

Универзитет у Београду
Математички факултет

Мастер рад

Елементи алгебре у настави у основној школи
са освртом на полиноме

Ментор
Проф. др. Милан Божић

Студент
Марија Тривунчић

Садржај

1. Увод	3
2. Алгебра полинома	5
3. Групни рад, дијалог, улога наставника	10
4. Резултати истраживања “The Teacher's Role in Classroom Discourse: A Review of Recent Research into Mathematics Classrooms”, аутора Margaret Walshaw и Glende Anthony	13
5. Елементи алгебре које обрађујемо у седмом разреду основне школе	35
6. Примена дискусије и групног рада на часу математике на коме се обрађује тема из алгебре	41
7. Компаративна анализа	44
8. Прилог: Примена дискусије и групног рада на часу математике на коме се обрађује тема из геометрије	45
9. Закључак	55
10. Литература	56

1. Увод

Ми никада не постајемо математичари, чак и ако научимо напамет све туђе доказе, ако наш ум није оспособљен да самостално решава постављене проблеме.

Р. Декарт

Опште је познато да математика игра важну улогу у томе како ће појединац решити различите проблеме пословног и друштвеног живота. Истраживачи и реформатори стављају акценат недвосмислено на друштвени и културни аспект математичког развоја. Верује се да активно ангажовање ученика у математичким идејама, доводи до развоја специфичних способности и идентитета. Предпоставља се да управо ове способности и идентитети праве позитивне промене у животима ученика и њиховом будућем развоју. Математичари потврђују ову врсту размишљања, позивањем на промене у настави, у којима учење правила за манипулацију симболима представља начин комуникације кроз математику.

Нове иницијативе, замењују традиционалну учионицу са учионицама у којима су ученици који разговарају међусобно и групе ученика које изражавају своје мишљење у дискусији са читавим разредом. Разговор о математици у учионици, као и математичка дискусија, објашњење и одбрана идеја постају карактеристике квалитетног математичког искуства.

Данас, као и ранијих деценија, многи ђаци нису успешни у математици и непрестано се сусрећу са проблемима. Анализе међународних тестирања (нпр. Програм за међународну процену постигнућа ученика, PISA) потврђују тренд систематског неуспеха из математике међу одређеним групама ученика. Ови подаци указују на дилему са којом се суочавају наставници, школе и доносиоци одлука: да ли школе могу да задовоље све више различитих група ученика? Ове промене захтевају шире разумевање онога како настава мора да буде конципирана да би била ефикасна за све ученике. Тешкоћа је у томе што настава математике треба да буде ефикасна и привлачна, а не просто набацивање података.

Рад се бави питањем како побољшати наставу математике у школама. Посебно бих хтела да истакнем у основној школи, зато што је ту почетак и све оно што ми пропустимо, много је теже колегама да надокнаде касније. Неки од ученика изграде мишљење да нешто не могу да схвате или науче у основној школи. У даљем школовању, већина њих не улаже толики напор колики је неопходан да надокнаде пропуштено, као што улажу у основној школи да би савладали неку јединицу, зато што имају став да не могу. Наша улога је поред обраде неког градива и грађење позитивног става о математици и самопоуздања у решавању математичких проблема.

Надам се да ће мој рад и истраживање помоћи и колегама да нађу одговоре на нека од питања која сви тражимо од када почнемо да радимо са ученицима, као што је којим све педагошким методама наставе можемо најбоље објаснити неко градиво, како да буде јасно и да то знање буде што трајније. Истаћи ћемо неке од метода помоћу којих се може унапредити настава. Моја намера је била да рад представља својеврсни приручник за наставнике почетнике зато што знам колико сам ја имала

потребу да прочитам такав рад када сам почињала. Због тога су и овако одређене целине у раду.

Први део се бави математиком и полиномима како смо их обрађивали на часовима алгебре 1 на математичком факултету у Београду. Овај део поред тога што нам може служити као увид у начин на који смо ми то учили, можда још више може да нас подсети на то да наставник увек треба да зна више од ученика како би имао одговоре на његова питања и био сигуран у то што предаје. Такође и да се сетимо да поред тога што смо први пут дошли на час са већим знањем од знања које у том тренутку поседују ученици да је једини начин да представљамо модел понашања на који се ученици могу угледати ако напредујемо истовремено кад и они и увек имамо више знање.

Други део се бави групним радом и дијалогом, као и улогом наставника. Ови делови су у нераскидивој вези. Један без другог не би постојали и колико нам је неопходан дијалог да би био продуктиван групни рад, толико је онај који све повезује у целину наставник који зна која је његова улога.

Трећи део се ослања на истраживање “The Teacher's Role in Classroom Discourse: A Review of Recent Research into Mathematics Classrooms”, аутора Margaret Walshaw и Glende Anthony, објављеног од стране Америчке асоцијације за педагошка истраживања. Настојале су да покажу везу између дискусије и групног рада у настави математике и разумевања и коришћења математичких термина и решавања математичких проблема.

Четврти део представља елементе алгебре које обрађујемо на часовима математике у седмом разреду основне школе како бисмо имали увид у то које наставне јединице су предвиђене за тај узраст, као и који стандарди би требало да буду испуњени. Највише ћемо посматрати начин на који се обрађује наставна тема полиноми.

У *петом делу* је приказано истраживање које сам спровела у основној школи “Иван Милутиновић” у Вишњици, у коме испитујем утицај примене групног рада и дискусије на часовима математике. Наставна јединица коју смо утврђивали тог часа је била множење полинома мономом.

Шести део представља компаративну анализу између примене групног рада и дискусије на часу и часа када је фронтални облик рада.

Прилажем приказ часа на коме се обрађује тема из градива геометрије у петом разреду као пример лепо одржаног часа после кога су ученици побољшали резултате по свим критеријумима (о којима ћемо више говорити у раду).

2. Алгебра полинома

Прстен $(K, +, \cdot)$ је алгебарска структура са две бинарне операције за које важи:

- 1) $(K, +)$ је комутативна група,
- 2) $(K, \cdot)$ је моноид,
- 3) друга операција је дистрибутивна у односу на прву,

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

$$c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b,$$

за свако $a, b, c \in K$. Саме операције прстена обично обележавамо са $+$ и $\cdot$ (тим редом) и називамо сабирањем и множењем. Неутрал адитивне групе $(K, +)$ називамо нулом самог прстена и обележавамо са 0 , док мултипликативни неутрал називамо јединицом у прстену и обележавамо са 1 , при чему подразумевамо да је $1 \neq 0$. Стога прстен K садржи бар два различита елемента.

Скуп свих не-нула елемената прстена K обележаваћемо са $K^* = K \setminus \{0\}$.

За елемент $x \in K$ кажемо да је леви **делитељ нуле** у том прстену ако за бар једно $y \in K^*$ важи $xy = 0$, односно десни делитељ нуле ако важи $yx = 0$. Наравно, сама нула прстена је делитељ нуле, јер је $0 \cdot 1 = 0$, $1 \neq 0$, док за преостале делитеље нуле у том прстену кажемо да су **прави**.

За елемент $x \in K$ кажемо да је **инверзибилан** у прстену K ако је $xy = yx = 1$ за неки $y \in K$.

Проста раширења прстена

Нека је L било који натпрстен датог прстена K . Јасно је да сваки од његових потпрстена A који садржи K и неки фиксиран елемент $\lambda \in L$ мора да садржи и скуп $K[\lambda]$ свих елемената $a \in L$ који се могу представити у облику

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 + \dots + \alpha_n \lambda^n,$$

са $\alpha_r \in K$ и $n \in \mathbb{N}_0$. При том је тај скуп и једна подгрупа адитивне групе прстена L . Заиста, ако за уочено a и

$$b = \beta_0 + \beta_1 \lambda + \beta_2 \lambda^2 + \dots + \beta_m \lambda^m,$$

ставимо $k = \max\{m, n\}$, као и $\alpha_r = \beta_s = 0$ за свако $r > n$ и свако $s > m$, тада у самом прстену L важи

$$a + b = (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)\lambda + \dots + (\alpha_k + \beta_k)\lambda^k,$$

а тиме и $a + b \in K[\lambda]$. Међутим, у општем случају, скуп $K[\lambda]$ не мора бити и потпрстен прстена L .

Ово последње ће бити ако, на пример, само λ комутира са сваким од елемената из K , то јест ако је $\alpha\lambda = \lambda\alpha$ за свако $\alpha \in K$. Наиме, како је тада и $\alpha\lambda^r = \lambda^r\alpha$, ако су $a = \sum \alpha_r \lambda^r$ и $b = \sum \beta_s \lambda^s$ назначени елементи скупа $K[\lambda]$, одмах следи да је и $ab = \sum \delta_k \lambda^k$, са

$$\delta_k = \alpha_0 \beta_k + \alpha_1 \beta_{k-1} + \dots + \alpha_k \beta_0.$$

Отуда је и $ab \in K[\lambda]$, што заједно са претходним значи да је тада скуп $K[\lambda]$ управо минимални потпрстен од L који садржи λ и уочени прстен K .

Посебно, ако је ту $L = K[\lambda]$ за бар једно $X \in L$ које комутира са свим елементима из K , за сам прстен L кажемо и да је једно *просто раширење* датог прстена K (са генератором λ). Јасно је да је тада $K[\lambda]$ и један K -модул са генератрисом

$$e = [1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^n, \dots].$$

Уз то, ако је та фамилија e и линеарно независна над прстеном K , то јест ако за свако $n \in \mathbb{N}_0$ и произвољне α_r -ове из K важи

$$\alpha_0 + \dots + \alpha_n \lambda^n = 0 \Rightarrow \alpha_0 = \dots = \alpha_n = 0,$$

за само то λ кажемо и да је *трансцендентно* над K . То тачно значи да тада и за свако a из $K[\lambda]$ постоји тачно један низ $a_e = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$ елемената, из прстена K , такав да је $\alpha_r \neq 0$ за највише коначно много r -ова и $a = \sum \alpha_r \lambda^r$.

Тако је, на пример, поље $C = R[i]$ једно просто раширење поља R . При том је $i^2 + 1 = 0$, па ту i није и трансцендентно над R . И слично за $\lambda = \sqrt{2}$ и просто раширење $Q[\lambda]$ поља Q . Наиме, тада је $\lambda^2 = 2$, а тиме и

$$Q[\sqrt{2}] = \{\alpha + \beta\sqrt{2} : \alpha, \beta \in Q\}.$$

Прстен полинома

Докажимо сада да и сваки прстен K има бар једно просто раширење $K[\lambda]$ у коме је то λ и трансцендентно над K . Штавише, показаће се да су два таква његова раширења и узајамно изоморфна.

Наиме, управо смо видели да је свако просто раширење $K[\lambda]$ од K у тесној вези са једним подскупом скупа L свих низова $(\alpha_0, \alpha_1, \dots)$, са α_r -овима из K . Наравно, ту је L и потпуно одређено са K . Такође, ако су a и b било који низови из L , на пример

$$(1) \quad a = (\alpha_0, \alpha_1, \dots) \quad \text{и} \quad b = (\beta_0, \beta_1, \dots),$$

због $\alpha_r, \beta_r \in K$, тај скуп L садржи и, како њихову суму

$$(2) \quad a + b = (\alpha_0 + \beta_0, \alpha_1 + \beta_1, \dots),$$

тако и њихов *производ*:

$$(3) \quad a \cdot b = (\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots), \quad \delta_k = \sum_{r=0}^k \alpha_r \beta_{k-r}.$$

Тиме су, по аналогiji са претходном тачком, и у скупу L дефинисане две бинарне операције $(a, b) \rightarrow a + b$ и $(a, b) \rightarrow ab$.

Штавише, лако се провери да је и сама та структура $(L, +, \cdot)$ такође један прстен, са јединицом $e = (1, 0, 0, \dots)$. Уз то је са $\alpha \rightarrow (\alpha, 0, 0, \dots)$ дефинисан и један мономорфизам прстена K у тај прстен L , чија је слика

$$K_0 = \{(\alpha, 0, 0, \dots) : \alpha \in K\}$$

потпрстен од L изоморфан са K . Самим тим, прстене K и K_0 можемо и *поистоветити*, у смислу да сваки од елемената $\alpha \in K$ има значење низа $(\alpha, 0, 0, \dots)$ у прстену L , па тада пишемо

$$K = K_0 \text{ и}$$

$$\alpha = (\alpha, 0, 0, \dots) \quad (\alpha \in K).$$

Даље, међу преосталим низовима из прстена L најпростији облик има низ

$$X = (0, 1, 0, 0, \dots).$$

При том, из (3) непосредно следи да за свако $a = (\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ из L важи $aX = (0, \alpha_0, \alpha_1, \dots)$. Такође је $Xa = aX$, као и $\alpha a = (\alpha\alpha_0, \alpha\alpha_1, \dots)$ за свако α из K . Према тачки 1, тиме је и скуп

$$K[X] = \{\alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_n X^n : \alpha_r \in K, n \in N_0\}$$

управо минимални потпрстен прстена L који садржи уочени елемент X и сам прстен K , то јест K_0 . Наравно, ту је $X^2 = X \cdot X = (0, 0, 1, 0, \dots)$, затим $X^3 = X^2 \cdot X = (0, 0, 0, 1, 0, \dots)$, и тако даље, па на основу тога непосредно следи да је и

$$(4) \quad \alpha_0 + \dots + \alpha_n X^n = (\alpha_0, \dots, \alpha_n, 0, \dots),$$

са $n \in N_0$ и $\alpha_r \in K$. То посебно значи да је ту X и трансцендентно над прстеном K , јер је тај низ *нула*, ако и само ако је и $\alpha_r = 0$ за свако r .

Тако одређен прстен $K[X]$ зовемо и *прстеном полинома*, а саме његове елементе *полиномима* по *неодређеној* X над датим прстеном K .

У суштини, елементи тог прстена су низови над K облика (4), док су му операције одређене са (1-3). При том је K , то јест K_0 потпрстен од $K[X]$, уз напомену да $\alpha \in K$ има значење низа $(\alpha, 0, 0, \dots)$, као и да ту неодређена $X = (0, 1, 0, \dots)$ може бити означена и неким другим симболом.

Саме чланове низа $p = (\alpha_0, \dots, \alpha_n, 0, \dots)$ зовемо и *коэффицијентима* полинома $p = \sum \alpha_r X^r$. Тиме су два полинома и *једнака*, ако и само ако су им једнаки и одговарајући коэффицијенти. Посебно, полином $p = \sum \alpha_r X^r$ је *нула*, ако и само ако је и $\alpha_r = 0$ за свако r .

Наравно, ту је $Xp = pX$ и за сваки полином p , из прстена $K[X]$, али је, према (3), тај прстен и комутативан, ако и само ако је то и сам прстен K . У том случају, прстен $K[X]$ је и *линеарна алгебра* над K , са спољном K -операцијом $(\alpha, p) \rightarrow \alpha p$.

И на крају, ако је прстен K потпрстен неког прстена L , одговарајући прстени полинома имају исту неодређену, на пример X , па је тада и прстен полинома $K[X]$ потпрстен прстена $L[X]$.

Степен полинома

Нека је $K[X]$ прстен полинома са неодређеном X над датим прстеном K . Полиноме облика αX^n , где је $\alpha \in K$ и $n \in N_0$, зовемо и *мономима*, а саме елементе из K , *константама* или *скаларима* у том прстену $K[X]$.

Наравно, сваки полином p из $K[X]$ је сума коначно много монома. При том, ако је $(\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ низ његових коэффицијената, тада је, или $p = 0$, то јест $\alpha_r = 0$ за свако r из N_0 , или постоји тачно једно $n \in N_0$ за које је

$$(1) \quad p = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_n X^n, \quad \alpha_n \neq 0,$$

а самим тим и $\alpha_r = 0$ ($r > n$). У овом другом случају, цео број n са назначеним својством зовемо и *степеном*, а n -ти коэффицијент α_n *водећим* коэффицијентом ученог полинома $p \neq 0$. Такође, за полиноме са водећим коэффицијентом 1 кажемо и да су *монични*.

Овде ћемо степен полинома n означавати са $d^\circ p$, уз напомену да степен *нула-полинома* дефинишемо као симбол $d^\circ 0 = -\infty$ са уобичајеним својствима, као што су $(-\infty) + (-\infty) = -\infty < n$ и

$$(-\infty) + n = n + (-\infty) = -\infty.$$

За полиноме степена 1 кажемо и да су *линеарни*. Другим речима, то је сваки од полинома

$\alpha X + \beta$, са $\alpha, \beta \in K$ и $\alpha \neq 0$. Такође, полином p је *константа*, то јест $p = \alpha \in K$, ако и само ако је $d^\circ p < 0$. При том, за произвољне полиноме p и q из $K[X]$ важи:

$$d^\circ\{p + q\} \leq \max\{d^\circ p, d^\circ q\}, \quad d^0 pq \leq d^\circ p + d^\circ q.$$

Штавише, ако водећи коефицијент бар једног од тих полинома p и q није делитељ нуле у прстену K , или ако је неки од њих нула, тада у другој од тих релација мора бити и

$$d^\circ pq = d^\circ p + d^\circ q.$$

Заиста, нека је $p = \alpha_0 + \dots + \alpha_n X^n$ и $q = \beta_0 + \dots + \beta_m X^m$, где је $\alpha_n, \beta_m \neq 0$, а самим тим и $d^\circ p = n$, $d^\circ q = m$. Ако је $k = \max\{m, n\}$ и $\alpha_r = \beta_s = 0$ ($r > n$, $s > m$) биће и

$$p + q = \sum_{r=0}^k (\alpha_r + \beta_r) X^r, \quad pq = \sum_{r=0}^{m+n} \delta_r X^r,$$

са $\delta_r = \sum \alpha_s \beta_{r-s}$, па је тако $d^\circ(p+q) \leq k$, као и $d^\circ pq \leq m + n$. Уз то, како је $\delta_{m+n} = \alpha_n \beta_m$, ако α_n није делитељ нуле у прстену K , ту δ_{m+n} није нула, па је тада и

$$d^0 pq = m + n.$$

Посебно, ако је $q = \alpha$ било који регуларан или инверзибилан елемент прстена K , из (2) следи да је $d^\circ \alpha p = d^\circ p$, па (2) важи за свако $p, q \in K[X]$, ако и само ако прстен K нема правих делитеља нуле. У вези са тим важи и

ТВРЂЕЊЕ 1. *Ако прстен K нема правих делитеља нуле, онда их нема ни прстен полинома $K[X]$, и ти прстени имају исте инверзибилне елементе.*

Доказ. Како прстен K нема правих делитеља нуле, ако за неке полиноме p и q важи $pq=1$, из (2) следи да у том случају мора бити $d^\circ p + d^\circ q = 0$, то јест $d^\circ p = d^\circ q = 0$, па је тако: $p \in K[X]^* \Leftrightarrow p \in K^*$. Слично, ако је $pq=0$, биће $d^\circ p + d^\circ q = -\infty$, а тиме и $p=0$ или $q=0$.

Посебно, ако је K било које поље, према тврђењу 1, прстен $K[X]$ је област целих у коме полином p има инверз једино ако је $p \in K$ и $p \neq 0$, па је тада

$$K[X]^* = K^* = K \setminus \{0\}.$$

С друге стране, као и у сваком прстену, за полином p кажемо да је *придружен* или *еквивалентан* полиному q и пишемо $p \sim q$, ако је $p = uq$ за бар један пар инверзибилних полинома u и v . При том је и $d^\circ p = d^\circ q$.

У случају када је K поље и $p \neq 0$, релација $p \sim q$ у прстену $K[X]$ значи да је $p = \alpha q$ за тачно једно α из K^* . Такође, ако је тај полином p одређен са (1), за $\alpha = \alpha_n$ и $\varepsilon_r = \alpha_r/\alpha_n$ важи

$$p = \alpha(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 X + \dots + X^n),$$

па је тада сваки од полинома $p \neq 0$ из $K[X]$ еквивалентан и тачно једном *моничном* полиному $\bar{p}$.

Пример. Ако је $K = \mathbb{Z}_4$ прстен остатака по модулу четири, одговарајући прстен полинома $K[X]$ није област целих и у њему је $K[X]^* \neq K^*$. Тако, на пример, за

$$p = 1 + 2X^3 \text{ и } q = 1 - 2A^3$$

важи $pq = 1$, а тиме и $p^{-1} = q$, са $d^{\circ}p=3$. Такође је $d^{\circ}pq < d^{\circ}p + d^{\circ}q$, па (2) не мора да важи и у случају када сам прстен K има правих делитеља нуле.

3. Групни облик рада, дијалог, улога наставника

Групни облик наставног рада је такав облик рада у коме се одељење дели на групе које, свако за себе, остварују постављене наставне задатке и о резултатима свога рада обавештавају одељенски колектив. Наставник је активан у првом делу часа када се расподељују задаци и дају упутства а затим дискретно усмерава рад и помаже групама ако је потребно.

Иако су ученици по старости у разредима уједначени, још увек постоје многе индивидуалне разлике. Тај недостатак се може отклонити или макар ублажити ако се ученици поделе у групе. Тада наставници могу да активирају школски успешније ученике као своје помагаче ради стварања што бољих услова за повезивање знања и искуства ученика различитих способности. Можемо им задати проблем ради стварања продуктивне ситуације.

Сарадничко учење у групи обележава

- Различита ментална развијеност и различит ниво ученичких знања
- Социјално – когнитивне расправе (супротстављање идеја) што омогућује стварање повољне ситуације за учење.
- Различитост идеја и личности омогућује примену дијалога, размене и расправе

Дијалогска метода

Дијалогска метода спада у методе заједничког рада наставника и ученика. Заснива се на питањима и одговорима, разговору наставника са ученицима и у томе је њена основна карактеристика.

Разговор омогућава наставнику да подстакне мишљење и мисаоне активности ученика, а истовремено, на основу њихових одговора, да проверава целисходност постављених питања и оправданост својих поступака у настави.

Разговор као наставна метода разликује се од обичног разговора својом усмереношћу ка остваривању одређеног циља и адекватном припремом наставника. У овој припреми не предвиђају се само питања која ће бити постављена ученицима, већ такође и њихова реаговања и могући одговори као и проблеми који се могу појавити током разговора. Задатак разговора је да подстиче мишљење ученика и да обликује способност формулисања судова који се заснивају на уверењу које је довољно образложено.

Разговор није низ питања и одговора која почињу од наставника и њиме се завршавају. Одлика правог разговора је обухватање што ширег круга учесника.

Уколико наставник процени да ће доћи до прекида разговора или, пак, да разговор иде у погрешном смеру, наставник се укључује и враћа ученике на основну тему, даје неопходне допуне и исправке, подстиче, усмеравајући његов даљњи ток. Може се рећи да је разговор у знатној мери „колективни процес мишљења“.

За примену ове методе неопходно је да ученици располажу извесним подацима и знањем, доживљајима и искуствима о материји која ће се обрађивати. Другим речима, разговор се примењује у ситуацијама када нова истина логички следи из раније познате.

Дискусија је облик разговора у коме се исказују појединачни ставови и мишљења о одређеном проблему, побијају аргументи саговорника и излажу противаргументи, а проблеми се сагледавају из различитих углова. Услови за квалитетну расправу су изврсно познавање подручја о коме се расправља, заинтересованост учесника, способност и вештина доказивања, односно аргументовања, позитиван став. У дискусији нема победника, циљ је изграђивање личног и колективног става о одређеној теми.

Улога наставника

Наставник је одговоран за усмеравање ученика.

Значајна је социјална интеракција у развоју мисаоних активности ученика као и у целокупном менталном развоју. Сазнања су квалитетнија а и остварљивост циљева је дугорочнија. Овај облик учења подстиче властито учење као и учење других чланова групе.

Кључни захтеви:

- Познавати способности сваког појединца у групи
- Састав групе мора да мотивише ученике
- Јасно дефинисани задаци за сваког ученика
- Развој социјалних вештина
- Анализа процеса у групи
- Дефинисати које активности следе, зависно од задатих циљева

Наставник осигурава те услове и подстиче ученике. Он је покретач, управљач, приказивач, координатор и особа која мотивише ученике на рад. Ако се квалитетно припреми час нема страха од могућег хаоса, смањене продуктивности на часу или

губитка контроле. Повећава се ученичка активност и подстиче мисаона самосталност за решавање проблема. Интензивно се развијају социјалне вештине и култура демократског опхођења.

Позитивно деловање

- Успех, разумевање и критичко мишљење
- Размишљање вишег реда
- Усмереност на рад
- Мотивисаност за учење
- Способност сагледања ситуације из туђег угла
- Позитиван однос према вршњацима
- Позитиван однос према самоме себи, наставницима и другима.

Ученици су одговорни за сопствени успех али и за успех других.

4. Резултати истраживања “The Teacher's Role in Classroom Discourse: A Review of Recent Research into Mathematics Classrooms”, аутора Margaret Walshaw и Glende Anthony

Нови наставни програм захтева пуно од наставника. Били смо заинтересовани за то шта су истраживања показала о наставним методама које кроз дискусију на часу доприносе активном учествовању ученика у математици. Свакако, документовање доказа о педагошкој пракси која се бави добијањем добрих резултата ученика кроз дискусију на часу је примарна потреба. Одговарајући на изазов, бројни истраживачи су понудили низ општих педагошких приступа који су били добри за остварење циља. Знамо да пракса и услови који укључују ученике у промишљену и одрживу дискусију, могу направити разлике у учењу када је дискусија направљена на моћним идејама. Наставници који позивају ученике да развију објашњење, дају предвиђања, дискутују о алтернативним приступима проблему и појасне или докажу своје тврдње, то раде јер верују да сви ученици имају право на образовање у ширем смислу – разумевање великих идеја наставног програма и уважавање њихове вредности и способности да примене те идеје у животу ван школе.

Препознавање ефикасне наставне праксе у специфичној области, као што је математика, је недаван истраживачки подухват. Као резултат, разумевање како изгледа квалитетна настава математике, посебно у вези са групним учењем и провером математичких идеја, је још увек у почетној фази. Да би помогли, у истраживању, Национални савет професора математике (2000.) је поставио широке смернице како да се побољша настава: „Ефикасна настава подразумева посматрање ученика и пажљиво слушање њихових идеја и објашњења“. Узимамо ове директиве као основу за педагошке методе које су битне за одржавање наставе математике.

Гледамо критички на недавно истраживање педагошких метода које су битне за ученике. Многим ученицима, математика представља низ препрека и изазова – задатак испуњен сталним неуспехом.

Описивање ефикасне и правичне наставе није само примењивање општих приступа. Изазов за оне који имају интерес у математичком образовању је да схвате како ефективна настава може да изгледа за све ученике у процесу наставе. У овом чланку, ми се супротстављамо изазову и понављамо оно што су наставници одавно знали: јачање знања и идентитета ђака у великој мери зависи од тога колико добро наставник користи педагошке методе наставе. (Muijs и Reynolds, 2001 ; Rowe, 2004). Пружамо свеобухватни критички преглед како професори математике организују наставни час, тако да предавања буду поучна. У следећем одељку ћемо изложити метод који смо користили за приступ подацима. Скупљали смо литературу, организовали разговор поводом низа тема кроз које смо критички проценили врсте људских карактеристика, та запажања бележили са циљем да помогну ученицима у постизању математичких и социјалних циљева. На крају износимо последице нашег разматрања ове велике матрице праксе за професоре.

Метод тражења и прикупљања података

Преглед се осврће на следеће питање: Које су педагошке карактеристике приступа настави која производи жељене резултате код свих ученика? Синтеза је део програма основаног од стране Министарства просвете Новог Зеланда, да продуби

знања о процесу наставе различитим групама ученика. Задатак у том пројекту је био да се утврди шта литература каже о квалитету наставе математике за различите групе ученика. Подухват је укључивао ангажовање библиотечких кадрова, саветодавних и ревизорских група. Такође, укључује и образовну заједницу у целини, као и математичку образовну заједницу, посебно, које су помагале у лоцирању публикација у математичким часописима, тезама и пројектима као и друге научне радове, по секторима, са фокусом на математику у школама широм света. Мреже у које смо укључени осигуравају да прикупљање података буде из читаве заједнице.

У овом прегледу, циљ је да се обезбеде смернице за предавања за професоре математике. Овај циљ искључује предавања у предшколском, наставу организовану у локалној заједници, код куће и друге облике наставе. Поред тога, претраживање литературе било је ограничено само на земље из енглеског говорног подручја. Намера је била да се приступи низу мера које су произишле из одговора на питања шта, зашто, како и под којим условима су одређене педагошке методе постизале добре резултате код свих ученика. Претраживана су штампана и електронска издања. Прелазећи границе учионице, претрага је узела у обзир и релевантне публикације у општем образовању, литератури и специјалним образовним областима. Конкретно, претрага је покрила научни рад у:

- Главној образовној математичкој литератури укључујући и математичке часописе (на пример *Journal for Research in Mathematics Education*, *Educational Studies in Mathematics*, *Journal of Mathematics Teacher Education*, *For the Learning of Mathematics*, *Journal of Mathematical Behaviour*), међународне конференције (на пример *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *International Congress on Mathematical Education*, *Mathematics Education Research Group of Australasia publications*) и међународне приручнике за математичко образовање;
- Релевантним аустралијским и азијским студијама, извештајима и тезама;
- Образовним часописима (*American Educational Research Journal*, *British Educational Research Journal*, *Cognition and Instruction*, *Elementary School Journal*, *Learning and Instruction*)
- Специјалистичким часописима и пројектима, поготово оних који се налазе у ширем образовном пољу (*Journal of Learning Disabilities*) и
- Међународним студијама (*Third International Mathematics and Society Study*, *PISA*, и у Великој Британији *Leverhulme projects*)

Ова метода претраге је довела до велике количине података који је служио као полазна тачка за идентификовање ефикасних педагошких метода за наставу.

Избор доказа

У првом погледу на прикупљене податке, приметили смо да многе студије које нуде детаљно објашњење добрих резултата ђака не успевају да пруже задовољавајуће доказе да је метод наставе довео до тих добрих резултата. Друге нуде детаљна објашњења педагошких метода, али неосноване тврдње или недовољне доказе како су те методе имале утицај на успех ђака. Ове студије нису задовољиле у потпуности њихов критеријум, јер нису тражили само просто објашњење педагошких метода или успеха ђака, већ детаљно објашњење везе ове две ствари. Да будем прецизнија, тражили су методе које су повезане са успехом ђака како школским, тако и друштвеним. Конкретно, узели су разумевање знања математике Националног истраживачког савета:

- Концептуално схватање: разумевање математичких појмова, операција и односа;
- Процедурално знање: вештина у обављању процедура флексибилно, прецизно, ефикасно и на одговарајући начин
- Стратешка квалификованост: способност формулисања, представљања и решавања математичких проблема
- Адаптивно резонување: способност за логичко размишљање, објашњење и образложење, и
- Продуктивно располагање: способност да схвати математику као разумну и корисну науку, заједно са веровањем у марљивост и сопствену ефикасност.

На ове школске успехе, додали су и низ других успеха који утичу на понашање, комуникацију и учешће. Успеси обухватају:

- Осећај културног идентитета и националне припадности
- Осећај припадности
- Допринос
- Добробит
- Истраживање, и
- Основне вредности, као што су поштовање других, праведност, брига, марљивост и великодушност.

Поред фокуса на резултате, у одабиру података, водили су рачуна да елиминишу студије које идентификују ефикасност наставника преко:

- а) наставниковог прихватања реформи наставног плана, или
- б) употребом резултата.

Визије професора се не спроводе баш увек на начин како је дизајнер наставног плана замислио. Слично томе, открили смо да најбољи описи и објашњења уско повезани са добрим проценама, нису успели да кажу читаву педагошку причу. Заиста, како наш преглед разјашњава, преношење знања је комплексна активност. Неки наставни приступи и организације часова дају другачије резултате код различитих ђака.

Трагајући за наставом која је направила везу између педагогије и жељених резултата закључили су да велики утицај имају различите заједнице, фактори и локације. Њихова стратегија претраге је показала спремност да се размотре сви облици истраживачких доказа без обзира на методолошке парадигме и идеолошку искреност и проблем у проналажењу контекстуално ефикасних, одговарајућих и моћних примера шта најбоље функционише код одређене популације и одређених образовних циљева. У раду са различитостима, настојали су да спознају разлике у

контексту, пракси и начину размишљања истраживача, како би оригиналне доказе представили што транспарентније. Укључили су различите врсте доказа, узимајући у обзир људску вољу, програмску променљивост, културну разноликост и више перспектива. Свака студија, окарактерисана својим гледањем на ствари, довела је до различитих врста истине.

Укључили смо студије које:

- Су фокусиране на наставу математике у учионицама у школи
- Дају опис садржаја, узорака и података
- Пружају детаље о одређеној педагошкој методи и ученичким успесима
- Повезују истраживање са одговарајућом литературом и теоријом
- Користи методе које омогућавају истраживање везе између педагошких метода и успеха ученика
- Су дале податке о томе шта је било успешно а шта не код одређених ученика.

Спојили су потпуно различите податке и утврдили убедљивост, повезаност и поузданост понуђених информација. Процена квалитета истраживања је зависила од природе знања и степена повезаности између тих тврдњи и приложених доказа. Укратко, за укључивање студије у овај извештај, користили су везу настава – резултати. Приликом процене природе и снаге каузалних односа између педагошких приступа и резултата учења, руководили су се Максвеловом категоризацијом две врсте објашњења узрочности.

- Први тип, правилност узрочности је заснован на правилности у одређеном броју случајева.
- Други тип, процесно оријентисана објашњења, представљају повезаност као стварне узрочне механизме и процесе који су укључени у посебним догађајима и ситуацијама. Оба типа објашњења узрочности, су обезбедили подстицај да се укључе извештаји емпиријских студија, од веома малих појединачних студија, до експерименталних студија великих димензија.

Подела и организација података

Осмислили смо наставу као систем мреже, који се развија. У овом систему наставник и ученици су међусобно повезани кроз интеракцију.

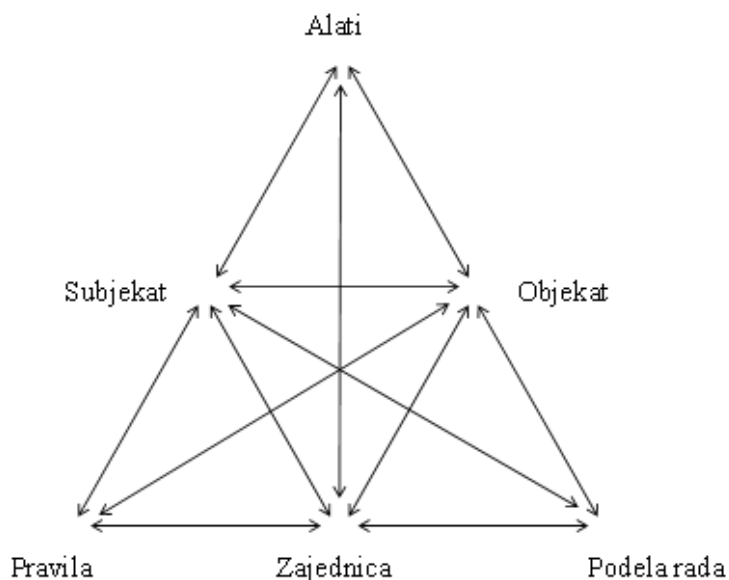
Учење математике обухвата активности у оквиру заједнице. То подразумева како генерисати идеје, како да се изразе користећи речи и симболе, као и како да докаже себи и другима да су те идеје истините.

Енгстром (1999) дао је идејно утемељење за објашњавање улоге заједнице у активности система. Он се у свом раду фокусира на колективну активност у систему као примарну јединицу анализе постављену у оквир шире мреже система, нуди, на неки начин, анализирање улоге, одговорности, и ресурсе у вези са активностима. Теорија је у стању да се носи са културним и историјским системима заједнице, као што су учионице који су вођене заједничким мотивима, док је истовремено у константном покрету и суочена са унутрашњом супротности. Слика 1 показује његов модел система људских активности.

Примена модела на нашу дискусију о улози педагогије у настави, тако да је пажња усмерена на ученика (он је објекат), а активан, онај који врши радњу (субјекат) је

наставник, а исходи су они о којима је расправљано раније да се сматрају пожељним за студента. Правила су задата у оквиру одељења. Подела рада се види између ученика и наставника, оно што повезује знање наставника (и о педагошким методама и о ученицима) и ресурсе (људске и материјалне) који су доступни у учионици.

Једна од битних ствари која произилази из овог модела је то што ученици повезују градиво са појмовима и ситуацијама из околине и живота уопште. Исходи оваквог вида учења су успешни због праксе да повезују научено. У ствари, социјални и академски исходи су производ добро организоване мреже односа између знања и размене открића. То значи да ови процеси функционишу на макронивоу, укључујући политику и институционо управљање, стварајући контекст за рад у коме наставници раде на микронивоу у учионици. Имајући у виду обим система, карактеристике квалитетне праксе морају да чине велику матрицу праксе која се састоји од више димензија и сложеним односима између њених делова. Истраживања су показала како интеракције између елемената у систему дубоко утиче на развијање математичког размишљања код ученика.



СЛИКА 1: Енгестромова културно историјска теорија

Квалитетна настава је заједнички подухват заснован на материјалу, систему, људској и емотивној подршци, као и на заједничким напорима наставника да направе позитивну промену за све ученике. У прављењу промене, кроз дискусију на часу, наставници побољшавају когнитивну пажњу ученика, а не ограничавају пажњу на процедурална правила. Мишљење је да кроз интеракције и дискусије на часу ученици развијају наклоност ка математици. Учење о другачијим начинима за размишљање о идејама је фундаментално за усавршавање учења. Сама природа математике предпоставља да ученици не могу са разумевањем да науче математику без ангажовања у дискусији и аргументацији.

Али више приче да часу не мора нужно да повећа разумевање ученика. Боље разумевање зависи од појединих педагошких приступа, наменски усмерених на развој културе дискусије који производе сагласност и објашњење унутар одељенске заједнице.

У разматрању шта је урађено у овој области, открили смо да је доста активности повезаних са педагошком праксом дошло до изражаја.

Ово укључује:

- (а) права и обавезе учествовања,
- (б) проширивање размишљања,
- (ц) фино подешавање математичког размишљања кроз језик и
- (д) обликовање математичке аргументације.

Користимо овај скуп активности да пронађемо литературу о дискусији на часу математике. Свака активност служи као тачка дискусије у одељку „Резултати“. Заједно, активности пружају увид у специфичне педагошке методе повезане са дискусијом на часу математике.

Права и обавезе учествовања у дискусији

Постоји велики број теоријских и емпиријских доказа који показују корисне ефекте учествовања у математичком дијалогу на часу.

Свакодневна рутина предавања представља важну улогу у томе како ученици схватају и уче математику. Ова рутина укључује права и обавезе математичког учешћа. Ученици учествују у социјалном развоју на часу, а наставник регулише математичке могућности доступне у учионици.

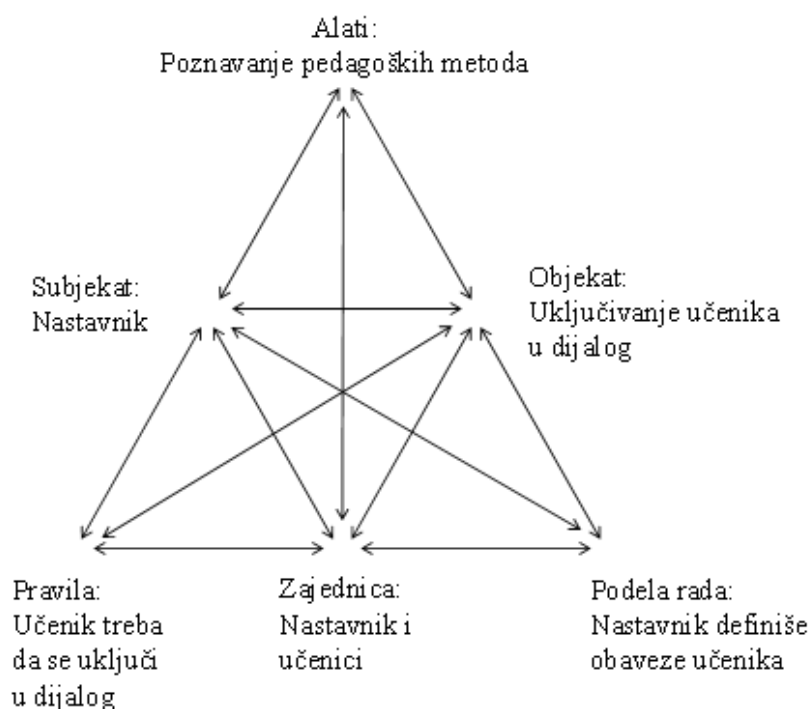
Највећи изазов за многе наставнике је да укључе дискусију као саставни део укупне стратегије наставе и учења. Како и када наставник смишља наставу која ће омогућити ученицима да учествују у математичким дискусијама? Када и како да учествују у математичким дискусијама и шта да раде као слушаоци? Начин предавања доводи до повећања активности на часу. Различита очекивања и захтеви у одељењима служе да би се направио различит когнитивни ниво код студената. Осим тога обавеза учешћа је поставила границе око могућности за ученике да деле сопствена искуства и да се укључе у математику. У истраживању које је спроведено на ученицима основних школа и њиховом одговору на проблеме који захтевају објашњења комутативности, примећено је да многи ученици нису знали да искажу своје математичке идеје, заиста, неколицини ђака је било врло нелагодно да деле своје мишљење са другима. Одређени наставник постигао велики успех у математичком развоју ученика. Он је ово постигао пажљиво слушајући питања и објашњења ученика и тражећи од њих да образложе своје одговоре. „Пре него што запишеш, хоћу да објасниш свом другу из клупе. Ако му кажеш – Постоји 8 краљица, твој друг треба да каже – Како знаш да постоји 8 краљица?“ Коришћењем ове педагошке стратегије, наставник је развио математичко размишљање код свих ученика. Расправа на часу је била основна за промену у схватању ученика. Током периода од неколико месеци, наставник је интегрисао посебне педагошке стратегије фокусиране на истраживање и тумачење студената, разумевање и креирање нових знања.

Поштовање доприноса ученика је педагошка стратегија. Наставници који практикују учешће ученика и који измаме допринос ученика у раду на часу и који позивају ученике да слушају једни друге, поштују друге и себе саме, прихватају другачија

мишљења и укључују се у размену мишљења представљају добар пример педагошке праксе.

Проучавали су одељење једног професора у периоду од две године. Посебно су обратили пажњу на оцењивање и обавезе на часу, везаним за то ко сме да се говори, кад, и у којој форми и како се понашају слушаоци. Постепено, наставник је научио како да омогући ученицима учествовање у раду на часу, како да деле своје мишљење и како пажљиво да слушају друге. На пример, наставник је рекао разреду: „Ако немате своје мишљење, да ли бисте се потрудили и рекли нам своје мишљење да би ова дискусија трајала мало дуже?“ Као резултат измењених норми за учешће на часу, примећено је повећање активности ученика. Ова дискусија је изграђена као колективна активност на часу.

Слика 2 представља прву акцију наставника у предавању, фокусирану на учешће читавог разреда и активно учешће у расправи. Она представља први корак у ширем смислу педагошке активности на часу са циљем да осигура добре резултате за све ученике. Активност представља централни елемент наставникове акције, добро усклађене са скорим реформама наставног програма којима је циљ да побољшају учење. Тражи се посебна акција наставника да успостави, разјасни и примењује правила за активност на часу. У овој акцији улога наставника и ученика је непосредно видљива. Остварење циља првог корака – укључење свих ученика у расправу је засновано на заједничком разумевању важности расправе и дељења математичких идеја.



СЛИКА 2 Активност 1: Права и обавезе учествовања у дискусији

Може настати одређен број ситуација у којима исход није реализован у потпуности. На пример, на одређеном броју студија је примећено да поједини ученици напредују више од других у настави где су сви ученици укључени у разговор. Изузетно надарени ученици желе да доминирају расправом на часу. Они лошији остају

пасивни, а када учествују, њихови доприноси су релативно слабији, а њихове идеје су понекад збркане. Наставници понекад несвесно стварају несигурне социјалне норме учешћа. Испитивања су укључивала и средње школе у Шпанији са високим процентом имиграната. За разлику од домаћих ученика, имигрантима није било дозвољено да учествују у математичким расправама и стога нису имали лично искуство о томе како учествовање у расправи може да утиче да разјасни и модификује размишљање. Истраживачи су приметили систематско одбијање наставника да дозволе имигрантима да објасне и докажу своје стратегије за решавање проблема. Закључили су да смањене социјалне обавезе и мањи когнитивни захтеви постављени овим ученицима доводе до њиховог искључења из пуног ангажовања у математици и стога имају органичен математички развој. Настава за укључивање обезбеђује да је учествовање у расправи на часу добро за све ученике.

Из студија које су укључивале шест британских школа, документовано је да су слабија одељења имала дуготрајнији наставни план са мањим бројем наставних стратегија. Упоредимо искуство у учењу ученика различитих социјално економских група у одељењу седмог разреда. Ученици вишег социјално економског статуса веровали да су им обрасци интеракције и наставе помогли да науче нове начине размишљања о идејама. Разговор им је помогао да одражавају, разјасне и мењају свој начин размишљања и да уграде убедљиве аргументе. Ученици нижег социјално економског статуса су били вољни да допринесу настави, наводећи да широк спектар идеја повећао њихове напоре да дођу до тачног одговора. Њихова потешкоћа у разликовању математички коректних решења и бесмислица, утицала је на њихову одлуку да одустану. Педагогија у анализи професорке Лубиенски је тежила да да привилегију ученицима са високим социјално економским степеном. На сличан начин, Џонсова студија је показала да вештина учења и системско знање, који су карактеристика породица високог социјално економског степена, су их постављали повољно у односу на наставу у школи

Разлике између давања одговора и подршке размишљању ученика

У претходном одељку приметили смо да је велики број истраживача пријавио когнитивне предности које су последица учествовања ученика у математичким расправама. Исказивајући своје идеје, ученици могу да прикажу и отворе за размишљање своје математичко резоновање. Идеје ученика представљају податке за наставнике о томе шта ученици већ знају и шта треба да науче; идеје су постале извор и за саме ученике изазивајући, стимулишући и проширивајући своје сопствено мишљење.

Педагошки приступ који је у стању да побољша размишљање ученика, подразумева знатно више од развијања добре атмосфере за дискусију и решавање проблема. Приступ укључује социјализацију ученика у већи математички свет који поштује стандарде схватања и правила увежбавања:

Наставник мора дати сваком детету прилику да ради на решавању проблема кроз дискусију, док истовремено охрабрује сваког од њих да слушају и да учествују у решавању проблема других ученика и тиме развијају размишљање. Ипак, наставник такође мора да буде сигуран да ученици дођу до неопходног циља, можда посебног решења или одређене формулације која ће довести до следећег корака. Коначно, наставник мора да пронађе начин да повеже различите путеве до решења тако да

свима буде јасно. Са друге стране, једнако је важно да наставних доведе до тога да ученици сматрају себе и друге ученике као легитимне учеснике који су допринели решавању проблема.

Ефективна педагогија захтева да се посебна пажња посвети идејама ученика. Дobar наставник покушава да „уђе“ у главу ученицима уочавањем и пажљивим слушањем онога што ученик каже.

Један наставник друге године је слушао и учио из схватања математике својих ученика док су били укључени у дискусију о односима међу бројевима. Анализа дискусије је открила да је наставниково знање математике, и његов фокус на слушање, опажање и постављање подпитања са циљем схватања и разјашњења помогло бољем схватању чињеница о томе како ученици размишљају.

У истраживању обављеном у оквиру одељења седмог разреда, приметили су велики број интеракција и дискусија ученика. Детаљнија анализа ових интеракција је утврдила да је наставник пружао подршку реаговањем, а не директно, док је посматрао активност ученика и њихово разумевање градива. Он је то чинио пажљивим испитивањем и смисленим интервенцијама са циљем пребацивања ослањања ученика са наставника на подршку вршњака са различитим нивоом знања и разумевања. Стратегија наставника није била усмерена на структурирање учења кроз организовања понашања ученика.

Уместо тога, основни циљеви су били:

- Да олакша успостављање ситуација у којима ученици морају да деле идеје и дискутују (нпр. Да ли би неко хтео да дода нешто на објашњење ученика Х? Да ли би то хтео да нам покажеш на табли? То је одлично питање! Да ли би неко хтео да проба?)
- Да помогне ученицима да прошире границе свог истраживања (нпр. А шта ви мислите? Шта ти мислиш, да ли ће ова формула моћи увек да се примени? Зашто не продужиш низ да би видео да ли постоји шаблон?)
- Да подстакне ученике да праве везе између различитих открића и развију дубље разумевање међусобних односа (нпр. Да ли можемо да сазнамо како су ова два обрасца повезана?)
- Да подстакне представљање идеје на више начина (нпр. Да ли постоји други начин за решавање овог проблема?)

Бројне друге студије су истраживале шта је то што наставници раде да би схватили како ученици размишљају. White (2003) је истраживао како су два наставника предавала математику, посматрајући како је настава побољшала искуство различитих ученика у два огледна одељења и како се испољило на математичко размишљање ученика. Наставници су били део већег пројекта – „Increasing the Mathematical Power of All Children and Teachers“. Школске налепнице су илустровале једну од четири теме које су настале из наставе:

- (а) вредновање идеја ученика,
- (б) истраживање одговора ученика,
- (ц) укључивање ранијих знања ученика,
- (д) подстицање на комуникацију ученик – ученик.

Наставници су укључили све ученике у наставу прво посматрајући њихов рад на часу, а онда одлучили када и како сваког да подстакну да учествују. Активно слушајући идеје и сугестије ученика они су видели колико сваки ученик доприноси дискусији на часу. Наставници су подстицали ученике да дају оцену идеја и размишљања других ученика тако што би дали сигнал шаком са палцом упереним према горе или према доле. У једном од одељења са ограниченим говорним могућностима енглеског језика, ово се показало као одлична стратегија за ученике да поделе своје мишљење са разредом.

Fraivillig (1999) је известио о размени идеја на часу. Оно што је било посебно ефикасно је начин на који је наставник намерно одржавао дискусију. Тачније, знао је када треба да се укључи а кад искључи из дискусије ученика. Знање када да интервенише је битна чињеница за наставнике фокусиране на прављењу разлике у учењу ученика.

Литература открива да сензибилитет за преузимање расправе како би се осигурало да се важне математичке идеје развијају, зависи од низа педагошких вештина. Тарнер и колеге су утврдили да на велико ангажовање ученика петог и шестог разреда утицала улога наставника у облицима наставе који је омогућио да причају о некој теми на начин прихватљив тренутном знању и схватању ученика. Он је делио а потом и пребацио одговорност, тако да ученици могу да добију већу аутономност. Такође је подстакао мотивацију подржавањем радозналости и циљева ученика. У овим одељењима, после разговора је уследила педагошка акција која је имала намену проналаска схватања ученика и тумачења датих информација.

У другој студији, усмереној на истраживање начина на који наставник сарађује са латино ученицима петог разреда (и са ученицима којима је енглески матерњи језик), је утврђено да је наставников фокус на математички разговор омогућио ученицима да развију способност за разумевање математике. Наставник је омогућио учење кроз испитивање, што представља мање излагања наставника, а више схватања ученика. Започињао је дискусију са сваким учеником и користећи одговоре, био је у могућности да објасни математичко значење одређене теме.

Међутим, у другим студијама наставници нису били сигурни како на који начин да објасне неко градиво. Knight (2003) је интервјуисао шест наставника и посматрао њихово излагање током наставе у основној школи. Студија је открила да је од 349 примера вербалне интеракције са ученицима, већина (83%) имала облик охрабрења или похвале. Knight је известио да су наставници често несвесни великог броја таквих интеракција. Само 17% интеракција је имало позитиван когнитиван ефекат на развој ученика.

Истраживања у средњој школи су такође показала да већина подршке наставника не помаже ученицима да „уче математику и размишљају математички“. На пример, Watson (2002) је известио да настава математике у средњој школи са ученицима са мањим капацитетом „често подразумева поједностављење математике док не постане низ малих корака који могу лако да се пређу“. Често наставници воде ученике кроз низ опажања, а ученици само попуњавају празнине у аритметичким изразима. Ово није водило до трајног учења управо зато што ова стратегија смањује могућност когнитивне обраде. Ова врста педагошке подршке потврђује став да ако ученици седе и ништа не раде, наставник ће променити ниво интелектуалног ангажмана тако да задатак може да се заврши уз минималан напор.

Наставници који ученицима пружају вербалну подршку наводећи их на сваки корак до решења су мање ефективни у унапређењу размишљања ученика, него наставници који скрећу пажњу на могуће начине решавања проблема.

Ефективни наставници у свом истраживању утицали на дијалог на часу само уобличавањем идеја ученика. За вредновање и обликовање математичког доприноса ученика служе ове важне идеје:

- Омогућено је ученицима да виде да је математика прављена у групама људи
- Подржавају се ученици да уче тако што ће учествовати у стварању и потврди идеја
- Омогућено је да ученици буду свесни о више концептуално напреднијих облика математичке активности.

Истраживачи су открили да релевантне и значајне реакције наставника на дискусију ученика представља истицање конкретних математичких идеја постављених методама ученика. Истраживање схватања ученика пружа наставницима могућност да обликују ангажовање у математичкој вишечланој заједници, са циљем унапређења разумевања одређених математичких конвенција. Редифинисање дијалога ученика у математички прихватљив облик пружа наставницима могућност да побољшају везе између језика и концептуалног разумевања. Професор понавља, каже на други начин или прошири дискусију ученика са циљем појашњења или истицања одређеног садржаја, проширења резоновања, укључења нових идеја или померања дијалога на други правац.

У одељењима где је коришћено поновљено изражавање постоји већа тенденција да ученици пруже објашњење и да наставник понови, прошири, преобликује или преведе објашњења ученика другима у разреду. Наставник је користио понављање да истакне посебне тврдње и идеје појединих ученика и користио је оригиналне идеје ученика као одскочну даску за развој нових сазнања током дискусије читавог разреда.

Повратна информација једног наставника била у стању да обликује учешће ученика, додајући културне нијансе математичкој дискусији:

Наставник ће преформулисати њихова објашњења и доказе у смислу да би била компатибилна са математичким знањем у целини, а са друге стране да буду прихваћена од стране деце као опис онога шта су они урадили. Дакле, уместо да стапају доприносе деце, наставник је преузео водећу улогу од њихових доприноса и охрабрио их да помажу једни другима у објашњењима док је водио дискусију о математици. Као последица математичко значење и пракса у учионици нису унапред предодређени од стране наставника већ се развијају током конверзације. Истинска посвећеност комуникацији.

У размени идеја на часу обично наставник преговара између три области знања: разумевање теме, разумевање уџбеника и другог материјала и његовом личном теоријом о учењу ученика. Како се налазе између ове три области знања и као проширују своје сазнање о њима, ефективни наставници су у стању да повећају ниво знања математике код ученика. Конкретно, такви наставници су способни да се прилагоде и промене своје рутинске радње и у том процесу допринесу развоју нових педагошких рутина и нових сазнања о некој теми.

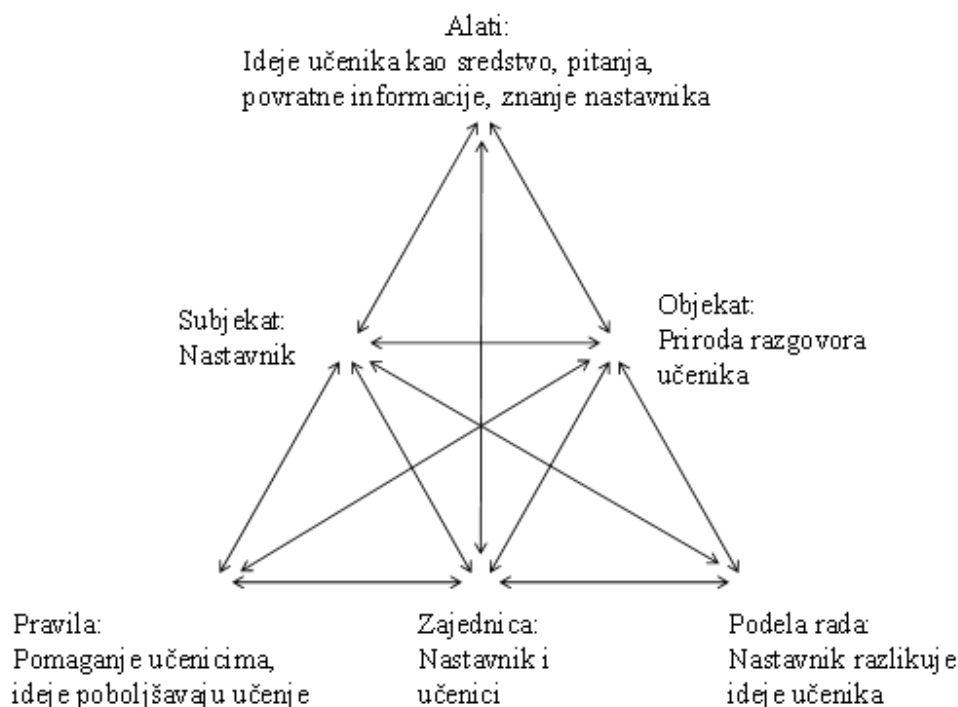
Прилагођавање и промене рутинске праксе захтева стручну акцију. Стручна акција представља синтезу деловања, мишљења, теорије и принципа. Наставници који су били у стању да развију математичко разумевање, били они који су имали добро знање о теми коју су обрађивали. Ово знање је утицало на доношење одлука на лицу места током дијалога на часу, а притом је и давало информације о садржају који ученици треба да науче и активностима које ученици треба да спроведу.

Стручна акција може бити спроведена у учионици. То на првом месту подразумева слушање ученика како објашњавају математички садржај. Добри наставници у слушању примете значајне математичке тренутке и реагују на одговарајући начин.

Како утиче употреба камера да би наставник имао увид у то шта је речено и урађено на часу? Кроз гледање видео снимака сопственог предавања наставници су пријавили повећану свесност, у смислу да су приметили значајне математичке моменте. Ово је значило да су постојале веће шансе да наставник одговори на потребе својих ученика.

Узимајући све ове активности заједно, у другој акцији у предавању математике, предмет пажње је прешао са дискусије ученика на садржај дискусије ученика. Активност се одвија у оквиру сложене мреже излагања наставника фокусиране на наставу (слика 3). Исход је јасно спајање идеја ученика што је постигнуто наменским раслојавањем идеја и помагањем дискусије ученика. Ово помагање се одвија кроз пажљиво слушање и уочавање од стране наставника, кроз одговоре, пре него директну подршку, кроз знање различитих ученика, кроз поновљено изражавање и питања наставника и других ученика и кроз знање наставника када треба да се укључи, а кад искључи из дискусије. Важан фактор посредовања у овој акцији је стварање поделе рада међу ученицима. Остали ученици и наставник имају видљиво присуство у оквиру заједнице, са циљем спајања мишљења, са становишта унапређења новог знања.

Без брзе педагошке подршке жељени исход унапређења математичког знања ученика постаје недостижан. Супротно је такође тачно. Превише подршке је контрапродуктивно за учење. Поредимо два наставника. Код једног наставника, истраживачи су забележили бројне примере сувишних повратних информација. Иако је овај наставник створио позитивно окружење за учење и показао искрену жељу за дискусију у разреду, стваран математички разговор је био минималан. Когнитивни простор је био ограничен због недовољног времена за размишљање и ученици су често били прекидани. Конкретно, ученици нису имали прилику да уче и говоре језиком математичара. Тиме што није пружао могућност ученицима да учествују на часу, овај наставник је спречио ученике да изразе оно што су учили. У другом случају такође је наставник смањio когнитивни простор. Иако је наставник у студији урадио доста „правих“ ствари, на пример, убацио је математику у причу која је имала значај за ученике и формирао мале групе за рад, ипак није успео у потпуности да објасни ученицима значење математичких појмова.



СЛИКА 3 Активност 2: Помагање идеја ученика са цијем да се унапреди учење

Фино подешавање математичког размишљања кроз језик

До сада смо размотрили низ аспеката који омогућавају ученицима да се укључе у смислени дијалог о математици. Ипак, ангажовање у ефективном раду на часу је сложен процес који комбинује рад, причу, мишљење, осећања и припадност. Као што смо видели, ангажовање у раду на часу који унапређује разумевање ученика, захтева учтиву размену идеја, слушање наставника и предусретљивост. Такође, укључује и упознавање ученика са математичким конвенцијама. Ефикасни наставници су у стању да премосте интуитивна схватања ученика са глобалним математичким схватањима. У овом одељку ћемо се фокусирати на језик, као нашу трећу активност. Чинимо то у уверењу да језик има централну улогу у вези између научних дисциплина и свакодневних идеја. Језик представља значење за ученике док се крећу ка начинима размишљања и схватања одликованим прецизношћу, сажетошћу и логиком. Конкретно, наставник који чини разлику међу различитим ученицима је усмерен на обликовање и развој математичара – почетника који говоре прецизан и генерализовани језик математике.

Наставници који су успоставили заједницу унутар одељења у којима је био омогућен приступ наставним средствима су били у стању да значајно подрже математичку активност ученика. Истраживање јасно показује везу између квалитета везе наставник – ученик и дискусији ученика о математичком значењу. С временом, доприноси ученика који су првобитно означени неформалним схватањима, су почели да добијају форму језика и схватања шире математичке заједнице.

Мишљење је да се користи конвенционални језик за изражавање математичких идеја. Ефикасни наставници су у стању да направе окружење у којем конвенционални језик математике мигрира са наставника на ученике. Дакле, значења која ученици формирају су настала коришћењем језика који наставник користи. Да

би увели ученике у математичку заједницу, ефективни наставници деле са својим ученицима конвенције и значења повезане са градивом.

Укратко, одговорност за разликовање појмова и израза, и да направи ученике осетљивим за конкретне нијансе, стоји на наставнику, који темељно утиче на математичко значење које ученици праве.

Стручност у математици показује контролу над наставом. Али специјализован језик математике може бити проблематичан за ученике. Посебне речи и граматика која се користи у школској математици, могу да ометају приступ смислу и циљу одређене лекције. Речи, фразе и изрази могу добити потпуно друго значење од оног које се користи у свакодневном животу.

Примењујући ово на ученике из Аустралије, утврђено је да ученици који говоре стандардни енглески језик (обично ученици из породица средње класе) имају бољи приступ математици у школи. Како су наставници у њиховом истраживању рекли, ученици су били у стању да схвате шта им се говори. Један наставник који је предавао ученицима који нису говорили енглески као матерњи језик је изнео чињенице о значењу речи:

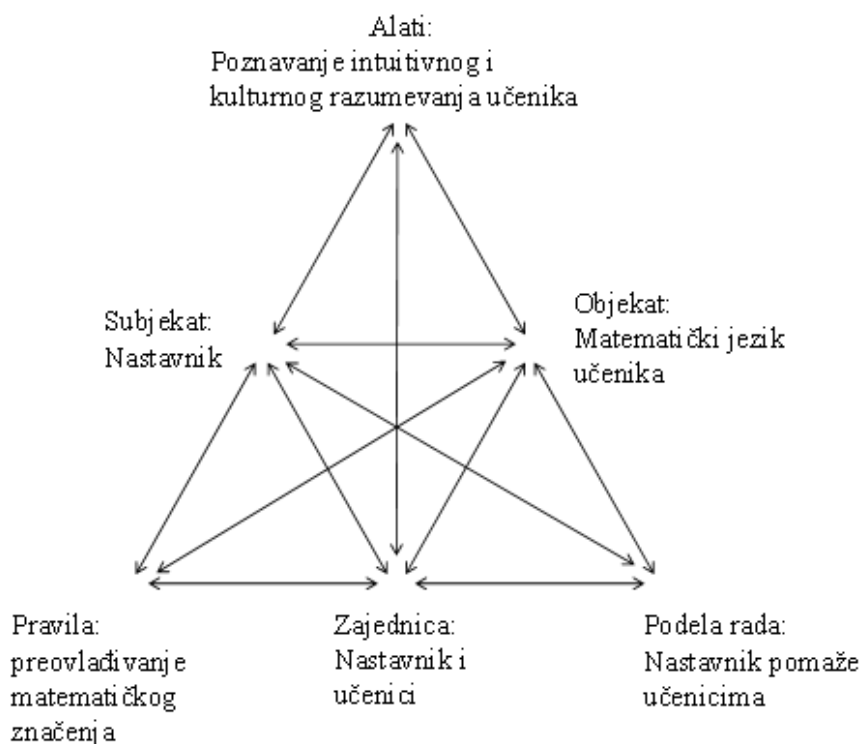
Потребно је да се ојача „Кажи ми шта ја мислим кад кажем процена?“ или „Где су неке ствари које си ти проценио?“ Треба ствари поставити како деца разумеју, јер за децу којој енглески није матерњи језик, бројеви не представљају проблем, али ако кажете „процена“ они неће знати шта то значи.

Математички језик генерално представља потешкоћу ученицима а посебно у вишејезичним одељењима. Пронашли смо у литератури велики број истраживања која су испитивала одрађене проблеме у вишејезичним одељењима. Са каквим се проблемима суочавају кинески ученици који говоре мандарински у школама на Новом Зеланду. Истраживање је било фокусирано на тешкоће које се могу приписати ограниченом знању енглеског језика. Такође су настојали да открију карактеристике језика које би могле створити проблеме за ученике. Дата су два теста у размаку од седам недеља. На сваком тесту једна половина ученика је радила енглеску верзију, а друга мандаринску, тако да је сваки ученик, у целини, радио обе врсте теста. Примећена је разлика у успеху. У просеку, ученици су енглеску верзију теста урадили лошије за 15%. Оно што је стварало проблем је синтакса математичке теорије, посебно, предлози, ред речи и тешкоћа тумачења контекста. Вокабулар није представљао проблем ученицима у толикој мери. Значајно је да наставници у нису били свесни да ученици не разумеју градиво у потпуности.

Ученици са Тонге и Самоа, су имали проблема са синтаксом. Проблем са речима који укључује математичке импликације и логичке структуре као што су услови и негације су посебно били проблем ученика старијих разреда. Открили су да већи проблем има стручан вокабулар него општи. Понекад се енглеске речи фонетски превode на пацифичке језике да би изразили математичке појмове када одређена реч не постоји у матерњем језику. Појмови као што су апсолутна вредност, систем једначина и појмови као што су вероватно, извесно и готово сигурно, немају еквивалент на Тонга језику, док поједине речи на енглеском, као што је коцка, имају више еквивалената на Тонга језику. Предлог је био да се направи специјалан курс енглеског језика са математичким појмовима да би се повезао смисао енглеских појмова са појмовима на матерњем језику ученика.

У истраживању о приступу два наставника, једног са Самоа, а другог са Тонге, који су се школовали у својим земљама, пре него што су дошли на Нови Зеланд да заврше више образовање примећено је да су наставници користили и енглески и матерњи језик ученика, да би објаснили математичке појмове ученицима. Пронађен је пример да се професор пребацује са језика на језик, када ученици нису могли да схвате математичке појмове. Пребацивање са језика на језик је коришћено са речи, фразе и реченице и тежило је да побољша разумевање ученика.

У овој трећој активности повезаној са наставом математике, представљеној на слици 4, предмет пажње је математички језик ученика. На основу упознавања са тим како ученици интуитивно и културолошки схватају речи и изразе, и на основу наставниковог сопственог знања језика математике, наставник, као субјекат, обликује разумевање језика математике на часу, објашњавајући ученицима одређена значења речи, појмова и синтаксе. Основно за резултат ове активности је да језик математике има предност над интуитивним или културолошким схватањима. У овој активности је примарно да наставник добро познаје своје ученике и има добро знање математике, како би могао да помогне својим ученицима у процесу учења језика математике. Дакле, подела рада између наставника и ученика је очигледна, као што јето било и у активностима 1 и 2.



СЛИКА 4 Активност 3: Фино подешавање математичког размишљања кроз језик

Обликовање математичке аргументације

До сада смо видели како наставници побољшавају наставу кроз језик. Али језик математике подразумева много више од стручног вокабулара. Он такође подразумева и начин на који се појмови користе у оквиру математичке аргументације. Позитивни ефекти пружања редовних прилика да се ученици укључе у аргументацију су добро документовани. Показано је да ученици треба да имају

могућност и простор да тумаче, генерализују, оправдају и докажу своје идеје, као и да критикују идеје других у разреду.

Многи истраживачи су утврдили да педагошка пракса која омогућава ученицима да се укључе у ове активности, значајно унапређује развој њиховог математичког мишљења. Развој мишљења не зависи толико од фреквенције дијалога, већ од тога у којој мери се ученици третирају као активни учесници. Развој размишљања ученика такође појачава став да ученик представља себе као неког ко жели да учи математику. Конкретно, значај обликовања математичке аргументације, може се постићи подстицајући ангажовање ученика у разговору и одбрани одређених ставова против тврдњи других ученика. Овај процес зависи од вештог управљања наставника овом дискусијом. Вештина „обезбеђује међусобно усклађивање ученика и усклађивање са садржајем академског рада, а истовремено их уводи у одређене начине говора и размишљања.

Посматрајмо наставнике који су развили вештину обликовања математичких одговора ученика. Ако упоредимо педагошке приступе јапанских и америчких наставника, утврдимо да јапански наставници проводе више времена у усклађивању идеја ученика са конвенцијама за које су одговорни. Међутим, помагање при аргументацији је врло сложена активност. Сложена је зато што наставник и ученици „преговарају више од идеја... Они граде разумевање о томе шта значи да се говори и мисли математички“ (Meyer и Turner, 2002).

Дискусија, дебата и критика су стратегије које морају да се науче. У педагошком смислу, дискусија подразумева много више од одржавања разговора, уместо тога, она захтева разговор обogaћен математиком. Педагошки приступи који су се показали ефикасним укључују моделирање на високом нивоу од стране наставника и/или способних вршњака; прављење концептуалних веза, обезбеђивање одговарајућег времена за истраживање идеја и успостављање веза, подстицање ученика на самопосматрање и одрживу средину за објашњење, значење и схватање.

Fraivillig (1999) је развио концептуални оквир за описивање начина на који наставници фино подешавају математичко размишљање ученика кроз когнитивне структуре. Три кључне педагошке компоненте идентификоване у студији „Унапређење размишљања код деце“ су изазивање, подржавање и проширење. Изазивање подразумева промовисање и управљање интеракцијама у учионици, подржавање представља помоћ при индивидуалном размишљању а проширење прихвата ону праксу која унапређује размишљање код деце. Он је утврдио да када је наставник изазивао, подржавао и проширивао размишљање ученика, дискусија у учионици је била квалитетнија. Конкретно, они су разјашњавали математичке конвенције и претпоставке. Укратко, они су искористили добре стране дискусије да би унапредили учење.

Педагошки приступ који побољшава размишљање ученика и истиче значај дискусије и дебате на часу постаје главно средство развоја ученика.

За овај приступ наставник прво мора да изгради норме за оно што представља математички прихватљив, другачији, ефикасан и елегантан начин објашњавања. То су норме које регулишу садржај и правац математичке аргументације и управљају могућностима за учење.

Наставници који развијају аргументацију ученика и унапређују учење су и сами активни истраживачи математике. Један наставник је кроз наменско слушање олакшао групи ученика да дођу до решења. Ученици су заузели различите ставове како доћи до решења и покушавали су да поткрепе те ставове доказима. Наставник је дао свој допринос тако што је наводио контра примере. При томе је помагао размишљање пружајући предвидиву структуру за размишљање.

Наставник у средњој школи развио математичко размишљање код својих ученика помагањем у процесу истраге. Наставник је водио часове математике тако што је прво обезбедио пажњу ученика и учествовање у дискусији. Конкретно, наставник је позивао ученике да разјасне, разраде, критикују и оправдају своје тврдње. Наставник је изградио размишљање ученика водећи их коз стратешке кораке повезивања идеја да би се упоредо развијало знање. Наставник гура ученике напред ка зрелом учешћу у математичкој заједници. Како је школска година напредовала, наставник је смањивао свој утицај, да би ученици били независнији приликом истицања својих идеја. Са своје стране, ученици су испуњавали своје задатке са смањеним утицајем наставника на предлагање и вредновање алтернативних решења.

У другој студији Stein (1996.) је идентификовао факторе повезане са одржавањем когнитивне активности високог нивоа. Од 64% задатака у студији, који су остали на високом нивоу, наставник је приметио одрживу жељу за доказивањем, објашњењем и значењем, а главни фактор су била питања, коментари и повратне информације. Овај фактор је често праћен обликовањем учинка од стране наставника или способних ученика, најчешће у облику представљања решења пред разредом. Презентације су обликовале употребу вишеструког представљања, смисленог истраживања и одговарајућих математичких доказа. У многим случајевима жеља за разумевањем резултирала је узастопним презентацијама које приказују више прилаза проблему.

Жеља за разумевањем је вид квалитетне математичке праксе, коју су описали многи истраживачи. Када наставник тражи од ученика да разраде идеје, покуша да охрабри ученике да учине своје размишљање експлицитним, или кад прати питања и одговоре ученика са охрабрењем да размишљају дубље, наставник има увид у то колико ученици заправо знају и подстиче их да то знање прошире.

Пример ефикасног разговора:

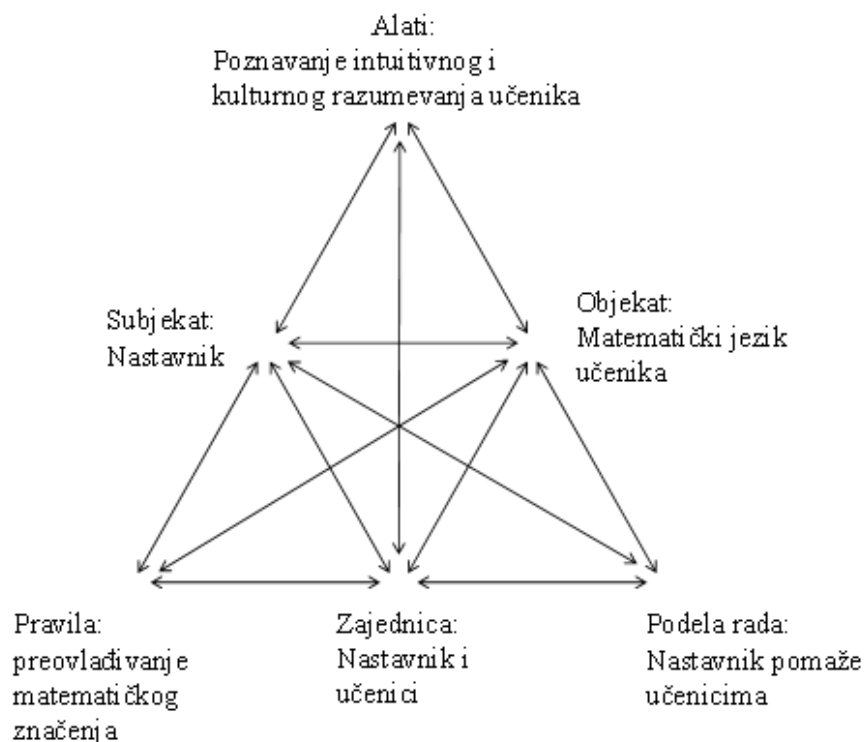
(а) „Дакле, у овој ситуацији, како си добио 18/27 и 18/30?“

(б) „Шта треба да урадиш да би пронашао заједнички именилац? Када то има смисла? Неколико вас је почело, а прва ствар коју си ти урадио је да си сабирао и онда си завршио и добио 19/16. Шта то значи? Када то можеш да урадиш? Када има смисла тако сабирати?“

Сада разматрамо како ова, четврта активност рада наставника се представља као активност на часу. Предавање математике је усмерено са циљем, независно од индивидуалног становиштва наставника на свој рад. Наравно, предавања не би постојало без ученика. Свакодневна настава је фокусирана на помагање ученицима да уче и да једног дана постану одговорни грађани. Стога није изненађујуће приметити да у активности 4, приказаној на слици 5, наставник опет има доминантну улогу. При томе наставник даје осећај континуитета и усклађености

интеракцијама фокусираним на учење. Наставник, као субјекат, има циљ да одржи поделу рада, успостављену раније између наставника и ученика. Разлика између поделе рада објашњене овим моделом у односу на поделу рада у традиционалном начину предавања, може бити објашњена на следећи начин: традиционални модел представља блиску везу између контроле наставника на високом нивоу и минималне активности ученика, док активност 4, ако и претходне активности овде описане, представљају да висок ниво педагошке активности доводи до корисне размене унутар одељења.

Постоји низ метода наставника који служе као корисни посредници за учешће ученика у аргументацији. Основно за успешно учествовање ученика у дебати и одбрани идеја је когнитивна структура коју обезбеђује наставник. Помоћни алат за анализу обухвата изградњу норми наставника за обликовање прихватљивих и елегантних објашњења и доказа, вешто вођење расправе и одрживу жељу за значењем. Сви ови облици наставе доприносе жељеном циљу.



СЛИКА 5 Активност 4: Обликовање математичке аргументације

Последице за наставнике

Шта наставници могу да науче из литературе? Шта овај преглед говори о томе како наставници математике могу да направе услове за продуктивну наставу математике? Иако не постоји формула која ово објашњава, у литератури су примећени услови који доприносе побољшању успеха ученика. На активно учешће ученика утиче сложен низ фактора од којих су многи утврђени педагошким доприносима и ограничењима у праву учешћа и одговорности на часу. Конкретно, на могућности за учење има утицај то да ли су ученици подстицани да заједно дођу до решења кроз дијалог. Ефективна настава чини математичко размишљање ученика видљивим и отвореним за размишљање. У окружењу где се идеје деле, сопствене идеје ученика

постају средства за учење. Али и више од тога: њихова објашњења стимулишу, изазивају и проширују размишљања других ученика.

Ефикасни наставници су показали да могу у учионици да успоставе атмосферу погодну за дељење идеја. Они раде на развијању међусобног односа који ствара когнитивни и физички простор за ученике да би развили свој математички и културни идентитет. Прављење таквог простора у учионици доста зависи од прављења пријатног амбијента који омогућава закључивање, комуникацију и критику. Такође зависи и од стварања могућности за ученике да то постигну кроз дискусију. Наставници који стављају акценат на исход наставе, организују садржајан и промишљен час и пружају могућност за дељење идеја.

Истовремено, истраживачи јасно показују да педагошка пракса која је фокусирана искључиво на прихватање свих одговора и решења не погађа срж онога што настава математике заиста подразумева. Подршка за значајно математичко размишљање зависи од наставника који не само да чује, већ пажљиво послушкује математичке идеје у разговору ученика. Идеја која подржава развој математичког идентитета и способности ученика, обликује закључивање и размишљање, а идеје и решења води ка одговарајућем закључку.

Овај преглед скреће пажњу на чињеницу да наставници који имају жељу да развију схватање ученика, неће увек постићи жељени резултат. Осим ако наставник добро не схвати математичке идеје које чује у разреду, неће развити флексибилност која му је потребна за уочавање могућности које може да користи за усмеравање ученика ка сложенијим схватањима. Размишљање на лицу места и суочавање са спорним математичким размишљањем, захтева целокупно знање наставника. Начин на који наставници предају веома зависи од тога шта они знају и мисле о математици и о разумевању и учењу математике. Успешан наставник математике ће имати обоје, ефекат и намеру да помогне ученицима у стварању осећаја за математику. Штавише, ефикасан наставник може да разуме шта ученици мисле и куда то мишљење води.

Наставници треба да знају да пружањем могућности ученицима да истраже математику кроз наставу, они доприносе побољшању друштвеног и когнитивног ангажовања ученика. Најефикаснија је равнотежа између могућности да ученици имају корист од предавања наставника и укључења ученика у дискусију и дебату. Пресудан значај за учење имају активности које наставници планирају и и врсте математичких расправа које су везане за те активности. Ефикасни наставници планирају дискусије које укључују многе чињенице и појединачно знање и искуство ученика. Опсежна истраживања у овој области су утврдила да ефикасни наставници развијају своје планове тако да би омогућили ученицима да развију навике које могу да користе са математичком ефикасношћу и да користе одговарајући језик да подрже своје разумевање.

Квалитетна настава математике на свим нивоима гарантује да дискусија није само губљење времена, већ је усмерена на решавање истинских проблема. Најефикаснија настава је она која омогућава ученицима да приступе важним концептима и односима, да истраже математичку структуру и да адекватно користе технике и записе. Истраживање пружа потпуне доказе да када наставник укључи дискусију у ток часа, током дужег периода времена, он пружа ученицима могућност за успех, повећава осећај за контролу и побољшава учениково располагање математиком. Неформална математичка знања ученика проистичу из свакодневних активности, а

квалитетне интеракције на часу се граде на том знању. Истраживања су обезбедила коначне доказе који показују да је ефективна настава у стању да повеже интуитивна знања ученика и генерално прихваћена математичка знања. Несумњиво, језик игра централну улогу у том процесу. Наставник који прави разлику за различите ученике је усмерена на обликовање и развој математичара – почетника који говори прецизни и општи језик математике. Фокусирањем на језик на овај начин, наставник суштински утиче на математичка значења која су ученици представили.

Концепт наставе који подржава растућу свест ученика о себи као легитимних учесника у производњи математичког знања, ствара могућност за наредне генерације. Иако су многи истраживачи показали да размена математичких идеја на часу обезбеђује контекст за социјални и когнитивни ангажман, други су скренули пажњу да су ученици са ограниченим знањем енглеског мање склони ка размени идеја у групним процесима. Наставници треба да буду свесни да и други ученици, такође, не напредују у дискусијама на часу. Лично одбијање да учествују у дискусији и ниски захтеви постављени од стране наставника, појединим ученицима, има као ефекат потпуно искључење из учења математике.

Доследно наглашено у истраживању је чињеница да је рад на часу бољи када подразумева поштовање при размени идеја, када је наставник сигуран да сви ученици учествују у размени идеја и када идеје са часа постану еквивалентне математичким конвенцијама. То укључује константну жељу за доказивањем и објашњавањем, као и знање када треба да се укључе а кад да се искључе из дијалога. Поновљеним изражавањем математичких предлога ученика се може допринети размени идеја на часу. У најефикаснијој размени идеја, наставник је у могућности да организује дискусију и аргументацију и олакша дијалог, не само за развој математичких способности и идентитета, већ и да побољша социјализацију ученика. Укратко, дискусија унутар одељенске заједнице учествује у „микрокосмосу математичке праксе“ (Schoenfeld, 1992), учећи како ће ученик да присвоји математичке идеје, језик и методе и како ће постати математичар – почетник.

Грешке и пропусти

Приметили смо да у скором истраживању наставе математике, у целини, да се суштина ставља на међусобне односе на часу. Данашње истраживање тежи да покаже сарадњу при развоју знања, тј. истраживање се бави друштвеним контекстом предавања и учења. Истраживање на које смо се осврнули, испитује друштвени контекст наставе путем квалитативних и квантитативних метода истраживања. Ова запажања износимо уз упозорење да нисмо потпуно и апсолутно покрили све могућности. Неки пропусти су настали јер није било могуће да се укључи сваки доказ о спровођењу наставе. Такође признајемо да нису укључена ни одређена међународна истраживања зато што се фокусирају на друге области математичког образовања. Други недостаци су настали због недостатака у литератури. До сада не знамо толико много о спровођењу наставе у средњој школи, колико знамо о спровођењу наставе у основној. У литератури такође, недостају велика истраживања која се баве везом између учења и организовања дијалога на настави. Такво истраживање је важно за разумевање рада наставника и ефекат реформи.

Закључак

Од кључног значаја за образовање је откривање које заједнице подржавају наставу математике која има циљ разумевање ученика. Наставници који су спровели реформу наставе, неизбежно се морају фокусирати на развој заједнице обезбеђујући да је онима који су у заједници дата прилика да говоре, подржавају и негују међусобно учење. Овај преглед пружа систематичне и поуздане доказе о квалитетној настави математике и објашњава врсту педагошког приступа који води ка повећању ангажовања и побољшању резултата ученика из различитих социјалних група.

Претрага литературе је усмерила пажњу на различите контексте, различите заједнице и вишеструке начине рада и мишљења. Као резултат те претраге, представили смо и објаснили случајеве напора наставника да уради свој посао што боље може за своје ђаке. Наш преглед у цртама објашњава методе квалитетне наставе математике. Докази се ослањају на историју, културу, језик и обичаје који се могу наћи у учионици. У карактеристичном приступу, преглед разматра широк спектар истраживачких доказа представљеним разним истраживачким методама да би се истражило шта успешно функционише у пракси. Преглед је посвећен развоју знања и педагошке стручности у вишекултуралним заједницама и промени образовања.

У теорији, ако представимо учионицу као систем активност, наш преглед је утврдио да ефикасне педагошке методе и добро мотивисан наставник дају најбоље резултате за ученике. Наставник је субјекат, а ученици објекат педагошког рада унутар колективног система активности. Стога, настава није дијалог међу једнакима, без обзира на то колико равноправни циљеви у учионици могу бити и без обзира колико је наставник вешт у помагању, суштина је да треба да изгледа да је знање заједнички конструисано.

Педагошка пракса је општа и индивидуална, доносећи обоје, опште мотиве и индивидуалне циљеве. Наша пажња на аспекте дискусије и помагања приликом учења, открива низ општих вештина, знања и склоноси наставника која доприносе унапређивању знања ученика. Ови аспекти праве позитивне промене код свих ученика, без обзира на област деловања. Од педагошких фактора зависи како и са којим ефектом се градиво схвата и учи. Желимо да истакнемо комплексност наставног процеса. Успех ученика зависи од низа културолошких чинилаца. Иако је наш преглед испитивао литературу о дискусији на часу математике, важно је напоменути да ће дискусија дати позитивне ефекте само ако постоји јака веза између свих елемената. Другим речима, унапређење продуктивне дискусије је део веће мреже активности која омогућава ученицима да развију навике, да успешно користе математику. Овај услов потиче директно из наше замисли наставе математике, као део активности општег система. За нас наставник не представља толико изоловано лице, већ целину смештену унутар заједнице, попут ученика у одељењу и у школи. У овом представљању наставник је под утицајем флексибилних фактора и интерактивних променљивих. То значи да резултат наставе представља низ могућих фактора и услова. Ти фактори и услови обликују како и са којим ефектом се математика схвата и учи. У оквиру система активности наставници модификују и трансформишу своју педагошку праксу. Они прилагођавају своју праксу у односу на своја лична схватања и у односу на ниво у школи.

Неколико важних идеја следе из овог. Прво, стварање могућности за дискусију у учионици је врло сложена активност. Квалитетно предавање није само чињеница да се познаје свој предмет. Друго, уметањем наставе у систем, не можемо да тврдимо да подучавање ученика има резултате. Ако успех ученика није узрокован наставном праксом, у најмању руку може бити изазван том праксом. У овом прегледу представили смо важне увиде у истраживања која показују како се тај изазов догодио. Појавили су се поједини обрасци који су нам омогућили да имамо увид у то шта представља ефикасна педагошка пракса. Сваки аспект представља само један од доказа и мора се тумачити као једно од многих решења променљиве у оквиру система наставе. Узимајући у обзир све ове аспекте, можемо да предвидимо како може да изгледа квалитетна настава математике.

Овај преглед је на више начина продубио наше знање о математичкој пракси која користи дискусију. Открили смо да је заједница основа за квалитетну наставу. Успостављање интеракција у учионици доприноси јачању тежњи ученика, њихових ставова и достигнућа. Наставници који су успоставили окружење погодно за дискусију, могу да разумеју своје ученике. Ученици такође имају корист, тако да идеје изнете на часу постају богат ресурс за знање. Кроз наменско учешће у дискусији, пажљиво слушање идеја других ученика, расправу и брљење сопствених ставова и кроз давање и прихватање критика, ученици побољшавају своје знање и развијају свој математички идентитет.

Истраживања наглашавају да когнитивне и материјалне одлуке које наставници праве у вези са дискусијом на часу, значајно утичу на учење. У истраживању се непрекидно истиче чињеница да дискусије које су богате когнитивним и социјалним искуством, подржавају развој креативног мишљења и вештина за решавање проблема. Наставници који су у стању да обезбеде такав садржај, истовремено повећавају осећај ученика за контролу и развијају математичке способности ученика. Рад на часу још више обогаћује када дискусија подразумева заједничку изградњу математичког знања кроз размену идеја. Када наставници раде на развијању заједница за развој идеја, они се осигуравају да идеје које су изнете су у оквиру општих математичких конвенција и у оквиру наставног програма.

Желимо да овај преглед, који је заснован на доказима, буде полазна тачка реформи, иновација и променама педагошких метода у настави математике. Стручна истраживања дискусије на часу су још увек у почетној фази, али полако кроз истраживања проширујемо сазнања, како дискусија утиче на математичко размишљање и учење. Оно што је истакнуто је да је процес наставе изузетно комплексна ствар. Искусни, а и нови наставници, као и други предавачи, често не цене потпуне могућности педагошке праксе. Надамо се да овај преглед поред тога што разјашњава комплексност процеса наставе, помаже наставницима у испуњењу својих циљева.

5. Елементи алгебре које обрађујемо у седмом разреду основне школе

Реални бројеви

- Квадрат рационалног броја
- Решавање једначине $x^2=a$, $a \geq 0$. Квадратни корен
- Ирационални бројеви
- Скуп реалних бројева. Бројевна права
- Децимални запис реалног броја
- Приближна вредност реалног броја
- Основна својства операције сабирања и множења реалних бројева
- Поредак бројева и операције сабирање и множење
- Основна својства операције кореновања у R_0^+
- Једнакост $\sqrt{a^2} = |a|$

Цели и рационални алгебарски изрази

- Степен чији је изложилац природан број
- Множење и дељење степена једнаких основа
- Степен производа и количника
- Степен степена
- Примена степена
- Алгебарски изрази
- Полиноми
 - Мономи
 - Биноми
 - Триноми
- Сабирање полинома
- Множење полинома
 - Множење монома
 - Множење полинома мономом
 - Множење полинома полиномом
- Квадрат бинома
- Разлика квадрата
- Растављање полинома на чиниоце

Зависне величине и њихово графичко представљање

- Правоугли координатни систем
- Растојање између две тачке у координатном систему
- График зависности међу величинама
- Директна пропорционалност
 - Појам директне пропорционалности
 - График зависности $y=k \cdot x$, $x \in R$
- Обрнута пропорционалност
 - Појам обрнуте пропорционалности
- Примена пропорционалности
 - Пропорција и њене особине

- Продужена пропорција
- Примена пропорција

Ученик научи да :

- Основни ниво :
 - Израчуна степен датог броја, као и основне операције са степенима
 - Сабира, одузима и множи мономе
 - Одреди вредност функције задате таблицом
- Средњи ниво
 - Оперише са степенима и зна шта је квадратни корен
 - Сабира и одузима полиноме, помножи два бинома и да квадрира бином
 - Уочи зависност међу променљивим, зна функцију $y=ax$ и графички интерпретира њена својства; везује за та својства појам директне пропорционалности и одређује непознати члан пропорције
- Напредни ниво
 - Користи особине степена и квадратног корена
 - Примењује формуле за разлику квадрата и квадрат бинома; увежбано трансформише алгебарске изразе и своди их на најједноставнији облик
 - Разликује директно и обрнуто пропорционалне величине и то изражава одговарајућим записом

Полиноми

Алгебарске изразе у којима се променљива не јавља као делилац или део делиоца називамо цели алгебарски изрази или, краће, полиноми.

Дефиниција: Полиноми су алгебарски изрази добијени помоћу знакова бројева, знакова променљивих и знакова операција сабирања, одузимања и множења (+, -, ·).

На пример: $7a$, $8 + 4x$ јесу полиноми, док изрази $\frac{1}{x}$ и $\frac{9}{1+a}$ нису полиноми.

Мономи¹

Дефиниција: Мономи су полиноми у којима се од знакова операција појављује само знак за множење (·).

На пример: $6a$ јесте моном, док израз $7+a$ није.

Дефиниција: Бројевна константа у моному назива се коефицијентом тог монома.

¹ Префикс *моно-* води порекло од грчке речи *monos*, што значи један, једини. Као део сложене речи, моно значи један, једно, јединствено, само. Префикс *поли-* води порекло од грчке речи *polis*, што значи много. Као први део сложенице означава мноштво, вишеструкост онога што је исказано другим делом речи.

Дефиниција: За мономе који се разликују само у коефицијенту (који имају једнаке "словне" делове) кажемо да су слични.

На пример: $7a$ и $\frac{5}{8}a$ су слични мономи.

Теорема: Ако је M неки моном, а α и β реални бројеви, онда су и мономи αM и βM међусобно слични.

Биноми ²

Дефиниција: Ако су A и B два неслична монома, онда израз $A + B$ називамо биномом, а за мономе A и B кажемо да су чланови бинома $A + B$.

На пример: $1 + x$

Триноми

Дефиниција: Ако су A , B и C три неслична монома, онда израз $A + B + C$ називамо триномом, а за мономе A , B и C кажемо да су чланови тринома $A + B + C$.

На пример: $1 + x - y^5$

Сабирање полинома

Теорема: Ако је M моном, а α и β реални бројеви, тада је $\alpha M + \beta M = (\alpha + \beta)M$.

На пример: $2x + 3x = (2+3)x = 5x$

Дефиниција: Полином је сређен ако је записан као збир несличних монома.

Теорема: Нека су M и N два неслична монома, а α , β , γ и δ A и B , где је $A = \alpha M + \beta N$, а $B = \gamma M + \delta N$, важи

$$A + B = \alpha M + \beta N + \gamma M + \delta N = (\alpha + \gamma)M + (\beta + \delta)N.$$

За сабирање полинома важе иста својства као за сабирање реалних бројева.

Теорема: За свака три полинома A , B и C важи $A+B = B+A$ и $(A+B)+C = A+(B+C)$.

Дефиниција: Полиноме чији је збир једнак нули називаћемо међусобно супротним полиномима, то јест полиноми P и $-P$ су међусобно супротни јер је $P + (-P) = 0$.

Теорема: Ако су P и $-P$ међусобно супротни полиноми, онда су парови одговарајућих коефицијената (коефицијенти сличних монома из ова два полинома) међусобно супротни бројеви.

На пример: Супротан полином полинома $P = 5x^3$ је полином $-P = -5x^3$

Дефиниција: За свака два полинома A и B важи $A - B = A + (-B)$.

Дефиниција: Степен полинома, који зависи само од једне променљиве, једнак је највећем степену који се јавља у сређеном облику тог полинома.

На пример: Степен полинома $4x^5 + 3x - 1$ је 5, док је степен полинома.

² Префикс *би-* води порекло од латинске речи *bis* што значи двапут. Овај префикс налазимо у сложеницама којим се означава да се нешто јавља двапут, да је удвојено, двоструко и слично.

$y^2 + 3$ једнак два.

Множење полинома

Поред операције сабирања, за полиноме се дефинише и операција множења. Својства операције множења у скупу реалних бројева важе и за полиноме.

Множење монома

Теорема : Производ произвољног броја монома је моном.

Пример: Помножимо мономе $A = -5x^3$ и $B = 2x^2$.

Користећи комутативност множења и својства степена добијамо :

$$A \cdot B = -5x^3 \cdot 2x^2 = -5 \cdot 2 \cdot x^3 x^2 = -10 \cdot x^5$$

Множење полинома мономом

Дефиниција : Полином А помножимо мономом М тако што сваки члан полинома А помножимо мономом М па добијене производе саберемо.

Множење полинома полиномом

Теорема : Полином А помножимо полиномом В Тако што сваки члан полинома А помножимо сваким чланом полинома В па добијене производе саберемо.

Квадрат бинома

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Теорема: Квадрат бинома једнак је збиру квадрата

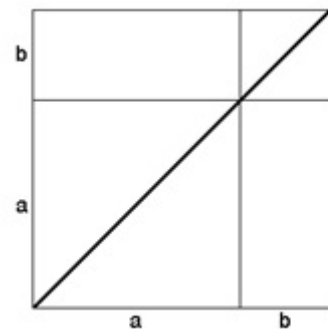
чланова тог бинома и њиховог двоструког производа,

то јест $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Теорема: Квадрат разлике монома А и В једнак је разлици збира квадрата

тих монома и двоструког производа тих монома,

то јест $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.



Разлика квадрата

Теорема: Разлика квадрата два неслична монома једнака је производу њиховог збира и њихове одговарајуће разлике, то јест $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$.

Растављање полинома на чиниоце

Ако су А, В и С три међусобно неслична монома,

тада је $AB + AC = A(B+C)$.

На основу сазнања савремене дидактичко-методичке праксе, а односе се на типове часа, облике рада, наставне методе и наставна средства

ТИПОВИ ЧАСА су обрада, утврђивање, систематизација, проверавање и оцењивање и комбиновани (одређује се према активности које преовладава на часу).

ОБЛИЦИ РАДА одређују однос и степен учешћа наставника и ученика у наставном процесу (раду), а то су: фронтални, групни, рад у паровима, индивидуални и комбиновани.

НАСТАВНЕ МЕТОДЕ су научно верификовани начини и поступци рада наставника и ученика у наставном процесу које доприносе стицању знања, умећа и навика: развијању склоности и способности; формирању моралних и естетских вредности, као и остваривању циљева осталих видова васпитања.

Наставне методе су:

1. вербалне или методе живе речи:
 - метода усменог излагања или монолошка (облици ове методе су: приповедање, описивање, образлагање и објашњење) и
 - метода разговора или дијалогска (продуктивни облици ове методе су: хеуристички, слободан и дискусија; хеуристички – наставник поступно, уз помоћ питања, води ученика од појединости, до откривања општег због чега је за овај разговор потребно искуство и предзнање ученика; слободан – питања постављају наставник и ученици о слободној теми, о теми која ће се обрађивати, као и на завршетку неке теме да би се објасниле неке дилеме; дискусија – полемика, дебата или расправа у којој ученици међусобно или наставник и ученик супротстављају мишљења, износе и побијају аргументе о осветљавају проблеме са новог становишта, наравно за коришћење овог облика разговора неопходно је познавање теме, интересовање, толеранција и међусобно уважавање ставова ученика и наставника).
2. метода рада на тексту, писани и графички радови (рад на тексту, писани и графички радови – коришћење уџбеника, полупрограмираних и програмираних материјала као и других текстова; илустрације цртежима, дијаграмима, графицима, шемама; разни самостални писмени и графички радови ученика: школски писмени задаци, контролне вежбе и тестови, реферати и сл.).
3. метода показивања или демонстрације (показивање или приказивање модела, шема, скица, појава, стања, активности, филмова, разне пројекције и др.).
4. метода практичних радова – шири појам од методе лабораторијског и експерименталног рада.
5. комбиноване наставне методе – плурализам метода.

НАСТАВНА СРЕДСТВА

Постоји више класификација наставних средстава, а у овом подсетнику дата је једна од њих.

1. Вербална наставна средства (жива и изговорена реч – говор и репродукована реч и говор):
2. Текстуална наставна средства (одговарајући штампани и посебно писани текстови из различитих области људског стваралаштва).
3. Визуелна наставна средства (сва она наставна средства која се у току наставног процеса примају – опажају чулом вида: предмети, фотографије, дијаслике, цртежи, карте, шеме, дијаграми, симболи итд.).
4. Аудитивна наставна средства (сва она наставна средства која примамо помоћу чула слуха изузев говора и то: разни шумови у природи, музички и тонски ефекти, разни звучни ефекти итд.).
5. Аудио – визуелна наставна средства представљају синтезу елемената аудитивних и визуелних средстава, као на пример: дијафилм праћен одговарајућим текстом, музиком, шумовима или другим звучним ефектима; тонски филмови, ТВ емисије, школска телевизија, настава уз помоћ компјутера и др.
6. Мануелна наставна средства чине посебну групу средстава. Она служе за извођење разноврсних радних операција, захтева или рада као на пример: разноврсни алати, машине, инструменти, апарати, препарати, предмети, материјали и др.
7. Помоћно-техничка наставна средства омогућавају успешну примену осталих, главних наставних средстава. Разноврсна су и многобројна као на пример: разноврсне табле, столице, апликатори, показивачи и др.

6. Примена дискусије и групног рада на часу математике на коме се обрађује тема из алгебре

Истраживање које сам спровела у основној школи “Иван Милутиновић” у Вишњици, у којој сам запослена на месту наставника математике.

Резултати истраживања треба да докажу да ће се применом свега теоријски приказаног доћи до очекиваних резултата.

Учествовала су два одељења седмог разреда, седмо један и седмо два.

У оба одељења сам одржала час утврђивања градива које смо обрађивали предходног часа, **множења полинома мономом**. У седмом један је облик рада био групни, док је у седмом два био фронтални.

Ученици су требали да:

у оквиру образовних задатака:

- Утврде правила и поступак множења полинома мономом и да их тачно примењују у задацима
- Утврде поступак сређивања израза по растућим и опадајућим степенима (тј. поступак за добијање сређеног полинома)

у оквиру функционалних задатака:

- Стичу навику изостављања знака за операцију множења између чинилаца монома, као и броја 1 када је он чинилац
- Стичу способност изражавања математичким језиком, јасно и прецизно, у писаном и усменом облику
- Стичу навику да дискутују о поступку решавања математичких проблема
- Да се оспособљавају да у току рада дају објашњења за сваки корак у решавању задатака
- Развијају логичко, аналитичко и процедурално (алгоритамско) мишљење
- Развијају способност да закључују по аналогiji

Ученици треба да развијају у оквиру васпитних задатака:

- Концентрацију
- Способност за упоран и предан рад
- Поступност и систематичност у раду
- Тачност, прецизност и уредност у раду
- Позитиван однос према математици и уважавање математике као подручја људске делатности
- Способност уважавања мишљења других
- Способност за рад у групи и комуникацију са другим ученицима
- Самопоуздање и поверење у властите математичке способности
- Поверење у способности других

Ток часа:

Уводни део часа

Анализа домаћег задатка.

Поновити: Како гласи дистрибутивни закон множења према сабирању?

$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ *дистрибутивни закон* множења у односу на сабирање;

Како множимо полином мономом?

Полином А множимо мономом М тако што сваки члан полинома А помножимо мономом М, па добијене производе саберемо.

Уџбеник, страна 74, задатак 4.

Одреди производ $A \cdot M$ ако је:

a) $A = 7a^2 - 3a + 5$, $M = 2a$;

b) $A = -5a^2 - 4a + 8$, $M = 3a^2$.

Главни део часа

Седмо један:

Ученици су подељени у 4 групе, сваку групу чини 4 ученика, 2 групе су чиниле девојчице, 2 групе дечаки. У свакој групи је изабран представник.

Наставник одређује које задатке ученици решавају у групи. Све четири групе решавају исте задатке. Један задатак је основног нивоа, два су средњег и један је вишег нивоа.

Наставник прати рад ученика, усмерава их на правилно решавање задатака, даје инструкције, неопходна и додатна објашњења и инсистира на поступности и систематичности при раду, на развијању педантности и уредности и бодри ученике да питају шта им није јасно.

Ученици у групи решавају задатке. Поступак решавања записују у свесци, објашњавајући један другоме оно што је нејасно. Траже помоћ наставника уколико им је потребна.

Запажање наставника:

Девојчице раде све задатке заједно. Док задатак не буде јасан свакој од њих, не прелазе на наредни. Дечаки, они који имају иначе боље резултате, прво ураде задатке, затим објасне онима којима није јасно. Девојчице решавају задатке брже зато што сваки корак прелазе заједно.

Седмо два:

Забрањен им је било који вид комуникације. Наставник на табли решава све задатке. Објашњава поступак и даје примере.

Завршни део часа

Седмо један:

Прво представник прве групе излази пред таблу и решава први задатак.

Наставник му поставља питања :

1. „Значи, рекао си да...”

Поновимо још једном поступак, или ако није правилно математичким језиком поновимо правилно.

2. „Да ли можеш својим речима да поновиш оно што је он управо рекао?”

Можемо ово да питамо ученика из друге групе.

3. „Шта ти мислиш о томе?”, или „Да ли се слажеш или не?” „Зашто?”

Питамо ученика из треће групе.

4. “Да ли имаш нешто да додаш? Да ли знаш неки контра пример?” (пример када се не може на исти начин решити задатак)

Питамо ученика из четврте групе.

Указивање на уочене најчешће грешке ученика при решавању.

Затим се понавља поступак са учеником из друге групе који решава други задатак на табли, па са учеником из треће и учеником из четврте групе.

Касније, у пракси се показало да је продуктивније да ученици постављају једни другима питања. Док ученик из прве групе решава задатак, ученик из друге групе може њему, или неком другом ученику да постави питање (нпр. „Да ли би то могао правилније да поновиш?“).

Седмо два :

Решавају задатке самостално, затим наставник те задатке решава на табли.

Указивање на уочене најчешће грешке ученика при решавању.

Наставник ученицима оба одељења на крају часа задаје домаћи задатак.

Ученици из оба одељења су имали следећег часа тест.

Ученици седмог један су имали вишу просечну оцену на тесту.

Ученици одељења у коме је био групни рад и примењена је дискусија су имали боље резултате на тесту који су радили наредног часа. Ученици који су учили у групама су се доста прецизније математички изражавали од ученика код којих није било дискусије на часу.

Пример задатака за рад на часу

1.Одреди производ полинома Р и М

а) $P = 2x + 3$, $M = 4x$

б) $P = -4ab + 16ac - 8bc$, $M = \frac{1}{2}bc$

2.Помножи и среди добијене полиноме, затим одреди степен сваког од добијених полинома

а) $(x^4 - 2x^2 - x)(-7x) =$

б) $-\frac{2}{7}xy^2 \cdot (14x^2 - 7xy + 21xy^3) =$

в) $4xy \cdot (-\frac{3}{8}x^2y^4 + \frac{1}{4}x^4y^8 + \frac{9}{16}x^8y^6) =$

3.Среди полиноме и одреди њихов степен

а) $(-2x + y) \cdot 3y - 4x \cdot (5x - 2y) =$

б) $x^2 \cdot (2x - 7) - x \cdot (5x + 4x^2) + 7 \cdot (x^3 - x) =$

в) $3x \cdot (-3x^3 + 2x^2 + 9x - 1) + 7x^2 \cdot (x^2 - 2x + 1) =$

4. Провери тачност једнакости:

$$(a^2 - 3a + 2) \cdot (-3a^2) - (2a + 3a^2 - 2a^3) \cdot 2a = a^4 + 3a^3 - 10a^2$$

Пример задатака за тест

1.Одреди производ полинома Р и М

а) $P = 3p - 2q$, $M = -2p$

б) $P = 2a - 3b$, $M = -5abc$

2.Помножи и среди добијене полиноме, затим одреди степен сваког од добијених полинома

а) $-3abc \cdot (2ab - 4abc + 6a^2b^3c^4) =$

$$\text{б) } (2x^3y^3 - 2x^2y^2 - 3xy) \cdot 9x^2y^3 =$$

3. Среди полиноме и одреди њихов степен

$$\text{а) } (2x - 3y) \cdot 5x + 12xy =$$

$$\text{б) } 2 \cdot (x^2 + y^2) - 3x \cdot (x - y) + 6x^2 =$$

$$\text{в) } 4x^2 \cdot (3x^3 - 7x + 1) - 2x \cdot (5x^2 + 4x - 3) =$$

4. Дати су полиноми $A = 2a^2 - 3a + 7$, $B = -a^2$ и $C = 9a^2 - 5a + 4$. Одреди полином $4A - 3BC$

7. Компаративна анализа

Наведено истраживање је изведено 2013. године. Поновила сам истраживање 2014. године са истом наставном јединицом на друга два одељења седмог разреда.

У оба случаја су боље резултате имали ученици за време чијег часа сам применила групни рад. Поред тога што је просек био виши у том одељењу и други критеријуми су били више испуњени.

У седмом један је просек био 3,375. Четири ученика су добила пет, три ученика су добила четири, пет ученика је добило тројку, три ученика су добила два и један ученик је добио један.

У седмом два је просек био 2,94. Четири ученика су добила пет, два ученика су добила четири, четири ученика су добила тројку, три ученика су добила два и четири ученика су добила један.

Још једном сам се уверила да ће ученици слободније тражити помоћ уколико им је потребна, да ће се јасније и математички исправније изражавати, да ће више међусобно комуницирати и размењивати ставове и идеје везане за област којом се бавимо уколико укључим дискусију у час. Били су активнији, више су учесвовали у раду. Владала је позитивнија атмосфера на часу, деца су деловала одморније него иначе.

У току истраживања сам приметила колико је битна улога наставника. Поред тога што већина наставника ретко примењује групни рад на часу зато што сматрају да је боље искоришћено време уколико одрже уобичајени час, разлог је и то што је неопходна опширнија припрема. Наставник мора да буде организатор оваквог часа. Неопходно је да прецизно организује активности ученика, као и временске интервале у којима ће се свака од тих активности одиграти. Наставник мора да буде и мотиватор, неко ко ће одржавати позитивну атмосферу и покретати ученике на рад, неко ко ће усмеравати дискусију тако да се ученици баве тачно оном области која је предвиђена. Ипак, оно што је можда најбитније у припреми и извођењу оваквог часа је то што је неопходно да наставник предвиди шта су кључна места у тој области која можда неком ученику неће бити јасна и на која наставник може да скрене пажњу. Због тога је важно да се наставник добро припреми да би у сваком задатку објаснио када ученик дође до тог тренутка. Дешава се да ученици када раде у групи превиде таква места због тога што је једној особи, или више њих, из групе јасно па ураде задатак заједно.

Управљање процесом наставе је врло сложена и динамична активност због чега је неопходно увођење иновација.

Циљ је био да се истакне којим активностима и на који начин се долази до најбољих резултата и најоптималније остварује положај наставника у управљању процесом наставе. Положај наставника у управљању процесом наставе се интензивира померањем његове улоге од преносиоца знања до улога планера, организатора, мотиватора, верификатора, саветника. Положај и улога наставника се све више шире на нове улоге које су на стратешком нивоу.

Показана је веза између теоријског и емпиријског дела истраживања. Остварени су циљеви и задаци истраживања.

8. Прилог: Примена дискусије и групног рада на часу математике на коме се обрађује тема из геометрије

Прилажем приказ још једног часа на коме је примењен групни рад као пример да можемо применити и када обрађујемо тему из геометрије. Резултати су били добри као и у већ приказаном истраживању.

Ученици петог разред су били задовољни зато што су своје знање примењивали на стварима које их окружују.

Наставна тема:	Осна симетрија
Наставна јединица:	Осна симетрија једне фигуре
Тип часа:	Обрада
Образовни циљ:	Ученици треба да: Усвоје појам оносиметричне фигуре Умеју да одређују осе симетрије фигура Естетски доживљавају оносиметричне фигуре
Васпитни циљ:	Ученици се оспособљавају за тимски рад; самоевалуацију
Наставне методе:	Дијалогска, самостални истраживачки рад ученика, илустративна
Наставни облици:	Фронтални, групни, индивидуални
Наставна средства:	Образовни стандарди: Ученик интуитивно схвата појам подударних фигура (кретањем до поклапања) Ученик уме да уочи оносиметричне фигуре и одреди осу симетрије.

Садржај часа

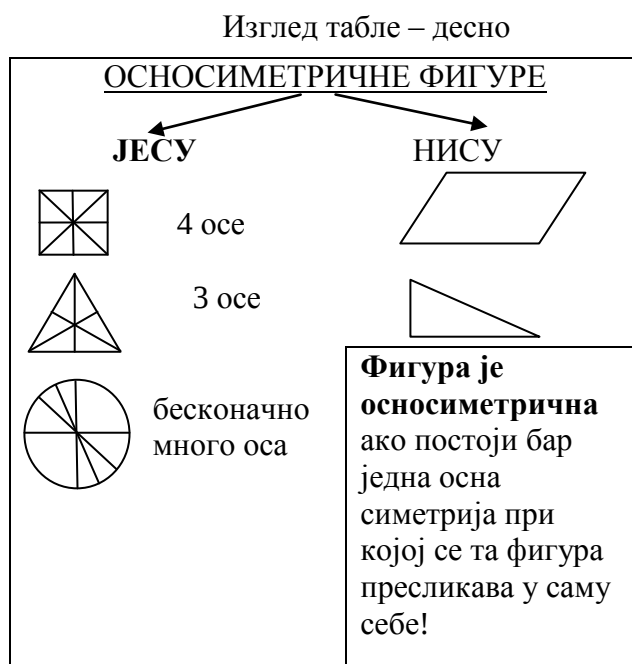
Уводни део часа

Обновити шта је то ОСНА СИМЕТРИЈА (Пресликавање у односу на неку праву којим се добијају две симетричне, подударне фигуре); да бисмо неку фигуру пресликали оносиметрично потребна нам је права која се зове (ОСА СИМЕТРИЈЕ); Шта осна симетрија чува (углове и растојања); шта је слика тачке која се налази на оси симетрије? (Та иста тачка) Асоцијације за осну симетрију: одраз у води, у огледалу, крила лептира...

Истицање наставне јединице: ОСНА СИМЕТРИЈА ЈЕДНЕ ФИГУРЕ – ОСНОСИМЕТРИЧЕ ФИГУРЕ

Главни део часа

Ученици се деле у пет група и добијају упутства за рад. На почетку добијају папирне моделе основних симетричних и несиметричних фигура. Наставник даје упутство: Покушајте своје моделе да пресавијете тако да се делови фигура потпуно преклопе. Код неких се то може учинити на више начина, а код неких је немогуће. Групе/ученици примећују да се неке фигуре осном симетријом у односу на линију пресавијања пресликавају у себе, тј. да су основне симетричне. Они ученици који успеју да фигуре доведу до преклапања уцртавају осе симетрије на добијеним моделима и по један представник из сваке групе излази и лепи свој модел у део табле предвиђен за основне симетричне или несиметричне фигуре.



У даљем току часа ученици добијају нове листиће. Циљ је да у својој групи фигура одреде оне које су основне симетричне и све њихове осе симетрије. Сваки ученик у групи добија свој папир. Пет група чине: знаци и симболи, бројеви, слова, заставе, примери из природе. (Радни листићи и решења се налазе у прилогу). Затим, сваки ученик, редом из група: знаци и симболи, бројеви, слова, заставе, примери из природе излаже свој листић док остали прате. Тиме сваки пут утврђујемо дефиницију основне симетричне фигуре.

Изглед табле – лево, центар

ОСНА СИМЕТРИЈА ЈЕДНЕ ФИГУРЕ

Знаци и симболи

Примери из природе

Слова

Заставе

Бројеви

На одређена места се лепе листићи одређене групе и заједно коментаришемо.

Завршни део часа

Ради утврђивања наученог ученици решавају квиз („PISA“ тест). Сваки ученик добија копију на папиру, а тест и потом решења ће бити приказани на пројектору. Задаци и решења са теста су у прилогу.

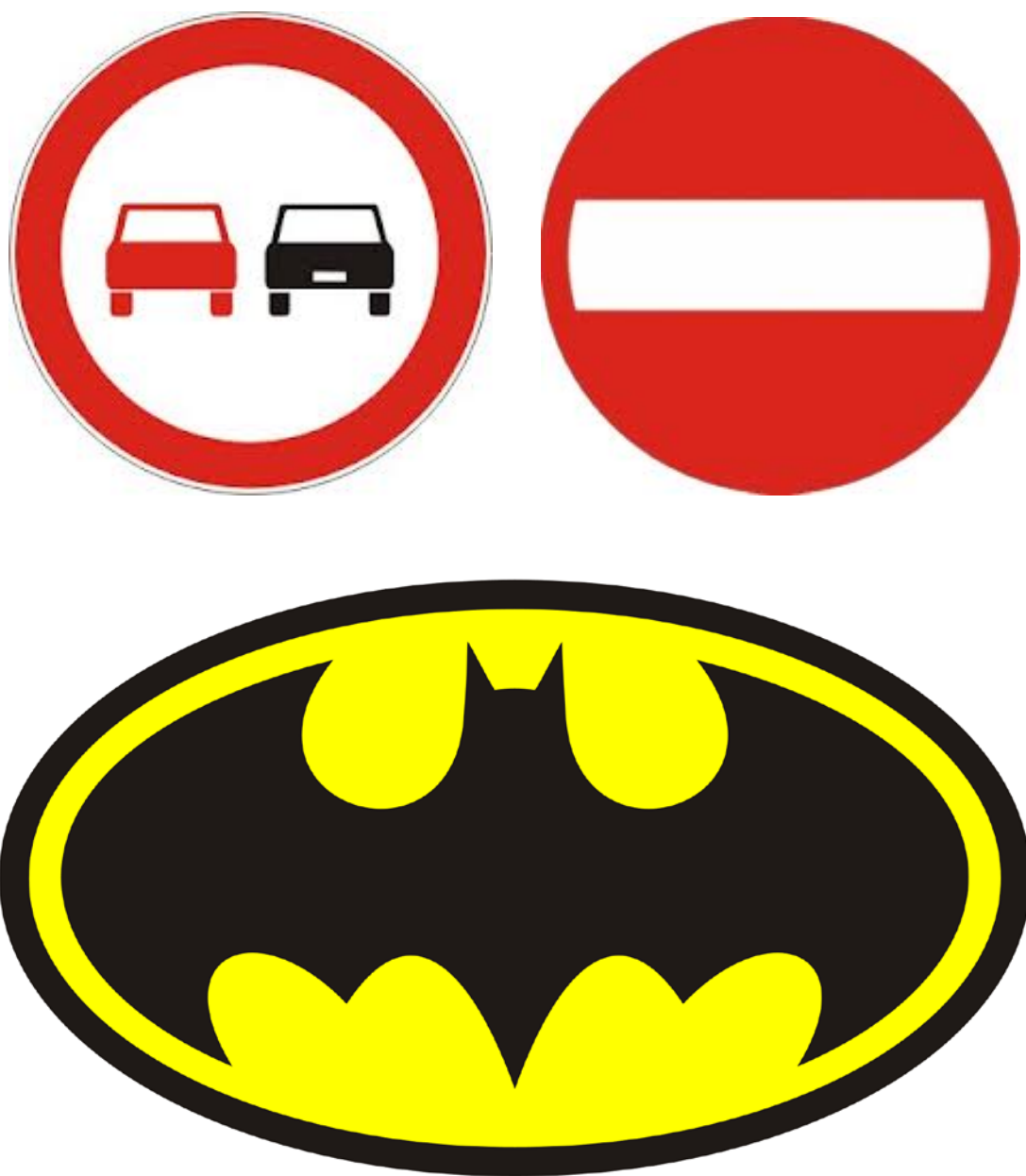
Обновити шта је то ОСНОСИМЕТРИЧНА ФИГУРА! (Фигура је осносиметрична ако постоји бар једна осна симетрија при којој се та фигура пресликава у саму себе!)

За домаћи задатак сами нацртајте и обојите 5 осносиметричних и 5 несиметричних фигура.

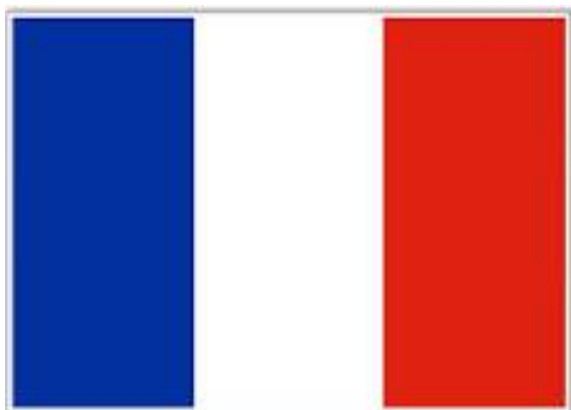
Закључак

Ученици су имали боље резултате него на ранијим тестовима.

Знаци и симболи



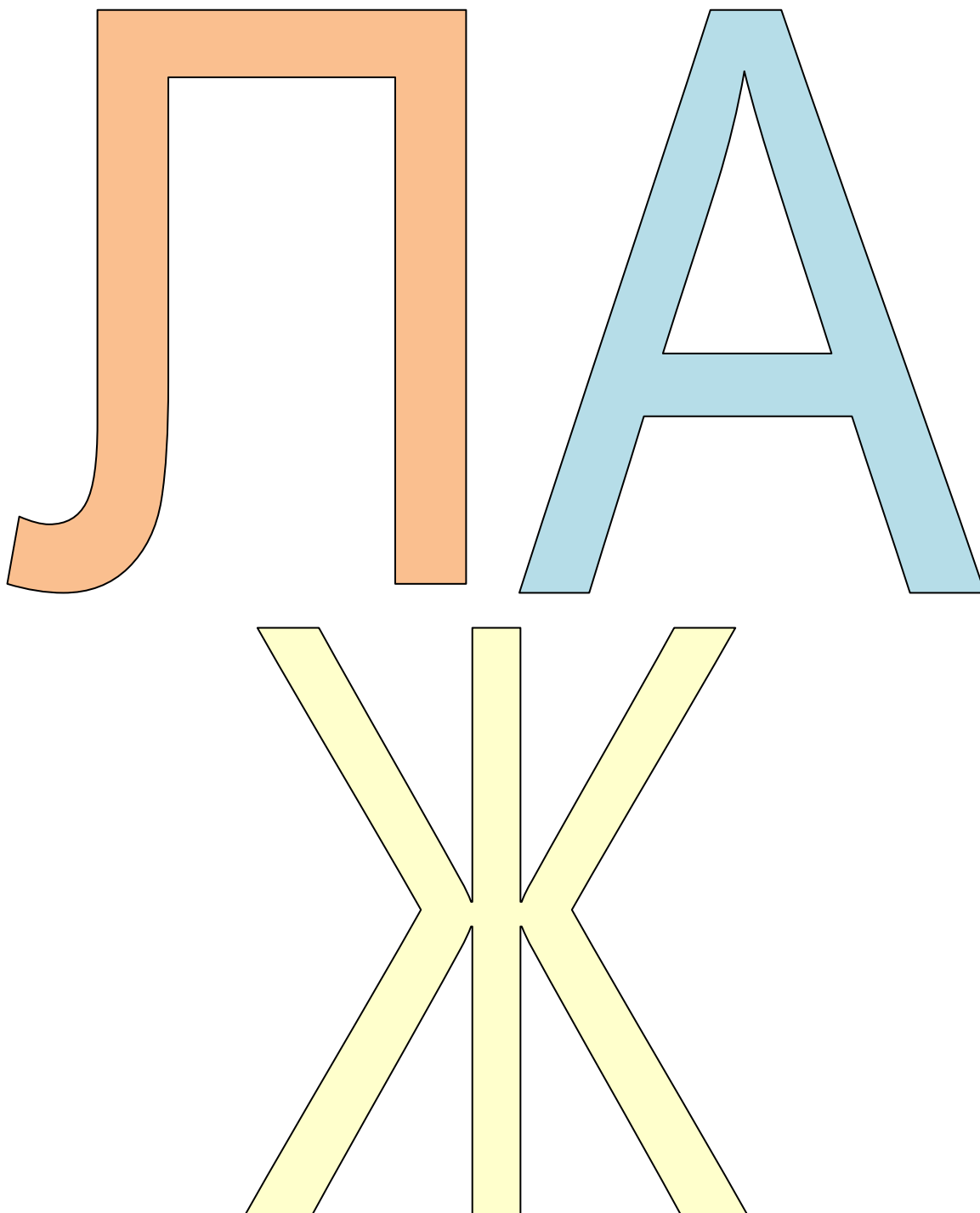
Заставе



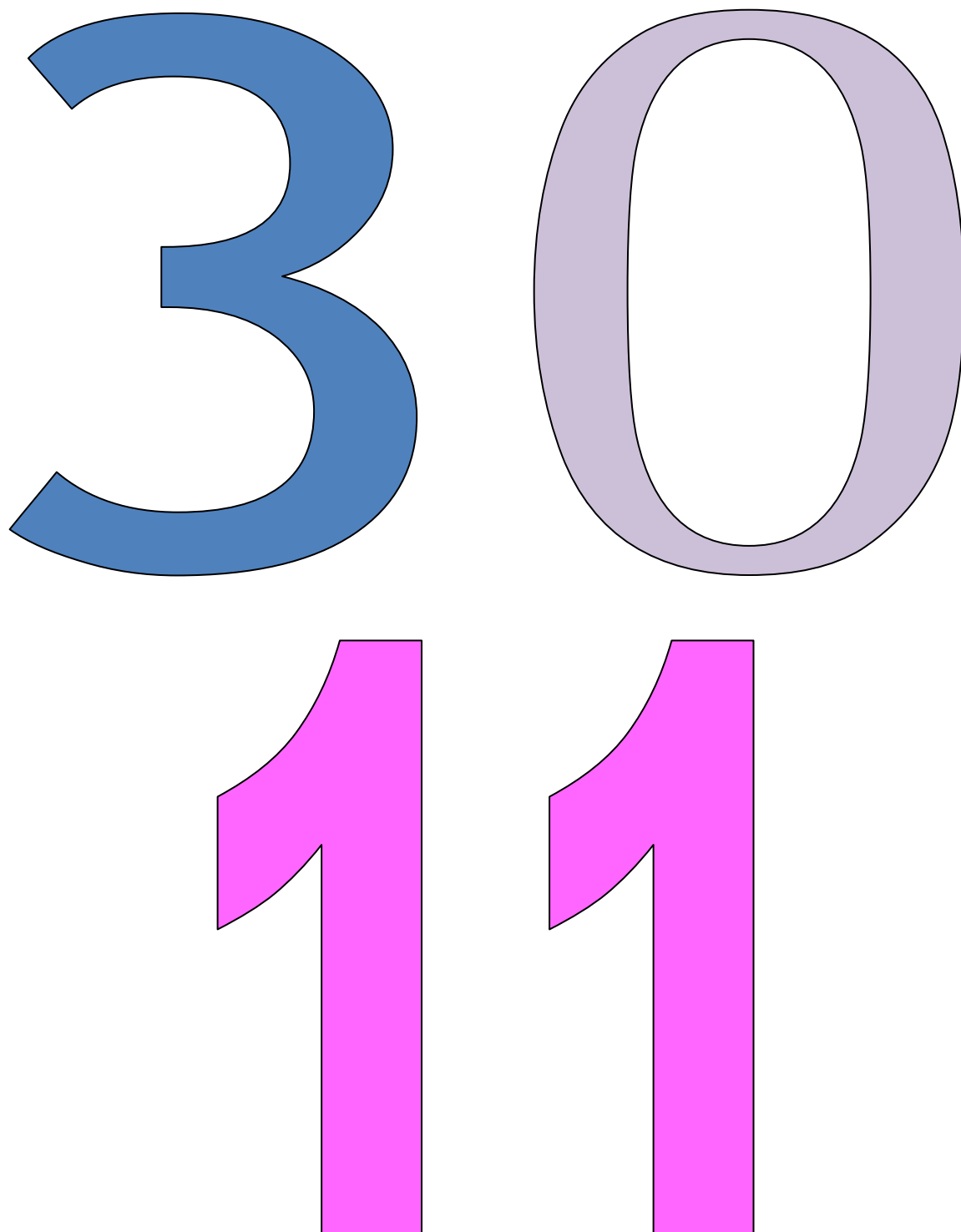
Примери из природе



Слова

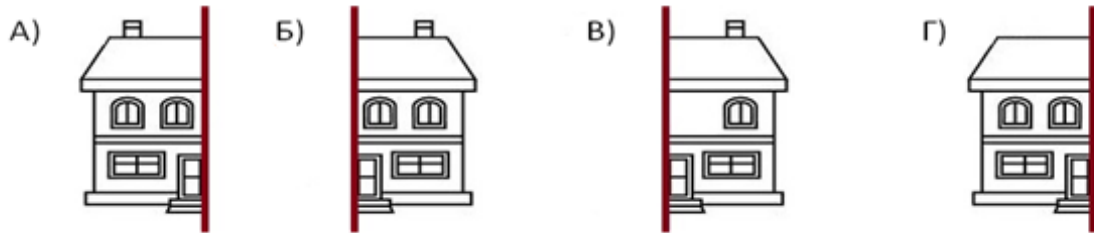


Бројеви

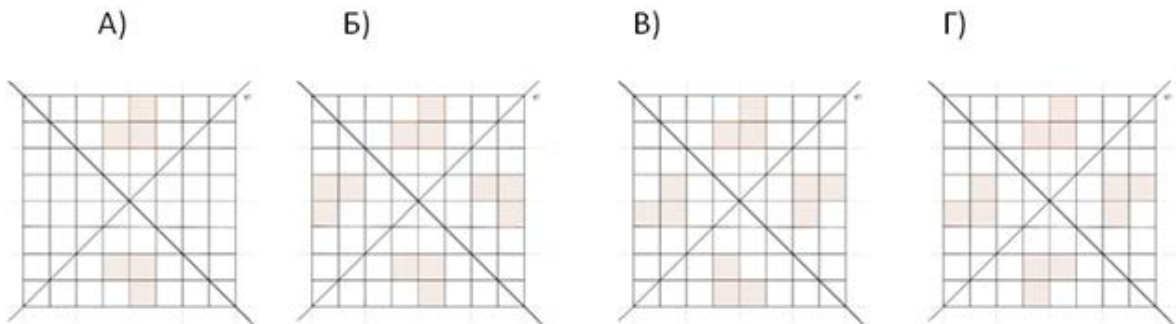
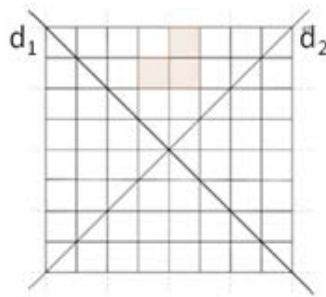


PISA тест:

1. Који цртеж треба додати па да кућица постане оносиметрична фигура?



2. Када обојиш фигуру са најмање могуће квадрата тако да она буде оносиметрична у односу на праве d_1 и d_2 , добићеш?

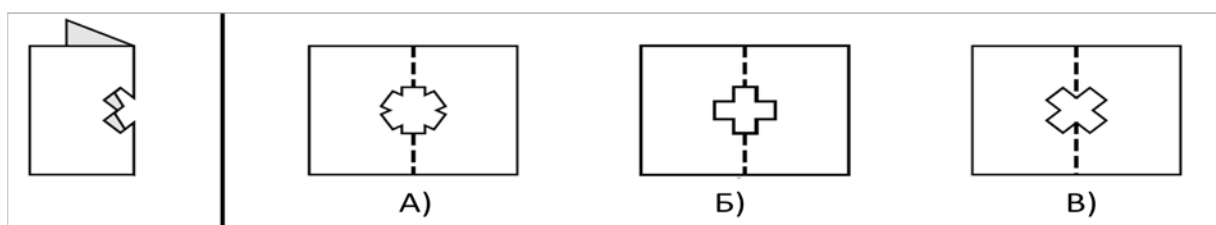
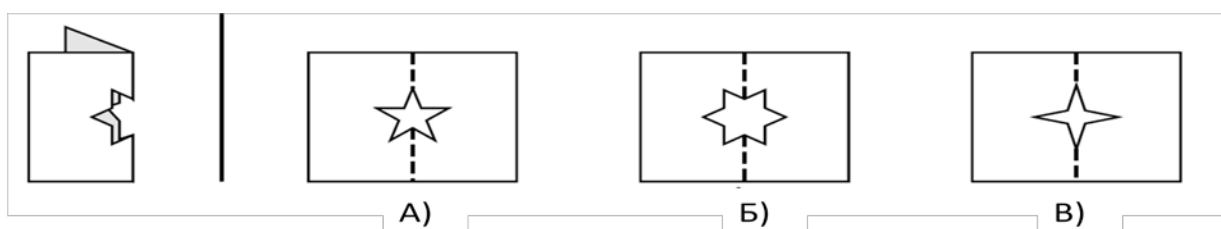


3. Ако речи посматрамо као оносиметричне фигуре, која има две осе симетрије?

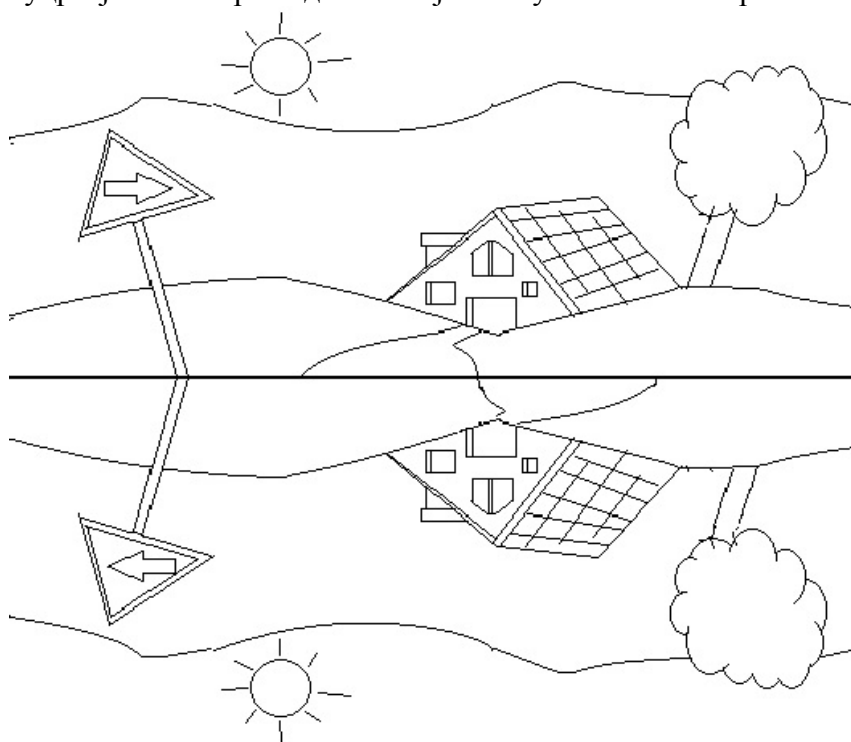
A) Б) В) Г)

АНА ОХО АЛА МАМА

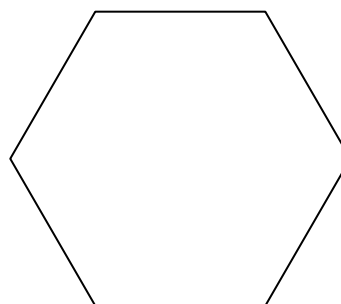
4. Када преклопимо папир и исечемо га као на слици лево, добићемо



5. Пронађи и уцртај знак X преко делова који слику чине несиметричном.



6. Фигура на слици има
- А) 4 осе симетрије
 - Б) 6 оса симетрије
 - В) 8 оса симетрије
 - Г) 2 осе симетрије



9. Закључак

Математика развија логичко, апстрактно и дедуктивно мишљење, користимо је у свакодневном животу. Код деце математика развија перцепцију, уочавање међусобних односа у свету који их окружује.

Овај рад се бави методама којима можемо побољшати процес наставе, приказаним теоријски и емпиријски кроз елементе алгебре које обрађујемо у основној школи.

У теоријском делу смо првенствено представили појмове и законитости алгебре полинома на начин на који смо их усвојили на Математичком факултету у Београду у оквиру предмета алгебра 1, као и оне којима се бавимо у седмом разреду основне школе.

Затим смо анализирали факторе који утичу на квалитетно управљање наставом и остваривање основних функција улоге наставника у наставном процесу. У овој анализи су коришћена истраживања наших психолога, педагога и методичара наставе, као и истраживање "The Teacher's Role in Classroom Discourse: A Review of Recent Research into Mathematics Classrooms", аутора Margaret Walshaw и Glende Anthony, објављеног од стране Америчке асоцијације за педагошка истраживања. Ова истраживања нам показују како можемо на најбољи начин да унапредимо наставу и приближимо градиво ученицима, али нам и указују на најчешће грешке које се јављају.

У експерименталном делу су дати методологија и резултати емпиријског истраживања о утицају групног рада и дискусије примењеног на часу одржаном у седмом разреду основне школе. Указано је на разлику између уобичајеног начина одржавања часа, када се углавном примењује фронтални облик рада и када примењујемо друге методе како бисмо побољшали процес наставе, што се показало и продуктивније.

Мој рад показује колика је потреба за иновацијама и усавршавањем на свим нивоима образовања коришћењем савремених метода и организационих облика наставе да би се остварила неопходна сарадња између свих чинилаца образовања.

Наставник представља и механизам унутрашње контроле процене резултата наставе па самим тим треба да прилагођава наставу у циљу постизања што бољих резултата, односно у складу са циљевима које хоће да оствари.

10. Литература

1. Радни уџбеник за пети разред основне школе, Небојша Икодиновић, Слађана Димитријевић, Сања Милојевић, Ненад Вуловић, Клет, Београд, 2011.
2. Додатна настава Математика 5, Наталија Јекић, Душанка Ковачевић, Креативни центар, Београд, 2010.
3. Збирка задатака за пети разред основне школе, Владимир Стојановић, Математископ, Београд, 2010.
4. <http://www.superteacherworksheets.com/geometry/folded-paper-shapes.pdf>
5. Математика 7, уџбеник за седми разред основне школе, Икодиновић Н., Димитријевић С., Klett, 2012.
6. Математика 7, збирка за седми разред основне школе, Милојевић С., Вуловић Н., Klett, 2012.
7. Приручник за наставнике математике у седмом разреду основне школе, Икодиновић Н., Klett 2011.
8. Знам за више – Математика 7, објашњења и вежбања за боље оцене у 7. разреду, Klett, 2010.
9. Математика 7, збирка за седми разред основне школе, Круг, 2008.
10. Алгебра, Гојко Калајџић, Математички факултет, Београд, 2004.
11. “The Teacher's Role in Classroom Discourse: A Review of Recent Research into Mathematics Classrooms”, Margaret Walshaw and Glenda Anthony, Review of Educational Research, September 2008, Vol. 78, No. 3, pp. 516-551, American Educational Research Association
12. <http://licencazarad.palankaonline.info/didaktika/5-nastavne-metode>
13. <http://matematikaos.blogspot.com/2010/04/matematika-misli-o-matematici.html>