Математички факултет
Универзитет у Београду



# Проблемски задаци истраживачког типа у настави алгебре у основној школи

мастер рад

ментор:
др Небојша Икодиновић

студент:
Бојана Живковић

Београд, 2015.

# Садржај

# Увод

Као и остали савремени облици наставе и проблемска настава је настала као реакција на традиционалну наставу, која је и у савременим условима наставила да негује претежно репродуктивну активност ученика, настава у којој ученик добија научне чињенице у готовом облику а његов задатак је да ове чињенице упамти и што верније репродукује. Све ово морало је довести до промена. Потребно је да ученик учествује у процесу који води до знања, јер је сазнање пре свега процес долажења до знања, а не готов производ који треба само запамтити.

Одушевљење математиком често почиње размишљањем о неком задатку који нам се, у извесном смислу, нарочито допао. Такав задатак се може срести на школском часу, у збирци задатака, у разговору на забавама или случајним сусретима. Као и свако друго, тако и ово одушевљење изазива интересовање које код неких брзо прераста у озбиљно бављење математиком. Решавање таквих задатака највише доприноси суштинском развоју мишљења ученика, нарочито логике и довитљивости.

Улога наставника је изузетно важна, наставник мора добро да размисли о природи градива и да припреми праве проблемске задатке који ће се наслањати на претходна знања ученика.

”Мотивисати ученике да нешто уче, значи навести разлог због кога ће учити. Уколико наставник не успе да мотивише ученике за наставу узалудан је његов даљи труд.”[1]

Циљ овог рада је да помогне наставницима у важном и тешком делу посла који се односи на развијање математичког мишљења, истрајности и стваралачких способности ученика. Рад је намењен и ученицима који желе да самостално развијају математичко мишљење.

У овом раду дате су карактеристике и специфичности проблемских задатака истраживачког типа и њихов методички значај. Теоријска разматрања илустрована су практичним примерима. Такође, у раду се налазе припреме за часове математике у основној школи.



[1]Дејић, М., Методика наставе математике, Јагодина 2000.

Рад се састоји од шест поглавља:

У оквиру првог поглавља говори се о присуству математике у свакодневном животу. Истакнути су циљеви и задаци математике у основној школи. Математика је често проблем, а за многе је то непремостива препрека за напредовање - зато је улога наставника математике од посебног значаја.

Друго поглавље указује на значај математичких задатака за развој математичког мишљења. Ученике треба навикавати и оспособљавати да плански приступају решавању задатака, директно или индиректно треба да се утврде поступци - операције које чине механизам решавања задатака.

Треће поглавље говори о суштини проблемске наставе. Она битно утиче на отклањање слабости класичне наставе, а које се исказују у неговању механичког памћења уместо мишљења, у репродукцији уместо продукције, у копирању и опонашању уместо стваралаштва. Такође дата су практична упутства за примену проблемске наставе и истакнут значај проблемске наставе за развој способности ученика.

Четврто поглавље приказује артикулацију часа проблемске наставе, истиче његову вредност и погодност добијања повратне информације у току часа.

У петом поглављу описане су припреме за часове математике у основној школи на којима се од ученика захтевало решавање проблемских задатака истраживачког типа.

У шестом поглављу дата је анализа одржаних часова.

# 1 Математика и њен значај

## 1.1 Математика је свуда око нас

Ако довољно пажљиво погледамо око себе свуда можемо видети математику. Постоји бесконачан број примера у нашем животном простору који се могу везати уз математику, али треба знати гледати око себе. Веза између математике и света у коме живимо природна је и нераскидива, а то нажалост често заборављамо када математику покушавамо приближити нашим ученицима.

## 1.2 Циљ и задаци наставе математике у основној школи

Математика као наставни предмет у основној школи заснива се на елементима математике као науке, јер одговарајуће научне садржаје трансформише и прилагођава узрасту ученика. Наставни програм математике за основну школу поред садржаја и распореда градива за одговарајуће разреде основне школе истиче циљ и задатке наставе математике.

Циљ наставе математике у основној школи јесте:

- да ученици усвоје елементарна математичка знања која су потребна за схватање појава и зависности у животу и друштву;
- да оспособи ученике за примену усвојених математичких знања у решавању разноврсних задатака из животне праксе, за успешно настављање математичког образовања и за самообразовање;
- да допринесе развијању менталних способности, формирању научног погледа на свет и свестраном развитку личности ученика.

Поред ових општих циљева можемо додати и следеће: развијање интересовања и љубави према математици, развијање математичког мишљења и математичке способности (моћ апстраховања, математичка индукција, логичко расуђивање, проналазачко и стваралачко мишљење), креативности, сналажљивости итд.

Задаци наставе математике јесу:

- да ученици стичу знања неопходна за разумевање квантитативних и просторних односа и законитости у разним појавама у природи, друштву и свакодневном животу;
- да ученици стичу основну математичку културу, потребну за откривање улоге и примене математике у различитим подручјима човекове делатности (математичко моделовање), за успешно настављање образовања и укључивања у рад;
- да развија ученикову способност посматрања, опажања и логичког, критичког, стваралачког и апстрактног мишљења;
- да развија културне, радне, етичке и естетске навике ученика, као и математичку радозналост у посматрању и изучавању природних појава;
- да ученици стичу способност изражавања математичким језиком и да се јасно и прецизно изражавају у писменом и усменом облику;
- да изграђују позитивне особине ученикове личности, као што су: истинољубивост, упорност, систематичност, уредност, тачност, одговорност, смисао за самостални рад;
- да ученици стичу навику и обучавају се у коришћењу разноврсних извора знања;
- да ученици усвоје основне чињенице о скуповима, релацијама и пресликавањима;
- да ученици савладају основне операције с природним, целим, рационалним и реалним бројевима, као и основне законе тих операција;
- да ученици упознају најважније равне и просторне геометријске фигуре и њихове узајамне односе;
- да оспособи ученике за прецизност у мерењу, цртању и геометријским конструкцијама;
- да ученицима омогући разумевање одговарајућих садржаја природних наука и допринесе радном и политехничком васпитању и образовању;
- да интерпретацијом математичких садржаја и упознавањем основних математичких метода доприносе формирању правилног погледа на свет и свестраном развитку личности ученика.

## 1.3 Математика је многима проблем

Иако је математика све време присутна у нашим животима, у школама се углавном сматра за тежак, неразумљив, апстрактан и само за ретке "срећнике" успешан предмет. Такво гледиште већ генерацијама представља озбиљну препреку дечијем напредовању. Често од наставника и родитеља чујемо мишљења да нека деца једноставно нису за математику. Много ређе се питамо колико организација наставе, методичка припремљеност наставника, његова креативност, план и програм и позитивна мотивација ученика утичу на њену успешност. Учење математике у школи одвија се често на врло уском узорку задатака у којем деца најчешће не виде сврху таквог учења и стечена знања врло тешко примењују у свакодневном животу. Чак и школске проблемске задатке који покушавају успоставити везу математике и свакодневних проблема, деца најчешће тумаче као апстрактне проблеме који захтевају извођење неких операција са задатим бројевима, а знајући да је важно нешто израчунати деца се ни не удубљују у текст задатка и не размишљају шта је стварни одговор на задати проблем. Ако желимо да наши ученици заволе математику и почну у њој постизати боље резултате, јасно је да многе ствари у настави треба мењати. Математика има велики значај и улогу не само као наставни предмет који образује људе, пружајући им корисна знања за живот или за настављање школовања, него и као предмет који и васпитава људе доприносећи изграђивању интелектуално снажних и напредних личности.

## 1.4 Ученике треба ослободити страха од математике

"Ученике треба придобијати, а не одбијати. При ступању у школу, ученици обично имају позитиван став према математици. Касније, неки науче да је воле, а неки не."[1] Стичу се разне предрасуде о томе како је математика тешка и да је само за одабране, а да они сами нису способни да је савладају. И сами смо често сведоци, када упитамо неког родитеља како дете учи у школи, да одговара да му све иде добро осим математике. Ово се најчешће исказује у присуству деце која се на овај начин само утврђују у свом ставу да нису за математику. Ми као наставници морамо да избацимо детету из главе идеју да је математика баук. Треба их убедити да је школско градиво за просечне ученике и да свако може да га савлада. Задаци које поставља наставник не треба да

[1] Дејић, М., Методика наставе математике, Јагодина 2003.

премашују могућности ученика и да га обесхрабрују. Велика је радост деце када нешто схватају и разумеју. У разреду мора да влада клима слободе и неспутаности. Ученици могу слободно да питају све, а да при томе не доживе подсмех. Тек када их ослободимо страха неће се десити да је увек све јасно када наставник пита: Да ли је све јасно? На свако добронамерно питање које долази од стране ученика, наставник мора да одговори и да га разјасни. На тај начин ученицима се неће стварати конфузија, а наставник ће знати шта то ученици не знају и полако попуњавати евентуалне празнине и пропусте. Такође, ученици ће стећи поверење у себе и разбити фаму да је математика само за одабране. Поступност у савлађивању математичког градива повећава интересовање за математику, а хаотичност увећава незнање и смањује интересовање.

Напоменимо да незаинтересованост за изучавање математике, а самим тим и лењост ученика, не значи да ученици не воле да раде, већ само да осећају неспособност да савладају интелектуални напор који се од њих тражи. Зато наставник мора да се потруди да математику приближи ученицима и то да сваки појединац напредује према својим способностима.

# 2 Математички задаци и развој математичког мишљења



Опште је позната улога математичких задатака у настави и учењу математике. С једне стране, та улога је одређена тиме што се коначан циљ наставе математике своди углавном на то да ученици што боље овладају методама решавања система задатака. На тај начин, решавање математичких задатака у настави математике јавља се и као циљ и као средство те наставе. Ако се појам математичког задатка схвати довољно широко, онда се може рећи да се изучавање математике остварује највећим делом решавањем математичких задатака. Решавање математичких задатака служи разним конкретним циљевима наставе математике. Без претеривања може се тврдити да се решавањем задатака остварују готово сви дидактички циљеви наставе математике:

- **Образовни** - стицање нових математичких знања (усвајање појмова, симболике, доказа, уочавање или илустрација неке математичке чињенице, формирање знања и навика помоћу система вежбања задатака, увођење у нове садржаје и стварање оговарајућих проблемских ситуација, утврђивање стечених знања тј. илустрације примене изучаване теорије и њено дубље усвајање, контрола и самоконтрола усвојености математичких знања и др.);

- **практични** (примена математичких знања у решавању разних проблема из свакодневне праксе, сродних дисциплина и разних других области);

- **развојно - васпитни** (формирање и развијање специфичног математичког стила мишљења и оспособљавање за активности математичког карактера, васпитање низа позитивних особина личности - фабулом, садржином и процесом решавања задатака, остваривање политехничког васпитања ученика).

Нарочито је велика улога проблемских задатака у развијању математичког мишљења ученика. Основно дидактичко средство за развијање математичког мишљења јесте, пре свега, решавање ових или оних математичких задатака чији садржај или начин решавања одговара одређеној карактеристици мишљења. **Карактеристика математичког мишљења** може се посматрати са неколико аспеката, као што су:

- садржај или тип мишљења (конкретно, апстрактно, интуитивно функционално, дијалектичко, структурно, стваралачко или продуктивно мишљење).

- опште методе сазнања или математичког истраживања (посматрање, индукција, дедукција, примена аналогије, математичко моделовање).

- форма, тј. квалитети мишљења који одређују стил мишљења (гипкост, активност, усмереност, економичност, дубина, ширина и сл.).

- субјективна својства карактера личности (тачност, упорност, концизност, радозналост и др.).

У процесу наставе математике адекватним дидактичким путевима треба развијати основне компоненте математичког мишљења, обраћајући посебну пажњу на васпитање тзв. математичког стила мишљења. Оспособљеност ученика за решавање проблемских задатака најбоља је карактеристика стања математичког мишљења ученика и нивоа њиховог математичког образовања. Да би се код ученика развијала способност за решавање проблемских задатака, мора се код њих побудити за то одређено интересовање, обезбедити потребно време, развити одговарајуће мисаоне операције (карактеристичне за одређене фазе решавања задатака).

Приликом избора задатака мора се стално имати у виду да сваки задатак треба да има одређени циљ, сврху, тј. треба да буде карика у добро осмишљеном систему задатака за одређену наставну јединицу и тему. Сваки задатак који се даје ученицима треба нечему да их научи, а решавање треба да буде корак напред у улажењу ученика у математику. Педагошка вредност задатка цени се према укупности свих елемената који могу бити од интереса у конкретној ситуацији (непосредни наставни циљ, да ли је неопходан баш тај задатак, конкретни подаци у задатку, фабула задатка, могућност да га ученик реши и евентуална помоћ наставника, веза са претходним решаваним и наредним задацима итд.).

У настави математике првенствено морају бити заступљени задаци чије решавање доприноси дубљем разумевању и трајном усвајању система математичких знања предвиђених наставним програмом. Наравно, осим тога, морају у довољном броју бити заступљене и вежбе за формирање ових или оних математичких навика. При изучавању неке теме првенствено су важни уводни, односно "главни" примери, којима се упознаје и илуструје обрађено теоријско питање, разјашњава његов смисао. Осим тога, треба да се користе и задаци који су по својим функцијама знатно "продуктивнији"(што не значи и тежи) - у циљу подстицања заинтересованости ученика за учење математике. У процесу наставе математике, а посебно при решавању задатака, нарочиту пажњу треба посвећивати актуелизацији знања ученика. Ради тога су корисне специјалне серије задатака које су састављење тако да ученици науче да вешто користе раније стечена знања и искуство при решавању нових задатака, тј. да своје знање примењују у новој ситуацији.

Суштина примене математике у решавању неког проблемског задатка састоји се у превођењу задатка на математички језик, решавању тако формулисаног задатка помоћу математичког апарата и интерпретацији добијених резултата на језику полазних података. Међутим, треба уочавати да свако правило, односно формула има свој одређени домен примене. Ученике треба навикавати и оспособљавати да плански приступају решавању задатака, нарочито оних тежих. Директно или индиректно, треба да се утврде поступци - операције које чине механизам решавања задатака. При томе се мора ићи систематски и етапно: прво задатак се мора разумети и јасно видети шта се тражи, по могућности, задатак треба шематски записати. Друго, мора се уочити како међусобно зависе разне појединости, каква је веза између непознате и датих података - да би се дошло до идеје решавања и створио план. Треће, треба извршити план. Четврто, треба начинити осврт, тј. проверити, дискутовати и коментарисати добијена решења. Свака од ових фаза има свој значај. Задатке, нарочито оне теже, нипошто не треба решавати на брзину прескачући поједине фазе. Не треба журити са почетком решавања, ученик не би требало да започиње ако задатак није разумео (што се у пракси често сусреће). Правилно компоноване скице и цртежи, нарочито при решавању геометријских задатака, могу доста допринети да се добије јасна представа о целини "ситуације" везане за одређени задатак. Ваља избегавати специјалне положаје и посебне случајеве код цртежа, јер могу одвести на погрешан пут.

Нема сврхе да ученик ради појединости пре него што је уочио главне везе и створио неки план. Наиме, у решавању задатка најважније је доћи до идеје плана и на то обратити пажњу. Наставник ће ненаметљиво помагати ученицима да дођу до те идеје. Многе од тешкоћа ученици ће избећи ако се навикну да контролишу сваки корак у реализацији плана решавања.

Закључна етапа је такође веома важна пошто готова решења треба преиспитати, издискутовати и извести (поједине) одређене поучне закључке.

Када напишу доказ или дођу до решења неког задатка, по правилу, ученици одмах "откаче" тај задатак, затворе свеску и очекују нови задатак. Тако се готово увек изоставља важна и поучна етапа рада (осврт). Стога код ученика ваља изграђивати сазнање о томе да добијањем решења задатак скоро никад није исцрпљен, већ да остаје још понешто да се уради.

Ученици ретко запажају да задаци међу собом имају неке везе. Осврт на решавање задатка (својеврстан поглед уназад, али и унапред) згодна је прилика да се истраже неке везе тог задатка са другим задацима (примена истог поступка у некој другој ситуацији, уопштавање и сл.). Ученици ретко имају систематска знања о задацима и суштини њиховог решавања, па је њихова главна пажња (а често и наставникова пажња) усмерена на то да се дође до решења задатка и то што је могуће брже. Закључној анализи и извођењу закључака из решења задатка, не посвећује се неопходна пажња а то је у ствари оно најважније, оно због чега се задаци и решавају. То некако измиче пажњи, јер је заклоњено техничким проблемом да се нађе и добије само решење. У процесу наставе математике ученици треба да се оспособе за решавање различитих задатака. Међутим, у школи се не могу размотрити и решити све врсте задатака, а то није ни неопходно јер ма колико задатака решили у школи, ученици ће ипак у свом будућем раду сусретати нове врсте задатака. Зато школа мора наоружати ученике општим приступом решавању ма којих задатака, тј. решавајући конкретне задатке ученици треба да овладају општим поступцима решавања задатака у ма којој новој ситуацији.

Од посебне важности је решавање истог задатка на различите начине (уз избор најбољег од њих), јер је то често много корисније него ли решавање низа стереотипних задатака на један исти начин. Наиме, при оцењивању неког начина решавања задатка (поготову у случају више начина решавања) активно су присутне разне мисаоне операције (анализа, компарација, генерализација и други) што, несумњиво, има позитиван утицај на развој математичког мишљења ученика. Уз то, различите варијанте решавања истог задатка дају ученику могућност да примени читав арсенал својих математичких знања. Када се заврши са решавањем низа међусобно повезаних задатака корисно је дати резиме, систематизовати методе и могућности решавања задатака посматране врсте.

# 3 Проблемска настава

Од три типа наставе - **предавачког** (задатак ученика је да запамте изложене информације), **објашњивачког** (активност ученика је богата, али се ипак своди на рецепцију) и **истраживачког** (ученичка активност је стваралачка) - општем, нарочито интелектуалном, развоју ученика убедљиво највише доприноси истраживачки. У савременој дидактици се све више и упорније захтева да настава има истаживачки карактер. То је последица слабости класичне наставе која првенствено тражи савлађивање врло обимног чињеничког материјала, а запоставља практичну примену наученог и ментални развој ученика. Класичне наставне методе у великој мери обезбеђују остваривање циљева наставе математике, али не оспособљавају у довољној мери ученике да мисле математички.

У циљу што веће ефикасности наставе, утврђујући као примарни задатак развијање мишљења код ученика, савремена дидактика, уз помоћ психологије, ствара нови дидактички систем - **проблемску наставу**. Кључни задатак школе је да ученици схвате наставни садржај толико да знање могу самостално применити у потпуно новим околностима. Тиме се највише развија стваралачко мишљење што је и главни циљ проблемске наставе.

Различити аутори су различито дефинисали проблемску наставу, али се, у суштини сви слажу. Решавање проблема је, у ствари, стваралачка активност којом се, у сусрету са посебним захтевима, тражи проналажење нових решења. Не треба мешати проблемску наставу са наставном методом. Проблемска настава представља дидактички систем тј. концепцију наставе која ће се реализовати наставним методама. О ефикасности проблемске наставе за развијање стваралачког мишљења код ученика, много је писано и експериментално потврђивано. Без обзира на њену водећу улогу међу дидактичким системима она се у настави мало примењује. Један од разлога је и недостатак конкретних метода за њену примену на наставном часу.

Амерички психолог Робер Гање сматра да су "проблеми врхунски тип учења у хијерархији која се креће од најједноставнијег условљавања, преко учења појмова и начела до самог решавања проблема", што указује на континуирано учење. То је тип наставе у коме ученици, самосталним истраживањем и решавањем проблема, развијају стваралачко мишљење. Организација и наставни поступци се тако бирају и подешавају да максимално подстичу и одржавају мисаону активност ученика и доприносе развоју њихових менталних способности. Пре него што изнесем структуру часа по моделу проблемске наставе даћу неке терминолошке одредбе.

## 3.1 Шта је проблем

О томе шта представља **проблем** међу стручњацима нема јединственог мишљења. Међутим, оно што карактерише сваки проблем то је постојање неке тешкоће, неке препреке. "Тамо где се може доћи до циља лако нема проблема", истиче Б. Стевановић (1974). Проблеми се дакле појављују онда када појединац наиђе на извесну тешкоћу или препреку у задовољавању својих жеља, или постизању својих циљева, онда када наиђе на одређену тешкоћу, а циљ не може постићи на основу до тада важећих начина, већ ваља пронаћи пут, начин за њено превазилажење. Проналазећи сопствене путеве у савладавању тешкоће ученик долази до нових знања.

Кад се нађе пред проблемом, ученик прво треба да сагледа који услови недостају, а то неће бити могуће ако крене "утабанима стазама", устаљеним начином решавања. Фонд знања која има у меморији неће му бити сам по себи довољан. Мораће да се ослони на продуктивно, стваралачко мишљење. Од посебног је значаја што, при решавању проблема, постоји могућност да сваки ученик може одабрати посебан начин, пут и поступак. Пошто се ради о активности мишљења посредством проблемских ситуација, код ученика долази до "формирања сазнајних интереса и моделовања умних процеса који су адекватни стваралаштву"[1], што доводи до веома сложених мисаоних активности. Макс Вертхајмер, оснивач гешталт теорије, каже да је битна одлика продуктивног мишљења сагледавање проблемске ситуације као саставног дела шире целине, а то значи да треба увидети однос међу елементима, однос између средстава и циља, узрока и последице, појединачног и општег.

[1]Вилотијевић, М., Дидактика, Научна књига, Учитељски факултет, Београд, 1999.

## 3.2 Проблемска ситуација

Полазећи са становишта дидактике и психологије, разлике између проблема и проблемске ситуације постоје и на њих указује Р. Ничковић (1974) наводећи: "**Проблемска ситуација** представља почетну карику у решавању схваћеног и прихваћеног проблема и као таква она је доживљај неизвесности, очекивања, збуњености, радозналости, тензије".

Смисао проблемске ситуације јесте да мотивише ученике за решавање проблема. Разлог настајања проблемске ситуације јесте извесна противречност која је садржана у проблему. О природи проблема и проблемске ситуације С. Прванови (1970) истиче: "Ставити ученике пред проблем значи дати му извесне податке и поставити му одређен циљ који он има, користећи те податке, и само њих, да постигне. Ставити или довести ученика у проблемску ситуацију значи омогућити му да "види" неке релације, а препустити њему самом да поставља циљеве, тј. одређене проблеме". Проблемска ситуација се ствара погодном причом, интересантним визуелним ефектима, нечим што ће заинтересовати ученике за решавање проблема који из те ситуације настаје.

Проблемска ситуација је почетно психичко стање изненађења, упитности, велике заинтересованости и високе умне и емоционалне напрегнутости појединца који треба да реши задати проблем. Задати проблем се издваја из масе других тиме што измиче стандардним поступцима решавања, издваја се својој тежином, а пре свега, тешком уочљивошћу података неопходних за решавање и захтева мисаоне напоре највишег реда да би се решио. Тешкоћа је што се не виде путеви за решавање иако су они, пак у задатом проблему и могуће их је пронаћи ако се дубље размисли, односно ако се траже на нестандардан начин. Пошто проблемска ситуација потпуно мобилише интересовање, пажњу, машту и мисао ученика, неопходно је да је наставник на часу и створи добро изабраним и формулисаним питањем које ће потпуно окупирати ученике. Тада они неће бити у положају да пасивно примају, него ће морати да активно мисле.

## 3.3 Етапе у решавању проблема

Може се сматрати да решавање проблема представља низ сложених интелектуалних операција. У фази решавања проблема ученици су усмерени на тражење путева који воде до решавања проблема. Решавајући проблем ученици се сусрећу са неком тешкоћом, са спорном ситуацијом, као и са празнинама у мисаоном току. Ту празнину треба уз помоћ нових података попунити и решити проблем. Избор метода којима ћемо решити проблем зависи од нивоа знања ученика. Посебно код ученика који још нису навикли на "нестандардан" начин рада, најбоље је користити хеуристички облик дијалога, где наставник на основу хеуристичких питања активира ученике за откривање података неопходних за решавање проблема. Творци гешталт теорије наводе четири фазе у решавању проблема, а то су:

- **препарација** (упознавање елемената проблема),
- **инкубација** (привидан мир у коме је мисао ипак активна),
- **илуминација** (изненадно решење),
- **верификација** (проверавање).

Најприхваћеније објашњење тока у решавању проблема је оно у коме се наводи да је то мисаони процес који чине четири етапе. Истина, оне имају додирне тачке са фазама из гешталт теорије, али се у целини не могу поистоветити. То су следеће етапе:

- Упознавање проблема: појединац упознаје елементе проблема, настоји да проникне у њихове међусобне везе и односе.
- Сужавање - реформулација проблема: на основу анализе датих података и онога што је задато, појединац увиђа шта недостаје, у чему је празнина коју треба попунити; он анализира оно што је дато водећи рачуна о задатом и тако, донекле, сужава и конкретизује проблем, локализује тешкоћу и тражи начин решавања.
- Постављање хипотезе: анализом датог и задатог, сагледавањем и локализовањем тешкоће појединац поставља хипотезу за решење проблема.
- Проверавање хипотезе: кад се хипотеза јави, појединац полази од тога да је она исправна, јер је потпуно у складу са начином тражења који је изабрао, јер може да "затвори" празнину у датим подацима. Хипотеза је решење чију исправност треба проверити.

## 3.4 Нивои проблемске наставе

Важан услов за успешну примену проблемске наставе је и правилно одабирање њеног нивоа, тј. правилно одабирање степена активности ученика у решавању проблема. Већина аутора најчешће истиче четири различита нивоа проблемског излагања у настави:

1. Монолошко излагање (проблемски монолог) реализује се применом информационих и проблемских питања, на која у основи одговара сам наставник. Овај ниво је најнижи, а ученици су најмање активни, те се користи само ако су наставни садржаји потпуно нови и не ослањају се ни на какво претходно искуство ученика.

2. Дијалошко излагање (проблемски дијалог). Наставник пред ученике поставља проблем, указује на правце његовог решавања тражећи од ученика да сами реше проблем. Кроз дијалог наставник - ученик и ученик - наставник најчешће се долази до решења проблема. Може се десити да ни после више покушаја ученици не дођу до решења. Тада наставник сам саопштава резултате, али настава и у оваквим случајевима задржава све атрибуте проблемске наставе, а ученици су кроз покушаје доласка до решења били активни учесници у развијању стваралачког мишљења.

3. Самостално решавање проблема. На овом нивоу проблемске наставе наставник формулише проблем и ствара проблемску ситуацију, а ученици потпуно самостално долазе до решења проблема.

4. Самостално формулисање и решавање проблема од стране ученика. Овде се тражи да ученици сами формулишу и решавају проблем. Наставник има само задатак да припреми проблеме и реализује проблемску ситуацију.

## 3.5 Значај проблемске наставе

Значај овог типа наставе извире из њене суштине. Она треба битно да утиче на отклањање слабости које стално репродукује класична настава, а које се исказују у неговању механичког памћења уместо мишљења, у репродукцији уместо продукције, у копирању и опонашању уместо стваралаштва. На ове слабости се одавно указује, одавно се предлажу боља решења. Американац Дјуи је још првих деценија 20. века осмислио и у пракси проверио **пројект - метод** у коме, између осталог, истиче да је при изради и обради сваког пројекта веома битно да ученици буду субјективно заинтересовани за постављени проблем и да њихова решења и закључци буду практично примењиви. Дјуи је касније своју пројект - методу преобликовао у проблем - методу. Проблемска настава треба да изведе данашњу школу на виши ниво, од стицања знања ка развоју ученичких стваралачких способности, што значи да наставни процес треба да буде процес мисаоне активности ученика. У њој суштински треба да се измени и улога наставника који би требало да буде не испоручилац готових знања и решења него сарадник и организатор такве наставе у којој ће ученици самостално решавати проблеме и тако развијати своје апстрактно мишљење и укупне менталне капацитете.

Решавање проблема је најефикасније средство за развој стваралачког мишљења. На Гањеовој хијерархијској лествици типова учења решавање проблема је на самом врху као најсложенији тип. Гање каже да се проблеми решавају међусобним повезивањем правила.



## 3.6 Нека практична упутства за примену проблемске наставе

1. Организација проблемског часа треба да се одвија следећим фазама:
   - Стварање проблемске ситуације
   - Постављање хипотеза
   - Декомпозиција проблема
   - Решавање проблема
   - Анализа резултата
   - Практична примена усвојених сазнања

   Ово међутим не треба схватити као круту шему. Неке фазе могу да се изоставе, а неке да се обогате новим садржајима.

2. Проблемска ситуација се ствара на почетку часа и треба да буде атрактивна и привлачна, да мотивише ученике на размишљање и активност. Знамо да проблемску наставу карактерише нешто што је необично, противречно, нешто што интригира ученике и мотивише их за стицање нових знања кроз решавање проблема.

3. Проблем који се износи пред ученике треба да буде примерен њиховом узрасту. Треба водити рачуна о захтевима који се постављају пред ученике и о могућностима да они одговоре на те захтеве. Под могућности ученика подразумевамо степен психичког развоја, претходно знање и искуство које ученици поседују у вези са облашћу која се обрађује, мотивисаност за решавање проблема итд. Путкиевич (према Ј. Ђорђевићу, 1981) даје класификацију захтева који се износе пред ученике. Он каже да захтеви могу бити:

   а) знатно нижи
   б) знатно виши

в) на истом нивоу или
г) мало виши
од горње границе ученикових могућности.

**а)** Ако су проблеми на знатно нижем нивоу од горње границе ученикових могућности они не подстичу мисаону активност ученика, а самим тим је и не развијају. Проблем не сме да буде лишен извесних тешкоћа и напора. Уколико је проблем исувише лак ученици стичу утисак да они то знају и према томе за њега не треба посебно да се залажу.
**б)** Тешкоћа којом се карактерише проблем и проблемска ситуација не сме код ученика да остави утисак нерешивости. Ученици тада губе вољу да траже пут његовог решавања и прибегавају тражењу лакших путева, што развија лоше навике. У таквим случајевима губи се интересовање за наставни предмет, а лекције се уче механички.
**в)**Иако најидеалније изгледа када се захтеви подударе са могућностима, ипак у оваквој ситуацији се не ангажује мишљење на најбољи начин. Ученици нису у довољној мери активни, будући да у решавању проблема могу да примене и извесне шеме доласка до решења.
**г)** Најбоље је када су захтеви нешто мало изнад ученикових могућности. У таквим случајевима ученици, због извесних непознатих ситуација, нису у стању да примене од раније познате шеме. Уочавају нове везе и односе, анализирају ситуације и траже нове, до тада непознате путеве доласка до решења. Ово погодује интелектуалном развитку ученика. Ученици ће бити у стању да самостално реше проблем иако се он само делимично ослања на претходна знања и искуства. То искуство и знање треба користити тако да не води директно ка решењу, већ олакшава уочавање нових до тада непознатих путева доласка до решења.

4. За обраду наставне јединице проблемским путем потребно је више времена него применом других дидактичких система. Зато је потребно да се наставници добро припреме за проблемски час што ће знатно утицати на економичност наставе. Без обзира на спорији ток часа наставник треба да пружи могућност сваком ученику да се искаже, да укаже на своје путеве у решавању проблема. Сви ти покушаји, иако често не воде до решења, представљају за сваког ученика мисаони напор који позитивно утиче на развијање мишљења.

5. Будући да се сваки проблем одликује тешкоћом, ученици морају бити истрајни и упорни при његовом решавању.

6. Да би се дошло до решавања проблема ученици морају увидети везе и односе међу чињеницама што ће довести до развитка свих врста мишљења.

7. Ученике треба учити да се ослобађају шаблона у мишљењу. Код ученика треба развити способност да у решавању проблема налазе различите и нове путеве.

8. За решавање проблема битан је и број и врста података којима се располаже. Сувише небитних података могу одвући пажњу од правог пута решавања проблема.

9. Не мора цео наставни час да буде посвећен решавању проблема. У организацији и току часа могу се успешно комбиновати различити наставни системи. У појединим фазама часа класичне наставе може се користити проблемски начин рада и мишљења.

10. Ученицима треба омогућавати да сами постављају и решавају проблеме.

11. Као правило треба узети активно учешће ученика, како у стварању и формирању проблема, тако и у стварању радне хипотезе, њеног образложења, доказа, провере решеног проблема.

## 3.7 Проблемска настава у функцији развијања способности ученика

У животу се стално срећемо с новим проблемским ситуацијама. Свакодневне животне ситуације упућују човека да их решава. Зато је решавање проблема у школским условима, развијање способности њиховог решавања у настави, изврсна припрема за живот и важно обележје личне зрелости. Ту се ученици самостално оријентишу у сложеним односима нове проблемске ситуације, анализирају је, траже и постављају хипотезе за њено разрешавање, проналазе средства и приступају процесу решавања применом самосталних облика интелектуалног и практичног рада који су прикладни за успешно решавање тога проблема. Такав рад развија способности, осамостаљује ученике и припрема их за живот. А припремање младих за живот и њихово лично сазревање битан је саставни део педагошке функције школе као друштвене институције. Полазећи, дакле од темељне улоге школе да припрема младе за живот, настава би морала обиловати ситуацијама у којима ученици активно и самостално решавају проблеме. Стваралаштво је битна функција мишљења у процесу решавања проблема. Зато је процес таквог решавања изванредно прикладан за развитак мисаоних способности. Мишљење је заправо спознавање које се постиже решавањем непознатих задатака или проблема. Његов је почетак у проблемској ситуацији. Оно мора разрешити такву ситуацију и доћи до нове спознаје, оно је у ствари процес решавања проблема. Зато савремено васпитање претпоставља и тражи наставу путем решавања проблема. Таква настава омогућава мисаоно активирање ученика, а то је темељна претпоставка за развитак мишљења. И што је виша мисаона активност, интензивнији је и бржи развитак мишљења. Будући да самостално решавање проблема омогућава највишу мисаону активност, таква је делатност најприкладнија за развитак мишљења. Решавајући проблем ученик мора интензивно мислити, пажљиво анализирати нову ситуацију, уочавати нове везе и односе, повезивати, судити, закључивати. Решавање проблема претпоставља сналажљивост, флексибилност, оригиналност, критичност, креативност. Интензивно ангажовање свих тих мисаоних операција ставља их у функцију и развија па се решавање проблема појављује и као средство развијања флексибилног, критичког, продуктивног, стваралачког мишљења. Савремена теорија интелектуалног васпитања претпоставља и тражи проблемске ситуације, мисаоно активирање ученика, решавање проблема и развијање интелектуалних способности. Решавање проблема непосредно је у функцији интелектуалног васпитања. Ученици који се често стављају у проблемске ситуације, који траже и налазе начела и путеве њиховог разрешавања, који се уверавају у правилност одређених решења, обогаћују своје искуство и развијају способност стваралачког решавања и нових проблемских задатака, имају врло повољне услове за свој интелектуални развитак. Процес решавања проблема у највећој могућој мери потпомаже развитак интелектуалних снага и способности и у томе је њено педагошко значење. Решавајући проблеме развијају се стваралачке способности ученика, а стваралачке способности омогућавају откривање нових спознаја и налажење нових решења у подручју науке, уметности и технике, у подручју производње материјалних добара и културних вредности. Оснивачи, истраживачи, уметници, проналазачи, ствараоци и њихови производи, дела, творевине, изуми, креације - зависни су о развитку стваралачке способности. Зато је развитак стваралачких способности и културе мишљења један од прворазредних васпитних задатака.

Решавајући проблеме ученици интензивно мисле, истражују самостално делују, проналазе решења, уче. Услед тога је решавање проблема истовремени облик интензивне активности и самосталног деловања, облик стваралачког мишљења и истраживања и врло ефикасан облик учења.

У процесу решавања ученици усвајају знања, уочавају нове законитости, проширују своја сазнања, овладавају новим умећима и навикама, обогаћују искуство. А будући да су врло активни и самостални усвојена знања, умећа и навике су врло трајни. То значи да је процес решавања проблема истовремено и средство успешног учења, односно средство овладавања културом учења.

У васпитном раду изванредно је важна емоционална компонента. Она се појављује као унутрашња моторна снага која појединца покреће у акцију. Узмимо за пример радост у раду, радно одушевљење, позитиван однос према раду. Без тих особина није могуће постићи ни већу продуктивност рада, ни стваралаштво у раду. Зато у процесу васпитања морамо развијати позитиван однос према раду. А како се то постиже? Од самог почетка младе људе треба навикавати на физички и интелектуални рад, на савладавање тешкоћа, на улагање напора да се остваре одређени задаци. Врло је важно да они успеју у томе, да осете радост радне победе, да доживе вредност свога рада, радост успеха. Сваки је рад напоран, а напор не привлачи него одбија. Али када се савладају тешкоће и када се након напорног рада остваре жељени резултати, појављује се осећај задовољства који прати успешно обављени посао или остварени задатак. То је унутрашња мотивација која покреће према новим задацима, а нови успеси снажно јачају такву мотивацију. Ту је кључ за успешно решавање васпитних задатака на том подручју. Успеси постају средство развијања спонтаних интереса за неко подручје. Зато морамо омогућити младима да осете радост успешно остварених задатака, да доживе много таквих успеха и радних победа. Потребни су, дакле, радни задаци, потребно је да их ученици успешно решавају и да доживе успех. То претпоставља да су задаци примерени учениковим могућностима. А примерени задаци не смеју бити ни претешки, ни прелаки. Лаки задаци не мотивишу, њихово решавање не изазива већи напор па зато изостаје осећај победе и радост успеха. Осећају поверења у своје снаге и радости успеха мора претходити одређени напор и што је он био већи и радост је већа. Задаци, дакле, морају представљати тешкоће, морају снажно ангажовати снаге и способности. Они требају бити тешки, али је важан захтев да их ученици уз велико залагање, па и максимално ангажовање својих снага и способности, могу успешно решити. Успешно решење изазива радост успеха и подстиче на нова решења. Неуспех, насупрот, изазива негативна осећања, осећај немоћи, неповерење у своје могућности и демотивира. Зато задаци морају бити примерени учениковим могућностима, тј. довољно тешки да ангажују све ученикове способности, али не претешки да онемогуће успешно решење.

Проблемска настава је изванредно прикладна за развијање позитивног односа према раду, радости успеха и радног одушевљења. Она претпоставља да ученици решавају проблеме, да савладавају тешкоће, да улажу напоре и ангажују све своје снаге. Ако су задаци примерени осетиће радост успеха, задовољство решавања, развиће се поверење у своје могућности, прихватаће се нови задаци, доживљавати нови успеси. Тако се развија позитиван однос према раду, задовољство у раду, марљивост, тако се постиже култура рада и продуктивност.

Решавањем проблема код ученика развија се смисао за истраживање, буди се радозналост, истраживачки занос, они се осамостаљују у раду, усвајају методе и технике интелектуалног рада. Применом разноврсних начина решавања постиже се методологијска еластичност, флексибилност и оригиналност. Усвајају се врло флексибилни ментални модели, општа начела и ставови што омогућава сналажење у најразноврснијим ситуацијама. Тако васпитане појединце не збуњују тешкоће и проблемске ситуације. Они их разматрају, анализирају, уочавају битне елементе и односе, траже и проналазе решења. Успеси охрабрују, стимулирају, ученици не избегавају радне задатке, не беже пред тешкоћама, него их марљиво, самостално, упорно и дисциплиновано решавају. Такво решавање проблема постаје и средство развијања смисла за истраживање, проналажење, откривање, средство овладавања културом интелектуалнога рада и културом истраживања. Решавање проблема има још дубље васпитно значење. У процесу решавања ученици испољавају иницијативу, разборитост, марљивост, дисциплинираност, самосталност, сналажљивост, одговорност и бројне друге позитивне људске квалитете. Испољавањем у процесу решавања проблема та својства се уједно и развијају, јачају, обликују. То значи да је процес решавања проблема врло прикладан начин развијања многобројних позитивних људских особина, средство изграђивања личности, формирања карактера и културе понашања.

Формирањем позитивног односа према раду и животу, према материјалним и културним вредностима, буђењем смисла за спознавање и истраживање, помагањем обликовања личности и карактера, развијањем стваралачких способности и културе мишљења, културе учења, културе рада, културе истраживања и културе понашања - проблемска настава пружа врло повољне могућности за многострани развитак ученика. Ако се правилно користе, такве могућности могу у великој мери потпомоћи процес реафирмације васпитне функције школе.

# 4 Час проблемске наставе

Проблемска настава је такав облик рада који омогућава ученику да до знања долази користећи своје интелектуалне способности у решавању проблемских задатака. Она доприноси развијању стваралачког мишљења ученика, те је, стога, о њој много писано, а предности експериментално потврђиване. И поред тога, она се мало примењује. Један од разлога је и недостатак конкретних модела за њену примену.

## 4.1 Артикулација часа проблемске наставе

Једно од најважнијих питања јесте како изгледа проблемски час у пракси, каква је његова артикулација? Артикулација часа у овом типу наставе не може се свести на рецепт, јер ту рецептологија много не помаже. Како ће се организовати час, кроз које ће етапе он проћи зависи од више чинилаца (природе градива, проблемских задатака које оно намеће, претходних знања ученика, њиховог искуства у решавању проблема), а наставник, на снову властите процене, треба да се одлучи за примерену артикулацију. Важно је знати да артикулација није независна категорија него је условљена другим елементима. Арукулација која ће овде бити изложена је само једна од могућих и не треба је узимати као шаблон.
Час проблемске наставе може имати следеће етапе:

**Формулисање проблема (стварање проблемске ситуације)**. У уводном делу часа наставник поставља проблемски задатак настојећи да, на тај начин, створи атмосферу радозналости, мобилише пажњу и интересовања ученика, изазове њихову мисаону напетост, да их потпуно мотивише. Проблемска ситуација се може створити изношењем супротних ставова о неком питању што може учинити сам наставник а могу и ученици, постављањем тезе која се може оспоравати. Неопходно је да проблем буде схваћен и прихваћен од стране ученика.

**Фаза настављања (предлагање хипотезе)**. Наставник подстиче ученике на размишљање ради изналажења могућности за решавање проблема. Могуће су разне претпоставке које ученици могу давати, али их треба навести да дођу до што потпуније претпоставке, која би омогућила решавање проблема. Хипотезе су могућа решења. Важно је да су хипотезе резултат размишљања ученика, да их није наметнуо наставник сугестивним питањима.

**Фаза декомпозиције проблема (рашчлањавање).** У овој фази ученик приближава проблем неком моделу или шеми који му је ближи. Према томе, наставник заједно са ученицима анализира познато и непознато у проблему. У овој фази ученици треба прво да целовито сагледају проблем, да виде и анализирају дате елементе, да утврде који елементи недостају да би се проблем решио, да сагледају везе и односе између елемената, да то, ако је потребно, повежу са претходним знањима. Укратко, овај део рада би се могао означити као анализа, односно као рашчлањавање проблема да би се потпуно сагледала његова структура, тј. место и улога елемената у проблему као целини и да би се утврдило који елемент недостаје а потребан је ради решавања.

**Фаза решавања проблема.** То је суштинско проверавање постављене хипотезе. За сваки део проблема обавља се посматрање, изводе се огледи и доказује се хипотеза да би се дошло до закључка. Важно је овде напоменути да је потребно стрпљиво саслушати сва могућа решења. Нови садржај треба да се савлада тако што ће ученици самостално, користећи претходна знања и искуство и активно размишљајући, решити проблемске задатке које је припремио и саопштио наставник. Могу се применити разни облици рада - индивидуални, рад у пару, групни. Решавање проблема је процес у коме ученици понављају раније градиво (ради повезивања са новим садржајима) и стичу нова знања.

**Фаза извођења закључка.** Наставник треба да настоји да се правилно дефинишу појмови који су се користили и њихов смештај у шири систем знања.

**Фаза проверавања закључака.** Ова фаза представља примену стечених знања, умећа и навика у новим ситуацијама. Да би се ученици оспособили да стичу знања решавањем проблема, у завршном делу часа треба им задати још неки проблем истог типа и тражити да га реше. Кад се поново сусретну са сличним проблемом, далеко лакше ће га решити и умеће стечено знање да примене у новој ситуацији. Вежбањем и примењивањем они ће утврдити стечена знања.

## 4.2 Повратна информација

Самостално решавање проблема као начин рада је велики изазов не само за ученике него, пре свега, за наставника који је, зато што руководи наставним процесом, одговоран за исходе. Самосталност и мисаона активизација су повезани појмови, јер нема мисаоне активности ако се не мисли својом главом. Да ли је час на коме је доминирало решавање проблема, или су проблеми решавани само у једној фази часа, успео може да се закључи само на основу тога да ли су ученици потпуно разумели и усвојили планирани садржај. Дакле, наставник мора имати повратну информацију о томе и то у току часа на коме се реализује градиво. Добру могућност да добије повратну информацију има наставник у оној фази часа у којој ученици износе и образлажу хипотезе за решавање проблема. Тада он може да види да ли су они мисаоне напоре добро усмерили према циљу и зависно од исправности, да евентуално укаже на грешке и учини исправке односно да коригује наставни процес. Није довољно да се повратна веза остварује само по критеријуму тачности ученикововог одговора. Наставник треба да прати психичку активност ученика по више показатеља, на пример, да ли је проблем решио на најцелисходнији, најједноставнији начин, да ли је утрошио превише времена, да ли остварује напредак у односу на раније резултате. Наставник повратном информацијом треба да сазна да ли се циљ часа остварује на оптималан начин и да, зависно од садржаја те информације, испрограмира оптималан пут. Значи, повратном везом треба пратити сам ток решавања проблема да би се предузеле благовремене корекције ако су потребне.

Један од начина да се добије повратна информација о томе да ли су ученици разумели градиво које је обрађивано решавањем проблема су контролни задаци којима се то може ефикасно и релативно брзо проверити. Наставник тада има времена да у фази утврђивања исправи оно у чему ученици највише греше. Један вид ефикасне повратне информације су домаћи задаци које треба преконтролисати на следећем часу. Они су, истовремено, добро средство за утврђивање градива.

## 4.3 Вредновање часа проблемске наставе

Час проблемске наставе, као и сваки други начин рада, треба да вреднује сам наставник. Он је, пре свега, дужан да наставни рад тако организује да на време добије повратну информацију не само да ли су ученици тачно решили проблем већ и да ли су га решили на оптималан начин. У ствари, процењује се адекватност одређеног решења а оно почива на критичком прегледу постављених хипотеза и суда којим се прихвата оправданост једне од хипотеза. Посебан значај има провера резултата мишљења у пракси. Ако је повратна информација о самом току часа и његовом крајњем исходу неповољна, он себи мора да постави нека питања:

- Да ли су проблемски задаци, које сам саставио или их узео готове, добри?
- Да ли сам те задатке довољно функционално и методички правилно користио?
- Да ли сам на почетку часа створио добру проблемску ситуацију и да ли сам у тој фази максимално мотивисао ученике на мисаону активност?
- Да ли сам у току часа довољно инсистирао да ученици самостално закључују или се задовољавао њиховим описима и репродукцијама?
- Да ли сам "превише руководио" часом и потиснуо ученике и њихову мисаону активност?

У тој самоанализи наставник мора да нађе одговоре, да утврди где су му слабости и да их исправи. Директор школе или школски педагог (психолог) могу за вредновање часова проблемске наставе користити вишестепене скале за евалуацију наставних часова у којима ће различитим бројем поена оценити да ли наставник неуспешно, делимично успешно или врло успешно остварио наведене задатке. Свако од поменутих, или других важних питања, треба поентирати и о њима разговарати са наставником, указати му шта је добро у његовом раду, а шта може и треба да буде боље.

# 5 Припреме за час

## 5.1 Прилог број 1

### Организација часа проблемске наставе истраживачог типа у петом разреду

**Основни подаци:**
*Назив школе:* ОШ "Бранко Радичевић"
*Наставни предмет:* Математика
*Разред:* пети
*Датум реализације:* 24.10.2014.
*Наставник:* Бојана Живковић

**Општи методички подаци:**
*Наставна тема:* Дељивост
*Тип часа:* Утврђивање
*Циљеви:*
- стицање елементарних математичких знања;
- развијање математичког мишљења;
- развијање математичких способности;
- утврђивање стечених знања;

*Задаци:*
- развијање позитивног односа према математици;
- уважавање математике као подручја људске делатности;
- развијање самопоуздања;
- развијање поверења у властите математичке способности;

*Облици рада:* Фронтални, индивидуални
*Наставне методе:* Разговор и писани радови
*Наставна средства:* Креда, табла
*Наставни објекти:* Учионица

## Структура и ток часа

**Уводни део часа:**
На почетку часа наставник дефинише циљеве часа: На овом часу ћемо испитати које цифре се појављују као цифре јединица код бројева који су дељиви бројем 2, бројем 3, бројем 5 и бројем 7, као и њихову повезаност. Покушаћемо да уочимо правила у појављивању истих цифара код различитих низова бројева.

Наставник следећим питањима проверава до сада стечено знање о месним вредностима цифара и правилима дељивости бројева:

- Ако посматрамо број 125, која цифра се налази на месту јединица, која на месту десетица а која на месту стотина?
- Када је број дељив бројем 2?
- Када је број дељив бројем 3?
- Када је број дељив бројем 5?
- Како записујемо двоструку вредност броја $x$?
- Како записујемо троструку вредност броја $x$?
- Како дефинешемо $x^2$?

*Могући одговори су:*

- Цифра јединица је 5, цифра десетица је 2, а цифра стотина 1.
- Број је дељив бројем 2, ако му је цифра јединица: 0, 2, 4, 6 или 8.
- Број је дељив бројем 3 ако му је збир цифара дељив са 3.
- Број је дељив бројем 5, ако му је цифра јединица: 0 или 5.
- Двострука вредност броја $x$ је $2 \cdot x$.
- Трострука вредност броја $x$ је $3 \cdot x$.
- $x^2$ дефинишемо на следећи начин: $x^2 = x \cdot x$.
  У овом делу часа заступљен је фронтални облика рада и метод разговора. Разговори се воде у циљу провере до сада стеченог знања и увођења ученика у ново градиво.

**Главни део часа:**
**Наставник:** Бројеви који су дељиви бројем 2 су:

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \ldots$$

Видимо да су цифре које се појављују као цифре јединица у бројевима који су дељиви бројем 2 следеће:

$$2, 4, 6, 8, 0.$$

Бројеви који су дељиви бројем 5 су:

$$5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, \dots$$

Видимо да су цифре које се појављују као цифре јединица у бројевима који су дељиви бројем 5 само 0 и 5.

Наставник задаје ученицима задатке:

**Задатак 1.** *Испитајте које све цифре могу бити цифре јединица у бројевима који су дељиви бројем* 3.

*Решење:*
Бројеви који су дељиви бројем 3 су:

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, \dots$$

Цифре које се појављују као цифре јединица у тим бројевима су:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Дакле, било којом цифром се могу завршавати бројеви који су дељиви бројем 3.

**Задатак 2.** *Испитајте које све цифре могу бити цифре јединица у бројевима који су дељиви бројем* 7.

*Решење:*
Бројеви који су дељиви бројем 7 су:

$$7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, \dots$$

Цифре које се појављују као цифре јединица у тим бројевима су:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Дакле, било којом цифром се могу завршавати бројеви који су дељиви бројем 7.

**Задатак 3.** *а) Напишите првих девет природних бројева који су дељиви бројем 3. Које цифре се појављују као цифре јединица у тим бројевима?*

*б) Напишите првих девет природних бројева који су дељиви бројем 7. Које цифре се појављују као цифре јединица у тим бројевима?*

*в) Да ли уочавате везу у редоследу цифара јединица бројева који су дељиви бројем 3 и редоследу цифара јединица бројева који су дељиви бројем 7?*

*Решење:*

а) Првих девет природних бројева који су дељиви бројем 3 су:

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27.$$

Цифре које се појављују као цифре јединица у тим бројевима су:

$$3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7.$$

б) Првих девет природних бројева који су дељиви бројем 7 су:

$$7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63.$$

Цифре које се појављују као цифре јединице у тим бројевима су:

$$7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3.$$

в) Редослед цифара јединица бројева који су дељиви бројем 3 је обрнут од редоследа цифара јединица бројева који су дељиви бројем 7.

**Задатак 4.** *Испитајте које цифре се не појављују као цифре јединица у квадратима бројева следећег низа:*

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

*Решење:*
Квадрати ових бројева су:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.$$

Цифре које се појављују као цифре јединица су:

$$1, 4, 5, 6, 9.$$

Цифре које се не појављују као цифре јединица су:

$$2, 3, 7, 8.$$

**Задатак 5.** *Почните низ бројем 3 и наставите га удвостручивањем. Да ли уочавата правило по коме се понављају цифре јединица у бројевима овог низа?*

*Решење:*
Тражени низ је :

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, \ldots$$

Цифре које се појављују као цифре јединица у бројевима овог низа су:

$$3, 6, 2, 4, 8, 6, 2, 4, \ldots$$

Број 3 се јавља као цифра јединица само на првом месту.
Број 6 се јавља као цифра јединица на сваком $4k + 2$ месту, $k = 0, 1, 2, \ldots$
Број 2 се јавља као цифра јединица на сваком $4k + 3$ месту, $k = 0, 1, 2, \ldots$
Број 4 се јавља као цифра јединица на сваком $4k + 4$ месту, $k = 0, 1, 2, \ldots$
Број 8 се јавља као цифра јединица на сваком $4k + 5$ месту, $k = 0, 1, 2, \ldots$
Ученици самостално решавају задатке, након тога дискутују са наставником о решењу.

**Завршни део часа:**
Наставник резимира урађено и задаје домаћи.

1. Почните низ бројем 2 и наставите га удвостручивањем. Да ли уочавате правило по коме се понављају цифре јединица у бројевима овог низа?

2. Почните низ бројем 1 и наставите га утростручивањем. Да ли уочавате правило по коме се понављају цифре јединица у бројевима овог низа?

3. Шта се дешава ако низ почнемо најмањим простим бројем и наставимо га утростручивањем?

## Час по фазама

**Формулисање проблема:**
**Наставник:** Посматрајмо првих неколико парних бројева:

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots$$

Уочимо којим цифрама се завршавају:

$$2, 4, 6, 8, 0, 2, 4, \dots$$

Посматрајмо првих неколико бројева који су дељиви бројем 5:

$$5, 10, 15, 20, 25, 30, \dots$$

Уочимо којим цифрама се завршавају:

$$5, 0, 5, 0, \dots$$

**Проблем:**

1. Које цифре се појављују као цифре јединица у бројевима који су дељиви бројем 3?

2. Које цифре се појављују као цифре јединица у бројевима који су дељиви бројем 7?

3. а) Напишите првих девет природних бројева који су дељиви бројем 3. Које цифре се појављују као цифре јединица у тим бројевима?

   б) Напишите првих девет природних бројева који су дељиви бројем 7. Које цифре се појављују као цифре јединица у тим бројевима?

   в) Да ли уочавате везу у редоследу цифара јединица бројева који су дељиви бројем 3 и редоследу цифара јединица бројева који су дељиви бројем 7?

4. Које цифре се не појављују као цифре јединица у квадратима бројева следећег низа:
$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

5. Почните низ бројем 3 и наставите га удвостручивањем. Да ли уочавате правило по коме се понављају цифре јединица у бројевима овог низа?

**Предлагање хипотеза:**

1. Цифре које се појављују као цифре јединица у бројевима који су дељиви бројем 3 су:
$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

2. Цифре које се појављују као цифре јединица у бројевима који су дељиви бројем 3 су:
$$0, 3, 9.$$

3. Цифре које се појављују као цифре јединица у бројевима који су дељиви бројем 7 су:
$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

4. Цифре које се појављују као цифре јединица у бројевима који су дељиви бројем 7 су:
$$0, 7.$$

5. Редослед цифара јединица бројева који су дељиви бројем 3 је обрнут од редоследа цифара јединица бројева који су дељиви бројем 7.

6. Цифре које се не појављују као цифре јединица у квадратима бројева задатог низа су:
$$2, 3, 7, 8.$$

7. Број 3 се јавља као цифра јединица само на првом месту.
Број 6 се јавља као цифра јединица на сваком $4k + 2$ месту, $k = 0, 1, 2, \ldots$
Број 2 се јавља као цифра јединица на сваком $4k + 3$ месту, $k = 0, 1, 2, \ldots$
Број 4 се јавља као цифра јединица на сваком $4k + 4$ месту, $k = 0, 1, 2, \ldots$
Број 8 се јавља као цифра јединица на сваком $4k + 5$ месту, $k = 0, 1, 2, \ldots$

**Декомпозиција проблема:**

1. Записаћемо првих неколико бројева који су дељиви бројем 3, док не уочимо да се цифре јединица у тим бројевима понављају.
2. Записаћемо првих неколико бројева који су дељиви бројем 7, док не уочимо да се цифре јединица у тим бројевима понављају.
3. а) Записаћемо првих девет природних бројева који су дељиви бројем 3 и видети које цифре се појављују као цифре јединица у тим бројевима?
   б) Записаћемо првих девет природних бројева који су дељиви бројем 7 и видети које цифре се појављују као цифре јединица у тим бројевима?
   в) Покушавамо да уочимо везу у редоследу цифара јединица бројева дељивих бројем 3 и редоследу цифара јединица бројева дељивих бројем 7.
4. Квадрираћемо чланове датог низа и тако ћемо добити други низ, записаћемо цифре које се појављују као цифре јединица у бројевима добијеног низа и видети које се цифре не појављују као цифре јединица.
5. Почећемо низ бројем 3 и наставити удвостручивањем, након тога записаћемо цифре које се појављују као цифре јединица у бројевима добијеног низа и покушати да уочимо правило по коме се оне понављају.

**Решавање проблема:**

1. Бројеви који су дељиви бројем 3 су:
   $$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, \dots$$
   Цифре које се појављују као цифре јединица у бројевима који су дељиви бројем 3 су следеће:
   $$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$
2. Бројеви који су дељиви бројем 7 су:
   $$7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, \dots$$
   Цифре које се појављују као цифре јединица у бројевима који су дељиви бројем 7 су следеће:
   $$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

3. а) Првих девет природних бројева који су дељиви бројем 3 су:

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27.$$

Цифре које се појављују као цифре јединица у тим бројевима су следеће:

$$3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7.$$

б) Првих девет природних бројева који су дељиви бројем 7 су:

$$7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63.$$

Цифре које се појављују као цифре јединица у тим бројевима су следеће:

$$7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3.$$

в) Редослед цифара јединица бројева који су дељиви бројем 3 је обрнут од редоследа цифара јединица бројева који су дељиви бројем 7.

4. Квадрирањем задатог низа добијамо следећи низ:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.$$

Цифре које се појављују као цифре јединица у бројевима овог низа су следеће:

$$1, 4, 9, 6, 5.$$

Цифре које се не појављују као цифре јединица у бројевима овог низа су следеће:

$$2, 3, 7, 8.$$

5. Ако започемо низ бројем 3 и наставимо га удвостручивањем добијамо следећи низ:

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, \ldots$$

Цифре које се појављују као цифре јединица у бројевима овог низа су следеће:

$$3, 6, 2, 4, 8, 6, 2, \ldots$$

3 се јавља као цифре јединица само на првом месту.
6 се јавља као цифре јединица на сваком $4k+2$ месту, $k = 0, 1, 2\ldots$
2 се јавља као цифре јединица на сваком $4k+3$ месту, $k = 0, 1, 2, \ldots$
4 се јавља цифре јединица на сваком $4k+4$ месту, $k = 0, 1, 2, \ldots$
8 се јавља цифре јединица на сваком $4k+5$ месту, $k = 0, 1, 2, \ldots$

## 5.2 Прилог број 2

### Организација часа проблемске наставе истраживачог типа у шестом разреду

**Основни подаци:**
*Назив школе:* ОШ "Бранко Радичевић"
*Наставни предмет:* Математика
*Разред:* шести
*Датум реализације:* 06.03.2015.
*Наставник:* Бојана Живковић

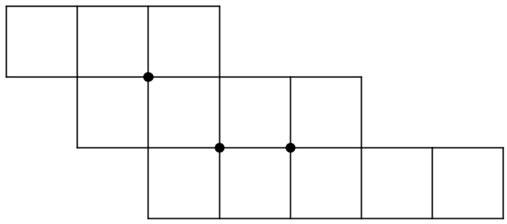
**Општи методички подаци:**
*Наставна тема:* Четвороугао
*Тип часа:* Утврђивање
*Циљеви:*
- развијање позитивног става према математици;
- развијање љубави према математици;
- развијање стваралачког мишљења;

*Задаци:*
- развијање критичког и стваралачког мишљења;
- развијање културне, радне, етичке и естетске навике;
- развијање смисла за самостални рад;
- развијање самопоуздања;
- развијање поверења у властите математичке способности;

*Облици рада:* Фронтални, индивидуални
*Наставне методе:* Разговор и писани радови
*Наставна средства:* Креда, табла
*Наставни објекти:* Учионица

## Структура и ток часа:

**Уводни део часа:**
Наставник представља ученицима проблем којим ће се бавити на овом часу: Нацртајте геометријке фигуре од 12 квадрата који су спојени дуж страница (целом дужином). Након тога извуците следеће податке:
- $m$ је број различитих места на којима се четири квадрата додирују.
- $O$ је обим геометријске фигуре.
На пример, ако се квадрати споје на начин приказан на слици, постоје три места на којима се четири квадрата додирују.



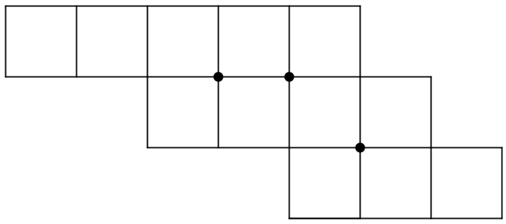
Слика 1.

У овом примеру $m = 3$ и $O = 20$.

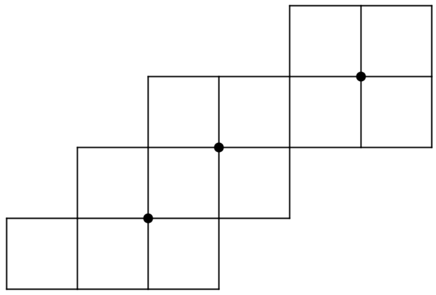
**Главни део часа:**
Наставник задаје ученицима задатак:

1. Испитајте да ли постоје још неки начини на које можемо спојити 12 квадрата дуж страница, тако да број различитих места на којима се четири квадрата додирују буде 3?
2. Проверите да ли ће обим бити исти у свим примерима.
3. Наведите још неке начине на које можемо спојити 12 квадрата и израчунајте у тим примерима $m$ и $O$.
4. Да ли уочавате неку везу између $m$ и $O$?

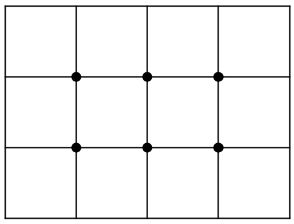
Наставник пушта ученике да самостално истражују.
Неки од начина да се споје 12 квадрата приказани су на следећим сликама:



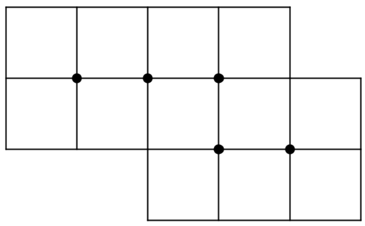
Слика 2.



Слика 3.



Слика 4.



Слика 5.

Слика 6.

**Закључак:**
12 квадрата се могу спојити на различите начине дуж страница тако да број места на којима се додирују четири квадрата буде 3.
Обим ће бити исти за све фигуре које имају исто $m$.
Што је фигура "приближнија" квадрату то је веће $m$.
Са повећањем $m$ смањује се $O$.
Ако је $m$ најмање могуће, $m = 0$, онда је $O = 26$.
Сваки пут када се $m$ повећа за 1, обим се смањи за 2.
Ако је $m$ највеће могуће, $m = 6$, онда је $O = 14$.

**Завршни део часа:**
Ученици износе своје закључке, наставник проверава њихову тачност заједно са ученицима.

## 5.3 Прилог број 3

### Организација часа проблемске наставе истраживачог типа у седмом разреду

**Основни подаци:**
*Назив школе:* ОШ "Бранко Радичевић"
*Наставни предмет:* Математика
*Разред:* седми
*Датум реализације:* 21.02.2015.
*Наставник:* Бојана Живковић

**Општи методички подаци:**
*Наставна тема:* Полиноми
*Тип часа:* Утврђивање
*Циљеви:*
- развијање менталних способности;
- развијање креативности;
- стицање нових математичких знања;
*Задаци:*
- развијање математичке радозналости, домишљатости;
- развијање упорности, систематичности;
- развијање уредности, тачности, одговорности;
- развијање смисла за самостални рад;
- развијање способности закључивања по аналогији;
- развијање интуиције, генерализације;
- развијање способности ученика да у току рада дају објашњење за сваки корак у раду;
*Облици рада:* Фронтални, индивидуални
*Наставне методе:* Разговор и писани радови
*Наставна средства:* Креда, табла
*Наставни објекти:* Учионица

## Структура и ток часа

**Уводни део часа:**
Наставник упознаје ученике са значењем речи палиндром.
Палиндром је реч или израз који се једнако чита с леве и с десне стране.
На пример, речи : АНА, РАДАР,...
И међу бројевима имамо палиндроме:

$$11, 121, 8448, 1001, 55, \ldots$$

Бројеви: $1214, 15, 6677, \ldots$ нису палиндроми.
**Уводни пример:**
Изаберите један двоцифрени број, на пример 39. Овај број није изворно палиндром. Испитаћемо колико је пута потребно извршити неке трансформације над овим бројем да бисмо добили палиндром.

| | | |
|---|---|---|
| изабрали смо број: | 39 | |
| окрените га у број: | 93 | |
| саберите ова два броја: | 132 | (**1. реда**) |
| окрените добијени број: | 231 | |
| саберите ова два броја: | 363 | (**2. реда**) |

Овде се заустављамо јер је добијени резултат палиндром.
Закључујемо да је број 39 палиндром другог реда.
Постоје бројеви који су изворно палиндроми, на пример:

$$11, 33, 55, 88, \ldots$$

они су палиндроми нултог реда.
**Главни део часа:**
Наставник задаје задатак:
Испитајте ког су реда још неки двоцифрени бројеви, на пример: $53, 24, 16, 82$.
Наставник даје времена ученицима да самостално дођу до решења.
Закључујемо да су бројеви $53, 24, 16$ првог реда а број 82 другог реда.
Да ли можете да уочите шта је заједничко за ова три броја која су првог реда? Збир њихових цифара је мањи од 10.
Колики је збир цифара броја 82? Збир цифара броја 82 је 10.
Закључујемо: Двоцифрени бројеви чији је збир цифара мањи од 10, су првог реда, а двоцифрени бројеви чији је збир цифара тачно 10 су другог реда. Проверите ова тврђења на још неким примерима.
Испитајте ког су реда двоцифрени бројеви чији је збир цифара: $11, 12, 13$ и 14.

*Тражени одговори:*

1. Двоцифрени бројеви чији је збир цифара мањи од 10 су првог реда.
2. Двоцифрени бројеви чији је збир цифара 10 су другог реда.
3. Двоцифрени бројеви чији је збир цифара 11 су првог реда.
4. Двоцифрени бројеви чији је збир цифара 12 и 13 су другог реда.
5. Двоцифрени бројеви чији је збир цифара 14 су трећег реда.

**Доказ:** Сваки двоцифрени број можемо записати као: $10a + b$.
Када окренемо двоцифрени број његова цифра десетица постаће цифра јединица и обрнуто, па га можемо записати као: $10b + a$.
Када саберемо та два броја добићемо следеће:

$$(10a + b) + (10b + a) = 11(a + b).$$

Сада двоцифрене бројеве можемо груписати према збиру његових цифара на следећи начин:

1. $a + b < 10$, број ће бити палиндром првог реда.

2. $a + b = 10,\ 11(a + b) = 110$

| | | |
|---|---|---|
| добили смо број: | 110 | |
| окрећемо га у број: | 011 | |
| сабирамо ова два броја: | 121 | (**2. реда**) |

   Видимо да ће двоцифрени број чији је збир цифара 10 бити палиндром другог реда.

3. $a + b = 11,\ 11(a + b) = 121$
   Видимо да ће двоцифрени број чији је збир цифара 11 бити палиндром првог реда.

4. $a + b = 12,\ 11(a + b) = 132$

| | | |
|---|---|---|
| добили смо број: | 132 | |
| окрећемо га у број: | 231 | |
| сабирамо ова два броја: | 363 | (**2. реда**) |

Видимо да ће двоцифрени број чији је збир цифара 12 бити палиндром другог реда.

5. $a+b=13,\ 11(a+b)=143$

| | | |
|---|---|---|
| добили смо број: | 143 | |
| окрећемо га у број: | 341 | |
| сабирамо ова два броја: | 484 | (**2. реда**) |

Видимо да ће двоцифрени број чији је збир цифара 13 бити палиндром другог реда.

6. $a+b=14,\ 11(a+b)=154$

| | |
|---|---|
| добили смо број: | 154 |
| окрећемо га у број: | 451 |
| сабирамо ова два броја: | 605 |

Настављамо поступак све док не добијемо палиндром.

| | | |
|---|---|---|
| добили смо број: | 605 | |
| окрећемо га у број: | 506 | |
| сабирамо ова два броја: | 1111 | (**3. реда**) |

Видимо да ће двоцифрени број чији је збир цифара 14 бити палиндром трећег реда.

**Завршни део часа:**

Наставник заједно са ученицима дискутује о закључцима до којих су ученици дошли и задаје домаћи: Испитајте ког су реда двоцифрени бројеви чији је збир цифара: $15, 16$ и $17$.

**Час по фазама**

**Формулисање проблема:**
**Наставник:** Палиндром је реч или израз који се једнако чита с леве и с десне стране.
Број 39 је палиндром другог реда, а то смо закључили на следећи начин:

| | | |
|---|---|---|
| изабрали смо број: | 39 | |
| окрените га у број: | 93 | |
| саберите ова два броја: | 132 | (**1. реда**) |
| окрените добијени број: | 231 | |
| саберите ова два броја: | 363 | (**2. реда**) |

Овде се заустављамо јер је добијени резултат палиндром.
Закључујемо да је број 39 палиндром другог реда.

**Проблем:** Ког су реда остали двоцифрени бројеви?
**Напомена:** Постоје бројеви који су изворно палиндроми, на пример:

$$11, 33, 88, \ldots$$

они су нултог реда и њих ћемо изоставити у овом испитивању.

**Предлагање хипотеза:**

1. Двоцифрени бројеви чији је збир цифара мањи од 10 су првог реда.
2. Двоцифрени бројеви чији је збир цифара 10 су другог реда.
3. Двоцифрени бројеви чији је збир цифара 11 су првог реда.
4. Двоцифрени бројеви чији је збир цифара 12 и 13 су другог реда.
5. Двоцифрени бројеви чији је збир цифара 14 су трећег реда.
6. Двоцифрени бројеви чији је збир цифара 15 су четвртог реда.
7. Двоцифрени бројеви чији је збир цифара 16 су шестог реда.
8. Двоцифрени бројеви чији је збир цифара 17 нису палиндроми.

**Декомпозиција проблема:**

1. Испитаћемо ког су реда двоцифрени бројеви чији је збир цифара мањи од 10.
2. Испитаћемо ког су реда двоцифрени бројеви чији је збир цифара 10.
3. Испитаћемо ког су реда двоцифрени бројеви чији је збир цифара 11.
4. Испитаћемо ког су реда двоцифрени бројеви чији је збир цифара 12.
5. Испитаћемо ког су реда двоцифрени бројеви чији је збир цифара 13.
6. Испитаћемо ког су реда двоцифрени бројеви чији је збир цифара 14.
7. Испитаћемо ког су реда двоцифрени бројеви чији је збир цифара 15.
8. Испитаћемо ког су реда двоцифрени бројеви чији је збир цифара 16.
9. Испитаћемо ког су реда двоцифрени бројеви чији је збир цифара 17.

**Решавање проблема:**
Сваки двоцифрени број можемо записати као: $10a + b$.
Када окренемо двоцифрени број његова цифра десетица постаће цифра јединица и обрнуто, па га можемо записати као: $10b + a$.
Када саберемо та два броја добићемо следеће:

$$(10a + b) + (10b + a) = 11(a + b).$$

Сада двоцифрене бројеве можемо груписати према збиру његових цифара на следећи начин:

1. $a + b < 10$, број ће бити палиндром првог реда.

2. $a + b = 10$, $11(a + b) = 110$

| | | |
|---|---|---|
| добили смо број: | 110 | |
| окрећемо га у број: | 011 | |
| сабирамо ова два броја: | 121 | (**2. реда**) |

Видимо да ће двоцифрени број чији је збир цифара 10 бити палиндром другог реда.

3. $a + b = 11,\ 11(a + b) = 121$
Видимо да ће двоцифрени број чији је збир цифара 11 бити палиндром првог реда.

4. $a + b = 12,\ 11(a + b) = 132$

| | | |
|---|---|---|
| добили смо број: | 132 | |
| окрећемо га у број: | 231 | |
| сабирамо ова два броја: | 363 | (**2. реда**) |

Видимо да ће двоцифрени број чији је збир цифара 12 бити палиндром другог реда.

5. $a + b = 13,\ 11(a + b) = 143$

| | | |
|---|---|---|
| добили смо број: | 143 | |
| окрећемо га у број: | 341 | |
| сабирамо ова два броја: | 484 | (**2. реда**) |

Видимо да ће двоцифрени број чији је збир цифара 13 бити палиндром другог реда.

6. $a + b = 14,\ 11(a + b) = 154$

| | |
|---|---|
| добили смо број: | 154 |
| окрећемо га у број: | 451 |
| сабирамо ова два броја: | 605 |

Настављамо поступак све док не добијемо палиндром.

| | | |
|---|---|---|
| добили смо број: | 605 | |
| окрећемо га у број: | 506 | |
| сабирамо ова два броја: | 1111 | (**3. реда**) |

Видимо да ће двоцифрени број чији је збир цифара 14 бити палиндром трећег реда.
Аналогно испитујемо за бројеве чији је збир цифара: $15, 16$ и $17$.

**Фаза извођења закључка:** Степен палиндрома двоцифреног броја зависи од збира цифара тог броја.

**Фаза проверавања закључка:** Проверите тачност овог тврђења на осталим двоцифреним бројевима.

## 5.4 Прилог број 4

### Организација часа проблемске наставе истраживачог типа у осмом разреду



**Основни подаци:**
*Назив школе:* ОШ "Бранко Радичевић"
*Наставни предмет:* Математика
*Разред:* осми
*Датум реализације:* 28.10.2014
*Наставник:* Бојана Живковић

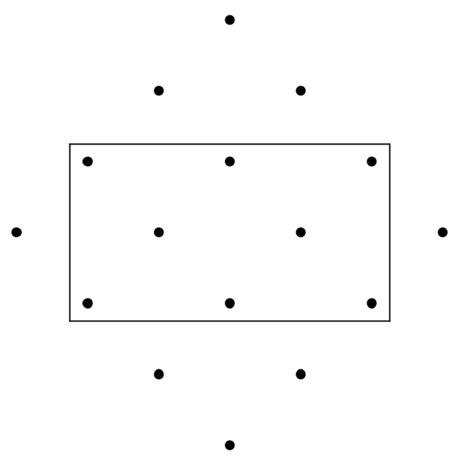
**Општи методички подаци:**
*Наставна тема:* Линеарне једначине
*Тип часа:* Утврђивање
*Циљеви:*
- развијање љубави према математици;
- развијање стваралачког мишљења;
- развијање креативности;

*Задаци:*
- развијање културне, радне, етичке и естетске навике;
- развијање тачности, прецизности и уредности у раду;
- развијање упорности, уредности, систематичности, одговорности;
- развијање смисла за самостални рад;

*Облици рада:* Фронтални, индивидуални
*Наставне методе:* Разговор и писани радови
*Наставна средства:* Креда, табла
*Наставни објекти:* Учионица

**Структура и ток часа:**

**Уводни део часа:**
Наставник представља ученицима проблем којим ће се бавити на овом часу: На ротираној мрежи је нацртан правоугаоник од $3 \times 2$ тачке.



Слика 7.

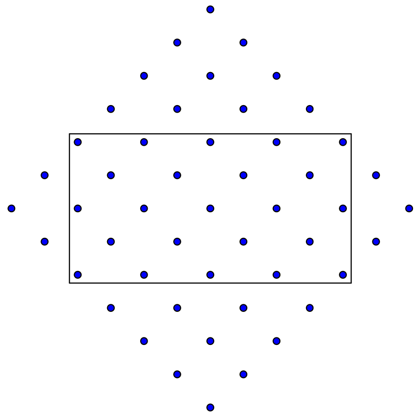
У нацртаном правоугаонику налази се осам тачака.
Увешћемо нову ознаку "$*$" за коју ће важити $3 * 2 = 8$ јер се у правоугаонику који је нацртан од $3 \times 2$ тачке налази 8 тачака.

**Главни део часа:**
Наставник задаје задатак ученицима:

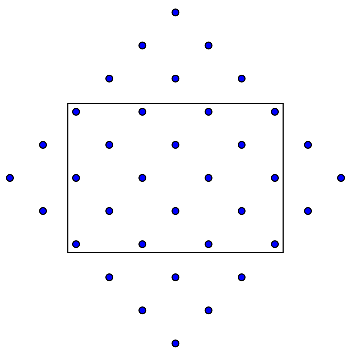
1. Проширите мрежу и испитајте колико је $5 * 3$.
2. Проширите мрежу и испитајте колико је $4 * 3$.
3. Проширите мрежу и испитајте колико је $7 * 2$.
4. Покушајте да уочите који је општи израз за $m * n$

Ученици самостално испитују проблем.
Након неког времена наставник дискутује са ученицима о решењу проблема.

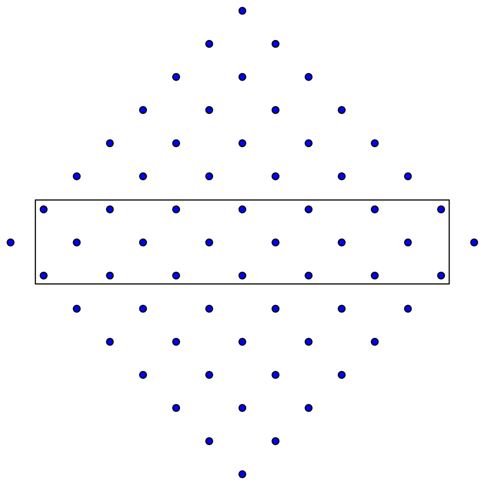
*Решење:*



Слика 8.



Слика 9.



Слика 10.

Закључујемо да је општи облик за $m * n = m \cdot n + (m-1) \cdot (n-1)$.
Након тога наставник задаје следеће задатке:

1. Одредите $x$ тако да важи $2 * x = 14$.

2. Одредите $x$ тако да важи $17 * x = 48$.

*Решење:*

**1.**

$$2 * x = 14$$

$$2x + (2-1)\cdot(x-1) = 14$$

$$2x + x - 1 = 14$$

$$3x = 14 + 1$$

$$3x = 15$$

$$x = 5.$$

**2.**

$$17 * x = 48$$

$$17x + (17-1)\cdot(x-1) = 48$$

$$17x + 16\cdot(x-1) = 48$$

$$17x + 16x - 16 = 48$$

$$33x = 48 + 16$$

$$33x = 64$$

$$x = \tfrac{64}{33}.$$

У другом задатку видимо да не постоји цео број $x$ тако да важи $17*x = 48$. Према томе, закључујемо да задатак нема решење.

**Завршни део часа:**

Наставник задаје домаћи ученицима:

1. Одредите $x$ тако да важи $8 * x = 42$.
2. Одредите $x$ тако да важи $10 * x = 86$.
3. Одредите $x$ тако да важи $20 * x = 215$.

# 6 Анализа одржаних часова

У **петом разреду** рађено је утврђивање дељивости бројева. Наставник је на почетку часа следећим питањима проверио до сада стечено знање ученика о месним вредностима цифара и правилима дељивости бројева:

1. Ако посматрамо број 125, која цифра се налази на месту јединица, која на месту десетица а која на месту стотина?
2. Када је број дељив бројем 2?
3. Када је број дељив бројем 3?
4. Када је број дељив бројем 5?
5. Како записујемо двоструку вредност броја $x$?
6. Како записујемо троструку вредност броја $x$?
7. Како дефинешемо $x^2$?

Ученици су савладали дељивост бројевима 2, 3 и 5 умеју да запишу двоструку вредност броја, троструку вредност броја, квадрат броја, па постоји теоријско знање потребно за решавање датих задатака.
Наставник је на примерима показао како одређујемо цифре јединица бројева који су дељиви бројем 2 као и бројем 5.
Затим су ученицима дати следећи задаци:

1. Које цифре се појављују као цифре јединица у бројевима који су дељиви бројем 3?
2. Које цифре се појављују као цифре јединица у бројевима који су дељиви бројем 7?
3. а) Напишите првих девет природних бројева који су дељиви бројем 3. Које цифре се појављују као цифре јединица у тим бројевима?

   б) Напишите првих девет природних бројева који су дељиви бројем 7. Које цифре се појављују као цифре јединица у тим бројевима?

   в) Да ли уочавате везу у редоследу цифара јединица бројева који су дељиви бројем 3 и редоследу цифара јединица бројева који су дељиви бројем 7?

4. Које цифре се не појављују као цифре јединица у квадратима бројева следећег низа: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?
5. Почните низ бројем 3 и наставите га удвостручивањем. Да ли уочавате правило по коме се понављају цифре јединица у бројевима овог низа?

Наставник је ученицима дао времена да самостално ураде постављене задатке. При решавању прва два задатка ученицима није била потребна помоћ наставника. Ученици су разумели шта се од њих тражи у задацима и успешно их решили, што је и било очекивано јер се задаци решавају аналогно као примери које је урадио наставник.

Трећи задатак је ученицима у првом тренутку изгледао компликовано, зато што се састојао из више захтева али када су пажљиво прочитали лако су одговорили на прва два, проблем је настао код трећег захтева. Наставник је приметио да већина ученика има одбојност према задацима у којима је потребно нешто испитати или уочити, они их на самом почетку прогласе тешким и компликованим, не желе ни да крену у решавање јер сматрају да су такви задаци изнад њихових могућности. Ученици нису могли самостално да одговоре на постављени проблем. Након што је наставник записао низ који чине цифре јединаца бројева дељивих бројем 3 и испод њега низ који чине цифре јединица бројева дељивих бројем 7, ученици су уочили да је редослед чланова ова два низа обрнут.

У четвртом задатку већина ученика је разумела шта се од њих тражи, успешно су квадрирали чланове датог низа и тако добили нови низ. Било је ученика који нису тачно квадрирали чланове низа, јављале су се грешке као на пример: $3^2 = 6$ , $4^2 = 8$...
Након што је наставник записао на табли чланове новог низа ученицима није био проблем да одреде цифре јединица тог низа.

У петом задатку ученици нису имали проблем са формирањем низа на задати начин, лако су уочили које цифре се појављују као цифре јединица али нису могли да уоче правило по коме се оне понављају. Посматрајући низ који чине цифре јединица заједно са наставником ученици су приметили да се број 3 јавља само на првом месту а да се бројеви 6, 2, 4, 8 периодично понављају али и даље нису знали како да запишу правило. Чак и након објашњења наставника неки ученици су и даље имали проблем да разумеју уопштен запис, иако им је на интуитивном нивоу било јасно.

У **шестом разреду** наставник је на примеру показао како се може нацртати геометријска фигура од 12 квадрата који су спојени дуж страница. Након тога извукао је следеће податке:

1. $m$ је број различитих места на којима се четири квадрата додирују.
2. $O$ је обим геометријске фигуре.

Од ученика се тражило да провере да ли постоје још неки начини на које могу спојити 12 квадрата дуж страница тако да број различитих места на којима се четири квадрата додирују буде 3. Већина ученика успешно је одговорила на овај захтев. Само пар ученика није правилно спојило 12 квадрата јер су занемарили услов да квадрати треба бити спојени дуж страница. Након тога требало је да провере да ли ће обим фигура у свим примерима бити исти. Овај задатак ученицима није представљао проблем, веома брзо и лако су дошли до тачног решења али било је и оних који нису разумели како да израчунају обим.

У трећем задатку требало је нацртати неколико различитих геометријских фигура а затим за сваку фигуру одредити $m$ и $O$. Такође се тражило да ученици уоче везу између $m$ и $O$. Ученици нису имали проблем са цртањем геометријских фигура и одређивањем вредности за $m$ и $O$. Овај задатак је ученицима био јако занимљив, у његовом решавању учествовали су и ученици који на редовним часовима математике показују јако мало интересовања. Након неколико нацртаних геометријских фигура ученици су уочили да како се $m$ повећава, тако се обим фигуре смањује. Закључили су да код 12 квадрата спојених дуж страница, највећи број места на којима се додирују четири квадрата је 6 и тада је обим 14, а најмањи број места је 0 и тада је обим 26. Било је и оних који су закључили да за $m = 6$ обим је 14 и сваки пут када се $m$ смањи за 1, обим се повећа за 2.

Ученици **седмог разреда** испитивали су да ли су сви двоцифрени бројеви палиндроми и ког су реда. Када их је наставник питао да ли знају значење речи палиндром, ученици су одговорили да им то звучи познато, знају да су некада чули али нису знали тачно да дефинишу. Чим је наставник почео да објашњава ученици су се одмах сетили, чак су и наводили примере као што су: ”Ана воли Милована”,...
Наставник је на примеру показао како се испитује ког је реда неки број, одмах затим ученици су могли самостално да испитује остале примере, успешно су долазили до палиндрома и одређивали ред. Ученици су показали велико интересовање за овај задатак, занимало их је да ли постоје неки изузеци, да ли се сваки број може довести до палиндрома, који је највећи ред...
Правило по коме ће бити груписани двоцифрени бројеви ученици су извели уз помоћ наставника.
Наставник је приметио да ученици у овом узрасту не поседују довољно

знања и искуства да самостално испитају ког су реда сви двоцифрени бројеви, чак и општи запис двоцифреног броја за већину ученика делује јако конфузно. Након што је наставник објаснио на који начин ће бити груписани двоцифрени бројеви и испитао ког су реда двоцифрени бројеви чији је збир цифара мањи од 10, 10, 11 и 12, ученици су могли самостално да наставе испитивање.

У **осмом разреду**, након што је наставник представио проблем којим ће се бавити, нацртао мрежу и увео ознаку "*", ученицима је дат задатак да прошире мрежу и тако испитају колико је $5 * 3$, $4 * 3$ и $7 * 2$. Већина ученика лако је одговорила на постављени задатак али било је и оних који нису разумели шта се од њих очекује и нису знали на који начин треба да прошире мрежу. Наставник је већ на почетку часа приметио да овај задатак није побудио велико интересовање код ученика.

Следећи задатак био је да ученици уоче општи израз за $m*n$. Знајући решења првог задатка, сви ученици су покушавали да дођу до општег израза "намештајући" образац тако да важи следеће:

$$2 * 3 = 8$$

$$4 * 3 = 18$$

$$5 * 3 = 23$$

$$7 * 2 = 20$$

Ниједан ученик није покушао да дође до решења посматрајући правоугаонике уцртане у мреже. Ученици су брзо одустајали, један по један, само пар упорних успело је да нађе општи запис који би задовољавао једну од наведених једнакости али не и све. Након савета наставника да погледају правоугаонике које су уцртали у мреже, један ученик је посматрајући мрежу 2*3 јако брзо дошао до општег израза: $m*n = m \cdot n + (m-1) \cdot (n-1)$. У овом делу часа наставник је приметио да ученици када добију задатак имају велику жељу да се докажу и дођу до решења. Проблем је недостатак упорности, ученици јако брзо губе мотивацију. Након само два неуспела покушаја ученици су потпуно одустали од задатка.
На крају часа наставник је задао неколико једначина чије је решавање захтевало примену стеченог знања. Да ли због умора, недостатка мотивације или неразумевања задатка, само пар ученика је решило постављене једначине без помоћи наставника.

# Закључак

Један од циљева наставе математике у основној школи је да ученици усвоје што више знања и да то знање буде квалитетно и дуготрајно. У таквом наставном процесу на првом месту је активност ученика и њихово оспособљавање за самостално тражење одговора на постављена питања. Стручњаци у својим радовима оправдано указују на потребу превазилажења традиционалне наставе. Једнолична настава замара ученике јер је монотона а ученици пасивни посматрачи који слушају и при томе се труде да што више меморишу. У основној школи ученици би требало да стекну знање и способности које ће представљати основу за дањи наставак школовања и професионално образовање.

На часовима математике треба тежити развијању способности ученика које тражи савремена цивилизација. Такође, неопходно је стварати што је више могуће ситуација које омогућавају да ученик буде у активној позицији, да слободно говори, запажа, излаже и брани своје идеје, примењује стечена знања и испољава своју креативност. Часови који ово пружају ученику су пријатни, интересантни јер га свестрано ангажују и пружају могућност за самопотврђивање и напредак.

Учење путем открића остварују се општи циљеви образовања, формира се аутономија, способност самосталног решавања проблема, способност за истраживања и примена наученог у новим ситуацијама. Треба неговати осетљивост за проблеме, способност да се уочи необично у задатку, да се уоче противречни, сувишни и непотпуни задаци, као и да се процени реалност добијеног решења.

Развити математичку "истрајност" код ученика није лако, поготово што су ученици имали претходна искуства где су били учени да дају одговоре на кратка питања затвореног типа. Неговање одлучности код ученика да се држе проблема и да не одустају ако убрзо не дођу до решења је нешто на чему мора стално да се ради и то од самог уласка ученика у наше учионице. Перманентно треба тежити развијању упорности и воље код ученика да "не дигну руке" и да буду способни да се изборе са "шкрипцем".

Сматрам да је учење путем откривања или истраживање најмоћнији начин напредовања ученика јер је фокус на знању ученика - ради се о равнотежи између предавања и усвајања знања.

# Литература


[1] Mike Ollerton, **100 идеја за подучавање математике**, Школска књига, Загреб, 2011.

[2] Mike Ollerton, **The Mathematics Teacher's Handbook**, Continuum, 2009.

[3] Вилотијевић, М., **Дидактика**, Научна књига, Учитељски факултет, Београд, 1999.

[4] Дејић, М., **Методика наставе математике**, Јагодина, 2000.

[5] Дејић, М., **Методика наставе математике**, Јагодина, 2003.

[6] Егерић, М., **Практикум методике математике разредне наставе**, Јагодина, 2000.

[7] Дејић, М., Дејић, Б., **Занимљиви свет математике**, НИРО, "Техничка књига", Београд, 1987.

[8] Дејић, М., Вуковић, С., **Математика као игра**, Друштво математичара Србије, Подружница Панчево, 2000.

[9] Ракић, Б., **Мотивација и школско учење**, Завод за издавање уџбеника, Сарајево, 1970.