UNIVERZITET U BEOGRADU

SEKVENTI, PRIRODNA DEDUKCIJA I MULTIKATEGORIJE

DOKTORSKA TEZA

Mirjana Borisavljević

Beograd, 1997. godine

SADRŽAJ:

UVOD

SISTEMI SEKVENATA

Sisteme sekvenata i sisteme prirodne dedukcije za predikatsku logiku razmatrao je **Gencen (Gentzen)** u svom radu **"Investigations into logical deduction"**.

U tom radu sistemi sekvenata igraju važniju ulogu. Daćemo Gencenovu formulaciju tih sistema. Sa A, B, C,... označićemo formule, a sa Γ, Δ, Λ,... nizove formula. Sekvent je izraz oblika $\Gamma \vdash \Delta$ i zove se jednozaključni ako je niz Δ prazan ili jedna formula, inače se zove višezaključni. Definišu se pravila uvođenja (s leva i s desna $\vdash$) logičkih veznika $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ $\neg$ i kvantifikatora $\forall$, $\exists$, koje Gencen zove figure zaključivanja. Pored toga definisana su i strukturna pravila (strukturne figure zaključivanja). Navešćemo kako izgledaju strukturna pravila za jednozaključne sekvente:

<u>permutacija:</u>
$$\frac{\Gamma A B \Delta \vdash C}{\Gamma B A \Delta \vdash C.}$$

<u>kontrakcija:</u>
$$\frac{B B \Gamma \Delta \vdash C}{B \Gamma \Delta \vdash C.}$$

<u>slabljenje:</u>
$$\frac{\Gamma \vdash C}{B \Gamma \vdash C.}$$

<u>sečenje:</u>
$$\frac{\Gamma \vdash A \quad A \Delta \vdash C}{\Gamma \Delta \vdash C,}$$
gde je formula A formula sečenja.

Izvod sekventa $\Gamma \vdash C$ čine sekventi zapisani u obliku drveta (pomoću pravila) na čijem kraju je sekvent $\Gamma \vdash C$.

Kao rezultat ovakve sekventne formulacije predikatske logike dobijen je interesantan način razgraničavanja klasične i intuicionističke logike. Ako posmatramo višezaključne sekvente, pravila za veznike i kvantifikatore i strukturna pravila definisana na njima dobijamo klasičnu logiku. Sva ta pravila na jednozaključnim sekventima daju intuicionističku logiku.

Glavni Gencenov rezultat u tom radu je sledeća teorema:

TEOREMA O ELIMINACIJI SEČENJA: Svaki izvod sekventa $\Gamma \vdash \Delta$ za klasičnu logiku,

($\Gamma \vdash A_K$ ili $\Gamma \vdash_I$ za intuicionističku logiku) može se transformisati u izvod sa istim krajnjim sekventom koji u sebi ne sadrži sečenje.

Karakteristično za izvod koji sadrži sečenje je da se formula sečenja pojavljuje u sekventima pre sečenja, a gubi se primenom tog pravila. Izvod bez sečenja ima lepu osobinu da se u njemu čuvaju sve formule koje učestvuju u izvođenju krajnjeg sekventa.

SISTEMI PRIRODNE DEDUKCIJE

O drugim sistemima, sistemima prirodne dedukcije nalazimo više u radovima **Pravica (Prawitz)**. On je u svojim radovima **"Natural deduction"**, **"Ideas and results in proof theory"** detaljno izučavao sisteme prirodne dedukcije za klasičnu i intuicionističku logiku.

U sistemima prirodne dedukcije za logičke veznike $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ i kvantifikatore $\forall$, $\exists$ definisana su dva pravila: pravilo uvođenja i pravilo eliminacije. Pravila za veznik $\neg$ su drugačija. Sa A, B,... obeležimo formule a sa Γ, Δ,... skupove formula. Pravila za uvođenje i eliminaciju veznika $\wedge$ imaju oblik:

uvođenje: $\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}$ eliminacija: $\dfrac{A \wedge B}{A}$ $\dfrac{A \wedge B}{B.}$

Formule koje se pojavljuju u nekom pravilu iznad linije su premise pravila, a formula koja se pojavljuje ispod linije je zaključak tog pravila.

Izvod formule A u ovim sistemima je u obliku drveta (koje čine pravila) na čijem se vrhu nalaze neke formule a na kraju formula A. Formule sa vrha dveta čine skup pretpostavki, Γ, iz kojih je izvedena formula na kraju izvoda.

Interesantno je da u prirodnodedukcijskoj formulaciji predikatske logike razlika između klasične i intuicionističke logike je u obliku pravila za negaciju, $\neg$ (ili prisustva odnosno odsustva Pirsovog pravila).

Ako se u izvodu neke formule A prvo pojavi pravilo uvođenja nekog veznika, pa pravilo eliminacije (istog veznika), onda sve formule od one koja je nasala pravilom uvođenja do premise pravila eliminacije čine maksimalnu formulu (ili segment) tog izvoda. Prisustvo maksimalne formule (ili segmenta) u nekom izvodu dovodi do toga da nemamo informaciju koje su sve formule učestvovale u tom izvodu. To je razlog što je Pravic hteo da svaki izvod sistema prirodne dedukcije transformiše u izvod koji nema maksimalnih formula (odnosno segmenata), takozvani normalan izvod.

U tome je važnost sledeće teoreme sistema prirodne dedukcije.

TEOREMA O NORMALNOM OBLIKU: Za svaki izvod formule A iz pretpostavki Γ postoji normalan izvod iz Γ formule A.

U Pravicovom drugom radu, precizirana je razlika između teoreme o normalnom obliku i teoreme o normalizaciji.

TEOREMA O NORMALIZACIJI: Postoji procedura koja redukuje svaki izvod na normalan izvod.

Naravno, teorema o normalnom obliku je posledica teoreme o normalizaciji.

U tom radu Pravic je napravio pomak u sređivanju normalnih izvoda sistema prirodne dedukcije. U izvodu sistema prirodne dedukcije možemo izdvojiti nizove formula koje

Pravic naziva stazama. U svakoj stazi normalnog izvoda postoji minimalna formula ili minimalni segment (koji čine više istih formula). Za normalan izvod možemo reći da ima dobar redosled pravila u svakoj stazi. Sve formule staze koje se pojavljuju pre minimalne formule (segmenta) su premise ili zaključci pravila eliminacije, a sve formule posle nje su premise ili zaključci pravila uvođenja. U sređivanju normalnog izvoda može se ići korak dalje. Postavljanjem zahteva da minimalna formula (odnosno formula koja čini minimalni segment) bude atomska, potrebne su još neke redukcije za normalan izvod. Normalni izvod sa atomskim minimalnim formulama u svim njegovim stazama zove se prošireni normalni izvod. U vezi sa tim Pravic je naveo i teoremu o proširenoj normalizaciji.

TEOREMA O PROŠIRENOJ NORMALIZACIJI: Postoji procedura koja redukuje svaki izvod na proširen normalan izvod.

U radu je pomenuta i odgovarajuća **teorema o proširenom normalnom obliku.**

MULTIKATEGORIJE

Mi ćemo koristiti prednosti koje pruža kategorijalni pristup logičkim sistemima, tačnije pozitivnom delu intuicionističke iskazne logike.

Logička interpretacija pojmova teorije kategorija je sledeća: objekte iz klase objekata neke kategorije smatramo formulama. Strelice kategorije (koje su oblika $f{:}B\to A$, gde je A cilj, a B ishodište strelice) smatraćemo dokazima. Ishodište B je pretpostavka na osnovu koje je izveden zaključak, cilj A, izvođenjem f. Jednakosti između strelica koje važe u kategoriji, logički gledano pretstavljaju izjednačavanje nekih dokaza.

Nad strelicama kategorije definišu se operacije, koje se često zovu i pravila izvođenja ili jednostavnije pravila. Na ovaj način čitav izvod sa krajnjim sekventom $B\vdash A$ iz sistema sekvenata može biti zapisan kao strelica $f{:}B\to A$.

Jedan od najznačajnijih rezultata je da je intuicionistička iskazna logika povezana sa slobodnom bikartezijanskom zatvorenom kategorijom.

Postoji i prirodnija veza sekvenata i strelica koju je uveo Lambek. Ishodište strelice ne čini više jedan objekat već niz (skup ili multiskup) objekata. Takve strelice imaju oblik $f{:}\Gamma\to A$ gde je Γ niz (skup ili multiskup) objekata i često se zovu i multistrelice. Kategorije koje imaju ovakve strelice zovu se multikategorije i nas će samo one i interesovati.

U multikategoriji postoje jedinične strelice koje su oblika $1_A{:}A\to A$, za svaki objekat A multikategorije. Definisano je i pravilo izvođenja

$$\frac{f{:}\Gamma\to A \quad g{:}\Delta A\Lambda\to B}{g\langle f\rangle{:}\Delta\Gamma\Lambda\to B,}$$

i važe sledeće jednakosti nad strelicama:

$f\langle 1_A\rangle=f,$	za $f{:}A\Gamma\to B.$
$1_B\langle g\rangle=g,$	za $g{:}\Gamma\to B.$
$f\langle g\langle h\rangle\rangle= f\langle g\rangle\langle h\rangle,$	za $f{:}A\Gamma\to C,\ g{:}B\Delta\to A,\ h{:}\Lambda\to B.$
$f\langle g\rangle\langle h\rangle=f\langle h\rangle\langle g\rangle,$	za $f{:}AB\Gamma\to C,\ g{:}\Delta\to A,\ h{:}\Lambda\to B.$

Moguće je obogatiti jezik multikategorije novim operacijama nad objektima i novim operacijama nad strelicama. Najčešće se posmatra slobodna multikategorija koja ima samo jedinične strelice, a nove strelice se dobijaju primenom operacija nad stelicama koje postoje u toj multikategoriji.

U svom radu **"Logic without sructural rules" Lambek** je posmatrao slobodnu multikategoriju sa operacijama nad objektima ($\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftarrow$,...) i specijalnim strelicama, koje zamenjuju pravila eliminacije veznika i operacijama nad strelicama koje odgovaraju pravilima uvođenja iz sistema sekvenata. Definisao je i jednakosti nad strelicama. Pravilo izvođenja koje smo gore naveli odgovara pravilu sečenja iz sistema sekvenata, pa ga je Lambek tako i nazvao. Na taj način definisana je slobodna multikategorija koja odgovara Gencenovom sistemu sekvenata (sa jednozaključnim sekventima) u kome od strukturnih pravila postoji samo sečenje. Lambek je pokazao da je u toj multikategoriji moguće eliminisati sečenje. Važno je istaći da su jednakosti koje su definisane u toj slobodnoj multikategoriji pretstavljale upravo korake redukcije pri redukovanju proizvoljne strelice na strelicu koja ne sadrži sečenje.

VEZA IZMEĐU SISTEMA PRIRODNE DEDUKCIJE I SISTEMA SEKVENATA

Mi ćemo u ovom radu ispitivati vezu između sistema prirodne dedukcije i Gencenovog sistema sekvenata za pozitivan deo intuicionističke iskazne logike. Posebno će nam biti važna veza između karakteristika ovih sistema, teoreme o normalizaciji i teoreme o eliminaciji sečenja.

Naš način pretstavljanja sistema prirodne dedukcije i sistema sekvenata biće aparatom multikategorija. Radićemo sa sistemima koji imaju objekte, strelice, operacije nad strelicama (objektima), jednakosti nad strelicama. U zapisu strelica nećemo koristi oznaku $\rightarrow$ već će strelice biti oblika $f{:}\Gamma \vdash A$. Term strelice će biti f; tip terma je $\Gamma \vdash A$; a operacije će biti operacije ili pravila nad strelicama.

Vratimo se još jednom logičkoj interpretaciji strelice $f{:}\Gamma \vdash A$. U termu f su zapisana sva pravila koja su primenjena od polaznih strelica oblika $1_A{:}A \vdash A$ do strelice $f{:}\Gamma \vdash A$. Sekventno gledano term f sadrži informaciju kako izgleda izvod sa krajnjim sekventom $\Gamma \vdash A$. Prirodnodedukcijski gledano term f čuva sva pravila kojima smo od pretpostavki koje su u Γ dobili zaključak A.

Pomenućemo dva rada u kojima se ispituje vezu između sistema prirodne dedukcije i Gencenovog sistema sekvenata:

Cuker (Zucker): "The correspondence between cut-elimination and normalization";
Potinger (Pottinger): "Normalization as a Homomorphic image of cut-elimination".

Cuker je posmatrao sistem prirodne dedukcije i sistem sekvenata za predikatsku intuicionističku logiku. Definisao je dva sistema od kojih je jedan sistem u kome se pojavljuju sekventi i pravila izvođenja definisana nad njima. Drugi sistem odgovara sistemu prirodne dedukcije. U oba sistema radi se sa izvodima. U prvom sistemu postoje izvodi sa krajnjim sekventom, na primer $\Gamma \vdash A$ i redukcije kojima se dolazi do izvoda sa istim krajnjim sekventom, ali koji nema sečenja. U drugom sistemu radi se o izvodima sa krajnjom formulom (na primer A) i redukcijama nad izvodima koje dovode do normalnog izvoda.

Potinger je upoređivao sistem prirodne dedukcije i sistem sekvenata za intuicionističku iskaznu logiku. U sistemima, koje je on definisao izvodima odgovaraju termi (određenog tipa), a pravilima izvođenja, pravila koja su definisana nad tim termima. Naravno u sistemu koji pretstavlja sistem sekvenata pravila nad termima odgovaraju pravilima uvođenja veznika (s leve odnosno desne strane $\vdash$). U sistemu koji igra ulogu sistema prirodne dedukcije pravila pretstavljaju uvođenja i eliminacije veznika.

Pregled onog šta će biti urađeno u ovom radu daćemo kroz komentar rezultata iz navedenih radova Cukera i Potingera, ali pre svega moramo uskladiti terminologiju.

Najvažnije je na početku reći da ćemo se ograničiti na pozitivan deo iskazne intuicionističke logike. Od sada pa na dalje u čitavom radu pod Gencenovim sistemom sekvenata podrazumevaćemo sistem sekvenata za pozitivan deo iskazne intuicionističke logike. Sistem prirodne dedukcije će biti sistem prirodne dedukcije za pozitivan deo iskazne intuicionističke logike.

I bez prisustva negacije bilo je poteškoća približiti posmatrane sisteme. Dodavanje negacije i ispitivanje njenog uticaja biće jedan od sledećih koraka koje planiramo da bi upotpunili sliku o vezi ova dva sistema.

Dalje u svim posmatranim sistemima govorićemo o formulama, termima (zajednički termin za izvod i term), pravilima za terme ili operacijama nad termima (za pravila izvođenja, operacije nad termima, strelicama), redukcijskim koracima nad termima ili izjednačavanjima terama (za redukcije i jednakosti nad termima).

Vezu između sistema prirodne dedukcije i Gencenovog sistema sekvenata koju su ustanovili Cuker i Potinger u svojim radovima analiziraćemo na sledeći način:

<u>Prvo</u>, definisanje sistema koji odgovaraju sistemu prirodne dedukcije i Gencenovom sistemu sekvenata.

<u>Drugo</u>, povezivanje terama tih sistema definisanjem preslikavanja koja slikaju formule i terme jednog sistema u formule i terme drugog sistema.

<u>Treće</u>, glavni cilj je da uporedimo važne karakteristike ova dva sistema: teoremu o normalizaciji i teoremu o eliminaciji sečenja.
Zbog toga treba uporediti korake redukcije nekog terma do normalnog terma u sistemu prirodne dedukcije sa
redukcijskim koracima prilikom redukovanja terma na term bez sečenja u Gencenovom sistemu sekvenata.
Nakon toga, može se utvrditi (kako to Cuker i Potinger kažu) ekvivalentnost tih dveju važnih teorema.

<u>Četvrto</u>, u pomenutim radovima Cukera i Potingera nije bila predmet izučavanja teorema o proširenoj normalizaciji sistema prirodne dedukcije, koju je razmatrao Pravic. U ovom radu će biti i o tome reči.

<u>Prvo.</u>

Sistemi koje su definisali Cuker i Potinger i koji odgovaraju sistemu prirodne dedukcije i Gencenovom sistemu sekvenata, dosta su modifikovani u odnosu na sistem kome odgovaraju. U sistemima koji su vezani za sistem sekvenata nema eksplicitno nekih strukturnih pravila (permutacije, slabljenja); pravila za veznike su drugačija. To je urađeno sa ciljem da ta dva sistema, čija veza želi da se uspostavi (i na osnovu nje ustanovi veza i između izvornih sistema), budu sličniji. Na taj način se olakšava uspostavljanje te veze. Pri tome su izostavljene i zanemarene neke karakteristike sistema, koji se povezuju.

Mi ćemo na drugi način približiti sistem prirodne dedukcije i Gencenov sistem sekvenata. Definisaćemo sistem $\mathcal{ND}$, koji je sistem prirodne dedukcije (ima terme i operacije nad njima) i sistem $\mathcal{G}$ koji je sistem sekvenata. Biće definisani još neki sistemi koji će da tako kažemo biti između sistema $\mathcal{ND}$ i $\mathcal{G}$. Ti sistemi će slikovito rečeno, redom gubiti karakteristike sistema $\mathcal{ND}$ a dobijati karakteristike sistema $\mathcal{G}$. Tako ćemo u etapama videti kakve su razlike između sistema $\mathcal{ND}$ i sistema $\mathcal{G}$.

Drugo.

Za povezivanje ovih sistema (u našem slučaju ima ih više od dva) naš zapis izvoda pomoću terama i operacija nad njima mnogo doprinosi preciznom definisanju potrebnih preslikavanja. Povezivanje sistema sa eksplicitno zadatim svim operacijama koje ih karakterišu pokazaće da postoje slučajevi kada samo neki termi jednog sistema mogu naći odgovarajući term u drugom sistemu. Pojaviće se suvišne operacije (koje nemaju odgovarajuće u drugom sistemu), specijalni oblici terma (samo se takvi slikaju u drugi sistem).

Već se ovde problem "slaganja redukcija", koje u širem smislu shvatamo kao neko izjednačavanje terama, posmatranih sistema deli na dva nivoa.

Prvi nivo tog problema je ustanoviti kakva izjednačavanja nam trebaju nad termima da bi preslikavanjima povezali terme jednog sistema sa termima nekog drugog sistema. To je povezivanje u smislu da za svaki term iz jednog sistema postoji odgovarajući term u drugom sistemu.

Drugi nivo je ispitati da li se redukcijski koraci posmatranih sistema "dobro slažu". To znači da li svaka redukcija u jednom sistemu odgovara nekoj redukciji iz drugog sistema.

U svojim radovima Cuker i Potinger su malu pažnju obratili na prvi nivo, a važniji im je bio odnos koraka redukcije zbog toga što im je glavni cilj bio upoređivanje pomenutih važnih teorema sistema prirodne dedukcije i Gencenovog sistema sekvenata.

Treće.

U Cukerovom radu je izdvojena disjunkcija (sa svojim pravilima uvođenja i eliminacije) kao mesto gde se ne slažu sistem prirodne dedukcije i Gencenov sistem sekvenata. To neslaganje se ogleda u tome da u Gencenovom sistemu sekvenata postoji korak redukcije (permutovanje eliminacije disjunkcije i sečenja) koji kada se preslika u sistem prirodne dedukcije nije korak redukcije. Tako je Cuker isključio disjunkciju iz lepe slike o slaganju ova dva sistema.

Potinger je izmenio problematične korake redukcije u sistemu koji odgovara Gencenovom sistemu sekvenata. Ti novi koraci redukcije su se "lepo" složili sa koracima redukcije u sistemu, koji odgovara sistemu prirodne dedikcije.

Posmatrajući sistem prirodne dedukcije može se primetiti specifičnost pravila za eliminaciju veznika $\vee$ u odnosu na to pravilo za veznike $\wedge$, $\Rightarrow$. Mi ćemo definisati sistem u kome će pravila za eliminaciju veznika $\wedge$, $\Rightarrow$ imati oblik pomenutog pravila za eliminaciju veznika $\vee$. Videćemo sledeće:

1. pojavljuju se novi redukcijski koraci, koji do sada nisu postojali;
2. ta nova pravila za eliminaciju veznika $\wedge$, $\Rightarrow$ stvaraju iste probleme koje je dosad stvarala samo eliminacija veznika $\vee$.

Potingerovo rešenje problema slaganja redukcija sistema koje posmatramo, tako što u jednom sistemu promenimo korake redukcije u stvari je potvrda da je potrebno postaviti pitanje, o izboru koraka redukcije.

U sistemu prirodne dedukcije redukovanje terma na normalan term je jasno određeno. Ali, u Gencenovom sistemu sekvenata postoji više strategija kako od nekog terma doći do terma bez sečenja. Znači, prvo treba odlučiti da li se zadaje određena strategija (koraci redukcije) ili je dozvoljeno izabrati bilo koju strategiju (dozvoliti više mogućnosti za rešavanje nekog slučaja koji se javlja pri redukovanju). Kao drugo, treba ustanoviti kako se svaka (odnosno da li se svaka) strategija (koraci redukcije), slaže sa redukcijama u sistemu prirodne dedukcije. Tek nakon toga može se govoriti o slaganju odnosno neslaganju redukcije ova dva sistema.

Cuker i Potinger su ustanovili ekvivalentnost karakterističnih teorema sistema prirodne dedukcije i Gencenovog sistema sekvenata: teoreme o normalizaciji i teoreme o eliminaciji sečenja. Preciznije ta ekvivalentnost kod njih znači, da ako u sistemu prirodne dedukcije važi teorema o normalizaciji onda u Gencenovom sistemu sekvenata važi teorema o eliminaciji sečenja i obmuto. Ekvivalentnost tih teorema mogla bi da se utvrdi i na sledeći način: posmatramo proizvoljan term jednog sistema; postojećim preslikavanjem taj term prenesemo u drugi sistem, gde za svaki term pa i sliku posmatranog terma važi karakteristična teorema. Onda se postavlja pitanje: šta nam ta činjenica može reći o važenju karateristične teoreme u polaznom sistemu? Na to pitanje dobijamo određeni odgovor, ali pri tome moramo voditi računa šta je u tom odgovoru posledica karakteristične teoreme, a šta nekih drugih svojstava terama.

Četvrto.

Cuker i Potinger nisu razmatrali teoremu o proširenoj normalizaciji u sistemu prirodne dedukcije. U pregledu koji sledi navešćemo šta je u vezi sa tim urađeno u ovom radu.

Ovim smo završili upoređivanje načina povezivanja sistema prirodne dedukcije i Gencenovog sistema sekvenata, koji će biti dat u ovom radu sa postupcima povezivanja tih sistema koje su sproveli Cuker i Potinger u svojim radovima.

Rad ćemo podeliti na pet poglavlja. Svako poglavlje će se sastojati od više odeljaka.

U **prvom poglavlju** ćemo dati definicije sistema koji će odgovarati sistemu prirodne dedukcije, sistem $\mathcal{ND}$ i Gencenovom sistemu sekvenata, sistem $\mathcal{G}$. Definisaćemo sve sisteme koji pretstavljaju vezu između njih (sistemi $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$, $\mathcal{G}'$). Još ćemo definisati dodatne jednakosti u tim sistemima koje će odgovarati koracima redukcije pri normalizaciji terma u sistemu prirodne dedukcije, odnosno koracima transformacije nekog terma u term bez sečenja Gencenovog sistema sekvenata. Posmatrani sistemi sa jednakostima biće neka vrsta parcijalnih algebri koje ćemo zvati samo $\mathcal{ND}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$, $\mathcal{G}'$, $\mathcal{G}$ u zavisnosti od kog sistema polazimo. Karakteristične teoreme sistema prirodne dedukcije i Gencenovog sistema sekvenata posmatraćemo u tim algebrama.

Preslikavanja koja povezuju pomenute sisteme (bolje rečeno njihove terme) će biti definisana u **drugom poglavlju.** Koristeći ta preslikavanja utvrdićemo: koji termi nekog sistema (oslobođeni suvišnih operacija, posebnog oblika) se mogu preslikati u term nekog drugog sistema; kako se pojedinim preslikavanjima čuvaju ili menjaju koraci redukcije...

Sve to će biti korišćeno kada u **trećem poglavlju** budemo posmatrali teoremu o normalizaciji ili teoremu o eliminaciji sečenja u pomenutim algebrama. Odgovarajući sistemi nekih od njih ($\mathcal{ND}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$) će sa svojim osobinama biti bliži sistemu prirodne dedukcije, pa ćemo u tim algebrama posmatrati teoremu o normalizaciji. U svakom od tih sistema ćemo definisati pojam normalnog terma (u nekim sistemima i više vrsta normalnosti terma). To nijansiranje će dati više različitih teorema o normalizaciji (čak i u jednom sistemu). U $\mathcal{G}'$ i $\mathcal{G}$ karakteristična će biti teorema o eliminaciji sečenja. Teoreme iz $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$, $\mathcal{G}'$ će nam poslužiti da povežemo teoremu o normalizaciji u $\mathcal{ND}$ sa teoremom o eliminaciji sečenja u $\mathcal{G}$.

Pravic je u svojim radovima, koje smo pomenuli dao definiciju proširenog normalnog terma u sistemu prirodne dedukcije. Zatim je dokazao teoremu o proširenoj normalizaciji u tom sistemu. Ta teorema je, pored teoreme o normalizaciji, još jedna važna karakteristika sistema prirodne dedukcije. U **četvrtom poglavlju** ćemo posmatrati proširen normalan term sistema $\mathcal{ND}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$. U različitim sistemima od $\mathcal{ND}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$ taj pojam (i pojmovi vezani za njega) će se menjati zbog novih operacija, izjednačavanja terama i drugih svojstava važnih za konkretan sistem. U $\mathcal{ND}$ uvešćemo nove redukcije i dobiti $\mathcal{ND}$-*min*, a već postojećim jednakostima iz algebri $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$ dodaćemo nove jednakosti i dobiti algebre $\mathcal{N}$-*min* i $\mathcal{N}'$-*min*. Pokazaćemo da u njima važi teorema o proširenoj normalizaciji. Pošto nas zanima veza sistema prirodne dedukcije sa Gencenovim sistemom sekvenata odgovorićemo na pitanje šta je ono što pojmu proširen normalan term odgovara u sistemima $\mathcal{G}'$ i $\mathcal{G}$ i koje jednakosti među termima treba dodati posojećim jednakostima u $\mathcal{G}'$ i $\mathcal{G}$ i definisati $\mathcal{G}'\eta$ i $\mathcal{G}\eta$. Ustanovićemo i koja teorema u $\mathcal{G}'\eta$ i $\mathcal{G}\eta$ odgovara teoremi o proširenoj normalizaciji u $\mathcal{ND}$-*min*, $\mathcal{N}$-*min*, $\mathcal{N}'$-*min*. Na taj način teorema koja karakteriše sistem prirodne dedukcije daće teoremu u Gencenovom sistemu sekvenata, koja je sa njom povezana.

NAPOMENE, KOMENTARI...

Na kraju nekoliko napomena o komentarima, numerisanju lema i davanju imena novim pojmovima koji će se pojavljivati u ovom radu.

Kroz ceo rad postoje delovi u tekstu koji će počinjati naznakom ***KOMENTAR:*** ... U tim komentarima će se na slobodniji način opisati neka definicija koja sledi (ili koja je upravo data), objasniti razlog definisanja nekog pojma, opravdati izbor karakteristika,...; komentarisati rezultat leme (ili teoreme) i koristi tog rezultata za ono što se želi dokazati kasnije. Osim toga tu će se ono što se komentariše direktno povezati sa izvornim sistemima prirodne dedukcije i Gencenovim sistemom sekvenata. Možda će sve biti objašnjeno njihovom terminologijom. U tim komentarima ćemo pojmove koje uvodimo, svojstva koja dokazujemo gledati sa stanovišta polaznih sistema, sistema prirodne dedukcije i Gencenovog sistema sekvenata. Pokazujući šta na osnovu naših rezultata možemo novo reći o karakteristikama ovih sistema i o vezama između njih mi ćemo opravdati razloge definisanja baš tih pojmova i važnost svojstava koja ističemo.

U radu nećemo numerisati definicije. Leme i teoreme koje se pojavljuju u svakom novom odeljku poglavlja biće numerisane od 1. Ako želimo da se pozovemo na lemu 4 iz trećeg odeljka drugog poglavlja to ćemo označavati sa lema 4(poglavlje II, 3).

Oznake definisanih pojmova će biti skraćenice od naziva na engleskom jeziku. Na primer: drvo strelice *f* je **T**(ree)(*f*);

sistem prirodne dedukcije je označen sa sistem $\mathcal{N}$(atural)$\mathcal{D}$(eduction)...

SISTEMI $\mathcal{ND}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$, $\mathcal{G}'$, $\mathcal{G}$

U ovom radu će povezivanje sistema prirodne dedukcje i Gencenovog sistema sekvenata biti izvršeno u koracima, etapama. Na putu od sistema prirodne dedukcije ka Gencenovom sistemu sekvenata posmatraćemo više sistema. Prvi od tih sistema, sistem $\mathcal{ND}$, će u stvari biti sistem prirodne dedukcije, a poslednji, sistem $\mathcal{G}$, Gencenov sistem sekvenata. Svaki od sistema između njih će biti neka vrsta prelaza koji će gubiti karakteristike sistema $\mathcal{ND}$ i dobijati karakteristike sistema $\mathcal{G}$.

Svi posmatrani sistemi imaće zajedničku sledeću karakteristiku: termovski zapis kako je dobijen neki izvod tog sistema. U različitim sistemima strelice oblika $f{:}\Gamma \vdash A$ igraće ulogu izvoda formule A iz pretpostavki Γ ili ulogu sekventa $\Gamma \vdash A$, ali će imati svoje ime, term f, i postojaće operacije nad tim strelicama tako da će term f nositi potpunu informaciju o načinu nastanka strelice $f{:}\Gamma \vdash A$. Da bismo saznali od kojih strelica (pravila izvođenja) je nastala $f{:}\Gamma \vdash A$ neće nam biti potrebno drvo tog izvoda, sve će biti zapisano u termu f.

Operacije nad strelicama sistema $\mathcal{ND}$ će biti pravila eliminacije i pravila uvođenja. Sve specifičnosti sistema prirodne dedukcije: posebnost pravila eliminacije disjunkcije, mogućnost više ili nijedne precrtane pretpostavke u pravilima eliminacije disjunkcije i uvođenja implikacije će biti prisutne u sistemu $\mathcal{ND}$. Jedini dodatak će biti to što ćemo eksplicitno dati operaciju nadovezivanja, koja u sistemu prirodne dedukcije postoji implicitno. Ali, pokazaćemo da ona u ovom sistemu nema veliku važnost.

Prvi korak od sistema prirodne dedukcije ka Gencenovom sistemu sekvenata je sistem $\mathcal{N}$. On ima dve značajne karakteristike koje ga razlikuju od sistema $\mathcal{ND}$. Prvo, ima neka strukturna pravila (govoreći u terminima Gencenovog sistema: kontrakciju, slabljenje). Drugo, operacije nad strelicama koje odgovaraju pravilima eliminacije $\wedge$, $\Rightarrow$ su drugačijeg oblika, njihov oblik je uniformisan po ugledu na pravilo eliminacije $\vee$. Ne treba posebno objašnjavati da prisustvo strukturnih pravila pretstavlja važan pomak ka Gencenovom sistemu sekvenata. Razloge promene oblika navedenih operacija navešćemo u sledećem odeljku.

Sledeći korak je sistem $\mathcal{N}'$. Pomak sa sistema $\mathcal{N}$ na sistem $\mathcal{N}'$ nije veliki. Razlikuju se samo po operaciji eliminisanja veznika $\vee$. U sistemu $\mathcal{N}$ ona je u prirodnodedukcijskom duhu, a u sistemu $\mathcal{N}'$ ta operacija u sebi spaja operaciju iz sistema $\mathcal{N}$ i strukturno pravilo kontrakciju. U radovima Cukera i Potingera o vezi prirodne dedukcije i Gencenovog sistema sekvenata kao problem se pojavila disjunkcija, tačnije pravilo za eliminaciju disjunkcije. Detaljnije gledajući pokazalo se da je krivac oblik samog tog pravila što će se videti kada i eliminacije veznika $\wedge$, $\Rightarrow$ budu istog oblika (prelaz sa sistema $\mathcal{ND}$ na sistem $\mathcal{N}'$) i kada se posmatraju dve verzije tog pravila (prelaz sa sistema $\mathcal{N}$ na sistem $\mathcal{N}'$).

Sistem sa strelicom $f{:}\Gamma \vdash A$ ćemo smatrati levim (desnim; levo-desnim) ako operacije definisane nad strelicama unose promene samo sa leve (desne; i sa leve i sa desne) strane rampe $\vdash$ u zapisu $\Gamma \vdash A$. U tom smislu prelazak sa sistema $\mathcal{N}$ na sistem $\mathcal{G}'$ može se najbolje okarakterisati kao prelazak sa desnog na levo-desni sistem. Sistem $\mathcal{G}'$ ima ista strukturna pravila kao sistem $\mathcal{N}'$, samo pri operacijama eliminacije veznika u sekventu $\Gamma \vdash A$ (mi ćemo ga zvati tip) promena se vrši desno od $\vdash$.

Gencenov sistem sekvenata je levo-desni sistem, a neke razlike između njega i sistema prirodne dedukcije nalaze se baš u razlikama između tih sistema.

Na kraju dolazimo do sistema $\mathcal{G}$ koji odgovara Gencenovom sistemu sekvenata. Sistem $\mathcal{G}'$ morao je biti obogaćen još jednim strukturnim pravilom, permutacijom, a ostale operacije su malo promenjene da bi došli do sistema $\mathcal{G}$. Permutacija kao da ima manju težinu od ostalih strukturnih pravila. Kategorijalno gledano permutacija je prirodni izomorfizam što nije slučaj sa kontrakcijom i slabljenjem. Pojavom permutacije nećemo napraviti veliki pomak u vezivanjima sistema prirodne dedukcije i sistema sekvenata, ali ćemo konačno doći do Gencenovog sistema sekvenata.

1. $\mathcal{N}$-DEDUKTIVNI SISTEMI

DEFINICIJA: ***$\mathcal{N}$*-deduktivni sistem** se sastoji od skupa **objekata** i skupa **strelica**. Objekte ćemo zvati **formule** i označavaćemo ih $A,B,C,...$ a **strelice** će biti oblika $f{:}\Gamma \vdash A$, gde je Γ multiskup objekata, f će biti **term** strelice, a $\Gamma \vdash A$, **tip terma** f. Svakom objektu A pridružena je **jedinična strelica** oblika $1_A{:}A\vdash A$ čiji term ćemo često zvati jednostavno jedinica. Postoji i operacija **veze**, kojoj ćemo kasnije davati i druge nazive i koju ćemo zadavati na jedan od dva načina:

<u>prvi:</u>
$$\frac{f{:}\Gamma \vdash A \quad g{:}[A]\Delta \vdash B}{(1_{[A]}/f)\, g{:}[\Gamma]\Delta \vdash B}$$

Gde je $[A]$ multiskup koji čine samo formule oblika A.

Multiskup $[\Gamma]$ će se dobijati iz Γ na način koji ćemo precizirati kasnije.

<u>drugi</u> (specijalan slučaj prvog oblika), $[A]=\{A\}$:
$$\frac{f{:}\Gamma \vdash A \quad g{:}A\Delta \vdash B}{(1_A/f)\, g{:}\Gamma\Delta \vdash B}$$

Sistemi koje ćemo mi posmatrati, $\mathcal{ND}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$, $\mathcal{G}'$ biće $\mathcal{N}$-deduktivni sistemi slobodno generisani nekim beskonačnim skupom objekata. Objekte tih sistema dobićemo induktivno od postojećih objekata primenom **operacija** za objekte: $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ (koje ćemo zvati **veznici**). U svakom od sistema definisaćemo određene operacije nad strelicama, koje ćemo ponekad zvati i operacije nad termima. Polazeći od jediničnih strelica primenom tih operacija dobićemo nove strelica tih sistema. Operacije nad strelicama, u tim sistemima, zapisivaćemo na sledeći način

$$\frac{f{:}\Gamma \vdash A \quad (g{:}\Delta\vdash B \quad h{:}\Lambda\vdash C)}{O(f\,(,\,g,\,h)){:}\Theta \vdash D}$$

gde je O n-arna operacija, $n\in\{1,2,3\}$.

Drvo izvođenja strelice $f_1=O(f(,\,g,\,h)){:}\Theta \vdash D$ zvaćemo **drvo te strelice**, $\mathbf{T}(f_1)$. Drvo strelice $f{:}\Gamma \vdash A$ $(g{:}\Delta\vdash B$ $h{:}\Lambda\vdash C)$ je **podrvo** od $\mathbf{T}(f_1)$.

Operacija O je **glavna operacija** terma f_1, a termi f, g, h su njegovi **podtermi**. Da je neki term h podterm terma f u daljem tekstu zapisivaćemo na sledeći način: $f=O_1(...(O_k(h))...)$, gde su $O_1,O_2,...O_k$ glavne operacije podterama terma f kojima je h podterm i koje se navedenim redosledom javljaju u termu f. Ponekad će to biti i kraća oznaka, $f=O(h)$ i biće naglašeno da je O niz operacija $O_1, O_2, ... O_k$.

Sada ćemo nešto reći o indeksiranju jediničnih strelica i formula sa leve strane $\vdash$ u drvetu (a time i termu) neke strelice. Posmatraćemo strelicu $f:\Gamma \vdash B$ u nekom od tih sistema. Svako pojavljivanje jedinične strelice neke formule A, $1_A:A \vdash A$, u drvetu f smatraćemo posebnim i razlikovaćemo ga od nekog drugog pojavljivanja te strelice u $T(f)$. Zbog toga ćemo uvesti indeksiranje jedinica i formula sa leve strane $\vdash$ u tipu terma. Indekse ćemo pisati samo kada to bude neophodno, ali ćemo uvek pretpostavljati njihovo postojanje. Za strelicu $f:\Gamma \vdash B$ sve jedinične strelice koje se pojavljuju u njenom drvetu (jedinice iz njenog drveta) moraju imati različite indekse. Neka se u $T(f)$ k-puta pojavljuje $1_A:A \vdash A$ svaka od njih biće indeksirana na sledeći način $1_{A_{i_n}}:A_{A_{i_n}} \vdash A$ gde su i_n, $1 \leq n \leq k$ prirodni brojevi, $i_n \neq i_m$ za $n \neq m$. Znači, indeks jedinice i njene formule je **indeksirana reč**. Za A deo indeksa formule $A_{A_{i_n}}$ reći ćemo da je **Ime** tog indeksa. U sistemu $\mathcal{ND}$ imaćemo i jednu operaciju nad indeksima pa će postojati mogućnost da neka formula A ima indeks oblika $A_{m E_l D_n}$. U tom slučaju ime tog indeksa je A. Za $f:\Gamma \vdash B$ strelicu nekog od sistema, **ind**(Γ) je skup svih indeksa formula iz multiskupa Γ. Na dalje kada budemo govorili o strelici $f:\Gamma \vdash B$ i multiskupu Γ podrazumevaćemo da Γ ustvari čine indeksirane formule.

Neka su $f:\Gamma_1 \vdash A$ i $g:\Gamma_2 \vdash A$ dve strelice iz nekog od sistema $\mathcal{ND}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$, $\mathcal{G}'$.

(I) Za terme f i g reći ćemo da su **istog tipa** ako postoji bijekcija između ind(Γ_1) i ind(Γ_2), gde odgovarajući indeksi pri toj bijekciji imaju isto ime. Ponekad ćemo to kraće zapisivati $f, g:\Gamma_1 \vdash A$.

(II) Ako se u nekom termu h posmatranih sistema pojavi na više mesta podterm f tipa $\Gamma \vdash A$, to znači da ind(Γ) jednog od tih terama nije jednak indeksu nekog drugog i da između njih postoji bijekcija.

(III) Za Γ_1 ćemo reći da **sadrži** Γ_2 ako postoji 1-1 preslikavanje iz ind(Γ_2) u ind(Γ_1), gde odgovarajući indeksi pri tom preslikavanju imaju isto ime. Oznaka: $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1$.

2. SISTEM $\mathcal{ND}$

Sistem $\mathcal{ND}$ koji ćemo sada definisati odgovara sistemu prirodne dedukcije. Strelica $f:\Gamma \vdash B$ iz $\mathcal{ND}$ sa svojim termom f i njegovim tipom $\Gamma \vdash B$ odgovara drvetu u sistemu prirodne dedukcije čije su pretpostavke iz Γ, zaključak je A a u termu f je zapisano (operacijama) kojim pravilima od Γ dobijamo zaključak A. Operacije uvođenja i operacije eliminacije (koje ćemo definisati) u sistemu $\mathcal{ND}$ odgovaraju pravilima uvođenja i eliminacije veznika u sistemu prirodne dedukcije.

DEFINICIJA: Sistem $\mathcal{ND}$ je $\mathcal{N}$-deduktivni sistem slobodno generisan nekim beskonačnim skupom objekata nad kojima postoje tri operacije: $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$. Strelice ovog sistema ćemo induktivno definisati iz jediničnih strelica pomoću operacija nad strelicama koje slede.

Operacije uvođenja.

$$I\wedge.\ \frac{f:\Gamma \vdash A \quad g:\Delta \vdash B}{\{f, g\}:\Gamma\Delta \vdash A\wedge B,} \qquad \text{ind}(\Gamma)\cap\text{ind}(\Delta)=\varnothing.$$

$I\vee 1.\quad \dfrac{f{:}\Gamma \vdash A}{{}_{k}f{:}\Gamma \vdash A\vee B}$ $\qquad$ $I\vee 2.\quad \dfrac{f{:}\Gamma \vdash B}{{}_{k'}f{:}\Gamma \vdash A\vee B}$

$I\Rightarrow.\quad \dfrac{f{:}[A]\Gamma \vdash B}{\lambda f{:}\Gamma \vdash A\Rightarrow B}$ $\qquad$ $I^{o}\Rightarrow.\quad \dfrac{f{:}\,\Gamma \vdash B}{\lambda_{o}f{:}\Gamma \vdash A\Rightarrow B}$

$[A]$ čine samo formule oblika A, koje imaju različite indekse i multiskup Γ može da sadrži neke druge formule A_{A_i}, $A_{A_i}\notin[A]$.

Operacije eliminacije.

$E\wedge 1.\quad \dfrac{f{:}\Gamma \vdash A\wedge B}{\pi f{:}\Gamma \vdash A}$ $\qquad$ $E\wedge 2.\quad \dfrac{f{:}\Gamma \vdash A\wedge B}{\pi' f{:}\Gamma \vdash B}$

$E\vee.\quad \dfrac{h{:}\Gamma \vdash A\vee B\quad f{:}[A]\Delta \vdash C\quad g{:}[B]\Lambda \vdash C}{\delta(h,f,g){:}\Gamma\Delta\Lambda \vdash C}$

$E^{A}\vee.\quad \dfrac{h{:}\Gamma \vdash A\vee B\quad f{:}\Delta \vdash C\quad g{:}[B]\Lambda \vdash C}{\delta_{0A}(h,f,g){:}\Gamma\Delta\Lambda \vdash C}$

$E^{B}\vee.\quad \dfrac{h{:}\Gamma\vdash A\vee B\quad f{:}[A]\Delta \vdash C\quad g{:}\Lambda\vdash C}{\delta_{0B}(h,f,g){:}\Gamma\Delta\Lambda\vdash C}$

$E^{AB}\vee.\quad \dfrac{h{:}\Gamma\vdash A\vee B\quad f{:}\Delta \vdash C\quad g{:}\Lambda\vdash C}{\delta_{0AB}(h,f,g){:}\Gamma\Delta\Lambda\vdash C}$ $\quad$ ind(Γ), ind(Δ) i ind(Λ) disjunktni skupovi.

$E\Rightarrow.\quad \dfrac{h{:}\Gamma \vdash A\Rightarrow B\quad f{:}\Delta \vdash A}{\iota(h,f){:}\Gamma\Delta \vdash B,}$ $\qquad$ $\mathrm{ind}(\Gamma)\cap\mathrm{ind}(\Delta)=\emptyset.$

Operacija nadovezivanja: $\quad \dfrac{f{:}\Gamma \vdash A\quad g{:}[A]\Delta \vdash B}{(1_{[A]}/f)g{:}[\Gamma]\Delta\vdash B,}$ $\qquad$ $\mathrm{ind}(\Gamma)\cap\mathrm{ind}([A]\Delta)=\emptyset.$

Na sledeći način formiramo multiskup $[\Gamma]$ od formula iz multiskupa Γ:
za svaku formulu C_{c_i} iz Γ multiskup $[\Gamma]$ dobija formule $C_{c_iA_j}$ za sve formule A_{A_j} iz $[A]$.
Primer: ako $\Gamma=C_{c_i}C_{c_j}D_{D_mE_l}$, $[A]=A_{A_k}A_{A_n}$
onda $[\Gamma]=C_{c_iA_k}C_{c_jA_k}D_{D_mE_lA_k}C_{c_iA_n}C_{c_jA_n}D_{D_mE_lA_n}$.
U $I\Rightarrow$, $E\vee$, $E^{A}\vee$, $E^{B}\vee$, $E^{AB}\vee$ i operaciji nadovezivanja jedinice koje odgovaraju formulama koje se nalaze između zagrada [,] u tipovima iznad linije su **nosioci oslobođenih pretpostavki** redom operacija λ, δ, δ_{0A}, δ_{0B}, δ_{0AB} i nadovezivanja , a formule koje se nalazu u tipu tih jedinica sa desne strane $\vdash$ su **oslobođene pretpostavke (o. p.)** navedenih operacija.
Na ovaj način je potpuno definisan sistem ***ND***.

KOMENTAR: *U sistemu prirodne dedukcije slikovito rečeno, drvo pravimo odozgo na dole, od pretpostavki ka zaključku. U njemu postoji mogućnost da se dobije novo drvo pišući neko drvo sa zaključkom A iznad nekog drugog drveta sa premisom A. Posle toga novo drvo koje dobijeno* *ne nosi informaciju da je nastalo od dva drveta na opisani način. Drvo strelice u* ***ND*** *se u tome razlikuje. U sistemu* ***ND*** *mi imamo operaciju nad strelicama, nadovezivanje, koja će odgovarati opisanom postupku i tom operacijom će i u termu i u drvetu strelice biti zabeleženo " vezivanje" dva terma, dve strelice.*

Sada ćemo definisti Pravicov oblik nekog terma sistema ***ND***. Grubo rečeno, Pravicov oblik terma dobijamo kada u tom termu zanemarimo nadovezivanja.

DEFINICIJA: Neka je $f{:}\Gamma\vdash B$ jedna strelica sistema ***ND***. **Pravicov oblik terma** f dobijamo ako svaki podterm terma f koji je oblika $(1_{[A]}/h)g$ zamenimo sa termom formiranim na sledeći način: svaku jedinicu $1_A{:}A\vdash A$, čiji indeks počinje sa $_{A_i}$, $A_{A_i}\in[A]$ zamenimo termom h_{A_i}, gde je h_{A_i} term h u kome su sve jedinice na svoj postojeći indeks dobile dodatak $_{A_i}$.

<u>Oznaka</u>: $\Pi(f)$.

Neka je $\Pi(h)$ Pravicov oblk terma h i $\Pi(f)$ Pravicov oblk terma f. Neka se u $\Pi(h)$ i $\Pi(f)$ pojavljuju iste operacije uvođenja i eliminisanja i to istim redom; između indeksa jedinica koje se pojavljuju u odgovarajućim operacijama postoji bijekcija. Onda su $\Pi(h)$ i $\Pi(f)$ jednaki.

<u>Oznaka:</u> $\Pi(h)\equiv\Pi(f)$.

KOMENTAR: *Za neki term f tipa* $f{:}\Gamma\vdash B$ *sistema* ***ND***, *njegov Pravicov oblik,* $\Pi(f)$, *odgovara drvetu izvoda u sistemu prirodne dedukcije, kome su pretpostavke formule iz* Γ, *a čiji je zaključak formula B. Operacije koje se pojavljuju u njemu su zapisane u* $\Pi(f)$. *Posmatrajući* $\Pi(f)$, *a ne sam term f gubi se jedina razlika između drveta* $T(f)$ *i drveta izvoda u sistemu prirodne dedukcije: ne vodi se računa o nadovezivanju dva izvoda. U* $\Pi(f)$ *se gubi informacija gde je neko drvo sa krajem A dodato na drvo sa pretpostavkom A i na taj način dobijeno novo drvo. Zanemarujući nadovezivanja u termu f, definisanjem* $\Pi(f)$, *dobijamo onoliko informacija o formiranju tog terma koliko je to potrebno gledajući sa stanovišta sistema prirodne dedukcije.*

DEFINICIJA: Neka su $f,\ g{:}\Gamma\vdash B$ dve strelice sistema ***ND***. Ako važi $\Pi(h)\equiv\Pi(f)$ onda kažemo da su termi f i g **Π- identični termi,** $f=_\Pi g$.

Svi Π-identični termi imaju među sobom jedan koji nema nadovezivanja, već je nastao pravljenjem drveta odozgo na dole, to je f^Π.

LEMA: Za svaki term $f{:}\Gamma\vdash A$ iz sistema ***ND*** postoji term f^Π istog tipa, koji nema operaciju nadovezivanja i za koji važi $f=_\Pi f^\Pi$.

DOKAZ:

Neka se u termu f pojavljuje k nadovezivanja.

Neka je $f=O((1_{[C]}/h_1)g_1)$ i termi h_1, g_1 nemaju nadovezivanja.

$f_1=O(g_2)$, g_2 dobijen tako što umesto svake 1_C od $1_{[C]}$ u g_1 piše term h_1, $g_2=_\Pi(1_{[C]}/h_1)g_1$, znači $f=_\Pi f_1$.

•

•

•

$f=_\Pi f_1=_\Pi f_2=_\Pi f_3=_\Pi\ldots=_\Pi f_k$, term f_k nema nadovezivanja, znači $f_k\equiv f^\Pi$.

Jedinstvenost: neka su f_1 i f_2 termi takvi da $f=_\Pi f_1=_\Pi f_2$ i f_1, f_2 nemaju nadovezivanja. Pošto su Π- identični oni se razlikuju samo po broju i redosledu nadovezivanja, kojih nemaju.

Znači $f_1\equiv f_2\equiv f^\Pi$. **q. e. d.**

DEFINICIJA: Za svaki term $f{:}\Gamma\vdash A$ iz sistema ***ND*** posmatraćemo klasu Π-identičnih terama $[f^{\Pi}]=\{g$ term iz ***ND***: $g=_{\Pi}f\}$, a term f^{Π} ćemo zvati **Pravicov term klase** $[f^{\Pi}]$.

KOMENTAR: Ako posmatramo sistem ***ND****, kao sistem koji odgovara sistemu prirodne dedukcije onda ćemo raditi sa klasama* Π*-identičnih terama. S druge strane ako želimo da vidimo vezu* ***ND*** *i sistema iz lanca koji vodi ka Gencenovom sistemu sekvenata onda ćemo razlikovati terme u okviru tih klasa.*

DEFINICIJA: ***ND*** je sistem ***ND*** u kome važe RM-redukcije nad termima:

(I) Redukcija zaobilaska, **R-MF redukcije:**

R-MF$\wedge$*1.*		$\pi(\{f,g\})\hookrightarrow_R f,$	za $f{:}\Gamma\vdash A,\ \ g{:}\Delta\vdash B.$
R-MF$\wedge$*2.*		$\pi'(\{f,g\})\hookrightarrow_R g,$	za $f{:}\Gamma\vdash A,\ \ g{:}\Delta\vdash B.$
R-MF$\vee$*1.*		$\delta(_{\kappa}h,f,g)\hookrightarrow_R (1_{[A]}/h)f,$	za $h{:}\Gamma\vdash A\ f{:}[A]\Delta\vdash C\ \ g{:}[B]\Lambda\vdash C.$
	specijalno	$\delta_{0A}(_{\kappa}h,f,g)\hookrightarrow_R f,$	za $h{:}\Gamma\vdash A,\ \ f{:}\Delta\vdash C,\ \ g{:}[B]\Lambda\vdash C.$
R-MF$\vee$*2.*		$\delta(_{\kappa'}h,f,g)\hookrightarrow_R (1_{[B]}/h)g,$	za $h{:}\Gamma\vdash B,\ \ f{:}[A]\Delta\vdash C,\ \ g{:}[B]\Lambda\vdash C.$
	specijalno	$\delta_{0B}(_{\kappa'}h,f,g)\hookrightarrow_R g,$	za $h{:}\Gamma\vdash B,\ \ f{:}[A]\Delta\vdash C,\ \ g{:}\Lambda\vdash C.$
R-MF$\Rightarrow$*.*		$\iota(\lambda h,f)\hookrightarrow_R (1_{[A]}/f)h,$	za $h{:}\ [A]\Gamma\vdash B,\ \ f{:}\Delta\vdash A.$
	specijalno	$\iota(\lambda_0 h,f)\hookrightarrow_R h,$	za $h{:}\Gamma\vdash B,\ \ f{:}\Delta\vdash A.$

(II) Redukcija zaobilaska, **R-MS redukcije**:

R-MS$\wedge$*1.* $\pi(\delta(h,f,g))\hookrightarrow_R \delta(h,\pi f,\pi g)$ za $h{:}\Gamma\vdash A\vee B, f{:}[A]\Delta\vdash C\wedge D,\ g{:}[B]\Lambda\vdash C\wedge D.$

R-MS$\wedge$*2.* $\pi'(\delta(h,f,g))\hookrightarrow_R \delta(h,\pi' f,\pi' g)$ za $h{:}\Gamma\vdash A\vee B, f{:}[A]\Delta\vdash C\wedge D,\ g{:}[B]\Lambda\vdash C\wedge D.$

R-MS$\vee$*.* $\delta(\delta(h,f,g),h_1,h_2)\hookrightarrow_R \delta(h,\delta(f,h_1,h_2),\delta(g,h_1,h_2))$
za $h{:}\Gamma\vdash A\vee B,\ f{:}[A]\Delta\vdash C\vee D,\ g{:}[B]\Lambda\vdash C\vee D,\ h_1{:}[C]\Theta\vdash E,\ h_2{:}[D]\Phi\vdash E.$

R-MS$\Rightarrow$*.* $\iota(\delta(h,f,g),h_1)\hookrightarrow_R \delta(h,\iota(f,h_1),\iota(g,h_1))$
za $h{:}\Gamma\vdash A\vee B,\ f{:}[A]\Delta\vdash C\Rightarrow D,\ g{:}[B]\Lambda\vdash C\Rightarrow D,\ h_1{:}\Theta\vdash C.$

Redukcije R-MF će odgovarati redukcijama u sistemu prirodne dedukcije za eliminaciju maksimalne formule, a redukcije R-MS redukcijama za eliminaciju maksimalnog segmenta.

DEFINICIJA: Neka je f term tipa $\Gamma\vdash A$ iz ***ND*** i neka je h podterm terma f, $f=O(h)$, gde je O niz operacija. Ako je h^R term koji se od terma h dobija izostavljanjem nekih operacija, onda je O^R jedan niz operacija dobijen od O na sledeći način:

(i) izostavljanjem nadovezivanja koja se odnose na jedinice kojih nema u h^R;

(ii) zamenjivanjem operacija δ i λ vezanih za jedinice kojih nema u h^R sa operacijama δ_{0A} (δ_{0B} ili δ_{0AB}), λ_0.

Za neki niz opercija O može postojati više O^R nizova koji se međusobno razlikuju po broju i mestu pojavljivanja operacija nadovezivanja.

DEFINICIJA: Neka je f term tipa $\Gamma\vdash A$ iz ***ND***.

1. Ako term f nema nadovezivanja.

   Neka postoji podterm h terma f koji ima oblik leve strane jedne od RM-redukcija i $f=O(h)$, gde je O niz operacija.

   Neka je g term oblika $O^R(h^R)$ gde je h^R Pravicov term desne stane iste redukcije.

   Onda se term f **1-RM redukuje** na term g.

2. Ako term f ima nadovezivanja.

Neka postoji podterm h terma f, $f=O(h)$ koji je Π-identičan sa Pravicovim termom h_1, gde je h_1 leva strana neke RM-redukcije.

Neka je g term oblika $O^R(h_1^R)$, gde je h_1^R desna strana te redukcije.

Onda se term f **1-RM redukuje** na term g.

Term h je **nosilac redukcije**. Ako je potrebno naglasiti da li se radi o R-MF ili R-MS redukciji reći ćemo da se f **1-RMF (1-RMS) redukuje** na g.

Oznaka: $f \hookrightarrow_{1\text{-}RM} g$.

DEFINICIJA: Neka su f, g termi iz $\mathcal{ND}$. Ako postoji prirodan broj m i termi $h_1, h_2, \ldots, h_m$ iz $\mathcal{ND}$ takvi da

$$f \equiv h_1 \hookrightarrow_{1\text{-}RM} h_2 \hookrightarrow_{1\text{-}RM} \ldots \hookrightarrow_{1\text{-}RM} h_m \equiv g,$$

tada kažemo da se term f **RM-redukuje** na term g.

Oznaka: $f \hookrightarrow_{RM} g$.

LEMA 1: Neka je f term iz $\mathcal{ND}$.

Postoji term g takav da $f \hookrightarrow_{1\text{-}RM} g$ akko za svaki $f_1 \in [f^\Pi]$ postoji $g_1 \in [g^\Pi]$, tako da važi $f_1 \hookrightarrow_{1\text{-}RM} g_1$.

DOKAZ:

$\Leftarrow$: Jednostavno: $f' \in [f^\Pi]$, $g' \in [g^\Pi]$.

Znači: $f' \hookrightarrow_{1\text{-}RM} g'$.

$\Rightarrow$: $f_1 \in [f^\Pi]$, $\Pi(f)=\Pi(f_1)$; $g_1 \in [g^\Pi]$, $\Pi(g)=\Pi(g_1)$.

Ako $f' \hookrightarrow_{1\text{-}RM} g'$: term f i term f_1 se razlikuju samo

1. po mestu pojavljivanja nekih nadovezivanja <u>ili</u>
2. da jedan od njih ima neka nadovezivanje a drugi ne.

<u>Ako</u> se ta nadovezivanja ne odnose na nosioca redukcije, <u>onda</u> $f_1 \hookrightarrow_{1\text{-}RM} g$.

<u>Ako</u> se ta nadovezivanja odnose na nosioca redukcije,

<u>onda</u> na osnovu definicije o redukcijama 2. postoji podterm h terma f', $f'=O(h)$ i njemu Π-identičan Pravicov term je h_1, gde je h_1 leva strana neke RM-redukcije.

Onda: g' je term oblika $O^R(h_1^R)$, gde je h_1^R desna strana ista redukcije i

$$f_1 =_\Pi O(h) \text{ i } f_1 \hookrightarrow_{1\text{-}RM} g_1,\ g_1 =_\Pi g'.$$

Znači $g_1 \in [g^\Pi]$. **q. e. d.**

LEMA 2: Neka je f term tipa $\Gamma_1 \vdash A$ i g term tipa $\Gamma_2 \vdash A$ iz $\mathcal{ND}$. Tada

1. $f^\Pi \hookrightarrow_{1\text{-}RMF} g^\Pi$ akko $\forall f' \in [f^\Pi]$ $\exists g' \in [g^\Pi]$ $f' \hookrightarrow_{1\text{-}RMF} g'$.
2. $f^\Pi \hookrightarrow_{1\text{-}RMS} g^\Pi$ akko $\forall f' \in [f^\Pi]$ $\exists g' \in [g^\Pi]$ $f' \hookrightarrow_{1\text{-}RMS} g'$.

DOKAZ:

1. i 2. $\Rightarrow$ lako se pokaže na osnovu leme 1 $\Rightarrow$ i činjenice da $f^\Pi \in [f^\Pi]$ i $g^\Pi \in [g^\Pi]$.

1.$\Leftarrow$: $f^\Pi \in [f^\Pi]$, onda postoji g_1 takav da $f^\Pi \hookrightarrow_{1\text{-}RMF} g_1$.

Na osnovu definicije $\hookrightarrow_{1\text{-}RMF}$ imamo $f^\Pi = O(h)$, gde je O niz operacija u kome nema nadovezivanja.

(i) Term h može biti oblika leve strane neke *R-MF* redukcije:

ili $\pi\{h_1, h_2\}$ ili $\pi'\{h_1, h_2\}$ ili $\delta({}_\kappa h_1, h_2, h_3)$ ili $\delta({}_\kappa h_1, h_2, h_3)$ ili $\iota(\lambda h_1, h_2)$;

$g_1 = O'(h'^\Pi)$, gde je O' jedan O^R, znači nema nadovezivanja i term h' je oblika

ili h_1 ili h_2 ili $(1_A/h_1)h_2$ ili $(1_B/h_1)h_3$ ili $(1_A/h_2)h_1$.

(ii) Term h ne može imati drugi oblik jer term f^Π nema nadovezivanja.

Znači: $f^{\Pi} \hookrightarrow_{1\text{-}RMF} g^{\Pi}$.

2.$\Leftarrow$: $f^{\Pi} \in [f^{\Pi}]$, onda postoji g_1 takav da $f^{\Pi} \hookrightarrow_{1\text{-}RMS} g_1$.

Na osnovu definicije $\hookrightarrow_{1\text{-}RMS}$ imamo $f^{\Pi}=O(h)$, gde je O niz operacija u kome nema nadovezivanja.

(i) Term h može biti oblika leve strane neke $R\text{-}MS$ redukcije:

ili $\pi\delta(h_1, h_2, h_3)$ ili $\pi'\delta(h_1, h_2, h_3)$ ili $\delta(\delta(h_1, h_2, h_3), h_4, h_5)$ ili $\iota(\delta(h_1, h_2, h_3), h_4)$; $g_1=O'(h'^{\Pi})$, gde je O' jedan O^R, znači nema nadovezivanja i term h' je oblika ili $\delta(h_1, \pi h_2, \pi h_3)$ ili $\delta(h_1, \pi' h_2, \pi' h_3)$ ili $\delta(h_1, \delta(h_2, h_4, h_5)\ \delta(h_3, h_4, h_5))$ ili $\delta(h_1, \iota(h_2, h_4), \iota(h_3, h_4))$.

(ii) Term h ne može imati drugi oblik jer term f^{Π} nema nadovezivanja.

Znači: $f^{\Pi} \hookrightarrow_{1\text{-}RMS} g^{\Pi}$. **q. e. d.**

3. SISTEM $\mathcal{N}$, MODIFIKOVAN SISTEM PRIRODNE DEDUKCIJE

KOMENTAR: Jedna velika razlika između sistema prirodne dedukcije i Gencenovog sistema sekvenata je da Gencenov sistem sekvenata ima, a sistem prirodne dedukcije nema strukturna pravila. Druga razlika, koja ne izgleda suštinska je da sistem prirodne dedukcije pretstavlja desni sistem a sistem sekvenata levo-desni sistem.

Na prvom koraku od sistema $\mathcal{ND}$, koji odgovara sistemu prirodne dedukcije, ka nekom sistemu koji odgovara Gencenovom sistemu sekvenata nalazi se sistem $\mathcal{N}$. Sistem $\mathcal{N}$ ima dve važne novine u odnosu na sistem $\mathcal{ND}$: ima strukturna pravila; operacije nad strelicama koje odgovaraju pravilima eliminacije veznika su po svom obliku uniformisane. Grubo rečeno, operacije eliminacije veznika $\wedge$, $\Rightarrow$ su istog tipa (što do sada nije bio slučaj) kao operacija eliminisanja $\vee$.

KOMENTAR: Videćemo da neki problemi, koji su navedeni kao problemi sa disjunkcijom (Cuker, Potinger) ustvari su povezani sa oblikom operacije eliminacije disjunkcije.

DEFINICIJA: Sistem $\mathcal{N}$ je $\mathcal{N}$-deduktivni sistem slobodno generisan nekim beskonačnim skupom objekata nad kojima postoje tri operacije: $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$. Strelice ovog sistema ćemo induktivno dobiti od jediničnih strelica pomoću operacija nad strelicama koje ćemo definisati.

Za stelicu $f{:}\Gamma\vdash A$ iz sistema $\mathcal{N}$, kada to bude potrebno, razlikovaćemo podvučene i obične jedinice terma f odnosno $T(f)$. Tako razlikovanim jedinicama odgovaraće podvučene i obične formule u tipu $\Gamma \vdash A$, tačnije u multiskupu Γ. Obične jedinice ćemo označavati sa $1_A{:}A \vdash A$, a podvučene $\_1_A{:}\_A \vdash A$, pa će podvučene formule u Γ biti označene sa $\_A$, $\_B$, $\_C$... Za strelicu $f{:}\Gamma \vdash A$ sve podvučene formule iz Γ označavaćemo sa $u(\Gamma)$ ili $u(f)$.

Definišemo operacije nad strelicama:

<u>Operacije zamene.</u>

<u>nova pretpostavka</u>:

$$\frac{\_1_{A_i}{:}\ \_A_{A_i} \vdash A \qquad f{:}\Gamma \vdash B}{(\_/1_{A_i})f{:}\ \_A_{A_i}\Gamma \vdash B,} \qquad A_i \notin \operatorname{ind}(\Gamma).$$

sjedinjavanje:

$$\frac{f{:}\Gamma A_{A_i} A_{A_j}\Delta \vdash B}{(1_{A_i}1_{A_j}/\,1_{A_k})f{:}\Gamma A_{A_k}\Delta \vdash B,} \qquad A_k \notin \mathrm{ind}(\Gamma A_{A_i} A_{A_j}\Delta).$$

(i) $1_{A_i}, 1_{A_j}$ nisu podvučene jedinice:
onda A_{A_k} obična formula, $\mathrm{u}(\Gamma A_{A_k}\Delta)=\mathrm{u}(\Gamma A_{A_i} A_{A_j}\Delta)$.
(ii) jedna od 1_{A_i}, 1_{A_j}, na primer 1_{A_i}, je podvučena jedinica:
onda A_{A_k} obična formula, $\mathrm{u}(\Gamma A_{A_k}\Delta)=\mathrm{u}(\Gamma A_{A_i} A_{A_j}\Delta)\setminus\{A_{A_i}\}$.
(iii) obe jedinice 1_{A_i} i 1_{A_j} su podvučene:
onda A_{A_k} podvučena formula $\mathrm{u}(\Gamma A_{A_k}\Delta)=(\mathrm{u}(\Gamma A_{A_i} A_{A_j}\Delta)\setminus\{A_{A_i}, A_{A_j}\})\cup\{A_{A_k}\}$.

nadovezivanje:

$$\frac{f{:}\Gamma \vdash A \quad g{:}\Delta A_{A_i}\Lambda \vdash B}{(1_{A_i}/f)\, g{:}\Gamma\Delta\Lambda \vdash B}$$

$\mathrm{ind}(\Gamma)\cap \mathrm{ind}(\Delta A_{A_i}\Lambda)=\varnothing$.
(i) A_{A_i} nije podvučena formula:
$\mathrm{u}(\Gamma\Delta\Lambda)=\mathrm{u}(\Gamma)\cup \mathrm{u}(\Delta\Lambda)$
(ii) A_{A_i} podvučena formula:
$\mathrm{u}(\Gamma\Delta\Lambda)= \mathrm{u}(\Delta\Lambda)\cup\{D_{D_1},\ldots,D_{D_m}\}$, za $D_{D_1}\ldots D_{D_m}\equiv \Gamma$.

Operacije veznika.
U definicijama operacija koje slede nećemo pisati indekse uz formule koje izdvajamo u nekim tipovima. Podrazumevaćemo da tačno znamo koju formulu od $A_{A_1}\ldots A_{A_k}$ iz na primer $\Delta AB\Lambda$ pretstavlja istaknuta formula A.

$NE\wedge$.
$$\frac{f{:}\Gamma \vdash A\wedge B \quad g{:}\Delta AB\Lambda \vdash C}{f'g{:}\Gamma\Delta\Lambda \vdash C}$$
$\mathrm{ind}(\Gamma)\cap\mathrm{ind}(\Delta AB\Lambda)=\varnothing$,
$\mathrm{u}(f'g)=\mathrm{u}(\Gamma)\cup \mathrm{u}(\Delta\Lambda)$.

$NI\wedge$.
$$\frac{f{:}\Gamma \vdash A \quad g{:}\Delta \vdash B}{\{f, g\}{:}\Gamma\Delta \vdash A\wedge B}$$
$\mathrm{ind}(\Gamma)\cap\mathrm{ind}(\Delta)=\varnothing$,
$\mathrm{u}(\{f, g\})=\mathrm{u}(f)\cup \mathrm{u}(g)$.

$NE\vee$.
$$\frac{h{:}\Gamma \vdash A\vee B \quad f{:}\Theta A\Delta \vdash C \quad g{:}\Phi B\Lambda \vdash C}{\mathbf{d}(h, f, g){:}\Gamma\Theta\Phi\Delta\Lambda \vdash C}$$
$\mathrm{ind}(\Gamma)$, $\mathrm{ind}(\Delta\Theta)$, $\mathrm{ind}(\Lambda\Phi)$ disjunktni skupovi,
$\mathrm{u}(\mathbf{d}(h, f, g))=\mathrm{u}(\Gamma)\cup \mathrm{u}(\Delta\Theta)\cup \mathrm{u}(\Lambda\Phi)$.

$NI\vee$.
$$\frac{f{:}\Gamma \vdash A}{{}_{\kappa}f{:}\Gamma \vdash A\vee B} \qquad \frac{f{:}\Gamma \vdash B}{{}_{\kappa'}f{:}\Gamma \vdash A\vee B}$$

$NE\Rightarrow$.
$$\frac{h{:}\Gamma \vdash A\Rightarrow B \quad f{:}\Delta \vdash A \quad g{:}\Theta B\Lambda \vdash C}{\mathbf{I}(h, f, g){:}\Gamma\Theta\Delta\Lambda \vdash C}$$
$\mathrm{ind}(\Gamma)$, $\mathrm{ind}(\Delta)$, $\mathrm{ind}(\Lambda\Theta)$ disjunktni skupovi,
$\mathrm{u}(\mathbf{I}(h, f, g))=\mathrm{u}(\Gamma)\cup \mathrm{u}(\Delta)\cup \mathrm{u}(\Lambda\Theta)$.

$NI\Rightarrow$.
$$\frac{f{:}A\Gamma \vdash B}{f^{*}{:}\Gamma \vdash A\Rightarrow B}$$

Operacije $NE\wedge$, $NE\vee$, $NE\Rightarrow$ su **operacije eliminacije**.
Operacije $NI\wedge$, $NI\vee$, $NI\Rightarrow$ su **operacije uvođenja**.
Često ćemo koristiti kraće oznake za nizove nekih operacija zamene.

1. Sa $(\_/1_\Delta)$ ćemo označavati niz novih pretpostavki $(\_/1_{B_i})\ldots(\_/1_{D_k})$, gde je $\Delta=B_{B_i}\ldots D_{D_k}$.

2. Niz sjedinjavanja $(1_{B_i} 1_{B_j}/1_{B_m})\ldots(1_{C_k} 1_{C_l}/1_{C_n})$ ćemo označavati $(1_\Delta 1_\Delta/1_\Delta)$, gde će jedno Δ biti $B_{B_j}\ldots C_{C_k}$ drugo $B_{B_i}\ldots C_{C_l}$ a treće $B_{B_m}\ldots C_{C_n}$.
3. niz nadovezivanja $(1_{B_i}/g)\ldots(1_{B_k}/g)$ ćemo označavati sa $(1_B/g)\ldots$

DEFINICIJA: Neka je f term sistema $\mathcal{N}$. Za dve operacije sjedinjavanja $(1_{B_i} 1_{B_j}/1_{B_m})$, $(1_{B_k} 1_{B_l}/1_{B_n})$ iz terma f kažemo da su **povezana** akko važi jedna od sledećih mogućnosti: $1_{B_m} \equiv 1_{B_k}$, $1_{B_m} \equiv 1_{B_l}$, $1_{B_n} \equiv 1_{B_i}$, $1_{B_n} \equiv 1_{B_j}$.

Ta dva sjedinjavanja čine **niz sjedinjavanja** terma f, dužine 2. Pretpostavimo da imamo niz sjedinjavanja terma f dužine n i neko sjedinjavanje je povezano sa poslednjim (ili prvim) članom niza, onda dodavanjem tog sjedinjavanja nizu dobijamo niz sjedinjavanja dužine $n+1$. Za neke dve **jedinice** koje se pojavljuju u tom nizu reći ćemo da su **povezane tim nizom**.

Ako su sve jedinice u nekom nizu sjedinjavanja podvučene onda je to **T-niz sjedinjavanja.**

DEFINICIJA: U operacijama $NE\wedge$ i $NE\vee$ sve jedinice koje su nekim nizom sjedinjavanja povezane sa jedinicama istaknutih formula A **i** B su **nosioci oslobođenih pretpostavki** redom operacija ', **d**, a formule koje se nalazu u tipu tih jedinica sa desne strane $\vdash$ su **oslobođene pretpostavke (o. p.)** navedenih operacija. U operacijama $NI\Rightarrow$, nadovezivanju ($NE\Rightarrow$) sve jedinice koje su nekim nizom sjedinjavanja povezane sa jedinicama istaknute formula A (B) sa leve strane $\vdash$ su **nosioci oslobođenih pretpostavki** redom operacija *****, nadovezivanja **(I)**, a formule koje se nalazu u tipu tih jedinica sa desne strane $\vdash$ su **oslobođene pretpostavke (o. p.)** navedenih operacija. Ako su **oslobođene pretpostavke** podvučene formule onda govorimo o **fiktivnim oslobođenim petpostavkama (f. o. p.).**

KOMENTAR: Pošto nam sistem $\mathcal{N}$ pretstavlja vezu između sistema $\mathcal{ND}$ i $\mathcal{G}'$ u njemu ćemo terme ujednačavati na sledeći način: zanemarićemo redosled sjedinjavanja i novih pretpostavki; redosled i broj nadovezivanja. Za sve terme koji su istog tipa i razlikuju se samo po tome reći ćemo da imaju isti prirodan oblik, u smislu da su razlike koje postoje između njih prirodnodedukcijski nebitne.

DEFINICIJA: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ sistema $\mathcal{N}$. **Prirodni oblik terma** f, $N(f)$, definisaćemo na sledeći način:
1. $f=1_A{:}A_{A_i} \vdash A$, $N(f)=1_A$.
2. $f=O(h\,(,g,g_1))$, gde je O neka operacija veznika.
Onda $N(f)=O(N(h)(,N(g),N(g_1)))$.
3. $f=(\_/1_{B_i})h$, $h{:}\Gamma \vdash A$.
Onda $N(f)=N(h)(\_1_{B_i})$.
4. $f=(1_{A_i} 1_{A_j}/1_{A_k})h$, $h{:}\Gamma A_{A_i} A_{A_j} \Delta \vdash B$
(i) 1_{A_i}, 1_{A_j} nisu podvučene jedinice:
$N(f)$ se dobija kada se u svim jedinicama u $N(h)$ čiji indeks počinje sa $_{A_i}$ i $_{A_j}$ taj početak zameni sa $_{A_k}$.
(ii) jedna od 1_{A_i}, 1_{A_j}, na primer 1_{A_i}, je podvučena jedinica:
$N(f)$ se dobija kada se u $N(h)$ izostave sve podvučene jedinice čiji indeks počinje sa $_{A_i}$ i svim jedinicama u $N(h)$ čiji indeks počinje sa $_{A_j}$ taj početak zameni sa $_{A_k}$.
(iii) 1_{A_i}, 1_{A_j} su podvučene jedinice:
$N(f)$ se dobija kada se iz $N(h)$ izostave sve podvučene jedinice čiji indeks počinje sa $_{A_i}$ i $_{A_j}$ a doda $\_1_{A_k}$.
5. $f=(1_{A_i}/h)g$, $h{:}\Gamma \vdash A$, $g{:}\Delta A_{A_i} \Lambda \vdash B$

(i) 1_{A_i} nije podvučena jedinica:

$N(f)$ se dobija kada se sve jedinice $N(g)$ čiji indeks, J, počinje sa A_i zamene sa $N(h)_J$, koji se dobija kada se svim jedinicama iz $N(h)$ na indeks doda J.

(ii) 1_{A_i} podvučena jedinica:

$N(f)$ se dobija kada se sve podvučene jedinice u $N(g)$ čiji indeks, J, počinje sa A_i zamene podvučenim jedinicama $\_1_{D_1 J} \ldots \_1_{D_m J}$ za $D_{D_1} \ldots D_{D_m} \equiv \Gamma$.

U indeksu neke jedinice iz $N(h)$ **početak indeksa** je prva indeksirana reč.

Primer: početak indeksa jedinice $1_{A_i B_k C_m}$ je A_i.

DEFINICIJA: Neka su f i g termi istog tipa iz sistema $\mathcal{N}$. Ako se u prirodnim oblicima $N(f)$, $N(g)$ pojavljuju istim redom iste operacije za veznike; između početaka indeksa jedinica koje se pojavljuju u odgovarajućim operacijama postoji bijekcija; između početaka indeksa podvučenih jedinica koje se pojavljuju u $N(f)$, $N(g)$ postoji bijekcija, ali možda se u tim prirodnim oblicima odgovarajuće podvučene jedinice ne javljaju istim redosledom. Onda ćemo reći da $N(f) \equiv N(g)$, odnosno **prirodni oblici** $N(f)$ i $N(g)$ **su jednaki**.

Primer: $f=(1_{A_1}/(\_/1_{D_5})1_{A_7})((\_/1_{C_3})1_{A_1})\wedge 1_{B_2}$, $g=(\_/1_{D_8})(\_/1_{C_3})1_{A_2}\wedge 1_{B_5}$

$N(f)= (1_{A_7 A_1}(\_1_{D_5 A_1})(\_1_{C_3 A_1}))\wedge 1_{B_2}$, $N(g)= (1_{A_2}\wedge 1_{B_5})(\_1_{D_5 A_1})(\_1_{C_3 A_1})$ i $N(f) \equiv N(g)$.

DEFINICIJA: Neka su f i g dva terma tipa $\Gamma \vdash A$ sistema $\mathcal{N}$. Ako važi $N(f) \equiv N(g)$ onda kažemo da su f, g **prirodno jednaki termi**.

Oznaka: $f=_{ND} g$.

U $\mathcal{ND}$ termi su povezani redukcijama. U sistemu $\mathcal{N}$ izjednačićemo neke terme. Važno je primetiti da će termi koji se izjednačavaju biti istog tipa (što nije bio slučaj kod redukcija u $\mathcal{ND}$).

Još se nešto značajno pojavljuje u sistemu $\mathcal{N}$. Sam oblik operacija eliminisanja veznika stvara prirodnodedukcijski problem maksimalnog segmenta sa operacijama eliminisanja svih veznika, a ne samo veznika $\vee$. Za rešavanje toga će nam trebati nove jednakosti: $NMS\wedge$, $NMS\Rightarrow$. Na taj način u odnosu na redukcije iz $\mathcal{ND}$, koje nam pomažu u normalizaciji terma, sistemu $\mathcal{N}$ potrebno je više jednakosti da bi se omogućila normalizacija.

DEFINICIJA: $\mathcal{N}$ je sistem $\mathcal{N}$ u kome važe **NM jednakosti** nad termima:

1. Jednakosti maksimalne formule, **NMF jednakosti**:

$NMF\wedge$. $\{f, g\}'h = (1_B/g)(1_A/f)h$, za $f:\Gamma \vdash A$, $g:\Delta \vdash B$, $h:\Theta AB\Lambda \vdash C$.

$NMF\vee 1$. $\mathbf{d}(_\kappa h, f, g) = (\_/1_\Lambda)(1_A/h)f$ za $h:\Gamma \vdash A$, $f:A\Delta \vdash C$, $g:B\Lambda \vdash C$.

$NMF\vee 2$. $\mathbf{d}(_{\kappa'} h, f, g) = (\_/1_\Delta)(1_B/h)g$ za $h:\Gamma \vdash B$, $f:A\Delta \vdash C$, $g:B\Lambda \vdash C$.

$NMF\Rightarrow$. $\mathbf{I}(h^*, f, g) = (1_B/(1_A/f)h)g$ za $h:A\Gamma \vdash B$, $f:\Delta \vdash A$, $g:B\Lambda \vdash C$.

Posebno ako je u $NMF\wedge$ term h tipa $\Theta\_A\_B\Lambda \vdash C$ i u $NMF\Rightarrow$ term g tipa $\_B\Lambda \vdash C$ onda su to **slabe NMF jednakosti**.

2. Jednakosti maksimalnog segmenta, **NMS jednakosti**:

$NMS\wedge 1$. $(h'f)'g = h'(f'g)$, za $h:\Gamma \vdash A\wedge B$, $f:AB\Delta \vdash C\wedge D$, $g:CD\Lambda \vdash E$.

$NMS\wedge 2$. $\mathbf{d}(h'f, g_1, g_2)=h'\mathbf{d}(f, g_1, g_2)$, za $h:\Gamma \vdash A\wedge B$, $f:AB\Delta \vdash C\vee D$, $g_1:C\Lambda \vdash E$, $g_2:D\Theta \vdash E$.

$NMS\wedge 3$. $\mathbf{I}(h'f, g_1, g_2) = h'\mathbf{I}(f, g_1, g_2)$, za $h:\Gamma \vdash A\wedge B$, $f:AB\Delta \vdash C\Rightarrow D$, $g_1:\Lambda \vdash C$, $g_2:D\Theta \vdash E$.

$NMS\vee 1$. $\mathbf{d}(h, g_1, g_2)'f= (1_\Theta 1_\Theta/1_\Theta)\ \mathbf{d}(h, g_1'f, g_2'f)$, za $h{:}\Gamma\vdash A\vee B,\;\; g_1{:}A\Delta\vdash C\wedge D,\;\; g_2{:}B\Lambda\vdash C\wedge D,\;\; f{:}CD\Theta\vdash E.$

NMS$\vee$*2.* $\mathbf{d}(\mathbf{d}(h, g_1, g_2), f_1, f_2)=(1_{\Theta_1\Theta_2}, 1_{\Theta_1\Theta_2}/1_{\Theta_1\Theta_2})\,\mathbf{d}(h, \mathbf{d}(g_1, f_1, f_2), \mathbf{d}(g_2, f_1, f_2)),$

za $h{:}\Gamma\vdash A\vee B,\;\; g_1{:}A\Delta\vdash C\vee D,\;\; g_2{:}B\Lambda\vdash C\vee D,\;\; f_1{:}C\Theta_1\vdash E,\;\; f_2{:}D\Theta_2\vdash E.$

NMS$\vee$*3.* $\mathbf{I}(\mathbf{d}(h, g_1, g_2), f_1, f_2)=(1_{\Theta_1\Theta_2}, 1_{\Theta_1\Theta_2}/1_{\Theta_1\Theta_2})\,\mathbf{d}(h, \mathbf{I}(g_1, f_1, f_2), \mathbf{I}(g_2, f_1, f_2)),$

za $h{:}\Gamma\vdash A\vee B,\;\; g_1{:}A\Delta\vdash C\Rightarrow D,\;\; g_2{:}B\Lambda\vdash C\Rightarrow D,\;\; f_1{:}\Theta_1\vdash C,\;\; f_2{:}D\Theta_2\vdash E.$

NMS$\Rightarrow$*1.* $\mathbf{I}(h, g_1, g_2)'f=\mathbf{I}(h, g_1, g_2'f),$

za $h{:}\Gamma\vdash A\Rightarrow B,\;\; g_1{:}\Delta\vdash A,\;\; g_2{:}B\Lambda\vdash C\wedge D,\;\; f{:}CD\Theta\vdash E.$

NMS$\Rightarrow$*2.* $\mathrm{d}(\mathbf{I}(h, g_1, g_2), f_1, f_2)= \mathbf{I}(h, g_1, \mathbf{d}(g_2, f_1, f_2)),$

za $h{:}\Gamma\vdash A\Rightarrow B,\;\; g_1{:}\Delta\vdash A,\;\; g_2{:}B\Lambda\vdash C\vee D,\;\; f_1{:}C\Theta_1\vdash E,\;\; f_2{:}D\Theta_2\vdash E.$

NMS$\Rightarrow$*3.* $\mathbf{I}(\mathbf{I}(h, g_1, g_2), f_1, f_2)= \mathbf{I}(h, g_1, \mathbf{I}(g_2, f_1, f_2)),$

za $h{:}\Gamma\vdash A\Rightarrow B,\;\; g_1{:}\Delta\vdash A,\;\; g_2{:}B\Lambda\vdash C\Rightarrow D,\;\; f_1{:}\Theta_1\vdash C,\;\; f_2{:}D\Theta_2\vdash E.$

Istaknute operacije u termu sa leve strane jednakosti (na primer u *NMS*$\vee$*3.* **I**, d) su **važne operacije** te jednakosti. Zvaćemo ih **prva i druga** po redosledu kako se pojavljuju u tom termu.

KOMENTAR: Kako navedene jednakosti oslikavaju korake pri normalizaciji nekog terma, a normalizacija je karakteristika prirodne dedukcije, prelaz sa jednog terma na drugi term će biti "grub" posmatrajući sa stanovišta Gencenovog sistema sekvenata, ali dovoljno "fin" sa prirodnodedukcijskog stanovišta.

Od terma sa nekim podtermom, koji ima isti prirodan oblik kao leva strana neke od navedenih jednakosti prelazi se na proizvoljan term, koji ima podterm prirodnog oblika kao desna strana te jednakosti, a ostali deo se poklapa sa polaznim termom.

KOMENTAR: To je sasvim dovoljno da se oslika način eliminisanja maksimalne formule ili smanjenja dužine maksimalnog segmenta. Takav prelaz se definiše 1-NM redukcijama.

Neka za dva terma h i f sistema $\mathcal{N}$ važi da su prirodno jednaki i neka je O niz operacija. Tada: $O(h)=_{ND}O(f)$ pri čemu se svaka operacija iz O, koja se odnosi na neku jedinicu iz h, odnosi na jedinicu iz f čiji indeks (postojećom bijekcijom) odgovara toj jedinici iz h. Nećemo uvoditi posebne **oznake** za nizove operacija O sa leve i desne strane jednakosti $=_{ND}$.

DEFINICIJA: Neka je f term iz $\mathcal{N}$. Neka je $h_1= h_2$ je jedna od NM jednakosti. Neka je h najmanji podterm terma f, $O(h)=f$, takav da je $h=_{ND} O_1(h_1)$ za neki niz operacija zamene O_1, koji može biti prazan. Imamo $O(O_1(h_1))=_{ND}f$ i ako $N(f)$ sadrži važne operacije jednakosti $h_1= h_2$ onda se **term** f **1-NM redukuje na** svaki **term** g za koji $g=_{ND} O(O_1(h_2))$. Term h je **nosilac** te redukcije.

<u>Oznaka:</u> $f\rightarrow_{1\text{-}NM}g$.

Ako je potrebno može se precizirati f se **1-NMF redukuje (1-NMS redukuje)** na g.

<u>Oznaka:</u> $f\rightarrow_{1\text{-}NMF}g$ ($f\rightarrow_{1\text{-}NMS}g$).

Posebno imamo da se f **1-NMF slabo redukuje** na term g, $f\rightarrow_{1\text{-}NMFT}g$.

DEFINICIJA: Neka su f i g dva terma tipa $\Gamma\vdash A$ iz $\mathcal{N}$. Ako postoji prirodan broj m i termi $h_1,\ldots,h_m$ iz $\mathcal{N}$ takvi da

$f \equiv h_1 \rightarrow_{1\text{-}NM} h_2 \rightarrow_{1\text{-}NM} \dots \rightarrow_{1\text{-}NM} h_m \equiv g$,
onda se f **NM-redukuje** na term g.
<u>Oznaka:</u> $f \rightarrow_{NM} g$.

4. SISTEM $\mathcal{N}'$

Sistemi $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$ razlikovaće se samo po operaciji eliminacije veznika $\vee$.

DEFINICIJA: Sistem $\mathcal{N}'$ se dobija kada se u sistemu $\mathcal{N}$ operacija veznika $NE\vee$ zameni operacijom:

$$N'E\vee.\ \frac{h{:}\Gamma \vdash A\vee B \quad f{:}A\Delta \vdash C \quad g{:}B\Delta \vdash C}{\mathbf{D}(h, f, g){:}\Gamma\Delta \vdash C}$$

ind(Γ), ind(Δ) disjunktni, za Δ iz $A\Delta \vdash C$ i $B\Delta \vdash C$. Formule iz Δ iz tipa $\Gamma\Delta \vdash C$ su sa novim indeksima.

<u>Napomene:</u>
(I) Za term f sistema $\mathcal{N}'$ u definiciji prirodnog oblika od f, $N(f)$, ima jedna razlika u odnosu na definiciju kada term pripada sistemu $\mathcal{N}$. Deo 2. iz definicije tog pojma zamenjujemo sa
2'. (i) $f = O(h\ (, g, g_1))$, gde je O neka operacija veznika koja nije operacija **D**.
Onda $N(f) = O(N(h)\ (, N(g), N(g_1)))$.
(ii) $f = \mathbf{D}(h, g_1, g_2)$, $h{:}\Gamma \vdash A\vee B$, $g_1{:}A\Delta \vdash C$, $g_2{:}B\Delta \vdash C$.
Neka su formula D_{D_j} iz $A\Delta$ i D_{D_l} iz $B\Delta$ zamenjene formulom D_{D_m} u $\Gamma\Delta \vdash C$. Onda u svim jedinicama $N(g_2)$, $N(g_1)$ čiji indeksi počinju sa $_{D_j}\,_{D_l}$ umesto toga stavljamo $_{D_m}$. Tako uradimo za sve odgovarajuće formule iz $A\Delta \vdash C$, $B\Delta \vdash C$ i dobijamo $N'(g_2)$, $N'(g_1)$.
Onda, $N(f) = \mathbf{D}(N(h), N'(g_1), N'(g_2))$.
(II) Definisanje nosilaca oslobođenih pretpostavki i oslobođenih pretpostavki u sistemu $\mathcal{N}'$ je potpuno isto kao u sistemu $\mathcal{N}$.
(III) Potpuno ista definicija jednakosti prirodnih oblika dva terma f, g iz sistema $\mathcal{N}'$ kao u sistemu $\mathcal{N}$, $N(f) \equiv N(g)$.
(IV) Potpuno ista definicija kao u sistemu $\mathcal{N}$, da su termi f i g iz sistema $\mathcal{N}'$ prirodno jednaki $f =_{ND} g$.

***KOMENTAR:** Dosta je važna razlika između $NE\vee$ i $N'E\vee$. Pored toga što je operacija eliminisanja veznika $\vee$ specifična u sistemu prirodne dedukcije (možemo je smatrati kao nešto što je ostalo od sistema sekvenata) njen oblik $NE\vee$ je na neki način vezan za prirodnu dedukciju, a njen oblik $N'E\vee$ za sistem sekvenata. U definisanju te operacije na način kao u $N'E\vee$ je skriveno niz sjedinjavanja (u sistemu sekvenata kontrakcija) što nije svojstveno prirodnoj dedukciji. S druge strane, definicija $NE\vee$ pravi problem ako se želi izvršiti eliminacija nadovezivanja (što je svojstveno sistemu sekvenata i ta se operacija tamo zove sečenje). Razdvajanje na sistem $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$ je slikovito rečeno rasklapanje problema da se bolje sagleda.*

DEFINICIJA: $\mathcal{N}''$ je sistem $\mathcal{N}'$ u kome važe **M jednakosti** nad termima:

1. Jednakosti maksimalne formule, **MF jednakosti**:

$MF\wedge$. $\{f, g\}'h = (1_B/g)(1_A/f)\, h$, za $f{:}\Gamma \vdash A,\ g{:}\Delta \vdash B,\ h{:}\Theta AB\Lambda \vdash C$.

$MF\vee 1$. $\mathbf{D}({}_\kappa h, f, g) = (1_A/h)\, f$ za $h{:}\Gamma \vdash A,\ f{:}A\Delta \vdash C,\ g{:}B\Delta \vdash C$.

$MF\vee 2$. $\mathbf{D}({}_\kappa h, f, g) = (1_B/h)g$ za $h{:}\Gamma \vdash B,\ f{:}A\Delta \vdash C,\ g{:}B\Delta \vdash C$.

$MF\Rightarrow$. $\mathbf{I}(h^*, f, g) = (1_B/\,(1_A/f)\, h)g$ za $h{:}A\Gamma \vdash B,\ f{:}\Delta \vdash A,\ g{:}B\Lambda \vdash C$.

Posebno ako je u $MF\wedge$ term h tipa $\Theta\_A\_B\Lambda \vdash C$ i
u $MF\Rightarrow$ term g tipa $\_B\Lambda \vdash C$ onda su to **slabe MF jednakosti**.

2. Jednakosti maksimalnog segmenta, **MS jednakosti**:

$MS\wedge 1$. $(h' f)' g = h' (f' g)$, za $h{:}\Gamma \vdash A\wedge B,\ f{:}AB\Delta \vdash C\wedge D,\ g{:}CD\Lambda \vdash E$.

$MS\wedge 2$. $\mathbf{D}(h'f, g_1, g_2) = h'\mathbf{D}(f, g_1, g_2)$, za $h{:}\Gamma \vdash A\wedge B,\ f{:}AB\Delta \vdash C\vee D,\ g_1{:}C\Lambda \vdash E,\ g_2{:}D\Lambda \vdash E$.

$MS\wedge 3$. $\mathbf{I}(h' f, g_1, g_2) = h'\, \mathbf{I}(f, g_1, g_2)$, za $h{:}\Gamma \vdash A\wedge B,\ f{:}AB\Delta \vdash C\Rightarrow D,\ g_1{:}\Lambda \vdash C,\ g_2{:}D\Theta \vdash E$.

$MS\vee 1$. $\mathbf{D}(h, g_1, g_2)' f = \mathbf{D}(h, g_1' f, g_2' f)$,
za $h{:}\Gamma \vdash A\vee B,\ g_1{:}A\Delta \vdash C\wedge D,\ g_2{:}B\Delta \vdash C\wedge D,\ f{:}CD\Theta \vdash E$.

$MS\vee 2$. $\mathbf{D}(\mathbf{D}(h, g_1, g_2), f_1, f_2) = \mathbf{D}(h, \mathbf{D}(g_1, f_1, f_2), \mathbf{D}(g_2, f_1, f_2))$,
za $h{:}\Gamma \vdash A\vee B,\ g_1{:}A\Delta \vdash C\vee D,\ g_2{:}B\Delta \vdash C\vee D,\ f_1{:}C\Theta \vdash E,\ f_2{:}D\Theta \vdash E$.

$MS\vee 3$. $\mathbf{I}(\mathbf{D}(h, g_1, g_2), f_1, f_2) = \mathbf{D}(h, \mathbf{I}(g_1, f_1, f_2), \mathbf{I}(g_2, f_1, f_2))$,
za $h{:}\Gamma \vdash A\vee B,\ g_1{:}A\Delta \vdash C\Rightarrow D,\ g_2{:}B\Delta \vdash C\Rightarrow D,\ f_1{:}\Theta_1 \vdash C,\ f_2{:}D\Theta_2 \vdash E$.

$MS\Rightarrow 1$. $\mathbf{I}(h, g_1, g_2)' f = \mathbf{I}(h, g_1, g_2' f)$,
za $h{:}\Gamma \vdash A\Rightarrow B,\ g_1{:}\Delta \vdash A,\ g_2{:}B\Lambda \vdash C\wedge D,\ f{:}CD\Theta \vdash E$.

$MS\Rightarrow 2$. $\mathbf{D}(\mathbf{I}(h, g_1, g_2), f_1, f_2) = \mathbf{I}(h, g_1, \mathbf{D}(g_2, f_1, f_2))$,
za $h{:}\Gamma \vdash A\Rightarrow B,\ g_1{:}\Delta \vdash A,\ g_2{:}B\Lambda \vdash C\vee D,\ f_1{:}C\Theta \vdash E,\ f_2{:}D\Theta \vdash E$.

$MS\Rightarrow 3$. $\mathbf{I}(\mathbf{I}(h, g_1, g_2), f_1, f_2) = \mathbf{I}(h, g_1, \mathbf{I}(g_2, f_1, f_2))$,
za $h{:}\Gamma \vdash A\Rightarrow B,\ g_1{:}\Delta \vdash A,\ g_2{:}B\Lambda \vdash C\Rightarrow D,\ f_1{:}\Theta_1 \vdash C,\ f_2{:}D\Theta_2 \vdash E$.

Definicija važne operacije neke od jednakosti u $\mathcal{N}'$ je ista kao u $\mathcal{N}$.

DEFINICIJA: Neka je f term iz $\mathcal{N}'$. Neka je $h_1 = h_2$ je jedna od M jednakosti. Neka je h najmanji podterm terma f, $O(h)=f$, takav da je $h =_{ND} O_1(h_1)$ za neki niz operacija zamene O_1, koji može biti prazan. Imamo $O(O_1(h_1)) =_{ND} f$ i ako $N(f)$ sadrži važne operacije jednakosti $h_1 = h_2$ onda se **term** f **1-M redukuje na** svaki **term** g za koji $g =_{ND} O(O_1(h_2))$. Term h je **nosilac** te redukcije.
Oznaka: $f \to_{1\text{-}M} g$.
Ako je potrebno može se precizirati da se f **1-MF redukuje (1-MS redukuje)** na term g.
Oznaka: $f \to_{1\text{-}MF} g$ ($f \to_{1\text{-}MS} g$).
Posebno imamo da se f **1-MF slabo redukuje** na g, $f \to_{1\text{-}MFT} g$.

DEFINICIJA: Neka su f i g dva terma tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{N}'$. Ako postoji prirodan broj m i termi $h_1, \ldots, h_m$ iz $\mathcal{N}'$ takvi da
$f \equiv h_1 \to_{1\text{-}M} h_2 \to_{1\text{-}M} \cdots \to_{1\text{-}M} h_m \equiv g$,
onda se f **M-redukuje** na term g.
Oznaka: $f \to_M g$.

5. SISTEM $\mathcal{G}'$, MODIFIKACIJA GENCENOVOG SISTEMA SEKVENATA

Sada ćemo definisati sistem $\mathcal{G}'$ koji će biti modifikacija Gencenovog sistema sekvenata.

KOMENTAR: Zašto sisteme $\mathcal{ND}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$ svrstavamo u grupu sistema koji su povezani sa sistemom prirodne dedukcije, a za sistem $\mathcal{G}'$ kažemo da je povezan sa Gencenovim sistemom sekvenata?
U sistemu $\mathcal{G}'$ će se pojaviti sva strukturna pravila (sem permutacije) i on će biti levo-desni sistem. Najvažnije je to što u njemu nećemo imati nikakvih dodatnih izjednačavanja terama, koja da tako kažem "kriju" strukturna pravila (to je prirodan oblik u $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$). Jedina izjednačavanja među termima će biti ona koja će nam biti potrebna za eliminaciju sečenja što je opet karakteristično za Gencenov sistem sekvenata(a ne za normalizaciju, koja karakteriše sistem prirodne dedukcije).

DEFINICIJA: **Sistem** $\mathcal{G}'$ je $\mathcal{N}$-deduktivni sistem slobodno generisan nekim beskonačnim skupom objekata nad kojima postoje tri operacije: $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$. Operacije nad strelicama ćemo podeliti na **strukturna pravila** i **pravila za veznike**. Operacija veze će se ovde zvati **sečenje** i pripadaće strukturnim pravilima.

<u>Strukturna pravila:</u>

<u>slabljenje:</u>

$$\frac{f{:}\Gamma\Delta \vdash A}{\mathbf{t}_B(f){:}\Gamma B_{B_i}\Delta \vdash A,} \qquad {}_{B_i} \notin \mathrm{ind}(\Gamma), \mathrm{ind}(\Delta).$$

<u>kontrakcija:</u>

$$\frac{f{:}\Gamma BB\Delta \vdash A}{\mathbf{c}_B(f){:}\Gamma B_{B_k}\Delta \vdash A,} \qquad {}_{B_k} \notin \mathrm{ind}(\Gamma BB\Delta).$$

<u>sečenje:</u>

$$\frac{f{:}\Gamma \vdash A \quad g{:}\Delta A\Lambda \vdash B}{g\langle f\rangle{:}\Delta\Gamma\Lambda \vdash B,} \qquad \mathrm{ind}(\Gamma)\cap\mathrm{ind}(\Delta A\Lambda)=\varnothing.$$

U pravilima kontrakcija i slabljenje formula B **u** donjem tipu je **glavna formula pravila**. Formule B iz gornjeg tipa **u** pravilu kontrakcije su **pomoćne formule** tog **pravila**. U pravilu sečenja formule A iz tipova $\Gamma \vdash A$, $\Delta A\Lambda \vdash B$ **su formule sečenja**.

<u>Pravila za veznike.</u>

$G'E\wedge$

$$\frac{f{:}\Gamma AB\Delta \vdash C}{f^{\xi}{:}\Gamma A\wedge B\Delta \vdash C}$$

$G'I\wedge$

$$\frac{f{:}\Gamma \vdash A \quad g{:}\Delta \vdash B}{\{f, g\}{:}\Gamma\Delta \vdash A\wedge B}$$

$\mathrm{ind}(\Gamma)\cap\mathrm{ind}(\Delta)=\varnothing$.

$G'E\vee$.

$$\frac{f{:}\Gamma A\Delta \vdash C \quad g{:}\Gamma B\Delta \vdash C}{[f, g]{:}\Gamma A\vee B\Delta \vdash C}$$

Γ, Δ u tipu $\Gamma A\vee B\Delta \vdash C$ sa novim indeksima.

$G'I\vee$.

$$\frac{f{:}\Gamma \vdash A}{{}_{\kappa}f{:}\Gamma \vdash A\vee B} \qquad \frac{g{:}\Gamma \vdash B}{{}_{\kappa'}g{:}\Gamma \vdash A\vee B}$$

$G'E\Rightarrow.$ $\dfrac{f{:}\Gamma \vdash A \quad g{:}\Delta B\Lambda \vdash C}{g[f]{:}\Delta\Gamma\Lambda A{\Rightarrow}B \vdash C}$ $\mathrm{ind}(\Gamma)\cap\mathrm{ind}(\Delta B\Lambda)=\varnothing.$

$G'I\Rightarrow.$ $\dfrac{f{:}\Gamma A\Delta \vdash B}{f^{*}{:}\Gamma\Delta \vdash A{\Rightarrow}B.}$

U pravilima za veznike, nova formula koja se pojavljuje u tipu strelice ispod linije naziva se **glavna formula** tog **pravila** (na primer $A\wedge B$ u $G'E\wedge$ i $G'I\wedge$). Formule A i B koje su izdvojene u tipovima iznad linije su **pomoćne formule** tog **pravila**. Formule koje se pojavljuju i u gornjem i u donjem tipu pravila (strukturnih i za veznike) a nisu glavna formula, pomoćna formula ili formula sečenja su **bočne formule** tog **pravila.**

Pravila $G'E\wedge$, $G'E\vee$ i $G'E\Rightarrow$ su **pravila eliminacije**.

Pravila $G'I\wedge$, $G'I\vee$ i $G'I\Rightarrow$ su **pravila uvođenja**.

U ovom sistemu biće indeksirane samo formule sa leve strane $\vdash$ u tipu terma. Znači u jediničnim strelicama drveta strelice, $1_B{:}B_{B_i} \vdash B$, samo formula levo od $\vdash$ imaće indeks, indeksiranu reč. U pravilima eliminacije formule $A\wedge B$, $A\vee B$ i $A\Rightarrow B$ dobijaju novi indeks koji ne pripada redom skupu $\mathrm{ind}(\Gamma)$, $\mathrm{ind}(\Gamma\Delta)$, $\mathrm{ind}(\Gamma\Delta\Lambda)$.

Često ćemo radi lakšeg zapisa,

(i) niz slabljenja $\mathbf{t}_{A_i}(\mathbf{t}_{B_j}(\ldots(\mathbf{t}_{C_k}(h))\ldots))$ zapisivati $\mathbf{t}_\Delta(h)$, gde znamo da je $\Delta = A_{A_i}B_{B_j}\ldots C_{C_k}$;

(ii) niz kontrakcija $\mathbf{c}_A(\mathbf{c}_B(\ldots(\mathbf{c}_C(h))\ldots))$ zapisivaćemo $\mathbf{c}_\Delta(h)$ što će značiti da smo odgovarajuće formule iz $\Delta = A_{A_i}B_{B_j}\ldots C_{C_k}$ i $\Delta = A_{A_n}B_{B_m}\ldots C_{C_l}$ kontrahovali u formule iz $\Delta = A_{A_p}B_{B_q}\ldots C_{C_r}$

KOMENTAR: *Posmatrajući naš izbor da zapisom $f{:}\Gamma \vdash A$ zabeležimo da je od pretpostavki Γ na način f dobijen zaključak A odmah je jasno da je on mnogo bliži sistemu sekvenata nego sistemu prirodne dedukcije i njegovim drvetima. Uz sekvent $\Gamma \vdash A$ moramo znati jedno (od više mogućih) drvo koje nam govori samo kako smo dobili A iz Γ. S druge strane iz terma f mi možemo odmah rekonstruisati čitavo drvo formule A uz formula Γ. Znači zapis čitavog drveta, koje je često glomazno i komplikovano nije nam potreban. Naš sistem $\mathcal{G}'$ možemo shvatiti kao da smo term pridružili sekventu u Gencenovom sistemu sekvenata. Jednostavno rečeno, aksiome Gencenovog sistema sekvenata $A \vdash A$ u $\mathcal{G}'$ dobijaju ime 1_A kao što dobijaju ime i sve figure zaključivanja, koje mi zovemo struktuna pravila i pravila za veznike.*

U teoremi o eliminaciji sečenja, koja karakteriše Gencenov sistem sekvenata govori se o transformaciji drveta nekog sekventa $\Gamma \vdash A$ u neko drugo drvo istog sekventa u kome nema sečenja. Dalje, u dokazu te teoreme, donekle je postrožen pojam transformacije koracima prelaska sa jednog drveta sekventa na neko drugo drvo tog sekventa. Ta dva drveta rezlikovala su se po redosledu pravila sečenja i nekog drugog pravila. Pošto u sistemu $\mathcal{G}'$ mi imamo mogućnost zapisa tih drveta termom, te prelaske sa jednog drveta na drugo definisaćemo jednakostima među tennima.

Pre nego što to uradimo interesantno je istaći sledeće. Ako posmatramo dokaz leme o eliminaciji sečenja, koji je dao Gencen i njegove izvode zamenimo termima, a korake transformacije jednog izvoda na drugi zapišemo kao jednakost između odgovarajućih terama dobijamo sledeću sliku:
posledica važenja svih tih jednakosti je da su bilo koja dva terma sa istim tipom jednaka, što je mnogo više od onog što nama treba.

Zato ćemo mi navesti malo izmenjene jednakosti, koje će nam biti dovoljne (što ćemo videti kasnije) da uspostavimo vezu između nekog terma sistema $\mathcal{G}'$ i terma istog tipa koji ne sadrži sečenje.

S druge strane, one neće grubo (po jednakim tipovima) izjednačavati terme sistema $\mathcal{G}$!

DEFINICIJA: $\mathcal{G}'$je sistem $\mathcal{G}'$u kome važe sledeće **ElimCut jednakosti:**

I Jedinične jednakosti, **Mcat jednakosti**.

M1.	$f\langle 1_A\rangle=f,$	za $f{:}\Gamma A\Delta\vdash B.$
M2.	$1_B\langle g\rangle=g,$	za $g{:}\Gamma\vdash B.$

II Jednakosti o permutaciji sečenja sa kontrakcijom i slabljenjem, **CT-CUT jednakosti**.

CUTC1.	$g\langle \mathbf{c}_A(f)\rangle=\mathbf{c}_A(g\langle f\rangle),$	za $f{:}\Gamma AA\Delta\vdash C,\ g{:}\Lambda C\Theta\vdash B.$
CUTC2.	$\mathbf{c}_A(g)\langle f\rangle=\mathbf{c}_A(g\langle f\rangle),$	za $f{:}\Gamma\vdash C,\ g{:}\Lambda AA\Delta C\Theta\vdash B.$
CUTC0.	$\mathbf{c}_C(g)\langle f\rangle=\mathbf{c}_\Gamma(g\langle f\rangle\langle f\rangle),$	za $f{:}\Gamma\vdash C,\ g{:}\Lambda CC\Delta\vdash B.$
CUTT1.	$g\langle \mathbf{t}_A(f)\rangle=\mathbf{t}_A(g\langle f\rangle),$	za $f{:}\Gamma\vdash C,\ g{:}\Lambda C\Delta\vdash B.$
CUTT2.	$\mathbf{t}_A(g)\langle f\rangle=\mathbf{t}_A(g\langle f\rangle),$	za $f{:}\Gamma\vdash C,\ g{:}\Delta C\Lambda\vdash B.$
CUTT0.	$\mathbf{t}_C(g)\langle f\rangle=\mathbf{t}_\Gamma(g)$	za $f{:}\Gamma\vdash C,\ g{:}\Lambda\Delta\vdash B.$

III Važne jednakosti, **β jednakosti**.

$\beta\wedge$	$h^{\S}\langle\{f,g\}\rangle=h\langle f\rangle\langle g\rangle,$	za $h{:}\Theta AB\Lambda\vdash C,\ f{:}\Gamma\vdash A,\ g{:}\Delta\vdash B.$
$\beta\vee 1.$	$[f,g]\langle_{\kappa}h\rangle=f\langle h\rangle,$	za $f{:}\Lambda A\Delta\vdash C,\ g{:}\Lambda B\Delta\vdash C,\ h{:}\Gamma\vdash A.$
$\beta\vee 2.$	$[f,g]\langle_{\kappa'}h\rangle=g\langle h\rangle,$	za $f{:}\Lambda A\Delta\vdash C,\ g{:}\Lambda B\Delta\vdash C,\ h{:}\Gamma\vdash B.$
$\beta\Rightarrow.$	$f[g]\langle h^*\rangle=f\langle h\langle g\rangle\rangle,$	za $h{:}\Theta A\Delta\vdash B,\ f{:}\Phi B\Lambda\vdash C,\ g{:}\Gamma\vdash A.$

IV Jednakosti permutacije sečenja i nekog pravila za veznike, **PermCut jednakosti:**

Posmatramo term sledećeg oblika:

$R(f_1(,f_2))\langle L(g_1(,g_2))\rangle{:}\Lambda\Gamma\Delta\vdash B,\ L(g_1(,g_2)){:}\Gamma\vdash A,\ R(f_1(,f_2)){:}\Lambda A\Delta\vdash B,$ gde su R i L neka pravila različita od sečenja i oznaka R (L) znači desno (levo) pravilo posmatranog sečenja. Jednakosti koje slede nam omogućavaju da permutujemo posmatrano sečenje sa pravilom R ili L. Šta je urađeno od te dve mogućnosti govoriće nam naziv svake jednakosti.

Na primer: naziv jednakosti ***E(R)perm.Cut-I*** kaže da se desno pravilo (***R***) koje je eliminacija (*E*) permutovalo sa sečenjem i da je levo pravilo neko pravilo uvođenja (***I***).

Zbog jednostavnosti zapisa pravila ***R*** i *L* ćemo pisati kao da zavise samo od jednog terma ali to će se odnositi na sva pravila eliminaije ili uvođenja koja su u sistemu $\mathcal{G}$!

1. ***L* je pravilo uvođenja:**

   Postoje mogućnosti za pravilo *R*:

   (i) *R* je pravilo eliminacije kome je formula sečenja glavna formula i to su već navedene **β-jednakosti**.

   (ii) *R* je pravilo eliminacije koje ima glavnu formulu različitu od formule sečenja i tada:
   $R(f)\langle L(g)\rangle= R(f\langle L(g)\rangle),$
   i to su jednakosti ***E(R)perm.Cut-I***.

   (iii) *R* je pravilo uvođenja, tada:
   $R(f)\langle L(g)\rangle= R(f\langle L(g)\rangle),$
   i to su jednakosti ***I(R)perm.Cut-I***.

   (iv) *R* je slabljenje ili kontrakcija koji se odnose na formulu sečenja i to su već pomenute ***CUTC0*** i ***CUTT0*** jednakosti.

(v) R je slabljenje ili kontrakcija koji se ne odnose na formulu sečenja i tada:

$R(f)\langle L(g)\rangle = R(f\langle L(g)\rangle)$,

i one su podskup svih jednakosti ***CUTC2, CUTT2*** kada je L pravilo uvođenja.

2. **L je pravilo eliminacije:**

Postoje mogućnosti za pravilo R:

(i) R je pravilo eliminacije kome je formula sečenja glavna formula i tada:

$R(f)\langle L(g)\rangle = L(R(f)\langle g\rangle)$,

i te jednakosti zovemo ***Max.Red.*** **jednakosti.**

(ii) R je pravilo eliminacije koje ima glavnu formulu različitu od formule sečenja i tada:

$R(f)\langle L(g)\rangle = L(R(f)\langle g\rangle)$, i to su jednakosti ***E(L)perm.Cut-E.***

ili

$R(f)\langle L(g)\rangle = R(f\langle L(g)\rangle)$, i to su jednakosti ***E(R)perm.Cut-E.***

(iii) R je pravilo uvođenja, tada:

$R(f)\langle L(g)\rangle = L(R(f)\langle g\rangle)$, i to su jednakosti ***E(L)perm.Cut-I.***

ili

$R(f)\langle L(g)\rangle = R(f\langle L(g)\rangle)$, i to su jednakosti ***I(R)perm.Cut-E.***

(iv) R je slabljenje ili kontrakcija koji se odnose na formulu sečenja i to su već pomenute ***CUTC0*** i ***CUTT0*** jednakosti.

(v) R je slabljenje ili kontrakcija koji se ne odnose na formulu sečenja i

1. postoji term h, podterm terma f takav da
   ili h je 1_D za neko D
   ili poslednje pravilo terma h je eliminacija formule sečenja i $f=P(h)$, gde je P niz strukturnih pravila. Tada:

$R(f)\langle L(g)\rangle = L(R(f)\langle g\rangle)$, i to su ***CTMax.Red.*** **jednakosti.**

ili

$R(f)\langle L(g)\rangle = R(f\langle L(g)\rangle)$, i te jednakosti su već pomenute ***CUTC2, CUTT2.***

2. ako ne postoji term h, podterm terma f sa osobinama navedenim pod 1.,tada:

$R(f)\langle L(g)\rangle = L(R(f)\langle g\rangle)$, i to su jednakosti ***E(L)perm.Cut-CiT.***

ili

$R(f)\langle L(g)\rangle = R(f\langle L(g)\rangle)$, i te jednakosti su već pomenute ***CUTC2, CUTT2.***

3. **L je kontrakcija ili slabljenje:**

Postoje mogućnosti za pravilo R:

(i) R je pravilo eliminacije koje formira formulu sečenja i tada:

$R(f)\langle L(g)\rangle = L(R(f)\langle g\rangle)$, i to su jednakosti koje su podskup jednakosti ***CUTC1, CUTT1*** kada je R pravilo eliminacije.

(ii) R je pravilo eliminacije koje formira neku formulu različitu od formule sečenja i tada:

$R(f)\langle L(g)\rangle = R(f\langle L(g)\rangle)$, i to su jednakosti ***E(R)perm.Cut-CiT***

ili

$R(f)\langle L(g)\rangle = L(R(f)\langle g\rangle)$, i te jednakosti su već pomenute ***CUTC1, CUTT1.***

(iii) R je pravilo uvođenja, tada:

$R(f)\langle L(g)\rangle = R(f\langle L(g)\rangle)$, i to su jednakosti ***I(R)perm.Cut-CiT*** ili

$R(f)\langle L(g)\rangle = L(R(f)\langle g\rangle)$, i te jednakosti su već pomenute ***CUTC1, CUTT1.***

(iv) R je <u>slabljenje ili kontrakcija</u> koji se <u>odnose na formulu sečenja</u> i to su već pomenute ***CUTC0*** i ***CUTT0*** jednakosti.

(v) R je <u>slabljenje ili kontrakcija</u> koji se <u>ne odnose na formulu sečenja</u> i tada:

$R(f)\langle L(g)\rangle = L(R(f)\langle g\rangle)$, i to su ***CUTC1*** ili ***CUTT1*** jednakosti,

ili

$R(f)\langle L(g)\rangle = R(f\langle L(g)\rangle)$ i to su ***CUTC2*** ili ***CUTT2*** jednakosti.

V Jednakosti asocijativnosti i komutativnosti, **Mcat.as.kom.Cut. jednakosti.**

M3.	$h\langle g\langle f\rangle\rangle = h\langle g\rangle\langle f\rangle$,	za $f{:}\Gamma\vdash A,\ g{:}\Theta A\Delta\vdash B,\ h{:}\Phi B\Lambda\vdash C.$
M4.	$h\langle g\rangle\langle f\rangle = h\langle f\rangle\langle g\rangle$,	za $f{:}\Gamma\vdash A,\ g{:}\Delta\vdash B,\ h{:}\Theta AB\Lambda\vdash C.$

VI Jednakosti kontrakcije i slabljenja, **CT jednakosti.**

CT0.	$\mathbf{c}_A(\mathbf{t}_A(f)) = f$,	za $f{:}\Gamma A\Delta\vdash B.$
CT1.	$\mathbf{c}_A(\mathbf{t}_B(f)) = \mathbf{t}_B(\mathbf{c}_A(f))$,	za $f{:}\Gamma AA\Delta\vdash C.$
CC1.	$\mathbf{c}_B(\mathbf{c}_A(f)) = \mathbf{c}_A(\mathbf{c}_B(f))$,	za $f{:}\Gamma AABB\Delta\vdash C.$
TT1.	$\mathbf{t}_B(\mathbf{t}_A(f)) = \mathbf{t}_A(\mathbf{t}_B(f))$,	za $f{:}\Delta\vdash C.$
CE∧.	$\mathbf{c}_A(f^{\dagger}) = \mathbf{c}_A(f)^{\dagger}$,	za $f{:}\Gamma AA\Lambda BC\Delta\vdash D.$
CE∨.	$\mathbf{c}_A([f, h]) = [\mathbf{c}_A(f), \mathbf{c}_A(h)]$,	za $f{:}\Gamma AA\Lambda B\Delta\vdash D,\ h{:}\Gamma AA\Lambda C\Delta\vdash D.$
CE⇒1.	$\mathbf{c}_A(f[h]) = \mathbf{c}_A(f)[h]$,	za $f{:}\Gamma AA\Lambda C\Delta\vdash D,\ h{:}\Theta\vdash B.$
CE⇒2.	$\mathbf{c}_A(f[h]) = f[\mathbf{c}_A(h)]$,	za $h{:}\Gamma AA\Lambda\vdash B,\ h{:}C\Theta\vdash D.$
CI∧1.	$\mathbf{c}_A(\{f, h\}) = \{\mathbf{c}_A(f), h\}$,	za $f{:}\Gamma AA\Lambda\vdash B,\ h{:}\Delta\vdash C.$
CI∧2.	$\mathbf{c}_A(\{f, h\}) = \{f, \mathbf{c}_A(h)\}$,	za $f{:}\Delta\vdash C,\ h{:}\Gamma AA\Lambda\vdash B.$
CI∨1.	$\mathbf{c}_A({}_{\kappa}f) = {}_{\kappa}(\mathbf{c}_A(f))$,	za $f{:}\Gamma AA\Lambda\vdash B.$
CI∨2.	$\mathbf{c}_A({}_{\kappa'}f) = {}_{\kappa'}(\mathbf{c}_A(f))$,	za $f{:}\Gamma AA\Lambda\vdash B.$
CI⇒.	$\mathbf{c}_A(f^{*}) = \mathbf{c}_A(f)^{*}$,	za $f{:}\Delta B\Gamma AA\Lambda\vdash C.$
TE∧.	$\mathbf{t}_A(f^{\dagger}) = \mathbf{t}_A(f)^{\dagger}$,	za $f{:}\Gamma BC\Delta\vdash D.$
TE∨.	$\mathbf{t}_A([f, h]) = [\mathbf{t}_A(f), \mathbf{t}_A(h)]$,	za $f{:}\Gamma B\Delta\vdash D,\ h{:}\Gamma C\Delta\vdash D.$
TE⇒1.	$\mathbf{t}_A(f[h]) = \mathbf{t}_A(f)[h]$,	za $f{:}\Gamma C\Delta\vdash D,\ h{:}\Theta\vdash B.$
TE⇒2.	$\mathbf{t}_A(f[h]) = f[\mathbf{t}_A(h)]$,	za $h{:}\Gamma\vdash B,\ h{:}C\Theta\vdash D.$
TI∧1.	$\mathbf{t}_A(\{f, h\}) = \{\mathbf{t}_A(f), h\}$,	za $f{:}\Gamma\vdash B,\ h{:}\Delta\vdash C.$
TI∧2.	$\mathbf{t}_A(\{f, h\}) = \{f, \mathbf{t}_A(h)\}$,	za $f{:}\Gamma\vdash B,\ h{:}\Delta\vdash C.$
TI∨1.	$\mathbf{t}_A({}_{\kappa}f) = {}_{\kappa}(\mathbf{t}_A(f))$,	za $f{:}\Gamma\vdash B.$
TI∨2.	$\mathbf{t}_A({}_{\kappa'}f) = {}_{\kappa'}(\mathbf{t}_A(f))$,	za $f{:}\Gamma\vdash B.$
TI⇒.	$\mathbf{t}_A(f^{*}) = \mathbf{t}_A(f)^{*}$,	za $f{:}\Delta B\Gamma\vdash C.$

KOMENTAR: *Ako posmatramo sistem $\mathfrak{G}'$ bez strukturnih pravila slabljenje i kontrakcija i izostavljanjem jednakosti koje se odnose na njih* (**CT-CUT** *jednakosti,* **4.1.(iv),(v), 4.2.(iv),(v); 4.3.(iv),(v); CT** *jednakosti) dobijamo sistem koji možemo označiti $\mathfrak{G}'$-$\mathfrak{CC}$. Interesantna je činjenica da je sistem $\mathfrak{G}'$-$\mathfrak{CC}$ ekvivalentan sa slobodnom multikategorijom koju je definisao Lambek u svom radu "Logic without structural rules" samo je $\mathfrak{G}'$-$\mathfrak{CC}$ na siromašnijem jeziku (samo veznici ∧, ∨, ⇒).*

<u>Napomena:</u> Koristićemo neke kraće oznake:

Sa $E(R)perm.Cut$ ćemo označavati zajedno $E(R)perm.Cut\text{-}I$, $E(R)perm.Cut\text{-}E$ i $E(R)perm.Cut\text{-}CiT$.

Sa $E\wedge(R)perm.Cut$ ćemo označavati $E(R)perm.Cut$ kada je E eliminacija veznika $\wedge$. Analogno važi i za sve druge jednakosti grupe (IV).

DEFINICIJA: Neka su f, g dva terma tipa $\Gamma\vdash A$ iz $\mathcal{G}'$. Ako postoji podterm f' terma f i podterm g' terma g takvi da je $f'=g'$ jedna od jednakosti I-VI (sa važnošću da je f sa leve a g sa desne srane =) i $f=P(f')$, $g=P(g')$, gde je P niz pravila tada kažemo da se term f **1-cf redukuje na term** g.

Oznaka: $f >_1 g$. U slučaju da je to potrebno navešćemo i koja je to jednakost.

DEFINICIJA: Neka su f, g dva terma tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{G}'$. Ako postoji prirodan broj m i termi $h_1, h_2, \ldots, h_m$ iz $\mathcal{G}'$ takvi da

$$f \equiv h_1 >_1 h_2 >_1 \ldots >_1 h_m \equiv g, \text{ onda se term } f \textbf{ cf-redukuje na term } g.$$

Oznaka: $f > g$, a ako bude potrebno može biti navedeno koje su to jednakosti u koracima $>_1$. Postoji mogućnost da se u nizu $f \equiv h_1 >_1 h_2 >_1 \ldots >_1 h_m \equiv g$ pojavi i slučaj $h_{i+1} > h_i$ i onda ćemo koristiti oznaku $f \geqslant g$.

U $\mathcal{G}'$ se jednostavno dokazuje sledeća lema.

CT-Lema: U $\mathcal{G}'$ neke od jednakosti mogu se izvesti iz preostalih jednakosti:

1. Jednakosti $TE\wedge$, $TE\vee$, $TE{\Rightarrow}1$, $TE{\Rightarrow}2$
   posledica su jednakosti $M2$, $CUTT1$, $CUTT2$, $CTMaxRed$.
2. Jednakosti $TI\wedge$, $TI\vee 1$, $TI\vee 2$
   posledica su jednakosti $M2$, $CUTT1$, $I(R)permCut$.
3. Jednakost $TI{\Rightarrow}$
   posledica je jednakosti $M1$, $M2$, $CUTT1$, $I(R)permCut$, $\beta{\Rightarrow}$.
4. Jednakosti $CE\wedge$, $CE\vee$, $CE{\Rightarrow}1$, $CE{\Rightarrow}2$
   posledica su jednakosti $M1$, $CUTC2$, β jednakosti, $CTMaxRed$, $MaxRed$, $I(R)permCut$.
5. Jednakosti $CI\wedge$, $CI\vee 1$, $CI\vee 2$
   posledica su jednakosti $M2$, $CUTC1$, $I(R)permCut$.
6. Jednakost $TI{\Rightarrow}$
   posledica je jednakosti $M1$, $M2$, $CUTC1$, $I(R)permCut$, $\beta{\Rightarrow}$.
7. Jednakosti $CT1$, $CC1$, $TT1$
   posledica su jednakosti $M1$, $CUTC0$, $CUTC1$, $CUTC2$, $CUTT1$, $CUTT2$, $\beta\wedge$.

Važno je istaći: CT jedakosti nisu posledice $E(L)permCut$ jednakosti.

6. POLUGRAF

DEFINICIJA: **Polugraf** čine skup objekata i skup strelica zajedno sa dva preslikavanja izvorište: {strelice}→{objekti}*, cilj: {strelice}→{objekti}.

gde je {objekti}* slobodni monoid generisan skupom objekata čiji elementi su nizovi objekata

Za svaki objekat A iz skupa objekata postoji jedinična strelica $1_A{:}A \vdash A$.

7. SISTEM $\mathcal{G}$, GENCENOV SISTEM SEKVENATA

DEFINICIJA: Sistem $\mathcal{G}$ je polugraf slobodno generisan beskonačnim skupom objekata na sledeći način: njegovi objekti se dobijaju pomoću operacija za objekte $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$; njegove strelice se dobijaju induktivno pomoću operacija za strelice, primenjenih na jedinične strelice. Grupu operacija za strelice podelićemo na:

1. strukturna pravila;
2. pravila za veznike.

Za strelicu $f{:}\Gamma\vdash A$ sistema $\mathcal{G}$, f je **term strelice**, $\Gamma \vdash A$ je **tip terma** f, gde je Γ niz objekata iz $\mathcal{G}$.

Strukturna prvila.

permutacija:
$$\frac{f{:}\Gamma AB\Delta \vdash C}{\mathrm{p}_{A,B}(f){:}\Gamma BA\Delta \vdash C.}$$

slabljenje:
$$\frac{f{:}\Gamma \vdash A}{\mathrm{t}_B(f){:}B\Gamma \vdash A,}$$

kontrakcija:
$$\frac{f{:}BB\Delta \vdash A}{\mathrm{c}_B(f){:}B\Delta \vdash A.}$$

sečenje:
$$\frac{f{:}\Gamma \vdash A \quad g{:}A\Lambda \vdash B}{g\langle f\rangle{:}\Gamma\Lambda \vdash B.}$$

Pravila za veznike.

$GE\wedge$
$$\frac{f{:}A\Gamma \vdash C}{f_{p'}{:}A\wedge B\Gamma \vdash C} \qquad \frac{f{:}B\Gamma \vdash C}{f_{p}{:}A\wedge B\Gamma \vdash C}$$

$GI\wedge$
$$\frac{f{:}\Gamma \vdash A \quad g{:}\Gamma \vdash B}{\langle f, g\rangle{:}\Gamma \vdash A\wedge B.}$$

$GE\vee$.
$$\frac{f{:}\,A\Delta \vdash C \quad g{:}B\Delta \vdash C}{[f, g]{:}A\vee B\Delta \vdash C}$$

$GI\vee$.
$$\frac{f{:}\Gamma \vdash A}{{}_{\kappa}f{:}\Gamma \vdash A\vee B} \qquad \frac{g{:}\Gamma\vdash B}{{}_{\kappa'}g{:}\Gamma \vdash A\vee B.}$$

$GE\Rightarrow$.
$$\frac{f{:}\Gamma \vdash A \quad g{:}B\Lambda \vdash C}{g[f]{:}A\Rightarrow B\Gamma\Lambda \vdash C}$$

$GI\Rightarrow$.
$$\frac{f{:}\,A\Delta \vdash B}{f^{*}{:}\Delta \vdash A\Rightarrow B.}$$

U pravilu permutacije formula C i formule nizova Γ, Δ iz tipova $\Gamma AB\Delta \vdash C$, $\Gamma BA\Delta \vdash C$ su **bočne formule** tog pravila. Formule A i B su **formule permutacije**.

Za sva ostala pravila definicija bočnih, glavnih, pomoćnih formula i formula sečenja je ista kao u sistemu $\mathcal{G}'$.

Pravila $GE\wedge$, $GE\vee$ i $GE\Rightarrow$ su **pravila eliminacije**.

Pravila $GI\wedge$, $GI\vee$ i $GI\Rightarrow$ su **pravila uvođenja**.

Oznake $t_\Delta(h)$, $c_\Delta(h)$ imaju isto značenje kaou sistemu $\mathcal{G}'$. Niz permutacija kojim se od terma tipa $f{:}\Gamma\Delta\Lambda\Phi\vdash A$ dobija term tipa $g{:}\Gamma\Lambda\Delta\Phi\vdash A$ zapisivaćemo na sledeći način $\mathbf{p}_{\Delta,\Lambda}(f)=g$.

Indeksiranje jedinica i formula u sistemu $\mathcal{G}$ je isto kao u sistemu $\mathcal{G}'$. Za navedena pravila za strelice skupovi indeksa strelica koje učestvuju u tom pravilu su disjunktni; indeksiranje glavnih formula tih pravila je kao u sistemu $\mathcal{G}'$. Neka su $f{:}\Gamma \vdash A$, $g{:}\Delta \vdash A$ strelice iz sistema $\mathcal{G}$. Za terme f i g reći ćemo da su istog tipa ako su Γ i Δ jednaki kao nizovi formula.

Razlika između sistema $\mathcal{G}'$ i $\mathcal{G}$ je u odsustvu, odnosno prisustvu strukturnog pravila permutacije i u tome što je tip terma sistema $\mathcal{G}'$ oblika $\Gamma \vdash A$, gde je Γ multiskup, a u sistemu $\mathcal{G}$ term ima tip $\Gamma \vdash A$, gde je Γ niz formula. Na neki način redosled formula u tipu terma iz $\mathcal{G}$ već govori na kojoj jedinici (onoj koja odgovara prvoj formuli u nizu) se vrši operacija. S druge strane, sam zapis operacije u $\mathcal{G}'$ i terama sa tipovima ne određuje tačno formulu na čijoj se jedinici vrši operacija, već se izdvajanjem te formule u tipu naznači o kojoj se formuli radi. Još jedna razlika, zbog prisustva novog strukturnog pravila, permutacije, imaćemo dodatne jednakosti među termima u sistemu $\mathcal{G}$.

KOMENTAR: Sistem $\mathcal{G}$ ćemo posmatrati kao sistem, koji odgovara Gencenovom sistemu ali, najvažnije stvari u povezivanju Gencenovog sistema i sistema prirodne dedukcije završavaju se na vezi $\mathcal{N}'$, $\mathcal{G}'$. Na taj način kao da su strukturna pravila slabljenje i kontrakcija postala važnija od permutacije.

DEFINICIJA: $\mathcal{G}$ je sistem $\mathcal{G}$ u kome važe sledeće **GElimCut jednakosti:**

I Jedinične jednakosti, **GMcat jednakosti.**

GM1. $f\langle 1_A\rangle=f$, za $f{:}\Gamma A\Delta \vdash B$.

GM2. $1_B\langle g\rangle=g$, za $g{:}\Gamma \vdash B$.

II Jednakosti o permutaciji sečenja sa kontrakcijom, slabljenjem i permutacijom, **PCT-CUT jednakosti.**

GCUTC1. $g\langle \mathbf{c}_A(f)\rangle=\mathbf{c}_A(g\langle f\rangle)$, za $f{:}AA\Delta \vdash C$, $g{:}C\Theta \vdash B$.

GCUTC2. $\mathbf{p}_{A\Delta,C}(\mathbf{c}_A(g))\langle f\rangle= \mathbf{p}_{A,\Gamma}(\mathbf{c}_A(\mathbf{p}_{\Gamma,AA}(\mathbf{p}_{AA\Delta,C}(g)\langle f\rangle)))$, za $f{:}\Gamma \vdash C$, $g{:}AA\Delta C\Theta \vdash B$.

GCUTC0. $\mathbf{c}_C(g)\langle f\rangle=\mathbf{c}_\Gamma(\mathbf{p}_{\Gamma,C}(g\langle f\rangle)\langle f\rangle)$, za $f{:}\Gamma \vdash C$, $g{:}CC\Delta \vdash B$.

GCUTT1. $g\langle \mathbf{t}_A(f)\rangle=\mathbf{t}_A(g\langle f\rangle)$, za $f{:}\Gamma \vdash C$, $g{:}C\Delta \vdash B$.

GCUTT2. $\mathbf{p}_{A,C}(t_A(g))\langle f\rangle=\mathbf{p}_{A,\Gamma}(\mathbf{t}_A(g\langle f\rangle))$, za $f{:}\Gamma \vdash C$, $g{:}C\Delta \vdash B$.

GCUTT0. $\mathbf{t}_C(g)\langle f\rangle=\mathbf{t}_\Gamma(g)$ za $f{:}\Gamma \vdash C$, $g{:}\Delta \vdash B$.

GCUTP1. $g\langle \mathbf{p}_{A,B}(f)\rangle=\mathbf{p}_{A,B}(g\langle f\rangle)$, za $f{:}\Gamma AB\Delta \vdash C$, $g{:}C\Theta \vdash B$.

GCUTP2. $\mathbf{p}_{A,,B}(g)\langle f\rangle= \mathbf{p}_{A,B}((g\langle f\rangle)$, za $f{:}\Gamma \vdash C$, $g{:}C\Lambda AB\Delta \vdash B$.

III Važne jednakosti, β_G **jednakosti.**

G$\beta\wedge$*1.* $h_p\langle\langle f, g\rangle\rangle=h\langle f\rangle$, za $h{:}A\Lambda \vdash C$, $f{:}\Gamma \vdash A$, $g{:}\Gamma \vdash B$.

G$\beta\wedge$*2.* $h_{p'}\langle\langle f, g\rangle\rangle=h\langle g\rangle$, za $h{:}B\Lambda\vdash C$, $f{:}\Gamma \vdash A$, $g{:}\Gamma \vdash B$.

G$\beta\vee$*1.* $[f, g]\langle_k h\rangle=f\langle h\rangle$, za $f{:}A\Delta \vdash C$, $g{:}B\Delta \vdash C$, $h{:}\Gamma \vdash A$.

$G\beta\vee 2.$ $[f,g]\langle_{\kappa'} h\rangle = g\langle h\rangle,$ za $f{:}A\Delta\vdash C,\ g{:}B\Delta\vdash C,\ h{:}\Gamma\vdash B.$

$G\beta\Rightarrow.$ $f[g]\langle h^*\rangle = \mathrm{p}_{\Gamma,\Delta}(f\langle h\langle g\rangle\rangle),$ za $h{:}A\Delta\vdash B,\ f{:}B\Lambda\vdash C,\ g{:}\Gamma\vdash A.$

IV Jednakosti o permutaciji sečenja i nekog pravila za veznike, **GPermCut jednakosti**.

Posmatramo term sledećeg oblika:

$R(f_1(,f_2))\langle L(g_1(,g_2))\rangle{:}\Lambda\Gamma\Delta\vdash B,\ L(g_1(,g_2)){:}\Gamma\vdash A,\ R(f_1(,f_2)){:}\Lambda A\Delta\vdash B,$ gde su R i L neka pravila različita od sečenja i oznaka R (L) znači desno (levo) pravilo posmatranog sečenja. Ispitivaćemo sve njihove mogućnosti istim redosledom kao u sistemu $\mathcal{G}'$ i svaki od tih slučajeva imaće svoj broj (2.(iv) na primer). Ako neki od slučajeva iz $\mathcal{G}'$ ne može da se javi u $\mathcal{G}$ mi ćemo izostaviti njegov broj (na primer 1.(v)). Novi slučajevi kojih nema u $\mathcal{G}'$ a pojavljuju se u $\mathcal{G}$ dobiće svoju numeraciju (1.(vi), 2.(vi), 3.(vi), 4.(i)-(iv)).

1. ***L* je pravilo uvođenja:**

Postoje mogućnosti za pravilo R:

(i) R je pravilo eliminacije koje formira formulu sečenja i to su već navedene β-jednakosti.

(iii) R je pravilo uvođenja, tada:

$R(f)\langle L(g)\rangle = R\ldots(f\langle L(g)\rangle),$ gde je pravilo uvođenja R zajedno sa potrebnim permutacijama označeno sa $R\ldots$;

i to su jednakosti ***GI(R)perm.Cut-I.***

(iv) R je slabljenje ili kontrakcija koji se odnose na formulu sečenja i to su već pomenute ***GCUTC0*** i ***GCUTT0*** jednakosti.

(v) R je permutacija koji se ne odnosi na formulu sečenja i tada:

$R(f)\langle L(g)\rangle = L\ldots(R(f)\langle g\rangle),$ gde je pravilo uvođenja L zajedno sa potrebnim permutacijama označeno sa $L\ldots$;

i to su jednakosti ***GI(L)perm.Cut-P.***

ili

već pomenuta jednakost ***GCUTP1*** kada je L pravilo uvođenja.

2. ***L* je pravilo eliminacije:**

Postoje mogućnosti za pravilo R:

(i) R je pravilo eliminacije koje formira formulu sečenja i tada:

$R(f)\langle L(g)\rangle = L(R(f)\langle g\rangle),$

i te jednakosti zovemo ***GMax.Red.* jednakosti.**

(iii) R je pravilo uvođenja, tada:

$R(f)\langle L(g)\rangle = L\ldots(R(f)\langle g\rangle),$ gde je pravilo eliminacije L zajedno sa potrebnim permutacijama označeno sa $L\ldots$;

i to su jednakosti ***GE(L)perm.Cut-I.***

ili

$R(f)\langle L(g)\rangle = R(f\langle L(g)\rangle),$ i to su jednakosti ***GI(R)perm.Cut-E.***

(iv) R je slabljenje ili kontrakcija koji se odnose na formulu sečenja i to su već pomenute ***GCUTC0*** i ***GCUTT0*** jednakosti.

(vi) R je permutacija koji se ne odnosi na formulu sečenja i tada:

$R(f)\langle L(g)\rangle = L(R(f)\langle g\rangle),$ i to su jednakosti ***GE(L)perm.Cut-P.***

ili

već pomenuta jednakost ***GCUTP1*** kada je L pravilo eliminacije.

3. L **je kontrakcija ili slabljenje:**

Postoje mogućnosti za pravilo R:

(i) R je pravilo eliminacije koje formira formulu sečenja i tada:
$R(f)\langle L(g)\rangle = L(R(f)\langle g\rangle)$, i to su jednakosti koje su podskup jednakosti ***GCUTC1, GCUTT1*** kada je R pravilo eliminacije.

(iii) R je pravilo uvođenja, tada:
$R(f)\langle L(g)\rangle = R(f\langle L(g)\rangle)$, i to su jednakosti ***GI(R)perm.Cut-CiT***
ili
$R(f)\langle L(g)\rangle = L(R(f)\langle g\rangle)$, i te jednakosti su već pomenute ***GCUTC1, GCUTT1***.

(iv) R je slabljenje ili kontrakcija koji se odnose na formulu sečenja i to su već pomenute ***GCUTC0*** i ***GCUTT0*** jednakosti.

(vi) R je permutacija koji se ne odnosi na formulu sečenja i tada:
$R(f)\langle L(g)\rangle = L(R(f)\langle g\rangle)$, i to su već pomenute jednakosti ***GCUTC1, GCUTT1***
ili
$R(f)\langle L(g)\rangle = R(f\langle L(g)\rangle)$, i to je već pomenuta jednakost ***GCUTP2*** kada je L pravilo kontrakcije ili slabljenja.

4. L **je permutacija:**

Postoje mogućnosti za pravilo R:

(i) R je pravilo eliminacije koje formira formulu sečenja i tada:
$R(f)\langle L(g)\rangle = L(R(f)\langle g\rangle)$, i to su već pomenute jednakosti ***GCUTP1***, kada je R pravilo eliminacije.

(ii) R je pravilo uvođenja, tada:
$R(f)\langle L(g)\rangle = R(f\langle L(g)\rangle$ zovemo ih ***GI(R)perm.Cut-P.***
ili
$R(f)\langle L(g)\rangle = L(R(f)\langle g\rangle)$, i to su već pomenute jednakosti ***GCUTP1***, kada je R pravilo uvođenja.

(iii) R je slabljenje ili kontrakcija koji se odnose na formulu sečenja i to su već pomenute ***GCUTC0*** i ***GCUTT0*** jednakosti ili ***GCUTP1*** kada je pravilo R kontrakcija ili slabljenje.

(iv) R je permtacija koja se ne odnosi na formulu sečenja tada
$R(f)\langle L(g)\rangle = L(R(f)\langle g\rangle)$, i to su već pomenute jednakosti ***GCUTP1.***
ili
$R(f)\langle L(g)\rangle = R(f\langle L(g)\rangle)$, i to su već pomenute jednakosti ***GCUTP2.***

V Jednakosti asocijativnosti i komutativnosti, **GMcat.as.kom.Cut jednakosti.**

GM3.	$h\langle g\langle f\rangle\rangle = h\langle g\rangle\langle f\rangle$,	za $f{:}\Gamma\vdash A,\ g{:}A\Delta\vdash B,\ h{:}B\Lambda\vdash C$.
GM4.	$\mathbf{p}_{\Lambda,\Gamma}(\mathbf{p}_{\Gamma,B}(h\langle g\rangle)\langle f\rangle) = \mathbf{p}_{\Lambda,A}(\mathbf{p}_{A,B}(h)\langle f\rangle)\langle g\rangle$,	za $f{:}\Lambda\vdash B,\ g{:}\Gamma\vdash A,\ h{:}AB\Delta\vdash C$.

VI Jednakosti permutacije, kontrakcije i slabljenja, **PCT jednakosti.**

GPP1.	$\mathbf{p}_{B,A}(\mathbf{p}_{A,B}(f)) = f$,	za $f{:}\Gamma AB\Delta\vdash C$.
GPP2.	$\mathbf{p}_{C,D}(\mathbf{p}_{A,B}(f)) = \mathbf{p}_{A,B}(\mathbf{p}_{C,D}(f))$,	za $f{:}\Gamma AB\Delta CD\Lambda\vdash C$.
GPP3.	$\mathbf{p}_{B,C}(\mathbf{p}_{A,C}(\mathbf{p}_{A,B}(f))) = \mathbf{p}_{A,B}(\mathbf{p}_{A,C}(\mathbf{p}_{B,C}(f))$,	za $f{:}\Gamma ABC\Lambda\vdash C$.
GPT1.	$\mathbf{p}_{A,B}(\mathbf{t}_D(f)) = \mathbf{t}_D(\mathbf{p}_{A,B}(f))$,	za $f{:}\Gamma AB\Delta\vdash C$

GPC1.	$\mathbf{p}_{A,B}(\mathbf{c}_D(f))=\mathbf{c}_D(\mathbf{p}_{A,B}(f)),$	za $f{:}DD\Gamma AB\Delta\vdash C.$
GPC0.	$\mathbf{c}_D(f)=\mathbf{c}_D(\mathbf{p}_{D,D}(f)),$	za $f{:}DD\Gamma\Delta\vdash C.$
GCT0.	$\mathbf{c}_A(\mathbf{t}_A(f))=f,$	za $f{:}A\Delta\vdash B.$
GCT1.	$\mathbf{c}_B(\mathbf{p}_{A,BB}(\mathbf{t}_A(f)))=\mathbf{p}_{A,B}(\mathbf{t}_A(\mathbf{c}_B(f))),$	za $f{:}BB\Delta\vdash C.$
GCC1.	$\mathbf{p}_{B,A}(\mathbf{c}_B(\mathbf{p}_{A,BB}(\mathbf{c}_A(f))))=\mathbf{c}_A(\mathbf{p}_{B,AA}(\mathbf{c}_B(\mathbf{p}_{AA,BB}(f)))),$	za $f{:}AABB\Delta\vdash C.$
GTT1.	$\mathbf{t}_B(\mathbf{t}_A(f))=\mathbf{p}_{A,B}(\mathbf{t}_A(\mathbf{t}_B(f))),$	za $f{:}\Delta\vdash C.$

DEFINICIJA: Neka su f, g dva terma tipa $\Gamma\vdash A$ iz $\mathcal{G}$. Ako postoji podterm f' terma f i podterm g' terma g takvi da je $f'=g'$ jedna od jednakosti I-VI (sa važnošću da je f sa leve a g sa desne srane =) i $f=P(f')$, $g=P(g')$, gde je P niz pravila, tada kažemo da se term f **1-Gcf redukuje na term** g.

Oznaka: $f\succ_1 g$. U slučaju da je to potrebno navešćemo i koja je to jednakost.

DEFINICIJA: Neka su f, g dva terma tipa $\Gamma\vdash A$ iz $\mathcal{G}$. Ako postoji prirodan broj m i termi $h_1,h_2,...,h_m$ iz $\mathcal{G}$ takvi da

$f\equiv h_1\succ_1 h_2\succ_1 ... \succ_1 h_m\equiv g$, onda se term f **Gcf-redukuje na term** g.

Oznaka: $f\succ g$, a ako bude potrebno može biti navedeno koje su to jednakosti u koracima $\succ_1$.
Postoji mogućnost da se u nizu $f\equiv h_1\succ_1 h_2\succ_1 ... \succ_1 h_m\equiv g$ pojavi i slučaj $h_{i+1}\succ_1 h_i$ i onda ćemo koristiti oznaku $f \succcurlyeq g$.

KOMENTAR: *Pri definisanju $\mathcal{G}$ mogli smo da navedemo još jednakosti koje izjednačavaju terme u kojima je permutovano neko strukturno pravilo (permutacija, kontrakcija, slabljenje) sa nekim pravilom za veznike. Te jednakosti bi odgovarale jednakostima CE$\wedge$-TI$\Rightarrow$ iz $\mathcal{G}'$ i bilo bi još nekih novih zbog prisustva pravila permutacije u sistemu $\mathcal{G}$. Ali, lako se može videti da su te jednakosti posledica jednakosti koje smo već naveli u definiciji $\mathcal{G}$. Dokaz toga bi bio sličan dokazu CT-Leme u $\mathcal{G}'$!*

VEZE IZMEĐU SISTEMA

Naš pristup proučavanju sistema prirodne dedukcije i Gencenovog sistema sekvenata je da ulogu izvoda odnosno figura izvođenja preuzimaju termi sa operacijama nad njima. To nam omogućava da te naše sisteme povežemo preslikavanjima. Preslikavanja koje ćemo definisati će povezivati formule sa formulama, poštovaće operacije nad njima i praviće parove odgovarajućih operacija nad strelicama tih sistema (original i slika preslikavanja). Uz pomoć tih preslikavanja vezu među sistemima podelićemo na dva nivoa: veza između terama i veza među jednakostima nad termima.

Prisustvo, odnosno odsustvo operacija nad strelicama u pojedinim sistemima će kao rezultat dati da svaki term iz sistema $\mathcal{ND}$ mogu preslikati u neki term sistema $\mathcal{N}$, ali samo neke terme (bez suvišnih operacija) iz sistema $\mathcal{N}$ u sistem $\mathcal{ND}$. Različita priroda operacija će imati za posledicu da će jednoj operaciji iz sistema $\mathcal{ND}$ odgovarati niz operacija u sistemu $\mathcal{N}$.

Sledeći nivo je upoređivanje u kakvom su odnosu redukcije, odnosno izjednačavanja među termima koja postoje u $\mathcal{ND}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$, $\mathcal{G}'$ i $\mathcal{G}$. Redukcije koje smo definisali u $\mathcal{ND}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$ odgovaraju koracima redukcije pri normalizaciji u sistemu prirodne dedukcje. Jednakosti koje važe u $\mathcal{G}'$ i $\mathcal{G}$ su koraci transformacije potrebni za dobijanje terma bez sečenja u Gencenovom sistemu sekvenata. Zbog toga bi ovo vezivanje već bio početak upoređivanja važnih teorema ova dva sistema: teoreme o normalizaciji i teoreme o eliminaciji sečenja. Povezujući $\mathcal{ND}$ i $\mathcal{N}$ videćemo da prisustvo strukturnih pravila nameće nove jednakosti (izjednačavanja) među termima, kao i da od oblika operacija eliminacija zavisi nepostojanje ($\mathcal{ND}$), odnosno postojanje ($\mathcal{N}$) maksimalnih segmenata.

1. VEZE IZMEĐU SISTEMA $\mathcal{ND}$ I $\mathcal{N}$

Pre nego što uspostavimo vezu između terama sistema $\mathcal{ND}$ i sistema $\mathcal{N}$ potsetimo se razlika koje postoje između njih i koje će dosta uticati na prirodu te veze.

Prvo, u sistemu $\mathcal{N}$ postoje operacije zamene kojih nema u sitemu $\mathcal{ND}$, pa postoji problem pretstavljanja tih operacija u $\mathcal{ND}$.

Drugo, u sistemu $\mathcal{ND}$ imamo specijalne oblike nekih operacija (δ_{0A}, δ_{0B}, δ_{0AB}, λ_0, $(1_{[A]}/f)$) za koje ne postoje odgovarajuće operacije u sistemu $\mathcal{N}$.

Treće, operacije eliminisanja u sistemima $\mathcal{ND}$ i $\mathcal{N}$ razlikuju se, grubo rečeno, po broju oslobođenih pretpostavki.

Ova tri problema ćemo rešavati u bogatijem (sa više operacija) sistemu $\mathcal{N}$ definišući terme specijalnog oblika, koji će odgovarati termima iz sistema $\mathcal{ND}$. Na određeni način ćemo klasifikovati operacije sjedinjavanja i novih pretpostavki, neke od tih vrsta proglasiti suvišnim (posmatrajući ih iz sistema $\mathcal{ND}$), a neke će biti pridružene operacijama eliminisanja ili uvođenja.

Operacije **d**; **'**; **I**; * u sistemu ***N*** zajedno sa sjedinjavanjima, koja su povezana sa njihovim oslobođenim pretpostavkama odgovaraće operacijama δ; π, π'; λ; * u sistemu ***ND***. Na taj način ćemo rešiti problem različitog broja oslobođenih pretpostavki.

Drugi problem ćemo rešiti tako što ćemo smatrati da operacijama δ_{0A}, δ_{0B}, δ_{0AB}; λ_0 u sistemu ***ND*** odgovaraju operacija **d**; odnosno * zajedno sa nekom operacijom nove pretpostavke. Što se tiče nadovezivanja iz sistema ***ND*** njega zamenjujemo nizom nadovezivanja u sistemu ***N***.

Sve ostale operacije zamene u nekom termu sistema ***N***, koje nisu na jedan od ovih načina povezane sa nekom drugom operacijom u tom termu biće suvišne i formiraćemo term bez tih operacija koji će odgovarati polaznom. Samo za takav term, bez suvišnih sjedinjavanja i novih pretpostavki iz ***N*** moći ćemo da nađemo odgovarajući term u sistemu ***ND***. Za svaki term f sistema ***N*** , formiranjem posebnog terma bez suvišnih operacija (koji ćemo zvati prirodno sređen) rešićemo prvi problem.

Postupak formiranja terma (od proizvoljnog terma sistema ***N***) koji će moći da se preslika u sistem ***ND*** grubo ćemo podeliti na dva dela:

(1) definisanje tog terma;

(2) ispitivanje da li ti termi "čuvaju redukcijske korake".

Prvi deo čine:

1.1. Eliminisanje iz terma f suvišnih operacija sjedinjavanja i novih pretpostavki - dobijanje prirodno sređenog terma f^{tc}.

1.2. Dokaz da je za prizvoljan term f njegov f^{tc} jedinstven do na $=_{ND}$.

1.3. Definisanje operacija eliminisanja $\wedge$, $\Rightarrow$ u termu f na način sličan kao u sistemu ***ND*** i dobijanje nd-terma terma f.

1.4. Dokazivanje da je svejedno kojim redosledom (1.1 pa 1.3 ili 1.3 pa 1.1) sređujemo term f. Ovim je gotov proces formiranja terma $(nf)^{tc}$, koji će se umesto terma f, kao njegov pretstavnik slikati u sistem ***ND***.

Ostaje nam drugi deo: da li će redukcija $f \to_{1\text{-}RM} g$ biti sačuvana na pretstavnicima $(nf)^{tc}$, $(ng)^{tc}$:

1.5. Čuvanje redukcijskih koraka u termima nf, f^{tc}, $(nf)^{tc}$.

1.1.

Sada ćemo dati preciznu klasifikaciju operacija u nekom termu sistema ***N***.

DEFINICIJA: Neka je $f{:}\Gamma\_\Delta\vdash A$ strelica sistema ***N***. Definisaćemo neke **specijalne operacije** terma f.

1. Operacija * je **T-desna** ako su nosioci njenih o. p. podvučene jedinice.
2. Operacija * je **C-desna** ako ima više nosilaca njene o. p. i niz kojim su povezani ti nosioci nije T-niz.
3. Operacija **'** (**d**) je **T$\wedge$($\vee$)-eliminaciona** ako nosioci jedne njene o. p. (može i druge) su podvučene jedinice.
4. Operacija **'** je **T$\wedge$** operacija ako su nosioci njenih o. p. podvučene jedinice.
5. Operacija **I** je **T$\Rightarrow$** operacija ako je su nosioci njene o. p. podvučene jedinice.
6. Operacije **'** , **d**, **I** su redom **C$\wedge$, C$\vee$, C$\Rightarrow$ eliminacione** ako ima više nosilaca njene o. p. i niz kojim su povezani ti nosioci nije T-niz.
7. Operacija nadovezivanja je **T-nadovezujuća** ako su nosioci njenih o. p. podvučene jedinice.

8. Operacija nadovezivanja je **C-razgranata** ako ima više nosilaca njene o. p. i niz kojim su povezani ti nosioci nije T-niz.

Jedinica terma koja se pojavljuje u termu f i nije nosilac neke o. p. operacija ', **d**, **I**, *, nadovezivanja naziva se **suvišna jedinica** tog terma, f-suvišna.

9. Operacija $(\_/1_{B_i})$ je **T-suvišna** operacija ako je jedinica 1_{B_i} f-suvišna.

10. Operacija $(1_{C_i}1_{C_j}/1_{C_k})$ je **C-suvišna** operacija ako je jedinica 1_{C_k} f-suvišna.

DEFINICIJA: Za neki term f sistema $\mathcal{N}$ niz sjedinjavanja koji povezuje nosioce o. p. neke njegove specijalne operacije je **niz** te **operacije**. Nove pretpostavke čije se jedinice pojavljuju u tom nizu su **nove pretpostavke** te **operacije**.

Napomena: Term f može imati više nizova za istu specijalnu operaciju.

1.2.

Sledeći korak je da definišemo kako da od svakog terma f sistema $\mathcal{N}$ formiramo term (prirodno sređen) koji možemo preslikati u sistem $\mathcal{ND}$. Prvo ćemo definisati korake redukcije, a zatim ćemo pokazati da važi jedno veoma važno svojstvo: za svaki term f proizvoljnom primenom koraka redukcije dobijamo jedinstven (do na $=_{ND}$) prirodno sređen term.

DEFINICIJA: Neka je f term sistema $\mathcal{N}$.

Za neku T-desnu, T$\wedge$($\vee$)-eliminacionu operaciju terma f ako ta operacija ima niz sjedinjavanja, dobijamo **T-term** terma f, f_T, ako: izostavimo neke nove pretpostavke te operacije $(\_/1_{C_{ci}}),\dots$; sva sjedinjavanja oblika $(\_1_{C_i}\ \_1_{C_j}/\_1_{C_k})$ u kojima se pojavljuje jedinica nekih od tih pretpostavki izostavljamo i ako nije izostavljena nova pretpostavka $(\_/1_{C_{cj}})$ onda zamenimo $1_{C_j}\equiv 1_{C_k}$.

Za neku C-desnu, C$\wedge$($\vee$, $\Rightarrow$) eliminacionu operaciju terma f dobijamo **C-term** terma f, f_C, ako: izostavimo neke nove pretpostavke te operacije $(\_/1_{C_{ci}}),\dots$; sva sjedinjavanja oblika $(\_1_{C_i}\ \_1_{C_j}/\_1_{C_k})$ u kojima se pojavljuje jedinica nekih od tih pretpostavki izostavljamo i ako nije izostavljena nova pretpostavka $(\_/1_{C_{cj}})$ onda zamenimo $1_{C_j}\equiv 1_{C_k}$.

Za neku operaciju T$\wedge$: $h\,'h_1$; T$\Rightarrow$: $\mathbf{I}(h_1, h_2, h_3)$; ili T-nadovezujuću $(\_\ 1_{C_j}/h_1)h_2$ dobijamo **TT-term** iz terma f na sledeći način:

1. izostavljanjem navedene operacije, nosioca njenih o. p. i svih njenih novih pretpostavki i niza sjedinjavanja redom (za T$\wedge$, T$\Rightarrow$, T-nadovezujuću) iz podterama h_1; h_3; h_2 i dobijanje redom terama h_1'; h_3'; h_2'.
2. dodavanjem novih pretpostavki na tako dobijene terme, čije jedinice odgovaraju jedinicama redom terama h; h_1, h_2; h_1 koje nisu suvišne, za ostatak terma f.

Primer: $f=(1_{A_m}/h_2)(((\_/1_{A_m})1_{C\wedge B})'(\_1_{C_i}\ \_1_{C_j}/\_1_{C_k})(\_/1_{C_i})(\_/1_{B_n})(\_/1_{C_j})h_1))$

za $(\_/1_{A_m})1_{C\wedge B}: \_AC\wedge B\vdash C\wedge B$, $\quad(\_1_{C_i}\ \_1_{C_j}/\_1_{C_k})(\_/1_{C_i})(\_/1_{B_n})(\_/1_{C_j})h_1: \_C\_B\Delta\vdash A$.

Term $(1_{A_m}/h_2)(\_/1_{A_m})h_1$ je TT-term operacije T$\wedge$ iz terma f.

Za neku C-razgranatu operaciju terma f, $(1_{C_j}/h_1)h_2$, term f_1 je **CC-term** dobijen iz f na sledeći način:

1. izostavljanjem nadovezivanja $(1_{C_k}/h_1)h_2$;
2. izostavljanjem svih novih pretpostavki te operacije;
3. izostavljanjem svih sjedinjavanja iz nizova te operacije;

4. za sve nepodvučene jedinice koje su se pojavljivale u tim nizovima 1_{C_i} , 1_{C_j} ,... pravimo nadovezivanja $(1_{C_i}/h_1)$, $(1_{C_j}/h_1)$...
5. za sve jedinice iz h_1 koje nisu suvišne za preostali deo terma f: 1_{D_n} ; 1_{D_m};... i koje nakon ovog niza nadovezivanja imaju "duplikate" 1_{D_i}, 1_{D_j} ...; 1_{D_k} , 1_{D_l} ... imamo niz sjedinjavanja koja odgovarajeće jedinice spajaju u jednu.

Primer: $f=1_{A\wedge B}'((1_{C_m}/(\_/1_D)\{1_A, 1_B\})(1_{C_i}\_1_{C_j}/\_1_{C_m})\ (1_{C_k}1_{C_l}/1_{C_i})(\_/1_{C_j})h_2)$

$A\wedge B \equiv C,\ \ 1_{A\wedge B}{:}A\wedge B \vdash A\wedge B,\ \ h_2{:}C_{C_k}C_{C_l}\Delta \vdash E,\ f{:}\,A\wedge B\,\_D\Delta \vdash E.$

Onda $f_1{:}\,A\wedge B\_D\_D\,\Delta \vdash E.$

$f_1= 1_{A\wedge B}'((1_{A_q}1_{A_p}/1_{A_t})\ (1_{B_r}1_{B_s}/1_{B_x})(\,1_{C_k}/(\_/1_{D_d})\{1_{A_q}, 1_{B_s}\})(\,1_{C_l}/(\_/1_{D_t})\{1_{A_p}, 1_{B_r}\})h_2).$

Važi: $f=_{ND}f_T$, $f=_{ND}f_C$.

DEFINICIJA: Neka je f term sistema $\mathcal{N}$. Definišemo **korake redukcije**:

(C1) $f\mapsto_1 h$, h je prirodno jednak term nekom **C**-termu terma f za neke njegove specijalne (C-desne, C$\wedge$($\vee$, $\Rightarrow$) eliminacione) operacije.

(T1) $f\mapsto_1 h$, h je prirodno jednak term nekom T-termu terma f za neke njegove specijalne (T-desne, T$\wedge$($\vee$, $\Rightarrow$) eliminacione) operacije.

(C2) $f\mapsto_1 h$, term h je prirodno jednak termu dobijenom izostavljanjem nekih C-suvišnih operacija terma f kao i novih pretpostavki sa svojim nizovima i čije se jedinice pojavljuju u tim C-suvišnim operacijama.

(T2)) $f\mapsto_1 h$, term h je prirodno jednak termu dobijenom izostavljanjem nekih T-suvišnih operacija terma f, nekih sjedinjavanja iz njihovih nizova i novih pretpostavki tih operacija čije se jedinice pojavljuju u tim sjedinjavanjima.

(C3) $f\mapsto_1 h$, term h je prirodno jednak term nekom CC-termu terma f za neku njegovu C-razgranatu operaciju.

(T3) $f\mapsto_1 h$, term h je prirodno jednak term nekom TT-termu terma f za neku njegovu T$\wedge$, T$\Rightarrow$ ili T-nadovezujuću operaciju.

DEFINICIJA: Neka su f, g dva terma tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{N}$. Ako postoji prirodan broj m i termi $h_1,h_2,\dots,h_m$ iz $\mathcal{N}$ takvi da

$f\equiv h_1\mapsto_1 h\mapsto_1\dots\mapsto_1 h_m\equiv g$, za bili koje korake $\mapsto$ od onih gore definisanih onda ćemo to zapisati $f\mapsto\dots_m g$ ili samo $f\mapsto\dots g$.

DEFINICIJA: Neka je $f{:}\Gamma\_\Delta\vdash A$ strelica sistema $\mathcal{N}$. Za term f ćemo reći da je **prirodno sređen term** ako ne postoji term g iz $\mathcal{N}$ takav da $f\mapsto_1 g$ za bilo koji korak $\mapsto_1$ gore definisan.
Oznaka: f^{tc}.

TEOREMA 1: Neka su f, f_1, f_2 termi sistema $\mathcal{N}$, takvi da $f\mapsto_1 f_1$ i $f\mapsto_1 f_2$.
Tada postoji term f_3 sistema $\mathcal{N}$ takav da $f_1\mapsto_1 f_3$ i $f_2\mapsto_1 f_3$.

DOKAZ:
Ovo tvrđenje ćemo dokazati tako što ćemo proći kroz sve moguće slučajeve koraka $f\mapsto f_1$ i $f\mapsto f_2$. Ako bi sve to detaljno ispisivali dokaz bi bio jako dugačak. Zato ćemo detaljno ispisati jedan interesantan slučaj.

Posmatramo
$$\begin{tikzcd} & f \arrow[dl, "\mathrm{C1}"'] \arrow[dr, "\mathrm{T3}"] & \\ f_1 & & f_2 \end{tikzcd}$$

Term f ima oblik $O(\mathbf{I}(h_1, h_2, h_3))$ i operacija $\mathbf{I}(h_1, h_2, h_3)$ je njegova T$\Rightarrow$ operacija.
$h_1:\Gamma \vdash A \Rightarrow B,\quad h_2:\Delta \vdash A,\ h_3:\_B\Lambda \vdash C.$

1. Posebno je interesntno ako prilikom redukcije $\mapsto_{C1}$ nove pretpostavke i sjedinjavanja koje izostavljamo pripadaju termima h_1 i h_2.
Imamo $f_1 = O'(\mathbf{I}(h_1', h_2', h_3'))$ i $h_i =_{ND} h_i'$, $1 \le i \le 3$.
$f_2 = O((\_/1_{\Gamma})(\_/1_{\Delta'})\ h_3'')$, term h_3'' dobijen iz h_3 izostavljanjem o. p. operacije $\mathbf{I}$ i njegovih novih pretpostavki i nizova. Jedinice koje nisu suvišne za ostatak terma f čine $1_{\Gamma'}$ i $1_{\Delta'}$.
Tada, $f_1 \mapsto_1 f_3$, gde je f_3 prirodno jednak $O'((\_/1_{\Gamma 1})(\_/1_{\Delta 1})h_{31})$, TT-termu od f_1,
$f_2 \mapsto_1 f_3'$, gde je f_3' prirodno jednak $O''((\_/1_{\Gamma 2})(\_/1_{\Delta 2})h_{32})$, T-termu ili C-termu od f_2.
Iz terma f_2 izostavljane su sve nove pretpostavke i sjedinjavanja kao prilikom pravljenja terma f_1. Sve jedinice iz novih pretpostavki ili sjedinjavanja, koji nestaju prilikom $\mapsto_{C1}$ a nalazile su se h_1', h_2' sačuvane su u $1_{\Gamma'}$ i $1_{\Delta'}$ jer nisu suvišne za ostatak terma f. Postoji mogućnost da su sada to T-nizovi sjedinjavanja pa primenjujemo T1 redukciju, a ne C1 redukciju. Term h_{32} nema one nove pretpostavke i sjedinjavanja koja nema term h_3' i one koje nema term h_3''.
Term h_{31} je jednak termu h_{32}, samo sa različitim redosledom operacija. Iz njih su izostavljene iste nove pretpostavke i sjedinjavanja, možda samo indeksi nekih jedinica, koje odgovaraju jedna drugoj nisu isti, ali između njih postoji bijekcija. Znači $h_{31} =_{ND} h_{32}$. One jedinice koje su nestale iz Γ' i Δ' pri prelasku na $\Gamma 2$ i $\Delta 2$ već su suvišne u h_1', h_2' za ostatak terma f. Znači, postoji bijekcija između $\Gamma 1$ i $\Gamma 2$, odnosno $\Delta 1$ i $\Delta 2$.
Znači $f_1 \mapsto_1 f_3$ i $f_2 \mapsto_1 f_3$.
2. Slučaj kada prilikom $\mapsto_{C1}$ ne menjamo terme h_1 i h_2 je analogan.
Analogno se pokazuju slučajevi kada term f ima T$\wedge$ ili T-nadovezujuću operaciju.
Na sličan način se dokažu i svi preostali slučajevi. **q. e. d.**

POSLEDICA T1: Neka su f, f_1, f_2 termi sistema $\mathcal{N}$, takvi da $f \mapsto \dots_m f_1$ i $f \mapsto \dots_n f_2$.
Tada postoji term f_3 sistema $\mathcal{N}$ takav da $f_1 \mapsto \dots_n f_3$ i $f_2 \mapsto \dots_m f_3$.

POSLEDICA T2: Neka su f, f_1, f_2, termi sistema $\mathcal{N}$, takvi da $f \mapsto \dots f_1$ i $f \mapsto \dots f_2$.
Tada postoji term f_3 sistema $\mathcal{N}$ takav da $f_1 \mapsto \dots f_3$ i $f_2 \mapsto \dots f_3$.

TEOREMA 2: Neka je $f:\Gamma\_\Delta \vdash A$ strelica sistema $\mathcal{N}$. Za term f postoji term g takav da $f \mapsto \dots g$ i g je prirodno sređen term.

DOKAZ:

Dokaz ćemo izvesti indukcijom po složenosti terma f.
Navešćemo samo jedan slučaj koji je najinteresantniji. Ostali slučajevi mogu se slično (neki mnogo jednostavnije) pokazati.
Neka: $f = h^*$.
Na osnovu indukcijske pretpostavke postoji h^{tc} i možda u termu h postoji T-desna, C-desna operacija terma f.

<u>Ako:</u> takvih operacija nema u f, <u>onda</u> $f^{tc} = (h^{tc})^*$.
<u>Ako:</u> u h postoji T-desna terma f, ona je T-suvišna u h pa je nema u h^{tc},
<u>onda</u> $f^{tc} = ((\_/1_{B_i})h^{tc})^*$.
<u>Ako:</u> u h postoji C-desna terma f, ona je C-suvišna u h pa je nema u h^{tc},
<u>onda</u> $f^{tc} = ((1_{B_i}1_{B_j}/1_{B_k}) \dots (1_{B_m}\_1_{B_n}/1_{B_l})h^{tc})^*$.

Znači postoji f^{tc}. **q. e. d.**

TEOREMA: Neka je f:Γ_Δ⊢A strelica sistema $\mathcal{N}$. Za term f postoji jedinstven (do na $=_{ND}$) term g takav da $f \mapsto ... g$ i g je prirodno sređen term.
DOKAZ:
Teorema 2: za svaki term f iz $\mathcal{N}$ postoji f^{tc}
Neka $f \mapsto ..._n g$ i $f \mapsto ..._m h$, h i g su prirodno sređeni termi i $h \neq g$.
Na osnovu posledice T2 postoji f' takav da $g \mapsto ..._m f'$ i $h \mapsto ..._n f'$, ali $g = g^{tc}$ i $h = h^{tc}$ pa mora $f' \equiv g \equiv h \equiv f^{tc}$. **q. e. d.**

DEFINICIJA: Neka je f:Γ_Δ⊢A strelica iz $\mathcal{N}$. Neka je f^{tc} prirodno sređen term.
Definišemo $|f^{tc}| = \{g$ term iz $\mathcal{N}$: $f^{tc} =_{ND} g^{tc}\}$.

KOMENTAR: Rezultat teoreme 1, teoreme 2 i teoreme je da ne moramo voditi računa o redosledu "odstranjivanja" suvišnih operacija u nekom termu sistema $\mathcal{N}$. Kao što smo već rekli, prirodno sređen term ćemo moći da preslikamo u neki term sistema $\mathcal{ND}$. Prirodno sređen term u $\mathcal{N}$ je onaj term koji posmatrajući ga iz sistema $\mathcal{ND}$ nema suvišnih operacija. Ovim tvrđenjima smo dobili da svaki term f sistema $\mathcal{N}$ ima jedinstven f^{tc} (do na $=_{ND}$), što znači da ima jedinstvenog (do na $=_{ND}$) "pretstavnika" u sistemu $\mathcal{ND}$.

DEFINICIJA: Neka je f:Γ_Δ⊢A strelica iz $\mathcal{N}$. Neka je $|f^{tc}|$ klasa terama iz $\mathcal{N}$. Neka je $g \in |f^{tc}|$ i $g \equiv g^{tc}$ takav da:
1. svakoj T-desnoj operaciji neposredno prethodi njena nova pretpostavka.
2. svakoj T-eliminacionoj operaciji neposredno prethodi njena nova pretpostavka.
3. svakoj C-desnoj operaciji neposredno prethode njene nove pretpostavke i niz te operacije.
4. svakoj C-eliminacionoj operaciji neposredno prethode njene nove pretpostavke i niz te operacije.
5. operacije nadovezivanja koje zamenjuju C-razgranatu operaciju (iz polaznog terma f) su jedna iza druge.

Onda je g **Π-pretstavnik klase** $|f^{tc}|$, <u>oznaka:</u> $f^{tc\Pi}$.

<u>Napomene:</u> 1. g^{tc}, $h^{tc} \in |f^{tc}|$ onda se g^{tc}, h^{tc} razlikuju samo po broju i mestu nadovezivanja.
2. klasa $|f^{tc}|$ ima više $f^{tc\Pi}$ koji se razlikuju samo po broju i mestu nadovezivanja.

Operacije zamene specijalnih operacija terma f, u termu $f^{tc\Pi}$ neposredno prethode svojim operacijama. To će biti jako važno kada term $f^{tc\Pi}$ budemo preslikavali u sistem $\mathcal{ND}$ jer će čitav niz tih operacija zamene i neka operacija veznika odgovarati jednoj operaciji u sistemu $\mathcal{ND}$.

U daljem tekstu kada budemo posmatrali term f i njegov podterm h, ako drugačije ne kažemo h^{tc}, $h^{tc\Pi}$ će označavati prirodno sređen term terma h u odnosu na sve operacije terma f.

<u>Primer:</u> $f=(1_C/g)(\_/1_C)1_{A\wedge B}'(1_B 1_B/1_B)(\_/1_B)(\_/1_B)1_A$, $h=(\_/1_C)1_{A\wedge B}'(1_B 1_B/1_B)(\_/1_B)(\_/1_B)1_A$
Za h kao podterm od f imamo $h^{tc}=(\_/1_C)1_{A\wedge B}'(\_/1_B)1_A$.
A ako posmatramo h kao zaseban term onda prirodno sređen term je $1_{A\wedge B}'(\_/1_B)1_A$.

1.3.

Postoji još jedna mogućnost približavanja terma sistema $\mathcal{N}$ termima sistema $\mathcal{ND}$. Oblici operacija eliminisanja veznika $\wedge$, $\Rightarrow$ u ovim sistemima se razlikuju. Slikovito rečeno eliminacija u $\mathcal{ND}$ se vrši na termima koji nemaju "suvišnih" pretpostavki, koji nisu "mnogo" složeni, što je slučaj u sistemu $\mathcal{N}$. Zato ćemo pokušati da u sistemu $\mathcal{N}$ zamenimo postojeće eliminacije veznika $\wedge$, $\Rightarrow$ nekim koje su jednostavnije u sledećem smislu: termi koji su tipa $AB\Gamma\vdash C$ (ili $B\Delta\vdash C$) u operacijama eliminacije veznika $\wedge$ ($\Rightarrow$) biće jedinice tipa $B\vdash B$, $\_AB\vdash B$, $\_BA\vdash A$ a ostale informacije tih terama "čuvaju" se nadovezivanjima. Ako takve izmene izvršimo u nekom termu sistema $\mathcal{N}$ dobijamo nd-term tog terma. Sledi precizna definicija.

DEFINICIJA: Neka je $f{:}\Theta\vdash D$ strelica iz $\mathcal{N}$. Ako svaki podterm iz f koji ima jedan od sledećih oblika:

(i) $h'g$ za $h{:}\Gamma\vdash A\wedge B,\ g{:}\Lambda AB\Delta\vdash C$,

(ii) $(1_C/O(h'g))h_1$, za $h{:}\Gamma\vdash A\wedge B,\ g{:}\Lambda AB\Delta\vdash C,\ h_1{:}C\Phi\vdash E$.

(iii) $\mathbf{I}(h, h_1, h_2)$, za $h{:}\Gamma\vdash A\Rightarrow B,\ h_1{:}\Delta\vdash A,\ h_2{:}\Theta B\Lambda\vdash C$,

(iv) $(1_C/O(\mathbf{I}(h, h_1, h_2)))h_3$, za $h{:}\Gamma\vdash A\Rightarrow B,\ h_1{:}\Delta\vdash A,\ h_2{:}\Theta B\Lambda\vdash C,\ h_3{:}C\Phi\vdash E$.

gde je O niz operacija zamene, zamenimo respektivno sa

(i) $(1_\Gamma 1_\Gamma/1_\Gamma)(1_A/h'(\_/1_B)1_A)\ (1_B/h'(\_/1_A)1_B)g$, ako $g\neq(\_/1_A)1_B,\ (\_/1_B)1_A$;

(ii) $(1_C/O((1_\Gamma 1_\Gamma/1_\Gamma)(1_A/h'(\_/1_B)1_A)\ (1_B/h'(\_/1_A)1_B)g))h_1$, ako $g\neq(\_/1_A)1_B,\ (\_/1_B)1_A$;

(iii) $(1_B/\mathbf{I}(h, h_1, 1_B))\ h_2$, ako $h_2\neq 1_B$;

(iv) $(1_C/(1_B/\mathbf{I}(h, h_1, 1_B))h_2)h_3$, ako $h_2\neq 1_B$.

Onda dobijamo **nd-term terma** f, nf.

1.4.

LEMA: Neka je $f{:}\Theta\vdash D$ strelica iz $\mathcal{N}$. Tada u sistemu $\mathcal{N}$ važi:

$(1_\Gamma 1_\Gamma/1_\Gamma)(\_/1_\Delta)(nf)^{tc}=_{ND}n(f^{tc})$, za neke Γ i Δ.

DOKAZ:

Napomena: term $(nf)^{tc}$ označavaćemo sa nf^{tc}.

Najvažnije će nam biti kako će se slagati termi nf i f prilikom pravljenja prirodno sređenih terama $(nf)^{tc}, f^{tc}$.

Kada budemo pravili $n(f^{tc})$ sve T$\wedge$ eliminacione, T$\Rightarrow$ eliminacione operacije iz f^{tc} postaju T-nadovezujuće i nema drugih promena.

Navešćemo dokaz samo za interesantne slučajeve specijalnih operacija kada se njihova vrsta ne poklapa u termima nf i f.

Dokaz ćemo izvesti indukcijom po složenosti terma f.

- T$\wedge$-eliminaciona u termu f postaje T-nadovezujuća u termu nf:

za podterm $h'(\_/1_B)g$ od terma f, $h{:}\Gamma\vdash A\wedge B$, $g{:}A\_B\Delta\vdash C$,

sa jedne strane:

$$(h'(\_/1_B)g)^{tc}=h^{tc}{}'(\_/1_B)g^{tc},$$

$$n((h'(\_/1_B)g)^{tc})=(1_{\Gamma'}1_{\Gamma'}/1_{\Gamma'})(1_A/n(h^{tc})'(\_/1_B)1_A)(1_B/n(h^{tc})'(\_/1_A)1_B)(\_/1_B)n(g^{tc})$$

$$=_{ND}(1_{\Gamma'}1_{\Gamma'}/1_{\Gamma'})(1_A/n(h^{tc})'(\_/1_B)1_A)(\_/1_{\Gamma'})n(g^{tc});$$

sa druge strane:

$$n(h'(\_/1_B)g)=(1_\Gamma 1_\Gamma/1_\Gamma)(1_A/nh'(\_/1_B)1_A)(1_B/nh'(\_/1_A)1_B)(\_/1_B)ng,$$

$$(n(h'(\_/1_B)g))^{tc}=(1_{\Gamma''}1_{\Gamma''}/1_{\Gamma''})(1_A/(nh)^{tc}{}'(\_/1_B)1_A)(\_/1_{\Gamma''})(ng)^{tc}.$$

Tip $\Gamma' \vdash A\wedge B$ je tip terma h^{tc}, a time i terma $n(h^{tc})$. Jedinice $1_{\Gamma''}$ čine jedinice koje nisu C-suvišne za term $n(h'(\_/1_B)g)$. Ako su suvišne za term f može se desiti da term $(n(h'(\_/1_B)g))^{tc}$ uopšte nema sjedinjavanja $(1_{\Gamma''}1_{\Gamma''}/1_{\Gamma''})$, ali sigurno $\Gamma''\subseteq\Gamma'$.

Onda $n((h'(\_/1_B)g)^{tc}) = (1_{\Gamma 1}\, 1_{\Gamma 1}/1_{\Gamma 1})(\_/1_{\Delta 1})(n(h'(\_/1_B)g))^{tc}$, za neke $\Gamma 1$, $\Delta 1$.

- Analogno se dokazuje kada: $T\Rightarrow$-eliminaciona u termu f postaje T-nadovezujuća u termu nf;

$T\wedge$ termu f postaje T-nadovezujuća u termu nf;

$T\Rightarrow$ u termu f postaje T-nadovezujuća u termu nf.

- $C\wedge$-eliminaciona u f postaje u termu nf C-razgranata:

za podterm $(h'(1c_i\, 1c_j/\, 1c_k)g)$ od f, $h{:}\Gamma \vdash C\wedge B$, $g{:}CB\Delta \vdash C$,

sa jedne strane

$(h'(1c_i\;1c_j/\;1c_k)g)^{tc}=h^{tc}{}'(1c_i\;1c_j/\,1c_k)g^{tc}$,

$n((h'(1c_i\,1c_j/1c_k)g)^{tc})=(1_{\Gamma'}\,1_{\Gamma'}/1_{\Gamma'})(1c_k/\,nh^{tc}{}'(\_/1_B)1_C)(1_B/\,nh^{tc}{}'(\_/1_C)1_B)(1c_i\,1c_j/1c_k)n(g^{tc})$

sa druge

$n(h'(1c_i\,1c_j/1c_k)g)=(1_\Gamma 1_\Gamma/1_\Gamma)(1c_k/\,nh'(\_/1_B)1_C)(1_B/\,nh'(\_/1_C)1_B)(1c_i\,1c_j/\,1c_k)ng$,

$(n(h'(\_/1_B)g))^{tc}=(1_{\Gamma''}1_{\Gamma''}/1_{\Gamma''})(1c_i/\,n(h^{tc})'(\_/1_B)1_C)\;(1c_j/\,n(h^{tc})'(\_/1_B)1_C)(ng)^{tc}$.

Na sličan nažin kao u slučaju $T\wedge$-eliminacione operacije pokaže se da

$n((h'(1c_i\,1c_j/1c_k)g)^{tc})=_{ND}(1_{\Gamma 1}\,1_{\Gamma 1}/1_{\Gamma 1})(\,\_/1_{\Delta 1})(n(h'(\_/1_B)g))^{tc}$, za neke $\Gamma 1$, $\Delta 1$.

- Analogno se dokazuje kada: $C\Rightarrow$-eliminaciona u termu f postaje C-razgranata u termu nf.

q. e. d.

DEFINICIJA: Neka je $f{:}\Gamma \vdash A$ strelica iz sistema $\mathcal{N}$. Definišemo:

$|f| = \{g$ term iz $\mathcal{N}{:}\, f =_{ND} g\}$,

$[nf^{tc}] = \{g$ term iz $\mathcal{N}{:}\ (nf)^{tc} =_{ND} (ng)^{tc}\}$.

Na tri načina smo grupisali terme sistema $\mathcal{N}$, a sada ćemo videti kakav je odnos među tim klasama.

LEMA 1n: Neka su f, g termi sistema $\mathcal{N}$. Ako $f =_{ND} g$, onda $f^{tc} =_{ND} g^{tc}$.

DOKAZ:

Ako $f =_{ND} g$.

Onda se termi f i g razlikuju 1. po rasporedu, mestu pojavljivanja u njima nekih operacija nove pretpostavke, sjedinjavanja i nadovezivanja;

2. term f ima neka nadovezivanja a term g ne i obrnuto.

Razlika 1: sjedinjavanja i nove pretpostavke su suvišni (ili ne) i u termu f i u termu g.

Razlika 2: posmatramo: term f ima nadovezivanje na C-razgranatu formulu C, a term g nema to nadovezivanje,

$(1_C/h)O(\ldots(1c_m 1c_k/1c_n)h_1\ldots)$ podterm terma f,

$O(\ldots(1_\Gamma 1_\Gamma/1_\Gamma)h_2\ldots)$ podterm terma g za $(1_\Gamma 1_\Gamma/1_\Gamma)h_2 =_{ND} (1_C/h)(1c_m 1c_k/1c_n)h_1$, $h{:}\Gamma\vdash C$.

Tada $((1_C/h)O(\ldots(1c_m 1c_k/1c_n)h_1\ldots))^{tc} = O^{tc}(\ldots(1_{\Gamma'}\,1_{\Gamma'}1_{\Gamma'})(1c_m/h^{tc})(\,1c_k/h^{tc})h_1{}^{tc}\ldots)$,

gde je Γ' deo od Γ čiji jedinice ne učestvuju u suvišnim operacijama.

$(O(\ldots(1_\Gamma 1_\Gamma/1_\Gamma)h_2\ldots))^{tc} = O^{tc}(\ldots(1_{\Gamma'}\,1_{\Gamma'}/1_{\Gamma'})h_2{}^{tc}\ldots)$.

Znači, $f^{tc} =_{ND} g^{tc}$.

q. e. d.

LEMA 2n: Neka je f term sistema $\mathcal{N}$. Za neki term g iz $\mathcal{N}$ važi:

$g \in |f^{tc}|$ akko $|g| \subseteq |f^{tc}|$.

DOKAZ:

$\Rightarrow: g \in |f^{tc}|$:

$h \in |g|$, $h =_{ND} g$, lema 1n: $g^{tc} =_{ND} h^{tc}$, znači $h \in |f^{tc}|$.

$\Leftarrow$: $|g| \subseteq |f^{tc}|$, $g \in |g|$, znači $g \in |f^{tc}|$. **q. e. d.**

Posledica leme i leme 2n:

POSLEDICA 1: Neka je f term sistema $\mathcal{N}$. Tada je $|f^{tc}|$ unija svih $|g|$, za $g \in |f^{tc}|$.

LEMA 3n: Neka su f, g termi sistema $\mathcal{N}$. Ako $f =_{ND} g$, onda $nf =_{ND} ng$.

DOKAZ:

Dokaz ćemo izvesti indukcijom po složenosti terma f odnosno terma g.

Slučajevi kada term f ima jedan od oblika $\{f_1, f_2\}$, ${}_K h$, ${}_{K'} h$; $\mathbf{d}(f_1, f_2, f_3)$; $(\_/1_C)h$, $(1_C\, 1_C/\, 1_C)h$, $(1_C/h_1)h$ nisu puno interesantni i dokazuju se na isti način. Pokazaćemo to na primeru kada je:

$f=\{f_1, f_2\}$: Pošto važi $f =_{ND} g$ term g mora imati oblik $O(\{g_1, g_2\})$, gde je O niz operacija zamene koji može biti prazan.

Ako: $\{g_1, g_2\} = g$ onda mora $f_1 =_{ND} g_1$ i $f_2 =_{ND} g_2$.

Termi f_1 i f_2 su manje složenosti od terma f pa, $nf_1 =_{ND} ng_1$ i $nf_2 =_{ND} ng_2$.

Onda $nf \equiv \{nf_1, nf_2\} =_{ND} \{ng_1, ng_2\} \equiv ng$.

Ako: $O(\{g_1, g_2\}) = g$ i O nije prazan niz operacija zamene.

Onda za O_1 i O_2 nizove koji čine O važi $f_1 =_{ND} O_1(g_1)$ i $f_2 =_{ND} O_2(g_2)$.

Na osnovu indukcijske pretpostavke imamo

$nf_1 =_{ND} nO_1(g_1)$ i $nf_2 =_{ND} nO_2(g_2)$,

Onda $nf \equiv \{nf_1, nf_2\} =_{ND} \{nO_1(g_1), nO_2(g_2)\} =_{ND} O(\{ng_1, ng_2\}) \equiv ng$.

Interesantan je slučaj kada je ili $f = f_1' f_2$ ili $f = \mathbf{I}(f_1, f_2, f_3)$.

Neka je $f = f_1' f_2$, $f_1 : \Gamma \vdash A \wedge B$, $f_2 : \Lambda A B \Delta \vdash C$.

Ako: $g = g_1' g_2$, onda $f_1 =_{ND} g_1$, $f_2 =_{ND} g_2$ i još $nf_1 =_{ND} ng_1$ i $nf_2 =_{ND} ng_2$;

$nf = (1_\Gamma\, 1_\Gamma/1_\Gamma)(1_A/nf_1'(\_/1_B)1_A)(1_B/nf_1'(\_/1_A)1_B)nf_2$,

$ng = (1_\Gamma\, 1_\Gamma/1_\Gamma)(1_A/ng_1'(\_/1_B)1_A)(1_B/ng_1'(\_/1_A)1_B)ng_2$.

Odavde $nf =_{ND} ng$.

Ako: $g = O(g_1' g_2)$, gde je O niz operacija zamene.

Onda za O_1 i O_2 nizove koji čine O važi $f_1 =_{ND} O_1(g_1)$ i $f_2 =_{ND} O_2(g_2)$.

Na osnovu indukcijske pretpostavke imamo

$nf_1 =_{ND} nO_1(g_1)$ i $nf_2 =_{ND} nO_2(g_2)$,

$nf = (1_\Gamma\, 1_\Gamma/1_\Gamma)(1_A/nf_1'(\_/1_B)1_A)(1_B/nf_1'(\_/1_A)1_B)nf_2$.

$n(O_1(g_1)' O_2(g_2)) = (1_\Gamma\, 1_\Gamma/1_\Gamma)(1_A/nO_1(g_1)'(\_/1_B)1_A)(1_B/\, nO_1(g_1)'(\_/1_A)1_B)nO_2(g_2)$

$ng = O((1_\Gamma\, 1_\Gamma/1_\Gamma)(1_A/ng_1'(\_/1_B)1_A)(1_B/ng_1'(\_/1_A)1_B)ng_2)$.

$=_{ND} (1_\Gamma\, 1_\Gamma/1_\Gamma)(1_A/nO_1(g_1)'(\_/1_B)1_A)(1_B/\, nO_1(g_1)'(\_/1_A)1_B)nO_2(g_2)$.

Znači, $nf =_{ND} ng$.

Analogno bi se dokazalo kada je $f = \mathbf{I}(f_1, f_2, f_3)$. **q. e. d.**

Posledica leme 3n:

POSLEDICA 2: Neka je f term sistema $\mathcal{N}$. Tada je $[nf^{tc}]$ unija svih $|g^{tc}|$ za $g \in [nf^{tc}]$.

1.5.

Sledeće važno pitanje je kako se prelazak sa terma f na term nf, f^{tc}, nf^{tc} odražava na redukcije koje je moguće izvršiti na termu f. Nekoliko sledećih lema daje odgovor na to pitanje. Ako termu f sistema $\mathcal{N}$ njegove operacije daju karakteristike tog sistema, a terme nf, f^{tc}, nf^{tc} smo formirali da nose karakteristike sistema $\mathcal{ND}$ onda treba očekivati da kako prelaz sa f na f^{tc} (na primer) čuva redukcije i da će na isti način to činiti preslikavanje terma f u sistem $\mathcal{ND}$.

LEMA 4n: Neka su f, g termi iz $\mathcal{N}$.

(I) $f \rightarrow_{1\text{-}NMF} g$ akko $\forall f_1 \in |f|\ \forall g_1 \in |g|\ f_1 \rightarrow_{1\text{-}NMF} g_1$.

(II) $f \rightarrow_{1\text{-}NMS} g$ akko $\forall f_1 \in |f|\ \forall g_1 \in |g|\ f_1 \rightarrow_{1\text{-}NMS} g_1$.

DOKAZ:

(I) $\Leftarrow$: jednostavno.

$\Rightarrow$: $N(f) \equiv N(f_1)$ $N(g) = N(g_1)$ na osnovu definicije $\rightarrow_{1\text{-}NMF} g$ važi

$$\forall f_1 \in |f|\ \forall g_1 \in |g|\ f_1 \rightarrow_{1\text{-}NMF} g_1.$$

(II) kao (I). **q. e. d.**

LEMA 5n: Neka su f, g termi iz $\mathcal{N}$.

(I) Ako $f^{tc} \rightarrow_{1\text{-}NMF} g$, onda postoji term h, takav da $f \rightarrow_{1\text{-}NMF} h$ i $g^{tc} =_{ND} h^{tc}$.

(II) Ako $f^{tc} \rightarrow_{1\text{-}NMS} g$, onda postoji term h, takav da $f \rightarrow_{1\text{-}NMS} h$ i $g^{tc} =_{ND} h^{tc}$.

DOKAZ:

(I) neka je O_{NP} niz novih pretpostavki koje vraćaju T-suvišne jedinice terma f i O_S niz sjedinjavanja koja su bila suvišna u termu f.

Term f sadrži kao svoj podterm nosioca redukcije $f^{tc} \rightarrow_{1\text{-}NMF} g$. Zato postoji term h, takav da $f \rightarrow_{1\text{-}NMF} h$ i $O_S(O_{NP}(g)) = h$. Zato $g^{tc} =_{ND} h^{tc}$.

Znači $f \rightarrow_{1\text{-}NMF} g_1$ i $g_1^{tc} = O_{N.P.}(O_S(g))^{tc} = g^{tc}$.

(II) kao u slučaju (I). **q. e. d.**

U narednim lemama koristićemo neke oznake koje će nam pojednostaviti zapisivanje:

O- niz (možda i prazan) operacija veznika i zamene;

E-niz (možda i prazan) operacija zamene;

O^n-u nekom nizu operacija, O, izvršene su promene da dobijemo nd-term od terma u kome postoje potrebne operacije za tu promenu;

O^{tc}, E^{tc}- za term $f=O(h)$ ili $f=E(h)$ u nizu O ili E načinjene su promene da dobijemo f^{tc};

$\equiv$-identički jednaki termi, multiskupovi.

LEMA 1: Neka su f, g: $\Theta \vdash F$ dve strelice iz $\mathcal{N}$.

Ako $f \rightarrow_{1\text{-}NMF} g$, onda $nf \rightarrow_{m\text{-}NMF} ng$, $m \in \{1,2\}$.

DOKAZ:

Pokazaćemo da to važi u slučaju jednakosti $NMF\wedge$.

Dokaz je analogan za jednakost $NMF\Rightarrow$.

U slučaju jednakosti $NMF\vee$ dokaz je jednostavan.

Neka $f \rightarrow_{1\text{-}NMF\wedge} g$: onda postoji podterm h terma f tako da $f=O(h)$ i term h ima jedan od oblika:

$E(\{h_1,h_2\})'h_3$ ili $(1_{C\wedge D} / E(\{h_1,h_2\}))O_1(E_2(1_{C\wedge D})'h_3)$.

Na osnovu leme 3n i leme 4n možemo da posmatramo samo slučaj

$h = E(\{h_1,h_2\})'h_3$, za h_1:$\Gamma_1 \vdash C$, h_2:$\Gamma_2 \vdash D$, h_3:$CD\Delta \vdash B$, $\Gamma \equiv \Gamma_1\Gamma_2$.

Tada $g =_{ND} O(E((1_C/h_1)(1_D/h_2)h_3))$, još $ng = O^n(E((1_C/nh_1)(1_D/nh_2)nh_3)))$,

$nf = O^n((1_\Gamma 1_\Gamma/1_\Gamma)(1_C/E\{nh_1,nh_2\}'(\_/1_D)1_C)(1_D/E\{nh_1,nh_2\})'(\_/1_C)1_D)\ nh_3)$

$nf \to_1 O^n((1_\Gamma 1_\Gamma/1_\Gamma)(1_C/E((1_C/nh_1)(1_D/nh_2)(\_/1_D)1_C)(1_D/E\{nh_1,nh_2\})'(\_/1_C)1_D)\ nh_3)$

$\to_1 O^n((1_\Gamma 1_\Gamma/1_\Gamma)(1_C/E((1_C/nh_1)(1_D/nh_2)(\_/1_D)1_C)(1_D/E((1_C/nh_1)(1_D/nh_2)(\_/1_C)1_D))nh_3) \equiv h_4$,

$h_4 =_{ND} ng$.

Znači: $nf \to_{2\text{-}NMF\wedge} ng$. **q. e. d.**

LEMA 2: Neka su $f, g{:}\Theta \vdash A$ dve strelice iz $\mathcal{N}$.

Ako $f \to_{1\text{-}NMF} g$, onda $f^{tc} \to_{1\text{-}NMF} (\_/1_F)...g^{tc}$, gde je $(\_/1_F)$... niz novih pretpostavki koji može biti i prazan.

DOKAZ:

Pokazaćemo da to važi u slučaju jednakosti $NMF\wedge$.

Dokaz je analogan za jednakost $NMF\Rightarrow$, $NMF\vee$.

Neka $f \to_{1\text{-}NMF\wedge} g$: onda postoji podterm h terma f tako da $f=O(h)$ i term h ima jedan od oblika:

ili $E(\{h_1,h_2\})'h_3$ ili $(1_{C\wedge D}/E(\{h_1,h_2\}))O_1(E_2(1_{C\wedge D})'h_3)$.

Na osnovu leme 3n i leme 4n možemo da posmatramo samo slučaj $h = E(\{h_1,h_2\})'h_3$ za $h_1{:}\Gamma \vdash C$, $h_2{:}\Lambda \vdash D$, $h_3{:}CD\Delta \vdash B$.

Prvi slučaj: operacija ' nije $T\wedge$-eliminaciona:

$f^{tc} = O^{tc}(E^{tc}(\{h_1^{tc},h_2^{tc}\})'h_3^{tc})$,

$f^{tc} \to_1 O^{tc}(E^{tc}((1_C/h_1^{tc})(1_D/h_2^{tc})h_3^{tc}))$,

Znači: $f^{tc} \to_{1\text{-}NMF} g^{tc}$.

Drugi slučaj: operacija ' iz h je $T\wedge$-eliminaciona, to znači u h_3 postoji operacija $(\_/1_C)$.

$g = O(E((\_/1_\Gamma)(1_D/h_2)h_3))$, $g^{tc} =_{ND} O^{tc}(E^{tc}((\_/1_{\Gamma'})(1_D/h_2^{tc})h_3^{tc})$,

Γ' čine formule iz Γ čije jedinice nisu suvišne za ostatak terma, operacije O^{tc}, E^{tc}.

S druge strane

$f^{tc} = O^{tc}(E^{tc}(\{h_1^{tc},h_2^{tc}\})'h_3^{tc})$,

$f^{tc} \to_1 O^{tc}(E^{tc}((1_C/h_1^{tc})(1_D/h_2^{tc})h_3^{tc}) =_{ND} O^{tc}(E^{tc}((\_/1_{\Gamma''})(1_D/h_2^{tc})h_3^{tc})$,

Γ'' čine formule iz Γ čije jedinice nisu suvišne za ostatak terma, operacije O^{tc}, E^{tc}.

Zbog toga Γ' može da ima manje formula od Γ'' za neko Φ.

Onda: $f^{tc} \to_{1\text{-}NMF} (\_/1_\Phi)g^{tc}$. **q. e. d.**

Posledica leme 1 i leme 2:

POSLEDICA 3: Neka su $f, g{:}\Theta \vdash A$ dve strelice iz $\mathcal{N}$.

Ako $f \to_{1\text{-}NMF} g$, onda $nf^{tc} \to_{m\text{-}NMF} (\_/1_F)...ng^{tc}$, gde je $(\_/1_F)$... niz novih pretpostavki koji može biti i prazan i $m \in \{1,2\}$.

LEMA 3: Neka su $f, g{:}\Theta \vdash A$ dve strelice iz $\mathcal{N}$.

Ako $f \to_{1\text{-}NMFT} g$, onda $nf =_{ND} ng$.

DOKAZ:

Pokazaćemo da to važi u slučaju $f \to_{1\text{-}NMFT\wedge} g$.

Dokaz je analogan u drugom slučaju.

Neka $f \to_{1\text{-}NMFT\wedge} g$: onda postoji podterm h terma f tako da $f=O(h)$ i term h ima jedan od oblika:

ili $E(\{h_1,h_2\})'h_3$ ili $(1_{C\wedge D}/E(\{h_1,h_2\}))O_1(E_2(1_{C\wedge D}'h_3)$

i u termu h_3 postoje operacije $(\_/1_C)$, $(\_/1_D)$ za $h_1{:}\Lambda \vdash C$, $h_2{:}\Delta \vdash D$.

Pretpostavimo $f= O(E(\{h_1,h_2\})'h_3)$ i $h_3=O_1((\_/1_C)\ (\_/1_D)h_4)$.

Tada $nf=O^n((1_{\Gamma\Delta}\,1_{\Gamma\Delta}/1_{\Gamma\Delta})(\_1_C/\,E\{nh_1,nh_2\}'(\_/1_D)1_C)(\_1_D/\,E\{nh_1,nh_2\}'(\_/1_C)1_D))nh_3$ i u $N(nf)$ imamo podvučene jedinice koje odgovaraju formulama iz Λ i Δ.

Znači u $N(nf)$ nema nosioca NMFT redukcije.

Znači: $nf =_{ND} ng$. **q. e. d.**

LEMA 4: Neka su $f, g{:}\Theta \vdash A$ dve strelice iz $\mathcal{N}$.

Ako $f \rightarrow_{1\text{-}NMFT} g$, onda $f^{tc}=_{ND} (\_/1_F)\ldots g^{tc}$, gde je $(\_/1_F)\ldots$ niz novih pretpostavki koji može biti i prazan.

DOKAZ:

Pokazaćemo da to važi u slučaju $f \rightarrow_{1\text{-}NMFT\Rightarrow} g$.

Neka $f \rightarrow_{1\text{-}NMFT\Rightarrow} g$: onda postoji podterm h terma f tako da $f=O(h)$, term h ima jedan od oblika:

ili $\mathbf{I}(E(h_1{}^*),h_2,h_3)$ ili $(1_{C\Rightarrow D}/E_1(h_1{}^*))O_1(\mathbf{I}(E_2(1_{C\Rightarrow D}),h_2,h_3)))$,

pretpostavimo $f= O(\mathbf{I}(E(h_1{}^*), h_2, h_3))$, $h_1{:}C\Gamma \vdash D$, $h_2{:}\Delta \vdash C$, $h_3{:}\_D\Lambda\vdash E$, i term h_3 sadrži operaciju $(\_/1_D)$.

Tada $g=_{ND}O(E((1_D/(1_C/h_2)h_1)h_3))$ i

$g^{tc}= O^{tc}(E^{tc}((\_/1_{\Gamma'\Delta'})h_3{}^{tc}))$, gde su $\Gamma'\Delta'$ iz $\Gamma\Delta$ potrebne za ostatak terma g^{tc}.

Još $f^{tc}=O^{tc}(E^{tc}((\_/1_{\Gamma''\Delta''})h_3{}^{tc}))$, gde su $\Gamma''\Delta''$ iz $\Gamma\Delta$ potrebne za ostatak terma f^{tc}.

Može se desiti da $\Gamma''\Delta''$ ima više formula nego $\Gamma'\Delta'$.

Znači: $f^{tc}=_{ND}(\_/1_F)\ldots g^{tc}$, gde je $(\_/1_F)\ldots$ niz novih pretpostavki koji može biti i prazan.

Dokaz je analogan u slučaju kada $f \rightarrow_{1\text{-}NMFT\wedge} g$. **q. e. d.**

Posledica leme 3. i leme 5n.

POSLEDICA 4: Neka su $f, g{:}\Gamma \vdash A$ dve strelice iz $\mathcal{N}$.

Ako $f \rightarrow_{1\text{-}NMFT} g$, onda $nf^{tc}=_{ND} ng^{tc}$.

LEMA 5: Neka su $f, g{:}\Gamma \vdash A$ dve strelice iz $\mathcal{N}$.

Ako $f \rightarrow_{1\text{-}NMS\wedge(\Rightarrow)} g$, onda $nf=_{ND} ng$.

DOKAZ:

Pokazaćemo da to važi u slučaju jednakosti $NMS\wedge 3$.

Dokaz je analogan za ostale jednakosti $NMS\Rightarrow$, $NMS\wedge$.

Neka $f \rightarrow_{1\text{-}NMFS\wedge 3} g$: onda postoji podterm h terma f tako da $f=O(h)$ i h ima jedan od oblika:

ili $\mathbf{I}(E(h_1{}'h), h_2, h_3)$ ili $(1_{C\Rightarrow D}/E_1(h_1{}'h)O_1(\mathbf{I}(E_2(1_{C\Rightarrow D}), h_2, h_3))$,

Možemo pretpostaviti

$h= \mathbf{I}(E(h_1{}'h), h_2, h_3)$ za $h_1{:}\Delta \vdash E\wedge F$, $h{:}EF\Lambda\vdash C\Rightarrow D$, $h_2{:}\Theta_1\vdash C$, $h_3{:}D\Theta_2\vdash G$.

Tada $g=_{ND}O(E(h_1{}'\mathbf{I}(h, h_2, h_3)))$.

Sa druge strane:

$$nf= O^n((1_D/\mathbf{I}(E((1_\Delta 1_\Delta/1_\Delta)(1_E/nh_1{}'(\_/1_F)1_E)(1_F/nh_1{}'(\_/1_E)1_F)nh),nh_2,1_D))nh_3),$$

$$ng=O^n(E((1_\Delta 1_\Delta/1_\Delta)(1_E/nh_1{}'(\_/1_F)1_E)(1_F/nh_1{}'(\_/1_E)1_F)(1_D/\mathbf{I}(nh,nh_2,1_D))nh_3).$$

Znači: $nf=_{ND} ng$. **q. e. d.**

LEMA 6: Neka su $f, g{:}\Gamma \vdash A$ dve strelice iz $\mathcal{N}$.

Ako $f \rightarrow_{1\text{-}NMS\wedge(\Rightarrow)} g$, onda $f^{tc}\rightarrow_{1\text{-}NMS\wedge(\Rightarrow)} g^{tc}$.

DOKAZ:

Pokazaćemo da to važi u slučaju jednakosti $NMS\wedge 1$.

Dokaz je analogan za ostale jednakosti $NMS\Rightarrow$, $NMS\wedge$.

Neka $f \rightarrow_{1\text{-}NMFS\wedge 1} g$: onda postoji podterm h terma f tako da $f=O(h)$, term h ima jedan od oblika:

ili $E((h_1\text{'}h_2)\text{'}h_3)$ ili $(1_{C\wedge D}/E_1(h_1\text{'}h_2))O_1(E_2(1_{C\wedge D})\text{'}h_3)$, $h_1{:}\Delta\vdash E\wedge F$, $h_2{:}EF\Lambda\vdash C\wedge D$, $h_3{:}CD\Theta_2\vdash G$.

Term g je oblika $O(E((h_1\text{'}(h_2\text{'}h_3))))$ ili $O(O_1(E_2(E_1(h_1\text{'}(h_2\text{'}h_3)))))$.

S druge strane $f^{tc}= O^{tc}(E^{tc}((h_1^{tc}\text{'}h_2^{tc})\text{'}h_3^{tc}))$,

$g^{tc}= O^{tc}(E^{tc}(h_1^{tc}\text{'}(h_2^{tc}\text{'}h_3^{tc}))$.

Znači: $f^{tc}\rightarrow_{1\text{-}NMS\wedge(\Rightarrow)} g^{tc}$. **q. e. d.**

Posledica leme 5 i leme 1n:

POSLEDICA 5: Neka su $f, g{:}\Gamma\vdash A$ dve strelice iz $\mathcal{N}$.

Ako $f \rightarrow_{1\text{-}NMS\wedge(\Rightarrow)} g$, onda $nf^{tc} =_{ND} ng^{tc}$.

LEMA 7: Neka su $f, g{:}\Gamma\vdash A$ dve strelice iz $\mathcal{N}$.

(I) Ako $f \rightarrow_{1\text{-}NMS\vee 1(3)} g$, onda nije $nf \rightarrow_{k\text{-}NMS\vee 1(3)} ng$ za neko k.

(II) Ako $f \rightarrow_{1\text{-}NMS\vee 2} g$, onda $nf \rightarrow_{1\text{-}NMS\vee 2} ng$.

DOKAZ:

Neka $f \rightarrow_{1\text{-}NMFS\vee 1} g$: onda postoji podterm h' terma f tako da $f=O(h)$, h' ima jedan od oblika:

ili $E(\mathbf{d}(h, h_1 h_2))\text{'}h_3$ ili $(1_{C\wedge D}/E_1(\mathbf{d}(h, h_1, h_2)))O_1(E_2(1_{C\wedge D})\text{'}h_3)$,

za $h{:}\Delta\vdash E\vee F$, $h_1{:}E\Theta\vdash C\wedge D$ $h_2{:}F\Lambda\vdash C\wedge D$, $h_3{:}CD\Phi\vdash G$.

Neka $f=O(E(\mathbf{d}(h, h_1, h_2))\text{' }h_3)$, onda $g=O(E((1_\Phi 1_\Phi/1_\Phi)\,\mathbf{d}(h, h_1\text{'}h_3, h_2\text{'}h_3)))$,

$nf=O^n((1_{\Delta\Theta\Lambda}1_{\Delta\Theta\Lambda}/1_{\Delta\Theta\Lambda})(1_C/E(\mathbf{d}(nh,nh_1,nh_2))\text{'}(\_/1_D)1_C)\ (1_D/E(\mathbf{d}(nh,nh_1,nh_2))\text{'}(\_/1_C)1_D)nh_3)$.

$ng=O^n(E((1_\Phi 1_\Phi/1_\Phi)\,\mathbf{d}(nh,(1_\Theta 1_\Theta/1_\Theta)(1_C/nh_1\text{'}(\_/1_D)1_C)(1_D/nh_1\text{'}(\_/1_C)1_D)nh_3,(1_\Lambda 1_\Lambda/ 1_\Lambda)(1_C/nh_2\text{'}(\_/1_D)1_C)(1_D/nh_2\text{'}(\_/1_C)1_D)nh_3)))$ i imamo

$nf\rightarrow_{2\text{-}NMS}$

$O^n((1_{\Delta\Theta\Lambda}1_{\Delta\Theta\Lambda}/1_{\Delta\Theta\Lambda})(1_C/E(\mathbf{d}(nh, nh_1\text{'}(\_/1_D)1_C, nh_2\text{'}(\_/1_D)1_C)))$
$(1_D/E(\mathbf{d}(nh, nh_1\text{'}(\_/1_C)1_D, nh_2\text{'}(\_/1_C)1_D)))\ nh_3)$.

Znači: nije $nf \rightarrow_{k\text{-}NMS\vee 1} ng$.

Analogno se pokazuje jednakost $NMS\vee 3$.

Dokaz (II) je jednostavan. **q. e. d.**

LEMA 8: Neka su $f, g{:}\Phi\vdash A$ dve strelice iz $\mathcal{N}$.

Ako $f \rightarrow_{1\text{-}NMS\vee} g$, onda $f^{tc} \rightarrow_{1\text{-}NMS\vee} (1_D 1_D/1_D)\ldots g^{tc}$, gde niz sjedinjavanja $(1_D 1_D/1_D)\ldots$ može biti i prazan..

DOKAZ:

Dokazaćemo lemu za $NMS\vee 1$ jednakost, a u slučaju $NMS\vee 2$, $NMS\vee 3$ dokaz je analogan.

$f\rightarrow_{1\text{-}NMS\vee 1} g$, $f=O(h)$ i term h je oblika ili $E(\mathbf{d}(h_1,h_2,h_3))\text{'}h_4$

ili $(1_{C\wedge D}/E(\mathbf{d}(h_1, h_2, h_3))O_1(E_1(1_{C\wedge D})\text{'}h_4)$,

$h_1{:}\Delta\vdash E\vee F$, $h_2{:}E\Lambda\vdash C\wedge D$, $h_3{:}F\Gamma\vdash C\wedge D$, $h_4{:}CD\Theta\vdash B$.

Tada je term g prirodno jednak termu oblika ili $O(E((1_\Theta 1_\Theta/1_\Theta)\,\mathbf{d}(h_1, h_2\text{'}h_4, h_3\text{'}h_4)))$

ili $O(O_1(E(E_1((1_\Theta 1_\Theta/1_\Theta)\,\mathbf{d}(h_1, h_2\text{'}h_4, h_3\text{'}h_4)))))$.

Neka na primer termi f i g imaju prvi oblik (od dva moguća).

Dalje je dokaz je analogan dokazu leme 2.

Znači: $f^{tc} \rightarrow_{1\text{-}NMS\vee} (1_D\, 1_D/1_D)\ldots g^{tc}$. q. e. d.

LEMA nM: Neka je $f{:}\Gamma\vdash A$ strelica iz $\mathcal{N}$.

Ako $nf \rightarrow_{1\text{-}NMF} g$ ili $nf \rightarrow_{1\text{-}NMS\vee} g$, onda $g \equiv ng$.

DOKAZ:

Jednostavna posledica lema 1, 3, 7. q. e. d.

Zaključak:

1. Redukcije *NMF* se čuvaju u prirodno sređenim termima i nd-termima (lema 1, lema 2, posledica 3).

2. Redukcije $NMS\vee2$ se čuvaju u prirodno sređenim i nd-termima (lema 7(II), lema 8).

3. Redukcije $NMS\Rightarrow$ ne postoje u nd-termima. Samim prelaskom na nd-terme te jednakosti se ne razlikuju (posledica 5).

4.Redukcije $NMS\vee1,3$ u nd-termima poprimaju sasvim drugi oblik i ne odgovaraju nijednom izjednačavanju koje postoji u $\mathcal{N}$(lema 7(I)).

KOMENTAR: Prirodno sređeni termi pretstavljaju pokušaj rešavanja problema strukturnih pravila iz Gencenovog sistema sekvenata u prirodnoj dedukciji. Slaganje sa koracima redukcije u njihovom slučaju daje potvrdan odgovor o nekom "pomirenju" sistema sa i bez strukturnih pravila.

Term i njegov nd-term pretstavljaju upoređivanje dva načina definisanja eliminacije veznika $\wedge$, $\Rightarrow$: (i) uniformno kao eliminacija veznika $\vee$ iz prirodne dedukcije; (ii) definisanje tih operacija kao operacija eliminacije veznika $\wedge,\Rightarrow$ u prirodnoj dedukciji. Ovo neslaganje redukcija, govori o tome da oblik redukcije, koji nam je potreban za problem maksimalnog segmenta zavisi od načina definisanja pravila eliminacija veznika.

1.6. PRESLIKAVANJA IZMEĐU SISTEMA $\mathcal{ND}$ I $\mathcal{N}$

Sada ćemo definisati preslikavanja koja će povezivati objekte sistema $\mathcal{ND}$ i $\mathcal{N}$ i njihove strelice. Pretpostavićemo da su $\mathcal{ND}$ i $\mathcal{N}$ $\mathcal{N}$-deduktivni sistemi nad istim skupom objekata. Objekti sistema će se slikati u sebe i preslikavanja će poštovati operacije nad objektima. Preslikavanja nad strelicama definisaćemo indukcijom po složenosti strelice.

Definišemo preslikavanje $\mathbf{r}{:}\mathcal{ND} \rightarrow \mathcal{N}$.

Ako je A objekat sistema $\mathcal{ND}$, onda $\mathbf{r}(A)=A$, gde je A objekat sistema $\mathcal{N}$. Preslikavanje $\mathbf{r}$ nad objektima poštuje operacije nad njima.

Ako je $h{:}\Theta \vdash D$ strelica iz sistema $\mathcal{ND}$, $\mathbf{r}(h)$ ćemo definisati indikcijom po složenosti strelice h:

r1. $\mathbf{r}(1_{A_i})=1_{A_i}$.

r2. $\mathbf{r}(\{f, g\})= \{\mathbf{r}(f),\mathbf{r}(g)\}$, za $f{:}\Gamma \vdash A,\ g{:}\Delta \vdash B$.

r3. $\mathbf{r}(\pi f)= \mathbf{r}(f)'(\_/1_B)1_A$, za $f{:}\Gamma \vdash A\wedge B$.

r4. $\mathbf{r}(\pi' f)= \mathbf{r}(f)'(\_/1_A)1_B$, za $f{:}\Gamma \vdash A\wedge B$.

r5. $\mathbf{r}(_{\kappa}f)={}_{\kappa}(\mathbf{r}(f))$, za $f{:}\Gamma \vdash A$.

r6. $\mathbf{r}(_{\kappa'}f)={}_{\kappa'}(\mathbf{r}(f))$, za $f{:}\Gamma \vdash B$.

r7. $\mathbf{r}(\delta(f, g_1, g_2))=\mathbf{d}(\mathbf{r}(f),(1_A\, 1_A/1_A)\ldots\mathbf{r}(g_1),(1_B\, 1_B/1_B)\ldots\mathbf{r}(g_2))$, za $f{:}\Gamma \vdash A\vee B,\ g_1{:}[A]\Delta \vdash C,\ g_2{:}[B]\Lambda \vdash C$.

r8. $\mathfrak{r}(\delta_{0A}(f, g_1, g_2))=\mathbf{d}(\mathfrak{r}(f), (\_/1_A)\mathfrak{r}(g_1), (1_B\, 1_B/1_B)\ldots\mathfrak{r}(g_2))$, za $f{:}\Gamma \vdash A\vee B$, $g_1{:}\Delta \vdash C$, $g_2{:}[B]\Lambda \vdash C$.

r9. $\mathfrak{r}(\delta_{0B}(f, g_1, g_2))=\mathbf{d}(\mathfrak{r}(f), (1_A\, 1_A/1_A)\ldots\mathfrak{r}(g_1), (\_/1_B)\mathfrak{r}(g_2))$, za $f{:}\Gamma \vdash A\vee B$, $g_1{:}[A]\Delta \vdash C$, $g_2{:}\Lambda \vdash C$.

r10. $\mathfrak{r}(\delta_{0AB}(f, g_1, g_2))=\mathbf{d}(\mathfrak{r}(f), (\_/1_A)\mathfrak{r}(g_1), (\_/1_B)\mathfrak{r}(g_2))$, za $f{:}\Gamma \vdash A\vee B$, $g_1{:}\Delta \vdash C$, $g_2{:}\Lambda \vdash C$.

r11. $\mathfrak{r}(\lambda f)= ((1_A\, 1_A/1_A)\ldots\mathfrak{r}(f))^*$, za $f{:}[A]\Gamma \vdash B$.

r12. $\mathfrak{r}(\lambda_0 f)= ((\_/1_A)\mathfrak{r}(f))^*$, za $f\,\Gamma \vdash B$.

r13. $\mathfrak{r}(\iota(f, g))= \mathbf{I}(\mathfrak{r}(f), \mathfrak{r}(g), 1_B)$, za $f{:}\Gamma \vdash A\Rightarrow B$, $g{:}\Delta \vdash A$.

r14. $\mathfrak{r}((1_{[A]}/f)g)=(1_A/\mathfrak{r}(f))\ldots\mathfrak{r}(g)$, za $f{:}\Gamma \vdash A$, $g{:}[A]\Delta \vdash B$,

gde $(1_A\, 1_A/1_A)\ldots$ pretstavlja niz sjedinjavanja za jedinice koje odgovaraju formulama iz $[A]$.

gde $(1_A/\mathfrak{r}(f))\ldots$ pretstavlja niz nadovezivanja $(1_{A_1}/\mathfrak{r}(f))\ldots$ $(1_{A_k}/\mathfrak{r}(f))$, za $[A]\equiv\{A_{A_0},\ldots,A_{A_k}\}$.

Pre nego što definišemo preslikavanje iz sistema $\mathcal{N}$ u sistem $\mathcal{ND}$ važno je napomenuti da proizvoljan term iz sistema $\mathcal{ND}$ možemo preslikati u sistem $\mathcal{N}$, ali samo terme oblika $nf^{tc\Pi}$, $f^{tc\Pi}$ iz sistema $\mathcal{N}$ možemo preslikati u sistem $\mathcal{ND}$.

Posmatramo sistem $\mathcal{ND}$ i sistem $\mathcal{N}$ generisane istim skupom objekata.

Definišemo preslikavanje $\mathfrak{p}{:}\mathcal{N}\to\mathcal{ND}$.

Ako je A objekat sistema $\mathcal{N}$, onda $\mathfrak{p}\,(A)=A$, gde je A objekat sistema $\mathcal{ND}$. Preslikavanje $\mathfrak{p}$ nad objektima poštuje operacije nad njima.

Ako je $h{:}\Theta \vdash D$ strelica iz sistema $\mathcal{N}$, $h \equiv nh^{tc\Pi}$, $\mathfrak{p}(h)$ ćemo definisati indikcijom po složenosti strelice h:

p1. $\mathfrak{p}(1_{A_i})=1_{A_i}$.

p2. $\mathfrak{p}(\{f, g\})=\{\mathfrak{p}(f),\mathfrak{p}(g)\}$, za $f{:}\Gamma \vdash A$, $g{:}\Delta \vdash B$.

p3. $\mathfrak{p}(f\,'g)=(1_{B_i}/\pi'(\mathfrak{p}(f)))\,(1_{A_j}/\pi(\mathfrak{p}(f)))\mathfrak{p}(g)$, za $f{:}\Gamma \vdash A\wedge B$, $g{:}A_{A_j}B_{B_i}\Delta\vdash C$.

p4. $\mathfrak{p}({}_{\kappa}f)={}_{\kappa}\mathfrak{p}(f)$ za $f{:}\Gamma \vdash A$.

p5. $\mathfrak{p}({}_{\kappa'}f)={}_{\kappa'}(\mathfrak{p}(f))$, za $f{:}\Gamma \vdash B$.

p6. $\mathfrak{p}(\mathbf{d}(f, g_1, g_2))=\delta(\mathfrak{p}(f),\mathfrak{p}(g_1),\mathfrak{p}(g_2))$, za $f{:}\Gamma \vdash A\vee B$, $g_1{:}\,A\Delta \vdash C$, $g_2{:}B\Lambda \vdash C$.

p7. $\mathfrak{p}(f^*)= \mathfrak{p}(f))^*$, za $f{:}\,A\Gamma \vdash B$.

p8. $\mathfrak{p}(\mathbf{I}(f, g_1, g_2))= (1_{B_i}/\iota(\mathfrak{p}(f),\mathfrak{p}(g_1)))\mathfrak{p}(g_2)$, za $f{:}\Gamma \vdash A\Rightarrow B$, $g_1{:}\Delta \vdash A$, $g_2{:}B_{B_i}\Lambda \vdash C$.

p9. $\mathfrak{p}(f\,'(\_/1_A)g)=(1_{A_j}/\pi(\mathfrak{p}(f)))\mathfrak{p}(g)$, za $f{:}\Gamma \vdash A\wedge B$, $g{:}A_{A_j}\Lambda \vdash C$.

p9.1. $\mathfrak{p}(f\,'(\_/1_B)g)=(1_B/\pi'(\mathfrak{p}(f)))\mathfrak{p}(g)$, za $f{:}\Gamma \vdash A\wedge B$, $g{:}B_{B_i}\Lambda \vdash C$.

p9.2. $\mathfrak{p}(f\,'(\_/1_B)1_A)=\pi\mathfrak{p}(f)$, za $f{:}\Gamma \vdash A\wedge B$.

p9.3. $\mathfrak{p}(f\,'(\_1_A)1_B)=\pi'\mathfrak{p}(f)$, za $f{:}\Gamma \vdash A\wedge B$.

p9.4 $\mathfrak{p}(f\,'(1_A\, 1_A/1_A)\ldots(1_B\, 1_B/1_B)\ldots g)=(1_{[B]}/\pi'(\mathfrak{p}(f)))(1_{[A]}/\pi(\mathfrak{p}(f)))\mathfrak{p}(g)$, za $f{:}\Gamma \vdash A\wedge B$, $g{:}A\ldots AB\ldots\Delta \vdash C$.

p10. $\mathfrak{p}(\mathbf{d}(f, (\_/1_A)g_1, g_2))=\delta_{0A}(\mathfrak{p}(f), \mathfrak{p}(g_1),\mathfrak{p}(g_2))$, za $f{:}\Gamma\vdash A\vee B$, $g_1{:}\Delta \vdash C$, $g_2{:}B\Lambda\vdash C$.

p10.1 $\mathfrak{p}(\mathbf{d}(f, g_1, (\_/1_B)g_2))= \delta_{0B}(\mathfrak{p}(f),\mathfrak{p}(g_1),\mathfrak{p}(g_2))$, za $f{:}\Gamma \vdash A\vee B$, $g_1{:}A\Delta\vdash C$, $g_2{:}\Lambda \vdash C$.

p10.2. $\mathfrak{p}(\mathbf{d}(f, (\_/1_A)g_1, (\_/1_B)g_2))=\delta_{0AB}(\mathfrak{p}(f),\mathfrak{p}(g_1),\mathfrak{p}(g_2))$, za $f{:}\Gamma\vdash A\vee B$, $g_1{:}\Delta\vdash C$, $g_2{:}\Lambda\vdash C$.

p10.3. $\mathfrak{p}(\mathbf{d}(f, (1_A\, 1_A/1_A)\ldots g_1, (1_B\, 1_B/1_B)\ldots g_2))=\delta(\mathfrak{p}(f),\mathfrak{p}(g_1),\mathfrak{p}(g_2))$, za $f{:}\Gamma\vdash A\vee B$, $g_1{:}A\ldots A\Delta\vdash C$, $g_2{:}\,B\ldots B\Lambda \vdash C$,

p11. $\mathfrak{p}(\mathbf{I}(f, g, 1_B))= \iota(\mathfrak{p}(f),\mathfrak{p}(g))$, za $f{:}\Gamma \vdash A\Rightarrow B$, $g{:}\Delta \vdash A$.

$\mathfrak{p}$**11.1.** $\mathfrak{p}(\mathrm{I}(f, g_1, (1_B\, 1_B/1_B)...g_2)) = (1_{[B]}/\iota(\mathfrak{p}(f), \mathfrak{p}(g_1)))\mathfrak{p}(g_2)$, za $f{:}\Gamma \vdash A \Rightarrow B,\ g_1{:}\Delta \vdash A,$
$g_2{:}B...B\Lambda \vdash C.$

$\mathfrak{p}$**12.** $\mathfrak{p}(((\_/1_A)f)^*) = \lambda_0(\mathfrak{p}(f))$, za $f{:}\Gamma \vdash B.$

$\mathfrak{p}$**12.1.** $\mathfrak{p}(((1_A\, 1_A/1_A)...f)^*) = \lambda(\mathfrak{p}(f))$, za $f{:}\ A...A\Gamma \vdash B.$

$\mathfrak{p}$**13.** $\mathfrak{p}((1_{A_j}/f)g) = (1_{A_j}/\mathfrak{p}(f))\mathfrak{p}(g)$, za $f{:}\Gamma \vdash A,\ g{:}A\Delta \vdash B.$

DEFINICIJA: Neka je $f{:}\Gamma\vdash A$ proizvoljna strelica sistema $\mathcal{ND}$. Ako

1. svaki podterm terma f, oblika $\pi h,\ h{:}\Delta \vdash C\wedge D$, zamenimo termom $(1_C/\pi h)1_C$;
2. svaki podterm terma f, oblika $\pi' h,\ h{:}\Delta \vdash C\wedge D$, zamenimo termom $(1_D/\pi' h)1_D$;
3. svaki podterm terma f, oblika $\iota(h, g),\ h{:}\Delta \vdash C\Rightarrow D, g{:}\Lambda \vdash C$ zamenimo termom $(1_D/\iota(h, g))1_D$

dobijamo term istog tipa $\Gamma\vdash A$ koji ćemo označavati ${}^1f$.

Neka je ${}^1\mathcal{ND} = \{{}^1f{:}\ f$ term sistema $\mathcal{ND}\}$,

$n\mathcal{N}^{tc\Pi} = \{nf^{tc\Pi}{:}\ f$ term sistema $\mathcal{N}\}$.

Ako u sistemima $\mathcal{N}$ i $\mathcal{ND}$ izdvojimo neke terme ${}^1\mathcal{ND} \subseteq \mathcal{ND}$ i $n\mathcal{N}^{tc\Pi} \subseteq \mathcal{N}$ postoji 1-1 i NA veza između podskupova datih sistema.

Posmatramo $\mathfrak{r}{:}\,{}^1\mathcal{ND} \to n\mathcal{N}^{tc\Pi}$, $\mathfrak{p}{:}\ n\mathcal{N}^{tc\Pi} \to {}^1\mathcal{ND}$ tada važi:

za ${}^1f \in {}^1\mathcal{ND},\ \mathfrak{p}(\mathfrak{r}({}^1f)) = {}^1f$; za $nf^{tc\Pi} \in n\mathcal{N}^{tc\Pi},\ \mathfrak{r}(\mathfrak{p}(nf^{tc\Pi})) = nf^{tc\Pi}$.

KOMENTAR: Na osnovu preslikavanja $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{p}$ moguće je definisati još neke veze između sistema $\mathcal{ND}$ i $\mathcal{N}$. Sa stanovišta prirodnodedukcijskih jednakosti u sistemu $\mathcal{ND}$ termi su izjednačeni po $=_\Pi$, a u sistemu $\mathcal{N}$ po $=_{ND}$. Zbog toga možemo da definišemo preslikavanja $\underline{\mathfrak{p}}$, $\underline{\mathfrak{r}}$ ($\overline{\underline{\mathfrak{p}}}$, $\overline{\underline{\mathfrak{r}}}$) koja će preslikavati klase terama iz $\mathcal{ND}$ u klase terama u $\mathcal{N}$ i obrnuto. Preslikavanja $\underline{\mathfrak{p}}$ i $\overline{\underline{\mathfrak{p}}}$ se razlikuju po tome da li slikaju klasu $[nf^{tc}]$ ili $|f^{tc}|$.

Posmatramo sisteme $\mathcal{ND}$ i $\mathcal{N}$.

U sistemu $\mathcal{ND}$ definisali smo za sve terme tog sistema $[f^\Pi] = \{h$ term iz $\mathcal{ND}{:}\ h =_\Pi f\}$.

Sada definišemo $\mathcal{ND}/_\Pi$ skup kome su elementi $[f^\Pi], [h^\Pi],...$ za terme f, h sistema $\mathcal{ND}$.

U sistemu $\mathcal{N}$ definisali smo $[nf^{tc}], |f^{tc}|$ za term f iz sistema $\mathcal{N}$.

Definišemo $\mathcal{N}/_{tc}$ čiji su elementi $|f^{tc}|, |h^{tc}|,...$ i $\mathcal{N}/_{ntc}$ čiji su elementi $[nf^{tc}], [nh^{tc}]...$

Definišemo preslikavanja:

$\underline{\mathfrak{r}}{:}\mathcal{ND}/_\Pi \to \mathcal{N}/_{tc}$, $\quad \underline{\mathfrak{r}}([f^\Pi]) =_{def} |\mathfrak{r}(f)^{tc}|$.

$\underline{\mathfrak{p}}{:}\mathcal{N}/_{tc} \to \mathcal{ND}/_\Pi$, $\quad \underline{\mathfrak{p}}(|f^{tc}|) =_{def} [\mathfrak{p}(f^{tc\Pi})^\Pi]$.

$\overline{\underline{\mathfrak{r}}}{:}\mathcal{ND}/_\Pi \to \mathcal{N}/_{ntc}$, $\quad \overline{\underline{\mathfrak{r}}}([f^\Pi]) =_{def} [n\mathfrak{r}(f)^{tc\Pi}]$.

$\overline{\underline{\mathfrak{p}}}{:}\mathcal{N}/_{ntc} \to \mathcal{ND}/_\Pi$, $\quad \overline{\underline{\mathfrak{p}}}([nf^{tc}]) =_{def} [\mathfrak{p}(nf^{tc\Pi})^\Pi]$.

LEMA 9: Neka je $f{:}\Gamma \vdash A$ strelica sistema $\mathcal{N}$.

Ako su h, g dva Π-pretstavnika iz $|f^{tc}|$, onda $\mathfrak{p}(h) =_\Pi \mathfrak{p}(g)$.

DOKAZ:

$h, g \in |f^{tc}|,\ h^{tc} =_{ND} f^{tc},\ g^{tc} =_{ND} f^{tc}$, još h, g su Π-pretstavnici: $h \equiv h^{tc\Pi},\ g \equiv g^{tc\Pi}$, znači $h =_{ND} g$, razlikuju se po redosledu, mestu novih pretpostavki, sjedinjavanja, (možda i broja) nadovezivanja. Ali u h i g nove pretpostavke i sjedinjavanja su baš ispred operacija na koje se odnose, pa se h i g razlikuju samo po broju i mestu nadovezivanja. To znači da se $\mathfrak{p}(h)$ i $\mathfrak{p}(g)$ razlikuju po broju i mestu nadovezivanja, znači: $\mathfrak{p}(h) =_\Pi \mathfrak{p}(g)$. **q. e. d.**

POSLEDICA 6: Preslikavanja $\underline{\mathfrak{p}}$, $\overline{\underline{\mathfrak{p}}}$ su dobro definisana.

DOKAZ:

$|f^{tc}|=|h^{tc}|$, to znači $f^{tc}=_{ND}h^{tc}$, odnosno $f^{tc\Pi}=_{ND}h^{tc\Pi}$,

$\underline{\mathbf{p}}(|f^{tc}|)=_{def}[\mathbf{p}(nf^{tc\Pi})^{\Pi}]$, $\underline{\mathbf{p}}(|h^{tc}|)=_{def}[\mathbf{p}(nh^{tc\Pi})^{\Pi}]$.

lema 9: $\mathbf{p}\,(nf^{tc\Pi})=_{\Pi}\mathbf{p}(nh^{tc\Pi})$,

znači, $\underline{\mathbf{p}}(|f^{tc}|)=\underline{\mathbf{p}}(|h^{tc}|)$.

$[nf^{tc}]=[nh^{tc}]$, to znači $nf^{tc}=_{ND}nh^{tc}$, odnosno $nf^{tc\Pi}=_{ND}nh^{tc\Pi}$,

$\bar{\underline{\mathbf{p}}}([nf^{tc}])=_{def}[\mathbf{p}(nf^{tc\Pi})^{\Pi}]$, $\bar{\underline{\mathbf{p}}}([nh^{tc}])=_{def}[\mathbf{p}(nh^{tc\Pi})^{\Pi}]$.

lema 9: $\mathbf{p}(nf^{tc\Pi})=_{\Pi}\mathbf{p}(nh^{tc\Pi})$,

znači, $\bar{\underline{\mathbf{p}}}([nf^{tc}])=\bar{\underline{\mathbf{p}}}([nh^{tc}])$. **q. e. d.**

LEMA 10: Neka su $f, g{:}\Gamma\vdash A$ dve strelice sistema $\mathcal{ND}$. Ako $f=_{\Pi}g$ u $\mathcal{ND}$, tada $\mathbf{r}(f)=_{ND}\mathbf{r}(g)$ u $\mathcal{N}$.

DOKAZ:

Ako $f=_{\Pi}g$ to znači da se termi f, g razlikuju samo po prisustvu i rasporedu nadovezivanja u $\mathcal{ND}$, onda $\mathbf{r}(f)$, $\mathbf{r}(g)$ se razlikuju samo po prisustvu i rasporedu nadovezivanja, znači $\mathbf{r}(f)=_{ND}\mathbf{r}(g)$ u sistemu $\mathcal{N}$. Još važi $\mathbf{r}(f)\equiv n\mathbf{r}(f)$ i $\mathbf{r}(f)\equiv n\mathbf{r}(f)^{tc\Pi}$, znači $\mathbf{r}(f)\equiv n\mathbf{r}(f)^{tc\Pi}$. **q. e. d.**

POSLEDICA 7: Preslikavanja $\underline{\mathbf{r}}$, $\bar{\underline{\mathbf{r}}}$ su dobro definisana.

DOKAZ:

$[f^{\Pi}]=[h^{\Pi}]$, to znači $f=_{\Pi}h$, $\underline{\mathbf{r}}([f^{\Pi}]=_{def}|\mathbf{r}(f)^{tc}|$, $\underline{\mathbf{r}}([h^{\Pi}]=_{def}|\mathbf{r}(h)^{tc}|$,

$\bar{\underline{\mathbf{r}}}([f^{\Pi}]=_{def}|n\mathbf{r}(f)^{tc\Pi}|$, $\bar{\underline{\mathbf{r}}}([h^{\Pi}]=_{def}|n\mathbf{r}(h)^{tc\Pi}|$,

lema 10: $\mathbf{r}(f)=_{ND}\mathbf{r}(h)$ i $\mathbf{r}(f)^{tc}\equiv\mathbf{r}(f)$, $\mathbf{r}(h)^{tc}\equiv\mathbf{r}(h)$.

Znači, $\underline{\mathbf{r}}([f^{\Pi}]=\underline{\mathbf{r}}([h^{\Pi}]$, $\bar{\underline{\mathbf{r}}}([f^{\Pi}]=\bar{\underline{\mathbf{r}}}([h^{\Pi}]$. **q. e. d.**

KOMENTAR: U lemi 11 ćemo videti da preslikavanje $\mathbf{p}$ briše razliku koja postoji u sistemu $\mathcal{N}$ između nekog terma f i njemu odgovarajućeg terma nf. Eliminacija veznika $\wedge$, $\Rightarrow$ definisana u $\mathcal{ND}$ (koja je u prirodnodedukcijskom duhu) odgovara eliminaciji veznika $\wedge$, $\Rightarrow$ koja se javlja u nd-termima. Samim definisanjem preslikavanja $\mathbf{p}$ operacijama eliminisanja $\wedge$, $\Rightarrow$ koji su u duhu eliminisanja veznika $\vee$, menja se oblik i one postaju prirodnodedukcijske (i samim tim različite od operacije eliminacije $\vee$, koja je u prirodnoj dedukciji istog oblika). Kao da postoji neka vrsta "kreativnosti" preslikavanja $\mathbf{p}$ u ovom slučaju. Kasnije ćemo tačno i videti (kod proširene normalizacije) da preslikavanje $\mathbf{p}$ "guta" neke važne redukcijske korake.

LEMA 11:

1. Neka je $h=1_{A\wedge B}{'}f$ term sistema $\mathcal{N}$, gde $f{:}AB\Gamma\vdash C$, $nf\equiv f$ i nisu i A i B podvučene formule. Tada: $\mathbf{p}(h^{tc\Pi})=_{\Pi}\mathbf{p}(nh^{tc\Pi})$.
2. Neka je $h=\mathbf{I}(1_{A\Rightarrow B}, g, f)$ term sistema $\mathcal{N}$, gde $g{:}\Gamma\vdash A$, $f{:}B\Delta\vdash C$, $nf\equiv f$, $ng\equiv g$ i B nije podvučena formula. Tada: $\mathbf{p}(h^{tc\Pi})=_{\Pi}\mathbf{p}(nh^{tc\Pi})$.

DOKAZ:

1. $\mathbf{p}(h^{tc\Pi})=\mathbf{p}((1_{A\wedge B}{'}f)^{tc\Pi})=\mathbf{p}(1_{A\wedge B}{'}f^{tc\Pi})=_{\Pi}(1_A/\pi 1_{A\wedge B})\,(1_B/\pi' 1_{A\wedge B})\mathbf{p}(f^{tc\Pi})$.

$nh^{tc\Pi}=(1_A/\,1_{A\wedge B}{'}(\_1_B)1_A)(1_B/1_{A\wedge B}{'}(\_/1_A)1_B\,)f^{tc\Pi}$

$\mathbf{p}(nh^{tc\Pi})=\mathbf{p}((1_A/\,1_{A\wedge B}{'}(\_1_B)1_A)(1_B/1_{A\wedge B}{'}(\_/1_A)1_B\,)f^{tc\Pi})$

$=(1_A/\pi 1_{A\wedge B})\,(1_B/\pi' 1_{A\wedge B})\mathbf{p}(f^{tc\Pi})$.

2. $\mathbf{p}(h^{tc\Pi})=\mathbf{p}((\mathbf{I}(1_{A\Rightarrow B}, g, f)^{tc})=\mathbf{p}(\mathbf{I}(1_{A\Rightarrow B}, g^{tc\Pi}, f^{tc\Pi}))=(1_B/\,\iota(1_{A\Rightarrow B}, \mathbf{p}(g^{tc\Pi}))\,\mathbf{p}(f^{tc\Pi})$.

$nh^{tc\Pi}=(1_B/\mathbf{I}(1_{A\Rightarrow B}, g^{tc\Pi}, 1_B))f^{tc\Pi}$

$\mathbf{p}(nh^{tc\Pi})= \mathbf{p}((1_B/\mathbf{I}(1_{A\Rightarrow B}, g^{tc\Pi}, 1_B))f^{tc\Pi}) = (1_B/\iota(1_{A\Rightarrow B}, \mathbf{p}(g^{tc\Pi})))\mathbf{p}(f^{tc\Pi}).$ **q. e. d.**

POSLEDICA 8: U sistemima $\mathcal{ND}$ i $\mathcal{N}$ važi:

1. $\mathbf{p}(((1_C/1_{A\wedge B}'f)h)^{tc})= \mathbf{p}((1_{A\wedge B}'(1_C/f)h)^{tc}),$ za $f{:}AB\Gamma\vdash C,\ h{:}C\Lambda\vdash D.$
2. $\mathbf{p}(((1_C/\mathbf{I}(1_{A\Rightarrow B}, g, f))h)^{tc})= \mathbf{p}((\mathbf{I}(1_{A\Rightarrow B}, g, (1_C/f)h))^{tc}),$ za $g{:}\Gamma\vdash A,\ f{:}B\Delta\vdash C,\ h{:}C\Lambda\vdash D.$

POSLEDICA 9: Za term f sistema $\mathcal{N}$ važi: $\mathbf{p}(nf^{tc})=\mathbf{p}(f^{tc}).$

POSLEDICA 10: Važi $\bar{\underline{\mathbf{p}}}\circ\bar{\underline{\mathbf{r}}}=\mathbf{1}_{\mathcal{ND}/\Pi}$ i $\bar{\underline{\mathbf{r}}}\circ\bar{\underline{\mathbf{p}}}=\mathbf{1}_{\mathcal{N}/ntc}.$

DOKAZ:

$[f^{\Pi}]\in\mathcal{ND}/_{\Pi}:\ \bar{\underline{\mathbf{p}}}\circ\bar{\underline{\mathbf{r}}}([f^{\Pi}]) = \bar{\underline{\mathbf{p}}}([(n\mathbf{r}(^1f)^{tc\Pi}])= \bar{\underline{\mathbf{p}}}([\mathbf{r}(^1f)])= [\mathbf{p}(\mathbf{r}(^1f))^{\Pi}]$

$= [^1f^{\Pi}]=[f^{\Pi}].$

$[nf^{tc}]\in\mathcal{N}/_{ntc}:\ \bar{\underline{\mathbf{r}}}\circ\bar{\underline{\mathbf{p}}}([nf^{tc}]) = \bar{\underline{\mathbf{r}}}([\mathbf{p}(nf^{tc\Pi})^{\Pi}])= [n\mathbf{r}(\mathbf{p}(nf^{tc\Pi}))^{tc}]$

$= [n\mathbf{r}(\mathbf{p}(nf^{tc\Pi}))^{tc}]=[\mathbf{r}(\mathbf{p}(nf^{tc\Pi}))]$

$= [nf^{tc\Pi}].$ **q. e. d.**

1.7. KAKO PRESLIKAVANJA $\mathbf{p}$ I $\mathbf{r}$ ČUVAJU REDUKCIJE $\hookrightarrow_{1\text{-}RM}$ I $\rightarrow_{1\text{-}NM}$

Pitanje koje sledeće treba postaviti je kako definisana preslikavanja poštuju redukcije date u $\mathcal{ND}$ i $\mathcal{N}$. U lemama koje slede dobićemo odgovor.

Pre toga već uvedenim skraćenim oznakama, zbog jednostavnijeg zapisa dodaćemo i ove:

-za niz operacija O njegova slika preslikavanjem $\mathbf{r}$ je O';

- za niz operacija O njegova slika preslikavanjem $\mathbf{p}$ je O''.

LEMA 12: Neka su $f{:}\Gamma\vdash A,\ g{:}\Delta\vdash A$ strelice iz $\mathcal{ND}$.

Ako $f\hookrightarrow_{1\text{-}RMF}g$, onda postoji term h u $\mathcal{N}$ takav da $\mathbf{r}(f)\rightarrow_{1\text{-}NMF}h,\ h^{tc}=_{ND}\mathbf{r}(g)^{tc}$.

DOKAZ:

Dokazaćemo lemu za $R\text{-}MF\vee 1$ redukciju, a za ostale redukcije dokaz je analogan.

Neka $f\hookrightarrow_{1\text{-}RMF}g$: term f je oblika $O(h)$

i term h ima oblik ili $\delta(_kh_1, h_2, h_3)$ ili $\delta(E(_kh_1), h_2, h_3)$.

Term g je oblika ili $O_1((1_C/h_1)h_2)$ ili $O_1(E((1_C/h_1)h_2))$,

gde je $(1_C/h_1)h_2=h^R$ i $O_1=O^R$.

Pretpostavimo $h=\delta(_kh_1, h_2, h_3)$.

Preslikavanje $\mathbf{r}$: $\mathbf{r}(f)=O'(\mathbf{d}(_k\mathbf{r}(h_1), \mathbf{r}(h_2), \mathbf{r}(h_3))$

$\mathbf{r}(g)= O_1'((1_C/\mathbf{r}(h_1))\mathbf{r}(h_2)).$

Sa druge strane $\mathbf{r}(f)\rightarrow_{1\text{-}NMF\vee}O'((\_/1_\Lambda)(1_C/\mathbf{r}(h_1))\mathbf{r}(h_2)),$ za $\mathbf{r}(h_3){:}B\Lambda\vdash C.$

Imamo: $\mathbf{r}(g)\neq O'((\_/1_\Lambda)(1_C/\mathbf{r}(h_1))\mathbf{r}(h_2)).$

Preslikavanjem $\mathbf{r}$ se svaka operacija δ_{0A}, δ_{0B}, δ_{0AB}; λ_0 iz niza $O_1=O^R$ slika u novu pretpostavku i T$\vee$-eliminacionu $\mathbf{d}$; u novu pretpostavku i T-desnu *.

Znači: O_1' je baš O' sa $(\_/1_\Lambda)$.

Znači, $(\mathbf{r}(g))^{tc}=(O'(\_/1_\Lambda)(1_C/\mathbf{r}(h_1))\mathbf{r}(h_2)))^{tc}.$

Znači: $h^{tc}=_{ND}\mathbf{r}(g)^{tc}.$ **q. e. d.**

LEMA 13: Neka su $f{:}\Theta \vdash E$, $g{:}\Phi \vdash F$ strelice iz $\mathcal{ND}$.

Ako $f \hookrightarrow_{1\text{-}RMS} g$, onda $\mathbf{r}(f) \rightarrow_{1\text{-}NMS\vee} (1_\Theta\, 1_\Theta / 1_\Theta)\mathbf{r}(g)$ u $\mathcal{N}$.

DOKAZ:

Dokazaćemo lemu za $R\text{-}MS\wedge 1$ redukciju, a za ostale redukcije dokaz je analogan.

Neka $f \hookrightarrow_{1\text{-}RMS\wedge 1} g$: term f je oblika $O(h)$

i term h ima oblik ili $\pi(\delta(h_1, h_2, h_3))$ ili $\pi(E(h_1), h_2, h_3))$.

Term g je oblika ili $O(\delta(h_1, \pi h_2, \pi h_3)$ ili $O(E(h_1), \pi h_2, \pi h_3)$.

Možemo da posmatramo (na osnovu leme 10) samo slučaj kada je h oblika:

$h=\pi(\delta(h_1, h_2, h_3))$, za $h_1{:}\Gamma \vdash A\vee B$, $h_2{:}\,[A]\Delta \vdash C\wedge D$, $h_3{:}[B]\Lambda \vdash C\wedge D$.

Preslikavanje $\mathbf{r}$: $\mathbf{r}(f)=O'(\mathbf{d}(\mathbf{r}(h_1), (1_A 1_A/1_A)\ldots\mathbf{r}(h_2), (1_B 1_B/1_B)\ldots\mathbf{r}(h_3))'(\_/1_D)1_C)$,

$\mathbf{r}(g)=O'(\mathbf{d}(\mathbf{r}(h_1),((1_A 1_A/1_A)\ldots\mathbf{r}(h_2))'(\_/1_D)1_C), ((1_B 1_B/1_B)\ldots\mathbf{r}(h_3))'(\_/1_D)1_C))$,

$\mathbf{r}(f)\rightarrow O'((1_{\Delta\Lambda} 1_{\Delta\Lambda}/1_{\Delta\Lambda})\mathbf{d}(\mathbf{r}(h_1),((1_A 1_A/1_A)\ldots\mathbf{r}(h_2))'(\_/1_D)1_C), ((1_B 1_B/1_B)\ldots\mathbf{r}(h_3))'(\_/1_D)1_C))$.

Znači $\mathbf{r}(f) \rightarrow_{1\text{-}NMS\vee 1}\mathbf{r}(g)$. **q. e. d.**

LEMA 14: Neka su $f{:}\Gamma \vdash A$, $g{:}\Delta \vdash A$ strelice iz $\mathcal{N}$.

Ako $f \rightarrow_{1\text{-}NMF} g$, onda $\mathbf{p}(f^{tc\Pi}) \hookrightarrow_{1\text{-}RMF} \mathbf{p}(g^{tc\Pi})$ u $\mathcal{ND}$.

DOKAZ:

Dokazaćemo lemu za $NMF\vee 1$ redukciju, a za ostale redukcije dokaz je analogan.

Neka $f \rightarrow_{1\text{-}NMF\vee 1} g$, na osnovu leme 2: $f^{tc} \rightarrow_{1\text{-}NMF\vee 1} 1(\_/1_F)\ldots g^{tc}$, $f^{tc} =_{ND} f^{tc\Pi}$, $g^{tc} =_{ND} g^{tc\Pi}$,

$f^{tc\Pi} \rightarrow_{1\text{-}NMF\vee 1} 1(\_/1_F)\ldots g^{tc\Pi}$.

Prvi slučaj: $(\_/1_F)\ldots$ prazan niz.

Term f^{tc} je oblika $O(h)$, term h oblika $\mathbf{d}({}_k h_1, h_2, h_3)$, $h_1{:}\Theta\vdash C$, $h_2{:}C\Delta\vdash B$, $h_3{:}D\Lambda\vdash B$.

Term g^{tc} je oblika $O_1((\_/1_{\Lambda'})\,(1_C/h_1)h_2)$.

Preslikavanje $\mathbf{p}$: $\mathbf{p}(f^{tc\Pi}) = O''(\delta({}_k\mathbf{p}(h_1), \mathbf{p}(h_2), \mathbf{p}(h_3))$.

$\mathbf{p}(g^{tc\Pi}) = O''\,((1_C/\mathbf{p}(h_1)\,\mathbf{p}(h_2))$.

$(\_/1_{\Lambda'})$ su jedinice koje pripadaju nizu neke operacije T-desne, T$\vee$-eliminacione, iz Λ i one zajedno sa njom daju δ_{0A}, δ_{0B}, δ_{0AB}, λ_0 u slici $\mathbf{p}(g^{tc\Pi})$ koje odgovaraju δ, λ iz $\mathbf{p}(f^{tc\Pi})$.

Znači: $\mathbf{p}(f^{tc\Pi}) \hookrightarrow_{1\text{-}RMF} \mathbf{p}(g^{tc\Pi})$.

Drugi slučaj: $(\_/1_D)\ldots$ nije prazan niz.

Term f^{tc} je oblika $O(h)$, term h oblika $\mathbf{d}({}_k h_1, h_2, h_3)$, $h_1{:}\Theta\vdash C$, $h_2{:}C\Delta\vdash B$, $h_3{:}D\Lambda\vdash B$.

Term g je oblika $O\,(E((\_/1_\Lambda)\,(1_C/h_1)h_2))$, $(\_/1_C)$ postoji u termu h_2.

$f^{tc} = O^{tc}(\mathbf{d}({}_k h_1{}^{tc}), h_2{}^{tc}, h_3{}^{tc})$,

$g^{tc} = O^{tc}((\_/1_{\Lambda_1})\,(\_/1_{\Delta_1})h_2{}^{tc})$.

$f^{tc} \rightarrow_{1\text{-}NMF\vee 1} O^{tc}((\_/1_{\Lambda_1})(1_C/h^{tc}{}_1)h_2{}^{tc}) =_{ND} O^{tc}((\_/1_{\Lambda_1})(\_/1_{\Delta_2})h_2{}^{tc})$, Δ_2 sadrži Δ_1,

$f^{tc} \rightarrow_{1\text{-}NMF\vee} (\_/1_D)\ldots g^{tc}$.

$\mathbf{p}(f^{tc\Pi}) = O''\,(\delta_{0C}({}_k\mathbf{p}(h_1{}^{tc\Pi}), \mathbf{p}(h_2{}^{tc\Pi}), \mathbf{p}(h_3{}^{tc\Pi})))$,

$\mathbf{p}(g^{tc\Pi}) = O''\,(\mathbf{p}(h_2{}^{tc\Pi}))$,

$\mathbf{p}(f^{tc\Pi}) \rightarrow_{1\text{-}NMF\vee} g_1$, $g_1 =_{ND} O''\,(\mathbf{p}(h_2{}^{tc\Pi}))$.

Znači, u $\mathcal{ND}$: $\mathbf{p}(f^{tc\Pi}) \hookrightarrow_{1\text{-}RMF} \mathbf{p}(g^{tc\Pi})$. **q. e. d.**

Na osnovu Leme 1 i leme 14 imamo:

POSLEDICA 11: Neka su f, $g{:}\Gamma \vdash A$ strelice iz $\mathcal{N}$.

$$\text{Ako } f \rightarrow_{1\text{-}NMF} g, \text{ onda } \mathbf{p}(nf^{tc\Pi}) \hookrightarrow_{m\text{-}RMF} \mathbf{p}(ng^{tc\Pi}) \text{ u } \mathcal{ND},\ m \in \{1, 2\}.$$

Na osnovu Posledice 4 i Leme 9 važi:

POSLEDICA 12: Neka su $f, g: \Gamma \vdash A$ strelice iz $\mathcal{N}$.

Ako $f \rightarrow_{1\text{-}NMFT\wedge(\Rightarrow)} g$, onda $\mathbf{p}(f^{tc\Pi}) =_{\Pi} \mathbf{p}(g^{tc\Pi})$ u $\mathcal{ND}$.

Posledica 5, Lema 9, daju:

LEMA 15: Neka su $f, g: \Gamma \vdash A$ strelice iz $\mathcal{N}$.

Ako $f \rightarrow_{1\text{-}NMS\wedge(\Rightarrow)} g$, onda $\mathbf{p}(f^{tc\Pi}) =_{\Pi} \mathbf{p}(g^{tc\Pi})$ u $\mathcal{ND}$.

LEMA 16: Neka su $f, g: \Phi \vdash E$ strelice iz $\mathcal{N}$.

Ako $f \rightarrow_{1\text{-}NMS\vee 1(3)} g$, onda ne važi $\mathbf{p}(f^{tc\Pi}) \hookrightarrow_{1\text{-}RMS} \mathbf{p}(g^{tc\Pi})$ u $\mathcal{ND}$.

DOKAZ:

Neka $f \rightarrow_{1\text{-}NMS\vee 1} g$. Na osnovu leme 8: $f^{tc\Pi} \rightarrow_{1\text{-}NMS\vee 1} (1_D\, 1_D/1_D) \ldots g^{tc\Pi}$,

$f^{tc\Pi} = O(E(\mathbf{d}(h_1, h_2, h_3))'h_4)$,

$g^{tc\Pi} = O_1(\mathbf{d}(h_1, h_2'h_4, h_3'h_4))$, za $h_1: \Theta \vdash A \vee B$, $h_2: A\Delta \vdash C \wedge D$, $h_3: B\Lambda \vdash C \wedge D, h_4: \Gamma CD \vdash E$.

$\mathbf{p}(f^{tc\Pi}) = O''(E''((1_C/\pi\delta(\mathbf{p}(h_1), \mathbf{p}(h_2), \mathbf{p}(h_3)))(1_D/\pi'\delta(\mathbf{p}(h_1), \mathbf{p}(h_2), \mathbf{p}(h_3)))\mathbf{p}(h_4))$,

$\mathbf{p}(g^{tc\Pi}) = O_1''(\delta(\mathbf{p}(h_1), (1_C/\pi\mathbf{p}(h_2))(1_D/\pi'\, \mathbf{p}(h_2))\mathbf{p}(h_4)), (1_C/\pi\mathbf{p}(h_3))(1_D/\pi'\, \mathbf{p}(h_3))\mathbf{p}(h_4))$.

$\mathbf{p}(f^{tc\Pi}) \hookrightarrow_{1\text{-}RMS} \mathbf{p}(g^{tc\Pi})$ nije RMS-redukcija u $\mathcal{ND}$.

Potpuno isto se pokazuje neslaganje za $NMS\vee 3$ jednakost. **q. e. d.**

LEMA 17: Neka su $f, g: \Phi \vdash E$ strelice iz $\mathcal{N}$.

Ako $f \rightarrow_{1\text{-}NMS\vee 1(3)} g$, onda postoji term h iz $\mathcal{N}$ takav da

1. $nf^{tc\Pi} \rightarrow_{m\text{-}NMS\vee 1(3)} h$, $m \in \{1, 2\}$.
2. $\mathbf{p}(nf^{tc\Pi}) \hookrightarrow_{1\text{-}RMS} \mathbf{p}(nh^{tc\Pi})$ u $\mathcal{ND}$.

DOKAZ:

Dokazaćemo lemu za $NMS\vee 1$ redukciju, a za ostale redukcije dokaz je analogan.

Neka $f \rightarrow_{1\text{-}NMS\vee 1} g$. Na osnovu leme 7: nije $nf \rightarrow_{1\text{-}NMS\vee 1} ng$.

$f^{tc\Pi} = O(E(\mathbf{d}(h_1, h_2, h_3))'h_4)$,

$g^{tc\Pi} = O_1(\mathbf{d}(h_1, h_2'h_4, h_3'h_4))$, za $h_1: \Theta \vdash A \vee B$, $h_2: A\Delta \vdash C \wedge D$, $h_3: B\Lambda \vdash C \wedge D, h_4: \Gamma CD \vdash E$.

Najvažnije je da se pravljenjem terama nf i ng operacije $\mathbf{d}(h_1, h_2, h_3)'h_4$, $h_2'h_4$, $h_3'h_4$ su se pojednostavile.

$nf^{tc\Pi} \equiv O((1_C/E(\mathbf{d}(h_1^{tc\Pi}, h_2^{tc\Pi}, h_3^{tc\Pi}))'(\_/1_D)1_C)(1_D/E(\mathbf{d}(h_1^{tc\Pi}, h_2^{tc\Pi}, h_3^{tc\Pi}))'(\_/1_C)1_D)h_4$,

$nf^{tc\Pi} \rightarrow_{1\text{-}NMS\vee 1}$

$O((1_C/E(\mathbf{d}(h_1^{tc\Pi}, h_2^{tc\Pi}{}'(\_/1_D)1_C, h_3^{tc\Pi}{}'(\_/1_D)1_C))(1_D/E(\mathbf{d}(h_1^{tc\Pi}, h_2^{tc\Pi}, h_3^{tc\Pi}))'(\_/1_C)1_D))h_4$

$\rightarrow_{1\text{-}NMS\vee 1}$

$O((1_C/E(\mathbf{d}(h_1^{tc\Pi}, h_2^{tc\Pi}{}'(\_/1_D)1_C, h_3^{tc\Pi}{}'(\_/1_D)1_C))(1_D/E(\mathbf{d}(h_1^{tc\Pi}, h_2^{tc\Pi}{}'(\_/1_C)1_D, h_3^{tc\Pi}{}'(\_/1_C)1_D h_4))$

znači, $nf^{tc\Pi} \rightarrow_{m\text{-}NMS\vee 1(3)} h$.

S druge strane:

$\mathbf{p}(nf^{tc\Pi}) = O''(E''(1_C/\pi\delta(\mathbf{p}(h_1), \mathbf{p}(h_2), \mathbf{p}(h_3))(1_D/\pi'\delta(\mathbf{p}(h_1), \mathbf{p}(h_2), \mathbf{p}(h_3))\mathbf{p}(h_4))))$,

$\mathbf{p}(h) = O''(E''((1_C/\delta(\mathbf{p}(h_1), \pi\mathbf{p}(h_2), \pi\mathbf{p}(h_3))), (1_D/\delta(\mathbf{p}(h_1), \pi'\mathbf{p}(h_2), \pi'\, \mathbf{p}(h_3)))\mathbf{p}(h_4))$.

Znači $\mathbf{p}(nf^{tc\Pi}) \hookrightarrow_{1\text{-}RMS\vee 1} \mathbf{p}(nh^{tc\Pi})$, $nh^{tc\Pi} \equiv h$.

Dokaz je isti i za $NMS\wedge$ i za $NMS\Rightarrow$ jednakosti. **q. e. d.**

Zaključak je:

1. Redukcije *R-MF* i *NMF* redukcije čuvaju se pri preslikavanjima $\mathfrak{p}$ i $\mathfrak{r}$ (lema 12, lema 14, posledica 11).

2. Redukcije *R-MS* i *NMS*$\vee$ redukcije se slažu ako su operacije eliminisanja veznika $\wedge$, $\Rightarrow$ u sistemima $\mathcal{ND}$ i $\mathcal{N}$ u istom duhu, odnosno slažu se termi iz $\mathcal{ND}$ sa nd-termima iz $\mathcal{N}$ (lema 13, lema17). U drugom sličaju veza ne postoji (lema 16).

3. Redukcije *NMS*$\wedge(\Rightarrow)$ kao specifičnost za $\mathcal{N}$ i oblika njegovih operacija eliminacije veznika $\wedge$,$\Rightarrow$ nemaju važnost u $\mathcal{ND}$ (lema 15).

4. Redukcije *NMFT*$\wedge(\Rightarrow)$ kao specifičnosti za $\mathcal{N}$ (zbog približavanja Gencenovom sistemu dodavanjem strukturnih pravila) nemaju nikakva odraza u $\mathcal{ND}$ (za sistem $\mathcal{ND}$ to su suviše nijansirane razlike) (posledica 12).

2. VEZE IZMEĐU SISTEMA $\mathcal{N}$ I $\mathcal{N}'$

Sistemi $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$ su nad istim beskonačnim skupom atomskih objekata. Preslikavanja $\mathfrak{l}:\mathcal{N}\rightarrow\mathcal{N}'$ i $\mathfrak{f}:\mathcal{N}\rightarrow\mathcal{N}$ će slikati objekte u same sebe i čuvati operacije nad njima. Preslikavanja strelica ćemo definisati indukcijom po složenosti strelice.

$\mathfrak{l}$1. $\mathfrak{l}(1_{A_i})=1_{A_i}$.

$\mathfrak{l}$2. $\mathfrak{l}(\{f, g\})=\{\mathfrak{l}(f), \mathfrak{l}(g)\}$, za $f:\Gamma\vdash A,\ g:\Delta\vdash B$.

$\mathfrak{l}$3. $\mathfrak{l}(f\,'g)=\mathfrak{l}(f)'\mathfrak{l}(g)$, za $f:\Gamma\vdash A\wedge B,\ g:\Lambda AB\Delta\vdash C$.

$\mathfrak{l}$4. $\mathfrak{l}({}_{\kappa}f)={}_{\kappa}\mathfrak{l}(f)$, za $f:\Gamma\vdash A$.

$\mathfrak{l}$5. $\mathfrak{l}({}_{\kappa'}f)={}_{\kappa'}\mathfrak{l}(f)$, za $f:\Gamma\vdash B$.

$\mathfrak{l}$6. $\mathfrak{l}(\mathbf{d}(f,g,h))=\mathbf{D}(\mathfrak{l}(f),(\_/1_{\Lambda})\mathfrak{l}(g),(\_/1_{\Delta})\mathfrak{l}(h))$, za $f:\Gamma\vdash A\vee B,\ g:\Phi A\Delta\vdash C,\ h:\Theta B\Lambda\vdash C$.

$\mathfrak{l}$7. $\mathfrak{l}(f^*)=\mathfrak{l}(f)^*$, za $f:\Delta A\Gamma\vdash B$.

$\mathfrak{l}$8. $\mathfrak{l}(\mathbf{I}(f, g, h))=\mathbf{I}(\mathfrak{l}(f),\mathfrak{l}(g),\mathfrak{l}(h))$, za $f:\Gamma\vdash A\Rightarrow B,\ g:\Delta\vdash A,\ h:\Theta B\Lambda\vdash C$.

$\mathfrak{l}$9. $\mathfrak{l}((\_/1_A)f)=(\_/1_A)\mathfrak{l}(f)$, za $f:\Gamma\vdash C$.

$\mathfrak{l}$10. $\mathfrak{l}((1_A 1_A/1_A)f)=(1_A 1_A/1_A)\mathfrak{l}(f)$, za $f:\Theta AA\Gamma\vdash C$.

$\mathfrak{l}$11. $\mathfrak{l}((1_A/h)f)=(1_A/\mathfrak{l}(h))\mathfrak{l}(f)$, za $h:\Gamma\vdash A,\ f:\Lambda A\Delta\vdash B$.

Preslikavanje $\mathfrak{f}$:

$\mathfrak{f}$1. $\mathfrak{f}(1_{A_i})=1_{A_i}$.

$\mathfrak{f}$2. $\mathfrak{f}(\{f, g\})=\{\mathfrak{f}(f),\mathfrak{f}(g)\}$, za $f:\Gamma\vdash A,\ g:\Delta\vdash B$.

$\mathfrak{f}$3. $\mathfrak{f}(f\,'g)=\mathfrak{f}(f)'\mathfrak{f}(g)$, za $f:\Gamma\vdash A\wedge B,\ g:\Lambda AB\Delta\vdash C$.

$\mathfrak{f}$4. $\mathfrak{f}({}_{\kappa}f)={}_{\kappa}\mathfrak{f}(f)$, za $f:\Gamma\vdash A$.

$\mathfrak{f}$5. $\mathfrak{f}({}_{\kappa'}f)={}_{\kappa'}\mathfrak{f}(f)$, za $f:\Gamma\vdash B$.

$\mathfrak{f}$6. $\mathfrak{f}(\mathbf{D}(f, g, h))=(1_{\Delta\Theta}\, 1_{\Delta\Theta}/1_{\Delta\Theta})\mathbf{d}(\mathfrak{f}(f),\mathfrak{f}(g),\mathfrak{f}(h))$, za $f:\Gamma\vdash A\vee B,\ g:\Theta A\Delta\vdash C,\ h:\Theta B\Delta\vdash C$.

$\mathfrak{f}$7. $\mathfrak{f}(f^*)=\mathfrak{f}(f)^*$, za $f:\Delta A\Gamma\vdash B$.

$\mathfrak{f}$8. $\mathfrak{f}(\mathbf{I}(f, g, h))=\mathbf{I}(\mathfrak{f}(f),\mathfrak{f}(g),\mathfrak{f}(h))$, za $f:\Gamma\vdash A\Rightarrow B,\ g:\Delta\vdash A,\ h:\Theta B\Lambda\vdash C$.

$\mathfrak{f}$9. $\mathfrak{f}((\_/1_A)f)=(\_/1_A)\mathfrak{f}(f)$, za $f:\Gamma\vdash C$.

$\mathfrak{f}$10. $\mathfrak{f}((1_A 1_A/1_A)f)=(1_A 1_A/1_A)\mathfrak{f}(f)$, za $f:\Theta AA\Gamma\vdash C$.

$\mathfrak{f}$11. $\mathfrak{f}((1_A/h)f)=(1_A/\mathfrak{f}(h))\mathfrak{f}(f)$, za $h:\Gamma\vdash A,\ f:\Lambda A\Delta\vdash B$.

KOMENTAR: Pošto se sistemi $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$ razlikuju samo po eliminaciji disjunkcije: operacije **d** *i* **D** *tu će se i pojaviti izvesne razlike. Operacija* **D** *u sebi krije implicitnu kontrakciju (odnosno kako se zove u sistemu $\mathcal{N}'$ sjedinjavanje), zato* **d** *i* **D** *nisu operacije, grubo rečeno, iste težine. Prelaske $\mathfrak{l}(\mathbf{d}(f,g,h))$, $\mathfrak{f}(\mathbf{D}(f,g,h))$ možemo shvatiti kao pokušaj da se u istom sistemu (svejedno $\mathcal{N}$ ili $\mathcal{N}'$) operacija* **D** *definiše preko* **d** *i obrnuto. Onda imamo:*

za $f{:}\Gamma \vdash A\vee B,\ \ g{:}\Theta A\Delta \vdash C,\ \ h{:}\Phi B\Lambda \vdash C,$ $\qquad \mathbf{d}(f, g, h) =_{def} \mathbf{D}(f, (\_/1_{\Lambda\Phi})g, (\_/1_{\Delta\Theta})h).$

za $f{:}\Gamma \vdash A\vee B,\ \ g{:}\Phi A\Delta \vdash C,\ h{:}\Phi B\Delta \vdash C,$ $\qquad \mathbf{D}(f, g, h) =_{def} (1_{\Delta\Phi} 1_{\Delta\Phi} / 1_{\Delta\Phi})\mathbf{d}(f, g, h)).$

Imamo $\mathfrak{l}(\mathfrak{f}(\mathbf{D}(f, g, h))) =_{ND} \mathbf{D}(f, g, h)$ u $\mathcal{N}'$ i $\mathfrak{f}(\mathfrak{l}(\mathbf{d}(f, g, h))) =_{ND} \mathbf{d}(f, g, h)$ u $\mathcal{N}$, ali gencenovski gledajući ovu jednakost možemo opisati kao kontrakcija(slabljenje(f)) =f.

Što se tiče redukcija one su iste u sistemima $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$ i čuvaju se preslikavanjima $\mathfrak{f}$ i $\mathfrak{l}$. Dokazi ovih lema su jednostavni i navešćemo samo jedan, kao primer.

LEMA 1: Neka su $f, g{:}\Gamma \vdash A$ dve strelice iz $\mathcal{N}$.
$f =_{ND} g$ u $\mathcal{N}$ akko $\mathfrak{l}(f) =_{ND} \mathfrak{l}(g)$ u $\mathcal{N}'$.

LEMA 2: Neka su $f, g{:}\Gamma \vdash A$ dve strelice iz $\mathcal{N}$.
Ako $f \rightarrow_{1\text{-}NMF} g$ u $\mathcal{N}$, onda $\mathfrak{l}(f) \rightarrow_{1\text{-}MF} \mathfrak{l}(g)$ u $\mathcal{N}'$.

DOKAZ:

Neka je $f \rightarrow_{1\text{-}NMF\vee 1} g$: Term f je oblika $O(f_1)$ i term f_1 je oblika
$\mathbf{d}(O_1({}_{\kappa}h), h_1, h_2)$, gde je $h_1{:}\Theta \vdash C$, $h_2{:}C\Delta \vdash B$, $h_3{:}D\Lambda \vdash B$ i
O niz operacija zamene.
Imamo $g = O_2((\_/1_{\Lambda})(1_A/h)h_1)$ i $g =_{ND} O(O_1((\_/1_{\Lambda})(1_A/h)h_1))$.
$f =_{ND} O(O_1(\mathbf{d}({}_{\kappa}h, h_1, h_2)))$,
$\mathfrak{l}(O(O_1(\mathbf{d}({}_{\kappa}h, h_1, h_2))) = O'(O_1'((1_{\Delta\Lambda}1_{\Delta\Lambda}/1_{\Delta\Lambda})\mathbf{D}({}_{\kappa}\,\mathfrak{l}(h), (\_/1_{\Lambda})\mathfrak{l}(h_1), (\_/1_{\Delta})\mathfrak{l}(h_2))))$, gde su O_1' i O' slike operacija O_1 i O preslikavanjem $\mathfrak{l}$.
$\mathfrak{l}(f) \rightarrow_{MF\vee 1} O'(O_1'((\_/1_{\Lambda})(1_A/\mathfrak{l}(h))\mathfrak{l}(h_1)))$,
$\mathfrak{l}(g) = O_2'((\_/1_{\Lambda})(1_A/\mathfrak{l}(h))\mathfrak{l}(h_1))$,
Znači, $\mathfrak{l}(f) \rightarrow_{1\text{-}MF\vee 1} \mathfrak{l}(g)$.
Dokaz je potpuno isti za $NMF\vee 2$ jednakost.
Za jednakosti $NMF\wedge$ i $NMF\Rightarrow$ dokaz je trivijalan. **q. e. d.**

LEMA 3: Neka su $f, g{:}\Gamma \vdash A$ dve strelice iz $\mathcal{N}'$.
Ako $f \rightarrow_{1\text{-}MF} g$ u $\mathcal{N}$, onda $\mathfrak{f}(f) \rightarrow_{1\text{-}NMF} \mathfrak{f}(g)$ u $\mathcal{N}$.

LEMA 4: Neka su $f, g{:}\Gamma \vdash A$ dve strelice iz $\mathcal{N}$.
Ako $f \rightarrow_{1\text{-}NMS} g$ u $\mathcal{N}$, onda $\mathfrak{l}(f) \rightarrow_{1\text{-}MS} \mathfrak{l}(g)$ u $\mathcal{N}'$.

LEMA 5: Neka su $f, g{:}\Gamma \vdash A$ dve strelice iz $\mathcal{N}'$.
Ako $f \rightarrow_{1\text{-}MS} g$ u $\mathcal{N}$, onda $\mathfrak{f}(f) \rightarrow_{1\text{-}NMS} \mathfrak{f}(g)$ u $\mathcal{N}$.

3. VEZE IZMEĐU SISTEMA $\mathcal{N}'$ I $\mathcal{G}'$

Veza sistema $\mathcal{N}'$ i $\mathcal{G}'$ pretstavlja vezu između sistema $\mathcal{N}'$, koji je u prirodnodedukcijskom duhu, ali sa operacijama koje odgovaraju strukturnim pravilima i sistema $\mathcal{G}'$, koji je jedna vrsta Gencenovog sistema sekvenata (bez permutacije). Grubo rečeno, ova dva sistema su iste težine (u smislu prisustva operacija nad strelicama) ali je $\mathcal{N}'$ desni sistem a $\mathcal{G}'$ je levo-desni sistem.

Definisanje preslikavanja $\mathfrak{s}:\mathcal{N}'\to\mathcal{G}'$ i $\mathfrak{n}:\mathcal{G}'\to\mathcal{N}'$ biće dato na sledeći način:
Sistemi $\mathcal{N}'$ i $\mathcal{G}'$ su nad istim beskonačnim skupom objekata.
Preslikavanja $\mathfrak{s}:\mathcal{N}'\to\mathcal{G}'$ i $\mathfrak{n}:\mathcal{G}'\to\mathcal{N}'$ će slikati objekte u same sebe i čuvati operacije nad njima.
Preslikavanja strelica ćemo definisati indukcijom po složenosti strelice.
Preslikavanje $\mathfrak{s}$:

s1. $\mathfrak{s}(1_{A_i})=1_{A_i}$.
s2. $\mathfrak{s}(\{f,g\})=\{\mathfrak{s}(f),\mathfrak{s}(g)\}$, za $f:\Gamma\vdash A,\ \ g:\Delta\vdash B$.
s3. $\mathfrak{s}(f\,'g)=\mathfrak{s}(g)^{\text{ł}}\langle\mathfrak{s}(f)\rangle$, za $f:\Gamma\vdash A\wedge B,\ \ g:\Lambda AB\Delta\vdash C$.
s4. $\mathfrak{s}({}_{\kappa}f)={}_{\kappa}\mathfrak{s}(f)$, za $f:\Gamma\vdash A$.
s5. $\mathfrak{s}({}_{\kappa'}f)={}_{\kappa'}\mathfrak{s}(f)$, za $f:\Gamma\vdash B$.
s6. $\mathfrak{s}(\mathbf{D}(f,g,h))=[\mathfrak{s}(g),\mathfrak{s}(h)]\langle\mathfrak{s}(f)\rangle$, za $f:\Gamma\vdash A\vee B,\ g:\Lambda A\Delta\vdash C,\ h:\Lambda B\Delta\vdash C$.
s7. $\mathfrak{s}(f^{*})=\mathfrak{s}(f)^{*}$, za $f:\Delta A\Gamma\vdash B$.
s8. $\mathfrak{s}(\mathbf{I}(f,g,h))=\mathfrak{s}(h)[\mathfrak{s}(g)]\langle\mathfrak{s}(f)\rangle$, za $f:\Gamma\vdash A\Rightarrow B,\ \ g:\Delta\vdash A,\ \ h:\Theta B\Lambda\vdash C$.
s9. $\mathfrak{s}((\_/1_A)f)=\mathbf{t}_A(\mathfrak{s}(f))$, za $f:\Gamma\vdash C$.
s10. $\mathfrak{s}((1_A\,1_A/1_A)f)=\mathbf{c}_A(\mathfrak{s}(f))$, za $f:\Delta AA\Gamma\vdash C$.
s11. $\mathfrak{s}((1_A/h)f)=\mathfrak{s}(f)\langle\mathfrak{s}(h)\rangle$, za $h:\Gamma\vdash A,\ \ f:\Lambda A\Delta\vdash B$.

Preslikavanje $\mathfrak{n}$:

n1. $\mathfrak{n}(1_{A_i})=1_{A_i}$.
n2. $\mathfrak{n}(\{f,g\})=\{\mathfrak{n}(f),\mathfrak{n}(g)\}$, za $f:\Gamma\vdash A,\ \ g:\Delta\vdash B$.
n3. $\mathfrak{n}(f^{\text{ł}})=1_{A\wedge B}{}'\mathfrak{n}(f)$, za $f:\Gamma AB\Delta\vdash C$.
n4. $\mathfrak{n}({}_{\kappa}f)={}_{\kappa}\mathfrak{n}(f)$, za $f:\Gamma\vdash A$.
n5. $\mathfrak{n}({}_{\kappa'}f)={}_{\kappa'}\mathfrak{n}(f)$, za $f:\Gamma\vdash B$.
n6. $\mathfrak{n}([g,h])=\mathbf{D}(1_{A\vee B},\mathfrak{n}(g),\mathfrak{n}(h))$, za $g:\Lambda A\Delta\vdash C,\ \ h:\Lambda B\Delta\vdash C$.
n7. $\mathfrak{n}(f^{*})=\mathfrak{n}(f)^{*}$, za $f:\Delta A\Gamma\vdash B$.
n8. $\mathfrak{n}(h[g])=\mathbf{I}(1_{A\Rightarrow B},\mathfrak{n}(g),\mathfrak{n}(h))$, za $g:\Delta\vdash A,\ \ h:\Gamma B\Lambda\vdash C$.
n9. $\mathfrak{n}(\mathbf{t}_A(f))=(\_/1_A)\mathfrak{n}(f)$, za $f:\Gamma\vdash C$.
n10. $\mathfrak{n}(\mathbf{c}_A(f))=(1_A\,1_A/1_A)\mathfrak{n}(f)$, za $f:\Delta AA\Gamma\vdash C$.
n11. $\mathfrak{n}(f\langle h\rangle)=(1_A/\mathfrak{n}(h))\mathfrak{n}(f)$, za $h:\Gamma\vdash A,\ \ f:\Lambda A\Delta\vdash B$.

DEFINICIJA: Neka je $f:\Gamma\vdash A$ strelica sistema $\mathcal{N}'$. Ako svaki podterm terma f oblika $g'h$; $\mathbf{D}(g,h_1,h_2)$ ili $\mathbf{I}(g,h_1,h_2)$ zamenimo redom termom $(1_{A\wedge B}/g)1_{A\wedge B}{}'h$; $(1_{A\vee B}/g)\mathbf{D}(1_{A\vee B},h_1,h_2)$; $(1_{A\Rightarrow B}/g)\mathbf{I}(1_{A\Rightarrow B},h_1,h_2)$) dobijamo term (i njemu odgovarajuću strelicu) koji ćemo obeležavati sa ${}^{1}f$, ${}^{1}f:\Gamma\vdash A$ u sistemu $\mathcal{N}'$.

DEFINICIJA: Neka je $f{:}\Gamma\vdash A$ strelica sistema $\mathcal{G}'$. Ako svaki podterm terma f oblika $h^{\natural}$; $[h_1,h_2]$; $h_1[h_2]$ zamenimo redom termom oblika $h^{\natural}\langle 1_{C\wedge D}\rangle$; $[h_1,h_2]\langle 1_{C\vee D}\rangle$; $h_1[h_2])\langle 1_{C\Rightarrow D}\rangle$ dobijamo term (i strelicu) koji ćemo obeležavati, f^1, $f^1{:}\Gamma\vdash A$ u sistemu $\mathcal{G}'$.

Jednostavno se dokazuju sledeća svojstva terama iz $\mathcal{N}'$ i $\mathcal{G}'$.

LEMA 0: (1) Ako je f term sistema $\mathcal{N}'$, tada: $f =_{ND} {}^1f$.

(2) Ako je f term iz $\mathcal{G}'$, tada: $f >_{MI} f^1$.

(3) Ako je f term iz $\mathcal{N}'$, tada: $\mathfrak{s}({}^1f) >_{MI} \mathfrak{s}(f)$.

KOMENTAR: Priroda operacija eliminisanja u sistemu $\mathcal{N}'$ gde se menja desna strana u tipu terma, sa sobom u sistem $\mathcal{G}'$ donosi eliminisanje, koje se dešava sa leve strane $\vdash$ u tipu i sečenje. S druge strane eliminisanje (u sistemu $\mathcal{G}'$) koje se ogleda u promeni sa leve strane $\vdash$ nosi sa sobom (u $\mathcal{N}'$) eliminisanje koje daje dešavanje sa desne strane $\vdash$ i potrebu za jedinicom. Ovakve osobine koje su u stvari u prirodi veze desnog i levo-desnog sistema se odražavaju u potrebi za termom ${}^1f$ (nekog terma f) u sistemu $\mathcal{N}'$ i termom g^1 (nekog terma g) u sistemu $\mathcal{G}'$. Preslikavanje $\mathfrak{n}$ koje nosi karakteristike svog polaznog (desnog) sistema ostaviće ih na slici u sitemu $\mathcal{G}'$. I naravno $\mathfrak{s}$ slika iz levo-desnog sistema, pa ${}^1f$ sve eliminacije ima "pojednostavljeno na jedinicama" i još jedno sečenje.

Imamo lepu osobinu gore definisanih preslikavanja:
Za $f{:}\Gamma\vdash A$ strelicu sistema $\mathcal{N}'$ imamo: $\mathfrak{n}\circ\mathfrak{s}(f) = {}^1f$.
Za $g{:}\Gamma\vdash A$ strelicu sistema $\mathcal{G}'$ imamo: $\mathfrak{s}\circ\mathfrak{n}(g) = g^1$.

Pre nego što ispitamo druge karakteristike gore definisanih preslikavanja $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{s}$ navešemo još jednu mogućnost definisanja preslikavanja $\mathfrak{s}$. Označavaćemo ga sa $\mathfrak{s}_0$ i ono će se poklapati sa preslikavanjem $\mathfrak{s}$ sem u sledećim slučajevima:
Umesto **$\mathfrak{s}$3**. biće sledeće:

$\mathfrak{s}$3.1.	$\mathfrak{s}_0(f\,'g) = \mathfrak{s}_0(g)^{\natural}\langle\mathfrak{s}_0(f)\rangle$,	za $f{:}\Gamma\vdash A\wedge B$, $g{:}\Lambda AB\Delta\vdash C$.
$\mathfrak{s}$3.2.	$\mathfrak{s}_0(1_{A\wedge B}\,'g) = \mathfrak{s}_0(g)^{\natural}$,	za $g{:}\Lambda AB\Delta\vdash C$.

Umesto **$\mathfrak{s}$6**. sledeće:

$\mathfrak{s}$6.1.	$\mathfrak{s}_0(\mathrm{D}(f, g, h)) = [\mathfrak{s}_0(g), \mathfrak{s}_0(h)]\langle\mathfrak{s}_0(f)\rangle$,	za $f{:}\Gamma\vdash A\vee B$, $g{:}\Lambda A\Delta\vdash C$, $h{:}\Lambda B\Delta\vdash C$.
$\mathfrak{s}$6.2.	$\mathfrak{s}_0(\mathrm{D}(1_{A\vee B}, g, h)) = [\mathfrak{s}_0(g), \mathfrak{s}_0(h)]$,	za $g{:}\Lambda A\Delta\vdash C$, $h{:}\Lambda B\Delta\vdash C$.

Umesto **$\mathfrak{s}$8**. sledeće:

$\mathfrak{s}$8.1.	$\mathfrak{s}_0(\mathrm{I}(f, g, h)) = \mathfrak{s}_0(h)[\mathfrak{s}_0(g)]\langle\mathfrak{s}_0(f)\rangle$,	za $f{:}\Gamma\vdash A\Rightarrow B$, $g{:}\Delta\vdash A$, $h{:}\Theta B\Lambda\vdash C$.
$\mathfrak{s}$8.2.	$\mathfrak{s}_0(\mathrm{I}(1_{A\Rightarrow B}, g, h)) = \mathfrak{s}_0(h)[\mathfrak{s}_0(g)]$,	za $g{:}\Delta\vdash A$, $h{:}\Theta B\Lambda\vdash C$.

U slučaju preslikavanja $\mathfrak{s}_0$ imamo:
Za $f{:}\Gamma\vdash A$ strelicu sistema $\mathcal{N}'$ imamo: $\mathfrak{n}\circ\mathfrak{s}_0(f) = {}^1f$.
Za $g{:}\Gamma\vdash A$ strelicu sistema $\mathcal{G}'$ imamo: $\mathfrak{s}_0\circ\mathfrak{n}(g) = g$.

KOMENAR: Obogaćivanjem sistema koji odgovaraju prirodnoj dedukciji, sistema $\mathcal{ND}$, novim operacijama, operacijama zamene i još nekim promenama sa kojima smo došli do sistema $\mathcal{N}$, odnosno $\mathcal{N}'$ pojam jednakosti među termima se zakomplikovao. Drvo terma u kome operacija nadovezivanja sledi operaciju eliminaije je bilo drugačije od drveta terma u kome je redosled tih operacija obrnut. Gledajući prirodnodedukcijski, to nije bitno, gledajući sekventno bitno je. U sistemima $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$ koji su sistemi srodni prirodnodedukcijskom (bez obzira na dodate operacije zamene) mi smo uveli izjednačavanje $=_{ND}$ i time zanemarili te razlike. Sada, kada upoređujemo sisteme $\mathcal{N}'$ i $\mathcal{G}'$ moći ćemo tačno jednakostima iz $\mathcal{G}'$ zapisati koje smo sve razlike *sklonili u prirodan oblik nekog terma iz $\mathcal{N}$. Te jednakosti će nam dati sledeća definicija, odnosno važna lema.*

DEFINICIJA: Neka su $f, g{:}\Gamma\vdash A$ dve strelice iz $\mathcal{G}'$. Ako za terme f, g važi $f \geqslant_{*} g$ i * iz sledećeg skupa operacija
$\{Mcat,\ CT,\ CT\text{-}CUT,\ E(R)perm.Cut,\ I(R)perm.Cut\}$ tada kažemo da su termi f, g **N-identični termi**.
Oznaka: $f =_N g$.

VAŽNA LEMA: Neka su $f, g{:}\Gamma\vdash A$ dve strelice iz $\mathcal{G}'$.

Tada za terme f i g važi: $f =_N g$ u $\mathcal{G}'$ akko $\mathfrak{n}(f) =_{ND} \mathfrak{n}(g)$ u $\mathcal{N}$.

DOKAZ:

$\Rightarrow$: Ako $f =_N g$ u $\mathcal{G}'$:

to znači da postoje podtermi f_1 i g_1 takvi da $f = O(f_1)$, $g = O(g_1)$ i $f_1 = g_1$ je jedna N-jednakost.
Dovoljno je pokazati da $\mathfrak{n}(f_1) =_{ND} \mathfrak{n}(g_1)$ u $\mathcal{N}$ prolazeći kroz sve slučajeve N-jednakosti, jer:
$\mathfrak{n}(f) = \mathfrak{n}(O(f_1)) = O'(\mathfrak{n}(f_1)) =_{ND} O'(\mathfrak{n}(g_1)) = \mathfrak{n}(O(g_1)) = \mathfrak{n}(g)$, gde je O' slika operacija O preslikavanjem $\mathfrak{n}$.
Ovde ćemo navesti dokaz ako je $f_1 = g_1$ $E(R)perm.Cut\text{-}I$ jednakost, a za sve druge N-jednakosti dokaz je analogan.
Neka $f_1 = E(h_1)\langle h_2\rangle$, $g_1 = E(h_1\langle h_2\rangle)$, gde je E neka operacija eliminacije i E' njena slika preslikavanjem $\mathfrak{n}$. Onda
$\mathfrak{n}(f_1) = \mathfrak{n}(E(h_1)\langle h_2\rangle) = (1_C/\mathfrak{n}(h_2))E'(\mathfrak{n}(h_2))$,
$\mathfrak{n}(g_1) = \mathfrak{n}(E(h_1\langle h_2\rangle)) = E'((1_C/\mathfrak{n}(h_2))\mathfrak{n}(h_2))$,
$(1_C/\mathfrak{n}(h_2))E'(\mathfrak{n}(h_2)) =_{ND} E'((1_C/\mathfrak{n}(h_2))\mathfrak{n}(h_2))$, u $\mathcal{N}$,

znači: $\mathfrak{n}(f_1) =_{ND} \mathfrak{n}(g_1)$.

$\Leftarrow$: Ako $\mathfrak{n}(f) =_{ND} \mathfrak{n}(g)$ u $\mathcal{N}$.

Postoje termi h_1, h iz $\mathcal{N}$ takvi da $\mathfrak{s}(h) = f^1$, $\mathfrak{s}(h_1) = g^1$.
U sistemu $\mathcal{G}'$ važi $f^1 =_N f$ i na osnovu prvog dela leme: $\mathfrak{n}(f^1) =_{ND} \mathfrak{n}(f)$.
$\mathfrak{n}(f^1) = \mathfrak{n} \circ \mathfrak{s}(h) = {}^1h$, $\mathfrak{n}(g^1) = \mathfrak{n} \circ \mathfrak{s}(h_1) = {}^1h_1$,
Ako pokažemo $\mathfrak{s}(h) =_N \mathfrak{s}(h_1)$ u $\mathcal{G}'$
onda to znači $f^1 =_N g^1$ i koristeći da je $f =_N f^1$, $g =_N g^1$, dobijamo $f =_N g$ u $\mathcal{G}'$.
Imamo $h =_{ND} h_1$, treba pokazati $\mathfrak{s}(h) =_N \mathfrak{s}(h_1)$.
To ćemo pokazati indukcijom po složenosti terma h: $\mathrm{l}(h)$ gde je broj operacija u termu h.
$\mathrm{l}(h)=0$: $h = 1_A$, $1_A{:}A\vdash A$, mogućnost za $h_1 = (1_A/1_A)\ldots 1_A$, $(1_A/1_A)\ldots 1_A{:}A\vdash A$

$\mathfrak{s}(h) = 1_A$, $\mathfrak{s}(h_1) = 1_A\langle 1_A\rangle\ldots(1_A)$, $\mathfrak{s}(h) >_{Mcat} \mathfrak{s}(h_1)$.

znači: $\mathfrak{s}(h) =_N \mathfrak{s}(h_1)$.

$\mathrm{l}(h)>0$: (I) termi h i h_1 imaju iste poslednje operacije: neku operaciju veznika. Na primer poslednja operacija je $\{,\}$:

$h = \{h_3, h_4\}$, $h_1 = \{h_5, h_6\}$ i $h =_{ND} h_1$ mora $h_3 =_{ND} h_5$, $h_4 =_{ND} h_6$,
$\mathrm{l}(h_4), \mathrm{l}(h_3) < \mathrm{l}(h)$, $\mathrm{l}(h_5), \mathrm{l}(h_6) < \mathrm{l}(h)$, na osnovu indukcijske pretpostavke:
$\mathfrak{s}(h_3) =_N \mathfrak{s}(h_5)$,
$\mathfrak{s}(h_4) =_N \mathfrak{s}(h_6)$,
odnosno $\{\mathfrak{s}(h_3), \mathfrak{s}(h_4)\} =_N \{\mathfrak{s}(h_5), \mathfrak{s}(h_6)\}$.

znači: $\mathfrak{s}(h) =_N \mathfrak{s}(h_1)$

Potpuno isto se dokazuje za sve ostale operacije veznika.

(II) poslednja operacija terma h je neka operacija zamene, a terma h_1 je proizvoljna operacija.

Posmatraćemo slučaj kada se term h završava operacijom nadovezivanja a $N(h)$ je oblika $\{h', h_2\}$.

Term h u tom slučaju može biti oblika:

$(1_B/h_4)O(\{h_1', h_2'\})$, gde je O niz operacija zamene koji može biti i prazan.

Term h_1 ima jedan od sledećih oblika:

ili $\{h_1'', h_2''\}$ ili $O_1(\{h_1'', h_2''\})$, gde je O_1 niz operacija zamene.

Zato što $h =_{ND} h_1$

postoji podterm od $\{h_1', h_2'\}$: $\{g_1', g_2'\}$ i podterm od $\{h_1'', h_2''\}$:$\{g_1'', g_2''\}$ takvi da $\{g_1', g_2'\} =_{ND} \{g_1'', g_2''\}$.

Na osnovu indukcijske pretpostavke:

$\{\mathbf{s}(g_1'), \mathbf{s}(g_2')\} =_N \{\mathbf{s}(g_1''), \mathbf{s}(g_2'')\}$,

Onda na osnovu N-jednakosti $\mathbf{s}(h) =_N \mathbf{s}(h_1)$.

Potpuno isto bi tekao dokaz za slučaj kada bi $N(h)$ imao neki drugi oblik.

Zatim bi se postupak ponovio kada bi poslednja operacija terma h bilo sjedinjavanje ili nova pretpostavka.

Na taj način bi pokazali da u $\mathcal{G}'$ važi $\mathbf{s}(h) =_N \mathbf{s}(h_1)$. **q. e. d.**

Kada smo u $\mathcal{N}'$ definisali za dva terma f, g redukciju $f \to_{1\text{-}M} g$ onda smo zahtevali da se na jednom mestu termi f i g razlikuju po nekoj M jednakosti a da im se ostali delovi prirodnih oblika podudaraju. U važnoj lemi smo videli koje sve jednakosti iz $\mathcal{G}'$ su zanemarene na taj način. Kao da su koraci redukcije u $\mathcal{G}'$ "preciznije" urađeni.

POSLEDICA 1: Neka su $f, g{:}\Gamma \vdash A$ dve strelice iz $\mathcal{N}'$.

Tada za terme f i g važi: $f =_{ND} g$ u $\mathcal{N}'$ akko $\mathbf{s}(f) =_N \mathbf{s}(g)$ u $\mathcal{G}'$.

DOKAZ:

$\Rightarrow$: $f =_{ND} g$: postoje u $\mathcal{G}'$ termi h, h_1 takvi da $\mathbf{n}(h) = {}^1 f$, $\mathbf{n}(h_1) = {}^1 g$.

U $\mathcal{N}'$ imamo $f =_{ND} {}^1 f$, $g =_{ND} {}^1 g$ a odatle $\mathbf{n}(h) =_{ND} \mathbf{n}(h_1)$.

Na osnovu važne leme imamo $h =_N h_1$ u $\mathcal{G}'$.

Važi: $\mathbf{s}({}^1 f) = \mathbf{s}(\mathbf{n}(h)) = h^1$ i $\mathbf{s}(g) = \mathbf{s}(\mathbf{n}(h_1)) = h_1^1$, $h >_{M1} h^1$.

Onda: $h^1 =_N h_1^1$, znači: $\mathbf{s}({}^1 f) =_N \mathbf{s}({}^1 g)$,

lema 0: $\mathbf{s}({}^1 f) >_{M1} \mathbf{s}(f)$, odnosno $\mathbf{s}({}^1 f) =_N \mathbf{s}(f)$.

Odatle $\mathbf{s}(f) =_N \mathbf{s}(g)$ u $\mathcal{G}'$.

$\Leftarrow$: $\mathbf{s}(f) =_N \mathbf{s}(g)$: važna lema $\mathbf{n}(\mathbf{s}(f)) =_{ND} \mathbf{n}(\mathbf{s}(g))$ u $\mathcal{N}'$,

$\mathbf{n}(\mathbf{s}(f)) = {}^1 f$ i ${}^1 f =_{ND} f$ u $\mathcal{N}'$.

Znači: $f =_{ND} g$ u $\mathcal{N}'$. **q. e. d.**

Redukcije u $\mathcal{N}'$ preslikavanjima $\mathbf{n}$ i $\mathbf{s}$ dobro su povezane sa odgovarajućim redukcijama u $\mathcal{G}'$. Koraku redukcije u $\mathcal{G}'$ odgovara korak redukcije u $\mathcal{N}'$. Koraku u $\mathcal{N}'$ odgovara korak redukcije istog tipa u $\mathcal{G}'$ ali i mnogo N-jednakosti koje pokrivaju izjednačavanje terama po prirodnom obliku u $\mathcal{N}'$. To ćemo pokazati u lemama koje slede.

LEMA 1: Neka su $f, g{:}\Theta \vdash F$ dve strelice iz $\mathcal{N}'$.

Ako $f \to_{1\text{-}MF} g$ u $\mathcal{N}'$, onda $\mathbf{s}(f) >_\beta =_N \mathbf{s}(g)$ u $\mathcal{G}'$.

DOKAZ:

Neka $f \to_{1\text{-}MF} g$: Nosilac redukcije je term f_1, $f=O(f_1)$, $f_1=g_1$ MF jednakost $g =_{ND} O(g_1)$.

Term f_1 ima jedan od sledećih oblika u zavisnosti o kojoj se MF jednakosti radi:

$E(\{h_1, h_2\})'h$ ili $(1_{C\wedge B}/\, E(\{h_1, h_2\}))O_1(E_1(1_{C\wedge B})'h)$,

$\mathbf{D}(E(_K h), h_1, h_2)$ ili $(1_{C\vee B}/E_1(_K h))O_1(\mathbf{D}(E_2(1_{C\vee B}), h_1, h_2))$,

$\mathbf{I}(E(h^*), h_1, h_2)$ ili $(1_{C\Rightarrow B}/E_1(h^*))O_1(\mathbf{I}(E_2(1_{C\Rightarrow B}), h_1, h_2))$

Pretpostavićemo da $f \to_{1\text{-}MF\wedge} g$

i f_1 je oblika $E(\{h_1,h_2\})'h$, za $h_1{:}\Gamma \vdash C$, $h_2{:}\Delta \vdash B$, $h{:}\Lambda CB\Theta \vdash D$ i E niz operacija zamena. Ako je E' slika operacija E preslikavanjem $\mathfrak{s}$,

tada $\mathfrak{s}(f_1) = \mathfrak{s}(E(\{h_1, h_2\})'h) = \mathfrak{s}(h)^{\natural}\langle E'(\{\mathfrak{s}(h_1), \mathfrak{s}(h_2)\})\rangle$

$=_N E'(\mathfrak{s}(h)^{\natural}\langle\{\mathfrak{s}(h_1), \mathfrak{s}(h_2)\}\rangle =_{\beta\wedge} E'(\mathfrak{s}(h)\, \langle\mathfrak{s}(h_1)\rangle\langle\mathfrak{s}(h_2)\rangle)$

$= E'(\mathfrak{s}((1_C/h_1)(1_B/h_2)h)) = \mathfrak{s}(g_1)$.

Ako je O' slika operacija O preslikavanjem $\mathfrak{s}$ imamo na osnovu posledice važne leme :

$\mathfrak{s}(f) = O'(\mathfrak{s}(f_1)) =_{N,\, \beta\wedge} O'(\mathfrak{s}(g_1)) =_N \mathfrak{s}(g)$.

Dokaz je analogan i za preostale MF-redukcije.

Znači: $\mathfrak{s}(f) >_\beta =_N \mathfrak{s}(g)$. q. e. d.

LEMA 2: Neka su $f, g{:}\Gamma \vdash A$ dve strelice iz $\mathcal{N}$.

Ako $f \to_{1\text{-}MS} g$ u $\mathcal{N}$, onda $\mathfrak{s}(f) >_{MaxRed,\, CTMaxRed} =_N \mathfrak{s}(g)$ u $\mathcal{G}'$.

DOKAZ:

Potpuno isti postupak dokaza kao u lemi 1. q. e. d.

LEMA 3: Neka su $f, g{:}\Theta \vdash F$ dve strelice iz $\mathcal{G}'$.

Ako $f >_{1\beta} g$ u $\mathcal{G}'$, onda $\mathfrak{n}(f) \to_{1\text{-}MF} \mathfrak{n}(g)$ u $\mathcal{N}$.

DOKAZ:

Neka $f >_{1\beta\wedge} g$ u $\mathcal{G}'$: postoji podterm f_1 terma f i podterm g_1 terma g takvi da je $f=O(f_1)$, $g=O(g_1)$ i $f_1 = h^{\natural}\langle\{h_1, h_2\}\rangle$, $g_1 = h\langle h_1\rangle\langle h_2\rangle$, za $h_1{:}\Gamma \vdash A$, $h_2{:}\Delta \vdash B$, $h{:}\Lambda AB\Theta \vdash D$.

$\mathfrak{n}(f_1) = \mathfrak{n}(h^{\natural}\langle\{h_1, h_2\}\rangle) = (1_{A\wedge B}/\{\mathfrak{n}(h_1), \mathfrak{n}(h_2)\})1_{A\wedge B}'\mathfrak{n}(h)$.

$\mathfrak{n}(g_1) = (1_A/\mathfrak{n}(h_1))(1_B/\mathfrak{n}(h_2)\, \mathfrak{n}(h)$.

$\mathfrak{n}(f_1) \to_{1\text{-}MF} (1_C/\mathfrak{n}(h_1))(1_D/\mathfrak{n}(h_2))\mathfrak{n}(h)$.

$\mathfrak{n}(f) = \mathfrak{n}(O(f_1)) =_{def} O''(\mathfrak{n}(f_1))$, gde je O'' slika od O preslikavanjem $\mathfrak{n}$.

$O''(\mathfrak{n}(f_1)) \to_{1\text{-}MF} O''(\mathfrak{n}(g_1))$

$O''(\mathfrak{n}(g_1)) =_{def} \mathfrak{n}(O(g_1)) = \mathfrak{n}(g)$.

Znači $\mathfrak{n}(f) \to_{1\text{-}MF\wedge 1} \mathfrak{n}(g)$.

Na potpuno isti način se dokazuje za jednakosti $\beta\vee 1$, $\beta\vee 2$, $\beta\Rightarrow$. q. e. d.

LEMA 4: Neka su $f, g{:}\Gamma \vdash A$ dve strelice iz $\mathcal{G}'$.

Ako $f >_{1MaxRed,\, CTMaxRed} g$ u $\mathcal{G}'$, onda $\mathfrak{n}(f) \to_{1\text{-}MS} \mathfrak{n}(g)$ u $\mathcal{N}$.

DOKAZ:

Istim postupkom kao u lemi 3 dokaže se da ovo važi za sve Max.Red. jednakosti iz $\mathcal{G}'$.

q. e. d.

***KOMENTAR:** Ako pogledamo šta pripada skupu jednakosti koje definišu cf-redukcije primetićemo da E(L)permCut nemaju odgovarajuće redukcije u $\mathcal{N}$. Kao da one pretstavljaju neki višak bez kog se ne može u $\mathcal{G}'$, a koji ne treba u $\mathcal{N}$.*

Kasnije kada budemo dokazali teoremu o eliminaciji sečenja u $\mathcal{G}'$ videćemo da nam te jednakosti nisu potrebne.

Te jednakosti posmatrane u $\mathcal{N}'$ znače:
da hoćemo da izvršimo permutaciju neke eliminacije sa uvođenjem ***(E(L)permCut-I)*** *ili da hoćemo da permutujemo dve eliminacije u izvodu, pri čemu zaključak prve nije važna premisa druge* ***(E(L)permCut-E)****. Takvi slučajevi u termu iz $\mathcal{N}'$ ne prave maksimalne segmente i zato nam nisu potrebni ti koraci redukcije u $\mathcal{N}'$.*

Možemo zaključiti da su nam redukcije u $\mathcal{N}'$ merilo potrebnog i dovoljnog za dokaz teorema koje karakterišu ova dva sistema: teorema o normalizaciji u $\mathcal{N}'$ i teorema o eliminaciji sečenja u $\mathcal{G}'$.

4. VEZE IZMEĐU SISTEMA $\mathcal{G}'$ I $\mathcal{G}$

DEFINICIJA: Neka je $f{:}\Gamma\vdash A$ strelica sistema $\mathcal{G}$. Neka je $h{:}\Delta BC\Lambda\vdash D$ podterm terma f takav da $\mathbf{p}_{B,C}(h)$ je podterm od f. Ako neko pojavljivanje u drvetu terma f jedne od formula te permutacije je pomoćna formula ili formula sečenja nekog pravila u termu f, onda je permutacija $\mathbf{p}_{B,C}$ **bitna permutacija** terma f, **vezana** je za to pravilo. U suprotnom je **nebitna**. Sve permutacije vezane za neko pravilo čine **niz vezanih** permutacija **za** to **pravilo**.

DEFINICIJA: Neka je $f{:}\Gamma\vdash A$ strelica sistema $\mathcal{G}$. Term lf se dobija od terma f tako što se u termu f izostave sve nebitne permutacije. Term lf^L se dobija od terma lf tako što permutacije vezane za neko pravilo neposredno prethode tom pravilu.

DEFINICIJA: Neka su $f{:}\Gamma_1\vdash A$, $h{:}\Gamma_2\vdash A$ dve strelice sistema $\mathcal{G}$. Ako su Γ_1 i Γ_2 jednaki kao multiskupovi i termi f i h se razlikuju samo po prisustvu i mestu (u njima) permutacija onda ćemo reći da su termi f i h **L-jednaki**.

<u>Oznaka:</u> $f=_L h$.

Važi: $lf=_L lf^L$.

DEFINICIJA: Neka je $f{:}\Gamma\vdash A$ strelica sistema $\mathcal{G}$. Definišemo $[lf]=\{g$ term iz $\mathcal{G}.\ lg^L=_L lf^L\}$. Term lf^L je **L-pretstavnik** te klase.

Veza sistema $\mathcal{G}'$ i $\mathcal{G}$ pretstavlja vezu između sistema $\mathcal{G}'$, koji je veoma blizu Gencenovom sistemu sekvenata, samo nema strukturno pravilo permutaciju i $\mathcal{G}$ koji je Gencenov sistem sekvenata. Grubo rečeno, ova dva sistema se jako malo razlikuju (imaju iste operacije nad strelicama). Razlike koje budemo među njima ustanovili biće pokazatelj uticaja i važnosti prisustva permutacije.

Sistemi $\mathcal{G}'$ i $\mathcal{G}$ su nad istim beskonačnim skupom atomskih objekata.

Preslikavanje $\mathfrak{g}{:}\mathcal{G}'\rightarrow\mathcal{G}$ će slikati objekte u same sebe i čuvati operacije nad njima.

Preslikavanje strelica ćemo definisati indukcijom po složenosti strelice.

Preslikavanje $\mathfrak{g}$:

$\mathfrak{g}$**1.** $\mathfrak{g}(1_{A_i})=1_{A_i}$.

$\mathfrak{g}$**2.** $\mathfrak{g}(\{f,g\})=\langle\mathbf{p}_{\Delta,\Gamma}(t_\Delta(\mathfrak{g}(f))),\mathbf{t}_\Gamma(\mathfrak{s}(g))\rangle$, za $f{:}\Gamma\vdash A$, $g{:}\Delta\vdash B$.

$\mathfrak{g}$**3.** $\mathfrak{g}(f^{\mathfrak{s}})=\mathbf{c}_{A\wedge B}((\mathbf{p}_{A\wedge B,B}((\mathbf{p}\dots(\mathfrak{g}(f)))_p))_{p'})$, za $f{:}\Gamma A\Delta B\Lambda\vdash C$.

$\mathfrak{g}$4. $\mathfrak{g}({}_{\kappa}f) = {}_{\kappa}\mathfrak{g}(f)$, za $f{:}\Gamma \vdash A$.

$\mathfrak{g}$5. $\mathfrak{g}({}_{\kappa'}f) = {}_{\kappa'}\mathfrak{g}(f)$, za $f{:}\Gamma \vdash B$.

$\mathfrak{g}$6. $\mathfrak{g}([g, h]) = [\mathbf{p}(\ldots(\mathfrak{g}(g))), \mathbf{p}(\ldots(\mathfrak{g}(h)))]$, za $g{:}\Lambda A\Delta \vdash C$, $h{:}\Lambda B\Delta \vdash C$.

$\mathfrak{g}$7. $\mathfrak{g}(f^*) = \mathbf{p}(\ldots(\mathfrak{g}(f)))^*$, za $f{:}\Delta A\Gamma \vdash B$.

$\mathfrak{g}$8. $\mathfrak{g}(h[g]) = \mathbf{p}(\ldots(\mathfrak{g}(h)))[\mathfrak{g}(g)]$, za $g{:}\Delta \vdash A$, $h{:}\Gamma B\Lambda \vdash C$.

$\mathfrak{g}$9. $\mathfrak{g}(\mathbf{t}_A(f)) = \mathbf{t}_A(\mathfrak{g}(f))$, za $f{:}\Gamma \vdash C$.

$\mathfrak{g}$10. $\mathfrak{g}(\mathbf{c}_A(f)) = \mathbf{c}_A(\mathbf{p}(\ldots(\mathfrak{g}(f))))$, za $f{:}\Delta A\Lambda A\Gamma \vdash C$.

$\mathfrak{g}$11. $\mathfrak{g}(f\langle h\rangle) = \mathbf{p}(\ldots(\mathfrak{g}(f)))\langle\mathfrak{g}(h)\rangle$, za $h{:}\Gamma \vdash A$, $f{:}\Lambda A\Delta \vdash B$.

Oznaka $\mathbf{p}(\ldots($, u gore navedenim preslikavanjima znači da se na tom mestu nalazi niz permutacija koje su potrebne za operaciju koja sledi ili da bi term imao tip određenog oblika.

Napomena: Za strelicu $f{:}\Gamma\vdash A$ sistema $\mathcal{G}'$, Γ je multiskup koji čine formule sa svojim indeksima. Svakom tipu terma pridružujemo niz formula načinjen od formula multiskupa Γ.
Polazimo od jedinica $1_A{:}A \vdash A$ i imamo niz dužine jedan, A;
Pretpostavimo da tipovi podterama terma f imaju nizove formula, onda:
1. ako term f ima jedan od oblika $h^{\dagger}$, $\mathbf{t}_A(h)$ ili $\mathbf{c}_A(h)$
tipu terma f odgovara niz koji i tipu terma h samo što na mestu jedne pomoćne formule stoji glavna formula;
2. ako je term f oblika ili ${}_{\kappa}h$ ili ${}_{\kappa'}h$, tipu terma f odgovara niz koji i tipu termu h;
3. ako term f ima jedan od oblika $\{h, g\}$, $g\langle h\rangle$ tip terma f je niz koji se dobija dodavanjem niza tipa terma g na niz tipa terma h.
4. ako je term f oblika $h[g]$, $g{:}\Delta \vdash A$, $h{:}\Lambda B\Gamma \vdash C$ i neka je Φ niz tipa $\Lambda B\Gamma \vdash C$, a Θ niz tipa $\Delta \vdash A$ onda je $A{\Rightarrow}B\Theta\Phi'$ niz tipa $\Lambda A{\Rightarrow}B\Delta\Gamma\vdash C$, gde je Φ' niz Φ iz koga je izostavljena formula B.
5.
$$\frac{g{:}\Lambda A\Delta \vdash C \qquad h{:}\Lambda B\Delta \vdash C}{[g, h]{:}\Lambda A\vee B\Delta \vdash C,}$$
pretpostavljamo da postoje nizovi napravljeni od formula multiskupova $\Lambda A\Delta$ terma g: Θ; $\Lambda B\Delta$ terma h: Φ, pa će se tipu terma $[g, h]$ odgovarati niz $A{\Rightarrow}B\Theta'$ gde je Θ' niz Θ iz koga je izostavljena formula A.

Preslikavanje $\mathbf{l}{:}\mathcal{G}\to\mathcal{G}'$ će slikati objekte u same sebe i čuvati operacije nad njima, a samo neke strelice iz $\mathcal{G}$ će slikati u strelice iz $\mathcal{G}'$. Neka je $[lf]$ klasa strelica iz sistema $\mathcal{G}$. Neka je lf^L proizvoljan L-pretstavnik te klase. Definišemo $\mathbf{l}(lf^L)$ indukcijom po složenosti strelice lf^L.
Preslikavanje $\mathbf{l}$:

l1. $\mathbf{l}(1_{A_i}) = 1_{A_i}$.

l2. $\mathbf{l}(\langle f,g\rangle) = c_\Gamma(\{\mathbf{l}(f), \mathbf{l}(g)\})$, za $f{:}\Gamma \vdash A$, $g{:}\Gamma \vdash B$.

l3. $\mathbf{l}((\mathbf{p}\ldots(\mathfrak{g}(f)))_p) = t_B(\mathbf{l}(f))^{\dagger}$, za $f{:}\Gamma A\Delta \vdash C$.

l4. $\mathbf{l}((\mathbf{p}\ldots(\mathfrak{g}(f)))_{p'}) = t_A(\mathbf{l}(f))^{\dagger}$, za $f{:}\Gamma B\Delta \vdash C$.

l5. $\mathbf{l}({}_{\kappa}f) = {}_{\kappa}\mathbf{l}(f)$, za $f{:}\Gamma \vdash A$.

l6. $\mathbf{l}({}_{\kappa'}f) = {}_{\kappa'}\mathbf{l}(f)$, za $f{:}\Gamma \vdash B$.

l7. $\mathbf{l}([\mathbf{p}(\ldots(g)), \mathbf{p}(\ldots(h))]) = [\mathbf{l}(g), \mathbf{l}(h)]$, za $g{:}\Gamma A\Delta \vdash C$, $h{:}\Gamma B\Delta \vdash C$.

l8. $\mathbf{l}(\mathbf{p}(\ldots(f^*))) = \mathbf{l}(f)^*$, za $f{:}\Delta A\Gamma \vdash B$.

l9. $\mathbf{l}(\mathbf{p}(\ldots(h[g]))) = \mathbf{l}(h)[\mathbf{l}(g)]$, za $g{:}\Delta \vdash A$, $h{:}\Gamma B\Lambda \vdash C$.

l10. $\mathbf{l}(\mathbf{t}_A(f)) = \mathbf{t}_A(\mathbf{l}(f))$, za $f{:}\Gamma \vdash C$.

l11. $\mathbf{l}(\mathbf{c}_A(\mathbf{p}(\ldots(f)))) = \mathbf{c}_A(\mathbf{l}(f))$, za $f{:}\Delta AA\Gamma \vdash C$.

I12. $\mathbf{l}(\mathbf{p}(\ldots(f))\langle h\rangle) = \mathbf{l}(f))\langle \mathbf{l}(h)\rangle$, za $h{:}\Gamma \vdash A$, $f{:}\Lambda A\Delta \vdash B$.

Oznaka $\mathbf{p}(\ldots($ u gore navedenim preslikavanjima su permutacije vezane za operaciju koja sledi posle njih.

DEFINICIJA: Neka je f term sistema $\mathcal{G}'$, tipa $\Theta \vdash D$. Izvršićemo sledeće izmene na termu f:

1. svaki njegov podterm oblika $h^{\mathfrak{z}}$ za $h{:}\Gamma AB\Delta \vdash C$
   zamenjujemo termom istog tipa: $\mathbf{c}_{A\wedge B}((\mathbf{t}_B(\mathbf{t}_A(f)^{\mathfrak{z}}))^{\mathfrak{z}})$;
2. svaki njegov podterm oblika $\{h, f\}$ za $h{:}\Gamma \vdash A$, $f{:}\Delta \vdash B$
   zamenjujemo termom istog tipa: $\mathbf{c}_{\Gamma\Delta}(\{\mathbf{t}_\Delta(h), \mathbf{t}_\Gamma(f)\})$.

Term koji dobijemo nakon ovih izmena označavaćemo sa ${}^{CT}f$.

DEFINICIJA: Neka je f term sistema $\mathcal{G}$, tipa $\Theta \vdash D$. Izvršićemo sledeće izmene na termu f:

1. svaki njegov podterm oblika h_p ili $h_{p'}$ za $h{:}A\Delta \vdash C$
   zamenjujemo termom istog tipa: $\mathbf{c}_{A\wedge B}((\mathbf{p}_{A\wedge B,B}((\mathbf{p}_{B,A}(\mathbf{t}_B(f)))_p))_{p'})$;
2. svaki njegov podterm oblika $\langle h, f\rangle$ za $h{:}\Gamma \vdash A$, $f{:}\Gamma \vdash B$
   zamenjujemo termom istog tipa: $\mathbf{c}_{\Gamma\Gamma}(\mathbf{p}_{\Gamma,\Gamma}(\langle \mathbf{t}_\Gamma(h), \mathbf{t}_\Gamma(f)\rangle))$.

Term koji dobijemo nakon ovih izmena označavaćemo sa f^{CT}.

<u>Važi:</u>
1. za proizvoljan term f sistema $\mathcal{G}'$: $\mathbf{l} \circ \mathbf{g}\, (f) = {}^{CT}f$.
2. za proizvoljan term f sistema $\mathcal{G}$: $\mathbf{g} \circ \mathbf{l}\ (lf^L) = (lf^L)^{CT}$.

KOMENTAR: Neslaganja sistema $\mathcal{G}'$ i $\mathcal{G}$ koja se ogledaju u potrebi za definisanjem terama ${}^{CT}f$ i f^{CT} posledica su različite "jačine" odgovarajućih pravila tih sistema: $f^{\mathfrak{z}}$ i $f_p, f_{p'}$; $\{h, f\}$ i $\langle h, f\rangle$. Kao što se vidi iz definicija preslikavanja $\mathbf{g}$ i $\mathbf{l}$ svako od ovih pravila u odnosu na ono drugo pravilo u koje se slika ima i jedno strukturno pravilo (kontrakciju, odnosno slabljenje).

LEMA 0:
1. U $\mathcal{G}'$ za proizvoljan term f: $f =_* {}^{CT}f$, gde su * jednakosti iz $\mathcal{G}'$, posebno *CUTTO* i *CTO.*
2. U $\mathcal{G}$ za proizvoljan term f: $f =_* f^{CT}$, gde su * jednakosti iz $\mathcal{G}$, posebno *GCUTTO* i *GCTO.*
3. U $\mathcal{G}$ za proizvoljan term f:
   (i) $lf =_* lf^L$, gde su * jednakosti u $\mathcal{G}$.
   (ii) $f =_* \mathbf{p}(\ldots(lf)\ldots)$, gde su $\mathbf{p}(\ldots($ sve nebitne permutacije terma f i * jednakosti iz $\mathcal{G}$ (permutovanje pravila permutacije i drugih pravila).

Posmatramo sisteme $\mathcal{G}'$ i $\mathcal{G}$. U sistemu $\mathcal{G}$ definisali smo za sve terme tog sistema $[lf] = \{g$ term iz $\mathcal{G}$: $lg^L =_L lf^L\}$. Sada definišemo $\mathcal{G}/_L$ skup kome su elementi $[lf]$, $[lh]$... za terme f, h... sistema $\mathcal{G}$.

Definišemo preslikavanja:

$\underline{\mathbf{g}}{:}\mathcal{G} \to \mathcal{G}/_L$, $\qquad \underline{\mathbf{g}}(f) =_{def} [l\,\mathbf{g}(f)]$.

$\underline{\mathbf{l}}{:}\mathcal{G}/_L \to \mathcal{G}'$, $\qquad \underline{\mathbf{l}}([lf]) =_{def} \mathbf{l}(lf^L)$.

Treba proveriti da li je $\underline{\mathbf{l}}$ dobro definisano preslikavanje.

Pretpostavimo lf^L, $lg^L \in [lf]$. To znači $lf^L =_L lg^L$, odnosno termi lf^L, lg^L razlikuju se samo po prisustvu (odsustvu) permutacija vezanih za neke operacije i po njihovom (tih permutacija) redosledu u nizu vezano za te operaciju. Ali, permutacije se "ne slikaju " preslikavanjem $\mathbf{l}$, pa time $\mathbf{l}(lf^L) = \mathbf{l}(lg^L)$.

Za jednakosti iz $\mathcal{G}'$ i $\mathcal{G}$ kažemo da su odgovarajuće ako imaju isti naziv samo u $\mathcal{G}$ je na početku dodato slovo G.

Pomoću preslikavanja koja smo definisali postoji jednostavna veza između jednakosti nad termima u $\mathcal{G}'$ i u $\mathcal{G}$.

Prvo ćemo navesti kako preslikavanje $\mathfrak{g}$ čuva jednakosti u $\mathcal{G}'$.

LEMA: Neka su f, g termi tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{G}'$ za koje važi $f >_1 g$.
Ako je za ovaj korak redukcije korišćena jednakost:
1. $M1, M2,$ onda $p(\ldots(\mathfrak{g}(f)) \succ_1 \mathfrak{g}(g)$ za $GM1$, $GM2$.
2. Neka od $CT\text{-}CUT$ jednakosti, onda $\mathfrak{g}(f) \succ_1 \mathfrak{g}(g)$ za odgovarajuću $PCT\text{-}CUT$ jednakost.
3. $\beta G\wedge 1$, $\beta G\wedge 2$, onda $\mathfrak{g}(f) \succ_2 \mathfrak{g}(g)$,
   ostale β-jednakosti, onda $\mathfrak{g}(f) \succ_1 \mathfrak{g}(g)$.
4. Neka od $E(R)perm.Cut$, onda $\mathfrak{g}(f) \succ_* \mathfrak{g}(g)$, za odgovarajuću $GE(R)perm.Cut$.
5. Neka od $E(L)perm.Cut$, onda $\mathfrak{g}(f) \succ_* \mathfrak{g}(g)$, za odgovarajuću $GE(L)perm.Cut$.
6. Neka od $I(R)perm.Cut$, onda $\mathfrak{g}(f) \succ_* \mathfrak{g}(g)$, za odgovarajuću $GI(R)perm.Cut$.
7. $Max.Red$, onda $\mathfrak{g}(f) \succ_1 \mathfrak{g}(g)$, za $GMax.Red$.
8. $M3, M4$, onda $\mathfrak{g}(f) \succ_1 \mathfrak{g}(g)$, za $GM3$, $GM4$.

U svim redukcijama $\succ_*$ postoji mogućnost korišćenja neke *GPP1-GPP3, GCUTP1, GCUTP2.* jednakosti.

DOKAZ:
Jednostavno se sve ovo dokazuje. **q. e. d.**

Sa druge strane, posmatramo dva terma f, g iz $\mathcal{G}$, za koje $f \equiv lf^L$, $g \equiv lg^L$. Postoje $\mathfrak{l}(lf^L)$, $\mathfrak{l}(lg^L)$. Neka je $f \succ_1 g$. Ako taj korak redukcije nije *PP1-PP3, GCUTP1, GCUTP2* preslikavanje $\mathfrak{l}$ će povezivati iste grupe jednakosti iz $\mathcal{G}'$ i $\mathcal{G}$ kao i preslikavanje $\mathfrak{g}$ u prethodnoj lemi.

NORMALIZACIJA I ELIMINACIJA SEČENJA

Sisteme $\mathcal{ND}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$ ćemo smatrati pretstavnicima sistema prirodne dedukcije. Zbog toga će u njima biti definisani pojmovi niti terma, segment niti, maksimalni segment. Posmatrajući različite oblike segmenata, od kojih treba osloboditi neki term tih sistema, imaćemo više definicija normalnog terma. U $\mathcal{ND}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$ ćemo pokazati da izjednačavanja terama koja smo u njima definisali jesu veza proizvoljnog terma sa normalnim termom na koji se on redukuje. U njima će važiti teorema o normalizaciji.

S druge strane sistemi $\mathcal{G}'$ i $\mathcal{G}$ su u duhu Gencenovog sistema sekvenata. Da bi precizirali pojam transformacije proizvoljnog terma u term bez sečenja tog sistema mi smo definisanjem $\mathcal{G}'$ odnosno $\mathcal{G}$ uveli neka izjednačavanja među termima, koja odgovaraju koracima transformacije. U $\mathcal{G}'$ i $\mathcal{G}$ ćemo dokazati teoremu o eliminaciji sečenja. Izborom nekih jednakosti nad termima od onih koje postoje u $\mathcal{G}'$ pokazaćemo više "strategija" dokazivanja ove teoreme. Videćemo da nam na osnovu toga za eliminaciju sečenja neće biti potrebna sva izjednačavanja terama koja postoje u $\mathcal{G}'$.

U ovom delu će najveći značaj imati veze između normalizacija u $\mathcal{ND}$ i $\mathcal{N}$; veze normalizacije i eliminacije sečenja u $\mathcal{N}'$ i $\mathcal{G}'$. U $\mathcal{N}$ će se iznijansirati dve vrste normalnih terama, a time i dve normalizacije. U $\mathcal{G}'$ ćemo moći da vršimo selekciju kakva sečenja želimo da eliminišemo, a kakva ne.

Na osnovu veza među jednakostima između terama u $\mathcal{ND}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$, $\mathcal{G}'$ (najinteresantnija veza $\mathcal{N}'$, $\mathcal{G}'$) i dokaza teorema o normalizaciji i o eliminaciji sečenja dobićemo sliku: da određenoj normalizaciji (G-normalizaciji) u $\mathcal{N}'$ odgovara eliminacija određenih (važnih) sečenja u $\mathcal{G}'$.

1. NORMALIZACIJE U $\mathcal{ND}$, $\mathcal{N}$ I $\mathcal{N}'$

U ovom delu će biti posmatrane normalizacije u $\mathcal{ND}$, $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$. Pre nego što budemo posmatrali svaki od njih posebno, daćemo definicije nekoliko pojmova koji su isti u sva tri njihova sistema. Ako bude specifičnosti vezane za neki sistem njegovo ime navešćemo u zagradi kao i specifičnosti vezane za njega.

Definisaćemo još neke pojmove koji će biti zajednički za sisteme $\mathcal{ND}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$ a koje ćemo kasnije posmatrati.

DEFINICIJA: Za neki term f u sistemima $\mathcal{ND}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$ sve jedinice koje se pojavljuju u drvetu tog terma a nisu nosioci oslobođene pretpostavke operacije nadovezivanja su **nosioci pretpostavki** terma f. Formule koje se pojavljuju sa desne strane $\vdash$ u njihovom tipu su **pretpostavke** terma f. Posebno u sistemima $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$ pretpostavke čiji su nosioci podvučene jedinice zovemo **fiktivne pretpostavke** terma f.

DEFINICIJA: Neka je f' proizvoljan term u nekom od sistema i f' njegov podterm koji je oblika $f'=O(f\,(,\,g,\,h))$ gde je O neka operacija. Deo drveta terma f' ima oblik

$$\frac{f{:}\Gamma\vdash A\quad (g{:}\Delta\vdash B\quad h{:}\Lambda\vdash C)}{f'=O(f\,(,g,\,h)){:}\Theta\vdash D}$$

i pojavljivanje formule A u tipu $\Gamma\vdash A$ je **premisa operacije** O;

premisa terma f';

premisa terma f';

pojavljivanje formule D u tipu $\Theta\vdash D$ je **zaključak operacije** O;

zaključak terma f'.

Formula E za term f tipa $\Gamma\vdash E$ je **krajnja formula terma** f.

Za dve premise B, D nekog terma f' reći ćemo da je B **odmah iznad** D (D **odmah ispod** B) ako je D zaključak a B premisa iste operacije u termu f'. U zavisnosti da li je formula E oblika $A\wedge B$, $A\vee B$, $A\Rightarrow B$, gde su A, B neke formule, veznik $\wedge$, $\vee$ ili $\Rightarrow$ će biti **glavni veznik formule** E. Broj veznika u formuli E će biti **stepen** te **formule, d(E).**

DEFINICIJA: U operacijama eliminacije veznika u sistemima $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$ ($\mathcal{ND}$) premisa koja sadrži veznik koji se eliminiše je **važna premisa**, a ostale (ako postoje) su **nevažne premise** te operacije.

Na primer, u $\mathcal{ND}$ elimenacija $\vee$:

$$\frac{h{:}\Gamma\vdash A\vee B\quad f{:}[A]\Lambda\vdash C\quad g{:}[B]\Delta\vdash C}{\delta(h,f,g){:}\Gamma\Lambda\Delta\vdash C,}$$

važna premisa je $A\vee B$ a nevažne su pojavljivanja formule C u tipovima $[A]\Lambda\vdash C$, $[B]\Delta\vdash C$.

U operaciji nadovezivanja u sistemima $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$ ($\mathcal{ND}$)

$$\frac{h{:}\Gamma\vdash A\quad f{:}\Delta A\Lambda\vdash C}{(1_A/h)\,f{:}\Gamma\Lambda\Delta\vdash C,}$$

premisa A iz tipa $\Gamma\vdash A$ je **važna premisa** tog pravila.

U operaciji nova pretpostavka u sistemima $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$

$$\frac{\_1_A{:}\_A\vdash A\quad f{:}\Delta\vdash C}{(\_/1_A)\,f{:}\_A\Delta\vdash C,}$$

premisa A je **važna premisa** tog pravila.

DEFINICIJA: Neka je f term tipa $\Gamma\vdash A$ sistema $\mathcal{ND}$. Reći ćemo da niz premisa $A_1, A_2,\dots,A_n$ tog terma čine **nit terma** f ako:

1. A_1 je pretpostavka terma f;
2. $i<n$: (i) A_i nije važna premisa nadovezivanja, onda A_{i+1} odmah ispod A_i;
   (ii) A_i je važna premisa nadovezivanja, onda je A_{i+1} oslobođena pretpostavka tog nadovezivanja;
3. $A_n\equiv A$ je krajnja formula terma f.

DEFINICIJA: Neka je f term tipa $\Gamma\vdash A$ sistema $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$. Reći ćemo da niz premisa $A_1, A_2,\dots,A_n$ tog terma čine **nit terma** f ako:

1. A_1 je pretpostavka terma f;
2. $i<n$: A_i nije fiktivna pretpostavka terma f i nije fiktivna oslobođena pretpostavka nadovezivanja;

(i) A_i nije važna premisa nadovezivanja, onda A_{i+1} odmah ispod A_i;

(ii) A_i je važna premisa nadovezivanja, onda je A_{i+1} oslobođena pretpostavka tog nadovezivanja;

3. A_n je ili krajnja formula terma f ili fiktivna pretpostavka terma f ili fiktivna oslobođena pretpostavka nadovezivanja.

DEFINICIJA: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ sistema $\mathcal{ND}$. Niz pojavljivanja iste formule B u nekoj niti terma f, $B^1B^2...B^k$ je **segment**, s, te niti i tog terma, ako:

1. B^1 nije zaključak neke operacije eliminacije ili nadovezivanja;
2. $i<k$: B^i je nevažna premisa neke eliminacije ili premisa nadovezivanja;
3. B^k nije nevažna premisa neke eliminacije.

DEFINICIJA: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ sistema $\mathcal{N}$ ili $\mathcal{N}'$. Niz pojavljivanja iste formule B u nekoj niti terma f, $B^1B^2...B^k$ je **segment**, s, te niti i tog terma, ako:

1. B^1 nije zaključak neke operacije eliminacije ili operacije zamene;
2. $i<k$: B^i je nevažna premisa neke eliminacije ili premisa operacije zamene;
3. B^k je ili važna premisa neke eliminacije ili važna premisa operacije nova pretpostavka.

Najčešće ćemo segment s označavati $s=B^1B^2...B^k$ i B^i, $1\leq i\leq k$ će označavati formulu B iz s koja je određena svojim mestom u segmentu s; B^i ćemo zvati **pojavljivanje formule B u segmentu s**. **Dužina segmenta** $s=B^1B^2...B^k$, $l(s)$, je (broj formula B tog segmenta koje su premise operacija eliminisanja)+1, a **stepen segmenta** s, $d(s)$ je broj veznika u formuli B.

U drvetu strelice formule koje čine nit terma ili segment neke niti terma se nalaze sa desne strane $\vdash$ u tipu nekog podterma i nemaju indeks. Indeksi formula $A_1...A_n$ u definiciji niti terma je samo jednostavno označavanje, koja formula sledi za kojom. Naravno, A_i ne mora biti kao formula jednaka formuli A_j za $i\neq j$. S druge strane, segment $B^1...B^k$ je deo $A_iA_{i+1}... A_{i+k-1}$, neke niti $A_1...A_n$ tako da
$A_i \equiv A_{i+1}\equiv...\equiv A_{i+k-1}\equiv B$. Pošto će nam biti bitno mesto formule u nekom segmentu, to će nam govoriti njen gornji indeks.

DEFINICIJA: Maksimalan segment niti nekog terma f je segment koji počinje zaključkom uvođenja nekog veznika, a završava se važnom premisom operacije eliminisanja tog veznika.

Specijalan slučaj maksimalnog segmenta je **maksimalna formula**. To je maksimalan segment dužine dva. To je segment koji počinje zaključkom operacije uvođenja nekog veznika, a završava se važnom premisom operacije eliminisanja tog veznika i sve formule segmenta sem prve i poslednje su nevažne premise operacije nadovezivanja u sistemu $\mathcal{ND}$ (operacija zamene u sistemima $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$).

DEFINICIJA: Prazan M-segment nekog terma f je segment koji počinje zaključkom terma 1_B, a završava se važnom premisom operacije eliminisanja glavog veznika formule B.

DEFINICIJA: Neka su s_1, s_2 dva segmenta niti terma f. Reći ćemo da je **segment s_1 iznad segmenta s_2** ako se formule koje čine segment s_1 nalaze iznad formula koje čine s_2 u toj niti. Ako je $s_1=C^1C^2...C^m$ i $s_2=C^k...C^{k+n}$ i ako postoje C^i iz s_1 i C^{i+k} iz s_2 takvi da su $C^i\equiv C^{i+k},...,C^m\equiv C^{k+n}$ po pojavljivanju, onda ćemo reći da su **segmenti s_1 i s_2 povezani**.

Za neki **segment** s reći ćemo da je **premisa neke operacije** ako je poslednja formula segmenta s premisa te operacije; a reći ćemo da je **zaključak neke operacije** ako je prva formula segmenta s zaključak te operacije.

Segment s_1 je **podsegment segmenta** s ako je formula koja čini segment s_1 potformula formule koja čini segment s.

1.1. NORMALIZACIJA U $\mathcal{ND}$

$\mathcal{ND}$ odgovara sistemu prirodne dedukcije i imaće važnu karakteristiku, teoremu o normalizaciji. Redukcijski koraci koji su već definisani u $\mathcal{ND}$ su koraci kojima se proizvoljan term tog sistema redukuje na normalan term. Naravno da to sve odgovara koracima redukcije i normalizaciji u sistemu prirodne dedukcije.

Definicije segmenta, maksimalne formule, maksimalnog segmenta analogne su definicijama tih pojmova u sistemu prirodne dedukcije. Jedina razlika postoji u definiciji normalnog terma. Ali, prvo ćemo dati jednu definiciju.

DEFINICIJA: U nekom termu f tipa $\Gamma \vdash A$ sistema $\mathcal{ND}$, svaku od operacija eliminacije $E^A\vee$, $E^B\vee$, $E^{AB}\vee$ zvaćemo **zaliha**.

KOMENTAR: Moramo reći da različite definicije normalnog terma postoje u Pravicova dva rada: "Natural deduction", "Ideas and results in proof theory". U prvom radu term (u njegovim terminima izvod) koji ne sadrži zalihe i nema maksimalnih segmenata je normalan; podtermi koji se završavaju nekom od operacija $E^A\vee$, $E^B\vee$, $E^{AB}\vee$ zamenjuju se nekim svojim podtermom i dobija se term bez zaliha. Ovi prelazi, da ih tako nazovemo, ne odgovaraju već poznatim redukcijama u $\mathcal{ND}$ (odnosno prirodnoj dedukciji). U drugom radu Pravica normalan term može imati zalihe. Naša definicija se poklapa sa onom iz drugog rada, a daćemo i definiciju Pravicovog normalnog terma, koja odgovara definiciji normalnog terma iz prvog.

DEFINICIJA: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ sistema $\mathcal{ND}$. Term f je **Pravicov normalan term** ako je normalan i nema zaliha.

DEFINICIJA: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{ND}$. Term f je **normalan term** u tom sistemu ako nema maksimalnih segmenata. Term je **normalan bez praznih M-segmenata** ako je normalan i nema praznih M-segmenata.

Sada ćemo navesti tri leme koje će nam biti potrebne da bi dokazali teoremu o normalizaciji u $\mathcal{ND}$. Ove leme nećemo dokazivati jer se mogu analogno dokazati kao leme 1, 2, 3 iz narednog dela. Jedina razlika je što bi se ovde u $\mathcal{ND}$ umesto operacija zamene posmatrala samo operacija nadovezivanja.

LEMA 1: Neka je $f{:}\Gamma \vdash A$ strelica iz $\mathcal{ND}$.

Term f ima maksimalnu formulu akko postoji term g takav da $f \hookrightarrow_{1\text{-}RMF} g$.

LEMA 2: Neka je $f{:}\Gamma \vdash A$ strelica iz $\mathcal{ND}$.

Ako term f ima maksimalan segment (dužine>2) sa formulom B, onda postoji term g takav da $f \hookrightarrow_{1\text{-}RMS} g$ i term g ima maksimalan segment sa formulom B, dužine manje nego u termu f.

LEMA 3: Neka je $f{:}\Gamma \vdash A$ strelica iz $\mathcal{ND}$.

Neka postoji term g iz $\mathcal{ND}$ takav da $f \hookrightarrow_{1\text{-}RMS} g$ i neka h podterm od f nosilac ove redukcije. Ako za term h važi:

(1) sadrži operaciju uvođenja glavnog veznika važne premise operacije redukcije, onda term f ima maksimalan segment.

(2) ne sadrži operaciju uvođenja glavnog veznika važne premise operacije redukcije, onda term f ima prazan M-segment.

Pre nego što formulišemo teoremu o normalizaciji za terme iz $\mathcal{ND}$, navešćemo teoremu o normalnom obliku u njemu. Ona je slabije tvrđenje od teoreme o normalizaciji.

TEOREMA O NORMALNOM OBLIKU U $\mathcal{ND}$:
Za svaki term f tipa $\Gamma \vdash A$ u $\mathcal{ND}$ postoji tem g u $\mathcal{ND}$ takav da je g normalan term i $g{:}\Gamma' \vdash A$, gde Γ sadrži Γ'.

TEOREMA O NORMALIZACIJI U $\mathcal{ND}$:
Svaki term f tipa $\Gamma \vdash A$ u $\mathcal{ND}$ se RM-redukuje na normalan term g u $\mathcal{ND}$.

Dokaz ove teoreme odgovaraće dokazu koji je dao Pravic u "Natural deduction" za teoremu o normalnom obliku u prirodnodedukcijskom sistemu za intuicionističku logiku.

1.2. NORMALIZACIJA U $\mathcal{N}$ I $\mathcal{N}'$

Sistemi $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$ se razlikuju samo po operaciji eliminisanja veznika $\vee$ pa će postupak redukcija njihovih terama i normalizacija biti potpuno analogni. Sve pojmove koji budu potrebni definisaćemo u sistemu $\mathcal{N}'$ i sve leme i teoreme dokazaćemo za terme iz $\mathcal{N}'$. Bez dodatnih uslova ene važe i u $\mathcal{N}$.

DEFINICIJA: Nit terma f sistema $\mathcal{N}$ koja se završava krajnjom formulom terma f je **Π-nit** tog terma.

DEFINICIJA: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ sistema $\mathcal{N}'$. Reći ćemo da je neka maksimalna formula Π-niti terma f **slaba maksimalna formula** ako su sve oslobođene pretpostavke njene operacije eliminacije fiktivne i glavni znak formule je $\wedge$ ili $\Rightarrow$. Ostale maksimalne formule su **stroge.**

DEFINICIJA: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ sistema $\mathcal{N}'$. **G-maksimalan segment** terma f će biti segment koji počinje zaključkom operacije uvođenja nekog veznika, a završava se fiktivnom oslobođenom pretpostavkom nekog nadovezivanja.

DEFINICIJA: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ jednog od sistema $\mathcal{N}$. Term f je **normalan term** ako njegove Π-niti nemaju maksimalnih segmenata.

DEFINICIJA: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ sistema $\mathcal{N}'$. Reći ćemo da je term f **slabo normalan** ako je dužine veće od dva, nema strogih, a može da ima slabih maksimalnih formula.

DEFINICIJA: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ sistema $\mathcal{N}'$. Term f je **G-normalan** ako nema maksimalnih segmenata ni u jednoj niti i nema G-maksimalnih segmenata.

KOMENTAR: *Prisustvo operacija zamene u sistemu $\mathcal{N}'$ zahtevaće novu (slabiju) nijansu u pojmu normalnosti terma za vezu sa sistemom $\mathcal{ND}$: slabo normalan. S druge strane, operacije* *zamene u kombinaciji sa prirodnodedukcijskim koracima redukcije daju zahtev više za pojam normalnog terma za vezu sa sistemom $\mathcal{G}$: G-normalan. Odnos je sledeći: f je G-normalan $\Rightarrow f$ je normalan $\Rightarrow f$ je slabo normalan term.*

U narednim lemama ćemo videti vezu koraka redukcije i maksimalnih segmenata.

LEMA 1: Neka je f:$\Gamma \vdash A$ strelica iz $\mathcal{N}$.
Term f ima maksimalnu formulu u Π-niti akko postoji term g takav da $f \to_{1\text{-}MF} g$.
DOKAZ:
$\Rightarrow$: term f ima maksimalnu formulu, formulu B:

formula B je zaključak operacije uvođenja: $\{h_1, h_2\}$, $_\kappa h$, $_{\kappa'} h$, h^*, zatim mogu da slede operacije zamene i na kraju operacija eliminacije kojoj je B važna premisa.
To znači da od oblika formile B zavisi oblik podterma f_1 terma f za koji $f=O(f_1)$.
Pretpostavimo da je $B \equiv C \wedge D$.
Tada je term f_1 oblika ili $E(\{h_1, h_2\})'h$ ili $(1_B/E(\{h_1, h_2\}))E_1(1_B)'h$, gde su E_1 i E nizovi operacija zamene.
Neka $f_1=E(\{h_1, h_2\})'h$, tada $f_1=_{ND} E(\{h_1, h_2\}'h)$
$E(\{h_1, h_2\}'h) \to_{1\text{-}MF} E((1_C/h_1)(1_D/h_2)h)$,
odatle $f \to_{1\text{-}MF} O(E((1_C/h_1)(1_D/h_2)h))$.
Znači postoji term g takav da $f \to_{1\text{-}MF} g$.
Potpuno isto dokazujemo ako $f_1=(1_B/E(\{h_1,h_2\})E_1(1_B)'h$.
Analogno se dokazuje ako formula B ima oblik $C \vee D$ ili $C \Rightarrow D$.

$\Leftarrow$: $f \to_{1\text{-}MF} g$ u $\mathcal{N}$:

postoji podterm f_1 terma f, $f=O(f_1)$, koji u zavisnosti od toga o kojoj je MF-redukciji reč, ima oblik:
$(1_{C\wedge D}/E(\{h_1,h_2\})O_1(E_1(1_{C\wedge D})'h)$,
$(1_{C\vee D}/E(_\kappa h)\ O_1(\mathbf{D}(E_1(1_{C\vee D}),h_1,h_2))$,
$(1_{C\Rightarrow D}/E(h^*)\ O_1(\mathbf{I}(E_1(1_{C\Rightarrow D}),h_1,h_2))$, gde je O_1, niz operacija zamene i eliminacije a, E_1 i E nizovi operacija zamene.
Neka je u pitanju MF$\wedge$-jednakost, onda zaključak operacije $\{h_1,h_2\}$, formula $C\wedge D$ je početak segmenta. Dalje, u tom segmentu su nevažne premise operacija zamene iz E, zatim $C\wedge D$ jedinice $1_{C\wedge D}$, onda premise operacija E_1 i na kraju važna premisa operacije '. To tačno znači da je $C\wedge D$ maksimalna formula terma f.
Dokaz je analogan za druge MF-redukcije. **q. e. d.**

<u>Napomena:</u> Posebno važi:
Term f ima slabu maksimalnu formulu akko postoji term g takav da $f \to_{1\text{-}MFT} g$.

LEMA 2: Neka je f:$\Gamma \vdash A$ strelica iz $\mathcal{N}$.
Ako term f ima maksimalan segment u Π-niti (dužine>2) sa formulom B,
onda postoji term g takav da $f \to_{1\text{-}MS} g$ i term g ima maksimalan segment sa formulom B, dužine manje nego u termu f.
DOKAZ:
Ako term f ima maksimalan segment onda term f ima podterm f_1 oblika:
(I) ili $O_1(\{h_1, h_2\})'h_3$ ili $\mathbf{D}(O_1(_\kappa h_1), h_2, h_3)$ ili $\mathbf{I}(O_1(h_1^*), h_2, h_3)$

ili

(II) $O_2((1_{C\wedge D}/O_1(\{h_1, h_2\}))h)'h_3$ ili $\mathbf{D}(O_2((1_{C\vee D}/O_1(_{\kappa}h_1))h), h_2, h_3)$ ili

$\mathbf{I}(O_2(1_{C\Rightarrow D}(O_1(h_1{}^*))h), h_2, h_3)$, gde su O_1, O_2 nizovi operacija zamene i eliminacije.

Term $f=O(f_1)$.

Odmah napomenimo da ako je term f_1 oblika (II) postoji term f_2 koji je oblika (I) i $f_1 =_{ND} f_2$, odnosno $O(f_1) =_{ND} O(f_2)$. Zato ćemo posmatrati samo slučaj kada je term f_1 oblika (I) i to na primer:

$f_1 = O_1(\{h_1, h_2\})'h_3$: $O_1 = O^1 ... O^m$ i neka $O^1 ... O^{k-1}$ operacije zamene, O^k operacija eliminacije (na primer) $\Rightarrow$ i O^0 je $O^{k+1} ... O^m$, onda $f_1 =_{ND} O^1(...(O^{k-1}(I(h_4, h_5, O^0(\{h_1, h_2\}))'h_3))...)$.

$$f_1 \rightarrow_{1\text{-}MS} O^1(...(O^{k-1}(I(h_4, h_5, O^0(\{h_1, h_2\})'h_3))...) \equiv f_3.$$

Znači $f \rightarrow_{1\text{-}MS} O(f_3)$.

Što se tiče dužine maksimalnog segmenta s, terma f, neka je n broj eliminacija u nizu O_1. Onda dužina maksimalnog segmenta $l(s)$=n+1. U termu $O(f_3)$ i njegovom segmentu s_3 sa formulom B nedostaje jedna eliminacija (eliminacija $\Rightarrow$) pa je $l(s_3)$=n.

Potpuno isto se dokazuju slučajevi ako je term f nekog drugog oblika iz (I). **q. e. d.**

Napomena: 1.Ako term f ima maksimalan segment s i za njega $f_1 \rightarrow_{1\text{-}MS} g$, onda ćemo maksimalni segment terma g koji počinje zaključkom iste operacije uvođenja kao i s u termu f zvati redukovan segment segmenta s, oznaka s^R. Term g će biti term segmenta s.

2. Maksimalni segment s terma f može imati više svojih terama $g_1,...,g_m$ i $g_1 =_{ND} ... =_{ND} g_m$.

LEMA 3: Neka je f:$\Gamma \vdash A$ strelica iz $\mathcal{N}'$.

Neka postoji term g iz $\mathcal{N}'$ takav da $f \rightarrow_{1\text{-}RMS} g$ i neka h podterm od f koji je nosilac ove redukcije.

Ako za term h važi:

(1) sadrži operaciju uvođenja glavnog veznika važne premise druge operacije redukcije, onda term f ima maksimalan segment.

(2) ne sadrži operaciju uvođenja glavnog veznika važne premise druge operacije redukcije, onda term f ima prazan M-segment.

DOKAZ:

Na osnovu definicija maksimalnog segmenta i praznog M-segmenta. **q. e. d.**

Nije teško dokazati da važi sledeća lema:

LEMA 4: Neka term f ima maksimalan segment, s dužine veće od 2 i neka je g term takav da $f \rightarrow_{1\text{-}MS} g$, onda za sve segmente, $s_1 ... s_k$ terma f, koji su povezani sa s važi $l(s_i^R) < l(s_i)$, $1 \le i \le k$.

Sada ćemo dokazati teoremu o normalizaciji u sistemu $\mathcal{N}'$ ($\mathcal{N}$) i teoremu o normalnom obliku u $\mathcal{N}'$($\mathcal{N}$) kao njenu posledicu.

TEOREMA O NORMALNOM OBLIKU U $\mathcal{N}'$:

Za svaki term f tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{N}'$ postoji term h istog tipa iz $\mathcal{N}'$, takav da je h normalan term.

TEOREMA O NORMALIZACIJI U $\mathcal{N}'$:

Svaki term f iz $\mathcal{N}'$ se M-redukuje na normalan term u $\mathcal{N}'$.

DOKAZ:

Termu f ćemo pridružiti dva parametra. Prvi parametar, d-najveći stepen svih maksimalnih segmenata u Π-niti terma f; drugi parametar l- suma dužina svih maksimalnih segmenata Π-niti u f stepena d.

Dokaz izvodimo indukcijom po paru $\langle d,l\rangle$ terma f za koji važi sledeće upoređivanje:
$\langle d_1,l_1\rangle < \langle d_2,l_2\rangle$ akko (i) $d_1<d_2$ ili (ii) $d_1=d_2$, $l_1< l_2$.

Biramo maksimalni segment neke Π-niti, s, terma f čiji je stepen d i koji ima sledeće karakteristike:
1. ne postoji maksimalan segment iznad s stepena $d(s)$;
2. ne postoji maksimalan segment stepena $d(s)$ koji je iznad segmenta s ili je sa njim povezan.
Takav segment postoji.

Ako je s maksimalna formula,
na osnovu leme 1 postoji f_l, $f\to_{l\text{-}MF}f_l$ i term f_l nema više tu maksimalnu formulu.

Ako f_l ima još maksimalnih segmenata tog stepena d onda prvi parametar terma f_l, d_1, jednak je d, ali za drugi, l_1, $l_1=l-l(s)<l$ pa na osnovu indukcijske pretpostavke postoji g normalan term i $f_l\to_M g$. Znači $f\to_{l\text{-}MF}f_l$ i $f_l\to_M g$ pa imamo
$f\to_M g$ i g je normalan term.

Ako f_l nema više maksimalnih segmenata stepena d onda $d_1<d$ i na osnovu indukcijske pretpostavke postoji g normalan term
i $f_l\to_M g$. Znači $f\to_{l\text{-}MF}f_l$ i $f_l\to_M g$ pa imamo
$f\to_M g$ i g je normalan term.

Ako je s maksimalni segment,
na osnovu leme 2 postoji f_l, $f\to_{l\text{-}MS}f_l$ i $l(s^R)<l(s)$.

Ako f_l ima još maksimalnih segmenata tog stepena d onda za prvi parametar terma f_l, d_1, važi $d=d_1$ i na osnovu leme 4 za segmente $s_1...s_k$ povezane sa segmentom s, $l(s_i^R)<l(s_i)$, $1\leq i\leq k$ i svi su stepena d i dobijamo da je njegov drugi parametar $l_1$manji od l pa na osnovu indukcijske pretpostavke postoji g normalan term i
$f_l\to_M g$. Znači $f\to_{l\text{-}MS}f_l$ i $f_l\to_M g$ pa imamo
$f\to_M g$ i g je normalan term.

Ako f_l nema više maksimalnih segmenata stepena d onda $d_1<d$ i na osnovu indukcijske pretpostavke postoji g normalan term i $f_l\to_M g$.
Znači $f\to_{l\text{-}MF}f_l$ i $f_l\to_M g$ pa imamo
$f\to_M g$ i g je normalan term.

q. e. d.

DEFINICIJA: Neka je $f{:}\Gamma\vdash A$ strelica sistema $\mathcal{N}$. Ako term f ima podterm oblika $(\_1_C/h_1)h_2$ za $h_2{:}\_C\Delta\vdash B$, $h_1{:}\Lambda\vdash C$ onda je h_1 **t-podterm** terma f. Ako term h_1 ima maksimalan segment u nekoj svojoj Π-niti ili ima uvedenje formule C zvaćemo ga **G-term** terma f.

LEMA 5: Neka je $f{:}\Gamma\vdash A$ strelica sistema $\mathcal{N}$.
(I) Term f ima maksimalan segment u nekoj niti koja nije Π-nit akko postoji t-podterm terma f koji ima maksimalan segment u nekoj svojoj Π-niti.
(II) Term f ima G-maksimalan segment sa formulom B akko postoji t-podterm terma f koji ima uvedenje formule B i fiktivna o. p. nadovezivanja u kome se taj podterm pojavljuje je baš formula B.
DOKAZ:
(I) Jednostavno se dokazuje.
(II)
$\Rightarrow$: u termu f postoji uvođenje formule B, nakon toga niz operacija sjedinjavanja i novih pretpostavki, eliminacija (kojima je B nevažna premisa) i na kraju nadovezivanje na

podvučenu jedinicu.

f ima podterm h, $f=O(h)$, oblika

$(\_1_B/O_1(\{h_1, h_2\}))h_3$, $B \equiv C\wedge D$, $O_1(\{h_1,h_2\}):\Delta \vdash C\wedge D$,

$(\_1_B/O_1(_\kappa h_1))h_3$, $B \equiv C\vee D$, $O_1(_\kappa h_1):\Delta \vdash C\vee D$,

$(\_1_B/O_1(h_1{}^*))h_3$, $B \equiv C\Rightarrow D$, $O_1(h_1{}^*):\Delta \vdash C\Rightarrow D$,

onda $g_1=(\_/1_\Delta)h_3$ i $g=O(g_1)$.

$\Leftarrow$: $f=O((\_1_C/h_1)h_2)$, onda $g=O((\_/1_\Lambda)h_2)$, $h_1:\Lambda\vdash B$ i h_1 sadrži uvođenje formule B pa ima jedan od oblika: $h_1=O_1(\{h_3, h_4\})$ ili $O_1(_\kappa h_3)$ ili $O_1(h_3{}^*)$.

To znači da term f ima G-maksimalan segment **q. e. d.**

<u>Važi:</u> ako je g G-term terma f, onda je $g =_{ND} f$.

KOMENTAR: Kao što smo već napomenuli za povezivanje sa sistemom $\mathcal{G}'$ term u sistemu $\mathcal{N}'$ treba da bude G-normalan. Značajno je to što su neki term f i njegov G-term prirodno jednaki. Grubo rečeno, u $\mathcal{N}'$ njihova razlika je nevažna, ali u $\mathcal{G}'$ ona postaje bitna. Redukovanje nekog terma f u $\mathcal{N}'$ na G-normalan (što je dokaz teoreme o normalizaciji u $\mathcal{N}'$) je u stvari prvo, redukovanje terma f na neki normalan term u $\mathcal{N}'$, h, i među termima takvim da $h=_{ND}g$ tražimo G-noramlan (1-G redukcijama).

DEFINICIJA: Neka su $f, g:\Gamma \vdash A$ dve strelice iz $\mathcal{N}'$. Za terme f, g definišemo

$f\rightarrow_{1\text{-}GM} g$ akko ili $f\rightarrow_{1\text{-}M} g$ ili je g G-term od f i reći ćemo da se term f **1-G-redukuje** na term g.

$f\rightarrow_{GM} g$ akko postoji m prirodan broj i termi $h_1,\dots,h_m$ iz $\mathcal{N}'$ takvi da $f\equiv h_1\rightarrow_{1\text{-}GM}\dots\rightarrow_{1\text{-}GM} h_m\equiv g$ i reći ćemo da se f **G-redukuje na term** g.

TEOREMA O G-NORMALNOM OBLIKU U $\mathcal{N}'$:
Za svaki term f tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{N}'$ postoji term f_G istog tipa iz $\mathcal{N}'$, takav da je f_G G-normalan term.

TEOREMA O G-NORMALIZACIJI U $\mathcal{N}'$:
Svaki term f iz $\mathcal{N}'$ se G-redukuje na G-normalan term u $\mathcal{N}'$.

DOKAZ:

Na početku da kažemo da ćemo sa Max-segment označavati i maksimalan i G-maksimalan segment terma f.

Slično kao u dokazu teoreme o normalizaciji posmatramo, ali sada Max-segment sa najvećim stepenom d i sumu dužina takvih Max-segmenata označavamo sa l.

Izaberemo Max- segment s, terma f sa karakteristikama 1. 2. iz dokaza pomenute teoreme.

Dokaz izvodimo indukcijom po paru $\langle d,l\rangle$ terma f koji smo definisali u dokazu teoreme o normalizaciji :

Ako je to maksimalna formula ili maksimalni segment u Π-niti, s, onda je dokaz potpuno isti kao dokaz o normalizaciji.

Ako je s G-maksimalan segment ili maksimalan segment neke niti koja nije Π-nit, na osnovu leme 5 postoji f_1, $f=_{ND}f_1$ i term f_1 nema više taj maksimalan segment stepena d.

Ako f_1 ima još maksimalnih segmenata tog stepena d onda $d=d_1$, ali $l_1=l-l(s)<l$ pa na osnovu indukcijske pretpostavke postoji G-normalan term g i $f_1\rightarrow_{GM}g$.

Znači $f=_{ND}f_1$ i $f_1\rightarrow_{GM}g$ imamo

$f\rightarrow_{GM}g$ i g je G-normalan term.

Ako f_1 nema više maksimalnih segmenata stepena d onda $d_1<d$ i na osnovu indukcijske pretpostavke postoji G-normalan term g i $f_1\rightarrow_{GM}g$. Znači $f=_{ND}f_1$ i $f_1\rightarrow_{GM}g$, pa imamo

$f \rightarrow_{GM} g$ i g je G-normalan term. **q. e. d.**

2. ELIMINACIJA SEČENJA U $\mathcal{G}'$ I $\mathcal{G}$

U $\mathcal{G}'$ i $\mathcal{G}$, čiji su sistemi u duhu Gencenovog sistema sekvenata važi teorema o eliminaciji sečenja.

Na početku ćemo definisati neke zajedničke pojmove za sisteme $\mathcal{G}'$ i $\mathcal{G}$. Ako bude nekih specifičnosti vezanih za neki od sistema to ćemo istaći.

DEFINICIJA: Stepen formule A, d(A):

1. Ako je formula A atomska formula ,onda d(A)=0.
2. Ako formula A ima jedan od sledećih oblika $C \wedge D$, $C \vee D$, $C \Rightarrow D$, onda d(A)=d(C)+d(D)+1.

U narednoj definiciji govorićemo o formulama koje se pojavljuju u tipovima terama u drvetu nekog terma. Formula će biti potpuno određena ne samo svojim oblikom, već i svojim mestom pojavljivanja u tom drvetu.

DEFINICIJA: Posmatramo strukturna pravila i pravila za veznike sistema $\mathcal{G}'$ i $\mathcal{G}$ u drvetu nekog terma f.

(I) U svakom pravilu za veznike glavna formula je **nadnaslednik** onih pomoćnih formula tog pravila koja se nalazi sa iste strane $\vdash$ u tipu sa koje i glavna formula.

(II) U pravilu kontrakcije glavna formula je **c-naslednik** pomoćnih formula.

(III) U svim pravilima svako pojavljivanje bočne formule u tipu koji se nalazi ispod linije je **naslednik** pojavljivanja te formule u tipu iznad te linije.

Posebno u sistemu $\mathcal{G}$, u pravilu permutacije pojavljivanje formule permutacije u tipu terma $\mathrm{p}_{A,B}(f)$ je **naslednik** odgovarajuće formule permutacije u tipu terma f.

Primeri:

$GE\vee$
$$\frac{f: A\Delta \vdash C \quad g: B\Delta \vdash C}{[f, g]: A\vee B\Delta \vdash C,}$$
za svaku formulu D iz Δ u tipu $A\vee B\Delta \vdash C$ važi da je naslednik odgovarajuće formule D iz tipova $A\Delta \vdash C$, $B\Delta \vdash C$. Formula $A\vee B$ je nadnaslednik formula A i B.

$GI\Rightarrow$
$$\frac{f: A\Delta \vdash B}{f^{*}: \Delta \vdash A\Rightarrow B,}$$
formula $A\Rightarrow B$ je nadnaslednik formule B.

Važi neka vrsta tranzitivnosti:

- svojstvo naslednika, c-naslednika, nadnaslednika je tranzitivno;
- nadnaslednik nekog naslednika pojavljivanja formule A je i njen nadnaslednik;
- c-naslednik nekog naslednika pojavljivanja formule A je i njen c-naslednik.

(IV)
$$\frac{f: \Gamma \vdash A \quad g: \Delta A \Lambda \vdash B}{g\langle f \rangle: \Delta\Gamma\Lambda \vdash B}$$

Pojavljivanja formule A u tipovima terama f i g su **povezana sečenjem.**

(V) $1_A: A \vdash A$

Pojavljivanje formule A sa jedne strane $\vdash$ u tipu jedinice 1_A **povezano je jedinicom** sa pojavljivanjem formule A sa druge strane $\vdash$ u tom tipu.

Sada ćemo definisati pojam loze neke formule koja se pojavljuje u tipu proizvoljnog terma $f{:}\Gamma \vdash A$.

(VI) $f{:}\Gamma \vdash A$

Neka je B^f pojavljivanje neke formule B u tipu $\Gamma \vdash A$.

Sva pojavljivanja formule B u drvetu terma f kojima je B^f naslednik čine **lozu formule** B^f u termu f. **Krajnja formula loze** (može ih biti više) je ona formula iz loze koja nije ničiji naslednik. Sve krajnje formule loze formule B^f su **mogućnosti formule** B^f.

Ako je krajnja formula loze formule B^f u termu f sa one strane $\vdash$ u nekoj jedinici sa koje je strane formula B^f u tipu $\Gamma \vdash A$ onda loza formule B^f ima **jedan stabilan kraj**. Samu krajnju formulu zovemo **stabilan kraj loze**. U suprotnom taj **kraj** loze je **nestabilan**.

Neka je krajnja formula loze formule B^f u termu f glavna formula uvođenja (eliminacije). Neka je formula B^f nadnaslednik pojavljivanja formule B'. Ako loza pojavljivanja formule B' ima stabilan kraj, onda je B' **1-potformula formule** B^f.

Za lozu formule B^f jedna njena **grana** je niz formula pojavljivanja formule B, $B^f, B^1, \ldots B^k$, gde je B^i naslednik ili c-naslednik B^{i+1}, $1 \leq i \leq k-1$ i B^k je jedna od krajnjih formula loze (jedna od mogućnosti formule B^f). **Dužina grane** je broj formula u njoj.

DEFINICIJA: Neka je $h{:}\Delta\Gamma\Lambda \vdash B$ strelica sistema $\mathcal{G}'$ ili sistema $\mathcal{G}$, oblika $g\langle f \rangle$, gde su f i g strelice oblika $f{:}\Gamma \vdash A^f$, $g{:}A^g\Lambda \vdash B$ i A formula sečenja. **Desni rang sečenja** $g\langle f \rangle$ je maksimalna dužina grana loze A^g, **rr**(A), **levi rang** sečenja $g\langle f \rangle$ je maksimalna dužina grana loze A^f, **lr**(A). **Rang sečenja, r**(A), je zbir levog i desnog ranga tog sečenja.

Stepen sečenja je stepen njegove formule sečenja.

2.1 ELIMINACIJA SEČENJA U $\mathcal{G}'$

TEOREMA O ELIMINACIJI SEČENJA U $\mathcal{G}'$:

Svaki term h iz $\mathcal{G}'$ se cf-redukuje na term istog tipa h_{cf}, koji nema pravilo sečenja, $h \geqslant h_{cf}$.

Za dokaz navedene teoreme dovoljno će biti da dokažemo sledeću lemu.

GLAVNA LEMA O ELIMINACIJI SEČENJA U $\mathcal{G}'$:

Neka je dat term $h{:}\Delta\Gamma\Lambda \vdash B$ iz $\mathcal{G}'$, oblika $g\langle f \rangle$ i $f{:}\Gamma \vdash A$, $g{:}\Delta A \Lambda \vdash B$ i termi f i g ne sadrže pravilo sečenja. Tada se term h cf-redukuje na term h_{cf} u $\mathcal{G}'$, $h \geqslant h_{cf}$ i term h_{cf} nema sečenja.

Teorema o eliminaciji sečenja u $\mathcal{G}'$ je posledica ove leme.

DOKAZ TEOREME O ELIMINACIJI SEČENJA U $\mathcal{G}'$:

Svaki term h iz $\mathcal{G}'$ ima konačan broj sečenja.

Neka je h_1 podterm terma h, $O(h_1)=h$, $h_1=g_1\langle f_1 \rangle$ i termi f_1 i g_1 nemaju sečenja.

Drugim rečima, $g_1\langle f_1 \rangle$ je prvo sečenje u termu h.

Glavna lema za h_1: $h_1 \geqslant h_{1cf}$, odnosno $O(h_1) \geqslant O(h_{1cf})$.

Dalje neka je h_2 podterm terma $O(h_{1cf})=O_1(h_2)$ takav da $h_2=g_2\langle f_2 \rangle$ i termi f_2 i g_2 nemaju sečenja. To je ustvari drugo sečenje u polaznom termu h.

Glavna lema za h_2: $h_2 \geqslant h_{2cf}$, odnosno $O_1(h_2) \geqslant O_1(h_{2cf})$, $O(h_{1cf}) \geqslant O_1(h_{2cf})$.

Ovakvim postupkom eliminišu se sva sečenja polaznog terma h, na primer neka ih ima m i dobijamo:

$h \geqslant O(h_{1cf}) \geqslant O_1(h_{2cf}) \geqslant \ldots \geqslant O_{m-1}(h_{mcf})$, $O_{m-1}(h_{mcf})$ je term bez sečenja i još imamo niz cf-redukcija, pa $O_{m-1}(h_{mcf}) \equiv h_{cf}$ i $h \geqslant h_{cf}$ **q. e. d.**

LEMA 1: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash B$ iz $\mathcal{G}'$. Neka je $c_A(h)$ podterm terma f. Pojavljivanje formule A u tipu terma $c_A(h)$ ne može biti krajnja formula loze nekog pojavljivanja formule A iz drveta terma f.

DOKAZ:

Deo drveta terma f u kome se pojavljuje term $c_A(h)$ je sledećeg oblika:

$$\frac{h: \Lambda A A \Delta \vdash C}{c_A(h): \Lambda A \Delta \vdash C}$$

u tipu terma h mora biti još formula iz loze nekog pojavljivanja formule A čijoj lozi pripada pojavljivanje formule A u tipu $\Lambda A \Delta \vdash C$. **q. e. d.**

DEFINICIJA: Upoređivanje dvojki:

$\langle n_1, n_2 \rangle < \langle m_1, m_2 \rangle$ akko 1. $n_1 < m_1$; ili 2. $n_1 = m_1$, $n_2 < m_2$.

DOKAZ GLAVNE LEME O ELIMINACIJI SEČENJA U $\mathcal{G}'$:

$$\frac{f: \Gamma \vdash A \quad g: \Delta A \Lambda \vdash B}{g\langle f \rangle: \Delta \Gamma \Lambda \vdash B}$$

Dokaz će biti izveden indukcijom po $\langle d(A), r(A) \rangle$ upoređivanjem dvojki.

Prvi slučaj: $r(A)=2$.

1. $f \equiv 1_A$ i term g kao poslednje pravilo ima:
   ili slabljenje baš formule sečenja A ili eliminaciju kojoj je glavna formula, formula sečenja A ili $g = 1_A$, tada
   $g\langle f \rangle \equiv g\langle 1_A \rangle >_{M1} g$, i u termu g nema sečenja.
2. $g \equiv 1_A$ i term f kao poslednje pravilo ima:
   ili uvođenje kome je glavna formula, formula sečenja A, ili $f = 1_A$, tada
   $g\langle f \rangle \equiv 1_A \langle f \rangle >_{M2} f$ i u termu f nema sečenja.
3. term f kao poslednje pravilo ima uvođenje formule sečenja,
   a term g slabljenje formule sečenja: $\mathbf{t}_A(g_1) \equiv g$.
   $g\langle f \rangle \equiv \mathbf{t}_A(g_1)\langle f \rangle >_{CUTT0} \mathbf{t}_\Gamma(g_1)$ i u termu g_1 nema sečenja.
4. term f kao poslednje pravilo ima uvođenje formule sečenja,
   a term g eliminaciju kod koje je formila sečenja glavna formula.
   $g_1^{\natural}\langle\{f_1, f_2\}\rangle >_{\beta\wedge} g_1\langle f_1 \rangle\langle f_2 \rangle$,
   $[g_1, g_2]\langle {}_{\kappa}f_1 \rangle >_{\beta\vee 1} g_1\langle f_1 \rangle$,
   $[g_1, g_2]\langle {}_{\kappa'}f_1 \rangle >_{\beta\vee 2} g_2\langle f_1 \rangle$,
   $g_1[g_2]\langle f_1^* \rangle >_{\beta\Rightarrow} g_1\langle f_1\langle g_2 \rangle\rangle$,
   Formule sečenja pravila sečenja koje se nalaze sa desne strane > su potformule formule A pa je njihov stepen manji od $d(A)$. Na osnovu indukcijske pretpostavke termi sa desne strane > se cf-redukuju na term bez sečenja h_{cf}. Odatle i term h se cf-redukuje na h_{cf}.

Drugi slučaj: $rr(A)>1$, odnosno $r(A)>2$.

1. Poslednje pravilo terma g je ili uvođenje ili eliminacija kojoj glavna formula nije formula sečenja; ili slabljenje ili kontrakcija čija glavna formula nije A.

Tada term g ima oblik ili $P(g_1)$ ili $P(g_1, g_2)$, gde je P pomenuto pravilo.

Na osnovu cf-redukcija imamo slučajeve:

ili $P(g_1)\langle f\rangle > P(g_1\langle f\rangle)$

ili jedan od sledećih slučajeva:

$P(g_1, g_2)\langle f\rangle > P(g_1\langle f\rangle, g_2)$,

$P(g_1, g_2)\langle f\rangle > P(g_1, g_2\langle f\rangle)$,

$P(g_1, g_2)\langle f\rangle > P(g_1\langle f\rangle, g_2\langle f\rangle)$.

Formule sečenja pravila sečenja koje se nalaze sa desne strane $>$ je formula A, ali je njihov rang sečenja manji nego rang sečenja $g\langle f\rangle$. Na osnovu indukcijske pretpostavke termi sa desne strane $>$ se cf-redukuju na term bez sečenja h_{1cf}. Odatle i term h se cf-redukuje na neki term bez sečenja h_{cf}.

2. Poslednje pravilo terma g je kontrakcija čiji je glavna formula A, formula sečenja:

$$\dfrac{f{:}\Gamma\vdash A \qquad \dfrac{g_1{:}\Delta AA\Lambda\vdash B}{c_A(g_1){:}\Delta A\Lambda\vdash B}}{c_A(g_1)\langle f\rangle{:}\Delta\Gamma\Lambda\vdash B}$$

Postavlja se pitanje: šta je poslednje pravilo u termu g_1?

Ako je $g_1 = c_A(g_2)$, nastavljamo sa ispitivanjem šta je poslednje pravilo terma g_2.

Na osnovu leme 1 u termu g se loza formule sečenja A ne može završiti kontrakcijom kojoj je glavna formula, formula A.

Zato postoji podterm g_{m-1}, terma g takav da:

$g = c_A(\ldots(c_A(g_{m-1}))\ldots)$, $g_{m-1}=P(g_m)$ i $P\neq c_A$.

U zavisnosti šta je pravilo P imamo tri slučaja:

2.1. Poslednje pravilo terma g_{m-1} je ili uvođenje ili eliminacija kojoj glavna formula nije formula sečenja; ili slabljenje ili kontrakcija čija glavna formula nije A.

Tada term g_{m-1} ima oblik ili $P(h_1)$ ili $P(h_1, h_2)$, gde je P pomenuto pravilo.

Na osnovu cf-redukcija imamo slučajeve:

ili $c_A(\ldots(c_A(P(h_1)))\ldots)\langle f\rangle > P((c_A(\ldots(c_A(h_1))\ldots))\langle f\rangle)$

ili jedan od slučajeva:

$c_A(\ldots(c_A(P(h_1, h_2)))\ldots)\langle f\rangle > P(c_A(\ldots(c_A(h_1))\ldots)\langle f\rangle, h_2)$,

$c_A(\ldots(c_A(P(h_1, h_2)))\ldots)\langle f\rangle > P(h_1, c_A(\ldots(c_A(h_2))\ldots)\langle f\rangle)$,

$c_A(\ldots(c_A(P(h_1, h_2)))\ldots)\langle f\rangle > P(c_A(\ldots(c_A(h_1))\ldots)\langle f\rangle, c_A(\ldots(c_A(h_2))\ldots)\langle f\rangle)$,

Formule sečenja pravila sečenja koja se nalaze sa desne strane $>$ je formula A, ali je njihov rang sečenja manji nego rang sečenja $c_A(\ldots(c_A(P(g_m)))\ldots)\langle f\rangle$. Na osnovu indukcijske pretpostavke termi sa desne strane $>$ se cf-redukuju na term bez sečenja h_{1cf}. Odatle i term h se cf-redukuje na neki term bez sečenja h_{cf}.

2.2. Poslednje pravilo terma g_{m-1} je eliminacija čija je glavna formula jedna od formula iz loze formule sečenja A. Neka je na primer $A\equiv D\wedge C$, onda to izgleda ovako:

$$\dfrac{f{:}\Gamma\vdash A \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{g_m{:}\Delta DCA\ldots A\Lambda\vdash B}{g_m^{\dagger}{:}\Delta D\wedge CA\ldots A\Lambda\vdash B}}{\vdots}}{c_A(\ldots(c_A(g^{\dagger}))\ldots){:}\Delta A\Lambda\vdash B}}{c_A(\ldots(c_A(g^{\dagger}))\ldots)\langle f\rangle{:}\Delta\Gamma\Lambda\vdash B}$$

tada

$$\dfrac{\dfrac{f:\Gamma\vdash A \qquad \dfrac{\dfrac{f:\Gamma\vdash A \qquad \dfrac{\dfrac{g_m:\Delta DCA\ldots A\Lambda\vdash B}{\vdots}}{\mathbf{c}_A(\ldots(\mathbf{c}_A(g))\ldots):\Delta ADC\Lambda\vdash B}}{\mathbf{c}_A(\ldots(\mathbf{c}_A(g))\ldots)\langle f\rangle:\Delta DC\Gamma\Lambda\vdash B}}{(\mathbf{c}_A(\ldots(\mathbf{c}_A(g))\ldots)\langle f\rangle)^{\S}:\Delta D\wedge C\Gamma\Lambda\vdash B}}{(\mathbf{c}_A(\ldots(\mathbf{c}_A(g))\ldots)\langle f\rangle)^{\S}\langle f\rangle:\Delta\Gamma\Gamma\Lambda\vdash B}}{\mathbf{c}_\Gamma(\,(\mathbf{c}_A(\ldots(\mathbf{c}_A(g))\ldots)\langle f\rangle)^{\S}\langle f\rangle):\Delta\Gamma\Lambda\vdash B}$$

Imamo $\mathbf{c}_A(\ldots(\mathbf{c}_A\,(g^{\S}))\ldots)\langle f\rangle \geqslant_{*} \mathbf{c}_\Gamma(\,(\mathbf{c}_A(\ldots(\mathbf{c}_A(g))\ldots)\langle f\rangle)^{\S}\langle f\rangle)$.
Sečenje $\mathbf{c}_A(\ldots(\mathbf{c}_A(g))\ldots)\langle f\rangle$ je manjeg ranga od sečenja $\mathbf{c}_A(\ldots(\mathbf{c}_A\,(g^{\S}))\ldots)\langle f\rangle$, pa na osnovu indukcijske pretpostavke taj term se cf-redukuje na term h_{1cf} koji nema sečenja i koji je tipa $\Delta DC\Gamma\Lambda\vdash B$.
Sečenje $(h_{1cf})^{\S}\langle f\rangle$ ima desni rang jednak jedan, a levi isti kao i polazno sečenje, pa na osnovu indukcijske pretpostavke taj term se cf-redukuje na term h_{2cf} koji nema sečenja.
Znači, $g\langle f\rangle \geqslant_{*} \mathbf{c}_\Gamma(\,(\mathbf{c}_A(\ldots(\mathbf{c}_A(g))\ldots)\langle f\rangle)^{\S}\langle f\rangle) \geqslant \mathbf{c}_\Gamma((h_{1cf})^{\S}\langle f\rangle) \geqslant \mathbf{c}_\Gamma(h_{2cf})$
i term $\mathbf{c}_\Gamma(h_{2cf})$ nema sečenja.
<u>Napomena:</u> među jednakostima * koriste se jednakosti permutacije sečenja sa kontrakcijom, *E(R)permCut* i CT jednakost: $\mathbf{c}_A\,(g^{\S})= (\mathbf{c}_A(g))^{\S}$. Navedena CT jednakost se može izvesti iz drugih jednakosti sistema $\mathcal{G}'$(CT lema, poglavlje **I**, **5**).
Važno je istaći da nam za to nisu potrebne *E(L)perm.Cut* jednakosti.
Analogan je slučaj i kada je formula sečenja oblika $D\vee C$ ili $D\Rightarrow C$.

2.3. Poslednje pravilo terma g_{m-1} je slabljenje, čija je glavna formula jedna od formula iz loze formule sečenja A.
Tada $g= \mathbf{c}_A(\ldots(\mathbf{c}_A(\mathbf{t}_A(g_m)))\ldots)$ i na osnovu *CT0:* $g \geqslant \mathbf{c}_A(\ldots(\mathbf{c}_A(g_m))\ldots)$ gde sa desne strane $\geqslant$ imamo jednu kontrakciju manje nego u termu g.
Sečenje $\mathbf{c}_A(\ldots(\mathbf{c}_A(g_m))\ldots)\langle f\rangle$ je manjeg ranga od sečenja $g\langle f\rangle$, pa na osnovu indukcijske pretpostavke $\mathbf{c}_A(\ldots(\mathbf{c}_A(g_m))\ldots)\langle f\rangle \geqslant h_{cf}$ i term h_{cf} nema sečenja.

<u>Treći slučaj:</u> lr(A)>1, odnosno r(A)>2.
Poslednje pravilo terma f je ili eliminacija ili slabljenje ili kontrakcija.
Tada term f ima oblik ili $P(f_1)$, ili $P(f_1, f_2)$, gde je P pomenuto poslednje pravilo.
Na osnovu cf-redukcija imamo slučajeve:
ili $g\,\langle P(f_1)\rangle > P(g\,\langle f_1\rangle)$
ili jedan od slučajeva:
$g\langle P(f_1, f_2)\rangle > P(g\langle f_1\rangle,\ g\langle f_2\rangle)$
$g\langle P(f_1, f_2)\rangle > P(\,g\langle f_1\rangle, f_2)$,
$g\langle P(f_1, f_2)\rangle > P(f_1, g\langle f_2\rangle)$
Formule sečenja pravila koja se nalaze sa desne strane > je formula A, ali je njihov rang sečenja manji nego rang sečenja $P(g_1)\langle f\rangle$. Na osnovu indukcijske pretpostavke termi sa desne strane >se cf-redukuju na term bez sečenja h_{1cf}. Odatle i term h se cf-redukuje na neki term bez sečenja h_{cf}.

Na ovaj način je dokazana glavna lema. q. e. d.

KOMENTAR: Naš dokaz glavne leme (a time i teoreme) o eliminaciji sečenja je sličan Gencenovom dokazu leme (i teoreme) o eliminaciji mešanja. Videli smo u dokazu da u koracima redukcije, pri redukovanju nekog terma dolazi do permutovanja pravila. Cilj tih permutacija je da sečenje permutujemo sa nekim drugim pravilom i na taj način dobijemo term u kome je rang sečenja manji. Ali nismo u svim slučajevima problem rešavali "penjanjem" samo sečenja. U slučaju 2.2 se sečenjem smo morali da "penjemo" i još neke kontrakcije. Taj "paket kontrakcija i sečenja"- da ga tako nazovemo, je ustvari suština pravila mešanja, koje je definisao Gencen.

Razlike između Gencenovog pravila mešanje i postupka u našem dokazu su sledeće: prvo, u Gencenovom pravilu mešanje, kontrakcijama se u jednu formulu spoje sve formule A koje se pojavljuju u $\Delta A \Lambda$; drugo, Gencen u svom sistemu sekvenata ima pravilo permutacije i nizove formula (a ne multiskupove) u tipu terma, pa da bi mogle da se izvrše pomenute kontrakcije i sečenje potrebne su još i neke permutacije.

Primetimo da je u ovom dokazu, koji smo naveli, postojala izvesna sloboda. U slučaju kada rr $(A)>1$, lr $(A)>1$ bilo je dozvoljeno da biramo koji ćemo rang smanjiti.

Glavnu lemu je moguće dokazati ako se postroži način smanjivanja ranga sečenja. Na taj način će se smanjti broj jednakosti koji nam je potreban da bi postojao cf-redukcijski prelaz od h do h_{cf}

Jedan dokaz, koji ćemo zvati **desno penjanje**, je strategija da dok god je desni rang sečenja veći od jedan koristimo jednakosti među termima koje smanjuju desni rang, time i ceo rang, i omogućavaju primenu indukcijske pretpostavke. Tek kada rr $(A)=1$ onda u zavisnosti da li je lr$(A)>1$ ili lr$(A)=1$ smanjujemo levi rang ili d(A). Jednakosti koje su nam potrebne da dokažemo glavnu lemu desnim penjanjem zvaćemo **R -jednakosti**.

Druga strategija je **levo penjanje**, i ona se sprovodi tako da dok god je rr$(A)>1$ i lr$(A)>1$ smanjujemo levi rang i primenjujemo indukcijsku pretpostavku. Kada lr$(A)=1$ onda u zavisnosti od desnog ranga smanjujemo rang ili stepen formule sečenja. Jednakosti koje su nam potrebne za ovu strategiju zvaćemo **L-jednakosti**.

Važi da R-jednakosti, L-jednakosti pripadaju ElimCut jednakostima.

Prolazeći kroz sve moguće slučajeve, slično kao u navedenom dokazu glavne leme dobijamo;

R-jednakosti ={Max.Red, CTMax.Red, β jednakosti, *M1, M2, E(R)perm.Cut, I(R)perm.Cut*, CT-CUT},

L-jednakosti ={Max.Red, β jednakosti, CT-CUT, *M1, M2, E(R)perm.Cut-I, I(R)perm.Cut-E, E(L)perm.Cut*}.

Drugi dokaz glavne leme bio bi dokaz strategijom desno penjanje, treći dokaz strategijom levo penjanje.

DEFINICIJA: Neka su f, g termi iz $\mathcal{G}'$.

$f \geqslant_{1R} g$ akko $f \geqslant_{1*} g$ i * jedna od R-jednakosti.

$f \geqslant_{1L} g$ akko $f \geqslant_{1*} g$ i * jedna od L-jednakosti.

Term f se **Rcf-redukuje** na term g akko postoji prirodan broj m i $h_1,\dots,h_m$ termi iz $\mathcal{G}'$takvi da $f \equiv h_1 \geqslant_{1R} \dots \geqslant_{1R} h_m \equiv g$. <u>Oznaka:</u> $f \geqslant_R g$.

Term f se **Lcf-redukuje** na term g akko postoji prirodan broj m i $h_1,\dots,h_m$ termi iz $\mathcal{G}'$takvi da $f \equiv h_1 \geqslant_{1L} \dots \geqslant_{1L} h_m \equiv g$. <u>Oznaka:</u> $f \geqslant_L g$.

TEOREMA O R-ELIMINACIJI SEČENJA U $\mathcal{G}'$:
Svaki term h iz $\mathcal{G}'$ se Rcf-redukuje na term h_{cf} iz $\mathcal{G}'$ koji je istog tipa i nema pravila sečenja.

TEOREMA O L-ELIMINACIJI SEČENJA U $\mathcal{G}'$:
Svaki term h iz $\mathcal{G}'$ se Lcf-redukuje na term h_{cf} iz $\mathcal{G}'$ koji je istog tipa i nema pravila sečenja.
DOKAZI:
Ove dve teoreme slede na osnovu dokaza glavne leme koje smo nazvali desno penjanje, odnosno levo penjanje.

2.2 ELIMINACIJA SEČENJA U $\mathcal{G}$

TEOREMA O ELIMINACIJI SEČENJA U $\mathcal{G}$:
Svaki term h iz $\mathcal{G}$ se Gcf-redukuje na term h_{Gcf} iz $\mathcal{G}$, $h \succcurlyeq h_{Gcf}$, koji je istog tipa i nema pravila sečenja.

Potpuno isto kao u $\mathcal{G}'$ za dokaz navedene teoreme dovoljno će biti da dokažemo sledeću lemu.

GLAVNA LEMA O ELIMINACIJI SEČENJA U $\mathcal{G}$:
Neka je dat term $h{:}\Gamma\Delta \vdash B$ iz $\mathcal{G}$, oblika $g\langle f\rangle$ i $f{:}\Gamma \vdash A$, $g{:}A\Delta \vdash C$ i termi f i g ne sadrže pravilo sečenja. Tada se term h Gcf-redukuje na term h_{Gcf} u $\mathcal{G}$, $h \succcurlyeq h_{Gcf}$, koji nema sečenja.

DEFINICIJA: Neka je f term sistema $\mathcal{G}$. Definisaćemo **dužinu terma** f, **l(f)**, induktivno po složenosti terma.
Ako $f=1_A$ onda $l(f)=0$.
Ako $f=P(h)$, gde je P neko pravilo, onda $l(f)=l(h)+1$.
Ako $f=P(h, g)$, gde je P neko pravilo, onda $l(f)=l(h)+l(g)+1$.

DEFINICIJA: Neka je term $h{:}\Delta\Gamma\Lambda \vdash B$ sistema $\mathcal{G}$, oblika $g\langle f\rangle$ i $f{:}\Gamma \vdash A$, $g{:}A\Lambda \vdash B$. **Mera sečenja** $g\langle f\rangle$, **m**($g\langle f\rangle$), je dužina terma g umanjena za broj pravila oblika $\mathbf{p}_{D,A}$, $\mathbf{c}_A$ koji se pojavljuju u njemu, gde je A formula koja pripada lozi formule sečenja $g\langle f\rangle$ i D proizvoljna formula.

DEFINICIJA: Upoređivanje trojki:
$\langle n_1, n_2, n_3\rangle < \langle m_1, m_2, m_3\rangle$ akko 1. $n_1<m_1$; ili 2. $n_1=m_1$, $n_2<m_2$; ili 3. $n_1=m_1$, $n_2=m_2$, $n_3<m_3$.

LEMA 1: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash B$ u $\mathcal{G}$. Neka su $\mathbf{c}_A(h)$ i $\mathbf{p}_{D,A}(g)$ podtermi terma f. Tada pojavljivanje formule A u tipu terma $\mathbf{c}_A(h)$ ili $\mathbf{p}_{D,A}(g)$ ne može biti krajnja formula loze nekog pojavljivanja formule A iz drveta terma f.
DOKAZ:
Deo drveta terma f u kome se pojavljuje term $\mathbf{c}_A(h)$ je sledećeg oblika:

$$\frac{h{:}\Gamma AA\Delta \vdash C}{\mathbf{c}_A(h){:}\Gamma A\Delta \vdash C}$$

i u tipu terma h mora biti još formula iz loze formule A.
Na potpuno isti način se dokazuje i slučaj podterma $\mathbf{p}_{D,A}(g)$. **q. e. d.**

LEMA 2: Neka je f term iz $\mathcal{G}$. Term f se može Gcf-redukovati na term h iz $\mathcal{G}$ tako da term h ne sadrži parove permutacija oblika $\mathbf{p}_{B,C}$, $\mathbf{p}_{C,B}$ gde je formula permutacije C (dnosno B) jedne od permutacija naslednik formule C (B) druge permutacije.

DOKAZ:

Posledica jednakosti iz $\mathcal{G}$ kao što smo naveli na kraju **poglavlja I, 7** je da permutacija može da zameni mesta sa nekim drugim pravilom u termu. Na taj način se permutacije $\mathbf{p}_{B,C}$ i $\mathbf{p}_{C,B}$ dovedu u termu jedna do druge i onda se primeni jednakost *GPP1*. q. e. d.

DOKAZ GLAVNE LEME O ELIMINACIJI SEČENJA U $\mathcal{G}$:

$$\frac{f{:}\Gamma\vdash A \quad g{:}A\Delta\vdash C}{g\langle f\rangle{:}\Gamma\Delta\vdash C}$$

Dokaz će biti izveden indukcijom po $\langle \mathrm{d}(A), \mathrm{lr}(A), \mathrm{m}(g\langle f\rangle)\rangle$ upoređivanjem trojki.
Na osnovu leme 2 možemo da pretpostavimo da je term g već Gcf-redukovan i da nema parova permutacija koji se pominju u lemi 3.

Prvi slučaj: $\mathrm{m}(g\langle f\rangle)=0$.

Onda $g=1_A$ i na osnovu *GM1* i *GM2* traženi term bez sečenja je term f.

Drugi slučaj: $\mathrm{m}(g\langle f\rangle)=1$.

Onda (i) formula A je glavna formula poslednjeg pravila terma g, g ima jedan od oblika:

1_{Bp}, ako $A\equiv B\wedge D$; $1_{Cp'}$, ako $A\equiv B\wedge D$; $1_B[1_C]$, ako $A\equiv B\Rightarrow D$; $\mathbf{t}_A(1_D)$.

(ii) poslednje pravilo terma g je uvođenje i term g ima jedan od sledećih oblika:

${}_{\kappa}1_A$, ${}_{\kappa'}1_A$, $\langle 1_A, 1_A\rangle$.

U slučaju (i) ako $\mathrm{lr}(A)>1$ onda permutujemo sečenje i poslednje pravilo terma f. Na taj način dobijamo sečenje čija formula ima isti stepen kao i formula polaznog sečenja, ali ima manji levi rang i na to sečenje može se primeniti indukcijska pretpostavka (i. p.).
Ako je $\mathrm{lr}(A)=1$ onda term $g\langle f\rangle$ β_G-redukcijama redukujemo na term u kome sečenja imaju formulu manjeg stepena i jedan term je jedinica pa primenimo *GM1* i *GM2* i dobijamo term bez sečenja.
U slučaju (ii) permutujemo sečenje i poslednje pravilo terma g, primenimo *GM1* i *GM2* i dobijamo term bez sečenja.

Treći slučaj: $\mathrm{m}(g\langle f\rangle)>1$.

Poslednje pravilo terma g može biti:

(i) pravilo uvođenja;
(ii) permutacija čija formula permutacije nije formula sečenja A;
(iii) kontrakcija čija je glavna formula baš formula sečenja A;
(iv) permutacija oblika $\mathbf{p}_{D,A}$, $g=\mathbf{p}_{D,A}(h)$, za $h{:}DA\Delta'\vdash C$, $D\Delta'\equiv\Delta$;
(v) slabljenje kome je formula sečenja A glavna formula;
(vi) eliminacija kojoj je formula sečenja A glavna formula.

Slučajevi (i) i (ii).

U ovim slučajevima sečenje permutujemo sa poslednjim pravilom terma g. Sečenje u dobijenom novom termu ima isti stepen kao i $g\langle f\rangle$, ima isti levi rang kao $g\langle f\rangle$ ali ima manju meru. Zato na njega možemo primeniti i. p..
Neka je na primer $g=h^*$, $h{:}BA\Delta\vdash D$, $C\equiv B\Rightarrow D$.
Onda $g\langle f\rangle \succcurlyeq (\mathbf{p}_{\Gamma,B}(\mathbf{p}_{B,A}(h)\langle f\rangle))^*$. Sečenje $\mathbf{p}_{B,A}(h)\langle f\rangle$ ima za jedan manju meru od polaznog sečenja $h^*\langle f\rangle$ pa na osnovu i. p. term $\mathbf{p}_{B,A}(h)\langle f\rangle$ se Gcf-redukuje na term bez sečenja h_{lcf}

Znači $g\langle f\rangle \succcurlyeq (\mathbf{p}_{\Gamma,B}(h_{lcf}))^*$ i term $(\mathbf{p}_{\Gamma,B}(h_{lcf}))^*$ nema sečenja.

Slučaj (iii).

Term g je oblika $\mathbf{c}_A(g_1)$, za $g_1{:}AA\Delta \vdash C$.

Ispitujemo šta je poslednje pravilo terma g_1. Ako je to $\mathbf{c}_A$ ili $\mathbf{p}_{D,A}$ nastavljamo sa ispitivanjem. Loza formule sečenja, na osnovu leme 1 ne može se završiti jednim od tih pravila pa će se u termu g pojaviti podterm h za koji:

$g=PC(h)$ gde je PC niz pravila oblika $\mathbf{c}_A$, $\mathbf{p}_{D,A}$, $h{:}\Delta_1 A\Delta_2 ..A\Delta_n \vdash C$,

i $h=P_1(h_1)$ ili $h=P_1(h_1, h_2)$, $P_1 \neq \mathbf{c}_A$, $\mathbf{p}_{D,A}$.

Pravilo P_1 može biti:

1. Uvođenje.
2. Permutacija čija formula permutacije nije iz loze formule sečenja A.
3. Slabljenje čija glavna formula E nije iz loze formule sečenja.
   U ovim slučajevima postupamo isto kao u (i) i (ii), odnosno sa poslednjim pravilom terma h permutujemo niz PC (u 3. izmenjen izostavljanjem permutacija oblika $\mathbf{p}_{E,A}$) sa sečenjem.
4. Eliminacija čija glavna formula E nije iz loze formule sečenja.
   Neka je na primer, $E \equiv D\wedge F$. Tada $h=h_{1p}$ ili $h=h_{1p'}$. U nizu PC svaku permutaciju oblika $\mathbf{p}_{E,A}$ zamenjujemo permutacijom $\mathbf{p}_{D,A}$ ili $\mathbf{p}_{F,A}$ i dobijamo niz PC'.
   Onda $g\langle f\rangle \succcurlyeq \mathbf{p}_{E,\Gamma}((\mathbf{p}_{\Gamma,D}(PC'(h_1)\langle f\rangle))_p)$. Na sečenje $PC'(h_1)\langle f\rangle$ može se primeniti i. p. jer ima meru manju od sečenja $g\langle f\rangle$.
   Potpuno isto se postupa za sva druga pravila eliminacije.
5. Kontrakcija čija glavna formula E nije iz loze formule sečenja.
   Neka je $h_1{:}EE\Delta' A\Delta_2 ..A\Delta_n \vdash C$ i $E\Delta' \equiv \Delta_1$. U nizu PC gde god se nalazi permutacija $\mathbf{p}_{E,A}$ dodajemo još jednu $\mathbf{p}_{E,A}$ i na taj način dobijamo niz PC'.
   Onda $g\langle f\rangle \succcurlyeq \mathbf{p}_{E,\Gamma}(\mathbf{c}_E(\mathbf{p}_{\Gamma,EE}(PC'(h_1)\langle f\rangle)))$. Na sečenje $PC'(h_1)\langle f\rangle$ može se primeniti i. p. jer ima meru manju od sečenja $g\langle f\rangle$.
6. Slabljenje čija je glavna formula iz loze formule sečenja A.
   U nizu PC se izostavi jedna kontrakcija i to je niz PC'.
   Onda $g\langle f\rangle \succcurlyeq PC'(h_1)\langle f\rangle$. Na sečenje $PC'(h_1)\langle f\rangle$ može se primeniti i. p. jer ima meru manju od sečenja $g\langle f\rangle$.
7. Eliminacija čija je glavna formula A iz loze formule sečenja.
   Neka je na primer $A \equiv B\vee D$, onda $h=[h_1, h_2]$, $h_1{:}B\Delta_2 ..A\Delta_n \vdash C$, $h_2{:}D\Delta_2 ..A\Delta_n \vdash C$.
   Iz niza PC izostavimo jednu kontrakciju i onda pravimo dva niza:
   PC_1- tako što pre svake kontrakcije dodamo dve permutacije $\mathbf{p}_{B,A}$, $\mathbf{p}_{B,A}$;
   PC_2- tako što pre svake kontrakcije dodamo dve permutacije $\mathbf{p}_{D,A}$, $\mathbf{p}_{D,A}$.
   Onda $g\langle f\rangle \succcurlyeq \mathbf{c}_\Gamma([\mathbf{p}_{\Gamma,B}(PC_1(h_1)\langle f\rangle)\ \mathbf{p}_{\Gamma,D}(PC_2(h_2)\langle f\rangle)]\langle f\rangle)$. Na sečenja $PC_1(h_1)\langle f\rangle$ $PC_2(h_2)\langle f\rangle$ može se primeniti i. p. jer imaju meru manju od sečenja $g\langle f\rangle$:
   $PC_1(h_1)\langle f\rangle \succcurlyeq f_1$ i term f_1 nema sečenja.
   $PC_2(h_1)\langle f\rangle \succcurlyeq f_2$ i term f_2 nema sečenja.
   Znači $g\langle f\rangle \succcurlyeq \mathbf{c}_\Gamma([\mathbf{p}_{\Gamma,B}(f_1)\ \mathbf{p}_{\Gamma,D}(f_2)]\langle f\rangle)$.
   Ako $\mathrm{lr}(A) > 1$: permutujemo poslednje pravilo terma f sa sečenjem i dobijamo term u kome sečenje ima isti stepen kao $g\langle f\rangle$, ali manji levi rang pa možemo primeniti i. p..
   Ako $\mathrm{lr}(A) = 1$: term f je oblika ${}_{\kappa}f_3$ ili ${}_{\kappa'}f_3$ pa imamo
   $g\langle f\rangle \succcurlyeq \mathbf{c}_\Gamma(\mathbf{p}_{\Gamma,B}(f_1)\langle f_3\rangle)$ ili $g\langle f\rangle \succcurlyeq \mathbf{c}_\Gamma(\mathbf{p}_{\Gamma,D}(f_2)\langle f_3\rangle)$ i ova sečenja imaju stepen manji nego sečenje $g\langle f\rangle$.
   Potpuno isto se postupa za sva druga pravila eliminacije.

Slučaj (iv).

Term g je oblika $\mathbf{p}_{D,A}(g_1)$, za $g_1{:}DA\Delta \vdash C$.

Ispitujemo šta je poslednje pravilo terma g_1. Ako je to $\mathbf{p}_{F,A}$ nastavljamo sa ispitivanjem. Loza formule sečenja, na osnovu leme 1 ne može se završiti jednim takvim pravilom pa će se u termu g pojaviti podterm h za koji:

$g=P(h)$ gde je P niz pravila oblika $\mathbf{p}_{F,A}$, $h{:}\Delta_1 A\Delta_2 \vdash C$,

i $h=P_1(h_1)$ ili $h=P_1(h_1, h_2)$, $P_1 \neq \mathbf{p}_{E,A}$, za neku formulu E.

Pravilo P_1 može biti:

1. Uvođenje.
2. Permutacija čija formula permutacije nije iz loze formule sečenja A.
3. Slabljenje čija glavna formula E nije iz loze formule sečenja.
4. Eliminacija čija glavna formula E nije iz loze formule sečenja.
5. Kontrakcija čija glavna formula E nije iz loze formule sečenja.

Postupak redukcije je isti kao u 1, 2, 3, 4, 5 u slučaju (iii) samo što u ovom slučaju niz pravila P ima ulogu niza PC iz (iii).

Slučaj (v).

Term g je oblika $\mathbf{t}_A(h)$, za $h{:}\Delta \vdash C$.

Onda $g\langle f \rangle \succcurlyeq \mathbf{t}_\Gamma(g)$ i term $\mathbf{t}_\Gamma(g)$ nema sečenja.

Slučaj (vi).

U zavisnosti od glavnog veznika formule A term g ima jedan od oblika:

h_p, $h_{p'}$, ako $A \equiv B\wedge D$; $[h_1, h_2]$, ako $A \equiv B\vee D$; $h_1[h_2]$, ako $A \equiv B\Rightarrow D$.

Ako $\mathrm{lr}(A) > 1$: permutujemo poslednje pravilo terma f sa sečenjem i dobijamo term u kome sečenje ima isti stepen kao $g\langle f \rangle$, ali manji levi rang pa možemo primeniti i. p..

Ako $\mathrm{lr}(A) = 1$: term f je oblika redom $\langle f_3, f_4 \rangle$; ${}_{\iota}f_3$ ili ${}_{\kappa}f_3$; $f_3{}^*$.

Na osnovu β_G-redukcija, na primer za $A \equiv B\vee D$:

$g\langle f \rangle \succcurlyeq \mathbf{c}_\Gamma(\mathbf{p}_{\Gamma,B}(h_1)\langle f_3 \rangle)$ ili $g\langle f \rangle \succcurlyeq \mathbf{c}_\Gamma(\mathbf{p}_{\Gamma,D}(h_2)\langle f_3 \rangle)$ i ova sečenja imaju stepen manji nego sečenje $g\langle f \rangle$.

Potpuno isto se postupa za $A \equiv B\wedge D$ i $A \equiv B\Rightarrow D$. **q. e. d.**

Istaknimo da u navedenom dokazu teoreme o eliminaciji sečenja u $\mathcal{G}$ nisu korišćene *GE(L)permCut* redukcije. Ta činjenica nam je važna jer smo pokazali (poglavlje **II**, 3) da takve redukcije u $\mathcal{G}'$(a to važi i u $\mathcal{G}$) nemaju odgovarajuće redukcije u $\mathcal{N}$.

Redukcije koje postoje u $\mathcal{G}$ daju nam mogućnost da u gore navedenom dokazu u svakom od slučajeva (i)-(vi), kada je m($g\langle f \rangle$)>1 proveravamo levi rang sečenja, i ako je to moguće (ako je $\mathrm{lr}(A)$>1) permutujemo sečenje sa poslednjim pravilom terma f. Takva strategija bi onda zahtevala *GE(L)permCut* redukcije. Ako bismo tako dokazivali teoremu o eliminaciji sečenja u $\mathcal{G}$ mogli bismo reći da se redukcije u $\mathcal{G}$ "ne slažu" sa redukcijama u $\mathcal{N}$.

2.3 NEVAŽNA SEČENJA U SISTEMIMA $\mathcal{G}$ I $\mathcal{G}'$

U ovom delu ćemo sva sečenja koja se pojavljuju u nekom termu iz sistema $\mathcal{G}'$ ili $\mathcal{G}$ podeliti na dve vrste: važna i nevažna sečenja.

Ovakvu podelu uslovljava naš zahtev da ustanovimo koja to sečenja smeju postojati u nekom termu f sistema $\mathcal{G}'$ tako da je njegova slika $\mathbf{n}(f)$ u sistemu $\mathcal{N}$ G-normalan term. Ta sečenja ćemo zvati nevažna. Prisustvo u termu f sistema $\mathcal{G}'$ sečenja koja nisu nevažna davaće nam maksimalan segment u termu $\mathbf{n}(f)$ sistema $\mathcal{N}'$.

KOMENTAR: Ako prirodnodedukcijski gledamo pravilo sečenja ono pretstavlja spajanje dva izvoda i ne stvara probleme kad god ne spoji izvode takve da je u jednom uveden neki veznik, a u drugom koji se nastavlja na njega postoji eliminacija tog veznika.

Definicija koja sledi, definicija prošlosti formula sečenja u sečenju $g\langle f\rangle{:}\Delta\Gamma\Lambda\vdash B$ za $f{:}\Gamma\vdash A$ i $g{:}\Delta A\Lambda\vdash B$ daje grubo rečeno mogućnost provere da li je formula A iz tipa $\Gamma\vdash A$ povezana sa nekim uvođenjem formule A u termu f i da li je formula A iz tipa $\Delta A\Lambda\vdash B$ povezana sa nekom eliminacijom formule A u termu g. Ako je to slučaj onda je sečenje $g\langle f\rangle$ važno, odnosno prirodnodedukcijski gledano to sečenje pravi maksimalan segment.

Naredne definicije daćemo za terme sistema $\mathcal{G}'$, ali mogu da budu i definicije u sistemu $\mathcal{G}$.

DEFINICIJA: Neka je dato sečenje

$$\frac{f{:}\Gamma\vdash A^f \qquad g{:}\Delta A^g\Lambda\vdash B}{g\langle f\rangle{:}\Delta\Gamma\Lambda\vdash B,}$$

Za svaki stabilan kraj loze formule A^f definišemo **prošlost formule** A^f.

Neka je A^{end} jedan stabilan kraj loze formule A^f. Tada posmatramo niz formula $A^f, F_1, \ldots F_k$ takav da:

1. F_1 je pojavljivanje formule A koje je povezano jedinicom sa krajnjom formulom loze, formulom A^{end}.
2. F_i nije (i) potformula neke formule iz Γ i $F_i \notin \Gamma$;
   (ii) u nekom tipu sa desne strane $\vdash$.

   Onda, ako

   2.1. F_i nije povezana sečenjem sa nekom formulom, tada je
   F_{i+1}: ili naslednik formule F_i ili nadnaslednik formule F_i ili c-naslednik formule F_i.

   2.2. F_i povezana sečenjem sa nekom formulom F':
   formula F' ima više krajnjih formula loze, pa imamo više mogućnosti $F'^1, \ldots, F'^m$; F_i je **čvor niza** sa m mogućnosti. Neka je F'^n jedna krajnja formula loze i onda ako:

   2.2.1. formula F'^n je stabilan kraj, tada
   F_{i+1} je pojavljivanje formule F' koje je povezano jedinicom sa krajnjom formulom te loze.

   2.2.2. formula F'^n nije stabilan kraj:
   (1) postoji 1-potformula, F'', formule F' takva da je A potformula od F'', tada F_{i+1} je pojavljivanje formule F'' koje je povezano jedinicom sa krajnjom formulom loze 1-potformule F''.
   (2) ne postoji 1-potformula formule F' kojoj je A potformula, tada
   $F_{i+1} = F'$.
3. F_k ili potformula neke formule iz Γ ili $F_k \in \Gamma$ ili formula u nekom tipu sa desne strane $\vdash$.

Niz formula $A^f, F_1, \ldots F_k$ je **moguća prošlost formule** A^f, a formula F_k je **kraj prošlosti** formule A^f.

Neka je A^{end} jedan stabilan kraj loze formule A^g. Tada posmatramo niz formula $A^g, F_1, \ldots F_k$ takav da:

1. F_1 je pojavljivanje formule A koje je povezano jedinicom sa krajnjom formulom loze, formulom A^{end}.
2. F_i nije (i) potformula formule B i $B \neq F_i$;
   (ii) u nekom tipu sa leve strane $\vdash$;
   (iii) pomoćna formula pravila eliminacije $\Rightarrow$ koja nema nadnaslednika.

   Onda, ako

   2.1. F_i nije povezana sečenjem sa nekom formulom, tada je
   F_{i+1}: ili naslednik formule F_i ili nadnaslednik formule F_i.

   2.2. F_i povezana sečenjem sa nekom formulom F'
   formula F' ima više krajnjih formula loze, pa imamo više mogućnosti $F'^1,\dots,F'^m$; F_i je **čvor niza** sa m mogućnosti. Neka je F'^n jedna krajnja formula loze i onda ako:

   2.2.1. F'^n je stabilan kraj, tada
   F_{i+1} je pojavljivanje formule F' koje je povezano jedinicom sa F'^n.

   2.2.2. F' nije stabilan kraj:
   (1) postoji 1-potformula, F'', formule F' takva da je A potformula od F'', tada F_{i+1} je pojavljivanje formule F'' koje je povezano jedinicom sa krajnjom formulom loze 1-potformule F''.
   (2) ne postoji 1-potformula formule F' kojoj je A potformula, tada
   $F_{i+1}=F'$.
3. F_k ili potformula formule B ili $F_k \equiv B$ ili formula u nekom tipu sa leve strane $\vdash$ ili pomoćna formula pravila eliminacije $\Rightarrow$ koja nema nadnaslednika.

Niz formula $A^g, F_1,\dots F_k$ je **moguća prošlost formule** A^g, a formula F_k je **kraj prošlosti** formule A^g.

Skup svih mogućih prošlosti formule A^g (A^f) je **prošlost formule** A^g (A^f).

Formula A^g (A^f) ima **dobru prošlost** akko nijedan kraj njenih mogućih prošlosti nije sa leve (desne) strane $\vdash$ u nekom tipu i formula A^g(A^f) nema nestabilnih krajeva loze. U suprotnom, A^g (A^f) ima **lošu prošlost**.

DEFINICIJA: Neka je dato sečenje

$$\frac{f{:}\Gamma \vdash A^f \qquad g{:}\Delta A^g \Lambda \vdash B}{g\langle f\rangle{:}\Delta\Gamma\Lambda \vdash B,}$$

To sečenje je **tipa**

R- ako 1. formula A^f ima lošu prošlost i
2. formula A^g ima dobru prošlost;

L- ako 1. formula A^f ima dobru prošlost i
2. formula A^g ima lošu prošlost;

RL- ako formule A^f i A^g imaju dobru prošlost.

DEFINICIJA: Neka je $g\langle f\rangle$ term tipa $\Gamma\Delta \vdash B$ za $f{:}\Gamma \vdash A^f$, $g{:}\Delta A^g \Lambda \vdash B$ iz sistema $\mathcal{G}'$ i termi f i g u sebi ne sadrže sečenje. Tada je sečenje $g\langle f\rangle$ **nevažno** akko svi krajevi u lozi formule A^g su stabilni ili svi krajevi u lozi formule A^f su stabilni.

DEFINICIJA: Neka je $g\langle f\rangle$ term tipa $\Gamma\Delta \vdash B$ za $f{:}\Gamma \vdash A^f$, $g{:}\Delta A^g \Lambda \vdash B$ iz sistema $\mathcal{G}'$ i termi f i g u sebi sadrže samo nevažna sečenja. Tada je sečenje $g\langle f\rangle$

$$\frac{f{:}\Gamma \vdash A^f \qquad g{:}\Delta A^g \Lambda \vdash B}{g\langle f\rangle{:}\Delta\Gamma\Lambda \vdash B,}$$

nevažno ako formula A^f ima dobru prošlost ili formula A^g ima dobru prošlost.
Ostala sečenja ćemo zvati **važna.**

DEFINICIJA:
IElimCut jednakosti =({ElimCut jednakosti}$\cup\{M3, M4\})\setminus\{M1, M2\}$.
IR-jednakosti =(R-jednakosti $\cup\{M3, M4\})\setminus\{M1, M2\}$.
IL-jednakosti =(L-jednakosti $\cup\{M3, M4\})\setminus\{M1, M2\}$.

DEFINICIJA: Neka su f, g termi iz sistema $\mathcal{G}'$.
$f \geqslant_{1I} g$ akko $f \geqslant_{1^*} g$ i * jedna od IElimCut jednakosti;
$f \geqslant_{1IR} g$ akko $f \geqslant_{1^*} g$ i * jedna od IR-jednakosti;
$f \geqslant_{1IL} g$ akko $f \geqslant_{1^*} g$ i * jedna od IL-jednakosti.
Term f se **icf-redukuje** na term g akko postoji prirodan broj m i $h_1,...,h_m$ termi iz $\mathcal{G}'$ takvi da $f \equiv h_1 \geqslant_{1I} ... \geqslant_{1I} h_m \equiv g$. Oznaka: $f \geqslant_I g$.
Term f se **Ricf-redukuje** na term g akko postoji prirodan broj m i $h_1,...,h_m$ termi iz $\mathcal{G}'$ takvi da $f \equiv h \geqslant_{1IR} .. \geqslant_{1IR} h_m \equiv g$. Oznaka: $f \geqslant_{IR} g$.
Term f se **Licf-redukuje** na term g akko postoji prirodan broj m i $h_1,...,h_m$ termi iz $\mathcal{G}'$ takvi da $f \equiv h_1 \geqslant_{1IL} ... \geqslant_{1IL} h_m \equiv g$. Oznaka: $f \geqslant_{IL} g$.

Slično kao lema 1 (iz **2.1**) dokazuje se sledeća lema.

LEMA 2: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash B$ iz $\mathcal{G}'$.
(I) Neka je $c_A(h)$ podterm terma f. Pojavljivanje formule A u tipu terma $c_A(h)$ ne može biti krajnja formula loze nekog pojavljivanja formule A iz drveta terma f.
(II) Neka je $g\langle h \rangle$ podterm terma f. Pojavljivanje formule A u tipu terma $g\langle h \rangle$ ne može biti krajnja formula loze nekog pojavljivanja formule A iz drveta terma f ako formula sečenja $g\langle h \rangle$ pripada prošlosti te formule A.

GLAVNA LEMA O ELIMINACIJI VAŽNIH SEČENJA U $\mathcal{G}'$:
Neka je dat term $h{:}\Delta\Gamma\Lambda \vdash B$ iz $\mathcal{G}'$, oblika $g\langle f \rangle$ za $f{:}\Gamma \vdash A$, $g{:}\Delta A\Lambda \vdash B$ i $g\langle f \rangle$ važno sečenje, a termi f i g sadrže samo nevažna sečenja. Tada se term h icf-redukuje na term h_{icf} koji ima samo nevažna sečenja. Svaka formula, koja ne pripada prošlosti formule sečenja A, ima istu prošlost u termu h i u termu h_{icf}.
DOKAZ:

$$\frac{f{:}\Gamma \vdash A \qquad g{:}\Delta A\Lambda \vdash B}{g\langle f \rangle{:}\Delta\Gamma\Lambda \vdash B,}$$

Lemu ćemo dokazati indukcijom po $\langle$d(A), r(A)$\rangle$ upoređivanjem dvojki.
Dokaz će biti sličan dokazu glavne leme o eliminaciji sečenja u $\mathcal{G}'$.
Postojaće slučajevi u oba dokaza kod kojih se na isti način primenjuju redukcije da bi se dobio term sa sečenjem, čiji su parametri manji od parametara $\langle$d(A), r(A)$\rangle$ posmatranog sečenja i za koje onda važi indukcijska pretpostavka.
Takve slučajeve nećemo ovde ponovo navoditi, već ćemo se pozvati na dokaz glavne leme o eliminaciji sečenja u $\mathcal{G}'$.
<u>Prvi slučaj</u>: r(A)=2.
Postupa se analogno kao u prvom slučaju dokaza glavne leme o eliminaciji sečenja u $\mathcal{G}'$.

<u>Drugi slučaj</u>: rr(A)>1, odnosno r(A)>2.

1. Poslednje pravilo terma g je ili uvođenje ili eliminacija ili slabljenje ili kontrakcija čija glavna formula nije A.
Postupa se analogno kao u drugom slučaju tačka 1. dokaza glavne l eme o eliminaciji sečenja u $\mathcal{G}'$.
2. Poslednje pravilo terma g je kontrakcija čiji je glavna formula A, formula sečenja:

$$\dfrac{f{:}\Gamma \vdash A \qquad \dfrac{g_1{:}\Delta AA\Lambda \vdash B}{c_A(g_1){:}\Delta A\Lambda \vdash B}}{c_A(g_1)\langle f\rangle{:}\Delta\Gamma\Lambda \vdash B}$$

Postavlja se pitanje: šta je poslednje pravilo u termu g_1?
Ako je $g_1 = c_A(g_2)$ ili
$g_1 = g_3\langle g_2\rangle$ nevažno sečenje, za $g_2{:}\Delta_1 AA\Lambda_1 \vdash C$, $g_3{:}\Delta_2 C\Lambda_2 \vdash B$ sa svojstvom
(i): formula C pripada prošlosti formule sečenja $g\langle f\rangle$,
onda nastavljamo sa ispitivanjem šta je poslednje pravilo terma g_2.
Na osnovu leme 1 u termu g se loza formule sečenja A ne može završiti kontrakcijom kojoj je glavna formula, formula A niti nevažnim sečenjem sa svojstvom (i).
Zato postoji podterm g_{m-1}, terma g takav da:
$g_{m-1}=P(g_m)$ i $P\neq c_A$ i P nije nevažno sečenje sa svojstvom (i).
$g=CC(g_{m-1})$, gde je CC niz kontrakcija c_A i nevažnih sečenja sa svojstvom (i)
U zavisnosti šta je pravilo P imamo četiri slučaja:
2.1. Poslednje pravilo terma g_{m-1} je ili eliminacija kojoj glavna formula nije formula sečenja ili slabljenje ili kontrakcija čija glavna formula nije A.
Postupa se analogno kao u drugom slučaju tačka 2.1 dokaza glavne leme o eliminaciji sečenja u $\mathcal{G}'$.
2.2. Poslednje pravilo terma g_{m-1} je eliminacija čija je glavna formula jedna od formula iz loze formule sečenja A. Neka je na primer $A\equiv D\wedge C$, onda slično kao u drugom slučaju tačka 2.2 dokaza glavne leme o eliminaciji sečenja u $\mathcal{G}'$:
Imamo $CC(g^{\S})\langle f\rangle \geqslant_{*} c_\Gamma((CC'(g)\langle f\rangle)^{\S}\langle f\rangle)$, CC' ima jednu kontrakciju manje od CC.
Sečenje $CC'(g)\langle f\rangle$ je manjeg ranga od sečenja $CC(g^{\S})\langle f\rangle$, pa na osnovu indukcijske pretpostavke taj term se icf-redukuje na term h_{1cf} koji ima samo nevažna sečenja i koji je tipa $\Delta DC\Gamma\Lambda \vdash B$.
Sečenje $(h_{1cf})^{\S}\langle f\rangle$ ima desni rang jednak jedan, a levi isti kao i polazno sečenje, pa na osnovu indukcijske pretpostavke taj erm se icf-redukuje na term h_{2cf} koji ima samo nevažna sečenja.
Znači, $g\langle f\rangle \geqslant_{*} c_\Gamma((CC'(g)\langle f\rangle)^{\S}\langle f\rangle) \geqslant c_\Gamma((h_{1cf})^{\S}\langle f\rangle) \geqslant c_\Gamma(h_{2cf})$
i term $c_\Gamma(h_{2cf})$ ima samo nevažna sečenja.
2.3. Poslednje pravilo terma g_{m-1} je uvođenje, na primer $g_m=\{h_1, h_2\}$.
$g=c_{A...}(g_3)\langle c_{A...}(...g_i\underline{\langle} c_{A...}(\{h_1, h_2\})\underline{\rangle}...)\rangle$, gde $c_{A...}$ označava mogući niz kontrakcija.
Sečenje sa podvučenim zagradama u termu g je nevažno i pošto postoji uvođenje čija je glavna formula formula sečenja to sečenje je tipa R. Onda
$g \geqslant c_{A...}(g_3)\langle c_{A...}(...g_i)\rangle\underline{\langle} c_{A...}(\{h_1, h_2\})\underline{\rangle}$, odnosno
$g\langle f\rangle \geqslant c_\Gamma(c_{A...}(g_3)\langle c_{A...}(...g_i)\rangle\langle f\rangle\underline{\langle} c_{A...}(\{h_1, h_2\})\langle f\rangle\underline{\rangle})$, sečenja $c_{A...}(g_3)\langle c_{A...}(...g_i)\rangle\langle f\rangle$ i $c_{A...}(\{h_1, h_2\})\langle f\rangle$ su manjeg ranga od polaznog, na osnovu indukcijske pretpostavke $c_{A...}(g_3)\langle c_{A...}(...g_i)\rangle\langle f\rangle \geqslant h_{1cf}$, $c_{A...}(\{h_1, h_2\})\langle f\rangle \geqslant h_{2cf}$ i h_{1cf}, h_{2cf} bez važnih sečenja.
Formula sečenja sa podvučenim zagradama ne pripada prošlosti formule važnog sečenju $c_{A...}(g_3)\langle c_{A...}(...g_i)\rangle\langle f\rangle$ pa njena prošlost ostaje ista i u h_{1cf}, odnosno sečenje

$h_{1cf}\langle h_{2cf}\rangle$ je tipa R i nevažno.

Znači: $g\langle f\rangle \geqslant h_{1cf}\langle h_{2cf}\rangle$.

Potpuno analogno se dokazuje za ostala pravila uvođenja.

2.4. Poslednje pravilo terma g_{m-1} je nevažno sečenje $h_1\langle h_2\rangle$ čija formula sečenja ne pripada prošlosti formule sečenja $g\langle f\rangle$.

$g=c_{A...}(g_3)\langle c_{A...}(...g_i\langle c_{A...}(h_1\underline{\langle} h_2\underline{\rangle})\rangle...)\rangle$, gde $c_{A...}$ označava mogući niz kontrakcija Sečenje sa podvučenim zagradama u temu g je nevažno. Onda

$g \geqslant c_{A...}(g_3)\langle c_{A...}(...h_i)\rangle\underline{\langle} c_{A...}(h_2)\underline{\rangle}$, odnosno

$g\langle f\rangle \geqslant c_\Gamma(c_{A...}(g_3)\langle c_{A...}(...h_1)\rangle\langle f\rangle\underline{\langle} c_{A...}(h_2)\langle f\rangle\underline{\rangle})$, sečenja $c_{A..}(g_3)\langle c_{A..}(...h_i)\rangle\langle f\rangle$ i $c_{A...}(h_2)\langle f\rangle$ su manje ranga od polaznog pa na osnovu indukcijske pretpostavke $c_{A...}(g_3)\langle c_{A...}(...h_i)\rangle\langle f\rangle \geqslant h_{1cf}$, $c_{A...}(h_2)\langle f\rangle \geqslant h_{2cf}$ i h_{1cf}, h_{2cf} bez važnih sečenja. Formula sečenja sa podvučenim zagradama u $c_{A...}(g_3)\langle c_{A...}(...g_i)\rangle\langle f\rangle$ ne pripada prošlosti formule važnog sečenja pa njena prošlost ostaje ista i u h_{1cf}, odnosno sečenje $h_{1cf}\langle h_{2cf}\rangle$ je nevažno.

Znači: $g\langle f\rangle \geqslant h_{1cf}\langle h_{2cf}\rangle$.

3. Poslednje pravilo terma g je nevažno sečenje $g_2\langle g_1\rangle$ čija formula sečenja pripada prošlosti formule sečenja $g\langle f\rangle$.

$$\dfrac{f{:}\Gamma\vdash A \qquad \dfrac{g_1{:}\Delta_1 A\Lambda_1\vdash C \quad g_2{:}\Delta_2 C\Lambda_2\vdash B}{g_2\langle g_1\rangle{:}\Delta A\Lambda\vdash B}}{g_2\langle g_1\rangle\langle f\rangle{:}\Delta\Gamma\Lambda\vdash B}$$

3.1. Sečenje $g_2\langle g_1\rangle$ je tipa R.

Onda $g_2\langle g_1\rangle\langle f\rangle \geqslant_{M3} g_2\langle g_1\langle f\rangle\rangle$, na osnovu indukcijske pretpostavke $g_1\langle f\rangle \geqslant h_{1cf}$, h_{1cf} ima samo nevažna sečenja i $g_2\langle h_{1cf}\rangle$ nevažno sečenje.

3.2. Sečenje $g_2\langle g_1\rangle$ je tipa L.

Postavlja se pitanje: šta je poslednje pravilo u termu g_1?

Ako je $g_1 = c_A(g_3)$ ili

$g_1 = g_4\langle g_3\rangle$ nevažno sečenje, za $g_3{:}\Delta_1 AA\Lambda_1\vdash C$, $g_4{:}\Delta_2 C\Lambda_2 \vdash B$ sa svojstvom (i): formula C pripada prošlosti formule sečenja $g\langle f\rangle$,

onda nastavljamo sa ispitivanjem šta je poslednje pravilo terma g_3.

Na osnovu leme1 u termu g se loza formule sečenja A ne može završiti kontrakcijom kojoj je glavna formula, formula A niti nevažnim sečenjem sa svojstvom (i).

U okviru ovog slučaja postojaće podslučajevi 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4 analogno podslučajevima 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 slučaja 2.

4. Poslednje pravilo terma g je nevažno sečenje $g_2\langle g_1\rangle$ čija formula sečenja ne pripada prošlosti formule sečenja $g\langle f\rangle$.

$$\dfrac{f{:}\Gamma\vdash A \qquad \dfrac{g_1{:}\Delta_1 A\Lambda_1\vdash C \quad g_2{:}\Delta_2 C\Lambda_2\vdash B}{g_2\langle g_1\rangle{:}\Delta A\Lambda\vdash B}}{g_2\langle g_1\rangle\langle f\rangle{:}\Delta\Gamma\Lambda\vdash B}$$

Onda $g_2\langle g_1\rangle\langle f\rangle \geqslant_{M3} g_2\langle g_1\langle f\rangle\rangle$, na osnovu indukcijske pretpostavke $g_1\langle f\rangle \geqslant h_{1cf}$, h_{1cf} ima samo nevažna sečenja i $g_2\langle h_{1cf}\rangle$ je nevažno sečenje.

Analogno je kada formula sečenja pripada tipu terma g_2, samo se onda umesto jednakosti *M3* koristi *M4*.

<u>Treći slučaj:</u> lr(A)>1, odnosno r(A)>2.

1. Poslednje pravilo terma f je ili eliminacija ili slabljenje ili kontrakcija.
   Postupa se analogno kao u trećem slučaju dokaza glavne leme o eliminaciji sečenja u $\mathcal{G}'$.
2. Poslednje pravilo terma f je nevažno sečenje $f_2\langle f_1\rangle$ čija formula sečenja ne pripada prošlosti formule sečenja $g\langle f\rangle$.

$$\dfrac{\dfrac{f_1{:}\Gamma_1\vdash C \quad f_2{:}C\Gamma_2\vdash A}{f_2\langle f_1\rangle{:}\Gamma\vdash A} \quad g{:}\Delta A\Lambda\vdash B}{g\langle f_2\langle f_1\rangle\rangle{:}\Delta\Gamma\Lambda\vdash B}$$

Onda $g\langle f_2\langle f_1\rangle\rangle \geqslant_{M3} g\langle f_2\rangle\langle f_1\rangle$ na osnovu indukcijske pretpostavke $g\langle f_2\rangle \geqslant h_{1cf}$, h_{1cf} ima samo nevažna sečenja i $h_{1cf}\langle f_1\rangle$ nevažno sečenje.

3. Poslednje pravilo terma f je nevažno sečenje $f_2\langle f_1\rangle$ čija formula sečenja pripada prošlosti formule sečenja $g\langle f\rangle$.

3.1. Sečenje $f_2\langle f_1\rangle$ je tipa L.

$$\dfrac{\dfrac{f_1{:}\Gamma_1\vdash C \quad f_2{:}C\Gamma_2\vdash A}{f_2\langle f_1\rangle{:}\Gamma\vdash A} \quad g{:}\Delta A\Lambda\vdash B}{g\langle f_2\langle f_1\rangle\rangle{:}\Delta\Gamma\Lambda\vdash B}$$

Onda $g\langle f_2\langle f_1\rangle\rangle \geqslant_{M3} g\langle f_2\rangle\langle f_1\rangle$ na osnovu indukcijske pretpostavke $g\langle f_2\rangle \geqslant h_{1cf}$, h_{1cf} ima samo nevažna sečenja i $h_{1cf}\langle f_1\rangle$ je nevažno sečenje.

3.2. Sečenje $f_2\langle f_1\rangle$ je tipa R.
Sada bi analogno kao u drugom slučaju, tačka 3.2 ispitivali koje je poslednje pravilo terma f_1 i imali bi više slučajeva.

Na ovaj način je dokazana lema. **q. e. d.**

Slično kao u slučaju glavne leme o eliminaciji sečenja postoje strategije u dokazu koji smo sad naveli. Na osnovu ove leme mogu se dokazati i sledeće teoreme.

TEOREMA O I-ELIMINACIJI SEČENJA U $\mathcal{G}'$:
Svaki term h iz $\mathcal{G}'$ se icf-redukuje na term h_{icf} iz $\mathcal{G}'$ koji je istog tipa i nema važnih sečenja.

TEOREMA O IL-ELIMINACIJI SEČENJA U $\mathcal{G}'$:
Svaki term h iz $\mathcal{G}'$ se Licf-redukuje na term h_{icf} iz $\mathcal{G}'$ koji je istog tipa i nema važnih sečenja.

TEOREMA O IR-ELIMINACIJI SEČENJA U $\mathcal{G}'$:
Svaki term h iz $\mathcal{G}'$ se Ricf-redukuje na term h_{icf} iz $\mathcal{G}'$ koji je istog tipa i nema važnih sečenja.

3. TEOREMA O NORMALIZACIJI U $\mathcal{ND}$ I TEOREMA O NORMALIZACIJI U $\mathcal{N}$

U ovom delu ćemo ispitivati ekvivalentnost teoreme o normalizaciji u $\mathcal{ND}$ i teoreme o normalizaciji u $\mathcal{N}$. Tu ekvivalentnost treba shvatiti tako da uz pomoć preslikavanja $\mathfrak{p}$ i

$\mathfrak{r}$ koja ih povezuju ustanovimo sledeće: da li na osnovu toga da teorema o normalizaciji važi u $\mathcal{ND}$ možemo da zaključimo da teorema o normalizaciji važi u $\mathcal{N}$ i obrnuto. Rezultat koji budemo dobili biće da teorema o normalizaciji u $\mathcal{ND}$ daje teoremu o normalizaciji samo za neke terme u $\mathcal{N}$. S druge strane teorema o normalizaciji u $\mathcal{N}$ daje teoremu o normalizaciji u $\mathcal{ND}$.

Sledeće dve leme daće nam neka svojstva terama u $\mathcal{ND}$ i $\mathcal{N}$, koja ćemo kasnije koristiti.

LEMA 1: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{N}$.

(1) Ako je f slabo normalan, onda $nf^{tc\Pi}$ normalan term.

(2) Term f je slabo normalan akko f^{tc} normalan term.

(3) Term nf ne može biti slabo normalan.

DOKAZ:

(1) term f je slabo normalan:

pretpostavimo $nf^{tc\Pi}$ ima maksimalan segment, postoji g takav da $nf^{tc\Pi} \rightarrow_{1\text{-}NM} g$.

Lema 5n (poglavlje **III,1.2**): postoji term h takav da $nf \rightarrow_{1\text{-}NM} g$.

Onda $f \rightarrow_{1\text{-}NM} h'$ i nije $f \rightarrow_{1\text{-}NMFT} h'$.

To je nemoguće jer je f slabo normalan term.

Na osnovu definicije normalnosti terma imamo da je $nf^{tc\Pi}$ normalan term u $\mathcal{N}$.

(2)$\Leftarrow$: f^{tc} je normalan term:

pretpostavimo f nije slabo normalan, odnosno f ima maksimlan segment u Π-niti.

Ako dužina=2, onda f ima strogu maksimalnu formulu,

lema 1 (poglavlje **III, 1.2**): postoji g, $f \rightarrow_{1\text{-}NMF} g$,

lema 2 (poglavlje **II, 1**): $f^{tc} \rightarrow_{1\text{-}NMF} h$, ali to je nemoguće jer f^{tc} normalan.

Ako dužina >2, onda f ima maksimalni segment,

lema 2 (poglavlje **III, 1.2**): postoji g, $f \rightarrow_{1\text{-}NMS} g$,

lema 6, lema 8 (poglavlje **II, 1**): f^{tc} ima maksimalan segment,

ali to je nemoguće jer f^{tc} normalan term.

Znači: f je slabo normalan term u $\mathcal{N}$.

$\Rightarrow$: f je slabo normalan term.

Na sličan način kao (1).

(3) u termu nf imamo operacije eliminisanja $\Rightarrow$ ($\wedge$) samo u obliku $\mathbf{I}(h, g, 1_B)$ $(h'(\_/1_B)1_A)$ i oslobođene pretpostavke ovih operacija ne mogu biti (obe) fiktivne. Zato nema slabih maksimalnih formula u nf. Slabe maksimalne formule u f, odnosno nosioci njihovih fiktivnih oslobođenih pretpostavki su jedinice T-nadovezujućih operacija u nf. **q. e. d.**

LEMA 2: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{ND}$. Term f je normalan akko ${}^{1}f$ normalan term.

DOKAZ:

Prvo imamo $f =_{\Pi} {}^{1}f$ i onda ${}^{1}f \in [f^{\Pi}]$.

Drugo važi: ako $f =_{\Pi} g$ onda je f normalan term akko g je normalan term.

Dokaz: g nije normalan, g ima maksimalan segment, postoji g_1 takav da $g \hookrightarrow_{RM} g_1$ i postoji f_1, $g_1 =_{\Pi} f_1$ takav da $f \hookrightarrow_{RM} f_1$. Ali, to je nemoguće jer je f normalan term.

Znači: g je normalan term. Na osnovu toga ${}^{1}f$ je normalan term. **q. e. d.**

Lema 3 i lema 4 pokazuju kako preslikavanja $\mathfrak{r}$ i $\mathfrak{p}$ čuvaju svojstvo nekog terma da ima maksimalan segment.

LEMA 3: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ iz ***ND***.

Ako f ima maksimalan segment, onda $\mathfrak{r}(f)$ ima maksimalan segment neke Π-niti u ***ND***.

DOKAZ:

Term f iz ***ND*** ima maksimalan segment (ili formulu).

Postoji term g takav da ili $f \hookrightarrow_{1\text{-}RMF} g$ ili $f \hookrightarrow_{1\text{-}RMS} g$.

Onda ili postoji h_1 iz ***N***, $\mathfrak{r}(f) \rightarrow_{1\text{-}NMF} h_1$, $h_1^{tc} =_{\Pi} \mathfrak{r}(g)^{tc}$, odnosno $\mathfrak{r}(f)$ ima maksimalnu formulu,

ili $\mathfrak{r}(f) \rightarrow_{1\text{-}NMS} \mathfrak{r}(g)$, odnosno $\mathfrak{r}(f)$ ima maksimalni segment.

Znači: $\mathfrak{r}(f)$ ima maksimalni segment u ***N***. **q. e. d.**

LEMA 4: Neka je $nh^{tc\Pi}$ term tipa $\Gamma \vdash A$ iz ***N***. Ako $nh^{tc\Pi}$ ima maksimalan segment, onda $\mathfrak{p}(nh^{tc\Pi})$ ima maksimalan segment u ***ND***.

DOKAZ:

Ako term $nh^{tc\Pi}$ ima maksimalnu formulu.

Lema 1 (poglavlje **III, 1.2**): $nh^{tc\Pi} \rightarrow_{1\text{-}NMF} g$, $g \equiv ng^{tc\Pi}$.

Posledica 11 (poglavlje **II,1**): $\mathfrak{p}(nh^{tc\Pi}) \hookrightarrow_{m\text{-}RMF} \mathfrak{p}(ng^{tc\Pi})$.

Lema 1 (poglavlje **III, 1.1**): $\mathfrak{p}(nh^{tc\Pi})$ ima maksimalnu formulu.

Ako term $nh^{tc\Pi}$ ima maksimalni segment.

Lema 2 (poglavlje **III, 1.2**): $nh^{tc\Pi} \rightarrow_{1\text{-}NMS} g$.

Kada bi $nh^{tc\Pi} \rightarrow_{1\text{-}NMS\wedge(\Rightarrow)} g$ onda nosilac redukcije, podterm terma $nh^{tc\Pi}$, term f ima uvođenje važne premise druge operacije.

Na primer: $nh^{tc\Pi} \rightarrow_{1\text{-}NMS\wedge 3} g$, $f = \mathbf{I}(f_1{}'f_2, f_3, f_4)$, mora $f_2 = (\_/1_B)1_C$ i $f_4 = 1_D$ za neke B, C, D. Treba term f_2 da sadrži uvođenje $C \equiv F \Rightarrow E$, što je nemoguće.

Znači: $nh^{tc\Pi} \rightarrow_{1\text{-}NMS\vee} g$, $g \equiv ng^{tc\Pi}$.

Lema 17 (poglavlje **II,1**): $\mathfrak{p}(nh^{tc\Pi}) \hookrightarrow_{1\text{-}RMS\vee} \mathfrak{p}(ng^{tc\Pi})$, $\mathfrak{p}(ng^{tc\Pi})$ ima uvođenje važne premise druge operacije.

Lema 3 (poglavlje **III, 1.1**): $\mathfrak{p}(nh^{tc\Pi})$ ima maksimalni segment. **q. e. d.**

*KOMENTAR: Kako smo već rekli na početku preslikavanja $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{p}$ kao veza među **ND** i **N** prenose njihova važna svojstva. Rekli smo da će nam biti najvažniji zadatak teorema o normalizaciji. Taj zadatak možemo podeliti na dva i svaki od njih će biti jedan nivo povezivanja karakteristika **ND** i **N***

*Prvi zadatak je teorema o normalnom obliku u **ND**, **N**. Veza među njima će nam reći da ako u **ND** za neki term f postoji normalan term (zanemarujući način kako smo do njega došli) onda i samo onda za proizvoljan term u **N** važi isto svojstvo.*

Da bi smo to pokazali treba da dokažemo sledeće dve leme.

LEMA 5: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ iz ***ND***.

Ako je f normalan term u ***ND***, onda je $\mathfrak{r}(f)$ normalan term u ***N***.

DOKAZ:

Pretpostavimo: $\mathfrak{r}({}^1f)$ nije normalan term u ***N***.

Onda $\mathfrak{r}({}^1f)$ ima maksimalan segment u ***N***,

lema 4: $\mathfrak{p}(\mathfrak{r}({}^1f))$ ima maksimalan segment u ***ND***, odnosno $\mathfrak{p}(\mathfrak{r}({}^1f))$ nije normalan u ***ND***,

$\mathfrak{p} \circ \mathfrak{r} = \mathbf{1}_{1ND}$: ${}^1f$ nije normalan term u ***ND***,

lema 2: f nije normalan term u ***ND***, što je nemoguće jer f normalan term u ***ND***.

Znači $\mathfrak{r}({}^1f)$ je normalan term u ***N***,

lema 10: (poglavlje **II**, **1**): $\mathbf{r}({}^{1}f) =_{ND} \mathbf{r}(f)$.
Znači, $\mathbf{r}(f)$ je normalan term u $\mathcal{N}$. **q. e. d.**

LEMA 6: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{N}$.

Ako je f slabo normalan term u $\mathcal{N}$, onda je $\mathbf{p}(nf^{tc\Pi})$ normalan term u $\mathcal{ND}$.

DOKAZ:

Pretpostavimo: $\mathbf{p}(nf^{tc\Pi})$ nije normalan term u $\mathcal{ND}$.

Onda $\mathbf{p}(nf^{tc\Pi})$ ima maksimalan segment u $\mathcal{ND}$,
lema 3: $\mathbf{r}(\mathbf{p}(nf^{tc\Pi}))$ ima maksimalan segment u $\mathcal{N}$, odatle $\mathbf{r}(\mathbf{p}(nf^{tc\Pi}))$ nije normalan u $\mathcal{N}$,
$\mathbf{r}^\circ\mathbf{p}=\mathbf{1}_{u\mathcal{N}tc}$: $nf^{tc\Pi}$ ima maksimalan segment u $\mathcal{N}$, $nf^{tc\Pi}$ nije normalan term u $\mathcal{N}$,
lema 1: f nije slabo normalan u $\mathcal{N}$, što je nemoguće jer je f normalan term u $\mathcal{ND}$.

Znači mora da je $\mathbf{p}(nf^{tc\Pi})$ normalan term u $\mathcal{ND}$. **q. e. d.**

Teorema o normalnom obliku u $\mathcal{ND}$.
$\Uparrow\Downarrow$
Teorema o normalnom obliku u $\mathcal{N}$.

DOKAZ:

$\Downarrow$: Neka je f proizvoljan term iz $\mathcal{N}$ tipa $\Gamma \vdash A$.
posmatramo $f^{tc\Pi}$ term tipa $\Gamma' \vdash A$ iz $\mathcal{N}$ i Γ sadrži Γ',
$\mathbf{p}(f^{tc\Pi})$ term tipa $\Gamma' \vdash A$ u sistemu $\mathcal{ND}$.
Teorema o normalnom obliku u $\mathcal{ND}$:
Postoji term f_N tipa $\Gamma'' \vdash A$ u $\mathcal{ND}$ i f_N normalan term, Γ' sadrži Γ''.
Lema 5: $\mathbf{p}(f_N)$ normalan term u $\mathcal{N}$, $\Gamma''\Delta \equiv \Gamma$. Onda $(\_/1_\Delta)\mathbf{p}(f_N)$ normalan term u $\mathcal{N}$ tipa $\Gamma \vdash A$.

$\Uparrow$: Neka je f proizvoljan term iz $\mathcal{ND}$ tipa $\Gamma \vdash A$.
$\mathbf{r}(f)$ term tipa $\Gamma \vdash A$ u $\mathcal{N}$.
Teorema o normalnom obliku u $\mathcal{N}$:
Postoji normalan term f_N tipa $\Gamma \vdash A$, u $\mathcal{N}$.
Lema 1: $nf_N^{tc\Pi}$ normalan term u $\mathcal{N}$, tipa $\Gamma' \vdash A$ i Γ sadrži Γ',
lema 6: $\mathbf{r}(f_N)$ je normalan term tipa $\Gamma' \vdash A$ u $\mathcal{ND}$. **q. e. d.**

KOMENTAR: Drugi zadatak je da utvrdimo da li koraci redukcije koji postoje od terma do normalnog terma u $\mathcal{ND}$ odgovaraju koracima redukcije u $\mathcal{N}$. To je ono više, što tvrdi teorema o normalizaciji u odnosu na teoremu o normalnom obliku.

To ćemo videti u lemama koje slede.

LEMA 7: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{ND}$.

Ako se term f RM-redukuje na term f_N, f_N je normalan term,
onda se term $\mathbf{r}(f)$ NM-redukuje na term g, g je normalan term i $g^{tc} =_{ND} \mathbf{r}(f_N)$.

DOKAZ:

$f \hookrightarrow_{RM} f_N$: postoje $h_1,\dots,h_m$ termi iz $\mathcal{ND}$ takvi da $f \equiv h_1 \hookrightarrow_{1\text{-}RM} h_2 \hookrightarrow_{1\text{-}RM} \dots \hookrightarrow_{1\text{-}RM} h_m \equiv f_N$.
$h_i \hookrightarrow_{1\text{-}RM} h_{i+1}$ znači ili $h_i \hookrightarrow_{1\text{-}RMF} h_{i+1}$ ili $h_i \hookrightarrow_{1\text{-}RMS} h_{i+1}$, $1 \leq i \leq m\text{-}1$.
$h_1 \hookrightarrow_{1\text{-}RMF} h_2$, lema 12 (poglavlje **II,1**): $\mathbf{r}(h_1) \to_{1\text{-}NMF} f_1$, $f_1^{tc} =_{ND} \mathbf{r}(h_2)^{tc} \equiv \mathbf{r}(h_2)$;
$h_1 \hookrightarrow_{1\text{-}RMS} h_2$, lema 13 (poglavlje **II,1**): $\mathbf{r}(h_1) \to_{1\text{-}NMS\vee} \mathbf{r}(h_2)$.

Ako $h_1 \hookrightarrow_{1\text{-}RMF} h_2$ i (1) $h_2 \hookrightarrow_{1\text{-}RMF} h_3$,

onda $\mathbf{r}(h_2) \rightarrow_{1\text{-}NMF} \bar{f}_2$, $\bar{f}_2^{\,tc} =_{ND} \mathbf{r}(h_3)^{tc} \equiv \mathbf{r}(h_3)$ odnosno $f_1^{\,tc} \rightarrow_{1\text{-}NMF} \bar{f}_2$,

lema 5n (poglavlje **II**,**1**): postoji f_2, $f_1 \rightarrow_{1\text{-}NMF} f_2$, $f_2^{\,tc} =_{ND} \mathbf{r}(h_3)^{tc}$.

Znači: $\mathbf{r}(f) \equiv \mathbf{r}(h_1) \rightarrow_{1\text{-}NMF} f_1 \rightarrow_{1\text{-}NMF} f_2$, $f_2^{\,tc} =_{ND} \mathbf{r}(h_3)^{tc}$.

(2) $h_2 \hookrightarrow_{1\text{-}RMS} h_3$,

onda $\mathbf{r}(h_2) \rightarrow_{1\text{-}NMS\vee} \mathbf{r}(h_3)$, odnosno $f_1^{\,tc} \rightarrow_{1\text{-}NMS\vee} \mathbf{r}(h_3)$,

lema 5n (poglavlje **II**,**1**): postoji f_2, $f_1 \rightarrow_{1\text{-}NMS\vee} f_2$, $f_2^{\,tc} =_{ND} \mathbf{r}(h_3)^{tc} \equiv \mathbf{r}(h_3)$.

Znači: $\mathbf{r}(f) \equiv \mathbf{r}(h_1) \rightarrow_{1\text{-}NMF} f_1 \rightarrow_{1\text{-}NMS\vee} f_2$, $f_2^{\,tc} =_{ND} \mathbf{r}(h_3)$.

Ako $h_1 \hookrightarrow_{1\text{-}RMS} h_2$ i (1) $h_2 \hookrightarrow_{1\text{-}RMF} h_3$,

onda $\mathbf{r}(h_2) \rightarrow_{1\text{-}NMF} \bar{f}_2$, $\bar{f}_2^{\,tc} =_{ND} \mathbf{r}(h_3)^{tc} \equiv \mathbf{r}(h_3)$,

znači: $\mathbf{r}(f) \equiv \mathbf{r}(h_1) \rightarrow_{1\text{-}NMS} \mathbf{r}(h_2) \rightarrow_{1\text{-}NMF} \bar{f}_2$, $\bar{f}_2^{\,tc} =_{ND} \mathbf{r}(h_3)^{tc}$.

(2) $h_2 \hookrightarrow_{1\text{-}RMS} h_3$

onda $\mathbf{r}(h_2) \rightarrow_{1\text{-}NMS\vee} \mathbf{r}(h_3)$,

znači: $\mathbf{r}(f) \equiv \mathbf{r}(h_1) \rightarrow_{1\text{-}NMS\vee} \mathbf{r}(h_2) \rightarrow_{1\text{-}NMS\vee} \mathbf{r}(h_3)$.

Na ovaj način

$\mathbf{r}(f) \equiv \mathbf{r}(h_1) \rightarrow_{1\text{-}NM} f_1 \rightarrow_{1\text{-}NM} f_2 \rightarrow_{1\text{-}NM} \cdots \rightarrow_{1\text{-}NM} f_{m-1}$, $\quad f_{m-1}^{\,tc} =_{ND} \mathbf{r}(h_m)^{tc} \equiv \mathbf{r}(h_m) \equiv \mathbf{r}(f_N)$.

Lema 5: $\mathbf{r}(f_N)$ je normalan term u $\mathcal{N}$, znači $f_{m-1}^{\,tc}$ je normalan term u $\mathcal{N}$.

Lema 1: f_{m-1} je slabo normalan term u $\mathcal{N}$, lema nM(poglavlje **II**,**1**): $n\, f_{m-1} \equiv f_{m-1}$.

Znači: $g \equiv f_{m-1}$ i g je normalan term u $\mathcal{N}$. **q. e. d.**

LEMA 8: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{N}$.

Ako se $nf^{tc\Pi}$ NM-redukuje na f_N i f_N je normalan term i svaka od tih redukcija je povezana sa nekim maksimalnim segmentom,

onda se $\mathbf{p}(nf^{tc\Pi})$ RM-redukuje na g i $g \equiv \mathbf{p}(nf_N^{\,tc\Pi}) \equiv \mathbf{p}(f_N^{\,tc\Pi})$.

DOKAZ:

$nf^{tc\Pi} \rightarrow_{NM} f_N$: postoje $h_1,\dots,h_m$ takvi da $nf^{tc\Pi} \equiv h_1 \rightarrow_{1\text{-}NM} h_2 \rightarrow_{1\text{-}NM} \cdots \rightarrow_{1\text{-}NM} h_m \equiv f_N$.

$h_i \rightarrow_{NM} h_{i+1}$: kao u dokazu leme 4: ili $h_i \rightarrow_{NMF} h_{i+1}$ ili $h_i \rightarrow_{NMS\vee} h_{i+1}$, $1 \le i \le m\text{-}1$.

$h_1 \rightarrow_{1\text{-}NMF} h_2$, posledica 11 (poglavlje **II**,**1**): $\mathbf{p}(h_1) \hookrightarrow_{1\text{-}RMF} \mathbf{p}(h_2^{\,tc\Pi})$,

$h_1 \rightarrow_{1\text{-}NMS\vee} h_2$, lema 17 (poglavlje **II**,**1**): $\mathbf{p}(h_1) \hookrightarrow_{1\text{-}RMS} \mathbf{p}(h_2^{\,tc\Pi})$.

Ako $h_1 \rightarrow_{1\text{-}NMF} h_2$ i (1) $h_2 \rightarrow_{1\text{-}NMF} h_3$

onda $\mathbf{p}(nh_2^{\,tc\Pi}) \hookrightarrow_{1\text{-}RMF} \mathbf{p}(nh_3^{\,tc\Pi})$,

znači: $\mathbf{p}(nf^{tc\Pi}) \equiv \mathbf{p}(h_1) \equiv \mathbf{p}(nh_1^{\,tc\Pi}) \hookrightarrow_{1\text{-}RMF} \mathbf{p}(nh_2^{\,tc\Pi}) \hookrightarrow_{1\text{-}RMF} \mathbf{p}(nh_3^{\,tc\Pi})$.

(2) $h_2 \rightarrow_{1\text{-}NMS\vee} h_3$

onda $\mathbf{p}(nh_2^{\,tc\Pi}) \hookrightarrow_{1\text{-}RMS} \mathbf{p}(nh_3^{\,tc\Pi})$,

znači: $\mathbf{p}(nf^{tc\Pi}) \equiv \mathbf{p}(h_1) \equiv \mathbf{p}(nh_1^{\,tc\Pi}) \hookrightarrow_{1\text{-}RMF} \mathbf{p}(nh_2^{\,tc\Pi}) \hookrightarrow_{1\text{-}RMS} \mathbf{p}(nh_3^{\,tc\Pi})$.

Ako $h_1 \rightarrow_{1\text{-}NMS\vee} h_2$ i (1) $h_2 \rightarrow_{1\text{-}NMF} h_3$

onda $\mathbf{p}(nh_2^{\,tc\Pi}) \hookrightarrow_{1\text{-}RMF} \mathbf{p}(nh_3^{\,tc\Pi})$,

znači: $\mathbf{p}(nf^{tc\Pi}) \equiv \mathbf{p}(h_1) \equiv \mathbf{p}(nh_1^{\,tc\Pi}) \hookrightarrow_{1\text{-}RMS} \mathbf{p}(nh_2^{\,tc\Pi}) \hookrightarrow_{1\text{-}RMF} \mathbf{p}(nh_3^{\,tc\Pi})$.

(2) $h_2 \rightarrow_{1\text{-}NMS\vee} h_3$

onda $\mathbf{p}(nh_2^{\,tc\Pi}) \hookrightarrow_{1\text{-}RMS} \mathbf{p}(nh_3^{\,tc\Pi})$,

znači: $\mathbf{p}(nf^{tc\Pi}) \equiv \mathbf{p}(h_1) \equiv \mathbf{p}(nh_1^{\,tc\Pi}) \hookrightarrow_{1\text{-}RMS} \mathbf{p}(nh_2^{\,tc\Pi}) \hookrightarrow_{1\text{-}RMS} \mathbf{p}(nh_3^{\,tc\Pi})$.

Znači: $\mathbf{p}(nf^{tc\Pi})$ se RM-redukuje na $\mathbf{p}(nh_m^{\,tc\Pi}) \equiv \mathbf{p}(f_N^{\,tc\Pi})$.

Lema 6: ako je f_N normalan term onda je $\mathbf{p}(f_N^{\,tc\Pi})$ normalan term u $\mathcal{ND}$. **q. e. d.**

Pre nego što uporedimo teoreme o normalizaciji u $\mathcal{ND}$ i $\mathcal{N}$ dokazaćemo dve teoreme, koje će nam biti potrebne za to.

TEOREMA 1: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{ND}$.

Ako se term ${}^1f$ RM-redukuje na term f_N i f_N je normalan term,
onda se term f RM-redukuje na term g i g je normalan term, $g =_\Pi f_N$.

DOKAZ:

${}^1f \hookrightarrow_{RM} f_N$: postoje $h_1,\dots,h_m$ takvi da ${}^1f \equiv h_1 \hookrightarrow_{1\text{-}RM} h_2 \hookrightarrow_{1\text{-}RM} \cdots \hookrightarrow_{1\text{-}RM} h_m \equiv f_N$.

${}^1f \hookrightarrow_{1\text{-}RM} h_2$ lema 1(poglavlje **I,1**): postoji g_2, $g_2 =_\Pi h_2$, $f \hookrightarrow_{1\text{-}RM} g_2$;

$h_2 \hookrightarrow_{1\text{-}RM} h_3$ lema 1(poglavlje **I,1**): postoji g_3, $g_3 =_\Pi h_3$, $g_2 \hookrightarrow_{1\text{-}RM} g_3$.

• • •

Znači $f \equiv h_1 \hookrightarrow_{1\text{-}RM} g_2 \hookrightarrow_{1\text{-}RM} \cdots \hookrightarrow_{1\text{-}RM} g_m$, $g_m =_\Pi f_N$, f_N je normalan term.

Lema 2: g je normalan term u $\mathcal{ND}$. **q. e. d.**

TEOREMA 2: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{N}$.

Ako se term $nf^{tc\Pi}$ NM-redukuje na term f_N i f_N je normalan term,
onda se nf NM-redukuje na term g i $f_N{}^{tc} = g^{tc}$.

DOKAZ:

$nf^{tc\Pi} \to_{NM} f_N$: postoje $h_1,\dots,h_m$ takvi da $nf^{tc\Pi} \equiv h_1 \to_{1\text{-}NM} h_2 \to_{1\text{-}NM} \cdots \to_{1\text{-}NM} h_m \equiv f_N$.

$nf^{tc\Pi} \to_{1\text{-}NM} h_2$ lema 5n (poglavlje **II,1**): postoji g_2 takav da $nf \to_{1\text{-}NM} g_2$, i $h_2{}^{tc} =_{ND} g_2{}^{tc}$;

$h_2 \to_{1\text{-}NM} h_3$ lema 2, lema 6, lema 8 (poglavlje **II,1**): postoji $\bar{h}_3$, $h_2{}^{tc} \to_{1\text{-}NM} \bar{h}_3$,
odnosno $g_2{}^{tc} \to_{1\text{-}NM} \bar{h}_3$,
lema 5n (poglavlje **II,1**): postoji g_3, $g_2 \to_{1\text{-}NM} g_3$, $g_3{}^{tc} =_{ND} \bar{h}_3{}^{tc}$ i $\bar{h}_3{}^{tc} =_{ND} h_3{}^{tc}$.
Znači $nf \to_{1\text{-}NM} g_2 \to_{1\text{-}NM} g_3$ i $g_3{}^{tc} =_{ND} h_3{}^{tc}$.

• • •

$nf \to_{1\text{-}NM} g_2 \to_{1\text{-}NM} \cdots \to_{1\text{-}NM} g_{m-1}$ i $g_{m-1}{}^{tc} =_{ND} h_{m-1}{}^{tc}$,
odnosno, $nf \to_{1\text{-}NM} g_2 \to_{1\text{-}NM} \cdots \to_{1\text{-}NM} g_{m-1} \to_{1\text{-}NM} g$ i $g^{tc} =_{ND} f_N{}^{tc}$, f_N je normalan term.
Lema 1: $f_N{}^{tc}$ je normalan term, odnosno g^{tc} je normalan term.
Lema 1: g je normalan term u $\mathcal{N}$. **q. e. d.**

Teorema o normalizciji u $\mathcal{ND}$.

$\Uparrow$ $\Downarrow$

Teorema o normalizaciji u $\mathcal{N}$.

DOKAZ:

$\Downarrow$: nf proizvoljan term iz $\mathcal{N}$.
$nf^{tc\Pi}$ term iz $\mathcal{N}$, $\mathbf{r}: {}^1\mathcal{ND} \to n\mathcal{N}^{tc\Pi}$ je NA preslikavanje,
postoji ${}^1g$ iz ${}^1\mathcal{ND}$, $\mathbf{r}({}^1g) = nf^{tc\Pi}$.
Teorema o normalizciji u $\mathcal{ND}$:
${}^1g$ se RM-redukuje na g_N, g_N je normalan term.
Lema 7: $\mathbf{r}({}^1g)$ se NM-redukuje na g_1, $g_1{}^{tc} =_{ND} \mathbf{r}(g_N)$, g_1 normalan term.
To znači $nf^{tc\Pi}$ se NM-redukuje na normalan term g_1,
teorema 2: nf se NM-redukuje na term g_2, g_2 je normalan term i $g_1{}^{tc} =_{ND} g_2{}^{tc}$.

$\Uparrow$: f proizvoljan term iz $\mathcal{ND}$.
${}^1f$ term iz $\mathcal{ND}$, $\mathbf{p}: n\mathcal{N}^{tc\Pi} \to {}^1\mathcal{ND}$ je NA preslikavanje,
postoji $ng^{tc\Pi}$ iz $n\mathcal{N}^{tc\Pi}$ $\mathbf{p}(ng^{tc\Pi}) = {}^1f$.

Teorema o normalizciji u $\mathcal{N}$:
$ng^{lc\Pi}$ se NM-redukuje na f_N, f_N je normalan term.
Lema 8: $\mathfrak{p}(ng^{lc\Pi})$ se RM-redukuje na term f_1, $f_1 \equiv \mathfrak{p}(f_N{}^{lc\Pi})$, f_1 je normalan term,
odnosno ${}^1f$ se RM-redukuje na normalan term, f_1,
teorema 1: f se RM-redukuje na f_2, f_2 je normalan term i $f_1 =_\Pi f_2$.

KOMENTAR: Teorema o normalizaciji u $\mathcal{ND}$ daje teoremu o slaboj normalizaciji za nd-terme u $\mathcal{N}$. S druge strane iz teoreme o normalizaciji u $\mathcal{N}$ dobijamo teoremu o normalizaciji u $\mathcal{ND}$.

4. TEOREMA O G-NORMALIZACIJI U $\mathcal{N}'$ I TEOREMA O ELIMINACIJI SEČENJA U $\mathcal{G}'$

U narednim lemama pokazaćemo neke osobine terama iz $\mathcal{N}'$ i $\mathcal{G}'$ koje će nam biti potrebne da uspostavimo vezu između gore pomenutih teorema.

LEMA 1: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{N}'$.
Term ${}^1f$ se G-redukuje na term h akko se term f G-redukuje na term h.

DOKAZ:
$\Rightarrow$: ako ${}^1f$ se G-redukuje na term h onda postoje $h_1,\dots,h_m$ iz $\mathcal{N}'$ takvi da
${}^1f \equiv h_1 \rightarrow_{1\text{-}GM} h_2 \rightarrow_{1\text{-}GM} \dots \rightarrow_{1\text{-}GM} h_m \equiv h$. Važi $f =_{ND} {}^1f$ i na osnovu definicije $\rightarrow_{1\text{-}GM}$ imamo:
${}^1f \rightarrow_{1\text{-}GM} h_2 \rightarrow_{1\text{-}GM} \dots \rightarrow_{1\text{-}GM} h_m \equiv h$.
znači, term f se G-redukuje na term h.
$\Leftarrow$: na potpuno isti način kao $\Rightarrow$. **q. e. d.**

LEMA 2: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{G}'$.
Term f^1 se Rcf-redukuje (Lcf-redukuje) na term h akko
term f se Rcf-redukuje (Lcf-redukuje) na term h'.

DOKAZ:
$\Uparrow$: Imamo $f \equiv h_1 >_{1R} h_2 >_{1R} \dots >_{1R} h_m \equiv h'$, jer se f Rcf- redukuje na term h'.
Term f ima k operacija eliminacije pa, $f^1 \equiv g_1 >_{1M1} g_2 >_{1M1} \dots >_{1M1} g_{k+1} \equiv f$.
Znači, $f^1 \equiv g_1 >_{1M1} g_2 >_{1M1} \dots >_{1M1} g_{k+1} \equiv f \equiv h_1 >_{1R} h_2 >_{1R} \dots >_{1R} h_m \equiv h'$.
$\Downarrow$: Imamo $f^1 \equiv g_1 >_{1R} g_2 >_{1R} \dots >_{1R} g_m \equiv h$, jer se f^1 Rcf- redukuje na term h.
Ako je $g_i >_{1R} g_{i+1}$, $1 \le i < m$ i sečenje na koje se odnosi redukcija nije sa jedinicom po kojoj se razlikuju f i f^1 onda, $g_i >_{1R} g_{i+1}$ postoji u nizu redukcija terma f.
Ako je $g_i >_{1R} g_{i+1}$, $1 \le i < m$ i sečenje na koje se odnosi redukcija je sa jedinicom po kojoj se razlikuju f i f^1 onda, korak $g_i >_{1R} g_{i+1}$ ne postoji u nizu redukcija terma f.
Znači: $f \equiv h_1 >_{1R} h_2 >_{1R} \dots >_{1R} h_k$, $k \le m$ i $h_k{}^1 = h$.
Potpuno isto se dokazuje za Lcf-redukcije. **q. e. d.**

TEOREMA: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{G}'$.
Term f je term bez važnih sečenja u $\mathcal{G}'$ akko $\mathfrak{n}(f)$ G-normalan term u $\mathcal{N}'$.

DOKAZ:

$\Rightarrow$: f je term bez važnih sečenja u $\mathcal{G}'$.

Dokazaćemo da je $\mathbf{n}(f)$ G-normalan term u $\mathcal{N}'$ indukcijom po dužini terma f, $l(f)$, što je ustvari broj operacija u termu f.

(I) jednostavno je ako je ili $f=O(f_1)$ ili $f=O(f_1, f_2)$, gde je O neko pravilo različito od sečenja. Važi $l(f_1) < l(f)$ i $l(f_2) < l(f)$, pa na osnovu idukcijske pretpostavke $\mathbf{n}(f_1)$, $\mathbf{n}(f_2)$ G-normalni termi u $\mathcal{N}'$.

Znači ili $O(\mathbf{n}(f_1))$ ili $f=O(\mathbf{n}(f_1),\mathbf{n}(f_2))$ G-normalan term u $\mathcal{N}'$.

(II) ako je $f=f_2\langle f_1 \rangle$ nevažno sečenje u $\mathcal{G}'$.

Važi $l(f_1) < l(f)$ i $l(f_2) < l(f)$ pa na osnovu idukcijske pretpostavke $\mathbf{n}(f_1)$, $\mathbf{n}(f_2)$ G-termi u $\mathcal{N}'$ i $\mathbf{n}(f)=\mathbf{n}(f_2\langle f_1\rangle)=(1_A/\mathbf{n}(f_1))\mathbf{n}(f_2)$.

Pitanje je da li se ovim nadovezivanjem pravi maksimalan segment u termu $\mathbf{n}(f)$?

1. 1_A nije podvučena jedinica:

Ako je A atomska formula, odmah $\mathbf{n}(f)$ je G-normalan term u $\mathcal{N}'$.

Ako A nije atomska formula. Pretpostavimo da u $\mathbf{n}(f)$ postoji maksimalan (ili G-maksimalan) segment. Zbog osobina terama $\mathbf{n}(f_1)$, $\mathbf{n}(f_2)$ taj segment čine formule A. To znači da u $\mathbf{n}(f_1)$ postoji uvođenje formule A, a u termu $\mathbf{n}(f_2)$ eliminacija. To bi značilo da A^{f_1} ima lošu prošlost i A^{f_2} ima lošu prošlost, odnosno $f_2\langle f_1\rangle$ je važno sečenje. To je nemoguće jer je pretpostavka da je $f_2\langle f_1 \rangle$ nevažno sečenje.

2. 1_A podvučena jedinica:

Ako bi postojao maksimalan segment u niti koja se završava formulom iz 1_A onda bi on postojao i u $\mathbf{n}(f_1)$ što je nemoguće jer je on G-normalan.

Ako bi postojao G-maksimalan segment kome pripada formula iz 1_A to bi značilo da u f_1 postoji uvođenje formule A, a u termu f_2 slabljenje. To je nemoguće jer je pretpostavka da je $f_2\langle f_1 \rangle$ nevažno sečenje.

Znači: $\mathbf{n}(f)$ je G-normalan term u $\mathcal{N}'$.

$\Leftarrow$: $\mathbf{n}(f)$ je G-normalan term u $\mathcal{N}'$.

Dokazaćemo da je term f bez važnih sečenja u $\mathcal{G}'$ indukcijom po dužini terma f, $l(f)$.

(I) Ako poslednje pravilo terma f nije sečenje.

Onda je f oblika ili $O(h)$ ili $O(h, g)$ i O nije sečenje.

Imamo ili $\mathbf{n}(f)= O^n(\mathbf{n}(h))$ ili $\mathbf{n}(f)= O^n(\mathbf{n}(h), \mathbf{n}(g))$

Moraju $\mathbf{n}(h)$ i $\mathbf{n}(g)$ biti G-normalni jer u suprotnom $\mathbf{n}(f)$ ne bi bio G-normalan.

Na osnovu indukcijske pretpostavke h, g termi bez važnih sečenja.

Znači: f je term bez važnih sečenja.

(II) Ako je poslednje pravilo terma f sečenje, $f=g\langle h \rangle$.

Tada $\mathbf{n}(f)=(1_A/\mathbf{n}(h))\mathbf{n}(g)$ u $\mathcal{N}'$.

Termi $\mathbf{n}(h)$, $\mathbf{n}(g)$, su G-normalni i na osnovu indukcijske pretpostavke termi h i g su bez važnih sečenja.

Ako je A atomska formula, odmah f bez važnih sečenja.

Ako A nije atomska formula imamo dva slučaja:

1. 1_A nije podvučena jedinica.

Kad bi $g\langle h \rangle$ bilo važno sečenje onda bi $\mathbf{n}(f)$ imao maksimalan segment, a to je nemoguće, jer je $\mathbf{n}(f)$ G-normalan term.

2. 1_A je podvučena jedinica.

Kad bi $g\langle h \rangle$ bilo važno sečenje onda bi $\mathbf{n}(f)$ imao G-maksimalan segment, a to je nemoguće, jer je $\mathbf{n}(f)$ G-normalan term.

Znači: $g\langle h \rangle$ je term bez važnih sečenja u $\mathcal{G}'$. q. e. d.

POSLEDICA: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{N}'$.

Term f je G-normalan u $\mathcal{N}'$ akko $\mathbf{s}(f)$ je term bez važnih sečenja u $\mathcal{G}'$.

VEZA

teoreme o G-normalizaciji u $\mathcal{N}'$

I

teoreme o R-eliminaciji sečenja u $\mathcal{G}'$

$\downarrow$: Neka je f proizvoljan term iz $\mathcal{G}'$.

Teorema o G-normalizaciji u $\mathcal{N}'$:

Term $\mathbf{n}(f)$ se G-redukuje na term g_N i g_N je G-normalan term u $\mathcal{N}'$.

Odnosno, postoje $g_1,\dots,g_m$ takvi da $\mathbf{n}(f)\equiv g_1 \rightarrow_{1\text{-}GM} g_2 \rightarrow_{1\text{-}GM} \cdots \rightarrow_{1\text{-}GM} g_m \equiv g_N$.

$g_i \rightarrow_{1\text{-}GM} g_{i+1},\ 1\leq i<m$ znači ili $g_i \rightarrow_{1\text{-}GMF} g_{i+1}$ ili $g_i \rightarrow_{1\text{-}GMS} g_{i+1}$ ili $g_i =_{ND} g_{i+1}$.

Lema 1, lema 2 (poglavje **II**, 3): ili $\mathbf{s}(g_i) >=_{\beta,N} \mathbf{s}(g_{i+1})$ ili $\mathbf{s}(g_i) >=_{Max.Red,N,\ CTMax.Red} \mathbf{s}(g_{i+1})$

ili $\mathbf{s}(g_i) >_{CUTTO} \mathbf{s}(g_{i+1})$.

$g_1 \rightarrow_{1\text{-}GM} g_2$: Imamo $\mathbf{s}(g_1) \equiv \mathbf{s}(h_{11}) \geqslant_{1R} \mathbf{s}(h_{12}) \geqslant_{1R} \cdots \geqslant_{1R} \mathbf{s}(h_{1n}) \equiv \mathbf{s}(g_2)$.

• • •

$g_{m-1} \rightarrow_{1\text{-}GM} g_m$: Imamo $\mathbf{s}(g_{m-1}) \equiv \mathbf{s}(h_{m-11}) \geqslant_{1R} \mathbf{s}(h_{m-12}) \geqslant_{1R} \cdots \geqslant_{1R} \mathbf{s}(h_{m-1k}) \equiv \mathbf{s}(g_m)$.

Znači postoji prirodan broj n+...+k i

$\mathbf{s}(g_1) \equiv \mathbf{s}(h_{11}) \geqslant_{1R} \cdots \geqslant_{1R} \mathbf{s}(h_{1n}) \equiv \mathbf{s}(g_2) \geqslant_{1R} \cdots \geqslant_{1R} \mathbf{s}(g_{m-1}) \equiv \mathbf{s}(h_{m-11}) \geqslant_{1R} \cdots \geqslant_{1R} \mathbf{s}(h_{m-1k}) \equiv \mathbf{s}(g_m)$ i

$\mathbf{s}(g_m) \equiv \mathbf{s}(g_N)$.

Imamo $\mathbf{s}(g_1) \equiv \mathbf{s}(\mathbf{n}(f)) \equiv f^1$ i $\mathbf{s}(g_N)$ je term bez važnih sečenja u $\mathcal{G}'$.

Znači: f^1 se Rcf-redukuje na term $\mathbf{s}(g_N)$ i $\mathbf{s}(g_N)$ je term bez važnih sečenja u $\mathcal{G}'$.

Lema 2: f se Rcf -redukuje na term f_{cf} i $f_{cf}^{\,1} = \mathbf{s}(g_N)$, f_{cf} je term bez važnih sečenja u $\mathcal{G}'$.

$\uparrow$: Neka je f proizvoljan term iz $\mathcal{N}'$.

Teorema o R-eliminaciji sečenja u $\mathcal{G}'$:

Term $\mathbf{s}(f)$ se Rcf-redukuje na term g_{cf} i g_{cf} je term bez sečenja u $\mathcal{G}'$.

Imamo $\mathbf{s}(f) \equiv h_1 \geqslant_{1R} h_2 \geqslant_{1R} \cdots \geqslant_{1R} h_n \equiv g_{cf}$.

$h_i \geqslant_{1R} h_{i+1},\ 1\leq i<n$ znači ili $h_i \geqslant_{1N} h_{i+1}$ ili $h_i \geqslant_{1\beta} h_{i+1}$ ili $h_i \geqslant_{1\text{-}Max.Red.} h_{i+1}$.

Važna lema, lema 3, lema 4 (poglavje **II**, 3): ili $\mathbf{n}(h_i) =_{ND} \mathbf{n}(h_{i+1})$ ili $\mathbf{n}(h_i) \rightarrow_{1\text{-}GMF} \mathbf{n}(h_{i+1})$

ili $\mathbf{n}(h_i) \rightarrow_{1\text{-}GMS} \mathbf{n}(h_{i+1})$.

Na osnovu ovog imamo $\mathbf{n}(\mathbf{s}(f)) = {}^1f$, ${}^1f$ se G-redukuje na $\mathbf{n}(g_{cf})$ i g_{cf} je term bez sečenja u $\mathcal{G}'$.

Teorema: $\mathbf{n}(g_{cf})$ je G-normalan term u $\mathcal{N}'$.

Lema 1: term f se G-redukuje na term f_N i $f_N = \mathbf{n}(g_{cf})$, je G-normalan term u $\mathcal{N}'$. q. e. d.

Na isti način se pokazuje sledeća ekvivalentnost:

Teorema o G-normalizaciji u $\mathcal{N}'$.

$\Uparrow \quad \Downarrow$

Teorema o IR-eliminaciji sečenja u $\mathcal{G}'$.

KOMENTAR: Teorema o G-normalizaciji u $\mathcal{N}'$ daje teoremu o eliminaciji važnih sečenja i to desnim penjanjem. S druge strane teorema o IR-eliminaciji sečenja u $\mathcal{G}'$ daje teoremu o G-normalizaciji u $\mathcal{N}'$.

PROŠIRENA NORMALIZACIJA I ATOMIZACIJA

U radu "Natural deduction" Pravic je definisao pojam staze u nekom izvodu, a zatim je pokazao jednu lepu osobinu normalnih izvoda sistema prirodne dedukcije: u proizvoljnoj stazi normalnog izvoda postoji segment takav da svi segmenti koji mu prethode su zaključci operacija eliminacija i svi koji slede posle njega su pretpostavke uvođenja. U normalnom izvodu su razgraničene eliminacije veznika i uvođenje, pa možemo reći da u tom izvodu prvo imamo sve eliminacije, a zatim sva uvođenja. Nakon te osobine sledi njegov zahtev da segment koji je granica između eliminacija i uvođenja bude sastavljen od atomskih formula. Iz tog razloga on definiše redukcije koje formulu središnjeg segmenta dovode do atomske. Definicija proširenog normalnog terma bi bila da je to term koji je je normalan i čiji je središnji sekvent svake staze atomski. Završetak je da u sistemu prirodne dedukcije važi teorema o proširenoj normalizaciji.

Slične pojmove kao u sistemu prirodne dedukcije definisaćemo u sistemima ***ND***, ***N***, ***N'***. Redukcijama i jednakostima koje važe u ***ND***, ***N***, ***N'*** dodaćemo nove redukcije i jednakosti i posmatrati parcijalne algebre ***ND-min***, ***N-min***, ***N'-min***. Dokazaćemo da u njima važi teorema o proširenoj normalizaciji.

S druge strane, u sistemima ***G'***, ***G*** atomizacija srednjeg dela iz ***N'*** odgovara atomizaciji jedinica sa vrha drveta (onih od kojih počinjemo pri formiranju) terma. Interesantno je da prisustvo raznih vrsta sečenja u termu ograničava koje jedinice u njemu možemo atomizovati a da ne promenimo vrstu sečenja u tom termu. U sistemu ***N'*** bilo koja atomizacija središnjeg dela ne kvari normalnost tog terma. Redukcije koje povezuju neki term bez sečenja (ili term sa nevažnim sečenjima) sa nekim termom u kome su jedinice atomizovane opisaćemo novim jednakostima koje ćemo dodati na već postojeće u ***G'*** i ***G*** i definisati ***G'***η, ***G***η. Ono što odgovara teoremi o proširenoj normalizaciji iz ***ND-min***, ***N-min***, ***N'-min*** u ***G'***η, ***G***η biće teorema o atomizaciji.

Razlika, na primer, između sistema ***G'*** i ***G*** po atomizaciji terma je jako mala i nebitna pa je nećemo ni navoditi. Daćemo samo one veze ***ND-min*** i ***N-min***, ***N'-min*** i ***G'***η na kojima se važne stvari nijansiraju i razlikuju.

1. ATOMIZACIJA MINIMALNOG SEGMENTA NORMALNOG TERMA U SISTEMU ***ND***

*KOMENTAR: Potsetimo se da je naša definicija normalnog terma u sistemu **ND** različita od Pravicove u "Natural deduction" po tome što naš normalan term može imati zaliha. Definicija staze u normalnom termu sistema **ND**, kao nasleđe navedene razlike nosi razliku u odnosu na definiciju staze kod Pravica. U definiciji staze u **ND** postoji mogućnost da se ona završi važnom premisom operacije* δ.

DEFINICIJA: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ iz sistema ***ND***. Reći ćemo da niz premisa $A_1,\ldots,A_n$ terma f čine **stazu terma**, p, ako:

1. A_1 je pretpostavka terma f koja nije oslobođena pretpostavka neke operacije δ, λ ili nadovezivanja.
2. A_i za svako $i<n$ nije nevažna premisa operacije ι i
(i) A_i nije važna premisa δ ili nadovezivanja, onda A_{i+1} odmah ispod A_i;
(ii) A_i važna premisa δ ili nadovezivanja, onda A_{i+1} oslobođena pretpostavka te operacije (ako postoji).
3. A_n ili nevažna premisa operacije ι ili važna premisa operacije δ ili krajnja formula terma f.

Normalan term sistema ***ND*** ima osobinu da mu je svaka staza koja ima više od jednog segmenta podeljena na deo eliminacija i deo uvođenja.

TEOREMA: Neka je f normalan term tipa $\Gamma \vdash A$ iz sistema ***ND***. Neka je p proizvoljna staza terma f, $p=s_1\ldots s_n$, $n>1$. Postoji segment s_k koji deli stazu p na dva (možda prazna) dela: E_{ND}-deo, I_{ND}-deo za koje važi:
E: svaki segment s_j iz E_{ND}-dela ($j<k$) je važna premisa neke operacije eliminacije i segment s_{j+1} je podsegment segmenta s_j;
M: s_k, $k\neq n$ je premisa neke operacije uvođenja;
I: svaki segment s_j iz I_{ND}-dela ($k<j<n$) je važna premisa neke operacije uvođenja i segment s_j je podsegment segmenta s_{j+1}.
DOKAZ:
Prvo treba pokazati osobinu: da se svaki segment, koji je važna premisa neke operacije eliminacije, pojavljuje na stazi p pre segmenta koji je premisa nekog uvođenja. Ako bi bilo suprotno, onda bi nekoj važnoj premisi eliminacije prethodilo uvođenje; važna premisa eliminacije bi bila zaključak uvođenja, odnosno postojao bi maksimalan segment (formula) što je nemoguće jer je f normalan term.
Znači: važi navedena osobina.
Onda, neka je s prvi segment iz p koji je premisa neke operacije uvođenja. Tada $s\equiv s_k$ i na osnovu pokazane osobine važi E, M, I.

*KOMENTAR: U sistemu **ND** želimo da atomizujemo minimalni segment. Ali, to ćemo uraditi samo na stazama koje se poklapaju sa stazama definisanim na Pravicov način (zvaćemo ih Pravicove staze). Šta bi se desilo kada bi posmatrali stazu terma koja se završava važnom pretpostavkom δ? To znači da je δ oblika δ_{0A}, δ_{0B} ili δ_{0AB}. Onda ta staza ima samo E_{ND}-deo i minimalni segment je ta važna pretpostavka. Ako bi atomizovali važnu pretpostavku operacije δ u tako dobijenom termu imali bi M-segment. Dobro je to što nikako ne bi smo dobili maksimalan segmant jer se nalazimo u E_{ND}-delu staze i u njoj nema uvođenja, odnosno važna premisa operacije δ nije nastala uvođenjem.*
Može se reći da je ovo naš izbor da važne pretpostavke operacije δ kao krajeve staze ostavimo neatomizovane. S druge strane ovo je jedno objašnjenje zašto je Pravic rekao da bi izvodi sa zalihama pravili neke teškoće.

DEFINICIJA: Neka je f normalan term tipa $\Gamma \vdash A$ iz sistema ***ND***. Neka je p staza terma f koju čine segmenti $s_1\ldots s_n$. Segment $s_n\equiv C^1\ldots C^m$ je poslednji segment staze. Ako formula C^m nije važna premisa eliminacije δ onda je staza p **Pravicova staza terma** f.

DEFINICIJA: Neka je f normalan term tipa $\Gamma \vdash A$ iz sistema ***ND***. Neka je p Pravicova staza terma f. Neka je s_k segment te staze iz teoreme koju smo naveli gore. Segment s_k ćemo zvati **minimalni segment staze** p terma f.

DEFINICIJA: ***ND-min*** je ***ND*** sa dodatim **ND-MinS redukcijama**:

$ND\text{-}MinS\wedge$: $h \hookrightarrow \{\pi h, \pi' h\}$, za $h{:}\Gamma \vdash A\wedge B$.

$ND\text{-}MinS\vee$: $h \hookrightarrow \delta(h, {}_{\kappa}1_A, {}_{\kappa'}1_B)$, za $h{:}\Gamma \vdash A\vee B$.

$ND\text{-}MinS\Rightarrow$: $h \hookrightarrow \lambda(\iota(h, 1_A))$, za $h{:}\Gamma \vdash A\Rightarrow B$.

Sada ćemo definisati korake redukcije za atomizaciju minimalnih segmenata normalnih terama u ***ND-min***.

DEFINICIJA: Neka je f normalan term tipa $\Gamma \vdash A$ iz ***ND-min***. Neka je s minimalan segment staze p iz f, $s \equiv C^1 \ldots C^k$. Neka je h podterm terma f takav da je njegov tip $\Delta \vdash C^1$. Ako je g takav term da su f^{Π} i g^{Π} jednaki, samo umesto h u termu g je term h' za koji $h \hookrightarrow h'$ je jedna ND-MinS redukcija, onda kažemo da se f **1-NDmin redukuje** na term g po stazi p.

Staza p je **glavna staza** te redukcije. Staze terma g čije segmente, čine premise i zaključci operacija terma h' su **nove staze** te redukcije. Često ćemo za nove staze redukcije reći da su staze terma g koje odgovaraju stazi p iz terma f.

<u>Oznaka:</u> $f \hookrightarrow_{NDm1} g$.

DEFINICIJA: Neka je f normalan term iz ***ND-min***, g term iz ***ND-min*** takav da postoji prirodan broj m i termi $h_1,\ldots,h_m$ iz ***ND-min*** takvi da

$f \equiv h_1 \hookrightarrow_{NDm1} h_2 \hookrightarrow_{NDm1} \ldots \hookrightarrow_{NDm1} h_m \equiv g$, onda kažemo da se f **NDmin-redukuje** na term g.

<u>Oznaka:</u> $f \hookrightarrow_{NDm} g$.

NDmin koracima redukcije se čuva normalnost terma.

LEMA: Neka je f normalan term iz ***ND-min***. Ako f ima stazu p sa minimalnim segmentom s_{MIN}, čija formula nije atomska, tada postoji term g iz ***ND-min***, $f \hookrightarrow_{NDm1} g$ i g normalan term.

DOKAZ:

Term f je normalan term iz ***ND-min***, $p \equiv s_1 \ldots s_n$, $s_i \equiv s_{MIN}$ minimalni segment staze p, $s_{MIN} \equiv C^1 \ldots C^k$; C^k premisa neke operacije uvođenja (prvog u p) i C nije atomska formula.

Redukcija $\hookrightarrow_{NDm1}$ menja formulu C^1: eliminiše, pa uvodi glavni veznik formule C^1 i na taj način segment koji čini podformula formule C (moguće dva segmenta) postaje minimalan.

Segment s_{i-1} je važna premisa neke operacije eliminacije $s_{i-1} \equiv D^1 \ldots D^l$ i C potformula formule D. Znači, D^l važna premisa operacije eliminacije i C^1 zaključak te operacije.

U zavisnosti od glavnog znaka formule D, term $h{:}\Delta \vdash C^1$ za $f = O(h)$, je oblika:

$\pi(h_1)$, $\pi'(h_1)$, $\iota(h_1, h_2)$, $\delta(h_1, h_2, h_3)$, 1_C a u zavisnosti od glavnog veznika formule C, redukcija $h \hookrightarrow h_1$ ima jedan od oblika:

$h \hookrightarrow_{NDm1} \{\pi h, \pi' h\}$, $A\wedge B \equiv C$; $h \hookrightarrow_{NDm1} \delta(h, {}_{\kappa}1_A, {}_{\kappa'}1_B)$, $A\vee B \equiv C$;

$h \hookrightarrow_{NDm1} \lambda(\iota(h, 1_A))$, $A \Rightarrow B \equiv C$.

Onda: $f \hookrightarrow_1 O(h_1)$, $O(h_1) \equiv g$:

Dobili smo nove staze redukcije:

$p_1^{\wedge} \equiv s'_1 \ldots s'_{i-1} C^1 A C^0 C^2 \ldots C^k s'_{i+1} \ldots s'_n$; $p_2^{\wedge} \equiv s'_1 \ldots s'_{i-1} C^1 B C^0 C^2 \ldots C^k s'_{i+1} \ldots s'_n$.

$p_1^{\vee} \equiv s'_1 \ldots s'_{i-1} C^1 A C^0 C^2 \ldots C^k s'_{i+1} \ldots s'_n$; $p_2^{\vee} \equiv s'_1 \ldots s'_{i-1} C^1 B C^0 C^2 \ldots C^k s'_{i+1} \ldots s'_n$.

$p_1^{\Rightarrow} \equiv s'_1 \ldots s'_{i-1} C^1 B C^0 C^2 \ldots C^k s'_{i+1} \ldots s'_n$; $p_2^{\Rightarrow} \equiv A$, gde su novi minimalni segmenti zatamnjeni.

Na ovaj način dobili smo jedno uvođenje i jednu eliminaciju.

1. Da li posle uvođenja (formiranja C^0) postoji neka elimincija, čija je važna premisa zaključak nekog uvođenja ? Segment $C^0C^2...C^k$ pripada I_{ND}-delu on je kao i svi segmenti tog dela ($s'_{i+1}...s'_n$) zaključak uvođenja i C je potformula tih segmenata.

Znači odgovor je ne.

2. Da li pre eliminisanja (razbijanja C^1) postoji neko uvođenje, čiji zaključak je važna premisa tog eliminisanja? Segmenti $s_1...s_{i-1}$ čine E_{ND}-deo staze p (pa onda $s'_1...s'_{i-1}$ čine E_{ND}-deo staza p_1, p_2) i tu nema formula koje su "pravljene".

Znači odgovor je ne.

Jednom NDm-redukcijom ne narušava se normalnost terma, znači term g, za koji $f \hookrightarrow_{NDm1} g$, je normalan term u ***ND-min***.

q. e. d.

DEFINICIJA: Neka je f normalan term tipa $\Gamma \vdash A$ iz sistema ***ND***. Neka je p proizvoljna staza terma f koja ima minimalni segment $s_{MIN} \equiv C^1...C^k$. Ako je C atomska formula onda je f **proširen normalan term u *ND*, po stazi p.**

Ako je term f proširen normalan u sistemu ***ND*** po proizvoljnoj Pravicovoj stazi terma f onda je f **proširen normalan term** u sistemu ***ND***.

Na osnovu svega ovoga imamo teoreme o proširenom normalnom obliku i proširenoj normalizaciji:

TEOREMA O PROŠIRENOM NORMALNOM OBLIKU U *ND-min*:

Za svaki normalan term f tipa $\Gamma \vdash A$ u ***ND-min*** postoji proširen normalan term g u ***ND-min***, čiji tip je $\Gamma' \vdash A$ i Γ sadrži Γ'.

TEOREMA O PROŠIRENOJ NORMALIZACIJI U *ND-min*:

Svaki normalan term f tipa $\Gamma \vdash A$ u ***ND-min*** se NDm-redukuje na proširen normalan term g iz ***ND-min***.

Teorema o proširenom normalnom obliku u ***ND-min*** je posledica teoreme o proširenoj normalizaciji. Dokaz teoreme o proširenoj normalizaciji je analogan dokazu teoreme o proširenom normalizaciji u ***N-min*** koji ćemo dati u narednom delu.

2. ATOMIZACIJA MINIMALNOG SEGMENTA NORMALNOG TERMA U SISTEMIMA *N* I *N'*

Kao i u slučaju normalizacije tako i o proširenoj normalizaciji paralelno ćemo govoriti u sistemima ***N*** i ***N'*** i gde to bude potrebno naglasićemo razlike.

KOMENTAR: Za razliku od sistema ***ND*** *u sistemima* ***N*** *i* ***N'*** *imamo operacije zamene (tačnije sjedinjavanja i nove pretpostavke) i sve operacije eliminacije su istog oblika. Pojam analogan stazi u* ***ND*** *je linija u* ***N*** *i problem kraja staze sa važnom premisom operacije δ je sada problem linije sa krajem koji je fiktivna oslobođena pretpostavka operacija* **'**, **d(D)**, **I**, *nadovezivanja.*

DEFINICIJA: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ iz sistema $\mathcal{N}$. Reći ćemo da niz premisa $A_1,...,A_n$ terma f čine **liniju terma**, l, ako:

1. A_1 je pretpostavka terma f koja nije oslobođena pretpostavka neke operacije ', **d**, **I** ili nadovezivanja i nije fiktivna pretpostavka terma f.
2. A_i za svako $i<n$ nije nevažna premisa operacije **I**, koja je potformula važne premise; ili fiktivna oslobođena pretpostavka operacije eliminacije ili nadovezivanja:
(i) A_i nije važna premisa eliminacije ili nadovezivanja, onda A_{i+1} odmah ispod A_i;
(ii) A_i važna premisa operacije eliminacije ili nadovezivanja, onda A_{i+1} oslobođena pretpostavka te operacije.
3. A_n ili nevažna premisa operacije **I**, koja je potformula važne premise; ili fiktivna oslobođena pretpostavka operacija eliminisanja ili nadovezivanja; ili krajnja formula terma f.

DEFINICIJA: Svaku fiktivnu pretpostavku nekog terma f tipa $\Gamma \vdash A$ iz sistema $\mathcal{N}$ zovemo **1-linija** tog terma f.

Važi: 1. Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ iz sistema $\mathcal{N}$. Sve formule koje se pojavljuju u drvetu terma f sa desne strane $\vdash$ pripadaju nekoj liniji (liniji ili 1-liniji) tog terma f.

2. Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ iz sistema $\mathcal{N}$. Neka je l jedna linija terma f. Linija l se sastoji od segmenata $s_1...s_k$ koje čine više pojavljivanja iste formule (može biti i jedno).

Svojstvo da linije G-normalnih terama sistema $\mathcal{N}'$ imaju deo eliminisanja i deo uvođenja dokazuje sledeća teorema.

TEOREMA: Neka je f G-normalan term tipa $\Gamma \vdash A$ iz sistema $\mathcal{N}$. Neka je l proizvoljna linija terma f, $l=s_1...s_n$, $n>1$. Postoji segment s_k koji deli liniju l na dva (možda prazna) dela: E_N-deo, I_N-deo za koje važi:
E: svaki segment s_j iz E_N-dela ($j<k$) je važna premisa neke operacije eliminacije i segment s_{j+1} je podsegment segmenta s_j;
M: s_k, $k\neq n$ je premisa neke operacije uvođenja;
I: svaki segment s_j iz I_N-dela ($k<j<n$) je važna premisa neke operacije uvođenja i segment s_j je podsegment segmenta s_{j+1}.

DOKAZ:
Prvo treba pokazati osobinu: da se svaki segment, koji je važna premisa neke operacije eliminacije, pojavljuje na liniji l pre segmenta koji je premisa nekog uvođenja. Ako bi bilo suprotno, onda bi nekoj važnoj premisi eliminacije prethodilo uvođenje; važna premisa eliminacije bi bila zaključak uvođenja, odnosno imali bi maksimalan segment (formulu) što je nemoguće jer je f G-normalan term.
Znači: važi navedena osobina.
Onda, neka je s prvi segment iz l koji je premisa neke operacije uvođenja. Tada $s\equiv s_k$ i na osnovu pokazane osobine važi E, M, I. **q. e. d.**

Treba reći da za normalne terme sistema $\mathcal{N}$ ($\mathcal{N}'$) važi donekle izmenjena teorema koju smo gore naveli za G-normalne terme. Kod normalnih terama osobinu navedenu u teoremi imaju samo linije koje se ne završavaju fiktivnom oslobođenom pretpostavkom nadovezivanja, a ne sve linije normalnog terma.

KOMENTAR: *Od svih linija normalnog terma u sistemu $\mathcal{N}$ samo u nekim (zvaćemo ih Pravicovim linijama) ćemo definisati minimalni segment i atomizovaćemo ga. To su linije koje se ne završavaju fiktivnim oslobođenim pretpostavkama operacije eliminacije ili nadovezivanja.*

U narednim definicijama, lemama, teoremama biće reči o G-normalnim termima iz sistema $\mathcal{N}$. Kako (kao što smo već napomenuli) ovo može da se primeni na G-normalne terme iz $\mathcal{N}'$, tako da to sve važi za normalne terme iz $\mathcal{N}$ odnosno $\mathcal{N}'$. Jer ako je f G-normalan onda f je normalan u $\mathcal{N}$, odnosno $\mathcal{N}'$.

DEFINICIJA: Neka je f G-normalan term tipa $\Gamma \vdash A$ iz sistema $\mathcal{N}$. Neka je l linija terma f koju čine segmenti $s_1 \dots s_n$. Segment $s_n \equiv C^l \dots C^m$ je poslednji segment linije. Ako formula C^m nije fiktivna oslobođena pretpostavka eliminacije, nadovezivanja onda je linija l **Pravicova linija terma** f.

DEFINICIJA: Neka je f G-normalan term tipa $\Gamma \vdash A$ iz sistema $\mathcal{N}$. Neka je l Pravicova linija terma f. Neka je s_k segment te linije iz teoreme koju smo naveli gore. Segment s_k ćemo zvati **minimalni segment linije** l terma f.

Definicija kaže da na dalje kad god budemo govorili o minimalnom segmentu neke linije podrazumevaćemo da je ona Pravicova linija.

KOMENTAR: Postoje još dve mogućnosti rešavanja problema atomizacije minimalnog segmenta. Prvo, promena definicije linije: da se ona završava važnom premisom eliminacije a fiktivne oslobođene pretpostavke ne pripadaju nijednoj liniji, niti čine 1-liniju. Druga mogućnost, atomizovati fiktivne oslobođene pretpostavke tako što nove pretpostavke budu njihove potformule pa se operacijama prave potrebne formule što nije uvek (za veznik $\Rightarrow$) moguće.

DEFINICIJA: ***$\mathcal{N}$-min*** je $\mathcal{N}$ sa dodatim **MinS jednakostima**:

$MinS\wedge$: $h = h'\{1_A, 1_B\}$,	za $h{:}\Gamma \vdash A \wedge B$.
$MinS\vee$: $h = \mathbf{d}(h, {}_{\kappa}1_A, {}_{\kappa'}1_B)$,	za $h{:}\Gamma \vdash A \vee B$.
$MinS\Rightarrow$: $h = (\mathbf{I}(h, 1_A 1_B))^*$,	za $h{:}\Gamma \vdash A \Rightarrow B$.

DEFINICIJA: ***$\mathcal{N}'$-min*** je $\mathcal{N}'$ sa dodatim **MinS jednakostima**:

$MinS\wedge$: $h = h'\{1_A, 1_B\}$,	za $h{:}\Gamma \vdash A \wedge B$.
$MinS\vee'$: $h = \mathbf{D}(h, {}_{\kappa}1_A, {}_{\kappa'}1_B)$,	za $h{:}\Gamma \vdash A \vee B$.
$MinS\Rightarrow$: $h = (\mathbf{I}(h, 1_A 1_B))^*$,	za $h{:}\Gamma \vdash A \Rightarrow B$.

Zbog oblika operacija eliminacije u sistemu $\mathcal{N}$ imamo jednu lepu osobinu minimalnog segmenta linija u normalnom termu iz ***$\mathcal{N}$-min***.

LEMA 1: Neka je f G-normalan term tipa $\Gamma \vdash A$ iz sistema $\mathcal{N}$. Neka je l proizvoljna Pravicova linija terma f i s_{MIN} minimalan segment te linije, $s_{MIN} \equiv C^1 \dots C^n$. Podterm terma f koji ima tip oblika $\Delta \vdash C^1$ je uvek jedinica $1_C{:}C \vdash C^1$.

DOKAZ:

Na osnovu teoreme: $s_{MIN} = s_k$ je premisa uvođenja, a s_{k-1} je važna premisa neke operacije eliminacije i s_k je podsegment segmenta s_{k-1}. To znači: poslednja formula segmenta $s_{k-1} = D^1 \dots D^l$, D^l je važna premisa neke eliminacije i formula C je potformula formule D;

segmenti s_{k-1}, s_k su sa linije l, onda u toj liniji iza D^l sledi C^1:

D^l važna premisa eliminacije,

mora: C^1 oslobođena pretpostavka te eliminacije.

Ako bi jedinica 1_C:$C \vdash C$ bila podvučena onda $s_k \equiv C^1$ i to je kraj linije l. Onda l nije Pravicova i s_k nije minimalan segment.
Znači: traženi term je nepodvučena jedinica, 1_C:$C \vdash C$. **q. e. d.**

Sada ćemo definisati korake redukcije za atomizaciju minimalnih segmenata normalnih terama u ***N-min***.

DEFINICIJA: Neka je f G-normalan term tipa $\Gamma \vdash A$ iz ***N-min***. Neka je s minimalan segment linije l iz f, $s \equiv C^1 \ldots C^k$. Neka je h podterm terma f takav da je njegov tip $\Delta \vdash C^1$ (na osnovu leme 1 to je 1_C). Ako je g takav term da su $N(f)$ i $N(g)$ jednaki samo umesto h u termu g je term h' za koji je $h = h'$ jedna MinS jednakost, onda kažemo da se f **1- Min redukuje** na term g po liniji l.

Linija l je **glavna linija** te redukcije. Linije terma g koje imaju segmente, koje čine premise i zaključci operacija terma h' su **nove linije** te redukcije. Često ćemo reći za nove linije redukcije da su linije terma g koje odgovaraju liniji l iz terma f.
Oznaka: $f \to_{MIN1} g$.

Napomena: na osnovu leme 1 dovoljne su nam MinS-jednakosti samo za jedinice:
1MinS$\wedge$: $1_{A\wedge B} = 1_{A\wedge B}{}'\{1_A, 1_B\}$,
1MinS$\vee$: $1_{A\vee B} = \mathbf{d}(1_{A\vee B}, {}_{\kappa}1_A, {}_{\kappa'}1_B)$,
1MinS$\Rightarrow$: $1_{A\Rightarrow B} = (\mathbf{I}(1_{A\Rightarrow B}, 1_A, 1_B))^*$.

DEFINICIJA: Neka je f G-normalan term iz ***N-min***, g term iz ***N-min*** takav da postoji prirodan broj m i termi $h_1, \ldots, h_m$ iz ***N-min*** takvi da
$f \equiv h_1 \to_{MIN1} h_2 \to_{MIN\,1} \ldots \to_{MIN1} h_m \equiv g$, onda kažemo da se f **Min-redukuje** na term g.
Oznaka: $f \to_{MIN} g$.

Koracima Min-redukcije se čuva normalnost terma.

LEMA 2: Neka je f G-normalan term iz ***N-min***. Ako f ima liniju l sa minimalnim segmentom s_{MIN}, čija formula nije atomska, tada postoji term g iz ***N-min***, $f \to_{MIN1} g$ i g je G-normalan term.
DOKAZ:
Term f je G-normalan term iz ***N-min***, $l \equiv s_1 \ldots s_n$, $s_i \equiv s_{MIN}$ minimalni segment linije l, $s_{MIN} \equiv C^1 \ldots C^k$; C^k premisa neke operacije uvođenja (prvog u l) i C nije atomska formula.
Redukcija $\to_{MIN1}$ menja formulu C^1: eliminiše, pa uvodi glavni veznik formule C^1 i na taj način segment koji čini potformula formule C (moguće dva segmenta) postaje minimalan.
Pitanje je gde se nalazi formula C^1 u drvetu terma f?
$s_i = s_{MIN} \equiv C^1 \ldots C^k$; C^k, $s_{i-1} \equiv E^1 \ldots E^m$ je važna premisa eliminacije,
odnosno E^m važna premisa eliminacije, C je potformula od E i $E^1 \ldots E^{m-1}$ nevažne premise eliminacije ili premise zamene;
$s_{i+1} \equiv U^1 \ldots U^l$ je zaključak uvođenja, odnosno U^1 je zaključak uvođenja, C je potformula od U, $U^2 \ldots U^l$ nevažne premise eliminacije ili premise zamene, U^l je premisa novog uvođenja.
Neka je na primer $A \wedge B \equiv C$ tada dobojamo dve nove linije redukcije:
$l_1{}^\wedge \equiv s'_1 \ldots s'_{i-1}\, C^1 A^1\, A^2\, A^3\, C^0\, C^{00}\, C^2 \ldots C^k s'_{i+1} \ldots s'_n$;
$l_2{}^\wedge \equiv s'_1 \ldots s'_{i-1}\, C^1\, B^1\, B^2\, B^3 C^0\, C^{00} C^2 \ldots C^k s'_{i+1} \ldots s'_n$
i sada je minimalni segment $A^1 A^2 A^3$ u novoj liniji $l_1{}^\wedge$ i dobili smo jedno uvođenje i eliminaciju.
1. Da li posle uvođenja (formiranja C^0) postoji neka elimincija, kojoj je C^0 važna premisa?

Segment $C^0C^{00}C^2...C^k$ pripada I_N-delu on je kao i svi segmenti tog dela $(s'_{i+1}...s'_n)$ zaključak uvođenja i C je potformula njihovih formula. Znači odgovor je ne.
2. Da li pre eliminisanja (razbijanja C^1) postoji neko uvođenje , čiji zaključak je C^1 tog eliminisanja? Segmenti $s_1...s_{i-1}$ čine E_N-deo linije l (pa $s'_1...s'_{i-1}$ čine E_N-deo linija l_1, l_2) i tu nema formula koje su "pravljene".
Znači odgovor je ne.
Dokaz je potpuno isti u slučaju kada je $A \vee B \equiv C$, $A \Rightarrow B \equiv C$.
Jednom Min-redukcijom ne narušava se G-normalnost terma.
Znači term g, za koji $f \rightarrow_{MIN1} g$, je G-normalan term u ***N-min***. **q. e. d.**

Neka je f term sistema ***N***. Neka je l njegova linija i $s_{MIN} \equiv C^1...C^m$ njen minimalni segment. Postoje podtermi terma f h_1 i h_m takvi da $h_1{:}\Delta_1 \vdash C^1$, $h_m{:}\Delta_m \vdash C^m$ i term h_1 je podterm terma h_m. Postavlja se pitanje na koji od terma h_1 ili h_m hoćemo da primenimo MinS jednakost i da atomizujemo formulu C ? Naš izbor je term h_1 (što se vidi iz definicije Min-redukcije).

Šta bi se desilo da smo izabrali term h_m ili bilo koji term $h_i{:}\Delta_i \vdash C^i$, $1 < i \leq m$?

Sačuvalo bi se važno svojstvo Min-redukcije da čuva normalnost terma (lema 2). Interesantno je da bi term sa primenjenom Min-redukcijom na termu $h_i{:}\Delta_i \vdash C^i$, $1 < i \leq m$ bio MS jednakostima povezan sa termom u kome je Min-redukcija primenjena na termu $h_1{:}\Delta_1 \vdash C^1$.

DEFINICIJA: Neka je f G-normalan term tipa $\Gamma \vdash A$ iz sistema ***N***. Neka je l proizvoljna linija terma f koja ima minimalni segment $s_{MIN} \equiv C^1...C^k$. Ako je C atomska formula onda je f **proširen G-normalan term** u sistemu ***N***, **po liniji** l.

Ako je term f prošireno G-normalan u sistemu ***N*** po proizvoljnoj Pravicovoj liniji terma f onda je f **proširen G-normalan term** u sistemu ***N***.

U ***N-min*** (***N'-min***) važi teorema:

TEOREMA O PROŠIRENOM G-NORMALNOM OBLIKU U *N-min*:
Za svaki G-normalan term f tipa $\Gamma \vdash A$ u ***N-min*** postoji proširen G-normalan term istog tipa u ***N-min***.

TEOREMA O PROŠIRENOJ G-NORMALIZACIJI U *N-min*:
Svaki G-normalan term f tipa $\Gamma \vdash A$ u ***N-min*** se Min-redukuje na proširen G-normalan term g iz ***N-min***.
DOKAZ:
Neka je d- najveći stepen minimalnih segmenata koji se pojavljuju u termu f;
br- broj minimalnih segmenata koji su stepena d u termu f.
Teoremu ćemo dokazati indukcijom po paru ⟨d, br⟩ posmatranog terma f.
Neka: l proizvoljna linija terma f, s_{MIN} minimalni segment linije l i d(s_{MIN})=d,

lema 2: postoji term g takav da $f \rightarrow_{MIN1} g$, po liniji l.

Ako term g nema minimalnih segmenata stepena d, onda za d_g prvi parametar iz dvojke terma g važi d_g <d, pa na osnovu indukcijske pretpostavke postoji proširen G-nomalan term h,

takav da $g \rightarrow_{MIN} h$.

Znači: $f \rightarrow_{MIN} h$ i h je proširen G-nomalan term u ***N-min***.

Ako term g ima minimalnih segmenata stepena d, onda d_g=d, ali liniji l odgovaraju nove linije l_1, l_2 u termu g čije minimalne segmente čine potformule formule C odakle term g

ima manje minimalnih segmenata stepena d pa za br_g terma g važi br_g<br. Na osnovu indukcijske pretpostavke postoji proširen G-nomalan term h takav da $g \rightarrow_{MIN} h$.

Znači, $f \rightarrow_{MIN} h$ i h je proširen G-nomalan term u $\mathcal{N}$-min.

3. ATOMIZACIJA JEDINICA U SISTEMU $\mathcal{G}'$

Analogan postupak atomizaciji minimalnog segmenta normalnih terama u sistemu $\mathcal{N}'$ je atomizacija jedinica vrha drveta terma u kome nema sečenja u sistemu $\mathcal{G}'$. Potpuna atomizacija bi bila da sve polazne pretpostavke u drvetu koje su oblika $1_A{:}A \vdash A$ budu takve da je A atomska formula. U prethodnim poglavljima definisali smo nevažna sečenja u termu sistema $\mathcal{G}'$. Ovde ćemo videti kako je povezana atomizacija sa vrstama sečenja koje se pojavljuju u termima čije jedinice hoćemo da atomizujemo. Zato ćemo na početku definisati vrste jedinica u nekom termu sistema $\mathcal{G}'$ koje ćemo posmatrati.

DEFINICIJA: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ iz sistema $\mathcal{G}'$. Neka **Un(T(*f*))** čine sve jedinice koje se pojavljuju u drvetu terma f, koje ćemo razlikovati po formuli kojoj pripadaju i po mestu u drvetu terma f (što govori indeks njene formle).

DEFINICIJA: Neka je $1_A{:}A \vdash A$ jedinica u sistemu $\mathcal{G}'$. Formula A sa leve strane $\vdash$ u jedinici 1_A je **leva formula jedinice** 1_A, a formula A sa desne strane $\vdash$ je **desna formula te jedinice.**

DEFINICIJA: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ iz sistema $\mathcal{G}'$. Ako je $1_{A_j}{:}A_{A_j} \vdash A$ jedinica iz Un(T(*f*)) takva da:

1. njena desna formula i svi njeni naslednici nisu formule sečenja u nekom sečenju tipa L;
2. njena leva formula, svi njeni naslednici i c-naslednici nisu formula sečenja u nekom sečenju tipa R.

Onda 1_{A_j} pripada **Un(*f*).**

Važi: 1. Un(*f*) $\subseteq$Un(T(*f*)).
2. Ako term f nema sečenja, onda Un(*f*)$\equiv$Un(T(*f*)).

DEFINICIJA: $\mathcal{G}'\eta$ je $\mathcal{G}$ sa dodatim η **jednakostima**:

$\eta\wedge.\ \ 1_{A\wedge B}=(\{1_A, 1_B\})^{\mathfrak{f}}.$

$\eta\vee.\ \ 1_{A\vee B}= [_{\kappa}1_A, {}_{\kappa'}1_B].$

$\eta\Rightarrow.\ 1_{A\Rightarrow B}= (1_B[1_A])^{*}.$

Sada ćemo navesti definicije redukcija za atomizaciju jedinica terma.

DEFINICIJA: Neka su f, g termi tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{G}'\eta$. Ako postoje podtermi f_1 od f i g_1 od g takvi da je $f_1 = g_1$ neka η jednakost i za niz pravila P, $f = P(f_1)$, $g=P(g_1)$, tada se **term** f **1-η redukuje** na term g.

<u>Oznaka:</u> $f >_{1\eta} g$.

DEFINICIJA: Neka su f, g termi tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{G}'\eta$. Ako postoji prirodan broj m i termi $h_1,\dots,h_m$ iz $\mathcal{G}'$ takvi da: $f \equiv h_1 >_{1\eta} \dots >_{1\eta} h_m \equiv g$, reći ćemo da se term f **η-redukuje** na term g.
Oznaka: $f >_\eta g$.

DEFINICIJA: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ iz sistema $\mathcal{G}'$. Ako za sve jedinice iz Un(T(f)) važi da su njihove formule atomske onda ćemo za term f reći da je **atomizovan term**.

Sledeće leme će nam koristiti u dokazu teoreme o atomizaciji jedinica u $\mathcal{G}'\eta$.

LEMA 1: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{G}'\eta$ i term f je oblika $O(h(,g))$, gde je O neko pravilo. Tada term f je atomizovan akko su termi h, g atomizovani.
DOKAZ:
Jednostavno, po složenosti terma f. **q. e. d.**

LEMA 2: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{G}'\eta$. Term f je oblika ili $O((h,)\ 1_C)$ ili 1_C, gde je O neko pravilo za strelice, a term h je atomizovan. U oba slučaja C nije atomska formula. Tada se term f η-redukuje na atomizovan term g, koji je oblika ili $O((h,)h_1)$ ili h_1, gde je h_1 atomizovan term.
DOKAZ:
Term $O((h,)1_C)$ može biti oblika $[h, 1_C]$, $[1_C, h]$; $1_C[h]$, $h[1_C]$; $\{h, 1_C\}$, $\{1_C, h\}$; ${}_{\kappa}1_C$, ${}_{\kappa'}1_C$, $1_C{}^*$; $t_A(1_C)$, $1_C\langle h \rangle$, $h\langle 1_C \rangle$.
Dokaz ćemo izvršiti indukcijom po stepenu formule C: d(C).
Neka je $C \equiv B \wedge D$: $\eta\wedge$. $1_C = (\{1_B, 1_D\})^{\dagger}$.
Posmatramo term $\{1_B, 1_D\}$ d(B)<d(C), d(D)<d(C) pa na osnovu indukcijske pretpostavke postoji atomizovani termi f_1, f_2 takav da $\{1_B, 1_D\} >_\eta \{f_1, 1_D\} >_\eta \{f_1, f_2\}$ i na osnovu leme 1 imamo da je $\{f_1, f_2\}$ atomizovan term.
$1_C >_{1\eta} (\{1_B, 1_D\})^{\dagger} >_{1\eta} h_1 >_{1\eta} \dots >_{1\eta} (\{f_1, 1_D\})^{\dagger} >_{1\eta} h_2 >_{1\eta} \dots >_{1\eta} (\{f_1, f_2\})^{\dagger}$, pa na osnovu definicije $>_\eta$ imamo: $O((h,)1_C) >_\eta O((h,)\{f_1, f_2\}^{\dagger})$.
Dokaz je analogan ako je formula C oblika $C \equiv B \vee D$, $C \equiv B \wedge D$. **q. e. d.**

TEOREMA O ATOMSKOM OBLIKU U $\mathcal{G}'\eta$:
Za svaki term f tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{G}'\eta$ postoji atomizovan term g tipa $\Gamma \vdash A$ u $\mathcal{G}'\eta$.

TEOREMA O ATOMIZACIJI U $\mathcal{G}'\eta$:
Svaki term f tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{G}'\eta$ se η-redukuje na term g tipa $\Gamma \vdash A$ takav da je on atomizovan term u $\mathcal{G}'\eta$.
DOKAZ:
Neka je f:$\Gamma \vdash A$ strelica iz $\mathcal{G}'\eta$, $O(h_1) \equiv f$, gde je O niz pravila:
h_1 je podterm terma f koji nije atomizovan, a svi njegovi podtermi (ako ih ima) su atomizovani. Term h_1 ima oblik ili $O_1((h',)1_C)$ ili 1_C gde je h' atomizovan term i C nije atomska formula.
Na osnovu leme 2 postoji atomizovan term g_1 takav da $h_1 >_\eta g_1$.
Znači $f \equiv O(h_1) >_\eta O(g_1) \equiv f_1$, i sve preostale neatomske jedinice se nalaze u preostalim termima na koje se odnose pravila iz niza O.
Sledeći korak bi bio: h_2 podterm terma f_1 koji nije atomizovan i svi njegovi podtermi atomizovani. Naravno da je g_1 podterm od h_2.
• • •
Dobijamo na kraju: $f >_\eta f_1 >_\eta f_2 >_\eta \dots >_\eta f_k$ i f_k nema podterm koji nije atomizovan,

znači $f_k \equiv g$ je atomizovan term u $\mathcal{G}'\eta$. **q. e. d.**

Napravićemo pregled veza atomizacije jedinica u nekom termu i njegovog oblika. Važno će nam biti da li će se atomizacijom u nekom termu

(i) stvoriti nove operacije sečenja i

(ii) neka nevažna sečenja postati važna.

Lema koja sledi daće nam odričan odgovor na prvo pitanje.

LEMA 3: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{G}'\eta$ u kome nema sečenja.

Ako $f >_{1\eta} g$, onda je term g tipa $\Gamma \vdash A$ i u njemu nema sečenja.

DOKAZ:

U čemu se sastoji η-redukcija: podterm terma f oblika 1_C u zavisnosti od oblika formule C zamenjeni su termima $(\{1_A, 1_B\})^{\S}$, $[_{\kappa}1_A, _{\kappa'}1_B]$, $(1_B[1_A])^{*}$ u kojima nema sečenja. **q. e. d.**

LEMA 4: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash D$ iz $\mathcal{G}'\eta$, koji ima samo nevažna sečenja, kod kojih su formule sečenja atomske. Ako $f >_{1\eta} g$, onda je term g tipa $\Gamma \vdash A$ i ima samo nevažna sečenja.

DOKAZ:

Lema 3: η-redukcijama se ne stvaraju nova sečenja, što znači g nema novih sečenja u odnosu na term f. Da li η-redukcije mogu od nevažnih sečenja da naprave važna?

Neka je $h\langle h_1 \rangle$ nevažno sečenje tipa L u termu f i termi h, h_1 nemaju sečenja.

$$\frac{h_1 : \Gamma \vdash A \qquad h : \Delta A \Lambda \vdash B}{h\langle h_1 \rangle : \Delta\Gamma\Lambda \vdash B,}$$

$A \equiv C \wedge F$ i jedinicu 1_A koja postoji u h_1 η-redukcijom zamenjujemo sa $(\{1_C, 1_F\})^{\S}$ i imamo redukciju $h_1 >_{1\eta} h_2$ i $(\{1_C, 1_F\})^{\S}$ je podterm terma h_2.

Onda $h\langle h_1 \rangle >_{1\eta} h\langle h_2 \rangle$. Pošto je sečenje $h\langle h_1 \rangle$ tipa L term h ima eliminaciju (ili slabljenje) formule A pa sečenje $h\langle h_2 \rangle$ postaje važno.

Ali, term f koji mi posmatramo ima nevažna sečenja samo sa atomskom formulama pa na jedinici 1_A nema η-redukcija.

Znači, g je atomizovan term sa nevažnim sečenjima kao u termu f. **q. e. d.**

KOMENTAR: *U dokazu leme 4 videli smo da je na drugo pitanje koje smo postavili potvrdan odgovor. To je ono što nama ne odgovara. Ne želimo da nam redukcije atomizacije na termu, koji je već sređen po pitanju nevažnih sečenja, stvaraju nove probleme sa sečenjima. Zato ćemo da definišemo drugačije redukcije (tačnije na određenim jedinicama terma) koje neće proizvoditi važna sečenja.*

DEFINICIJA: Neka su f, g termi tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{G}'\eta$. Ako postoji prirodan broj m i termi $h_1, \ldots, h_m$ iz $\mathcal{G}'\eta$ takvi da:

$f \equiv h_1 >_{1\eta} \ldots >_{1\eta} h_m \equiv g$ i svaka od ovih η-redukcija bila je na jedinici iz Un(h_i), $1 \leq i \leq m$, onda ćemo reći da se **term f Nη-redukuje na term g.**

Oznaka: $f >_{N\eta} g$.

Važi: ako $f >_{N\eta 1} g$ za neku $1_A \in \mathrm{Un}(f)$ onda $\mathrm{Un}(g) = (\mathrm{Un}(f) \setminus \{1_A\}) \cup \{1_C, 1_D\}$ ako je formula A oblika ili $C \wedge D$ ili $C \vee D$ ili $C \Rightarrow D$.

DEFINICIJA: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ iz sistema $\mathcal{G}'$. Ako za sve jedinice iz Un(f) važi da su njihove formule atomske onda ćemo za term f reći da je **N-atomizovan term.**

Važi: 1. Ako je term f atomizovan, onda f je N-atomizovan.
2. Neka je f term bez sečenja. Tada f atomozovan akko f N-atomizovan.

LEMA 5: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{G}'\eta$ i term f ima jedan od oblika $[h, 1_C]$, $[1_C, h]$; $1_C[h]$, $h[1_C]$; $\{h, 1_C\}$, $\{1_C, h\}$; ${}_{\kappa}1_C$, ${}_{\kappa'}1_C$, $1_C{}^*$; $t_A(1_C)$, $1_C\langle h \rangle$, $h\langle 1_C\rangle$,
gde je term h je atomizovan i 1_C je neatomska jedinica iz Un(f). Tada se term f Nη-redukuje na N-atomizovan term g, koji je oblika redom $[h, h_1]$, $[h_1, h]$; $h_1[h]$, $h[h_1]$; $\{h, h_1\}$, $\{h_1, h\}$; ${}_{\kappa}h_1$, ${}_{\kappa'}h_1$, $h_1{}^*$; $t_A(h_1)$, $h_1\langle h\rangle$, $h\langle h_1\rangle$, gde je h_1 N-atomizovan term.

DOKAZ:

Dokaz je potpuno isti kao dokaz leme 2. **q. e. d.**

LEMA 6: Neka je term f tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{G}'\eta$, koji ima samo nevažna sečenja.
Ako $f >_{1N\eta} g$, g term iz $\mathcal{G}'\eta$, onda term g ima samo nevažna sečenja.

DOKAZ:

Na osnovu leme 3 imamo da term g nema novih sečenja u odnosu na term f.
Ostaje pitanje da li Nη-redukcije od nevažnih sečenja stvaraju važna?
$f >_{1N\eta} g$: postoje podtermi f_1 od f i g_1 od g takvi da je $f_1=g_1$ neka η-jednakost $f_1=1_C$, i $1_C \in$ Un(f) i za niz operacija O, $f=O(f_1)$, $g=O(g_1)$.
U zavisnosti od glavnog veznika formule C term g_1 ima jedan od sledećih oblika $(\{1_B, 1_D\})^{\natural}$, $[{}_{\kappa}1_B, {}_{\kappa'}1_D]$, $(1_D[1_B])^*$.

(I) po definiciji Un(f): 1_C nije podterm nekog terma h u f koji se pojavljuje u jednom od slučajeva:
1. $h{:}\Delta \vdash C$, $h_1{:}C\Delta_1 \vdash D$ i u f postoji $h_1\langle h\rangle$ nevažno sečenje tipa L;
2. $h{:}C\Delta \vdash D$, $h_1{:}\ \Delta_1 \vdash C$ i u f postoji $h\langle h_1\rangle$ nevažno sečenje tipa R;
To znači da ne može da se desi
1. $h_1\langle h\rangle$ i u termu h_1 eliminacija C i u Nη-redukcijama se u h pojavi uvođenje C;
2. $h\langle h_1\rangle$ i u termu h_1 uvođenje C i u Nη-redukcijama se u h pojavi eliminacija C.
Znači: za formule sečenja svih sečenja iz f, ako imaju jedinice na krajevima svojih loza važi da te jedinice ne pripadaju Un(f).

(II) Ako za $1_C{:}C \vdash C$ iz f postoji sečenje kome je formula sečenja nadnaslednik desne formule 1_C: C je potformula od C' imamo da je to sečenje tipa R i ovom se Nη-redukcijom još više atomizuje uvedena formula C'.

Znači: sečenje ostaje nevažno.

(III) Ako za $1_C{:}C \vdash C$ iz f postoji sečenje kome je formula sečenja nadnaslednik leve formule 1_C: C je potformula od C' imamo da je to sečenje tipa L i ovom se Nη-redukcijom još više atomizuje uvedena formula C'.

Znači: sečenje ostaje nevažno.

(IV) Ako za $1_C{:}C \vdash C$ u termu f ne postoji sečenje kome je formula sečenja neka formula C iz te jedinice ili neki njihov naslednik ili nadnasledník, tada Nη-redukcije na 1_C ne utiču na sečenja u termu f.

Znači term g ima samo nevažna sečenja. **q. e. d.**

***KOMENTAR:** Ako hoćemo da izvršimo atomizaciju jedinica terma, koji nema sečenja, onda možemo atomizovati sve jedinice. Ali, ako hoćemo da posmatramo terme sa nevažnim sečenjima u sistemu $\mathcal{G}'$ (koji odgovaraju normalnim termima u sistemu $\mathcal{N}$) onda atomizacija svih jedinica stvara važna sečenja u termu. Najverovatnije je da je moguće nakon atomizacije rešiti se tih novonastalih važnih sečenja, ali je to protiv našeg postupka da prvo iz terma u*

$\mathcal{G}'\eta$ eliminišemo sečenja (koja odaberemo) a zatim izvršimo atomizaciju jedinica.

U $\mathcal{G}'\eta$ važi teorema o N-atomizaciji i njena posledica teorma o N-atomskom obliku.

TEOREMA O N-ATOMSKOM OBLIKU U $\mathcal{G}'\eta$:
Za svaki term f, koji ima samo nevažna sečenja i tipa je $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{G}'\eta$ postoji N-atomizovan term istog tipa u $\mathcal{G}'\eta$.

TEOREMA O N-ATOMIZACIJI U $\mathcal{G}'\eta$:
Svaki term f tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{G}'\eta$, koji ima samo nevažna sečenja, se Nη-redukuje na term g istog tipa takav da je g N-atomizovan term u $\mathcal{G}'\eta$ i ima samo nevažna sečenja.
DOKAZ:
Kao i dokaz teoreme o atomizaciji samo se još koriste lema 5 i lema 6. **q. e. d.**

Na kraju ovog dela daćemo još jednu mogućnost definisanja jednakosti za atomizaciju jedinica u termu sistema $\mathcal{G}'$: CNη jednakostima.

DEFINICIJA: CNη jednakosti:

C$\eta\wedge$.	$h=(\{1_A, 1_B\})^{\xi}\langle h \rangle$,	za $h{:}\Gamma \vdash A\wedge B$.
C$\eta\vee$.	$h=[{}_{\kappa}1_A, {}_{\kappa'}1_B]\langle h \rangle$,	za $h{:}\Gamma \vdash A\vee B$.
C$\eta\Rightarrow$.	$h=(1_B[1_A])^{*}\langle h \rangle$,	za $h{:}\Gamma \vdash A\Rightarrow B$.

CNη-redukcije bi se uvele analogno η-redukcijama u $\mathcal{G}'\eta$. Interesantno je to da sve jedinice koje mogu da se atomizuju Nη-redukcijama mogu i sa CNη-redukcijama i obrnuto. U jednom od sledećih delova ćemo više govoriti o vezi jednakosti u $\mathcal{G}'$ i $\mathcal{G}'\eta$.

4. VEZA NDmin-REDUKCIJA IZ $\mathcal{ND}$-*min* I Min-REDUKCIJA IZ $\mathcal{N}$-*min*

DEFINICIJA: Neka su f, g termi sistema $\mathcal{ND}$ i važi $f=_{\Pi}g$. Neka je p proizvoljna staza terma f. Za stazu p' terma g, koja sadrži iste premise odgovarajućih operacija iz Pravicovog oblika terma kao i staza p kažemo da **odgovara stazi** p. Za operacije čije premise sadrži neka staza reći ćemo da su operacije te staze.

Neka je p proizvoljna staza terma f, $p=s_1...s_k...s_n$, $s_k=s_{MIN}=C^1...C^m$; i neka je početak staze p pretpostavka A.
Svaka od formula staze p, sem poslednje je premisa neke operacije; sve te operacije su operacije staze p. Ako posmatramo $f=_{\Pi} g$ imamo da se f i g razlikuju samo po prisustvu (odnosno odsustvu) nekih nadovezivanja i njihovog redosleda. Ako je p' staza terma g koja počinje pretpstavkom A, ona ima svoje operacije. Operacije staza p i p' mogu se razlikovati samo kao termi f i g. To znači da se između dve operacije za veznike u p i p' može da se pojavi različit broj nadovezivanja. Nadovezivanje kao operacija ima osobinu da su mu premisa i zaključak ista formula, pa su one u istom segmentu staze. To znači da se s_i i s'_i, $1\leq i\leq n$ mogu razlikovati po broju formula koje ih čine.

Još $s_{MIN}=C^1...C^m$, C^m premisa neke operacije uvođenja; s'_k iz p', $s'_k= C^1...C^l$
ako: $m=l$: $s'_k =s'_{MIN}$.
ako: $m<l$: između operacije kojoj je C^m zaključak i one kojoj je ona premisa ima drugih operacija (čuvaju formulu C) to su nadovezivanja. Mora da u p' postoji pomenuto uvođenje, njegova premisa je neka formula C i zaključak C', $C\neq C'$ pripada drugom segmentu. To znači da C^m premisa uvođenja i $s'_k =s'_{MIN}$.

Pre nego što vidimo kako se slažu koraci NDmin-redukcije iz ***ND-min*** i Min-redukcije iz ***N-min*** pokazaćemo neka svojstva terama ovih sistema koje ćemo kasnije koristiti.

LEMA 1: Neka su f, g normalni termi iz ***ND-min***, takvi da važi $f=_{\Pi}g$.
Tada $f \hookrightarrow_{NDm1} f_1$ za minimalni segment s_{MIN} neke staze p akko $g\hookrightarrow_{NDm1} g_1$ za minimalni segment s'_{MIN} staze p' koja odgovara stazi p iz f. Još važi $f_1 =_{\Pi} g_1$.
DOKAZ:
Ako $f \hookrightarrow_{NDm1} f_1$: p staza terma f, $s_{MIN}=C^1...C^m$, postoji podterm h terma f, $h{:}\Delta_1\vdash C^1$, $f=O(h)$, $h=h_1$ jedna ND-MinS jednakost. Term f_1 dobijen tako što se ostali deo terma f razlikuje do na $=_{\Pi}$, a umesto h ima term h_1:
(i) h podterm terma g, onda $g \hookrightarrow_{NDm1} f_1$, $f_1\equiv g_1$.
(ii) h nije podterm terma g, ond postoji h_2 podtem terma g, $h_2{:}\Delta_1\vdash C^1$, $h=_{\Pi} h_2$ i $h_2=h_3$ jedna ND-MinS jednakost i $h_1=_{\Pi} h_3$. Term g_1 se dobija tako što se ostali deo terma g (ne podterm h_2) rezlikuje do na $=_{\Pi}$, a umesto h_2 ima h_3.
Znači $g_1=_{\Pi}f_1$.
U slučaju $g \hookrightarrow_{NDm1} g_1$ dokaz je potpuno isti. **q. e. d.**

POSLEDICA 1: Neka je f normalan term iz ***ND-min***.
Tada važi $f \hookrightarrow_{NDm1} h$ akko $f^1 \hookrightarrow_{NDm1} g$ i $g=_{\Pi} h$.

Već smo prilikom definisanja preslikavanja **p** i **r** videli da samo određeni termi (prirodno sređeni, nd-termi) sistema ***N*** imaju odgovarajući term u sistemu ***ND***. Proizvoljan term f sistema ***N*** ima različite linije od njegovih terama $nf^{tc\Pi}$ i $f^{tc\Pi}$. Preslikavanjem $\mathbf{p}(nf^{tc\Pi})$ ili $\mathbf{p}(f^{tc\Pi})$ samo linije tih terama se pojavljuju u sistemu ***ND*** kao kandidati za staze. Narednom lemom preciziraćemo koje su to zajedničke linije terama f, $nf^{tc\Pi}$ i $f^{tc\Pi}$.

DEFINICIJA: Neka je f normalan term sistema ***N***. Za neku liniju l terma f kažemo da **prolazi preko** neke **operacije** ako linija l sadrži premisu te operacije.

Termi f, $nf^{tc\Pi}$ i $f^{tc\Pi}$ imaju neke zajedničke (iste) podterme u kojima nema specijalnih operacija i njihovih nizova i novih pretpostavki. Za neku Pravicovu liniju l' terma $nf^{tc\Pi}$ ($f^{tc\Pi}$) kažemo da odgovara nekoj Pravicovoj liniji l terma f ako prolaze preko istih premisa zajedničkih operacija (ne specijalnih) terma f i $nf^{tc\Pi}$ ($f^{tc\Pi}$).

LEMA 2: Neka je f normalan term iz ***N***. Za svaku Pravicovu liniju l terma f postoji odgovarajuća Pravicovu linija l' u termu $nf^{tc\Pi}$ i prilikom formiranja terma $nf^{tc\Pi}$ nisu nastale nove Pravicove linije.
DOKAZ:
Proći ćemo kroz sve slučajeve specijalnih operacija i videti koje promene na linijama u f izaziva formiranje $nf^{tc\Pi}$.

Neka term f ima neku od specijalnih operacija:

T-desnu, C-desnu, onda (i) izostavi se više 1-linija;
(ii) linije koje prolaze preko izostavljenih novih pretpostavki i sjedinjavanja postaju kraće.

T-nadovezujuću onda, (i) više linija koje se završavaju f. o. p. nadovezivanja (koje nisu Pravicove) postaju 1-linije a neke se i gube;
(ii) linije koje prolaze preko izostavljenih novih pretpostavki i sjedinjavanja postaju kraće.

T$\vee$-eliminacionu, C$\vee$-eliminacionu onda (i) biće izostavljeno više linija koje se završavaju f.o. p. eliminacije (koje nisu Pravicove);
(ii) linije koje prolaze preko izostavljenih novih pretpostavki i sjedinjavanja postaju kraće.

T-suvišnu, onda izostavi se više 1-linija i neke linije postaju kraće.

C-suvišnu, onda (i) izostave se neke 1-linije;
(ii) linije koje prolaze preko izostavljenih novih pretpostavki i sjedinjavanja postaju kraće.

T$\wedge$-eliminacionu, T$\wedge$, T$\Rightarrow$ onda (i) linije koje se završavaju f. o. p. te eliminacije $\wedge$ ili $\Rightarrow$ postaju linije koje se završavaju f.o.p. nadovezivanja, zatim 1-linije;
(ii) pojavljuju se nove linije koje nisu Pravicove;
(iii) menja se dužina drugih linija.

C$\wedge$-eliminacionu, C$\Rightarrow$-eliminacionu onda (i) linije koje se završavaju o. p. te eliminacije $\wedge$ ili $\Rightarrow$ postaju linije koje se završavaju o. p. nadovezivanja a to znači C-razgranata ili 1-linije;
(ii) menja se dužina drugih linija.

C-razgranatu onda (i) neće biti nekih linija sa koje se završavaju f. o. p. nadovezivanja;
(ii) menja se dužina drugih linija. **q. e. d.**

Nekoliko lema koje ćemo sada navesti daće nam vezu između Min-redukcija u termu f iz ***N-min*** i terama $nf^{lc\Pi}$, $f^{lc\Pi}$. Pošto su $nf^{lc\Pi}$ i $f^{lc\Pi}$ termi u duhu prirodne dedukcije u ***N-min*** koraci Min-redukcije u njma preslikavanjem ***p*** će biti prenete u ***ND-min***.

LEMA 3: Neka su f, g normalni termi iz ***N-min***.
Ako $f \to_{MIN1} g$, onda postoji term h takav da $nf^{lc\Pi} \to_{MIN1} h$.

DOKAZ:
Neka $f \to_{MIN1} g$ i linija $l = s_1 \ldots s_m$ i $s_k = s_{MIN} = C^1 \ldots C^n$.
Imamo $1_C{:}C \vdash C^1$ u termu f i $1_{A\wedge B}'\{1_A, 1_B\}$, $\mathbf{D}(1_{A\vee B}, {}_{\kappa}1_A, {}_{\kappa'}1_B)$, $(\mathbf{I}(1_{A\Rightarrow B}, 1_A, 1_B))^*$ u termu g (zavisnosti od glavnog veznika formule C). Na osnovu leme 2 jedinica $1_C{:}C \vdash C^1$ postoji i u termu $nf^{lc\Pi}$. Onda je h term koji se dobija kada se jedinica $1_C{:}C \vdash C^1$ u termu $nf^{lc\Pi}$ zameni sa jednim od terama $1_{A\wedge B}'\{1_A, 1_B\}$, $\mathbf{D}(1_{A\vee B}, {}_{\kappa}1_A, {}_{\kappa'}1_B)$, $(\mathbf{I}(1_{A\Rightarrow B}, 1_A, 1_B))^*$ (zavisnosti od glavnog veznika formule C). **q. e. d.**

LEMA 4: Neka je f normalan term iz ***N-min***.
Ako $nf^{lc\Pi} \to_{MIN1} h$, onda postoji term g takav da $f \to_{MIN1} g$.
Još važi: ako $h \to_{MIN1} h_1$ onda $g \to_{MIN1} g_1$.

DOKAZ:
Neka je $nf^{lc\Pi}$ sa linijom $l = s_1 \ldots s_m$ i $s_k = s_{MIN} = C^1 \ldots C^n$.
U termu $nf^{lc\Pi}$ je $1_C{:}C \vdash C^1$ i postoji podterm f_1, koji ima jedan od oblika:
$f_2'(\_/1_D)1_C$; $\mathbf{d}(f_4, f_3, f_2)$, 1_C je podterm od f_3 ili f_2; $\mathbf{I}(f_2, f_3, 1_C)$ i $nf^{lc\Pi} = O(f_1)$.

Posmatraćemo slučaj kada je $C \equiv A \wedge B$.
U termu h jedinica 1_C je zamenjena sa $1_{A\wedge B}'\{1_A, 1_B\}$, i njegov podterm h_1 je oblika:
ili $f_2'(\_/1_D)\ 1_{A\wedge B}'\{1_A, 1_B\}$ ili $\mathbf{d}(f_4, f_3', f_2')$ ili $\mathbf{I}(f_2, f_3, 1_{A\wedge B}'\{1_A, 1_B\})$.
Važi: {linije terma f koje nisu 1-linije}={Pravicove linije terma f}∪{ne Pravicove terma f }.
Na osnovu leme 2:
{linije terma $nf^{tc\Pi}$ koje nisu 1-linije}={Pravicove linije koje odgovaraju Pravicovim linijama f}.
{linije terma h koje nisu 1-linije}=({linije terma $nf^{tc\Pi}$ koje nisu 1-linije}\{l})∪{l_1, l_2}, gde su l_1, l_2 nove linije Min-redukcije $nf^{tc\Pi} \rightarrow_{MIN1} h$.
Analogno se dokazuje u slučaju kada formula C oblika $B \vee D$ ili $B \Rightarrow D$. **q. e. d.**

LEMA 5: Neka je f term iz ***N-min***.
1. Ako je f proširen normalan term, onda $nf^{tc\Pi}$ proširen normalan term.
2. Ako je f G-normalan term i $nf^{tc\Pi}$ proširen normalan term, onda je f proširen G-normalan term.

DOKAZ:
1. Pretpostavimo da postoji term g iz ***N-min*** takav da $nf^{tc\Pi} \rightarrow_{MIN1} g$.
   Na osnovu leme 4 postoji term h takav da $f \rightarrow_{MIN1} h$, što je nemoguće .

Znači : $nf^{tc\Pi}$ je proširen normalan term.
2. Slično kao pod 1. **q. e. d.**

LEMA 2': Neka je f normalan term iz ***N-min***. Za svaku Pravicovu liniju l terma f postoji odgovarajuća Pravicovu linija l' u termu $f^{tc\Pi}$ i prilikom formiranja terma $f^{tc\Pi}$ nisu nastale nove Pravicove linije.

DOKAZ:
Dokaz je sličan dokazu leme 2. **q. e. d.**

LEMA 3': Neka su f, g normalni termi iz ***N-min***.
Ako $f \rightarrow_{MIN1} g$, onda postoji term h takav da $f^{tc\Pi} \rightarrow_{MIN1} h$ i $g^{tc\Pi} =_{ND} h$;

DOKAZ:
Dokaz je sličan dokazu leme 3. **q. e. d.**

LEMA 4': Neka je f normalan term iz ***N-min***.
Ako $f^{tc\Pi} \rightarrow_{MIN1} h$, onda postoji term g takav da $f \rightarrow_{MIN1} g$.

DOKAZ:
Dokaz je sličan dokazu leme 4. **q. e. d.**

LEMA 5': Neka je f term iz ***N-min***.
1. Ako je f proširen normalan term, onda $f^{tc\Pi}$ proširen normalan term.
2. Ako je f G-normalan term i $f^{tc\Pi}$ proširen normalan term, onda je f proširen G-normalan term.

DOKAZ:
Dokaz je sličan dokazu leme 5. **q. e. d.**

Neka je f term sistema ***ND***. Neka je segment s premisa neke operacije O terma f. Za segment s' neke linije terma $\mathbf{r}(f)$ reći ćemo da je slika segmenta s ako je premisa slike opeacije O preslikavanjem $\mathbf{r}$. Na potpuno isti način definiše se slika nekog segmente terma iz ***N*** preslikavanjem $\mathbf{p}$. Da ne bi komplikovali zapis u naredne dve teoreme za segment $C^1 \ldots C^m$ njegovu sliku prilikom preslikavanja $\mathbf{r}$ odnosno $\mathbf{p}$ označavaćemo $C^1 \ldots C^l$ pri čemu m i l ne moraju biti jednaki.

LEMA 6: Neka su f, g normalni termi iz ***ND-min***.

Ako $f \hookrightarrow_{NDm1} g$, onda $\mathbf{r}(f) \rightarrow_{MIN1} h$, h je term iz ***N-min***.

U termu $\mathbf{r}(g)$ postoji Min redukcija akko u termu h postoji Min-redukcija.

DOKAZ:

Prvo:

Neka f normalan term, p staza terma, $p=s_1 \ldots s_n$ i $s_k=s_{MIN}=C^1 \ldots C^n$.

Onda $h_1{:}\Delta_1 \vdash C^1$ podterm terma f, $f=O(h_1)$ i imamo sledeće osobine:

1. h_1 podterm terma h_2 ... h_{m-1} podterm terma h_m, $h_i{:}\Delta_i \vdash C^i$, $1 \leq i \leq m$.
2. Formula C^m premisa nekog uvođenja, pa podterm terma f ima jedan od sledećih oblika: $\{h, h_m\}$, $\{h_m, h\}$, ${}_{\kappa}h_m$, ${}_{\kappa'}h_m$, λh_m.
3. Mogućnosti za terme h_{i+1} su sledeće: $\delta(f_1, h_i, f_2)$; $\delta(f_1, f_2, h_i)$; $(1_D/f_1)h_i$; $(1_C/h_i)f_1$ i f_1 ima podterm oblika $\delta(f_4, 1_C, f_3)$, $\delta(f_4, f_3, 1_C)$.
4. Za sekvent $s_{k-1}= C'^1 \ldots C'^n$, formula C'^n je važna premisa eliminacije i C je potformula formule C'.

Pretpostavimo da je formula C' oblika $C \wedge B$.

Onda imamo da $h_1= \pi h'$, za $h'{:}\Delta_1 \vdash C \wedge B$.

Tada $\mathbf{r}(h_1)= \mathbf{r}(h')'(\_/1_B)1_C$.

U zavisnosti od svog oblika iz 2. termi h_{i+1}, $1 \leq i < m$ se slikaju u jedan od sledećih terama sistema $\mathcal{N}$: $\mathbf{d}(\mathbf{r}(f_1), \mathbf{r}(h_i), \mathbf{r}(f_2))$; $\mathbf{d}(\mathbf{r}(f_1), \mathbf{r}(f_2), \mathbf{r}(h_i))$; $(1_D/\mathbf{r}(f_1))\mathbf{r}(h_i)$; $(1_D/\mathbf{r}(h_i))\mathbf{r}(f_1)$.

Operacije ovog tipa čuvaju segment sa formulom C i nekoj formuli C iz $C^1 \ldots C^m$ odgovara više formula C u segmentu u $\mathbf{r}(h_m)$.

Znači u $\mathbf{r}(h_m)$ imamo segment $C^1 \ldots C^l$, $m \leq l$, i na osnovu 2. formula C^l je premisa nekog uvođenja.

Znači $C^1 \ldots C^l$ minimalni segment u termu $\mathbf{r}(f)$.

Imamo $f \hookrightarrow_{NDm1} g$, onda $h_1=h'_1$ jedna NDMinS jednakost.

U zavisnosti od glavnog veznika formule C imamo jedan od sledećih oblika terma h'_1 i njegove slike $\mathbf{r}(h'_1)$:

$\{\pi(\pi(h')), \pi'(\pi(h'))\}$,	$\{\mathbf{r}(h')'(\_/1_B)1_C'(\_/1_D)1_A, \mathbf{r}(h')'(\_/1_B)1_C'(\_/1_A)1_D\}$,	ako $C \equiv A \wedge D$;
$\delta((\pi h'), {}_k1_A, {}_{\kappa'}1_D)$,	$\mathbf{d}((\mathbf{r}(h'))'(\_/1_B)1_C, {}_{\kappa}1_A, {}_{\kappa'}1_D)$,	ako $C \equiv A \vee D$;
$\lambda(\iota(\pi h', 1_A))$,	$(\mathbf{I}(\mathbf{r}(h')'(\_/1_B)1_C, 1_A, 1_D))^*$,	ako $C \equiv A \Rightarrow D$.

S druge strane $\mathbf{r}(h_1) \rightarrow_{MIN1} h_2$ u zavisnosti od glavnog veznika formule C imamo da je term h_2:

$\mathbf{r}(h')'(\_/1_B)1_C'\{1_A, 1_D\}$,

$\mathbf{r}(h')'((\_/1_B)\mathbf{d}(1_C, {}_{\kappa}1_A, {}_{\kappa'}1_D))$,

$\mathbf{r}(h')'((\_/1_B)\mathbf{I}(1_C, 1_A, 1_D))$.

Ako je O'' slika operacija O preslikavanjem $\mathbf{r}$,

onda: $\mathbf{r}(f)=O''(\mathbf{r}(h_1))$ i $\mathbf{r}(f) \rightarrow_{MIN1} O''(h_2)$, $O''(h_2)=h$.

Slika terma g je $\mathbf{r}(g)=O''(\mathbf{r}(h'_1))$.

Drugo:

Nove staze u $\mathbf{r}(h_1')$ i u h_2 imaju minimalne segmente $s_{MIN1} \equiv A$, $s_{MIN2} \equiv D$ i ostale staze u $\mathbf{r}(g)$ i h nisu menjali minimalne segmente.

Znači, min-redukcija u $\mathbf{r}(g)$ prouzrukuje Min-redukciju u h na stazi sa odgovarajućim segmentom i obrnuto.

Dokaz je analogan i kada je formula C' oblika $C \vee B$, odnosno $C \Rightarrow B$. **q. e. d.**

LEMA 7: Neka su f, g normalni termi iz ***N-min*** i $nf^{c\Pi} \equiv f$.

Ako $f \rightarrow_{MIN1} g$, onda $\mathbf{p}(f) \hookrightarrow_{NDm1} \mathbf{p}(ng^{tc\Pi})$ i $\mathbf{p}(g)=\mathbf{p}(ng^{tc\Pi})$.

DOKAZ:

Neka je f normalan term, l linija tog terma, $l=s_1...s_n$ i $s_k=s_{MIN}=C^1...C^m$.

Imamo sledeća svojstva:

1.Na osnovu leme 1 mora 1_C: $C \vdash C^1$.

Pošto $f \equiv nf^{tc\Pi}$ podterm $\bar{f}$ terma f koji sadrži jedinicu 1_C može biti sledećeg oblika:

$(1_\Delta 1_\Delta/1_\Delta)(1_C/h'(\_/1_E)1_C)\ (1_E/h'(\_/1_C)1_E)f_1$;

$\mathbf{d}(h, f_1, f_2)$, term 1_C je podterm terma f_1;

$(1_C/\,\mathbf{I}(h, f_1, 1_C))\, f_2$.

2. Formula C^m je premisa nekog uvođenja h_m: $\Delta_m \vdash C^m$: $\{h_m, h\}$, ${}_K h_m$, ${}_K h_m$, $h_m{}^*$.

3. Svaki od terama h_{i+1}: $\Delta_{i+1} \vdash C^{i+1}$, $1 \le i \le m-1$, je oblika $h_{i+1}=O(h_i\ (,h, f_3))$ i O je eliminacija ili operacija zamene. Pri preslikavanju $\mathbf{p}(f)$ više operacija iz ***N-min*** se slika u jednu operaciju u ***ND-min***.

Znači u $\mathbf{p}(f)$ dobijamo segment $C^1...C^l$, $l \le n$, ali, zadržava se osobina da je C^l premisa nekog uvođenja pa to jeste minimalni segment u $\mathbf{p}(f)$.

Neka je na primer term $\bar{f}$ (od tri gore navedena) oblika:

$(1_\Delta 1_\Delta/1_\Delta)(1_C/h'(\_/1_E)1_C)\ (1_E/h'(\_/1_C)1_E)f_1$, za $C \equiv B \wedge D$,

onda u termu g postoji podterm $\bar{g} = (1_\Delta 1_\Delta/1_\Delta)(1_C/h'(\_1_E)1_C\{1_B,1_D\})\ (1_E/h'(\_/1_C)1_E)f_1$;

$\mathbf{p}(\bar{f})=(1_C/\pi(\mathbf{p}(h)))(1_E/\pi'(\mathbf{p}(h)))\ \mathbf{p}(f_1)$,

$\mathbf{p}(\bar{g})=(1_C/\ (1_C/\pi(\mathbf{p}(h)))((1_B/\pi 1_C)(1_D/\pi' 1_C)\ \{1_B, 1_D\})(1_E/\pi'(\mathbf{p}(h)))\mathbf{p}(f_1)=\mathbf{p}(n\ \bar{g}^{tc\Pi})$,

$\mathbf{p}(n\ \bar{g}^{tc\Pi})=_\Pi(1_C/\{\pi(\pi(\mathbf{p}(h))),\ \pi'(\pi(\mathbf{p}(h)))\})(1_E/\pi'(\mathbf{p}(h)))\mathbf{p}(f_1)$.

Odavde, $\mathbf{p}(f) \hookrightarrow_{NDm1} \mathbf{p}(ng^{tc\Pi})$.

Potpuno je analogan dokaz u svim ostalim slučajevima. **q. e. d.**

LEMA 8: Neka su f, g normalni termi iz ***N-min*** i $f^{tc\Pi} \equiv f$.

Ako $f \rightarrow_{MIN1} g$, onda $\mathbf{p}(f) \hookrightarrow_{NDm1} \mathbf{p}(g^{tc\Pi})$.

DOKAZ:

Dokaz veoma sličan dokazu leme 7. **q. e. d.**

LEMA 9: Neka je f proširen normalan term u ***ND-min***.

Term $\mathbf{r}(f)$ je proširen normalan term u ***N-min***.

DOKAZ:

Pretpostavimo suprotno: $\mathbf{r}(f)$ nije proširen normalan u ***N-min***.

Onda $\mathbf{r}(f) \rightarrow_{MIN1} h$, na osnovu leme 7: $\mathbf{p}(\mathbf{r}(f)) \hookrightarrow_{NDm1} \mathbf{p}(nh^{tc\Pi})$ i važi $\mathbf{p}(\mathbf{r}(f))=f^l$.

Znači f^l nije proširen normalan term u ***N-min***, odnosno f nije proširen normalan term u ***N-min*** što je nemoguće.

Znači, $\mathbf{r}(f)$ je proširen normalan term u ***N-min*** **q. e. d.**

LEMA 10: Neka je f proširen normalan term u ***N-min*** i $nf^{tc\Pi} \equiv f$.

Term $\mathbf{p}(f)$ je proširen normalan term u ***ND-min***.

DOKAZ:

Pretpostavimo suprotno: $\mathbf{p}(f)$ nije proširen normalan term u ***ND-min***.

onda $\mathbf{p}(f) \hookrightarrow_{NDm1} h$ i na osnovu leme 6: $\mathbf{r}(\mathbf{p}(f)) \rightarrow_{MIN1} f_1$ i važi $\mathbf{r}(\mathbf{p}(f))=f$.

Znači f nije proširen normalan term u ***N-min***, što je nemoguće.

Mora da je $\mathbf{p}(f)$ proširen normalan term u ***ND-min*** **q. e. d.**

LEMA 11: Neka je f proširen normalan term u ***N-min*** i $f^{tc\Pi} \equiv f$.

Term $\mathfrak{p}(f)$ je proširen normalan term u ***ND-min***.

DOKAZ:

Pretpostavimo suprotno: $\mathfrak{p}(f)$ nije proširen normalan term u ***N-min***.

onda $\mathfrak{p}(f) \hookrightarrow_{NDm1} h$ i na osnovu leme 6: $\mathfrak{r}(\mathfrak{p}(f)) \to_{MIN1} f_1$ i važi $\mathfrak{r}(\mathfrak{p}(f)) = nf^{tc\Pi}$.

Znači $nf^{tc\Pi} \to_{MIN1} f_1$ i na osnovu leme 4: postoji term g takav da $f \to_{MIN1} g$

i iz leme 3: $nf^{tc\Pi} \to_{MIN1} g_1$, što je nemoguće.

Mora: $\mathfrak{p}(f)$ je proširen normalan term u ***ND-min***. **q. e. d.**

5. VEZA Min-REDUKCIJA IZ *N-min* I Nη-REDUKCIJA IZ $\mathcal{G}'\eta$

Prvo ćemo dokazati dve leme.

LEMA 1: Neka je f G-normalan term iz ***N'-min***. Tada važi da $f \to_{MIN1} \bar{f}$ akko ${}^{1}f \to_{MIN1} g$.

DOKAZ:

$\Rightarrow$: $f \to_{MIN1} \bar{f}$, $l = s_1 \ldots s_n \ldots s_m$, $s_n \equiv s_{MIN} \equiv C^1 \ldots C^k$.

Za liniju l' terma ${}^{1}f$ reći ćemo da odgovara nekoj liniji l terma f ako sadrži premise istih operacija za veznike (određenih mestom u drvetu terma f) kao i linija l.

Termi f i ${}^{1}f$ razlikuju se po nadovezivanjima: svaki term iz f oblika $h'g$, $\mathbf{D}(h, g_1, g_2)$, $\mathbf{I}(h, g_1, g_2)$ u termu ${}^{1}f$ zamenjen je sa $(1_D/h)1_D'g$, $(1_D/h)\mathbf{D}(1_D, g_1, g_2)$ $(1_D/h)\mathbf{I}(1_D, g_1, g_2)$.

(I) ako linija l ne sadrži ove operacije onda linija l' koja joj odgovara ima segmente od istih formula i iste dužine kao i l pa, ${}^{1}f \to_{MIN1} \bar{f}$.

(II) ako linija l ide preko ovih operacija onda l' možda ima segmente različitih dužina od l ali, za s_n postoji s_n' koji je premisa uvođenja:

$s'_n \equiv s_{MIN} \equiv C^1 \ldots C^k C^{k+1} \ldots C^{k+l}$ i postoji C^l pa onda ${}^{1}f \to_{MIN1} g$.

$\Leftarrow$: potpuno analogno kao $\Rightarrow$. **q. e. d.**

POSLEDICA 1: Za svaki term f iz ***N'-min*** važi:

f potpuno G-normalan term akko ${}^{1}f$ potpuno G-normalan term.

LEMA 2: Neka je f term tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{G}'\eta$.

Tada važi da $f >_{1N\eta} \bar{f}$ akko $f^{l} >_{1N\eta} g$, za neku jedinicu iz $\mathrm{Un}(f^{l})$.

DOKAZ:

$\Rightarrow$: $f >_{1N\eta} \bar{f}$ neka 1_C iz $\mathrm{Un}(f)$ koja je zamenjena desnom stranom odgovarajuće η jednakosti.

Term f^{l} dobijamo kada $h^{\natural}$, $[h, g]$, $h[g]$ u termu f zamenimo sa $h^{\natural}\langle 1_C\rangle$, $[h, g]\langle 1_C\rangle$, $h[g]\langle 1_C\rangle$.

Ako jedinice u termu f povežemo sa pravilom kome je njena formula premisa onda u termu f^{l} pored jedinica koje odgovaraju (vezane su za isto pravilo iz drveta od f, odnosno f^{l}) jedinicama u f imamo i one iz gore navenih sečenja. Ali nove jedinice ne pripadaju $\mathrm{Un}(f^{l})$. Možemo reći da termi f, f^{l} imaju iste $\mathrm{Un}(f^{l})$, $\mathrm{Un}(f)$.

Znači $f^{l} >_{1N\eta} g$, za neko g.

$\Leftarrow$: potpuno isti dokaz kao $\Rightarrow$. **q. e. d.**

POSLEDICA 2: Za svaki term f iz $\mathcal{G}'\eta$ važi:

f je N-atomizovan term akko je ${}^1f$ N-atomizovan term.

LEMA 3: Neka je f G-normalan term tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{N}'$-*min*, neka važi da $f \to_{MIN1} g$ ako je term g G-normalan term iz $\mathcal{N}'$-*min*.
Tada, $\mathbf{s}(f) >_{1N\eta} \bar{f}$ za neki term $\bar{f}$ iz $\mathcal{G}'$ i $\mathbf{s}(f) >_{1CN\eta} \mathbf{s}(g)$.

DOKAZ:

Neka $f \to_{MIN1} g$, $l = s_1 ... s_n ... s_m$, $s_n \equiv s_{MIN} \equiv C^1 ... C^k$.
Onda postoji podterm terma f, $1_C : C \vdash C^1$ i formula C^1 je oslobođena pretpostavka neke operacije eliminacije:
postoji podterm terma f koji može biti oblika $h'g$; $\mathbf{D}(h, g_1, g_2)$; $\mathbf{I}(h, g_1, g_2)$ i 1_C je podterm redom terma g; g_1 ili g_2; g_2.
Imamo $\mathbf{s}(h'g) = \mathbf{s}(g)^{\S}\langle\mathbf{s}(h)\rangle$; $\mathbf{s}(\mathbf{D}(h, g_1, g_2)) = [\mathbf{s}(g_1), \mathbf{s}(g_2)]\langle\mathbf{s}(h)\rangle$; $\mathbf{s}(\mathbf{I}(h, g_1, g_2)) = \mathbf{s}(g_2)[\mathbf{s}(g_1)]\langle\mathbf{s}(h)\rangle$.
$\mathbf{s}(1_C : C \vdash C^1) = 1_C$, $1_C : C \vdash C$.
Za desnu formulu jedinice 1_C imamo: ako postoji u segmentu $C^1 ... C^k$ važnih premisa nadovezivanja onda ima sečenja u $\mathbf{s}(f)$ u kojima je naslednik formule C formula sečenja. To sečenje ne može biti tipa R jer, ako bi bilo tipa R pojavila bi se još jedna eliminacija sa glavnom formulom C u $\mathcal{N}'$. Ali tada segment s_{k+1}, za $s_k = s_{MIN}$, bi činile potformule formule C što je nemoguće jer $s_k = s_{MIN}$.
Za levu formulu jedinice 1_C imamo: ona dobija nadnaslednika pa nema sečenja kome je ona formula sečenja.
Znači ova jedinica pripada Un($\mathbf{s}(f)$) i neka $\mathbf{s}(f) >_{1N\eta} \bar{f}$ za tu jedinicu iz Un($\mathbf{s}(f)$).
S druge strane $N(f)$ i $N(g)$ se razlikuju samo po tome što je 1_C zamenjeno desnom stranom jedne od MinS jednakosti u zavisnosti od glavnog veznika formule C:
$1_C'\{1_A, 1_B\}$, za $C \equiv A \wedge B$; $\mathbf{D}(1_C, {}_{\kappa}1_A, {}_{\kappa'}1_B)$, za $C \equiv A \vee B$; $(\mathbf{I}(1_C, 1_A, 1_B))^*$ za $C \equiv A \Rightarrow B$; i
$\mathbf{s}(1_{A\wedge B}'\{1_A, 1_B\}) = (\{1_A, 1_B\})^{\S}\langle 1_C\rangle$,
$\mathbf{s}(\mathbf{D}(1_{A\vee B}, {}_{\kappa}1_A, {}_{\kappa'}1_B)) = [{}_{\kappa}1_A, {}_{\kappa'}1_B]\langle 1_C\rangle$,
$\mathbf{s}((\mathbf{I}(1_{A\Rightarrow B}, 1_A, 1_B))^*) = (1_B[1_A]\langle 1_C\rangle)^*$.
Znači $\mathbf{s}(f) >_{1CN\eta} \mathbf{s}(g)$. **q. e. d.**

Kada bi za vezu među sistemima $\mathcal{N}'$ i $\mathcal{G}'$ koristili preslikavanje $\mathbf{s}_{\theta}$ onda bi Min-redukcija i η-redukcija bili povezani na sledeći način:

LEMA 3': Neka je f G-normalan term tipa $\Gamma \vdash A$ iz $\mathcal{N}'$-*min*, neka važi da $f \to_{MIN1} g$, za g G-normalan term iz $\mathcal{N}'$-*min*.
Tada, $\mathbf{s}_{\theta}(f) >_{1N\eta} \mathbf{s}_{\theta}(g)$.

***KOMENTAR:** Prethodne leme su nam dale sledeće: CNη-redukcije se lepo slažu sa preslikavanjem* $\mathbf{s}$; *Nη-redukcije se lepo slažu sa preslikavanjem* $\mathbf{s}_{\theta}$. *Ako posmatramo vezu* $f \to_{MIN1} g$ *i* $\mathbf{s}(f) >_{1N\eta} h$ *za neki term h sistema* $\mathcal{G}'$, *treba reći da jedinica terma* $\mathbf{s}(g)$ *po kojoj se razlikuju termi h i* $\mathbf{s}(g)$ *ne pripada skupu* Un($\mathbf{s}(g)$) *pa jedinice koje postoje u termima h i* $\mathbf{s}(g)$ *za datu atomizaciju su iste, što je jedino važno da znamo kada želimo da nastavljamo atomizaciju.*

Iz $\mathcal{G}'\eta$ η-redukcije će se prenositi u NDmin-redukcije u $\mathcal{N}'$-*min* preslikavanjem $\mathbf{n}$.

LEMA 4: Neka je f term sa nevažnim sečenjima iz $\mathfrak{G}'\eta$ i za term g iz $\mathfrak{G}'\eta$ važi $f >_{1\eta} g$, za neku jedinicu $1_C{:}C \vdash C$ iz Un(f) za čiju desnu formulu važi da ima nadnaslednika.

Onda važi da je $\mathfrak{n}(1_C{:}C \vdash C) = 1_C{:}C \vdash C$ koja sa desne strane $\vdash$ ima početak minimalnog segmenta neke linije l terma $\mathfrak{n}(f)$ i $\mathfrak{n}(f) \to_{MIN1} \mathfrak{n}(g)$ za tu liniju l.

DOKAZ:

Neka je f dati term i $1_C{:}C \vdash C$ jedinica iz Un(f) koja je u termu g zamenjena desnom stranom odgovarajuće η-jednakosti. Oznaka $1_C{:}C \vdash C$

$$C_l \lrcorner \quad \uparrow C_r$$

Kako izgleda podterm terma f sa jedinicom 1_C?

(I) ${}_K 1_C$, ${}_{K'} 1_C$, $\{1_C, h\}$, $\{h, 1_C\}$, $1_C{}^*$;

Ovo preslikano u $\mathfrak{N}$ je $\mathfrak{n}(1_C{:}C \vdash C) = 1_C$, $1_C{:}C \vdash C$ i C je premisa pravila uvođenja.

1. Ako u termu f nema sečenja tipa L sa formulom sečenja C_l ili nekim njenim naslednikom onda u $\mathfrak{N}$-*min* segment $s \equiv C$ samo sa jednom formulom, koji je onda prvi u nekoj liniji l i s je premisa uvođenja,

znači: s je minimalan segment, $s \equiv C$.

2. Ako u termu f ima sečenja tipa R sa formulom sečenja C' koja je nadnaslednik formule C_l to znači da postoji eliminacija čijoj glavnoj formuli je C potformula: *el(nizpravila.*(1_C)). U $\mathfrak{N}$-*min* se to slika u $1_C{}'O(1_C\}$ ili $\mathbf{D}(1_C, O(1_C), h_1)$ ili $(\mathbf{I}(1_C, h_1, O(1_C)))^*$, C' pripada segmentu s_{k-1} a C segmentu s_k i premisa je uvođenja.

Znači s_k je minimalan segment, $s_k \equiv C$.

3. Ako term f ima sečenje tipa R ili RL ili nema sečenja. To nema uticaja zbog toga što bi njihove formule sečenja bile u $\mathfrak{N}$-*min* već u I-delu linije i ne bi sadržale formulu C.

(II) $[h, 1_C]$, $[1_C, h]$; $1_C[h]$, $h[1_C]$; $\mathfrak{n}(1_C{:}C \vdash C) = 1_C{:}C \vdash C$.

Ove operacije preslikane u $\mathfrak{N}$-*min* su redom $\mathbf{D}(1, \mathfrak{n}(h), 1_C)$, $\mathbf{D}(1, 1_C, \mathfrak{n}(h))$; $\mathbf{I}(1, \mathfrak{n}(h), 1_C)$, $\mathbf{I}(1, 1_C, \mathfrak{n}(h))$ gde je 1 jedinica formule C' kojoj je C potformula. U poslednjem slučaju liniju u $\mathfrak{N}$-*min* čini jedan segment s, a njega jedna formula $s \equiv C$. U preostala tri slučaja $1_C{:}C \vdash C$ je oslobođena pretpostavka u $\mathfrak{n}(f)$ i C je kandidat za početak minimalnog segmenta.

Ako su operacije koje slede sjedinjavanje, nova pretpostavka, nadovezivanje ili eliminacija (kojoj C nije važna premisa) onda se produžava segment koji je počeo formulom C.

Ako bi se pojavila operacija eliminacije kojoj je formula C iz posmatranog segmenta važna premisa to bi značilo u $\mathfrak{G}'\eta$ da naslednik formule C_r je formula sečenja u nekom sečenju tipa L, što je nemoguće jer 1_C pripada Un(f).

Ako bi se pojavila operacija nadovezivanja koja bi od neke formule C iz posmatranog segmenta pravila važnu premisu eliminacije, na primer

$(1_C / \mathbf{D}(1, \mathfrak{n}(h), 1_C)\ 1_C{}'g$, to je nemoguće jer 1_C pripada Un(f).

Znači kraj segmenta koji počinje formulom C može biti premisa nekog uvođenja ili kraj linije.

(III) $1_C\langle h\rangle$ sečenje tipa R nemoguće jer $1_C \in$ Un(f).

(IV) $h\langle 1_C\rangle$ sečenje tipa L nemoguće jer $1_C \in$ Un(f).

(V) $\mathbf{t}_A(1_C)$ ili neko dozvoljeno sečenje.

Onda proveravamo koje je pravilo sledeće.

Slično kao u slučaju (II) zaključimo da kraj segmenta koji počinje formulom C može biti premisa nekog uvođenja ili kraj linije.

Na ovaj način smo pokazali da za jedinicu 1_C iz Un(f) je slika u $\mathfrak{N}$-*min*

$\mathfrak{n}(1_C{:}C \vdash C) = 1_C{:}C \vdash C$ i formula C je početak minimalnog segmenta s_{MIN}.

Neka je f_1 term iz $\mathfrak{N}$ takav da $\mathfrak{n}(f) \to_{MIN1} f_1$ po liniji l u kojoj je s_{MIN}:

$1_{A\wedge B}=(\{1_A, 1_B\})^{\mathfrak{f}}$, za $C\equiv A\wedge B$; $1_{A\vee B}=[_{\kappa}1_A, _{\kappa'}1_B]$, za $C\equiv A\vee B$; $1_{A\Rightarrow B}=(1_B[1_A])^*$, za $C\equiv A\Rightarrow B$.
$\mathbf{n}((\{1_A, 1_B\})^{\mathfrak{f}})=1_{A\wedge B}'\{1_A, 1_B\}$,
$\mathbf{n}([_{\kappa}1_A, _{\kappa'}1_B])=\mathbf{D}(1_{A\vee B}, {}_{\kappa}1_A, {}_{\kappa'}1_B)$,
$\mathbf{n}((1_B[1_A])^*)=(\mathbf{I}(1_{A\Rightarrow B}, 1_A, 1_B))^*$.
Znači $\mathbf{n}(g)=f_1$.
Imamo $\mathbf{n}(f)\rightarrow_{MIN1}\mathbf{n}(g)$. **q. e. d.**

LEMA 5: Neka je f term bez sečenja iz $\mathcal{G}'\eta$ i za term g iz $\mathcal{G}'\eta$ važi $f>_{1\eta} g$, za neku jedinicu $1_C:C\vdash C$ iz Un(f).
Onda važi da je $\mathbf{n}(1_C:C\vdash C)=1_C:C\vdash C$ koja sa desne strane $\vdash$ ima početak minimalnog segmenta neke linije l terma $\mathbf{n}(f)$ i $\mathbf{n}(f)\rightarrow_{MIN1}\mathbf{n}(g)$ za tu liniju l.
DOKAZ:
Amalogno dokazu leme 4. **q. e. d.**

Što se tiče N-atomizovanih i proširenih G-normalnih terama iz $\mathcal{G}'\eta$ i $\mathcal{N}'$-*min*, njih će čuvati preslikavanja $\mathbf{s}$ i $\mathbf{n}$.

TEOREMA 1: Neka je f proširen G-normalan term iz $\mathcal{N}'$-*min*.
Term $\mathbf{s}(f)$ je N-atomizovan term sa nevažnim sečenjem u $\mathcal{G}'\eta$.
DOKAZ:
Pretpostavimo suprotno: postoji term h iz $\mathcal{G}'\eta$ takav $\mathbf{s}(f)>_{1N\eta}h$.
lema 4: $\mathbf{n}(\mathbf{s}(f))\rightarrow_{MIN1}\mathbf{n}(h)$ u $\mathcal{N}'$-*min* i $\mathbf{n}(\mathbf{s}(f))={}^1f$.
znači: ${}^1f\rightarrow_{MIN1}\mathbf{n}(h)$ u $\mathcal{N}'$-*min*.
lema 1: $f\rightarrow_{MIN1} g$, što je nemoguće.
Znači: $\mathbf{s}(f)$ je N-atomizovan term. **q. e. d.**

TEOREMA 2: Neka je f N-atomizovan term bez važnih sečenja u sistemu $\mathcal{G}'\eta$.
Term $\mathbf{n}(f)$ je proširen G-normalan term u $\mathcal{N}'$-*min*.
DOKAZ:
Pretpostavimo suprotno: postoji term h iz $\mathcal{N}'$-*min* takav $\mathbf{n}(f)\rightarrow_{MIN1} h$.
lema 4: $\mathbf{s}(\mathbf{n}(f))>_{1\eta}\mathbf{n}(h)$ u $\mathcal{G}'\eta$ i $\mathbf{s}(\mathbf{n}(f))=f^1$.
znači: $f^1>_{1\eta}\mathbf{n}(h)$ u $\mathcal{G}'\eta$.
lema 2: $f>_{1\eta} g$, što je nemoguće.
Znači: $\mathbf{n}(f)$ je proširen G-normalan term. **q. e. d.**

Na isti način se dokazuje sledeća teorema.

TEOREMA 3: Neka je f N-atomizovan term bez sečenja u $\mathcal{G}'\eta$.
Term $\mathbf{n}(f)$ je proširen G-normalan term u $\mathcal{N}'$-*min*.

6. TEOREMA O PROŠIRENOJ NORMALIZACIJI U ***ND-min***
I
TEOREMA O PROŠIRENOJ NORMALIZACIJI U ***N-min***

U odeljku 3. trećeg poglavlja uporedili smo "jačine" teorema o normalizaciji u ***ND*** i ***N***. Dobili smo da teorema o normalizaciji u ***ND*** daje normalizaciju samo posebnih terama iz ***N*** (prirodno sređenih, nd-terama). Slična situacija će biti i sa teoremama o proširenim normalizacijama u ***ND-min*** i ***N-min***.

$\Downarrow$: Neka je f proizvoljan normalan term iz ***N-min***.
Lema 1 (poglavlje **III**, 3): $nf^{tc\Pi}$ je normalan term u ***N-min***.
$\mathbf{r}$ je NA preslikavanje na ***nN***$^{tc\Pi}$: postoji term g iz ***ND*** $g \equiv {}^{1}g$ takav da $\mathbf{r}(g)=nf^{tc\Pi}$.
$\mathbf{p}\circ\mathbf{r}=\mathbf{1}_{{}^{1}ND}$: $\mathbf{p}\circ\mathbf{r}(g)=g$, $\mathbf{p}\circ\mathbf{r}(g)=\mathbf{p}(nf^{tc\Pi})$, $nf^{tc\Pi}$ je normalan term.
Lema 6 (poglavlje **III**, 3): $\mathbf{p}(nf^{tc\Pi})=g$ normalan term u ***ND-min***
Teorema o proširenoj normalizaciji u ***ND-min***.
Term g se NDmin-redukuje na term h i h je proširen normalan term u ***ND-min***.
To znači na osnovu definicije $\hookrightarrow_{NDm}$:
postoje $h_1,\dots,h_m$ takvi da $g\equiv h_1 \hookrightarrow_{NDm1} h_2 \hookrightarrow_{NDm1} \cdots \hookrightarrow_{NDm1} h_m \equiv h$.
$g \hookrightarrow_{NDm1} h_2$, lema 6 (poglavlje **IV**, 4): $\mathbf{r}(g) \rightarrow_{MIN1} \bar{h}_2$, h_2 ima Min-redukciju akko $\bar{h}_2$ ima Min-redukciju.
• • •
$\mathbf{r}(g) \equiv \mathbf{r}(h_1) \rightarrow_{MIN1} \bar{h}_2 \rightarrow_{MIN1} h'_3 \rightarrow_{MIN1} \cdots \rightarrow_{MIN1} h'_m$
h'_m ima Min-redukciju akko $\mathbf{r}(h)$ ima Min-redukciju.
lema 9 (poglavlje **IV**, 4): $\mathbf{r}(h)$ je proširen normalan term.
Znači $nf^{tc\Pi} \rightarrow_{MIN1} \bar{h}_2 \rightarrow_{MIN1} h'_3 \rightarrow_{MIN1} \cdots \rightarrow_{MIN1} h'_m$, h'_m proširen normalan term u ***N-min***.

$\Uparrow$: Neka je f proizvoljan normalan term iz ***ND-min***.
Lema 2 (poglavlje **III**, 3): term ${}^{1}f$ je normalan term iz ***ND-min***.
$\mathbf{p}$ je NA preslikavanje na ***¹ND***: postoji term g iz ***N*** $g \equiv ng^{tc\Pi}$ takav da $\mathbf{p}(g)={}^{1}f$.
$\mathbf{r}\circ\mathbf{p}=\mathbf{1}_{nN^{tc\Pi}}$: $\mathbf{r}\circ\mathbf{p}(g)=g$, $\mathbf{r}\circ\mathbf{p}(g)={}^{1}f$, ${}^{1}f$ je normalan term.
Lema 5 (poglavlje **III**, 3): $\mathbf{r}({}^{1}f)=g$ normalan term u ***N***.
Teorema o proširenoj normalizaciji u ***N-min***.
Term g se Min-redukuje na term h i h je proširen normalan term u ***N-min***.
To znači na osnovu definicije $\rightarrow_{MIN}$:
postoje $h_1,\dots,h_m$ takvi da $g \equiv h_1 \rightarrow_{MIN1} h_2 \rightarrow_{MIN1} \cdots \rightarrow_{MIN1} h_m \equiv h$.
$g \rightarrow_{MIN1} h_2$, lema 7 (poglavlje **IV**, 4): $\mathbf{p}(g) \hookrightarrow_{NDm1} \mathbf{p}(nh_2^{tc\Pi})$, $\mathbf{p}(nh_2^{tc\Pi})=\mathbf{p}(h_2)$.
$h_2 \rightarrow_{MIN1} h_3$, lema 3 (poglavlje **IV**, 4): $nh_2^{tc\Pi} \rightarrow_{MIN1} \bar{h}_3$:
lema 7(poglavlje **IV**, 4): $\mathbf{p}(nh_2^{tc\Pi}) \hookrightarrow_{NDm1} \mathbf{p}(n\bar{h}_3^{tc\Pi})$,
$\mathbf{p}(nh_3^{tc\Pi})=\mathbf{p}(\bar{h}_3)=\mathbf{p}(n\bar{h}_3^{tc\Pi})$.

• • •
$\mathbf{p}(g) \hookrightarrow_{NDm1} \mathbf{p}(nh_2^{tc\Pi}) \hookrightarrow_{NDm1} \mathbf{p}(nh_{i_1}^{tc\Pi}) \hookrightarrow_{NDm1} \cdots \hookrightarrow_{NDm1} \mathbf{p}(nh_{i_n}^{tc\Pi})$, $i_1,\dots i_n \in \{3,4,\dots m\}$ i $\mathbf{p}(nh_{i_n}^{tc\Pi})=\mathbf{p}(h_{i_n})$.
Ako $i_n \equiv m$: $\mathbf{p}(g) \hookrightarrow_{NDm} \mathbf{p}(h_m)$, h_m je proširen normalan term,
lema 5 (poglavlje **IV**, 4): $nh_m^{tc\Pi}$ je proširen normalan term,

lema 10(poglavlje **IV**, 4): $\mathfrak{p}(nh_m{}^{tc\Pi})$ je proširen normalan term,

$\mathfrak{p}(nh_m{}^{tc\Pi}) = \mathfrak{p}(h_m)$, $\mathfrak{p}(h_m)$ je proširen normalan term.

Ako $i_n \neq m$: $nh_m{}^{tc\Pi}$ nema više minimalnih segmenata.

$nh_m{}^{tc\Pi}$ je proširen normalan term,

lema 10(poglavlje **IV**, 4): $\mathfrak{p}(nh_m{}^{tc\Pi})$ je proširen normalan term.

Znači f^d se Min redukuje na $\mathfrak{p}(nh_{i_n}{}^{tc\Pi})$ proširen normalan term u ***ND-min***

Posledica 1(poglavlje **IV**, 4): f se Min redukuje na proširen normalan term f_{i_n}, u ***ND-min***,
$\mathfrak{p}(nh_{i_n}{}^{tc\Pi}) =_{\Pi} f_{i_n}$.

*KOMENTAR: Teorema o proširenoj normalizaciji u **ND-min** može da nam pruži informaciju samo o proširenoj normalizaciji terma oblika $nf^{tc\Pi}$ iz **N-min**. Prvi razlog je što za proizvoljan term f iz sistema **N** samo njegov $nf^{tc\Pi}$ term ima odgovarajući term u sistemu **ND**, pa preko njega prelazimo u sistem **ND**.*

*Teorema o proširenoj normalizaciji u **ND-min** važi za term koji se sa $\mathfrak{r}$ slika u $nf^{tc\Pi}$, pa preslikavanje $\mathfrak{r}$ informaciju o atomizaciji prenosi na $nf^{tc\Pi}$ u **N-min**. Sada deluje drugi razlog, šta možemo da kažemo u sistemu **N** o termu f u zavisnosti od $nf^{tc\Pi}$. Ono što je važno reći, da taj drugi razlog više nije u vezi sa teoremom o proširenoj normalizaciji u **ND-min**.*

7. TEOREMA O PROŠIRENOJ G-NORMALIZACIJI U *N'-min* I TEOREMA O N-ATOMIZACIJI U *G'η*

$\Downarrow$: Neka je f term bez važnih sečenja iz $\mathcal{G}'\eta$.
Term f^d bez važnih sečenja.
Postoji term g iz ***N'-min*** takav da $\mathfrak{s}(g) = f^d$, g je G-normalan term.
Teorema o proširenoj G-normalizaciji u ***N'-min***.
Term g se Min-redukuje na term g_1 i g_1 je proširen G-normalan term u ***N-min***.
Definicija $\rightarrow_{MIN1}$: $g \equiv h_1 \rightarrow_{MIN1} h_2 \rightarrow_{MIN1} \dots \rightarrow_{MIN1} h_m \equiv g_1$.
Lema 3 (poglavlje **IV**, **5**): $\mathfrak{s}(g) \equiv \mathfrak{s}(h_1) >_{1CN\eta} \mathfrak{s}(h_2) >_{1CN\eta} \dots >_{1CN\eta} \mathfrak{s}(h_m) \equiv \mathfrak{s}(g_1)$.
Lema 3 (poglavlje **IV**, **5**): postoje $f_2, \dots, f_m$, $\mathfrak{s}(g) \equiv \mathfrak{s}(h_1) >_{1N\eta} f_2 >_{1N\eta} \dots >_{1N\eta} f_m$,
Un(f_m)=Un($\mathfrak{s}(h_m)$)=Un($\mathfrak{s}(g_1)$).
Teorema 1(poglavlje **IV**, **5**): $\mathfrak{s}(g_1)$ je N-atomizovan term bez važnih sečenja, Un($\mathfrak{s}(g_1)$) samo atomske jedinice.
Znači: f_m je N-atomizovan term bez važnih sečenja,
$f^d >_{1N\eta} f_2 >_{1N\eta} \dots >_{1N\eta} f_m$,
lema 2(poglavlje **IV**, **5**): $f >_{1N\eta} \overline{f}_2 >_{1N\eta} \dots >_{1N\eta} \overline{f}_m$, i $\overline{f}_m$ je N-atomizovan term bez važnih sečenja.

$\Uparrow$: Neka je h G-normalan term sistema ***N'-min***.
Postoji term g iz $\mathcal{G}'$ takav da $\mathfrak{n}(g) =^1 h$, g je term bez važnih sečenja.

Teorema o N-atomizaciji u sistemu $\mathcal{G}'\eta$:

Term g se Nη-redukuje na term f i f je N-atomizovan term bez važnih sečenja u $\mathcal{G}'\eta$.

Definicija $>_{N\eta}$: postoje $h_1,\dots,h_m$ da $g \equiv h_1 >_{1N\eta} h_2 >_{1N\eta} \dots >_{N\eta} h_m \equiv f$.

Lema 4(poglavlje **IV**, 5): $\mathfrak{n}(g) \rightarrow_{MIN1} \mathfrak{n}(h_2) \rightarrow_{MIN1} \dots \rightarrow_{MIN1} \mathfrak{n}(h_m) \equiv \mathfrak{n}(f)$.

Teorema 2 (poglavlje **IV**, 5): $\mathfrak{n}(f)$ je proširen G-normalan term.

${}^1h \rightarrow_{MIN1} \mathfrak{n}(h_2) \rightarrow_{MIN1} \dots \rightarrow_{MIN1} \mathfrak{n}(h_m) \equiv \mathfrak{n}(f)$.

Lema 2(poglavlje **IV**, 5): $h \rightarrow_{MIN1} f_2 \rightarrow_{MIN1} \dots \rightarrow_{MIN1} f_m$, f_m je proširen G-normalan term.

KOMENTAR: Teorema o proširenoj G-normalizaciji u $\mathcal{N}'$-***min*** *daje N-atomizaciju termima* f^d *za neki term f iz* $\mathcal{G}'\eta$. *Još smo dokazali da ako je* f^d *N-atomizovan onda je takav i f.*

S druge strane, imamo sličnu situaciju. Teorema o N-atomizaciji u $\mathcal{G}'\eta$ *daje proširenu normalizaciju terma* ${}^1g$ *za neki term g iz* $\mathcal{N}'$-***min***. *Imamo pokazano da je onda i term g prošireno normalan.*

Na neki način je uspostavljena ravnoteža ovih teorema.

8. JOŠ NEŠTO O JEDNAKOSTIMA NAD TERMIMA

U čitavom radu najvažnije je bilo kako povezati sistem prirodne dedukcije i Gencenov sistem sekvenata. Tačnije, kako povezati terme tih sistema i kako opisati i povezati redukcije nad njihovim termima koje su potrebne za karakteristične teoreme tih sistema.

Naš izbor je bio da jednakostima nad termima opisujemo te redukcijske korake. Zato smo posmatrali različite parcijalne algebre (na primer $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}$-***min***) i u njihovim vezama dobili sliku o povezanosti i "istoj težini" teoreme o normalizaciji i teoreme o eliminaciji sečenja, odnosno teoreme o proširenoj normalizaciji i teoreme o atomizaciji.

U ovom delu ćemo videti šta još možemo dobiti iz jednakosti koje smo zadali.

Možda centralno mesto ispitivanja zavisnosti među jednakostima imaju, da ih tako nazovemo *Problematične* jednakosti. Prilikom upoređivanja jednakosti iz $\mathcal{N}'$ i iz $\mathcal{G}'$ ustanovili smo da jednakostima *E(L)permCut* iz $\mathcal{G}'$nema odgovarajućih u $\mathcal{N}'$. Tačnije njima bi odgovarale *Problematične* jednakosti, koje su sledećeg oblika:

$T\wedge.\ (1_D/f'g)\,h = f'((1_D/g)h)$, za $f{:}\Theta \vdash A\wedge B,\ g{:}\Gamma AB\Delta \vdash D,\ h{:}D\Lambda \vdash C$.

$T\vee.\ (1_D/\mathbf{D}(f, g_1, g_2))h = \mathbf{D}(f, (1_D/g_1)h, (1_D/g_2)h)$, za $f{:}\Theta \vdash A\vee B,\ g_1{:}A\Delta \vdash D,\ g_2{:}B\Delta \vdash D,$
$h{:}D\Lambda \vdash C$.

$T\Rightarrow.\ (1_D/\mathbf{I}(f, g_1, g_2))h = \mathbf{I}(f, g_1, (1_D/g_2)h)$, za $f{:}\Theta \vdash A\Rightarrow B,\ g_1{:}\Delta \vdash A,\ g_2{:}B\Gamma \vdash D,$
$h{:}D\Lambda \vdash C$.

i koje ne važe u $\mathcal{N}'$ (odnosno u $\mathcal{N}$, sa izmenom u jednakosti $T\vee$ umesto operacije **D** operacija **d**).

8.1.

Kako se odsustvo *Problematičnih* jednakosti u $\mathcal{N}$ odnosno $\mathcal{N}'$ odražava na njihove veze sa $\mathcal{ND}$ i $\mathcal{G}'$?

U $\mathcal{G}'$ važe jednakosti koje odgovaraju svim *Problematičnim* jednakostima (to su *E(L)permCut-E* jednakosti iz $\mathcal{G}'$). Dokaz teoreme o eliminaciji sečenja može se izvesti i bez tih jednakosti. Zato je pitanje o važenju ili ne važenju tih jednakosti u $\mathcal{G}'$ nebitno.

Mnogo je interesantnija veza između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{ND}$.

Za terme prve *Problematične* jednakosti imamo:

$\mathbf{p}((1_D/f'g)\,h) = (1_D/(1_\Theta,1_\Theta/1_\Theta)(1_A/\mathbf{p}(f)'(\_/1_B)1_A)(1_B/\mathbf{p}(f)'(\_/1_A)1_B)\,\mathbf{p}(g))\,\mathbf{p}(h)$.

$\mathbf{p}(f'((1_D/g)h)) = (1_\Theta,1_\Theta/1_\Theta)(1_A/\mathbf{p}(f)'(\_/1_B)1_A)(1_B/\mathbf{p}(f)'(\_/1_A)1_B)\,(1_D/\mathbf{p}(g))\,\mathbf{p}(h)$.

Što znači da $\mathbf{p}((1_D/f'g)\,h) =_\Pi \mathbf{p}(f'((1_D/g)h))$ u $\mathcal{ND}$.

Potpuno isto važi za terme treće *Problematične* jednakosti.

Termi druge *Problematične* jednakosti se slikaju na sledeći način u $\mathcal{ND}$:

$\mathbf{p}((1_D/\mathbf{D}(f, g_1, g_2))\,h) = (1_D/\mathbf{D}(\mathbf{p}(f), \mathbf{p}(g_1), \mathbf{p}(g_2))\,\mathbf{p}(h)$,

$\mathbf{p}(\mathbf{D}(f, (1_D/g_1)h, (1_D/g_2)h)) = \mathbf{D}(\mathbf{p}(f), (1_D/\mathbf{p}(g_1))\,\mathbf{p}(h), (1_D/\mathbf{p}(g_2))\,\mathbf{p}(h)))$

i njihove slike nisu redukcijskim korakom povezane u $\mathcal{ND}$.

Termi druge *Problematične* jednakosti se slikaju na sledeći način u $\mathcal{G}'$:

$\mathbf{s}((1_D/\mathbf{D}(f, g_1, g_2))\,h) = \mathbf{s}(h)\langle[\mathbf{s}(g_1), \mathbf{s}(g_2)]\langle \mathbf{s}(f)\rangle\rangle$

$\mathbf{s}(\mathbf{D}(f, (1_D/g_1)h, (1_D/g_2)h)) = [\mathbf{s}(h)\langle \mathbf{s}(g_1)\rangle, \mathbf{s}(h)\langle \mathbf{s}(g_2)\rangle]\langle \mathbf{s}(f)\rangle$.

i njihove slike su jednake u $\mathcal{G}'$.

Ovakvo neslaganje između $\mathcal{ND}$ i $\mathcal{G}'$ Cuker je smatrao problemom.

Komentar:

– Grubo govoreći, ako se operacije eliminacije i uvođenja veznika definišu kao u sistemu $\mathcal{ND}$, onda je to eliminisanje, uvođenje urađeno na "jedinicama". Termi koji učestvuju u operacijama (posebno za veznike $\wedge$ i $\Rightarrow$) su "očišćeni" od suvišnih "primesa". Samo operacija eliminacije za veznik $\vee$ u $\mathcal{ND}$ je u duhu operacija eliminacije sistema $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$, $\mathcal{G}'$... To znači da strelice nad kojima se vrši operacija nose "veliku prošlost" i jedinice nosioci formula u kojima se eliminiše (ili od kojih se uvodi) glavni veznik su "umotane" sa puno operacija i terama.

– Priroda pravila eliminacije veznika $\wedge$, $\Rightarrow$ u sistemu $\mathcal{ND}$ rešava problem ne postojanja prve i treće *Problematične* jednakosti u sistemu $\mathcal{N}$ ili $\mathcal{N}'$. Ali operacija eliminacije veznika $\vee$ u sistemu $\mathcal{ND}$ ostaje istog tipa kao i u sistemu $\mathcal{N}$ i neslaganje ostaje.

8.2.

Pri definisanju $\mathcal{N}$-*min* ($\mathcal{N}'$-*min*) postojala je mogućnost da umesto jednakosti $MinS\wedge$ uzmemo sledeću jednakost:

$MinS\wedge'.\, f = (1_\Theta 1_\Theta/1_\Theta/)\,\{f'(\_/1_B)1_A, f'(\_/1_A)1_B\}$ za $f{:}\Theta \vdash A\wedge B$.

LEMA 1: Neka su $f{:}\Theta \vdash A\wedge B$, $g{:}\Gamma AB\Delta \vdash D$ strelice. Tada:

jednakosti iz $\mathcal{N}$ i $f = f'\{1_A, 1_B\}$ i $(1_D/1_{A\wedge B}'g)\,f = 1_{A\wedge B}'((1_D/g)h)$

akko

jednakosti iz $\mathcal{N}$ i $f = (1_\Theta,1_\Theta/1_\Theta)\{f'(\_/1_B)1_A, f'(\_/1_A)1_B\}$.

To znači: $MinS\wedge$ i jedna *Problematična* jednakost su ekvivalentne sa $MinS\wedge'$.

Komentar:

– Nije isto da li ćemo na $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$ dodati $MinS\wedge'$ ili $MinS\wedge$.

8.3.

Ako neki term f sistema $\mathcal{N}$ ili $\mathcal{N}'$ posmatramo u $\mathcal{N}$*-min* ili $\mathcal{N}'$*-min* dobijamo sledeću vezu terama f i nf.

Neka su $f{:}\Theta \vdash A\wedge B$, $g{:}\Gamma AB\Delta \vdash D$ strelice iz $\mathcal{N}$*-min* ili $\mathcal{N}'$*-min*.

Neka je $nf \equiv f$ i $ng \equiv g$. Onda:

$$f'g =_{MinS\wedge'} ((1_\Theta, 1_\Theta/1_\Theta)\{f'(\_/1_B)1_A, f'(\_/1_A)1_B\})'g$$
$$=_{NMF\wedge} (1_\Theta, 1_\Theta/1_\Theta)(1_A/f'(\_/1_B)1_A)(1_B/f'(\_/1_A)1_B)g \equiv n(f'g).$$

Neka su $f{:}\Theta \vdash A\Rightarrow B$, $g{:}\Gamma \vdash A$, $h{:}B\Lambda \vdash D$ strelice iz $\mathcal{N}$*-min* ili $\mathcal{N}'$*-min*.

Neka je $nf \equiv f$, $nh \equiv h$ i $ng \equiv g$. Onda:

$$\mathbf{I}(f, g, h) =_{MinS\Rightarrow} \mathbf{I}(\mathbf{I}(f, 1_A, 1_B)^*, g, h)$$
$$=_{NMF\Rightarrow} (1_B/(1_A/g)\mathbf{I}(f, 1_A, 1_B))\, h =_{ND} (1_B/\mathbf{I}(f, g, 1_B))\, h \equiv n(\mathbf{I}(f, g, h)).$$

Komentar:

- Pri povezivanju terama f i nf pojavljuje se jednakost $MinS\wedge'$ a ne $MinS\wedge$.
- Prilikom prelaska sa terma f na term nf pravi se mnogo $NMF\wedge(\Rightarrow)$, $MinS\wedge'(\Rightarrow)$ redukcija (u zavisnosti koliko term f ima podterama određenog oblika).
- Ako preslikavanje $\mathfrak{p}$ shvatimo kao povezivanje dve mogućnosti definisanja pravila eliminacije veznika $\wedge(\Rightarrow)$ onda je veoma interesantno da nam za to trebaju $NMF\wedge(\Rightarrow)$, $MinS\wedge'(\Rightarrow)$ jednakosti.

8.4.

Način na koji preslikavanje $\mathfrak{p}$ presikava terme *Problematične* jednakosti $T\wedge$ u sistem $\mathcal{ND}$ (što smo videli u 8.1.) daje:

da će preslikavanje $\mathfrak{p}$ "slepiti" $MinS\wedge'$ i $MinS\wedge$ jednakosti do na $=_\Pi$:

$$\mathfrak{p}(f'\{1_A, 1_B\}) = (1_A/\pi\mathfrak{p}(f))(1_B/\pi'\mathfrak{p}(f))\{1_A, 1_B\}.$$
$$\mathfrak{p}((1_\Theta, 1_\Theta/1_\Theta)\{f'(\_/1_B)1_A, f'(\_/1_A)1_B\}) = \{\pi\mathfrak{p}(f), \pi'\mathfrak{p}(f)\}.$$

8.5.

Pokazaćemo kako u $\mathcal{G}'$ izborom nekih jednakosti za osnovne možemo izvesti preostale.

LEMA 2: U $\mathcal{G}'$ važi:

1. $\{h, f\} = \{1_A, 1_B\}\langle h\rangle\langle f\rangle$ <u>akko</u> $\{h, f\}\langle g_1\rangle = \{h\langle g_1\rangle, f\}$ i $\{h, f\}\langle g_2\rangle = \{h, f\langle g_2\rangle\}$,
   za $h{:}\Gamma_1 C\Gamma_2 \vdash A$, $f{:}\Delta_1 D\Delta_2 \vdash B$, $g_1{:}\Lambda \vdash C$, $g_2{:}\Theta \vdash D$.
2. ${}_\kappa h = {}_\kappa 1_A\langle h\rangle$ i ${}_{\kappa'} h = {}_{\kappa'} 1_A\langle h\rangle$ <u>akko</u> ${}_\kappa(h\langle f\rangle) = {}_\kappa h\langle f\rangle$ i ${}_{\kappa'}(h\langle f\rangle) = {}_{\kappa'} h\langle f\rangle$,
   za $h{:}\Gamma_1 C\Gamma_2 \vdash A$, $f{:}\Delta \vdash C$.
3. $h[f] = h\langle 1_B[1_A]\langle f\rangle\rangle$ <u>akko</u> $f_1[g_1] = f_1\langle 1_B[g_1]\rangle \Leftrightarrow h_1\langle f_1[g_1]\rangle = h_1\langle f_1\rangle[g_1]$.

   i

   $f_1[g_1] = f_1[1_A]\langle g_1\rangle \Leftrightarrow f_1[g_1]\langle h_2\rangle = f_1[g_1\langle h_2\rangle]$.

za $h{:}B\Gamma \vdash C,\ f{:}\Delta \vdash A,\ f_1{:}B\Lambda \vdash C,\ g_1{:}E\Theta \vdash A,\ h_1{:}C\Lambda_1 \vdash D,\ h_2{:}\ \Theta_1 \vdash E.$

LEMA 3: U $\mathcal{G}'$ važi:

1. (i) $h\langle\{1_A,1_B\}^{\int}\rangle=(h\langle\{1_A,1_B\}\rangle)^{\int}$ <u>akko</u> $E\wedge(L)permCut,$
za $h{:}\Gamma A\wedge B\Delta \vdash C.$
(ii) <u>ako</u> $E\wedge(L)permCut,$ <u>onda</u> $E\wedge(R)permCut.$

2. (i) $h\langle[{}_{\kappa}1_A,{}_{\kappa'}1_B]\rangle=[h\langle{}_{\kappa}1_A\rangle,h\langle{}_{\kappa'}1_B\rangle]$ <u>akko</u> $E\vee(L)permCut,$
za $h{:}\Gamma A\vee B\Delta \vdash C.$
(ii) <u>ako</u> $E\vee(L)permCut,$ <u>onda</u> $E\vee(R)permCut.$

3. (i) $(1_B[1_A])^*\langle h\rangle=(1_B[1_A]\langle h\rangle)^*$ <u>akko</u> $I\Rightarrow(R)permCut,$
za $h{:}\Gamma \vdash A\Rightarrow B.$

<u>**Komentar:**</u>
– Jednakosti nad termima u kojima su pravila za veznike date na jedinicama zamenjuju više jednakosti.

8.6.

LEMA 4: U $\mathcal{G}'\eta$ za $f{:}\Gamma \vdash A\wedge B,\quad h{:}A\wedge B\Delta \vdash C,$ važi:

$$c_\Gamma(\{t_B(1_A)^{\int}\langle f\rangle,\ t_A(1_B)^{\int}\langle f\rangle\})=f \quad \underline{\text{akko}} \quad (h\langle\{1_A,1_B\}\rangle)^{\int}=h.$$

LEMA 5: U $\mathcal{G}'\eta$ važi:

1. $(h\langle\{1_A,1_B\}\rangle)^{\int}=h$ <u>akko</u> $\{1_A,1_B\}^{\int}=1_{A\wedge B}$ i $h\langle\{1_A,1_B\}^{\int}\rangle=(h\langle\{1_A,1_B\}\rangle)^{\int},$
za $h{:}\Gamma A\wedge B\Delta\vdash C.$

2. $[h\langle{}_{\kappa}1_A\rangle,h\langle{}_{\kappa'}1_B\rangle]=h$ <u>akko</u> $[{}_{\kappa}1_A,{}_{\kappa'}1_B]=1_{A\vee B}$ i $h\langle[{}_{\kappa}1_A,{}_{\kappa'}1_B]\rangle=[h\langle{}_{\kappa}1_A\rangle,h\langle{}_{\kappa'}1_B\rangle],$
za $h{:}\Gamma A\vee B\Delta\vdash C.$

3. $(1_B[1_A]\langle h\rangle)^*=h$ <u>akko</u> $(1_B[1_A])^*=1_{A\Rightarrow B}$ i $(1_B[1_A])^*\langle h\rangle=(1_B[1_A]\langle h\rangle)^*$
za $h{:}\Gamma \vdash A\Rightarrow B.$

LEMA 6: U $\mathcal{G}'\eta$ važi:

$$[{}_{\kappa}1_A,{}_{\kappa'}1_B]\langle h\rangle=h \quad \underline{\text{akko}} \quad [{}_{\kappa}1_A,{}_{\kappa'}1_B]=1_{A\vee B} \qquad \text{za } h{:}\Gamma \vdash A\vee B.$$

Preslikavanjima koje smo definisali sledeće jednakosti iz ***ND-min***
$ND\text{-}MinS\wedge{:}\quad h=\{\pi h,\pi' h\},$ za $h{:}\Gamma \vdash A\wedge B;$
$ND\text{-}MinS\Rightarrow{:}\quad h=\lambda(\iota(h,1_A)),$ za $h{:}\Gamma \vdash A\Rightarrow B$
slikaju se redom u jednakosti
$c_\Gamma(\{t_B(1_A)^{\int}\langle f\rangle,\ t_A(1_B)^{\int}\langle f\rangle\})=f,$ za $f{:}\Gamma \vdash A\wedge B;$
$(1_B[1_A]\langle h\rangle)^*=h,$ za $h{:}\Gamma \vdash A\Rightarrow B$ u $\mathcal{G}'\eta.$

S druge strane samo jednakosti
$\{1_A,1_B\}^{\int}=1_{A\wedge B},\ (1_B[1_A])^*=1_{A\Rightarrow B}$ pretstavljaju $\eta\wedge$ i $\eta\Rightarrow$ jednakosti u $\mathcal{G}'\eta.$

<u>**Komentar:**</u>

- Jednakosti $ND\text{-}MinS\wedge$ i $ND\text{-}MinS\Rightarrow$ u $\mathcal{ND}$-min nose sa sobom više nego $\eta\wedge$ i $\eta\Rightarrow$ jednakosti u $\mathcal{G}'\eta$.

–Šta je sa veznikom $\vee$?

Jednakost $ND\text{-}MinS\vee : h=\delta(h, {}_{\kappa}1_A, {}_{\kappa'}1_B)$, za $h{:}\Gamma\vdash A\vee B$

se slika u jednakost $[{}_{\kappa}1_A, {}_{\kappa'}1_B]\langle h\rangle=h$, za $h{:}\Gamma\vdash A\vee B$.

Ako bi $ND\text{-}MinS\vee$ bila "jača" od $\eta\vee$ kao u slučaju veznika $\wedge$ i $\Rightarrow$ sa $ND\text{-}MinS\vee$ na osnovu leme 5 (2.) u $\mathcal{N}$ bi "ušla" i *Problematična* jednakost, $T\vee$. Ali lema 6 daje ravnotežu u slučaju veznika $\vee$ za sliku jednakosti $ND\text{-}MinS\vee$ i $\eta\vee$ i znači ni u sistemu $\mathcal{ND}$-min ne važi *Problematična* jednakost $T\vee$.

8.7.

LEMA 7:

1. Na osnovu jednakosti iz $\mathcal{G}'$ i $\{1_A, 1_B\}^{\mathfrak{s}}=1_{A\wedge B}$

 važi $\{h,f\}=\{1_A, 1_B\}\langle h\rangle\langle f\rangle$, za $h{:}\Gamma\vdash A$, $f{:}\Delta\vdash B$

2. Na osnovu jednakosti iz $\mathcal{G}'$ i $[{}_{\kappa}1_A, {}_{\kappa'}1_B]=1_{A\vee B}$

 važi ${}_{\kappa}h={}_{\kappa}1_A\langle h\rangle$ i ${}_{\kappa'}h={}_{\kappa'}1_A\langle h\rangle$, za $h{:}\Gamma\vdash A$.

3. Na osnovu jednakosti $\mathcal{G}'$ i $(1_B[1_A])^{*}=1_{A\Rightarrow B}$

 važi $h[f]=h\langle 1_B[1_A]\langle f\rangle\rangle$, za $h{:}B\Gamma\vdash C$, $f{:}\Delta\vdash A$.

Na osnovu leme 2 i leme 7 imamo da ako $\mathcal{ND}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$ ($\mathcal{G}'$, $\mathcal{G}$) dodamo MinS jednakosti (η jednakosti) mnoge jednakosti koje već važe u njima postaju posledica dodatih jednakosti.

Literatura:

[1] G. Gentzen, *Investigations into logical deduction*, in M. E. Szabo, ed., The Collected Papers of Gerhard Gentzen (North-Holland, Amsterdam, 1969) 68-131.

[2] J.-Y. Girard, *Proof Theory and Logical Complexity*, Vol I, (1987) Bibliopolis, Naples.

[3] J. Lambek, *Logic without structural rules*, in K. Došen & P. Schroeder-Heister, ed., Substructural Logics (Oxford University Press, Oxford, 1993) 179-206.

[4] J. Lambek, and P. J. Scott, *Introduction to Higher-Order Categorical Logic* (Cambridge University Press, Cambridge, 1986).

[5] G. Pottinger, *Normalization as a homomorphic image of cut elimination*, Annals of Mathematical Logic vol 12 (1977) 323-357.

[6] D. Prawitz, *Natural Deduction*, A Proof-Theoretical Study (Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1965).

[7] D. Prawitz, *Ideas and results in proof theory*, in J. E. Fenstad, ed., Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium (North-Holland, Amsterdam, 1971) 235-308.

[8] J. Zucker, *The correspondence between cut elimination and normalization*, Annals of Mathematical Logic vol 7 (1974) 1-156.

INDEKS

Naveden je broj stranice na kojoj se nalazi definicija pojma.