UNIVERZITET U BEOGRADU. MATEMATIČKI FAKULTET

Mr Mirko Lepović

REŠAVANJE NEKIH HEREDITARNIH PROBLEMA SPEKTRALNE TEORIJE GRAFOVA

Doktorska disertacija

BEOGRAD, 1991.

SADRŽAJ RADA

UVOD

Ovaj doktorski rad pripada Spektralnoj teoriji konačnih i beskonačnih grafova, koja objedinjuje elemente teorije grafova, linearne algebre i opšte spektralne teorije operatora. Pod spektrom (konačnog ili beskonačnog) grafa, podrazumevamo inače spektar odgovarajuće matrice susedstva posmatranog grafa.

Računari su imali suštinsku ulogu u izradi ovog rada. Pre svega prilikom izračunavanja spektara pojedinih grafova, gde je korišćen standardni program "Eigen", zatim kod ispitivanja izomorfnosti grafova i kod postupka za generisanje čitavih klasa grafova i pretraživanja njihovih spektara u cilju određivanja npr. maksimalnih grafova u odgovarajućim klasama.

Ukratko ćemo objasniti prirodu problema posmatranih u ovom radu.

Neka je G proizvoljan konačan povezan graf bez petlji i višestrukih grana. Relacija $H \le G$ će označavati da je graf H indukovani podgraf grafa G. Za indukovani podgraf obično ćemo pretpostavljati da je takođe povezani graf.

Od najveće važnosti u celom radu biće tzv. teorema preplitanja, koju navodimo bez dokaza.

Teorema 0.1 (Teorema preplitanja) Neka je G graf sa spektrom $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \dots \ge \lambda_n$ i neka je H njegov indukovani podgraf sa spektrom $\mu_1 \ge \mu_2 \ge \dots \ge \mu_m$. Tada važe sledeće nejednakosti

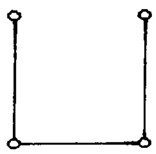
$$\lambda_{n-m+i} \le \mu_i \le \lambda_i \qquad (i = 1,\dots,m) .$$

Neka je dalje P izvesna grafovska osobina. Reći ćemo da je osobina P hereditarna, ako iz uslova da graf G ima osobinu P sledi da svaki njegov indukovani podgraf takođe ima ovu osobinu. Većina problema posmatranih u ovom radu jesu hereditarni problemi ili se svode na takve probleme. Takvi su na primer problemi u poglavljima I, II, V, VI, VIII i IX. Svi problemi posmatrani u ovom radu su inače kompletno rešeni.

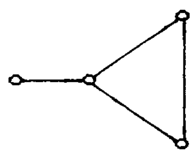
Hereditarni problemi su do sada više puta proučavani u matematičkoj literaturi, od čega navodimo radove [1], [2], [5], [7], [8], [9], [10], [11], [15], [16], [17], [19], [20], [21], [24].

Kod posmatranja bilo kog hereditarnog problema, grafove koji imaju posmatranu osobinu nazivamo dozvoljenim za odgovarajući problem, a ostale grafove nazivamo zabranjenim. Uloga zabranjenih grafova kod generisanja svih dozvoljenih grafova može biti od bitnog značaja, a često je i skup svih minimalnih zabranjenih grafova (minimalnih u smislu relacije $\leq$) u posmatranom problemu konačan. Stoga je i ovaj tzv. metod zabranjenih grafova vrlo bitan kod rešavanja hereditarnih problema. Vrlo često se može mnogo saznati o strukturi izvesnog grafa, ako je poznato da neki drugi konkretan graf ne može biti njegov indukovani podgraf.

Kao ilustraciju navodimo teoremu H. Smith-a (str. 98), iz koje sledi da je povezani graf kompletan multi-partitan graf ako i samo ako ne sadrži nijedan od sledeća dva grafa



G_1



G_2

kao svoj indukovani podgraf.

Ukratko ćemo opisati sadržaj ovog rada po pojedinim poglavljima.

Ceo rad se sastoji iz 10 poglavlja, 2 priloga i spiska literature (str. 193-195).

U poglavlju I (str. 1-43) posmatramo problem određivanja konačnih i beskonačnih grafova sa 6 sopstvenih vrednosti različitih od nule uključujući i njihove višestrukosti. Ovaj problem za $p = 3,4,5$ sopstvenih vrednosti posmatrao je A. Torgašev u radovima

[19] i [20]. U ovom poglavlju u određenoj meri poboljšavamo metodu primenjenu u navedenim radovima A. Torgaševa. Najvažniji rezultat u ovom poglavlju je Lista 1.1 (str. 10-43), koja daje kompletan spisak kanoničkih grafova sa tačno 6 sopstvenih vrednosti različitih od nule.

U Poglavlju II (str. 44-46) dajemo spisak svih maksimalnih kanoničkih grafova koji imaju 6 sopstvenih vrednosti različitih od nule. Osim toga, u kratkim crtama je opisan postupak za generisanje kanoničkih grafova sa n nenula sopstvenih vrednosti ($n \in N$).

U Poglavlju III (str. 47-68) posmatramo sopstvene normalne digrafove, kao jednu vrstu uopštenja običnih grafova. Između ostalog uvodimo definiciju prostih i mešovitih normalnih digrafova i dokazujemo čitav niz osobina takvih digrafova.

U Poglavlju IV (str. 69-80) , upotrebom računara, u potpunosti opisujemo sve sopstvene normalne digrafove sa 6 i 7 čvorova. Sličan problem je posmatrao A. Torgašev u radu [22] za normalne digrafove sa 3,4 i 5 čvorova. Najvažniji rezultat ovog poglavlja su Liste 4.1 (str. 71-72) i 4.2 (str. 73-80), koje respektivno daju kompletan spisak svih normalnih digrafova sa tačno 6 i 7 čvorova.

U poglavlju V (str. 81-94) posmatramo sve povezane grafove čija energija (tj. suma svih pozitivnih sopstvenih vrednosti uključujući takođe njihove višestrukosti) nije veća od 4. U radu [21] A. Torgašev je posmatrao sve povezane grafove čija energija nije veća od 3. Primenjena metoda u ovom poglavlju se u izvesnim detaljima razlikuje od metode koja je data u radu [21].U Listi 5.1 naveden je potpuni spisak grafova (ukupno 154) čija energija ne prelazi 4, a veća je od 3.

U Poglavlju VI (str. 95-102) opisujemo sve povezane grafove čija prva redukovana energija, tj. suma apsolutnih vrednosti svih sopstvenih vrednosti bez maksimalne, nije veća od 5. Pokazano je da postoji tačno 75 takvih grafova sa tačno jednom pozitivnom sopstvenom vrednošću, i 137 takvih grafova sa više od jedne pozitivne sopstvene vrednosti (Lista 6.1). Osim toga, u Teoremi 6.1 dokazan je i jedan opšti rezultat koji se odnosi na konačnost skupa svih grafova sa uniformno ograničenom prvom redukovanom energijom.

U Poglavlju VII (str. 103-113) opisujemo sve povezane grafove čija druga redukovana energija, tj. suma apsolutnih vrednosti svih sopstvenih vrednosti bez minimalne, nije veća od 6. Pokazano je da postoji tačno 91 takvih grafova sa tačno jednom pozitivnom sopstvenom vrednošću, i tačno 315 takvih grafova sa više od jedne pozitivne sopstvene vrednosti (Lista 7.1). Osim toga, u Teoremi 7.1 dokazan je i jedan opšti rezultat koji se odnosi na konačnost skupa svih grafova sa uniformno ograničenom drugom redukovanom energijom.

U Poglavlju VIII (str. 114-123) u potpunosti su opisani svi povezani grafovi čija treća redukovana energija, tj. suma apsolutnih vrednosti svih sopstvenih vrednosti bez minimalne i maksimalne, nije veća od 2.5. Za razliku od rezultata iz poglavlja VI i VII, dobijeni skup je beskonačan. Osim toga, dokazana je i važna opšta teorema konačnosti (Teorema 8.2) koja se odnosi na skup svih kanoničkih grafova sa uniformno ograničenom trećom redukovanom energijom.

U Poglavlju IX (str. 124-130) uvodimo definiciju k-pozitivne redukovanje energije, k - negativne redukovane energije i (k,ℓ) - redukovane energije, i dokazujemo neka osnovna svojstva ovih energija. U Teoremi 9.1 dokazujemo da je za svako $k \in N_o = N \cup \{0\}$, skup svih grafova sa uniformno ograničenom k - pozitivnom redukovanom energijom uvek konačan. U Teoremi 9.3 dokazan je sličan rezultat za grafove sa uniformno ograničenom k - negativnom redukovanom energijom. U teoremi 9.5 dokazana je slična teorema konačnosti, ali za skup svih kanoničkih grafova sa uniformno ograničenom (k,ℓ) - redukovanom energijom. Odgovarajući skup svih grafova sa uniformno ograničenom ovom vrstom energije je inače uvek beskonačan.

U Poglavlju X (str. 131-138) posmatramo problem realnosti izvesnih grafovskih polinoma $\beta(G,C,x)$ za određene klase grafova. Ovaj problem je u izvesnoj meri razrađivan u literaturi, i od velike je važnosti u nekim primenjenim naukama (pre svega u hemiji). Postoji hipoteza da su nule ovog polinoma uvek realne, ali opšti matematički dokaz još nije pronađen. U nedavno objavljenim radovima [12] i [13] ova hipoteza je dokazana za neke posebne klase grafova. U ovom poglavlju mi dokazujemo ovu hipotezu za jednu klasu grafova koja uopštava grafove iz rada [13]. Kao sporedan rezultat, u Stavu 10.2 dobijena je čitava klasa kospektralnih grafova.

U prilogu A (str.139-163) dajemo kompletan spisak karakterističnih polinoma svih povezanih grafova čiji je odgovarajući kanonički graf reda n $(2 \le n \le 6)$.

U prilogu B (str. 164-192) dajemo izvorne programe koje najviše koristimo za rešavanje pojedinih problema u ovom radu. Svi navedeni programi su napisani u mašinskom jeziku MACRO-11 (asembleru), na sistemu DELTA-644.

U najvećem delu rada koristimo sledeće oznake. G je proizvoljan (konačan ili beskonačan) povezani graf. V(G) je skup čvorova grafa G. E(G) je skup grana grafa G. |G| je broj čvorova grafa G, tj. njegov red. Ako je |G|= n, tada je $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \dots \ge \lambda_n$ njegov spektar, tj. spektar odgovarajuće 0-1 matrice susedstva grafa G.

Sva tvrđenja u ovom radu klasifikovana su inače u obliku stavova, teorema (važnijih stavova) i korolara, čije numeracije teku odvojeno.

Koristim ovu priliku da se zahvalim mentoru ovog rada, vanrednom profesoru A. Torgaševu na sugestijama, primedbama i nesebičnoj pomoći pri izradi istog rada. Takođe izražavam zahvalnost Akademiku redovnom profesoru D. Cvetkoviću, Akademiku redovnom profesoru I. Gutmanu, kao i docentu M. Petroviću na korisnim sugestijama pri izradi ovog rada.

Kragujevac, 11. 01. 1991. god.

A u t o r

I. ODREĐIVANJE SVIH KONAČNIH I BESKONAČNIH GRAFOVA SA 6 SOPSTVENIH VREDNOSTI RAZLIČITIH OD NULE

U ovom poglavlju posmatramo problem određivanja konačnih i beskonačnih grafova sa p sopstvenih vrednosti različitih od nule. Ovaj problem za $p = 3,4,5$ posmatrao je A. Torgašev u radovima [19] i [20]. Mi ćemo posmatrati problem za $p = 6$, s tim što ćemo u izvesnom smislu modifikovati postupak koji je primenjen u radovima A. Torgaševa.

Osnovni pojmovi i definicije koje se odnose na spektralnu teoriju kanoničkih grafova sadržani su u sledećem odeljku, i potiču iz radova [19] i [20].

1.1 Osnovni pojmovi i definicije

U celom odeljku posmatramo povezane prebrojivo beskonačne grafove bez petlji i višestrukih grana. Skup čvorova $V(G)$ grafa G je skup prirodnih brojeva N. Matrica susedstva $A(G)$ grafa G je matrica $A(G) = [a_{ij}]$ beskonačnog reda $N \times N$, gde je

$$a_{ij} = \begin{cases} a^{i+j-2}, & (i,j) \text{ - susedni} \\ 0, & (i,j) \text{ - nisu susedni} \end{cases}$$

i a je konstanta iz intervala $I = (0,1)$.

Beskonačnu matricu $A(G)$ možemo posmatrati kao matricu linearnog operatora A u Hilbertovom prostoru ℓ^2 sa ortonormiranim bazisom $\{e_i\}$. Operator A definisan na ovaj način je Hilbert-Schmidt-ov operator, jer je

$$n(A) = \sum |a_{ij}|^2 < \infty .$$

Spektar $\sigma(G)$ grafa G se definiše kao spektar $\sigma(A) = \sigma(A(G))$ ovog Hilbert-Schmidt-ovog operatora.

Navodimo bez dokaza teoremu koja daje osnovna svojstva spektra $\sigma(A(G))$.

Teorema 1.1 ([19],[20]) Spektar $\sigma(A(G))$ pridružen matrici susedstva A(G) beskonačnog neorijentisanog grafa G ima sledeće osobine:

(i) $\sigma(G)$ je realan, sadrži nulu i konačan ili beskonačan niz sopstvenih vrednosti $\{\lambda_i \mid \lambda_i \neq 0,\ i = 1,2,\ldots,n\}$. Svako $\lambda_i \neq 0$ je konačne mnogostrukosti i $\lambda_n \longrightarrow 0$ kada $n \longrightarrow \infty$ ako je niz beskonačan.

(ii) Maksimalna vrednost $\lambda_1 = r(G)$, koja se naziva spektralni radijus, je jednostruka. Ako je $-r(G)$ sopstvena vrednost grafa G, tada je $-r(G)$ takođe jednostruka.

(iii) Spektralni radijus $r(G) = \|A\| \leq d$, gde je d realna konstanta, tj. $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{(1-a^2)\sqrt{1+a}}$, tako da spektar $\sigma(G)$ grafa G leži u intervalu $[-d,d]$.

Od posebnog interesa su beskonačni grafovi sa konačnim spektrom $\sigma(G) = \{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p,0,0,\ldots\}$. U ovom slučaju $\lambda = 0$ je sopstvena vrednost beskonačne mnogostrukosti. Ko-dimenzija potprostora $X_o = \{ x \in X \mid A(x) = 0 \}$ je p.

Definicija 1.1 ([19],[20]) Neka je G beskonačan graf sa spektrom $\sigma(G) = \{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p;\ 0\}$ ($\lambda_i \neq 0$ za $i \in \{1,2,\ldots,p\}$). Tada je G graf sa p-konačnim spektrom.

Definicija 1.2 ([19],[20]) Graf G je graf konačnog tipa ako i samo ako se skup V(G) = N može razbiti na konačan skup $N_1,N_2,\ldots,N_k$ karakterističnih skupova, tako da su bilo koja dva čvora iz istog skupa N_i nesusedna i bilo koja dva podskupa N_i i N_j su kompletno susedna ili kompletno nesusedna.

Na skupu čvorova V(G) uvodimo relaciju ekvivalencije – čvorovi x,y su ekvivalentni (u relaciji) ako i samo ako imaju iste susede. Podskupovi N_i,N_j su klase ekvivalencije u odnosu na definisanu relaciju. Izborom po jednog čvora iz svake klase N_k dobijamo količnik g grafa G. Graf $g = g(N_1, N_2, \ldots, N_p)$ naziva se kanonička slika grafa G.

Teorema 1.2 ([19], [20]) Kanonički graf g grafa G ima sledeće osobine:

(i) Beskonačan graf konačnog tipa k ima p-konačan spektar, gde je $p = p(G) \leq k$.

(ii) Svaki graf sa p-konačnim spektrom je konačnog tipa k, gde je $k \leq 2^p - 1$.

(iii) Ako je $G = g(N_1, N_2, \ldots, N_k)$ graf konačnog tipa, onda je broj sopstvenih vrednosti različitih od nule p(G) grafa G jednak broju sopstvenih vrednosti različitih od nule p(g) grafa g.

Time se problem određivanja svih beskonačnih grafova sa p sopstvenih vrednosti različitih od nule upravo svodi na problem nalaženja svih kanoničkih grafova takođe sa p sopstvenih vrednosti različitih od nule.

Sa g_o označimo bazni podgraf grafa G sa p čvorova koji ima svojstvo da su mu kolone (vektori) matrice susedstva $A(g_o)$ linearno nezavisne.

Navodimo sledeći rezultat koji daje osnovna svojstva baznog grafa g_o.

Stav 1.1 ([19], [20]) Bazni podgraf g_o grafa G ima sledeće osobine:

(i) Graf g_o nema izolovanih čvorova.

(ii) Svaki čvor $x \in V(G) \setminus V(g_o)$ je susedan bar jednom čvoru $y \in V(g_o)$.

(iii) Matrica susedstva $A(g_o)$ grafa g_o je regularna.

Problem određivanja svih konačnih i beskonačnih grafova sa 6 sopstvenih vrednosti različitih od nule obrađen je na računaru DELTA-644. U programu je ostavljena mogućnost za obradu svih kanoničkih grafova sa n $(3 \leq n \leq 10)$ sopstvenih vrednosti različitih od nule. Većina programa koji se odnose na ovu problematiku pisana je na jeziku COBOL.

U sledećem odeljku dajemo osnovne rezultate koji se odnose na problem određivanja kanoničkih grafova sa p sopstvenih vrednosti različitih od nule.

1.2 Osnovni rezultati

Obrazložićemo postupak rekonstruisanja matrice susedstva kanoničkog grafa g prema radovima [19] i [20].

Prvo određujemo skup svih baznih grafova reda n. Bazni grafovi reda n nemaju nulu u spektru. Svaki bazni graf predstavljen je matricom susedstva $[a_{ij}]$, gde je $a_{ij} = 1$ ako su čvorovi x_i i x_j susedni, a $a_{ij} = 0$ ako čvorovi x_i i x_j nisu susedni. Označimo sa $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ vektore vrste matrice susedstva baznog grafa g_o. Vektori a_i su linearno nezavisni pa je rang $([a_{ij}]) = n$.

Pretpostavimo da od baznog grafa g_o treba generisati graf g_1 dodavanjem čvora $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tako da graf g_1 sadrži isto n sopstvenih vrednosti različitih od nule. Matrica susedsva $A(g_1)$ generisanog grafa g_1 je oblika

$$A(g_1) = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 & x_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 \end{bmatrix} .$$

Tada je x linearna kombinacija vektora $\{a_i\}$, te postoje skalari $\{p_i\}$ tako da je $x = p_1a_1 + p_2a_2 + \ldots + p_na_n$. Definišimo vektore X i A_i na sledeći način: $X = (x,0) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0)$ i $A_i = (a_i, x_i) = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}, x_i)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Vektor X je linearna kombinacija vektora $\{A_i\}$ i skalara $\{p_i\}$, tj. imamo da je $(x,0) = p_1(a_1,x_1) + p_2(a_2,x_2) + \dots + p_n(a_n,x_n)$. Množenjem skalara $\{p_i\}$ i vektora $\{a_i\}$, prethodna relacija se svodi na relaciju

$$(x,0) = (p_1a_1 + \dots + p_na_n, p_1x_1 + \dots + p_nx_n). \tag{1.1}$$

Imajuću u vidu da je $x = p_1a_1 + \dots + p_na_n$, iz relacije (1.1) dobijamo sledeću relaciju

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n = 0. \tag{1.2}$$

Ako stavimo da je $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ relacija (1.2) se svodi na uslov da je skalarni proizvod $\langle p,x\rangle = 0$.

Relacija (1.1) se jednostavnim transformacijama svodi na sledeći sistem od n jednačina

$$\left[\begin{array}{l} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + \dots + a_{1n}p_n = x_1 \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{2n}p_n = x_2 \\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \qquad \dots \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \qquad \dots \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \qquad \dots \qquad \cdot \qquad \cdot \\ a_{n1}p_1 + a_{n2}p_2 + \dots + a_{nn}p_n = x_n \end{array}\right. . \tag{1.3}$$

Ovaj sistem ima jedinstveno rešenje jer je po pretpostavci $\det([a_{ij}]) \neq 0$. Za generisanje svih kanoničkih grafova sa n sopstvenih vrednosti različitih od nule potrebno je odrediti sve vektore x_i i p_i. Vektori x_i sadrže elemente iz skupa $\{0,1\}$ i izborom svih mogućih kombinacija elemenata iz $\{0,1\}$ u vektoru $x \in R^n$ nalazimo sistemom jednačina (1.3) vektore p_i, x_i. Pri tome vektori p_i i x_i zadovoljavaju sledeće uslove:

(i) $x_i \neq 0$;

(ii) Skalarni proizvod $\langle x_i, p_i\rangle = 0$;

(iii) $x_i \neq a_j$ $(j = 1,2,\dots,n)$.

Relacija (iii) važi jer u suprotnom slučaju generisani graf g_1 ne bi bio kanonički zato što bi čvorovi koji odgovaraju vektorima x_i i a_j imali iste susede.

Sada ćemo pokazati kako se na bazni graf dodaju dva čvora tako da novi generisani kanonički graf g_2 sadrži n sopstvenih vrednosti različitih od nule. Istim postupkom se generišu kanonički grafovi g_k koji imaju (n+k) čvorova i takođe n sopstvenih vrednosti različitih od nule. Neka je matrica $A(g_2)$ generisanog grafa g_2

$$A(g_2) = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 & y_1 \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} & x_2 & y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 & x_n & y_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 & y_{n+1} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y_{n+1} & 0 \end{bmatrix},$$

gde je vektor $y \neq x$ i vektor y je neki od vektora koji su određeni sistemom jednačina (1.3).

Za trenutak pretpostavimo da su elementi generisane matrice $A(g_2)$ simetrični u odnosu na glavnu dijagonalu.

Tada je $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ linearna kombinacija vektora $\{a_i\}$ i skalara $\{p_i\}$ i $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ linerana kombinacija vektora $\{a_i\}$ i skalara $\{q_i\}$. Definišimo vektore Y i B_i na sledeći način: $Y = (y, y_{n+1}, 0) = (y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}, 0)$ i $B_i = (a_i, x_i, y_i) = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}, x_i, y_i)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Vektor Y je linerana kombinacija vektora $\{B_i\}$ i skalara $\{q_i\}$, tj. imamo da je vektor $(y, y_{n+1}, 0) = q_1(a_1, x_1, y_1) + q_2(a_2, x_2, y_2) + \ldots + q_n(a_n, x_n, y_n)$. Množenjem skalara $\{q_i\}$ i vektora $\{a_i\}$, prethodna relacija se svodi na relaciju

$$(1.4) \qquad (y, y_{n+1}, 0) = (q_1a_1 + \ldots + q_na_n, q_1x_1 + \ldots + q_nx_n, q_1y_1 + \ldots + q_ny_n).$$

Iz relacije (1.4) neposredno dobijamo sledeće relacije

(1.5) $$y_{n+1} = q_1x_1 + \dots + q_nx_n \quad ,$$

(1.6) $$0 \quad = q_1y_1 + \dots + q_ny_n \quad .$$

Desna strana relacije (1.5) predstavlja skalarni proizvod vektora x,q i upravo iz ove relacije vidimo kako se određuju elementi matrice susedstva $A(g_2)$ generisanog grafa g_2. Ako je skalarni proizvod vektora $x,q \in \{0,1\}$ tada kažemo da su vektori x,q koegistentni. Ako je skalarni proizvod $\langle x,q\rangle = 0$ tada čvorovi koji odgovaraju vektorima x,y nisu susedni. Ako je skalarni proizvod $\langle x,q\rangle = 1$ tada su čvorovi koji odgovaraju vektorima x,y susedni. Osim toga primetimo da je relacija (1.6) sadržana u uslovu (iii) pri određivanju vektora x_i,p_i.

Navodimo sledeći rezultat koji se odnosi na način generisanja elemenata matrice susedstva kanoničkog grafa g. Ovom teoremom se ujedno dokazuje simetričnost elemenata generisanih vrsta i kolona u odnosu na glavnu dijagonalu matrice susedstva. Sa k označimo ukupan broj vektora x koji se određuju pomoću relacije (1.3)

Teorema 1.3 Za proizvoljne indekse $i,j \in \{1,2,\dots,k\}$ važi komutativnost skalarnog množenja vektora x_i,p_j po indeksima i,j, tj. $\langle x_i,p_j\rangle = \langle x_j,p_i\rangle$.

Dokaz. U dokazu ove teoreme vektore a_i, A_i, B_i $(i = 1,2,\dots,k)$ i X definišimo na isti način kao u razmatranju generisanja matrice susedstva kanoničkog grafa dodavanjem dva čvora na bazni graf.

Neka je data matrica susedstva $A(g_2)$ u obliku

$$A(g_2) = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} & x_1 & y_1 \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} & x_2 & y_2 \\ . & . & \dots & . & . & . \\ . & . & \dots & . & . & . \\ . & . & \dots & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & x_n & y_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & 0 & y(1) \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & y(2) & 0 \end{bmatrix} .$$

Dovoljno je dokazati da je $y(1) = y(2)$. Najpre dokažimo da ako je $x = (x_1,x_2,\dots,x_n)$ linerna kombinacija vektora $\{a_i\}$ i skalara $\{p_i\}$, tada je X linerna kombinacija vektora $\{A_i\}$ i skalara $\{p_i\}$.

Pretpostavmo da je X linearna kombinacija vektora $\{A_i\}$ i skalara $\{q_i\}$, tj. $(x,0) = q_1(a_1,x_1) + \dots + q_n(a_n,x_n)$. Sobzirom da je $(x,0) = ((x_1,x_2,\dots,x_n),0)$ i na osnovu prethodne relacije imamo da je $x = q_1a_1 + \dots + q_na_n$. Po pretostavci x je linearna kombinacija vektora $\{a_i\}$ i skalara $\{p_i\}$, pa neposredno dobijamo da je $\{p_i\} = \{q_i\}$ $(i \in \{1,2,\dots,n\})$.

Pretpostavimo da je vektor $y = (y_1,y_2,\dots,y_n)$ linearna kombinacija vektora $\{a_i\}$ i skalara $\{q_i\}$. Analogno prethodnom razmatranju dokazuje se da je vektor $Y = (y,y(1),0)$ linerana kombinacija vektora $\{B_i\}$ i skalara $\{q_i\}$, tj. imamo da je vektor $(y,y(1),0) = q_1(a_1,x_1,y_1) + \dots + q_n(a_n,x_n,y_n)$. Odavde neposredno dobijamo sledeću relaciju

$$y(1) = q_1x_1 + \dots + q_nx_n \;. \tag{1.7}$$

Stavimo da je $Z = (x,0,y(2))$. Lako se pokazuje da je vektor $(x,0,y(2)) = p_1(a_1,x_1,y_1) + \dots + p_n(a_n,x_n,y_n)$. Iz prethodne relacije imamo

$$y(2) = p_1y_1 + \dots + p_ny_n \;. \tag{1.8}$$

Neka je $R = (y_1,y_2,\dots,y_n,y(2),0)$. Pretpostavimo da je vektor R linearna kombinacija vektora $\{B_i\}$ i skalara $\{r_i\}$, tj. $Z = (y,Y(2),0) = r_1(a_1,x_1,y_1) + \dots + r_n(a_n,x_n,y_n)$. Iz ove relacije neposredno dobijamo

$$y = r_1a_1 + \dots + r_na_n \;, \tag{1.9}$$

$$y(2) = r_1x_1 + \dots + r_nx_n \;. \tag{1.10}$$

Po pretpostavci je vektor y linearna kombinacija vektora $\{a_i\}$ i skalara $\{q_i\}$ pa iz relacije (1.9) imamo da je $\{r_i\} = \{q_i\}$ ($i \in \{1,2,\ldots,n\}$). Konačno iz relacija (1.7), (1.8) i (1.10) imamo da je $y(1) = y(2)$. □

U sledećoj listi dat je kompletan spisak svih kanoničkih neizomorfnih grafova sa tačno 6 sopstvenih vrednosti različitih od nule, čime je navedeni problem za konačne i beskonačne grafove potpuno rešen. Tako dobijamo glavni rezultat u ovom poglavlju.

Teorema 1.4 Postoji tačno 1644 neizomorfnih povezanih kanoničkih grafaova koji imaju 6 sopstvenih vrednosti raličitih od nule.

Slog Liste 1.1 (str. 10 - 43) svih kanoničkih grafova sa 6 sopstvenih vrednosti različitih od nule predstavljen je u obliku

$$n_1 \quad n_2 \qquad a_{12}\ a_{13}a_{23} \cdots a_{1n}a_{2n}\cdots a_{n-1,n}\ ,$$

gde je n_1 redni broj odgovarajućeg grafa G, n_2 je broj njegovih grana i $a_{12}\ a_{13}a_{23} \cdots a_{1n}a_{2n}\cdots a_{n-1,n}$ je gornji trougaoni oblik odgovarajuće matrice susedstva grafa G.

Napomenimo da Lista 1.1 sadrži:

sa 6 čvorova : 52 grafa,
sa 7 čvorova : 158 grafova,
sa 8 čvorova : 332 grafa,
sa 9 čvorova : 437 grafova,
sa 10 čvorova : 373 grafa,
sa 11 čvorova : 204 grafa,
sa 12 čvorova : 70 grafova,
sa 13 čvorova : 15 grafova,
sa 14 čvorova : 3 grafa.

LISTA 1.1 SPISAK KANONIČKIH GRAFOVA SA 6 NENULA SOPSTVENIH VREDNOSTI

1. Kanonički grafovi sa 06 čvorova

0001	05	1	01	001	0001	00001
0002	05	1	01	001	0100	00001
0003	06	1	11	001	0001	00001
0004	06	1	01	011	0001	00100
0005	06	1	01	001	1001	00001
0006	06	1	01	001	0011	00001
0007	06	1	01	001	0101	00001
0008	06	1	01	001	0011	00100
0009	06	1	01	001	0001	10001
0010	07	1	01	001	0111	00010
0011	07	1	11	001	0011	00100
0012	07	1	01	001	1001	10001
0013	07	1	01	011	0001	01001
0014	07	1	11	001	0011	00001
0015	07	1	11	001	0001	00011
0016	07	1	01	001	0111	00001
0017	07	1	01	011	1001	00001
0018	07	1	01	101	0001	10001
0019	08	1	01	011	0111	00001
0020	08	1	01	001	1001	11001
0021	08	1	01	001	1001	10101
0022	08	1	11	001	1001	10001
0023	08	1	11	101	0001	10001
0024	08	1	11	101	1001	00010
0025	08	1	11	101	0001	00011
0026	08	1	11	011	1001	00010
0027	08	1	01	001	1111	00001
0028	08	1	01	001	0011	00111
0029	09	1	11	001	0111	10001
0030	09	1	11	001	0001	11011
0031	09	1	01	011	1111	00001
0032	09	1	01	011	0001	11011
0033	09	1	11	101	0001	11001
0034	09	1	11	101	1001	10001
0035	09	1	11	111	0001	00011
0036	09	1	11	001	1111	00010
0037	09	1	11	001	0001	10111
0038	10	1	01	011	1011	10011
0039	10	1	01	111	0001	11011
0040	10	1	01	111	0111	10001
0041	10	1	11	101	0001	10111
0042	10	1	01	111	0011	10011
0043	10	1	11	111	0001	10011
0044	10	1	11	011	1111	00010
0045	11	1	11	111	1111	00010
0046	11	1	11	101	0101	10111
0047	11	1	01	011	1111	11001
0048	11	1	11	101	1111	01001
0049	12	1	01	111	1111	11001
0050	12	1	11	111	1111	10001
0051	13	1	01	111	0111	11111
0052	15	1	11	111	1111	11111

2. Kanonički grafovi sa 07 čvorova

0053	06	1	00	001	0000	00001	100101
0054	06	1	00	001	0001	00001	010001
0055	06	1	00	001	0001	00001	010010
0056	07	1	01	011	0001	00100	000001
0057	07	1	01	001	0100	00001	001010
0058	07	1	01	001	0100	00001	001001
0059	07	1	01	001	0001	00001	010010
0060	07	1	01	001	0100	00001	101000
0061	07	1	00	001	0011	00001	010100
0062	07	1	01	001	0100	00001	010010
0063	07	1	01	001	0001	00001	010001
0064	07	1	00	001	0011	00001	010010
0065	08	1	01	011	1001	00001	010000
0066	08	1	01	001	0101	00001	000101
0067	08	1	11	001	0001	00001	010010
0068	08	1	01	011	0001	00100	001100
0069	08	1	01	001	0011	00001	000101
0070	08	1	01	011	0001	00100	010001
0071	08	1	01	001	0101	00001	100001
0072	08	1	11	001	0011	00100	010000
0073	08	1	00	001	0011	00001	101001
0074	08	1	01	011	0001	01001	100000
0075	08	1	01	011	0001	01001	000100
0076	08	1	01	001	0100	00001	011010
0077	08	1	01	001	0101	00001	010001
0078	08	1	01	001	0011	00001	000110
0079	08	1	01	001	0011	00001	010100
0080	08	1	01	001	0011	00001	100010
0081	08	1	01	001	0101	00001	000110
0082	08	1	01	001	0011	00001	011000
0083	08	1	01	001	0011	00100	100001
0084	09	1	01	011	0111	00001	000100
0085	09	1	11	101	0001	10001	001000
0086	09	1	01	001	1001	10101	100000
0087	09	1	11	001	1001	10001	001000
0088	09	1	11	101	0001	10001	000010
0089	09	1	11	101	1001	00010	001000
0090	09	1	01	001	1111	00001	010000
0091	09	1	11	101	0001	10001	010000
0092	09	1	11	011	1001	00010	010000
0093	09	1	11	101	0001	10001	100000
0094	09	1	01	001	1001	10101	010000
0095	09	1	11	001	1001	10001	100000
0096	09	1	11	101	1001	00010	010000
0097	09	1	01	001	1111	00001	100000
0098	09	1	01	001	0011	00001	110100
0099	09	1	11	011	1001	00010	000001
0100	09	1	01	001	1001	10101	001000
0101	09	1	11	001	1001	10001	010000
0102	09	1	11	011	1001	00010	100000
0103	09	1	01	001	0111	00001	001001
0104	09	1	01	001	0101	00001	110100
0105	09	1	01	001	0001	10001	101010
0106	09	1	11	001	0001	00001	100101
0107	09	1	01	001	0001	10001	100101
0108	09	1	11	001	0001	00001	001101

0109	09	1	01	011	0001	01001	101000
0110	10	1	11	001	0111	10001	100000
0111	10	1	01	011	1111	00001	010000
0112	10	1	11	001	0001	11011	000010
0113	10	1	01	011	0001	11011	010000
0114	10	1	01	011	0111	00001	100100
0115	10	1	01	001	1001	10101	100010
0116	10	1	11	101	0001	10001	010100
0117	10	1	11	101	1001	10001	001000
0118	10	1	11	101	1001	00010	001010
0119	10	1	11	001	0111	10001	000010
0120	10	1	01	011	1111	00001	001000
0121	10	1	11	101	0001	10001	100100
0122	10	1	11	101	0001	11001	010000
0123	10	1	11	001	0111	10001	001000
0124	10	1	01	001	1001	10101	110000
0125	10	1	11	101	0001	10001	001001
0126	10	1	11	101	1001	00010	000011
0127	10	1	11	001	0111	10001	000100
0128	10	1	11	101	0001	00011	000011
0129	10	1	11	001	0001	11011	100000
0130	10	1	11	101	1001	10001	100000
0131	10	1	11	001	1001	10001	100100
0132	10	1	01	001	1001	10101	010001
0133	10	1	11	001	1001	10001	010001
0134	10	1	11	011	1001	00010	001010
0135	10	1	01	001	0101	00001	101011
0136	10	1	01	001	1001	10001	001101
0137	10	1	01	011	0001	01001	001011
0138	10	1	01	011	1001	00001	010011
0139	11	1	01	011	1011	10011	001000
0140	11	1	11	011	1111	00010	000001
0141	11	1	01	111	0111	10001	001000
0142	11	1	11	001	0001	11011	010100
0143	11	1	01	011	1011	10011	000010
0144	11	1	11	001	0111	10001	001001
0145	11	1	11	001	0001	10111	000110
0146	11	1	01	001	1001	10101	101100
0147	11	1	11	101	0001	10001	100101
0148	11	1	01	011	0111	00001	011001
0149	11	1	01	111	0001	11011	000001
0150	11	1	11	101	1001	10001	001001
0151	11	1	11	101	0001	11001	011000
0152	11	1	11	101	0001	10001	001011
0153	11	1	01	001	1001	10101	001101
0154	11	1	01	111	0001	11011	000100
0155	11	1	11	001	0111	10001	010001
0156	11	1	11	001	1001	10001	001101
0157	11	1	11	001	0111	10001	010100
0158	11	1	11	101	0001	10001	010101
0159	11	1	01	001	0011	00111	110001
0160	11	1	11	001	0111	10001	101000
0161	11	1	01	011	1111	00001	010001
0162	11	1	11	101	0001	10001	110010
0163	11	1	11	001	0001	11011	001001
0164	11	1	11	101	1001	00010	001110
0165	12	1	11	101	0001	10111	000011
0166	12	1	11	101	0101	10111	000001
0167	12	1	01	111	0111	10001	010010
0168	12	1	01	001	1001	10101	101011

0223	09	1	01	001	0100	00001	000110	1010000
0224	09	1	00	001	0001	00001	010100	1000101
0225	09	1	01	001	0101	00001	000001	0001010
0226	09	1	00	001	0001	00001	100010	1010100
0227	09	1	01	001	0100	00001	010010	1000001
0228	09	1	01	001	0101	00001	001000	0100100
0229	09	1	00	001	0011	00001	000100	1010010
0230	09	1	01	001	0011	00001	001000	0110000
0231	09	1	01	011	0001	00100	000001	0001010
0232	10	1	11	001	1001	10001	000010	1000000
0233	10	1	11	101	0001	10001	000010	1000000
0234	10	1	01	001	1001	10101	010000	1000000
0235	10	1	01	001	1111	00001	001000	0100000
0236	10	1	11	101	0001	10001	001000	1000000
0237	10	1	11	011	1001	00010	010000	1000000
0238	10	1	11	101	0001	10001	000010	0010000
0239	10	1	01	001	0101	00001	010001	1010000
0240	10	1	11	001	1001	10001	000010	0010000
0241	10	1	11	101	0001	10001	001000	0100000
0242	10	1	01	001	1001	10101	000010	1000000
0243	10	1	01	001	1111	00001	001000	1000000
0244	10	1	11	011	1001	00010	000001	0010000
0245	10	1	11	001	1001	10001	000001	0100000
0246	10	1	01	001	1001	10101	001000	1000000
0247	10	1	01	001	0101	00001	011000	1000010
0248	10	1	01	001	0101	00001	010010	1000001
0249	10	1	00	001	0011	00001	100100	1010001
0250	10	1	11	001	0001	00001	010000	0101010
0251	10	1	00	001	0011	00001	001001	0110100
0252	10	1	01	001	0001	10001	000100	0101010
0253	10	1	01	001	0011	00100	011000	1000001
0254	10	1	01	001	0101	00001	000001	0010110
0255	10	1	01	001	0101	00001	000001	0001101
0256	10	1	00	001	0011	00001	100100	1010010
0257	10	1	01	001	0111	00010	000010	0010001
0258	10	1	01	001	0001	10001	000010	0101100
0259	10	1	00	001	0011	00001	000101	0101010
0260	10	1	11	001	0001	00001	001101	0100000
0261	11	1	11	001	0111	10001	001000	1000000
0262	11	1	01	011	0111	00001	000100	1010000
0263	11	1	11	101	0001	11001	001000	0100000
0264	11	1	01	011	0001	11011	000100	0100000
0265	11	1	01	011	1111	00001	001000	0100000
0266	11	1	11	101	1001	00010	000011	0010000
0267	11	1	11	101	0001	10001	010000	1001000
0268	11	1	11	101	1001	10001	000010	1000000
0269	11	1	01	001	1001	10101	001000	0100001
0270	11	1	11	001	0111	10001	000100	0010000
0271	11	1	11	101	0001	10001	001000	0110000
0272	11	1	11	001	0001	11011	000010	0100000
0273	11	1	11	001	0111	10001	000100	0100000
0274	11	1	11	011	1001	00010	000001	0100010
0275	11	1	11	101	1001	00010	010100	1000000
0276	11	1	11	101	0001	10001	000010	0010010
0277	11	1	11	001	1001	10001	010000	0100010
0278	11	1	01	001	1001	10101	000010	0001100
0279	11	1	11	101	1001	10001	000010	0010000
0280	11	1	01	001	0011	00001	001001	1011000
0281	11	1	11	101	0001	10001	010100	1000000
0282	11	1	11	101	1001	00010	010000	0101000

0283	11	1	01	001	1001	10101	000100	0100010
0284	11	1	11	001	1001	10001	010000	1001000
0285	11	1	11	101	0001	10001	000010	0010100
0286	11	1	01	001	1001	10101	100000	1000100
0287	11	1	11	001	1001	10001	000101	0010000
0288	11	1	00	001	0011	00001	000101	0110101
0289	11	1	11	011	1001	00010	001000	0100001
0290	11	1	00	001	0011	00001	000101	1010011
0291	11	1	01	001	1001	10101	000010	0100010
0292	11	1	11	011	1001	00010	001010	0100000
0293	11	1	11	001	0001	00001	010100	0101100
0294	11	1	01	001	1001	10101	000101	0010000
0295	11	1	01	001	0101	00001	001011	1000010
0296	11	1	01	011	0001	01001	001000	1001010
0297	11	1	11	001	0001	00001	010010	1001100
0298	11	1	01	001	0101	00001	000100	1010110
0299	11	1	01	011	0001	01001	000001	0010110
0300	12	1	01	011	1011	10011	000001	0001000
0301	12	1	01	111	0001	11011	000001	0001000
0302	12	1	01	111	0111	10001	000100	0010000
0303	12	1	11	101	0001	11001	001000	1000100
0304	12	1	01	011	1011	10011	000001	0010000
0305	12	1	11	001	0111	10001	000100	0100010
0306	12	1	01	001	1001	10101	000100	0110100
0307	12	1	11	101	0001	10001	010110	1000000
0308	12	1	01	011	0111	00001	000110	1010000
0309	12	1	11	101	1001	00010	000011	0010100
0310	12	1	01	111	0001	11011	000001	0100000
0311	12	1	11	101	1001	10001	000101	1000000
0312	12	1	11	001	0111	10001	000010	1010000
0313	12	1	11	001	0001	11011	000010	1000100
0314	12	1	11	101	0001	10001	001000	0011010
0315	12	1	01	011	0111	00001	000101	0001100
0316	12	1	01	001	1001	10101	001000	1100001
0317	12	1	01	011	0001	11011	010000	1000100
0318	12	1	11	001	1001	10001	100000	1010100
0319	12	1	01	001	0101	00001	100000	1111010
0320	12	1	11	101	0001	10001	001001	0101000
0321	12	1	11	101	0001	11001	001000	1000010
0322	12	1	11	001	0111	10001	001001	1000000
0323	12	1	01	001	1001	10101	000100	1011000
0324	12	1	11	101	0001	10001	001001	1001000
0325	12	1	11	101	0001	10001	001000	1001001
0326	12	1	11	011	1001	00010	001010	0101000
0327	12	1	11	001	0111	10001	000010	0101000
0328	12	1	01	001	1001	10101	000010	0000111
0329	12	1	11	101	0001	10001	001011	0100000
0330	12	1	11	001	0111	10001	000010	0001001
0331	12	1	01	001	0101	00001	001011	0110100
0332	12	1	01	011	0111	00001	001001	1001000
0333	12	1	11	001	0001	11011	000010	0010010
0334	12	1	11	001	1001	10001	010001	1001000
0335	12	1	01	001	1001	10101	000100	0001011
0336	12	1	11	101	1001	00010	001000	1100001
0337	12	1	11	001	0111	10001	010100	1000000
0338	12	1	11	001	1001	10001	000001	0110100
0339	12	1	01	001	1001	10101	000101	1100000
0340	12	1	11	101	0001	10001	001000	0101001
0341	12	1	11	101	0001	10001	000010	0010110
0342	12	1	11	001	0001	11011	010000	1000001

0343	12	1	01	001	1001	10101	000010	0001011
0344	12	1	11	101	0001	10001	001000	0101010
0345	12	1	11	001	0111	10001	001001	0100000
0346	12	1	11	101	0001	10001	001001	1000001
0347	12	1	01	001	1001	10101	000011	0001001
0348	12	1	11	101	0001	10001	010000	0101010
0349	12	1	11	001	0001	11011	010000	1001000
0350	12	1	11	101	0001	10001	000010	0101010
0351	12	1	11	001	1001	10001	010110	1000000
0352	12	1	11	001	1001	10001	000001	0101100
0353	12	1	11	101	1001	00010	001110	0100000
0354	12	1	01	001	0001	10001	010110	1101000
0355	12	1	01	011	1001	00001	000100	0100111
0356	13	1	01	011	1011	10011	000001	0001010
0357	13	1	11	101	0101	10111	000100	0010000
0358	13	1	01	111	0111	10001	001000	0011000
0359	13	1	11	001	0001	11011	010110	1000000
0360	13	1	01	011	1011	10011	000001	1001000
0361	13	1	01	011	0001	11011	000100	1011000
0362	13	1	01	011	1111	00001	000100	1010010
0363	13	1	01	001	1001	10101	010000	1101010
0364	13	1	01	011	1011	10011	000010	0001001
0365	13	1	11	001	0111	10001	000010	0011001
0366	13	1	01	011	0111	00001	101000	1010100
0367	13	1	11	101	1001	00010	010111	1000000
0368	13	1	01	011	1011	10011	000100	0010001
0369	13	1	11	101	1001	10001	001001	1000001
0370	13	1	01	111	0111	10001	000100	0100001
0371	13	1	01	011	1011	10011	001000	1001000
0372	13	1	11	001	0111	10001	010110	1000000
0373	13	1	01	001	1001	10101	000010	1011100
0374	13	1	01	011	1011	10011	000010	1001000
0375	13	1	11	101	0001	10001	010101	1001000
0376	13	1	01	111	0001	11011	010000	0100010
0377	13	1	11	001	1001	10001	010001	0110100
0378	13	1	01	011	0001	01001	001010	0101011
0379	13	1	01	011	1011	10011	001000	0010010
0380	13	1	11	001	0111	10001	000010	0101100
0381	13	1	11	101	0001	11001	001000	0101010
0382	13	1	11	101	0001	10001	100000	1011010
0383	13	1	01	001	0011	00100	011010	0111001
0384	13	1	11	101	0001	10001	000010	1001011
0385	13	1	01	111	0111	10001	000110	0100000
0386	13	1	11	001	0001	11011	001001	0100100
0387	13	1	11	101	0001	10001	001011	0101000
0388	13	1	01	011	0001	11011	000100	0010101
0389	13	1	11	001	0111	10001	001100	0100001
0390	13	1	01	001	1001	10101	011010	1100000
0391	13	1	11	101	0001	10001	001010	0101010
0392	13	1	01	001	0011	00100	000111	0111001
0393	13	1	01	001	1001	10101	000011	1100001
0394	13	1	01	011	0111	00001	000101	0010011
0395	13	1	11	101	0001	10001	010000	0110110
0396	13	1	01	011	0001	01001	010101	1010001
0397	13	1	11	101	0001	10001	000010	0011011
0398	13	1	01	001	1111	00001	010000	1110010
0399	13	1	11	011	1001	00010	001010	0010110
0400	13	1	11	101	0001	10001	001011	1000001
0401	13	1	11	001	1001	10001	010000	1101010
0402	13	1	01	001	0101	00001	001011	1101001

0403	13	1	01	001	0101	00001	101110	1101000
0404	14	1	01	011	1011	10011	010010	1000100
0405	14	1	11	101	0101	10111	000001	1000010
0406	14	1	01	111	0111	10001	001000	0100101
0407	14	1	11	001	0001	11011	010010	1000101
0408	14	1	01	011	1011	10011	000001	0110100
0409	14	1	01	011	0001	11011	100010	1010010
0410	14	1	01	011	1111	00001	010000	1011001
0411	14	1	01	001	1001	10101	000101	1101010
0412	14	1	01	011	1011	10011	000001	1001010
0413	14	1	11	001	0111	10001	000010	1010011
0414	14	1	11	101	1001	00010	001010	0101110
0415	14	1	01	011	1011	10011	001000	0101001
0416	14	1	11	101	0001	10001	001010	0101110
0417	14	1	11	001	0011	00100	010011	1011001
0418	14	1	01	011	1011	10011	001001	0100100
0419	14	1	11	101	0101	10111	001000	0101000
0420	14	1	01	111	0111	10001	000101	0110000
0421	14	1	01	011	1011	10011	000010	1010010
0422	14	1	01	111	0001	11011	100100	1010000
0423	14	1	01	011	1111	00001	010001	1011000
0424	14	1	01	001	1001	10101	100010	1101010
0425	14	1	01	011	1011	10011	000010	0010011
0426	14	1	11	101	1001	00010	011011	1100000
0427	14	1	11	101	0001	10001	010100	1101100
0428	14	1	01	011	1001	00001	100100	1101011
0429	14	1	01	111	0111	10001	010000	1010010
0430	14	1	01	011	1011	10011	000101	0100100
0431	14	1	01	111	0001	11011	000100	0100101
0432	14	1	01	011	0111	00001	010010	1010101
0433	14	1	11	101	1001	00010	000011	0011101
0434	14	1	01	011	1011	10011	000010	0110010
0435	14	1	11	001	0011	00100	010011	1100110
0436	14	1	01	001	1001	10101	011010	1000011
0437	14	1	01	011	0111	00001	001001	1001101
0438	14	1	01	111	0001	11011	000100	1011000
0439	14	1	01	111	0111	10001	001000	1100100
0440	14	1	01	001	1001	10101	000101	0110101
0441	14	1	01	011	0111	00001	010100	1011010
0442	14	1	11	101	1001	00010	101100	1100001
0443	14	1	11	001	1001	10001	001011	0110100
0444	14	1	01	011	0001	01001	001011	1100101
0445	14	1	11	101	0001	10001	001011	1001001
0446	14	1	11	101	0001	11001	010000	1110100
0447	14	1	11	101	1001	00010	001110	1011000
0448	14	1	11	001	0111	10001	100000	1100101
0449	14	1	01	001	1111	00001	101000	1110010
0450	14	1	11	101	0001	11001	001000	0111100
0451	14	1	11	001	0111	10001	010100	1010001
0452	15	1	01	011	1011	10011	011010	1010000
0453	15	1	11	101	0101	10111	001001	0101000
0454	15	1	01	011	0111	00001	100110	1010101
0455	15	1	01	001	1001	10101	010001	1011101
0456	15	1	01	011	1011	10011	000101	1000101
0457	15	1	11	111	0001	10011	011000	1000110
0458	15	1	01	111	0111	10001	001100	0110001
0459	15	1	11	101	0001	11001	010110	1000011
0460	15	1	01	011	1011	10011	001001	1001010
0461	15	1	01	011	1111	00001	010001	1101010
0462	15	1	11	101	1001	00010	010111	1100010

0463	15	1	11	001	0111	10001	001001	1001101
0464	15	1	01	011	1011	10011	000100	0110101
0465	15	1	11	101	0101	10111	000100	0011100
0466	15	1	01	001	1001	10101	010111	1000011
0467	15	1	01	111	0001	11011	101000	1011000
0468	15	1	01	111	0111	10001	010000	1001101
0469	15	1	11	101	0001	11001	001011	0011010
0470	15	1	01	011	1111	00001	001010	1001011
0471	15	1	11	101	1001	10001	001011	0110100
0472	15	1	01	011	0001	01001	100101	1111100
0473	15	1	01	011	1011	10011	100100	1001010
0474	15	1	11	101	0101	10111	001011	1000000
0475	15	1	01	001	1001	10101	011110	1000011
0476	15	1	01	011	1011	10011	010001	0110010
0477	15	1	11	001	0111	10001	101000	1101010
0478	15	1	01	001	1111	00001	010001	1101101
0479	15	1	11	101	0101	10111	001100	1000001
0480	15	1	11	101	0001	10001	001010	1011011
0481	15	1	11	101	1001	00010	001000	1101111
0482	15	1	01	111	0111	10001	000101	0100011
0483	15	1	01	011	0001	01001	100101	1010111
0484	15	1	01	011	1001	00001	101011	1011010
0485	15	1	11	101	0001	10001	010101	0101110
0486	15	1	11	001	0001	00011	010111	1110100
0487	15	1	01	011	0001	01001	001101	1110101
0488	16	1	01	011	1011	10011	010100	0111010
0489	16	1	01	111	0111	11111	000010	0010001
0490	16	1	01	011	0111	00001	011001	1011011
0491	16	1	01	011	1011	10011	010010	0101110
0492	16	1	01	111	0001	11011	001001	1010101
0493	16	1	01	111	0111	10001	101001	1010100
0494	16	1	11	101	0001	11001	001101	0110110
0495	16	1	01	011	1011	10011	010100	1010011
0496	16	1	11	101	0001	10001	001011	1011011
0497	16	1	11	001	1111	00010	101101	1100100
0498	16	1	11	101	1001	00010	100011	1101110
0499	16	1	11	001	0111	10001	010110	1001011
0500	16	1	11	001	1001	10001	101001	1101011
0501	16	1	01	011	1001	00001	101101	1111010
0502	16	1	01	011	1011	10011	010100	0110011
0503	16	1	01	111	0111	10001	010001	1110010
0504	16	1	01	001	1001	10101	010111	1111000
0505	16	1	01	011	1011	10011	001010	1001011
0506	16	1	11	101	0001	10001	010101	1011011
0507	16	1	11	101	1001	10001	001010	1101101
0508	16	1	11	101	1001	00010	001010	1101111
0509	16	1	01	011	1011	10011	011001	1001001
0510	16	1	11	001	1111	00010	110010	1110001
0511	16	1	01	001	1111	00001	011101	1101010
0512	16	1	01	011	1011	10011	011001	1010010
0513	16	1	01	111	0111	10001	010001	1001101
0514	16	1	01	111	0001	11011	001001	1010110
0515	16	1	01	011	1111	00001	100110	1010101
0516	16	1	11	001	0001	10111	000110	0111110
0517	16	1	11	101	0001	10001	010111	1110100
0518	16	1	11	111	1111	00010	000011	0010011
0519	17	1	11	101	0001	10111	101101	1100001
0520	17	1	01	001	1001	10101	110111	1110100
0521	17	1	11	011	1111	00010	101010	1100101
0522	17	1	01	111	0111	10001	001101	1010101

0523	17	1	11	101	0001	10001	011111	1110100
0524	17	1	01	011	1011	10011	011001	0111010
0525	17	1	11	101	1001	10001	010111	1101100
0526	17	1	01	011	1011	10011	011010	1001011
0527	17	1	01	001	1001	10101	010111	0110111
0528	17	1	01	111	0111	10001	100110	1100101
0529	18	1	01	011	1011	10011	100101	1011101
0530	18	1	11	111	1111	00010	011010	1010101
0531	18	1	01	011	1011	10011	010111	0111010
0532	18	1	01	011	1011	10011	011001	1011101
0533	18	1	11	001	1111	00010	011101	1011011
0534	18	1	01	111	1111	11001	000001	1101011
0535	18	1	11	001	1111	00010	100111	1011011
0536	19	1	01	011	1011	10011	011101	1010111
0537	19	1	11	101	0001	00011	011111	1101111
0538	19	1	11	111	0001	10011	001111	0101111
0539	20	1	11	001	0001	10111	011111	1110111
0540	21	1	11	011	1111	00010	101111	1101111
0541	22	1	01	111	1111	11001	011111	1110110
0542	22	1	11	101	1111	01001	011111	1101111

4. Kanonički grafovi sa 09 čvorova

0543	09	1	00	001	0000	00001	001001	0100010	01100000
0544	10	1	00	001	0001	00001	000110	1000100	10010000
0545	10	1	00	001	0000	00001	001010	0100100	10100001
0546	10	1	00	001	0001	00001	000001	0101000	01010100
0547	10	1	00	001	0000	00001	001010	0100100	10001001
0548	11	1	11	001	1001	10001	000010	0010000	10000000
0549	11	1	11	101	0001	10001	000010	0010000	10000000
0550	11	1	01	001	1001	10101	000010	0010000	10000000
0551	11	1	01	001	0101	00001	000100	0001010	00100010
0552	11	1	01	001	0001	00001	000001	0001000	01011010
0553	11	1	00	001	0011	00001	000100	0100100	10001001
0554	11	1	11	001	0001	00001	001000	0101001	10000000
0555	11	1	01	001	0001	10001	000010	0101100	10000000
0556	11	1	01	001	0101	00001	000100	0010001	01001000
0557	11	1	01	001	0001	10001	000001	0001000	01010100
0558	12	1	01	001	1111	00001	001000	0100000	10000001
0559	12	1	11	001	0111	10001	000010	0010000	10000000
0560	12	1	11	101	1001	00010	001000	0011000	10000000
0561	12	1	01	001	1001	10101	001000	1000000	10001000
0562	12	1	11	101	1001	10001	000010	0010000	10000000
0563	12	1	11	101	0001	10001	001000	0010100	10000000
0564	12	1	11	001	1001	10001	000010	0010000	01000100
0565	12	1	11	101	0001	10001	001000	0100000	10000001
0566	12	1	01	001	1001	10101	000010	0010000	01000100
0567	12	1	11	011	1001	00010	001000	0100001	10000000
0568	12	1	11	001	1001	10001	000001	0100000	10010000
0569	12	1	11	101	0001	10001	000010	0101000	10000000
0570	12	1	01	001	1001	10101	000101	0100000	10000000
0571	12	1	11	011	1001	00010	000001	0010000	01000001
0572	12	1	01	001	0011	00001	000101	0010000	10010100
0573	12	1	11	001	1001	10001	000101	0010000	10000000
0574	12	1	01	001	1001	10101	001000	0100001	10000000
0575	12	1	11	011	1001	00010	000001	0010100	01000000
0576	12	1	11	001	0001	00001	001101	0100000	10000001

0577	12	1	01	001	0011	00001	100000	1000100	11010000
0578	12	1	00	001	0000	00001	001001	0100101	10010011
0579	12	1	01	001	0101	00001	010001	1000001	10100000
0580	12	1	01	001	0101	00001	000001	0001000	10101100
0581	12	1	11	001	0001	00001	010000	1001000	10011000
0582	12	1	01	001	0101	00001	000001	1000010	11010000
0583	12	1	00	001	0011	00001	000100	0110010	10100010
0584	13	1	11	001	0111	10001	000010	0010000	01000100
0585	13	1	01	011	0111	00001	000101	0010000	01100000
0586	13	1	11	101	0001	11001	001000	0100000	10001000
0587	13	1	01	111	0001	11011	000001	0001000	01000000
0588	13	1	11	101	0001	10001	001000	0101001	10000000
0589	13	1	11	101	1001	10001	000010	0101000	10000000
0590	13	1	01	001	1001	10101	001000	0100010	10000001
0591	13	1	11	001	0111	10001	001000	1000000	10100000
0592	13	1	00	001	0011	00001	000100	0101100	01100011
0593	13	1	01	011	0001	11011	000001	0010100	01000000
0594	13	1	11	101	0001	10001	000010	0010010	01010000
0595	13	1	11	101	1001	00010	010000	0101000	11000000
0596	13	1	01	001	1001	10101	000101	0010000	01000001
0597	13	1	11	101	0001	10001	000010	0101100	10000000
0598	13	1	11	001	0001	00001	010000	0110100	10010001
0599	13	1	11	101	0001	10001	000010	0010000	01010001
0600	13	1	11	001	1001	10001	001000	0011010	10000000
0601	13	1	11	101	1001	00010	000011	0101000	10000000
0602	13	1	11	001	0111	10001	000100	0010000	01000001
0603	13	1	11	001	0111	10001	000100	0010000	01000100
0604	13	1	11	001	1001	10001	001000	0101001	10000000
0605	13	1	11	001	0111	10001	000100	0100000	01010000
0606	13	1	00	001	0011	00001	000101	1001100	10100001
0607	13	1	11	001	0111	10001	000100	0010010	01000000
0608	13	1	11	001	1001	10001	010000	0100010	10010000
0609	13	1	11	001	0001	11011	000010	0010010	01000000
0610	13	1	11	011	1001	00010	001011	0100000	10000000
0611	13	1	01	001	1001	10101	010000	0110100	10000000
0612	13	1	11	101	0001	10001	000010	0010010	10000001
0613	13	1	11	001	1001	10001	000010	0001011	00100000
0614	13	1	01	001	1001	10101	000010	0100010	10000001
0615	13	1	11	001	1001	10001	000101	0101000	10000000
0616	13	1	11	001	0001	00001	010000	0100100	10001011
0617	13	1	01	001	0101	00001	000110	0110001	10000100
0618	14	1	01	011	1011	10011	000001	0001000	01001000
0619	14	1	01	111	0001	11011	000100	0100000	01000100
0620	14	1	01	111	0111	10001	000100	0010000	01000010
0621	14	1	11	101	0001	11001	001000	0110000	10001000
0622	14	1	01	011	1011	10011	000001	0001000	00100001
0623	14	1	11	001	0111	10001	000100	0011000	01000100
0624	14	1	01	011	0111	00001	001001	0101000	10010000
0625	14	1	01	001	1001	10101	011010	1000000	11000000
0626	14	1	01	011	1011	10011	000001	0010000	00100100
0627	14	1	11	101	0001	10001	000010	0101010	10000001
0628	14	1	11	101	1001	00010	001010	0100000	11000100
0629	14	1	01	011	1011	10011	000010	0010000	00101000
0630	14	1	11	101	1001	10001	000010	0001011	10000000
0631	14	1	01	011	1011	10011	000001	0010000	10010000
0632	14	1	11	001	0111	10001	001001	0101000	10000000
0633	14	1	01	111	0111	10001	001000	0100000	01100000
0634	14	1	11	001	0001	11011	010100	1000000	10001000
0635	14	1	01	011	1011	10011	000001	0001000	10100000
0636	14	1	01	001	1001	10101	000011	0001010	10000010

0637	14	1	11	101	1001	00010	010010	1000001	11000000
0638	14	1	11	001	0111	10001	001000	0100001	10000001
0639	14	1	01	001	0001	00001	000001	0101010	01101101
0640	14	1	11	101	0001	10001	000010	0010000	00110110
0641	14	1	01	111	0111	10001	000101	0010000	01000000
0642	14	1	11	001	0001	11011	000010	0100000	10001001
0643	14	1	11	001	0111	10001	001001	0100000	10000001
0644	14	1	11	101	0001	10001	000010	1000000	11011000
0645	14	1	01	001	1111	00001	001000	0101010	10100000
0646	14	1	11	001	0001	11011	001001	0100000	10000001
0647	14	1	11	001	0111	10001	000010	0010000	00110010
0648	14	1	11	101	0001	10001	000010	0010100	01010100
0649	14	1	11	001	0111	10001	000100	0100000	11001000
0650	14	1	11	001	0001	11011	000010	0010010	10001000
0651	14	1	01	001	1001	10101	000010	0010000	10110001
0652	14	1	11	001	0111	10001	000010	0010011	10000000
0653	14	1	11	101	0001	10001	001000	0101010	10000001
0654	14	1	11	001	0001	11011	001001	1000000	10001000
0655	14	1	01	001	1001	10101	000101	1000000	10001010
0656	14	1	11	001	0111	10001	000010	0001001	01000100
0657	14	1	11	001	0111	10001	001000	0101010	10000000
0658	14	1	11	011	1001	00010	001010	0101000	10000010
0659	14	1	01	001	1001	10101	000011	0001001	10000100
0660	14	1	11	011	1001	00010	000001	0010100	01001001
0661	14	1	11	001	0001	11011	000010	0100000	10011000
0662	14	1	01	001	1001	10101	010000	0100011	10000001
0663	14	1	11	001	0111	10001	000100	0010010	01010000
0664	14	1	01	001	1001	10101	000010	0011011	10000000
0665	14	1	11	001	0111	10001	010000	0101000	10000010
0666	14	1	01	001	1001	10101	000110	0010001	01000100
0667	14	1	11	101	0001	10001	000010	0010110	01010000
0668	14	1	01	001	1001	10101	001000	0100001	01000101
0669	14	1	01	001	0101	00001	001011	1000000	11010010
0670	15	1	01	011	1011	10011	000100	0010001	01001000
0671	15	1	11	101	0101	10111	000001	0101000	10000000
0672	15	1	11	001	0001	11011	010100	1000000	10010100
0673	15	1	01	011	1011	10011	001000	0010010	01001000
0674	15	1	01	111	0001	11011	000001	0100000	10001010
0675	15	1	01	011	0111	00001	001000	0101001	01100001
0676	15	1	01	001	1001	10101	000010	0000111	10000110
0677	15	1	01	011	1011	10011	001000	0010010	10010000
0678	15	1	11	001	0111	10001	001000	0101010	10100000
0679	15	1	01	011	1111	00001	001010	0100000	10100100
0680	15	1	11	101	1001	00010	001110	0101000	10000010
0681	15	1	01	011	1011	10011	001000	0010100	01000100
0682	15	1	11	101	1001	10001	000010	0010000	01011100
0683	15	1	01	001	0101	00001	000110	0110101	10100001
0684	15	1	11	101	0101	10111	000100	1000000	10010000
0685	15	1	01	011	1011	10011	000010	0010000	01100100
0686	15	1	01	011	0111	00001	001010	0101001	10010000
0687	15	1	01	011	1011	10011	001000	0010100	10010000
0688	15	1	11	001	0111	10001	001001	0011010	01000000
0689	15	1	01	011	1111	00001	001010	0100000	10010001
0690	15	1	11	101	1001	00010	000011	0101000	10001100
0691	15	1	01	011	1011	10011	000001	0010000	00101010
0692	15	1	11	101	0001	10001	000010	0101010	10010010
0693	15	1	11	001	1001	10001	000001	0010110	10010001
0694	15	1	01	111	0111	10001	000110	0010001	01000000
0695	15	1	11	101	0001	11001	001000	0011010	01100000
0696	15	1	01	011	1011	10011	000010	0101000	10010000

0697	15	1	01	001	1001	10101	001101	1000000	11000010
0698	15	1	11	001	0111	10001	001000	0011000	01000011
0699	15	1	11	101	1001	00010	001011	0101001	10000000
0700	15	1	01	011	1011	10011	000010	0010100	10010000
0701	15	1	01	011	1011	10011	000001	0001000	00100101
0702	15	1	01	111	0001	11011	000001	0001000	10110000
0703	15	1	11	001	0001	11011	010110	1000000	10001000
0704	15	1	11	001	0111	10001	001000	0101101	10000000
0705	15	1	01	001	1001	10101	000010	0001011	10001001
0706	15	1	11	101	0001	10001	001011	0100000	10000011
0707	15	1	11	101	0001	10001	010000	0101010	10000011
0708	15	1	01	001	0101	00001	010001	1011000	11100100
0709	15	1	11	101	0001	10001	001011	0011010	01000000
0710	15	1	01	111	0111	10001	001000	0011010	01000000
0711	15	1	01	001	0101	00001	000110	1010000	11100110
0712	15	1	11	101	0001	10001	001000	0101110	10000001
0713	15	1	11	001	0001	11011	001001	0100000	10001001
0714	15	1	01	001	1001	10101	000101	0100000	01101010
0715	15	1	01	001	0101	00001	010001	1010000	11110100
0716	15	1	11	101	0001	10001	001101	0100000	10010010
0717	15	1	11	001	0111	10001	000100	0100010	01010100
0718	15	1	01	001	1111	00001	000100	1010000	11100100
0719	15	1	01	001	0101	00001	100010	1010000	11011001
0720	15	1	11	001	0001	11011	000010	0010010	01010001
0721	15	1	01	001	1001	10101	000011	0100000	10110010
0722	15	1	11	001	0001	11011	000010	0101000	10010001
0723	15	1	11	001	0111	10001	010101	1000000	10100000
0724	15	1	01	001	0001	10001	001000	0101101	11010010
0725	16	1	01	011	1011	10011	001000	0100010	10010001
0726	16	1	11	101	0101	10111	010001	1000000	10010000
0727	16	1	01	111	0111	10001	000110	0011000	10100000
0728	16	1	11	001	0001	11011	010110	0110100	10000000
0729	16	1	01	011	1011	10011	000001	0110100	10100000
0730	16	1	01	111	0001	11011	000001	0100100	01001100
0731	16	1	01	011	0111	00001	101000	1010100	10110000
0732	16	1	01	001	1001	10101	000011	0110100	11000010
0733	16	1	01	011	1011	10011	001000	0010100	01100100
0734	16	1	11	001	0111	10001	100000	1010010	11010000
0735	16	1	11	101	1001	00010	011010	1000010	11000100
0736	16	1	01	011	1011	10011	000001	1001000	10010100
0737	16	1	11	101	0001	10001	010100	0110000	10010101
0738	16	1	11	101	1001	10001	010100	1000000	11011000
0739	16	1	01	001	0101	00001	101100	1101000	11011000
0740	16	1	11	101	0101	10111	001000	0100010	10000010
0741	16	1	01	111	0111	10001	001101	0100000	01100000
0742	16	1	01	011	1011	10011	001000	0100010	01010010
0743	16	1	01	111	0001	11011	010000	0110010	10001000
0744	16	1	01	011	0111	00001	100100	1010001	10110000
0745	16	1	01	001	1001	10101	010001	1000010	10101100
0746	16	1	11	001	0111	10001	001001	0101000	11010000
0747	16	1	01	011	1111	00001	010001	0110010	10010000
0748	16	1	01	011	1011	10011	001000	0100010	01100100
0749	16	1	01	011	1011	10011	000001	0001000	01011100
0750	16	1	11	101	0101	10111	000100	0100010	10010000
0751	16	1	01	111	0111	10001	000101	0100000	10100001
0752	16	1	11	101	0001	11001	001000	0101100	10000101
0753	16	1	01	011	1011	10011	000001	0001000	01101001
0754	16	1	01	011	1011	10011	000001	0000101	00100101
0755	16	1	11	001	0111	10001	000010	0101000	01101100
0756	16	1	11	101	0001	10001	011000	1000001	10010110

0757	16	1	01	001	1111	00001	000100	0100010	01101110
0758	16	1	01	011	1011	10011	000101	0010001	01001000
0759	16	1	01	011	1011	10011	000100	0010011	10001000
0760	16	1	01	011	1011	10011	001001	0101000	10010000
0761	16	1	11	001	0111	10001	100000	1010000	11010001
0762	16	1	11	101	1001	00010	000011	0010110	01010001
0763	16	1	01	011	1011	10011	000001	0100100	01101000
0764	16	1	11	001	0001	00001	001101	0101010	01110100
0765	16	1	01	011	1011	10011	001000	0100100	10010001
0766	16	1	01	001	1001	10101	000100	1000010	10101110
0767	16	1	01	011	1011	10011	000010	0001001	01100100
0768	16	1	11	001	0111	10001	001000	0101001	10100001
0769	16	1	01	011	1111	00001	010001	1001000	10100001
0770	16	1	11	101	0001	10001	001001	0010110	10010001
0771	16	1	11	001	0001	00001	001001	1001011	10011010
0772	16	1	01	011	1011	10011	000100	0100100	10100001
0773	16	1	11	101	1001	00010	010100	0110100	11000001
0774	16	1	01	111	0111	10001	000101	0010000	10011000
0775	16	1	01	011	1111	00001	001000	0110000	11010100
0776	16	1	01	001	0101	00001	101000	1011100	11010010
0777	16	1	01	001	1001	10101	010001	0110010	10000011
0778	16	1	11	101	0001	10001	000010	0101010	11011000
0779	16	1	01	111	0111	10001	000100	0010000	11001010
0780	16	1	11	001	0111	10001	000100	0101000	01011010
0781	16	1	11	001	1001	10001	010001	0100110	01100100
0782	16	1	01	001	0101	00001	011101	1000000	11110100
0783	16	1	11	101	1001	00010	001000	0010110	01010011
0784	16	1	11	001	0001	11011	001001	0100100	10001001
0785	16	1	01	001	1001	10101	010001	0110101	10000010
0786	16	1	11	101	0001	10001	001000	0101010	01011100
0787	16	1	11	001	0111	10001	000010	0001001	01011001
0788	16	1	01	001	1001	10101	000100	0110100	10110001
0789	16	1	01	001	1001	10101	010000	0100011	01101001
0790	16	1	01	001	1111	00001	100000	1010000	11100110
0791	16	1	11	001	0111	10001	001000	0100010	11001010
0792	16	1	01	001	0101	00001	000110	0100011	11100110
0793	16	1	01	001	1001	10101	000110	0100010	10110001
0794	16	1	11	001	0111	10001	001001	0100000	11001010
0795	17	1	01	011	1011	10011	001001	0100100	10010001
0796	17	1	11	101	0101	10111	001010	0101001	10000000
0797	17	1	11	001	0001	11011	011010	1000000	11101000
0798	17	1	01	111	0111	10001	000100	0100001	11001010
0799	17	1	01	011	1011	10011	000010	0110010	10010001
0800	17	1	01	111	0001	11011	010010	0110010	10001000
0801	17	1	01	001	1001	10101	011010	1100000	11101000
0802	17	1	01	011	0111	00001	010100	1010001	10110100
0803	17	1	01	011	1011	10011	000010	1001000	10111000
0804	17	1	11	001	0111	10001	010001	0100110	11010000
0805	17	1	11	101	1001	00010	010100	1011001	11000001
0806	17	1	01	011	1011	10011	001001	0100100	01101000
0807	17.	1	11	101	0001	10001	010000	0110000	10110111
0808	17	1	01	011	0001	01001	000110	1010010	10111100
0809	17	1	11	001	1001	10001	000001	0010110	11001011
0810	17	1	01	011	1011	10011	000101	1000101	10100000
0811	17	1	11	001	0001	11011	010100	1000000	10101110
0812	17	1	01	111	0111	10001	010000	1010010	10101000
0813	17	1	01	011	1011	10011	001001	0101000	10001001
0814	17	1	01	001	1001	10101	000010	0000111	11010101
0815	17	1	11	001	0111	10001	000100	1001100	10111000
0816	17	1	11	101	1001	00010	001010	0110100	10001110

0817	17	1	11	101	0001	10001	000010	0101010	01111100
0818	17	1	01	001	0011	00001	100010	1001011	10110110
0819	17	1	11	101	1001	10001	000010	0010110	01010101
0820	17	1	01	011	1011	10011	000010	0110010	10100100
0821	17	1	11	101	0101	10111	100000	1000010	10010001
0822	17	1	01	001	1001	10101	000101	1000101	11010100
0823	17	1	01	011	1011	10011	000100	0010001	01101010
0824	17	1	01	001	1111	00001	001001	0111010	10100100
0825	17	1	11	101	0101	10111	100000	1000010	11010000
0826	17	1	11	001	0001	11011	011010	1000000	10101100
0827	17	1	01	111	0111	10001	000110	0110001	10100000
0828	17	1	01	011	1011	10011	000101	0010011	01001000
0829	17	1	01	011	0111	00001	010100	0110001	10101010
0830	17	1	01	011	1011	10011	010001	0101000	10010010
0831	17	1	01	011	1111	00001	000100	0110001	10110100
0832	17	1	01	011	0001	01001	000010	0010111	01110110
0833	17	1	11	001	0001	11011	010110	1000000	10010110
0834	17	1	01	111	0111	10001	000101	0100101	01100000
0835	17	1	01	011	1011	10011	001000	0010100	10010101
0836	17	1	11	101	0001	10001	001001	0101011	10000011
0837	17	1	01	111	0111	10001	001100	0100010	01100100
0838	17	1	01	001	1001	10101	000101	1000000	11011110
0839	17	1	01	011	1111	00001	010001	0101010	10110000
0840	17	1	01	011	1011	10011	000010	0001001	00100111
0841	17	1	01	011	1011	10011	000001	0010000	01011101
0842	17	1	01	011	1011	10011	000100	0100100	01101010
0843	17	1	01	011	1111	00001	010001	1001000	10100110
0844	17	1	01	011	0111	00001	010100	1010001	10110010
0845	17	1	01	011	0111	00001	001001	0100101	01100101
0846	17	1	01	011	1001	00001	010011	0101101	10010010
0847	17	1	11	001	0111	10001	001001	0101000	01011010
0848	17	1	11	101	0001	10001	001000	0101001	11011010
0849	18	1	01	011	1011	10011	010010	1000100	10010011
0850	18	1	11	101	0101	10111	000001	0010100	10001101
0851	18	1	11	001	0001	11011	001001	0101010	10010101
0852	18	1	01	011	0111	00001	000110	0011011	01100110
0853	18	1	01	011	1011	10011	011010	1010000	10100100
0854	18	1	01	011	0001	11011	010000	0110100	10110011
0855	18	1	01	001	1001	10101	000011	1000010	11110011
0856	18	1	01	011	1011	10011	000010	0111011	10010000
0857	18	1	11	101	0001	10001	001010	0011011	10010110
0858	18	1	11	101	1001	00010	001011	0011100	10110010
0859	18	1	01	011	1111	00001	011000	1001010	10101001
0860	18	1	11	001	0111	10001	010000	1000001	11110110
0861	18	1	11	001	0011	00001	010110	0110100	10101011
0862	18	1	11	001	1001	10001	100100	1100100	11010101
0863	18	1	01	011	1011	10011	010010	0110100	10100010
0864	18	1	11	101	0101	10111	001110	1000000	10000110
0865	18	1	01	011	0111	00001	000101	1001100	10110101
0866	18	1	01	011	1011	10011	001001	0010101	01010001
0867	18	1	01	111	0001	11011	101000	1010010	10110000
0868	18	1	11	101	0001	10001	010101	1000001	10110110
0869	18	1	11	101	1001	00010	011010	1000010	11011100
0870	18	1	01	011	1011	10011	000010	0001001	10111001
0871	18	1	11	001	0111	10001	001000	0101001	10111001
0872	18	1	01	011	1001	00001	010000	1110110	11110100
0873	18	1	11	001	0001	11011	001001	0101001	10010011
0874	18	1	01	011	0111	00001	001101	0101010	01100101
0875	18	1	01	111	0001	11011	100100	1010000	11101000
0876	18	1	01	011	1011	10011	000100	0101110	10100001

0877	18	1	01	011	1111	00001	010001	0101010	10011010
0878	18	1	01	011	1011	10011	001001	0100100	10010101
0879	18	1	11	101	0101	10111	000001	0001001	10001101
0880	18	1	11	101	0001	11001	010000	1000011	11101001
0881	18	1	01	011	1011	10011	001001	0101000	01110100
0882	18	1	01	011	1111	00001	011000	1001010	10110100
0883	18	1	11	001	0111	10001	010110	0110110	10000001
0884	18	1	11	001	0001	11011	010110	1000000	10101110
0885	18	1	01	111	0001	11011	101000	1011000	11001000
0886	18	1	01	011	1011	10011	000001	1000101	10100101
0887	18	1	11	001	1001	10001	001011	0100010	11001011
0888	18	1	01	111	0111	10001	001100	0100010	10011001
0889	18	1	01	011	1111	00001	010001	0101010	10010110
0890	18	1	01	001	0011	00001	000110	0110101	01110111
0891	18	1	11	001	0001	11011	001001	1001001	10011010
0892	18	1	01	011	1011	10011	000001	0001000	10101111
0893	18	1	01	001	1111	00001	011101	1010010	11010000
0894	18	1	11	001	0111	10001	001001	0110100	11001010
0895	18	1	11	101	0001	10001	010111	1000001	11001001
0896	18	1	11	011	1001	00010	001011	0100101	01001110
0897	18	1	01	011	1001	00001	010011	1001001	11010101
0898	19	1	01	011	1011	10011	011001	1000101	10100010
0899	19	1	11	101	0101	10111	001010	1000010	10011010
0900	19	1	11	101	0001	11001	001011	0011010	01101100
0901	19	1	01	011	0111	00001	010010	0110011	10101011
0902	19	1	01	011	1011	10011	011010	1001001	10100001
0903	19	1	01	111	0001	11011	001001	1010110	11001000
0904	19	1	01	001	1001	10101	010111	0110011	10001001
0905	19	1	01	111	0111	10001	000100	1010001	11001011
0906	19	1	11	101	1001	00010	001000	0101001	11101111
0907	19	1	01	011	1111	00001	100101	1010000	11010101
0908	19	1	01	011	1011	10011	011001	1001001	10010100
0909	19	1	01	001	0111	00001	010010	1011101	11011010
0910	19	1	01	011	1011	10011	000010	0110010	01110110
0911	19	1	11	101	0101	10111	010100	1000101	11010000
0912	19	1	11	001	0001	11011	000010	0110110	10101101
0913	19	1	01	011	1011	10011	011001	1010001	10100100
0914	19	1	11	001	0111	10001	011011	1000001	11010010
0915	19	1	01	001	1001	10001	001101	1010101	10110101
0916	19	1	11	101	1001	10001	001011	0101000	10110101
0917	19	1	11	101	0101	10111	001010	1000010	11010010
0918	19	1	01	011	1011	10011	000001	0101110	10100101
0919	19	1	01	011	1111	00001	001010	1001011	10100101
0920	19	1	11	101	0101	10111	000001	0011101	11010000
0921	19	1	11	001	0001	11011	001001	1001101	10101010
0922	19	1	01	001	1001	10101	010001	1011001	10111010
0923	19	1	01	111	0111	10001	000101	0100011	11001010
0924	19	1	01	011	1011	10011	010010	0110100	10010011
0925	19	1	01	001	1001	10101	000101	1000101	11011110
0926	19	1	11	101	0001	10001	001001	0101011	11011010
0927	20	1	01	011	1011	10011	001001	0010101	10111010
0928	20	1	11	101	0101	10111	001001	0011001	11000101
0929	20	1	11	001	0001	11011	010101	1001000	11101011
0930	20	1	01	111	0111	10001	000101	1010101	10110100
0931	20	1	01	011	1011	10011	011010	1001011	10100001
0932	20	1	01	011	0001	11011	010101	1001101	11001010
0933	20	1	01	001	1001	10101	101100	1101010	11011100
0934	20	1	01	011	1111	00001	010001	0101010	10110111
0935	20	1	01	011	1011	10011	010010	1001011	10100011
0936	20	1	11	101	0001	10001	001101	0101111	01101100

0937	20	1	11	001	0111	10001	010110	0110100	10010111
0938	20	1	11	001	0001	00011	010111	1110010	11101001
0939	20	1	11	101	0101	10111	100010	1000110	10011001
0940	20	1	01	011	1111	00001	011001	1010010	11010101
0941	20	1	01	011	1011	10011	010001	1001001	10111010
0942	20	1	11	101	1001	00010	100001	1101110	11101100
0943	20	1	01	111	0111	10001	000101	1010011	10110100
0944	20	1	11	001	0111	10001	010110	0110100	10100111
0945	20	1	01	011	1011	10011	011010	1001001	10010110
0946	20	1	01	001	1111	00001	010101	1001011	10110110
0947	20	1	01	011	1011	10011	011001	1000101	10010011
0948	20	1	01	111	0001	11011	010000	1011001	11101001
0949	20	1	01	111	0111	10001	000101	1010011	10101010
0950	20	1	01	011	1011	10011	011001	1001001	10100101
0951	20	1	01	001	0011	00100	101111	1100110	11010101
0952	20	1	11	011	1001	00010	010010	1011011	11010101
0953	20	1	01	011	1011	10011	000100	0110010	10111011
0954	20	1	01	111	0001	11011	001001	0100101	10101011
0955	20	1	11	001	1001	10001	011010	1100100	11010111
0956	20	1	01	011	1111	00001	011001	1001011	11010100
0957	21	1	01	011	1011	10011	010010	0101110	01110110
0958	21	1	11	111	1111	10001	000111	0110000	10010110
0959	21	1	01	001	1001	10101	001101	1011010	11010111
0960	21	1	11	101	1001	00010	011011	1100011	11101100
0961	21	1	01	011	1111	00001	010101	1010101	10110110
0962	21	1	11	101	0001	10001	010101	0110111	11101010
0963	21	1	01	011	1011	10011	010010	0101110	10100111
0964	21	1	11	001	0111	10001	001101	1011100	11001011
0965	21	1	01	001	1001	10101	011010	0110111	10101110
0966	21	1	01	011	0111	00001	011001	1010101	10110111
0967	21	1	01	011	1011	10011	001000	0101111	01110110
0968	21	1	01	011	1011	10011	011101	1000101	10100101
0969	21	1	11	101	1111	01001	000001	0110011	11000111
0970	22	1	01	011	1011	10011	010111	0111010	10001011
0971	22	1	11	101	0001	11001	010101	0110111	11101010
0972	22	1	01	111	0111	10001	010010	1011011	11100101
0973	22	1	11	011	1111	00010	101010	1100101	11100011
0974	22	1	11	001	1111	00010	011101	0111101	11001001
0975	22	1	01	011	1011	10011	010111	0110101	10100110
0976	23	1	11	111	1111	00010	011010	1010101	11001011
0977	24	1	11	011	1111	00010	101010	1101110	11110101
0978	24	1	11	111	1111	10001	100101	1010011	11000111
0979	28	1	11	011	1111	00010	101111	1101111	11110111

5. Kanonički grafovi sa 10 čvorova

0980	12	1	00	001	0001	00001	000001	0100010	01010000	010101000
0981	13	1	11	101	0001	10001	000010	0010000	00101000	100000000
0982	13	1	11	001	0001	00001	001000	0100000	10000001	100010010
0983	13	1	11	001	0001	00001	001000	0011010	01000000	100000001
0984	14	1	11	001	1001	10001	000010	0001011	00100000	100000000
0985	14	1	11	001	0111	10001	000010	0010000	10000000	101000000
0986	14	1	11	101	0001	10001	000010	0010000	01010001	100000000
0987	14	1	01	001	1001	10101	000010	0010000	01000100	100000001
0988	14	1	01	001	1001	10101	000101	0010000	01000001	100000000
0989	14	1	11	001	1001	10001	000010	0010000	01000100	100000001
0990	14	1	01	001	0001	10001	000001	0001000	10100100	101100000

0991	15	1	01	111	0001	11011	000001	0001000	01000000	010001000
0992	15	1	11	101	0001	11001	001000	0100000	01100000	100010000
0993	15	1	11	001	0111	10001	000100	0010000	00110000	010001000
0994	15	1	11	101	0001	10001	001000	0100000	01010100	011000000
0995	15	1	01	001	1111	00001	001000	0101010	10000000	101000000
0996	15	1	01	001	1001	10101	010000	0110100	10000000	110000000
0997	15	1	11	001	0111	10001	000010	0001001	00100000	010001000
0998	15	1	11	001	0001	11011	000010	0010010	01000000	100000001
0999	15	1	01	001	1001	10101	000011	0001010	01000000	100000100
1000	15	1	11	101	0001	10001	000010	0010000	00101000	010101000
1001	15	1	00	001	0011	00001	000100	0100100	01100010	100010011
1002	15	1	11	001	1001	10001	000010	0010000	01000100	011001000
1003	15	1	11	001	0001	11011	000010	0010010	01000000	010010000
1004	15	1	11	101	0001	10001	000010	0010000	01010100	100000001
1005	15	1	00	001	0011	00001	000100	0010010	01001001	011001001
1006	16	1	01	011	1011	10011	000010	0010000	00101000	010001000
1007	16	1	01	111	0111	10001	000101	0010000	01000000	011000000
1008	16	1	11	101	0001	11001	001000	0100000	10000101	100010000
1009	16	1	01	011	1011	10011	000001	0010000	00100100	100100000
1010	16	1	11	001	0111	10001	001000	0101010	10000000	101000000
1011	16	1	01	011	1011	10011	000001	0001000	00100001	010010000
1012	16	1	11	101	0001	10001	000010	0010010	01011000	100000010
1013	16	1	01	011	1011	10011	000001	0001000	00010100	010010000
1014	16	1	11	001	0111	10001	001001	0100000	01010000	100000010
1015	16	1	01	001	1111	00001	000100	0100000	01010000	111001000
1016	16	1	11	101	1001	00010	001011	0100000	01010010	100000000
1017	16	1	01	001	1001	10101	000010	0001000	10000110	101100000
1018	16	1	11	101	1001	10001	000101	0010000	01010001	100000000
1019	16	1	01	001	0101	00001	000101	0010000	00110100	010010101
1020	16	1	11	001	1001	10001	000001	0010110	01000000	011010000
1021	16	1	11	001	0001	11011	000010	0010010	01000000	100100010
1022	16	1	11	001	0111	10001	000100	0010010	00110100	010000000
1023	16	1	01	001	1001	10101	001000	0100010	10000001	100010010
1024	16	1	11	011	1001	00010	001100	0100001	10000000	101000010
1025	16	1	01	001	1001	10101	000010	0100010	10000001	100010010
1026	16	1	11	001	1001	10001	000101	0010000	01001100	100000001
1027	16	1	11	001	0001	11011	000010	0100000	01001000	100110000
1028	16	1	11	001	0111	10001	000010	0010011	01010000	100000000
1029	16	1	11	101	0001	10001	001000	0100000	01010100	100000011
1030	16	1	11	001	1001	10001	000010	0001011	00100000	010100001
1031	16	1	01	001	1001	10101	001000	0100001	01000101	100000001
1032	16	1	11	001	0001	00001	001000	0100100	10010010	100110100
1033	17	1	01	011	1011	10011	000010	0010000	00101000	011001000
1034	17	1	11	101	0101	10111	000001	0001001	00100000	100010000
1035	17	1	01	111	0111	10001	001000	0011010	01000000	011000000
1036	17	1	11	001	0001	11011	001001	0100000	10000001	100010010
1037	17	1	01	011	1011	10011	000010	0010000	01010001	100100000
1038	17	1	01	111	0001	11011	000100	0010011	01000000	100010000
1039	17	1	01	001	1001	10101	000101	0100000	10000000	101101010
1040	17	1	01	011	1011	10011	000001	0001000	10001010	101000000
1041	17	1	11	001	0111	10001	000010	0001001	00110010	010001000
1042	17	1	01	011	1111	00001	000100	0001100	00101011	010000000
1043	17	1	11	101	1001	00010	010000	0101000	01101000	100001010
1044	17	1	01	011	1011	10011	000010	0010000	01000100	011001000
1045	17	1	11	101	1001	10001	000101	0010000	00110100	010010000
1046	17	1	01	011	1011	10011	000001	0001000	01001000	101000001
1047	17	1	11	101	0101	10111	000001	0001001	00100000	100000001
1048	17	1	01	011	1011	10011	000001	0000101	00010001	001000001
1049	17	1	11	001	0111	10001	001000	0011000	01000100	010101000
1050	17	1	01	011	1111	00001	001000	0100000	01100000	100100011

1051	17	1	11	101	1001	00010	010000	0110100	10000001	110000010
1052	17	1	01	011	1011	10011	000001	0000101	00100000	001010100
1053	17	1	01	011	1011	10011	000001	0010000	01001000	100100001
1054	17	1	11	101	0101	10111	000100	0100010	10000000	100100000
1055	17	1	11	001	0001	11011	000010	0010010	01000000	100110010
1056	17	1	01	001	1001	10101	000101	0010000	01101011	100000000
1057	17	1	11	001	0111	10001	001000	0100010	01010100	100000010
1058	17	1	01	011	1011	10011	000001	0010000	00100100	011010000
1059	17	1	11	101	0001	10001	000010	0010010	00101100	010110000
1060	17	1	01	001	1111	00001	001000	0100000	01010010	101000011
1061	17	1	11	001	0001	11011	000010	0010010	01001000	100010001
1062	17	1	11	101	1001	00010	001011	0011100	01000000	100000010
1063	17	1	11	001	0111	10001	001000	0101001	10000000	101000010
1064	17	1	11	001	0001	11011	000010	0101000	01011000	100010000
1065	17	1	01	001	1001	10101	000100	0001100	01000100	010111000
1066	17	1	01	001	0101	00001	000100	0010111	01000100	011010100
1067	17	1	11	101	0001	10001	001001	0101000	01100000	100000101
1068	17	1	11	001	0111	10001	000100	0010010	01000000	110010010
1069	17	1	11	001	0001	11011	000010	0010010	01010001	100010000
1070	17	1	01	001	1001	10101	000100	0001100	01000100	101100001
1071	18	1	01	011	1011	10011	000001	0000101	00101010	100100000
1072	18	1	11	101	0101	10111	000001	0010100	01010001	100000000
1073	18	1	01	111	0111	10001	000110	0010001	00110000	010000001
1074	18	1	11	001	0001	11011	001001	0101001	10000000	100101000
1075	18	1	01	011	1011	10011	000010	0010000	00100110	010100010
1076	18	1	01	111	0001	11011	000100	0100000	01000100	100110001
1077	18	1	01	011	0111	00001	001010	1001000	10011000	101100000
1078	18	1	01	001	1001	10101	010000	0110100	11000000	111010000
1079	18	1	01	011	1011	10011	001000	0010010	01001000	100100001
1080	18	1	11	101	1001	00010	010100	0110100	10000001	100011000
1081	18	1	01	011	1011	10011	000010	0010000	00100110	001010001
1082	18	1	01	011	1011	10011	001000	0010010	01001000	011010000
1083	18	1	11	101	0101	10111	000100	0100010	10000000	110001000
1084	18	1	01	111	0111	10001	000100	0010000	01000010	110010100
1085	18	1	01	011	1011	10011	000010	0001001	00100001	011001000
1086	18	1	11	001	0111	10001	010100	1000000	10100100	110100000
1087	18	1	01	011	1111	00001	010000	0110000	10010100	101000100
1088	18	1	11	101	1001	00010	001011	0100000	01101100	110000000
1089	18	1	11	101	0001	10001	000010	0010000	01010100	100101101
1090	18	1	11	101	0101	10111	000001	0001001	10000000	100001010
1091	18	1	01	011	1011	10011	000100	0001010	10001001	101000000
1092	18	1	01	111	0001	11011	001001	0100000	10001000	110010000
1093	18	1	01	001	1001	10101	000101	0011010	10000000	100010110
1094	18	1	01	011	1011	10011	000010	0010000	01000100	100101100
1095	18	1	11	101	1001	00010	000011	0010000	00101100	100001011
1096	18	1	11	101	0001	10001	000010	0101000	01011000	110110000
1097	18	1	01	001	0001	00001	000100	0101100	10110001	101110010
1098	18	1	01	011	0001	11011	000001	0001000	10001010	100110100
1099	18	1	01	011	0111	00001	000100	0001100	00110101	101010000
1100	18	1	11	001	0111	10001	001000	0101010	01011010	100000000
1101	18	1	01	011	1011	10011	000001	0000101	00100101	100100000
1102	18	1	01	011	1011	10011	000100	0010011	01001000	100010000
1103	18	1	01	011	1011	10011	000001	0001000	01001000	011010010
1104	18	1	01	011	1011	10011	000010	0010000	01100100	100100001
1105	18	1	01	011	1011	10011	000001	0010000	01001000	100101001
1106	18	1	11	101	0001	10001	000010	0010010	01010101	100000011
1107	18	1	11	101	0001	10001	001001	0010110	01010000	010110000
1108	18	1	01	001	0101	00001	000001	0100010	01001011	010110110
1109	18	1	01	001	0101	00001	000001	0101101	10000101	100010101
1110	18	1	11	001	0111	10001	010000	0101000	10000010	110010001

1111	18	1	01	001	1001	10101	010000	0100011	10000001	100001101
1112	18	1	11	101	0001	10001	001000	0010100	00110101	010101000
1113	18	1	00	001	0011	00001	001001	0100101	01011010	011010001
1114	18	1	11	101	0001	10001	001101	0100000	01010100	100000011
1115	18	1	11	011	1001	00010	000001	0010010	01001000	101101001
1116	19	1	01	011	1011	10011	000001	0100100	01101000	101000010
1117	19	1	11	101	0101	10111	000001	0010000	10001000	110100010
1118	19	1	11	001	0001	11011	010000	0100100	01101100	100100001
1119	19	1	01	011	1011	10011	001000	0010100	01010011	100100000
1120	19	1	01	111	0001	11011	010000	0110010	10001000	110010000
1121	19	1	01	001	1001	10101	000010	0010000	10110001	101110010
1122	19	1	01	011	0111	00001	000110	0010011	01010000	101101000
1123	19	1	11	001	0111	10001	010100	0101100	10000000	101001010
1124	19	1	11	101	1001	00010	010100	1000000	11000000	111011100
1125	19	1	01	011	1111	00001	010000	0101000	10010010	100110100
1126	19	1	11	101	0001	10001	000010	0010010	01011101	100000011
1127	19	1	01	001	0111	00010	000011	0011001	01100000	011011010
1128	19	1	01	011	1011	10011	001000	0010100	01000100	010100110
1129	19	1	11	101	0001	11001	001000	0101010	10001001	100100100
1130	19	1	01	111	0001	11011	000100	1010000	10110000	110010000
1131	19	1	01	001	1001	10101	000101	0100000	10110010	110101000
1132	19	1	01	011	0111	00001	011000	1010000	10101000	101100100
1133	19	1	01	011	1011	10011	000010	0010100	01100100	100100001
1134	19	1	11	001	0111	10001	001000	0100001	01010010	110010100
1135	19	1	01	011	1111	00001	000100	0001100	00100011	001010110
1136	19	1	11	001	0011	00001	100000	1000100	10101000	101101011
1137	19	1	01	011	1011	10011	000001	0000101	00100000	101110100
1138	19	1	11	001	0001	11011	000010	0100100	10010000	101011010
1139	19	1	01	111	0111	10001	001000	0011000	01000001	100110001
1140	19	1	01	011	1011	10011	000001	0010000	10010000	101110100
1141	19	1	01	011	1011	10011	000001	0010000	01101000	100101001
1142	19	1	01	011	1011	10011	000001	0001000	00100101	011010010
1143	19	1	01	011	1011	10011	000010	0001001	00100001	001001110
1144	19	1	11	101	0101	10111	001000	0011000	01000100	100000110
1145	19	1	11	001	0001	11011	000010	0100100	01101100	100100001
1146	19	1	01	011	1011	10011	000100	0010001	01001000	011001001
1147	19	1	01	011	1011	10011	001000	0010010	01001000	010100101
1148	19	1	01	011	1111	00001	000100	0010001	01010101	101100000
1149	19	1	01	001	0100	00001	000100	0010101	10101101	101110010
1150	19	1	11	011	1001	00010	001100	0100100	01111000	100000011
1151	19	1	01	011	1011	10011	000100	0010001	01001000	011010100
1152	19	1	01	011	1111	00001	000100	0101000	10100001	101100010
1153	19	1	01	001	1001	10101	010001	0101110	10000010	100010100
1154	19	1	01	011	1011	10011	001000	0010100	10010000	100101010
1155	19	1	11	001	0001	11011	010000	0100100	10000011	100010110
1156	19	1	01	001	1001	10101	000100	0001011	00100010	011010011
1157	19	1	01	011	0111	00001	000101	0110000	10011001	101000001
1158	19	1	11	101	0001	10001	001001	0101000	01100000	110110100
1159	19	1	11	001	1001	10001	001011	0011010	01000000	100100110
1160	19	1	11	101	1001	00010	001011	0011100	01000000	100001110
1161	19	1	11	001	0001	11011	001001	0100000	10010010	100110100
1162	20	1	01	011	1011	10011	001000	0100010	01100100	100100011
1163	20	1	11	101	0101	10111	001110	0100011	10000000	100100000
1164	20	1	11	001	0001	11011	010000	1001000	10011000	101011100
1165	20	1	01	111	0111	10001	000101	0001100	01000111	101000000
1166	20	1	01	011	1011	10011	000100	0001010	01001000	011010110
1167	20	1	01	111	0001	11011	010000	1000100	10011000	101001100
1168	20	1	01	011	0111	00001	001010	0100100	01100101	101100010
1169	20	1	01	011	1011	10011	001000	0100100	10010001	101110000
1170	20	1	11	001	0111	10001	001001	0110100	10000001	101001010

1171	20	1	11	101	1001	00010	011011	1000000	11000000	111011000
1172	20	1	01	011	1111	00001	000100	0001100	10101000	101101010
1173	20	1	01	011	1011	10011	000001	0001000	01011100	101001001
1174	20	1	11	101	0001	10001	010000	0110110	10010001	110010010
1175	20	1	11	001	1001	10001	010000	0100010	01101000	101001111
1176	20	1	01	011	1011	10011	000010	0100010	01010000	101001011
1177	20	1	11	101	0101	10111	000001	0010000	00110010	110100010
1178	20	1	11	001	0001	11011	001001	0101001	01101100	100000001
1179	20	1	01	011	0001	11011	000100	0010101	01101010	100110000
1180	20	1	01	011	0111	00001	000110	0010101	01010101	101100000
1181	20	1	01	011	1011	10011	000001	0010000	01101000	101110100
1182	20	1	11	001	0111	10001	010001	0101010	10000010	110010001
1183	20	1	11	101	1001	00010	001010	0101000	01101000	101100011
1184	20	1	01	011	1011	10011	001000	0100100	01101000	100100011
1185	20	1	11	101	0001	10001	000010	0010010	01010101	010111010
1186	20	1	01	011	1011	10011	000001	0000101	00100101	100101010
1187	20	1	01	111	0111	10001	001000	0110000	10011001	101010000
1188	20	1	01	011	1011	10011	000100	0100100	01100101	100010001
1189	20	1	01	011	0111	00001	000110	1010000	10101000	101101001
1190	20	1	11	001	0111	10001	001001	0101000	10011010	101001000
1191	20	1	01	011	1111	00001	001010	0100011	01100110	100100000
1192	20	1	01	011	1011	10011	000001	0010000	00101010	101110100
1193	20	1	01	111	0001	11011	000100	0010011	01000000	101010110
1194	20	1	01	001	0101	00001	001011	0011010	01001011	101100001
1195	20	1	01	011	1011	10011	001000	0100010	01001001	100101001
1196	20	1	01	111	0001	11011	000100	0100101	10100000	101100010
1197	20	1	11	001	0111	10001	001001	0101000	01011010	110100000
1198	20	1	01	011	1111	00001	010001	1010000	10110000	111001000
1199	20	1	11	001	0001	11011	000010	0101000	10010110	100110010
1200	20	1	01	011	1011	10011	001000	0100100	10010001	100101010
1201	20	1	11	001	0111	10001	010100	0101100	01101010	100000001
1202	20	1	01	011	1011	10011	000010	0101000	01100101	100100001
1203	20	1	01	011	1011	10011	000101	0010011	01001000	100010100
1204	20	1	01	011	0001	11011	000100	1001100	10100100	110010001
1205	20	1	01	001	1001	10101	010001	1000001	10000101	101011010
1206	20	1	01	011	1011	10011	000001	0010010	01101000	100101001
1207	20	1	01	111	0111	10001	001000	0100000	10011001	110010001
1208	20	1	11	101	0001	10001	001011	0100000	10010010	111010001
1209	20	1	11	001	0001	11011	001001	0101001	01011010	100010000
1210	20	1	01	001	0101	00001	001000	1001110	10111100	110101000
1211	21	1	01	011	1011	10011	000001	0100100	01011100	101000011
1212	21	1	11	101	0101	10111	000001	0001001	10001101	100100100
1213	21	1	11	001	0001	11011	010000	0101010	10011001	101010010
1214	21	1	01	111	0111	10001	001100	0100101	10100000	111001000
1215	21	1	01	011	1011	10011	001000	0101111	10010000	100101000
1216	21	1	01	111	0001	11011	000001	0100010	10011011	101010000
1217	21	1	01	001	1001	10101	100000	1011010	11000001	110101010
1218	21	1	01	011	0111	00001	000110	0100100	01100111	101100010
1219	21	1	11	101	1001	00010	001000	0101100	01101000	111011100
1220	21	1	01	011	1111	00001	010001	0110010	10010000	101010101
1221	21	1	01	011	1011	10011	001000	0110100	10010001	101110000
1222	21	1	01	011	0001	01001	001011	0100010	01010110	011011001
1223	21	1	11	001	1001	10001	010100	0101100	01100100	110110001
1224	21	1	01	011	1011	10011	000010	0001001	01100100	011101100
1225	21	1	11	101	0101	10111	010001	0110010	10000001	100100010
1226	21	1	11	001	0001	11011	000010	0101000	01011000	101011011
1227	21	1	01	111	0111	10001	000101	0100000	10100110	101010100
1228	21	1	01	011	1011	10011	000010	1001000	10100101	101110000
1229	21	1	01	001	1001	10101	001000	0100001	01101010	110101101
1230	21	1	01	011	0111	00001	000101	0100101	10011001	101000011

1231	21	1	01	011	1011	10011	000010	0001001	01011110	011001000
1232	21	1	01	011	1011	10011	001010	0100010	01100100	100100011
1233	21	1	11	101	0101	10111	000001	0111000	10000001	110100010
1234	21	1	11	001	0001	11011	010000	0101010	10000011	100101110
1235	21	1	01	011	0001	11011	010000	0101010	01101001	101000110
1236	21	1	01	011	1111	00001	000100	0010101	10100100	101101010
1237	21	1	01	011	1011	10011	000100	0010011	01001000	101011100
1238	21	1	11	011	1001	00010	011110	1000001	10100010	110000101
1239	21	1	11	101	0101	10111	001010	0101001	10000000	110100100
1240	21	1	11	001	0001	11011	001001	0100000	10010010	111010101
1241	21	1	01	011	1011	10011	001010	0100010	10010001	100101100
1242	21	1	01	001	1001	10101	010111	0110100	10000000	100001111
1243	21	1	11	101	0001	10001	001101	0100000	01101100	111010100
1244	21	1	11	101	1001	00010	011010	1000001	10001100	110111000
1245	21	1	01	011	0001	01001	000100	0011011	10110001	111010010
1246	21	1	01	011	1011	10011	001001	0100100	01101000	100100011
1247	21	1	11	101	0001	11001	001000	0101100	01111000	100010011
1248	21	1	01	001	1001	10101	010000	0110100	10110001	110101010
1249	21	1	01	011	1011	10011	001001	0010101	10010000	100101010
1250	21	1	01	111	0111	10001	001000	0011010	01000101	011001010
1251	21	1	01	011	1011	10011	001000	0100010	01101001	100100011
1252	21	1	01	001	1001	10101	000101	0010000	10110011	110101010
1253	21	1	01	011	0111	00001	000101	0001100	00101011	001101011
1254	21	1	01	111	0001	11011	000100	0100101	01001110	101001000
1255	22	1	01	011	1011	10011	000001	0101110	10010000	101001011
1256	22	1	11	101	0101	10111	011001	1000001	10000100	100100101
1257	22	1	11	001	0001	11011	010000	1001000	10101110	111010010
1258	22	1	01	011	0111	00001	000101	0010011	01001011	011001101
1259	22	1	01	011	1011	10011	010001	0110010	10010011	100101000
1260	22	1	01	011	0001	11011	000001	0101010	10110001	110010110
1261	22	1	01	001	1001	10101	011010	0110111	10000001	100001101
1262	22	1	01	011	1011	10011	000100	0100100	10100101	101110100
1263	22	1	01	011	1111	00001	000100	0010101	01000101	101101011
1264	22	1	01	011	1011	10011	000010	0010011	01011111	100100000
1265	22	1	11	001	0111	10001	001001	0101000	10011010	101110010
1266	22	1	01	011	0001	01001	001010	0110000	10011101	101111010
1267	22	1	11	001	1001	10001	011001	1000001	10101010	101101001
1268	22	1	01	011	1011	10011	000100	0100100	10100101	101011100
1269	22	1	11	101	0101	10111	001010	0011100	10000000	110001110
1270	22	1	11	001	0001	11011	010000	0110110	10010001	111010001
1271	22	1	01	001	1001	10101	001000	1000100	11010110	110111100
1272	22	1	01	011	1011	10011	000001	0010010	01011101	100010101
1273	22	1	11	101	0001	10001	000010	0010100	01111100	110110011
1274	22	1	01	011	1111	00001	001010	0100011	01100110	101001010
1275	22	1	01	011	1011	10011	000010	0001001	00100111	011101100
1276	22	1	11	001	0001	00001	010101	0111010	10000011	101101110
1277	22	1	11	101	1001	10001	001101	0101110	01101000	100000011
1278	22	1	01	011	1011	10011	000001	1001000	10010100	101110101
1279	22	1	11	101	0101	10111	001011	0100010	01110001	100000001
1280	22	1	01	111	0111	10001	000110	0011011	01000000	101010110
1281	22	1	11	101	1001	00010	001000	1000000	11011110	111011100
1282	22	1	01	001	1001	10101	000010	1011100	11010100	110111000
1283	22	1	11	101	0001	10001	001001	0101011	10000011	110110100
1284	22	1	01	011	1011	10011	000001	0000101	01011101	101001001
1285	22	1	01	011	0111	00001	010010	0110011	10100010	101010110
1286	22	1	01	011	1011	10011	010010	1000100	10010011	101000101
1287	23	1	01	011	1011	10011	000010	0101111	01100100	100101100
1288	23	1	11	101	0101	10111	010100	1000101	10001110	110100000
1289	23	1	11	001	0001	11011	010000	0110110	10000011	101011110
1290	23	1	01	011	0111	00001	000101	0100101	10011001	101010111

1291	23	1	01	011	1011	10011	010010	0101001	10010010	101110010
1292	23	1	01	011	0001	11011	010000	0101010	01101001	101100111
1293	23	1	01	001	1001	10101	000101	0010000	10110011	110111110
1294	23	1	01	011	1011	10011	000010	0101000	10101101	101110010
1295	23	1	11	101	0001	10001	000010	0010110	01111100	110110011
1296	23	1	11	101	1001	00010	011011	1000000	11011100	111011000
1297	23	1	01	011	1011	10011	011010	1001001	10100001	101001010
1298	23	1	11	001	1001	10001	010100	0101100	10101011	110110001
1299	23	1	01	011	0001	11011	001011	0101011	10001001	110010010
1300	23	1	01	001	1001	10101	001000	0100010	10110011	110111110
1301	23	1	01	111	0111	10001	000110	0011000	10101010	111001100
1302	23	1	01	011	1011	10011	000100	0010001	01011101	011101010
1303	23	1	11	101	0001	10001	001011	0011010	10010011	110010110
1304	23	1	11	101	0101	10111	000001	0010110	00111011	010100010
1305	24	1	01	011	1011	10011	010111	0110010	01110100	100100010
1306	24	1	01	001	1001	10101	011010	1000011	10101110	101100101
1307	24	1	11	101	0101	10111	000001	0111000	10001101	100110101
1308	24	1	01	011	0111	00001	001001	1001101	10101001	101101011
1309	24	1	01	011	1011	10011	000010	1001011	10100101	101110010
1310	24	1	11	101	0001	11001	001011	0011010	01010110	010110110
1311	24	1	01	011	1011	10011	010100	1001000	10100111	101110100
1312	24	1	01	011	1111	00001	000110	0100011	10110111	110101000
1313	24	1	01	011	1011	10011	010010	0101001	01100111	100100101
1314	24	1	01	001	1001	00001	010111	0110100	10101110	111101010
1315	24	1	11	001	1001	10001	001011	0101111	01101000	100100111
1316	24	1	01	011	1011	10011	000010	0010011	10010110	101110011
1317	24	1	11	001	0001	11011	011010	1001101	10101100	111010000
1318	24	1	11	101	1001	00010	001011	0011100	10000111	111011010
1319	24	1	01	011	1011	10011	010010	1001001	10100011	101001110
1320	24	1	11	001	0001	11011	001001	0110110	10011011	101010100
1321	24	1	01	111	0001	11011	000100	1001100	10101010	101011110
1322	24	1	01	011	1011	10011	010010	0101001	10001001	101001111
1323	24	1	01	111	0111	10001	000101	0001100	10100111	110010101
1324	24	1	01	011	1011	10011	000010	0010011	01011111	100101100
1325	24	1	01	011	1011	10011	010010	0110100	10010011	100101110
1326	25	1	01	011	1011	10011	010001	0100101	10010101	101110101
1327	25	1	11	101	0101	10111	001010	0101001	01100101	100110101
1328	25	1	11	001	0001	11011	010110	0110110	10011011	111010000
1329	25	1	01	011	0111	00001	000101	0110011	10101011	101101011
1330	25	1	01	011	1011	10011	010001	0100101	10010011	101011101
1331	25	1	01	011	0001	11011	001011	0101011	10011011	110010010
1332	25	1	01	111	0111	10001	011001	1001101	10101010	110010010
1333	25	1	01	011	1011	10011	011010	1001001	10010110	101001011
1334	25	1	11	101	1001	00010	011011	1000011	11011100	111011000
1335	25	1	01	011	1111	00001	000110	1001010	10110110	111001110
1336	25	1	11	001	1001	10001	010111	0110100	01110101	101001110
1337	25	1	11	101	0101	10111	010001	0101001	01100101	011100101
1338	25	1	01	001	1001	10101	010111	0110100	10110011	110101010
1339	25	1	01	011	1111	00001	010001	1001011	10011010	101010111
1340	25	1	01	011	1011	10011	010010	0111011	10100011	101001100
1341	25	1	01	011	1011	10011	100100	1001010	10100111	101110010
1342	25	1	01	001	0011	00111	101111	1100010	11001001	110100011
1343	25	1	01	111	0111	10001	000110	0100011	10100111	111001100
1344	25	1	01	011	1011	10011	010010	0110011	10010110	101000111
1345	25	1	01	011	1011	10011	010010	0101110	10100011	101001110
1346	25	1	11	001	0011	00100	010111	1001111	11001100	110101001
1347	26	1	01	011	1011	10011	011001	1001001	10101101	101110100
1348	26	1	01	001	1001	10101	010001	1011101	11010110	110111100
1349	26	1	01	011	1111	00001	100101	1001100	10100111	110101011
1350	26	1	01	111	0001	11011	001001	0100101	10110011	111010101

1351	27	1 01 011 1011 10011 010100 0110011 10101110 101110110
1352	29	1 00 001 0011 00111 100111 1010111 10110111 101110111

6. Kanonički grafovi sa 11 čvorova

1353	17	1 01 001 1001 00001 000100 0001100 01000000 100001010 1100010100
1354	17	1 11 001 1001 10001 000010 0001011 00100000 010100001 1000000000
1355	17	1 11 101 0001 10001 000010 0010000 00101000 010101000 1000000001
1356	18	1 11 001 0111 10001 000010 0010000 01010110 100000000 1010000000
1357	18	1 11 101 1001 10001 000010 0010000 00101000 010101000 1000000001
1358	18	1 11 101 0001 10001 001000 0011010 01000000 011000000 1000000011
1359	18	1 11 001 0001 11011 000010 0101000 01011000 100000000 1000100000
1360	18	1 11 101 0001 10001 000010 0010000 01010001 010110010 1000000000
1361	18	1 11 001 0001 11011 000010 0010010 01000000 010010000 1000000011
1362	18	1 01 001 1001 10101 000101 0100000 01101010 100000000 1100000000
1363	19	1 01 011 1011 10011 000001 0000101 00100000 001010100 1001000000
1364	19	1 01 011 0001 11011 000001 0001000 00101001 001011010 0100000000
1365	19	1 01 011 0111 00001 000101 0010000 00110100 010101000 0110000000
1366	19	1 11 101 1001 00010 001000 0010110 01000010 010100110 1000000000
1367	19	1 01 011 1011 10011 000010 0010000 00101000 010001000 0110010000
1368	19	1 01 011 1011 10011 000001 0010000 00100100 010010000 1001000001
1369	19	1 01 011 1011 10011 000001 0001000 00100001 001001010 0100100000
1370	19	1 11 101 1001 10001 000010 0010000 00101000 011101000 1000000001
1371	19	1 01 011 0001 01001 000010 0001000 00011000 010001101 1010010001
1372	19	1 11 001 0111 10001 000010 0010000 01010001 010110010 1000000000
1373	19	1 11 001 0001 11011 000010 0010010 01011001 100000000 1000100000
1374	19	1 11 101 0001 10001 000010 0010010 00101100 010100000 1000000110
1375	20	1 01 011 1011 10011 000010 0010000 00101000 010100011 1001000000
1376	20	1 11 101 0101 10111 000001 0001001 00100000 001001010 1000100000
1377	20	1 01 011 0111 00001 000100 0001100 01001000 010100000 1011000011
1378	20	1 11 001 0001 11011 000010 0010010 01000000 100000001 1001011010

1379	20	1 01 011 1011 10011 000001 0001000 00010100 010010000 1010010001
1380	20	1 01 011 0001 11011 000100 0100000 10001000 100110000 1010010100
1381	20	1 01 011 1011 10011 000001 0001000 01001000 100010100 1010000010
1382	20	1 11 001 0111 10001 000010 0101000 01011000 100000000 1010000110
1383	20	1 01 111 0111 10001 000100 0010000 00110000 010001000 1010100001
1384	20	1 01 011 0001 01001 000010 0001000 00100001 011000010 1011110001
1385	20	1 01 001 1001 10101 001000 0011010 01000011 100000000 1100001100
1386	20	1 11 101 0001 10001 000010 0010010 01010000 100000010 1101100100
1387	20	1 01 001 0111 00010 000011 0010000 00110010 011000000 0110110010
1388	20	1 11 001 0111 10001 001000 0100010 01010100 100000010 1010000100
1389	20	1 11 001 0001 11011 000010 0010010 01000000 100100010 1001100100
1390	21	1 01 011 1011 10011 000001 0000101 00010001 001000001 0010010110
1391	21	1 11 101 0101 10111 000001 0001001 00100000 100000001 1001001010
1392	21	1 11 001 0001 11011 001001 0101001 10000000 100010000 1001010001
1393	21	1 01 011 1011 10011 000010 0010000 01000100 011001000 1001011000
1394	21	1 01 111 0001 11011 000100 0100000 01000100 100010001 1001100010
1395	21	1 01 011 1011 10011 000001 0010000 01001000 011010000 1001000011
1396	21	1 11 001 0111 10001 000010 0100010 10000001 101000010 1101000001
1397	21	1 11 101 1001 00010 001011 0011100 01000000 011011000 1000000100
1398	21	1 11 101 0001 10001 001101 0100000 01010100 011000000 1000000111
1399	21	1 01 011 0001 01001 000001 0000101 00011010 010001011 1010010001
1400	21	1 01 011 1011 10011 000001 0010000 00100100 011010000 1001010001
1401	21	1 11 101 0101 10111 000100 0011000 01000100 100000010 1001000100
1402	21	1 11 101 0001 11001 001000 0011010 01000000 011000000 1001001101
1403	21	1 01 011 0111 00001 000100 0010010 00101010 010010010 0110010001
1404	21	1 01 011 1011 10011 000010 0010000 00101000 100100000 1001011010
1405	21	1 01 011 1111 00001 000100 0010001 01000000 010100010 1011000011
1406	21	1 01 011 1011 10011 000010 0010000 00100110 100100000 1001011000
1407	21	1 01 011 1011 10011 000010 0010000 01000100 011001000 1001000011
1408	21	1 11 001 0001 11011 001001 0101001 01011010 100000000 1000100000

1409 21 1 01 011 1111 00001 001000 0100000 01100000 100100011
1101010000

1410 21 1 11 101 1001 00010 000011 0010100 00111010 010100000
1000000110

1411 22 1 01 011 1011 10011 001000 0010010 01001000 011010000
1001000011

1412 22 1 11 101 0101 10111 000100 0010000 00110000 100000011
1001000110

1413 22 1 11 001 0001 11011 000010 0100000 10000001 100010010
1001011101

1414 22 1 01 011 0111 00001 001010 0101001 10010000 100110000
1011000100

1415 22 1 01 011 1011 10011 000010 0010000 00101000 011001000
1001011010

1416 22 1 01 011 0001 11011 000100 0010101 00101110 010000000
1001100010

1417 22 1 01 001 1001 10101 001000 0100001 01101010 100000000
1101011010

1418 22 1 01 011 1111 00001 001000 0110010 10010000 100110010
1011000000

1419 22 1 01 011 1011 10011 000001 0001010 01001000 101000001
1010010010

1420 22 1 11 101 1001 00010 001011 0011001 01000001 100000000
1011001010

1421 22 1 11 101 0001 10001 001101 0100000 01100000 100000011
1001010110

1422 22 1 01 001 0111 00010 000011 0010000 01010010 011011001
1000100011

1423 22 1 01 011 1011 10011 000001 0000101 00100101 100100000
1001010100

1424 22 1 11 101 0101 10111 000100 0010100 01100100 100000001
1000011000

1425 22 1 11 001 0001 11011 000010 0010010 01010110 010110010
1000000010

1426 22 1 01 011 0111 00001 000100 0100100 01010000 101000011
1011000110

1427 22 1 01 011 1111 00001 000110 0010001 01000000 011000100
1011011000

1428 22 1 01 011 1011 10011 000100 0001010 10001001 101000000
1010010010

1429 22 1 01 111 0111 10001 001000 0011000 01000001 011000010
1100100100

1430 22 1 01 011 1011 10011 000010 0010000 00101000 011001000
1011100001

1431 22 1 11 001 0111 10001 000100 0011010 01000000 100110010
1100100100

1432 22 1 11 011 1001 00010 000001 0010010 01001000 010011000
1011010011

1433 22 1 01 001 1001 10101 000010 0001000 00010111 001000010
0101110011

1434 23 1 01 011 1011 10011 000100 0001010 00100011 010010000
0110101100

1435 23 1 11 101 0101 10111 001110 0101000 10000000 100001100
1101000000

1436 23 1 11 001 0001 11011 010100 0101100 10000000 100010000
1010111100

1437 23 1 01 111 0111 10001 000101 0100000 01100000 101000010
1100101001

1438 23 1 01 011 1011 10011 000001 0100100 01101000 101000010
1010010100

1439	23	1 01 111 0001 11011 000100 0100000 10001000 100110000 1010111001
1440	23	1 01 001 1001 10101 001000 0100010 10000001 100010010 1101111100
1441	23	1 01 011 0111 00001 001000 0101010 01100000 100110011 1011000010
1442	23	1 01 011 1011 10011 001000 0010100 01100100 100100001 1001010100
1443	23	1 11 001 0111 10001 000010 0010011 01010111 010110010 1000000000
1444	23	1 01 001 1001 10001 001000 1000000 10101000 101101001 1101001011
1445	23	1 11 001 1001 10001 000010 0001011 00100000 101010010 1011011001
1446	23	1 01 011 1011 10011 000101 0010001 00100110 010010000 0110101000
1447	23	1 01 011 0111 00001 000110 0101000 01100110 101000010 1011000100
1448	23	1 01 011 1011 10011 001000 0010010 01001000 100100001 1011100100
1449	23	1 11 101 0001 10001 001000 0011010 01010011 100000000 1110100101
1450	23	1 11 001 0111 10001 001001 0101000 01011010 011010010 1000000001
1451	23	1 01 001 0111 00010 001000 0100101 01100001 100010001 1011100110
1452	23	1 01 011 1011 10011 001000 0010010 01010010 011101100 1001000000
1453	23	1 01 011 1011 10011 000100 0001010 01001000 010111000 1010000011
1454	23	1 11 101 0001 11001 001000 0011010 01000000 010101000 1110100101
1455	23	1 11 001 0111 10001 000010 0001001 00100110 010001001 0101011010
1456	24	1 01 011 1011 10011 001000 0100010 01001001 011001001 1001010010
1457	24	1 11 101 0101 10111 000001 0001001 00101000 100010001 1001101010
1458	24	1 11 001 0001 11011 010100 1000000 10001000 100101001 1010111001
1459	24	1 01 011 1011 10011 000001 0001010 01011100 101000001 1010010010
1460	24	1 01 111 0001 11011 000100 0100000 01000100 101001011 1110101000
1461	24	1 01 011 0111 00001 010010 0110000 10100010 101010100 1011001100
1462	24	1 01 011 1011 10011 001000 0100010 01010010 011001001 1001000101
1463	24	1 11 101 0001 10001 001101 0100000 01100000 100100101 1110101001
1464	24	1 11 101 1001 00010 001010 0101000 01101000 100001010 1101111000
1465	24	1 01 101 0001 10001 000001 0100000 10100101 111010001 1110110010
1466	24	1 11 001 1001 10001 001101 0100000 10010010 110010100 1101010001
1467	24	1 01 111 0111 10001 000110 0011000 01000001 101010100 1100100100
1468	24	1 01 011 1011 10011 000100 0001010 01001000 011010110 1010010010

1469 24 1 01 111 0001 11011 010010 0100110 10010001 101000000
1010010010

1470 24 1 01 011 1011 10011 000001 0100100 01101000 100100011
1010000101

1471 24 1 01 011 1011 10011 001001 0100100 01010001 100010001
1001000101

1472 24 1 01 111 0111 10001 000101 0001100 01100001 101000000
1100101001

1473 24 1 01 001 1111 00001 000100 0001100 10110000 101110000
1110010101

1474 24 1 01 111 0001 11011 000100 0010011 01001011 010011100
1010000000

1475 24 1 01 001 1001 10101 000011 0001010 10000010 101101000
1101011001

1476 24 1 01 011 1011 10011 001000 0010010 01001000 010111110
1001000010

1477 24 1 01 011 1011 10011 000001 0001000 01001000 101001001
1011101100

1478 24 1 01 011 1011 10011 000010 0001001 00100001 011001000
1011100101

1479 25 1 01 011 1011 10011 001000 0100100 01100101 100100011
1001010100

1480 25 1 11 101 0101 10111 001011 0011000 01000100 100000010
1101001010

1481 25 1 11 001 0001 11011 010110 0110100 10000000 101011100
1110100000

1482 25 1 01 111 0111 10001 001000 0011000 01100001 100110001
1100100101

1483 25 1 01 111 0001 11011 000100 0100111 10001001 101001000
1100100001

1484 25 1 01 011 0111 00001 011000 1001001 10100001 101010010
1011010001

1485 25 1 01 011 1011 10011 000001 0010010 01101000 100100001
1011101100

1486 25 1 11 101 0001 10001 000010 0010100 01010100 011111000
1101100101

1487 25 1 11 101 1001 00010 001011 0100000 01101100 100001101
1110110000

1488 25 1 01 001 0101 00001 000110 0100011 10100000 101110010
1111011001

1489 25 1 11 001 1001 10001 010000 0110100 01110101 100100011
1100100010

1490 25 1 01 011 1011 10011 001000 0101111 01100100 100100001
1001010000

1491 25 1 11 101 0101 10111 001000 0100010 10001001 100011000
1001100101

1492 25 1 01 111 0111 10001 000101 0010000 01000110 100110001
1100101001

1493 25 1 01 001 1001 10101 000101 0010000 00110100 101101000
1101010111

1494 25 1 01 011 0111 00001 010101 0110000 10010001 101000101
1011011000

1495 25 1 11 101 0001 10001 001001 0101011 01100000 100000111
1101101000

1496 25 1 11 001 0111 10001 001000 0011000 01000100 101110001
1100101101

1497 25 1 01 011 0001 01001 001000 0110000 10010101 100111010
1011110100

1498 25 1 01 011 1011 10011 000100 0001010 00100011 001001110
0110101100

1499 25 1 01 011 1011 10011 000001 0110100 10010001 100101010 1010000011

1500 26 1 01 011 1011 10011 000001 0001010 01011100 011010011 1010010010

1501 26 1 11 101 0101 10111 001110 0100011 01010001 100000000 1100011010

1502 26 1 01 111 0111 10001 001100 0100101 01100010 100110001 1010100100

1503 26 1 01 011 1011 10011 001000 0100010 01001001 100101001 1011100101

1504 26 1 01 111 0001 11011 000100 0100101 01100110 100010000 1010111100

1505 26 1 11 001 0001 11011 010000 0101010 10011001 101010010 1110100100

1506 26 1 01 011 1011 10011 000010 0100010 01100100 100100011 1011100110

1507 26 1 01 011 1111 00001 000110 0110001 10010100 101101100 1101010000

1508 26 1 01 011 1011 10011 001001 0100100 01110101 100010001 1001000101

1509 26 1 11 001 0111 10001 000100 0011010 01000101 010101010 1001100111

1510 26 1 01 111 0111 10001 000100 0100100 01100101 100110001 1010100110

1511 26 1 01 011 1011 10011 000100 0001010 01011100 011010111 1010000010

1512 26 1 01 011 0111 00001 000101 0001100 01001010 010101001 0110011111

1513 26 1 01 011 1011 10011 000001 0001000 01001000 101011110 1011101100

1514 26 1 01 011 1011 10011 001001 0100100 01101000 100100011 1001010110

1515 26 1 01 011 1011 10011 000001 0100100 10010001 100101010 1011101001

1516 26 1 01 011 1011 10011 000001 0100100 10001010 101001011 1010111000

1517 27 1 01 011 1011 10011 001010 0100010 01100100 100100011 1011100110

1518 27 1 01 001 1001 10101 011010 1000000 11010110 110111000 1110100010

1519 27 1 11 101 0101 10111 010100 0110011 01110001 100000011 1000010010

1520 27 1 01 011 1011 10011 001010 0100010 10010001 100101100 1011100101

1521 27 1 11 001 0001 11011 010000 0101010 10000011 100101110 1110100101

1522 27 1 01 111 0001 11011 010000 0110010 10100011 101001100 1110100100

1523 27 1 01 011 1011 10011 001001 0010101 10010000 100101010 1011101001

1524 27 1 11 101 0101 10111 001000 0111000 10001001 100011010 1101001100

1525 27 1 11 001 0001 11011 010110 0110100 10000000 100101110 1010111001

1526 27 1 01 111 0001 11011 010011 1001001 10100000 101001010 1100100101

1527 27 1 01 011 1011 10011 000100 0100100 01011100 011001010 0110101011

1528 27 1 11 101 0001 10001 001001 0101011 01100000 110110100 1110101100

1529	28	1	01	011	1011	10011	000010	0001001	00100111	011101100	1010110101
1530	28	1	11	001	0001	11011	010110	0110110	10000001	101011110	1110100000
1531	28	1	11	101	0101	10111	010001	0110010	01110011	100011001	1001000100
1532	28	1	01	011	1011	10011	000100	0101110	01110100	100010011	1010010101
1533	28	1	01	001	1001	10101	011001	0110110	10000011	100010110	1011010101
1534	28	1	01	111	0001	11011	000100	0010011	01001011	011001100	1001100111
1535	28	1	01	111	0111	10001	000100	0110010	10011001	101001001	1100101011
1536	28	1	01	011	1011	10011	010001	0101000	01100101	100100101	1010011101
1537	28	1	01	111	0111	10001	000110	0100101	01100010	101010110	1011010100
1538	29	1	01	011	1011	10011	010010	0110100	10010111	101000101	1010011010
1539	29	1	11	101	0101	10111	010001	0101001	10001011	100011010	1001101001
1540	29	1	11	001	0001	11011	010100	0101100	01101010	100110111	1110101000
1541	29	1	01	111	0111	10001	000101	0001100	00110101	010001111	1110011100
1542	29	1	01	011	1011	10011	010010	0101001	10010010	101011011	1011100100
1543	29	1	01	011	1011	10011	010010	0110100	10010011	100101110	1010001011
1544	29	1	01	011	0001	01001	001101	1001010	11001011	110100100	1110101101
1545	30	1	01	011	1011	10011	010001	0100101	01101010	100101011	1011101001
1546	30	1	11	101	0101	10111	001010	0101001	01100101	100010111	1000111100
1547	30	1	11	001	0001	11011	011011	1001001	10011010	101011100	1110100100
1548	30	1	01	111	0111	10001	000101	0001100	01000111	101001111	1010101110
1549	30	1	01	001	1001	10101	000101	1011001	11010100	110111100	1110101010
1550	30	1	01	111	0111	10001	010001	0100100	01100101	100110101	1011011101
1551	30	1	01	011	1011	10011	010010	0101110	01100110	101000111	1010011100
1552	30	1	01	011	1011	10011	010010	0110011	10010011	100101100	1010011011
1553	31	1	01	011	1011	10011	010001	0110010	01101011	100101001	1011101101
1554	31	1	11	101	0101	10111	001011	0100010	01110001	100010111	1101001110
1555	31	1	11	001	0001	11011	010101	0101100	10010111	100110110	1110101010
1556	31	1	01	111	0001	11011	001001	0110010	10011011	101010110	1110101100

7. Kanonički grafovi sa 12 čvorova

1557	22	1 01 001 1001 10101 000101 0010000 01000001 100000000 1100000100 11010101000
1558	22	1 11 001 1001 10001 000010 0010000 01010001 010110010 0110010000 10000000001
1559	22	1 11 001 0001 11011 000010 0010010 01010001 010110010 1000000000 10001000000
1560	23	1 01 011 1011 10011 000010 0010000 00101000 010001000 0101000110 10010000010
1561	23	1 11 101 1001 10001 000010 0010000 00101000 010100011 0101100110 10000000000
1562	23	1 11 001 0111 10001 000100 0010010 00110100 010000000 0101000000 10011001100
1563	23	1 11 101 0001 10001 000010 0010010 01010000 010110000 1000000100 11011001000
1564	24	1 01 011 1011 10011 000010 0010000 00101000 010001000 1001000001 10010110100
1565	24	1 11 101 0101 10111 000001 0001001 00100000 001001010 0011001001 10001000000
1566	24	1 11 101 1001 00010 001011 0100000 01101100 100000000 1100000000 11101100000
1567	24	1 01 011 1011 10011 000001 0000101 00100000 001010100 1001000000 10111010000
1568	24	1 01 011 1011 10011 000001 0001010 00100001 001001010 0100100000 01101001000
1569	24	1 11 001 0111 10001 001001 0100000 01010000 100000010 1010010100 11010001000
1570	24	1 01 011 1011 10011 000001 0010000 00100100 011010000 1001000001 10010100010
1571	25	1 01 011 1011 10011 000010 0010000 00101000 011001000 1001000001 10111000010
1572	25	1 11 001 0001 11011 000010 0010010 01011001 100000000 1000100000 10010110101
1573	25	1 01 011 0111 00001 000100 0001100 00110101 010010001 0101000000 10101000011
1574	25	1 01 011 1011 10011 000010 0010000 01000100 010100010 0110010001 10010000101
1575	25	1 11 101 1001 00010 001010 0100000 01010000 011010000 1000010010 11101100100
1576	26	1 01 011 1011 10011 000010 0010000 00101000 010001000 0101000110 10111000011
1577	26	1 11 101 0101 10111 000100 0010100 00111000 010001011 0110010000 10000000001
1578	26	1 11 001 0001 11011 000010 0010010 01000000 010101100 1000000011 10010110110
1579	26	1 01 001 1001 10101 000011 0001010 01000000 100000100 1011010010 11010110001
1580	26	1 11 101 1001 00010 001100 0100100 01011000 011010000 1000000111 11000010010
1581	26	1 01 011 1111 00001 001000 0010100 01000000 010100110 0110000001 10110000111
1582	26	1 11 001 1001 10001 000001 0010110 01000000 011010000 1001000101 11010101010
1583	26	1 01 011 1011 10011 000001 0000101 00100000 100100000 1001010100 10111010001
1584	27	1 01 011 1011 10011 000001 0010010 01001000 010111010 1001000010 10010100100

1585 27 1 01 001 1001 10101 000011 0001010 01101001 100000100
1100001000 11010110100
1586 27 1 01 011 0111 00001 000100 0100100 01100101 101000010
1010100110 10110001000
1587 27 1 01 011 1011 10011 000001 0001000 00100101 010010000
0101110010 01101001001
1588 27 1 01 011 1011 10011 000010 0010000 01000100 011001000
1001000011 10111000110
1589 27 1 01 011 0001 01001 000010 0010100 01100000 100101001
1001110010 10111100100
1590 28 1 01 011 1011 10011 001000 0010010 01001000 010100101
1001000010 10111001010
1591 28 1 11 101 0101 10111 000001 0001001 00101000 001110100
1000010101 10010010001
1592 28 1 01 011 0111 00001 000100 0001100 00101011 001101011
0101000010 01100011001
1593 28 1 01 011 0001 11011 000001 0001000 00101001 001011010
0101010011 01101001001
1594 28 1 01 011 1011 10011 000010 0010000 00101000 010100011
0110010001 10111000011
1595 28 1 11 001 0111 10001 010000 0101000 10000010 101001100
1101001000 11110110000
1596 28 1 01 011 1011 10011 001000 0010010 01001000 100100001
1001010010 10111001001
1597 29 1 01 011 1011 10011 001000 0010100 01000100 011001000
1001010100 10111000111
1598 29 1 11 101 0101 10111 001000 0100010 01100100 100000101
1001001010 11000110100
1599 29 1 01 011 1011 10011 000010 0100010 01010000 011001001
1001000101 10100101101
1600 30 1 01 011 1011 10011 000001 0001000 00100101 010010000
1010111100 10111011100
1601 30 1 01 001 1001 10101 000010 0001011 00100000 010111011
1011000111 11010100100
1602 30 1 01 011 0111 00001 000101 0001100 00100111 001010110
0011010101 01100111000
1603 30 1 01 011 1011 10011 001000 0100010 01100100 100100011
1001010000 10111001101
1604 30 1 01 011 0001 11011 000001 0001000 00101101 010101001
0110100101 10011010110
1605 30 1 11 101 1001 00010 001110 0100101 01011010 011010000
1000001111 11000010010
1606 30 1 11 101 0001 10001 001001 0100001 01010110 011000000
1000001111 11101010101
1607 30 1 01 001 1001 10101 000100 0100010 01101001 011011101
1000010010 10101110100
1608 30 1 11 001 0111 10001 001001 0011010 01000000 100101100
1001101100 11001011010
1609 31 1 01 011 1011 10011 000001 0100100 01011100 011010001
1001000101 10100101101
1610 31 1 11 101 0101 10111 001010 0010110 01000110 100000000
1100011000 11010011101
1611 31 1 01 011 0111 00001 000101 0001100 00100111 001101010
0100101011 01100111001
1612 31 1 01 111 0001 11011 000100 0100101 01001110 101000000
1011000110 11101010001
1613 32 1 01 011 1011 10011 000001 0100100 01011100 011010001
1001010101 10100101101
1614 32 1 11 001 0001 11011 001001 0100000 10010101 100110100
1010110110 11101010100

1615	32	1 01 011 0111 00001 000110 0010011 00101010 010101011 0110011001 10110100011
1616	32	1 01 011 1011 10011 000001 0000101 00100101 001010101 1001010101 10111010101
1617	32	1 11 101 1001 00010 001110 0100101 01011010 011010000 1000001111 10110001110
1618	35	1 01 011 1011 10011 010010 0101110 01100110 011101100 1001001010 10100111001
1619	35	1 11 001 0001 11011 001001 0110110 10010011 100110110 1010110100 11101010100
1620	35	1 01 111 0111 10001 010001 0100100 01100101 100110101 1010011101 10101011100
1621	35	1 01 011 1011 10011 011001 0111010 10001011 100100101 1010001101 10100100110
1622	36	1 01 011 1011 10011 010111 0110010 01110100 100010111 1001000101 10100011101
1623	36	1 11 101 0101 10111 001010 0010110 00111001 100010111 1100011010 11010011001
1624	36	1 01 111 0111 10001 000101 0110011 10011001 101001101 1010101100 11001010110
1625	36	1 01 001 1001 10101 000101 0010000 01101011 110101011 1101111100 11101011010
1626	36	1 01 011 1011 10011 010010 0101001 01100111 100100101 1010011101 10101101010

8. Kanonički grafovi sa 13 čvorova

1627	28	1 01 011 1011 10011 000010 0010000 00101000 010001000 0110010000 10010000011 100101101000
1628	28	1 11 001 0001 11011 000010 0010010 01010001 010110010 1000000000 10001000000 101011001100
1629	29	1 01 011 1011 10011 000001 0000101 00100000 001001010 0010101001 10010000000 101110100100
1630	29	1 01 011 1011 10011 000001 0001000 00010100 010010000 0101110000 10100000011 101001000110
1631	30	1 01 011 1011 10011 000010 0010000 00100110 001010001 0101000101 10010000000 101110001010
1632	30	1 11 101 0001 11001 001000 0100000 01010100 011000000 1000010111 10001000100 111010001010
1633	31	1 01 011 1011 10011 000001 0001000 00010100 001001011 0100100000 01011100010 011010011001
1634	32	1 01 011 1011 10011 000010 0010000 01000100 010100010 0110010001 10010000101 101110001110
1635	33	1 01 011 1011 10011 000001 0001010 01001000 010111000 0110100101 10100000110 101001001100
1636	34	1 01 011 1011 10011 000010 0010100 01000100 011001000 1001000011 10010111000 101110001101
1637	36	1 01 011 1011 10011 001000 0100010 01001001 011010010 1001000111 10010100110 101110010001
1638	37	1 01 011 1011 10011 000001 0100100 01011100 100010101 1001000101 10100001101 101001011110
1639	37	1 11 101 0101 10111 000001 0010100 00101100 010100011 0111000000 10001101111 110100011010
1640	42	1 01 011 1011 10011 010010 0101001 01100111 011101100 1001001010 10100111001 101011010110
1641	42	1 01 011 1011 10011 010010 0101110 01101001 100100101 1001011010 10100011011 101001110110

9. Kanonički grafovi sa 14 čvorova

1642	35	1 01 011 1011 10011 000001 0000101 00100000 001001010 0010101001 10010000000 100101010010 1011101001001
1643	43	1 01 011 1011 10011 000100 0100100 01011100 011001010 0111010100 10001000111 101000011110 1010010110010
1644	49	1 01 011 1011 10011 010001 0100101 01010001 011001011 1001001101 10100111101 101011101010 1011101011000

II. MAKSIMALNI KANONIČKI GRAFOVI SA 6 SOPSTVENIH VREDNOSTI RAZLIČITIH OD NULE

U prethodnom razmatranju opisali smo sve konačne i beskonačne grafove koji imaju tačno 6 sopstvenih vrednosti različitih od nule. U ovom poglavlju dajemo spisak svih maksimalnih kanoničkih grafova koji imaju takođe 6 sopstvenih vrednosti različitih od nule. Osim toga, u kratkim crtama je opisan postupak za generisanje kanoničkih grafova sa n sopstvenih vrednosti različitih od nule.

* * *

Neka je $n \geq 2$ fiksirani ceo broj. Označimo sa $T(n)$ skup svih neizomorfnih grafova sa tačno n sopstvenih vrednosti različitih od nule, a sa $T_c(n)$ označimo skup svih kanoničkih grafova koji pripadaju skupu $T(n)$. S obzirom da je broj sopstvenih vrednosti različitih od nule $n(g)$ kanoničkog grafa g jednak broju sopstvenih vrednosti različitih od nule $n(G)$ grafa G (graf g je kanonički graf grafa G), jasno je da se skup $T(n)$ može generisati pomoću skupa kanoničkih grafova $T_c(n)$. U prethodnom poglavlju je dokazano da svaki graf $g \in T_c(n)$ sadrži indukovan podgraf H sa n čvorova koji takođe pripada skupu $T_c(n)$. Takav podgraf nema nulu u spektru, i nazivamo ga "jezgro" grafa g ili "bazni graf" grafa g. Označimo sa $\varkappa_n$ skup svih baznih grafova sa n čvorova. Kako je $\varkappa_n \subseteq T_c(n)$, jasno je da je skup $\varkappa_n$ konačan. Očigledno je da graf G može imati više različitih baznih grafova.

Pošto je svaki čvor $x \in V(g)\setminus V(H)$ susedan bar jednom čvoru $y \in V(H)$ i bilo koja dva čvora $a,b \in V(g)$ nemaju iste susede, sledi da je $|g| \leq 2^n - 1$.

Na osnovu svega rečenog, jasna je metoda za generisanje skupa svih kanoničkih grafova koji imaju n sopstvenih vrednosti različitih od nule. Dakle, polazimo od skupa baznih grafova, i za bilo koji fiksirani bazni graf H, primenjujemo metod ekstenzije dodavanjem novih čvorova tako da je novi čvor x susedan bar nekom od čvorova baznog grafa H. Ispitivanjem svih mogućih kombinacija "susedstva" novog čvora x sa čvorovima baznog grafa H i već dodatih čvorova, generišemo kanoničke grafove koji pripadaju skupu $T_c(n)$. U ovom postupku primenjujemo metod zabranjenih podgrafova.

Ovim načinom dat je opis metode za generisanje kanoničkih grafova koji imaju n sopstvenih vrednosti različitih od nule. Međutim ovaj postupak nije primenjen u Poglavlju I za generisanje skupa $T_c(6)$ s obzirom da izložena metoda iziskuje neuporedivo više vremena. Naime, kao što je opisano, za svaki bazni graf H generisali smo vektore x_i, p_i i ispitivanjem uslova koegzistencije (da li je skalarni proizvod $\langle x_i, p_j\rangle \in \{0,1\}$) generisali kanoničke grafove koji pripadaju skupu $T_c(6)$.

Pretraživanjem spektara svih povezanih grafova sa 6 čvorova (postoji tačno 112 takvih grafova), lako se utvrđuje da postoji tačno 52 grafa koji nemaju nulu u spektru. Dakle, postoji tačno 52 bazna grafa iz klase $T_c(6)$. U ovom poglavlju kondenzujemo rezulate koje smo dobilu u prethodnom razmatranju, tj. navodimo skup svih maksimalnih grafova koji imaju 6 sopstvenih vrednosti različitih od nule. Za graf $g \in T_c(n)$ reći ćemo da je maksimalan ako i samo ako nijedan njegov nadgraf ne pripada skupu $T_c(n)$ (tj. bilo koji njegov nadgraf ili nema n sopstvenih vrednosti različitih od nule ili nije kanonički).

Koristeći program za izdvajanje maksimalnih kanoničkih grafova iz skupa $T_c(n)$ $(3 \le n \le 10)$ dobijamo sledeći rezultat.

Teorema 2.1 Postoji tačno 27 maksimalnih kanoničkih grafova sa 6 sopstvenih vrednosti različitih od nule. Svi ovi grafovi su predstavljeni u Listi 2.1. Navedeni grafovi imaju respektivno 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13 ili 14 čvorova.

Napomenimo da je slog Liste 2.1 svih maksimalnih kanoničkih grafova sa 6 sopstvenih vrednosti različitih od nule predstavljen u obliku

$$n_1 \quad n_2 \quad n_3 \qquad a_{12}\, a_{13}a_{23} \,\cdots\, a_{1n}a_{2n}\cdots a_{n-1,n} \quad ,$$

gde je n_1 redni broj odgovarajućeg grafa, n_2 je broj čvorova grafa, n_3 je broj njegovih grana i $a_{12}\, a_{13}a_{23} \,\cdots\, a_{1n}a_{2n}\cdots a_{n-1,n}$ je gornji trougaoni oblik odgovarajuće matrice susedstva grafa G.

LISTA 2.1 MAKSIMALNI KANONIČKI GRAFOVI SA 6 SOPSTVENIH VREDNOSTI RAZLIČITIH OD NULE

001 06 08 1 10 001 0101 11001
002 06 09 1 11 111 1000 10001
003 06 10 1 10 001 0101 11111
004 06 11 1 10 110 1010 11111
005 06 15 1 11 111 1111 11111

006 08 16 1 10 001 1110 11101 000100 1010111
007 08 22 1 11 111 1111 10011 101011 1100111

008 09 21 1 11 111 1001 00001 001111 0101111 11100000
009 09 21 1 11 111 1001 10001 000111 0110000 11110110
010 09 22 1 10 001 1100 11001 001101 1010111 11100111
011 09 24 1 11 111 1001 10001 101011 1100111 11110100
012 09 24 1 11 111 1001 00001 010111 1100111 11011011

013 10 25 1 11 111 1111 00001 000101 0010011 01000111 100001111
014 10 29 1 11 111 1001 00001 011100 1011101 11011011 111000111

015 11 24 1 10 001 0101 11010 010000 0100011 10000001 100001101
1101011010
016 11 28 1 10 001 0101 11010 001000 0010011 10011001 100111101
1101011010

017 12 26 1 10 111 0011 00010 010000 0110010 10000010 100010000
1011001001 11100110000
018 12 28 1 11 111 1001 10000 001011 0011010 01001000 010100000
1010000101 11001011000
019 12 30 1 10 001 0101 11010 000010 0010010 01000000 011101100
1001111011 11010110100
020 12 30 1 10 001 0101 11010 000010 0010010 01000000 100110010
1001111011 11010110110
021 12 30 1 10 001 1010 00001 000110 0010101 01101101 100100010
1010001011 11100101001
022 12 32 1 10 001 0101 11010 001001 0110110 01110010 011101011
1000001001 10000101101

023 13 30 1 10 001 1010 00001 000001 0001100 00100101 001010111
0110110001 10000100011 101000010010
024 13 37 1 10 001 1010 00001 000110 0010011 00110110 011110000
1000100111 10011101001 101101100110

025 14 35 1 10 001 1010 00001 001010 0100000 01001000 011000000
1000011010 10001001111 101000011100 1010100111100
026 14 43 1 10 001 1010 00001 001010 0100100 01001110 011011100
1000011111 10100001110 110001110001 1110011100010
027 14 49 1 10 111 0011 00010 010011 0101000 01100111 011011000
1000111111 10101111010 101100110100 1100110110001

III. NEKI REZULTATI IZ TEORIJE NORMALNIH DIGRAFOVA

U ovom poglavlju uvodimo definiciju prostih i mešovitih digrafova i ujedno dajemo neke osobine normalnih digrafova.

Osnovni pojmovi i definicije koji se odnose na spektralnu teoriju normalnih digrafova sadržani su u sledećem odeljku i potiču iz rada [22].

3.1 Osnovni pojmovi i definicije

U celom poglavlju posmatramo povezane konačne digrafove $G = (V,E)$ bez višestrukih grana i petlji. $V = V(G)$ je skup čvorova grafa G i $E(G)$ je skup orijentisanih grana, tj. skup uređenih parova (x,y) skupa $V(G)$ $(x \neq y)$. Ako par $(x,y) \in E(G)$ ili $(y,x) \in E(G)$ tada xy zovemo luk grafa G.

Ako $x,y \in V(G)$, čvor x je susedan čvoru y ako i samo ako $(x,y) \in E(G)$. Na osnovu definicije imamo da za svaki uređeni par $(x,y) \in E(G)$ postoji najviše jedan orijentisani luk od čvora x ka y, i za bilo koji par različitih čvorova x,y postoji najviše dva orijentisana luka koji spajaju x i y.

Ako je x susedno sa y i y nije susedno sa x, tada pišemo $x \longrightarrow y$. Ako je x susedno sa y i y susedno sa x onda pišemo $x \longleftrightarrow y$. Ako je $x \longrightarrow y$ ili ako je $y \longrightarrow x$ tada luk xy zovemo prosti luk (simple). Ako je $x \longleftrightarrow y$, tada luk xy zovemo dvostruki luk ili dupla grana (double).

Za digraf G, neka je $A = A(G) = [a_{ij}]$ 0-1 matrica susedstva grafa G, gde je $a_{xy} = 1$ ako je x susedno sa y i $a_{xy} = 0$ ako x nije susedno y. Graf G se naziva normalnim ako je matrica susedstva pridružena grafu G normalna, tj. ako je $AA' = A'A$. Graf G je simetričan ako su mu svi lukovi dvostruki. Kako je simetričan graf očigledno normalan - ovaj slučaj ne posmatramo jer nastojimo da uopštimo spektralnu teoriju simetričnih grafova. Stoga proučavamo samo nesimetrične normalne digrafove koje označavamo sa PND (proper normal digraphs). U daljem izlaganju pod pojmom normalni digraf podrazumevamo nesimetrični normalni digraf.

Za digraf G označimo sa G_o graf generisan digrafom G brisanjem orijentacija svih lukova u G. Graf G_o zovemo bazni graf. Ako je G_o bazni graf digrafa G, tada G zovemo nadgrafom grafa G_o. Red digrafa G (broj čvorova digrafa G) je red njegovog baznog grafa G_o i obično se obeležava sa $|G|$. Digraf G je povezan ako i samo ako je G_o povezan. Pod stepenom čvora $x \in V(G)$ podrazumevaćemo stepen čvora x u baznom grafu G_o.

Kao što pokazuju primeri, nemaju svi bazni grafovi odgovarajuće normalne digrafove, te se u teoriji normalnih digrafova javljaju tri osnovna problema:

(i) Naći sve klase grafova S_g^i ($i \in N$) tako da svaki graf $G_o \in S_g^i$ ne sadrži nijedan nadgraf G (bazni graf G_o ne sadrži nijedan normalan digraf).

(ii) Naći sve bazne grafove G_o koji imaju bar jedan normalan digraf.

(iii) Ako klasu takvih grafova označimo sa S_g i ako je $G_o \in S_g$ naći sve normalne digrafove nad G_o.

Ako je G digraf sa n čvorova, spektar digrafa G se definiše kao spektar matrice susedstva $A = A(G)$ digrafa G, tj. $\sigma(G) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ $(Re(\lambda_1) \geq \ldots \geq Re(\lambda_n))$. U opštem slučaju spektar nije realan. Ako je G normalan digraf, onda spektar digrafa G sadrži bar jednu kompleksnu nulu. Spektar normalnog digrafa je očigledno simetričan u odnosu na realnu osu.

Neka svojstva spektra normalnih digrafova sadržani su u sledećoj teoremi.

Teorema 3.1 ([22]) Neka je $\sigma(G) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ spektar normalnog digrafa G $(Re(\lambda\ ) \geq \ldots \geq Re(\lambda\ ))$.

Tada je:

(i) Spektralni radijus $r(G) = \lambda_1(G)$ je realan;

(ii) Spektar $\sigma(G)$ leži u krugu $|\lambda_1| \leq r(G)$;

(iii) $r(G)$ je jednostruka vrednost akko je G povezan digraf;

(iv) G je bipartitan akko je $\sigma(G)$ simetričan u odnosu na koordinatni početak;

(v) Ako je $-r(G) \in \sigma(G)$, onda je G biparitan i $-r(G)$ je jednostruka sopstvena vrednost digrafa G, ukoliko je G povezani digraf;

(vi) Spektralni trag je nula, tj. $\sum \lambda_i = 0$;

(vii) Numerički rang $W(A) = \{\langle Ax,x\rangle \mid \|x\| = 1\}$ digrafa G jednak je konveksnom omotaču spektra $\sigma(G)$.

(viii) Postoji bar jedan sopstveni vektor koji odgovara sopstvenoj vrednosti $r(G)$ čije su sve koordinate realne i pozitivne;

(ix) Postoji skup uzajamno normalnih vektora $v_1,v_2,\ldots,v_n \in H$ koji respektivno odgovaraju sopstvenim vrednostima $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$. Skup vektora $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ čini ortonormiranu bazu Hilbert-ovog prostora H.

Ako su G_1 i G_2 dva digrafa, kažemo da je G_1 izomorfan sa G_2 i pišemo $G_1 \cong G_2$ akko postoji bijekcija w: $V(G_1) \longrightarrow V(G_2)$ tako da je ispunjen jedan od sledeća dva uslova:

(i) Za bilo koja dva čvora $x,y \in V(G_1)$ iz $(x,y) \in E(G_1)$ sledi da je $(w(x),w(y)) \in E(G_2)$.

(ii) Za bilo koja dva čvora $x,y \in V(G_1)$ iz $(x,y) \in E(G_1)$ sledi da je $(w(y),w(x)) \in E(G_2)$.

U prvom slučaju kažemo da su digrafovi G_1 i G_2 iste orijentacije, dok u drugom slučaju suprotne.

Ako su $A_i = A(G_i)$ matrice susedstva digrafova G_i $(i=1,2)$ i $G_1 \cong G_2$ onda postoji unitarna matrica U tako da je $A_2 = UA_1U^*$ ili $A2 = UA_1{}'U^*$. Spektar izomorfnih digrafova (uključujući i multiplicitet) je očigledno isti. Iz tih razloga se teorija normalnih digrafova može reducirati na teoriju neizomorfih normalnih digrafova.

U sledećom odeljku koristićemo dva ekvivalentna kriterijuma normalnosti.

3.2 Osnovni rezultati

Definicija 3.1 ([22],[14]) Neka su x i y čvorovi digrafa G. čvor $z \in V(G)$ se zove zajednički naslednik (successor) čvorova x i y ako i samo ako su x,y susedni čvoru z. čvor $z \in V(G)$ se zove zajednički prethodnik (predecessor) čvorova x i y ako i samo ako je z susedan i čvoru x i čvoru y.

Označimo sa $suc_G(x,y) = suc(x,y)$ broj svih zajedničkih
naslednika čvorova x,y i sa $prc_G(x,y) = prc(x,y)$ broj svih zajed-
ničkih prethodnika čvorova x,y. Specijalno, $suc(x) = suc(x,x)$ je
broj svih čvorova $y \in V(G)$ tako da je x susedno sa y, i $prc(x)$ =
$prc(x,x)$ je broj svih čvorova $y \in V(G)$ tako da je čvor y susedan
čvoru x. Takođe sa $sc(x)$ označimo broj svih čvorova $y \in V(G)$ tako
da je $x \rightarrow y$ i sa $pc(x)$ broj svih čvorova $y \in V(G)$ tako da je
$y \rightarrow x$.

Uzimajući u obzir definiciju normalnih digrafova imamo sledeći stav.

Stav 3.1 ([22]) Digraf G je normalan ako i samo ako su ispunjena sledeća dva uslova:

(i) $suc(x,y) = prc(x,y)$ za bilo koja dva različita čvora $x,y \in V(G)$.

(ii) $suc(x) = prc(x)$ ili ekvivalentno $sc(x) = pc(x)$ za bilo koji čvor $x \in V(G)$.

Definicija 3.1 normalnosti digrafova vezana je za samu
strukturu grafa. Ispitivanje da li je digraf normalan ili ne u
većini slučajeva svodi se na kombinatorno prebrojavanje grana koje
izlaze (ulaze) iz određenog čvora. S druge strane način utvr-
đivanja normalnosti digrafova definicijom 3.1 zavisan je i od gra-
fičke reprezentacije baznog grafa G_0.

Stav 3.2 daje jedinstven metod utvrđivanja normalnosti digrafova ignorišući strukturu grafa (red grafa, broj grana u jednom grafu, način grafičke reprezentacije).

Neka je

$$\text{(3.1)}\qquad \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

matrica susedstva digrafa G. Označimo sa $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ i sa $a'_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})$ ($i = 1,2,\dots,n$) respektivno vektore vrste i vektore kolone matrice susedstva (3.1). Definišimo matrice $B = B(b_{ij})$ i $B' = B'(b'_{ij})$ respektivno kao proizvod matrica A, A' i A', A, tj. $B = AA'$ i $B' = A'A$. Na osnovu definicija matrica B, B' i uslova da je $a'_{ij} = a_{ji}$ imamo sledeće relacje:

$$\text{(3.2)}\qquad b_{ij} = \sum_k a_{ik} a'_{kj} = \sum_k a_{ik} a_{jk} \quad ,$$

$$\text{(3.3)}\qquad b'_{ij} = \sum_k a'_{ik} a_{kj} = \sum_k a'_{ik} a'_{jk} \quad .$$

Relacije (3.2) i (3.3) odnose se respektivno na skalarno množenje vektora a_i, a_j i a'_i, a'_j u odnosu na ortonormirani bazis $\{ei\}$ prostora R^n. Iz relacija (3.2) i (3.3) neposredno dobijamo da je uslov normalnosti $AA' = A'A$ ekvivalentan sledećoj relaciji

$$\text{(3.4)}\qquad \langle a_i, a_j \rangle = \langle a'_i, a'_j \rangle \quad (i,j \in \{1,2,\dots,n\}),$$

gde smo sa $\langle a_i, a_j \rangle = a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \dots + a_{in}a_{jn}$ označili skalarni proizvod vektora a_i i a_j.

Uzimajući u obzir relaciju (3.4) navodimo sledeće tvrđenje.

Stav 3.2 Digraf G je normalan ako i samo ako je $\langle a_i, a_j\rangle = \langle a_i', a_j'\rangle$ $(i,j \in \{1,2,\dots,n\})$.

Stav 3.2 uslov normalnosti $suc(x,y) = prc(x,y)$ i teoriju normalnih digrafova svodi na algebarski uslov normalnosti. Teoreme i svojstva normalnih digrafova koja se dokazuju uslovom $suc(x,y) = prc(x,y)$ u većini slučajeva se na jednostavniji način dokazuju relacijom (3.4).

Radi ilustracije, uzimajući u obzir Stav 3.2 dokazaćemo na drugi način dva rezultata koje je A. Torgašev dokazao u radu [22].

Teorema 3.2 Ako je bazni graf G_o stablo, tada nad G_o ne postoji nijedan nesimetrični digraf G (tj. normalan digraf generisan baznim grafom G_o).

<u>Dokaz</u>. Pretpostavimo suprotno, da postoji normalan digraf G nad G_o. S obzirom da je operacija numericaje normalnog digrafa invarijantno svojstvo, ne umanjujući opštost dokaza možemo pretpostaviti da je za neko i,j čvor x_i stepena jedan obeležen sa 1 i njemu susedan čvor x_j obeležen sa 2. Matrica susedstva normalnog digrafa tada ima oblik

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix} . \tag{3.5}$$

Iz uslova $\langle a_i, a_j\rangle = \langle a_i', '_j\rangle$ za $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ imamo da je $a_{2j} = a_{j2}$, tj. uslov normalnosti pokazuje da su sve grane iz čvora x_j duple u normalnom digrafu. Stavimo da je G_1 indukovani podgraf digrafa G koji se dobija eliminacijom čvora x_i (stavimo da je $x_i = x_{i_1}$) iz grafa G , tj. $G_1 = G \setminus \{x_{i_1}\}$. Pokazaćemo da je G_1 normalan digraf generisan nad baznim grafom $G_o \setminus \{x_{i_1}\}$.

Neka je

$$(3.6)\qquad \begin{bmatrix} 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

matrica susedstva digrafa G_1, zatim $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ $(i = 2,3,\dots,n)$ odgovarajući vektori vrste matrice (3.6). Uzimajući u obzir definiciju normalnosti digrafa G imamo da je $\langle a_i, a_j\rangle = \langle a_i', a_j'\rangle$ za $i,j \in \{2,3,\dots,n\}$. Na osnovu ove relacije i definicije vektora A_i ($i \in \{2, 3, \dots , n\}$) neposredno dobijamo relaciju

$$a_{1i}a_{1j} + \langle A_i, A_j\rangle = a_{i1}a_{j1} + \langle A_i', A_j'\rangle.$$

Iz uslova da je $a_{1i}a_{1j} = a_{i1}a_{j1}$ i prethodne relacije dobijamo da je $\langle A_i, A_j\rangle = \langle A_i', A_j'\rangle$ $(i,j \in \{2,3,\dots,n\})$, čime smo dokazali da je digraf G_1 normalan.

Bazni graf $G_o \setminus \{x_{i_1}\}$ je stablo pa postoji čvor x_{i_2} stepena jedan. Neka je x_{j_2} susedno x_{i_2}. Slično se pokazuje da su odgovarajući vektori vrsta i vektori kolona čvorova x_{i_2}, x_{j_2} simetrični, $G_2 = G \setminus \{x_{i_1}, x_{i_2}\}$ je normalan digraf i odgovarajući bazni graf $G_o \setminus \{x_{i_1}, x_{i_2}\}$ digrafa G_2 je stablo. Induktivnim razmatranjem, posle $(n-2)$ koraka imamo da je

$$(3.7)\qquad G_{n-2} = G \setminus \left\{ x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-2}} \right\} = K_2$$

normalan nesimetričan digraf, što je kontradikcija. Do relacije (3.7) smo došli iz pretpostavke da nad grafom G_o postoji normalan digraf. Time je tvrđenje dokazano. □

Teorema 3.3 Neka je G normalan digraf reda n. Dalje, neka je $G_1 = G \cup \{x\}$ digraf generisan digrafom G dodavanjem čvora x (x sadrži samo duple grane), tako da je x susedan svim čvorovima x_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ digrafa G. Tada je G_1 takođe normalan digraf.

Dokaz. Neka je

$$(3.8)\qquad \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 1 \\ a_{21} & 0 & \ldots & a_{2n} & 1 \\ . & . & \ldots & . & . \\ . & . & \ldots & . & . \\ . & . & \ldots & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrica susedstva digrafa G_1, $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}, 1)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ i $x = (1,1,\ldots,1,0)$ odgovarajući vektori vrste matrice (3.8). Iz uslova normalnosti $\langle a_i, a_j\rangle = \langle a_i', a_j'\rangle$ $(i,j = 1,2,\ldots,n)$ digrafa G, lako je videti da je $\langle A_i, A_j\rangle = \langle A_i', A_j'\rangle$ ekvivalentno sledećoj relaciji

$$1 + \langle a_i, a_j\rangle = 1 + \langle a_i', a_j'\rangle \quad (i,j = 1,2,\ldots,n).$$

Proverimo uslov normalnosti za čvorove x_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ i čvor x. Imamo da je

$$(3.9)\qquad \langle A_i, x\rangle - \langle A_i', x'\rangle = \langle A_i, x\rangle - \langle A_i', x\rangle = \sum_k a_{ik} - \sum_k a_{ki} = \langle a_i, a_i\rangle - \langle a_i', a_i'\rangle .$$

Iz relacije (3.9) neposredno sledi da je generisani digraf G_1 dodavanjem čvora x normalan. ▫

Prirodno je postaviti pitanje pod kojim uslovom normalan digraf pri eliminaciji određenih čvorova indukuje normalan podgraf, odnosno pod kojim uslovima je operacija "eliminacije" čvorova normalnog digrafa zatvorena na skupu svih normalnih digrafova $S_n(G)$.

Pretpostavimo da je dat normalan digraf u matričnom obliku

$$(3.10)\qquad \left[\begin{array}{cccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & a_{2k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & a_{kk+1} & \cdots & a_{kn} \\ \hline a_{k+11} & a_{k+12} & \cdots & a_{k+1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ a_{k+21} & a_{k+22} & \cdots & a_{k+2k} & b_{21} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{array}\right]$$

gde je $r = n-k$.

Vektore vrste matrice (3.10) označimo sa a_i, i definišimo sledeće n-dimenzione vektore:

$$\begin{cases} A_i = (a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{ik},0,0,\ldots,0) & (i = 1,2,\ldots,n), \\ B_i = (0,0,\ldots,0,b_{i1},b_{i2},\ldots,b_{ir}) & (i = 1,2,\ldots,r). \end{cases}$$

Pretpostavimo da je podgraf G_k generisan normalnim digrafom G eliminacijom čvorova x_1, x_2, ... , x_k normalan. Neka je matrica susedstva normalnog digrafa oblika (3.10). Tada uzimajući u obzir uslov normalnosti (3.4) imamo da je

$$\langle a_i,a_j\rangle = \langle a_i',a_j'\rangle \qquad (i,j \in \{k+1,k+2,\ldots,n\}).$$

Imajući u vidu definiciju definiciju vektora A_i, B_i i prethodnu relaciju imamo da je $\langle A_i+B_i,A_j+B_j\rangle = \langle A_i'+B_i',A_j'+B_j'\rangle$. Poslednja relacija se svodi na ekvivalentan oblik

$$(3.11)\qquad \langle A_i,A_j\rangle + \langle B_i,B_j\rangle = \langle A_i',A_j'\rangle + \langle B_i',B_j'\rangle.$$

Po pretpostavci je digraf $G_k = G \setminus \{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$ pa je matrica $A(G_k) = [b_{ij}]$ ($i,j \in \{1,2,...,r\}$). Iz uslova normalnosti digrafa G_k i prethodne relacije dobijamo

(3.12) $$\langle A_i, A_j\rangle = \langle A_i', A_j'\rangle \quad (i,j \in \{k+1,k+2,...,n\}).$$

Relacija (3.12) je bitna za razmatranje pod kojim uslovima je operacija "eliminacije" čvorova invarijantna nad skupom normalnih digrafova. Njenom primenom i primenom relacije (3.11) neposredno dobijamo sledeći rezultat.

Teorema 3.4 Ako je G normalan digraf i matrica susedstva digrafa G ima oblik (3.10), tada je $G \setminus \{x_1,x_2,...,x_k\}$ normalan ako i samo ako je ispunjen uslov (3.12).

Teorema 3.5 Neka je G normalan digraf. Digraf $G_1 = G\setminus\{x_1\}$ je normalan ako i samo ako su sve grane iz čvora x_1 duple.

Dokaz. Pretpostavimo da je G_1 normalan digraf. Neka je matrica susedstva digrafa G oblika (3.10). Za digraf G_1 vektori A_i i A_i' imaju oblik

$$\begin{array}{ll} A_2 = (a_{21}) , & A_2' = (a_{12}), \\ A_3 = (a_{31}) , & A_3' = (a_{13}), \\ \dots\dots & \dots\dots \\ A_n = (a_{n1}) , & A_n' = (a_{1n}). \end{array}$$

Iz uslova $\langle A_i, A_j\rangle = \langle A_i', A_j'\rangle$ sledi da je $a_{i1}a_{j1} = a_{1i}a_{1j}$. Specijalno za $i = j$ imamo da je $a_{i1}^2 = a_{1i}^2$, odakle neposredno dobijamo da je $a_{i1} = a_{1i}$ $(i \in \{2,3,...n\})$.

Sada pretpostavimo da iz čvora x_1 polaze sve duple grane. U ovom slučaju imamo da je $A_i = A_i'$ $(i = 2,3,...,n)$. Iz uslova normalnosti digrafa G i relacije (3.11), neposredno imamo da je digraf G_1 sopstveni normalani digraf. □

Iz ove teoreme direktno dolazimo do zaključka da je "eliminacija" čvorova koji imaju sve duple grane u sopstvenom normalnom digrafu G invarijatno svojstvo.

Teorema 3.6 Ako je G normalan digraf, $G_2 = G \setminus \{x_1,x_2\}$ normalan digraf i x_1,x_2 čvorovi koji nemaju iste susede na skupu $V(G) \setminus \{x_1,x_2\}$ baznog grafa G_o, tada su sve grane iz čvorova x_1,x_2 duple.

Dokaz. Neka je matrica susedstva digrafa G u obliku (3.10). Za digraf G_2 vektori A_i i A_i' imaju oblik

$$A_3 = (a_{31},a_{32}) \quad , \quad A_3' = (a_{13},a_{23}),$$

$$A_4 = (a_{41},a_{42}) \quad , \quad A_4' = (a_{14},a_{24}),$$

$$\ldots \ldots\ldots\ldots \quad . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_n = (a_{n1},a_{n2}) \quad , \quad A_n' = (a_{1n},a_{2n}).$$

Iz pretpostavke da x_1, x_2 nemaju iste susede na skupu čvorova $V(G) \setminus \{x_1,x_2\}$ sledi da postoji čvor $x_i = x_{i_o}$ u indukovanom normalnom digrafu $G_2 = G \setminus \{x_1,x_2\}$ tako da je x_1 susedan sa x_{i_o} i x_2 nije susedan sa x_{i_o}. Odgovarajući vektori za čvor x_{i_o} su $A_{i_o} = (a_{i_o1},0)$, $A_{i_o}' = (a_{1i_o},0)$. Iz relacije (3.12) imamo da je $\langle A_{i_o},A_{i_o}\rangle = \langle A_{i_o}',A_{i_o}'\rangle$. Iz poslednje relacije neposredno dobijamo da je $a_{i_o1} = a_{1i_o} = 1$, tj., vektor $A_{i_o} = A_{i_o}' = (1,0)$.

Ako pretpostavimo da postoji orijentisana grana iz čvora x_1 u neki čvor x_{j_o} indukovanog podgrafa G_2, tada imamo da je $A_{j_o} = (a_{j_o1},a_{j_o2}) = (1,a_{j_o2})$ i $A_{j_o}' = (a_{1j_o},a_{2j_o}) = (0,a_{2j_o})$.

Iz uslova normalnosti dobijamo

$$\langle A_{j_o},A_{j_o}\rangle = \langle A_{j_o}',A_{j_o}'\rangle ,$$

odakle je $1 + a_{j_o 2} = 0 + a_{2j_o}$. Iz poslednje relacije dobijamo kao jedino rešenje da je $a_{j_o 2} = 0$ i $a_{2j_o} = 1$, tj. vektor $A_{j_o} = (1,0)$ i $A'_{j_o} = (0,1)$. Skalarnim množenjem vektora A_{i_o}, A_{j_o} imamo

$$\langle A_{i_o}, A_{j_o} \rangle = \langle A'_{i_o}, A'_{j_o} \rangle ,$$

odakle je $\langle (1,0),(1,0) \rangle = \langle (1,0),(0,1) \rangle$, tj. $1 = 0$, što je kontradikcija. Dobijena kontradikcija je posledica pretpostvke da iz čvora x_1 postoji bar jedna orijentisana grana.

Konačno, pretpostavimo da iz čvora x_1 postoji orijentisana grana u čvor x_2. S obzirom da čvorovi x_1 i x_2 imaju duple grane na skupu čvorova $V(G) \setminus \{x_1, x_2\}$ neposredno sledi da se odgovarajući vektori a_{i_1} i a'_{i_1} razlikuju samo u jednoj koordinati (u koordinati koja odgovara grani $x_1 x_2$). Odavde eksplicitno sledi da je $\langle a_{i_1}, a_{i_1} \rangle \neq \langle a'_{i_1}, a'_{i_1} \rangle$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom o normalnosti digrafa G. □

Sledeći rezultat u izvesnom smislu predstavlja generalizaciju Teoreme 3.5 i Teoreme 3.6.

Za bilo koji čvor $x \in G$ (G je PND) reći ćemo da je x čisti čvor (clear vertex) ako i samo ako čvor x ne sadrži nijednu orijentisanu granu. Ako čvor x sadrži bar jednu orijentisanu granu onda čvor x nazovimo mešovitim čvorom (mixed vertex).

Teorema 3.7 Neka je G normalan digraf i neka je $A = [a_{ij}]$ odgovarajuća matrica susedstva od G. Tada je:

(i) Dodavanje (ili brisanje) duplih grana čistim čvorovima digrafa G zatvorena operacija na skupu svih normalnih digrafova $S_n(G)$.

(ii) Dodavanje čvorova digrafu G koji su susedni samo čistim čvorovima digrafa G (novododati čvorovi nemaju orijentisanih grana) takođe zatvorena operacija na skupu svih normalnih digrafova $S_n(G)$.

<u>Dokaz</u>. (i) Označimo sa $\bar{A} = \left[\bar{a}_{ij}\right]_{k\times k}$ matricu susedstva indukovanog podgrafa digrafa G koji nastaje brisanjem svih čistih čvorova iz G. Zatim, označimo sa $C = \left[c_{ij}\right]_{\ell\times\ell}$ matricu susedstva podgrafa G koji nastaje brisanjem svih mešovitih čvorova iz G. Podesnom numeracijom čvorova $x_i \in G$, odgovarajuće matrice A i A' imaće respektivno oblik

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{k\times k} & B_{k\times\ell} \\ B'_{\ell\times k} & C_{\ell\times\ell} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \bar{A}'_{k\times k} & B_{k\times\ell} \\ B'_{\ell\times k} & C_{\ell\times\ell} \end{bmatrix}.$$

Iz uslova normalnosti AA' = A'A digrafa G neposredno dobijamo sledeću relaciju

$$\begin{bmatrix} \bar{A}\bar{A}' + BB' & \bar{A}B + BC \\ B'\bar{A}' + CB' & B'B + CC \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}'\bar{A} + BB' & \bar{A}'B + BC \\ B'\bar{A} + CB' & B'B + CC \end{bmatrix}.$$

Iz poslednje jednakosti imamo sledeće dve relacije

(3.13) $$\bar{A}\bar{A}' = \bar{A}'\bar{A} ,$$

(3.14) $$\bar{A}B = \bar{A}'B .$$

Iz relacije (3.13) sledi da digraf G ostaje normalan digraf ako se iz njega odstrane svi čvorovi koji sadrže duple grane (Teorema 3.5). Takođe primetimo da je digraf G normalan ako i samo ako važe relacije (3.13) i (3.14). Dodavanjem (brisanjem) duplih grana čistim čvorovima digrafa G, odgovarajuće matrice susedstva $\bar{A}$ i B se ne menjaju, pa iz relacija (3.13) i (3.14) neposredno dolazimo do zaključka da je odgovarajući generisani digraf digrafom G normalan digraf.

(ii) Označimo sa G_s digraf koji nastaje dodavanjem čistih čvorova $x_1, x_2, \ldots, x_s$ digrafu G. Za digraf G_s definišimo matrice $\bar{A}$ i C na potpuno isti način kao u dokazu (i). Očigledno da je odgovarjuća matrica susedstva $\bar{A}$ za digraf G_s ista odgovarajućoj matrici $\bar{A}$ za digraf G. S obzirom da je digraf G normalan sledi da važi relacija (3.13) za digraf G_s. Da bi smo dokazali normalnost digrafa G_s dovoljno je pokazati da važi relacija (3.14).

Zaista, imamo da odgovarajuće matrice B i C imaju respektivno oblik $\left[b_{ij} \Big|_{k\times \ell} \; 0_{k\times s} \right]$ i $\left[c_{ij} \right]_{(\ell+s)\times(\ell+s)}$, gde je $0_{k\times s}$ nula matrica reda kxs. Relacija (3.14) je ekvivalentna sledećoj matričnoj relaciji

$$\begin{bmatrix} \bar{A}B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}'B \\ 0 \end{bmatrix},$$

odakle neposredno sledi dokaz tvrđenja. □

Mnogi primeri pokazuju da parcijalni digrafovi generisani normalnim digrafom brisanjem svih duplih grana ostaju normalni digrafovi (normalni parcijalni digrafovi). Za dalje proučavanje normalnih digrafova uvešćemo neke nove pojmove i definicije.

Definicija 3.2 Neka je G normalan digraf i G_1 digraf generisan digrafom G eliminacijom svih njegovih duplih grana. Ako je G_1 normalan digraf, tada G nazivamo prostim (simple) normalnim digrafom. Ako G_1 nije normalan, tada G nazivamo mešovitim (mixed) digrafom.

Pretpostavimo da je G prost normalan digraf. Neka je A = $[a_{ij}]$ matrica susedstva digrafa G. Pretpostavimo da je G_1 digraf generisan digrafom G brisanjem svih duplih grana. Neka je B = $[b_{ij}]$ matrica susedstva digrafa G_1. Osim toga, pretpostavimo da je G_2 digraf generisan digrafom G brisanjem svih orijentisanih grana. Neka je C = $[c_{ij}]$ matrica susedstva digrafa G_2. Digraf G_2 je normalan digraf jer je simetričan. Iz uslova normalnosti digrafova G, G_1, G_2 dobijamo

$$(3.15)\qquad \begin{cases} \langle a_i, a_j \rangle = \langle a'_i, a'_j \rangle, \\ \langle b_i, b_j \rangle = \langle b'_i, b'_j \rangle, \\ \langle c'_i, c'_j \rangle = \langle c'_i, c'_j \rangle. \end{cases}$$

Relacija (3.15) se može napisati u ekvivalentnom obliku

$$\langle c_i, c_j \rangle + \langle c_i, b_j \rangle + \langle c_j, b_i \rangle + \langle b_i, b_j \rangle =$$
$$\langle c'_i, c'_j \rangle + \langle c'_i, b'_j \rangle + \langle c'_j, b'_i \rangle + \langle b'_i, b'_j \rangle .$$

Iz uslova da je $c_i = c'_i$ i prethodne relacije imamo

$$\langle b_j - b'_j, c_i \rangle + \langle b_i - b'_i, c_j \rangle + \langle b_i, b_j \rangle = \langle b'_i, b'_j \rangle.$$

Iz poslednje relacije vidimo da je G prost normalan digraf ako i samo ako važi sledeća relacija

$$\langle b_j - b'_j, c_i \rangle + \langle b_i - b'_i, c_j \rangle = 0.$$

Definišimo matricu $D = [d_{ij}]$ sa $d_{ij} = b_{ij} - b_{ji}$. Relacija (3.16) svodi se na relaciju u matričnom obliku

$$DC = K,$$

gde je K – koso-simetrična matrica. Zaista, označimo elemente matrice K sa k_{ij}. U skalarnom obliku iz relacije (3.16) i prethodne relacije neposredno sledi da je $k_{ji} + k_{ij} = 0$, pa je K koso-simetrična matrica.

S druge strane, lako je pokazati da ako je DC koso-simetrična matrica, tada je digraf G prosti normalni digraf.

Iz prethodnog razmatranja neposredno dobijamo sledeći rezultat.

Teorema 3.8 Neka je G normalan digraf i neka je $A = [a_{ij}]$ matrica susedstva digrafa G. Osim toga neka je $C = [c_{ij}]$ matrica susedstva digrafa G_2 koji nastaje brisanjem svih orijentisanih grana iz G i $D = [d_{ij}]$ matrica definisana sa $d_{ij} = a_{ij} - a_{ji}$. Tada je digraf G prost ako i samo ako je DC koso-simetrična matrica.

Teorema 3.9 Neka je G normalan digraf i neka je $A = [a_{ij}]$ matrica susedstva digrafa G. Osim toga neka je $R = [r_{ij}]$ matrica susedstva baznog grafa G_o i $D = [d_{ij}]$ matrica definisana sa $d_{ij} = a_{ij} - a_{ji}$. Tada je digraf G prost ako i samo ako je DR koso-simetrična matrica.

Dokaz. Digrafovi G_1, G_2 i odgovarajuće matrice susedstva $B = [b_{ij}]$ i $C = [c_{ij}]$ se definišu na isti način kao i u dokazu prethodne teoreme. Kako je bazni graf G_o simetričan, uslov normalnosti baznog grafa možemo da izrazimo u skalarnom obliku $\langle r_i, r_j \rangle = \langle r'_i, r'_j \rangle$ ($i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$). Pošto je G_o simetričan imamo da je $r_i = r'_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Osim toga, očigledno je $R = C + B + B'$, odnosno $r_i = c_i + b_i + b'_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Prvo pretpostavimo da je G prosti normalni digraf. Tada imamo

$$\langle b_j - b'_j, b_i + b'_i \rangle + \langle b_i - b'_i, b_j + b'_j \rangle = 0. \tag{3.17}$$

Na osnovu prethodne teoreme imamo da svaki prosti normalni digraf G zadovoljava relaciju

$$\langle b_i - b'_i, c_j \rangle + \langle b_j - b'_j, c_i \rangle = 0. \tag{3.18}$$

Sabiranjem relacija (3.17) i (3.18) imamo

$$\langle b_i - b'_i, r_j \rangle + \langle b_j - b'_j, r_i \rangle = 0. \tag{3.19}$$

odakle neposredno dobijamo da je DR koso-simetrična matrica.

Sada pretpostavimo da je DR koso-simetrična matrica. Dokazaćemo da je digraf G prosti normalni digraf.

Iz ove pretpostavke sledi da je zadovoljena relacija (3.19). Iz ove relacije neposredno dobijamo

$$\langle b_i - b'_i, cj \rangle + \langle b_j - b'_j, c_i \rangle + 2\langle b_i, b_j \rangle - 2\langle b'_i, b'_j \rangle = 0. \tag{3.20}$$

Uzimajući u obzir normalnost digrafa G, imamo relaciju

$$\langle b_i - b'_i, cj \rangle + \langle b_j - b'_j, c_i \rangle + \langle b_i, b_j \rangle - \langle b'_i, b'_j \rangle = 0. \tag{3.21}$$

Iz relacija (3.20) i (3.21) neposredno sledi da je

$$\langle b_i, b_j \rangle = \langle b'_i, b'_j \rangle \quad (i,j = 1,2,\ldots,n) ,$$

što dokazuje da je digraf G prosti normalni digraf. □

Teorema 3.10 Ako je digraf G prosti normalni digraf tada je DK koso-simetrična matrica, gde je $D = A - A'$ i K je matrica susedstva kompletnog grafa K_n.

Dokaz. Pretpostavimo da je G prosti normalni digraf. Tada je po Definiciji 3.2 digraf G_1 normalan digraf. Označimo sa $\bar{G}$ komplement digrafa G_1. Očigledno $\bar{G}$ je sopstveni normalni digraf nad grafom K_n. Označimo odgovarajuću matricu digrafa $\bar{G}$ sa $\bar{A} = \left[\bar{a}_{ij}\right]$ i $\bar{D} = \bar{A} - \bar{A}'$. Neka je $\bar{G}_1$ digraf generisan digrafom $\bar{G}$ eliminacijom svih njegovih duplih grana. Digraf $\bar{G}_1$ je normalan zato što je izomorfan digrafu G_1. Odavde zaključujemo da je digraf $\bar{G}$ prosti normalni digraf. Na osnovu Teoreme 3.9 neposredno sledi da je $\bar{D}K$ koso-simetrična matrica. Uzimajući u obzir definiciju $\bar{D} = \bar{A} - \bar{A}'$ i $D = A - A'$ očigledno imamo da je $\bar{D} = D$, čime je dokazano da je DK koso-simetrična matrica. □

Suprotno tvrđenje u opštem slučaju ne važi. Naime, za digraf na Slici 3.1 odgovarajuća matrica DK je koso-simetrična i isti digraf nije prosti normalni digraf.

Teorema 3.11 Svaki normalni digraf nad kompletnim grafom K_n je prosti normalni digraf.

Dokaz. Označimo sa $R = \left[r_{ij}\right]$ i $A = \left[a_{ij}\right]$ respektivno matrice susedstva grafova K_n i G. Na osnovu Teoreme 3.9 treba da dokažemo da je DR koso-simetrična matrica, gde je $D = \left[d_{ij}\right]$ i $d_{ij} = a_{ij} - a_{ji}$.

Stavimo da je $c_{ij} = \langle d_i, r_j \rangle + \langle d_j, r_i \rangle$ $(i,j = 1,2,\ldots,n)$.

Na osnovu definicije matrice D neposredno imamo

$$c_{ij} = \langle a_i - a'_i, r_j \rangle + \langle a_j - a'_j, r_i \rangle . \tag{3.22}$$

Definišimo $\bar{r}_i = (1,1,\ldots,1) - r_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Relacija (3.22) je ekvivalentna sledećoj relaciji

$$(3.23) \qquad (\langle a_i-a_i',r_j\rangle + \langle a_i-a_i',\bar{r}_j\rangle) + (\langle a_j-a_j',r_i\rangle + \langle a_i-a_j,\bar{r}_i\rangle)$$
$$= c_{ij} + \langle a_i-a_i',\bar{r}j\rangle + \langle a_j-a_j',\bar{r}i\rangle.$$

Pošto je $\langle a_i-a_i',r_j+\bar{r}_j\rangle = \langle a_i-a_i',(1,1,\ldots,1)\rangle = dg(a_i)-dg(a_i') = 0$, gde je $dg(x_i)$ ukupan broj jedinica u vektoru x_i $(i = 1,2,\ldots,n)$, leva strana relacije (21) je nula. Na osnovu ovoga i relacije

$$\langle a_i-a_i',\bar{r}_j\rangle + \langle a_j-a_j',\bar{r}_i\rangle = (a_{ij} - a_{ji}) + (a_{ji} - a_{ij}) = 0$$

imamo da je $c_{ij} = 0$ za bilo koje vrednosti indeksa i,j. Time je dokaz završen. □

Teorema 3.12 Svaki normalni digraf G nad kompletnim bipartitnim grafom K_{n_1,n_2} je prosti normalni digraf.

Dokaz. Pretpostavimo da je $|G| = n = n_1 + n_2$ i pretpostavimo da su karakteristični skupovi od $V(G)$

$$N_1 = \{1,2,\ldots,n_1\}, \quad N_2 = \{n_1+1,n_1+2,\ldots,n\}.$$

Tada se matrica susedstva $R = [r_{ij}]$ grafa $G_o = K_{n_1,n_2}$ može prikazati u obliku

$$R = \begin{bmatrix} O_{n_1} & R_1 \\ R_2 & O_{n_2} \end{bmatrix},$$

gde je $R_1 = \left[r_{ij}\right]_{n_1 \times n_2}$, $R_2 = \left[r_{ij}\right]_{n_2 \times n_1}$.

Definišimo matricu $D = \left[d_{ij}\right]$ i vektore r_i, $\bar{r}_i$ na potpuno isti način kao i u prethodnoj teoremi. Treba da dokažemo da je DR koso-simetrična matrica. Definišimo $c_{ij} = \langle d_i, r_j \rangle + \langle d_j, r_i \rangle$. Na isti način kao i u prethodnoj teoremi dolazimo do relacije

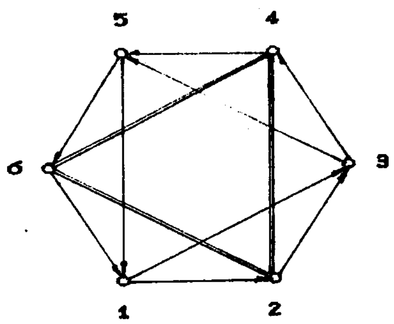
$$c_{ij} + \langle a_i - a_i', \bar{r}_j \rangle + \langle a_j - a_j', \bar{r}_i \rangle = 0. \tag{3.24}$$

Ako pretpostavimo da su oba indeksa $i,j \in N_1$ ili $i,j \in N_2$, neposredno dobijamo da je $c_{ij} = 0$. Konačno, ako pretpostavimo da je $i \in N_1$ i $j \in N_2$, iz poslednje relacije imamo

$$c_{ij} + dg(a_i) - dg(a_i') + dg(a_j) - dg(a_j') = 0 \quad ,$$

odakle je ponovo $c_{ij} = 0$. Prema tome, DR je kososimetrična matrica čime je teorema dokazana. □

Dve poslednje teoreme ne mogu se generalisati za m-partitan graf $K_{n_1,n_2,\ldots,n_m}$ $(m \geq 3)$. Kao kontraprimer navodimo digraf (Slika 3.1) koji je normalni sopstveni digraf i nije prost, a njegov bazni graf je $K_{2,2,2}$.



Slika 3.1

Od interesa je pronaći sve klase grafova koji imaju samo proste normalne digrafove. Napomenimo da su svi normalni digrafovi čiji broj čvorova ne prelazi 5 prosti normalni digrafovi. Takođe je utvrđeno da je ukupan broj normalnih digrafova sa 6 čvorova 55, i da u tom skupu postoji tačno 51 prostih normalnih digrafa, a od 267 normalnih digrafova reda 7 postoji ukupno 251 prostih.

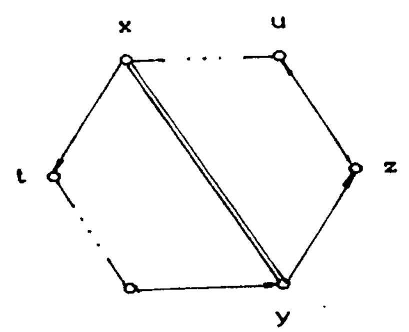
U radu [23] A. Torgašev je opisao sve klase sopstvenih normalnih digrafova čiji stepen čvorova nije veći od 3. Lako je proveriti da su svi ovi digrafovi prosti normalni digrafovi. Problem utvrđivanja svih normalnih digrafova čiji stepen čvorova nije veći od 4 nije u potpunosti rešen, mada je utvrđeno da postoje beskonačne klase ovih digrafova koji nisu prosti normalni digrafovi (mešoviti digrafovi).

U ovom poglavlju napomenuli smo da svi bazni grafovi ne sadrže sopstvene normalne digrafove. U radu [22], A. Torgašev takođe je dokazao da stabla i monociklički grafovi nemaju PND (graf nije ciklus C_n). Stoga se prirodno nameće problem utvrđivanja svih klasa baznih grafova koji ne sadrže nijedan sopstveni normalni digraf. Ovaj opšti problem ostaje otvoren u ovom radu.

Na kraju ovog odeljka, ilustracije radi, dokazaćemo jedno svojstvo normalnih digrafova korišćenjem uslova normalnosti koji je dat Definicijom 3.1.

Teorema 3.13 Ako je bazni graf G_o biciklički graf, tada nad G_o ne postoji nijedan sopstveni normalni digraf.

Dokaz. Razmotrimo slučaj kada bazni graf ne sadrži čvorove stepena jedan.

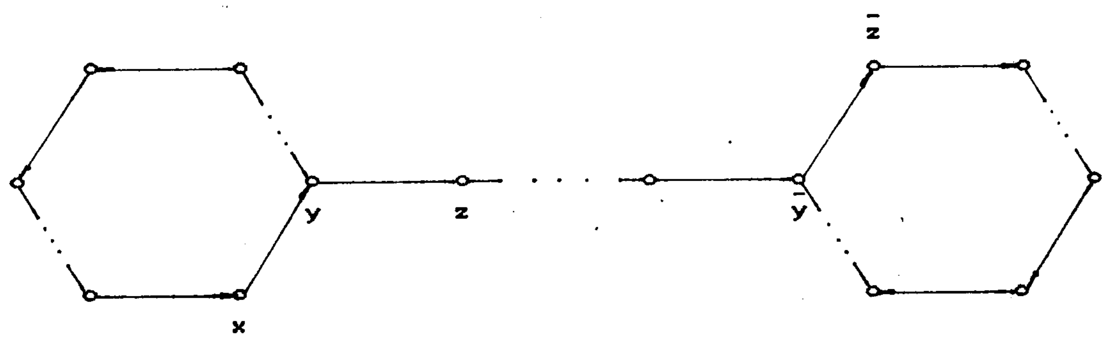


Slika 3.2

Pretpostavimo da graf G_o reda n ($n \geq 4$) sadrži ciklus dužine n kao parcijalni podgraf. Tada postoje čvorovi $x,y \in V(G_o)$ i stepen čvorova x,y je tri. S obzirom da je broj grana u čvoru y tri, iz čvora y mora da postoji jedna dupla grana. Ako pretpostavimo da je yz dupla grana, tada uz uslov da je $sc(z) = pc(z)$ mora postojati dupla grana iz čvora z u neki čvor u. Induktivnim razmatranjem dolazimo do zaključka da su sve grane u ciklusu dužine n duple. Dakle, grana xy mora biti dupla.

Pretpostavimo da iz čvora y postoji orijentisana grana u čvor z. Uz uslov normalnosti $sc(z) = pc(z)$ sledi da postoji orijentisana grana iz čvora z u čvor u. Lako dolazimo do zaključka da je indukovani nadgraf nad baznim grafom G_o graf sa Slike 3.2.

S obzirom da je $suc(t,y) \neq prc(t,y)$ sledi da indukovani nadgraf nije sopstveni normalni digraf.



Slika 3.3

Sada pretpostavimo da graf G_o reda n ($n \geq 4$) ne sadrži ciklus reda n kao parcijalni podgraf. Na osnovu prethodnog razmatranja dolazimo do zaključka da ako postoji jedna dupla grana u ciklusu C_k tada su sve grane u ciklusu duple. Pretpostavimo prvo da ciklusi u G_o nemaju zajedničkih čvorova. Tada postoji čvor $y \in V(G_o)$ stepena tri i postoji dupla grana iz čvora y u neki čvor $z \in V(G)$. Očigledno da je indukovani nadgraf nad baznim grafom G_o digraf sa Slike 3.3.

S obzirom da je $suc(x,z) \neq prc(x,z)$ sledi da indukovani nadgraf nije sopstveni normalni digraf.

Sada pretpostavimo da ciklusi u G_o imaju zajednički čvor y. Uzimajući u obzir Sliku 3.3, možemo pretpostaviti da je $\bar{y} = y$ i $\bar{z} = z$. Pošto je $suc(x,z) \neq prc(x,z)$ bez obzira da li je iz čvora y u čvor z dupla ili orijentisana grana, sledi da indukovani nadgraf nad baznim grafom G_o nije sopstveni normalni digraf.

Slučaj kada bazni graf G_o ima čvorove stepena jedan je jednostavan. Pošto je grana iz čvora x stepena jedan dupla, lako je videti da su duple i sve grane iz čvorova koji su susedni čvoru x. Sličnim razmatranjem kao i u prethodnim slučajevima, dolazimo do zaključka da nad baznim bicikličkim grafom G_o ne postoji nijedan sopstveni normalni digraf. □

IV. ODREĐIVANJE SVIH SOPSTVENIH NORMALNIH DIGRAFOVA REDA 6 I 7

Povezani graf G nazivamo normalnim digrafom ako je odgovarajuća 0-1 matrica grafa G normalna. Digraf G se naziva sopstveni normalni digraf i označava PND (proper normal digraph) ako je odgovarajuća matrica digrafa G normalna i nije simetrična. U radu [22] A. Torgašev je opisao sve PND sa 3,4, i 5 čvorova. U ovom poglavlju, korišćenjem računara, u potpunosti opisujemo sve PND sa 6 i 7 čvorova.

4.1 Rezultati

U ovom poglavlju posmatramo povezane digrafove bez višestrukih grana i petlji. Odgovarajuću 0-1 matricu susedstva digrafa G označavamo sa $A = [a_{ij}]$ a red digrafa G (broj čvorova digrafa G) sa $|G|$. Za određeni PND označićemo sa G_o odgovarajući bazni graf digrafa G. Bazni graf G_o ima isti skup čvorova kao i PND G, i dva čvora $x,y \in V(G_o)$ su susedna u G_o ako i samo ako je x susedan čvoru y ili y je susedan x u digrafu G.

U ovom poglavlju opisujemo PND sa 6 i 7 čvorova. Sve PND reda 6 i 7 generisali smo upotrebom programa za izomorfizam normalnih digrafova i programa koji od određenog baznog grafa generiše odgovarajuće normalne digrafove. Pritom, pri razmatranju ovog problema, polazimo od skupa svih povezanih grafova sa 6 i 7 čvorova (112 i 853 grafova, respektivno).

Glavni rezultati sadržani su Listi 4.1 i Listi 4.2. Na taj način dobijamo sledeće rezultate.

Teorema 4.1 Postoji tačno 55 neizomorfnih sopstvenih normalnih digrafova reda 6.

Teorema 4.2 Postoji tačno 267 neizomorfnih sopstvenih normalnih digrafova reda 7.

Iz rezultata koji su sadržani u Listama 4.1 i 4.2, dobijamo da od 112 povezanih grafova sa 6 čvorova, postoji 30 grafova koji imaju bar jedan odgovarajući PND. Takođe, od 853 grafa sa 7 čvorova, postoji tačno 157 grafova koji imaju bar jedan odgovarajući sopstveni normalni digraf.

Lako je videti da su u Listi 4.1 normalni sopstveni digrafovi sa rednim brojevima 30, 35, 39 i 43 mešoviti, dok su ostali digrafovi u ovoj listi prosti.

U Listi 4.2 normalni sopstveni digrafovi sa rednim brojevima 121, 136, 144, 158, 159, 168, 179, 207, 220, 223, 224, 227, 232, 233, 242, i 246 su mešoviti, dok su ostali digrafovi u ovoj listi prosti.

Svi sopstveni normalni digrafovi u Listama 4.1 i 4.2 predstavljeni su u obliku

$$n_1.n_2 \quad n_3 \qquad a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}\ \cdots\ a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn}\ ,$$

gde je n_1 redni broj sopstvenog normalnog digrafa, n_2 je redni broj baznog grafa G_o koji odgovara digrafu G, n_3 je broj grana u sopstvenom normalnom digrafu G i $a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}\ \cdots\ a_{n1}\ a_{n2}\cdots a_{nn}$, je odgovarajuća matrica susedstva sopstvenog normalnog digrafa G.

LISTA 4.1 SPISAK SVIH SOPSTVENIH NORMALNIH DIGRAFOVA SA 6 ČVOROVA

01.01	06	010000	001000	000100	000010	000001	100000
02.02	10	010000	101010	010100	000010	010001	001000
03.03	12	010100	101000	010001	001010	000101	100010
04.04	08	000101	100000	010010	001000	100000	001000
05.04	12	010110	101000	010101	101000	001000	100000
06.05	13	010000	101000	010111	001001	001100	001010
07.06	13	001000	001000	110111	001010	001001	001100
08.07	12	010100	001010	010001	101000	000101	100010
09.07	14	010101	100010	010100	101010	000101	101000
10.08	12	010100	001010	100001	100010	010001	001100
11.09	14	000111	100000	010011	001000	101001	101010
12.10	09	000001	100100	010000	001001	000100	010010
13.11	14	010000	101111	010010	011000	010001	010100
14.12	15	001001	101000	110111	001010	001100	011000
15.13	14	010000	101010	010011	001001	011100	000110
16.14	16	010110	001010	000111	101000	111001	100010
17.15	16	010001	100011	010110	001010	001101	111000
18.16	16	001111	100010	110101	101000	011000	101000
19.17	17	010000	101101	010110	010011	001101	011010
20.18	15	010001	001001	000101	000011	100001	111110
21.19	18	011001	101010	110100	100011	010101	001110
22.20	18	000101	101100	010101	111011	010100	001110
23.21	19	010010	101101	010110	010011	101101	011010
24.22	14	011100	001010	100011	001001	110000	100100
25.22	18	011101	001010	100111	101001	110000	101100
26.23	18	010000	101111	010011	011010	010101	011100
27.23	19	010000	101111	010111	011001	011100	011010
28.24	12	011000	000101	010100	000011	101000	100010

29.24	12	001001	100100	010010	001001	100100	010010
30.24	15	010011	101001	100010	011000	000101	110100
31.24	16	001011	101000	100110	011001	000101	110100
32.24	18	011010	101001	110100	010011	001101	100110
33.24	18	011010	001101	110100	010011	101001	100110
34.24	20	001011	101001	110110	011001	001101	110110
35.25	15	011100	100010	010011	001010	100101	101000
36.25	21	011101	101010	010111	101010	110101	101010
37.26	20	010001	101101	010111	001011	011100	111010
38.26	21	010001	101111	010101	010011	011001	111110
39.27	14	010100	000111	010001	001010	111000	100010
40.27	22	010011	101111	010110	110010	111101	011010
41.28	22	010101	100111	010011	111001	001101	111110
42.28	23	010101	101110	010111	101011	011101	111010
43.29	16	011100	000110	110010	001011	100101	101000
44.29	24	011011	101110	110101	110011	011101	101110
45.29	25	011101	101110	110111	011011	111001	101110
46.30	18	001101	100110	110010	011001	100101	011010
47.30	18	010011	100011	110100	111000	001101	001110
48.30	20	011111	101100	100011	101010	110001	110100
49.30	21	001111	101010	100101	010011	111001	110110
50.30	22	001111	101001	010110	110011	110101	101110
51.30	24	011011	101110	110101	101011	011101	110110
52.30	24	011110	001111	110101	110011	111001	101110
53.30	25	011110	101101	110111	011011	111001	101110
54.30	26	011110	101111	010111	110011	111101	111010
55.30	27	011110	101111	110111	111011	011101	111100

LISTA 4.2 SPISAK SVIH SOPSTVENIH NORMALNIH DIGRAFOVA SA 7 ČVOROVA

001.001	07	0100000	0010000	0001000	0000100	0000010	0000001	1000000
002.002	12	0010000	0010000	1101001	0010100	0000001	0001000	0010010
003.003	12	0010000	0000001	0101000	0010101	0001010	0000100	1001000
004.004	15	0010001	0010000	1101110	0010100	0010010	0011000	1000000
005.005	14	0100000	1010001	0101000	0000101	0001010	0010100	0100010
006.006	15	0010000	0010000	1101111	0010010	0011000	0010100	0010000
007.007	15	0010000	0010000	1101000	0010111	0001001	0001100	0001010
008.008	14	0000001	1010100	0101001	0010000	0100001	0100000	0010110
009.009	15	0100001	1010000	0101110	0010100	0010010	0011000	1000000
010.010	14	0001001	1000000	0101000	1010110	0001010	0001100	0010000
011.011	12	0000011	1000000	0100001	0010000	0001001	0000100	1010100
012.012	16	0100000	1010110	0101001	0010100	0100001	0101000	0010010
013.013	12	0100100	0010000	0001010	1000001	0010001	1000000	0001100
014.013	16	0101100	0010000	0001110	1010001	1010001	1000000	0001100
015.013	16	0100110	1010000	0101010	1000001	0010001	1010000	0001100
016.014	16	0100000	1010000	0101001	0010011	0001010	0000101	0011100
017.015	17	0010010	1010000	1101110	0010100	0011001	0110000	0000100
018.016	16	0001001	1000100	0101000	1010010	0100011	0001100	0010100
019.017	17	0101000	1010000	0101000	1010111	0001001	0001100	0001010
020.018	16	0100001	1011110	0100100	0110000	0100010	0101000	1000000
021.019	16	0100000	1011111	0100100	0110000	0100010	0101000	0100000
022.020	16	0100000	1010101	0100110	0010010	0111000	0001100	0100000
023.021	16	0100000	1010101	0100011	0010000	0101001	0000100	0110100
024.022	17	0110000	0010010	1101111	0010100	0011000	1010000	0010000
025.023	12	0101001	1010000	0100110	0010000	1000000	1000000	0010000
026.023	16	0100111	1010000	0101110	1000000	1010000	1010000	0010000
027.024	17	0110000	0010001	1101001	0010110	0001010	0001100	1010000
028.025	18	0100010	1010101	0101011	1010000	0101000	0010100	0110000

029.026	18	0101101	0010000	0001111	1010000	1010001	1000000	1010100
030.027	19	0010010	1010000	1101111	0010101	0011000	0110000	0011000
031.028	17	0000110	1000010	0100010	0010010	0001010	1111101	0000010
032.029	18	0101010	1010001	0100110	0010001	1000001	1010000	0101100
033.030	18	0111010	0010100	1001110	1010001	1100000	1010000	0001000
034.031	18	0001110	1000000	0100110	0010000	1010011	1010101	0000110
035.032	18	0100010	1000110	0101100	0010101	0011010	1110000	0001000
036.033	18	0101100	0010100	0001110	1010001	1110010	1000100	0001000
037.034	19	0100000	1011010	0100110	0110100	0011011	0101100	0000100
038.035	19	0110000	0010010	1101110	0010101	0011001	1010000	0001100
039.036	19	0100001	1011010	0101100	0100110	0011010	0110100	1000000
040.037	18	0101000	1010000	0100010	0010101	0001011	1000101	0001110
041.038	19	0100000	1011011	0101100	0100110	0011010	0110100	0100000
042.039	18	0101100	0010100	0001110	1010000	1110011	1000100	0000100
043.040	18	0101000	0011000	0001001	1110111	0001010	0001100	1001000
044.041	18	0100001	1010101	0101100	0000110	0110010	0011000	1100000
045.042	20	0111010	0010100	1001110	1010011	1100000	1011000	0001000
046.043	18	0100001	0010001	0001001	0000101	0000011	1000001	1111110
047.044	20	0100101	0010011	0101010	0010100	1001001	1110000	1000110
048.045	20	0001001	0001001	0001001	1110101	0000011	0001100	1111010
049.046	20	0100000	1010101	0101001	0000101	0100011	0010001	0111110
050.047	20	0100000	1011111	0100101	0110000	0100010	0101001	0110010
051.048	21	0100000	1011110	0101100	0100110	0111011	0110100	0000100
052.049	20	0100001	1010100	0101001	0000101	0100011	0010001	1011110
053.050	20	0100001	1010010	0001011	0010100	0101010	0110101	1000110
054.051	20	0100000	1010101	0101100	0000111	0110010	0011001	0101010
055.052	20	0100000	1011111	0101010	0110100	0110010	0101100	0100000
056.052	21	0100000	1011111	0101100	0110110	0101010	0111000	0100000
057.053	20	0100001	1011110	0101100	0110010	0101010	0110100	1000000
058.053	21	0100001	1011110	0101110	0110010	0111000	0110100	1000000
059.054	20	0100001	1010001	0001111	0010100	0111010	0010100	1100100
060.055	15	0100101	1000010	0101000	0000011	1001000	0010100	1010000

061.056	18	0100010	0010001	1001000	0010110	0001011	1000101	0101100
062.057	15	0100000	0010011	0001000	0100110	0000001	0101001	1001010
063.058	21	0100100	1011010	0101100	0100110	1011011	0110100	0000100
064.059	16	0000001	0010000	1001100	0000101	0011011	0010100	0100110
065.059	20	0010000	0000001	0101110	0010101	0011011	0010101	1001110
066.059	20	0010001	0010001	1101100	0000101	0011011	0010100	1100110
067.060	20	0101001	1010000	0101001	1010101	0000011	0001100	1011010
068.061	21	0100101	1011010	0101100	0100110	1011010	0110100	1000000
069.062	21	0100111	1010010	0101011	0010100	1001000	1010001	1110000
070.063	21	0111000	1010001	0101001	1010111	0001010	0001100	1101000
071.064	20	0101001	1010001	0100011	0010100	0001011	1000100	1110100
072.065	16	0001010	1010000	0101110	0010001	1010000	0010001	0100100
073.065	18	0001110	1000001	0100110	1010000	1010001	0010001	0101100
074.065	20	0101110	1000001	0101100	1010001	1010001	1010000	0001110
075.066	18	0010010	1010000	1101111	0010001	0011000	0110000	0010100
076.066	21	0110000	0010010	1101111	0010101	0011001	1010000	0011100
077.067	23	0111010	1010100	0101110	1010100	1101010	1010101	0000010
078.068	22	0101011	0010001	0001111	1010001	1000001	1010000	1111100
079.069	22	0100011	1011010	0101110	0010110	0111000	1110100	1000000
080.069	23	0100011	1011110	0100110	0110010	0101010	1111100	1000000
081.070	22	0100001	1010101	0101001	0000101	0100011	0010001	1111110
082.071	18	0111000	1000101	0100011	0100100	1001010	0010100	1010000
083.072	22	0100010	1010110	0101111	0110100	0011010	1111000	0010000
084.073	23	0100010	1011111	0100110	0110010	0101010	1111100	0100000
085.074	22	0101001	1010000	0100011	0010101	0001011	1000101	1011110
086.075	23	0100001	1011011	0101100	0100110	0011011	0110100	1100100
087.076	18	0111000	1010000	1100001	0010101	0000011	0001100	1001010
088.076	22	0110001	1010000	1101000	1000111	0001011	0001101	0011110
089.076	22	0111001	1010000	1101001	1010101	0000011	0001100	1011010
090.077	22	0100000	1010111	0101010	0010111	0101001	0101100	0111000
091.078	22	0111000	1010100	1100010	0010111	0101010	1001101	0001010
092.079	22	0101000	1011001	0100001	0110110	0001011	0001101	1100110
093.080	19	0100111	0010000	0001111	1000000	1010010	1010001	1010100
094.080	22	0001111	1000000	0100111	0010000	1010011	1010101	1010110
095.080	23	0101111	1010000	0101111	1010000	1010010	1010001	1010100
096.081	18	0100001	1001101	0101000	0010001	0000011	0100100	1110010

097.081	22	0100001	1011011	0101001	0110001	0100010	0000101	1111100
098.082	23	0100100	1010000	0101111	0010101	1011011	0011100	0010110
099.083	22	0101010	1010100	0101001	1000101	0100011	1010001	0011110
100.084	22	0100110	0010001	0101110	1010000	1010011	1010101	0001110
101.085	22	0110010	1010001	1101111	0010100	0011000	0110001	1010010
102.085	23	0010011	1010010	1101111	0010100	0011000	1110001	0110010
103.086	22	0111000	1010101	1100010	0010110	0101011	1001100	0100100
104.087	24	0100010	1011011	0101110	0010110	0111000	1110101	0100010
105.087	25	0100010	1011111	0101010	0100110	0110010	1111101	0100010
106.088	24	0100000	1011111	0101101	0100110	0110011	0111000	0110100
107.089	25	0100011	1011110	0101010	0100110	0110010	1111101	1000010
108.090	24	0100010	1011010	0001111	0110110	0111001	1101100	0010100
109.091	20	0101001	0010001	0000111	0010001	1000001	1000001	1111110
110.091	24	0101011	0010001	0001111	1010001	1000001	1010001	1111110
111.092	24	0100001	1011110	0101101	0100110	0110011	0111000	1010100
112.093	24	0101000	0011101	0101011	1110110	0001010	1011001	0110010
113.094	24	0101100	1011111	0100110	0110100	1111010	1100100	0100000
114.095	24	0101001	1010001	0100011	0010101	0001011	1000101	1111110
115.096	24	0101001	1011001	0101001	1110011	0001010	0000101	1111100
116.097	16	0100001	1001010	0100100	0010001	0100010	0001001	1010100
117.097	20	0100001	1011010	0100101	0010001	0100010	0101001	1010110
118.097	20	0100001	1000110	0101100	0110010	0010011	0001101	1011000
119.097	24	0100001	1001110	0101100	0110011	0110011	0001101	1011100
120.097	24	0100001	1011110	0101001	0100011	0110001	0100101	1011110
121.098	17	0100000	0010011	0001001	0110100	0101010	0000101	1001100
122.099	25	0101111	1010100	0101111	1010010	1010001	1011000	1110000
123.100	24	0101100	0010101	0101110	1010001	1110011	1010100	0001110
124.101	25	0111010	1010101	0101110	1010100	1101010	1010101	0100010
125.102	20	0110100	1011001	0001100	0100111	1001010	1100000	0101000
126.103	24	0100000	1010101	0101101	0000111	0111011	0011100	0110110
127.103	25	0100000	1010101	0101011	0010111	0111010	0011101	0101110
128.104	24	0100110	1010010	0001111	0010101	1011001	1100001	0111100
129.105	25	0101010	1011100	0101111	1010110	0111010	1110100	0010000
130.106	24	0101011	1010100	0101110	1010100	0111001	1000101	1010010
131.107	14	0110000	0011000	0001100	0000110	0000011	1000001	1100000

132.107	14	0100010	0010001	1001000	0100100	0010010	0001001	1000100
133.107	21	0110010	0011001	1001100	0100110	0010011	1001001	1100100
134.107	21	0110001	1011000	0101100	0010110	0001011	1000101	1100010
135.108	22	0101011	1010001	0101000	1100101	0000011	1001100	1011010
136.109	21	0111100	1010001	0100111	0010001	1000001	1010000	1101010
137.109	27	0101111	1010001	1101110	1010001	1010001	1010001	0111110
138.110	24	0101001	1010001	0001011	0010101	0100011	1000101	1111110
139.110	26	0101011	1010001	0001011	1010101	0101001	1000101	1111110
140.111	27	0101011	1010110	0101110	1110100	0111011	1011100	1000100
141.112	27	0111010	1011100	0101110	1110111	1101010	1011100	0001000
142.113	26	0101010	1011010	0001111	1110110	0111001	1101100	0010100
143.113	27	0101010	1010110	0101111	1110100	0111011	1011100	0010100
144.114	18	0100001	1001101	0101000	0000011	0010001	0100100	1110010
145.114	26	0100001	1011111	0101001	0100011	0110001	0100101	1111110
146.115	26	0110111	1001010	1101001	0110110	1011000	1001101	1010010
147.116	21	0100001	0010011	0001001	0100101	0000011	1001001	1111110
148.117	26	0100001	1011101	0101001	0110111	0001011	0101100	1111010
149.118	24	0101001	0010101	1000011	1000101	0100011	0011001	1111110
150.119	26	0110110	1011101	1101010	1100110	0111010	1011100	0100000
151.119	27	0110110	1011101	0101110	1100110	1111010	1011100	0100000
152.120	22	0101110	1000101	0101001	1000011	1110000	1011000	0010110
153.120	26	0101110	1010100	0001111	1010011	1100001	1011001	0111010
154.121	26	0100111	0010001	0001111	1000001	1010011	1010101	1111110
155.122	26	0101011	1011010	0001110	1110111	0111000	1101100	1001000
156.123	18	0000111	1010001	1000100	0110000	0001010	0101001	1100010
157.123	18	0100101	0010011	1001000	0100100	0010010	1001001	1100010
158.123	21	0110011	1001011	0101000	0000110	1010000	1100101	1100010
159.123	21	0110001	0001011	0101100	0010110	1011000	1000101	1100010
160.123	24	0110011	1001011	0101100	0010110	1011000	1100101	1100010
161.123	24	0010111	1011001	1100100	0110010	1001010	0101101	1100010
162.124	26	0100111	1011110	0101101	1100100	1111010	0110100	1010000
163.125	22	0110010	1000011	0101011	0000101	0011000	1110001	1010110
164.125	23	0010011	1010001	1100111	0010100	0001001	0110001	1111010
165.125	26	0110010	1010011	0101111	0010101	0011001	1100001	1111100
166.125	26	0110011	1010011	1100111	0010100	0001001	1110001	1111010
167.125	27	0010011	1010001	1101111	0010101	0011001	0110001	1111110
168.126	21	0101010	1010100	0101001	1000101	0011010	1010001	0100110
169.126	27	0101010	1010101	0101011	1010101	0111010	1010101	0101110
170.127	26	0111100	1011001	1100010	1100101	0101011	0010101	1001110
171.128	25	0101111	1010100	0101111	1010001	1010010	1011000	1110000

172.129	29	0101110	1011100	1101010	1110111	0111010	1011101	0001010
173.130	28	0100101	1011010	0101110	0110011	1001011	0111101	1010110
174.130	29	0100101	1011010	0100111	0110101	1011011	0101101	1011110
175.131	22	0011100	1001010	0101010	1110111	0111000	1001100	0001000
176.131	27	0111010	0011110	1001110	1110111	1111000	1101100	0001000
177.131	28	0111100	1001110	0101110	1110111	1111010	1011100	0001000
178.131	29	0111010	0011110	1101110	1110111	1011010	1111100	0001000
179.132	20	0100100	1010010	0001110	0100011	1001001	0010101	0111000
180.132	28	0100100	1011011	0101110	0110101	1011011	0101101	0110110
181.132	29	0100100	1011011	0101110	0110111	1011011	0101101	0111100
182.133	28	0101101	0010101	0001111	1010001	1110011	1000101	1111110
183.134	28	0100011	1010011	0001111	0010101	0111001	1100101	1111110
184.135	28	0100010	1011011	0101110	0010111	0111001	1110101	0101110
185.136	28	0110101	1010001	1100111	0010110	1011011	0001101	1111100
186.137	20	0000011	1000101	0101000	1100100	0101011	0011100	0010110
187.137	24	0001011	1001100	0101001	1010110	0101011	0010101	1110100
188.137	24	0101000	0011101	0101011	0110110	0000011	1011001	1110010
189.137	28	0101011	1001101	0101001	1110110	0001011	1011001	1110110
190.137	28	0101011	1011100	0101011	1010110	0101011	1010101	1110100
191.138	27	0100011	0010011	0001011	0000111	1000011	1111101	1111110
192.139	24	0100110	1010101	0101001	1000011	0110011	0011100	1101100
193.140	28	0111011	0010101	1101111	1010001	1110000	1010001	1011110
194.140	29	0101111	1010101	1101110	1010001	1110001	1010001	0111110
195.141	22	0111000	0011011	1000110	0010110	1101000	1100101	0100010
196.141	26	0001110	1011011	1101010	0110110	1110000	0111101	0100010
197.141	26	0111100	0011011	1001110	1010110	1111000	1100101	0100010
198.141	30	0110110	1011111	0101110	1110010	1101010	1111101	0100010
199.141	30	0111100	0011111	1001110	1110110	1111010	1101101	0100010
200.141	31	0101110	1011111	1101010	1110110	0111010	1111101	0100010
201.142	31	0101010	1011101	0101111	1010111	0111010	1110101	0111010
202.143	30	0110011	1010101	1101001	1000111	0101011	0011101	1111110
203.144	26	0101001	1011111	0101100	0100111	0110010	1111000	1100010
204.144	30	0001011	1011110	0101110	0110111	0111010	1111101	1100010
205.144	31	0101011	1010111	0101110	1110101	0111010	1011101	1101010
206.145	30	0111011	1010001	1101101	1000111	0011011	1011100	1110110
207.146	22	0110100	0010011	0001101	0100110	1011010	1000101	1101000
208.146	30	0110101	1011011	0101101	0100111	1011010	1100101	1111010
209.147	30	0101001	0011101	0101011	1110111	0001011	1011001	1111110
210.148	31	0100101	1011011	0100111	0110101	1011011	0101101	1111110
211.149	24	0011010	1010100	1001011	0100110	1110001	0101101	0010110

212.149	24	0100110	0011100	1100011	1010010	1011001	0101101	0010110
213.149	27	0111100	1001110	0101011	1110010	1011001	1100101	0010110
214.149	27	0001110	1010100	1100111	0110010	1011011	0111101	0010110
215.149	30	0101110	1011010	1100111	1110100	0111011	1011101	0010110
216.149	30	0011110	1010110	1101101	0110110	1101011	1111001	0010110
217.149	32	0111100	1001110	0101111	1110110	1111011	1011101	0010110
218.149	33	0011110	1010110	1101111	0110110	1111011	1111101	0010110
219.149	33	0111110	1011110	1101011	1110110	1111001	1101101	0010110
220.150	25	0101110	1011000	1000110	1110011	0101001	1001101	0011010
221.150	33	0111110	1011100	1101011	1100111	1110011	1011101	0011110
222.151	32	0110110	1011101	1101010	1100111	0111011	1011101	0101110
223.152	21	0001101	1000110	0100101	1110000	0011010	1010001	0101010
224.152	21	0101001	0011100	0000111	1010001	1001010	1100100	0110010
225.152	24	0101001	1011111	0100110	0110100	1100010	1100001	0111000
226.152	24	0101010	1011111	0101010	0100101	1110000	0100101	1110000
227.152	27	0101110	1011111	0101001	1100101	1111000	0110100	1100010
228.152	28	0100011	1011111	0101100	1100101	1101010	0110101	0111010
229.152	30	0100111	1011111	0101101	1110100	0111010	1110001	1101010
230.152	30	0100111	1011111	0101101	1110001	0111010	1110100	1101010
231.152	32	0101110	1011111	0101011	1110101	0111010	1110101	1101010
232.153	24	0101101	1011100	1100110	1110001	0111010	1001000	0010100
233.153	27	0110110	1011000	1101111	1010011	0111001	0011100	1010100
234.153	32	0111011	1011100	1100111	0110111	1101011	1011100	1011100
235.153	33	0110111	1011100	0101111	1100111	1111011	1011100	1011100
236.154	26	0110011	1001101	0101100	1010010	1001011	0110101	1100110
237.154	30	0101101	1010011	1001110	0110110	0111011	1011101	1100110
238.154	30	0101111	1001111	1101000	0010110	1110011	1110101	1100110
239.154	34	0110111	1001111	0101110	1010110	1111011	1111101	1100110
240.154	34	0111101	1011011	1101110	1110110	0111011	1011101	1100110
241.154	35	0111111	1011011	1101110	1110110	1111001	1011101	1100110
242.155	26	0001101	1010101	0000111	0110100	1111011	1100100	0101110
243.155	31	0101101	1011011	0100111	0110101	1111010	1100101	1011110
244.155	34	0100111	1011111	0101101	1100101	1111011	0110101	1111110
245.155	35	0101111	1011110	0101111	1110101	1011011	1110101	1111010
246.156	28	0111111	1001100	1100101	1010110	1001011	1010001	1111000
247.156	30	0110011	1011101	0101011	1100110	1110010	1011101	0101110
248.156	35	0111110	1011101	0101111	1100111	1110011	1011101	1111010
249.156	36	0111110	1011101	1101111	1110011	0111011	1011101	1110110
250.156	37	0111111	1011101	1100111	1110110	1111011	1011101	1101110
251.157	21	0101010	0011100	1001010	0000111	1010001	0100101	1110000
252.157	21	0010011	1011000	0001110	1000101	1100010	0101001	0110100
253.157	21	0001110	1010001	1000110	0110001	0101001	0101100	1010010
254.157	28	0001111	1010011	1000111	1110001	1111000	0111100	0101110
255.157	28	0111010	1010011	0001111	0110101	1101001	1011100	1100110
256.157	30	0111111	1011100	1101100	1000111	1001011	1110001	1110010
257.157	30	0001111	1010011	1000111	1110010	0111010	1111101	0101110
258.157	32	0111111	1011010	1001101	1110111	1101010	1011001	1101100
259.157	33	0110111	1011011	1101111	1110010	0111001	1010101	1111100
260.157	34	0111010	1000111	0101111	0110111	1011011	1111101	1011110
261.157	35	0101111	1011101	1101011	1010111	1110011	1111100	0111110
262.157	35	0101111	1011101	1101110	0110111	1011011	1111001	1110110
263.157	36	0111111	1011110	1101101	1010111	1110011	1111001	1101110

264.157	36	0111111	1011110	1100111	1110101	1011011	1101101	1111010
265.157	37	0111111	1011110	1101101	1110111	1101011	1011101	1111010
266.157	38	0111111	1011110	1101111	1110111	1011011	1111001	1111100
267.157	39	0111111	1011110	1101111	1110111	1111011	1011101	1111100

V. O GRAFOVIMA ČIJA ENERGIJA NIJE VEĆA OD 4

U nedavnom objavljenom radu [21], A. Torgašev je opisao sve konačne povezane grafove čija energija (tj. suma svih pozitivnih sopstvenih vrednosti uključujući takođe njihove višestrukosti) nije veća od 3. U ovom poglavlju opisujemo sve povezane grafove čija energija nije veća od 4. Primenjena metoda se u izvesnim detaljima razlikuje od metode koja je data u radu [21].

5.1 Rezultati

U ovom poglavlju posmatraćemo opet proste konačne povezane grafove. Spektar grafa G je skup $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ sopstvenih vrednosti 0-1 matrice susedstva grafa G.

Suma svih pozitivnih sopstvenih vrednosti (uključujući takođe i njihove višestrukosti) označava se sa S(G) i naziva energijom grafa G. Pošto je $|\lambda_1| \geq 1$, sledi da je $S(G) \geq 1$ za bilo koji povezani graf G. Za proizvoljnu realnu konstantu $a \geq 1$ posmatraćemo klasu grafova

$$P(a) = \left\{ G \mid S(G) \leq a \right\} .$$

U ovom poglavlju u potpunosti opisujemo klasu P(4).

Ako graf G pripada klasi P(4), reći ćemo da je G dozvoljeni graf, u suprotnom graf G nazivaćemo zabranjenim za klasu P(4).

S obzirom da je u radu [21] A. Torgašev potpuno opisao klasu P(3), u ovom poglavlju iz klase P(4) izostavljamo grafove čija energija nije veća od 3. Prema tome, opisaćemo u stvari klasu grafova $Q(4) = P(4) \setminus P(3)$.

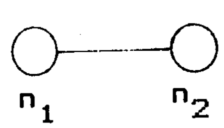
U radu [21] takođe je dokazano da je klasa P(a) konačna za svako realno $a \geq 1$. Naša metoda se u nekim detaljima razlikuje od odgovarajuće metode u radu [21]. Naime, prvo opisujemo kompletan skup kanoničkih grafova iz klase P(4), zatim generišemo sve grafove iz ove klase.

Na osnovu definicije pozitivne energije, lako se dokazuje da je svaki podgraf H dozvoljenog grafa G takođe dozvoljen graf. Iz tog razloga, za generisanje svih dozvoljenih grafova koji pripadaju klasi P(4), vrlo je pogodno koristiti metod zabranjenih podgrafova.

Reći ćemo da su dva čvora $x, y \in V(G)$ ekvivalentna u grafu G, u oznaci $x \sim y$ ako x nije susedno sa y, i x i y imaju identične susede u grafu G. Očigledno je relacija ~ relacija ekvivalencije na skupu čvorova V(G). Odgovarajući količnik skup (graf) označićemo sa g, i nazivati kanoničkim grafom grafa G. Graf g je takođe povezan, i očigledno imamo $g \subseteq G$. Na primer, ako je $G = K_{m_1,m_2,\ldots,m_p}$ $(p \geq 2)$ kompletni m-partitni graf, onda je njegov kanonički graf kompletan graf K_p. Kanonički graf kompletnog grafa K_n je takođe graf K_n.

Za graf G kažemo da je kanonički ako $|G| = |g|$, tj. ako graf G nema nijedan par ekvivalentnih čvorova.

Neka je g kanonički graf grafa G, $|g| = k$, i $N_1, N_2, \ldots, N_k$ odgovarajući skupovi ekvivalentnih čvorova u G. Tada označavamo $G = g(N_1, N_2, \ldots, N_k)$, ili jednostavnije $G = g(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, gde je $|N_i| = n_i$ $(i = 1,2,\ldots,k)$, podrazumevajući da je g označeni graf. Skupove $N_1, N_2, \ldots, N_k$ nazivamo karakterističnim skupovima grafa G. Očigledno, svaki skup $N_i \subseteq V(G)$ $(i = 1,2,\ldots,k)$ sadrži samo izolovane čvorove, i ako postoji bar jedna grana između skupova N_i, N_j $(i \neq j)$, onda postoje sve moguće grane između čvorova tih skupova. Stoga je zgodno prikazati skupove N_i $(i = 1,2,\ldots,k)$ pomoću belih (tj. praznih) krugova, a sve moguće grane između čvorova skupa N_i i N_j sa samo jednom granom između odgovarajućih krugova. Ako je, na primer, G kompletan bipartitan graf $K_{m,n}$ sa karakterističnim skupovima N_1 i N_2, onda se graf $K_{m,n}$ jednostavno označava

$G =$ 

,

podrazumevajući da je $|N_i| = n_i$ $(i = 1,2)$.

Jasno je da se bilo koji graf G, čiji je kanonički graf g, može dobiti variranjem, na određeni način, vrednosti parametara $n_1, n_2, \ldots, n_k \in N$.

Ako je g kanonički graf grafa G, sledi da je $g \subseteq G$ i ako

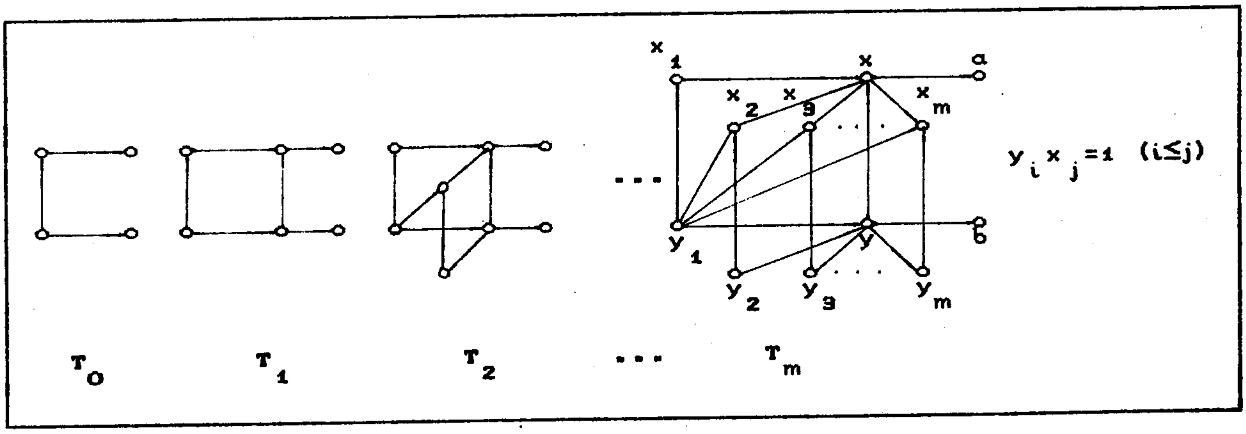
$$G \in P(4) \Rightarrow g \in P(4).$$

Odavde sledi da je klasa $P_o(4)$ svih kanoničkih grafova koji pripadaju klasi P(4) konačna. Iz tog razloga, u ovom poglavlju prvo opisujemo klasu $P_o(4)$, zatim pomoću kanoničkih grafova iz klase $P_o(4)$ generišemo celu klasu P(4), odnosno klasu Q(4).

Osim toga, lako se uočava da se i mnogi drugi hereditarni problemi u Spektralnoj teoriji grafova mogu reducirati na generisanje najpre odgovarajućeg skupa kanoničkih grafova. U tom smislu mogu se videti radovi [19], [20], [24] itd.

Generisanje kompletnog skupa kanoničkih grafova iz klase P(4) zasniva se na sledećoj opštoj teoremi koja je dokazana u [24] i koja može biti vrlo korisna pri rešavanju drugih sličnih problema.

Teorema 5.1 ([24]) U svim, osim u nizu konkretnih slučajeva, svaki povezani kanonički graf sa n čvorova ($n \geq 3$) sadrži bar jedan indukovani podgraf sa n-1 čvorova, koji je takođe povezan i kanonički. Izuzetak od ovog pravila su grafovi



Gornji grafovi očigledno zadovoljavaju relaciju $T_o \subseteq$ $\subseteq T_1 \subseteq T_2 \ldots$.

Direktnim pretraživanjem spektara svih povezanih grafova sa ne više od 7 čvorova, nalazimo da klasa P(4) sadrži tačno 39 kanoničkih grafova. Oni su prikazani u Listi 5.1.

Kao što je poznato, postoji tačno 11.117 povezanih grafova sa 8 čvorova. Direktnom proverom njihovih spektara, nalazimo da klasa P(4) ne sadrži ni jedan kanonički graf sa 8 čvorova.

Na osnovu Teoreme 5.1 neposredno dobijamo sledeći rezultat.

Teorema 5.2 Lista 5.1 je kompletna lista svih kanoničkih grafova iz klase P(4).

Neka su $K_{n_1,n_2,\ldots,n_m}$, P_n i C_n respektivno kompletan m-partitan graf, putanja i ciklus sa n čvorova.

Klasa P(4) sadrži tačno 39 neizomorfnih kanoničkih grafova. Pored toga, primetimo da neki grafovi iz Liste 1 pripadaju klasi P(3), pa ne pripadaju klasi Q(4). Međutim, ovi kanonički grafovi mogu variranjem parametara $n_1,n_2,\ldots,n_m$ generisati neke grafove iz klase Q(4). Pomenuti grafovi su sledeći

$$g_1 = K_2,\ g_2 = K_3,\ g_3 = P_4,\ g_4,\ g_5 = K_4,\ g_6 = P_5 \text{ i } g_7.$$

Za kanonički graf $g \in Q(4)$ reći ćemo da je prost ako nijedan graf G ($G \neq g$), čiji je kanonički graf g, ne pripada klasi P(4).

Stav 5.1 Kanonički grafovi g_{12}, g_{14}, g_{15}, g_{16}, g_{19}, g_{20}, g_{23}, g_{24}, g_{25}, g_{26}, g_{28}, g_{29}, g_{30}, g_{31}, g_{32}, g_{33}, g_{34}, g_{35}, g_{36}, g_{37}, g_{38}, g_{39} iz Liste 5.1 su prosti.

Daćemo samo ideju dokaza ovog stava. Lako je proveriti da su svi navedeni kanonički grafov dozvoljeni. S obzirom da je svojstvo $S(G) \leq a$ hereditarno, dovoljno je pokazati da se dodavanjem novog čvora, koji je ekvivalentan nekom čvoru kanoničkog grafa g uvek dobija zabranjen graf.

Nadalje, za bilo koji od preostalih grafova iz Liste 5.1, dajemo potrebne i dovoljne uslove pod kojim odgovarajući nadgraf kanoničkog grafa g pripada klasi Q(4).

Stav 5.2 Graf $G = g_1(m,n) \in Q(4)$ $(m \le n)$ ako i samo ako

$$(m,n) = (1,10),(1,11),(1,12),(1,13),(1,14),(1,15),(1,16)$$
$$(2,5),\ (2,6),\ (2,7),\ (2,8),\ (3,4),\ (3,5),\ (4,4).$$

Dokaz. Pošto je $g_1 = K_2$, graf $G = K_{m,n}$ je kompletan bipartitan graf, pa ima samo jednu pozitivnu sopstvenu vrednost $r(G) = \sqrt{mn}$. Prema tome, graf $G \in Q(4)$ ako i samo ako je $9 < mn \le 16$, odakle lako dobijamo dokaz tvrđenja. □

Stav 5.3 Graf $G = g_2(m,n,k)$ $(m \le n \le k)$ pripada klasi $Q(4)$ ako i samo ako je

$$(m,n,k) = (1,1,4),\ (1,1,5),\ (1,1,6),$$
$$(1,2,2),\ (1,2,3),\ (2,2,2).$$

Dokaz Pošto je $g_2 = K_3$, graf G je kompletan 3-partitan graf $K_{m,n,k}$. Graf G ima samo jednu pozituvnu sopstvenu vrednost, koja je maksimalan koren $r(G)$ polinoma

$$F(\lambda) = \lambda^3 - (mn + mk + nk)\lambda - 2mnk.$$

Odavde imamo da $G \in Q(4)$ ako i samo ako je $3 < r(G) \le 4$, odakle lako sledi dokaz tvrđenja. □

Stav 5.4 Graf $G = g_3(m,n,k,\ell)$ $(m < \ell$ ili $m = \ell,\ n \le k)$ pripada klasi $Q(4)$ ako i samo ako (m,n,k,ℓ) ima jednu od sledećih vrednosti:

$(1,1,1,4)$, $(1,1,1,5)$, $(1,1,1,6)$, $(1,1,1,7)$,
$(1,1,1,8)$, $(2,1,1,3)$, $(2,1,1,4)$, $(2,1,1,5)$,
$(2,1,1,6)$, $(3,1,1,3)$, $(3,1,1,4)$, $(1,1,3,1)$,
$(1,1,4,1)$, $(1,1,5,1)$, $(1,1,2,2)$, $(1,1,3,2)$,
$(1,1,2,3)$, $(1,2,1,2)$, $(1,3,1,2)$, $(1,4,1,2)$,
$(1,2,1,3)$, $(1,3,1,3)$, $(1,2,1,4)$, $(1,2,1,5)$,

$(1,2,2,1)$, $(1,2,3,1)$, $(2,2,1,2)$, $(2,2,1,3)$,

$(1,2,2,2)$.

Dokaz. Lako je proveriti da svi navedeni grafovi pripadaju klasi $Q(4)$. Pored toga, lako se dokazuje da graf $g_3(2,2,2,2)$ ima energiju veću od 4, dakle zabranjen je za klasu $P(4)$. Iz tog razloga, ako je neki graf $G = g_3(m,n,k,\ell) \in Q(4)$ ($m < \ell$ ili $m = \ell$, $n \leq k$) onda je

$$m = 1 \text{ ili } n = 1 \text{ ili } k = 1.$$

Dalje, primetimo da su sopstvene vrednosti ovih grafova određene jednačinom

$$\lambda^4 - (mn + nk + k\ell)\lambda^2 + mnk\ell = 0.$$

Stoga se ove sopstvene vrednosti mogu eksplicitno odrediti. Sada je lako pokazati da graf $G = g_3(m,n,k,\ell) \in Q(4)$ ako i samo ako je ispunjeno

$$9 < mn + nk + k\ell + 2\sqrt{mnk\ell} \leq 16.$$

Iz ove relacije neposredno dobijamo dokaz stava. □

Stav 5.5 Graf $G = g_4(m,n,k,\ell)$ ($k \leq \ell$) pripada klasi $Q(4)$ ako i samo ako (m,n,k,ℓ) ima jednu od sledećih vrednosti:

$(m,n,k,\ell) = (1,1,1,2)$, $(1,1,1,3)$, $(1,1,1,4)$, $(2,1,1,2)$,
$(2,1,1,3)$, $(3,1,1,1)$, $(3,1,1,2)$, $(4,1,1,1)$,
$(4,1,1,2)$, $(5,1,1,1)$, $(6,1,1,1)$, $(7,1,1,1)$,
$(1,2,1,1)$, $(1,3,1,1)$, $(2,2,1,1)$, $(3,2,1,1)$,
$(1,2,1,2)$, $(1,1,2,2)$, $(2,1,2,2)$.

Dokaz ovog stava je u potpunosti sličan sa dokazom prethodnog stava, pa ga izostavljamo.

Stav 5.6 Graf $G = g_5(m,n,k,\ell)$ $(m \le n \le k \le \ell)$ pripada klasi $Q(4)$ ako i samo ako je $(m,n,k,\ell) = (1,1,1,2)$.

Dokaz. Direktno se proverava da graf $g_5(1,1,1,2)$ pripada klasi $Q(4)$. Pošto grafovi $g_5(1,1,2,2)$ i $g_5(1,1,1,3)$ imaju energiju veću od 4, tvrđenje je dokazano. o

Stav 5.7 Graf $G = g_6(m,n,k,\ell,p)$ $(m < p$ ili $m = p$, $n \le \ell)$ pripada klasi $Q(4)$ ako i samo ako (m,n,k,ℓ,p) ima jednu od sledećih vrednosti:

(1,1,1,1,2), (1,1,1,1,3), (1,1,1,1,4), (1,1,1,1,5),
(2,1,1,1,2), (2,1,1,1,3), (2,1,1,1,4), (3,1,1,1,3),
(1,2,1,1,1), (1,2,1,1,2), (1,2,1,1,3), (1,3,1,1,1),
(1,1,2,1,1), (1,1,3,1,1), (1,1,4,1,1), (1,1,2,1,2),
(1,1,3,1,2), (1,1,2,1,3), (1,2,1,2,1), (1,1,1,2,2),
(1,2,2,1,1), (2,1,2,1,2).

Dokaz. Lako je proveriti da gornji grafovi pripadaju klasi $Q(4)$. Pošto svi grafovi $g_6(m,n,k,\ell,p)$ $(m < p$ ili $m = p, n \le \ell)$, gde (m,n,k,ℓ,p) ima jednu od sledećih vrednosti

(1,2,1,3,1), (1,1,1,2,3), (1,1,1,3,2),
(1,1,2,3,1), (1,1,3,2,1), (2,1,2,1,3),
(2,1,3,1,2), (1,1,1,1,6), (2,1,1,1,5),
(3,1,1,1,4), (1,2,1,1,4), (1,3,1,1,2),
(1,1,5,1,1), (1,1,4,1,2), (1,1,3,1,3),

imaju energiju veću od 4, neposredno dobijamo dokaz tvrđenja. o

Na sličan način dokazujemo sledeća tvrđenja.

Stav 5.8 Graf $G = g_7(m,n,k,\ell,p)$ $(m < \ell$ ili $m = \ell$, $n \le k)$ pripada klasi $Q(4)$ ako i samo ako (m,n,k,ℓ,p) ima jednu od sledećih vrednosti

(1,1,1,1,2), (1,1,1,1,3), (2,1,1,1,1), (2,1,1,1,2),

(3,1,1,1,1), (3,1,1,1,2), (4,1,1,1,1), (5,1,1,1,1),

(1,2,1,1,1), (1,2,1,2,1), (2,1,1,2,1), (1,2,1,3,1),

(2,1,1,2,2).

Stav 5.9 Graf $G = g_8(m,n,k,\ell,p)$ $(\ell \leq p)$ pripada klasi $Q(4)$ ako i samo ako (m,n,k,ℓ,p) ima jednu od sledećih vrednosti

(1,1,1,1,1), (1,1,1,1,2), (2,1,1,1,1),

(3,1,1,1,1), (1,1,2,1,1), (1,2,1,1,1).

Stav 5.10 Graf $G = g_9(m,n,k,\ell,p)$ $(m < n$ ili $m = n, k \leq p)$ pripada klasi $Q(4)$ ako i samo ako (m,n,k,ℓ,p) ima jednu od sledećih vrednosti

(1,1,1,1,1), (1,1,1,1,2).

Stav 5.11 Graf $G = g_{10}(m,n,k,\ell,p)$ $(m < n$ ili $m = n, k \geq p)$ pripada klasi $Q(4)$ ako i samo ako (m,n,k,ℓ,p) ima jednu od sledećih vrednosti

(1,1,1,1,1), (1,1,1,2,1), (1,1,2,1,1), (1,2,1,1,1).

Stav 5.12 Graf $G = g_{11}(m,n,k,\ell,p)$ $(k \leq p)$ pripada klasi $Q(4)$ ako i samo ako (m,n,k,ℓ,p) ima jednu od sledećih vrednosti

(1,1,1,1,1), (1,1,1,2,1), (2,1,1,1,1).

Stav 5.13 Graf $G = g_{13}(m,n,k,\ell,p)$ $(k \leq \ell \leq p)$ pripada klasi $Q(4)$ ako i samo ako (m,n,k,ℓ,p) ima jednu od sledećih vrednosti

(1,1,1,1,1), (2,1,1,1,i).

Stav 5.14 Graf $G = g_{17}(m,n,k,\ell,p,q)$ $(m < q$ ili $m = q$, $n < p$ ili $m = q$, $n = p$, $k \leq \ell)$ pripada klasi $Q(4)$ ako i samo ako (m,n,k,l,p,q) ima jednu od sledećih vrednosti

(1,1,1,1,1,1), (1,1,1,1,1,2).

Stav 5.15 Graf $G = g_{18}(m,n,k,\ell,p,q)$ ($m < p$ ili $m = p$, $n \leq \ell$) pripada klasi $Q(4)$ ako i samo ako (m,n,k,l,p,q) ima jednu od sledećih vrednosti

$$(1,1,1,1,1,1),\ (1,1,1,1,1,2),(1,1,1,1,2,1).$$

Stav 5.16 Graf $G = g_{21}(m,n,k,\ell,p,q)$ ($m \leq n$) pripada klasi $Q(4)$ ako i samo ako (m,n,k,ℓ,p,q) ima jednu od sledećih vrednosti $(1,1,1,1,1,1)$, $(1,1,1,2,1,1)$.

Graf $G = g_{22}(m,n,k,\ell,p,q)$ ($m < \ell$ ili $m = \ell$, $n < k$ ili $m = \ell, n = k, p \leq q$) pripada klasi $Q(4)$ ako i samo ako (m,n,k,ℓ,p,q) ima jednu od sledećih vrednosti $(1,1,1,1,1,1)$, $(1,1,1,2,1,1)$.

Graf $G = g_{27}(m,n,k,\ell,p,q)$ ($m < \ell$ ili $m = \ell$, $n \leq k$) pripada klasi $Q(4)$ ako i samo ako (m,n,k,l,p,q) ima jednu od sledećih vrednosti $(1,1,1,1,1,1)$, $(1,1,1,1,1,2)$.

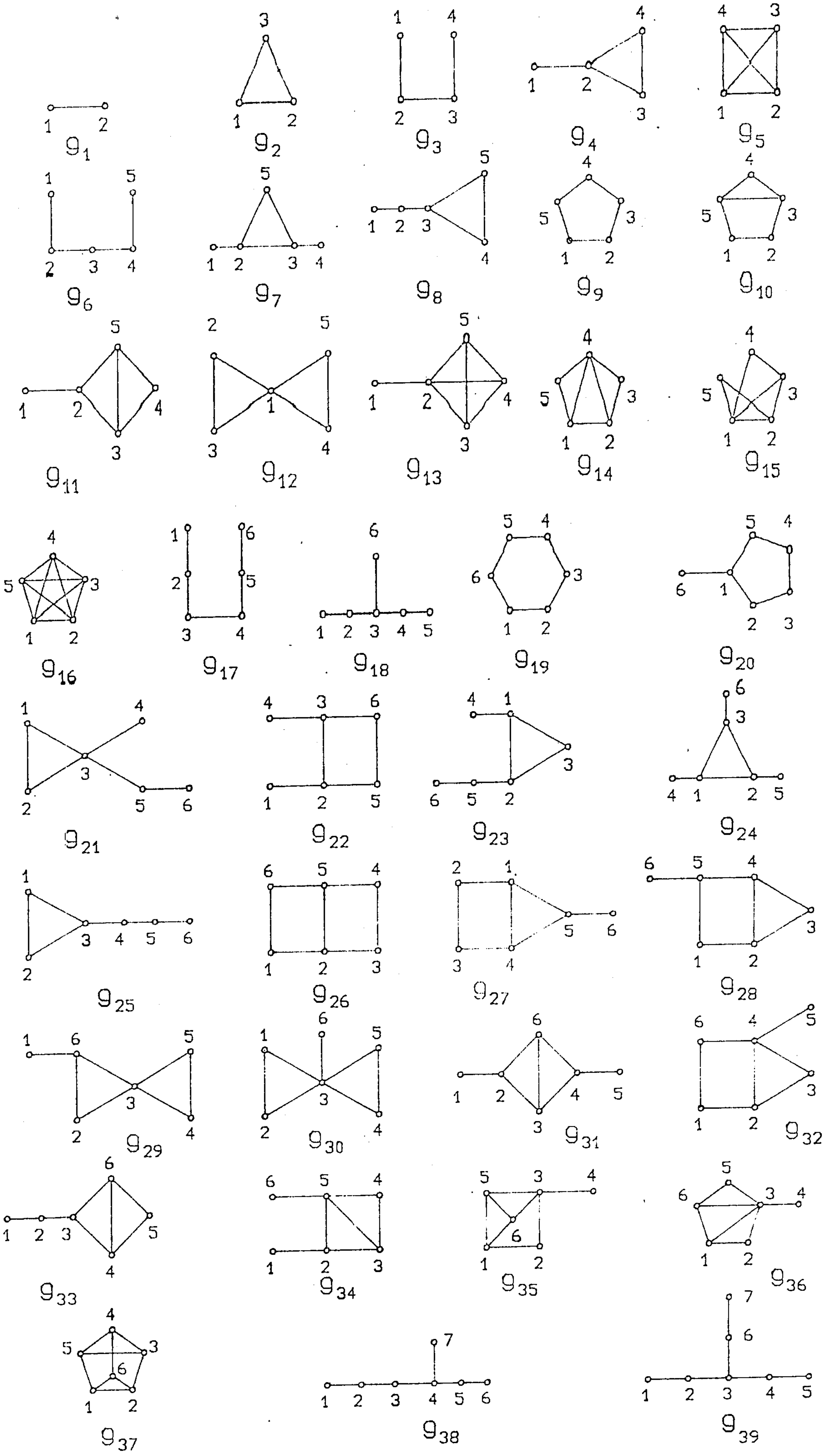
Stavovi 5.1–5.16 i Teorema 5.2 u potpunosti opisuju klasu $Q(4)$. Kao neposrednu posledicu Stavova 5.1–5.16 i Teoreme 5.2 imamo sledeći rezultat.

Teorema 5.3 Postoji tačno 154 neizomorfnih grafova čija je energija veća od 3 i nije veća od 4. Svi ovi grafovi su dati u Listi 5.2.

Svi grafovi u ovoj listi predstavljeni su u obliku

$$n_1\ n_2\ n_3 \qquad a_{12}\ a_{13}a_{23}\ \cdots\ a_{1n}a_{2n}\cdots a_{n-1,n}\ ,$$

gde je n_1 redni broj odgovarajućeg grafa, n_2 je broj čvorova grafa, n_3 je broj njegovih grana i $a_{12}\ a_{13}a_{23}\ \cdots\ a_{1n}a_{2n}\cdots a_{n-1,n}$ je gornji trougaoni oblik odgovarajuće matrice susedstva posmatranog grafa.


g_1 g_2 g_3 g_4 g_5
g_6 g_7 g_8 g_9 g_{10}
g_{11} g_{12} g_{13} g_{14} g_{15}
g_{16} g_{17} g_{18} g_{19} g_{20}
g_{21} g_{22} g_{23} g_{24}
g_{25} g_{26} g_{27} g_{28}
g_{29} g_{30} g_{31} g_{32}
g_{33} g_{34} g_{35} g_{36}
g_{37} g_{38} g_{39}

LISTA 5.1

LISTA 5.2 SPISAK SVIH NEIZOMORFNIH GRAFOVA IZ KLASE Q(4)

001	05	05	1	10	001	0101
002	05	05	1	10	001	1100
003	05	06	1	10	001	1110
004	05	06	1	10	110	1001
005	05	06	1	10	001	1101
006	05	06	1	10	110	1010
007	05	07	1	11	111	1000
008	05	07	1	10	011	1101
009	05	07	1	10	111	0011
010	05	08	1	10	111	0111
011	05	08	1	11	111	1001
012	05	09	1	10	111	1111
013	05	10	1	11	111	1111

014	06	05	1	10	001	1000	00010
015	06	05	1	10	001	1000	01000
016	06	05	1	10	001	0100	00001
017	06	06	1	10	001	0101	00100
018	06	06	1	10	110	1000	10000
019	06	06	1	10	001	0100	01001
020	06	06	1	10	001	0100	10010
021	06	06	1	10	001	0100	10100
022	06	06	1	10	001	1000	00101
023	06	06	1	10	100	1000	01001
024	06	06	1	10	110	1000	00001
025	06	06	1	10	001	1000	10100
026	06	06	1	10	011	1000	00010
027	06	06	1	10	001	1100	00100
028	06	06	1	10	001	0100	00011
029	06	06	1	10	001	1010	00001
030	06	07	1	10	001	1101	00100
031	06	07	1	10	110	1000	10001
032	06	07	1	10	110	1000	00011
033	06	07	1	10	001	1101	01000
034	06	07	1	10	110	1000	00101
035	06	07	1	10	110	1010	01000
036	06	07	1	10	001	1000	11100
037	06	07	1	10	001	1000	11001
038	06	07	1	10	001	1000	10110
039	06	07	1	10	100	1000	01101
040	06	07	1	10	001	1010	10100
041	06	07	1	10	100	1000	11100
042	06	07	1	10	001	0101	01010
043	06	07	1	10	001	1110	00010
044	06	07	1	10	001	1110	01000
045	06	07	1	10	011	1000	00101
046	06	07	1	10	011	1001	00001
047	06	08	1	10	001	1010	10011
048	06	08	1	10	011	1000	10011

049	06	08	1	10	100	1000	10111	
050	06	08	1	10	110	1000	11100	
051	06	08	1	10	011	1001	01100	
052	06	08	1	10	011	1000	10110	
053	06	08	1	10	001	1100	01101	
054	06	08	1	10	110	1000	11010	
055	06	08	1	10	001	1000	11101	
056	06	08	1	10	001	1000	11011	
057	06	09	1	10	001	1101	11010	
058	06	09	1	10	001	1101	01110	
059	06	09	1	10	110	1000	01111	
060	06	09	1	10	110	1001	11001	
061	06	09	1	10	100	1111	10001	
062	06	10	1	10	011	1001	11110	
063	06	10	1	10	011	1001	11101	
064	06	11	1	10	100	1111	11110	
065	06	12	1	10	111	0111	11101	
066	07	06	1	10	100	1000	10000	000001
067	07	06	1	10	001	1000	00100	000010
068	07	06	1	10	001	1000	10000	010000
069	07	06	1	10	001	1000	10000	000100
070	07	06	1	10	001	1000	01000	000100
071	07	06	1	10	001	1000	00010	000100
072	07	06	1	10	001	0100	00001	000010
073	07	06	1	10	001	1000	00100	001000
074	07	06	1	10	001	1000	01000	000010
075	07	07	1	10	001	1000	00100	100001
076	07	07	1	10	001	0100	10010	010000
077	07	07	1	10	001	1000	10000	100001
078	07	07	1	10	110	1000	10000	010000
079	07	07	1	10	001	1000	00100	101000
080	07	07	1	10	001	1000	00010	100100
081	07	07	1	10	100	1000	10000	010010
082	07	07	1	10	001	1000	10000	001100
083	07	07	1	10	110	1000	10000	100000
084	07	08	1	10	001	1101	01000	010000
085	07	08	1	10	100	1000	10000	001101
086	07	08	1	10	100	1000	01101	000100
087	07	08	1	10	100	1000	10000	100011
088	07	08	1	10	100	1000	01101	000001
089	07	08	1	10	001	1010	10100	100000
090	07	08	1	10	001	0100	10010	100010
091	07	08	1	10	011	1001	00001	000010
092	07	08	1	10	011	1001	00001	000001
093	07	09	1	10	011	1001	10010	000100
094	07	09	1	10	011	1001	10010	010000
095	07	09	1	10	100	1000	10000	101110
096	07	09	1	10	011	1001	01100	000001
097	07	09	1	10	100	1000	10111	000001
098	07	09	1	10	001	1010	10011	100000
099	07	10	1	10	100	1000	01101	011010
100	07	10	1	10	100	1000	10000	111110
101	07	10	1	10	100	1000	01001	011110
102	07	10	1	10	100	1000	11100	111000
103	07	10	1	10	100	1000	10000	011111

104	07	11	1 10 011 1001 10010 101100
105	07	11	1 10 011 1001 01100 100101
106	07	11	1 10 100 1111 10001 100010
107	07	12	1 10 011 1001 01101 100101
108	08	07	1 10 100 1000 10000 100000 0001000
109	08	07	1 10 001 1000 10000 000100 0001000
110	08	07	1 10 100 1000 10000 000001 0000001
111	08	07	1 10 001 1000 00100 001000 0010000
112	08	07	1 10 001 1000 00100 001000 1000000
113	08	08	1 10 001 1000 00100 001000 0100100
114	08	08	1 10 100 1000 10000 100000 0010100
115	08	08	1 10 001 1000 00010 100100 0001000
116	08	08	1 10 001 1000 00100 101000 0010000
117	08	08	1 10 100 1000 10000 100000 1000010
118	08	08	1 10 001 1000 00010 100100 1000000
119	08	08	1 10 110 1000 10000 010000 1000000
120	08	09	1 10 100 1000 10000 100000 0001110
121	08	09	1 10 100 1000 10000 100000 1010010
122	08	09	1 10 001 1010 10100 100000 0010000
123	08	09	1 10 100 1000 01101 000001 0000010
124	08	09	1 10 001 1010 10100 100000 1000000
125	08	09	1 10 001 1000 00100 001000 0110100
126	08	10	1 10 100 1000 10000 100000 0101011
127	08	10	1 10 011 1001 10010 000100 1000000
128	08	11	1 10 100 1000 10000 100000 0101111
129	08	12	1 10 100 1000 10000 100000 0111111
130	08	13	1 10 100 1111 10001 100010 1000100
131	08	15	1 10 011 1001 01101 100101 1001010
132	08	16	1 10 011 1001 01101 100101 0110101
133	09	08	1 10 100 1000 10000 100000 0001000 10000000
134	09	08	1 10 001 1000 00100 001000 1000000 10000000
135	09	08	1 10 001 1000 10000 000100 0001000 00010000
136	09	08	1 10 100 1000 10000 100000 0001000 00010000
137	09	08	1 10 001 1000 10000 000100 0001000 10000000
138	09	08	1 10 100 1000 10000 000001 0000001 10000000
139	09	09	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 00100100
140	09	09	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000010
141	09	09	1 10 110 1000 10000 010000 1000000 10000000
142	09	14	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 01111111
143	10	09	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 000000001
144	10	09	1 10 100 1000 10000 100000 0001000 10000000 000100000
145	10	10	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000100
146	10	16	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 011111111
147	11	10	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 1000000000
148	11	10	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 000000001 1000000000
149	12	11	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 1000000000 10000000000

150	13	12	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 1000000000 10000000000 100000000000
151	14	13	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 1000000000 10000000000 100000000000 1000000000000
152	15	14	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 1000000000 10000000000 100000000000 1000000000000 10000000000000
153	16	15	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 1000000000 10000000000 100000000000 1000000000000 10000000000000 100000000000000
154	17	16	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 1000000000 10000000000 100000000000 1000000000000 10000000000000 100000000000000 1000000000000000

VI. NEKI REZULTATI O PRVOJ REDUKOVANOJ ENERIJI GRAFA

U ovom poglavlju opisujemo sve povezane grafove čija prva redukovana energija, tj. suma apsolutnih vrednosti svih sopstvenih vrednosti bez maksimalne, nije veća od 5.

* * *

U ovom poglavlju, posmatraćemo takođe proste konačne povezane grafove. Spektar grafa G je skup $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ sopstvenih vrednosti 0-1 matrice susedstva grafa G.

Sumu sopstvenih vrednosti $|\lambda_2| + |\lambda_3| + \ldots + |\lambda_n|$ označićemo sa $R_1(G)$ i nazivaćemo je prvom redukovanom energijom grafa G. Pošto je $|\lambda_n| \geq 1$, sledi da je $R_1(G) \geq 1$ za bilo koji graf G. Za proizvoljnu realnu konstantu $a \geq 1$ posmatraćemo klasu grafova

$$C_1(a) = \left\{ G \mid R_1(G) \leq a \right\}.$$

U ovom poglavlju u potpunosti ćemo opisati klasu $C_1(5)$.

Ako graf G pripada klasi $C_1(5)$, onda ćemo reći da je G dozvoljeni graf; u suprotnom nazivaćemo ga zabranjenim za klasu $C_1(5)$.

Neka je H bilo koji povezani (indukovani) podgraf grafa G ($H \subseteq G$). Na osnovu teoreme preplitanja sledi da je $R_1(H) \leq R_1(G)$ pa je bilo koji povezani podgraf dozvoljenog grafa takođe dozvoljen. Iz tog razloga se za generisanje dozvoljenih grafova može koristiti metod zabranjenih podgrafova.

Dokazaćemo najpre jedno važno svojstvo proizvoljne klase $C_1(a)$ $(a \geq 1)$.

Teorema 6.1 Klasa $C_1(a)$ je konačna za svaku konstantu $a \geq 1$.

Dokaz. Neka je G bilo koji graf koji pripada klasi $C_1(a)$
Tada imamo da je

$$a \geq \sum_{i=2}^{n} |\lambda_i| \geq \sum_{\lambda_i < 0} |\lambda_i| = \sum_{\lambda_i > 0} |\lambda_i|$$

prema tome $G \in S(a)$, gde je $S(a) = \left\{ G \mid \sum_{\lambda_i > 0} |\lambda_i| \leq a \right\}$ klasa koja je razmatrana u radu [21]. Sledi da je $C_1(a) \subseteq S(a)$. Pošto je po Teoremi 2 u [21], klasa S(a) konačna za svako $a \geq 1$, naša teorema je dokazana. □

Pošto kompletan m-partitan graf $K_{n_1,n_2,\ldots,n_m}$ ima samo jednu pozitivnu sopstvenu vrednost r(G), on će pripadati klasi $C_1(a)$ ako i samo ako je $r(G) \leq a$.

Odredimo prvo sve vrednosti parametara $n_1,n_2,\ldots,n_m$ za koje je graf $K_{n_1,n_2,\ldots,n_m}$ $(n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_m)$ dozvoljen.

Stav 6.1 Graf $K_{m,n}$ $(m \leq n)$ je dozvoljen samo za sledeće vrednosti parametara m,n:

1. $m = 1$, $n = 1,2,\ldots,25$.
2. $m = 2$, $n = 2,3,\ldots,12$.
3. $m = 3$, $n = 3,4,\ldots,8$.
4. $m = 4$, $n = 4,5,6$.
5. $m = 5$, $n = 5$.

Dokaz. Pošto je $K_{m,n}$ kompletan bipartitan graf, imamo da je $r(G) = \sqrt{mn}$. Prema tome $G \in C_1(5)$ ako i samo ako je $mn \leq 25$, odakle neposredno dobijamo tvrđenje. □

Stav 6.2 Graf $K_{m,n,k}$ $(m \leq n \leq k)$ je dozvoljen samo za sledeće vrednosti parametara m,n,k:

1. $m = 1$, $n = 1$, $k = 1,2,\dots,10$.

2. $m = 1$, $n = 2$, $k = 2,3,\dots,6$.

3. $m = 1$, $n = 3$, $k = 3,4$.

4. $m = 2$, $n = 2$, $k = 2,3$.

Dokaz. Karakteristični polinom grafa $K_{m,n,k}$ je

$$P(\lambda) = \lambda^{m+n+k-3} (\lambda^3 - (mn + mk + nk)\lambda - 2mnk).$$

Stoga je rutinska stvar proveriti da je $r(G) \le 5$ upravo za naznačene vrednosti parametara m,n,k. □

Stav 6.3 Graf $K_{m,n,k,\ell}$ $(m \le n \le k \le \ell)$ je dozvoljen samo za sledeće vrednosti parametara m,n,k,ℓ:

$$(m,n,k,\ell) = (1,1,1,1),\ (1,1,1,2),\ (1,1,1,3),\ (1,1,1,4)$$
$$(1,1,1,5),\ (1,1,2,2),\ (1,1,2,3).$$

Dokaz Lako se proverava da su svi gore naznačeni grafovi dozvoljeni. S druge strane, pošto je graf $K_{m,n,k,\ell}$ zabranjen za vrednosti parametara $(m,n,k,\ell) = (1,1,1,6),(1,1,2,4),(1,1,3,3)$, na osnovu teoreme preplitanja imamo dokaz. □

Stav 6.4 Graf $K_{m,n,k,\ell,p}$ $(m \le n \le k \le \ell \le p)$ je dozvoljen samo za sledeće vrednosti parametara m,n,k,ℓ,p:

$$(m,n,k,\ell,p) = (1,1,1,1,1),\ (1,1,1,1,2).$$

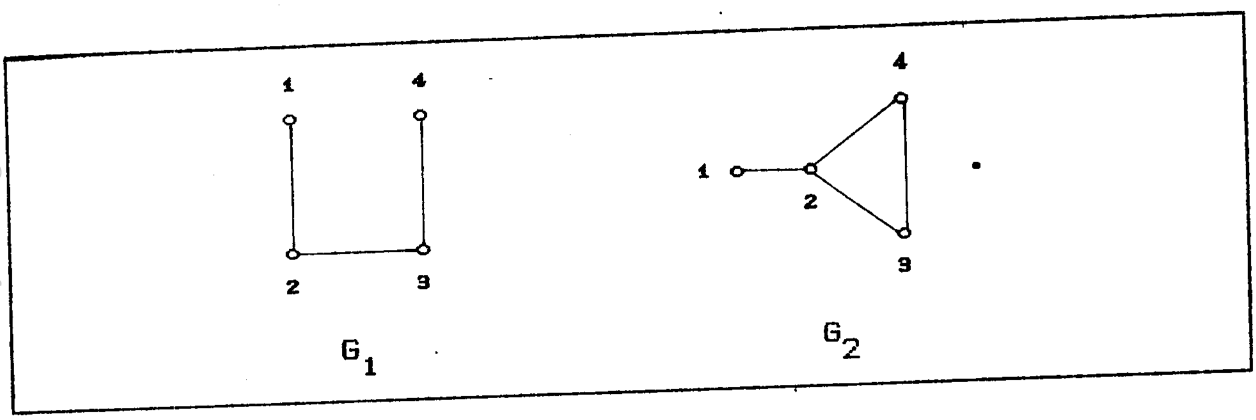
Dokaz. Lako sa proverava da su oba naznačena grafa dozvoljeni. Pošto je graf $K_{m,n,k,\ell,p}$ zabranjen za vrednosti parametara $(m,n,k,\ell,p) = (1,1,1,1,3)$, $(1,1,1,2,2)$ neposredno dobijamo dokaz. □

Stav 6.5 Graf $G = K_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ $(k \ge 6)$ je dozvoljen ako i samo ako je $k = 6$ i G je graf K_6.

Dokaz. Graf K_6 je očigledno dozvoljeni graf. S druge strane su grafovi $K_{1,1,1,1,1,2}$ i K_7 zabranjeni, pa neposredno dobijamo dokaz tvrđenja. □

Sada ćemo odrediti sve dozvoljene grafove iz klase $C_1(5)$ koji imaju bar dve pozitivne sopstvene vrednosti. Na osnovu rezultata H. Smith-a u [17] imamo

Teorema 6.2 ([17]) Graf G ima bar dve pozitivne sopstvene vrednosti ako i samo ako sadrži jedan od sledećih grafova kao (indukovan) podgraf



Primetimo da su oba grafa G_1, G_2 dozvoljeni. Označimo $\zeta_1 = \{G_1, G_2\}$. Ako je $G \in \zeta_1$ i S je neprazan podskup skupa čvorova V(G), neka je G_x graf generisan grafom G dodavanjem novog čvora x koji je susedan samo čvorovima koji pripadaju skupu S. Označimo sa ζ_2 skup svih neizomorfnih dozvoljenih grafova G_x, gde $G \in \zeta_1$, i $S \subseteq V(G) \setminus \{\emptyset\}$. Ako je konstruisana klasa ζ_i, definišimo sa ζ_{i+1} klasu koju dobijamo pomoću ζ_i na sličan način kao što je ζ_2 dobijena pomoću ζ_1. Označimo

$$\zeta = \bigcup_{i \in N} \zeta_i .$$

Na osnovu Teoreme 6.1, klasa ζ je konačna, tj. imamo da je $\zeta_i = \emptyset$ za sve dovoljno velike vrednosti i. Svi grafovi koji pripadaju skupu ζ su, po definiciji dozvoljeni grafovi i sadrže bar dve pozitivne sopstvene vrednosti. Ovo sledi na osnovu činjenice da za bilo koji povezani graf G i za bilo koji njegov povezani indukovani podgraf H, postoji niz povezanih indukovanih podgrafova $H_i \subseteq G$ $(i = 0,1,\dots r)$ takvih da je

$$H = H_o \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_r = G$$

i $|H_{i+1}| = |H_i| + 1$ $(i = 0,1,\dots,r-1)$.

Koristeći računar, možemo generisati skup svih neizomorfnih dozvoljenih grafova koji imaju bar dve pozitivne sopstvene vrednosti.

Na ovoj način dobijamo sledeću teoremu.

Teorema 6.3 Klasa $C_1(5)$ sadrži tačno 137 neizomorfnih grafova koji imaju bar dve pozitivne sopstvenih vrednosti. Svi ovi grafovi su prikazani u Listi 6.1.

Stavovi 6.1–6.5 i Teorema 6.3 u potpunosti opisuju klasu $C_1(5)$. Specijalno dobijamo da klasa $C_1(5)$ sadrži tačno 75+137 = 212 neizomorfnih grafova.

Svi grafovi u ovoj listi predstavljeni su u istom obliku kao i grafovi iz Liste 5.2 (str. 91–94) iz prethodnog poglavlja.

LISTA 6.1 DOZVOLJENI GRAFOVI KOJI IMAJU BAR DVE POZITIVNE SOPSTVENE VREDNOSTI

001	04	03	1	10	001		
002	04	04	1	10	110		
003	05	04	1	10	001	1000	
004	05	04	1	10	001	0100	
005	05	05	1	10	001	0101	
006	05	05	1	10	011	1000	
007	05	05	1	10	001	1100	
008	05	05	1	10	110	1000	
009	05	05	1	10	001	1010	
010	05	06	1	10	001	1110	
011	05	06	1	10	110	1001	
012	05	06	1	10	001	1101	
013	05	06	1	10	110	1010	
014	05	07	1	11	111	1000	
015	05	07	1	10	011	1101	
016	05	07	1	10	111	0011	
017	05	08	1	11	111	1001	
018	06	05	1	10	001	1000	10000
019	06	05	1	10	001	1000	00010
020	06	05	1	10	001	1000	01000
021	06	05	1	10	001	1000	00100
022	06	06	1	10	001	1010	00100
023	06	06	1	10	001	0100	01100
024	06	06	1	10	001	1010	00001
025	06	06	1	10	011	1000	00100
026	06	06	1	10	011	1000	10000
027	06	06	1	10	011	1000	00001
028	06	06	1	10	110	1000	10000
029	06	06	1	10	110	1000	00100
030	06	06	1	10	001	1000	00110
031	06	07	1	10	001	1000	11100
032	06	07	1	10	001	1000	10110
033	06	07	1	10	001	1010	10100
034	06	07	1	10	110	1001	00100
035	06	07	1	10	110	1001	10000
036	06	07	1	10	100	1000	01101
037	06	07	1	10	001	1101	01000
038	06	07	1	10	001	1000	01101
039	06	08	1	10	100	1111	00010
040	06	08	1	10	100	1111	00001
041	06	08	1	10	111	0011	00010
042	06	08	1	10	011	1101	00001
043	06	08	1	10	011	1101	00100
044	06	08	1	10	110	1001	00110
045	06	08	1	10	011	1001	00011
046	06	08	1	10	011	1001	00101

047	06	08	1	10	110	1000	11010	
048	06	08	1	10	001	1010	10101	
049	06	09	1	11	111	1001	10000	
050	06	09	1	11	111	1001	01000	
051	06	09	1	10	110	1000	01111	
052	06	09	1	10	011	1000	01111	
053	06	09	1	10	110	1000	10111	
054	06	09	1	10	011	1101	01001	
055	06	09	1	10	001	1101	01110	
056	06	09	1	10	011	1000	11110	
057	06	09	1	10	110	1001	11001	
058	06	10	1	10	111	0111	00011	
059	06	10	1	10	111	0111	10001	
060	06	10	1	11	111	1001	10010	
061	06	10	1	10	110	1001	11011	
062	06	10	1	10	011	1001	01111	
063	06	11	1	11	111	1000	01111	
064	06	11	1	10	011	1101	11110	
065	06	11	1	10	111	1111	00011	
066	06	12	1	10	111	0111	11011	
067	07	06	1	10	100	1000	10000	000001
068	07	06	1	10	001	1000	00100	001000
069	07	06	1	10	001	1000	00010	100000
070	07	06	1	10	001	1000	00010	000100
071	07	07	1	10	011	1000	10000	000100
072	07	07	1	10	001	1000	10000	101000
073	07	07	1	10	100	1000	10000	010010
074	07	07	1	10	110	1000	10000	100000
075	07	07	1	10	001	1000	00100	101000
076	07	08	1	10	001	1000	01101	001000
077	07	08	1	10	100	1000	10000	001101
078	07	08	1	10	110	1001	10000	000100
079	07	08	1	10	100	1000	10000	100011
080	07	08	1	10	011	1000	00001	100100
081	07	08	1	10	100	1000	01101	000001
082	07	09	1	10	100	1000	01101	100001
083	07	09	1	10	001	1010	00100	011010
084	07	09	1	10	100	1000	10000	101110
085	07	09	1	10	110	1000	11010	100000
086	07	09	1	10	001	1000	10000	011011
087	07	09	1	10	001	1010	10100	101000
088	07	10	1	10	100	1000	01111	100010
089	07	10	1	10	011	1001	01101	001000
090	07	10	1	10	100	1000	01111	001100
091	07	10	1	10	100	1111	00001	100001
092	07	10	1	10	110	1001	11001	100000
093	07	10	1	10	100	1000	11111	000001
094	07	10	1	10	011	1101	00001	100100
095	07	11	1	10	011	1001	01111	000001
096	07	11	1	10	011	1001	00101	011010
097	07	11	1	10	110	1000	10000	011111
098	07	11	1	10	111	0111	10001	000100
099	07	12	1	10	100	1111	00001	011110
100	07	12	1	10	110	1001	10000	011111
101	07	13	1	10	100	1111	00001	111101

102	07	13	1	10	100	1000	01111	011111				
103	07	13	1	10	110	1000	01111	011110				
104	07	14	1	10	111	0111	10001	011101				
105	07	14	1	10	111	0111	11101	011000				
106	08	07	1	10	001	1000	00100	001000	1000000			
107	08	07	1	10	001	1000	00100	001000	0010000			
108	08	07	1	10	100	1000	10000	100000	0000010			
109	08	07	1	10	001	1000	00010	100000	1000000			
110	08	08	1	10	100	1000	10000	100000	0000101			
111	08	08	1	10	001	1000	00100	101000	1000000			
112	08	08	1	10	110	1000	10000	100000	1000000			
113	08	08	1	10	110	1000	10000	100000	0100000			
114	08	09	1	10	100	1000	10000	100000	0010101			
115	08	09	1	10	100	1000	10000	100000	1100010			
116	08	09	1	10	110	1001	10000	000100	0001000			
117	08	09	1	10	001	1000	10000	101000	1010000			
118	08	10	1	10	100	1000	10000	100000	1011100			
119	08	10	1	10	100	1000	01101	100001	1000000			
120	08	10	1	10	001	1010	10100	101000	1000000			
121	08	10	1	10	100	1000	01101	100001	0000010			
122	08	11	1	10	100	1000	10000	100000	0101111			
123	08	11	1	10	100	1000	10000	100000	1101110			
124	08	11	1	10	100	1000	11111	000001	1000000			
125	08	11	1	10	100	1000	01111	100001	0000001			
126	08	12	1	10	100	1000	10000	100000	1011111			
127	08	13	1	10	110	1000	10000	100000	0111111			
128	08	16	1	10	100	1000	01111	100001	0111111			
129	09	08	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	01000000		
130	09	09	1	10	110	1000	10000	100000	1000000	10000000		
131	09	10	1	10	100	1000	10000	100000	1100010	10000000		
132	09	13	1	10	100	1000	10000	100000	0111111	00000001		
133	09	14	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	11101111		
134	10	09	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	01000000	100000000	
135	10	10	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000001	
136	11	10	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	01000000	100000000	1000000000
137	11	11	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000001	1000000000

VII. NEKI REZULTATI O DRUGOJ REDUKOVANOJ ENERGIJI GRAFA

U ovom poglavlju opisujemo sve povezane grafove čija druga redukovana energija, tj. suma apsolutnih vrednosti svih sopstvenih vrednosti bez minimalne, nije veća od 6.

* * *

Posmatrajmo opet proste konačne povezane grafove. Spektar grafa G je skup $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ njegovih sopstvenih vrednosti.

Sumu sopstvenih vrednosti $|\lambda_1| + |\lambda_2| + \ldots + |\lambda_{n-1}|$ označićemo sa $S_1(G)$ i nazvaćemo je drugom redukovanom energijom grafa G. Pošto je $|\lambda_1| \geq 1$, sledi da je $S_1(G) \geq 1$ za bilo koji graf G. Za proizvoljnu realnu konstantu $a \geq 1$ posmatraćemo klasu grafova

$$D_1(a) = \left\{ G \mid S_1(G) \leq a \right\}.$$

U ovom poglavlju u potpunosti ćemo opisati klasu $D_1(6)$.

Ako graf G pripada klasi $D_1(6)$, reći ćemo da je graf G dozvoljeni graf; u suprotnom, graf ćemo nazivati zabranjenim za klasu $D_1(6)$.

Na osnovu definicije druge redukovane energije, neposredno sledi je svaki podgraf H dozvoljenog grafa G, takođe dozvoljeni graf. Iz tog razloga, za generisanje svih dozvoljenih grafova koji pripadaju klasi $D_1(6)$ primenjujemo postupak zabranjenih podgrafova.

Dokazaćemo najpre jedno važno svojstvo opšte klase $D_1(a)$ $(a \geq 1)$.

Teorema 7.1 Klasa $D_1(a)$ je konačna za svako $a \geq 1$.

Dokaz. Neka je G bilo koji graf koji pripada klasi $D_1(a)$ Tada imamo da je

$$a \geq \sum_{i=1}^{n-1} |\lambda_i| \geq \sum_{\lambda_i > 0} |\lambda_i| ,$$

prema tome $G \in S(a)$, gde je $S(a) = \left\{ G | \sum_{\lambda_i > 0} |\lambda_i| \leq a \right\}$ klasa koja je razmatrana u radu [21]. Sledi da je $D_1(a) \subseteq S(a)$. Pošto je po Teoremi 2 u [21], klasa $S(a)$ konačna za svako $a \geq 1$, naša teorema je dokazana. □

S obzirom da kompletan m-partitan graf $K_{n_1,n_2,\ldots,n_m}$ ima samo jednu pozitivnu sopstvenu vrednost, on će pripadati klasi $D_1(a)$ ako i samo ako je $2r(G) + \lambda_n \leq a$.

Odredićemo najpre sve vrednosti parametara $n_1,n_2,\ldots,n_m$ za koje je graf $K_{n_1,n_2,\ldots,n_m}$ ($n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_m$) dozvoljen.

Stav 7.1 Graf $K_{m,n}$ $(m \leq n)$ je dozvoljen za sledeće vrednosti parametara m,n:

1. $m = 1$, $n = 1,2,\ldots,36$.
2. $m = 2$, $n = 2,3,\ldots,18$.
3. $m = 3$, $n = 3,4,\ldots,12$.
4. $m = 4$, $n = 4,5,\ldots,9$.
5. $m = 5$, $n = 5,6,7$.
6. $m = 6$, $n = 6$.

Dokaz. Pošto je $K_{m,n}$ kompletan bipartitan graf, imamo da je $r(G) = \sqrt{mn}$. Prema tome $G \in D_1(6)$ ako i samo ako je $mn \leq 36$, odakle neposredno dobijamo tvrđenje. □

Stav 7.2 Graf $K_{m,n,k}$ $(m \le n \le k)$ je dozvoljen za sledeće vrednosti parametara m,n,k:

1. $m = 1$, $n = 1$, $k = 1,2,\dots,10$.
2. $m = 1$, $n = 2$, $k = 2,3,4,5$.
3. $m = 1$, $n = 3$, $k = 3$.
4. $m = 2$, $n = 2$, $k = 2$.

Dokaz. Karakteristični polinom grafa $K_{m,n,k}$ je

$$P(\lambda) = \lambda^{m+n+k-3}\left[\lambda^3 - (mn + mk + nk)\lambda - 2mnk\right].$$

Odavde je lako proveriti da je $|\lambda_1| + |\lambda_2| \le 6$ upravo za naznačene vrednosti parametara m,n,k. □

Stav 7.3 Graf $K_{m,n,k,\ell}$ $(m \le n \le k \le \ell)$ je dozvoljen za sledeće vrednosti parametara m,n,k,ℓ:

$$(m,n,k,\ell) = (1,1,1,1),\ (1,1,1,2).$$

Dokaz. Lako je videti da su oba naznačena grafa dozvoljena. S druge strane, pošto je graf $K_{m,n,k,\ell}$ zabranjen za vrednosti parametara $(m,n,k,\ell) = (1,1,1,3)$, $(1,1,2,2)$ dokaz stava je završen. □

S obzirom da je graf K_5 zabranjen, na osnovu teoreme preplitanja sledi da je svaki graf oblika $G = K_{n_1,n_2,\dots,n_m}$ $(m \ge 5)$ takođe zabranjen. □

Sada ćemo odrediti sve dozvoljene grafove iz klase $D_1(6)$ koji imaju bar dve pozitivne sopstvene vrednosti. Koristeći računar, metodom koja je opisana u prethodnom poglavlju može se generisati skup svih neizomorfnih dozvoljenih grafova koji imaju bar dve pozitivne sopstvene vrednosti.

Na ovoj način dobijamo sledeću teoremu.

Teorema 7.2 Klasa $D_1(6)$ sadrži tačno 315 neizomorfnih grafova koji imaju bar dve pozitivne sopstvenih vrednosti. Svi ovi grafovi su prikazani u Listi 7.1.

Stavovi 7.1-7.3 i Teorema 7.2 u potpunosti opisuju klasu $D_1(6)$. Specijalno dobijamo da klasa $D_1(6)$ sadrži tačno 91+315 = 406 neizomorfnih grafova.

Svi grafovi u ovoj listi su predstavljeni na isti način kao i grafovi iz Liste 5.2 (str. 91-94).

LISTA 7.1 SPISAK SVIH DOZVOLJENIH GRAFOVA KOJI IMAJU BAR DVE SOPSTVENE VREDNOSTI

001	04	03	1	10	001
002	04	04	1	10	110

003	05	04	1	10	001	0100
004	05	04	1	10	001	1000
005	05	05	1	10	011	1000
006	05	05	1	10	001	1100
007	05	05	1	10	001	0101
008	05	05	1	10	110	1000
009	05	05	1	10	001	1010
010	05	06	1	10	110	1010
011	05	06	1	10	001	1101
012	05	06	1	10	110	1001
013	05	06	1	10	001	1110
014	05	07	1	10	011	1101
015	05	07	1	10	111	0011
016	05	07	1	11	111	1000
017	05	08	1	11	111	1001

018	06	05	1	10	001	1000	10000
019	06	05	1	10	001	1000	00010
020	06	05	1	10	001	1000	01000
021	06	05	1	10	001	0100	00010
022	06	05	1	10	001	1000	00100
023	06	06	1	10	001	1010	00100
024	06	06	1	10	001	0100	01001
025	06	06	1	10	011	1000	00001
026	06	06	1	10	001	1010	00010
027	06	06	1	10	001	0100	00011
028	06	06	1	10	011	1000	10000
029	06	06	1	10	001	0100	01100
030	06	06	1	10	110	1000	10000
031	06	06	1	10	001	1010	00001
032	06	06	1	10	001	1000	00110
033	06	06	1	10	001	0101	00001
034	06	06	1	10	011	1000	00100
035	06	06	1	10	110	1000	00100
036	06	07	1	10	001	0100	11001
037	06	07	1	10	100	1000	01101
038	06	07	1	10	011	1000	10100
039	06	07	1	10	001	0100	11100
040	06	07	1	10	001	1000	10110
041	06	07	1	10	110	1000	00101
042	06	07	1	10	001	1000	11100
043	06	07	1	10	110	1001	10000
044	06	07	1	10	001	1101	00010
045	06	07	1	10	011	1000	00101
046	06	07	1	10	001	1101	01000

047	06	07	1	10	001	1000	01101	
048	06	07	1	10	001	1010	10100	
049	06	07	1	10	011	1000	00011	
050	06	07	1	10	110	1001	00100	
051	06	07	1	10	110	1010	10000	
052	06	08	1	10	110	1001	00110	
053	06	08	1	10	100	1111	00001	
054	06	08	1	10	110	1000	11010	
055	06	08	1	10	011	1101	00100	
056	06	08	1	10	011	1101	00010	
057	06	08	1	10	001	0101	11010	
058	06	08	1	10	011	1001	00011	
059	06	08	1	10	100	1111	00010	
060	06	08	1	10	011	1001	00101	
061	06	08	1	10	011	1101	00001	
062	06	09	1	10	110	1000	01111	
063	06	09	1	10	001	1101	01110	
064	06	09	1	10	011	1000	01111	
065	06	09	1	10	011	1101	01001	
066	06	09	1	10	110	1001	11001	
067	06	09	1	10	011	1000	11110	
068	06	10	1	10	111	0111	10001	
069	06	10	1	10	011	1001	01111	
070	07	06	1	10	001	1000	01000	000010
071	07	06	1	10	001	1000	10000	010000
072	07	06	1	10	001	1000	00100	100000
073	07	06	1	10	001	1000	00010	000100
074	07	06	1	10	001	1000	00010	000001
075	07	06	1	10	001	1000	00100	000001
076	07	06	1	10	001	1000	00010	100000
077	07	06	1	10	001	1000	01000	000001
078	07	06	1	10	100	1000	10000	000001
079	07	07	1	10	001	1000	10000	001001
080	07	07	1	10	011	1000	00001	000010
081	07	07	1	10	001	1010	00100	100000
082	07	07	1	10	110	1000	10000	010000
083	07	07	1	10	001	0100	01100	100000
084	07	07	1	10	001	1000	10000	010001
085	07	07	1	10	110	1000	10000	000010
086	07	07	1	10	110	1000	10000	100000
087	07	07	1	10	100	1000	10000	010010
088	07	07	1	10	011	1000	00001	000100
089	07	07	1	10	001	0100	01100	010000
090	07	07	1	10	011	1000	00001	001000
091	07	07	1	10	001	0100	00010	100010
092	07	07	1	10	001	1000	10000	001100
093	07	08	1	10	001	1000	01101	100000
094	07	08	1	10	100	1000	10000	100011
095	07	08	1	10	001	1000	00010	011010
096	07	08	1	10	011	1000	10000	100100
097	07	08	1	10	001	1101	01000	010000
098	07	08	1	10	001	1000	01101	010000
099	07	08	1	10	001	1000	10110	100000
100	07	08	1	10	100	1000	01101	000001
101	07	08	1	10	011	1000	10000	011000

102	07	08	1	10	100	1000	01101	000100	
103	07	08	1	10	001	1010	10100	100000	
104	07	08	1	10	011	1000	00001	100001	
105	07	09	1	10	100	1111	00001	100000	
106	07	09	1	10	011	1101	00001	000010	
107	07	09	1	10	100	1000	01101	010100	
108	07	09	1	10	100	1000	10000	101110	
109	07	09	1	10	100	1000	10000	011101	
110	07	09	1	10	100	1000	01101	000101	
111	07	09	1	10	100	1000	01101	100100	
112	07	09	1	10	011	1001	00011	000001	
113	07	09	1	10	001	1000	10000	011011	
114	07	09	1	10	011	1001	00101	001000	
115	07	09	1	10	011	1001	00101	010000	
116	07	10	1	10	100	1000	11111	000001	
117	07	10	1	10	110	1001	11001	100000	
118	07	10	1	10	100	1000	01111	010100	
119	07	10	1	10	001	1000	00100	011111	
120	07	10	1	10	001	1010	10100	000111	
121	07	10	1	10	110	1000	01111	000100	
122	07	10	1	10	011	1001	00101	100001	
123	07	10	1	10	100	1000	01111	100100	
124	07	10	1	10	011	1001	01101	100000	
125	07	11	1	10	011	1001	00101	011010	
126	07	11	1	10	110	1000	01111	100001	
127	07	11	1	10	110	1001	10000	011011	
128	07	11	1	10	011	1001	01101	000011	
129	07	11	1	10	110	1001	11001	010010	
130	07	11	1	10	011	1001	01111	000100	
131	07	12	1	10	100	1111	11110	100000	
132	07	12	1	10	111	0111	10001	100010	
133	07	12	1	10	011	1001	01111	100001	
134	07	12	1	10	110	1000	01111	011010	
135	07	13	1	10	011	1001	01101	101101	
136	07	13	1	10	011	1001	01101	011101	
137	07	13	1	10	100	1111	11110	000011	
138	07	13	1	10	100	1000	11111	011110	
139	07	14	1	10	011	1001	01111	011011	
140	08	07	1	10	100	1000	10000	000001	0100000
141	08	07	1	10	001	1000	00010	100000	1000000
142	08	07	1	10	001	1000	00010	100000	0001000
143	08	07	1	10	001	1000	00100	100000	0010000
144	08	07	1	10	100	1000	10000	000001	0000010
145	08	07	1	10	100	1000	10000	000001	1000000
146	08	08	1	10	001	0100	01100	010000	0100000
147	08	08	1	10	110	1000	10000	010000	0100000
148	08	08	1	10	001	1000	00100	100000	0001010
149	08	08	1	10	001	0100	01100	010000	0010000
150	08	08	1	10	110	1000	10000	100000	1000000
151	08	08	1	10	110	1000	10000	010000	1000000
152	08	08	1	10	100	1000	10000	100000	0000101
153	08	08	1	10	100	1000	10000	000001	0000011
154	08	09	1	10	100	1000	10000	100000	0010101
155	08	09	1	10	001	1010	10100	100000	1000000
					011	1000	00010	011010	0001000

157	08	09	1	10	100	1000	01101	000001	0000010
158	08	09	1	10	011	1000	10000	011000	1000000
159	08	09	1	10	110	1000	10000	100000	1001000
160	08	09	1	10	001	1010	10100	100000	0010000
161	08	09	1	10	100	1000	01101	000100	0001000
162	08	10	1	10	011	1000	00001	100001	1000010
163	08	10	1	10	100	1000	10000	100000	1011100
164	08	10	1	10	100	1111	00001	100000	1000000
165	08	10	1	10	100	1000	10000	000001	0111100
166	08	10	1	10	011	1101	00001	000010	0000100
167	08	10	1	10	011	1000	00001	000010	0110100
168	08	10	1	10	001	1000	10000	011011	0010000
169	08	10	1	10	100	1000	10000	011101	0000001
170	08	10	1	10	100	1000	10000	100000	0110101
171	08	10	1	10	001	1000	10000	011011	0001000
172	08	11	1	10	001	1000	00010	011010	0110100
173	08	11	1	10	100	1000	01111	010100	0000001
174	08	11	1	10	011	1001	00011	000001	1001000
175	08	11	1	10	100	1000	10000	011111	0000010
176	08	11	1	10	011	1001	01101	100000	1000000
177	08	11	1	10	100	1000	11111	000001	1000000
178	08	11	1	10	100	1000	10000	100000	1101110
179	08	11	1	10	100	1000	10000	100000	0101111
180	08	12	1	10	100	1000	10000	111111	1000000
181	08	12	1	10	110	1000	01111	100001	0100000
182	08	12	1	10	100	1000	10000	011111	0100001
183	08	12	1	10	100	1000	01111	010100	0010100
184	08	12	1	10	011	1001	00101	011010	0100000
185	08	12	1	10	100	1000	01111	010100	1000010
186	08	12	1	10	100	1000	01111	010100	0101000
187	08	12	1	10	011	1001	00101	010000	1001010
188	08	13	1	10	110	1000	01111	100001	1000010
189	08	13	1	10	011	1001	01101	011010	0100000
190	08	13	1	10	100	1000	01111	010100	1000011
191	08	13	1	10	011	1001	01101	011010	0000001
192	08	14	1	10	011	1001	01101	011010	1000010
193	08	14	1	10	011	1001	01101	011010	0010100
194	08	14	1	10	100	1000	11111	011110	1000000
195	08	14	1	10	011	1001	01101	011010	0100010
196	08	14	1	10	100	1000	10000	011111	1001011
197	08	15	1	10	011	1001	01101	011010	1001001
198	08	16	1	10	011	1001	01101	011010	0111100
199	08	16	1	10	100	1000	11111	011110	1000011
200	08	17	1	10	011	1001	01101	011010	1001111

201	09	08	1	10	100	1000	10000	000001	0000010	10000000
202	09	08	1	10	100	1000	10000	000001	1000000	10000000
203	09	08	1	10	001	1000	00010	100000	0001000	00010000
204	09	08	1	10	001	1000	00010	100000	0001000	10000000
205	09	08	1	10	001	1000	00100	100000	0010000	00100000
206	09	08	1	10	100	1000	10000	000001	1000000	00000010
207	09	09	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	01000010
208	09	09	1	10	001	0100	01100	010000	0010000	00100000
209	09	09	1	10	001	0100	01100	010000	0100000	01000000
210	09	09	1	10	100	1000	10000	000001	0000010	10000100

212	09	09	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000010	
213	09	09	1	10	110	1000	10000	100000	1000000	01000000	
214	09	09	1	10	110	1000	10000	010000	0100000	01000000	
215	09	10	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10001001	
216	09	10	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	00100101	
217	09	10	1	10	011	1000	10000	011000	1000000	10000000	
218	09	10	1	10	110	1000	10000	100000	1001000	00010000	
219	09	10	1	10	100	1000	10000	100000	0010101	00000001	
220	09	10	1	10	100	1000	01101	000001	0000010	10000000	
221	09	11	1	10	100	1000	01101	000100	0001000	10000100	
222	09	11	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10101010	
223	09	11	1	10	100	1000	10000	100000	0110101	00000001	
224	09	11	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	01101010	
225	09	11	1	10	001	1000	10000	011011	0010000	00100000	
226	09	12	1	10	100	1000	10000	100000	0101111	10000000	
227	09	12	1	10	100	1000	10000	011111	0000010	00000001	
228	09	12	1	10	100	1000	10000	100000	0101111	00100000	
229	09	12	1	10	011	1001	01101	100000	1000000	10000000	
230	09	12	1	10	100	1000	10000	100000	0101111	00000001	
231	09	12	1	10	100	1000	10000	011111	0000010	00000100	
232	09	13	1	10	100	1000	10000	011111	1000001	00000010	
233	09	13	1	10	100	1000	10000	011111	1000001	00000100	
234	09	13	1	10	100	1000	10000	111111	1000000	10000000	
235	09	14	1	10	100	1000	10000	111111	1000001	10000000	
236	09	14	1	10	100	1000	10000	011111	1000001	00000011	
237	09	14	1	10	011	1001	01101	011010	0100000	01000000	
238	09	14	1	10	001	1000	10000	011011	0010000	01101100	
239	09	14	1	10	100	1000	10000	011111	0000010	10000011	
240	09	15	1	10	011	1001	01101	011010	0010100	01000000	
241	09	15	1	10	100	1000	10000	011111	1000001	00110100	
242	09	15	1	10	110	1000	10000	100000	1000000	01111111	
243	09	16	1	10	011	1001	01101	011010	0110100	00000001	
244	09	16	1	10	011	1001	01101	011010	0110100	00100000	
245	09	16	1	10	100	1000	10000	011111	1000001	01110001	
246	09	17	1	10	011	1001	01101	011010	1001011	01000000	
247	09	17	1	10	100	1000	10000	100000	0101111	01111110	
248	09	19	1	10	011	1001	01101	011010	1001011	01100001	
249	09	19	1	10	100	1000	10000	011111	1000001	01111111	
250	10	09	1	10	100	1000	10000	000001	1000000	00000010	100000000
251	10	09	1	10	100	1000	10000	000001	0000010	10000000	100000000
252	10	09	1	10	001	1000	00010	100000	0001000	10000000	100000000
253	10	09	1	10	001	1000	00100	100000	0010000	00100000	100000000
254	10	09	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	000000010
255	10	09	1	10	100	1000	10000	000001	0000010	10000000	000001000
256	10	10	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000010	100000000
257	10	10	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	01000010	100000000
258	10	10	1	10	100	1000	10000	000001	0000010	10000100	100000000
259	10	10	1	10	110	1000	10000	100000	1000000	01000000	100000000
260	10	10	1	10	100	1000	10000	000001	1000000	00000010	100000100
261	10	11	1	10	100	1000	10000	100000	0010101	00000001	100000000
262	10	11	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	00100101	100000000
263	10	11	1	10	011	1000	10000	011000	1000000	10000000	100000000
264	10	11	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10001001	100000000
265	10	12	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	01101010	100000000
[illegible]	10	12	1	10	100	1000	10000	100000	0110101	00000001	100000000

267	10	12	1 10 100 1000 10000 100000 0110101 00000001 000000010
268	10	13	1 10 100 1000 10000 100000 0101111 10000000 000000010
269	10	13	1 10 100 1000 10000 100000 0101111 10000000 100000000
270	10	14	1 10 100 1000 10000 011111 1000001 00000010 000000001
271	10	14	1 10 100 1000 10000 011111 1000001 00000010 000000100
272	10	14	1 10 100 1000 10000 011111 1000001 00000010 100000000
273	10	15	1 10 100 1000 10000 011111 1000001 00000100 100000100
274	10	15	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 01111111 100000000
275	10	17	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000010 011111111
276	10	19	1 10 011 1001 01101 011010 0110100 00100000 011010000
277	10	20	1 10 011 1001 01101 011010 0110100 01101000 001010000
278	11	10	1 10 100 1000 10000 000001 0000010 10000000 100000000 1000000000
279	11	10	1 10 100 1000 10000 000001 0000010 10000000 100000000 0000010000
280	11	10	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 000000010 0000000001
281	11	10	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 0000000010
282	11	11	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 1000000001
283	11	11	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 0000000011
284	11	11	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 01000010 100000000 0000000010
285	11	11	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000010 100000000 0000000010
286	11	12	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 1000001010
287	11	12	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 01000010 100000000 1000000010
288	11	15	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 0101101110
289	11	16	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 0011110111
290	11	16	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 01111111 100000000 0000000010
291	11	17	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 01111111 100000001 0000000100
292	11	17	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 01111111 100000001 1000000000
293	12	11	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 0000000010 00000000100
294	12	11	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 1000000000 00000000100
295	12	11	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 0000000010 00000000001
296	12	12	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 1000000000 00000001001
297	12	12	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 1000000001 00000000010
298	12	12	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 1000000001 10000000000

299	12	13	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 1000000000 10000000011
300	12	19	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 0111111111 00000000001
301	13	12	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 0000000010 00000000100 100000000000
302	13	12	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 0000000010 00000000001 100000000000
303	13	12	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 1000000000 00000000100 100000000000
304	13	13	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 1000000000 10000000000 000000110000
305	13	13	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 1000000000 10000000000 100100000000
306	13	21	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 1000000000 10000000000 011111111110
307	14	13	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 1000000000 00000000100 100000000000 1000000000000
308	14	14	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 1000000000 10000000000 100000000000 1000100000000
309	15	14	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 1000000000 00000000100 100000000000 1000000000000 10000000000000
310	15	15	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 1000000000 10000000000 100000000000 1000000000000 10001000000000
311	16	15	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 1000000000 00000000100 100000000000 1000000000000 10000000000000 100000000000000
312	16	16	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 1000000000 10000000000 100000000000 1000000000000 10000000000000 100010000000000
313	17	16	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 1000000000 00000000100 100000000000 1000000000000 10000000000000 100000000000000 1000000000000000
314	17	17	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 1000000000 10000000000 100000000000 1000000000000 10000000000000 100000000000000 1000100000000000
315	18	17	1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 100000000 1000000000 00000000100 100000000000 1000000000000 10000000000000 100000000000000 1000000000000000 10000000000000000

VIII. NEKI REZULTATI O TREĆOJ REDUKOVANOJ ENERGIJI GRAFA

U ovom poglavlju opisaćemo sve povezane grafove čija treća redukovana energija, tj. suma apsolutnih vrednosti svih sopstvenih vrednosti, bez minimalne i maksimalne, nije veća od 2.5.

* * *

Neka je G proizvoljan graf reda n i $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ \ldots \ \geq \lambda_n$ njegov spektar.

Sumu sopstvenih vrednosti $|\lambda_2| + |\lambda_3| + \ldots + |\lambda_{n-1}|$ označićemo sa $T_1(G)$ i nazivaćemo **trećom redukovanom energijom** grafa G. Za proizvoljnu realnu konstantu $a > 0$ posmatraćemo klasu grafova

$$E_1(a) = \left\{ G \mid T_1(G) \leq a \right\}.$$

U ovom poglavlju u potpunosti ćemo opisati klasu $E_1(2.5)$.

Ako graf G pripada klasi $E_1(2.5)$, reći ćemo da je on dozvoljeni graf; u suprotnom, nazivaćemo ga zabranjenim za klasu $E_1(2.5)$.

Na osnovu definicije treće redukovane energije, jasno je da je svaki podgraf H dozvoljenog grafa G, takođe dozvoljeni graf. Iz tog razloga možemo primeniti postupak zabranjenih podgrafova za generisanje svih grafova koji pripadaju klasi $E_1(a)$ $(a > 0)$.

S obzirom da kompletan m-partitan graf $K_{n_1,n_2,\ldots,n_m}$ ima samo jednu pozitivnu sopstvenu vrednost, i da je $r(G) = |\lambda_2| + |\lambda_3| + \ldots + |\lambda_n|$, lako je videti da on pripada klasi $E_1(a)$ ako i samo ako je $\lambda_1(G) + \lambda_n(G) \leq a$.

Pošto graf $K_{m,n}$ pripada klasi $E_1(a)$ za sve vrednosti parametara $m,n \in N$, zaključujemo da je klasa $E_1(a)$ beskonačna za svaku konstantu $a > 0$.

Da bi smo generisali skup svih grafova koji pripadaju klasi $E_1(2.5)$, prvo ćemo odrediti kompletan skup kanoničkih grafova iz ovog skupa. Naime, ako je g kanonički graf grafa G, tada iz

$$G \in E_1(a) \Rightarrow g \in E_1(a).$$

Iz tog razloga, vrlo je zgodno prvo opisati skup svih kanoničkih grafova koji pripadaju klasi $E_1(a)$.

Generisanje kompletnog skupa kanoničkih grafova iz klase $E_1(2.5)$ zasniva se na Teoremi 5.1 ([24]) (str. 83).

Sada ćemo dokazati osnovnu osobinu opšte klase $E_1(a)$ $(a > 0)$. Dokaz se zasniva na Teoremi 8.1 koja je data u radu [19].

Teorema 8.1 ([19]) Za svako $n \in N$, skup svih kanoničkih grafova koji imaju n nenula sopstvenih vrednosti je konačan.

Teorema 8.2 Za svaku konstantu $a > 0$, skup svih kanoničkih grafova koji pripadaju klasi $E_1(a)$ je konačan.

<u>Dokaz</u>. Pođimo od suprotne pretpostavke, tj. pretpostavimo da postoji neka konstanta $a > 0$, takva da je skup kanoničkih grafova iz klase $E_1(a)$ beskonačan. Očigledno se može pretpostaviti da je a prirodan broj. Tada, na osnovu Teoreme 8.1, za svaki realan broj $M > 0$ postoji graf G tako da važi

$$(8.1) \qquad |\lambda_2| + |\lambda_3| + \dots + |\lambda_{n-1}| \le a ,$$

i G ima $p \ge M$ nenula sopstvenih vrednosti. Multiplicitet sopstvene vrednosti $\lambda = 0$ grafa G je $q = n - p$. Pretpostavimo da je $\lambda_s > \lambda_{s+1} = \dots = \lambda_{s+q} = 0 > \lambda_{s+q+1}$. Odgovarajući karakteristični polinom grafa G tada se može napisati u obliku

$$P_n(\lambda) = \lambda^q \ (\lambda^p + a_1\lambda^{p-1} + \dots + a_p) \quad ,$$

gde je $|a_p| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_s \cdot |\lambda_{s+q+1}| \cdot \dots \cdot |\lambda_n|$.

Ne umanjujući opštost dokaza možemo uzeti da je $q = 0$, odnosno $n = p$. Pretpostavimo da je n izabrano dovoljno veliko tako da je $\sqrt{n} \geq a + 5$. Imamo da je $|\lambda_1|$, $|\lambda_n| \leq n-1$, a iz relacije (8.1) sledi da je $|\lambda_i| \leq \sqrt{n}$ za $i = 2,3,\ldots,n-1$.

Označimo $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ i neka je k ukupan broj sopstvenih vrednosti λ_i, takvih da je $|\lambda_i| \leq \varepsilon$ $(i = 2,3,\ldots,n-1)$. Lako je pokazati da je $k > a + 3$. Zaista, u suprotnom slučaju postojalo bi najmanje $n - (k+2)$ sopstvenih vrednosti λ_i $(2 \leq i \leq n-1)$ takvih da je $|\lambda_i| > \varepsilon$. Relacija (8.1) daje

$$a \geq \sum_{i=2}^{n-1} |\lambda_i| > \frac{n-(k+2)}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} - \frac{a+5}{\sqrt{n}} . \tag{8.2}$$

Pošto je $\sqrt{n} \geq a + 5$, iz relacije (8.2) dobijamo $a > \sqrt{n} - 1$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom. Stoga je $k \geq a + 4$.

Dalje, neka je k_o ukupan broj sopstvenih vrednosti λ_i $(i = 2,3,\ldots,n-1)$ takvih da je $|\lambda_i| > 1$. Korišćenjem relacije (8.1) imamo

$$a \geq \sum_{i=2}^{n-1} |\lambda_i| \geq \sum_{i=1}^{k_o} 1 = k_o$$

Odavde sledi da je $k_o \leq a$.

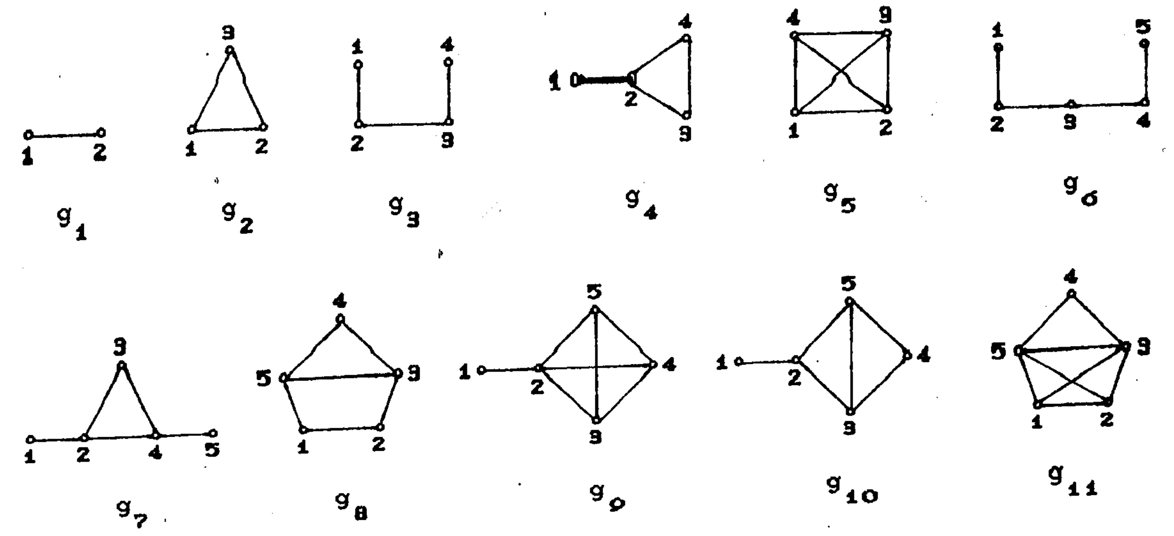
Sada konačno imamo

$$|a_n| = |\lambda_1|\cdot|\lambda_2|\cdot\ldots\cdot|\lambda_n| = |\lambda_1|\cdot|\lambda_n|\left(|\lambda_2|\cdot|\lambda_3|\cdot\ldots\cdot|\lambda_{n-1}|\right) \leq$$

$$\leq (n-1)^2 \underbrace{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\ldots\cdot\sqrt{n}}_{k_o}\cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}_{k}\cdot \underbrace{1\cdot 1\cdot\ \ldots\ \cdot 1}_{n-(k+k_o+2)} \leq 1$$

što je kontradikcija pošto $|a_n| \in N$ $(a_n \neq 0)$. Stoga je skup svih kanoničkih grafova iz $E_1(a)$ konačan za svako $a > 0$. □

Direktnim pretraživanjem spektara svih povezanih grafova sa najviše 5 čvorova, nalazimo da klasa $E_1(2.5)$ sadrži tačno 11 kanoničkih grafova reda 2,3,4 ili 5. Oni su prikazani u Listi 8.1.



LISTA 8.1

Kao što je takođe poznato, postoji tačno 112 neizomorfnih povezanih grafova sa 6 čvorova. Direktnom proverom njihovih spektara dobijamo da klasa $E_1(2.5)$ ne sadrži nijedan kanonički graf sa 6 čvorova.

Na osnovu Teoreme 8.1 i Teoreme 8.2 neposredno dobijamo sledeći rezultat.

Teorema 8.3 Lista 8.1 je kompletna lista svih kanoničkih grafova iz klase $E_1(2.5)$.

Sada, koristeći listu svih kanoničkih grafova iz klase $E_1(2.5)$, generišemo sve grafove iz te klase.

Stav 8.1 Graf $G = g_1(m,n) \in E_1(2.5)$ za sve vrednosti parametara m,n $(m \leq n)$.

<u>Dokaz</u>. Pošto je $g_1 = K_2$, graf $G = K_{m,n}$ je kompletan bipartititan graf, pa ima tačno jednu pozitivnu i tačno jednu negativnu sopstvenu vrednost. Stoga je $T_1(G) = 0$ za svaki kompletan bipartitan graf G. □

Stav 8.2 Graf $G = g_2(m,n,k)$ $(m \leq n \leq k)$ pripada klasi $E_1(2.5)$ ako i samo ako je

$$(m,n,k) = (1,\dot{1},\dot{1})\ ,\ (2,\underset{\cdot}{2},\dot{2})\ ,\ (2,3,\dot{3})\ ,\ (2,4,4)\ ,$$

gde $\dot{p}$ znači da je odgovarajući parametar veći ili jednak p, a $\underset{\cdot}{p}$ znači da je odgovarajući parametar manji ili jednak p.

Dokaz. Pošto je $g_2 = K_3$, graf G je kompletan 3-partitan graf $K_{m,n,k}$ i sadrži samo tri nenula sopstvene vrednosti, koje su koreni polinoma

$$P(\lambda) = \lambda^3 - (mn + mk + nk)\lambda - 2mnk.$$

Prema tome $G \in E_1(2.5)$ ako i samo ako je $|\lambda_2| \leq 2.5$, tj. ako i samo ako je $P(-2.5) \geq 0$. Odavde lako dobijamo dokaz tvrđenja. □

Stav 8.3 Graf $G = g_3(m,n,k,\ell)$ $(m \leq \ell)$ pripada klasi $E_1(2.5)$ ako i samo ako (m,n,k,ℓ) ima jednu od sledećih vrednosti:

$$(1,\ 1,\ \dot{1},\ \dot{1})\ ,\ (1,\ \dot{1},\ 1,\ \dot{1})\ ,\ (1,\ \dot{1},\ \dot{1},\ 1)\ ,$$

$$(\dot{1},\ 1,\ 1,\ \dot{1})\ ,\ (1,\ 2,\ \dot{2},\ \underset{\cdot}{7})\ ,\ (1,\ 3,\ 2,\ \underset{\cdot}{4})\ ,$$

$$(1,\ 3,\ \dot{3},\ \underset{\cdot}{3})\ ,\ (1,\ 4,\ \underset{\cdot}{3},\ \underset{\cdot}{3})\ ,\ (1,\ 4,\ \dot{4},\ 2)\ ,$$

$$(1,\ 5,\ 2,\ \underset{\cdot}{3})\ ,\ (1,\ \underset{\cdot}{7},\ \dot{2},\ 2)\ ,\ (1,\ 8,\underset{\cdot}{26},\ 2)\ ,$$

$$(1,\ 9,\underset{\cdot}{14},\ 2)\ ,\ (1,10,\underset{\cdot}{10},\ 2)\ ,\ (1,11,\ \underset{\cdot}{8},\ 2)\ ,$$

$$(1,12,\ \underset{\cdot}{7},\ 2)\ ,\ (1,\underset{\cdot}{15},\ \underset{\cdot}{6},\ 2)\ ,\ (1,\underset{\cdot}{21},\ \underset{\cdot}{5},\ 2)\ ,$$

$$(1,\underset{\cdot}{53},\ \underset{\cdot}{4},\ 2)\ ,\ (1,\dot{54},\ \underset{\cdot}{3},\ 2)\ ,\ (2,\ 1,\ \underset{\cdot}{3},\ \underset{\cdot}{4})\ ,$$

$$(2,\ 1,\ \dot{4},\ \underset{\cdot}{3})\ ,\ (2,\ 2,\ 2,\ 2).$$

Dokaz. Lako je proveriti da svi gornji grafovi pripadaju klasi $E_1(2.5)$. Primetimo da su sopstvene vrednosti ovih grafova određene jednačinom

$$\lambda^4 - (mn + nk + k\ell)\lambda^2 + mnk\ell = 0.$$

Dakle, ove sopstvene vrednosti mogu se eksplicitno odrediti. Odavde je lako pokazati da graf $G = g_3(m,n,k,\ell) \in E_1(2.5)$ ako i samo ako je ispunjeno

$$256mnk\ell - 400(mn + nk + k\ell) + 625 \leq 0.$$

Iz ove relacije neposredno dobijamo dokaz stava. □

Stav 8.4 Graf $G = g_4(m,n,k,\ell)$ $(k \leq \ell)$ pripada klasi $E_1(2.5)$ ako i samo ako (m,n,k,ℓ) ima jednu od sledećih vrednosti:

$(m,n,k,\ell) =$ (1, 1, 5, 1) , (1, 1, 6,30) , (1, 1, 7,13) ,
(1, 1, 8,10) , (1, 1, 9, 9) , (1, 5, 1, 1) ,
(1, 2, 2, 2) , (1, 6, 1,86) , (1, 7, 1,35) ,
(1, 8, 1,25) , (1, 9, 1,21) , (1,10, 1,19) ,
(1,11, 1,17) , (1,12, 1,16) , (1,14, 1,15) ,
(1,17, 1,14) , (1,24, 1,13) , (1,43, 1,12) ,
(1,44, 1,11) , (2, 1, 1, 1) , (2, 2, 1, 8) ,
(2, 5, 1, 5) , (2, 4, 1, 4) , (3, 1, 1, 6) ,
(3, 2, 1, 3) , (4, 2, 1, 3) , (10,1, 1, 2) ,
(11,1, 1, 2) , (12,1, 1, 1) .

Dokaz. Primetimo da su sve nenula sopstvene vrednosti grafa G čiji je kanonički graf g_4 koreni polinoma

$$P(\lambda) = \lambda^4 - (mn + nk + n\ell + k\ell)\lambda^2 - 2nk\ell\lambda + mnk\ell.$$

Za proizvoljan graf $G = (m,n,k,\ell)$ može se odrediti konstanta $c < 0$ tako da je $P(c) < 0$ i $P(2.5 + c) < 0$. Ako takva konstanta postoji sledi da je $|\lambda_3| < |c|$, $|\lambda_2| < 2.5 - |c|$ i $|\lambda_2| + |\lambda_3| < 2.5$, pa je graf $G = (m,n,k,\ell)$ dozvoljen. Na primer, za graf

$(m,n,k,\ell) = (1,1,6,30)$ možemo izabrati $c = -2.0975$. Pošto je $P(-2.0975) < 0$ i $P(0.4025) < 0$ sledi da je $|\lambda_3| < 2.0975$ i $|\lambda_2| < 0.4025$. Ovaj graf je dozvoljen, a primenom teoreme preplitanja dolazimo do zaključka da su dozvoljeni i grafovi sa parametrima $(m,n,k,\ell) = (1,1,\dot{6},\dot{30})$. S druge strane, za graf $(m,n,k,\ell) = (1,1,6,31)$ imamo da je $P(-2.0975) > 0$ i $P(0.4025) > 0$, pa je $|\lambda_3| > 2.0975$ i $|\lambda_2| > 0.4025$. Dakle, ovaj graf je zabranjen. Primenom, ponovo teoreme preplitanja sledi da su svi grafovi sa parametrima $(m,n,k,\ell) = (1,1,6,\dot{31})$ takođe zabranjeni. Na sličan način određuju se svi dozvoljeni grafovi čiji je kanonički graf g_4. □

Stav 8.5 Graf $G = g_5(m,n,k,\ell)$ $(m \le n \le k \le \ell)$ pripada klasi $E_1(2.5)$ ako i samo ako je $(m,n,k,\ell) = (1,1,\dot{2},1)$.

<u>Dokaz</u>. Lako je videti da su nenula sopstvene vrednosti grafa G čiji je kanonički graf g_5 koreni polinoma

$$P(\lambda) = \lambda^4 - (mn + mk + m\ell + nk + n\ell + k\ell)\lambda^2 -$$
$$-2(mnk + mn\ell + mk\ell + nk\ell)\lambda - 3mnk\ell \quad .$$

Pošto su grafovi sa parametrima $(m,n,k,\ell) = (1,1,3,1)$, $(1,2,2,2)$ zabranjeni dolazimo do zaključka da je graf ovakvog tipa dozvoljen samo ukoliko je $m = n = 1$ i $k = 2$. Za graf $(1,1,2,\ell)$ imamo da je $|\lambda_2| = 1$. Takođe može se videti da je graf $G = (1,1,2,\ell)$ dozvoljen ako i samo ako je $P_1(-1.5) > 0$, gde je

$$P_1(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - (4 + 4\ell)\lambda - 6\ell \; .$$

Pošto je $P_1(-1.5) = \frac{3}{8}$ imamo da je graf $G = (1,1,2,\ell)$ dozvoljen za svako $\ell \in N$. Takođe zaključujemo da $|\lambda_3| \longrightarrow 1.5$ ako $\ell \longrightarrow \infty$. Zaista, ako stavimo da je $\lambda_3 = -1.5 + \varepsilon$ $(\ \varepsilon > 0\ )$ imamo da je $P_1(-1.5 + \varepsilon) < 0$ za dovoljno veliko ℓ, pa je $|\lambda_3| > 1.5 - \varepsilon$. Prema tome dokazali smo da $|\lambda_2| + |\lambda_3| \longrightarrow 2.5$ kada $\ell \longrightarrow \infty$. □

Stav 8.6 Graf $G = g_6(m,n,k,\ell,p)$ ($m < p$ ili $m = p$, $n \leq \ell$) pripada klasi $E_1(2.5)$ ako i samo ako (m,n,k,ℓ,p) ima jednu od sledećih vrednosti:

$$(1,1,1,2,2)\ ,\ (1,1,2,1,2)\ ,\ (1,1,2,7,1)\ ,$$

$$(1,1,3,5,1)\ ,\ (1,1,7,4,1)\ ,\ (1,1,8,3,1)\ .$$

<u>Dokaz</u>. Lako je proveriti da svi gornji grafovi pripadaju klasi $E_1(2.5)$. Dalje, primetimo da su nenula sopstvene vrednosti grafa G određene jednačinom

$$\lambda^4 - (mn + nk + k\ell + \ell p)\lambda^2 + mnk\ell + mn\ell p + nk\ell p = 0.$$

Odavde sledi da se nenula sopstvene vrednosti grafa G mogu eksplicitno naći. S druge strane, lako je dokazati da graf $G = g_6(m,n,k,\ell) \in E_1(2.5)$ ako i samo ako je

$$256(mnk\ell + mn\ell p + nk\ell p) - 400(mn + nk + k\ell + \ell p) + 625 \leq 0.$$

Iz ove relacije neposredno dobijamo dokaz tvrđenja. □

Stav 8.7 Graf $G = g_7(m,n,k,\ell,p)$ ($m \leq p$) pripada klasi $E_1(2.5)$ ako i samo ako (m,n,k,ℓ,p) ima jednu od sledećih vrednosti

$$(1,1,1,2,5)\ ,\ (1,1,1,3,4)\ ,\ (1,1,2,2,1)\ ,$$

$$(1,1,3,1,1)\ ,\ (1,2,1,1,2)\ ,\ (1,2,1,3,1)\ ,$$

$$(1,2,2,1,1)\ ,\ (1,3,1,2,1)\ ,\ (1,3,2,1,1)\ .$$

<u>Dokaz</u>. Primetimo da su nenula sopstvene vrednosti grafa G čiji je kanonički graf g_7 koreni polinoma

$$P(\lambda) = \lambda^4 - (mn + nk + n\ell + k\ell + \ell p)\lambda^2 - 2nk\ell\lambda + $$
$$+\ mnk\ell + mn\ell p + nk\ell p\ .$$

Za proizvoljan graf $G = (m,n,k,\ell,p)$ određujemo konstantu $c < 0$ tako da je $P(c) < 0$ i $P(2.5 + c) < 0$. Ako takva konstanta postoji sledi da je $|\lambda_3| < |c|$, $|\lambda_2| < 2.5 - |c|$ i $|\lambda_2| + |\lambda_3| < 2.5$. Jasno je da je graf $G = (m,n,k,\ell)$ dozvoljen. Na sličan način kao i u Stavu 8.4 određujemo sve dozvoljene grafove čiji je kanonički graf g_7. □

Stav 8.8 Graf $G = g_8(m,n,k,\ell,p)$ $(m \leq n)$ pripada klasi $E_1(2.5)$ ako i samo ako (m,n,k,ℓ,p) ima jednu od sledećih vrednosti

(1, 1, 2, 1, 1) , (1, 1, 3, 1, 4) , (1, 1, 4, 1, 3) ,

(1, 1, 5, 1, 2) , (1, 2, 1, 1, 4) , (1, 2, 2, 1, 2) ,

(1, 2, 3, 1, 1) , (1, 3, 1, 1, 2) , (1, 3, 2, 1, 1) ,

(1, 4, 1, 1, 1) , (1, 5, 16, 1, 1) , (1, 6, 6, 1, 1) ,

(1, 7, 4, 1, 1) , (1, 9, 3, 1, 1) , (1, 15, 2, 1, 1) ,

(1, 16, 1, 1, 1) , (2, 2, 1, 1, 2) , (2, 2, 2, 1, 1) ,

(2, 10, 1, 1, 1) , (3, 5, 1, 1, 1) .

Dokaz. Lako je videti da su nenula sopstvene vrednosti grafa G čiji je kanonički graf g_8 koreni polinoma

$$P(\lambda) = \lambda^4 - (mn + mp + nk + n\ell + k\ell + \ell p)\lambda^2 - 2nk\ell\lambda + \\ + mnk\ell + mnkp + mk\ell p + nk\ell p \;.$$

Na potpuno sličan način kao i u prethodnom stavu nalazimo sve dozvoljene grafove čiji je kanonički graf g_8. □

Stav 8.9 Graf $G = g_9(m,n,k,\ell,p)$ $(k \leq \ell \leq p)$ pripada klasi $E_1(2.5)$ ako i samo ako je $(m,n,k,\ell,p) = (1,1,1,1,1)$.

Dokaz. Nenula sopstvene vrednosti grafa G čiji je kanonički graf g_9 su koreni polinoma

$$P(\lambda) = \lambda^5 - (mn + nk + n\ell + np + k\ell + kp + \ell p)\lambda^3 - $$
$$- 2(nk\ell + nkp + n\ell p + k\ell p)\lambda^2 + $$
$$+ (mnk\ell + mnkp + mn\ell p - 3nk\ell p)\lambda + 2mnk\ell p .$$

Pošto su grafovi sa parametrima $(m,n,k,\ell,p) = (1,1,1,1,2)$, $(2,1,1,1,1)$ zabranjeni, zaključujemo da je graf posmatranog oblika dozvoljen samo ukoliko je $m = k = \ell = p = 1$. Za graf $G=(1,n,1,1,1)$ imamo da je $|\lambda_3| = |\lambda_4| = 1$. Takođe se može videti da je graf G dozvoljen ako i samo ako je $P_1(0.5) \leq 0$, gde je

$$P_1(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 4n\lambda + 2n.$$

Pošto je $P_1(0.5) = \frac{-3}{8}$ imamo da je $G = (1,n,1,1,1)$ dozvoljen za svako $n \in N$. Na sličan način kao i u Stavu 5.1 zaključujemo da $|\lambda_2| \longrightarrow 0.5$ ako $n \longrightarrow \infty$. Prema tome sledi da $|\lambda_2|+|\lambda_3|+|\lambda_4| \longrightarrow 2.5$ kada $n \longrightarrow \infty$. □

Stav 8.10 Graf $G = g_{10}(m,n,k,\ell,p)$ $(k \leq p)$ pripada klasi $E_1(2.5)$ ako i samo ako je $(m,n,k,\ell,p) = (1,2,1,1,1)$.

<u>Dokaz</u>. Pošto su grafovi sa parametrima $(n,m,k,\ell,p) = (1,3,1,1,1)$, $(2,2,1,1,1)$, $(1,2,1,2,1)$, $(1,2,1,1,2)$ zabranjeni, tvrđenje je dokazano. □

Stav 8.11 Graf $G = g_{11}(m,n,k,\ell,p)$ $(k \leq \ell)$ pripada klasi $E_1(2.5)$ ako i samo ako je $(m,n,k,\ell,p) = (1,1,1,1,1)$.

<u>Dokaz</u>. Pošto je odgovarajući graf zabranjen ako je bilo koji od parametara m,n,k,ℓ,p jednak dva, stav je dokazan. □

Stavovi 8.1–8.11 i Teorema 8.2 u potpunosti opisuju klasu $E_1(2.5)$.

IX. NEKI REZULTATI O (k,ℓ) - REDUKOVANOJ ENERGIJI GRAFA

U prethodnim poglavljima posmatrali smo neke vrste energija (sumu apsolutnih vrednosti svih sopstvenih vrednosti bez maksimalne $R_1(G)$, sumu apsolutnih vrednosti svih sopstvenih vrednosti bez minimalne $S_1(G)$, zatim sumu apsolutnih vrednosti svih sopstvenih vrednosti bez minimalne i maksimalne $T_1(G)$, i sumu svih pozitivnih sopstvenih vrednosti $S(G)$), i u potpunosti opisali određene klase grafova za pomenute vrste energija. U ovom poglavlju daćemo definiciju k - pozitivne redukovane energije, k - negativne redukovane energije i (k,ℓ) - redukovane energije, i dokazaćemo neka svojstva ovih energija koja uopštavaju rezultate dobijene u prethodnim poglavljima.

* * *

U ovom poglavlju takođe posmatramo konačne povezane grafove bez petlji i višestrukih grana. Spektar grafa G je skup $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ sopstvenih vrednosti 0-1 matrice susedstva pridružene grafu G.

Neka je $k > 0$ fiksirani prirodni broj ili nula. Sumu apsolutnih vrednosti sopstvenih vrednosti $|\lambda_1| + |\lambda_2| + \ldots + |\lambda_{n-k}|$ $(k < n)$ označimo sa $S_+^k(G)$ i nazovimo je k - pozitivna redukovana energija (ona sadrži bar jednu pozitivnu sopstvenu vrednost). Pošto je $|\lambda_1| \geq 1$, sledi da je $S_+^k(G) \geq 1$ za bilo koji povezani graf G. Za proizvoljnu realnu konstantu $a \geq 1$ i $k \in N_o = N \cup \{0\}$, posmatrajmo klasu grafova

$$E_+^k(a) = \left\{ G \mid S_+^k(G) \leq a \right\}.$$

Sada dokazujemo jednu važnu osobinu opšte klase $E_+^k(a)$.

Teorema 9.1 Za svaku realnu konstantu $a \geq 1$ i bilo koji fiksirani broj $k \in N_o$, skup $E_+^k(a)$ je konačan.

Dokaz. Neka je $a \geq 1$ proizvoljna konstanta i G proizvoljan graf reda n iz klase $E_+^k(G)$. Dalje, neka je k $(0 \leq k < n)$ fiksirana konstanta. Tada imamo

$$|\lambda_1| + |\lambda_2| + \ldots + |\lambda_{n-k}| \leq a \tag{9.1}$$

Osim toga neposredno dobijamo

$$2(n-1) \leq 2m = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\Big)^2 , \tag{9.2}$$

gde je m broj grana u grafu G. Iz relacija (9.1) i (9.2) sada imamo

$$\sqrt{2(n-1)} \leq \sum_{i=1}^{n-k} |\lambda_i| + \sum_{i=n-k+1}^{n} |\lambda_i| \leq a + \sum_{i=n-k+1}^{n} |\lambda_i| \leq \tag{9.3}$$

$$\leq a + k|\lambda_1| \leq (k+1)a.$$

Iz relacija (9.1) i (9.3) sledi da je $n \leq 1 + \dfrac{(k+1)^2 \cdot a^2}{2}$ odakle neposredno dobijamo tvrđenje. □

Ako stavimo da je $k = 1$, iz prethodnog stava dobijamo Teoremu 6.1 (str. 95-96). Takođe primetimo da Teorema 9.1 predstavlja generalizaciju Teoreme 2 u radu [21]. Zaista, za proizvoljnu konstantu $a \geq 1$, označimo sa $E_+(a)$ klasu svih grafova čija poluenergija (tj. suma svih pozitivnih sopstvenih vrednosti uključujući i njihove višestrukosti) nije veća od a. Tada, imamo sledeći rezultat.

Teorema 9.2 Za svaku realnu konstantu $a \geq 1$, skup $E_+(a)$ je konačan.

Dokaz. Za bilo koji realan broj $a \geq 1$, uzimajući $k = 0$, u Teoremi 9.1 sledi da je skup $E^{o}_{+}(2a)$ konačan. Iz uslova

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = 2 \sum_{\lambda_i > 0} |\lambda_i| ,$$

neposredno dobijamo da je $E_{+}(a) = E^{o}_{+}(2a)$, QED.

Dalje, za proizvoljan fiksirani broj $k > 0$ sumu apsolutnih sopstvenih vrednosti $|\lambda_{k+1}| + |\lambda_{k+2}| + \ldots + |\lambda_n|$ $(k < n)$ označimo sa $S^{k}_{-}(G)$ i nazovimo je k - negativnom redukovanom energijom (ona sadrži bar jednu negativnu sopstvenu vrednost). Pošto je $|\lambda_n| \geq 1$, neposredno sledi da je $S^{k}_{-}(G) \geq 1$ za bilo koji povezani graf G. Za prizvoljnu realnu konstantu $a \geq 1$ i $k \in N_o$ posmatraćemo klasu grafova

$$E^{k}_{-}(a) = \left\{ G \mid S^{k}_{-}(G) \leq a \right\} .$$

Dokazaćemo osnovno svojstvo klase $E^{k}_{-}(a)$.

Teorema 9.3 Za svaku realnu konstantu $a \geq 1$ i bilo koji fiksirani broj $k \in N_o$, skup $E^{k}_{-}(a)$ je konačan.

Dokaz. Neka je $a \geq 1$ bilo koji realan broj i G proizvoljan graf reda n iz klase $E^{k}_{-}(G)$. Dalje, neka je k $(0 \leq k < n)$ fiksirana konstanta. Tada važi

$$(9.4) \qquad |\lambda_{k+1}| + |\lambda_{k+2}| + \ldots + |\lambda_n| \leq a$$

Označimo $I = \left\{ i \mid i < k+1,\ \lambda_i < 0 \right\}$. Iz relacije (9.4) i relacije

$$a \geq \sum_{i=k+1}^{n} |\lambda_i| \geq \sum_{\lambda_i < 0} |\lambda_i| - \sum_{i \in I} |\lambda_i| ,$$

sledi

$$(9.5) \qquad \sum_{\lambda_i < 0} |\lambda_i| \leq a + \sum_{i \in I} |\lambda_i| \leq a + \sum_{i \in I} |\lambda_n| \leq$$
$$\leq a + k|\lambda_n| = (k+1)a .$$

S obzirom da je skup $E_+(a)$ konačan i $\sum_{\lambda_i < 0} |\lambda_i| = \sum_{\lambda_i > 0} |\lambda_i|$ na osnovu relacije (9.5) neposredno dobijamo tvrđenje.□

Posebno, ako stavimo da je $k = 1$, dobijamo Teoremu 7.1 (str. 103-104).

Dalje, neka su k,ℓ proizvoljni fiksirani prirodni brojevi takvi da je $k+\ell < n$. Sumu apsolutnih vrednosti sopstvenih vrednosti $|\lambda_{k+1}| + |\lambda_{k+2}| + + \ldots + |\lambda_{n-\ell}|$ označićemo sa $S_k^{\ell}(G)$ i nazvaćemo je (k,ℓ) - redukovanom energijom grafa. Za bilo koji realan broj $a > 0$ i parametre $k,\ell \in N$, posmatrajmo klasu grafova

$$E_k^{\ell}(a) = \left\{ G \mid S_k^{\ell}(G) \leq a \right\} .$$

S obzirom da kompletan bipartitan graf $K_{m,n}$ pripada klasi $E_k^{\ell}(a)$ za svako $m,n \in N$, zaključujemo da je klasa $E_k^{\ell}(a)$ beskonačna za svaku konstantu $a > 0$ i parametre $k,\ell \in N$. Međutim, kao što ćemo kasnije videti (k,ℓ) - redukovana energija imaće osobinu konačnosti na skupu svih kanoničkih grafova.

Za bilo koji realan broj $a > 0$ i parametre $k,\ell \in N$, posmatrajmo klasu kanoničkih grafova

$$\tilde{E}_k^{\ell}(a) = \left\{ G \mid S_k^{\ell}(G) \le a \right\}.$$

Ako je $k = \ell$, klase $S_k^k(a)$, $E_k^k(a)$, $\tilde{E}_k^k(a)$ ćemo respektivno označiti sa $S_k(a)$, $E_k(a)$, $\tilde{E}_k(a)$.

Sada dokazujemo osobinu konačnosti opšte klase $\tilde{E}_k(a)$ $(a > 0,\ k \in N)$. Dokaz se zasniva na Teoremi 8.1 ([19]) (str. 115).

Teorema 9.4 Za svaku realnu konstantu $a > 0$ i svako $k \in N$, skup $\tilde{E}_k(a)$ je konačan.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da postoji neka konstanta $a > 0$ i parametar $k \in N$ tako da je skup $\tilde{E}_k(a)$ beskonačan. Tada, na osnovu Teoreme 8.1, za svaki realan broj $M > 0$ postoji graf G tako da važi

$$(9.6) \qquad |\lambda_{k+1}| + |\lambda_{k+2}| + \dots + |\lambda_{n-k}| \le a ,$$

i G ima $p > M$ nenula sopstvenih vrednosti. Višestrukost nule grafa G je $q = n-p$. Pretpostavimo da je $\lambda_s > \lambda_{s+1} = \dots = \lambda_{s+q} = 0 > \lambda_{s+q+1}$.

Tada je odgovarajući karakteristični polinom grafa G

$$P_n(\lambda) = \lambda^q \, (\lambda^p + a_1\lambda^{p-1} + \dots + a_p) ,$$

gde je $|a_p| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_s \cdot |\lambda_{s+q+1}| \cdot \dots \cdot |\lambda_n|$.

Ne umanjujući opštost dokaza, možemo uzeti da je $q = 0$, odnosno $n = p$. Pretpostavimo da je n izabrano dovoljno veliko tako da je $\sqrt{n} \ge [a] + 6k$. Imamo da je $|\lambda_i| \le n-1$ za $i \in \{1,2,\dots,k\} \cup \{n-k+1, n-k+2,\dots,n\}$, a iz relacije (9.6) sledi $|\lambda_i| \le \sqrt{n}$ za $i = k+1, k+2, \dots, n-k$.

Označimo $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, i neka je r ukupan broj sopstvenih vrednosti λ_i, takvih da je $|\lambda_i| \le \varepsilon$ $(i = k+1,k+2,\dots,n-k)$. Lako je pokazati da je $r > [a] + 4k$. Zaista, u suprotnom slučaju postojalo bi najmanje $(n - (2k + r))$ sopstvenih vrednosti λ_i $(k+1 \le i \le n-k)$ tako da je $|\lambda_i| > \varepsilon$. Relacija (9.6) daje

$$[a] + 1 > a \ge \sum_{i=k+1}^{n-k} |\lambda_i| > \frac{n - (2k+r)}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} - \frac{[a]+6k}{\sqrt{n}} . \tag{9.7}$$

Pošto je $\sqrt{n} \ge [a] + 6k$, iz relacije (9.7) dobijamo $[a] + 1 > \sqrt{n} - 1$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom.

Dalje, neka je r_o ukupan broj sopstvenih vrednosti λ_i $(i = k+1,k+2,\dots,n-k)$ takvih da je $|\lambda_i| > 1$. Korišćenjem relacije (9.6) imamo

$$[a] + 1 > a \ge \sum_{i=k+1}^{n-k} |\lambda_i| \ge \sum_{i=1}^{r_o} 1 = r_o .$$

Odavde sledi da je $r_o \le [a]$.

Sada konačno imamo

$$|a_n| = \left(|\lambda_1| \cdot \ldots \cdot |\lambda_k|\right)\left(|\lambda_{k+1}| \cdot \ldots \cdot |\lambda_{n-k}|\right)\left(|\lambda_{n-k+1}| \cdot \ldots \cdot |\lambda_n|\right) \le$$

$$\le (n-1)^{2k} \underbrace{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \ldots \cdot \sqrt{n}}_{r_o} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}}_{r} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \ldots 1}_{n-(r+r_o+2k)} < 1,$$

što je kontradikcija pošto $|a_n| \in N$ $(a_n \ne 0)$. Prema tome, skup $\tilde{E}_k(a)$ je konačan za svako $a > 0$ i $k \in N$. □

Iz prethodne teoreme posebno uzimanjem $k = 1$, dobijamo Teoremu 8.2 (str. 115-116).

Na osnovu Teoreme 9.4 neposredno dobijamo sledeći rezultat koji se odnosi na opštu klasu kanoničkih grafova $\tilde{E}_k^{\ell}(a)$.

Teorema 9.5 Za svaku realnu konstantu $a > 0$ i $k,\ell \in N$, skup $\tilde{E}_k^{\ell}(a)$ je konačan.

Dokaz. Ne umanjujući opštost dokaza pretpostavićemo da je $k \geq \ell$. Neka je G proizvoljan graf iz skupa $\tilde{E}_k^{\ell}(a)$. Tada iz relacije

$$\sum_{i=k+1}^{n-k} |\lambda_i| \leq \sum_{i=k+1}^{n-\ell} |\lambda_i| \leq a$$

sledi da je $G \in \tilde{E}_k(a)$, tj. $\tilde{E}_k^{\ell}(a) \subseteq \tilde{E}_k(a)$. Kako je skup $\tilde{E}_k(a)$ konačan za svaku konstantu $a > 0$ i $k \in N$, sledi i da je skup $\tilde{E}_k^{\ell}(a)$ takođe konačan za svako $a > 0$ i $k,\ell \in N$. □

X. ISPITIVANJE REALNOSTI NULA NEKIH GRAFOVSKIH POLINOMA

U nekim problemima teorijske hemije bitno je da su sve nule grafovskog polinoma $\beta(G,C,x)$ realni brojevi. Smatra se da je ovaj uslov ispunjen za sve grafove G i sve njihove cikluse C, međutim opšti matematički dokaz ovog rezultata još nije nađen. Nedavno je N. Mizoguchi u radu [13] dokazao da gornji uslov važi za monociklične i biciklične grafove. Takođe su I. Gutman, M. Petrović, N. Mizoguchi i M. Lepović u radu [12] dokazali realnost nula polinoma $\beta(G,C,x)$ za pojedine klase grafova koje zavise od nekoliko proizvoljnih parametara.

U ovom poglavlju uopštavamo osnovni rezultat iz nedavno objavljenog rada [12].

* * *

Za proizvoljan graf G reda n polinom sparivanja (matching polynomial) se definiše pomoću relacije

$$\alpha(G,x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, m(G,k)\cdot x^{n-2k}$$

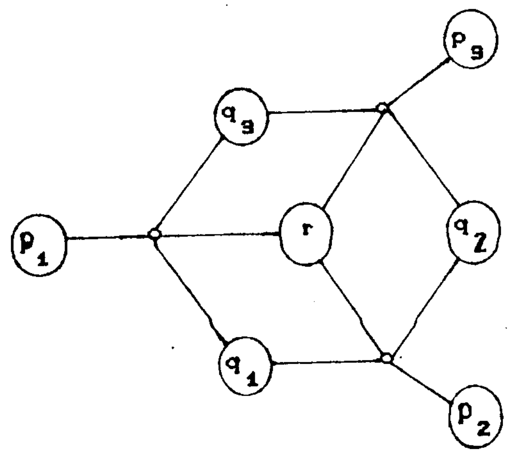
gde je $m(G,k)$ broj načina na koji se mogu izabrati k nezavisnih grana u grafu G. Po definiciji uzima se da je $m(G,0) = 1$. Poznato je da za bilo koji graf G, odgovarajući polinom sparivanja $\alpha(G,x)$ ima realne nule.

Grafovski polinom $\beta(G,C,x)$ definiše se na sledeći način

$$\beta(G,C,x) = \alpha(G,x) - 2\alpha(G\setminus C,x) ,$$

gde je $G\setminus C$ podgraf grafa G koji je generisan brisanjem svih čvorova koji pripadaju ciklusu C.

U ovom poglavlju posmatraćemo klasu grafova koji imaju najviše tri nezavisne grane oblika prikazanog na Slici 10.1.

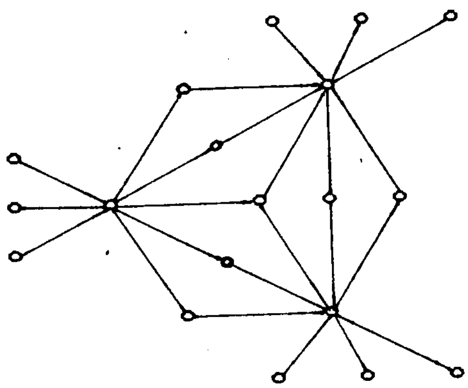


$$G = G(p_1,p_2,p_3,q_1,q_2,q_3,r)$$

Slika 10.1

Na gornjem dijagramu veliki krugovi predstavljaju skupove uzajamno nepovezanih čvorova. Primera radi, graf G sa vrednostima parametara $p_i = 3$, $q_i = 2$, $r = 1$ $(i = 1,2,3)$ predstavljen je na Slici 10.2.

$G(3,3,3,2,2,2,1) =$



Slika 10.2

Za graf $G = G(p_1,p_2,p_3,q_1,q_2,q_3,r)$ posmatraćemo grafovski polinom

$$\beta(G,C^*,x) = \alpha(G,x) - 2\alpha(G\backslash C^*,x) ,$$

gde je C^* proizvoljan ciklus grafa G sa tačno 6 čvorova $(p_i \geq 0$, $q_i \geq 1$, $r \geq 0)$, i ujedno ćemo dokazati da navedeni polinom ima realne nule za bilo koju kombinaciju parametara p_i, q_i, r $(i = 1,2,3)$.

Na taj način uopštavamo sličan rezultat dokazan u radu [12], gde su posmatrani grafovi oblika $G = G(p,p,p,q,q,q,r)$ $(p \geq 0,\ q \geq 1,\ r = 0)$.

U daljem izlaganju, zbog konciznijeg kodiranja matematičkih relacija, označićemo vektor $(p_1,p_2,p_3,q_1,q_2,q_3,r)$ sa (p_i,q_i,r), odgovarajuće polinome $\alpha(G,x)$, $\beta(G,C^*,x)$ respektivno sa $\alpha(x) = \alpha(p_i,q_i,r)(x)$, $\beta(x) = \beta(p_i,q_i,r)(x)$, i koeficijente $m(G,k)$ grafa $G = G(p_i,q_i,r)$ sa $m_k = m_k(p_i,q_i,r)$.

Za graf G na Slici 10.1 polinom sparivanja $\alpha(x)$ je oblika

$$\alpha(x) = x^n - m_1x^{n-2} + m_2x^{n-4} - m_3x^{n-6} ,$$

gde je

$$m_1 = p_1 + p_2 + p_3 + 2q_1 + 2q_2 + 2q_3 + 3r , \tag{10.1}$$

$$\begin{aligned} m_2 = {} & p_1p_2 + p_1p_3 + p_1q_1 + 2p_1q_2 + p_1q_3 + 2p_1r + p_2p_3 + \\ & p_2q_1 + p_2q_2 + 2p_2q_3 + 2p_2r + 2p_3q_1 + p_3q_2 + p_3q_3 + \\ & 2p_3r + q_1^2 - q_1 + 3q_1q_2 + 3q_1q_3 + 4q_1r + q_2^2 - q_2 + \\ & 3q_2q_3 + 4q_2r + q_3^2 - q_3 + 4q_3r + 3r^2 - 3r , \end{aligned} \tag{10.2}$$

$$\begin{aligned} m_3 = {} & p_1p_2p_3 + p_1p_2q_2 + p_1p_2q_3 + p_1p_2r + p_1p_3q_1 + p_1p_3q_2 + \\ & p_1p_3r + p_1q_1q_2 + p_1q_1q_3 + p_1q_1r + p_1q_2(q_2 - 1) + \\ & p_1q_2q_3 + 2p_1q_2r + p_1q_3r + p_1r(r - 1) + p_2p_3q_1 + \\ & p_2p_3q_3 + p_2p_3r + p_2q_1q_2 + p_2q_1q_3 + p_2q_1r + p_2q_2q_3 + \\ & p_2q_2r + p_2q_3(q_3 - 1) + 2p_2q_3r + p_2r(r - 1) + \\ & p_3q_1(q_1 - 1) + p_3q_1q_2 + p_3q_1q_3 + 2p_3q_1r + p_3q_2q_3 + \\ & p_3q_2r + p_3q_3r + p_3r(r - 1) + q_1(q_1 - 1)q_2 + \\ & q_1(q_1 - 1)q_3 + q_1(q_1 - 1)r + q_1q_2(q_2 - 1) + \\ & 2q_1q_2q_3 + 3q_1q_2r + q_1q_3(q_3 - 1) + 3q_1q_3r + \end{aligned} \tag{10.3}$$

$$2q_1r(r-1) + q_2(q_2-1)q_3 + q_2(q_2-1)r \quad +$$
$$q_2q_3(q_3-1) + 3q_2q_3r + 2q_2r(r-1) + q_3(q_3-1)r \quad +$$
$$2q_3r(r-1) + r(r-1)(r-2) \quad ,$$

i $m_k = 0$ za $k \geq 4$. Polinom sparivanja podgrafa $G\backslash C^*$ ($G\backslash C^*$ je kompletno nepovezan graf sa n-6 čvorova) je $\alpha(G\backslash C^*,x) = x^{n-6}$. Prema tome, odgovarajući polinom $\beta(G,C^*,x)$ je oblika

$$\beta(x) = x^{n-6}\,(x^6 - m_1x^4 + m_2x^2 - m_3 - 2) \; .$$

Iz prethodne relacije neposredno sledi da se ispitivanje realnosti nula polinoma $\beta(x)$ svodi na utvrđivanje egzistencije realnih nula polinoma $\beta_o(x) = \alpha_o(x) - 2$, gde je

$$\alpha_o(x) = x^3 - m_1x^2 + m_2x - m_3 \; .$$

Primetimo da, ukoliko polinom $\beta_o(x)$ ima realne nule, na osnovu Descartes-ovog pravila o promeni znaka, nule polinoma $\beta_o(x)$ moraju biti pozitivne.

Sada ćemo dokazati jedno svojstvo koje se odnosi na opštu klasu grafova $G(p_i,q_i,r)$.

Stav 10.1 Za svako $x,s \in R^1$ i za bilo koju kombinaciju parametara p_i,q_i,r $(i = 1,2,3)$, važe sledeće relacije

(i) $\qquad \alpha_o(p_i+s,q_i,r)(x+s) = \alpha_o(p_i,q_i,r)(x)$,

(ii) $\qquad \beta_o(p_i+s,q_i,r)(x+s) = \beta_o(p_i,q_i,r)(x)$.

<u>Dokaz</u>. Na osnovu definicije polinoma $\alpha_o(x)$, imamo da je

$$\alpha_o(p_i+s,q_i,r)(x) = x^3 - m_1^sx^2 + m_2^sx - m_3^s \; , \tag{10.4}$$

gde je $m_k^s = m_k(p_i+s,q_i,r)$ $(k = 1,2,3)$. Uzimajući u obzir relacije (10.1), (10.2), (10.3), lako je videti da je

(10.5) $$m_1^s = 3s + m_1 ,$$

(10.6) $$m_2^s = 3s^2 + 2m_1 s + m_2 ,$$

(10.7) $$m_3^s = s^3 + m_1 s^2 + m_2 s + m_3 .$$

Zamenom m_k^s $(k = 1,2,3)$ u relaciji (10.4) neposredno dobijamo dokaz tvrđenja (i). Relacija (ii) dokazuje se na potpuno isti način. □

Označimo sa x_j, y_j respektivno nule polinoma $\alpha_o(p_i,q_i,r)$, $\beta_o(p_i,q_i,r)$ $(j = 1,2,3)$. Na osnovu relacija (i),(ii) iz Stava 10.1 neposredno sledi da su $x_j + s$, $y_j + s$, $(j = 1,2,3)$ respektivno nule polinoma $\alpha_o(p_i+s,q_i,r)$, $\beta_o(p_i+s,q_i,r)$.

Teorema 10.1 Za bilo koju kombinaciju parametara p_i,q_i,r $(i=1,2,3)$ nule polinoma $\beta_o(x) = \alpha_o(x) - 2$ su realne i nenegativne.

Dokaz. Neka je G proizvoljan graf iz klase $G(p_i,q_i,r)$, i neka je $s \in R^1$ proizvoljna konstanta. Tada se polinom $\alpha_o(p_i+s,q_i,r)$ može predstaviti realcijom (10.4). Uzimajući u obzir relaciju (10.5), odredimo $s_o \in R^1$ konstantu za koju je $m_1^{s_o} = 0$. Na osnovu relacija (10.6) i (10.7) dobijamo da je

(10.8) $$m_2^{s_o} = \frac{-m_1^2}{3} + m_2 ,$$

(10.9) $$m_3^{s_o} = \frac{2m_1^3}{27} - \frac{m_1 m_2}{3} + m_3 .$$

Uz uslov da je $m_1^{s_o} = 0$, polinomi $\alpha_o(x)$, $\beta_o(x)$ se svode respektivno na kanonički oblik polinoma $\alpha^o(x) = \alpha^o(p_i,q_i,r)(x)$, $\beta^o(x) = \beta^o(p_i,q_i,r)(x)$. Time se problem određivanja nula polinoma $\alpha_o(x)$, $\beta_o(x)$ reducira na problem određivanja realnih nula njihovih odgovarajućih kanoničkih polinoma. Iz relacije (10.4), neposredno sledi da su navedeni kanonički polinomi predstavljeni u obliku

$$\alpha^{o}(p_i,q_i,r)(x) = x^3 + m_2^{s_o}x^2 - m_3^{s_o} ,$$

$$\beta^{o}(p_i,q_i,r)(x) = \alpha^{o}(p_i,q_i,r)(x) - 2 .$$

Definišimo parametarske funkcije $A(p_i,q_i,r)= m_2^{s_o}$ i $B(p_i,q_i,r)= m_3^{s_o}$. Na osnovu relacija (10.8),(10.9),(10.1),(10.2) i (10.3) lako je pokazati da važe sledeće dve jednakosti

$$\begin{aligned}
-3A(p_i,q_i,r) = {} & p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3 + p_1q_1 - \\
& -2p_1q_2 + p_1q_3 + p_2q_1 + p_2q_2 - 2p_2q_3 - 2p_3q_1 + \\
& p_3q_2 + p_3q_3 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - q_1q_2 - q_1q_3 - \\
& -q_2q_3 + 3q_1 + 3q_2 + 3q_3 + 9r ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
27B(p_i,q_i,r) = {} & 2p_1^3 - 3p_1^2p_2 - 3p_1^2p_3 + 3p_1^2q_1 - 6p_1^2q_2 + 3p_1^2q_3 - \\
& -3p_1p_2^2 + 12p_1p_2p_3 - 12p_1p_2q_1 + 6p_1p_2q_2 + 6p_1p_2q_3 - \\
& -3p_1p_3^2 + 6p_1p_3q_1 + 6p_1p_3q_2 - 12p_1p_3q_3 - 3p_1q_1^2 - \\
& -6p_1q_1q_2 + 12p_1q_1q_3 + 9p_1q_1 + 6p_1q_2^2 - 6p_1q_2q_3 - \\
& -18p_1q_2 - 3p_1q_3^2 + 9p_1q_3 + 2p_2^3 - 3p_2^2p_3 + 3p_2^2q_1 + \\
& 3p_2^2q_2 - 6p_2^2q_3 - 3p_2p_3^2 + 6p_2p_3q_1 - 12p_2p_3q_2 + \\
& 6p_2p_3q_3 - 3p_2q_1^2 + 12p_2q_1q_2 - 6p_2q_1q_3 + 9p_2q_1 - \\
& -3p_2q_2^2 - 6p_2q_2q_3 + 9p_2q_2 + 6p_2q_3^2 - 18p_2q_3 + 2p_3^3 - \\
& -6p_3^2q_1 + 3p_3^2q_2 + 3p_3^2q_3 + 6p_3q_1^2 - 6p_3q_1q_2 - \\
& -6p_3q_1q_3 - 18p_3q_1 - 3p_3q_2^2 + 12p_3q_2q_3 + 9p_3q_2 - \\
& -3p_3q_3^2 + 9p_3q_3 - 2q_1^3 + 3q_1^2q_2 + 3q_1^2q_3 + 18q_1^2 + \\
& 3q_1q_2^2 - 12q_1q_2q_3 - 18q_1q_2 + 3q_1q_3^2 - 18q_1q_3 - \\
& -2q_2^3 + 3q_2^2q_3 + 18q_2^2 + 3q_2q_3^2 - 18q_2q_3 - 2q_3^3 + \\
& 18q_3^2 + 54r.
\end{aligned}$$

Iz poslednje dve relacije, neposredno dobijamo da je

$$A(p_i+s,q_i+t,r+u) = A(p_i,q_i,r) - 3(t+u) , \tag{10.10}$$

$$B(p_i+s,q_i+t,r+u) = B(p_i,q_i,r) + 2u. \tag{10.11}$$

Posmatrajmo sada polinom $\alpha_o(x) = \alpha_o(p_i,q_i-1,r+1)(x)$. Tada je njegov odgovarajući kanonički polinom

$$\alpha^o(p_i,q_i-1,r+1)(x) = x^3 + \bar{m}_2^{s_o}x^2 - \bar{m}_3^{s_o} ,$$

gde je $\bar{m}_2^{s_o} = A(p_i,q_i-1,r+1)$ i $\bar{m}_3^{s_o} = B(p_i,q_i-1,r+1)$. Na osnovu relacija (10.10) i (10.11) neposredno imamo da je $\bar{m}_2^{s_o} = m_2^{s_o}$, $\bar{m}_3^{s_o} = m_3^{s_o} + 2$. Iz poslednje relacije neposredno sledi da je

$$\alpha^o(p_i,q_i-1,r+1)(x) = \beta^o(p_i,q_i,r)(x) . \tag{10.12}$$

S obzirom da polinom $\alpha^o(p_i,q_i,r)(x)$ ima realne nule za bilo koju kombinaciju parametara $p_i \geq 0$, $q_i \geq 0, r \geq 0$ $(i = 1,2,3)$, i na osnovu relacije (10.12) sledi da i polinom $\beta^o(p_i,q_i,r)$ $(p_i \geq 0,\ q_i \geq 1,\ r \geq 0)$ takođe ima realne nule $(i = 1,2,3)$. Iz relacije (ii) neposredno sledi da i polinom $\beta_o(p_i,q_i,r)(x)$ ima realne nule za bilo koju kombinaciju parametara p_i,q_i,r. □

Označimo sa O_s kompletno nepovezan graf sa s čvorova. Na osnovu Teoreme 10.1 imamo sledeći rezultat.

Korolar 10.1 Za bilo koju kombinaciju parametara p_i,q_i,r $(i = 1,2,3)$ važe sledeće relacije

(i) $\beta_o(p_i,q_i,r)(x) = \alpha_o(p_i+1,q_i-1,r+1)(x)$,

(ii) $\beta((G(p_i,q_i,r) \cup O_1),C^*,x) = \alpha(G(p_i+1,q_i-1,r+1),x)$.

Neka je $P(G(p_i,q_i,r),x) = |xI - A|$ karakteristični polinom grafa G, i neka je $A = [a_{ij}]$ 0-1 matrica susedstva od G. Stavimo da je $q = \min \{q_1,q_2,q_3\}$. Na osnovu ovih pretpostvki neposredno dobijamo sledeće tvrđenje.

Stav 10.2 Za bilo koju kombinaciju parametara p_i, q_i, r $(i = 1,2,3)$ i za $s \in \{1,2,\dots,q\}$, graf $G(p_i,q_i,r) \cup O_s$ je kospektralan sa grafom $G(p_i+s,q_i-s,r+s)$.

Dokaz. Metodom koja je opisana u Prilogu A (str.134-159) lako se pokazuje da je karakteristični polinom grafa $G(p_i,q_i,r)$

$$P(G(p_i,q_i,r),x) = x^{n-6}(x^6 - a_1x^4 + a_2x^2 - a_3),$$

gde je

$$a_1 = p_1 + p_2 + p_3 + 2q_1 + 2q_2 + 2q_3 + 3r,$$

$$\begin{aligned} a_2 = {} & p_1p_2 + p_1p_3 + p_1q_1 + 2p_1q_2 + p_1q_3 + 2p_1r + p_2p_3 + \\ & p_2q_1 + p_2q_2 + 2p_2q_3 + 2p_2r + 2p_3q_1 + p_3q_2 + p_3q_3 + \\ & 2p_3r + 3q_1q_2 + 3q_1q_3 + 2q_1r + 3q_2q_3 + 2q_2r + 2q_3r, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 = {} & p_1p_2p_3 + p_1p_2q_2 + p_1p_2q_3 + p_1p_2r + p_1p_3q_1 + p_1p_3q_2 + \\ & p_1p_3r + p_1q_1q_2 + p_1q_1q_3 + p_1q_1r + p_1q_2q_3 + p_1q_3r + \\ & p_2p_3q_1 + p_2p_3q_3 + p_2p_3r + p_2q_1q_2 + p_2q_1q_3 + p_2q_1r + \\ & p_2q_3q_3 + p_2q_2r + p_3q_1q_2 + p_3q_1q_3 + p_3q_2q_3 + p_3q_2r + \\ & p_3q_3r + 4q_1q_2q_3 + q_1q_2r + q_1q_3r + q_2q_3r. \end{aligned}$$

Ako stavimo da je $a_k = a_k(p_i,q_i,r)$, lako se proverava da je $a_k(p_i+s,q_i-s,r+s) = a_k(p_i,q_i,r)$ $(k = 1,2,3)$, odakle neposredno dobijamo dokaz tvrđenja. □

PRILOG A

U ovom prilogu dajemo spisak karakterističnih polinoma svih grafova čiji je odgovarajući kanonički graf reda najviše 6. Osim toga, u najkraćim crtama obrazložićemo metodu generisanja pomenutih karakterističnih polinoma, koja se oslanja na rezultate u radu [18] A. Torgaševa.

U prilogu A ujedno su dati svi programi za određivanje karakterističnih polinoma grafova čiji je kanonički graf reda 6.

* * *

Neka su N_1, N_2, ..., N_k karakteristični skupovi grafa G, i neka je $|N_i| = n_i$. Tada je $G = g(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, gde je g odgovarajući kanonički graf grafa G.

U radu [18] A. Torgašev je dokazao da su sopstvene vrednosti grafa G određene jednačinom

$$\det\left(b_{ij} - \frac{\lambda_i}{n_i}\cdot\delta_{ij}\right) = 0\ , \tag{11.1}$$

gde je $B = [b_{ij}]$ 0-1 matrica susedstva kanoničkog grafa g, a δ_{ij} Kronecker-ov δ - simbol.

Karakteristični polinom grafa G sa odgovarajućim kanoničkim grafom g_i predstavimo u obliku

$$P_i(\lambda) = \lambda^{n-r}\cdot P_i\ ,$$

gde je P_i polinom čiji su koreni nenula sopstvene vrednosti grafa G. Koeficijente polinoma P_i možemo da predstavimo u obliku

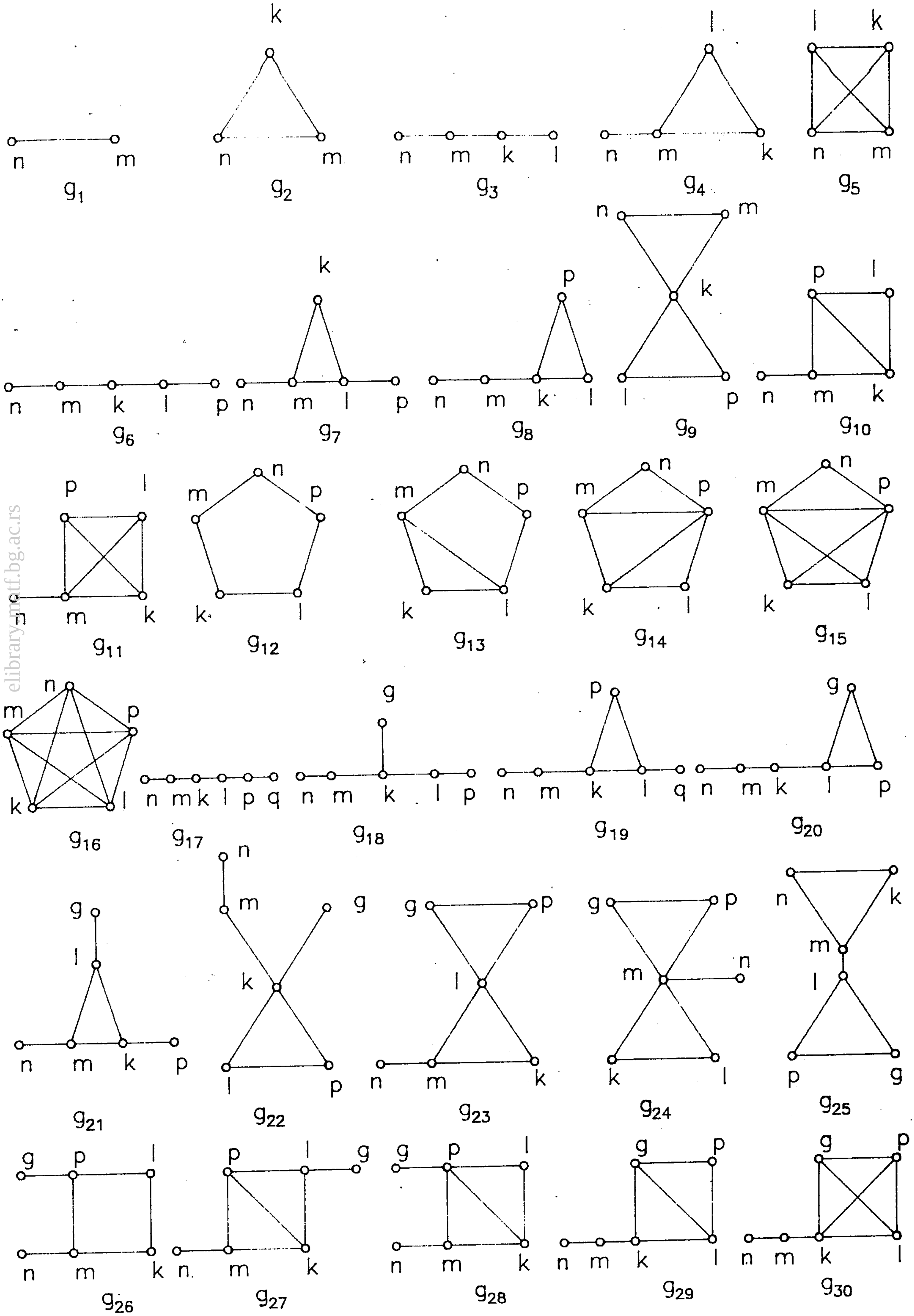
$$a_j = c_{o,j} + \sum_{m=1}^{2^{k-1}} c_{m,j} \cdot n_1^{\ell_{1,j}} \cdot n_2^{\ell_{2,j}} \cdot \ldots \cdot n_k^{\ell_{k,j}} , \tag{11.2}$$

gde je na osnovu relacije (11.1) $0 \leq \ell_{i,j} \leq 1$ i $\sum_{i=1}^{k} \ell_{i,j} \geq 1$.

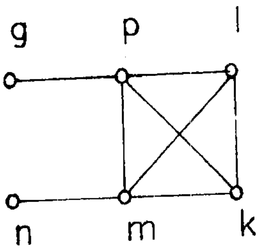
Iz relacije (11.2) vidimo da se koeficijenti odgovarajućeg karakterističnog polinoma određuju rešavanjem sistema od 2^k jednačina.

FORTRAN-ski program (str. 156-159) za određenu kombinaciju parametara $n_1, n_2, \ldots, n_k$ $(k = 6)$ daje koeficijente odgovarajućeg karakterističnog polinoma P_i.

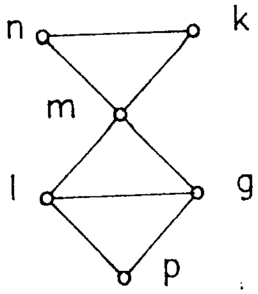
FORTRAN-ski program (str. 160-163) rešava sistem (11.2) i za određenu konstantu $c_{m,j}$ određuje odgovarajuću kombinaciju parametara $n_1, n_2, \ldots, n_k$ $(k = 6)$.


n m
g_1
k n m
g_2
n m k l
g_3
l n m k
g_4
l k n m
g_5
n m k l p
g_6
k n m l p
g_7
p n m k l
g_8
n m k l p
g_9
p l n m k
g_{10}
p l n m k
g_{11}
n m p k l
g_{12}
n m p k l
g_{13}
n m p k l
g_{14}
n m p k l
g_{15}
n m p k l
g_{16}
n m k l p q
g_{17}
g n m k l p
g_{18}
p n m k l q
g_{19}
g n m k l p
g_{20}
g l n m k p
g_{21}
n m g k l p
g_{22}
g p l n m k
g_{23}
g p m n k l
g_{24}
n k m l p g
g_{25}
g p l n m k
g_{26}
p l g n m k
g_{27}
g p l n m k
g_{28}
g p n m k l
g_{29}
g p n m k l
g_{30}

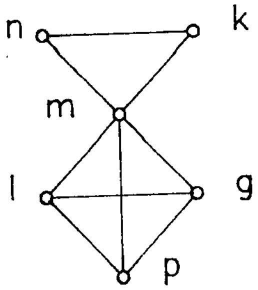
LISTA 11.1



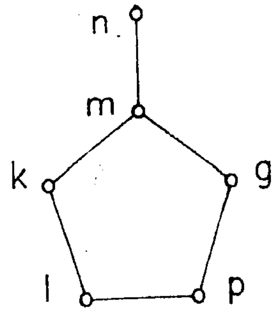
g_{31}



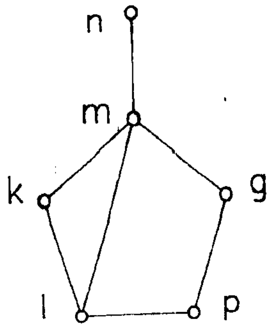
g_{32}



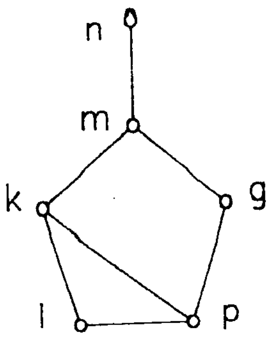
g_{33}



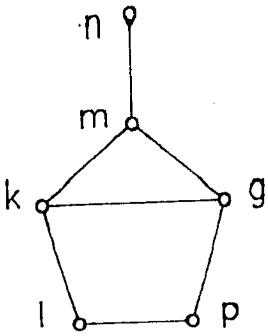
g_{34}



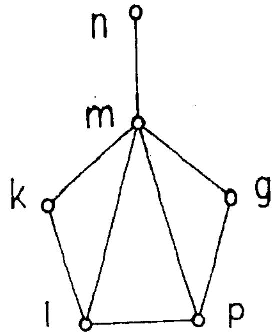
g_{35}



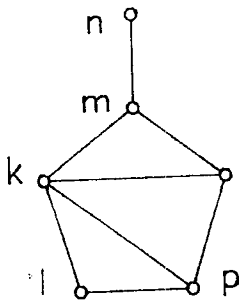
g_{36}



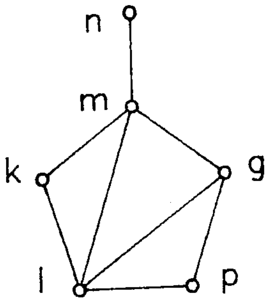
g_{37}



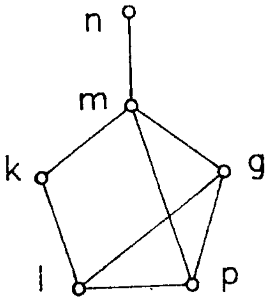
g_{38}



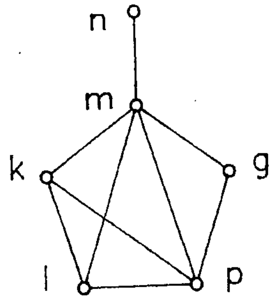
g_{39}



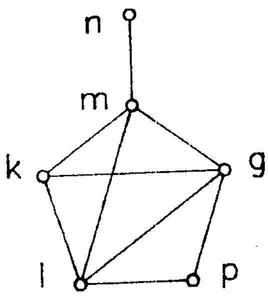
g_{40}



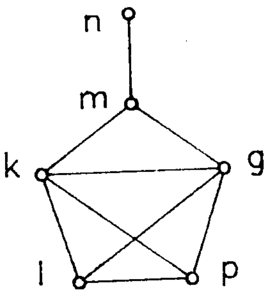
g_{41}



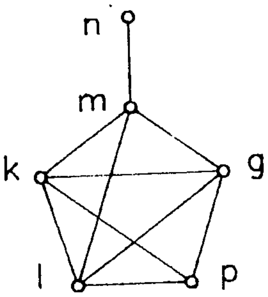
g_{42}



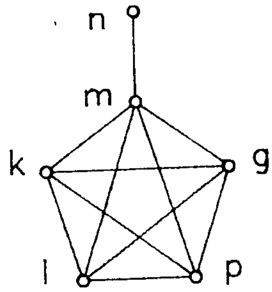
g_{43}



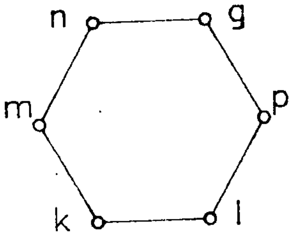
g_{44}



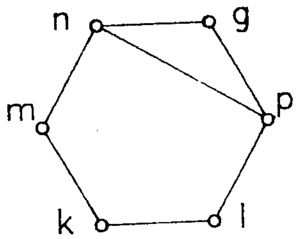
g_{45}



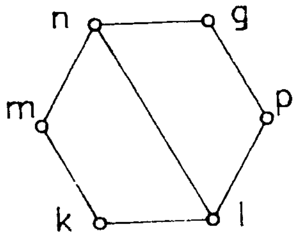
g_{46}



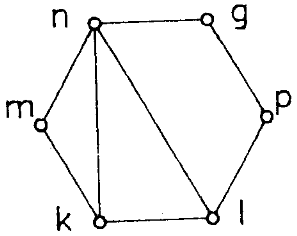
g_{47}



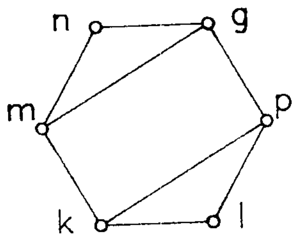
g_{48}



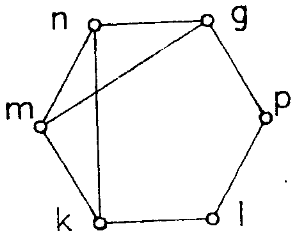
g_{49}



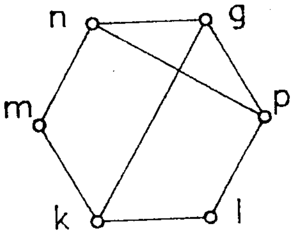
g_{50}



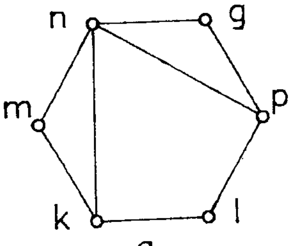
g_{51}



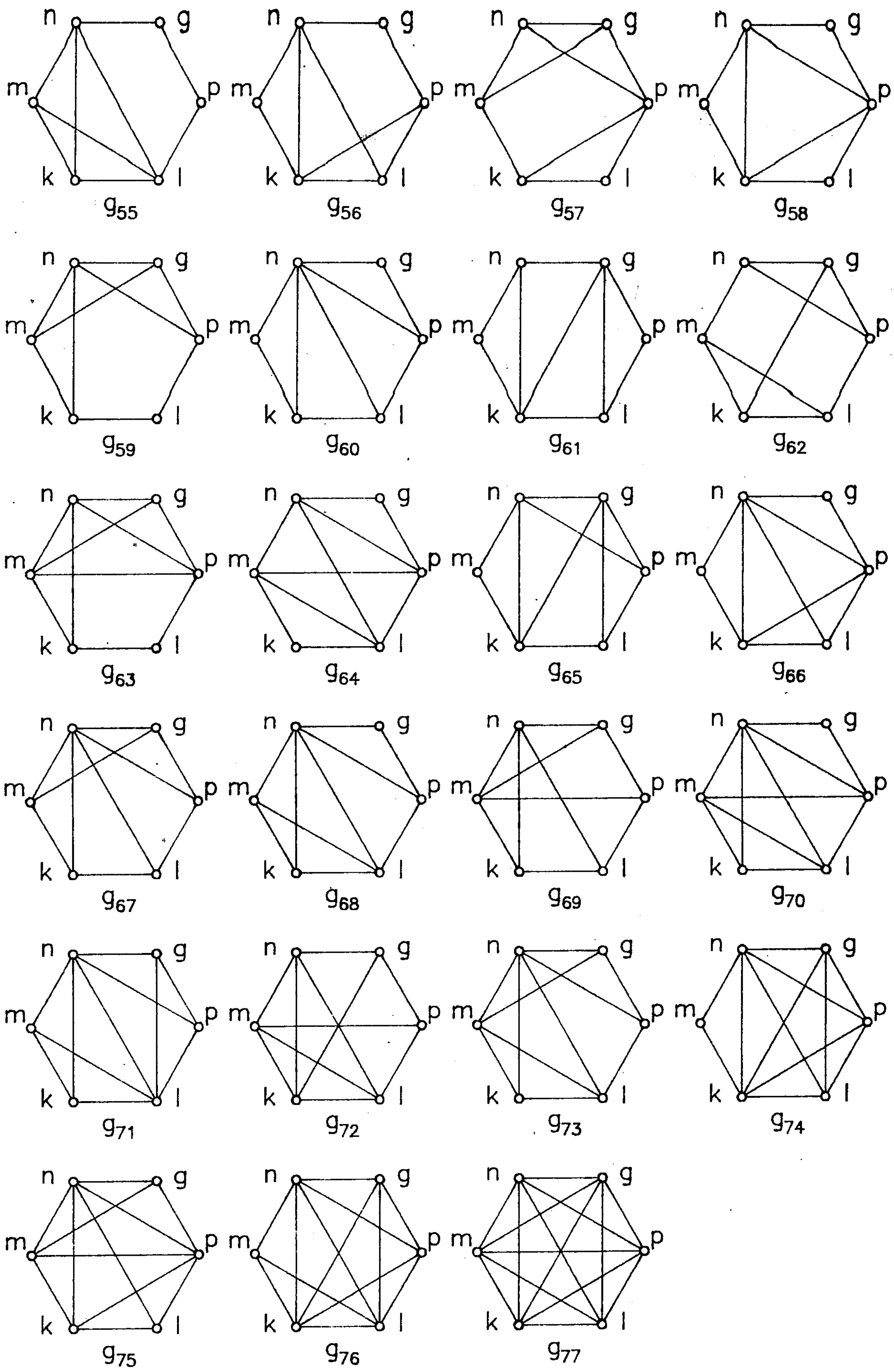
g_{52}



g_{53}



g_{54}


g_{55} g_{56} g_{57} g_{58}
g_{59} g_{60} g_{61} g_{62}
g_{63} g_{64} g_{65} g_{66}
g_{67} g_{68} g_{69} g_{70}
g_{71} g_{72} g_{73} g_{74}
g_{75} g_{76} g_{77}
n g p l k m

LISTA 11.1

$P_1 = \lambda^2 - nm.$

$P_2 = \lambda^3 - (nm + nk + mk)\lambda - 2nmk.$

$P_3 = \lambda^4 - (nm + mk + k\ell)\lambda^2 + nmk\ell.$

$P_4 = \lambda^4 - (nm + mk + m\ell + k\ell)\lambda^2 - 2mk\ell\lambda + nmk\ell.$

$P_5 = \lambda^4 - (nm + nk + n\ell + mk + m\ell + k\ell)\lambda^2 +$
$-2(nmk + nm\ell + nk\ell + mk\ell)\lambda - 3nmk\ell.$

$P_6 = \lambda^4 - (nm + mk + k\ell + \ell p)\lambda^2 + nmk\ell + nm\ell p + mk\ell p.$

$P_7 = \lambda^4 - (nm + mk + m\ell + k\ell + \ell p)\lambda^2 - 2mk\ell\lambda +$
$nmk\ell + nm\ell p + mk\ell p.$

$P_8 = \lambda^5 - (nm + mk + k\ell + kp + \ell p)\lambda^3 - 2k\ell p\lambda^2 +$
$(nmk\ell + nmkp + nm\ell p + mk\ell p)\lambda + 2nmk\ell p.$

$P_9 = \lambda^5 - (nm + nk + mk + k\ell + kp + \ell p)\lambda^3 - 2(nmk + k\ell p)\lambda^2 +$
$(nmk\ell + nmkp + nm\ell p + nk\ell p + mk\ell p)\lambda + 4nmk\ell p.$

$P_{10} = \lambda^5 - (nm + mk + mp + k\ell + kp + \ell p)\lambda^3 - 2(mkp + k\ell p)\lambda^2 +$
$(nmk\ell + nmkp + nm\ell p)\lambda + 2nmk\ell p.$

$P_{11} = \lambda^5 - (nm + mk + m\ell + mp + k\ell + kp + \ell p)\lambda^3 +$
$-2(mk\ell + mkp + m\ell p + k\ell p)\lambda^2 +$
$(nmk\ell + nmkp + nm\ell p - 3mk\ell p)\lambda + 2nmk\ell p.$

$P_{12} = \lambda^5 - (nm + np + mk + k\ell + \ell p)\lambda^3 +$
$(nmk\ell + nmkp + nm\ell p + nk\ell p + mk\ell p)\lambda - 2nmk\ell p.$

$P_{13} = \lambda^4 - (nm + np + mk + m\ell + k\ell + \ell p)\lambda^2 - 2mk\ell\lambda +$
$nmk\ell + nmkp + nk\ell p + mk\ell p.$

$$P_{14} = \lambda^5 - (nm + np + mk + mp + k\ell + kp + \ell p)\lambda^3 +$$
$$-2(nmp + mkp + k\ell p)\lambda^2 + (nmk + nm\ell p + nk\ell p)\lambda +$$
$$2nmk\ell p.$$

$$P_{15} = \lambda^5 - (nm + np + mk + m\ell + mp + k\ell + kp + \ell p)\lambda^3 +$$
$$-2(nmp + mk\ell + mkp + m\ell p + k\ell p)\lambda^2 +$$
$$(nmk + nk\ell p - 3mk\ell p)\lambda + 2nmk\ell p.$$

$$P_{16} = \lambda^5 - (nm + nk + n\ell + np + mk + m\ell + mp + k\ell + kp + \ell p)\lambda^3 +$$
$$-2(nmk + nm\ell + nmp + nk\ell + nkp + n\ell p + mk\ell + mkp +$$
$$m\ell p + k\ell p)\lambda^2 - 3(nmk\ell + nmkp + nm\ell p + nk\ell p +$$
$$mk\ell p)\lambda - 4nmk\ell p.$$

$$P_{17} = \lambda^6 - (nm + mk + k\ell + \ell p + pq)\lambda^4 +$$
$$(nmk\ell + nm\ell p + nmpq + mk\ell p + mkpq + k\ell pq)\lambda^2 - nmk\ell pq.$$

$$P_{18} = \lambda^6 - (nm + mk + k\ell + kq + \ell p)\lambda^4 +$$
$$(nmk\ell + nmkq + nm\ell p + mk\ell p + k\ell pq)\lambda^2 - nmk\ell pq.$$

$$P_{19} = \lambda^6 - (nm + mk + k\ell + kp + \ell p + \ell q)\lambda^4 - 2k\ell p\lambda^3 +$$
$$(nmk\ell + nmkp + nm\ell p + nm\ell q + mk\ell p + mk\ell q + k\ell pq)\lambda^2 +$$
$$2nmk\ell p\lambda - nmk\ell pq.$$

$$P_{20} = \lambda^6 - (nm + mk + k\ell + \ell p + \ell q + pq)\lambda^4 - 2\ell pq\lambda^3 +$$
$$(nmk\ell + nm\ell p + nm\ell q + nmpq + mk\ell p + mk\ell q + mkpq +$$
$$k\ell pq)\lambda^2 + 2(nm\ell pq + mk\ell pq)\lambda - nmk\ell pq.$$

$$P_{21} = \lambda^6 - (nm + mk + m\ell + k\ell + kp + \ell q)\lambda^4 - 2mk\ell\lambda^3 +$$
$$(nmk\ell + nmkp + nm\ell q + mk\ell p + mk\ell q + k\ell pq)\lambda^2 - nmk\ell pq.$$

$$P_{22} = \lambda^6 - (nm + mk + k\ell + kp + kq + \ell p)\lambda^4 - 2k\ell p\lambda^3 +$$
$$(nmk\ell + nmkp + nmkq + nm\ell p + mk\ell p + k\ell pq)\lambda^2 +$$
$$2nmk\ell p\lambda - nmk\ell pq.$$

$$P_{23} = \lambda^6 - (nm + mk + m\ell + k\ell + \ell p + \ell q + pq)\lambda^4 + \\ -2(mk\ell + \ell pq)\lambda^3 + (nmk\ell + nm\ell p + nm\ell q + nmpq + mk\ell p + \\ mk\ell q + mkpq + m\ell pq + k\ell pq)\lambda^2 + (2nm\ell pq + 4mk\ell pq)\lambda + \\ - nmk\ell pq.$$

$$P_{24} = \lambda^6 - (nm + mk + m\ell + mp + mq + k\ell + pq)\lambda^4 + \\ -2(mk\ell + mpq)\lambda^3 + (nmk\ell + nmpq + mk\ell p + mk\ell q + mkpq + \\ m\ell pq + k\ell pq)\lambda^2 + 4mk\ell pq\lambda - nmk\ell pq.$$

$$P_{25} = \lambda^6 - (nm + nk + mk + m\ell + \ell p + \ell q + pq)\lambda^4 + \\ -2(nmk + \ell pq)\lambda^3 + (nmk\ell + nm\ell p + nm\ell q + nmpq + nk\ell p + \\ nk\ell q + nkpq + mk\ell p + mk\ell q + mkpq + m\ell pq)\lambda^2 + \\ 2(nmk\ell p + nmk\ell q + nmkpq + nm\ell pq + nk\ell pq + mk\ell pq)\lambda + \\ 3nmk\ell pq.$$

$$P_{26} = \lambda^6 - (nm + mk + mp + k\ell + \ell p + pq)\lambda^4 + \\ (nmk\ell + nm\ell p + nmpq + mkpq + k\ell pq)\lambda^2 - nmk\ell pq.$$

$$P_{27} = \lambda^6 - (nm + mk + mp + k\ell + kp + \ell p + \ell q)\lambda^4 + \\ -2(mkp + k\ell p)\lambda^3 + (nmk\ell + nmkp + nm\ell p + nm\ell q + mk\ell q + \\ m\ell pq + k\ell pq)\lambda^2 + 2(nmk\ell p + mk\ell pq)\lambda - nmk\ell pq.$$

$$P_{28} = \lambda^6 - (nm + mk + mp + k\ell + kp + \ell p + pq)\lambda^4 + \\ -2(mkp + k\ell p)\lambda^3 + (nmk\ell + nmkp + nm\ell p + nmpq + \\ mkpq + k\ell pq)\lambda^2 + 2nmk\ell p\lambda - nmk\ell pq.$$

$$P_{29} = \lambda^5 - (nm + mk + k\ell + kq + \ell p + \ell q + pq)\lambda^3 + \\ -2(k\ell q + \ell pq)\lambda^2 + (nmk\ell + nmkq + nm\ell p + nm\ell q + nmpq + \\ mk\ell p + mk\ell q + mkpq)\lambda + 2(nmk\ell q + nm\ell pq + mk\ell pq).$$

$$P_{30} = \lambda^6 - (nm + mk + k\ell + kp + kq + \ell p + \ell q + pq)\lambda^4 + \\ -2(k\ell p + k\ell q + kpq + \ell pq)\lambda^3 + (nmk\ell + nmkp + nmkq + \\ nm\ell p + nm\ell q + nmpq + mk\ell p + mk\ell q + mkpq - 3k\ell pq)\lambda^2 + \\ 2(nmk\ell p + nmk\ell q + nmkpq + nm\ell pq + mk\ell pq)\lambda + 3nmk\ell pq.$$

$$P_{31} = \lambda^6 - (nm + mk + m\ell + mp + k\ell + kp + \ell p + pq)\lambda^4 + \\ -2(mk\ell + mkp + m\ell p + k\ell p)\lambda^3 + (nmk\ell + nmkp + nm\ell p + \\ nmpq - 3mk\ell p + mkpq + m\ell pq + k\ell pq)\lambda^2 + \\ 2(nmk\ell p + mk\ell pq)\lambda - nmk\ell pq.$$

$$P_{32} = \lambda^6 - (nm + nk + mk + m\ell + mq + \ell p + \ell q + pq)\lambda^4 + \\ -2(nmk + m\ell q + \ell pq)\lambda^3 + (nmk\ell + nmkq + nm\ell p + nm\ell q + \\ nmpq + nk\ell p + nk\ell q + nkpq + mk\ell p + mk\ell q + mkpq)\lambda^2 + \\ 2(nmk\ell p + 2nmk\ell q + nmkpq + nm\ell pq + nk\ell pq + mk\ell pq)\lambda + \\ 4nmk\ell pq.$$

$$P_{33} = \lambda^6 - (nm + nk + mk + m\ell + mp + mq + \ell p + \ell q + pq)\lambda^4 + \\ -2(nmk + m\ell p + m\ell q + mpq + \ell pq)\lambda^3 + (nmk\ell + nmkp + \\ nmkq + nm\ell p + nm\ell q + nmpq + nk\ell p + nk\ell q + nkpq + \\ mk\ell p + mk\ell q + mkpq - 3m\ell pq)\lambda^2 + 2(2nmk\ell p + 2nmk\ell q + \\ 2nmkpq + nm\ell pq + nk\ell pq + mk\ell pq)\lambda + 7nmk\ell pq.$$

$$P_{34} = \lambda^6 - (nm + mk + mq + k\ell + \ell p + pq)\lambda^4 + \\ (nmk\ell + nm\ell p + nmpq + mk\ell p + mk\ell q + mkpq + m\ell pq + \\ k\ell pq)\lambda^2 - 2mk\ell pq\lambda - nmk\ell pq.$$

$$P_{35} = \lambda^6 - (nm + mk + m\ell + mq + k\ell + \ell p + pq)\lambda^4 - 2mk\ell\lambda^3 + \\ (nmk\ell + nm\ell p + nmpq + mk\ell p + mk\ell q + mkpq + \\ k\ell pq)\lambda^2 - nmk\ell pq.$$

$$P_{36} = \lambda^6 - (nm + mk + mq + k\ell + kp + \ell p + pq)\lambda^4 - 2k\ell p\lambda^3 + (nmk\ell + nmkp + nm\ell p + nmpq + mk\ell p + mk\ell q + m\ell pq + k\ell pq)\lambda^2 + 2nmk\ell p\lambda - nmk\ell pq.$$

$$P_{37} = \lambda^4 - (nm + mk + mq + k\ell + kq + \ell p + pq)\lambda^2 - 2mkq\lambda + nmk\ell + nmkq + nm\ell p + nmpq + mk\ell p + mk\ell q + mkpq + m\ell pq.$$

$$P_{38} = \lambda^6 - (nm + mk + m\ell + mp + mq + k\ell + \ell p + pq)\lambda^4 + -2(mk\ell + m\ell p + mpq)\lambda^3 + (nmk\ell + nm\ell p + nmpq + mk\ell q + mkpq + k\ell pq)\lambda^2 + 2mk\ell pq\lambda - nmk\ell pq.$$

$$P_{39} = \lambda^5 - (nm + mk + mq + k\ell + kp + kq + \ell p + pq)\lambda^3 + -2(mkq + k\ell p + kpq)\lambda^2 + (nmk\ell + nmkp + nmkq + nm\ell p + nmpq + mk\ell p + mk\ell q + m\ell pq)\lambda + 2(nmk\ell p + nmkpq + mk\ell pq).$$

$$P_{40} = \lambda^6 - (nm + mk + m\ell + mq + k\ell + \ell p + \ell q + pq)\lambda^4 + -2(mk\ell + m\ell q + \ell pq)\lambda^3 + (nmk\ell + nm\ell p + nm\ell q + nmpq + mk\ell p + mkpq + k\ell pq)\lambda^2 + 2(nm\ell pq + mk\ell pq)\lambda + - nmk\ell pq.$$

$$P_{41} = \lambda^6 - (nm + mk + mp + mq + k\ell + \ell p + \ell q + pq)\lambda^4 + -2(mpq + \ell pq)\lambda^3 + (nmk\ell + nm\ell p + nm\ell q + nmpq + mkpq + k\ell pq)\lambda^2 + 2nm\ell pq\lambda - nmk\ell pq.$$

$$P_{42} = \lambda^6 - (nm + mk + m\ell + mp + mq + k\ell + kp + \ell p + pq)\lambda^4 + -2(mk\ell + mkp + m\ell p + mpq + k\ell p)\lambda^3 + (nmk\ell + nmkp + nm\ell p + nmpq - 3mk\ell p + mk\ell q + k\ell pq)\lambda^2 + 2(nmk\ell p + mk\ell pq)\lambda - nmk\ell pq.$$

$$\begin{aligned}P_{43} = \lambda^5 &- (nm + mk + m\ell + mq + k\ell + kq + \ell p + \ell q + pq)\lambda^3 + \\ &-2(mk\ell + mkq + m\ell q + k\ell q + \ell pq)\lambda^2 + (nmk\ell + nmkq + \\ &\quad nm\ell p + nm\ell q + nmpq + mk\ell p - 3mk\ell q + mkpq)\lambda + \\ &2(nmk\ell q + nm\ell pq + mk\ell pq).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{44} = \lambda^6 &- (nm + mk + mq + k\ell + kp + kq + \ell p + \ell q + pq)\lambda^4 + \\ &-2(mkq + k\ell p + k\ell q + kpq + \ell pq)\lambda^3 + (nmk\ell + nmkp + \\ &\quad nmkq + nm\ell p + nm\ell q + nmpq + mk\ell p + m\ell pq - 3k\ell pq)\lambda^2 + \\ &2(nmk\ell p + nmk\ell q + nmkpq + nm\ell pq + mk\ell pq)\lambda + 3nmk\ell pq.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{45} = \lambda^6 &- (nm + mk + m\ell + mq + k\ell + kp + kq + \ell p + \ell q + pq)\lambda^4 + \\ &-2(mk\ell + mkq + m\ell q + k\ell p + k\ell q + kpq + \ell pq)\lambda^3 + \\ &\quad (nmk\ell + nmkp + nmkq + nm\ell p + nm\ell q + nmpq - 3mk\ell q + \\ &- 3k\ell pq)\lambda^2 + 2(nmk\ell p + nmk\ell q + nmkpq + nm\ell pq)\lambda + \\ &\quad 3nmk\ell pq.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{46} = \lambda^6 &- (nm + mk + m\ell + mp + mq + k\ell + kp + kq + \ell p + \ell q + \\ &\quad pq)\lambda^4 - 2(mk\ell + mkp + mkq + m\ell p + m\ell q + mpq + k\ell p + \\ &\quad k\ell q + kpq + \ell pq)\lambda^3 + (nmk\ell + nmkp + nmkq + nm\ell p + \\ &\quad nm\ell q + nmpq - 3mk\ell p - 3mk\ell q - 3mkpq - 3m\ell pq + \\ &-3k\ell pq)\lambda^2 + 2(nmk\ell p + nmk\ell q + nmkpq + nm\ell pq + \\ &-2mk\ell pq)\lambda + 3nmk\ell pq.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{47} = \lambda^6 &- (nm + nq + mk + k\ell + \ell p + pq)\lambda^4 + \\ &\quad (nmk\ell + nmkq + nm\ell p + nmpq + nk\ell q + n\ell pq + mk\ell p + \\ &\quad mkpq + k\ell pq)\lambda^2 - 4nmk\ell pq.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{48} = \lambda^6 &- (nm + np + nq + mk + k\ell + \ell p + pq)\lambda^4 - 2npq\lambda^3 + \\ &\quad (nmk\ell + nmkp + nmkq + nm\ell p + nmpq + nk\ell p + nk\ell q + \\ &\quad n\ell pq + mk\ell p + mkpq + k\ell pq)\lambda^2 - 2(nmk\ell p - nmkpq + \\ &- nk\ell pq)\lambda - 4nmk\ell pq.\end{aligned}$$

$$P_{49} = \lambda^6 - (nm + n\ell + nq + mk + k\ell + \ell p + pq)\lambda^4 + (nmkq + nm\ell p + nmpq + nk\ell q + mk\ell p + mkpq + k\ell pq)\lambda^2 - nmk\ell pq.$$

$$P_{50} = \lambda^6 - (nm + nk + n\ell + nq + mk + k\ell + \ell p + pq)\lambda^4 + -2(nmk + nk\ell)\lambda^3 + (nmkq + nm\ell p + nmpq + nk\ell p + nk\ell q + nkpq + mk\ell p + mkpq + k\ell pq)\lambda^2 + 2(nmk\ell p + nmkpq)\lambda + - nmk\ell pq.$$

$$P_{51} = \lambda^5 - (nm + nq + mk + mq + k\ell + kp + \ell p + pq)\lambda^3 + -2(nmq + k\ell p)\lambda^2 + (nmk\ell + nmkp + nmkq + nm\ell p + nmpq + nk\ell q + nkpq + n\ell pq + mk\ell p + mk\ell q + m\ell pq + k\ell pq)\lambda + 2(nmk\ell p + nmk\ell q + nm\ell pq + nk\ell pq).$$

$$P_{52} = \lambda^6 - (nm + nk + nq + mk + mq + k\ell + \ell p + pq)\lambda^4 + -2(nmk + nmq)\lambda^3 + (nmk\ell + nm\ell p + nmpq + nk\ell p + nk\ell q + nkpq + n\ell pq + mk\ell p + mk\ell q + mkpq + m\ell pq + k\ell pq)\lambda^2 + 2(nmk\ell p + nmk\ell q + nmkpq + nm\ell pq - nk\ell pq - mk\ell pq)\lambda + - 5nmk\ell pq.$$

$$P_{53} = \lambda^6 - (nm + np + nq + mk + k\ell + kq + \ell p + pq)\lambda^4 - 2npq\lambda^3 + (nmk\ell + nmkp + nm\ell p + nmpq + nk\ell p + nk\ell q + nkpq + n\ell pq + mk\ell p + mkpq)\lambda^2 - 2nmk\ell p\lambda - nmk\ell pq.$$

$$P_{54} = \lambda^6 - (nm + nk + np + nq + mk + k\ell + \ell p + pq)\lambda^4 + -2(nmk + npq)\lambda^3 + (nmk\ell + nmkp + nmkq + nm\ell p + nmpq + nk\ell q + nkpq + n\ell pq + mk\ell p + mkpq + k\ell pq)\lambda^2 + 4nmkpq\lambda - 4nmk\ell pq.$$

$$P_{55} = \lambda^5 - (nm + nk + n\ell + nq + mk + m\ell + k\ell + \ell p + pq)\lambda^3 + -2(nmk + nm\ell + nk\ell + mk\ell)\lambda^2 + (-3nmk\ell + nmkq + nm\ell p + nm\ell q + nmpq + nk\ell p + nk\ell q + nkpq + mk\ell p + mkpq + m\ell pq + k\ell pq)\lambda + 2(nmk\ell p + nmk\ell q + nmkpq + mk\ell pq).$$

$$P_{56} = \lambda^6 - (nm + nk + n\ell + nq + mk + k\ell + kp + \ell p + pq)\lambda^4 + -2(nmk + nk\ell + k\ell p)\lambda^3 + (nmkp + nmkq + nm\ell p + nmpq + nk\ell q + mk\ell p + mkpq + k\ell pq)\lambda^2 + 2nmk\ell p\lambda - nmk\ell pq.$$

$$P_{57} = \lambda^6 - (nm + np + nq + mk + mq + k\ell + kp + \ell p + pq)\lambda^4 + -2(nmq + npq + k\ell p)\lambda^3 + (nmk\ell + nmkq + nm\ell p + nk\ell p + nk\ell q + nkpq + n\ell pq + mk\ell p + mk\ell q + m\ell pq + k\ell pq)\lambda^2 + 2(nmk\ell q + nm\ell pq + 2nk\ell pq)\lambda - nmk\ell pq.$$

$$P_{58} = \lambda^6 - (nm + nk + np + nq + mk + k\ell + kp + \ell p + pq)\lambda^4 + -2(nmk + nkp + npq + k\ell p)\lambda^3 + (nmk\ell + nmkq + nm\ell p + nmpq + nk\ell q + n\ell pq + mk\ell p + mkpq + k\ell pq)\lambda^2 + 2(nmk\ell p + nmkpq + nk\ell pq)\lambda - 4nmk\ell pq.$$

$$P_{59} = \lambda^6 - (nm + nk + np + nq + mk + mq + k\ell + \ell p + pq)\lambda^4 + -2(nmk + nmq + npq)\lambda^3 + (nmk\ell + nmkp + nm\ell p + nk\ell q + nkpq + n\ell pq + mk\ell p + mk\ell q + mkpq + m\ell pq + k\ell pq)\lambda^2 + 2(nmk\ell q + nmkpq + nm\ell pq - mk\ell pq)\lambda - 4nmk\ell pq.$$

$$P_{60} = \lambda^6 - (nm + nk + n\ell + np + nq + mk + k\ell + \ell p + pq)\lambda^4 + -2(nmk + nk\ell + n\ell p + npq)\lambda^3 + (nmkp + nmkq + nm\ell p + nmpq + nk\ell q + nkpq + mk\ell p + mkpq + k\ell pq)\lambda^2 + 2(nmk\ell p + 2nmkpq + nk\ell pq)\lambda - nmk\ell pq.$$

$$P_{61} = \lambda^6 - (nm + nk + n\ell + nq + mk + k\ell + \ell p + \ell q + pq)\lambda^4 + -2(nmk + nk\ell + n\ell q + \ell pq)\lambda^3 + (nmkq + nm\ell p + nm\ell q + nmpq + nk\ell p + nkpq + mk\ell p + mk\ell q + mkpq + k\ell pq)\lambda^2 + 2(nmk\ell p + nmk\ell q + nmkpq + nm\ell pq + nk\ell pq + mk\ell pq)\lambda + 3nmk\ell pq.$$

$$P_{62} = \lambda^4 - (nm + np + nq + mk + m\ell + k\ell + kq + \ell p + pq)\lambda^2 + -2(npq + mk\ell)\lambda + nmk\ell + nmkp + nm\ell q + nmpq + nk\ell p + nk\ell q + nkpq + n\ell pq + mk\ell p + mk\ell q + mkpq + m\ell pq.$$

$$P_{63} = \lambda^6 - (nm + nk + np + nq + mk + mp + mq + k\ell + \ell p + pq)\lambda^4 + -2(nmk + nmp + nmq + npq + mpq)\lambda^3 + (nmk\ell + nm\ell p + -3nmpq + nk\ell q + nkpq + n\ell pq + mk\ell q + mkpq + m\ell pq + k\ell pq)\lambda^2 + 2(nmk\ell q + nmkpq + nm\ell pq)\lambda - nmk\ell pq.$$

$$P_{64} = \lambda^6 - (nm + n\ell + np + nq + mk + m\ell + mp + k\ell + \ell p + pq)\lambda^4 + -2(nm\ell + nmp + n\ell p + npq + mk\ell + m\ell p)\lambda^3 + (nmkp + nmkq - 3nm\ell p + nm\ell q + nk\ell p + nk\ell q + mkpq + m\ell pq + k\ell pq)\lambda^2 + 2(nmk\ell p + nmk\ell q + nmkpq + nm\ell pq + nk\ell pq + mk\ell pq)\lambda + 4nmk\ell pq.$$

$$P_{65} = \lambda^5 - (nm + nk + np + nq + mk + k\ell + kq + \ell p + \ell q + pq)\lambda^3 + -2(nmk + nkq + npq + k\ell q + \ell pq)\lambda^2 + (nmk\ell + nmkp + nm\ell p + nm\ell q + nmpq + mk\ell p + mk\ell q + mkpq)\lambda + 2(nmk\ell q + nmkpq + nm\ell pq + mk\ell pq).$$

$$P_{66} = \lambda^6 - (nm + nk + n\ell + np + nq + mk + k\ell + kp + \ell p + pq)\lambda^4 + -2(nmk + nk\ell + nkp + n\ell p + npq + k\ell p)\lambda^3 + (nmkq + nm\ell p + nmpq - 3nk\ell p + nk\ell q + mk\ell p + mkpq + k\ell pq)\lambda^2 + 2(nmk\ell p + nmkpq + nk\ell pq)\lambda - nmk\ell pq.$$

$$P_{67} = \lambda^6 - (nm + nk + n\ell + np + nq + mk + mq + k\ell + \ell p + pq)\lambda^4 + -2(nmk + nmq + nk\ell + n\ell p + npq)\lambda^3 + (nmkp + nm\ell p + nm\ell q + nk\ell q + nkpq + mk\ell p + mk\ell q + mkpq + m\ell pq + k\ell pq)\lambda^2 + 2(nmk\ell p + nmk\ell q + nmkpq + nm\ell pq + nk\ell pq - mk\ell pq)\lambda - 5nmk\ell pq.$$

$$P_{68} = \lambda^6 - (nm + nk + n\ell + np + nq + mk + m\ell + k\ell + \ell p + pq)\lambda^4 + -2(nmk + nm\ell + nk\ell + n\ell p + npq + mk\ell)\lambda^3 + (-3nmk\ell + nmkp + nmkq + nm\ell q + nmpq + nk\ell q + nkpq + mk\ell p + mkpq + m\ell pq + k\ell pq)\lambda^2 + 2(nmk\ell p + nmk\ell q + 2nmkpq + nm\ell pq + nk\ell pq + mk\ell pq)\lambda + 4nmk\ell pq.$$

$$P_{69} = \lambda^6 - (nm + nk + n\ell + nq + mk + mp + mq + k\ell + \ell p + pq)\lambda^4 + -2(nmk + nmq + nk\ell + mpq)\lambda^3 + (nmkp + nm\ell q + nk\ell p + nk\ell q + nkpq + mk\ell q + mkpq + m\ell pq + k\ell pq)\lambda^2 + 2(nmk\ell q + nmkpq)\lambda - nmk\ell pq.$$

$$P_{70} = \lambda^6 - (nm + nk + n\ell + np + nq + mk + m\ell + mp + k\ell + \ell p + pq)\lambda^4 - 2(nmk + nm\ell + nmp + nk\ell + n\ell p + npq + mk\ell + m\ell p)\lambda^3 + (-3nmk\ell + nmkq - 3nm\ell p + nm\ell q + nk\ell q + nkpq + mkpq + m\ell pq + k\ell pq)\lambda^2 + 2(nmk\ell q + nmkpq + nm\ell pq + nk\ell pq + mk\ell pq)\lambda + 3nmk\ell pq.$$

$$P_{71} = \lambda^6 - (nm + nk + n\ell + np + nq + mk + m\ell + k\ell + \ell p + \ell q + pq)\lambda^4 - 2(nmk + nm\ell + nk\ell + n\ell p + n\ell q + npq + mk\ell + \ell pq)\lambda^3 + (-3nmk\ell + nmkp + nmkq + nmpq + nkpq - 3n\ell pq + mk\ell p + mk\ell q + mkpq + m\ell pq + k\ell pq)\lambda^2 + 2(nmk\ell p + nmk\ell q + 2nmkpq + nm\ell pq + nk\ell pq + 2mk\ell pq)\lambda + 7nmk\ell pq.$$

$$P_{72} = \lambda^6 - (nm + nk + n\ell + nq + mk + m\ell + mp + k\ell + kq + \ell p + pq)\lambda^4 - 2(nmk + nm\ell + nk\ell + nkq + mk\ell + m\ell p)\lambda^3 + (-3nmk\ell + nmkp + nm\ell q + nk\ell p + nkpq + mk\ell q + m\ell pq)\lambda^2 + 2(nmk\ell p + nmk\ell q)\lambda - nmk\ell pq.$$

$$P_{73} = \lambda^5 - (nm + nk + n\ell + np + nq + mk + m\ell + mq + k\ell + \ell p + pq)\lambda^3 - 2(nmk + nm\ell + nmq + nk\ell + n\ell p + npq + mk\ell)\lambda^2 + (-3nmk\ell + nmkp + nk\ell q + nkpq + mk\ell p + mk\ell q + mkpq + k\ell pq)\lambda + 2(nmk\ell p + nmk\ell q + nmkpq + nk\ell pq).$$

$$P_{74} = \lambda^6 - (nm + nk + n\ell + np + nq + mk + k\ell + kp + kq + \ell p + \ell q + pq)\lambda^4 - 2(nmk + nk\ell + nkp + nkq + n\ell p + n\ell q + npq + k\ell p + k\ell q + kpq + \ell pq)\lambda^3 + (nm\ell p + nm\ell q + nmpq - 3nk\ell p - 3nk\ell q - 3nkpq - 3n\ell pq + mk\ell p + mk\ell q + mkpq - 3k\ell pq)\lambda^2 + 2(nmk\ell p + nmk\ell q + nmkpq + nm\ell pq - 2nk\ell pq + mk\ell pq)\lambda + 4nmk\ell pq.$$

$$P_{75} = \lambda^6 - (nm + nk + n\ell + np + nq + mk + mp + mq + k\ell + kp + \ell p + pq)\lambda^4 - 2(nmk + nmp + nmq + nk\ell + nkp + n\ell p + npq + mkp + mpq + k\ell p)\lambda^3 + (-3nmkp + nm\ell q - 3nmpq + -3nk\ell p + nk\ell q + mk\ell q + m\ell pq + k\ell pq)\lambda^2 + 2(nmk\ell q + nm\ell pq + nk\ell pq + mk\ell pq)\lambda + 3nmk\ell pq.$$

$$P_{76} = \lambda^6 - (nm + nk + n\ell + np + nq + mk + m\ell + k\ell + kp + kq + \ell p + \ell q + pq)\lambda^4 - 2(nmk + nm\ell + nk\ell + nkp + nkq + n\ell p + n\ell q + npq + mk\ell + k\ell p + k\ell q + kpq + \ell pq)\lambda^3 + (-3nmk\ell + nmpq - 3nk\ell p - 3nk\ell q - 3nkpq - 3n\ell pq + mkpq + m\ell pq - 3k\ell pq)\lambda^2 + 2(nmkpq + nm\ell pq + -2nk\ell pq + mk\ell pq)\lambda + 3nmk\ell pq.$$

$$P_{77} = \lambda^6 - (nm + nk + n\ell + np + nq + mk + m\ell + mp + mq + k\ell + kp + kq + \ell p + \ell q + pq)\lambda^4 - 2(nmk + nm\ell + nmp + nmq + nk\ell + nkp + nkq + n\ell p + n\ell q + npq + mk\ell + mkp + mkq + m\ell p + m\ell q + mpq + k\ell p + k\ell q + kpq + \ell pq)\lambda^3 - 3(nmk\ell + nmkp + nmkq + nm\ell p + nm\ell q + nmpq + nk\ell p + nk\ell q + nkpq + n\ell pq + mk\ell p + mk\ell q + mkpq + m\ell pq + k\ell pq)\lambda^2 - 4(nmk\ell p + nmk\ell q + nmkpq + nm\ell pq + nk\ell pq + mk\ell pq)\lambda - 5nmk\ell pq.$$

```
      DIMENSION X(100),Y(6),A(1000),R(1000)
      DOUBLE PRECISION Z(5)
      INTEGER U(100),FILE
      DATA FILE /1/,IFILE/2/
C
      OPEN(UNIT=FILE,TYPE='OLD',NAME='DR2:š100,104ćMATRIX.CAN',
     1 ACCESS='DIRECT',RECORDSIZE=104,RECORDTYPE='FIXED',
     2 FORM='FORMATTED')
C
      OPEN(UNIT=IFILE,TYPE='NEW',NAME='DR2:š100,104ćMATRIX.POL',
     1 RECORDSIZE=62,RECORDTYPE='FIXED')
C
      EPS=1.0E-3
      K=0
 99   K=K+1
      READ(FILE'K,88,ERR=24)N,L,(U(I),I=1,100)
 88   FORMAT(2I2,100I1)
      IF(L.EQ.99)GO TO 99
      M=0
      L=99
      WRITE(FILE'K,88,ERR=25)N,L,(U(I),I=1,100)
C
      DO 77 I = 1,N
        L = (I-1)*10
        DO 77 J = 1,I
          L=L+1
          M=M+1
          X(M)=FLOAT(U(L))
 77   CONTINUE
C
      DO 23 I1=1,2
      DO 23 I2=1,2
      DO 23 I3=1,2
      DO 23 I4=1,2
      DO 23 I5=1,2
      DO 23 I6=1,2
C
        DO 1 I=1,1000
          A(I)=0.
          R(I)=0.
 1      CONTINUE
C
        K=(I1*I1+I1)/2
        DO 3 J=1,I2
          DO 2 I=1,I1
            K=K+1
            A(K)=X(2)
 2        CONTINUE
          K=K+J
 3      CONTINUE
        K=I1+I2
        K=(K*K+K)/2
C
        DO 6 J=1,I3
          DO 4 I=1,I1
```

```
        K=K+1
        A(K)=X(4)
4     CONTINUE
C
      DO 5 I=1,I2
        K=K+1
        A(K)=X(5)
5     CONTINUE
      K=K+J
6   CONTINUE
C
    K=I1+I2+I3
    K=(K*K+K)/2
    DO 10 J=1,I4
      DO 7 I=1,I1
        K=K+1
        A(K)=X(7)
7     CONTINUE
C
      DO 8 I=1,I2
        K=K+1
        A(K)=X(8)
8     CONTINUE
C
      DO 9 I=1,I3
        K=K+1
        A(K)=X(9)
9     CONTINUE
      K=K+J
10  CONTINUE
C
    K=I1+I2+I3+I4
    K=(K*K+K)/2
    DO 15 J=1,I5
      DO 11 I=1,I1
        K=K+1
        A(K)=X(11)
11    CONTINUE
C
      DO 12 I=1,I2
        K=K+1
        A(K)=X(12)
12    CONTINUE
C
      DO 13 I=1,I3
        K=K+1
        A(K)=X(13)
13    CONTINUE
C
      DO 14 I=1,I4
        K=K+1
        A(K)=X(14)
14    CONTINUE
      K=K+J
15  CONTINUE
C
```

```
      K=I1+I2+I3+I4+I5
      K=(K*K+K)/2
      DO 21 J=1,I6
        DO 16 I=1,I1
          K=K+1
          A(K)=X(16)
16      CONTINUE
C
        DO 17 I=1,I2
          K=K+1
          A(K)=X(17)
17      CONTINUE
C
        DO 18 I=1,I3
          K=K+1
          A(K)=X(18)
18      CONTINUE
C
        DO 19 I=1,I4
          K=K+1
          A(K)=X(19)
19      CONTINUE
C
        DO 20 I=1,I5
          K=K+1
          A(K)=X(20)
20      CONTINUE
        K=K+J
21    CONTINUE
      N=I1+I2+I3+I4+I5+I6
      MV=0
      CALL EIGEN(A,R,N,MV)
      J=0
      M=0
      Y(3)=0.
      Y(4)=0.
      Y(5)=0.
      Y(6)=0.
      DO 22 I=1,N
        J=J+I
        IF(ABS(A(J)).LT.EPS)GO TO 22
        M=M+1
        Y(M)=A(J)
22    CONTINUE
C
      Z(1)=Y(1)*Y(2)+Y(1)*Y(3)+Y(1)*Y(4)+Y(1)*Y(5)+Y(1)*Y(6)+
     1     Y(2)*Y(3)+Y(2)*Y(4)+Y(2)*Y(5)+Y(2)*Y(6)+Y(3)*Y(4)+
     2     Y(3)*Y(5)+Y(3)*Y(6)+Y(4)*Y(5)+Y(4)*Y(6)+Y(5)*Y(6)
C
      Z(2)=Y(1)*Y(2)*Y(3)+Y(1)*Y(2)*Y(4)+Y(1)*Y(2)*Y(5)+
     1     Y(1)*Y(2)*Y(6)+Y(1)*Y(3)*Y(4)+Y(1)*Y(3)*Y(5)+
     2     Y(1)*Y(3)*Y(6)+Y(1)*Y(4)*Y(5)+Y(1)*Y(4)*Y(6)+
     3     Y(1)*Y(5)*Y(6)+Y(2)*Y(3)*Y(4)+Y(2)*Y(3)*Y(5)+
     4     Y(2)*Y(3)*Y(6)+Y(2)*Y(4)*Y(5)+Y(2)*Y(4)*Y(6)+
     5     Y(2)*Y(5)*Y(6)+Y(3)*Y(4)*Y(5)+Y(3)*Y(4)*Y(6)+
     6     Y(3)*Y(5)*Y(6)+Y(4)*Y(5)*Y(6)
```

```
C
      Z(3)=Y(1)*Y(2)*Y(3)*Y(4)+Y(1)*Y(2)*Y(3)*Y(5)+Y(1)*Y(2)*
     1     Y(3)*Y(6)+Y(1)*Y(2)*Y(4)*Y(5)+Y(1)*Y(2)*Y(4)*Y(6)+
     2     Y(1)*Y(2)*Y(5)*Y(6)+Y(1)*Y(3)*Y(4)*Y(5)+Y(1)*Y(3)*
     3     Y(4)*Y(6)+Y(1)*Y(3)*Y(5)*Y(6)+Y(1)*Y(4)*Y(5)*Y(6)+
     4     Y(2)*Y(3)*Y(4)*Y(5)+Y(2)*Y(3)*Y(4)*Y(6)+Y(2)*Y(3)*
     5     Y(5)*Y(6)+Y(2)*Y(4)*Y(5)*Y(6)+Y(3)*Y(4)*Y(5)*Y(6)
C
      Z(4)=Y(1)*Y(2)*Y(3)*Y(4)*Y(5)+Y(1)*Y(2)*Y(3)*Y(4)*Y(6)+
     1     Y(1)*Y(2)*Y(3)*Y(5)*Y(6)+Y(1)*Y(2)*Y(4)*Y(5)*Y(6)+
     2     Y(1)*Y(3)*Y(4)*Y(5)*Y(6)+Y(2)*Y(3)*Y(4)*Y(5)*Y(6)
C
      Z(5)=Y(1)*Y(2)*Y(3)*Y(4)*Y(5)*Y(6)
      Z(2)=-Z(2)
      Z(4)=-Z(4)
C
      WRITE(IFILE,100)Z,I1,I2,I3,I4,I5,I6
100   FORMAT(5F10.2,6I2)
23    CONTINUE
      GO TO 26
24    TYPE *,'*'
      GO TO 26
25    TYPE *,'$'
26    CALL EXIT
      END
```

```
      DIMENSION A(65,65),B(65),X(65)
      DOUBLE PRECISION Z(5)
      BYTE TXT(342)
C
      DATA TXT(1)   /'n'/, TXT(2)   /'m'/, TXT(7)   /'n'/
      DATA TXT(8)   /'k'/, TXT(13)  /'n'/, TXT(14)  /'l'/
      DATA TXT(19)  /'n'/, TXT(20)  /'p'/, TXT(25)  /'n'/
      DATA TXT(26)  /'q'/, TXT(31)  /'m'/, TXT(32)  /'k'/
      DATA TXT(37)  /'m'/, TXT(38)  /'l'/, TXT(43)  /'m'/
      DATA TXT(44)  /'p'/, TXT(49)  /'m'/, TXT(50)  /'q'/
      DATA TXT(55)  /'k'/, TXT(56)  /'l'/, TXT(61)  /'k'/
      DATA TXT(62)  /'p'/, TXT(67)  /'k'/, TXT(68)  /'q'/
      DATA TXT(73)  /'l'/, TXT(74)  /'p'/, TXT(79)  /'l'/
      DATA TXT(80)  /'q'/, TXT(85)  /'p'/, TXT(86)  /'q'/
      DATA TXT(91)  /'n'/, TXT(92)  /'m'/, TXT(93)  /'k'/
      DATA TXT(97)  /'n'/, TXT(98)  /'m'/, TXT(99)  /'l'/
C
      DATA TXT(103) /'n'/, TXT(104) /'m'/, TXT(105) /'p'/
      DATA TXT(109) /'n'/, TXT(110) /'m'/, TXT(111) /'q'/
      DATA TXT(115) /'n'/, TXT(116) /'k'/, TXT(117) /'l'/
      DATA TXT(121) /'n'/, TXT(122) /'k'/, TXT(123) /'p'/
      DATA TXT(127) /'n'/, TXT(128) /'k'/, TXT(129) /'q'/
      DATA TXT(133) /'n'/, TXT(134) /'l'/, TXT(135) /'p'/
      DATA TXT(139) /'n'/, TXT(140) /'l'/, TXT(141) /'q'/
      DATA TXT(145) /'n'/, TXT(146) /'p'/, TXT(147) /'q'/
      DATA TXT(151) /'m'/, TXT(152) /'k'/, TXT(153) /'l'/
      DATA TXT(157) /'m'/, TXT(158) /'k'/, TXT(159) /'p'/
      DATA TXT(163) /'m'/, TXT(164) /'k'/, TXT(165) /'q'/
      DATA TXT(169) /'m'/, TXT(170) /'l'/, TXT(171) /'p'/
      DATA TXT(175) /'m'/, TXT(176) /'l'/, TXT(177) /'q'/
      DATA TXT(181) /'m'/, TXT(182) /'p'/, TXT(183) /'q'/
      DATA TXT(187) /'k'/, TXT(188) /'l'/, TXT(189) /'p'/
      DATA TXT(193) /'k'/, TXT(194) /'l'/, TXT(195) /'q'/
      DATA TXT(199) /'k'/, TXT(200) /'p'/, TXT(201) /'q'/
      DATA TXT(205) /'l'/, TXT(206) /'p'/, TXT(207) /'q'/
      DATA TXT(211) /'n'/, TXT(212) /'m'/, TXT(213) /'k'/
      DATA TXT(214) /'l'/, TXT(217) /'n'/, TXT(218) /'m'/
      DATA TXT(219) /'k'/, TXT(220) /'p'/, TXT(223) /'n'/
      DATA TXT(224) /'m'/, TXT(225) /'k'/, TXT(226) /'q'/
      DATA TXT(229) /'n'/, TXT(230) /'m'/, TXT(231) /'l'/
      DATA TXT(232) /'p'/, TXT(235) /'n'/, TXT(236) /'m'/
      DATA TXT(237) /'l'/, TXT(238) /'q'/, TXT(241) /'n'/
      DATA TXT(242) /'m'/, TXT(243) /'p'/, TXT(244) /'q'/
      DATA TXT(247) /'n'/, TXT(248) /'k'/, TXT(249) /'l'/
      DATA TXT(250) /'p'/, TXT(253) /'n'/, TXT(254) /'k'/
      DATA TXT(255) /'l'/, TXT(256) /'q'/, TXT(259) /'n'/
      DATA TXT(260) /'k'/, TXT(261) /'p'/, TXT(262) /'q'/
      DATA TXT(265) /'n'/, TXT(266) /'l'/, TXT(267) /'p'/
      DATA TXT(268) /'q'/, TXT(271) /'m'/, TXT(272) /'k'/
      DATA TXT(273) /'l'/, TXT(274) /'p'/, TXT(277) /'m'/
      DATA TXT(278) /'k'/, TXT(279) /'l'/, TXT(280) /'q'/
      DATA TXT(283) /'m'/, TXT(284) /'k'/, TXT(285) /'p'/
      DATA TXT(286) /'q'/, TXT(289) /'m'/, TXT(290) /'l'/
      DATA TXT(291) /'p'/, TXT(292) /'q'/, TXT(295) /'k'/
      DATA TXT(296) /'l'/, TXT(297) /'p'/, TXT(298) /'q'/
```

```
      DATA TXT(301) /'n'/, TXT(302) /'m'/, TXT(303) /'k'/
      DATA TXT(304) /'1'/, TXT(305) /'p'/, TXT(306) /' '/
      DATA TXT(307) /'n'/, TXT(308) /'m'/, TXT(309) /'k'/
      DATA TXT(310) /'1'/, TXT(311) /'q'/, TXT(312) /' '/
      DATA TXT(313) /'n'/, TXT(314) /'m'/, TXT(315) /'k'/
      DATA TXT(316) /'p'/, TXT(317) /'q'/, TXT(318) /' '/
      DATA TXT(319) /'n'/, TXT(320) /'m'/, TXT(321) /'1'/
      DATA TXT(322) /'p'/, TXT(323) /'q'/, TXT(324) /' '/
      DATA TXT(325) /'n'/, TXT(326) /'k'/, TXT(327) /'1'/
      DATA TXT(328) /'p'/, TXT(329) /'q'/, TXT(330) /' '/
      DATA TXT(331) /'m'/, TXT(332) /'k'/, TXT(333) /'1'/
      DATA TXT(334) /'p'/, TXT(335) /'q'/, TXT(336) /' '/
      DATA TXT(337) /'n'/, TXT(338) /'m'/, TXT(339) /'k'/
      DATA TXT(340) /'1'/, TXT(341) /'p'/, TXT(342) /'q'/
      DATA IFILE /1/
C
      OPEN(UNIT=IFILE,TYPE='OLD',NAME='DR2:š100,104ćMATRIX.POL',
     1 RECORDSIZE=62,RECORDTYPE='FIXED')
      EPS=1.0E-3
C
      DO 99 I=1,300
        IF(TXT(I).EQ.'n')GO TO 99
        IF(TXT(I).EQ.'m')GO TO 99
        IF(TXT(I).EQ.'k')GO TO 99
        IF(TXT(I).EQ.'1')GO TO 99
        IF(TXT(I).EQ.'p')GO TO 99
        IF(TXT(I).EQ.'q')GO TO 99
        TXT(I) = ' '
99    CONTINUE
C
C
      DO 15 J=1,5
        DO 3 I=1,64
          READ(IFILE,2,END=3)Z,I1,I2,I3,I4,I5,I6
1
2         FORMAT(5F10.2,6I2)
          B(I)=Z(J)
C
          A(I,1) = I1
          A(I,2) = I2
          A(I,3) = I3
          A(I,4) = I4
          A(I,5) = I5
          A(I,6) = I6
C
          A(I,7)  = I1*I2
          A(I,8)  = I1*I3
          A(I,9)  = I1*I4
          A(I,10) = I1*I5
          A(I,11) = I1*I6
          A(I,12) = I2*I3
          A(I,13) = I2*I4
          A(I,14) = I2*I5
          A(I,15) = I2*I6
          A(I,16) = I3*I4
          A(I,17) = I3*I5
          A(I,18) = I3*I6
```

```
      A(I,19) = I4*I5
      A(I,20) = I4*I6
      A(I,21) = I5*I6
C
      A(I,22) = I1*I2*I3
      A(I,23) = I1*I2*I4
      A(I,24) = I1*I2*I5
      A(I,25) = I1*I2*I6
      A(I,26) = I1*I3*I4
      A(I,27) = I1*I3*I5
      A(I,28) = I1*I3*I6
      A(I,29) = I1*I4*I5
      A(I,30) = I1*I4*I6
      A(I,31) = I1*I5*I6
      A(I,32) = I2*I3*I4
      A(I,33) = I2*I3*I5
      A(I,34) = I2*I3*I6
      A(I,35) = I2*I4*I5
      A(I,36) = I2*I4*I6
      A(I,37) = I2*I5*I6
      A(I,38) = I3*I4*I5
      A(I,39) = I3*I4*I6
      A(I,40) = I3*I5*I6
      A(I,41) = I4*I5*I6
C
      A(I,42) = I1*I2*I3*I4
      A(I,43) = I1*I2*I3*I5
      A(I,44) = I1*I2*I3*I6
      A(I,45) = I1*I2*I4*I5
      A(I,46) = I1*I2*I4*I6
      A(I,47) = I1*I2*I5*I6
      A(I,48) = I1*I3*I4*I5
      A(I,49) = I1*I3*I4*I6
      A(I,50) = I1*I3*I5*I6
      A(I,51) = I1*I4*I5*I6
      A(I,52) = I2*I3*I4*I5
      A(I,53) = I2*I3*I4*I6
      A(I,54) = I2*I3*I5*I6
      A(I,55) = I2*I4*I5*I6
      A(I,56) = I3*I4*I5*I6
C
      A(I,57) = I1*I2*I3*I4*I5
      A(I,58) = I1*I2*I3*I4*I6
      A(I,59) = I1*I2*I3*I5*I6
      A(I,60) = I1*I2*I4*I5*I6
      A(I,61) = I1*I3*I4*I5*I6
      A(I,62) = I2*I3*I4*I5*I6
C
      A(I,63) = I1*I2*I3*I4*I5*I6
      A(I,64) = 1.
3     CONTINUE
C
      L=1
      N=64
4     M=0
```

```
            DO 5 I=L,N
              IF (ABS(A(I,L)).LT.EPS) GO TO 5
              M=I
              GO TO 6
 5          CONTINUE
 6          IF(M.EQ.0)GO TO 16
            IF (N.EQ.L) GO TO 10
            DO 7 I=L,N
              X(65)=A(M,I)
              A(M,I)=A(L,I)
              A(L,I)=X(65)
 7          CONTINUE
            X(65)=B(M)
            B(M)=B(L)
            B(L)=X(65)
            M=L+1
            DO 9 I=M,N
              DO 8 K=M,N
                A(I,K)=A(I,K)-(A(I,L)*A(L,K)/A(L,L))
 8            CONTINUE
              B(I)=B(I)-(A(I,L)*B(L)/A(L,L))
 9          CONTINUE
            L=L+1
            GO TO 4
 10         X(N)=B(N)/A(N,N)
            DO 12 I=1,N-1
              X(65)=0.
              DO 11 K=1,I
                X(65)=X(65)+A(N-I,N-K+1)*X(N-K+1)
 11           CONTINUE
              X(N-I)=(B(N-I)-X(65))/A(N-I,N-I)
 12         CONTINUE
 C
            WRITE(2,88)
 88         FORMAT('  ')
 C
            DO 14 I=1,N
              IF(ABS(X(I)).LT.EPS)GO TO 14
              L = (I-7)*6+1
              L1=N-J-1
              WRITE(2,13)L1,(TXT(M),M=L,L+5),X(I)
 13           FORMAT(I4,5X,6A1,5X,F10.3)
 14         CONTINUE
            REWIND(IFILE)
 15       CONTINUE
          GO TO 17
 16       TYPE *,J
 17       CALL EXIT
          END
```

PRILOG B

U ovom prilogu dajemo izvorne programe koji su najčešće u upotrebi u ovom radu, u rešavanju nekih problema spektralne teorije grafova.

Većina programa u ovom prilogu je napisana u asembleru (MACRO - 11), i za njih je karakteristično da su neuporedivo brži od programa koji su pisani u bilo kom višem mašinskom jeziku.

* * *

Program GRAFIND.MAC (str. 167-171) generiše sve povezane grafove nad skupom grafova iz datoteke MATRIX.OLD i formira izlaznu datoteku MATRIX.NEW. Ukoliko ne postoji datoteka MATRIX.OLD onda se ovim programom formira datoteka MATRIX.NEW sa slogom (grafom) K_2.

U prvom bajtu u slogu obe datoteke nalazi se broj čvorova grafa G, u drugom bajtu broj grana, u trećem i četvrtom bajtu parametar grafa, a ostalih 20 bajtova je rezervisano za reprezentaciju matrice susedstva grafa G. Matrica susedstva je kodirana pomoću slova engleske abecede i specijalnih znakova. Ilustracije radi, napomenimo da slovo A predstavlja vektor 00000 (binarno nula), B vektor 00001 (binarno 1), C 00010 (binarno 2), itd. S obzirom da je za slovo A ASCII vrednost 65, za B 66 itd., neposredno se uočava da karakter X u reprezentaciji matrice susedstva grafa G predstavlja vektor (binarni broj) čija je vrednost ASCII(X) - 65.

Program SORT.MAC (str. 172-176) od ulazne datoteke MATRIX.NEW formira privremenu datoteku MATRIX.TMP koja se koristi za određivanje parametra grafa G (treći i četvrti bajt u slogu), a nakon toga kreira izlaznu sortiranu datoteku MATRIX.S10.

Program IZOGRAF.MAC (str. 177-185) od ulazne datoteke MATRIX.S10 formira datoteku neizomorfnih grafova MATRIX.I10.

Program LISTGRAF.CBL (str. 186-189) dešifuje slog ulazne datoteke MATRIX.L10 (dekodira matricu susedstva grafa G) i kreira listu MATRIX.LST neizomofnih grafova.

Program LAMDA.FTN (str. 190) od ulazne datoteke MATRIX.L10 daje sopstvene vrednosti grafa G. Potprogram SUBL.MAC (str. 191-192) u ovom programu dešifruje matricu susedstva, i priprema uslove za direktno pozivanje potprograma EIGEN.FTN.Sopstvene vrednosti se prikazuju na ekranu terminala.

Na kraju, dajemo i kompletan postupak upotrebe navedenih programa. Pretpostavimo da datoteka MATRIX.006 sadrži sve neizomorfne grafove reda 6, i da želimo da kreiramo sve neizomorfne grafove reda 7.

Redosled koraka je sledeći,

```
PIP MATRIX.OLD=MATRIX.006        ;kreiramo datoteku MATRIX.OLD
RUN GRAFIND                      ;kreiramo datoteku MATRIX.NEW
PIP MATRIX.OLD;*/DE/LD           ;brišemo datoteku  MATRIX.OLD
RUN SORT                         ;kreiramo datoteku MATRIX.S10
PIP MATRIX.NEW;*/DE/LD           ;brišemo datoteku  MATRIX.NEW
PIP MATRIX.TMP;*/DE/LD           ;brišemo datoteku  MATRIX.TMP
RUN IZOGRAF                      ;kreiramo datoteku MATRIX.I10
```

Kreirana datoteka MATRIX.I10 sadrži sve neizomorfne grafove reda 7. Nakon poslednjeg koraka arhiviramo datoteku MATRIX.I10 (recimo pod nazivom MATRIX.007). Ukoliko ne postoji datoteka MATRIX.006, onda pozivanjem programa GRAFIND formiramo sve neizomorfne poveznane grafove reda 2 (graf K2). Ukoliko ponovimo čitav postupak dobićemo sve povezane grafove reda 3. Od grafova reda 3, formiraju se istim postupkom svi neizomorfni grafovi reda 4, zatim reda 5, reda 6.

Ukoliko želimo da kreiramo listu neizomorfnih grafova reda 7, onda prvo kopiramo datoteku MATRIX.007 u MATRIX.L10, a zatim pozivimo program LISTGRAF. Na istu datoteku možemo primeniti program LAMDA za određivanje sopstvenih vrednosti.

Napomenimo da se svi MACRO programi u ovom prilogu mogu primeniti na bilo kom 16 - adresibilnom Digital-ovom računaru. Na VAX-u (32 - adresibilnom, 64-adresibilnom, itd.) svi ovi MACRO programi se mogu lako modifikovati zamenom nekih WORD instrukcija BYTE instrukcijama.

Svi navedeni programi mogu se primeniti na grafove čiji red (broj čvorova) nije veći od 10.

```
        .TITLE  GRAFIND.MAC
        .IDENT  /LEPOVIC MIRKO/

        .MCALL  FDAT$A,FDBDF$,FDBF$A,FDRC$A,FDOP$A,FSRSZ$,FINIT$
        .MCALL  OPEN$R,OPEN$W,GET$,PUT$,CLOSE$,EXIT$S,QIOW$S
        .ENABL  LC

        FSRSZ$  60.

FDBUL:  FDBDF$
        FDRC$A  FD.INS,SLGUL,24.
        FDOP$A  1,IMEUL,,FO.RD
        FDBF$A  ,15360.


FDBIZ:  FDBDF$
        FDAT$A  R.FIX,FD.CR,24.
        FDRC$A  FD.INS,SLGIZ,24.
        FDOP$A  2,IMEIZ,,FO.WRT
        FDBF$A  ,15360.

SLGUL:  .BLKB   24.
        .EVEN
SLGIZ:  .BLKB   24.
        .EVEN

IMEUL:  .WORD   A1,A2,A3,A4,A5,A6
A2:     .ASCII  /DR1:/
A1=.-A2
        .EVEN
A4:     .ASCII  /š100,104ć/
A3=.-A4
        .EVEN
A6:     .ASCII  /MATRIX.OLD/
A5=.-A6
        .EVEN

IMEIZ:  .WORD   B1,B2,B3,B4,B5,B6
B2:     .ASCII  /DR1:/
B1=.-B2
        .EVEN
B4:     .ASCII  /š100,104ć/
B3=.-B4
        .EVEN
B6:     .ASCII  /MATRIX.NEW/
B5=.-B6
        .EVEN

ERORS:  .ASCII  /Read error at        *** DR1:š100,104ćMATRIX.OLD ***/   ;
        .ASCII  /Writ error at        *** DR1:š100,104ćMATRIX.NEW ***/   ;
        .ASCII  /Open error at        *** DR1:š100,104ćMATRIX.OLD ***/   ;
        .ASCII  /Open error at        *** DR1:š100,104ćMATRIX.NEW ***/   ;
```

```
COD:    .BYTE   0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,1,1
        .BYTE   0,0,1,0,0,0,0,1,0,1,0,0,1,1,0,0,0,1,1,1
        .BYTE   0,1,0,0,0,0,1,0,0,1,0,1,0,1,0,0,1,0,1,1
        .BYTE   0,1,1,0,0,0,1,1,0,1,0,1,1,1,0,0,1,1,1,1
        .BYTE   1,0,0,0,0,1,0,0,0,1,1,0,0,1,0,1,0,0,1,1
        .BYTE   1,0,1,0,0,1,0,1,0,1,1,0,1,1,0,1,0,1,1,1
        .BYTE   1,1,0,0,0,1,1,0,0,1,1,1,0,1,0,1,1,0,1,1
        .BYTE   1,1,1,0,0,1,1,1,0,1,1,1,1,1,0,1,1,1,1,1

MTX:    .WORD   M01,M02,M03,M04,M05,M06,M07,M08,M09,M10
M01:    .BLKB   10.
M02:    .BLKB   10.
M03:    .BLKB   10.
M04:    .BLKB   10.
M05:    .BLKB   10.
M06:    .BLKB   10.
M07:    .BLKB   10.
M08:    .BLKB   10.
M09:    .BLKB   10.
M10:    .BLKB   10.

BUF:    .BLKB   100.
CMB:    .WORD
NCB:    .WORD
HCB:    .WORD
PAR:    .WORD

OPEN:   FINIT$
        OPEN$R  #FDBUL,,,,,,EROUL
        OPEN$W  #FDBIZ,,,,,,EROIZ
RDUL:   GET$    #FDBUL,,,ERRUL
        MOV     #4,R0
        MOV     #BUF,R1
DCOD:   MOVB    SLGUL(R0),R3
        SUB     #101,R3
        MUL     #5,R3
        CLR     R2
ECOD:   MOVB    COD(R3),(R1)+
        INC     R3
        INC     R2
        CMP     #5,R2
        BNE     ECOD
        INC     R0
        CMP     #30,R0
        BNE     DCOD
        CLR     R0
        CLR     R3
COPY:   MOV     MTX(R0),R1
        CLR     R2
LOOP:   CMP     #5,R2
        BEQ     INIC
        MOV     BUF(R3),(R1)+
        INC     R2
```

```
        ADD     #2,R3
        JMP     LOOP
INIC:   ADD     #2,R0
        CMP     #24,R0
        BNE     COPY
        MOV     #1,CMB
        CLR     R0
COMB:   INC     R0
        ASL     CMB
        CMPB    R0,SLGUL
        BNE     COMB
        INCB    SLGUL
        MOVB    SLGUL,SLGIZ
        DEC     CMB
        CLR     NCB
NEXT:   CMP     NCB,CMB
        BEQ     RDUL
        INC     NCB
        MOV     NCB,HCB
        CLR     R0
CLRS:   CLR     BUF(R0)
        ADD     #2,R0
        CMP     #12,R0
        BNE     CLRS
        CLR     R0
        CLR     R3
COMC:   MOV     HCB,R1
        ASR     HCB
        MOV     HCB,R2
        ASL     R2
        SUB     R2,R1
        ADD     R1,R3
        MOVB    R1,BUF(R0)
        INC     R0
        TST     HCB
        BNE     COMC
        ASL     R3
        CLR     R0
        MOVB    SLGUL+1,R0
        ADD     R0,R3
        MOVB    R3,SLGIZ+1
        CLR     SLGIZ+2
        MOVB    SLGUL,R0
        DEC     R0
        ASL     R0
        MOV     MTX(R0),R1
        CLR     R2
ROWS:   MOV     BUF(R2),(R1)+
        ADD     #2,R2
        CMP     #12,R2
        BNE     ROWS
        ASR     R0
        CLR     R2
        CLR     R3
COLS:   MOV     MTX(R2),R1
```

```
        ADD      R0,R1
        MOVB     BUF(R3),(R1)
        ADD      #2,R2
        INC      R3
        CMP      #12,R3
        BNE      COLS
        CLR      R0
UNCD:   MOV      MTX(R0),R1
        CLR      PAR
INIT:   CLR      R2
        CLR      R3
        MOV      #20,R4
UNRW:   CLR      R5
        MOVB     (R1)+,R5
        MUL      R4,R5
        ADD      R5,R3
        INC      R2
        ASR      R4
        CMP      #5,R2
        BNE      UNRW
        ADD      #101,R3
        MOV      R0,R2
        ADD      #4,R2
        ADD      PAR,R2
        MOVB     R3,SLGIZ(R2)
        CMP      #1,PAR
        BEQ      UNCL
        MOV      #1,PAR
        JMP      INIT
UNCL:   ADD      #2,R0
        CMP      #24,R0
        BNE      UNCD
        PUT$     #FDBIZ,,,ERRIZ
        JMP      NEXT
EROUL:  CMPB     #177746,F.ERR(R0)
        BEQ      WRK2
        MOV      #ERORS,R0
        ADD      #100.,R0
        QIOW$S   #IO.WLB,#5,,,,,<R0,#50.>
        JMP      EXIT
WRK2:   OPEN$W   #FDBIZ,,,,,,EROIZ
        MOVB     #2,SLGIZ
        MOVB     #2,SLGIZ+1
        CLR      SLGIZ+2
        MOVB     #'I,SLGIZ+4
        MOVB     #'A,SLGIZ+5
        MOVB     #'Q,SLGIZ+6
        MOV      #7,R0
FULL:   MOVB     #'A,SLGIZ(R0)
        INC      R0
        CMP      #30,R0
        BNE      FULL
        PUT$     #FDBIZ,,,ERRIZ
        CLOSE$   #FDBIZ
        EXIT$S
```

```
EROIZ:  MOV     #ERORS,R0
        ADD     #150.,R0
        QIOW$S  #IO.WLB,#5,,,,,<R0,#50.>
        JMP     EXIT
ERRUL:  CMPB    #IE.EOF,F.ERR(R0)
        BEQ     EXIT
        MOV     #ERORS,R0
        QIOW$S  #IO.WLB,#5,,,,,<R0,#50.>
        JMP     EXIT
ERRIZ:  MOV     #ERORS,R0
        ADD     #50.,R0
        QIOW$S  #IO.WLB,#5,,,,,<R0,#50.>
        JMP     EXIT
EXIT:   CLOSE$  #FDBUL
        CLOSE$  #FDBIZ
        EXIT$S
        .END OPEN
```

```
        .TITLE  SORT.MAC
        .IDENT  /LEPOVIC MIRKO/

        .MCALL  FDAT$A,FDBDF$,FDBF$A,FDRC$A,FDOP$A,FSRSZ$
        .MCALL  OPEN$M,OPEN$W,OPEN$R,GET$,PUT$,GET$R
        .MCALL  PUT$R,CLOSE$,EXIT$S,FINIT$
        .MCALL  QIOW$S,SPWN$S,WTSE$S
        .ENABL  LC

        FSRSZ$  3.

FDBUL:  FDBDF$
        FDRC$A  FD.INS!FD.RAN,SLGUL,24.
        FDOP$A  1,IMEUL,,FO.MFY
        FDBF$A  ,512.

FDBIZ:  FDBDF$
        FDAT$A  R.FIX,FD.CR,12.
        FDRC$A  FD.INS,SLGIZ,12.
        FDOP$A  2,IMEIZ,,FO.WRT
        FDBF$A  ,512.

FDBRD:  FDBDF$
        FDRC$A  FD.INS,SLGIZ,12.
        FDOP$A  2,IMEIZ,,FO.RD
        FDBF$A  ,512.

SLGUL:  .BLKB   24.
        .EVEN

SLGIZ:  .BLKB   12.
        .EVEN

IMEUL:  .WORD   A1,A2,A3,A4,A5,A6
A2:     .ASCII  /DR1:/
A1=.-A2
        .EVEN
A4:     .ASCII  /š100,104č/
A3=.-A4
        .EVEN
A6:     .ASCII  /MATRIX.NEW/
A5=.-A6
        .EVEN

IMEIZ:  .WORD   B1,B2,B3,B4,B5,B6
B2:     .ASCII  /DR1:/
B1=.-B2
        .EVEN
B4:     .ASCII  /š100,104č/
B3=.-B4
        .EVEN
B6:     .ASCII  /MATRIX.TMP/
B5=.-B6
        .EVEN
```

```
SCL:     .RAD50   /SCL.../
SRTA:    .ASCII   %SRT DR1:š100,104ćMATRIX.TMP=DR1:š100,104ćMATRIX.TMP% ;
         .ASCII   %/FO:F:12/KE:CN3.10%
         .EVEN
SRTB:    .ASCII   %SRT DR1:š100,104ćMATRIX.S10=DR1:š100,104ćMATRIX.NEW% ;
         .ASCII   %/FO:F:24/KE:CN1.4%
         .EVEN

ERORS:   .ASCII   /Read error at      *** DR1:š100,104ćMATRIX.NEW ***/  ;
         .ASCII   /Rewr error at      *** DR1:š100,104ćMATRIX.NEW ***/  ;
         .ASCII   /Writ error at      *** DR1:š100,104ćMATRIX.TMP ***/  ;
         .ASCII   /Read error at      *** DR1:š100,104ćMATRIX.TMP ***/  ;
         .ASCII   /Open error at      *** DR1:š100,104ćMATRIX.NEW ***/  ;
         .ASCII   /Open error at      *** DR1:š100,104ćMATRIX.TMP ***/  ;

COD:     .BYTE    0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,1,1
         .BYTE    0,0,1,0,0,0,0,1,0,1,0,0,1,1,0,0,0,1,1,1
         .BYTE    0,1,0,0,0,0,1,0,0,1,0,1,0,1,0,0,1,0,1,1
         .BYTE    0,1,1,0,0,0,1,1,0,1,0,1,1,1,0,0,1,1,1,1
         .BYTE    1,0,0,0,0,1,0,0,0,1,1,0,0,1,0,1,0,0,1,1
         .BYTE    1,0,1,0,0,1,0,1,0,1,1,0,1,1,0,1,0,1,1,1
         .BYTE    1,1,0,0,0,1,1,0,0,1,1,1,0,1,0,1,1,0,1,1
         .BYTE    1,1,1,0,0,1,1,1,0,1,1,1,1,1,0,1,1,1,1,1

MTX:     .WORD    M01,M02,M03,M04,M05,M06,M07,M08,M09,M10
M01:     .BLKB    10.
M02:     .BLKB    10.
M03:     .BLKB    10.
M04:     .BLKB    10.
M05:     .BLKB    10.
M06:     .BLKB    10.
M07:     .BLKB    10.
M08:     .BLKB    10.
M09:     .BLKB    10.
M10:     .BLKB    10.

BUF:     .BLKB    100.
LVX:     .BLKW    10.

POZ:     .WORD
PAR:     .WORD

START:   FINIT$
         OPEN$M   #FDBUL,,,,,,EROUL
         OPEN$W   #FDBIZ,,,,,,EROIZ
         CLR      POZ
RDUL:    INC      POZ
         GET$R    #FDBUL,,,POZ,,ERRUL
         MOV      #4,R0
         MOV      #BUF,R1
DCOD:    MOVB     SLGUL(R0),R3
         SUB      #101,R3
         MUL      #5,R3
         CLR      R2
ECOD:    MOVB     COD(R3),(R1)+
```

```
        INC     R3
        INC     R2
        CMP     #5,R2
        BNE     ECOD
        INC     RO
        CMP     #30,RO
        BNE     DCOD
        CLR     RO
        CLR     R3
NEXT:   MOV     MTX(RO),R1
        CLR     R2
LOOP:   CMP     #5,R2
        BEQ     CMPA
        MOV     BUF(R3),(R1)+
        INC     R2
        ADD     #2,R3
        JMP     LOOP
CMPA:   ADD     #2,RO
        CMP     #24,RO
        BNE     NEXT
        CLR     RO
CLRS:   CLR     LVX(RO)
        ADD     #2,RO
        CMP     #24,RO
        BNE     CLRS
        CLR     RO
        CLR     R1
ADRS:   MOV     MTX(RO),R2
        CLR     R3
        CLR     R4
COMP:   CMPB    R3,SLGUL
        BEQ     COLM
        INC     R3
        CMPB    #1,(R2)+
        BNE     COMP
        INC     R4
        JMP     COMP
COLM:   DEC     R4
        ASL     R4
        INC     LVX(R4)
        ADD     #2,RO
        INC     R1
        CMPB    R1,SLGUL
        BNE     ADRS
        MOV     POZ,SLGIZ
        MOV     #2,R1
        CLR     RO
COPY:   MOV     LVX(RO),R2
        MOVB    R2,SLGIZ(R1)
        ADD     #2,RO
        INC     R1
        CMP     #24,RO
        BNE     COPY
        PUT$    #FDBIZ,,,ERRIZ
        JMP     RDUL
ERRUL:  CMPB    #IE.EOF,F.ERR(RO)
```

```
        BEQ      SRTC
        MOV      #ERORS,RO
        QIOW$S   #IO.WLB,#5,,,,,<RO,#50.>
EXITA:  CLOSE$   #FDBUL
        CLOSE$   #FDBIZ
        EXIT$S
ERRIZ:  MOV      #ERORS,RO
        ADD      #100.,RO
        QIOW$S   #IO.WLB,#5,,,,,<RO,#50.>
        JMP      EXITA
EROUL:  MOV      #ERORS,RO
        ADD      #200.,RO
        QIOW$S   #IO.WLB,#5,,,,,<RO,#50.>
        JMP      EXITA
EROIZ:  MOV      #ERORS,RO
        ADD      #250.,RO
        QIOW$S   #IO.WLB,#5,,,,,<RO,#50.>
        JMP      EXITA
SRTC:   CLOSE$   #FDBIZ
        SPWN$S   #SCL,,,#100,#100,#1,,,#SRTA,#69.,#5
        WTSE$S   #1
        OPEN$R   #FDBRD,,,,,,ERORD
        CLR      PAR
        MOVB     #'*,BUF
RDUA:   GET$     #FDBRD,,,ERRUA
        MOV      #2,R1
        CLR      RO
SAME:   CMP      BUF(RO),SLGIZ(R1)
        BNE      HOLD
        ADD      #2,RO
        ADD      #2,R1
        CMP      #12,RO
        BNE      SAME
REWR:   MOV      SLGIZ,POZ
        GET$R    #FDBUL,,,POZ,,ERRUB
        MOV      PAR,SLGUL+2
        PUT$R    #FDBUL,,,POZ,,ERRUC
        JMP      RDUA
HOLD:   INC      PAR
        MOV      #2,R1
        CLR      RO
HOLA:   MOV      SLGIZ(R1),BUF(RO)
        ADD      #2,RO
        ADD      #2,R1
        CMP      #12,RO
        BNE      HOLA
        JMP      REWR
ERRUA:  CMPB     #IE.EOF,F.ERR(RO)
        BEQ      SRTD
        MOV      #ERORS,RO
        ADD      #150.,RO
        QIOW$S   #IO.WLB,#5,,,,,<RO,#50.>
EXITB:  CLOSE$   #FDBUL
        CLOSE$   #FDBRD
        EXIT$S
ERRUB:  MOV      #ERORS,RO
```

```
        QIOW$S  #IO.WLB,#5,,,,,<RO,#50.>
        JMP     EXITB
ERRUC:  MOV     #ERORS,RO
        ADD     #50.,RO
        QIOW$S  #IO.WLB,#5,,,,,<RO,#50.>
        JMP     EXITB
ERORD:  MOV     #ERORS,RO
        ADD     #250.,RO
        QIOW$S  #IO.WLB,#5,,,,,<RO,#50.>
        JMP     EXITB
SRTD:   CLOSE$  #FDBUL
        CLOSE$  #FDBRD
        SPWN$S  #SCL,,,#100,#100,#1,,,#SRTB,#68.,#5
        WTSE$S  #1
        EXIT$S
        .END    START
```

```
          .TITLE   IZOGRAF.MAC
          .IDENT   /LEPOVIC MIRKO/

          .MCALL   FDAT$A,FDBDF$,FDBF$A,FDRC$A,FDOP$A,FSRSZ$
          .MCALL   OPEN$M,OPEN$W,PUT$,GET$R,PUT$R,FINIT$
          .MCALL   CLOSE$,EXIT$S,QIOW$S
          .ENABL   LC

          FSRSZ$   60.

FDBIO:    FDBDF$
          FDRC$A   FD.INS!FD.RAN,SLG,24.
          FDOP$A   1,IMEIO,,FO.MFY
          FDBF$A   ,15360.

FDBWR:    FDBDF$
          FDAT$A   R.FIX,FD.CR,24.
          FDRC$A   FD.INS,SLG,24.
          FDOP$A   2,IMEWR,,FO.WRT
          FDBF$A   ,15360.

SLG:      .BLKB    24.
          .EVEN

IMEIO:    .WORD    A1,A2,A3,A4,A5,A6
A2:       .ASCII   /DR1:/
A1=.-A2
          .EVEN
A4:       .ASCII   /š100,104ć/
A3=.-A4
          .EVEN
A6:       .ASCII   /MATRIX.S10/
A5=.-A6
          .EVEN

IMEWR:    .WORD    B1,B2,B3,B4,B5,B6
B2:       .ASCII   /DR1:/
B1=.-B2
          .EVEN
B4:       .ASCII   /š100,104ć/
B3=.-B4
          .EVEN
B6:       .ASCII   /MATRIX.I10/
B5=.-B6
          .EVEN

ERORS:    .ASCII   /Read error at       *** DR1:š100,104ćMATRIX.S10 ***/   ;
          .ASCII   /Rewr error at       *** DR1:š100,104ćMATRIX.S10 ***/   ;
          .ASCII   /Writ error at       *** DR1:š100,104ćMATRIX.I10 ***/   ;
          .ASCII   /Open error at       *** DR1:š100,104ćMATRIX.S10 ***/   ;
          .ASCII   /Open error at       *** DR1:š100,104ćMATRIX.I10 ***/   ;
```

```
COD:    .BYTE   0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,1,1
        .BYTE   0,0,1,0,0,0,0,1,0,1,0,0,1,1,0,0,0,1,1,1
        .BYTE   0,1,0,0,0,0,1,0,0,1,0,1,0,1,0,0,1,0,1,1
        .BYTE   0,1,1,0,0,0,1,1,0,1,0,1,1,1,0,0,1,1,1,1
        .BYTE   1,0,0,0,0,1,0,0,0,1,1,0,0,1,0,1,0,0,1,1
        .BYTE   1,0,1,0,0,1,0,1,0,1,1,0,1,1,0,1,0,1,1,1
        .BYTE   1,1,0,0,0,1,1,0,0,1,1,1,0,1,0,1,1,0,1,1
        .BYTE   1,1,1,0,0,1,1,1,0,1,1,1,1,1,0,1,1,1,1,1

MTX:    .WORD   M01,M02,M03,M04,M05,M06,M07,M08,M09,M10
M01:    .BLKB   10.
M02:    .BLKB   10.
M03:    .BLKB   10.
M04:    .BLKB   10.
M05:    .BLKB   10.
M06:    .BLKB   10.
M07:    .BLKB   10.
M08:    .BLKB   10.
M09:    .BLKB   10.
M10:    .BLKB   10.

GTX:    .WORD   G01,G02,G03,G04,G05,G06,G07,G08,G09,G10
G01:    .BLKB   10.
G02:    .BLKB   10.
G03:    .BLKB   10.
G04:    .BLKB   10.
G05:    .BLKB   10.
G06:    .BLKB   10.
G07:    .BLKB   10.
G08:    .BLKB   10.
G09:    .BLKB   10.
G10:    .BLKB   10.

LTX:    .WORD   L01,L02,L03,L04,L05,L06,L07,L08,L09
L01:    .BLKB   100.
L02:    .BLKB   100.
L03:    .BLKB   100.
L04:    .BLKB   100.
L05:    .BLKB   100.
L06:    .BLKB   100.
L07:    .BLKB   100.
L08:    .BLKB   100.
L09:    .BLKB   100.

DNX:    .BLKW   10.
LVX:    .BLKW   10.
CLV:    .BLKW   10.

BUF:    .BLKB   100.
HSL:    .BLKW   12.
ADR:    .BLKW   2

POZ:    .WORD
PAR:    .WORD
KEY:    .WORD
CPY:    .WORD
```

```
HLR:    .WORD
HLC:    .WORD
RDN:    .WORD
NDG:    .WORD
CHG:    .WORD

OPEN:   FINIT$
        OPEN$M  #FDBIO,,,,,,EROIO
        OPEN$W  #FDBWR,,,,,,EROWR
        MOV     #HSL,ADR
        MOV     #SLG,ADR+2
        CLR     POZ
RDIO:   INC     POZ
        GET$R   #FDBIO,,,POZ,,ERRIO
        CMPB    #'*,SLG
        BEQ     RDIO
        PUT$    #FDBWR,,,ERRWR
        CLR     R0
HOLD:   MOV     SLG(R0),HSL(R0)
        ADD     #2,R0
        CMP     #30,R0
        BNE     HOLD
        MOV     POZ,KEY
        CLR     CPY
RDIN:   INC     POZ
        GET$R   #FDBIO,,,POZ,,ERRIN
        CMPB    #'*,SLG
        BEQ     RDIN
        CMP     SLG+2,HSL+2
        BEQ     PAIR
        MOV     KEY,POZ
        JMP     RDIO
PAIR:   CALL    CODS
        CALL    COPY
        CLR     R0
        TST     CPY
        BNE     SETP
        MOV     #1,CPY
        CALL    CODS
        CALL    COPY
        CLR     R0
        CALL    CLRS
        CLR     R0
        JMP     SETP
CODS:   MOV     CPY,R0
        ASL     R0
        MOV     ADR(R0),R4
        ADD     #4,R4
        MOV     #BUF,R1
        CLR     R0
DCOD:   MOVB    (R4)+,R3
        SUB     #101,R3
        MUL     #5,R3
        CLR     R2
ECOD:   MOVB    COD(R3),(R1)+
        INC     R3
```

```
        INC     R2
        CMP     #5,R2
        BNE     ECOD
        INC     R0
        CMP     #24,R0
        BNE     DCOD
        RTS     PC
COPY:   CLR     R0
        CLR     R3
NEXT:   TST     CPY
        BEQ     THAT
        MOV     GTX(R0),R1
        CLR     R2
        JMP     LOOP
THAT:   MOV     MTX(R0),R1
        CLR     R2
LOOP:   CMP     #5,R2
        BEQ     NEWA
        MOV     BUF(R3),(R1)+
        INC     R2
        ADD     #2,R3
        JMP     LOOP
NEWA:   ADD     #2,R0
        CMP     #24,R0
        BNE     NEXT
        RTS     PC
CLRS:   CLR     DNX(R0)
        CLR     LVX(R0)
        ADD     #2,R0
        CMP     #24,R0
        BNE     CLRS
        CLR     R0
        CLR     R1
MOVE:   MOV     MTX(R0),R2
        CLR     R3
        CLR     R4
LEVL:   CMPB    R3,SLG
        BEQ     ROWS
        INC     R3
        CMPB    #1,(R2)+
        BNE     LEVL
        INC     R4
        INC     LVX(R0)
        JMP     LEVL
ROWS:   DEC     R4
        ASL     R4
        INC     DNX(R4)
        ADD     #2,R0
        INC     R1
        CMPB    R1,SLG
        BNE     MOVE
        RTS     PC
SETP:   CLR     CLV(R0)
        ADD     #2,R0
        CMP     #24,R0
        BNE     SETP
```

```
        CLR     PAR
        CLR     R0
        CALL    SUBC
        JMP     CHGR
SUBC:   INC     CLV(R0)
        MOV     R0,R1
        SUB     #2,R1
        MOV     R0,R2
        CLR     RDN
SUBR:   ADD     #2,R1
        MOV     GTX(R1),R3
        CLR     NDG
        CLR     R4
NUMD:   CMPB    R4,SLG
        BEQ     ROWD
        INC     R4
        CMPB    #1,(R3)+
        BNE     NUMD
        INC     NDG
        JMP     NUMD
ROWD:   CMP     NDG,LVX(R0)
        BNE     SUBR
        INC     RDN
        CMP     RDN,CLV(R0)
        BNE     SUBR
        RTS     PC
CHGR:   CLR     CHG
        CMP     R1,R2
        BEQ     CHGA
        CLR     PAR
        MOV     GTX(R1),R3
        MOV     GTX(R2),R4
        CLR     R5
ROWC:   MOV     (R3),-(SP)
        MOV     (R4),(R3)+
        MOV     (SP)+,(R4)+
        INC     R5
        CMP     #5,R5
        BNE     ROWC
        CLR     R5
        ASR     R1
        ASR     R2
COLC:   ASL     R5
        MOV     GTX(R5),R3
        MOV     R3,R4
        ADD     R1,R3
        ADD     R2,R4
        MOVB    (R3),-(SP)
        MOVB    (R4),(R3)
        MOVB    (SP)+,(R4)
        ASR     R5
        INC     R5
        CMPB    R5,SLG
        BNE     COLC
CHGA:   MOV     GTX(R0),R3
        MOV     MTX(R0),R4
```

```
        MOV     R0,R1
        ASR     R1
        INC     R1
        ADD     R1,R3
        ADD     R1,R4
EQUI:   CMPB    (R3)+,(R4)+
        BNE     EQUL
        INC     R1
        CMPB    R1,SLG
        BNE     EQUI
        MOV     LTX(R0),R3
        CLR     R5
HOLG:   MOV     GTX(R5),R1
        CLR     R2
HOLR:   MOV     (R1)+,(R3)+
        INC     R2
        CMP     #5,R2
        BNE     HOLR
        ADD     #2,R5
        CMP     #24,R5
        BNE     HOLG
        ADD     #2,R0
        ASR     R0
        INC     R0
        CMPB    R0,SLG
        BEQ     REWR
        DEC     R0
        ASL     R0
        CALL    SUBC
        CMP     R1,R2
        BNE     PARS
        JMP     CHGR
PARS:   MOV     #1,CHG
        MOV     #1,PAR
        MOV     R1,HLR
        ASR     R1
        ASR     R2
        CLR     R5
        JMP     EQUA
REWR:   MOVB    #'*,SLG
        PUT$R   #FDBIO,,,POZ,,ERREW
        JMP     RDIN
EQUL:   MOV     R1,R2
        MOV     R3,R5
        DEC     R5
EQUC:   INC     R1
        CMPB    (R3),(R5)
        BNE     CMPN
        INC     R3
        INC     R4
        JMP     EQUC
CMPN:   CMPB    (R3)+,(R4)+
        BEQ     EQUC
        TST     R0
        BEQ     ASLR
        CLR     R5
```

```
EQUA:   MOV     GTX(R5),R3
        MOV     R3,R4
        ADD     R1,R3
        ADD     R2,R4
        CMPB    (R3),(R4)
        BNE     TSTC
        ADD     #2,R5
        CMP     R0,R5
        BEQ     ASLR
        JMP     EQUA
ASLR:   ASL     R1
        ASL     R2
        JMP     CHGR
TSTC:   TST     CHG
        BEQ     CHGN
        CLR     RDN
        CLR     R5
        JMP     CMPL
CHGN:   MOV     GTX(R0),R3
        MOV     MTX(R0),R4
        MOV     R1,HLC
        MOV     R3,R5
        ADD     R1,R3
        ADD     R1,R4
        ADD     R2,R5
CMPR:   INC     R1
        CMPB    R1,SLG
        BEQ     BACK
        INC     R3
        INC     R4
        CMPB    (R3),(R5)
        BEQ     CMPR
        CMPB    (R3),(R4)
        BEQ     CMPR
        CLR     R5
        JMP     EQUA
BACK:   MOV     HLC,R1
        CLR     RDN
        CLR     R5
CMPL:   CMP     LVX(R5),LVX(R0)
        BNE     CMPD
        INC     RDN
CMPD:   ADD     #2,R5
        CMP     R5,R0
        BNE     CMPL
        ADD     CLV(R0),RDN
        MOV     LVX(R0),R5
        DEC     R5
        ASL     R5
        CMP     RDN,DNX(R5)
        BEQ     CMPX
        TST     PAR
        BNE     PART
        MOV     R0,R5
        SUB     #2,R5
        MOV     LTX(R5),R1
```

```
        CLR     R2
COPL:   MOV     GTX(R2),R3
        CLR     R5
COPR:   MOV     (R1)+,(R3)+
        INC     R5
        CMP     #5,R5
        BNE     COPR
        ADD     #2,R2
        CMP     #24,R2
        BNE     COPL
        CALL    SUBC
        JMP     PARS
PART:   MOV     CLV(RO),RDN
        INC     CLV(RO)
        MOV     HLR,R1
        ASL     R2
        CALL    SUBR
        JMP     PARS
CMPX:   CLR     PAR
        CLR     CLV(RO)
        SUB     #2,RO
        MOV     LVX(RO),R5
        DEC     R5
        ASL     R5
        TST     RO
        BEQ     CMPY
        CLR     RDN
        CLR     R5
        JMP     CMPL
CMPY:   CMP     CLV(RO),DNX(R5)
        BNE     CMPZ
        JMP     RDIN
CMPZ:   CALL    COPY
        CLR     RO
        CALL    SUBC
        JMP     CHGR
ERRIN:  CMPB    #IE.EOF,F.ERR(RO)
        BEQ     RDEND
        MOV     #ERORS,RO
        QIOW$S  #IO.WLB,#5,,,,,<RO,#50.>
        JMP     EXIT
RDEND:  MOV     KEY,POZ
        JMP     RDIO
ERREW:  MOV     #ERORS,RO
        ADD     #50.,RO
        QIOW$S  #IO.WLB,#5,,,,,<RO,#50.>
        JMP     EXIT
ERRWR:  MOV     #ERORS,RO
        ADD     #100.,RO
        QIOW$S  #IO.WLB,#5,,,,,<RO,#50.>
        JMP     EXIT
ERRIO:  CMPB    #IE.EOF,F.ERR(RO)
        BEQ     EXIT
        MOV     #ERORS,RO
        QIOW$S  #IO.WLB,#5,,,,,<RO,#50.>
        JMP     EXIT
```

```
EROIO:  MOV      #ERORS,RO
        ADD      #150.,RO
        QIOW$S   #IO.WLB,#5,,,,,<RO,#50.>
        JMP      EXIT
EROWR:  MOV      #ERORS,RO
        ADD      #200.,RO
        QIOW$S   #IO.WLB,#5,,,,,<RO,#50.>
        JMP      EXIT
EXIT:   CLOSE$   #FDBIO
        CLOSE$   #FDBWR
        EXIT$S
        .END     OPEN
```

```
IDENTIFICATION DIVISION.
PROGRAM-ID. LISTGRAF.
AUTHOR. MIRKO LEPOVIC.
ENVIRONMENT DIVISION.
INPUT-OUTPUT SECTION.
FILE-CONTROL.
        SELECT DAT-1 ASSIGN TO "DR1:š100,104ćMATRIX.L10".
        SELECT DAT-2 ASSIGN TO "DR1:š100,104ćMATRIX.LST".
DATA DIVISION.
FILE SECTION.
FD      DAT-1   LABEL RECORD IS STANDARD.
01      SLOG-1.
        02      NUM-CVOR            PIC X.
        02      NUM-GRANA           PIC X.
        02      FILLER              PIC XX.
        02      MATRIX  PIC X OCCURS 20 TIMES.
FD      DAT-2   LABEL RECORD IS STANDARD.
01      RED     PIC X(75).
WORKING-STORAGE SECTION.
01      I               PIC 99.
01      J               PIC 99.
01      L               PIC 99.
01      SLOG-2.
        02      FILLER              PIC XXX.
        02      LIS-RED             PIC 999.
        02      FILLER              PIC X.
        02      LIS-CVOR            PIC 99.
        02      FILLER              PIC X.
        02      LIS-GRANA           PIC 99.
        02      FILLER              PIC XXX.
        02      LIS-ELEM            PIC X OCCURS 60 TIMES.
01      FUN-COD         PIC S999 COMP VALUE 512.
01      LUN-TI          PIC S99  COMP VALUE 5.
01      EVENT-FLAG      PIC S99  COMP VALUE 1.
01      PROCES-WORD     PIC S99  COMP VALUE 0.
01      STATUS-WORD     PIC S99  COMP VALUE 0.
01      PAR.
        02      ADRESA              PIC S99 COMP.
        02      NUM-CHAR            PIC S99 COMP.
        02      COD-RETURN          PIC S99 COMP VALUE 13.
        02      FILLER              PIC X(6).
01      END-STATUS      PIC S99 COMP VALUE 0.
01      POLJE-MATRIX.
        02      P-M     PIC X(10) OCCURS 10 TIMES.
01      MATRIX-POLJE REDEFINES POLJE-MATRIX.
        02      M-P     PIC X(5) OCCURS 20 TIMES.
01      ROW-MATRIX.
        02      R-M     PIC X OCCURS 10 TIMES.
01      CVOR-NUM        PIC 99.
01      GRANA-NUM       PIC 99.
01      RED-SLOG        PIC 999 VALUE ZERO.
01      RED-BROJ        PIC 99.
01      POLJE-CVOR      PIC XX.
01      NASLOV-LISTE.
        02      N-L     PIC X OCCURS 60 TIMES.
```

```
01      NASLOV-NASLOV.
        02      N-N     PIC X OCCURS 72 TIMES.
01      ENCODE-MATRIX.
        02      E-M     PIC X(5) OCCURS 32 TIMES.
01      MATRIX-ENCODE REDEFINES ENCODE-MATRIX PIC X(160).
01      SKOK            PIC 9.
01      POLJE-SPACE     PIC X(80) VALUE SPACE.
01      COD-CHAR        PIC S999 COMP.
01      CHAR-COD REDEFINES COD-CHAR PIC X.
01      ESCAPE PIC S999 COMP VALUE 27.
01      ESC REDEFINES ESCAPE PIC X.
PROCEDURE DIVISION.
ABC.
        STRING "0000000001000100001100100001010011000111"
               "0100001001010100101101100011010111001111"
               "1000010001100101001110100101011011010111"
               "1100011001110101101111100111011111011111"
               DELIMITED BY SIZE INTO MATRIX-ENCODE.
*
        OPEN INPUT DAT-1 OUTPUT DAT-2.
        DISPLAY ESC "<" ESC "(S" ESC "š0;7m" ESC "š2J"
                WITH NO ADVANCING.
        DISPLAY ESC "š1;1H" POLJE-SPACE ESC "š1;2H"
                "Author : Mirko Lepovic"
                WITH NO ADVANCING.
        DISPLAY ESC "š2;1H" ESC "#6" " " ESC "š2;40H" " "
                ESC "š0m" ESC "š2;10H" "Lista matrica susedstva"
                        WITH NO ADVANCING.
        DISPLAY ESC "š7m" ESC "š3;1H" POLJE-SPACE ESC "š3;2H"
                "Broj upisanih slogova :  " RED-SLOG
                ESC "š0m" WITH NO ADVANCING.
        MOVE ALL "q" TO POLJE-SPACE.
        DISPLAY ESC "(0" ESC "š5;1H" POLJE-SPACE ESC "š5;1H" "l"
                ESC "š5;17H" "w" ESC "š5;80H" "k"
                WITH NO ADVANCING.
        DISPLAY ESC "š6;1H" "x" ESC "š6;17H" "x" ESC "š6;80H" "x"
                WITH NO ADVANCING.
        DISPLAY ESC "š7;1H" POLJE-SPACE ESC "š7;1H" "m"
                ESC "š7;17H" "v" ESC "š7;80H" "j" ESC "(S"
                WITH NO ADVANCING.
*
        MOVE SPACE TO NASLOV-LISTE.
        DISPLAY ESC "š0;1;7m"ESC "š6;2H" " Naslov liste :"
                ESC "š0m" ESC "š6;19H" WITH NO ADVANCING.
        CALL "GETADR" USING ADRESA NASLOV-LISTE.
        MOVE 60 TO NUM-CHAR.
        CALL "WTQIO" USING FUN-COD LUN-TI EVENT-FLAG PROCES-WORD
                        STATUS-WORD PAR END-STATUS.
        DISPLAY ESC "š8;1H" WITH NO ADVANCING.
        MOVE ZERO TO I.
        MOVE ZERO TO J.
L1.
        COMPUTE I = I + 1.
        IF N-L(I) NOT = SPACE MOVE I TO J.
        IF I NOT = 60 GO TO L1.
        MOVE SPACE TO NASLOV-NASLOV.
```

```
        COMPUTE I = (72 - J) / 2.
        IF J = ZERO MOVE 1 TO J.
        MOVE ZERO TO L.
L2.
        COMPUTE L = L + 1.
        COMPUTE I = I + 1.
        MOVE N-L(L) TO N-N(I).
        IF L NOT = J GO TO L2.
        MOVE ALL SPACES TO RED.
        STRING "    " NASLOV-NASLOV DELIMITED BY SIZE INTO RED.
        WRITE RED AFTER PAGE.
        MOVE SPACES TO RED.
        WRITE RED AFTER 2 LINES.
        MOVE ALL "#" TO POLJE-CVOR.
        MOVE 3 TO RED-BROJ.
L3.
        READ DAT-1 AT END GO TO L7.
        MOVE ZERO TO COD-CHAR.
        MOVE NUM-CVOR TO CHAR-COD.
        MOVE COD-CHAR TO CVOR-NUM.
        MOVE NUM-GRANA TO CHAR-COD.
        MOVE COD-CHAR TO GRANA-NUM.
        COMPUTE GRANA-NUM = GRANA-NUM / 2.
        MOVE ZERO TO I.
L4.
        COMPUTE I = I + 1.
        MOVE MATRIX(I) TO CHAR-COD.
        MOVE COD-CHAR TO L.
        COMPUTE L = L - 64.
        MOVE E-M(L) TO M-P(I).
        IF I NOT = 20 GO TO L4.
        MOVE ALL SPACES TO SLOG-2.
        COMPUTE RED-SLOG = RED-SLOG + 1.
        MOVE RED-SLOG TO LIS-RED.
        MOVE CVOR-NUM TO LIS-CVOR.
        MOVE GRANA-NUM TO LIS-GRANA.
        IF CVOR-NUM NOT = POLJE-CVOR MOVE CVOR-NUM TO POLJE-CVOR
                                     MOVE 2 TO SKOK.

        MOVE ZERO TO L.
        MOVE 1 TO I.
L5.
        COMPUTE I = I + 1.
        MOVE P-M(I) TO ROW-MATRIX.
        MOVE ZERO TO J.
L6.
        COMPUTE J = J + 1.
        COMPUTE L = L + 1.
        MOVE R-M(J) TO LIS-ELEM(L).
        IF J NOT = ( I - 1 ) GO TO L6.
        IF I NOT = CVOR-NUM COMPUTE L = L + 1
                            GO TO L5.
        IF RED-BROJ NOT < 60 MOVE 1 TO SKOK
                             MOVE ZERO TO RED-BROJ
                WRITE RED FROM SLOG-2 AFTER PAGE ELSE
                WRITE RED FROM SLOG-2 AFTER SKOK LINES.
        COMPUTE RED-BROJ = RED-BROJ + SKOK.
```

```
           MOVE 1 TO SKOK.
           DIVIDE 100 INTO RED-SLOG GIVING I REMAINDER I.
           IF I NOT = ZERO GO TO L3.
           DISPLAY ESC "š7m" ESC "š3;27H" RED-SLOG ESC "š0m"
                   ESC "š8;1H" WITH NO ADVANCING.
           GO TO L3.
       L7.
           DISPLAY ESC "š7m" ESC "š3;27H" RED-SLOG ESC "š0m"
                   ESC "š8;1H" WITH NO ADVANCING.
           CLOSE DAT-1 DAT-2.
           STOP RUN.
```

```
      PROGRAM LAMDA
      DIMENSION A(200),R(200)
      LOGICAL *1 X(24)
      INTEGER FILE
      DATA FILE/1/
      OPEN(UNIT=FILE,TYPE='OLD',NAME='DR1:š100,104čMATRIX.L10',
     1 RECORDSIZE=24,RECORDTYPE='FIXED')
C
5     READ(FILE,10,END=20)(X(I),I=1,24)
10    FORMAT(24A1)
      CALL SUBL(N,X,A,R)
      MV=1
      CALL EIGEN(A,R,N,MV)
      J=0
      TYPE *,' '
      DO 15 I=1,N
        J=J+I
        TYPE *,A(J)
15    CONTINUE
      GO TO 5
20    CALL EXIT
      END
```

```
        .TITLE  LEPOVIC
        .IDENT  /MIRKO/
        .GLOBL  SUBL

COD:    .BYTE   0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,1,1
        .BYTE   0,0,1,0,0,0,0,1,0,1,0,0,1,1,0,0,0,1,1,1
        .BYTE   0,1,0,0,0,0,1,0,0,1,0,1,0,1,0,0,1,0,1,1
        .BYTE   0,1,1,0,0,0,1,1,0,1,0,1,1,1,0,0,1,1,1,1
        .BYTE   1,0,0,0,0,1,0,0,0,1,1,0,0,1,0,1,0,0,1,1
        .BYTE   1,0,1,0,0,1,0,1,0,1,1,0,1,1,0,1,0,1,1,1
        .BYTE   1,1,0,0,0,1,1,0,0,1,1,1,0,1,0,1,1,0,1,1
        .BYTE   1,1,1,0,0,1,1,1,0,1,1,1,1,1,0,1,1,1,1,1

BUF:    .BLKB   100.
ONE:    .WORD   0,40200

SUBL::  MOV     4(R5),R0
        CLR     ž2(R5)
        MOVB    (R0),ž2(R5)
        ADD     #4,R0
        MOV     #BUF,R1
        CLR     R4
DCOD:   MOVB    (R0)+,R3
        SUB     #101,R3
        MUL     #5,R3
        CLR     R2
ECOD:   MOVB    COD(R3),(R1)+
        INC     R3
        INC     R2
        CMP     #5,R2
        BNE     ECOD
        INC     R4
        CMP     #24,R4
        BNE     DCOD
        MOV     6(R5),R0
        MOV     10(R5),R1
        CLR     R2
CLRS:   CLR     (R0)+
        CLR     (R0)+
        CLR     (R1)+
        CLR     (R1)+
        INC     R2
        CMP     #200.,R2
        BNE     CLRS
        MOV     6(R5),R0
        CLR     R1
LOOP:   MOV     R1,R3
        MUL     #12,R3
        INC     R1
        CLR     R2
FULL:   MOVB    BUF(R3),R4
        ASL     R4
        MOV     ONE(R4),(R0)+
        CLR     (R0)+
```

```
INC     R3
INC     R2
CMP     R1,R2
BNE     FULL
CMP     R1,ž2(R5)
BNE     LOOP
RTS     PC
.END
```

LITERATURA

[1] **D. Cvetković, M. Doob, H. Sachs** - "Spectra of graphs - Theory and Application", VEB Deutch. Verl.Wiss., Berlin, 1980; Academic Press, New York, 1980.

[2] **D. Cvetković, M. Doob, I. Gutman, A. Torgašev:** "Recent results in the theory of Graph Spectra", North-Holland, Amsterdam, 1988.

[3] **I. Gutman, O.E. Polansky:** "Mathematical Concepts in Organic Chemistry", Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[4] **M. Lepović:** The characterization of normal digraphs with 6 and 7 vertices, Graph Theory, Proc. Eight Seminar on Graph Theory, Novi Sad, April 18-19,1987,Inst. Novi Sad, 1989, str. 90-98.

[5] **M. Lepović:** Maximal canonical graphs with 6 nonzero eigenvalues, Glasnik Mat. (Zagreb), 25 (1) (1990), str. 683-686.

[6] **M. Lepović:** Certain results on normal digraphs, prihvaćeno za štampu u Radovi Matematički ANU BiH Inst. Mat. (Sarajevo).

[7] **M. Lepović:** On graphs whose energy does not exceed 4, prihvaćeno za štampu u Publ. Inst. Mat. (Beograd) 49(63) (1990).

[8] **M. Lepović:** Some results about the reduced energy of graphs, I, poslato u Univ. Novi Sad , Review of Reaserch Fac. Sci. (Ser. Mat.).

[9] **M. Lepović:** Some results about the reduced energy of graphs, II, prihvaćeno za štampu u Bull. Serb. Acad. Sci. Arts (Ser. Mat.).

[10] **M. Lepović:** Some results about the reduced energy of graphs, III, poslato u Mat. Vesnik, (Beograd).

[11] **M. Lepović:** Some kinds of energies of graphs, poslato u Discrete Mat. .

[12] **M. Lepović, I. Gutman, M. Petrović, N. Mizoguchi:** Some contributions to the theory of cyclic conjugation, J. Serb. Chem. Soc. 55 (4) (1990), str. 193-198.

[13] **N. Mizoguchi:** Circuit resonance energy. On the roots of circuit characteristic polynomial, Bull. Chem. Soc. Japan 63 (1990), str. 765-769.

[14] **M. Petrić:** Some operations on normal digraphs, Univ. Novi Sad, Review of Research (Ser. Mat.) 17(No 1) (1987) str. 57-67.

[15] **Petrović M. M.:** On graphs whose spectral spread does not exceed 4, Publ. Inst. Math. (Beograd), 34(48)(1983), str. 169-174.

[16] **Petrović M. M.:** Graphs with bounded reduced positive energy, U Proc. Fourth Yugoslav Sem. Appl. Mat., Split, Maj 28-30, 1984, str. 147-153.

[17] **J. H. Smith:** Some properties of the spectrum of a graph, U Combinatorial Structures and Their Applications, Gordon and Breach, New York, 1970; str. 403-406.

[18] **A. Torgašev:** Spectra of infinite graphs, Publ. Inst. Mat. (Beograd) 29(43) (1981), str. 269-282.

[19] A. Torgašev: On infinite graphs with three and four nonzero eigenvalues, Bull. Acad. Serbe Sci. Arts. (Sci. Mat.) (76) 11(1981), str. 39-48.

[20] A. Torgašev: On infinite graphs with five nonzero eigenvalues, Bull. Acad. Serbe Sci. Arts. (Sci. Mat.)(79)12 (1982), str. 31-38.

[21] A. Torgašev: Graphs whose energy does not exceed 3, Czech. Mat. J. 36 (111)(1986), (No 2), str. 167-171.

[22] A. Torgašev: The spectrum of a normal digraph, Univ. Novi Sad, Review of Research Fac. Sci. (Ser. Math.) 17(No 1) (1987), str. 187-200.

[23] A. Torgašev: Normal digraphs whose degrees do not exceed 3, Graph Theory, Proc. Eight Yugoslav Seminar on Graph Theory, Novi Sad, April 18-19, 1987, Inst. Math., Novi Sad, 1989, str. 113-122.

[24] A. Torgašev: A property of canonical graphs, prihvaćeno za štampu u Publ. Inst. Mat. (Beograd).