UNIVERZITET U BEOGRADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET



*Stojan J. Duborija*

# ADAMAROV PROIZVOD U $H^p$, $B^p$, $D$ PROSTORIMA I NJIMA ANALOGNIM PROSTORIMA

DOKTORSKA DISERTACIJA



BEOGRAD, 1981.

# U V O D

1. U teoriji funkcija kompleksne promjenljive razlikuju se dvije vrste problema: takozvani granični i unutrašnji problemi. Granični problemi odnose se na utvrdjivanje raznih svojstava pojedinih analitičkih funkcija, ili klasa analitičkih funkcija na skupovima tačaka koje pripadaju granici odgovarajuće oblasti definisanosti ovih funkcija. Unutrašnji problemi odnose se na utvrdjivanje svojstava ovih funkcija na skupovima tačaka koje pripadaju njihovoj oblasti definisanosti. Poslednjih pedeset godina su, pored ostalog, posebno proučavane tzv. klase funkcija $H^p, 0<p\leq\infty, N, B^p, 0<p<1, D^p, 0<p\leq\infty, A^p, 0<p<\infty$, čija su mnoga svojstva tretirana u ovom radu.

Koristeći se metodama funkcionalne analize, u toku poslednjih trideset godina ove klase funkcija posmatraju se i kao odgovarajući prostori analitičkih funkcija. Vidan doprinos izučavanju ovih prostora dali su: G.H.Hardy, I.E.Littlewood, P.L. Duren, B.W.Romberg, A.L.Shilds, I.I.Privalov i dr. Istaknuto mjesto, u teoriji prostora analitičkih funkcija ima problem utvrdjivanja nekih svojstava Adamarovog (J.Hadamard) proizvoda

$$(f \odot g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$$

ako su poznata neka svojstva njegovih komponenata - analitičkih funkcija

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{i} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

kao i njemu obrnut problem: ako su poznata svojstva Adamorovog proizvoda $f \odot g$ i jedne komponente, šta se može utvrditi za drugu komponentu[15],[39],[34].

U krugu tih problema često se ispituju i utvrdjuju neophodni i dovoljni uslovi koje treba da ispunjava komponenta $f$ da bi Adamorov proizvod $f \odot g$ pripadao datom prostoru analitičkih funkcija za svaki element $g$ nekog datog prostora analitičkih funkcija. Najjednostavniji je slučaj kada se neophodni i dovoljni uslovi koje treba da zadovolji funkcija $f$ svode na pripadnost ove funkcije nekom prostoru analitičkih funkcija što nije uvijek moguéno. Najčešće se neophodan i dovoljan uslov izražava u terminima Tejlorovih koeficijenata; stoga se isto analitička funkcija $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ identifikuje sa nizom $\{a_n\}$ svojih Tejlorovih koeficijenata. Tada se postavlja sledeći problem: okarakterisati nizove $\{a_n\}$ tako da Adamarov proizvod

$$(f \odot g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$$

pripada datom prostoru $B$ analitičkih funkcija, odnosno prostoru nizova (ako se Adamarov proizvod $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ identifikuje sa nizom $\{a_n b_n\}$ svojih Tejlorovih koeficijenata), za svaku analitičku funkciju $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ ili svaki niz $\{b_n\})$ datog prostora $A$.

Niz $\{a_n\}$ sa tim svojstvom je množitelj prostora $A$ u prostor $B$. Skup svih takvih množitelja označava se $(A,B)$. Tada se problem sastoji u tome da se okarakteriše $(A,B)$.

2. U ovom radu tretiram, koristeći metodu množitelja, Adamarove proizvode prostora $H^p, B^p, D^p$ *i* $A^p$, tj. množitelje ovih prostora; moji rezultati odnose se na množenje u $D^p$ *i* $A^p$ prostorima.

Rad se sastoji od tri glave.

U prvoj glavi se navode poznati rezultati koji se odnose na pojedina svojstva elemenata prostora ili prostora $H^p, B^p$,

$D^p$ *i* $A^p$ i koji se koriste u II i III glavi. Takodje se dokazuje jedna nova teorema (teorema 1.4.3) koja daje poboljšanju ocjenu za $M_\infty(r,f)$.

Problematici množitelja je posvećena druga glava ove disertacije. Odeljak 2.3. sadrži nove rezultate za množitelje $D^p$ prostora (teoreme 2.3.1. - 2.3.12). Utvrdjeni su neophodni i dovoljni uslovi da niz $\{\lambda_n\}$ pripada: a) $(D^p,D^2)$, $2\leq p\leq\infty$ (teorema 2.3.5); b) $(H^1,D)$ (teorema 2.3.9); c) $(D^2,D)$ (teorema 2.3.10). U ostalim teoremama pomenutog odeljka utvrdjuju se dovoljni uslovi za posmatrane množitelje.

U trećoj glavi razmatra se najprije (u odeljku 3.1) problem odredjivanja prostora $A^p$ kojima pripada izvod $f'(z)$ ako analitička funkcija pripada prostoru $A^q$, i njemu obrnut problem. Ovaj odeljak sadrži jedno originalno pooštrenje koje je u Bergmanovim prostorima ranije dobio japanski matematičar Hiroehi Watanabe [31]; odnosnu teoremu 3.1.3 dokazao sam koristeći svoj raniji rezultat (teorema 1.4.3), na osnovu kojeg sam takodje dokazao još jednu novu teoremu (teorema 3.1.4), koja tvrdi da, ako $f(z)\in A^p$, $0<p<\infty$, tada $f_{(k)}(z)\in A^q$ za

1. $k>2(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$ i $0\leq p\leq q<1$
2. $k\geq(1-\frac{1}{q}) + 2(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$, $1\leq q<\infty$

Dobijeni rezultati su bolji od poznatih.

U odeljku 3.2 dokazao sam da se neke poznate ocjene Tejlorovih koeficijenata prostora $A^p$ mogu poboljšati (teorema 3.2.1). Kao posledice tih novih ocjena dobio sam sledeće rezultate:

a) *Niz* $\{\frac{1}{(n+1)^{\frac{2}{p}}}\in(A^p,l^1)$ ako je $0<p\leq 1$;

b) *Niz* $\{\frac{1}{(n+1)^{\frac{2}{p}-\frac{1}{2}}}\} \in (A^p, l^2)$ ako je $1 \leq p \leq 2$.

Na kraju je data bibliografija korišćenih radova.

# I GLAVA

## PROSTORI ANALITIČKIH FUNKCIJA $H^p$, $B^p$, $D^p$ i $A^p$

U ovoj glavi se, za svaki od prostora $H^p$, $B^p$, $D^p$ i $A^p$, navode neki poznati rezultati koji su u ovom radu korišćeni kao polazna tačka u ispitivanju nekih novih svojstava Adamarovih proizvoda funkcija koje tim prostorima pripadaju.

### 1.1. HARDIJEV PROSTOR $H^p$

1. Navedimo definiciju prostora $H^p$ i $N$, a zatim utvrdimo njihov odnos i ponašanje elemenata tih prostora na granici jediničnog kruga. Zatim ćemo navesti nekoliko teorema koje daju ocjene rasta integralnih sredina elemenata prostora $H^p$. Ove teoreme pripadaju, uglavnom, Hardiju i Litlvudu.

*DEFINICIJA* 1.1.1. neka je $f(z)$ analitička funkcija definisana u jediničnom krugu $D=\{z;|z|<1\}$, i neka je

$$M_p(r,f)=\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p da\Big)^{\frac{1}{p}},\quad 0<p<\infty;$$

$$M_\infty(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|;$$

$$N(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta.$$

Tada

a) $f(z)\in H^p$, $0<p<\infty$, ako je $\sup\limits_{0\leqslant r<1} M_p(r,f)<\infty$;

b) $f(z)\in H^\infty$, ako je $\sup\limits_{0\leqslant r<1} M_\infty(r,f)<\infty$;

c) $f(z)\in N$, ako je $\sup\limits_{0\leqslant r<1} N(r,f)<\infty$;

Prostori definisani pod a) i b) u literaturi su poznati kao Hardijevi (G.H.Hardy), a prostor pod c) kao Nevanlinin (R.Nevanlinna) prostor.

Teorema 1.1.1. Za prostore na koje se odnosi prethodna definicija (1.1.1) važi:

$$H^{\infty} \subset H^{p} \subset H^{q} \subset N \qquad 0<q<p<\infty.$$

*DOKAZ:* Relacija $H^{\infty} \subset H^{p}$ slijedi iz činjenice da su elementi prostora $H^{\infty}$ ograničene analitičke funkcije.

Neka je $0\leq r<1$ i $q<p$. Ako je

$$A = \{\theta \in [0,2\pi];\ |f(re^{i\theta})|>1\},$$

tada važi relacija

$$(1.1.1)\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^q d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_A |f(re^{i\theta})|^q d\theta +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\mathscr{C}A} |f(re^{i\theta})|^q d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_A |f(re^{i\theta})|^p d\theta + 1.$$

Iz ove nejednakosti slijedi da je

$$H^{p} \subset H^{q} \text{ za } 0<q<p<\infty.$$

Dokaz da je $H^{p} \subset N$ slijedi iz procjene

$$(1.1.2)\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ln(1+|f(re^{i\theta})|)d\theta \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1+|f(re^{i\theta})|)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

U sva tri slučaja inkluzija je prava, što potvrdjuju i primjeri:

1) funkcija $f(z)=(1-z)^{-\frac{1}{p}} \in H^{q} (q<p)$, ali $f(z) \notin H^{p}$,

2) $f(z)=ln\frac{1}{1-z} \in H^{p} (0<p<\infty)$, ali $f(z) \notin H^{\infty}$;

3) $f(z)=e^{\frac{1}{1-z}} \in N$, ali $f(z) \notin H^{p}$ $(0<p\leq\infty)$.

Za razvoj teorije Hardijevih prostora od posebnog su značaja teoreme o postajanju graničnih vrijednosti njihovih elemenata; navedimo - bez dokaza - dvije od tih teorema.

*TEOREMA 1.1.2.(NEVANLINA)* Funkcija analitička u krugu $|z|<1$ pripada klasi $N$ ako i sam ako je ona količnik dvije ograničene funkcije ([5]). Značaj ove teoreme je u tome što se svojstva ograničenih funkcija mogu prenijeti na funkcije prostora $N$.

*TEOREMA 1.1.3.* Za funkciju $f(z)\in N$ skoro svugdje postoji netangentni limes $f(e^{i\theta})$ i $ln|f(e^{i\theta})|$ je integrabilna funkcija, izuzev ako je $f(z)\equiv 0$. Ako $f(z)\in H^p$ $(p>0)$, tada $f(e^{i\theta})\in$ $\in L^p_{[0,2\pi]}$. ([5]).

*NAPOMENA 1.1.1.* Iz prethodne teoreme slijedi da svaka funkcija $f(z)\in H^p$ $(0<p\leqslant\infty)$ ima netangentnu graničnu vrijednost $f(e^{i\theta})$ u skoro svakoj graničnoj tački jediničnog kruga. S tim u vezi uvedimo oznaku

$$\mathscr{H}^p=\{f(e^{i\theta});\ f(e^{i\theta})=\lim_{re^{i\varphi}\xrightarrow[\sphericalangle]{}e^{i\theta}} f(re^{i\varphi}),\ f(z)\in H^p\}.$$

Kao i obično, i u ovom slučaju smatraćemo da su dvije funkcije jednake ako se skoro svugdje poklapaju.

Iz teoreme 1.1.3. slijedi da je

$$\mathscr{H}^p\subset L^p_{[0,2\pi]}$$

i da je $\mathscr{H}^p$ vektorski potprostor prostora $L^p_{[0,2\pi]}$. Celishodno je definisati veličinu

$$||f||=||f||_{H^p}=\lim_{r\to 1} M_p(r,f)$$

gdje je $M_p(r,f)$ ranije definisane integralna sredina funkcije $f(z)$.

Poznato je da je (b. [5]) $\mathscr{H}^p(0<p<\infty)$ $L^p$ - zatvaranje skupa polinoma po $e^{i\theta}$. Kao posledica toga slijedi činjenica da je $H^p$ Banahov (Banach) prostor $(1\leq p\leq\infty)$, dok je za $0<p<1$ kompletan metrički prostor sa metrikom

$$d(f,g)=\|f-g\|_p^p.$$

2. Faktorizacija elemenata prostora $N$ je vezana za pojmove Blaškeovog (W.Blaschke) proizvoda, unutrašnje funkcije i spoljašnje funkcije.

*DEFINICIJA 1.1.2.* Neka je $\{a_n\}$ niz kompleksnih brojeva u jediničnom krugu $|z|<1$, $0<|a_1|\leq|a_2|\leq\ldots<1$, $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)<\infty$. Proizvod

$$B(z)=z^m\prod_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{a_n}\frac{a_n-z}{1-\bar{a}_n z},\quad m=0,1,2,\ldots$$

zove se Blaškeov proizvod.

*DEFINICIJA 1.1.3.* Analitička funkcija $f(z)$ definisana u $|z|<1$ je unutrašnja funkcija ako je

$$|f(z)|\leq 1 \text{ i } |f(e^{i\theta})|=1 \text{ skoro svugdje.}$$

*DEFINICIJA 1.1.4.* Analitička funkcija $F(z)$ je spoljašnja funkcija klase $H^p$ ako je oblika

$$F(z)=e^{i\gamma}\exp\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\ln\psi(t)dt\}$$

gdje je $\gamma$ realan broj, $\psi(t)\geq 0$, $\ln\psi(t)\in L^1$ i $\psi(t)\in L^p$.

*DEFINICIJA 1.1.5.* Unutrašnja funkcija $S(z)$ je singularna ako je

$$S(z)=\exp\{-\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t)\},$$

gde je $\mu(t)$ ograničena neopadajuća funkcija sa osobinom da je skoro svugdje $\mu'(t)=0$.

U vezi sa Blaškeovim proizvodom i unutrašnjom i spoljašnjom funkcijom navešćemo bez dokaza tri teoreme koje karakterišu njihovo ponašanje u prostoru $H^p$.

*TEOREMA 1.1.4* (Teorema o kanonskoj faktorizaciji). Analitička funkcija $f(z)\not\equiv 0$ pripada prostoru $H^p$, $0<p<\infty$, ako i samo ako je

$f(z)=B(z)\ S(z)\ F(z)$, gdje je $B(z)$ Blaškeov proizvod formiran od nula funkcije $f(z)$, $S(z)$ singularna unutrašnja funkcija i $F(z)$ spoljašnja funkcija klase $H^p$. ([5]).

Teoremom 1.1.4.okarakterisan je prostor $H^p$ faktorizacijom svojih elemenata, a naredna teorema ukazuje kako se može okarakterisati prostor $N$.

*TEOREMA 1.1.5.* Analitička funkcija $f(z)$ pripada prostoru $N$ ako i samo ako je

$$f(z)=B(z)\ F(z)\ \frac{S_1(z)}{S_2(z)},$$

gde je $B(z)$ Blaškeov proizvod formiran od nula funkcije $f(z)$, $S_1(z)$ i $S_2(z)$ su singularne unutrašnje funkcije, a $F(z)$ spoljašnja funkcija prostora $N$. ([5]).

Sledeća teorema utvrdjuje da $f(re^{i\theta})$ konvergira ka $f(e^{i\theta})$ u smislu metrike u $L^p$.

*TEOREMA 1.1.6.* Ako funkcija $f(z)\in H^p$ $(0<p<\infty)$, tada je

$$(1.1.3.)\quad \lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta=\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta})|^p d\theta$$

i

$$(1.1.4.)\quad \lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})-f(e^{i\theta})|^p d\theta=0.$$

([5]).

3. Sada ćemo navesti definicije još nekih pojmova koje ćemo kasnije koristiti.

*DEFINICIJA 1.1.6.* Neka je $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ analitička funkcija definisana u jediničnom krugu $|z|<1$ i neka je $\beta>0$. Tada je parcijalni izvod reda $\beta$ te funkcije.

$$(1.1.5)\quad f^{[\beta]}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1+\beta)}{n!}a_n z^n,$$

a parcijalni integral reda $\beta$ te funkcije

$$(1.1.6)\quad f_{[\beta]}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{\Gamma(n+1+\beta)}a_n z^n$$

Iz navedene definicije neposredno slijedi da su parcijalni izvod i parcijalni integrali uopštenja običnog izvoda i integrala.

Veza izmedju tih dvaju integrala, odnosno izmedju tih dvaju izvoda data je relacijama:

$$\int_0^z f(\xi)d\xi=zf_{[1]}(z),$$

odnosno

$$f^{[1]}(z)=[zf(z)]'$$

Odnos izmedju funkcije i njenog parcijalnog integrala utvrdjuje sledeća teorema:

*TEOREMA 1.1.7.* Neka funkcija $f(z)\in H^p(0<p<\infty)$. Tada $f_{[\beta]}(z)\in H^q$, $0<\beta<\frac{1}{p}$, $q=\frac{p}{1-\beta p}$.

Uslovi za $\beta$ i $q$ ne mogu se poboljšati ([21]).

4. Prije nego što navedemo nekoliko teorema o rastu integralnih sredina funkcija prostora $H^p$, navedimo tri nejednakosti (1.1.7, 1.1.8. i 1.1.9, dokaz u [5] ), koje se često koriste u raznim dokazima, a i u ovom radu će biti korišćene.

*LEMA 1.1.1.* Za svako $p>\frac{1}{2}$ važi relacija

$$(1.1.7)\quad \int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\Theta}{(1-2r\cos\Theta+r^2)^p}=O\left(\frac{1}{(1-r)^{2p-1}}\right),\ r\to 1$$

*LEMA 1.1.2.* Svaka funkcija $f(z)\in H^p$, $0<p\leq\infty$, može se predstaviti u obliku

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)$$

gdje funkcije $f_1(z)$ i $f_2(z)$ pripadaju prostoru $H^p$ i nemaju nula u krugu $|z|<1$, a pri tome

$$\|f_n\|_p\leq 2\|f\|_p,\ n=1,2. \tag{1.1.8}$$

*LEMA 1.1.3.* Neka je $p>1$ i $\rho=\frac{1}{2}(1+r)$. Tada

$$\int_0^{2\pi}|\rho e^{i\theta}-r|^{-p}d\theta=O\left((1-r)^{1-p}\right),\ r\to 1. \tag{1.1.9}$$

*TEOREMA 1.1.8.* Neka je $0<p\leq\infty$, $\beta>0$ i $f(z)$ analitička funkcija u krugu $|z|<1$; tada je

$$M_p(r,f)=O\left(\frac{1}{(1-r)^{\beta}}\right),$$

ako i samo ako je

$$M_p(r,f')=O\left(\frac{1}{(1-r)^{\beta+1}}\right).$$ ([5 ,str.80]).

*TEOREMA 1.1.9.* Neka je $1<p<\infty$, $1<a<\infty$, $-1<b<\infty$ i $f(z)$ analitička funkcija u krugu $|z|<1$; tada je

$$\int_0^1(1-r)^b\{M_p(r,f)\}^a dr<C\{\int_0^1(1-r)^{a+b}\{M_p(r,f')\}^a dr+|f(0)|^a\},$$

gdje konstanta $C$ ne zavisi od $f(z)$. ([5 ,str.81]).

*TEOREMA 1.1.10.* (Hardi - Litlvud). Ako je $f(z)$ analitička funkcija u krugu $|z|<1$ i ako je

$$M_p(r,f)\leq\frac{C}{(1-r)^{\beta}},\ 0<p<\infty,\ \beta\geq 0,$$

tada postoji konstanta $K=K(p,\beta)$, nezavisna od $f(z)$ i takva da je

$$M_q(r,f)\leq\frac{KC}{(1-r)^{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}},\ p<q<\infty.$$

Specijalno ako je $\beta=0$ (tj. ako $f(z)\in H^p$), onda je

$$M_q(r,f)=\mathcal{O}((1-r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}});$$

pri tome je eksponent $\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$ najbolji mogući. ([21,str.84]).

*TEOREMA* **1.1.11.** (Hardi - Lilvud). Ako je $0<p<q\leq\infty$, $f\in H^p$, $\lambda>p$ i $\alpha=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$, tada je

$$\int_0^1 (1-r)^{\lambda\alpha-1}\{M_q(r,f)\}^\lambda dr<\infty.$$ ( [5 ,str.87]).

*TEOREMA 1.1.12.* Neka $f(z)\in H^p$, $0<p<1$. tada je

$$\int_0^1 (1-r)^{\frac{1}{p}-2} M_1(r,f)dr\leq C_p||f||_p.$$ ( [5] ).

5. Netaknuto mjesto u teoriji analitičkih funkcija zauzimaju Tejlorovi koeficijenti. Naime, postavlja se sledeće osnovno pitanje: da li na osnovu pripadnosti analitičke funkcije nekom prostoru možemo nešto reći o njenim Tejlorovim koeficijentima, i obrnuto, ako znamo ponašanje Tejlorovih koeficijenata, možemo li nešto reći o funkciji $f(z)$.

Za prostor $H^p$, ako je $p=2$, odgovor je jasan: $f(z)\in H^2$ ako i samo ako $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<\infty$.

U ostalim slučajevima problem je složeniji. Ako je $1<p<\infty$, ponašanje koeficijenata $H^p$ prostora svodi se na slučaj

Furijeovih koeficijenata u $L^p$ prostoru.

Djelimičan odgovor na ova pitanja daju sledeće četiri teoreme:

*TEOREMA 1.1.13.* Ako funkcija $f(z)=\sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n \in H^p$, $1\leq p\leq 2$,

tada $\{a_n\} \in l^q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,

$i$ $||\{a_n\}||_q \leq ||f||_p$.

Obrnuto, ako $\{a_n\} \in l^p$, $1\leq p\leq 2$, tada

$$f(z)=\sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n \in H^p,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

i važi nejednakost

$$||f||_q \leq ||\{a_n\}||_p. \quad ([5]).$$

*TEOREMA 1.1.14.* (Hardi - Litlvud). Ako

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^p$, $0<p\leq 2$, tada je

$$\{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{p-2}|a_n|^p\}^{\frac{1}{p}} \leq Cp||f||_p$$

i

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}|a_n|^p<\infty. \quad ([5]).$$

*TEOREMA 1.1.15.* Ako je $\{a_n\}$ niz kompleksnih brojeva takav da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{q-2}|a_n|^q<\infty \text{ za neko } q,\ 2\leq q<\infty,$$

tada funkcija

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^q$$

i važi nejednakost

$$||f||_q\leq C_q\{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{q-2}|a_n|^q\}^{\frac{1}{q}},$$

gdje $C_q$ zavisi samo od $q$.

Sledeća teorema odnosi se na ocjenu Tejlorovih koeficijenata funkcija koje pripadaju prostoru $H^p$, $0<p\leq 1$. ([5]).

*TEOREMA 1.1.16.* Ako funkcija

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^p,\ 0<p\leq 1.$$

tada je

$$(1.1.10)\quad a_n=o(n^{\frac{1}{p}-1}),\ n\to\infty$$

i

$$(1.1.11)\quad |a_n|\leq Cn^{\frac{1}{p}-1}\,||f||_p.$$

Ocjena (1.1.10) je najbolja moguća, jer za svaki nula-niz $\{\delta_n\}$ postoji funkcija

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^p$$

tako da je

$$a_n\neq\mathcal{O}(\delta_n n^{\frac{1}{p}-1}).$$

*DOKAZ:* Ako $f(z)\in H^1$, tada je na osnovu Riman - Lebegove leme

$$a_n=o(1).$$

Neka je $0<p<1$. Iz

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)dz}{z^{n+1}},\ 0<r<1,$$

slijedi

$$(1.1.12)\quad |a_n|\leq r^{-n}M_1(r,f).$$

Pošto je $M_1(r,f)=o(1-r)^{1-\frac{1}{p}}$ (Teorema 1.1.10), to je

$$a_n=o(n^{\frac{1}{p}-1}),\ r=1-\frac{1}{n}.$$

Sobzirom da je $M_p(r,f)\leq ||f||_p$, na osnovu teoreme (1.1.10) dobijamo da je

$$(1.1.13)\quad M_1(r,f)\leq C||f||_p(1-r)^{1-\frac{1}{p}}$$

i

$$M_1(r,f)=o(1-r)^{1-\frac{1}{p}},$$

pa iz (1.1.12) i (1.1.13) slijedi tvrdjenje (1.1.11) tj.

$$|a_n| \leqslant C n^{\frac{1}{p}-1} \, ||f||_p .$$

## 1.2. BANAHOV OMOTAČ $B^p$ PROSTORA $H^p$

Kao što je poznato Hardijev prostor $H^p$, $p \geqslant 1$ je Banahov prostor. Medjutim ako je $0<p<1$, $H^p$ nije Banahov, već $F$ - prostor. Problem odredjivanja Banahovog omotača $B^p$ prostora $H^p$, $0<p<1$, tj. Banahovog prostora u kome je ovaj svugdje gust, dalo je snažan podsticaj daljem razvoju $H^p$ - prostora.

Mnoga svojstva prostora $H^p$, $0<p<1$, dokazana su upravo poslednjih desetak godina.

*DEFINICIJA 1.2.1.* Prostor $B^p$, $0<p<1$, je prostor analitičkih funkcija $f(z)$ u krugu $|z|<1$ za koje važi

$$||f||_{B^p} = ||f||_B = \int_0^1 (1-r)^{\frac{1}{p}-2} M_1(r,f)\, dr < \infty .$$

U sledećoj teoremi tvrdi se da je prostor $B^p$ Banahov omotač prostora $H^p$, i utvrdjuju se neka njegova svojstva.

*TEOREMA 1.2.1.* Prostor $B^p$ sa normom $||f||_B$ je Banahov prostor; taj prostor ima sledeće osobine:

a) $|f(z)| \leqslant C_p ||f||_B (1-|z|)^{-\frac{1}{p}}$;

b) $f(z) = o(1-|z|)^{-\frac{1}{p}}$, $z \to 1$ $(z = re^{i\theta})$ uniformno po $\theta$;

c) Za svako $f(z) \in B^p$, $f_\rho \to f$ u $B^p$ - normi kada $\rho \to 1$, gdje je $f_\rho(z) = f(\rho z)$;

d) $H^p$ je svugdje gust podtprostor prostora $B^p$;

e) $||f||_B \leqslant C ||f||_p$, $f \in H^p$, $0<p<1$. ([21]).

Kako je $H^p \subset B^p$, prirodno se postavlja pitanje šta je sa svojstvima prostora $H^p$ koja se prenosi na širi prostor $B^p$, i koja nova svojstva ima prostor $B^p$.

*Ocjena*

$$M_\infty(r,f)=o((1-r)^{-\frac{1}{p}}),$$

koja važi za prostor $H^p$, $0<p<1$, ostaje da važi i u široj klasi $B^p$ (teorema 1.2.1.).

Sledeća ocjena Tejlorovih koeficijenata, koja je najbolja za klasu $H^p$, takodje ostaje da važi i u široj klasi $B^p$, za koju važi i suprotno tvrdjenje.

*TEOREMA 1.2.2.* Ako funkcija $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in B^p$, tada je

$$a_n=o(n^{\frac{1}{p}-1}),\quad n\to\infty, \tag{1.2.5}$$

i

$$|a_n|\leq C_p\,||f||_B n^{\frac{1}{p}-1}. \tag{1.2.6}$$

Obrnuto, ako je $0<p<1$ i $a_n=O(n^\alpha)$, $\alpha<\frac{1}{p}-\frac{3}{2}$, tada $f(z)\in B^p$. Eksponent $\frac{1}{p}-\frac{3}{2}$ je najbolji mogući, jer postoji funkcija $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tako da je $a_n=O(n^{\frac{1}{p}-\frac{3}{2}})$, ali ne pripada prostoru $B^p$.

*DOKAZ:* Neka $f(z)\in B^p$. Kako je

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz$$

to je i

$$|a_n|\leq\frac{M_1(r,f)}{r^n}\leq C_p\,||f||_B\, r^{-n}(1-r)^{1-\frac{1}{p}}$$

za svako $r<1$. Uzimajući da je $r=1-\frac{1}{n}$, dobijamo relaciju (1.2.5.)

Nejednakost (1.2.6.) slijedi iz osobine da je

$$f(z)=o((1-r)^{-\frac{1}{p}}) \text{ za } f(z)\in B^p.$$

Obrnuto, ako je $a_n=O(n^\alpha)$ i, ne umanjujući opštost, predpostavimo da je $\alpha>-\frac{1}{2}$, imaćemo

$$M_1^2(r,f)\leqslant M_2^2(r,f)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{2n}\leqslant C\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{2\alpha} r^{2n}=\mathcal{O}((1-r)^{-1-2\alpha}),$$

pa je

$$\|f\|_B=\int_0^1 (1-r)^{\frac{1}{p}-2} M_1(r,f)\,dr\leqslant C\int_0^1 (1-r)^{\frac{1}{p}-2-\frac{1}{2}-\alpha}\,dr<\infty$$

za $-\frac{1}{p}+2+\frac{1}{2}+\alpha<1$, tj. $\alpha<\frac{1}{p}-\frac{3}{2}$.

Da je ova ocjena najbolja, pokazano je u radu [21].

*NAPOMENA 1.2.1.* Uslov $a_n=\mathcal{O}(n^{\alpha})$, $\alpha<\frac{1}{p}-\frac{3}{2}$, je dovoljan za pripadnost analitičke funkcije $f(z)$ prostoru $B^p$. Teorema 1.2.2 ne kazuje ništa o neophodnosti istog uslova.

Kako je $a_n=\mathcal{O}(n^{\frac{1}{p}-1})$ neophodan uslov za pripadnost funkcije $f(z)$ prostoru $B^p$, uočava se činjenica da je taj uslov slabiji od uslova $a_n=\mathcal{O}(n^{\alpha})$, gdje je $\alpha<\frac{1}{p}-\frac{3}{2}$.

Pored dovoljnog uslova za pripadnost funkcije prostoru $B^p$ navedenog u prethodnoj teoremi, utvrdjen je još jedan dovoljan uslov u terminima Tejlorovih koeficijenata.

*TEOREMA 1.2.3.* Neka je $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ analitička funkcija u krugu $|z|<1$. Ako red

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\frac{1}{p}}|a_n|$$

konvergira, tada $f(z)\in B^p$. Eksponent $1-\frac{1}{p}$ je najbolji mogući.

*DOKAZ.*

$$\int_0^1 (1-r)^{\frac{1}{p}-2} M_1(r,f)\,dr\leqslant\int_0^1 (1-r)^{\frac{1}{p}-2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n\Big)dr\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\frac{1}{p}}|a_n|<\infty.$$

Da je eksponent $1-\frac{1}{p}$ najbolji mogući pokazano je u radu [20].

U uvodu smo istakli da je jedan dio III glave posvećen utvrdjivanju svojstva funkcije $f(z)$ ako $f'(z)\in A^p$ i obratno, svojstva funkcije $f'(z)$ ako $f(z)\in A^p$.

Za prostor $B^p$ odgovarajući problem je potpuno riješen sledećom teoremom:

*TEOREMA 1.2.4.* Ako je $0<p<q<1$ i $\beta = \frac{1}{p} - q$. Tada

a) $f(z) \in B^p \Rightarrow f_{[\beta]}(z) \in B^q$.

b) $f(z) \in B^q \Rightarrow f^{[\beta]}(z) \in B^p$.

Dokaz ove teoreme nalazi se u [21] .

## 1.3. $D^p$ PROSTOR

1. Prostori $D^p$ nijesu univerzalno poznati u matematičkoj literaturi. Njih je, koristeći kao motiv sledeću teoremu, kojom se utvrdjuje odnos integralnih sredina $M_p(r,f)$ i integrala tzv. area-funkcije $A(r,f)$, definisao i dokazao neka njihova svojstva M. Jevtić ([35]).

*TEOREMA 1.3.1.* Neka je $f(z)$ analitička funkcija u krugu $|z|<1$ i neka je $f(0)=0$. Tada je za $p\geq 2$

$$(1.3.1) \quad M_p^p(r,f) \leq C_p \int_0^r \left(\frac{A(\rho)}{\rho}\right)^{\frac{p}{2}} d\rho,$$

a za $0<p\leq 2$

$$(1.3.2) \quad M_p^p(r,f) \geq C_p \int_0^r \left(\frac{A(\rho)}{\rho}\right)^{\frac{p}{2}} d\rho,$$

gdje je

$$C_p = \frac{p^p}{2^{\frac{p}{2}} \cdot \Pi}.$$

Videti dokaz u radu [32].

*DOKAZ.* Kako je

$$M_p^p(r,f) = M_p^p(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta,$$

i

$$A(r) = A(r,f) = \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho |f'(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta d\rho = \Pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 r^{2n},$$

na osnovu Hardi-Stejnove identičnosti

$$r\frac{d}{dr}M_p^p(r) = \frac{p^2}{2\pi}\int_0^r\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^{p-2}|f'(\rho e^{i\theta})|^2\rho d\rho d\theta,$$

koji važi za $0<r<1$ i $p>0$, i nejednakost

$$M_p^p(r,f) \geqslant \frac{1}{\pi}\int_0^r [M(\rho)]^p d\rho, \quad p>0,$$

gdje je

$$M(\rho) = M(\rho,f) = \sup\{|f(z)|;\ |z| = \rho\}$$

pokazujemo:

a) Ako je $p=2$, tada je

$$M_2^2(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = c_2\int_0^r \frac{A(\rho)}{\rho} d\rho;$$

ova jednakost važi i za (1.3.2).

b) Neka je $p>2$. Tada je

$$r\frac{d}{dr}M_p^p(r) \leqslant \frac{p^2}{2\pi}M(r)^{p-2}\int_0^r\int_0^{2\pi} |f'(\rho e^{i\theta})|^2 \rho d\rho d\theta =$$

$$= \frac{p^2}{2\pi}M(r)^{p-2}A(r),$$

pa je i

$$M_p^p(r) \leqslant \frac{p^2}{2\pi}\int_0^r M(\rho)^{p-2}A(\rho)\rho^{-1}d\rho.$$

Koristeći Holderovu (Hölder) nejednakost, gdje je $p'=\frac{p}{p-2}$ i $q'=\frac{p}{2}$, dobijamo

$$M_p^p(r) \leqslant \frac{p^2}{2\pi}\left(\int_0^r M(\rho)^p d\rho\right)^{\frac{p-2}{p}}\left(\int_0^r \left(\frac{A(\rho)}{\rho}\right)^{\frac{p}{2}} d\rho\right)^{\frac{2}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{p^2}{2\pi}\left(\pi M_p^p(r)\right)^{\frac{p-2}{p}}\left(\int_0^r \left(\frac{A(\rho)}{\rho}\right)^{\frac{p}{2}} d\rho\right)^{\frac{2}{p}} =$$

$$= \frac{p^2}{2}(M_p^p(r))^{\frac{p-2}{p}} \left(\frac{1}{\pi}\int_0^r \left(\frac{A(\rho)}{\rho}\right)^{\frac{p}{2}} d\rho\right)^{\frac{2}{p}},$$

ili

$$\left[M_p^p(r)\right]^{\frac{2}{p}} \leqslant \frac{p^2}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^r \left(\frac{A(\rho)}{\rho}\right)^{\frac{p}{2}} d\rho\right)^{\frac{2}{p}},$$

to jest

$$M_p^p(r) \leqslant \frac{p^p}{2^{\frac{p}{2}}\Pi}\left(\int_0^r \left(\frac{A(\rho)}{\rho}\right)^{\frac{p}{2}} d\rho\right) = C_p\int_0^r \left(\frac{A(\rho)}{\rho}\right)^{\frac{p}{2}} d\rho.$$

Neka je $0<p<2$. Tada je

$$A(r) = \int_0^r\int_0^{2\pi} |f'(\rho e^{i\theta})|^2 \rho\, d\rho\, d\theta \leqslant M(r)^{2-p}\int_0^r\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^{p-2}|f'(\rho e^{i\theta})|^2 \rho\, d\rho\, d\theta$$

pa je i

$$\frac{p^2}{2\pi}A(r) \leqslant \frac{p^2}{2\pi}M(r)^{2-p}\int_0^r\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^{p-2}\cancel{H'(\rho e^{i\theta})}\,|f'(\rho e^{i\theta})|^2 \rho\, d\rho\, d\theta$$

to jest

$$\frac{p^2}{2\pi}A(r) \leqslant M(r)^{2-p}\, r\frac{d}{dr}M_p^p(r).$$

Stepenujući lijevu i desnu stranu sa $\frac{p}{2}$ i koristeći Hardijevu nejednakost za $p'=\frac{2}{2-p}$ i $q'=\frac{2}{p}$, dobijamo

$$\frac{p^p}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}}A(r)^{\frac{p}{2}} \leqslant M(r)^{(2-p)\frac{p}{2}}\, r^{\frac{p}{2}}\left[\frac{d}{dr}\left(M_p^p(r)\right)\right]^{\frac{p}{2}}.$$

Integrišući lijevu i desnu stranu od $0$ do $r$ po $\rho$, dobijamo

$$\frac{p^p}{(2p)^{\frac{p}{2}}}\int_0^r \left(\frac{A(\rho)}{\rho}\right)^{\frac{p}{2}} d\rho \leqslant \left(\int_0^r M(\rho)^p d\rho\right)^{\frac{2-p}{2}}\left[M_p^p(r)\right]^{\frac{p}{2}} <$$

$$< \Pi^{\frac{2-p}{2}}\left[M_p^p(r)\right]^{\frac{2-p}{2}}\left[M_p^p(r)\right]^{\frac{p}{2}},$$

to jest

$$M_p^p(r) \geq C_p \int_0^r \left(\frac{A(\rho)}{\rho}\right)^{\frac{p}{2}} d\rho.$$

2. Koristeći nejednakost (1.3.1) i (1.3.2) kao motiv, M. Jevtić je definisao prostor $D^p$.

Navedimo ove njegove definicije.

*DEFINICIJA 1.3.1.* Neka je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ analitička funkcija u krugu $|z|<1$. Funkcija $f(z) \in D^p$, $0<p<\infty$, ako je

$$\|f\|_{D^p}^p = \int_0^1 \left[A(r)\right]^{\frac{p}{2}} dr < \infty,$$

gdje je

$$A(r) = A(r,f) = \iint_{|z|<r} |f'(z)|^2 dx dy = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 r^{2n}.$$

*DEFINICIJA 1.3.2.* Neka je $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ analitička funkcija u krugu $|z|<1$, funkcija $f(z) \in D^{\infty}$ ako je

$$\|f\|_{\infty}^2 = A(1,f) = \iint_{|z|<1} |f'(z)|^2 dx dy = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 < \infty.$$

Napominjemo da je M. Jevtić upotrebio za označavanje prostora oznaku $D^p$ zbog toga što se u literaturi koristi oznaka $D$ za prostor funkcija sa konačnim (Dirišleovim) integralom.

Jasno, prostori $D^p$ su uopštenje prostora $D$:

$D \subset D^p$, $0<p<\infty$.

Posledica teoreme 1.3.1 i definicije prostora $D^p$ ukazuju da postoje izgledi da prostori $D^p$ zauzmu zapaženo mjesto u teoriji Hardijevih prostora.

Navedimo radi sledećeg izlaganja nekoliko rezultata M.

Jevtića.

*POSLEDICA 1.3.1.* Ako je $0<p<2$, tada je $H^p \subset D^p$.

*POSLEDICA 1.3.2.* Ako je $p=2$, tada je $H^2 = D^2$.

*POSLEDICA 1.3.3.* Ako je $p>2$, tada je $D^p \subset H^p$.

Prostori $D^p$ se ne mogu uporediti (u odnosu na inkluziju) sa prostorom $B^p$ ako je $0<p<1$. Naime, $D^p \setminus B^p \neq \phi$ i $B^p \setminus D^p \neq \phi$. ( 5 ).

Kao i Hardijev prostor $H^p$, prostor $D^p$ je Banahov ako je $1\leqslant p\leqslant\infty$, a $F$-prostor ako je $0<p<1$.

*TEOREMA 1.3.2.* Neka su $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ i $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ analitičke funkcije u krugu $|z|<1$ i

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n$$

Ako $f(z)\in D^p$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $g(z)\in D^q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; tada:

1) Postoji konstanta $C>0$, koja ne zavisi od $f(z)$ i $g(z)$ i takva da je

$$|h(z)|\leqslant C\|f\|_{D^p}\|g\|_{D^q};$$

2) Funkcija $h(z)$ je neprekidna u krugu $|z|\leqslant 1$, [34].

*POSLEDICA 1.3.4.* Ako je $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ i $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \in D^q$ tada

$$\varphi(f) = \lim_{r\to 1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n r^n, \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in D^p,$$

definiše neprekidni linearni funkcional u prostoru $D^p$.

*POSLEDICA 1.3.5.* Ako funkcija $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \in D^p$, $0<p\leqslant\infty$, tada je

$$(1.3.3)\quad b_n = \mathcal{O}(n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}).$$

Uslov (1.3.3) je neophodan da analitička funkcija $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ pripada prostoru $D^p$.

Interesantno je da neophodan uslov

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}|a_n|^p<\infty, \quad 0<p\leq 2,$$

da $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ pripada prostoru $H^p$ ostaje da važi i u daleko široj klasi $D^p$.

*TEOREMA 1.3.3.* Neka je funkcija $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ analitička u krugu $|z|<1$. Ako $f(z)\in D^p$, $0<p\leqslant 2$, tada je

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}|a_n|^p<\infty. \tag{1.3.4}$$

*DOKAZ.* Prema teoremi Boas-a i Askey-a [ 11 ],[ 12 ] imamo da je

$$\int_0^1 \left[A(r)\right]^{\frac{p}{2}} dr<\infty$$

ako i samo ako je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} k|a_k|^2\right)^{\frac{p}{2}}}{n^2}<\infty. \tag{1.3.5}$$

Takodje, na osnovu jedne teoreme Hardija i Litlvuda [v. 27] , iz uslova (1.3.5) slijedi da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}|a_n|^p<\infty, \quad 0<p\leqslant 2.$$

Prema tome, ako $f(z)\in D^p$, $0<p\leqslant 2$, tada je

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}|a_n|^p<\infty.$$

Uslovi (1.3.3) i (1.3.4) su neophodni da funkcija $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ pripada prostoru $D^p$.

Navedimo i neke dovoljne uslove.

*TEOREMA 1.3.4.* 1) Neka je $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ analitička funkcija u krugu $|z|<1$. Ako je $a_n=\mathcal{O}(n^{\alpha})$, $\alpha<\frac{1}{p}-1$, $0<p<\infty$ , tada $f(z)\in D^p$.

2) Funkcija $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{p}-1} z^n \notin D^p$, $0<p<\infty$. Od interesa je navesti i njen dokaz.

*DOKAZ.* 1) Za dokaz iskoristimo da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} r^n \sim \frac{\Gamma(\alpha)}{(1-r)^{\alpha}}, \quad r\to 1, \alpha > 0,$$

što znači da je

$$\int_0^1 \left[A(r,f)\right]^{\frac{p}{2}} dr \leq C\int_0^1 \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{2\alpha+1} r^{2n}\Big)^{\frac{p}{2}} dr \leq$$

$$\leq C\int_0^1 (1-r)^{-p(\alpha+1)} dr < \infty.$$

2) $$\int_0^1 \left[A(r,g)\right]^{\frac{p}{2}} dr = C\int_0^1 \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{2}{p}-1} r^{2n}\Big)^{\frac{p}{2}} dr.$$

Pošto je

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{2}{p}-1} r^{2n} \sim C(1-r)^{-\frac{2}{p}},$$

to je i

$$\int_0^1 \left[A(r,g)\right]^{\frac{p}{2}} dr = \infty.$$

*TEOREMA 1.3.5.* Ako je $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{p}{2}-1} |a_n|^p < \infty$, tada funkcija

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in D^p, \quad 0<p\leq 2.$$

Postoji funkcija

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \notin D^p$$

ako je

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} |a_n|^p < \infty \text{ za svako } \beta < \frac{p}{2}-1.$$

*DOKAZ:* $$\int_0^1 [A(r,f)]^{\frac{p}{2}} dr \leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{p}{2}} |a_n|^p \int_0^1 r^{np} dr$$

$$\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{p}{2}-1} |a_n|^p<\infty.$$

Funkcija $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n_k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} z^{nk}$, gdje je $\frac{n_{k+1}}{n_k}\geq q>1$. $K=1,2,\ldots$, ne pripada prostoru $D^p$, iako je

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta}|a_n|^p<\infty \text{ za svako } \beta<\frac{p}{2}<1.$$

## 1.4. BERGMANOVI PROSTORI ANALITIČKIH FUNKCIJA

Bergmanovi prostori $A^{p,\alpha}$ su uopštenje Hardijevih prostora. Naime, $H^p\subset A^{2p}, 0<p<\infty$ . Utvrdjivanje svojstava Bergmanovog prostora $B^p$ $(B^p= A^{1,\frac{1}{p}-2})$ imalo je veliki značaj u razvitku teorije $H^p$ prostora.

*DEFINICIJE 1.4.1.* Analitička funkcija $f(z)$ definisana u jediničnom krugu $|z|<1$ pripada Bergmanovom prostoru $A^{p,\alpha}, 0<p<\infty$, $-1<\alpha<\infty$, ako je

$$\|f\|^p_{A^{p,\alpha}} = \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} |f(re^{i\Theta})|^p(1-r^2)^{\alpha}\, r\,dr\,d\Theta<\infty.$$

Prostor $A^{1,\frac{1}{p}-2}$, $0<p<1$, je prostor $B^p$. Kao i u slučaju Hardijevih prostora $H^p$, Bergmanov prostor $A^{p,\alpha}$ je Banahov prostor ako je $1\leq p<\infty$, a $F$-prostor ako je $0<p<1$, sa metrikom

$$d(f,g) = \|f-g\|^p_{A^{p,\alpha}},\quad f,\ g\in A^{p,\alpha}.$$

U daljem radu posmatračemo prostor $A^{p,0} = A^p$.

*TEOREMA 1.4.1.* Funkcija $f(z)$, analitička u krugu $|z|<1$, pripada prostoru $A^p$ ako i samo ako je

$$\int_0^1 M_p^p(r,f)\,dr<\infty.$$

*DOKAZ*. Pošto je

$$\|f\|_{A^p}^p = 2\,\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} |f(re^{i\Theta})|^p\, r\,dr\,d\Theta$$

$$= 2\int_0^1 rM_p^p\,(r,f)\,dr\leqslant 2\int_0^1 M_p^p(r,f)\,dr$$

i

$$\|f\|_{A^p}^p = 2\int_0^1 r\;M_p^p(r,f)\,dr$$

$$\geqslant 2\int_{\frac{1}{2}}^1 M_p^p(r,f)\,r\,dr \geqslant 2\,\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 M_p^p(r,t)\,dr,$$

to je i

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 M_p^p(r,f)\,dr\leqslant \|f\|_{A^p}^p \leqslant 2\int_0^1 M_p^p(r,f)\,dr.$$

Tvrdjenje teoreme *1. 4. 1* je neposredna posledica ove poslednje nejednakosti.

Proučavajući $D^p$ - prostore i utvrdjujući njihov odnos prema $A^p$ - prostorima *M.* Jevtić je pokazao sledeću teoremu.

*TEOREMA 1.4.2.* $D^p\subset A^p$ za $0<p<\infty$.

*DOKAZ:* Ako je $2\leqslant p<\infty$, tada je $D^p\subset H^p$. Takodje je $H^p\subset A^p$ za $p>0$, pa je i

$D^p\subset A^p$ za $2\leqslant p<\infty$.

Ako je $0<p<2$, tada je

$$\|f\|_{D^p}^p = \int_0^1\left[\Pi\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 r^{2n}\right]^{\frac{p}{2}} dr$$

$$\geqslant \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}\right]^{\frac{p}{2}} dr$$

$$= \int_0^1 [M_2^2(r,f)]^{\frac{p}{2}} dr = \int_0^1 M_2^p(r,f)dr$$

$$\geqslant \int_0^1 M_p^p(r,f)dr = |(f)|^p_{A^p},$$

to jest, ako $f(z) \in D^p$, tada $f(z) \in A^p$.

*TEOREMA 1.4.3.* Ako funkcija $f(z)$ pripada prostoru $A^p$, tada je

$$M_\infty(r,f) = O\left(\frac{1}{(1-r)^{\frac{2}{p}}}\right), \quad 0<p\leqslant\infty.$$

*DOKAZ:* Ako je $p=\infty$ tvrdjenje je očigledno. Neka je $0<p<\infty$. Tada je

$$||f||^p_{A^p} = \iint_{|z|<1} |f(z)|^p dxdy$$

$$\geqslant \iint_{|w-z|<1-|z|} |f(w)|^p dudv$$

$$\geqslant |f(z)|^p \iint_{|w-z|<1-|z|} dudv = |f(z)|^p \pi(1-|z|)^2,$$

to jest

$$|f(z)|^p \leqslant \frac{||f||^p_{A^p}}{\pi(1-|z|)^2},$$

pa je za $|z|=r$

$$M_\infty(r,f) = O\left(\frac{1}{(1-r)^{\frac{2}{p}}}\right)$$

Navedeni originalni rezultat predstavlja poboljšanje u odnosu na rezultat koji je *H.* Vatanaba dobio u svom radu [*31*]; naime, on je dokazao (lema 2) da

$$|f(re^{i\theta})|\leq C_p(1-r)^{-\frac{2}{p}} \text{ za } 0<p\leq 1$$

a
$$|f(re^{i\theta})|\leq C_p(1-r)^{-\frac{1}{p}-1} \text{ za } 1<p\leq\infty.$$

Napominjem da sam ovu teoremu koristio u dokazivanju nekoliko novih teorema koje se odnose na $A^p$ - prostore (III glava).

Od interesa je radi daljeg proučavanja prostora $A^p$ navesti teoreme koje daje *H.* Vatanaba u svome radu [31].

*TEOREMA 1.4.4.* Ako je $0<p<1$, tada je $B^p\subset A^p$.

*DOKAZ:* Ako funkcija $f(z)\in B^p$, tada je

(1.4.1)
$$M_p(r,f)\leq M_1(r,f)\leq C_p(1-r)^{-\frac{1}{p}-1}$$

i

(1.4.2)
$$|f(re^{i\theta})|\leq C_p(1-r)^{-\frac{1}{p}};$$

stoga je
$$\int_0^1 M_p{}^p(r,f)\,dr\leq C_p{}^p\int_0^1(1-r)^{p-1}dr<\infty,$$

što znači da $f(z)\in A^p$ ($B^{\frac{1}{2}}=A^1$ slijedi iz definicije).

Napominjemo da je poznato (r.[25]) da

(1.4.3)
$$H^p\subset A^{2p},\quad 0<p\leq\infty.$$

*TEOREMA 1.4.5.* Ako je $0<p<\frac{1}{2}$, tada je $A^{2p}\subset B^p$; ako je $\frac{1}{2}\leq p<1$, tada je $B^p\subset A^{2p}$.

*DOKAZ:* Neka je $0<p<\frac{1}{2}$ i $f(z)\in A^{2p}$.

Na osnovu teoreme 1.4.3. je
$$\int_0^1(1-r)^{\frac{1}{p}-2}M_1(r,f)\,dr=\int_0^1(1-r)^{\frac{1}{p}-2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^{2p}|f(re^{i\theta})|^{1-2p}d\theta\right)dr$$
$$\leq\int_0^1(1-r)^{\frac{1}{p}-2}M_{2p}{}^{2p}(r,f)\left\{C_p(1-r)^{-\frac{1}{p}}\right\}^{1-2p}dr$$

$$= C_p^{\,1-2p}\int_0^1 M_{2p}^{\,2p}(r,f)\,dr<\infty.$$

Neka je, sada, $\frac{1}{2}\leq p<1$ i $f(z)\in B^p$.

Prema (1.4.2) je

$$M_{2p}^{\,2p}(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|.|f(re^{i\theta})|^{2p-1}d\theta$$

$$\leq \left\{C_p(1-r)^{-\frac{1}{p}}\right\}^{2p-1} M_1(r,f)$$

pa je i

$$\int_0^1 M_{2p}^{\,2p}(r,f)\,dr\leq C_p^{\,2p-1}\int_0^1 (1-r)^{\frac{1}{p}-2} M_1(r,f)<\infty.$$

Teorema 1.4.5 i relacija (1.4.3) povlače:

$H^p\subset A^{2p}\subset B^p$ za $0<p<\frac{1}{2}$

i

$H^p\subset B^p\subset A^{2p}$ za $\frac{1}{2}\leq p<1$.

Inkluzije su prave. Naime, za funkciju

$$f(z)=(1-z)^{-\frac{1}{p}}\left\{\frac{1}{z}\log\frac{1}{1-z}\right\}^{\beta}$$

važi (v.[5]):

$f(z)\in B^p\setminus A^{2p}$ ako je $\beta=-\frac{1}{2p}$ i $0<p<\frac{1}{2}$,

i

$f(z)\in A^{2p}\setminus B^p$ ako je $\beta=-1$ i $\frac{1}{2}<p<1$.

# II GLAVA

## PROSTORI ANALITIČKIH FUNKCIJA $H^p$, $B^p$, $D^p$ I $A^p$

U prvoj glavi, navedeni su u terminima Tejlorovih koeficijenata, neki neophodni i neki dovoljni uslovi za pripadnost analitičke funkcije $f(z)$ prostora $H^p$, odnosno $B^p$, ili $D^p$. Potpuna karakterizacija pripadnosti funkcije $f(z)$ nekom prostoru na osnovu njenih Tejlorovih koeficijenata moguća je jedino u slučaju prostora $H^2$ (odnosno $D^2$).

Jedan od načina da se utvrde nova svojstva Tejlorovih koeficijenata jeste karakterizacija množitelja datog prostora. Ova glava je posvećena množiteljima prostora $H^p$, $B^p$ i $D^p$.

U prvom odeljku navode se poznati rezultati o množiteljima $(H^p, l^q)$ i $(B^p, l^q)$.

Medjutim, problem množitelja $(H^p, H^q)$ i $(B^p, B^q)$je mnogo složeniji. Dok su uglavnom utvrdjeni neophodni i dovoljni uslovi da niz $\{\lambda_n\}$ pripada $(H^p, l^q)$ ili $(B^p, l^q)$ u slučaju množitelja $(H^p, H^q)$ i $(B^p, B^q)$ takve karakterizacije u opštem slučaju nisu poznate.

U drugom odeljku navode se neki poznati neophodni ili dovoljni ili i neophodni i dovoljni uslovi da niz $\{\lambda_n\}$ pripada $(H^p, H^q)$ ili $(B^p, B^q)$. Odeljak 2.3 sadrži niz originalnih rezultata.

Posmatrani u sklopu poznatih rezultata,navedenih u odeljku 2.1 i 2.2, ovi prilozi otvaraju nove mogućnosti za dalja istraživanja.

## 2.1. MNOŽITELJI $(H^p, l^q)$ I $(B^p, l^q)$

Jedan od opštih problema teorije analitičkih funkcija jeste problem utvrdjivanje svojstava Adamarovog proizvoda

$$(f\odot g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$$

ako su poznata svojstva komponenata $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ i $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ tog proizvoda, i obrnuto, ako su poznata svojstva jedne komponente Adamarovog proizvoda, recimo $g(z)$ i Adamarovog proizvoda $f\ g$, šta se može utvrditi za komponentu $f(z)$.

Često se analitička funkcija $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n z^n$ identifikuje sa nizom $\{\lambda_n\}$ svojih Tejlorovih koeficijenata. Ako je zadatak da se utvrde neophodni ili dovoljni, ili i neophodni i dovoljni uslovi da niz $\{\lambda_n\}$, gdje je $\{\lambda_n\}$ dati niz ili niz Tejlorovih koeficijenata neke analitičke funkcije, ima svojstva da Adamarov proizvod $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n z^n$ pripada prostoru $B$, za svaki element $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ datog prostora $A$ analitičkih funkcija, onda se umjesto termina Adamarov proizvod koristi termin množitelj.

*DEFINICIJA 2.1.1.* Za niz kompleksnih brojeva $\{\lambda_n\}$ kažemo da je množitelj prostora $H^p$ u prostoru nizova $l^q$ ako $\{\lambda_n a_n\} \in l^q$. Za svaku funkciju $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^p$.

Skup svih nizova $\{\lambda_n\}$ takvih da $\{\lambda_n a_n\} \in l^q$ za svaki element $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ prostora $H^p$ označava se sa $(H^p, l^q)$.

Prije nego što navedemo neke teoreme o množiteljima $(H^p, l^q)$ i $(B^p, l^q)$, primjetimo da se i za slučaj kada $H^p$ i $l^p$ prostori nisu Banahovi, primjenjuje teorema o zatvorenom grafiku.

Konkretno , za $0<p<1$ , $H^p$ i $l^p$ su $F$-prostori. Ako je $\{\lambda_n\}$ množitelj, onda je inducirani linearni operator.

$$\Lambda: \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \to \{\lambda_n a_n\}$$

linearni operator iz prostora $H^p$ u rostor $l^q$. Pokažimo da je $\Lambda$ zazatvoreni operator

Pretpostavimo da $f_k \in H^p$, $f_k \to f \in H^p$ i da je

$$g_k = \Lambda(f_k) \to g \in l^q.$$

Ako je

$$f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} z^n, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ i } g = \{b_n\}.$$

Prema teoremi 1.1.16, imamo da je

$$|a_n^{(k)} - a_n| \leqslant C n^{\frac{1}{p}-1} \|f_k - f\|_p, \quad (n=0,1,2,\ldots),$$

odakle slijedi da $a_n^{(k)} \to a_n$, $k\to\infty$, za svako $n = 0,1,2,\ldots$ .

Kako $\lambda_n a_n^{(k)} \to b_n$ $(k\to\infty)$, to je i $\lambda_n a_n = b_n$, tj.

$$\Lambda(f) = g,$$

pa je $\Lambda$ zatvoreni operator, a prema teoremi o zatvorenom grafiku, $\Lambda$ je ograničeni operator.

*TEOREMA 2.1.1.* Neka je $0<p\leqslant 1$. Niz $\{\lambda_n\} \in (H^p, l^\infty)$ ako i samo ako je

$$(2.1.1) \quad \lambda_n = \mathcal{O}(n^{1-\frac{1}{p}})$$

*DOKAZ.* Dokažimo da je uslov (2.1.1) neophodan. Neka $\{\lambda_n\} \in (H^p, l^\infty)$. Zatvoreni linearni operator

$$\Lambda : f \to \{\lambda_n a_n\}$$

preslikava $H^p$ u $l^\infty$. Na osnovu teoreme o zatvorenom grafiku, linearni operator $\Lambda$ je ograničen, tj.

$$(2.1.2) \quad \sup_n |\lambda_n a_n| = \|\Lambda f\| \leq C\|f\|_p .$$

Uzmimo da je

$$g(z) = (1-z)^{-1-\frac{1}{p}} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n ,$$

gdje je $b_n \sim B_n^{\frac{1}{p}}$.

Neka je $f(z) = g(rz)$ za fiksiran $r<1$. Iz (2.1.2) i leme 1.1.1. slijedi da je

$$|\lambda_n| n^{\frac{1}{p}} r^n \leq C_1 (1-r)^{-1} .$$

Za $r = 1 - \frac{1}{n}$ dobićemo (2.1.1).

Obrnuto, na osnovu teoreme 1.1.16. i uslova (2.1.1) slijedi da

$$\{\lambda_n\} \in (H^p, l^\infty).$$

Primjetimo da $\{\lambda_n\} \in (H^p, l^\infty)$ ako i samo ako $\{\lambda_n\} \in (H^p, C_0)$, gdje je $C_0$ prostor nula-nizova,

*POSLEDICA 2.1.1.* Ako $f(z) \in H^p$, $0<p\leq 1$,

$$a_n = \mathcal{O}(n^{\frac{1}{p}-1})$$

je najbolja.

Za funkcije klase $H^\infty$ to su pokazali Hardi i Litlvud a za $0<p\leq 1$ Daren (P.L Duren) i (G.D. Taylor) [22].

Ako se u definiciji 2.1.1 $H^p$ zamjeni sa $B^p$, dobiće se množitelji $(B^p, l^q)$, za koje važi sledeća teorema:

*TEOREMA 2.1.2.* Za $0<p<1$ niz $\{\lambda_n\} \in (B^p, l^\infty)$ ako i samo ako je

$$(2.1.3) \quad \lambda_n = \mathcal{O}(n^{1-\frac{1}{p}}).$$

*DOKAZ.* Neophodnost uslova (2.1.3) dokazuje se kao i kod teoreme 2.1.1.

Pokazati da je uslov (2.1.3) dovoljan.

Neka je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in B^p$$

tada je, na osnovu teoreme 1.2.2,

$$a_n = \mathcal{O}(n^{\frac{1}{p}-1}),$$

pa je

$$\lambda_n a_n = O(1), \quad tj. \quad \{\lambda_n a_n\} \in l^\infty.$$

*TEOREMA 2.1.3.* Neka je $0<p<1$. Niz $\{\lambda_n\} \in (H^p, l^q)\,(p\leq q<\infty)$ ako i samo ako je

$$(2.1.4) \quad \sum_{n=1}^{N} n^{\frac{q}{p}} |\lambda_n|^q = \mathcal{O}(N^q).$$

Za dokaz ove teoreme koristićemo sledeću lemu:

*LEMA 2.1.1.* Neka je $b_n \geq 0$ i $0<\beta<\alpha$. Tada je

$$(2.1.5) \quad \sum_{n=1}^{N} n^\alpha b_n = \mathcal{O}(N^\beta)$$

ako i samo ako je

$$(2.1.6)\quad \sum_{n=N}^{\infty} b_n = \mathcal{O}(N^{\beta-\alpha}).$$

*DOKAZ.* Pokažimo da relacija (2.1.6) slijedi iz relacije (2.1.5). Uvedimo, u tom cilju, oznaku

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} n^k b_k.$$

Tada je

$$\sum_{n=N}^{M} b_n = \sum_{n=N}^{M-1} S_n[n^{-\alpha}-(n+1)^{-\alpha}] + S_M M^{-\alpha} - S_{N-1}N^{-\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{n=N}^{M-1} n^{\beta-\alpha-1} + CM^{\beta-\alpha}.$$

Kada $M\to\infty$, slijedi tvrdjenje (2.1.6).

Pokažimo da relacija (2.1.5) slijedi iz relacije (2.1.6). Ako uvedemo oznaku

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} b_k,$$

imaćemo

$$\sum_{n=1}^{N} n^{\alpha} b_n = \sum_{n=1}^{N} [n^{\alpha}-(n+1)^{\alpha}]R_n - N^{\alpha}R_{N+1} \leqslant CN^{\beta}.$$

Sada možemo preći na dokaz prethodne teoreme (videti [ 5 ]):

*Dokaz teoreme 2.1.3.* Pokažimo neophodnost úslova (2.1.4). Ako $\{\lambda_n\} \in (H^p, l^q)$ tada prema teoremi o zatvorenom grafiku, operator,

$$\Lambda: f \to \{a_n\lambda_n\}$$

je ograničen, tj.

$$(2.1.7)\quad \left\{\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n a_n|^q\right\}^{\frac{1}{q}} = \|\Lambda(f)\| \leqslant C\|f\|_p$$

za

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n \in H^p.$$

Izaberimo $f(z)=g(rz)$, gdje je

$$g(z) = (1-z)^{-1-\frac{1}{p}} = \sum_0^\infty b_n z^n, \quad b_n \sim Bn^{\frac{1}{p}}$$

Iz (2.1.7) slijedi

$$\sum_1^\infty |n^{\frac{1}{p}} r^n \lambda_n|^q \leq C(1-r)^{-q},$$

$$\sum_1^\infty n^{\frac{q}{p}} r^{nq} |\lambda_n|^q \leq C(1-r)^{-q},$$

$$r^{Nq} \sum_1^N n^{\frac{q}{p}} |\lambda_n|^q \leq C(1-r)^{-q}.$$

Uslov (2.1.4) dobijamo kada u poslednjoj relaciji stavimo da je $r = 1-\frac{1}{N}$.

Primjetimo da je (2.1.4) neophodan uslov i za $p \geq 1$, ili $q<p$.

Pokažimo da je uslov (2.1.4) dovoljan.

Prema lemi 2.1.1, uslov (2.1.4) je ekvivalentan uslovu

$$(2.1.8) \quad \sum_{n=N}^\infty |\lambda_n|^q = \mathcal{O}(N^{q(1-\frac{1}{p})}),$$

što znači da red $\sum_{n=1}^\infty |\lambda_n|^q$ konvergira.

Ne umanjujući opštost, pretpostavimo da je $\lambda_n \geq 0$ i $\sum_{n=1}^\infty \lambda_n^q = 1$.

Neka je

$$S_1 = 0 \text{ i } S_n = 1 - \{\sum_{k=1}^\infty \lambda_k^q\}^{1/\gamma}, n=2,3,\ldots$$

gdje je $\gamma = q(\frac{1}{p} - 1)$.

Primjetimo da $S_n \to 1$ kad $n \to \infty$:

Prema teoremi (1.1.11),

$$\int_0^1 (1-r)^{\gamma-1} M_1^q(r,f)\,dr<\infty \quad (p\leq q<\infty)$$

$$f\in H^p \ (0<p<1).$$

Pošto je $M_1(r,f)\geq r^n|a_n|$

$$\infty>\int_0^1\sum_1^{\infty}(1-r)^{\gamma-1}M_1^q(r,f)\,dr=\sum_1^{\infty}\int_{S_n}^{S_{n+1}}(1-r)^{\gamma-1}M_1^q(r,f)\,dr\geq$$

$$\geq\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^q\int_{S_n}^{S_{n+1}}(1-r)^{\gamma-1}r^{nq}dr\geq\frac{1}{\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^q S_n^{nq}\{(1-S_n)^{\gamma}-(1-S_{n+1})^{\gamma}\}$$

$$=\frac{1}{\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^q|a_n|^q(S_n)^{nq}.$$

Iz uslova (2.1.8) slijedi

$$\{\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k^q\}^{\frac{1}{\gamma}}\leq\frac{c}{n},$$

pa je

$$(S_n)^{nq}\geq(1-\frac{c}{n})^{nq}\to e^{-cq}>0.$$

Znači, nizovi $\{(S_n)^{nq}\}$ su ograničeni odozdo sa $e^{-cq}>0$, pa ova ocjena pokazuje da je

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^q|a_n|^q<\infty,$$

što znači da $\{\lambda_n\}\in(H^p,l^q)$, ([ 5 ]).

*POSLEDICA 2.1.2.* Ako $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n\in H^p$, $0<p<1$, tada je

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-2}|a_n|^p<\infty.$$

*DOKAZ*. Ako u teoremi 2.1.3. stavimo $q=p$ i primijenimo da niz $\{n^{1-\frac{2}{p}}\}\in(H^p,l^p)$, tada

$$\infty>\sum_{n=1}^{\infty}|n^{1-\frac{2}{p}}a_n|^p=\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-2}|a_n|^p.$$

*TEOREMA 2.1.4.* Niz $\{\lambda_n\}\in(H^1,l^2)$ ako i samo ako je

$$(2.1.9)\quad \sum_{n=1}^{N}n^2|\lambda_n|^2=\mathcal{O}(N^2).$$

*DOKAZ*. Neophodnost uslova (2.1.9) pokazuje se kao u teoremi 2.1.3.

Pokažimo da je uslov (2.1.9) dovoljan.

Neka $f(z)=\sum_0^{\infty}a_n z^n\in H^1$. Pretpostavimo da $f(z)$, nema nula u $|z|<1$. Stavimo $f=\varphi^2$, gdje je

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n\in H^2,\text{ pa je }\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^2<\infty.$$

Kako je $a_n=\sum_{k=0}^{n}b_k b_{n-k}$, to je

$$|a_n|\leq 2\sum_{k=[\frac{n}{2}]}^{n}b_k b_{n-k}.$$

Pretpostavimo da je $\lambda_n\geq 0$ i $b_n\geq 0$. Koristeći Koši-Švarcovu nejednakost dobijamo

$$a_n^2\leq 4\sum_{k=0}^{\infty}b_k^2\sum_{k=[\frac{n}{2}]}^{n}b_k^2=C\sum_{k=[\frac{n}{2}]}^{n}b_k^2=c\beta_k,$$

pa je

$$\sum_{n=1}^{N}\lambda_n^2\ a_n^2\leq C\sum_{n=1}^{N}\lambda_n^2\beta_n$$

Pokažimo sada da je $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2 \beta_n < \infty$.

Parcijalnim sumiranjem dobijamo

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2 \beta_n = N^{-2} S_n \beta_N - \sum_{n=1}^{N-1} S_n \Delta(n^{-2}\beta_n),$$

gdje je $S_n = \sum_{n=1}^{N} n^2 \lambda_n^2$, $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, a sabirak $N^{-2} S_n \beta_N$ je ograničen zbog uslova (2.1.9) i $\sum_0^\infty b_k^{\;2} < \infty$.

Treba pokazati da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\Delta(n^{-2}\beta_n)| < \infty.$$

Kako je

$$\Delta(n^{-2}\beta_n) = (n+1)^{-2} \Delta\beta_n + \beta_n \Delta(n^{-2})$$

to je i

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\Delta(n^{-2}\beta_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \Delta\beta_n + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \beta_n |\Delta(n^{-2})|,$$

gdje je $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \Delta\beta_n < \infty$. Takodje je

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \beta_n |\Delta(n^{-2})| \leqslant 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=[\frac{n}{2}]}^{n} b_k^2 \leqslant 2 \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \sum_{n=k}^{2k+1} \frac{1}{n} \leqslant$$

$$\leqslant 6 \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{\;2} < \infty.$$

Znači, zaista

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\Delta(n^{-2}\beta_n)| < \infty.$$

*POSLEDICA 2.1.3.* Ako $f(z) \in H^p$, $0<p<1$, tada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n} < \infty.$$

*TEOREMA Pelija (Paley's)*. Ako funkcija $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^1$, tada je za svaki lakunarni niz $\{n_k\}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_k}|^2 < \infty.$$

*DOKAZ*. Neka je $n_1, n_2, \ldots,$ lakunarni niz prirodnih brojeva što znači

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq Q > 1,$$

i

$$\lambda_n = \begin{cases} 1, & n = n_k, \\ 0, & n \neq n_k. \end{cases}$$

Ako je $n_k \leq N < n_{k+1}$, tada je

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 |\lambda_n|^2 = \sum_{j=1}^{k} n_j^2 \leq n_k^2 \{1 + \frac{1}{Q^2} + \ldots + \frac{1}{Q^{2(1-k)}}\} \leq CN^2,$$

pa je prema tome, $\{\lambda_n\} \in (H^1, H^2)$ [ 5 ];

*POSLEDICA 2.1.4.* Niz

$$\{\lambda_n\} \in (H^1, l^q), \quad 2 \leq q < \infty,$$

ako i samo ako je ispunjen uslov (2.1.4).

*DOKAZ*. Zaista, ako niz $\{\lambda_n\}$ zadovoljava uslov (2.1.4) i ako je $\mu_n = |\lambda_n|^{\frac{q}{2}}$, tada prema uslovu (2.1.9) imamo da je

$$\mu_n \in (H^1, l^2),$$

pa je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^2 |a_n|^2 < \infty,$$

to jest

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^q |a_n|^2 < \infty,$$

a kako $f(z) \in H^1 \Rightarrow a_n \to 0$, to je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^q |a_n|^q < \infty.$$

Uslov (2.1.4) nije dovoljan ako je $p=1$ i $q<2$, to se može vidjeti ako posmatramo lakunarni red

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}, \quad \frac{n_{k+1}}{n_k} \geq Q > 1$$

kod kojeg je $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$, ali $\sum_{1}^{\infty} |a_k|^q = \infty$ za $q<2$. Pri tome niz $(\lambda_n)$:

$$\lambda_n = \begin{cases} 1, & n = n_k, \\ 0, & n \neq n_k, \end{cases}$$

zadovoljava relaciju (2.1.4) ali ne pripada $(H^1, l^q)$, $q<2$.

*Napomena 2.1.1.* Nejednakost

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{n+1} \leq \pi \, \|f\|_1$$

je poznata Hardijeva nejednakost. Iz te nejednakosti se neposredno vidi da $\{\frac{1}{n+1}\} \in (H^1, l^1)$.

*TEOREMA 2.1.5.* Niz $\{\lambda_n\} \in (B^p, l^1)$ ako i samo ako je

$$(2.1.10) \quad \sum_{n=1}^{N} n^{\frac{1}{p}} |\lambda_n| = O(N).$$

*DOKAZ.* Neophodnost uslova (2.1.10) dokazuje se kao u teoremi 2.1.3, jer je $H^p \subset B^p$, pa $\{\lambda_n\} \in (H^p, l^1)$.

Pokažimo da je uslov (2.1.10) dovoljan. Na osnovu teoreme 1.2.4. imamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in B^p \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{2-\frac{1}{p}} a_n z^n \in B^{1/2};$$

stoga je dovoljno dokazati teoremu za slučaj $p=1/2$; tada uslov (2.1.10) dobija oblik

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 |\lambda_n| = \mathcal{O}(N).$$

Na osnovu leme 2.1.1. imamo da je $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < \infty$. Zato uzimamo da je $\lambda_n \geqslant 0$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$.

Neka je $S_1=0$ i $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$, $n=2,3,\ldots$ .

Ako $f \in B^{\frac{1}{2}}$, tada je

$$\infty > \int_0^1 M_1(r,f)\,dr = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{S_n}^{S_{n+1}} M_1(r,f)\,dr \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \int_{S_n}^{S_{n+1}} r^n\,dr =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |a_n| (S_n)^n.$$

Na osnovu leme 2.1.1 i uslova (2.1.10) za $p=\frac{1}{2}$

$$1-S_n \leqslant \frac{c}{n}, \quad tj.\quad S_n^n \geqslant \left(1-\frac{c}{n}\right)^n \to e^{-c} > 0,$$

pa je $\{S_n^n\}$ ograničen odozdo pozitivnom konstantom, što znači da $f \in B^{1/2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |a_n| < \infty$.

*POSLEDICA 2.2.6.* Niz $\{\lambda_n\} \in (B^p, l^q)$, $0<p<1$, $1 \leqslant q < \infty$, ako i samo ako je

$$\text{(2.1.11)} \quad \sum_{n=1}^{N} n^{\frac{q}{p}} |\lambda_n|^q = \mathcal{O}(N^q).$$

*DOKAZ.* Pošto je $H^p \subset B^p$, to $\{\lambda_n\} \in (H^p, l^q)$, pa se neophodnost uslova (2.1.11) dokazuje kao i kod $H^p$-prostora.

Dokazati da je uslov (2.1.11) i dovoljan.

Neka $\{\lambda_n\}$ zadovoljava (2.1.11) ; pokažimo da tada

$$\mu_n = |\lambda_n|^q n^{(\frac{1}{p}-1)(q-1)} \in (B^p, l^1).$$

Ako je

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k^{\frac{q}{p}} |\lambda_k|^q = \mathcal{O}(n^q),$$

onda parcijalnim sumiranjem dobijamo da je:

$$\sum_{n=1}^{N} n^{\frac{1}{p}} |\mu_n| = \mathcal{O}(N)$$

pa na osnovu teoreme 2.1.5. niz $\{\mu_n\} \in (B^p, l^1)$, što znači da

$$(f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n \in B^p) \Rightarrow \sum_0^\infty |\mu_n a_n| < \infty.$$

Pošto je

$$a_n = \mathcal{O}(n^{\frac{1}{p}-1})$$

to je

$$\sum_1^\infty |\lambda_n|^q |a_n|^q = \sum_1^\infty |\lambda_n|^q |a_n| |a_n|^{q-1} \leq \sum_1^\infty |\lambda_n|^q n^{(\frac{1}{p}-1)} |a_n|^{(q-1)} < \infty,$$

što znači da, zaista niz

$$\{\lambda_n\} \in (B^p, l^q).$$

## 2.2. MNOŽITELJI $(H^p, H^q)$, $(B^p, B^q)$

Poznati rezultati o množiteljima $(H^p, H^q)$ i $(B^p, B^q)$, koje navodimo u ovom odeljku, daju ideju za proučavanje množitelja $(D^p, D^q)$.

*DEFINICIJA 2.2.1.* Za niz kompleksnih brojeva $\{\lambda_n\}$ kažemo da je množitelj prostora $H^p$ u $H^q$ ako

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n z^n \in H^q$$

za svaku funkciju

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^p.$$

*TEOREMA 2.2.1.* Neka je $0<p<1$ i $0<q<1$, i neka je $\nu$ pozitivan cio broj tako da je $\frac{1}{\nu+1}\leqslant p<\frac{1}{\nu}$.

Niz kompleksnih brojeva $\{\lambda_n\}\in(B^p,B^q)$ ako i samo ako funkcija $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n z^n$ zadovoljava uslov

$$(2.2.1)\quad M_1(r,g^{(\nu)}) = \mathcal{O}\left((1-r)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\nu}\right).$$

*DOKAZ.* Pokažimo najpre da je uslov (2.2.1) dovoljan. U tom cilju posmatrajmo funkciju $f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n \in B^p$ i pokažimo da funkcija

$$h(z) = \sum_0^{\infty} \lambda_n a_n z^n \in B^q.$$

Kako je

$$h(\rho z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{it})g(ze^{-it})dt, \quad 0<\rho<1,$$

diferenciranjem te jednačine po $z$ dobijamo:

$$\rho^{\nu}\, h^{(\nu)}(\rho z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{it})g^{(\nu)}(ze^{-it})e^{-it}dt,$$

odakle je za $z = re^{i\theta}$,

$$\rho^{\nu}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|h^{(\nu)}(\rho re^{i\theta})|d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{it})||g^{(\nu)}(re^{i(\theta-t)})|dt\,d\theta,$$

pa je

$$\rho^{\nu}M_1(\rho r,h^{(\nu)})\leqslant M_1(\rho,f)\cdot M_1(r,g^{(\nu)})\leqslant C(1-r)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\nu}M_1(\rho,f).$$

Za $\rho=r$ odatle imamo

$$r^{\nu}M_1(r^2,h^{(\nu)})\leqslant C(1-r)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\nu}M_1(r,f).$$

Kako je

$$\int_0^1 M_1(r,h^{(\nu)})(1-r)^{\frac{1}{s}-2}dr\leqslant C\int_0^1(1-r)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\nu}M_1(r,f)(1-r)^{\frac{1}{s}-q}dr$$

$$= C\int_0^1(1-r)^{\frac{1}{p}-2}M_1(r,f)dr = C\|f\|_{B^p}<\infty \text{ za } \frac{1}{s}=\frac{1}{q}+\nu,$$

to znači, $h^{(\nu)}\in B^s$ za $\frac{1}{s}=\frac{1}{q}+\nu$, pa je na osnovu teoreme 1.2.4.

$$h\in B^{\frac{s}{1-\nu s}},\ tj.\ h\in B^q.$$

Pokažimo sada da je uslov (2.2.1) neophodan. Neka $\{\lambda_n\}$ $\in(H^p,B^q)$. Tada je na osnovu teoreme o zatvorenom grafiku, operator

$$\Lambda:\sum_{a}^{\infty}a_nz^n\to\sum_{0}^{\infty}\lambda_na_nz^n$$

ograničen za $\frac{1}{\nu+1}\leqslant p<\frac{1}{\nu}$. Neka je

$$f(z) = \frac{\nu!z^{\nu}}{(1-z)^{1+\nu}}=\sum_{n=\nu}^{\infty}a_nz^n$$

gdje je

$$a_n = \frac{n!}{(n-\nu)!}.$$

U ovom slučaju je

$$(2.2.2)\quad h(z) = \sum_{n=\nu}^{\infty}\lambda_na_nz^n = z^{\nu}g^{\nu}(z).$$

Neka je $f_r(z)=f(rz)$ i $h_r(z)=h(rz)$ ; tada je

$$\|h_r\|_{B^q} = \|\Lambda(f_r)\| \leq C\|f_r\|_{H^p}.$$

Drugim riječima

$$\int_0^1 (1-\rho)^{\frac{1}{q}-2} M_1(\rho r,h)\,d\rho < CM_p(r,f) = O((1-r)^{\frac{1}{p}-\nu-1}),$$

jer je na osnovu leme 1.1.3.

$$M_p(r,f) = \{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{\nu! z^\nu}{(1-z)^{1+\nu}}\right|^p d\theta\}^{\frac{1}{p}} \leq \{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1-r)^{(1+\nu)p}}\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= O(\frac{1}{(1-r)^{(1+\nu)p-1}})^{\frac{1}{p}} = O(\frac{1}{(1-r)^{1+\nu-\frac{1}{p}}}).$$

Na posletku

$$\int_r^1 (1-\rho)^{\frac{1}{q}-2} M_1(\rho r,h)\,d\rho \leq \int_0^1 (1-r)^{\frac{1}{q}-2} M_1(\rho r,h)\,d\rho = O(\frac{1}{(1-r)^{\nu+1-\frac{1}{p}}})$$

to jest

$$M_1(r^2,h)\int_r^1 (1-\rho)^{\frac{1}{q}-2}\,d\rho = O\left((1-r)^{\frac{1}{p}-\nu-1}\right),$$

a odatle i iz (2.2.2) sledi tvrdjenje teoreme 2.2.1 (v. [*18*]).

*POSLEDICA 2.2.1.* Niz $\{\lambda_n\}\in(B^p,B^p)$ ako i samo ako je

$$(2.2.1') \quad M_1(r,g') = O((1-r)^{-1}).$$

*TEOREMA 2.2.2.* Neka je $0<p<1\leq q\leq\infty$ i $\frac{1}{\nu+1}\leq p<\frac{1}{\nu}, \gamma=1,2,3,\ldots$ . Niz $\{\lambda_n\}\in(H^p,H^q)$ ako i samo ako funkcija

$$g(z) = \sum_0^\infty \lambda_n z^n$$

zadovoljava uslov

$$(2.2.3) \quad M_q(r,g^{(\nu+1)}) = O((1-r)^{\frac{1}{p}-\nu-2}).$$

U dokazu teoreme 2.2.2 koristi se sledeća lema koju su dokazali P.L. Duren i G.H. Shields [20]:

*LEMA 2.2.1.* Ako je $f(z)$ funkcija analitička u krugu $|z|<1$ i ako je

$$\int_0^1 (1-r)^{\alpha} M_q(r,f')dr<\infty, \quad \alpha>0, \quad 1\leq q\leq\infty,$$

tada je

$$\int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} M_q(r,f)dr<\infty.$$

*Dokaz teoreme 2.2.2.* Neophodnost uslova (2.2.3) dokazuje se kao i kod teoreme 2.2.1.

Dokažimo da je uslov (2.2.3) dovoljan, tj. da

$$h(z) = \sum_0^\infty \lambda_n a_n z^n \in H^q.$$

Neka niz $\{\lambda_n\}$ zadovoljava uslov (2.2.3) za datu funkciju

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n \in B^p$$

Diferenciranjem $h(\rho z)$ dobijamo

$$\rho^{\nu+1}|h^{(\nu+1)}(\rho z)|\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})||g^{(\nu+1)}(ze^{-it})|dt.$$

Pošto je $q\geq 1$, na osnovu poznate Jansenove nejednakosti [10] dobija se

$$\rho^{\gamma+1}M_q(r\rho,h^{(\gamma+1)})\leq M_1(\rho,f)M_q(r,g^{(\nu+1)})\leq$$

$$\leq C(1-r)^{\frac{1}{p}-\nu-2} M_1(\rho,f).$$

Stavimo $\rho=r$ i iskoristimo pretpostavku da $f\in B^p$ tj.

$$\int_0^1 (1-r)^{\frac{1}{p}-2} M_1(r,f)<\infty;$$

dobićemo

$$\int_0^1 (1-r)^{\nu} M_q(r,h^{(\nu+1)})dr \leq \int_0^1 (1-r)^{\frac{1}{p}-2} M_1(r,f)<\infty.$$

Sukcesivnom primjenom prethodne leme zaključujemo da je

$$\int_0^1 M_q(r,h')dr<\infty, \text{ pa je } M_q(r,h)<\infty,$$

to jest, zaista $h(z)\in H^q$.

*TEOREMA 2.2.3.* $(H^2,H^2) = l^{\infty}$.

Prije nego dokažemo ovu teoremu, uočimo sledeću osobinu prostora $H^2$:

Kako funkcija

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n \in H^2$$

ako i samo ako

$$\sum_0^{\infty} |a_n| z^n \in H^2$$

to i niz kompleksnih brojeva $\{\lambda_n\}\in(H^p,H^2)$ ako i samo ako

$$\{|\lambda_n|\}\in(H^p,H^2).$$

*Dokaz teoreme 2.2.3* (v. [ 5 ]). Ako je $\{\lambda_n\}\in(H^p,H^2)$ tada na osnovu teoreme o zatvorenom grafiku operator

$$\Lambda : \sum_0^{\infty} a_n z^n \to \sum_0^{\infty} \lambda_n a_n z^n$$

je ograničen, tj.

$$\sum_0^{\infty} |\lambda_n a_n|^2 = \|\Lambda(f)\| \leq C\|f\|_{H^p} ,$$

pa je

$$(H^p, H^2) \subset l^\infty.$$

Za $p=2$ slijedi $(H^2, H^2) \subset l^\infty$.

Neka je $\{\lambda_n\} \in l^\infty$; tada za funkciju

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n \in H^2$$

važi

$$\sum_0^\infty |a_n|^2 < \infty$$

pa je

$$\sum_0^\infty |\lambda_n a_n|^2 = \sum_0^\infty |\lambda_n|^2 |a_n|^2 \leqslant C \sum_0^\infty |a_n|^2 < \infty.$$

Znači

$$l^\infty \subset (H^2, H^2), \ tj. \ (H^2, H^2) = l^\infty.$$

*Napomena* 2.2.1. S obzirom na identifikovanje prostora $H^2$ sa prostorom nizova $l^2$, teoremu 2.2.3 možemo formulisati i u obliku: $(l^2, l^2) = l^\infty$.

Sledeća posledica proširuje prethodnu teoremu za $2 \leqslant p < \infty$:

*POSLEDICA 2.2.2.* Za $2 \leqslant p \leqslant \infty$ važi

$$(H^p, H^2) = l^\infty,$$

to jest

$$(H^p, l^2) = \infty.$$

*TEOREMA 2.2.4.* Ako je $0 < p \leqslant 2 \leqslant q < \infty$, $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ i $\lambda_n = O(n^{-\alpha})$ tada niz

$$\{\lambda_n\} \in (H^p, H^q);$$

pri tome tvrdjenje važi i ako je $0 < p \leqslant 1$ a $q = \infty$ a ne važi ako je $1 < p \leqslant 2$ a $q = \infty$. Broj $\alpha$ je najbolji mogući, a za svako $a < \alpha$ postoji niz $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n = \mathcal{O}(n^{-a})$, koji ne pripada $(H^p, H^q)$.

*DOKAZ*. Neka je najpre $0<p\leq 1$ i $2\leq q\leq\infty$. Za funkciju $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n \in H^p$ važi da je $a_n = o(n^{\frac{1}{p}-1})$.

Kako je

$$|\lambda_n a_n|^{q'}\leq Cn^{\alpha q'}|a_n|^p|a_n|^{q'-p}, \ \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1,$$

pa je i

$$\sum_0^\infty |\lambda_n a_n|^{q'}\leq C\sum_0^\infty n^{p-2}|a_n|^p.$$

Na osnovu teoreme 1.1.14. slijedi da je

$$\sum_0^\infty |\lambda_n a_n|^{q'}<\infty \Rightarrow (\lambda_n a_n)\in l^{q'},$$

pa na osnovu teoreme 1.1.13. zaključujemo da

$$\sum_0^\infty \lambda_n a_n z^n \in H^q.$$

Razmotrimo sada slučaj kada je $1<p\leq 2=q$, tj. kada je

$$\lambda_n = \mathcal{O}(n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}).$$

Na osnovu poznate Holderove (Hölder) nejednakosti i teoreme 1.1.13 i 1.1.14. slijedi

$$\sum_1^\infty |\lambda_n a_n|^2\leq C\sum_1^\infty n^{1-\frac{2}{p}}|a_n|\cdot|a_n|\leq$$

$$\leq C\{\sum_1^\infty n^{p-2}|a_n|^p\}^{\frac{1}{p}}\{\sum_1^\infty |a_n|^{p'}\}^{\frac{1}{p'}}<\infty; \ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

Prema tome zaista niz $\{\lambda_n\}\in(H^p,H^2)$.

Na kraju, pretpostavimo da je $1<p\leq 2<q<\infty$. Za dato $\lambda_n=\mathcal{O}(n^{-\alpha})$, neka je $\mu_n=n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\lambda_n$. Kao što smo već pokazali

$$\{\mu_n\} = \{n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\lambda_n\} = \{n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\}\in(H^p,H^2).$$

Da bismo naše tvrdjenje dokazali dovoljno je da dokažemo da

$$\{n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\} \in (H^2, H^q).$$

U tom cilju koristićemo rezultate do kojih su došli Hardi i Litlvud [28]:

Ako je $0<p<q<\infty$, $\alpha=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$ i

$$(2.2.4)\quad \lambda_n = \frac{n!}{\Gamma(n+1+\alpha)} = n^{-\alpha}+O(n^{-\alpha-1})$$

tada

$$\{\lambda_n\} \in (H^p, H^q).$$

Iz uslova (2.2.4), primijenjenog na slučaj koji razmatramo, slijedi:

$$(2.2.5)\quad n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} = \frac{n!}{\Gamma(n+\frac{3}{2}-\frac{1}{q})} + \nu_n$$

gdje je $\nu_n = O(n^{\frac{1}{q}-\frac{3}{2}})$.

Ako $\sum\limits_1^\infty a_n z^n \in H^2$, tada $\{a_n\} \in l^\infty$,

pa je

$$\sum_1^\infty |\nu_n a_n|^{q'} \leqslant C\sum_1^\infty n^{(\frac{1}{q}-\frac{3}{2})q'} < \infty;\quad 1<q'\leqslant 2.$$

Stoga $\{\nu_n\} \in (H^2, H^q)$, pa na osnovu relacija (2.2.4) i (2.2.5)

$$\{n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\} \in (H^2, H^q).$$

Prema tome

$$\{\mu_n\} \in (H^p, H^2) \quad \text{i} \quad \{n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\} \in (H^2, H^q)$$

pa i

$$\{\mu_n n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\} = \{n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\lambda_n n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\} = \{\lambda_n\} \in (H^p, H^q)$$

Tvrdjenje ne važi ako je $1<p<q=\infty$.

Zaista, neka je

$$f(z) = (1-z)^{-\frac{1}{p'}} = \sum_{0}^{\infty} \lambda_n z^n .$$

Ovdje je $\lambda_n = \mathcal{O}(n^{-\frac{1}{p}})$, te ako bismo imali da je $\{\lambda_n\} \in (H^p, H^\infty)$ onda bi na osnovu Kavenijevog (Caveny, v. 13 ) rezultata $[(H^p, H^\infty)] = H^{p'}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $1<p<\infty$, bilo $f \in H^{p'}$ što nije slučaj.

Na primer, neka je $0<a<b<\alpha$. Tada funkcija

$$(1-z)^{-\frac{1}{q}-b} \notin H^p .$$

Medjutim množenjem sa odgovarajućim nizom $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n = \mathcal{O}(n^{-a})$, dobija se funkcija

$$(1-z)^{-\frac{1}{q}-b+a} \notin H^q, \quad q \leq \infty .$$

Otuda zaključujemo da je $\alpha$ najbolji mogući izložilac.

## 2.3. MNOŽITELJI $D^p$ PROSTORA

1. U odeljku 1.3. je dokazano da je $H^p \subset D^p$ ako je $0<p\leq 2$, i da je $D^p \subset H^p$ ako je $2\leq p<\infty$. Takodje se zna da je $D^p \setminus B^p \neq \emptyset$ i $B^p \setminus D^p = \emptyset$, $0<p<1$.

Lako se može pokazati da je $D^p$ pravi dio prostora $A^p$ za svako $0<p<\infty$. Dakle, $D^p$ se ne svodi na poznate prostore. Stoga se prirodno postavlja pitanje utvrdjivanja svojstava prostora $D^p$ i njihova uporedjivanja sa odgovarajućim svojstvima prostora $H^p, B^p$ i $A^p$.

1. U ovom odeljku razmatra se problem množitelja prostora $D^p$ i utvrdjuju i dokazuju orginalni rezultati (teoreme 2.3.1 i 2.3.10). Uporedjujući ove nove rezultate sa poznatim rezultatima o množiteljima prostora $H^p$ i $B^p$, lako se zaključuje da čitav niz otvorenih pitanja o množiteljima prostora $D^p$ ostaje otvoren.

Množitelji prostora $D^p$ se definišu kao i množitelji prostora $H^p$ i $B^p$. Treba samo u definiciji zamijeniti $H^p$, odnosno $B^p$ sa $D^p$.

*TEOREMA 2.3.1.* Ako je $\lambda_n = \mathcal{O}(n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}})$, $0<p\leq\infty$, tada $\{\lambda_n\} \in (D^p, l^\infty)$.

*DOKAZ.* Neka je $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in D^p$, $0<p\leq\infty$. Na osnovu posledice 1.3.5. za Tejlorove koeficijente $a_n$ važi sledeća ocjena:

$$a_n = \mathcal{O}(n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}), \quad 0<p\leq\infty.$$

Prema tome je, s obzirom na pretpostavku

$$\lambda_n a_n = \mathcal{O}(1), \quad tj. \quad \{\lambda_n a_n\} \in l^\infty,$$

za svaku funkciju $f(z) \in D^p$, $0<p\leq\infty$.

*TEOREMA 2.3.2.* Ako niz $\{\lambda_n\} \in (D^p, l^\infty)$, $0<p\leq 2$, tada je

$$\lambda_n = \mathcal{O}(n^{1-\frac{1}{p}}).$$

*DOKAZ.* Pošto je, kao što je ranije pokazano (posledica 1.3.1, teorema 1.3.1), $H^p \subset D^p$ za $0<p\leq 2$, to je i

$$(D^p, l^\infty) \subset (H^p, l^\infty).$$

Dakle, ako niz

$$\{\lambda_n\} \in (D^p, l^\infty)$$

tada i

$$\{\lambda_n\} \in (H^p, l^\infty),$$

pa je zaista

$$\lambda_n = \mathcal{O}(n^{1-\frac{1}{p}}), \ 1<p\leq 2.$$

2. Množitelje $(D^1, l^q)$, $1\leq q<\infty$, prvi je razmatrao M. Jevtić , koji je s tim u vezi dokazao dve teoreme, naime, da

$$\{\lambda_n\} \in (D^1, l^1) \text{ ako je } \sum_{n=1}^{N} n|\lambda_n| = \mathcal{O}(\sqrt{N}),$$

odnosno

$$\{\lambda_n\} \in (D^1, l^q),\ 1\leq q<\infty, \text{ ako je } \sum_{n=1}^{N} n^q|\lambda_n|^q = o(N^{q/2}).$$

3. Naredne teoreme odnose se na množitelje $D^p$ u prostoru $D^q$, $D$ i $H^q$, kao i na množitelje prostora $H^p$ u prostore $D^2$ i $D$.

*TEOREMA 2.3.3.* Ako je $\sum_{n=1}^{N} n|\lambda_n| = \mathcal{O}(\sqrt{N})$ , tada

$$\{\lambda_n\} \in (D^1, l^1).$$

*DOKAZ.* Uslovu $\sum_{n=1}^{N} n|\lambda_n| = \mathcal{O}(\sqrt{N})$ ekvivalentan je uslov

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{|\lambda_n|}{\sqrt{n}} = \mathcal{O}(\frac{1}{N}).$$

Ne umanjujući opštost, pretpostavimo da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda_n|}{\sqrt{n}} = 1;$$

Parcijalne sume tog reda su: $S_1=0$, $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|\lambda_k|}{\sqrt{k}}$, $n=2,3,\ldots$ .

Uočimo da je $S_{n+1}\geq S_n$, da je po pretpostavci, $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$.

Ako funkcija $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in D^1$, tada je

$$\infty > \int_0^1 (\Pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 r^{2n})^{\frac{1}{2}} dr = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{S_n}^{S_{n+1}} (\Pi \sum_{k=1}^{\infty} k|a_k|^2 r^{2k})^{\frac{1}{2}} dr \geq$$

$$\geq C \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}|a_n| \int_{S_n}^{S_{n+1}} r^n dr \geq C \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}|a_n|(S_n)^n \frac{|\lambda_n|}{\sqrt{n}} =$$

$$= C \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||\lambda_n|(S_n)^n.$$

Pošto je $1-S_n \leq \frac{k}{n}$, $k>0$, to je i

$$(S_n)^n \geq (1 - \frac{k}{n})^n,$$

to jest

$$\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{k}{n})^n = e^{-k} > 0,$$

pa je niz $\{S_n{}^n\}$ ograničen odozdo pozitivnom **konstantom** , odakle slijedi da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n||a_n| < \infty.$$

*TEOREMA* 2.3.4. Ako je $\sum_{n=1}^{N} n^q|\lambda_n|^q = \mathcal{O}(N^{\frac{q}{2}})$, $1 \leq q < \infty$, tada

$$\{\lambda_n\} \in (D^1, l^q).$$

*DOKAZ.* Neka je

$$\mu_n = |\lambda_n|^q n^{\frac{1}{2}(q-1)},$$

tada je

$$\sum_{n=1}^{N} n|\mu_n| = \sum_{n=1}^{N} n^{\frac{q}{2}+\frac{1}{2}}|\lambda_n|^q = \mathcal{O}(\sqrt{n}).$$

Na osnovu teoreme 2.3.3,

$$\{\mu_n\} \in (D^1, l^1).$$

Prema tome, za svaku funkciju $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in D^1$ važi relacija

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^q |a_n|^q = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^q |a_n| |a_n|^{q-1} \leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^q n^{(1-\frac{1}{2})(q-1)} |a_n|$$

$$= C \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^q n^{\frac{1}{2}(q-1)} |a_n| = C \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n| |a_n| < \infty.$$

Dakle, zaista niz $\{\lambda_n\} \in (D^1, l^q)$.

*TEOREMA 2.3.5.* Ako je $2 \leqslant p \leqslant \infty$, tada je

$(D^p, D^2) = l^\infty$.

*DOKAZ.* Pošto je $(H^2, H^2) = l^\infty$ (teorema 2.2.3), to je i

$$l^\infty = (H^2, H^2) = (D^2, D^2) \subset (D^p, D^2), \quad p \geqslant 2.$$

Na osnovu teoreme o zatvorenom grafiku je

$$(D^p, D^2) \subset l^\infty,$$

pa je

$$l^\infty = (D^2, D^2) \subset (D^p, D^2) \subset l^\infty$$

to jest zaista

$$(D^p, D^2) = l^\infty, \quad 2 \leqslant p \leqslant \infty.$$

*TEOREMA 2.3.6.* Ako je $\lambda_n = \mathcal{O}(n^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}})$, gdje je $0<p<1$, tada $\{\lambda_n\} \in (H^p, D^2)$.

*DOKAZ.* Neka je $f(z) = \sum_{1}^{\infty} a_n z^n \in H^p$, $0<p<1$.

Kako je

$$\sum_{1}^{\infty} |\lambda_n a_n|^2 = \sum_{1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |a_n|^p |a_n|^{2-p} \leqslant C \sum_{1}^{\infty} n^{-\frac{2}{p}+1} n^{(\frac{1}{p}-1)(2-p)} |a_n|^p =$$

$$= C \sum_{1}^{\infty} n^{p-2} |a_n|^p,$$

a na osnovu Hardi-Litlvudove teoreme (teorema 1.1.14) je, za $f(z)$

$\in H^p,\ 0<p\leq 2,$

$$\sum_1^\infty n^{p-2}|a_n|^p<\infty,$$

to znači da je

$$\sum_1^\infty |\lambda_n a_n|^2<\infty,$$

pa, prema tome, i funkcija

$$\sum_1^\infty \lambda_n a_n z^n \in D^2,$$

što znači da zaista

$$\{\lambda_n\}\in (H^p,D^2),\ 0<p<1.$$

*TEOREMA 2.3.7.* Neka je $0<p<2$. Ako je $\lambda_n=\mathcal{O}(n^{-\alpha})$, $\alpha>\frac{1}{p}$, tada

$$\{\lambda_n\}\in (D^p,D^2).$$

*DOKAZ.* Neka $f(z) = \sum_1^\infty a_n z^n \in D^p$. Kako je Tejlorov koeficijent $a_n=\mathcal{O}(n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}})$, to je i

$$\sum_1^\infty |\lambda_n a_n|^2\leq C\sum_1^\infty n^{-2\alpha}\cdot n^{2(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} = C\sum_1^\infty n^{-2\alpha+\frac{2}{p}-1}.$$

Poslednji red konvergira za

$$2\alpha+1-\frac{2}{p}>1,$$

što znači da za $\alpha>\frac{1}{p}$ funkcija $\sum_1^\infty \lambda_n a_n z^n\in D^2$, to jest da

$$\{\lambda_n\}\in (D^p,D^2),\ 0<p<2.$$

*TEOREMA 2.3.8.* Neka je $0<p\leq 1$. Ako je $\lambda_n=\mathcal{O}(n^{-\frac{1}{p}})$, tada

$$\{\lambda_n\}\in (H^p,D).$$

*DOKAZ.* Neka $f(z)=\sum_0^\infty a_n z^n \in H^p$. Red

$\sum\limits_1^\infty n|\lambda_n a_n|^2$ , konvergira jer je

$$\sum_1^\infty n|\lambda_n a_n|^2 = \sum_1^\infty n|\lambda_n|^2|a_n|^{2-p}|a_n|^p < C\sum_1^\infty n\cdot n^{-\frac{2}{p}} n^{(\frac{1}{p}-1)(2-p)}|a_n|^p =$$

$$= C\sum_1^\infty n^{p-2}|a_n|^p,$$

pa na osnovu Hardi-Litlvudove teoreme (teorema 1.1.14) za prostore $H^p$ zaključujemo da je

$$\sum_{n=1}^\infty n|\lambda_n a_n|^2<\infty,$$

i da,prema tome, funkcija $\sum\limits_1^\infty \lambda_n a_n z^n \in D$, što znači da

$$\{\lambda_n\} \in (H^p, D),\quad 0<p\leqslant 1.$$

Prema tome funkcija $\sum\limits_1^\infty \lambda_n a_n z^n \in D$.

*TEOREMA 2.3.9.* Niz $\{\lambda_n\} \in (H^1, D)$ ako i samo ako je

$$\sum_{n=1}^N n^3|\lambda_n|^2 = O(N^2). \tag{2.3.1}$$

*DOKAZ.* Dokažimo najpre da je uslov (2.3.1) neophodan. Ako $\{\lambda_n\} \in (H^1, D)$, tada za svaku funkciju $f(z) \in H^1$ važi

$$\sum_1^\infty n|\lambda_n a_n|^2<\infty \qquad \sum_1^\infty |\sqrt{n}\lambda_n|^r|a_n|^r<\infty$$

i odatle sledi da je

$$\{\sqrt{n}\lambda_n\} \in (H^1, H^2).$$

Na osnovu teoreme 2.1.4. imamo da je

$$\sum_1^\infty n^2(\sqrt{n}|\lambda_n|)^2 = O(N^2),$$

što znači da je

$$\sum_{n=1}^{N} n^3 |\lambda_n|^2 = \mathcal{O}(N^2).$$

Jednostavno se dokazuje i da je uslov (2.3.1) dovoljan.

*TEOREMA 2.3.10.* Niz $\{\lambda_n\} \in (D^2, D)$ ako i samo ako je

(2.3.2) $\lambda_n = \mathcal{O}(n^{-\frac{1}{2}})$.

*DOKAZ.* Dokažimo najpre da je uslov (2.3.2) neophodan. Neka $\{\lambda_n\} \in (D^2, D)$. Tada je

$$\sum_{1}^{\infty} n |a_n|^2 |\lambda_n|^2 < \infty$$

za svaku funkciju $f(z) = \sum_{1}^{\infty} a_n z^n \in D^2$.

Red

$$\sum_{1}^{\infty} n |a_n|^2 |\lambda_n|^2 = \sum_{1}^{\infty} (\sqrt{n} |\lambda_n|)^2 |a_n|^2 < \infty$$

što znači da

$$\{\sqrt{n}\lambda_n\} \in (D^2, D^2) = l^{\infty}.$$

Prema tome, niz $\{\sqrt{n}\lambda_n\}$ je ograničen, to jest

$$\sqrt{n}\lambda_n = \mathcal{O}(1),$$

ili

$$\lambda_n = \mathcal{O}(n^{-\frac{1}{2}}).$$

Obrnuto, da je uslov (2.3.2) dovoljan neposredno se dokazuje.

*TEOREMA 2.3.9.* Ako je $\lambda_n = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$, $\alpha > \frac{3}{2}$, tada $\{\lambda_n\} \in (D^1, D)$.

*DOKAZ.* Za funkciju $f(z) = \sum_{1}^{\infty} a_n z^n \in D^1$,

$$a_n = \mathcal{O}(n^{\frac{1}{2}}),$$

pa je i

$$\sum_{1}^{\infty} n|\lambda_n a_n|^2 = \sum_{1}^{\infty} n|\lambda_n|^2|a_n|^2 \leq C\sum_{1}^{\infty} n\cdot n^{-2\alpha}\cdot n = C\sum_{1}^{\infty} n^{2-2\alpha}.$$

Poslednji red konvergira za $-2+2\alpha>1$, to jest $\alpha>\frac{3}{2}$, što znači da zaista

$$\{\lambda_n\} \in (D^1, D).$$

*TEOREMA 2.3.12.* Neka je $0<p\leq 1$, $2\leq q<\infty$. Ako je $\lambda_n = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$, $\alpha\leq\frac{p-2}{2}(1-\frac{1}{q}+\frac{1}{p})$, tada

$$\{\lambda_n\} \in (D^p, H^q).$$

*DOKAZ.* Neka $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in D^p$. Tada je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n a_n|^{q'} \leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha q'}|a_n|^p|a_n|^{q'-p}$$

$$= C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha q'} n^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})(q'-p)}|a_n|^p = C\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}|a_n|^p,$$

pa je na osnovu Hardi-Litlvudove teoreme (teorema 1.1.14) za $H^p$ prostore

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n a_n|^{q'} < \infty,$$

tako da sada možemo na osnovu teoreme 1.1.13 zaključiti da funkcija

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n z^n \in H^q, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1,$$

što znači da zaista,

$$\{\lambda_n\} \in (D^p, H^q), \quad 0<p\leq 1, \quad 2\leq q<\infty.$$

III G L A V A

NEKA NOVA SVOJSTVA PROSTORA $A^p$

Za razliku od prostora $H^p$ i $B^p$, problemi odredjivanja prostora $A^q$ kome pripada funkcija $f(z)$ ako njen izvod pripada prostoru $A^p$, $0<p<1$, i obrnut problem odredjivanja prostora $A^q$ kome pripada izvod $f'(z)$ ako $f(z)$ pripada prostoru $A^p$, nijesu riješeni.

Neki djelimični rezultati objavljeni su 1977. godine u radu [31] Hiroši Vatanabe (Hiroshi Watanabe). Medjutim, potpuno rješenje do sada još nije dato.

Proučavajući ovaj problem, došao sam do izvesnih rezultata, koji su obuhvaćeni u ovoj glavi. U prvom odjeljku 3.1. ovog rada dokazao sam da se ocjene koje je u radu [31] dobio Hiroši Vatanabe mogu poboljšati.

U odeljku 3.2. navedene su neke ocjene Tejlorovih koeficijenata elemenata prostora $A^p$ i u ovom slučaju, za razliku od prostora $H^p$ i $B^p$, dobijene su samo neke ocjene za koje nije utvrdjeno da li su najbolje.

Dobio sam i neke ocjene Tejlorovih koeficijenata koje su bolje od poznatih i izložio ih u istom odjeljku.

## 3.1. IZVODI I INTEGRALI PROSTORA $A^p$

Najprije navedimo poznatu Hardi-Litlvudovu teoremu koju ćemo u daljem koristiti:

*TEOREMA 3.1.1.* Neka je $f(z)$ analitička funkcija u krugu $|z|<1$ i neka je:

$$(3.1.1)\quad \mu(r,\theta) = \sup_{\rho\leqslant r}|f(\rho e^{i\theta})|.$$

Tada za $0<p<\infty$ važi nejednakost:

$$(3.1.2)\quad \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu^p(r,f)d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_p M_p(r,f).$$

(Ovo je tzv. "Max-teorema").

Problem odredjivanja prostora $A^q$ kome pripada izvod $f'(z)$ ako $f(z)\in A^p$, $0<p<1$, može se posmatrati opštije:
Odrediti prostor $A^q$ kome pripada $f^{(n)}(z)$ ako $f(z)\in A^p$.

I obrnuti problem se može posmatrati opštije, pri čemu se za parcijalni integral $k$-tog reda uvodi oznaka $f_{(k)}(z)$:

$$f_{(k)}(z) = \int_0^z f_{(k-1)}(\zeta)d\zeta,\ k = 1,2,\dots$$

U vezi s tim koristićemo sledeću teoremu (v. [31]):

*TEOREMA 3.1.2.* Neka je $k = 1,2,\dots$; tada za funkciju $f(z)$ analitičku u krugu $|z|<1$ važe nejednakosti:

$$(3.1.3)\quad \int_0^1 M_q^q(r,f_{(k)})dr \leqslant C_{q,k}\int_0^1 (1-r)^{kq}M_q^q(r,f)dr,\ 0<q\leqslant 1,$$

$$(3.1.4)\quad \int_0^1 M_q^q(r,f_{(k)})dr < C_{q,k}\int_0^1 (1-r)^{kq-q+1}M_q^q(r,f)dr,\ 1\leqslant q\leqslant\infty.$$

2. Sada ćemo dokazati teoremu koja predstavlja u izvesnom smislu opštiji rezultat nego Lema 5, H. Vatanabe, formulisana u pomenutom radu [31]:

*TEOREMA 3.1.3.* Ako $f(z)\in A^p$ i $0<p\leq q<\infty$, tada za realno $\alpha$ važe nejednakosti:

$$(3.1.5)\quad \int_0^1 (1-r)^{\alpha q} M_q^q(r,f)\,dr \leq C_{p,q}\int_0^1 M_p^p(r,f)\,dr,\quad \alpha\geq 2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right),\quad 0<q\leq 1,$$

i

$$(3.1.6)\quad \int_0^1 (1-r)^{\alpha q-q+1} M_q^q(r,f)\,dr \leq C_{p,q}\int_0^1 M_p^p(r,f)\,dr,$$

$$\alpha\geq\left(1-\frac{1}{q}\right)+2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right),\quad 1\leq q<\infty.$$

*DOKAZ.* Dokažimo najprije nejednakost (3.1.5). Na osnovu naše teoreme 1.4.3. imamo da je:

$$\int_0^1 (1-r)^{\alpha q} M_q^q(r,f)\,dr = \int_0^1 (1-r)^{\alpha q}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^{q-p}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)dr\leq$$

$$\leq \int_0^1 (1-r)^{\alpha q} M_p^p(r,f)\{C_p(1-r)^{-\frac{2}{p}}\}^{q-p}dr = C_p^{q-p}\int_0^1 (1-r)^{\alpha q-\frac{2(q-p)}{p}} M_p^p(r,f)\,dr=$$

$$= C_{p,q}\int_0^1 (1-r)^{\alpha q-\frac{2(q-p)}{p}} M_p^p(r,f)\,dr,$$

a kada je

$$\alpha q-\frac{2(q-p)}{p}\geq 0,\quad tj.\quad \alpha\geq 2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right),$$

dobijamo da je

$$C_{p,q}\int_0^1 (1-r)^{\alpha q-\frac{2(q-p)}{p}} M_p^p(r,f)\,dr \leq C_{p,q}\int_0^1 M_p^p(r,f)\,dr,$$

što dokazuje gornju nejednakost (3.1.5).

Nejednakost (3.1.6) takodje dobijamo koristeći našu teoremu 1.4.3. naime:

$$\int_0^1 (1-r)^{\alpha q-q+1} M_q^q(r,f)\,dr \leqslant \int_0^1 (1-r)^{\alpha q-q+1} M_p^p(r,f)\{C_p(1-r)^{-\frac{2}{p}}\}^{q-p}dr =$$

$$= C_p^{q-p}\int_0^1 (1-r)^{\alpha q-q+1-\frac{2(q-p)}{p}} M_p^p(r,f)\,dr,$$

pa za

$$\alpha q - q + 1 - \frac{2(q-p)}{p} \geqslant 0, \text{ tj. } \alpha \geqslant (1-\frac{1}{q}) + 2(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$$

zaključujemo da je

$$\int_0^1 (1-r)^{\alpha q-q+1} M_q^q(r,f)\,dr < C'_{p,q}\int_0^1 M_p^p(r,f)\,dr,$$

to jest da važi i nejednakost (3.1.6).

Napomenimo da je H. Vatanabe svoju odgovarajuću lemu formulisao raščlanjenu na slučajeve: a) $0<p\leqslant q\leqslant 1$; b) $0<p\leqslant 1\leqslant q<\infty$; c) $1\leqslant p\leqslant q<\infty$, pa je za svaki slučaj na poseban način dokazivao. Medjutim, ja sam teoremu formulisao i dokazao u kompaktnom obliku, tj. za $0<p\leqslant q<\infty$.

3. Naša teorema 1.4.3. koja važi za $A^p$ prostore, utiče i na ocjenu koju je H. Vatanabe dobio u svojoj teoremi 3 [31], tj. poboljšava Vatanabin rezultat. Tu ocjenu utvrdjujemo sledećom novom teoremom, koja je analogna pomenutoj Vatanabinoj teoremi i glasi:

*TEOREMA 3.1.4.* Neka je funkcija $f(z)$ analitička u krugu $|z|<1$. Za $0<p<q<\infty$ važi nejednakost

$$(3.1.7)\quad \int_0^1 M_q^q(r,f_{(k)})dr \leq C_{p,q,k}\int_0^1 M_p^p(r,f)dr,$$

to jest

$$f(z)\in A^p \text{ povlači da } f_{(k)}(z)\in A^q$$

ako je:

1) $k\geq 2(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$ i $0<p\leq q\leq 1$;

2) $k\geq(1-\frac{1}{q}) + 2(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$, $1\leq q<\infty$.

*DOKAZ.* Pošto je, prema relaciji (3.1.3)

$$\int_0^1 M_q^q(r,f_{(k)})dr \leq C_{q,k}\int_0^1 (1-r)^{kq}M_q^q(r,f)dr,\quad 0<q\leq 1,$$

a na osnovu (3.1.5) je

$$\int_0^1 (1-r)^{\alpha q}M_q^q(r,f)dr \leq C_{p,q}\int_0^1 M_p^p(r,f)dr,$$

gdje je $\alpha\geq 2(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$, $0<q\leq 1$, to je

$$\int_0^1 M_q^q(r,f_{(k)})dr \leq C_{p,q,k}\int_0^1 M_p^p(r,f)dr \text{ i}$$

$$k\geq 2(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}) \text{ i } 0<p<q<1.$$

Takodje, na osnovu relacije (3.1.4) u teoremi 3.1.2 i relacije (3.1.6) u teoremi 3.1.3 slijedi da je

$$\int_0^1 M_q^q(r,f_{(k)})dr \leq C_{p,q,k}\int_0^1 M_p^p(r,f)dr \text{ za}$$

$$k>(1-\frac{1}{q}) + 2(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}),\quad 1\leq q<\infty.$$

Rešenje inverznog problema daje sledeća Vatanabina teorema 4 [31]:

*TEOREMA 3.1.5.* Neka je $0<p<q<\infty$. Ako $f(z)\in A^q$, tada za

1) $k<\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$, $1<q<\infty$,

2) $k<\frac{1}{p}-\frac{2}{q}$, $0<q<1$,

važi nejednakost

$$(3.1.8)\quad \left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} M_p^p(r,f^{(k)})\,dr\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_{p,q,k}\left(\int_0^1 M_q^q(r,f)\,dr\right)^{\frac{1}{q}}$$

ili, drugim riječima, tada

$$f(z)\subset A^q \Rightarrow f^{(k)}(z)\subset A^p.$$

## 3.2. KOEFICIJENTI ELEMENATA PROSTORA $A^p$

Prostor $A^p$ za $1\leq p<\infty$ je Banahov, a za $0<p<1$ je $F$-prostor. Dakle, teorema o zatvorenom grafiku se može primijeniti. Medjutim, i pored toga malo je množitelja prostora $A^p$ dosad proučeno i uopšte, poznato je malo ocjena Tejlorovih koeficijenata elemenata prostora $A^p$.

U ovom odjeljku dokazao sam neke nove nejednakosti koje važe za Tejlorove koeficijente elemenata prostora $A^p$. Koristeći iste lako se pokazuje da

$$\left\{\frac{1}{(n+1)^{\frac{2}{p}}}\right\}\in(A^p,l^1) \text{ ako je } 0<p\leq 1,$$

i

$$\left\{\frac{1}{(n+1)^{\frac{2}{p}-\frac{1}{2}}}\right\}\in(A^p,l^2) \text{ ako je } 1\leq p\leq 2.$$

*TEOREMA 3.2.1.* Ako funkcija $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ pripada prostoru $A^p$, tada važe nejednakosti:

$$(3.2.1)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{(n+1)^{2/p}} \leq C_p \int_0^1 M_p^p(r,f)\,dr, \quad 0<p\leq 1,$$

i

$$(3.2.2)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{(n+1)^{\frac{4}{p}-1}} < C_p \int_0^1 M_p^p(r,f)\,dr, \quad 1\leq p\leq 2.$$

*DOKAZ.* Dokažimo najpre nejednakost (3.2.1). Ako u relaciji (3.1.5) (teorema 3.1.3) stavimo $q=1$ i $\alpha=2(\frac{1}{p}-1)$, tada imamo

$$\int_0^1 (1-r)^{2(\frac{1}{p}-1)} M_1(r,f)\,dr \leq C_p \int_0^1 M_p^p(r,f)\,dr.$$

Pošto je

$$|a_n| \leq \frac{1}{r^n} M_1(r,f),$$

to je i

$$C_p \int_0^1 M_p^p(r,f)\,dr \geq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{1-\frac{1}{n+1}}^{1-\frac{1}{n+2}} (1-r)^{2(\frac{1}{p}-1)} M_1(r,f)\,dr \geq$$

$$\geq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2}\right)^{2(\frac{1}{p}-1)} M_1\left(1-\frac{1}{n+1};f\right) \frac{1}{(n+1)(n+2)} \geq$$

$$\geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^{\frac{2}{p}-1}(n+1)} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n |a_n| \geq C_p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{(n+1)^{\frac{2}{p}}},$$

čime je nejednakost (3.2.1) dokazana.

Dokažimo sada nejednakost (3.2.2). Ako u nejednakosti (3.1.6) (teorema 3.1.3) stavimo da je $q=2$ i $\alpha=\frac{2}{p}-\frac{1}{2}$, onda imamo:

$$\int_0^1 M_p^p(r,f)\,dr \geq \int_0^1 (1-r)^{\frac{4}{p}-2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}\right) dr =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 B(\frac{4}{p}-1,\ 2n+1) = C_p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{\frac{4}{p}-1}} ,$$

I time je nejednakost (3.2.2) dokazana.

Napomenimo da je ova teorema analogna Vatanabinoj teoremi 5 u pomenutom radu [31], ali dok je prvi deo naše teoreme isti kao u Vatanabinoj, drugi deo predstavlja poboljšanje Vatanabinog rezultata.

Interpretirajući rezultate (3.2.1) i (3.2.2) u terminima Adamarovih proizvoda, tj. množitelja $A^p$-prostora u prostore nizova, dobijamo sledeće dvije posledice:

*POSLEDICA 3.2.1.* Ako je $0<p\leq 1$, tada niz

$$(3.2.1') \quad \left\{ \frac{1}{(n+1)^{\frac{2}{p}}} \right\} \in (A^p, l^1).$$

*POSLEDICA 2.2.* Ako je $1\leq p\leq 2$, tada niz

$$(3.2.2') \quad \left\{ \frac{1}{(n+1)^{\frac{2}{p}-\frac{1}{2}}} \right\} \in (A^p, l^2).$$

# B I B L I O G R A F I J A

[1] Бари Н.К.: Тригонометрические ряды, Москва 1961.

[2] Clunie J., Hayman W.K.: Symposium on Complex Analysis, Canterbery, 1973.

[3] Dajović V.: Teorija funkcija kompleksne promenljive, Beograd, 1977.

[4] Dunford N., Schwarts J.T.: Linear operators, Part I, Interscience, New Jork, 1958.

[5] Duren P.L.: Theories of $H^p$ spaces. Academic Press, New Yorc, and London, 1970.

[6] Евграфов М.А.: Аналитические функции, Москва 1968.

[7] Гофман К.: Банаховы пространства аналитических функций, Москва 1963.

[8] Koosis P.: Intraduction to $H^p$ spaces, Cambridge Univ. Press. 1980.

[9] Привалов И.И.: Граничные свойства аналитических функций, Москва 1980.

[10] Zygmund A.: Trigonometric Series. Cambridge Univ. Press. London and New York, 1959.

[11] Askey R.: $L^p$ behaviokr of power series with positive coefficients, Proc. Amer. Math. Soc., 19(1968), 303-305.

[12] Askey R., R.P. Boas: Some integrability theorems for power series with positive coefficients. (Ohio University Press, 1970.).

[13] Caveny J.: Bounded Hadamard products of $H^p$ functions. Duke Math. J. 33(1966), 389-394.

[14] Caveny J.: Absolute convergence factors for $H^p$ series. Canad. J. Math. 21(1969), 187-195.

[15] Dajović V.: Sur l'existence des valeurs limites de la resultante des fonctions apartenant a la elasse, $H^p$, P>1. Bull. Soc. Math et phus. de Serbie, vol. VIII, 1-2, 1956.

[16] Dajović V.: Nekoliko stavova o graničnim vrednostima rezultante funkcija klase $H^p$ $(0<p<1)$ i još nekih klasa analitičkih funkcija, Vesnik Društva matematičara i fizičara N.R.S., 1-2, 1955, 21-37.

[17] Dajović V.: Existence des valeurs limites du produit d'Hadamard $f(t)$ o $g(t)$, $f(t)\in B^p(0<p<1)$, $g(t)\in A$. Mat. Vesnik 13(28) 1976, 389-392.

[18] Duren P.L.: Coefficient multipliers of $H^p$ and $B^p$ spaces. Pacifik J.Math. 32(1970, 69-78).

[19] Duren P.L.: On the multipliers of $H^p$ spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 22(1969), 24-27.

[20] Duren P.L., Shields A.L.: Properties of $H^p$ $(0<p<1)$ and its containing Banach space. Trans. Amer. Math. Soc. 141 (1969) 255-262.

[21] Duren P.L., Romberg B.W., Shields A.L.: Linear functionals on $H^p$ spaces with $0<p<1$. J.Reine und Angew. Math. 238 (1969), 32-60.

[22] Duren P.L., Taylor G.D.: Mean grawth and coefficient of $H^p$ functions.

[23] Duren P.L., Shapiro H.S., Shields A.L.: Singular meansures and domains not of Smirnov type. Duke Math.J. 33(1966) 247-254.

[24] Duren P.L., Shilds A.L.: Coefficient multipliers of $H^p$ and $B^p$ spaces. (to appear).

[25] Flett T.: On the rate of growth of mean values of holomorphic functions. Proc. London Math. Soc.(3) 20(1970) 749-768.

[26] Gandu G.I.: $H^p$ multipliers and inequalities of Hardy and Littlewood. J. Austral Math. Soc. 10(1969), 23-32.

[27] Hardy G.H., Littlewood J.E.: Elementary theorems concerning power series with positiv coefficients and moment constants of positive functions. J. Reine und angew. Math 157 (1927), 141-158.

[28] Hardy G.H., Littlewood J.E.: Some properties of fractional integrals. II, Math, Z. 34(1932) 403-439.

[29] Hardy G.H., Littlewood J.E.: Some properties of conjugate functions functions. J. Reine und augew Math. 167(1931), 405-423.

[30] Hedlnnd J.H.: Multipliers of $H^p$ spaces. J. Math. Mech. 18(1969) 1067-1074.

[31] Hirochi Watanabe: Some Properties of Functions in Bergman Space $A^p$. Department of Mathematical Science, Faculty of Science, Tocai University (Received on Nov. 7.1977).

[32] Holland F., Twoney J.B.: On Hardy classes and the area function J.Lond. Math. Soc. 17,1978, 275-283.

[33] Horowitz C.: Zero of functions in the Bergman Spaces. Duke Math.J., 41(1974), 693-710.

[34] Jevtić M.: Neka svojstva novih Adamorovih proizvoda analitičkih funkcija. Mat. Vesnik No.4, Beograd, 1980.

[35] Йевтич M.: O коэффициентах Тейлора элементов пространства $D^p$. Мат. Весник, Београд, 1980.

[36] Wells J.H.: Some results concerning multipliers of $H^p$. J.Lond. Math. Soc. 2(1970).

[37] Walters S.S.: The space $H^p$ with $0<p<1$, Proc. Amer. Math. Soc. 1(1950). 800-805.

[38] Walters S.S.: Remares on the space $B^p$, Pacific J. Math. 1(1951), 455-471.

[39] Whiteman R.A.: A converse form of Dajovitchs theorem, Duke Math. J. v.31.(321-324), 1964.

# SADRŽAJ