UNIVERSITETI I PRISHTINËS

FAKULTETI I SHKENCAVE MATEMATIKE-NATYRORE

Mr Ruzhdi Kastrati

VLERËSIMI I KOEFICIENTËVE FOURIE TE DISA KLASA FUNKSIONESH ME DY VARIABLA

(disertacion i doktoratës)

Prishtinë,1989

PËRMBAJTJA

Rezultatet e paraqitura në këtë dorëshkrim janë arritur nën udhëheqjen e Dr Muharrem Berishes, profesor ordinar i FSHMN-së në Prishtinë.Me këtë rast deshiroj ti shprehi mirënjohje të thellë për ndihmen e madhe që më ka ofruar.

Falenderoj ngrohësisht Dr Mihajl K. Potapovin nga Universiteti Shtetëror i Moskës për kujdesin dhe ndihmen e ofruar gjatë qendrimit tim në këtë Universitet.

Falenderoj gjithashtu Dr Halil Turkun,profesor ordinar dhe Dr Minir Efendiun,profesor inordinar të FSHMN-së në Prishtinë për leximin me kujdes të dorëshkrimit dhe vërejtjet e dobishme që mi kanë ofruar.

H Y R J E

Paraqitja e funksioneve me një , dy apo më shumë variabla me anë të shprehjeve analitike, ofron mundsi të pazëvendsueshme për shqyrtimin e vetive të tyre.Si shprehje analitike të këto funksione, më së shpeshti përdoren seritë.Zakonisht përdoren seritë sipas ndonjë sistemi ortogonal apo thjeshtë seritë ortogonale si dhe seritë trigonometrike e në veçanti ato Fourie.

Seritë Fourie të funksioneve me një variabël ,janë shqytuar në mënyrë të hollësishme në shumë monografi e punime shkencore , siq bie fjala [2], [7] , [11] , [12] , [13] , [14] , [15] , [22] ,[24] , etj.Mirëpo, shqyrtim analog nuk është bërë për seritë e dyfishta Fourie.

Më parë po i japim disa shenime të përgjithëshme.

Në sistemin xOy ,le të jetë dhënë drejtëkëndshi $R=\{(x,y) \mid a \leq x \leq b\ ,\ c \leq y \leq d\}$ si dhe sistemi i funksioneve

$$\varphi_n(x,y)\ ,\ n=0,1,2,\ldots \tag{1}$$

të definuara e të integruara në R.

Relacioni (1) paraqet sistem ortogonal të funksioneve reale në - R, në qoftë se :

$$\iint_R \varphi_n(x,y)\,\varphi_m(x,y)\,dx\,dy = 0, \quad \forall n \neq m$$

Madhësia :

$$\|\varphi_n(x,y)\| = \sqrt{\iint_R \varphi_n^2(x,y)\,dx\,dy} \tag{2}$$

quhet norma e $\varphi_n(x,y)$

Sistemi (1) quhet i normuar nëse :

$$\iint_R \varphi_n^2(x,y)\,dx\,dy = 1$$

Çdo funksion f(x,y) i integrueshëm në R, mund të paraqitet me seri Fourie

$$f(x,y) \sim c_0\varphi_0(x,y) + c_1\varphi_1(x,y) + c_2\varphi_2(x,y) + \dots + c_n\varphi_n(x,y) + \dots \tag{3}$$

ku

$$c_n = \frac{\iint_R f(x,y)\,\varphi_n(x,y)\,dx\,dy}{\iint_R \varphi_n^2(x,y)\,dx\,dy} \tag{4}$$

Koeficientet c_n të dhënë në (4) quhen koeficientë Fourie në lidhje me një sistem ortogonal (1).

Funksionet :

$$\begin{aligned} &\cos mx,\ \sin mx,\ \cos ny,\ \sin ny,\ \dots \\ &\cos mx\cos nx,\ \sin mx\cos ny,\ \dots \\ &\cos mx\sin ny,\ \sin mx\sin ny,\ \dots \end{aligned} \tag{5}$$

paraqesin bazën e sistemit të normuar trigonometrik për funksionet me dy variabla.

Të gjitha funksionet në (5) janë peridike , me periodë 2π sipas x-it dhe y-it.

Serinë e trajtës :

$$\sum_{m,n} \lambda_{m,n} \left(a_{m,n} \cos mx \cos ny + b_{m,n} \sin mx \cos ny + c_{m,n} \cos mx \sin ny + d_{m,n} \sin mx \sin ny \right) \tag{6}$$

ku $a_{m,n}$, $b_{m,n}$, $c_{m,n}$,$d_{m,n} \in \mathbb{R}$, e quajmë seri e dyfisht trigonometrike , ku

$$\lambda_{m,n} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{për } m=n=0 \\ \frac{1}{2} & \text{për } m>0, n=0 \text{ ose } m=0, n>0 \\ 1 & \text{për } m>0, n>0. \end{cases}$$

Në rastin kur

$$f(x,y) = \sum_{m,n} \lambda_{m,n} \left(a_{m,n} \cos mx \cos ny + b_{m,n} \sin mx \cos ny + c_{m,n} \cos mx \sin ny + d_{m,n} \sin mx \sin ny \right)$$

dhe seria që gjendet në anën e djathtë të barazimit të mësipërmë konvergjon uniformisht në katrorin $K = [-\pi, \pi]^2$ kah funksioni f(x,y), atëherë

$$A_{0,0} = \frac{1}{4\pi^2} \iint_K f(x,y)\,dx\,dy ,$$

$$A_{m,0} = \frac{1}{2\pi^2} \iint_K f(x,y) \cos mx \,dx\,dy , \quad m=1,2,3,\dots$$

$$A_{0,n} = \frac{1}{2\pi^2} \iint_K f(x,y) \cos ny \,dx\,dy , \quad n=1,2,3,\dots$$

$$B_{m,0} = \frac{1}{2\pi^2} \iint_K f(x,y) \sin mx \, dx \, dy \ , \ m=1,2,3,\ldots$$

$$B_{0,n} = \frac{1}{2\pi^2} \iint_K f(x,y) \sin ny \, dx \, dy \ , \ n=1,2,3,\ldots$$

dhe

$$\left.\begin{aligned}
a_{m,n} &= \frac{1}{\pi^2} \iint_K f(x,y) \cos mx \cos ny \, dx \, dy, \\
b_{m,n} &= \frac{1}{\pi^2} \iint_K f(x,y) \sin mx \cos ny \, dx \, dy, \\
c_{m,n} &= \frac{1}{\pi^2} \iint_K f(x,y) \cos mx \sin ny \, dx \, dy, \\
d_{m,n} &= \frac{1}{\pi^2} \iint_K f(x,y) \sin mx \sin ny \, dx \, dy \ .
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Serinë e dyfisht trigonometrike (6) koeficientët e së cilës jepen me formulat (7) e quajmë seri e dyfisht trigonometrike Fourie ose seri e dyfisht Fourie , kurse $A_{0,0}$, ... , $d_{m,n}$ koeficientët Fourie të funksionit $f(x,y)$.

Në kët rast shkruajmë :

$$f(x,y) \sim \sum_{m,n} \lambda_{m,n} \Big(a_{m,n} \cos mx \cos ny + b_{m,n} \sin mx \cos ny + \\ + c_{m,n} \cos mx \sin ny + d_{m,n} \sin mx \sin ny \Big),$$

ku

$$\lambda_{m,n} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{për } m=0=n \, , \\ \frac{1}{2} & \text{—"— } m>0, n=0 \text{ ose } m=0, n>0 \, , \\ 1 & \text{—"— } m>0 \, , \, n>0 . \end{cases}$$

Vargu i numrave natyral ku

$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$

quhet lakunar , nëse gjendet $\lambda > 1$ i tillë që

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \lambda > 1 \quad , k=1,2,3,\ldots$$

Seria trigonometrike e trajtës :

$$\sum_{m,n} (a_{m,n} \cos m_k x \cos n_k y + b_{m,n} \sin m_k \cos n_k y +$$
$$+ c_{m,n} \cos m_k x \sin n_k y + d_{m,n} \sin m_k \sin n_k y)$$

quhet lakunare, nëse $\{m_k\}$ dhe $\{n_k\}$ janë vargje lakunare.

Viteve të fundit është duke u punuar mjaft në vlerësimin e koeficientëve Fourie të funksioneve me dy e më shumë variabla, në ç'drejtim bazë të fortë japin punimet [5] , [6] dhe [30] .Vërtetohet pohimi :

Le të jetë $f(x,y) \in L_p$, ($p > 1$) funksion çift sipas x-it dhe y-it , ku $a_{m,n} > 0$ janë koeficientët e tij Fourie. Nëse $\{ a_{m,n} \}$ është monotono zvoglues sipas indeksave m dhe n , atëherë , gjenden numrat natyral k dhe l ashtu që :

$$(m n)^{1-\frac{1}{p}} a_{m,n} \leq C \, \omega_{k,l}^{(p)} (f, \frac{\pi}{2m}, \frac{\pi}{2n}), \tag{8}$$

ku C ëshë konstantë , kurse

$$\omega_{k,l}^{(p)} (f, \frac{\pi}{2m}, \frac{\pi}{2n})$$

është moduli i lëmueshmërisë së funksionit f(x,y), i rendit k sipas x-it dhe l sipas y-it.

Mosbarazimi (8) vlen edhe në rastin kur $f(x,y) \in L_p$ është funksion çift vetëm sipas njërit variabël ,si dhe në rastin kur $f(x,y)$ është tek sipas x-it dhe y-it .

Në qoftë se $f(x,y) \in L_p$, ($1 \leq p < \infty$) ku

$$f(x,y) \sim \sum_{m,n} c_{m,n} \; e^{i(mx+ny)}$$

atëherë, koeficientët e tij Fourie $c_{m,n}$, $(m,n \in \mathbb{Z})$ plotësojnë konditen :

$$|c_{m,n}| \leq C_1 \, \omega^{(p)}_{k,l}\left(f, \frac{\pi}{2m}, \frac{\pi}{2n}\right) \qquad (9)$$

ku l,k janë numra natyral,kurse C_1 konstantë.

Në rastin kur $f(x,y) \in L_p$, ($1 < p < \infty$) paraqitet funksion çift sipas njërit apo të dy variablave ose tek sipas njërit apo të dy variablave , atëherë koeficientët e tij Fourie $a_{m,n}$ plotësojnë konditen (9) dhe vlen mosbarazimi :

$$C_2 \,(mn)^{1-\frac{1}{p}} \, a_{m,n} \leq \omega_{k,l}\left(f, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) \leq C_3 \,(mn)^{1-\frac{1}{p}} \, a_{m,n}$$

ku k ,l janë numra natyral, kurse C_2 dhe C_3 konstante.

Në këtë dorëshkrim iu kemi qasur vlerësimit të koeficientëve Fourie të funksioneve me dy variabla në klasët e Nikolsk-it dhe të Besov -it .Vlerësimi i koeficientëve Fourie është bërë për funksionet me seri të dyfisht lakunare në klasët :

$$S^{o} H_{p}^{r_1 r_2}\ ,\quad S^{o} H_{p}^{\varphi_1 \varphi_2}\ ,\quad H(p, k_1, k_2, \varphi)\ ,\quad S^{o} B_{p}^{r_1 r_2}\ ,$$

ndërsa për funksionet çift në klasët :

$$\bar{H}(p, k_1, k_2, \varphi)\ ,\quad B_{p\theta}^{r_1 r_2}\quad \text{dhe}\quad B(p, \theta, \alpha)\ .$$

Në vazhdim po japim përmbajtjen e shkurtër të kapitujve të këtij dorëshkrimi .

Në kapitullin e parë janë dhënë përkufizimet dhe nocionet themelore që do të shfrytëzohen për vërtetimin e teoremave kryesore të këtij punimi.Meqë, vlerësimi i koeficientëve Fourie i funksioneve me dy variabla,kryesisht është bërë me ndihmën e modulit të lëmueshmërisë,këtu janë dhënë vlerësime të tij si nga ana e majtë ,poashtu edhe nga e djathta (teorema 1.2.1). Mandej, është dhënë lidhja ndërmjet modulit të lëmueshmërisë dhe të koeficientëve Fourie (lema 1.3.2)

Në kapitullin e dytë janë vlerësuar koeficientët Fourie kryesisht për funksionet në klasët e Nikolsk-it.Në paragrafët 2.1 , 2.2 dhe 2.3 vlerësimi i koeficientëve Fourie është bërë për funksionet me seri të dyfisht lakunare,ndërsa në paragrafin 2.4 një vlerësim i tillë është dhënë për funksionet çift me dy variabla nga klasa $H(p,k_1,k_2,\varphi)$

Në rastin kur funksioni është me seri të dyfisht lakunare,janë vërtetuar teoremat :

Teoremë 1.Që $f(x,y) \in L_p^0$, $1 \leq p_i < \infty$,$i=1,2$, i matëshëm dhe periodik ,me periodë 2π

$$f(x,y) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\nu\mu} \cos \nu x \cos \mu y \tag{10}$$

me koeficientë :

$$\begin{aligned} c_{\nu\mu} &= a_{kl} > 0 \quad \text{për} \quad \nu = 2^k \text{ dhe } \mu = 2^l \\ c_{\nu\mu} &= 0 \qquad\quad \text{për} \quad \nu \neq 2^k \text{ ose } \mu \neq 2^l \end{aligned} \tag{11}$$

ku k,l janë numra natyral , ti takoje klasës $S^0 H_p^{r_1 r_2}$ është e nevojshme dhe e mjaftueshme që koeficientët e tij Fourie të plotësojnë konditen

$$c_{\nu\mu} = \frac{C_4}{\nu^{r_1} \mu^{r_2}} .$$

Teoremë 2. Që $f(x,y) \in L_p$, $1 \leq p_i < \infty$, $i=1,2$, i trajtës (10) ,me koeficientë që plotësojnë konditën (11) të jetë nga klasa $S^0 H_p^{\varphi_1 \varphi_2}$ është e nevojshme dhe e mjaftueshme që koeficientët e tij Fourie të plotësojnë konditën

$$c_{\nu\mu} = C_5 \, \varphi_1(\delta_1) \, \varphi_2(\delta_2)$$

ku funksionet $\varphi_i(\delta_i)$, $i=1,2$ plotësojnë konditatë e dhëna në (2.1)

Teorematë e sipershenuara i kam paraqitur në kongresin e matematicientëve të mbajtur në Moskë,në shkurt të vitit 1985.

Konditatë e nevojshme përkatësisht të mjaftueshme që duhet ti plotësojnë koeficientët Fourie, në mënyrë që funksioni të jetë nga klasa $H(p,k_1,k_2,\varphi)$, janë dhënë përkatësisht në teorematë 2.3.3 dhe 2.3.4.

Ndërkaq, vlerësimi i koeficientëve Fourie i funksionit çift me dy variabla nga klasa $H(p,k_1,k_2,\varphi)$ është dhënë në paragrafin 2.4. Konditatë që duhet ti plotësojnë koeficientët Fourie janë dhënë si në shumë (teorema 2.4.1) poashtu edhe në një koeficient (teorema 2.4.2).

Në kapitullin e tretë është dhënë vlerësimi i koeficientëve Fourie për funksionet me dy variabla nga klasa e Besov-it .Vërtetohet këjo

Teoremë 3. Konditë e nevojshme dhe e mjaftueshme që funksioni

$$f(x,y) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} \tau_{\nu\mu} \cos\nu x \cos\mu y ,$$

me koeficient që plotësojnë konditen (11) të jetë nga klasa $S^{o} B_{p\theta}^{r_1 r_2}$ është që koeficientët e tij Fourie të plotësojnë konditen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} \tau_{\nu\mu}^{\theta}\, \nu^{r_1\theta} \mu^{r_2\theta} < +\infty .$$

Teoremën 3 e kam paraqitur në Kongresin e VIII të Matematikanëve , Fizikanëve dhe Astronomëve të Jugoslavis të mbajtur në Prishtinë,prej 23-27 Shtator të vitit 1985

Në paragrafin 3.2 është dhënë vlerësimi i koeficientëve Fourie i funksionit çift nga klasa $B_{p\theta}^{\tau_1\tau_2}$. Edhe në këtë rast caktohen konditatë e nevojshme dhe të mjaftueshme që duhet ti plotësojnë koeficientët Fourie, në mënyrë që funksioni të jetë nga klasa $B_{p\theta}^{\tau_1\tau_2}$ (teorema 3.2.1) Në vazhdim, është dhënë vlerësimi i koeficientëve Fourie i funksionit çift me dy variabla nga klasa $B(p, \theta, \alpha)$. Në teoremën 3.3.1 janë dhënë konditatë e nevojshme, kurse në teoremën 3.3.2 ato të mjaftueshme, në mënyrë që funksioni ti takoje klasës $B(p, \theta, \alpha)$.

Lidhja ndërmjet vlerësimit të koeficientëve Fourie në klasët $B_{p\theta}^{\tau_1\tau_2}$ dhe $B(p, \theta, \alpha)$ është dhënë në rrjedhimin 3.3.1.

KAPITULLI I PARË

KOEFICIENTËT FOURIE DHE MODULI I LËMUESHMËRISË PËR FUNKSIONET ME DY VARIABLA

Në punimin [1] është dhënë lidhja ndërmjet koeficientëve Fourie dhe modulit të lëmueshmërisë për funksionet me me një variabël.Këjo problematikë është vazhduar dhe njëkohësisht është thelluar në [7] , [12] , [13] dhe [28]. Mirëpo, rezultatet e fituara në lidhje me vlerësimin e koeficientëve Fourie të funksiont me një variabël,nuk do të thotë se vlejn edhe për funksionet me dy variabla.Kët më së miri e ilustron teorema e Privalov-it ([2] ,faqe 135), e vërtetuar për funksionet me një variabël, porë e cila nuk vlen për funksionet me dy variabla.Prandaj, paraqitet nevoja e shqyrtimit më të hollësishëm të koeficientëve Fourie për funksionet me dy variabla.

Në punimet [5] dhe [6] janë dhënë vlerësime për lidhjen ndërmjet koeficientëve Fourie të funksioneve me dy variabla dhe modulit të lëmueshmërisë.

Duke u bazuar në rezultatet e gjerëtanishme në këtë lëmi, në këtë kapitull është shqyrtuar detalisht lidhja ndërmjet koeficientëve Fourie dhe modulit të lëmueshmërisë për funksionet me dy variabla.

§ 1.1 PËRKUFIZIMET DHE KUPTIMET THEMELORE

Le të jetë f(x,y) funksion me dy variable x dhe y, me periodë 2π. Do të themi se $f(x,y) \in L_p$, $1 \leq p < \infty$, në qoftë se është i matëshëm dhe vlen

$$\|f(x,y)\|_p = \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x,y)|^p \, dx \, dy \right)^{1/p} < \infty ,$$

ndërsa për $p = \infty$:

$$\|f(x,y)\|_\infty = \|f(x,y)\|_C = \max_{(x,y)} |f(x,y)|$$

Shenojmë me $\omega_{k_1 k_2}(f, t_1, t_2)_p$ modulin e lëmueshmërisë (në metriken L_p) të rendit k_1 sipas x-it, ndërsa të rendit k_2 sipas y-it të $f(x,y) \in L_p$, do me thanë

$$\omega_{k_1 k_2}(f, t_1, t_2)_p = \sup_{\substack{|h_1| < t_1 \\ |h_2| < t_2}} \| \Delta_{h_1}^{k_1} \Delta_{h_2}^{k_2} f(x,y) \|_p =$$

$$= \sup_{\substack{|h_1| < t_1 \\ |h_2| < t_2}} \left\| \sum_{\nu=0}^{k_1} \sum_{\mu=0}^{k_2} (-1)^{k_1+k_2-\nu-\mu} \binom{k_1}{\nu} \binom{k_2}{\mu} f(x+\nu h_1, y+\mu h_2) \right\|_p .$$

Serinë Fourie të funksionit me dy variabla në trajtë komplekse e shkruajmë

$$f(x,y) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_{\nu\mu} e^{i(\nu x+\mu y)},$$

ku

$$c_{\nu\mu} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t,u)\, e^{i(\nu x+\mu y)}$$

Në kët rast kemi :

$$\Delta_{h_1}^{k_1} f(x,y) \sim \sum_{|\nu|=1}^{\infty} \sum_{|\mu|=1}^{\infty} d_{\nu\mu} e^{i(\nu x+\mu y)},$$

ku

$$d_{\nu\mu} = c_{\nu\mu}\left[2\sin\frac{\nu h_1}{2} e^{i\left(\frac{\nu h_1}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}\right]^{k_1},$$

ndërsa

$$\Delta_{h_2}^{k_2} f(x,y) \sim \sum_{|\nu|=1}^{\infty} \sum_{|\mu|=1}^{\infty} b_{\nu\mu} e^{i(\nu x+\mu y)}$$

$$b_{\nu\mu} = c_{\nu\mu}\left[2\sin\frac{\mu h_2}{2} e^{i\left(\frac{\mu h_2}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}\right]^{k_2},$$

dhe

$$\Delta_{h_1 h_2}^{k_1 k_2} f(x,y) \sim \sum_{|\nu|=1}^{\infty} \sum_{|\mu|=1}^{\infty} A_{\nu\mu} e^{i(\nu x+\mu y)}$$

$$A_{\nu\mu} = c_{\nu\mu}\left[2\sin\frac{\nu h_1}{2} e^{i\left(\frac{\nu h_1}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}\right]^{k_1}\cdot\left[2\sin\frac{\mu h_2}{2} e^{i\left(\frac{\mu h_2}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}\right]^{k_2}.$$

Shenojmë me $S_{nm} f(x,y)$ shumën e pjesëshme të serisë Fourie të rendit n sipas x-it dhe m sipas y-it të funksionit f(x,y) , pra

$$S_{nm} f(x,y) = \sum_{|\nu|=0}^{n} \sum_{|\mu|=0}^{m} c_{\nu\mu} e^{i(\nu x+\mu y)}.$$

Me $S_{n\infty} f(x,y)$ shenojmë shumën e pjesëshme të serisë Fourie të rendit n sipas x-it, do me thanë

$$S_{n\infty} f(x,y) \sim \sum_{|\nu|=0}^{n} \sum_{|\mu|=0}^{\infty} c_{\nu\mu} e^{i(\nu x+\mu y)}$$

ndërsa, me $S_{\infty m} f(x,y)$ shenojmë shumën e pjesëshme të serisë Fourie të rendit m sipas y-it, pra

$$S_{\infty m} f(x,y) \sim \sum_{|\nu|=0}^{\infty} \sum_{|\mu|=0}^{m} c_{\nu\mu} e^{i(\nu x+\mu y)}$$

Shenojmë me $E_{nm} f(x,y)_p$ përafrimin më të mirë (në metriken L_p) të funksionit $f(x,y) \in L_p$ me polinom trigonometrik $T_{nm}(x,y)$ të rendit n sipas x-it, kurse m sipas y-it, pra

$$E_{nm} f(x,y)_p = \inf_{T_{nm}} \| f(x,y) - T_{nm}(x,y)\|_p .$$

§ 1.2 VLERËSIMI I MODULIT TË LËMUESHMËRISË ME NDIHMEN E KOEFICIENTËVE FOURIE

Teoremë 1.2.1 Le të jetë $f(x,y) \in L_p$, $1 < p < \infty$ dhe $c_{\nu\mu}$ koeficientët e tij Fourie. Nëse shenojmë

$$B_p^p(\tau_{\nu\mu},k_1,k_2,n,m) = (1/n^{k_1 p})(1/m^{k_2 p}) \sum_{|\nu|=1}^{n} \sum_{|\mu|=1}^{m} |\tau_{\nu\mu}||\nu|^{(k_1+1)p-2}|\mu|^{(k_2+1)p-2} +$$

$$+ (1/n^{k_1 p}) \sum_{|\nu|=1}^{n} \sum_{|\mu|=m+1}^{\infty} |\tau_{\nu\mu}|^p |\nu|^{(k_1+1)p-2} |\mu|^{p-2} +$$

$$+ (1/m^{k_2 p}) \sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} \sum_{|\mu|=1}^{m} |\tau_{\nu\mu}|^p |\nu|^{p-2} |\mu|^{(k_2+1)p-2} +$$

$$+ \sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} \sum_{|\mu|=m+1}^{\infty} |\tau_{\nu\mu}|^p |\nu|^{p-2} |\mu|^{p-2},$$

atëherë, për çfarëdo k_1, k_2 numra natyral vlen :

1. Për $2 < p < \infty$:

$$(1) \quad A_1 B_2(\tau_{\nu\mu},k_1,k_2,n,m) \le \omega_{k_1 k_2}\left(f,\frac{1}{n},\frac{1}{m}\right)_p \le A_2 B_p(\tau_{\nu\mu},k_1,k_2,n,m)$$

2. Për $1 < p \le 2$

$$(2) \quad A_3 B_p(\tau_{\nu\mu},k_1,k_2,n,m) \le \omega_{k_1 k_2}\left(f,\frac{1}{n},\frac{1}{m}\right)_p \le A_4 B_2(\tau_{\nu\mu},k_1,k_2,n,m)$$

ku A_1, A_2, A_3 dhe A_4 nuk varen nga $f(x,y)$, n dhe m.

Vërtetim. Në qoftë se : $2 < p < \infty$, atëherë

$$\omega^{p}_{k_1k_2}\left(f,\frac{1}{n},\frac{1}{m}\right)_p = \sup_{\substack{|h_1|<1/n \\ |h_2|<1/m}} \| \Delta^{k_1k_2}_{h_1h_2} f(x,y)\|^p_p =$$

$$= \sup_{\substack{|h_1|<1/n \\ |h_2|<1/m}} \Big\| \sum_{\nu=0}^{k_1}\sum_{\mu=0}^{k_2} (-1)^{k_1+k_2-\nu-\mu}\binom{k_1}{\nu}\binom{k_2}{\mu} f(x+\nu h_1, y+\mu h_2)\Big\|^p_p$$

Duke zbatuar teoremën Peli ([22], faqe 217) kemi:

$$\omega^{p}_{k_1k_2}\left(f,\frac{1}{n},\frac{1}{m}\right)_p \le A_5 \sup_{\substack{|h_1|<1/n \\ |h_2|<1/m}} \sum_{|\nu|=1}^{\infty}\sum_{|\mu|=1}^{\infty} |c_{\nu\mu}|^p |\nu|^{p-2} \left|2\sin\frac{\nu h_1}{2}\right|^{k_1p} |\mu|^{p-2} \left|2\sin\frac{\mu h_2}{2}\right|^{k_2p} \le$$

$$\le A_6 \sup_{\substack{|h_1|<1/n \\ |h_2|<1/m}} \Big\{ \sum_{|\nu|=1}^{n}\sum_{|\mu|=1}^{m} |c_{\nu\mu}|^p |\nu|^{p-2} \left|2\sin\frac{\nu h_1}{2}\right|^{k_1p} |\mu|^{p-2} \left|2\sin\frac{\mu h_2}{2}\right|^{k_2p} +$$

$$+ \sum_{|\nu|=1}^{n}\sum_{|\mu|=m+1}^{\infty} |c_{\nu\mu}|^p |\nu|^{p-2} \left|2\sin\frac{\nu h_1}{2}\right|^{k_1p} |\mu|^{p-2} \left|2\sin\frac{\mu h_2}{2}\right|^{k_2p} +$$

$$+ \sum_{|\nu|=n+1}^{\infty}\sum_{|\mu|=1}^{m} |c_{\nu\mu}|^p |\nu|^{p-2} \left|2\sin\frac{\nu h_1}{2}\right|^{k_1p} |\mu|^{p-2} \left|2\sin\frac{\mu h_2}{2}\right|^{k_2p} +$$

$$+ \sum_{|\nu|=n+1}^{\infty}\sum_{|\mu|=m+1}^{\infty} |c_{\nu\mu}|^p |\nu|^{p-2} \left|2\sin\frac{\nu h_1}{2}\right|^{k_1p} |\mu|^{p-2} \left|2\sin\frac{\mu h_2}{2}\right|^{k_2p} \Big\} \le$$

$$\le A_6 \Big\{ (1/n^{k_1p})(1/m^{k_2p}) \sum_{|\nu|=1}^{n}\sum_{|\mu|=1}^{m} |c_{\nu\mu}|^p |\nu|^{(k_1+1)p-2} |\mu|^{(k_2+1)p-2} +$$

$$+ (1/n^{k_1p}) \sum_{|\nu|=1}^{n}\sum_{|\mu|=m+1}^{\infty} |c_{\nu\mu}|^p |\nu|^{(k_1+1)p-2} |\mu|^{p-2} +$$

$$+ (1/m^{k_2 p}) \sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} \sum_{|\mu|=1}^{m} |\tau_{\nu\mu}|^p |\nu|^{p-2} |\mu|^{(k_2+1)p-2} +$$

$$+ \sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} \sum_{|\mu|=m+1}^{\infty} |\tau_{\nu\mu}|^p |\nu|^{p-2} |\mu|^{p-2} \Big\} = A_6 B_p^p(\tau_{\nu\mu}, k_1, k_2, n, m) \ldots \quad (2.1)$$

Për $1 < p \leqslant 2$ vlen :

$$\omega_{k_1 k_2}\left(f, \frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)_p \leq A_7\, \omega_{k_1 k_2}\left(f, \frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)_2 .$$

Në veçanti, për $p=2$ duke patur në konsideratë (2.1) kemi:

$$\omega_{k_1 k_2}\left(f, \frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)_p \leq A_8\, B_2(\tau_{\nu\mu}, k_1, k_2, n, m) \quad . \qquad (2.2)$$

Për letësim të vërtetimit të teoremës shenojmë:

$$I_1 = (1/n^{k_1 p})(1/m^{k_2 p}) \sum_{|\nu|=1}^{n} \sum_{|\mu|=1}^{m} |\tau_{\nu\mu}|^p |\nu|^{(k_1+1)p-2} |\mu|^{(k_2+1)p-2},$$

$$I_2 = (1/n^{k_1 p}) \sum_{|\nu|=1}^{n} \sum_{|\mu|=m+1}^{\infty} |\tau_{\nu\mu}|^p |\nu|^{(k_1+1)p-2} |\mu|^{p-2},$$

$$I_3 = (1/m^{k_2 p}) \sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} \sum_{|\mu|=1}^{m} |\tau_{\nu\mu}|^p |\nu|^{p-2} |\mu|^{(k_2+1)p-2} \text{ dhe}$$

$$I_4 = \sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} \sum_{|\mu|=m+1}^{\infty} |\tau_{\nu\mu}|^p |\nu|^{p-2} |\mu|^{p-2}.$$

Vlerësojmë veç e veç çdo shumë I_1, I_2, I_3 dhe I_4.

Për shumën I_1 vlen mosbarazimi :

$$I_1 \leq A_9 \sum_{|\nu|=1}^{n} \sum_{|\mu|=1}^{m} |\tau_{\nu\mu}|^p \left|2\sin\frac{\nu h_1}{2}\right|^{k_1 p} \left|2\sin\frac{\mu h_2}{2}\right|^{k_2 p} |\nu|^{p-2} |\mu|^{p-2}.$$

Meqë $S_{nm}\left(\Delta^{k_1 k_2}_{(1/n)(1/m)} f(x,y)\right) =$

$$= \sum_{|\nu|=1}^{n} \sum_{|\mu|=1}^{m} c_{\nu\mu}\left[2\sin\frac{\nu}{2n} e^{i\left(\frac{\nu}{2n}-\frac{\pi}{2}\right)}\right]^{k_1}\left[2\sin\frac{\mu}{2m} e^{i\left(\frac{\mu}{2m}-\frac{\pi}{2}\right)}\right]^{k_2} e^{i(\nu x+\mu y)}$$

me zbatimin e teoremës Peli për $1 < p \leq 2$ kemi :

$$I_1 \leq A_{10} \left\| S_{nm}\left(\Delta^{k_1 k_2}_{(1/n)(1/m)} f(x,y)\right)\right\|_p^p \leq A_{12} \left\|\Delta^{k_1 k_2}_{(1/n)(1/m)} f(x,y)\right\|_p \leq$$

$$\leq A_{13}\, \omega^p_{k_1 k_2}\left(f, \frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)_p \qquad (2.3)$$

Mëtutje , vlerësojmë I_4 e mandej I_2 dhe I_3 .Marrim

$$f(x,y) - S_{n\infty} f(x,y) - S_{\infty m} f(x,y) + S_{nm} f(x,y) \sim$$

$$\sim \sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} \sum_{|\mu|=m+1}^{\infty} c_{\nu\mu}\, e^{i(\nu x+\mu y)}.$$

Për $1 < p \leq 2$ zbatojmë përseri teoremën Peli :

$$I_4 \leq A_{14} \left\| f(x,y) - S_{n\infty} f(x,y) - S_{\infty m} f(x,y) + S_{nm} f(x,y)\right\|_p^p \leq$$

$$\leq A_{15}\, E_{nm} f(x,y)_p .$$

Ndonëse

$E_{nm} f(x,y)_p \leq A_{16}\, \omega^p_{k_1 k_2}\left(f, \frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)_p$ kemi :

$$I_4 \leq A_{17}\, \omega^p_{k_1 k_2}\left(f, \frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)_p \qquad (2.4)$$

Për të vlerësuar I_2 marrim :

$F(x,y) = f(x,y) - S_{\infty m} f(x,y)$, pra

$$F(x,y) \sim \sum_{|\nu|=0}^{\infty} \sum_{|\mu|=m+1}^{\infty} c_{\nu\mu}\, e^{i(\nu x+\mu y)}$$

$$S_{n\infty} f(x,y) \sim \sum_{|\nu|=0}^{n} \sum_{|\mu|=m+1}^{\infty} c_{\nu\mu} e^{i(\nu x+\mu y)}$$

dhe

$$S_{n\infty}\left(\Delta_{(1/n)}^{k_1} F(x,y)\right) \sim \sum_{|\nu|=0}^{n} \sum_{|\mu|=m+1}^{\infty} c_{\nu\mu}\left[2\sin\frac{\nu}{2n} e^{i\left(\frac{\nu}{2n}-\frac{\pi}{2}\right)}\right]^{k_1} e^{i(\nu x+\mu y)}.$$

Atëherë,

$$I_2 \leq \sum_{|\nu|=1}^{n} \sum_{|\mu|=m+1}^{\infty} |c_{\nu\mu}|^p \left|2\sin\frac{\nu}{2n}\right|^{k_1 p} |\nu|^{p-2} |\mu|^{p-2}$$

Zëvendsojmë $\Delta_{(1/n)}^{k_1} F(x,y) = \varphi$ e mandej njehsojmë:

$$\Delta_{(1/n)}^{k_1} f(x,y) = \varphi - S_{\infty m}(\varphi)$$

Duke zbatuar teoremën Peli kemi

$$\begin{aligned} I_2 &\leq A_{18} \| S_{n\infty} \Delta_{(1/n)}^{k_1} F(x,y) \|_p^p \leq \\ &\leq A_{19} \| \Delta_{(1/n)}^{k_1} F(x,y) \|_p^p = \\ &= A_{19} \| \varphi - S_{\infty m}(\varphi) \|_p^p \leq \\ &\leq A_{20} E_{\infty m}^p (\varphi)_p \leq \\ &\leq A_{21} \omega_{k_2}^p \left(\varphi, \frac{1}{m}\right)_p = \\ &= A_{21} \sup_{|h_2|<1/m} \| \Delta_{h_2}^{k_2}(\varphi) \|_p^p = \\ &= A_{21} \sup \| \Delta_{h_2}^{k_2} \Delta_{(1/n)}^{k_1} f(x,y) \|_p^p \\ &\leq A_{22}\, \omega_{k_1 k_2}^p \left(f, \frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)_p \end{aligned} \qquad (2.5)$$

Le të jetë :

$$\psi(x,y) = f(x,y) - S_{n\infty} f(x,y),$$

atëherë

$$\psi(x,y) \sim \sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} \sum_{|\mu|=0}^{\infty} c_{\nu\mu} e^{i(\nu x+\mu y)}$$

dhe
$$S_{\infty m}(\psi) \sim \sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} \sum_{|\mu|=0}^{m} c_{\nu\mu} e^{i(\nu x+\mu y)}$$

Së fundi ,vlerësojmë edhe shumën I_3 .

$$I_3 \leq \sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} \sum_{|\mu|=1}^{m} |c_{\nu\mu}|^p \left|2\sin\frac{\mu}{2m}\right|^{k_2 p} |\nu|^{p-2} |\mu|^{p-2} \leq$$
$$\leq A_{23} \| S_{\infty m} \Delta^{k_2}_{(1/m)}(\psi) \|_p^p \leq$$
$$\leq A_{24} \| \Delta^{k_2}_{(1/m)}(\psi) \|_p^p =$$
$$= A_{24} \| \Delta^{k_2}_{(1/m)}(f) - S_{n\infty} \Delta^{k_2}_{(1/m)}(f) \|_p^p \leq$$
$$\leq A_{25} E^p_{n\infty}(\Delta^{k_1}_{(1/m)}(f))_p \leq$$
$$\leq A_{26} \omega^p_{k_1}(\Delta^{k_2}_{(1/m)}(f))_p \leq$$
$$\leq A_{27} \omega^p_{k_1 k_2}\left(f, \frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)_p \qquad (2.6)$$

Nga mosbarazimet (2.3), (2.4), (2.5) dhe (2.6) rrjedh relacioni (2).

Për $2 \leq p < \infty$ vlen vlerësimi

$$\omega_{k_1 k_2}\left(f, \frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)_p \geqslant A_{28}\, \omega_{k_1 k_2}\left(f, \frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)_2$$

Duke u bazuar në vlerësimin e mëparëshëm për p=2 kemi

$$\omega_{k_1 k_2}\left(f, \frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)_p \geqslant A_{29} B_2(c_{\nu\mu}, k_1, k_2, n, m) \qquad (2.7)$$

Nga mosbarazimet (2.1) dhe (2.7) rrjedh vërtetimi i relacionit (1) dhe me këtë teorema 1.2.1 u vertetua.

Teoremë 1.2.2 Në qoftë se $f(x,y) \in L_p$, $1 < p < \infty$ dhe $c_{\nu\mu}$ janë koeficientët e tij Fourie , atëherë vlen mosbarazimi

1. Për $2 \leq p < \infty$:

$$C_1\left\{(1/n^{2k_1})\sum_{|\nu|=1}^{n}\sum_{|\mu|=0}^{\infty}|c_{\nu\mu}|^2|\nu|^{2k_1}+\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty}\sum_{|\mu|=0}^{\infty}|c_{\nu\mu}|^2\right\}^{1/2}\leq$$

$$\leq \omega_{k_1}\left(f,\frac{1}{n}\right)_p \leq$$

$$\leq C_2\left\{(1/n^{k_1 p})\sum_{|\nu|=1}^{n}\sum_{|\mu|=0}^{\infty}|c_{\nu\mu}|^p|\nu|^{(k_1+1)p-2}+\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty}\sum_{|\mu|=0}^{\infty}|c_{\nu\mu}|^p|\nu|^{p-2}\right\}^{1/p}. \quad (4)$$

2. Për $1 < p \leq 2$:

$$C_3\left\{(1/n^{k_1 p})\sum_{|\nu|=1}^{n}\sum_{|\mu|=0}^{\infty}|c_{\nu\mu}|^p|\nu|^{(k_1+1)p-2}+\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty}\sum_{|\mu|=0}^{\infty}|c_{\nu\mu}|^p|\nu|^{p-2}\right\}^{1/p}\leq$$

$$\leq \omega_{k_1}(f,1/n)_p \leq$$

$$\leq C_4\left\{(1/n^{2k_1})\sum_{|\nu|=1}^{n}\sum_{|\mu|=0}^{\infty}|c_{\nu\mu}|^2|\nu|^{2k_1}+\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty}\sum_{|\mu|=0}^{\infty}|c_{\nu\mu}|^2\right\}^{1/2}, \quad (5)$$

ku konstantët C_1, C_2, C_3 dhe C_4 nuk varën nga $f(x,y)$, n dhe m.

Vërtetim. Për $2 \leq p < \infty$,sipas teoremës Peli ([22], faqe 217)

$$\omega_{k_1}^p(f,1/n)_p=\sup_{|h_1|\leq 1/n}\|\Delta_{h_1}^{k_1}f(x,y)\|_p^p \leq$$

$$\leq C_5\sup_{|h_1|\leq 1/n}\left\{\sum_{|\nu|=1}^{\infty}\sum_{|\mu|=0}^{\infty}|c_{\nu\mu}|^p\left|2\sin\frac{\nu h_1}{2}\right|^{k_1 p}|\nu|^{p-2}\right.\leq$$

$$\leq C_6 \sup_{|h_1|\leq 1/n} \Big\{ \sum_{|\nu|=1}^{n} \sum_{|\mu|=0}^{\infty} |\tau_{\nu\mu}|^p \Big|2\sin\frac{\nu h_1}{2}\Big|^{k_1 p} |\nu|^{p-2} +$$

$$+ \sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} \sum_{|\mu|=0}^{\infty} |\tau_{\nu\mu}|^p \Big|2\sin\frac{\nu h_1}{2}\Big|^{k_1 p} |\nu|^{p-2} \Big\} \leq$$

$$\leq C_7 \Big\{ (1/n^{k_1 p}) \sum_{|\nu|=1}^{n} \sum_{|\mu|=0}^{\infty} |\tau_{\nu\mu}|^p |\nu|^{(k_1+1)p-2} + \sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} \sum_{|\mu|=0}^{\infty} |\tau_{\nu\mu}|^p |\nu|^{p-2} \Big\} \qquad (2.8)$$

Ndonëse për $2 \leq p < \infty$ vlen :

$$\omega_{k_1}(f, 1/n)_2 \leq \omega_{k_1}(f, 1/n)_p ,$$

atëherë nga (2.8) për p=2 kemi :

$$\omega_{k_1}(f, 1/n)_p \geq C_8 \Big\{ (1/n^{2k_1}) \sum_{|\nu|=1}^{n} \sum_{|\mu|=0}^{\infty} |\tau_{\nu\mu}|^2 |\nu|^{2k_1} + \sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} \sum_{|\mu|=0}^{\infty} |\tau_{\nu\mu}|^2 \Big\}^{1/2} \qquad (2.9)$$

Nga (2.8) dhe (2.9) rrjedh mosbarazimi i parë (4) i teoremës.

Nëse $1 < p \leq 2$,atëherë

$$\omega_{k_1}(f, 1/n)_p \leq \omega_{k_1}(f, 1/n)_2$$

Për p=2 nga (2.8) kemi vlerësimin :

$$\omega_{k_1}(f, 1/n)_p \leq C_9 \Big\{ (1/n^{2k_1}) \sum_{|\nu|=1}^{n} \sum_{|\mu|=0}^{\infty} |\tau_{\nu\mu}|^2 |\nu|^{2k_1} + \sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} \sum_{|\mu|=0}^{\infty} |\tau_{\nu\mu}|^2 \Big\}^{1/2} \qquad (2.10)$$

Poashtu, sipas teoremës Peli vlerësojmë:

$$\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} \sum_{|\mu|=0}^{\infty} |\tau_{\nu\mu}|^p |\nu|^{p-2} \leq C_{10} \| f(x,y) - S_{n\infty} f(x,y) \|_p^p \leq$$

$$\leq C_{11} E_{n\infty}^p f(x,y)_p \leq C_{12}\, \omega_{k_1}^k (f, 1/n)_p \leq$$

$$\leq C_{13} \Big\{ (1/n^{k_1 p}) \sum_{|\nu|=1}^{n} \sum_{|\mu|=0}^{\infty} |\tau_{\nu\mu}|^p |\nu|^{(k_1+1)p-2} + \sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} \sum_{|\mu|=0}^{\infty} |\tau_{\nu\mu}|^p |\nu|^{p-2} \Big\}$$

$$\leq C_{14} \| S_{n\infty} \Delta_{(1/n)}^{k_1} f(x,y) \|_p^p \leq C_{15} \| \Delta_{(1/n)}^{k_1} f(x,y) \|_p^p \leq C_{16}\, \omega_{k_1}^p (f, 1/n)_p \qquad (2.11)$$

Nga (2.10) dhe (2.11) rrjedh mosbarazimi (5).

§ 1.3. KOEFICIENTËT FOURIE DHE MODULI I LËMUESHMËRISË PËR FUNKSIONET ME SERI TË DYFISHTA

Shkruajmë se $f(x,y) \in L_{\vec{p}}$, në qoftë se është funksion i matëshëm periodikë, me periodë 2π dhe plotëson kushtet:

$$\|f(x,y)\|_{\vec{p}} \leq C < \infty ,$$

ku

$$\|f(x,y)\|_{\vec{p}} = \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} |f(x,y)|^{p_1} dx \right]^{p_2/p_1} \right\}^{1/p_2}$$

dhe $\vec{p} = \{p_1, p_2\}$, $1 \leq p_i < \infty$, $i=1,2$.

Madhësit $\omega_{k_1 k_2}(f, \delta_1, \delta_2)_{\vec{p}}$, $E_{nm} f(x,y)$ dhe $S_{nm} f(x,y)$ përkufizohen në mënyrë analoge si në § 1.1.

Serinë lakunare Fourie të $f(x,y) \in L_p$, $1 \leq p_i < \infty$, $i=1,2$ e marrim në trajtë

$$f(x,y) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\nu\mu} \cos \nu x \cos \mu y ,$$

ku

$$c_{\nu\mu} = a_{kl} > 0 \quad \text{për} \quad \nu = 2^k \quad \text{dhe} \quad \mu = 2^l ,$$
$$c_{\nu\mu} = 0 \quad \text{për} \quad \nu \neq 2^k \quad \text{ose} \quad \mu \neq 2^l ,$$

ku k,l janë numra natyral.

Për ti vërtetuar rezultatet kryesore të këtij paragrafi po i japim këto pohime :

Lemë 1.3.1 [18]. Në qoftë se $f(x,y) \in L_{\vec{p}}$,atëherë gjendet numri natyral h i tillë që:

$$2h \geqslant \max(p_1,p_2)$$

dhe vlen mosbarazimi

$$\| f(x,y)\|_{\vec{p}} \leqslant A(p_1,p_2,h)\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(x,y)]^{2h}dx\,dy\right\}^{1/2h},$$

Ku A varët nga p_1,p_2 dhe h.

Lemë 1.3.2 Le të jetë $f(x,y) \in L_{\vec{p}}$, $1 \leq p_i < \infty$,i=1,2.

Nëse :

$$\frac{n_{k_1+1}}{n_{k_1}} \geqslant k_1 > 1, \qquad \frac{n_{k_2+1}}{n_{k_2}} \geqslant k_2 > 1$$

dhe seria :

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\left(a_{k_1k_2}^2+b_{k_1k_2}^2+c_{k_1k_2}^2+d_{k_1k_2}^2\right) \tag{3.1}$$

është konvergjente,atëherë

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\left(a_{k_1k_2}\cos n_{k_1}x\cos n_{k_2}y+b_{k_1k_2}\cos n_{k_1}x\sin n_{k_2}y+\right.$$
$$\left.+c_{k_1k_2}\sin n_{k_1}x\cos n_{k_2}y+d_{k_1k_2}\sin n_{k_1}x\sin n_{k_2}y\right) \tag{3.2}$$

është seri Fourie e $f(x,y) \in L_{\vec{p}}$ dhe vlenë :

$$A_1(p_1,p_2,\lambda_1,\lambda_2)\left\{\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\left(a_{k_1k_2}^2+b_{k_1k_2}^2+c_{k_1k_2}^2+d_{k_1k_2}^2\right)\right\}^{1/2} \leq$$
$$\leq \|f(x,y)\|_{\vec{p}} \leq$$
$$A_2(p_1,p_2,\lambda_1,\lambda_2)\left\{\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\left(a_{k_1k_2}^2+b_{k_1k_2}^2+c_{k_1k_2}^2+d_{k_1k_2}^2\right)\right\}^{1/2},$$

ku konstantët A_1, A_2 varën nga p_1,p_2,λ_1 dhe λ_2.

Vërtetim. Për $p_i < \infty$, $i=1,2$, sipas lemës 1.3.1 gjendet numri natyral h ashtu që

$$2h \geqslant \max(p_1, p_2).$$

Për $p_2 \leq p_1 \leq 2$ vlen

$$\| f(x,y) \|_{\vec{p}} \leq C(p_1,p_2) \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(x,y)]^{2h} \, dx \, dy \right\}^{1/2h},$$

ku konstanta C varet nga p_1 dhe p_2.

Në mënyrë analoge veprohet edhe në rastin $p_1 \leq p_2 \leq 2h$.

Nëse shenojmë :

$$F(z_1,z_2) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \rho_{k_1 k_2} z_1^{n_{k_1}} z_2^{n_{k_2}} \tag{3.3}$$

atëherë, për $z_1 = e^{ix}$, $z_2 = e^{iy}$ dhe $\rho = \frac{1}{4}(a_{k_1k_2} - ib_{k_1k_2} - ic_{k_1k_2} + d_{k_1k_2})$ seria (3.2) paraqet pjesën reale të serisë (3.3)

Në barazimin

$$[F(z_1,z_2)]^h = \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \rho_{k_1 k_2} z_1^{n_{k_1}} z^{n_{k_2}}$$

zëvendsojmë

$$\sum_{k_2=1}^{\infty} \rho_{k_1 k_2} z_2^{n_{k_2}} = c_{k_1}(z_2)$$

atëherë, sipas lemës së Zygmundit ([2], faqe 216) kemi:

$$F(z_1,z_2) = \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu z^\nu \tag{3.4}$$

ku

$$d_\nu = C(h) \binom{d_1}{k_1} \binom{d_2}{k_2} \cdots c_{nd_1}^{d_1} c_{nd_2}^{d_2} \cdots c_{nd_j}^{d_j}$$

dhe

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_j = h.$$

Me zbatimin e lemës 1.3.1 dhe barazimit të Parsevalit ([22], faqe 79) në (3.4) kemi:

$$\int_0^{2\pi} [F(x,y)]^{2h} dx\,dy = \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty} d^2_{k_1k_2} \leq$$

$$\leq A_2(p_1,p_2,\lambda_1,\lambda_2)\Big(\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty} \rho_{k_1k_2}\Big)^h \leq$$

$$\leq A_2(p_1,p_2,\lambda_1,\lambda_2)\Big[\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}(a^2_{k_1k_2}+b^2_{k_1k_2}+c^2_{k_1k_2}+d^2_{k_1k_2})\Big]^{2h} \text{ dhe}$$

$$\|f(x,y)\|_{\bar p} \leq A_2(p_1,p_2,\lambda_1,\lambda_2)\Big[\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}(a^2_{k_1k_2}+b^2_{k_1k_2}+c^2_{k_1k_2}+d^2_{k_1k_2})\Big]^{1/2}. \quad (3.5)$$

Sipas barazimit të Parsevalit kemi:

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}(a^2_{k_1k_2}+b^2_{k_1k_2}+c^2_{k_1k_2}+d^2_{k_1k_2}) = A_3\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= A_4\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{2\pi} |f(x,y)|^{3/2}|f(x,y)|^{2/3}dx\,dy\Big).$$

Nga mosbarazimi i Helderit ([22] ,faqe 125) fitojmë:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x,y)\,dx\,dy \leq \int_0^{2\pi}\Big\{\Big[\int_0^{2\pi} f(x,y)\,dx\Big]dy\Big\}^{2/3}\Big\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^4(x,y)\,dx\,dy\Big\}^{1/3}.$$

Prandaj,

$$\|f(x,y)\|_2^2 \leq \Big\{\Big[\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)\,dx\,dy\Big]^{2/3}\Big[\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^4(x,y)\,dx\,dy\Big]^{1/3}\Big\}^{3/2}$$

prej nga rrjedhë

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)\,dx\,dy \geq \frac{\|f(x,y)\|_2^2}{\Big\{\Big[\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)\,dx\,dy\Big]^{1/4}\Big\}^2}.$$

Duke u bazuar në konditatë e lemës dhe barazimin e Parsevalit fitojmë:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)\,dx\,dy \geq A_5\Big[\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}(a^2_{k_1k_2}+b^2_{k_1k_2}+c^2_{k_1k_2}+d^2_{k_1k_2})\Big]^{1/2} \qquad (3.6)$$

Për $p_1, p_2 \geq 1$ vlen

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)\,dx\,dy \leq A_6(p_1,p_2)\Big[\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{2\pi} f^{p_1}dx\Big)^{p_2/p_1}dy\Big]^{1/p_2} \qquad (3.7)$$

Nga (3.6) dhe (3.7) kemi :

$$\| f(x,y)\|_{\vec{p}} \geq A_7(p_1,p_2,\lambda_1,\lambda_2)\Big[\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}(a^2_{k_1k_2}+b^2_{k_1k_2}+c^2_{k_1k_2}+d^2_{k_1k_2})\Big]^{1/2} \qquad (3.8)$$

Nga (3.5) dhe (3.8) del ajo që u kërkua dhe me kët lema 1.3.2 u vërtetua.

Lemë 1.3.3 Nëse $f(x,y) \in L_{\vec{p}}$ dhe

$$f(x,y) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\nu\mu}\cos\nu x\cos\mu y,$$

ku

$$c_{\nu\mu} = a_{kl} > 0 \quad \text{për } \nu = 2^k \text{ dhe } \mu = 2^l,$$
$$c_{\nu\mu} = 0 \quad \text{për } \nu \neq 2^k \text{ ose } \mu \neq 2^l$$

janë koeficientët e tij Fourie,atëherë vlen mosbarazimi:

$$\| f(x,y) - S_{\infty m} f(x,y)\|_{\vec{p}} \leq C\, E_{\infty\left[\frac{m}{2}\right]} f(x,y)_{\vec{p}}.$$

Vërtetim.Shenojmë me $V_{l,\infty}$ shumat e pjesëshme të Vale Pusonit ([22], faqe 354) të funksionit f(x,y),do me thanë:

$$V_{l_1\infty}(f) = \frac{S_{l_1\infty}(f)+\cdots+S_{2l_1-1,\infty}(f)}{l_1}, \quad \text{përkatësisht}$$

$$V_{\infty l_2}(f) = \frac{S_{\infty l_2}(f)+\cdots+S_{\infty\, 2l_2-1}(f)}{l_2}.$$

Me që seria është lakunare kemi:

$$S_{\infty 2^l}(f) = S_{\infty 2^l+1}(f) = \dots = S_{\infty 2.2^l-1}(f),$$

prandaj

$$V_{\infty 2^l}(f) = S_{\infty 2^l}(f) .$$

Meqë

$$\| V_{\infty 2^l}(f)\|_{\vec{p}} \leq C_1 \| f(x,y)\|_{\vec{p}},$$

ku C_1 është konstantë ,kemi

$$\| f- V_{\infty 2^l}(f)\|_{\vec{p}} = \| f-T_{\infty 2^l}(f) - V_{\infty 2^l}(f) + T_{\infty 2^l}(f)\|_{\vec{p}} \leq$$

$$\leq \| f- T_{\infty 2^l}(f)\|_{\vec{p}} + \| V_{\infty 2^l}(f) - T_{\infty 2^l}(f)\|_{\vec{p}} \leq$$

$$\| f- T_{\infty 2^l}(f)\|_{p} + \| V_{\infty 2^l}(f- T_{\infty 2^l}(f)\|_{\vec{p}}$$

$$C_2 \| f- T_{\infty 2^l}(f)\|_{\vec{p}} .$$

Ndonëse konstanta C_2 nuk varët nga $T_{\infty 2^l}(f)$,atëherë:

$$\| f- V_{\infty 2^l}(f)\|_{\vec{p}} \leq C_2 E_{\infty 2^l}(f).$$

Për çfarëdo m gjendet l ashtu që:

$$2^l \leq m < 2.2^l \text{ , do me thanë } \quad 2^l > \left[\frac{m}{2}\right].$$

Atëherë ,

$$S_{\infty m}(f) = S_{\infty 2^l}(f) \quad \text{dhe}$$

$$\| f- S_{\infty m}(f)\|_{\vec{p}} = \| f- S_{\infty 2^l}(f)\|_{\vec{p}} =$$

$$= \| f- V_{\infty 2^l}(f)\|_{\vec{p}} \leq$$

$$\leq C_2 E_{\infty 2^l}(f)_{\vec{p}} \leq$$

$$\leq C_2 E_{\infty \left[\frac{m}{2}\right]}(f)_{\vec{p}} .$$

Lemë 1.3.4 Në qoftë se $f(x,y)\in L_p$ dhe

$$f(x,y)\sim \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\nu\mu}\cos\nu x\cos\mu y,$$

ku

$$c_{\nu\mu} = a_{kl} > 0 \quad \text{për} \quad \nu = 2^k \text{ dhe } \mu = 2^l,$$

$$c_{\nu\mu} = 0 \qquad \text{për} \quad \nu \neq 2^k \text{ ose } \mu \neq 2^l$$

janë koeficientët e tij Fourie ,atëherë vlen mosbarazimi:

$$\| f(x,y)\|_p \leq \; C\; E_{\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{m}{2}\right]} f(x,y)$$

Vërtetim.Analog me lemën 1.3.3 kemi :

$$V_{2^k\infty}(f) = S_{2^k\infty}(f) = S_{2^k+1\infty}(f) = \ldots = S_{2.2^k-1}(f)$$

Meqë :

$$V_{l_1 l_2}(f) = V_{l_1\infty}\left\{ V_{\infty l_2}(f)\right\},$$

atëherë

$$V_{2^k 2^l}(f) = V_{2^k}\left\{ V_{\infty 2^l}(f)\right\} =$$

$$= V_{2^k\infty}\left\{ S_{\infty 2^l}(f)\right\} = S_{2^k\infty}\left\{ S_{\infty 2^l}(f)\right\} = S_{2^k 2^l}(f).$$

Poashtu ([2] ,faqe 185) vlen:

$$W_{l_1 l_2}(f) = V_{l_1\infty}(f) + V_{\infty l_2}(f) - V_{l_1 l_2}(f) \text{ ,ose}$$

$$W_{2^k 2^l}(f) = V_{2^k\infty}(f) + V_{\infty 2^l}(f) - V_{2^k 2^l}(f) =$$

$$S_{2^k\infty}(f) + S_{\infty 2^l}(f) - S_{2^k 2^l}(f) .$$

Duke u bazuar në mosbarazimin([1])

$$\| f - W_{l_1 l_2}(f)\|_p \leq C_1\; E_{l_1 l_2}(f)$$ vlerësojmë :

$$\| f - S_{2^\varkappa \infty}(f) + S_{\infty 2^l}(f) - S_{2^\varkappa 2^l}(f)\|_{\vec{p}} \leq C_1 E_{2^\varkappa 2^l}(f)_{\vec{p}}$$

Për çfarëdo m,n gjenden l ,$\varkappa$ numra natyral ashtu që:

$2^l \leq m < 2\, 2^l$, do me thanë $2^l > \left[\frac{n}{2}\right]$,

$2^\varkappa \leq n < 2 2^\varkappa$,prej nga $2^\varkappa > \left[\frac{n}{2}\right]$

Kështu,do të kemi:

$$\| f - S_{n\infty}(f) - S_{\infty m}(f) + S_{nm}(f)\|_{\vec{p}} =$$

$$= \| f - S_{2^\varkappa \infty}(f) - S_{\infty 2^l}(f) + S_{2^\varkappa 2^l}(f)\|_{\vec{p}} \leq$$

$$\leq C_2 E_{\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]}(f)_{\vec{p}} .$$

Teoremë 1.3.1 Nëse $f(x,y) \in L_{\vec{p}}$, $1 \leq p_i < \infty$,$i=1,2$,

$$f(x,y) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\nu\mu} \cos\nu x \cos\mu y ,$$

ku

$c_{\nu\mu} = a_{kl} > 0$ për $\nu = 2^k$ dhe $\mu = 2^l$,

$c_{\nu\mu} = 0$ për $\nu \neq 2^k$ ose $\mu \neq 2^l$,

atëherë vlenë mosbarazimi

$$\omega_{k_1 k_2}(f, 1/n, 1/m)_{\vec{p}} \leq C_1 \Big\{ (1/n^{k_1})(1/m^{k_2}) \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} c_{\nu\mu}^2 \nu^{2k_1} \mu^{2k_2} \Big)^{1/2} +$$

$$+ (1/n^{k_1}) \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=m+1}^{\infty} c_{\nu\mu}^2 \nu^{2k_1} \Big)^{1/2} + (1/m^{k_2}) \Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{m} c_{\nu\mu}^2 \mu^{2k_2} \Big)^{1/2} +$$

$$+ \Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sum_{\mu=m+1}^{\infty} c_{\nu\mu}^2 \Big)^{1/2} \Big\} ,$$

ku C_1 nuk varët nga $f(x,y)$, m dhe n .

Vërtetim.Në bazë të lemës 1.3.2 kemi:

$$\|\Delta_{h_1h_2}^{k_1k_2} f(x,y)\|_{\vec{p}} \le C_2\Big[\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}\tau_{\nu\mu}^2\Big(2\sin\frac{\nu h_1}{2}\Big)^{2k_1}\Big(2\sin\frac{\mu h_2}{2}\Big)^{2k_2}\Big]^{1/2}.$$

Meqë

$(\sin x)^2 = (\sin|x|)^2$, atëherë

$$\|\Delta_{h_1h_2}^{k_1k_2} f(x,y)\|_{\vec{p}} \le C_3\Big\{\Big[\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}\tau_{\nu\mu}^2\Big(2\sin\frac{\nu|h_1|}{2}\Big)^{2k_1}\Big(2\sin\frac{\mu|h_2|}{2}\Big)^{2k_2}\Big]^{1/2}+$$

$$+\Big[\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\tau_{\nu\mu}^2\Big(2\sin\frac{\nu|h_1|}{2}\Big)^{2k_1}\Big(2\sin\frac{\mu|h_2|}{2}\Big)^{2k_2}\Big]^{1/2}+$$

$$+\Big[\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{m}\tau_{\nu\mu}^2\Big(2\sin\frac{\nu|h_1|}{2}\Big)^{2k_1}\Big(2\sin\frac{\mu|h_2|}{2}\Big)^{2k_2}\Big]^{1/2}+$$

$$+\Big[\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\tau_{\nu\mu}^2\Big(2\sin\frac{\nu|h_1|}{2}\Big)^{2k_1}\Big(2\sin\frac{\mu|h_2|}{2}\Big)^{2k_2}\Big]^{1/2}\Big\} \le$$

$$\le C_3\Big\{|h_1|^{k_1}|h_2|^{k_2}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}\tau_{\nu\mu}^2\,\nu^{2k_1}\mu^{2k_2}\Big)^{1/2}+|h_1|^{k_1}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\tau_{\nu\mu}^2\,\nu^{2k_1}\Big)^{1/2}+$$

$$+|h_2|^{k_2}\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{m}\tau_{\nu\mu}^2\,\mu^{2k_2}\Big)^{1/2}+\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\tau_{\nu\mu}^2\Big)^{1/2}\Big\}.$$

Meqë $\sin x \le x$ për $x > 0$ dhe

$\sin\frac{\nu|h_1|}{2} \le \frac{\nu|h_1|}{2}$ dhe $\sin\frac{\mu|h_2|}{2} \le \frac{\mu|h_2|}{2}$ kemi:

$$\omega_{k_1k_2}(f,1/n,1/m)_{\vec{p}} = \sup_{\substack{|h_1|\le 1/n\\ |h_2|\le 1/m}}\|\Delta_{h_1h_2}^{k_1k_2} f(x,y)\|_{\vec{p}} \le$$

$$\le C_4\Big\{(1/n^{k_1})(1/m^{k_2})\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}\tau_{\nu\mu}^2\,\nu^{2k_1}\mu^{2k_2}\Big)^{1/2}+(1/n^{k_1})\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\tau_{\nu\mu}^2\,\nu^{2k_1}\Big)^{1/2}+$$

$$+(1/m^{k_2})\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{m}\tau_{\nu\mu}^2\,\mu^{2k_2}\Big)^{1/2}+\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\tau_{\nu\mu}^2\Big)^{1/2}\Big\}.$$

Teoremë 1.3.2 Në qoftë se $f(x,y)\in L_{\vec{p}}$, $1\le p_i<\infty$, $i=1,2$

$$f(x,y)\sim \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\nu\mu}\cos\nu x\cos\mu y ,$$

ku

$$c_{\nu\mu} = a_{kl} > 0 \quad \text{për} \quad \nu = 2^k \quad \text{dhe} \quad \mu = 2^l,$$
$$c_{\nu\mu} = 0 \quad \text{për} \quad \nu \ne 2^k \quad \text{ose} \quad \mu \ne 2^l,$$

atëherë vlen :

$$\omega_{k_1k_2}(f,1/n,1/m)_{\vec{p}} \ge C\Big\{(1/n^{k_1})(1/m^{k_2})\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m} c_{\nu\mu}^2 \nu^{2k_1}\mu^{2k_2}\Big)^{1/2} +$$
$$+(1/n^{k_1})\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=m+1}^{\infty} c_{\nu\mu}^2 \nu^{2k_1}\Big)^{1/2} + (1/m^{k_2})\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{m} c_{\nu\mu}^2 \mu^{2k_2}\Big)^{1/2} +$$
$$+\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=m+1}^{\infty} c_{\nu\mu}^2\Big)^{1/2}\Big\},$$

ku konstanta C nuk varët nga $f(x,y)$, m dhe n .

Vërtetim . Marrim :

$$\varphi(x,y) = f(x,y) - S_{n\infty}(f) - S_{\infty m}(f) + S_{nm}(f)$$

dhe në funksionin $\varphi(x,y)$ zbatojmë lemën 1.3.1 dhe vetitë e modulit të lëmueshmërisë ([9])

$$\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=m+1}^{\infty} c_{\nu\mu}^2\Big)^{1/2} \le C_1\, E_{[\frac{n}{2}][\frac{m}{2}]}f(x,y)_{\vec{p}} \le C_2\,\omega_{k_1k_2}(f,1/n,1/m)_{\vec{p}} \quad (3.9)$$

Ndonëse për $0\le x\le \frac{\pi}{2}$ vlen $\frac{2}{\pi}x\le \sin x$, atëherë

$$(1/n^{k_1})(1/m^{k_2})\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m} c_{\nu\mu}^2 \nu^{2k_1}\mu^{2k_2}\Big)^{1/2} \le$$
$$\le C_3\Big[\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\nu\mu}^2 \Big(2\sin\frac{\nu}{2n}\Big)^{2k_1}\Big(2\sin\frac{\mu}{2m}\Big)^{2k_2}\Big]^{1/2} \le$$
$$\le C_4 \|\Delta_{h_1h_2}^{k_1k_2} f(x,y)\|_{\vec{p}} \le C_5\,\omega_{k_1k_2}(f,1/n,1/m)_{\vec{p}} \quad (3.10)$$

Në mënyrë analoge vlerësojmë edhe shumat tjera :

$$(1/n^{k_1})\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\tau_{\nu\mu}^2\,\nu^{2k_1}\Big)^{1/2}\le C_5\Big[\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\tau_{\nu\mu}^2\Big(2\sin\frac{\nu}{2^n}\Big)^{2k_1}\Big]^{1/2}\le$$

$$\le C_6\Big[\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\tau_{\nu\mu}^2\Big(2\sin\frac{\nu}{2^n}\Big)^{2k_1}\Big]^{1/2}.$$

Sipas lemës 1.3.2 marrim :

$$(1/n^{k_1})\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\tau_{\nu\mu}^2\,\nu^{2k_1}\Big)^{1/2}\le C_7\|\Delta_{1/n}^{k_1}f(x,y)-S_{\infty m}f(x,y)\|_{\vec{p}}\,,$$

ku

$$f(x,y)-S_{\infty m}(f)\sim\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\tau_{\nu\mu}\cos\nu x\cos\mu y.$$

Nëse marrim zëvendsimin $F(x,y)=\Delta_{1/n}^{k_1}f(x,y)$,

atëherë

$$\Delta_{1/n}^{k_1}S_{\infty m}(f)=S_{\infty m}F(x,y)$$

dhe vlen

$$(1/n^{k_1})\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\tau_{\nu\mu}^2\,\nu^{2k_1}\Big)^{1/2}\le C_8\|F(x,y)-S_{\infty m}F(x,y)\|_{\vec{p}}$$

e që sipas lemës 1.3.3 do të kemi :

$$(1/n^{k_1})\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\tau_{\nu\mu}^2\,\nu^{2k_1}\Big)^{1/2}\le C_9\,E_{\infty[\frac{m}{2}]}F(x,y)_{\vec{p}}$$

Në bazë të përkufizimit 1.1.1, vetive të modulit të lëmueshmërisë dhe të vlerësimit të Potapovit ([10]) kemi:

$$(1/n^{k_1})\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\tau_{\nu\mu}^2\,\nu^{2k_1}\Big)^{1/2}\le C_{10}\,\omega_{k_2}(F,1/[\tfrac{m}{2}])\le C_{11}\,\omega_{k_2}(F,1/m)_{\vec{p}}\le$$

$$\le\sup_{|h_2|\le 1/m}\|\Delta_{h_2}^{k_2}F(x,y)\|_{\vec{p}}\le C_{11}\,\omega_{k_1k_2}(f,1/n,1/m)_{\vec{p}} \qquad (3.11)$$

Në mënyrë analoge vlerësojmë se:

$$(1/m^{k_2})\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{m}\tau_{\nu\mu}^2\,\mu^{2k_2}\Big)^{1/2}\le C_{12}\,\omega_{k_1k_2}(f,1/n,1/m)_{\vec{p}} \qquad (3.12)$$

Nga relacionet (3.9),(3.11) dhe (3.12) rrjedh vërtetimi i teoremës.

K A P I T U L L I   I   D Y T Ë

VLERËSIMI I KOEFICIENTËVE FOURIE I FUNKSIONEVE ME DY VARIABLA NGA KLASA E NIKOLSK-it

Në [13] është dhënë vlerësimi i koeficientëve Fourie për funksionet me një variabël nga klasa e Nikolsk-it. Këtu janë përcaktuar konditatë e nevojshme dhe të mjaftueshme që duhet ti plotësojnë koeficientët Fourie, në mënyrë që funksioni ti takoje klasës së Nikolsk-it. Mirëpo, një vlerësim i tillë nuk është bërë për funksionet me dy variabla. Prandaj, një shqyrtim i terësishëm i tyre është më se i nevojshëm.

Meqë pohimet e dhëna në kapitullin e parë janë vërtetuar për funksionet me dy variabla, këtu do të japim ca vlerësime të koeficientëve Fourie për funksionet me seri të dyfishta.

Në paragrafët 2.1, 2.2 dhe 2.3 janë dhënë konditatë e nevojshme dhe të mjaftueshme që duhet ti plotësojnë koeficientët Fourie , në mënyrë që funksioni me seri të dyfisht lakunare të jetë përkatësisht nga klasa $S^oH_p^{r_1 r_2}$, $S^oH_p^{d_1 d_2}$ dhe $H\,(p,k_1,k_2,\varphi)$.

Në paragrafin 2.4 janë dhënë konditatë e nevojshme dhe të mjaftueshme që duhet ti plotësojnë koeficientët Fourie të funksionit çift me seri të dyfisht në mënyrë që ai të jetë nga klasa $H(p,k_1,k_2,\varphi)$.

§ 2.1. VLERËSIMI I KOEFICIENTËVE FOURIE I FUNKSIONEVE ME SERI TË DYFISHTA LAKUNARE NGA KLASA $S^oH_{\vec{p}}^{r_1r_2}$

Përkufizim 2.1.1 Themi se $f(x,y)\in L^o_{\vec{p}}$, $1\le p_i<\infty$, $i=1,2$ dhe $\vec{p}=\{p_1,p_2\}$ nëse :

1. $f(x,y)\in L_{\vec{p}}$ dhe
2. a) $\int_0^{2\pi} f(x,y)\,dx=0$, për çdo x,

   b) $\int_0^{2\pi} f(x,y)\,dy=0$, për çdo y.

Shenojmë me $\omega_{k_1k_2}(f,\delta_1,\delta_2)$ modulin e lëmueshmërisë të rendit k_1 sipas x-it dhe k_2 sipas y-it të funksionit $f(x,y)\in L_{\vec{p}}$, pra

$$\omega_{k_1k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_{\vec{p}}=\sup_{\substack{|h_1|\le\delta_1\\|h_2|\le\delta_2}}\|\Delta^{k_1k_2}_{h_1h_2}f(x,y)\|_{\vec{p}},$$

ku

$$\Delta^{k_1k_2}_{h_1h_2}f(x,y)=\sum_{\nu=0}^{k_1}\sum_{\mu=0}^{k_2}(-1)^{k_1+k_2-\nu-\mu}\binom{k_1}{\nu}\binom{k_2}{\mu}f(x+\nu h_1,y+\mu h_2).$$

Përkufizim 2.1.2. Funksioni i matëshëm dhe periodikë $f(x,y)$,me periodë 2π themi se i takon klasës $S^0H_{\vec{p}}^{r_1r_2}$, $1\leq p_i<\infty$,$i=1,2$ nëse :

1. $f(x,y)\in L^0_{\vec{p}}$

2. $\omega_{k_1k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_{\vec{p}} \leq C\,\delta_1^{r_1}\delta_2^{r_2}$,

ku C është konstantë dhe $k_1 > r_1$, $k_2 > r_2$.

Lemë 2.1.1 .Në qoftë se $f(x,y)\in L_{\vec{p}}$, $1\leq p_i<\infty$, $i=1,2$ dhe

$$f(x,y) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\nu\mu}\cos\nu x\cos\mu y,$$

ku

$$c_{\nu\mu} = a_{kl} > 0 \quad \text{për} \quad \nu = 2^k \text{ dhe } \mu = 2^l,$$
$$c_{\nu\mu} = 0 \quad \text{për} \quad \nu \neq 2^k \text{ ose } \mu \neq 2^l$$

janë koeficientët e tij Feurie ,atëherë vlen :

$$A_1\Big\{(1/n^{k_1})(1/m^{k_2})\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m} c_{\nu\mu}^2\nu^{2k_1}\mu^{2k_2}\Big)^{1/2} + (1/n^{k_1})\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=m+1}^{\infty} c_{\nu\mu}^2\nu^{2k_1}\Big)^{1/2} +$$
$$+ (1/m^{k_2})\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{m} c_{\nu\mu}^2\mu^{2k_2}\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=m+1}^{\infty} c_{\nu\mu}^2\Big)^{1/2}\Big\} \leq$$
$$\leq \omega_{k_1k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_{\vec{p}} \leq$$
$$A_2\Big\{(1/n^{k_1})(1/m^{k_2})\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m} c_{\nu\mu}^2\nu^{2k_1}\mu^{2k_2}\Big)^{1/2} + (1/m^{k_2})\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{m} c_{\nu\mu}^2\mu^{2k_2}\Big)^{1/2} +$$
$$+ (1/n^{k_1})\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=m+1}^{\infty} c_{\nu\mu}^2\nu^{2k_1}\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=m+1}^{\infty} c_{\nu\mu}^2\Big)^{1/2}\Big\}$$

ku konstantët A_1 dhe A_2 nuk varën nga $f(x,y)$,m dhe n.

Vërtetimi i lemës 2.1.1 rrjedhë drejtëpërdrejtë nga teorema 1.3.1 dhe teorema 1.3.2.

Teoremë 2.1.1. Që funksioni i matëshëm dhe periodikë $f(x,y)$ me periodë 2π

$$f(x,y) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\nu\mu} \cos\nu x \cos\mu y$$

me koeficientë

$$c_{\nu\mu} = a_{kl} > 0 \quad \text{për} \quad \nu = 2^k \quad \text{dhe} \quad \mu = 2^l,$$
$$c_{\nu\mu} = 0 \quad \text{për} \quad \nu \neq 2^k \quad \text{ose} \quad \mu \neq 2^l,$$

ti takoje klasës $S^0 H_p^{r_1 r_2}$ është e nevojshme dhe e mjaftueshme që koeficientët e tij Fourie të plotësojnë konditen:

$$c_{\nu\mu} = C\,(1/\nu^{r_1})\,(1/\mu^{r_2}).$$

Vërtetim . Shenojmë

$$I_1 = (1/2^{nk_1})(1/2^{mk_2})\Big(\sum_{\nu=1}^{2^n}\sum_{\mu=1}^{2^m} c_{\nu\mu}^2\, \nu^{2k_1}\mu^{2k_2}\Big)^{1/2},$$

$$I_2 = (1/2^{nk_1})\Big(\sum_{\nu=1}^{2^n}\sum_{\mu=2^m+1}^{\infty} c_{\nu\mu}^2\, \nu^{2k_1}\Big)^{1/2},$$

$$I_3 = (1/2^{mk_2})\Big(\sum_{\nu=2^n+1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{2^m} c_{\nu\mu}^2\, \mu^{2k_2}\Big)^{1/2} \quad \text{dhe}$$

$$I_4 = \Big(\sum_{\nu=2^n+1}^{\infty}\sum_{\mu=2^m+1}^{\infty} c_{\nu\mu}^2\Big)^{1/2}.$$

Sipas lemës 2.1.1. gjenden konstantatë A_1 , A_2 ashtu që

$$A_1 (I_1+ I_2+ I_3+ I_4)\leq \omega_{k_1k_2}(f,1/n,1/m)_{\bar{p}}\leq A_2(I_1+I_2+I_3+I_4)$$

Kondita e mjaftueshme.Duke u nisur nga fakti se

$$\tau_{\nu\mu} = C(1/n^{\tau_1})(1/m^{\tau_2}),$$

do të kemi

$$I_1^2=(1/2^{2nk_1})(1/2^{2mk_2})\left(\sum_{\nu=1}^{2^n}\sum_{\mu=1}^{2^m}\tau_{\nu\mu}^2\nu^{2k_1}\mu^{2k_2}\right) \tag{1.1}$$

Qartazi:

$$I_1^*=\sum_{\nu=1}^{2^n-1}\sum_{\mu=1}^{2^m-1}\tau_{\nu\mu}^2\nu^{2k_1}\mu^{2k_2}=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\nu=2^k}^{2^{k+1}-1}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{\mu=2^l}^{2^{l+1}-1}\tau_{\nu\mu}^2\nu^{2k_1}\mu^{2k_2}$$

Duke pasur parasysh konditatë e teoremës dhe faktin se seria e funksionit është lakunare kemi

$$I^*=\sum_{\nu=1}^{2^n-1}\sum_{\mu=1}^{2^m-1}\tau_{\nu\mu}^2\nu^{2k_1}\mu^{2k_2}=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1}a_{kl}^2\,2^{2kk_1}\,2^{2lk_2}\leq$$

$$\leq A_3\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1}2^{2kk_1-2k\tau_1}\,2^{2lk_2-2l\tau_2}$$

$$= A_3\sum_{k=0}^{n-1}2^{2k(k_1-\tau_1)}\sum_{l=0}^{m-1}2^{2l(k_2-\tau_2)}\leq$$

$$\leq A_4\,2^{2n(k_1-\tau_1)}\,2^{2m(k_2-\tau_2)} \tag{1.2}$$

Duke pasur parasysh (1.2) vlerësojmë (1.1)

$$I_1^2=(1/2^{2nk_1})(1/2^{2mk_2})\left(I_1^*+a_{2^n2^m}\,2^{2nk_1}2^{2mk_2}\right) \tag{1.3}$$

e që nga këtej kemi

$$I_1\leq A_5(1/2^{n\tau_1})(1/2^{m\tau_2}).$$

Meqë për çdo δ_1, δ_2 ekzistojnë numrat m dhe n ashtu që

$$1/2^{n+1} < \delta_1 < 1/2^n, \quad 1/2^{m+1} < \delta_2 < 1/2^m, \qquad (1.3)'$$

atëherë

$$I_1 \leq A_6\ \delta_1^{\tau_1}\delta_2^{\tau_2}. \qquad (1.4)$$

Në mënyrë të ngjajshme vlerësojmë edhe I_2.

$$I_2^2 = (1/2^{2nk_1})\Big(\sum_{\nu=1}^{2^n-1}\sum_{\mu=2^m+1}^{\infty} \tau_{\nu\mu}^2\, \nu^{2k_1} + a_{2^n2^m}^{-}\, 2^{2nk_1}\Big) \leq$$

$$\leq A_7(1/2^{2nk_1})\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=m+1}^{\infty} a_{k\ell}^2\, 2^{kk_1} =$$

$$= A_7(1/2^{2nk_1})\sum_{k=0}^{n-1} 2^{2k(k_1-\tau_1)} \sum_{\ell=m+1}^{\infty} 2^{-2\ell\tau_2},$$ e që ketej

$$I_2 \leq A_8(1/2^{n\tau_1})(1/2^{m\tau_2})$$

Duke pasur parasysh (1.3)' konkludojmë:

$$I_2 \leq A_9\ \delta_1^{\tau_1}\delta_2^{\tau_2} \qquad (1.5)$$

Në mënyrë analoge tregohet se :

$$I_3 \leq A_{10}\ \delta_1^{\tau_1}\delta_2^{\tau_2} \quad \text{dhe} \qquad (1.6)$$

$$I_4 \leq A_{11}\ \delta_1^{\tau_1}\delta_2^{\tau_2}. \qquad (1.7)$$

Nga mosbarazimet (1.4), (1.5), (1.6) dhe (1.7) dhe në bazë të lemës 2.1.1 kemi:

$$\omega_{k_1k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_{\vec{p}} \leq \omega_{k_1k_2}(f,1/2^n,1/2^m)_{\vec{p}} \leq$$

$$\leq A_{12}(I_1+I_2+I_3+I_4) \leq A_{13}\,\delta_1^{\tau_1}\delta_2^{\tau_2}. \qquad (1.8)$$

Kondita e nevojshme. Dijmë se

$$\omega_{k_1k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_{\bar p} \le \omega_{k_1k_2}(f,1/2^n,1/2^m)_{\bar p} \le A_{13}\,\delta_1^{r_1}\delta_2^{r_2}.$$

Vlerësojmë nga e majta rradhazi shumatë I_1, I_2, I_3 dhe I_4.

$$I_1^2 \geqslant (1/2^{2nk_1})(1/2^{2mk_2})\Big(\sum_{\nu=1}^{2^n}\sum_{\mu=1}^{2^m} \tau_{\nu\mu}^2\, \nu^{2k_1}\mu^{2k_2}\Big) \geqslant$$

$$\geqslant A_{14}(1/2^{2nk_1})(1/2^{2mk_2}) \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1} a_{kl}^2\, 2^{2kk_1}\, 2^{2lk_2} =$$

$$= A_{14}(1/2^{2nk_1})(1/2^{2mk_2}) \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1} a_{kl}^2\, 2^{2kk_1+2lk_2}$$

$$\geqslant A_{15}(1/2^{2nk_1})(1/2^{2mk_2})\, a_{nm}^2 \cdot 2^{2nk_1+2mk_2}$$

prej nga

$$a_{nm} \leqslant I_1 \leqslant A_{15}\,(1/2^{nr_1})\,(1/2^{mr_2}) \qquad (1.9)$$

Në mënyrë analoge tregohet se :

$$a_{nm} \leqslant I_2 \leqslant A_{16}\,(1/2^{nr_1})\,(1/2^{mr_2}) \qquad (1.10)$$

$$a_{nm} \leqslant I_3 \leqslant A_{17}\,(1/2^{nr_1})\,(1/2^{mr_2}) \qquad (1.11)$$

$$a_{nm} \leqslant I_4 \leqslant A_{18}\,(1/2^{nr_1})\,(1/2^{mr_2}) \qquad (1.12)$$

Nga mosbarazimet (1.9), (1.10), (1.11) dhe (1.12) rrjedhë vërtetimi i konditës së nevojshme.

§ 2.2. VLERËSIMI I KOEFICIENTËVE FOURIE I FUNKSIONEVE ME SERI TË DYFISHT LAKUNARE NGA KLASA $S^oH_p^{\varphi_1\varphi_2}$

Përkufizim 2.1.1.Funksioni i matëshëm dhe periodikë $f(x,y)$, me periodë 2π themi se i takon klasës $S^oH_p^{\varphi_1\varphi_2}$, $1 \leq p_i < \infty$, $i=1,2$ nëse i plotëson konditatë :

1. $f(x,y) \in L_p^o$ dhe

2. $\omega_{k_1k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_p \leq C\,\varphi_1(\delta_1)\,\varphi_2(\delta_2)$

ku funksionet $\varphi_i\ (i=1,2)$ plotësojnë konditatë :

a) $\varphi_i(\delta_i) \geq 0$ dhe të vazhdueshme në $[0,1]$ për i=1,2,

b) $\varphi_i(\delta_{i1}) \leq C_1\varphi_i(\delta_{i2})$, $0 \leq \delta_{i1} \leq \delta_{i2} \leq 1$, $i=1,2$ dhe

c) $\varphi_i(2\delta_i) \leq C_2\varphi_i(\delta_i)$, $i=1,2$;

konstantët C ,C_1 dhe C_2 nuk varën nga δ_i për i=1,2.

Le të jenë φ_i (i=1,2) funksione që plotësojnë konditatë:

$$1^\circ \quad \left(\int_0^\delta \frac{\varphi_1^2(t)}{t}\,dt\right)^{1/2} \leq C_3\,\varphi_1(\delta_1) \qquad (2.1)$$

$$2^\circ \quad \delta^k\left(\int_\delta^1 \frac{\varphi_1^2(t)}{t^{2k+1}}\,dt\right)^{1/2} \leq C_4\,\varphi_1(\delta_1)$$

$3^\circ \quad \left(\int_0^{\delta} \frac{\varphi_2^2(t)}{t} dt\right)^{1/2} \le C_5 \varphi_2(\delta_2)$

$4^\circ \quad \delta^k \left(\int_{\delta}^{1} \frac{\varphi_2^2(t)}{t^{2k+1}} dt\right)^{1/2} \le C_6 \varphi_2(\delta_2).$

Lemë 2.2.1. Nëse $f(x,y) \in L_{\vec{p}}$, $1 \le p_i < \infty$, $i=1,2$ dhe

$$f(x,y) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\nu\mu} \cos \nu x \cos \mu y ,$$

ku

$c_{\nu\mu} = a_{kl} > 0$ për $\nu = 2^k$ dhe $\mu = 2^l$,

$c_{\nu\mu} = 0$ për $\nu \ne 2^k$ ose $\mu \ne 2^l$,

atëherë vlen vlerësimi :

$$A_1 \Big\{ (1/n^{k_1})(1/m^{k_2}) \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} c_{\nu\mu}^2 \nu^{2k_1} \mu^{2k_2} \Big)^{1/2} + (1/n^{k_1}) \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=m+1}^{\infty} c_{\nu\mu}^2 \nu^{2k_1} \Big)^{1/2} +$$

$$+ (1/m^{k_2}) \Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{m} c_{\nu\mu}^2 \mu^{2k_2} \Big)^{1/2} + \Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sum_{\mu=m+1}^{\infty} c_{\nu\mu}^2 \Big)^{1/2} \Big\} \le$$

$$\le \omega_{k_1 k_2}(f, \delta_1, \delta_2)_{\vec{p}} \le$$

$$\le A_2 \Big\{ (1/n^{k_1})(1/m^{k_2}) \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} c_{\nu\mu}^2 \nu^{2k_1} \mu^{2k_2} \Big)^{1/2} + (1/n^{k_1}) \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=m+1}^{\infty} c_{\nu\mu}^2 \nu^{2k_1} \Big)^{1/2} +$$

$$+ (1/m^{k_2}) \Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{m} c_{\nu\mu}^2 \mu^{2k_2} \Big)^{1/2} + \Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sum_{\mu=m+1}^{\infty} c_{\nu\mu}^2 \Big)^{1/2} \Big\}.$$

Konstantët A_1 dhe A_2 nuk varën nga $f(x,y)$, m dhe n.

Vërtetim. Vlerësimi i anës së majtë i lemës është analog me teoremen 1.3.1. rrjedhimisht, vërtetimi i anës së djathtë i lemës është analog me at në teoremën 1.3.1.

Teoremë 2.2.1.Që funksioni periodikë $f(x,y) \in L_{\vec{p}}$, $1 \leq p_i < \infty$, $i=1,2$ me periodë 2π dhe seri Fourie

$$f(x,y) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\nu\mu} \cos\nu x \cos\mu y$$

me koeficient

$$c_{\nu\mu} = a_{kl} > 0 \quad \text{për} \quad \nu = 2^k \quad \text{dhe} \quad \mu = 2^l,$$

$$c_{\nu\mu} = 0 \quad \text{për} \quad \nu \neq 2^k \quad \text{ose} \quad \mu \neq 2^l$$

të jetë nga klasa $S^o H_p^{\varphi_1 \varphi_2}$ është e nevojshme dhe e mjaftueshme që koeficientët e tij Fourie të plotësojnë konditen:

$$c_{\nu\mu} \leq C\, \varphi_1(\delta_1)\, \varphi_2(\delta_2)$$

ku funksionet $\varphi_i(\delta_i)$ ($i=1,2$) plotësojnë konditatë (2.1).

Vërtetim. Vlerësojmë veç e veç shumat I_1, I_2, I_3 dhe I_4 ku :

$$I_1 = (1/2^{nk_1})(1/2^{mk_2})\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} c_{\nu\mu}^2 \nu^{2k_1} \mu^{2k_2}\Big)^{1/2},$$

$$I_2 = (1/2^{nk_1})\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=m+1}^{\infty} c_{\nu\mu}^2 \nu^{2k_1}\Big)^{1/2},$$

$$I_3 = (1/2^{mk_2})\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{m} c_{\nu\mu}^2 \mu^{2k_2}\Big)^{1/2}$$

dhe

$$I_4 = \Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sum_{\mu=m+1}^{\infty} c_{\nu\mu}^2\Big)^{1/2}.$$

Kondita e mjaftueshme.Le të jetë :

$$c_{\nu\mu} = C\, \varphi_1(\delta_1)\, \varphi_2(\delta_2).$$

Vlerësojmë rradhazi shumatë I_1, I_2, I_3 dhe I_4.

$$I_1^2 = (1/2^{2nk_1})(1/2^{2mk_2})\left(\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}\tau_{\nu\mu}^2\,\nu^{2k_1}\mu^{2k_2}\right)$$

$$\leq (1/2^{2nk_1})(1/2^{2mk_2})\left(\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\nu=2^k}^{2^{k+1}-1}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{\mu=2^l}^{2^{l+1}-1}\tau_{\nu\mu}^2\,\nu^{2k_1}\mu^{2k_2}\right)$$

$$= (1/2^{2nk_1})(1/2^{2mk_2})\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1}\tau_{2^k 2^l}\,2^{2kk_1}\,2^{2lk_2} \leq$$

$$\leq (1/2^{2nk_1})(1/2^{2mk_2})\sum_{k=0}^{n-1}2^{2kk_1}\varphi_1^2(1/2^k)\sum_{l=0}^{m-1}2^{2lk_2}\varphi_2^2(1/2^l) \leq$$

$$\leq C_1\,2^{2nk_1}\varphi_1^2(1/2^n)\cdot 2^{2mk_2}\varphi_2^2(1/2^m) \leq$$

$$\leq C_2\,\varphi_1^2(1/2^n)\,\varphi_2^2(1/2^m) \qquad (2.2)$$

Duke pasur parasysh mosbarazimin (1.3)′ kemi:

$$(1/2^{nk})\int_{1/2^n}^{1}\frac{\varphi_i(t)}{t^{2k_i+1}}\,dt = (1/2^{nk})\sum_{\lambda=0}^{n-1}\int_{1/2^{\lambda+1}}^{1/2^\lambda}\frac{\varphi_i(t)}{t^{2k_i+1}}\,dt \leq$$

$$\leq C_3\,(1/2^{2nk})\sum_{\lambda=0}^{n-1}\varphi_i^2(1/2^\lambda)\,2^{2k} \qquad (2.3)$$

Poashtu :

$$(1/2^{nk})\int_{1/2^n}^{1}\frac{\varphi_i^2(t)}{t^{2k_i+1}}\,dt \geqslant C_4\,(1/2^{2nk})\sum_{\lambda=0}^{n-1}\varphi_i^2(1/2^{\lambda+1})\cdot 2^{2k}$$

ku $i = 1,2$.

Nga mosbarazimet (2.1) , (2.2) dhe (2.3) rrjedhë se

$$I_1 \leq C_4\, \varphi_1(\delta_1)\, \varphi_2(\delta_2) \tag{2.4}$$

Në mënyrë të ngjajshme vlerësohen edhe shumatë tjera I_2, I_3 dhe I_4 :

$$I_2 \leq C_5\, \varphi_1(\delta_1)\, \varphi_2(\delta_2) \tag{2.5}$$

$$I_3 \leq C_6\, \varphi_1(\delta_1)\, \varphi_2(\delta_2) \tag{2.6}$$

dhe

$$I_4 \leq C_7\, \varphi_1(\delta_1)\, \varphi_2(\delta_2) \tag{2.7}$$

Nga mosbarazimet (2.4), (2.5) , (2.6) dhe (2.7) si dhe nga lema 2.2.1. vijmë në kët përfundim:

$$\omega_{k_1 k_2}(f, \delta_1, \delta_2)_{\vec{p}} \leq \omega_{k_1 k_2}(f, 1/n, 1/m)_p \leq$$

$$\leq C_8(I_1 + I_2 + I_3 + I_4) = C_9\, \varphi_1(\delta_1)\, \varphi_2(\delta_2).$$

Kondita e nevojshme. Për $f(x,y) \in S^0 H_p^{\varphi_1 \varphi_2}$, në bazë të përkufizimit 2.2.1 vlen:

$$\omega_{k_1 k_2}(f, \delta_1, \delta_2)_{\vec{p}} \leq C_{10}\, \varphi_1(\delta_1)\, \varphi_2(\delta_2).$$

Poashtu

$$I_1^2 = (1/2^{2nk_1})(1/2^{2mk_2})\Big(\sum_{\nu=1}^{2^n} \sum_{\mu=1}^{2^m} c_{\nu\mu}^2\, \nu^{2k_1} \mu^{2k_2}\Big) =$$

$$= (1/2^{2nk_1})(1/2^{2mk_2}) \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{m-1} a_{k\ell}^2\, 2^{2kk_1 + 2\ell k_2} \geq$$

$$(1/2^{2nk_1}) (1/2^{2mk_2}) a_{nm}^2 \cdot 2^{2kk_1+2lk_2} , \qquad (2.8)$$

e që këtej, në bazë të lemës 2.2.1 dhe mosbarazimit (2.8) kemi:

$$\bar{a}_{nm} \leq I_1 \leq C_{11} (1/ 2^{nr_1}) (1/2^{mr_2}) \qquad (2.9)$$

Në mënyrë analoge tregohet se:

$$a_{nm} \leq I_2 \leq C_{12} (1/2^{nr_1}) (1/2^{mr_2}) \qquad (2.10)$$

$$a_{nm} \leq I_3 \leq C_{13} (1/2^{nr_1}) (1/2^{mr_2}) \qquad (2.11)$$

dhe

$$a_{nm} \leq I_4 \leq C_{14} (1/2^{nr_1}) (1/2^{mr_2}) \qquad (2.12)$$

Nga mosbarazimet (2.9), (2.107, (2.11) dhe (2.12) rrjedhë vërtetimi i teoremës.

Teoremë 2.2.2.Që funksioni

$$f(x,y) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\nu\mu} \cos \nu x \cos \mu y ,$$

me koeficientë

$$c_{\nu\mu} = a_{kl} > 0 \quad \text{për} \quad \nu = 2^k \quad \text{dhe} \quad \mu = 2^l,$$

$$c_{\nu\mu} = 0 \quad \text{për} \quad \nu \neq 2^k \quad \text{ose} \quad \mu \neq 2^l$$

të jetë nga klasa $S^o H_p^{\varphi_1 \varphi_2}$, $1 < p < \infty$, është e nevojshme dhe e mjaftueshme që koeficientët e tij Fourie të plotësojnë konditatë:

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}\tau_{\nu\mu}^{2}\,\nu^{2k_1}\mu^{2k_2}\right)^{1/2}\le C_1 n^{k_1} m^{k_2}\,\varphi_1\!\left(\frac{1}{n+1}\right)\varphi_2\!\left(\frac{1}{m+1}\right)\\
&\left(\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\tau_{\nu\mu}^{2}\,\nu^{2k_1}\right)^{1/2}\le C_2 n^{k_1}\,\varphi_1\!\left(\frac{1}{n+1}\right)\varphi_2\!\left(\frac{1}{m+1}\right)\\
&\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{m}\tau_{\nu\mu}^{2}\,\mu^{2k_2}\right)^{1/2}\le C_3 m^{k_2}\,\varphi_1\!\left(\frac{1}{n+1}\right)\varphi_2\!\left(\frac{1}{m+1}\right)\\
&\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\tau_{\nu\mu}^{2}\right)\le C_4\,\varphi_1\!\left(\frac{1}{n+1}\right)\varphi_2\!\left(\frac{1}{m+1}\right)
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Vërtetim. Për $f(x,y)\in S^{0}H_{p}^{\varphi_1\varphi_2}$, $1<p<\infty$,sipas përkufizimit 2.2.1, lemës 2.1.1 dhe mosbarazimit (1.3) kemi:

$$\omega_{k_1,k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_{\vec{p}}\le C_5\,\delta_1^{r_1}\delta_2^{r_2}$$

dhe

$$
\begin{aligned}
&C_6\Big\{(1/n^{k_1})(1/m^{k_2})\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}\tau_{\nu\mu}^{2}\nu^{2k_1}\mu^{2k_2}\Big)^{1/2}+(1/n^{k_1})\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\tau_{\nu\mu}^{2}\nu^{2k_1}\Big)^{1/2}+\\
&+(1/m^{k_2})\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{m}\tau_{\nu\mu}^{2}\mu^{2k_2}\Big)^{1/2}+\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\tau_{\nu\mu}^{2}\Big)^{1/2}\Big\}\le\\
&\le\omega_{k_1k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_{\vec{p}}\,.
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Nga mosbarazimet (2.13) dhe (2.14) rrjedhë kondita e nevojshme e teoremës.

Anasjelltas, nëse përmbushen konditatë (2.13), atëherë sipas lemësl.3.1 kemi:

$$\omega_{k_1k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_{\vec{p}}\le C_7\,\delta_1^{r_1}\delta_2^{r_2},$$

që do të thotë se $f(x,y)\in S^{0}H_{p}^{\varphi_1\varphi_2}$.

§ 2.3. VLERËSIMI I KOEFICIENTËVE FOURIE I FUNKSIONEVE ME SERI TË DYFISHT LAKUNARE NGA KLASA $H(p,k_1,k_2,\varphi)$

Përkufizim 2.3.1 Themi se $f(x,y)$ i matëshëm dhe periodikë, me periodë 2π i takon klasës $H(p,k_1,k_2,\varphi)$ nëse:

1. $f(x,y)\in L_{\vec{p}}^{0}$ dhe
2. $\omega_{k_1 k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_{\vec{p}} \leq C\varphi(\delta_1,\delta_2)$

ku funksioni $\varphi(\delta_1,\delta_2)$ plotëson konditatë :

a) $\varphi(\delta_1,\delta_2)\geq 0$ dhe i vazhdueshëm në $[0,1]$

b) 1° $\varphi(\delta_1,\delta_2)\leq C_1(\delta_1^{(1)},\delta_2)$, $0\leq\delta_1\leq\delta_1^{(1)}\leq 1$,

2° $\varphi(\delta_1,\delta_2)\leq C_2(\delta_1,\delta_2^{(1)})$, $0\leq\delta_2\leq\delta_2^{(1)}\leq 1$,

c) 1° $\varphi(2\delta_1,\delta_2)\leq C_3\varphi(\delta_1,\delta_2)$ dhe

2° $\varphi(\delta_1,2\delta_2)\leq C_4\varphi(\delta_1,\delta_2)$.

Teoremë 2.3.1. Le të jetë $f(x,y)\in L_p$, $1<p<\infty$, ku

$$f(x,y)\sim\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}c_{\nu\mu}\cos\nu x\cos\mu y$$

me koeficient

$$c_{\nu\mu}=a_{kl}>0 \quad \text{për} \quad \nu=2^k \quad \text{dhe} \quad \mu=2^l,$$

$$c_{\nu\mu}=0 \quad \text{për} \quad \nu\neq 2^k \quad \text{ose} \quad \mu\neq 2^l,$$

dhe funksioni $\varphi(\delta_1,\delta_2)$ le të plotësoje konditen

$$\delta_1^{k_1}\delta_2^{k_2}\left[\int_{\delta_1}^{1}\int_{\delta_2}^{1}\varphi^{\gamma}(t_1,t_2)t_1^{-k_1\gamma-1}t_2^{-k_2\gamma-1}dt_1dt_2\right]^{1/\gamma}\leq C_5\varphi(\delta_1,\delta_2) \qquad (3.1)$$

ku γ =min (p,2).Atëherë.konditë e nevojshme dhe e mjaftueshme që $f(x,y)$ $H(p,k_1,k_2,\varphi)$ është që koeficientët e tij Fourie të plotësojnë konditen

$$\left(\sum_{\nu=n}^{\infty}\sum_{\mu=m}^{\infty} c_{\nu\mu}^{2}\right) \leq C_6\,\varphi(1/n,1/m).$$

Vërtetim.Sipas lemës 1.3.2 vlen:

$$A_1\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\nu\mu}^{2}\right)^{1/2} \leq \|f(x,y)\|_{\vec{p}} \leq A_2\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\nu\mu}^{2}\right)^{1/2} \qquad (3.2)$$

Për $1 < p < \infty$ dhe n,m të çfarëdoshëm,gjenden s,t numra natyral ashtu që

$$2^s \leq n \leq 2^{s+1},$$
$$2^t \leq m \leq 2^{t+1}$$

dhe vlen:

$$E_{nm}\,f(x,y)_{\vec{p}} \leq \|f(x,y) - S_{2^s2^t}\,f(x,y)\|_{\vec{p}}$$
$$\leq A_3\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=m+1}^{\infty} c_{\nu\mu}^{2}\right)^{1/2}$$

e që sipas kondites së teoremës kemi:

$$E_{nm}(f) \leq A_4\,\varphi(1/n,1/m)$$

$\omega_{k_1,k_2}(f,1/n,1/m)_{\vec{p}} \leq A_5\,\varphi(1/n,1/m)$, do me thanë

$f(x,y) \in H(p,k_1,k_2,\varphi)$.

Anasjelltas,nëse $f(x,y) \in H(p,k_1,k_2,\varphi)$, $1 < p < \infty$, atëherë vlen:

$$\|f(x,y) - S_{2^{s-1}2^{t-1}}\,f(x,y)\|_{\vec{p}} \leq A_6\,E_{nm}\,f(x,y)_{\vec{p}}. \qquad (3.3)$$

Nga mosbarazimet (3.2) dhe (3.3) kemi:

$$\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\tau_{\nu\mu}^{2}\right)^{1/2}\leq\|f(x,y)\|_{p}$$

e që sipas përkufizimit 2.3.1 është

$$\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\tau_{\nu\mu}^{2}\right)^{1/2}\leq A_6\,\varphi(1/n,1/m).$$

Teoremë 2.3.2. Nëse funksioni $\varphi(\delta_1,\delta_2)$ plotëson konditen

$$\left(\int_0^{\delta_1}\int_0^{\delta_2}\varphi^2(t_1,t_2)\,t_1^{-1}t_2^{-1}\,dt_1\,dt_2\right)^{1/2}\leq C\,\varphi(\delta_1,\delta_2), \qquad (3.4)$$

atëherë, konditë e nevojshme dhe e mjaftueshme që funksioni $f(x,y)\in H(p,k_1,k_2,\varphi)$ është që koeficientët e tij Fourie të plotësojnë konditen

$$\tau_{\nu\mu}\leq C_1\,\nu^{-\frac{1}{2}}\mu^{-\frac{1}{2}}\,\varphi(1/\nu,1/\mu).$$

Vërtetimi i teoremës 2.3.2. ëshë rrjedhim i vërtetimit të teoremës 2.3.1.

Teoremë 2.3.3Konditë e mjaftueshme që f(x,y) ti takoje klasës $H(p,k_1,k_2,\varphi)$ është që koeficientët e tij Fourie të plotësojnë konditatë :

1. Për $1<p\leq 2$:

$$\left(\sum_{|\nu|=1}^{n}\sum_{|\mu|=1}^{m}|\tau_{\nu\mu}|^2|\nu|^{2k_1}|\mu|^{2k_2}\right)^{1/2}\leq C_1\,n^{k_1}m^{k_2}\,\varphi(1/n,1/m),$$

$$\left(\sum_{|\nu|=1}^{n}\sum_{|\mu|=m+1}^{\infty}|\tau_{\nu\mu}|^2|\nu|^{2k_1}\right)^{1/2}\leq C_2\,n^{k_1}\,\varphi(1/n,1/m),$$

$$\Big(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty}\sum_{|\mu|=1}^{m}|\tau_{\nu\mu}|^2|\mu|^{2k_2}\Big)^{1/2}\le C_3\,\varphi(1/n,1/m),$$

$$\Big(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty}\sum_{|\mu|=m+1}^{\infty}|\tau_{\nu\mu}|^2\Big)^{1/2}\le C_4\,\varphi(1/n,1/m).$$

2.Për $2\le p<\infty$:

$$\Big(\sum_{|\nu|=1}^{n}\sum_{|\mu|=1}^{n}|\tau_{\nu\mu}|^p|\nu|^{(k_1+1)p-2}|\mu|^{(k_2+1)p-2}\Big)^{1/p}\le C_5\,n^{k_1}m^{k_2}\varphi(1/n,1/m),$$

$$\Big(\sum_{|\nu|=1}^{n}\sum_{|\mu|=m+1}^{\infty}|\tau_{\nu\mu}|^p|\nu|^{(k_1+1)p-2}|\mu|^{p-2}\Big)^{1/p}\le C_6\,n^{k_1}\varphi(1/n,1/m),$$

$$\Big(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty}\sum_{|\mu|=1}^{m}|\tau_{\nu\mu}|^p|\nu|^{p-2}|\mu|^{(k_2+1)p-2}\Big)^{1/p}\le C_7\,m^{k_2}\varphi(1/n,1/m)$$

$$\Big(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty}\sum_{|\mu|=m+1}^{\infty}|\tau_{\nu\mu}|^p|\nu|^{p-2}|\mu|^{p-2}\Big)^{1/2}\le C_8\,\varphi(1/n,1/m)$$

ku konstantët C_1, $C_2,\dots,C_8$ nuk varën nga $f(x,y)$,m dhe n.

Vërtetim. Për $1<p\le 2$ sipas teoremës 1.2.1 dhe konditave të teoremës kemi:

$$\omega_{k_1k_2}(f,1/n,1/m)_{\vec{p}}\le C_9\,\varphi(1/n,1/m),$$

prej nga rrjedhë se $f(x,y)\in H(p,k_1,k_2,\varphi)$.Në mënyrë analoge veprohet edhe në rastin kur $2\le p<\infty$.

§ 2.4. VLERËSIMI I KOEFICIENTËVE FOURIE I FUNKSIONIT ÇIFT ME SERI TË DYFISHT NGA KLASA $H(p,k_1,k_2,\varphi)$

Le të jetë $f(x,y)\in L_{\vec{p}}$, $1<p<\infty$, funksion çift sipas x-it dhe y-it, me seri Fourie të trajtës:

$$f(x,y)\sim\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}a_{\nu\mu}\cos\nu x\cos\mu y.$$

Për të vërtetuar rezultatin kryesor në kët paragraf, po e japim kët

Lemë 2.4.1.([30], faqe 41) Në qoftë se $f(x,y)\in L_{\vec{p}}$, $1<p<\infty$ është funksion çift me seri Fourie të trajtës (4.1), atëherë vlen mosbarazimi:

$$C_1B_p(a_{\nu\mu},k_1,k_2,n,m)\le\omega_{k_1k_2}(f,1/n,1/m)_{\vec{p}}\le C_2B_p(a_{\nu\mu},k_1,k_2,n,m)\qquad(4.1)$$

ku

$$B_p(a_{\nu\mu},k_1,k_2,n,m)=(1/n^{k_1p})(1/m^{k_2p})\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}a_{\nu\mu}^{p}\nu^{(k_1+1)p-2}\mu^{(k_2+1)p-2}+$$

$$+(1/n^{k_1p})\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}a_{\nu\mu}^{p}\nu^{(k_1+1)p-2}\mu^{p-2}+$$

$$+(1/m^{k_2p})\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{m}a_{\nu\mu}^{p}\nu^{p-2}\mu^{(k_2+1)p-2}+$$

$$+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}a_{\nu\mu}^{p}\nu^{p-2}\mu^{p-2},$$

konstantët C_1 dhe C_2 nuk varën nga $f(x,y)$,n dhe m.

Për $1<p\leq 2$ vlrësimi i anës së djathtë i mosbarazimit (4.1) është dhënë në ([30],faqe 41),kurse vlerësimi nga e majta në teoremën 1.2.1.Në rastin kur $2<p<\infty$ në mosbarazimin (4.1) zbatojmë teoremën e Pelit ([23],faqe 217),teoremën e Xheksonit ([23],faqe 120) dhe vetitë e modulit të lëmueshmërisë.

Teoremë 2.4.1. Që funksioni f(x,y) të jetë nga klasa $H(p,k_1,k_2,\varphi)$ është e nevojshme dhe e mjaftueshme që koeficientët e tij Fourie të plotësojnë konditatë :

$$\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m} a_{\nu\mu}^{p}\,\nu^{(k_1+1)p-2}\mu^{(k_2+1)p-2}\Big)^{1/p} < C_1 n^{k_1} m^{k_2}\varphi(1/n,1/m),$$

$$\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=m+1}^{\infty} a_{\nu\mu}^{p}\,\nu^{(k_1+1)p-2}\mu^{p-2}\Big)^{1/p} < C_2 n^{k_1}\varphi(1/n,1/m),$$

$$\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{m} a_{\nu\mu}^{p}\,\nu^{p-2}\mu^{(k_2+1)p-2}\Big)^{1/p} < C_3 m^{k_2}\varphi(1/n,1/m),$$

$$\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=m+1}^{\infty} a_{\nu\mu}^{p}\,\nu^{p-2}\mu^{p-2}\Big)^{1/p} < C_4\,\varphi(1/n,1/m),$$

konstantët C_1, C_2,C_3 dhe C_4 nuk varën nga f(x,y), n dhe m.

Vërtetim. Nëse $1 < p < \infty$, atëherë sipas lemës 2.4.1 kemi vlerësimin

$$\omega_{k_1 k_2}(f, 1/n, 1/m)_p \le C_5 \Big\{ (1/n^{k_1})(1/n^{k_2}) \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} a_{\nu\mu}^{p} \nu^{(k_1+1)p-2} \mu^{(k_2+1)p-2} +$$

$$+ (1/n^{k_1}) \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=m+1}^{\infty} a_{\nu\mu}^{p} \nu^{(k_1+1)p-2} \mu^{p-2} +$$

$$+ (1/m^{k_2}) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{m} a_{\nu\mu}^{p} \nu^{p-2} \mu^{(k_2+1)p-2} +$$

$$+ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sum_{\mu=m+1}^{\infty} a_{\nu\mu}^{p} \nu^{p-2} \mu^{p-2} \Big\} \qquad (4.2)$$

Duke zbatuar konditatë e teoremës në mosbarazimin (4.2) kemi:

$$\omega_{k_1 k_2}(f, 1/n, 1/m)_p < C_6\, \varphi(1/n, 1/m),$$

që sipas përkufizimit2.3.1 do të thotë $f(x,y) \in H(p, k_1, k_2, \varphi)$.

Le të jetë $f(x,y) \in H(p, k_1, k_2, \varphi)$, $1 < p < \infty$. Sipas lemës 2.4.1 kemi :

$$\omega_{k_1 k_2}(f, 1/n, 1/m)_p \geq C_7 \Big\{ (1/n^{k_1})(1/m^{k_2}) \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} a_{\nu\mu}^{p} \nu^{(k_1+1)p-2} \mu^{(k_2+1)p-2} +$$

$$+ (1/n^{k_1}) \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=m+1}^{\infty} a_{\nu\mu}^{p} \nu^{(k_1+1)p-2} \mu^{p-2} +$$

$$+ (1/m^{k_2}) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{m} a_{\nu\mu}^{p} \nu^{p-2} \mu^{(k_2+1)p-2} +$$

$$+ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sum_{\mu=m+1}^{\infty} a_{\nu\mu}^{p} \nu^{p-2} \mu^{p-2} \Big\}.$$

Nga (4.3) rrjedhin konditatë e teoremës.

Teoremë 2.4.2. Nëse funksioni $\varphi(\delta_1,\delta_2)$ i plotëson konditatë e dhëna në (3.1) dhe (3.4), atëherë, konditë e nevojshme dhe e mjaftueshme që funksioni $f(x,y)$ ti takoje klasës $H(p,k_1,k_2,\varphi)$ është që koeficientët e tij Fourie të plotësojnë konditen :

$$a_{\nu\mu} \leq \frac{C\,\varphi(1/n,1/m)}{\nu^{1-1/p}\mu^{1-1/p}}.$$

Vërtetim. Le të jetë

$$a_{\nu\mu} \leq \frac{C\,\varphi(1/n,1/m)}{\nu^{1-1/p}\mu^{1-1/p}}.$$

Në bazë të vetive të funksionit $\varphi(\delta_1,\delta_2)$ kemi:

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m} a_{\nu\mu}^{p}\,\nu^{(k_1+1)p-2}\mu^{(k_2+1)p-2} \leq$$

$$\leq C_1\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}\varphi^{p}(1/n,1/m)\,\nu^{k_1p-1}\mu^{k_2p-1} \leq$$

$$\leq C_2\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}\varphi^{p}(1/\nu,1/\mu)\int_{1/(\nu+1)}^{1/\nu}\int_{1/(\mu+1)}^{1/\mu}\frac{1}{t_1^{k_1p+1}}\cdot\frac{1}{t_2^{k_2p+1}}\,dt_1\,dt_2 \leq$$

$$\leq C_3\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}\int_{1/(\nu+1)}^{1/\nu}\int_{1/(\mu+1)}^{1/\mu}\Big[\frac{\varphi^{p}(t_1,t_2)}{t_1^{k_1p+1}\,t_2^{k_2p+1}}\,dt_1\Big]dt_2 =$$

$$= C_4\int_{1/(n+1)}^{1}\Big[\int_{1/(m+1)}^{1}\frac{\varphi^{p}(t_1,t_2)}{t_1^{k_1p+1}\,t_2^{k_2p+1}}\,dt_1\Big]dt_2 \leq$$

$$\leq C_5\,(n+1)^{k_1 p}\,(m+1)^{k_2 p}\,\varphi^p\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{m+1}\right)$$

$$\leq C_6\,\left[n^{k_1}\,m^{k_2}\varphi\left(\frac{1}{n},\frac{1}{m}\right)\right]^p. \qquad (4.4)$$

Në mënyrë analoge vlerësojmë :

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=m+1}^{\infty} a_{\nu\mu}^p\,\nu^{p-2}\mu^{p-2} \leq C_7 \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\varphi^p(1/\nu,1/\mu)\,\frac{1}{\nu}\cdot\frac{1}{\mu} \leq$$

$$\leq C_8 \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\varphi(1/\nu,1/\mu)\int_{1/(\nu+1)}^{1/\nu}\int_{1/(\mu+1)}^{1/\mu}\frac{dt_1}{t_1}\,\frac{dt_2}{t_2} \leq$$

$$\leq C_9 \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\int_{1/(\nu+1)}^{1/\nu}\int_{1/(\mu+1)}^{1/\mu}\frac{\varphi^p(t_1,t_2)}{t_1\,t_2}\,dt_1\,dt_2 \leq$$

$$\leq C_{10}\int_0^{1/(n+1)}\int_0^{1/(m+1)}\frac{\varphi^p(t_1,t_2)}{t_1\,t_2}\,dt_1\,dt_2 \leq$$

$$\leq C_{11}\,\varphi^p\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{m+1}\right) \leq$$

$$\leq C_{12}\,\varphi^p\left(\frac{1}{n},\frac{1}{m}\right) \qquad (4.5)$$

Po kështu vlerësojmë :

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=m+1}^{\infty} a_{\nu\mu}^p\,\nu^{(k_1+1)p-2}\mu^{p-2} \leq$$

$$\leq C_{13}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\varphi^p\left(\frac{1}{\nu},\frac{1}{\mu}\right)\nu^{k_1 p-1}\cdot\frac{1}{\mu} \leq$$

$$\leq C_{14} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=m+1}^{\infty} \varphi^{p}\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\mu}\right) \int_{1/(\nu+1)}^{1/\nu} \frac{dt_1}{t_1^{k_1 p+1}} \int_{1/(\mu+1)}^{1/\mu} \frac{dt_2}{t_2}$$

$$\leq C_{15} \left[n^{k_1} \varphi\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)\right]^{p} \tag{4.6}$$

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{m} a_{\nu\mu}^{p} \nu^{p-2} \mu^{(k_2+1)p-2} \leq C_{16} \left[m^{k_2} \varphi\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)\right]^{p}. \tag{4.7}$$

Nga mosbarazimet (4.4), (4.5), (4.6) dhe (4.7) si dhe në bazë të lemës 2.4.1 e teoremës 2.4.1 rrjedhë vërtetimi i teoremës.

Rrjedhim 2.4.1. Nëse zëvendsojmë $\varphi(t_1,t_2)=t_1^{r_1} t_2^{r_2}$, atëherë fitohet klasa $H_p^{r_1 r_2}$.

K A P I T U L L I   I   T R E T Ë

VLERËSIMI I KOEFICIENTËVE FOURIE I FUNKSIONEVE ME DY VARIABLA NGA KLASA E BESOV-it

Në [24] janë caktuar konditatë që duhet ti plotësojnë koeficientët Fourie të funksionit me një variabël,në mënyrë që ai ti takoje klasës së Besov-it.Këto kondita shprehen si në një koeficient Fourie,poashtu edhe në trajtë të shumës, në mënyrë që funksioni të jetë nga këjo klasë.Në punimin [16] janë dhënë konditatë e mjaftueshme që duhet ti plotësojnë koeficientët Fourie ,në mënyrë që funksioni me një variabël të jetë nga klasa $B\,(p,\theta,\alpha)$.Ndërsa,në punimin [12] duke u bazuar në vlerësimin e modulit të lëmueshmërisë së funksionit $f(x)$,janë dhënë konditatë e nevojshme dhe të mjaftueshme që duhet ti plotësojnë koeficientët Fourie të funksionit çift si dhe të funksionit me seri lakunare,në mënyrë që ky të jetë nga klasa $B^{r}_{p\theta}$ .Në [13]i është dhënë kontribut vlerësimit të koeficientëve Fourie të funksioneve me një variabël në klasët e Nikolsk-it dhe të Besov-it.

Për vlerësimin e koeficientëve Fourie të funksioneve me dy variable nga klasa e Besov-it janë bërë dhe po bëhen përpjekje nga shumë matematicientë.Bie fjala, në punimin [5] në mënyrë të përgjithësuar janë vlerësuar koeficientët Fourie për funksionet me dy variable.Prandaj,çdo përpjekje për ti vlerësuar koeficientët Fourie të funksioneve me dy variable paraqet kontribut për kët lëmi.

Kët kapitull ia kemi kushtuar vlerësimit të koeficientëve Fourie të funksioneve me dy variable nga klasët :$S^oB^{r_1r_2}_{p\theta}$ $B^{r_1r_2}_{p\theta}$ dhe $B(p,\theta,\alpha)$.Në paragrafin e parë bëhet vlerësimi i koeficientëve Fourie për funksionet me seri të dyfisht lakunare nga klasa $S^oB^{r_1r_2}_{p\theta}$.Kurse, në paragrafin e dytë dhe të tretë vlerësohen koeficientët Fourie për funksionet çift me dy variable nga klasa $B^{r_1r_2}_{p\theta}$ dhe $B(p,\theta,\alpha)$.

§ 3.1.VLERËSIMI I KOEFICIENTËVE FOURIE I FUNKSIONEVE ME SERI TË DYFISHT LAKUNARE NGA KLASA $S^oB^{r_1r_2}_{p\theta}$

Përkufizim 3.1.1. Themi se funksioni i matëshëm dhe periodikë $f(x,y)$, me periodë 2π i takon klasës $S^oB^{r_1r_2}_{p\theta}$, nëse

1. $f(x,y)\in L^o_p$,
2. $I=\int_0^1 t_2^{-r_2\theta-1}\left[\int_0^1 t_1^{-r_1\theta-1}\omega^{\theta}_{k_1k_2}(f,t_1,t_2)\,dt_1\right]^{1/\theta}dt_2<\infty$

ku me $\omega_{k_1 k_2}(f,t_1,t_2)$ shenuam modulin e lëmueshmërisë të funksionit $f(x,y) \in S^oB^{r_1 r_2}_{p\theta}$.

Teoremë 3.1.1 Konditë e nevojshme dhe e mjaftueshme që funksioni

$$f(x,y) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\nu\mu} \cos\nu x \cos\mu y ,$$

me koeficientë

$$c_{\nu\mu} = a_{kl} > 0 \quad \text{për} \quad \nu = 2^k \text{ dhe } \mu = 2^l$$

$$c_{\nu\mu} = 0 \quad \text{për} \quad \nu \neq 2^k \text{ ose } \mu \neq 2^l$$

ti takoje klasës $S^oB^{r_1 r_2}_{p\theta}$ është që koeficientët e tij Fourie të plotësojnë konditen :

$$I_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\nu\mu}^{\theta} \nu^{r_1\theta} \mu^{r_2\theta} < \infty .$$

Vërtetim . Mund të vërehet lehtë se gjenden konstantët A_1, A_2, A_3 dhe A_4 ashtu që të jetë :

$$A_1 \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} 2^{\nu r_1\theta} 2^{\mu r_2\theta} \omega^{\theta}_{k_1 k_2}(f, 1/2^{\nu}, 1/2^{\mu})_{\vec{p}} \leq$$

$$\leq A_2 \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} \nu^{r_1\theta-1} \mu^{r_2\theta-1} \omega^{\theta}_{k_1 k_2}(f, 1/\nu, 1/\mu)_{\vec{p}} \leq I \leq$$

$$\leq A_3 \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} \nu^{r_1\theta-1} \mu^{r_2\theta-1} \omega^{\theta}_{k_1 k_2}(f, 1/\nu, 1/\mu)_{\vec{p}} \leq$$

$$\leq A_4 \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} 2^{\nu r_1\theta} 2^{\mu r_2\theta} \omega^{\theta}_{k_1 k_2}(f, 1/2^{\nu}, 1/2^{\mu})_{\vec{p}} . \qquad (3.1)$$

Për $1 \leq p_i < \infty$, $i=1,2$ në mosbarazimin (3.1) zbatojmë lemën 1.3.1 :

$$I \leq A_5 \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \nu^{r_1\theta-1} \mu^{r_2\theta-1} \omega_{k_1k_2}^{\theta}(f, 1/\nu, 1/\mu)_{\bar{p}} \leq$$

$$\leq A_6 \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} 2^{\nu r_1\theta} 2^{\mu r_2\theta} \Big[(1/2^{\theta k_1\nu})(1/2^{\theta k_2\mu})\Big(\sum_{n=1}^{\nu} \sum_{m=1}^{\mu} a_{nm}^2 2^{2nk_1} 2^{2mk_2}\Big)^{\theta/2} +$$

$$+ (1/2^{\theta\nu k_1})\Big(\sum_{n=1}^{\nu} \sum_{m=\mu+1}^{\infty} a_{nm}^2 2^{2nk_1}\Big)^{\theta/2} + (1/2^{\theta\mu k_2})\Big(\sum_{n=\nu+1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\mu} a_{nm}^2 2^{2mk_2}\Big)^{\theta/2} +$$

$$+ \Big(\sum_{n=\nu+1}^{\infty} \sum_{m=\mu+1}^{\infty} a_{nm}^2\Big)^{\theta/2}\Big]. \qquad (3.2)$$

Për $\frac{\theta}{2} \geqslant 1$ në shumat e brëndshme të (3.2) zbatojmë lemën 1.3.3 ,kurse në shumatë e jashtme lemën 1.3.2 :

$$I \leqslant A_7 I_1. \qquad (3.3)$$

Për $\frac{\theta}{2} \leqslant 1$ dhe nëse shumatë në (3.2) ndrrojnë vendet,atëherë me zbatimin e lemës 1.3.2 kemi :

$$I \leqslant A_8 I_1. \qquad (3.4)$$

Nëse në (3.1) zbatojmë anën e djathtë të lemës 1.3.2 do të kemi :

$$I \geqslant A_9 \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \nu^{r_1\theta-1} \mu^{r_2\theta-1} \omega_{k_1k_2}^{\theta}(f, 1/\nu, 1/\mu)_{\bar{p}} \geqslant$$

$$\geqslant A_{10}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}2^{\nu r_1\theta}2^{\mu r_2\theta}\Big[(1/2^{\theta\nu k_1})(1/2^{\theta\mu k_2})\Big(\sum_{n=1}^{\nu}\sum_{m=1}^{\mu}a_{nm}^2\,2^{2nk_1}2^{2mk_2}\Big)^{\theta/2}+$$

$$+(1/2^{\theta\nu k_1})\Big(\sum_{n=1}^{\nu}\sum_{m=\mu+1}^{\infty}a_{nm}^2\,2^{2nk_1}\Big)^{\theta/2}+(1/2^{\theta\mu k_2})\Big(\sum_{n=\nu+1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\mu}a_{nm}^2\,2^{2mk_2}\Big)^{\theta/2}+$$

$$+\Big(\sum_{n=\nu+1}^{\infty}\sum_{m=\mu+1}^{\infty}a_{nm}^2\Big)^{\theta/2}\Big] \qquad (3.5)$$

Për $\frac{\theta}{2}\geqslant 1$ në shumatë e brëndshme të mosbarazimit (3.5) zbatojmë lemën 1.3.2 ,kurse në shumën -e jashtme zbatojmë lemën 1.3.3 ,atëherë kemi :

$$I \geqslant A_{11}\, I_1 \qquad (3.6)$$

Për $\frac{\theta}{2}\leq 1$ me ndrimin e vendeve të shumave në (3.5) dhe zbatimin përkatësisht të lemave 1.3.3 dhe 1.3.2 do të kemi:

$$I \geqslant A_{12}\, I_1 \qquad (3.7)$$

Nga mosbarazimet (3.3) dhe (3.6) përkatësisht (3.4) dhe (3.7) kemi :

$$A_{13}\, I_1 \leq I \leqslant A_{14}\, I_1$$

e që në bazë të përkufizimit 3.1.1 do të thotë se

$f(x,y) \in S^{o}\, B_{p}^{r_1 r_2}$.

§ 3.2. VLERËSIMI I KOEFICIENTËVE FOURIE I FUNKSIONEVE ÇIFT ME DY VARIABLE NGA KLASA $B_{p\theta}^{r_1 r_2}$

Përkufizim 3.2.1. Themi se funksioni $f(x,y) \in B_{p\theta}^{r_1 r_2}$, $1 < p < \infty$, $1 < r_i < \infty$, $i=1,2$; $r_1, r_2 > 0$, nëse:

1. $f(x,y) \in L_{\vec{p}}$

2. $\|f(x,y)\|_{\vec{p}} = \left[\int_0^1 \int_0^1 t_1^{-r_1\theta-1} t_2^{-r_2\theta-1} \omega_{m,n}^{\theta}(f,t_1,t_2)_{\vec{p}}\, dt_1 dt_2 \right]^{1/p} < \infty$

ku moduli i lëmueshmërisë është i përcaktuar si vijonë:

$$\omega_{k_1 k_2}(f,t_1,t_2)_{\vec{p}} = \sup_{\substack{|t_1| \le k_1 \\ |t_2| \le k_2}} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta_{m,n} f(x,y,t_1,t_2)^p\, dx\, dy \right]^{1/p}$$

Përkufizim 3.2.2. Themi se vargu $a_{m,n} \in M$, në qoftë se

1. $\Delta_{11} a_{m,n} \geqslant 0$,

2. $a_{m,n+1} \leqslant a_{m,n}$, për m të fiksuar,

3. $a_{m+1,n} \leqslant a_{m,n}$, për n të fiksuar,

ku

$$\Delta_{11} a_{m,n} = a_{m,n} - a_{m+1,n} - a_{m,n+1} + a_{m+1,n+1}.$$

Lemë 3.2.1 ([30] ,faqe 36) Në qoftë se $a_{m,n} \geq 0$, $1 < p < \infty$ dhe

1. $\alpha > 1,\ \beta > 1,\ S_{m,n} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}$,
2. $\alpha > 1,\ \beta < 1,\ S_{m,n} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=n}^{\infty} a_{ik}$,
3. $\alpha < 1,\ \beta > 1,\ S_{m,n} = \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}$,
4. $\alpha < 1,\ \beta < 1,\ S_{m,n} = \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_{ik}$,

atëherë,vlen mosbarazimi :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^{-\alpha} n^{-\beta} S_{m,n}^{p} \leq B(\alpha,\beta,p) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^{-\alpha} n^{-\beta} (mn\, a_{m,n})^{p}.$$

Lemë 3.2.2.([30] , faqe 37) Le të jetë $a_{m,n} \geq 0$, $0 < p < 1$. Në qoftë se për ndonjë $c > 0$ vlen :

1. $\alpha > 1,\ \beta > 1,\ S_{m,n} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}$ dhe $a_{m,n} \cdot (mn)^{-c}$ zvogëlues,
2. $\alpha > 1,\ \beta < 1,\ S_{m,n} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=n}^{\infty} a_{ik}$, $\begin{cases} a_{m,n} m^{-c} \text{ zvogëlues për } n \text{ të fiksuar} \\ a_{m,n} n^{c} \text{ rritës për } m \text{ të fiksuar} \end{cases}$
3. $\alpha < 1,\ \beta > 1,\ S_{m,n} = \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}$, $\begin{cases} a_{m,n} m^{c} \text{ rritës për } n \text{ të fiksuar} \\ a_{m,n} n^{-c} \text{ zvogëlues për } m \text{ të fiksuar} \end{cases}$
4. $\alpha < 1,\ \beta > 1,\ S_{m,n} = \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_{ik}$ dhe $a_{m,n} (mn)^{c}$ rritës,

atëherë, vlen mosbarazimi :

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^{-\alpha} n^{-\beta} S_{m,n}^{p} \leq A(\alpha,\beta,p) \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^{-\alpha} n^{-\beta} (mn\, a_{m,n})^{p}.$$

Teoremë 3.2.1. Le të jetë $0 < r_1 \leq m$, $0 < r_2 \leq n$, $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$ dhe $a_{m,n} \geq 0$, $a_{m,n} \in M$. Konditë e nevojshme dhe e mjaftueshme që $f(x,y) \in B_{p\theta}^{r_1 r_2}$ është që koeficientët e tij Fourie të plotësojnë konditen:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^{\theta}\; i^{\theta(r_1+1/q)-1}\; j^{\theta(r_2+1/q)-1} < \infty .$$

Kondita e nevojshme. Për m dhe n numra palë vlen:

$$\frac{1}{4\pi^2}\sum_{\mu=[\frac{i}{2}]}^{i}\sum_{\nu=[\frac{k}{2}]}^{k}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Delta_{m,n} f(x,y,t,\varphi)\cos\nu x\cos\mu y\, dx\, dy =$$

$$= (-1)^{(m+n)/2}\, 2^{m+n} \sum_{\mu=[\frac{i}{2}]}^{i}\sum_{\nu=[\frac{k}{2}]}^{k} a_{\mu\nu} \sin^{m}\mu t \sin^{n}\nu\varphi .$$

Në qoftë se

$$\frac{\pi}{2(i+1)} < t_i < \frac{\pi}{2i}\ ,\quad \frac{\pi}{2(k+1)} < \varphi_k < \frac{\pi}{2k}\ ,$$

atëherë :

$$\sum_{\mu=[\frac{i}{2}]}^{i}\sum_{\nu=[\frac{k}{2}]}^{k} a_{\mu\nu} \leq A_{m,n}(ik)^{1/p}\Big[\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi}|\Delta_{m,n} f(x,y,t_i,\varphi_k)|^{p} dx\, dy\Big]^{1/p}$$

Prandaj,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^{\theta}\; i^{\theta(r_1-1/p)-1}\; j^{\theta(r_2-1/p)-1} \leq$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} i^{\theta(r_1-1/p)-1}\; j^{\theta(r_2-1/p)-1}\Big(\sum_{\mu=[\frac{i}{2}]}^{i}\sum_{\nu=[\frac{k}{2}]}^{k} a_{\mu,\nu}\Big)^{\theta} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} i^{\theta\tau_1-1} j^{\theta\tau_2-1}\left[\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}|\Delta_{m,n} f(x,y,t_i,\varphi_k)|^p dx\,dy\right]^{\theta/p}$$

Dijmë se vlen mosbarazimi :

$$\left[\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}|\Delta_{m,n} f(x,y,t_i,\varphi_k)|^p dx\,dy\right]^{\theta/p} \leq$$

$$\leq A\int_i^{i+1}\int_k^{k+1}\left[\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}|\Delta_{m,n} f(x,y,\tfrac{\pi}{2t},\tfrac{\pi}{2\varphi})|^p dx\,dy\right]^{\theta/p} dt\,d\varphi.$$

Prandaj ,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^{\theta}\, i^{\theta(\tau_1-1/p)-1} j^{\theta(\tau_2-1/p)-1} \leq \omega_{m,n}^{\theta}(f,t,\varphi)_{\vec{p}} \leq$$

$$\leq A(m,n,p,\theta)\int_0^1\int_0^1 t^{-\theta\tau_1-1}\varphi^{-\theta\tau_2-1}\omega_{m,n}^{\theta}(f,t,\varphi)_{\vec{p}}\,dt\,d\varphi.$$

$$\|f(x,y)\|_{\vec{p}} = \left[\int_0^1\int_0^1 t^{-\theta\tau_1-1}\varphi^{-\theta\tau_2-1}\omega_{m,n}^{\theta}(f,t,\varphi)_{\vec{p}}\,dt\,d\varphi\right]^{1/p} \leq$$

$$\leq A_1'(m,n,p,\theta)\,\|f(x,y)\|_{\vec{p}}.$$

Sipas vetive të modulit të lëmueshmërisë, ekzistojnë konstantët A_1, A_2, A_3 dhe A_4 ashtu që :

$$A_1\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\mu\theta\tau_1} 2^{\nu\theta\tau_2}\omega_{k_1k_2}^{\theta}(f,1/2^{\mu},1/2^{\nu})_{\vec{p}} \leq$$

$$\leq A_2\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu^{\tau_1\theta-1}\nu^{\tau_2\theta-1}\omega_{k_1k_2}^{\theta}(f,1/\mu,1/\nu)_{\vec{p}} \leq$$

$$\leq \|f(x,y)\|_{\vec{p}} \leq$$

$$\leq A_3 \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu^{r_1\theta-1} \nu^{r_2\theta-1} \omega_{k_1k_2}^{\theta}(f, 1/\mu, 1/\nu)_{\vec{p}} \leq$$

$$\leq A_4 \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\mu r_1\theta} 2^{\nu r_2\theta} \omega_{k_1k_2}^{\theta}(f, 1/2^{\mu}, 1/2^{\nu})_{\vec{p}} .$$

Mëtutje vlerësojmë :

$$\| f(x,y)\|_{\vec{p}} \leq A_1'(m,n,p,\theta) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} i^{r_1\theta-1} j^{r_2\theta-1} \Big\{ i^{-k_1\theta} j^{-k_2\theta} \Big[$$

$$\Big[\sum_{\mu=1}^{i} \sum_{\nu=1}^{j} a_{\mu\nu}^{p} \mu^{(k_1+1)p-2} \nu^{(k_2+1)p-2} \Big]^{\theta/p} +$$

$$+ i^{-k_1\theta} \Big[\sum_{\mu=1}^{i} \sum_{\nu=j+1}^{\infty} a_{\mu\nu}^{p} \mu^{(k_1+1)p-2} \nu^{p-2} + j^{-k_2\theta} \Big[\sum_{\mu=i+1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{j} a_{\nu\mu}^{p} \mu^{p-2} \nu^{(k_2+1)p-2} \Big]^{\theta/p} +$$

$$+ \Big(\sum_{\mu=i+1}^{\infty} \sum_{\nu=j+1}^{\infty} a_{\mu\nu}^{p} \mu^{p-2} \nu^{p-2} \Big)^{\theta/p} \Big\}$$

Nëse për $\frac{\theta}{p} > 1$ zbatojmë lemën 3.2.1 , ndërsa për $\frac{\theta}{p} < 1$ lemën 3.2.2 ,atëherë rrjedhë vërtetimi i teoremës.

Në rastin kur $\frac{\theta}{p} = 1$ me ndrrimin e renditjes së shumave dhe me zbatimin përkatësisht të lemave 3.2.2 dhe 3.2.1 rrjedhë vërtetimi i teoremës.

§ 3.3. VLERËSIMI I KOEFICIENTËVE FOURIE I FUNKSIONIT ÇIFT ME DY VARIABLE NGA KLASA $B(p,\theta,\alpha)$

Përkufizim 3.3.1 Themi se $f(x,y)\in B(p,\theta,\alpha)$ në qoftë se $f(x,y)\in L_p$, $1\le p<\infty$, $0<\theta<\infty$, $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2\}$ dhe vlen mosbarazimi

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha_1(t_1)\,\alpha_2(t_2)\,\omega^{\theta}_{k_1,k_2}(f,t_1,t_2)_p\,dt_1\,dt_2<\infty$$

ku

$$k_i>\frac{\alpha_i}{\theta}\quad ,i=1,2.$$

Përkufizim 3.3.2. Funksionet $\alpha_i(t_i)$, $i=1,2$ janë të matëshme në $[0,2\pi]$, të shumueshme në $[\delta,2\pi]$ për $\forall\delta\in(0,2\pi)$ si kanë këto veti plotësuese :

1.Ekziston konstanta C_1 e tillë që :

$$\alpha_i(t_i)\geqslant C_1\quad \text{për }\forall\, t_i\in[0,2\pi],\ (i=1,2).$$

2.Ekzistojnë numratë real r_i (i=1,2) dhe konstan- C_2 ashtu që për $\forall\delta\in(0,2\pi)$ të vleje :

$$\int_0^{\delta}\alpha_i(t_i)^{r_i}\,dt\le C_2\,\delta^{r_i}\int_{\delta}^{2\pi}\alpha_i(t)\,dt\ ,\quad i=1,2.$$

Lemë 3.3.1. ([12]).Nëse a_k, α , β , janë numra të tillë që $a_k \geq 0$, $0<\alpha<\beta<\infty$,atëherë vlen mosbarazimi :

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\beta}\Big)^{1/\beta} \leq \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\alpha}\Big)^{1/\alpha}.$$

Teoremë 3.3.1. Që funksioni i matëshëm dhe periodikë $f(x,y) \in L_p^*$ me periodë 2π , ku

$$f(x,y) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\nu\mu} \cos\nu x \cos\mu y ,$$

të jetë nga klasa B (p, θ, α), ku $a_{\nu\mu} \in M$, $1< p<\infty$, $1 < \theta < \infty$, $\alpha=\{\alpha_1, \alpha_2\}$, kondità e nevojshme është që koeficientët e tij Fourie të plotësojnë konditatë :

1. Për $\theta \leq p$:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\nu\mu}^{\theta}\, \nu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1} \mu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1} b_{2,1}(\nu)\, b_{2,2}(\mu) < \infty,$$

2. Për $\theta > p$:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\nu\mu}^{\theta}\, \nu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1} \mu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1} b_{2,1}(\nu) b_{2,2}(\mu)\Big[\frac{b_{2,1}(\nu)\, b_{2,2}(\mu)}{\nu\mu A_1(\nu) A_2(\mu)}\Big]^{\frac{\theta}{p}-1} < \infty,$$

ku

$$A_i(t) = \int_{1/(t+1)}^{1/t} \alpha_i(\nu)\, d\nu ,$$

$$b_{2,i}^{(1)} = s^{k\theta}\int_0^{1/n} \alpha_i(t)\, dt + \int_{1/(n+1)}^{1} \alpha_i(t)\, dt , \quad i=1,2. \tag{4.1}$$

Vërtetim . Shenojmë :

$$I=\int_0^1\int_0^1 \alpha_1(t)\,\alpha_2(\mu)\,\omega^{\theta}_{k_1k_2}(f,t,\mu)_{\vec{p}}\,dt\,d\mu$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\int_{\frac{1}{\mu+1}}^{\frac{1}{\mu}} \alpha_1(t)\,\alpha_2(\mu)\,\omega^{\theta}_{k_1k_2}(f,t,\mu)_{\vec{p}}\,dt\,d\mu .$$

Sipas përkufizimit 3.3.2 , lemës 3.2.3 dhe vetive të modulit të lëmueshmërisë ([8]) kemi :

$$I\le\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}\omega^{\theta}_{k_1k_2}(f,1/\nu,1/\mu)_{\vec{p}}\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\int_{\frac{1}{\mu+1}}^{\frac{1}{\mu}}\alpha_1(t)\,\alpha_2(\mu)\,dt\,d\mu=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}A_1(\nu)\,A_2(\mu)\,\omega^{\theta}_{k_1k_2}(f,1/\nu,1/\mu)_{\vec{p}}\le$$

$$\le C\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}A_1(\nu)A_2(\mu)\Big\{\frac{1}{\nu^{k_1\theta}}\cdot\frac{1}{\mu^{k_2\theta}}\Big[\sum_{n=1}^{\nu}\sum_{m=1}^{\mu}a_{nm}^{p}\,n^{(k_1+1)p-2}\,m^{(k_2+1)p-2}\Big]^{\frac{\theta}{p}}+$$

$$+\frac{1}{\nu^{k_1\theta}}\Big[\sum_{n=1}^{\nu}\sum_{m=\mu+1}^{\infty}a_{nm}^{p}\,n^{(k_1+1)p-2}\,m^{p-2}\Big]^{\theta/p}+$$

$$+\frac{1}{\mu^{k_2\theta}}\Big[\sum_{n=\nu+1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\mu}a_{nm}^{p}\,n^{p-2}\,m^{(k_2+1)p-2}\Big]^{\theta/p}+$$

$$+\Big[\sum_{n=\nu+1}^{\infty}\sum_{m=\mu+1}^{\infty}a_{nm}^{p}\,n^{p-2}\,m^{p-2}\Big]^{\theta/p}\Big\}.$$

Marrim :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

dhe vlerësojmë çdonjerën nga shumatë I_1, I_2, I_3 dhe I_4.

Për $\theta \le p$, sipas lemës 3.2.2 ,lemës 3.3.1 dhe vetive të modulit të lëmueshmërisë kemi :

$$I_1 = C_1 \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} A_1(\nu) A_2(\mu) \frac{1}{\nu^{k_1\theta}} \cdot \frac{1}{\mu^{k_2\theta}} \left[\sum_{n=1}^{\nu} \sum_{m=1}^{\mu} a_{nm}^{p} n^{(k_1+1)p-2} m^{(k_2+1)p-2} \right]^{\frac{\theta}{p}} \le$$

$$\le C_2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{A_1(\nu)}{\nu^{k_1\theta}} \cdot \frac{A_2(\mu)}{\mu^{k_2\theta}} \left[\sum_{\nu=0}^{\log_2 2^{\nu}+1} \sum_{\mu=0}^{\log_2 2^{\mu}+1} \sum_{n=2^{\nu}}^{2^{\nu+1}} \sum_{m=2^{\mu}}^{2^{\mu+1}} a_{nm}^{p} n^{(k_1+1)p-2} m^{(k_2+1)p-2} \right]^{\frac{\theta}{p}} \le$$

$$\le C_3 \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{A_1(\nu)}{\nu^{k_1\theta}} \frac{A_2(\mu)}{\mu^{k_2\theta}} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\log_2 2^{\nu}+1} \sum_{\mu=0}^{\log_2 2^{\mu}+1} a_{2^{\nu}2^{\mu}}^{p} 2^{[(k_1+1)p-2]\nu+\nu} \cdot 2^{[(k_2+1)p-2]\mu+\mu} \right\}^{\frac{\theta}{p}} \le$$

$$\le C_4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{A_1(\nu)}{\nu^{k_1\theta}} \frac{A_2(\mu)}{\mu^{k_2\theta}} \left(\sum_{n=1}^{\nu} \sum_{m=1}^{\mu} a_{nm}^{\theta} n^{(k_1+1)\theta-\frac{\theta}{p}-1} m^{(k_2+1)\theta-\frac{\theta}{p}-1} \right)$$

Nëse shumave ua ndrrojmë vendet ,do të kemi :

$$I_1 \le C_5 \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\nu\mu}^{\theta} \nu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1} \mu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1} b_{11}(\nu) b_{21}(\mu).$$

Në mënyrë analoge vlerësojmë I_2, I_3 dhe I_4.Kështu fitohet vlerësimi :

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{nm}^{\theta} n^{\theta-\frac{\theta}{p}-1} m^{\theta-\frac{\theta}{p}-1} b_{21}(\nu) b_{22}(\mu) < \infty.$$

ku b_{2i} (i=1,2) ka trajtën (4.1).

Në rastin kur $\theta > p$ kemi vlerësimin:

$$I_1 \leq C_5 \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{A_1(\nu)}{\nu^{k_1\theta}} \frac{A_2(\mu)}{\mu^{k_2\theta}} \left[\sum_{n=1}^{\nu}\sum_{m=1}^{\mu} a_{nm}^{p} n^{(k_1+1)p-2} m^{(k_2+1)p-2} \right]^{\frac{\theta}{p}-1} \leq$$

$$\leq C_6 \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{A_1(\nu)}{\nu^{k_1\theta}} \frac{A_2(\mu)}{\mu^{k_2\theta}} \left[a_{\nu\mu}^{p} \nu^{(k_1+1)p-2} \mu^{(k_2+1)p-2} \varphi_i(\nu)\psi_i(\mu) \right]^{\frac{\theta}{p}-1},$$

ku

$$\varphi_i(t) = \frac{t^{k_i\theta} \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{A_i(\nu)}{\nu^{k_i\theta}}}{A_i(t)} \quad , \quad i = 1,2$$

dhe

$$\psi_i(t) = \frac{b_{1i}(t)}{A_i(t)} \quad , \quad i = 1,2.$$

Prandaj ,

$$I_1 \leq C_7 \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} a_{nm}^{\theta} \nu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1} \mu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1} b_{11}(\nu) b_{12}(\mu) \left[\frac{b_{11}(\nu) b_{12}(\mu)}{\nu\mu A_1(\nu) A_2(\mu)} \right]^{\frac{\theta}{p}-1}.$$

Në mënyrë analoge vlerësohen edhe I_2, I_3 dhe I_4. Kështu fitohet vlerësimi :

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\nu\mu}^{\theta} \nu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1} \mu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1} b_{21}(\nu) b_{22}(\mu) \left[\frac{b_{21}(\nu) b_{22}(\mu)}{\nu\mu A_1(\nu) A_2(\mu)} \right]^{\frac{\theta}{p}-1} < \infty,$$

që do me thanë se $f(x,y) \in B(p, \theta, \alpha)$.

Teoremë 3.3.2. Në qoftë se $f(x,y) \in \bar{B}(p,\theta,\alpha)$, $1 \leq p < \infty$, $1 < \theta < \infty$, $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ dhe

$$f(x,y) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\nu\mu} \cos \nu x \cos \mu y ;$$

atëherë, koeficientët e tij Fourie plotësojnë konditatë :

1. Për $\theta \geq p$:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\nu\mu}^{\theta} \nu^{\theta - \frac{\theta}{p} - 1} \mu^{\theta - \frac{\theta}{p} - 1} b_{21}(\nu) b_{22}(\mu) < \infty .$$

2. Për $\theta < p$:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\nu\mu}^{\theta} \nu^{\theta - \frac{\theta}{p} - 1} \mu^{\theta - \frac{\theta}{p} - 1} b_{21}(\nu) b_{22}(\mu) \left[\frac{b_{21}(\nu) b_{22}(\mu)}{\nu\mu A_1(\nu) A_2(\mu)} \right]^{\frac{\theta}{p} - 1}$$

ku

$A_i(t)$, $i = 1,2$

$b_{2i}^{(1)}$, $i = 1,2$ janë dhënë me relacionet (4.1).

Vërtetimi i teoremës është analog me vërtetimin e teoremës 3.3.1.

Lidhjen ndërmjet klasëve $\bar{B}(p,\theta,\alpha)$ dhe $B_{p\theta}^{r_1 r_2}$ na e jep ky

Rrjedhim 3.3.1 Nëse te klasa e funksioneve $B(p,\theta,\alpha)$ zëvendsojmë :

$$(t_1, t_2) = t_1^{r_1} t_2^{r_2}$$

atëherë fitohet klasa e funksioneve $B_{p\theta}^{r_1 r_2}$.

LITERATURA

[1] A.A. Konjushkov.- Najlushqie priblizhenja trigonometriqeskimi polinomami i koeficijenti Fourie,mat.sbor. 1958, 44, N=1, 58-84 .

[2] A. Zygmund.- Trigonometriqeski rjadi,Gont nktp, Moskva 1939.

[3] A. Zygmund.- Trigonometrical series, Chelsea Publ. co. New York,1952.

[4] G. B. Hardi, D.E. Litelvud i G. Polia, Neravenstva, G.I.I.L.,Moskva, 1948.

[5] I.E. Zhak.- O soprazhnjenih dvojnih trigonometriqeskih rjadoh,Mat. sbo.,1952, 31,N=3,469-484.

[6] L. Kagadij.- Koeficijenti Fourie i moduli gladkosti funkcij dvuh pjeremenih,Uqen.zap. Tartus, UN-TA,tom 253, N=9, 229-243.

[7] L. Leindler.- Uber vers chiedene konvergenzarten trigonometrischer reihen III (Bediugungen in der metric von L_p), Acta Sci, Math. (Szeged) ,27,1966,205-215.

[8] M.K. Potapov.-Priblizhenje uglom i teoremi vlozhenja, Matem. Balkanik, 1972, 183-198.

[9] M.K. Potapov.- Teoremi vlozhenja smeshnoj metrike, A.N. SSSR, Trudi, gl. 5, 1980.

[10] M.K. Potapov.- O priblizheni uglom,Proc. of the conference on constructive theori of functions,Akademy of scientes, publiching house the Hungarian.

[11] M.K .Potapov.- Ovlozhenji i sovpadeni nekatorih klasov funkcij ,Izves. AN SSSR, N=4,1969, 840-860

[12] M.K. Potapov i M. Berisha .- Moduli gladkosti i koeficijenti Fourie periodiqeskih funkcij odnovo pjeremenovo, Publications de linstitut mathematicue,nauvelle serie, tom 26, (40),1979, 215-228

[13] M.Berisha.- Prilog teoriji Fourier-ovih redova,Biblioteka Posebna izdanja,Prishtinë ,1984.

[14] M.Berisha.- Koeficijenti Fourie i moduli gladkosti funkcij dvuh peremenih ,Matematiqki vesnik, 38,1986,251-262

[15] M.Berisha .- O koeficijentah Fourie periodiqeskih funkcij prinadlezhashqih B(p, θ, α) klasam,Serdika,Bulgarsko matematiqesko spisanije,Tom-11, 1985, (79-85)

[16] M. Berisha.-Dostatoqniji uslovia koeficijentov Fourie periodiqeskih funkcij prinadlezhashqih B (p, θ, α) klasam tipa Besova, Glasnik matematiqki,Vol.3, 21,(41) 1986, 115-122.

[17] M. Berisha i R.Kastrati .- O nekatorih svojstva dvojnih trigonometriqeskih rjadov,Teorija funkcij i priblizhenja,Izd. Moskovskog Universiteta,1985

[18] M. Berisha i R.Kastrati.- Moduli gladkosti i koeficijenti dvojnih lakunarnih trigonometriqeskih rjadov, Punime matematike,N=1, Prishtinë 1986.

[19] M.Berisha i R.Kastrati.- O koeficijentah Fourie lakunarnih trigonometriqeskih dvojnih rjadov prinadlezhashqih $S^0 H_p^{r_1, r_2}$ klasam funkcij,Punime matematike,N=2 Prishtinë 1987, 43-48.

[20] M. Timan.- Obratnije teoremi konstruktivnoj teori funkcij v prostranstva L_p , Mat.sbor. 46 (88) I, Moskva 1958, 125-138.

[21] M.F. Timan.- Osobenosti osnovnih teorem konstruktivnoj teorii funkcij v prostranstva L_p, AN. Az. SSSR, Isledovanija po savremenim problemam konsruktivnoj teorii funkcij , Baku 1965.

[22] N. Bari .-Trigonometriqeski rjadi, Moskva 1961.

[23] N.Bari.- O najlushqem priblizhenju trigonometriqeskimi polinomami dvuh soprjazhenih funkcij, Izv. AN SSSR, ser.mat. 19, 1955, 285-302.

[24] O.V. Besov.- O nekatorih uslovija prinadlezhashqih k L_p periodiqeskih funkcij, Nauqn. dokl. V.Sh., Fiz.-Mat. nauki N=1, 1959

[25] O.V. Besov .- Isledovanie odnovo semeistva funksionalnih prostranstva v svjazi s teoremami vlozhenja i prodolzhenja, Tr. Mat. Inst. V.A. Steklova, AN SSSR, 60 1961, 42-81.

[26] R.Kastrati i M. Berisha.- O koeficijentah Fourie lakunarnih trigonometriqeskih dvojnih rjadov prinadlezhashqih $S^o H_p^{d_1 d_2}$ klasam, Punime matematike,N=3,Prishtinë 1988, 49-54.

[27] S. Aljanqiq.- On the integral modul of continuity in L_p $(1 < p < \infty)$ of Fourier series with monotone coefficients , Proc. Amer. Math.Soc. ,1966, 17,N=7,287-294.

[28] S. Aljanqiq, M.Tomiq .- Uber den stetigkeit modul van Fourier-Reihen wit monotonen coefficients, Math. z. 1965,88, 274-284.

[29] S.M. Nikolski.- Priblizhenje funkcij mnogih pjeremenih i teoremi vlozhenja, AN SSSR, Moskva 1969.

[30] T.S. Tevzadzje.-Nekatorije klasi funkcij i trigonometriqeskije rjadi Fourie -Nekatorije voprosi teorii funkcij, Tom II, Tbilisi 1981.

BIOGRAFIJA

U linda më 15.02.1943 në fshatin Karaçevë e epërme, K.K. i Kamenicës.Shkollën fillore e kreva në vendlindje, kurse të mesmen -Shkollën Normale në Gjilan.Në vitin 1964 kam regjistruar studimet e rregullta në degën e Matematikës në Prishtinë dhe të njejtatë i mbarova në Shtator të vitit 1968.Dy vite kam punuar si profesor i matematikës në Shkollën Normale të Prishtinës.

Studimet pasuniversitare i kam kryar në Prishtinë,në lëmin e analizës reale. Kam magjistruar në temën : ,,Vlerësimi i koeficientëve Fourie i serive lakunare nga klasat e Nikollsk-it ''.

Në FSHMN të Prishtinës jam që nga Shtatori i vitit 1972. Jam ligjerues i lëndës Matematika për studentët e Kimisë. Kam kryar një varg deryrash si shoqërore poashtu edhe partiake.