UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

ĐURICA S. JOVANOV

# PRILOG TEORIJI VARIJACIONIH NEJEDNAČINA NA NORMIRANIM PROSTORIMA

- Doktorska disertacija -

BEOGRAD, 1991. godine

# UNIVERZITET U BEOGRADU

## Matematički Fakultet



Djurica S. Jovanov

# PRILOG TEORIJI VARIJACIONIH NEJEDNAČINA NA NORMIRANIM PROSTORIMA

Doktorska disertacija

Beograd 1991. godine

# SADRŽAJ

# UVOD

Teorija varijacionih nejednačina razvijena je, ne tako davno ali je privukla pažnju mnogih pznatih matematičara i doživela buran razvoj tokom poslednje dve decenije. Temelje ove teorije postavili su Stampacchia, Brezis, Lions, Browder, Schauder i drugi matematičari koji su razvijali teoriju monotonih operatora.

Na varijacione nejednačine se svode problemi iz raznih oblasti kao što su na primer: konveksni problemi minimizacije, komplementarni problem u matematičkom programiranju, zadaci sa slobodnom granicom, neki problemi iz ekonomije, saobraćaja ([16, 17]) itd.

Karakterizacija projekcije tačke na zatvoren konveksan podskup Euklidskog prostora, preko varijacione nejednačine, razmatrana je u [9,18,26]. Veza izmedju konveksnih funkcija i varijacionih nejednačina je razmatrana u [27,32]. Karamardijan je komplementarni problem u matematičkom programiranju sveo na varijacionu nejednačinu na $R_+^n$. Veza izmedju problema konveksne minimizacije i varijacionih nejednačina je razmatrana u [25]. Egzistencija rešenja varijacione nejednačine sa jednoznačnim operatorom je razmatrana u [10].

Za varijacione nejednačine sa jednoznačnim operatorom, razmatrane na konačno dimenzionom prostoru, u slučaju kada je skup dopustivih tačaka opisan konveksnim ograničenjima poznata je karakterizacija rešenja([15,16,17,27]). Takodje su razvijene metode za numeričko rešavanje takvih varijacionih nejednačina(npr. u [17,27,30,35]). Dovoljni uslovi za lokalnu jedinstvenost rešenja varijacione nejednačine u konačno dimenzionom prostoru dati su u [42]. Za varijacionu nejednačinu sa višeznačnim operatorom, koja se rešava na Banahovom prostoru karakterizacija rešenja i metode za numeričko rešavanje su dati u [4,5,6,7].

U ovom radu se razmatraju varijacione nejednačine, sa višeznačnim ili jednoznačnim operatorom, na realnom Banahovom prostoru, u slučaju kada je skup dopustivih tačaka opisan operatorskim i konusnim ograničenjima.

Prva glava je pripremnog karaktera. U njoj se navode, uglavnom poznati rezultati koji se odnose na višeznačna preslikavanja.

U prvom odeljku se razmatraju višeznačna preslikavanja polu-neprekidna odozdo (odozgo). Originalni rezultati su sadržani u lemama 1.1.1., 1.1.2., 1.1.3.

U drugom odeljku se navode poznati rezultati, koji se odnose na (neprekidnu) selektibilnost višeznačnog preslikavanja (kao što su npr. Michaels Selection Theorem, teorema o aproksimativnoj selektibilnosti itd.), kao i na $\sigma$-selektibilnost. Lema 1.2.1. koja se odnosi na $\sigma$-selektibilnost višeznačnog preslikavanja, je originalna.

U trećem odeljku se navode neki poznati rezultati koji se odnose na monotone operatore.

Druga glava je posvećena varijacionim nejednačinama sa skupovnim operatorom (formulacija problema, egzistencija rešenja, zavisnost rešenja od parametra)..

U prvom odeljku se u vidu primera navode razni problemi koji se svode na varijacione nejednačine (komplementarni problem u matematičkom programiranju sa jednoznačnim ili višeznačnim preslikavanjem, problem minimizacije diferencijabilne odnosno subdiferencijabilne konveksne funkcije, odredjivanje ravnotežne tačke u beskoalicionoj igri n lica, generalisane operatorske jednačine, projekcija tačke na zatvoren konveksan skup).

U drugom odeljku se razmatra problem egzistencije rešenja varijacione nejednačine na Hilbertovom prostoru, sa skupovnim operatorom. Uvodi se pojam koercitivnosti skupovnog operatora. Formulišu se i dokazuju dovoljni uslovi za egzistenciju rešenja varijacione nejednačine sa skupovnim operatorom, polu-neprekidnim (odozdo ili odozgo). Rezultati koji se odnose na ovu problematiku sadržani su u teoremama 2.2.1. do 2.2.5.. Takodje je Mintina lema proširena na varijacionu nejednačinu sa skupovnim operatorom, koji je polu-neprekidan odozdo. U [8] je dokazana Mintina lema za varijacionu. nejednačinu sa skupovnim operatorom koji je maksimalno monoton. U posledici 2.2.1. je dokazana egzistencija rešenja varijacione nejednačine sa $\sigma$-selektibilnim skupovnim operatorom. Pod istim uslovima pod kojima važi Mintina lema dokazano je da je skup rešenja razmatrane varijacione nejednačine konveksan i slabo zatvoren (posledica 2.2.2). Klasične egzistencijalne teoreme za varijacione nejednačine mogu se naći npr. u [11].

U trećem odeljku druge glave razmatra se problem aproksimacije rešenja. U radu [10] Browder je dao dovoljne uslove za egzistenciju rešenja varijacione nejednačine sa jednoznačnim operatorom i razvio metode aproksimacije rešenja. U [10] se rešavanje polazne varijacione nejednačine sa monotonim operatorom svodi na rešavanje niza varijacionih nejednačina sa jako monotonim operatorom. Drugim rečima, vrši se regularizacija polazne varijacione nejednačine. Ovaj postupak je sličan Tihonovljevom metodu regularizacije konveksnih problema minimizacije (izloženim npr. u [38,39,40,41]). U teoremi 2.3.1. je dokazana konvergencij rešenja regularizovane varijacione nejednačine ka rešenju polazne varijacione nejednačinesa monotonim, polu-neprekidnim odozdo operatorom. Aproksimacija rešenja korišćena u teoremi 2.3.1. se naziva Brauer-Tihonovom. Ovaj termin je uveo Bakušinski u svom radu [6]. Sličnom tehnikom kao u [43] dokazano je da niz rešenja dobijen metodom uzastopnih aproksimacija konvergira ka rešenju polazne varijacione nejednačine.

U četvrtom odeljku se razmatra varijaciona nejednačina čiji operator i skup na kome se rešava zavise od nekog parametra. Dokazano je da je skup rešenja takve varijacione nejednačine, pod odredjenim uslovima, polu-neprekidna odozgo funkcija parametra (teorema 2.4.1. i posledica 2.4.1.).

U trećoj glavi se razmatraju varijacione nejednačine sa ograničenjima.

U prvom odeljku se daje karakterizacija rešenja varijacione nejednačine sa konusnim i/ili operatorskim ograničenjem. U teoremama 3.1.1. i 3.1.2. se daje karakterizacija rešenja varijacione nejednačine sa skupovnim operatorom uz uslov da skup dopustivih tačaka ima bar jednu radijalnu tačku. U posledici 3.1.2. se dokazuje da je teorema 3.1.1. uopštenje prve teoreme u [7]. Rezultati izloženi u ovom odeljku inspirisani su odgovarajućim rezultatima izloženim u [15], koji se odnose na karakterizaciju rešenja problema konveksne minimizacije, što je specijalan slučaj varijacione nejednačine.

U drugom odeljku se razmatra problem aproksimacije rešenja varijacione nejednačione sa konusnim i operatorskim ograničenjima. Polazna varijaciona nejednačina se svodi na sistem varijacionih nejednačina sa pogodnijim skupom dopustivih tačaka. U lemi 3.2.1 se dokazuje da iz monotonosti operatora polazne varijacione nejednačine sledi monotonost operatora odgovarajućeg sistema. U lemi 3.2.2. se dokazuje, uz neke dodatne uslove, da je operator sistema i hemi-neprekidan. U teoremama 3.2.1. i 3.2.2. se dokazuje konvergencija niza dobijenog metodom uzastopnih projekcija ka rešenju polazne varijacione nejednačine sa jednoznačnim hemi-neprekidnim operatorom. Navedena tvrdjenja se izvode primenom teoreme 3 u [4] i teoreme 3.1.1. Leme 3.2.3 i 3.2.4. se odnose na aproksimaciju rešenja varijacione nejednačine sa višeznačnim operatorom. Poslednja tvrdjenja se dobijaju primenom teorema 2.3.1., 2.3.2. i 3.1.1. Takodje se navode još neke modifikacije navedenog algoritma. Na kraju se formuliše i dokazuje jedna egzistencijalna teorema za varijacionu nejednačinu sa konusnim ograničenjem (teorema 3.2.3).

Numeracija formula u svakoj glavi počinje iz početka. Kada se poziva na formulu iz iste glave navodi se broj formule a kada se poziva na neku formulu iz glave različite od tekuće navode se broj glave i broj formule.

Svi prostori koji se u radu pominju su realni tako da se ta činjenica nigde posebno ne naglašava.

Oznake korišćene u radu su standardne. Navešćemo samo neke: subdiferencijal funkcije $f(u,v)$ po promenljivoj $u$ se označava sa $\partial_u f(u,v)$, izvod u smeru $d$ funkcije $g$ u tački $u$ se označava sa $g'(u;d)$. Preslikavanje $u \rightarrow \langle\lambda, g(u)\rangle$ se ponekad označava sa $\lambda g(u)$. Metrička projektor na zatvoren konveksan skup $U$ se označava sa $P_U$. $B(u,\delta)$ označava otvorenu a $B[u,\delta]$ zatvorenu kuglu sa centrom u tački $u$ i poluprečnika $\delta$, $B$ označava otvorenu jediničnu kuglu, $R_+^n$ označava nenegativni ortant prostora $R^n$, $\mathrm{cone}U_u$ označava konus sa vrhom $u \in U$, generisan elementima skupa $U$ itd.

Bibliografija sadrži 46 bibliografskih jedinica, koje se odnose na varijacione nejednačine, probleme konveksne minimizacije, komplementarni problem, funkcionalnu analizu itd.

Na kraju želim da zahvalim svojim mentorima dr Vladimiru Jankoviću i dr Slobodanu Dajoviću na korisnim sugestijama, prilikom izrade ovog rada.

# I GLAVA

# VIŠEZNAČNA PRESLIKAVANJA

## 1.1. Polu-neprekidna preslikavanja

Neka su X i Y skupovi. Pod višeznačnim preslikavanjem $F:X \to PY$ se podrazumeva pridruživanje svakom elementu $x \in X$ podskupa $F(x) \subset Y$. Domen preslikavanja F se definiše sledećom relacijom

$$Dom(F) := \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}.$$

Pogodno je preslikavanje F(x) okarakterisati grafikom

$$Graph(F) := \{(x,y) \in X \times Y : y \in F(x)\}.$$

Neka je $\mathcal{F} \neq \emptyset, \mathcal{F} \subset X \times Y$. Tada je uslovom $Graph(F) = \mathcal{F}$, preslikavanje potpuno odredjeno, tj. preslikavanje F se može zadati uslovom

$$F(x) := \{y \in Y : (x,y) \in \mathcal{F}\}.$$

Dalje ćemo smatrati da su X i Y Hausdorfovi topološki prostori i da je $Dom(F) = X$.

**Definicija 1.1.1.** Za preslikavanje $F:X \to PY$ se kaže da je polu-neprekidno odozgo u tački $x_0 \in X$ ako za svaki otvoren skup $W$, za koji je $F(x_0) \subset W$, postoji okolina $M$ elementa $x_0$ takva da je $F(M) \subset W$.

**Definicija 1.1.2.** Neka su X i Y normirani prostori. Za preslikavanje $F:X \to PY$ se kaže da je polu-neprekidno odozgo u $\epsilon$ smislu u tački $x_0$ ako i samo ako

$$(\forall \epsilon>0)(\exists \delta>0)\ F(x_0+\delta B) \subset F(x_0) + \epsilon B.$$

Za preslikavanje F se kaže da je polu-neprekidno odozgo (u $\epsilon$ smislu) ako i samo ako je takvo za svako $x_0 \in X$.

Iz činjenice da su $F(x_0) + \epsilon B$, $x_0+\delta B$ specijalne okoline skupa $F(x_0)$ i elementa $x_0$ sledi da iz polu-neprekidnosti odozgo preslikavanja F sledi polu-neprekidnost odozgo u $\epsilon$ smislu preslikavanja F. Da obrnuto nije tačno pokazuje primer koji sledi.

Primer 1.1.1. ([3]) Neka je $F:R \to PR^2$ preslikavanje definisano sa

$$F(k) := \{(x,y): x = k\}.$$

Da bi dokazali da je ovako definisano preslikavanje F polu-neprekidno odozgo u $\epsilon$ smislu za $x = 0$, dovoljno je u definiciji 1.1.2. staviti da je $\delta=\epsilon$. Medjutim F nije polu-neprekidno odozgo u smislu definicije 1.1.1. jer ako se uzme da je

$$W = \{(x,y): |y| < 1/|x|\}$$

sledi da je $F(0) \subset W$ i da za svako $x \neq 0$ nije $F(x) \subset W$.

Dakle iz polu-neprekidnosti odozgo u $\epsilon$ smislu ne sledi polu-neprekidnost odozgo u smislu definicije 1.1.1. U slučaju kada je $F(x)$ kompakt za svako $x \in X$, navedene dve polu-neprekidnosti odozgo su ekvivalentne.

Definicija 1.1.3. Za preslikavanje $F:X \to PY$ se kaže da je polu-neprekidno odozdo u tački $x_0$ ako i samo ako za svako $y_0 \in F(x_0)$ i svaku okolinu $W(y_0)$ tačke $y_0$, postoji okolina $W(x_0)$ tačke $x_0$ takva da

$$(\forall x \in W(x_0))\ F(x) \cap W(y_0) \neq \emptyset.$$

**Definicija 1.1.4.** Neka su X i Y normirani prostori. Za preslikavanje $F:X \rightarrow PY$ se kaže da je polu-neprekidno odozdo u $\epsilon$ smislu, u tački $x_0$ ako i samo ako

$$(\forall \epsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x \in x_0+\delta B)\ F(x_0) \subset F(x) + \epsilon B.$$

Jasno je da iz polu-neprekidnosti odozdo u $\epsilon$ smislu, sledi polu-neprekidnost odozdo u smislu definicije 1.1.3. Obrnuto ne važi. Ako je $F(x_0)$ kompaktan, preslikavanje F je u tački $x_0$, polu-neprekidno odozdo ako i samo ako je polu-neprekidno odozdo u $\epsilon$ smislu.

**Definicija 1.1.5.** Za preslikavanje $F:X \rightarrow PY$, koje je polu-neprekidno odozdo i odozgo, kaže se da je neprekidno.

**Lema 1.1.1.** Neka su X, Y, Z Banahovi prostori, $f:Y \rightarrow PZ$ polu-neprekidno odozgo i $g:Y \rightarrow Z$ neprekidno preslikavanje, $\alpha \in R$. Tada

(a) Ako je preslikavanje $H:X \rightarrow PY$ polu-neprekidno odozgo, onda je preslikavanje F definisano sa

$$F(u) := f(H(u)) = \bigcup_{y \in H(u)} f(y)$$

takodje polu-neprekidno odozgo.

(b) Ako je preslikavanje $H:Y \rightarrow PZ$ polu-neprekidno odozgo, onda je preslikavanje G definsano sa

$$G(u) := \alpha H(u) = \{\alpha z : z \in H(u)\},$$

takodje polu-neprekidno odozgo.

(c) Ako je preslikavanje $H:Y \rightarrow PZ$ polu-neprekidno odozgo i $H(u)$ kompaktno za svako $u \in X$, onda je preslikavanje Z definisano sa

$$Z(u) := g(u) + H(u) = \{g(u) + y : y \in H(u)\},$$

takodje polu-neprekidno odozgo.

**Napomena:** Lako se može pokazati da će uslov naveden u teoremi za jednoznačnu funkciju f biti ispunjen ako i samo ako je f neprekidna funkcija.

**Dokaz:** (a) Neka je $W$ otvorena okolina skupa $F(u)$ tj. $F(u)=f(H(u))\subset W$. Iz neprekidnosti preslikavanja f sledi da za svako $y\in H(u)$ postoji okolina $U_y$, takva da je $f(U_y)\subset W$. Definišimo $M_1$ sa

$$M_1 := \bigcup_{y\in H(u)} U_y$$

Ovako definisan skup $M_1$ je otvorena okolina skupa $H(u)$, za koju važi

$$f(M_1) = f(\bigcup_{y\in H(u)} U_y) = \bigcup_{y\in H(u)} f(U_y) \subset W,$$

jer je $f(U_y) \subset W$, za svako $y\in H(u)$.

Iz polu-neprekidnosti odozgo preslikavanja H i $H(u)\subset M_1$ sledi da postoji okolina $M$, elementa u, takva da je $H(M) \subset M_1$. Dakle, $f(H(M))\subset f(M_1)\subset W$.

(b) Sledi iz (a) za $f(x)=\alpha x$.

(c) Neka je $g(u)+H(u)\subset W$, gde je $W\subset Z$, otvoren skup. Iz neprekidnosti preslikavanja g sledi da

$$(\forall\epsilon>0)(\exists\alpha>0)\ g(u+\alpha B) \subset g(u) + \epsilon B.$$

Primetimo da, zbog otvorenosti skupa $W$ i kompaktnosti $H(u)$, postoji $\epsilon>0$ tako da je

$$g(u)+\epsilon B+H(u) \subset W,\ \text{tj.}\ H(u) \subset W-(g(u)+\epsilon B) = W_1.$$

$W_1$ je otvorena okolina $H(u)$, pa zbog polu-neprekidnosti odozgo preslikavanja H sledi da postoji otvorena okolina $M_1$, elementa u, takva da je

$$H(M_1) \subset W_1 = W-(g(u)+\epsilon B).$$

Takodje postoji $\delta>0$ tako da je $g(u+\delta B) \subset g(u) + \epsilon B$, zbog neprekidnosti funkcije g. Neka je $M:=M_1\cap(u+\alpha B)$. Tada je $M$ otvorena okolina elementa u za koju važi

$$g(M) + H(M) \subset W,$$

što znači da je preslikavanje Z polu-neprekidno odozgo. ■

**Lema 1.1.2.** Neka je $G: X \to PY$ preslikavanje polu-neprekidnosti odozgo u $\epsilon$ smislu i neka je $G(u)$ zatvoren za svako $u \in X$, gde su X i Y Banahovi prostori. Neka su, dalje $(u_n)$, $(v_n)$, $(\epsilon_n)$ nizovi za koje je, za svaki $n \in N$

$$u_n \in X \wedge v_n \in Y \wedge d(v_n, G(u_n)) \to 0 \ (n \to \infty).$$

Ako je $\lim_{n \to \infty} u_n = u \in \mathrm{Dom}(F) \wedge \lim_{n \to \infty} v_n = v$, onda $v \in G(u)$.

Dokaz: Iz definicije polu-neprekidnosti odozgo u $\epsilon$ smislu sledi da

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0) G(u + \delta B) \subset G(u) + \epsilon B.$$

Neka je $\epsilon > 0$. Iz

$$\lim_{n \to \infty} u_n = u, \ \lim_{n \to \infty} v_n = v \ \text{ i } \lim_{n \to \infty} d(v_n, G(u_n)) = 0,$$

sledi da postoje prirodni brojevi $n_0$, $n_1$, $n_2$ za koje važi

$$(\forall n > n_0) \ \|v_n - v\| < \epsilon/3 \tag{1}$$

$$(\forall n > n_1) \ G(u_n) \subset G(u) + (\epsilon/3)B \tag{2}$$

$$(\forall n > n_2) \ 0 < d(v_n, G(u_n)) < \epsilon/3 \tag{3}$$

Iz $\lim_{n \to \infty} d(v_n, G(u_n)) = 0$ sledi da je za $n > \max(n_0, n_1, n_2)$, ispunjeno

$$v_n \in G(u_n) + (\epsilon/3)B \subset G(u) + (\epsilon/3)B + (\epsilon/3)B = G(u) + (2\epsilon/3)B,$$

Iz (1) i (3) sledi da

$$(\forall \epsilon > 0) \ v \in G(u) + \epsilon B, \text{ pa je}$$

$$v \in \bigcap_{\epsilon > 0} (G(u) + \epsilon B) = G(u). \ \blacksquare$$

U lemi koja sledi navode se neke osobine kompozicije, zbira i množenja skalarom preslikavanja polu-neprekidnog odozdo.

**Lema 1.1.3.** Neka su $X,Y,Z$ Banahovi prostori, $f:Y\to Z$, jednoznačno neprekidno preslikavanje. Tada

(a) Ako je $H:X\to PY$, polu-neprekidno odozdo, onda je preslikavanje $F$ definsano sa

$$F(u):=f(H(u))=\{f(y):y\in H(u)\},$$

takodje polu-neprekidno odozdo .

(b) Ako je preslikavanje $H:Y\to PZ$, polu-neprekidno odozdo (u $\epsilon$ smislu), onda je preslikavanje $G$ definsano sa

$$G(u):=\alpha H(u)=\{\alpha z:z\in H(u)\},$$

takodje polu-neprekidno odozdo (u $\epsilon$ smislu).

(c) Ako je $H:Y\to PZ$, polu-neprekidno odozdo u $\epsilon$ smislu, onda je preslikavanje $Z$ definsano sa

$$Z(u):=f(u)+H(u)=\{f(u)+y:y\in H(u)\},$$

takodje polu-neprekidno odozdo u $\epsilon$ smislu.

Dokaz: (a) Neka je $z\in f(H(u))$. Tada postoji $y\in H(u)$ takvo da je $f(y)=z$. Dalje, neka je $W(z)$ otvorena okolina tačke $z$. Tada je $W_1(y):=f^{-1}(W(z))$ otvorena okolina tačke $y\in H(u)$. Zbog polu-neprekidnosti odozdo preslikavanja $H(u)$, postoji okolina $W(u)$ takva da je

$$(\forall v\in W(u))\; H(v)\cap W_1(y)\neq\emptyset,$$

pa je

$$(\forall v\in W(u))\; f(H(v))\cap W(z)\neq\emptyset.$$

(b) Za $\alpha=0$ tvrdjenje je očigledno. Pretpostavimo da je $\alpha\neq 0$. Neka je zatim $u\in Y$, $z\in\alpha H(u)$, $W(z)$ proizvoljna otvorena okolina elementa $z$. Tada $z_1:=(1/\alpha)z\in H(u)$, $W(z_1):=(1/\alpha)W(z)$ je otvorena okolina elementa $z_1$. Zbog polu-neprekidnosti odozdo preslikavanja $H(u)$, postoji okolina $W(u)$ takva da je

$$(\forall v\in W(u))\; H(v)\cap W(z_1)\neq\emptyset,$$

odakle sledi da je

$$(\forall v\in W(u))\; \alpha H(v)\cap \alpha W(z_1)\neq\emptyset, \text{ tj.}$$

$$(\forall v\in W(u))\; \alpha H(v)\cap W(z)\neq\emptyset,$$

što znači da je preslikavanje G polu-neprekidno odozdo.

Pretpostavimo da je H(u) polu-neprekidno odozdo u $\epsilon$ smislu. Tada

$(\forall\epsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall v\in u+\delta B)\ H(u) \subset H(v) + (\epsilon/\alpha)B$, odnosno

$(\forall\epsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall v\in u+\delta B)\ \alpha H(u) \subset \alpha H(v) + \epsilon B$.

c) Neka je $z \in f(u) + H(u)$ i $W(z) = z + \epsilon B$. Tada $z_1 := z - f(u) \in H(u)$, pa iz činjenice da je preslikavanje H polu-neprekidno odozdo u $\epsilon$ smislu sledi da za okolinu $W(z_1) := z - f(u) + (\epsilon/2)B$ postoji okolina $W(u)$ za koju je

$(\forall v\in W(u))\ H(v) \cap W(z_1) \neq \emptyset$.

Dakle za svako $v\in W(u)$ postoji $w_v \in H(u)$ tako da je $\|w_v - z_1\| < \epsilon$ tj.

$\|w_v + f(u) - z\| < \epsilon/2$

Iz neprekidnosti funkcije f sledi da za svako $\epsilon>0$ postoji $\delta>0$ tako da važi

$(\forall v\in u+\delta B)\ \|f(u) - f(v)\| < \epsilon/2$

pa je

$\|w_v + f(v) - z\| = \|w_v + f(u) - f(u) + f(v) - z\| \leq \|w_v + f(u) - z\| + \|f(u) - f(v)\| < 2\epsilon/2 = \epsilon$.

Dakle, $w_v + f(v) \in z + \epsilon B = W(z)$, $w_v \in H(v)$, pa je

$(\forall v\in W(u))\ (f(v) + H(v)) \cap W(z) \neq \emptyset$,

što znači da je Z(u) polu-neprekidno odozdo u $\epsilon$ smislu.■

U konveksnoj analizi veoma značajnu ulogu ima funkcija oslonca konveksnog skupa. Naime funkcija oslonca skupa K se definiše relacijom

$$\sigma_K(p) := \sup_{y\in K} \langle p,y\rangle.$$

Često se koristi konvencija $\sigma_K(p) = \sigma(K,p)$. Primetimo da se zatvoren konveksan skup $K \subset Y$ može okarakterisati na sledeći način

$K = \{y\in Y : (\forall p\in Y^*)\ \langle p,y\rangle \leq \sigma_K(p)\}$.

Pretpostavimo da je dato višeznačno preslikavanje $F:X \to PY$, za svako $p \in Y^*$ se može posmatrati funkcija

$$x \to \sigma(F(x),p).$$

Definicija 1.1.6. Za preslikavanje $F:X \to PY$ se kaže da je hemi-neprekidno u tački $x_0 \in X$, ako je za svako $x \in Dom(F)$, za koje $x_0+tx \in Dom(F)$, za $0<t<1$, i svako $p \in Y^*$, funkcija $t \to \sigma(F(x_0+tx),p)$ neprekidna u tački $t=0$. Za preslikavanje F se kaže da je hemi-neprekidno odozgo ako je hemi-neprekidno odozgo u svakoj tački $x_0 \in X$.

Ako je F jednoznačno preslikavanje tj. $F(x) = \{f(x)\}$, gde je $f:X \to Y$ jednoznačno preslikavanje, funkcija $\sigma(F(x),p)$ se svodi na

$$\sigma(F(x),p) = \langle p,f(x)\rangle$$

tako da će preslikavanje F biti hemi-neprekidno u tački $x_0$ ako i samo ako je preslikavanje $t \to \langle f(x_0+tx),p\rangle$ neprekidna u tački $t=0$, za svako $x \in Dom(F)$, za koje $x_0+tx \in Dom(F)$, za $0<t<1$, i svako $p \in Y^*$. Jednoznačno preslikavanje f je hemi-neprekidno ako je za sve $x,y \in Dom(f)$, preslikavanje $t \to \langle f(x+ty),p\rangle$ neprekidno za $t \in [0,1]$.

## 1.2. Neprekidne selekcije višeznačnog preslikavanja

Uvedimo sada pojam (neprekidne) selektibilnosti višeznačnog preslikavanja.

Definicija 1.2.1. Pretpostavimo da je data familija podskupova $(F_\alpha : \alpha \in A)$ prostora X. Pod selekcijom ove familije se podrazumeva funkcija $f:A \to X$, sa osobinom $f(\alpha) \in F_\alpha$.

Egzistencija navedenog preslikavanja f sledi iz Aksiome izbora.

U ovom odeljku će biti navedeni neki rezultati, koji se odnose na egzistenciju neprekidne selekcije. U principu, neprekidno višeznačno preslikavanje ne mora da ima neprekidnu selekciju (primer 1.6.1. u [3]).

Definicija 1.2.2. Za višeznačno preslikavanje $F:X \to PY$ se kaže da je (neprekidno) lokalno selektibilno u tački $x_0 \in X$ ako za svako $y_0 \in F(x_0)$ postoji otvorena okolina $W(x_0)$, tačke $x_0$ i neprekidno jednoznačno preslikavanje $f: W(x_0) \to Y$ takvo da važi

$$f(x_0) = y_0 \wedge (\forall x \in W(x_0))\, f(x) \in F(x).$$

Za višeznačno preslikavanje F se kaže da je lokalno selektibilno ako je lokalno selektibilno za svako $x_0 \in X$.

Za preslikavanje $F:X \to PY$ sa zatvorenim konveksnim slikama, prirodno se može uvesti pojam minimalne selekcije. Naime za svako $x \in X$ je

$$m(F(x)) := P_{F(x)}(0), \text{ tj.}$$

$m(F(x))$ je element skupa $F(x)$ sa minimalnom normom.

Važi

Teorema 1.2.1. ([3]) Neka je X metrički, Y Hilbertov prostor, $F:X \to PY$ i za svako $x \in X$ je $F(x)$ zatvoren konveksan podskup prostora Y. Ako je F neprekidno višeznačno preslikavanje, onda je $m(F(x))$ neprekidna selekcija tog preslikavanja. ■

Navedimo još neke rezultate koji se odnosi na egzistenciju neprekidne selekcije lokalno selektibilnog preslikavanja.

Teorema 1.2.2. (Michaels Selection Theorem)([3]) Neka je X metrički prostor, Y Banahov prostor. Dalje, neka je $F:X \to PY$ polu-neprekidno odozdo i za svako $x \in X$ je $F(x)$ zatvoren konveksan podskup prostora Y. Tada postoji funkcija $f:X \to Y$, koja je neprekidna selekcija preslikavanja F. ■

Da svako , polu-neprekidno odozgo, preslikavanje F ne mora da bude lokalno selektibilno pokazuje primer koji sledi.

**Primer 1.2.1.** Neka je $F:R\rightarrow PR$, definisano sa

$F(x)=\{-1\}$ za $x<0$, $F(x)=\{1\}$ za $x>0$, $F(0)=[-1,1]$.

Lako je pokazati da je F polu-neprekidno odozgo u 0 i da ne postoji neprekidno preslikavanje $f:R\rightarrow R$ za koje je $f(0)=0\in F(0)$ i u nekoj okolini 0 važi $f(x)\in F(x)$.

Dakle, iako je F polu-neprekidno odozgo za $x=0$, F nije neprekidno selektibilno za $x=0$. ∎

Pošto iz polu-neprekidnosti odozgo ne sledi neprekidna selektibilnost, navešćemo jedan rezultat koji se odnosi na aproksimativnu selektibilnost.

**Teorema 1.2.3.** ([3]) Neka je X metrički, Y Banahov prostor, $F:X\rightarrow PY$ polu-neprekidno odozgo, za $x\in X$ je $F(x)$ zatvoren konveksan podskup prostora Y. Tada za svako $\epsilon>0$ postoji lokalno Lipšicova funkcija $f_\epsilon$, čija je slika sadržana u konveksnom omotaču slika preslikavanja F i

$\mathrm{Graph}(f_\epsilon) \subset \mathrm{Graph}(F) + \epsilon B$. ∎

**Definicija 1.2.3.** Za višeznačno preslikavanje $F:X\rightarrow PY$ se kaže da je $\sigma$-selektibilno ako postoji opadajući niz preslikavanja $F_n:X\rightarrow PY$ sa zatvorenim grafikom i kompaktnim slikama za koji je

a) $(\forall n\in N)$ $F_n$ ima neprekidnu selekciju.

b) $(\forall x\in X)\ F(x) = \bigcap\limits_{n\in N} F_n(x)$

Može se pokazati da je svako preslikavanje polu neprekidno odozgo sa kompaktnim konveksnim slikama $\sigma$-selektibilno.

**Lema 1.2.1.** Neka je $F:X\rightarrow PY$, i zadovoljava uslov:

F je $\sigma$-selektibilno preslikavanje, pri čemu je za preslikavanja $F_n$ iz prethodne definicije $F_n(X)$ kompaktan.

Dalje, neka je $G:X\to PZ$, definisano sa

$$G(u) := g(F(u)),$$

pri čemu je $g: Y\to Z$ neprekidna funkcija. Tada je višeznačno preslikavanje G $\sigma$-selektibilno.

Dokaz: Neka je $F_n$ niz iz definicije 1.2.4. Pokažimo da niz preslikavanja $G_n$ definisan sa

$$G_n(u) := g(F_n(u))$$

zadovoljava sve uslove navedene definicije. Očigledno iz činjenice da je $F_n$ opadajući i da je $F_n(u)$, za svako u, kompaktan sledi da je niz $G_n$ opadajući i da je $G_n(u)$ kompaktan za svako u. Pretpostavimo da $(v_k,p_k)\in Graph(G_n)$ $v_k\to v$ $(k\to\infty)$, $p_k\to p$ $(k\to\infty)$. Tada je $p_k=g(q_k)$, za neki niz $(q_k)$ sa osobinom $q_k\in F_n(v_k)$ za $k\in N$. Zbog kompaktnosti $F_n(X)$ možemo smatrati da niz $(q_k)$ ima bar jednu tačku nagomilavanja. Bez smanjenja opštosti možemo smatrati da $q_k\to q$ $(k\to\infty)$. Zbog neprekidnosti funkcije g je $p=g(q)$ a zbog zatvorenosti grafika preslikavanja $F_n$ je $q\in F_n(v)$ tj. $(v,p)\in Graph(G_n)$. Prema tome, grafik preslikavanja $G_n$ je zatvoren. Neka je $f_n$ neprekidna selekcija preslikavanja $F_n$. Tada je funkcija $g_n(u):=g(f_n(u))$ neprekidna selekcija preslikavanja $G_n$. Pored toga je zbog uslova b) iz definicije 1.2.3.

$$G(x) = g\Big(\bigcap_{n\in N} F_n(x)\Big) = \bigcap_{n\in N} g(F_n(x)) = \bigcap_{n\in N} G_n(x)$$

Dakle $G_n$ ispunjava sve uslove definicije 1.2.3. pa je G $\sigma$-selektibilno preslikavanje. ■

Navedimo sada jednu verziju teoreme o fiksnoj tački, koja se odnosi na $\sigma$-selektibilna preslikavanja.

**Teorema 1.2.4.** ([3]). Neka je U konveksan kompaktan podskup Banahovog prostora X i neka je F $\sigma$-selektibilno skupovno preslikavanje skupa U u samog sebe. Tada preslikavanje F ima fiksnu tačku tj.

$$(\exists u\in U)\ u\in F(u)$$ ■

## 1.3. Monotona preslikavanja

Neka je X Banahov prostor, $X^*$ njemu dualan prostor.

Definicija 1.3.1. Za višeznačno preslikavanje $F: X \to PX^*$ se kaže da je monotono ako i samo ako

$$(\forall x_1, x_2 \in Dom(F))(\forall v_1 \in F(x_1))(\forall v_2 \in F(x_2)) \langle v_2 - v_1, x_2 - x_1 \rangle \geq 0.$$

Monotono preslikavanje F je maksimalno monotono ako i samo ako ne postoji preslikavanje G takvo da je $Graph(F) \subset Graph(G)$ i $Graph(F) \neq Graph(G)$.

Definicija 1.3.2. Za monotono preslikavanje F se kaže da je strogo monotono, ako u prethodnom uslovu jednakost važi samo za $x_2 = x_1$.

Definicija 1.3.3. Za preslikavanje $G: X \to PX^*$ se kaže da je jako monotono ako postoji $m > 0$, tako da

$$(\forall u_1, u_2 \in Dom(G))(\forall y_1 \in G(u_1))(\forall y_2 \in G(u_2)) \langle y_2 - y_1, u_2 - u_1 \rangle \geq m\|u_2 - u_1\|^2$$

Preslikavanje definisano u primeru 1.2.2. je maksimalno monotono, dok je npr. preslikavanje G definisano sa

$$G(x) = \{-1\} \text{ za } x < 0, G(x) = \{1\} \text{ za } x > 0, G(0) = \{-1, 0, 1\},$$

samo monotono.

Navedimo sada neke osobine koje karakterišu maksimalno monotone operatore.

Lema 1.3.1. ([3]) Višeznačno preslikavanje $F: X \to PX^*$ je maksimalno monotono ako i samo ako su, za svaki $x \in X$ i $u \in X^*$, sledeća tvrdjenja ekvivalentna

a) $(\forall (y, v) \in Graph(F)) \langle u - v, x - y \rangle \geq 0$,

b) $u \in F(x)$ ∎

U lemi koja sledi navode se neke osobine maksimalno monotonih operatora.

**Lema 1.3.2.** ([3]) Ako je $F:X\to PX^*$ je maksimalno monoton, onda

a) $(\forall x\in Dom(F))$ $F(x)$ je zatvoren i konveksan.

b) Ako za nizove $(x_n)$ i $(u_n)$ važi

$u_n\in F(x_n)$, za sve $n\in N$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ i $u_n$ slabo konvergira ka $u$ kad $n\to\infty$

onda $u\in F(x)$. ■

Navedimo sada poznatu Mintinu teoremu u kojoj se daje karakterizacija maksimalno monotonog preslikavanja.

**Teorema 1.3.1.** ([3]) Neka je $F:X\to PX$, monotono preslikavanje Hilbertovog prostora $X$ u samog sebe. Tada je $F$ maksimalno monotono ako i samo ako je $1+F$ surjektivno. ■

Iz leme 1.3.2. i teoreme 1.1.3. sledi

**Posledica 1.3.1.** Neka je $X$ metrički, $Y$ Banahov prostor, $F:X\to PY$, maksimalno monoton, polu-neprekidan odozdo operator. Tada je $F$ neprekidno selektibilna. ■

Da iz maksimalne monotonosti ne sledi polu-neprekidnost odozdo pokazuje sledeći primer.

**Primer 1.3.1.** Neka je $F:R\to PR$, definisano sa

$F(x)=\{-1\}$ za $x<0$, $F(x)=\{1\}$ za $x>0$, $F(0)=[-1,1]$.

Očigledno je $F$ maksimalno monotono preslikavanje. Neka je $y_0 = 0\in F(0)$. Definišimo okolinu $W(0)$ sa

$W(0) := \{x\in R: |x| < 1/2\}$.

Tada je

$$(\forall x \neq 0)\, F(x) \cap W(0) = \emptyset,$$

pa preslikavanje F nije polu-neprekidno odozdo. ∎

Veoma značajna klasa maksimalno monotonih operatora se navodi u sledećem primeru.

Primer 1.3.2. Neka je $f: X \rightarrow R$, konveksna funkcija, pri čemu je X Hilbertov prostor. Tada je $\partial f: X \rightarrow PX$, preslikavanje definisano sa

$$\partial f(x) := \{p \in X : (\forall y \in X)\ f(y) - f(x) \geq \langle p, y - x \rangle\}$$

maksimalno monoton operator. Ako je f jako (strogo) konveksna funkcija, onda je $\partial f$ jako (strogo) monoton operator. ∎

Može se postaviti pitanje da li je svako maksimalno monotono preslikavanje subdiferencijal neke konveksne funkcije. U radu [31] R.T.Rockafellar je dokazao da za svako maksimalno monotono preslikavanje $G: R \rightarrow PR$, postoji konveksna funkcija $f: R \rightarrow R$ za koju je $\partial f(x) = G(x)$, za $x \in Dom(G)$.

Da svako maksimalno monotono preslikavanje ne mora da bude subdiferencijal konveksnog funkcionala pokazuje primer koji sledi.

Primer 1.3.3. ([25]) Neka je $F: R^2 \rightarrow R^2$ vektorsko polje

$$F(x) = (x_1, x_2 + g(x_1)),\ x = (x_1, x_2) \in R^2.$$

Ovde je $g \neq 0$ glatka funkcija jedne promenljive $x_1 \in R$, takva da je

$$|g(t_1) - g(t_2)| \leq |t_1 - t_2|, \text{ za sve } t_1, t_2 \in R.$$

Neka je dalje $(,)$ oznaka za skalarni proizvod u $R^2$. Iz sledećeg niza jednakosti i nejednakosti

$$(F(x^1)-F(x^2), x^1-x^2) = ((x^1{}_1-x^2{}_1, x^1{}_2-x^2{}_2+g(x^1{}_1)-g(x^2{}_1)), (x^1{}_1-x^2{}_1, x^1{}_2-x^2{}_2) =$$

$$= \|x^1-x^2\|^2+(x^1{}_2-x^2{}_2)(g(g(x^1{}_1)-g(x^2{}_1)) \geq \|x^1-x^2\|^2-|x^1{}_2-x^2{}_2||g(x^1{}_1)-g(x^2{}_1)| \geq$$

$$\geq \|x^1-x^2\|^2-(1/2)|x^1{}_2-x^2{}_2|^2-(1/2)|g(x^1{}_1)-g(x^2{}_1)|^2 \geq (1/2)\|x^1-x^2\|^2$$

sledi da je F monotono preslikavanje. Dokažimo sada da je preslikavanje F maksimalno monotono. Označimo sa i: $R^2 \rightarrow R^2$ identičko preslikavanje. Dokazaćemo da je i+F preslikavanje na. Neka je $(x,y) \in R^2$. Tada $(i+F)(x^1,x^2)=(x,y)$ ako i samo ako je $(2x^1,2x^2+g(x^1))=(x,y)$ tj. ako i samo ako je $x^1=x/2$ i $x^2=(y-g(x^1)/2$. Time je dokazano da je i+F na. Iz teoreme 1.3.1. sledi da je F maksimalno monoton. Medjutim, F nije gradijent nijedne konveksne funkcije.([32]). ■

# II GLAVA

# VARIJACIONE NEJEDNAČINE

## 2.1. Formulacija problema. Primeri.

Neka je X Banahov prostor $X^*$ njemu dualan prostor, $U \subset X$ konveksan, zatvoren podskup prostora X, $F: X \to PX^*$. Pod varijacionom nejednačinom VI(F,U), podrazumeva se problem odredjivanja elementa $u \in X$ za koji je

$$u \in U \wedge (\forall v \in U)\ \langle F(u), v - u \rangle \geq 0.$$

Za element $u \in U$ se kaže da je rešenje varijacione nejednačine VI(F,U) ako i samo ako

$$(\exists y \in F(u))(\forall v \in U)\ \langle y, v - u \rangle \geq 0.$$

Sada ćemo u obliku primera navesti neke probleme koji se mogu svesti na rešavanje varijacionih nejednačina.

Primer 2.1.1. (Komplementarni problem) Neka je $R_+^n := \{x \in R^n : x_i \geq 0, i=1,\dots,n\}$, $F: R_+^n \to R^n$. Treba odrediti $x_0 \in R^n$ za koje je

$$x_0 \in R_+^n \wedge F(x_0) \in R_+^n \wedge \langle F(x_0), x_0 \rangle = 0.$$

Može se dokazati (teorema 1.5.5. u [25]) da je $x_0 \in R_+^n$ rešenje navedenog problema ako i samo ako je $x_0$ rešenje sledeće varijacione nejednačine

$$x_0 \in R_+^n \wedge (\forall y \in R_+^n)\ \langle F(x_0), y - x_0 \rangle \geq 0. \blacksquare$$

**Primer 2.1.2.** (Komplementarni problem sa višeznačnim preslikavanjem) Neka je $F: R_+^n \to PR^n$. Za $x_0$ se kaže da je rešenje komplementarnog problema sa višeznačnom funkcijom F ako i samo ako važi

$$x_0 \in R_+^n \wedge ((\exists y \in F(x_0))\ y \in R_+^n \wedge \langle y, x_0 \rangle = 0).$$

Može se pokazati da je $x_0 \in R_+^n$ rešenje navedenog problema ako i samo ako je rešenje sledeće varijacione nejednačine

$$x_0 \in R_+^n \wedge (\forall v \in R_+^n)\ \langle F(x_0), v - x_0 \rangle \geq 0. \blacksquare$$

**Primer 2.1.3.** ([11]) Neka je X Banahov prostor, $f: X \to R$, diferencijabilna funkcija. Rešavanje problema

$$u \in X \wedge (\forall v \in X)\ f(u) \leq f(v),$$

dovodi nas do rešavanja sledeće jednačine u X*

$$f'(u) = 0. \qquad (1)$$

Ako se razmatra opštiji problem odredjivanja elementa u za koji je

$$u \in U \wedge (\forall v \in U)\ f(u) \leq f(v), \qquad (2)$$

gde je $U \subset X$ konveksan podskup prostora X, (1) ne mora da važi. Pokazaćemo da iz (2) sledi

$$u \in U \wedge (\forall v \in U)\ \langle f'(u), v - u \rangle \geq 0. \qquad (3)$$

Stvarno, neka je $\Phi: [0,1] \to R$, definisana sa

$$\Phi(t) := f(u + t(v - u))$$

Primetimo da $u + t(v-u) \in U$, za $u, v \in U$, $t \in [0,1]$ i da zbog diferencijabilnosti funkcije f važi

$$\Phi(t) - \Phi(0) = t\langle f'(u), v - u \rangle + o(t).$$

Iz (2) sledi da je

$$(\forall t \in [0,1])\ \Phi(0) \leq \Phi(t).$$

Dakle,

$$0 \leq \lim\ (\Phi(t) - \Phi(0))/t = \langle f'(u), v - u \rangle.$$

Ako je f konveksna onda (3) karakteriše tačke za koje važi (2). Naime $\Phi(t)$ je takodje konveksna pa važi

$$\Phi(1) \geq \Phi(0) + \Phi'(0) \text{ tj.}$$

$$f(v) \geq f(u) + \langle f'(u), v - u\rangle \geq f(u),$$

za sve $v \in U$. ■

Primer 2.1.4. Neka je X Hilbertov prostor i $f: X \to R$ konveksna funkcija.. Može se pokazati da je $u \in X$ rešenje problema minimizacije (2) ako i samo ako je $u \in X$ rešenje sledeće varijacione nejednačine

$$u \in U \wedge (\forall v \in U) \langle \partial f(u), v - u\rangle \geq 0. ■$$

Primer 2.1.5. Neka je $U \subset X$ zatvoren konveksan podskup Hilbertovog prostora X i neka je $u \in X$. Poznato je da postoji jedinstveno rešenje w, sledećeg problema minimizacije

$$\min_{u \in U} \|u - v\| = \|w - u\|$$

pri čemu je $\|u\| = ((u,u))^{1/2}$, gde je $(,)$ skalarni proizvod definisan na prostoru X. Može se pokazati ([11]) da je w rešenje gornjeg problema ako i samo ako je rešenje varijacione nejednačine

$$w \in U \wedge (\forall v \in U)\ (w - u, v - w) \geq 0. ■$$

Primer 2.1.6. (Beskoaliciona igra n igrača)([8]) Neka je dato n funkcionala: $f_1(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $f_2(x_1,x_2,\dots,x_n)$, ..., $f_n(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $x_i \in Q_i$ ($Q_i$ su zatvoreni konveksni podskupovi prostora $X_i$). Igra se sastoji u tome da i-ti igrač bira takvu strtegiju $x_i$ sa ciljem da smanji što je više moguće vrednost funkcionala $f_i$. Pod ravnotežnom tačkom igre n lica se podrazumeva takav izbor strategija $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ za koji je ispunjen sledeći uslov

$$(\forall x_i \in P_i)\ f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \leq f_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*),\ i=1,2,\dots,n.$$

Odredjivanje ravnotežne tačke se može svesti na rešavanje varijacione nejednačine VI(F,U). Neka je $P = P_1 x P_2 x \dots x P_n$. Definišimo funkcional $\Phi(\omega,x)$ na PxP na sledeći način

$$\Phi(\omega,x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1,\dots,x_{i-1},\omega_i,x_{i+1},\dots,x_n) .$$

Lako se dokazuje da je $x^*$ ravnotežna tačka ako i samo ako je

$$(\forall \omega \in P)\ \Phi(x^*,x^*) \le \Phi(\omega,x^*).$$

U slučaju subdiferencijabilnosti funkcionala $\Phi(\omega,x)$, po prvom argumentu, lako se može dokazati da je $x^*$ rešenje varijacione nejednačine $VI(\partial_\omega \Phi(\omega,x),P)$ ■

Primer 2.1.7. (generalisane operatorske jednačine)([8]) Rešavanje generalisane jednačine $0 \in F(u)$ sa apriornim uslovom $u \in U$, gde je $F:X \to PX^*$, $U \subset X$ zatvoren konveksan podskup Banahovog prostora X, može se svesti na rešavanje varijacione nejednačine VI(F,U). ■

## 2.2. Egzistencija rešenja varijacione nejednačine sa višeznačnim operatorom

U ovom odeljku ćemo razmatrati i formulisati uslove pod kojima postoji rešenje varijacione nejednačine VI(F;U). Pretpostavljamo da je bilinearna forma $\langle , \rangle : X x X^* \to R$ ograničena. Važi

Lema 2.2.1. Neka je X Hilbertov prostor, $\langle , \rangle : X x X \to R$ ograničena bilinearna forma. Tada postoji linearan ograničen operator $A:X \to X$, takav da je

$$(\forall u \in X)(\forall v \in X)\ \langle u,v \rangle = (Au,v),$$

gde je $( , ): X x X \to R$ skalarni proizvod na X. ■

Navešćemo sada prvu teoremu o egzistenciji rešenja.

**Teorema 2.2.1.** Neka je $X$ Hilbertov prostor, $\emptyset \neq U \subset X$, konveksan kompaktan podskup prostora $X$, $F: X \to PX$ višeznačno preslikavanje polu-neprekidno odozgo i $U \subset \mathrm{intDom}(F)$, $F(u)$ je konveksan i kompaktan za svako $u \in U$. Tada varijaciona nejednačina $VI(F,U)$ ima bar jedno rešenje.

Dokaz: Uvedimo preslikavanje $G: U \to PX$ sa

$$G(u) := u - A(F(u)),$$

gde je $A: X \to X$, linearan ograničen operator, čija egzistencija sledi iz leme 2.2.1. Iz leme 1.1.1. sledi da je $G$ polu-neprekidna odozgo i da je za svako $u \in U$, $G(u)$ konveksan kompaktan podskup prostora $X$. Prema teoremi 1.2.2. sledi da za svako $\epsilon > 0$ postoji lokalno Lipšicova funkcija $g_\epsilon: U \to X$ ( dakle neprekidna) takva da je

$$\mathrm{Graph}(g_\epsilon) \subset \mathrm{Graph}(G) + \epsilon B.$$

Neka je $(\epsilon_n)$ pozitivan nula niz i neka je

$$f_{\epsilon n}(u) := P_U(g_{\epsilon n}(u))$$

Iz činjenice da su $P_U$ i $g_{\epsilon n}$ neprekidna preslikavanja sledi da je preslikavanje

$$f_{\epsilon n}: U \to U$$

takodje neprekidno. Pošto je pored toga, $U$ konveksan i kompaktan, prema Šauderovoj teoremi, postoji $u_n \in U$ tako da je

$$u_n = f_{\epsilon n}(u_n) = P_U(g_{\epsilon n}(u_n)) \in P_U(G(u_n) + \epsilon_n B)) \subset P_U(G(u_n)) + \epsilon_n B.$$

Iz činjenice da je $G(u)$ polu-neprekidno odozgo a $P_U$ neprekidno preslikavanje sledi da je preslikavanje

$$H(u) := P_U(G(u))$$

polu-neprekidno odozgo. Niz $(u_n)$, dakle ima osobinu

$$u_n \in H(u_n) + \epsilon_n B. \tag{4}$$

Zbog kompaktnosti skupa $U$ možemo smatrati da postoji $u \in U$ tako da je $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = u$.

Iz leme 1.1.2. i (4) sledi da je

$$u \in H(u) = P_U(G(u)) = P_U(u - A(Fu)).$$

Iz poslednje relacije sledi da postoji $y \in F(u)$ tako da je

$$u = P_U(u - Ay),$$

pa je

$$(\forall v \in U)\ (u, v-u) \geq (u - Ay, v-u) \text{ tj.}$$

$$(\forall v \in U)\ \langle y, v-u \rangle \geq 0,$$

što po definiciji znači da je u rešenje varijacione nejednačine VI(F,U).■

**Teorema 2.2.2.** Neka je X Hilbertov prostor, $U \subset X$, $U \neq \emptyset$, konveksan i kompaktan podskup prostora X, $F: X \to PX$ višeznačno preslikavanje polu-neprekidno odozdo, $U \subset \text{intDom}(F)$, za sve $u \in U$, je $F(u)$ kompaktan konveksan podskup prostora X. Tada varijaciona nejednačina VI(F,U) ima bar jedno rešenje.

**Dokaz:** Neka je $G(u)$ preslikavanje definisano kao u dokazu prethodne teoreme. Pošto su $F(u)$, za svako $u \in U$, kompaktni iz polu-neprekidnosti odozdo preslikavanja F sledi polu-neprekidnost odozdo u $\epsilon$-smislu. Iz leme 1.2.2. sledi da je preslikavanje G polu-neprekidno odozdo. Pored toga $G(u)$ je kompaktan i konveksan skup za sve $u \in U$, pa iz Teoreme 1.2.3. (RefCelina), sledi da preslikavanje G ima neprekidnu selekciju g. Dakle postoji neprekidna funkcija $g: U \to X$, takva da je

$$(\forall u \in U)\ g(u) \in G(u).$$

Definišimo funkciju $f: X \to X$, sa

$$f(u) := P_U(g(u)).$$

Iz neprekidnosti projektora i funkcije g sledi neprekidnost funkcije f. Dakle, $f: U \to U$, je neprekidno preslikavanje konveksnog, kompaktnog skupa U u sam skup U, pa prema Šauderovoj teoremi o fiksnoj tački, postoji $u \in U$, takvo da je

$$u = f(u) = P_U(g(u)) \in P_U(g(u)) \in P_U(G(u)) = P_U(u - A(Fu)).$$

Iz poslednje relacije sledi da postoji $y \in F(u)$ tako da je

$$u = P_U(u - Ay).$$

Kao u dokazu prethodne teoreme dokazuje se da je u rešenje varijacione nejednačine VI(F,U).

Iz posledice 1.3.1. sledi još jedan dovoljan uslov za egzistenciju rešenja varijacione nejednačine VI(F,U).

Teorema 2.2.3. Neka je X Hilbertov prostor, $\emptyset \neq U \subset X$, konveksan i kompaktan podskup X, $F: X \to PX$ maksimalno monotono višeznačno preslikavanje polu-neprekidno odozdo, $U \subset \mathrm{intDom}(F)$. Tada varijaciona nejednačina VI(F,U) ima bar jedno rešenje.

Dokaz: Iz Posledice 1.3.1. sledi da postoji neprekidna selekcija preslikavanja F. Slično kao u dokazu prethodne teoreme se dokazuje da postoji rešenje varijacione nejednačine VI(F,U). ■

Da je kompaktnost skupa U bitna pretpostavka u prethodnim teoremama pokazuje primer koji sledi.

Primer 2.2.1.([11]) Neka je $X = R = U$, $F: R \to (0,\infty)$, $\langle x^*, x \rangle := x^* x$. Tada se varijaciona nejednačina

$$u \in U \wedge (\forall v \in U)\, F(u)(v - u) \geq 0,$$

svodi na $F(u) = 0$, što nije ispunjeno ni za jedan element $u \in U$. ■

Dakle, u slučaju kada skup U nije ograničen, da bi se obezbedila egzistencija rešenja, potrebno je uvesti neku novu pretpostavku. Zbog toga ćemo sledećom definicijom uvesti pojam koercitivnosti preslikavanja F.

Definicija 2.2.1. Neka je $\emptyset \neq U \subset X$, neograničen konveksan podskup Banahovog prostora X, $X^*$ dualan prostor prostora X. Za preslikavanje $F: X \to PX^*$ kažemo da je koercitivno na U ako i samo ako postoji $v_0 \in U$ tako da

$$(\exists z_0 \in F(v_0))(\forall y \in F(u))\ \langle y - z_0, u - v_0 \rangle / \|u - v_0\| \to +\infty$$

za $u \in U$ i $\|u\| \to +\infty$.

U slučaju kada U nije ograničen, uz uslov da je F koercitivan važi.

Teorema 2.2.4. Neka je X konačno dimenzioni Hilbertov prostor, $\emptyset \neq U \subset X$ zatvoren konveksan podskup prostora X, $F: X \to PX$, koercitivno preslikavanje za koje je $U \subset \mathrm{intDom}(F)$, za svako $u \in U$ je $F(u)$ konveksan, kompaktan podskup prostora X i ispunjen je bar jedan od uslova:

(A) F je polu-neprekidno odozgo.

(B) F je polu-neprekidno odozdo.

Tada varijaciona nejednačina VI(F,U) ima bar jedno rešenje.

Dokaz: Neka je $u_R$ rešenje varijacione nejednačine $VI(F,U\cap B[0,R])$:

$$u\in U\cap B[0,R] \wedge (\forall v\in U\cap B[0,R])\ \langle F(u),v-u\rangle \geq 0,$$

čija egzistencija sledi, pod uslovom (A) iz teoreme 2.2.1., a pod uslovom (B) iz teoreme 2.2.2.. Izaberimo R tako da bude $R \geq \|v_0\|$, gde je $v_0$ iz definicije 2.2.1.. Tada je za svako $y\in F(u_R)$ ispunjeno

$$\langle y, v_0-u_R\rangle = -\langle y-z_0, u_R-v_0\rangle + \langle z_0, u_R-v_0\rangle \leq$$

$$\leq -\langle y-z_0, u_R-v_0\rangle + \|z_0\|\|u_R-v_0\| \leq$$

$$\leq \|u_R-v_0\|(-\langle y-z_0, u_R-v_0\rangle/\|u_R-v_0\| + \|z_0\|).$$

Ukoliko bi za sve $R>0$ bilo $\|u_R\| = R$, iz poslednje relacije bi sledilo da za dovoljno veliko R važi

$$(\forall y\in F(u_R))\ \langle y, v_0-u_R\rangle < 0,$$

što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $u_R$ rešenje varijacione nejednačine $VI(F,U\cap B[0,R])$. Dakle, postoji $R>0$, za koje je $\|u_R\| < R$. Za svako $u\in U$ postoji $\epsilon>0$ tako da $u_R+\epsilon(v-u_R)\in U$. Iz činjenice da je $u_R$ rešenje varijacione nejednačine $VI(F,U\cap B[0,R])$ sledi da je

$$(\forall v\in U)\ \langle F(u_R),v-u_R\rangle \geq 0,$$

što znači da je $u_R$ rešenje varijacione nejednačine VI(F,U).∎

Za dalja razmatranja će nam biti korisna lema koja sledi.

Lema 2.2.2.(Mintina lema) Neka je $U\neq\emptyset$ zatvoren, konveksan podskup Banahovog prostora X i $F:U\to PX^*$, preslikavanje koje je monotono i polu-neprekidno odozdo. Tada

$$u\in U \wedge (\exists y\in F(u))(\forall v\in U)\ \langle y,v-u\rangle \geq 0 \qquad (5)$$

ako i samo ako

$$u\in U \wedge (\forall v\in U)(\forall y\in F(v))\ \langle y,v-u\rangle \geq 0. \qquad (6)$$

Dokaz: Pretpostavimo da važi (5). Zbog monotonije preslikavanja F je za svako $v \in U$

$$(\forall y \in F(v))(\forall z \in F(u))\ \langle y, v - u\rangle \geq \langle z, v - u\rangle. \tag{7}$$

Pošto je u rešenje varijacione nejednačine VI(F,U) (važi(5)), sledi da postoji neko $z \in F(u)$ za koje je

$$(\forall v \in U)\ \langle z, v - u\rangle \geq 0$$

pa iz (7) sledi (6).

Pretpostavimo da važi (6). Ako se u (6), umesto v uvrsti $u+(1/n)(v-u)$, dobija se

$$u \in U \wedge (\forall v \in U)(\forall y \in F(u+(1/n)(v-u))\ \langle y, v - u\rangle \geq 0. \tag{8}$$

Za svako $y \in F(u)$ postoji niz $y_n \in F(u+(1/n)(v-u))$ tako da $y_n \to y$ $(n \to \infty)$, pa iz (8) sledi

$$u \in U \wedge (\forall v \in U)(\forall y \in F(u))\ \langle y, v - u\rangle \geq 0\ ,$$

a odatle

$$u \in U \wedge (\exists y \in F(u))(\forall v \in U)\ \langle y, v - u\rangle \geq 0\ ,$$

što znači da je u rešenje varijacione nejednačine VI(F,U) tj. važi (5). ■

Teorema 2.2.5. Neka je $U \neq \emptyset$, zatvoren, konveksan podskup Hilbertovog prostora X, $F: X \to PX$, preslikavanje, koje je monotono, polu-neprekidno odozdo na konačno dimenzionim podprostorima prostora X, $U \subset \mathrm{intDom}(F)$, za sve $u \in U$ je $F(u)$ konveksan i zatvoren podskup prostora X. Tada, ako je ispunjen bar jedan od uslova

(A) U je ograničen,

(B) F je koercitivan,

varijaciona nejednačina VI(F,U) ima bar jedno rešenje.

Dokaz: Pretpostavimo da važi (A). Definišimo skupove C(v) sa

$$C(v) := \{u \in U : (\forall y \in F(u))\ \langle y, v - u\rangle \geq 0\ \}.$$

Ovako definisan skup C(v) je slabo zatvoren i ograničen. Označimo skup svih rešenja varijacione nejednačine VI(F,U) sa $U_*$. Lako se može uočiti da je

$$U_* = \bigcap_{v \in U} C(v)$$

Iz pretpostavke da je $U_* = \emptyset$ sledi da postoje $v_1, v_2, \dots, v_n \in U$ tako da je

$$C(v_1) \cap C(v_2) \cap \dots \cap C(v_n) = \emptyset. \tag{9}$$

Neka je $X_1$ podprostor prostora $X$ generisan vektorima $v_1, v_2, \dots, v_n$. Neka je $i: X_1 \to X$, kanoničko ulaganje podprostora $X_1$ u $X$, $p: X \to X_1$, preslikavanje definisano sa

$$p(x) = P_{X_1} x,\ x \in X \text{ (ortogonalna projekcija)}.$$

Preslikavanje $F_1: X_1 \to PX_1$, definisano sa

$$F_1(v) := p(F(i(v))),$$

je polu-neprekidno odozdo, $F_1(v)$ je konveksan i kompaktan za sve $v \in U \cap X_1$, pa varijaciona nejednačina $VI(F_1, U \cap X_1)$, prema teoremi 2.2.2. ima bar jedno rešenje u. Za rešenje u važi

$$u \in C(v_1) \cap C(v_2) \cap \dots \cap C(v_n)$$

što je u suprotnosti sa (9). Prema tome

$$\bigcap_{v \in U} C(v) \neq \emptyset$$

odakle i iz leme 2.2.2. sledi da varijaciona nejednačina $VI(F, U)$ ima bar jedno rešenje.

Pretpostavimo da je ispunjen uslov (B). Tada se slično kao u dokazu teoreme 2.2.4. može dokazati da varijaciona nejednačina $VI(F, U)$ ima bar jedno rešenje. Naime označimo sa $u_R$ rešenje varijacione nejednačine $VI(F, U \cap B[0,R])$:

$$u \in U \cap B[0,R] \wedge (\forall v \in U \cap B[0,R])\ \langle F(u), v - u \rangle \geq 0,$$

čija egzistencija sledi, iz dokazanog dela teoreme (A). Izaberimo $R$ tako da bude $R \geq \|v_0\|$, gde je $v_0$ iz definicije 2.2.1.. Tada je za svako $y \in F(u_R)$ ispunjeno

$$\langle y, v_0 - u_R \rangle = -\langle y - z_0, u_R - v_0 \rangle + \langle z_0, u_R - v_0 \rangle \leq$$

$$\leq -\langle y - z_0, u_R - v_0 \rangle + \|z_0\| \|u_R - v_0\| \leq$$

$$\leq \|u_R - v_0\| ( -\langle y - z_0, u_R - v_0 \rangle / \|u_R - v_0\| + \|z_0\|).$$

Ukoliko bi za sve $R>0$ bilo $\|u_R\| = R$, iz poslednje relacije bi sledilo da za dovoljno veliko $R$ važi

$$(\forall y \in F(u_R))\ \langle y, v_0 - u_R\rangle < 0,$$

što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $u_R$ rešenje varijacione nejednačine $VI(F, U\cap B[0,R])$. Dakle, postoji $R>0$, za koje je $\|u_R\| < R$. Za svako $u \in U$ postoji $\epsilon>0$ tako da $u_R+\epsilon(v-u_R)\in U$. Iz činjenice da je $u_R$ rešenje varijacione nejednačine $VI(F, U\cap B[0,R])$ sledi da je

$$(\forall v \in U)\ \langle F(u_R), v - u_R\rangle \geq 0,$$

što znači da je $u_R$ rešenje varijacione nejednačine $VI(F,U)$. ■

Ako je $F$ $\sigma$-selektibilno višeznačno preslikavanje onda iz leme 1.2.1. i teoreme 1.2.4. sledi sledeće tvrdjenje o egzistenciji rešenja varijacione nejednačine $VI(F,U)$.

Posledica 2.2.1. Neka je $X$ Hilbertov prostor, $\emptyset \neq U \subset X$ konveksan i kompaktan, $F:U\to PU$ $\sigma$-selektibilno preslikavanje koje zadovoljava uslove leme 1.2.1. Tada varijaciona nejednačina $VI(F,U)$ ima bar jedno rešenje.

Dokaz: Iz leme 1.2.1. sledi da je preslikavanje $H:U\to PU$ definisano sa

$$H(u) := P_U(u - A(F(u))),$$

gde je $A$ operator čija egzistencija sledi iz leme 2.2.1., $\sigma$-selektibilno. Iz teoreme 1.2.4. sledi da preslikavanje $H$ ima nepokretnu tačku $u$ tj. da je $u \in H(u)$ za neko $u \in U$. Slično kao u dokazu teoreme 2.2.1. se dokazuje da je $u$ rešenje varijacione nejednačine $VI(F,U)$. ■

Iz leme 2.2.2., neposredno sledi

Posledica 2.2.2. Ako su ispunjeni uslovi leme 2.2.2. , onda je skup rešenja varijacione nejednačine $VI(F,U)$, koji ćemo označavati sa $U_*$, konveksan, slabo zatvoren podskup skupa $U$. ■

Dovoljni uslovi za jedinstvenost rešenja navode se u sledećem tvrdjenju.

**Teorema 2.2.6.** Ako je $U \subset X$, konveksan zatvoren podskup Banahovog prostora X, $F: U \to PX^*$ strogo monotono skupovno preslikavanje, onda varijaciona nejednačina VI(F,U) ne može imati više od jednog rešenja.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da varijaciona nejednačina VI(F,U) ima dva različita rešenja $u_1$ i $u_2$. Tada je

$$u_1 \in U \wedge (\exists y \in F(u_1))(\forall v \in U) \langle y, v - u_1 \rangle \geq 0,$$

$$u_2 \in U \wedge (\exists z \in F(u_2))(\forall v \in U) \langle z, v - u_2 \rangle \geq 0.$$

Ako se u prvu relaciju uvrsti $v = u_2$, u drugu $v = u_1$, posle sabiranja se dobija

$$(\exists y \in F(u_1))(\exists z \in F(u_2)) \langle z - y, u_1 - u_2 \rangle \geq 0.$$

što je u suprotnosti sa činjenicom da je F strogo monotono preslikavanje. ■

## 2.3. Brauer-Tihonova aproksimacija rešenja

U ovom odeljku se razmatra aproksimacija rešenja varijacione nejednačine VI(F,U) nizom rešenja nekih pomoćnih varijacionih nejednačina. Ovakav način aproksimacije rešenja za probleme minimizacije prvi je uveo A.N.Tihonov. Analogan, opštiji rezultat koji se odnosi na aproksimaciju rešenja varijacione nejednačine sa jednoznačnim operatorom, dokazao je Brauer u radu [10].

**Teorema 2.3.1.** Neka je X refleksivan Banahov prostor, $F: X \to PX^*$, preslikavanje koje je monotono i polu-neprekidno odozdo. Dalje neka je $M: X \to X^*$, jako monotono preslikavanje sa osobinama: M je polu-neprekidno odozdo i preslikava ograničene podskupove u ograničene. Tada varijaciona nejednačina $VI(F_\epsilon, U)$:

$$u \in U \wedge (\forall v \in U) \langle F_\epsilon(u), v - u \rangle \geq 0,$$

gde je $\epsilon > 0$, $F_\epsilon(u) := F(u) + \epsilon M(u)$, $U \subset Dom(F) \cap Dom(M)$, zatvoren konveksan podskup prostora X, ima jedinstveno rešenje $u_\epsilon$ i iz $\epsilon \to 0+$ sledi da $u_\epsilon \to u^*$, gde je $u^*$ rešenje varijacione nejednačine

$$u \in U_* \wedge (\forall v \in U_*) \langle M(u), v - u \rangle \geq 0.$$

Dokaz: Iz jake monotonosti M i monotonosti F sledi jaka monotonost preslikavanja $F_\epsilon$ za $\epsilon > 0$. Iz teoreme 2.2.5. sledi da postoji bar jedno rešenje varijacione nejednačine $VI(F_\epsilon, U)$. Zbog stroge monotonosti preslikavanja $F_\epsilon$ to rešenje je jedinstveno. Označimo to jedinstveno rešenje sa $u_\epsilon$. Dokažimo sada da iz $\epsilon \to 0+$, sledi $u_\epsilon \to u^*$. Operatori F i $F_\epsilon$ su višeznačni. Dalje ćemo sa $F(u)$ ($F_\epsilon(u)$) označavati proizvoljne elemente skupova $F(u)$ ($F_\epsilon(u)$), ako to nije drugačije naglašeno. Neka je $w \in U_*$. Tada važi

$$\langle F_\epsilon(w) - \epsilon M(w), u_\epsilon - w \rangle \geq 0 \wedge \langle F_\epsilon(u_\epsilon), w - u_\epsilon \rangle \geq 0,$$

odakle sabiranjem sledi

$$\langle F_\epsilon(w) - F_\epsilon(u_\epsilon) - \epsilon M(w), u_\epsilon - w \rangle \geq 0,$$

odnosno

$$\langle F(w) - F(u_\epsilon), u_\epsilon - w \rangle + \epsilon \langle M(w) - M(u_\epsilon), u_\epsilon - w \rangle - \epsilon \langle M(w), u_\epsilon - w \rangle \geq 0,$$

tj.

$$\langle F(u_\epsilon) - F(w), u_\epsilon - w \rangle + \epsilon \langle M(u_\epsilon) - M(w), u_\epsilon - w \rangle \leq \epsilon \langle M(w), w - u_\epsilon \rangle$$

Iz monotonosti preslikavanja F sledi da je

$$m\|u_\epsilon - w\|^2 \leq \langle M(u_\epsilon) - M(w), u_\epsilon - w \rangle \leq \langle M(w), w - u_\epsilon \rangle. \quad (17)$$

Pošto M preslikava ograničene podskupove u ograničene biće za neko $C_0 \in R$, $\|M(w)\| \leq C_0$. Prema tome iz (17) sledi

$$m\|u_\epsilon - w\|^2 \leq C_0 \|u_\epsilon - w\|,$$

tj.

$$\|u_\epsilon - w\| \leq C_0 / m.$$

Dakle $u_\epsilon$, gde $\epsilon \to 0+$, je uniformno ograničeno, pa zbog toga možemo smatrati da postoji $u_0$ takvo da $u_\epsilon$ slabo konvergira ka $u_0$ kada $\epsilon \to 0+$. Dokažimo da $u_0 \in U_*$. Iz leme 2.2.2 sledi

$$(\forall v \in U)(\forall y \in F(v) + \epsilon M(v)) \langle y, v - u_\epsilon \rangle \geq 0,$$

odnosno

$$(\forall v\in U)(\forall y_1\in F(v))\ \langle y_1+\epsilon M(v), v-u_\epsilon\rangle \geq 0,\ \text{tj.}$$

$$(\forall v\in U)(\forall y_1\in F(v))\ \langle y_1, v-u_\epsilon\rangle + \epsilon\langle M(v), v-u_\epsilon\rangle \geq 0.$$

Zbog toga što M preslikava ograničene podskupove u ograničene drugi sabirak u poslednjoj relaciji teži 0, kada $\epsilon\to 0+$. Tada iz slabe konvergencije $u_\epsilon$ ka $u_0$ sledi

$$(\forall v\in U)(\forall y_1\in F(v))\ \langle y_1, v-u_0\rangle \geq 0,$$

što znači da je (sledi iz leme 2.2.2.)

$$(\forall v\in U_*)\ \langle F(u_0), v-u_0\rangle \geq 0,$$

odnosno da $u_0\in U_*$.

Označimo sa $u^*$ rešenje varijacione nejednačine $VI(M,U_*)$. Tada važi

$$(\forall v\in U_*)\ \langle M(u^*), v-u^*\rangle \geq 0,$$

Kada se u (17) w zameni sa $u^*$ dobija se

$$m\|u_\epsilon-u^*\|^2 \leq \langle M(u_\epsilon)-M(u^*), u_{\epsilon n}-u^*\rangle \leq \langle M(u^*), u^*-u_\epsilon\rangle \qquad (18)$$

tj.

$$m\|u_\epsilon-u^*\|^2 \leq \langle M(u^*), u^*-u_0\rangle + \langle M(u^*), u_0-u_\epsilon\rangle.$$

U poslednjoj nejednakosti prvi sabirak je manji ili jednak od nule(jer je $u^*$ rešenje varijacione nejednačine $VI(M,U_*)$), a drugi teži 0 (zbog slabe konvergencije $u_\epsilon$ ka uo ) pa sledi da $\|u_\epsilon-u^*\|\to 0(\epsilon\to 0+)$ tj. $u_\epsilon\to u^*(\epsilon\to 0+)$.■

Za operator M, u slučaju kada je X Hilbertov prostor, može se izabrati da je $M(u)=u$. Tada je $m=1$. U teoremi koja sledi biće dokazano da niz tačaka generisan algoritmom

$$u_{n+1}\in P_U(u_n-\alpha_n(F(u_n)+\epsilon_n u_n)) \qquad (19)$$

konvergira, pod odredjenim pretpostavkama, ka rešenju varijacione nejednačine $VI(F,U)$.

Teorema 2.3.2. Neka je X Hilbertov prostor, $F:X\to PX$ preslikavanje koje je monotono, polu-neprekidno odozdo i zadovoljava uslov

$$(\forall u\in U)(\exists y\in F(u))\ \|y\| \leq L(1+\|u\|). \qquad (20)$$

Dalje, neka je U ograničen, zatvoren, konveksan podskup prostora X, $U \subset Dom(F)$ i $U_* \neq \emptyset$. Neka su $(\alpha_n)$ i $(\epsilon_n)$ realni nizovi koji ispunjavaju uslove:

$\alpha_n > 0$, $\epsilon_n > 0$, $\sum \alpha_n \epsilon_n$ divergira, $\epsilon_n \to 0$, $\alpha_n \to 0$, $\alpha_n = o(\epsilon_n)$, $\sum \alpha_n^2$ konvergira.

Tada niz tačaka generisanih algoritmom (19) konvergira, u normi prostora X, ka rešenju varijacione nejednačine VI(F,U) sa najmanjom normom.

Dokaz: Označimo sa $u_{\epsilon n}$ rešenje varijacione nejednačine

$$u \in U \wedge (\forall v \in U)\ \langle F(u) + \epsilon_n u, v - u \rangle \geq 0,$$

čija egzistencija i jedinstvenost sledi iz teoreme 2.3.1. Primetimo da je rešenje varijacione nejednačine $VI(M, U_*)$, za $M(u) = u$, element skupa $U_*$ sa najmanjom normom. Neka je $(u_n)$ niz generisan algoritmom (19). Važi

$$\|u_{n+1} - u_{\epsilon n+1}\| \leq \|u_{n+1} - u_{\epsilon n}\| + \|u_{\epsilon n} - u_{\epsilon n+1}\|. \qquad (21)$$

Zbog jake monotonosti preslikavanja $F_{\epsilon n}$ je

$$(\forall y \in F_{\epsilon n}(u_{\epsilon n+1}))(\forall z \in F_{\epsilon n}(u_{\epsilon n}))\ \langle z - y, u_{\epsilon n} - u_{\epsilon n+1} \rangle \geq \epsilon_n \|u_{\epsilon n} - u_{\epsilon n+1}\|^2. \quad (22)$$

Iz činjenice da je $u_{\epsilon n}$ rešenje varijacione nejednačine $VI(F_{\epsilon n}, U)$, sledi da postoji $z_n \in F_{\epsilon n}(u_{\epsilon n})$ tako da je

$$(\forall v \in U)\ \langle z_n, v - u_{\epsilon n} \rangle \geq 0. \qquad (23)$$

Iz (22) i (23) sledi

$$(\forall y \in F_{\epsilon n}(u_{\epsilon n+1}))\ \epsilon_n \|u_{\epsilon n} - u_{\epsilon n+1}\|^2 \leq \langle y, u_{\epsilon n+1} - u_{\epsilon n} \rangle \leq$$

$$\leq \langle y - z_{n+1}, u_{\epsilon n+1} - u_{\epsilon n} \rangle \qquad (24)$$

gde je $z_{n+1} \in F_{\epsilon n+1}(u_{\epsilon n+1})$ za koji je

$$(\forall v \in U)\ \langle z_{n+1}, v - u_{\epsilon n+1} \rangle \geq 0\,.$$

Primetimo da je $z_{n+1} = z_{n+1}^* + \epsilon_{n+1} u_{\epsilon n+1}$, za neko $z_{n+1}^* \in F(u_{\epsilon n+1})$; kao i da je $y \in F_{\epsilon n}(u_{\epsilon n+1})$ oblika $y = y_{n+1}^* + \epsilon_n u_{\epsilon n+1}$ za neko $y_{n+1}^* \in F(u_{\epsilon n+1})$.

Iz (24) za $y_{n+1}^* = z_{n+1}^*$ (tj. $y = z_{n+1}^* + \epsilon_n u_{\epsilon n+1}$) sledi da je

$$\epsilon_n \|u_{\epsilon n} - u_{\epsilon n+1}\|^2 \leq (\epsilon_n - \epsilon_{n+1}) \langle u_{\epsilon n+1}, u_{\epsilon n+1} - u_{\epsilon n} \rangle \leq C_0(\epsilon_n - \epsilon_{n+1}) \|u_{\epsilon n} - u_{\epsilon n+1}\|,$$

gde je $\|u_{\epsilon n+1}\| \leq C_0$, $(n \in N)$, odakle je

$$\|u_{\epsilon n} - u_{\epsilon n+1}\| \leq C_0(\epsilon_n - \epsilon_{n+1})/\epsilon_n . \tag{25}$$

Dalje je za sve $y \in F(u_n)$,

$$\|u_{\epsilon n} - u_{n+1}\|^2 = \|P_U(u_n - \alpha_n(F_{\epsilon n}(u_n)) - P_U(u_{\epsilon n})\|^2 \leq$$

$$\leq \|u_n - u_{\epsilon n} - \alpha_n(y + \epsilon_n u_n)\|^2 =$$

$$= \|u_n - u_{\epsilon n}\|^2 - 2\alpha_n \langle y + \epsilon_n u_n, u_n - u_{\epsilon n}\rangle + \alpha_n^2 \|y + \epsilon_n u_n\|^2. \tag{26}$$

Takodje je

$$(\forall y \in F(u_n))(\forall z \in F(u_{\epsilon n}))\ \langle y + \epsilon_n u_n, u_n - u_{\epsilon n}\rangle = \langle z + \epsilon_n u_{\epsilon n}, u_n - u_{\epsilon n}\rangle -$$

$$- \langle z + \epsilon_n u_{\epsilon n} - (y + \epsilon_n u_n), u_n - u_{\epsilon n}\rangle = \langle z + \epsilon_n u_{\epsilon n}, u_n - u_{\epsilon n}\rangle +$$

$$+ \langle y - z, u_n - u_{\epsilon n}\rangle + \epsilon_n \|u_n - u_{\epsilon n}\|^2 . \tag{27}$$

Neka je $z_n \in F(u_{\epsilon n})$, tako da $\langle z_n + \epsilon_n u_{\epsilon n}, u_n - u_{\epsilon n}\rangle \geq 0$. Iz (27), za $z=z_n$ sledi

$$(\forall y \in F(u_n))\ \langle y + \epsilon_n u_n, u_n - u_{\epsilon n}\rangle \geq \epsilon_n \|u_n - u_{\epsilon n}\|^2 . \tag{28}$$

Dalje, iz uslova (20) sledi

$$(\exists y \in F(u_n))\ \|y + \epsilon_n u_n\|^2 \leq (\|y\| + \|\epsilon_n u_n\|)^2 \leq$$

$$\leq (L(1 + \|u_n\|) + \epsilon_n \|u_n\|)^2 \leq C_3(1 + \|u_n\|)^2 \tag{29}$$

i

$$1 + \|u_n\| \leq 1 + \|u_n - u_{\epsilon n}\| + \|u_{\epsilon n}\| \leq \|u_n - u_{\epsilon n}\| + C_0 + 1,$$

odakle posle kvadriranja sledi

$$(1 + \|u_n\|)^2 \leq (\|u_n - u_{\epsilon n}\| + C_0 + 1)^2 =$$

$$= \|u_n - u_{\epsilon n}\|^2 + (C_0 + 1)^2 + 2(C_0 + 1)\|u_n - u_{\epsilon n}\| \leq$$

$$\leq \|u_n - u_{\epsilon n}\|^2 + (C_0 + 1)^2 + (\|u_n - u_{\epsilon n}\|^2 + 1)(C_0 + 1) =$$

$$= C_3 \|u_n - u_{\epsilon n}\|^2 + C_4. \tag{30}$$

Iz (25), (26), (27), (28), (29) i (30) sledi

$$\|u_{n+1} - u_{\epsilon n}\|^2 \leq \|u_n - u_{\epsilon n}\|^2 (1 - \alpha_n \epsilon_n + \alpha_n^2 C_3) + C_4 \alpha_n^2, \text{ tj.}$$

$$\|u_{n+1} - u_{\epsilon n}\| \leq (\|u_n - u_{\epsilon n}\|^2 (1 - \alpha_n \epsilon_n + \alpha_n^2 C_3) + C_4 \alpha_n^2)^{1/2}.$$

Prema tome za niz $b_n = \|u_n - u_{\epsilon n}\|$ važi

$$0 \leq b_{n+1}^2 \leq b_n^2(1 - s_n) + d_n,$$

pri čemu je

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (\alpha_n\epsilon_n - \alpha_n^2 C_3) = 0, \lim_{n\to\infty} (d_n/s_n) = \lim_{n\to\infty} (C_4\alpha_n^2/(\alpha_n\epsilon_n + \alpha_n^2 C_3)) = 0.$$

Prema lemi 2.3.4. ([44]) sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_{\epsilon n}\| = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Zbog

$$\|u_n - u_*\| \leq \|u_n - u_{\epsilon n}\| + \|u_{\epsilon n} - u_*\|,$$

i $\|u_{\epsilon n} - u_*\| \to 0$ ($\epsilon_n \to 0$), gde je $u_*$ rešenje varijacione nejednačiune VI(F,U) sa minimalnom normom. Prema tome, niz $(u_n)$ generisan algoritmom (19) konvergira ka $u_*$. ∎

## 2.4. Varijacione nejednačine sa parametrom.

Neka su X i Y Banahovi prostori. Razmotrimo varijacionu nejednačinu $VI(F_\lambda, U(\lambda))$, gde je $\lambda \in \Lambda \subset Y$, parametar od koga zavise operator F i skup dopustivih tačaka U. Označimo sa $U_*(\lambda)$ skup rešenja varijacione nejednačine $VI(F_\lambda, U(\lambda))$. U sledećoj teoremi se navodi jedna osobina skupa $U_*(\lambda)$.

Teorema 2.4.1. Neka su X i Y Banahovi prostori, $\Lambda \subset Y$ kompaktan podskup prostora Y, $U(\lambda)$ neprazan podskup prostora X, $F_\lambda : U(\lambda) \to PX^*$ višeznačno preslikavanje polu-neprekidno odozgo po $u \in U(\lambda)$ i $\lambda \in \Lambda$. Pored toga pretpostavimo da je $F_\lambda(u)$ kompaktan za svako $u \in U(\lambda)$, $\lambda^* \in \mathrm{int}\Lambda$, da je $U(\lambda)$ preslikavanje neprekidno u tački $\lambda = \lambda^*$ i postoji okolina $W(\lambda^*)$ za koju je

$$(\forall \lambda \in W(\lambda^*))\ U_*(\lambda) \neq \emptyset.$$

Tada je preslikavanje $U_*(\lambda)$ polu-neprekidno odozgo u tački $\lambda = \lambda^*$.

Dokaz: Neka je $(\lambda_k)$ niz elemenata skupa $\Lambda$, takav da $\lambda_k \to \lambda^* (k \to \infty)$ i neka je $(u_k)$ niz elemenata skupa $X$, za koji je $u_k \in U_*(\lambda_k)$. Iz $U_*(\lambda_k) \subset U(\lambda_k)$ sledi da je $u_k \in U(\lambda_k)$. Pored toga, zbog polu-neprekidnosti odozgo, preslikavanja $U$ i kompaktnosti skupa $\Lambda$ sledi da je $U(\Lambda)$ kompaktan skup. Prema tome, možemo smatrati da postoji $u \in U(\Lambda)$ tako da $u_k \to u$ $(k \to \infty)$. Iz polu-neprekidnosti odozgo preslikavanja $U$ za $\lambda = \lambda^*$, sledi da $u \in U(\lambda^*)$ tj. da je $u$ dopustiva tačka za varijacionu nejednačinu $VI(F_{\lambda^*}, U(\lambda^*))$. Iz polu-neprekidnosti odozdo preslikavanja $U$ za $\lambda = \lambda^*$ sledi

$$(\forall v \in U(\lambda^*)) \text{ postoji niz } (v_k) \text{ takav da } v_k \in U(\lambda_k) \text{ i } \lim_{k \to \infty} v_k = v$$

Takodje za sve $k \in N$ važi

$$(\forall u_k \in U(\lambda_k))(\exists y_k \in F_{\lambda_k}(u_k)) \ \langle y_k, v_k - u_k \rangle \geq 0.$$

Iz polu-neprekidnosti odozgo višeznačnog preslikavanja $F$ i kompaktnosti skupova $\Lambda$ i $U(\Lambda)$ sledi da je $F_\Lambda(U(\Lambda))$ kompaktan skup. Zbog toga možemo smatrati da postoji $y$ tako da $y_k \to y$ $(k \to \infty)$, pa zbog polu-neprekidnosti odozgo preslikavanja $F$ i $y_k \in F_{\lambda_k}(u_k)$ sledi $y \in F_{\lambda^*}(u)$. Zbog ograničenosti bilinearne forme $\langle , \rangle$ je $\langle y, v - u \rangle \geq 0$ za svako $v \in U(\lambda^*)$, tj. $u \in U_*(\lambda^*)$, što znači da je preslikavanje $U_*: \Lambda \to PX$ polu-neprekidno odozgo u $\lambda^*$. ■

Iz navedene teoreme, u slučaju kada varijaciona nejednačina ima jedinstveno rešenje sledi posledica.

Posledica 2.4.1. Neka su $U, F, \Lambda, X, Y, \lambda^*$ kao u teoremi 2.4.1. i neka varijaciona nejednačina $VI(F_\lambda, U(\lambda))$ ima za svako $\lambda \in \Lambda$ jedinstveno rešenje $u^*(\lambda)$. Tada je funkcija $u^*: \Lambda \to X$ neprekidna u $\lambda^*$.

Dokaz: Neka je $(\lambda_k)$ niz elemenata skupa $\Lambda$, takav da $\lambda_k \to \lambda^* (k \to \infty)$. Iz teoreme 2.4.1. sledi da je $U_*(\lambda)$ polu-neprekidno odozgo u $\lambda^*$, pa zbog jedinstvenosti rešenja varijacione nejednačine sledi da $u^*(\lambda_k) \to u^*(\lambda^*) (k \to \infty)$.

# III GLAVA

# VARIJACIONE NEJEDNAČINE SA OGRANIČENJIMA

## 3.1. Karakterizacija rešenja

Definicija 3.1.1. Neka su X, Y Banahovi prostori, $S \subset Y$ je zatvoren, konveksan konus. Za preslikavanje $g:X \rightarrow Y$ se kaže da je S-konveksno ako i samo ako za sve $0<\alpha<1$ i $u_1, u_2 \in X$, važi

$$\alpha g(u_1) + (1-\alpha)g(u_2) - g(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2) \in S. \tag{1}$$

Definicija 3.1.2. Neka je X Banahov prostor, $U \subset X$ konveksan podskup prostora X. Za tačku z se kaže da je radijalna tačka skupa U ako i samo ako

$(\forall w \in U)(\exists \alpha > 0)$ tako da duž $[z, z-\alpha(w-z)] \subset U$.

Primetimo da ova osobina ne zavisi od norme prostora X. Ako U ima nepraznu relativnu unutrašnjost riU, u odnosu na neku normu prostora X, onda U ima radijalnih tačaka.

Neka je Z Banahov prostor, $b \in Z$ i $A:X \rightarrow Z$ linearan neprekidan operator. Definišimo skupove $U_1$ i $U_2$ na sledeći način

$U_1 = \{u \in X : -g(u) \in S\}$, $U_2 = \{u \in X : Au = b\}$,

gde je S zatvoren, konveksan konus u prostoru Y sa nepreznom unutrašnjošću i preslikavanje $g:X \rightarrow Y$ je neprekidno i S-konveksno.

Neka je $U = U_0 \cap U_1$, $V = U_1 \cap U_2$, pri čemu je $U_0 \subset X$ konveksan skup.
Razmatraćemo sledeće dve varijacione nejednačine

$$u \in U \wedge (\forall v \in U)\ \langle F(u), v-u \rangle \geq 0 \quad (2)$$

$$u \in V \wedge (\forall v \in V)\ \langle F(u), v-u \rangle \geq 0. \quad (3)$$

Pretpostavimo da skupovi U i V imaju radijalnih tačaka. Označimo sa H skup generatornih elemenata za $S^*$; tj. $H \subset S^*$ i $S^*$ je zatvorenje skupa $\{\alpha h : \alpha \in R_+ \wedge h \in coH\}$, gde je sa coH konveksni omotač elemenata skupa H.
Za varijacionu nejednačinu (2) važi

$$-g(u) \in S \text{ ako i samo ako } (\forall q \in H)\ \langle q, g(u) \rangle \leq 0.$$

Definišimo skupove $H_=$ i $H_<$ na sledeći način

$$H_= := \{q \in H : (\forall u \in U) \langle q, g(u) \rangle = 0\} \text{ i } H_< := H \setminus H_=.$$

Neka je P slabo* kompaktan podskup $H_<$ takav da $0 \notin coP$. Uvedimo skup $\Delta$ na sledeći način

$$\Delta = \Delta(P) = \{u \in U_0 : (\forall q \in H \setminus P)\ \langle q, g(u) \rangle \leq 0\}.$$

Neka je $K = P^*$. Iz činjenice da je $P \subset H \subset S^*$ i da je S zatvoren konveksan konus, sledi da je $K \supset S$, i $K^* = cone(clcoP)$. Za $u \in U$, definišimo $\Pi(u,P)$ kao zatvorenje konusa $cone(\Delta(P))_u$. Pošto je $intS \neq \emptyset$ ako i samo ako je skup generatornih elemenata konusa $S^*$ konveksan slabo* kompaktan skup H, za koji $0 \notin H$, sledi da je $intK \neq \emptyset$. Iz Banach-Steinhausove teoreme, $P \subset H$ je slabo* kompaktan ako i samo ako je P slabo* zatvoren ograničen u smislu norme prostora $X^*$. Označimo sa $K^*$ zatvoren konveksan konus generisan sa P.

Sledeća lema se odnosi na strukturu skupa H.

**Lema 3.1.1.** Neka $u, v \in U$, pri čemu je $u \neq v$; dalje neka je H skup generatornih elemenata za $S^*$. Tada je H unija disjunktnih konveksnih podskupova $H_<^{v-u}$ and $H_=^{v-u}$, gde je

$$H_<^{v-u} := \{q \in H : (\forall \alpha \in (0,1))\ \langle q, g(u+\alpha(v-u)) \rangle < 0\} \quad (4)$$

$$H_=^{v-u} := \{q \in H : (\forall \alpha \in (0,1))\ \langle q, g(u+\alpha(v-u)) \rangle = \langle q, g(u) \rangle = 0\} \quad (5)$$

Takodje važe sledeća tvrdjenja

$(\forall r\in\partial_u(\langle q,g(u)\rangle))\ \langle r,v-u\rangle < 0$, za $q\in H_{<}^{v-u}$ i $\langle q,g(u)\rangle = 0$ (6)

$(\forall r\in\partial_u(\langle q,g(u)\rangle))\ \langle r,v-u\rangle = 0$, za $q\in H_{=}^{v-u}$ i $\langle q,g(u)\rangle = 0$. (7)

Specijalno, ako postoji $(qg)'(u;d)$ onda je

$(qg)'(u;v-u) < 0$, za $q\in H_{<}^{v-u}$ i $\langle q,g(u)\rangle = 0$ i

$(qg)'(u;v-u) = 0$, za $q\in H_{=}^{v-u}$ i $\langle q,g(u)\rangle = 0$.

Ako je, pored toga v radijalna tačka skupa U, onda $H_{=}^{v-u} = H_{=}$ i $H_{<}^{v-u} = H_{<}$. ■

Tvrdjenje, ekvivalentno navedenoj lemi je dokazano u radu [15], u kome je razmatrana vektorska optimizacija uz konusno i operatorsko ograničenje.

U radu [7], je razmatrana varijaciona nejednačina VI(F,U), za $U=\{u\in U_0: g_i(u)\le 0, i=1,\dots,n\}$, pri čemu je $U_0$ konveksan podskup prostora X, $g_i: X\to R$ su konveksne funkcije, i F monotono višeznačno preslikavanje. Varijacionoj nejednačini VI(F,U) je pridružen sledeći sistem varijacionih nejednačina

$$(u,p)\in U_0\times R_+^n \wedge (\forall(v,q)\in U_0\times R_+^n)(\langle F(u)+\partial_u(pg)(u),v-u\rangle\ge 0 \wedge$$
$$\wedge\ \langle -g(u),q-p\rangle\ge 0).$$

U radu [7], uz pretpostavku da važi Slejterov uslov, dokazano je, da je u rešenje varijacione nejednačine VI(F,U) ako i samo ako postoji $p\in R_+^n$, takvo da je (u,p) rešenje navedenog sistema varijacionih nejednačina.

Varijacionoj nejednačini (2) pridružićemo sledeći sistem varijacionih nejednačina

$$(u,\lambda)\in\Delta\times K^*\wedge(\forall(v,\eta)\in\Delta\times K^*)(\langle\lambda_0F(u)+\partial_u(\lambda g)(u),v-u\rangle\ge 0 \wedge$$
$$\wedge\ \langle\mu-\lambda,-g(u)\rangle\ge 0) \qquad (8)$$

U sledećoj teoremi se daje karakterizacija rešenja varijacione nejednačine VI(F,U).

**Teorema 3.1.1.** Neka je $F:X \to PX^*$ višeznačno preslikavanje Banahovog prostora $X$ u njemu dualan prostor $X^*$, $S \subset Y$ zatvoren konveksan telesni konus u Banahovom prostoru $Y$. Neka je $U_0 \subset X$ konveksan podskup prostora $X$ i $U=\{u \in U_0 : -g(u) \in S\}$, pri čemu je $g:X \to Y$, $S$-konvekna funkcija, za koju postoji $(qg)'(u;d)$, za $q \in P$ i ograničen je na $\{d \in X : \|d\| \leq 1\}$. Tada

(a) Ako je uredjen par $(u,\lambda)$ rešenje sistema varijacionih nejednačina (8), za neko $\lambda_0 > 0$ onda je $u$ rešenje varijacione nejednačine (2). Ako je $u$ rešenje varijacione nejednačine (2) onda postoje $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda \in K^*$, ne istovremeno jednaki nuli, tako da je uredjen par $(u,\lambda)$ rešenje sistema varijacionih nejednačina (8).

(b) Ako skup $U$ sadrži radijalnu tačku $\neq u$, i ako je $u$ rešenje varijacione nejednačine (2), onda postoji $\lambda \in K^*$ tako da uredjen par $(u,\lambda)$ bude rešenje sistema varijacionih nejednačina (8), za $\lambda_0 = 1$.

Dokaz: (a) Iz definicije skupova $K$ i $\Delta$, sledi da je

$$u \in U \wedge -g(u) \in S \text{ ako i samo ako } u \in \Delta \wedge -g(u) \in K. \tag{9}$$

Pretpostavimo da je $(u,\lambda)$ rešenje sistema (8), za $\lambda_0 > 0$. Iz (8), tada sledi da važi

$$(\forall \mu \in K^*) \langle \mu, g(u) \rangle \leq \langle \lambda, g(u) \rangle.$$

Ukoliko bi bilo $\langle \lambda, g(u) \rangle > 0$, za $\mu = 2\lambda \in K^*$ relacija (8) ne bila zadovoljena. Ukoliko bi bilo $\langle \lambda, g(u) \rangle < 0$, za $\mu = 0.5\lambda \in K^*$ relacija (8) ne bi važila. Prema tome je $\langle \lambda, g(u) \rangle = 0$. Iz $S$-konveksnosti preslikavanja $g$ i $\lambda \in K^*$ sledi da je funkcija $\lambda g : U_0 \to R$ konveksna, pa je relacija

$$(\forall r \in \partial_u(\langle \lambda, g(u) \rangle)) \langle r, v-u \rangle \leq \langle \lambda, g(v) \rangle - \langle \lambda, g(u) \rangle \leq 0, \tag{10}$$

tačna za svako $v \in U$.

Iz (8) sledi da je $(\forall \mu \in K^*) \langle \mu, g(u) \rangle \leq 0$, odakle sledi $-g(u) \in K$. Iz (8), (9) i (10) sledi da je $u$ rešenje varijacione nejednačine (2).

Pretpostavimo da je $u \in U$ rešenje varijacione nejednačine (2). Tada postoji $r \in F(u)$ tako da važi

$$(\forall v \in U) \langle r, v-u \rangle \geq 0.$$

Definišimo neprekidno linearno preslikavanje $\int:Y\rightarrow C(P)$ na sledeći način

$(\forall y\in Y)(\forall q\in P)\int(y)(q) := q(y)$.

Neprekidnost sledi iz slabe* kompaktnosti P. Označimo sa J konus nenegativnih funkcija iz C(P). Pored toga $v\in U$ ako i samo ako

$v\in\Delta \wedge -g(v)\in K$ tj. ako i samo ako $v\in\Delta \wedge -(\int g)(v)\in J$.

Prema tome ne postoji $v\in\Delta$, za koje važi

$\langle r,v-u\rangle < 0 \wedge -(\int g)(v) \in J$.

Prema teoremi 2 u [13] i teoremi 2.5.1. u [14] sledi da postoji $\lambda_0\geq 0$ i $\rho\in J^*$ koji nisu istovremeno jednaki nuli i za koje važi

$$(\forall v\in\Delta)\ \langle\lambda_0 r,v-u\rangle + \rho(\int g)(v) \geq 0, \tag{11}$$

Za $v=u$ dobija se $\rho(\int g)(u) \geq 0$. Neka je $\rho\int=\lambda$. Tada $\lambda\in K^*\subset S^*$ , pa sledi da je $\langle\lambda,g(u)\rangle=0$. To znači da je

$$(\forall v\in\Delta)\ \langle\lambda_0 r,v-u\rangle + \langle\lambda,g(v)\rangle \geq \langle\lambda,g(u)\rangle,$$

odakle sledi da postoji $p\in\partial_u(\lambda g)(u)$ za koje je je

$$(\forall v\in\Delta)\ \langle\lambda_0 r+p,v-u\rangle \geq 0 \tag{12}$$

(b) Egzistencija $\lambda_0\geq 0$, $\lambda\in K^*$, ne istovremeno jednakih nuli, sledi iz (a). Pretpostavimo da je $\lambda_0=0$; tada $\rho\neq 0$. Neka je $v\in U$ radijalna tačka skupa U različita od u, čija egzistencija sledi iz pretpostavki teoreme. Iz kompaktnosti P sledi da se $\rho\in C(P)^*$ može predstaviti (regularnom) Radonovom merom $\omega$ na P, odnosno da je

$$(\forall\psi\in C(P))\ \rho\psi = {}_P\int\psi d\omega.$$

Iz $\rho(J)\subset R_+$, sledi da je $\omega$ nenegativna mera. Pošto je $\langle\lambda,g(u)\rangle=0$ važiće ${}_P\int\langle q,g(u)\rangle d\omega=0$. Iz $\langle q,g(u)\rangle\leq 0$ i $\omega\geq 0$, $\omega$ se može posmatrati samo na $Q_1=\{q\in Q:\langle q,g(u)\rangle=0\}$ (jer je mera razlike skupova P i $P_1$ jednaka nuli). Ali $\rho\neq 0$, $\omega\neq 0$, pa iz regularnosti mere $\omega$, sledi da je $\omega(A)>0$ za neki kompaktan skup $A\subset P_1$ Prema lemi 3.1.1. je za $q\in A$, $\psi(q)=(qg)'(u;v-u) < 0$, pa sledi da je

$$(\lambda g)'(u;v-u) = \rho\psi = {}_P\int\psi d\omega = {}_P\int(fg)'(u;v-u)d\omega = {}_P\int(qg)'(u;v-u)d\omega =$$

$$= {}_P\int\psi(q)d\omega < 0.$$

Prema tome važi

$$(\forall r \in \partial_u(\lambda g)(u))\ \langle r, v-u\rangle < 0,$$

što je u suprotnosti sa (12) za $\lambda_0=0$. Prema tome $\lambda_0 \neq 0$ pa možemo smatrati da je $\lambda_0=1$.Iz Iz $\langle \lambda, g(u)\rangle=0$ sledi da je

$$(\forall \mu \in K^*)\langle -g(u), \mu-\lambda\rangle \geq 0,$$

odnosno da je uredjen par $(u,\lambda)$ rešenje sistema (8), za $\lambda_0=1$. ■

Prva nejednakost u (8) (za $\lambda_0=1$), je ekvivalentna sa

$$0 \in F(u) + \partial_u(\lambda g)(u) - \Pi(u,P)^* \tag{13}$$

Otuda sledi

Posledica 3.1.1. Pretpostavimo da su ispunjeni uslovi teoreme 3.1.1.(b). Tada je u rešenje varijacione nejednačine (2) ako i samo ako postoji $\lambda \in K^*$ za koje je

$$0 \in F(u)+\partial_u(\lambda g)(u)-\Pi(u,P)^* \wedge (\forall \mu \in K^*)\langle \mu-\lambda, -g(u)\rangle \geq 0 \ ■ \tag{14}$$

Razmotrimo, sada, vezu izmedju teoreme 3.1.1. i rezultata u [7]. Veza izmedju navedenih tvrdjenja se može formulisati na sledeći način.

Posledica 3.1.2. Neka je u varijacionoj nejednačini VI(F,U) F višeznačni operator i

$$U=\{u \in U_0 : g_i(u) \leq 0, i=1,\dots,n\},$$

pri čemu je $U_0$ konveksan podskup Banahovog prostora X, $g_i : X \to R$ su konveksne i neprekidne funkcije. Ako je uredjen par (u,p) rešenje sistema varijacionih nejednačina

$$(u,p) \in U_0 \times R_+^{\,n} \wedge (\forall (v,q) \in U_0 \times R_+^{\,n})(\langle F(u)+\partial_u(pg)(u), v-u\rangle \geq 0 \wedge$$

$$\wedge \langle -g(u), q-p\rangle \geq 0),$$

onda je u rešenje varijacione nejednačine VI(F,U). Ako je za skup U ispunjen Slejterov uslov (tj. za svako $p \in R_+^n$, $p \neq 0$, postoji $u \in U_0$ tako da je $\langle p, g(u) \rangle < 0$) onda važi i obratno tvrdjenje, tj. ako je u rešenje varijacione nejednačine VI(F,U), onda postoji $p \in R_+^n$, tako da je uredjen par (u,p) rešenje prethodnog sistema varijacionih nejednačina.

Dokaz: Neka je $Y = R^n$, $S = R_+^n$. Tada je $S^* = R_+^n$. Skup U se može opisati preko konusnog ograničenja, na sledeći način:

$$U = \{u \in U_0 : -g(u) \in S\},$$

pri čemu je S-konveksna funkcija $g: X \to Y$, definisana sa $g(u) := (g_1(u), \dots, g_n(u))$. Tada je za skup generatornih elemenata H, konusa $S^*$, moguće izabrati sledeći skup: $H = \{e_i : i = 1,2,\dots,n\}$, gde je $e_i$ vektor, čije su sve komponente osim i-te jednake 0, a i-ta komponenta je jednaka 1. Primetimo da ovako formulisan problem zadovoljava uslove teoreme 3.1.1.(b) i da je u slučaju, kada je zadovoljen Slejterov uslov $H = H_<$, $H_= = \emptyset$. Izaberimo skup P iz teoreme 3.1.1. tako da je $P = H_<$. U tom je slučaju $K = P^* = H^* = S$, $K^* = S^* = R_+^n$, $\Delta = U_0$, pa sledi tvrdjenje teoreme. ■

Prethodni rezultat izložen u teoremi 3.1.1. se može proširiti na varijacionu nejednačinu VI(F,V) tj na problem (3).

Teorema 3.1.2. Pretpostavimo da F, g, S zadovoljavaju uslove teoreme 3.1.1.(b) Dalje neka su X i Z Banahovi prostori i $A(X) = Z$. Tada je u za koje važi $-g(u) \in S$, $Au = b$, rešenje varijacione nejednačine (3), ako i samo ako postoje $\lambda \in K^*$ i $\sigma \in Z^*$ za koje je

$$(\forall (v,\mu) \in \Delta \times K^*) \langle F(u) + \partial_u(\lambda g)(u) - \sigma A, v - u \rangle \geq 0 \ \wedge \ \langle -g(u), \mu - \lambda \rangle \geq 0 \qquad (15)$$

Dokaz: Označimo sa W jezgro operatora A. Primenimo teoremu 3.1.1. pri ograničenju $v \in u + W$. Pretpostavimo da je u rešenje varijacione nejednačine (3). Prema posledici 3.1.1 sledi da za neko $\nu \in F(u) + \partial_u(\lambda g)(u) - \Pi(u)^*$ važi $\nu \in W^\perp$, gde je sa $W^\perp$ označen podprostor prostora $X^*$ na kome se anuliraju svi elementi $W \subset X$. Medjutim, $A(X) = Z$, $(Aw = 0 \Rightarrow \langle \nu, w \rangle = 0)$ ako i samo ako $\nu = \sigma A$ za neko $\sigma \in Z^*$ (teorema 2.2 u [11]). Prema tome, važi

$$0 \in F(u) + \partial_u(\lambda g)(u) - \nu A - \Pi(u,P)^* \ \wedge \ (\forall \mu \in K^*) \langle \mu - \lambda, -g(u) \rangle \geq 0 \qquad (16)$$

Dalje iz (16) sledi (15).

Pretpostavimo sada da postoje $\lambda \in K^*$ i $\nu \in Z^*$, za koje važi (16). Slično kao u dokazu teoreme 3.1.1. dokazuje se da je $\langle\lambda, g(u)\rangle = 0$, $-g(u) \in K$, odakle sledi da je u dopustiva tačka. Iz (15) sledi

$$(u,\lambda) \in \Delta \times K^* \wedge (\forall (v,\mu) \in \Delta \times K^*) \langle F(u) + \partial_u(\lambda g)(u), v-u\rangle \geq 0 \wedge$$

$$\wedge \langle \mu - \lambda, -g(u)\rangle \geq 0 \qquad (17)$$

Kao u dokazu teoreme 3.1.1, dokazuje se da iz (17) sledi (3). Dakle, u je rešenje varijacione nejednačine (3). ∎

## 3.2. Aproksimacija rešenja

Neka su X, Y Hilbertovi prostori, $U_0 \subset X$ zatvoren konveksan podskup prostora X i

$$U = \{u \in U_0 : -g(u) \in S\},$$

Neka je dalje $F: U \rightarrow PX$ skupovno preslikavanje. Razmotrimo sada u nekim specijalnim slučajevima neke mogućnosti za numeričko rešavanje varijacione nejednačine VI(F,U):

$$u \in U \wedge (\forall v \in U) \langle F(u), v-u\rangle \geq 0. \qquad (18)$$

U teoremi 3.1.1. je dokazano da je navedena varijaciona nejednačina, pod odredjenim uslovima, ekvivalentna sistemu (8) (za $\lambda_0 = 1$). Označimo sa $\Phi(u,\lambda)$ operator sistema varijacionih nejednačina (8) tj.

$$\Phi(u,\lambda) := (F(u) + \partial_u(\lambda g)(u), -g(u)),$$

U tvrdjenju koje sledi navodi se jedna osobina tog operatora.

Lema 3.2.1. Ako je operator F varijacione nejednačine (18) monoton, onda je operator sistema (8) (za $\lambda_0 = 1$), $\Phi(u,\lambda)$, takodje monoton.

Dokaz: $\Phi(u,\lambda)=(F(u)+\partial_u(\lambda g)(u),-g(u))$. Važi

$$\langle\Phi(u_1,\lambda_1)-\Phi(u_2,\lambda_2),(u_1,\lambda_1)-(u_2,\lambda_2)\rangle = \langle F(u_1)-F(u_2),u_1-u_2\rangle$$

$$+\langle\lambda_2,g(u_1)\rangle-\langle\lambda_2,g(u_2)\rangle-\langle\partial_u(\lambda_2 g)(u_2),u_1-u_2\rangle+\langle\lambda_1,g(u_2)\rangle$$

$$-\langle\lambda_1,g(u_1)\rangle-\langle\partial_u(\lambda_1 g)(u_1),u_2-u_1\rangle\geq 0,$$

zbog monotonosti operatora F i konveksnosti preslikavanja $\lambda g$: $U_0\to R$. ∎

Za $Y=R$ i $S=R_+$, S-konveksnost se svodi na uobičajenu konveksnost.

**Lema 3.2.2.** Neka je $F:U_0\to X$ monotono hemi-neprekidno preslikavanje, pri čemu je $U_0$ zatvoren, konveksan podskup Hilbertovog prostora X, i neka je $g:U_0\to Y$ S-konveksno preslikavanje skupa $U_0$ u Banahov prostor Y, koje ima hemi-neprekidan izvod. Tada je $\Phi(u,\lambda)$ takodje hemi-neprekidan.

Dokaz: Pretpostavimo da $p\in[0,1]$. Iz hemi-neprekidnosti preslikavanja F, g, g′ sledi da je preslikavanje

$$p\to\langle\Phi(u+pv,\lambda+p\mu),(w,\omega)\rangle=\langle(F(u+pv)+(\lambda+p\mu)g'(u+pv),-g(u+pv)),(w,\omega)\rangle$$

$$=\langle F(u+pv),w\rangle+\langle\lambda g'(u+pv),w\rangle+p\langle\mu g'(u+pv),w\rangle-\langle g(u+pv),\omega\rangle,$$

neprekidno za sve $w\in X$, i $\omega\in X^*$. ∎

Koristeći rezultate iz [4, 5, 6, 7] može se pokazati da niz tačaka generisanih algoritmom

$$u_{n+1}=P_\Delta(u_n-\alpha_n(F(u_n)+\partial_u(\lambda_n g)(u_n)+\epsilon_n u_n)), \tag{19}$$

$$\lambda_{n+1}=P_{K^*}(\lambda_n+\alpha_n(g(u_n)-\epsilon_n\lambda_n)), \tag{20}$$

konvergira ka rešenju sistema (8). Naime važi sledeće tvrdjenje:

**Teorema 3.2.1.** Neka su X, Y Hilbertovi prostori, $U_0$ zatvoren konveksan podskup X, $U_*\neq\emptyset$ i ima bar jednu radijalnu tačku (koja ne pripada $U_*$). Dalje, neka je $F:X\to X$ monotono hemi-neprekidno preslikavanje za koje je $Dom(F)\supset U_0$, $g$: $U_0\to Y$ S-konveksno preslikavanje Banahovog prostora X u Banahov prostor Y, koje ima hemi-neprekidan i ograničen izvod. Takodje, pretpostavimo da realni nizovi $(\alpha_n)$, $(\epsilon_n)$ zadovoljavaju uslove:

$$\alpha_n \geq 0,\ \epsilon_n > 0,\ \epsilon_n \leq \epsilon_{n-1},\ \epsilon_n \to 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \epsilon_n = \infty,\ \epsilon_n/\epsilon_{n+1} = 1 + o(\alpha_n \epsilon_n),$$

i da je zadovoljen bar jedan od uslova (A) i (B),

(A) 1. $(\exists L>0)(\forall u \in U_0)\|F(u)\| \leq L(1+\|u\|)$

2. $\alpha_n = o(\epsilon_n)$

(B) 1. $(\exists L>0)(\forall u,v \in U_0)\|F(u)-F(v)\| \leq L\|u-v\|$.

2. $\limsup_{n\to\infty} (\alpha_n/\epsilon_n) \leq 1/L^2$.

Tada niz tačaka generisanih algoritmom (19), (20) konvergira ka rešenju sistema (8) (za $\lambda_0 = 1$), sa minimalnom normom, a niz $(u_n)$ konvergira ,u normi prostora X, ka $u^*$, gde je sa $u^*$ označeno jedno rešenje varijacione nejednačine (18).

Dokaz: Tvrdjenje sledi iz teoreme 3 u ([4]). Pokazaćemo da operator $\Phi : U_0 x S^* \to X^* x S$ zadovoljava uslove teoreme 3 ([4]). Stvarno, ako je F jednoznačno hemi-neprekidno preslikavanje, onda to važi i za $\Phi$. Bez smanjenja opštosti možemo smatrati da je

$(\forall u \in U_0)\ \|g'(u)\| \leq L$.

U sučaju kada važi (A) imamo

$\|\Phi(u,\lambda)\| = \|(F(u)+(\lambda g)'(u), -g(u))\|$

$\leq \|F(u)\| + \|(\lambda g)'(u)\| + \|g(u)\| \leq \|F(u)\| + \|\lambda\| \|g'(u)\| + \|g(u)\|$

$\leq 2L(1+\|u\|+\|\lambda\|)$

Dakle $\Phi(u,\lambda)$ zadovoljava uslov (A) u teoremi 3 ([4]).

Pretpostavimo sada da važi (B). Tada

$\|\Phi(u_1,\lambda_1)-\Phi(u_2,\lambda_2)\| = \|F(u_1)-F(u_2)+(\lambda_1 g)'(u_1)-(\lambda_2 g)'(u_2)\| + \|g(u_2)-g(u_1)\|$

$\leq \|F(u_1)-F(u_2)\| + \|(\lambda_1 g)'(u_1)-(\lambda_2 g)'(u_2)\| + \|g(u_2)-g(u_1)\|$

$\leq 2L(\|u_1-u_2\| + \|\lambda_1-\lambda_2\|)$.

Prema tome $\Phi(u,\lambda)$ zadovoljava uslov (B) teoreme 3 u ([4]). ■

Primer 3.3.1. ([4]) Lako se može pokazati da nizovi $(\alpha_n)$ i $(\epsilon_n)$ definisani kao što sledi, zadovoljavaju uslove teoreme 3.3.1.

(a) $\alpha_n = n^{-0.5}$, $\epsilon_n = n^{-p}$ $(0 < p < 0.5)$

(b) $\alpha_n = k\epsilon_n$, $\epsilon_n = n^{-p}$ $(0 < p \leq 0.5)$, $k < 2/(L+C)^2$ ■

Ukoliko je dopustivi skup U definisan sa

$$U = \{u \in U_0 : -g(u) \in S \wedge G(u) = 0\}, \tag{21}$$

gde su $U_0$, g, S, kao u teoremi 3.2.1., i $G:X \to Z$ je operator, koji preslikava Banahov prostor X u Banahov prostor Z, pri čemu je funkcional $\|G(u)\|^p$ konveksan i operator $(\|G(u)\|^p)'$ $(p \geq 1)$ je jako monoton, slično prethodnoj teoremi može se dokazati sledeće tvrdjenje.

Teorema 3.2.2. Pretpostavimo da varijaciona nejednačina (18), pri čemu je U definisano sa (21), ima rešenja, i neka su F, g, X, Y kao u teoremi 3.2.1. Neka je $G:X \to Z$ operator koji preslikava Banahov prostor X u Banahov prostor Z, pri čemu je funkcional $\|G(u)\|^p$ konveksan, a njegov izvod $(\|G(u)\|^p)'$ $(p \geq 1)$ jako monoton. Takodje, pretpostavimo da realni nizovi $(\alpha_n)$, $(\epsilon_n)$ zadovoljavaju uslove.

$$\alpha_n \geq 0,\ \epsilon_n > 0,\ \epsilon_n \leq \epsilon_{n-1},\ \epsilon_n \to 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \epsilon_n = \infty,\ \epsilon_n/\epsilon_{n+1} = 1 + o(\alpha_n \epsilon_n),$$

i da je zadovoljen bar jedan od uslova (A) i (B):

(A) 1. $(\exists L>0)(\forall u \in U_0)\ (\|F(u)\| \leq L(1+\|u\|) \wedge \|(\|G(u)\|^p)'\| \leq L(1+\|u\|))$

2. $\alpha_n = o(\epsilon_n)$

(B) 1. $(\exists L>0)(\forall u,v \in U_0)(\|F(u) - F(v)\| \leq L\|u - v\| \wedge$

$$\wedge\ \|(\|G(u)\|^p)' - (\|G(v)\|^p)'\|\ L\|u - v\|).$$

2. $\limsup_{n \to \infty} (\alpha_n/\epsilon_n) \leq m/L^2$.

Tada za $p \geq 1$ niz tačaka generisanih algoritmom

$$u_{n+1} = P_\Delta(u_n - \alpha_n(F(u_n) + \partial_u(\lambda_n g)(u_n) + \epsilon_n(\|G(u_n)\|^p)')$$

$$\lambda_{n+1} = P_{K^*}(\lambda_n + \alpha_n(g(u_n) - \epsilon_n \lambda_n))$$

$$u_{n+1} = P_\Delta(u_n - \alpha_n(F(u_n) + \partial_u(\lambda_n g)(u_n) + \epsilon_n(\|G(u_n)\|^p)'))$$

$$\lambda_{n+1} = P_{K^*}(\lambda_n + \alpha_n(g(u_n) - \epsilon_n\lambda_n))$$

konvergira ka rešenju sistema (8) (za $\lambda_0=1$), koje ima osobinu da je $\|G(u)\|$ minimalna tj. niz $(u_n)$ konvergira, u normi prostora X, ka nekom elementu skupa $U_*$, pri čemu je sa $U_*$ označen skup rešenja varijacione nejednačine (18), sa dopustivim skupom U koji je definisan sa (21). ■

Za aproksimaciju rešenja varijacione nejednačine sa višeznačnim operatorom, primenićemo rezultate izložene u teoremama 2.3.1., 2.3.2. i 3.1.1. Prema teoremi 3.1.1. varijaciona nejednačina VI(F,U) je ekvivalentna sistemu (8). U tvrdjenju koje sledi ćemo pokazati da operator sistema (8) zadovoljava uslove teorema 2.3.1. i 2.3.2..

Lema 3.2.3. Neka su X i Y Hilbertovi prostori, F: $U_0 \to PX$ višeznačno preslikavanje, polu-neprekidno odozdo, g: $U_0 \to Y$ neprekidno diferencijabilna S-konveksna funkcija. Tada je operator $\Phi(u,\lambda) := (F(u) + \partial_u(\lambda g)(u), -g(u))$ polu-neprekidan odozdo.

Dokaz: Pretpostavimo da $y_0 \in \Phi(u_0,\lambda_0)$ i.e. $y_0 = (y^* - r(u_0), -g(u_0))$, pri čemu je $y^* \in F(u_0)$, $r(u) = \langle g(u), g(u)\rangle'$. Pretpostavimo, takodje da je $W(y_0)$ neka otvorena okolina $y_0$. Iz polu-neprekidnosti odozdo preslikavanja F i neprekidnosti r, prema lemi 1.1.3., sledi da je preslikavanje $F(u) - \langle g(u), g(u)\rangle'$ polu-neprekidno odozdo , takodje. Dakle, za okolinu $W(y_0)$, postoji okolina $W_0(u_0)$ za koju je ispunjeno

$$(\forall u \in W_0(u_0))\ (F(u) - \langle g(u), g(u)\rangle') \cap W(y_0) \neq \emptyset .$$

Iz neprekidnosti funkcije g, sledi da za svaku okolinu $M(g(u_0))$, postoji okolina $W_1(u_0)$ za koju je

$$(\forall u \in W_1(u_0))\ g(u) \in M(g(u_0)).$$

Dakle, za svaku okolinu $O(y_0)$ elementa $y_0$, postoji okolina elementa $(u_0,\lambda_0)$,

$$V(u_0,\lambda_0) = (W_1(u_0) \cap W_0(u_0)) \times M(\lambda_0),$$

za koju je

$$(\forall u \in W_1(u_0) \cap W_0(u_0))(\forall \lambda \in M(\lambda_0)\ \Phi(u,\lambda) \cap O(y_0) \neq \emptyset.$$

Prema tome, dokazano je da je operator $\Phi(u,\lambda)$ polu-neprekidan odozdo. ■

Iz leme 3.2.1. i teoreme 2.3.1. sledi, kao posledica sledeće tvrdjenje.

Posledica 3.2.1. Neka su X, Y Hilbertovi prostori, $S \subset Y$ zatvoren konveksan telesni konus, $U_0$ neprazan zatvoren konveksan podskup prostora X, $F:X \rightarrow PX$ monotono višeznačno preslikavanje, polu-neprekidno odozdo, $g:X \rightarrow X$ S-konveksno i neprekidno diferencijabilno preslikavanje. Takodje, pretpostavimo da varijaciona nejednačina VI(F,U) ima bar jedno rešenje. Tada sistem varijacionih nejednačina

$$(u,\lambda) \in \Delta x K^* \wedge (\forall (v,\mu) \in \Delta x K^*)(\langle F(u) + (\lambda g)'(u) + \epsilon u, v-u \rangle \geq 0 \wedge$$
$$\wedge \langle \mu - \lambda, -g(u) + \epsilon\lambda \rangle \geq 0) \qquad (22)$$

za svako $\epsilon > 0$, ima jedinstveno rešenje $(u_\epsilon,\lambda_\epsilon)$ i iz $\epsilon \rightarrow 0+$, sledi da $(u_\epsilon,\lambda_\epsilon) \rightarrow (u^*,\lambda^*)$, gde je sa $(u^*,\lambda^*)$ označeno rešenje sistema varijacionih nejednačina (8) (za $\lambda_0=1$), sa najmanjom normom. ■

Iz teoreme 2.3.1. i lema 3.2.1. i 3.2.3. sledi

Posledica 3.3.2. Neka su X, Y Hilbertovi prostori, $S \subset Y$ zatvoren konveksan telesni konus, $U_0$ neprazan zatvoren konveksan podskup prostora X, $F:X \rightarrow PX$ monotono višeznačno preslikavanje, polu-neprekidno odozdo, $g:X \rightarrow X$ S-konveksno i neprekidno diferencijabilno preslikavanje. Dalje, pretpostavimo da varijaciona nejednačina VI(F,U) ima bar jedno rešenje. Takodje, neka su za realne nizove $(\alpha_n)$ i $(\epsilon_n)$ ispunjeni uslovi:

$$\alpha_n > 0,\ \epsilon_n > 0,\ \sum \alpha_n \epsilon_n \text{ divergira},\ \epsilon_n \rightarrow 0,\ \alpha_n \rightarrow 0,\ \alpha_n = o(\epsilon_n),\ \sum \alpha_n^2 \text{ konvergira}.$$

Tada niz tačaka generisanih algoritmom (19), (20) konvergira ka rešenju sistema varijacionih nejednačina (8), (za $\lambda_0=1$), sa minimalnom normom, odnosno niz $(u_n)$ konvergira ka nekom rešenju varijacione nejednačine VI(F,U) ■

Pretpostavimo da je $U \subset X$ definisan sa

$$U = \{u \in U_0 : -g(u) \in S \wedge Au = b\},$$

**Lema 3.2.4.** Ako je par $(u,\lambda)$ rešenje sledećeg sistema varijacionih nejednačina

$$(u,\lambda)\in V_0 x S^* \wedge (\forall (v,\mu)\in V_0 x S^*)(\langle F(u)+\partial_u(\lambda g)(u), v-u\rangle \geq 0 \wedge$$

$$\wedge \langle \mu-\lambda, -g(u)\rangle \geq 0) \qquad (23)$$

onda je u rešenje varijacione nejednačine (18).

Dokaz: Pretpostavimo da je par $(u,\lambda)$ rešenje sistema (23). Tada iz druge nejednačine u (23), sledi da je $\langle \lambda, g(u)\rangle = 0$ i za svako $\mu\in S^*$, $\langle \mu, g(u)\rangle \leq 0$. Odatle imamo da je

$$-g(u)\in (S^*)^* = S$$

pa je $u\in U$. Neka je $v\in U$. Tada važi

$$0 \geq \langle \lambda, g(v)\rangle = \langle \lambda, g(v)\rangle - \langle \lambda, g(u)\rangle \geq \langle \partial_u(\lambda g)(u), v-u\rangle .$$

Iz prve nejednakosti u (23) sledi

$$u\in U \wedge (\forall v\in U) \langle F(u), v-u\rangle \geq 0.$$

Prema tome u je rešenje varijacione nejednačine (18). ∎

Napomena 3.2.1. Iz prethodnog tvrdjenja sledi da će posledica 3.2.1. važiti ako se svuda $\Delta$ zameni sa $V_0$ (odnosno sa $U_0$) a $K^*$ sa $S^*$, i pretpostavi da sistem varijacionih nejednačina (23) ima rešenja. Takodje posledica 3.2.2. ostaje na snazi ako se u algoritmu (19), (20) izvrši ista zamena i pretpostavi egzistencija rešenja sistema (23).

Navedimo na kraju jednu egzistencijalnu teoremu za varijacione nejednačine sa konusnim ograničenjem.

**Teorema 3.2.3.** Neka je $U_0$ kompaktan konveksan podskup Hilbertovog prostora X i neka je $F:U_0\to PX$ višeznačno monotono preslikavanje, sa kompaktnim slikama, koje je polu-neprekidno odozdo. Dalje, neka je $g:U_0\to Y$, S-konveksna neprekidno diferencijabilna funkcija, gde je $S\subset Y$ zatvoren konveksan telesni konus Banahovog prostora Y. Tada varijaciona nejednačina VI(F,U), gde je U definisano relacijom,

$$U = \{u\in U_0 : -g(u)\in S\} \neq \emptyset,$$

ima bar jedno rešenje.

konveksan telesni konus Banahovog prostora Y. Tada varijaciona nejednačina VI(F,U), gde je U definisano relacijom,

$$U = \{u \in U_0 : -g(u) \in S\} \neq \emptyset,$$

ima bar jedno rešenje.

Dokaz: Iz leme 3.3.3. sledi da je $\Phi(u,\lambda)$ polu-neprekidno odozdo. Pored toga iz S-konveksnosti funkcije g sledi da je U konveksan. Za svako $u \in U_0$ je F(u) kompaktan konveksan skup, pa je zbog toga $\Phi(u,\lambda)$ takodje konveksan i kompaktan za sve $(u,\lambda) \in U_0 x S^*$. Neka je $(u_k)$ proizvoljan niz elemenata skupa U. Zbog kompaktnosti $U_0$ možemo da pretpostavimo, bez smanjenja opštosti, da niz $(u_k)$ konvergira ka nekom elementu $u \in U_0$. Iz $u_k \in U$ sledi da je $-g(u_k) \in S$, pa iz neprekidnosti funkcije g sledi da je $-g(u) \in S$. Pored toga je $u \in U_0$ pa $u \in U$.

Dakle, operator $\Phi(u,\lambda)$ je polu-neprekidan odozdo (prema lemi 3.2.3.), sa konveksnim i kompaktnim slikama, skup U je konveksan i kompaktan. Iz teoreme 2.2.2. sledi egzistencija rešenja sistema varijacionih nejednačina (23), pa prema lemi 3.2.4., kada se umesto $V_0$ zameni $U_0$, sledi egzistencija rešenja VI(F,U). ∎

## BIBLIOGRAFIJA:

[1] Aljančić S., Uvod u realnu i funkcionalnu analizu, Gradjevinska knjiga, Beograd 1979.

[2] Ahn B.H., Solution of Nonsymetric Linear Complementarity Problems by Iterative Methods, JOTA vol 33, N° 2 1981.

[3] Aubin J.P., Celina A., Differential Inclusions (Set-valued map and Viability Theory), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo 1984.

[4] Bakušinskij A.B. , Poljak B.T., O resenii variacionnih neravenstv, DAN SSSR 1974, tom 219, N° 5, pp. 1038-1041.

[5] Bakušinskij A.B., Reguljarizujusci algorithm na osnove metoda Njutona-Kantorovica dlja resenija variacionnih neravenstv, ZVMMF 1976, tom 16, N° 6, pp. 1397-1404.

[6] Bakušinskij A.B., Metodi resenija monotonnih variacionnih neravenstv, osnovanie na principe iterativnoj reguljarizacii, ZVMMF 1977, N° 6, pp. 1350-1362.

[7] Bakušinskij A.B., Ekvivalentnie preobrazovanija variacionnih neravenstv i ih ispolzovanie, DAN SSSR 1979, tom 247, N° 6, pp. 1297-1300.

[8] Bakušinskij A.B., Gončarskij A.V., Nekorrektnie zadači, čislennie metodi i priloženija, Izdateljstvo Moskovskogo Univerziteta, Moskva 1989.

[9] Browder F., Nonlinear monotone operators and convex sets in Banach spaces, Bull.Amer.Math.Soc. 71, 1965., 780-785.

[10] Browder F.E., Existence and Approximation of Solutions of Variational Inequalities, Proc. N.A.S., 1966, vol 56, pp. 1080-1086.

[11] Chivot M. Variational Inequalities and Flow in Porous Media, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo 1982.

[12] Craven B.D., Nonlinear programming in locally convex spaces, JOTA 1972, N$^{o}$10, pp. 197-210.

[13] Craven B.D. and Mond B., Transposition Theorems for cone-convex functions, SIAM J.Appl. Math. 24, 1973, pp. 603-612.

[14] Craven B.D., Mathematical Programming and Control Theory, Chapman and Hall, London 1978.

[15] Craven B.D. and Zlobec S., Complete characterization of optimality forconvex programming in Banach Spaces, Aplicable Analysis 1980, vol 11, pp. 67-78.

[16] Dafermos S., Traffic Equilibrium and Variational Inequalities, Transportation Science 1980, vol 14, pp. 42-54.

[17] Dafermos S.C., An Iterative scheme for Variational Inequalities, Mathematical Programming 1983, vol 26, pp. 40-47.

[18] Hartman P., Stampacchia G., On some nonlinear elliptic differential functional equations, Acta Math. 115 (1966), 153-188.

[19] Jovanov Dj., Lagrange-ov princip u varijacionim nejednakostima, Zbornik radova SYM-OP-IS 87, H.Novi 1987.

[20] Jovanov Dj., Varijacione nejednačine sa konusnim ograničenjima, Zbornik radova SYM-OP-IS 88, Brioni 1988.

[21] Jovanov Dj. , Egzistencija rešenja varijacione nejednačine sa skupovnim operatorom, Zbornik radova SYM-OP-IS 90, Kupari 1990.

[22] Jovanov Dj., Variational Inequalities in Banach Spaces, Matematički vesnik, primljeno za štampu.

[23] Karamardian S., Generalized Complementarity Problem, JOTA 8, 1971, pp. 161-168.

[24] Karamardian S., The Complementarity Problem, Mathematical Programming 1972, vol 2, pp. 107-129.

[25] Kinderlehrer D., Stampacchia G. An Introduction to Variational Inequalities and Applications, Academic Press, New York 1980.

[26] Lions J.L.Stampacchia G. , Variational Inequalities, Comm.Pure Appl.Math., 20, 1967, pp. 493-519.

[27] Mancino O. and Stampachia G. Convex Programming and Variational Inequalities,JOTA 1972, vol 9, pp. 3-23.

[28] Moreau J.J., Principes extremaux pour le probleme de la naissance de la cavitation, J.Mecanique 5, 1966, 439-470.

[29] McLinden L., The Complementarity Problem for Maximal Monotone Multifunctions, Variational Inequalities and Complementarity Problems, Theory and Applications, Edited by R.W.Cottle, Department of Operatons Research, Stanford University, F. Giannessi, Department of Matematics, University of Pisa, J.L.Lions, College de France, John Wiley and Sons, Chichester New York Brisbane Toronto, 1980.

[30] Pang J. and Chan D., Iterative Methods for Variational and Complementarity Problems, Mathematical Programming 1982, vol 24, pp. 284-313.

[31] Rockafellar R.T., Convex programming and systems of elementary monotonic relations. J.Math.Anal.Appl. 1967., N$^{o}$ 19, pp. 543-564.

[32] Rockafellar R.T., Convex Analysis, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey 1970.

[33] Rockafelar R.T. , Lagrange Multipliers and Variational Inequalities, Variational Inequalities and Complementarity Problems, Theory and Applications, Edited by R.W.Cottle, Department of Operatons Research, Stanford University, F. Giannessi, Department of Matematics, University of Pisa, J.L.Lions, College de France, John Wiley and Sons, Chichester New York Brisbane Toronto, 1980.

[34] Rudin W. , Functional Analysis, Mc Graw-Hill 1973.

[35] Smith M.J., A Descent Algorithm for Solving Monotone Variational Inequalities and Monotone Complementarity Problems, JOTA 1984, vol 44, N°3, pp. 485-495

[36] Stampacchia G., Variational Inequalities, A.Gizzetti ed. Theory and Applications of Monotone Operator, Proc. of the NATO Advanced Study Institute, Venecija 1968, pp. 101-192.

[37] Tamir A. The Complementarity Problem of Mathematical Programming, Case Western Reserve University, Cleveland, Ohio, Phd Thesis 1973.

[38] Tihonov A.N. , O ustojčivosti optimizacii funkcionalov, ŽVM i MF, tom 6, N° 4, 1966.

[39] Tihonov A.N. , O metodah regularizacii zadač optimalnogo upravlenija, DANSSSR, tom 162, N° 4,1965.

[40] Tihonov A.N. , O nekorrektnih zadačah optimalnogo planirovanija, ŽVM i MF, tom 6, N° 1, 1966.

[41] Tihonov A.N. , Arsenjin B.J. , Metodi rešenija nekorrektnih zadač, Nauka, Moskva 1979.

[42] Tobin R.L., Sensivity Analysis for Variational Inequalities, JOTA 1986, vol 48, N°1, pp. 191-204.

[43] Vasiljev F.P., Metodi rešenija ekstremaljnih zadač, zadači minimizacii v funkcionalnih prostranstv, regularizacija, approksimacija, Nauka, Moskva 1981.

[44] Vasiljev F.P., Čislenie metodi rešenija ekstremalnih zadač, Nauka, Moskva 1980.

[45] Zlobec S., Characterizing Optimality in Mathematical Programming Models, Mc Gill University 1987.

[46] Zlobec S., Craven D., Stabilization and Determination of the Set of Minimal Binding Constraints in Convex Programming, Math. Operationsforsch.Statist.Ser. Optimization, vol 12, 1981, N°2, pp.203-220.