Marko D. Leko

BORNOVO RELATIVISTIČKI ČVRSTO TELO

(doktorska disertacija)

S A D R Ž A J

Glava str.

Smatram svojom prijatnom dužnošću da istaknem da mi je temu moje doktorske disertacije predložio moj kolega Dr Rastko Stojanović.

Beograd, 14.III.1963.

U V O D

Posmatrajmo sistem tačaka C_{ξ^i} (i = 1,2,3), gde su ξ^i parametri koji karakterišu bilo koju od tačaka sistema.

Klasična definicija čvrstog tela: "za sistem tačaka se kaže da predstavlja čvrsto telo ako je rastojanje istovremenih položaja dveju bilo kojih tačaka sistema tokom vremena nepromenljivo i zavisi samo od izbora tih dveju tačaka", neodrživa je u teoriji relativnosti jer se zasniva na pojmu istovremenosti koji u teoriji relativnosti nema apsolutno značenje. Prema tome, usvajajući gornju definiciju, u teoriji relativnosti bi se moglo reći samo da je sistem tačaka C_{ξ^i} čvrst u odnosu na odredjenog posmatrača, pa "čvrstoća" nekog sistema ne bi bila prirodna osobina tog sistema sa stanovišta teorije relativnosti.

Tražeći osobinu sistema tačaka C_{ξ^i} koja bi bila kovarijantna u odnosu na transformacije teorije relativnosti (i, prema tome, nezavisna od posmatrača) a koja bi predstavljala generalizaciju klasičnog čvrstog tela, Maks Born[1)] (Max Born) je dao ovu definiciju relativistički čvrstog tela: "za sistem tačaka C_{ξ^i} se kaže da predstavlja relativistički čvrsto telo ako je za svake dve bliske tačke tog sistema interval izmedju odgovarajućih svetskih linija, upravan na tim linijama, stalan tokom tog kretanja". Izrazi "interval" i "upravan" su u ovoj definiciji shvaćeni u smislu metrike prostor-vremena. Potrebno je na-

1) M. Born, Ann. Phys., 30, 1 (1909).

glasiti da je Born, definišući relativistički čvrsto telo, mislio na čvrsto telo u specijalnoj teoriji relativnosti. To je i prirodno, jer je vreme kada je Born dao svoju definiciju prethodilo pojavi opšte teorije relativnosti.

Interesantno je da nema radova iz kojih bi se videlo da se Born kasnije bavio tim problemom i u opštoj teoriji relativnosti, ma da se definicija koju je dao može, bez ikakvih izmena, primeniti i u opštoj teoriji relativnosti.

Ubrzo po Bornovom definisanju relativistički čvrstog tela Hergloc[2)] (G. Herglotz) i Neter[3)] (F. Noether) su, nezavisno jedan od drugog, pokazali da Bornovo čvrsto telo u specijalnoj teoriji relativnosti ima samo <u>tri</u> stepena slobode. To je očigledan nedostatak Bornovog čvrstog tela. Ali, kako do danas nije data nijedna prihvatljivija definicija, skoro svi radovi[4)] koji su u vezi s relativistički čvrstim telom zasnivaju se na Bornovoj definiciji.

Problemom čvrstog tela u opštoj teoriji relativnosti prvi su se bavili i matematički izrazili Bornovu definiciju Salcman i Taub[5)] (G. Salzman i A. Taub). U delu svoga

---

2)G. Herglotz, Ann. Phys. <u>31</u>, 393 (1909-1910).

3)F. Noether, Ann. Phys., <u>31</u>, 919 (1909-1910).

4)Pomenućemo radove:

J.R.Pounder, Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies, Ser.A, No.11 (1954). U ovom radu autor proučava relativistički čvrste obrtne površine.

J.L.Synge, Stud.Math. and Mech. Presented to Richard von Mises, New York, 1954, p.217. U ovom radu autor proučava kretanje relativistički čvrstih površina uopšte.

J. L. Synge, Math.Zeits., <u>72</u> (1), 82 (1959). U ovom radu autor je proglasio za meru brzine deformacije izraz koji Salcman i Taub označuju sa $D_{\alpha\beta}$ (vidi izraz (1.22)), i na osnovu toga je predložio jednu relativističku teoriju elastičnosti.

R.A.Toupin, Arch.Ratl.Mech.Anal., <u>1</u> (3), 181(1958). U tom radu autor ukazuje da se ne može formulisati mehanika kontinuuma u relativnosti bez definicije relativistički čvrstog tela.

5)G.Salzman and A.H.Taub,Phys.Rev.,<u>95</u>,1659 (1954).

rada koji se odnosi na kinematiku Bornovog čvrstog tela oni su, osim matematičkog oblika Bornove definicije, izveli u tenzorskom obliku rezultate Hergloca i Netera, koji se odnose na kretanje Bornovog čvrstog tela u specijalnoj teoriji relativnosti. Problem broja stepeni slobode Bornovog čvrstog tela u opštoj teoriji relativnosti nisu ni oni niti iko posle njih razmatrali.

U ovome radu izložićemo izvodjenje diferencijalnih jednačina kretanja Bornovog čvrstog tela u opštoj teoriji relativnosti koje su u pomenutom radu dali Salcman i Taub, zatim ćemo pokazati da te diferencijalne jednačine mogu biti zadovoljene samo ako je zadovoljen jedan od dva jednostavnija sistema diferencijalnih jednačina. Pokazaćemo, dalje, da svaki od ta dva sistema dopušta kretanje koje ima samo <u>tri</u> stepena slobode. Način prilaženja problemu i pojedini rezultati se potpuno razlikuju od onih koje su dali Hergloc i Neter. Dalje ćemo pokazati da i klasična aproksimacija kretanja Bornovog čvrstog tela ima samo tri stepena slobode, što konačno potvrdjuje da Bornovo relativistički čvrsto telo <u>nije</u> generalizacija klasičnog čvrstog tela, pa smo naveli i jedan pokušaj takve generalizacije, za koji smo pokazali da predstavlja samo specijalan slučaj Bornovog tela. Najzad, nezavisno od problema broja stepeni slobode, pokazali smo da, i pored velikog nedostatka Bornovog relativistički čvrstog tela, izmedju njega i klasičnog čvrstog tela postoji uočljiva analogija, koja na osnovu Bornove definicije nije očigledna. Na kraju smo predložili put za koji, na osnovu iskustva stečenog za vreme izrade ovog rada, verujemo da može dovesti do rešenja problema relativističke generalizacije klasičnog čvrstog tela.

U izlaganju ćemo se služiti oznakama koje su Salcman i Taub koristili u svome gore pomenutom radu. Pri tome će latinski indeksi uzimati vrednosti 1,2,3, a grčki 1,2,3,4. Dužnost nam je da istaknemo da i navedena stilizacija Bornove definicije pripada istim autorima.

G L A V A I

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE KRETANJA BORNOVOG RELATIVISTIČKI ČVRSTOG TELA U OPŠTOJ TEORIJI RELATIVNOSTI

U datom koordinatnom sistemu x^α prostor-vremena, gde je $x^4 = ct$, pri čemu je c brzina prostiranja svetlosti u vakuumu a t vreme u tom koordinatnom sistemu, kretanje sistema tačaka C_{ξ^i} odredjeno je jednačinama

$$x^\alpha = x^\alpha(\xi^i, \theta), \tag{1.1}$$

gde je θ ma koji parametar vremenskog tipa (može se, na primer, uzeti da je $\theta = x^4$). Po pretpostavci, jednačine (1.1) predstavljaju nesingularnu transformaciju izmedju koordinata x^α i koordinata ξ^i, θ. Dalje se pretpostavlja da jednačine (1.1), za fiksirane vrednosti ξ^i predstavljaju parametarske jednačine linije vremenskog tipa, jer po pretpostavci nijedna tačka C_{ξ^i} bilo kog sistema tačaka nema brzinu ni u jednom trenutku koja dostiže ili prevazilazi brzinu svetlosti, i da funkcije $x^\alpha(\xi^i, \theta)$ imaju neprekidne druge parcijalne izvode po ξ^i, θ. Neka je $g_{\alpha\beta}$ metrički tenzor prostor-vremena u x^α koordinatnom sistemu, takav da signatura forme $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ bude 2 a da tom formom definisan interval prostornog tipa bude pozitivan (tj. takav da u specijalnoj teoriji relativnosti u odnosu na Galilejeve koordinate glasi

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} (dx^i)^2 - (dx^4)^2.)$$

Neka je

$$\mathcal{U}^{\alpha}=\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \theta}\equiv x^{\alpha}{}_{,\theta}\,. \tag{1.2}$$

$\mathcal{U}^{\alpha}$ je četvorovektor brzine vremenskog tipa, pa mu je intenzitet

$$\left(-g_{\alpha\beta}\,\mathcal{U}^{\alpha}\mathcal{U}^{\beta}\right)^{1/2}. \tag{1.3}$$

Četvorovektor

$$u^{\alpha}=\left(-g_{\lambda\mu}\,\mathcal{U}^{\lambda}\mathcal{U}^{\mu}\right)^{-1/2}\mathcal{U}^{\alpha} \tag{1.4}$$

je četvorovektor za koji je

$$g_{\alpha\beta}\,u^{\alpha}u^{\beta}=u_{\alpha}u^{\alpha}=-1, \tag{1.5}$$

gde je

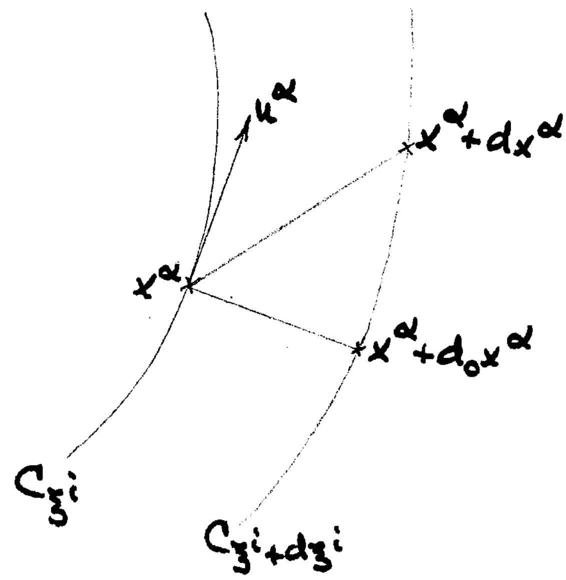
$$u_{\alpha}=g_{\alpha\beta}\,u^{\beta}, \tag{1.6}$$

tj. u^{α} je jedinični četvorovektor brzine. Iz (1.5) je

$$u_{\alpha;\beta}\,u^{\alpha}=0, \tag{1.7}$$

gde je $u_{\alpha;\beta}$ kovarijantni izvod vektora u_{α} po x^{β}.

Zapazimo, sada, svetske linije dveju bliskih tačaka C_{ξ^i} i $C_{\xi^i+d\xi^i}$ (sl.1) i na svetskoj liniji tačke C_{ξ^i} bilo koji dogadjaj x^{α}, a na svetskoj liniji tačke $C_{\xi^i+d\xi^i}$ njemu bliski dogadjaj $x^{\alpha}+dx^{\alpha}$. U opštem slučaju pomeranje



sl.1.

$$dx^{\alpha}=x^{\alpha}_{,i}\,d\xi^{i}+\mathcal{U}^{\alpha}d\theta\,, \qquad \left(x^{\alpha}_{,i}\equiv\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{i}}\right) \tag{1.8}$$

nije upravno na svetskoj liniji tačke C_{ξ^i}, tj. u opštem slučaju ne važi

$$g_{\alpha\beta} u^\alpha dx^\beta = 0. \tag{1.9}$$

Stoga nam je cilj da, za date vrednosti $d\xi^i$, nadjemo ono $d\theta$ za koje je zadovoljena jednačina (1.9). Stavljajući (1.8) u (1.9) dobivamo

$$u_\alpha (x^\alpha_{,i} d\xi^i + \mathcal{U}^\alpha d\theta) = 0,$$

odakle je

$$d\theta = -\frac{u_\alpha x^\alpha_{,i}}{u_\beta \mathcal{U}^\beta} d\xi^i,$$

što zamenom u (1.8) za pomeranje $d_0 x^\alpha$ upravno na svetskoj liniji tačke C_{ξ^i} daje

$$d_0 x^\alpha = \left(x^\alpha_{,i} - \frac{\mathcal{U}^\alpha u_\lambda}{u_\mu \mathcal{U}^\mu} x^\lambda_{,i} \right) d\xi^i.$$

Smenivši, na osnovu (1.4), $\mathcal{U}^\alpha$ izrazom

$$\mathcal{U}^\alpha = (-\mathcal{U}_\nu \mathcal{U}^\nu)^{1/2} u^\alpha,$$

za $d_0 x^\alpha$ dobivamo

$$d_0 x^\alpha = \left(x^\alpha_{,i} - \frac{u^\alpha u_\lambda}{u_\mu u^\mu} x^\lambda_{,i} \right) d\xi^i. \tag{1.10}$$

Napominjemo da smo količnik smeli skratiti sa $(-\mathcal{U}_\nu \mathcal{U}^\nu)^{1/2}$ jer je, kao što je već spomenuto, $\mathcal{U}^\alpha$ četvorovektor vremenskog tipa pa je, svakako, $\mathcal{U}_\nu \mathcal{U}^\nu \neq 0$. Najzad, zbog (1.5), imamo da je

$$d_0 x^\alpha = (x^\alpha_{,i} + u^\alpha u_\lambda x^\lambda_{,i}) d\xi^i. \tag{1.11}$$

Bornova definicija relativistički čvrstog tela zahteva, sada, da izraz

$$dl^2 = g_{\alpha\beta} d_0 x^\alpha d_0 x^\beta \tag{1.12}$$

ne zavisi od θ, tj. da je

$$(dl^2)_{,\theta} = 0. \tag{1.13}$$

Smenivši (1.11) u (1.12) dobivamo

$$dl^2 = g_{\alpha\beta}(x^\alpha_{,i} + u^\alpha u_\lambda x^\lambda_{,i})(x^\beta_{,j} + u^\beta u_\mu x^\mu_{,j}) d\xi^i d\xi^j,$$

odn.

$$dl^2 = g_{\alpha\beta} x^\alpha_{,i} x^\beta_{,j} d\xi^i d\xi^j + g_{\alpha\beta} u^\beta u_\mu x^\alpha_{,i} x^\mu_{,j} d\xi^i d\xi^j +$$

$$+ g_{\alpha\beta} u^\alpha u_\lambda x^\lambda_{,i} x^\beta_{,j} d\xi^i d\xi^j + g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta u_\lambda u_\mu x^\lambda_{,i} x^\mu_{,j} d\xi^i d\xi^j,$$

ili, podesnom izmenom nemih indeksa i uzimajući u obzir (1.5) i (1.6),

$$dl^2 = (g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta) x^\alpha_{,i} x^\beta_{,j} d\xi^i d\xi^j. \tag{1.14}$$

S obzirom da veličine $d\xi^i$ ne zavise[6] od θ i s obzirom da su proizvoljne, sada se iz (1.13) dobiva

$$[(g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta) x^\alpha_{,i} x^\beta_{,j}]_{,\theta} = 0. \tag{1.15}$$

Izvevši naznačeno parcijalno diferenciranje po θ, dobiva se

$$(g_{\alpha\beta,\theta} + u_{\alpha,\theta} u_\beta + u_\alpha u_{\beta,\theta}) x^\alpha_{,i} x^\beta_{,j} + (g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta)(x^\alpha_{,i})_{,\theta} x^\beta_{,j} +$$

$$+ (g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta) x^\alpha_{,i} (x^\beta_{,j})_{,\theta} = 0. \tag{1.16}$$

Kako su drugi parcijalni izvodi funkcija x^α po pretpostavci neprekidni po argumentima ξ^i i θ to je

$$(x^\alpha_{,i})_{,\theta} = (x^\alpha_{,\theta})_{,i},$$

tj.

$$(x^\alpha_{,i})_{,\theta} = \mathcal{U}^\alpha_{,i} = \mathcal{U}^\alpha_{,\gamma} x^\gamma_{,i},$$

$$\left(\mathcal{U}^\alpha_{,i} \equiv \frac{\partial \mathcal{U}^\alpha}{\partial \xi^i}, \ \mathcal{U}^\alpha_{,\gamma} \equiv \frac{\partial \mathcal{U}^\alpha}{\partial x^\gamma}\right)$$

како je

$$u_{\alpha,\theta} = u_{\alpha,\gamma} x^\gamma_{,\theta} = u_{\alpha,\gamma} \mathcal{U}^\gamma$$

---

6) Salcman i Taub su u daljem izvodjenju uveli i koristili pojam sopstvenog vremena.

i kako je

$$g_{\alpha\beta,\theta} = g_{\alpha\beta,\lambda}\, x^{\lambda}_{,\theta} = g_{\alpha\beta,\lambda}\, U^{\lambda},$$

tj.

$$g_{\alpha\beta,\theta} = \left(g_{\alpha\gamma}\left\{{}^{\gamma}_{\beta\lambda}\right\} + g_{\gamma\beta}\left\{{}^{\gamma}_{\alpha\lambda}\right\}\right) U^{\lambda},$$

gde je $\left\{{}^{\lambda}_{\beta\gamma}\right\}$ Kristofelov simbol druge vrste, to (1.16) postaje

$$\left[\left(g_{\alpha\gamma}\left\{{}^{\gamma}_{\beta\lambda}\right\} + g_{\gamma\beta}\left\{{}^{\gamma}_{\alpha\lambda}\right\}\right) U^{\lambda} + u_{\alpha,\gamma} U^{\gamma} u_{\beta} + u_{\alpha} u_{\beta,\gamma} U^{\gamma}\right] x^{\alpha}_{,i} x^{\beta}_{,j} +$$

$$+ (g_{\alpha\beta} + u_{\alpha} u_{\beta}) U^{\alpha}_{,\gamma} x^{\gamma}_{,i} x^{\beta}_{,j} + (g_{\alpha\beta} + u_{\alpha} u_{\beta}) U^{\beta}_{,\gamma} x^{\alpha}_{,i} x^{\gamma}_{,j} = 0.$$

Podesnom izmenom nemih indeksa dobivamo

$$\left[\left(g_{\alpha\gamma}\left\{{}^{\gamma}_{\beta\lambda}\right\} + g_{\gamma\beta}\left\{{}^{\gamma}_{\alpha\lambda}\right\}\right) U^{\lambda} + u_{\alpha,\gamma} U^{\gamma} u_{\beta} + u_{\alpha} u_{\beta,\gamma} U^{\gamma} +\right.$$

$$\left. + (g_{\gamma\beta} + u_{\gamma} u_{\beta}) U^{\gamma}_{,\alpha} + (g_{\alpha\gamma} + u_{\alpha} u_{\gamma}) U^{\gamma}_{,\beta}\right] x^{\alpha}_{,i} x^{\beta}_{,j} = 0,$$

odn.

$$\left[g_{\alpha\gamma}\left(U^{\gamma}_{,\beta} + \left\{{}^{\gamma}_{\beta\lambda}\right\} U^{\lambda}\right) + g_{\gamma\beta}\left(U^{\gamma}_{,\alpha} + \left\{{}^{\gamma}_{\alpha\lambda}\right\} U^{\lambda}\right) +\right.$$

$$+ \left(u_{\alpha,\gamma} - \left\{{}^{\lambda}_{\alpha\gamma}\right\} u_{\lambda}\right) U^{\gamma} u_{\beta} + \left(u_{\beta,\gamma} - \left\{{}^{\lambda}_{\beta\gamma}\right\} u_{\lambda}\right) U^{\gamma} u_{\alpha} +$$

$$\left. + \left(U^{\gamma}_{,\alpha} + \left\{{}^{\gamma}_{\alpha\lambda}\right\} U^{\lambda}\right) u_{\gamma} u_{\beta} + \left(U^{\gamma}_{,\beta} + \left\{{}^{\gamma}_{\beta\lambda}\right\} U^{\lambda}\right) u_{\alpha} u_{\gamma}\right] x^{\alpha}_{,i} x^{\beta}_{,j} = 0.$$

S obzirom da izrazi u okruglim zagradama predstavljaju kovarijantne izvode odgovarajućih vektora, poslednja se jednačina može napisati u obliku

$$\left(g_{\alpha\gamma} U^{\gamma}_{;\beta} + g_{\gamma\beta} U^{\gamma}_{;\alpha} + u_{\alpha;\gamma} U^{\gamma} u_{\beta} + u_{\beta;\gamma} U^{\gamma} u_{\alpha} +\right.$$

$$\left. + U^{\gamma}_{;\alpha} u_{\gamma} u_{\beta} + U^{\gamma}_{;\beta} u_{\gamma} u_{\alpha}\right) x^{\alpha}_{,i} x^{\beta}_{,j} = 0,$$

tj. u obliku

$$\left(U_{\alpha;\beta} + U_{\gamma;\beta} u^{\gamma} u_{\alpha} + U_{\beta;\alpha} + U_{\gamma;\alpha} u^{\gamma} u_{\beta} +\right.$$

$$\left. + u_{\alpha;\gamma} U^{\gamma} u_{\beta} + u_{\beta;\gamma} U^{\gamma} u_{\alpha}\right) x^{\alpha}_{,i} x^{\beta}_{,j} = 0,$$

ili, najzad, u obliku

$$\left[\mathcal{U}_{\gamma;\beta}(\delta^\gamma_\alpha+u^\gamma u_\alpha)+\mathcal{U}_{\gamma;\alpha}(\delta^\gamma_\beta+u^\gamma u_\beta)+\right.$$

$$\left.+u_{\alpha;\gamma}\mathcal{U}^\gamma u_\beta+u_{\beta;\gamma}\mathcal{U}^\gamma u_\alpha\right]x^\alpha_{,i}x^\beta_{,j}=0, \qquad (1.17)$$

gde je

$$\delta^\gamma_\alpha=\begin{cases}1, & \gamma=\alpha\\ 0, & \gamma\neq\alpha\end{cases}$$

Kronekerov simbol.

Iz (1.4) je

$$\mathcal{U}_\alpha=(-\mathcal{U}_\lambda\mathcal{U}^\lambda)^{1/2}u_\alpha, \qquad (1.18)$$

i, na osnovu toga,

$$\mathcal{U}_{\gamma;\beta}(\delta^\gamma_\alpha+u^\gamma u_\alpha)=\left[(-\mathcal{U}_\lambda\mathcal{U}^\lambda)^{1/2}_{,\beta}u_\gamma+(-\mathcal{U}_\lambda\mathcal{U}^\lambda)^{1/2}u_{\gamma;\beta}\right](\delta^\gamma_\alpha+u^\gamma u_\alpha)$$

$$=(-\mathcal{U}_\lambda\mathcal{U}^\lambda)^{1/2}_{,\beta}(u_\alpha+u_\gamma u^\gamma u_\alpha)+$$

$$+(-\mathcal{U}_\lambda\mathcal{U}^\lambda)^{1/2}(u_{\alpha;\beta}+u_{\gamma;\beta}u^\gamma u_\alpha),$$

što je, zbog (1.5) i (1.7),

$$\mathcal{U}_{\gamma;\beta}(\delta^\gamma_\alpha+u^\gamma u_\alpha)=(-\mathcal{U}_\lambda\mathcal{U}^\lambda)^{1/2}u_{\alpha;\beta}. \qquad (1.19)$$

Korišćenjem (1.18) u obliku

$$\mathcal{U}^\alpha=(-\mathcal{U}_\lambda\mathcal{U}^\lambda)^{1/2}u^\alpha \qquad (1.20)$$

i (1.19), (1.17) postaje, posle skraćivanja sa $(-\mathcal{U}_\lambda\mathcal{U}^\lambda)^{1/2}$,

$$(u_{\alpha;\beta}+u_{\beta;\alpha}+u_{\alpha;\gamma}u^\gamma u_\beta+u_{\beta;\gamma}u^\gamma u_\alpha)x^\alpha_{,i}x^\beta_{,j}=0. \qquad (1.21)$$

Da bismo sebi olakšali dalje pisanje, uvedimo tenzor

$$D_{\alpha\beta}=u_{\alpha;\beta}+u_{\beta;\alpha}+u_{\alpha;\gamma}u^\gamma u_\beta+u_{\beta;\gamma}u^\gamma u_\alpha. \qquad (1.22)$$

Sa tom oznakom, (1.21) glasi

$$D_{\alpha\beta}\, x^{\alpha}_{,i}\, x^{\beta}_{,j} = 0, \tag{1.23}$$

odn.

$$D_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{i}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^{j}} = 0 . \tag{1.24}$$

Posmatrajmo, sada, izraz $D_{\alpha\beta} u^{\alpha}$. Uzimajući, ponovo, u obzir (1.7) i (1.5) dobivamo

$$D_{\alpha\beta} u^{\alpha} = 0 .$$

Množenjem te jednačine sa $(-u_{\lambda} u^{\lambda})^{1/2}$ dobiva se, zbog (1.20),

$$D_{\alpha\beta} U^{\alpha} = 0$$

odn.

$$D_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \theta} = 0, \tag{1.25}$$

a, otuda, i

$$D_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \theta} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^{i}} = 0 \tag{1.26}$$

i

$$D_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \theta} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \theta} = 0 . \tag{1.27}$$

Ako još, zbog podesnosti, za trenutak uvedemo oznaku

$$\xi^{4} = \theta,$$

jednačine (1.24), (1.26) i (1.27) se zajedno mogu napisati u obliku

$$D_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{\lambda}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^{\mu}} = 0 . \tag{1.28}$$

Posmatrajmo (1.28) kao sistem od 16 homogenih linearnih jednačina po 16 nepoznatih $D_{\alpha\beta}$. Uvedimo matricu

$$T = \left\{ \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\lambda} \right\}, \tag{1.29}$$

čija je determinanta

$$\Delta = |T| = \left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\lambda} \right| \tag{1.30}$$

Jakobijan funkcija x^α u odnosu na promenljive ξ^λ.

Da bismo napisali matricu koeficijenata uz nepoznate $D_{\alpha\beta}$ u sistemu jednačina (1.28) postupimo na sledeći način. Pre svega fiksirajmo λ i α. Time u sistemu (1.28) uočavamo samo one jednačine koje imaju to fiksirano λ i bilo koje μ, i u tim jednačinama posmatramo samo koeficijente uz četiri nepoznate $D_{\alpha\beta}$ koje imaju fiksirano α i bilo koje β. Matrica tih koeficijenata je

$$P^\alpha_\lambda = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\lambda} \left\{ \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\mu} \right\},$$

tj.

$$P^\alpha_\lambda = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\lambda} T. \tag{1.31}$$

Matrica S svih koeficijenata celog sistema (1.28) je, sada,

$$S = \left\{ \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\lambda} T \right\},$$

što, na osnovu (D II.3) (vidi Dodatak II), predstavlja Kronekerov proizvod matrice T samom sobom, tj.

$$S = T \times T. \tag{1.32}$$

S obzirom da je T nesingularna matrica, jer je njena determinanta $\Delta \neq 0$ (na osnovu pretpostavke da jednačine (1.1) predstavljaju nesingularnu transformaciju izmedju koordinata x^α i koordinata ξ^λ), i da je T matrica četvrtog reda, dobivamo da je determinanta sistema jednačina (1.28), na osnovu (D II.5)

$$|S| = |T|^4 |T|^4 = |T|^8 = \Delta^8 \neq 0. \tag{1.33}$$

Otuda sledi da su jednačine (1.28) zadovoljene samo za

$$D_{\alpha\beta} = 0. \tag{1.34}$$

S obzirom na (1.22), jednačina (1.34) se može eksplicitno napisati u obliku

$$u_{\alpha;\beta} + u_{\beta;\alpha} + u_{\alpha;\gamma} u^{\gamma} u_{\beta} + u_{\beta;\gamma} u^{\gamma} u_{\alpha} = 0, \tag{1.35}$$

što i predstavlja Salcman-Taubove diferencijalne jednačine kretanja Bornovog čvrstog tela u opštoj teoriji relativnosti.

G L A V A   II

DVE VRSTE KRETANJA BORNOVOG ČVRSTOG TELA U OPŠTOJ TEORIJI RELATIVNOSTI

Posmatrajući jednačinu (1.35), tj.

$$u_{\alpha;\beta}+u_{\beta;\alpha}+u_{\alpha;\gamma}u^{\gamma}u_{\beta}+u_{\beta;\gamma}u^{\gamma}u_{\alpha}=0, \tag{2.1}$$

neposredno se vidi da je ta jednačina zadovoljena ako je

$$u_{\alpha;\beta}+u_{\beta;\alpha}=0, \tag{2.2}$$

tj. ako je tenzor $u_{\alpha;\beta}$ antisimetričan, jer je tada, zbog (1.7), i

$$u_{\alpha;\gamma}u^{\gamma}u_{\beta}=-u_{\gamma;\alpha}u^{\gamma}u_{\beta}=0.$$

Medjutim, vidi se da je jednačina (2.1) zadovoljena i ako je

$$u_{\alpha;\beta}+u_{\alpha;\gamma}u^{\gamma}u_{\beta}=0. \tag{2.3}$$

Jednačine (2.2) i (2.3) su nezavisne, jer se jedna na drugu ne može svesti. Zaista, na osnovu (2.2) sledi da je

$$u_{\alpha;\beta}+u_{\alpha;\gamma}u^{\gamma}u_{\beta}=u_{\alpha;\beta}-u_{\gamma;\alpha}u^{\gamma}u_{\beta}$$

tj., zbog (1.7),

$$u_{\alpha;\beta}+u_{\alpha;\gamma}u^{\gamma}u_{\beta}=u_{\alpha;\beta},$$

što, na osnovu (2.2), ne mora biti jednako nuli. Obrnuto, na osnovu (2.3) i (1.7) je

$$(u_{\alpha;\beta}+u_{\beta;\alpha})u^{\beta}u_{\gamma} = u_{\alpha;\beta}u^{\beta}u_{\gamma} = -u_{\alpha;\sigma},$$

što na osnovu (2.3) ne mora biti jednako nuli, odakle sledi da ni

$$u_{\alpha;\beta}+u_{\beta;\alpha}$$

ne mora biti jednako nuli.

Medjutim, ne vidi se da jednačina (2.1) nema rešenje koje nije resenje ni jedne od jednačina (2.2) ili (2.3).

Da bismo to pokazali napišimo jednačinu (2.1) u obliku[7]

$$(u_{\lambda;\mu}+u_{\mu;\lambda})(\delta^{\lambda}_{\alpha}+u^{\lambda}u_{\alpha})(\delta^{\mu}_{\beta}+u^{\mu}u_{\beta}) = 0. \qquad (2.4)$$

Ovaj sistem homogenih linearnih jednačina po $u_{\lambda;\mu}+u_{\mu;\lambda}$ ima očigledna trivijalna rešenja

$$u_{\lambda;\mu}+u_{\mu;\lambda}=0,$$

što i predstavlja jednačinu (2.2). Da sistem (2.4) ima i rešenja koja se razlikuju od (2.2) pokazaćemo izračunavanjem determinante sistema.

Razmišljanjem sličnim razmišljanju koje smo koristili pri nalaženju determinante sistema (1.28) nalazimo da je matrica koeficijenata sistema (2.4)

$$\mathcal{M} = L \times L, \qquad (2.5)$$

gde je L matrica

$$L = \{\delta^{\alpha}_{\lambda}+u^{\alpha}u_{\lambda}\} \qquad (2.6)$$

(α je indeks vrste, a λ kolone). Otuda je, opet na osnovu (D II.5), determinanta sistema (2.4)

[7] Ovaj oblik jednačine (2.1) dali su Salcman i Taub.

$$|\mathcal{M}|=|L|^{8}. \tag{2.7}$$

Lako je izračunati da je

$$|L|=|\delta^{\alpha}_{\lambda}+u^{\alpha}u_{\lambda}|=1+u_{\gamma}u^{\gamma},$$

ili, zbog (1.5),

$$|L|=0, \tag{2.8}$$

pa je

$$|\mathcal{M}|=0, \tag{2.9}$$

što znači da sistem (2.4) ima rešenja različita od (2.2). To smo mi, uostalom, već i videli kada smo naveli jednačine (2.3). Tačno je da jednačine (2.3) ne predstavljaju veze izmedju veličina $u_{\alpha;\beta}+u_{\beta;\alpha}$, ali činjenica da, zbog (2.9), postoje medju tim veličinama veze koje se razlikuju od (2.2), dopušta mogućnost da se one, linearnim kombinacijama, mogu svesti na veze (2.3) izmedju veličina $u_{\alpha;\beta}$. Pitanje da li su netrivijalna rešenja jednačina (2.4) po $u_{\alpha;\beta}+u_{\beta;\alpha}$ ekvivalentna ili nisu jednačinama (2.3) svodi se, sada, na pitanje da li broj uslovljenih nepoznatih[8] $u_{\alpha;\beta}+u_{\beta;\alpha}$ u jednačinama (2.4) daje ili ne upravo broj uslovljenih nepoznatih $u_{\alpha;\beta}$ u jednačinama (2.3). Prema tome, za odgovor na naše pitanje presudno je odredjivanje rangova matrica sistema (2.3) i (2.4).

Videli smo već da je (2.5) matrica koeficijenata sistema (2.4) i da je determinanta matrice L jednaka nuli. Kako je, na primer,

$$|\delta^{i}_{j}+u^{i}u_{j}|=1+u^{i}u_{i}=-u^{4}u_{4}\neq 0,$$

to je rang $\rho(L)$ matrice L

$$\rho(L)=3. \tag{2.10}$$

Otuda je, na osnovu (2.5) i (D II.4), rang $\rho(\mathcal{M})$ matrice $\mathcal{M}$

---

[8] Vidi T.P.Andjelić: Matrice, Naučna Knjiga, Beograd, 1962, str. 144.

$$\rho(\mathcal{M}) = [\rho(L)]^2 = 9. \tag{2.11}$$

Uvedimo oznaku

$$s_{\alpha\beta} = u_{\alpha;\beta} + u_{\beta;\alpha} . \tag{2.12}$$

Sada rezultat (2.11) tvrdi da u sistemu (2.4) postoji devet linearno nezavisnih jednačina. (Lako je pokazati da su to, na primer, jednačine

$$(\delta_i^\alpha + u^\alpha u_i)(\delta_j^\beta + u^\beta u_j) s_{\alpha\beta} = 0.) \tag{2.13}$$

Pored tih jednačina medju veličinama $s_{\alpha\beta}$ moraju važiti i jednačine

$$s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha} , \qquad \alpha > \beta \tag{2.14}$$

kojih ima šest. Dakle, za odredjivanje 16 netrivijalnih rešenja $s_{\alpha\beta}$ sistema jednačina (2.4) imamo na raspolaženju ukupno 15 linearno nezavisnih jednačina, pa je, prema tome, samo jedna od tih nepoznatih proizvoljna (slobodna nepoznata).

Da bismo videli koliko otuda sledi proizvoljnih veličina $u_{\alpha;\beta}$, prebrojmo jednačine koje nam stoje na raspoloženju za nalaženje tih veličina kada su odredjene nepoznate $s_{\alpha\beta}$. Pre svega, imamo deset linearno nezavisnih jednačina (2.12), tj.

$$u_{\alpha;\beta} + u_{\beta;\alpha} = s_{\alpha\beta} \tag{2.14}$$

(deset ih je linearno nezavisnih, jer su jednačine (2.12) simetrične u odnosu na α i β). Pored tih jednačina postoje četiri veze (1.7), tj.

$$u_{\alpha;\beta} u^\alpha = 0. \tag{2.15}$$

Izmedju jednačina (2.14) i (2.15) ne postoji linearna zavisnost. Napominjemo da smo prilikom traženja linearno nezavisnih jednačina (2.4) koristili samo vezu $u_\alpha u^\alpha = -1$ (na osnovu te veze smo zaključili da je $|L| = 0$).

Skup jednačina (2.14) i (2.15) predstavlja sistem od 14 jednačina (nehomogenih) sa 16 nepoznatih, pa su, stoga, dve od njih proizvoljne. Kako je medju veličinama $\lambda_{\alpha\beta}$ jedna proizvoljna to imamo dve proizvoljne veličine $u_{\alpha;\beta}$ i jednu proizvoljnu vezu $u_{\lambda;\mu}+u_{\mu;\lambda}=\lambda_{\lambda\mu}$, ako je $\lambda\neq\mu$ (pri čemu, naravno, mora biti $\lambda,\mu\neq\alpha,\beta$) ili tri proizvoljne veličine $u_{\alpha;\beta}$, od kojih je jedna $u_{A;A}$, ako je λ_{AA} proizvoljno. U oba slučaja, razumljivo, nijedne dve proizvoljne veličine $u_{\alpha;\beta}$ ne smeju biti one koje se pojavljuju u istoj jednačini (2.14).

Vratimo se, sada, na jednačine (2.3). Njih možemo napisati u obliku

$$u_{\alpha;\gamma}(\delta^{\gamma}_{\beta}+u^{\gamma}u_{\beta})=0. \qquad (2.16)$$

Ovo je sistem od 16 homogenih linearnih jednačina sa 16 nepoznatih $u_{\alpha;\beta}$. Trivijalna rešenja

$$u_{\alpha;\beta}=0 \qquad (2.17)$$

zadovoljavaju i jednačine (2.2), te nas, stoga, sada ne interesuju. Lako se može pokazati da je determinanta sistema (2.16)

$$\begin{vmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \end{vmatrix} = |L|^4 = 0,$$

gde je L, opet, matrica (2.6). Otuda sledi da sistem (2.16) ima rešenja različita od (2.17).

S obzirom da je $\rho(L)=3$, rang matrice koeficijenata

$$\begin{Bmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \end{Bmatrix}$$

sistema (2.16) je $4\rho(L)=12$. Prema tome, u sistemu (2.16) ima 12 linearno nezavisnih jednačina. (Lako je pokazati da su to, na primer, jednačine

$$(\delta^{\beta}_{i}+u^{\beta}u_{i})u_{\alpha;\beta}=0.) \qquad (2.18)$$

Pored tih jednačina medju veličinama $u_{\alpha;\beta}$ moraju važiti i jednačine (1.7), tj.

$$u_{\alpha;\beta}u^{\alpha} = 0, \tag{2.19}$$

koje su linearno nezavisne i kojih ima četiri. Medjutim, skup jednačina (2.18) i (2.19) nije sistem linearno nezavisnih jednačina. I zaista, pomnoživši jednačine (2.19) sa $\delta^{\beta}_{i} + u^{\beta}u_{i}$ i sabravši po β dobivamo

$$\left[(\delta^{\beta}_{i} + u^{\beta}u_{i})u_{\alpha;\beta}\right]u^{\alpha} = 0,$$

a to predstavlja tri linearne veze (i = 1,2,3) izmedju jednačina (2.18). Prema tome, medju jednačinama (2.18) i (2.19) ima 13 linearno nezavisnih jednačina sa 16 nepoznatih veličina $u_{\alpha;\beta}$, što znači da su, kao i malopre, tri od njih proizvoljne.

Na osnovu toga, sada smemo zaključiti da su jedina rešenja sistema (2.4), odn. (2.1), koja se razlikuju od rešenja sistema (2.2) upravo rešenja sistema (2.3).

Proučimo još koliko proizvoljnih veličina $u_{\alpha;\beta}$ ima ako se Bornovo čvrsto telo u opštoj teoriji relativnosti kreće tako da zadovoljava sistem diferencijalnih jednačina (2.2).

Tih veličina je 16 i one, osim 10 jednačina (2.2) ($\alpha \leq \beta$), tj.

$$u_{\alpha;\beta} + u_{\beta;\alpha} = 0, \qquad (\alpha \leq \beta) \tag{2.20}$$

moraju zadovoljavati i četiri jednačine (1.7), odn. (2.15). Jednačine (2.20) su, kao što se i neposredno vidi, linearno nezavisne. Tako isto su i jednačine (2.15) medju sobom linearno nezavisne. Medjutim, skup jednačina (2.20) i (2.15) je skup linearno zavisnih jednačina. Pokazaćemo da je, na primer, jednačina

$$u_{\alpha;4}u^{\alpha} = 0 \tag{2.21}$$

posledica jednačina (2.2) i jednačina

$$u_{\alpha;i}u^{\alpha} = 0, \tag{2.22}$$

a iz samog toka tog računa ...

(2.20) i (2.22) medju sobom linearno nezavisne.

Posmatrajmo izraz $u_{\alpha;\beta}u^{\alpha}u^{\beta}$. S obzirom da je $u_{\alpha;\beta}$, na osnovu (2.2), antisimetričan tenzor, sledi da je

$$u_{\alpha;\beta}u^{\alpha}u^{\beta}=0\,. \tag{2.23}$$

S druge strane, zbog (2.22), imamo da je

$$(u_{\alpha;\beta}u^{\alpha})u^{\beta}=0=(u_{\alpha;i}\,u^{\alpha})u^{i}+(u_{\alpha;4}\,u^{\alpha})u^{4}$$
$$=(u_{\alpha;4}\,u^{\alpha})u^{4},$$

pa, pošto je

$$u^{4}=(-u_{\lambda}u^{\lambda})^{-1/2}\frac{\partial x^{4}}{\partial\theta}\neq 0$$

(jer $x^4=ct$ mora zavisiti od θ koje je vremenskog tipa), dobivamo jednačinu (2.21).

Skup jednačina (2.20) i (2.22) je, stoga, skup 13 linearno nezavisnih jednačina sa 16 nepoznatih veličina $u_{\alpha;\beta}$. Prema tome, tri od tih veličina su proizvoljne.

Na osnovu svega ovoga, sada možemo tvrditi:

<u>Bornovo čvrsto telo u opštoj teoriji relativnosti kreće se tako da zadovoljava bar jedan od sistema diferencijalnih jednačina</u>

$$u_{\alpha;\beta}+u_{\beta;\alpha}=0 \tag{2.2}$$

<u>ili</u>

$$u_{\alpha;\beta}+u_{\alpha;\gamma}u^{\gamma}u_{\beta}=0, \tag{2.3}$$

<u>i pri tome su tri od veličina $u_{\alpha;\beta}$ proizvoljne</u>.

Posmatrajući sistem jednačina (2.1) vidi se da je on zadovoljen i ako je zadovoljen sistem jednačina

$$u_{\alpha;\beta}+u_{\beta;\gamma}u^{\gamma}u_{\alpha}=0. \tag{2.24}$$

Na osnovu onoga što smo dokazali trebalo bi očekivati da mora postojati način da se linearnim kombinacijama sistem jednačina (2.24) svede na jedan bilo koji od sistema jednačina (2.2) ili (2.3) ili da se bar jedan od tih sistema može svesti na sistem (2.24). Medjutim, svi pokušaji u tom smislu su pretrpeli neuspeh. Sada ćemo pokazati da je to neslaganje s iznetim dokazom samo prividno.

Množenjem jednačine (2.24) s u^{α} i sabiranjem po α dobivamo, zbog (1.5) i (1.7),

$$u_{\beta;\gamma}u^{\gamma}=0,$$

pa se, na osnovu tog rezultata, jednačine (2.24) svode na

$$u_{\alpha;\beta}=0. \qquad (2.25)$$

Dakle, jednačine (2.24) tvrde isto što i jednačine (2.25), pa su, prema tome, samo specijalan, trivijalan, slučaj i jednačina (2.2) i jednačina (2.3).

GLAVA III

BROJ STEPENI SLOBODE BORNOVOG ČVRSTOG TELA U OPŠTOJ TEORIJI RELATIVNOSTI

Da bismo proučili koliko stepeni slobode ima Bornovo čvrsto telo u opštoj teoriji relativnosti treba, slično slučaju čvrstog tela u klasičnoj mehanici koji smo prikazali u Dodatku I, proučiti koliko medju veličinama $u_{\alpha;\beta}$ ima proizvoljnih. To što odgovor na pitanje o broju stepeni slobode Bornovog tela zasnivamo na istom principu kao i odgovor na pitanje o broju stepeni slobode klasičnog čvrstog tela ne treba da nas zbunjuje, jer posmatrač u teoriji relativnosti operiše istim pojmovima i veličinama kao i posmatrač u klasičnoj mehanici i jedina je razlika medju njima u metrici za koju su vezani. Posmatrač u teoriji relativnosti, iako svestan relativnosti rastojanja i vremenskih intervala, ipak posmatra rastojanja i vremenske intervale. Mera rastojanja ili vremenskog intervala je relativna, ali je apsolutna njihova egzistencija.

U Glavi II smo pokazali da se Bornovo čvrsto telo kreće tako da zadovoljava ili diferencijalne jednačine

$$u_{\alpha;\beta}+u_{\beta;\alpha}=0, \tag{3.1}$$

ili diferencijalne jednačine

$$u_{\alpha;\beta}+u_{\alpha;\gamma}u^{\gamma}u_{\beta}=0, \tag{3.2}$$

i da su u oba slučaja medju veličinama $u_{\alpha;\beta}$ tri proizvoljne.

Sa veličina $u_{\alpha;\beta}$ predjimo sada na veličine $U_{\alpha;\beta}$. Vezu izmedju njih daje jednačina (1.19), tj.

$$U_{\gamma;\beta}(\delta^{\gamma}_{\alpha}+u^{\gamma}u_{\alpha})=(-U_{\lambda}U^{\lambda})^{1/2}u_{\alpha;\beta}. \qquad (3.3)$$

Izborom tri veličine $u_{\alpha;\beta}$ odredjene su, i u slučaju (3.1) i u slučaju (3.2), sve ostale, tako da (3.3) predstavlja sistem od 16 jednačina sa 16 nepoznatih $U_{\alpha;\beta}$. Medjutim, s obzirom da je matrica koeficijenata sistema (3.3) (vidi matricu koeficijenata sistema (2.16)) singularna, to 16 jednačina (3.3) nisu medju sobom linearno nezavisne. Nećemo ispitivanjem matrice koeficijenata proširene nezavisnim članovima na desnim stranama jednačina (3.3) pokazivati da sistem (3.3) nije protivrečan niti ćemo tim putem pokazivati koliko je medju tim jednačinama linearno nezavisnih, već ćemo to učiniti jednostavnijim putem.

Napišimo jednačine (3.3) u obliku

$$a_{\alpha\beta}\equiv U_{\gamma;\beta}(\delta^{\gamma}_{\alpha}+u^{\gamma}u_{\alpha})-(-U_{\lambda}U^{\lambda})^{1/2}u_{\alpha;\beta}=0. \qquad (3.4)$$

Pokazaćemo da iz jednačina

$$a_{i\beta}=0 \qquad (3.5)$$

sledi jednačina $a_{4\beta}=0$. I zaista, s obzirom na (1.5) i (1.7) imamo da je

$$a_{\alpha\beta}u^{\alpha}=0,$$

pa je

$$a_{4\beta}u^{4}=-a_{i\beta}u^{i},$$

ili, na osnovu (3.5) i činjenice da je $u^{4}=(-U_{\lambda}U^{\lambda})^{-1/2}\frac{\partial x^{4}}{\partial\theta}\neq 0$ (jer $x^{4}=ct$ mora zavisiti od parametra θ),

$$a_{4\beta}=0.$$

Stoga u sistemu (3.3), odn. (3.4), ima samo 12 linearno nezavisnih jednačina, na primer jednačine (3.5).

Proučimo prvo slučaj (3.1). Pomnoživši jednačinu (3.1) sa u^{β} i sabravši po β dobivamo, zbog (1.7),

$$u_{\alpha;\beta}u^{\beta}=0. \qquad (3.6)$$

Pomnoživši, dalje, jednačinu (3.6) sa $(-\mathcal{U}_{\lambda}\mathcal{U}^{\lambda})^{1/2}$ dobivamo

$$u_{\alpha;\beta}\mathcal{U}^{\beta}=0. \qquad (3.7)$$

Jednačinu (3.6) možemo napisati u obliku

$$\left[(-\mathcal{U}_{\lambda}\mathcal{U}^{\lambda})^{-1/2}\mathcal{U}_{\alpha}\right]_{;\beta}u^{\beta}=0,$$

odakle je

$$(-\mathcal{U}_{\lambda}\mathcal{U}^{\lambda})^{-1/2}_{,\beta}u^{\beta}\mathcal{U}_{\alpha}+(-\mathcal{U}_{\lambda}\mathcal{U}^{\lambda})^{-1/2}\mathcal{U}_{\alpha;\beta}u^{\beta}=0.$$

Pomnoživši ovu jednačinu sa u_{γ} dobivamo

$$(-\mathcal{U}_{\lambda}\mathcal{U}^{\lambda})^{-1/2}_{,\beta}u^{\beta}\mathcal{U}_{\alpha}u_{\gamma}+(-\mathcal{U}_{\lambda}\mathcal{U}^{\lambda})^{-1/2}\mathcal{U}_{\alpha;\beta}u_{\gamma}u^{\beta}=0, \qquad (3.8)$$

a izmenom indeksa α i γ u (3.8), s obzirom da je $\mathcal{U}_{\alpha}u_{\gamma}=$ $=u_{\alpha}\mathcal{U}_{\gamma}$,

$$(-\mathcal{U}_{\lambda}\mathcal{U}^{\lambda})^{-1/2}_{,\beta}u^{\beta}\mathcal{U}_{\alpha}u_{\gamma}+(-\mathcal{U}_{\lambda}\mathcal{U}^{\lambda})^{-1/2}\mathcal{U}_{\gamma;\beta}u_{\alpha}u^{\beta}=0. \qquad (3.9)$$

Najzad, oduzevši jednačine (3.8) i (3.9) i podelivši rezultujuću jednačinu sa $(-\mathcal{U}_{\lambda}\mathcal{U}^{\lambda})^{-1/2}\neq 0$ imamo

$$\mathcal{U}_{\alpha;\beta}u^{\beta}u_{\gamma}=\mathcal{U}_{\gamma;\beta}u^{\beta}u_{\alpha}. \qquad (3.10)$$

Sada smo u stanju da pokažemo da je i

$$a_{\alpha\beta}u^{\beta}\equiv 0. \qquad (3.11)$$

I zaista je, s obzirom na (1.7),

$$a_{\alpha\beta}u^{\beta}=(\mathcal{U}_{\alpha;\beta}+\mathcal{U}_{\gamma;\beta}u^{\gamma}u_{\alpha})u^{\beta}=$$

$$=\mathcal{U}_{\alpha;\beta}u^{\beta}+\mathcal{U}_{\gamma;\beta}u^{\beta}u_{\alpha}u^{\gamma}.$$

Drugi član možemo, s obzirom na (3.10) napisati u obliku

$$u_{\alpha;\beta}u^{\beta}u_{\gamma}u^{\gamma},$$

pa se, zbog (1.5), dobiva (3.11).

Pokazaćemo da, u slučaju (3.1) a na osnovu (3.11), ni 12 jednačina (3.5) nisu linearno nezavisne, nego da, na primer, iz

$$a_{ij}=0 \tag{3.12}$$

sledi $a_{i4}=0$. (3.11) se može, za $\alpha=i$, napisati u obliku

$$a_{i4}u^{4}=-a_{ij}u^{j},$$

odakle je, uzevši u obzir (3.12) i $u^{4}\neq 0$,

$$a_{i4}=0.$$

Prema tome, medju jednačinama (3.4), odn. (3.3), ima, u slučaju (3.1), samo devet linearno nezavisnih jednačina. Kako su još, kao što smo videli u Glavi II, tri medju ~~njima~~ veličinama $u_{\alpha;\beta}$ proizvoljne sledi da medju veličinama $u_{\alpha;\beta}$ imamo (16-9)+3=10 proizvoljnih.

Da bi nam dalje razmišljanje bilo bliže onom kojim smo se služili u Dodatku I, napišimo jednačine (3.3) u obliku

$$u^{\gamma}_{;\beta}(\delta^{\alpha}_{\gamma}+u^{\alpha}u_{\gamma})=(-u_{\lambda}u^{\lambda})^{1/2}u^{\alpha}_{;\beta}. \tag{3.13}$$

Pre nego što budemo odredili koje od veličina $u^{\alpha}_{;\beta}$ smemo uzeti za proizvoljne, razmotrimo veličine $u^{4}_{;\beta}$ i $u^{\alpha}_{;4}$. Razlozi koje ćemo navesti ubediće nas da pri izboru veličina koje ćemo uzeti za proizvoljne moramo baš njih uzeti, naravno ukoliko proizvoljnost svake od tih veličina ne dovodi do protivrečnosti.

Što se tiče veličina

$$u^{4}_{;\beta}=\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\frac{\partial x^{4}}{\partial \theta}\right)+\left\{{4 \atop \gamma\beta}\right\}u^{\gamma}, \tag{3.14}$$

ni za jednu od njih ne smemo a da ne uzmemo da je proizvoljna jer bi je proizvoljnost drugih veličina odredjivala, čime bi bilo odredjeno $\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{\partial x^4}{\partial\theta}\right)$, odn. u krajnjoj liniji izraz $\frac{\partial x^4}{\partial\theta}$. S obzirom da je sve do sada u svim izvodjenjima bila sačuvana proizvoljnost parametra θ (s jedinim ograničenjem da mora biti vremenskog tipa) koju smo pretpostavili uvodjenjem tog parametra na početku Glave I, vidi se da prilikom izbora proizvoljnih veličina moramo uzeti i sve medju sobom nezavisne veličine $u^4_{;\beta}$.

U pogledu veličina

$$u^\alpha_{;4} = \frac{\partial}{\partial x^4}\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial\theta}\right) + \left\{ {\alpha \atop \gamma\, 4} \right\} u^\gamma, \qquad (3.15)$$

stvar stoji slično jer izraz $\frac{\partial x^\alpha}{\partial\theta}$, koji implicira koordinate brzine, mora biti proizvoljan zbog proizvoljnosti parametra θ.

Treba još samo videti da li medju veličinama $u^4_{;\beta}$ i $u^i_{;4}$ ($u^4_{;4}$ je već obuhvaćeno u skupu veličina $u^4_{;\beta}$) ne postoji neka zavisnost.

Odmah se vidi da u svakoj od jednačina (3.13) postoji samo jedna od veličina $u^4_{;\beta}$ pa da ih, stoga, sve četiri možemo uzeti za proizvoljne. Jednačine (3.13) za $\alpha = i$ i $\beta = 4$ (koje su linearno nezavisne) glase

$$u^\gamma_{;4}\left(\delta^i_\gamma + u^i u_\gamma\right) = \left(-u_\lambda u^\lambda\right)^{1/2} u^i_{;4}. \qquad (3.16)$$

S obzirom da su to tri jednačine sa tri veličine $u^i_{;4}$ na prvi pogled izgleda da nijedna od njih ne može biti proizvoljna nego da su sve tri odredjena rešenja gornjih jednačina. Medjutim, u Glavi II smo videli da su medju veličinama $u_{\alpha;\beta}$ tri proizvoljne, a, kao što se vidi iz jednačine (2.15) napisane za $\beta = 4$ u obliku

$$u^i_{;4} u_i + u^4_{;4} u_4 = 0,$$

sve tri veličine $u^i_{;4}$ na desnim stranama jednačina (3.16) [illegible]

(3.16) mogu biti uzete za proizvoljne, odakle sledi da $u^i_{;4}$ mogu biti uzete za proizvoljne veličine, što, na osnovu onoga što je gore rečeno, i treba učiniti.

Dakle, medju 10 ~~xxxxxxx~~ proizvoljnih veličina $u^\alpha_{;\beta}$ treba uzeti sedam veličina (3.14) i (3.15). Od ostalih devet veličina $u^i_{;j}$ treba za proizvoljne izabrati još samo tri.

Sada možemo pristupiti traženju broja stepeni slobode u slučaju kretanja odredjenog jednačinom (3.1). Jednačina (3.6) predstavlja diferencijalnu jednačinu geodezijske linije, pa izražava jednu veoma važnu i zanimljivu osobinu ove vrste kretanja Bornovog čvrstog tela. Naime, Bornovo čvrsto telo za koje važi (3.1) kreće se tako da je svetska linija svake njegove tačke geodezijska linija prostor-vremena.

Fiksirajmo, sada, jedan skup ξ^i_0. Dobiveni rezultat tvrdi da je svetska linija tačke $C_{\xi^i_0}$ geodezijska linija (koja je početnim uslovima potpuno odredjena). Na osnovu toga izgleda kao da kretanje tačke $C_{\xi^i_0}$ ima jedan stepen slobode. Medjutim, u prostor-vremenu prostorni položaj je neodvojivo vezan za trenutak, tako da razmišljanje, uobičajeno u klasičnoj mehanici, koje, apstrahujući vreme, dovodi do saznanja da je za odredjivanje polozaja tačke koja se kreće po unapred odredjenoj krivoj dovoljan jedan parametar i koje na taj način dopušta proizvoljan zakon puta, u prostor-vremenu može biti pogrešan. Pokazaćemo da je naše kretanje upravo takvo i da se tačka $C_{\xi^i_0}$ kreće po geodezijskoj liniji po zakonu koji je početnim uslovima potpuno odredjen.

Posmatrajmo izraz $u^\alpha_{;\beta} u^\beta$. Na osnovu (1.4) možemo napisati da je

$$u^\alpha_{;\beta} u^\beta = \left[(-u_\lambda u^\lambda)^{1/2} u^\alpha\right]_{;\beta} u^\beta$$

$$= (-u_\lambda u^\lambda)^{1/2}_{,\beta} u^\beta u^\alpha + (-u_\lambda u^\lambda)^{1/2} u^\alpha_{;\beta} u^\beta .$$

Kako je, iz (3.7),

$$u^\alpha_{;\beta} u^\beta = g^{\alpha\gamma} u_{\gamma;\beta} u^\beta = 0,$$

to dobivamo

$$u^{\alpha}_{;\beta} u^{\beta} = (-u_{\lambda} u^{\lambda})^{1/2}_{,\beta} u^{\beta} u^{\alpha}. \qquad (3.17)$$

Setivši se da je

$$u^{\alpha}_{;\beta} = u^{\alpha}_{,\beta} + \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} u^{\gamma}$$

i da je

$$u^{\beta} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \theta},$$

iz (3.17) dobivamo

$$u^{\alpha}_{,\theta} + \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} u^{\beta} u^{\gamma} = (-u_{\lambda} u^{\lambda})^{1/2}_{,\theta} u^{\alpha}. \qquad (3.18)$$

(Podsećamo da je $u^{\alpha}_{,\theta} = \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial \theta}$ a ne $\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\theta}}$.) Sada ćemo iskoristiti proizvoljnost parametra θ. Kao što smo i rekli prilikom njegovog uvodjenja u početku Glave I, možemo uzeti da je $\theta = x^4$. Tada je

$$u^4 = 1, \qquad u^4 = (-u_{\lambda} u^{\lambda})^{-1/2},$$

a otuda

$$u^4_{,\theta} = 0,$$

pa za $\theta = x^4$ i $\alpha = 4$ jednačina (3.18) daje

$$(-u_{\lambda} u^{\lambda})^{1/2}_{,\theta} = \frac{1}{u^4} \left\{ {4 \atop \beta\gamma} \right\} u^{\beta} u^{\gamma}, \qquad (3.19)$$

pa se (3.18) može napisati u obliku

$$u^{\alpha}_{,\theta} = \frac{1}{u^4} \left(\left\{ {4 \atop \beta\gamma} \right\} u^{\alpha} - \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} u^4 \right) u^{\beta} u^{\gamma}. \qquad (3.20)$$

Iz ove jednačine se vidi da je promena brzine u^{α} sa vremenom $t = \frac{1}{c}\theta$ potpuno odredjena metrikom prostor-vremena i brzinom u^{α} u tom trenutku, te je, prema tome, brzina duž cele svetske linije, a, stoga, i zakon kretanja, potpuno odredjena početnim uslovima. Iz toga zaključujemo da kretanje tačke $C_{\xi_0^i}$ nema nijedan stepen slobode.

Zaključak je, možda, na prvi pogled čudan i u klasičnoj mehanici neuobičajen, ali ima veoma jednostavno tumačenje. Radi lakšeg razumevanja tumačenje ćemo primeniti u slučaju specijalne teorije relativnosti, a otuda će, imajući u vidu moguću metriku opšte teorije relativnosti, biti jasno da postoji analogija onoga što ćemo navesti sa tumačenjem koje bi trebalo dati u opštoj teoriji relativnosti.

U specijalnoj teoriji relativnosti geodezijske linije su prave, pa je kretanje tačke $C_{\xi_0^i}$ pravolinijsko. S obzirom da se u specijalnoj teoriji relativnosti mogu uvesti takve koordinate za koje su Kristofelovi simboli druge vrste $\left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\}$ jednaki nuli (Galilejeve koordinate), iz (3.20) sledi da se tačka $C_{\xi_0^i}$ kreće jednoliko pravolinijski. S obzirom da se u teoriji relativnosti ne može govoriti o nekom apsolutnom miru i da se tačka koja je u miru u odnosu na jednog posmatrača u specijalnoj teoriji relativnosti kreće jednoliko pravolinijski u odnosu na drugog, vidi se da je kretanje naše tačke $C_{\xi_0^i}$ i u specijalnoj i u opštoj teoriji relativnosti generalizacija mirovanja tačke u klasičnoj mehanici, koja nema nijedan stepen slobode.

Fiksirajmo, sada, $\theta = \theta_0$ pa potražimo brzinu tačke $C_{\xi_0^i + d\xi^i}$ u dogadjaju $x_0^\alpha + d_0x^\alpha$, gde je $x_0^\alpha = x^\alpha(\xi_0^i, \theta_0)$, imajući ~~x xxxx~~ na umu da znamo brzinu tačke $C_{\xi_0^i}$. Do na veličine prvog reda u odnosu na $d\xi^i$ brzina tačke $C_{\xi_0^i} + d\xi^i$ je

$$u^\alpha + u^\alpha_{;\beta}\, d_0x^\beta.$$

Od 10 proizvoljnih veličina $u^\alpha_{;\beta}$ njih sedam, tj. $u^\alpha_{;\alpha}$ i $u^i_{;4}$ je vezano za proizvoljnost izbora parametra θ, pa, stoga, ne utiču na broj stepeni slobode. Prema tome, moguća pomeranja čvrstog tela pri fiksiranom dogadjaju

x_0^α zavisi od tri proizvoljne veličine te naše telo ima samo tri stepena slobode.

Sa stanovišta posmatrača, a u toj ulozi se mi i nalazimo, uverljivija je sledeća analiza. Fiksirajući dogadjaj x_0^α fiksirali smo i trenutak $t_0 = \frac{1}{c} x_0^4$. Potražimo prostorne koordinate brzine tačke $C_{\xi_0^i + d\xi^i}$ u dogadjaju koji je istovremen dogadjaju x_0^α, tj. u dogadjaju $x_0^\alpha + d^* x^\alpha$, pri čemu je

$$d^* x^\alpha = x^\alpha_{,i}\, d\xi^i + u^\alpha d\theta$$

takav vektor pomeranja da je

$$d^* x^4 = 0.$$

Opet, do na veličine prvog reda u odnosu na $d\xi^i$, prostorne koordinate brzine tačke $C_{\xi_0^i + d\xi^i}$ u trenutku t_0 su

$$u^i + u^i_{;j}\, d^* x^j$$

(jer je $d^* x^4 = 0$). Medju veličinama $u^i_{;j}$, kao što smo videli, ima samo tri proizvoljne, pa ponovo zaključujemo da naše telo ima samo tri stepena slobode.

Iz svega što je rečeno mogli bismo, možda, reći da je kretanje (3.1) neka vrsta generalizacije obrtanja čvrstog tela oko nepomične tačke iz klasične mehanike, ali ne treba izgubiti iz vida da je to kretanje takvo da svetske linije svih tačaka moraju biti geodezijske linije prostor-vremena. Podrobnije ispitivanje kretanja (3.1) nećemo dati, jer bi nas odvelo daleko od našeg glavnog cilja - odredjivanja broja stepeni slobode Bornovog čvrstog tela.

Predjimo, sada, na ispitivanje slučaja (3.2). Odredjivanje broja stepeni slobode ovog kretanja je nesravnjeno lakše. Odmah uvidjamo da ne mora važiti jednačina (3.6), te da, stoga, svetske linije ~~tačak~~ tačaka našeg čvrstog tela ne moraju biti geodezijske linije prostor-vremena niti je svetska linija bilo kakva odredjena linija. S druge strane, opet zato što ne mora važiti (3.6) ne mora važiti ni (3.20), što znači da kretanje tačke $C_{\xi^i_0}$ ne mora biti ni generalizacija jednolikog kretanja niti je odredjen bilo kakav zakon kretanja dogadjaja po, inače neodredjenoj, svetskoj liniji. Otuda sledi da kretanje tačke $C_{\xi^i_0}$ ima tri stepena slobode.

Izabravši svetsku liniju tačke $C_{\xi^i_0}$ pokazaćemo da su svetske linije svih ostalih tačaka odredjene. Zaista, ma za koje fiksirano θ_0 fiksiran je dogadjaj x^α_0 pa, prema tome, i jedinični vektor u^α te izabrane svetske linije u dogadjaju x^α_0. Do na veličine prvog reda u odnosu na $\delta\xi^i$, jedinični vektor svetske linije tačke $C_{\xi^i_0}+\delta\xi^i$ u dogadjaju $x^\alpha_0+\delta_0 x^\alpha$ je

$$u^\alpha + u^\alpha{}_{;\beta}\,\delta_0 x^\beta .$$

Naše telo se kreće tako da zadovoljava jednačinu (3.2), koju možemo napisati u obliku

$$u^\alpha{}_{;\beta} + u^\alpha{}_{;\lambda}\,u^\lambda u_\beta = 0. \qquad (3.21)$$

Pomnoživši ovu jednačinu sa $\delta_0 x^\beta$ dobivamo, zbog upravnosti vektora u^α i $\delta_0 x^\beta$, tj. zbog $u_\beta\,\delta_0 x^\beta = 0$,

$$u^\alpha{}_{;\beta}\,\delta_0 x^\beta = 0. \qquad (3.22)$$

Jednačina (3.22) izražava činjenicu da su svetske linije svih tačaka našeg tela medjusobno paralelne (u smislu metrike prostor-vremena), te svetska linija tačke $C_{\xi^i_0}$ odredjuje i svetske linije svih ostalih tačaka, ili, što je isto, kretanje tačke $C_{\xi^i_0}$ odredjuje kretanje i svake druge tačke našeg tela.

Prema tome, čvrsto telo koje se kreće tako da zadovoljava diferencijalne jednačine (3.2) ima, takodje, tri stepena slobode. Na osnovu izloženih osobina tog kretanja vidi se da ono predstavlja generalizaciju translatornog kretanja klasičnog čvrstog tela.

Dakle, postoje dva moguća tipa kretanja Bornovog čvrstog tela u opštoj teoriji relativnosti i u oba slučaja kretanje takvog tela ima samo tri stepena slobode.

I ovde treba da pomenemo, kao i u Dodatku I, da i sama struktura prostora može uticati na smanjenje broja stepeni slobode, ~~koji je posledica isključivo~~ onog broja koji je posledica isključivo definicije čvrstog tela.

GLAVA IV

KLASIČNA APROKSIMACIJA[9] BORNOVOG ČVRSTOG TELA

U Uvodu smo već pomenuli da je Born, definišući relativistički čvrsto telo, želeo ne samo da pod tim imenom podrazumeva jednu klasu kretanja sistema tačaka u teoriji relativnosti, nego i da ta klasa kretanja predstavlja generalizaciju kretanja klasičnog čvrstog tela.

Poznata je činjenica da je klasična (Njutnova) mehanika aproksimacija specijalnog slučaja opšte teorije relativnosti - specijalne teorije relativnosti, za brzine koje su dovoljno male da se mogu zanemariti u poredjenju sa brzinom svetlosti (klasična aproksimacija). Stoga i svaki relativistički pojam, ako jeste generalizacija nekog klasičnog pojma, mora biti takav da njegov specijalan oblik, koji ima u specijalnoj teoriji relativnosti, u klasičnoj aproksimaciji da upravo klasični pojam čija je on generalizacija.

Na osnovu ovoga je jasno da je kretanje Bornovog čvrstog tela generalizacija kretanja klasičnog čvrstog tela samo ako se ono, u klasičnoj aproksimaciji, svede na ovo poslednje.

---

[9] Izraz "klasična aproksimacija" smo upotrebili radi kratkoće i pod njim podrazumevamo aproksimaciju kojom rezultati specijalne teorije relativnosti prelaze u rezultate klasične (Njutnove) mehanike.

Prirodno je postaviti pitanje da li je uopšte potrebno pronalaziti klasičnu aproksimaciju kretanja Bornovog čvrstog tela, kada smo već videli da ono ima samo tri stepena slobode a ne šest kao što ima kretanje klasičnog čvrstog tela. Normalno je očekivati da se aproksimacijom broj stepeni slobode neće povećati. Medjutim, zaključiti samo na osnovu tog očekivanja da kretanje Bornovog čvrstog tela nije generalizacija kretanja klasičnog čvrstog tela nije ubedljivo jer se unapred ne sme odbaciti mogućnost da se aproksimacijom mogu pojaviti i novi stepeni slobode[10].

Po definiciji, Bornovo čvrsto telo je onaj sistem tačaka za koji važi (1.13), tj.

$$(g_{\alpha\beta} d_0 x^\alpha d_0 x^\beta)_{,\theta} = 0. \tag{4.1}$$

Izraz u zagradi ima isti oblik i u specijalnoj teoriji relativnosti, pri čemu je u tom specijalnom slučaju uvek moguće naći takve koordinate (Galilejeve koordinate) da metrički tenzor bude

$$g_{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Bmatrix}. \tag{4.2}$$

Izaberimo, sada, da je

$$\theta = x^4 \quad (= ct). \tag{4.3}$$

Tada je

$$d_0 x^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^l} d\xi^l + u^i d\theta, \tag{4.4}$$

i

$$d_0 x^4 = d\theta, \tag{4.5}$$

jer je, zbog (4.3),

---

[10] Na to me je upozorio moj profesor Dr Konstantin Voronjec.

$$\frac{\partial x^4}{\partial \xi^i} = 0 \tag{4.6}$$

i

$$u^4 = \frac{\partial x^4}{\partial \theta} = 1. \tag{4.7}$$

Razmotrimo šta biva sa $d_0 x^\alpha$ u klasičnoj aproksimaciji.

Matematički izraz pretpostavke da je brzina (trobrzina) tačke C_{ξ^i} mala u poredjenju s brzinom c svetlosti je

$$u^i \ll u^4 \quad (=1). \tag{4.8}$$

S obzirom na (4.7) i metrički tenzor (4.2), iz uslova upravnosti vektora u^α i $d_0 x^\alpha$ dobivamo

$$d_0 x^4 = \sum_{i=1}^{3} u^i d_0 x^i, \tag{4.9}$$

odakle je u klasičnoj aproksimaciji, zbog (4.8),

$$d_0 x^4 \approx 0. \tag{4.10}$$

Na osnovu toga je, iz (4.4) i (4.5),

$$d_0 x^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^l} d\xi^l \tag{4.11}$$

i

$$d_0 x^4 = 0. \tag{4.12}$$

Ako sa $x^\alpha + d^* x^\alpha$ obeležimo dogadjaj na svetskoj liniji tačke $C_{\xi^i + d\xi^i}$ koji je istovremen dogadjaju x^α na svetskoj liniji tačke C_{ξ^i}, onda je

$$d^* x^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^i} d\xi^i. \tag{4.13}$$

Sada se vidi da je klasična aproksimacija vektora $d_0 x^\alpha$ vektor $d^* x^\alpha$ (vidi jednačinu (4.6)), što znači da su, u klasičnoj aproksimaciji, dogadjaji x^α i $x^\alpha + d_0 x^\alpha$

istovremeni.

Prema tome, klasična aproksimacija Bornovog zahteva je

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{4} d^*x^\alpha d^*x^\alpha\right)_{,\theta} = 0, \tag{4.14}$$

ili, množenjem sa $\frac{d\theta}{dt}$ $(= c)$ i zbog $d^*x^4 = 0$,

$$\left(\sum_{i=1}^{3} d^*x^i d^*x^i\right)_{,t} = 0. \tag{4.15}$$

Dakle, u klasičnoj aproksimaciji Bornova definicija zahteva da rastojanje (u običnom, prostornom smislu) istovremenih položaja tačaka C_{ξ^i} i $C_{\xi^i+d\xi^i}$ ostane tokom vremena nepromenjeno, a to je upravo i zahtev definicije klasičnog čvrstog tela.

Da li se iz toga sme zaključiti da se <u>kretanje</u> Bornovog čvrstog tela u klasičnoj aproksimaciji svodi na kretanje klasičnog čvrstog tela, ili, da budemo precizniji, da je <u>kretanje</u> Bornovog čvrstog tela generalizacija kretanja klasičnog čvrstog tela?

Jednačina (4.15) tvrdi samo da je klasična aproksimacija Bornovog čvrstog tela - čvrsto telo u klasičnom smislu. Istina je da se iz jednačine (4.15), koja je identična jednačini (D I.2) za Dekartove pravougle koordinate, dobivaju uslovi (D I.6) koje mora zadovoljavati kretanje klasičnog čvrstog tela. Iz toga može izgledati verovatno da je i generalizacija bilo kog klasično mogućeg kretanja klasičnog čvrstog tela neko kretanje Bornovog čvrstog tela. Medjutim, na osnovu osobina mogućih kretanja Bornovog čvrstog tela, koje smo upoznali u Glavi III, izgleda, s druge strane, kao da su moguća kretanja Bornovog čvrstog tela generalizacije samo nekih od mogućih kretanja klasičnog čvrstog tela.

Konačan odgovor, prema tome, treba tražiti jedino u klasičnoj aproksimaciji diferencijalnih jednačina kretanja Bornovog čvrstog tela.

Sada smo pred izborom da li da se odlučimo na traženje klasične aproksimacije diferencijalnih jednačina (2.1) ili na traženje klasičnih aproksimacija posebno diferencijalnih jednačina (2.2), a posebno diferencijalnih jednačina (2.3). Polazeći od jednačina (2.1) dobili bismo uslove koje, u klasičnoj aproksimaciji, moraju zadovoljavati veličine $u_{\alpha;\beta}$, ali nam oni ne bi jemčili, kao ni uslov (4.15), da je svako kretanje koje zadovoljava te uslove - kretanje kome kao generalizacija odgovara neko od kretanja Bornovog čvrstog tela[11].

Definicija Bornovog čvrstog tela dopušta da se ono kreće samo tako da zadovoljava ili sistem diferencijalnih jednačina (2.2) ili sistem diferencijalnih jednačina (2.3). Ispitajmo klasične aproksimacije tih kretanja. Rezultati tih ispitivanja daće konačan odgovor na pitanje da li se kretanje Bornovog čvrstog tela sme smatrati generalizacijom kretanja klasičnog čvrstog tela ili ne.

U specijalnoj teoriji relativnosti u odnosu na koordinate u odnosu ~~na~~ koje je metrički tenzor dat sa (4.2), je

$$u_i = u^i, \quad u_4 = -u^4 = -1, \quad (\theta = x^4) \tag{4.16}$$

odakle je

$$u_\alpha u^\alpha = \sum_{i=1}^{3} u^i u^i - 1,$$

odn.

$$(-u_\alpha u^\alpha)^{1/2} = \left(1 - \sum_{i=1}^{3} u^i u^i\right)^{1/2}. \tag{4.17}$$

Taj se izraz, s obzirom na (4.8), u klasičnoj aproksimaciji svodi na

$$(-u_\alpha u^\alpha)^{1/2} = 1. \tag{4.18}$$

---

[11] I zaista, klasičnom aproksimacijom jednačina (2.1) dobivaju se jednačine (D I.6) i proizvoljnost veličina $u_{i;4}$. Ovo tvrdjenje nećemo ovde dokazivati, ali, poklonivši mu poverenje, smemo zaključiti jedino, kao i iz jednačine (4.15) da je svako kretanje Bornovog čvrstog tela takvo da njegova klasična aproksimacija predstavlja kretanje klasičnog čvrstog tela, ali ne i obrnuto.

Otuda je, dalje, u klasičnoj aproksimaciji

$$u^{\alpha} = \mathcal{U}^{\alpha} \quad \text{odn.} \quad u_{\alpha} = \mathcal{U}_{\alpha} . \tag{4.19}$$

S druge strane, u odnosu na Galilejeve koordinate u specijalnoj teoriji relativnosti, imamo da je

$$\left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} = 0,$$

pa se, u odnosu na te koordinate, kovarijantni izvod svodi na parcijalni izvod, tj. važi

$$u_{\alpha;\beta} = u_{\alpha,\beta} . \tag{4.20}$$

Predjimo, sada, na traženje klasične aproksimacije kretanja koje zadovoljava sistem diferencijalnih jednačina (2.2). One za $\alpha = i$, $\beta = j$ i s obzirom na (4.20) i (4.19) u klasičnoj aproksimaciji daju

$$\mathcal{U}_{i,j} + \mathcal{U}_{j,i} = 0, \tag{4.21}$$

za $\alpha = i$, $\beta = 4$

$$\mathcal{U}_{i,4} = 0, \tag{4.22}$$

jer je, na osnovu (4.16),

$$\mathcal{U}_{4,i} = 0, \tag{4.23}$$

a za $\alpha = \beta = 4$ jednačinu

$$\mathcal{U}^{4}_{,4} = 0, \tag{4.24}$$

koja je (treba imati na umu da je $\theta = x^4$) trivijalna jer tvrdi da je

$$\frac{\partial}{\partial x^4}\left(\frac{\partial x^4}{\partial x^4}\right) = 0 .$$

Jednačine (4.21) tvrde ono što sledi i iz jednačina (4.15), tj. da je klasična aproksimacija Bornovog čvrstog tela čije kretanje zadovoljava sistem diferencijalnih jednačina (2.2) telo koje je čvrsto i u klasičnom smislu. I zaista, množenjem jednačina (4.21) sa $\frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}\frac{\partial x^l}{\partial \xi^l}$ dobiva se

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi^l}\frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}+\frac{\partial u_l}{\partial \xi^k}\frac{\partial x^l}{\partial \xi^l}=0. \qquad (4.25)$$

Kako je, dalje, uzevši u obzir (4.16),

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi^l}=\frac{\partial u^i}{\partial \xi^l}=\frac{\partial}{\partial \xi^l}\left(\frac{\partial x^i}{\partial \theta}\right)=\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^l}\right),$$

(4.25) postaje

$$\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^l}\right)\frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}\right)\frac{\partial x^i}{\partial \xi^l}\right]=0,$$

odn.

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}\frac{\partial x^i}{\partial \xi^l}=0. \qquad (4.26)$$

Množenjem poslednje jednačine sa $d\xi^k d\xi^l$ dobivamo

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\sum_{i=1}^{3}d_\xi x^i d_\xi x^i=0, \qquad (4.27)$$

gde je

$$d_\xi x^i=\frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}d\xi^k,$$

identično sa (4.13) za $\alpha=i$. Množenjem jednačine (4.26) sa $\frac{d\theta}{dt}$ $(=c)$ dobiva se jednačina (4.15).

Uzgred pomenimo da je jednačina (4.26) ekvivalentna jednačinama (4.21) s obzirom na proizvoljnost veličina $d\xi^i$, što se može dokazati postupkom sličnim postupku koji smo koristili pri izvodjenju jednačina (D I.6) iz jednačine (D I.2).

Jednačina (4.22), koja se, zbog (4.16) može napisati i u obliku

$$u^i_{,4}=0, \qquad (4.28)$$

tvrdi da, fiksirajući bilo koji položaj (odredjen prostornim koordinatama x^i), brzina svake tačke klasične aproksimacije Bornovog čvrstog tela čije kretanje zadovoljava sistem diferencijalnih jednačina (2.2) koja se nadje u tom položaju ne zavisi od trenutka u kome se u tom položaju nadje.

S druge strane, jednačine (3.6), tj.

$$u_{\alpha;\beta}u^{\beta}=0,$$

koje se dobivaju množenjem jednačina (2.2) sa u^{β} i sabiranjem po β, u klasičnoj aproksimaciji, na osnovu (4.20) i (4.19), za $\alpha=i$ glase

$$\mathcal{U}_{i;\beta}\mathcal{U}^{\beta}=0,$$

tj.

$$\frac{\partial \mathcal{U}_i}{\partial \theta}=0,$$

ili, što je, zbog (4.16), isto što i

$$\frac{\partial \mathcal{U}^i}{\partial \theta}=0. \tag{4.29}$$

Ove jednačine tvrde da je brzina svake tačke klasične aproksimacije Bornovog čvrstog tela čije kretanje zadovoljava sistem diferencijalnih jednačina (2.2), i to kao vektorska veličina, stalna tokom vremena. Iz njih sledi da je

$$\frac{\partial x^i}{\partial \theta}=\mathcal{U}^i=\mathcal{U}^i(\xi^j), \tag{4.30}$$

odakle je

$$x^i=\mathcal{U}^i\cdot\theta+f^i(\xi^j). \tag{4.31}$$

Smenivši nadjene ~~xxxxxxxxx~~ izraze za funkcije x^i u (4.26) dobivamo

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial \mathcal{U}^i}{\partial \xi^j}\theta+\frac{\partial f^i}{\partial \xi^j}\right)\left(\frac{\partial \mathcal{U}^i}{\partial \xi^k}\theta+\frac{\partial f^i}{\partial \xi^k}\right)=0,$$

odn.

$$\sum_{i=1}^{3}\left(2\frac{\partial u^i}{\partial\xi^j}\frac{\partial u^i}{\partial\xi^k}\theta+\frac{\partial u^i}{\partial\xi^j}\frac{\partial f^i}{\partial\xi^k}+\frac{\partial u^i}{\partial\xi^k}\frac{\partial f^i}{\partial\xi^j}\right)=0. \tag{4.32}$$

Pošto jednačine (4.32) moraju identički važiti po θ dobivamo, izmedju ostalog,

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u^i}{\partial\xi^j}\frac{\partial u^i}{\partial\xi^k}=0, \tag{4.33}$$

i, posebno, za $k=j$,

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u^i}{\partial\xi^j}\right)^2=0,$$

odakle sledi i

$$\frac{\partial u^i}{\partial\xi^j}=0. \tag{4.34}$$

Jednačine (4.34) tvrde da u datom trenutku θ sve tačke klasične aproksimacije Bornovog čvrstog tela čije kretanje zadovoljava sistem diferencijalnih jednačina (2.2) imaju iste brzine i to kao vektorske veličine, pa zajedno sa jednačinama (4.29) tvrde da se naše telo (proučavana klasična aproksimacija) kreće jednoliko pravolinijski translatorno.

Iz (4.29) i (4.34) za veličinu

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^j}=\frac{\partial u^i}{\partial\xi^k}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^j}+\frac{\partial u^i}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x^j},$$

sledi, uzevši u obzir i (4.16),

$$u_{i,j}=0. \tag{4.35}$$

Skup jednačina (4.35) i (4.22) tvrdi ponovo ono isto što je tvrdio i skup jednačina (4.34) i (4.29), naime, da se u klasičnoj aproksimaciji kretanje Bornovog čvrstog tela koje se kreće tako da zadovoljava sistem diferencijalnih jednačina (2.2) svodi na jednoliko pravolinijsko translatorno kretanje.

Podsećamo da smo, analizujući kretanje koje zadovoljava sistem diferencijalnih jednačina (2.2), u Glavi III na str. 29, rekli da je to neka vrsta generalizacije obrtanja klasičnog čvrstog tela oko nepomične tačke, ili, što je, na osnovu Galilejevog klasičnog principa relativnosti, isto, oko tačke koja se kreće jednoliko pravolinijski. Na osnovu toga a u svetlosti rezultata koje smo sada dobili izgleda da je "obrtanje" Bornovog čvrstog tela malo u poredjenju sa brzinama kretanja njegovih tačaka, tako da u klasičnoj aproksimaciji daje klasično čvrsto telo koje se kreće jednoliko pravolonijski translatorno.

To što smo zaključili, samo maglovito opisuje osobine tog kretanja Bornovog čvrstog tela, ali bi nas, ponavljamo, potpunija analiza tog kretanja suviše udaljila od našeg glavnog zadatka. U ovoj Glavi nas interesuje samo klasična aproksimacija kretanja Bornovog čvrstog tela, a takvu aproksimaciju kretanja koje zadovoljava sistem diferencijalnih jednačina (2.2) smo dobili potpuno precizno.

Nadjimo, sada, klasičnu aproksimaciju jednačina (2.3). S obzirom na (4.20) i (4.19) one se mogu napisati u obliku

$$u_{\alpha,\beta}+u_{\alpha,r}u^{r}u_{\beta}+u_{\alpha,4}u^{4}u_{\beta}=0. \qquad (4.36)$$

Za $\alpha=i$, $\beta=j$, dobivamo, zbog (4.8),

$$u_{i,j}=0. \qquad (4.37)$$

Za $\alpha=i$, $\beta=4$ imamo jednačinu

$$u_{i,4}+u_{i,r}u^{r}u_{4}+u_{i,4}u^{4}u_{4}=0,$$

koja se, na osnovu (4.16) i (4.37), svodi na identičnost, pa ne daje nikakav uslov za veličine

$$u_{i,4}\,. \qquad (4.38)$$

Za $\alpha=4$, $\beta=j$, zbog (4.23) i (4.24), jednačina (4.36) se opet svodi na identičnost, a isto tako i za $\alpha=\beta=4$.

Jednačine (4.37) i proizvoljnost izraza (4.38) zajedno tvrde da je kretanje ~~xxx~~ dobiveno klasičnom aproksimacijom kretanja Bornovog čvrstog tela koje zadovoljava sistem diferencijalnih jednačina (2.3), translatorno.

Vidimo, dakle, da klasična aproksimacija kretanja Bornovog relativistički čvrstog tela daje klasično translatorno kretanje klasičnog čvrstog tela: u prvom slučaju jednoliko pravolinijsko translatorno, ili, što je na osnovu Galilejevog klasičnog principa relativnosti, isto, mirovanje čvrstog tela, pri čemu to kretanje nema nijedan stepen slobode, a u drugom slučaju proizvoljno translatorno kretanje čvrstog tela koje, prema tome, ima tri stepena slobode.

Na osnovu svega toga smemo zaključiti da Bornovo relativistički čvrsto telo <u>nije</u> generalizacija klasičnog čvrstog tela.

G L A V A V

TOMASOVO RELATIVISTIČKI ČVRSTO TELO

U potrazi za definicijom relativistički čvrstog tela koje bi bilo generalizacija klasičnog čvrstog tela, T. Tomas[12] (T. Y. Thomas) je dao definiciju iz koje sledi zahtev: sistem tačaka C_{3}^{i} predstavlja relativistički čvrsto telo ako se kreće tako da zadovoljava jednačine

$$u_{\alpha;\beta}+u_{\beta;\alpha}=0. \tag{5.1}$$

Pokazaćemo da sistem tačaka koji se kreće tako da zadovoljava sistem diferencijalnih jednačina (5.1) predstavlja Bornovo relativistički čvrsto telo i da, prema tome, ne može biti generalizacija klasičnog čvrstog tela.

Bornovo relativistički čvrsto telo je onaj sistem tačaka čije kretanje zadovoljava sistem diferencijalnih jednačina (2.1), koje se mogu napisati i u ekvivalentnom obliku (2.4), tj.

$$(u_{\nu;\beta}+u_{\beta;\nu})(\delta^{\nu}_{\lambda}+u^{\nu}u_{\lambda})(\delta^{\beta}_{\mu}+u^{\beta}u_{\mu})=0. \tag{5.2}$$

Množenjem ove jednačine sa $(-u_{\sigma}u^{\sigma})^{1/2}$ i s obzirom na

---

12) T. Y. Thomas, Arch. Ratl. Mech. Anal., Vol.9, No.4., p.301 (1962).

(1.19) dobivamo

$$\left[u_{\alpha;\beta}(\delta^{\alpha}_{\nu}+u^{\alpha}u_{\nu})+u_{\alpha;\nu}(\delta^{\alpha}_{\beta}+u^{\alpha}u_{\beta})\right](\delta^{\nu}_{\lambda}+u^{\nu}u_{\lambda})(\delta^{\beta}_{\mu}+u^{\beta}u_{\mu})=0. \tag{5.3}$$

S obzirom da, zbog (1.5), važi

$$(\delta^{\alpha}_{\nu}+u^{\alpha}u_{\nu})(\delta^{\nu}_{\lambda}+u^{\nu}u_{\lambda})=\delta^{\alpha}_{\lambda}+u^{\alpha}u_{\lambda}, \tag{5.4}$$

oslobadjajući se uglaste zagrade iz (5.3) dobivamo

$$u_{\alpha;\beta}(\delta^{\alpha}_{\lambda}+u^{\alpha}u_{\lambda})(\delta^{\beta}_{\mu}+u^{\beta}u_{\mu})+u_{\alpha;\nu}(\delta^{\alpha}_{\mu}+u^{\alpha}u_{\mu})(\delta^{\nu}_{\lambda}+u^{\nu}u_{\lambda})=0. \tag{5.5}$$

Izmenivši na podesan način indekse u drugom članu dobivamo

$$(u_{\alpha;\beta}+u_{\beta;\alpha})(\delta^{\alpha}_{\lambda}+u^{\alpha}u_{\lambda})(\delta^{\beta}_{\mu}+u^{\beta}u_{\mu})=0. \tag{5.6}$$

Lako je pokazati[13] i obrnuto da se iz jednačine (5.6) može dobiti jednačina (5.2).

Prema tome, ako se sistem tačaka kreće tako da zadovoljava jednačine (5.1) sigurno zadovoljava i jednačine (5.6), odn. Tomasovo relativistički čvrsto telo je specijalan slučaj Bornovog relativistički čvrstog tela i, stoga, ne predstavlja generalizaciju klasičnog čvrstog tela.

Kretanje Bornovog čvrstog tela koje zadovoljava jednačine (5.1) ima neke veoma interesantne osobine.

Pokazaćemo, prvo, da je to kretanje takvo da je telo za posmatrača opšte teorije relativnosti čvrsto i u klasičnom smislu (ne prelazeći na klasičnu aproksimaciju).

Jednačine (5.1) se mogu napisati u obliku

$$u_{\alpha,\beta}-\left\{{}^{\gamma}_{\alpha\beta}\right\}u_{\gamma}+u_{\beta,\alpha}-\left\{{}^{\gamma}_{\alpha\beta}\right\}u_{\gamma}=0,$$

13) Ekvivalentnost jednačina (5.2) i (5.6) konstatovali su Salcman i Taub u svom ovde već pomenutom radu. Samo su oni pogrešno verovali da su i jednačine (5.1) i (2.2) medju sobom ekvivalentne. Greška u njihovom zaključivanju je potekla, u krajnjoj liniji, zbog korišćenja pojma sopstvenog vremena.

odakle je, dalje,

$$(g_{\alpha\mu}u^{\mu})_{,\beta}+(g_{\beta\mu}u^{\mu})_{,\alpha}-2\left\{{\gamma \atop \alpha\beta}\right\}u_{\gamma}=0,$$

$$g_{\alpha\mu,\beta}u^{\mu}+g_{\beta\mu,\alpha}u^{\mu}+g_{\alpha\mu}u^{\mu}_{,\beta}+g_{\beta\mu}u^{\mu}_{,\alpha}-2\left\{{\gamma \atop \alpha\beta}\right\}u_{\gamma}=0,$$

te, s obzirom na

$$g_{\alpha\mu,\beta}=g_{\lambda\mu}\left\{{\lambda \atop \alpha\beta}\right\}+g_{\alpha\lambda}\left\{{\lambda \atop \mu\beta}\right\}, \qquad (5.7)$$

dobivamo

$$\left(g_{\alpha\lambda}\left\{{\lambda \atop \mu\beta}\right\}+g_{\beta\lambda}\left\{{\lambda \atop \mu\alpha}\right\}\right)u^{\mu}+g_{\alpha\mu}u^{\mu}_{,\beta}+g_{\beta\mu}u^{\mu}_{,\alpha}=0.$$

Koristeći opet (5.7) imamo

$$g_{\alpha\beta,\mu}u^{\mu}+g_{\alpha\mu}u^{\mu}_{,\beta}+g_{\beta\mu}u^{\mu}_{,\alpha}=0.$$

Pomnoživši ove jednačine sa $x^{\alpha}_{,i}\,x^{\beta}_{,j}$ i sabravši po α i β dobivamo

$$g_{\alpha\mu}(u^{\mu}_{,\beta}x^{\beta}_{,j})x^{\alpha}_{,i}+g_{\beta\mu}(u^{\mu}_{,\alpha}x^{\alpha}_{,i})x^{\beta}_{,j}+g_{\alpha\beta,\mu}u^{\mu}x^{\alpha}_{,i}x^{\beta}_{,j}=0. \qquad (5.8)$$

Zbog

$$u^{\mu}_{,\beta}x^{\beta}_{,j}=u^{\mu}_{,j}=(x^{\mu}_{,\theta})_{,j}=(x^{\mu}_{,j})_{,\theta}$$

i

$$g_{\alpha\beta,\mu}u^{\mu}=g_{\alpha\beta,\mu}x^{\mu}_{,\theta}=g_{\alpha\beta,\theta},$$

jednačine (5.8) možemo napisati u obliku

$$g_{\alpha\mu}x^{\alpha}_{,i}(x^{\mu}_{,j})_{,\theta}+g_{\beta\mu}(x^{\mu}_{,i})_{,\theta}x^{\beta}_{,j}+g_{\alpha\beta,\theta}x^{\alpha}_{,i}x^{\beta}_{,j}=0,$$

ili, podesnom izmenom nemih indeksa,

$$g_{\alpha\beta}x^{\alpha}_{,i}(x^{\beta}_{,j})_{,\theta}+g_{\alpha\beta}(x^{\alpha}_{,i})_{,\theta}x^{\beta}_{,j}+g_{\alpha\beta,\theta}x^{\alpha}_{,i}x^{\beta}_{,j}=0,$$

tj.

$$\left(g_{\alpha\beta}\, x^{\alpha}_{,i}\, x^{\beta}_{,j}\right)_{,\theta} = 0. \qquad (5.9)$$

Pomnoživši te jednačine sa $d\xi^i\, d\xi^j$ i sabravši po i i j i s obzirom da $d\xi^i$ ne zavisi od θ, dobivamo

$$\left(g_{\alpha\beta}\, x^{\alpha}_{,i}\, x^{\beta}_{,j}\, d\xi^i\, d\xi^j\right)_{,\theta} = 0. \qquad (5.10)$$

Ako sada uzmemo da je $\theta = x^4 = ct$ dobivamo

$$\left(g_{ij}\,\frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}\,\frac{\partial x^j}{\partial \xi^m}\, d\xi^k\, d\xi^m\right)_{,t} = 0, \qquad (5.11)$$

jer je

$$\frac{\partial x^4}{\partial \xi^i} = 0.$$

Izraz u zagradi, odn.

$$dl^2 = g_{ij}\,\frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}\,\frac{\partial x^j}{\partial \xi^m}\, d\xi^k\, d\xi^m, \qquad (5.12)$$

predstavlja rastojanje (u običnom prostornom smislu) istovremenih (za datog posmatrača) položaja tačaka ξ^i i $\xi^i + d\xi^i$, pa jednačina (5.11) i izražava čvrstoću tela u klasičnom smislu.

Druga interesantna osobina kretanja koje zadovoljava jednačine (5.1) je u sledećem. Pomnoživši jednačine (5.1) sa $u^\alpha u^\beta$ i sabravši po α i β dobivamo

$$u_{\alpha;\beta}\, u^\alpha u^\beta = 0,$$

što se može napisati u obliku

$$\left(u_\alpha u^\alpha\right)_{,\beta} u^\beta = 0, \qquad (5.13)$$

ili najzad, s obzirom na (1.2), u obliku

$$\left(u_\alpha u^\alpha\right)_{,\theta} = 0. \qquad (5.14)$$

Jednacina (5.14) izražava činjenicu da se dogadjaj x^k kreće po svetskoj liniji tačke C_{ξ^i} tako da je intenzitet četvorovektora brzine stalan tokom kretanja. Pri tome je skup ξ^i proizvoljan.

Dalje, u specijalnoj teoriji relativnosti u Galilejevim koordinatama, u odnosu na koje metrički tenzor ima oblik (4.2), i za $\theta = x^4$ jednačina (5.14) ima oblik

$$\left(\sum_{i=1}^{3} u^i u^i - 1\right)_{,t} = 0,$$

odakle je

$$\left(\sum_{i=1}^{3} u^i u^i\right)_{,t} = 0. \qquad (5.15)$$

Ova jednačina tvrdi da se svaka tačka C_{ξ^i} kreće jednoliko.

S druge strane, jednačina (5.1) za $\alpha = i$, $\beta = 4$, u specijalnoj teoriji relativnosti za Galilejeve koordinate glasi

$$u^i_{,4} = -u_{4,i},$$

odn., za $\theta = x^4 = ct$, s obzirom da je $u_4 = u^4 = -\frac{\partial x^4}{\partial \theta} = -1$,

$$u^i_{,4} = 0. \qquad (5.16)$$

Jednačine (5.16) tvrde da, fiksirajući bilo koji položaj (odredjen prostornim koordinatama x^i) brzina svake tačke tela koja se nadje u tom položaju ne zavisi od trenutka u kome se u tom položaju nadje.

Posmatrajući rezultat (5.11) u specijalnoj teoriji relativnosti, možemo odrediti prirodu kretanja odredjenog jednačinama (5.1). Poznato je da i samo kretanje u relativnosti prouzrokuje deformaciju dužina (tzv. Lorencova kontrakcija). Jedina mogućnost da se rastojanja (u običnom prostornom smislu) tačaka tela ne menjaju tokom vremena je da je, u specijalnoj teoriji relativnosti, to kretanje jednoliko pravolinijsko translatorno. Pri tom treba imati na umu da pomenuta rastojanja nisu invarijantna (prirodne osobine tela), što jednačina (5.11), uostalom, i ne tvrdi, već samo da je invarijantna osobina njihove konstantnosti. To znači, ako su ta rastojanja konstantna u odnosu na jedan koordinatni sistem - konstantna su i u odnosu na svaki drugi inercioni koordinatni sistem, odn. ako se telo kreće jednoliko pravolinijski translatorno u odnosu na jedan inercioni koordinatni sistem - kreće se jednoliko pravolinijski translatorno i u odnosu na svaki drugi inercioni koordinatni sistem.

GLAVA VI

ANALOGIJA KLASIČNOG I BORNOVOG RELATIVISTIČKI ČVRSTOG TELA[14)]

Born svojom definicijom nije uspeo da generališe kretanje klasičnog čvrstog tela. U nameri da nadjemo takvu generalizaciju, ako se ona uopšte može naći (a naše je ~~mišljenje~~ lično uverenje da za to mora postojati neki način) pokušali smo da, pre svega, sagledamo razliku izmedju relativističke i klasične kinematike čvrstog tela posmatrajući ih sa analognih gledišta.

Pojam prostor-vremena nije privilegija teorije relativnosti. I u klasičnoj mehanici se može definisati odgovarajući pojam - klasični prostor-vreme, kao skup dogadjaja, gde pod dogadjajem podrazumevamo veličinu odredjenu sa četiri broja: tri broja x^i koji odredjuju položaj tačke u prostoru i četvrtog broja t koji odredjuje trenutak u kome se tačka u prostoru posmatra.

Kretanju tačke odgovara neprekidan niz dogadjaja, pa je takvo kretanje u klasičnom prostor-vremenu predstavljeno linijom - klasičnom svetskom linijom.

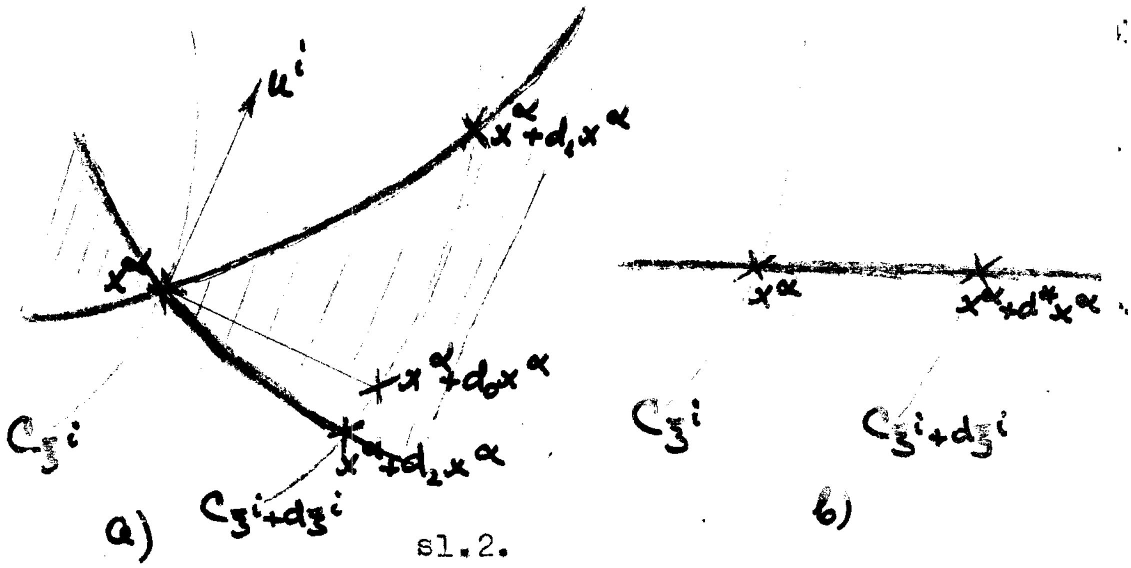
Govoreći o metrici prostor-vremena moramo se ogra-

---

14) Rezultate prvog dela ove Glave smo već izneli u radu koji je objavljen u časopisu Publication de l'Institut Mathématiques, Beograd, Tome 1(15),1961,str.25.

ničiti samo na intervale izmedju dogadjaja koji leže u istoj, bilo kojoj, hiperravni t = const. i takav interval predstavlja rastojanje (u uobičajenom prostornom smislu) istovremenih položaja dveju tačaka.

Posmatrajmo jedan dogadjaj x^α u prostor-vremenu teorije relativnosti (sl.2a). Skup svetskih linija svetlosnih zrakova kroz x^α obrazuje nula-hiperpovršinu prostor-vremena (u specijalnoj teoriji relativnosti nula-hiperkonus). Nula hiperpovršina kroz x^α je na



sl.2.

sl.2a shematski prikazana debelom linijom. Deo prostor-vremena koji je na slici osenčen je skup takvih dogadjaja za koje su vektori pomeranja koji ih spajaju sa dogadjajem x^α prostornog tipa. Može se pokazati[15] da se uvek može naći takav koordinatni sistem da dogadjaji koje spaja vektor pomeranja prostornog tipa budu u odnosu na takav koordinatni sistem istovremeni. Stoga se takvi dogadjaji, po Foku, i zovu kvaziistovremeni dogadjaji. Sada se vidi da je analogon osenčenom delu relativističkog prostor-vremena u klasičnom prostor-vremenu (sl.2b) samo debela linija kroz dogadjaj x^α, tj. skup svih dogadjaja istovremenih dogadjaju x^α.

Neka je C_{ξ^i} (sl.2a) svetska linija tačke ξ^i (koja prolazi kroz dogadjaj x^α), a $C_{\xi^i+d\xi^i}$ svetska

[15] Vidi В.А. Фок: Теория пространства, времени и тяготения, Гостехиздат, Москва, 1955, стр. 50.

linija tačke $C_{\xi^i+d\xi^i}$. Neka su $x^\alpha+d_1x^\alpha$ i $x^\alpha+d_2x^\alpha$ dogadjaji na svetskoj liniji tačke $C_{\xi^i+d\xi^i}$ u kojima ona prodire kroz nula-hiperpovršinu kroz x^α i neka je $x^\alpha+d^*x^\alpha$ dogadjaj na klasičnoj svetskoj liniji tačke $C_{\xi^i+d\xi^i}$ koji je istovremen dogadjaju x^α. Skup dogadjaja na svetskoj liniji tačke $C_{\xi^i+d\xi^i}$ izmedju dogadjaja $x^\alpha+d_1x^\alpha$ i $x^\alpha+d_2x^\alpha$ je skup kvaziistovremenih dogadjaja tačke $C_{\xi^i+d\xi^i}$ dogadjaju x^α, pa je $x^\alpha+d^*x^\alpha$ klasični analogon bilo kog dogadjaja iz pomenutog skupa.

Kako, u teoriji relativnosti, dva vektora vremenskog tipa ne mogu biti uzajamno upravni[16], vektor d_0x^α, definisan jednačinom (1.11), mora biti prostornog tipa, pa dogadjaj $x^\alpha+d_0x^\alpha$ pripada pomenutom skupu dogadjaja. Medjutim, i pored toga što izmedju dogadjaja $x^\alpha+d_0x^\alpha$ i dogadjaja (u klasičnom prostor vremenu) $x^\alpha+d^*x^\alpha$ na taj način postoji analogija, odmah se vidi da, zbog mnoštva dogadjaja u relativističkom prostor-vremenu koji su analogni dogadjaju $x^\alpha+d^*x^\alpha$, ta analogija nije ubedljiva.

Najprirodnije je pretpostaviti da je analogija potpuna izmedju dogadjaja $x^\alpha+d^*x^\alpha$ u klasičnom prostor-vremenu i srednjeg kvaziistovremenog dogadjaja $x^\alpha+d_*x^\alpha$ u relativističkom prostor-vremenu, koji se nalazi na sredini izmedju dogadjaja $x^\alpha+d_1x^\alpha$ i $x^\alpha+d_2x^\alpha$, tj. takvog dogadjaja da je

$$d_*x^\alpha=\frac{d_1x^\alpha+d_2x^\alpha}{2} \tag{6.1}$$

(na osnovu čega je do na veličine prvog reda u odnosu na d_1x^α, odn. d_2x^α i dogadjaj $x^\alpha+d_*x^\alpha$ na svetskoj liniji tačke $C_{\xi^i+d\xi^i}$), pa u definiciji relativistički čvrstog tela zahtevati da interval definisan sa

[16] Vidi J.L.Synge: Relativity, The Special Theory, North-Holland Publishing Comp., Amsterdam, 1956, str.27.

$$g_{\alpha\beta}\, d_* x^\alpha d_* x^\beta \tag{6.2}$$

bude stalan tokom kretanja.

Medjutim, pokazaćemo da je

$$d_* x^\alpha \equiv d_0 x^\alpha, \tag{6.3}$$

te da, s jedne strane, izmedju Bornovog relativistički čvrstog tela i klasičnog čvrstog tela postoji, na izgled, potpuna analogija, i, s druge strane, da se ni tim putem ne može rešiti problem generalizacije pojma klasičnog čvrstog tela.

Pošto su

$$d_1 x^\alpha = x^\alpha_{,i}\, d\xi^i + \lambda^\alpha d_1\theta \tag{6.4}$$

i

$$d_2 x^\alpha = x^\alpha_{,i}\, d\xi^i + \lambda^\alpha d_2\theta, \tag{6.5}$$

to je, na osnovu (6.1),

$$d_* x^\alpha = x^\alpha_{,i}\, d\xi^i + \lambda^\alpha \frac{d_1\theta + d_2\theta}{2}, \tag{6.6}$$

gde su $d_1\theta$ i $d_2\theta$ rešenja jednačine

$$g_{\alpha\beta}(x^\alpha_{,i}\, d\xi^i + \lambda^\alpha d\theta)(x^\beta_{,j}\, d\xi^j + \lambda^\beta d\theta) = 0. \tag{6.7}$$

Ova se jednačina može napisati u obliku

$$g_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta (d\theta)^2 + 2g_{\alpha\beta}\lambda^\alpha x^\beta_{,i}\, d\xi^i \cdot d\theta + g_{\alpha\beta} x^\alpha_{,i} x^\beta_{,j}\, d\xi^i d\xi^j = 0, \tag{6.8}$$

odakle je

$$\frac{d_1\theta + d_2\theta}{2} = \frac{g_{\lambda\mu}\lambda^\lambda x^\mu_{,i}\, d\xi^i}{-g_{\sigma\tau}\lambda^\sigma\lambda^\tau},$$

pa (6.6) postaje

$$d_* x^\alpha = \left(x^\alpha_{,i} + \lambda^\alpha \frac{u_\lambda x^\lambda_{,i}}{-u_\sigma\lambda^\sigma} \right) d\xi^i,$$

tj.

$$d_* x^\alpha = (x^\alpha_{;i} + u^\alpha u_\lambda x^\lambda_{;i})\, d\xi^i. \qquad (6.9)$$

S obzirom da je vektor $d_e x^\alpha$ dat jednačinom (1.11), t

$$d_e x^\alpha = (x^\alpha_{;i} + u^\alpha u_\lambda x^\lambda_{;i})\, d\xi^i, \qquad (6.10)$$

poredjenjem jednačina (6.9) i (6.10) dobiva se (6.3), kao što smo u početku i tvrdili.

* * *

Poredjenje sl.2a sa sl.2b i neuspeh Bornovog pokušaja generalizacije klasičnog čvrstog tela navodi na sledeće razmišljanje.

Izabravši ma koji invarijantan način odredjivanja dogadjaja na svetskoj liniji tačke $C_{\xi^i + d\xi^i}$ koji je kvaziistovremen dogadjaju x^α, tj. uzimajući umesto jednačine (6.1) jednačinu

$$d_* x^\alpha = \frac{\lambda\, d_1 x^\alpha + d_2 x^\alpha}{\lambda + 1}, \qquad (6.11)$$

gde je $\lambda > 0$ skalarna invarijanta, sigurno je, ma da to nismo pokušali da dokažemo, da bismo dobili kretanje koje bi u klasičnoj aproksimaciji dalo neke klase kretanja klasičnog čvrstog tela (na primer, za $\lambda = 1$, na osnovu rezultata Glave IV, klasu translatornog kretanja klasičnog čvrstog tela). Medjutim, nijedan od tih izbora ne bi doveo do kretanja tela koje bi predstavljalo generalizaciju kretanja klasičnog čvrstog tela.

Stoga odavde proističu dva predloga: ili

1. u definiciji relativistički čvrstog tela zahtevati da izraz (6.2) bude stalan tokom kretanja, pri čemu je $d_* x^\alpha$ dato jednačinom (6.11), gde je $\lambda > 0$ proizvoljno izabrana skalarna invarijanta, ili

2. zahtevati da površina "trougla" čija su temena u dogadjajima x^α, $x^\alpha + d_1 x^\alpha$ i $x^\alpha + d_2 x^\alpha$ (ta je površina infinitezimalna pa se može aproksimativno uzeti da je ravna) bude stalna tokom kretanja.

Drugi predlog nam izgleda prihvatljiviji, jer je klasičnom pojmu rastojanja izmedju dogadjaja x^{*} i $x^{*}+\lambda^{*}x^{*}$ sa sl.2b, potpuni analogon ustvari baš površina pomenutog trougla.

Medjutim, ti predlozi nemaju ničeg zajedničkog s razmatranjem Bornovog relativistički čvrstog tela, te ih u ovom radu nećemo ni ispitivati.

D O D A T A K I

BROJ STEPENI SLOBODE ČVRSTOG TELA U KLASIČNOJ MEHANICI

Neka su konačne jednačine kretanja sistema tačaka C_{ξ^a} ($a = 1,2,3$) u nekom koordinatnom sistemu x^i

$$x^i = x^i(\xi^a, t), \quad (i = 1,2,3) \tag{D I.1}$$

gde je t vreme. U klasičnoj mehanici taj sistem tačaka predstavlja čvrsto telo ako je

$$(g_{ij}\, dx^i dx^j)_{,t} = 0, \tag{D I.2}$$

gde je g_{ij} metrički tenzor, a

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^a} d\xi^a \tag{D I.3}$$

vektor pomeranja koji spaja tačku C_{ξ^a} s istovremenim položajem tačke $C_{\xi^a + d\xi^a}$.

Koristeći oznake analogne oznakama iz Glave I, čija će upotreba bez ikakvog daljeg preciziranja biti iz teksta jasna, jednačina (D I.2) se, s obzirom da veličine $d\xi^a$ ne zavise od vremena, može napisati u obliku

$$(g_{ij}\, x^i_{,a} x^j_{,b})_{,t}\, d\xi^a d\xi^b = 0,$$

odakle je, zbog proizvoljnosti veličina $d\xi^a$,

$$(g_{ij}\, x^i_{,\alpha}\, x^j_{,\beta})_{,t} = 0. \qquad \text{(D I.4)}$$

Imajući na umu da je

$$g_{ij,t} = g_{ij,k}\lambda^k = (g_{ik}\{^k_{jl}\} + g_{kj}\{^k_{il}\})\lambda^l, \quad \left(\lambda^k = \frac{\partial x^k}{\partial t}\right)$$

(jer g_{ij} eksplicitno ne zavisi od vremena) i da je

$$(x^i_{,\alpha})_{,t} = (x^i_{,t})_{,\alpha} = \lambda^i_{,\alpha} = u^i_{;j}\, x^j_{,\alpha},$$

postupkom sličnim postupku u Glavi I dobivamo

$$(u_{i;j} + u_{j;i})\, x^i_{,\alpha}\, x^j_{,\beta} = 0. \qquad \text{(D I.5)}$$

Ako još uzmemo u obzir da jednačine (D I.1) predstavljaju u svakom trenutku t nesingularnu transformaciju koordinata ξ^α u kordinate x^i, to mora biti

$$\det\{x^i_{,\alpha}\} \neq 0$$

pa iz (D I.5) sledi[17)]

$$u_{i;j} + u_{j;i} = 0. \qquad \text{(D I.6)}$$

I u klasičnu mehaniku se može uvesti pojam prostor-vremena, kao što smo i učinili i objasnili u Glavi VI, ali se ne može definisati metrika $g_{\alpha\beta}$ takvog klasičnog prostor-vremena već samo metrika g_{ij} njegovog potprostora - običnog prostora. Stoga ne postoji ni mogućnost obrazovanja kovarijantnih izvoda $u_{i;4}$, pri čemu bi x^4 trebalo da predstavlja vreme. Jedino što se može to je obrazovanje parcijalnih izvoda $u_{i,4} = \frac{\partial u_i}{\partial t}$ (smatrajući u_i funkcijom promenljivih ξ^α, t a ne x^i, t) koji odredjuju kovarijantne koordinate W_i ubrzanja, definisane sa

---

17) Ove jednačine je izveo Th. De Donder: Bull. Acad. Roy. Belg. (Classe des Sciences), Séance du 3 janvier 1942, Nos 1-3, p. 8.

$$W_i = u_{i,4} - \left\{ {i \atop ik} \right\} u_j u^k . \qquad \text{(D I.7)}$$

Pokazaćemo, sada, da se proučavanjem 12 veličina

$$u_{i;j} \qquad \text{i} \qquad u_{i,4} \qquad \text{(D I.8)}$$

može zaključiti da čvrsto telo u klasičnoj mehanici ima šest stepeni slobode.

Veličine (D I.8) nisu medjusobno nezavisne. Izmedju njih 12 postoji šest relacija (D I.6) za $i \neq j$. Dakle, samo su njih šest proizvoljne. Medjutim, ne mogu biti proizvoljne bilo kojih šest. Pre svega proizvoljne su veličine $u_{i,4}$ jer se ne pojavljuju u relacijama (D I.6) Iz relacija (D I.6) se, dalje, vidi da se za preostale tri proizvoljne veličine mogu uzeti tri veličine $u_{i;j}$ za koje je $i \neq j$ i pri tome da medju njima nema dve koje imaju iste indekse, na primer tri veličine $u_{i;j}$ $(i<j)$ Dakle, skup šest proizvoljnih veličina

$$u_{i;j} \; (i<j), \qquad u_{i,4}, \qquad \text{(D I.9)}$$

odredjuje sve ostale veličine (D I.8).

Na koji se način može protumačiti proizvoljnost šest velicina (D I.9)? Fiksirajmo skup ξ_0^a koji inače možemo proizvoljno izabrati. Tada proizvoljnost veličina $u_{i,4}$ izražava proizvoljnost ubrzanja tačke $C_{\xi_0^a}$, odn. proizvoljnost kretanja te tačke u tri pravca prostora, dakle, tri stepena slobode njenog kretanja.

Biranjem $u_{i,4}$ za tačku $C_{\xi_0^a}$ odredili smo diferencijalne jednačine kretanja (D I.7) tačke $C_{\xi_0^a}$, pa i samo njeno kretanje. (Pretpostavlja se da su dati početni uslovi, koji, inače, po definiciji stepena slobode, i ne utiču na njihov broj.) Time su odredjene i veličine u_i za tu tačku.

Fiksirajmo, sada, trenutak vremena t pa potražimo brzinu tačke $C_{\xi_0^a + d\xi^a}$ imajući na umu da znamo brzinu tačke $C_{\xi_0^a}$. Do na veličine prvog reda u odnosu na $d\xi^a$ brzina tačke $C_{\xi_0^a + d\xi^a}$ je

$$u_i + u_{ij}\, dx^j,$$ (D I.10)

gde je dx^j dato sa (D I.3). To znači da je polje brzina svih tačaka čvrstog tela bilo u kom trenutku potpuno odredjeno brzinom u_i tačke C_{S_0} i skupom veličina u_{ij}. Pošto je medju ovim poslednjim njih tri proizvoljno, to pomeranje čvrstog tela pri fiksiranom položaju tačke C_{S_0} ima nova tri stepena slobode, pa sledi da definicija (D I.2) čvrstog tela dopušta da čvrsto telo klasične mehanike ima šest stepeni slobode.

Potrebno je pomenuti da i sama struktura prostora može uticati na smanjenje broja stepeni slobode - broja koji je posledica isključivo definicije čvrstog tela. Medjutim, u Euklidovom prostoru takvih dopunskih ograničenja nema, tako da kretanje klasičnog čvrstog tela u Euklidovom trodimenzionom prostoru ima upravo šest stepeni slobode.

D O D A T A K   II

NEKI OBRASCI IZ ALGEBRE KRONEKEROVOG PROIZVODA DVEJU MATRICA[18)]

Kronekerov proizvod matrice

$$A=\{a_{\beta}^{\alpha}\} \quad (\alpha=1,\dots,m;\beta=1,\dots,n) \qquad \text{(D II.1)}$$

tipa (m,n) i matrice

$$B=\{b_{\mu}^{\lambda}\} \quad (\lambda=1,\dots,p;\mu=1,\dots,q) \qquad \text{(D II.2)}$$

tipa (p,q) je, po definiciji, matrica

$$A\times B=\{a_{\beta}^{\alpha}B\} \qquad \text{(D II.3)}$$

tipa (mp,nq).

Ako $\rho(A)$ označava rang matrice A, onda važi obrazac

$$\rho(A\times B)=\rho(A)\,\rho(B). \qquad \text{(D II.4)}$$

Ako je A matrica reda m, a B matrica reda p, i ako $|A|$ označava determinantu matrice A, onda je

$$|A\times B|=|A|^{p}\,|B|^{m}. \qquad \text{(D II.5)}$$

---

18) Vidi C.C.Mac Duffee: The Theory of Matrices, Chelsea Publishing Company, New York, 1946, str.82,83

L I T E R A T U R A

1. Andjelić, T., Matrice, Naučna Knjiga, Beograd, 1962.
2. Born, M., Ann. Phys., 30, 1 (1909).
3. De Donder, Th., Bull. Acad. Roy. Belg. (Classe des Sciences), Séance du janvier 1942, Nos 1-3, p.8.
4. Mac Duffee, C.C., The Theory of Matrices, Chelsea Publishing Company, New York, 1946.
5. Фок, В.А., Теория пространства, времени и тяготения, Гостехиздат, Москва, 1955.
6. Herglotz, G., Ann.Phys., 31, 393 (1909-1910).
7. Noether, F., Ann.Phys., 31, 919 (1909-1910).
8. Pounder, J.R., Comm.Dublin Inst.Adv.Stud., Ser.A, No.11 (1954).
9. Salzman, G. and Taub, A.H., Phys.Rev., 95, 1659 (1954).
10. Synge, J.L., Stud.math.Mech.Presented to Richard von Mises, New York, 1954, p.217.
11. Synge, J.L., Relativity, The Special Theory, North-Holland Publishing Comp., Amsterdam, 1956.
12. Synge, J.L., Math.Zeits., 72(1), 82 (1959).
13. Thomas, T.Y., Arch.Ratl.Mech.Anal., 9(4), 301 (1962).
14. Toupin, R.A., Arch.Ratl.Mech.Anal., 1(3), 181 (1958).