UNIVERZITET U BEOGRADU

MATEMATIČKI FAKULTET

Miodrag M. Sokić

ANTIMODULARNE RELACIJE EKVIVALENCIJE

magistarska teza

Beograd, 2004.

Uvod

Osnovna želja koju imamo jeste utvrđivanje mesta neke matematičke strukture,odnosno procena njenog mesta prema drugim strukturama. A osnovno matematičko sredstvo koje koristimo za tako nešto je preslikavanje. U slučaju topoloških prostora koristimo neprekidna preslikavanja, u slučaju algebarskih struktura to su homomorfizmi,a u slučaju skupova bez strukture to su "najobičnija" preslikavanja. Poslednji slučaj je suviše siromašan i svodi se na proveru usklađenosti aksioma teorije skupova i nekih dodatnih aksioma poput GCH,AD,CH,MA itd.. Međutim put koji nudi deskriptivna teorija skupova je nešto vijugaviji,pa samim tim koristi mnogo više matematičkog alata,posebno Borelove skupove uočenog Poljskog prostora i Borelova preslikavanja. Tako u slučaju Borelovog preslikavanja izomorfizam se svodi na proveru bijektivnodti i proveru borelovosti preslikavnja a ne i njegovog inverza. Svaka prebrojiva struktura se može videti kao jedan element prostora $2^{\mathbb{N}}$,dok izomorfizam među strukturama određuje dejstvo simetrične grupe S_∞,a to je zapravo jedna Borelova struktura. Teorija mera takođe omogućuje da na Borelovom skupu uvedemo mogućnost "vaganja" na kolikom delu uočeno svojstvo važi ili ne važi,u terminima svuda,skoro svuda,na konula skupu. Tokom ovih razmatranja mogu se dobiti rezultati koji su zanimljivi,na prvi pogled predstavljaju nesto sasvim jednostavno,kao što je tvrđenje koje zauzima centralni deo u narednom tekstu.

Ovde je cilj da se predstavi teorema o nemogućnosti pravljenja $\aleph_0 - 1$ preslikavanja sa prostora invarijantne mere opremljenog F_2-dejstvom homomorfizmom u modularnu relaciju ekvivalencije. Oba načina koji su ovde predstavljeni koriste težinske funkcije na slobodnoj grupi od dva generatora. Dok se razlika među njima nalazi u pravljenju kompozicije preslikavnja u prvom slučaju $L^2(2^{F_2}) \to l^1(F_2)$,a u drugom slučaju preslikavnje $l^2(\mathcal{F}(F_2)) \to l^1(F_2)$ zajedno sa teorijom unitarnih reprezentacija. Oba slučaja imaju isti zaključak,koji se svodi na kontradikciju,da slabi centri jedne težine moraju biti linearno uređeni.

Prvo poglavlje se sastoji iz osnovnih pojmova deskriptivne teorije skupova koji će biti korišćeni. Slično su u drugom delu navedeni samo neki elementi teorije klasifikacije sa naglaskom na neuređenost hijerarhije.

U trećem delu se objašnjava pojam modularnosti,i dati su primere takvih relacija,dok se u četvrtom delu nalazi predstavljanje težina na koje se oslanjaju oba dokaza.

Peti deo daje preslikavanje na koje se oslanja Hjortov dokaz u šestoj glavi.Dokaz u šestoj glavi koristi prelaz na 1-1 preslikavanje koji originalno nije koristio Hjort. U sedmoj glavi je dat uvod u teoriju reprezentacija koji je u narednoj osmoj iskorišćen u dokazu. I na kraju su dati neki primeri antimodularnih relacija ekvivalencije.

Na kraju bih želeo da se zahvalim profesorima Mili Mršević i Žarku Mijajloviću,a posebnu zahvalnost dugujem profesoru Bobanu Veličkoviću koji me je uputio u oblast deskriptivne teorije skupova.

Glava 1

Deskriptivna teorija skupova

U osnovi deskriptivne teorije skupova se nalazi *Poljski prostor* , a to je topološki prostor koji je separabilan i kompletno metrizabilan.Takvih prostora ima jako puno a neki primeri toga su:

(i) otvoren interval $(0,1)$ sa naslednom topologijom,

(ii) prostori $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \mathbb{I} = [0,1], \mathbb{T} = \{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}$,

(ii) Kantorov prostor $\mathcal{C} = 2^{\mathbb{N}}$,

(iv) Berov prostor $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Od jednog ili više Poljskih prostora možemo praviti novi Poljski prostor.

Stav 1.1 *(i) Kompletiranje separabilnog metričkog prostora je Poljski prostor*

(ii) Zatvoren potprostor Poljskog prostora je Poljski

(iii) Proizvod niza Poljskih prostora je Poljski

(iv) Suma niza Poljskih prostora je Poljski

(v) Potprostor Poljskog prostora je Poljski akko je G_δ-podskup

Posebni slučajevi topoloških prostora su topološke grupe,tj. one čija je topologija Poljska.Neke od takvih grupa su:

(i) $(\mathbb{R},+); (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot); (\mathbb{T}, \cdot)$,

(ii) $(X,+)$ gde je X separabilan Banahov prostor,

(iii) Kantorova grupa $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$,

(iv) Ako je skup $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,tada gledajući matrice $n \times n$ kao podskup od $\mathbb{K}^{n^2}$ dolazimo do Poljskih grupa $GL_n(\mathbb{K}), SL_n(\mathbb{K}), U(n), O(n), SU(n), SO(n)$,

(v) Liove grupe su Poljske grupe.

Topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ sa topologijom $\mathcal{T}$ popravljamo do malo bogatije strukture $(X, \mathcal{B}(X))$,a pišemo $(X, \mathcal{B}(\mathcal{T}))$,tj. do jedne Bulove algebre i dobijamo *Borelov prostor.*To je zapravo najmanja $\sigma - algebra$koja sadrži sve otvorene skupove na topološkom prostoru,ovde je označena sa $\mathcal{B}(\mathcal{T})$.Njeni skupovi su poređani u izvesnu hijerarhiju:

$$\sum\nolimits_1^0 \subset \sum\nolimits_2^0 \cdots \sum\nolimits_\eta^0$$

$$\Delta_1^0 \subset \Delta_2^0 \cdots \Delta_\eta^0$$

$$\prod\nolimits_1^0 \subset \prod\nolimits_2^0 \cdots \prod\nolimits_\eta^0$$

pri čemu je $\sum_1^0$ kolekcija svih otvorenih skupova,a $\prod_1^0$ kolekcija svihzatvorenih skupova,pri čemu važi:

$$\prod\nolimits_\eta^0 = \{A^c : A \in \sum\nolimits_\eta^0\}$$

$$\Delta_\eta^0 = \sum\nolimits_\eta^0 \cap \prod\nolimits_\eta^0$$

I pored sve zanimljivosti ove hijerarhije na dalje je nećemo razmatrati jer nije od suštinske važnosti za ono što sledi.

Definicija 1.1 *Ako su X i Y topološki prostori,preslikavanje $f : X \to Y$nazivamo* ***Borelovim*** *ukoliko je inverzna slika svakog Borelovog skupa Borelov skup.Posebno ako je f bijekcija i oba funkcije f i f^{-1} su Borelove,onda govorimo o* ***Borelovom izomorfizmu****,a ukoliko je i $X = Y$ o* ***Borelovom automorfizmu***

Kako nam sama topološka struktura ne dolazi do izražaja a posmatramo samo Borelove skupove onda to formalizujemo narednom definicijom.

Definicija 1.2 *Merljivi prostor $(X, \mathcal{S})$,skup sa σ-algebrom,je* ***standardan Borelov prostor*** *ukoliko je izomorfan sa $(Y, \mathcal{B}(Y))$ za neki Poljski prostor Y,ili ekvivalentno ukoliko postoji Poljska topologija $\mathcal{T}$takva da je $\mathcal{S} = \mathcal{B}(\mathcal{T})$.*

Jedan nestandardan primer ovoga,i ne tako očigledan je Effros Borelov prostor od $F(X) = \{F \subset X : F = \overline{F}\}$,gde je X neki Poljski prostor.A ovde je σ-algebra generisana skupovima oblika:

$$\{F \in F(X) : F \cap U \neq \emptyset\}$$

Definicija 1.3 ***Standardna Borelova grupa*** *G je standardan Borelov prostor G gde je G grupa a preslikavanje $(x, y) \mapsto xy^{-1}$je Borelovo. Standardn Borelova grupa je* ***Poljična*** *ukoliko postoji poljska topologija $\mathcal{T}$ koja joj daje Borelov prostor takva da je $(G, \mathcal{T})$ topološka grupa.*

Šta više, standardne Borelove grupe imaju osobinu da može postojati najviše jedna Poljska topologija koja im daje strukturu Borelovih skupova,da je u njoj grupa topološka.A primeri za ovakvih grupa su:

(i) grupa $G \subset \mathcal{T}^{N}$sastavljena od nizova $\{x_n\}$ takvih da je $x_n = 1$ za sve dovoljno velike n

(ii) podgrupa $l^2 \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$sa nasledjenom topologijom

Poljski prostori imaju mogućnost promene Borelovih skupova u otvoreno zatvorene skupove bez narušavanja Borelove hijerarhije,a to izražava sledeća teorema.

Teorema 1.1 *Ako je $(X, \mathcal{T})$ Poljski prostor, a $A \subseteq X$ Borelov skup,tada postoji Poljska topologija pri čemu je$\mathcal{T}_A \supseteq \mathcal{T}$ i $\mathcal{B}(\mathcal{T}_A) = \mathcal{B}(\mathcal{T})$,i uz to je A otvoreno-zatvoren skup u $\mathcal{T}_A$*

Posebno ukoliko je $(X, \mathcal{T})$ Poljski prostor,a Y je prebrojive baze,$f : X \to Y$ Borelovo preslikavanje,tada postoji Poljska topologija $\mathcal{T}_f \supseteq \mathcal{T}$ koja ne menja Borelove skupove a preslikavanje $f : (X, \mathcal{T}_f) \to Y$ postaje neprekidno.

Definicija 1.4 *Neka je X Poljski prostor,tada skup $A \subseteq X$ nazivamo* ***analitičkim*** *ako postoji Poljski prostor Y i neprekidno preslikavanje $f : Y \to X$ takvo da je $f(Y) = A$. Specijalno je i prazan skup analitički.*

Klasu analitičkih skupova označavamo sa $\sum_1^1$ i za nju važi:

$$\mathcal{B}(X) \subseteq \sum\nolimits_1^1,$$

a ukoliko je X neprebrojiv Poljski prostor važi presiznije:

$$\mathcal{B}(X) \subset \sum\nolimits_1^1(X),$$

dok za standardan Borelov prostor važi:

$$(\mathcal{B})(X) = \Delta_1^1(X)$$

kao i:

$$\Delta_\eta^1 = \sum\nolimits_\eta^1 \cap \prod\nolimits_\eta^1,$$

$$\prod\nolimits_1^1 = \{A^c : A \in \sum\nolimits_1^1(X)\}.$$

Za razliku od neprekidnih preslikavanja Borelova preslikavanja imaju jača svojstva što pokazuje sledeća teorema.

Teorema 1.2 *Neka su X i Y standardni Borelovi prostori i neka je $f : X \to Y$ preslikavanje,tada je sledeće ekvivalentno:*

(i) f je Borelovo

(ii) $graf(f)$ je Borelov

(iii) $graf(f)$ je analitički

Posebno ukoliko je f Borelova bijekcija,tada je f Borelov izomorfizam.

Ukoliko je $(X, \mathcal{S})$ merljiv prostor tada preslikavanje $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ koje zadovoljava uslove:

$$\mu(\emptyset) = 0$$

$$\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$$

,gde je $\{A_n\}$ disjunktna familija podskupova koji pripadaju $\mathcal{S}$, nazivamo **merom**. Posebno ukoliko je $\mu(X) = 1$ govorimo o **verovatnosnoj meri**,a ukoliko je u pitanju Borelova σ-algebra govorimo o **Borelovoj meri**.U skladu sa prethodnim predstavljamo neke primere:

- Lebegova mera na $\mathbb{R}^n$
- Ako je G poljska lokalno kompaktna grupa,tada postoji,jedinstvena do na množenje pozitivnom konstantom,σ-konačna Borelova mera μ_G na G takva da:

$$K - kompakt \Rightarrow \mu_G(K) < \infty$$

$$U \neq \emptyset \, otvoren \Rightarrow \mu_G(U) > 0$$

$$(\forall g \in G)(\forall Borelov A)(\mu_G(gA) = \mu_G(A))$$

  i ovakvu meru nazivamo **levom Haarovom merom na G**

- Uzmemo li $0 < p < 1$ i da je skup $2 = \{0, 1\}$možemo zadati meru na ovom dvočlanom skupu sa

$$\mu(\{0\}) = p,$$

$$\mu(\{1\})) = 1 - p$$

  te je možemo proširiti do proizvod mere na $2^{\mathbb{N}} = \mathcal{C}$ zadavajući:

$$\mu_p(N_s) = p^a(1-p)^b$$

  gde je $s = (s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}) \in 2^n$ i $a = card(\{i < n : s_i = 0\})$ i $b = n - a$. Posebno za $p = \frac{1}{2}$ dobijamo Haarovu meru na grupi $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}} = \mathcal{C}$

Specijalno kada grupa dejstvuje na merljivom prostoru $(X, \mathcal{S}, \mu)$ kažemo da je mera **invarijantna** ukoliko je:

$$(\forall g \in G)(\forall A \in S)(\mu(gA) = \mu(A))$$

dok meru nazivamo **G-ergodičnom** ukoliko je svaki G-invarijantni skup mere 0 ili 1,Posebno, mera je E_G-neatomska ukoliko je mera svake orbite nula,tj.:

$$\mu(\{gx : g \in G\}) = 0, \forall x \in X$$

Za dva data skupa X, Y i skup $P \subseteq X \times Y$,**uniformizacijom** skupa P nazivamo podskup $P^* \subseteq P$ takav da :

$$(\forall x \in X)(\exists y P(x, y) \Leftrightarrow \exists! y P^*(x, y)).$$

Drugim rečima, P^* je graf funkcije f sa domenom $A = proj_X(P)$,i takvu funkciju nazivamo **uniformizacionom funkcijom** za P.

Teorema 1.3 ***(Lusin Novikov):*** *Neka su X i Y standardni Borelovi prostori i neka je $P \subseteq X \times Y$ Borelov skup.Ako je zasek P_x prebrojiv, tada P ima Borelovu uniformizaciju te je i $proj_X(P)$ Borelov skup.*

Šta više P se može napisati kao $\bigcup_n P_n$,gde je P_n Borelov graf,tj. ako važi $P_n(x, y)$ i $P_n(x, y')$ tada je $y = y'$.

Posledica 1.1 *Ako su X i Y standardni Borelovi prostori a $f : X \to Y$ Borelovo preslikavanje koje je $\aleph_0 - 1$ (inverzna slika svake tačke je prebrojiv skup) tada je $f(X)$ Borelov skup i postoji Borelova funkcija $g : f(X) \to Y$ takva da je $f(g(y)) = y$ za sve $y \in f(X)$.*

Posledica 1.2 *Ako su X i Y standardni Borelovi prostori,a $P \subseteq X \times Y$ Borelov skup sa prebrojivim zasecima,tada postoji niz Borelovih funkcija $f_n : proj_X(P) \to Y$ takvih da je $P_x = \{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ za sve $x \in proj_X(P)$.*

Dalje,ukoliko je $A_n = \{x : card(P_x) = n\}$ za $n = 2, 3, 4, \ldots, \aleph_0$,tada je A_n Borelov i za svaki n postoji niz $(f_i^{(n)})_{i<n}$ Borelovih funkcija $f_i^{(n)} : A_n \to Y$ sa disjunktnim grafovima tako da za $x \in A_n$ važi $P_x = \{f_i^{(n)} : i < n\}$.

Naredna teorema zbog svoje važnosti zaslužuje da bude dokazana.

Teorema 1.4 ***(Feldman-Moore):*** *Neka je X standardan Borelov prostor i neka je E na njemu zadata Borelova relacija ekvivalencije,tj. Borelov podskup od $X \times X$.Ukoliko je E prebrojiva relacija(svaka klasa je prebrojiva) tada posoji prebrojiva grupa G Borelovih automorfizama od X takva da je $xEy \Leftrightarrow g \in G(gx = y)$. Šta više, grupa G se može izabrati tako da je:*

$$xEy \Leftrightarrow \exists ginG(g^2 = 1 \wedge gx = y)$$

Dokaz: Kako E ima prebrojive sekcije onda se po prethodnoj teoremi može napisati u obliku :

$$E = \bigcup_n F_n$$

za neki niz Borelovih grafova $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.Pri tome možemo podrazumevati da je $F_n \cap F_m = \emptyset$ ako je $n \neq m$. Neka je $F_{n,m} = F_n \cap F_m^{-1}$ gde je $F \subseteq X^2$ definisan sa :

$$F^{-1} = \{(x,y) : (y,x) \in F\}.$$

S obzirom da možemo uzeti predstavljanje :

$$X^2 \setminus \Delta_X = \bigcup_p (A_p \times B_p)$$

gde su A_p i B_p međusobno disjunktni Borelovi podskupovi od X, dobijamo da je : $F_{n,m,p} = F_{n,m} \cap (A_p \times B_p)$ oblika:

$$F_{n,m,p} = graf(f_{n,m,p})$$

za neke Borelove bijekcije:

$$f_{n,m,p} : D_{n,m,p} \to R_{n,m,p}$$

$$D_{n,m,p} \cap R_{n,m,p} = \emptyset$$

Pa se može definisati niz $\{g_{n,m,p}\}$ Borelovih automorfizama od X sa:

$$g_{n,m,p} = \begin{cases} f_{n,m,p}(x) & ; x \in D_{n,m,p} \\ f_{n,m,p}^{-1}(x) & ; x \in R_{n,m,p} \\ x & ; \text{inače} \end{cases}$$

Međutim $g_{n,m,p}^2 = 1$ i uz to važi:

$$E = \bigcup graf(g_{n,m,p})$$

te je željeno dejstvo nastalo od grupe $\Gamma = < g_{n,m,p} >$. □

Glava 2

Klasifikabilnost

Relacija ekvivalencije E na skupu X možemo posmatrati kao podskup Dekartovog proizvoda X^2, i u tom smislu je nazivamo **Borelovom**, ukoliko je skup u standardnom Borelovom prostoru X^2.Najjednostavniji primer tako nečega jeste najfinija relacija ekvivalencije - identitet sa jedne strane,i najgrublja sa druge strane-svak je sa svakim u relaciji.U prostoru između ove dve javlja se razni primeri pa prvo što pokušavamo da učinimo jeste da uvedemo nekakav poredak.Da bi to uradili treb nekako da čuvamo klase ekvivalencije pri upotrebi osnovnog sredstva - preslikavanja,ovde su to Borelova preslikavanja.

Definicija 2.1 *Neka su $(X_1, \mathcal{B}_1)$ i $(X_2, \mathcal{B}_2)$ dva standardna Borelova prostora sa relacijama ekvivalencije E_1 i E_2 redom na njima.Tada Borelovo preslikavanje nazivammo* ***homomorfizmom*** *ukoliko važi:*

$$(\forall x_1, x_2 \in X_1)(x_1 E_1 x_2 \Rightarrow f(x_1) E_2 f(x_2))$$

Ovakvim preslikavanjem nam je omogućeno da čitave klase skupljamo u jednu tačku,pa i da čitve prostore kontrakujemo u jednu tačku i na taj način malo očuvamo od relacije,radi čega uvodimo finije preslikavanje,odnosno pojam.

Definicija 2.2 *Neka su $(X_1, \mathcal{B}_1, E_1)$ i $(X_2, \mathcal{B}_2, E_2)$ dva standardna Borelova prostora sa Borelovim relacijama ekvivalencije tada kažemo da je Borelovo preslikavanje $f : X_1 \to X_2$* ***redukcija*** *relacije ekvivalencije E_1 na relaciju ekvivalencije E_2 ukoliko važi:*

$$(\forall z_1, x_2 \in X)(x_1 E_1 x_2 \Leftrightarrow f(x_1) E_2 f(x_2)$$

i koristimo oznaku $E_1 < E_2$

Na ovaj način smo sačuvali različitost klasa i nismo umanjili kardinalni broj klasa,grubo govoreći u prethodnonj definiciji smo postigli da je X_1/E_1 utopljen u X_2/E_2. Tako da bi prvi pokušaj da se uvede red biolo uzimanje jedne tačke kao predstanvika klase.

Definicija 2.3 *Neka je X prostor sa relacijom ekvivalencije E,tada je za E* ***transverzala*** *skup $T \subseteq X$ takav da T seče svaku klasu u tačno jednoj tački,dok je preslikavnje $s : X \to X$ takvo da je $xEy \Rightarrow s(x) = s(y)$ nazvano* ***selektor***

U opštem slučaju postojanje transverzale i selektora je ekvivlentno,dok u slučaju da želimo Borelovu transverzalu ili Borelov selektor nešto komplikovanije.

Ukoliko je relacija ekvivalencije E na skupu X takva da se njene klase poklapaju sa orbitama dejstva grupe G na skupu X tada kažemo da je **relacija indukovana dejstvom grupe** i označavamo sa E_G,odnosno:

$$xEy \Leftrightarrow (\exists g \in G)(gx = y)$$

Ukoliko je svaka klasa relacije ekvivlencije konačna onda govorimo o **konačnoj relaciji ekvivalencije**, a ukoliko su klase prebrojive o **prebrojivoj relaciji ekvivalencije**.A ovakve su sve relacije nastale dejstvom grupe $\mathbb{Z}$ ili neke konačne grupe.Borelov selektor uvek povlači postojanje Borelove transverzale, dok obrnuto važi za prebrojive Borelove relacije ekvivalencije.

Definicija 2.4 *Prebrojivu Borelovu relaciju ekvivalencije nazivamo* ***aperiodičnom*** *relacijom ekvivalencije ukoliko su joj sve klase beskonačne,a ukoliko se može predstaviti kao rastuća unija konačnih relacija ekvivalencije nazivamo je* ***hiperkonačnom*** .

Teorema 2.1 *Ako je E Borelova relacija ekvivalencije tada je ona hiperkonačna akko je indukovana Borelovim $\mathbb{Z}$-dejstvom.*

Definicija 2.5 *Ukoliko su (X_1, E_1) i (X_2, E_2) dva standardna Borelova prostora sa Borelovim relacijama ekvivalencije,a $\rho : X_1 \to X_2$ Borelov izomorfizam koji zadovoljava:*

$$x_1E_1x_2 \Leftrightarrow \rho(x_1)E_2\rho(x_2)$$

tada kažemo da su E_1 i E_2 ***Borel izomorfne*** *, u oznaci $E_1 \cong E_2$*

Još jedan pokušaj prilaska ovakvim relacijama je sledeći.

Definicija 2.6 *Borelova relacija ekvivalencije E na standardnom Borelovom prostoru X je* **drvljiva** *ukoliko postoji simetrična Borelova relacija R takva da je:*

$$R \subseteq X \times X$$

čije komponente povezanosti predstavljvju klase ekvivalencije relacije E,pri čemu ne sadrže ciklove.

Posebno relacije ekvivalencije koje se redukuju na $\mathbb{R}$ nazivamo **glatkim** ili **konkretno klasifikabilnim.**

Grupa F_2 deluje na prostoru 2^{F_2} sa šift dejstvom:

$$(\sigma \cdot f)(\tau) = f(\sigma^{-1}\tau); f \in 2^{F_2}; \sigma, \tau \in F_2$$

i za bilo koje $f_1, f_2 : F_2 \to \{0,1\}$ zadajemo relaciju sa :

$$f_1 E_\infty f_2 \quad akko \quad (\exists\sigma \in F_2)(\sigma f_1 = f_2)$$

Ako sa $F(F_2)$ označimo slobodni deo ovog dejstva,tj.one f za koje $(\forall\sigma \in F_2)(\sigma f \neq f)$,tada dobijamo restrikcijom relaciju E_{T_∞}.

E_∞ je maksimalna prebrojiva Borelova relacija ekvivalencije,tj. za svaku drugu prebrojivu relaciju ekvivalencije E važi $E \leq E_\infty$,dok je E_{T_∞} maksimalna drvljiva Borelova relacija ekvivalencije. Primeri značajnih Borlovih relacija ekvivalencije su:

- relacija ekvivalencije slaganja na $2^{\mathbb{N}}$

$$xE_0y \Leftrightarrow (\exists k)(\forall n > k)(x(n) = y(n))$$

- eventualno slaganje tačaka Kantorovog prostora

$$x, y \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$$

$$xE_1y \Leftrightarrow (\exists k)(\forall n > k)(x(n) = y(n))$$

- malo labavije slaganje tačaka

$$x, y \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$$

$$xE_3y \Leftrightarrow (\forall n)(x(n)E_0y(n))$$

- relacije jednakosti

$$0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots, \mathbb{N}, \mathbb{R}$$

- relacija od koseta grupe $l^1 = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum |x(i)| < \infty\}$ viđena kao podgrupa od $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ - oznaka E_2

Hijerarhija među ovim relacijama može biti predstavljena sledećim dijagramom:

$$\Delta(1) \leq \Delta(2) \leq \ldots \Delta(n) \leq \ldots \leq \mathbb{N} \leq \mathbb{R} \leq E_0$$
$$E_0 < E_1$$
$$E_0 < E_3$$
$$E_0 < E_2$$

pri čemu znamo da između $\mathbb{N}$ i $\mathbb{R}$ nema kao ni između $\mathbb{R}$ i E_0, dok su E_1 i E_3 međusobno neuporedive.

Teorema koja će u narednim glavama biti pokazana omogućava da pronađemo relaciju ekvivalencije koja nije drvljiva a nije ni Borel reducibilna na E_{T_∞}.To je relacija ekvivalencije $E^{X_{ss}} \times E_0$ koju neću podrobnije opisivati zbog obimnosti,a nalazi se u [7].Takođe možemo doći do relacije ekvivalencije E tako da važi:

$$E_0 < E < E_{T_\infty}$$

Za kraj kao u slučaju prethodne glave izlažemo lemu koja po svom značaju zaslužuje da bude spomenuta.

Lema 2.1 ***(Lema o markeru)****Svaka aperiodična Borelova relacija ekvivalencije dopušta opoadajući niz markera,tj. opadajući niz Borelovih kompletnih sekcija čiji je presek prazan.*

Dokaz: Bez gubljenja opštosti možemo podrazumevati da naša relacija ekvivalencije E leži na $X = 2^{\mathbb{N}}$.Sa $s_n(x)$ označavamo leksikografski najmanji $s \in 2^n$ takav da važi:

$$|[x]_E \cap \mathcal{N}_s| = \infty$$

pa definišemo :

$$x \in A_n \Leftrightarrow x|n = s_n(x)$$

Na ovaj način dobijamo opaduajući niz Borelovih skupova:

$$\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

od kojih svaki seče svaku klasu u beskonaňo mnogo tačaka.Sa druge strane skup

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

seče svaku klasu od E u najviše jednoj tački,tako da je željeni niz:

$$B_n = A_n \setminus A.$$

□

Glava 3

Modularnost

Za dve particije $\mathcal{P} = \{A_i\}, \mathcal{Q} = \{B_j\}$ skupa Y sa $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} = \{A_i \cap B_j\}$ označavamo zajedničko profinjenje.Takođe koristimo oznaku $\mathcal{P} \leq \mathcal{Q}$ akko je svaki A_i sadržan u nekom B_j,tj. ukoliko $\mathcal{P}$ profinjuje $\mathcal{Q}$.

Definicija 3.1 *Borelovo dejstvo diskretne grupe Γ na standardnom Borelovom prostoru Y nazivamo* **modularnim** *ukoliko postoji niz prebrojivih Borelovih particija $\{\mathcal{P}_n\}$ od Y da važi:*

$$\mathcal{P}_n = \{A_i^{(n)}\}_{i \in I_n}, |I_n| \leq \aleph_0$$

$$A_i^{(n)} \cap A_j^{(n)} = \emptyset, i \neq j, \bigcup_{i \in I_n} A_i^{(n)} = Y$$

i da $\{\mathcal{P}_n\}$ generiše Borelove skupove tako da je svaki $\mathcal{P}_n$ i $\Gamma-$invarijantan;tj. za svaki $\gamma \in \Gamma, n \in \mathbb{N}, i \in I_n$ postoji $j \in I_n$ da važi $\gamma \cdot A_i^{(n)} = A_j^{(n)}$ .Posebno ističemo **konačno modularna dejstva** *kod kojih su uočene particije $\mathcal{P}_n = \{A_1^{(n)}, \ldots, A_{k_n}^{(n)}\}$ sve konačne.*

Napomena 3.1 *Merljiv prostor $(X, \mathcal{S})$ je izomorfan nekom $(Y, \mathcal{B}(Y))$ gde je Y neki separabilan metrizabilan prostor akko je $\mathcal{S}$ prebrojiva familija koja razdvaja tačke,tj. za svake dve tačke $x, y \in X$ postoji $A \in \mathcal{S}$ da je $x \in A, \neg(y \in A)$.Tako da na ovaj način donekle možemo proveriti da li $\{\mathcal{P}_n\}$ generše željenu kolekciju Borelovih skupova.*

Od polaznih particija koje potvrđuju modularnost možemo dobiti nove particije uzimajući:

$$\mathcal{Q}_n = \mathcal{P}_0 \wedge \mathcal{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{P}_n$$

pri čemu je svaki $\mathcal{Q}_n$ i $\Gamma-$ invarijantan a ispunjeno je i:

$$\mathcal{Q}_0 \geq \mathcal{Q}_1 \geq \ldots \geq \mathcal{Q}_n \geq \ldots,$$

a $\{\mathcal{Q}_n\}$ generiše Borelove skupove.

Slično možemo reći da je dejstvo modularno ukoliko postoji rastući niz Bulovih algebri

$$\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1 \ldots \subset \mathcal{B}_n \subset \ldots$$

takvih da $\Gamma - dejstvo$ permutuje svaku od njih a sama Borelova $\sigma - algebra$ je generisana sa $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$

Modularnost zadovoljava sledeća svojctva:

(i) Ako $\Gamma-$deluje modularno na Y i to potvrdjuje particija $\{\mathcal{P}_n\}$tada je i za svaki Γ-invarijantan Borelov skup $Z \subseteq Y$,Γ-dejstvo na Z modularno,a to potvrđuju particije:$\{\mathcal{P}_n|Z\} = \{A_i^{(n)} \cap Z\}$

(ii) Ako Γ-deluje modularno na$Y$ a Δ deluje modularno na Z pri čemu to potvrdjuju particije $\{\mathcal{P}_n\}$ i $\{\mathcal{Q}_n\}$ onda je i proizvod akcija od $\Gamma \times \Delta$ takođe modularna,a to svedoči particija $\mathcal{P}_n \times \mathcal{Q}$, gde je $\mathcal{P}_n = \{A_i^{(n)}\}, \mathcal{Q}_n = \{B_j^{(n)}\}, \mathcal{P}_n \times \mathcal{Q}_n = \{A_i^{(n)} \times B_j^{(n)}\}$

(iii) Ukoliko Γ deluje modularno na X i Y pri čemu to svedoče particije $\{\mathcal{P}_n\}$ i $\{\mathcal{Q}_n\}$ tada Γ deluje modularno i na direktnoj sumi $X \oplus Y$ pri čemu to potvrđuju particije $\{\mathcal{P}_n \oplus \mathcal{Q}_n\}$ date sa $\mathcal{P}_n \oplus \mathcal{Q} = \{A_i^{(n)} \oplus B_i^{(n)}\}$

Definicija modularnosti u sebi sadrži inicijalno postavljanje drveta čiji bi čvorovi mogli biti određeni elementi iz particije koje potvrđuju modularnost,tako da se osnovni primeri modularnog dejstva uvode na prebrojivom korenskom drvetu pomoću njegovih automorfizama.Za prebrojivo korensko drvo T, sa korenom v_0, sa $[T]$ označavamo skup svih njegovih beskonačnih putanja $\alpha = (v_0, v_1, \ldots)$ koje počinju iz korena, a za svaku konačnu putanju $s = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ neka je $N_s = \{\alpha \in [T] : \forall i \leq n(\alpha(i) = v_i)\}$. Pri topologiji čiji su bazni otvoreni skupovi $N_s, [T]$ postaje Poljski prostor.Ukoliko prebrojiva grupa Γ deluje automorfizmom na T, i to tako da je $(\forall\gamma =\in \Gamma)(\gamma \cdot v_0 = v_0)$,onda Γ deluje neprekidno na $[T]$ sa $\gamma \cdot (v_0, v_1, v_2, \ldots) = (\gamma \cdot v_0, \gamma \cdot v_1, \gamma \cdot v_2, \ldots)$.A da je ovo dejstvo to potvrđuju particije $\{\mathcal{P}_n\}$,gde je $\mathcal{P}_n = \{N_s : |s| = n\}$.

Jedan drugi primer,jako blizak ovom,dolazi iz dejstva grupe izometrija na ultrametričkom Poljskom prostoru. Ako je (X, d) ultrametrički Poljski prostor,a prebrojiva grupa Γ deluje izometrijama na X tada modularnost potvrđuje $\{\mathcal{P}_n\}$, gde je $\mathcal{P}_n$ sačinjeno od otvorenih lopti radijusa $\frac{1}{n+1}$ u X. U ultrametričkom prostoru dve kugle poluprečnika $\frac{1}{n+1}$ sa centrima udaljenim više od $\frac{1}{n+1}$ su međusobno disjunktne.

Sledeći stav daje ekvivlentno viđenje modularnog dejstva.

Stav 3.1 *Ukoliko prebrojiva grupa Γ deluje na Borelov način na standardnom Borelovom prodtoru Y, tada je sledeće ekvivalentno:*

(i) Γ *dejstvo na Y je modularno*

(ii) *Postoji dejstvo od Γ automorfizmima na prebrojivom korenskom drvetu T i Borelovo Γ utapanje od dejstva Γ na Y u indukovano Γ dejstvo na $[T]$,tj. Borelova injekcija $\phi : Y \to [T]$ takva da je $\gamma \cdot \phi(y) = \phi(\gamma \cdot y)$*

(iii) *Postoji dejstvo od Γ izometrijama na Poljskom ultrametričkom prostoru (X, d), Borelovo Γ - utapanje od dejstva Γ na Y u dejstvo od Γ na X.*

Dokaz:

(i)⇒(ii) Neka je $\mathcal{P}_0 \geq \mathcal{P}_1 \geq \ldots$ niz Borelovih particija koje svedoče da je $\Gamma -$ *dejstvo* na Y modularno,a bez gubljenja opštosti možemo uzeti da je $\mathcal{P}_0 = \{Y\}$.Tada korensko drvo definišemo sa :

(a) koren od T je Y

(b) sledbenici od Y su elementi od $\mathcal{P}_1$

(c) za $A \in \mathcal{P}_1$,sledbenici od A su $B \in \mathcal{P}_2$,takvi da je $B \subseteq A$

Na ovakvom T grupa Γ deluje prirodno nasleđenim automorfizmima,a željeno utapanje je:

$$\phi : Y \to [T]$$

$$y \mapsto (A_0, A_1, \ldots) \quad akko \quad \forall n (y \in A_n)$$

(ii)⇒(i) Prostor $[T]$ postaje ultrametrički Poljski prostor ukoliko ga opremimo metrikom $d(\alpha, \beta) = 2^{-n-1}$,gde je n najmanji takav da $\neg(\alpha(n) = \beta(n))$. Pa ukoliko Γ deluje na T automorfizmima onda je indukovano dejstvo od Γ na $([T], d)$ izometrično.

(iii)⇒(i) Usled postojanja utapanja, Y možemo poistovetiti sa invarijantnim podskupovima od X,a na njega se modularnost prenosi sa nadprostora. □

Sledeći stav daje mogućnost popravke modularnog dejstva.

Stav 3.2 *Neka je E prebrojiva Borelova relacija ekvivlencije na standardnom Borelovom prostoru X i neka grupa Γ deluje na modularan način na standardnom Borelovom prostoru Y.Ukoliko postoji $\aleph_0 - 1$ Borelov homomorfizam ρ sa E u E_Γ^Y,$xEy \Rightarrow \rho(x) E_\Gamma^Y \rho(y)$,tada postoji modularno dejstvo prebrojive grupe Γ_1 na nekom standardnom Borelovom prostoru Y_1 i Borelov $1 - 1$ homomorfizam sa E u $E_{\Gamma_1}^{Y_1}$.*

Dokaz: Najpre fiksiramo prebrojivu grupu Δ koja deluje modularno i Borelovo na standardnom Borelovom prostoru Z, i to tako da Δ-dejstvo ima beskonačnu orbitu.Može se uzeti :

$$\Delta = \mathbb{Z}_2^{<\mathbb{N}} = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \ldots$$

a dejstvo je kordinatno sabiranje na $Z = 2^{\mathbb{N}} = \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$.

Željene prostore i dejstva dobijamo uzimajući da je $\Gamma_1 = \Gamma \times \Delta, Y_1 = Y \times Z$,a dejstvo od Γ_1 na Y_1 je modularno zbog osobina modularnog dejstva da se prenose na proizvod dejstva.

Dalje neka je $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $1-1$ enumeracija beskonačne orbite od Δ-dejstva na Z.Možemo fiksirati Borelovo preslikavanje $f : \rho(X) \times \mathbb{N} \to X$ tako da je :

$$\rho^{-1}(\{y\}) = \{f(y, n) : n \in \mathbb{N}\}$$

Dalje stavljajući:

$$\rho_1(x) = (\rho(x), z_{n_x})$$

gde je n_x najmanji n takav da je $f(\rho(x), n) = x$.Injektivnost je očigledna pa ostaje da se proveri homomorfizam,odnosno

$$xEy \Rightarrow \rho_1(x) E_{\Gamma_1}^{Y_1} \rho_1(y).$$

A ovo važi jer ako je xEy onda je $\rho(x)E_\Gamma^Y\rho(y)$,te možemo uzeti $\gamma \in \Gamma$ da je $\gamma \cdot \rho(x) = \rho(y)$. Takpđe neka je $\rho_1(x) = (\rho(x), n); \rho_1(y) = (\rho(y), m)$,ali tada možemo naći $\delta \in \Delta$ takvo da je $\delta \cdot z_n = z_m$.Odnosno $(\gamma, \delta) \cdot \rho_1(x) = \rho_1(y)$,te smo došli do kraja dokaza. □

Analogno slučaju modularnosti,možemo i u slučaju konačne modularnosti reći da je to ekvivalentno sa tim da se Γ-dejstvo na Y koje je konačno modularno može može utopiti u Γ dejstvo na nekom drvetu $[T]$, gde Γ deluje automorizmima na korenskom drvetu T ,a drvo T je lokalno konačno,svako teme ima samo konačno mnogo sledbenika.Konačna modularnost je u bliskoj vezi sa **rezidualno konačnim grupama** , tj.onim grupama Γ koje zadovoljavaju sledeći usov:

$$(\forall \gamma \in \Gamma, \gamma \neq 1)(\exists N \trianglelefteq \Gamma)([\Gamma : N] < \infty \wedge \neg(\gamma \in N))$$

Poencareova lema tvrdi da je presek dve grupe konačnog indeksa takođe podgrupa konačnog indeksa,tako da svaka podgrupa konačnog indeksa sadrži normalnu podgrupu konačnog indeksa - presek njenih konjugata.Za prebrojivu grupu Γ sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) Γ je rezidualno konačna,

(b) postoji opadajući niz $\Gamma = \Gamma_0 \geq \Gamma_1 \geq \ldots$ podgrupa konačnog indeksa takvih da je $\bigcap_n \Gamma_n = \{1\}$,

(c) postoji opadajuči niz $\Gamma = \Gamma_0 \geq \Gamma_1 \geq \ldots$ normalnih podgrupa konačnog indeksa da je $\bigcap_n \Gamma_n = \{1\}$.

Dobro znan primer rezidualno konačnih grupa su konačno generisane linearne grupe,tj. konačno generisane podgrupe od $GL_n(F)$ gde je F neko polje.

Stav 3.3 *Prebrojiva grupa Γ dopušta slobodno konačno modularno dejstvo akko je Γ rezidualno konačna.*

Dokaz: Ukoliko je Γ rezidualno konačna tada možemo fiksirati opadajući niz normalnih podgrupa konačnog indeksa $\Gamma = \Gamma_0 \geq \Gamma_1 \geq \ldots$ takvih da je $\bigcap_n \Gamma_n = \{1\}$.Pa u cilju pokazivanja konačnog modularnog dejstva konstruišemo lokalno konačno drvo T na kome Γ deluje automorfizmima grana:

(a) koren drveta je Γ_0

(b) sledbenici od Γ_0 su koseti od Γ_1

(c) sledbenici od Γ_1-koseta su svi Γ_2 koseti sadržani u Γ_1 itd.

Γ deluje na $[T]$sa:

$$\gamma \cdot (\Gamma_0, \gamma_1\Gamma_1, \gamma_2\Gamma_2, \ldots) = (\Gamma_0, \gamma\gamma_1\Gamma_1, \gamma\gamma_2\Gamma_2, \ldots)$$

a ovo dejstvo je slobodno jer ukoliko je $\gamma(\Gamma_0, \gamma_1\Gamma_1, \ldots) = (\Gamma_0, \gamma_1\Gamma_1, \ldots)$,gde je $\Gamma_0 \supseteq \gamma_1\Gamma_1 \supseteq \gamma_2\Gamma_2 \ldots$imali bismo da je $\gamma_n^{-1}\gamma\gamma_n \in \Gamma_n$ za svako n ali $\gamma \in \bigcap_n = \{1\}$.

Obrnuto ako Γ deluje slobodno na Y konačno modularnim načinom što potvrđuje sledeća particija $\mathcal{P}_0 \geq \mathcal{P}_1 \geq \ldots$,zbog slobode dejstva za $y \in Y$ važi $(\forall\gamma \in \Gamma)(\gamma \cdot y = y \Rightarrow \gamma = 1)$. Te neka je $A_n \in \mathcal{P}_n$ takav da je $y \in A_n$ i stabilizator $\Gamma_n = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \cdot A_n = A_n\}$ i obzirom da Γ deluje na $\mathcal{P}_n$ permutacijom $\Gamma \cdot \mathcal{P}_n \subseteq \mathcal{P}_n$ ima konačno mogućnosti te je $[\Gamma : \Gamma_n] < \infty$.Sa druge straneje $A_n \supseteq A_{n+1} \Rightarrow \Gamma_n \geq \Gamma_{n+1}$.I na kraju za $\gamma \in \bigcap_n \Gamma_n$ važi $\gamma \cdot A_n = A_n$ te je $\gamma \cdot (\bigcap_n A_n) = \bigcap_n A_n$,a takođe je $\bigcap_n A_n = \{y\}$ odnosno $\gamma \cdot y = y$ te mora biti $\gamma = 1$,čime je dokazano slobodno dejstvo. ✠

Ovaj stav možemo za nijansu poboljšati u sledećem.

Stav 3.4 *Prebrojiva grupa Γ dopušta slobodno dejstvo sa invarijavtnom verovatnosnom Borelovom merom akko je Γ rezidualno konačna.*

Dokaz: Ukoliko Γ dopušta slobodno modularno dejstvo na Y sa invarijantnom merom μ a to potvrdjuje particija $\mathcal{P}_0 \geq \mathcal{P}_1 \geq \ldots$,nadalje možemo smatrati da je svaki član od $\mathcal{P}_n$ pozitivne mere,inače možemo preći na konula skupove.Dalje dobijamo da je za svako n i svaki $A \in \mathcal{P}_n$, Γ orbita od A konačna,jer je mera celog prostora konačna i jednaka 1.Tako da dokaz možemo sprovesti do kraja kao u drugom delu dokaza prethodnog stava.

Kada je Γ rezidualno konačna tada imamo strogo opadajući niz normalnih podgrupa $\Gamma_0 = \Gamma > \Gamma_1 > \Gamma_2 > \ldots$ takvih da je $\bigcap_n \Gamma_n = \{1\}$.Ovo nam omogućava da definišemo drvo T kao u prvom delu prethodnog stava:

(a) koren drveta je Γ_0

(b) sledbenici od Γ_0 su koseti od Γ_1

(c) sledbenici Γ_1−koseta su Γ_2−koseti unutar $\Gamma_1$koseta i tako dalje

Γ deluje uobičajeno na $[T]$.Dalje bazni otvoreni skupovi $\{N_s : |s| = n+1, n \geq 0\}$ čine konačne particije,tako da je $[\Gamma : \Gamma_n] = k_n$ omogućilo da uvedemo meru na $[T]$ da ispunjava $\mu(N_s) = \frac{1}{k_n}$,i to je upravo invarijantna mera za Γ dejstvo na $[T]$. □

A sada ću navesti primer nekoliko manje standardnih modularnih dejstava:

(A) Neka $(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ označava skup svih $1-1$ preslikavanja iz $\mathbb{N}$ u $\mathbb{N}$.To je jedan zatvoren podskup od $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ na kome simetrična podgrupa S_∞ deluje sa:

$$\pi \cdot \alpha(n) = \alpha(\pi^{-1}(n))$$

i ostavlja $(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ invarijantnim u ovakvom dejstvu. Uzmemo li prebrojivu podgrupu $\Gamma \leq S_\infty$ onda ona deluje modularno na $(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ što polazuju sledeće particije $\{\mathbb{P}_n\}$:

$$\mathbb{P}_n = \{A_k^{(n)}\}_{k\leq\infty}$$

$$A_k^{(n)} = \begin{cases} \{\alpha \in (\mathbb{N})^{\mathbb{N}} : \alpha(k) = n\} & ; k \in \mathbb{N} \\ (\mathbb{N})^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k^{(n)} & ; k = \infty \end{cases}$$

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\forall \gamma \in \Gamma)(\gamma \cdot A_k^{(n)} = A_{\gamma(k)}^{(n)})$$

Podgrupa s_∞ viđena kao podskup $S_\infty \subseteq (\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$je invarijantna pod ovim dejstvom pa nasleđuje modularnost i dejstvo od Γ na S_∞ dato sa:

$$\gamma \cdot \alpha = \alpha \circ \gamma^{-1}$$

Takođe preslikavanje $\alpha \mapsto \alpha^{-1}$ iz S_∞ u S_∞ predstavlja Borelov izomorfizam desno translacionog dejstva i levo translacionog dejstva od Γ na S_∞,tj.:

$$\gamma * \alpha = \gamma\alpha$$

te je i ovo jedno modularno dejstvo.

(B) Grupa $\Gamma = SL_n(\mathbb{Z})$ deluje na prebrojivoj diskretnoj abelovoj grupi $G = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n$ množenjem na uobičajen način:

$$\gamma = (a_{ij}) \in \Gamma, g = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} \in G, \gamma \cdot g = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$$

Grupi G možemo pridružiti kompaktnu Poljsku grupu $K = \hat{G}$,grupa koju čine neprekidni homomorfizmi iz grupe G u jedinični krug kompleksne ravni $\mathbb{T}$.Pa se dejstvo od Γ prirodno prenosi na K:

$$\chi : G \to \mathbb{T} - \text{karakter}, \gamma \in \Gamma, \gamma \cdot \chi : G \to \mathbb{T}, \gamma \cdot \chi(g) = \chi(\gamma^{-1} \cdot g)$$

Da bi se izračunao dual $\hat{G}$ poželjno je poći od duala za $\mathbb{Q}$ koji poistovećujemo sa podgrupom od $\mathbb{T}^{\mathbb{N}^+}$ sastavljenom od $\{\alpha_k\} \in \mathbb{T}^{\mathbb{N}^+}$ takvih da je $\alpha_k = \chi(\frac{1}{k!}), \alpha_{k+1}^{k+1} = \alpha_k$ zaa sve $k \in \mathbb{N}^+$.Pa se dalje $(\hat{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}})$ može videti kao podskup nizova $\{\alpha_k\} \in \mathbb{T}^{\mathbb{N}^+}$,tkvih da:

$$(\alpha_k) \in \prod_{k \in \mathbb{N}^+} R_{k!}, (\forall k \in \mathbb{N}^+)(\alpha_{k+1}^{k+1} = \alpha_k).\alpha_k^{k!} = 1,$$

$R_{k!}$ je skup $k!$-tih korena jedinice.Tako da dobijamo predstavljanje $K = (\hat{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}})^n \cong (\hat{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}})^n$ u vidu n-torki $(\{\alpha_k^{(1)}, \dots, \{\alpha_k^{(n)}\}\})$ gde su $\{\alpha_k^{(i)}\}$ prethodno definisani.I konačno se dobija dejstvo od $\Gamma = SL_n(\mathbb{Z})$ na K dato formulom:

$$\gamma = (a_{ij}) \in SL_n(\mathbb{Z}), x = (\{\alpha_k^{(1)}\}, \dots, \{\alpha_k^{(n)}\}) \in K, \gamma \cdot x = y = (\{\beta_k^{(1)}\}, \dots, \{\beta_k^{(n)}\})$$

$$\beta_k^{(i)} = (\alpha_k^{(1)})^{a_{1i}} (\alpha_k^{(2)})^{a_{2i}} \dots (\alpha_k^{(n)})^{a_{ni}}, za \quad k \in \mathbb{N}^+, 1 \le i \le n$$

Sve ovo omogućava da Γ deluje automorfizmima na korenskom drvetu T sastavljenom od:

$$(\alpha_k^{(1)}, \dots, \alpha_k^{(n)}); \alpha_k^{(i)} \in R_{k!}; k = 1, 2$$

$$(1, \dots, 1) \quad je \quad \text{koren}$$

$$nasledni ci \quad od \quad (\alpha_k^{(1)}, \dots, \alpha_k^{(n)}) \quad su \quad svi \quad (\alpha_{k+1}^{(1)}, \dots, \alpha_{k+1}^{(n)})$$

takvi da je $(\alpha_{k+1}^{(i)})^{k+1} = \alpha_k^{(i)}$.A kako se K može identifikovati sa $[T]$ ovo polazuje da je dejstvo od Γ na K konačno modularno.

(C) Neka je K kompaktna Poljska grupa koja deluje na tranzitivno Borelov način na standardnom Borelovom prostoru Y i neka je Γ prebrojiva gusta podgrupa od K.Ukoliko bi postojao opadajući niz $\Gamma = \Gamma_0 \geq \Gamma_1 \geq \dots$ normalnih podgrupa od Γ takvih da je $[\Gamma : \Gamma_n] < +\infty$ i $\bigcap_n \overline{\Gamma_n} = \{1\}$ to bi značilo da je Γ-dejstvo na Y, konačno modularno.Pa ako je $x \in Y, L = K_x = \{k \in K : kx = x\}$ stabilizator,imamo da je $K-$prostor Y Borel izomorfan sa K prostorom K/L,te se može uzeti bez gubljenja opštosti da je Y kompaktan ,a da K deluje neprekidno na Y. Te,ukoliko je $H_n = \overline{\Gamma_n}$ takvo da $H_n \trianglelefteq K, [K : H_n] < \infty, \cap_n H_n = \{1\}$ i ako je $\mathcal{P}_n$ particija sastavljena od H_n orbita od Y , a to su otvoreno zatvoreni podskupovi jer ih ima konačno i svaki je zatvoren.Kako je $H_n \trianglelefteq K$,Γ gusto u K,biće da Γ deluje na $\mathcal{P}_n$.Sa druge strane $\{\mathcal{P}_n\}$ razdvaja tačke jer bi inače za $(x \neq y)$ u Y za svako n bili u istom elementu od $\mathcal{P}_n$ i x i y,te bi postojao $h_n \in H_n : h_n x = y$.Ovako bismo dobili niz $\{h_{n_i}\}$ koji zbog kompaktnosti konvergira , recimo $h_{n_i} \to h$,tj. $h \in \cap_n H_n = \{1\}$,odnosno $h_{n_i} x \to hx = x \Rightarrow x = y$,kontradikcija.

Specijalan slučaj ovoga je za $n \geq 2, p -$ prost :

$$K = SL_n(\mathbb{Z}_p)$$

$Y - k$-dim. potprostor od n-dim. vektorskog prostora $\mathbb{Q_P}^n, 1 \leq k < n$, $\Gamma = SL_n(\mathbb{Z}), \Gamma_m$ je jezgro kanonske surjekcije $SL_n(\mathbb{Z}) \to SL_n(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}), m = 0, 1 \dots, \overline{\Gamma_m}$ je jezgro kanonske surjekcije $SL_n(\mathbb{Z}_p) \to SL_n(\mathbb{Z}_p/p^m\mathbb{Z}_p)$

Drugi primer je levo-translatorno dejstvo od $SL_n(\mathbb{Z}) \leq SL_n(\mathbb{Z}_p)$ na $SL_n(\mathbb{Z}_p)$

Glava 4

Težine

Nadalje je $F_2 =< a, b >$,slobodna grupa generisana sa a i b.

Definicija 4.1 ***Težina*** *za F_2 je preslikavanje $\omega : F_2 \to \mathbb{R}$ koje zadovoljava uslove:*

(i) $\omega(\sigma) \geq 0$ *za sve* $\sigma \in F_2$,

(ii) $\omega(\sigma) \neq 0$ *za neko* $\delta \in F_2$,

(iii) $\omega \in l^1(F_2)$.

Element $\sigma_0 \in F_2$ nazivamo ***centrom*** *ukoliko svaka od četiri oblasti u Caylevom grafu od F_2 ima $\omega-$težinu $\leq \frac{1}{2} \parallel \omega \parallel_1$.Formalno ovo zapisujemo da za svako $g \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$ važi:*

$$\sum\{\omega(\sigma_0 g\delta) : g\delta \textit{redukovana reč}\} \leq \frac{1}{2} \parallel \omega \parallel_1 .$$

Slično ovome, ukoliko svaka od 4 oblasti oko σ_0 ima ω-težinu manju od $< \frac{2}{3} \parallel \omega \parallel_1$ onda σ_0 nazivamo ***slabim centrom*** *.Formalno da za svaki $g \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$ važi:*

$$\sum\{\omega(\sigma_0 g\delta) : g\delta \quad \textit{redukovana} \quad \textit{rec}\} \leq \frac{2}{3} \parallel \omega \parallel_1 .$$

Odavde odmah sledi da je svaki centar i slabi centar.

Pitanje položaja i postojanja centara i slabih centara,kao i njihovu egzistenciju rešava nekoliko narednih lema.

Lema 4.1 *Svaka težina ima barem jedan centar,pa samim tim i slabi centar.*

Dokaz: Polazeći od suprotne pretpostavke za težinu ω imali bismo i da neutral slobodne grupe $1 \in F_2$ nije centar,što povlači da je za neko $g_0 \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$ ispunjeno $\sum\{\omega(g_0\delta) : g\delta \text{redukovana rec}\} > \frac{1}{2} \parallel \omega \parallel_1$.Dalje obzirom da ni g_0 nije centar po pretpostavci,možemmo naći $g_1 \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$ tako da je $\sum\{\omega(g_0g_1\delta) : g_1\delta - \text{redukovana}\} > \frac{1}{2} \parallel \omega \parallel_1$ a uz to $g_0g_1 \neq 1$,tj. g_0g_1 je redukovana reč.Nastavaljajući ovaj postupak možemo naći $g_0, g_1, \dots, g_n \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$ takve da je $g_0g_1 \dots g_n$ redukovana reč za svako n i uz to važi za obaranje centra $\sum\{\omega(g_0g_1 \dots g_n\delta) : g_n\delta - \text{redukovana}\} > \frac{1}{2} \parallel \omega \parallel_1$.Međutim prethodni stav je u suprotnosti sa tim da više od pola težine mora biti skoncentrisano u lopti konačnog radijusa oko 1 u Caylievom grafu,jer $\omega \in l^1(F_2)$,te polazna pretpostavka ne važi. $\square$

Lema 4.2 *Ukoliko posmatramo dejstvo od F_2 na $l^1(F_2)$ desnim množenjem:*

$$\tau \cdot f(\sigma) = f(\sigma\tau)$$

tada je σ_0 centar težine ω akko je $\sigma_0\tau^{-1}$ centar težine $\tau \cdot \omega$;i analogno je σ_0 slabi centar težine ω akko je $\sigma_0\tau^{-1}$ slabi centar za $\tau \cdot \omega$.Te ukoliko je C_ω skup centara za ω,a WC_ω skup slabih centara za ω onda je :

$$\tau \cdot C_\omega = C_{\tau\omega}, \tau \cdot WC_\omega = WC_{\tau\omega}$$

Dokaz: Ide direktno iz definicije. $\square$

Lema 4.3 *Slabi centri težine obrazuju konačan skup,koji je konveksan u smislu Caylievog grafa.Slično važi i za centre.*

Dokaz: Ukoliko σ leži na geodezijskoj liniji koja povezuje dva slaba centra σ_1 i σ_2 težine ω,tada možemo primetiti da su sve četiri oblasti oko σ uključene u neku od oblasti koje okružuju σ_1 ili σ_2,tako da su težine na njima sigurno manje od $< \frac{2}{3} \parallel \omega \parallel_1$,pa je i σ slabi centar.

Obzirom da je $\omega \in l^1(F_2)$, možemo uzeti dovoljno veliko n tako da je deo težine skoncentrisan unutar lopte radijusa n oko 1 u Caylijevom grafu $\geq \frac{2}{3} \parallel \omega \parallel_1$.Dalje ukoliko je σ' na rastojanju većem od $n+1$ od 1 u Caylijevom grafu ,σ' ne može biti slabi centar,jer jedan od 4 njegova okolna regiona sadrži prvobitno uočenu loptu na kojoj se nalazi $\geq \frac{2}{3} \parallel \omega \parallel_1$.Pa se slabi centri mogu nalaziti samo unutar uočene lopte,a za to postoji samo konačno kandidata. $\square$

Lema 4.4 *Svi slabi centri se nalaze na jednoj liniji,tj. na geodezijskoj liniji koja povezuje dva temena Caylievog grafa.*

Dokaz: Ukoliko ovo nije tačno a ω je slabi centar koji ima tri suseda $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ koji su slabi centri, tada tri disjunktne oblasti R_1, R_2, R_3 date sa $R_i = \{\omega_i g\delta : g\delta - \text{redukovana}, g \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\} \setminus \{g_i\}\}$,gde je $g_i \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$ takvo da $\omega g_i^{-1} = \omega_i$, imaju težinu $> \frac{1}{3} \parallel \omega \parallel_1$.A ovo daje da $\parallel \omega \parallel_1 > \parallel \omega \parallel_1$ što je nemoguće. $\square$

Lema 4.5 *Ako su ω_1 i ω_2 težine takve da je $\parallel \omega_1 - \omega_2 \parallel_1 < \frac{1}{12} \parallel \omega_2 \parallel_1$ tada je svaki centar od ω_1 i slabi centar od ω_2.*

Dokaz: Neka je σ centar za ω_1,a R neka od njemu pridružene oblasti ,tada je:

$$| \sum_{\delta \in R} \omega_1(\delta) - \sum_{\delta \in R} \omega_2(\delta) | \leq \parallel \omega_1 - \omega_2 \parallel_1 < \frac{1}{12} \parallel \omega_2 \parallel_1$$

i uz to je još:

$$\parallel \omega_1 \parallel_1 \leq \parallel \omega_2 \parallel_1 + \parallel \omega_1 - \omega_2 \parallel_1 < \parallel \omega_2 \parallel_1 + \frac{1}{12} \parallel \omega_2 \parallel_1 = \frac{13}{12} \parallel \omega_2 \parallel_1$$

a kako je:

$$\sum_{\delta \in R} \omega_1(\delta) \leq \frac{1}{2} \parallel \omega_1 \parallel_1 < \frac{7}{12} \parallel \omega_2 \parallel_1$$

biće:

$$\sum_{\delta \in R} \omega_2(\delta) < \frac{1}{12} \parallel \omega_2 \parallel_1 + \sum_{\delta \in R} \omega_1(\delta)$$
$$< \frac{1}{12} \parallel \omega_2 \parallel_1 + \frac{7}{12} \parallel \omega_2 \parallel_1 = \frac{2}{3} \parallel \omega_2 \parallel_1$$

$\square$

Glava 5

Od $L^2(2^{F_2})$ do $l^1(F_2)$

Nadalje neka je $2^{F_2} = \{0,1\}^{F_2}$ kolekcija funkcija iz F_2 u $\{0,1\}$ opremljena proizvod merom,pri čemu F_2 deluje množenjem sa desna,

$$\tau \cdot f(\sigma) = f(\sigma\tau), f \in 2^{F_2}; \sigma, \tau \in F_2$$

A ovo dalje indukuje dejstvo na $L^2(2^{F_2})$ standardnim putem:

$$za \quad \psi : 2^{F_2} \to \mathbb{C} \quad \text{definišemo} \quad \tau\psi$$

sa:

$$\tau\psi(f) = \psi(\tau^{-1}f)$$

Za konačan skup $S \subseteq F_2$ definišemo odgovarajuću funkciju :

$$\psi_S : 2^{F_2} \to \{-1, 1\}$$

$$f \mapsto (-1)^{|\{\sigma \in S : f(\sigma)=1\}|},$$

kojoj f dodeljuje vrednost 1 ukoliko se S i f slažu na parnom broju mesta,jer je f zapravo karakteristična funkcija nekog podskupa od F_2.Tako je posebno $\psi_\emptyset : f \mapsto 1$ konstantna funkcija sa vrednošću 1.Takođe, familija $\{\psi_S : S \subset F_2 - \text{konacan}\}$ obrazuje ortonomiran sistem čiji je linearan omotač svuda gust u $L^2(2^{F_2})$.Posebno ,vektor $\psi \in L^2(2^{F_2})$je ortogonalan na konstantnu funkciju akko se nalazi u potprostoru koji je zatvorenje linearnog omotača za $\{\psi_S : S \neq \emptyset - \text{konacan}\}$.

Sa željom da sebi što više približimo prostor $L^2(2^{F_2})$ uočavamo najpre prebrojivi skup $\mathcal{F}(F_2) = \{S \subset F_2 : S - \text{konacan}\}$,pomoću koga formiramo još jedan Hilbertov prostor $l^2(\mathcal{F}_\in(F_2))$.Tako da se može uspostaviti linearna izometrija indukovana sa $\{\psi_S : S \subset F_2 - \text{konacan}\}$:

$$\Delta : L^2(2^{F_2}) \to l^2(\mathcal{F}(F_2))$$

$$\psi_S \mapsto \delta_S, gde \quad je \quad \delta_S(T) = \begin{cases} 1 & ; T = S \\ 0 & ; T \neq S \end{cases}$$

Hilbertov prostor $l^2(\mathcal{F}(F_2))$ možemo iskoristiti za dobijanje elemenata iz l^1-prostora na sledeći način:

$$E : l^2(\mathcal{F}(F_2)) \to l^1(\mathcal{F}(F_2))$$

$$E(\phi)(s) = |\phi(s)|^2$$

tako da posebno dobijamo:

$$\| E(\phi) \|_{l^1} = \| \phi \|_{L^2}^2$$

Za kraj preostaje da prostor $\mathcal{F}(F_2)$ na neki način pojednostavimo putem sledećeg preslikavanja:

$$\Sigma : l^1(\mathcal{F}(F_2)) \to l^1(F_2)$$

$$\Sigma(\phi)(\sigma) = \sum_{S \in \mathcal{F}(F_2), \sigma \in S} |S|^{-1} \phi(S)$$

tako da je u slučaju pozitivnog ϕ,i ako je $\phi(\emptyset) = 0$, dobijeno linearno preslikavanje koje zadovoljava $\| \Sigma(\phi) \|_{l^1} = \| \phi \|_{l^1}$.

Sklapanjem ova tri uočena preslikavanja u celinu dobijamo:

$$\pi = \Sigma E \Delta : L^2(2^{F_2}) \to l^1(F_2)$$

$$\phi \mapsto \Sigma(E(\Delta(\phi)))$$

Lema 5.1 *Za $\phi_1, \phi_2 \in l^2(\mathcal{F}(F_2))$ važi:*

$$\| E(\phi_1) - E(\phi_2) \|_{l^1} \leq (\| \phi_1 \|_{l^2} + \| \phi_2 \|_{l^2}) \| \phi_1 - \phi_2 \|_{l^2}$$

Dokaz:

$$\| E(\phi_1) - E(\phi_2) \|_{l^1} = \sum_{s \in \mathcal{F}(F_2)} |E(\phi_1)(s) - E(\phi_2)(s)|$$

$$= \sum_{s \in \mathcal{F}(F_2)} |\phi_1(s)^2 - \phi_2(s)^2| =$$

$$\sum_{s \in \mathcal{F}(F_2)} |\phi_1(s)(\phi_1(s) - \phi_2(s)) + \phi_2(s)(\phi_1(s) - phi_2(s))|$$

$$\leq \sum_{s \in \mathcal{F}(F_2)} |\phi_1(s)| \cdot |\phi_1(s) - \phi_2(s)| + \sum_{s \in \mathcal{F}(F_2)} |\phi_2(s)| \cdot |\phi_1(s) - \phi_2(s)|$$

$$=<|\phi_1|,|\phi_1-\phi_2|>+<|\phi_2|,|\phi_1-\phi_2|>, Cauchy-Schwarz,$$
$$\leq\|\phi_1\|_{l^2}\cdot\|\phi_1-\phi_2\|_{l^2}+\|\phi_2\|_{l^2}\cdot\|\phi_1-\phi_2\|_{l^2}$$
$$=(\|\phi_1\|_{l^2}+\|\phi_2\|_{l^2})\cdot\|\phi_1-\phi_2\|_{l^2}$$

□

Za konačan podskup $S\subset F_2$ i $\tau\in F_2$ uzimamo da je:

$$\tau\cdot S=\{\sigma\tau^{-1}:\sigma\in S\},$$

odnosno

$$\sigma\in S\Leftrightarrow\sigma\tau^{-1}\in\tau\cdot S$$
$$\sigma\tau\in S\Leftrightarrow\sigma\in\tau\cdot S$$

pa slično ovome definišemo τf za $f\in l^2(\mathcal{F}(F_2))\cup l^1(\mathcal{F}(F_2))$ sa:

$$\tau\cdot f(S)=f(\tau^{-1}\cdot S)$$

te ako je $f=\delta_{S_0}$ biće:

$$\tau\cdot f(S)=1\Leftrightarrow\tau^{-1}S=S_0\Leftrightarrow S=\tau\cdot S_0$$

pa je:

$$\tau\cdot\delta_{S_0}=\delta_{\tau\cdot S_0}$$

Lema 5.2 *(o) Za $\phi\in L^2(2^{F_2})$, ortogonalnu na konstantnu funkciju i norme 1, biće $\|\pi(\phi)\|_{l^1}=1$*

(i) $\|\pi(\phi_1)-\pi(\phi_2)\|_{l^1}\leq(\|\phi_1\|_{L^2}+\|\phi_2\|_{l^2})\,\|\phi_1-\phi_2\|_{L^2}$

(ii) π je F_2-preslikavanje,tj. za $\sigma\in F_2$ i $\phi\in L^2(2^{F_2})$ važi:

$$\pi(\sigma\cdot\phi)=\sigma\cdot\pi(\phi)$$

(iii) Za ϕ koje nije s.s. konstantno ,$\pi(\phi)$ je težina

(iv) Za svako ϕ i $\sigma\in F_2$,σ_0 je centar od $\pi(\phi)$ akko je $\sigma_0\sigma^{-1}$ centar od $\pi(\sigma\cdot\phi)$;σ_0 je slabi centar od $\pi(\phi)$ akko je $\sigma_0\sigma^{-1}$ slabi centar od $\pi(\sigma\cdot\phi)$.

(v) Za jedinične vektore ϕ_1 i ϕ_2u $L^2(2^{F_2})$ ortogonalne na konstantnu funkciju takve da je $\|\phi_1-\phi_2\|_{L^2}<\frac{1}{12}$,a σ_0 je slabi centar od $\pi(\phi_1)$,tako da je σ_0 slabi centar od $\pi(\phi_2)$

Dokaz:

(o) i (i) Slede neposredno iz prethodno uočenih izometrija i prethodne leme.

(ii) Najpre se može pokazati da je Δ jedno F_2-preslikavanje,a tu proveru je dovoljno uraditi za bazne elemente oblika ψ_S gde je $S \subset F_2$ konačan,$f \in 2^{F_2}, \tau \in F_2$:

$$\tau \cdot \psi_S(f) = \psi(\tau^{-1} \cdot f) = (-1)^{|\{\sigma \in S: \tau^{-1} f(\sigma)=1\}|}$$
$$= (-1)^{|\{\sigma \in S: f(\sigma\tau^{-1})=1\}|} = (-1)^{|\{\sigma\tau \in S: f(\sigma)=1\}|}$$
$$(-1)^{|\{\sigma \in \tau S: f(\sigma)=1\}|} = \psi_{\tau \cdot S}(f)$$

odnosno:

$$\Delta(\tau \cdot \psi_S) = \Delta(\psi_{\tau \cdot S}) = \delta_{\tau \cdot S} = \tau \cdot \delta_S = \tau \cdot \Delta(\psi_S)$$

Dok je E očigledno F_2 preslikavanje to je u Σ prikriveno rogobatnim sumama:

$$(\Sigma(\tau \cdot f))(\sigma) = \sum_{\sigma \in S} \frac{\tau \cdot f(S)}{|S|} = \sum_{\sigma \in S} \frac{f(\tau^{-1} S)}{|S|}$$
$$\sum_{\sigma \in \tau S} \frac{f(S)}{|S|} = \sum_{\sigma\tau \in S} \frac{f(|S|)}{|S|}$$
$$(\Sigma(f))(\sigma\tau) = (\tau \cdot \Sigma(f))(\sigma)$$

pa komponovanjem F_2-preslikavanja dobijamo F_2-preslikavanja.

(iii) Direktno iz definicije.

(iv) Za bilo koji $g \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$je:

$$\sum\{\pi(\sigma \cdot \phi)(\tau g \sigma_0 \sigma^{-1}) : \tau g - \text{redukovana}\} =$$
$$\sum\{\sigma \cdot \pi(\phi)(\tau g \sigma_0 \sigma^{-1}) : \tau g - \text{redukovana}\}, \text{zbog(ii)}, =$$
$$\sum\{\pi(\phi)(\tau g \sigma_0) : \tau g - \text{redukovana}\}$$

tako da se tvđenje za okolne oblasti u slučaju centra ili slabog centra prenosi ekvivlentno.

(v) Ukoliko odaberemo vektore iz tvrđenja :$\| \phi_1 \|_{L^2} = \| \phi_2 \|_{L^2} = 1, \phi_1, \phi_2 \perp \mathbb{C} \cdot \not{\mathbb{K}}, \| \phi_1 - \phi_2 \|_{L^2}$ tada koristeći (o) i (i) dobijamo: $\| \pi(\phi_1) - \pi(\phi_2) \|_{l^2} < \frac{1}{6} min\{\| \pi(\phi_1) \| -l^2, \| \pi(\phi_2) \|_{l^1}\}$ te je za $\sigma_0 \in F_2, g \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$ ispunjeno:

$$|\sum\{\pi(\phi_1)(\tau g \sigma_0 : \tau g\text{–redukovana})\} - \sum\{\pi(\phi_2)(\tau g \sigma_0 : \tau g\text{–redukovana})\}|$$

ograničeno sa $\frac{1}{6} \parallel \pi(\phi_2) \parallel_{l^2}$,pa ako je:

$$\sum\{\pi(phi_1)(\tau g\sigma_0 : \tau g - \text{redukovana})\} < \frac{1}{2} \parallel \pi(\phi_1) \parallel_{l^1} = \frac{1}{2} \parallel \pi(\phi_2) \parallel_{l^1}$$

odnosno:

$$\sum\{\pi(\phi_2)(\tau g\sigma_0) : \tau g\text{−redukovana}\} < \frac{1}{2} \parallel \pi(\phi_2) \parallel_{l^1} + \frac{1}{6} \parallel \pi(\phi_2) \parallel_{l^1} = \frac{2}{3} \parallel \pi(\phi_2) \parallel_{l^1}$$

te smo dobili željeni odnos na susednim oblastima. □

Glava 6

Hjortov dokaz

Teorema 6.1 *Ako je E konačna modularna relacija ekvivalencije na standardnom Borelovom prostoru $(X, \mathcal{B})$,a $M \subset 2^{F_2}$ je skup pune mere,tj. mere 1.Podrazumevamo da je 2^{F_2} snabdeven običnom proizvod-merom, tada ne postoji $\aleph_0 - 1$ merljivo presllikavanje:*

$$\Theta : M \to X$$

koje je homomorfizam,tj. takvo da za sve $f_1, f_2 \in 2^{F_2}$ važi:

$$f_1 E_{F_2} f_2 \Rightarrow \Theta(f_1) E \Theta(f_2)$$

Dokaz: Najpre uslov da je u pitanju $\aleph_0 - 1$ preslikavanje možemo zameniti sa tim da onda postoji $1 - 1$ preslikavanje koje je homomorfizam sa M u neku modularnu relaciju ekvivalencije,što sledi iz stava u poglavlju o modularnim relacijama ekvivalencije.A zbog jednostavnijeg zapisa nadalje ću podrazumevati da je $M = 2^{F_2}$,što ne umanjuje opštost.

Dokaz se sprovodi polazeći od pretpostavke da ovakvo preslikavanje postoji i izvodimo kontradikciju.

Neka je G prebrojiva grupa koja deluje Borelovim dejstvom na X i određuje $E = E_G$,to postoji po Feldman-Moorovoj teoremi,i neka su $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{B}_n \subset \ldots \mathcal{B}$ konačne Bulove algebre takve da $\cup \mathcal{B}_n$ generiše $\mathcal{B}$ i svaka $\mathcal{B}_n$ je $G-$invarijantna.I neka još $A(\mathcal{B}_n)$ označava atome Bulove algebre $\mathcal{B}_n$ i za svaki $B \in \mathcal{B}_n$ uzimamo da je:

$$\hat{B} = \Theta^{-1}(B)$$
$$\hat{\mathcal{B}} = \{\hat{B} : B \in \mathcal{B}\}, \hat{\mathcal{B}}_n = \{\hat{B} : B \in \mathcal{B}_n\}$$
$$A(\hat{\mathcal{B}}_n) - \text{atomi Bulove algebre} \quad \hat{\mathcal{B}}_n.$$

Međutim pošto je Θ $1 - 1$ preslikavanje,a Borelov skup se u Borelovom $1 - 1$ preslikavanju slika u Borelov skup,dobijamo da $\hat{\mathcal{B}}$ generiše Borelovu algebru na 2^{F_2}.

Za $x \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}, f \in 2^{F_2}$ sa $g_{f,x} \in G$ označavmo element koji zadovoljava:

$$g_{f,x} \cdot \Theta(f) = \Theta(x \cdot f),$$

ovim želimo da odglumimo dejstvo grupe G na F_2 gde ono u osnovi nije dato.Zbog prebrojivosti grupe G i principa uniformnosti kad Borelov skup ima prebrojive zaseke možemo uzeti da je za fiksirano x preslikavanje

$$f \mapsto g_{f,x} - \text{Borelovo}$$

U daljem se dokaz zasniva na nekoliko pomoćnih tvrđenja.
Tvrdnja 1:

$$(\forall x \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\})(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \subset 2^{F_2})(\exists n \in \mathbb{N})$$

tako da važi:

$$\mu(M) > 1 - \varepsilon$$

$$(\forall \hat{B} \in A(\hat{\mathcal{B}}_n))(\forall f_1, f_2 \in \hat{B} \cap M)(g_{f_1,x} = g_{f_2,x}),$$

odnosno funkcija $f \mapsto g_{f,x}$ zavisi samo od $\hat{B} \in A(\hat{\mathcal{B}}_n)$ na kome se f nalazi.

dokaz tvrdnje: Najpre primetimo da za fiksirano x postoji mnogo vrednosti za razne $g_{f,x}$,tako da možemo dobiti prebrojivo mnogo merljivih skupova od kojih je svaki sastavljen od elemenata koji se slikaju u jedan fiksirani element grupe G. Obzirom da je mera celog prostora 1, možemo uzeti konačan posdkup $F \subset G$ takav da elementi van F odvuku manje od $\frac{\varepsilon}{2}$ mere na F_2.Te ukoliko uzmemo kolekciju $(M_g)_{g \in F}$ tada je za sve $f \in M_g$:

$$g_{f,x} = g$$

$$\mu(\bigcup_{g \in F} > 1 - \frac{\varepsilon}{2})$$

Kako $\bigcup \hat{\mathcal{B}}_n$ generiše $\sigma-$algebru $\hat{\mathcal{B}}$,to znači i da je $\bigcup \hat{\mathcal{B}}_n$ gust u ovoj merljivoj algebri ,pa:

$$(\forall g \in F)(\exists n_g \in \mathbb{N})(\exists \hat{B}_g \in \hat{\mathcal{B}_{n_g}})(\mu(\hat{B}_g \triangle M_g) < \frac{\varepsilon}{2|F|})$$

Dalje uzimajući :

$$n = max\{n_g : g \in F\}$$

$$M = (\bigcup_{g \in F} M_g) \setminus (\bigcup_{g \in F} \hat{B}_g \triangle M_g)$$

dobijamo željeni M. □

Koristeći ovu tvrdnju i zbog invarijantnosti proizvod-mere na 2^{F_2} možemo naći skupove $N_2 \subset N_1 \subset 2^{F_2}, n \in \mathbb{N}$ da je:

$$g : A(\hat{\mathcal{B}}_n) \times \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\} \to G$$

$$(\hat{B}, x) \mapsto g_{\hat{B},x}$$

i uz to:

(i) $(\forall \tau \in F_2)(\forall f \in N_2)(d(\tau, e) \leq 3 \Rightarrow \tau \cdot f \in N_1)$,

(ii) $\mu(N_2) > 1 - 10^{-9}$,

(iii) $(\hat{B} \in A(\hat{\mathcal{B}}_n)) \wedge (f \in \hat{B} \cap N_1) \wedge (x \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}) \Rightarrow (g_{\hat{B},x} = g_{f,x})$, a može se podrazumevati da je $\mu(\hat{B}) < 10^{-8}$ za sve $\hat{B} \in A(\hat{\mathcal{B}}_n)$.

Tvrdnja 2: Ako je $x \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}; B_1, B_2 \in A(\mathcal{B}_n); x \cdot (\hat{B}_1 \cap N_1) \cap \hat{B}_2 \cap N_1 \neq \emptyset$ onda je:

(i) $x \cdot (\hat{B}_1 \cap N_1) \subset \hat{B}_2$

(ii) $x^{-1}(\hat{B}_2 \cap N_1) \subset \hat{B}_1$

(iii) $x \cdot (\hat{B}_1) \supset \hat{B}_2 \cap N_1$

Dokaz tvrdnje:

(i) Ako je $f_0 \in \hat{B}_1 \cap N_1 \cap x^{-1}(\hat{B}_2)$imaćemo da je $g_{f_0,x} = g_{\hat{B}_1,x}$ zbog načina na koji smo odabrali N_1 i N_2.Sa druge strane je:

$$g_{\hat{B}_1,x} \cdot \Theta(f_0) = \Theta(x \cdot f_0) \in B_2,$$

a pošto G permutuje $A(\mathcal{B}_n)$ važiće $g_{\hat{B}_1,x} \cdot B_1 = B_2$,te će za sve $f \in \hat{B}_1 \cap N_1$ biti:

$$\Theta(x \cdot f) = g_{f,x} \cdot \Theta(f) = g_{\hat{B}_1,x} \cdot \Theta(f) \in B_2,$$

odnosno $x \cdot f \in \hat{B}_2$.

(ii) Sledi analogno iz (i)

(iii) Ako je $f_0 \in \hat{B}_2 \cap N_1$ tada je $x^{-1} \cdot f_0 \in \hat{B}_1$ zbog (ii) odnosno $x \cdot (x^{-1} \cdot f_0) \in x \cdot \hat{B}_1$ tj. $f_0 \in x \cdot (\hat{B}_1)$

□

Za atom $\hat{B} \in A(\hat{\mathcal{B}}_n)$ kažemo da je **dobar** ukoliko važi:

$$\frac{\mu(\hat{B} \setminus N_2)}{\mu(\hat{B})} < 10^{-4}$$

a inače ga nazivamo **lošim** . Tako da u slučaju lošeg atoma $\hat{B} \in A(\hat{\mathcal{B}}_n)$ važi:

$$\mu(\hat{B} \leq 10^4 \cdot \mu(\hat{B} \setminus N_2)) \leq 10^4 \cdot \mu(2^{F_2} \setminus N_2) < 10^4 \cdot 19^{-9} = 10^{-5}$$

pa imamo:

$$\mu(\bigcup\{\hat{B} \in A(\hat{\mathcal{B}}_n) : \hat{B} - \text{loš}\} \cup (2^{F_2} \setminus N_2)) < 10^{-5} + 10^{-9} < 10^{-4}$$

Dalje uočimo skup:

$$N_3 = \{f \in 2^{F_2} : \forall \tau \in F_2(d(\tau, e) \leq 3 \Rightarrow \tau \cdot f \in N_2 \setminus \cup\{\hat{B} \in A(\hat{B}_n) : \hat{B} - \text{loš}\})\}$$

pa će biti ispunjeni procena mere sa:

$$\mu(N_3) > 1 - 4 \cdot (3 \cdot 3 + 3 + 1) \cdot 10^{-4} = 1 - 0,0052 > 1 - 10^{-2}$$

Tvrdnja 3: Ako je $f_0 \in N_3 \cap \hat{B}_1, \tau \in F_2, d(\tau, e) \leq 3, \tau \cdot f_0 \in \hat{B}_2$ tada je:

$$\frac{\mu(\hat{B}_1)}{\mu(\hat{B}_2)} \in (\frac{10^4 - 1}{10^4}, \frac{10^4}{10^4 - 1}).$$

i

$$\mu(\tau \cdot \hat{B}_1 \triangle \hat{B}_2) < 4 \cdot 10^{-4} min\{\mu(\hat{\mathcal{B}}_1), \mu(\hat{\mathcal{B}}_2)\}.$$

Dokaz tvrdnje: Neka je $\tau = x_0 x_1 x_2$ gde je $x_i \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$ i neka su $\hat{C}_1, \hat{C}_2 \in A(\hat{\mathcal{B}}_n)$ atomi koji redom sadrže $x_2 \cdot f_0$ i $x_1 x_2 \cdot f_0$.Pa će tvrdnja (iii) iz prethodnog stava dati:

$$x_2 \cdot \hat{B}_1 \supset \hat{C}_1 \cap N_1$$
$$x_1 \cdot \hat{C}_1 \supset \hat{C}_2 \cap N_1$$
$$x_0 \cdot \hat{C}_2 \supset \hat{B}_2 \cap N_1$$

Tako da će za svaki $f' \in \hat{B}_2 \cap N_2 \subset \hat{B}_2 \cap N_1$ važiti zbog (i) u odabiru za N_1 i N_2:

$$\tau^{-1} \cdot f' = x_2^{-1} x_1^{-1} x_0^{-1} \cdot f', x_1^{-1} x_0^{-1} \cdot f', x_0^{-1} \cdot f' \in N_1$$

Krećući se unazad dobijamo da važi:

$$x_0^{-1} f' \in \hat{C}_2 \cap N_1$$

$$x_1^{-1}x_0^{-1}f' \in \hat{C}_1 \cap N_1$$
$$\tau^{-1}f' \in \hat{B}_1$$

te imajući u vidu da je $\tau \cdot f_0 \in N_3$ i da je N_3 samo od delova dobrih atoma i još je $\tau \cdot f_0 \in \hat{B}_2$,dobijamo:

$$\tau \cdot (\hat{B}_1) \supset \hat{B}_2 \cap N_2$$

što se odražava i na meru:

$$\mu(\hat{B}_2 \setminus (\tau \cdot \hat{B}_1)) < 10^{-4}\mu(\hat{B}_2)$$

$$\mu(\hat{B}_2)\mu(\hat{B}_1) = \mu(\hat{B}_2)\mu(\tau \cdot \hat{B}_1) < 10^{-4}\mu(\hat{B}_2),$$

a sličan razlog daje da važi:

$$\tau^{-1}(\hat{B}_2) \supset \hat{B}_1 \cap N_2,$$

$$\hat{B}_2 \supset \tau(\hat{B}_1 \cap N_2),$$
$$\mu((\tau \cdot \hat{B}_1) \setminus \hat{B}_2) < 10^{-4}\mu(\hat{B}_1),$$
$$\mu(\hat{B}_1) - \mu(\hat{B}_2)) < 10^{-4}\mu(\hat{B}_1),$$

□

Za atom $\hat{B}_n \subset 2^{F_2}$,pozitivne mere $\mu(\hat{B}) \in (0,1)$ definišemo $\gamma_{\hat{B}} \in L^2(2^{F_2})$ sa:

$$\gamma_{\hat{B}}(f) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-\mu(\hat{B})}}{\sqrt{\mu(\hat{B})}} & ; f \in \hat{B} \\ -\frac{\sqrt{\mu(\hat{B})}}{\sqrt{1-\mu(\hat{B})}} & ; \neg(f \in \hat{B}) \end{cases}$$

pri čemu su ovakve funkcije ortogonalne na konstantnu funkciju i imaju normu 1:

$$\| \gamma_{\hat{B}} \|_{L^2}^2 = \int (\gamma_{\hat{B}})^2 = \int_{\hat{B}} \frac{1-\mu(\hat{B})}{\mu(\hat{B})} + \int_{2^{F_2}\setminus\hat{B}} \frac{\mu(\hat{B})}{1-\mu(\hat{B})} = 1$$

$$< \gamma_{\hat{B}}, 1 > = \int_{\hat{B}} \sqrt{\frac{1-\mu(\hat{B})}{\mu(\hat{B})}} - \int_{2^{F_2}\setminus\hat{B}} \sqrt{\frac{\mu(\hat{B})}{1-\mu(\hat{B})}} = \sqrt{\mu(\hat{B})(1-\mu(\hat{B}))} - \sqrt{(1-\mu(\hat{B})(\mu(\hat{B}))} = 0$$

Pa ćemo govoriti da je σ_0 centar(slabi centar) za $f \in 2^{F_2}$ ukoliko je za $\hat{B} \in A(\hat{\mathcal{B}}_n)$ koje sadrži $f \cdot \sigma_0$ centar(slabi centar) za $\pi(\gamma_{\hat{B}})$,gde je π preslikavanje zadato unapred.

Tvrdnja 4: Za $f \in N_3, \tau \in F_2, d(\tau, e) \leq 3, f \in \hat{B}_1, \tau \cdot f \in \hat{B}_2, \hat{B}_1 \in A(\hat{B_n}), \hat{B}_2 \in A(\hat{B_n})$ važi:

$$\| \tau \cdot \gamma_{\hat{B}_1} - \gamma_{\hat{B}_1} \|_{L^2} = \| \gamma_{\tau \cdot \hat{B}_1} - \gamma_{\hat{B}_2} \|_{L^2} < 3 \cdot 10^{-2}$$

Dokaz tvrdnje: Prva jednakost sledi direktno iz definicije funkcije $\gamma_{\hat{B}}$ i način na koji smo zadali dejstvo na $L^2(2^{F_2})$ od ranije.A za ostatak dokaza najpre ćemo uočiti particiju:

$$2^{F_2} = (\tau \cdot \hat{B}_1 \triangle \hat{B}_2) \sqcup (\tau \hat{B}_1 \cap \hat{B}_2) \sqcup (2^{F_2} \setminus (\tau \hat{B}_1 \cup \in B_2))$$

i uzeti funkcije koje imaju nosače na ovim skupovima,redom ψ_1, ψ_2, ψ_3 te je:

$$\gamma_{\tau \cdot \hat{B}_1} - \gamma_{\hat{B}_2} = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$$

Tako da je za izvođenje nejednakosti dovoljno naći pogodna ograničenja za $\| \psi_1 \|_{L^2}, \| \psi_2 \|_{L^2}, \| \psi_3 \|_{L^2}$,a pri tome možemo pretpostaviti da je $\mu(\hat{B}_1) \leq \mu(\hat{B}_2)$,bez gubljenja opštosti,a uz to zadnje tvrđenje daje:

$$\mu(\hat{B}_2) < \frac{10^4}{10^4 - 1} \mu(\hat{B}_1)$$

Najpre procena za $\| \psi_1 \|_{L^2}$:

$$\begin{aligned}
\| \psi_1 \|_{L^2} &= \sqrt{\int_{\tau \hat{B}_1 \triangle \hat{B}_2} \psi_1^2} \\
&\leq \sqrt{\mu(\tau \hat{B}_1 \triangle \hat{B}_2) \cdot max_{\tau \hat{B}_1 \triangle \hat{B}_2} \psi_1^2} \\
&\leq \sqrt{4 \cdot 10^{-4} \cdot min\{\mu(\hat{B}_1), \mu(\hat{B}_2)\} \cdot \frac{1}{\mu(\hat{B}_1)}} \\
&= \sqrt{4 \cdot 10^{-4} \cdot \mu(\hat{B}_1) \frac{1}{\mu \hat{B}_1}} \\
&= 2 \cdot 10^{-2}
\end{aligned}$$

Ovde je korišćena nejednakost iz zadnjeg tvrđenja i pretpostavke da je $\mu \hat{B}_1 \leq \mu \hat{B}_2$,pa sada prelazimo na procenu za $\| \psi_2 \|_{L^2}$

$$\| \psi_2 \|_{L^2} = \sqrt{\int_{\tau \hat{B}_1 \cap \hat{B}_2} \psi_1^2}$$

$$\leq \sqrt{\mu(\hat{B}_2)}(\sqrt{\frac{1-\mu(\hat{B}_1)}{\mu(\hat{B}_1)}} - \sqrt{\frac{1-\mu(\hat{B}_2)}{\mu(\hat{B}_2)}})$$

$$\leq \sqrt{\mu(\hat{B}_2)}(\sqrt{\frac{1-\mu(\hat{B}_1)}{\mu(\hat{B}_1)}} - \sqrt{\frac{1-\mu(\hat{B}_2)}{\mu(\hat{B}_2)}})(\sqrt{\frac{1-\mu(\hat{B}_1)}{\mu(\hat{B}_1)}} - \sqrt{\frac{1-\mu(\hat{B}_2)}{\mu(\hat{B}_2)}})\sqrt{\mu(\hat{B}_2)}$$

$$= \mu(\hat{B}_2)(\frac{1-\mu(\hat{B}_2)}{\mu(\hat{B}_1)}) - \frac{1-\mu(\hat{B}_2)}{\mu(\hat{B}_2)})$$

$$= \frac{\mu(\hat{B}_2)-\mu(\hat{B}_1)}{\mu(\hat{B}_1)}$$

$$< \frac{10^{-4}\mu(\hat{B}_1)}{\mu(\hat{B}_1)} < 10^{-4}$$

U prethodnom delu je iskorišćeno da je odabir $\hat{B}_1$ i $\hat{B}_2$ unapred urađen tako da su $\mu(\hat{B}_1), \mu(\hat{B}_2) < 10^{-8}$ te je $\sqrt{1-\mu(\hat{B}_1)}$ i $\sqrt{1-\mu(\hat{B}_2)}$ dovoljno blisko 1 te njihov zbir prelazi 1.I za kraj ostaje još jedna procena:

$$\| \psi_3 \|_{L^2} =$$

$$\sqrt{\int_{2^{F_2}\setminus(\tau\hat{B}_1\cup\hat{B}_2)} (\sqrt{\frac{\mu(\hat{B}_1)}{1\ \mu(\hat{B}_1)}} - \sqrt{\frac{\mu(\hat{B}_2)}{1-\mu(B_2)}})^2}.$$

$$\leq \sqrt{\frac{\mu(\hat{B}_1)}{1-\mu(\hat{B}_1)} + \frac{\mu(\hat{B}_2)}{1-\mu(\hat{B}_2)}}$$

$$< \sqrt{2\mu(\hat{B}_1)+2\mu(\hat{B}_2)}$$

$$< \sqrt{2\cdot 10^{-8}+2\cdot 10^{-8}} = 2\cdot 10^{-4}.$$

□

Tvrdnja 5: Ako je $f \in N_3, \tau \in F_2, d(\tau, e) \leq 3$,a σ_0 je centar za f,onda je $\sigma_0\tau^{-1}$ slabi cenatar za $\tau \cdot f$.

Dokaz tvrdnje: Fiksirajmo $\hat{B}_1, \hat{B}_2 \in A(\hat{\mathcal{B}}_n)$ takve da $f \in \hat{B}_1, \tau f \in \hat{B}_2$,a po uslovu σ_0 je centar za $\pi(\gamma_{\hat{B}_1})$.Dalje po osobini centra imamo da je $\sigma_0\tau^{-1}$ centar za $\pi(\tau\cdot\gamma_{\hat{B}_1}) = \pi(\gamma\tau\cdot\hat{B}_1)$,a iz prethodne tvrdnje dobijamo:

$$\| \gamma_{\tau\cdot\hat{B}_1} - \gamma_{\hat{B}_1} \|_{L^2} < \frac{1}{12}$$

što implicira da je $\sigma_0\tau^{-1}$ slabi centar za $\pi(\gamma_{\hat{B}_2})$,odnosno za $\tau\cdot f$ □

Da bismo priveli dokaz kraju uočimo skupove N_g,gde je $g \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}, e\}$ zadate sa:

$$N_g = \{f \in N_3 : \text{centar za f je skup}\{\omega g : \omega g - \text{redukovana}\}\}$$

$$N_e = \{f \in N_3 : \text{centar od f je neutral e}\}$$

pri čemu smo napravili particiju:$N_3 = N_e \sqcup N_a \sqcup N_{a^{-1}} \sqcup N_b \sqcup N_{b^{-1}}$.Tako da bar jedan od ovih N_g ima meru $\geq \frac{1}{5}\mu(N_3)$,recimo da je to N_a,a slično se razmatraju i ostale mogućnosti.Sa B_τ ćemo označiti skup $f \in 2^{F_2}$ da je neka redukovana reč $\sigma\tau$ slabi centar za f.

Dalje ukoliko je $f \in N_3 \cap N_a$,τ ne počinje sa a,$d(\tau, e) \leq 3$,onda je po zadnjoj tvrdnji:

$$\tau \cdot f \in B_{a\tau^{-1}} \subset B_{\tau^{-1}}$$

Za redukovanu reč τ dužine 3 postoji 27 mogućnosti ukoliko ne želimo da završava sa a i za svaku takvu τ će važiti:

$$\mu(B_{a\tau^{-1}}) \geq \mu(N_a) \geq \frac{1}{5}\mu(N_3)$$

Međutim,očigledno je $\frac{27}{5}\mu(N_3) > 2\mu(N_3)$,što znači da poostoji $f \in 2^{F_2}$ u tri različita $Ba\tau_1^{-1}, B_{a\tau_2^{-1}}, B_{a\tau_3^{-1}}$ gde je svaka $a\tau_i^{-1}$ redukovana reč,i $d(\tau_i, e) =$ 3.Ali ovo je u suprotnosti sa tim da su slabi centri jedne težine linearno uređeni.

$\square$

Ovu teoremu je moguće istim postupkom manjim izmenama poboljšati.

Definicija 6.1 *Neka je $(Z, \mathcal{C}, \nu)$ standardan Borelov prostor i neka je Z^{F_2} proizvod-prostor sastavljen od svih preslikavanja $f : F_2 \to Z$,pri čemu uzimamo produkt meru a dejstvo definišemo sa:*

$$F_2 \times Z^{F_2} \to Z^{F_2}$$

$$\sigma \cdot f(\tau) = f(\tau\sigma).$$

Ovako dobijen prostor sa ovim dejstvom i ovom merom nazivamo ***Bernulijev šift*** *od dejstva F_2 na Z^{F_2}*

Teorema 6.2 *Ako je E Borelova relacija konačnog modularnog tipa na $(X, \mathcal{B})$,a $(Z, \mathcal{C}, \nu)$ standardan Borelov verovatnosni prostor,$M \subset Z^{F_2}$ je pune mere, tada ne postoji $\aleph_0 - 1$ merljivo preslikavanje*

$$\Theta : M \to X$$

koje je homomorfizam,tj. $f_1 E_{F_2} F_2 \Rightarrow \Theta(f_1) E \Theta(f_2)$.

Glava 7

Unitarne reprezentacije

Definicija 7.1 *Za prebrojivu diskretnu grupu Γ **unitarna reprezentacija** na separabilnom kompleksnom Hilbertovom prostoru H je dejstvo od Γ na H unitarnim operatorima,ili ekvivalentno homomorfizam:*

$$\pi : \Gamma \to U(H),$$

gde je $U(H)$ unitarna grupa Hilbertovog prostora H.I obično pišemo,bez gubljenja opštosti da je:

$$\gamma \cdot \xi = \pi(\gamma) \cdot \xi,$$

*ukoliko želimo da istaknemo H pišemo sa H_π,jer na jednom prostoru jedna grupa može na razne načine delovati.Dve reprezentacije $\pi : \Gamma \to U(H_\pi)$ i $\rho :\to u(H_\rho)$ su **izomorfne** u oznaci $\pi \cong \rho$,ukoliko postoji izomorfizam T Hilbertovih prostora sa uslovom:*

$$T : H_\pi \to H_\rho$$

$$(\forall \gamma \in \Gamma)(\forall \xi \in H_\pi)(T(\gamma \cdot \xi) = \gamma \cdot T(\xi))$$

***Podreprezentacija** od π je restrikcija od π na neki $\Gamma-$invarijantni zatvoreni potprostor od H_π,a ukoliko je reprezentacija izomorfna podreprezentaciji od π kažemo da je ρ **jako sadržana** u π,označavamo $\rho \leq \pi$*

Napomena 7.1 *Za svaku grupu možemo naći bar jednu reprezentaciju na svakom Hilbertovom prostoru i to je trivijalna,kada sve elemente grupe slikamo u identitet.*

Ukoliko je $\{\pi_{i\in I}\}$ prebrojiva familija unitarnih reprezentacija grupe Γ gde je $H_i = H_{\pi_i}$,možemo doći do nove reprezentacije **direktne sume** $\bigoplus_{i\in I} \pi_i$:

$H = \bigoplus_i H_i$-Hilbertov prostor familija $\{\xi_i\}$,pri čemu pišemo $\oplus_i \xi_i, \xi_i \in H_i, \sum \| \xi_i \|_i^2 < \infty$

$< \oplus_i \xi_i, \oplus_i \eta_i >= \sum < \xi_i, \eta - i >$ - zadavanje skalarnog proizvoda

$\gamma \cdot \oplus_i \xi_i = \oplus_i (\gamma \cdot \xi_i)$ - zadavanje dejstva.

Očigledno da važi $H_i \leq \oplus_i H_i$,a direktna suma od n kopija reprezentacije π označavamo sa $n \cdot \pi$,i posebno sa $\infty \cdot \pi = \aleph_0 \cdot \pi$.

Definicija 7.2 *Za svaku prebrojivu grupu* Γ *sa* λ_Γ *označavamo* ***levo regularnu reprezentaciju*** *od* Γ *na* $l^2(\Gamma)$ *datu sa:*

$$\gamma \cdot \psi(\delta) = \psi(\gamma^{-1}\delta),$$

Za svaku grupu Γ i njenu reprezentaciju $\pi : \Gamma \to H$ i svaka dva elementa $\xi, \eta \in H$ uočavamo funkciju koja slika $\Gamma \to \mathbb{C}$ sa:

$$f_{\xi,\eta}(\gamma) =< \gamma \cdot \xi, \eta >$$

a nazivamo je **matrični koeficijent** , a posebno u slučaju $\xi = \eta$, dobijamo dijagonalne **matrične koeficijente** zadate sa:

$$\gamma \mapsto < \gamma\xi, \xi > .$$

Ovako dobijen dijagonalno matrični koeficijent je pozitivno definitna funkcija,tj. preslikavanje $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ takvo da za sve $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ i $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ važi:

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(\gamma_j^{-1}\gamma_i) c_i \bar{c}_j \geq 0$$

Teorema 7.1 ***(GNS Teorema):*** *Za svaku pozitivno definitnu funkciju* f *postoji jedinstvena do na izomorfizam trojka* (π_f, H_f, ξ_f) *sastavljena od unitarne reprezentacije* π_f *grupe* Γ *na Hilbertovom prostoru* H_f *i* ***cikličnog vektora*** $\xi_f \in H_f$*,tj. vektora čiji je linearni omotač od* $\Gamma \cdot \xi_f$ *gust u* H_f*,i tada je :*

$$f(\gamma) =< \gamma \cdot \xi_f, \xi_f > .$$

Kažemo da je pozitivno definitna funkcija **realizovana** u unitarnoj reprezentaciji π ukoliko je jednaka nekom dijagonalnom koeficijentu od π.Pa ako je f realizovana u π,tada je $\pi_f \leq \pi$,jer ako je $f(\gamma) =< \gamma\xi, \xi >$ onda je π_f izomorfna podreprezentaciji od π na zatvoren podprostor $< \Gamma \cdot \xi >$ je kraća oznaka za zatvorenje linearnog omotača od $\Gamma \cdot \xi$.

Definicija 7.3 *Za dve unitarne reprezentacije π i ρ grupe Γ na Hilbertovom prostorima H_π,H_ρ redom kažemo da je π* ***slabo sadržana*** *u ρ,oznaka $\pi \prec \rho$,ukoliko je svaka pozitivno definitna funkcija realizovana u π može predstaviti kao limes tačka po tačka niza konačnih suma pozitivno definitnih funkcija realizovanih u ρ.Za dve reprezentacije prethodno uočene kažemo da su* ***slabo ekvivalentne*** *oznakom $\pi \sim \rho$,ukoliko je $\pi \prec \rho$ i $\rho \prec \pi$.*

Jezikom formula bi to značilo da ako je $\xi \in H_\pi$, $f(\gamma) =< \gamma \cdot \eta_i, \eta_i >$ tada postoji niz funkcija f_n oblika:

$$f_n = \sum_{i=1}^{k_n} < \gamma \cdot \eta_i, \eta_i >, \eta_i \in H_\rho$$

takvih da $(\forall\gamma \in \Gamma)(f_n(\gamma) \to f(\gamma))$,a možemo reći da uspevamo uraditi aproksimaciju $(\forall\varepsilon > 0)(\forall\gamma \in \Gamma)$:

$$| < \gamma \cdot \xi, \xi > - \sum_{i=1}^{k} < \gamma \cdot \eta_i, \eta_i > | < \varepsilon.$$

Neke od osobina relacije $\prec$ su:

- tranzitivnost:$\pi \prec \rho \prec \sigma \Rightarrow \pi\rho$,
- boravi na podreprezentaciji:$\pi \leq \rho \Rightarrow \pi \prec \rho$,
- izomorfizam je čuva:$\pi \cong \rho \Rightarrow \pi \sim \rho$,
- ostaje na prebrojivim familijama $\{\pi_i\}$,

$$(\forall i \in I)(\pi_i \prec \rho) \Leftrightarrow \oplus_i \pi_i \prec \rho,$$

- posebno:$\pi \sim \infty \cdot \pi$.

Stav 7.1 *Ako je π unitarna reprezentacija prebrojive grupe Γ ,tada su sledeći iskazi ekvivalentni:*

(i) $\pi \prec \lambda_\Gamma$.

(ii) $\pi \prec \infty \cdot \lambda_\Gamma$.

(iii) *Svaka pozitivno definitna funkcija u π je tačka po tačka limes niza pozitivno definitnih funkcija koje su realizovane u $\infty \cdot \lambda_\Gamma$.*

(iv) *Za svaki* $\xi_1, \ldots, \xi_n \in H_\pi$ *i svaki* $\varepsilon > 0$,*i svaki konačan podskup* $F \subseteq \Gamma$,*postoje* $\eta_1, \ldots, \eta_n \in H_{\infty \cdot \lambda_\Gamma}$ *tako da za* $\forall \gamma \in F$ *važi:*

$$| < \gamma\xi_i, \xi_j > - < \gamma\eta_i, \eta_j > | < \varepsilon.$$

(v) *Isto kao (iv) samo što su* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *ortonomirani* $\eta_1, \ldots, \eta_n$ *se mogu uzeti takođe kao ortonomirani.*

Dokaz:

(i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(iii) Već znamo da je $\infty \cdot \lambda_\Gamma \sim \lambda_\Gamma$ a za prelaz sa (ii) na (iii) obrnuto treba videti da ako je ρ unitarna reprezentacija od Γ,tada je za $\theta_1, \ldots, \theta_n \in H_\rho$ ispunjeno:

$$\sum_{i=1}^{n} < \gamma \cdot \theta_i, \theta_i > = < \gamma \cdot \oplus_{i=1}^{m} \theta_i, \oplus_{i=1}^{m} \theta_i >,$$

odnosno suma konačno mnogo pozitivno definitnih funkcija realizovanih u ρ je jednaka pozitivno definitnoj funkciji realizovanoj u $\infty \cdot \rho$.

(v)$\Rightarrow$(ii) Uzimajući specijalan slučaj $n = 1$,za bilo koji jedinični vektor $\xi \in H_\pi$,bilo koje $\varepsilon > 0$,i proizvoljno konačan skup $F \subseteq \Gamma$ postoji jedinični vektor $\eta \in H_{\infty \cdot \lambda_\Gamma}$ takav da za sve $\gamma \in F$ važi:

$$| < \gamma\xi, \xi > - < \gamma\eta, \eta > | < \varepsilon,$$

a obzirom da je svaki vektor skalarni umnožak nekog jediničnog vektora dobijamo tvđenje (ii).Ovde smo dobili i još jači zaključak,tj. ne samo da određene konačne sume konvergiraju,već se one pretvaraju u običan niz.

(iii)$\Rightarrow$(iv) Ovde dokaz izvodimo u dva dela,kada reprezentacija ima ciklični vektor,i drugi slučaj kada reprezentacija nema ciklični vektor. **Slučaj1:**Ukoliko je $\xi \in H_\pi$ ciklični vektor ,tj. $< \Gamma \cdot \xi > = H_\pi$,tada za date $\xi_1, \ldots, \xi_n \in H_\pi, \varepsilon > 0, F \subseteq \Gamma$ konačan možemo naći za $1 \leq i \leq n$ zadovoljenje sledećih uslova:

$$\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_{n_i}^{(i)} \in \mathbb{C}$$

$$\gamma_1^{(i)}, \ldots, \gamma_{n_i}^{(i)} \in \Gamma$$

$$\| \xi_i - \sum_{k=1}^{n_i} \alpha_k^{(i)} (\gamma_k^{(i)} \cdot \xi) \| < \varepsilon, 1 \leq i \leq n$$

Uzimajući da je $M = max\{\| \xi_1 \|, \dots, \| \xi_n \|\}$ dobićemo:

$$| < \gamma \cdot \xi_i, \xi_j > - < \gamma \cdot \sum_{k=1}^{n_i} \alpha_k^{(i)} (\gamma_k^{(i)} \cdot \xi), \sum_{k=1}^{n_j} \alpha_k^{(j)} (\gamma_k^{(j)} \cdot \xi) > | < 2\varepsilon(\varepsilon + M)$$

a uz to važi sledeće:

$$< \gamma \cdot \sum_{k=1}^{n_i} \alpha_k^{(i)} (\gamma_k^{(i)} \cdot \xi), \sum_{k=1}^{n_j} \alpha_k^{(j)} (\gamma_k^{(j)} \cdot \xi) >$$

$$= \sum_{k=1}^{n_i} \sum_{l=1}^{n_j} \alpha_k^{(i)} \overline{\alpha_l^{(j)}} < \gamma \gamma_k^{(i)} \xi, \gamma_l^{(j)} \xi >$$

$$= \sum_{k=1}^{n_i} \sum_{l=1}^{n_j} \alpha_k^{(i)} \overline{\alpha_l^{(j)}} < (\gamma_l^{(j)})^{-1} \gamma \gamma_k^{(i)} \xi, \xi >$$

Sada možemo iskoristiti uslov (iii) da bismo dobili aproksimacije za svaku pozitivno definitnu funkciju određenu ca $< (\gamma_l^{(j)})^{-1} \gamma \gamma_k^{(i)} \xi, \xi >$,te analizom $\eta \in H_{\infty \cdot \lambda_\Gamma}$ tako da za sve $\gamma \in F, 1 \leq i \leq n$ važi:

$$\sum_{k=1}^{n_i} \sum_{l=1}^{n_j} |\alpha_k^{(i)} \overline{\alpha_l^{(j)}}| \cdot | < (\gamma_l^{(j)})^{-1} \gamma \gamma_k^{(i)} \xi, \xi > - <, (\gamma_l^{(j)})^{-1} \gamma \gamma_k^{(i)} \eta, \eta > | < \varepsilon$$

Uzmemo li da je:$\eta_i = \sum_{k=1}^{n_i} \alpha_k^{(i)} (\gamma_k^{(i)} \eta) \in H_{\infty \cdot \lambda_\Gamma}$ dobijamo aproksimaciju za (iv) jer je:

$$| < \gamma \xi_i, \xi_j > - < \gamma \eta_i, \eta_j > |$$
$$\leq 2\varepsilon(\varepsilon + M) +$$
$$| < \gamma \cdot \sum_{k=1}^{n_i} \alpha_k^{(i)} (\gamma_k^{(i)} \xi), \sum_{k=1}^{n_j} \alpha_k^{(j)} (\gamma_k^{(j)} \xi) > - < \gamma \cdot \sum_{k=1}^{n_i} \alpha_k^{(i)} (\gamma_k^{(i)} \eta), \sum_{k=1}^{n_j} \alpha_k^{(j)} (\gamma_k^{(j)} \eta) > |$$
$$= 2\varepsilon(\varepsilon + M) +$$
$$| \sum_{k=1}^{n_i} \sum_{l=1}^{n_j} \alpha_k^{(i)} \overline{\alpha_l^{(i)}} < (\gamma_l^j)^{-1} \gamma \gamma_k^{(i)} \xi, \xi > - \sum_{k=1}^{n_i} \sum_{l=1}^{n_j} \alpha_k^{(i)} \overline{\alpha_l^{(i)}} < (\gamma_l^j)^{-1} \gamma \gamma_k^{(i)} \eta, \eta > |$$
$$< 2\varepsilon(\varepsilon + M) + \varepsilon$$

Slučaj2:U slučaju kada π nema cikličnih vektora tada možemo naći predstavljanje:

$$H_\pi = \oplus_k H_{\pi_k}, \pi = \oplus_k \pi_k$$

gde svaki π_k ima ciklični vektor.Te ukoliko imamo $\xi_1, \ldots, \xi_n \in H_\pi$, možemo imati zapis:

$$\xi_i = \oplus_k \xi_k^{(k)}, \xi_i^{(k)} \in H_{\pi_k}$$

tako da je:

$$< \gamma\xi_k, \xi_j >= \sum_k < \gamma\xi_i^{(k)}, \gamma_j^{(k)} >,$$

jer za različite $l \neq k$ važi $< \xi_i^{(k)}, \xi_i^{(l)} >= 0$.Zbog konvergentnosti redova za $\varepsilon > 0, F \subseteq \Gamma$ konačno možemo naći dovoljno veliko N tako da je:

$$| < \gamma \cdot \xi_i, \xi_j > - \sum_{k=0}^{N} < \gamma \cdot \xi_i^{(k)}, \xi_j^{(k)} > | < \varepsilon, \forall \gamma \in F.$$

Kako su $\xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)} \in H_{\pi_k}$,tada po slučaju 1 možemo naći $\eta_1^{(k)}, \ldots, \eta_n^{(k)} \in H_{\infty \cdot \lambda_\Gamma}$ takve da je:

$$| < \gamma \cdot \xi_i^{(k)}, \xi_j^{(k)} > - < \gamma \cdot \eta_i^{(k)}, \eta_j^{(k)} > | < \frac{\varepsilon}{N+1}$$

za sve $\gamma \in F, 0 \leq k \leq N$.Tako uzimajući:

$$\eta_i = \eta_i^{(0)} \oplus \eta_i^{(1)} \oplus \ldots \oplus \eta_i^{(N)}$$

gde je $\eta_i \in H_{(N+1)\cdot(\infty \cdot \lambda_\Gamma)} \cong H_{\infty \cdot \lambda_\Gamma}$ imamo da važi:

$$< \gamma \cdot \eta_i, \eta_j >= \sum_{k=0}^{N} < \gamma \cdot \eta_i^{(k)}, \eta_j^{(k)} >$$

pa je za svaki $\gamma \in F$:

$$| < \gamma \cdot \xi_i, \xi_j > - < \gamma \cdot \xi_i, \xi_j > | \leq$$

$$| < \gamma \cdot \xi_i, \xi_j > - \sum_{k=0}^{N} < \gamma \xi_i^{(k)}, \xi_j^{(k)} > | + | \sum_{k=0}^{N} < \gamma \xi_i^{(k)}, \xi_j(k) - \sum_{k=0}^{N} < \gamma \eta_i^{(k)}, \eta_j^{(k)} > |$$

$$< \varepsilon + (N+1)\frac{\varepsilon}{N+1} = 2\varepsilon$$

(iv)$\Rightarrow$(v) Ukoliko su $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ortonomirani vektori u $H_\pi, \varepsilon > 0, F \subseteq \Gamma$ konačan podskup,tada po uslovu (iv) možemo naći $\eta_1', \ldots, \eta_n'$ linearno nezavisni,a ovo dalje možemo popraviti pomoću Gram-Shmidtovog procesa,ukoliko je δ dovoljno malo,do ortonomiranog sistema $\eta_1, \ldots, \eta_n$ tako da:

$$\| \eta_i' - \eta_i \| < \varepsilon; i = 1, \ldots, n$$

A onda je za bilo koje $\gamma \in \Gamma, 1 \leq j, i \leq n$ ispunjeno:

$$| < \gamma \cdot \eta_i', \eta_j' > - < \gamma \cdot \eta_i, \eta_j > | < \varepsilon(1+\varepsilon) + \varepsilon$$

$\square$

Ukoliko prebrojiva grupa Γ deluje Borelovski na standardnom Borelovom prostoru X sa invarijantnom merom μ ,tada ovo dejstvo daje unitarnu reprezentaciju π^X na $H = L^2(X, \mu) \equiv L^2(X)$ dato sa:

$$(\pi(\gamma)f)(x) = (\gamma \cdot f)(x) = f(\gamma^{-1}x).$$

Konstantna funkcija 1 na X određuje 1-dimenzionalni invarijantni potprostor $\mathbb{C}1$ od π^X,pri čemu ima ortogonalni komplement:

$$(\mathbb{C}1)^{\perp} = L_0^2(X) = \{f \in L^2(X) : \int f d\mu = 0\}$$

koji je takođe invarijantan pod π^X.Sa π_0^X označavmo restrikciju od π^X na $L_0^2(X)$.

Definicija 7.4 *Dejstvo grupe Γ na standardnom Borelovom prostoru X sa invarijantnom verovatnosnom merom nazivamo **tempiranim** ukoliko je:*

$$\pi_0^X \prec \lambda_\Gamma$$

Za svaku ireducibilnu reprezentaciju π grupe G ,sa $\hat{\pi}$ označavamo njenu klasu izomorfizma,a **dual grupe** G je:

$$\hat{G} = \{\hat{\pi} : \pi - \text{ireduciblna unitarna reprezentacija na} G\}.$$

Jedno od ključnih mesta u teoriji reprezentacije zauzima sledeća teorema Peter-Weyla.

Teorema 7.2 *Ako je G kompaktna poljska grupa,tada važi:*

(i) Svaka ireducibilna unitarna reprezentacija od G je konačno dimenziona

(ii) $\bar{G}$ je prebrojiva

(iii) Svaka unitarna reprezentacija od G je direktna suma ireducibilnih reprezentacija.

Te ukoliko je π neka određena reprezentacija klase $\hat{\pi} \in \hat{G}$,tada njene matrične funkcije određuju jedan konačan dimenzioni potprostor unutar $L^2(G)$,G je grupa sa Haarovom merom,koji označavamo sa ε_π,a ne zavisi od određene reprezentacije iz fiksne klase.

Teorema 7.3 *Za kompaktnu poljsku grupu važi:*

(i) $L^2(G) = \oplus_{\hat{\pi}\in\hat{G}}\varepsilon_{\hat{\pi}}$

(ii) $\{\sqrt{d_\pi}\pi_{ij}\}_{1\leq i\leq j}$ *je ortonomirana baza za* $\varepsilon_{\hat{\pi}}$ *,i uz to je* $dim(\varepsilon_\pi) = d_\pi^2$, *gde je* $d_\pi = dim(\pi)$*,a* π_{ij} *su odgovarajuće matrične funkcije određene prema bazi prostora.*

(iii) *Za* $1 \leq i \leq d_\pi$*,podprostor* $\varepsilon_{\hat{\pi},i}$ *od* ε_π *razapet sa i-tom vrstom od matrice* $(\sqrt{d_\pi})\pi_{ij}$ *je invarijantan za desno regularnu reprezentaciju,a podreprezentacija od* ρ_G *određena sa* $\varepsilon_{\hat{\pi},i}$ *je izomorfna sa* π.

Neke od pojmova teorije ergodičnosti,kao što su ergodičnost i mešanje, možemo interpretirati u jeziku reprezentacija:

(i) Dejstvo je **ergodično** ukoliko unitarna reprezentacija π_0^X od Γ na $L_0^2(X)$ nema ne nula invarijantne vektore,tj. za $\xi \in L_0^2(X)$ važi:

$$(\forall\gamma \in \Gamma)(\gamma\xi = \xi) \Leftrightarrow \xi = 0$$

odnosno

$$1_\Gamma\pi_0^X.$$

(ii) Dejstvo je **srednje-meko** ukoliko za svaki $\xi \in L_0^2(x, \xi \neq 0)$,važi:

$$\overline{\lim_{\gamma\to\infty}} \mid < \gamma\xi, \xi > \mid <\| \xi \|^2$$

(iii) Dejstvo je **slabo mešanje** ukoliko π_0^X ne sadrži nenula konačno dimenzionu reprezentaciju,a to se može ekvivalentno reći da za bilo koje $\xi_1, \ldots, \xi_n \in L_0^2(X), \varepsilon > 0$,postoji $\gamma \in \Gamma$,tako da je:

$$\mid < \gamma\xi_i, \xi_j > \mid < \varepsilon, 1 \leq i \leq n$$

(iv) Dejstvo je **jako mešanje** ukoliko je π_0^X jedna c_0-reprezentacija,tj. matrični koeficijenti teže nuli:

$$< \gamma\xi, \eta > \to 0, \text{kad}\gamma \to \infty, \forall\xi, \eta \in L_0^2(X)$$

Jednu moguću vezu među ovim pojmovima daje i sledeća teorema.

Teorema 7.4 Γ *je beskonačna prebrojiva grupa koja deluje automorfizmima na kompaktnoj poljskoj grupi* G *(te ostavlja Haarovu meru invarijantnu) i ona zadovoljava:*

(i) $\Gamma \times G \to G$*-dejstvo je ergodično.*

(ii) *Dejstvo od* Γ *na* G *je slabo mešanje.*

(iii) *Ako je* 1_G *trivijalno 1-dimenzionalna reprezentacija od* G*,tada za svaki* $\hat{\pi} \neq \hat{1}_G, \hat{\pi} \in \hat{G}, \Gamma/\Gamma_{\hat{\pi}}$ *je beskonačna,gde je* $\Gamma_{\hat{\pi}}$ *stabilizator od* $\Gamma-$*dejstva na* $\hat{G}$.

(iv) *Za neki* $g \in G, \Gamma \cdot g$ *je gusto u* G.

(v) *Za* μ *- skoro svako* $g \in G, \Gamma \cdot g$ *je gust u* G.

Glava 8

Kechrisova verzija

Teorema koja je u odeljku 6 dokazana,ovde će biti dokazano na drugačiji način,i nešto malo opštije koristeći unitarne reprezentacije grupa.

Teorema 8.1 *Neka je Γ prebrojiva grupa takva da je $F_2 \leq \Gamma$,koja deluje Borelovski na standardnom Borelovom prostoru X sa ne-atomskom merom μ.Ukoliko je ovo dejstvo tempirano tada ne postoji $\aleph_0 - 1$ Borelov homomorfizam sa E_Γ^X u neki E_Δ^Y gde je E_Δ^Y modularna relacija ekvivalencije nastala dejstvom prebrojive grupe Δ na standardnom Borelovom prostoru Y.*

Dokaz: Najpre ukoliko teorema važi za $\Gamma_0 \leq \Gamma$ onda važi i za Γ,pa ćemo ovde pokazati da važi u slučaju $\Gamma = F_2$,a da bismo to izveli najpre treba da pokažemo da je dejstvo od F_2 tempirano.Pa ukoliko je $\pi_0^X|F_2$ restrikcija reprezentacije π_0^X na F_2 tada je $\pi_0^X \prec \lambda_\Gamma|F_2$,te je dovoljno potvrditi $\lambda_\Gamma|F_2 \leq \infty \cdot \lambda_{F_2}$,jer $\infty \cdot \lambda_{F_2}$.U tom cilju uočimo ortonomiranu bazu $\{e_\delta\}_{\delta\in\Gamma}$ od $l^2(\Gamma)$ datu sa:

$$e_\delta(\gamma) = \begin{cases} 1 & ,\delta = \gamma \\ 0 & ,\delta \neq \gamma \end{cases}$$

Onda,ako su $C_1(= F_2), C_2, \ldots$ desni koseti od F_2 u Γ,a $H_i =< e_\delta : \delta \in C_i >$,imamo da je H_i F_2-invarijantan,$H = \oplus_i H_i$,a reprezentacija od F_2 na H_i je izomorfna sa λ_{F_2}.

Ovim je postignuto da se nadalje može uzimati samo $\Gamma = F_2$.

Kao i u Hjortovom dokazu koristimo skup svih konačnih potskupova od F_2 i skup svih nepraznih konačnih podskupova od F_2 u oznaci $\mathcal{F}(F_2)$ i skup svih nepraznih konačnih podskupova od F_2 u oznaci $\mathcal{F}_0(F_2)$,a na njima F_2 deluje levim translatornim dejstvom $\gamma \cdot S = \gamma S$,te deluje unitarno na $l^2(\mathcal{F}(F_2))$ sa :

$$\gamma \cdot p(S) = p(\gamma^{-1}S)$$

Ortonomirana baza za $l^2(\mathcal{F}(F_2))$ se može zadati sa $(e_S)_{S\in\mathcal{F}(F_2)}$ sa:

$$e_S(T) = \begin{cases} 1 & ,S = T \\ 0 & ,S \neq T \end{cases}$$

pri čemu je $\gamma \cdot e_S = e_{\gamma \cdot S}$,a 1-dimenzionalni podprostor $< e_\emptyset >$ određen sa $e_\emptyset$ je F_2-invarijantan sa ortogonalnim komplementom:

$$< e_\emptyset >^\perp =< e_S : S \neq \emptyset >$$

Slično možemo uzeti $f_S \in l^2(\mathcal{F}_0(F_2))$ tako da je $\{f_S\}_{S\in\mathcal{F}_0(F_2)}$ jedna F_2-invarijantna ortonomirana baza za $l^2(\mathcal{F}_0(F_2))$,a preslikavanje $e_S \leftrightarrow f_S$ je izomorfizam od F_2-dejstva na $< e_\emptyset >^\perp$ i dejstva na $l^2(\mathcal{F}_0(F_2))$.

Dejstvo od F_2 na $\mathcal{F}_\prime(F_2)$ ima beskonačno mnogo beskonačnih orbita $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots$ tako da imamo predstavljanje:

$$l^2(\mathcal{F}_0(F_2)) = \oplus_n < f_S : S \in \mathcal{O}_n >$$

pri čemu F_2 deluje na $\{f_S : S \in \mathcal{O}_n\}$ tranzitivno i slobodno odakle sledi da je reprezentacija od F_2 na $< f_S : S \in \mathcal{O}_n >$ izomorfna regularnoj reprezentaciji od F_2.Te ako je $\mu^0_{F_2}$ reprezentacija od F_2 na $l^2(\mathcal{F}_0(F_2))$ imaćemo:

$$\mu^0_{F_2} \cong \infty \cdot \lambda_{F_2}$$

dok je za slučaj μ_{F_2},reprezentacija od F_2 na $l^2(\mathcal{F}(F_2))$:

$$l^2(\mathcal{F}(F_2)) =< e_\emptyset > \oplus \bigoplus_n < e_S : S \in \mathcal{O}_n >$$

$$\mu_{F_2} \cong 1_{F_2} \oplus \infty \cdot \lambda_{F_2}$$

Na Banahovim prostorima $l^1(F_2), l^1(\mathcal{F}(F_2)).l^1\mathcal{F}_0(F_2)$ posmatramo dejstvo od F_2 dato sa:

$$\gamma \cdot f(u) = f(\gamma^{-1}u)$$

Tvrdnja1: Postoji preslikavanje $\Theta : l^2(\mathcal{F}_0(F_2)) \to l^1 F_2$ sa s;edećim svojstvima:

(i)

$$\| \Theta(f) \|_1 = \| f \|_2, \forall f \in l^2(\mathcal{F}_0(F_2))$$

(ii)

$$\| \Theta(f_1) - \Theta(f_2) \|_1 \leq 3 \| f_1 - f_2 \|_2, \forall f_1, f_2 \in l^2(\mathcal{F}_0(F_2))$$

(iii)

$$\Theta(f) \geq 0, \forall f \in l^2(\mathcal{F}_0(F_2))$$

(iv) Θ je F_2-preslikavanje,$\Theta(\gamma f) = \gamma \cdot \Theta(f), \forall f \in l^2(\mathcal{F}(F_2)), \gamma \in F_2$.

Dokaz tvrdnje: Dokaz ovog tvrđenja ide u mnogome paralelno sa Hjortovim dokazom,pa tako najpre uočavamo preslikavanje:

$$f \in l^2(\mathcal{F}_0(F_2)) \to f^* \in l^1(\mathcal{F}_0(F_2))$$

$$f^*(S) = \begin{cases} \frac{|f(S)|}{\|f\|_2} & ,f \neq 0 \\ 0 & ,f = 0 \end{cases}$$

tako da važi:$\| f^* \|_1 = \| f \|_2, f^* \geq 0$,i ako je $\widetilde{f}(S) = |f(S)|^2$ za $f \in l^2(\mathcal{F}_0(F_2))$ imamo da za $f_1, f_2 \in l^2(\mathcal{F}_0(F_2))$ koje su realne važi:

$$\| \widetilde{f_1} - \widetilde{f_2} \|_1 \geq (\| f_1 \|_2 + \| f_2 \|_2) \cdot \| f_1 - f_2 \|_2$$

A željeno preslikavanje biće sastavljeno i od sledećeg niza preslikavanja:

$$\widetilde{\Theta} : l^1(\mathcal{F}_0(F_2)) \to l^1(F_2)$$

$$\widetilde{\Theta}(f)(\gamma) = \sum_{\gamma \in S \in \mathcal{F}_0(F_2)} \frac{f(S)}{|S|}.$$

Ovo je očigledno preslikavanje koje ispunjava uslove:

$$\| \widetilde{\Theta}(f) \|_1 \leq \| f \|_1$$

$$f \geq 0 \Rightarrow (\| \widetilde{\Theta}(f) \|_1 = \| f \|_1, \widetilde{\Theta}(f) \geq 0)$$

Pa uzimajući za $f \in l^2(\mathcal{F}_0(F_2))$ da je:

$$\Theta(f) = \widetilde{\Theta}(f^*)$$

i pošto je $f^* \geq 0$ imamo:

$$\| \Theta(f) \|_1 = \| \Theta(f^*) \|_1 = \| f^* \|_1 = \| f \|_2$$

$$\Theta(f) \geq 0$$

$$\Theta \text{je} F_2 - \text{preslikavanje}$$

a da bi dokazali (ii) koristimo sledeći postupak:

$$\| \Theta(f_1) - \Theta(f_2) \|_1 = \| \widetilde{\Theta}(f_1^*) - \widetilde{\Theta}(f_2^*) \|_2$$

$$= \| \widetilde{\Theta}(f_1^* - f_2^*) \|_1$$

$$\leq \| f_1^* - f_2^* \|_1 \leq 3 \cdot \| f_1 - f_2 \|_2$$

Tako da je preostalo pokazati da za $f_1, f_2 \in l^2(\mathcal{F}_0(F_2))$ važi:

$$\| f_1^* - f_2^* \|_1 \leq 3 \cdot \| f_1 - f_2 \|_2$$

Da bismo ovako nešto uradili razmatramo dva slučaja,kada su f_1 i f_2 realni i opšti slučaj.

Slučaj 1: f_1 i f_2 su realne funkcije pri čemju $f_i \neq 0, i = 1, 2$,jer u tom slučaju nejednakost odmah važi.Najpre ukoliko su f_1 i f_2 kolinearene imaćemo $r \in \mathbb{R}, r \neq 0, f_1 = r \cdot f_2$,što povlači:

$$(rf_2)^* = \frac{(rf_2)^2}{\| rf_2 \|_2} = \frac{r^2 f_2^2}{|r| \cdot \| f_2 \|_2} = |r| \cdot f_2^*,$$

$$\| f_1^* - f_2^* \|_1 = \| |r| f_2^* - f_2^* \|_1$$

$$= ||r| - 1| \, \| f_2^* \|_1 \leq |r - 1| \, \| f_2 \|_2 = \| f_1 - f_2 \|_2 .$$

Za nekolinearne f_1 i f_2 imamo:

$$\| f_1^* - f_2^* \|_1 = \sum_{S \in \mathcal{F}_0(F_2)} |f_1^*(S) - f_2^*(S)| = \sum_{S \in \mathcal{F}_0(F_2)} |\frac{f_1(S)^2}{\| f_1 \|_2} - \frac{f_2(S)^2}{\| f_2 \|_2}|.$$

Skraćeno zapisujemo $a_i = \| f_i \|_2$ i ne umanjujući opštost, možemo podrazumevati da je $a_1 \leq a_2$ i:

$$\| f_1^* - f_2^* \|_1 = \sum_{S \in \mathcal{F}_0(F_2)} |\frac{f_1(S)^2}{a_1} - \frac{f_2(S)^2}{a_2}|$$

$$= \frac{1}{a_1 a_2} \sum_{S \in \mathcal{F}_0(F_2)} |(\sqrt{a_2} f_1(S))^2 - (\sqrt{a_1} f_2(S))^2|$$

$$= \frac{1}{a_1 a_2} \| (\widetilde{\sqrt{a_2} f_1}) - (\widetilde{\sqrt{a_1} f_2}) \|_1,$$

pa po već urađenoj nejednakosti za $\| \widetilde{f_1} - \widetilde{f_2} \|_1$ imamo dalje:

$$\| f_1^* - f_2^* \| \leq \frac{1}{a_1 a_2} (\sqrt{a_2} a_1 + \sqrt{a_1} a_2) \cdot \| \sqrt{a_2} f_1 - \sqrt{a_1} f_2 \|_2$$

$$= \| (\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}) (\frac{f_1}{\sqrt{a_1}} - \frac{f_2}{\sqrt{a_2}}) \|_2,$$

$$a_2 \leq \| f_1 - f_2 \|_2 + \| \sqrt{\frac{a_1}{f_1}} - \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} f_2 \|_2$$

$$\leq \| f_1 - f_2 \|_2 + \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \, \| \frac{a_2}{a_1} f_1 - f_2 \|_2$$

$$\leq \| f_1 - f_2 \|_2 + \| \frac{a_2}{a_1} f_1 - f_2 \|_2, jera_1 \leq a_2$$

$$\leq \| f_1 - f_2 \|_2 + 2 \cdot \| f_1 - f_2 \|_2 = 3 \, \| f_1 - f_2 \|_2 .$$

Prethodna nejednakost koristi da ja $\| \frac{a_2}{a_1} f_1 - f_2 \|_2 \leq 2 \, \| f_1 - f_2 \|_2$ što sledi iz toga da ako je ψ ugao između f_1 i f_2,a važi $\| \frac{a_2}{a_1} f_1 \|_2 = a_2 = \| f_2 \|_2$, biće:

- u slučaju $0 < \psi \leq \frac{\pi}{2}$sledi$\rho = \frac{\pi-\psi}{2}, \frac{\pi}{4} \leq \rho < \frac{\pi}{2}$ odnosno:

$$\| f_1 - f_2 \|_2 \geq \| \frac{a_2}{a_2} f_1 - f_2 \|_2 \sin\rho \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \| \frac{a_2}{a_1} f_1 - f_2 \|_2$$

$$\geq \frac{1}{2} \| \frac{a_2}{a_1} f_1 - f_2 \|_2$$

- Za $\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$ biće:

$$\| f_2 - \frac{a_2}{a_1} f_1 \|_2 \leq 2 \cdot \| f_2 \|_2 \leq \| f_1 - f_2 \|_2 .$$

Slučaj 2: Ukoliko su $f_1, f_2 \in l^2(\mathcal{F}_0(F_2))$ kompleksne funkcije, koristićemo oznaku $|f|(S) = |f(S)|$ tada će biti po prethodnom slučaju:

$$\| (|f_1|)^* - (|f_2|)^* \|_1 \leq 3 \cdot \| |f_1| - |f_2| \|_2$$

ali pošto je $(|f_1|)^* = f^*$ važiće:

$$\| f_1^* - f_2^* \| \leq 3 \cdot \| |f_1| - |f_2| \|_2,$$

te bi bilo dovoljno pokazati da važi:

$$\| |f_1| - |f_2| \|_2 \leq \| f_1 - f_2 \|_2 .$$

A ovo dobijamo koristeći dobro znanu nejednakost kompleksnih brojeva $||a| - |b|| \leq |a - b|$:

$$\| |f_1| - |f_2| \|_2^2 = \sum_{S \in \mathcal{F}_0(F_2)} ||f_1|(S) - |f_2|(S)|^2$$

$$= \sum_{S \in \mathcal{F}_0(F_2)} ||f_1(S)| - |f_2(S)||^2$$

$$\leq \sum_{S \in \mathcal{F}_0(F_2)} |f_1(S) - f_2(S)|^2 = \| f_1 - f_2 \|_2^2 .$$

□

Dokaz teoreme nadalje koristi činjenicu da možemo pretpostaviti da je uočeni homomorfizam $\phi : X \to Y$ zapravo 1-1 ,a ne $\aleph - 1$,isto kao u Hjortovom dokazu.Takođe na dalje fiksiramo Borelovo preslikavanje:

$$\alpha : F_2 \times X \to \Delta$$

$$\phi(\gamma \cdot x) = \alpha(\gamma, x) \cdot \phi(x), \forall x \in X, \gamma \in F_2$$

i neka je $\mathcal{P}_0 \geq \mathcal{P}_1 \geq \ldots$ opadajući niz particija koji potvrđuje modularnost od Δ na Y.Slično kao u Hjortovom dokazu uzimamo $\hat{A} = \phi^{-1}(A)$.

U daljem koristimo naredna tri tvrđenja,koja su već od ranije poznata,pa neću predstavljati njihove dokaze.

Tvrdnja 2: Za bilo koji konačan,simetričan $F \subset F_2$ koji sadrži 1,i bilo koje $\varepsilon > 0$,postoji Borelov skup $M \subseteq \hat{A}_1 \cup \ldots \cup \hat{A}_n, \frac{1}{2} > \mu(\hat{A}_i) > 0, i = 1, \ldots, n$,i

$$\forall \gamma \in F(x \mapsto \alpha(\gamma, x)\text{je konstantna na svakom M} \cap \hat{A}_i, i = 1, \ldots, n)$$

Koristeći ovo tvrđenje možemo uzeti loptu F oko jedinice radijusa 3 u Caylijevom grafu,zatim $\delta < \frac{1}{2}$ dovoljno malo,recimo $\delta = 10^{-6}$,pa ε takođe dovoljno malo da važi $|F| \cdot \varepsilon \cdot (2 + \frac{1}{\delta}) < \frac{1}{2}$.Pa potom primenjujemo prethodno tvrđenje da bi dobili $k, A_1, \ldots, A_n, M$.

Tvrdnja 3: Ako je $\gamma \in F, 1 \leq i \leq j \leq n, \gamma \cdot (M \cap \hat{A}_i) \cap (M \cap \hat{A}_j) \neq \emptyset$ tada važi:

$$\gamma \cdot (M \cap \hat{A}_i) \subseteq \hat{A}_j,$$
$$\gamma^{-1}(M \cap \hat{A}_j) \subseteq \hat{A}_i.$$

Skup $\hat{A}_i, 1 \leq i \leq n$ nazivamo **dobrim** ukoliko je $\frac{\mu(\hat{A}_i \setminus M)}{\mu(\hat{A}_i)} < \delta$, a inače ga nazivamo **lošim**.Tako da sad možemo izvršiti procenu:

$$\varepsilon > \mu(X \setminus M) \geq \sum_{\hat{A}_i - los} \mu(\hat{A}_i \setminus M) \geq \delta \sum_{\hat{A}_i - los} \mu(\hat{A}_i),$$

$$\frac{\varepsilon}{\delta} \geq \sum_{\hat{A}_i - los} \mu(\hat{A}_i).$$

Umesto skupa N_3 iz Hjortove teoreme ovde uvodimo skup N sa:

$$N = \{x \in X : \forall \gamma \in F(\gamma x \in M \wedge \gamma x \in \cup\{\hat{A}_i : \hat{A}_i \text{je dobar}\})\}$$

tako da dobijamo još jednu procenu:

$$\mu(X \setminus N) \leq |F| \cdot (2\varepsilon + \frac{\varepsilon}{\delta}) < \frac{1}{2}$$

tako da postoji barem jedan dobar element $\hat{A}_i$.Uzimajući u definiciji skupa N da je γ identitet dobijamo da je:

$$N \subseteq M \cap \{\hat{A}_i : \hat{A}_i \text{je dobar}\}$$

Tvrdnja 4: Ukoliko je $x \in N, x \in \hat{A}_i, \gamma \in F, \gamma \cdot x \in \hat{A}_j$ tada važe procene:

$$1-\delta \leq \frac{\mu(\hat{A}_i)}{\mu(\hat{A}_j)} \leq \frac{1}{1-\delta},$$

$$\mu(\gamma \cdot \hat{A}_i \triangle \hat{A}_j) \leq 3\delta \cdot \mu(\hat{A}_j).$$

U ovom trenutku posedujemo konačnu nepraznu kolekciju $\mathcal{G}$ dobrih podskupova koji su međusobno disjunktni,uz to su Borelovi,i važi da je $0 < \mu(C) < \frac{1}{2}$ za $C \in \mathcal{G}$.Pri tome imamo Borelov skup $N \subseteq \cup\mathcal{G}$ takav da je $\mu(N) > \frac{1}{2}$,i ako je $x \in N, x \in C \in \mathcal{G}, \gamma \in F$ biće i $\gamma \cdot x \in D \in \mathcal{G}$ i važiće:

$$(1-\delta) \leq \frac{\mu(C)}{\mu(D)} \leq \frac{1}{1-\delta},$$

$$\mu(\gamma \cdot C \triangle D) \leq 3 \cdot \delta \cdot \mu(D).$$

Međutim pošto je dejstvo od F_2 na X tempirano,$\pi_0^X \prec \lambda_{F_2}$, i pošto je $\mu_{F_2}^0 \cong \infty \cdot \lambda_{F_2}$,koristeći ekvivalentno predstavljanje tempiranosti iz glave o reprezentacijama,za svako $\varepsilon > 0$ i $\xi_1, \ldots, \xi_m \in L_0^2(X)$ postoje $\eta_1, \ldots, \eta_m \in l^2(\mathcal{F}_0(F_2))$ takvi da:

$$(*) \quad | < \gamma \cdot \xi_i, \xi_j > - < \gamma \cdot \eta_i, \eta_j > | < \varepsilon_1, \forall \gamma \in F,$$

uz to ako je $\varepsilon_1 < \| \xi_i \|_2, 1 \leq i \leq m$,tada je $\eta_1, \ldots, \eta_m \neq 0$,za slučaj $\gamma = 1$.Označavajući sa 1_C karakterističnu funkciju skupa C ,tada za kolekciju $\mathcal{G} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ dobijamo niz funkcija:

$$\xi_i = 1_{C_i} - \mu(C_i); 1 \leq i \leq m$$

pri čemu one zadovoljavaju:

$$\xi_i \in L_0^2(X), \| \xi_i \|_2^2 = \mu(C_i)(1-\mu(C_i)) > 0$$

Kombinujući sa uslovom $(*)$,uzimajući $\varepsilon_1 < \frac{1}{80^2}\mu(C_i)(1-\mu(C_i)) = \frac{1}{80^2} \| \xi_i \|_2^2$ $, 1 \leq i \leq m$ dobijamo $\eta_1, \ldots, \eta_m \in l^2(\mathcal{F}_0(F_2))$,takve da $\eta_i \neq 0, 1 \leq i \leq m$.

Tvrdnja 1 nam daje preslikavanje Θ,koje koristimo da bi dobili težine,naime za $x \in \cup\mathcal{G}$ biće:

$$\omega(x) = \Theta(\eta_i)$$

gde je C_i jedinstveni element od $\mathcal{G}$ takav da $x \in C_i$. Ovako dobijeno $\omega(x)$ je težina na F_2 ,i to takvo da ako je $x \in N, x \in C_i \in \mathcal{G}, \gamma \in F$ tada je $\gamma \cdot x \in C_j \in \mathcal{G}$ i još je:

$$\omega(\gamma \cdot x) = \Theta(\eta_j)$$

Za privođenje dokaza kraju potrebno je izvesti i poslednju tvrdnju:
Tvrdnja 5: Predpostavljajući da je δ izabrano dovoljno malo,imamo:

$$\| \gamma \cdot \omega(x) - \omega(\gamma \cdot x) \|_1 < \frac{1}{12} \| \omega(\gamma \cdot x) \|_1$$

za bilo koje $x \in N, \gamma \in F$.

Dokaz tvrdnje: Uzmimo da je $x \in N, x \in C_i \in \mathcal{G}, \gamma \in F, \gamma \cdot x \in C_j \in \mathcal{G}$,tako da će biti $\omega(x) = \Theta(\eta_i), \omega(\gamma \cdot x) = \Theta(\eta_j)$.Pa provera nejednakosti tvrdnje je zapravo provera da je:

$$\| \gamma \cdot \Theta(\eta_i) - \Theta(\eta_j) \|_1 < \frac{1}{12} \| \Theta(\eta_j) \|_1$$

A pošto važi:

$$\| \Theta(\eta_j) \|_1 = \| \eta_j \|_2$$

$$\| \Theta(\gamma \cdot \eta_i) - \Theta(\eta_j) \|_1 \leq 3 \cdot \| \gamma \cdot \eta_i - \eta_j \|_2$$

dovoljno je proveriti:

$$\| \gamma \cdot \eta_i - \eta_j \|_2^2 < \frac{1}{36^2} \| \eta_j \|_2^2$$

Kako unitarani operatori čuvaju normu,a $\eta-$ovi su izabrani prema pravilu $(*)$, a posebno da je γ neutaral imamo:

$$| \| \xi_i \|_2^2 - \| \eta_j \|_2^2 | < \varepsilon_1,$$

$$\| \xi_i \|_2^2 < 2 \cdot \| \eta_j \|_2^2,$$

a prema pravilima za računanje skalarnog proizvoda važi:

$$\| \gamma \cdot \eta_i - \eta_j \|_2^2 = \| \eta_i \|_2^2 + \| \eta_j \|_2^2 - 2Re < \gamma \cdot \eta_i, \eta_j >$$

$$\| \gamma \cdot \xi_i - \xi_j \|_2^2 = \| \xi_i \|_2^2 + \| \xi_j \|_2^2 - 2Re < \gamma \cdot \xi_i, \xi_j >$$

odakle dolazimo do procene:

$$| \| \gamma \cdot \eta_i - \eta_j \|_2^2 - \| \gamma \cdot \xi_i \xi_j \|_2^2 | \leq$$

$$| \| \eta_i \|_2^2 - \| \xi_i \|_2^2 | + | \| \xi_i \|_2^2 - \| \xi_j \|_2^2 | + 2| < \gamma\xi_i, \xi_j > - < \gamma\eta_j, \eta_j > |$$

$$< 4\varepsilon_1$$

a samim tim ,koristeći odabir za ε_1:

$$\| \gamma \cdot \eta_i - \eta_j \|_2^2 < 4\varepsilon_1 + \| \gamma\xi_i - \xi_j \|_2^2 < \frac{4}{80^2} \| \xi_j \|_2^2 + \| \gamma \cdot \xi_i - \xi_j \|_2^2$$

Tako da je dovoljno ustvrditi:

$$\| \gamma \cdot \xi_i - \xi_j \|_2^2 < f(\delta) \| \xi_j \|_2^2$$

Za neku fiksiranu funkciju $f : (0, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}^+$ takvu da $\lim_{a \to 0} f(a) = 0$.S tim u vezi:

$$\| \gamma\xi_i - \xi_j \|_2^2 = \mu(\gamma C_i \triangle C_j) + |\mu(C_i) - \mu(C_j)|^2$$
$$+2(\int (1_{\gamma \cdot C_i}) - 1_{C_j})(\mu(C_j) - \mu(C_i))$$
$$\leq 3 \cdot \delta\mu(C_j) + \mu(C_j)^2 |\frac{\mu(C_i)}{\mu(C_j)} - 1|^2 + 4\mu(C_j)|\frac{\mu(C_i)}{\mu(C_j)} - 1|$$

što sledi iz tvrdnje 4 i grube procene da je integral $| \int 1_{\gamma C_i} - 1_{C_j}| \leq 2$, i uz to je :

$$\| \xi_j \|_2^2 = \mu(C_j)(1 - \mu(C_j))$$

. Nakon skraćivanja sa $\mu(C_j)$ da bi tražena funkcija f trebala zadovoljavati:

$$3\delta + \mu(C_j)|\frac{\mu(C_i)}{\mu(C_j)} - 1|^2 + 4|\frac{\mu(C_i)}{\mu(C_j)} - 1| \leq f(\delta)(1 - \mu(C_j))$$

a kako je $\mu(C_j) < \frac{1}{2}$ dovoljno bi bilo:

$$3\delta + |\frac{\mu(C_i)}{\mu(C_j)} - 1|^2 + 4|\frac{\mu(C_i)}{\mu(C_j)} - 1| \leq \frac{1}{2} f(\delta)$$

Tvrdnja 4 daje da važi:

$$1 - \delta \leq \frac{\mu(C_i)}{\mu(C_j)} \leq \frac{1}{1 - \delta}$$

pa se može uzeti:

$$f(a) = 6a^2 + 2g(a)^2 + 8g(a)$$

gde je :

$$g(a) = max(a, \frac{a}{1-a}) = \frac{a}{1-a}$$

□

Da bi priveli dokaz kraju uočavamo za svako $g \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$ skup:

$$N_g = \{x \in N : \text{centar od } \omega(x) \text{je redukovana reč oblika } g\gamma\}$$

i još uzimamo:

$$N_1 = \{x \in N : 1 \text{je centar od} \omega(x)\}$$

Ovim je dobijena particija $N = N_a \sqcup N_{a^{-1}} \sqcup N_b \sqcup N_{b^{-1}} \sqcup N_1$,tako da za jedan skup recimo N_a,važi:

$$\mu(N_a) \geq \frac{1}{5}\mu(N)$$

Takođe postoji skup $K \subseteq F$ sačinjen od 27 elemenata dužine tačno 3 koji se ne završavaju sa a^{-1},a za $\gamma \in K$ uočavamo:

$$B_\gamma = \{x \in \cup\mathcal{G} : \text{slabi centar od}\omega(x)\text{je oblika } \gamma\gamma'\}$$

Istaknute tvrdnje ove teoreme ukazuju da ako je $x \in N_a, \gamma \in K$,tada $\omega(x)$ ima centar c_1 koji počinje sa a,te $\omega(\gamma \cdot x)$ ima slabi centar $\gamma \cdot c_1$,odnosno $\gamma c_1 \in B_\Gamma$ te važi:

$$\mu(B_\gamma) \geq \mu(N_a) \geq \frac{1}{5}\mu(N)$$

Pravila za računanje mere nam daju:

$$\mu(\bigcup_{\gamma \in K} B_\gamma) = \sum_{\gamma \in K} \mu(B_\gamma) - \sum_{\{\gamma_1,\gamma_2\} \in [K]^2} \mu(B_{\gamma_1} \cap B_{\gamma_2})$$

$$+ \sum_{\{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\} \in [K]^3} \mu(B_{\gamma_1} \cap B_{\gamma_2} \cap B_{\gamma_3}) + \dots$$

gde je $[K]^n = \{a \subseteq K : |a| = n\}$.

Znajući da su slabi centri određene težine linearno uređeni,ne može biti da za neko $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} \in [K]^3$ važi $B_{\gamma_1} \cap B_{\gamma_2} \cap B_{\gamma_3} \neq \emptyset$ otpada,tako da je za sve $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} \in [K]^3$ ispunjeno $B_{\gamma_1} \cap B_{\gamma_2} \cap B_{\gamma_3} = \emptyset$.Međutim posledica ovoga ide korak dalje,te ako je $\{\gamma_1, \gamma_2\} \neq \{\gamma_1', \gamma_2'\}$ važiće $(B_{\gamma_1} \cap B_{\gamma_2}) \cap (B_{\gamma_1'} \cap B_{\gamma_2'}) = \emptyset$.

Procena mere kolekcije skupova $\mathcal{G}$ daje:

$$\mu(\cup\mathcal{G}) \geq \sum_{\{\gamma_1,\gamma_2\} \in [K]^2} \mu(B_{\gamma_1} \cap B_{\gamma_2}) \geq |K| \cdot \frac{\mu(N)}{5} = \frac{27}{5} \cdot \mu(N)$$

a kako je utvrđeno $\mu(N) > \frac{1}{2}$ biće:

$$\mu(\cup\mathcal{G}) \geq \frac{27}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{27}{10}$$

a ovo je u kontradikciji sa tim da je mera prostora jednaka 1. □

Glava 9

Primeri antimodularnosti

Gledajući Kechrisovu teoremu vidimo da je potrebno utvrditi tempiranost dejstva prebrojive grupe,a za tako nešto se koristi neka od teorema reprezentacije koje ću ovde navesti bez dokaza.

Teorema 9.1 *Beskonačna prebrojiva grupa* Γ *deluje automorfizmima na kompaktnoj poljskoj grupi* G *i tada su sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) Dejstvo $\Gamma \times G \to G$ *je mešanje.*

(ii) Dejstvo od Γ *je srednje mešanje.*

(iii) Za bilo koje $\hat{\pi} \neq 1_G, \Gamma_{\hat{\pi}}$ *je konačno.*

(iv) Za svaku beskonačnu $\Gamma_0 \leq \Gamma$*,dejstvo* $\Gamma_0 \times G \to G$ *je ergodično..Šta više ukoliko je* Γ *grupa bez torzije, gornje je ekvivalentno sa*

(v) $\pi_0^G \cong n \cdot \lambda_\Gamma$*,za neko* $1 \leq n \leq \infty$*.*

Imajući u vidu da je Borelovo dejstvo prebrojive grupe Γ na standardnom Borelovom prostoru X sa invarijantnom merom μ, E_0-ergodično akko za svaku hiperkonačnu relaciju ekvivalencije E i Borelov homomorfizam ϕ : $E_\Gamma^X \to E$,postoji $\mu-$konula skup preslikan sa ϕ u jednu $E-$klasu izražavamo sledeću teoremu.

Teorema 9.2 *Beskonačna prebrojiva grupa* Γ *deluje automorfizmima na kompaktnoj poljskoj grupi* G *i tada je sledeće ekvivalentno:*

(i) dejstvo $\Gamma \times G \to G$ *je tempirano,*

(ii) za bilo koju $\hat{\pi} \neq \hat{1_G}, \Gamma_{\hat{\pi}}$*je pristupačna,*

(iii) za bilo koju nepristupačnu $\Gamma_0 \leq \Gamma, \Gamma_0-$dejstvo na G je ergodično,

(iv) za bilo koju nepristupačnu $\Gamma_0 \leq \Gamma, \Gamma_0$ dejstvo na G je E_0-ergodično.

Posebno ukoliko je dejstvo od Γ na G tempirano,to je i dejstvo od $\Gamma_0 \leq \Gamma$ na Γ,za svaku beskonačnu podgrupu$\Gamma_0 \leq \Gamma$

Posledica 9.1 *Beskonačna prebrojiva grupa Γ deluje automorfizmima na kompaktnoj Poljskoj grupi G,i tada je:*

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \quad gde:$$

(i) dejstvo je mešanje,

(ii) dejstvo je srednje mešanje,

(iii) dejstvo je tempirano,

(iv) dejstvo je slabo mešanje,

(v) dejstvo je ergodično.

Posebno ukoliko je dejstvo mešanje onda je ono antimodularno.

(A) $\Gamma-$beskonačna prebrojiva grupa.

$K-$abelova kompaktna poljska grupa sa Haarovom merom ν.

$G = K^{\Gamma}-$kompaktana poljska grupa sa tačka-po-tačka množenjem.

$\nu^{\Gamma}-$prizvod mera koja je i Harrova mera na G.

$\hat{K}^{<\Gamma} = \{\{\chi_\gamma\}_\gamma : \chi_\gamma \in \hat{K}, \chi_\gamma = 1$ osim za konačno mnogo γ - dualna grupa$\hat{G}$

$(\chi_\gamma)_\gamma = \chi : G \to \mathbb{T}-$ karakter na proizvodu je određen sa:

$$\{\chi_\gamma\}_\gamma(\{k_\gamma\}_\gamma) = \prod_\gamma \chi_\gamma(k_\gamma).$$

Dejstvo grupe Γ na K^Γ dato šiftovanjem $\delta \cdot \{k_\gamma\} = \{k_{\gamma^{-1}\delta}\}$ i ovo je jedan automorfizam na K^Γ,a njegovo odgovarajuće dejstvo na $\hat{G} = \hat{K}^{<\Gamma}$ je dato sa $\delta \cdot \{\chi_\Gamma\} = \{\chi_{\gamma^{-1}\delta}\}$.

Dalje ukoliko je $K \neq \{1\}$,biće $\hat{K} \neq \{1\}$,pa je i dejstvo od Γ na $\hat{G} \backslash \{1\} = \hat{K}^{<\Gamma} \backslash \{1\}$ sa konačnim stabilizatorima,što povlači da je dejstvo mešanje odnosno da je tempirano.Tako u slučaju dejstva grupe $\Gamma \geq F_2$ sa šiftom na $2^\Gamma = \mathbb{Z}_2^\Gamma$ sa uobičajenom produkt merom dobijamo antimodularno dejstvo.Slično antimodularna dejstva dobijamo za dejstvo na X^Γ gde je X bilo kojinejednočlan skup,kao i u slučaju dejstva grupe $\Gamma \geq F_2$ šiftom na $\mathbb{T}^\Gamma$ sa uobičajenom produkt merom.

(B) Za $n = 2, 3, \dots$ grupa $SL_n(\mathbb{Z})$ deluje matričnim množenjem na $\mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$ i to je jedno dejstvo automorfizmom.Dual od $\mathbb{T}^n$ je $\mathbb{Z}^n$ gde $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ identifikujemmo sa karakterom:

$$\phi(z_1, \dots, z_n) = z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}.$$

A indukovano dejstvo od $SL_n(\mathbb{Z})$ na $\mathbb{Z}^n$ je dato sa:

$$A \cdot (k_1, \dots, k_n) = (A^{-1})^t \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix},$$

tako da je struktura stabilizatora ovog dejstva ista kao i struktura stabilizatora običnog matričnog množenja na $\mathbb{Z}^n$.

Posebno u slučaju $n = 2$ dobijamo da su stabilizatori elementi iz $\mathbb{Z}^2 \backslash \{0\}$ beskonačne ciklične grupe,tako da dejstvo od $SL_2(\mathbb{Z})$ na $\mathbb{T}^2$ tempirano,što znači da je u pitanju antimodularno dejstvo.

(C) Jedan način da grupu F_2 utopimo u grupu $SL_2(\mathbb{Z})$ je takav da kopija ima konačan indeks u $SL_2(\mathbb{Z})$.Ovako smo dobili dejstvo od F_2 na $\mathbb{T}^2$ koje deluje na dualu $\mathbb{Z}^2$ tako da ima beskonačno pristupačne stabilizatore.Tako da je dejstvo F_2 na $\mathbb{T}^2$ tempirano,pa samim tim antimodularno.

Ukoliko F_2 utopimo u $SL_2(\mathbb{Z})$ tako da su sve matrice u kopiji od F_2 hiperboličke ,tj. imaju trag > 2 one neće imati fiksnih tačaka na $\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$.Tako da indukovano dejstvo na $\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ ima trivijalne stabilizatore,te je dejstvo mešanje,pa je relacija antimodularna.

(D) Dejstvo grupe $SL_n(\mathbb{Z})$ na $\mathbb{T}^n$ za $n \geq 2$ je antimodularno čak i ukoliko izvršimo restrikciju na invarijantni konula posdkup od $\mathbb{T}^n$.Razlog za to je postojanje kopije od F_2 unutar $SL_n(\mathbb{Z})$ tako da je dobijeno dejstvo tempirano.

(E) (A.Vallette,B.Bekka)Ako je G diskretna beskonačna podgrupa od $SL_2(\mathbb{R})$,njeno kanonsko dejstvo na $X = SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})$ je tempirano a samim tim i antimodularno.

(F) Γ-rezidualno konačna grupa

$\Gamma = \Gamma_0 \geq \Gamma_1 \geq \dots$ - opadajući niz normalnih podgrupa konačnog indeksa takvih da je $\cap_n \Gamma_n = \{1\}$

$$\pi_n : \Gamma/\Gamma_{n+1} \to \Gamma/\Gamma_n$$

$$\gamma\Gamma_{n+1} \mapsto \gamma\Gamma_n \text{kanonska projekcija}$$

$K-$inverzni limes od niza (Γ_n, π_n) zatvorenih podgrupa kompaktne grupe $\prod_n \Gamma/\Gamma_n$

$$K = \{(\gamma_n\Gamma_n) : \gamma_0\Gamma_0 \supseteq \gamma_1\Gamma_1 \supseteq \dots\}$$

Grupu Γ možemo utopiti u K putem preslikavanja

$$\phi : \gamma \mapsto (\gamma\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

tako da je $\phi(\Gamma)$ gusta podgrupa od K.Te ako je $H_n = \overline{\phi(\Gamma_m)}$,biće $[K : H_n] < \infty$ i $\cap_n H_n = \{1\}$ jer je:

$$H_n = \{(\Gamma_0, \dots, \Gamma_n, \gamma_{n+1}\Gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}\Gamma_{n+2}, \dots) : \Gamma_n \subseteq \gamma_{n+1}\Gamma_{n+1} \subseteq \gamma_{n+2}\Gamma_{n+2} \subseteq \dots\}$$

a ovo upućuje na to da je dejstvo Γ na K konačno modularno,po primeru iz glave o modularnim relacijama ekvivalencije.

Ovo posebno znači da se svaka rezidualno konačna prebrojiva grupa Γ može gusto utopiti u kompaktnu Poljsku grupu K,tako da je indukovano dejstvo modularno.

(G) Ako prebrojiva grupa Γ deluje na Borelov način na standardnom Borelovom prostoru X sa ne-atomskom invarijantnom merom μ ,i ukoliko je ovo dejstvo slabo mešanje onda ono nije modularno.Jer, ukoliko su $\{\mathcal{P}\}_n$ particije koje određuju modularnost tada možemo naći dovoljno veliko n i bar jedan $A \in \mathcal{P}_n$ sa merom $0 < \mu(A) < 1$.Tada je linearni omotač od $\{1_A - \mu(A)\cdot 1 : A \in \{\mathcal{P}_n\}\}$ nenula konačno dimenzionalni potprostor od $L^2_0(X)$ invarijantan za $\Gamma-$dejstvo,što je kontradikcija.

Literatura

[1] H.Becker,A.S.Kechris,The Descriptive Set Theory of Polish Group Action,Cambridge University Press,1996.

[2] B.Bekka,P.de la Harpe,A.Vallete,Background on unitary group representation,preprint,2002.

[3] J.P.Christensen,Topology and Borel Structure,North Holland,1974.

[4] R.Dougherty,S.Jackson,A.S.Kechris,The structure of hyperfinite Borel equivalence relations,Transaction of the American Mathematical Society,vol 34.,193-225,1994.

[5] R.Engelking,General Topology,PWN-Polish-Scientific Publishers,Warsaw,1979.

[6] E.Hewitt,K.A.Ross,Abstract Harmonic Analysis I,Springer-Verlag,1979.

[7] G.Hjort,Classification and Orbit Equivalence Relations,preprint,2002.

[8] G.Hjort,A.S.Kechris,A.Louveau,Countable Borel Equivalence Relation,J.Math.Logic,1-80,2002.

[9] G.Hjort,A Converse to Dye's theorem,preprint,2002.

[10] G.Hjort,A.S.Kechris,Recent Developments in the theory of Borel reducibility,preprint,2000.

[11] A.S.Kechris,Action of Polish Groups and Classification Problems,preprint

[12] A.S.Kechris,Classical Descriiptive Set Theory,Springer-Verlag,1995.

[13] A.S.Kechris,B.D.Miller,Topics in Orbit Equivalence Theory,to be published,2003.

[14] A.S.Kechris,Unirary Representation and Modular Action,preprint,2003.

[15] Y.N.Moschowakis,Descriptive Set Theory,North-Holland, Amsterdam,1980.

[16] K.Kunen,Set Theory,An Introduction to Independence Proofs,Elsevier Science publisher,Amsterdam,1980.

Indeks

Sadržaj