Ж. Мијајловић

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

СПЕЦИЈАЛИСТИЧКИ РАД

ТЕМА: ИСАК ЊУТН И ТЕОРЕМА О СИМЕТРИЧНИМ ПОЛИНОМИМА

КАНДИДАТ:
СЛАЂАНА ХИРШЛ,
ДИПЛОМИРАНИ МАТЕМАТИЧАР

ISAAC NEWTON

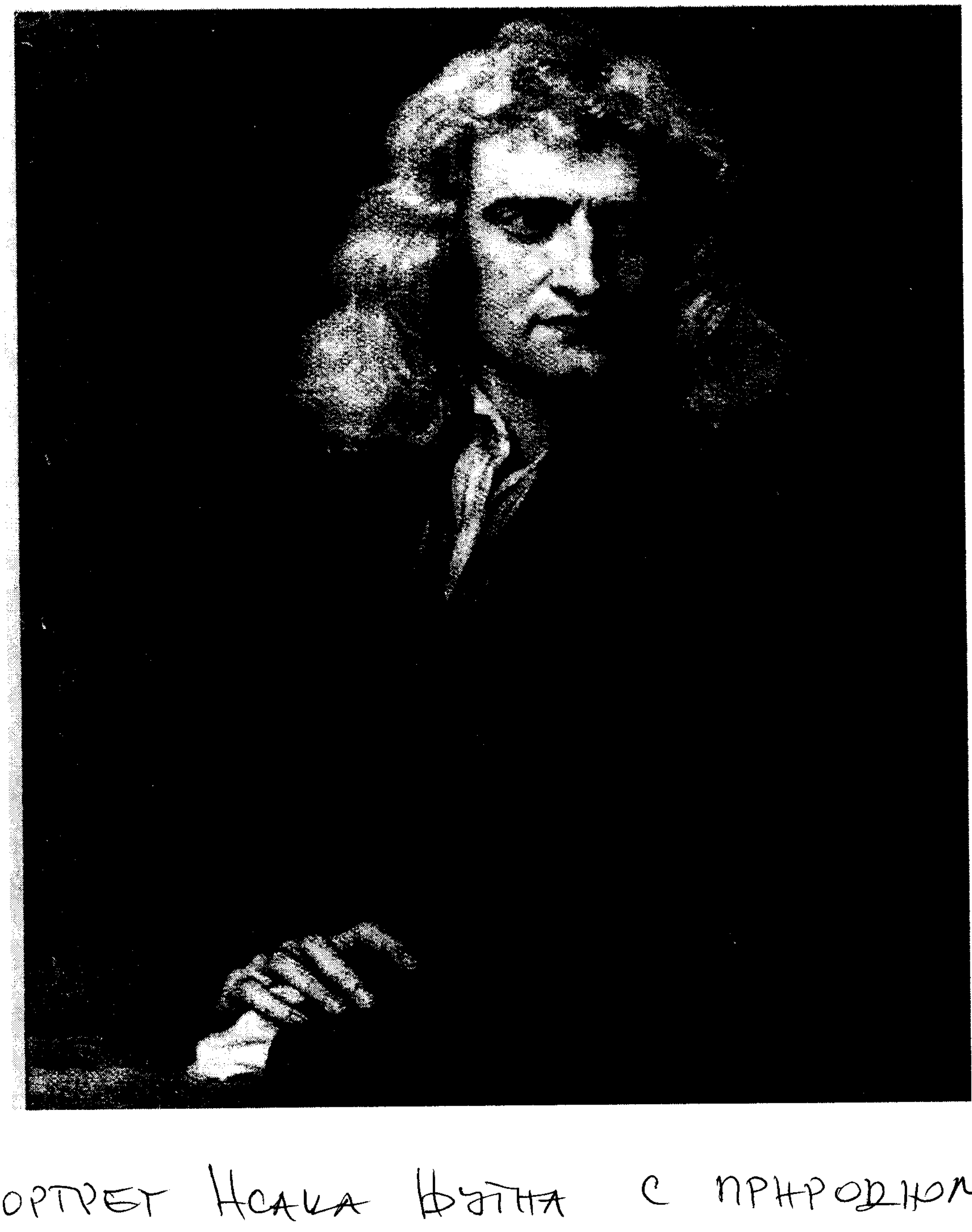
QUI GENUS HUMANUM INGENIO SUPERAVIT

Разумом он је надмашио људски род

Природе ред и закон њен у вечној тами се крио.
И рече Бог:
НЕК' ЊУТН СЕ ЈАВИ
и свуда светлост се разли

Александар Попа

Овако је изгледао…….



Портрет Исака Њутна с природном косом,

Како почети ову причу, а избећи оно класично: Родио се 25. децембра1642. год. у месту Вулсторп. . .

Велики људи имају две биографије, од којих она духовна тајанственом лепотом далеко превазилази телесну, која крајње незанимљиво показује како живи обичан човек. Човек, не геније. Њутнова духовна биографија представља фаустовски бег од људске приземне судбине. Оставио је толико много математици и физици, уредио земљу и свемир, како се говорило, али је у души увек тражио да постигне немогуће-свеобухватно. За њега математика и физика нису цели живот, признавао је и друге ствари, али само онолико колико су му омогућавале да се бави алхемијом. Алхемија јесте била страст његовог времена, као и теологија. Ипак,по својим достигнућима тешко је рећи шта је био више: физичар или математичар. Једно је сигурно: без Њутна би се наука развијала много другачије.

Лагранж је Њутна често називао највећим генијем који је икада постојао. Говорио је: "Он је најсрећнији од свих срећних, светски систем се може само једном поставити."

Шта му је у томе помогло ?...

Њутнова библиотека била је, према скромним средствима којима је располагао, мала, али одабрана. У њој се налазила дела Еуклида, Декарта, Виета, Шотна и Валиса, а затим предавања Њутновог учитеља Барова из оптике, па његова математичка испитивања и његови преводи Архимеда и Аполонија. Са знањима која је стекао још у Кембрицу, Њутн је добио добар преглед о тадашњем стању математике, механике и оптике.

У свим тим наукама прекорачен је у оно доба видокруг старих Грка. У математици се располагало бројевним знацима, симболичким ознакама за математичке операције и употребом слова за опште бројеве, развијеним математичким језиком, неочекиване способности. Аналитичка геометрија, основана од Декарта, створила је везу између аритметике и геометрије и омогућила да се геометријски проблеми решавају рачунским путем. Она је бескрајно проширила област геометрије. Јер док су Грци познавали само ограничен број геометријских крива, сада је свака произвољна једначина између координата х, у представљала по једну равну криву, чиме је њихов број постао неограничен. Отпочело се са испитивањем тих крива, изналазиле се њихове тангенте, превојне тачке, асимптоте, екстремне вредности, израчунавале се њихове дужине између задатих тачака и површине, захваћене њима. За решавање тих проблема пронађене су појединачне методе које су, међутим, за разне криве биле различите, па нису имале значај општег метода који би се могао приманити за сваку криву.

Млади Њутн није правио разлике између геометрије и науке о кретању, сматрајући геометрију као саставни део механике. То његово схватање датира од зиме 1665-66. Увидео је да се при решавању проблема тангенте ради углавном о изналажењу једног количника, кога сада називамо диференцијалним количником, а који има значај брзине којом се једна нестална величина мења. Полазећи од те претпоставке, Њутн је пронашао општи метод да одреди тај количник-он га назва флуксиом-и тиме реши све задатке у вези са тангентним проблемом.

При изналажењу дужина крива и површина, захваћеним њима, радило се како је Њутн увидео, о сличној ствари –из задатих брзина одредити ток промењљивог кретања. Он назва ту величину флуентом и нађе општи метод за њено одређивање. Тим рачунским методама, које је Њутн назвао рачун флуксија, положио је темеље данашњег инфинитезималног рачуна. Почеци тог рачуна падају већ у године 1665. и 1666. али су ти Њутнови радови објављени тек доцније. Када је Лајбниц у периоду између 1676. и 1694. дакле, много касније од Њутна, али независно од њега, пронашао инфинитезимални рачун и разрадио га уз помоћ својих талентованих ученика браће Бернули, дошло је између њега и Њутна до жучне расправе о приоритету тог проналаска. Она се онда завршила на штету Лајбница. Данас је то питање у толико пречишћено што се обојица морају сматрати за проналазаче диференцијалног рачуна. Оригиналност сваког од њих следује из разних полазних положаја са којих су се приближили том проблему, Њутн са области механике, а Лајбниц са поља геометрије. Око тога се Њутн и Лајбниц сами не би спорили, јер су дуго били у добрим односима, али је околина учинила своје. Они који ништа нису знали ни разумели од генијалних идеја двојице научника постарали су се да у овима ослободе њихове приземне, људске страсти и слабости.

Ипак, како је до тога дошло ?...

ЊУТНОВЕ МАТЕМАТИЧКЕ СТУДИЈЕ
СПОР СА ЛАЈБНИЦОМ

Дар за математику, исто као и за музику, често је урођен, испољава се рано и органски детерминише склоп интелигенције датог човека.Њутн је био такав урођени математичар." Да би научио математику," каже Фонтенел у свом комеморативном говору 1727. године, "Њутн није проучавао Еуклида, који му је изгледао сувише јасан, сувише прост, на шта не треба трошити време; он га је донекле знао пре него што га је читао; сам поглед на текст теорема моментално је стварао и доказ. Он је одмах прешао на књиге као што су Декартова "Геометрија" и Кеплерова "Оптика". На Њутна се може применити оно што је рекао Лукијан о Нилу чији извори нису били познати у старини: "Човеку није дато да види Нил нејаким и у рађању".У овој китњастој фрази 18. века има свакако преувеличавања, чак и нетачности. Баш је Еуклид, односно класична геометријска метода античких филозофа, био главно оруђе Њутнових математичких истраживања; Њутн је мислио геометријски и на маргинама примерка Декартове геометрије сачувана је Њутнова својеручна белешка: "Ово није геометрија". Пронађен је и Њутнов примерак Еуклида чије су маргине ишаране Њутновим белешкама и цртежима.

Правац Њутновој математичкој мисли дао је без сумње Баров, његов учитељ; он је био његов непосредни претходник у методи флуксија. "Лекције из геометрије" од И. Барова у чијој је редакцији Њутн учествовао, исто као и у "Лекцијама из оптике", у многоме подсећају на великог ученика. Интересантно је да су за Барова геометријске криве у суштини кинематичке, јер промене које оне изазивају су функције времена. Прва уводна лекција код Барова посвећена је појму времена." Време по Барову је постојаност ствари у њеном постојању" и представља "апсолутну величину". На питање да ли је време постојало пре ствари и да ли се о времену може говорити тамо где нема ничега Баров одговара потврдно, исто као и у погледу простора. "Време није актуелно постојање – каже он- него могућност сталног тајног постојања, оно,исто као и простор, означава способност егзистенције величине".У овим речима упознајемо прве нацрте дефиниција простора и времена из Њутнових "Принципија".

Познато је да је Мор објавио једно Њутново непознато писмо које је врло важно за схватање извора Њутновог математичког правца мисли: "Алузију на методу (флуксија) ја сам нашао у Фермаовом начину повлачења тангената; примењујући је на апстрактне једначине и обратно, ја сам је учинио општом. Грегори и Баров примењивали су ову методу повлачења тангената. Један мој чланак послужио је као повод др. Барову да ми покаже своју методу тангената пре него што ју је унео у своју десету лекцију из геометрије. Ја сам онај пријатељ кога он тамо помиње ".

Из писма се јасно види несумњив утицај Фермаових радова како на Барова тако и на Њутна. За обојицу су исто тако од великог значаја радови Џона Волиса, сабрани у књизи "Универзална аритметика или нова метода за проучавање квадратуре кривих линија".(1665.)

Сви Њутнови математички радови су се појавили у штампи тек после његовог пресељења у Лондон. Уз то, публиковање математичких радова код Њутна је готово у свим случајевима било изазвано углавном спором са Лајбницом. Ова околност веома је значајна. Отуда постаје јасно да је математички рад за Њутна имао углавном помоћни значај оруђа при истраживањима у физици.

Ипак у време стварања "Прицтабилно" Њутн се радо називао математичарем, уз разграничавање физике принципа од физике хипотеза. Физика принципа с формалне стране личи на геометрију и изграђена је чисто математички; физика хипотеза, бар у Њутново доба, (Декарт, Хук), била је веома далеко од математичке елеганције и само је Хук у својој “Расправи о светлости" учинио први покушај да математички обради хипотезу (таласна теорија). Математика у Њутновим рукама била је моћно средство за синтетичко испитивање природе. Карактеристично је да је чак и сама терминологија новог рачуна бесконачно малих, коју је увео Њутн, наиме: "флуксија", "флуента"(од речи текући), "момент", узета из механичких представа и утом погледу је знатно конкретнија од Лајбницових "диференцијала" и "интеграла". Исто је тако карактеристично да у својој "Универзалној аритметици" тумачећи текст, Њутн понекад даје чисто физичке задатке. Један од њих ушао је у све уџбенике физике, мада је његово порекло мало коме познато: "Камен пада у бунар; одредити дубину бунара према звуку који настаје кад камен падне на дно”.

Другостепена, практична улога математике у Њутновим рукама не умањује, наравно, значај његових великих открића у тој области. Нови проблеми физике тражили су и нову математику, нове методе.Анализа бесконачно малих била је неопходно потребна за решавање задатака нове механике.Физика и математика увек су помагале једна другој, и њихов је развој често недељив. При томе некад је физика престизала математику, а некад су у математици настајали читави велики раздели и главе "узалуд". Физика се њима користила у неким случајевима знатно после њиховог постанка. Тако се у 19. веку паралелно теорији електромагнетног поља развија векторска анализа, а нееуклидска геомерија добија стимулацију за даљи развој у вези теорије релативитета. Многи задаци оптике, теорије гасова итд. упорно захтевају развитак теорије интегралних једначина. За интерпретацију појава кванта примењена је математичка теорија група. Физичари постављају задатке, математичари дају методе за њихово решење. Њутн је радио у исто време и једно и друго.

Проналазак рачуна бесконачно малих неоспорно је најважнија чињеница у историји математике и људске мисли уопште. Класична метода Еуклидова, Архимедова, Аполонијева и других аналитичких геометара омогућава да се утврде квантитативни односи измеђуразних променљивих величина у извесним чак и веома компликованим случајевима. Али су начини за решавање готово у сваком задатку различити; требало је располагати нарочитим генијем једног Архимеда, Њутна, Поансоа с њиховим неисцрпним проналазачким духом, па да се геометријска метода спроводи систематски. Велико Декартово дело – аналитичка геометрија- постало је мост између алгебре и геометрије; постало је могуће да се један исти однос представи методом координата – аналитички (у виду формула)- или геометријски. Отворен је нови пут за решавање геометријских задатака – и обрнуто-геометријски задаци могу се свести на аналитичке. Ипак, остала је једна тешкоћа.

Крива фигура разликује се од слике ограничене правим линијама тиме што се правац граничне линије непрекидно мења: бесконачно мало померање дуж криве праћено је бесконачно малом променом правца. Многе се промене у природи одигравају по оваквим непрекидним кривим: планете описују елипсе, обртна тела кругове, тела при паду параболе, тежак конац обешен о два краја прави тзв. ланчаницу итд. Ако у координатном систему представимо графички везе између природних појава добићемо криве линије које се непрекидно мењају. Представљајући, на пример, везу запремине и притиска гаса, по Бојл-Мариотовом закону, добићемо хиперболу; дифракционе појаве у оптици представљене су спиралом (Корнуова спирала). Праволинијска зависност је редак случај у природи, па је стога проучавање кривих линија постала прека потреба науке још од давних времена. Али примена античких математичких метода на криве линије увек је задавала тешкоће. Архимед је у извесним случајевима успевао да савлада ове тешкоће. Прве, довољно опште методе за конструкцију тангената, које одређују правац криве у свакој тачки предложили су у првој половини и средином 17. века Декарт, Паскал, Ферма, Волис, Баров и други. Ипак, ове методе су имале прилично грешака. Оне не само што се нису могле проширити на трансцедентне криве, него се чак ни на алгебарске нису могле применити у свим случајевима. Главни недостатак било је опет чисто геометријско третирање питања. Требало је наћи аналитички начин који би заменио геомеријску представу тангенте. Овај задатак аналитичке карактеристике бесконачно малих промена кривих (или, општије, флуксија) решио је Њутн по својприлици још шездесетих година 17. века, а касније, вероватно потпуно независно од њега, Лајбниц. Слика која приказује неку криву у неком координатном систему у исто време очигледно приказује површину затворену датом кривом или њеним луком. У вези с тим стоји други основни задатак анализе, наиме: одредити ове површине ако је задата једначина криве (задатак квадратуре или интегрални рачун).

1669.године Њутн је предао Барову мемоар: "De analysi per aequationes numero terminorum infinitas“; (О анализи бескрајних редова помоћу једначина); главни његов предмет су квадратуре. Њутн израчунава површину коју затвара крива задата једначином :

$$y = ax^{\frac{m}{n}}$$

и налази за површину израз :

$$\frac{an}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$$

Квадратуру сложених кривих Њутн своди на квадратуру појединих делова; показане су методе за претходно уређење једначина сложених кривих путем растављања разломака и корена у редове по степенима. Шаљући Њутнов рукопис Колинсу на преглед, Баров препоручује Њутна као још веома младог магистра необичних способности. Ово дело по одобрењу писца издао је Џонсон 1711. год. У вези са полемиком између Њутна и Лајбница; трагова методе флуксија у њему још нема. Ову методу изложио је Њутн у другом делу које је тек после његове смрти издао Џон Колзон 1736. г . под насловом "Метода флуксија и бескрајни редови " (The method of fluxions and infinite series); у Њутновим сабраним делима овај рад је штампан под насловом "Аналитичка геометрија" (Geometria analytika). Флуентама (текућим) Њутн назива променљиве величине које улазе у једначину. Брзина којом се мења прираштај флуената тј. количник између бескрајно малог прираштаја једне флуенте и одговарајућег бескрајно малог прираштаја друге флуенте Њутн назива флуксијом. Бескрајно мали прираштај флуената (према усвојеној Лајбницовој терминологији – диференцијал) Њутн обележава симболом *o.x,* а саму флуксију са *x.* У наведеној расправи Њутн прво даје теорију растављања функција у редове , а затим прелази на основни задатак рачуна флуксија: тражење односа између флуксија ако је дат однос између флуената. Дат је такође начин за израчунавање односа флуксија; даље се претреса други основни задатак рачуна бесконачно малих: из познатог односа између флуксија наћи однос између флуената (задатак интегралног рачуна). Потпуно је решен низ најважнијих задатака анализе: решење најпростијих диференцијалних једначина, одређивање максимума и минимума функција, налажење тангената и субтангената, израчунавање кривине у превојној тачки криве, израчунавање површина ограничених кривим линијама и дужина лука криве .

Њутн је знао цену свом великом открићу и потврдио је делимично своја права у писму Колинсу од 1672.год. Колинс је био центар научне преписке између енглеских и страних математичара. Њутн је саопштио Колинсу своје откриће у општим цртама не наводећи саму методу, него га објашњава на неколико примера. То писмо је послужило касније као упориште у спору између Њутна и Лајбница. Био је то један злосрећан и дугачак спор...

Писмо Колинсу послато је у децембру 1672. год. Почетком 1673.г. Лајбниц је дуже времена боравио у Лондону и често посећивао секретара Краљевског друштва Олденбурга, који је у извесној мери био упознат са Њутновим математичким радовима. Из Лондона Лајбниц се упутио у Париз где се у друштву с Хајгенсом почео интензивно бавити математиком. 1674.г. Олденбург је саопштио Лајбницу да постоји једна нова општа Њутнова метода, чију садржину није изложио. 1676.г. Лајбниц је опет био на путовању у Енглеској и лично се упознао са Колинсом. Касније, када је спор био у пуном јеку, браниоци Њутнових права су се позвали на то да је том приликом Лајбниц могао сазнати за садржину Њутнових радова из рукописа који су се налазили код Колинса. 1676.г. Њутн преко Олденбурга шаље Лајбницу писмо у коме саопштава многе нове ствари у погледу растављања у редове, излаже чувени бином (без доказа); али се у писму не помиње метода бесконачно малих. Тек у следећем писму Олденбургу од 24. oктобра 1676.г. Њутн говори о новој методи. Он наводи резултате које је постигао том методом, примере њене примене, али саму суштину методе он саопштава овом шифром:

6 aeccdae 13eff 7i 3l 9n 4o 4qrr 4s 9t 12vx

Бројни коефицијенти који стоје пред словима показују колико се пута дато слово понавља у тексту шифроване реченице. Ако се зна да је реченица написана латински и ако се добро зна тај језик она се онда може дешифровати. Ова реченица у дешифрованом облику објављена је у "Принципима". Текст гласи: " Data aequationae quoteunquefluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa" (дата је једначина која у себи садржи текуће количине (флуенте), наћи ток (флуксије) и обрнуто). Немогуће је било из овога разумети суштину открића. Детаљно излагање методе сакривено је једном још скривенијом шифром. Лајбниц парира Њутнове загонетке у писму од 21. јуна 1677. године доста јасним излагањем основа диференцијалног рачуна, који се у ствари од методе флуксија разликује само симболиком. Тиме је преписка завршена.

Дугим проучавањем овог питања историчари математике су дошли до јединственог закључка: Основе анализе бесконачно малих открили су Њутн и Лајбниц независно један од другог, при чему је несумњиво да је Њутн учинио своје откриће неколико година пре Лајбница.

Неки историчари пребацују Њутну његово шифрирање у писму Лајбницу и, обратно, Лајбницово отворено, јасно излагање методе у свом одговору. Не може се рећи да је та замерка оправдана. Обичај да се скривају још не сасвим завршени резултати научног рада у виду анаграма и шифара био је раширен у старо доба. При томе је директан циљ био да се спречи паралелизам у научним радовима и заштита ауторског права на приоритет. Пошто је Њутн потпуно јасно изложио област на коју се протеже његова метода и главне резултате примене те методе, Лајбницу наравно није остајало ништа друго него да сасвим јасно покаже Њутну да је и он независно од њега дошао до исте методе и, без обзира на Њутнову шифру, требало је изложити и саму методу. Њутн и Лајбниц у својој преписци су изјавили само оно што су били принуђени да изјаве, те стога супротставити Њутновој скривености Лајбницов благородни поступак нема никаквог разлога.

У лајпцишком часопису “Acta Eruditorum” (Радови научника) појавио се 1684. године први Лајбницов мемоар посвећен диференцијалном рачуну. Овде је Лајбниц учинио неразумљиву тактичку грешку, јер није никако поменуо Њутново име. Он ту грешку исправља у другом мемоару, где излаже основе интегралног рачуна. Набрајајући дугачки списак имена претходника који су припремили терен за анализу бесконачно малих Лајбниц помиње и Њутна. "Њутн је дошао до открића квадратура помоћу бескрајних редова, не само потпуно независно, него је он толико допунио методу уопште, да би издање његових радова који још нису угледали света било, без сумње, повод за нове успехе у науци". Ова реченица пружала је нејасну представу о Њутновим открићима. Њутн се идуће године у првом издању "Принципа" изјаснио потпуно објективно о Лајбницовим радовима.

У чувеном "Поучку" у другој књизи "Принципа" поводом методе флуксије Њутн пише следеће:

"У писмима која сам изменио са веома вештим математичарем Лајбницом пре десет година ја сам му саопштио да располажем методом за одредбу максимума и минимума, конструкцију тангената и решавање сличних задатака која се може једнако применити како на рационалне тако и на ирационалне чланове, при чему сам сакрио саму методу шифрирајући следећу реченицу: "када је задата једначина, која садржи који било број текућих количина, наћи флуксије, и обратно". Славни човек одговорио ми је на то да је и он открио такву методу која једва да се што разликује од моје, и то само терминима и изгледом формула".

Сасвим је природно поставити питање од битног значаја за разумевање Њутновог карактера: зашто он није благовремено објавио своју методу? Питање и у наше доба остаје велика психолошка загонетка. Има разлога да се претпостави да је математика у Њутновим очима играла помоћну улогу у физичким истраживањима. Дефинитивну обраду мемоара о методи флуксија у 1671.год. (или око тог времена) спречила су велика експериментална истраживања у области оптике; Њутн је одложио нову методу као мање важну у поређењу с новом облашћу за експерименте која му се открила и није имао кад да заврши математички рад. У доба када су завршавана главна истраживања у области светлости (1675-1676) започета је поменута Лајбницова преписка с Њутном која га је уверила да је његову матоду пронашао други. Њутн је своја права учврстио у поменутом писму Лајбницу и објављивање нове методе изгубило је од свог ефекта – метода је постала позната и остало је само да се осигура приоритет. Задовољивши се тиме, Њутн се бацио на реализацију нових огромних физичких идеја у области механике. Зашто Њутн није обрадио "Принципе" с математичке стране по новој методи? Написати "Принципе" новим математичким језиком значило је учинити их неразумљивим свакоме савременику, значило је упустити се у нове неизбежне препирке чисто математичког карактера. Чак и математичар какав је био Хајгенс писао је још 1692. г. Лајбницу да он не разуме која су преимућства диференцијалног рачуна над старим методама. Математичка страна "Принципа" за Њутна је била од другостепеног значаја у односу на њихову физичку садржину. Њутн је опет пошао линијом најмањег отпора, задовољивши се кратком напоменом да постоји метода флуксија, и решењем неколико задатака.После издања "Принципа" остао му је важан физички проблем: детаљно проучавање месечевог кретања. Опет није било времена, и опет физика и астрономија стоје испред математике.

Ово је једно од могућих објашњења зашто Њутн није штампао своју "Методу флуксија" пре деведесетих година 17. века. Циновски рад који му није остављао времена да штампа своје радове завршио се умним премором и психичким обољењем после кога се и карактер и обим Њутнове активности из основа мења. Административна служба скопчана са радом који нема ничег заједничког с науком, бучан живот Лондона, активност у Краљевском друштву, све му је то одузимало време и одвраћало пажњу од редовних научних истраживања.

Нова анализа у облику који јој је дао Лајбниц почела је деведесетих година брзо да се усваја. Прво Јакоб Бернули а затим његов брат Јохан постигли су изненађујуће успехе у новом рачуну. У Француској је маркиз Л`Опитал издао 1693.г. први детаљни уџбеник диференцијалног рачуна. Нову методу прихватили су математичари Европе и, сасвим природно, везивали је за име Лајбница који је анализи дао згодан и елегантан облик.

Као да је предосећао неизбежну борбу за приоритет, Лајбниц се 1693.г обратио писмом Њутну предлажући му да обнове преписку.Њутнов одговор је био пријатељски и спокојан:

"Наш Волис-пише Њутн- додао је својој "Алгебри" нека од писама која сам ти писао у своје време. Он је уз то тражио од мене да изложим отворено методу коју сам у то доба сакрио од тебе помоћу слова; ја сам то учинио кратко у колико се могло. Надам се да нисам написао ништа што би ти било непријатно, ако се то ипак десило, молим да ми саопштиш, јер су ми пријатељи дражи од математичких открића". Али се преписка на томе и завршила.

Треба подвући необичну мирноћу и безбрижност Њутнову у погледу његових права у то доба. Тријумфални поход новог рачуна под Лајбницовом фирмом диференцијалног рачуна, почиње, ипак, да узнемирава национални понос енглеских патриота. Већ сасвим остарели Волис пише 1695.г. Њутну карактеристично писмо:

"Ви се не бринете у довољној мери о својој слави и слави нације, задржавајући тако дуго своја драгоцена открића".

Па чак ни оваква изазивања нису имала дејства: он је као и пре ћутао. Непосредни изазивач спора између Њутна и Лајбница био је женевски математичар Фацио Дуилје (Fatio de Duillier) који се преселио у Лондон. Љут на Лајбница из разних разлога Фацио је штампао 1699. године омању књигу у којој је, између осталог, не само подвукао да је Њутн први открио нову методу, него је учинио и лаку алузију на могућност плагијата од стране Лајбница. Лајбниц је на ову оптужбу остао хладан и напоменуо је да нема ни најмање намере да ступа у спор с Њутном по питању приоритета: он гаји према Њутну најбоље поштовање и уверен је да Њутн не одобрава Фацијево писање.

Спор је плануо поново поводом Њутнове "Оптике" 1704. године. Њутн је уз прво издање "Оптике" приложио две расправе: "De quadratura curvarum" (О квадратури кривих) и "Enumeratio linearum tertii ordinis" (Криве трећег реда). Ови мемоари имају само спољашњу везу са "Оптиком" и у каснијим издањима они су изостављени. Њихова појава је несумњиво у вези са спором који је почињао као што је то наглашено у предговору. У првој расправи Њутн, најзад, даје дуго очекивано штампано излагање методе флуксија и примењује је на квадратуре. Оба мемоара својим основама несумњиво потичу из седамдесетих година. У анонимној рецензији "Оптике" у "Acta eruditorum" коју је очигледно писао Лајбниц, уз све похвале на Њутнову адресу рецензент тумачи Њутнове закључке терминологијом Лајбницовог диференцијалног рачуна. Сам Њутн, као што је тврдио касније, схватио је ову рецензију као директну оптужбу у плагијату. Свађа је започела; један он Њутнових најревноснијих ученика, Џон Кејл, преокренуо је у свом мемоару "О закону централних сила" од 1708. године аргументацију рецензента и уметнуо овај параграф:

"Све ово произилази из сада већ знамените методе флуксија коју је први, без икакве сумње, открио сер Исак Њутн као што се у то може уверити свако ко прочита његова писма која је објавио Волис. Тај исти рачун објавио је касније Лајбниц у "Acta eruditorum" мењајући само називе, облик и начин обележавања".

Лајбниц, као члан Краљевског друштва, обратио се жалбом против Кејла секретару Друштва. Али оптужбе против Лајбница за плагијат бивале су све одређеније. Друштво је изабрало специјалну комисију да реши спор између Лајбница и Кејла. Већина чланова комисије били су присталице и ученици Њутна. Средином 1713. године изашла је књига под насловом "Commercium epistolicum D. Johanius Collins et aliorum de Analysi promota" (Преписка Д. Ј. Колинса и других о новој анализи) у којој су објављени резултати рада комисије. У књизи је изложена позната преписка и донета мотивисана одлука која се завршава следећом реченицом:

"На основу тога сматрамо да је Њутн први проналазач и сматрамо да Кејл, тврдећи то, није учинио ништа неправичног у погледу Лајбница".

Друго издање "Преписке" појавило се 1722. године а она је исто тако објављена и у Француској.

Овај компликовани и непотребни спор затровао је последње године живота и Њутну и Лајбницу. Лајбниц је одговорио на "Преписку" анонимним памфлетом у коме је Њутну пребацио низ прекора; поменута је Њутнова полемика са Хуком, Њутново присвајање Флемстидових астрономских открића и друго. У спор су увучени сви Њутнови ученици: Кејл, Котс, Тејлор, и други. До 1714. године Њутн је покушао да остане у сенци, али је касније морао да води полемику и под својим именом. Спором се као спортском разонодом заинтересовао двор, тражени су разноврсни посредници за помирење који су још више распаљивали страсти. Спор није прекинут ни смрћу Лајбнициовом, 1716. године, добијајући карактер научне утакмице на новом математичком пољу. Њутнове снаге су слабиле, ученицима је било далеко до учитеља и они су често трпели поразе. Њутн је умро непримирен. У примедбама уз "Историју рачуна флуксија" Џозефа Рафсона он је 1717. године написао:

"Да ли је Лајбниц плагирао ову методу или ју је сам пронашао, то нема апсолутно никаквог значаја, јер други по реду проналазач нема никаква права".

У трећем издању "Принципа" које је издао Пембертон Њутн је избацио и онај чувени "Поучак" у коме се одавало признање Лајбницу. "Поучак" је замењен другим у коме се излаже садржина писма Колинсу.

Енглески су историчари потпуно оценили Лајбницове заслуге, и обратно, немачки историчари признали су Њутну приоритет. Спор остаје као једна бесмислена чињеница на коју су утрошене последње снаге два генијална човека. Они сами нису желели овај спор али су у њега увучени низом случајности.

Велико Њутново и Лајбницово откриће, анализа бесконачно малих, наставило је да се нормално развија, развија се и данас. То је основни математички облик савремене природне науке и технике и нема могућности да се обухвате сви безбројни корисни резултати које је собом донела анализа бесконачно малих у области теорије и технике. Најопштији принципи физике нашли су свој израз у симболима диферанцијалних и интегралних једначина и тзв. варијационог рачуна. Апстрактна идеја континуалности природних процеса и појава која се налази у основи анализе бесконачно малих, и ако не потпуно тачна, била је веома плодоносна. Нова је физика у извесним случајевима напустила идеју континуитета, идеја атомизације, скокова, прекида, дубоко је продрла у саврменеу науку. Атомизира се маса, електрично пуњење, енергија, дејство; класичне диференцијалне једначине стичу статички смисао и сматрају се за тачне само за средње вредности великог броја појединих елементарних процеса. Али уз ово ограничење принципи анализе бесконачно малих не губе свој руководећи значај.

Њутнов математички рад није ограничен само на откриће рачуна флуксија. Чувени биномни образац, метода приближног решавања једначина, читав низ јединствених геометријских теорема у "Принципима", сјајна расправа о кривима трећег реда стављају Њутна, независно од открића анализе, у ред првих математичара свог доба. И данас, читање његове "Универзалне аритметике" која је састављена од лекција држаних у Кембрицу и већ поменутог дела "Криве трећег реда", пружају сваком геометру и љубитељу математике дубоко задовољство.

Треба још једном нагласити да су сва Њутнова математичка истраживања извршена главним делом пре деведесетих година. После пресељења у Лондон прави стваралачки рад био је завршен; од тог момента Њутн помоћу ученика и сарадника само је изводио биланс свог стваралачког периода.

И за крај. . .

Дана 20. марта 1727. год. по старом календару премину Исак Њутн у краљевском летњиковцу у Кенсингтону, где је провео последње дане свог живота. Сахранише га у крунидбеној цркви енглеских краљева уз почасти које се иначе чине само члановима краљевске породице.

Епитаф на споменику гласи:

"Овде почива сер Исак Њутн, племић, који је готово божанским разумом први доказао с бакљом математике кретање планета, путеве комета и плиме океана.

Он је испитао разлике светлосних зрака и различита својства боја које се при томе јављају, што раније нико није наслућивао. Прилежан, мудар и вредан тумач природе, старине и светог писма, он је својом филозофијом потврђивао величину свемогућег бога, а својом нарави оличавао јеванђеоску простоту. Нека се смртни радују што је постојао овакав украс рода људског. Рођен 25. децембра 1642., умро 20. марта 1727. године."

Њутн је поживео 84 године углавном у добром здрављу. Изгубио је само један зуб, од напорног гледања у месец ослабио му је вид, а коса му је рано оседела, али је остала бујна до последњих дана.

Иако је оставио математику у својим најбољим годинама, као нешто неважно, његов дух је остао крајње свеж и употребљив и за најтеже математичке проблеме.

Када је једном приликом, по повратку из ковнице новца, онако уморан, одмах после ручка, решио два до тада нерешива проблема и објавио их у "Гласнику Краљевске академије", без потписа, одушевљен Бернули је узвикнуо: "Препознао сам лава по његовим шапама!".

Па ипак Њутн је био физичар и претежно физичар. Астрономско поље његова је џиновска лабораторија, а математичке методе генијални инструмент.

Говорио је :

"Не знам како изгледам свету, али сам себи ја изгледам као дечак који се игра на морској обали и ужива кад с времена на време пронађе каменчић шаренији од обичних, или црвену шкољку, док велики океан истине стоји преда мном неиспитан".

Ево једног шареног каменчића. . .

СИМЕТРИЧНИ ПОЛИНОМИ И ЕЛЕМЕНТАРНЕ СИМЕТРИЧНЕ ФУНКЦИЈЕ

Дефиниција: Функција $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ од n промењљивих $x_1, x_2, ..., x_n$ је симетрична ако је њена вредност иста за све пермутације промењљивих, тј. ако је :

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{p_1}, x_{p_2}, ..., x_{p_n})$$

sa сваку пермутацију P скупа бројева 1,2,3,...,n.

Како се свака пермутација може добити помоћу транспозиција,можемо рећи да је функција симетрична ако при транспозицији њених промењљивих функција остаје иста.
Пример: изрази 2+3, $x_1 + x_2, x_1^p + x_2^p + ... + x_m^p$ су симетрични у односу на величине 2,3; односно x_1, x_2; односно $x_1, x_2, ..., x_m$.Напротив, изрази 2-3, $x_1^2 - x_1$ то нису.

Специјално се говори о симетричним полиномима ; о симетричним рационалним функцијама (изразима) и сл.

Нека је $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in K[x_1, x_2, ..., x_n]$, где је $K[x_1, ..., x_n]$ прстен полинома од n промењљивих и нека је σ трансформација која измешта промењљиве полинома $f(x_1, ..., x_n)$.
Дефиниција: Полином је симетричан ако је $f^\sigma = f$ за сваку пермутацију из скупа пермутација промењљивих (како год изместили промењљиве добијамо исти полином).
Пример: $x_1^2 + x_2^2 \in K[x_1, x_2]$ је симетричан
$x_1^2 + x_2^2 \in K[x_1, x_2, x_3]$ није симетричан

Стандардни симетрични полиноми постоје у сваком прстену полинома од n промењљивих и то су *елементарне симетричне функције :*

$$\sigma_1 = \sigma_1^n = x_1 + x_2 + ... + x_n$$
$$\sigma_2 = \sigma_2^n = x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n$$

$$\sigma_n = \sigma_n^n = x_1 x_2 \dots x_n$$

При томе се узима да је :

$$\sigma_0(x_1,\dots,x_n) = 1 \quad \text{и}$$

$$\sigma_k(x_1,\dots,x_n) = 0 \qquad \text{за } k>n$$

Лема: Сваки симетричан полином се може изразити преко елементарних симетричних функција.

Тако на пример :

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2) = \sigma_1^3 - 3\sigma_2\sigma_1$$

Лексикографски поредак у скупу монома са више промењљивих:

Нека је $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ прстен полинома са промењљивим $x_1, x_2, \dots x_n$ и коефицијентима из поља K.Не-нула полином из $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ облика $ax^i = ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\dots x_n^{i_n}$ називамо мономом са изложиоцем $i=(i_1,\dots,i_n)$ (мултииндекс), а број $|\, i \,| = i_1 + i_2 + \dots + i_n$ његовим степеном(висином мултииндекса).

Ако су сви не-нула мономи полинома f истог степена k, тај полином називамо хомогеним са степеном хомогености k.

Мономи истог степена уређују се лексикографски према изложиоцима на следећи начин:

$x_1^{i_1}x_2^{i_2}\dots x_n^{i_n} < x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ ако је $(i_1, i_2, \dots, i_n) < (k_1, k_2, \dots, k_n)$ тј. ако је прва међу не-нула разликама $k_s - i_s$ позитивна.

Лема о најстаријем члану симетричног полинома:

Ако је f симетричан полином из $K[x_1,\dots,x_n]$ и $A = ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ његов најстарији члан , тада мора да важи:

$$k_1 \ge k_2 \ge \dots \ge k_n$$

Доказ: Претпоставимо да у најстаријем члану из A за неко i је : $k_i < k_{i+1}$; како је полином симетричан , он уз најстарији члан $A = ax_1^{k_1}\dots x_i^{k_i}x_{i+1}^{k_i+1}\dots x_n^{k_n}$ садржи и члан који се из овога добије пермутовањем промењљивих x_i, x_{i+1} , па је :

$A' = ax_1^{k_1}...x_{i+1}^{k_i}x_i^{k_{i+1}}...x_n^{k_n}$ тј.

$A' = ax_1^{k_1}...x_i^{k_{i+1}}x_{i+1}^{k_i}...x_n^{k_n}$ који је због $k_i < k_{i+1}$ већи од A што је супротно претпоставци да је A најстарији члан полинома.

Пример: A=3 $x_1^2 x_2^3$ било би $A' = 3x_2^2 x_1^3 \Rightarrow A' = 3x_1^3 x_2^2 > A$

Лема о најстаријем члану производа полинома са више променљивих

Најстарији моном производа два полинома једнак је производу најстаријих чланова монома фактора.

Доказ: Претпоставимо да је најстарији члан полинома f : $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n} > a'x_1^{k_1'}...x_n^{k_n'}$; где је $k_i > k_i'$, а десну страну од знака неједнакости чине остали чланови полинома f; а у полиному g најстарији члан је : $bx_1^{l_1}x_2^{l_2}...x_n^{l_n} > b'x_1^{l_1'}x_2^{l_2'}...x_n^{l_n'}; l_j > l_j'$, а десну страну од знака неједнакости чине остали чланови полинома g.

Множењем добијамо:

fg: $abx_1^{k_1+l_1}...x_n^{k_n+l_n}$ и $a'b'x_1^{k_1'+l_1'}...x_n^{k_n'+l_n'}$

Нека је: $i < j$:

Пошто је : $k_i > k_i'$ и

$l_j > l_j'$, тада је и

$k_i + l_j > k_i' + l_j'$

Из овога следи да је : $abx_1^{k_1+l_1}...x_n^{k_n+l_n} > a'b'x_1^{k_1'+l_1'}...x_n^{k_n'+l_n'}$

Такође је због : $k_j + l_j > k_j + l_j'$

$abx_1^{k_1+l_1}...x_n^{k_n+l_n} > ab'x_1^{k_1+l_1'}...x_n^{k_n+l_n'}$

А како је и : $k_i + l_i > k_i' + l_i$, то је и :

$abx_1^{k_1+l_1}...x_n^{k_n+l_n} > a'bx_1^{k_1'+l_1}...x_n^{k_n'+l_n}$

што у потпуности доказује лему.

ЊУТНОВА ТЕОРЕМА О СИМЕТРИЧНИМ ПОЛИНОМИМА

Теорема:

Ако је $f\in K[x_1,x_2,...,x_n]$ симетричан полином од n променљивих, тада постоји јединствен полином $g\in K[x_1,x_2,...,x_n]$ такав да је $f(x_1,x_2,...,x_n)=g(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$, где су $\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n$, елементарне симетричне функције од $x_1,x_2,...,x_n$.

Доказ:

Нека је $f\in K[x_1,x_2,...,x_n]$ симетричан полином од n променљивих и $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$ његов најстарији члан.Уочимо полином $h=a\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}...\sigma_{n-1}^{k_{n-1}-k_n}\sigma_n^{k_n}$; због $k_1\geq k_2\geq...\geq k_n$, сви изложиоци су ненегативни ,па је полином добро дефинисан. То је симетричан полином јер је произвид симетричних полинома. Његов најстарији члан једнак је производу најстаријих чланова (*лема о најстаријем члану производа полинома са више променљивих*) :

$$ax_1^{k_1-k_2}...(x_1x_2)^{k_2-k_3}...(x_1x_2...x_{n-1})^{k_{n-1}-k_n}.(x_1x_2...x_n)^{k_n}=ax_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$$

Следи да f и h имају исте најстарије чланове и најстарији члан од f-h је мањи од најстаријег члана f.

Применимо индукцију по најстаријем члану:
На полином $f_1=f-h$ применимо исто разматрање и добијамо:
$f_2=f_1-h_1$ са још мањим најстаријим чланом ; и даље :
$f_3=f_2-h_2$ са још мањим најстаријим чланом и тд.
....
....

Процес се мора завршити након коначно много корака (добра уређеност) и тиме се добија :

$$f_k-h_k=0$$

Тако се добије:

$$f=h+f_1=h+h_1+f_2=h+h_1+h_2+f_3=h+h_1+h_2+...+h_k=g(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$$

Овим је доказана егзистенција полинома g.
Докажимо сада јединственост :
Лема:Нема никоје рационалне функције R која није $\equiv 0$, за коју би било:
$R(\sigma_1(x_1, x_2,..., x_n), \sigma_2(x_1, x_2,..., x_n),..., \sigma_n(x_1, x_2,..., x_n)) = 0$, за све могуће вредности $x_1, x_2,..., x_n$.
Претпоставимо да, обрнуто , таква рационална функција R постоји.Множећи имениоцем од R, добили бисмо за бројилац B аналогни идентитет:
$B(\sigma_1(x_1,...), \sigma_2(x_1,...) = 0$ за све изборе $x_1, x_2,...,$ мада B као функција од σ_v није$\equiv$0, тј.иако постоји бар један избор за $\sigma_1,....,\sigma_n$, рецимо $\sigma_1^{'},...,\sigma_n^{'}$, за које је:

$$B(\sigma_1^{'}, \sigma_2^{'},..., \sigma_n^{'}) \neq 0 \quad *$$

Али ,посматрамо ли полином $x^n + \sigma_1^{'}x^{n-1} + ... + \sigma_{n-1}^{'}x + \sigma_n^{'}$ и његове нула тачке $x_1^{'}, x_2^{'},..., x_n^{'}$ па њих уврстимо уместо x-ова у бројилац B, тада он постаје $B(\sigma_1(x_1^{'},...), \sigma_2(x_1^{'},...) = 0$, па је и $B(\sigma_1^{'}, \sigma_2^{'},..., \sigma_n^{'}) = 0$ сопротно релацији *.
Из овога произилази једнозначност у приказивању симетричног полинома $p(x_1, x_2,..., x_n)$ помоћу $\sigma_1,..., \sigma_n$. Када би, наиме, постојала два таква приказа , рецимо $P(\sigma_1,...,\sigma_n), P_1(\sigma_1,...,\sigma_n)$, онда би њихова разлика била $\equiv 0$ као функција од x – ова, а не би била $\equiv 0$ као функција σ, што се противи тврђењу горње леме.
Претпоставимо,сада да $f(x_1,...,x_n)$ има два записа:

$$f(x_1,...,x_n) = g(\sigma_1,...,\sigma_n)$$
$$f(x_1,...,x_n) = h(\sigma_1,...,\sigma_n) \quad \text{и нека је :}$$
$$g \neq h$$

Одузимањем добијамо:

$$0 = g(\sigma_1,...,\sigma_n) - h(\sigma_1,...,\sigma_n)$$
$$g - h = p(\sigma_1,...,\sigma_n) = 0$$

Како је $\sigma_1(x_1,...,x_n),...,\sigma_n(x_1,...,x_n)$, то је $g - h = 0$ за све изборе променљивих $x_1,...,x_n$, што је могуће само ако је :

$g-h\equiv 0$ тј. ако је: $g\equiv h$, што је супротно претпоставци да је $g\neq h$.

Крај доказа.

Ево неколико примера који добро илуструју наведену теорему:

Пример 1: $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2$; најстарији члан је $3x_1^2x_2$, а низ експонената је : 2,1 па је:

$$h=3\sigma_1^1\sigma_2^1=3(x_1+x_2)x_1x_2=3x_1^2x_2+3x_1x_2^2$$

$$f_1=f-h=x_1^2+x_2^2$$

Најстарији члан је x_1^2 , низ експонената је 2,0 ;

$$h_1=\sigma_1^2\sigma_2^0=\sigma_1^2=(x_1+x_2)^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$$

$$f_2=f_1-h_1=-2x_1x_2$$

Низ експонената најстаријег члана је 1,1 ; тада је:

$$h_2=-2\sigma_1^0\sigma_2^1=-2\sigma_2=-2x_1x_2$$

$$f_3=f_2-h_2=0\ \Rightarrow f=h+h_1=h+h_1+h_2=h+h_1+h_2+h_3\ ;$$

$$f=h+h_1+h_2=3\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2-2\sigma_2$$

Пример 2: $f=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$, најстарији члан је x_1^2 , низ експонената је : 2,0,0...,0 , па је :

$$h=\sigma_1^2=(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+2x_1x_2+2x_1x_3+\ldots+2x_{n-1}x_n$$

$$f_1=f-h=-2x_1x_2-2x_1x_3-\ldots-2x_{n-1}x_n$$

Најстарији члан је $-2x_1x_2$, низ експонената је 1,1,0,0,...,0 ;

$$h_1=-2\sigma_1^0\sigma_2^1=-2\sigma_2=-2(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n)$$

$$f_2=f_1-h_1=0\ \Rightarrow f=h+h_1$$

$$f=\sigma_1^2-2\sigma_2$$

Пример 3:

$$f=x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3=\sum_{i=1}^{n}x_i^3$$

Најстарији члан је x_1^3; низ експонената је 3,0,0....,0

$$h=\sigma_1^3=(x_1+x_2+\ldots+x_n)^3=\sum_{\substack{k_i\geq 0\\ k_1+k_2+\ldots+k_n=3}}\frac{3!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^3+3\sum_{i\neq j}x_i^2x_j+6\sum_{i\leq j\leq k}x_ix_jx_k$$

$$f_1=f-h=-3\sum_{i\neq j}x_i^2x_j-6\sum_{i<j<k}x_ix_jx_k$$

најстарији моном је $-3x_1^2x_2$; низ експонената је 2,1,0,...

$$h_1=-3\sigma_1\sigma_2=-3\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j\prec k}x_jx_k=-3\Big(\sum_{j\prec k}x_j^2x_k+\sum_{j\succ k}x_jx_k^2+\sum_{i\prec j\prec k}x_ix_jx_k+\sum_{i\prec j\prec k}x_ix_jx_k+\sum_{i\prec j\prec k}x_ix_jx_k\Big)=$$

$$=-3\Big(\sum_{i\neq j}x_i^2x_j+3\sum_{i<j<k}x_ix_jx_k\Big)$$

$$h_2=f_1-h_1=3\sum_{i<j<k}x_ix_jx_k$$

$$h_2=3\sigma_3=3\sum_{i<j<k}x_ix_jx_k$$

$$f_3=f_2-h_2=0\Rightarrow f=h+f_1=h+h_1+f_2=h+h_1+h_2$$

$$\Rightarrow f=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$$

Пример 4:

$$f=x_1^2x_2+x_1^2x_3+\ldots+x_1^2x_n+x_1x_2^2+x_2^2x_3+\ldots+x_2^2x_n+\ldots+x_1x_{n-1}^2+x_2x_{n-1}^2+\ldots+x_{n-1}^2x_n+x_1x_n^2+\ldots+x_{n-1}x_n^2=$$

$$=\sum_{i\neq j}x_i^2x_j$$

Најстарији члан је $x_1^2x_2$, низ експонената је 2,1,0,0...

$$h=\sigma_1\sigma_2=(x_1+x_2+\ldots+x_n)(x_1x_2+\ldots+x_{n-1}x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j\neq k}x_jx_k=\sum_{i\neq j}x_i^2x_j+3\sum_{i\neq j\neq k}x_ix_jx_k$$

$$f_1=f-h=-3\sum_{i\neq j\neq k}x_ix_jx_k$$

Најстарији члан је $-3x_1x_2x_3$, низ експонената је 1,1,1,0,0...

$$h_1=-3\sigma_3=-3\sum_{i\neq j\neq k}x_ix_jx_k\Rightarrow f_2=f_1-h_1=0\Rightarrow f_1=h_1$$

$\Rightarrow$

$$f=h+f_1=h+h_1=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3$$

ОПШТЕ ВИЈЕТОВЕ ФОРМУЛЕ

У другом разреду средње школе у области квадратне једначине изучавају се Вијетове формуле за полином другог степена.Због тога ће овде бити речи о уопштеним Вијетовим формулама за полином n-тог степена.

Ако полином f раставимо на линеарне чиниоце: $f(x)=a(x-x_1)...(x-x_n)$, а затим ово посматрамо као идентитет коме су $x_1,...x_n$ променљиве, а не константе, добијамо уопштену Вијетову теорему за полином n-тог степена, где се појављују елементарне симетричне функције.

Теорема: Ако је $a_0+a_1x+...+a_nx^n=a_n(x-x_1)...(x-x_n)$, тада је:

$$x_1+...+x_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1x_2+...+x_{n-1}x_n=\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

.

.

$$x_1x_2...x_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

Доказ уопштених Вијетових формула биће изведен помоћу симетричних функција , индукцијом:

$n=1$

$x-x_1=x-\sigma_1(x_1)$

$n=2$

$(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x^2-\sigma_1(x_1,x_2)x+\sigma_2(x_1,x_2)$

Ово су Вијетове формуле за квадратну једначину.

Претпоставимо да важи за n=n:

$(x-x_1)...(x-x_n)=x^n-\sigma_1x^{n-1}...+(-1)^n\sigma_n$

Докажимо да важи за n=$n+1$:

$$(x-x_1)\ldots(x-x_n)(x-x_{n+1}) = x^{n+1} - \sigma_1 x^n + \ldots + (-1)^{n+1}\sigma_{n+1}$$

$$(x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \ldots + (-1)^n \sigma_n)(x - x_{n+1}) =$$
$$= x^{n+1} - \sigma_1 x^n + \sigma_2 x^{n-1} + \ldots + (-1)^n \sigma_n x - x^n x_{n+1} + \sigma_1 x^{n-1} x_{n+1} - \sigma_2 x^{n-2} x_{n+1} + \ldots + (-1)^{n+1} \sigma_n x_{n+1} =$$
$$= x^{n+1} - (\sigma_1 + x_{n+1}) x^n + (\sigma_2 + \sigma_1 x_{n+1}) x^{n+1} + \ldots + (-1)^{n+1} (\sigma_{n+1} + \sigma_n x_{n+1}) =$$
$$= x^{n+1} - \sigma_1 x^n + \sigma_2 x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n+1} \sigma_{n+1}$$

Крај доказа.

Као илустрацију општих Вијетових формула наводим пример који се појавио на пријемном испиту за упис на техничке факултете и Математички факултет у Београду:

Пример : Ако су x_1, x_2, x_3 решења једначине $125x^3 - 64 = 0$, тада је $x_1 x_2 x_3 - (x_1 + x_2 + x_3)$ једнако:
а) 0 ; б) $\frac{125}{64}$; в) $\frac{64}{125}$; г) $\frac{8}{25}$; д) $\frac{-64}{125}$;

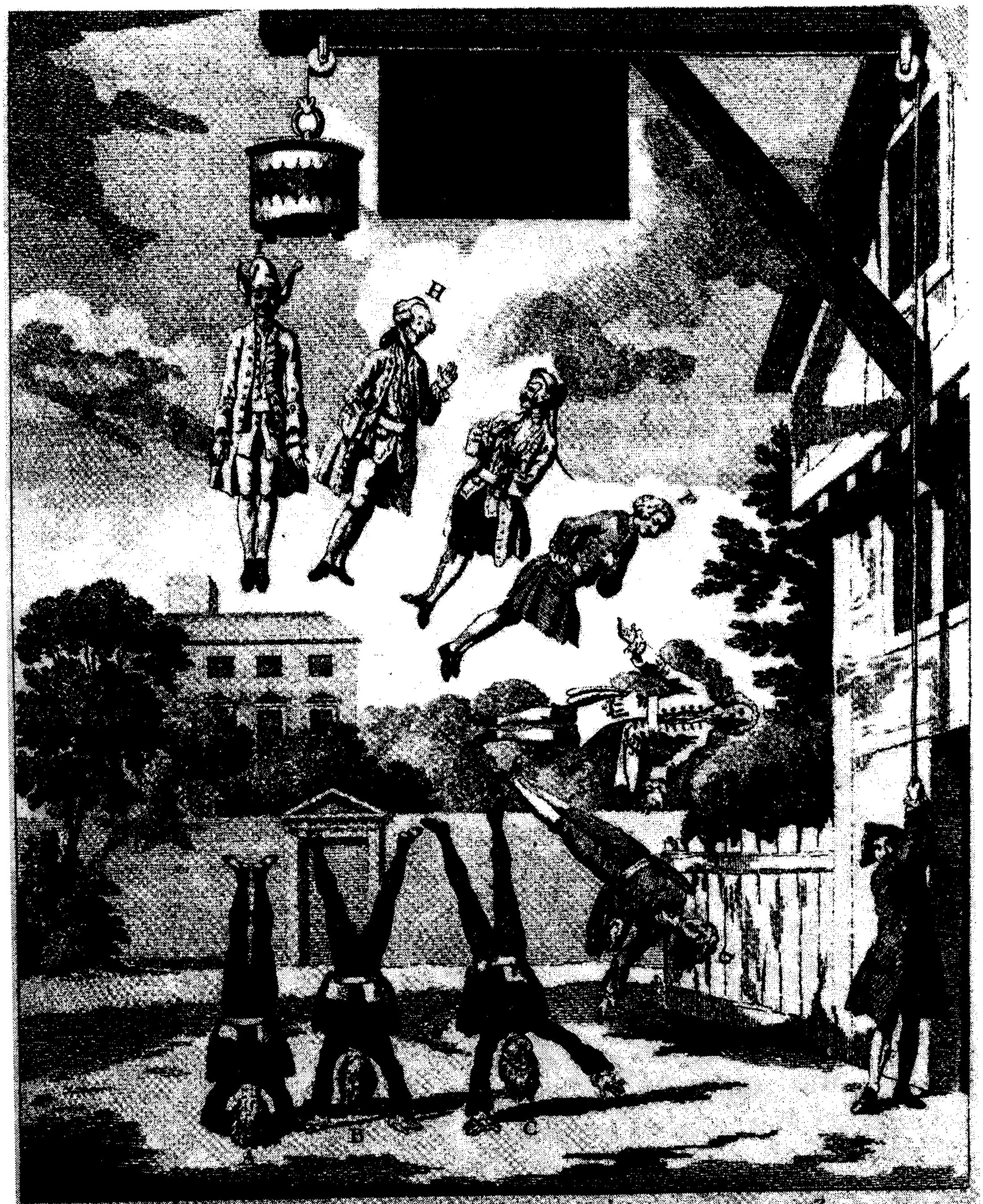
Решење: како је наведена једначина трећег степена , то је за $n = 3, a_3 = 125, a_2 = 0, a_1 = 0, a_0 = -64$, па је према Вијетовим формулама за једначину трећег степена $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3} = 0; x_1 x_2 x_3 = -\frac{a_0}{a_3} = \frac{64}{125}$, па је $x_1 x_2 x_3 - (x_1 + x_2 + x_3) = \frac{64}{125}$, па је тачан одговор в).
Овај задатак био је на тесту у септембарском уписном року 1994.године , и тачан одговор вреднован је са 5 поена, а с обзиром на то да су задаци бодовани од 3 до 8 поена , сврстан је у задатке средње тежине. (СЛЕДИ ЈОШ НЕКОЛИКО ПРИМЕРА ЗА КВАДРАТНУ ЈЕДНАЧИНУ.)
И да не заборавимо...

Уз Њутнову теорему долазе неизоставно и још нека имена чуваних математичара који су дали свој допринос теореми,Тако се појављују имена Варинга(Waring,Meditationes algebraicae,Cambridge,1782.), затим Крамера (Cramer), Вандермонда (Vandermonde), Гауса (Gauss), Кошија (Cauchy).
Ипак, теорема је Њутнова, и само Њутнова.

ЗАНИМЉИВОСТИ

- Hipotheses non fingo (хипотезе не измишљам)
- Нећу да мешам досетку са извесношћу
- Волео је да прави компликоване механичке играчке, моделе воденица, аутоматска колица, водене и сунчане сатове.
- Волео је да пушта змајеве, чак и ноћу с фењерима од хартије у разним бојама, па је из шале причао по околини да се појавила нова комета.
- Као шеснаестогодишњак одређивао је јачину ветра за време буре, мерећи даљину свог скока по ветру и насупрот ветра.
- Велики експериментатор, љубитељ прецизног, чистог и лепог експеримента.
- Одличан брусилац огледала, призама и сочива (својом вештином је надмашио најбоље лондонске мајсторе.)
- Наклоност према хемији и алхемији.
- Никада се није женио ; нико не може служити два господара: или госпођица Сторej , или наука- једно од тога двога.
- Не брините се за сутра, јер сутра бриниће се за се. Доста је сваком дану зла свога.
- Добро је цртао.
- Волео је да скупља лековито биље.
- Био је штедљив; веће издатке чинио је само за коповину књига и научних апарата.
- У парламенту је углавном ћутао, осим једном, када је тражио да се затвори прозор. (анегдота)
- Био је ватрени борац за аутономију универзитета.Супротставио се чак и краљевој жељи да на Универзитет прими за магистра неког бенегдиктанског свештеника.
- Необично миран и безбрижан у погледу својих права у вези спора са Лајбницом и сличних спорова.

Било је и подсмеха. О, зар је и то могуће?!



A. absolute Gravity. B. Conatus against absolute Gravity. C. partial Gravity. D. comparative Gravity. E. horizontal, or good sense. F. Wit. G. comparative Levity or Coxcomb. H. partial Levity, or pert Fool. I. absolute Levity, or Stark Fool.

ЧИНИ НАМ СЕ БЕЗБОЖНИМ ДА ЈЕ ЊУТН ЗА ЖИВОТА МОГАО БИТИ ПРЕДМЕТ САТИРЕ. ОНДАШЊА КАРИКАТУРА ИСМЕВА ЊУТНОВ ЗАКОН ГРАВИТАЦИЈЕ.

Најважнији подаци из Њутновог живота

1643. Рођен 4. јануара у Вулсторпу (Woolsthorpe), близу варошице Грентем (Grantham). Мало имање у Вулсторпу налазило се у поседу породице Њутн више од сто година. Приход са имања износио је годишње свега око 30 фунти стерлинга. Како је Њутнов отац, који се исто тако звао Исак, умро пре него што му се син родио, његова мајка Харијета Ејскаф (Harriet Ayscough), се ускоро преудала за свештеника Смита у Норт-Уитему. Њутн је провео рану младост код мајке на малом имању у врло скромним приликама.

1650-1654. Похађа основну школу у селу Скилингтону.

1654-1657. Посећује "Краљевску школу" у Грентему, уз новчану помоћ ујака Вилијема.

1657. После смрти другог мужа Њутнова мајка се са троје деце враћа у Вулсдорп.

1657-1658. Њутн обавља на имању земљорадничке послове, али се више интересује за књиге и механичке апарате него за имање.

1658-1660. Наставља школовање у Грентему и припрема се за универзитетске студије.

1660. Петог јуна уписује се на универзитет у Кембрицу, где је примљен у Тринити-Колеџ. Изучава Декартове математичке списе, Еуклидову геометрију, Коперников систем и Кеплерову оптику. Као сиромашан ђак био је неко време "субсајзар" и "сајзар", тј. послуживао је у Колеџу своје другове. Живи повучено и бави се искључиво науком.

1663. Ступа у пријатељске везе са својим професором математике и оптике Баровом, који га необично цени због велике обдарености за математичке и физичке науке.

1665. Добија степен бакалауреуса (најнижи академски степен).

1666. Проводи годину дана у родном месту због куге која влада у Кембрицу. За то време бави се проучавањем преламања и дисперзије светлости и долази до открића да су Сунчеви зраци састављени из зракова разних боја, који се у призми преламају под разним угловима. У исто време долази до открића Њутновог биномног правила, поставља темеље рачуна флуксија (диференцијални и интегрални рачун) и бави се идејом опште гравитације.

1667. Завршетак студија у Кембрицу. Добија степен магистра (виши академски степен), и звање вишег члана Тринити колеџа.

1668. Проналази мали телескоп, дугачак свега 15 центиметара. Као узор служи му телескоп Џемса Грегорија, али Њутн предвиђа битне измене у конструкцији.

1669. Предаје Барову математичку расправу о методи израчунавања квадратуре кривих линија под насловом: "Analysis per aecquationes numero terminorum infinitas".

Баров предаје Њутнову расправу члану Краљевског друштва, математичару Колинсу, који задржава препис за себе, али је не приказује Краљевском друштву. Расправа је штампана тек 1711. године, према препису нађеном у Колинсовој заоставштини после његове смрти. Двадесет деветог октобра наслеђује катедру математике од Барова, који захваљује на овом положају у корист Њутна и преузима катедру теологије.

1669-1671. Држи предавања о својим открићима из оптике.

1671. Израђује други, савршенији телескоп и ставља га на располагање научницима Каљевског друштва да би га испитали и оценили. Председник Краљевског друштва Роберт Мореј и чланови Врен, Хук и други, испитују Њутнов телескоп и у свом извештају изражавају се о њему врло повољно. Инструмент се чува у Библиотеци Краљевског друштва у Лондону. На њему стоји записано: "Пронашао сер Исак Њутн и направио својом руком 1671. год. "

1672. Постаје члан Краљевског друштва на основу расправе "Истраживања светлосних појава", одштампане у "Филозофским трансакцијама". Тај рад наишао је код многих научника на одобравање, али је неке изазвао на полемику. Међу противницима налазили су се, између осталих, Хук и Хајгенс, који су побијали Њутново учење углавном због тога што су сматрали да је Њутново схватање светлости у супротности са таласном теоријом, коју су они заступали. У свом одговору Хуку, Њутн каже да је његова наука о бојама заснована на експерименталним чињенизама, а не на некој хипотези о природи светлости. Њутн је углавном стајао на становишту да се светлост састоји из корпускула разних величина, али је изричито нагласио да своју науку о разлагању Сунчеве светлости у спектралне боје не везује ни за какву хипотезу.

10. децембра саопштева писмом Колинсу своју методу тангенти, коју овај не објављује.

1673. Лајбниц долази у Лондон и код секретара Краљевског друштва Олденбурга и Колинса упознаје се са Њутновим математичким радовима.

1672-1675. Проучава исцрпно светлосне појаве, нарочито боје тзв. "танких листића", (боје код мехурића од сапунице). По Бојловом примеру, пропушта монохроматичну светлост (светлост једне боје) кроз равну површину планконвексногсочива мале кривине, постављеног на стаклену плочу. Око места где је кривина сочива додиривала плочу налазили су се наизменично поређани светли и тамни прстенови, а Сунчева светлост показивала је прстенове у разним бојама. Мерењима је утврдио да црвена светлост даје најшире прстенове, а љубичаста најуже. Тачно објашњење Њутнових прстенова дали су Јунг и Френел помоћу интерференције на основу таласне теорије светлости тек почетком 19. века. Јунг је Њутнове прстенове искористио да би утврдио таласну дужину светлосних зракова.

1675.

10. фебруара подноси Краљевском друштву своје дело о природним бојама тела, у коме даје доказ да боје разних материја зависе од врсте светлости. Само у белој светлости појављују се тела у својим бојама, док у хомогеној црвеној светлости видимо тела као црвена само ако им је боја црвена. Ако је тело жуто, зелено или плаво изгледа нам у црвеној светлости црно. То долази због тога што свако тело одбија зраке оне боје коју и само има, док зраке осталих боја упија. Како је, као што је Њутн доказао, светлост беле боје састављена из свих спектралних боја, то у белој светлости тела показују своје праве боје, јер нађу увек ону боју којом светле, те је од себе одбијају.

19. фебруара дело је штампано у "Philosophical Transactions".

9. децембра подноси Краљевском друштву још једно дело из оптике у коме приказује своја истраживања о бојама танких листића. То дело довело је до велике полемике са Хуком, која је трајала четри године и Њутну одузела много драгоценог

времена. Када је завршио полемику, изјавио је да на пољу оптике неће ништа више објавити за Хукова живота. И заиста, своје велико дело о оптици објавио је тек 1704. године, две године после Хукове смрти.

1675-1679. Објављује 15 чланака о светлосним појавама, као одговор на Хукове примедбе.

1676. Научна преписка са Лајбницом, који је почетком године боравио у Лондону код Колинса. Њутн саопштава Лајбницу да је разрадио нову методу за решавање максимума и минимума, тангенти итд. На то му Лајбниц шаље своју методу.

1679. 28. новембра упућује писмо секретару Краљевског друштва Хуку, у коме одговара на један упит Друштва у погледу окретања Земље и предлаже да се изведу опити помоћу којих би се директно доказало да се Земља окреће око своје осовине. Опите треба извести слободним падањем тела са велике висине {то би доказало да тело при падању скреће према истоку. Краљевско друштво овлашћује Хука да изврши експерименте, који их децембра изводи и о томе реферише Друштву. Још исте године Хук одговара Њутну да ће због косог правца равни падања према Земљиној осовини осим скретања на исток настати и мало скретање према југу. Даље каже да би путања тела у вакууму била ексцентрична елиптична спирала. Та Хукова примедба навела је Њутна на механичку теорему према којој путања планете, када се креће под утицајем привлачне силе која опада са квадратом одстојања мора бити елипса у чијој са једној жижи налази центар привлачења (Сунце). У једном писму упућеном Халеју признаје Њутн изричито да га је Хукова примедба довела до тог открића.

1679-1682. Разрађује теорију гравитације.

1682. На седници Краљевског друштва, одржаној у јуну, саопштени су Пикарови резултати мерења дужине меридијана. Са њима израчунава Њутн пречник Земље и наставља своје рачуне из 1666. о кретању небеских тела око Сунца. Рачуни се тачно поклапају са теоријом.

1683. Шаље Краљевском друштву своје рачуне о кретању планета и комета, али без доказа.

1684. Долази Халеј до открића да се комбинацијом закона о центрифугалној сили и трећег Кеплеровог закона може доказати да центрифугална сила опада са квадратом одстојања. Када је то саопштио Врену у Хуковом присуству, Хук је изјавио да ће на основу Халејевог открића објаснити кретање планета. Али Хук никада није дао објашњење.

1684. Августа одлази Халеј Њутну у Кембриџ и наговара га да објави доказе открића, поднета Краљевском друштву.

1685. Њутн објављује у Волисовој "Алгебри" редове разних функција.

1686. Почетком априла шаље Краљевском друштву своје дело под именом: "Philosophiae naturalis principia mathematica". (математички принципи природних наука).

На седници краљевског друштва, одржаној 28. априла, саопштава др Винсент присутним члановима Њутнов манускрипт и истиче у једном говору огроман значај Њутновог дела.

На седници Савета Краљевског друштва, одржаној 19. маја решава се да се Њутново дело штампа о трошку Друштва и да се коректура повери Халеју.

У писму од 20. јуна упућеном Халеју Њутн изражава жељу да се штампају само прве две књиге дела, не трећа. Њутн у писму каже: "Филозофија (мисли се наука) је тако нескромна дама свађалица, да се с њоме упуштати значи исто толико колико упетљати се у процесе. То сам раније искусио, али ме она и сада опомиње на то чим јој се приближим." Халеј на то одговара да би било за жаљење да се не штампа и трећа књига и успева да добије Њутнов пристанак.

1687. Маја појављује се прво издање Њутнових "Принципија".

1688. Универзитет у Кембриџу шаље Њутна као свог посланика у парламент. Пре тога је живео у Кембриџу са врло малом платом у скромним условима, бавећи се искључиво науком, а сада је био приморан да се бави општим пословима. То је дошло због тога што је краљ Јаков Други тражио од универзитета да прими за магистра неког бенедиктанског калуђера. Универзитет је сматрао да краљева жеља значи повреду универзитетских привилегија, а и плашио се да ће владар католик понављањем таквих захтева одузети универзитету протестантски карактер. Зато су професори универзитета закључили да се захтеву одупру. Међу њима се налазио и Њутн. Због тога, а и због његовог великог имена послали су га у парламент, да брани аутономију универзитета.

1688-1690. Присуствује седницама парламента.

1692. Запада у нервно обољење због претераног духовног напрезања. Извесно време Њутн се налазио у поремећеном душевном стању.

1695. Постаје надзорник ковнице са годишњом платом од 600 фунти. То место даје му његов пријатељ и обожавалац, некадашњи његов ђак Чарлс Монтегју, када је постао министар финансија.

1699. Постаје директор ковнице, са годишњом платом од око 1500 фунти. Париска академија наука бира га за свог члана.

1701. Универзитет у Кембрицу шаље га као свог посланика у парламент.

1703. Избор Њутна за председника Краљевског друштва, и на том положају остаје до смрти.

1704. Објављује велико дело "Оптика" у три књиге, у којима излаже своја открића и описе многобројних експеримената. Прва књига се односи на рефлексију, преламања и расипање (дисперзију) светлости. У њој је разрађена Њутнова емисиона теорија светлости и теорија дуге. У другој књизи говори о бојама танких листића и природним бојама тела. У трећој књизи разрађује своје идеје о савијању, двоструком преламању, тоталној рефлексији и поларизацији светлости. Уз Оптику штампане су и две математичке расправе о теорији флуксија и њеној примени на квадратуру кривих линија и о класификацији 73 криве линије трећег степена са навођањем њихових особина. Расправе имају наслов: "De quadratura curvarum", "Enumeratio linearum tertii ordinis".

Лајбниц даје у "Acta eruditorum" приказ оптике, али без свог потписа и прави алузије као да је Њутн од Лајбница преузео методу диференцијалног и интегралног рачуна.

1705. Краљица Ана дарује Њутну племство, Њутн постаје "сер Исак", учествује у разним парламентарним и министеријалним комисијама, појављује се на двору, постаје салонски филозоф принцезе од Велса. Чувеним спором са Лајбницом заинтересован је краљ и двор.

1707. Објава Њутнових предавања из алгебре: "Arithmetica universalis, sive de compositione et resolutione arithmetica liber". Та предавања Њутн је држао на Кембрицу од 1669-1678.

1708. Почетак полемике између Њутнових присталица и Лајбница о приоритету у погледу проналаска диференцијалног и интегралног рачуна. Џон Кејл објављује књигу: "О закону центалних сила", у којој истиче Њутна као проналазача, а Лајбница као плагијатора. Лајбниц се као члан обраћа Краљевском друштву.

1711. Објава математичког дела "Methodus differentialis".
Објављивање расправе о рачуну флуксија, написане 1665., а предате Колинсу 1669.

1713. Роџер Котес, професор астрономије у Кембрицу, објављује друго издање Принципија. Оно се разликује од првог знатним изменама, нарочито у погледу теорије Месеца и комета, које је сам Њутн припремио.
Комисија Краљевског друштва објављује књигу "Преписка Колинса и других о новој Анализи", којом се утврђује Њутнов приоритет у односу на Лајбница.

1720-1725. Почиње да болује од реуматизма и других тежих болести.

1726. Треће издање Принципија приређује некадашњи Њутнов ђак др. Пембертон.

1727. Председава седници Краљевског друштва одржаној 28. фебруара и враћа се у свој стан у Кензингтон тек 4. марта. Одмах затим пада у постељу, а 29. марта у шест сати увече губи свест.

1727. 31. Марта ноћу између један и два часа умире у 85. години. Сахрањен је уз нарочите почасти као највећи научник своје земље у чувеној Вестминстерској англиканској катедрали. Његови наследници подигли су му 1731. споменик на најугледнијем месту цркве. Споменик се састоји из саркофага са Њутновом фигуром од камена. Њутн се налази у лежећем ставу, налакћен на списе. Испред њега стоје два младића са развијеном трубом хартије на којој су нацртани једна геометријска фигура и један конвергентан ред. На предњем делу саркофага, постављеног на постољу, налазе се рељефи младића. Један држи призму, други телескоп, трећи мери вагом Сунце и планете, четврти је запослен око пећи за топљење метала, а два су натоварена кованим новцем. Иза саркофага се налазе пирамиде са звездом на врху и глобусом у средини.

1736. После Њутнове смрти објављено је његово дело "A Method of Fluyions", са осталим за живота необјављеним списима.

ЛИТЕРАТУРА:

- Исак Њутн и Њутнова принципија, проф. Др Милутин Миланковић, инж. Славко Бошкан.
- Исак Њутн – живот и рад, С.И. Вавилов.
- Успон човијека, Јаков Броновски.
- Предавања из Увода у елементарну алгебру на специјалистичким студијама Математичког факултета у Београду – др Александар Липковски.
- Виша алгебра, др Ђуро Курепа