UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Nada Perić

NEKI IDEALI NA SKUPU PRIRODNIH BROJEVA I ODGOVARAJUĆE INVARIJANTE KONTINUUMA

- magistarska teza -

Novi Sad, 2004.

19. Feb. 2005

Komisija: 1. M. Kurilić (mentor)
2. M. Grulović (predsednik)
3. S. Pilipović
4. Ž. Mijajlović

Pitanja

1. $\beta\omega$, ω^* ; $\omega^* \cong \omega_1^*$ (?)

2. $2^\omega/Fin \ncong \prod B_i/\mathcal{D}$; $\omega^* \approx \beta\mathbb{Z}$

$|B_i| \leq \omega$

3. Prelazna gustina (str. 6) ideja da se vidi da li je ... i to ...

W. Rudin
Van Mill
Yuleo
Perović

Dual

Sadržaj

I MALI KARDINALI 13

Predgovor

U **prvoj** glavi su navedene osnovne definicije i teoreme iz oblasti teorije skupova, teorije parcijalnih uređenja, teorije Boolovih algebri i topologije.

U prvom ekspozitornom delu ove teze sakupljeni su poznati rezultati vezani za male kardinale $\mathfrak{b}, \mathfrak{d}, \mathfrak{p}, \mathfrak{t}, \mathfrak{a}, \mathfrak{s}, \mathfrak{u}$.

Druga glava ovog dela posvećena je kardinalu $\mathfrak{b}$.

Na početku uvodimo relacije $=^*$ i $\leq^*$ između funkcija iz ω u ω i definišemo kada je familija preslikavanja ${}^\omega\omega$ neograničena. Dajemo i dva dokaza teoreme da je prebrojiva familija $\mathcal{B} \subseteq {}^\omega\omega$ ograničena. Prvi direktan, a drugi preko pogodno odabranog parcijalnog uređenja, koristeći generički filter. U nastavku definišemo $\mathfrak{b}$ kao minimalni kardinal $|\mathcal{B}|$, gde je $\mathcal{B} \subseteq {}^\omega\omega$ neograničena familija i pokazujemo da je $\omega < \mathfrak{b} \leq \mathfrak{c}$. Dokazujemo i tvrđenje da iz MA sledi $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$.

U **trećoj** glavi definišemo dominirajuću familiju preslikavanja iz ω u ω. Dokazujemo da ne postoji prebrojiva dominirajuća familija i definišemo kardinal $\mathfrak{d}$ kao minimalni $|\mathcal{D}|$, gde je $\mathcal{D} \subseteq {}^\omega\omega$ dominirajuća familija. Kako je svaka dominirajuća familija neograničena, sledi da je $\omega < \mathfrak{b} \leq \mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$. Takođe, koristeći generički filter dokazujemo da ne postoji prebrojiva dominirajuća familija.

U **četvrtoj** glavi na skupu $[\omega]^\omega$ definišemo relacije $\subset^*$ i $\subseteq^*$ i dajemo definiciju pseudopreseka familije $\mathcal{P} \subseteq [\omega]^\omega$. Familija $\mathcal{P} \subseteq [\omega]^\omega$ima jako svojstvo konačnog preseka ili sfip (engl.: the strong finite intersection property) ako i samo ako za svaki konačan podskup $\{P_1, ..., P_n\} \subseteq \mathcal{P}$ važi $|\bigcap_{i<n} P_i| = \omega$. Primer familije koja ima sfip, a nema pseudopresek je neglavni ultrafilter na $[\omega]^\omega$, tako da na osnovu egzistencije takvih familija dolazimo do definicije kardinala $\mathfrak{p}$, koji je minimalni kardinal takve familije.

Opet na dva načina dokazujemo da svaka prebrojiva familija $\mathcal{P} \subseteq [\omega]^\omega$ sa sfip ima pseudopresek. Jedan od dokaza je uz korišćenje generičkog filtera u pogodno odabranom parcijalnom uređenju.

Na početku **pete** glave dajemo niz lema vezanih za osobine relacija $\subset^*$ i $\subseteq^*$. U *drugoj* sekciji definišemo kada je familija $\mathcal{T} \subseteq [\omega]^\omega$ tower i navodimo neke ekvivalentne definicije towera. Dokazujemo da tower postoji, pa tako i definišemo kardinal $\mathfrak{t}$ kao minimalni kardinal $|\mathcal{T}|$, gde je $\mathcal{T} \subseteq [\omega]^\omega$ tower. Dokazujemo da je kardinal $\mathfrak{t}$ regularan i da važi relacija $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{t}$. Poslednja sekcija sadrži niz lema koje nam pomažu u dokazu tvrđenja $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{b}$.

U glavi **šest** uvodimo kardinal $\mathfrak{a}$. *Prva* sekcija sadrži definiciju skoro disjunktne familije (adf) i primere nekih adf, kao i definiciju maksimalne adf (madf) i potreban i dovoljan uslov da adf bude maksimalna. Dajemo i rezultat da je svaka adf sadržana u nekoj madf, kao i dva dokaza teoreme da prebrojiva adf ne može da bude madf. Jedan od dokaza je primenom parcijalnih uređenja, koristeći generički filter. Važe i relacije $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$.

U **sedmoj** glavi definišemo splitting familije, i definišemo $\mathfrak{s}$, kao minimalni kardinal $|\mathcal{S}|$, gde je $\mathcal{S} \subseteq [\omega]^\omega$ splitting familija. Pokazujemo da važe relacije $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{d}$ i $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{s}$.

U **osmoj** glavi definišemo neglavni ultrafilter i bazu nekog neglavnog ultrafiltera. Kardinal $\mathfrak{u}$ je minimalni kardinal $|\mathcal{B}|$, gde je $\mathcal{B} \subseteq P(\omega)$ baza nekog neglavnog ultrafiltera. Važi $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{u}$.

U **devetoj** glavi primenjujemo rezultate prethodnih sekcija konstruišući jedan primer iz topologije. Definišemo faktor algebru $P(\omega)/\mathrm{Fin}$ i navodimo neke njene osobine.

U drugom delu ove teze, čiji sadržaj pripada matematičkom folkloru, umesto ideala konačnih skupova posmatramo proizvoljan ideal $\mathcal{I}$ na ω. Skupove koji mu pripadaju zovemo mali, a one koji ne pripadaju idealu $\mathcal{I}$ zovemo pozitivnim.

U **desetoj** glavi definišemo $\mathcal{I}$-adf. $\mathcal{A}$ je $\mathcal{I}$-adf ako i samo ako svaki element familije $\mathcal{A}$ je pozitivan i presek svaka dva elementa iz $\mathcal{A}$ mali. Familija $\mathcal{A}$ je $\mathcal{I}$-madf ako za svaku $\mathcal{I}$-adf familiju koja je nadskup familije $\mathcal{A}$ sledi da su one jednake. Dajemo potreban i dovoljan uslov da $\mathcal{I}$-adf bude maksimalna. Važi da je svaka $\mathcal{I}$-adf sadržana u nekoj $\mathcal{I}$-madf i ako ideal nije maksimalan onda postoji $\mathcal{I}$-madf kardinalnosti 2. Dajemo definiciju nigde maksimalnog ideala. S pretpostavkom $(*)$ koja glasi da se svaki pozitivan skup može rastaviti na dva pozitivna skupa, postoji prebrojiva beskonačna $\mathcal{I}$-madf, pa definišemo kardinal $\mathfrak{a}_\mathcal{I}$, kao minimalni kardinal $|\mathcal{A}|$, gde je $\mathcal{A}$ beskonačna $\mathcal{I}$-madf.

U **jedanaestoj** glavi definišemo relacije $=_\mathcal{I}$ i $\subseteq_\mathcal{I}$ i navodimo osobine tih relacija. Definišemo i $\mathcal{I}$-pseudopresek kao i $\mathcal{I}$-sfip. Važi da familija pozitivnih skupova $\mathcal{P}$ koja ima $\mathcal{I}$-pseudopresek ima $\mathcal{I}$-sfip. Uz pretpostavku $(*)$ obezbeđujena je egzistencija familije sa $\mathcal{I}$-sfip bez $\mathcal{I}$-pseudopreseka, pa tako definišemo kardinal $\mathfrak{p}_\mathcal{I}$ kao minimalni $|\mathcal{P}|$, gde familija $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{I}^+$ ima $\mathcal{I}$-sfip i nema $\mathcal{I}$-pseudopresek. Uz istu pretpostavku važi $\mathfrak{p}_\mathcal{I} \leq \mathfrak{a}_\mathcal{I}$.

U **dvanaestoj** glavi definišemo $\mathcal{I}$-tower i uz uslov $(*)$ dokazujemo njegovo postojanje. Definišemo kardinal $\mathfrak{t}_\mathcal{I}$, kao minimalni kardinal $|\mathcal{T}|$, gde je $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{I}^+$ $\mathcal{I}$-tower. Kardinal $\mathfrak{t}_\mathcal{I}$ je regularan i važi $\mathfrak{p}_\mathcal{I} \leq \mathfrak{t}_\mathcal{I}$.

Trinaesta glava je posvećena kardinalu $\mathfrak{s}_\mathcal{I}$, kojeg definišemo uz pretpostavku $(*)$. Važi $\mathfrak{t}_\mathcal{I} \leq \mathfrak{s}_\mathcal{I}$.

U trećem delu teze, koji sadrži orginalne rezultate, analizirana su tri izabrana ideala na skupu racionalnih brojeva.

U **četrnaestoj** glavi posmatran je ideal $\mathcal{I}_C$, generisan familijom rastućih i ograničenih nizova racionalnih brojeva. Za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji $\mathcal{I}_C$-madf kardinalnosti n. Opadajući nizovi su pozitivni skupovi, postoji $\mathcal{I}_C$-madf kardinalnosti $\mathfrak{c}$ i postoji prebrojiva $\mathcal{I}_C$-madf odakle sledi $\mathfrak{p}_{\mathcal{I}} = \mathfrak{a}_{\mathcal{I}} = \aleph_0$.

U **petnaestoj** glavi je razmatran ideal $\mathcal{I}_{C_\omega \cup C_{\omega^*}}$, gde je C_ω familija svih rastućih i ograničenih nizova racionalnih brojeva, a C_{ω^*} familija svih opadajućih i ograničenih nizova racionalnih brojeva. Potreban i dovoljan uslov da skup pripada idealu $\mathcal{I}_{C_\omega \cup C_{\omega^*}}$ je da ima konačno tačaka nagomilavanja i da je ograničen. Postoji $\mathcal{I}_{C_\omega \cup C_{\omega^*}}$-madf kardinalnosti $\mathfrak{c}$ i prebrojiva $\mathcal{I}_{C_\omega \cup C_{\omega^*}}$-adf ne može da bude $\mathcal{I}_{C_\omega \cup C_{\omega^*}}$-madf. Dajemo i dokaz teoreme da svaka prebrojiva familija pozitivnih skupova sa $\mathcal{I}_{C_\omega \cup C_{\omega^*}}$-sfip ima $\mathcal{I}_{C_\omega \cup C_{\omega^*}}$-pseudopresek, pa važi $\omega < \mathfrak{p}_{\mathcal{I}_{C_\omega \cup C_{\omega^*}}} \leq \mathfrak{c}$.

Tema **šesnaeste** glave je ideal $\mathcal{I}_{n.g.} = \{I \subseteq \mathbb{Q} : \mathrm{Int}\overline{I} = \emptyset$ u prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})\}$. Za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji $\mathcal{I}_{n.g.}$-madf kardinalnosti n i postoji prebrojiva $\mathcal{I}_{n.g.}$-madf, kao i $\mathcal{I}_{n.g.}$-madf kardinalnosti $\mathfrak{c}$.

Spisak literature je dat na kraju teze. Notacija je u celom tekstu standardna, dok su novouvedene oznake detaljno objašnjene.

⁕ ∞ ⁕

Ovom prilikom se zahvaljujem dr Stevanu Pilipoviću na pruženoj podršci tokom postdiplomskih studija.

Dr Milan Grulović je pročitao rukopis ove teze i dao niz korisnih sugestija, čime su ovi delovi postali precizniji i jasniji. Ovom prilikom mu se zahvaljujem.

Posebnu zahvalnost dugujem mentoru, dr Milošu Kuriliću, koji me je uveo u oblast invarijanti kontinuuma i ukazao na pravce istraživanja koji su doveli do ove teze. Njegovi saveti su bitno popravili čitljivost i razumljivost rezultata navedenih u radu.

Novi Sad, novembar, 2004. Nada Perić

Oznake

$\mathbb{N}$	skup prirodnih brojeva
$\mathbb{Z}$	skup celih brojeva
$\mathbb{Q}$	skup racionalnih brojeva
$\mathbb{R}$	skup realnih brojeva
α, β, γ	ordinali
κ, λ, μ	kardinali
$\mathrm{cf}(\kappa)$	kofinalnost
κ^+	najmanji kardinal veci od κ
$\omega = \aleph_0$	prvi beskonačni kardinal (ordinal)
$\omega_1 = \aleph_1$	prvi neprebrojivi kardinal (ordinal)
$P(X)$	partitivni skup skupa X
$\lvert X \rvert$	kardinalni broj skupa X
$[X]^\kappa$	familija podskupova skupa X kardinalnosti κ
$[X]^{<\omega}$	familija konačnih podskupova skupa X
$[X]^{<\kappa}$	familija podskupova skupa X kardinalnosti manje od κ
$\langle X, \mathcal{O} \rangle$	topološki prostor
$\mathcal{O}$	familija otvorenih skupova (topologija)
$\mathcal{F}$	familija zatvorenih skupova
$\mathcal{B}$	baza topologije
$\mathcal{B}(x)$	baza okolina tačke x
f, g, h	preslikavanja
$f[A]$	direktna slika skupa A
$f^{-1}[A]$	inverzna slika skupa A
$f \upharpoonright A$	restrikcija preslikavanja f na skup A
$f \mid A$	sirjektivna restrikcija preslikavanja f na skup A
$\mathrm{dom} f$	domen preslikavanja f
$\mathrm{ran} f$	kodomen preslikavanja f
$\langle L, < \rangle$, L	linearno uređen skup
$\leq$	relacija poretka (refleksivna, antisimetrična i tranzitivna)
$<$	irefleksivna, asimetrična i tranzitivna relacija
(a, b)	otvoren interval
$[a, b]$	zatvoren interval

Glava 1

Uvod: osnovne definicije i tvrdjenja

1.1 Skupovi

1.1.1 Ordinali i kardinali

Metateorija ovog rada će biti ZFC.

U tekstu ćemo se pozvati na elementarno poznavanje ordinalne i kardinalne aritmetike (može se naći u [6], [12], [15], [16], [19]). Ovde navodimo samo pojmove i tvrđenja koja će biti korištena u ovoj tezi.

Skup x je **tranzitivan** ako i samo ako za svako $y \in x$ važi $y \subseteq x$. Tranzitivan skup α je **ordinal** ako i samo ako je $\langle \alpha, \in \rangle$ dobro uređen skup (vidi stranu 5). Klasu svih ordinala označavamo sa **ON**. Ordinale ćemo označavati slovima $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi, \zeta$.

Elementi ordinala su, takođe, ordinali. Neka je α ordinal. Za svako $\beta \in \alpha$ važi $\beta = \{\gamma \in \alpha : \gamma \in \beta\}$. Ako je $\alpha \in$ **ON**, onda je i $\alpha \cup \{\alpha\} \in$ **ON** i to je naslednik ordinala α. Ordinal α za koji postoji ordinal β takav da je $\alpha = S(\beta)$ zovemo **sledbenikom** i označavamo sa $\beta + 1$. Neprazan ordinal koji nije sledbenik zovemo **graničnim** ordinalom.

Posmatrajmo neprazan skup ordinala X. Skup $\bigcap X$ je ordinal koji pripada X i važi $\bigcap X = \min\langle X, \in \rangle$. Dakle, svaki skup ordinala je dobro uređen relacijom $\in$. Skup $\bigcup X$ je najmanji ordinal takav da za svako $\alpha \in X$ važi $\alpha \leq \bigcup X$. Skup ordinala ne mora biti ordinal, ali je zato svaki tranzitivan skup ordinala ordinal.

Svaki dobro uređen skup je izomorfan nekom ordinalu.

Slede teoreme o transfinitnoj indukciji i rekurziji na **ON**.

Teorema 1. ([12]) Neka je $A(x)$ formula. Tada važi

$$[A(0) \wedge \forall \alpha \in \mathbf{ON}((\forall \beta \in \alpha\ A(\beta)) \Rightarrow A(\alpha))] \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbf{ON}\ A(\alpha).$$

Teorema 2. ([12]) Neka je $F(x, y)$ formula sa dve slobodne promenljive takva da je $F : V \to V$. Tada jedinstveno postoji $G : \mathbf{ON} \to V$ da

$$(\forall \alpha)(G(\alpha) = F(G \restriction_\alpha).$$

Skupovi A i B su **ekvipotentni**, u oznaci $A \sim B$, ako i samo ako postoji bijekcija $f : A \to B$. Ordinal α je **kardinal** ako i samo ako za sve $\beta \in \alpha$ važi $\neg \beta \sim \alpha$. Klasu svih skupova ekvipotentnih skupu X označavamo sa $|X|$. Kardinalni broj skupa X je kardinal $\kappa \in |X|$ (egzistenciju takvog kardinala garantuje aksioma izbora).

Sabiranje i množenje kardinala, kao i njihove osobine detaljno se mogu naći u navedenoj literaturi sa početka ovog naslova. Sa ω označavamo prvi beskonačni kardinal, sa ω_1 prvi neprebrojivi kardinal.

Svaki beskonačan kardinal pomnožen sa samim sobom je opet taj isti kardinal. Proizvod i zbir dva beskonačna kardinala je uvek maksimalan kardinal od ta dva kardinala. Operacija stepenovanja beskonačnih kardinala nije trivijalna i mi ovde navodimo jedan od krajnjih rezultata, koji će nam služiti u dokazima nekih teorema.

Lema 1. (König) ([15]) Neka su κ_i i λ_i, za $i \in I$, kardinali. Ako važi $\kappa_i < \lambda_i$, tada je $\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i$.

Navodimo i veoma značajnu posledicu pomenute teoreme.

Posledica 1. ([15]) Neka su λ i κ kardinali. Tada
(a) $\kappa < 2^\kappa$;
(b) $\mathrm{cf}(2^\kappa) > \kappa$;
(c) $\mathrm{cf}(\kappa^\lambda) > \lambda$;
(d) $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} > \kappa$.

Iskaz

$$\text{Ne postoji skup } A \text{ takav da je } \aleph_0 < |A| < \mathfrak{c}$$

se zove **Hipoteza kontinuuma** i označava se sa **CH**. Ovaj iskaz je nezavisan od teorije ZFC. Drugim rečima, ni postojanje, ni nepostojanje takvog skupa A ne može da se dokaže na osnovu aksioma tog sistema (konzistentnost CH sa ZFC pokazao je Gödel 1940. godine, a konzistentnost ZFC i $\neg$CH pokazao je Cohen 1963. godine).

Označimo sa ${}^A B$ skup svih preslikavanja iz skupa A u skup B. Definišimo i sledeću oznaku ${}^{<\omega}\omega = \bigcup_{n \in \omega} {}^n\omega$.

Skup svih podskupova skupa A kardinalnosti κ označavamo sa $[A]^\kappa$. Slično, skup svih podskupova skupa A kardinalnosti $\leq \kappa$, označavamo sa $[A]^{\leq \kappa}$.

1.1.2 Realni brojevi

Osnovne definicije i tvrđenja vezane za realne brojeve mogu se naći u [22]. Ovde navodimo samo pojmove koji će biti korišteni u ovoj tezi.

Prirodni brojevi se u formalnoj teoriji skupova definišu kao skupovi: $0=\emptyset$, $1=\{0\}$, $2=\{0,1\}$, $\ldots, n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Skup prirodnih brojeva označava se sa ω.

Skup pozitivnih prirodnih brojeva označavamo sa $\mathbb{N}$, skup celih brojeva $\mathbb{Z}$, a skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$. Realne brojeve definišemo kao Dedekindove preseke u linearno uređenom skupu $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$. S druge strane, pomenuto proširenje može da se dobije takođe metodama analize, odnosno topologije - kompletiranjem metričkog prostora racionalnih brojeva. Ovaj postupak pripada Kantoru.

1.1.3 Ideali i filteri na P(X)

Osnovne definicije i tvrđenja vezane za ideale i filtere na $P(X)$ mogu se naći u [1] i [5]. Ovde navodimo samo pojmove i tvrđenja koji će biti korišteni u ovoj tezi.

Podsetimo se, neprazan skup $\mathcal{I} \subseteq P(X)$ je **ideal** na skupu X ako i samo ako važi

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$ i $X \notin \mathcal{I}$,

(I2) $A, B \in \mathcal{I} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{I}$,

(I3) $A \subseteq B \in \mathcal{I} \Rightarrow A \in \mathcal{I}$.

Skupove koji pripadaju idealu $\mathcal{I}$ zvaćemo **mali** skupovi, a one koji ne pripadaju idealu zvaćemo **pozitivnim**. Familiju pozitivnih skupova označićemo sa $\mathcal{I}^+$, tj. $\mathcal{I}^+ = P(X) \setminus \mathcal{I}$. Za ideal kažemo da je **maksimalan** ako i samo ako nije pravi podskup ni jednog većeg ideala. Označimo sa $\mathcal{I}^*$ skup komplemenata elemenata ideala $\mathcal{I}$, tj. $\mathcal{I}^* = \{X \setminus I : I \in \mathcal{I}\}$.

Familija $\mathcal{U} \subseteq P(X)$ je **filter** na skupu X ako i samo ako važe sledeći uslovi:

(FI1) $\emptyset \notin \mathcal{U}$ i $X \in \mathcal{U}$,

(FI2) $F_1, F_2 \in \mathcal{U} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{U}$,

(FI3) $\mathcal{U} \ni F \subseteq A \Rightarrow A \in \mathcal{U}$.

Za filter kažemo da je **ultrafilter** ili **maksimalni filter** ako i samo ako nije pravi podskup ni jednog većeg filtera. Označimo sa $\mathcal{U}^*$ skup komplemenata elemenata filtera $\mathcal{U}$, tj. $\mathcal{U}^* = \{X \setminus F : F \in \mathcal{U}\}$.

Filter $\mathcal{U} \subseteq P(X)$ je ultrafilter ako i samo ako za svaki podskup $A \subseteq X$ važi: $A \in \mathcal{U}$ ili $X \setminus A \in \mathcal{U}$.

Neprazna familija $\mathcal{P}$ podskupova skupa X ima **svojstvo konačnog preseka** (s.k.p.) ako i samo ako svaka konačna potkolekcija kolekcije $\mathcal{P}$ ima neprazan presek. Svaka familija koja ima svojstvo konačnog preseka je sadržana u nekom ultrafilteru.

Dokaz sledećeg, dobro poznatog tvrđenja je elementaran, te ga izostavljamo.

Teorema 3. ([1]) (a) Ideal $\mathcal{I} \subseteq P(X)$ je maksimalan ako i samo ako za svaki $A \subseteq X$ sledi $A \in \mathcal{I}$ ili $X \setminus A \in \mathcal{I}$;

(b) Filter $\mathcal{U} \subseteq P(X)$ je ultrafilter ako i samo ako za svaki $A \subseteq X$ sledi $A \in \mathcal{U}$ ili $X \setminus A \in \mathcal{U}$;

(c) Ako je $\mathcal{I}$ ideal, onda je $\mathcal{I}^*$ filter (dual ideala $\mathcal{I}$); ako je $\mathcal{U} \subseteq P(X)$ filter onda je $\mathcal{U}^*$ ideal (dual filtera $\mathcal{U}$) i važi $\mathcal{I}^{**} = \mathcal{I}$ i $\mathcal{U}^{**} = \mathcal{U}$;

(d) $\mathcal{U}$ je ultrafilter ako i samo ako je $\mathcal{U}^*$ maksimalni ideal;

(e) $\mathcal{I}$ je maksimalni ideal ako i samo ako je $\mathcal{I}^*$ je ultrafilter.

Lema 2. Ako je $\mathcal{I}$ ideal i $S \in \mathcal{I}^+$, onda je $\mathcal{I} \restriction S \stackrel{\text{def}}{=} \{I \cap S : I \in \mathcal{I}\}$ ideal na S.

Dokaz. (I1) Kako je $\emptyset \in \mathcal{I}$, sledi da je $\emptyset \in \mathcal{I} \restriction S$. Iz $S \in \mathcal{I}^+$, tj. $S \notin \mathcal{I}$, sledi $S \notin \mathcal{I} \restriction S$.

(I2) Neka $A, B \in \mathcal{I} \restriction S$. Tada je $A = I_1 \cap S$ i $B = I_2 \cap S$, gde su I_1 i $I_2 \in \mathcal{I}$. Sledi $A \cup B = (I_1 \cup I_2) \cap S$, a kako je $I_1 \cup I_2 \in \mathcal{I}$ imamo $A \cup B \in \mathcal{I} \restriction S$.

(I3) Neka je $A \subseteq B \in \mathcal{I} \restriction S$. Tada $B = I \cap S$ za neko $I \in \mathcal{I}$, pa važi $A = A \cap B = A \cap I \cap S$. Kako je $I \in \mathcal{I}$, sledi $A \cap I \in \mathcal{I}$, pa je $A \in \mathcal{I} \restriction S$. □

Lema 3. Ako je $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ particija skupa X, a $\mathcal{I}_k \subseteq P(X_k), k \leq n$ ideali, onda je ideal na X $\mathcal{I} = \{I \subseteq X : \forall k \leq n\ I \cap X_k \in \mathcal{I}_k\}$ koji nije maksimalan za $n > 1$.

Dokaz. (I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$ jer za svako $k \leq n$ važi $\emptyset \in \mathcal{I}_k$. Jasno, $X \notin \mathcal{I}$ jer bi u suprotnom za svako $k \leq n$ važilo $X \cap X_k = X_k \in \mathcal{I}_k$, a $\mathcal{I}_k$ je ideal.

(I2) Neka $A, B \in \mathcal{I}$. Tada, za svako $k \leq n$ važi $A \cap X_k, B \cap X_k \in \mathcal{I}_k$. Sada imamo $(A \cup B) \cap X_k = (A \cap X_k) \cup (B \cap X_k) \in \mathcal{I}_k$, pa $A \cup B \in \mathcal{I}$.

(I3) Neka $A \subseteq B \in \mathcal{I}$. Tada, za svako $k \leq n$ imamo $B \cap X_k \in \mathcal{I}_k$, pa važi $A \cap X_k \subseteq B \cap X_k \in \mathcal{I}_k$, odakle $A \cap X_k \in \mathcal{I}_k$. Znači $A \in \mathcal{I}$.

Da ideal nije maksimalan, sledi iz toga što $X_1 \notin \mathcal{I}$, i $\omega \setminus X_1 \notin \mathcal{I}$. □

1.2 Parcijalna uredjenja

1.2.1 Osnovne definicije i tvrdjenja

Ako je $\mathbb{P}$ neprazan skup i $\leq$ relacija poretka na $\mathbb{P}$, tada uređeni par $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ nazivamo **parcijalno uređen skup**. Parcijalno uređen skup $\mathbb{P}$ je **linearno uređen** ako i samo ako su svaka dva elementa skupa $\mathbb{P}$ uporediva.

Neka je $\emptyset \neq X \subseteq P$ i neka $a \in P$. Tada je a:

- *gornje ograničenje* (majoranta) skupa X ako $\forall x \in X \quad x \leq a$.
- *donje ograničenje* (minoranta) skupa X ako $\forall x \in X \quad a \leq x$.
- *supremum* skupa X (u oznaci $\sup X$) ako je a majoranta skupa X i za svaku majorantu b skupa X važi da je $a \leq b$.
- *infimum* skupa X (u oznaci $\inf X$) ako je a minoranta skupa X i za svaku minorantu b skupa X važi da je $b \leq a$.
- *maksimum* skupa X ako $a \in X$ i za svako $x \in X$ važi da je $x \leq a$.
- *minimum* skupa X ako $a \in X$ i za svako $x \in X$ važi da je $a \leq x$.

Skup X je **odozgo ograničen** ako i samo ako ima gornje ograničenje (majorantu), dok je **odozdo ograničen** ako i samo ako ima donje ograničenje (minorantu).

Parcijalno uređen skup X je **dobro uređen** ako i samo ako svaki neprazan podskup skupa X ima minimum. Svaki dobro uređen skup je linearno uređen i ima minimum.

Neka je $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ parcijalno uređenje. Skup $A \subseteq \mathbb{P}$ je **lanac** ako i samo ako su svi elementi skupa A po parovima uporedivi.

Teorema 4. Linearno uređen skup je dobro uređen ako i samo ako nema beskonačni opadajući lanac.

Dokaz. ($\Leftarrow$) Pretpostavimo da skup S nije dobro uređen. Neka je $x \in S$. Kako S nije dobro uređen, nema minimalnog elementa, pa postoji $x_1 < x$, $x_1 \in S$. Slično, postoji $x_2 \in S$, da $x_2 < x_1$. Nastavljajući postupak dobijamo opadajući lanac $\ldots < x_2 < x_1 < x$, kontradikcija. □

Lema 4. (Lema Zorna) Ako je $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ parcijalno uređen skup u kome svaki lanac ima gornje ograničenje, onda u $\mathbb{P}$ postoji maksimalni element.

1.2.2 Generički filter. Teorema Rasiowa-Sikorski

Osnovne definicije i tvrđenja vezane za generički filter mogu se naći u [12] i [15]. Ovde navodimo samo pojmove i tvrđenja koji će biti korišteni u ovoj tezi.

Neka je $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ parcijalno uređenje. Neprazan skup $G \subseteq \mathbb{P}$ je **filter** ako i samo ako

(F1) Za svako $p, q \in G$ postoji $r \in G$ takvo da je $r \leq p, q$;

(F2) Ako p pripada G, onda su svi elementi veći od p u G.

Skup $D \subseteq \mathbb{P}$ je **gust** ako i samo ako za svako $p \in \mathbb{P}$ postoji $d \in D$, takvo da je $d \leq p$.

Neka je $\mathcal{D}$ familija gustih podskupova skupa $\mathbb{P}$. Filter $G \subseteq \mathbb{P}$ je **$\mathbb{P}$- generički filter nad** $\mathcal{D}$ ako i samo ako G seče svaki element familije $\mathcal{D}$, odnosno $D \cap G \neq \emptyset$, za svako $D \in \mathcal{D}$.

Teorema 5. Neka je $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ parcijalno uređenje i $\mathcal{D}$ prebrojiva familija gustih skupova. Tada postoji filter $G \subseteq \mathbb{P}$, koji je $\mathbb{P}$-generički filter nad $\mathcal{D}$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\}$ familija gustih skupova. Rekurzijom definišimo niz $\langle p_n : n \in \omega \rangle$ u $\mathbb{P}$. Biramo $p_0 \in D_0$. Skup D_1 je gust, pa biramo $p_1 \in D_1$, takvo da je $p_1 \leq p_0$. Skup D_2 je gust, pa biramo $p_2 \in D_2$ takvo da $p_2 \leq p_1$. Nastavljajući tako dobijamo niz $p_0 \geq p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n \geq \ldots$, gde je $p_n \in D_n$, za $n \in \omega$. Definišimo $G = \{q \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega\ q \geq p_n\}$. Jasno je da $G \cap D_n \neq \emptyset$, za sve $n \in \omega$. Pokažimo da je G filter. Ako $q_1, q_2 \in G$ i $q_1 \geq p_{n_1}, q_2 \geq p_{n_2}$, onda je $q_1, q_2 \geq p_n$, gde je $n = \max\{n_1, n_2\}$. Drugi uslov je još očigledniji. Sledi G je filter. □

Elementi $p, q \in \mathbb{P}$ su **kompatibilni** ako i samo ako postoji $r \in \mathbb{P}$, za koje važi $r \leq p, q$. Inače su nekompatibilni i to označavamo sa $p \perp q$.

Skup $A \subseteq \mathbb{P}$ je **antilanac** ako i samo ako su svi elementi skupa A po parovima nekompatibilni.

Skup $\mathbb{P}$ zadovoljava **ccc** (engl.: the countable chain condition) ako i samo ako je svaki antilanac u $\mathbb{P}$ najviše prebrojiv.

Kardinal $cc(\mathbb{P})$ je najmanji kardinal κ takav da je svaki antilanac u $\mathbb{P}$ kardinalnosti manje od κ.

Primer 1. Ako je $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ uobičajena realna prava, onda u $\langle \mathcal{O} \setminus \{\emptyset\}, \subseteq \rangle$ važi: $p \perp q$ ako i samo ako je $p \cap q = \emptyset$; A je antilanac u $\langle \mathbb{P}, \subseteq \rangle$ ako i samo ako je A disjunktna familija otvorenih (nepraznih) skupova. Ovde je $cc(\mathbb{P}) = \omega_1$.

Primer 2. Ako je $\mathbb{B}$ Booleova algebra i $\mathbb{P} = \mathbb{B} \setminus \{0\}$, onda u $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ važi $p \perp q$ ako i samo ako $p \wedge q = 0$.

1.2.3 Teorema Cantora o uredjenju $\mathbb{Q}$

Osnovne definicije i tvrđenja vezane za Cantorovu teoremu o uređenju mogu se naći u [4] i [30]. Ovde dajemo samo dokaz te teoreme.

Teorema 6. (Cantor) Ako su $\langle A, <_A \rangle$, $\langle B, <_B \rangle$ prebrojiva gusta linearna uređenja bez krajnjih tačaka, onda postoji izomorfizam $f : \langle A, <_A \rangle \to \langle B, <_B \rangle$.

Dokaz. Neka je

$$\mathbb{P} = \{\varphi : \varphi \text{ je funkcija } \wedge \operatorname{dom}\varphi \subseteq A \wedge \operatorname{ran}\varphi \subseteq B \wedge |\varphi| < \aleph_0 \wedge \varphi \text{ je rastuća}\}.$$

Tada je $\langle \mathbb{P}, \supseteq \rangle$ parcijalno uređenje. Definišimo skupove
$D_a = \{\varphi \in \mathbb{P} : a \in \operatorname{dom}\varphi\}, a \in A$ i
$D_b = \{\varphi \in \mathbb{P} : b \in \operatorname{ran}\varphi\}, b \in B$.

Dokažimo da su skupovi D_a i D_b gusti, za sve $a \in A$ i $b \in B$. Pokažimo prvo za D_a. Neka je $\varphi \in \mathbb{P}$ i $\varphi \notin D_a$. Prema definiciji skupa D_a važi $|\varphi| < \aleph_0$ i $a \notin \operatorname{dom}\varphi$. Neka je $\operatorname{dom}\varphi = \{a_1, \ldots, a_n\}$, gde je $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Moguće je:

(i) $a \in (a_i, a_{i+1})$ za neko $i \in \{1, \ldots, n-1\}$: neka je $\varphi(a_i) = b_i, \varphi(a_{i+1}) = b_{i+1}$. Kako je skup B gust biramo $b \in (b_i, b_{i+1})$ i definišemo $\psi = \varphi \cup \{\langle a, b \rangle\}$. Tada $\psi \in D_a$ i $\psi \supseteq \varphi$.

(ii) $a < a_1$: ako je $\varphi(a_1) = b_1$, biramo $b < b_1, b \in B$. Definišimo ψ na sledeći način: $\psi = \varphi \cup \{\langle a, b \rangle\}$. Tada $\psi \in D_a$ i $\psi \supseteq \varphi$.

(iii) $a > a_n$: slično kao prethodni slučaj.

Jasno, $\psi \in D_a$ i $\psi \supseteq \varphi$. Sledi: skup D_a je gust za svako $a \in A$.

Neka je sada $\varphi \in \mathbb{P}$ i $\varphi \notin D_b$. Jasno, prema definiciji skupa D_b važi $|\varphi| < \aleph_0$ i $b \notin \operatorname{ran}\varphi$. Neka je $\operatorname{ran}\varphi = \{b_1, \ldots, b_n\}$, gde je $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$. Moguće je:

(i) $b \in (b_i, b_{i+1})$ za neko $i \in \{1, \ldots, n-1\}$: neka je $\varphi(a_i) = b_i, \varphi(a_{i+1}) = b_{i+1}$. Kako je skup A gust biramo $a \in (a_i, a_{i+1})$ i definišemo $\psi = \varphi \cup \{\langle a, b \rangle\}$. Tada $\psi \in D_b$ i $\psi \supseteq \varphi$.

(ii) $b < b_1$: ako je $\varphi(a_1) = b_1$, biramo $a < a_1, a \in A$. Definišimo ψ, sa $\psi = \varphi \cup \{\langle a, b \rangle\}$. Tada $\psi \in D_b$ i $\psi \supseteq \varphi$.

(iii) $b > b_n$: slično kao prethodni slučaj.

Jasno, $\psi \in D_b$ i $\psi \supseteq \varphi$. Sledi skup D_b, za sve $b \in B$ je gust.

Prema teoremi 5, kako je $\mathcal{D} = \{D_a : a \in A\} \cup \{D_b : b \in B\}$ prebrojiva familija gustih skupova na $\langle \mathbb{P}, \supseteq \rangle$, postoji $\mathbb{P}$-generički filter nad $\mathcal{D}$. Označimo ga sa G. Za $f_G \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\varphi \in G} \varphi$ važi sledeće:

(a) f_G je funkcija,

(b) Funkcija f_G je rastuća,

(c) $\mathrm{dom} f_G = A$,

(d) $\mathrm{ran} f_G = B$.

Neka su $\varphi, \psi \in G$. Kako postoji $\eta \in G$, tako da $\eta \supseteq \varphi, \psi$ i kako je η funkcija, sledi $\varphi \cup \psi$ je funkcija, pa je (a) dokazano.

Pokažimo da je f_G rastuća funkcija. Neka su $a, b \in A$ i neka je $a <_A b$. Pretpostavimo, što ne utiče na opštostrazmatranja, $f_G(a) = \varphi(a)$ i $f_G(b) = \varphi(b)$ za neko $\varphi \in G$. Kako je $\varphi \in \mathbb{P}$, ona je rastuća, pa važi $\varphi(a) <_B \varphi(b)$, tj. $f_G(a) <_B f_G(b)$, čime je dokazano (b).

Pokažimo (c), tj. da važi $\mathrm{dom} f_G = A$. Neka je $a \in A$. Kako je D_a gust, postoji $\psi \in G \cap D_a$, pa je $a \in \mathrm{dom}\psi \subseteq \mathrm{dom} f_G$, čime je dokazano da je $\mathrm{dom} f_G = A$.

Pokažimo (d). Neka je $b \in B$. Kako je D_b gust, postoji $\psi \in G \cap D_b$, te je $b \in \mathrm{ran}\psi \subseteq \mathrm{ran} f_G$; dakle $\mathrm{ran} f_G = B$. □

1.2.4 Martinova aksioma

Osnovne definicije i tvrđenja vezane za Martinovu aksiomu mogu se naći u [12], [15] i [26]. Ovde navodimo samo pojmove koji će biti korišteni u ovoj tezi.

Za beskonačan kardinal κ, MA(κ), je iskaz: ako je $\mathbb{P}$ ccc parcijalno uređenje i $\mathcal{D} \subseteq P(\mathbb{P})$ familija gustih skupova, gde je $|\mathcal{D}| \leq \kappa$, onda postoji $\mathbb{P}$ -generički filter nad $\mathcal{D}$. **Martinova aksioma**, skraćeno **MA** je iskaz $\forall \kappa < \mathfrak{c}$ MA(κ).

Napomena 1.

(1) MA(ω) važi uvek (teorema 5), pa CH implicira MA.

(2) Konzistenciju MA+$\neg$CH su dokazali Solovay i Tenennbaum 1971. godine metodom iteriranog forsinga, ([15]).

Primer 3. MA nije tačna za parcijalna uređenja koja nisu ccc: Ako CH važi i $\mathbb{P} = {}^{<\omega}\omega_1$, tada su za parcijalno uređenje $\langle \mathbb{P}, \supseteq \rangle$, skupovi $D_\alpha = \{\varphi \in \mathbb{P} : \alpha \in \mathrm{ran}\varphi\}$, $\alpha \in \omega_1 = \mathfrak{c}$ gusti u $\mathbb{P}$. Neka je $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Kada bi postojao $\mathbb{P}$-generički filter G nad $\mathcal{D}$, onda bi $g = \bigcup_{\varphi \in G} \varphi : \omega \to \omega_1$ bila sirjekcija, što je nemoguće.

1.3 Booleove algebre

1.3.1 Osnovne definicije

Osnovne definicije i tvrđenja vezane za Booleove algebre mogu se naći u [8], [20] i [27]. Ovde navodimo samo pojmove koji će biti korišteni u ovoj tezi.

Algebra $\langle \mathbb{B}, \wedge, \vee, ^c, 0, 1\rangle$ gde su $\wedge$ i $\vee$ binarne, ^{c} unarna operacija, a 0 i 1 konstante je Booleova algebra ako i samo ako važe sledeći uslovi (za sve $p, q, r \in \mathbb{B}$):

1) $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$ i $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$ (asocijativnost),
2) $p \wedge q = q \wedge p$ i $p \vee q = q \vee p$ (komutativnost),
3) $p \wedge p = p$ i $p \vee p = p$ (idempotentnost),
4) $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ i $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (distributivnost),
5) $(p \wedge q)^c = p^c \vee q^c$ i $(p \vee q)^c = p^c \wedge q^c$ (De Morganovi zakoni),
6) $p \wedge 0 = 0$ i $p \vee 0 = p$,
7) $p \wedge 1 = p$ i $p \vee 1 = 1$,
8) $p \wedge p^c = 0$ i $p \vee p^c = 1$,
9) $0^c = 1$ i $1^c = 0$,
10) $(p^c)^c = p$.

Na primer $\langle P(X), \cap, \cup, ^c, \emptyset, X\rangle$, gde je X proizvoljan skup, je Booleova algebra.

Neka je $\mathbb{B}$ Boole-ova algebra. Relaciju poretka $\leq \subseteq \mathbb{B}^2$ definišimo na sledeći način $p \leq q$ ako i samo ako $p \wedge q = p$.

Algebra $\mathbb{B}$ je **kompletna** Booleova algebra ako i samo ako za svaki neprazan skup $S \subseteq \mathbb{B}$ postoji sup$S$ (ili ekvivalentno inf$S$). Na primer za svaki skup X je Booleova algebra $\langle P(X), \cap, \cup, ^c, \emptyset, X\rangle$ kompletna. Algebra $\mathbb{B}$ je **σ-algebra** ako i samo ako za svaki neprazan, prebrojiv skup $S \subseteq \mathbb{B}$ postoji sup$S$ (ili ekvivalentno inf$S$).

Neka je $\mathbb{B}$ Booleova algebra. Familija $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{B}^+ \overset{\text{def}}{=} \{a \in \mathbb{B} : a > 0\}$, je **antilanac** ako i samo ako za svaka dva različita elementa $a, b \in \mathcal{A}$ važi $a \wedge b = \emptyset$. Ako važi i $\bigvee_{a \in \mathcal{A}} a = 1$, familija $\mathcal{A}$ je **particija jedinice**.

Skup $D \subseteq \mathbb{B}^+$ je **gust** ako i samo ako za svako $x \in \mathbb{B}^+$ postoji $y \in D$, takvo da važi $y \leq x$.

1.3.2 Ideal. Faktor algebra

Neprazan skup $I \subseteq \mathbb{B}$, gde je $\mathbb{B}$ nosač Boolove algebre, je **ideal** ako i samo ako važi

(I1) $0 \in I$ i $1 \notin I$;
(I2) $p, q \in I \Rightarrow p \vee q \in I$;
(I3) $p \leq q \in I \Rightarrow p \in I$.

Neka je $\mathbb{B}$ Booleova algebra. Relacija $\sim \subseteq \mathbb{B}^2$ je **kongruencija** ako i samo ako važi

(K1) Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije;
(K2) Ako važi $p \sim p_1$ i $q \sim q_1$, sledi $p \wedge q \sim p_1 \wedge q_1$;
(K3) Ako važi $p \sim p_1$, sledi $p^c \sim p_1^c$.

Teorema 7. ([8]) Za neki ideal I neka je relacija $\sim \subseteq \mathbb{B}^2$ definisana na sledeći način: $p \sim q$ ako i samo ako $p \triangle q \in I$ ($p \triangle q \overset{\text{def}}{=} (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$). Tada važi:

(a) Relacija $\sim$ je kongruencija;

(b) Uređena šestorka $\langle \mathbb{B}/\sim, \wedge, \vee, ', [0], [1]\rangle$, gde je $\mathbb{B}/\sim = \{[p] : p \in B\}$ i $[p] \overset{\text{def}}{=} \{q \in B : p \sim q\}$, gde su operacije definisane na sledeći način $[p] \wedge [q] = [p \wedge q]$, $[p] \vee [q] = [p \vee q]$ i $[p]' = [p']$, je Booleova algebra;

(c) Preslikavanje $q : \mathbb{B} \to \mathbb{B}/\sim$ je sirjektivni homomorfizam (epimorfizam).

Algebra $\mathbb{B}/\sim$ je **faktor algebra** algebre $\mathbb{B}$.

1.4 Topološki prostori

Osnovne definicije i tvrđenja vezane za topološke prostore mogu se naći u [3], [7], [14], [17] i [18]. Ovde navodimo samo pojmove i tvrđenja koji će biti korišteni u ovoj tezi.

1.4.1 Otvoreni i zatvoreni skupovi. Potprostor

Neka je X neprazan skup. Familija $\mathcal{O}$ podskupova X je **familija otvorenih skupova** ako i samo ako važe sledeći uslovi:

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$

(O2) $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$

(O3) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{O}$

Za kolekciju $\mathcal{O}$ kažemo da je **topologija** na skupu X, za $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ kažemo da je **topološki prostor**, dok su elementi skupa X **tačke**.

Skup $F \subseteq X$ je **zatvoren** ako i samo ako je $X \setminus F$ otvoren skup. Familiju zatvorenih skupova obeležavamo sa $\mathcal{F}$.

Prebrojivu uniju zatvorenih skupova zovemo F_σ**-skup**. Prebrojivi presek otvorenih skupova zovemo G_δ**-skup**.

Neka su $\mathcal{O}_1$ i $\mathcal{O}_2$ topologije na skupu X. Ako je $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$ onda je topologija $\mathcal{O}_2$ **finija** od topologije $\mathcal{O}_1$, tj. topologija $\mathcal{O}_1$ je **grublja** od topologije $\mathcal{O}_2$.

Neka je $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ topološki prostor i $A \subseteq X$. Familiju $\mathcal{O}_A = \{O \cap A : O \in \mathcal{O}\}$ zovemo **indukovana topologija** topologijom $\mathcal{O}$, a topološki prostor $\langle A, \mathcal{O}_A \rangle$ potprostorom prostora $\langle X, \mathcal{O} \rangle$. Ako je $A \in \mathcal{O}$ onda je A **otvoren potprostor**. Ako je $A \in \mathcal{F}$ onda je A **zatvoren potprostor**.

Topološki prostor $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ je **savršen** ako i samo ako ne postoji tačka $x \in X$ takva da je $\{x\} \in \mathcal{O}$, tj. u X ne postoje izolovane tačke.

1.4.2 Baza topologije. Okoline. Težina i karakter

Posmatrajmo topološki prostor $\langle X, \mathcal{O} \rangle$. Familija $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ je **baza topologije** $\mathcal{O}$ ako i samo ako važe sledeći uslovi:

(B1) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$

(B2) Svaki otvoren skup se može predstaviti kao unija baznih.

Familija $\mathcal{P} \subseteq P(X)$ je **podbaza** topologije $\mathcal{O}$ ako i samo ako važe sledeći uslovi:

(PB1) $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{O}$

(PB2) Familija konačnih preseka elemenata $\mathcal{P}$ je neka baza topologije $\mathcal{O}$.

Međutim, topologija može biti zadana pomoću baze. Tako je familija $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ baza neke topologije na skupu X ako i samo ako važe sledeći uslovi:

(BN1) $\bigcup \mathcal{B} = X$

(BN2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}\ \exists \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}\ (B_1 \cap B_2 = \bigcup \mathcal{B}_1)$

Takođe, topologija može biti definisana pomoću podbaze, pa je familija $\mathcal{P} \subseteq P(X)$ podbaza neke topologije na X ako i samo ako je $\bigcup \mathcal{P} = X$.

Neka je $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ topološki prostor. Skup $A \subseteq X$ je **okolina tačke** $x \in X$ ako i samo ako postoji $O \in \mathcal{O}$ takav da je $x \in O \subseteq A$. Familiju svih okolina tačke x označavamo sa $\mathcal{U}(x)$. Skup $A \subseteq X$ je otvoren ako i samo ako je okolina svake svoje tačke. Familija skupova $\mathcal{B}(x)$ je **baza okolina** tačke x ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:

(BO1) $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$

(BO2) $\forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists B \in \mathcal{B}(x)\ (B \subseteq U)$

Rećićemo da topološki prostor $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ zadovoljava **prvu aksiomu prebrojivosti** ako i samo ako u svakoj tački $x \in X$ postoji prebrojiva baza okolina. X zadovoljava **drugu aksiomu prebrojivosti** ako i samo ako postoji prebrojiva baza $\mathcal{B}$ topologije $\mathcal{O}$. Ako topološki prostor zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti, onda zadovoljava i prvu aksiomu prebrojivosti. Ove dve osobine se mogu uopštiti. **Karakter tačke** $x \in X$, u oznaci $\chi(x, X)$, je najmanji beskonačni kardinal κ za koji postoji baza okolina tačke x kardinalnosti κ; Ako se zna o kom je prostoru reč, možemo pisati $\chi(x)$. **Karakter prostora** X, u oznaci $\chi(X)$ je $\sup\{\chi(x, X) : x \in X\}$. Beskonačni kardinal κ je **težina prostora** X, u oznaci $w(X) = \kappa$, ako i samo ako je κ najmanji beskonačni kardinal za koji postoji baza topologije prostora X kardinalnosti κ. Karakter prostora je uvek manji ili jednak težini.

1.4.3 Adherencija i izvod. Separabilnost

Neka je $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ topološki prostor i $A \subseteq X$. Tačka $x \in X$ je **adherentna tačka** skupa A ako i samo ako svaka okolina tačke x seče skup A. Tačka $x \in X$ je **tačka nagomilavanja** skupa A ako i samo ako svaka okolina tačke x seče skup $A \setminus \{x\}$. Skup svih adherentnih tačaka skupa A zovemo **adherencija** (ili **zatvaranje**) skupa A, u oznaci $\overline{A}$, dok skup svih tačaka nagomilavanja skupa A zovemo **izvod** skupa A, u oznaci A'.

Teorema 8. ([7]) Izvod skupa ima sledeće osobine:

(a) Ako je $A \subseteq B$, onda je $A' \subseteq B'$;

(b) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

Teorema 9. ([7]) Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada za proizvoljne podskupove $A, B \subseteq X$ važi:

(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(b) $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$;

(c) Ako $A \subseteq B$, onda $\mathrm{Int}A \subseteq \mathrm{Int}B$ i $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Skup $D \subseteq X$ je **gust** u X ako i samo ako je $\overline{D} = X$. Skup D je gust u topološkom prostoru X ako i samo ako seče svaki neprazan bazni skup. Gustinu prostora X u oznaci $d(x)$ je $\min\{|D| : \overline{D} = X\} + \aleph_0$. Prostor X je **separabilan** ako i samo ako postoji prebrojiv gust skup u X. Ako prostor X zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti onda i je separabilan. Obratno ne mora da važi.

1.4.4 Aksiome separacije

Topološki prostor $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ je

- T_0**-prostor** ako i samo ako za svake dve različite tačke postoji otvoren skup koji sadrži tačno jednu od njih.
- T_1**-prostor** ako i samo ako za svake dve različite tačke $x, y \in X$ postoji otvoreni skup O da je $x \in O$, a $y \notin O$.
- T_2**-prostor** ako i samo ako za svake dve različite tačke $x, y \in X$ postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1 i O_2 da $x \in O_1$ i $y \in O_2$. T_2-prostor se naziva i **Hausdorffov prostor**
- T_3**-prostor** ako i samo ako je T_1-prostor i za svaki zatvoren skup F i svaku tačku $x \notin F$ postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1 i O_2 da je $x \in O_1$ i $F \subseteq O_2$. T_3-prostor se naziva i **regularan prostor**.
- $T_{3\frac{1}{2}}$**-prostor** ako i samo ako je T_1-prostor sa osobinom da za svaki zatvoren skup F i svaku tačku $x \notin F$ postoji neprekidno preslikavanje $f : X \to [0,1]$ takvo da je $f(x) = 0$ i $f[F] \subseteq \{1\}$. $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor se naziva i **Tihonovski** ili **kompletno regularan prostor**.
- T_4**-prostor** ako i samo ako je T_1-prostor i za svaka dva zatvorena disjunktna skupa F_1 i F_2 postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1 i O_2 da je $F_1 \subseteq O_1$ i $F_2 \subseteq O_2$. T_4-prostor se naziva i **normalan** prostor.
- T_5**-prostor** ako i samo ako je T_4-prostor i svaki njegov potprostor je T_4-prostor. T_5-prostor se naziva i **nasledno normalan**.
- T_6**-prostor** ako i samo ako je T_4-prostor i svaki njegov zatvoren skup je G_δ skup. T_6-prostor se naziva i **savršeno normalan**.

Topološki prostor je T_1-prostor ako i samo ako su svi singltoni (jednoelementni skupovi) zatvoreni.

Važi sledeći niz implikacija:

$$T_6 \Rightarrow T_5 \Rightarrow T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0.$$

Topološki prostor je **nuladimenzionalan** ako i samo ako je T_2 i ako postoji baza koja se sastoji od skupova koji su istovremeno otvoreni i zatvoreni.

DEO I

MALI KARDINALI

Glava 2

Kardinal $\mathfrak{b}$

2.1 Neograničene familije u skupu ${}^{\omega}\omega$. Kardinal $\mathfrak{b}$

Definicija 1. Neka su $f, g : \omega \to \omega$ proizvoljna preslikavanja. Definišimo relacije $=^*$ i $\leq^*$ na sledeći način:
$f =^* g$ akko $\exists k_0 \in \omega\ \forall k \geqslant k_0\ f(k) = g(k)$,
$f \leq^* g$ akko $\exists k_0 \in \omega\ \forall k \geqslant k_0\ f(k) \leq g(k)$.

Lema 5. Relacija $=^*$ je relacija ekvivalencije na ${}^{\omega}\omega$. Relacija $\leq^*$ je refleksivna i tranzitivna, nije antisimetrična, ali $f \leq^* g$ i $g \leq^* f$ implicira $f =^* g$. Relacija $\leq$ na ${}^{\omega}\omega / =^*$ definisana sa $[f] \leq [g]$ akko $f \leq^* g$ je dobro definisana i to je relacija poretka na ${}^{\omega}\omega / =^*$.

Definicija 2. Familija $\mathcal{B} \subseteq {}^{\omega}\omega$ je **ograničena** akko postoji funkcija $g : \omega \to \omega$ tako da za svako $f \in \mathcal{B}$ važi $f \leq^* g$.

Primer 4. Familija funkcija konstanti $\{f_n : n \in \omega\}$, gde je $f_n(k) = n$, za svako $k \in \omega$, je ograničena, jer je $f_n \leq^* g$, gde je $g(k) = k$ za svako $k \in \omega$.

Primer 5. Familija $\{f_n : n \in \omega\}$, gde je $f_n(k) = k + n$, za sve $k \in \omega$, je ograničena, jer $f_n \leq^* g$, gde je $g(k) = 2k$, za sve $k \in \omega$.

Teorema 10. Svaka prebrojiva familija $\mathcal{B} \subseteq {}^{\omega}\omega$ je ograničena.

Dokaz. Neka je $\mathcal{B} = \{f_n : n \in \omega\} \subseteq {}^\omega\omega$. Definišimo funkciju $g : \omega \to \omega$ na sledeći način: $g(0) = f_0(0)$, $g(1) = \max\{f_0(1), f_1(1)\}$, $g(2) = \max\{f_0(2), f_1(2), f_2(2)\}, \ldots, g(n) = \max\{f_i(n) : i \leq n\}$.

Neka je $n_1 \in \omega$ proizvoljno. Tada za svako $k \geq n_1$, sledi $g(k) = \max\{f_n(k) : n \leq k\} \geq f_{n_1}(k)$. Dakle, $f_{n_1} \leq^* g$, za sve $n_1 \in \omega$, pa je familija $\mathcal{B}$ ograničena. □

Definicija 3. $\mathfrak{b} = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \subseteq {}^\omega\omega$ je neograničena familija$\}$.

Teorema 11. $\omega < \mathfrak{b} \leq \mathfrak{c}$.

Dokaz. Prva nejednakost sledi iz teoreme 10. Druga nejednakost sledi iz $|{}^\omega\omega| = |\omega|^{|\omega|} = \omega^\omega = 2^\omega = \mathfrak{c}$. □

2.2 Uredjenje $\mathbb{P}_\mathcal{B}$. Generički dokaz neprebrojivosti kardinala $\mathfrak{b}$

Ako je L konačan podskup skupa ${}^\omega\omega$ definišimo $L(k) = \max\{f(k) : f \in L\}$.

Ovde ćemo teoremu 10 dokazati na drugi način, koristeći pojam generičkog filtera. Neka je $\mathcal{B} \subseteq {}^\omega\omega$ proizvoljna familija. Neka je

$$\mathbb{P}_\mathcal{B} = \{\langle \varphi, K\rangle : \varphi \in {}^{<\omega}\omega \wedge K \subseteq \mathcal{B} \text{ je konačan skup}\}$$

i neka je $\leq$ binarna relacija na $\mathbb{P}_\mathcal{B}$ data sa

$$\langle \varphi, K\rangle \leq \langle \psi, L\rangle \text{ akko } \varphi \supseteq \psi \wedge K \supseteq L \wedge \forall k \in \mathrm{dom}\varphi \setminus \mathrm{dom}\psi\ (\varphi(k) \geq \cancel{L}(k)).$$ ψ

Lema 6. $\langle \mathbb{P}_\mathcal{B}, \leq\rangle$ je parcijalno uređenje.

Dokaz. Refleksivnost i antisimetričnost relacije $\leq$ su evidentne. Dokazaćemo tranzitivnost. Ako je $\langle \varphi_1, K_1\rangle \leq \langle \varphi_2, K_2\rangle \leq \langle \varphi_3, K_3\rangle$, onda je $\varphi_1 \supseteq \varphi_2 \supseteq \varphi_3$ i $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3$, pa $\varphi_1 \supseteq \varphi_3$ i $K_1 \supseteq K_3$. Pritom važi: (1) $\forall k \in \mathrm{dom}\varphi_1 \setminus \mathrm{dom}\varphi_2\ \varphi_1(k) \geq K_2(k)$ i (2) $\forall k \in \mathrm{dom}\varphi_2 \setminus \mathrm{dom}\varphi_3\ \varphi_2(k) \geq K_3(k)$.

Neka $k \in \mathrm{dom}\varphi_1 \setminus \mathrm{dom}\varphi_3$. Ako je $k \in \mathrm{dom}\varphi_1 \setminus \mathrm{dom}\varphi_2$, onda je $\varphi_1(k) \geq K_2(k) \geq K_3(k)$, jer je $K_3 \subseteq K_2$. S druge strane, ako je $k \in \mathrm{dom}\varphi_2 \setminus \mathrm{dom}\varphi_3$, onda je $\varphi_1(k) = \varphi_2(k) \geq K_3(k)$, zbog (2). □

Lema 7. Za svako $n \in \omega$, skup $D_n = \{\langle \varphi, K\rangle \in \mathbb{P}_\mathcal{B} : \mathrm{dom}\varphi \geq n\}$ je gust.

Dokaz. Neka $\langle \psi, L\rangle \in \mathbb{P}_\mathcal{B}$. Ako je $\mathrm{dom}\psi \geq n$, onda $\langle \psi, L\rangle \in D_n$. Neka je $\mathrm{dom}\psi = m < n$. Definišimo $\varphi : n \to \omega$ sa

$$\varphi(k) = \begin{cases} \psi(k), & \text{za } k < m, \\ L(k), & \text{za } m \leq k < n. \end{cases}$$

Tada $\varphi \supseteq \psi$, $L \supseteq L$ i za svako $k \in \mathrm{dom}\varphi \setminus \mathrm{dom}\psi$ važi $\varphi(k) \geq L(k)$, pa je $\langle \varphi, L\rangle \leq \langle \psi, L\rangle$ i pritom $\langle \varphi, L\rangle \in D_n$. □

Lema 8. Za svako $f \in \mathcal{B}$, skup $\Delta_f = \{\langle \varphi, K \rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{B}} : f \in K\}$ je gust.

Dokaz. Neka $\langle \varphi, K \rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{B}}$. Tada trivijalno $\Delta_f \ni \langle \varphi, K \cup \{f\} \rangle \leq \langle \varphi, K \rangle$. □

Teorema 12. Svaka prebrojiva familija $\mathcal{B} \subseteq {}^{\omega}\omega$ je ograničena, dakle $\mathfrak{b} > \aleph_0$. Preciznije, neka je $\mathcal{B} \subseteq {}^{\omega}\omega$ prebrojiva familija i $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\} \cup \{\Delta_f : f \in \mathcal{B}\}$. Tada

(a) postoji $\mathbb{P}$-generički filter G nad $\mathcal{D}$,

(b) ako je $g = \bigcup_{\langle \varphi, K \rangle \in G} \varphi$, onda $g : \omega \to \omega$ i $f \leq^* g$, za sve $f \in \mathcal{B}$.

Dokaz. (a) je posledica teoreme 5 i činjenice $|\mathcal{D}| = \aleph_0$.

(b) Pokažimo da je g funkcija. Pokazaćemo da $\langle \varphi, K \rangle, \langle \psi, L \rangle \in G$ implicira kompatibilnost φ i ψ, tj. da za svako $k \in \mathrm{dom}\varphi \cap \mathrm{dom}\psi$ važi $\varphi(k) = \psi(k)$. Skup G je filter, pa postoji $\langle \xi, N \rangle \in G$, tako da je $\langle \xi, N \rangle \leq \langle \varphi, K \rangle, \langle \psi, L \rangle$. Jasno, $\xi \supseteq \varphi, \psi$, odakle $\mathrm{dom}\varphi \cap \mathrm{dom}\psi \subseteq \mathrm{dom}\xi$, pa je za $k \in \mathrm{dom}\varphi \cap \mathrm{dom}\psi$, $\varphi(k) = \xi(k) = \psi(k)$.

Pokažimo $\mathrm{dom} g = \omega$, odnosno da za svako $n \in \omega$ važi $n \leq \mathrm{dom} g$. Za $n \in \omega$ prema lemi 7 postoji $\langle \varphi, K \rangle \in G \cap D_n$. Jasno, $\varphi \subseteq g$ i $\mathrm{dom}\varphi \geq n$, pa je $n \leq \mathrm{dom}\, g$ jer $\mathrm{dom}\varphi \subseteq \mathrm{dom} g$.

Pokažimo: $f \leq^* g$ za svako $f \in \mathcal{B}$. Neka je $f \in \mathcal{B}$ i $\langle \varphi, K \rangle \in G \cap \Delta_f$. Jasno, $f \in K$. Neka je $\mathrm{dom}\varphi = k_0$. Dokažimo da za svako $k \geq k_0$ važi $g(k) \geq f(k)$. Neka je $k \geq k_0$. Kako je $\mathrm{dom}(g) = \bigcup_{\langle \theta, M \rangle \in G} \mathrm{dom}\theta = \omega$, postoji $\langle \psi, L \rangle \in G$ tako da je $k \in \mathrm{dom}\psi$. G je filter, pa postoji $\langle \xi, N \rangle \leq \langle \varphi, K \rangle, \langle \psi, L \rangle$, pa iz $\xi \supseteq \psi$ sledi $k \in \mathrm{dom}\xi \setminus \mathrm{dom}\varphi$, te $g(k) = \xi(k) \geq K(k) \geq f(k)$, jer je $f \in K$. □

2.3 Martinova aksioma implicira $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$

Prema teoremi 11 je $\omega < \mathfrak{b} \leq \mathfrak{c}$. Ako važi CH, onda je, jasno, $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$. Postavlja se pitanje: šta je $\mathfrak{b}$, ako je $\mathfrak{c} > \aleph_1$?

Teorema 13. Neka je $\mathcal{B} \subseteq {}^{\omega}\omega$ proizvoljna familija. Tada je $\mathbb{P}_{\mathcal{B}}$ ccc parcijalno uređenje.

Dokaz. Uočimo da za proizvoljno $\varphi \in {}^{<\omega}\omega$ i $K, L \in [\mathcal{B}]^{<\omega}$ važi $\langle \varphi, K \cup L \rangle \leq \langle \varphi, K \rangle, \langle \varphi, L \rangle$. Dakle, ako $\langle \varphi, K \rangle, \langle \varphi, L \rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{B}}$, onda su ovi elementi kompatibilni. Pretpostavimo da je $\{\langle \varphi_\alpha, K_\alpha \rangle : \alpha < \kappa\}$ neprebrojiv antilanac u $\mathbb{P}_{\mathcal{B}}$. Kako je $A = \{\mathrm{dom}\varphi_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \omega$, postoji $n \in \omega$, takvo da je $|\{\alpha < \kappa : \mathrm{dom}\varphi_\alpha = n\}| > \omega$. Sve funkcije $\varphi_\alpha, \alpha < \kappa$ moraju biti različite, dakle ima ih neprebrojivo mnogo, što je nemoguće, jer $|{}^{n}\omega| = \omega^n = \omega$, kontradikcija. □

Teorema 14. MA$\Rightarrow \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{B} \subseteq {}^{\omega}\omega$ i $|\mathcal{B}| = \kappa < \mathfrak{c}$. Označimo $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\} \cup \{\Delta_f : f \in \mathcal{B}\}$. Tada $|\mathcal{D}| = \omega + \kappa < \mathfrak{c}$, pa prema MA postoji $G \subseteq \mathbb{P}$, tako da je G $\mathbb{P}$-generički filter nad $\mathcal{D}$. Neka je $g = \bigcup_{\langle \varphi, K \rangle \in G} \varphi$. Nastavak dokaza je sličan odgovarajućem delu dokaza teoreme 12. □

Glava 3

Kardinal $\mathfrak{d}$

3.1 Dominirajuće familije u skupu ${}^{\omega}\omega$. Kardinal $\mathfrak{d}$

Definicija 4. Familija $\mathcal{D} \subseteq {}^{\omega}\omega$ je **dominirajuća** ako i samo ako za svako $f \in {}^{\omega}\omega$ postoji $g \in \mathcal{D}$ takvo da je $f \leq^* g$.

Napomena 2. Ako je u pitanju linearni poredak onda se pojam neograničenog i dominirajućeg (kofinalnog) skupa poklapaju. No, $\langle {}^{\omega}\omega, \leq^* \rangle$ je parcijalno uređenje i to su dva različita pojma.

Lema 9. Svaka dominirajuća familija $\mathcal{D}$ je neograničena.

Dokaz. Pretpostavimo da je familija $\mathcal{D}$ dominirajuća i da je ograničena. Tada postoji $h \in {}^{\omega}\omega$, takvo da za svako $g \in \mathcal{D}$ važi $g \leq^* h$. Neka je $g' \in \mathcal{D}$ i $h + 1 \leq g'$, (za sve $k \in \omega$ definišemo $(h+1)(k) = h(k) + 1$). Tada $h + 1 \leq^* g' \leq^* h$. Zbog tranzitivnosti $\leq^*$ imamo $h + 1 \leq^* h$, pa postoji $k_0 \in \omega$, da za svako $k \geq k_0$ važi $h(k) + 1 \leq h(k)$, kontradikcija. □

Teorema 15. Ne postoji prebrojiva dominirajuća familija.

Dokaz. Kada bi postojala, prema lemi 9 to bi bila i prebrojiva neograničena familija, što je u suprotnosti sa teoremom 10. □

Definicija 5. $\mathfrak{d} = \min\{|\mathcal{D}| : \mathcal{D} \subseteq {}^\omega\omega$ je dominirajuća familija$\}$.

Teorema 16. $\omega < \mathfrak{b} \leq \mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{D} \subseteq {}^\omega\omega$ dominirajuća familija i $\mathfrak{d} = |\mathcal{D}|$. Tada je $\mathcal{D}$, prema lemi 9 i neograničena familija, pa prema definiciji kardinala $\mathfrak{b}$ sledi $\mathfrak{b} \leq |\mathcal{D}| = \mathfrak{d}$. Naravno, $\mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$ jer $|{}^\omega\omega| = \mathfrak{c}$.

□

Teorema 17. MA$\Rightarrow \mathfrak{d} = \mathfrak{c}$.

Dokaz. Sledi iz teoreme 16 i teoreme 14.

□

3.2 Uredjenje $\mathbb{P}$. Generički dokaz neprebrojivosti kardinala $\mathfrak{d}$

U nastavku posmatramo novo parcijalno uređenje pomoću kojeg ćemo, na još jedan način, dokazati teoremu 17.

Neka je

$$\mathbb{P} = \{\langle n, f\rangle : n \in \omega \wedge f \in {}^\omega\omega\}.$$

Definišimo relaciju $\leq$ na sledeći način:

$$\langle n, f\rangle \leq \langle m, g\rangle \text{ ako i samo ako } n \geq m \wedge f \geq g \wedge f \upharpoonright_m = g \upharpoonright_m.$$

Lema 10. Za svako $m \in \omega$, skup $D_m = \{\langle n, f\rangle \in \mathbb{P} : n \geq m\}$ je gust u $\mathbb{P}$.

Dokaz. Ako $\langle l, g\rangle \in \mathbb{P} \setminus D_m$, onda $l < m$, pa $\langle m, g\rangle \in D_m$ i $\langle m, g\rangle \leq \langle l, g\rangle$. □

Lema 11. Za svako $h \in {}^\omega\omega$ skup $\Delta_h = \{\langle n, f\rangle \in \mathbb{P} : h \leq^* f\}$ je gust u $\mathbb{P}$.

Dokaz. Neka $\langle l, g\rangle \in \mathbb{P}$ i neka je funkcija $f : \omega \to \omega$ definisana sa

$$f(k) = \begin{cases} g(k), & \text{za } k < l, \\ \max\{g(k), h(k)\}, & \text{za } k \geq l. \end{cases}$$

Tada $h \leq^* f$, pa $\langle l, f\rangle \in \Delta_h$ i $\langle l, f\rangle \leq \langle l, g\rangle$.

□

Teorema 18. Neka je $\mathcal{D}_0 \subseteq {}^\omega\omega$ prebrojiva familija i $\mathcal{D} = \{D_m : m \in \omega\} \cup \{\Delta_h : h \in \mathcal{D}_0\}$. Tada, ako je G $\mathbb{P}$-generički filter nad $\mathcal{D}$ i $f_G = \bigcup_{\langle n,f\rangle \in G} f \upharpoonright_n$, onda

(a) $f_G : \omega \to \omega$;

(b) $h \leq^* f_G$, za svako $h \in \mathcal{D}_0$.

Dokaz. (a) Ako su $\langle n, f\rangle, \langle m, g\rangle \in G$ imamo $f \upharpoonright_n, g \upharpoonright_m \subseteq f_G$. Neka je $k \in m \cap n$. Postoji $\langle l, h\rangle \in G$, tako da je $\langle l, h\rangle \leq \langle n, f\rangle, \langle m, g\rangle$, pa je $k \in m \cap n \subseteq n \subseteq l$, dakle $k \in l \cap m \cap n$. Sada imamo $f(k) = f \upharpoonright n(k) = h \upharpoonright_n (k) = h \upharpoonright_m (k) = g \upharpoonright_m (k) = g(k)$. Dakle, f_G je funkcija.

Za proizvoljno $m \in \omega$, postoji $\langle n, f\rangle \in D_m \cap G$. Tada je $n \geq m$ i $f \upharpoonright_n \subseteq f_G$, odakle $m \subseteq n \subseteq \mathrm{dom} f_G$. Dakle, za svako $m \in \omega$ važi $m \subseteq \mathrm{dom} f_G$, pa je $\mathrm{dom} f_G = \omega$.

(b) Neka $h \in \mathcal{D}_0$ i $\langle n, f\rangle \in G \cap \Delta_h$. Tada je $h \leq^* f$, pa postoji $k_1 \in \omega$ tako da za svako $k \geq k_1$ važi $f(k) \geq h(k)$. Neka je $k_0 = \max\{n, k_1\}$. Dokažimo da za svako $k \geq k_0$ važi $f_G(k) \geq h(k)$. Neka je $k \geq k_0$ i $\langle m, g\rangle \in G \cap D_{k+1}$. Tada je $k \in m$ i pritom postoji $\langle l, \varphi\rangle \in G$ tako da $\langle l, \varphi\rangle \leq \langle n, f\rangle, \langle m, g\rangle$. Jasno, imamo $l \geq m$, pa je $k < l$. Takođe je $\varphi(k) \geq f(k)$, pa sledi $f_G(k) = f_G \upharpoonright_l (k) = \varphi(k) \geq f(k) \geq h(k)$, čime je teorema dokazana.

□

3.3 Martinova aksioma implicira $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$

Ako važi Martinova aksioma, onda umesto $|\mathcal{D}_0| = \omega$ u prethodnom tvrđenju možemo pretpostaviti $|\mathcal{D}_0| = \kappa$, za $\kappa < \mathfrak{c}$. Tako dobijamo MA$\Rightarrow$ $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$. Potrebno je samo da dokažemo da je $\mathbb{P}$ ccc.

Lema 12. Elementi $\langle n, f_1\rangle$ i $\langle n, f_2\rangle$ su kompatibilni ako i samo ako je $f_1 \upharpoonright_n = f_2 \upharpoonright_n$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka su elementi $\langle n, f_1\rangle$ i $\langle n, f_2\rangle$ kompatibilni. Tada postoji $\langle n_0, f_0\rangle$ takvo da je $\langle n_0, f_0\rangle \leq \langle n, f_1\rangle, \langle n, f_2\rangle$. Sledi $f_0 \upharpoonright_n = f_1 \upharpoonright_n \wedge f_0 \upharpoonright_n = f_2 \upharpoonright_n$. Jasno, $f_1 \upharpoonright_n = f_2 \upharpoonright_n$.

($\Leftarrow$) Ako je $f_1 \upharpoonright_n = f_2 \upharpoonright_n$, sledi $\langle n, \max\{f_1, f_2\}\rangle \leq \langle n, f_i\rangle$, za $i = 1, 2$. □

Teorema 19. $\mathbb{P}$ je ccc parcijalno uređenje.

Dokaz. Pretpostavimo da je $A = \{\langle n_\alpha, f_\alpha\rangle : \alpha < \kappa\}$ antilanac u $\mathbb{P}$, gde je $\kappa > \omega$. Za $n \in \omega$, neka je $I_n = \{\alpha < \kappa : n_\alpha = n\}$. Tada je $\kappa = \bigcup_{n\in\omega} I_n$, pa postoji $n_0 \in \omega$, takvo da je $|I_{n_0}| > \omega$. Jasno, $\{\langle n_0, f_\alpha\rangle : \alpha \in I_{n_0}\}$ je neprebrojiv antilanac, pa za sve $\alpha, \beta \in I_{n_0}$, međusobno različite, važi $f_\alpha \upharpoonright_{n_0} \neq f_\beta \upharpoonright_{n_0}$, kontradikcija, jer je $|{}^{n_0}\omega| = \omega^{n_0} = \omega$. □

Glava 4

Kardinal $\mathfrak{p}$

4.1 Familije u skupu $[\omega]^\omega$ sa jakim svojstvom konačnog preseka. Pseudopresek

Definicija 6. Za skupove $A, B \in [\omega]^\omega$ definišimo relacije:
$A =^* B$ akko $|A \triangle B| < \omega$ ($\triangle$ je simetrična razlika),
$A \subseteq^* B$ akko $|A \setminus B| < \omega$.

Lema 13. (a) Relacija $=^*$ je relacija ekvivalencije na $[\omega]^\omega$ i za $A, B \in [\omega]^\omega$ važi:

$$A =^* B \text{ akko } \exists k_0 \in \omega\ \forall k \geq k_0\ (k \in A \Leftrightarrow k \in B); \tag{4.1}$$

(b)

$$A \subseteq^* B \text{ akko } \exists k_0 \in \omega\ \forall k \geq k_0\ (k \in A \Rightarrow k \in B); \tag{4.2}$$

(c) $\subseteq^*$ je refleksivna i tranzitivna relacija na $[\omega]^\omega$, nije antisimetrična i važi: $A \subseteq^* B \wedge B \subseteq^* A$ akko $A =^* B$.

Dokaz. (a) Pokažimo da je $=^*$ relacija ekvivalencije. Refleksivnost i simetričnost trivijalno važi. Dokažimo tranzitivnost. Neka je $|A \triangle B| < \omega$ i $|B \triangle C| < \omega$, tj. skupovi $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ i $(B \setminus C) \cup (C \setminus B)$ su konačni. Tada su konačni i $A \setminus B$ i $(B \setminus C)$, pa je i skup $A \setminus C$

konačan ($A \setminus C \subseteq A \setminus B \cup B \setminus C$). Analogno, iz konačnosti skupova $B \setminus A$ i $C \setminus B$ sledi da je skup $C \setminus A$ konačan, dakle $A =^* C$.

Pokažimo da važi formula (4.1). Neka je ispunjeno $A =^* B$ i neka je, na primer, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Neka je $k_0 = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Tada za svako $k > k_0$ važi $k \in A \cap B$ ili $k \in (A \cup B)^c$, tj. $k \in A$ ako i samo ako $k \in B$. Neka sada važi desna strana ekvivalencije u formuli (4.1). Pokažimo da je skup $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ konačan. Ako bi bio beskonačan, recimo da je $A \setminus B$ beskonačno, tada bi za svako $k_0 \in A$, postojao $k \geq k_0$ da važi $k \in A$ i $k \notin B$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom.

(b) ($\Rightarrow$) Neka je $A \setminus B = \{n_0, n_1, ..., n_m\}$ i $k_0 = \max\{n_0, n_1, ..., n_m\} + 1$. Za $k \geq k_0$ neka je $k \in A$. Pretpostavimo $k \notin B$. Tada $k \in A \setminus B$, pa $k = n_j$, za neko $j \leq m$. No $k \geq k_0 > n_j$, kontradikcija. Dakle, $k \in B$.

($\Leftarrow$) Neka važi $\forall k \geq k_0\ (k \in A \Rightarrow k \in B)$. Tada, ako je $k \in A \setminus B$, imamo $k < k_0$, pa $A \setminus B \subseteq \{0, 1, 2, ..., k_0 - 1\}$, odnosno $|A \setminus B| < \omega$, tj. $A \subseteq^* B$.

(c) Za svako $A \in [\omega]^\omega$ važi $A \subseteq^* A$ jer je $A \setminus A = \emptyset$, pa je relacija refleksivna. Pokažimo tranzitivnost. Neka je $A \subseteq^* B$ i $B \subseteq^* C$. Prema (4.2) imamo

$$\exists k_1 \in \omega\ \forall k \geq k_1\ (k \in A \Rightarrow k \in B) \tag{4.3}$$

i

$$\exists k_2 \in \omega\ \forall k \geq k_2\ (k \in B \Rightarrow k \in C). \tag{4.4}$$

Neka je $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$. Za $k \geq k_0$, ako je $k \in A$, prema (4.3) $k \in B$, a onda prema (4.4) $k \in C$. Dakle, za svako $k \geq k_0$ iz $k \in A$ sledi $k \in C$, tj. $A \subseteq^* C$. □

Ako je $P_i \in [\omega]^\omega, i \in I$, i $Q = \bigcap_{i \in I} P_i$, onda je jasno, $Q \subseteq P_i$, za svako $i \in P_i$. Sada dajemo jednu generalizaciju preseka.

Definicija 7. Neka je $\mathcal{P} \subseteq [\omega]^\omega$. Skup $Q \in [\omega]^\omega$ je **pseudopresek** familije $\mathcal{P}$ akko $Q \subseteq^* P$, za svako $P \in \mathcal{P}$.

Jasno, ako presjek familija $\mathcal{P} \subseteq [\omega]^\omega$ beskonačan onda je to i pseudopresek. Obratno ne važi. Svaki beskonačan podskup pseudopreseka je pseudopresek.

Primer 6. ω je jedan pseudopresek familije $\mathcal{P} = \{[n, \infty) : n \in \omega\}$, dok je presek ove familije prazan. Uočimo da je svaki $Q \in [\omega]^\omega$ pseudopresek familije $\mathcal{P}$.

Primer 7. Familija $P_x = [-x, x] \cap \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}^+$, je familija $\mathfrak{c}$ mnogo skupova, linearno uređena i $\bigcap_{x>0} P_x = \{0\}$. Pseudopresek je svaki niz u $\mathbb{Q}$ koji konvergira nuli.

Lema 14. Neka su $P, P_1, P_2, ..., P_n \in [\omega]^\omega$. Ako je $P \subseteq^* P_i$, za sve $i \leq n$, onda
(a) $P \subseteq^* P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_n$;
(b) $|\bigcap_{i \leq n} P_i| = \omega$.

Dokaz. (a) Trivijalno ($\subseteq^*$).

(b) Direktna posledica tačke (a). □

Posledica 2. Konačna familija ima pseudopresek ako i samo ako ima beskonačan pseudopresek.

Tako dolazimo do sledećeg pojma.

Definicija 8. Familija $\mathcal{P} \subseteq [\omega]^\omega$ ima **jako svojstvo konačnog preseka** ili **sfip** (engl.: the strong finite intersection property) ako i samo ako za svaki konačan podskup $\{P_1, ..., P_n\} \subseteq \mathcal{P}$ važi $|\bigcap_{i\leq n} P_i| = \omega$.

Teorema 20. Familija $\mathcal{P} \subseteq [\omega]^\omega$ koja ima pseudopresek, ima sfip.

Dokaz. Posledica leme 14. □

4.2 Kardinal $\mathfrak{p}$. Neprebrojivost kardinala $\mathfrak{p}$

Lema 15. Ako je $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$ neglavni ultrafilter važi:

(a) $\mathcal{U}$ ima sfip;

(b) $\mathcal{U}$ nema pseudopresek.

Dokaz. (a) Neka $F_1, F_2, ..., F_n \in \mathcal{U}$. Tada $\bigcap_{i\leq n} F_i \in \mathcal{U}$, no $\mathcal{U}$ sadrži samo beskonačne skupove.

(b) Pretpostavimo da je $P \in [\omega]^\omega$ pseudopresek familije $\mathcal{U}$, tj. $P \subseteq^* F$, za sve $F \in \mathcal{U}$. No, tada bi familija $\mathcal{U} \cup \{P\}$ imala s.k.p. (jer bi $P \cap F = \emptyset$ za $F \in \mathcal{U}$ dalo $P \setminus F = P$, suprotno sa $P \subseteq^* F$), kontradikcija. □

Dakle, postoje familije sa sfip koje nemaju pseudopresek.

Definicija 9. $\mathfrak{p} = \min\{|\mathcal{P}| : \mathcal{P} \subseteq [\omega]^\omega$ ima sfip i nema pseudopresek$\}$

Teorema 21. Svaka prebrojiva familja $\mathcal{P} \subseteq [\omega]^\omega$ sa sfip ima pseudopresek.

Dokaz. Neka familija $\mathcal{P} = \{P_n : n \in \omega\} \subseteq [\omega]^\omega$ ima sfip. Definišimo niz $\langle n_k : k \in \omega\rangle$ u ω sa namerom da skup $P = \{n_k : k \in \omega\}$ bude pseudopresek familije $\mathcal{P}$. Neka je $n_0 = \min P_0$, $n_1 = \min(P_0 \cap P_1 \setminus \{n_0\})$, $n_2 = \min(P_0 \cap P_1 \cap P_2 \setminus \{n_0, n_1\})$, ..., $n_k = \min(P_0 \cap P_1 \cap P_2 \cap ... \cap P_k \setminus \{n_0, n_1, n_2, \dots, n_{k-1}\})$. Očigledno, za $k \in \omega$ važi da za svako $i > k$ imamo $n_i \in P_k$, pa $P \subseteq^* P_k$. Skup P je beskonačan jer su n_i različiti. □

Posledica 3. $\omega < \mathfrak{p} \leq \mathfrak{c}$.

4.3 Uredjenje $\mathbb{P}_{\mathcal{P}}$. Generički dokaz neprebrojivosti kardinala $\mathfrak{p}$

U nastavku dokazujemo teoremu 21 na još jedan način. Za proizvoljnu familiju $\mathcal{P} \subseteq [\omega]^\omega$ sa sfip, neka je

$$\mathbb{P}_{\mathcal{P}} = \{\langle s, K\rangle : s \subseteq \omega \text{ konačan } \wedge K \subseteq \mathcal{P} \text{ konačan}\}$$

i neka je relacija $\leq$ definisana na sledeći način:

$$\langle s, K\rangle \leq \langle t, L\rangle \text{ akko } s \supseteq t \ \wedge\ K \supseteq L \ \wedge\ s \setminus t \subseteq \bigcap L.$$

Teorema 22. $\langle \mathbb{P}_{\mathcal{P}}, \leq\rangle$ je parcijalno uređenje.

Dokaz. Refleksivnost i antisimetričnost su trivijalni. Dokažimo tranzitivnost. Neka je $\langle s, K\rangle \leq \langle t, L\rangle$ i $\langle t, L\rangle \leq \langle r, M\rangle$. Sledi

$$s \supseteq t \wedge K \supseteq L \wedge\ s \setminus t \subseteq \bigcap L, \tag{4.5}$$

i

$$t \supseteq r \wedge L \supseteq M \wedge\ t \setminus r \subseteq \bigcap M. \tag{4.6}$$

Pokažimo $\langle s, K\rangle \leq \langle r, M\rangle$. Jasno, $s \supseteq r$ i $K \supseteq M$. Ostaje da se pokaže $s \setminus r \subseteq \bigcap M$. Iz $K \supseteq L \supseteq M$ sledi $\bigcap K \subseteq \bigcap L \subseteq \bigcap M$. Sada iz (4.5) i (4.6) sledi $s \setminus r \subseteq (s \setminus t) \bigcup (t \setminus r) \subseteq (\bigcap L) \cup (\bigcap M) \subseteq \bigcap M$. □

Lema 16. Za svako $n \in \omega$, skup $D_n = \{\langle s, K\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{P}} : |s| \geq n\}$ je gust u $\mathbb{P}_{\mathcal{P}}$.

Dokaz. Neka je $\langle t, L\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{P}}$. Ako je $|t| \geq n$, onda $\langle t, L\rangle \in D_n$. Zbog sfip, $\bigcap L$ je beskonačan skup, pa izaberimo konačan skup $r \subseteq (\bigcap L) \setminus t$ kardinalnosti n. Tada $\langle r \cup t, L\rangle \in D_n$ i važi $\langle r \cup t, L\rangle \leq \langle t, L\rangle$. □

Lema 17. Za svako $P \in \mathcal{P}$, skup $\Delta_P = \{\langle s, K\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{P}} : P \in K\}$ je gust u $\mathbb{P}_{\mathcal{P}}$.

Dokaz. Neka je $\langle t, L\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{P}}$. Tada $\langle t, L \cup \{P\}\rangle \leq \langle t, L\rangle$. □

Teorema 23. Svaka prebrojiva familija sa sfip ima pseudopresek, tj. $\mathfrak{p} > \aleph_0$. Preciznije, neka je $\mathcal{P} \subseteq [\omega]^\omega$ prebrojiva familija sa sfip i $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\} \cup \{\Delta_P : P \in \mathcal{P}\}$. Ako je $G (\subseteq \mathbb{P}_{\mathcal{P}})$ $\mathbb{P}_{\mathcal{P}}$-generički filter nad $\mathcal{D}$ i $P_G = \bigcup_{\langle s, K\rangle \in G} s$, onda važi:

(a) $P_G \in [\omega]^\omega$;

(b) Za svako $P \in \mathcal{P}$ važi $P_G \subseteq^* P$, odnosno P_G je pseudopresek date familije.

Dokaz. (a) Dokazaćemo da za svako $n \in \omega$ važi $|P_G| \geq n$. Neka je $n \in \omega$ i $\langle s, K\rangle \in G \cap D_n$. Tada je $s \subseteq P_G$ i $|s| \geq n$.

(b) Neka je $P \in \mathcal{P}$. Tada postoji $\langle s, K\rangle \in G \cap \Delta_P$, pa je $s \subseteq P_G$ i $P \in K$. Dokažimo za svako $\langle t, L\rangle \in G$ važi $t \setminus s \subseteq P$. Neka $\langle t, L\rangle \in G$. Skup G je filter, pa postoji $\langle r, M\rangle \in G$ tako da $\langle r, M\rangle \leq \langle s, K\rangle, \langle t, L\rangle$. Sledi $r \supseteq s, t$ i $M \supseteq K, L$. Takođe $r \setminus s \subseteq \bigcap K \subseteq P$. No $t \setminus s \subseteq r \setminus s$, pa $t \setminus s \subseteq P$. Dokažimo $P_G \setminus s \subseteq P$. Važi $P_G \setminus s = \bigcup_{\langle t, L\rangle \in G} t \setminus s \subseteq P$. □

4.4 Martinova aksioma implicira $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$

Za primenu Martinove aksiome na $\mathbb{P}_{\mathcal{P}}$ potrebno je pokazati sledeću lemu:

Lema 18. $\mathbb{P}_{\mathcal{P}}$ je ccc parcijalno uređenje.

Dokaz. Uočimo da su elementi $\mathbb{P}_{\mathcal{P}}$ sa istom prvom komponentom kompatibilni, tj. $\langle s, K \cup L\rangle \leq \langle s, K\rangle, \langle s, L\rangle$. Pretpostavimo da je $\{\langle s_\alpha, K_\alpha\rangle : \alpha < \kappa\}$ neprebrojiv antilanac u $\mathbb{P}_{\mathcal{P}}$. Tada su s_α, za $\alpha < \kappa$ različiti, što je nemoguće jer je $|[\omega]^{<\omega}| = \aleph_0$. □

Sledi uopštenje teoreme 23 pod pretpostavkom MA.

Teorema 24. Ako važi MA, onda svaka familija $\mathcal{P} \subseteq [\omega]^\omega$ sa sfip, kardinalnosti $\kappa < \mathfrak{c}$ ima pseudopresek. Dakle, MA$\Rightarrow \mathfrak{p} = \mathfrak{c}$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{P} = \{P_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq [\omega]^\omega$ familija sa sfip i $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\} \cup \{\Delta_{P_\alpha} : \alpha < \kappa\}$. Prema MA postoji $\mathbb{P}_{\mathcal{P}}$-generički filter nad $\mathcal{D}$. Označimo ga sa G. Neka je $P_G = \bigcup_{\langle s,K\rangle \in G} s$. Dokaz da je P_G pseudopresek familije $\mathcal{P}$ je sličan odgovarajućem delu dokaza teoreme 23. □

Glava 5

Kardinal $\mathfrak{t}$

5.1 Tower u skupu $[\omega]^\omega$. Ekvivalentne definicije

Definicija 10. Neka $A, B \in [\omega]^\omega$. Definišimo $A \subset^* B$ ako i samo ako $|A \setminus B| < \omega$ i $|B \setminus A| = \omega$.

Lema 19. (a) $A \subset^* B$ ako i samo ako $A \subseteq^* B \wedge \neg B \subseteq^* A$ ako i samo ako $A \subseteq^* B \wedge A \neq^* B$;
(b) Relacija $\subset^*$ je irefleksivna, asimetrična i tranzitivna.

Dokaz. (a) Trivijalno.

(b) Irefleksivnost je jasna jer bi iz $A \subset^* A$ sledilo $|A \setminus A| = \omega$, kontradikcija. Iz $A \subset^* B$ sledi $|B \setminus A| = \omega$, pa nije $B \subset^* A$.

Pokažimo tranzitivnost. Neka je $A \subset^* B$ i $B \subset^* C$. Sledi

$$A \subseteq^* B \wedge \neg B \subseteq^* A, \tag{5.1}$$

$$B \subseteq^* C \wedge \neg C \subseteq^* B. \tag{5.2}$$

Prema lemi 13 iz (5.1) i (5.2) sledi $A \subseteq^* C$. Iz $C \subseteq^* A$ bi zbog $A \subseteq^* B$ sledilo $C \subseteq^* B$ što je netačno zbog (5.2). Dakle, $\neg C \subseteq^* A$, pa je $A \subset^* C$. $\square$

Lema 20. Neka je $\mathcal{T} \subseteq [\omega]^\omega$, $\xi \in \mathbf{ON}$ i $T : \xi \to \mathcal{T}$ bijekcija. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(a) $\forall \alpha, \beta < \xi \ (\alpha < \beta \Leftrightarrow T_\alpha {}^*\!\supset T_\beta)$, odnosno $\langle \mathcal{T}, {}^*\!\supset \rangle \cong \langle \xi, < \rangle$;
(b) $\forall \alpha, \beta < \xi \ (\alpha < \beta \Rightarrow T_\alpha {}^*\!\supset T_\beta)$;
(c) $\forall \alpha, \beta < \xi \ (\alpha \leq \beta \Leftrightarrow T_\alpha {}^*\!\supseteq T_\beta)$, odnosno $\langle \mathcal{T}, {}^*\!\supseteq \rangle \cong \langle \xi, \leq \rangle$.

Dokaz. (a)$\Rightarrow$(b) Trivijalno.

(b)$\Rightarrow$(c) Pretpostavimo da važi (b).

($\Rightarrow$) Neka je $\alpha \leq \beta$. Razlikujemo dva slučaja. Za $\alpha = \beta$, imamo $T_\alpha = T_\beta$, pa je $T_\alpha {}^*\!\supseteq T_\beta$. Za $\alpha < \beta$, imamo zbog (b) $T_\alpha {}^*\!\supset T_\beta$, pa i $T_\alpha {}^*\!\supseteq T_\beta$.

($\Leftarrow$) Neka je $T_\alpha {}^*\!\supseteq T_\beta$. Pretpostavimo $\beta < \alpha$. Tada zbog (b) imamo $T_\beta {}^*\!\supset T_\alpha$, pa prema lemi 19 sledi $\neg T_\alpha {}^*\!\supseteq T_\beta$, kontradikcija. Dakle, $\alpha \leq \beta$.

(c)$\Rightarrow$(a) Neka važi (c) i neka je $\alpha, \beta < \xi$.

($\Rightarrow$) Pretpostavimo $\alpha < \beta$. Tada zbog (c) imamo $T_\alpha {}^*\!\supseteq T_\beta$. Pretpostavimo $T_\alpha \subseteq^* T_\beta$. Zbog (c) je tada $\alpha \geq \beta$, što je netačno. Dakle, $\neg T_\alpha \subseteq^* T_\beta$, pa $T_\alpha {}^*\!\supset T_\beta$.

($\Leftarrow$) Neka $T_\alpha {}^*\!\supset T_\beta$. Pretpostavimo $\beta \leq \alpha$. Tada zbog (c) $T_\beta {}^*\!\supseteq T_\alpha$ što je nemoguće, jer iz $T_\beta \subset^* T_\alpha$ sledi $\neg T_\alpha \subseteq^* T_\beta$. Dakle, $\alpha < \beta$. □

Lema 21. Neka je $\mathcal{T} \subseteq [\omega]^\omega$, $\xi \in \mathbf{ON}$ i $T : \xi \to \mathcal{T}$ bijekcija. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(d) $\forall \alpha, \beta < \xi \ (\alpha < \beta \Rightarrow T_\alpha {}^*\!\supseteq T_\beta)$;
(e) $\forall \alpha, \beta < \xi \ (\alpha \leq \beta \Rightarrow T_\alpha {}^*\!\supseteq T_\beta)$.

Dokaz. (d)$\Rightarrow$(e) Neka važi (d) i neka za $\alpha, \beta < \xi$ važi $\alpha \leq \beta$. Ako je $\alpha = \beta$, onda $T_\alpha = T_\beta$, pa jasno $T_\alpha {}^*\!\supseteq T_\beta$. Ako je $\alpha < \beta$ imamo , zbog (d), $T_\alpha {}^*\!\supseteq T_\beta$.

(e)$\Rightarrow$(d) Trivijalno jer iz $\alpha < \beta$ sledi $\alpha \leq \beta$. □

Lema 22. Neka je $\mathcal{T} \subseteq [\omega]^\omega$, $\xi \in \mathbf{ON}$ i $T : \xi \to \mathcal{T}$ bijekcija. Tada (c)$\Rightarrow$(e), dok obratna implikacija ne mora da važi.

Dokaz. Implikacija (c)$\Rightarrow$(e) je evidentna. S druge strane, ako je $\xi = \omega$ i T_α kokonačni podskupovi ω, onda $T_\alpha =^* T_\beta$ za sve $\alpha, \beta \in \omega$, pa (e) važi trivijalno. No (c) ne važi jer (a) očigledno ne važi. □

Napomena 3. Uslovi (a) i (c) govore o izomorfizmu, a uslov (e) govori o homomorfizmu relacijskih struktura.

Lema 23. Neka je familija $\mathcal{T} \subseteq [\omega]^\omega$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) Postoji $\xi \in \mathbf{ON}$ i bijekcija $T : \xi \to \mathcal{T}$ takva da važi jedan od uslova (a), (b) ili (c);
(ii) $\langle \mathcal{T}, {}^*\!\supset \rangle$ je dobro uređen skup;
(iii) $\langle \mathcal{T}, {}^*\!\supseteq \rangle$ je dobro uređen skup.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$ Neka postoje ξ i T i neka važi (a). Tada je T izomorfizam relacijskih struktura, pa kako je $\langle \xi, < \rangle$ dobro uređen skup, sledi da je i $\langle \mathcal{T}, {}^*\supset \rangle$ dobro uređen.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Neka je $\langle \mathcal{T}, {}^*\supset \rangle$ dobro uređen. Tada potoji $\xi \in \mathbf{ON}$ da je $\langle \mathcal{T}, {}^*\supset \rangle \cong \langle \xi, < \rangle$.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$ Slično se dokazuje. □

Definicija 11. Neprazna familija $\mathcal{T} \subseteq [\omega]^\omega$ je **tower (kula)** ako i samo ako

(a) $\mathcal{T}$ zadovoljava jedan od ekvivalentnih uslova (i), (ii) ili (iii) iz leme 23;

(b) $\mathcal{T}$ nema pseudopresek.

5.2 Egzistencija tower-a. Kardinal t. Regularnost

Za beskonačan skup $A \subseteq \omega$ postoji jedinstveni izomorfizam

$$c_A : \langle \omega, < \rangle \to \langle A, < \rangle$$

tzv. **funkcija brojilica** (engl.: counting function). Ona daje numeraciju skupu A, tj. $A = \{n_0, n_1, n_2, \dots\}$, gde je $n_k = c_A(k)$ i $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$.

Teorema 25. Tower postoji.

Dokaz. Neka je $\pi : [\omega]^\omega \to [\omega]^\omega$ preslikavanje definisano $\pi(A) = c_A(\{0, 2, 4, \dots\}) = \{n_0, n_2, n_4, \dots\}$. Jasno, $\pi(A)$ je skup elemenata skupa A sa parnim indeksima (parna polovina skupa A). Neka je $\Pi = \{\mathcal{P} \subseteq [\omega]^\omega : \mathcal{P}$ ima pseudopresek$\}$.
Dakle, za svako $\mathcal{P} \in \Pi$ imamo
$P_S(\mathcal{P}) = \{Q \in [\omega]^\omega : Q$ je pseudopresek familije $\mathcal{P}\} \neq \emptyset$.

Neka je $\varphi : \Pi \to [\omega]^\omega$, preslikavanje takvo da $\varphi(\mathcal{P}) \in P_S(\mathcal{P})$, tj. φ je funkcija izbora za familiju $\{P_S(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \Pi\}$. Dakle, svakoj familiji $\mathcal{P} \in \Pi$ funkcija φ dodeljuje neki pseudopresek. Definišimo rekurzijom niz $\langle T_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}^+ \rangle$ u skupu $[\omega]^\omega \cup \{\emptyset\}$ sa

$$T_0 = \omega$$

$$T_\alpha = \begin{cases} \pi(\varphi(\{T_\beta : \beta < \alpha\})), & \{T_\beta : \beta < \alpha\} \text{ ima pseudopresek;} \\ \emptyset, & \text{inače.} \end{cases}$$

Neka je

$$\xi = \begin{cases} \min\{\alpha < \mathfrak{c}^+ : T_\alpha = \emptyset\}, & \text{ako postoji } \alpha < \mathfrak{c}^+ \text{ takvo da } T_\alpha = \emptyset\text{ ;} \\ \mathfrak{c}^+, & \text{ako za svako } \alpha < \mathfrak{c}^+ \text{ važi } T_\alpha \in [\omega]^\omega. \end{cases}$$

Dakle, za svako $\alpha < \xi$ važi $T_\alpha \neq \emptyset$.

Pokažimo da

$$\forall \alpha, \beta < \xi \; (\alpha < \beta \Rightarrow T_\alpha {}^*\supset T_\beta). \tag{5.3}$$

Indukcijom na dobro uređenom skupu ξ dokazaćemo da za svako $\beta < \xi$ i svako $\alpha < \beta$ važi $T_\alpha {}^*\supset T_\beta$. Za $\beta = 0$ to je trivijalno tačno. Neka je $\beta_0 < \xi$ i neka za svako $\beta < \beta_0$ i za svako $\alpha < \beta$ važi $T_\alpha {}^*\supset T_\beta$. Dokazujemo da za svako $\alpha < \beta_0$ važi $T_\alpha {}^*\supset T_{\beta_0}$. Zbog $\beta_0 < \xi$ je $T_{\beta_0} \neq \emptyset$, pa $T_{\beta_0} = \pi(\varphi(\{T_\alpha : \alpha < \beta_0\})) \subset^* \varphi(\{T_\alpha : \alpha < \beta_0\}) \subseteq^* T_\alpha$, za sve $\alpha < \beta_0$.

Sada za $\alpha \neq \beta$ sledi $T_\alpha \neq T_\beta$, pa $|\xi| \leq \mathfrak{c}$, jer je $|[\omega]^\omega| = \mathfrak{c}$.

Pokažimo još da $\mathcal{T} = \{T_\alpha : \alpha < \xi\}$ nema pseudopresek. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $P \in [\omega]^\omega$ da za sve $\alpha < \xi$, važi $P \subseteq^* T_\alpha$. Tada je $T_\xi = \pi(\varphi(\{T_\alpha : \alpha < \xi\})) \neq \emptyset$, kontradikcija. □

Definicija 12. $\mathfrak{t} = \min\{|\mathcal{T}| : \mathcal{T} \subseteq [\omega]^\omega$ je tower$\}$.

Teorema 26. Ako je $\langle T_\alpha : \alpha < \xi\rangle$ tower i $\varphi : \zeta \to \xi$ rastuće, kofinalno preslikavanje, onda je $\langle T_{\varphi(\delta)} : \delta < \zeta\rangle$ tower.

Dokaz. Za $\delta < \delta_1 < \zeta$ je $\varphi(\delta) < \varphi(\delta_1)$, pa prema lemi 20 (b) važi $T_{\varphi(\delta)}{}^* \supset T_{\varphi(\delta_1)}$. Pretpostavimo da postoji pseudopresek P, tj. za svako $\delta < \zeta$ važi $P \subseteq^* T_{\varphi(\delta)}$. Neka $\alpha < \xi$. Zbog kofinalnosti postoji $\delta < \zeta$ takvo da $\alpha < \varphi(\delta)$, pa $T_\alpha {}^*\supset T_{\varphi(\delta)}{}^*\supseteq P$, odatle $P \subseteq^* T_\alpha$. Dakle, $P \subseteq^* T_\alpha$ za $\alpha < \xi$, kontradikcija. □

Teorema 27. (a) $\mathfrak{t}$ je regularan kardinal;
(b) Postoji tower tipa $\langle \mathfrak{t}, > \rangle$.

Dokaz. (a) Neka je $\mathcal{T} = \{T_\alpha : \alpha < \xi\}$ tower i $|\xi| = \mathfrak{t}$. Neka je $\mathrm{cf}(\xi)$ kofinalnost kardinala ξ i $\varphi : \mathrm{cf}(\xi) \to \xi$ kofinalno, rastuće preslikavanje. Tada je $\mathcal{T}_1 = \{T_{\varphi(\delta)} : \delta < \mathrm{cf}(\xi)\}$ prema teoremi 26 takođe tower i važi $\mathfrak{t} \leq \mathrm{cf}(\xi) \leq |\xi| = \mathfrak{t}$, pa $\mathrm{cf}(\xi) = \mathfrak{t}$. Dakle, kardinal $\mathfrak{t}$ je regularan.

(b) $\mathcal{T}_1 = \{T_{\varphi(\delta)} : \delta < \mathfrak{t}\}$ je tower. □

5.3 Nejednakost $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{t} \leq \mathfrak{b}$

Teorema 28. $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{t}$

Dokaz. Neka je $\mathcal{T} = \langle T_\alpha : \alpha < \mathfrak{t}\rangle$ tower. Jasno, $\mathcal{T}$ nema pseudopresek. Dokažimo da ima sfip. Neka je $T_{\alpha_1}, \dots, T_{\alpha_k} \in \mathcal{T}$ i $\alpha > \max\{\alpha_i : i \leq k\}$. Tada $T_\alpha \subset^* T_{\alpha_i}$, pa $T_\alpha \subseteq^* T_{\alpha_i}$, za $i \leq k$, odnosno $T_\alpha \subseteq^* \bigcap_{i=1}^k T_{\alpha_i}$. Kako je $|T_\alpha| = \omega$, presek je beskonačan. Dakle, $\mathcal{T}$ je familija sa sfip bez pseudopreseka, pa $\mathfrak{p} \leq |\mathcal{T}| = \mathfrak{t}$. □

Napomena 4. Konzistencija $\mathfrak{p} < \mathfrak{t}$ je još uvek otvoreno pitanje.

Lema 24. Za kardinale λ i μ važi: $\lambda \leq \mu$ ako i samo ako za svako $\kappa < \lambda$ važi $\kappa < \mu$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Trivijalno.
($\Leftarrow$) Pretpostavimo $\mu < \lambda$. Sledi $\mu < \mu$, kontradikcija. □

Lema 25. Za kardinal κ sledeći uslovi su ekvivalentni:

(a) $\kappa < \mathfrak{b} = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \subseteq {}^{\omega}\omega$ je neograničena$\}$;

(b) Svaka familija $\mathcal{B} \subseteq {}^{\omega}\omega$ kardinalnosti κ je ograničena;

(c) Svaka familija striktno rastućih funkcija $\mathcal{B} \subseteq {}^{\omega}\omega$ kardinalnosti κ je ograničena.

Dokaz. (a)$\Leftrightarrow$(b) Trivijalno.

(b)$\Rightarrow$(c) Trivijalno.

(c)$\Rightarrow$(a) Neka važi (c). Pretpostavimo da je $\mathcal{B} = \{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$ neograničena familija. Pravimo funkcije h_α takve da za sve $\alpha < \kappa$ važi:

1. preslikavanje $h_\alpha : \omega \to \omega$ je rastuće;
2. $h_\alpha \geq f_\alpha$.

Neka je $g_\alpha = \max\{f_\alpha, 1\}$, za sve $\alpha < \kappa$. Jasno, $g_\alpha \geq f_\alpha$, za sve $\alpha < \kappa$. Neka je, za $\alpha < \kappa$, funkcija h_α data sa $h_\alpha(0) = g_\alpha(0), h_\alpha(1) = g_\alpha(0) + g_\alpha(1), \ldots, h_\alpha(k) = g_\alpha(0) + g_\alpha(1) + \ldots + g_\alpha(k)$. Očigledno je $h_\alpha \geq g_\alpha$. Kako je

$$h_\alpha(k+1) = \Sigma_{l \leq k+1} g_\alpha(l) = h_\alpha(k) + g_\alpha(k+1) \geq h_\alpha(k) + 1 > h_\alpha(k) \qquad (5.4)$$

funkcije h_α, za $\alpha < \kappa$ su rastuće.

Sada je $\mathcal{B}_1 = \{h_\alpha : \alpha < \kappa\}$ neograničena familija rastućih funkcija, kontradikcija sa (c). □

Između rastućih funkcija i njihovih kodomena postoji jednostavna veza . Na primer, ako je $f(k) = k$ i $g(k) = 2k$, onda je $f \leq g$ i $f[\omega] = \omega \supset g[\omega] = \{k : k \text{ je paran}\}$. Uopšte važi

Lema 26. Ako su $f, g : \omega \to \omega$ striktno rastuće, onda iz $f[\omega] \subseteq g[\omega]$ sledi $f \geq g$.

Dokaz. Pretpostavimo $f \not\geq g$. Neka je k_0 najmanji elemenat takav da $f(k_0) < g(k_0)$. Tada u $[0, f(k_0)]$ ima: $k_0 + 1$ elemenata iz $f[\omega]$ (to su $f(0), f(1), \ldots, f(k_0)$) i k_0 elemenata iz $g[\omega]$ (to su $g(0), g(1), \ldots, g(k_0 - 1)$). Dakle, $f[\omega] \not\subseteq g[\omega]$. □

Primer 8. Obrat ne važi. Ako je $f(k) = 2k + 1, g(k) = 2k$, onda $f > g$, iako $f[\omega] \cap g[\omega] = \emptyset$.

Sledi uopštenje prethodne leme.

Lema 27. Neka su $f, g : \omega \to \omega$ striktno rastuća preslikavanja. Tada ako je $f[\omega] \subseteq^* g[\omega]$, tj. ako postoji k_0 takvo da je $f[\omega \setminus k_0] \subseteq g[\omega]$, onda za svako $i \in \omega$ važi $f(k_0 + i) \geq g(i)$.

Dokaz. Pretpostavimo da je, za $i_0 \in \omega$, $f(k_0 + i_0) < g(i_0)$. Tada su $f(k_0), f(k_0 + 1), \ldots, f(k_0 + i_0) \in g[\omega] \cap [0, f(k_0 + i_0)]$. Dakle, u $g[\omega] \cap [0, f(k_0 + i_0)]$ ima $i_0 + 1$ element, a može ih biti najviše i_0 (to su $g(0), \ldots, g(i_0 - 1)$), kontradikcija. □

Teorema 29. $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{b}$

Dokaz. Prema lemi 24 i 25 dovoljno je dokazati da je za svako $\kappa < \mathfrak{t}$ familija $\mathcal{B} \subseteq {}^{\omega}\omega$ rastućih funkcija kardinalnosti κ ograničena. Neka je $\kappa < \mathfrak{t}$ i neka je $\mathcal{B}=\{g_\alpha : \alpha < \kappa\}$ familija rastućih funkcija. Rekurzijom definišemo niz $\langle f_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ u ${}^{\omega}\omega$ sa osobinama:

(a) f_α su striktno rastuća preslikavanja;

(b) $\alpha < \beta \Rightarrow f_\beta[\omega] \subset^* f_\alpha[\omega]$;

(c) $f_\alpha(k) \geq g_\alpha(2k)$, za sve $k \in \omega$.

Funkciju f_0 definišemo sa $f_0(k) = g_0(2k)$. Neka je $\alpha_0 < \kappa$ i neka je $\langle f_\alpha : \alpha < \alpha_0 \rangle$ niz sa osobinama (a-c). Definišemo f_{α_0}. Kako je zbog (b) $\langle f_\alpha[\omega] : \alpha < \alpha_0 \rangle$ pred-tower (engl.: weektower), (ispunjava uslov (a) definicije 11) i $|\alpha_0| < \kappa < \mathfrak{t}$, postoji pseudopresek $P_{\alpha_0} \subseteq^* f_\alpha[\omega]$, za sve $\alpha < \alpha_0$. Neka je $Q_{\alpha_0} = \pi(P\alpha_0)$-polovina P_{α_0}. Tada $Q_{\alpha_0} \in [\omega]^\omega$ i $Q_{\alpha_0} \subset^* f_\alpha[\omega]$, za svako $\alpha < \alpha_0$. Preslikavanje f_{α_0} definšimo tako da važi:

(d) $f_{\alpha_0}[\omega] \subseteq Q_{\alpha_0}$,

(f) važe osobine (a) i (c).

Rekurzijom definišemo:

$$f_{\alpha_0}(k) = \min\Big(Q_{\alpha_0} \setminus [0, \max\{g_{\alpha_0}(2k), f_{\alpha_0}(0), f_{\alpha_0}(1), \ldots, f_{\alpha_0}(k-1)\}]\Big)$$

Tada

(a) f_{α_0} je striktno rastuća (jer je $f_{\alpha_0}(k) > f_{\alpha_0}(k-1), k \in \omega$),

(b) $f_{\alpha_0}[\omega] \subseteq Q_{\alpha_0} \subset^* f_\alpha[\omega]$, $\alpha < \alpha_0$,

(c) $f_{\alpha_0}(k) > g_{\alpha_0}(2k), k \in \omega$.

Tako dobijamo niz $\langle f_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ sa osobinama (a-c). Zbog (b) i $\kappa < \mathfrak{t}$ postoji pseudopresek $P_\kappa \subseteq^* f_\alpha[\omega]$, $\alpha < \kappa$. Prepolovimo ga, a onda slično kao pre dobijamo rastuću funkciju f_κ, da $f_\kappa[\omega] \subseteq^* f_\alpha[\omega]$, za $\alpha < \kappa$. Tvrdimo da je f_κ ograničenje $\mathcal{B} = \{g_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Neka je $\alpha < \kappa$. Tada $f_\kappa[\omega] \subseteq^* f_\alpha[\omega]$, pa postoji $k_0 \in \omega$ da $f_\kappa[\omega \setminus k_0] \subseteq f_\alpha[\omega]$. Prema lemi 27 za svako $i \in \omega$ važi $f_\kappa(k_0 + i) \geq f_\alpha(i) \geq g_\alpha(2i)$. Da bi bilo $2i \geq k_0 + i$ mora biti $i \geq k_0$, pa tako za svako $i \geq k_0$ važi $f_\kappa(k_0 + i) \geq g_\alpha(2i) \geq g_\alpha(k_0 + i)$, jer je g_α rastuća funkcija. No, ovo znači za svako $k \geq 2k_0$ važi $f_\kappa(k) \geq g_\alpha(k)$, pa je $g_\alpha \leq^* f_\kappa$. □

Glava 6

Kardinal $\mathfrak{a}$

6.1 Maksimalne skoro disjunktne familije u skupu $[\omega]^\omega$. Kardinal $\mathfrak{a}$

Definicija 13. Skupovi $A, B \in [\omega]^\omega$ su **skoro disjunktni** (engl.: almost disjoint) ako i samo ako je $|A \cap B| < \omega$. Familija $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ je **skoro disjunktna familija**, kratko **adf** (od engl.: almost disjoint family), ako i samo ako za sve $A, B \in \mathcal{A}$, $A \neq B$, važi $|A \cap B| < \omega$.

Jasno, svaka disjunktna familija $\mathcal{D} \subseteq [\omega]^\omega$ je najviše prebrojiva. Sa adf to nije slučaj.

Primer 9. Na ω postoji adf kardinalnosti $\mathfrak{c}$. Identifikujemo ω i $\mathbb{Q}$. Za svaki realan broj $x \in \mathbb{R}$ biramo rastući niz racionalnih brojeva $\langle q_n^x : n \in \mathbb{N}\rangle \to x$. Neka je $A_x = \{q_n^x : n \in \mathbb{N}\}, x \in \mathbb{R}$. Ako je $x \neq y$, npr. $x < y$ i $0 < \epsilon < y - x$, onda postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, da za svako $n \geq n_0$ važi $q_n^y \in (y - \epsilon, y + \epsilon)$, pa je $q_n^y > x$, za $n \geq n_0$. Kako $A_x \subseteq (-\infty, x)$ sledi $A_x \cap A_y \subseteq \{q_1^y, \ldots, q_{n_0-1}^y\}$. Dakle, $\mathcal{A} = \{A_x : x \in \mathbb{R}\}$ je adf kardinalnosti $\mathfrak{c}$.

Primer 10. Posmatrajmo još jednu adf kardinalnosti $\mathfrak{c}$. Drvo ${}^{<\omega}2 = \bigcup_{n\in\omega} {}^n2$ je prebrojiv skup. Za preslikavanje $f : \omega \to 2$, definišemo podskup $A_f \subseteq {}^{<\omega}2$ sa $A_f = \{f \upharpoonright n : n \in \omega\}$ (A_f je maksimalna grana binarnog drveta ${}^{<\omega}2$). Ako su $f, g \in {}^\omega 2$ i $f \neq g$, onda je $|A_f \cap A_g| < \omega$. Dakle, $\mathcal{A} = \{A_f : f \in {}^\omega 2\}$ je adf i $|\mathcal{A}| = 2^\omega = \mathfrak{c}$.

Definicija 14. Adf $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ je **maksimalna** ili **madf** (engl.: maximal almost disjoint family) ako i samo ako ne postoji adf $\mathcal{A}_1$, da $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1$.

Lema 28. Adf $\mathcal{A}$ je maksimalna ako i samo ako

$$\forall X \in [\omega]^\omega \ \exists A \in \mathcal{A} \ (|A \cap X| = \omega). \tag{6.1}$$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $\mathcal{A}$ madf. Pretpostavimo da postoji $X \in [\omega]^\omega$ da $|A \cap X| < \omega$ za sve $A \in \mathcal{A}$. Tada X nije u $\mathcal{A}$, za $A \in \mathcal{A}$ i $\mathcal{A} \cup \{X\}$ je adf, kontradikcija.

($\Leftarrow$) Ako važi (6.1), pretpostavimo da postoji adf $\mathcal{A}_1$ da važi $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1$. Neka je $X \in \mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{A}$. Tada za svako $A \in \mathcal{A}$ važi $|A \cap X| < \omega$, što je u suprotnosti sa (6.1). □

Primer 11. Svaka konačna particija skupa ω sa beskonačnim elementima je madf. Neka je $\omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ particija skupa ω, gde je $A_i \in [\omega]^\omega$. Jasno, $\mathcal{A} = \{A_k : k \leq n\}$ je adf, a kako važi (6.1) to je i madf.

Teorema 30. Svaka adf je sadržana u nekoj madf.

Dokaz. Neka je $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ adf i neka je

$$\mathbb{P} = \{\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega : \mathcal{F} \text{ je adf i } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}\}.$$

Jasno, $\langle \mathbb{P}, \subseteq \rangle$ je parcijalno uređen skup. Neka je $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{P}$ lanac. Dokažimo da $\bigcup \mathcal{L} = \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{L}} \mathcal{F} \in \mathbb{P}$. Kako je $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$, za sve $\mathcal{F} \in \mathcal{L}$, to je $\bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{L}} \mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$. Kako je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$, za $\mathcal{F} \in \mathcal{L}$, imamo $\mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{L}$. Konačno, ako $A_1, A_2 \in \bigcup \mathcal{L}$, gde je $A_1 \in \mathcal{F}_1$ i $A_2 \in \mathcal{F}_2$ i recimo $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$, onda $A_1, A_2 \in \mathcal{F}_1$, pa $|A_1 \cap A_2| < \omega$. Dakle, $\bigcup \mathcal{L}$ je adf, te $\bigcup \mathcal{L} \in \mathbb{P}$. Takođe $\mathcal{F} \subseteq \bigcup \mathcal{L}$, za sve $\mathcal{F} \in \mathcal{L}$, pa je $\bigcup \mathcal{L}$ gornje ograničenje $\mathcal{L}$. Dakle, svaki lanac $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{P}$ ima gornje ograničenje, pa prema lemi Zorna $\mathbb{P}$ ima maksimalni element $\mathcal{A}^*$. Kako je $\mathcal{A}^*$ adf i $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$, ostaje da se pokaže maksimalnost $\mathcal{A}^*$. Neka je $\mathcal{A}_1$ adf i $\mathcal{A}^* \subset \mathcal{A}_1$. Tada $\mathcal{A}_1 \in \mathbb{P}$, pa je $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}^*$ zbog maksimalnosti $\mathcal{A}^*$. Dakle, $\mathcal{A}^*$ je madf. □

Teorema 31. Prebrojiva adf ne može da bude madf.

Dokaz. Neka je familija $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \omega\} \subseteq [\omega]^\omega$ adf. Dokažimo

$$\forall k \in \omega \ |\omega \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_k)| = \omega. \tag{6.2}$$

Pretpostavimo da je $\omega \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_k) = K$ konačan skup. Tada $A_{k+1} = A_{k+1} \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_k \cup K) = \bigcup_{i=1}^{k} (A_{k+1} \cap A_i) \cup (A_{k+1} \cap K)$, pa je A_{k+1} unija konačno mnogo konačnih skupova, dakle konačan skup, kontradikcija. Definišimo niz $\langle n_k : k \in \omega \rangle$ sa željom da skup $D = \{n_k : k \in \omega\}$ bude skoro disjunktan sa svim A_n. Neka je $n_0 = \min(\omega \setminus A_0), n_1 = \min(\omega \setminus A_0 \cup A_1 \cup \{n_0\}), \ldots, n_k = \min[\omega \setminus (\bigcup_{i<k} A_i \cup \{n_i : i < k\})]$. Zbog (6.2) konstrukcija je moguća. Sada je $A_0 \cap D = \emptyset, A_1 \cap D \subseteq \{n_0\}, \ldots, A_k \cap D \subseteq \{n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}\}$. Dakle, ovi skupovi su konačni, pa je $\mathcal{A} \cup \{D\}$ adf i $\mathcal{A}$ nije madf. □

Posledica 4. Ako je $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ madf, onda je $|\mathcal{A}| < \omega$ ili $|\mathcal{A}| > \omega$.

Definicija 15. $\mathfrak{a} = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ je beskonačna madf$\}$.

Posledica 5. $\omega < \mathfrak{a} \leq \mathfrak{c}$.

6.2 Uredjenje $\mathbb{P}_\mathcal{A}$. Generički dokaz neprebrojivosti kardinala $\mathfrak{a}$

Definicija 16. Skup $B \subseteq \omega$ je **skoro pokriven** sa skupovima $A_1, \ldots, A_n \subseteq \omega$ ako i samo ako je $B \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ konačan skup.

Lema 29. Neka je familija $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ beskonačna adf. Tada
(a) skup ω nije skoro pokriven sa konačno elemenata familije $\mathcal{A}$;
(b) ako je $\{A_1, \ldots, A_n, B\} \subseteq \mathcal{A}$, onda B nije skoro pokriven sa $A_1, \ldots, A_n$.

Dokaz. (a) Kada bi ω bio skoro pokriven sa konačno mnogo elemenata familije $\mathcal{A}$, na primer, skupovima $A_1, \ldots, A_n (\in \mathcal{A})$, tada bi skup $\omega \setminus \bigcup_{i \leq n} A_i$ bio konačan, pa bi familija $\mathcal{A}$ imala konačno mnogo elemenata (videti dokaz teoreme 31), što je netačno.

(b) Ako bi B bio skoro pokriven sa $A_1, \ldots, A_n$, po definiciji bi $B \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ bio konačan skup. Kako je B beskonačan, skup $B \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$, tj. $(B \cap A_1) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$ je takođe beskonačan. Tada bi za neko $i \leq n$ skup $B \cap A_i$ bio beskonačan, što je netačno jer je $\mathcal{A}$ adf. □

Teoremu 31, dokazaćemo na drugi način, koristeći opet pojam generičkog filtera. Neka je $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ beskonačna adf. Definišimo parcijalno uređenje $\langle \mathbb{P}_\mathcal{A}, \leq \rangle$ na sledeći način:

$$\mathbb{P}_\mathcal{A} = \{\langle s, K \rangle : s \subseteq \omega^{<\omega} \wedge K \in \mathcal{A}^{<\omega}\}$$

gde je $\leq$ binarna relacija na $\mathbb{P}_\mathcal{A}$ data sa

$$\langle s, K \rangle \leq \langle t, L \rangle \text{ ako i samo ako } s \supseteq t \wedge K \supseteq L \wedge s \setminus t \cap \bigcup L = \emptyset.$$

Teorema 32. $\langle \mathbb{P}_\mathcal{A}, \leq \rangle$ je parcijalno uređenje.

Dokaz. Refleksivnost i antisimetričnost su očigledne. Dokažimo tranzitivnost. Ako imamo $\langle s, K \rangle \leq \langle t, L \rangle \leq \langle u, M \rangle$, tj. $s \supseteq t, K \supseteq L, (s \setminus t) \cap \bigcup L = \emptyset, t \supseteq u, L \supseteq M, (t \setminus u) \cap \bigcup M = \emptyset$, onda jasno, $s \supseteq u$ i $K \supseteq M$. Dokažimo $(s \setminus u) \cap \bigcup M = \emptyset$. Zbog $u \subseteq t \subseteq s$ i $M \subseteq L$, imamo $(s \setminus u) = (s \setminus t) \cup (t \setminus u)$ i $\bigcup M \subseteq \bigcup L$, pa $(s \setminus u) \cap \bigcup M = [(s \setminus t) \cap (t \setminus u)] \cap \bigcup M = ((s \setminus t) \cap \bigcup M) \cup \emptyset \subseteq (s \setminus t) \cap \bigcup L = \emptyset$. □

Lema 30. Elementi $\langle s, K \rangle$ i $\langle t, L \rangle$ iz $\mathbb{P}_\mathcal{A}$ su kompatibilni ako i samo ako $(s \setminus t) \cap \bigcup L = \emptyset$ i $(t \setminus s) \cap \bigcup K = \emptyset$. Tada važi i

$$\langle s \cup t, K \cup L \rangle \leq \langle s, K \rangle, \langle t, L \rangle. \tag{6.3}$$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka postoji $\langle u, M\rangle \leq \langle s, K\rangle, \langle t, L\rangle$. Tada po definiciji relacije važi $u \supseteq s, t$; $M \supseteq K, L$; $(u \setminus s) \cap \bigcup K = \emptyset$ i $(u \setminus t) \cap \bigcup L = \emptyset$. Kako je $s \subseteq u$ i $(u \setminus t) \cap \bigcup L = \emptyset$, sledi $(s \setminus t) \cap \bigcup L = \emptyset$. Zbog $t \subseteq u$ i $(u \setminus s) \cap \bigcup K = \emptyset$, sledi $(t \setminus s) \cap \bigcup K = \emptyset$.

($\Leftarrow$) Neka $(s \setminus t) \cap \bigcup L = \emptyset$ i $(t \setminus s) \cap \bigcup K = \emptyset$. Dokažimo (6.3). Jasno, $s \cup t \supseteq s, t$ i $K \cup L \supseteq K, L$. Takođe $((s \cup t) \setminus s) \cap \bigcup K = (t \setminus s) \cap \bigcup K = \emptyset$ i $(s \cup t) \setminus t \cap \bigcup L = (s \setminus t) \cap \bigcup L = \emptyset$, pa važi (6.3), pa su $\langle s, K\rangle$ i $\langle t, L\rangle$ kompatibilni. □

Lema 31. Za svako $n \in \omega$, skup $D_n = \{\langle s, K\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}} : |s| \geq n\}$ je gust u $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$.

Dokaz. Neka je $\langle t, L\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}} \setminus D_n$. Tada $|t| < n$. Kako je prema lemi (29) (a) $\omega \setminus \bigcup L$ beskonačan skup, beskonačan je i $\omega \setminus (\bigcup L \cup t)$, pa iz njega izaberimo elemente $k_1, \dots, k_n$ i definišimo skup $s = t \cup \{k_1, \dots, k_n\}$. Sada je $\langle s, L\rangle \in D_n$ i $\langle s, L\rangle \leq \langle t, L\rangle$ jer je, po konstrukciji, $(s \setminus t) \cap \bigcup L = \emptyset$. □

Lema 32. Za svako $A \in \mathcal{A}$, skup $\Delta_A = \{\langle s, K\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}} : A \in K\}$ je gust .

Dokaz. Za $\langle t, L\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ važi $\langle t, L \cup \{A\}\rangle \leq \langle t, L\rangle$. □

Teorema 33. Prebrojiva adf ne može da bude madf, dakle $\mathfrak{a} > \omega$. Preciznije, neka je $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ prebrojiva adf i $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\} \cup \{\Delta_A : A \in \mathcal{A}\}$. Ako je G $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$-generički filter nad $\mathcal{D}$ i $D_G = \bigcup_{\langle s, K\rangle \in G} s$, onda:

(a) $D_G \in [\omega]^\omega$;

(b) Za sve $A \in \mathcal{A}$, važi $|D_G \cap A| < \omega$.

Dokaz. Kako je $|\mathcal{D}| = \omega + |\mathcal{A}| = \omega$, prema teoremi 5 postoji $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$-generički filter nad $\mathcal{D}$, označimo ga sa G.

(a) Za proizvoljno $n \in \omega$ postoji $\langle s, K\rangle \in G \cap D_n$. Tada $s \subseteq D_G$ i $|s| \geq n$, pa je $|D_G| \geq n$, za svako $n \in \omega$. Dakle, $|D_G| = \omega$.

(b) Neka $A \in \mathcal{A}$. Tada postoji $\langle t, L\rangle \in G \cap \Delta_A$. Sada $t \subseteq D_G$ i $A \in L$. Za proizvoljno $\langle s, K\rangle \in G$ elementi $\langle s, K\rangle$ i $\langle t, L\rangle$ su kompatibilni, pa je $s \setminus t \cap \bigcup L = \emptyset$, odakle $s \setminus t \cap A = \emptyset$. Dakle, $(D_G \setminus t) \cap A = \bigcup_{\langle s, K\rangle \in G}((s \setminus t) \cap A) = \emptyset$, pa je $D_G \cap A \subseteq t$, tj. $|D_G \cap A| < \omega$. □

6.3 Martinova aksioma implicira $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$

Prelazimo na primenu MA. Za to nam je potrebna sledeća lema:

Lema 33. $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ je ccc parcijalno uređenje.

Dokaz. Elementi $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ sa istom prvom komponentom, na primer $\langle s, K\rangle$ i $\langle s, L\rangle$ su kompatibilni jer je $\langle s, K \cup L\rangle \leq \langle s, K\rangle, \langle s, L\rangle$. Neka je $A = \{\langle s_i, K_i\rangle : i \in I\}$ antilanac u $\mathbb{P}$. Tada iz $i \neq j$ sledi $s_i \neq s_j$, pa kako je $|[\omega]^{<\omega}| = \omega$, imamo $|I| = \omega$. □

Teorema 34. MA$\Rightarrow$ $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$.

Dokaz. Neka je familija $\mathcal{A}$ adf kardinalnosti $\omega < \kappa < \mathfrak{c}$. Tada je $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\} \cup \{\Delta_A : A \in \mathcal{A}\}$ familija u $\mathbb{P}_\mathcal{A}$ gustih skupova kardinalnosti $\kappa < \mathfrak{c}$. Kako je $\mathbb{P}_\mathcal{A}$ ccc postoji $\mathbb{P}_\mathcal{A}$ generički filter nad $\mathcal{D}$, u oznaci G. Neka je $D_G = \bigcup_{\langle s,K\rangle \in G} s$. Nastavak dokaza je sličan odgovarajućem delu dokaza teoreme 33. Dakle, $\mathcal{A}$ nije madf. □

6.4 Jos neke posledice Martinove aksiome

Teorema 35. (MA) Neka su $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq [\omega]^\omega$ adf kardinalnosti $< \mathfrak{c}$. Ako nijedan element familije $\mathcal{B}$ nije skoro pokriven sa konačno elemenata $\mathcal{A}$, tada postoji $D \in [\omega]^\omega$ da važi:

(a) $\forall A \in \mathcal{A}\ (|D \cap A| < \omega)$;

(b) $\forall B \in \mathcal{B}\ (|D \cap B| = \omega)$.

Dokaz. Dokažimo da je za $B \in \mathcal{B}$ i $n \in \omega$ skup $D_n^B = \{\langle s,K\rangle \in \mathbb{P}_\mathcal{A} : |s \cap B| \geq n\}$ gust u $\mathbb{P}_\mathcal{A}$. Neka je $\langle t,L\rangle \in \mathbb{P}_\mathcal{A} \setminus D_n^B$. Tada je $|t \cap B| < n$. Kako je skup $B \setminus \bigcup L$ beskonačan, izaberimo $k_1, \ldots, k_n \in (B \setminus \bigcup L) \setminus t$. Neka je $s = t \cup \{k_1, \ldots, k_n\}$. Sada imamo $\langle s,L\rangle \in D_n^B$ i $\langle s,L\rangle \leq \langle t,L\rangle$. Kao u lemi 32 dokazuje se da su skupovi $\Delta_A = \{\langle s,K\rangle \in \mathbb{P}_\mathcal{A} : A \in K\}$ gusti. Odredimo kardinalnost familije $\mathcal{D} = \{D_n^B : B \in \mathcal{B} \wedge n \in \omega\} \cup \{\Delta_A : A \in \mathcal{A}\}$. Imamo $|\mathcal{D}| = |\mathcal{B} \times \omega| + |\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|\omega + |\mathcal{A}| = \max\{|\mathcal{B}|\omega, |\mathcal{A}|\} < \mathfrak{c}$. Prema lemi 33 parcijalno uređenje $\mathbb{P}_\mathcal{A}$ je ccc, dakle prema MA postoji $\mathbb{P}_\mathcal{A}$-generički filter nad $\mathcal{D}$, označimo ga sa G. Dokažimo da za $D_G = \bigcup_{\langle s,K\rangle \in G} s$ važi (a) i (b).

(a) Neka je $A \in \mathcal{A}$ i $\langle s,K\rangle \in \Delta_A \cap G$. Imamo da je $A \in K$. Za $\langle t,L\rangle \in G$ postoji $\langle u,M\rangle \in G$, tako da važi $\langle u,M\rangle \leq \langle s,K\rangle, \langle t,L\rangle$. Jasno, $(u \setminus s) \cap \bigcup K = \emptyset$, odnosno $(u \setminus s) \cap A = \emptyset$. Dalje, kako je $t \subseteq u$ važi $(t \setminus s) \cap A = \emptyset$, dakle $t \cap A \subseteq s \cap A$. Sada imamo $D_G \cap A = \bigcup_{\langle t,L\rangle \in G} t \cap A \subseteq s \cap A$, a to je konačan skup.

(b) Neka je $B \in \mathcal{B}$ i $\langle s,K\rangle \in D_n^B \cap G$. Tada je $s \subseteq D_G$ i $|s \cap B| \geq n$, pa je $|D_G \cap B| \geq n$. Ovo važi za svako $n \in \omega$, dakle $|D_G \cap B| = \omega$. □

Posledica 6. (MA) Neka je $\mathcal{C} \subseteq [\omega]^\omega$ adf kardinalnosti $< \mathfrak{c}$ i $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$. Tada postoji $D \in [\omega]^\omega$ da važi:

(a) $\forall A \in \mathcal{A}\ |D \cap A| < \omega$;

(b) $\forall B \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{A}\ |D \cap B| = \omega$.

Dokaz. Prema lemi 29 (b), ako $B \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{A}$ onda B nije skoro pokriven sa konačno elemenata familije $\mathcal{A}$. Familija $\mathcal{B}$ iz teoreme 35 je $\mathcal{C} \setminus \mathcal{A}$. □

Posledica 7. (MA) Ako je $\omega \leq \kappa < \mathfrak{c}$ sledi $2^\omega = 2^\kappa = \mathfrak{c}$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{C}$ adf kardinalnosti κ i funkcija $f : [\omega]^\omega \to P(\mathcal{C})$ definisana na sledeći način: $f(D) = \{A \in \mathcal{C} : |D \cap A| < \omega\}$. Neka je $\mathcal{A} \in P(\mathcal{C})$, tj. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$. Tada postoji $D \in [\omega]^\omega$ da važe (a) i (b) iz posledice 6, tj. $f(D) = \mathcal{A}$. Dakle, f je sirjekcija, pa $2^\kappa = |P(\mathcal{C})| \leq 2^\omega$. Naravno iz $\omega \leq \kappa$ sledi $2^\omega \leq 2^\kappa$, pa je $2^\kappa = 2^\omega = \mathfrak{c}$. □

Posledica 8. Iz MA sledi da 2^ω je regularni kardinal.

Dokaz. Za svako $\kappa < 2^\omega$ važi $2^\omega = 2^\kappa$. Prema lemi Königa (lema 1) i njenoj posledici (posledica 1) važi cf(2^ω) =cf$(2^\kappa) > \kappa$, pa jasno, cf$(2^\omega) = 2^\omega$. □

6.5 Nejednakost $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{a}$. Izomorfnost uredjenja $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ i $\mathbb{P}_{\mathcal{P}}$

Teorema 36. (a) Ako je $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ beskonačna adf, onda $\mathcal{P} = \{A^c : A \in \mathcal{A}\}$ ima sfip;
(b) ako je $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ beskonačna madf, sledi da $\mathcal{P}$ nema pseudopresek.

Dokaz. (a) Neka su $A_1, \ldots, A_2 \in \mathcal{A}$. Sledi da je $\bigcap_{i \leq n} A_i^c = \bigcap_{i \leq n} \omega \setminus A_i = \omega \setminus \bigcup_{i \leq n} A_i$ beskonačan skup (lema 29 (a)).

(b) Pretpostavimo da je P pseudopresek familije $\mathcal{P}$, tj. da je $P \subseteq^* A^c$, za sve $A \in \mathcal{A}$ i $P \in [\omega]^\omega$. Tada je $P \cap A = P \setminus A^c$ konačan skup za sve $A \in \mathcal{A}$ što je nemoguće zbog maksimalnosti familije $\mathcal{A}$. □

Posledica 9. $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{a}$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ madf i $|\mathcal{A}| = \mathfrak{a}$. Tada je $\mathcal{P} = \{A^c : A \in \mathcal{A}\}$ familija sa sfip i nema pseudopresek, te je $\mathfrak{p} \leq |\mathcal{P}| = |\mathcal{A}| = \mathfrak{a}$. □

Podsetimo se parcijalnog uređenja $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$.

$$\mathbb{P}_{\mathcal{A}} = \{\langle s, K\rangle : s \subseteq \omega \text{ je konačan } \wedge K \subseteq \mathcal{A} \text{ je konačan}\},$$

gde je $\leq$ binarna relacija na $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ data sa

$$\langle s, K\rangle \leq \langle t, L\rangle \text{ ako i samo ako } (s \supseteq t) \wedge K \supseteq L \wedge s \setminus t \cap \bigcup L = \emptyset.$$

Neka je familija $\mathcal{P} = \{A^c : A \in \mathcal{A}\}$. Definišimo skup

$$\mathbb{P}_{\mathcal{P}} = \{\langle s, K'\rangle : s \subseteq \omega^{<\omega} \wedge K' \in \mathcal{P}^{<\omega}\} \tag{6.4}$$

i na njemu relaciju $\leq_{\mathcal{P}}$:
$\langle s, K'\rangle \leq_{\mathcal{P}} \langle t, L'\rangle$ ako i samo ako $s \supseteq t \wedge K' \supseteq L' \wedge s \setminus t \subseteq \bigcap L'$.
Tada važi sledeća teorema.

Teorema 37. Preslikavanje $f : \mathbb{P}_{\mathcal{A}} \to \mathbb{P}_{\mathcal{P}}$ dato sa $f(\langle s, K\rangle) = \langle s, K'\rangle$, gde je $\{A_1, \ldots, A_n\}' = \{A_1^c, \ldots, A_n^c\}$ je izomorfizam.

Dokaz. $\langle s, K\rangle \leq_{\mathcal{A}} \langle t, L\rangle$ akko $s \supseteq t \wedge K \supseteq L \wedge (s \setminus t) \cap \bigcup L = \emptyset$ akko $s \supseteq t \wedge K' \supseteq L' \wedge (s \setminus t) \subseteq (\bigcup L)' = \bigcap L'$ akko $\langle s, K'\rangle \leq_{\mathcal{P}} \langle t, L'\rangle$. □

6.6 Nejednakost $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$

Označimo sa $\mathcal{V}$ skup "vertikalnih linija" u $\omega \times \omega$, tj. $\mathcal{V} = \{V_k : k \in \omega\}$, gde je $V_k = \{k\} \times \omega$, za sve $k \in \omega$. Definišemo

$$\mathfrak{a}_1 = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \cup \mathcal{V} \text{ je madf na } \omega \times \omega \text{ i } \mathcal{A} \cap \mathcal{V} = \emptyset\}.$$

Teorema 38. $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1$.

Dokaz. Jasno, $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{a}_1$ sledi iz činjenice da je $|\omega| = |\omega \times \omega|$. Koristimo: ako je $f : \omega \times \omega \to \omega$ bijektivno preslikavanje i $\mathcal{A}$ madf na $\omega \times \omega$ onda je $\{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$ madf na ω.

Neka je $\mathcal{A}$ madf na skupu ω i $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{a}\}$. Za svako $n \in \omega$ definišemo skupove B_n na sledeći način: $B_0 = A_0, B_1 = A_1 \setminus A_0, B_2 = A_2 \setminus (A_0 \cup A_1), \ldots$ Skupovi B_n su disjunktni i beskonačni. Neka je $S = \bigcup_{n\in\omega} B_n$. Dokažimo da je $\mathcal{A}_S = \{B_n : n \in \omega\} \cup \{A_\alpha \cap S : \alpha \geq \omega \ \wedge \ |A_\alpha \cap S| = \omega\}$ madf na S. Lako se vidi da je adf. Ako je $X \in [S]^\omega \subseteq \omega^\omega$, postoji $\beta < \mathfrak{a}$, takvo da je $|X \cap A_\beta| = \omega$. Moguće je:

(a) $\beta < \omega$. Tada je $\beta = n$ za neko $n \in \omega$, pa je $X \cap A_n$ beskonačan skup. Kako je $B_n = A_n \setminus ((A_n \cap A_0) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n-1}))$, to je $|X \cap B_n| = \omega$.

(b) $\beta > \omega$. Tada $X \cap A_\beta = X \cap S \cap A_\beta$ je beskonačan.

Neka je $\varphi : S \to \omega \times \omega$ bijektivno preslikavanje, takvo da je $\varphi(B_n) = V_n$ (takvo φ postoji jer je $S = \bigcup_{n\in\omega} B_n$ i $\omega \times \omega = \bigcup_{n\in\omega} V_n$ i $B_i \cap B_j = V_i \cap V_j = \emptyset$ za $i \neq j$). Tada je $\mathcal{A}_1 = \{\varphi[A] : A \in \mathcal{A}_S\}$ madf na $\omega \times \omega$ iz definicije kardinala $\mathfrak{a}_1$, i $\mathfrak{a}_1 \leq |\mathcal{A}_S| = |\mathcal{A}_S \setminus \{B_n : n \in \omega\}| \leq \mathfrak{a}$. □

Definicija 17. Za familije $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq [\omega]^\omega$ kažemo da su **ortogonalne**, u oznaci $\mathcal{A} \perp \mathcal{B}$ ako i samo ako za svaki skup $A \in \mathcal{A}$ i $B \in \mathcal{B}$ važi $|A \cap B| < \omega$.

Definicija 18.

$$\mathfrak{b}_1 = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \subseteq [\omega \times \omega]^\omega \wedge \ \mathcal{B} \perp \mathcal{V} \wedge \ \forall X \in [\omega \times \omega]^\omega \ (X \perp \mathcal{V} \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B} |X \cap B| = \omega)\}$$

Teorema 39. $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{b}_1 \leq \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}$.

Dokaz. Pokažimo prvo nejednakost $\mathfrak{b}_1 \leq \mathfrak{a}_1$. Ako je $\mathcal{A}$ iz definicije kardinala $\mathfrak{a}_1$ i $|\mathcal{A}| = \mathfrak{a}_1$, onda $\mathcal{A} \subseteq [\omega \times \omega]^\omega$ i $\mathcal{A} \perp \mathcal{V}$ jer $\mathcal{A} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Ako je $X \perp \mathcal{V}$ zbog maksimalnosti $\mathcal{A} \cup \mathcal{V}$ postoji $B \in \mathcal{A} \cup \mathcal{V}$ da $|B \cap X| = \omega$, no $B \notin \mathcal{V}$, pa $B \in \mathcal{A}$. Dakle, $\mathfrak{b}_1 \leq \mathfrak{a}_1$.

Pokažimo sada nejednakost $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{b}_1$. Pretpostavimo $\mathfrak{b}_1 < \mathfrak{b}$. Neka je $\mathcal{B}$ kao u definiciji kardinala $\mathfrak{b}_1$. Za $B \in \mathcal{B}$ definišemo preslikavanje $f_B : \omega \to \omega$ sa $f_B(k) = \max(\pi_2 [B \cap V_k] \cup \{0\})$. Tada je $B \subseteq L_{f_B} \stackrel{def}{=} \bigcup_{k\in\omega} \{k\} \times [0, f_B(k)]$. Zbog $\mathfrak{b}_1 < \mathfrak{b}$ familija $\{f_B : B \in \mathcal{B}\}$ je ograničena, pa postoji $g \in {}^\omega\omega$, da važi $f_B \leq^* g$, za sve $B \in \mathcal{B}$.

Neka je $h = g + 1$. Tada važi

$$\forall B \in \mathcal{B} \exists n_B \in \omega \forall k \geq n_B f_B(k) < h(k). \tag{6.5}$$

Neka je $X = h$. Zbog (6.5), za svako $B \in \mathcal{B}$ važi $|X \cap B| < \omega$, kontradikcija. □

Glava 7

Kardinal $\mathfrak{s}$

7.1 Spliting familije u skupu $[\omega]^\omega$. Kardinal $\mathfrak{s}$

Definicija 19. Neka je $A, S \in [\omega]^\omega$. Skup S **cepa** (engl.: **splits**) skup A ako i samo ako su $A \cap S$ i $A \setminus S$ beskonačni skupovi.

Definicija 20. Familija $\mathcal{S} \subseteq [\omega]^\omega$ je **spliting familija** (eng.: splitting family) ako i samo ako za svako $A \in [\omega]^\omega$ postoji $S \in \mathcal{S}$, da S cepa A.

Primer 12. Trivijalno $\mathcal{S} = [\omega]^\omega$ je spliting familija.

Definicija 21. $\mathfrak{s} = \min\{|\mathcal{S}| : \mathcal{S} \subseteq [\omega]^\omega$ je spliting familija$\}$.

7.2 Nejednakost $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{d}$

Neka je $\mathfrak{d}' = \min\{|\mathcal{D}| : \mathcal{D} \subseteq {}^\omega\omega \cap \text{Rastuće} \wedge \forall f \in {}^\omega\omega\ \exists g \in \mathcal{D} f <^* g\}$.

Teorema 40. $\mathfrak{d}' = \mathfrak{d}$.

Dokaz. $(\leq)$ Neka je $\mathcal{D}$ iz definicije $\mathfrak{d}'$ i $|\mathcal{D}| = \mathfrak{d}'$. Kako iz $f <^* g$, sledi $f \leq^* g$, $\mathcal{D}$ je dominirajuća familija, pa je $\mathfrak{d} \leq |\mathcal{D}|$.

($\geq$) Neka je $\mathcal{D}$ dominirajuća familija i $|\mathcal{D}| = \mathfrak{d}$. Za svaku funkciju $g \in \mathcal{D}$ definišimo φ_g =max$\{g, 1\}$. Tada $g \leq \varphi_g$. Definišimo ψ_g sa $\psi_g(k) = \varphi_g(0) + \varphi_g(1) + \ldots + \varphi_g(k)$. Tada je $\varphi_g \leq \psi_g$ i ψ_g je rastuća. Neka je $h_g = \psi_g + 1$. Jasno, h_g je rastuća i $g < h_g$. Sada $\mathcal{D}_1 = \{h_g : g \in \mathcal{D}\} \subseteq {}^\omega\omega \cap$ Rastuće. Za $f \in {}^\omega\omega$ postoji $g \in \mathcal{D}$ da $f \leq^* g$, pa $f <^* h_g$. Dakle, $\mathfrak{d}' \leq |\mathcal{D}_1| = |\mathcal{D}| = \mathfrak{d}$. □

Lema 34. Neka je $A \in [\omega]^\omega$, $c_A : \omega \to A$ funkcija brojilica, $f : \omega \to \omega$ rastuća funkcija, gde je $f(0) > 0$ i neka je $S_f = \bigcup_{n \in \omega}[f^{2n}(0), f^{2n+1}(0))$. Tada, ako je $c_A <^* f$, sledi da S_f splituje A.

Dokaz. Indukcijom se lako pokazuje da je $f(k) > k$, za sve $k \in \omega$. Pokažimo indukcijom da za sve $n \in \omega$ važi $f^n(0) \geq n$. Za $n = 0$ je tačno. Neka je $f^n(0) \geq n$, za neko n. Tada zbog monotonosti i $f >$ id (gde je id identičko preslikavanje) sledi $f^{n+1}(0) = f(f^n(0)) > f^n(0) \geq n$, pa je $f^{n+1}(0) \geq n + 1$. Sumiramo:

(a) $f(k) > k$;

(b) $f^n(0) \geq n$.

Zbog $c_A <^* f$ postoji $m \in \omega$ da

(c) $\forall n \geq m \;\; c_A(n) < f(n)$.

Neka je $n \geq m$. Tada je $f^n(0) \leq c_A(f^n(0)) < f(f^n(0)) = f^{n+1}(0)$. Dakle, $c_A(f^n(0)) \in [f^n(0), f^{n+1}(0))$ za svako $n \geq m$. Sada za parno n imamo $c_A(f^n(0)) \in S_f \cap A$, a za neparno n važi $c_A(f^n(0)) \in A \setminus S_f$. Dakle, skupovi $A \cap S_f$ i $A \setminus S_f$ su beskonačni, pa S_f cepa A. □

Teorema 41. (a) Ako je $\mathcal{D} \subseteq {}^\omega\omega \cap$ Rastuće$\cap\{f \in \omega^\omega : f(0) > 0\}$ dominirajuća familija, tada je $\mathcal{S} = \{S_f : f \in \mathcal{D}\}$ spliting familija;

(b) $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{d}$.

Dokaz. (a) Neka je $A \in [\omega]^\omega$. Po pretpostavci postoji $f \in \mathcal{D}$ da $c_A <^* f$. Prema lemi 34, S_f cepa A.

(b) Na osnovu teoreme 40 i njenog dokaza postoji familija $\mathcal{D}$ sa svojstvima iz tačke (a) kardinalnosti $\mathfrak{d}$. Tada je $\mathcal{S} = \{S_f : f \in \mathcal{D}\}$ spliting familija kardinalnosti $\mathfrak{d}$, pa je $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{d}$. □

7.3 Nejednakost $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{s}$

Teorema 42. $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{s}$.

Dokaz. Neka je $\kappa < \mathfrak{t}$. Dokazujemo da ne postoji spliting familija kardinalnosti κ. Neka je $\mathcal{S} \subseteq [\omega]^\omega$,$|\mathcal{S}| = \kappa$. Neka je $\mathcal{S} = \{S_\alpha : \alpha < \kappa + 1\}$ jedna numeracija. Definišimo niz $\langle T_\alpha : \alpha < \kappa + 1\rangle$ u $[\omega]^\omega$ sa namerom da skup T_κ nije splitovan ni jednim S_α. Zahtevamo:

(a) ako je $\beta < \alpha$, onda je $T_\beta {}^*\!\supset T_\alpha$ i

(b) $T_\alpha \subseteq S_\alpha$ ili $T_\alpha \subseteq \omega \setminus S_\alpha$.

Neka je $\alpha \leq \kappa$ i neka je definisan niz $\langle T_\beta : \beta < \alpha\rangle$ sa osobinama (a) i (b). Definišimo T_α. Kako je $|\alpha| \leq \kappa < \mathfrak{t}$, postoji pseudopresek $P \subseteq^* T_\beta$, za svako $\beta < \alpha$. Neka je $\pi(P)$ polovina P. Moguće je:

(c) $|\pi(P) \cap S_\alpha| = \omega$; tada definišimo $T_\alpha = \pi(P) \cap S_\alpha \subseteq S_\alpha$;

(d) $|\pi(P) \cap S_\alpha| < \omega$; tada definišimo $T_\alpha = \pi(P) \setminus S_\alpha \subseteq S_\alpha$.

Tada je $T_\alpha \subset^* S_\alpha$ ili $T_\alpha \subset^* \omega \setminus S_\alpha$ i jasno, za svako $\beta < \alpha$ važi $T_\alpha \subset^* T_\beta$. Prema teoremi o rekurziji postoji niz $\langle T_\alpha : \alpha \leq \kappa \rangle$ sa osobinama (a) i (b). Tada za svako $\alpha \leq \kappa$ važi $T_\kappa \subset^* S_\alpha$ ili $T_\kappa \subset^* \omega \setminus S_\alpha$, pa T_κ nije splitovan ni jednim S_α. Dakle, $\mathcal{S}$ nije spliting familija. □

Glava 8

Kardinal $\mathfrak{u}$

8.1 Baza neglavnog ultrafiltera na skupu ω. Kardinal $\mathfrak{u}$

Podsetimo se $\mathcal{U} \subseteq P(\omega)$ je **neglavni ultrafilter** na ω ako i samo ako
(U1) $\emptyset \notin \mathcal{U} \ \wedge \ \omega \in \mathcal{U}$;
(U2) $F_1, F_2 \in \mathcal{U} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{U}$;
(U3) $\mathcal{U} \ni F \subseteq A \subseteq \omega \Rightarrow A \in \mathcal{U}$;
(U4) $\forall X \subseteq \omega \ (X \in \mathcal{U} \vee X^c \in \mathcal{U})$;
(U5) $\bigcap_{F \in \mathcal{U}} F = \emptyset$.

Definicija 22. $\mathcal{B} \subseteq P(\omega)$ je **baza nekog neglavnog ultrafiltera na** ω ako i samo ako je $\mathcal{B}\uparrow \stackrel{def}{=} \{A \subseteq \omega : \exists B \in \mathcal{B}\ (B \subseteq A)\}$ neglavni ultrafilter na ω.

Teorema 43. $\mathcal{B} \subseteq P(\omega)$ je baza nekog neglavnog ultrafiltera na ω ako i samo ako
(a) $\emptyset \notin \mathcal{B} \neq \emptyset$;
(b) $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}\ B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$;
(c) $\forall X \subseteq \omega\ \exists B \in \mathcal{B}\ (B \subseteq X \vee B \subseteq X^c)$;
(d) $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B = \emptyset$.

Dokaz. ($\Rightarrow$)Neka je $\mathcal{B}\uparrow$ neglavni ultrafilter.
(a) Iz $\emptyset \in \mathcal{B}$ sledilo bi $\mathcal{B}\uparrow = P(\omega)$, pa $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Iz $\mathcal{B} = \emptyset$ sledilo bi $\mathcal{B}\uparrow = \emptyset$. Dakle, $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

(b) Neka $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Kako $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}\uparrow$ sledi $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}\uparrow$, pa postoji $B_3 \in \mathcal{B}$ da $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

(c) Neka je $X \subseteq \omega$. $\mathcal{B}\uparrow$ je ultrafilter pa ako je $X \in \mathcal{B}\uparrow$, onda postoji $B \in \mathcal{B}$ tako da važi $B \subseteq X$, a ako $X^c \in \mathcal{B}\uparrow$, onda postoji $B \in \mathcal{B}$ tako da važi $B \subseteq X^c$.

(d) Pretpostavimo $P = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B \neq \emptyset$. Za svako $A \in \mathcal{B}\uparrow$ postoji $B \in \mathcal{B}$ da $B \subseteq A$, pa $P \subseteq A$. Dakle, $P \subseteq \bigcap_{A \subseteq \mathcal{B}\uparrow} A \neq \emptyset$ što je netačno, jer je $\mathcal{B}\uparrow$ neglavni ultrafilter.

($\Leftarrow$) Neka važi (a)-(d). Dokažimo da familija $\mathcal{B}\uparrow$ zadovoljava uslove (U1)...(U5).

(U1) $\emptyset \in \mathcal{B}\uparrow$ bi dalo $\emptyset \in \mathcal{B}$ što je netačno zbog (a). Neka je $B \in \mathcal{B}$. Tada $B \subseteq \omega$, pa $\omega \in \mathcal{B}\uparrow$.

(U2) Neka su $F_1, F_2 \in \mathcal{B}\uparrow$ i $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ takvi da $B_1 \subseteq F_1$, $B_2 \subseteq F_2$. Zbog (b) postoji $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq F_1 \cap F_2$, pa $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{B}\uparrow$.

(U3) Neka je $\mathcal{B}\uparrow \ni F \subseteq A \subseteq \omega$. Tada postoji $B \in \mathcal{B}$ da $B \subseteq F \subseteq A$, pa $A \in \mathcal{B}\uparrow$.

(U4) Neka je $X \subseteq \omega$. Zbog (c) postoji $B \in \mathcal{B}$ tako da, ili $B \subseteq X$ ili $B \subseteq X^c$, dakle $X \in \mathcal{B}\uparrow$ ili $X^c \in \mathcal{B}\uparrow$.

(U5) Iz $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}\uparrow$ sledi $\bigcap \mathcal{B}\uparrow \subseteq \bigcap \mathcal{B} = \emptyset$. □

Posledica 10. Ako je $\mathcal{B} \subseteq P(\omega)$ baza nekog neglavnog ultrafiltera na ω, onda $\mathcal{B} \subseteq [\omega]^\omega$.

Dokaz. Pretpostavimo $B = \{n_1, \ldots, n_k\} \in \mathcal{B}$. Zbog teoreme 43(d) postoji $B_i \in \mathcal{B}$ takvo da $n_i \notin B_i$, $i = 1, \ldots, k$. Tada je $B \cap B_1 \cap \ldots \cap B_k = \emptyset$ što je nemoguće, jer $\mathcal{B}\uparrow$ ima svojstvo konačnog preseka. □

Definicija 23. $\mathfrak{u} = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ je baza nekog neglavnog ultrafiltera na $\omega\}$.

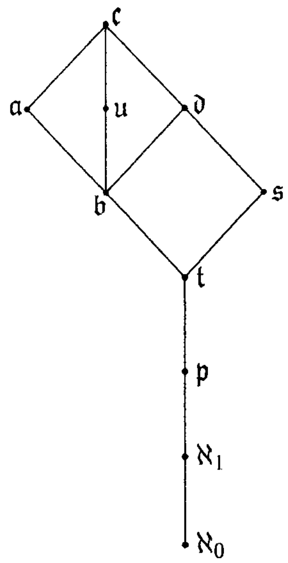
8.2 Nejednakost $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{u}$

Teorema 44. $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{u}$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. $\mathfrak{u} < \mathfrak{b}$. Neka je $\mathcal{B}$ baza nekog neglavnog ultrafiltera na ω i $|\mathcal{B}| = \mathfrak{u}$. Familija $\{c_B : B \in \mathcal{B}\}$ je ograničena, tj. postoji preslikavanje $g : \omega \to \omega$ takvo da $c_B \leq^* g$, za svako $B \in \mathcal{B}$. Lako nalazimo striktno rastuću funkciju da je $f(0) > 0$ i $f > g$, pa je $c_B <^* f$, za sve $B \in \mathcal{B}$. Tada prema lemi 34 S_f splituje sve $B \in \mathcal{B}$. No zbog teoreme 43(c) postoji $B \in \mathcal{B}$ da $B \subseteq S_f$ ili $B \subseteq \omega \setminus S_f$, pa skup B nije splitovan, kontradikcija. □

8.3 Rezime: Dijagram nejednakosti. Istorijske napomene

Na slici koja sledi prikazan je dijagram malih kardinala. On nam objašnjava kako se kardinali odnose u ZFC. Primera radi, linija između kardinala $\mathfrak{b}$ i $\mathfrak{d}$ znači da se $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{d}$ može dokazati u ZFC.



Kardinale $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{p}$ i $\mathfrak{t}$ definisao je Rothberger 1939. i 1948. godine ([23], [24] i [25]). Godine 1960. Katětov je definisao kardinal $\mathfrak{d}$ ([13]), a 1972. godine Hechler je definisao kardinal $\mathfrak{a}$ ([10] i [11]) i kardinal $\mathfrak{u}$ ([10] i [11]). Kardinal $\mathfrak{s}$ definisao je Booth 1974. godine ([2]).

Relacija kardinala $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{u}$ je dokazana 1977. godine. Dokazao ju je Solomon ([28]). Godine 1936. Hausdorff je pokazao da važi $\mathfrak{p} \leq \omega_1$ ([9]). Odnos $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{b}$ je 1948. godine pokazao Rothberger ([25]), $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$ Solomon 1977. godine, a $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{d}$ Nyikos 1973. godine ([21]). Relacije $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{t}$ i $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{d}$ su očigledne.

Glava 9

Mali kardinali u topologiji i algebri

9.1 Jedna primena u topologiji

Generalno važi $w(X) \geq d(X), \chi(X)$. Postavlja se pitanje šta je sa prebrojivim separabilnim prostorima? Da li iz prebrojivosti skupa tačaka sledi prebrojivost baze ili baze okolina? Odgovor je negativan što pokazuje i sledeći primer.

Primer 13. Neka je $X = \omega^2 \cup \{p\}$, gde $p \notin \omega^2$ ($\omega^2 = \omega \times \omega$). Za $m \in \omega$ i $f \in {}^\omega\omega$ definišimo

$$B_{m,f} = \{p\} \cup \bigcup_{k \geq m} \{k\} \times [f(k), \infty)_\omega$$

Tada važi:

(a) $\mathcal{B} = P(\omega^2) \cup \{B_{m,f} : m \in \omega \wedge f \in {}^\omega\omega\}$ je baza neke topologije na X. Označimo je sa $\mathcal{O}$;

(b) $(X, \mathcal{O})$ je Hausdorffov, 0-dimenzionalan prostor sa prebrojivo mnogo tačaka, pa je i separabilan;

(c) $(X, \mathcal{O})$ ne zadovoljava prvu, pa dakle ni drugu aksiomu prebrojivosti;

(d) $\chi(p) = \mathfrak{d}$.

Dokaz. (a) Lako se pokazuje da je

$$B_{m,f} \cap B_{n,g} = B_{\max\{m,n\},\max\{f,g\}}. \tag{9.1}$$

(BN1) Važi jer je $B_{0,0} = X$, pa je $\bigcup \mathcal{B} = X$.

(BN2) Neka $B^1, B^2 \in \mathcal{B}$. Moguće je:

$\circ$ $B^1 \in P(\omega^2) \vee B^2 \in P(\omega^2)$. Tada $B^1 \cap B^2 \in P(\omega^2) \subseteq \mathcal{B}$.

$\circ$ $B^1 = B_{m,f}$, $B^2 = B_{n,g}$. Tada koristimo (9.1).

(b) T_2 se lako pokazuje diskusijom po izboru tačaka. Takođe $\mathcal{B}' = \{\{x\} : x \in \omega^2\} \cup \{B_{m,f} : m \in \omega \wedge f \in {}^\omega\omega\} \subseteq \mathcal{O} \cap \mathcal{F}$ je baza topologije $\mathcal{O}$, pa je topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ nuladimenzionalan.

(c) Pretpostavimo da je $\mathcal{B}(p) = \{W_i : i \in \omega\}$ prebrojiva baza okolina tačke p. Tada za svako $i \in \omega$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takvo da $p \in B \subseteq W_i$. Jasno, B je oblika B_{m_i,f_i}. Familija $\{f_i : i \in \omega\}$ je ograničena (jer je prebrojiva), tj. postoji $g \in {}^\omega\omega$ tako da $f_i <^* g$ za sve $i \in \omega$. Kako je $B_{0,g} \in \mathcal{U}(p)$ postoji $i_0 \in \omega$ da $W_{i_0} \subseteq B_{0,g}$, pa i $B_{m_{i_0},f_{i_0}} \subseteq B_{0,g}$. Tada za svako $k \geq m_{i_0}$ važi $f_{i_0}(k) \geq g(k)$, pa je $g \leq^* f_{i_0}$, kontradikcija.

(d) ($\leq$) Neka je $\{g_\alpha : \alpha < \mathfrak{d}\}$ dominirajuća familija. Dokažimo da je $\mathcal{B}(p) = \{B_{m,g_\alpha} : m \in \omega \wedge \alpha < \mathfrak{d}\}$ baza okolina tačke p. Neka je U okolina tačke p. Tada je $B_{n,f} \subseteq U$, za neko $n \in \omega$ i $f \in {}^\omega\omega$. Neka je $f \leq^* g_{\alpha_0}$. Tada postoji $k_0 \in \omega$, takvo da za svako $k \geq k_0$ važi $f(k) \leq g_{\alpha_0}(k)$. Neka je m =max$\{n, k_0\}$. Tada je $B_{m,g_{\alpha_0}} \subseteq B_{n,f} \subseteq U$.

($\geq$) Neka je $\mathcal{B}\ (p)$ baza okolina tačke p. Rezonovanjem kao u (b) možemo pretpostaviti bez uticaja na opštost da je $\mathcal{B}\ (p) = \{B_{m_\alpha,f_\alpha} : \alpha < \kappa\}$. Neka je $f \in {}^\omega\omega$. Tada $B_{0,f} \in \mathcal{U}\ (p)$, pa postoji $\alpha < \kappa$ takvo da je $B_{m_\alpha,f_\alpha} \subseteq B_{0,f}$. Tada

$$\bigcup_{k \geq m_\alpha} \{k\} \times [f_\alpha(k), \infty) \subseteq \bigcup_{k \in \omega} \{k\} \times [f(k), \infty), \tag{9.2}$$

pa za $k \geq m_\alpha$ imamo $[f_\alpha(k), \infty) \subseteq [f(k), \infty)$, tj. $f(k) \leq f_\alpha(k)$. Zato je $f \leq f_\alpha$. Dakle, $\{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$ je dominirajuća familija, pa $\kappa \geq \mathfrak{d}$. Zato je i $\chi(p) \geq \mathfrak{d}$. □

9.2 Neke osobine algebre $P(\omega)/\mathrm{Fin}$

Skup svih konačnih podskupova skupa ω označimo sa Fin, tj. Fin$= [\omega]^{<\omega}$.

Teorema 45. (a) Fin je ideal u Booleovoj algebri $\langle P(\omega), \cap, \cup, {}^c, \emptyset, \omega\rangle$;

(b) Relacija $=^* \subseteq P(\omega)^2$, data sa $A =^* B$ ako i samo ako $A \triangle B$ $\in$Fin, je kongruencija;

(c) Uređena šestorka $\langle P(\omega)/_{=^*}, \wedge, \vee, ', [\emptyset], [\omega]\rangle$ sa operacijama definisanim na sledeći način $[A]\wedge[B] = [A \cap B]$, $[A]\vee[B] = [A \cup B]$ i $[A]' = [A^c]$ je Booleova algebra;

(d) Neka je na Booleovoj algebri $P(\omega)/_{=^*}$ relacija $\leq$ prirodni poredak. Tada važi

$[A] \leq [B]$ ako i samo ako $A \subseteq^* B$,

$[A] < [B]$ ako i samo ako $A \subset^* B$.

Dokaz. (a) Kako je $\emptyset$ $\in$Fin, a ω $\notin$Fin i za svaka dva konačna skupa važi da je unija konačna, kao i da je podskup konačnog skupa konačan, ispunjeni su uslovi (I1)-(I3), pa je Fin ideal.

(b) Kako je Fin ideal, prema teoremi 7 trivijalno sledi.

(c) Trivijalno sledi prema teoremi 7.

(d) Važi $[A] \leq [B]$ ako i samo ako $[A] \wedge [B] = [A]$, odnosno $[A \cap B] = [A]$, tj. $(A \cap B) \triangle A \in$Fin, tj. $A \setminus B \in$Fin, pa $A \subseteq^* B$.

Važi $[A] < [B]$ ako i samo ako $[A] \leq [B]$ i $[A] \neq [B]$, odnosno $A \subseteq^* B$ i $A \triangle B \notin$Fin, tj. $A \subseteq^* B$ i $A \neq^* B$, pa je $A \subset^* B$.

□

Lema 35. Neka su $[A], [B] \in P(\omega)/\mathrm{Fin}$. Tada $[A] \wedge [B] = 0$ ako i samo ako $|A \cap B| < \omega$.

Dokaz. Neka je $[A] \wedge [B] = 0$, tj. $[A \cap B] = [\emptyset]$. Sledi da su $A \cap B$ i $\emptyset$ u relaciji, tj. $A \cap B =^* \emptyset$. Po definiciji relacije je, jasno, $(A \cap B) \triangle \emptyset \in$Fin, odnosno $A \cap B \in$Fin. □

Napomena 5. Ako je relacija $\sim$ definisana preko ideala (kao u teoremi 7), tada se umesto $\mathbb{B}/\sim$ piše i $\mathbb{B}/I$.

Teorema 46. $|P(\omega)/\mathrm{Fin}| = \mathfrak{c}$.

Dokaz. Familije iz primera 9 i 10 su adf kardinalnosti $\mathfrak{c}$. Neka je familija $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ adf. Pretpostavimo da za neke $A_\alpha, A_\beta \in \mathcal{A}$ važi $[A_\alpha] = [A_\beta]$, tj. $A_\alpha =^* A_\beta$, odnosno $A_\alpha \triangle A_\beta \in$Fin. Tada $|A_\alpha \cap A_\beta| = \omega$ što je netačno. Dakle, $\{[A_\alpha] : \alpha < \mathfrak{c}\} \subseteq P(\omega)/\mathrm{Fin}$ je familija kardinalnosti $\mathfrak{c}$. □

Teorema 47. Booleova algebra $P(\omega)/\mathrm{Fin}$ je nekompletna, štaviše nije ni σ-algebra.

Dokaz. Neka je $\omega = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ particija skupa ω, gde je $A_n \in [\omega]^\omega$. Pretpostavimo $[A] = \bigvee_{n\in\omega}[A_n]$. Tada $[A_n] \leq [A]$, pa prema teoremi 45(d) važi $A_n \subseteq^* A$. Izaberimo $n_k \in A_k \cap A$. Neka je $B = A \setminus \{n_k : k \in \omega\}$. Tada $A_n \subseteq^* B$, tj. $[A_n] \leq [B] < [A]$, kontradikcija. □

Teorema 48. (a) Familija $\mathcal{A} = \{[A_\alpha] : \alpha < \kappa\}$ je antilanac u $P(\omega)/\mathrm{Fin}$ ako i samo ako je skup $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ adf;

(b) Familija $\mathcal{A}$ je particija jedinice ako i samo ako je $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ je madf;

(c) $\mathfrak{a} = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ je beskonačna particija jedinice$\}$.

Dokaz. (b) ($\Rightarrow$)Kontrapozicijom pokažimo da važi ovaj smer. Pretpostavimo da $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ nije madf, tj. da postoji $X \in [\omega]^\omega$, takav da za svako $\alpha < \kappa$ važi $|X \cap A_\alpha| < \omega$. Pokažimo da važi $[A_\alpha] \leq [X^c]$. Iz pretpostavke sledi da je $A_\alpha \cap X = A_\alpha \cap (X^c)^c = A_\alpha \setminus X^c$ konačan, tj. $A_\alpha \subseteq^* X^c$, dakle, $[A_\alpha] \leq [X^c]$. Tada $\bigvee_{\alpha<\kappa}[A_\alpha] \leq [X^c] \neq^* [\omega]$, jer ako je $[X^c] =^* [\omega]$ sledi da je $\omega \setminus X^c$ konačan, kontradikcija. □

Definicija 24. $\mathrm{cc}(\mathbb{B}) = \min\{\kappa :$ u $\mathbb{B}$ nema antilanaca kardinalnosti $\kappa\}$.

Teorema 49. (a) $\mathrm{cc}(P(\omega)) = \omega_1$;

(b) $\mathrm{cc}(P(\omega)/\mathrm{Fin}) = \mathfrak{c}^+$.

Dokaz. (a) Jednočlani podskupovi u $P(\omega)$ čine antilanac.

(b) U algebri $P(\omega)/\text{Fin}$ prema teoremi 48(a) familija $\mathcal{A} = \{[A_\alpha] : \alpha < \kappa\}$ je antilanac ako i samo ako je skup $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ adf. Prema primerima 9 i 10 postoji adf kardinalnosti $\mathfrak{c}$, pa je $\text{cc}((P(\omega)/\text{Fin}) \geq \mathfrak{c}^+$. Jasno, važi i $\text{cc}(P(\omega)/\text{Fin}) \leq \mathfrak{c}^+$, pa sledi jednakost. □

Dakle, ako je $\mathcal{A}$ je particija jedinice, važi $\mathfrak{a} \leq |\mathcal{A}| \leq \mathfrak{c}$.

Definicija 25. Za proizvoljnu Booleovu algebru $\mathbb{B}$ definišemo
$\pi(\mathbb{B}) = \min\{|D| : D \subseteq \mathbb{B} \text{ je gust}\}$,
$\text{Length}(\mathbb{B}) = \sup\{|L| : L \subseteq \mathbb{B} \text{ je linearno uređen}\}$,
$\text{Depth}(\mathbb{B}) = \sup\{|W| : W \subseteq \mathbb{B} \text{ je dobro uređen}\}$.

Teorema 50. $\pi(P(\omega)/\text{Fin}) = \mathfrak{c}$.

Dokaz. Generalno, za sve $\lambda < \text{cc}(\mathbb{B})$ važi $\pi(\mathbb{B}) \geq \lambda$. Neka je $A = \{a_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq \mathbb{B}^+$ antilanac i skup $D \subseteq \mathbb{B}^+$ gust u $\mathbb{B}$ takav da važi $|D| = \pi(\mathbb{B})$. Tada za svako $\alpha < \lambda$ i $a_\alpha \in A$ postoji $y_\alpha \in D$ tako da važi $y_\alpha \leq a_\alpha$. Tada $y_\alpha \perp y_\beta$ za $\alpha < \beta$, pa $|D| \geq \lambda$.

Kako u $P(\omega)/\text{Fin}$ postoji antilanac kardinalnosti $\mathfrak{c}$ određen madf kardinalnosti $\mathfrak{c}$, to je $|D| \geq \mathfrak{c}$, a kako $|P(\omega)/\text{Fin}| = \mathfrak{c}$, sledi $\pi(P(\omega)/\text{Fin}) \leq \mathfrak{c}$. Dakle, $\pi(P(\omega)/\text{Fin}) = \mathfrak{c}$. □

Teorema 51. $\text{Length}(P(\omega)/\text{Fin}) = \mathfrak{c}$.

Dokaz. ($\leq$) Sledi iz $|P(\omega)/\text{Fin}| = \mathfrak{c}$.

($\geq$) Neka je preslikavanje $f : \omega \to \mathbb{Q}$ bijekcija. Za $x \in \mathbb{R}$ neka je $Q_x = \{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$. Tada ako je $x < y$ sledi $Q_x \subseteq Q_y$ i $|Q_y \setminus Q_x| = \aleph_0$. Tada imamo $Q_x \subset^* Q_y$, tj. $[Q_x] < [Q_y]$. Dakle, $\langle\{[f^{-1}[Q_x]] : x \in \mathbb{R}\}, <\rangle$ je lanac u $P(\omega)/\text{Fin}$ tipa $\text{type}\langle\mathbb{R}, <\rangle$. □

DEO II

MALI KARDINALI ODREDJENI PROIZVOLJNIM IDEALOM

Glava 10

Kardinal $\mathfrak{a}_{\mathcal{I}}$

10.1 $\mathcal{I}$-maksimalne skoro disjunktne familije

U daljem tekstu $\mathcal{I}$ će biti ideal na skupu ω, a $\mathcal{I}^+ = P(\omega) \setminus \mathcal{I}$ odgovarajuća familija pozitivnih skupova.

Definicija 26. Familija $\mathcal{A} \subseteq P(\omega)$ je **$\mathcal{I}$-skoro disjunktna familija**, kraće **$\mathcal{I}$-adf** (engl.: $\mathcal{I}$-almost disjoint family) ako i samo ako važi

(IADF1) Za svako $A \in \mathcal{A}$ važi $A \in \mathcal{I}^+$,

(IADF2) Za skupove $A, B \in \mathcal{A}$, gde je $A \neq B$, važi $A \cap B \in \mathcal{I}$.

Ako pritom važi i

(IMADF) Ako je $\mathcal{A}_1$ $\mathcal{I}$-adf i važi $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_1$, onda je $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$,

kažemo da je $\mathcal{A}$ **$\mathcal{I}$-maksimalna skoro disjunktna familija** kraće **$\mathcal{I}$-madf** (engl.: $\mathcal{I}$-maximal almost disjoint family).

Lema 36. $\mathcal{I}$-adf $\mathcal{A}$ je $\mathcal{I}$-madf ako i samo ako

$$\forall X \in \mathcal{I}^+ \; \exists A \in \mathcal{A} \;\; X \cap A \in \mathcal{I}^+. \tag{10.1}$$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $\mathcal{A}$ $\mathcal{I}$-madf. Pretpostavimo suprotno, da postoji $X \in \mathcal{I}^+$ da za sve $A \in \mathcal{A}$ važi $X \cap A \in \mathcal{I}$. Tada je $\mathcal{A} \cup \{X\}$ $\mathcal{I}$-adf, kontradikcija.

($\Leftarrow$) Neka važi (10.1). Pretpostavimo da postoji $\mathcal{I}$-adf $\mathcal{A}_1$ takva da važi $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1$. Neka je $X \in \mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{A}$. Tada prema (10.1) za neko $A \in \mathcal{A}$, važi $X \cap A \notin \mathcal{I}$, pa $\mathcal{A}_1$ nije $\mathcal{I}$-adf, kontradikcija. □

Teorema 52. Svaka $\mathcal{I}$-adf je sadržana u nekoj $\mathcal{I}$-madf.

Dokaz. Neka je $\mathcal{A} \subseteq P(\omega)$ $\mathcal{I}$-adf i neka je

$$\mathbb{P} = \{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega) : \mathcal{F} \text{ je } \mathcal{I}\text{-adf i } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}\}.$$

Jasno, $\langle \mathbb{P}, \subseteq \rangle$ je parcijalno uređen skup. Neka je $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{P}$ lanac. Dokažimo da $\bigcup \mathcal{L} = \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{L}} \mathcal{F} \in \mathbb{P}$. Kako je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$, za $\mathcal{F} \in \mathcal{L}$, imamo $\mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{L}$. Pokažimo da je $\bigcup \mathcal{L}$ $\mathcal{I}$-adf.

(IADF1) Neka je $A \in \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{L}} \mathcal{F}$. Tada postoji $\mathcal{F} \in \mathcal{L}$, da je $A \in \mathcal{F}$, a $\mathcal{F}$ je $\mathcal{I}$-adf pa $A \notin \mathcal{I}$,

(IADF2) Neka su $A, B \in \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{L}} \mathcal{F}$ i $A \neq B$, gde je $A \in \mathcal{F}_1$, a $B \in \mathcal{F}_2$. Bez ograničenja opštosti pretpostavimo da je $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$. Tada $A, B \in \mathcal{F}_2$ i $A \cap B \in \mathcal{I}$.

Dakle, $\bigcup \mathcal{L}$ je $\mathcal{I}$-adf, te $\bigcup \mathcal{L} \in \mathbb{P}$. Takođe $\mathcal{F} \subseteq \bigcup \mathcal{L}$, za sve $\mathcal{F} \in \mathcal{L}$, pa je $\bigcup \mathcal{L}$ gornje ograničenje $\mathcal{L}$. Dakle, svaki lanac $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{P}$ ima gornje ograničenje, pa prema lemi Zorna, $\mathbb{P}$ ima maksimalni element $\mathcal{A}^*$. Kako je $\mathcal{A}^*$ $\mathcal{I}$-adf i $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$, ostaje da se pokaže da $\mathcal{A}^*$ zadovoljava (IMADF).

Neka je $\mathcal{A}_1$ $\mathcal{I}$-adf i $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{A}_1$. Kako važi $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{A}_1$ sledi $\mathcal{A}_1 \in \mathbb{P}$, pa je $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}^*$ jer je $\mathcal{A}^*$ maksimalni element u $\langle \mathbb{P}, \subseteq \rangle$. Dakle, $\mathcal{A}^*$ je $\mathcal{I}$-madf. □

10.2 Dovoljan uslov za postojanje beskonačnih $\mathcal{I}$-madf. Kardinal $\mathfrak{a}_{\mathcal{I}}$

Za proizvoljan ideal $\mathcal{I}$ na ω bar jedna $\mathcal{I}$-adf uvek postoji. To je $\mathcal{A} = \{\omega\}$, jer $\omega \notin \mathcal{I}$. Postoji li uvek $\mathcal{I}$-adf sa bar dva elementa? Odgovor je negativan, što pokazuje sledeći primer.

Primer 14. Posmatrajmo ideal $\mathcal{I} = \mathcal{U}^*$, gde je $\mathcal{U}$ ultrafilter na ω, (tj. $\mathcal{I}$ je maksimalni ideal). Tada je $\mathcal{I}^+ = \mathcal{I}^* = \mathcal{U} = P(\omega) \setminus \mathcal{I}$. Prema definiciji 26 familija $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ je $\mathcal{I}$-adf ako ispunjava

(IADF1) Za svako $A \in \mathcal{A}$ važi $A \in \mathcal{I}^+$, tj $A \in \mathcal{U}$,

(IADF2) Za skupove $A, B \in \mathcal{A}$, gde je $A \neq B$ važi $A \cap B \in \mathcal{I}$, tj. $A \cap B \notin \mathcal{U}$.

Kako je $\mathcal{U}$ ultrafilter uslov (IADF2) ne može biti ispunjen ako $\mathcal{A}$ ima više od jednog elementa, pa je svaka $\mathcal{I}$-adf te i svaka $\mathcal{I}$-madf najviše kardinalnosti 1.

Teorema 53. Ako $\mathcal{I}$ nije maksimalan ideal, onda postoji $\mathcal{I}$-madf kardinalnosti dva.

Dokaz. Po pretpostavci postoji A takvo da $A, A^c \notin \mathcal{I}$. Pokažimo da je familija $\mathcal{A} = \{A, A^c\}$ $\mathcal{I}$-madf, tj. da važi (10.1). Neka je $X \in \mathcal{I}^+$. Tada je $X = (X \cap A) \cup (X \cap A^c)$, pa kako je $X \in \mathcal{I}^+$ sledi $X \cap A \in \mathcal{I}^+$ ili $X \cap A^c \in \mathcal{I}^+$ te je uslov (10.1) zadovoljen. □

Primer 15. Posmatrajmo minimalni ideal $\mathcal{I} = \{\emptyset\}$. Jasno, $\mathcal{I}^+ = P(\omega)\backslash\mathcal{I} = P(\omega)\backslash\{\emptyset\}$, tj. svaki neprazan podskup skupa ω je pozitivan. Prema definiciji 26 familija $\mathcal{A}$ je $\mathcal{I}$-adf ako ispunjava

(IADF1) Za svako $A \in \mathcal{A}$ važi $A \in \mathcal{I}^+$, tj $A \neq \emptyset$,

(IADF2) Za skupove $A, B \in \mathcal{A}$, gde je $A \neq B$ važi $A \cap B \in \mathcal{I}$, tj. $A \cap B = \emptyset$.

Dakle, $\mathcal{A}$ je $\{\emptyset\}$-adf ako i samo ako je $\mathcal{A}$ familija nepraznih disjunktnih podskupova ω. Prema lemi 36 familija $\mathcal{A}$ biće $\mathcal{I}$-madf ako za svaki $X \in \mathcal{I}^+$ postoji $A \in \mathcal{A}$ da važi $A \cap X \in \mathcal{I}^+$, tj. $X \cap A \neq \emptyset$. Tada je $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \omega$, tj. familija $\mathcal{A}$ je particija ω. Sledi: $\mathcal{A}$ $\{\emptyset\}$-madf ako i samo ako je $\mathcal{A}$ particija ω i, jasno, $|\mathcal{A}| \leq \aleph_0$.

Primer 16. Sledeći ideal koji navodimo je Fin=$[\omega]^{<\omega}$. Tada se priča o $\mathcal{I}$-madf svodi na standardne madf. Prema teoremi 33 prebrojiva adf ne može da bude madf, ali postoje konačne madf i madf kardinalnosti $\mathfrak{c}$.

Iz primera 14 zaključujemo da za neke ideale $\mathcal{I}$ ne postoji beskonačna $\mathcal{I}$-madf. Da bismo obezbedili egzistenciju beskonačne $\mathcal{I}$-madf, uvodimo sledeći uslov, kojeg ćemo u daljem tekstu navoditi kao uslov $(*)$. On glasi:

Svaki pozitivan skup se može podeliti na dva pozitivna skupa. $(*)$

U nastavku dajemo jedan dovoljan uslov za $(*)$.

Definicija 27. Ideal $\mathcal{I}$ je **nigde maksimalan** ako i samo ako za svaki skup $S \in \mathcal{I}^+$ ideal $\mathcal{I} \restriction S$ nije maksimalan.

Teorema 54. Ako je ideal $\mathcal{I}$ nigde maksimalan, onda važi uslov $(*)$.

Dokaz. Dokazujemo kontrapoziciju tvrđenja. Pretpostavimo da postoji pozitivan skup A koji se ne može podeliti na dva pozitivna skupa. Tada jasno, za svaki $A' \subseteq A$ važi A' je mali ili $A \setminus A'$ je mali, pa je $A \setminus A'$ pozitivan ili je A' pozitivan. Pokažimo da je $\mathcal{U} = \{F \subseteq A : F \text{ je pozitivan}\}$ ultrafilter na skupu A.

(F1) Skup A je pozitivan i $A \subseteq A$, pa je $A \in \mathcal{U}$. Jasno, $\emptyset \notin \mathcal{U}$.

(F2) Neka su $F_1, F_2 \in \mathcal{U}$. Pretpostavimo $F_1 \cap F_2 \notin \mathcal{U}$. Kako je $F_1 \in \mathcal{I}^+$ važi $F_1 \setminus F_2 \in \mathcal{U}$, pa $A \setminus (F_1 \setminus F_2) = F_1^c \cup F_2 \in \mathcal{I}$; kontradikcija, jer $F_2 \notin \mathcal{I}$.

(F3) Ako je $A \supseteq F_1 \supseteq F_2 \in \mathcal{U}$, onda jasno, $F_1 \in \mathcal{U}$.

(UF) Kako $A \in \mathcal{I}^+$, za svaki $F \subseteq A$ važi da je F ili $A \setminus F$ pozitivan skup.

Kako je $\mathcal{U}$ ultrafilter na A, $\mathcal{U}^* = \{A \setminus F : F \in \mathcal{U}\} = \{A \cap I : I \in \mathcal{I}\} = \mathcal{I} \restriction A$ je maksimalni ideal na A. □

Teorema 55. Ako $\mathcal{I}$ zadovoljava $(*)$ onda Fin $\subseteq \mathcal{I}$.

Dokaz. Neka je $A \subseteq \omega$ i neka važi $|A| < \aleph_0$. Pretpostavimo suprotno, tj. $A \notin \mathcal{I}$. Kako važi $(*)$ on se može podeliti na dva pozitivna skupa. Svaki se od tih skupova prema istom uslovu može podeliti na dva pozitivna skupa. Tako nastavljamo postupak, kontradikcija sa konačnošću skupa A. □

Teorema 56. Ako ideal $\mathcal{I}$ zadovoljava $(*)$, onda postoji prebrojiva $\mathcal{I}$-adf, pa i beskonačna $\mathcal{I}$-madf.

Dokaz. Po pretpostavci za svako $S \in \mathcal{I}^+$ je $\mathcal{P}_S = \{A \subseteq S : A, S \setminus A \in \mathcal{I}^+\} \neq \emptyset$. Neka je π funkcija izbora za familiju $\{\mathcal{P}_S : S \in \mathcal{I}^+\}$, tj. $\pi : \mathcal{I}^+ \to \bigcup_{S \in \mathcal{I}^+} \mathcal{P}_S$, gde je $\pi(S) \in \mathcal{P}_S$. Definišimo niz $\langle A_n : n \in \omega \rangle$ rekurzijom na sledeći način: $A_0 = \pi(\omega), A_1 = \pi(\omega \setminus A_0), A_2 = \pi(\omega \setminus (A_0 \cup A_1)), \ldots, A_{n+1} = \pi(\omega \setminus (A_0 \cup \ldots \cup A_n))$. Za svako $n \in \omega$ važi $\omega \setminus (A_0 \cup \ldots \cup A_n) \in \mathcal{I}^+$, pa je ova konstrukcija moguća.

Jasno, $A_n \in \mathcal{I}^+$ su disjunktni skupovi. Dakle, $\{A_n : n \in \omega\}$ je $\mathcal{I}$-adf. $\mathcal{I}$-madf koja je sadrži, a postoji prema teoremi 52, je beskonačna. □

Definicija 28. Neka je $\mathcal{I} \subseteq P(\omega)$ ideal za koji postoji beskonačna $\mathcal{I}$-madf.

$\mathfrak{a}_{\mathcal{I}} = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A}$ je beskonačna $\mathcal{I}$- madf$\}$.

Teorema 57. Ako postoji prebrojiva $\mathcal{I}$-madf, onda postoji i prebrojiva $\mathcal{I}$-madf čiji su elementi disjunktni.

Dokaz. Neka je $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ $\mathcal{I}$-madf. Formirajmo skupove $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \ldots, B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Kako je $\mathcal{A}$ $\mathcal{I}$-madf, skupovi B_n su pozitivni, a očigledno su disjunktni. Pokažimo da je familija $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ $\mathcal{I}$-madf. Pretpostavimo suprotno: tada prema (10.1) postoji $X \in \mathcal{I}^+$ tako da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $X \cap B_n \in \mathcal{I}$. Kako je $\mathcal{A}$ $\mathcal{I}$-madf postoji najmanje $n \in \mathbb{N}$ da $X \cap A_n \notin \mathcal{I}$. Kako je $X \cap B_n = X \cap (A_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}))$ mali skup i $X \cap A_n$ je mali, kontradikcija. □

Glava 11

Kardinal $\mathfrak{p}_{\mathcal{I}}$

11.1 $\mathcal{I}$-jako svojstvo konačnog preseka. $\mathcal{I}$-pseudopresek

Definicija 29. Neka je $\mathcal{I}$ ideal na skupu ω. Za skupove $A, B \in \mathcal{I}^+$ definišimo relacije:
$A =_{\mathcal{I}} B$ akko $A \triangle B \in \mathcal{I}$,
$A \subseteq_{\mathcal{I}} B$ akko $A \setminus B \in \mathcal{I}$.

Lema 37. (a) Relacija $=_{\mathcal{I}}$ je relacija ekvivalencije na $\mathcal{I}^+$;
(b) $\subseteq_{\mathcal{I}}$ je refleksivna i tranzitivna relacija na $\mathcal{I}^+$.

Dokaz. (a) Pokažimo da je $=_{\mathcal{I}}$ relacija ekvivalencije. Refleksivnost sledi iz $A \triangle A = \emptyset \in \mathcal{I}$, a simetričnost iz $A \triangle B = B \triangle A$. Dokažimo tranzitivnost. Neka je $A =_{\mathcal{I}} B$ i $B =_{\mathcal{I}} C$, tada je $A \setminus B, B \setminus A, B \setminus C, C \setminus B \in \mathcal{I}$.

Pokažimo da važi

$$A \setminus C \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \text{ i} \tag{11.1}$$

$$C \setminus A \subseteq (C \setminus B) \cup (B \setminus A). \tag{11.2}$$

$A \setminus C = (A \cap C^c) \cap (B \cup B^c) = (A \cap C^c \cap B) \cup (A \cap C^c \cap B^c) \subseteq (B \cap C^c) \cup (A \cap B^c) = (B \setminus C) \cup (A \setminus B)$

Prema (11.1) i (11.2), $A \setminus C$ i $C \setminus A$ pripadaju idealu $\mathcal{I}$, kao podskupovi malih skupova, pa važi $A =_{\mathcal{I}} C$. Relacija $=_{\mathcal{I}}$ je, znači, tranzitivna.

(b) Refleksivnost važi jer iz $A \setminus A = \emptyset \in \mathcal{I}$ sledi $A \subseteq_{\mathcal{I}} A$. Pokažimo tranzitivnost. Neka za $A, B, C \in \mathcal{I}^+$ važi $A \subseteq_{\mathcal{I}} B$ i $B \subseteq_{\mathcal{I}} C$. Po definiciji relacije $\subseteq_{\mathcal{I}}$ sledi $A \setminus B \in \mathcal{I}$ i $B \setminus C \in \mathcal{I}$. Kako važi (11.1), $A \setminus C \in \mathcal{I}$ kao podskup malog skupa, pa je $A \subseteq_{\mathcal{I}} C$. □

Ako je $P_i \in \mathcal{I}^+$, za $i \in I$, i $R = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} P_i$, onda je jasno, $R \subseteq P_i$, za svako $i \in P_i$. Sada dajemo još jednu generalizaciju preseka.

Definicija 30. Neka je $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{I}^+$. Skup $R \subseteq \omega$ je **$\mathcal{I}$-pseudopresek** familije $\mathcal{P}$ ako i samo ako

1. $R \in \mathcal{I}^+$,
2. $R \subseteq_{\mathcal{I}} P$, za svako $P \in \mathcal{P}$.

Lema 38. Neka su $P, P_1, P_2, ..., P_n \in \mathcal{I}^+$. Ako je $P \subseteq_{\mathcal{I}} P_i$, za sve $i \leq n$, onda

(a) $P \subseteq_{\mathcal{I}} P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_n$;

(b) Skup $\bigcap_{i \leq n} P_i$ je pozitivan.

Dokaz. (a) Za sve $i \leq n$ važi $P \setminus P_i \in \mathcal{I}$. Tada jasno, $P \setminus (P_1 \cap \ldots \cap P_n) = (P \setminus P_1) \cup \ldots \cup (P \setminus P_n) \in \mathcal{I}$, pa $P \subseteq_{\mathcal{I}} P_1 \cap \ldots \cap P_n$. □

Definicija 31. Familija $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{I}^+$ ima **$\mathcal{I}$-jako svojstvo konačnog preseka** ili **$\mathcal{I}$-sfip** (engl.: the strong finite intersection property) ako i samo ako za svaki konačan podskup $\{P_1, ..., P_n\} \subseteq \mathcal{P}$ važi $\bigcap_{i \leq n} P_i \notin \mathcal{I}$.

Teorema 58. Familija pozitivnih skupova $\mathcal{P}$ koja ima $\mathcal{I}$-pseudopresek, ima $\mathcal{I}$-sfip.

Dokaz. Posledica leme 38. □

11.2 Kardinal $\mathfrak{p}_{\mathcal{I}}$. Nejednakost $\mathfrak{p}_{\mathcal{I}} \leq \mathfrak{a}_{\mathcal{I}}$

Primer 17. Ako ideal $\mathcal{I}$ sadrži samo prazan skup, svaki neprazan podskup ω je pozitivan. Tada prema definiciji 29 za svaka dva skupa $A, B \in \mathcal{I}^+$ važi $A =_{\mathcal{I}} B$ ako i samo ako $A = B$ i $A \subseteq_{\mathcal{I}} B$ ako i samo ako $A \subseteq B$. Prema definiciji 31 familija $\mathcal{P}$ ima $\mathcal{I}$-sfip ako i samo ako za svaki konačni podskup $\{P_1, ..., P_n\} \subseteq \mathcal{P}$ važi $\bigcap_{i \leq n} P_i \notin \mathcal{I}$, tj. da je presek pozitivan, odnosno $\bigcap_{i \leq n} P_i \neq \emptyset$. Dakle, $\mathcal{P}$ ima $\mathcal{I}$-sfip ako i samo ako familija $\mathcal{P}$ ima svojstvo konačnog preseka (s.k.p.). Za isti ideal prema definiciji 30 $P' \in \mathcal{I}^+$ je $\mathcal{I}$-pseudopresek familije $\mathcal{P}$ ako i samo ako za svaki $P \in \mathcal{P}$ važi $P' \subseteq_{\mathcal{I}} P$, tj. za svako $P \in \mathcal{P}$ važi $P' \subseteq P$ i $P' \neq \emptyset$. Tada važi $P' \subseteq \bigcap_{P \in \mathcal{P}} P$. Dakle, $\mathcal{P}$ ima $\mathcal{I}$-pseudopresek ako i samo ako $\bigcap_{P \in \mathcal{P}} P \neq \emptyset$.

Familija $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{I}^+$ sa $\mathcal{I}$-sfip bez $\mathcal{I}$-pseudopreseka, gde je $\mathcal{I} = \{\emptyset\}$ se svodi na familiju sa s.k.p. i $\bigcap \mathcal{P} = \emptyset$. Takva familija $\mathcal{P}$ može da bude prebrojiva i kardinalnosti $\mathfrak{c}$ (npr. neglavni ultrafilter na ω).

Primer 18. Sledeći ideal koji navodimo je Fin=$[\omega]^{<\omega}$. Tada je familija sa $\mathcal{I}$-sfip bez $\mathcal{I}$-pseudopreseka ustvari familija sa sfip bez pseudopreseka. Prema teoremi 23 svaka prebrojiva familija sa sfip ima pseudopresek, ali postoji familija sa sfip i bez pseudopreseka kardinalnosti $\mathfrak{c}$.

Primer 19. Uočimo još ideal $\mathcal{I} = \mathcal{U}^*$, gde je $\mathcal{U}$ neglavni ultrafilter na ω. Svi pozitivni skupovi su tada elementi ultrafiltera $\mathcal{U}$. Iz definicije 29 za $A, B \in \mathcal{I}^+ = \mathcal{U}$ važi $A =_{\mathcal{I}} B$ ako i samo ako $A \triangle B \in \mathcal{I}$, a to je uvek tačno zbog definicije ultrafiltera i $A \subseteq_{\mathcal{I}} B$ ako i samo ako $A \setminus B \in \mathcal{I}$, što je takođe uvek tačno. Svaka familija $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{I}^+$ ima $\mathcal{I}$-sfip. Kako važi $\omega \setminus B \in \mathcal{I}$, sledi da je $\omega \subseteq_{\mathcal{I}} B$, za sve $B \in \mathcal{P}$, tj. ω je $\mathcal{I}$-pseudopresek familije $\mathcal{P}$.

Dakle, svaka familija $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{I}^+$ sa $\mathcal{I}$-sfip ima $\mathcal{I}$-pseudopresek, tj. za ideal $\mathcal{U}^*$ ne postoji familija sa $\mathcal{I}$-sfip bez $\mathcal{I}$-pseudopreseka.

Da bismo obezbedili egzistenciju familije sa $\mathcal{I}$-sfip bez $\mathcal{I}$-pseudopreseka pretposta- vićemo da važi uslov $(*)$. Prvo dokažimo jedno pomoćno tvrđenje.

Teorema 59. Neka je $\mathcal{A}$ beskonačna $\mathcal{I}$-madf. Tada je $\mathcal{P} = \{A^c : A \in \mathcal{A}\}$ familija sa $\mathcal{I}$-sfip, koja nema $\mathcal{I}$-pseudopresek.

Dokaz. Pokažimo prvo da familija $\mathcal{P}$ ima $\mathcal{I}$-sfip, tj. da za proizvoljan konačan podskup $\{A_i^c : i \leq n\} \subseteq \mathcal{P}$ važi $\bigcap_{i \leq n} \omega \setminus A_i \notin \mathcal{I}$. Pretpostavimo suprotno, tj. $\bigcap_{i \leq n} A_i^c = (\bigcup_{i \leq n} A_i)^c \in \mathcal{I}$. Neka je $A^* \in \mathcal{A}$ takvo da za svako $i \leq n$ važi $A^* \neq A_i$. Tada sledi $A^* = A^* \cap \omega = (A^* \cap \bigcup_{i \leq n} A_i) \cup (A^* \cap (\bigcup_{i \leq n} A_i)^c) = (\bigcup_{i \leq n} A^* \cap A_i) \cup (A^* \cap (\bigcup_{i \leq n} A_i)^c)$. Kako je kao konačna unija malih skupova, skup $\bigcup_{i \leq n} A^* \cap A_i$ mali, a skup $A^* \cap (\bigcup_{i \leq n} A_i)^c$ takođe mali po pretpostavci, njihova unija, dakle A^* pripada idealu $\mathcal{I}$, pa je A^* mali, kontradikcija sa činjenicom da je $A^* \in \mathcal{A}$ i $\mathcal{A}$ $\mathcal{I}$-madf. Dakle, $\bigcap_{i \leq n} A_i^c \notin \mathcal{I}$, pa familija $\mathcal{P}$ ima $\mathcal{I}$-sfip.

Ostalo je još da se pokaže da $\mathcal{P}$ nema $\mathcal{I}$-pseudopresek. Pretpostavimo suprotno, da postoji $P \notin \mathcal{I}$ takav da za svako $A \in \mathcal{A}$ važi $P \subseteq_{\mathcal{I}} A^c$. Tada je $P \setminus A^c = P \cap (A^c)^c = P \cap A \in \mathcal{I}$ za sve $A \in \mathcal{A}$. Iz maksimalnosti familije $\mathcal{A}$ sledi $P \in \mathcal{A}$, dakle i $P \cap P \in \mathcal{I}$, kontradikcija.□

Ako ideal $\mathcal{I}$ zadovoljava uslov $(*)$, onda prema teoremi 56 postoji beskonačna $\mathcal{I}$-madf. Prema prethodnoj teoremi imamo

Teorema 60. Ako ideal $\mathcal{I}$ zadovoljava uslov $(*)$, onda postoji familija $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{I}^+$ koja ima $\mathcal{I}$-sfip, a nema $\mathcal{I}$-pseudopresek.

Definicija 32. Neka ideal $\mathcal{I}$ zadovoljava uslov $(*)$. Tada
$\mathfrak{p}_{\mathcal{I}} = \min\{|\mathcal{P}| : \mathcal{P} \subseteq \mathcal{I}^+$ ima $\mathcal{I}$-sfip i nema $\mathcal{I}$-pseudopresek$\}$.

Posledica 11. Neka ideal $\mathcal{I}$ zadovoljava uslov $(*)$. Tada $\mathfrak{p}_{\mathcal{I}} \leq \mathfrak{a}_{\mathcal{I}}$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{A}$ $\mathcal{I}$-madf takva da $|\mathcal{A}| = \mathfrak{a}_{\mathcal{I}}$. Prema teoremi 59, $\mathcal{P} = \{A^c : A \in \mathcal{A}\}$ je familija sa $\mathcal{I}$-sfip, koja nema $\mathcal{I}$-pseudopresek. Dakle, $\mathfrak{p}_{\mathcal{I}} \leq |\mathcal{P}| = \mathfrak{a}_{\mathcal{I}}$. □

Glava 12

Kardinal $\mathfrak{t}_{\mathcal{I}}$

12.1 $\mathcal{I}$-tower. Ekvivalentne definicije

Definicija 33. Neka je $\mathcal{I} \subseteq P(\omega)$ ideal i neka $A, B \in \mathcal{I}^+$. Definišimo
$A \subset_{\mathcal{I}} B$ ako i samo ako $A \setminus B \in \mathcal{I}$ i $B \setminus A \notin \mathcal{I}$.

Lema 39. Neka $A, B \in \mathcal{I}^+$. Tada važi
(a) $A \subset_{\mathcal{I}} B$ ako i samo ako $A \subseteq_{\mathcal{I}} B \wedge \neg B \subseteq_{\mathcal{I}} A$ ako i samo ako $A \subseteq_{\mathcal{I}} B \wedge A \neq_{\mathcal{I}} B$;
(b) Relacija $\subset_{\mathcal{I}}$ je irefleksivna, asimetrična i tranzitivna.

Dokaz. (a) Trivijalno.
(b) Irefleksivnost je jasna jer bi iz $A \subset_{\mathcal{I}} A$ sledilo $A \setminus A \notin \mathcal{I}$, što je netačno. Iz $A \subset_{\mathcal{I}} B$ sledi $A \setminus B \in \mathcal{I}$ i $B \setminus A \notin \mathcal{I}$, pa nije $B \subset_{\mathcal{I}} A$.
Pokažimo tranzitivnost. Neka je $A \subset_{\mathcal{I}} B$ i $B \subset_{\mathcal{I}} C$. Sledi

$$A \subseteq_{\mathcal{I}} B \wedge \neg B \subseteq_{\mathcal{I}} A, \tag{12.1}$$

i

$$B \subseteq_{\mathcal{I}} C \wedge \neg C \subseteq_{\mathcal{I}} B. \tag{12.2}$$

Prema lemi 37 (b) iz (12.1) i (12.2) sledi $A \subseteq_{\mathcal{I}} C$. Iz $C \subseteq_{\mathcal{I}} A$ bi zbog $A \subseteq_{\mathcal{I}} B$ sledilo $C \subseteq_{\mathcal{I}} B$ što je netačno zbog (12.2). Dakle, $\neg C \subseteq_{\mathcal{I}} A$, pa je $A \subset_{\mathcal{I}} C$. $\square$

Lema 40. Neka je $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{I}^+$, $\xi \in \mathbf{ON}$ i $T : \xi \to \mathcal{T}$ bijekcija. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(a) $\forall \alpha, \beta < \xi\ (\alpha < \beta \Leftrightarrow T_\alpha\ {}_{\mathcal{I}}\!\supset T_\beta)$;

(b) $\forall \alpha, \beta < \xi\ (\alpha < \beta \Rightarrow T_\alpha\ {}_{\mathcal{I}}\!\supset T_\beta)$;

(c) $\forall \alpha, \beta < \xi\ (\alpha \leq \beta \Leftrightarrow T_\alpha\ {}_{\mathcal{I}}\!\supseteq T_\beta)$.

Dokaz. (a)$\Rightarrow$(b) Trivijalno.

(b)$\Rightarrow$(c) Pretpostavimo da važi (b). Neka $\alpha, \beta < \xi$.

($\Rightarrow$) Neka je $\alpha \leq \beta$. Razlikujemo dva slučaja. Za $\alpha = \beta$, imamo $T_\alpha = T_\beta$, pa je $T_\alpha\ {}_{\mathcal{I}}\!\supseteq T_\beta$. Za $\alpha < \beta$, imamo zbog (b) $T_\alpha\ {}_{\mathcal{I}}\!\supset T_\beta$, pa i $T_\alpha\ {}_{\mathcal{I}}\!\supseteq T_\beta$.

($\Leftarrow$) Neka je $T_\alpha\ {}_{\mathcal{I}}\!\supseteq T_\beta$. Pretpostavimo $\beta < \alpha$. Tada zbog (b) imamo $T_\beta\ {}_{\mathcal{I}}\!\supset T_\alpha$, pa prema lemi 39 sledi $\neg T_\alpha\ {}_{\mathcal{I}}\!\supseteq T_\beta$, kontradikcija. Dakle, $\alpha \leq \beta$.

(c)$\Rightarrow$(a) Neka važi (c) i neka je $\alpha, \beta < \xi$.

($\Rightarrow$) Pretpostavimo $\alpha < \beta$. Tada zbog (c) imamo $T_\alpha\ {}_{\mathcal{I}}\!\supseteq T_\beta$. Pretpostavimo $T_\alpha \subseteq_{\mathcal{I}} T_\beta$. Zbog (c) je tada $\alpha \geq \beta$, što je netačno. Dakle, $\neg T_\alpha \subseteq_{\mathcal{I}} T_\beta$, pa $T_\alpha\ {}_{\mathcal{I}}\!\supset T_\beta$.

($\Leftarrow$) Neka $T_\alpha\ {}_{\mathcal{I}}\!\supset T_\beta$. Pretpostavimo $\beta \leq \alpha$. Tada zbog (c) $T_\beta\ {}_{\mathcal{I}}\!\supseteq T_\alpha$ što je nemoguće, jer iz $T_\beta \subset_{\mathcal{I}} T_\alpha$ sledi $\neg T_\alpha \subseteq_{\mathcal{I}} T_\beta$. Dakle, $\alpha < \beta$. $\square$

Lema 41. Neka je $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{I}^+$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) Postoji $\xi \in \mathbf{ON}$ i bijekcija $T : \xi \to \mathcal{T}$ da važi jedan od uslova (a),(b) ili (c), iz prethodne leme;

(ii) $\langle \mathcal{T}, {}_{\mathcal{I}}\!\supset \rangle$ je dobro uređen skup;

(iii) $\langle \mathcal{T}, {}_{\mathcal{I}}\!\supseteq \rangle$ je dobro uređen skup.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Neka postoje ξ i T da važi (a). Tada je T izomorfizam relacijskih struktura $\langle \xi, < \rangle$ i $\langle \mathcal{T}, {}_{\mathcal{I}}\!\supset \rangle$, pa kako je $\langle \xi, < \rangle$ dobro uređen skup, sledi da je i skup $\langle \mathcal{T}, {}_{\mathcal{I}}\!\supset \rangle$ dobro uređen.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Neka je $\langle \mathcal{T}, {}_{\mathcal{I}}\!\supset \rangle$ dobro uređen skup. Tada postoji $\xi \in \mathbf{ON}$ da je $\langle \mathcal{T}, {}_{\mathcal{I}}\!\supset \rangle \cong \langle \xi, < \rangle$, pa postoji bijekcija $T : \xi \to \mathcal{T}$ koja zadovoljava uslov (a) prethodne leme.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) Dokazuje se slično korišćenjem uslova (c) leme 41. $\square$

Definicija 34. Neprazna familija pozitivnih skupova $\mathcal{T}$ je $\mathcal{I}$**-tower (kula)** ako i samo ako

(a) $\mathcal{T}$ zadovoljava jedan od ekvivalentnih uslova (i), (ii) ili (iii) leme 41;

(b) $\mathcal{T}$ nema $\mathcal{I}$-pseudopresek.

12.2 Egzistencija $\mathcal{I}$-tower-a. Broj $\mathfrak{t}_{\mathcal{I}}$

Teorema 61. Neka ideal $\mathcal{I}$ zadovoljava uslov $(*)$. Tada $\mathcal{I}$-tower postoji.

Dokaz. Zbog uslova $(*)$ postoji operator $\pi : \mathcal{I}^+ \to \mathcal{I}^+$ takav da za svako $A \in \mathcal{I}^+$ važi $\pi(A) \subseteq A$ i $\pi(A), A \setminus \pi(A)$ su pozitivni skupovi. Neka je $\Pi = \{\mathcal{P} \subseteq \mathcal{I}^+ : \mathcal{P}$ ima $\mathcal{I}$ -pseudopresek $\}$. Dakle, za svako $\mathcal{P} \in \Pi$ imamo $P_S(\mathcal{P}) \stackrel{\text{def}}{=} \{Q \in \mathcal{I}^+ : Q$ je $\mathcal{I}$- pseudopresek $\mathcal{P}\} \neq \emptyset$.

Neka je $\varphi : \Pi \to \mathcal{I}^+$, preslikavanje takvo da $\varphi(\mathcal{P}) \in P_S(\mathcal{P})$, tj. φ je funkcija izbora za familiju $\{P_S(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \Pi\}$. Dakle, svakoj familiji $\mathcal{P} \in \Pi$ funkcija φ dodeljuje neki njen $\mathcal{I}$-pseudopresek. Definišimo rekurzijom niz $\langle T_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}^+\rangle$ u skupu $\mathcal{I}^+ \cup \{\emptyset\}$ sa

$$T_0 = \omega$$

$$T_\alpha = \begin{cases} \pi(\varphi(\{T_\beta : \beta < \alpha\})), & \{T_\beta : \beta < \alpha\} \text{ ima } \mathcal{I}\text{-pseudopresek ;} \\ \emptyset, & \text{inače.} \end{cases}$$

Neka je

$$\xi = \begin{cases} \min\{\alpha < \mathfrak{c}^+ : T_\alpha = \emptyset\}, & \text{ako postoji } \alpha < \mathfrak{c}^+ \text{ da } T_\alpha = \emptyset \text{ ;} \\ \mathfrak{c}^+, & \text{ako za svako } \alpha < \mathfrak{c}^+ \text{ važi } T_\alpha \neq \emptyset. \end{cases}$$

Dakle, za svako $\alpha < \xi$ važi $T_\alpha \neq \emptyset$.

Pokažimo da

$$\forall \alpha, \beta < \xi \; (\alpha < \beta \Rightarrow T_\alpha \;{}_{\mathcal{I}}{\supset}\; T_\beta). \tag{12.3}$$

Indukcijom na dobro uređenom skupu ξ dokazaćemo da za svako $\beta < \xi$ i svako $\alpha < \beta (< \xi)$ važi $T_\alpha \;{}_{\mathcal{I}}{\supset}\; T_\beta$. Za $\beta = 0$ to je trivijalno tačno. Neka je $\beta_0 < \xi$ i neka za svako $\beta < \beta_0$ i za svako $\alpha < \beta$ važi $T_\alpha \;{}_{\mathcal{I}}{\supset}\; T_\beta$. Dokazujemo da za svako $\alpha < \beta_0$ važi $T_\alpha \;{}_{\mathcal{I}}{\supset}\; T_{\beta_0}$. Zbog $\beta_0 < \xi$ je $T_{\beta_0} \neq \emptyset$, pa $T_{\beta_0} = \pi(\varphi(\{T_\alpha : \alpha < \beta_0\})) \subset_{\mathcal{I}} \varphi(\{T_\alpha : \alpha < \beta_0\}) \subseteq_{\mathcal{I}} T_\alpha$ za sve $\alpha < \beta_0$.

Sada za $\alpha \neq \beta$ sledi $T_\alpha \neq T_\beta$, pa $|\xi| \leq \mathfrak{c}$. Zbog $(*)$ i leme 38 je $\xi \geq \omega$.

Pokažimo još da $\mathcal{T} = \{T_\alpha : \alpha < \xi\}$ nema $\mathcal{I}$-pseudopresek. Pretpostavimo da postoji $\mathcal{I}$-pseudopresek, tj. da postoji $P \notin \mathcal{I}$ da za sve $\alpha < \xi$, važi $P \subseteq T_\alpha$. Tada je $T_\xi = \pi(\varphi(\{T_\alpha : \alpha < \xi\})) \neq \emptyset$, kontradikcija.

Sledi $\mathcal{T}$ je $\mathcal{I}$-tower. □

Definicija 35. Neka ideal $\mathcal{I}$ zadovoljava uslov $(*)$. Tada definišemo
$\mathfrak{t}_{\mathcal{I}} = \min\{|\mathcal{T}| : \mathcal{T} \subseteq \mathcal{I}^+ \text{ je } \mathcal{I}\text{-tower}\}$.

12.3 Regularnost $\mathfrak{t}_{\mathcal{I}}$. Nejednakost $\mathfrak{p}_{\mathcal{I}} \leq \mathfrak{t}_{\mathcal{I}}$

U daljem tekstu pretpostavićemo da ideal $\mathcal{I}$ zadovoljava uslov $(*)$.

Teorema 62. Ako je $\langle T_\alpha : \alpha < \xi\rangle$ $\mathcal{I}$-tower i $\varphi : \zeta \to \xi$ rastuće, kofinalno preslikavanje, onda je $\langle T_{\varphi(\delta)} : \delta < \zeta\rangle$ $\mathcal{I}$-tower.

Dokaz. Za $\delta < \delta_1 < \zeta$ je $\varphi(\delta) < \varphi(\delta_1)$, pa prema lemi 40 (b) važi $T_{\varphi(\delta)} \;{}_{\mathcal{I}}{\supset}\; T_{\varphi(\delta_1)}$. Pretpostavimo da postoji $\mathcal{I}$-pseudopresek P familije $\langle T_{\varphi(\delta)} : \delta < \zeta\rangle$, tj. da za svako $\delta < \zeta$ važi $P \subseteq_{\mathcal{I}} T_{\varphi(\delta)}$. Neka $\alpha < \xi$. Zbog kofinalnosti postoji $\delta < \zeta$ da $\alpha < \varphi(\delta)$, pa $T_\alpha \;{}_{\mathcal{I}}{\supset}\; T_{\varphi(\delta)} \;{}_{\mathcal{I}}{\supseteq}\; P$, odakle $P \subseteq_{\mathcal{I}} T_\alpha$. Dakle, $P \subseteq_{\mathcal{I}} T_\alpha$ za svako $\alpha < \xi$, kontradikcija. □

Teorema 63. (a) $\mathfrak{t}_{\mathcal{I}}$ je regularan kardinal;

(b) Postoji $\mathcal{I}$-tower tipa $\langle \mathfrak{t}_{\mathcal{I}}, > \rangle$.

Dokaz. (a) Neka je $\mathcal{T} = \{T_\alpha : \alpha < \xi\}$ $\mathcal{I}$-tower i $|\xi| = \mathfrak{t}_{\mathcal{I}}$. Neka je $\varphi : \mathrm{cf}(\xi) \to \xi$ kofinalno, rastuće preslikavanje. Tada je $\mathcal{T}_1 = \{T_{\varphi(\delta)} : \delta < \mathrm{cf}(\xi)\}$ prema teoremi 62 takođe $\mathcal{I}$-tower i važi $\mathfrak{t}_{\mathcal{I}} \leq \mathrm{cf}(\xi) \leq |\xi| = \mathfrak{t}_{\mathcal{I}}$, pa $\mathrm{cf}(\xi) = \mathfrak{t}_{\mathcal{I}}$. Dakle, kardinal $\mathfrak{t}_{\mathcal{I}}$ je regularan.

(b) $\mathcal{T}_1 = \{T_{\varphi(\delta)} : \delta < \mathfrak{t}_{\mathcal{I}}\}$ je $\mathcal{I}$-tower. □

Teorema 64. $\mathfrak{p}_{\mathcal{I}} \leq \mathfrak{t}_{\mathcal{I}}$

Dokaz. Neka je $\mathcal{T} = \langle T_\alpha : \alpha < \mathfrak{t}_{\mathcal{I}} \rangle$ $\mathcal{I}$-tower. Jasno, $\mathcal{T}$ nema $\mathcal{I}$-pseudopresek. Dokažimo da ima $\mathcal{I}$-sfip. Neka je $T_{\alpha_1}, \ldots, T_{\alpha_k} \in \mathcal{T}$ i $\alpha > \max\{\alpha_i : i \leq k\}$. Tada $T_\alpha \subset_{\mathcal{I}} T_{\alpha_i}$, pa $T_\alpha \subseteq_{\mathcal{I}} T_{\alpha_i}$, za $i \leq k$. Prema lemi 38 sledi $\bigcap_{i=1}^{k} T_{\alpha_i} \in \mathcal{I}^+$. Dakle, $\mathfrak{p}_{\mathcal{I}} \leq |\mathcal{T}| = \mathfrak{t}_{\mathcal{I}}$. □

Glava 13

Kardinal $\mathfrak{s}_{\mathcal{I}}$

Definicija 36. Neka su A, S pozitivni skupovi. Skup S **$\mathcal{I}$-cepa** (engl.: **splits**) skup A ako i samo ako su $A \cap S$ i $A \setminus S$ pozitivni skupovi.

Definicija 37. Familija $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{I}^+$ je **$\mathcal{I}$-spliting familija** ako i samo ako za svaki pozitivan skup A postoji $S \in \mathcal{S}$ koji $\mathcal{I}$-cepa A.

Ako važi $(*)$ onda $\mathcal{I}$-spliting familija postoji. Kao primer navodimo $\mathcal{I}^+$.

Definicija 38. $\mathfrak{s}_{\mathcal{I}} = \min\{|\mathcal{S}| : \mathcal{S} \subseteq \mathcal{I}^+$ je $\mathcal{I}$-spliting familija$\}$.

Teorema 65. Neka ideal $\mathcal{I}$ zadovoljava uslov $(*)$. Tada je $\mathfrak{t}_{\mathcal{I}} \leq \mathfrak{s}_{\mathcal{I}}$.

Dokaz. Neka je $\kappa < \mathfrak{t}_{\mathcal{I}}$. Dokazujemo da ne postoji $\mathcal{I}$-spliting familija kardinalnosti κ. Neka je $\mathcal{S}$ familija pozitivnih skupova kardinalnosti κ i neka je $\mathcal{S} = \{S_\alpha : \alpha < \kappa + 1\}$ jedna njena numeracija. Definišimo niz pozitivnih skupova $\langle T_\alpha : \alpha < \kappa + 1\rangle$ sa namerom da skup T_κ nije $\mathcal{I}$-splitovan ni jednim S_α. Zahtevamo:

(a) Ako je $\beta < \alpha$ onda $T_\beta \ {}_{\mathcal{I}}\!\supset T_\alpha$ i

(b) $T_\alpha \subset S_\alpha$ ili $T_\alpha \subset \omega \setminus S_\alpha$.

Neka je $\alpha \leq \kappa$ i neka je definisan niz $\langle T_\beta : \beta < \alpha\rangle$ sa osobinama (a) i (b). Definišimo T_α. Kako je $|\alpha| \leq \kappa < \mathfrak{t}_{\mathcal{I}}$, postoji $\mathcal{I}$-pseudopresek P familije $\{T_\beta : \beta < \alpha\}$. Neka je $\pi(P)$ operator koji deli P na dva pozitivna skupa. Moguće je:

- $\pi(P) \cap S_\alpha \notin \mathcal{I}$. Tada definišimo $T_\alpha = \pi(P) \cap S_\alpha$,
- $\pi(P) \cap S_\alpha \in \mathcal{I}$. Tada $\pi(P) \setminus S_\alpha \notin \mathcal{I}$ i definišimo $T_\alpha = \pi(P) \setminus S_\alpha$.

Tada je $T_\alpha \subset S_\alpha$ ili $T_\alpha \subset \omega \setminus S_\alpha$ i jasno, za svako $\beta < \alpha$ važi $T_\alpha \subset_{\mathcal{I}} T_\beta$. Prema teoremi o rekurziji postoji niz $\langle T_\alpha : \alpha \leq \kappa \rangle$ sa osobinama (a) i (b). Tada za svako $\alpha \leq \kappa$ važi $T_\kappa \subset_{\mathcal{I}} S_\alpha$ ili $T_\kappa \subset_{\mathcal{I}} \omega \setminus S_\alpha$, pa T_κ nije $\mathcal{I}$-splitovan ni jednim S_α. Dakle, $\mathcal{S}$ nije $\mathcal{I}$-spliting familija. $\square$

DEO III

NEKI SPECIJALNI IDEALI I KARDINALNOST ODGOVARAJUĆIH SKORO DISJUNKTNIH FAMILIJA

Glava 14

Ideal generisan ograničenim rastućim nizovima racionalnih brojeva

14.1 Ideal $\mathcal{I}_C$

Skupovi $\mathbb{Q}$ i ω su iste moći, tj. postoji bijektivno preslikavanje između njih. Iz tog razloga, pri razmatranju familija skupova i kardinala definisanih u prethodnim glavama, umesto skupa ω možemo posmatrati skup $\mathbb{Q}$. U ovom poglavlju posmatramo $\mathcal{I}$-madf na skupu racionalnih brojeva.

Neka je C skup rastućih i ograničenih nizova racionalnih brojeva, tj. nizova $\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, gde važi $q_1 < q_2 < \ldots$ i takvih da postoji $a \in \mathbb{R}$ da $q_n < a$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Definišimo skup

$\mathcal{I}_C = \{I \subseteq \mathbb{Q} :$ postoji konačna potfamilija $\{C_1, \ldots, C_n\} \subseteq C$ da $I \subseteq C_1 \cup \ldots \cup C_n\}$.

Teorema 66. Skup $\mathcal{I}_C$ je ideal na skupu $\mathbb{Q}$.

Dokaz. (I1) Pretpostavimo $\mathbb{Q} \in \mathcal{I}_C$. Tada postoji konačna potfamilija $\{C_1, \ldots, C_n\} \subseteq C$ da $\mathbb{Q} \subseteq C_1 \cup \ldots \cup C_n$, kontradikcija, jer su C_i za $i = 1, \ldots, n$ ograničeni nizovi racionalnih brojeva te je ograničena i njihova unija. Jasno, $\mathcal{I}_C \neq \emptyset$, jer je C neprazno; naravno, svi konačni podskupovi skupa racionalnih brojeva nalaze se u $\mathcal{I}_C$.

(I2) Neka su $I_1, I_2 \in \mathcal{I}_C$. Tada za I_1 postoji konačna potfamilija $\{C'_1, \dots, C'_k\} \subseteq C$, takva da je $I_1 \subseteq C'_1 \cup \ldots \cup C'_k$. Za I_2 takođe postoji konačna potfamilija $\{C''_1, \dots, C''_l\} \subseteq C$, takva da je $I_2 \subseteq C''_1 \cup \ldots \cup C''_l$. Jasno, sledi $I_1 \cup I_2 \subseteq C'_1 \cup \ldots \cup C'_k \cup C''_1 \cup \ldots \cup C''_l$ i $\{C'_1, \dots, C'_k, C''_1, \dots, C''_l\} \subseteq C$, pa je $I_1 \cup I_2 \in \mathcal{I}_C$.

(I3) Neka je $A \subseteq I \in \mathcal{I}_C$. Tada postoji $\{C_1, \dots, C_k\} \subseteq C$ tako da važi $A \subseteq I \subseteq C_1 \cup \ldots \cup C_k$, pa jasno, $A \in \mathcal{I}_C$. □

$\mathcal{I}_C$ nije maksimalni ideal jer recimo, ω i ω^c nisu u $\mathcal{I}_C$.

Kao što smo već rekli skupove koji pripadaju idealu $\mathcal{I}_C$ zvaćemo mali skupovi, a one koji ne pripadaju idealu zvaćemo pozitivnim. Familiju pozitivnih skupova označićemo sa $\mathcal{I}_C{}^+$, tj. $\mathcal{I}_C{}^+ = P(\mathbb{Q}) \setminus \mathcal{I}_C$.

Teorema 67. Svaka $\mathcal{I}_C$-adf je sadržana u nekoj $\mathcal{I}_C$-madf.

Dokaz. Ovo prema teoremi 52 važi za svaki ideal $\mathcal{I}$, pa važi i za $\mathcal{I}_C$. □

14.2 Postoje $\mathcal{I}_C$-madf kardinalnosti $\leq \aleph_0$ i $\mathfrak{c}$

Prema teoremi 53 kako $\mathcal{I}_C$ nije maksimalan ideal, postoji $\mathcal{I}_C$-madf kardinalnosti 2. No važi i više

Teorema 68. Za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji $\mathcal{I}_C$-madf kardinalnosti n.

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Posmatrajmo intervale $A_1 = (-\infty, 1) \cap \mathbb{Q}, A_2 = [1,2) \cap \mathbb{Q}, \dots, A_{n-1} = [n-2, n-1) \cap \mathbb{Q}, A_n = [n-1, \infty) \cap \mathbb{Q}$. Neka je $\mathcal{A}$ familija tako definisanih skupova, tj. $\mathcal{A} = \{A_i : i = 1, \dots, n\}$. Kako A_i za $i = 1, \dots, n$ ima beskonačno tačaka nagomilavanja, sledi $A_i \notin \mathcal{I}_C$ (mogli smo i ovako rezonovati: skupovi A_i su gusti, a $C_1 \cup \ldots \cup C_n$ nije gust skup) . Jasno, važi $A_n \cap A_m = \emptyset$, za različite $m, n \in \{1, \dots, n\}$, pa je $\mathcal{A}$ $\mathcal{I}_C$-adf. Pokažimo da je $\mathcal{I}_C$-madf. Pretpostavimo da nije $\mathcal{I}_C$-madf, tj. prema lemi 36 ne važi (10.1). Tada postoji pozitivan skup $X \subseteq \mathbb{Q}$ koji sa svakim elementom familije $\mathcal{A}$ ima mali presek. Iz jednakosti $X = X \cap \mathbb{Q}$ i $\mathbb{Q} = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ sledi da je $X = (X \cap A_1) \cup \ldots \cup (X \cap A_n) \in \mathcal{I}_C$, kontradikcija. □

Lema 42. Opadajući nizovi su pozitivni skupovi.

Dokaz. Neka je niz $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ opadajući. Označimo skup $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ sa V. Pretpostavimo da je V mali skup, tj. da postoje $C_1, \dots, C_n \in C$ da $V \subseteq \bigcup_{i \leq n} C_i$. Neka je za i ($i \leq n$) $|V \cap C_i| = \aleph_0$. Tada $V \cap C_i$ određuje podniz rastućeg niza C_i, pa je $\mathrm{type}(V \cap C_i, <) = \omega$. No, skup $V \cap C_i$ određuje i podniz opadajućeg niza V, pa je $\mathrm{type}(V \cap C_i, <) = \omega^*$, što je netačno. Dakle, za svako $i \leq n$ važi $|V \cap C_i| < \aleph_0$, pa $|V| < \aleph_0$, kontradikcija. □

Koristeći prethodnu teoremu pokažimo sledeće.

Teorema 69. Postoji $\mathcal{I}_C$-madf kardinalnosti $\mathfrak{c}$.

Dokaz. Za svako $x \in \mathbb{R}$ biramo opadajući niz $\langle q_n^x : n \in \mathbb{N}\rangle$, takav da je njegova granica x. Skupove elemenata tih nizova obeležimo sa $A_x = \{q_n^x : n \in \mathbb{N}\}$. Prema prethodnoj lemi važi $A_x \notin \mathcal{I}_C$. Pokažimo da za proizvoljne $x, y \in \mathbb{R}$, gde je $x \neq y$ važi $A_x \cap A_y \in \mathcal{I}_C$. Ne umanjujući opštost pretpostavimo $x < y$. Kako je x granica niza $\langle q_n^x : n \in \mathbb{N}\rangle$ u svakoj njegovoj okolini, pa i u $(x-1, y)$ se nalaze svi sem konačno mnogo članova skupa A_x. Tada ostaje najviše konačno mnogo elemenata A_x većih od y, pa je jasno, $A_x \cap A_y$ najviše konačan skup, odnosno

$$A_x \cap A_y \in \mathcal{I}_C. \tag{14.1}$$

Dakle, familija $\mathcal{A} = \{A_x : x \in \mathbb{R}\}$ je $\mathcal{I}_C$-adf i $|\mathcal{A}| = \mathfrak{c}$. Prema teoremi 52 familija $\mathcal{A}$ je sadržana u nekoj $\mathcal{I}_C$-madf $\mathcal{A}^*$ i jasno, $|\mathcal{A}^*| = \mathfrak{c}$. □

Teorema 70. Postoji prebrojiva $\mathcal{I}_C$-madf.

Dokaz. Neka je $\langle b^n : n \in \mathbb{N}\rangle$ rastući niz u intervalu $[0,1)$ takav da je $b^1 = 0$ i $\lim_{n\to\infty} b^n = 1$. Neka je $\langle a_k^n : k \in \mathbb{N}\rangle$ opadajući niz u $\mathbb{Q} \cap [b^n, b^{n+1})$ takav da je $\lim_{k\to\infty} a_k^n = b^n$. Neka je $A_n = \{a_k^n : k \in \mathbb{N}\}$ i $A_\infty = \mathbb{Q} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Pokažimo da je familija $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{A_\infty\}$ prebrojiva $\mathcal{I}_C$-madf.

Pokažimo prvo da je $\mathcal{A}$ $\mathcal{I}_C$-adf. Kako je A_n, za svako $n \in \mathbb{N}$ opadajući niz, prema lemi 42, A_n je pozitivan, tj. $A_n \notin \mathcal{I}_C$. Jasno, A_∞ je takođe pozitivan, jer je neograničen. Kako su, po definiciji, elementi familije $\mathcal{A}$ disjunktni, presek bilo koja dva elementa je mali. Sledi, familija $\mathcal{A}$ je $\mathcal{I}_C$-adf.

Pretpostavimo da $\mathcal{A}$ nije $\mathcal{I}_C$-madf. Tada prema (10.1) leme 36 postoji skup $B \notin \mathcal{I}_C$, za koji važi: $B \cap A_\infty \in \mathcal{I}_C$ i $B \cap A_n \in \mathcal{I}_C$, za svako $n \in \mathbb{N}$.

Pokažimo da važi $|B \cap A_n| < \aleph_0$, za sve $n \in \mathbb{N}$. U suprotnom, ako bi važilo $|B \cap A_n| = \aleph_0$, za neko $n \in \mathbb{N}$, tada bi $B \cap A_n$ bio podniz opadajućeg niza A_n, tj. $B \cap A_n \notin \mathcal{I}_C$. Imamo da je $|(B \cap \bigcup_{n\in\omega} A_n)| \leq \omega$. U slučaju da je $|(B \cap \bigcup_{n\in\omega} A_n)| < \omega$, tj. konačan, sledi da $B \cap \bigcup_{n\in\omega} A_n \in \mathcal{I}_C$. Ako je $|(B \cap \bigcup_{n\in\omega} A_n)| = \omega$, onda je $B \cap \bigcup_{n\in\omega} A_n$ skup elemenata rastućeg niza u $[0,1) \cap \mathbb{Q}$ koji konvergira 1 jer su u svakom od intervala $(b^n, 1)$ svi sem konačno mnogo elemenata $B \cap \bigcup_{n\in\omega} A_n$, pa je ponovo $B \cap \bigcup_{n\in\omega} A_n \in \mathcal{I}_C$.

Sada imamo

$$B = B \cap \mathbb{Q} = B \cap (\bigcup_{n\in\omega} A_n \cup A_\infty) = (B \cap \bigcup_{n\in\omega} A_n) \cup (B \cap A_\infty) \in \mathcal{I}_C, \tag{14.2}$$

kontradikcija. Dakle, familija $\mathcal{A}$ je $\mathcal{I}_C$-madf. □

Primer 20. Pokažimo da prebrojiva $\mathcal{I}_C$-adf koja se sastoji od odozdo ograničenih opadajućih nizova nije $\mathcal{I}_C$-madf.

Neka je $\{\langle a_n^k : k \in \mathbb{N}\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ $\mathcal{I}_C$-adf koja se sastoji od odozdo ograničenih opadajućih nizova u $\mathbb{Q}$. Skupove elemenata tih nizova označimo sa $A_n, n \in \mathbb{N}$, tj. $A_n = \{a_n^k : k \in \mathbb{N}\}$. Neka je $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$. Prema lemi 42, A_n su pozitivni.

Pokažimo da $\mathcal{A}$ nije $\mathcal{I}_C$-madf. Neka je, za $n \in \mathbb{N}$, a_n granica opadajućeg niza A_n. Prema (10.1) leme 36 dovoljno je naći pozitivan skup čiji je presek sa svakim A_n, za $n \in \mathbb{N}$ mali.

Neka je $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ i $\langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ proizvoljan opadajući niz racionalnih brojeva koji konvergira tački γ. Označimo skup elemenata tog niza sa $A = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Prema lemi 42, skup A je pozitivan, tj. $A \notin \mathcal{I}_C$. Pokažimo da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $A \cap A_n$ je konačan skup. Razlikujemo dva slučaja. Prvi, kada je $a_n \in (-\infty, \gamma)$ i drugi kada je $a_n \in (\gamma, +\infty)$.

Neka je u prvom slučaju $\epsilon < \gamma - a_n$. Kako je A_n skup članova opadajućeg niza koji konvergira a_n, u svakoj okolini, pa i u okolini $(a_n - \epsilon, a_n + \epsilon)$ se nalaze svi sem konačno mnogo elemenata skupa A_n. Sledi da je $A \cap A_n$ najviše konačan, pa tako i mali skup.

Neka je u drugom slučaju $\epsilon < a_n - \gamma$. Kako je A skup članova opadajućeg niza koji konvergira tački γ, u svakoj okolini, pa i u okolini $(\gamma - \epsilon, \gamma + \epsilon)$ se nalaze svi sem konačno mnogo elemenata skupa A. Sledi da je $A \cap A_n$ najviše konačan, pa tako i mali skup.

Posledica 12. $\mathfrak{p}_{\mathcal{I}_C} = \mathfrak{a}_{\mathcal{I}_C} = \aleph_0$.

Dokaz. Direktno iz posledice 11 i teoreme 70. □

Glava 15

Ideal generisan ograničenim rastućim i opadajućim nizovima racionalnih brojeva

15.1 Karakterizacija ideala $\mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$

Neka je $\mathcal{C}_\omega$ familija svih rastućih i ograničenih nizova racionalnih brojeva, a $\mathcal{C}_{\omega^*}$ familija svih opadajućih i ograničenih nizova racionalnih brojeva. Definišimo skup

$\mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}} = \{I \subseteq \mathbb{Q} :$ postoji konačna potfamilija $\{C_1, \ldots, C_n\} \subseteq \mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}$ da $I \subseteq C_1 \cup \ldots \cup C_n\}$.

Teorema 71. Skup $\mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$ je ideal na skupu $\mathbb{Q}$.

Dokaz. (I1) Pretpostavimo $\mathbb{Q} \in \mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$. Tada postoji konačna potfamilija $\{C_1, \ldots, C_n\} \subseteq \mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}$ da $\mathbb{Q} \subseteq C_1 \cup \ldots \cup C_n$, kontradikcija, jer su C_i za $i = 1, \ldots, n$ ograničeni rastući ili opadajući nizovi racionalnih brojeva, pa je njihova unija ograničen skup. Jasno, $\mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}} \neq \emptyset$ jer je $\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}$ neprazno; naravno, svi konačni podskupovi skupa racionalnih brojeva nalaze u $\mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$.

(I2) Neka su $I_1, I_2 \in \mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$. Tada za I_1 postoji konačna potfamilija $\{C'_1, \ldots, C'_k\} \subseteq \mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}$, takva da je $I_1 \subseteq C'_1 \cup \ldots \cup C'_k$. Za I_2, takođe postoji konačna potfamilija

$\{C''_1, \ldots, C''_l\} \subseteq \mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}$, takva da je $I_2 \subseteq C''_1 \cup \ldots \cup C''_l$. Jasno, sledi $I_1 \cup I_2 \subseteq C'_1 \cup \ldots \cup C'_k \cup C''_1 \cup \ldots \cup C''_l$ i $\{C'_1, \ldots, C'_k, C''_1, \ldots, C''_l\} \subseteq \mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}$, pa $I_1 \cup I_2 \in \mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$.

(13) Neka je $A \subseteq I \in \mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$. Tada postoji $\{C_1 \ldots C_k\} \subseteq \mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}$ tako da važi $A \subseteq I \subseteq C_1 \cup \ldots \cup C_k$, pa jasno, $A \in \mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$. □

Opet, skupove koji pripadaju idealu $\mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$ zvaćemo mali skupovi, a one koji ne pripadaju idealu zvaćemo pozitivnim. Familiju pozitivnih skupova označićemo sa $\mathcal{I}^+_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$, tj. $\mathcal{I}^+_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}} = P(\mathbb{Q}) \setminus \mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$.

Teorema 72. Svaka $\mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$-adf je sadržana u nekoj $\mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$-madf.

Dokaz. Kako prema teoremi 52 ovo važi za svaki ideal $\mathcal{I}$, važi i za $\mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$. □

Teorema 73. $I \in \mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$ ako i samo ako je I ograničen skup i ima konačno mnogo tačaka nagomilavanja u $\mathbb{R}$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $I \in \mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$. Tada je $I \subseteq C_1 \cup \ldots \cup C_n$, gde $\{C_1, \ldots, C_n\} \subseteq \mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}$. Jasno, I je ograničen kao podskup konačne unije ograničenih skupova.

Prema teoremi 8 iz $I \subseteq C_1 \cup \ldots \cup C_n$ sledi $I' \subseteq (C_1 \cup \ldots \cup C_n)' \subseteq C'_1 \cup \ldots \cup C'_n$ i kako je za skup $C \in \mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}$ jedina tačka nagomilavanja granica odgovarajućeg niza imamo da je I' konačan skup.

($\Leftarrow$) Neka je skup I ograničen i neka ima konačno mnogo tačaka nagomilavanja, tj. $I \subseteq (a, b)$ i $I' = \{t_1, \ldots, t_n\}$. Ne umanjujući opštost pretpostavimo $t_1 < \ldots < t_n$. Posmatrajmo interval (a, t_1). Ako bi skup $I \cap (a, t_1)$ bio konačan, izaberemo niz iz $\mathcal{C}_\omega$ koji sadrži te tačke. Ako je $I \cap (a, t_1)$ beskonačan, pokažimo da je $I \cap (a, t_1)$ dobro uređen skup.

Pretpostavimo da nije dobro uređen. Tada prema teoremi 4 postoji opadajući niz $\langle x_i : i \in \mathbb{N}\rangle$ čija je granica $a \leq x < t_1$. Jasno, x je tačka nagomilavanja skupa I, kontradikcija, jer je t_1 najmanja tačka nagomilavanja skupa I.

Kako je $I \cap (a, t_1)$ dobro uređen i beskonačan, on je tipa η, gde je $\omega \leq \eta < \omega_1$. Pokažimo da je $\eta = \omega$. Pretpostavimo da je $\eta > \omega$. Tada je $I \cap (a, t_1) = \{q_\alpha : \alpha < \eta\}$ gde važi $\alpha < \alpha'$ ako i samo ako $q_\alpha < q_{\alpha'}$. Sada imamo da je $q_\omega < t_1$, ali onda postoji tačka nagomilavanja koja je manja od ili jednaka $q_\omega < t_1$, što je netačno. Sledi $\eta = \omega$, pa je $I \cap (a, t_1)$ skup tačaka rastućeg niza koji konvergira ka t_1 te $I \cap (a, t_1) \in \mathcal{C}_\omega$.

Posmatrajmo sada interval $I \cap (t_1, \frac{t_1+t_2}{2})$. U slučaju da je konačan, opet izaberemo niz iz $\mathcal{C}_\omega$ koji sadrži te tačke. Ako je beskonačan, pokažimo da je inverzno dobro uređen. Pretpostavimo da nije inverzno dobro uređen. Tada prema teoremi 4 postoji rastući niz $\langle y_i : i \in \mathbb{N}\rangle$ čija je granica $y < t_2$ i $t_1 < y$. Jasno, y je tačka nagomilavanja skupa I, kontradikcija, jer između t_1 i t_2 nema tačaka nagomilavanja. Kao u prethodnom pasusu pokazuje se da je skup $I \cap (t_1, \frac{t_1+t_2}{2}) = \{q'_n : n \in \omega\} = C'_1$ tipa ω^*.

Ponavljajući postupak za svaki t_i, $i = 1, \ldots, n$ dobijamo $I \subseteq C_1 \cup \ldots \cup C_m \cup \ldots C'_1 \cup \ldots \cup C'_m$, gde su $C_i, C'_i \in \mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}$, za $m \leq n$. □

15.2 Kardinalnost $\mathcal{I}_{C_\omega \cup C_{\omega^*}}$-madf. Neprebrojivost $\mathfrak{a}_{\mathcal{I}_{C_\omega \cup C_{\omega^*}}}$

Teorema 74. Postoji $\mathcal{I}_{C_\omega \cup C_{\omega^*}}$-madf kardinalnosti $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

Dokaz. Za $x, y \in \mathbb{R}$ definišimo relaciju $\sim$ na sledeći način

$x \sim y$ ako i samo ako $x - y \in \mathbb{Q}$.

Sledeća dva stava će nam koristiti u dokazu.

Stav 1. (a) Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije;

(b) Klasa ekvivalencije $[x] = \{x + q : q \in \mathbb{Q}\}$, gde je $x \in \mathbb{R}$, je gust skup u $\mathbb{R}$.

Dokaz. (a) Trivijalno.

(b) Neka $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$. Pokažimo da postoji $y \in [x]$, takav da je $a < y < b$. Iz $a < b$ sledi $a - x < b - x$. Tada postoji $q \in \mathbb{Q}$ takav da $a - x < q < b - x$, a onda jasno, važi $a < q + x < b$. Kako je $x + q \in [x]$ sledi tvrđenje. □

Stav 2. Skup $\mathbb{Q}$ se može razbiti na prebrojivo mnogo malih skupova tako da je unija svake beskonačne potfamilije pozitivna.

Dokaz. Klasa ekvivalencije iz stava 1 imamo kontinuum mnogo i neka je C^α, $\alpha < \mathfrak{c}$ jedna numeracija familije klasa ekvivalencije. Jasno, važi $\mathbb{R} = \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} C^\alpha$. Neka je $\{q^n : n \in \mathbb{N}\}$ jedna numeracija skupa $\mathbb{Q}$ koja je injektivna. Za $n \in \mathbb{N}$ biramo rastući niz realnih brojeva $\langle x_k^n : k \in \mathbb{N}\rangle$ koji konvergira q^n, takav da su elementi niza iz klase C^n, dakle $\langle x_k^n : k \in \mathbb{N}\rangle \in (C^n)^{\mathbb{N}}$. Kako su klase C^n disjunktne i skupovi elemenata nizova su disjunktni. Označimo te skupove sa $T'_n = \{x_k^n : k \in \mathbb{N}\}$. Neka je $L = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T'_n$.

Pokažimo da je L gust, prebrojiv, bez krajnjih tačaka. Da je L prebrojiv, sledi iz činjenice da je prebrojiva unija prebrojivih skupova prebrojiva, tj. $|L| = |\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T'_n| = \aleph_0$. Pokažimo da je L gust. Neka su $x, y \in L$ i $x < y$. Tada postoji $q \in \mathbb{Q} \cap (x, y)$, pa postoji i $n_0 \in \mathbb{N}$ da je $q = q^{n_0}$. Prema konstrukciji postoji niz $\langle x_n^{n_0} : n \in \mathbb{N}\rangle$ koji konvergira q^{n_0}, a kako konvergira, za svako $\epsilon > 0$ postoji k_0 takvo da za svako $k \geq k_0$ važi $x_k^{n_0} > x$, tj. $x_k^{n_0} \in (x, y)$, odnosno $x < x_k^{n_0} < y$ i $x_k^{n_0} \in L$. Kako je skup L neograničen, on je bez krajnjih tačaka.

Kako je L prebrojiv, gust, bez krajnjih tačaka prema teoremi 6 postoji izomorfizam $f : L \to \mathbb{Q}$. Tada direktne slike $f[T'_n] = T_n$, $n \in \mathbb{N}$, čine razbijanje $\mathbb{Q}$. Pokažimo da elementi $T_n, n \in \mathbb{N}$ čine rastući ograničen niz, tj. $T_n \in \mathcal{I}_C$, za $n \in \mathbb{N}$. Neka $x_a, x_b \in T'_n$ i $x_a < x_b$. Kako je f izomorfizam, važi $f(x_a) < f(x_b)$, pa je niz u T_n rastući. Neka je $q^n < q^l$. Kako je q^n granica niza elemenata iz T'_n, a q^l elemenata niza iz T'_l, sledi da u skupu T'_l postoji x_k^l takav da je $q^n < x_k^l < q^l$. Neka je $x_r^n \in T'_n$. Kako je f izomorfizam iz $x_r^n < x_k^l$ sledi $f(x_r^n) < f(x_k^l)$. Kako je x_r^n proizvoljno izabran sledi da su svi elementi niza T_n ograničeni.

Dakle, za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $T_n \in \mathcal{I}_{C_\omega \cup C_{\omega^*}}$, a $\bigcup_{n\in M} T_n \notin \mathcal{I}_{C_\omega \cup C_{\omega^*}}$, za svaki beskonačan skup $M \subseteq \mathbb{N}$, jer ima beskonačno tačaka nagomilavanja. □

Prema stavu 2, skup $\mathbb{Q}$ možemo razbiti na prebrojivo mnogo malih skupova T_n, $n \in \mathbb{N}$ čija je unija svake beskonačne familije pozitivna. Neka je $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ madf i $|\mathcal{A}| = \mathfrak{c}$. Za svako $A \in \mathcal{A}$ definišimo $B_A = \bigcup_{n\in A} T_n$. Jasno, skupovi B_A su pozitivni. Pokažimo da je presek dva proizvoljna, tako definisana skupa mali. Neka je $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ i $A_1 \neq A_2$. Kako je $\mathcal{A}$ madf, sledi da je $A_1 \cap A_2$ konačan skup. Sada imamo da je $B_{A_1} \cap B_{A_2} = \bigcup_{n \in A_1 \cap A_2} T_n$ mali skup kao konačna unija malih skupova. Dakle, $\{B_A : A \in \mathcal{A}\}$ je $\mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$-adf kardinalnosti $\mathfrak{c}$.

Prema teoremi 52 familija $\{B_A : A \in \mathcal{A}\}$ je sadržana u nekoj $\mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$-madf $\mathcal{A}^*$ i jasno, $|\mathcal{A}^*| = \mathfrak{c}$. □

Egzistenciju prebrojive $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$-madf pokazali smo u teoremi 70. Da prebrojiva $\mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$-adf ne može da bude $\mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$-madf kazuje nam sledeća teorema.

Teorema 75. Prebrojiva $\mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$-adf ne može da bude $\mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$-madf.

Dokaz. Neka je familija $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \omega\}$ $\mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$-adf. Posmatrajmo dva slučaja.

(a) $M = \{n \in \omega : |A'_n| < \aleph_0\}$ je beskonačan, gde je A'_n izvod, tj. skup svih tačaka nagomilavanja skupa A_n. Kako za svako $n \in M$, skupovi A_n imaju konačno tačaka nagomilavanja i $A_n \notin \mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$, prema teoremi 73 sledi da su A_n neograničeni skupovi. Numerišimo skup $M = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$, da iz $k < l$ sledi $n_k < n_l$. Biramo $q_k \in \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{N}$, takve da važi:

(i) $q_k \in A_{n_k} \setminus \bigcup_{n<n_k} A_n$,

(ii) $|q_k| \geq k$.

Važi $A_{n_k} \setminus \bigcup_{n<n_k} A_n = A_{n_k} \setminus (A_{n_k} \cap \bigcup_{n<n_k} A_n) = A_{n_k} \setminus \bigcup_{n<n_k} (A_{n_k} \cap A_n) \notin \mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$, jer je konačna unija malih skupova mali skup te i ograničen, tj. $\bigcup_{n<n_k} (A_{n_k} \cap A_n) \in \mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$. Zbog neograničenosti A_{n_k} je $A_{n_k} \setminus \bigcup_{n<n_k} A_n$ neograničen skup, pa postoji q_k takav da je $|q_k| \geq k$ i $q_k \in A_{n_k} \setminus \bigcup_{n<n_k} A_n$.

Defininišimo skup $S = \{q_k : k \in \mathbb{N}\}$. Prema uslovu (ii) i teoremi 73 skup S je pozitivan jer je neograničen. Pokažimo da ima mali presek sa svakim $A_m, m \in \omega$. Neka je $m \in \mathbb{N}$. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da važi $n_k > m$. Za $l \geq k$ važi $n_l \geq n_k$, a kako $q_l \in A_{n_l} \setminus \bigcup_{n<n_l} A_n$, sledi $q_l \notin A_m$. Dakle, $A_m \cap S \subseteq \{q_1, \ldots, q_{k-1}\}$, pa je kao konačan skup i mali. Prema (10.1) leme 36 familija $\mathcal{A}$ nije $\mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$-madf.

(b) Neka je $M = \{n \in \omega : |A'_n| < \aleph_0\}$ konačan. Ne umanjujući opštost neka je $M = \{0, 1, \ldots, m\}$.

U nastavku dokaza pokažimo da važe sledeće tri leme.

Lema 43. Za svaku tačku iz izvoda nekog pozitivnog skupa postoji rastući ili opadajući niz u tom skupu koji joj konvergira.

Dokaz. Neka je $t \in A'$. Pokažimo da važi

$$\forall \epsilon_1 > 0 \ ((t - \epsilon_1, t) \cap A \neq \emptyset) \ \vee \ \forall \epsilon_2 > 0 \ ((t, t + \epsilon_2) \cap A \neq \emptyset) \tag{15.1}$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da važi

$$\exists \epsilon_1 > 0 \ ((t - \epsilon_1, t) \cap A = \emptyset) \ \wedge \ \exists \epsilon_2 > 0 \ ((t, t + \epsilon_2) \cap A = \emptyset). \tag{15.2}$$

Tada $(t - \epsilon_1, t + \epsilon_2) \cap A \setminus \{t\} = \emptyset$, kontradikcija, jer $t \in A'$. Dakle, važi (15.1). Neka sve desne okoline tačke t seku skup A. Izaberimo tačke $b_n, n \in \mathbb{N}$ na sledeći način: $b_1 \in (t, t + \varepsilon_2) \cap A$,

$b_2 \in (t, \min\{b_1, t + \frac{1}{2}\}) \cap A, \ldots, b_n \in (t, \min\{b_{n-1}, t + \frac{1}{n}\}) \cap A$. Sledi $\langle b_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ je opadajući niz i zbog $|b_n - t| < \frac{1}{n}$, sledi $\lim_{n\to\infty} b_n = t$. Ako sve leve okoline tačke t seku skup A, sličnom konstrukcijom dobijamo rastući niz koji konvergira tački t. $\square$

Lema 44. Neka je $n > m$. Tada za sve sem konačno mnogo $t \in A'_n$ postoji niz $\langle q^t_k : k \in \mathbb{N} \rangle$ koji konvergira tački t, takav da $q^t_k \in A_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup \{t\})$.

Dokaz. Pokažimo da za sve sem konačno mnogo tačaka $t \in A'_n$ važi

$$\exists \langle q_k \rangle \in A_n^{\mathbb{N}} \ (\langle q_k \rangle \to t \ \wedge \ \forall k \in \mathbb{N} \, \forall i < n \, (q_k \notin A_i \ \wedge \ q_k \neq t)) \tag{15.3}$$

Pretpostavimo suprotno, tj, postoji beskonačan podskup T skupa A'_n takav da ni za jedno $t \in T$ ne važi 15.3, odnosno da za svako $t \in T$ važi

$$\forall \langle q_k \rangle \in A_n^{\mathbb{N}} (\langle q_k \rangle \to t \Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} \, \exists i < n \ q_l \in A_i \cup \{t\}). \tag{15.4}$$

Kada bi $\{q_k : k \in \mathbb{N}\} \cap (\bigcup_{i<n} A_i \cup \{t\})$ bio konačan skup, izostavljanjem konačno članova niza $\langle q_k \rangle$ dobili bismo niz koji ne zadovoljava (15.4); zato iz (15.4) sledi

$$\forall \langle q_k \rangle \in A_n^{\mathbb{N}} \ (\langle q_k \rangle \to t \Rightarrow |\{q_k : k \in \mathbb{N}\} \cap (\bigcup_{i<n} A_i \cup \{t\})| = \aleph_0). \tag{15.5}$$

Dakle, za svaku tačku $t \in T$ važi

$$\exists \langle q_k \rangle \in A_n^{\mathbb{N}} \ (\langle q_k \rangle \to t \wedge \exists k_0 \in \mathbb{N} \, \forall k \geq k_0 \ q_k \in \bigcup_{i<n} A_i \cup \{t\}). \tag{15.6}$$

Pokažimo da važi

$$T \subseteq \bigcup_{i<n} (A_i \cap A_n)'. \tag{15.7}$$

Neka je $t \in T$. Prema lemi 43 i 15.3 postoje rastući ili opadajući niz $\langle q_k \rangle \in A_n^{\mathbb{N}}$ i prirodan broj k_0, takavi da $\langle q_k \rangle \to t$. Prema (15.6) postoji k_0 takav da $q_k \in A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup \{t\}$, za sve $k \geq k_0$, pa zbog monotonosti $q_k \in A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}$. Jasno, postoji $i_0 < n$ takav da je $|A_{i_0} \cap \{q_k : k \in \mathbb{N}\}| = \aleph_0$. Neka je $K = \{k \in \mathbb{N} : q_k \in A_{i_0}\}$. Niz $\langle q_k : k \in K \rangle$ je podniz niza $\langle q_k : k \in \mathbb{N} \rangle$ i $\langle q_k : k \in K \rangle \to t$, pa je on niz i u A_n i u A_{i_0}, dakle i u $A_{i_0} \cap A_n$. Sledi t je tačka nagomilavanja $A_{i_0} \cap A_n$, odnosno $t \in \bigcup_{i<n} (A_i \cap A_n)'$, pa važi (15.7). Skupovi $A_i \cap A_n$ su mali, pa prema lemi 73 imaju konačno tačaka nagomilavanja, dakle i konačna unija izvoda $\bigcup_{i<n} (A_i \cap A_n)'$ je konačan skup. Imamo da je desna strana (15.7) konačan, a leva beskonačan skup, kontradikcija. $\square$

Lema 45. Ako za niz $\langle q_k : k \in \mathbb{N} \rangle$ važi $\lim_{k\to\infty} q_k = t$ i $q_k \neq t$ onda on sadrži ili rastući ili opadajući podniz.

Dokaz. Pokažimo da za niz $\langle q_k : k \in \mathbb{N}\rangle$ za koji je $\lim_{k\to\infty} q_k = t$ važi:

$$\forall \epsilon > 0\ ((t-\epsilon, t) \cap \{q_k : k \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset)\ \vee\ \forall \epsilon > 0\ ((t, t+\epsilon) \cap \{q_k : k \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset). \quad (15.8)$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da

$$\exists \epsilon_1 > 0\ ((t-\epsilon_1, t) \cap \{q_k : k \in \mathbb{N}\} = \emptyset)\ \wedge\ \exists \epsilon_2 > 0\ ((t, t+\epsilon_2) \cap \{q_k : k \in \mathbb{N}\} = \emptyset). \quad (15.9)$$

Neka je $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Tada je iz (15.9) $(t-\epsilon, t+\epsilon) \cap \{q_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \{t\}$, kontradikcija sa $\lim_{k\to\infty} q_k = t$.

Dakle, razlikujemo dva slučaja:

(i) $\forall \epsilon > 0\ (t-\epsilon, t) \cap \{q_k : k \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$. Tada rekurzivno definišemo $\{k_j : j \in \mathbb{N}\}$ na sledeći način $k_1 = \min\{k : q_k \in (t-1, t)\}$, $k_2 = \min\{k > k_1 : q_k \in (\max\{t - \frac{1}{2}, q_{k_1}\}, t)\}, \ldots, k_{n+1} = \min\{k > k_n : q_k \in (\max\{t - \frac{1}{n+1}, q_{k_n}\}, t)\}$. Jasno, $q_{k_{n+1}} > q_{k_n}$ i $k_{n+1} > k_n$, pa je niz $\langle q_{k_j} : j \in \mathbb{N}\rangle$ rastući i konvergira tački t.

(ii) $\forall \epsilon > 0\ (t, t+\epsilon) \cap \{q_k : k \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$. Slično kao pod (i) dobijamo opadajući niz. □

Nastavljamo sa dokazom teoreme 75.

Definišimo skupove S^n, za $n > m$, na sledeći način. Prema lemi 44 postoji $t^{m+1} \in A'_{m+1}$ i postoji niz $\langle q_k^{m+1} : k \in \mathbb{N}\rangle \in (A_{m+1} \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_m \cup \{t\}))^{\mathbb{N}}$ koji konvergira tački t^{m+1}. Prema lemi 45 postoji rastući ili opadajući podniz $\langle q_{k_j}^{m+1} : j \in \mathbb{N}\rangle$ koji konvergira t^{m+1}. Sada imamo $S^{m+1} = \{q_{k_j}^{m+1} : j \in \mathbb{N}\}$.

Prema lemi 44 postoji $t^{m+2} \in A'_{m+2} \setminus \{t^{m+1}\}$ i postoji $\langle q_k^{m+2} : k \in \mathbb{N}\rangle \in (A_{m+2} \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{m+1} \cup \{t\}))^{\mathbb{N}}$ da $\langle q_{k_j}^{m+2} : j \in \mathbb{N}\rangle \to t^{m+2}$. Prema lemi 45 postoji podniz tog niza tako da $\langle q_{k_j}^{m+2} : j \in \mathbb{N}\rangle$ koji konvergira t^{m+2}. Sada imamo $S^{m+2} = \{q_{k_j}^{m+2} : j \in \mathbb{N}\}$. Postupak nastavljamo i dobijamo $S^{m+3}, S^{m+4}, \ldots$. Obeležimo skup $S = \bigcup_{n>m} S^n$. Pokažimo da je S veliki i da sa svakim $A_n, n \in \mathbb{N}$ ima mali presek. Kako ima beskonačno tačaka nagomilavanja skup S je veliki prema teoremi 73. Neka je $i \in \{1, \ldots, m\}$. Kako je $A_i \cap S = \emptyset$, sledi da skup S sa svakim $A_i, i \in \{1, \ldots, m\}$ ima mali presek. Neka je sada $j > m$. Za $i > j$ iz konstrukcije skupova S^i sledi $S^i \cap A_j = \emptyset$, pa imamo $A_j \cap S = A_j \cap (\bigcup_{i>m} S^i) = \bigcup_{i>m} A_j \cap S^i = \bigcup_{i=m+1}^{j} A_j \cap S^i \subseteq \bigcup_{i=m+1}^{j} S^i$. Kako su S^i prema teoremi 73 mali skupovi, sledi da je skup $A_j \cap S$ mali, kao podskup konačne unije malih skupova. Prema (10.1) leme 36, $\mathcal{A}$ nije $\mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$-madf. □

Teorema 76. Svaka prebrojiva familija pozitivnih skupova sa $\mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$-sfip ima $\mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$-pseudopresek.

Dokaz. Neka je $\mathcal{P} = \{P_n : n \in \omega\}$ familija pozitivnih skupova sa $\mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$-sfip. Kako je $P_1 \supseteq P_1 \cap P_2 \supseteq \ldots \supseteq P_1 \cap \ldots \cap P_n$ možemo pretpostaviti $P_1 \supseteq P_2 \supseteq \ldots \supseteq P_n$. Posmatrajmo dva slučaja.

(a) Skup $M = \{n \in \omega : |P'_n| < \aleph_0\}$ je beskonačan, gde je P'_n skup tačaka nagomilavanja skupa P_n. Kako za svako $n \in M$, skupovi P_n imaju konačno tačaka nagomilavanja, a $P_n \notin \mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$, prema teoremi 73 sledi da su P_n neograničeni. Nadskup neograničenog skupa je neograničen, pa sledi da je P_n neograničen, za svako $n \in \omega$. Kako su neograničeni za svako $n \in \omega$ izaberimo $q_n \in P_n$, takav da je $|q_n| \geq n$. Označimo sa $S = \{q_n : n \in \omega\}$. Skup S je neograničen, dakle prema teoremi 73 važi $S \notin \mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$. Pokažimo da je S $\mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$-pseudopresek familije $\mathcal{P}$. Neka je $n \in \omega$. Skup $S \setminus P_n \subseteq \{q_1, \ldots, q_{n-1}\}$, pa je $S \setminus P_n \in \mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}$, tj. $S \subseteq^*_{\mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}} P_n$.

(b) Skup $M = \{n \in \omega : |P'_n| < \aleph_0\}$ je konačan. Ovaj slučaj je nemoguć jer ako za neko k skup P_k ima konačno tačaka nagomilavanja onda i svaki $P_{k+i}, i = 1, 2, \ldots$ ima konačno tačaka nagomilavanja. □

Posledica 13. $\omega < \mathfrak{p}_{\mathcal{I}_{\mathcal{C}_\omega \cup \mathcal{C}_{\omega^*}}} \leq \mathfrak{c}$.

Dokaz. Direktna posledica teoreme 76. □

Glava 16

Ideal nigde gustih skupova

16.1 $\mathcal{I}_{n.g.}$-madf

I u ovom delu posmatramo topološki prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$, tj. realnu pravu sa uobičajenom topologijom. Baza uobičajene topologije je familija svih otvorenih intervala.

Ako je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor, skup $S \subseteq X$ je **nigde gust** ako i samo ako važi Int$\overline{S} = \emptyset$.

Neka je skup $\mathcal{I}_{n.g.}$ definisan na sledeći način

$\mathcal{I}_{n.g.} = \{I \subseteq \mathbb{Q} : \text{Int}\overline{I} = \emptyset \text{ u prostoru } (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})\}$.

Teorema 77. $\mathcal{I}_{n.g.}$ je ideal na skupu $\mathbb{Q}$.

Dokaz. (I1) $\mathbb{Q} \notin \mathcal{I}_{n.g.}$ jer je Int$\overline{\mathbb{Q}}$ =Int$\mathbb{R}$ $= \mathbb{R}$. Kako su konačni skupovi u $\mathcal{I}_{n.g.}$, sledi $\mathcal{I}_{n.g.} \neq \emptyset$.

(I2) Neka su $I_1, I_2 \in \mathcal{I}_{n.g.}$. Tada važi Int$\overline{I_1} = \emptyset$ i Int$\overline{I_2} = \emptyset$. Prema teoremi 9 važi Int$\overline{I_1 \cup I_2}$ =Int$(\overline{I_1} \cup \overline{I_2})$. Pokažimo da je Int$(\overline{I_1} \cup \overline{I_2}) = \emptyset$. Pretpostavimo da je Int$(\overline{I_1} \cup \overline{I_2}) \neq \emptyset$. Tada postoji interval $(a, b) \subseteq \overline{I_1} \cup \overline{I_2}$, pa $(a, b) \setminus \overline{I_2} \subseteq \overline{I_1}$. No $(a, b) \setminus \overline{I_2}$ je otvoren skup, pa kako je Int$\overline{I_1} = \emptyset$, sledi $(a, b) \setminus \overline{I_2} = \emptyset$, tj. $(a, b) \subseteq \overline{I_2}$ odakle Int$\overline{I_2} \neq \emptyset$, kontradikcija.

(I3) Neka je $A \subseteq I \in \mathcal{I}_{n.g.}$. Kako je Int$\overline{I} = \emptyset$, prema teoremi 9 važi Int$\overline{A}$ $\subseteq$Int$\overline{I} = \emptyset$, pa $A \in \mathcal{I}_{n.g.}$. □

Opet ćemo skupove koji pripadaju idealu $\mathcal{I}_{n.g.}$ zvati mali skupovi, a one koji ne pripadaju idealu zvaćemo pozitivnim. Familiju pozitivnih skupova označićemo sa $\mathcal{I}_{n.g.}{}^{+}$, tj. $\mathcal{I}_{n.g.}{}^{+} =$

$P(\mathbb{Q}) \setminus \mathcal{I}_{n.g.}$.

Teorema 78. Svaka $\mathcal{I}_{n.g.}$-adf je sadržana u nekoj $\mathcal{I}_{n.g.}$-madf.

Dokaz. Ovo prema teoremi 52 važi za svaki ideal $\mathcal{I}$, pa važi i za $\mathcal{I}_{n.g.}$. □

16.2 Postoje $\mathcal{I}_{n.g.}$-madf kardinalnosti $\leq \aleph_0$ i $\mathfrak{c}$

Teorema 79. Za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji $\mathcal{I}_{n.g.}$-madf kardinalnosti n.

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Posmatrajmo intervale $A_1 = (-\infty, 1) \cap \mathbb{Q}, A_2 = [1, 2) \cap \mathbb{Q}, \ldots, A_{n-1} = [n-2, n-1) \cap \mathbb{Q}, A_n = [n-1, \infty) \cap \mathbb{Q}$. Neka je $\mathcal{A} = \{A_i : i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Kako je Int$\overline{A_i} \neq \emptyset$, sledi $A_i \notin \mathcal{I}_{n.g.}$. Jasno, važi $A_i \cap A_j = \emptyset$, za različite $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, pa je $\mathcal{A}$ $\mathcal{I}_{n.g.}$-adf. Pokažimo da je i $\mathcal{I}_{n.g.}$-madf. Pretpostavimo da nije $\mathcal{I}_{n.g.}$-madf. Prema 36 ne važi (10.1), tj. postoji pozitivan skup $X \subseteq \mathbb{Q}$ koji sa svakim elementom familije $\mathcal{A}$ ima mali presek. Iz jednakosti $X = X \cap \mathbb{Q}$ i $\mathbb{Q} = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ sledi da je $X = (X \cap A_1) \cup \ldots \cup (X \cap A_n) \in \mathcal{I}_{n.g.}$, kontradikcija. □

Teorema 80. Postoji prebrojiva $\mathcal{I}_{n.g.}$-madf.

Dokaz. Neka je $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, gde je $A_n = \mathbb{Q} \cap [n, n+1)$ za sve $n \in \mathbb{Z}$. Kako važi Int$\overline{A_n} = (n, n+1)$ imamo $A_n \notin \mathcal{I}_{n.g.}$.

Pokažimo da je $\mathcal{A}$ $\mathcal{I}_{n.g.}$-madf. Jasno, je da je $\mathcal{I}_{n.g.}$-adf jer su joj elementi pozitivni, a presek bilo koja dva prazan, pa tako i mali skup. Da bi bila $\mathcal{I}_{n.g.}$-madf pokažimo uslov (10.1) leme 36. Neka $A \in \mathcal{I}^+_{n.g.}$, tj. Int$\overline{A} \neq \emptyset$. Tada postoji interval $(a, b) \subseteq$Int$\overline{A} \subseteq \overline{A}$, gde su $a, b \in \mathbb{Q}$. Za svaki interval, pa tako i za (a, b) postoji $n \in \mathbb{N}$ da $(a, b) \cap (n, n+1) \neq \emptyset$. Kako je presek dva intervala, interval označimo $(a, b) \cap (n, n+1) = (c, d)$. Jasno, sledi $(c, d) \subseteq \overline{A}$ i $(c, d) \subseteq \overline{A_n}$. Pokažimo $A \cap A_n \notin \mathcal{I}_{n.g.}$. Dovoljno je pokazati

$$(c, d) \subseteq \overline{A \cap A_n} \tag{16.1}$$

Važi $\overline{A \cap A_n} = \overline{A \cap \mathbb{Q} \cap [n, n+1)} = \overline{A \cap [n, n+1)}$, pa se (16.1) svodi na $(c, d) \subseteq \overline{A \cap [n, n+1)}$.

Neka je $x \in (c, d)$. Kako je $(c, d) \subseteq \overline{A}$, postoji niz $\langle a_k : k \in \mathbb{N} \rangle$, gde su $a_k \in A$, koji konvergira tački x. Tada postoji $k_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svako $k \geq k_0$ važi $a_k \in (c, d)$, pa $a_k \in A \cap [n, n+1)$, pa je $x \in \overline{A \cap [n, n+1)}$. Dakle, važi (16.1). □

Da bismo utvrdili egzistenciju $\mathcal{I}_{n.g.}$-madf kardinalnosti $\mathfrak{c}$ navedimo tri pomoćne leme.

Lema 46. Neka je skup $D \subseteq \mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$. Tada postoje gusti, disjunktni skupovi D' i D'', takvi da je $D = D' \cup D''$.

Dokaz. Skup $\mathbb{Q} \cup \sqrt{2}\,\mathbb{Q}$ je gust kao unija dva gusta skupa. Takođe je prebrojiv i bez krajnjih tačaka. Prema teoremi 6 postoji izomorfizam $f : \mathbb{Q} \cup \sqrt{2}\,\mathbb{Q} \to D$. Označimo direktne slike $f[\mathbb{Q}] = D'$ i $f[\sqrt{2}\,\mathbb{Q}] = D''$.

Pokažimo da je skup D' gust u $\mathbb{Q}$ (ili u $\mathbb{R}$). Neka su $p, q \in \mathbb{Q}$ i neka važi $p < q$. Kako je D gust u $\mathbb{Q}$, postoji $d_1, d_2 \in D$ i $p < d_1 < d_2 < q$. Razlikujemo slučajeve:

(a) $d_1 \in D'$ ili $d_2 \in D'$. Tada je $D' \cap (p,q) \neq \emptyset$.

(b) $d_1 \notin D'$ i $d_2 \notin D'$. Tada $d_1, d_2 \in D''$, pa postoje $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ da važi $r_1 < r_2$ i $f(\sqrt{2}r_1) = d_1$ i $f(\sqrt{2}r_2) = d_2$. Tada postoji $r \in (\sqrt{2}r_1, \sqrt{2}r_2) \cap \mathbb{Q}$, pa $f(r) \in D'$ i $d_1 < f(r) < d_2$, te ponovo $D' \cap (p,q) \neq \emptyset$.

Slično D'' je gust u $\mathbb{Q}$. □

Lema 47. Ako su skupovi $A_0, A_1, \ldots$ gusti i važi $\mathbb{Q} \supseteq A_0 \supseteq A_1 \supseteq \ldots$, onda postoji gust skup A takav da je $A \subseteq_{\mathcal{I}_{n.g.}} A_n$, za sve $n \in \omega$.

Dokaz. Neka je $\mathbb{Q} = \{q^n : n \in \omega\}$. Za $n \in \omega$ biramo niz $\langle r^n_k : k \in \mathbb{N}\rangle \in A_n^{\mathbb{N}}$ koji je rastući i konvergira q^n. Neka je $M_n = \{r^n_k : k \in \mathbb{N}\}$ i $A = \bigcup_{n \in \omega} M_n$. Jasno, $\overline{A} = \mathbb{R}$, tj. A je gust. Pokažimo da za svako $n \in \omega$ važi $A \subseteq_{\mathcal{I}_{n.g.}} A_n$, tj. $A \setminus A_n \in \mathcal{I}_{n.g.}$. Kako važi $A \setminus A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \setminus A_n = \bigcup_{m<n} M_m \setminus A_n \subseteq \bigcup_{m<n} M_m$, a $\bigcup_{m<n} M_m$ je nigde gust, tako je i $A \setminus A_n$ nigde gust, tj. $A \setminus A_n \in \mathcal{I}_{n.g.}$. □

Lema 48. Postoji familija gustih skupova $\{A_\varphi : \varphi \in {}^{<\omega}2\}$ da važi

$$\varphi \leq \psi \Rightarrow A_\varphi \supseteq A_\psi \quad \text{i} \tag{16.2}$$

$$\varphi \perp \psi \Rightarrow A_\varphi \cap A_\psi = \emptyset. \tag{16.3}$$

Dokaz. Neka je $A_\emptyset = \mathbb{Q}$. Prema lemi 46 postoje gusti i disjunktni skupovi $D', D'' \subseteq \mathbb{Q}$, da važi $\mathbb{Q} = D' \cup D''$. Označimo $A_0 = D'$ i $A_1 = D''$. Na isti način dobijemo $A_{00} = (D')'$ i $A_{01} = (D')''$, $A_{10} = (D'')'$, $A_{11} = (D'')''$.

Neka su definisani A_φ, za dom$\varphi \leq n$ da važi (16.2) i (16.3). Definišimo A_ψ, za dom$\psi = n+1$. Neka je dom$\psi = n+1$, gde je $n+1 = \{0, 1, \ldots, n\}$. Tada za $\varphi = \psi \restriction n$ je definisan A_φ. Prema lemi 46 postoje gusti i disjunktni skupovi D' i D'' da važi $A_\varphi = D' \cup D''$. Definišemo $A_{\varphi^\frown 0} = D'$ i $A_{\varphi^\frown 1} = D''$. Jasno, važi (16.2). Pokažimo da važi (16.3). Neka je $\varphi_1 \perp \psi_1$. Tada postoji $n \in \omega$ takvo da je $\varphi_1 \restriction_n = \psi_1 \restriction_n = \eta$. Tada je $\varphi_1(n) \neq \psi_1(n)$. Ne umanjujući opštost pretpostavimo $\varphi_1(n) = 0$ i $\psi_1(n) = 1$. Jasno, $A_{\eta^\frown 0} \cap A_{\eta^\frown 1} = \emptyset$. Kako je $A_{\varphi_1} \subseteq A_{\eta^\frown 0}$ i $A_{\psi_1} \subseteq A_{\eta^\frown 1}$ sledi 16.3. □

Teorema 81. Postoji $\mathcal{I}_{n.g.}$-madf kardinalnosti $\mathfrak{c}$.

Dokaz. Neka je $\{A_\varphi : \varphi \in {}^{<\omega}2\}$ familija iz leme 48. Neka je $f \in {}^{\omega}2$. Prema lemi 47 postoji $A_f \notin \mathcal{I}_{n.g.}$ da je ispunjeno $A_f \subseteq_{\mathcal{I}_{n.g.}} A_{f\restriction n}$, za svako $n \in \omega$. Neka je skup $\mathcal{A} = \{A_f : f \in {}^{\omega}2\}$. Kako je kardinalnost skupa ${}^{\omega}2$ $\mathfrak{c}$, skup $\mathcal{A}$ je takođe kardinalnosti $\mathfrak{c}$. Pokažimo da je $\mathcal{A}$ $\mathcal{I}_{n.g.}$-adf. Neka su $f, g \in {}^{\omega}2$ različiti elementi skupa ${}^{\omega}2$. Tada postoji n_0 takvo da da važi $f \restriction n_0 \perp g \restriction n_0$, pa $A_{f\restriction n_0} \cap A_{g\restriction n_0} = \emptyset$. Tada $A_f \setminus A_{f\restriction n_0} \in \mathcal{I}_{n.g.}$ i $A_g \setminus A_{g\restriction n_0} \in \mathcal{I}_{n.g.}$. Sledi $A_f \cap A_g = A_f \setminus A_{f\restriction n_0} \cup A_g \setminus A_{g\restriction n_0} \in \mathcal{I}_{n.g.}$. Dakle, $\mathcal{A}$ je $\mathcal{I}_{n.g.}$-adf kardinalnosti $\mathfrak{c}$. Prema teoremi 52 postoji $\mathcal{I}_{n.g.}$-madf kardinalnosti $\mathfrak{c}$. □

Literatura

[1] J.L. Bell, A.B. Slomson, Models and Ultraproducts: an Introduction, North Holland, Amsterdam, 1969.

[2] D. Booth, A Boolean view of sequential compactness, Fund. Math., 85, 99-102., 1974.

[3] N. Bourbaki, Topologie générale ch. IX, Paris, 1948.

[4] C.C. Chang, H.J. Keisler, Model Theory, North-Holland, Amsterdam, 1973., [ruski prevod: Moskva, MIR, 1977].

[5] W.W. Comfort, S. Negrepontis, The theory of ultrafilters (Springer, Berlin 1974).

[6] F.R. Drake, Set Theory: An Introduction to Large Cardinals, Studies in Logic 76, North Holland, 1974.

[7] R. Engelking, General Topology; Heldermann Verlag Berlin; Berlin, 1989.

[8] P. Halmos, Lectures on Boolean Algebras, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, 1963.

[9] F. Hausdorff, Summen von $\aleph_1$ Mengen, Fund. Math., 26, 241-255, 1936.

[10] S.H. Hechler, A dozen small uncountable cardinals, TOPO 72, Second (and last) Pittsburgh Topology Conference, Springer Lecture Notes in Math., 378, 207-218, 1972.

[11] S.H. Hechler, Short complete nested sequences in $\beta N - N$ and small maximal almost disjoint families, Gen. Topology Appl., 2, 139-149, 1972.

[12] T. Jech, Set Theory, Springer, Berlin, 1997.

[13] M. Katětov, Remarks on characters and pseudocharacters, Comm. Math. Univ. Car., 1(1), 20-25, 1960.

[14] J.L.Kelley, General Topology (D.Van Nostrand Comp. Inc., Princeton, New Jersey, 1957), [ruski prevod: Moskva, Nauka, 1980].

[15] K. Kunen, Set Theory: An Introduction to Independence Proofs, Studies in Logic 102, North Holland, 1980.

[16] K. Kuratowski, Mostowski A., Set Theory, North-Holland, Amsterdam; PWN, Warszawa, 1967. [ruski prevod: Mir, Moskva, 1970.]

[17] K. Kuratowski, Topology, Academic Press, New York; PWN, Warszawa, 1966. [ruski prevod: Mir, Moskva, 1970.]

[18] M. Kurilić, Osnovi opšte topologije, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1998.

[19] S. Milić, Elementi matematičke logike i teorije skupova, Prirodno matematički fakultet, Novi Sad, 1981.

[20] J.D. Monk, R. Bonnet, Handbook Of Boolean Algebras, North-Holland, Amsterdam; 1989.

[21] P.J. Nyikos, Prabir Roy's space Δ is not N-compact, Gen. Topology Appl., 3, 197-210, 1973

[22] S.B. Prešić , Realni brojevi, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1985.

[23] F. Rothberger, Une remarque concernant l'hypothèse du continu, Fund. Math., 31, 224-406, 1939.

[24] F. Rothberger, Sur un ensemble toujours de première categorie qui est depourvu de la propriété λ, Fund. Math. 32 294-300, 1939.

[25] On some problems of Hausdorff and of Sierpinski, Fund. Math., 35, 29-46, 1948.

[26] J. R. Shoenfield, Martin's axiom, The American Mathematical Monthly, 1975.

[27] R. Sikorski, Boolean Algebras; Mir; Moskva,1969.

[28] R.C. Solomon, Families of sets and functions, Czech. Math. J., 27(102), 556-559, 1977.

[29] J.E. Vaughan, Small uncountable cardinals and topology: Open problems in Topology, J.van Mill and G.M. Recd (Editors), North- Holland, Amsterdam, 1990, 195-218.

[30] Ž. Mijajlović, An Introduction to Modal Theory, Institute of Mathematics, Novi Sad, 1987.

BIOGRAFIJA

Nada Perić je rođena 27.08.1974. godine u Rijeci, Republika Hrvatska. Osnovnu i srednju školu završila je u Rijeci, a visoku školu u Novom Sadu. Na Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Institut za matematiku, smer profesor matematike upisala se školske 1994/95 godine. Diplomirala je 25.09.1999. godine.

Magistarske studije je upisala školske 1999/2000 godine.

Novi Sad, novembar, 2004.

Nada Perić

Нада Перић

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Magistarska teza
VR
Autor: Nada Perić
AU
Mentor: dr Miloš Kurilić
MN

Naslov rada: Neki ideali na skupu prirodnih brojeva i odgovarajuće invarijante kontinuuma
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski/engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija i Crna Gora
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2004.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet
MA
Fizički opis rada: 4/8+82/30/0/1/0/0

FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Topologija
ND
Predmetna odrednica/Ključne reči: Ideali, filteri, mali kardinali, topologija, skup racionalnih brojeva, realna prava
PO

UDK:
Čuva se: u biblioteci Instituta za matematiku i informatiku, Novi Sad
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: U ovoj tezi je dat pregled već poznatih rezultata iz oblasti malih kardinala (invarijante kontinuuma): $\mathfrak{b}, \mathfrak{d}, \mathfrak{p}, \mathfrak{t}, \mathfrak{a}, \mathfrak{s}, \mathfrak{u}$. Pored toga, umesto ideala konačnih skupova posmatramo i proizvoljan ideal $\mathcal{I}$ na ω i ispitujemo osobine invarijanata kontinuuma i njihove odnose. U orginalnom delu teze analizirana su konkretno tri izabrana ideala: ideal generisan ograničenim rastućim nizovima racionalnih brojeva, ideal generisan ograničenim rastućim i opadajućim nizovima racionalnih brojeva i ideal nigde gustih skupova i ispitivane osobine malih kardinala.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 22.1.2004.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:

Predsednik: dr Milan Grulović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Miloš Kurilić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: Akademik dr Stevan Pilipović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Žarko Mijajlović, redovni profesor, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu

KO

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monographic type
DT
Type of record: Text printed material
TR
Contents code: Master thesis
CC
Author: Nada Perić
AU
Mentor: Dr Miloš Kurilić
MN

Title: Neki ideali na skupu prirodnih brojeva i odgovarajuće invarijante kontinuuma
TI

Language of text: Serbian
LT
Language of abstract: Serbian/English
LA
Country of publication: Serbia and Monte Negro
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2004.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ.place: University of Novi Sad, Faculty of Natural Sciences and Mathematics
PP
Physical description: 4/8+82/30/0/1/0/0

PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: General Topology
SD
Subject / Key words: Ideals, filters, small cardinals, topology, set of rational numbers, set of real numbers.
SKW
UC:
Holding data: the library at Institute of Mathematics and Computer Science, Novi Sad
HD
Note:
N
Abstract: In this thesis we give a survey of known results concerning small cardinals (invariants of the continuum): $\mathfrak{b}, \mathfrak{d}, \mathfrak{p}, \mathfrak{t}, \mathfrak{a}, \mathfrak{s}, \mathfrak{u}$. Besides, instead of the ideal of final sets we consider an arbitrary ideal $\mathcal{I}$ on ω, and investigate the corresponding invariants on the continuum and their relationship. In the original part of thesis three special ideals are analyzed: the ideal generated by bounded, increasing sequences of rational numbers, the ideal generated by bounded increasing and bounded decreasing sequences of rational numbers, and the ideal of nowhere dense sets. The properties of corresponding small cardinals are investigated.
AB

Accepted by Scientific Board on: January 22, 2004
ASB
Defended:
DE
Thesis defend board:

President: Dr Milan Grulović, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: Dr Miloš Kurilić, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: Academic Dr Stevan Pilipović, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: Dr Žarko Mijajlović, Full Professor, Mathematical Faculty, University of Beograd

DB