Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

UNIVERZITET U BEOGRADU

Prirodno-matematički fakultet

Boško T. Živaljević

NESTANDARDNA ANALIZA U TEORIJI MODELA , TOPOLOGIJI I TEORIJI MERE

/magistarski rad/

B. Živaljević
V.P. 2875/14F
26002 Pančevo

prof. Hervi Miller
Prirodno-matematički fakultet
Vojvode Putnika 43
tel 533-264 (m.č.)
(071)

Beograd , 1984. godine

U V O D

Rad "Nestandardna analiza u teoriji modela, topologiji i teoriji mere" se sastoji iz četiri dela .

U uvodnoj , nultoj glavi se definiše nestandardni univerzum. Posmatraju se proizvoljni Δ_0 elementarno ekvivalentni modeli standardne nadstrukture Nad/S/ i konstruišu α-zasićeni i polizasićeni modeli i to na način koji , po svom stilu , nije uobičajen . Naime , definišu se pojmovi b-formula i b-tipova, a zatim uvodi pojam α-ograničeno zasićenog univerzuma kao modela koji realizira sve dopustive b-tipove na jeziku obogaćenom sa manje od α simbola konstanti . Polizasićen model je sada onaj koji je α-zasićen za neki $\alpha > |Nad/S/|$.

U prvoj ~~drugoj~~ glavi se nestandardna analiza primenjuje u teoriju modela . Osnovu za to čine radovi Cherlina i Hirschfelda ([Ch]) i Hensona([He]) iz kojih potiču teoreme 1.1.2. , 1.1.3. , 1.1.5. i 1.1.9. .Eventualna prednost nestandardnih metoda nad klasičnim je u tome da sada možemo posmatrati niz formula hiperkonačne dužine (odnosno koristiti neki drugi ekvivalent zasićenosti) što je i korišteno u ostalim teoremama ove glave . Opšti zaključak bi možda bio da se ~~je~~ , za zadani model U , $^*U$ ponaša kao njegov dovoljno dobar ultrastepen ili kao njegov "idealni pratilac" u smislu da je $^*U$ elementarno raširenje od U i da $^*U$ realizuje dosta tipova nad $^*U$ (teorema 1.1.1.) . Na kraju ove glave je dato nekoliko primera u kojima je pokazano kako se teoreme , koje se inače mogu dokazati teoremom kompaktnosti , mogu efikasno dokazati kroz nestandardnu analizu argumentom da se svaki standardni skup sadrži u nekom hiperkonačnom .

U drugoj glavi se posmatraju kompaktifikacije topoloških

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

prostorâ . Stroyan ([St]) je pokazao da se Wallmanova kompaktifikacija topološkog prostora X može dobiti kao faktor-prostor ${}^*X/r$ za neku relaciju ekvivalencije r u ${}^*X$ i za određenu topologiju u ${}^*X$. Robinson ([Ro]) i Hirschfeld ([Hi]) su posmatrali kompaktifikacije grupâ i prstenovâ . U ovoj glavi dokazujemo da se svaka T_2 kompaktifikacija može dobiti kao ${}^*X/r$. Kratko se diskutira pitanje: za koje je relacije ekvivalencije r faktor-prostor ${}^*X/r$ kompaktifikacija od X ? U vidu primera se daju nestandardni dokazi teoremâ Banach-Alaoglua , Alexandera i drugih .

Treća glava je posvećena proizvodima unutrašnjih prostora sa $*$ - konačno aditivnom merom . Posle izlaganja poznatih rezultata o konačnim proizvodima prostora , posmatraju se beskonačni proizvodi . Dokazuje se da nula-jedan zakon važi i u nekoj široj σ algebri nego što je algebra posmatrana u klasičnom slučaju te teoreme .

Na kraju bih se najsrdačnije zahvalio Radetu T. Živaljeviću na vrlo korisnim savetima i uputama prilikom pisanja ovog rada kao i prof. H.I.Milleru na nesebičnoj podršci .

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

GLAVA 0

0.1. Nadstrukture

Neka je S bilo kakav skup čije ćemo elemente nazivati praelementima ili atomima, jer ćemo pretpostaviti da nemaju elemenata tj. smatraćemo da relacija pripadanja između elemenata skupa S i njihovih elemenata nije definisana.

Nadstruktura ili superstruktura nad S , u oznaci Nad/S/, se definiše ovako :

za $n \in N$ definišimo $S_o = S$, $S_{n+1} = S_n \cup P/S_n/$ (P/X/-partitivni skup skupa X) i na kraju

$$Nad/S/ = \bigcup_{n \in N} S_n \quad .$$

Nad/S/ se može smatrati modelom jezika $L = \{\in, a : a \in Nad/S/\}$, gde je $\in$ binarna relacija koja se u Nad/S/ interpretira kao obična relacija pripadanja i a konstantni simboli interpretirani u Nad/S/ kao a , pa se ponekad naziva standardnim modelom . Ako se za S uzimaju različite matematičke strukture, recimo skup realnih brojeva , topološki prostor , prostor sa merom i slično , tada je jasno da Nad/S/ sadrži skoro sve što se običnim operacijama teorije skupova može izgraditi počevši od S . To znači da ako su $x,y \in Nad/S/$ tada je i $\{x,y\} \in Nad/S/$, $(x,y) \in Nad/S/$, $\bigcup_{e \in x} e \in Nad/S/$, $x \times y \in Nad/S/$ itd...

Formule jezika L sa ograničenim kvantifikatorima tj. formule u kojima se kvantifikatori pojavljuju u obliku $(Qx \in y)$ nazivamo Δ_o formulama .

Naš je zadatak da posmatramo proizvoljne modele Δ_o elementarno ekvivalentne nadstrukturi Nad/S/ , koje ćemo zvati <u>nestandardnim</u> modelima ukoliko ovi nisu izomorfni sa Nad/S/. Dakle neka je

$$U \overset{\Delta_o}{\equiv} Nad/S/ \qquad . \quad . \quad . \qquad /1/$$

Interpretaciju simbola $\in$ u U označimo sa $\in_u$, a interpretaciju konstante a u U označimo sa ${}^{i}a$. Uočimo podmodel V od U definisan ovako :

$$V = \{x \in U \ : \ (\exists n \in N)\ x \in_u {}^{i}S_n\} \ .$$

Skup svih interpretacija konstanti iz L označimo sa IC tj.

$$IC = \{{}^{i}a \ : \ a \in Nad/S/\} \ .$$

Vidi se da je $IC \subseteq V$, jer za ${}^{i}a \in IC$ vredi $Nad/S/ \models$ $\models a \in S_n$, pa zbog /1/ ${}^{i}a \in_u {}^{i}S_n$ tj. ${}^{i}a \in V$, tako da je V zaista podmodel od U .

<u>Lema o.l.l.</u> V je tranzitivni model tj. $x \in_u c \in V$ povlači $x \in V$.

<u>Dokaz</u>: $c \in V$ povlači $c \in_u {}^{i}S_n$ za neko $n \in N$. Sada $x \in_u c$ i $c \in_u {}^{i}S_n$ pa $x \in_u {}^{i}S_n$, jer je S_n tranzitivan i vredi /1/ , dakle $x \in V$. $\dashv$

<u>Teorema o.l.l.</u> Interpretacija $i : Nad/S/ \longrightarrow V$ je Δ_o elementarno ulaganje a V je Δ_o elementarni podmodel od U. Drugim rečima

$$IC \prec_{\Delta_o} V \prec_{\Delta_o} U \ .$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

<u>Dokaz</u> : Dokažimo $V \prec_{\Delta_0} \overset{*}{U}$ tj. ako je $p(x_1,\dots,x_n)$ Δ_0 formula i $c_1,\dots,c_n \in V$, tada je

$$V \models p(c_1,\dots,c_n), \quad \text{ako i samo ako} \quad U \models p(c_1,\dots,c_n) \qquad \dots /2/$$

To ćemo dokazati indukcijom po složenosti Δ_0 formula . Jedini netrivijalni korak je da ako /2/ vredi za formulu p tada važi i za $(\forall x \in c)p$ i $(\exists x \in c)p$ gde je c konstanta - - element od V .

Ako $V \models (\forall x \in c)p(x,c_1,\dots,c_n)$ tada je za bilo koji $x \in V$ $x \in_u c \ \& \ p(x,c_1,\dots,c_n)$ ispunjeno u V pa je zbog induktivne hipoteze i leme o.l.l. $U \models (\forall x \in c)p(x,c_1,\dots,c_n)$. Obrat kao i slučaj za formulu $(\exists x \in c)p$ dobijamo analogno.

Na kraju je $IC \prec_{\Delta_0} U$ zbog /1/ što zajedno sa $V \prec_{\Delta_0} U$ daje $IC \prec_{\Delta_0} V$. $\dashv$

Nestandardni model U , za čije ćemo se postojanje uveriti u narednom poglavlju , već može biti upotrebljen za razvijanje osnovnih pojmova i stavova nestandardne analize . Međutim , na neki način , "veštačku" relaciju pripadanja $\in_u$ želimo zameniti "pravom" relacijom pripadanja $\in$ i uobičajeni način za to je primena kolapsa Mostovskog na dotični univerzum . Za to nam je , opet , potrebno da $\in_u$ bude dobro uređenje /well-founded/ na U .

---
*
Ova tvrdnja je , u stvari , poznata činjenica iz teorije skupova da su Δ_0 formule apsolutne za tranzitivne modele.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Definicija o.1.1. Binarna relacija r na skupu A je dobro uređenje /well-founded/ ako svaki $X \subseteq A$ ima r minimalni element tj. element $m \in X$ za koji je $(\forall x \in X) \neg xrm$.

Jedan model elementarno ekvivalentan standardnom modelu $Nad/S/$ može se dobiti pomoću ultrastepena.

Definicija o.1.2. Ultrafilter D na skupu indeksa I ćemo zvati w_1 kompletnim, ako je prebrojiv presek elemenata iz D ponovo element iz D. U suprotnom ultrafilter D zovemo w_1 nekompletnim ultrafilterom .

Teorema o.1.2. Relacija $\in_u$ je dobro uređenje u ultrastepenu $\prod_D Nad/S/ = U$ ako i samo ako je D w_1 kompletan ultrafilter.

Dokaz: Ako je D w_1 nekompletan ultrafilter onda postoji niz $\{A_n : n \in N\}$ elemenata iz D koji je opadajući u odnosu na inkluziju i čiji je presek prazan skup. Zaista, postoji opadajući niz $\{A_n' : n \in N\}$ elemenata iz D sa $\bigcap_{n \in N} A_n' = P \notin D$. Tada za A_n uzmimo $P^c \cap A_n'$.

Možemo pretpostaviti da je $A_1 = I$. Posmatrajmo skupove $I_k = A_k \setminus A_{k+1}$ $(k \in N)$, za koje vredi

$$I = \bigcup_{k \in N} I_k \quad , \quad I_i \cap I_j = \emptyset \quad /i \neq j/ \qquad \ldots /3/$$

Definišimo niz $\{f_n : n \in N\}$ elemenata ultraproizvoda $\prod_D Nad/S/$ pomoću tablice (gde su prirodni brojevi shvaćeni preko teorijsko skupovne definicije)

$$\begin{array}{lcccccccccc}
 & I_1 & I_2 & I_3 & \ldots & I_k & \ldots & I_n & \ldots & \\
f_1 & (1, & 2, & 3 & ,\ldots, & k, & \ldots & ,n, & \ldots) & \\
f_2 & (1, & 1, & 2 & ,\ldots, & k-1, & \ldots, & n-1, & \ldots) & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \\
f_k & (1, & 1, & 1 & ,\ldots, & 1, & \ldots, & n-k, & \ldots) & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & & .
\end{array}$$

Tj. $f_k(i) = 1$ za $1 \leqslant i \leqslant k$, $f_k(i) = i-k$ za $i > k$.
Vidi se da ako je $m < n$ tada je $\{i \in I : f_m(i) \in f_n(i)\} = = \bigcup_{k \geqslant m} I_k$ tj. $f_m \in_D f_n$. Takođe se vidi da je $f_m \neq_D f_n$ za $m \neq n$. Tako imamo $f_1 \, {}_D\!\ni f_2 \, {}_D\!\ni \ldots {}_D\!\ni f_n \, {}_D\!\ni \ldots$ pa U nije dobro uređen.

Obratno, ako je D w_1 kompletan tada vredi Losova teorema za jezik L_{w_1}. Tako je

$\prod_D Nad/S/ \models (\exists x_1, x_2, \ldots)(x_2 \in x_1 \;\&\; x_3 \in x_2 \;\&\; \ldots)$ ako i samo ako je $Nad/S/ \models (\exists x_1, x_2, \ldots)(x_2 \in x_1 \;\&\; x_3 \in x_2 \;\&\; \ldots)$ što je nemoguće, pa je U dobro uređen. $\dashv$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Definicija o.1.3. Za $x \in Nad/S/$ $(x \in V)$ definišimo rang od x kao $ran(x) = MIN\{n \in N : x \in S_n\}$ $\left(ran(x) = MIN\{n \in N : x \in_u {}^iS_n\}\right)$.

Jasno da ako je $x \in y$ tada je $ran(x) < ran(y)$. Zaista, $ran(y) = n$ povlači $x \in y \subseteq S_{n-1}$, pa je $ran(x) \leqslant n-1$. Zbog elementarne ekvivalentnosti isto važi i u modelu V.

Nedostatak koji ima U otklanja podmodel V.

Teorema o.1.3. Ako je U bilo kakav model elementarno ekvivalentan modelu $Nad/S/$ tada je $\in_u$ dobro uređenje na V.

Dokaz : Ako su $x,y \in V$ i $x \in_u y$ tada je prema prethodnom $ran(x) < ran(y)$, pa ne možemo imati beskonačan opadajući niz elemenata iz V. $\dashv$

Sada ćemo primeniti kolaps Mostovskog na model V. Preciznije rečeno konstruisaćemo funkciju $k : V \longrightarrow Nad/R_o/$, gde je $R_o = \{x \in V : x \in_u {}^iS\}$ skup svih elemenata iz V nultog ranga, definisana induktivno po relaciji $\in_u$.

Dakle, ako je $x \in V$ nultog ranga, tj. minimalni element u relaciji $\in_u$ u modelu V, tada definišimo $k(x) = x$.

Ako smo definisali k za sve $x \in_u y \in V$ tada definišimo

$$k(y) = \{k(x) : x \in_u y\} .$$

Skup $k(V) = \{k(x) : x \in V\}$ se može pretvoriti u model jezika L interpretirajući relaciju $\in$ kao običnu relaciju pripadanja i simbol a kao $k({}^{i}a)$.

<u>Lema o.1.2.</u> /i/ k je 1-1 ,

/ii/ $x \in_u y$ ako i samo ako $k(x) \in k(y)$,

/iii/ $\mathrm{ran}(x) = \mathrm{ran}(k(x))$,

/iv/ $k(V)$ je tranzitivni podskup od $Nad/R_o/$.

<u>Dokaz</u> :/i/ Neka k nije 1-1 . Uzmimo da je x_o minimalan u skupu $\{x \in V : (\exists y \in V)\ x \neq y\ \&\ k(x) = k(y)\}$. Fiksirajmo y iz tog skupa različit od x_o . Kako je $x_o \neq y$ i kako u Nad/S/, pa i u V , vredi aksioma ekstenzije (jer je to Δ_o svojstvo) po kojoj je skup određen svojim elementima , to ili postoji $z \in_u x_o$ i $z \notin_u$ $\notin_u y$, ili postoji $z \notin_u x_o$ i $z \in_u y$. U prvom slučaju $k(z) \in$ $\in k(x_o)$, po definiciji kolapsa , pa $k(z) \in k(y)$ tj. $k(z) = k(t)$ za neki $t \in_u y$. Ne može biti $z = t$ jer $z \notin_u y$, odakle z narušava minimalnost elementa x_o .

U drugom slučaju je $k(z) \in k(y)$. Međutim $k(z) \notin k(x_o)$, jer bi u suprotnom bilo $k(z) = k(t)$ za neko $t \in_u x_o$ i $z \neq t$ što bi opet , narušilo minimalnost elementa x_o . Odavde sledi $k(x_o) = k(y)$ što je kontradikcija .

/ii/ $x \in_u y$ povlači $k(x) \in k(y)$ po definiciji kolapsa . Ako je $k(x) \in k(y)$ tada je $k(x) = k(t)$ za neko $t \in_u y$ pa je po /i/ $x = t$ dakle , $x \in_u y$.

/iii/ Ako e označava jedan od simbola $\in$ ili $\in_u$ tada vredi

$$\mathrm{ran}(x) = \sup\{\mathrm{ran}(y) : y\ e\ x\} + 1 ,$$

pa tvrđenje lako dokažemo e indukcijom .

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

/iv/ Ako je $k(x) \in k(V)$ $(x \in V)$ i $z \in k(x)$ tada je $z = k(y)$ za neko $y \in_u x$ dakle $z \in k(V)$. $\dashv$

Dakle, imajući na umu prethodnu lemu vredi:

<u>Teorema o.1.4.</u> V je izomorfan tranzitivnom podmodelu superstrukture $Nad/R_o/$. $\dashv$

Moglo bi se postaviti pitanje : zašto ne kolapsirati čitav univerzum $U = \prod_D Nad/S/$, gde je D w_1 kompletan ultrafilter na I , jer je tada $\in_u$ dobro uređenje na U ? Međutim, tada imamo $Nad/S/ \models (\forall x)(x \in S_o \vee x \in S_1 \vee \dots)$, pa je i $U \models (\forall x)(x \in S_o \vee x \in S_1 \vee \dots)$, odakle je $U = V$. Osim toga ne znamo da li postoje w_1 kompletni ultrafiltri i , ako postoji takav ultrafilter , poznato je da je $Nad/S/ \cong U$ čim je $|S| < k$ gde je k prvi neprebrojivi merljiv kardinal .

Korištenje Δ_o formula i modela V , umesto čitavog univerzuma U elementarno ekvivalentnog sa Nad/S/ i svih formula jezika **L** , bitno ne umanjuje našu moć izražavanja jer želimo govoriti samo o elementima nadstrukture Nad/S/ . Šta više biće korisno u daljnjem posmatrati jedan malo uži skup Δ_o formula nazvanih <u>ograničene</u> ili <u>b-formule</u> .

<u>Definicija o.1.3.</u> Δ_o formula $p(\vec{x})$ je <u>ograničena</u> ili <u>b-formula</u> ako za neki $n \in N$ važi

$$V \models p(\vec{x}) \rightarrow \vec{x} \in S_n \quad .$$

Najvažniji i najjednostavniji tip ograničenih formula je kada se kvantifikator $Q \in \{\forall, \exists\}$ u formuli pojavljuje u obliku $(Qx \in c)$, gde je c konstanta , i gde su slobodne promenljive , recimo y , ograničene na konstante tj. y se pojavljuje u obliku $y \in c$ ili $y = c$, c konstanta .

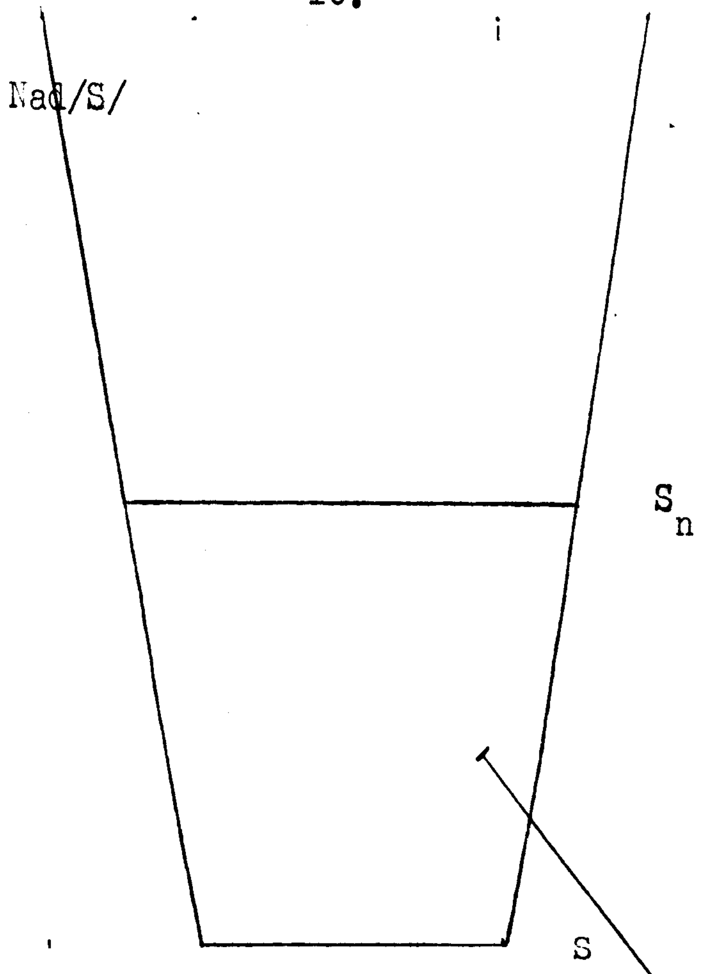
Sada možemo dati definicije preslikavanja $*$ i osnovnih pojmova nestandardne analize . Podsetimo se da je $i : Nad/S/ \longrightarrow \dot{V}$ interpretaciono preslikavanje koje svakom $a \in Nad/S/$ dodeljuje njegovu inetrpretaciju ${}^{i}a \in V$.

<u>Definicija o.1.4.</u> $*$ je kompozicija preslikavanja i i kolapsa k :

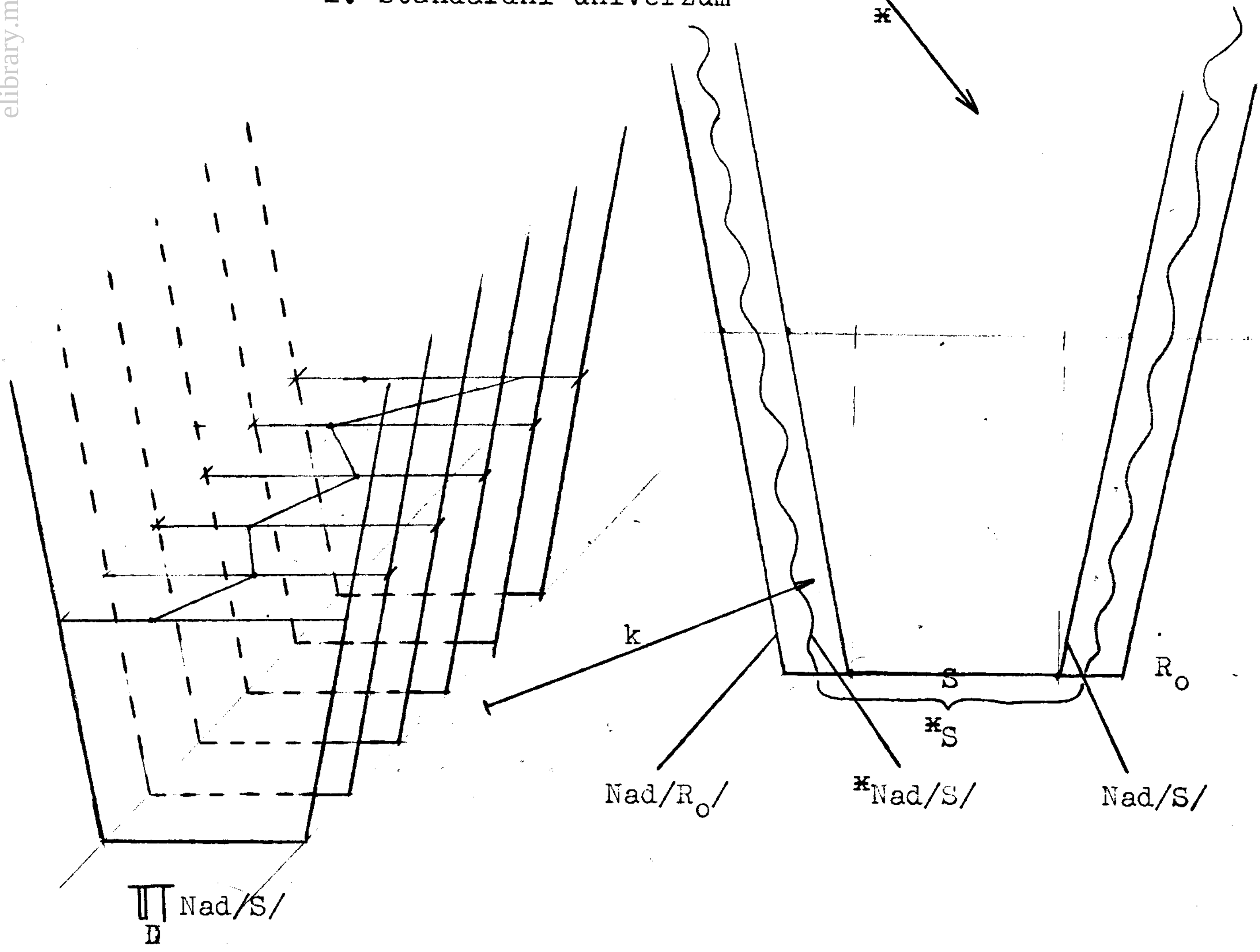
$$* = k \circ i : Nad/S/ \longrightarrow Nad/R_o/ \; .$$

Elementi prostora k(V) se nazivaju <u>unutrašnjim</u> (<u>internalnim</u>) skupovima. Unutrašnja relacija , funkcija i sl. je unutrašnji skup koji je relacija , funkcija i sl. Elementi od $Nad/R_o/$ koji nisu unutrašnji se nazivaju <u>vanjskim</u> skupovima.

Ako je $a \in Nad/S/$ tada se $*(a)$ jednostavno piše ${}^{*}a$. Za $a \in S$ ćemo smatrati da je ${}^{*}a = a$ tj. $S \subseteq {}^{*}S$. Skupovi (elementi) oblika ${}^{*}a$ $(a \in Nad/S/)$ se nazivaju <u>standardnim</u> <u>skupovima</u> (<u>elementima</u>), a unutrašnji skupovi koji se ne mogu napisati u toj formi se nazivaju <u>nestandardnim</u> <u>skupovima</u> (<u>elementima</u>) . k(V) ćemo još označavati sa ${}^{*}Nad/S/$.



1. standardni univerzum



Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Teorema o.1.5.(Princip prenosa) Svaki Δ_0 iskaz koji vredi u Nad/S/ ispunjen je i u *Nad/S/ i obratno.

Dokaz : Dokaz sledi iz teorema o.1. i o.4. $\dashv$

Posledica principa prenosa su jednakosti $^*(a\times b) = {^*a}\times{^*b}$, , $^*[f(a)] = {^*f}({^*a})$, $^*(a,b) = ({^*a}, {^*b})$, $^*\{a,b\} = \{{^*a}, {^*b}\}$ i slično , jer su odgovarajući pojmovi definabilni pomoću Δ_0 formula.

Teorema o.1.6. (Princip unutrašnjeg definisanja) Ako je a unutrašnji skup i $\mathbf{K}$ Δ_0 definabilna klasa u *Nad/S/ tj.

$$\mathbf{K} = \{ x \in {^*\mathrm{Nad}/S/} : {^*\mathrm{Nad}/S/} \models p(x) \}$$

gde je $p(x,\vec{c})$ Δ_0 formula sa <u>konstantama</u> iz *Nad/S/ , tada je

$$a \cap \mathbf{K} \quad \text{unutrašnji skup} .$$

Dokaz : Ako je $c = (c_1,\dots,c_n)$ tada , budući da je a unutrašnji skup , postoji $m \in N$ tako da $c_1,\dots,c_n,a \in S_m$. Aksioma ekstenzije vredi u Nad/S/. Tj.

$$\mathrm{Nad}/S/ \models (\forall \vec{x} \in S_m)(\forall x \in S_m)(\exists y \in S_m)(\forall z \in S_m)(z \in y \longleftrightarrow p(z,\vec{x}) \wedge z \in x)$$

Gornji iskaz je Δ_0 pa prema principu prenosa vredi i u *Nad/S/ tj.

$$^*\mathrm{Nad}/S/ \models (\forall \vec{x}\ {^*S_m})(\forall x \in {^*S_m})(\exists y \in {^*S_m})(\forall z \in {^*S_m})(z \in y \longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow p(z,\vec{x}) \wedge z \in x) .$$

Ako umesto x uzmemo a tada je $y = \mathbf{K} \cap a$. $\dashv$

Teorema o.1.6 (Princip standardnog definisanja) Skup $a \in {}^*Nad/S/$ je standardan ako i samo ako se može predstaviti u formi

$$a = \{x \in {}^*b : {}^*Nad/S/ \models p(x,\vec{c})\}$$

gde je $p(x,\vec{c})$ Δ_0 formula sa konstantama iz $Nad/S/$.

Dokaz : Akoje $a = {}^*e$ standardan skup tada je $a = \{x \in {}^*e : x=x\}$

Obratno ako su $c_1,\ldots,c_n,b \in S_m$ tada formirajmo skup e kao $e = \{x \in b : Nad/S/ \models p(x,\vec{c})\} \in S_m$. Sada imamo

$$Nad/S/ \models (\forall x \in S_m)(x \in e \longleftrightarrow x \in b \,\&\, p(x,\vec{c})) .$$

Gornji iskaz je Δ_0 pa prema principu prenosa vredi i u ${}^*Nad/S/$ tj. ${}^*e = a$ jer je $a \subseteq {}^*b \subseteq {}^*S_m$. $\dashv$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

0.2. $\mathcal{L}$-zasićeni i polizasićeni modeli

Do sada još nismo pokazali da novi model $^*Nad/S/$ nije izomorfan sa polaznim $Nad/S/$. Međutim, konstruisaćemo takav nestandardni univerzum $^*Nad/S/$ koji će imati mnogo jača svojstva nego što je obična neizomorfnost sa polaznim modelom. Ta su svojstva posedovanje mnogo idealnih elemenata i biće glavna prednost nestandardnog univerzuma nad starim.

Definicija o.2.1. Definišimo b-tip kao bilo koji skup $P(x)$ b-formula sa ne više od jedne slobodne promenljive x .

Pojam b-tipa je dakle , uobičajeni pojam iz teorije modela samo sužen na ograničene formule. Ostali pojmovi vezani za tipove se uvode na očekivani način .

Definicija o.2.2. Neka je M model jezika L i $X \subseteq M$ $(|X| < \alpha)$. Obogaćenje modela M do jezika $L_X = L \cup \{c_x : x \in X\}$, gde su c_x $(x \in X)$ novi konstantni simboli , je model M u kome se konstante c_x $(x \in X)$ interpretiraju kao x . b-tip $P(x)$ na obogaćenom jeziku L_X se lokalno realizuje u obogaćenom modelu M ako se svaki konačan podskup od $P(x)$ realizuje u M tj. ako za svaki konačan podskup $\{p_1(x), \dots, p_n(x)\}$ od $P(x)$ postoji $a \in M$ tako da je $M \models p_1(a) \& \dots \& p_n(a)$.

Tip se realizuje ako postoji $b \in M$ tako da je $M \models p(a)$ za svako $p(x) \in P(x)$. Na kraju model M jezika $\mathbf{L}$ je α-ograničeno zasićen , za zadani kardinal α , ako se za svaki $X \subseteq M$ i svaki b-tip na $\mathbf{L}_X$, koji se lokalno realizuje u M , realizuje u M , čim je $|X| < \alpha$.

Cilj ovog paragrafa je da se konstruiše α-ograničeno zasićen model *Nad/S/ za određene kardinale α . Pre nego što krenemo na samu konstrukciju daćemo nekoliko ekvivalentnih definicija tog pojma.

$*$ - konačan skup A je unutrašnji skup za koji postoji unutrašnja bijekcija $f : \{1,\dots,H\} \longrightarrow A$ gde je $H \in {}^*N$, $N = \{1,2,\dots\} \subseteq S$. Binarna relacija r je usmerena na svom području definisanosti domA ako za svaki konačan skup $\{a_1,\dots,a_n\} \subseteq$ $\subseteq$ domA postoji takvo b tako da je $(b,a_i) \in r$ za svako $i = 1,\dots,n$. Familija skupova je centrirana ako svaki konačan podskup te familije ima neprazan presek .

Teorema o.2.1. Sledeće tvrdnje su ekvivalentne :

/i/ *Nad/S/ je ograničeno α-zasićen ;

/ii/ za svaku unutrašnju usmerenu relaciju r sa $|\mathrm{dom}r| < \alpha$ postoji unutrašnji objekt b tako da je za svaki $a \in \mathrm{dom}r$ $(b,a) \in r$;

/iii/ Ako je $\mathbf{F}$ centrirana familija unutrašnjih skupova moći manje od α tada je $\bigcap_{A \in F} A \neq \emptyset$.

Svaki od gornjih uslova povlači sledeća dva :

/iv/ Ako je $A \subset {}^*X$ ne obavezno unutrašnji skup sa $|A| < \alpha$ i $f : A \longrightarrow B$ bilo koja funkcija , gde je B unutrašnji skup , tada postoji unutrašnje produženje od f tj. unutrašnja funkcija $\bar{f} : C \longrightarrow B$ $(C \supset A)$ tako da je $\bar{f}|_A = f$;

/v/ ako je $A \subset {}^*X$ i $|A| < \alpha$ tada postoji $*$ - konačan K tako da je $A \subset K \subset {}^*X$.

<u>Dokaz</u> : /i/ $\longrightarrow$ /ii/ Dodajmo jeziku $\mathbf{L}$ skup C konstanti koje će predstavljati elemente iz domr i konstantu c_r za relaciju r . Tip

$$P(x) = \{(x,c_1) \in c_r \&\ldots\&(x,c_n) \in c_r \ : \ c_1,\ldots,c_n \in C\}$$

se sastoji od b-formula (na primer $(x,c) \in r$ je isto što i $(\exists y \in S_n) y = (x,c)$ tj. $(\exists y \in S_n)(\exists s,t \in S_n)(\{x\} = s \ \& \ \{x,y\} = t \ \& \ \& \ y = \{s,t\})$, a formule u zagradama su očigledno b-formule) i lokalno se realizuje u obogaćenju $({}^*Nad/S/,a)_{a \in domr}$, pa se i realizuje u $({}^*Nad/S/,a)_{a \in domr}$.

/i/ $\longrightarrow$ /iii/ Ako je F centrirana familija unutrašnjih skupova i $|F| < \alpha$ tada se , uvodeći konstante za svaki njen element , tip $\{x \in A : A \in F\}$ lokalno realizuje u ${}^*Nad/S/$.

/iii/ $\longrightarrow$ /i/ Ako je p(x) b-formula tada vredi ${}^*Nad/S/ \models p(x) \leftrightarrow p(x) \& x \in S_n$ za neko $n \in N$. Tako ako imamo b-tip P(x) na jeziku $\mathbf{L}_X$ $(|X| < \alpha)$ tada je

$$F = \{\{x \in {}^*Nad/S/ \ : \ {}^*Nad/S/ \models p(x)\} \ : \ p(x) \in P(x)\}$$

centrirana familija unutrašnjih skupova , čiji je presek neprazan pa se P(x) realizuje .

/ii/ $\longrightarrow$ /iii/ Relacija r definisana sa $(x,A) \in r$ ako i samo ako $x \in A$ je usmerena na familiji F , budući da je

/iii/ $\longrightarrow$ /iv/ Za konačan $\{a_1,\dots,a_n\} \subseteq A$ posmatrajmo skup $\{h$: h je unutrašnja funkcija , $\{a_1,\dots,a_n\} \subset \mathrm{dom}h \subset {}^*X$, $\mathrm{rang}(h) \subseteq B$, $h|_{\{a_1,\dots,a_n\}} = f\}$.

Familija svih takvih skupova za sve konačne $\{a_1,\dots,a_n\} \subseteq A$ ima moć $< \alpha$ i centrirana je . U preseku tih skupova se nalazi traženo produženje $\bar{f}$.

/iii/ $\longrightarrow$ /v/ Za konačan $\{a_1,\dots,a_n\} \subseteq A$ posmatrajmo skup $\{a \subseteq {}^*X$: a-* konačan , $a \supseteq \{a_1,\dots,a_n\}\}$. Familija takvih skupova za sve konačne $\{a_1,\dots,a_n\} \subseteq A$ je centrirana i moći $< \alpha$ i u njenom preseku se nalazi traženi * - konačan skup . $\dashv$

Primedba : U /iv/ i /v/ nismo mogli odbaciti uslov $A \subseteq {}^*X$. Recimo da je $\alpha = w_0$ i $f : \{{}^*S_n : n \in N\} \longrightarrow {}^*N$ definisana sa $f({}^*S_n) = n$. Ako bi f imala unutrašnje produženje h tada bi skup $M = \{n \in {}^*N : (\forall k \leqslant n)(h^{-1}(k) \in h^{-1}(k+1))\}$ kao unutrašnji podskup od ${}^*N$ koji sadrži vanjski skup N (to sledi jednostavno iz činjenice da ${}^*N \setminus N$ nema minimalnog elementa , , dakle nije unutrašnji skup , te nije unutrašnji ni skup N) sadržao beskonačan ($\in {}^*N \setminus N$) prirodan broj H . Sada imamo $\dots \in h^{-1}(H-1) \in h^{-1}(H) \in h^{-1}(H+1)$, beskonačan opadajući niz u ${}^*Nad/S/$ što je nemoguće .

Takođe ako je K * - konačan i $K \supseteq \{{}^*S_1, {}^*S_2, \dots\}$ tada ${}^*Nad/S/ \ni \bigcup_{K' \in K} K' \supseteq {}^*Nad/S/$ što je nemoguće.

Sada ćemo pokazati da postoje α^+ ograničeno zasićeni modeli , gde je α^+ kardinal sledbenik od α , za $\alpha > |L|$.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Neka je $Th(Nad/S/)$ skup svih iskaza na jeziku $\mathbf{L}$ (ne samo Δ_0) koji su tačni u Nad/S/. Pokazaćemo da postoje modeli od $Th(Nad/S/)$ koji zadovoljavaju jači uslov nego traženi ; oni su α^+ zasićeni u uobičajnom smislu reči tj. tipovi nisu ograničeni na b-formule. Od njih ćemo na poznati način doći do traženog modela.

<u>Definicija o.2.3.</u> Ultrafilter D na I se naziva α-regularnim , za zadani kardinal α , ako postoji $E \subseteq D$, $|E| = \alpha$ i svaki element $a \in I$ se nalazi u najviše konačno elemenata od E .

Za svaki kardinal α postoji α-regularni ultrafilter. Uzmimo da je I skup svih konačnih podskupova od α . Skupovi oblika $\hat{a} = \{i \in I : a \in i\}$ su centrirani i sadrže se u nekom ultrafiltru D . Za E možemo uzeti same skupove $\hat{a}$ tj. $E = \{\hat{a} : a \in \alpha\}$. Sada je $i \in \hat{a}_1 \cap \ldots \cap \hat{a}_n$ ekvivalentno sa $a_1, \ldots, a_n \in i$ pa je D zaista α-regularan .

<u>Lema o.2.1.</u> Neka je U model jezika $\mathbf{L}$ i $\alpha > |\mathbf{L}|$. Tada postoji elementarno raširenje W od U koje ima svojstvo da ako je $X \subseteq U$, $|X| \leqslant \alpha$ i $P(x)$ tip na jeziku $\mathbf{L}_X$ koji se lokalno realizuje u $(U,a)_{a\in X}$, tada se on realizuje u $(W,a)_{a \in X}$.

<u>Dokaz</u> : Neka su $I_1, I_2, \ldots, I_k, \ldots$ $(k < \alpha)$ elementi α-regularnog ultrafiltra D na I koji imaju svojstvo da je svaki $i \in I$ u najviše konačno njih . Pokazaćemo da je $W =$

$= \prod_D U$, ultrastepen od U po D , traženi model.

Neka je $X \subset U$, $|X| \leqslant \alpha$ i $P(x)$ tip na jeziku L_X koji se lokalno realizuje u $(U,a)_{a \in X}$. Kako je $|L_X| \leqslant \alpha$ možemo pretpostaviti da je $|P(x)| = \alpha$. Tako imamo $P(x) = \{p_1(x) , \dots \dots , p_k(x) , \dots \}$ $(k < \alpha)$. Za $i \in I$ neka su $I_{i_1}, \dots, I_{i_n}$ tačno oni skupovi kojima i pripada . Dakle , formula $p(x) = (\exists x)(p_{i_1}(x) \ \& \dots \& \ p_{i_n}(x))$ je tačna u $(U,a)_{a \in X}$ pa uzmimo $f(i) \in U$ za koje ona vredi , tako da imamo

$$(U,a)_{a \in X} \models p_{i_1}(f(i)) \ \& \dots \& \ p_{i_n}(f(i)) \ .$$

Dobili smo funkciju $f : I \longrightarrow U$ za koju ćemo pokazati da je

$$(\prod_D U , a)_{a \in X} \models p_k(Df)$$

za bilo koji $1 \leqslant k < \alpha$.

Jasno , $(U,a)_{a \in X} \models p_k(f(i))$ za svaki $i \in I_k$ pa je gornje ispunjeno . Df je element koji zadovoljava $P(x)$. $\dashv$

<u>Teorema o.2.2.</u> Neka je U model jezika L i $\alpha \geqslant |L|$. Postoji α^+ zasićeno elementarno raširenje W modela U .

<u>Dokaz</u> : Za svaki ordinal k , $1 \leqslant k < \alpha^+$ konstruišimo niz modela $U_1 , \dots , U_k , \dots$ na sledeći način : U_1 neka je elementarno raširenje od U iz leme o.2.1. ; ako smo konstruisali U_s za $s < k$ tada , ako je k granični ordinal , stavimo $U_k = \bigcup_{s<k} U_s$, a ako je $k = k'+1$ neka je U_k elementarno raširenje $U_{k'}$ iz leme o.2.1. kada se namesto U posmatra $U_{k'}$. Na kraju stavimo $U_{\alpha^+} = \bigcup_{s<\alpha^+} U_s$. Ako je $X \subseteq U$ i $|X| < \alpha^+$ tada je $X \subseteq U_k$ za neko $k \leqslant \alpha$. Tako se tip koji se

lokalno realizuje u $(U,a)_{a\in X}$, lokalno realizuje i u $(U_k,a)_{a\in X}$ pa se realizuje u $(U_{k+1},a)_{a\in X}$ tj. u $(U_{\alpha^+},a)_{a\in X}$. Primetimo da je bez posebne napomene korištena lema o elementarnom lancu modela. $\dashv$

<u>Definicija o.2.4.</u> Model $^*Nad/S/$ se naziva <u>polizasićenim</u> ako je α- ograničeno zasićen za neki za neki $\alpha > |Nad/S/|$.

<u>Teorema o.2.3.</u> Postoji polizasićen model.

<u>Dokaz</u> : Po teoremi o.2.2. za $\alpha \geqslant |L| = |Nad/S/|$ postoji α^+ zasićeno elementarno raširenje U od Nad/S/. Od modela U možemo doći, kao što je opisano u o.1., do $^*Nad/S/$ koji je α^+ - ograničeno zasićen. Zaista, ako je $X \subseteq {}^*Nad/S/$ $|X| \leqslant \alpha$ i $P(x)$ b-tip na jeziku L_X koji se lokalno realizuje u $({}^*Nad/S/,a)_{a\in X}$, tada se on realizuje u U, zbog $V \prec_{\Delta_0} \prec_{\Delta_0} U$. Ako je $b \in U$ onaj koji zadovoljava $P(x)$ tada mora biti $b \in V$, jer su elementi tipa b-formule. Opet, zbog $V \prec_{\Delta_0} \prec_{\Delta_0} U$ u $^*Nad/S/$ se realizuje $P(x)$. $\dashv$

G L A V A I

1. Nestandardna analiza u teoriji modela

Iako smo metode teorije modela koristili u konstruisanju našeg modela *Nad/S/ moguće je sada primeniti nestandardnu analizu nazad u teoriju modela. Precizno opisana konstrukcija nestandardnog univerzuma u poglavlju O , u kojoj smo koristili samo određena svojstva ultraproizvoda i elementarnih lanaca , omogućuje nam izbegavanje pojavljivanja mrtvog kruga tj. dokazivanja neke činjenice pomoću nje same.

Dakle , neka je $\mathbf{L}$ neki jezik za koji ćemo pretpostaviti da je podskup od S . Takođe, ako govorimo o nekom modelu ili skupu modela jezika $\mathbf{L}$ uvek možemo pretpostaviti da su oni podskupovi od S . Ako je U model jezika $\mathbf{L}$ tada je *U model jezika $^*\mathbf{L}$, pa se i *U može smatrati modelom početnog jezika, jer je $\mathbf{L} \subset {}^*\mathbf{L}$. Na analogan način unutrašnji model jezika $^*\mathbf{L}$, tj. unutrašnji skup sa unutrašnjim relacijama i funkcijama kao unutrašnjim interpretacijama simbola iz $^*\mathbf{L}$, se može smatrati modelom jezika $\mathbf{L}$.

Skup formula i iskaza na jeziku $\mathbf{L}$ označimo respektivno sa Form($\mathbf{L}$) i Sen($\mathbf{L}$) . Oni se po potrebi takođe mogu smatrati podskupovima od S . Relacija zadovoljenja $\models$ je relacija između modela U , njegovih konačnih podskupova i elemenata skupa Form($\mathbf{L}$) pa je element od Nad/S/ . Tako možemo posmatrati $^*\models$.

<u>Lema 1.1.1.</u> Ako je M unutrašnji model jezika $\mathbb{L}$ i $p(x_1,\dots,x_n)\in Form(\mathbb{L})$, tada je za svaki niz $a_1,\dots,a_n\in M$

$$M \models p(a_1,\dots,a_n) \text{ ako i samo ako } {}^*M \;{}^*\!\models {}^*p(a_1,\dots,a_n) .$$

<u>Dokaz</u> : Tvrdnja se lako dokazuje indukcijom po složenosti formula , pri čemu vodimo računa o tome da su relacije i funkcije u M unutrašnje i primenjujući princip prenosa. $\dashv$

Budući da naš nestandardni univerzum ${}^*Nad/S/$ obiluje idealnim elementima to je prirodno očekivati da će primena nestandardne analize u teoriji modela biti baš u oblastima gde se konstruišu zasićeni modeli. Sledeći teorem je prirodna posledica zasićenosti modela ${}^*Nad/S/$.

<u>Teorema 1.1.1.</u> Ako je M unutrašnji model tada je on $|Nad/S/|^+$ zasićen .

<u>Dokaz</u> : Neka je $X\subset M$, $|X|\leqslant |Nad/S/|$ i $P(x)$ tip na jeziku $\mathbb{L}_X$ koji se lokalno realizuje u $(M,a)_{a\in X}$. Neka je $p(x,a_1,\dots,a_n)\in P(x)$. Uočimo skup

$$A_p = \{x\in M : M \models p(x,a_1,\dots,a_n)\} .$$

Na osnovu leme 1.1.1. imamo da je $A_p = \{x\in M : M \;{}^*\!\models {}^*p(x,a_1,\dots,a_n)\}$,pa je A_p unutrašnji podskup od M . Tako imamo centriranu familiju $\{A_p : p\in P(x)\}$ unutrašnjih skupova , moći manje ili jednake $|Nad/S/|$, koja ima neprazan presek . Element tog preseka realizuje $P(x)$. $\dashv$

Tako za svaki model U imamo njegovog idealnog pratioca ${}^*U$ u smislu da on sadrži sve idealne elemente koje U dopušta. Pri tome je ${}^*U$ elememtarno raširenje.

<u>Teorema 1.1.2.</u> ${}^*U$ je elementarno raširenje od U $({}^*U \succ U)$ tj. $* : U \longrightarrow {}^*U$ je elementarno ulaganje.

<u>Dokaz</u> : Prema lemi 1.1.1. je , za $a_1,\dots,a_n \in U$ i $p(x_1,\dots,x_n) \in$ $\in \mathrm{Form}(L)$, ${}^*U \models p(a_1,\dots,a_n)$ ekvivalentno sa ${}^*U \;{}^*\!\models {}^*p(a_1,\dots,a_n)$ što je, prema principu prenosa, ispunjeno onda i samo onda kada je $U \models p(a_1,\dots,a_n)$. $\dashv$

Pre nego što krenemo na izučavanje ultraproizvoda uvedimo nekoliko osnovnih pojmova vezanih za filtre .

Ako je I indeksni skup i D filter na I tada pod <u>monadom</u> mD filtra D podrazumevamo skup

$$\bigcap_{X\in D} {}^*X = mD \ .$$

Budući da je filter centrirana familija tada je uvek $mD \neq \emptyset$ što je posledica zasićenosti. Za $a \in {}^*I$ $\mathrm{Fil}\,a$ se definiše kao

$$\mathrm{Fil}\,a = \{X \subseteq I \ : \ a \in {}^*X\} \ .$$

Vidi se da je $\mathrm{Fil}\,a$ ultrafilter i da se svaki drugi ultrafilter D može dobiti na taj način , naime $D = \mathrm{Fil}\,a$ za $a \in mD$.
Ako je D filtar na I , $\{A_i : i \in I\}$ familija skupova i $f \in \prod_{i\in I} A_i$ tada sa Df označimo klasu ekvivalencije kojoj f pripada prilikom filtriranog proizvoda $\prod_D A_i$.

Ultraproizvod $\prod_D U_i$ modela U_i $(i \in I)$ se može tretirati ovako :

: uzmimo $a \in mD$; elementu $Df \in \prod_D U_i$ pridružimo ${}^*f(a) \in U_a$.

Tako dobijemo preslikavanje $F : \prod_D U_i \longrightarrow U_a$.

<u>Teorema 1.1.3.</u> Preslikavanje $F : \prod_D U_i \longrightarrow U_a$ definisano kao $F(Df) = {}^*f(a)$ je elementarno ulaganje.

<u>Dokaz</u> : Prvo , F je dobro definisano preslikavanje jer ako su $f , g \in \prod_I U_i$ D - jednaki tj. $X = \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in D$ tada $a \in {}^*X$ pa je ${}^*f(a) = {}^*g(a)$.

Dalje , za $Df_1,\ldots,Df_n \in \prod_D U_i$ i $p(x_1,\ldots,x_n) \in Form(\mathbf{L})$ je

$\prod_D U_i \models p(Df_1,\ldots,Df_n)$ ako i samo ako $\{i \in I : U_i \models p(f_1 i,\ldots,f_n i)\}$ $\in D$ ako i samo ako ${}^*\{i \in I : U_i \models p(f_1 i,\ldots,f_n i)\} \ni a$.

Međutim , ${}^*\{i \in I : U_i \models p(f_1 i,\ldots,f_n i)\} =$

$$= \{i \in {}^*I : U_i \ {}^*\!\!\models {}^*p({}^*f_1 i,\ldots,{}^*f_n i)\}$$ pa se gornji niz ekvivalencija nastavlja sa $U_a \ {}^*\!\!\models {}^*p({}^*f_1 a,\ldots,{}^*f_n a)$ što je na osnovu leme 1.1.1. ekvivalentno sa

$$U_a \models p({}^*f_1 a,\ldots,{}^*f_n a) \quad . \dashv$$

Teoremu kompaktnosti nismo koristili u našoj konstrukciji nestandardnog univerzuma i sada nećemo pogrešiti ako je dokažemo nestandardnim metodama.

<u>Teorema 1.1.4.</u> /i/ Ako je T skup iskaza jezika $\mathbf{L}$ i U_i

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

$(i \in I)$ niz modela istog jezika tako da je za svaki $p \in T$ skup $\{i \in I : U_i \not\models p\}$ konačan , tada je ultraproizvod $\prod_D U_i$ model teorije T za bilo koji neglavni ultrafilter D na I .

/ii/ Ako je za svaki konačan podskup $\{p_1, \ldots, p_n\} \subseteq \subseteq T$ teorije T skup $\{i \in I : U_i \models p_1 \& \ldots \& p_n\}$ neprazan ,tada postoji ultrafilter D na I tako da je $\prod_D U_i$ model od T.

<u>Dokaz</u> : /i/ Napred definisano preslikavanje $F : \prod_D U_i \longrightarrow U_a$, za $a \in mD$, je elementarno . Budući da D nije glavni , zbog čega je a nestandardan , i zbog principa prenosa za svaki $p \in \in {}^*T$ je $U_a {}^*\!\models {}^*p$, tj. za svaki $p \in T$ je $U_a {}^*\!\models {}^*p$. Na osnovu leme 1.1.1. je odatle $U_a \models p$ tj. $\prod_D U_i \models p$.

/ii/ Izaberimo $*$ - konačan skup formula $\{p_1, \ldots, p_H\}$ tako da je $T \subseteq \{p_1, \ldots, p_H\} \subseteq {}^*T$. Na osnovu principa prenosa postoji $a \in {}^*I$ tako da je $U_a {}^*\!\models p_1 \& \ldots \& p_H$ odakle je na osnovu leme 1.1.1. U_a model za T . Budući da je $\prod_D U_i$ elementarno ekvivalentan sa U_a , $\prod_D U_i$ je model od T . ⊣

Teorema kompaktnosti sada sledi iz predhodne teoreme. Međutim može se dokazati i direktno kako je to učinjeno u [Ch] .

<u>Teorema kompaktnosti</u> : Ako svaki konačan podskup teorije T ima model tada i T ima model.

<u>Dokaz</u> :[Ch] Uzmimo $*$ - konačan skup iskaza K tako da je $T \subseteq \subseteq K \subseteq {}^*T$ i unutrašnji model U od K , koji postoji na osnovu principa prenosa. Tada je osiromašenje modela U do jezika L model od T . ⊣

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Sledeći primer je takođe iz [Ch] . Klasa $\mathbf{K}$ modela poseduje svojstvo ulaganja (s.u.) ako se svaka dva modela iz $\mathbf{K}$ ulažu (izomorfno , homomorfno , elementarno - respektivno) u treći . $\mathbf{K}$ poseduje jako svojstvo ulaganja (j.s.u.) ako se svaki skup modela iz $\mathbf{K}$ ulaže (izomorfno , homomorfno , elementarno - respektivno) u neki model iz $\mathbf{K}$. Sa prod$\mathbf{K}$ označimo klasu modela izomorfnih nekom ultraproizvodu elemenata iz $\mathbf{K}$.

<u>Teorema 1.1.5.</u> Ako $\mathbf{K}$ ima j.s.u. (s.u.) tada i prod$\mathbf{K}$ ima j.s.u. (s.u.) .

<u>Dokaz</u> :[Ch] Pretpostavimo da $\mathbf{K}$ ima j.s.u. . Neka nam je zadana familija podskupova $\{\{U_{a_b} : a_b \in A_b\} : b \in B\}$ klase $\mathbf{K}$ čije ultraproizvode treba da uložimo u element iz prod$\mathbf{K}$. Ultraproizvode opet, možemo smatrati elementarno uloženim u U_{s_b} za neko $s_b \in {}^*A_b$ $(b \in B)$. Kako $\mathbf{K}$ ima j.s.u. za svaki $a \in \prod_{b \in B} A_b = A$ postoji ulaganje

$$f_{a(b)} : U_{a(b)} \longrightarrow U_a$$

gde je U_a iz $\mathbf{K}$. Zbog zasićenosti postoji $s \in {}^*A$ tako da je $s(b) = s_b$ za $b \in B$, tako da imamo $*$ - ulaganja

$${}^*f_{s_b} : U_{s_b} \longrightarrow U_s$$

koja su ulaganja naših ultraproizvoda u U_s . Ostaje samo da se dokaže da su to ulaganja u ultraproizvod $\prod_{Fils} U_a$ modela U_a $(a \in A)$, koji opet zamišljamo kao dio od U_s .

Dakle , neka je ${}^*g(s_b)$ element ultraproizvoda modela $\{U_{a_b} : a_b \in A_b\}$. Definišimo $h \in \prod_{a \in A} U_a$ kao

$$h(a) = f_{a_b}(g(a(b))) \quad \text{odakle je}$$

${}^*h(s) = {}^*f_a({}^*g(s(b))) = {}^*f_{a_s}({}^*g(s_b))$ i tvrdnja je dokazana.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Drugi dio teoreme , za slučaj s.u. je specijalan slučaj kada je $|B| = 2$. ⊣

Familija podmodela V_i $(i \in I)$ modela U je lokalni sistem ako je $U = \bigcup_{i \in I} V_i$ i za svaki $i,j \in I$ postoji $k \in I$ tako da je $U_i \cup U_j \subseteq U_k$.

Teorema 1.1.6. Neka je V_i $(i \in I)$ lokalni sistem podmodela modela V . Ako se svaki V_i homomorfno (izomorfno) ulaže u model U_i tada se V homomorfno (izomorfno) ulaže u neki ultraproizvod $\prod_D U_i$. Ako su još V_i elementarni podmodeli od V i V_i $(i \in I)$ se elementarno ulažu u U_i $(i \in I)$ tada se V elementarno ulaže u neki ultraproizvod $\prod_D U_i$.

Dokaz : Imamo homomorfizam (izomorfizam)

$$f_i : V_i \longrightarrow U_i \quad (i \in I) .$$

Uzmimo V_a $(a \in {}^*I)$ tako da je ${}^*V_i \subseteq V_a$ za svaki $i \in I$, što je moguće zbog zasićenosti . Sada je $V \subseteq V_a$, pa je

$$f_a : V \longrightarrow U_a \quad \text{homomorfizam (izomorfizam)}$$

jer je V podmodel od U_a i svaki $*$ - homomorfizam(izomorfizam) je homomorfizam (izomorfizam).

Uočimo ultraproizvod $\prod_{Fila} U_i$ koji se može smatrati podmodelom od U_a . $f_a(V)$ je podskup od tako zamišljenog $\prod_{Fila} U_i$. Zaista , za $v \in V$ uočimo $g : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} U_i$ definisano kao $g(i) = f_i(v)$ $(i \in I)$. Po principu prenosa je ${}^*g(a) = f_a(v)$ tj. $f_a(v) \in \prod_{Fila} U_i$.

U drugom slučaju trebamo pokazati da je $f_a : V \longrightarrow U_a$

elementarno preslikavanje , jer $\prod_{\mathrm{Fil}\,a} U_i$ zamišljamo kao elementarni podmodel od U_a po teoremi 2.1.3. . Imamo $V \prec {}^{*}V$ i $V_a \prec {}^{*}V$, jer je $V_a \prec^{*} {}^{*}V$, pa je $V \prec V_a$. Sada je f_a elementarno jer je $*$ - elementarno preslikavanje elementarno. $\dashv$

Jednačina nad modelom U su formule oblika

$$y = w(x_1,\dots,x_n) \quad \text{ili} \quad r(x_1,\dots,x_n)$$

gde je w funkcionalni a r relacijski simbol jezika **L** i $x_1,\dots,x_n,y$ ili promenljive ili konstante iz U. U je algebarski zatvoren (egzistencijalno zatvoren) u modelu V ako je $U \subseteq V$ i svaki skup jednačina (jednačina i negacija jednačina) koji ima rešenje u V ,tj. za koji postoje elementi iz V koji kada zamene slobodne promenljive u skupu jednačina (jednačina i negacija jednačina) dobijemo formule koje vrede u V , ima rešenje i u U .

Teorema 1.1.7. U je algebarski zatvoren (egzistencijalno zatvoren) u V ako i samo ako dijagram

$$\begin{tikzcd}
{}^{*}U & \\
U \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & V \arrow[ul, "f"']
\end{tikzcd}$$

komutira za neki homomorfizam (monomorfizam) f .

Dokaz : Ako takav homomorfizam (monomorfizam)f postoji i ako je A konačan skup jednačina jednačina i njihovih negacija koji ima rešenja $b_1,\dots,b_n$ u V , tada su $f(b_1),\dots,f(b_n)$ rešenja u ${}^{*}U$. Međutim ${}^{*}U$ je elementarno raširenje od U pa , budući da je A konačan , sistem ima rešenja i u U.

Obratno neka je U algebarski (egzistencijalno) zatvoren

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

u V . Uočimo $*$ - konačne skupove K , K_1 i K_2 za koje je $U \subseteq K_1 \subseteq {}^*U$, $V \setminus U \subseteq K_2 \subseteq {}^*V \setminus {}^*U$ i $\mathbf{L} \subseteq K \subseteq {}^*\mathbf{L}$. Takođe , uočimo $*$ - konačan skup A svih jednačina jednačina i negacija jednačina sa funkcionalnim i predikatskim simbolima u K i parametrima u K_1 koji ima rešenje u K_2. Prema principu prenosa , ako je $K_2 = \{b_1,\dots,b_H\}$ $H \in {}^*N \setminus N$, postoji $*$ - konačan skup $\{a_1,\dots,a_H\} \subseteq {}^*U$ čiji su elementi rešenja sistema A u ${}^*U$.

Sada funkciju $f : V \longrightarrow {}^*U$ definišimo na sledeći način : ako je $a \in U$ definišimo $f(a) = a$; za $a \in V \setminus U$ imamo da je $a = b_i$ za neko $i \in \{1,\dots,H\}$ pa definišimo $f(a) = a_i$.

f je homomorfizam (monomorfizam) jer ako je , na primer $r \in \mathbf{L}$ relacijski simbol i $V \models r(c_1,\dots,c_k,b_{i_1},\dots,b_{i_n})$ $c_1,\dots,c_k \in U$, $i_1,\dots,i_n \in \{1,\dots,H\}$ tada je po principu prenosa i konstrukciji funkcije f

$$ {}^*U = {}^*r(c_1,\dots,c_k,f(b_{i_1}),\dots,f(b_{i_n})) $$

odakle je , po lemi 2.1.1.

$$ {}^*U \models r(c_1,\dots,c_k,f(b_{i_1}),\dots,f(b_{i_n})) \quad . $$

Analogno radimo i u slučaju funkcionalnog simbola (tj. i u slučaju negacija odgovarajućih formula) pa je f zaista homomorfizam (monomorfizam) . $\dashv$

Iz predhodne teoreme vidimo da se svako egzistencijalno proširenje modela U može dobiti kao $U(X)$ - najmanji podmodel od ${}^*U$ koji sadrži $U \cup X$, za neki $X \subseteq {}^*U$. Recimo , ako su u

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

pitanju polja tada se svako raširenje algebarski zatvorenog polja može dobiti na taj način.

Sledeća teorema je produženje predhodne u slučaju elementarnog proširenja .

<u>Teorema 1.1.8.</u> Ako je $V \succ U$ tada postoji elementarno ulaganje $f : V \longrightarrow {}^*U$ tako da je za $a \in U$ $f(a) = a$.

<u>Dokaz</u> : Postupićemo analogno dokazu teoreme 1.1.7. . Uočimo hiperkonačne skupove K , K_1 , K_2 tako da je $U \subseteq K_1 \subseteq {}^*U$, $V \setminus U \subseteq$ $\subseteq K_2 \subseteq {}^*V \setminus {}^*U$ i $\mathrm{Form}(\mathbf{L}) \subseteq K \subseteq {}^*\mathrm{Form}(\mathbf{L})$. Uočimo takođe, $*$ - konačan skup

$$A = \{p(x_1,\dots,x_r) \in K : {}^*V \; {}^*\models p(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m) \text{ za neke } * \text{ - konačne } a_1,\dots,a_n \in K_1 \text{ i } b_1,\dots,b_m \in K_2\}.$$

Neka je $F(x_1,\dots,x_H,y_1,\dots,y_J)$ konjunkcija formula iz A pri čemu je unutrašnja kardinalnost od K_1 H a od K_2 J , tj. $K_1 = \{k_1,\dots,k_H\}$ i $K_2 = \{j_1,\dots,j_J\}$ $(H,J \in {}^*N \setminus N)$. Sada je ${}^*V \; {}^*\models F(k_1,\dots,k_H,j_1,\dots,j_J)$ pa zbog ${}^*U \prec^* {}^*V$ postoje $m_1,\dots,m_J \in {}^*U$ tako da je ${}^*U \; {}^*\models F(k_1,\dots,k_H,m_1,\dots,m_J)$. Preslikavanje $f : V \longrightarrow {}^*U$ definisano sa $f(a) = a$ za $a \in U$ i $f(x) = m_i$ ako je $x = j_i$, je elementarno .

Zaista , ako je $p \in \mathrm{Form}\,\mathbf{L}$ i $V \models p(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m)$ za standardne elemente $a_1,\dots,a_n$ i $b_1,\dots,b_m$ od K_1 i K_2 respektivno , tada je ${}^*V \; {}^*\models {}^*p(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m)$ pa formula ${}^*p$ ulazi u sastav formule F tako da je

$${}^*U \models {}^*p(a_1,\dots,a_n,f\,b_1,\dots,f\,b_m) ,$$

tj. zbog leme 1.1.1.

$${}^*U \models p(a_1,\dots,a_n,f(b_1),\dots,f(b_m)) . \dashv$$

Teorema 1.1.7. ima svoj standardni analog kada se ${}^{*}U$ zameni nekim ultrastepenom od U i može se naći u [Ba] . Sledeća teorema([He],[Ch])je u istom duhu , obuhvata teoremu 1.1.8. i predstavlja nestandardnu formulaciju Frayne-ove leme.

Teorema 1.1.9. Ako su U i V elementarno ekvivalentni modeli tada se U elementarno ulaže u ${}^{*}V$.

Dokaz :([He],[Ch]) Za $p(x_1,\dots,x_n) \in \mathrm{Form}\,\mathbf{L}$ neka je $A(p,a_1,\dots,a_n)$ skup svih funkcija k iz U u V definisanih na $\{a_1,\dots,a_n\}$ i takvih da je

$$U \models p(a_1,\dots,a_n) \text{ ako i samo ako } V \models p(k(a_1),\dots,k(a_n)) .$$

Dobijena familija je centrirana i ima moć ne veću od $|\mathrm{Nad}/S/|$ pa po zasićenosti postoji funkcija

$$f : \{a_1,\dots,a_H\} \longrightarrow {}^{*}V \quad ,$$

, gde je $\{a_1,\dots,a_H\}$ - * konačan skup tako da je $U \subseteq \{a_1,\dots,a_H\} \subseteq {}^{*}U$, tako da je za svaku formulu $p(x_1,\dots,x_n) \in \mathrm{Form}\,\mathbf{L}$

$${}^{*}U \ {}^{*}\!\models {}^{*}p(b_1,\dots,b_n) \text{ ako i samo ako } {}^{*}V \ {}^{*}\!\models {}^{*}p(f(b_1),\dots,f(b_n)) ,$$

, za bilo koje $b_1,\dots,b_n \in \{a_1,\dots,a_H\}$.

f tako inducira elementarno ulaganje U u ${}^{*}V$. $\dashv$

Iz dokaza predhodne teoreme se može izvesti

Frayneova lema Ako su modeli U i V elementarno ekvivalentni tada se U elementarno ulaže u neki ultrastepen modela V .

Dokaz :[Ch] Sačuvavši oznake iz dokaza teoreme 1.1.9. neka je indeksni skup I jednak uniji svih skupova oblika $A(p,a_1,\dots,a_n)$. U I posmatramo ultrafilter $\mathrm{Fil}(f)$. Element $a \in U$ se pri ele-

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

mentarnom ulaganju f slika u $f(a) \in {}^{*}V$. Konstruišimo funkciju $g : I \longrightarrow V$ na sledeći način : ako je $k \in I$ i $a \in \operatorname{dom} k$ tada neka je $g(a) = k(a)$; u suprotnom $g(a)$ je bilo koji element iz V . Vidi se da je ${}^{*}g(f) = f(a)$ što pokazuje da se U elementarno slika u $\prod_{Filf} V$. ⊣

Posledica teoreme 1.1.9. je da se svaki skup elementarno **ekvivalentnih** modela elementarno ulaže u fiksni model kao i sledeća teorema koju izdvajamo posebno. Takođe svaka dva konačna elementarno ekvivalentna modela su izomorfna jer je za konačne skupove ${}^{*}\{a_1,\dots,a_n\} = \{a_1,\dots,a_n\}$.

Posledica : Sledeći dijagram se može dopuniti do komutirajućeg kvadrata elementarnim strelicama.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\prec} & V \\ \curlywedge\big\downarrow & & \\ W & & \end{array}$$

Dokaz : Možemo smatrati da je $U \prec V$ i $U \prec W$ pa primeniti teoremu 1.1.9. ili 1.1.8. tako da je ${}^{*}U$ traženi model.

$$\begin{array}{ccc} U & \prec & V \\ \curlywedge & & \curlywedge \\ W & \prec & {}^{*}U \end{array}$$

⊣

Teorema 1.1.9. nam dakle , govori da ako su modeli U i V elementarno ekvivalentni tada se U elementarno ulaže u ${}^{*}V$. Zamišljajući U kao ${}^{\sigma}U = \{{}^{*}a : a \in U\}$, model U kao i dotično elementarno ulaganje f možemo smatrati elementima nad-

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

strukture Nad/*S/ . Ako posmatramo raširenje od Nad/*S/ sa $*_1$ kao novim zvezda preslikavanjem i primenimo teoremu 1.1.8. , tada postoji elementarno ulaganje g modela $^{*}V$ u $^{*_1}\sigma U$ tako da sledeći dijagram komutira

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d] & ^{*}V \arrow[dl, "g"] \\ ^{*_1}\sigma U & \end{tikzcd}$$.

Konstrukciju možemo nastaviti dalje u nova i nova raširenja , , tako da na kraju možemo očekivati da ćemo dobiti raširenje od Nad/S/ u kojem će $^{*}U$ i $^{*}V$ biti izomorfni , gde je $*$ preslikavanje u odnosu na krajnje raširenje . To nam sugeriše sledeću definiciju :

<u>Definicija 1.1.1.</u> Neka je k beskonačan kardinal . Za raširenje *Nad/S/ ćemo reći da poseduje <u>k svojstvo izomorfnosti</u> ako su svaka dva elementarno ekvivalentna unutrašnja modela na jeziku moći manje od k $(<k)$ izomorfna .

Pokazaćemo da postoje raširenja koja imaju k svojstvo izomorfnosti.

<u>Lema 1.1.2.</u> Neka je *Nad/S/ raširenje superstrukture Nad/S/. Tada je $*$: Nad/S/ $\longrightarrow$ Nad/*S/ Δ_0 elementarno ulaganje .

<u>Dokaz</u> : *Nad/S/ je tranzitivni podmodel od Nad/S/ , prema teoremi o.1.4. , pa je $*$ Δ_0 elementarno ulaganje . $\dashv$

Dakle , možemo počevši od standardne nadstrukture Nad/S/ konstruisati direktni sistem

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

$$\mathrm{Nad}/S/ \xrightarrow{p_{01}} \mathrm{Nad}/S_1/ \xrightarrow{p_{12}} \mathrm{Nad}/S_2/ \xrightarrow{p_{23}} \dots \longrightarrow \mathrm{Nad}/S_n/ \longrightarrow \dots$$

, gde su $p_{ij} : \mathrm{Nad}/S_i/ \longrightarrow \mathrm{Nad}/S_j/$ $(i<j)$ Δ_0 elementarna ulaganja tako da je za $i<j<k$ $p_{ik} = p_{jk} \circ p_{ij}$, $p_{ii} = I$ - identično preslikavanje i $p_{i,i+1}(S_i) = S_{i+1}$.

Posmatrajmo direktni limes $\underrightarrow{\mathrm{Lim}}(\mathrm{Nad}/S_n/, p_{ij}, n\in N)$ datog niza . To je skup klasa ekvivalencije oblika $[a,n]$, gde je relacija ekvivalencije $\sim$ definisana između parova (a,n) (za - $(a \in \mathrm{Nad}/S_n/$, $n \in N)$ kao $(a,i)\sim(b,j)$ ako i samo ako postoji $k>i$, $k>j$ tako da je $p_{ik}(a)=p_{jk}(b)$, a relacija pripadanja $\in_u$ je definisana kao $(a,i) \in_u (b,j)$ ako i samo ako postoji $k>i, k>j$ tako da je $p_{ik}(a) \in p_{jk}(b)$ .Za svako $n \in N$ postoji prirodno definisano preslikavanje $p_{nw_0} : \mathrm{Nad}/S_n/ \longrightarrow \underrightarrow{\mathrm{Lim}}(\mathrm{Nad}/S_n/, p_{ij}, n\in N)$ kao $p_{nw_0}(a) = [a,n]$ za koje se lako proveri da je Δ_0 elementarno ulaganje . Osim toga je

$$\underrightarrow{\mathrm{Lim}}(\mathrm{Nad}/S_n/, p_{ij}, n\in N) = \bigcup_{n\in N} p_{nw_0}[\mathrm{Nad}/S_n/]$$

gde oznaka $f[A]$ za funkciju f i skup A znači $f[A] = \{f(x) : x \in A\}$. Na način opisan u poglavlju o.1.1. tako dolazimo do novog raširenja **M** od Nad/S/ gde ulogu $*$ preslikavanja igra p_{ow_0} komponiran sa kolapsom , koje ćemo i dalje , radi jednostavnosti , označavati na isti način sa p_{ow_0} . Takođe je

$$M = \bigcup_{n\in N} p_{nw_0}[\mathrm{Nad}/S_n/]$$

ako smatramo da p_{nw_0} uzimaju vrednosti u M . Označivši sa $S_{w_0} = p_{ow_0}(S)$, M možemo smatrati tranzitivnom podstrukturom od $\mathrm{Nad}/S_{w_0}/$.

Jasno da sada taj proces možemo nastaviti dalje za bilo koji kardinal.

<u>Teorema 1.1.10.</u> (Henson [He]) Za bilo koji kardinal k postoji raširenje standardne nadstrukture koje ima k svojstvo izomorfnosti.

<u>Dokaz</u> : Iz predhodnog je jasno da možemo napraviti direktni sistem

$$Nad/S/ \xrightarrow{p_{01}} Nad/S_1/ \xrightarrow{p_{12}} \ldots \longrightarrow Nad/S_r/ \longrightarrow \qquad (r<k)$$

, gde su , za $i \leqslant j$, $p_{ij} : Nad/S_i/ \longrightarrow Nad/S_j/$ Δ_0 elementarna ulaganja i p_{ii} - identično preslikavanje , tako da je $p_{r,r+n}(S_r) = S_{r+n}$ za $n \in N$. Možemo pretpostaviti da je k regularan kardinal.

Raširenje $^*Nad/S/$ je kolapsirani direktni limes gornjeg niza i tranzitivni je dio od $Nad/S_k/$, $S_k = \bigcup_{r<k} p_{rk}(S_r)$, pri čemu se preslikavanje $p_{rk} : Nad/S_r/ \longrightarrow {}^*Nad/S_k/$ definiše na očekivan način , kao što je to bilo učinjeno u slučaju $k = w_o$. Znamo još da je

$$^*Nad/S/ = \bigcup_{r<k} p_{rk}[Nad/S_r/] \qquad \ldots /1/$$

Neka su sada $(U,r_1)_{r_1 \in L}$ i $(V,r_2)_{r_2 \in L}$ dva elementarno ekvivalentna unutrašnja modela od $^*Nad/S/$ na jeziku L čija je moć strogo manja od k . To su unutrašnji skupovi sa unutrašnjim relacijama i unutrašnjim funkcijama kao interpretacijama simbola jezika . Budući da je k regularan i zbog /1/ postoji $r<k$, U' , $V' \in Nad/S_r/$ i r_1' , $r_2' \in Nad/S_r/$, za $\bar{r} \in L$, , tako da je $U = p_{rk}(U')$, $V = p_{rk}(V')$, $r_1 = p_{rk}(r_1')$, $r_2 = p_{rk}(r_2')$ za $\bar{r} \in L$. Kako je p_{rk} Δ_0 elementarno ulaganje r_1' , r_2' su relacije odnosno funkcije na U' odnosno V' i U' i V' su elementarno ekvivalentni,jer se ispunljivost može izraziti preko Δ_0 formula .

Možemo smatrati da su raširenja svakog od modela $Nad/S_r/$

, za $r<k$, dobijena pomoću preslikavanja $p_{r,r+1}$ polizasi-ćena .

Koristeći teoreme 1.1.8. i 1.1.9. možemo konstruisati dijagram dužine w_o , pri čemu ćemo preslikavanja $p_{r,r+1}$ kraće označiti sa p_{r+1} .

$$
\begin{tikzcd}
U' \arrow[d, tail] & \equiv & V' \arrow[d, tail] \\
p_{r+1}[U'] \arrow[rr, "f_1"] & & p_{r+1}(V') \arrow[d, tail] \\
p_{r+2}(p_{r+1}[U']) \arrow[rr, "f_2"] \arrow[d, tail] & & p_{r-2}[p_{r+1}(V')] \\
\vdots & &
\end{tikzcd}
$$

f_1 , f_2 , ... su elementarna ulaganja a strelica $\rightarrowtail$ znači izomorfno ulaganje dotičnog skupa u višu strukturu pomoću funkcije oblika $p_{r+n,r+n+1}$ $(n \in N)$. f_2 je inverzna funkcija od f_1 na rang(f_1) (kada se rang f_1 posmatra u domenu od f_2 pomoću strelice $\rightarrowtail$) f_3 inverzna od f_2 itd.... Ako izbacimo strelice $\rightarrowtail$ smatrajući identificiranim objekte koje ona povezuje , imaćemo sledeći dijagram :

$$
\begin{tikzcd}
U' \arrow[dr, "f_1"] & \\
& p_{r+1}(V') \arrow[dl, "f_2"] \\
(p_{r+2}(U') \arrow[dr, "f_3"] & \\
& p_{r+3}(p_{r+1}(V')) \\
\vdots &
\end{tikzcd}
$$

Možemo smatrati da je $Nad/S_r/ \subseteq Nad/S_t/$ za $r<t$ tako da je $p_{t+1}(U') \subseteq p_{t+2}(U')$, pa gornji dijagram daje izomorfizam izme-

đu modela $p_{r,r+w_0}(U')$ i $p_{r,r+w_0}(V')$ koji ćemo označiti sa f .

Sada je $p_{r+w_0,k}(f)$ izomorfizam između

$$p_{r+w_0,k}(p_{r,r+w_0}(U')) = U \quad \text{i} \quad p_{r+w_0,k}(p_{r,r+w_0}(V')) = V \ ,$$

jer je $p_{r+w_0,k}$ Δ_0 elementarno preslikavanje . $\dashv$

Posledica Hensonove leme , kako se još naziva teorema 1.1.1o., je da je svaki unutrašnji model izomorfan standardnom modelu , ako pretpostavimo da nestandardni univerzum ima k svojstvo izomor-fnosti i da je jezik posmatranih modela moći strogo manje od k , jer svaki model iz *Nad/S/ ima elementarni podmodel moći ne veće od k . Ostale posledice se mogu naći u [He] .

Na kraju ove glave dajemo nekoliko primera kako se zasićemost nestandarnog univerzuma *Nad/S/ može primeniti u rešavanju različitih problema.

Ako imamo neku algebarsku strukturu ili model U tada je $^*U$ elementarno raširenje od U . Dakle U i $^*U$ imaju ista formalna svojstva tj. ona koja se mogu izraziti na jeziku do-tičnih struktura . Sledeći primer pokazuje da se svojstvo "biti prsten glavnih ideala" ne može izraziti na jeziku prvog reda.

<u>Primer 1.</u> Ako je $\mathbf{Z}$ skup celih brojeva tada $^*\mathbf{Z}$ nije prsten glavnih ideala .

<u>Dokaz</u> : Ako uzmemo $H \in {}^*\mathbf{Z}^+ \setminus \mathbf{Z}$ tada ideal generisan skupom $\{2^H , 2^{H-1},\dots,2^{H-k},\dots\}$ $(k \in N)$ nije glavni . U suprotnom bi I bio generisan elementom $a_1 2^{H_1} + \dots + a_k 2^{H_k}$ $(H_k \leqslant \dots \leqslant H_1)$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

pa bi imali $2^{H_k-1} = b_1 2^{H_1} + \ldots + b_k 2^{H_k}$ tj.

$$1 = b_1 2^{H_1-H_k+1} + \ldots + b_k 2$$

što je nemoguće . ⊣

<u>Primer 2.</u> Svako polje ima algebarski zatvoreno algebarsko proširenje .

<u>Dokaz</u> : Ako je K polje tada sa $K[x]$ označimo prsten polinoma sa koeficijentima iz K . Poznato je da se svaki $f \in K[x]$ razlaže na faktore u nekom nadpolju od K . Uzmimo hiperkonačan skup $\{f_1,\ldots,f_H\}$ $(H \in {}^*N \setminus N)$ tako da je $K[x] \subseteq \{f_1,\ldots,f_H\} \subseteq {}^*K[x]$. Postoji polje $L \supseteq {}^*K$ u kome se $f_1 \cdot \ldots \cdot f_H$ razlaže na faktore tj. postoji algebarsko raširenje od K u kome se svi polinomi iz $K[x]$ razlažu na faktore što je dovoljno da ono bude algebarski zatvoreno. ⊣

<u>Primer 3.</u> Svaka Bulova algebra je izomorfna nekom polju skupova.

<u>Dokaz</u> : Neka je X Bulova algebra . Izaberimo hiperkonačan skup K tako da je $X \subseteq K \subseteq {}^*X$. Bulova algebra $\bar{K}$ generisana sa K je hiperkonačna i * - izomorfno se ulaže u neko * - polje skupova (jer tražena reprezentacija vredi za konačne Bulove algebre) . Tako se i X izomorfno ulaže u polje skupova . ⊣

Potpuna teorema o reprezentaciji Bulovih algebri nam govori da se one realizuju kao otvoreno-zatvoreni skupovi u nekom kompaktnom Hausdorffovom topološkom prostoru .

<u>Primer 4.</u> Za svaku Bulovu algebru X postoji kompaktan Hausdorf-

fov topološki prostor Y tako da je X izomorfan sa Bulovom algebrom otvoreno-zatvorenih skupova u Y.

Dokaz : Za svaki ultrafilter F u X uzmimo jedan element a $^*X$ tako da je $a \leqslant x$ za svaki $x \in F$. Neka je Y skup tako dobijenih elemenata. Topologiju u Y uvedimo tako da su skupovi oblika $O_x = \{a \in Y : a \leqslant x\}$ $(x \in X)$ baza otvorenih skupova. Vidi se da je $O_{x \wedge y} = O_x \cap O_y$, $O_{x \vee y} = O_x \cup O_y$ i $O_{\overline{x}} = Y \setminus O_x$, pa su O_x otvoreno-zatvoreni skupovi. Y je kompaktan jer ako je $\{O_{x_i} : i \in I\}$ centrirana familija tada je i $\{x_i : i \in I\}$ centriran skup u X pa postoji $a \in Y$ $a \leqslant x_i$ za svako $i \in I$, dakle $a \in \bigcap_{i \in I} O_{x_i}$. Pošto je Y kompaktan svaki otvoreno-zatvoreni skup ima oblik O_x za neko $x \in X$ tako da je $x \longrightarrow O_x$ izomorfizam. ⊣

Primer 5. Svaki se poredak r na skupu X može produžiti do linearnog.

Dokaz : Izaberimo hiperkonačan skup K za koji je $X \subseteq K \subseteq {}^*X$. Stav važi za konačne skupove pa se poredak $^*r$ širi do linearnog čije je suženje na X traženo produženje. ⊣

Primer 6. Neka je A_i $(i \in I)$ familija skupova i D w_0 nekompletni ultrafilter na I. Tada je ili $|\prod_D A_i| < w_0$ ili $|\prod_D A_i| \geqslant 2^{w_0}$.

Dokaz : Ako je za neko $n \in N$ skup $\{i \in I : |A_i| < n\} \in D$ tada je za neko $k \in \{0, \ldots, n\}$ $\{i \in I : |A_i| = k\} \in D$, jer je $\{i \in I : |A_i| < n\} = \bigcup_{k=0} \{i \in I : |A_i| = k\}$ i D ultrafilter,

, pa je $|\prod_D A_i| = k$. U suprotnom , budući da je D w_0 nekompletan , postoje skupovi I_n $(n \in N)$ elementi od D takvi da je $I_{n+1} \subseteq I_n$, $\bigcap_{n \in N} I_n = \emptyset$ i da za $i \in I_n \setminus I_{n+1}$ postoji $B_i \subseteq A_i$ sa $|B_i| = n$. Jasno da je $|\prod_D A_i| \geqslant |\prod_{D'} B_i|$, gde je $D' = \mathcal{P}(I_1) \cap D$.

Posmatrajmo sada nestandardni univerzum $^*Nad/S/$ nastao pomoću ultrastepena preko ultrafiltra D' . Neka je $H \in {}^*N \setminus N$ beskonačan prirodan broj nastao od elementa $D'f$, gde je $f' : I_1 \longrightarrow \bigcup_{i \in I_1} B_i$ definisana sa $f(i) = n$ kada je $i \in I_n \setminus I_{n+1}$. Jasno je da ultraproizvod $\prod_{D'} B_i$ možemo zamišljati kao skup $\{k \in {}^*N : k \leqslant H\}$, jer skupove B_i smatramo podskupovima od N . Međutim $|\{k \in {}^*N : k \leqslant H\}| \geqslant 2^{w_0}$. Zaista ako $^*[o,1]$ podelimo tačkama $\frac{n}{H}$, $n = o,1,\ldots,H$ tada će svaki standardni broj $r \in [o,1]$ pripadati tačno jednom od intervala $[\frac{n}{H} , \frac{n+1}{H}]$ $(n = o,1,\ldots,H-1)$ kojih opet ima $|\{k \in {}^*N : k \leqslant H\}|$. $\dashv$

<u>Primer 7.</u> Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ i $M = X$ podprostor . Pretpostavimo da funkcija $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ima svojstva

$$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y) \quad \text{i}$$
$$p(tx) = t \cdot p(x)$$

za svako $x,y \in X$ i $t \geqslant o$. Tada se svaki linearni funkcional $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, za koji važi $f(x) \leqslant p(x)$ $(x \in M)$, može produžiti do linearnog funkcionala F na X za koji je takođe $F(x) \leqslant p(x)$ za svako $x \in X$.

<u>Dokaz</u> : Iz standardnog dokaza ([Ru]) je poznato da se za svaki konačan skup $\{x_1,\ldots,x_n\} \subseteq X \setminus M$ dati funkcional može produ-

žiti do funkcionala g definisanog na podprostoru $M[x_1,\dots,x_n]$ (najmanji podprostor koji sadrži $M\cup\{x_1,\dots,x_n\}$) tako da vredi $g(x)\leqslant p(x)$ za svako $x\in M[x_1,\dots,x_n]$.

Ako uzmemo hiperkonačan K za koji je $X\setminus M\subseteq K\subseteq {}^*X\setminus{}^*M$ tada se ${}^*f$ sa ${}^*M$ širi na ${}^*M[K]$ do funkcionala koji označimo sa g . Neka je $x\in X\setminus M$. Budući da je

$$-p(-x) = -{}^*p(-x)\leqslant g(x)\leqslant {}^*p(x) = p(x)$$

to $g(x)$ nije beskonačan , pa je $st(g(x))$ definisano (definiciju preslikavanja st videti u II glavi). st kao i g je linearno preslikavanje tako da je $F = st\circ g$ traženo produženje . $\dashv$

Primer 8. Direktni sistem modela se sastoji od usmerenog skupa I , što znači da je on uređen recimo relacijom $\leqslant$ i za svako $i,j\in I$ postoji $k\in I$ tako da je $i\leqslant k$ i $j\leqslant k$, niza modela U_i $(i\in I)$ nekog jezika L i skupa elementarnih ulaganja $m_{ij} : U_i \longrightarrow U_j$ $(i\leqslant j)$ tako da je m_{ii} identitet i $m_{jk}\circ m_{ij} = m_{ik}$.

Tvrdnja : Postoji takav model U i skup elementarnih ulaganja $f_i : U_i \longrightarrow U$ tako da je $U = \bigcup_{i\in I} f_i(U_i)$ i iz $i\leqslant j$ sledi $f(U_i)\subseteq f(U_j)$ (to je direktni limes datog sistema).

Dokaz : Uzmimo $a\in{}^*I$ veći od svih standardnih elemenata skupa ${}^*I$. Uočimo ${}^*U_a$. Za svako $i\in I$ ${}^*m_{ia} : {}^*U_i \longrightarrow {}^*U_a$ je $*$ elementarno ulaganje koje označimo sa f_i . Osim toga ako je $i\leqslant j$ tada je ${}^*m_{ja}\circ{}^*m_{ij} = {}^*m_{ia}$ pa je $f_i(U_i)\subseteq f_j(U_j)$. Na kraju $U = \bigcup_{i\in I} f_i(U_i)$ je traženi model. $\dashv$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

G L A V A II

2.1. Monade

Familija podskupova skupa X zovemo <u>prstenom</u> skupova ako ona sadrži $\emptyset$ i X i ako je zatvorena u odnosu na konačne unije i preseke tj. ako su A i B elementi te familije tada su i $A \cup B$ i $A \cap B$ takođe elementi te familije.

<u>Definicija 2.1.1.</u> Neka je $A \subset {}^*X$ bilo kakav skup (unutrašnji ili vanjski). <u>Monada</u> od A u odnosu na prsten $\mathbb{P}$ skupova iz X , u oznaci $m_{\mathbb{P}}(A)$, se definiše kao

$$m_{\mathbb{P}}(A) = \bigcap_{\substack{E \supset A, \\ E \in \mathbb{P}}} {}^*E \quad .$$

Monadu tačke $x \in {}^*X$ ćemo jednostavno označavati sa $m_{\mathbb{P}}(x)$.

Jasno da ako je $A \neq \emptyset$, tada je $m_{\mathbb{P}}(A) \neq \emptyset$ što je posledica zasićenosti našeg nestandardnog modela.

<u>Lema 2.1.1.</u> /i/ $m_{\mathbb{P}}(\emptyset) = \emptyset$, $m_{\mathbb{P}}({}^*X) = {}^*X$;

/ii/ $m_{\mathbb{P}}(m_{\mathbb{P}}(A)) = m_{\mathbb{P}}(A)$;

$$/iii/ \quad A \subseteq B \quad \text{povlači} \quad m_{\mathbb{P}}(A) \subseteq m_{\mathbb{P}}(B) \quad ;$$

$$/iv/ \quad m_{\mathbb{P}}(A \cup B) = m_{\mathbb{P}}(A) \cup m_{\mathbb{P}}(B) \quad .$$

Dokaz : /i/ i /iii/ je očigledno .

/ii/ Ako $x \notin m_{\mathbb{P}}A$ tada $x \notin {}^*E \supset A$ za neko $E \in \mathbb{P}$. Međutim ${}^*E \supset m_{\mathbb{P}}A$ pa $x \notin m_{\mathbb{P}}m_{\mathbb{P}}A$. Tako smo dokazali da je $m_{\mathbb{P}}m_{\mathbb{P}}A \subseteq m_{\mathbb{P}}A$. Obratna inkluzija je očigledna.

/iv/ Jasno da $m_{\mathbb{P}}(A \cup B) \supseteq m_{\mathbb{P}}A \cup m_{\mathbb{P}}B$. Ako $x \notin m_{\mathbb{P}}A \cup m_{\mathbb{P}}B$ tada za neke $E,F \in \mathbb{P}$ $x \notin {}^*E$, $x \notin {}^*F$, ${}^*E \supset A$, ${}^*F \supset B$. Tj. $x \notin {}^*E \cup {}^*F \supset A \cup B$ odakle $x \notin m_{\mathbb{P}}(A \cup B)$. $\dashv$

Ako nam je dat prsten skupova $\mathbb{P}$ na X tada nam lema 2.1.1. omogućava da u ${}^*X$ uvedemo topologiju tako da je $m_{\mathbb{P}}$ zatvarač operator. Tako dobijenu topologiju ćemo zvati $m_{\mathbb{P}}$ - topologija .

Teorema 2.1.1. ${}^*X$ sa $m_{\mathbb{P}}$ topologijom je kompaktan topološki prostor . X je gust u ${}^*X$.

Dokaz : Baza zatvorene topologije u $({}^*X, m_{\mathbb{P}})$ je $\{{}^*E : E \in \mathbb{P}\}$ tako da ako uzmemo centriranu familiju skupova iz baze ona će imati neprazan presek zbog zasićenosti nestandardnog modela. Tako je posmatrani prostor kompaktan .

Ako ${}^*E \supset X$ tada je ${}^*E = {}^*X$ pa je $m_{\mathbb{P}}X = {}^*X$. $\dashv$

Ako je (X,T) topološki prostor , gde je T familija otvorenih skupova u X , tada možemo posmatrati monade u odnosu na T , budući da je to prsten .

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

<u>**Lema 2.1.2.**</u> Topološki prostor (X,T) je **Hausdorffov** ako i samo ako je za bilo koje dve različite tačke $x , y \in X$

$$m_T x \cap m_T y = \emptyset .$$

<u>Dokaz</u> : Ako je (X,T) **Hausdorffov** tada je očigledno $m_T x \cap m_T y = \emptyset$ čim je $x \neq y$. Obratno, neka je $B(x)$ sistem okolina tačke x tj. $B(x) = \{O \in T : x \in O\}$. Za konačno $O_1,\dots,O_n \in B(x)$ formirajmo skup

$$A_{O_1,\dots,O_n} = \{O \in {}^*B\, x \; : O \subseteq {}^*O_1 \cap \dots \cap {}^*O_n\} .$$

Familija $\{A_{O_1,\dots,O_n} : \{O_1,\dots,O_n\}$ - konačan podskup od $B(x)\}$ je centrirana familija unutrašnjih skupova pa postoji $O' \in {}^*B(x)$ tako da je $O' \subseteq m_T x$. Analogno postoji $O'' \in {}^*B(y)$ sa $O'' \subseteq m_T y$. Sada ako je $m_T x \cap m_T y = \emptyset$ imamo $O' \cap O'' = \emptyset$ pa na osnovu principa prenosa postoje dve disjunktne okoline od x i y . ⊣

<u>Definicija 2.1.2.</u> Za tačku $a \in {}^*X$ topološkog prostora (X,T) ćemo reći da je <u>okolostandardna</u> (near-standard) ako postoji $x \in X$ tako da je $a \in m_T x$. Skup okolostandardnih tačaka se označava sa $n.s.{}^*X$.

Dakle, $n.s.{}^*X = \bigcup_{x \in X} m_T x$. Intuitivno, monada standardne tačke x predstavlja skup tačaka čija je "udaljenost" od x beskonačno mala. Monada daje potpunu informaciju o tome da li neki skup pripada lokalnoj bazi okolina od x ili ne ; naime $O \in B(x)$ ako i samo ako ${}^*O \supseteq m_T x$. Dalje $x \in A$ je unutrašnja tačka od A ako i samo ako $m_T x \subset {}^*A$. Postoje karakterizacije i drugih pojmova vezanih

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

za topološke prostore , u terminima monada . Jedna od najinteresantnijih je karakterizacija kompaktnosti topološkog prostora koju je dao A. Robinson .

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

<u>Teorema 2.1.2.</u> (X,T) je kompaktan ako i samo ako je svaka tačka iz ${}^*X$ okolostandardna tj. ${}^*X = \text{n.s.}{}^*X$.

<u>Dokaz</u> : Neka je (X,T) kompaktan i neka $a \in {}^*X$ nije okolostandardna . Tada za svaki $x \in X$ postoji otvorena okolina O_x od x tako da $a \notin {}^*O_x$. Familija $\{O_x : x \in X\}$ pokriva X pa postoji konačan podpokrivač $\{O_{x_1},\dots,O_{x_n}\}$. Dakle , $a \in$ $\in \bigcup_{i=1}^{n} {}^*O_{x_i}$ što je nemoguće .

Obratno neka je $\text{n.s.}{}^*X = {}^*X$. Uzmimo centriranu familiju zatvorenih skupova $\{F_i : i \in I\}$. Tada,zbog zasićenosti postoji $a \in \bigcap_{i \in I} {}^*F_i$. Kako je $a \in \text{n.s.}{}^*X$ to je $a \in m_{\mathbb{P}}x$ za neko $x \in X$. Sada je za svako $i \in I$ $x \in F_i$, jer bi inače $x \in X \setminus F_i$ odakle $x \in {}^*(X \setminus F_i)$ pa,budući da je $X \setminus F_i$ otvoren, i $a \in {}^*(X \setminus F_i)$ što je nemoguće . $\dashv$

Skrenućemo na čas sa glavnog toka ove glave i dati nekoliko primera primene teoreme 2.1.2. Prva od njih je opet od A. Robinsona - nestandardni dokaz kompaktnosti produkta kompaktnih prostora.

<u>Primer 2.1.1.</u> Topološki proizvod kompaktnih topoloških prostora

(X_i, T_i) $(i \in I)$ je kompaktan .

Dokaz : Dokažimo prvo da je $f \in {}^*(\prod_{i\in I} X_i)$ u monadi $m_T g$ elementa $g \in \prod_{i\in I} X_i$, gde je T topologija topološkog proizvoda , ako i samo ako je $f(i) \in m_{T_i} g(i)$ za svako $i \in I$.

Zaista neka je $f \in m_T g$ i $i_o \in I$ fiksirano. Tada je za svaku okolinu O_{i_o} od $g(i_o)$ $f \in {}^*\{h \in \prod_{i\in I} X_i : h(i_o) \in O_{i_o}\} = \{h \in {}^*\prod_{i\in I} X_i : h(i_o) \in {}^*O_{i_o}\}$. Dakle $f(i_o) \in {}^*O_{i_o}$ tj. $f(i_o) \in m_{T_{i_o}} g(i_o)$.

Obratno , ako $f \notin m_T g$ tada za neki $i_o \in I$ i neki otvoreni skup $O_{i_o} \in T_{i_o}$ $f \notin {}^*\{h \in \prod_{i\in I} X_i : h(i_o) \in O_{i_o}\}$, gde je $g(i_o) \in O_{i_o}$. Odatle $f(i_o) \notin {}^*O_{i_o}$ što povlači $f(i_o) \notin m_{T_{i_o}} g(i_o)$ i tvrdnja je dokazana.

Sada je jasno da je svaka tačka iz proizvoda okolostandardna , jer ako $f \in {}^*\prod_{i\in I} X_i$ tada je, zbog kompaktnosti koordinatnih prostora , za svako $i \in I$ $f(i)$ okolostandardna tačka, , recimo $f(i) \in m_{T_i}(x_i)$ $(x_i \in X_i)$, pa je prema gornjem $f \in m_T g$, gde je $g \in \prod_{i\in I} X_i$ definisano sa $g(i) = x_i$. ⊣

Primer 2.1.2. Ako postoji predbaza C topološkog prostora (X,T) (to je familija otvorenih skupova čiji konačni preseci čine bazu) tako da svaki pokrivač skupovima iz C ima konačan podpokrivač tada je (X,T) kompaktan .

Dokaz : Dokažimo da je svaka tačka iz $^*X$ okolostandardna. U suprotnom postoji $a \in {}^*X \setminus n.s.{}^*X$. Tada za svaku tačku $x \in X$ postoji $O_x \in C$ tako da $a \notin {}^*O_x$ jer je $m_T x = m_C x$. $\{O_x : x \in X\}$ pokriva X a nema konačan podpokrivač. ⊣

Primetimo da je gornji dokaz analogan dokazu potrebnosti uslova $n.s.{}^*X = {}^*X$ u teoremi 2.1.2. s tim što je zapaženo da monadu tačke čini presek zvezda predbaznih elemenata koji sadrže x. Slično je i u sledećem primeru.

Primer 2.1.3. Neka je (X,T) regularan topološki prostor. Ako za svaki pokrivač otvorenim skupovima od X postoji konačan podskup čije zatvorenje pokriva X tada je (X,T) kompaktan.

Dokaz : Postupa se analogno kao u predhodnom primeru s tim što je u regularnom topološkom prostoru $m_T x = m_C x$ gde je C familija regularno zatvorenih skupova. ⊣

Primer 2.1.4. Neka je X topološki vektorski prostor i X^d njegov dual - skup svih neprekidnih funkcionala sa X u $\mathbb{R}$. U X^d se uvodi topologija (slaba topologija), najmanja topologija pri kojoj su funkcionali A_x $(x \in X)$ definisani kao $A_x(f) = f(x)$ $(f \in X^d)$ neprekidni.

Teorema Banach-Alaoglu : Neka je $K = \{f \in X^d : (\forall x \in V)\, |f(x)| \leqslant 1\}$,

, gde je V neka okolina nule u X . Tada je $\mathbf{K}$ kompaktan u slaboj topologiji.

Dokaz : Dokazaćemo da je svaka tačka iz ${}^{*}\mathbf{K}$ okolostandardna.

Ako sa T označimo slabu topologiju tada je za $f \in X^d$ i $g \in {}^{*}(X^d)$ $g \in m_T f$ ako i samo ako $(\forall x \in X)(g(x) \approx {}^{*}f(x))$, gde oznaka $a \approx b$ za hiper-realne brojeve znači da je razlika a-b beskonačno mali broj.

Zaista , ako je $x_0 \in X$ i $g \in m_T f$ tada je $g \in$ $\in \{g' \in {}^{*}(X^d) : |g'(x_0) - {}^{*}f(x_0)| < \varepsilon\}$ za svaki ε- standardan i pozitivan , pa je $g(x_0) \approx {}^{*}f(x_0)$. Obratno ako $g(x_0) \not\approx$ $\not\approx {}^{*}f(x_0)$ za neki $x_0 \in X$, tada $g \notin {}^{*}\{g' \in X^d : |g'(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon\}$ za neki $\varepsilon > 0$ standardan , pa $g \notin m_T f$.

Po konstrukciji skupa $\mathbf{K}$ se vidi da

$$(\forall x \in X)(\exists I_x - \text{segment})(\forall f \in \mathbf{K}) \quad f(x) \in I_x \qquad \ldots /1/$$

Sada ako $g \in {}^{*}\mathbf{K}$ zbog /1/ i principa prenosa tačka $g(x)$, , za $x \in X$, je okolostandardna pa možemo posmatrati funkciju $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definisanu kao $f(x) = st(g(x))$ (definiciju preslikavanja st videti napred) . f je linearna funkcija jer je g $*$- linearna i st linearno preslikavanje. Dalje je $|g(x)| \leqslant 1$, za $x \in V$, pa je i $|f(x)| \leqslant 1$ za svako $x \in V$ što pokazuje da je f neprekidan funkcional. Dakle , za svako $x \in X$ je $f(x) \approx$ $\approx g(x)$ tj. $g \in m_T f$, što pokazuje da je g okolostandardna.⊣

Lema 2.1.2. nam omogućuje sledeću definiciju.

Definicija 2.1.3. Ako je (X,T) **Hausdorffov** topološki prostor - i $a \in n.s.{}^{*}X$ tada sa $st(a)$ označimo onu tačku iz X za koju je $a \in m_T st(a)$.

<u>Lema 2.1.3.</u> Neka je (X,T) **Hausdorffov topološki prostor i** $\mathbf{P}$ bilo kakv prsten skupova u X. Tada je $stM = \{sta : a \in M\}$ zatvoren skup, gde je M bilo **kakva** $\mathbf{P}$ monada.

<u>Dokaz</u> : Neka je $\overline{stM}$ zatvorenje skupa stM i $a \in \overline{stM}$. Tada je ${}^*V \cap M \neq \emptyset$ za svaku okolinu V od A, pa je familija $\{ {}^*V \cap {}^*E : V$ - okolina od **a**, $E \in \mathbf{P}$ tako da ${}^*E \supseteq M \}$ centrirana familija unutrašnjih skupova, koja po zasićenosti ima neprazan presek. Tj. $m_T a \cap M \neq \emptyset$ pa $a \in stM$. $\dashv$

<u>Lema 2.1.4.</u> Ako je (X,T) regularan Hausdorffov topološki prostor i S zatvoren skup tada je

$$st^{-1}(S) = n.s.({}^*X) \cap m_T S .$$

<u>Dokaz</u> : Jasno da vredi $st^{-1}(S) \subset n.s.({}^*X) \cap m_T S$. Obratno ako $t \in n.s.({}^*X) \cap m_T S$ tada $t \in m_T a$ za neki $a \in X$. Ako $a \notin S$, tada je zbog regularnosti $m_T a \cap m_T S = \emptyset$, što je nemoguće, pa $a \in S$ odakle $t \in m_T S$. $\dashv$

<u>Teorema 2.1.3.</u> **Neka je (X,T) regularan T_2 topološki prostor.** U ${}^*X$ uvedimo m_T topologiju i posmatrajmo $n.s.{}^*X$ kao podprostor u toj topologiji. Tada je

$$st : n.s.{}^*X \longrightarrow X$$

neprekidno i zatvoreno preslikavanje.

<u>Dokaz</u> : Neprekidnost sledi iz leme 2.1.4. a zatvorenost iz leme 2.1.3. i činjenice da je $st(M \cap n.s.{}^*X) = stM$. $\dashv$

U daljnjem izlaganju će nam biti potrebna i sledeća lema.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Lema 2.1.5. Neka je $\mathbf{P}$ bilo kakav prsten skupova u Hausdorffovom topološkom prostoru (X,T) . Tada je za svaku centriranu familiju $\{E_i : i \in I\} \subseteq \mathbf{P}$ elemenata iz $\mathbf{P}$, zatvorenu u odnosu na preseke konačno svojih elemenata ,

$$st(\bigcap_{i\in I} {}^*E_i) = \bigcap_{i\in I} st({}^*E_i) \quad .$$

Dokaz : Očigledno je

$$st(\bigcap_{i\in I} {}^*E_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} st({}^*E_i) \quad .$$

Obratno , ako $t \notin st(\bigcap_{i\in I} {}^*E_i)$ tada je $m_T t \cap (\bigcap_{i\in I} {}^*E_i) = \emptyset$, , pa je zbog zasićenosti $m_T t \cap {}^*E_{i_o} = \emptyset$, za neko $i_o \in I$, tj. $t \notin st({}^*E_{i_o})$. $\dashv$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

2.2. Wallmanova kompaktifikacija

U ovome što sledi biće prikazana nestandardna konstrukcija Wallmanove kompaktifikacije ,kako je to urađeno u[St].

Definicija 2.2.1. Neka je $\mathbf{P}$ prsten skupova iz X . Filter u $\mathbf{P}$ je skup $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{P}$ za koji je /i/ $\emptyset \notin \mathbf{F}$, /ii/ $A , B \in \mathbf{F}$ povlači $A \cap B \in \mathbf{F}$, /iii/ $A \supseteq B \in \mathbf{F}$ povlači $A \in \mathbf{F}$.
Filter je prost ako $A \cup B \in \mathbf{F}$ povlači $A \in \mathbf{F}$ ili $B \in \mathbf{F}$.
Maksimalan filter u odnosu na relaciju inkluzije $\subseteq$ se naziva ultrafilter .
Monada filtra $\mathbf{F}$ se definiše kao

$$m\mathbf{F} = \bigcap_{A \in \mathbf{F}} {}^{*}A \quad .$$

Za zadani $Y \subseteq {}^{*}X$ filter $Fil_{\mathbf{P}}Y$ se definiše kao

$$Fil_{\mathbf{P}}Y = \{ A \in \mathbf{P} : {}^{*}A \supseteq Y \} \quad .$$

$Fil_{\mathbf{P}}x$ je skraćena oznaka za $Fil_{\mathbf{P}}\{x\}$.

Jasno da je svaki ultrafilter ujedno i prost filter . Ako uzmemo tačku $x \in {}^{*}X$ i posmatramo filter $Fil_{\mathbf{P}}x$ tada je on prost . Obratno , pokazaćemo da se svaki prost filter može tako dobiti .

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

$= Fil_{\mathbb{P}}x$ za neko $x \in {}^*X$.

<u>Dokaz</u> : Uzmimo proizvoljan $x_1 \in m\mathbb{F}$. Jasno da je $Fil_{\mathbb{P}}x_1 \supseteq \mathbb{F}$. Ako je $\mathbb{F} \neq Fil_{\mathbb{P}}x_1$ posmatrajmo $\mathbb{F}_1 = \{ X \setminus A : A \in \mathbb{P} , A \in \mathbb{F} \}$. $\mathbb{F}_1$ je filter jer je $\mathbb{F}$ prost . Sada uzmimo $x \in m\mathbb{F} \cap m\mathbb{F}_1$ ($m\mathbb{F} \cap m\mathbb{F}_1 \neq \emptyset$ jer bi u suprotnom bilo $A \cap B = \emptyset$ za neke $A \in \mathbb{F}$, $B \in \mathbb{F}_1$ pa bi $X \setminus B \in \mathbb{F}$ što je nemoguće) za koji važi $Fil_{\mathbb{P}}x = \mathbb{F}$. $\dashv$

Neka je Π skup svih prostih filtera u prstenu $\mathbb{P}$. Za $S \subseteq \Pi$ definišimo $k(S) = \bigcap_{\mathbb{F} \in S} \mathbb{F}$. Za bilo koji filter $\mathbb{F}$ definišimo $h(\mathbb{F}) = \{ \mathbb{F}_0 \in \Pi : \mathbb{F}_0 \supseteq \mathbb{F} \}$. Sada u Π možemo definisati topologiju tako da je $S \longrightarrow h(k(S))$ zatvarač operator . To je <u>h - k</u> <u>topologija</u> u Π . Nestandardnu sliku prostora Π daje sledeća teorema :

<u>Teorema 2.2.2.</u> Ako u ${}^*X$ posmatramo $m_{\mathbb{P}}$ topologiju tada je $f : {}^*X \longrightarrow \Pi$, definisana sa $f(x) = Fil_{\mathbb{P}}x$ neprekidno i zatvoreno preslikavanje .

<u>Dokaz</u> : Neka je $S \subseteq \Pi$. Dokažimo da je

$$f^{-1}(h(k(S))) = \{ x \in {}^*X : m_{\mathbb{P}}x \subseteq m_{\mathbb{P}}(f^{-1}(S)) \} .$$

Ako je $f^{-1}(S) = T$ tada S možemo zamišljati kao $\{ Fil_{\mathbb{P}}x : x \in T \}$. $k(S)$ možemo zamišljati kao $Fil_{\mathbb{P}}T$. Tako je $h(k(S)) =$ $\{ \mathbb{F} \in \Pi : \mathbb{F} \supseteq Fil_{\mathbb{P}}T \} = \{ \mathbb{F} \in \Pi : m\mathbb{F} \subseteq m(Fil_{\mathbb{P}}T) \}$. Tj.

$$f^{-1}(h(k(S))) = \{ x \in {}^*X : m_{\mathbb{P}}x \subseteq m_{\mathbb{P}}T \} . \quad . \quad . \quad . \quad /1/$$

Ako je S zatvoren tada je $h(k(S)) = S$. Neka je $t \in$

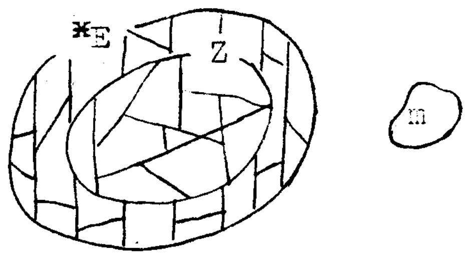
$\in m_{\mathbf{P}}T$. Tada je $m_{\mathbf{P}}t \subseteq m_{\mathbf{P}}T$ pa je zbog /1/ $t \in f^{-1}(h(k(S)))$ = $= f^{-1}(S) = T$. Tako je $m_{\mathbf{P}}T \subseteq T$ pa je T zatvoren .

Obratno , ako je $m_{\mathbf{P}}T = T$ i $Fil_{\mathbf{P}}x \in h(k(S))$ tada je zbog /1/ $m_{\mathbf{P}}x = m_{\mathbf{P}}T = T$ tj. $x \in T$ i $Fil_{\mathbf{P}}x \in S$. ⊣

<u>Posledica 2.2.1</u>. Π je homeomorfno sa ${}^{*}X/\approx$ u kome se posmatra faktor topologija u odnosu na $m_{\mathbf{P}}$ topologiju i $x \approx y$ ako i samo ako je $m_{\mathbf{P}}x = m_{\mathbf{P}}y$. ⊣

<u>Teorema 2.2.3.</u> Za $E \in \mathbf{P}$ neka je $F_E = \{\mathbf{F} \in \Pi \ : E \in \mathbf{F}\}$. Tada je $C = \{F_E \ : E \in \mathbf{P}\}$ baza zatvorene topologije u Π .

<u>Dokaz</u> : Π zamišljamo kao ${}^{*}X/\approx$. Dokažimo da je $\{{}^{*}E/\approx \ : E \in \mathbf{P}\}$ zatvorena baza u Π . $Z/\approx$ je zatvoren u ${}^{*}X/\approx$ ako i samo ako je Z zatvoren u ${}^{*}X$. Neka je $m \in {}^{*}X/\approx$, $m \notin Z/\approx$. Ako uzmemo $t \in m$ tada postoji $E \in \mathbf{P}$ tako da ${}^{*}E \supseteq Z$ i $t \notin {}^{*}E$. Tako $m \notin {}^{*}E/\approx$.



Skup u Π koji odgovara ${}^{*}E/\approx$ je $\{Fil_{\mathbf{P}}t \ : t \in {}^{*}E\}$ = $= \{\mathbf{F} \in \Pi \ : E \in \mathbf{F}\}$. ⊣

$m_{\mathbf{P}}t$ nisu dakle , elementi prostora ${}^{*}X/\approx$ nego se raspadaju na elemente iz ${}^{*}X/\approx$. Međutim , ako su u pitanju ultramonade (monade ultrafiltera) tada su one klase u relaciji $\approx$.

<u>Definicija 2.2.2.</u> **Wallmanov** prostor $W(\mathbb{P})$ je prostor svih ultrafiltera sa nasleđenom topologijom iz Π .

Tako je $W(\mathbb{P})$ homeomorfan sa prostorom svih ultramonada u ${}^*X$ kao podprostorom od ${}^*X/\approx$. U daljem će nam biti od interesa da posmatramo dualan prsten $\mathbb{D}$ prstenu $\mathbb{P}$ koji se definiše kao $\mathbb{D} = \{ X \setminus E : E \in \mathbb{P} \}$. Kako skupovi oblika ${}^*E/\approx$ čine zatvorenu bazu u ${}^*X/\approx$ to skupovi oblika ${}^*G/\approx$ $(G \in \mathbb{D})$ čine otvorenu bazu .

Odgovor na pitanje kada je $m_{\mathbb{P}}x$ ultramonada ,tj. $Fil_{\mathbb{P}}x$ ultrafilter , nam daje sledeća lema .

<u>Lema 2.2.1.</u> Sledeće izjave su ekvivalentne :

/i/ $(\forall x \in X)\, m_{\mathbb{P}}x$ je ultramonada ;

/ii/ $(\forall x \in X)\, m_{\mathbb{P}}x \subseteq m_{\mathbb{D}}x$;

/iii/ $(\forall E \in \mathbb{P})\, m_{\mathbb{D}}E \cap X = E$.

<u>Dokaz</u> : /i/ $\longrightarrow$ /ii/

$G \in \mathbb{D}$, $x \in G$ povlači $X \setminus G \notin Fil_{\mathbb{P}}x$ odakle postoji $E \in Fil_{\mathbb{P}}x$ za koje je $E \cap X \setminus G = \emptyset$ pa imamo $x \in E \subseteq G$.

/ii/ $\longrightarrow$ /i/

$x \notin E \in \mathbb{P}$ povlači $x \in X \setminus E \in \mathbb{D}$ pa postoji $E' \in Fil_{\mathbb{P}}x$ tako da je $E' \subseteq X \setminus E$ odakle je $E' \cap E = \emptyset$. Dakle , $Fil_{\mathbb{P}}x$ je ultrafilter.

/ii/ $\longrightarrow$ /iii/

$x \notin E$ povlači (zbog /ii/) $x \in E'$, $E' \cap E = \emptyset$ za neko $E' \in \mathbb{P}$ odakle $X \setminus E' \supseteq E$ pa $x \notin m_{\mathbb{P}}E$.

/iii/ $\longrightarrow$ /i/

$x \notin E \in \mathbb{P}$ povlači $x \notin m_{\mathbb{D}}E$ odakle postoji $G \in \mathbb{D}$ tako da je

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

$x \notin G$, ${}^{*}G \supseteq {}^{*}E$ odakle $x \in X \setminus G$, $X \setminus G \cap E = \emptyset$. $\dashv$

Sada ćemo razmatrati pitanje kada se topološki prostor (X,T) može uložiti u Wallmanov prostor $W(\mathbb{P})$ za neki prsten $\mathbb{P}$ zatvorenih skupova iz X .

<u>Definicija 2.2.3.</u> Za prsten zatvorenih skupova $\mathbb{P}$ u topološkom prostoru (X,T) kažemo da razdvaja tačke i zatvorene skupove ako za svaku tačku $x \in X$ i zatvoren skup Z , tako da $x \notin Z$, postoje E , $E' \in \mathbb{P}$ tako da je $x \in E$, $Z \subseteq E'$ i $E \cap E' = \emptyset$.

<u>Teorema 2.2.4.</u> Neka je $\mathbb{P}$ neki prsten zatvorenih skupova u topološkom prostoru (X,T) . Tada je

$$f : X \longrightarrow W(\mathbb{P}) \quad , \quad f(x) = \mathrm{Fil}_{\mathbb{P}} x$$

homeomorfno ulaganje ako i samo ako je (X,T) T_1 i $\mathbb{P}$ razdvaja tačke i zatvorene skupove.

<u>Dokaz</u> : $W(\mathbb{P})$ posmatramo kao prostor ultramonada sa poznatom topologijom .

Pretpostavimo da $\mathbb{P}$ razdvaja tačke i zatvorene skupove i da je (X,T) T_1 . Tada je $\mathbb{P}$ baza zatvorene topologije pa je $m_{\mathbb{D}}x \subseteq m_T x$ $(x \in X)$. Iz istog razloga je $m_{\mathbb{P}}x \subseteq m_{\mathbb{D}}x$ $(x \in X)$. Tako imamo

$$m_{\mathbb{P}}x \subseteq m_{\mathbb{D}}x = m_T x \qquad \ldots /1/$$

pa je $f(x) = m_{\mathbb{P}}x$ zaista u $W(\mathbb{P})$.

f je neprekidno preslikavanje . Zaista , neka je $f(x_o)=$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Zbog jednakosti u /1/ postoji $G \in \mathbb{D}$ tako da je $x \in G \subseteq O$. Tada je $f(x) \in f(G) \subseteq f(O)$. Međutim, $f(G) = {}^*G/\approx \cap f(X)$ pa je $f(x) \in {}^*G/\approx \cap f(X) \subseteq f(O) \cap f(X)$. Na kraju f je injekcija jer je (X,T) T_1.

Obratno, neka je $f(x) = m_{\mathbb{P}}x$ homeomorfno ulaganje. Tada je (X,T) T_1 jer je f injekcija. Dalje $f(x)$ je ultramonada pa prema lemi 2.2.1. mora biti $m_{\mathbb{P}}x \subseteq m_{\mathbb{D}}x$ $(x \in X)$. Ako uzmemo $O \in T$ tako da je $x \in O$ tada zbog otvorenosti preslikavanja f $\big($u $f(X)\big)$ postoji $G \in \mathbb{D}$ tako da je $f(x) \in {}^*G/\approx \cap f(X) \subseteq f(O) \cap f(X)$. Tako imamo $x \in G \subseteq O$ jer, ako postoji $x_o \in G$ tada je zbog $m_{\mathbb{P}}x_o \subseteq m_{\mathbb{D}}x_o$, $m_{\mathbb{P}}x_o = f\,x_o \in$ $\in {}^*G/\approx \cap f(X) \subseteq f(O)$. Sa druge strane $f(x_o) \notin f(O)$.

Tako smo dokazali da je $m_{\mathbb{D}}x = m_T x$ $(x \in X)$ dakle vredi /1/. Sada ako je Z zatvoren i $x \notin Z$ tada zbog jednakosti u /1/ postoji $E_1 \in \mathbb{P}$ tako da je $x \notin E_1 \supseteq Z$ a zbog inkluzije u /1/ postoji $E_2 \in \mathbb{P}$ tako da $x \in E_2$ i $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Dakle, $\mathbb{P}$ razdvaja tačke i zatvorene skupove. $\dashv$

$W(\mathbb{P})$ je kompaktifikacija od (X,T) ako je $\mathbb{P}$ prsten kao u teoremi 2.2.4. .

<u>Teorema 2.2.5.</u> Neka je (X,T) T_1 topološki prostor i $\mathbb{P}$ prsten zatvorenih skupova koji razdvaja tačke i zatvorene skupove. Tada je $W(\mathbb{P})$ T_1 kompaktifikacija od (X,T).

<u>Dokaz</u> : Ako je $f : X \longrightarrow W(\mathbb{P})$ definisano kao u teoremi 2.2.4. tada je ono homeomorfno ulaganje. Ostaje da se dokaže da je $W(\mathbb{P})$ kompaktan T_1 i da je $f(X)$ gust u $W(\mathbb{P})$.

Ako je $\{{}^*E_i/\approx \ : i \in I\}$ centrirana familija baznih zat-

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

vorenih tada je familija $\{{}^*E_i : i \in I\}$ centrirana pa se može produžiti do ultrafiltra u $\mathbb{P}$ čija je monada element svakog od skupova ${}^*E_i/\approx$ $(i \in I)$. To pokazuje da je $W(\mathbb{P})$ kompaktan .

Uzmimo bilo koji bazni otvoreni skup u $W(\mathbb{P})$ ${}^*G/\approx \cap W(\mathbb{P})$ $(G \in \mathbb{D})$. Uzmimo proizvoljni $x \in G$; tada je zbog $m_{\mathbb{P}}x \subseteq m_{\mathbb{D}}x \subseteq {}^*G$ (relacija /1/ u dokazu predhodne teoreme) , $m_{\mathbb{P}}x \in {}^*G/\approx \cap W(\mathbb{P})$ dakle , $f(X)$ je gust u $W(\mathbb{P})$.

Na kraju $W(\mathbb{P})$ je T_1 jer ako uzmemo različite ultramonade m_1 i m_2 tada postoje E_1 , $E_2 \in \mathbb{P}$ takvi da je $m_1 \subseteq {}^*E_1$, $m_2 \subseteq {}^*E_2$ i $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ pa su ${}^*E_1^c/\approx \cap W(\mathbb{P})$ i ${}^*E_2^c/\approx \cap W(\mathbb{P})$ okoline od m_2 i m_1 koje ne sadrže m_1 i m_2 respektivno. ⊣

<u>Definicija 2.2.4.</u> Prsten $\mathbb{P}$ se naziva <u>normalnim</u> ako se svaka dva $\mathbb{P}$ skupa (tj. dva skupa koji pripadaju $\mathbb{P}$) koji su disjunktni mogu odvojiti disjunktnim $\mathbb{D}$ skupovima . Tj. E_1 , $E_2 \in \mathbb{P}$ i $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ povlači da postoje G_1 , $G_2 \in \mathbb{D}$ tako da je $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $E_1 \subseteq G_1$, $E_2 \subseteq G_2$.

<u>Teorema 2.2.6.</u> $W(\mathbb{P})$ je T_2 ako i samo ako je $\mathbb{P}$ normalan prsten , pri čemu pretpostavljamo da je $m_{\mathbb{P}}x \subseteq m_{\mathbb{D}}x$ za $x \in X$ tj. da su monade standardnih tačaka ultramonade .

<u>Dokaz</u> : Neka je $\mathbb{P}$ normalan . Uzmimo dve različite ultramonade $m_1 \neq m_2$. Tada je $m_1 \cap m_2 = \emptyset$ pa postoje E_1 , $E_2 \in \mathbb{P}$ tako da je $m_1 \subseteq {}^*E_1$, $m_2 \subseteq {}^*E_2$ i $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Zbog normalnosti postoje G_1 , $G_2 \in \mathbb{D}$ $E_1 \subseteq G_1$, $E_2 \subseteq G_2$ i $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ pa su ${}^*G_1/\approx \cap W(\mathbb{P})$ i ${}^*G_2/\approx \cap W(\mathbb{P})$ disjunktne okoline od

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

m_1 i m_2 .

Obratno , neka je $W(\mathbb{P})$ T_2 . Uzmimo E_1 , E_2 elemente od $\mathbb{P}$. Iz dokaza teoreme 2.2.5. se vidi da je $W(\mathbb{P})$ kompaktan pa kako je i T_2 on je normalan prostor . ${}^*E_1/\approx \cap W(\mathbb{P})$ i ${}^*E_2/\approx \cap W(\mathbb{P})$ su disjunktni i zatvoreni pa postoje njihevo disjunktne otvorene okoline u $W(\mathbb{P})$. Kako su istovremeno to i kompaktni skupovi a $\mathbb{D}$ prsten , postoje G_1 , $G_2 \in \mathbb{D}$ tako da su ${}^*G_1/\approx \cap W(\mathbb{P})$ i ${}^*G_2/\approx \cap W(\mathbb{P})$ njihove disjunktne otvorene okoline . Sada mora biti ${}^*E_1 \subseteq {}^*G_1$ jer u suprotnom bi ${}^*E_1 \cap {}^*G_1^c$ sadržao ultramonadu koja je element od ${}^*E_1/\approx \cap W(\mathbb{P})$ a nije element od ${}^*G_1/\approx \cap W(\mathbb{P})$. Analogno je ${}^*E_2 \subseteq {}^*G_2$. Takođe je ${}^*G_1 \cap {}^*G_2 = \emptyset$ jer bi u suprotnom , zbog $m_{\mathbb{P}}x = m_{\mathbb{D}}x$, bilo $({}^*G_1/\approx \cap W(\mathbb{P})) \cap ({}^*G_2/\approx \cap W(\mathbb{P})) \neq \emptyset$. $\dashv$

Mogli smo , bez pretpostavke $m_{\mathbb{P}}x = m_{\mathbb{D}}x$, dokazati da je T_2 ako i samo ako je $\mathbb{P}$ normalnam prsten , međutim posmatramo samo prostor $W(\mathbb{P})$.

Dakle , prva nestandardna slika **Wallmanove** kompaktifikacijeje ta da se ona može posmatrati kao podprostor od faktor-prostora ${}^*X/\approx$ kada se u ${}^*X$ posmatra $m_{\mathbb{P}}$ topologija . Sada ćemo pokazati da se $W(\mathbb{P})$ može dobiti kao ${}^*X/r$ gde je r neko razbijanje od ${}^*X$ a u ${}^*X$ se posmatra ili $m_{\mathbb{P}}$ ili $m_{\mathbb{D}}$ topologija .

Promatramo proizvoljan prsten skupova u X . Dva filtra $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2$ su uporediva ako postoji filter koji sadrži i $\mathbb{F}_1$ i $\mathbb{F}_2$. $E \in \mathbb{P}$ je uporediv sa $\mathbb{F}_1$ ako je filter generisan sa E uporediv sa $\mathbb{F}_1$.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

<u>Lema 2.2.2.</u> /i/ Filtri $\mathbb{F}_1$ i $\mathbb{F}_2$ su uporedivi ako i samo ako je

$$m_{\mathbb{D}} m\mathbb{F}_1 \cap m\mathbb{F}_2 \neq \emptyset \quad ;$$

/ii/ $E \in \mathbb{P}$ je uporediv sa $\mathrm{Fil}_{\mathbb{P}} x \quad (x \in {}^*X)$ ako i samo ako je $x \in m_{\mathbb{D}} E$;

/iii/ ako se $\mathrm{Fil}_{\mathbb{P}} x \quad (x \in {}^*X)$ može produžiti do jedinstvanog ultrafiltera $\mathbb{F}$ tada je

$$\mathbb{F} = \{ E \in \mathbb{P} : x \in m_{\mathbb{D}} E \} \quad .$$

<u>Dokaz</u> : /i/ Ako su $\mathbb{F}_1$ i $\mathbb{F}_2$ uporedivi tada je $m\mathbb{F}_1 \cap m\mathbb{F}_2 \neq \emptyset$ pa tim pre vredi gornji uslov . Obratno , ako je $m_{\mathbb{D}} m\mathbb{F}_1 \cap m\mathbb{F}_2 = \emptyset$ tada je $m\mathbb{F}_1 \cap {}^*G_1^c = \emptyset$ za neki ${}^*G_1 \supseteq m\mathbb{F}_1$, $G_1 \in \mathbb{D}$ pa je $m\mathbb{F}_1 \cap m\mathbb{F}_2 = \emptyset$.

/ii/ Iz /i/ E je uporedivo sa $\mathrm{Fil}_{\mathbb{P}} x$ ako i samo ako je $m_{\mathbb{D}} E \cap m_{\mathbb{P}} x \neq \emptyset$ a to je ekvivalentno sa $x \in m_{\mathbb{D}} E$.

/iii/ Ako se $\mathrm{Fil}_{\mathbb{P}} x$ može produžiti do jedinstvenog ultrafiltera $\mathbb{F}$ tada je $\mathbb{F} \subseteq \{ E \in \mathbb{P} : x \in m_{\mathbb{D}} E \}$. Obratna inkluzija vredi jer bi se u suprotnom $\mathrm{Fil}_{\mathbb{P}} x$ širio do dva različita ultrafiltera . $\dashv$

<u>Lema 2.2.3.</u> Da bi se $\mathrm{Fil}_{\mathbb{P}} x$ mogao produžiti do jedinstvenog ultrafiltera , za $x \in {}^*X$, potrebno je i dovoljno da $\mathbb{P}$ bude normalan prsten .

<u>Dokaz</u> : Neka su $E_1, E_2 \in \mathbb{P}$ i $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Ako bi bilo $m_{\mathbb{D}} E_1 \cap m_{\mathbb{D}} E_2 \neq \emptyset$, recimo da x pripada tom preseku , tada bi se $\mathrm{Fil}_{\mathbb{P}} x$ širio do dva različita ultrafiltera prema predhodnoj lemi . Dakle $m_{\mathbb{D}} E_1 \cap m_{\mathbb{D}} E_2 = \emptyset$ pa se E_1 i E_2 mogu odvoji-

$\mathbb{D}$ skupovima .

Obrtano , neka se $Fil_{\mathbb{P}}x$ širi do dva različita ultrafiltera $\mathbb{F}_1$ i $\mathbb{F}_2$. Tada postoje $E_1 \in \mathbb{F}_1$ i $E_2 \in \mathbb{F}_2$ tako da je $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Kako je $\mathbb{P}$ normalan postoje $E_1', E_2' \in \mathbb{P}$ sa $E_1 \subseteq E_1'$, $E_2 \subseteq E_2'$, $E_1' \cup E_2' = X$. Međutim , $Fil_{\mathbb{P}}x$ je prost pa ili $E_1' \in Fil_{\mathbb{P}}x$ ili $E_2' \in Fil_{\mathbb{P}}x$. U prvom slučaju $E_1' \in \mathbb{F}_2$ i $E_1' \cap E_2 = \emptyset$ što je nemoguće . Analogno u drugom slučaju . ⊣

Tako ćemo od sada pretpostaviti da je $\mathbb{P}$ normalan prsten. Promatraćemo preslikavanje $f : {}^{*}X \longrightarrow W(\mathbb{P})$ definisano sa $f(x) = \{E \in \mathbb{P} : m_{\mathbb{D}}E \ni x\}$ tj. tački $x \in {}^{*}X$ ćemo pridružiti jedinstveni ultrafilter do koga se $Fil_{\mathbb{P}}x$ širi , a on je , prema lemi 2.2.2. , oblika $\{E \in \mathbb{P} : x \in m_{\mathbb{D}}E\}$.

<u>Lema 2.2.4.</u> $f^{-1}(f(x)) = m_{\mathbb{D}}m_{\mathbb{P}}x$.

<u>Dokaz</u> : Dokažimo prvo da je

$$f(x) = f(y) \longleftrightarrow y \in m_{\mathbb{D}}mf(x) \qquad \ldots /1/$$

Zaista , ako $y \notin m_{\mathbb{D}}mf(x)$ tada $y \in {}^{*}E$ za neko $E \in \mathbb{P}$ za koje je ${}^{*}E \cap mf(x) = \emptyset$ pa postoji $E_1 \in f(x)$ tako da je ${}^{*}E \cap {}^{*}E_1 = \emptyset$. Zbog normalnosti , E i E_1 se mogu razdvojiti $\mathbb{D}$ skupovima pa je $m_{\mathbb{P}}y \cap m_{\mathbb{D}}mf(x) = \emptyset$. Budući da je $mf(y) \subseteq$ $\subseteq m_{\mathbb{P}}y$, prema lemi 2.2.2. $f(x)$ i $f(y)$ nisu uporedivi.

Obratno , ako $y \in m_{\mathbb{D}}mf(x)$ tada je $m_{\mathbb{P}}y \cap m_{\mathbb{D}}mf(x) \neq \emptyset$ pa su $Fil_{\mathbb{P}}y$ i $f(x)$ uporedivi i lema 2.2.3. nam govori da je $f(x) = f(y)$.

Dakle , prema /1/ ostaje da se dokaže da je

$$m_{\mathbb{D}} m f(x) = m_{\mathbb{D}} m_{\mathbb{P}} x \quad .$$

$\subseteq$ vredi jer je $mf(x) \subseteq m_{\mathbb{P}} x$. Obratno , ako $^*G \supseteq mf(x)$ za $G \in \mathbb{D}$ tada mora biti $m_{\mathbb{P}} x \subseteq {}^*G$, jer bi u suprotnom $^*E_0 = {}^*X \setminus {}^*G$ bilo uporedivo sa $Fil_{\mathbb{P}} x$ tj. $E_0 \in f(x)$ što je nemoguće jer je $^*E_0 \cap mf(x) = \emptyset$, pa vredi obratna inkluzija . ⊣

<u>Lema 2.2.5.</u> Ako je $E \in \mathbb{P}$ tada je

$$m_{\mathbb{P}} m_{\mathbb{D}} E = m_{\mathbb{D}} E \quad .$$

<u>Dokaz</u> : Ako $x \in m_{\mathbb{D}} E$ tada postoji $E_1 \in \mathbb{D}$ sa svojstvom da je $x \in {}^*E_1$ i $E \cap E_1 = \emptyset$ pa budući da je $\mathbb{P}$ normalan postoje $G_1, G_2 \in \mathbb{D}$ tako da je $E \subseteq G_1$, $E_1 \subseteq G_2$ i $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Tako $x \in {}^*E_1 \subseteq {}^*G_2$ i $x \notin {}^*G_1$ pa $x \notin m_{\mathbb{P}} m_{\mathbb{D}} E$.

Dakle , vredi $m_{\mathbb{D}} E \subseteq m_{\mathbb{P}} m_{\mathbb{D}} E$ dok je suprotna inkluzija očigledna . ⊣

<u>Lema 2.2.6.</u> Za bilo kakav podskup $A \subseteq {}^*X$ vredi

$$h(k(f(A))) = f(m_{\mathbb{P}} A).$$

<u>Dokaz</u> : Jasno da je $k(f(A)) = \{ E \in \mathbb{P} : m_{\mathbb{D}} E \supseteq A \}$. Zadnji filter označimo sa $\mathbb{F}$. Dokažimo da je za svako $x \in m_{\mathbb{P}} A$ $f(x) \supseteq \mathbb{F}$, što će značiti da je $f(m_{\mathbb{P}} A) \subseteq h(k(f(A)))$.

Trebamo dakle , dokazati da ako je $A \subseteq m_{\mathbb{D}} E$ i $x \in m_{\mathbb{P}} A$ tada je $x \in m_{\mathbb{D}} E$. Međutim , to je jasno jer po lemi 2.2.5. imamo $m_{\mathbb{P}} A \subseteq m_{\mathbb{P}} m_{\mathbb{D}} E = m_{\mathbb{D}} E$.

Da bi dokazali $h(k(f(A))) \subseteq f(m_{\mathbb{P}} A)$ uzmimo $f(x) \in h(k(f(A)))$ i dokažimo da je $f^{-1}(f(x)) \cap m_{\mathbb{P}} A \neq \emptyset$. Zaista , imajući na umu lemu 2.2.4. u suprotnom bi bilo $m_{\mathbb{D}} m_{\mathbb{P}} x \cap m_{\mathbb{P}} A = \emptyset$

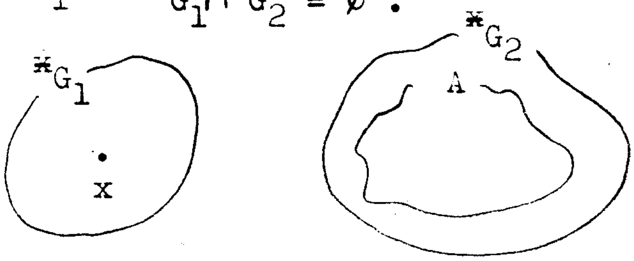
Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

$x \in {}^*E_x$, $A \subseteq {}^*E$ i $E_x \cap E = \emptyset$. Sada E_x i E možemo razdvojiti $\mathbb{D}$ skupovima pa imamo $E_x \in f(x)$ (jer $x \in {}^*E_x$) i $E_x \notin \mathbb{P}$ (jer $m_{\mathbb{D}} E_x \not\supseteq A$) pa $\mathbb{P} \not\subseteq f(x)$ tj. $f(x) \notin h(k(f(A)))$ što je kontradikcija . ⊣

<u>Lema 2.2.7.</u> Za bilo kakav podskup $A \subseteq {}^*X$ vredi

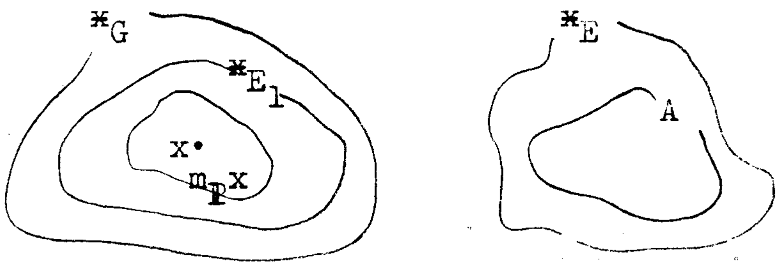
$$f(m_{\mathbb{D}}A) = f(m_{\mathbb{P}}A).$$

<u>Dokaz</u> : Dokažimo da je $f(m_{\mathbb{D}}A) \supseteq f(m_{\mathbb{P}}A)$, tj. za svako $x \in m_{\mathbb{P}}A$ je $f^{-1}(f(x)) \cap m_{\mathbb{D}}A \neq \emptyset$. U suprotnom je (lema 2.2.4.) $m_{\mathbb{D}}m_{\mathbb{P}}x \cap m_{\mathbb{D}}A = \emptyset$ pa postoje $G_1, G_2 \in \mathbb{D}$ tako da je $m_{\mathbb{P}}x \subseteq {}^*G_1$, $A \subseteq {}^*G_2$ i ${}^*G_1 \cap {}^*G_2 = \emptyset$.



Sada imamo $x \notin {}^*G_1^c$ i ${}^*G_1^c \supseteq A$ dakle , $x \notin m_{\mathbb{P}}A$ što je kontradikcija .

Obratno , da bi vredilo $f(m_{\mathbb{D}}A) \subseteq f(m_{\mathbb{P}}A)$ mora za svako $x \in m_{\mathbb{D}}A$ biti $m_{\mathbb{D}}m_{\mathbb{P}}x \cap m_{\mathbb{P}}A = \emptyset$. U suprotnom , postoje $G \in \mathbb{D}$, $E \in \mathbb{P}$ tako da je ${}^*G \supseteq m_{\mathbb{P}}x$, ${}^*E \supseteq A$ i ${}^*G \cap {}^*E = \emptyset$.



Kako je $m_{\mathbb{P}}x \subseteq {}^*G$ postoji $E_1 \in \mathbb{P}$; ${}^*E_1 \ni x$ i ${}^*E_1 \subseteq {}^*G$. Imamo $x \notin {}^*E_1^c$ i ${}^*E_1^c \supseteq A$ pa $x \notin m_{\mathbb{D}}A$ što je kontradikcija . ⊣

Tako smo izvršili sve pripreme za najvažniju teoremu ovog poglavlja.

<u>Teorema 2.2.7.</u> Neka je $\mathbb{P}$ normalan prsten skupova iz X. Tada je preslikavanje $f : {}^*X \longrightarrow W(\mathbb{P})$ definisano kao

$$f(x) = \{ E \in \mathbb{P} : x \in m_{\mathbb{D}}E \}$$

neprekidno i zatvoreno pri čemu u ${}^*X$ promatramo ili $m_{\mathbb{P}}$ ili $m_{\mathbb{D}}$ topologiju.

<u>Dokaz</u> : Kao što znamo element zatvorene baze u $W(\mathbb{P})$ izgleda kao $Z = \{ \mathbb{F} \in W(\mathbb{P}) : E \in \mathbb{F} \}$ za neko $E \in \mathbb{P}$. Tako $x \in f^{-1}(Z)$ ako i samo ako $f(x) \in Z$ a to je ekvivalentno sa $E \in f(x)$ što je, po definiciji funkcije f, isto što i $x \in m_{\mathbb{D}}E$. Dakle, $f^{-1}(Z) = m_{\mathbb{D}}E$ pa je f neprekidna u $m_{\mathbb{D}}$ topologiji. Međutim, po lemi 2.2.5. je $m_{\mathbb{P}}m_{\mathbb{D}}E = m_{\mathbb{D}}E$ pa je f neprekidna i u $m_{\mathbb{P}}$ topologiji. Zatvorenost preslikavanja f u obe topologije sledi iz leme 2.2.6. i 2.2.7. . ⊣

Tako je **Wallmanov** prostor $W(\mathbb{P})$ homeomorfan sa faktor prostorom ${}^*X/r$ za neku relaciju ekvivalencije r i bilo koju od topologija $m_{\mathbb{P}}$, $m_{\mathbb{D}}$ u ${}^*X$. Ako je (X,T) topološki prostor i $\mathbb{P}$ prsten zatvorenih skupova tako da je $W(\mathbb{P})$ T_2 kompaktifikacija od X, za šta je potrebno i dovoljno da $\mathbb{P}$ razlikuje tačke i zatvorene skupove i da je **normalan** prsten, tada $W(\mathbb{P})$ možemo dobiti kao ${}^*X/r$.

<u>Teorema 2.2.8.</u> Ako je $\mathbb{P}$ prsten zatvorenih skupova u topološ-

kom prostoru X,T , koji je normalan i koji razlikuje tačke i zatvorene skupove tada je $W(\mathbb{P})$ homeomorfan sa $^{*}X/r$ za neku relaciju ekvivalencije r i bilo koju od topologija $m_{\mathbb{D}}$ i $m_{\mathbb{P}}$ u $^{*}X$. $\dashv$

Ako je (X,T) T_1 prostor Tihonova tada sa

$$\mathbb{Z} = \{ f^{-1}(0) \ : \ f : X \longrightarrow [0,1] \ \text{neprekidna funkcija} \}$$

označimo prsten nula-skupova . Jasno da je takođe ,

$$\mathbb{Z} = \{ f^{-1}(Z) \ : \ Z \subseteq [0,1] \ \text{zatvoren skup} \ , \ f : X \longrightarrow [0,1] \ \text{neprekidna funkcija} \} .$$

Tako, dualan prsten $\mathbb{C}$ prstena $\mathbb{Z}$ izgleda kao

$$\mathbb{C} = \{ f^{-1}(O) : O \subseteq [0,1] \ , \ f : X \longrightarrow [0,1] \ \text{neprekidna funkcija,} \ O - \text{otvoren skup} \} .$$

Elementi prstena $\mathbb{C}$ se nazivaju konula skupovi.

<u>Teorema 2.2.9</u>. $W(\mathbb{Z})$ je Stone-Čech - ova kompaktifikacija od (X,T) .

<u>Dokaz</u> : Treba pokazati da se neprekidna funkcija $f : X \longrightarrow [0,1]$ može produžiti do neprekidne funkcije $\overline{f} : {}^{*}X/r \longrightarrow [0,1]$, gde **Wallmanov** prostor $W(\mathbb{Z})$ zamišljamo kao $^{*}X/r$ tako da u $^{*}X$ promatramo $m_{\mathbb{C}}$ topologiju .

Ako u $^{*}[0,1]$ posmatramo m_t topologiju , gde je t obična topologija u $[0,1]$, tada je $^{*}f : {}^{*}X \longrightarrow {}^{*}[0,1]$ neprekidno preslikavanje . Zaista , ako uzmemo $O \in t$ tada je $^{*}f^{-1}(^{*}O) = {}^{*}(f^{-1}(O))$ a to je bazni zatvoreni skup u $m_{\mathbb{C}}$.

Dalje , dokažimo da ako je xry $(x,y \in {}^{*}X)$ tada su $^{*}f(x)$ i $^{*}f(y)$ beskonačno blizu . Zaista , u suprotnom se

${}^*f(x)$ i ${}^*f(y)$ mogu odvojiti disjunktnim zatvorenim intervalima ${}^*I_1$, ${}^*I_2$ tj. ${}^*f(x) \in {}^*I_1$, ${}^*f(y) \in {}^*I_2$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $I_1, I_2 \subseteq [0,1]$. Tako $x \in {}^*f^{-1}(I_1)$, $y \in {}^*f^{-1}(I_2)$, $f^{-1}(I_1)$, $f^{-1}(I_2) \in Z$ i ${}^*f^{-1}(I_1) \cap {}^*f^{-1}(I_2) = \emptyset$, pa je $\neg(xry)$.

Na kraju koristeći teoremu 2.1.3. funkcija $st \circ f : {}^*X \longrightarrow [0,1]$ je neprekidna pa je $\bar{f} : {}^*X/r \longrightarrow [0,1]$ definisana sa $\bar{f}(r(x)) = st({}^*f(x))$ korektno definisana i neprekidna. Budući da je ${}^*f(x) = f(x)$ za $x \in X$ $\bar{f}$ produžuje f. $\dashv$

Za narednu teoremu nam je potrebna sledeća lema :

<u>Lema 2.2.8.</u> Neka je Y T_2 topološki prostor i $\mathcal{B}$ neka njegova otvorena baza, zatvorena u odnosu na uniju konačno svojih elemenata. Tada je

$$st^{-1}(K) = \bigcap_{\substack{O \in \mathcal{B}, \\ {}^*O \supseteq K}} {}^*O \qquad \text{za bilo koji kompakt}$$

K iz X.

<u>Dokaz</u> : Jasno da $\bigcap_{\substack{O \in \mathcal{B}, \\ {}^*O \supseteq K}} {}^*O \supseteq st^{-1}(K)$. Obratno, ako $x \notin st^{-1}(K)$ tada za svako $k \in K$ postoji $O_k \in \mathcal{B}$ tako da $k \in O_k$ i $x \notin {}^*O_k$. $\{O_k : k \in K\}$ pokriva K pa postoji konačan podpokrivač $O_{k_1}, \dots, O_{k_n}$ za koji $x \notin {}^*O_{k_1} \cup \dots \cup {}^*O_{k_n}$ dakle $x \notin \bigcap_{\substack{O \in \mathcal{B}, \\ {}^*O \supseteq K}} {}^*O$ jer je $\mathcal{B}$ zatvorena u odnosu na konačne unije. $\dashv$

<u>Teorema 2.2.10.</u> Ako je (X,T) T_1 Tihonovljev prostor i (Y,t) T_2 kompakt tada se svaka neprekidna funkcija $f : X \longrightarrow Y$

produžuje do neprekidne funkcije $\overline{f} : X \longrightarrow Y$, gde je X kompaktifikacija Stone-Čecha . .

<u>Dokaz</u> : Radimo analogno teoremi 2.2.9. . X je ${}^*X/r$ gde u ${}^*X$ posmatramo $m_{\mathbb{C}}$ topologiju . U ${}^*Y$ posmatramo m_t topologiju .

Dokažimo da je $st \circ {}^*f : {}^*X \longrightarrow Y$ neprekidno preslikavanje . Zaista , za $K \subseteq Y$ zatvoren (dakle kompaktan) je $st^{-1}(K) = \bigcap\limits_{\substack{O \in t_1, \\ {}^*O \supseteq K}} {}^*O$ prema lemi 2.2.1o. , gde je t_1 prsten konula skupova u Y . Tako je ${}^*f^{-1}(st^{-1}(K)) = \bigcap\limits_{\substack{O \in t_1, \\ {}^*O \supseteq K}} {}^*f^{-1}({}^*O)$ zatvoren u $m_{\mathbb{C}}$ topologiji jer je ${}^*f^{-1}({}^*O) = {}^*(f^{-1}(O))$ i $f^{-1}(O) \in \mathbb{C}$.

Dalje ako je xry $(x, y \in {}^*X)$ tada su ${}^*f(x)$ i ${}^*f(y)$ u istoj monadi . Zaista , u suprotnom imamo $a = st({}^*f(x)) \neq$ $\neq b = st({}^*f(y))$, pa postoji neprekidna funkcija $g : Y \longrightarrow [o,1]$ tako da je $g(a) = o$, $g(b) = 1$ odakle se vidi da se x i y mogu odvojiti $\mathbb{Z}$ skupovima (tj. njihovim zvezdama). Dakle $\neg(xry)$.

Prema tome možemo definisati $\overline{f} : {}^*X/r \longrightarrow Y$ tako da dijagram

$$\begin{tikzcd}
{}^*X \arrow[r, "nat"] \arrow[d, "{}^*f"'] & {}^*X/r \arrow[d, "\overline{f}"] \\
{}^*Y \arrow[r, "st"'] & Y
\end{tikzcd}$$

komutira (nat je prirodno preslikavanje koje svakom elementu iz ${}^*X$ dodeljuje klasu ekvivalencije kojoj on pripada) pa budući da je $st \circ {}^*f$ neprekidno to je $\overline{f}$ neprekidno produženje od f jer je za standardne x $f(x) = {}^*f(x)$.⊣

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

2.3. Svaka kompaktifikacija se može dobiti kao $^{*}X/r$

Wallmanova kompaktifikacija se dakle, prema teoremi 2.2.8. realizuje kao $^{*}X/r$ za neku relaciju ekvivalencije r u $^{*}X$ i bilo koju od topologija $m_{\mathbb{P}}$, $m_{\mathbb{D}}$ u $^{*}X$, gde je $\mathbb{P}$ normalan prsten zatvorenih skupova u X koji razdvajaju tačke i zatvorene skupove. U ovom poglavlju ćemo pokazati da se svaka T_2 kompaktifikacija topološkog prostora X može dobiti na gornji način. Diskutiraćemo i pitanje kada je $^{*}X/r$ kompaktifikacija od X za neku relaciju ekvivalencije r.

Biće nam potrebna sledeća lema koja je dopuna leme 2.1.4..

<u>Lema 2.3.1.</u> Ako je (X,T) T_2 normalan topološki prostor tada je za bilo koji zatvoren skup S

$$st^{-1}(S) = n.s.^{*}X \cap m_{\mathbb{C}}S$$

gde je $\mathbb{C}$ prsten svih zatvorenih skupova u X.

<u>Dokaz</u>: Iz leme 2.1.4. znamo da je $st^{-1}(S) = n.s.^{*}X \cap m_T S$, jer je Hausdorffov normalan topološki prostor ujedno i regularan. Međutim, zbog normalnosti svaka okolina zatvorenog skupa S sadrži zatvorenu okolinu od S pa je $m_{\mathbb{C}}S = m_T S$ i lema je dokazana. ⊣

Produženje teoreme 2.1.3. je sledeća teorema.

Teorema 2.3.1. Neka je (X,T) T_2 normalan prostor i $\mathbb{C}$ prsten svih zatvorenih skupova u X . Tada je

$$st : n.s.{}^*X \longrightarrow X$$

neprekidno i zatvoreno preslikavanje , gde se $n.s.{}^*X$ smatra podprostorom od ${}^*X$ u kome se posmatra $m_{\mathbb{C}}$ topologija .

Dokaz : st je neprekidno preslikavanje zbog leme 2.3.1. a zatvorenost sledi iz leme 2.1.3. i činjenice da je $st(M) = st(n.s.{}^*X \cap M)$ za $M \subseteq {}^*X$. ⊣

Sada možemo dokazati teoremu o reprezentaciji kompaktifikacija topološkog prostora X .

Teorema 2.3.2. Neka je (X,T) T_2 topološki prostor i (Y,t) njegova T_2 kompaktifikacija . Tada postoji takva relacija ekvivalencije r u ${}^*X$ tako da je (Y,t) homeomorfno sa ${}^*X/r$, gde se u ${}^*X$ posmatra bilo m_T bilo $m_{\mathbb{C}}$ topologija ($\mathbb{C}$ je kao obično prsten svih zatvorenih skupova u X).

Dokaz : Prema teoremama 2.1.3. i 2.3.1. preslikavanje

$$st_t : {}^*Y \longrightarrow Y$$

je neprekidno i zatvoreno bilo da u ${}^*Y$ posmatramo m_t ili m_c topologiju , gde je c prsten svih zatvorenih skupova u Y . Tako je , ako u ${}^*X$ posmatramo m_T ili $m_{\mathbb{C}}$ topologiju ,

$$st_t : {}^*X \longrightarrow Y$$

neprekidno preslikavanje . Dokažimo da je ono zatvoreno . Neka je $\bigcap_{i\in I} {}^*A_i$ m_T ($m_{\mathbb{C}}$) zatvoren skup , gde je $A_i \in T$ $(i \in I)$ ($A_i \in \mathbb{C}$ $(i \in I)$). Tada je, prema lemi 2.1.5., $st_t({}^*X \cap \bigcap_{i\in I} {}^*A_i) = st_t(\bigcap_{i\in I} {}^*A_i \cap {}^*X) = \bigcap_{i\in I} st_t({}^*A_i \cap {}^*X)$ zatvoren skup jer je $st_t({}^*A_i \cap {}^*X)$ zatvoren , pa je st_t zatvoreno preslikavanje .

Na kraju $st_t : {}^*X \longrightarrow Y$ je na jer je X gust u Y . Tako je Y homeomorfno sa ${}^*X/r$, gde se r definiše kao xry ako i samo ako je $st_t(x) = st_t(y)$. $\dashv$

Koristeći ideju Robinsona ([Ro]) možemo dokazati da za zadanu kompaktifikaciju $Y \supseteq X$ postoji neprekidno i zatvoreno preslikavanje $f : {}^*X \longrightarrow Y$, gde se u ${}^*X$ posmatra $m_{\mathbb{Z}}$ ili $m_{\mathbb{C}}$ topologija za prstene $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{C}$ nula i konula skupova respektivno . Zaista , identičko preslikavanje $id : X \longrightarrow Y$ se prema teoremi 2.2.10. može neprekidno produžiti do funkcije $g : X \longrightarrow Y$. g je surjekcija jer je $g(X)(\supseteq X)$ zatvoren skup i X gust u Y . Prema teoremi 2.2.7. za bilo koju od topologija $m_{\mathbb{Z}}$ ili $m_{\mathbb{C}}$ postoji neprekidno , zatvoreno i surjektivno preslikavanje $h : {}^*X \longrightarrow X$ tako da je $f = g \circ h$ traženo preslikavanje.

U skup svih kompaktifikacija prostora X uvodi se poredak $\prec$ na taj način da ako imamo dve kompaktifikacije Y_1 i Y_2 od X tada je $Y_1 \succ Y_2$ ako i samo ako postoji neprekidno i surjektivno preslikavanje $f : Y_1 \longrightarrow Y_2$ tako da je $f(x) = x$ za svako $x \in X$. Imajući stav reprezentacije za sve T_2 kompaktifikacije , možemo izvesti nestandardni kriterij kada je jedna kompaktifikacija veća od druge.

<u>Teorema 2.3.3.</u> Neka su Y_1 i Y_2 T_2 kompaktifikacije prostora X . Tada je $Y_1 \succ Y_2$ ako i samo ako je $r_1 \subseteq r_2$, gde su r_1 i r_2 relacije ekvivalencije u ${}^*X$ koje , prema teoremi 2.3.2. induciraju Y_1 i Y_2 .

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

<u>Dokaz</u> : Neka je $Y_1 \succ Y_2$. Tada imamo dijagram

$$\begin{tikzcd} & Y_1' \arrow[dd, "f"] \\ {}^*X \arrow[ur, "st_1"] \arrow[dr, "st_2"'] & \\ & Y_2' \end{tikzcd}$$

gde su st_1 , st_2 "standardni dio" preslikavanja u odnosu na topologije u Y_1 i Y_2 respektivno i f neprekidna surjekcija za koju je $f(x) = x$ za svako $x \in X$.

Za $x \in X$ je $st_1(x) = st_2(x) = x$ i $f(x) = x$ pa je $f \circ st_1|_X = st_2$. Ako u ${}^*X$ posmatramo bilo koju od topologija $m_{\mathbb{T}}$ ili $m_{\mathbb{C}}$ tada su $f \circ st_1$ i st_2 neprekidna preslikavanja koja se podudaraju na X , koji je svuda gust u ${}^*X$, pa budući da je Y_2 T_2 to je $f \circ st_1 = st_2$.

Tako ako je $st_1(x) = st_1(y)$ tada je $f(st_1(x)) = f(st_1(y))$ tj. $st_2(x) = st_2(y)$ pa je $r_1 \subseteq r_2$.

Obratno , ako je $r_1 \supseteq r_2$ tada je prirodno preslikavanje $nat : {}^*X/r_1 \longrightarrow {}^*X/r_2$ definisano sa $nat(r_1(x)) = r_2(x)$ $(x \in {}^*X)$ tako da , ako Y_1 i Y_2 zamišljamo kao ${}^*X/r_1$ i ${}^*X/r_2$, vidimo da je $Y_1 \succ Y_2$. $\dashv$

<u>Teorema 2.3.4.</u> Neka su r_i $(i \in I)$ relacije ekvivalencije u ${}^*X$ tako da su ${}^*X/r_i$ kompaktifikacije od X (ne obavezno T_2) , tj. $x \longrightarrow r_i(x)$ je homeomorfno ulaganje topološkog prostora (X, T) gde se u ${}^*X$ posmatra bilo $m_{\mathbb{T}}$ bilo $m_{\mathbb{C}}$ topologija , gde je $\mathbb{C}$ kao obično zatvorena topologija u X . Pretpostavimo još da je za svako $x \in X$ i $i \in I$ $r_i(x) \subseteq m_{\mathbb{T}}x$. Tada je ${}^*X/\bigcap_{i \in I} r_i$ kompaktifikacija od X (ne obavezno T_2) . Ako su još ${}^*X/r_i$ $(i \in I)$ T_2 tada je i ${}^*X/\bigcap r_i$ T_2 .

Dokaz : Neka je $r = \bigcap_{i\in I} r_i$. Trebamo pokazati da je nat : $X \longrightarrow {}^*X/r$ definisano sa $nat(x) = r(x)$ homeomorfno ulaganje , gde se u ${}^*X$ posmatra $m_{\mathbb{C}}$ (m_T) topologija . Preslikavanje nat je već neprekidno kao suženje neprekidnog preslikavanja i ostaje da se dokaže da je ono zatvoreno .

Za $F \in \mathbb{C}$ imamo , zbog toga što je ${}^*X/r_i$ kompaktifikacija od X ,

$$\bigcup_{y\in F} r_i(y) = C_i \cap \bigcup_{x\in X} r_i(x)$$

gde je C_i zatvoren u ${}^*X$ i unija r_i klasa . Tako je

$$\bigcap_{i\in I} \Big(\bigcup_{y\in F} r_i(y) \Big) = \bigcap_{i\in I} \Big(\bigcup_{x\in X} r_i(x) \cap C_i \Big) \qquad \ldots /1/$$

Međutim , vredi

$$\bigcap_{i\in I} \Big(\bigcup_{y\in F} r_i(y) \Big) = \bigcup_{y\in F} \Big(\bigcap_{i\in I} r_i(y) \Big) .$$

Zaista , $x \in \bigcap_{i\in I} \Big(\bigcup_{y\in F} r_i(y) \Big)$ povlači da za svako $i \in I$ postoji $y_i \in F$ tako da $x \in r_i(y_i)$. Sada za svako $i,j \in I$ mora biti $y_i = y_j$ jer u suprotnom $x \in r_i(y_i) \subseteq m_T y_i$, $x \in r_j(y_j) \subseteq m_T y_j$ $(i \neq j)$ što je u kontradikciji sa $m_T y_i \cap m_T y_j = \emptyset$ (X je T_2) . Tako je $y_i = y$ $(i \in I)$ i $x \in \bigcap_{i\in I} r_i(y)$ tj. $x \in \bigcup_{y\in F} \Big(\bigcap_{i\in I} r_i(y) \Big)$.

Obrat je očigledan jer je za svako $y \in F$ $r_i(y) \subseteq \bigcup_{y\in F} r_i(y)$ pa je $\bigcap_{i\in I} r_i(y) \subseteq \bigcap_{i\in I} \Big(\bigcup_{y\in F} r_i(y) \Big)$ za svako $y \in F$, što daje $\bigcup_{y\in F} \bigcap_{i\in I} r_i(y) \subseteq \bigcap_{i\in I} \Big(\bigcup_{y\in F} r_i(y) \Big)$.

Analogno je $\bigcap_{i\in I} \Big(\bigcup_{x\in X} r_i(x) \Big) = \bigcup_{x\in X} \Big(\bigcap_{i\in I} r_i(x) \Big)$ tako da jednakost /1/ prelazi u

$$\bigcup_{y\in F}\left(\bigcap_{i\in I} r_i(y)\right) = \bigcup_{x\in X}\left(\bigcap_{i\in I} r_i(x)\right) \cap \bigcap_{i\in I} C_i$$

tj. $\bigcup_{y\in F} r(y) = \bigcup_{x\in X} r(x) \cap \bigcap_{i\in I} C_i$.

Sada je $C = \bigcap_{i\in I} C_i$ zatvoren u $^*X$ i unija r klasa jer $x \in C$ povlači $r(x) \subseteq r_i(x) \subseteq C_i$ za svako $i \in I$ pa je $r(x) \subseteq \bigcup_{i\in I} C_i = C$.

Tako smo pokazali da je nat zatvoreno preslikavanje a kako je X gust u $^*X$ i nat neprekidno preslikavanje to je nat(X) gust u $^*X/r$ pa je $^*X/r$ kompaktifikacija od X .

Neka su $^*X/r_i = Y_i$ $(i \in I)$ T_2 . Tada su

$$nat_i : {}^*X \longrightarrow Y_i$$

, $nat_i(x) = r_i(x)$ $(x \in {}^*X)$, neprekidna i zatvorena preslikavanja , pa je i funkcija

$$f : {}^*X \longrightarrow \prod_{i\,I} Y_i$$

definisana kao $f(x) = (nat_i(x))_{i\in I}$, neprekidna i zatvorena kada u $\prod_{i\in I} Y_i$ posmatramo topologiju proizvoda , jer je $^*X$ kompaktan prostor a $\prod_{i\in I} Y_i$ T_2 . Tako je $f(^*X)$ homeomorfan sa $^*X/r'$ za neku relaciju ekvivalencije r' u $^*X$. Dokažimo da je $r' = \bigcap_{i\in I} r_i$. Ako je $(x,y) \in r'$ tada je $f(x) = f(y)$ tj. $(nat_i(x))_{i\in I} = (nat_i(y))_{i\in I}$ pa je za svako $i \in I$ $nat_i(x) = nat_i(y)$ dakle $(x,y) \in \bigcap_{i\in I} r_i$. Obratno , $(x,y) \in \bigcap_{i\in I} r_i$ povlači $nat_i(x) = nat_i(y)$ za svako $i \in I$ pa je $(x,y) \in r'$. Sada budući da je $\prod_{i\in I} Y_i$ T_2 to je i $f(^*X)$ tj. $^*X/r$ T_2 . $\dashv$

Teoreme 2.3.3. i 2.3.4. nam omogućuju da stvorimo intuitivnu sliku o poretku među T_2 kompaktifikacijama i kao posledicu daje sledeću teoremu .

<u>Teorema 2.3.5.</u> Za svaku familiju Y_i $(i \in I)$ T_2 kompaktifikacija prostora X postoji najmanja gornja međa Y.

<u>Dokaz</u> : Svaka od kompaktifikacija Y_i $(i \in I)$ se realizuje kao ${}^*X/r_i$ $(i \in I)$ pa je tražena najmanja gornja međa ${}^*X/\bigcap_{i \in I} r_i$. $\dashv$

Tako Stone-Čechovu kompaktifikaciju možemo dobiti kao ${}^*X/\bigcap_{i \in I} r_i$ gde su r_i $(i \in I)$ sve moguće relacije ekvivalencije u ${}^*X$ koje daju T_2 kompaktifikaciju od X .

Sada ćemo nakratko razmatrati pitanje kada je za neko r razbijanje prostora ${}^*X$ ${}^*X/r$ kompaktifikacija od X . Posmatraćemo samo takve relacije ekvivalencije za koje je $r(x) = m_T x$ $(x \in X)$ gde je kao obično T topologija u X .

<u>Lema 2.3.2.</u> Ako je (X,T) T_2 i regularan topološki prostor tada je ${}^*X/r$ kompaktifikacija od X ako je za svaki zatvoren skup F neke zatvorene baze $\mathbf{B}$ u X $m_T F$ unija r klasa , pod uslovom da u ${}^*X$ posmatramo m_T topologiju . Ako je još X normalan možemo posmatrati i $m_{\mathfrak{C}}$ topologiju u ${}^*X$ $\mathfrak{C}$ zatvoreni skupovi u X .

<u>Dokaz</u> : Prirodno preslikavanje $nat : X \longrightarrow {}^*X/r$, $nat(x) = = rx$ x X , je neprekidno . Dalje , ako je F $\mathbf{B}$ tada je $nat(F) = \{st^{-1}(x) : x \in F\}$ i $nat(X) = \{st^{-1}(x) : x \in X\}$.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

$$\bigcup_{x\in F} st^{-1}(x) = m_T F \cap n.s.{}^{*}X$$

i budući da je $m_T F$ unija r klasa nat je zatvoreno preslikavanje. Naime, ako je Z bilo kakav zatvoren skup imamo $Z = \bigcap_{i\in I} F_i$ $(F_i \in \mathbb{B}, \ i \in I)$ pa je $st^{-1}(Z) = \bigcap_{i\in I} st^{-1}(F_i)$; $st^{-1}(F_i)$ $(i \in I)$ su zatvoreni skupovi i unije r klasa pa je takav i skup $st^{-1}(Z)$ dakle $nat(Z) = \{st^{-1}(x) : x \in Z\}$ je zatvoren u $n.s.{}^{*}X$.

Ako je X normalan tada je $m_T F = m_{\mathbb{C}} F$. ⊣

<u>Teorema 2.3.7.</u> Ako je (X,T) T_2 lokalno kompaktan topološki prostor tada je ${}^{*}X/r$ kompaktifikacija od X (ne obavezno T_2) za bilo koju relaciju ekvivalencije r u ${}^{*}X$ tako da je $r(x) = m_T x$ $(x \in X)$, gde se u ${}^{*}X$ posmatra m_T topologija. Ako je X još i normalan tada se može posmatrati i $m_{\mathbb{C}}$ topologija $\mathbb{C}$ zatvoreni skupovi u X.

<u>Dokaz</u> : Prema prethodnoj lemi dovoljno je naći zatvorenu bazu $\mathbb{B}$ skupova tako da je za svaki $F \in \mathbb{B}$ $m_T F$ unija r klasa. Kako je X lokalno kompaktan postoji zatvorena baza $\mathbb{B}$ tako da je za svaki $F \in \mathbb{B}$ ${}^{*}F^{c} \subseteq n.s.{}^{*}X$. Ako je $y \in m_T F$ i $F \in \mathbb{B}$ tada, zavisno od toga da li je y okolostandardna ili ne, postoje dve mogućnosti: /i/ $y \in m_T x$ $(x \in X)$ tada je, zbog zatvorenosti skupa F, $x \in F$ pa je $r(y) = m_T x \subseteq m_T F$;
/ii/ $y \in {}^{*}X \setminus n.s.{}^{*}X$ tada je $r(y) \subseteq {}^{*}X \setminus n.s.{}^{*}X$ pa budući da $F \in \mathbb{B}$ imamo ${}^{*}F \subseteq {}^{*}X \setminus n.s.{}^{*}X$ odakle je $r(y) \subseteq {}^{*}F \subseteq m_T F$.
Dakle, u oba slučaja je $r(y) \subseteq m_T F$ i teorema je dokazana. ⊣

[illegible] možemo pokazati kako se jednotačkasta kompaktifikacija

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Aleksandrova može dobiti kao ${}^*X/r$.

<u>Teorema 2.3.8.</u> Neka je (X,T) lokalno kompaktan prostor. Tada se kompaktifikacija Aleksandrova jednom tačkom može dobiti kao ${}^*X/r$, gde je $r(x) = m_T x$ za $x \in X$ i $r(x) = {}^*X \setminus n.s.{}^*X$ za $x \in {}^*X \setminus n.s.{}^*X$. U ${}^*X$ se posmatra bilo m_T bilo $m_{\mathbb{C}}$ topologija .

<u>Dokaz</u> : Neka je $(X \cup \{w\}, T')$ jednotačkasta kompaktifikacija Aleksandrova . Ako u ${}^*X \cup \{w\}$ posmatramo bilo $m_{T'}$, bilo $m_{\mathbb{C}'}$ topologiju ($\mathbb{C}'$ zatvorena topologija u $X \cup \{w\}$) tada je $st_{T'} : {}^*X \cup \{w\} \longrightarrow X \cup \{w\}$ neprekidno i zatvoreno preslikavanje , pa je i $st_{T'} : {}^*X \longrightarrow X \cup \{w\}$ neprekidno i zatvoreno preslikavanje kada se u ${}^*X$ posmatra jedna od topologija m_T ili $m_{\mathbb{C}}$. Ako definišemo $(x,y) \in r$ ako i samo ako je $st_{T'}(x) = st_{T'}(y)$ tada je $r(x) = m_T x$ za $x \in X$ i $r(x) = m_{T'} w \cap {}^*X = {}^*X \setminus n.s.{}^*X$ za $x \in {}^*X \setminus n.s.{}^*X$, a $X \cup \{w\}$ je homeomorfan sa ${}^*X/r$. ⊣

GLAVA III

3.1. Loebeva mera

Neka je $\mathbb{P}$ familija podskupova skupa X . Za $\mathbb{P}$ ćemo reći da je <u>poluprsten</u> skupova ako je ona zatvorena u odnosu na preseke konačno svojih elemenata i ako se razlika dva elementa iz $\mathbb{P}$ razlaže na konačno disjunktnih skupova iz $\mathbb{P}$. Drugim rečima $A,B \in \mathbb{P}$ povlači $A \cap B \in \mathbb{P}$ i $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ za neke $A_i \in \mathbb{P}$ $(i = 1,\dots,n)$ tako da je $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$. $\mathbb{P}$ je <u>algebra</u> skupova ako $X \in \mathbb{P}$ i ako $A,B \in \mathbb{P}$ povlači $A \cup B \in \mathbb{P}$, $A \cap B \in \mathbb{P}$, $A \setminus B \in \mathbb{P}$. Za algebru $\mathbb{P}$ kažemo da je <u>σ algebra</u> ako je zatvorena u odnosu na prebrojivu uniju svojih članova .

Neka je $\mathbb{P}$ poluprsten . Funkcija $m : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, definisana na $\mathbb{P}$ i sa vrednostima u skupu nenegativnih realnih brojeva , je prebrojivo aditivna mera (ili σ aditivna mera) ako iz $A = \bigcup_{i \in N} A_i$, $A \in \mathbb{P}$, $A_i \in \mathbb{P}$ $(i \in N)$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ sledi $m(A) = \sum_{i \in N} m(A_i)$.

<u>Teorema 3.1.1.</u>(Carathéodory C.) Neka je $m : \mathbb{P} \longrightarrow [0,1]$ prebrojivo aditivna mera na poluprstenu $\mathbb{P}$ skupova iz X tako da $X \in \mathbb{P}$ i $m(X) = 1$. Tada se m može produžiti do prebrojivo aditivne mere $\overline{m}$ definisane na algebri $\overline{\mathbb{P}} \supseteq \mathbb{P}$. Mera $\overline{m}$ je i kompletna mera tj. $\overline{m}(A) = 0$ i $D \subseteq A$ povlači $D \in \overline{\mathbb{P}}$.

<u>Dokaz</u> : Najmanja algebra $\mathbb{K}$ koja sadrži poluprsten $\mathbb{P}$ se sastoji od skupova oblika $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \in \mathbb{P}$ $(i = 1,\ldots,n$, $n \in N)$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$. Mera m se širi na $\mathbb{K}$, do mere koju ćemo opet označiti sa m , tako da se definiše $m(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) =$ $= \bigcup_{i=1}^{n} m(A_i)$, gde su A_i $(i = 1,\ldots,n)$ međusobno disjunktni elementi poluprstena $\mathbb{P}$. Vidi se da je m dobro definisana i prebrojivo aditivna .

Definišimo familiju σ skupova algebre $\mathbb{K}$ kao $s(\mathbb{K}) =$ $= \{ \bigcup_{i\in N} B_i : (B_n)_{n\in N}$ niz elemenata iz $\mathbb{K} \}$ i familiju δ skupova algebre $\mathbb{K}$ kao $d(\mathbb{K}) = \{ \bigcup_{i\in N} B_i : (B_n)_{n\in N}$ niz elemenata iz $\mathbb{K} \}$. Produžićemo meru m (ostavljajući istu oznaku) na klase $s(\mathbb{K})$ i $d(\mathbb{K})$ na sledeći način : ako je $Q \in s(\mathbb{K})$ tada postoje skupovi $B_n \in \mathbb{K}$ $(n \in N)$ tako da je $Q = \bigcup_{n\in N} B_n$ i $B_n \cap B_m = \emptyset$ za $m \neq n$; definišimo $m(\bigcup_{n\in N} B_n) = \sum_{n\in N} m(B_n)$; ako je $P \in d(\mathbb{K})$ tada je $P = \bigcap_{n\in N} B_n$ za neke $B_n \in \mathbb{K}$ $(n \in N)$ tako da je $B_n \supseteq B_{n+1}$ za svako $n \in N$ pa definišimo $m(\bigcap_{n\in N} B_n) = \lim_n (m(B_n))$. Definicija je korektna, jer ako je $\bigcup_{n\in N} B_n = \bigcup_{n\in N} B'_n$ $B_n, B'_n \in \mathbb{K}$ $(n \in N)$, $B_n \cap B_m = B'_n \cap B'_m = \emptyset$ za $m \neq n$ tada je $B_m = B_m \cap \bigcup_{n\in N} B'_n = \bigcup_{n\in N} (B_m \cap B'_n)$ i $B'_m = B'_m \cap \bigcup_{n\in N} B_n = \bigcup_{n\in N} (B'_m \cap B_n)$ pa je $m(\bigcup_{n\in N} B'_n) = \sum_{m\in N} m(B'_m) =$ $= \sum_{m,n} m(B'_m \cap B_n) = \sum_{n\in N} m(B_n)$. Vidimo takođe da ako je $Q = \bigcup_{n\in N} B_n$ gde je $B_n \in \mathbb{K}$ $(n \in N)$ i $B_{n+1} \supseteq B_n$ tada je $m(Q) = \lim(m(B_n))$

tako da korektnost definicije u slučaju skupa $P \in d(\mathbf{K})$ sledi ako pređemo na komplement .

Osnovna svojstva produžene mere se vide iz sledeće leme.

<u>**Lema 1.**</u> Neka su $Q, Q', Q_n \in s(\mathbf{K})$ $(n \in N)$ i $P, P' \in d(\mathbf{K})$. Tada

/i/ $Q \supseteq P$ povlači $m(Q \setminus P) = m(Q) - m(P)$;

/ii/ $P \supseteq Q$ povlači $m(P \setminus Q) = m(P) - m(Q)$;

/iii/ $Q \supseteq Q'$ povlači $m(Q) \geqslant m(Q')$;

/iv/ $P \supseteq P'$ povlači $m(P) \geqslant m(P')$;

/v/ $Q \subseteq \bigcup_{n \in N} Q_n$ povlači $m(Q) \leqslant \sum_{n \in N} m(Q_n)$;

/vi/ $Q = \bigcup_{n \in N} Q_n$, $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ povlači

$$m(Q) = \sum_{n \in N} m(Q_n) \quad ;$$

/vii/ $P \cap P' = \emptyset$ povlači $m(P \cup P') = m(P) - m(P')$.

<u>Dokaz</u> : /i/ Neka je $Q = \bigcup_{n \in N} A_n$, $A_n \subseteq A_{n+1}$ $(n \in N)$ i $P = \bigcap_{n \in N} B_n$, $B_{n+1} \subseteq B_n$ $(n \in N)$ tako da su svi novouvedeni skupovi iz $\mathbf{K}$. Tada je $Q \setminus P = \bigcup_{n \in N} (A_n \cap B_n^c) \in s(\mathbf{K})$ pa je $m(Q \setminus P) = \lim_n (m(A_n \setminus B_n)) = m(Q) - m(P)$.

/ii/ Sačuvavši oznake kao u /i/ imamo $P \setminus Q = \bigcap_{n \in N} B_n \setminus \bigcap_{n \in N} A_n = \bigcap_{n \in N} (B_n \setminus A_n) \in d(\mathbf{K})$ pa je $m(P \setminus Q) = \lim m(B_n \setminus A_n) = m(P) - m(Q)$.

/iii/ Neka je $Q = \bigcup_{n \in N} A_n$, $Q' = \bigcup_{n \in N} A_n'$ tako da je $A_n \subseteq A_{n+1}$, $A_n' \subseteq A_{n+1}'$ $(n \in N)$ i tako da su novouvedeni skupovi iz $\mathbf{K}$. Tada je $Q' = Q \cap Q' = \bigcup_{n \in N} (A_n \cap A_n')$ pa je $m(Q') =$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

/iv/ Ako je $P \in d(\mathbf{K})$ tada je $P^c \in s(\mathbf{K})$ i $m(P) + m(P^c) = 1$ tako da tvrdnja sledi iz /iii/ .

/v/ Neka je $Q_n = \bigcup_{i \in N} A_{ni}$ razlaganje skupa Q_n skupovima iz $\mathbf{K}$ i $Q = \bigcup_{i \in N} A_i$ tako da je $A_i \subseteq A_{i+1}$ $(i \in N)$ $A_i \in \mathbf{K}$ $(i \in N)$. Tada je za svaki $k \in N$ $A_k \subseteq \bigcup_{n \in N} Q_n = \bigcup_{n,i \in N} A_{ni}$ pa je $m(A_k) \leqslant \sum_{n,i \in N} m(A_{ni})$, jer je m prebrojivo aditivna na $\mathbf{K}$, tako da je $m(Q) \leqslant \sum_{n \in N} m(Q_n)$.

/vi/ Ako posmatramo razbijanja skupova Q_n elementima iz $\mathbf{K}$ tada se time dobija razbijanje skupa Q pa tvrdnja sledi iz definicije mere m .

/vii/ Neka je $P = \bigcap_{n \in N} A_n$, $P' = \bigcap_{n \in N} A'_n$, $A_n \supseteq A_{n+1}$, $A'_n \supseteq A'_{n+1}$ $(n \in N)$ gde su novouvedeni skupovi elementi iz $\mathbf{K}$. Tada je $\bigcap_{n \in N} A_n \cap \bigcap_{n \in N} A'_n = \bigcap_{n \in N} (A_n \cap A'_n)$ pa je $m(P \cup P') =$
$= \lim_n (m(A_n \cup A'_n)) = \lim_n (m(A_n) + m(A'_n) - m(A_n \cap A'_n)) = m(P) + m(P')$ jer je $\bigcap_{n \in N} (A_n \cap A'_n) = \emptyset$.

Time smo lemu dokazali i možemo nastaviti dokaz teoreme Carathéodorya . Za svaki podskup $Y \subseteq X$ definišimo vanjsku i unutrašnju meru m_e i m_i kao $m_e(Y) = \{\inf m(Q) : Q \in s(\mathbf{K}) , Q \supseteq Y\}$, $m_i(Y) = \sup \{m(P) : P \in d(\mathbf{K}) , P \subseteq Y\}$.

<u>Lema 2.</u> /i/ Ako je $E = \bigcup_{n \in N} E_n$ razlaganje proizvoljnog podskupa od X na podskupove od X (tj. $E_n \cap E_m = \emptyset$ za $m \neq n$) tada je $m_i(E) \geqslant \sum_{n \, N} m_i(E_n)$.

/ii/ Za proizvoljan niz $(E_n)_{n\in N}$ podskupova od X vredi $m_e(E) \leqslant \sum_{n\in N} m_e(E_n)$, gde je $E = \bigcup_{n\in N} E_n$.

<u>Dokaz</u> : /i/ Izaberimo niz $(P_n)_{n\in N}$ elemenata iz $d(\mathbb{K})$ tako da je $P_n \subseteq E_n$ i $m_i(E_n) - \frac{\varepsilon}{2^n} \leqslant m(P_n)$, gde je ε unapred zadan pozitivan realan broj . Tada , koristeći svojstvo /vii/ iz leme 1. , imamo $m_i(E) \geqslant m(\bigcup_{k=1}^{n} P_k) = \sum_{k=1}^{n} m(P_k) \geqslant \sum_{k=1}^{n} m_i(E_k) - \varepsilon$

odakle sledi rezultat.

/ii/ Izaberimo niz elemenata $(Q_n)_{n\in N}$ klase $s(\mathbb{K})$ tako da je $m_e(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \geqslant m(Q_n)$, gde je ε unapred zadan pozitivan realan broj . Koristeći svojstvo /v/ iz leme 1. imamo $m_e(E) \leqslant m(\bigcup_{n\in N} Q_n) \leqslant \sum_{n\in N} m(Q_n) \leqslant \sum_{n\in N} m_e(E_n) + \varepsilon$ i rezultat sledi .

Sada definišimo klasu $\overline{\mathbb{P}}$ kao skup podskupova od X čije su vanjske i unutrašnje mere jednake , tj.

$$\overline{\mathbb{P}} = \{ Y \subseteq X : m_i(Y) = m_e(Y) \} .$$

Meru $\overline{m}$ na $\overline{\mathbb{P}}$ definišimo kao $\overline{m}(Y) = m_e(Y)$ $(= m_i(Y))$. Jasno da $\overline{\mathbb{P}} \supseteq \mathbb{K}$ i da je $\overline{m}(A) = m(A)$ za $A \in \mathbb{K}$ pa ostaje da se dokaže da je $\overline{\mathbb{P}}$ σ algebra i $\overline{m}$ prebrojivo aditivna kompletna mera na $\overline{\mathbb{P}}$.

Ako je $E \in \overline{\mathbb{P}}$ tada je očigledno $E^c \in \overline{\mathbb{P}}$. Ako su $E_1, E_2 \in \overline{\mathbb{P}}$ tada postoje $P_1, P_2 \in d(\mathbb{K})$, $Q_1, Q_2 \in s(\mathbb{K})$ tako da je $P_1 \subseteq E_1 \subseteq Q_1$, $P_2 \subseteq E_2 \subseteq Q_2$, $m(Q_1) - m(P_1) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, , $m(Q_2) - m(P_2) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, gde je ε unapred zadan pozitivan broj. Sada je $P_1 \cup P_2 \in d(\mathbb{K})$, $Q_1 \cup Q_2 \in s(\mathbb{K})$ i $m(Q_1 \cup Q_2) -$ $- m(P_1 \cup P_2) = m((Q_1 \cup Q_2) \setminus (P_1 \cup P_2))$ po /i/ lema 1. .

Budući je $(Q_1 \cup Q_2) \setminus (P_1 \cup P_2) \subseteq (Q_1 \setminus P_1) \cup (Q_2 \setminus P_2)$ pa budući da je $Q_1 \setminus P_1 \in s(\mathbb{K})$, $Q_2 \setminus P_2 \in s(\mathbb{K})$ i primenjujući /i/ i /ii/ leme 1. imamo $m(Q_1 \cup Q_2) - m(P_1 \cup P_2) \leqslant m(Q_1 \setminus P_1) + m(Q_2 \setminus P_2) \leqslant \varepsilon$. Tako je $\mathbb{P}$ algebra .

Ako je $(E_n)_{n\in N}$ niz elemenata iz $\mathbb{P}$ tada , da bi dokazali da je $\bigcup_{n\in N} E_n$ element od $\mathbb{P}$, možemo pretpostaviti da su elementi niza medusobno disjunktni . Prema lemi 2. je

$$\sum_{n\in N} m_e(E_n) \geqslant m_e(E) \geqslant m_i(E) \geqslant \sum_{n\in N} m_i(E_n) ,$$

, jer $m_e(E) \geqslant m_i(E)$ sledi iz /i/ lema 1. , pa je $\mathbb{P}$ σ algebra i $\overline{m}$ σ aditivna mera . Očigledno da je $\overline{m}$ kompletna . ⊣

<u>Definicija 3.1.1.</u> <u>Unutrašnji prostor sa * konačno aditivnom merom</u> je trojka $(X , \mathcal{A} , \mu)$, gde je X unutrašnji skup , , $\mathcal{A}$ unutrasnja algebra podskupova od X i $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow {}^*[0,1]$ unutrašnja *-konačno aditivna mera za koju je $\mu(X) = 1$.

Tako , ako je $(X,\mathcal{A},\mu)$ unutrašnji prostor sa * konačno aditivnom merom (ili kraće prostor sa * k.a. merom) tada je za svaki unutrašnji hiperkonačni niz $A_1,\ldots,A_H$ ($H \in {}^*N$) elemenata iz $\mathcal{A}$ $\bigcup_{k=1}^{H} A_k \in \mathcal{A}$ i , ako su A_k ($k = 1,\ldots,H$) medusobno disjunktni , $\mu(\bigcup_{k=1}^{H} A_k) = \sum_{k=1}^{H} \mu(A_k)$. Gledajući izvana $\mathcal{A}$ je algebra skupova i $st \circ \mu$ je prebrojivo aditivna mera na $\mathcal{A}$ jer ako imamo opadajući niz $(A_n)_{n\in N}$ skupova iz $\mathcal{A}$ tada je,zbog zasićenosti, $\bigcap_{n\in N} A_n \neq \emptyset$ pa je uslov $\bigcap_{n\in N} A_n = \emptyset$ povlači $\lim_n \mu(A_n) = 0$ trivijalno zadovoljen . Carathéodoryjeva teorema o produženju nam sada omogućava da meru $st\circ\mu$ produžimo do σ aditivne mere definisane na σ algebri koja sadrži $\mathcal{A}$. Međutim , konstrukcija produženja mere μ se može , u ovom slučaju , izvesti mnogo kraće nego u teoremi 3.1.1. .

<u>Teorema 3.1.2.</u> Neka je $(X , \mathcal{A} , \mu)$ unutrašnji prostor sa * k.a. merom . Tada se $st\circ\mu$ može produžiti do kompletne mere $L(\mu)$ definisane na σ algebri $L(\mathcal{A})$ koja sadrži $\mathcal{A}$.
<u>Dokaz</u> : Za svaki podskup $Y \subseteq X$ (unutrašnji ili vanjski) definišimo vanjsku i unutrašnju meru kao $\mu_e(Y) = \inf\{st\mu(A) : A \in \mathcal{A}, A \supseteq Y\}$, $\mu_i(Y) = \sup\{st\mu(A) : A \in \mathcal{A}, A \subseteq Y\}$. Klasa skupova $L(\mathcal{A})$ se sastoji od skupova sa jednakom vanjskom i unutrašnjom merom i za njih se definiše mera $L(\mu)$ kao $L(\mu)(Y) = \mu_e(Y)$.

Jasno da $L(\mathcal{A}) \supseteq \mathcal{A}$. Dokažimo da je $L(\mathcal{A})$ algebra . Ako $E \in L(\mathcal{A})$ tada očigledno i $E^c \in L(\mathcal{A})$. Ako imamo $E, F \in L(\mathcal{A})$ tada postoje $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ tako da je $A_1 \subseteq E \subseteq B_1$, $A_2 \subseteq F \subseteq B_2$ i $\mu(B_1 \setminus A_1) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, $\mu(B_2 \setminus A_2) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, gde je ε unapred zadan pozitivan standardan realan broj . Sada je $\mu((B_1 \cup B_2) \setminus (A_1 \cup A_2)) \leqslant \mu((B_1 \setminus A_1) \cup (B_2 \setminus A_2)) \leqslant \mu(B_1 \setminus A_1) + \mu(B_2 \setminus A_2) \leqslant \varepsilon$ tako da je $E \cup F \in L(\mathcal{A})$.

Na kraju neka je $(E_n)_{n \in N}$ niz elemenata iz $L(\mathcal{A})$. Dokažimo da je $\bigcup_{n \in N} E_n \in L(\mathcal{A})$. Možemo pretpostaviti da su elementi niza međusobno disjunktni . Postoje dva niza skupova $(A_n)_{n \in N}$, $(B_n)_{n \in N}$ iz $\mathcal{A}$ takvi da je $B_n \subseteq E_n \subseteq A_n$ i $\mu(A_n \setminus B_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

(A_n, B_n) do unutrašnjeg niza . Tada je skup

$$\{n \in {}^*N : (\forall k \leqslant n)\ A_k \in \mathcal{A} \ \&\ B_k \in \mathcal{A} \ \&\ \mu(A_k \setminus B_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k-1}}\}$$

unutrašnji i sadrži N , pa mora sadržavati i jedan beskonačan prirodan broj H . Tako imamo $(\forall k < H)(A_k \supseteq B_k \ \&\ \mu(A_k \setminus B_k) < \frac{\varepsilon}{2^k})$.

Uzmimo $n \in {}^*N \setminus N$, $n \leqslant H$. $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \supseteq \bigcup_{k \in N} A_k$ pa je $\mu_e(\bigcup_{k \in N} E_k) \lessapprox$

$\lessapprox \mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \mu(\bigcup_{k=1}^{n}(A_k \setminus B_k) \cup \bigcup_{k=1}^{n} B_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k \setminus B_k) +$

$+ \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) < \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k)$. Kako udaljenost zadnja dva broja nije beskonacno mala imamo

$$\mu_e(\bigcup_{k \in N} E_k) < \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) \qquad \ldots /1/$$

Skup hiperprirodnih brojeva n za koje vredi nejednakost /1/ je unutrasnji skup i sadrži vanjski skup $\{n \in {}^*N \setminus N : n \leqslant H\}$ pa postoji $n_o \in N$ tako da je $\mu_e(\bigcup_{k \in N} E_k) < \varepsilon + \sum_{k=1}^{n_o} \mu(B_k)$ pa budući da je $\sum_{k=1}^{n_o} \mu(B_k) \lessapprox \mu_i(\bigcup_{k \in N} E_k)$ to je $\mu_e(\bigcup_{k \in N} E_k) -$ $- \mu_i(\bigcup_{k \in N} E_k) < \varepsilon$ što dokazuje $\bigcup_{k \in N} E_k \in L(\mathcal{A})$. Takođe je $\mu(B_k) \lessapprox L(\mu)(B_k)$ pa je $L(\mu)(\bigcup_{k \in N} E_k) - \sum_{k=1}^{n_o} L(\mu)(B_k) < \varepsilon$ pa je $L(\mu)$ prebrojivo aditivna . $L(\mu)$ je očigledno kompletna mera . $\dashv$

Tako sada možemo izreći sledeću definiciju :

<u>Definicija 3.1.2.</u> Neka je $(X , \mathcal{A} , \mu)$ unutrašnji prostor sa $*$ k.a. merom . Prostor sa merom $(X , L(\mathcal{A}) , L(\mu))$ se naziva <u>Loebov</u> prostor pridružen prostoru $(X , \mathcal{A} , \mu)$. $L(\mu)$ se naziva <u>Loebova</u> <u>mera</u> a $L(\mathcal{A})$ <u>Loebova</u> <u>kompletna</u> <u>algebra</u> pridružena

Sledeća teorema pokazuje da su Loeb merljivi skupovi "blizu" elementima iz $\mathcal{A}$.

<u>Teorema 3.1.3.</u> Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ unutrašnji prostor sa $*$ k.a. merom. Tada za svaki $E \in L(\mathcal{A})$ postoji $A \in \mathcal{A}$ tako da je $L(\mu)(A \Delta E) = o$, gde je Δ simetrična **razlika** skupova.

<u>Dokaz</u> : Neka je $(A_n)_{n \in N}$ niz elemenata iz $\mathcal{A}$ tako da je $E \subseteq A_{n+1} \subseteq A_n$ $(n \in N)$ i $L(\mu)(A_n) - L(\mu)(E) < \frac{1}{n}$.

Uočimo unutrašnji skup:

$$\{n \in {}^*N : A_n \in \mathcal{A} \;\&\; (\forall k \leq n)(A_{k+1} \subseteq A_k \;\&\; \mu(A_k) > L(\mu)(E) - \tfrac{1}{k})\}$$

, gde smo prethodno niz $(A_n)_{n \in N}$ produžili do unutrašnjeg niza, koji sadrži skup standardnih prirodnih brojeva N. Tada on mora sadržavati i neki beskonačan prirodan broj H. Tako je $L(\mu)(A_H) \geqslant L(\mu)(E)$, a budući da je $A_H \subseteq \bigcap_{n \in N} A_n$, i $L(\mu)(A_H) \leqslant L(\mu)(E)$, pa je $L(\mu)(E \Delta A_H) = o$. $\dashv$

Najinteresantniji **primer** prostora sa $*$ k.a. merom je kada je u X zadan hiperkonačan skup $K = \{a_1, \dots, a_H\}$ $(H \in {}^*N \setminus N)$ i unutrašnja funkcija $f : K \longrightarrow {}^*[o,1]$, tako da je $\sum_{k=1}^{H} f(a_k) = 1$, kada se mera μ definiše kao $\mu(A) = \sum_{a_k \in A} f(a_k)$ za svaki unutrašnji podskup A od X.

Sledeći primer pokazuje da u opštem slučaju postoje skupovi koji nisu Loeb merljivi.

<u>Primer</u> : Neka je $T = \{o, \frac{1}{H}, \dots, \frac{k}{H}, \dots, 1\} \subseteq {}^*[o,1]$ $(H \in {}^*N \setminus N)$ delenje intervala ${}^*[o,1]$ na H jednakih delova i $f : T \longrightarrow {}^*[o,1]$

unutrašnja funkcija takva da je $\sum_{k=0}^{H} f(\frac{k}{H}) = 1$. Mera μ je zadana na skupu svih unutrašnjih podskupova skupa T kao $\mu(A) = \sum_{\frac{k}{H} \in A} f(\frac{k}{H})$ i to tako da je neatomska tj. $\mu(\{\frac{k}{H}\}) = f(\frac{k}{H}) \approx 0$ za svako $k \in \{0,1,\ldots,H\}$.

Dokažimo da skup $M = \{t \in T : st(t) \leqslant t\}$ nije Loeb merljiv . Nadimo njegovu vanjsku meru . Neka je $I \subseteq T$ unutrašnji skup i $I \supseteq M$. Za $r \in [0,1]$ skup $\{n \in {}^*N : {}^*[r, r+\frac{1}{n}] \cap T \subseteq I\}$ sadrži sve beskonačne prirodne brojeve pa , budući da je on unutrašnji , postoji $n_r \in N$ tako da je ${}^*[r, r+\frac{1}{n_r}] \cap T \subseteq I$. Familija intervala $\{[r, r+\frac{1}{n_r}] : r \in [0,1]\}$ pokriva $[0,1]$ pa postoji prebrojiv podpokrivač $\{I_i : i \in N\}$, $I_i = [r_i, r_i+\frac{1}{n_i}]$ $(i \in N)$.

Dokažimo da $T \setminus I$ ima meru nula . Ako $t \notin I$ tada je $r = st(t) > t$. Postoji $i \in N$ tako da $r \in I_i$. Ako bi bilo $r \in]r_i, r_i+\frac{1}{n_i}]$ tada bi t ${}^*]r_i, r_i+\frac{1}{n_i}] \cap T$ tj. imali bi $st(t) \leqslant t$ što je nemoguće dakle $st(t) = r_i$ pa $t \in m^-(r_i)$, gde je $m^-(r_i) = \{x \in {}^*[0,1] : x \leqslant r_i , x \approx r_i\}$. Tako smo pokazali da je $T \setminus I \subseteq \bigcup_{i \in N} (m^-(r_i) \cap T) \subseteq \bigcup_{i \in N} (m(r_i) \cap T)$ ($m(x)$ je monada tačke x). Međutim , ako je μ neatomska mera tada $m(r_i) \cap T$ ima $L(\mu)$ meru nula . Dakle , $L(\mu)(T \setminus I) = 0$ pa je $\mu_e(M) = 1$.

Dokažimo sada da je $\mu_i(M) = 0$. Znamo da je $\mu_i(M) = 1 - \mu_e(T \setminus M)$. Analogno kao gore skup $T \setminus M \cup \{t \in T : st(t) = t\}$ ima vanjsku meru 1 . Međutim , $\{t \in T : st(t) = t\}$ je prebrojiv , jer ako je $st(t) = r = t$ i $r = \frac{k}{H} = t$ tada je na osnovu principa prenosa t racionalan , pa ima $L(\mu)$ meru nula budući da je μ neatomska mera . Tako je $\mu_e(T \setminus M) = 1$ odakle je $\mu_i(M) = 0$ što pokazuje da M nije merljiv .

3.2. Proizvod merâ

Neka su (X, U, u) i (Y, V, v) dva unutrašnja prostora sa $*$ - k.a. merom . Posmatrajmo odgovarajuće Loebove prostore $(X, L(U), L(u))$, $(Y, L(V), L(v))$. U proizvod $X \times Y$ možemo uvesti meru na dva sledeća načina : I Posmatrajmo poluprsten $\{E \times F : E \in L(U) , F \in L(V)\}$; na njemu definišimo meru $L(u) \times L(v)$ kao $L(u) \times L(v)(E \times F) = L(u)(E) \cdot L(v)(F)$. Lako se proveri da je to prebrojivo aditivna mera , pa se ona , prema teoremi Carathéodoryja , širi do prebrojivo aditivne i kompletne mere , koju ćemo označiti istom oznakom $L(u) \times L(v)$ i koja je definisana na σ algebri $L(U) \times L(V)$. Tako dobijamo verovatnosni prostor $(X \times Y , L(U) \times L(V), L(u) \times L(v))$, koji nije ništa drugo do obični , vanjski proizvod standardnih verovatnosnih prostora . II Ako se na trenutak,preselimo iz standardnog u nestandardni univerzum , tada možemo posmatrati unutrašnju algebru $U \times V$ podskupova od $X \times Y$ nastalu kao najmanja algebra koja sadrži unutrašnji poluprsten $\mathbb{P} = \{A \times B : A \in U , B \in V\}$. Na $\mathbb{P}$ se može zadati $*$ - konačno aditivna mera $u \times v$ kao $u \times v(A \times B) = u(A) \cdot v(B)$, koja se širi na $U \times V$. Tako dobijamo unutrašnji prostor sa $*$ - k.a. merom $(X \times Y , U \times V , u \times v)$, pa možemo posmatrati odgovarajući Loebov prostor $(X \times Y , L(U \times V),$ $, L(u \times v))$.

Odnos između dva uvedena prostora daje sledeća teorema :

Teorema 3.2.1. $L(u \times v)$ je raširenje mere $L(u) \times L(v)$ tj.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

podudara sa $L(U) \times L(V)$.

Dokaz : Dovoljno je dokazati da , ako je $E \in L(U)$ i $F \in L(V)$, $E \times F \in L(U \times V)$ i $L(u) \times L(v)(E \times F) = L(u \times v)(E \times F)$, jer je $L(U \times V)$ σ algebra a mera $L(u) \times L(v)$ je jednoznačno određena vrednostima na skupovima oblika $E \times F$ $(E \in L(U)$, $F \in L(V))$.

Odkle , neka su $E \in L(U)$, $F \in L(V)$. Postoje skupovi $A \in U$, $B \in V$ takvi da je $L(u)(A \triangle E) = L(v(B \triangle F)) = o$. Sada je $A \times B \in U \times V$ i $(A \times B) \triangle (E \times F) \subseteq ((A \triangle E) \times Y) \cup (X \times (B \triangle F))$. Imamo $(A \triangle E) \times Y \in L(U \times V)$, $X \times (B \triangle F) \in L(U \times V)$, jer oba skupa imaju po jednu komponentu Loebove mere nula . Iz istog razloga je $L(U \times V)$ mera tih skupova nula , pa je $E \times F \in L(U \times V)$, jer je $L(U \times V)$ kompletna mera .

Dalje , imamo $L(U \times V)((A \times B) \triangle (E \times F)) = o$ što povlači $L(U \times V)(E \times F) = L(U \times V)(A \times B) = st(u(A)) \cdot st(v(B)) = L(u)(A) \cdot L(v)(B) =$ $= L(u)(E) \cdot L(v)(F)$. ⊣

Primedba 1. Razlika između σ algebri $L(U) \times L(V)$ i $L(U \times V)$ je u sledećem : posmatra se prvo poluprsten $\mathbb{P} = \{A \times B : A \in U , B \in V\}$; $\mathbb{P}$ se proširi do standardne algebre $\mathbf{B}_s$ dodavanjem svih konačnih unija disjunktnih elemenata iz $\mathbb{P}$, zatim se širi Carathéoryjevom konstrukcijom do σ algebre $L(U) \times L(V)$. U slučaju σ algebre $L(U \times V)$, $\mathbb{P}$ se međutim , proširi do unutrašnje algebre $\mathbf{B}_u$ dodavajući sve $*$ - konačne unije elemenata iz $\mathbb{P}$, pa se zatim primeni Carathéodoryjeva konstrukcija .

Jasno da je pri tome $\mathbf{B}_s \subseteq \mathbf{B}_u$ i da se $L(u) \times L(v)$ i $L(u \times v)$ podudaraju na $\mathbf{B}_s$, pa odatle i na $L(U) \times L(V)$, što

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

<u>Primedba 2</u>. Da li su možda algebre $L(U)\times L(V)$ i $L(U\times V)$ jednake ? Iz predhodne primedbe je jasno da će to biti slučaj kada je $\mathbf{B}_s = \mathbf{B}_u$. U suprotnom , kada je $\mathbf{B}_s \neq \mathbf{B}_u$, postoji $A \in \mathbf{B}_u \setminus \mathbf{B}_s$. Ako je $\bigcap_{n\in N} A_n \in d(\mathbf{B}_s)$ i $\bigcap_{n\in N} A_n \subseteq A$ tada je , zbog zasićenosti , $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \subseteq A$ za neko $n \in N$, tako da se unutrašnja mera skupa A dobija preko elemenata algebre $\mathbf{B}_s$ (a ne preko "jače" klase $d(\mathbf{B}_s)$) . To nam govori da bi možda , u opštem slučaju , postojao takav unutrašnji element od $L(U\times V)$ koji nije u $L(U)\times L(V)$, kao što nam pokazuje sledeći primer .

<u>Primer (Hoover)</u> : Neka je , za $n \in {}^*N \setminus N$ fiksiran beskonačan prirodan broj , $T = \{\frac{1}{n}, \dots, \frac{k}{n}, \dots, 1\}$, $W = \{0,1\}^T$. Posmatrajmo unutrašnje prostore sa merom $(T, {}^*\mathcal{P}(T), u)$ i $(W, {}^*\mathcal{P}(W), v)$, gde je $u(A) = \frac{{}^*|A|}{n}$ $(A \in {}^*\mathcal{P}(T))$, $v(B) = \frac{{}^*|B|}{2^n}$ $(B \in {}^*\mathcal{P}(W))$ i ${}^*|X|$ unutrašnja kardinalnost skupa X . Odgovarajuće Loebove prostore označimo jednostavno sa $(W, L(W), L(v))$ i $(T, L(T), L(u))$.

Algebra ${}^*\mathcal{P}(T) \times {}^*\mathcal{P}(W)$ nije ništa drugo do ${}^*\mathcal{P}(T\times W)$, tako da je unutrašnji proizvod gornjih prostora ,prostor sa merom $(T\times W, {}^*\mathcal{P}(T\times W), u\times v)$. Njegov Loebov prostor ćemo takođe , jednostavnije označiti sa $(T\times W, L(T\times W), L(u\times v))$. Primetimo da je $u\times v(\{(t,w)\}) = \frac{1}{n2^n}$ $((t,w)\in T\times W)$.

Neka je $H = \{(t,w) \in T\times W \ : \ w(t) = 1\}$.

<u>Tvrdnja</u> : H je unutrašnji podskup od $T\times W$ koji ne pripada $L(T)\times L(W)$.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

je $(u\times v)(H) = \frac{1}{2}$. Neka su A i B unutrašnji podskupovi od T i W respektivno . Dokažimo da je

$$L(u\times v)((A\times B)\cap H) = \frac{1}{2} L(u\times v)(A\times B) \quad \ldots \quad /1/$$

Posmatrajmo unutrašnji prostor sa $*$ - k.a. merom $W_1 = (\{0,1\}^A, {}^*\mathcal{P}(\{0,1\}^A), v_1)$ nastao od prostora W sužavanjem 0,1 - nizova na skup A ; mera v_1 se prirodno definiše . Ako sa p označimo projekciju $p : W \longrightarrow \{0,1\}^A$ definisanu sa $p(w) = w|_A$ $(w \in W)$, tada je jasno da je za $X \in {}^*\mathcal{P}(\{0,1\}^A)$ $v_1(X) = v(p^{-1}(X))$. Zakon velikih brojeva u prostoru W_1 nam daje

$$v_1(\{w \in \{0,1\}^A : \left| \frac{\sum_{t\in A} w(t)}{{}^*|A|} - \frac{1}{2} \right| \geqslant \varepsilon \}) \leqslant \frac{1}{4\,{}^*|A|\varepsilon^2}$$

za svako $\varepsilon \in {}^*\mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Ako pređemo u prostor W pomoću p^{-1} imamo

$$v(\{w \in W : \left| \frac{\sum_{t\in A} w(t)}{{}^*A} - \frac{1}{2} \right| \geqslant \varepsilon \}) \leqslant \frac{1}{4\,{}^*|A|\varepsilon^2} .$$

Neka je $C = \{ w \in W : \left| \frac{\sum_{t\in A} w(t)}{{}^*|A|} - \frac{1}{2} \right| \geqslant \varepsilon \}$. Gornja nejednakost tada prelazi u $v(C) \leqslant 1 - \frac{1}{4\,{}^*|A|\varepsilon^2}$.

Da dokažemo /1/ možemo pretpostaviti da je $L(u\times v)(A\times B) \neq 0$ tj . da je ${}^*|A|$ beskonačan broj . Tako , ako uzmemo $\varepsilon \approx 0$, $\varepsilon > 0$ tako da je ${}^*|A|\cdot\varepsilon^2$ beskonačno veliki broj , recimo $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt[4]{{}^*|A|}}$, tada je $L(v)(C) = 1$.

Na kraju stavimo $B' = B \cap C$. Imamo

$$\frac{L(u\times v)((A\times B)\cap H)}{L(u\times v)(A\times B)} \approx \frac{u\times v((A\times B')\cap H)}{u\times v(A\times B')} = \frac{\sum_{w\in B'} u\times v(A\times\{w\}\cap H)}{u(A)\cdot v(B')} =$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

$$= \frac{\sum\limits_{w\in B'} \frac{1}{n\cdot 2^n} \sum\limits_{t\in A} w(t)}{\frac{{}^{*}|A|\cdot {}^{*}|B'|}{n\cdot 2^n}} = \frac{\sum\limits_{w\in B'} \sum\limits_{t\in A} w(t)}{{}^{*}|A|\cdot {}^{*}|B'|} = \frac{\sum\limits_{w\in B'} \frac{\sum\limits_{t\in A} w(t)}{{}^{*}|A|}}{{}^{*}|B'|} \approx \frac{1}{2}$$

, jer je $B' \subseteq C$ i aritmetička sredina brojeva koji su $\approx \frac{1}{2}$ je opet $\approx \frac{1}{2}$.

Tako smo dokazali relaciju /1/ . Sada iz primedbe 2. i /1/ vidimo da je unutrašnja mera skupa H nula , jer ako je $A\times B \subseteq H$ (A unutrašnji podsup od T , B unutrašnji podskup od W) tada je $\frac{1}{2} L(u\times v)(A\times B) = L(u\times v)((A\times B)\cap H) = L(u\times v)(A\times B)$ pa je $L(u\times v)(A\times B) = o$. Kako je $u\times v(H) = \frac{1}{2}$ H nije merljiv . ⊣

<u>II dokaz</u> : Iz I dokaza vidimo da je dovoljno dokazati da , ako je $A\times B \subseteq H$, $A \in {}^{*}\mathcal{P}(T)$, $B \in {}^{*}\mathcal{P}(W)$ tada je $L(u\times v)(A\times B) = 0$. Ako je $A\times B \subseteq H$ tada je $(\forall t\in A)(\forall w\in B)\ w(t) = 1$ pa je $B \subseteq \{w : (\forall t\in A)\ w(t) = 1\}$. Dalje je $v(\{w : (\forall t\in A)\ w(t) = 1\}) =$

$$= \frac{2^{n-{}^{*}|A|}}{2^n} = \frac{1}{2^{{}^{*}|A|}} .$$

Ako je ${}^{*}|A|$ konačan , tada je očigledno $L(u\times v)(A\times B) = o$, a ako je ${}^{*}|A|$ beskonačan, tada je $v(\{w : (\forall t\in A)\ w(t) = 1\}) \approx o$, pa je $L(u\times v)(A\times B) \approx u(A)\cdot v(B) \approx o$. ⊣

Neka je (X , U_n , μ_n) $(n \in N)$ niz standardnih verovatnosnih prostora . Drugim rečima , X_n , U_n i μ_n su elementi standardnog univerzuma , gde je U_n σ-algebra na X_n i

U proizvodu $\prod_{k=1}^{n} X_k$ se može uvesti mera $\prod_{k=1}^{n} \mu_k$ kao Carathéodoryjeva ekstenzija mere P definisane na poluprstenu pravougaonika, skupova oblika $A_1 \times \cdots \times A_n$ ($A_k \in U_k$, $k = 1,\dots,n$), kao $P(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdot \ldots \cdot \mu_n(A_n)$. Taj verovatnosni prostor označimo sa

$$\left(\prod_{k=1}^{n} X_k \, , \, \prod_{k=1}^{n} U_k \, , \, \prod_{k=1}^{n} \mu_k \right) .$$

U beskonačni proizvod $\prod_{k \in N} X_k$ se uvodi mera na sličan način. Posmatra se algebra <u>cilindričnih</u> skupova, skupova oblika $B \times X_{n+1} \times \cdots$ $\left(B \in \prod_{k=1}^{n} U_k , \; n \in N\right)$, na kojoj se prirodno uvodi σ aditivna mera, koja se dalje širi pomoću Carathéodoryjeve teoreme. O tome govori sledeća teorema.

<u>Teorema 7.1.2</u>. Postoji kompletna mera μ na proizvodu $\prod_{n \in N} X_n$ definisana na nekoj σ algebri koja sadrži algebru cilindričnih skupova i takva da je za svaki cilindrični skup $B \times X_{n+1} \times \cdots$ $\left(B \in \prod_{k=1}^{n} X_k\right)$ $\mu(B \times X_{n+1} \times \cdots) = \left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right)(B)$.

<u>Dokaz</u> : Neka je C algebra cilindričnih skupova u $\prod_{k \in N} X_k$. Na C možemo zadati konačno aditivnu meru μ kao

$$\mu(B \times X_{n+1} \times \cdots) = \left(\prod_{k=1}^{n} u_k\right)(B) .$$

Ostaje da se dokaže da je μ prebrojivo aditivna i rezultat će tada slediti iz teoreme Carathéodoryja. Dakle, ako je $(\hat{B}_n)_{n \in N}$ opadajući niz cilindričnih skupova tako da je $\bigcap_{n \in N} \hat{B}_n = \emptyset$ trebamo dokazati da je $\lim_{n} \mu(\hat{B}_n) = 0$.

$B_n \in \prod_{k=1}^{n}$. Ako je $\lim_n(\mu(\hat{B}_n)) > o$ naći ćemo niz $(w_1, w_2, \dots) \in$ $\in \prod_{n\in N} X_n$ tako da je $(w_1, w_2, \dots) \in \bigcap_{n\in N} \hat{B}_n$.

Postoji niz merljivih funkcija $f_n^1 : X_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n \in N)$ tako da je

$$\mu(\hat{B}_n) = \int_{X_1} f_n^1 \, d\mu_1 \qquad \dots \quad /1/$$

Zaista , koristeći Fubinijevu teoremu imamo

$$\mu(\hat{B}_n) = (\prod_{k=1}\mu_k)(B_n) = \int_{X_1} d\mu_1 \int_{X_2} \dots \int_{X_n} \varphi_{B_n} \, d\mu_n \quad ,$$

, gde je φ_{B_n} karakteristična funkcija skupa B_n , pa je

$f_n^1 = \int_{X_2} \dots \int_{X_n} \varphi_{B_n} \, d\mu_n$. Jasno je odatle da ako $x_1 \notin$ $\notin B_1$ tada $\hat{x}_1 \notin B_n$, gde je $\hat{x}_1 \in \prod_{k=1}^{n} X_k$ bilo koja n-torka na čijem je prvom mestu x_1 , jer je projekcija skupa B_n u X_1 podskup od B_1 . Zbog toga je $\varphi_{B_n}(\hat{x}_1) = o$, pa imamo

$$x_1 \notin B_1 \quad \text{povlači} \quad (\forall n \in N) \; f_n^1(x_1) = o \qquad \dots /2/$$

Dalje , f_n^1 je opadajući niz funkcija , jer f_n^1 možemo pisati i kao

$$f_n^1 = \int_{X_2} \dots \int_{X_n} d\mu_n \int_{X_{n+1}} \varphi_{B_n \times X_{n+1}} \, d\mu_{n+1} \quad ,$$

, $B_{n+1} \subseteq B_n \times X_{n+1}$. Kako su f_n^1 očigledno i pozitivne funkcije , to one po tačkama konvergiraju ka funkciji f^1 i odatle

$$\lim \mu(\hat{B}_n) = \int_{X_1} f^1 \, d\mu_1 > o \; .$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Zaključujemo , imajući na umu /2/ , da postoji $w_1 \in B_1$ tako da je

$$f^1(w_1) > o \qquad \ldots \qquad /3/$$

Sada je

$$f^1_n(w_1) = \int_{X_2} f^2_n \, d\mu_2 \qquad \ldots \qquad /4/$$

, gde je $f^2_n = \int_{X_3} \ldots \int_{X_n} \varphi_{B_n} \, d\mu_n$. f^2_n je opadajući niz pozitivnih funkcija koji , prema tome , konvergira ka funkciji f^2 . Iz /4/ je

$$o < f^1(w_1) = \int_{X_2} f^2 \, d\mu_2 \quad ,$$

, pa postoji $w_2 \in X_2$ za koje je $f^2(w_2) > o$. Mora biti $(w_1, w_2) \in B_2$ jer bi u suprotnom bilo $(\forall n \in N)\ f^2_n(w_2) = o$, , jer je projekcija skupa B_n u X_2 podskup od B_2 . Ako nastavimo induktivno dobićemo $(w_1, w_2, \ldots) \in \bigcap_{n \in N} \hat{B}_n$. ⊣

Analogno slučaju na početku ovog odeljka , kada smo posmatrali proizvod dva unutrašnja prostora sa $*$ - k.a. merom , sada ćemo posmatrati beskonačan proizvod prostorâ .

Dakle , neka je (X_n , U_n , u_n) $(n \in N)$ niz unutrašnjih prostora sa $*$ - k.a. merom . Posmatrajmo njegovo produženje do unutrašnjeg niza (X_n , U_n , u_n) $(n \in {}^*N)$. Skup

$\{n \in {}^*N : \ \forall k \in n \ (X_n , U_n , u_n)$ je unutrašnji prostor sa $*$-k.a. merom $\}$

je unutrašnji i budući da sadrži vanjski skup konačnih prirodnih brojeva N , mora sadržavati i jedan beskonačan prirodan broj $H \in {}^{*}N \setminus N$. Tako dolazimo do hiperkonačnog niza unutrašnjih prostora sa $*$ - k.a. merom

$$(X_1 , U_1 , u_1), \ldots ,(X_n , U_n , u_n), \ldots ,(X_H , U_H , u_H).$$

Uporedo sa njim posmatrajmo i niz Loebovih prostora

$$(X_1 , L(U_1) , L(u_1)) , \ldots ,(L(X_n) , L(U_n) , L(u_n)), \ldots \qquad \ldots/1/$$

$(n \in N)$.

U proizvod $\prod_{k=1}^{H} X_k$ možemo uvesti verovatnosnu meru $\prod_{k=1}^{H} u_k$ tako da imamo unutrašnji prostor sa $*$ - k.a. merom

$$(\prod_{k=1}^{H} X_k , \prod_{k=1}^{H} U_k , \prod_{k=1}^{H} u_k) \quad ,$$

, gde je algebra $\prod_{k=1}^{H} U_k$ najmanja algebra koja sadrži poluprsten pravougaonika (zamišljamo na trenutak da smo u nestandardnom univerzumu) . Od njega možemo doći do odgovarajućeg Loebovog prostora

$$(\prod_{k=1}^{H} X_k , L(\prod_{k=1}^{H} U_k), L(\prod_{k=1}^{H} u_k)) .$$

Posmatrajući proizvod verovatnosnih prostora /1/ , kako nam to omogućava teorema 3.2.2. , dolazimo do običnog , standardnog prostora sa merom

$$(\prod_{k \in N} X_k , \prod_{k \in N} L(U_k) , \prod_{k \in N} L(u_k)) \quad ,$$

, gde je $\prod_{k \in N} L(U_k)$ σ algebra koja sadrži algebru cilindričnih skupova i $\prod_{k \in N} L(u_k)$ kompletna verovatnosna mera .

Postoji prirodno definisano preslikavanje

$$ST : \prod_{k=1}^{H} X_k \longrightarrow \prod_{k \in N} X_k \quad ,$$

, koje svakom $*$-konačnom nizu $a_1,\ldots,a_H \in \prod_{k=1}^{H} X_k$ pridružuje njegovu projekciju na prvih N koordináta , preciznije $ST(a_1,\dots,a_H) = (a_1,\dots,a_n,\dots)$ $(n \in N)$. Iz sledeće leme znamo da je ST "na" preslikavanje , tako da možemo posmatrati i verovatnosni prostor

$$\left(\prod_{k \in N} X_k \ , \ U \ , \ m \right) \ ,$$

, gde je $U = \left\{ Y \subseteq \prod_{k \in N} X_k \ : \ ST^{-1}(Y) \in L\left(\prod_{k=1}^{H} U_k\right) \right\}$ a mera m je definisana sa $m(Y) = L\left(\prod_{k=1}^{H} u_k\right)(ST^{-1}(Y))$.

<u>Lema 3.2.1.</u> /i/ ST je surjektivno preslikavanje ,

/ii/ $\prod_{k \in N} L(U_k) \subseteq U$ i $\prod_{k \in N} L(u_k)$ i m se podudaraju na $\prod_{k \in N} L(U_k)$.

<u>Dokaz</u> : /i/ Neka je $(a_1,\dots,a_n,\dots) \in \prod_{k \in N} X_k$. Produžimo niz $(a_n)_{n \in N}$ do unutrašnjeg niza $(a_n)_{n \in {}^*N}$. Skup $\{n \in {}^*N : (\forall k \leq n) a_k \in X_k\}$ je unutrašnji i sadrži vanjski skup N , pa sadrži neki beskonačan $H' \in {}^*N \setminus N$. Zavisno od toga da li je H' veći ili manji od H , niz $(a_k)_{k=1}^{H'}$ možemo skratiti odnosno produžiti do niza $(a_k)_{k=1}^{H}$ tako da je $ST((a_k)_{k=1}^{H}) = (a_n)_{n \in N}$.

/ii/ Neka je $\mathbb{P}$ poluprsten cilindričnih skupova oblika $A_1 \times \dots \times A_n \times X_{n+1} \times \dots$, gde je $A_k \in U_k$ $(k=1,\dots,n \ , \ n \in N)$. Tj. $\mathbb{P} = \{ A_1 \times \dots \times A_n \times X_{n+1} \times \dots \ : \ A_k \in U_k \ \ k=1,\dots,n \ , \ n \in N \}$. Dokažimo prvo da se σ algebra $\prod_{k \in N} L(U_k)$ može dobiti Carathéodoryjevom ekstenzijom mere $\prod_{k \in N} L(u_k)$ sa poluprstena $\mathbb{P}$.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Zaista , ako je $B_k \in L(U_k)$ i $L(u_k)(B_k) = o$ $(k=1,\dots,n \quad n \in N)$ tada možemo izabrati skupove $A_k \in U_k$ $(k=1,\dots,n)$ tako da je $A_k \supseteq B_k$ i $L(u_k)(A_k) \leqslant \sqrt[n]{\varepsilon}$ $(k=1,\dots,n)$, pa je

$B_1 \times \dots \times B_n \times X_{n+1} \times \dots \subseteq A_1 \times \dots \times A_n \times X_{n+1} \times \dots$ i

$\prod_{k \in N} L(u_k)(A_1 \times \dots \times A_n \times X_{n+1} \times \dots) \leqslant \varepsilon$, tako da je skup

$B_1 \times \dots \times B_n \times X_{n+1} \times \dots$ u Carathéodoryjevoj ekstenziji $\overline{\mathbb{P}}$ poluprstena $\mathbb{P}$. U opštem slučaju , za $B_k \in L(U_k)$ $(k=1,\dots,n)$ postoje takvi $A_k \in U_k$ $(k=1,\dots,n)$ tako da je $L(u_k)(A_k \Delta B_k) = o$ $(k=1,\dots,n)$. Sada imamo

$$(B_1 \times \dots \times B_n \times X_{n+1} \times \dots) \Delta (A_1 \times \dots \times A_n \times X_{n+1} \times \dots) \subseteq$$

$$\subseteq ((B_1 \Delta A_1) \times \prod_{\substack{k \in N \\ k>1}} X_k) \cup (X_1 \times (B_2 \Delta A_2) \times \prod_{\substack{k \in N \\ k>2}} X_k) \cup \dots \cup (\prod_{k=1}^{n-1} X_k \times (B_n \Delta A_n) \times \prod_{\substack{k \in N \\ k>n}})$$

Budući da je $L(u_k)(A_k \Delta B_k) = o$ i zbog napred rečenog , skupovi sa desne strane inkluzije su svi u $\overline{\mathbb{P}}$ i imaju $\prod_{k \in N} L(u_k)$ meru nula , pa je i skup sa leve strane $\prod_{k \in N} L(u_k)$ mere nula , odakle na osnovu kompletnosti mere $\prod_{k \in N} L(u_k)$ dobijamo da je $B_1 \times \dots \times B_n \times X_{n+1} \times \dots \in \overline{\mathbb{P}}$. Tako smo dokazali da je

$$\prod_{k \in N} L(U_k) = \overline{\mathbb{P}} \qquad \dots \qquad /1/$$

Predimo na dokazivanje dela /ii/ leme . Ako imamo cilindrični skup oblika $A_1 \times \dots \times A_n \times X_{n+1} \times \dots = D$, gde je $A_k \in U_k$ $(k = 1,\dots,n)$, tada je $ST^{-1}(D) = A_1 \times \dots \times A_n \times X_{n+1} \times \dots \times X_H$ i $L(\prod_{k=1}^{H} u_k)(ST^{-1}(D)) = \prod_{k \in N} L(u_k)$, pa je u tom slučaju /ii/ ispunjeno . Skupovi za koje vredi /ii/ čine σ algebru , pa je /ii/ ispunjeno i za $\sigma(\mathbb{P})$, odakle /ii/ vredi i za komple-

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Neka je V σ algebra generisana skupovima oblika $A \times X_{n+1} \times \cdots$ $(n \in N)$, gde je $A \subseteq \prod_{k=1}^{n} X_k$ element **unutrašnje** algebre generisane sa poluprstenom pravougaonika oblika $A_1 \times \cdots \times A_n$ $(A_k \in U_k$, $k=1,\ldots,n)$. Tako, ako su X_n hiperkonačni skupovi, V je generisana skupovima oblika $A \times X_{n+1} \times \cdots$ gde je $A \subseteq \prod_{k=1}^{n} X_k$ unutrašnji skup.

<u>Lema 3.2.2.</u> $V \subseteq U$.

<u>Dokaz</u> : Jasno , V je generisana skupovima oblika $D = A \times X_{n+1} \times \cdots$, gde je A unutrašnji podskup od $\prod_{k=1}^{n} X_k$, element unutrašnje algebre generisane unutrašnjim pravougaonicima poznatog oblika. Tako je $ST^{-1}(D) = A \times X_{n+1} \times \cdots \times X_H \in \prod_{k=1}^{H} U_k$. ⊣

Tako možemo posmatrati i verovatnosni prostor

$$\left(\prod_{k \in N} X_k\ ,\ V\ ,\ m\right) .$$

Ako , kao u dokazu leme 3.2.1. , sa $\mathbb{P}$ označimo poluprsten cilindričnih skupova oblika $A_1 \times \cdots \times A_n \times X_{n+1} \times \cdots$, tada je $\sigma(\mathbb{P}) \subseteq V$ i inkluzija može biti stroga , kako nam to pokazuje Hooverov primer .

H.J.Keisler ([St$_2$]) je pokazao da , ako posmatramo dva hiperkonačna unutrašnja verovatnosna prostora sa $*$ - k.a. merom $(X , \mathbb{C} , \mu)$, $(Y , \mathbb{D} , \nu)$, tada Fubinijeva teorema važi i u prostoru $(X \times Y , L(\mathbb{C} \times \mathbb{D}) , L(\mu \times \nu))$. Preciznije :

rabilna funkcija . Tada

a/ funkcija $y \longrightarrow f(x,y)$ je $L(\nu)$ integrabilna $L(\mu)$ skoro svuda ,

b/ $F(x) = \int f(x,y)dL(\nu)$ je $L(\mu)$ integrabilna ,

c/ $\int F(x)dL(\mu) = \int f(x,y)d\, L(\mu\times\nu)$ $\dashv$

Prirodno se postavlja pitanje da li Fubinijeva teorema važi recimo, i u prostoru $(\prod_{k\in N} X_k , V , m)$. Mi ćemo pokazati da je to tačno za posledicu Fubinijeve teoreme , nula-jedan zakon .

Podskup $D \subseteq \prod_{k\in N} X_k$ se naziva repni skup ako je zatvoren u odnosu na promenu konačno koordinata svojih elemenata . Drugim rečima $(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots) \in D$ povlači $(y_1,\dots,y_n,x_{n+1},\dots) \in D$ za svako $y_1 \in X_1$, ... , $y_n \in X_n$ i svako $n \in N$.

<u>Teorema 3.2.3.</u> Ako je $D \in V$ repni skup tada je $m(D) = 0$ ili $m(D) = 1$.

<u>Dokaz</u> : Neka je $p_{n,m} : \prod_{k\in N} X_k \longrightarrow X_n\times \cdots \times X_m$ $(m \geqslant n)$ projekcija , tj. $p_{n,m}(x_1,\dots,x_n,\dots,x_m,\dots) = (x_n,\dots,x_m)$.

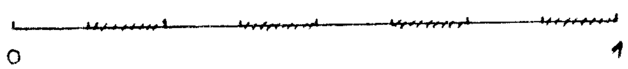
Sa $\mathbf{K}_{n,m}$ označimo unutrašnju algebru generisanu poluprstenom pravougaonika oblika $A_n\times \cdots \times A_m$ $(A_k \in U_k \ (k=n,\dots,m \ , m \geqslant n))$.

Neka je $\mathbf{F}_{n,m}$ σ algebra generisana sa skupovima oblika $p^{-1}_{n,m}(A)$, , $A\in \mathbf{F}_{n,m}$. $\mathbf{F}_{n,\infty}$ se definiše kao $\sigma(\bigcup_{m\geqslant n} \mathbf{F}_{n,m})$. Primetimo da je $\mathbf{F}_{n,m} \subseteq \mathbf{F}_{n,m+1}$ pa je $\bigcup \mathbf{F}_{n,m}$ algebra . Na kraju definišimo $\mathbf{F} = \bigcap_{n\in N} \mathbf{F}_{n,\infty}$ što predstavlja σ algebru repnih skupova, elemenata od V.

Neka je $D \in \mathbf{F}$. Tada je $D \in \mathbf{F}_{1,\infty}$ tj. $D \in \sigma(\bigcup_{n\in N} \mathbf{F}_{1,n})$ pa postoje skupovi $A_n \in \mathbf{F}_{1,n}$ tako da $m(D \Delta A_n) \longrightarrow o$. Međutim, $D \in \mathbf{F}_{n+1,\infty}$ pa pošto su A_n i D nezavisni imamo $m(D \cap A_n) = m(A_n)\cdot m(D)$, pa prelaskom na limes dobijamo $m(D) = m(D)^2$. Dakle, $m(D) = o$ ili $m(D) = 1$. ⊣

Da li Fubinijeva teorema ili nula jedan zakon važe kada se namesto σ algebre V posmatra U? Da li su U i $\overline{V}$ jednake σ algebre, gde je $\overline{V}$ kompletiranje od V? To su pitanja na koja bi interesantno bilo odgovoriti.

Neka je $X_k = \{o,1\}$ $(k \in N)$, gde je mera u_k definisana na svim podskupovima od X_k tako da je $u_k(o) = u_k(1) = \frac{1}{2}$. Tada se prostori $(\prod_{k\in N} X_k, \prod_{k\in N} L(U_k), \prod_{k\in N} L(u_k))$ i $(\prod_{k\in N} X_k, V, m)$ podudaraju sa intervalom $[o,1]$ u kome se posmatra mera Lebesguea. $(\prod_{k=1}^{H} X_k, \prod_{k=1}^{H} U_k, \prod_{k=1}^{H} u_k)$ se može identificirati sa $\{o, \frac{1}{2^H}, \dots, \frac{k}{2^H}, \dots, \frac{2^H-1}{2^H}\} \subseteq {}^*[o,1]$. Ako posmatramo sve realne brojeve koji pripadaju jednom od intervala oblika $[\frac{2k-1}{2^H}, \frac{2k}{2^H}]$ $(k = 1,\dots,2^{H-1})$ i ako taj skup označimo sa D, tada on nije Lebesgue merljiv.



Zaista, ako bi bio merljiv tada bi imamo meru $\frac{1}{2}$ jer skup D

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

simetričan u odnosu na sredinu intervala $[0,1]$. Sa druge strane vidi se da je D repni skup, pa bi on trebao da ima meru 0 ili 1 . Dakle, D nije merljiv .

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

B I B L I O G R A F I J A

[Da] Davis M. "Applied nonstandard analysis" John Wiley & Sons, New York (1977)

[Ba] Barwise J. "Handbook of Mathematical Logic" North-Holland, Amsterdam (1977)

[Ch] Cherlin G., Hirschfeld J. "Ultrafilters and ultraproducts in non-standard analysis" u "Contributions to nonstandard analysis" eds. Luxemburg W.A.J., Stroyan K.D., North-Holland, Amsterdam (1972)

[He] Henson C.W. "The isomorphism property in nonstandard analysis and its use in the theory of Banach spaces" Jour. of Sym.Logic Vol.39 No.4, 717-731 (1974)

[Hi] Hirschfeld Y. "Non standard analysis and the compactification of groups" Isr.Jour.Math. Vol.25, 145-153, (1976)

[Ke] Keisler H.J., Chang C.C. "Model Theory" North-Holland, Amsterdam (1973)

[Li] Lindstrøm T.L. "Applications of Nonstandard analysis to Probability Theory", zapisi lekcija sa seminara u Madisonu, University of Wisconsin, Madison, jesen 1981.

[Lo] Loeb P.A. "An introduction to nonstandard analysis and hyperfinite probability theory, Probabilistic Analysis and Related Topics" A.T.Brarucha-Reid ed., Academic Press, New York (1979)

[Lo_1] Loeb P.A. "Conversion from nonstandard to standard measure spaces and applications in probability theory" Trans. Amer. Math. Soc. 211, (1975), 113-122

[Ro] Robinson A. "Compactifications of groups and rings and non-standard analysis" Jour. Sym. Log. 34 576-588 (1969)

[Ru] Rudin W. "Functional analysis" McGraw-Hill , New York (1973)

[St] Stroyan K.D. "Aditional remarks on the theory of monads" u "Contributions to nonstandard analysis" , , Luxemburg W.A.J. , Stroyan K.D. eds. North-Holland , Amsterdam (1972)

[St_1] Stroyan K.D., Luxemburg W.A.J. "Introduction to the theory of infinitesimals" Academic Press , New York (1976)

[St_2] Stroyan K.D. , Bayod "Foundation of Infinitesimal Stochastic Analysis" u štampi

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

S A D R Ž A J

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs