U N I V E R Z I T E T U B E O G R A D U
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Aleksandar Ignjatović

MODELI ARITMETIKE

Branjeno 14. 11. 84

Komisija :

1. Ž. Mijajlović (rukovodilac)
2. S. Prešić
3. M. Rašković

Beograd

1984.

Istorija prirodnih brojeva i ostalih pojmova vezanih za njih je duga i teško se može reći šta je njen prapočetak; ipak, on se može vezati za proces odvajanja broja kao pojma od samih objekata koji se broje. Naime, ne samo prve civilizacije već i današnji primitivni narodi,na primer neka afrička plemena, nemaju jedinstveni način brojanja svih objekata; reč koja označava dva čoveka nije složena od reči koja označava pojam broja dva i pojam čoveka, već je jedinstvena i nema ničeg zajedničkog sa rečju koja označava tri čoveka ili dve ptice. Diferenciranje pojma broja svakako je vezano za pojavu privatnog vlasništva i prometa dobara, kada je trebalo ne samo brojati nego i uporedjivati i računati.

Sledeći korak važan za računanje prirodnim brojevima je pojava brojnih sistema. Primitivni narodi i danas imaju posebnu reč za različite brojeve i to obično samo prvih nekoliko, ostali su "mnogo". Sve civilizacije koje su dostigle velike domete tokom svoje istorije imaju različite brojne sisteme,a neke civilizacije su koristile i više njih. Tako su,na primer, Asteci, Maje i Kelti koristili sisteme sa osnovama 5 i 20, Feničani su pre oko 5000 godina uveli nov sistem slovne numeracije sa osnovama 10 i 60,a Jevreji i Grci su takav sistem prihvatili prilagodivši ga svojoj azbuci. Grčka varijanta ove numeracije se zadržala sve do kraja srednjeg veka, iako u sebi nije sadržavala oznaku za nulu,koju Grci i nisu priznavali kao prirodan broj. U prvim slovenskim prevodima i tekstovima Ćirila i Metodija i njihovih učenika preuzeta je grčka slovna numeracija (az - 1,buki - ,vedi 2,glagoli -3 i tako dalje; buki nema brojnu vrednost jer je u novogrčkom jeziku beta izgubila svoju glasovnu vrednost (Babilon - Vavilon i sl.).

Moderni decimalni sistem potiče iz Indije i verovatno ima korene u vavilonskim brojevima čija je osnova 60; u Evropu je prodreo preko Arapa i mada se u Indiji učvrstio već u V veku n.e. Evropa ga je potpuno prihvatila tek u XV, a nula,inače uvedena negde u XII veku,dobila je sva legitimna prava tek u XVI veku.+)

Uprkos nesavršenom brojnom sistemu,već stari Grci znali su puno o prirodnim brojevima, ali je matematika bila pomešana sa mistikom, pa su neki grčki matematičari, kao Pitagora na primer, nekim brojevima dodeljivali magična svojstva ili ljudske osobine.Ipak, iza mističnih verovanja ostala su i prva znanja o prirodnim brojevima.Tako je Euklid pokazao da ima beskonačno mnogo prostih brojeva tehnikom koja u potpunosti odgovara današnjim matematičkim metodama,a razmatrani su bili i brojevi blizanci, savršeni brojevi, trougaoni brojevi i slično. Ova znanja bila su plodna osnova za matematiku XVII i XVIII veka kada je teorija brojeva doživela buran razvoj, specijalno Fermat, Lagrange i Euler doprineli su tome svojim radovima.

Prvi pokušaj aksiomatskog zasnivanja teorije brojeva bio je 1861. godine kada Hermann Grassmann štampa "Lehrbuch der Arithmetik" u kome se prilično uspešno na aksiomatskoj osnovi zasniva teorija celih brojeva. Medjutim, medju aksiomama nema one koja tvrdi da različiti brojevi imaju različite naslednike. Aksiomatizacija zasnovana na osnovnim pojmovima - broj,1 i sledbenik i aksiomama P1 - P5 pripada Richardu Dedekindu i

+) Detaljnije o tome videti u [FR].

štampana je u njegovoj poznatoj knjižici "Was sind und was sollen die Zahlen" 1888, a potiče iz 1879.

P1 1 je broj.

P2 Naslednik svakog broja je broj.

P3 Različiti brojevi imaju različite naslednike.

P4 Ne postoji broj čiji je naslednik 1.

P5 Ako broj 1 ima neko svostvo i naslednik svakog broja sa ovim svojstvom i sam ima to svojstvo, tada svi brojevi imaju to svojstvo.

Ovu aksiomatiku preuzima Giuseppe Peano 1891, ali uvodi znatno pogodniju simboliku logičkog jezika dok istraživanja temelji na Grassmannovim rezultetima. Dalje usavršavanje simboličkog jezika dali su Russell i Whitehead 1910. godine u poznatom delu "Principia mathematica".+)

U [MARD], na premer, može se naći sledeće "poluaksiomatsko" zasnivanje (u stvari, aksiomatsko zasnivanje ali u neformalnoj teoriji) prirodnih brojeva:

N1 Definisano je preslikavanje $\pi: N \longrightarrow N$.

N2 $\pi(m) = \pi(n) \longrightarrow m = n$, tj. je injekcija.

N3 $1 \in N$.

N4 $(\forall n \in N)\ \pi(n) \neq 1$.

N5 Ako je $S \subseteq N$ podskup od N koji ima ova dva svojstva $1 \in S$, $(\forall n \in N)\ n \in S \longrightarrow \pi(n) \in S$, onda je $S = N$.

a zatim se pokazuje da su skup N i funkcija π odredjeni do izomorfizma. Medjutim, pokušaj da se Dedekindove aksiome pretoče u potpuno formalnu teoriju i da se prirodni brojevi opišu do izomorfizma teorijom u predikatskom računu prvog reda nije us-

---

+) Detalji o navedenim istorijskim činjenicama mogu se naći u [WA].

peo. Gödelov dokaz kompletnosti ovog računa 1930. godine ukazuje da svaka takva teorija ima i"nestandardne" modele(videti stav 2.1.3ovog rada).Uzrok tome je što svaki formalni jezik ograničava petu Peanovu(Dedekindovu) aksiomu na svojstva definabilna tim jezikom. Pokušaj da se proširi kolekcija definabilnih svojstava dodavanjem nove sorte promenljivih za "podskupove" univerzuma i odgovarajućih dodatnih aksioma vodi u aritmetiku "drugog reda" koja zapravo predstavlja teoriju prvog reda na dvosortnom jeziku.Ipak,i ova teorija ima nestandardne modele zbog nemogućnosti da se u svakoj interpretaciji "pokriju" svi podskupovi univerzuma modela.

Ovim pitanjima posvećena je prva glava ovog rada i u njoj su navedene sve fundamentalne teoreme o teoriji P kakve su Gödelove teoreme nekompletnosti (1.5.1) i nedokazivosti neprotivrečnosti teorije P u samoj teoriji P (1.5.2) i kakva je Churchova teorema o nerazrešvosti. Na kraju ove glave skiciran je čuveni rezultat Matijaseviča iz 1970. godine o diofantskim skupovima koji predstavlja rešenje desetog Hilbertovog problema, a za čije su rešenje u velikoj meri zaslužni i M.Davis,J. Robinson i H. Putnam. Teoreme uglavnom imaju prilično grubu skicu dokaza ali se u bibliografskim napomenama upućuje na literaturu koja sadrži detalje, što važi inače i za drugu glavu,posvećenu modelima teorije P. Rezultati u ovoj oblasti uglavnom su novijeg datuma a specijalno sedamdesetih godina ovog veka H.Friedman, H.Gaifman i J. Paris daju važne rezultate u ovoj oblasti.

Originalan doprinos ovog rada dat je u trećoj i četvrtoj glavi,gde su svi stavovi,sem navedenih poznatih teorema, novi.

U trećoj glavi uvodi se parcijalan strogi poredak na skupu Sent(P) svih rečenica jezika L_P indukovan nekom teorijom T i to na sledeći način (vidi 3.2.1)

$$\varphi <_T \psi \Leftrightarrow T \vdash Ex(Prf(x,\ulcorner\varphi\urcorner) \wedge \forall y \leq x \neg Prf(y,\ulcorner\psi\urcorner)).$$

Potom se ispituju poredci indukovani teorijama P i P + Con_P i pokazuje se da je $<_P = <_{Th(\omega)}$, a takodje se karakterišu svi modeli $\mathfrak{M} \models P$ sa svojstvom $<_{Th(\mathfrak{M})} = <_P$ (tvrdjenje 3.2.2). Tvrdjenje 3.2.4 pokazuje da poredak indukovan teorijom P + $\neg Con_P$ nije linearan, iako je poredak indukovan proizvoljnim modelom $\mathfrak{M}$ te teorije linearan, jer $\mathfrak{M} \models \neg Con_P$. Ova činjenica inače predstavlja neophodan i dovoljan uslov za linearnost poretka indukovanog teorijom nekog modela $\mathfrak{M}$. Kao posledicu navedenog stava dobijamo stav 3.3.3 kojim pokazujemo ranije poznatu činjenicu da postoje dva modela za P, koji se ne mogu zajedno potopiti ni u kakav treći model za P (svojstvo $\neg$JEP). Takodje pokazujemo da za svaku teoriju T postoji teorija T′ takva da je poredak $<_{T'}$ indukovan teorijom T′ linearan a predstavlja proširenje poretka $<_T$ indukovanog teorijom T (stav 3.2.5). Dokazuju se još neka svojstva ovog poretka vezana za neke poznate rezultate.

Četvrta glava posvećena je razmatranju nekih automorfnih slika nestandardnih modela za P na sopstveni početni komad. Teorema 4.1.1, po kojoj svaki model aritmetike ima dugačak početni komad navedena je u [SM 3] bez dokaza, tako da autor ovog rada nije mogao da uporedi sopstveni dokaz sa već postojećim. Teorema 4.2.1 daje neophodan i dovoljan uslov da početni komad $I_a = \{ x \mid x <_{\mathfrak{M}} a \}$ nekog modela $\mathfrak{M}$ sadrži početni komad izomorfan celom modelu, a kao posledicu dobijamo poznati stav (vidi 4.2.2) da je $\omega <_{\Sigma_1} \mathfrak{M} \leftrightarrow \bigcap\{\mathfrak{N} \mid \mathfrak{N} \subset_e \mathfrak{M}, \mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}\} = \omega$

Teoreme 4.3.1, 4.3.2 i 4.3.3 daju karakterizaciju početnih komada nestandardnih modela aritmetike koji se mogu prikazati kao unije,odnosno preseci početnih komada izomorfnih polaznom modelu. Na kraju se, kao posledica stava 4.3.3 dokazuje da ukoliko su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ modeli za P i $\omega \gneqq \mathfrak{N} <_{e\Sigma_1} \mathfrak{M}$ da se tada model $\mathfrak{N}$ može prikazati kao unija početnih komada modela $\mathfrak{M}$ koji su izomorfni sa $\mathfrak{M}$.

U radu se svuda, sem gde je izričito napomenuto, radi sa prebrojivim modelima aritmetike. Notacija je potpuno standardna za obu oblast, s tim što je kod predikata Prf_P indeks P, jednostavnosti radi, izostavljen. Pod pojmom parcijalnog strogog uredjenja podrazumeva se antisimetrična i tranzitivna ali ne i refleksivna relacija. PR^1 označava predikatski račun prvog reda sa uobičajenom aksiomatikom.

Autor ovog rada želi na kraju da se zahvali onima koji su mu pomogli u radu, pre svega mentoru dr Žarku Mijajloviću na brojnim sugestijama i korisnim savetima. Maštovita predavanja iz Matematičke logike i Algebre dr Slaviše Prešića podstakla su me da zavolim ovu oblast matematike.Česte i za mene veoma korisne diskusije sa dr Miodragom Raškovićem doprinele su jasnijem sagledavanju problematike kojoj je posvećen ovaj rad.

Takodje bih želeo da se zahvalim dr Djuri Kurepi,jednom od osnivača klasične teorije skupova, na njegovim podsticajnim savetima, zasnovanim na bogatom iskustvu nastavnika i naučnog radnika.

G L A V A P R V A

FORMALNA ARITMETIKA P KAO TEORIJA PREDIKATSKOG RAČUNA PRVOG REDA

I 0. FORMALNA ARITMETIKA P

Peanova aritmetika P je teorija u predikatskom računu prvog reda sa jednakošću na jeziku $L_P = \{+, \cdot, ', 0, <\}$, sa sledećim aksiomama:

P1. $\forall x \neg(x' = 0)$

P2. $\forall x \forall y\ (x' = y' \to x = y)$

P3. $\forall x\ (x + 0 = x)$

P4. $\forall x \forall y\ (x + y' = (x + y)')$

P5. $\forall x\ (x.0 = 0)$

P6. $\forall x \forall y\ (x.y' = x.y + y)$

P7. $\forall x \neg(x < 0)$

P8. $\forall x \forall y\ (x < y' \leftrightarrow x < y \vee x = y)$

P9. $\forall x \forall y\ (x < y \vee x = y \vee y < x)$

PI. Shema indukcije

Shema indukcije I je skup svih aksioma oblika

$$\theta\ (0,\vec{z}) \wedge \forall x\ (\theta(x,\vec{z}) \to \theta\ (x',\vec{z})) \to \forall x \theta\ (x,\vec{z}),$$

gde je $\theta(x,z)$ formula jezika L_P. Od interesa je posmatrati teoriju odredjenu aksiomama P1-P9, koju označavamo sa P^-. Shema indukcije je od presudnog značaja za P; dok se u P može dokazati ogroman deo tvrdjenja tačnih na strukturu prirodnih brojeva, u P^- nisu dokaziva čak ni njihova tako elementarna svojstva kao što su komutativnost i asocijativnost sabiranja i množenja. S druge strane, za dokaz velikog dela najvažnijih svojstava prirodnih brojeva nije neophodna indukcija u "punoj snazi". Naime, dovoljno je ograničiti se na restrikciju sheme I samo do nekog stepena složenosti formule θ. Zato je od značaja posmatrati "fragmente aritmetike", tojest podteorije od P u kojima je shema indukcije restrikovana na neku klasu formula (na primer Σ_n, Π_n, B_n, Open, ...).

I 1. HIJERARHIJA FORMULA U P

Sem uobičajenih dokazno-teoretskih hijerarhija formula (Σ_n^0, Π_n^0, B_n^0), u aritmetici su značajne još neke hijerarhije.

DEFINICIJA 1.1.1. Formula φ jezika L_P je $\Sigma_0(PR^1)$ formula ako je ekvivalentna u PR^1 nekoj formuli čiji su svi kvantifikatori ograničeni, tj. oblika $\forall x\ (x < y \rightarrow \varphi)$ i $Ex\ (x < y \wedge \varphi)$, što ćemo ubuduće zapisivati sa $\forall x < y\, \varphi$, odnosno $Ex < y\, \varphi$. Formula φ je $\Sigma_n(PR^1)(\Pi_n(PR^1))$ ako je ekvivalentna u PR^1 nekoj formuli oblika $Q_1\vec{x}_1 \ldots Q_n\vec{x}_n \psi$, gde je Q_1 blok egzistencijalnih (univerzalnih) kvantifikatora, a zatim blokovi istorodnih kvantifikatora alterniraju, dok je ψ Σ_0 formula. Formula φ je $\Delta_n(PR^1)$ akko je i $\Sigma_n(PR^1)$ i $\Pi_n(PR^1)$.

Zamenom PR_1 sa P, odnosno sa $Th(\mathfrak{M})$, gde je $\mathfrak{M}$ neki model jezika L_P, dobijamo hijerarhije $\Sigma_n(P)$ $(\Pi_n(P))$, odnosno $\Sigma_n(\mathfrak{M})$ $(\Pi_n(\mathfrak{M}))$. Ubuduće ćemo posmatrati samo hijerarhiju $\Sigma_n(P)$ $(\Pi_n(P), \Delta_n(P))$, i, jednostavnosti radi, označavaćemo je sa $\Sigma_n(\Pi_n, \Delta_n)$. Kao što ćemo videti, na osnovu Matijasevičeve teoreme hijerarhije, $\Sigma_n^0(\Pi_n^0)$ i $\Sigma_n(\Pi_n)$ poklapaju se (posledica 1.7.5).

I 2. OSNOVNE TEOREME FORMALNE ARITMETIKE P

Dokazi u teoriji P rečenica koje odgovaraju osnovnim svojstvima prirodnih brojeva, kao na primer

(S1) $\forall x\ (0 + x = x)$

(S2) $\forall x\ (0.x = 0)$

(S3) $\forall x \forall y\ (x + y = y + x \wedge x.y = y.x)$

(S4) $\forall x \forall y \forall z\ ((x + y) + z = x + (y + z) \wedge (x.y).z = x.(y.z))$

(S5) $\forall x\ (\neg(x = 0) \rightarrow Ey\ (x = y'))$

(S6) $\forall x \forall y\ (\neg(y = 0) \rightarrow E_1 u\ E_1 v\ (x = y.u + v \wedge v < y))$

potpuno su rutinski (videti na primer [ME]).

Posebnu ulogu u teoriji P igraju sledeći termi jezika L_P

$\underline{0} \doteq 0,\ \underline{1} \doteq 0',\ \underline{2} \doteq (0')',\ldots \underline{n} \doteq (\ldots(0')\underbrace{'\ldots)'}_{nx},\ldots$

koje nazivamo numeralima. Meta-indukcijom po prirodnim brojevima lako se dokazuje sledeći stav (vidi [ME]):

STAV 1.2.1. i) $P \vdash \underline{n} = \underline{m}$ akko je $n = m$

ii) $P \vdash \underline{n} \neq \underline{m}$ akko je $n \neq m$

iii) $P \vdash \underline{n} \cdot \underline{m} = \underline{n.m}$ za sve m,n

iv) $P \vdash \underline{n} + \underline{m} = \underline{n+m}$ za sve m,n

v) $P \vdash \underline{n} < \underline{m}$ akko je $n < m$.

Iz ovog stava sledi da za sve Σ_0^0 rečenice φ važi $P \vdash \varphi$ akko $\omega \models \varphi$, što se odmah jednostavno proširuje i na Σ_1^0 rečenice. Već pomenuta posledica Matijasevičeve teoreme daje odatle sledeći stav.

STAV 1.2.2. Za proizvoljnu Σ_1 rečenicu φ jezika L_P važi $P \vdash \varphi$ akko $\omega \models \varphi$.

Sledeće sheme su teoreme u P i njihovi dokazi su tipične primene sheme indukcije.

SH(J) Shema totalne indukcije

$\forall x\ (\forall y < x\ \varphi(y) \rightarrow \varphi(x)) \rightarrow \forall x\ \varphi(x)$

SH(L) Shema najmanjeg elementa

$Ex\ \varphi(x) \rightarrow Ex(\varphi(x) \wedge \forall y < x\ \neg\varphi(y))$

SH(G) Shema najvećeg elementa

$Ex\ \varphi(x) \wedge Ey\forall x\ (\varphi(x) \rightarrow x < y) \rightarrow Ex\ (\varphi(x) \wedge \forall y > x\ \neg\varphi(y))$

SH(B) Shema kolekcije

$\forall x < z\ Ey\theta(x,y) \rightarrow Eu\ \forall x < z\ Ey < u\ \theta(x,y)$

SH(R) Shema regularnosti

$\forall x < v\ Ey\ \forall u\ (\varphi(x,u) \rightarrow u < y) \rightarrow Ey\forall x < v\ \forall u(\varphi(x,u) \rightarrow u < y)$.

Dokažimo, na primer, SH(J), ostale sheme dokazuju se sličnom tehnikom u kojoj je primena sheme indukcije esencijalna.

DOKAZ SH(J). Označimo formulu $\forall y<x\,\varphi(y)$ sa $B(x)$, a rečenicu $\forall x(\forall y<x\,\varphi(y)\rightarrow\varphi(x)))$ sa C; očevidno $P\vdash B(0)$ zbog aksiome P7, pa $P\vdash C\rightarrow B(0)$. Po aksiomi P8 $P\vdash B(x')\leftrightarrow B(x)\wedge\varphi(x)$, dok zbog valjane formule smene $P\vdash C\rightarrow(B(x)\rightarrow\varphi(x))\ldots(1)$. Odavde je $P\vdash C\rightarrow(B(x)\rightarrow B(x'))$, odakle

$$P\vdash (C\rightarrow B(x))\rightarrow(C\rightarrow B(x')),\text{ tj.}$$

$$P\vdash (C\rightarrow B(0))\wedge\forall x\,((C\rightarrow B(x))\rightarrow (C\rightarrow B(x')),\text{ pa}$$

$$P\vdash \forall x\,(C\rightarrow B(x)),\text{ što sa (1) daje}$$

$$P\vdash C\rightarrow\forall x\,\varphi(x).$$

Shema SH(L) dobija se iz prethodne zamenom $\varphi(x)$ sa $\neg\varphi(x)$ i odgovarajućim transformacijama.

Medjutim, sve ove sheme, sem SH(G), slabije su od indukcije, naime važi

STAV 1.2.3. $P^- + J + L + B + R \nvdash I$.

DOKAZ. Uočimo strukturu

$$\Omega = (\omega_1, +, \cdot, ', <, 0),$$

gde su +, . i $<$ uobičajene operacije i poredak na najmanjem neprebrojivom ordinalu ω_1, a operacija ′ definisana je sa $\xi' = \xi + 1$. Neposredno se proverava da $\Omega \models P^- + J + L + B + R$ kao posledica osobina ovih operacija na ω_1, dobre uredjenosti i regularnosti ovog oridinala. S druge strane, $\Omega \not\models I$ jer $\Omega\models 0<\omega$, $\Omega\models\forall x(x<\omega\rightarrow x'<\omega)$, ali $\Omega\not\models\forall x\,(x<\omega)$.

NAPOMENA: Struktura $E = (\varepsilon, +, \cdot, ', <, 0)$, gde je $\varepsilon = \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$, jedan je od najčešće korišćenih modela za $P^- + J$.

Shema SH(G) "jaka" je koliko i indukcija, što pokazuje

STAV 1.2.4: $P^- + G \dashv\vdash P$.

DOKAZ: Da $P\vdash G$ dokazujemo metodom korišćenom u dokazu sheme SH(J); dokažimo zato samo da $P^- + G\vdash I$. Pretpostavimo da u nekom modelu $\mathfrak{A}$ za $P^- + G$ važi

$$\mathfrak{A} \models \varphi(0) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \varphi(x')) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2),$$

ali $\mathfrak{A} \not\models \forall x\, \varphi(x)$. Tada, za formulu $\psi(x) \doteq \forall y \leq x\, \varphi(y)$ važi $\mathfrak{A} \models \psi(0)$, pa $\mathfrak{A} \models Ex\, \psi(x)$. S druge strane, ako $\mathfrak{A} \models \neg\varphi(c)$, $c \in |\mathfrak{A}|$, očevidno $\mathfrak{A} \models \forall x\, (\psi(x) \rightarrow x < c)$, odakle $\mathfrak{A} \models Ex(\psi(x) \wedge \forall y > x \neg \psi(y))$, i neka element $d \in |\mathfrak{A}|$ realizuje poslednju formulu u modelu $\mathfrak{A}$. Tada, s obzirom da iz P8 sledi $c < c'$ i $\neg Ey\, (c < y < c')$ zaključujemo da $\mathfrak{A} \models \varphi(c) \wedge \neg\varphi(c')$, što je kontradikcija sa (2).

Kada se posmatra P^- sa nekom shemom koja nije parafraziranje sheme indukcije, na P^- dodaju se elementarna svojstva prirodnih brojeva koja su inače nedokaziva u P^-; najčešće su to

i) $\forall x \forall y\, (x + y = y + x \wedge x.y = y.x)$

ii) $\forall x \forall y \forall z\, ((x + y) + z = x + (y + z) \wedge (x.y).z = x.(y.z))$

iii) $\forall x \forall y \forall z\, (x.(y + z) = x.y + x.z)$

iv) $\forall x \forall y\, (x \leq y \iff Ez\, (x + z = y))$

v) $\forall x \forall y\, (x \leq y \vee y \leq x)$

vi) $\forall x \forall y \forall z\, (x + y = x + z \rightarrow y = z)$.

Teoriju P^- + i) - v i) obeležavamo sa P^*. Dokaz leme iz rada [PA 1] lako se pretvara u dokaz sledećeg stava.

<u>STAV 1.2.5.</u> $P \dashv\vdash P^* + I^+$, gde je I^+ sledeća shema:

$\theta(0) \wedge \theta(1) \wedge \forall x \forall y\, (\theta(x) \wedge \theta(y) \rightarrow \theta(x + y)) \rightarrow \forall x\, \theta(x)$.

Ovde je $\theta(x)$ proizvoljna formula jezika L_P, koja može imati i druge slobodne promenljive sem x.

<u>DOKAZ:</u> Deo $P \vdash P^* + I^+$ je uobičajen; obratno, neka je $\mathfrak{M} \models P^* + I^+$ i neka $\mathfrak{M} \models \theta(0) \wedge \forall x\, (\theta(x) \rightarrow \theta(x'))$. Izaberimo proizvoljan element $a \in |\mathfrak{M}|$ i dokažimo da $|\mathfrak{M}| \models \theta(\underline{a})$. Neka je

$$\psi(v,t) \doteq \forall w \leq t\, (\theta(w) \rightarrow \theta(w + v) \vee t < w + v),$$

očevidno $\mathfrak{M} \models \psi(0,\underline{a}) \wedge \psi(1,\underline{a})$. Pretpostavimo da

$\mathfrak{M}\models\Psi(z,\underline{a})\wedge\Psi(y,\underline{a})$, tada za svako $x\leqslant a$ je ili $a<x+y+z$ ili $x+y+z\leqslant a$. Ukoliko je $a<x+y+z$, očevidno je $\mathfrak{M}\models\theta(x)\rightarrow\theta(x+y+z)\vee a<x+y+z$. Ako je $x+y+z\leqslant a$, tada je $x\leqslant a$ i $x+z\leqslant a$, pa iz pretpostavke $\mathfrak{M}\models\Psi(z,a)\wedge\Psi(y,\underline{a})$ sledi $\mathfrak{M}\models\theta(x)\rightarrow\theta(x+z)$ i $\mathfrak{M}\models\theta(x+z)\rightarrow\theta(x+y+z)$. Odatle $\mathfrak{M}\models\theta(x)\rightarrow\theta(x+y+z)$, pa samim tim i

$$\mathfrak{M}\models\theta(x)\rightarrow\theta(x+y+z)\vee a<x+y+z.$$ Dakle,

$$\mathfrak{M}\models\Psi(z,\underline{a})\wedge\Psi(y,\underline{a})\rightarrow\Psi(z+y,\underline{a}),\ \text{pa}\ \mathfrak{M}\models\forall v\Psi(v,\underline{a}).$$

Za $v=a$ dobijamo $\mathfrak{M}\models\forall w\leqslant\underline{a}\ (\theta(w)\rightarrow\theta(w+\underline{a})\vee\underline{a}<w+a)$, odakle za $w=0$ sledi $\mathfrak{M}\models\theta(a)$.

U radu [PA 1] dokazan je stroži rezultet:

$$P+I^{+}(\Sigma_n)\dashv\vdash P^{-}+I(\Sigma_n)$$

za svaki $n\geqslant1$, gde je $I(\Sigma_n)$, odnosno $I^{+}(\Sigma_n)$ predstavljaju restrikciju sheme I, odnosno I^{+} na Σ_n formule. Takodje se napominje da $P^{-}+I^{+}\nvdash I$, pa je shema I^{+} "slabija" od indukcije u P^{-}. Medjutim, sledeći stav pokazuje da se ona ne može dedukovati iz sheme totalne indukcije SH(J).

<u>STAV 1.2.6</u>. $P^{-}+J\nvdash I^{+}$.

<u>DOKAZ</u>: Dovoljno je dokazati da $\Omega\not\models I^{+}$. Uočimo formulu $x<\omega$. Očevidno, $\Omega\models 0<\omega\wedge1<\omega\wedge\forall x\forall y\ (x<\omega\wedge y<\omega\rightarrow x+y<\omega)\wedge\neg\forall x\ (x<\omega)$, tj. $\Omega\not\models I^{+}$.

I 3. MOGUĆNOST FORMALIZOVANJA NEKIH MATEMATIČKIH POJMOVA U P

Teorija P je vrlo bogata, o tome svedoči i činjenica da je moguće uvesti novi predikatski simbol $\mathcal{E}$ definicionom aksiomom $M(\mathcal{E})$ (Vidi 1.4.5), tako da $P+M(\mathcal{E})\vdash ZF^{f}(\mathcal{E})$, gde je $ZF^{f}(\mathcal{E})$ teorija ZF — Inf + Inf$^{+)}$ sa simbolom $\mathcal{E}$ kao simbolom pripadanja. Dakle, u P je moguće izgraditi celokupnu teoriju konačnih skupova. S druge strane, bogatstvo teorije P ogleda se

+) Inf je aksioma beskonačnosti iz ZF, a $\neg$Inf njena negacija. Inače, oznaku ZF uveo je Žarko Mijajlović.

i u tome što se u njoj može "predstaviti" svaka rekurzivna funkcija i svaki rekurzivni predikat, što pokazuje sledeći stav.

STAV 1.3.1. Neka je R n-arni rekurzini predikat a F n-arna rekurzivna funkcija. Tada postoje formule φ i ψ, takve za sve prirodne brojeve $n_1,\dots,n_k,m$ važi

$$R(n_1,\dots,n_k) \Longrightarrow P \vdash \varphi(\underline{n}_1,\dots,\underline{n}_k),$$
$$\neg R(n_1,\dots,n_k) \Longrightarrow P \vdash \neg\varphi(\underline{n}_1,\dots,\underline{n}_k),$$
$$F(n_1,\dots,n_k) = m \Longleftrightarrow P \vdash \forall x(\psi(\underline{n}_1,\dots,\underline{n}_k,x) \longleftrightarrow x = \underline{m}).$$

Dokaz ovog stava izvodi se indukcijom po složenosti predikata R, odnosno funkcije F; baza indukcije je stav 1.2.1 (vidi [SH], 6.7).

I 4. KODIRANJE

Najsnažnije orudje u ispitivanju teorije P je kodiranje, postupak kojim teoriju P možemo ispitivati unutar nje same posredstvom kodova formula, nizova formula i ostalih sintaksnih objekata. Naime, svakoj formuli φ, odnosno termu t jezika L_P, dodeljuje se njegov kod - broj $\ulcorner\varphi\urcorner$, odnosno $\ulcorner t\urcorner$, a zatim se svakom kodu dodeljuje odgovarajući term jezika L_P - numeral $\underline{n}$, gde je $n = \ulcorner\varphi\urcorner$. Na taj način, formulama odnosno termima jezika L_P dodeljuju se objekti samog jezika L_P o kojima P može da "govori". Slično važi i za nizove formula, što nam omogućuje kodiranje objekata kakvi su, na primer, dokazi u P.

Osnov kodiranja je binarna primitivno rekurzivna funkcija $\beta(a,i)$ čiju egzistenciju i osnovna svojstva daje sledeća lema.

LEMA 1.4.1. [Gödel] Postoji primitivno rekurzivna funkcija $\beta(n,i)$ takva da je $\beta(n,i) \leq n \dot{-} 1$ za svako n, i i za proizvoljne brojeve $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ postoji broj a takav da je $\beta(a,i) = a_i$

za svako $i<n$.

Dokaz ove leme bazira se na Kineskoj teoriji o ostacima. Detaljan dokaz može se naći u [SH] ili [MI 1].

Najmanji broj a sa svojstvom da za zadate brojeve $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ važi $\beta(a,0) = n$ i $\beta(a,i+1) = a_i$ za svaki $i<n$, obeležavamo sa $\langle a_0,\ldots,a_{n-1}\rangle$ i zovemo kodom niza $a_0,\ldots,a_{n-1}$. Obratno, ako definišemo $lh(a) \doteq \beta(a,0)$, $(a)_i \doteq \beta(a,i+1)$ i ako je $a = \langle a_0,\ldots,a_{n-1}\rangle$, tada je $lh(a) = n$ i $(a)_i = a_i$ za $i<n$.

Predikat Seq(a) definisan na skupu prirodnih brojeva formulom

$Seq(a) \overset{\bullet}{\Longleftrightarrow} \forall x<a\ ((lh(x) \neq lh(a)) \vee Ei<lh(a)((x)_i \neq (a)_i))$

očevidno je rekurzivam i "prepoznaje" brojeve koji su kodovi nizova, tj. brojeva za koje postoje $a_0,\ldots,a_{n-1}$ takvi da je $a = \langle a_0,\ldots,a_{n-1}\rangle$. Ukoliko je $a = \langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ i $b = \langle b_1,\ldots,b_m\rangle$, definišimo $a * b \doteq \langle a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_m\rangle$. Nije teško dati eksplicitnu definiciju funkcije $*$ i uveriti se da je i ona rekurzivna.

Dokaz leme 1.4.1 može se formalizovati u P; naime, za funkciju $\beta(x,y)$ definisanu kao u dokazu ove leme, i za proizvoljnu funkciju f definabilnu u P važi:

STAV 1.4.2. $P \vdash \forall x\ Ey\ \forall i<x\ ((y)_i = f(i))$.

Ovaj stav nam omogućuje da definišemo neke važnije funkcije i relacije u P.

DEFINICIJA 1.4.3. (Eksponencijalna funkcija).

$y = x^z \overset{\bullet}{\Leftrightarrow} Ev((v)_0 = 1 \wedge \forall i<z\ ((v)_{i+1} = x.(v)_i) \wedge (v)_z = y)$.

U P se može dokazati ekvivalentnost ove definicije sa sledećom

$y = x^z \Longleftrightarrow \forall v\ ((v)_0 = 1 \wedge \forall i<z\ ((v)_{i+1} = x.(v)_i) \longrightarrow (v)_z = y)$.

što svedoči da je definiciona aksioma grafa eksponencijalna finkcija $\Delta_1(P)$.

DEFINICIJA 1.4.4. (Definicija zbira).

Neka je f neka funkcija definabilna u P. Tada

$y = \sum_{i\leq k} f(i) \Longleftrightarrow Ev((v)_0 = f(0) \wedge \forall i<k((v)_{i+1}=(v)_i+f(i+1)) \wedge (v)_k=y)$.

Slično kao u prethodnoj definiciji, lako se možemo uveriti da je definiciona aksioma zbira $\Delta_1(P)$.

Poslednje dve definicije omogućuju nam da definišemo relaciju $\mathcal{E}$ koja, kao što ćemo videti, ima veliku važnost i primenu.

DEFINICIJA 1.4.5. $(M(\mathcal{E}))$.

$x\mathcal{E}y \Longleftrightarrow Ez<y\ Ek<y\ (y=\sum_{i\leq k}2^{(z)_i} \wedge Ej<k\ (x=(z)_j) \wedge \forall i<k\ \forall v<k(i<v \longrightarrow (z)_i<(z)_v))$.

Iz napomena u vezi sa prethodnim definicijama sledi da je definiciona formula relacije $\mathcal{E}$ Δ_1. Sem primene ove relacije opisane u tački 3 ove glave, relacija $\mathcal{E}$ ima važnu primenu u teoriji modela aritmetike (vidi 2.3.4). Nju omogućuje sledeći stav:

STAV 1.4.6. (Teorema aritmetičke separacije).

Neka je $\varphi(x,y)$ proizvoljna formula čije su jedine slobodne promenljive x i y. Tada

$$P \vdash \forall y\ \forall z\ Ev\ \forall x(\varphi(x,y) \wedge x<z \longleftrightarrow x\mathcal{E}v).$$

DOKAZ: Za proizvoljne y i z element $v=\sum_{i<z}2^i f_\varphi(i,y)$, gde je f_φ funkcija definisana sa

$$(f_\varphi(x,y) = 1 \longleftrightarrow \varphi(x,y)) \wedge (f_\varphi(x,y) = 0 \longleftrightarrow \neg\varphi(x,y)),$$

zadovoljavaju gornju formulu.

Zahvaljujući osobinama funkcije $(x)_y$ i stavu 1.4.2, važi sledeća važna teorema.

<u>TEOREMA 1.4.7.</u> (Teorema o preneks-normalnoj formi)

Svaka formula φ je Π_n (Σ_n) za neko n.

<u>DOKAZ:</u> Posledica činjenice da

$P \vdash \forall i < x\ Ey\ \varphi(i,y) \longleftrightarrow Ey\ \forall i<x\ \varphi(i,(y)_i)$ i njene posledice $P \vdash Ei<x\ \forall y\ \varphi(i,y) \longleftrightarrow \forall y\ Ei<x\ \varphi(i,(y)_i)$, što nam omogućuje da "izvlačimo" neograničene kvantifikatore.

Da bi kodirali sintaksu teorije P dodelimo svakom simbolu jezika L_P kao i logičkim simbolima po jedan broj, i to različitim simbolima različite brojeve. Jedna od mogućnosti je sledeća:

$$\begin{pmatrix} + & \cdot & ' & 0 & < & x_i & = & E & \wedge & \neg \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6^i & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Broj dodeljen simbolu s označimo sa SN(s). Uočimo za svaku formulu φ ,odnosno term t jezika L_P,zapis u poljskoj notaciji koja sadrži samo gornje simbole. S obzirom na induktivno gradjenje formula i termova,dodelimo svakoj formuli, odnosno termu oblika $u \doteq sv_1 \ldots . v_n$ broj $\ulcorner u \urcorner = \langle SN(s), \ulcorner v_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner v_n \urcorner \rangle$; ovde je s jedan od simbola (logički ili jezika L_P) a v_i su formule ili termi manje složenosti. Tako je, na primer,

$$\ulcorner x_1 + x_2 \urcorner = \ulcorner + x_1 x_2 \urcorner = \langle SN(+), \ulcorner x_1 \urcorner, \ulcorner x_2 \urcorner \rangle.$$

Uzevši u obzir da su x_1 i x_2 u termu $x_1 + x_2$ takodje termi (a ne simboli za promenljive!) i da je

$\ulcorner x_i \urcorner = \langle SN\ (x_i) \rangle = \langle 6^i \rangle$ dobijamo

$\ulcorner x_1 + x_2 \urcorner = \langle 1, \langle 6 \rangle\ , \langle 36 \rangle \rangle$.

Slično je

$$\ulcorner Ex_1\ (x_1 = x_1) \urcorner = \langle SN(E), \ulcorner x_1 \urcorner, \ulcorner x_1 = x_1 \urcorner \rangle = \langle SN(E), \ulcorner x_1 \urcorner, \langle SN(=), \ulcorner x_1 \urcorner, \ulcorner x_1 \urcorner \rangle \rangle = \langle 8, \langle 6 \rangle, \langle 7, \langle 6 \rangle, \langle 6 \rangle \rangle \rangle.$$

Sada možemo na skupu prirodnih brojeva definisati rekurzivne predikate koji se "prepoznavati" kodove odredjenih sintaksnih objekata. Tako je predikat koji preproznaje termove koji su samo jedna promenljiva definisan sa

$$\mathrm{Vble}(a) \overset{*}{\Longleftrightarrow} a = \langle (a)_0 \rangle \wedge Ey \leq a\ ((a)_0 = 6^y),$$

dok je predikat koji prepoznaje termove uopšte

$$\mathrm{Term}(a) \overset{*}{\Longleftrightarrow} a = \langle SN(0) \rangle \vee \mathrm{Vble}(a) \vee (a = \langle SN(\,'\,),(a)_1 \rangle \wedge \mathrm{Term}((a)_1)) \vee ((a = \langle SN(+),(a)_1,(a)_2 \rangle \vee a = \langle SN(.),(a)_1,(a)_2 \rangle) \wedge \mathrm{Term}((a)_1) \wedge \mathrm{Term}((a)_2)).$$

Na osnovu poznatih stavova teorije rekurzije, ovako definisani predikati su primitivno rekurzivni. Analno se mogu definisati predikati For(a) i Sent(a) koji prepoznaju kodove formula,odnosno rečenica. Predikat $\mathrm{Fr}(\ulcorner\varphi\urcorner, x)$ označava da je promenljiva x slobodna u formuli φ. Takodje se može definisati rekurzivna funkcija Sub(a,b.c) takva da, uz uobičajene uslove za x,t i φ,važi $\mathrm{Sub}(\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner x\urcorner, \ulcorner t\urcorner) = \ulcorner\varphi(t)\urcorner$, gde je $\ulcorner\varphi(t)\urcorner$ formula nastala zamenom promenljive x termom t u formuli φ. Slično za Neg(a) važi $\mathrm{Neg}(\ulcorner\varphi\urcorner) = \ulcorner\neg\varphi\urcorner$, a analogne funkcije mogu se definisati i za ostale logične veznike.

Glavni cilj kodiranja je formalizacija pojma dokaza i dokazivosti u P. S obzirom da je skup kodova aksioma od P rekurzivan,takav je i predikat $\mathrm{Ax}_p(a) \overset{*}{\Longleftrightarrow}$ "a je kôd neke aksiome od P". S druge strane, predikati MP(a,b,c) i Gen(a,b) su tako definisani da $\omega \models \mathrm{MP}(\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner, \theta)$ akko je $\psi \doteq \varphi \to \theta$, odnosno $\mathrm{Gen}(\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner)$ akko je ψ oblika $\dot{\forall}\dot{x}\varphi$; oba očevidno imaju rekurzivne definicije.

Definišimo predikat $\mathrm{Prf}_p(a,b)$ na sledeći način:

$$\mathrm{Prf}_p(a,\ulcorner\varphi\urcorner) \overset{*}{\Longleftrightarrow} \mathrm{Seq}(a) \wedge (\mathrm{lh}(a) \neq 0) \wedge ((a)_{\mathrm{lh}(a)\dot{-}1} = \ulcorner\varphi\urcorner) \wedge \forall i \leq \mathrm{lh}(a)\ (\mathrm{Ax}_p((a)_i) \vee Ej < i\ Ek < i\ \mathrm{MP}((a)_j,(a)_k,(a)_i) \vee Ej < i\ \mathrm{Gen}((a)_j,(a)_i));$$

time smo formalizovali svojstvo da je broj a kod dokaza formule φ u P. Sada možemo definisati i predikat $Thm_p(a)$ koji na ω "prepoznaje" kodove teorema formalne aritmetike P:

$$Thm_p(\ulcorner\varphi\urcorner) \Longleftrightarrow Ex\ Prf_p(x, \ulcorner\varphi\urcorner).$$

S obzirom na način na koji je definisan predikat $Thm_p(a)$, očevidno $P \vdash \varphi$ akko $\omega \models Thm_p(\ulcorner\varphi\urcorner)$. Kako je rečenica $Thm_p(\ulcorner\varphi\urcorner)\ \Sigma_1$, na osnovu stava 1.2.2 sledi $P \vdash \varphi$ akko $P \vdash Thm_p(\ulcorner\varphi\urcorner)$. +) Medjutim, u opštem slučaju, $P \nvdash \varphi \leftrightarrow Thm_p(\ulcorner\varphi\urcorner)$.

Sledeća dva stava bacaju više svetlosti na vezu formule φ i predikata $Thm(\ulcorner\varphi\urcorner)$ u teoriji P.

STAV 1.4.8. Ako je $\varphi\ \Sigma_1$ rečenica, tada je $P \vdash \varphi \rightarrow Thm_p(\ulcorner\varphi\urcorner)$.

STAV 1.4.9. [Löb] Za proizvoljnu rečenicu φ jezika L_p

$$P \vdash Thm_p(\ulcorner\varphi\urcorner) \rightarrow \varphi \text{ akko } P \vdash \varphi .$$

Dokaz stava 1.4.8 izvodi se indukcijom po složenosti formule φ (vidi 8.2 u [SH] ili 3.5.4 u [SM 1] ,za dokaz stava 1.4.9 videti 4.1.1 u [SM 1]).

S obzirom da je $Thm(a)\ \Sigma_1$ rečenica,iz stava 1.4.8 neposredno dobijamo

STAV 1.4.10. Za svaku rečenicu φ jezika L_p

$$P \vdash Thm_p(\ulcorner\varphi\urcorner) \rightarrow Thm_p(\ulcorner Thm(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner).$$

U teoriji P može se dokazati svojstvo predikata Thm_p koje odgovara jednoj važnoj osobini koju imaju dokazi u P.

STAV 1.4.11. Neka su φ i ψ proizvoljne rečenice jezika L_p, tako da

$$P \vdash Thm_p(\ulcorner\varphi\urcorner) \wedge Thm_p(\ulcorner\varphi \rightarrow \psi\urcorner) \rightarrow Thm_p(\ulcorner\psi\urcorner).$$

Dokaz ovog stava zasniva se na činjenici da za proizvoljne formule φ i ψ jezika L_p važi:

$$P \vdash \forall x \forall y\ (Prf_p(x, \ulcorner\varphi\urcorner) \wedge Prf_p(y, \ulcorner\varphi \rightarrow \psi\urcorner) \rightarrow Prf_p(x * y * \langle\ulcorner\psi\urcorner\rangle, \ulcorner\psi\urcorner))$$

+) Ovde i u sličnim situacijama $\ulcorner\varphi\urcorner$ označava numeral koji odgovara kodu formule φ.

Sledeća teorema pokazuje se kao izuzetno korisno sredstvo u ispitivanju mnogih osobina formalne aritmetike P.

TEOREMA 1.4.12. (Gödelova lema o dijagonalizaciji)

Neka je $\varphi(x)$ formula jezika L_P u kojoj je x jedina slobodna promenljiva. Tada postoji rečenica ψ istog jezika takva da važi $P \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner\psi\urcorner)$.

DOKAZ: Definišimo formulu $\theta(x) \doteq \varphi(Sub(x,x))$ i neka je $m = \ulcorner\theta\urcorner$. Tada je

$P \vdash \theta(m) \leftrightarrow \varphi(Sub(m,m))$, tj.

$P \vdash \theta(m) \leftrightarrow \varphi(Sub(\ulcorner\theta\urcorner,m))$, odnosno

$P \vdash \theta(m) \leftrightarrow \varphi(\ulcorner\theta\ (m)\urcorner)$.

I 5. PITANJA KOMPLETNOSTI, NEPROTIVREČNOSTI I Π_1^0 - KONZERVATIVNOSTI

Način na koji je definisan predikat Thm_p pokazuje da je on rekurzivno nabrojiv; ako je T teorija koja sadrži P a čiji je skup aksioma rekurzivan (tj. rekurzivno proširenje od P) i predikat Thm_T, definisan potpuno analogno, rekurzivno je nabrojiv . Teorema Churcha (vidi [SH] 6.8.) pokazuje da predikat Thm_T nije rekurzivan kad god je T neprotivrečno proširenje od P. S druge strane, skup teorema svakog kompletnog rekurzivnog proširenje od P je rekurzivan (vidi [SH] 6.8.),pa odatle važi sledeća teorema.

TEOREMA 1.5.1. [Gödel],[Rosser] Svaka teorija T koja je rekurzivno proširenje od P je nekompletna.

Primena definisanih predikata $Prf_p(x,y)$ i $Thm_p(x)$ proteže se ne samo na pitanja kompletiranja već i neprotivrečnosti teorije P. Naime, ako rečenicu $\neg Ex\ Prf_p(x, \ulcorner 0 \neq 0 \urcorner)$ označimo sa Con_p , važi sledeća teorema:

TEOREMA 1.5.2 [Gödel]+) $P \nvdash Con_p$.

SKICA DOKAZA: Izaberimo na osnovu teoreme 1.4.12 rečenicu φ za koju

$P \vdash \varphi \leftrightarrow \neg Thm_p(\ulcorner\varphi\urcorner)$..............(1).

Očevidno, rečenica φ je istinita a ω, a nedokaziva u P. Zatim se pokazuje, koristeći stavove 1.4.10 i 1.4.11, da je

$P \vdash \varphi \leftrightarrow Con_p$..................(2),

odakle, s obzirom na nedokazivost formule φ sledi

$P \nvdash Con_p$.

Teorema 1.5.2 pokazuje da se dokaz neprotivrečnosti formalne aritmetike P može izvesti samo sredstvima koja sadrže konstrukcije koje se ne mogu formalizovati u P. U Gödelovom dokazu [Gö 1] to su funkcionali višeg reda, dok Gentzelov dokaz [Ge] koristi tranfinitnu indukciju.

U trećoj glavi za nas će biti važna sledeća neposredna posledica prethodne teoreme.

POSLEDICA 1.5.3 Teorija $P + \neg Con_p$ je neprotivrečna.

S obzirom na stavove 1.4.10 i 1.4.11 iz (1) i (2) dokaza teoreme 1.5.2 dobijamo

$P \vdash Con_p \rightarrow \neg Thm_p(\ulcorner Con_p\urcorner)$, odnosno

$P \vdash Con_p \rightarrow \neg Thm_p(\ulcorner\neg Con_p \rightarrow 0 \neq \bar{0}\urcorner)$. Odatle

$P \vdash Con_p \rightarrow \neg Thm_{p+\neg Con_p}(\ulcorner 0 \neq \bar{0}\urcorner)$,

pa ako sa Con_T označimo formulu $\neg Thm_T(\ulcorner 0 \neq \bar{0}\urcorner)$, dokazali smo sledeći stav:

STAV 1.5.4 $P \vdash Con_p \rightarrow Con_{p+\neg Con_p}$.

Poslednji stav koristi se u dokazu sledeće, za nas, veoma važne teoreme.

+) Analogna teorema važi i za sve teorije T koje sadrže u dovoljnoj meri aritmetiku i u kojima se modu definisati odgovarajući predikati kojima se formalizuje pojam dokazivosti u teoriji T i to tako da oni imaju sva neophodna svojstva koja se koriste u dokazu teoreme 1.5.2(videti [SM 1]).

TEOREMA 1.5.5 [+] (Kreisel). Teorija $P + \neg Con_p$ je Π_1^0 - konzervativno proširenje teorije P, tj. za svaku univerzalnu rečenicu φ jezika L_p

$$P + \neg Con_p \vdash \text{ akko } P \vdash \varphi.$$

SKICA DOKAZA: Ako je $P + \neg Con_p \rightarrow \varphi$, tada $P \vdash \neg Con_p \rightarrow \varphi$..(3). Ukoliko je φ Π_1^0 rečenica, u svakom rekurzivnom proširenju T od P važi: ako $T \vdash \varphi$, tada $P \vdash Con_T \rightarrow \varphi$. [++] Dakle, za svaku Π_1^0 rečenicu φ, iz $P + \neg Con_p \vdash \varphi$ sledi $P \vdash Con_{p+Con_p} \rightarrow \varphi$. Na osnovu stava 1.5.4 zaključujemo da $P \vdash Con_p \rightarrow \varphi$, pa zbog (3) zaključujemo da $P \vdash \varphi$.

I 6. DEFINABILNOST ISTINITOSTI

Imaju u vidu da predikat $Thm_p(x)$ "prepoznaje" kodove teorema u P, postavlja se pitanje može li se definisati predikat Sat(x) koji na svakom modelu $\mathfrak{M}$ za P prepoznaje kodove tačnih rečenica. S obzirom na stav potpunosti, ovo se svodi na pitanje postoji li formula Sat(x) jezika L_p tako da

$$P \vdash \varphi \leftrightarrow Sat(\ulcorner\varphi\urcorner)$$

za svaku rečenicu φ jezika L_p. Teorema 1.4.12 primenjena na predikat $\neg Sat(x)$ bi odmah dala kontradikciju sa ovom pretpostavkom, pa je odgovor na ovo pitanje negativan. Ipak, ako ograničimo složenost formule φ na klasu Σ_n - formula za neko n, odgovor je potvrdan.

TEOREMA 1.6.1. Postoji Δ_1 - definicija istine za Σ_0 - formule, tj. postoji Δ_1 formula $Sat_{\Sigma_0}(x,x_1,\dots,x_n)$ tako da za svaku formulu $\varphi(x,x_1,\dots,x_n)$ važi

$$P \vdash \forall x_1,\dots,\forall x_n(Sat_{\Sigma_0}(\ulcorner\varphi\urcorner,x_1,\dots,x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1,\dots,x_n)).$$

+) Za teoremu 1.5.5 važi ista napomena kao i za teoremu 1.5.2.
++) Detaljan dokaz ove teoreme može se naći u [MS], Kreisel ili [SM 1].

TEOREMA 1.6.2 Postoji Σ_{k+1} - definicija istine za Σ_{k+1} formule, tj. postoji Σ_{k+1} - formula $Sat_{\Sigma_{k+1}}(x,x_1,\dots,x_n)$ tako da za svaku Σ_{k+1} - formulu $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ važi

$$P \vdash \forall x_1,\dots,\forall x_n(Sat_{\Sigma_{k+1}}(\ulcorner\varphi\urcorner,x_1\dots,x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1,\dots,x_n)).$$

Teorema 1.6.2 je neposredna posledica teoreme 1.6.1 i činjenice da se svaka formula može predstaviti u prenens normalnoj formi (teorema 1.4.7). Dokaz teoreme 1.6.1 zasniva se na činjenici da se za svaku Σ_0 - formulu, zbog ograničenosti kvantifikatora, zadovoljenje u modelu $\mathfrak{M}$ za P može na pogodan način kodirati elementima modela, a zatim se iskoristi teorema kompletnosti. Detalji mogu se naći u [MI 1] i [PA 2] .Formulu koja je definicija istine neke klase formula zovemo još i relacijom zadovoljenja te klase formula.

I 7. MATIJASEVIČEVA TEOREMA

Ovaj kratki pregled teorije P završavamo fundamentalnom teoremom Matijaseviča, čija posledica (1.7.5) daje važne rezultate u teoriji modela aritmetike (vidi Gaifmanovu teoremu u drugoj glavi). Ona je motivisana sledećim čuvenim problemom.

DESETI HILBERTOV PROBLEM. Neka je zadata neka diofantska jednačina sa celim kojeficijentima. Naći postupak kojim se može, posle konačno mnogo koraka, utvrdiri ima li ova jednačina celih rešenja.

Sledeća lema pokazuje da je traženje ovakvog postupka za cela rešenja ekvivalentno traženju postupka za rešenja u skupu prirodnih brojeva (tj. "prirodna" rešenja).

LEMA 1.7.1 Neka je $p(x_1,\dots,x_n) = 0$ neka diofantska jednačina. Ona ima cela rešenja akko jednačina

$$\prod_{i_1,\dots,i_n\in\{0,1\}} P((-1)^{i}x_1\ ,\dots,(-1)^{i}x_n) = 0$$

ima prirodnih rešenja; jednačina $P(x_1,\dots,x_n) = 0$ ima prirodnih rešenja akko jednačina

$$P\ (x_{11}^2 + x_{12}^2 + x_{14}^2 + x_{14}^2, \ldots, x_{n1}^2 + x_{n2}^2 + x_{n3}^2 + x_{n4}^2) = 0$$

ima cela rešenja.

DOKAZ: Posledica Lagrangeove teoreme po kojoj se svaki prirodni broj može predstaviti kao zbir kvadrata najviše četiri prirodna broja.

DEFINICIJA 1.7.2. Skup $A \subset \omega^k$ je diofantski akko postoji $p \in \mathbb{Z}(\vec{z}, \vec{x})$ tako da za $n_1, \ldots, n_k \in \omega$ važi

$$(n_1, \ldots, n_k) \in A \Longleftrightarrow \omega \models E\vec{x}\ (P(\vec{n}, \vec{x}) = 0\ ).$$

Očevidno, svaki diofantski skup je rekurzivno nabrojiv. Medjuti , važi i obratno.

TEOREMA 1.7.3 [Matijasevič] . Svaki rekurzivno nabrojiv skup je diofantski.

Iako elementaran,dokaz ove teoreme je prilično složen (vidi [MA] ,[MMK]). Sama teorema može se formulisati i na sledeći način.

TEOREMA 1.7.3.′ Za svaku Σ_1 - formulu $\theta(x)$, postoji

$$p(\vec{x}, \vec{z}) \in \mathbb{Z}(\vec{x}, \vec{z})$$

tako da

$$\omega \models \forall\vec{x}\ (\theta(\vec{x}) \leftrightarrow E\vec{z}\ (p(\vec{x}, \vec{z}) = 0\ )).^{+)}$$

Analizirajući dokaz teoreme 1.7.3′ uočava se da se on može preneti u eoriju P, pa važi sledeći stav.

STAV 1.7.4 Za svaku Σ_1 - formulu $\theta(\vec{x})$ postoji $p(\vec{x}, \vec{z}) \in \mathbb{Z}(\vec{x}, \vec{z})$ tako da važi

$$P \vdash \forall\vec{x}\ (\theta(\vec{x}) \leftrightarrow E\vec{z}\ (p(\vec{x}, \vec{z}) = 0)).$$

Ako izaberemo $p(x, \vec{z}, \vec{y})$ tako da važi

$$\omega \models \forall x \forall\vec{y} (Sat_{\Sigma_1}(x, \vec{y}) \leftrightarrow Ez_1 \ldots Ez_k(p(x, \vec{z}, \vec{y}) = 0)),$$

očevidno za svaku Σ_1 - formulu $\theta(\vec{y})$

$$\omega \models \forall\vec{y}\ (\theta(\vec{y}) \leftrightarrow Ez_1 \ldots Ez_k(p(\ulcorner\theta\urcorner, \vec{z}, \vec{y}) = 0\ )).$$

+) Pokazuje se da je dovoljno posmatrati jednačine sa pozitivnim koeficijentima.

Matijasevič je pokazao da možemo ograničiti broj egzistencijalnih kvantifikatora na $k = 9$.

Sledeća posledica stava 1.7.4 je neposredna ali veoma važna.

POSLEDICA 1.7.5 Za $n \geqslant 1$, hijerarhije Σ_n^0 i Σ_n formula u P poklapaju se, tj. neka formula φ jezika L_P je $\Sigma_n^0(P)$ akko je $\Sigma_n(P)$.

Teorema 1.7.3, zajedno sa Churchovom tezom, tj. pretpostavkom da je skup $A \subset \omega$ odlučiv (vidi 6.8. u [SH]) akko je rekurzivan daje negativan odgovor na deseti Hilbertov problem.

TVRDJENJE 1.7.6. Ne postoji postupak kojim se za proizvoljnu datu diofantsku jednačinu može utvrditi u konačno mnogo koraka ima li ona celih rešenja ili nema.

DOKAZ: Izaberimo proizvoljan skup $A \subset \omega$ takav da $A \in \Sigma_1 - \Pi_1$. Ovakav skup na osnovu pomenute Churchove teoreme+) takav je, na primer, skup kodova teorema u P. Teorema 1.7.3 obezbedjuje postajanje diofantske jednačine $p(n,\vec{x}) = 0$ takve da $n \in A$ akko jednačina $p(n,\vec{x}) = 0$ ima rešenja u ω. Ako bi postojao postupak kojim se za svako n za ovu jednačinu može utvrditi ima li ona rešenja u ω ili nema, moglo bi se efektivno utvrditi za svaki prirodni broj n pripada li skupu A ili ne pripada, pa bi po Churchovoj tezi sledilo da je A rekurzivan skup, što je kontradikcija sa načinom izbora skupa A.

+) Vidi 6.8 u [SH].

G L A V A   D R U G A

MODELI FORMALNE ARITMETIKE P

II 1. POJAM I EGZISTENCIJA NESTANDARDNIH MODELA TEORIJE P

Kao što smo napomenuli u predgovoru, struktura prirodnih brojeva ω ne može se opisati nekom teorijom P predikatskog računa prvog reda tako dobro da svi prebrojivi modeli ove teorije budu izomorfni strukturi ω. Naime, svaka teorija $T \supset P$ ima nestandardne modele koji se po svojim svojstvima bitno razlikuju od strukture ω.

DEFINICIJA 2.1.1. Neka je $\mathfrak{M}$ neki model teorije P. Svaki element $|\mathfrak{M}|$ koji je interpretacija nekog numerala nazivamo standardnim; elemente koji to nisu nazivamo nestandardnim. Model koji ima nestandardnih elemenata nazivamo nestandardnim modelom.

LEMA 2.1.2. Svaki standardni model izomorfan je ω; svaki nestandardni model sadrži kao početni komad izomorfnu sliku strukture ω .

DOKAZ: Preslikavanje $f : \omega \rightarrow \mathfrak{M}$ definisano sa $f(n) = (\underline{n})^{\mathfrak{M}}$ predstavlja izomorfizam strukture ω i proizvoljnog standardnog modela, odnosno utapanje ω u početni komad nestandardnog modela $\mathfrak{M}$, što sledi iz stava 1.1.2 i aksioma P7 i P8.

S obzirom da u nestandardnom modelu $\mathfrak{M}$ za proizvoljan nestandardni element c i svaki prirodan broj n važi $\mathfrak{M} \models \underline{n} < \underline{c}$, nestandardne elemente nazivamo još i beskonačnim brojevima.

STAV 2.1.3. Za proizvoljnu konsistentnu teoriju $T \supset P$ postoji nestandardan model.

DOKAZ: Neka je T_0 proširenje od T dodavanjem nove konstante c u jezik teorije T, i skupa aksioma $\{\underline{n} < c \mid n \in \omega\}$. Stav kompaktnosti nas uverava da je T_0 neprotivrečna teorija. Proizvoljan model $\mathfrak{M}$ teorije T_0 je nestandardan model za T.

II 2. OSNOVNO O NESTANDARDNIM MODELIMA

Ukoliko u proizvoljnom nestandardnom modelu $\mathfrak{M} \models P$ uvedemo relaciju ekvivalencije $\sim$ sa

$$a \sim b \overset{df}{\Leftrightarrow} \left|\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}\right| < \omega ,$$

svaka klasa ekvivalencije sem one koja sadrži nulu uredjena je relacijom $<_{\mathfrak{m}}$ po tipu $\omega^* + \omega$. S obzirom da za proizvoljna dva beskonačna elementa a i b takva da $\neg(a \sim b)$ postoje elementi c_1, c_2 i c_3 takvi da je $c_1 < a < c_2 < b < c_3$ i

$$\neg\left[(c_1 \sim a) \vee (a \sim c_2) \vee (c_2 \sim b) \vee (b \sim c_3)\right],$$

tip uredjenja modela $\mathfrak{M}$ je $\omega + (\omega^* + \omega)\eta$, gde je η gust poredak bez krajnjih tačaka. Odavde neposredno sledi da su svi nestandardni prebrojivi modeli teorije P izomorfnog poretka.

Shema najmanjeg elementa SH(L) pokazuje da teorija P ima definabilne Skolemove funkcije. Odavde, na osnovu klasičnog stava teorije modela, sledi da je neki podmodel $\mathfrak{M}$ modela $\mathfrak{N}$ teorije P elementarni akko je on podmodel od $\mathfrak{N}$ gledano na jeziku proširenom simbolima definabilnih Skolemovih funkcija. Time neposredno dobijamo sledeći stav.

STAV 2.2.1 Neka su $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$ elementarni podmodeli nekog modela $\mathfrak{N}$ teorije P. Tada je i model $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$ elementaran podmodel od $\mathfrak{N}$.

DEFINICIJA 2.2.2. Neka tačka a modela $\mathfrak{M}$ teorije P je Σ_k (Π_k, Δ_k) definabilna akko postoji Σ_k (Π_k, Δ_k) formula $\varphi(x)$ sa jedinom slobodnom promenljivom x za koju je $\mathfrak{M} \models a = \mu x \varphi(x)$. Neka tačka je definabilna u modelu $\mathfrak{M}$ ako je Σ_n definabilna za neko $n \in \omega$. Skup definabilnih tačaka modela $\mathfrak{M}$ označavamo sa $Df(\mathfrak{M})$.

<u>STAV 2.2.3.</u> Skup tačaka $Df(\mathfrak{M})$ obrazuje elementarni podmodel modela $\mathfrak{M}$.

<u>DOKAZ:</u> Neka je $\varphi(x_1,\ldots,x_n,x)$ proizvoljna formula i $a_1,\ldots,a_n$ elementi $Df(\mathfrak{M})$ za koje

$\mathfrak{M}\models a_i = \mu x\, \varphi_i(x)$. Ako

$\mathfrak{M}\models Ex\, \varphi(a_1,\ldots,a_n,x)$, tada je element a takav da

$$\mathfrak{M}\models a = \mu x(Ex_1,\ldots,Ex_n(\bigwedge_{i\le n}(x_i = \mu x\, \varphi_i(x)) \wedge \varphi(x_1,\ldots,x_n,x))$$

pripada $Df(\mathfrak{M})$, pa tvrdjenje stava 2.2.3 sledi iz poznate Tarski-Vaughtove teoreme.

Na osnovu opštih model-teoretskih činjenica za proizvoljna dva modela $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$ važi $\mathfrak{M}_1 \equiv \mathfrak{M}_2$ akko je

$Df(\mathfrak{M}_1) \cong Df(\mathfrak{M}_2)$.

Odavde i iz stava 2.2.3 sledi da je za proizvoljna dva modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ kompletne teorije T $Df(\mathfrak{M}) \cong Df(\mathfrak{M}')$ i $Df(\mathfrak{M}) \models T$. Model $Df(\mathfrak{M})$ teorije T zovemo <u>minimalnim modelom</u> teorije T i obeležavamo ga sa $\mathfrak{M}_T$.

Očevidno, nestandardni model $\mathfrak{M}$ za P nema nestandardnih elemenata u $Df(\mathfrak{M})$ akko je elementarno ekvivalentan ω .Podmodel $Df(\mathfrak{M})$ može ali ne mora biti niti kofinalan niti koinicijalan u $\mathfrak{M}\setminus\omega$.+) Neka je $\mathfrak{M}\models P$ proizvoljan model koji nije elementarno ekvivalentan ω ,a koji postoji s obzirom na nekompletnost teorije P. Model $Df(\mathfrak{M})$ je primer nestandardnog modela u kome su definabilne tačke kofinalne i koinicijalne u skupu njegovih nestandardnih elemenata. S druge strane, ako je $\mathfrak{M}$ proizvoljan nestandardan model za P i $\Delta_{\mathfrak{M}}$ njegov elementarni dijagram, stav kompaktnosti primenjen na teoriju.

$T = \Delta_{\mathfrak{M}} \cup \{c \ne \underline{n} \mid n\in\omega\} \cup \{c<\underline{x} \mid x\in|\mathfrak{M}|\setminus\omega\} \cup \{\underline{x}<d \mid x\in|\mathfrak{M}|\}$ pokazuje

+) Izomorfnu sliku ω na početni komad modela $\mathfrak{M}$ izjednačavaćemo sa ω.

da je T neprotivrečna teorija jezika $L_P \cup \{\underline{x} \mid x \in |\mathfrak{M}|\} \cup \{c,d\}$, gde je $\underline{x}$ ime elementa x modela $\mathfrak{M}$. Proizvoljan model $\mathfrak{N}_0$ teorije T ima svojstvo da je $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}_0$ i da $\mathfrak{M}$ nije niti konfinalan niti koinicijalan sa $\mathfrak{N}_0 \setminus \omega$, pa to nije ni $Df(\mathfrak{N}_0) = Df(\mathfrak{N}) \subset \mathfrak{M}$.

Sledeća lema pokazuje da nestandardni modeli "ne prepoznaju" skup standardnih elemenata.

<u>LEMA 2.2.4</u>. Neka je $\mathfrak{M}$ nestandardan model za P. Ne postoji formula $\varphi(x,y)$, čije su jedine slobodne promenljive x i y, takva da za neki element $b \in |\mathfrak{M}|$ važi

$$\omega = \{ a \in |\mathfrak{M}| \mid \mathfrak{M} \models \varphi(\underline{a},\underline{b}) \} .$$

Dakle, skup standardnih elemenata nije parametarski definabilan ni u kom nestandardnom modelu teorije P.

<u>DOKAZ</u>: Pretpostavimo da za neku formulu $\varphi(x,y)$ i element $b \in |\mathfrak{M}|$ važi $\omega = \{ a \in |\mathfrak{M}| \mid \mathfrak{M} \models \varphi(\underline{a},\underline{b})\}$. No tada $\mathfrak{M} \models \varphi(0,\underline{b})$ i $\mathfrak{M} \models \forall x\,(\varphi(x,\underline{b}) \rightarrow \varphi(x',b))$, odakle $\mathfrak{M} \models \forall x\, \varphi(x,\underline{b})$, što je kontradikcija sa pretpostavkom da je $\omega \not\cong \mathfrak{M}$.

<u>STAV 2.2.5</u> Princip prelivanja (Overspill) +). Neka je $\mathfrak{M}$ nestandardan model za P, $b \in |\mathfrak{M}|$ i neka formula $\varphi(x,y)$ ima jedine slobodne promenljive x i y. Tada važi ekvivalencija: za svaki prirodan broj n $\mathfrak{M} \models \varphi(\underline{n},b)$ akko postoji beskonačan $a \in |\mathfrak{M}|$ tako da $\mathfrak{M} \models (\forall x < \underline{a})\, \varphi(x,\underline{b})$.

<u>DOKAZ</u>: Pretpostavimo da za svaki prirodan broj n važi $\mathfrak{M} \models \varphi(\underline{n},\underline{b})$. Ukoliko desna strana ekvivalencije ne bi bila tačna, formula $(\forall y < x)\,\varphi(y,z)$ bi parametarski, kad promenljiva z uzme vrednost b, definisala skup standardnih elemenata, što je kontradikcija sa lemom 2.2.4. Implikacija u drugom smeru je trivijalna.

+) Za neke varijante videti [SM 2].

POSLEDICA 2.2.6. Neka je $\mathfrak{M}$ nestandardan model za P, $b\in|\mathfrak{M}|$ i neka za beskonačno mnogo prirodnih brojeva n važi $\mathfrak{M}\models\varphi(\underline{n},\underline{b})$. Tada postoji beskonačan $a\in|\mathfrak{M}|$ takav da $\mathfrak{M}\models\varphi(\underline{a},\underline{b})$.

DOKAZ: Primenom **Principa** prelivanja 2.2.5 na formulu

$$Ey\ (y>x\wedge\varphi(y,b)).$$

II 3. STANDARDNI SISTEMI

DEFINICIJA 2.3.1. Neka je $\mathfrak{M}$ proizvoljan model za P. Skup $x\subset\omega$ je standardan na $\mathfrak{M}$ ako postoji formula $\varphi(x,y)$ čije su jedine slobodne promenljive x i y i element $b\in|\mathfrak{M}|$ takav da je $x=\{n\in\omega\,|\,\mathfrak{M}\models\varphi(\underline{n},\underline{b})\}$. Standardni sistem od $\mathfrak{M}$, $SSy(\mathfrak{M})$, familija je svih skupova standardnih na $\mathfrak{M}$.

DEFINICIJA 2.3.2 Neka je $\mathfrak{M}$ nestandardan model za P. Broj $a\in|\mathfrak{M}|$ kodira standardni skup $X\in SSy(\mathfrak{M})$ ako je $X=\{n\in\omega\,|\,\mathfrak{M}\models\underline{n}\,\varepsilon\,\underline{a}\}$, odnosno ako sa D_a označimo skup svih elemenata $x\in|\mathfrak{M}|$ za koje

$$\mathfrak{M}\models\underline{x}\,\varepsilon\,\underline{a}\ ,\ X=\{n\in\omega\,|\,n\in D_a\}=D_a\cap\omega.$$

Neposredno se proverava da je svaki element modela $\mathfrak{M}$ kod nekog nestandardnog skupa. Sledeći stav pokazuje da važi i i obrnuto.

STAV 2.3.4 Neka je $\mathfrak{M}$ nestandardan model za P i neka $X\in SSY(\mathfrak{M})$. Tada X ima beskonačan kôd manji od proizvoljnog unapred zadanog beskonačnog broja.

DOKAZ: Neka je $a\in|\mathfrak{M}|$ beskonačan; na osnovu Principa prelivanja možemo naći beskonačan $b\in|\mathfrak{M}|$ takav da je $2^{b+1}<a$. Na osnovu teoreme aritmetičke sepracije (stav 1.4.6) postoji $d\in|\mathfrak{M}|$ tako da $\mathfrak{M}\models\forall x\ (x\in D\underline{d}\leftrightarrow x<\underline{b}\wedge\varphi(x,\underline{c}))$. Očevidno, element $e=d+2^b$ ima svojstvo da je $D_e\cap\omega=X$ i

$$2^b < e < \sum_{i<b} 2^i + 2^b < 2^b + 2^b = 2^{b+1} < a,$$

tj. e je beskonačan kôd skupa X manji od a.

Iz ove teoreme sledi, s obzirom da je formula $x \in Dy\ \Delta_1$, da se svi standardni skupovi mogu parametarski definisati Δ_1 formulama.

Standardni sistem ima važnu ulogu jer se mnoga svojstva nekog nestandardnog modela mogu karakterisati preko njegovog standardnog sistema. Na primer, ukoliko posmatramo prebrojive modele teorije P, čiji je skupovni deo upravo skup prirodnih brojeva, standardni sistem nam omogućuje da odredimo složenost operacija $+$ i $\cdot$ ovog modela.+) U teoremama 2.3.5-2.3.7 $(\omega)^{\mathfrak{M}}$ iz razumljivih razloga ne identifikujemo sa ω kao što smo to inače činili.

<u>TEOREMA 2.3.5</u> (Tenenbaum). Neka je $\mathfrak{M} = (\omega, +, \cdot)$ nestandardan modela za P++) sa domenom ω. Tada je svaki standardan skup $X \in SSy(\mathfrak{M})$ rekurzivan u svakoj od operacija $+$ i $\cdot$ ovog modela.

<u>POSLEDICA 2.3.6</u> Neka je $\mathfrak{M} = (\omega, +, \cdot)$ nestandardan model za P. Tada, ako je $(\omega)^{\mathfrak{M}} \prec \mathfrak{M}$ ni $+$ ni $\cdot$ nisu aritmetičke operacije.

<u>DOKAZ:</u> Ako je $(\omega)^{\mathfrak{M}} \prec \mathfrak{M}$ tada je svaki aritmetički skup $X \subset \omega$ standardan za $\mathfrak{M}$. Na osnovu teoreme 2.3.5 svaki aritmetički skup je onda rekurzivan i u $+$ i u $\cdot$. Po teoremi aritmetičke hijerarhije sledi da $+$ i $\cdot$ ne mogu biti aritmetičke.

<u>POSLEDICA 2.3.7.</u> Neka je $\mathfrak{M} = (\omega, +, \cdot)$ nestandardan model za P. Tada ni $+$ ni $\cdot$ nisu rekurzivne operacije.

<u>DOKAZ:</u> Ako bi $+$ ili $\cdot$ bili rekurzivni, tada bi svaki skup X iz $SSy(\mathfrak{M})$ bio rekurzivan. No u svakom modelu postoji rekurzivan skup iz njegovog standardnog sistema.

+) Detaljan dokaz teoreme 2.3.5 kao i posledica 2.3.6 i 2.3.7 može se naći u [SM 2].

++) S obzirom da se $'$ i $<$ mogu definisati preko $+$ i $\cdot$, ovakvu strukturu možemo smatrati modelom za P.

Familija podskupova od ω koji su standradni sistemi modela za P može se karakterisati potpuno algebarski.

DEFINICIJA 2.3.8 Neka je $\mathcal{X}$ neprazna familija podskupova prirodnih brojeva. Familija $\mathcal{X}$ je C-zatvorena ako:

(i) $\mathcal{X}$ je algebra skupova, tj.

$$X,Y\in\mathcal{X} \longrightarrow X\cap Y,\quad X\cup Y, \omega - X\in\mathcal{X};$$

(ii) $\mathcal{X}$ je zatvorena za relativnu rekurzivnost;

(iii) $\mathcal{X}$ zadovoljava binarnu Königovu lemu: ako $X\in\mathcal{X}$ i X kodira beskonačno binarno drvo, tada postoji $Y\in\mathcal{X}$ koji kodira beskonačnu putanju kroz X.

TEOREMA 2.3.9 [Scott] Familija $\mathcal{X}$ je standardni sistem nekog modela $\mathfrak{M}$ za P akko je c-zatvorena.

Dokaz ove teoreme može se naći u [SM 2] ili [Scott].

II 4. ROBINSON-FRIEDMANOVA TEOREMA I POJAM REKURZIVNO ZASIĆENOG MODELA

DEFINICIJA 2.4.1 Neka je $\mathfrak{M}$ neki model za P i neka su $a_1,\dots,a_n$ elementi od $|\mathfrak{M}|$, a $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n$ njihova imena. Neka je Γ neka **familija** formula jezika $L = L_P\cup\{\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n\}$ a $\mathcal{T}$ familija formula jezika L_P čije su slobodne promenljive iz skupa $\{x,y_1,\dots,y_n\}$ Tada

(i) familija Γ dopušta relaciju zadovoljenja ako postoji formula $S_\Gamma(y,x,\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n)$ jezika L takva da za sve formule $\varphi(x,x_1,\dots,x_n)\in\Gamma$ važi

$$\mathfrak{M}\models \forall x(S_\Gamma(\ulcorner\varphi\urcorner,x,\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n) \leftrightarrow \varphi(x,\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n)).$$

(ii) Skup

$$\mathcal{T}(x,\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n) = \{\varphi(x,\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n) \mid \varphi(x,y_1,\dots,y_n)\in\mathcal{T}\}$$

je tip nad $\mathfrak{M}$ ako je konsistentan nad $\mathfrak{M}$, tj. ako za svaki konačan podskup $\mathcal{T}_0\subset\mathcal{T}$ važi

$$\mathfrak{M}\models \exists x \bigwedge_{\varphi\in\mathcal{T}_0}\varphi(x,\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n).$$

(iii) Tip $(x,\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)$ je <u>realizovan</u> u $\mathfrak{M}$ ako postoji element $a\in|\mathfrak{M}|$ koji realizuje sve formule ovog tipa, tj. za svaku formulu $\varphi\in\mathcal{T}$ važi

$$\mathfrak{M}\models\varphi(\underline{a},\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n).$$

(iv) Tip $\mathcal{T}(x,\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)$ je <u>rekurzivan</u> (<u>realan nad</u> $\mathfrak{M}$) ako je skup kodova $\{\ulcorner\varphi\urcorner \mid \varphi(x,y_1,\ldots,y_n)\in\mathcal{T}\}$ rekurzivan (pripada standardnom sistemu od $\mathfrak{M}$).

(v) Tip $\mathcal{T}(x,\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)$ nad $\mathfrak{M}$ je Γ-tip ako svaka formula $\varphi(x,\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)$ ovog tipa pripada skupu Γ.

Sledeća fundamentalna teorema predstavlja tipičnu primenu standardnih skupova i Principa prelivanja.

<u>TEOREMA 2.4.2.</u>[+)] Neka je $\mathfrak{M}$ nestandardan model za P, $a_1,\ldots,a_n$ elementi od $|\mathfrak{M}|$ i Γ-familija formula jezika $L=L_P\cup\{\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n\}$ koja dopušta relaciju zadovoljenja. Tada je svaki realan Γ-tip $\mathcal{T}(x,\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)$ nad $\mathfrak{M}$ realizovan u $\mathfrak{M}$.

<u>DOKAZ:</u> Pošto je tip $\mathcal{T}$ realan, postoji formula $\psi(x,y)$ jezika L_P i element $b\in|\mathfrak{M}|$ takav da za sve formule $\varphi(x,y_1,\ldots,y_n)$ istog jezika važi $\varphi(x,\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)\in\mathcal{T}$ akko $\mathfrak{M}\models\psi(\ulcorner\varphi\urcorner,b)$. Kako je $\mathcal{T}$ tip nad $\mathfrak{M}$, za svaki $n\in\omega$ važi

$$\mathfrak{M}\models \mathrm{Ex}\ (\forall\ulcorner\varphi\urcorner<\underline{n})\left[\psi(\ulcorner\varphi\urcorner,\underline{b})\rightarrow S_\Gamma(\ulcorner\varphi\urcorner,x,\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)\right].$$

Tada, na osnovu Principa prelivanja, za svaki nestandardni $a\in|\mathfrak{M}|$

$$\mathfrak{M}\models \mathrm{Ex}\ (\forall\ulcorner\varphi\urcorner<\underline{a})\left[\psi(\ulcorner\varphi\urcorner,\underline{b})\rightarrow S_\Gamma(\ulcorner\varphi\urcorner,x,a_1,\ldots,\underline{a}_n)\right].$$

Svedok egzistencijalnog kvantifikatora u poslednjoj formuli realizuje tip $\mathcal{T}$ u $\mathfrak{M}$.

<u>POSLEDICA 2.4.3.</u> U svakom nestandardnom modelu $\mathfrak{M}$ proizvoljan realan Σ_k tip nad $\mathfrak{M}$ je realizovan u $\mathfrak{M}$.

+) Smorynski u [SM 2] i [SM 3] ovu teoriju pripisuje Robinsonu i Friedmanu, iako su slične konstrukcije koristili i drugi matematičari (Mostowski, Levi).

DOKAZ: Sledi iz činjenice da klasa $\sum_n$ formula dopušta relaciju zadovoljenja (teorema 1.6.2).

Sledeća teorema je komplementarna sa teoremom 2.4.2 i zajedno s njom omogućuje izomorfna utapanja modela za P. Iz ove dve teoreme vidi se i pravi značaj standardnog sistema modela.

TEOREMA 2.4.4. Neka je $\mathfrak{M}$ nestandardan model za P, $a_1,\dots,a_n$ elementi od $|\mathfrak{M}|$ i Γ familija formula jezika $L = L_P \cup \{\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n\}$ koja dopušta relaciju zadovoljenja. Neka je

$$\tau^{\Gamma}_{a_1\dots a_n}(x_1,\dots,x_n) = \{\varphi \mid \varphi\in\Gamma \text{ i } \mathfrak{M}\models\varphi(\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n)\}$$

dakle Γ-tip n-torke $a_1,\dots a_n \in |\mathfrak{M}|$. Tada je $\tau^{\Gamma}_{a_1\dots a_n}(x_1,\dots,x_n)$ realan na $\mathfrak{M}$.

DOKAZ: Neka je a proizvoljan nestandardni element iz $\mathfrak{M}$. Na osnovu stavova 1.4.6 (aritmetička separacija)

$$\mathfrak{M} \models \mathrm{Ex}\ \forall \ulcorner\varphi\urcorner \in \Gamma \quad (\ulcorner\varphi\urcorner \in D_x) \longleftrightarrow \ulcorner\varphi\urcorner < \underline{a} \wedge S_{\Gamma}(\ulcorner\varphi\urcorner, \underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n)).$$

Bilo koji svedok gornje formule je kod tipa $\tau^{\Gamma}_{a_1\dots a_n}(x_1,\dots,x_n)$ u $\mathfrak{M}$.

DEFINICIJA 2.4.5. Nestandardan model $\mathfrak{M}$ za P je realno zasićen (rekurzivno zasićen) ako je svaki realan (rekurzivan) tip realizovan u $\mathfrak{M}$.

Može se dokazati da je proizvoljan nestandardan model realno zasićen akko je rekurzivno zasićen (vidi [SM 2]).Klasična konstrukcija modela kompletne teorije (vidi [SK]) bazirana na teoriji kompletnosti u kojoj naizmenično realizujemo rekurzivno tipove novim konstantama a zatim kompletiramo dobijene teorije na tako proširenim jezicima pokazuje da svako neprotivrečno kompletiranje teorije P ima rekurzivno zasićen model.U sledećojtački videćemo da postoje prebrojivi nestandardni modeli za P koji nisu rekurzivno zasićeni.

II 5. PODMODELI I EKSTENZIJE MODELA ZA P

<u>DEFINICIJA 2.5.1.</u> Neka je $\mathfrak{M}$ nestandardan model za P i $X \subset |\mathfrak{M}|$.

(i) X je <u>početni komad modela</u> $\mathfrak{M}$ ako za proizvoljan $a \in X$ i proizvoljan $b \in |\mathfrak{M}|$ iz $a<b$ sledi $b \in X$.

(ii) X je <u>kofinalan</u> u $\mathfrak{M}$ ako za proizvoljan $a \in |\mathfrak{M}|$ postoji $b \in X$ takav da je $b > a$.

<u>DEFINICIJA 2.5.2.</u> Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ modeli za P.

(i) Model $\mathfrak{N}$ je <u>end-ekstenzija</u> modela $\mathfrak{M}$ (u oznaci $\mathfrak{M} \subset_e \mathfrak{N}$) ako je $|\mathfrak{M}|$ početni komad modela $\mathfrak{N}$.

(ii) Model $\mathfrak{N}$ je konfinalna esktenzija modela $\mathfrak{M}$ (u oznaci $\mathfrak{M} \subset_c \mathfrak{N}$) ako je $|\mathfrak{M}|$ kofinalan u $\mathfrak{N}$.

(iii) Ukoliko je $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ a $\mathfrak{N}$ nije ni end ni kofinalna ekstenzija, kažemo da je $\mathfrak{N}$ <u>mešana ekstenzija</u> od $\mathfrak{M}$.

Ukoliko su end- odnosno kofinalne ekstenzije elementarne, označavamo ih respektivno sa $\prec_e$ odnosno $\prec_c$. Primer mešane ekstenzije je model $\mathfrak{N}_0$ konstruisan posle stava 2.2.3.

Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ modeli za P i neka je $\mathfrak{N}$ mešana ekstenzija modela $\mathfrak{M}$. Ukoliko sa $\overline{\mathfrak{M}}$ označimo skup

$$\{x \in |\mathfrak{N}| \mid \mathfrak{N} \models Ey\,(y>\underline{x})\},$$

$|\overline{\mathfrak{M}}|$ je očevidno početni komad od $\mathfrak{N}$, dok je $|\mathfrak{M}|$ kofinalan u $|\overline{\mathfrak{M}}|$. Neposredno se proverava da je $\overline{\mathfrak{M}}$ podmodel od $\mathfrak{N}$, a sledeća važna teorema pokazuje da je on model za P koji je elementarna kofinalna ekstenzija modela $\mathfrak{M}$.

<u>TEOREMA 2.5.3</u> [Gaifman]+) Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ modeli za P, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$. Tada je $\mathfrak{M} \prec_c \overline{\mathfrak{M}} \subset_e \mathfrak{N}$. Dokaz ove teoreme zasniva se na lemama 2.5.4 - 2.5.6. U prvoj se esencijalno koristi Matijasevičeva teorema.

+) Analogna teorema važi i za teorije $T \supset P$ jezika $L \supset L_P$, ali uz dodatnu pretpostavku da je $\mathfrak{M} \prec_{\Sigma_0} \mathfrak{N}$, koja zamenjuje lemu 2.5.4.

LEMA 2.5.4. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ modeli za P, $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{N}$, $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ proizvoljna $\sum_0$ formula i $a_1,\ldots,a_n$ elementi od $|\mathfrak{M}|$. Tada

$$\mathfrak{M}\models\varphi(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n) \text{ akko } \mathfrak{N}\models\varphi(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n), \text{tj. } \mathfrak{M}\prec_{\Sigma_0}\mathfrak{N}.$$

DOKAZ: Neposrednom primenom stava 1.7.4 na formule φ i $\neg\varphi$, i poznatog stava teorije modela po kome se istinitost $\sum_1^0$ formula čuva sa širenjem modela.

LEMA 2.5.5. Neka je $\mathfrak{N}$ struktura za jezik L_p, $\mathfrak{M}$ model za P, i neka je $|\mathfrak{M}|$ kofinalan u $\mathfrak{N}$. Tada su sledeće činjenice ekvivalentne:

(i) $\mathfrak{M}\prec\mathfrak{N}$;

(ii) $\mathfrak{N}\models$ P;

(iii) $\mathfrak{M}\prec_{\Sigma_0}\mathfrak{N}$.

DOKAZ: Implikacija (i) $\rightarrow$ (ii) trivijalna je dok na osnovu leme 2.5.4 (ii) $\rightarrow$ (iii). S obzirom da je po teoremi 1.4.7 svaka formula φ jezika L_p Π_n u P za neko n, implikaciju (iii) $\rightarrow$ (i) možemo dokazati indukcijom po složenosti formule φ u hijerarhiji Π_n. U induktivnom koraku koristimo činjenicu da je $|\mathfrak{M}|$ kofinalan u $\mathfrak{N}$, što nam omogućava da nadjemo pogodna ograničenja za neograničene kvantifikatore u φ. Detaljan dokaz može se naći u [PA 2], [SM 2] ili [Gaifman].

LEMA 2.5.6. Neka je $\mathfrak{N}\models$ P i $\mathfrak{M}\subseteq_e\mathfrak{N}$. Tada je $\mathfrak{M}\prec_{\Sigma_0}\mathfrak{N}$

DOKAZ: Neposredna posledica poznatih model-teoretskih činjenica.

DOKAZ TEOREME 2.5.3. Očevidno je $\overline{\mathfrak{M}}\subseteq_e\mathfrak{N}$, pa je $\overline{\mathfrak{M}}\prec_{\Sigma_0}\mathfrak{N}$ po lemi 2.5.6. Kako je $\mathfrak{M}\models$ P i $\mathfrak{N}\models$ P, po lemi 2.5.4 je $\mathfrak{M}\prec_{\Sigma_0}\mathfrak{N}$. odatle, pošto je $\mathfrak{M}\subset\overline{\mathfrak{M}}$ sledi $\mathfrak{M}\prec_{\Sigma_0}\overline{\mathfrak{M}}$, pa po lemi 2.5.5 zaključujemo da je $\mathfrak{M}\prec\overline{\mathfrak{M}}$.

Sledeći stav neposredna je posledica poznatih model-teoretskih činjenica.

STAV 2.5.7. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ modeli za P. Za svako $n\in\omega$ sledeće činjenice su ekvivalentne:

(i) $\mathfrak{M} \prec_{\Sigma_k} \mathfrak{N}$

(ii) $\mathfrak{M} \subset_{\Sigma_{k+1}} \mathfrak{N}$

(iii) $\mathfrak{M} \prec_{\Delta_{k+1}} \mathfrak{N}$.

S obzirom da po lemi 2.5.4 za proizvoljna dva modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ za P takva da je $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{N}$ važi $\mathfrak{M}\prec_{\Sigma_0}\mathfrak{N}$, i pošto se proizvoljan standardni skup može parametarski definisati Δ_1 -formulom sa proizvoljno malim paramterom (stav 2.3.4), iz stava 2.5.7 neposredno sledi sledeće tvrdjenje.

STAV 2.5.8. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ modeli za P. Tada važe implikacije:

(i) $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{N} \to SSy(\mathfrak{M})\subset SSy(\mathfrak{N})$.

(ii) $\mathfrak{M}\subset_e\mathfrak{N}\to SSy(\mathfrak{M}) = SSy(\mathfrak{N})$.

Primer rekurzivno nezasićenih modela su modeli koji se mogu dobiti Skolemovim zatvorenjem nad jednočlanim skupom ili su kofinalni sa takvim modelima.

DEFINICIJA 2.5.9. Neka je $\mathfrak{M}$ nestandardan model za P.

(i) Model $\mathfrak{M}$ je prost ako postoji element $a\in|\mathfrak{M}|$ takav da je Skolemovo zatvorenje $M[a]$ skupa $\{a\}$ ceo model $\mathfrak{M}$, tj. $M[a] = \mathfrak{M}$.

(ii) Model $\mathfrak{M}$ je kratak +) ako je kofinalna ekstenzija nekog prostog modela.

(iii) Model koji nije kratak nazivamo dugačkim modelom.

Pošto je Skolemovo zatvorenje nekog skupa u modelu elementarni podmodel od $\mathfrak{M}$, ako $\mathfrak{M}\models P$ i $a\in|\mathfrak{M}|$, tada je i $M[a]\models P$. Odatle, na osnovu stava 2.5.5, sledi da je svaki kratak model elementarna kofinalna ekstenzija odgovarajućeg prostog modela.

+) Pojam kratkog i dugog modela uveo je Lesan u [LE].

STAV 2.5.10. Kratki modeli nisu rekurzivno zasićeni.

DOKAZ: Neka je $M[a] \prec_c \mathfrak{M}$, gde $a \in |\mathfrak{M}|$. Rekurzivni tip $\tau(x,\underline{a})$ nad $\mathfrak{M}$ definisan familijom

$$\tau(x,y) = \{\forall z\ (\varphi(z,y) \wedge (\forall w < z)\ \neg\varphi(w,y) \rightarrow z < x) \mid \varphi \in L_P\}$$

očevidno nije realizovan u $\mathfrak{M}$.

Ukoliko je $\mathfrak{M}$ nestandardan model za P i $a \in |\mathfrak{M}|$, tada je na osnovu teoreme 2.5.3 $\overline{M[a]}$ kratak model za P koji je početni komad modela $\mathfrak{M}$. U četvrtoj glavi ovog rada dokazaćemo da svaki model $\mathfrak{M}$ za P ima i dugačke početne komade.

Svaki prebrojivi nestandardni model $\mathfrak{M}$ za P ima bogatstvo različitih početnih komada koji su modeli za P, što pokazuje sledeća teorema.

TEOREMA 2.5.11. Svaki nestandardni model $\mathfrak{N}$ za P ima 2^{ω} početnih komada koji su modeli različitih kompletiranja od P.

SKICA DOKAZA: Ovi početni komadi su oblika $\overline{\mathfrak{M}_T}$, gde $\mathfrak{M}_T \subset \mathfrak{N}$ i $\mathfrak{M}_T$ predstavlja minimalni model kompletiranja T za P, koje ima svojstvo da $T \cap B_n \in SSy(\mathfrak{N})$ i $T \cap \Sigma_1 = Th_{\Sigma_1}(\mathfrak{N})$. Može se pokazati da ima 2^{ω} ovakvih teorija (videti [JE]).

Medju end-ekstencijama nekogmmodela $\mathfrak{M}$ za P specijalnu ulogu igraju elementarne-ekstenzije. Njihovo postojanje obezbedjuje sledeći stav, koji važi bez obzira na moć modela.

TEOREMA 2.5.12. [McDowell - Specker]. Svaki model $\mathfrak{M}$ teorije P ima elementarnu end-ekstenziju.

Ova teorema može se generalisati na sve teorije $T \supset P$ prebrojivog jezika $L \supset L_P$, ali ne i na teorije jezika veće moći (vidi [MIL]). Za slučaj prebrojivih modela teoremu možemo dokazati primenom stava o ispuštanju tipova (vidi [CK]), dok se opšti slučaj dokazuje pomoću konstrukcije definabilnog ultrastepena modela $\mathfrak{M}$. Naime, uočimo familiju $\mathcal{D}$ podskupova

$A \in |\mathfrak{M}|$ koji su definabilni u $\mathfrak{M}$ formulom φ jezika L_P sa parametrima $b_1,\dots,b_k$ iz $\mathfrak{M}$:

$$A = \{a \in |\mathfrak{M}| \mid \mathfrak{M} \models \varphi(\underline{a}, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k)\} .$$

Lako se proverava da je familija $\mathcal{D}$ Bulova algebra, a zatim se konstruiše pogodan ultrafilter $\mathcal{U}$ u $\mathcal{D}$. Obeležimo sa $\mathcal{F}$ familiju svih definabilnih funkcija na $\mathfrak{M}$, tj. neka je

$$\mathcal{F} = \{f \mid f: |\mathfrak{M}| \to |\mathfrak{M}| \text{ , graf od f je parametarski definabilan u } \mathfrak{M}\}.$$

Uvedimo u $\mathcal{F}$ relaciju ekvivalencije $\sim$ sa

$$f \sim g \overset{df}{\longleftrightarrow} \{a \in |\mathfrak{M}| \mid \mathfrak{M} \models f(\underline{a}) = g(\underline{a})\} \in \mathcal{U} .$$

Neposredno se proverava da operacije +, . i relaciju < možemo uvesti u skup $|\mathcal{F}/\mathcal{U}|$ svih klasa ekvivalencije na uobičajeni način, na primer:

$$\bar{f} + \bar{g} = \bar{h} \leftrightarrow \{a \in |\mathfrak{M}| \mid \mathfrak{M} \models f(a) + g(a) = h(a)\} \in \mathcal{U},$$

gde su $\bar{f}$, $\bar{g}$ i $\bar{h}$ klase u kojima se nalaze fink ije f, g, odnosno h. Za dobijenu strukturu $\mathcal{F}/\mathcal{U}$ može se dokazati sledeća varijanta Łošove teoreme: za svaku formulu

$$\varphi(x_1,\dots,x_n) \text{ i } f_1,\dots,f_n \in \mathcal{F}$$

važi

$$\mathcal{F}/\mathcal{U} \models \varphi(\bar{f}_1,\dots,\bar{f}_n) \leftrightarrow \{a \in |\mathfrak{M}| \mid \mathfrak{M} \models \varphi(f_1(a),\dots,f_n(a))\} \in \mathcal{U}.$$

Ukoliko sa f_a za $a \in |\mathfrak{M}|$ označimo funkciju za koju je

$$\mathfrak{M} \models \forall x(f(x) = \underline{a}),$$

prirodno ulaganje $K : \mathfrak{M} \to \mathcal{F}/\mathcal{U}$ definisano sa $K^{(a)} = \bar{f}_a$ je izomorfno potapanje modela $\mathfrak{M}$ na elementarni početni komad modela $\mathcal{F}/\mathcal{U}$ +).

Opisana tehnika može se primeniti i na druga pitanja u vezi sa teorijom P. Naime, ukoliko posmatramo standardni model ω umesto $\mathfrak{M}$ u prethodnoj konstrukciji i ograničimo familiju

---

+) Detaljna konstrukcija definabilnog ultrastepena modela može se naći u [PA 2] ili [MAR].

$\mathcal{F}$ na Σ_n-definabilne funkcije, pokazuje se da je struktura $\mathcal{F}/\mathcal{U}$ model Σ_n-fragmenta aritmetike P, ali ne i cele teorije P. Time smo dokazali da P nema Σ_n aksiomatizaciju, pa smo samim tim dobili i alternativni dokaz teoreme Mostowskog (vidi [MO]) po kojoj P nema konačnu aksiomatizaciju.

II 6. MEDJUSOBNA UTAPANJA MODELA ZA P

Činjenica da su nestandardni modeli aritmetike "ograničeno-rekurzivno zasićeni", tj. da realizuju sve rekurzivne tipove ograničene kompleksnosti u Σ_n hijerarhiji koji su konsistentni sa teorijom posmatranog modela, omogućuje nam da formulišemo kriterijum potopivosti jednog nestandardnog modela aritmetike u drugi u terminima teorije i standardnih sistema ovih modela.

TEOREMA 2.6.1 [Friedman] +) Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ prebrojivi nestandardni modeli za P.

(i) Model $\mathfrak{M}$ je potopiv u model $\mathfrak{N}$ akko je $Th_E(\mathfrak{M}) \subset Th_E(\mathfrak{N})$ i $SSy(\mathfrak{M}) \subset SSy(\mathfrak{N})$.

(ii) Model $\mathfrak{M}$ je izomorfan početnom komadu modela $\mathfrak{N}$ akko je $Th_{\Sigma_1}(\mathfrak{M}) = Th_{\Sigma_1}(\mathfrak{N})$ i $SSy(\mathfrak{M}) = SSy(\mathfrak{N})$.

DOKAZ: Ukoliko je $\mathfrak{M}$ potopiv u $\mathfrak{N}$ ili izomorfan početnom komadu od $\mathfrak{N}$ odgovarajuća tvrdjenja o E, odnosno Σ_1 teorijama modela i njihovim standardnim sistemima slede iz stavova o prezervaciji klasične teorije modela za ovu vrstu potapanja, odnosno stava 2.5.8. Da bi dokazali implikaciju u obrnutom smeru za (i), uočimo proizvoljno nabrajanje $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ skupa $|\mathfrak{M}|$ i E-tip $\tau^E_{a_0}(x)$ tačke a_0. Na osnovu teoreme 2.2.4 i uslova $Th_E(\mathfrak{M}) \subset Th_E(\mathfrak{N})$ i $SSy(\mathfrak{M}) \subset SSy(\mathfrak{N})$, ovaj tip je realan na $\mathfrak{M}$, pa po teoremi 2.4.2, on se realizuje u $\mathfrak{M}$ u nekoj tački b_0.

+) U ovom obliku preuzeto iz [SM 3].

Preslikajmo a_o u b_o. Razmatrajući tip $\mathcal{T}^{E}_{a_1 a_o}(x,y)$ zaključujemo da je $\mathcal{T}^{E}_{a_1 a_o}(x,b_o)$ realan tip nad $\mathfrak{N}$,pa se stoga realizuje u nekoj tački b_1. Preslikajmo a_1 u b_1.Postupak produžujemo potpuno analogno. Što se tiče odgovarajuće implikacije za (ii), neka je opet $a_o,a_1,\ldots,a_n,\ldots$ nabrajanje od $|\mathfrak{M}|$. "Cik-cak" konstrukcija koju uvodimo je u parnim koracima identična onoj iz (i); zato pretpostavimo da je n neparan i da su slike elemenata $a_1,\ldots,a_{n-1}$ redom $b_1,\ldots,b_{n-1}$.

Neka je b_n najmanji iz $|\mathfrak{N}|$ sa svojstvom da je različit od svih $b_1,\ldots,b_{n-1}$,ali manji od nekog od njih,na primer $b_n < b_1$.Uočimo Π_1-tip $\mathcal{T}^{\Pi_1}_{b_n b_1 \ldots b_{n-1}}(x,\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_{n-1})$ koji odgovara Π_1-tipu elementa b_n. On je realan na $\mathfrak{M}$. Dokažimo da je on tip nad $\mathfrak{M}$. Neka je $\varphi_1,\ldots,\varphi_k$ proizvoljna konačna familija formula iz ovog tipa. Kako je $b_n < b_1$,ovaj Π_1-tip sadrži i formulu $x<x_1$,pa

$$\mathfrak{N} \models \mathrm{E}x<a_1 \bigwedge_{i\leqslant k} \varphi_i(x,a_1,\ldots,a_{n-1}),$$

jer je ova formula Π_1, a iz

$$\mathcal{T}^{\Sigma_1}_{a_1\ldots a_{n-1}}(x_1,\ldots,x_{n-1}) \subset \mathcal{T}^{\Sigma_1}_{b_1\ldots b_{n-1}}(x_1,\ldots,x_n) \text{ sledi}$$

$$\mathcal{T}^{\Pi_1}_{b_1\ldots b_{n-1}}(x_1,\ldots,x_{n-1}) \subset \mathcal{T}^{\Pi_1}_{a_1\ldots a_{n-1}}(x,\ldots,x_n).$$

Neka je b_n proizvoljan svedok gornje formule. Dodelimo b_n elementu a_n i konstrukciju nastavimo opisanim postupkom .

Zamenom E , odnosno Σ_1 sa Σ_{n+1} u uslovima teoreme 2.6.1 može se zahtevati da utapanje bude Σ_n-elementarno.

Takodje, sa neznatnim izmenama u konstrukciji,možemo dokazati teoremu 2.6.1 u "pojačanoj" formi i to u (i) zahtevati da se $\mathfrak{M}$ utopi u $\mathfrak{N}$ tako da $\mathfrak{N}$ bude mešana ekstenzija od $\mathfrak{M}$, a u (ii) da se $\mathfrak{M}$ utopi u pravi inicijalni segment od $\mathfrak{N}$, u oba slučaja bez ikakvog menjanja ostalih uslova.

Sem navedene teoreme, u glavi četvrtoj upotrebićemo i njenu sledeću modifikaciju.

DEFINICIJA 2.6.2. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ modeli za P, kažemo da je $\mathfrak{M}$ proizvoljno visoko potopiv u $\mathfrak{N}$ ako za svako $a \in |\mathfrak{M}|$ postoji $b \in |\mathfrak{M}|$ i potapanje F od $\mathfrak{M}$ u $\mathfrak{N}$ sa svojstvima da je $F(b) > a$. Model je izomorfan proizvoljno velikom početnom komadu od $\mathfrak{N}$ za svako $a \in |\mathfrak{N}|$ postoji utapanje modela $\mathfrak{M}$ na početni komad modela $\mathfrak{N}$ koji sadrži a.

TEOREMA 2.6.3. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ prebrojivi nestandardni modeli za P.

(i) Model $\mathfrak{M}$ je proizvoljno visoko potopiv u model akko je $Th_{\forall E}(\mathfrak{M}) \subset Th_{\forall E}(\mathfrak{N})$ i $SSy(\mathfrak{M}) \subset SSy(\mathfrak{N})$.

(ii) Model $\mathfrak{M}$ je izomorfan proizvoljno velikom početnom komadu od $\mathfrak{N}$ akko je $Th_{\Pi_2}(\mathfrak{M}) \subset Th_{\Pi_2}(\mathfrak{N})$ i $SSy(\mathfrak{M}) = SSy(\mathfrak{N})$.

DOKAZ: Implikacija s leva na desno proverava se neposredno koristeći stav 2.5.8 za (i), kao i uobičajene model-teoretske argumente. Obratna implikacija dokazuje se identičnom konstrukcijom kao i u teoremi 2.6.1, s tim što se za prvi element a_0 nabrajanja $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ skupa $|\mathfrak{M}|$ bira takav element čiji se Σ_1-tip realizuje proizvoljno velikim elementom modela $\mathfrak{M}$. Teorema 2.5.3 obezbedjuje postojanje takvog elementa a_0: dovoljno je uzeti elementarnu end-ekstenziju $\mathfrak{M}'$ modela $\mathfrak{M}$ i Σ_1-tip proizvoljnog elementa $c \in |\mathfrak{M}'| \setminus |\mathfrak{M}|$. Teoreme 2.4.2 i 2.4.4 obezbedjuju da se takav Σ_1-tip realizuje i u $\mathfrak{M}$. Uslov $Th_{\forall E}(\mathfrak{M}) \subset Th_{\forall E}(\mathfrak{N})$ omogućuje da se tip $\tau_{a_0}(x)$ može realizovati u $\mathfrak{N}$ proizvoljno velikim elementima b_0. Dalja konstrukcija identična je onoj u dokazu stava 2.6.1.+)

Preseci izomorfnih slika modela $\mathfrak{N}$ u sebe samog su u tesnoj vezi sa definabilnim tačkama modela $\mathfrak{N}$. Sledeći [MI 2], uvedimo sledeću definiciju.

+) Detalji ove konstrukcije kao i neke varijante ovih teorema mogu se naći u [SM 2] i [SM 3] .

DEFINICIJA 2.6.4 Ako je $\mathcal{N}$ prebrojiv model za P, tada je

$$P_k^n = \cap\{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \prec_{\Sigma_k} \mathcal{N} \text{ i } \mathcal{M} \cong \mathcal{N}\}$$

$$Q_k^n = \cap\{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \prec_{e\Sigma_k} \mathcal{N} \text{ i } \mathcal{M} \cong \mathcal{N}\}$$

Tehnika u čijoj biti leži varijanta konstrukcije opisana u dokazu teoreme 2.6.1 dokazuju se i sledeći stavovi.

TEOREMA 2.6.5 Ukoliko sa Δ_k^n označimo skup svih Δ_k^n -definabilnih tačaka modela $\mathcal{N}$, važi

$$P_k^n = \Delta_{k+1}^n.$$

Imajući u vidu da iz $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ za modele aritmetike sledi $\mathcal{M} \prec_{\Sigma_0} \mathcal{N}$ za k=o iz prethodne teoreme neposredno sledi naredna posledica.

POSLEDICA 2.6.6. $\cap\{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \subset \mathcal{N}, \mathcal{M} \cong \mathcal{N}\} = \Delta_1^n$

TEOREMA 2.6.7+) $Q_k^n = \overline{P_k^n} = \overline{\Delta_{k+1}^n}$.

Opet za k = o dobijamo sledeću neposrednu posledicu:

POSLEDICA 2.6.8. $\omega \prec_{\Sigma_1} \mathcal{N} \Leftrightarrow \{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \subset_e \mathcal{N} \text{ i } \mathcal{M} \cong \mathcal{N}\} = \omega$

Detaljan dokaz ovih stavova može se naći u [MI 2] .U četvrtoj glavi dobićemo 2.6.8 kao posledicu jednog nešto opštijeg stava čiji se dokaz primenom McDowell-Speckerove teoreme svodi neposredno na konstrukciju iz Friedmanove teoreme.

+) Za dokaz teorema 2.6.5 i 2.6.7 videti [MI 2] .

G L A V A   T R E Ć A

O JEDNOM PORETKU NA SKUPU REČENICA JEZIKA L_P

III 0. KRATAK PREGLED GLAVE

U ovoj glavi razmatraćemo parcijalan strogi poredak $<_T$ na skupu Sent(P) svih rečenica jezika L_P indukovan nekom teorijom T. Neke osobine ovog poretka za slučaj teorije $T = P + \neg Con_P$ omogućiće nam da dokažemo jedno čisto model-teoretsko svojstvo formalne aritmetike P ($\neg$JEP). Daćemo i karakterizaciju modela $\mathfrak{M} \models P$ koji "ne obogaćuju" poredak indukovan teorijom P, tj. modela $\mathfrak{M}$ za koje je $<_{Th(\mathfrak{M})} = <_P$. Dokazaćemo takodje da za svaku teoriju T postoji teorija T′ tako da je poredak indukovan teorijom T′ linearan, a predstavlja proširenje poretka indukovanog teorijom T.

III.1 INTERPRETACIJA PREDIKATA Prf(x,a) U MODELIMA ARITMETIKE

Budući da za svaku teoremu φ u P postoji proizvoljno veliki broj n tako da $P \vdash Prf(n, \ulcorner\varphi\urcorner)$, na osnovu principa prelivanja u svakom nestandardnom modelu $\mathfrak{M} \models P$ postoji beskonačno veliki dokaz a za φ, tj. $a \in |\mathfrak{M}| - \omega$ takav da $\mathfrak{M} \models Prf(\underline{a}, \ulcorner\varphi\urcorner)$. S druge strane, kao što ćemo videti, rečenice koje nisu teoreme u P imaju nestandardne "dokaze" u nekim modelima za P. Zato uvodimo sledeću definiciju.

<u>DEFINICIJA 3.1.1.</u> Neka je φ rečenica jezika L_P, $\mathfrak{M} \models P$. Tada proizvoljan element a iz $|\mathfrak{M}|$ za koji važi $\mathfrak{M} \models Prf(\underline{a}, \ulcorner\varphi\urcorner)$ nazivamo <u>dokazom rečenice</u> φ u modelu $\mathfrak{M}$. Ukoliko važi

$$\mathfrak{M} \models Prf(\underline{a}, \ulcorner\varphi\urcorner) \wedge \forall y < \underline{a} \neg Prf(y, \ulcorner\varphi\urcorner)$$

element a nazivamo <u>najkraćim dokazom rečenice φ u modelu $\mathfrak{M}$</u>.

Očevidno, rečenice "a je dokaz za φ" i "a je najkraći dokaz za φ" jesu Σ_0-rečenice sa parametrom $\underline{a}$, pa se "čuvaju" sa širenjem modela $\mathfrak{M}$. Naime, ako je $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ i $\mathfrak{M} \models$ "a je (najkraći) dokaz za φ", tada ista rečenica važi i u $\mathfrak{N}$.

Ako rečenica φ ima dokaz u modelu $\mathfrak{M}$, tada ona ima i najkraći dokaz u $\mathfrak{M}$ zahvaljujući shemi najmanjeg elementa. Takodje, ako je φ teorema u P i n najmanji broj koji je kôd nekog njenog dokaza, u svakom modelu $\mathfrak{M} \models P$ važi $\mathfrak{M} \models$ "n je najkraći dokaz za φ". Ako φ nije teorema u P, tada ona u bilo kom modelu može imati samo "beskonačno veliki" dokaz. U nekom modelu $\mathfrak{M}$ svaka rečenica ima dokaz akko $\mathfrak{M} \models \neg Con_P$, jer iz dokaza d za $\perp$ u modelu $\mathfrak{M}$ možemo konstruisati dokaz $\bar{d} = d * \langle \ulcorner \perp \to \varphi \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner \rangle$ za proizvoljnu rečenicu φ.

III 2. POREDAK $<_T$ NA SKUPU REČENICA SENT(P) U TEORIJI T

Uvedimo sada poredak na skupu rečenica jezika L_P definisan teorijom T.

TVRDJENJE 3.2.1. neka je T teorija koja sadrži P i Sent(P) ? skup svih rečenica jezika L_P. Tada je relacija

$$\varphi <_T \psi \Leftrightarrow T \vdash Ex(Prf(x, \ulcorner \varphi \urcorner) \wedge \forall y \leqslant x \neg Prf(y, \ulcorner \psi \urcorner))$$

strogi parcijalni poredak na skupu Sent(P).

NAPOMENA: Označimo Σ_1-rečenicu

$$Ex\ (Prf(x, \ulcorner \varphi \urcorner) \wedge \forall y \leqslant x \neg Prf(y, \ulcorner \psi \urcorner))$$

sa $\varphi < \psi$. Tada je očevidno

$$\varphi <_T \psi \Leftrightarrow T \vdash \varphi < \psi$$

DOKAZ: Iz pretpostavke da je $\varphi <_T \psi$ i $\psi <_T \varphi$ sledi

$$T \vdash Ex(Prf(x, \ulcorner \varphi \urcorner) \wedge \forall y \leqslant x \neg Prf(y, \ulcorner \psi \urcorner))$$

$$T \vdash Ex(x, \ulcorner \psi \urcorner) \wedge \forall y \leqslant x \neg Prf(y, \ulcorner \varphi \urcorner))$$

što je kontradikcija sa

$$T \vdash \forall y \forall y\ (x < y \vee y < x \vee x = y).$$

Slično iz

$$\varphi <_T \psi \text{ i } \psi <_T \theta \text{ uz}$$

$$T \vdash \forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \to x < z)$$

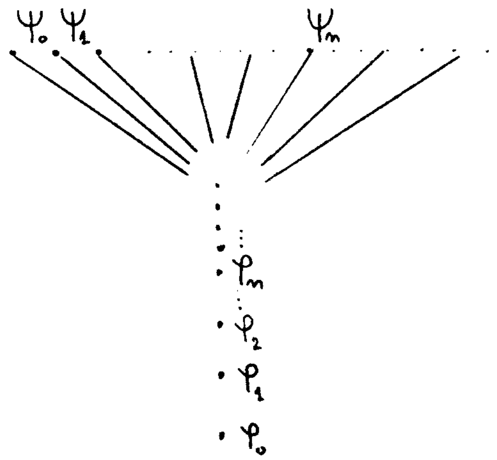
sledi $\varphi <_T \theta$.

Ispitajmo sada osnovne osobine ovog poretka.

S obzirom da je formula koja definiše ovaj poredak Σ_1, očevidno je $\varphi <_p \psi \Leftrightarrow \varphi <_{Th(\omega)} \psi$. Dakle,

$<_p \; = \; <_{Th(\omega)}$.

Tip uredjenja $<_p$ je $\overline{\omega} + \Lambda$, gde je $\overline{\omega}$ tip strogog uredjenja prirodnih brojeva (relacija $<$, a ne $\leqslant$), a Λ prazno uredjenje beskonačnog prebrojivog skupa. $\overline{\omega}$ odgovara uredjenju skupa $\{\varphi_i \mid P \vdash \varphi_i\}$ prema veličini kôda najmanjeg dokaza, a Λ praznom uredjenju skupa $\{\psi_i \mid P \nvdash \psi_i\}$.



Naime, za svaku teoremu φ_i u P i svaku rečenicu ψ_j, koja to nije, važi $\varphi_i <_{Th(\omega)} \psi_j$, dok su ψ_j uzajamno neuporedive rečenice.

U opštem slučaju, poredak $<_T$ ima znatno komplikovaniji tip.

Čak i kada $T \vdash \mathrm{Ex}\, \mathrm{Prf}(x, \ulcorner\varphi\urcorner)$ za svaku rečenicu φ, tj. kada $T \vdash \neg \mathrm{Con}_P$, poredak, kao što ćemo videti, ne mora biti linearan. S druge strane, poredak definisan teorijom nekog modela je linearan akko $\mathfrak{M} \models \neg \mathrm{Con}_P$. Ako $\mathfrak{M} \models \mathrm{Con}_P$ poredak se sastoji od linearno uredjenog dela formula koje imaju dokaz u modelu i "krošnje" drveta sastavljene od ostalih rečenica medjusobno neuporedivih, ali "većih" od proizvoljne rečenice koja ima dokaz u ovom modelu.

Ukoliko je $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$, na osnovu poznatih model-teoretskih činjenica i posledice 1.7.5 Matijasevičeve teoreme važi $\mathfrak{M} \prec_{\Sigma_1} \mathfrak{N}$. Zato iz $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ sledi implikacija $\varphi <_{Th(\mathfrak{M})} \psi \Rightarrow \varphi <_{Th(\mathfrak{N})} \psi$, tj. $<_{Th(\mathfrak{M})} \subset \; <_{Th(\mathfrak{N})}$. Medjutim, specijalno, ako je $\mathfrak{M} \models \neg \mathrm{Con}_P$ poredak je linearan, pa

$$\neg(\varphi <_{Th(\mathfrak{M})} \psi) \leftrightarrow \psi <_{Th(\mathfrak{M})} \psi \vee \varphi \equiv \psi,$$

odakle sledi da u ovom slučaju $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ povlači

$$\varphi <_{Th(\mathfrak{M})} \psi \leftrightarrow \varphi <_{Th(\mathfrak{N})} \psi, \text{ tj.}$$

$$<_{Th(\mathfrak{M})} = <_{Th(\mathfrak{N})}.$$

Kako smo videli, $<_p = <_{Th(\omega)}$, pa se možemo zapitati koji modeli $\mathfrak{M} \models P$ imaju svojstvo $<_{Th(\mathfrak{M})} = <_p$. Odgovor daje

<u>TVRDJENJE 3.2.2</u>. Neka je $\mathfrak{M} \models P$, tada je $<_p = <_{Th(\mathfrak{M})}$ akko je $\omega <_{\Sigma_1} \mathfrak{M}$.

<u>DOKAZ</u>: Kako je formula kojom je definisan poredak Σ_1, očevidno iz $\omega <_{\Sigma_1} \mathfrak{M}$ sledi $<_{Th(\mathfrak{M})} = <_{Th(\omega)} = <_p$. Obratno, neka je $<_p = <_{Th(\mathfrak{M})}$, i neka je φ neka Σ_1-rečenica takva da $\mathfrak{M} \models \varphi$. Kako za Σ_1-rečenice važi $P \vdash \varphi \rightarrow \text{Ex Prf}(x, \ulcorner\varphi\urcorner)$ (stav 1.4.8), tada $\mathfrak{M} \models \text{Ex Prf}(x, \ulcorner\varphi\urcorner)$. Odatle, za svaku rečenicu ψ različitu od φ važi $\psi <_{Th(\mathfrak{M})} \varphi$ ili $\varphi <_{Th(\mathfrak{M})} \psi$, već prema tome da li postoji dokaz za ψ u $\mathfrak{M}$ ili ne, i koliki je u odnosu na dokaz za φ. No tada φ mora biti teorema u P, jer za bilo koju rečenicu koja nije teorema u P u uredjenom skupu $(\text{Sent}(P), <_{Th(\mathfrak{M})})$ zbog $<_{Th(\mathfrak{M})} = <_p$ postoji beskonačno mnogo rečenica neuporedivih sa njom u smislu poretka $<_{Th(\mathfrak{M})}$. Dakle, $\omega \models \varphi$, što je u trebalo dokazati.

Kao što smo napomenuli, zbog činjenice da za proizvoljnu rečenicu φ važi $P + \neg Con_p \vdash \text{Ex Prf}(x, \ulcorner\varphi\urcorner)$, možemo se zapitati da li je poredak indukovan teorijom $P + \neg Con_p$ linearan, tj. da li za svake dve rečenice φ i ψ važi

$$\varphi <_{P+\neg Con_p} \psi \text{ ili } \psi <_{P+\neg Con_p} \varphi .$$

Da bi dobili odgovor na ovo pitanje, imajući u vidu da je teorija $P + \neg Con_p$ neprotivrečna (vidi 1.5.2), dokazaćemo sledeću lemu.

<u>LEMA 3.2.3.</u> Postoji rečenica φ jezika L_p nezavisna u teoriji $P + \neg Con_p$ za koju je

$$P \vdash \varphi \leftrightarrow \exists x(Prf(x, \ulcorner\varphi \to Con_p\urcorner) \wedge \forall y<x \neg Prf(y, \ulcorner\neg Con_p \to \varphi\urcorner) \ldots (1),$$

tj. $P \vdash \varphi \leftrightarrow [(\varphi \to Con_p) < (\neg Con_p \to \varphi)]$.

<u>DOKAZ:</u> Egzistencija rečenice φ sa svojstvima (1) sledi na osnovu teoreme 1.4.12, pa je dovoljno dokazati njenu nezavisnost u $P + \neg Con_p$. Pretpostavimo da je $P + \neg Con_p \vdash \neg\varphi$, tada $P \vdash \neg Con_p \to \neg\varphi$, tj. $P \vdash \varphi \to Con_p$. Kako je $P + \neg Con_p$ neprotivrečna teorija, tada $P + \neg Con_p \nvdash \varphi$, tj. $P \nvdash \neg Con_p \to \varphi \ldots (2)$

Neka je n kôd dokaza za $\varphi \to Con_p$, tada

$$\omega \models Prf(n, \ulcorner\varphi \to Con_p\urcorner) \text{ i}$$

$$\omega \models (\forall y < n) \neg Prf(y, \ulcorner\neg Con_p \to \varphi\urcorner).$$

S obzirom da se radi o Σ_0-rečenicama, na osnovu stava 1.2.2

$$P \vdash Prf(n, \ulcorner\varphi \to Con_p\urcorner) \wedge (\forall y<n) \neg Prf(y, \ulcorner\neg Con_p \to \varphi\urcorner),$$

odakle, uvodeći umesto n egzistencijalni kvantifikator i iz (1) sledi $P \vdash \varphi$, pa tim pre $P + \neg Con_p \vdash \varphi$, što je kontradincija sa (2).

Pretpostavimo sada da $P + \neg Con_p \vdash \varphi$, tada

$$P + \neg Con_p \nvdash \neg\varphi \qquad \ldots\ldots (3),$$

tj. $\quad P \vdash \neg Con_p \to \varphi$ i $P \nvdash \neg Con_p \to \neg\varphi$ odnosno

$$P \nvdash \varphi \to Con_p.$$

Neka je n kôd dokaza u P za $\neg Con_p \to \varphi$, tada, slično prethodnom slučaju,

$$P \vdash Prf(n, \ulcorner\neg Con_p \to \varphi\urcorner) \qquad \ldots\ldots (4)$$

i $\quad P \vdash \forall x < n\ Prf(x, \ulcorner\varphi \to Con_p\urcorner) \qquad \ldots\ldots (5).$

Odatle, iz (5)

$$P \vdash \forall x(Prf(x, \ulcorner\varphi - Con_p\urcorner) \to x \geqslant n),$$

što sa (4) daje

$$P \vdash \forall x(Prf(x, \ulcorner\varphi \to Con_p\urcorner) \to \neg\forall y < x\, \neg Prf(y, \ulcorner\neg Con_p \to \varphi\urcorner)),$$

tj. $$P \vdash Ex(Prf(x, \ulcorner\varphi \to Con_p\urcorner) \wedge \forall y < x\, \neg Prf(y, \ulcorner\neg Con_p \to \varphi\urcorner)).$$

Poslednje i (1) daju $P \vdash \neg\varphi$, odakle $P + \neg Con_p \vdash \neg\varphi$, što je kontradikcija sa (3). Dakle, φ je nezavisna rečenica teorije $P + \neg Con_p$.

Dokažimo sada sledeće tvrdjenje koje daje odgovor na naše pitanje.

<u>TVRDJENJE 3.2.4.</u> Postoje rečenice σ i ψ jezika L_p takve da nije ispunjeno ni $\sigma <_{P+Con_p} \psi$ niti $\psi <_{P+Con_p} \sigma$.

<u>DOKAZ</u>: Neka je $\sigma \doteq \varphi \to Con_p$ i $\psi \doteq \neg Con_p \to \varphi$, gde je φ rečenica opisana u lemi 3.2.3. Na osnovu iste leme, postoje modeli $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$ za teoriju $P + \neg Con_p$ takvi da $\mathfrak{M}_1 \models \varphi$ i $\mathfrak{M}_2 \models \neg\varphi$. S obzirom da u oba modela rečenice σ i ψ imaju dokaze, imajući u vidu (1) iz leme 3.2.3, zaključujemo da je $\sigma <_{Th(\mathfrak{M}_1)} \psi$ zbog $\mathfrak{M}_1 \models \varphi$, slično $\psi <_{Th(\mathfrak{M}_2)} \sigma$ zbog $\mathfrak{M}_2 \models \neg\varphi$.
Kako

$$P + \neg Con_p \subset Th(\mathfrak{M}_i),\ i = 1,2$$

zaključujemo da ne važi ni

$$\sigma <_{P+\ Con_p} \psi \text{ niti } \psi <_{P+\ Con_p} \sigma$$, što je i trebalo dokazati.

Pirodno je postaviti sledeće pitanje: ako je $T \supset P$ neka teorija i $<_T$ odgovarajući poredak, postoji li teorija T' takva da je poredak $<_{T'}$ linearan i $<_T \subset <_{T'}$, tj. može li se svaki poredak neke teorije T produžiti do linearnog koji opet odgovara nekoj teoriji T'?

Ukoliko je $T + \neg Con_p$ neprotivrečna teorija, očevidno teorija $Th(\mathfrak{M})$, gde je $\mathfrak{M}$ proizvoljan model za $T + \neg Con_p$, daje poredak sa traženim svojstvom. Medjutim, odgovor je potvrdan i u slučaju kada $T \vdash Con_p$,što pokazuje sledeće tvrdjenje:

TVRDJENJE 3.2.5 Neka je T proizvoljna neprotivrečna teorija koja sadrži P i $<_T$ poredak na skupu Sent(P) indukovan ovom teorijom. Tada postoji teorija $T' \supset P$ takva da je poredak $<_{T'}$ linearan i $<_T \subset <_{T'}$.

DOKAZ: Neka su φ i ψ neke rečenice jezika L_p. Uočimo skup Σ_1-formula $\emptyset = \{ \varphi < \psi \mid \varphi, \psi \in Sent(P) \text{ i } \varphi <_T \psi \}$ .Dokažimo da je skup formula $\emptyset + P + \neg Con_p$ neprotivrečan. Pretpostavimo suprotno, tada postoji konačan podskup $\emptyset_o \subset \emptyset$, takav da

$$P + \neg Con_p \vdash \neg \bigwedge_{\sigma_i \in \emptyset_o} \sigma_i \ .$$

No rečenica $\neg \bigwedge_{\sigma_i \in \emptyset_o} \sigma_i$ je Π_1, pa po posledici 1.7.5 Matijaceviceve teoreme ona je ekvivalentna nekoj Π_1^o ,tj. univerzalnoj rečenici. No tada, na osnovu Kreiselove teoreme (1.5.5),

$$P \vdash \neg \bigwedge_{\sigma_i \in \emptyset_o} \sigma_i \ ,$$

što je kontradikcija sa činjenicom da je $\emptyset + P$ neprotivrečna teorija s obzirom da je T neprotivrečna teorija i da $T \vdash \emptyset$ i $T \supset P$. Neka je $\mathfrak{M}$ proizvoljan model za $P + \emptyset + \neg Con_p$. Tada, očevidno, teorija $Th(\mathfrak{M})$ i poredak $<_{Th(\mathfrak{M})}$ ima tražena svojstva; naime, zbog $\mathfrak{M} \models \neg Con_p$ poredak $<_{Th(\mathfrak{M})}$ je linearan, a zbog $\mathfrak{M} \models \emptyset$ je $<_T \subset <_{Th(\mathfrak{M})}$.

III 3. PRIMENA U TEORIJI MODELA ARITMETIKE

Primenimo sada dokazane osobine poretka $<_T$ na ispitivanje jednog čisto model-teoretskog svojstva formalne aritmetike P (3.3.3).

DEFINICIJA 3.3.1. Kažemo da teorija T ima svojstvo JEP (Joint Embeding Proprety) ako za proizvoljne modele $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$ teorije

T postoji model $\mathfrak{N}$ za T sa svojstvom $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{N}$ i $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{N}$.

Dokažimo sada jednu lemu koja daje sintaksnu karakterizaciju teorije koje imaju svojstvo JEP.

LEMA 3.3.2. Za bilo koju neprotivrečnu teoriju T svojstvo JEP je ekvivalentno sledećem svojstvu (S): ako su ϕ i θ dve Σ_1^0-rečenice, tada iz konsistentnosti teorija $T + \phi$ i $T + \theta$ sledi konsistentnost teorije $T + \phi + \theta$.

DOKAZ: Pretpostavimo da teorija T ima svojstvo JEP, i neka su $T + \phi$ i $T + \theta$ konsistentne teorije, a $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$ modeli za $T + \phi$, odnosno $T + \theta$. Neka je $\mathfrak{N} \models T$ takav da $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{N}$ i $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{N}$. Kako se Σ_1^0-rečenice čuvaju pri širenju modela, $\mathfrak{N} \models T + \phi + \theta$, tj. $T + \phi + \theta$ je neprotivrečna teorija.

Obratno, neka T ima svojstvo (S), i neka su $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$ dva proizvoljna modela za T; uočimo teoriju $\Delta = T + \mathrm{diag}\,\mathfrak{M}_1 + \mathrm{diag}\,\mathfrak{M}_2$ jezika $L_T \cup \{c_a \mid a \in |\mathfrak{M}_1| \cup |\mathfrak{M}_2|\}$ i gde je $\mathrm{diag}\,\mathfrak{M}_i$ običan diagram modela $\mathfrak{M}_i$. Uočimo proizvoljno konačan podskup Δ_0 teorije Δ, obrazujmo konjunkciju svih formula iz $\Delta_0 \cap \mathrm{diag}\,\mathfrak{M}_1$ i oslobodimo se imena elemenata iz $\mathfrak{M}_1$, uvodeći umesto njih promenljive i odgovarajuće egzistencijalne kvantifikatore, čime dobijamo egzistencijalnu rečenicu ϕ konsistentnu sa T. Sličnim postupkom, primenjenim na $\Delta_0 \cap \mathrm{diag}\,\mathfrak{M}_2$, dobijamo egzistencijalnu rečenicu θ, takodje konsistentnu sa T. Model za teoriju $T + \phi + \theta$ može se obogatiti do modela za Δ_0. Na osnovu stava kompaktnosti zaključujemo da Δ ima model i to je očevidno model za T u kome se modeli $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$ utapaju.

STAV 3.3.3. Formalna aritmetika P nema svojstvo JEP.

DOKAZ: Na osnovu leme 3.3.2 dovoljno je dokazati da P nema svojstvo (S). Neka je $\phi_0 \doteq \sigma < \psi$, a $\theta_0 \doteq \psi < \sigma$, gde su σ i ψ rečenice iz stava 3.2.4. Na osnovu istog stava sledi da su teorije $P + \emptyset_0$ i $P + \Theta_0$ konsistentne, ali $P + \emptyset_0 + \Theta_0$ očevidno nije. S druge strane, na osnovu posledice 1.7.5 formule $\emptyset_0$ i Θ_0 su ekvivalentne u P nekim Σ_1^0-formulama $\emptyset$ i Θ sa istim svojstvima u pogledu konsistentnosti sa P.

Σ_1-rečenice sa ovim svojstvom mogu se dobiti na više načina. Ukoliko se u lemi 3.3. iz [JE] za rečenicu γ izabere proizvoljna Σ_1-rečenica nezavisna u P, rečenice α i β zadovoljavaju svojstva $P \nvdash \neg\alpha$, $P \nvdash \neg\beta$, $P \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$. Medjutim, služeći se idejom dokaza ove leme, rečenice sa ovim svojstvom možemo dobiti primenom sledeće leme, koja predstavlja uopštenje Gödelove teoreme o nepokretnoj tački.

<u>LEMA 3.3.4</u>. Neka su $A(x,a)$ i $B(x,y)$ formule jezika L_P, čije su jedine slobodne promenljive x i y. Tada postoje rečenice φ i ψ istog jezika takve da važi

$$P \vdash \varphi \leftrightarrow A(\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner) \text{ i}$$
$$P \vdash \psi \leftrightarrow B(\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner).$$

<u>DOKAZ</u>: Uočimo formule

$$\varphi(x,y) \doteq A(Sub(x,x,y), Sub(y,x,y)) \text{ i}$$
$$\psi(x,y) \doteq B(Sub(x,x,y), Sub(y,x,y))$$

i neka je

$$m = \ulcorner\varphi(x,y)\urcorner \quad \text{i} \quad n = \ulcorner\psi(x,y)\urcorner \;, \varphi \doteq \varphi(m,n), \psi \doteq \psi(m,n).$$

Tada je

$$P \vdash \varphi \leftrightarrow A(Sub(m,m,n), Sub(n,m,n) \text{ i}$$
$$P \vdash \psi \leftrightarrow B(Sub(m,m,n) Sub(n,m,n)), \text{ pa}$$
$$P \vdash \varphi \leftrightarrow A(Sub(\ulcorner\varphi(x,y)\urcorner, m,n), Sub(\ulcorner\psi(x,y)\urcorner, m,n)) \text{ i}$$
$$P \vdash \psi \leftrightarrow B(Sub(\ulcorner\varphi(x,y)\urcorner, m,n), Sub(\ulcorner\psi(x,y)\urcorner, m,n)).$$

Odavde je

$$P \vdash \varphi \leftrightarrow A(\ulcorner\varphi(m,n)\urcorner, \ulcorner\psi(m,n)\urcorner) \text{ i}$$
$$P \vdash \psi \leftrightarrow B(\ulcorner\varphi(m,n)\urcorner, \ulcorner\psi(m,n)\urcorner).$$

No tada je očevidno

$$P \vdash \varphi \leftrightarrow A(\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner) \text{ i}$$

$$P \vdash \psi \leftrightarrow B(\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner).$$

Sada Σ_1-rečenice sa traženim svojstvom daje sledeći stav:

<u>STAV 3.3.5</u> Postoje nezavisne P rečenice φ i ψ takve da

(*) $\quad P \vdash \varphi \leftrightarrow (\neg\varphi < \neg\psi)$ i

(**) $\quad P \vdash \psi \leftrightarrow (\neg\psi < \neg\varphi)$.

<u>DOKAZ</u>: Egzistencija rečenica φ i ψ sa ovim svojstvima sledi iz leme 3.3.4, pa je dovoljno pokazati još i njihovu nezavisnost u P. No iz $P \vdash \varphi$ na osnovu (*) sledi $P \vdash \neg\varphi < \neg\psi$, tj. $\neg\varphi <_p \neg\psi$, pa iz dokazanih osobina poretka $<_p$ sledi $P \vdash \neg\varphi$, što je kontradikcija. Slično proizilazi i iz pretpostavke $P \vdash \psi$. Neka $P \vdash \neg\varphi$, tada $P \vdash \neg(\neg\varphi < \neg\psi)$, pa $\neg(\neg\varphi <_p \neg\psi)$. S obzirom da $P \vdash \neg\varphi$, na osnovu osobina poretka $<_p$ dokazanih na početku tačke 2 ove glave sledi da je $\neg\psi <_p \neg\varphi$. Na osnovu već navedenih osobina, odatle $P \vdash \neg\psi$, a na osnovu (**) $P \vdash \psi$, što je kontradikcija. Slično važi i za pretpostavku $P \vdash \neg\psi$.

G L A V A Č E T V R T A

O NEKIM AUTOMORFIZMIMA MODELA TEORIJE P

IV 0. KRATAK PREGLED GLAVE

U ovoj glavi razmotrićemo dva metoda za ispitivanje automorfnih slika nekog modela $\mathfrak{M} \models P$ na sopstveni početni komad. Prvi se sastoji u kombinovanoj primeni McDowell-Speckerove (2.5.12) i Friedmanove (2.6.1) teoreme, a drugi na primeni jedne varijante Friedmanove teoreme (2.6.3). Prvim metodom dokazaćemo da svaki model aritmetike ima dugi početni komad, kao i jedan kriterijum za egzistenciju početnog komada modela $\mathfrak{M}$ izomorfnog polaznom modelu $\mathfrak{M}$,a sadržanom u početnom komadu $I_a = \{ x \in |\mathfrak{M}| \mid x <_{\mathfrak{M}} a \}$,gde je a neki element modela $\mathfrak{M}$. Poslednji kriterijum daće nam poznatu karakterizaciju modela $\mathfrak{M}$ sa svojstvom $\omega = \cap \{ \mathfrak{N} \mid \mathfrak{N} \subset_e \mathfrak{M}, \mathfrak{N} \cong \mathfrak{M} \}$. Druga metoda omogućiće nam da formulišemo kriterijum za egzistenciju početnog komada $\mathfrak{N} \subset_e \mathfrak{M}$ takvog da je $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}$ i da $\mathfrak{N}$ sadrži neki zadati početni komad, a da bude i sam sadržan u nekom drugom početnom komadu. Odatle dobijamo jednu karakterizaciju početnih komada modela $\mathfrak{M} \models P$,koji se mogu predstaviti kao unija, odnosno presek početnih komada od $\mathfrak{M}$ izomorfnih sa $\mathfrak{M}$. Na kraju, kao primenu prethodnog, dokazujemo da ukoliko je $\mathfrak{N} \subset_e \mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N} \prec_{\Sigma_1} \mathfrak{M}$, tada je $\mathfrak{N}$ unija neke familije automorfnih slika modela $\mathfrak{M}$.

IV 1. DUGAČKI KOMADI MODELA ZA P.

<u>TEOREMA 4.1.1.</u> Svaki model aritmetike $\mathfrak{M}$ ima dugačak početni komad.

<u>DOKAZ</u>: Uočimo lanac elementarnih end-ekstenzija

$$\mathfrak{M}_0 \prec_e \mathfrak{M}_1 \prec_e \cdots \mathfrak{M}_n \prec_e \cdots$$

gde je $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$,a ekstenzija svakog elementa lanca obezbedjena je teoremom 2.5.12. Uočimo model $\mathfrak{M}' = \bigcup_{i \in \omega} \mathfrak{M}_i$. Ovaj model je,očevidno, elementarna end-egzistencija polaznog modela $\mathfrak{M}$,

2

tojest $\mathfrak{M} \prec_e \mathfrak{M}'$. Na osnovu teoreme 2.5.8 $SSy(\mathfrak{M}) = SSy(\mathfrak{M}')$, a kako je utapanje elementarno $Th_{\Sigma_1}(\mathfrak{M}) = Th_{\Sigma_1}(\mathfrak{M}')$. Odavde i iz teoreme 2.6.1 sledi da je model $\mathfrak{M}'$ izomorfan nekom početnom komadu $\mathfrak{N}$ modela $\mathfrak{M}$. S obzirom da je onda i $\mathfrak{N}$ unija nekog elementarnog lanca $\mathfrak{N}_0 \prec \mathfrak{N}_1 \prec \ldots$ model $\mathfrak{N}$ je dugačak; za svako $a \in \mathfrak{N}_k$ sledi $M[a] \in \mathfrak{N}_k \subsetneq \mathfrak{N}$. Model $\mathfrak{N}$ je traženi dugački početni komad modela $\mathfrak{M}$.

IV 2. POČETNI KOMADI MODELA ZA P KOJI SADRŽE AUTOMORFNE SLIKE POLAZNOG MODELA

TEOREMA 4.2.1. Neka je $\mathfrak{M}$ nestandardan modela za P i $a \in |\mathfrak{M}| \setminus \omega$. Tada početni komad $I_a = \{x \in |\mathfrak{M}| \mid \mathfrak{M} \models \underline{x} < \underline{a}\}$ sadrži model $\mathfrak{N}$ takav da je $\mathfrak{N} \subset_e \mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}$ akko sadrži model $\mathfrak{A} \models P$, koji je Σ_1-elementarno ekvivalentan sa $\mathfrak{M}$.+)

DOKAZ: Ukoliko I_a sadrži izomorfnu sliku modela $\mathfrak{M}$, ta slika je i Σ_1-elementarno ekvivalentan model sa $\mathfrak{M}$ sadržan u I_a. Obratno, neka je $\mathfrak{A} \subset I_a$, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{M}$, i neka je $\mathfrak{M}'$ proizvoljna elementarna end-ekstenzija modela $\mathfrak{M}$ (teorema 2.5.12). Izaberimo proizvoljan element c iz $|\mathfrak{M}'| - |\mathfrak{M}|$, i uočimo njegov Σ_1-tip $\tau_c^{\Sigma_1}(x)$. Na osnovu teoreme 2.2.4 ovaj tip je realan. Proizvoljan konačan podskup τ_0 formula ovog tipa realizuje se, zbog $\mathfrak{A} \equiv_{\Sigma_1} \mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}' \succ \mathfrak{M}$, u $\mathfrak{A}$ u nekoj tački b_{τ_0}. Pošto iz $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}$ sledi $\mathfrak{A} \prec_{\Sigma_0} \mathfrak{M}$, odnosno $\mathfrak{A} \subset_{\Sigma_1} \mathfrak{M}$, znači da ista tačka b_{τ_0} realizuje τ_0 i u modelu $\mathfrak{M}$. No kako je $b_{\tau_0} < a$, tip $\overline{\tau}_c^{\Sigma_1} = \tau_c^{\Sigma_1}(x) \cup \{x < a\}$ je onda tip nad $\mathfrak{M}$. Iz $\mathfrak{M} \prec_e \mathfrak{M}'$ sledi $SSy(\mathfrak{M}) = SSy(\mathfrak{M}')$, pa je $\tau_c^{\Sigma_1}(x)$ realan i nad $\mathfrak{M}$. No tada je i tip $\overline{\tau}_c^{\Sigma_1}$ realan na $\mathfrak{M}$, pa po teoremi 24.2 on je

+) Primetimo da se ne zahteva da model $\mathfrak{A}$ bude nestandardan, zato ne možemo odmah, primenom Friedmanove teoreme, preslikati $\mathfrak{M}$ u početni komad modela $\mathfrak{A}$. Ova primedba je važna zbog posledice 4.2.2. Takodje se za model $\mathfrak{A}$ umesto $\mathfrak{A} \models P$ može zbog leme 2.5.6 zahtevati $\mathfrak{A} \subset_e \mathfrak{M}$. Primetimo da se i ova varijanta teoreme 4.2.1 može upotrebiti za posledicu 4.2.2.

i realizovan u $\mathfrak{M}$ nekom tačkom b. Izaberimo numeraciju $a_0, a_1 \ldots$ modela $\mathfrak{M}'$ u kome je $a_0 = c$. $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}$ očevidno zadovolajvaju uslove teoreme 2.6.1, a element a_0 možemo preslikati u b, i zatim produžiti standardnu konstrukciju opisanu u dokazu teoreme 2.6.1 (ii). Izomorfna slika podmodela $\mathfrak{M}$ modela $\mathfrak{M}'$ buće sadržana u I_a, jer slika elementa c sadržana u I_a.

<u>POSLEDICA 4.2.2</u>. Neka je $\mathfrak{M}$ nestandardan model za P. Tada

$$\omega \prec_{\Sigma_1} \mathfrak{M} \leftrightarrow \bigcap\{\mathfrak{N} \mid \mathfrak{N} \subset_e \mathfrak{M},\ \mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}\} = \omega$$

<u>DOKAZ</u>: Ukoliko je $\omega \prec_{\Sigma_1} \mathfrak{M}$, tada je $\omega \equiv_{\Sigma_1} \mathfrak{M}$, pa je u jednom pravcu implikacija neposredna posledica teoreme 4.2.1. Obratno, neka je $\{\mathfrak{N} \mid \mathfrak{N} \subset_e \mathfrak{M}, \mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}\} = \omega$. Da bi dokazali da je $\omega \prec_{\Sigma_1} \mathfrak{M}$, dovoljno je dokazati da $\mathfrak{M}$ nema nestandardnih Σ_1 definabilnih tačaka. Pretpostavimo da je $a \in |\mathfrak{M}| \setminus \omega$, φ neka Σ_1 formula i $\mathfrak{M} \models a = \mu x \varphi(x)$. Neka je f izomorfno preslikavanje modela $\mathfrak{M}$ na sopstveni početni komad $\mathfrak{N}$ sadržan u I_a. Tada $\mathfrak{N} \models \varphi(f(a))$, pa zbog $\mathfrak{N} \subset_{\Sigma_1} \mathfrak{M}$ sledi $\mathfrak{M} \models \varphi(f(a))$, što je nemoguće s obzirom da je $f(a) <_{\mathfrak{M}} a$.

Imajući u vidu stav 3.2.2, dobijamo sledeću neposrednu posledicu.

<u>POSLEDICA 4.2.3</u>. Neka je $\mathfrak{M}$ nestandardan model za P, tada

$$\bigcap\{\mathfrak{N} \mid \mathfrak{N} \subset_e \mathfrak{M},\ \mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}\} = \omega \iff <_P = <_{Th(\mathfrak{M})}$$

gde su $<_P$ i $<_{Th(\mathfrak{M})}$ uredjenja skupa Sent(P) uvedena u glavi trećoj.

IV 3. PRESECI I UNIJE AUTOMORFNIH SLIKA MODELA ZA P

<u>TEOREMA 4.3.1</u>. Neka je $\mathfrak{M}$ nestandardan model za P, a I_1 i I_2 njegovi početni komadi takvi da $\omega \subsetneq I_2 \subsetneq I_1$. Tada početni komad I_1 sadrži model $\mathfrak{N}$ takav da je $\mathfrak{N} \subset_e \mathfrak{M}, \mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}, \mathfrak{N} \not\subset I_2$ akko sadrži model $\mathfrak{A} \models P$ takav da je $Th_{\Pi_2}(\mathfrak{M}) \subset Th_{\Pi_2}(\mathfrak{A})$ i $\mathfrak{A} \not\subset I_2$.

DOKAZ: Ukoliko I_1 sadrži automorfnu sliku $\mathfrak{N}$ sa traženim svojstvima, očevidno za $\mathfrak{A}$ modežmo uzeti $\mathfrak{N}$. Obratno, neka $\mathfrak{A}$ zadovoljava sve uslove teoreme, i neka $a \in |\mathfrak{A}| \setminus I_2$. Uočimo model $\bar{\mathfrak{A}}$ očevidno je $\bar{\mathfrak{A}} \subseteq_e \mathfrak{M}$, a po teoremi 2.5.3 $\mathfrak{A} \prec \bar{\mathfrak{A}}$, pa

$$Th_{\Pi_2}(\mathfrak{M}) \subset Th_{\Pi_2}(\bar{\mathfrak{A}}) \quad i \quad SSy(\bar{\mathfrak{A}}) = SSy(\mathfrak{M}).$$

Na osnovu stava 2.6.3 (ii) model $\mathfrak{M}$ je izomorfan proizvoljno velikom početnom komadu modela $\bar{\mathfrak{A}}$; izaberimo komad $\mathfrak{N}$ koji sadrži tačku a. Očevidno, model $\mathfrak{N}$ zadovljava sva tražena svojstva.

Sledeći stavovi su posledice teoreme 4.3.1.

STAV 4.3.2. Neka je $\mathfrak{M}$ nestandardan model za P i $I \supset \omega$ njegov početni komad. Tada postoji familija $\mathcal{A}$ automorfnih slika modela $\mathfrak{M}$ sa svojstvom $I = \bigcap\{\mathfrak{N} \mid \mathfrak{N} \in \mathcal{A}, \mathfrak{N} \subseteq_e \mathfrak{M}, \mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}\}$ akko je $I \cong \mathfrak{M}$ ili za svaki element $a \in |\mathfrak{M}| - I$ postoji model $\mathfrak{A}_a \subset I_a$, $\mathfrak{A}_a \not\subset I$ takav da je $\mathfrak{A}_a \models P$ i $Th_{\Pi_2}(\mathfrak{M}) \subset Th_{\Pi_2}(\mathfrak{A}_a)$.

DOKAZ: Neposrednom primenom teoreme 4.3.1 na familiju parova početnih komada (I_a, I) za $a \in |\mathfrak{M}|$ I, ukoliko $I \not\cong \mathfrak{M}$.

STAV 4.3.3. Neka je $\mathfrak{M}$ nestandardan model za P i $I \supset \omega$ njegov početni komad. Tada postoji familija $\mathcal{A}$ automorfnih slika modela sa svojstvom $I = \bigcap\{\mathfrak{N} \mid \mathfrak{N} \in \mathcal{A}, \mathfrak{N} \subseteq_e \mathfrak{M}, \mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}\}$ akko za svaki $a \in I$ postoji model $\mathfrak{A}_a \models P$ takav da $a \in \mathfrak{A}_a$ i $\mathfrak{A}_a \subset I$, i $Th_{\Pi_2}(\mathfrak{M}) \subset Th_{\Pi_2}(\mathfrak{A}_a)$.

DOKAZ: Neposrednom primenom teoreme 4.3.1 na familiju parova (I, I_a), $a \in I$.

Sledeća lema omogućuje nam da pronadjemo početne komade modela $\mathfrak{M}$ koji zadovolavaju uslove za primenu stava 4.3.3.

LEMA 4.3.4. Neka su $\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{M}$ nestandardni modeli za P, $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$. Tada, ako je $\mathfrak{N} \prec_{\Sigma_1} \mathfrak{M}$, onda je $Th_{\Pi_2}(\mathfrak{M}) \subset Th_{\Pi_2}(\mathfrak{N})$.

<u>DOKAZ</u>: Neka je $\mathfrak{M} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \; Ey_1 \ldots Ey_k \, \varphi(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$, gde je φ Σ_0-formula i $a_1,\ldots a_n$ proizvoljni elementi iz $|\mathfrak{N}|$. Tada, s obzirom da $\mathfrak{M} \models Ey_1 \ldots Ey_k \, \varphi(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n,y_1,\ldots,y_k)$ i da je $\mathfrak{N} \prec_{\Sigma_1} \mathfrak{M}$, sledi $\mathfrak{N} \models Ey_1 \ldots Ey_k \, \varphi(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n,y_1,\ldots,y_k)$, pa kako su $a_1,\ldots,a_n$ bili proizvoljni iz $|\mathfrak{N}|$, sledi

$$\mathfrak{N} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n Ey_1 \ldots Ey_k \, \varphi(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_k),$$

odnosno $Th_{\Pi_2}(\mathfrak{M}) \; Th_{\Pi_2}(\mathfrak{N})$.

<u>STAV 4.3.5</u> Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ nestandardni modeli za P i $\mathfrak{N} \prec_{e\Sigma_1} \mathfrak{M}$. Tada postoji familija $\mathcal{A}$ automorfnih slika modela $\mathfrak{M}$ sa svojstom da je $\mathfrak{N} = \bigcup \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \in \mathcal{A}, \mathfrak{A} \subset_e \mathfrak{M}, \mathfrak{A} \cong \mathfrak{M}\}$.

<u>DOKAZ:</u> Za svako $a \in |\mathfrak{N}|$ na osnovu leme 4.3.4 model $\mathfrak{N}$ zadovljava uslove stava 4.3.3 za $\mathfrak{A}_a = \mathfrak{N}$.

LITERATURA KORIŠĆENA U RADU

1. [CK] C.C.Chang, H.J.Keisler, Model theory, North-Holland, Amsterdam 1973.

2. [FRIEDMAN] N.Friedman,Countable models of set theories,Cambridge summer school in mathematical logic,Springer Verlag,Heidelberg,539-573.

3. [GAIFMAN] H. Gaifman, A note on models and submodels of arithmetic, Proceding of the conference in mathematical logic,London 1970,Springer lecture notes in mathematics, vol. 255,128-144.

4. [GA] H. Gaifman,Model and types of Peano's arithmetic, Anals of mathematical logic,vol.9,1976, 223-306.

5. [GENTZEN] G. Gentzen,Die Wiederspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie,Math.Ann. 112,1936,N°4,493-565.

6. [GÖ] K.Gödel,Über eine bisher noch nicht benützte Erwiterung des finiten Stand Punktes,Dialectica,12,1958, 3-4, 280-287.

7. [GÖDEL] K. Gödel,Über formal unentschidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme,I,Monatsch.Math. Phys. 38,173-198.

8. [JE] D.Jensen,A.Ehrenfencht, Some problems in elementary arithmetic,Fundamenta mathematical,vol.92,1976,223-245.

9. [KREISLER] G.Kreisler,On weak completness of intuitionistic predicate logic,JSL, 27,1962,169-178.

10. [LÖB] M.H.Löb,Solution of a problem of Leon Henkin,JSL, 20,1955,115-118.

11. [LE] H.Lesan,Models of arithmetic dissertation,University of Manchester,1978.

12. [MA] Y.I.Manin,A course in m thematical logic,Springer Verlag,Berlin 1977.

13. [MARD] Sibe Mardešić,Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom orostoru,I,Školska knjiga,Zagreb 1974.

14. [MAR] W. Marek,Models of arithmetic,Lectures,Pensilvania state university,1979-.980.

15. [MAT] Yu.V.Matijasevič,Enumerable sets are diophantine,Soviet mathematical doklady,1970,354-357.

16. [ME] E. Mendelson,Introduction to mathematical logic,Second edition,D.Van Nostrand,New York,1970.

17. [MI 1] Ž.Mijajlović,Modeli aritemtike,predavanja na seminaru za matematiǒku logiku Matematičkog instituta,Beograd 1983.

18. [MI 2] Ž.Mijajlović,Submodels and definable points in models of Peano arithmetic,Notre Dame Journal of Formal Logic,vol.24,october 1983,№ 4.

19. [MIL] G.Mills,Extensions of models of Peano arithmetic, Ph.D.Dissertation,University of California,Berkeley 1977.

20. [MO] A.Mostowski,On models of axiomatic systems,Fundamenta mathematicae,39,1952,133-158.

21. [MS] A.Macintyre,H.Simmons,Gödel's diagonalization technique and related properties of theories,Colloquium mathematicum,vol.28,1973,fas. 2.

22. [PA 1] J.Paris,A note of an induction axiom,JSL,vol.43,1978, № 1.

23. [PA 2] J.Paris,Models of arithmetic,Lectures,Manchester 1977.

24. [ROSSER] J.B.Rosser,Extensions of some theorems of Gödel and Church, JSL ,1936,1,87-91.

25. [SC] D.Scott,Algebra of sets binumerable in complete extensions of arithmetic,Recurdive function theory,American mathematical society,Providence Rhode Island 1962,117-121.

26. [SH] J.R.Shoenfild,Mathematical logic,Addsion-Wesley Publishing company,1967.

27. [SM 1] C.Smorynski,The incompletes theorems,Handbook of Mathematical logic,Ed.J.Barwise,North Holland,Amsterdam 1977.

28. [SM 2] C.Smorynski,Nonstandard models of arithmetic preprint,University of Utrecht,1980.

29. [SM 3] C.Smorynski,Recursively saturated nonstandard model of arithmetic,JSL,vol.46,1981,№ 2.

30. [TENENBAUM] S.Tenenbaum,Non-archimedean models for arithmetic,Notices AMS 6,1959.

31. [WA] H.Wang,The axiomatization of arithmetic,JSL,vol.22, 1957,145-158.

S A D R Ž A J