Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet, PMF

IZOMORFNE ISKAZNE FORMULE U KATEGORIJALNOJ TEORIJI DOKAZA

(MAGISTARSKI RAD)

Mentor
profesor dr Kosta Došen

Kandidat
Zoran Petrić

Beograd
1993.

Pitanja: 1. J. Barwise: abstract model theory
2. Kako stoji sa drugim logikama
3. Prevodi iz logike u logiku (interpretacije): funktori?
4. Drugi fragmenti intuicionističke (npr. [illegible] R. Kalman)

Komisija:
1. K. Došen (mentor)
2. S. Prešić
3. Ž. Mijajlović
Nap. odbrana 16.[illegible].93

ZAHVALNICA

Hvala profesoru Kosti Došenu čija je velika zasluga za nastajanje ovog rada. Hvala i Đorđu Čubriću na nizu korisnih saveta.

autor

SADRŽAJ

0. UVOD

U uvodnoj glavi biće dat kratak pregled teorije kategorija i kategorijalne teorije dokaza. Potpunije informacije mogu se naći u [MacLane 1971] i [Lambek&Scott 1986].

0.1. Kategorije, Funktori i Prirodne transformacije

Kategoriju C karakterišu :

- Kolekcija $ob(C)$ objekata od C
- Kolekcija $mor(C)$ morfizama (strelica) od C
- Unarne operacije dom, cod: $mor(C) \longrightarrow ob(C)$
- Operacija koja svakom $A \in ob(C)$ dodeljuje jedinični morfizam 1_A
- Binarna operacija koja svakom paru morfizama $f: A \longrightarrow B$ i $g: B \longrightarrow C$ $(cod(f)=dom(g))$ dodeljuje njihovu kompoziciju $g \circ f: A \longrightarrow C$,

pri čemu važi:

- Za svako $f: A \longrightarrow B$, $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$
- Za sve $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$, $h: C \longrightarrow D$, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Primeri kategorija:

- Set (kategorija čiji su objekti skupovi a morfizmi funkcije)
- Grp (objekti su grupe, morfizmi su homomorfizmi)
- Top (objekti su topološki prostori, morfizmi su neprekidna preslikavanja)
- Cat (objekti su kategorije a morfizmi su **funktori**)
- Grupa kao kategorija (samo jedan objekat i po jedan morfizam za svaki element grupe a $g \circ f$ definišemo kao $f \cdot g$)

Morfizam $f: A \longrightarrow B$ je **izomorfizam** ukoliko postoji $g: B \longrightarrow A$ takav da je $g \circ f = 1_A$ i $f \circ g = 1_B$.

Za objekat 0 iz K kažemo da je **inicijalni** ukoliko za svaki $X \in ob(K)$ postoji jedinstvena strelica $f: 0 \longrightarrow X \in mor(K)$. Dualno, objekat T je **terminalan** ukoliko iz svakog objekta postoji jedinstven morfizam u T.

Ako su A i B kategorije tada **proizvod kategorija** $A \times B$ ima za objekte uređene parove (A,B) a za morfizme (f,g) gde su $A \in ob(A)$, $B \in ob(B)$,

$f\in mor(A)$, $g\in mor(B)$ i kompozicija je definisana po komponentama.

Ako je C kategorija onda je C^{op} kategorija koja ima iste objekte kao i C a svakoj strelici $f:A\longrightarrow B$ iz C odgovara strelica $f^{op}:B\longrightarrow A$ u C^{op}

Funktor $F:A\longrightarrow B$ kao strelica u kategoriji Cat karakterisan je sa :

- objekt funkcijom $ob(A)\longrightarrow ob(B)$
- morfizam funkcijom $mor(A)\longrightarrow mor(B)$,

pri čemu je ispunjeno:

- ako $f:A\longrightarrow B$ onda $F(f):F(A)\longrightarrow F(B)$
- $F(1_A) = 1_{F(A)}$
- $F(h\circ g) = F(h)\circ F(g)$.

Primeri funktora:

1. $\Pi:Top\longrightarrow Grp$ je funktor koji topološkom prostoru dodeljuje njegovu fundamentalnu grupu.
2. $F:Grp\longrightarrow Set$ "zaboravni" funktor koji grupi dodeljuje njen skup nosač odnosno "zaboravlja" strukturu grupe.
3. Neka je A **mala kategorija** (klasa strelica između svaka dva njena objekta je skup). Tada $Hom_A:A^{op}\times A\longrightarrow Set$, gde $Hom_A(A,B)$ predstavlja skup svih morfizama iz A u B, a $Hom_A(f,g)(h)=g\circ h\circ f$, pri čemu $f:A_1\longrightarrow A$, $g:B\longrightarrow B_1$ i $h:A\longrightarrow B$, je primer funktora koji će se u daljem radu često koristiti. $Hom_A(A,B)$ ćemo češće označavati skraćeno sa $A(A,B)$.

Df. Za funktor $F:A\longrightarrow B$ kažemo da je **pun** ukoliko za svaka dva objekta A,B iz A i svaku strelicu $h:F(A)\longrightarrow F(B)$ postoji $f\in mor(A)$ takva da je $F(f)=h$. Funktor $F:A\longrightarrow B$ je **slabo-pun** ukoliko za svaka dva objekta A,B iz A, ako je $A(A,B)=\emptyset$ onda je i $B(A,B)=\emptyset$.

Prirodna transformacija $\phi:F\longrightarrow G$, gde su $F,G:A\longrightarrow B$ funktori iz kategorije A u kategoriju B, zadana je kolekcijom strelica $\phi_A:F(A)\longrightarrow G(A)$, $A\in ob(A)$ (za svaki objekat po jedna), takvom da sledeći dijagram:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\phi_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & F(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\phi_A"] & F(B) \end{tikzcd}$$

komutira za svako $f: A \longrightarrow B$.

Ukoliko su $\phi: F \longrightarrow G$ i $\psi: G \longrightarrow H$ prirodne transformacije, gde su $F, G, H: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ funktori iz kategorije $\mathcal{A}$ u kategoriju $\mathcal{B}$, onda je sa $(\psi\circ\phi)_A = \psi_A \circ \phi_A$ definisana kompozicija $\psi\circ\phi: F \longrightarrow H$.

Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ kategorije. Tada **funktor kategorija** $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ ima za objekte sve funktore iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$, a morfizmi su prirodne transformacije.

Primer: $Set^{\mathbf{Z}}$, gde je $\mathbf{Z}$ aditivna grupa celih brojeva posmatrana kao kategorija. Ovde će objekti biti skupovi sa po jednom svojom istaknutom permutacijom a morfizam između (X, ϕ) i (Y, Ψ) je ono preslikavanje $f: X \longrightarrow Y$ za koje dijagram:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & Y \arrow[d, "\Psi"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

komutira.

0.2. Univerzalna konstrukcija, Adjungovani funktori

Neka je $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ funktor i $B \in ob(\mathcal{B})$ tada sa $(B \downarrow F)$ označavamo **koma kategoriju** čiji su objekti morfizmi $f: B \longrightarrow F(A)$ $(A \in ob(\mathcal{A}))$ a strelice između $f_1: B \longrightarrow F(A_1)$ i $f_2: B \longrightarrow F(A_2)$ su one strelice $h: A_1 \longrightarrow A_2$ u $\mathcal{A}$ za koje važi $f_2 = F(h)\circ f_1$. **Univerzalna strelica iz B u F** je inicijalni objekat koma kategorije $(B\downarrow F)$ odnosno čine je $\langle A, f: B \longrightarrow F(A)\rangle$, gde je $A \in ob(\mathcal{A})$ a $f \in mor(\mathcal{B})$), pri čemu za svaku $f_1: B \longrightarrow f(A_1)$ postoji jedinstvena strelica $h: A \longrightarrow A_1$ u $\mathcal{A}$ takva da je $f_1 = F(h)\circ f$. Dualno, **univerzalna strelica iz F u B** je terminalni objekt koma kategorije $(F\downarrow B)$ u kojoj su objekti strelice $f: F(A) \longrightarrow B$ a morfizmi između $f_1: F(A_1) \longrightarrow B$ i $f_2: F(A_2) \longrightarrow B$ su one strelice $h: A_1 \longrightarrow A_2$ za koje važi $f_1 = f_2 \circ F(h)$.

Primeri:

1. Neka je F: Grp$\longrightarrow$Set "zaboravni" funktor i X proizvoljan skup, tada univerzalna strelica iz X u F predstavlja utapanje skupa X u skup nosač slobodne grupe generisane tim skupom.

2. Neka je $\Delta: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}\times\mathcal{A}$ **dijagonalni funktor** zadat sa $\Delta(A)=(A,A)$ i $\Delta(f)=(f,f)$.

Univerzalna strelica iz Δ u (A,B) zove se **proizvod dijagram** i čine je objekat C i par strelica $\pi: C\longrightarrow A$ i $\pi': C\longrightarrow B$ takvih da za proizvoljan par strelica $f: D\longrightarrow A$ i $g: D\longrightarrow B$ postoji jedinstvena strelica $\langle f,g\rangle: D\longrightarrow C$ takva da sledeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
A & C \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\pi'"] & B \\
& D \arrow[ul, "f"] \arrow[u, "{\langle f,g\rangle}"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Objekat C označavamo sa $A\times B$ i zovemo **proizvodom** objekata A i B.

Dualno, univerzalna strelica iz (A,B) u Δ je **koproizvod dijagram** zadat objektom C i parom strelica $k: A\longrightarrow C$ i $k': B\longrightarrow C$ takvim da za svaki par strelica $f: A\longrightarrow D$ i $g: B\longrightarrow D$ postoji jedinstvena strelica $[f,g]: C\longrightarrow D$ takva da dijagram:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "f"'] & C \arrow[d, "{[f,g]}"] & B \arrow[l, "k'"'] \arrow[dl, "g"] \\
& D &
\end{tikzcd}$$

komutira. Objekat C označavamo sa A+B i zovemo **koproizvodom** objekata A i B.

Tvrđenje 0.2.1.

Neka je $S: \mathcal{D}\longrightarrow \mathcal{C}$ funktor. Par $\langle r, u: c\longrightarrow Sr\rangle$ je univerzalna strelica iz c u S akko je funkcija koja šalje svaki $f: r\longrightarrow d$ u $(Sf)\circ u: c\longrightarrow Sd$ bijekcija hom-skupova

$$\mathcal{D}(r,d)\cong\mathcal{C}(c,Sd) \qquad (*)$$

prirodna po d (prirodan izomorfizam funktora $\mathcal{D}(r,\_)$ i $\mathcal{C}(c,S\_)$).

Obrnuto, ako su dati r i c, svaki prirodni izomorfizam (*) je određen jedinstvenom strelicom $u:c \longrightarrow Sr$ takvom da je par $\langle r,u\rangle$ univerzalan iz c u S.

Dokaz. Izomorfizam (*) direktno sledi iz definicije univerzalne strelice, a njegova prirodnost po d iz jednakosti $S(g\circ f)\circ u=Sg\circ Sf\circ u$.
Za drugi deo tvrđenja posmatramo komutativan dijagram:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(r,r) \arrow[r, "\nu_r"] \arrow[d, "\mathcal{D}(r,f)"'] & \mathcal{C}(c,Sr) \arrow[d, "\mathcal{C}(c,Sf)"] \\
\mathcal{D}(r,d) \arrow[r, "\nu_d"] & \mathcal{C}(c,Sd)
\end{tikzcd}$$

gde smo sa ν označili prirodni izomorfizam, i puštamo $1_r \in \mathcal{D}(r,r)$ kroz njega. Označimo sa $u:c \longrightarrow Sr = \nu_r(1_r)$. Tada je, zbog $\nu_d(f)=Sf\circ u$, ν određen strelicom u, koja je univerzalna iz c u S, jer zbog postojanja ν^{-1} za svaku strelicu $f':c \longrightarrow Sd$ postoji jedinstvena strelica $f=\nu^{-1}(f'):r \longrightarrow d$ takva da je $f'=Sf\circ u$. ∎

Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{X}$ kategorije. **Adjunkcija** iz $\mathcal{X}$ u $\mathcal{A}$ je trojka $\langle F,G,\varphi\rangle$ gde su $\mathcal{X} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{A}$ funktori a φ dodeljuje svakom paru objekata (x,a) bijekciju $\varphi_{x,a}:\mathcal{A}(Fx,a)\cong\mathcal{X}(x,Ga)$ koja je prirodna po x i po a. Za funktore F i G kažemo da su **adjungovani** s tim što je F **levi** a G **desni adjunkt**.

Sledeća dva tvrđenja ukazaće na vezu između ove "prirodnije" definicije adjunkcije i druge, koju ćemo u daljem radu prihvatiti kao operativnu.
Teorema 0.2.2. ([MacLane 1971] p.80)
Adjunkcija $\langle F,G,\varphi\rangle:\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{A}$ određuje:
(i) Prirodnu transformaciju $\eta:I_{\mathcal{X}} \longrightarrow GF$ takvu da za svaki objekat x iz $\mathcal{X}$ strelica η_x je univerzalna iz x u G, dok je desni adjunkt za svaki $f:Fx \longrightarrow a$ strelica $\varphi f=Gf\circ\eta_x:x \longrightarrow Ga$;
(ii) Prirodnu transformaciju $\varepsilon:FG \longrightarrow 1_{\mathcal{A}}$ takvu da je svaka strelica ε_a univerzalna iz F u a, dok svaki $g:x \longrightarrow Ga$ ima levi adjunkt $\varphi^{-1}g=\varepsilon_a\circ Fg:Fx \longrightarrow a$.

Šta više, sledeće kompozicije su identiteti.

$$G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\varepsilon} G, \qquad F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\varepsilon F} F$$

Teorema 0.2.3. ([MacLane 1971] p.81)
Svaka adjunkcija $\langle F,G,\varphi\rangle : X \longrightarrow A$ je u potpunosti određena elementima jedne od sledećih listi:

(i) Funktorima F,G i prirodnom transformacijom $\eta : 1_X \longrightarrow GF$ takvom da je svaka strelica $\eta_x : x \longrightarrow GFx$ univerzalna iz x u G.

(ii) Funktorom $G : A \longrightarrow X$ i za svaki objekat x iz X objekat F_0x iz A i univerzalna strelica $\eta_x : x \longrightarrow GF_0x$ iz x u G. Tada funktor F ima objekt f-ju F_0 i definisan je na strelicama $h : x \longrightarrow x'$ sa $GFh \circ \eta_x = \eta_{x'} \circ h$.

(iii) Funktorima F,G i prirodnom transformacijom $\varepsilon : FG \longrightarrow 1_A$ takvom da je svaka $\varepsilon_a : FGa \longrightarrow a$ univerzalna iz F u a.

(iv) Funktorom $F : X \longrightarrow A$ i za svaki objekat a iz A objekat G_0a iz X i strelica $\varepsilon_a : FG_0a \longrightarrow a$ koja je univerzalna iz F u a.

(v) Funktorima F,G i prirodnim transformacijama $\eta : 1_X \longrightarrow GF$ i $\varepsilon : FG \longrightarrow 1_A$ tako da je $(G\varepsilon)\circ(\eta G) = 1_G$ i $(\varepsilon F)\circ(F\eta) = 1_F$.

U daljem radu uglavnom ćemo koristiti (v) kao definiciju adjungovane situacije.

Primeri:

(1) $\mathrm{Set} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathrm{Grp}$, gde je F funktor koji skupu dodeljuje njime generisanu slobodnu grupu, a G je "zaboravni" funktor. Ovo je jedan od niza primera slobodne konstrukcije. Za nas će posebno biti interesantan slučaj konstrukcije slobodne kategorije, određenog tipa, nad datim grafom.

(2) Neka je **1** kategorija koja ima samo jedan objekat i jednu strelicu. Dalje, neka je $F : C \longrightarrow \mathbf{1}$ funktor (svi objekti idu u jedan, i sve strelice takođe). Ukoliko on ima desni adjunkt $G : \mathbf{1} \longrightarrow C$, onda on predstavlja terminalni objekat date kategorije C.

(3) Hejtingova (pseudo-Bulova) algebra je par $\langle B,\leq\rangle$ gde je B neprazan skup, $\leq$ je parcijalno uređenje i za svaka dva elementa a i b iz B važi:

(a) postoji najmanja gornja granica ($a\cup b$).

(b) postoji najveća donja granica ($a\cap b$).

(c) postoji pseudo komplement od a relativno u odnosu na b ($a\Rightarrow b$), definisan da bude najveći $x\in B$ takav da je $a\cap x\leq b$.

(d) postoji najmanji element $\perp$.

Ukoliko PBA B posmatramo kao kategoriju čiji su objekti elementi od B a $\leq$ zamenjuje strelice ($\mathrm{dom}(a\leq b)=a$; $\mathrm{cod}(a\leq b)=b$) vidimo da iz ove definicije proističu četiri para adjunkcija:

(i) Dijagonalni funktor $\Delta: B\longrightarrow B\times B$ ima levi adjunkt $(a,b)\longmapsto a\cup b$.

(ii) Dijagonalni funktor ima desni adjunkt $(a,b)\longmapsto a\cap b$.

(iii)Funktor $a\cap\_$ (objektu x dodeljuje objekat $a\cap x$, a strelici $x\leq y$ strelicu $a\cap x\leq a\cap y$) ima desni adjunkt $a\Rightarrow\_$ koji objektu x dodeljuje $a\Rightarrow x$, a strelici $x\leq y$,strelicu $a\Rightarrow x\leq b\Rightarrow y$. Treba primetiti da uslov (c) iz definicije omogućuje ovu adjunkciju.

(iv) Funktor $B\longrightarrow\mathbf{1}$ ima levi adjunkt $1\longmapsto\perp$.

Videćemo da ovako definisana kategorija B predstavlja primer bikartezijanske zatvorene kategorije, a u [Rasiowa&Sikorski 1963] može se naći dokaz da je iskazni intuicionistički račun kompletan u odnosu na Hejtingove algebre kao modele.

0.3. Kartezijanske i bikartezijanske zatvorene kategorije

Za kategoriju C kažemo da je **kartezijanska zatvorena** **(CCC)** ukoliko za svako $c\in C$ sledeći funktori:

$$C\longrightarrow\mathbf{1} \qquad \Delta: C\longrightarrow C\times C \qquad \_\times c: C\longrightarrow C$$

imaju desne adjunkte, što bi značilo da postoje terminalni objekat 1, proizvod dijagram $a\xleftarrow{\pi}a\times b\xrightarrow{\pi'}b$ za svaka dva objekta a i b, sa univerzalnim svojstvom da za svaki dijagram $a\xleftarrow{f}c\xrightarrow{g}b$ postoji jedinstvena strelica $c\xrightarrow{\langle f,g\rangle}a\times b$ takva da je $\pi\langle f,g\rangle=f$ i $\pi'\langle f,g\rangle=g$, i da je $C(a\times c,b)\cong C(a,b^c)$. Ovim poslednjim smo specificirali sa $\_^c$ desni adjunkt funktora $\_\times c$.

Da bi kategorija C bila **bikartezijanska zatvorena** **(BCC)**, pored prethodnog, treba da funktori

$$C\longrightarrow\mathbf{1} \quad \text{i} \quad \Delta: C\longrightarrow C\times C$$

imaju i leve adjunkte, t.j. da postoje inicijalni objekat 0, i za svaka dva objekta a i b koproizvod dijagram $a\xrightarrow{k}a+b\xleftarrow{k'}b$, sa svojstvom dualnim proizvod dijagramu.

Primeri:

(1) Kategorija Set je Kartezijanska zatvorena ukoliko $A\times B$ definišemo kao Dekartov proizvod skupova A i B, za terminalni objekat uzmemo proizvoljan jednočlani skup, a A^B ,prirodno, definišemo kao skup preslikavanja iz skupa B u skup A. Šta više, Set je bikartezijanska zatvorena kategorija ukoliko za A+B uzmemo disjunktnu uniju tih skupova a prazan skup nam je inicijalni objekat.

(2) Već navedene, Hejtingove algebre predstavljaju BCC.

Otvoreni skupovi topološkog prostora X sa strukturom:

$$1\equiv X,\quad 0\equiv\emptyset,\quad U\wedge V\equiv U\cap V,\quad U\vee V\equiv U\cup V,\quad V\Leftarrow U\equiv \mathrm{int}((X-U)\cup V)$$

su primer Hejtingove algebre, pa samim tim, ako $\subseteq$ uzmemo za strelicu, predstavljaju bikartezijansku zatvorenu kategoriju.

(3) Za proizvoljnu grupu G posmatranu kao kategoriju važi da ako je C BCC onda je i funktor kategorija C^G BCC. Ovu činjenicu ćemo pokazati u odeljku posvećenom kategoriji Set^Z nakon što CCC i BCC budemo jednakosno predstavili.

I ako veoma prirodne, definicije CCC i BCC pomoću adjungovanih situacija nisu dovoljno operativne kada se postavi pitanje izomorfizma dva objekta. Koristeći teoreme 0.2.2. i 0.2.3. jednakosno ćemo uvesti ove kategorije.

Kartezijanska zatvorena kategorija C okarakterisana je: objektom 1 (terminalni objekat),dvema binarnim operacijama nad objektima $\_\times\_$ i $\_^{\_}$, kolekcijom strelica $0_A\colon A\longrightarrow 1$, $\pi_{A,B}\colon A\times B\longrightarrow A$, $\pi'_{A,B}\colon A\times B\longrightarrow B$, $\varepsilon_{A,B}\colon B^A\times A\longrightarrow B$, zatim binarnom operacijom $\langle\_,\_\rangle$ nad strelicama koja paru strelica $f\colon C\longrightarrow A$ i $g\colon C\longrightarrow B$ dodeljuje strelicu $\langle f,g\rangle\colon C\longrightarrow A\times B$ i unarnom operacijom * nad strelicama koja morfizmu $f\colon A\times B\longrightarrow C$ dodeljuje $f^*\colon A\longrightarrow C^B$ pri čemu su ispunjene sledeće jednakosti:

(i) $f=0_A$, za svako $f\colon A\longrightarrow 1$

(ii) $\pi_{A,B}\langle f,g\rangle=f$, $\pi'_{A,B}\langle f,g\rangle=g$, za $f\colon C\longrightarrow A$ i $g\colon C\longrightarrow B$

(iii) $\langle\pi_{A,B}f,\pi'_{A,B}f\rangle=f$, za $f\colon C\longrightarrow A\times B$

(iv) $\varepsilon_{A,B}\langle f^*\pi_{C,B},\pi'_{C,B}\rangle=f$, za $f\colon C\times B\longrightarrow A$

(v) $(\varepsilon_{A,B}\langle g\pi_{C,B},\pi'_{C,B}\rangle)^*=g$, za $g\colon C\longrightarrow A^B$

Pored ovoga bikartezijanska zatvorena kategorija podrazumeva inicijalni objekat 0, binarnu operaciju nad objektima _+_ , kolekciju morfizama $k_{A,B}:A\longrightarrow A+B$ i $k'_{A,B}:B\longrightarrow A+B$ i binarnu operaciju [_,_] nad morfizmima koja paru morfizama $f:A\longrightarrow C$ i $g:B\longrightarrow C$ dodeljuje morfizam $[f,g]:A+B\longrightarrow C$ pri čemu važi:

(vi) $f=\square_A$, za svako $f:0\longrightarrow A$

(vii) $[f,g]k_{A,B}=f$, $[f,g]k'_{A,B}=g$, za $f:A\longrightarrow C$ i $g:B\longrightarrow C$

(viii) $[hk_{A,B},hk'_{A,B}]=h$, za $h:A+B\longrightarrow C$

Dokaz da je prethodno ekvivalentno adjungovanim situacijama koje smo zahtevali u definicijama CCC i BCC zahteva nešto prostora i uglavnom je tehničke prirode te ćemo ga ovde izostaviti, mada bi čitaocima, na prvi pogled, trebalo da bude prepoznatljivo poreklo operacija, morfizama i većine zahtevanih jednakosti.

Na prvi pogled se može uočiti izvesna asimetričnost definicije BCC u odnosu na + i ×, što će povlačiti i nedualnost inicijalnog i terminalnog objekta, tj. važi sledeće:

Tvrđenje 0.3.1.
Ukoliko u definiciji BCC za funktor $\mathcal{C}\longrightarrow\mathbf{1}$ zahtevamo samo levi adjunkt t.j. samo inicijalni objekat, ništa se neće promeniti (terminalni objekat će i dalje biti tu), dok desni adjunkt funktora $\mathcal{C}\longrightarrow\mathbf{1}$ uz sve ostalo ne podrazumeva i levi adjunkt tog funktora.

Dokaz.
Neka je $\mathcal{C}$ kategorija i neka u njoj postoji inicijalni objekat 0, zatim, za svaka dva objekta proizvod i koproizvod dijagram, i neka funktor $\_\times C$ ima desni adjunkt $\_^C$. Pokazaćemo da je tada objekat 0^0 terminalan, t.j. da je $\mathcal{C}(A,0^0)$ jednočlan skup za svaki objekat A iz $\mathcal{C}$.
Znamo da je $\mathcal{C}(A,0^0)\cong\mathcal{C}(A\times 0,0)$. Zatim, zbog $A\times 0\cong 0\times A$ što će uskoro biti pokazano, imamo $\mathcal{C}(A\times 0,0)\cong\mathcal{C}(0\times A,0)\cong\mathcal{C}(0,0^A)$, a ovo poslednje je jednočlan skup, pa je takav i $\mathcal{C}(A,0^0)$.
Što se drugog dela tvrđenja tiče, dovoljan je primer kategorije Set iz koje je izbačen prazan skup. Ona zadovoljava sve BCC osobine sem postojanja inicijalnog objekta. ∎

Sledeće tvrđenje daće pregled "osnovnih" izomorfizama u CCC i BCC.

Tvrđenje 0.3.2.

Za proizvoljne objekte A,B,C u CCC važe sledeći izomorfizmi:

(1)	$A\times B\cong B\times A$	(2)	$(A\times B)\times C\cong A\times(B\times C)$
(3)	$(A\times B)^C\cong A^C\times B^C$	(4)	$(C^B)^A\cong C^{A\times B}$
(5)	$A\times 1\cong A$	(6)	$A^1\cong A$
(7)	$1^A\cong 1$		

Pored ovih u BCC važe još i sledeći:

(8)	$A+B\cong B+A$	(9)	$(A+B)+C\cong A+(B+C)$
(10)	$(A+B)\times C\cong(A\times C)+(B\times C)$	(11)	$A^{B+C}\cong A^B\times A^C$
(12)	$A+0\cong A$	(13)	$A\times 0\cong 0$
(14)	$A^0\cong 1$		

Dokaz.

Zbog jednostavnijeg zapisa izostavićemo indeks-slova uz pojedine morfizme, mada će iz same konstrukcije biti jasno na koje objekte se oni odnose.

Navešćemo još tri jednakosti koje su posledice CCC odnosno BCC zakona a koje su korisne za manipulisanje morfizmima.

(i) $\langle f,g\rangle h=\langle fh,gh\rangle$ za $h:D\longrightarrow C$; $f:C\longrightarrow A$; $g:C\longrightarrow B$

(ii) $h[f,g]=[hf,hg]$ za $h:C\longrightarrow D$; $f:A\longrightarrow C$; $g:B\longrightarrow C$

(iii) $h^*g=(h\langle g\pi,\pi'\rangle)^*$ za $h:A\times B\longrightarrow C$; $g:D\longrightarrow A$

Sada prelazimo na dokazivanje ovih 14 izomorfizama.

(1) $\varphi=\langle\pi',\pi\rangle:A\times B\longrightarrow B\times A$; $\psi=\langle\pi',\pi\rangle:B\times A\longrightarrow A\times B$

$\psi\circ\varphi=\langle\pi',\pi\rangle\langle\pi',\pi\rangle=\langle\pi'\langle\pi',\pi\rangle,\pi\langle\pi',\pi\rangle\rangle=\langle\pi,\pi'\rangle=\langle\pi 1_{A\times B},\pi' 1_{A\times B}\rangle=1_{A\times B}$

$\varphi\circ\psi=1_{B\times A}$ na isti način. Dakle, izomorfizam (1) važi.

(2) $\varphi=\langle\pi\pi,\langle\pi'\pi,\pi'\rangle\rangle:(A\times B)\times C\longrightarrow A\times(B\times C)$;

$\psi=\langle\langle\pi,\pi\pi'\rangle,\pi'\pi'\rangle:A\times(B\times C)\longrightarrow(A\times B)\times C$

$\psi\circ\varphi=\langle\langle\pi,\pi\pi'\rangle,\pi'\pi'\rangle\langle\pi\pi,\langle\pi'\pi,\pi'\rangle\rangle=\langle\langle\pi,\pi\pi'\rangle\varphi,\pi'\pi'\varphi\rangle=\langle\langle\pi\pi,\pi'\pi\rangle,\pi'\rangle=$

$=\langle\langle\pi,\pi'\rangle\pi,\pi'\rangle=\langle\pi,\pi'\rangle=1$

$\varphi\circ\psi=\langle\pi\pi\psi,\langle\pi'\pi,\pi'\rangle\psi\rangle=\langle\pi,\langle\pi\pi',\pi'\pi'\rangle\rangle=\langle\pi,\langle\pi,\pi'\rangle\pi'\rangle=1$

(3) $\varphi=\langle(\pi\varepsilon)^*,(\pi'\varepsilon)^*\rangle:(A\times B)^C\longrightarrow A^C\times B^C$;

$\psi=(\langle\varepsilon\langle\pi\pi,\pi'\rangle,\varepsilon\langle\pi'\pi,\pi'\rangle\rangle)^*:A^C\times B^C\longrightarrow(A\times B)^C$

$\psi\circ\varphi=(\langle\varepsilon\langle\pi\pi,\pi'\rangle,\varepsilon\langle\pi'\pi,\pi'\rangle\rangle\langle\langle(\pi\varepsilon)^*,(\pi'\varepsilon)^*\rangle\pi,\pi'\rangle)^*=$

$=(\langle\varepsilon\langle(\pi\varepsilon)^*\pi,\pi'\rangle,\varepsilon\langle(\pi'\varepsilon)^*\pi,\pi'\rangle\rangle)^*=(\langle\pi\varepsilon,\pi'\varepsilon\rangle)^*=\varepsilon^*=\varepsilon^*\langle 1\pi,\pi'\rangle=1$

$$\varphi\circ\psi=\langle(\pi\varepsilon)^*\psi,(\pi'\varepsilon)^*\psi\rangle=\langle(\pi\varepsilon\langle\psi\pi,\pi'\rangle)^*,(\pi'\varepsilon\langle\psi\pi,\pi'\rangle)^*\rangle=$$
$$=\langle(\pi\langle\varepsilon\langle\pi\pi,\pi'\rangle,\varepsilon\langle\pi'\pi,\pi'\rangle\rangle)^*,(\pi'\langle\varepsilon\langle\pi\pi,\pi'\rangle,\varepsilon\langle\pi'\pi,\pi'\rangle\rangle)^*\rangle=$$
$$=\langle(\varepsilon\langle\pi\pi,\pi'\rangle)^*,(\varepsilon\langle\pi'\pi,\pi'\rangle)^*\rangle=\langle\pi,\pi'\rangle=1$$

(4) $\varphi=(\varepsilon\langle\varepsilon\langle\pi,\pi\pi'\rangle,\pi'\pi'\rangle)^*:(C^B)^A\longrightarrow C^{A\times B}$

$\psi=((\varepsilon\langle\pi\pi,\langle\pi'\pi,\pi'\rangle\rangle)^*)^*:C^{A\times B}\longrightarrow(C^B)^A$

$$\psi\circ\varphi=((\varepsilon\langle\pi\pi,\langle\pi'\pi,\pi'\rangle\rangle)^*\langle\varphi\pi,\pi'\rangle)^*=((\varepsilon\langle\pi\pi,\langle\pi'\pi,\pi'\rangle\rangle\langle\langle\varphi\pi,\pi'\rangle\pi,\pi'\rangle)^*)^*=$$
$$=((\varepsilon\langle\varphi\pi\pi,\langle\pi'\pi,\pi'\rangle\rangle)^*)^*=((\varepsilon\langle\varepsilon\langle\pi,\pi\pi'\rangle,\pi'\pi'\rangle\langle\pi\pi,\langle\pi'\pi,\pi'\rangle\rangle)^*)^*=$$
$$=((\varepsilon\langle\varepsilon\langle\pi\pi,\pi'\pi\rangle,\pi'\rangle)^*)^*=((\varepsilon\langle\varepsilon\pi,\pi'\rangle)^*)^*=\varepsilon^*=1$$
$$\varphi\circ\psi=(\varepsilon\langle\varepsilon\langle\pi,\pi\pi'\rangle,\pi'\pi'\rangle\langle\psi\pi,\pi'\rangle)^*=(\varepsilon\langle(\varepsilon\langle\pi\pi,\langle\pi'\pi,\pi'\rangle\rangle)^*\langle\pi,\pi\pi'\rangle,\pi'\pi'\rangle)^*=$$
$$=(\varepsilon\langle\pi\pi,\langle\pi'\pi,\pi'\rangle\rangle\langle\langle\pi,\pi\pi'\rangle,\pi'\pi'\rangle)^*=(\varepsilon\langle\pi,\langle\pi\pi',\pi'\pi'\rangle\rangle)^*=1$$

(5) $\varphi=\pi:A\times1\longrightarrow A$; $\psi=\langle1,0\rangle:A\longrightarrow A\times1$

$\psi\circ\varphi=\langle1,0\rangle\pi=\langle\pi,\pi'\rangle=1$ jer $0\pi:A\times1\longrightarrow1$ mora biti isto što i $\pi':A\times1\longrightarrow1$ zbog terminalnosti 1.

$\varphi\circ\psi=\pi\langle1,0\rangle=1$

(6) $\varphi=\varepsilon\langle1,0\rangle:A^1\longrightarrow A$; $\psi=\pi^*:A\longrightarrow A^1$

$\psi\circ\varphi=\pi^*\varepsilon\langle1,0\rangle=(\pi\langle\varepsilon\langle1,0\rangle\pi,\pi'\rangle)^*=(\varepsilon\langle1,0\rangle\pi)^*=(\varepsilon\langle\pi,\pi'\rangle)^*=1$, jer opet $0_{A^1}\circ\pi_{A^1,1}=\pi'_{A^1,1}$

$\varphi\circ\psi=\varepsilon\langle1,0\rangle\pi^*=\varepsilon\langle\pi^*,0\rangle=\varepsilon\langle\pi^*\pi,\pi'\rangle\langle1,0\rangle=\pi\langle1,0\rangle=1$

(7) $\varphi=0:1^A\longrightarrow1$; $\psi=\pi^*:1\longrightarrow1^A$

$\psi\circ\varphi=\pi^*0=(\pi\langle0\pi,\pi'\rangle)^*=(0\pi)^*=\varepsilon^*=1$, jer $0\pi:1^A\times1\longrightarrow1$ je isto što i $\varepsilon:1^A\times1\longrightarrow1$.

(8) $\varphi=[k',k]:A+B\longrightarrow B+A$; $\psi=[k',k]:B+A\longrightarrow A+B$

$\psi\circ\varphi=[k',k][k',k]=[[k',k]k',[k',k]k]=[k,k']=[1k,1k']=1$

$\varphi\circ\psi=1$ na isti način.

(9) $\varphi=[[k,k'k],k'k']:(A+B)+C\longrightarrow A+(B+C)$;

$\psi=[kk,[kk',k']]:A+(B+C)\longrightarrow(A+B)+C$

$$\psi\circ\varphi=[kk,[kk',k']][[k,k'k],k'k']=[\psi[k,k'k],\psi k'k']=[[\psi k,\psi k'k],k']=$$
$$=[[kk,kk'],k']=[k[k,k'],k']=1$$
$$\varphi\circ\psi=[\varphi kk,\varphi[kk',k']]=[k,[\varphi kk',\varphi k']]=[k,[k'k,k'k']]=1$$

(10) $\varphi=\varepsilon\langle[k^*,k'^*]\pi,\pi'\rangle:(A+B)\times C\longrightarrow(A\times C)+(B\times C)$

$\psi=[\langle k\pi,\pi'\rangle,\langle k'\pi,\pi'\rangle]:(A\times C)+(B\times C)\longrightarrow(A+B)\times C$

$$\psi\circ\varphi=\varepsilon\langle(\psi\varphi)^*\pi,\pi'\rangle=\varepsilon\langle([\langle k\pi,\pi'\rangle,\langle k'\pi,\pi'\rangle]\varepsilon)^*[k^*,k'^*]\pi,\pi'\rangle=$$

$$=\varepsilon\langle[([\langle k\pi,\pi'\rangle,\langle k'\pi,\pi'\rangle]\varepsilon)^*k^*,([\langle k\pi,\pi'\rangle,\langle k'\pi,\pi'\rangle]\varepsilon)^*k'^*]\pi,\pi'\rangle=$$

$$=\varepsilon\langle[(\psi\varepsilon\langle k^*\pi,\pi'\rangle)^*,(\psi\varepsilon\langle k'^*\pi,\pi'\rangle)^*]\pi,\pi'\rangle=$$

$$=\varepsilon\langle[(\langle k\pi,\pi'\rangle)^*,(\langle k'\pi,\pi'\rangle)^*]\pi,\pi'\rangle=\varepsilon\langle[(1\langle k\pi,\pi'\rangle)^*,(1\langle k'\pi,\pi'\rangle)^*]\pi,\pi'\rangle=$$

$$=\varepsilon\langle[1^*k,1^*k']\pi,\pi'\rangle=\varepsilon\langle 1^*\pi,\pi'\rangle=1$$

$$\varphi\circ\psi=\varepsilon[\langle[k^*,k'^*]\pi,\pi'\rangle\langle k\pi,\pi'\rangle,\langle[k^*,k'^*]\pi,\pi'\rangle\langle k'\pi,\pi'\rangle]=$$

$$=\varepsilon[\langle k^*\pi,\pi'\rangle,\langle k'^*\pi,\pi'\rangle]=[\varepsilon\langle k^*\pi,\pi'\rangle,\varepsilon\langle k'^*\pi,\pi'\rangle]=[k,k']=1$$

(11) $\eta=\langle(\varepsilon\langle\pi,k\pi'\rangle)^*,(\varepsilon\langle\pi,k'\pi'\rangle)^*\rangle:C^{A+B}\longrightarrow C^A\times C^B$

$\tau=(\varepsilon\langle[(\varepsilon\langle\pi\pi',\pi\rangle)^*,(\varepsilon\langle\pi'\pi',\pi\rangle)^*]\pi',\pi\rangle)^*:C^A\times C^B\longrightarrow C^{A+B}$

$\tau\circ\eta=$

$$=(\varepsilon\langle[(\underbrace{\varepsilon\langle\pi\pi',\pi\rangle}_{\alpha})^*,(\underbrace{\varepsilon\langle\pi'\pi',\pi\rangle}_{\beta})^*]\pi',\pi\rangle\langle\langle(\underbrace{\varepsilon\langle\pi,k\pi'\rangle}_{\gamma})^*,(\underbrace{\varepsilon\langle\pi,k'\pi'\rangle}_{\delta})^*\rangle\pi,\pi'\rangle)^*=$$

$=(\varepsilon\langle[\alpha^*,\beta^*]\pi',\langle\gamma^*,\delta^*\rangle\pi\langle\pi',\pi\rangle\psi\varphi\langle\pi',\pi\rangle)^*$ gde su φ,ψ iz (10)

$$=(\varepsilon\langle[\alpha^*,\beta^*]\pi',\langle\gamma^*,\delta^*\pi\rangle\langle\pi',\pi\rangle[\langle k\pi,\pi'\rangle,\langle k'\pi,\pi'\rangle]\varphi\langle\pi',\pi\rangle)^*=$$

$$=(\underbrace{\varepsilon\langle[\alpha^*,\beta^*]\pi,\langle\gamma^*,\delta^*\rangle\pi'\rangle}_{\rho}[\langle k\pi,\pi'\rangle,\langle k'\pi,\pi'\rangle]\varphi\langle\pi',\pi\rangle)^*=$$

$$=(\varepsilon[\rho\langle k\pi,\pi'\rangle,\rho\langle k'\pi,\pi'\rangle]\varphi\langle\pi',\pi\rangle)^*=$$

$$=([\varepsilon\langle\alpha^*\pi,\langle\gamma^*,\delta^*\rangle\pi'\rangle,\varepsilon\langle\beta^*\pi,\langle\gamma^*,\delta^*\rangle\pi'\rangle]\varphi\langle\pi',\pi\rangle)^*=$$

$$=([\alpha\langle\pi,\langle\gamma^*,\delta^*\rangle\pi'\rangle,\beta\langle\pi,\langle\gamma^*,\delta^*\rangle\pi'\rangle]\varphi\langle\pi',\pi\rangle)^*=$$

$$=([\varepsilon\langle\gamma^*\pi',\pi\rangle,\varepsilon\langle\delta^*\pi',\pi\rangle]\varphi\langle\pi',\pi\rangle)^*=([\gamma\langle\pi',\pi\rangle,\delta\langle\pi',\pi\rangle]\varphi\langle\pi',\pi\rangle)^*=$$

$$=([\varepsilon\langle\pi',k\pi\rangle,\varepsilon\langle\pi',k'\pi\rangle]\varphi\langle\pi',\pi\rangle)^*=(\varepsilon\langle\pi',\pi\rangle\psi\varphi\langle\pi',\pi\rangle)^*=\varepsilon^*=1$$

$\eta\circ\tau=\langle\underbrace{(\varepsilon\langle\pi,k\pi'\rangle\langle\tau\pi,\pi'\rangle)^*}_{\alpha},\underbrace{(\varepsilon\langle\pi,k'\pi'\rangle\langle\tau\pi,\pi'\rangle)^*}_{\beta}\rangle$ pokazaćemo da je $\alpha=\pi$, a na sličan način se pokazuje da je $\beta=\pi'$ pa je odatle $\eta\circ\tau=1$.

$$\alpha=(\varepsilon\langle(\varepsilon\langle[(\varepsilon\langle\pi\pi',\pi\rangle)^*,(\varepsilon\langle\pi'\pi',\pi\rangle)^*]\pi',\pi\rangle)^*\pi,k\pi'\rangle)^*=$$

$$=(\varepsilon\langle(\varepsilon\langle[(\varepsilon\langle\pi\pi',\pi\rangle)^*,(\varepsilon\langle\pi'\pi',\pi\rangle)^*]\pi',\pi\rangle)^*\pi,\pi'\rangle\langle\pi,k\pi'\rangle)^*=$$

$$=(\varepsilon\langle[(\varepsilon\langle\pi\pi',\pi\rangle)^*,(\varepsilon\langle\pi'\pi',\pi\rangle)^*]\pi',\pi\rangle\langle\pi,k\pi'\rangle)^*=$$

$$=(\varepsilon\langle[(\varepsilon\langle\pi\pi',\pi\rangle)^*,(\varepsilon\langle\pi'\pi',\pi\rangle)^*]k\pi',\pi\rangle)^*=(\varepsilon\langle(\varepsilon\langle\pi\pi',\pi\rangle)^*\pi',\pi\rangle)^*=$$

$$=(\varepsilon\langle(\varepsilon\langle\pi\pi',\pi\rangle)^*\pi,\pi'\rangle\langle\pi',\pi\rangle)^*=(\varepsilon\langle\pi\pi',\pi\rangle\langle\pi',\pi\rangle)^*=(\varepsilon\langle\pi\pi,\pi'\rangle)^*=\pi$$

(12) $\varphi=[1,\square]:A+0\longrightarrow A$; $\psi=k:A\longrightarrow A+0$

$\psi\circ\varphi=k[1,\square]=[k1,k\square]=[k,k']=1$ jer $k\square:0\longrightarrow A\longrightarrow A+0$ je jednaka $k':0\longrightarrow A+0$ zbog inicijalnosti 0.

$\varphi\circ\psi=[1,0]k=1.$

(13) $C(A\times 0,B)\cong C(0\times A,B)\cong C(0,B^A)$. Poslednji skup je jednočlan pa je onda i $C(A\times 0,B)$ takođe, što znači da iz $A\times 0$ u proizvoljan objekat B postoji samo jedna strelica, pa je $A\times 0$ inicijalni objekat, a trivijalno važi da su svaka dva inicijalna objekta izomorfna, pa je $A\times 0\cong 0$.

(14) $C(B,A^0)\cong C(B\times 0,A)$ a po prethodnom ovo je jednočlan skup, pa je A^0 terminalni objekat i prema tome izomorfan sa 1. ∎

Pored ovoga, lako je pokazati da važi supstitucija izomorfnih objekata, pa je onda jasno da objekti CCC(BCC) u odnosu na $\cong$ daju jedan jednakosni račun. Centralno pitanje ovog rada biće: Da li su (1)-(14) dovoljni da ga aksiomatizuju?

0.4. Lambekova kategorijalna teorija dokaza

Kao alternativu prirodnoj dedukciji i računu sekvenata, možemo uzeti objekte BCC kao formule a morfizme kao dokaze, i tako dobiti jedan nehilbertovski deduktivni sistem za intuicionistički iskazni račun. Za početak, kartezijansku zatvorenu kategoriju moguće je posmatrati kao deduktivni sistem tako što $\times$ u kategoriji prevodimo u konjunkciju a B^A interpretiramo kao $A\Rightarrow B$. Jednakosti među morfizmima koje daje CCC odgovaraju izjednačavanju dokaza, nečemu što u prirodnoj dedukciji dovodi do normalizacije dokaza a u sekventnom računu do eliminacije sečenja. Sistem koji smo dobili nalazio bi se negde između prirodne dedukcije i računa sekvenata s time što bi strelica odgovarala rampi $\vdash$ u sekventu u kome su i leva i desna strana jednočlane, dok neke od osnovnih strelica, npr. $\varepsilon_{A,B}:B^A\times A\longrightarrow B$ ili $\pi_{A,B}:A\times B\longrightarrow A$, odgovaraju pravilima:

$$(\Rightarrow E)\ \frac{A \qquad A\Rightarrow B}{B} \qquad\qquad (\wedge E)\ \frac{A\wedge B}{A}$$

prirodne dedukcije. Lako je proveriti da ako se za skup teorema uzme skup onih formula A jezika $\wedge,\Rightarrow$ $(\times,\_^{-})$ za koje postoji strelica $1\longrightarrow A$ u slobodnoj CCC generisanoj iskaznim slovima, onda će on predstavljati skup teorema konjuktivno-implikativnog fragmenta iskaznog intuicionističkog računa. Sa prelaskom na BCC i interpretacijom + kao disjunkcije upotpunjujemo sistem do intuicionističke iskazne logike (IIL). Sa stanovišta teorije dokaza ovaj sistem je posebno interesantan jer iz zapisa morfizma $f:A \longrightarrow B$ može se rekonstruisati kompletan dokaz za B iz A kao premise, što recimo dokazani sekvent u sekventnom sistemu "zaboravlja".

Odlučivost IIL odnosno njenog $\Rightarrow,\wedge$ fragmenta daje direktan odgovor na pitanje o odlučivosti postojanja strelice između dva objekta u slobodnoj BCC odnosno CCC. Postoji i povratna reakcija. Jedno od osnovnih pitanja kada se bavimo nekom konkretnom kategorijom je koji su njeni objekti međusobno izomorfni. Ukoliko bismo pojam izomorfizma iz kategorije CCC(BCC) preneli u logiku dobili bismo kongruenciju na skupu formula koja bi predstavljala "jače" izjednačavanje od obične ekvivalencije u smislu da su izomorfne samo one ekvivalentne formule A i B za koje postoje dokazi $f:A \longrightarrow B$ i $g:B \longrightarrow A$ takvi da se

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A \quad \text{i} \quad B \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} B$$

nekakvom "normalizacijom" mogu svesti na osnovne: 1_A odnosno 1_B.

Što se logike tiče, nama je dovoljna ekvivalencija, i do na nju se formira Lindenbaumova algebra. Ova nova relacija bila bi više u vezi sa samim dokazima, i izomorfne formule možemo smatrati suštinski ekvivalentnim.

Još jedna mogućnost formalizacije svega ovoga je λ-račun sa tipovima i surjektivnim sparivanjem. O tome će više biti reči prilikom pregleda rada [B&C&L 1990] u trećoj glavi.

0.5. Supstrukturalne logike

Koristeći se kategorijama kao deduktivnim sistemima, u duhu prethodnog poglavlja, biće dat prilično grub pregled osnovnih supstrukturalnih logika. Radi kompletnije informacije, najbolje je obratiti se [Došen 1992+].

Suština ovih logika je u ispuštanju pojedinih strukturnih pravila Gentzen-ovog računa sekvenata. Pod strukturnim pravilima podrazumevamo ona pravila izvođenja koja se shematski mogu formulisati bez pominjanja logičkih konstanti, kao sto su:

Slabljenje:

s leva $\dfrac{\Gamma \vdash \Theta}{\mathfrak{D}, \Gamma \vdash \Theta}$ s desna $\dfrac{\Gamma \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta, \mathfrak{D}}$

Kontrakcija:

s leva $\dfrac{\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \Gamma \vdash \Theta}{\mathfrak{D}, \Gamma \vdash \Theta}$ s desna $\dfrac{\Gamma \vdash \Theta, \mathfrak{D}, \mathfrak{D}}{\Gamma \vdash \Theta, \mathfrak{D}}$

Permutacija:

s leva $\dfrac{\Delta, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \Gamma \vdash \Theta}{\Delta, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \Gamma \vdash \Theta}$ s desna $\dfrac{\Gamma \vdash \Theta, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \Lambda}{\Gamma \vdash \Theta, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \Lambda}$,

gde su Γ, Θ, Λ nizovi formula, a $\mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ formule.

Sledeca šema pokazuje međusobni odnos ovih logika.

Klasična

Intuicionistička

Relevantna BCK

Linearna

Asocijativni Lambekov račun

Neasocijativni Lambekov račun

S time što korak naniže predstavlja ispuštanje, ili restrikciju, jednog strukturnog pravila.

Ukoliko slabljenje s desna ogranicimo do na:

Intuicionističko slabljenje sdesna: $\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \mathfrak{A}}$

prelazimo sa klasične logike na intuicionističku i nadalje nam strukturna pravila sdesna nisu bitna. Za relevantnu logiku vezano je ispuštanje slabljenja a u BCK nemamo kontrakcije. Linearna logika ispušta oba ova pravila. U asocijativnom Lambekovom računu pored ovih ispuštena je i permutacija. Da bi smo se spustili do neasocijativne verzije ovog računa treba isključiti asocijativnost zapeta između formula što bi odgovaralo eliminaciji pravila brisanja zagrada kao strukturnog pravila, koje je, zbog forme sekvenata kakvu nalazimo kod Gentzena, izostavljeno iz spiska.

Sa druge strane, mi ćemo krenuti od kategorija koje odgovaraju najnižim sistemima, i zatim, proširujući zahteve za novim strelicama i jednakostima, doći do CCC odnosno BCC. Videćemo da, sa kategorijalne tačke gledišta, neke od ovih kategorija imaju sasvim jednostavne definicije, odnosno u njima, slično kao i u CCC i BCC, figurišu samo zahtevi za postojanjem određenih funktora i adjungovanih situacija.

Levo reziduirana kategorija (LRK) L karakterisana je parom adjungovanih funktora $F_A: L \longrightarrow L$ i $G_A: L \longrightarrow L$, za svako $A \in ob(L)$. F_A ćemo označavati sa $A \bullet \_$ a G_A sa $A \Rightarrow \_$. Kao što smo kod CCC imali jednakosnu prezentaciju, i ovde možemo uraditi nešto slično.

LRK je zadana sa:

- unarnim operacijama $A \bullet \_$ i $A \Rightarrow \_$ nad objektima i unarnom operacijom $A \bullet \_$ nad strelicama, za svaki objekat A.
- strelicom $\vec{\varepsilon}_{C,A}: C \bullet (C \Rightarrow A) \longrightarrow A$, za svaka dva objekta C, A.
- unarnom operacijom $*\_$, koja strelici $f: C \bullet A \longrightarrow B$ dodeljuje strelicu $*f: A \longrightarrow C \Rightarrow B$,

pri čemu je ispunjeno:

(i) $C \bullet (g \circ f) = (C \bullet g) \circ (C \bullet f)$

(ii) $\vec{\varepsilon}_{C,A}(C \bullet *f) = f$ za $f: C \bullet A \longrightarrow B$

(iii) $*(\vec{\varepsilon}_{C,B}(C \bullet g)) = g$ za $g: A \longrightarrow C \Rightarrow B$

Ova kategorija nema za podlogu logiku, jer nema prave supstitucije ekvivalenata već samo one "s desna". Ipak nju uzimamo za početnu jer su zahtevi u odnosu na funktore i adjunkcije, koji svoj maksimum dostižu u BCC, u njoj svedeni na minimalne.

Desno reziduirane kategorije ne donose ništa novo već samo funktore F_C i G_C zapisujemo kao $\_ \bullet C$ i $\_ \Leftarrow C$.

Neasocijativne Lambekove kategorije (NAL) spajaju dve prethodne uz zahtev da je $\_ \bullet \_$ funktor iz $L \times L \longrightarrow L$. Za to bi bilo dovoljno, pored (i), (ii), (iii) iz definicije LRK i odgovarajućih jednakosti DRK, pretpostaviti da je:

$$\text{(iv)}\quad (A_2 \bullet g) \circ (f \bullet B_1) = (f \bullet B_2) \circ (A_1 \bullet g)$$

za $f: A_1 \longrightarrow A_2$ i $g: B_1 \longrightarrow B_2$.

Ovoj kategoriji odgovara neasocijativni Lambekov račun.

U kategorijama koje slede navešćemo samo nove osnovne strelice koje figurišu u njima. Što se jednakosne prezentacije tiče, ona bi zahtevala dublju analizu normalizacije dokaza u odgovarajućim prirodnodedukcijskim sistemima što prevazilazi okvire ovog rada.

Asocijativna Lambekova kategorija (AL) nastaje proširivanjem NAL strelicama $\overset{\Rightarrow}{\beta}_{A,B,C}: A\cdot(B\cdot C) \longrightarrow (A\cdot B)\cdot C$ i $\overset{\Leftarrow}{\beta}_{A,B,C}: (A\cdot B)\cdot C \longrightarrow A\cdot(B\cdot C)$.

L-kategorije kojima odgovara linearna logika, nastaju od AL dodavanjem strelica $\gamma_{A,B}: A\cdot B \longrightarrow B\cdot A$.

R-kategorije su L-kategorije proširene za strelice $\omega_A: A \longrightarrow A\cdot A$ i odgovaraju relevantnoj logici.

BCK-kategorije su L-kategorije dopunjene strelicama $\pi_{A,B}: A\cdot B \longrightarrow A$ i $\pi'_{A,B}: A\cdot B \longrightarrow B$ čime je uvedeno slabljenje u linearnu logiku i dobijena BCK logika.

Klasičnoj logici odgovara kategorija nastala od BCC uz dodate osnovne strelice $0^{(0^A)} \longrightarrow A$.

Što se izomorfizama tiče, ako krenemo od CCC, vidimo da tu ne važi da je $A\times A \cong A$ pa to, u neku ruku, može predstavljati neko opravdanje za uvođenje supstrukturalnih BCK logika (izbacivanjem strelice $A \longrightarrow A\times A$). Sa druge strane, strelica $A\times A \longrightarrow A$ asocira na slabljenje i eto nekakvog motiva za relevantne logike. Na žalost, ne može biti prihvaćeno kao opšte pravilo da do supstrukturalnih logika možemo stizati izbacivanjem pojedinih strelica iz CCC koje nisu izomorfizmi. Već za permutaciju nemamo odgovarajućeg motiva. Ipak sama činjenica zvuči prilično interesantno, mada autor ne veruje u dublju vezu izomorfizmi-supstrukturalne logike.

1. KATEGORIJA KONAČNIH SKUPOVA I BCC

Naslov ove glave, ne slučajno, podseća na naslov [Соловьёв 1981]. U njemu će biti izložen taj rad kao prvo rešenje problema izomorfizma u CCC i data moguća proširenja na BCC. Takođe, biće data i posledica osnovnog tvrđenja u njemu, t.j. pokazaćemo da su svi izomorfizmi u slobodnoj CCC "prirodni".

1.1. Rezultati Solovjova o izomorfizmima u CCC

Kategorija C kojom ćemo se baviti je slobodna CCC generisana prebrojivim skupom objekata $\{a_1,a_2,a_3,\dots\}$. Sa kategorijalne tačke gledišta, ovo bi značilo da je strelica $\{a_1,a_2,\dots\}\longrightarrow F(C)$ univerzalna iz skupa $\{a_1,a_2,\dots\}$ u funktor $F:\mathrm{Cart}\longrightarrow\mathrm{Set}$, gde je Cart kategorija kartezijanskih zatvorenih kategorija sa **CCC-funktorima** (onim koji čuvaju strukturu CCC) kao strelicama, a F je zaboravni funktor. Jednakosna prezentacija CCC nam omogućuje egzistenciju ove univerzalne konstrukcije. Slična stvar će se ponavljati i u slučaju slobodne BCC odnosno ostalih slobodnih kategorija kojima ćemo se baviti.

Osnovni rezultat u [Соловьёв 1981] je rekurzivnost relacije $\cong$ na skupu parova objekata iz C. Na neki način problem je preveden na pitanje aksiomatizabilnosti jednakosne teorije $(N,1,\cdot,\_^{-})$ aksiomama koje bi odgovarale izomorfizmima (1)-(7) tvrđenja 0.3.2., na koje pozitivan odgovor daje Charles Martin u [Martin 1972].

U duhu ovog rada i, uopšte, kategorijalne teorije dokaza, objekte iz C ćemo zvati formulama i npr. A^B zvaćemo implikacijom sa antecedensom B i konsekvensom A.

Sledeće tvrđenje nam omogućuje supstituciju izomorfnih formula.

Tvrđenje 1.1.1.

Ako su A i B izomorfne i C proizvoljna formula iz C, tada važe izomorfizmi:

$$A\times C\cong B\times C\ ;\ C\times A\cong C\times B\ ;\ C^A\cong C^B\ ;\ A^C\cong B^C.$$

Dokaz. Neka je $f:A\longrightarrow B$ izomorfizam tada je i:

(a) $\langle f\pi,\pi'\rangle:A\times C\longrightarrow B\times C$ izomorfizam sa inverzom $\langle f^{-1}\pi,\pi'\rangle:B\times C\longrightarrow A\times C$

(b) $\langle\pi, f\pi'\rangle: C\times A \longrightarrow C\times B$ izomorfizam sa inverzom $\langle\pi, f^{-1}\pi'\rangle: C\times B \longrightarrow C\times A$

(c) $(\varepsilon\langle\pi, f^{-1}\pi'\rangle)^*: C^A \longrightarrow C^B$ izomorfizam sa inverzom $(\varepsilon\langle\pi, f\pi'\rangle)^*: C^B \longrightarrow C^A$

(d) $(f\varepsilon)^*: A^C \longrightarrow B^C$ izomorfizam sa inverzom $(f^{-1}\varepsilon)^*: B^C \longrightarrow A^C$ ∎

Uz ovo tvrđenje i izomorfizam (2)$A\times(B\times C)\cong(A\times B)\times C$ iz 0.3.2., nadalje možemo brisati zagrade uz višestruke konjunkcije i, prosto, o tome više ne voditi računa.

Svođenje na normalnu formu izvodimo u tri faze.

I. Koristeći se izomorfizmima (5)$A\times 1\cong A$, (6)$A^1\cong A$, (7)$1^A\cong 1$ iz tvrđenja 0.3.2., kao i (5')$1\times A\cong A$, koji je posledica (5), i (1)$A\times B\cong B\times A$, datu formulu A redukujemo sleva i odozgo zamenjujući potformule oblika levih strana izomorfizama (5),(5'),(6),(7) odgovarajućim desnim stranama. Posle svakog koraka novonastala formula ima manji broj simbola pa je ovaj proces konačan, odnosno ova normalizacija je jaka. Kao rezultat, od date formule A dobijamo formulu A^0 koja je, ili jednaka 1, ili ne sadrži 1 kao potformulu. Na primer:

$$(a_3^{\,1}\times a_2)^{(1\times a_1)}\times 1^{a_3} \longrightarrow (a_3^{\,1}\times a_2)^{a_1}\times 1^{a_3} \longrightarrow (a_3\times a_2)^{a_1}\times 1^{a_3} \longrightarrow (a_3\times a_2)^{a_1}\times 1 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow (a_3\times a_2)^{a_1}$$

Ukoliko A^0 nije 1 onda normalizaciju nastavljamo sledećom fazom.

II. Koristeći se izomorfizmima (3)$(A\times B)^C\cong A^C\times B^C$ i (4)$(C^B)^A\cong C^{A\times B}$ iz 0.3.2. oslobađamo se operacijskih simbola iz zaključaka implikacija. Formalno, ako sa $\varphi(A)$ označimo broj pojavljivanja slova u A, a sa $\psi(A)$ broj logičkih veznika u konsekvensima implikacija iz A, onda indukcijom po $\varphi(A)+\psi(A)$ definišemo **kvazisvedenu normalnu formu** A^+ od A na sledeći način:

$$a_i^+ = a_i$$
$$(A_1\times A_2)^+ = A_1^+\times A_2^+$$
$$(a_i^{A_1})^+ = a_i^{A_1^+}$$
$$((A_3^{A_2})^{A_1})^+ = (A_3^{A_1\times A_2})^+$$
$$((A_2\times A_3)^{A_1})^+ = (A_2^{A_1})^+\times(A_3^{A_1})^+$$

Kvazisvedena normalna forma će nam biti osnova za formiranje normalne forme date formule u kojoj će korišćenjem komutativnosti $A\times B\cong B\times A$ višestruke konjunkcije biti postavljene u određeni redosled.

III. Za početak potrebno nam je nekoliko novih pojmova.

Df. Neka je $>$ relacija totalnog strogog poretka na skupu A. Tada sa $>_n$ označavamo relaciju na skupu konačnih nizova iz A koja se leksikografski slaže sa $>$.

Df. Neka je v pojavljivanje neke potformule u A. Definišemo:

l(v)=broj antecedensa implikacija u A koje sadrže v.

$l(A)=\max\limits_{v} l(v)$

Sada možemo indukcijom po $l(A)$ odnosno $\max\{l(A),l(B)\}$ paralelno definisati **normalnu formu** $\tilde{A}$ kvazisvedene formule A i totalni poredak $>$ na skupu svedenih formula.

(i) $l(A)=0$ tada je A oblika $a_{i_0}\times a_{i_1}\times\ldots\times a_{i_n}$ i $\tilde{A}$ definišemo kao $\tilde{A}=a_{i_{\sigma 0}}\times a_{i_{\sigma 1}}\times\ldots a_{i_{\sigma n}}$ gde je σ permutacija $\{0,1,\ldots,n\}$ takva da je $i_{\sigma 0}\geq i_{\sigma 1}\geq\ldots\geq i_{\sigma n}$. Zatim definišemo poredak $a_i>a_j$ akko $i>j$ i $a_{i_0}\times\ldots\times a_{i_k}>a_{j_0}\times\ldots\times a_{j_m}$ (obe svedene) akko $a_{i_0},\ldots,a_{i_k}>_n a_{j_0},\ldots,a_{j_m}$.

(ii) Pretpostavimo da su normalna forma i relacija $>$ definisane za svaku kvazisvedenu formulu A za koju je $l(A)<k$, i, na skupu svedenih formula F, $l(F)<k$. Neka su A i B takve formule da je $l(A)=k$ i $l(B)\leq k$. Razmatraćemo dva slučaja:

(a) ako je $A=a_i^{A'}$ onda $\tilde{A}=a_i^{\tilde{A}'}$,
a za dve normalne forme $A=a_i^{A'}$ i $B=a_j^{B'}$ važi $A>B$ akko $A',a_i>_n B',a_j$.

(b) ako je $A=A_0\times\ldots\times A_n$,gde su glavni veznici u A_i implikacije, onda definišemo $\tilde{A}=\tilde{A}_{\sigma 0}\times\ldots\times\tilde{A}_{\sigma n}$, gde je σ permutacija od $\{0,\ldots,n\}$ takva da je $\tilde{A}_{\sigma 0}\geq\ldots\geq\tilde{A}_{\sigma n}$,
a za dve normalne forme $A=A_0\times\ldots\times A_k$ i $B=B_0\times\ldots\times B_m$, pri čemu su glavni veznici u A_i i B_j implikacije, $A>B$ akko $A_0,\ldots,A_k>_n B_0,\ldots,B_m$.

Ukoliko još definišemo $\tilde{1}=1$ i za svaku normalnu formu A različitu od 1 definišemo A>1, onda je ovime kompletiran postupak svođenja proizvoljne formule na normalnu formu i uveden totalni poredak na skupu normalnih formi.

Znači A normalizacijom prevodimo u $((\widetilde{A^0})^+)$ i ovo poslednje skraćeno pišemo kao $\tilde{A}$. Takođe, iz tvrđenja 1.1.1., imamo izomorfizam $A \cong \tilde{A}$.

Sledeći stav nam pokazuje da neidentične normalne forme nisu izomorfne i to će biti dovoljno za rešenje problema izomorfizma u ovoj kategoriji.

Tvrđenje 1.1.2.

$$A \cong B \text{ akko } \tilde{A} \equiv \tilde{B}$$

Dokaz. ($\Leftarrow$) Direktno iz tvrđenja 0.3.2. i 1.1.1.

($\Rightarrow$) Ovde će nam od velike koristi biti jednakosna teorija modela $(N, 1, \cdot, \_^{-})$, gde je N skup prirodnih brojeva, $\cdot$ množenje a $\_^{-}$ ili *exp* binarna operacija izložilac-eksponent. Kao veza između ovog modela i kategorije C služiće nam kategorija Set_F (kategorija konačnih skupova) koja je kao i kategorija Set (pr.1 iz 0.3.) CCC ukoliko $\times$ interpretiramo kao Dekartov proizvod, X^Y kao skup svih preslikavanja iz Y u X a za terminalni objekat 1 uzmemo jednočlani skup $\{*\}$. Tada morfizmi π i π' postaju odgovarajuće projekcije, ε je aplikacija funkcije na argument, $\_^{*}$ λ-apstrakcija, a 0_X jedinstveno preslikavanje koje skup X slika u $\{*\}$.

Primetimo da u Set_F važi da je $X \cong Y$ akko $|X| = |Y|$ gde je $|X|$ kardinalnost skupa X i da važi $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$ i $|X^Y| = |X|^{|Y|}$.

Ukoliko indukcijom po složenosti formule uvedemo prevod P iz skupa formula kategorije C u izraze jezika $\mathcal{L} = \{1, \cdot, \_^{-}\}$ na sledeći način:

$$\text{(i)} \quad P_{a_i} = p_i \qquad P_1 = 1$$

$$\text{(ii)} \quad P_{A \times B} = P_A \cdot P_B \qquad P_{A^B} = P_A^{\,P_B} ,$$

gde je p_i individualna promenljiva, onda sledeća lema prirodno sledi.

Lema 1.1.3. $A \cong B$ u C onda $\mathbf{N} \models P_A = P_B$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, t.j. da postoji nekakva valuacija

$v: \begin{matrix} p_1 p_2 \dots p_k \\ n_1 n_2 \dots n_k \end{matrix}$ gde su $p_1, p_2, \dots, p_k$ sva slova promenljivih koja se pojavljuju u P_A i P_B takva da $v(P_A) \neq v(P_B)$. Dalje, neka su $X_1, X_2, \dots X_k$ skupovi čije su kardinalnosti, redom, $n_1, n_2, \dots, n_k$. Kategorija C je slobodna CCC, pa postoji CCC-funktor $F: C \longrightarrow Set_F$ koji produžuje preslikavanje $f: \begin{matrix} a_1 a_2 \dots a_k \\ X_1 X_2 \dots X_k \end{matrix}$. Zbog prethodnog, tada je $|F(A)| = v(P_A)$ i $|F(B)| = v(P_B)$ pa $F(A) \not\cong F(B)$ a odavde sledi da ni A i B nisu izomorfni (svaki funktor prenosi izomorfizam). ∎

Neka $t\downarrow^{p_1 \dots p_n}_{c_1 \dots c_n}$ predstavlja vrednost izraza t nakon zamene promenljivih $p_1, \dots, p_n$ prirodnim brojevima $c_1, \dots, c_n$. Tada nam sledeća lema praktično završava dokaz ovog smera tvrđenja 1.1.2.

Lema 1.1.4. Neka su A i B formule iz C u svedenom obliku, i neka su $a_1, a_2, \dots, a_n$ sva slova u njima. Dalje, neka je k maksimalna višestrukost konjunkcije u B. Tada, ako je $A > B$, onda za svako $\delta > 0$ postoji ρ takvo da za svako $c \in N$ i $c > \rho$ važi:

$$(*) \qquad P_A\downarrow^{p_1 \dots p_n}_{c_1 \dots c_n} > \delta \cdot P_B\downarrow^{p_1 \dots p_n}_{c_1 \dots c_n}$$

$$\text{gde je } c_1 = c\ ,\ c_2 = c^h\ ,\ \dots\ ,\ c_n = c^{h^{n-1}} \quad \text{i } h > k+2.$$

Dokaz. Za unapred fiksirano h, i $c_1, \dots, c_n$ kao iz leme, uvodimo oznaku $P_A[\vec{c}]$ kao skraćenje za $P_A\downarrow^{p_1 \dots p_n}_{c_1 \dots c_n}$. Dokaz izvodimo indukcijom po $l = max\{l(A), l(B)\}$ gde je $l(A)$ definisano u trećoj fazi prelaska na normalnu formu.

Primetimo da je dovoljno pokazati slučaj kada je $A = a_i$ ili $A = a_i^{A'}$ jer $A = A_0 \times A_1 \times \dots \times A_n$ i $A > B = B_0 \times B_1 \times \dots \times B_m$ svodi se na to da je ili $A_0 > B$ ili $A_0 = B_0, \dots, A_{k-1} = B_{k-1}$ i $A_k > B'$ $(B = B_0 \times B_1 \times \dots \times B_{k-1} \times B')$. U prvom slučaju ako je $P_A[\vec{c}] > \delta P_B[\vec{c}]$ onda je tim pre i $P_A[\vec{c}] > \delta P_B[\vec{c}]$. U drugom slučaju je $P_A[\vec{c}] > \delta P_{B'}[\vec{c}]$ pa je onda i:

$$P_A[\vec{c}] \geq P_A[\vec{c}] \cdot P_A[\vec{c}] \cdot \dots \cdot P_A[\vec{c}] > \delta P_B[\vec{c}] \cdot P_B[\vec{c}] \cdot \dots \cdot P_{B'}[\vec{c}] = \delta \cdot P_B[\vec{c}]$$

te ova dodatna pretpostavka o A ne umanjuje opštost tvrđenja.

(i) $l=0$ $A = a_i$

(a) $B=1$

neka je $c>\rho=\max\{\delta,1\}$ onda je $P_A[\vec{c}]=c^{h^{i-1}}>c\cdot 1>\delta\cdot P_1[\vec{c}]$.

(b) $B=a_{j_0}\times\ldots\times a_{j_m}$ i $i>j_0\geq j_1\geq\ldots\geq j_m$

neka je $c>\rho=\max\{\delta,1\}$ onda je $P_A[\vec{c}]=c^{h^{i-1}}\geq c^{h^{j-1}\cdot h}>c^{h^{j-1}\cdot m}\cdot c>\delta\cdot P_B[\vec{c}]$.

(ii) Pretpostavimo da (*) važi za svako A i B takvo da je $\max\{l(A),l(B)\}<l$ i pokažimo da (*) tada važi i za A i B za koje je $\max\{l(A),l(B)\}=l$.

(a) $B=a_j^{B'}$, tada je $A=a_i^{A'}>B$ moguće ako (a') $A'>B'$ ili (a'') $A'=B'$ i $a_i>a_j$.

(a') Po indukcijskoj pretpostavci postoji $\rho_0>0$ takvo da za svako $c>\rho_0$ $P_{A'}[\vec{c}]>(h^{j-1}+1)P_{B'}[\vec{c}]$. Neka je $c>\rho=\max\{\rho_0,\delta,1\}$, tada je

$$P_A[\vec{c}]=c^{h^{i-1}\cdot P_{A'}[\vec{c}]}\geq c^{P_{A'}[\vec{c}]}>(c^{h^{j-1}})^{P_{B'}[\vec{c}]}\cdot c^{P_{B'}[\vec{c}]}>\delta P_B[\vec{c}].$$

(a'') Neka je $c>\rho=\max\{\delta,1\}$, tada je

$$P_A[c]=c^{h^{i-1}\cdot P_{B'}[\vec{c}]}\geq c^{(h^{j-1}+1)\cdot P_{B'}[\vec{c}]}>\delta\cdot P_B[\vec{c}].$$

(b) $B=B_0\times\ldots\times B_s$, $k\geq s>0$ i $B_0\geq\ldots\geq B_s$

po prethodnom postoje $\rho_1,\ldots,\rho_s$ takvi da je $P_{B_0}[\vec{c}]\geq P_{B_i}[\vec{c}]$ za $c>\rho_i$. Ako je $B_0=a_j^{B'_0}$ onda za $A=a_i^{A'}>B$ imamo dve mogućnosti (b') $A'>B'_0$ ili (b'') $A'=B'_0$ i $a_i>a_j$.

(b') Po indukcijskoj pretpostavci postoji ρ_0 takvo da je

$$P_{A'}[\vec{c}]>h^{j-1}(s+2)P_{B'_0}[\vec{c}]\text{ za }c>\rho_0$$

Neka je $c>\rho=\max\{\rho_0,\rho_1,\ldots,\rho_s,1,\delta\}$, tada je

$$P_A[c]=c^{h^{i-1}\cdot P_{A'}[\vec{c}]}\geq c^{P_{A'}[\vec{c}]}>c^{h^{j-1}(s+2)P_{B'_0}[\vec{c}]}>c\cdot(c^{h^{j-1}\cdot P_{B'_0}[\vec{c}]})^{s+1}>\delta\cdot P_B[\vec{c}]$$

(b'') Neka je $c>\rho=\max\{\rho_1,\ldots\rho_s,1,\delta\}$, pa je i

$$P_A[\vec{c}]=c^{h^{i-1}\cdot P_{B'_0}[\vec{c}]}\geq c^{(s+2)h^{j-1}P_{B'_0}[\vec{c}]}>c\cdot(P_{B_0}[\vec{c}])^{s+1}>\delta P_B[\vec{c}].$$

Ovo bi bio kraj dokaza leme 1.1.4.

Da bismo završili dokaz tvrđenja 1.1.2. primetimo da je > totalni poredak na skupu normalnih formi formula iz C, pa ako $\tilde{A}\not\equiv\tilde{B}$ to možemo pretpostaviti npr. da je $\tilde{A}>\tilde{B}$ pa po prethodnoj lemi **N** nije model za $P_{\tilde{A}}=P_{\tilde{B}}$ pa iz leme 1.1.3. sledi da $\tilde{A}\not\cong\tilde{B}$ pa onda i $A\not\cong B$. ■

Kao posledicu ovoga imamo sledeće tvrđenje:

Tvrđenje 1.1.5.

Relacija izomorfizma je odlučiva u slobodnoj kartezijanskoj zatvorenoj kategoriji C.

Postupak provere A≅B svođenjem A i B na normalne forme može biti nešto uprošćen korišćenjem sledećeg niza stavova:

Lema 1.1.6.

Kvazisvedene formule A i B su izomorfne ako se od jedne do druge može preći samo supstitucijom izomorfnih formula tipa $H\times G\cong G\times H$ (i $(H\times G)\times F\cong H\times(G\times F)$, ali za brisanje zagrada u višestrukim konjunkcijama smo se već ranije dogovorili).

Dokaz. Direktno iz Tvrđenja 1.1.4. i činjenice da od kvazisvedenih formula prelazimo na svedene korišćenjem samo supstitucije tog tipa. Ovaj prelazak nazivamo (k)-putem od A do B.

Lema 1.1.7.

(a) Ako su A i B kvazisvedene formule i A je tipa konjunkcije promenljivih, tada, ako je A≅B, onda je i B istog tipa i sadrži iste promenljive koje se ponavljaju u njima jednak broj puta.

(b) Ako su A i B kvazisvedene formule i A je tipa $a_i^{A'}$, gde je A' konjunkcija promenljivih, i A≅B, onda je i B oblika $a_j^{B'}$ i A'≅B' i i=j.

Dokaz. Direktno iz Tvrđenja 1.1.4.

Lema 1.1.8.

Neka su A,B,C, kvazisvedene formule i C je oblika $a_i^{C'}$. Označimo tada sa A* i B* formule nastale od A i B zamenom svih potformula izomorfnih C sa novom promenljivom a_k. Tada važi:

$$A\cong B \quad \text{akko} \quad A^*\cong B^*$$

Dokaz.

(⇒) A≅B pa na osnovu leme 1.1.6. postoji put od A do B koji koristi samo supstituciju tipa $G\times H\cong H\times G$ pa za prelazak sa A* na B* koristimo isti taj put s time što preskačemo korake koji se tiču zamene unutar pretpostavki formula izomorfnih sa C (svaka kvazisvedena formula izomorfna sa C je oblika a_i^F).

(⇐) Neka su A^C i B^C dobijeni od A i B supstitucijom izomorfnih C-u sa C. Tada na osnovu tvrđenja 1.1.1. i leme 1.1.6. postoje (k)-putevi od A do A^C i od B^C do B a (k)-put od A^C do B^C je kopija (k)-puta od A* do B*, te postoji i (k)-put od A do B, pa na osnovu leme 1.1.6. sledi da je $A\cong B$.■

Prethodni stavovi nam služe kao opravdanje za sledeći algoritam provere da li su dve kvazisvedene formule izomorfne.

1° Ukoliko su kvazisvedene formule A ili B oblika konjunkcije promenljivih, koristimo lemu 1.1.7.(a).

2° Ukoliko to nije slučaj onda uočavamo prvo levo pojavljivanje potformule od A oblika $C=a_i^{C'}$, gde je C' konjunkcija promenljivih, pa sve potformule od A i B izomorfne sa C zamenimo novom promenljivom i vraćamo se na 1° sa novonastalim A* i B*.

1.2. Moguća proširenja ideje Solovjova na BCC

Za početak posmatrajmo slobodnu BCC kategoriju $\mathcal{B}$ generisanu prebrojivim skupom objekata. Tada tvrđenju 1.1.1. ovde odgovara sledeće:

Tvrđenje 1.2.1.
Ako su A i B izomorfne i C proizvoljna formula iz $\mathcal{B}$, tada su i:

$$A\times C\cong B\times C \ ; \ A^C\cong B^C \ ; \ C^A\cong C^B \ ; \ A+C\cong B+C$$

Ovo tvrđenje pokazuje da objekti iz $\mathcal{B}$ u odnosu na $\cong$ kao jednakost jesu model jednakosnog računa jezika $\mathcal{L}=\{0,1,+,\cdot,\_^{-}\}$.

Kao što je već navedeno u primerima uvodne glave, Set_F je bikartezijanska zatvorena kategorija sa praznim skupom kao inicijalnim objektom i disjunktnom unijom kao interpretacijom za +. U Set_F važi da je $|\emptyset|=0$ i $|X+Y|=|X|+|Y|$. Uz to, prevod P iz formula kategorije $\mathcal{C}$ u terme jezika $\mathcal{L}'=\{1,\cdot,\_^{-}\}$ možemo prirodno produžiti u prevod iz formula $\mathcal{B}$ u terme jezika $\mathcal{L}$, pa kao poboljšanje leme 1.1.3. imamo:

Lema 1.2.2.

$$A\cong B \text{ u } \mathcal{B} \text{ onda } \mathbf{N}\models P_A=P_B$$

Kao što ćemo kasnije videti, ovo desno je odlučivo, međutim, jednakosna teorija od $(N,0,1,+,\cdot,\_^{-})$ nije aksiomatizovana jednakostima koje odgovaraju izomorfizmima (1)-(14) tvrđenja 0.3.2.. Šta više, ona uopšte nije konačno aksiomatizabilna, pa ideju Solovjova nećemo ovde u celini moći primeniti.

Označimo sa EXP jednakosnu teoriju jezika $\mathcal{L}=\{1,\cdot,\_^{-}\}$ čije su aksiome:

$(1)\ xy=yx$ $\quad (2)\ (xy)z=x(yz)$ $\quad (3)\ (xy)^z=x^zy^z$ $\quad (4)\ (z^y)^x=z^{xy}$

$(5)\ x1=x$ $\quad (6)\ x^1=x$ $\quad (7)\ 1^x=1$

i neka je EXP^+ na jeziku $\mathcal{L}^+=\{0,1,+,\cdot,\_^{-}\}$ nastala od EXP proširivanjem aksiomama:

$(8)\ x+y=y+x$ $\quad (9)\ (x+y)+z=x+(y+z)$ $\quad (10)\ (x+y)z=xz+yz$

$(11)\ z^{x+y}=z^xz^y$ $\quad (12)\ x0=0$ $\quad (13)\ x^0=1$ $\quad (14)\ x+0=x$

Pogledajmo, za trenutak, sledeći dijagram koji predstavlja osnovu ideje [Соловьёв 1981].

Dijagram 1.2.2.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{N}\models P_A=P_B \arrow[rr, leftrightarrow] & & \mathrm{EXP}\vdash P_A=P_B \arrow[dl] \\
& C\models A\cong B \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

Bilo bi interesantno kada bismo ovu ideju mogli sprovesti i u slučaju kategorije B, naravno sa EXP^+ umesto EXP. Na žalost, ovo nije moguće. Glavni razlozi ovakvog ishoda biće ispitani u daljem tekstu.

Kao prvo, uočimo izvesne karakteristike inicijalnog objekta u kategoriji Set_F. Neka je A proizvoljan neprazan skup. Tada je skup preslikavanja iz A u ø prazan, tj. objekat $ø^A$ je inicijalni u Set_F. U [Lambek&Scott 1986] se može naći uopštenje ovoga na BCC, tj. tvrdi se da u svakoj BCC važi da je 0^A inicijalni objekat akko $A\not\cong 0$. Ovde ,naravno, jedna implikacija jeste tačna, i to ona s leva za proizvoljnu BCC koja razdvaja inicijalni objekat od terminalnog, međutim, implikacija s desna ne mora važiti. Za kontraprimer uzmimo intuicionističku iskaznu logiku posmatranu kao BCC, gde su formule objekti a sve dokaze za B iz A, kao premise, izjednačimo u jedinstvenu strelicu $A\longrightarrow B$. Ovde će izomorfizam biti izjednačen sa ekvivalencijom, a $0^A \cong 0$ značilo bi $\neg A \Leftrightarrow \bot$ što nije tačno za svako A koje nije ekvivalentno sa $\bot$. Drugi kontraprimer mogla bi biti slobodna BCC generisana skupom $\{a\}$. Lako je videti da tada $a \not\cong 0$ ali takođe i $0^a \not\cong 0$ jer bi u suprotnom, zbog slobode kategorije, i 0^0 bilo izomorfno sa 0 što nije tačno. Ova osobina Set_F posmatrane kao BCC ukazuje na izvesnu neslobodu te kategorije u odnosu na izomorfizme.

Iz $\emptyset^A = \emptyset$ za $A \neq \emptyset$ i $\emptyset^\emptyset = \{\emptyset\}$ (terminalni objekat) direktno sledi da u Set_F za proizvoljan objekat A važi izomorfizam:

$$\emptyset^{\emptyset^{\emptyset^A}} \cong \emptyset^A$$

Odgovarajuća jednakost koja važi u **N** (uz prirodnu definiciju $0^0=1$) je:

$$(TN) \quad 0^{0^{0^x}} = 0^x$$

Sledeći primer pokazuje da $EXP^+ \not\vdash TN$.

Primer 1.2.3. Neka je $M=\{0,1,a,b\}$ i neka su na M definisane binarne operacije $+, \cdot, exp$ sledećim tablicama:

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	1	b	b
a	a	b	a	b
b	b	b	b	b

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	a	a
b	0	b	a	b

exp	0	1	a	b
0	1	0	b	0
1	1	1	1	1
a	1	a	a	a
b	1	b	b	b

Proverom možemo utvrditi da je $\mathfrak{M}=(M,0,1,+,\cdot,exp) \models EXP^+$, ali $0exp(0exp(0exp a))=1 \neq b=0exp a$, pa $\mathfrak{M} \not\models TN$.

Kao posledicu ovoga imamo odgovor na otvoreni problem postavjen u [Henkin 1977]. Sigurno teži problem je da li jednakosti (1)-(11) aksiomatizuju jednakosnu teoriju modela $(N,1,+,\cdot,\_^-)$. Na njega odgovor daje A.J.Wilkie u [Wilkie 1981]. Kada sa BCC budemo prešli na povezano zatvorene kategorije vratićemo se ovom pitanju.

U slučaju jednakosti TN postoji i odgovarajući izomorfizam u slobodnoj BCC, tj. za proizvoljan objekat A važi izomorfizam $0^{0^{0^A}} \cong 0^A$. Primetimo da postoje morfizmi $\varphi=(\varepsilon<\pi,(\varepsilon<\pi',\pi>)^*>)^* : 0^{0^{0^A}} \longrightarrow 0^A$ i $\psi=(\varepsilon<\pi',\pi>)^* : 0^A \longrightarrow 0^{0^{0^A}}$. Da bismo pokazali da su $\psi\circ\varphi$ i $\varphi\circ\psi$ jedinični morfizmi, poslužićemo se tvrđenjem I.8.3. iz [Lambek&Scott 1986] koje kaže da u BCC postoji najviše jedna strelica $A\longrightarrow 0$. Zbog adjunkcije imamo da je $\mathcal{C}(0^A,0^A)\cong\mathcal{C}(0^A\times A,0)$, a ovo desno je najviše jednočlan skup pa je stoga svaki morfizam $0^A\longrightarrow 0^A$ u stvari jedinični. Otuda $\varphi\circ\psi=1$ i slično $\psi\circ\varphi=1$.

Prirodno je zapitati se da li dopunjen spisak izomorfizama iz tvrđenja 0.3.2. izomorfizmima kao što su TN daje moć kategoriji Set_F u odnosu na BCC kakvu je imala u slučaju CCC. U ovom slučaju odgovor je negativan što pokazuje sledeći primer Đorđa Čubrića:

U Set_f važi $\emptyset^A+\emptyset^{\emptyset^A}\cong 1$ mada $\neg A\vee\neg\neg A$ nije čak ni intuicionistička teorema. Možda se isti rezultat može postići već na jeziku oslabljenom za +. Na primer, interesantno bi bilo pokazati da u opštem slučaju ne važi izomorfizam $A\cong A\times 0^{0^A}$ koji trivijalno važi u Set_F a nije posledica izomorfizama iz 0.3.2.

1.3. Povezano zatvorene kategorije i izomorfizmi

Zbog problema realizacije ideje Solovjova u slučaju BCC koji uzrokuje inicijalni objekat, oslabićemo zahteve postavljene u definiciji BCC odstranivši uslov postojanja levog adjunkta funktora $\mathcal{B}\longrightarrow\mathbf{1}$. Takve kategorije ćemo, poštujući terminologiju iz [Harnik&Makkai 1992], zvati **povezano zatvorenim (PZ) kategorijama** (connectionally closed categories). Njima odgovara fragment intuicionističkog računa bez negacije.

Sada ćemo redukovati teoriju EXP^+ na prvih 11 jednakosti i novonastali račun označiti sa EXP^*. Naravno i jezik je sužen na $\mathcal{L}^*=\{1,+,\cdot,\_^-\}$. Ovde će se naša problematika ukrstiti sa algebarskim problemom postavljenim od strane Alfreda Tarskog poznatijim kao: "Tarski's high-school algebra problem". Konkretno, on je postavio pitanje da li se iz EXP^* može dedukovati proizvoljna jednakost koja važi u $\mathbf{N}$ na jeziku $\mathcal{L}^*$. Pozitivan odgovor bi nam značio da je svaki izomorfizam u slobodnoj PZ kategoriji $\mathcal{P}$ generisanoj prebrojivim skupom objekata izvodiv iz prvih 11 izomorfizama tvrđenja 0.3.2. Uz odlučivost $EXP^{*}\vdash t_1=t_2$ za proizvoljan par terma (t_1,t_2) jezika $\mathcal{L}^{*}$ (rezultat iz [Gurevič 1985]) ovo bi nam dalo odlučivost problema izomorfizma u P.

A.J.Wilkie je prvi rešio ovaj problem u [Wilkie 1981] davši, na žalost, negativan odgovor. Sama ideja i neki elementi ovog rada su nam zanimljivi zbog mogućnosti povlačenja paralele sa situacijom u P. Zbog toga ćemo ovde dati malo opširniji prikaz nekih detalja.

Motiv za konstrukciju jednakosti koja nije posledica EXP^{*} su mu tzv. pozitivni polinomi, odnosno oni polinomi sa celim koeficijentima koji kao funkcije preslikavaju $(R^{+})^{m}$ u R^{+}, gde je R^{+} skup pozitivnih realnih brojeva. Posebno interesantan slučaj je ako postoji takav polinom P koji ima i negativnih koeficijenata i polinomi A,B,C,D čiji su koeficijenti prirodni brojevi, takvi da važi (i) $P\cdot A=C$ i (ii) $P\cdot B=D$. Takvi su na primer polinomi $P=x^2-x+1$; $A=x+1$; $B=x^2+x+1$; $C=x^3+1$; $D=x^4+x^2+1$.
Nije teško utvrditi da je $\mathbf{N}\models(A^x+B^x)^y(C^y+D^y)^x=(A^y+B^y)^x(C^x+D^x)^y$. Prosto, C i D imaju zajednički faktor P.

Označimo ovu jednakost sa (W). Wilkie je pokazao ono što se iz prvog pogleda naslućuje, tj. za važenje (W) u $\mathbf{N}$ suštinski su bitni polinom P i jednakosti (i) i (ii) a pošto se oni ne mogu izraziti na jeziku $\mathcal{L}^{*}$ onda i (W) nije posledica EXP^{*}.

U osnovi Wilkiejev dokaz ovoga je sintaksni, mada je u [Gurevič 1985] autor dao primer modela sa 59 elemenata koji zadovoljava EXP^{*} i u kome (W) ne važi. Po svoj prilici , prilično je popularno među nekim matematičarima konstruisanje modela za EXP^{*}, sa što manjim brojem elemenata, u kojima ne važi (W).

Za nas je takođe interesantno što je u [Wilkie 1981] pokazana sledeća teorema:

Teorema 1.3.1. Neka je $\mathcal{L}^{**}$ jezik nastao proširivanjem $\mathcal{L}^{*}$ operacijskim simbolima t_P za svaki pozitivan polinom P odgovarajuće n-arnosti. Označimo sa EXP^{**} proširenje teorije EXP^{*} jednakostima oblika f=g gde su f i g termi jezika $\mathcal{L}^{**}\setminus\{\_-\}$ (ovo je bitno) za koje važi $\mathbf{N}\models f=g$. tada važi sledeće:

Ako su f i g termi jezika $\mathcal{L}^*$ takvi da $\mathbf{N}\models f=g$ onda $EXP^{**}\vdash f=g$.

Ova teorema pokazuje da se izložena Wilkieva ideja može iskoristiti za formiranje svih jednakost u **N** koje nisu posledice EXP^*.

R.Gurevič je u [Gurevič 1990] dao proširenje Wilkievog rešenja problema Tarskog, odnosno pokazao je da jednakosna teorija od $(N,1,+,\cdot,\_^{-})$ nije konačno aksiomatizabilna. Za izbor jednakosti koja važi u N a nije posledica konačnog broja aksioma koristi se Wilkievim trikom i za polinom P uzima polinom $x^{n-1}-x^{n-2}+\ldots+1$, za n dovoljno veliki neparan prirodan broj, a A,B,C,D su, redom, polinomi $1+x$; $1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}$; $1+x^n$; $1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n-2}$.

Pitanje koje se nameće je gde se izomorfizmi iz P nalaze u svemu ovome. Od dijagrama 1.2.2. sada važi sled implikacija:

$$EXP^*\vdash P_A=P_B \longrightarrow P\models A\cong B \longrightarrow \mathbf{N}\models P_A=P_B$$

Već je navedeno da je u [Gurevič 1985] pokazana rekurzivnost skupa teorema teorije EXP^*. U istom članku je pokazana i rekurzivnost skupa jednakosti na jeziku $\mathcal{L}^*$ koje važe u **N**, pa odatle imamo rekurzivnost dovoljnog uslova i neophodnog uslova za izomorfizam dva objekta u P.

Nije teško videti da u P nije moguće provući Wilkievu ideju, odnosno polinom x^2-x+1 definisati u jeziku $\mathcal{L}^*$. Kao prvo to zbog beskonačnosti skupa N ne može biti polinom, a zbog brzine rasta ni eksponencijalni izraz. Ista priča se ponavlja u slučaju proizvoljnog pravog pozitivnog polinoma (postoje i negativni koeficijenti) , te uz teoremu 1.3.1. imamo motiv za postavku sledeće hipoteze:

Hipoteza 1.3.2.

$$P\models A\cong B \quad \text{akko} \quad EXP^*\vdash P_A=P_B$$

Martinov dokaz nam izdvaja klasu izraza (svi jezika $\mathcal{L}$) za koje pretpostavka Tarskog važi. Ovu klasu možemo proširiti zahvaljujući rezultatima iz [Henson&Rubel 1984]. Jezik $\mathcal{L}^*$ ćemo upotpuniti simbolima za prirodne brojeve i sa $L(\mathrm{N})$ označiti najmanju klasu C izraza koja zadovoljava sledeće:

(i) Konstante iz jezika i promenjive $x_1,x_2,x_3,\ldots$ su u C.

(ii) Ako su $t,s\in C$, onda i $t+s\in C$.

(iii) Ako su $t, s \in C$, onda i $t \cdot s \in C$.

(iv) Ako su $t, s \in C$, i t ne sadrži znak + u sebi, onda i $t^s \in C$.

Za klasu $L(N)$ važi pretpostavka Tarskog, odnosno ukoliko su $t, s \in L(N)$ onda $N \models t=s$ akko $EXP^* \vdash t=s$ (ovde je EXP^* uvećana za tablice sabiranja, množenja i binarne eksponencijacije prirodnih brojeva).

Ovo bi u kategoriji P značilo da je problem izomorfizma odlučiv za klasu objekata koji imaju takve konsekvense implikacija koji ne sadrže + ili se generatori ne pojavljuju u njima. Ovi objekti odgovaraju Harropovim iskaznim formulama.

U [Henson&Rubel 1984] autori iznose i pretpostavku da klasu $L(N)$ možemo proširiti ubacujući umesto (iv)

(iv)' $t, s \in C$ i t je polinom onda i $t^s \in C$

i da pri tom hipoteza Tarskog i dalje važi. Ukoliko bi to bilo pozitivno rešeno imali bismo rešen problem izomorfizma za prilično veliku klasu objekata iz P i to bi bilo otprilike sve što nam kategorija Set_F kao PZ-kategorija omogućuje u proučavanju ovog problema.

Naravno daleko lakši je slučaj slobodne PZ-kategorije generisane praznim skupom objekata. Označimo tu kategoriju sa P_0. Objekti u njoj su generisani jedinicom i PZ-operacijama. Uvedimo prevod $v: ob(P_0) \longrightarrow N$ koji svakom objektu dodeljuje vrednost odgovarajućeg izraza (1 je 1 u N + je sabiranje itd.), i prevod $u: N \longrightarrow ob(P_0)$ definisan da prirodnom broju dodeli odgovarajući zbir jedinica (ne vodimo računa o zagradama zbog asocijativnosti). Označimo $u(v(m))$ sa $|m|$.

Tvrđenje 1.3.3. Pokazaćemo da je $m \cong |m|$.

Dokaz. Indukcijom po složenosti m.

(i) $m=1$ onda i $|m|=1$.

(ii) Terminalan operacijski znak u m je +, odnosno $m=p+q$.

Tada $|p+q| = u(v(p+q)) = u(v(p)+v(q)) = u(v(p))+u(v(q)) = |p|+|q| \overset{i.h}{\cong} p+q$.

(iii) Neka je $m=p \times q$. Tada

$$p \times q \overset{i.h}{\cong} |p| \times |q| = u(v(p)) \times u(v(q)) \underset{distr.}{\cong} u(v(p) \cdot v(q)) = u(v(p \times q)) = |p \times q|$$

(iv) Neka je $m=p^q$. Tada

$$p^q \overset{\text{i.h.}}{\cong} |p|^{|q|} = u(v(p))^{u(v(p))} \underset{\substack{(10),(11)\\ \text{iz } 0.3.2.}}{\cong} u(v(p)^{v(q)}) = u(v(p^q)) = |p^q|$$

∎

Da su dve različite normalne forme $|m|$ i $|n|$ neizomorfne lako vidimo iz "utapanja" u Set_F kategorije P_0. Dakle, ovom normalizacijom je rešen problem izomorfizma u P_0.

1.4. Prirodnost izomorfizama u slobodnoj CCC

Ukoliko posmatramo npr. izomorfizam (1)$A\times B\cong B\times A$ iz tvrđenja 0.3.2. koji važi za proizvoljna dva objekta A i B iz kartezijanske zatvorene kategorije $\mathcal{A}$, on je prirodan u tom smislu što postoje funktori F i G

$$F: \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathcal{A} \qquad G: \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathcal{A}$$
$$F(A,B)=A\times B \qquad G(A,B)=B\times A$$
$$F(f,g)=f\times g \qquad G(f,g)=g\times f$$

koji su prirodno izomorfni (ovde je $f\times g$ skraćenica za $\langle f\pi, g\pi'\rangle$).

Prirodno je zapitati se da li su i ostali izomorfizmi (2)-(7) iz 0.3.2. prirodni u istom smislu i, još šire, da li proizvoljan par izomorfnih objekata u kategoriji C iz 1.1. generiše, na isti način, par prirodno izomorfnih funktora.

Ovo poglavlje nam daje pozitivan odgovor na prvo pitanje, i uz izvesne uslove, i na drugo.

Df. Neka je A formula iz C i neka je p pojavljivanje slova a_i u A. Tada definišemo $S_A(p)$ (znak pojavljivanja slova) na sledeći način:

(i) $A=p$ onda $S_A(p)=1$

(ii) $A=A_1\times A_2$ i p se pojavljuje u A_1 onda $S_A(p)=S_{A_1}(p)$

p se pojavljuje u A_2 onda $S_A(p)=S_{A_2}(p)$

$A=A_1^{A_2}$ i p se pojavljuje u A_1 onda $S_A(p)=S_{A_1}(p)$

p se pojavljuje u A_2 onda $S_A(p)=-S_{A_2}(p)$

Df. Označena formula je ona u kojoj su sva pojavljivanja slova označena.

Df. A je F-formula ukoliko se u A ne pojavljuje isto slovo sa dva znaka.

Tvrđenje 1.4.1. Neka su A i B formule iz $\mathcal{C}$ i $a_1,\dots,a_n$ sva slova u A i B. Neka su A^F i B^F dobijena od A i B preimenovanjem svakog pojavljivanja p slova a_i, ukoliko je $S(p)=-1$, sa a_{i+n}. Tada važi:

$$A\cong B \Leftrightarrow A^F\cong B^F$$

Dokaz. ($\Leftarrow$): Neka je f: $\begin{matrix} a_1,\dots,a_n,a_{n+1},\dots,a_{2n} \\ a_1,\dots,a_n,a_1,\dots,a_n \end{matrix}$

f produžujemo do CCC-funktora $\mathcal{F}:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}$, što je moguće zbog slobode kategorije $\mathcal{C}$, pa onda važi da je $\mathcal{F}(A^F)\cong\mathcal{F}(B^F)$ odnosno $A\cong B$.

($\Longrightarrow$): $A\cong B$ pa po [Соловьёв 1981] postoji konačan niz formula $A_1,\dots,A_m$ tako da je $A=A_1\cong A_2\cong \dots \cong A_m=B$ tako da je svaki od izomorfizama ostvaren supstitucijom izomorfnih iz izomorfizama (1)-(7) tvrđenja 0.3.2. Ukoliko još pokažemo da je $L^F\cong D^F$ gde je L leva, a D desna strana proizvoljnog izomorfizma iz 0.3.2., onda je izomorfizam $A_i^F\cong A_{i+1}^F$ posledica supstitucije izomorfnih $L^F\cong D^F$ ili $(L^F)^{-1}\cong(D^F)^{-1}$ gde $(A^F)^{-1}$ dobijamo od A^F kada a_i zamenim sa a_{n+i} i a_{n+k} sa a_k, za $1\le i,k\le n$.

Sam dokaz za $L^F\cong D^F$ kod (1) do (7) je kopija dokaza tvrđenja 0.3.2. pa ga ovde nećemo ponavljati. ∎

Kao posledicu ovog tvrđenja imamo da za svaki izomorfizam $A\cong B$ postoji opštiji (u smislu $A\cong B$ je instancija) $A^F\cong B^F$, koji zadovoljava osobinu da se nijedno slovo ne pojavljuje sa dva znaka u formulama A^F i B^F.

Neka je C označena F-formula i neka su $a_{i1}^{s1},\dots,a_{in}^{sn}$ sva označena slova koja se pojavljuju u C. Tada induktivno, po složenosti C, možemo definisati funktor $F_C:\mathcal{A}^{s1}\times\dots\times\mathcal{A}^{sn}\longrightarrow\mathcal{A}$ gde je $\mathcal{A}$ proizvoljna CCC i $\mathcal{A}^{si}$ je $\mathcal{A}$ ukoliko je $si=1$, odnosno $\mathcal{A}^{op}$ ukoliko je $si=-1$.

(i) $C=a_i$ $\quad F_C(A)=A$, $\quad F_C(f)=f$ $\qquad C=1$ $\quad F_C(A)=1$, $\quad F_C(f)=1_1$

(ii) $C=P\times Q$ i neka su $F_P:\mathcal{A}^{sr1}\times\dots\times\mathcal{A}^{srm}\longrightarrow\mathcal{A}$ i $F_Q:\mathcal{A}^{sq1}\times\dots\times\mathcal{A}^{sqp}\longrightarrow\mathcal{A}$ već definisani, pri čemu su $a_{ir1}^{sr1},\dots,a_{irm}^{srm}$ označena slova u P i $a_{iq1}^{sq1},\dots,a_{iqp}^{sqp}$ označena slova u Q.

Tada F_C definišemo na sledeći način :

$$F_C(A_1,\dots,A_n)=F_P\,(A_{r1},\dots,A_{rm})\times F_Q\,(A_{q1},\dots,A_{qp})$$
$$F_C(f_1,\dots,f_n)=F_P\,(f_{r1},\dots,f_{rm})\times F_Q\,(f_{q1},\dots,f_{qp})$$

(iii) $C=P^Q$ i neka su $F_P:\mathcal{A}^{sr1}\times\dots\times\mathcal{A}^{srm}\longrightarrow\mathcal{A}$ i $F_{Q^\bullet}:\mathcal{A}^{-sq1}\times\dots\times\mathcal{A}^{-sqp}\longrightarrow\mathcal{A}$

, ovde Q° znači da Q označavamo nezavisno a ne kao potformulu od C.

Tada F_C definišemo pomoću sledećih objekt i morfizam funkcija.

$$F_C(A_1,\dots A_n)=F_P(A_{r1},\dots,A_{rm})^{F_Q(A_{q1},\dots,A_{qp})}$$
$$F_C(f_1,\dots,f_n)=(F_P\,(f_{r1},\dots,f_{rm})\;\varepsilon<\pi\,,\;F_{Q^\bullet}(f^{op}_{q1},\dots,f^{op}_{qp})\;\pi'>)^*$$

Nije teško proveriti da su ovi funktori dobro definisani.

Sada imamo sve neophodne definicije za formulisanje glavnog tvrđenja ovog poglavlja.

Teorema 1.4.2.
Neka su A i B označene F-formule iz C takve da se ni jedno slovo ne pojavljuje sa dva različita znaka u A i B i neka su $a^{s1}_{i1},\dots,a^{sn}_{in}$ sva označena slova koja se u njima pojavljuju. Ako je $A\cong B$ onda su funktori $F^\Delta_A,F^\Delta_B:\ \mathcal{A}^{s1}\times\dots\times\mathcal{A}^{sn}\longrightarrow\mathcal{A}$ prirodno izomorfni, pri čemu su oni nastali od funktora F_A i F_B izjednačavanjem domena. Zbog nemogućnosti zabune i jednostavnosti, nadalje ćemo ih označavati samo sa F_A i F_B.

Dokaz.
Neka su A i B formule kakve zahteva teorema. Na osnovu rezultata sa početka ove glave možemo zaključiti da postoji konačan niz $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\dots,\mathcal{F}_m$ formula iz C, takvih da je $A=\mathcal{F}_1\cong\dots\cong\mathcal{F}_m=B$, da svake dve uzastopne ispunjavaju uslove tvrđenja i da su dobijene supstitucijom izomorfnih tipa (1)-(7) iz 0.3.2.
Ukoliko pokažemo da tvrđenje važi za svake dve uzastopne, onda će zbog komutiranja sledećeg dijagrama:

$$\begin{tikzcd}
F_{\mathcal{F}_1}(\vec{A}) \arrow[r, "t_1(\vec{A})"] \arrow[d, "F_{\mathcal{F}_1}(\vec{f})"] & F_{\mathcal{F}_2}(\vec{A}) \arrow[r] \arrow[d, "F_{\mathcal{F}_2}(\vec{f})"] & \ldots \arrow[r, "t_{m-1}(\vec{A})"] & F_{\mathcal{F}_m}(\vec{A}) \arrow[d, "F_{\mathcal{F}_m}(\vec{f})"] \\
F_{\mathcal{F}_1}(\vec{B}) \arrow[r, "t_1(\vec{B})"] & F_{\mathcal{F}_2}(\vec{B}) \arrow[r] & \ldots \arrow[r, "t_{m-1}(\vec{B})"] & F_{\mathcal{F}_m}(\vec{B})
\end{tikzcd}$$

$$\vec{A}=(A_1,\ldots,A_n) \qquad \vec{f}=(f_1,\ldots,f_n)$$

teorema biti dokazana.

Neka su, dakle, C i C^{ϑ}_{Q} , redom , formula i produkt zamene pojavljivanja ϑ potformule P formulom Q takvom da je $P\cong Q$ kao jedan od izomorfizama iz tvrđenja 0.3.2.

To da su odgovarajući funktori prirodno izomorfni pokazujemo indukcijom po dubini pojavljivanja ϑ u C.

(i) $C=\vartheta$. Postoji 7 slučajeva

(1) $P=A\times B$ i $Q=B\times A$

izomorfizam

$$\begin{tikzcd}
F_P(\vec{A}) \arrow[r, "<\pi', \pi>"] \arrow[d, "F_P(\vec{f})"] & F_Q(\vec{A}) \arrow[d, "F_Q(\vec{f})"] \\
F_P(\vec{B}) \arrow[r, "<\pi', \pi>"] & F_Q(\vec{B})
\end{tikzcd}$$

Djagram komutira jer:

$$<\pi',\pi>F_{A\times B}(\vec{f})=<\pi',\pi><F_A(\vec{f})\pi,F_B(\vec{f})\pi'>=<F_B(\vec{f})\pi',F_A(\vec{f})\pi>=$$
$$=<F_B(\vec{f})\pi,F_A(\vec{f})\pi'><\pi',\pi>=F_{B\times A}(\vec{f})<\pi',\pi>$$

(2) $P=(A\times B)\times C$ i $Q=A\times(B\times C)$

izomorfizam

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
F_P(\vec{A}) \arrow[r, "\langle \pi\pi, \langle \pi'\pi, \pi'\rangle\rangle"] \arrow[d, "F_P(\vec{f})"] & F_Q(\vec{A}) \arrow[d, "F_Q(\vec{f})"] \\
F_P(\vec{B}) \arrow[r, "\langle \pi\pi, \langle \pi'\pi, \pi'\rangle\rangle"] & F_Q(\vec{B})
\end{tikzcd}$$

Dijagram komutira jer:

$$\begin{aligned}
\langle \pi\pi, \langle \pi'\pi, \pi'\rangle\rangle F_{(A\times B)\times C}(\vec{f}) &= \langle \pi\pi, \langle \pi'\pi, \pi'\rangle\rangle \langle\langle F_A(\vec{f})\pi, F_B(\vec{f})\pi'\rangle\pi, F_C(\vec{f})\pi'\rangle = \\
&= \langle F_A(\vec{f})\pi\pi, \langle F_B(\vec{f})\pi'\pi, F_C(\vec{f})\pi'\rangle\rangle = \\
&= \langle F_A(\vec{f})\pi, \langle F_B(\vec{f})\pi, F_C(\vec{f})\pi'\rangle\pi'\rangle \langle \pi\pi, \langle \pi'\pi, \pi'\rangle\rangle = \\
&= F_{A\times(B\times C)}(\vec{f}) \langle \pi\pi, \langle \pi'\pi, \pi'\rangle\rangle
\end{aligned}$$

(3) $P=(C^B)^A$ i $Q=C^{A\times B}$

izomorfizam

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
F_P(\vec{A}) \arrow[r, "(\varepsilon\langle\varepsilon\langle\pi, \pi\pi'\rangle, \pi'\pi'\rangle)^*"] \arrow[d, "F_P(\vec{f})"] & F_Q(\vec{A}) \arrow[d, "F_Q(\vec{f})"] \\
F_P(\vec{B}) \arrow[r, "(\varepsilon\langle\varepsilon\langle\pi, \pi\pi'\rangle, \pi'\pi'\rangle)^*"] & F_Q(\vec{B})
\end{tikzcd}$$

Dijagram komutira jer:

$$(\varepsilon\langle\varepsilon\langle\pi, \pi\pi'\rangle, \pi'\pi'\rangle)^* F_P(\vec{f}) =$$

$$\begin{aligned}
&= (\varepsilon\langle\varepsilon\langle\pi, \pi\pi'\rangle, \pi'\pi'\rangle)^* (\overbrace{(F_C(\vec{f})\varepsilon\langle\pi, F_{B\bullet}(\vec{f}^{op})\pi'\rangle)^*\varepsilon\langle\pi, F_{A\bullet}(\vec{f}^{op})\pi'\rangle}^{g})^* = \\
&= (\varepsilon\langle\varepsilon\langle\pi, \pi\pi'\rangle\langle g^*\pi, \pi'\rangle, \pi'\pi'\rangle)^* = (e\langle\varepsilon\langle g^*\pi, \pi'\rangle\langle\pi, \pi\pi'\rangle, \pi'\pi'\rangle)^* = \\
&= (\varepsilon\langle\underbrace{(F_C(\vec{f})\varepsilon\langle\pi, F_{B\bullet}(\vec{f}^{op})\pi'\rangle)^*}_{h}\varepsilon\langle\pi, F_{A\bullet}(\vec{f}^{op})\pi'\rangle\langle\pi, \pi\pi'\rangle, \pi'\pi'\rangle)^* = \\
&= (\varepsilon\langle h^*\pi, \pi'\rangle\langle\varepsilon\langle\pi, F_{A\bullet}(\vec{f}^{op})\pi\pi'\rangle, \pi'\pi'\rangle)^* = \\
&= (F_C(\vec{f})\varepsilon\langle\pi, F_{B\bullet}(\vec{f}^{op})\pi'\rangle\langle\varepsilon\langle\pi, F_{A\bullet}(\vec{f}^{op})\pi\pi'\rangle, \pi'\pi'\rangle)^* = \\
&= (F_C(\vec{f})\varepsilon\langle\varepsilon\langle\pi, F_{A\bullet}(\vec{f}^{op})\pi\pi'\rangle, F_{B\bullet}(\vec{f}^{op})\pi'\pi'\rangle)^* = \\
&= (F_C(\vec{f})\varepsilon\langle\varepsilon\langle\pi, \pi\pi'\rangle, \pi'\pi'\rangle\langle\pi, \langle F_{A\bullet}(\vec{f}^{op})\pi\pi', F_{B\circ}(\vec{f}^{op})\pi'\pi'\rangle\rangle)^* = \\
&= (F_C(\vec{f})\varepsilon\langle(\varepsilon\langle\varepsilon\langle\pi, \pi\pi'\rangle, \pi'\pi'\rangle)^*\pi, \langle F_{A\bullet}(\vec{f}^{op})\pi\pi', F_{B\bullet}(\vec{f}^{op})\pi'\pi'\rangle\rangle)^* = \\
&= (F_C(\vec{f})\varepsilon\langle\pi, \langle F_{A\circ}(\vec{f}^{op})\pi\pi', F_{B\circ}(\vec{f}^{op})\pi'\pi'\rangle\rangle\langle(\varepsilon\langle\varepsilon\langle\pi, \pi\pi'\rangle, \pi'\pi'\rangle)^*\pi, \pi'\rangle)^* =
\end{aligned}$$

$$=(F_C(\vec{f})\varepsilon\langle\pi,\langle F_{A^\circ}(\vec{f}^{op})\pi,F_{B^\circ}(\vec{f}^{op})\pi'\rangle\pi'\rangle)^*(\varepsilon\langle\varepsilon\langle\pi,\pi\pi'\rangle,\pi'\pi'\rangle)^*=$$
$$=F_Q(\vec{f})(\varepsilon\langle\varepsilon\langle\pi,\pi\pi'\rangle,\pi'\pi'\rangle)^*$$

pa su i F_p i F_Q prirodno izomorfni.

(4) $P=(A\times B)^C$ i $Q=A^C\times B^C$

izomorfizam

$$\begin{tikzcd}
F_P(\vec{A}) \arrow[r, "\langle(\pi\varepsilon)^*,(\pi'\varepsilon)^*\rangle"] \arrow[d, "F_P(\vec{f})"] & F_Q(\vec{A}) \arrow[d, "F_Q(\vec{f})"] \\
F_P(\vec{B}) \arrow[r, "\langle(\pi\varepsilon)^*,(\pi'\varepsilon)^*\rangle"] & F_Q(\vec{B})
\end{tikzcd}$$

Pri čemu je:

$F_{\mathcal{A}}(\vec{f})=(\langle F_A(\vec{f})\pi,F_B(\vec{f})\pi'\rangle\varepsilon\langle\pi,F_{C^\circ}(\vec{f}^{op})\pi'\rangle)^*$

$F_{\mathcal{B}}(\vec{f})=\langle(F_A(\vec{f})\varepsilon\langle\pi,F_{C^\circ}(\vec{f}^{op})\pi'\rangle)^*\pi,(F_B(\vec{f})\varepsilon\langle\pi,F_{C^\circ}(\vec{f}^{op})\pi'\rangle)^*\pi'\rangle$

Uvodimo oznake $f=F_A(\vec{f})$ $g=F_B(\vec{f})$ $h=F_{C^\circ}(\vec{f}^{op})$

Dijagram komutira jer:

$$\langle(\pi\varepsilon)^*,(\pi'\varepsilon)^*\rangle(\underbrace{\langle f\pi,g\pi'\rangle\varepsilon\langle\pi,h\pi'\rangle}_{\phi})^*=\langle(\pi\varepsilon\langle\phi^*\pi,\pi'\rangle)^*,(\pi'\varepsilon\langle\phi^*\pi,\pi'\rangle)^*\rangle=$$
$$=\langle(\pi\langle f\pi,g\pi'\rangle\varepsilon\langle\pi,h\pi'\rangle)^*,(\pi'\langle f\pi,g\pi'\rangle\varepsilon\langle\pi,h\pi'\rangle)^*\rangle=$$
$$=\langle(f\pi\varepsilon\langle\pi,h\pi'\rangle)^*,(g\pi'\varepsilon\langle\pi,h\pi'\rangle)^*\rangle=$$
$$=\langle(f\varepsilon\langle(\pi\varepsilon)^*\pi,\pi'\rangle\langle\pi,h\pi'\rangle)^*,(g\varepsilon\langle(\pi'\varepsilon)^*\pi,\pi'\rangle\langle\pi,h\pi'\rangle)^*\rangle=$$
$$=\langle(f\varepsilon\langle\pi,h\pi'\rangle)^*(\pi\varepsilon)^*,(g\varepsilon\langle\pi,h\pi'\rangle)^*(\pi'\varepsilon)^*\rangle=$$
$$=\langle(f\varepsilon\langle\pi,h\pi'\rangle)^*\pi,(g\varepsilon\langle\pi,h\pi'\rangle)^*\pi'\rangle\langle(\pi\varepsilon)^*,(\pi'\varepsilon)^*\rangle$$

(5) $P=A\times 1$ i $Q=A$

izomorfizam

$$\begin{tikzcd}
F_P(\vec{A}) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "F_P(\vec{f})"] & F_Q(\vec{A}) \arrow[d, "F_Q(\vec{f})"] \\
F_P(\vec{B}) \arrow[r, "\pi"] & F_Q(\vec{B})
\end{tikzcd}$$

$$F_P(\vec{f})=F_A(\vec{f})\times 1_1\ ,\ F_Q(\vec{f})=F_A(\vec{f})$$

Dijagram trivijalno komutira.

(6) $P=1^A$ i $Q=1$

izomorfizam

$$\begin{tikzcd} F_P(\vec{A}) \arrow[r, "0"] \arrow[d, "F_P(\vec{f})"'] & F_Q(\vec{A}) \arrow[d, "F_Q(\vec{f})"] \\ F_P(\vec{B}) \arrow[r, "0"] & F_Q(\vec{B}) \end{tikzcd}$$

$$F_P(\vec{f})=(\varepsilon<\pi,F_{A\bullet}(\vec{f}^{op})\pi'>)^* \;,\; F_Q(\vec{f})=1_1$$

Dijagram trivijalno komutira.

(7) $P=A^1$ i $Q=A$

izomorfizam

$$\begin{tikzcd} F_P(\vec{A}) \arrow[r, "\varepsilon<1{,}0>"] \arrow[d, "F_P(\vec{f})"'] & F_Q(\vec{A}) \arrow[d, "F_Q(\vec{f})"] \\ F_P(\vec{B}) \arrow[r, "\varepsilon<1{,}0>"] & F_Q(\vec{B}) \end{tikzcd}$$

$$F_P(\vec{f})=(F_A(\vec{f})\varepsilon)^* \;,\; F_Q(\vec{f})=F_A(\vec{f})$$

Dijagram komutira jer:

$\varepsilon<1,0>(F_A(\vec{f})\varepsilon)^*=\varepsilon<(F_A(\vec{f})\varepsilon)^*\pi,\pi'><1,0>=F_A(\vec{f})\varepsilon<1,0>$

Ovime smo pokazali bazu indukcije i ujedno odgovorili potvrdno na pitanje prirodnosti izomorfizama (1)-(7) iz tvrđenja 0.3.2. Dalje pokazujemo indukcijski korak.

(ii) Pretpostavka je da za P=Q važi tvrđenje tj. sledeći dijagram komutira:

izomorfizam

$$\begin{tikzcd}
F_P(\vec{A}) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "F_P(\vec{f})"] & F_Q(\vec{A}) \arrow[d, "F_Q(\vec{f})"] \\
F_P(\vec{B}) \arrow[r, "i"] & F_Q(\vec{B})
\end{tikzcd}$$

(a) Tada tvrđenje važi i za $C\times P\cong C\times Q$

izomorfizam

$$\begin{tikzcd}
F_{C\times P}(\vec{A}) \arrow[r, "1\times i"] \arrow[d, "F_{C\times P}(\vec{f})"] & F_{C\times Q}(\vec{A}) \arrow[d, "F_{C\times Q}(\vec{f})"] \\
F_{C\times P}(\vec{B}) \arrow[r, "1\times i"] & F_{C\times Q}(\vec{B})
\end{tikzcd}$$

Dijagram komutira jer:

$$(1\times i)(F_C(\vec{f})\times F_P(\vec{f}))=F_C(\vec{f})\times(iF_P(\vec{f}))=F_C(\vec{f})(F_Q(\vec{f})i)=(F_C(\vec{f})\times F_Q(\vec{f}))(1\times i)$$

(b) Tada tvrđenje važi i za $P\times C\cong Q\times C$ (na isti način).

(c) Tada tvrđenje važi i za $P^C\cong Q^C$

izomorfizam

$$\begin{tikzcd}
F_{P^C}(\vec{A}) \arrow[r, "(i\varepsilon)^*"] \arrow[d, "F_{P^C}(\vec{f})"] & F_{Q^C}(\vec{A}) \arrow[d, "F_{Q^C}(\vec{f})"] \\
F_{P^C}(\vec{B}) \arrow[r, "(i\varepsilon)^*"] & F_{Q^C}(\vec{B})
\end{tikzcd}$$

Dijagram komutira jer:

$$\begin{aligned}
(i\varepsilon)^*(F_P(\vec{f})\varepsilon\langle\pi, F_{C\circ}(\vec{f}^{op})\pi'\rangle)^* &= (iF_Q(\vec{f})\varepsilon\langle\pi, F_{C\circ}(\vec{f}^{op})\pi'\rangle)^*= \\
&=(F_Q(\vec{f})i\varepsilon\langle\pi, F_{C\circ}(\vec{f}^{op})\pi'\rangle)^*= \\
&=(F_Q(\vec{f})\varepsilon\langle(i\varepsilon)^*\pi, \pi'\rangle\langle\pi, F_{C\circ}(\vec{f}^{op})\pi'\rangle)^*= \\
&=(F_Q(\vec{f})\varepsilon\langle\pi, F_{C\circ}(\vec{f}^{op})\pi'\rangle\langle(i\varepsilon)^*\pi, \pi'\rangle)^*= \\
&=(F_Q(\vec{f})\varepsilon\langle\pi, F_{C\circ}(\vec{f}^{op})\pi'\rangle)^*(i\varepsilon)^*
\end{aligned}$$

(d) Tada tvrđenje važi i za $C^P \cong C^Q$

izomorfizam

$$\begin{tikzcd}
F_{C^P}(\vec{A}) \arrow[r, "(\varepsilon(1\times i^{-1}))^*"] \arrow[d, "F_{C^P}(\vec{f})"] & F_{C^Q}(\vec{A}) \arrow[d, "F_{C^Q}(\vec{f})"] \\
F_{C^P}(\vec{B}) \arrow[r, "(\varepsilon(1\times i^{-1}))^*"] & F_{C^Q}(\vec{B})
\end{tikzcd}$$

Dijagram komutira jer:

$$(\varepsilon<1\times i^{-1}>)^*\underbrace{(F_C(\vec{f})\varepsilon<\pi, F_{P\circ}(\vec{f}^{op})\pi'>)}_{\phi}{}^*=(\varepsilon<\phi^*\pi, i^{-1}\pi'>)^*=$$

$$=(F_C(\vec{f})\varepsilon<\pi, F_{P\circ}(\vec{f}^{op})\pi'><\pi, i^{-1}\pi'>)^*=$$

$$=(F_C(\vec{f})\varepsilon<\pi, F_{P\circ}(\vec{f}^{op})i^{-1}\pi'>)^*=$$

$$=(F_C(\vec{f})\varepsilon<\pi, i^{-1}F_{Q\circ}(\vec{f}^{op})\pi'>)^*=$$

$$=(F_C(\vec{f})\varepsilon(1\times i^{-1})<\pi, F_{Q\circ}(\vec{f}^{op})\pi'>)^*=$$

$$=(F_C(\vec{f})\varepsilon<(\varepsilon(1\times i^{-1}))^*\pi, F_{Q\circ}(\vec{f}^{op})\pi'>)^*=$$

$$=(F_C(\vec{f})\varepsilon<\pi, F_{Q\circ}(\vec{f}^{op})\pi'>)^*(\varepsilon(1\times i^{-1}))^*$$

■

2. FUNKTOR KATEGORIJA $\mathbf{Set}^{\mathbf{Z}}$ KAO POVEZANO ZATVORENA KATEGORIJA

U prethodnoj glavi smo videli da je kategorija Set_F "slobodna" po pitanju izomorfizma kada je posmatramo kao CCC, u smislu da imamo sledeći oblik stava kompletnosti:

Neka je C kategorija kao u glavi 1 i A i B dva neizomorfna objekta u njoj. Tada postoji CCC funktor $F: C \longrightarrow \mathrm{Set}_F$ takav da $F(A) \not\cong F(B)$.

Takođe, hipoteza 1.3.2. nagoveštava da to nije slučaj kada je posmatramo kao PZ-kategoriju. Ovo zvuči pomalo neočekivano, mada sa kategorijalne tačke gledišta, Set_F je prilično "gruba" kao CCC i PZ-kategorija u smislu postojanja obilja nekanoničkih strelica (onih koje se ne mogu izraziti na jeziku CCC odnosno BCC), pa sa druge strane možemo biti zadovoljni onim što se desilo sa izomorfizmima u CCC. Ovo što smo malopre naveli se ogleda npr. u tome da ne postoji CCC-funktor iz C u Set_F takav da svakom paru (A,B) objekata iz C za koji je $C(A,B)=\emptyset$ dodeljuje par skupova $(F(A),F(B))$ među kojima nema preslikavanja.

Ideja bi bila da se nađe finiji model PZ-kategorije, u smislu prethodne rečenice, a u kome bi se izomorfnost objekata i dalje dovoljno lako proveravala. $\mathrm{Set}^{\mathrm{Z}}$ (tačnije $\mathrm{Set}_F^{\mathrm{Z}}$, odnosno kategorija čiji su objekti funktori iz grupe celih brojeva, posmatrane kao kategorije, u kategoriju konačnih skupova, a morfizmi, prirodne transformacije) zadovoljava ove uslove. Kao posledicu sledećeg tvrđenja imamo da je ovo PZ-kategorija.

Tvrđenje 2.1.1. Neka je K CCC (BCC ili PZ) i G kategorija čije su sve strelice izomorfizmi (u teoriji kategorija G je **grupoid**). Tada je i K^G CCC (BCC ili PZ).

Dokaz. Dokazaćemo tvrđenje u slučaju BCC. Ostali slučajevi su sadržani u ovome.

Nije veliki problem odrediti inicijalni i terminalni objekat nove kategorije, šta više, i proizvod i koproizvod se prirodno definišu. Za ovo nije čak ni neophodno da je G kategorija koja zadovoljava uslove tvrđenja, već umesto nje tu može stajati proizvoljna kategorija. Za definisanje binarne eksponencijacije bitno se koristi osobina G da svaka strelica ima inverznu.

F^E kao funktor definišemo objekt funkcijom $F^E(a)=F(a)^{E(a)}$ i morfizam funkcijom $F^E(f)=(Ff\circ\varepsilon\circ\langle\pi, Ef^{-1}\circ\pi\rangle)^*$ za $f:a\longrightarrow b$. Iz pretpostavke da sledeći dijagram:

$$\begin{tikzcd}
Ha\times Ea \arrow[r, "\lambda a"] \arrow[d, "\langle Hf\pi, Ef\pi'\rangle"] & Fa \arrow[d, "Ff"] \\
Hb\times Eb \arrow[r, "\lambda b"] & Fb
\end{tikzcd}$$

komutira, gde je $\lambda:H\times E\longrightarrow F$ prirodna transformacija (strelica u K^G), sledi komutativnost dijagrama:

$$\begin{tikzcd}
Ha \arrow[r, "(\lambda a)^*"] \arrow[d, "Hf"] & Fa^{Ea} \arrow[d, "(Ff\circ\varepsilon\circ\langle\pi, Ef^{-1}\pi'\rangle)^*"] \\
Hb \arrow[r, "(\lambda b)^*"] & Fb^{Eb}
\end{tikzcd}$$

na osnovu sledećeg računa:

$$\begin{aligned}
(Ff\circ\varepsilon\circ\langle\pi, Ef^{-1}\circ\pi'\rangle)^*\circ(\lambda a)^* &= (Ff\circ\varepsilon\circ\langle\pi, Ef^{-1}\circ\pi'\rangle\circ\langle(\lambda a)^*\circ\pi, \pi'\rangle)^* = \\
&= (Ff\circ\varepsilon\circ\langle(\lambda a)^*\circ\pi, \pi'\rangle\circ\langle\pi, Ef^{-1}\circ\pi'\rangle)^* = \\
&= (Ff\circ\lambda a\circ\langle\pi, Ef^{-1}\circ\pi'\rangle)^* = \\
&= (\lambda b\circ\langle Hf\circ\pi, Ff\circ\pi'\rangle\circ\langle\pi, Ef^{-1}\circ\pi'\rangle)^* = \\
&= (\lambda b\circ\langle Hf\circ\pi, \pi'\rangle)^* = (\lambda b)^*\circ Hf
\end{aligned}$$

Znači, $*$ prirodnu transformaciju $H\times E\longrightarrow F$ prevodi u prirodnu transformaciju $H\longrightarrow F^E$, pa zbog osobina operatora $*$, funktori $\_\times E$ i $\_^E$ su adjungovani. ∎

Kao što je već navedeno u primeru iz 0.1., objekte iz Set^Z možemo posmatrati, na drugi način, kao dejstvo grupe celih brojeva na skup, odnosno kao skupove sa jednom izdvojenom permutacijom. Morfizmi bi tada bili preslikavanja tih skupova koja su u saglasnosti sa istaknutim permutacijama, kako je i rečeno u navedenom primeru.

A. Läuchli je baveći se apstraktnom realizabilnošću u [Läuchli 1970] dao rezultat kompletnosti intuicionističke predikatske logike u odnosu na modele apstraktnih dokaza u kojima formulama ne dodeljuje skupove dokaza već skupove sa istaknutim permutacijama. Valjana će onda biti ona formula koja u svakom modelu ima invarijantan dokaz (fiksna tačka istaknute permutacije). Za nas je interesantan prevod ovog rezultata (iskaznog dela) na jezik kategorija koji se može formulisati (videti [Harnik&Makkai 1992]) u vidu sledeće teoreme.

Teorema 2.1.2.

Neka je P slobodna PZ-kategorija definisana u 1.4. Tada postoji slabo-pun funktor iz P u Set^Z.

Pored toga što ima ove osobine, kategorija Set^Z može nam izgledati pogodna i sa tačke gledišta Wilkievih rezultata jer u njoj nisu definabilni svi pozitivni polinomi. Na primer, polinom x^2-3x+3 za argument ne može uzeti skup $\{1,2\}$ sa cikličnom permutacijom $(1\ 2)$ jer je x^2+3 tada izomorfno skupu $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ sa permutacijom $(1\ 2)(3\ 4)$, a $3x$ je izomorfan skupu $\{1,2,3,4,5,6\}$ sa permutacijom $(1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$, pa se $3x$ ne može izomorfno utopiti u x^2+3 u smislu da bez obzira na preimenovanje elemenata skupa $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ permutacija koja odgovara objektu x^2+3 nema cikličnu reprezentaciju koja sadrži cikle $(1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$ što bi moralo biti ispunjeno u slučaju jednakosti $x^2+3=(x^2-3x+3)+3x$.

U ovoj kategoriji ipak važe sve jednakosti iz [Gurevič 1990] koje je autor koristio za pokazivanje da jednakosna teorija od $(N,1,+,\cdot,\_-)$ nije konačno aksiomatizabilna. Prosto, za svaki Z-skup x možemo definisati izraz :

$$x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\ldots+1$$

gde je n neparan prirodan broj. Razlog za ovo je što je x^{k-1} uvek utopivo u x^k (npr. uz preslikavanje $(a_1,a_2,\ldots a_{k-1})\longrightarrow(a_1,a_1,a_2,\ldots,a_{k-1})$). Prema tome, u Set^Z ne možemo oboriti ni jedan izomorfizam koji odgovara jednakosti Wilkievog tipa jer njegova ideja ovde prolazi.

Pitanje na koje bi bilo interesantno dati odgovor je da li neki od nedefinabilnih pozitivnih polinoma može učestvovati u genezi neke jednakosti na jeziku PZ-kategorija. Moji pokušaji tu nisu urodili plodom. Možda bi se cela stvar uz korišćenje teoreme 1.3.1. mogla uopštiti do izjednačavanja jednakosnih teorija Set_F i Set^Z, što nama ne odgovara.

Ukoliko bismo hteli da opravdamo hipotezu 1.3.2. nekakvim Solovjevim stilom, trebalo bi naći model PZ-kategorije u kome pravi pozitivni polinomi (postoje i negativni koficijenti) nisu definabilni i pokazati da je njena jednakosna teorija izomorfizama jednaka EXP^*.

Jedna lepa PZ-kategorija koja ispunjava prvi deo prethodnih zahteva je kategorija kompaktno-generisanih (G je zatvoren u X akko je njegov presek sa svakim kompaktnim podskupom od X zatvoren) Hausdorfovih prostora koju označavamo sa *CG*. Ukoliko sa k označimo operator koji modifikuje topologiju prostora X u kompaktno-generisanu onda su PZ operacije u *CG* definisane na sledeći način:

proizvod	$k(X\times Y)$
zbir	topološka suma
exp	$k(C(X,Y))$

gde je $C(X,Y)$ prostor neprekidnih preslikavanja iz X u Y sa kompaktno-otvorenom topologijom.

Ideja da prihvatimo neku kategoriju topoloških prostora potiče od toga što tu, osim u specijalnim slučajevima, nema razlaganja prostora X^2 na sumu prostora od kojih bi jedan bio prostor X. Kategoriju Top ne možemo uzeti u celini jer, ma kako definisali prostor funkcija između dva topološka prostora, to neće biti PZ-kategorija.
Iz rezultata [Steenrod 1966] sledi da je ograničenje na *CG* dovoljno za dobijanje PZ-kategorije.

Naravno, velika mana ove kategorije je to što je u njoj klasifikacija objekata po izomorfizmu, ovde homeomorfizmu topoloških prostora, daleko komplikovanija nego u Set_F (školska aritmetika), pa je već naći prostore za koje izomorfizam koji odgovara (W) ne važi, veliki posao.

3. DRUGO REŠENJE PROBLEMA IZOMORFIZMA U CCC

3.1. Lambda-račun sa tipovima

U svom radu [B&C&L 1990] K.Bruce, R.DiCosmo i G.Longo su dali novi dokaz odlučivosti problema izomorfizma u slobodno generisanoj kartezijanskoj zatvorenoj kategoriji C. Iako je ovaj rad gotovo 10 godina mlađi od već navedenog [Соловьёв 1981], po nekim elementima bi se moglo naslutiti da su autori tek naknadno saznali za originalno rešenje koje smo ovde izložili u prvoj glavi. Novo u njemu je potpuno drugačiji matematički aparat koji se koristi, odnosno, deo koji je kod Solovjova bio trivijalno rešen korišćenjem Martinovog rezultata o mogućnosti aksiomatizovanja nekih jednakosnih teorija, ovde je rešen, uz puno više truda zahvaljujući izvesnim osobinama λ-računa sa tipovima i surjektivnim sparivanjem.

Gotovo sve što nam je neophodno iz poznavanja λ-računa za razumevanje ovog dokaza, nalazi se u [Lambek&Scott 1986], a više informacija se može naći u [Barendregt 1984] ili [Hindley&Seldin 1986]. Osnovno ćemo ipak izložiti ovde.

Slobodan λ-račun sa tipovima, surjektivnim sparivanjem i terminalnim objektom $(\lambda\beta\eta\pi*^{t})$ je formalna teorija definisana na sledeći način. Sastoji se iz tipova **Tp** generisanih od prebrojivog skupa atomskih tipova **At**, terma za sve tipove (term a je tipa A skraćeno zapisujemo $a{:}A$) i jednakosti među termima. Pri tome važi sledeće:

(a) (i) $\mathrm{At}\subseteq\mathrm{Tp}$ i $T\in\mathrm{At}$ je konstantan tip.

(ii) Ako su $A,B\in\mathrm{Tp}$ onda je i $A\longrightarrow B\in\mathrm{Tp}$.

(iii) Ako su $A,B\in\mathrm{Tp}$ onda je i $A\times B\in\mathrm{Tp}$.

(b) (i) Za svaki tip A imamo prebrojiv skup promenljivih tog tipa, recimo $x_1^A{:}A, x_2^A{:}A, \ldots, x_n^A{:}A, \ldots$ i to su termi.

(ii) Za svaki tip A postoji konstantan term $*A{:}A\longrightarrow T$.

(iii) Za svaka dva tipa A i B postoje termi $\pi{:}A\times B\longrightarrow A$ i $\pi'{:}A\times B\longrightarrow B$.

(iv) Ako je $x{:}A$ promenljiva i $M{:}B$ term tada je i $\lambda x{:}A.M$ term tipa $A\longrightarrow B$.

(v) Ako su $M: A \longrightarrow B$ i $N: A$ termi onda je i MN term tipa B.

(vi) Ako su $M: A$ i $N: B$ termi onda je i $\langle M, N\rangle$ term tipa $A \times B$.

(c) Jednakost na termima je minimalna kongruencija koja zadovoljava sledeće:

(i) (α) $\lambda x: A.M = \lambda y: A.M[x \backslash y]$ ako y nije slobodna u M.

(β) $(\lambda x: A.M)N = M[x \backslash N]$.

(η) $\lambda x: A.(Mx) = M$ ako x nije slobodna u M.

(ξ) $M=N$ onda i $\lambda x: A.M = \lambda x: A.N$

(ii) (π_1) $\pi\langle M, N\rangle = M$

(π_2) $\pi'\langle M, N\rangle = N$

(π_3) $\langle \pi M, \pi' M\rangle = M$

(iii) (*) Za svako $M: A \longrightarrow T$ $M = *_A$

Ovde smo sa $M[x \backslash N]$ označavali supstituciju promenljive x termom N i za tačnu definiciju treba se obratiti ponuđenoj literaturi. Takođe uvodimo skraćene zapise $\langle M_1, M_2, \ldots, M_n\rangle$ za $\langle \ldots \langle\langle M_1, M_2\rangle, M_3\rangle, \ldots, M_n\rangle$ i $M_1 M_2 \ldots M_n$ ili samo $\bar{M}$ za $(\ldots((M_1 M_2)M_3)\ldots M_n)$. Sa $M[\bar{x} \backslash \bar{N}]$ označavamo simultanu supstituciju promenljivih niza $\bar{x}$ termima niza $\bar{N}$. Pojmove kao što su redeks, normalna forma, glavna normalna forma, stroga normalizacija, Church-Rosser svojstvo itd. ovde nećemo definisati.

3.2. Veza $\lambda\beta\eta\pi*^t$ i CCC odnosno logike

Ukoliko $\lambda\beta\eta\pi*^t$ posmatramo kao deduktivni sistem pri čemu tipove uzimamo za formule a terme za dokaze svojih tipova gde su promenljive hipoteze, neće biti teško proveriti da zatvoreni termi (bez slobodnih promenljivih) dokazuju intuicionističke teoreme, a takođe da važi i obrat tj. za svaku intuicionističku teoremu na jeziku CCC postojaće zatvoreni $\lambda\beta\eta\pi*^t$ term tog tipa.

Izjednačavanje terma nam u toj interpretaciji govori da npr. sledeće dokaze smatramo jednakim.

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} x: A \\ \downarrow \\ \varphi(x): B \end{array}}{\lambda x: A.\varphi(x): A \longrightarrow B} \qquad a: A}{(\lambda x: A.\varphi(x))a: B}
\qquad\qquad
\begin{array}{c} a: A \\ \downarrow \\ \varphi(a): B \end{array}
$$

Već odavde se vidi paralela $\lambda\beta\eta\pi*^{t}$ sa CCC. Formalno, u kategorijalnom duhu, možemo učiniti sledeće. Označićemo sa **λ-Calc** kategoriju $\lambda\beta\eta\pi*^{t}$-računa (detalji o morfizmima u toj kategoriji mogu se naći u [Lambek&Scott 1986]), zatim ćemo konstruisati funktor L: Cart⟶λ-Calc koji svakoj kartezijanskoj zatvorenoj kategoriji dodeljuje njen "internalni jezik" odnosno jedan $\lambda\beta\eta\pi*^{t}$-račun. Dati funktor ima adjunkt C: λ-Calc⟶Cart takav da su kompozicije CL i LC prirodno izomorfne redom jediničnim funktorima na kategorijama Cart odnosno λ-Calc (ovo znači da su kategorije Cart i λ-Calc **ekvivalentne**).

Sama konstrukcija ovih funktora zahteva poznavanje dodatnih osobina CCC, naime funkcionalne kompletnosti i mi je ovde nećemo izvoditi. Ona je u kompletu sa svim dokazima data u [Lambek&Scott 1986]. Ipak, na prvi pogled se može naslutiti da će internalni jezik neke CCC za tipove imati objekte te kategorije, a termi tipa A će biti strelice oblika $1\longrightarrow A$.

Naravno, nama najinteresantnije je kako u internalnom jeziku kategorije $\mathcal{C}$ (iz prve glave) definisati svojstvo koje bi odgovaralo izomorfizmu. Sledeća definicija, u duhu prethodnog, rešava taj problem.

$\mathcal{D}f$. Neka su $A,B\in\mathrm{Tp}$. Tada je A **dokazivo izomorfno** sa B, u oznaci $A\cong_p B$, ako postoje zatvoreni λ-termi $M:B\longrightarrow A$ i $N:A\longrightarrow B$ takvi da je $\lambda\beta\eta\pi*^{t}\vdash M\cdot N=1_A$ i $\lambda\beta\eta\pi*^{t}\vdash N\cdot M=1_B$, gde je $1_A=\lambda x{:}A.x{:}A\longrightarrow A$ a $M\cdot N$ definišemo kao $\lambda x{:}A.M(Nx)$. Za N kažemo da dokazuje $A\cong_p B$ i M je njegov inverz.

3.3. Drugi dokaz teoreme o izomorfizmima CCC

Označimo sa $\mathcal{T}h$ jednakosnu teoriju koja odgovara EXP iz prve glave samo sada na jeziku $\{T,\times,\longrightarrow\}$, odnosno, neka su njene sheme aksioma (uz aksiome jednakosti) sledeće:

(1) $A\times B=B\times A$

(2) $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$

(3) $A\longrightarrow(B\times C)=(A\longrightarrow B)\times(A\longrightarrow C)$

(4) $(A\times B)\longrightarrow C=A\longrightarrow(B\longrightarrow C)$

(5) $A\times T=A$

(6) $T\longrightarrow A=A$

(7) $A\longrightarrow T=T$

3.3.1. Glavno tvrđenje. $\mathcal{Th}\vdash A=B$ akko $A\cong_p B$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Praktično ovo bi bio prevod prvog dela dokaza tvrđenja 0.3.2. Formalno, prvo bi trebalo proveriti da je $\cong_p$ kongruencija. Dokaz za ovo je sledeće:

- $A\cong_p A$ je ostvareno sa $\lambda x{:}A.x$
- Ako M sa inverzom N dokazuje $A\cong_p B$ onda N dokazuje $B\cong_p A$.
- Ako M dokazuje $A\cong_p B$ i N dokazuje $B\cong_p C$ onda $N\bullet M$ dokazuje $A\cong_p C$.
- Ako M dokazuje $A\cong_p B$ i N dokazuje $C\cong_p D$ tada $\lambda x{:}(A\times C).\langle M(\pi x),N(\pi' x)\rangle$ dokazuje $A\times C\cong_p B\times D$ i $\lambda y{:}(A\to C).\lambda x{:}B.N(y(M^{-1}x))$ dokazuje $A\to C\cong_p B\to D$

Dalje proveravamo važenje ovih sedam aksioma.

(1) $\lambda x{:}(A\times B).\langle\pi' x,\pi x\rangle$ dokazuje $A\times B\cong_p B\times A$

(2) $\lambda x{:}A\times(B\times C).\langle\langle\pi x,\pi(\pi' x)\rangle,\pi'(\pi' x)\rangle$ dokazuje $A\times(B\times C)\cong_p(A\times B)\times C$

(3) $\lambda z{:}A\to(B\times C).\langle\lambda x{:}A.(\pi(zx)),\lambda x{:}A.(\pi'(zx))\rangle$ dokazuje $A\to(B\times C)\cong_p(A\to B)\times(A\to C)$

(4) $\lambda z{:}(A\times B)\to C.\lambda x{:}A.\lambda y{:}B.z\langle x,y\rangle$ dokazuje $(A\times B)\to C\cong_p A\to(B\to C)$

(5) π dokazuje $A\times T\cong_p A$

(6) $\lambda z{:}T\to A.z(*(T\to A)z)$ dokazuje $T\to A\cong_p A$

(7) $*(A\to T)$ dokazuje $A\to T\cong_p T$

Za primer ćemo pokazati važenje (1), ostalo je samo pitanje vežbe.
Neka je $M=\lambda x{:}(A\times B).\langle\pi' x,\pi x\rangle$, pokazaćemo da je $M^{-1}=\lambda x{:}(B\times A).\langle\pi' x,\pi x\rangle$

$M^{-1}\bullet M=\lambda t{:}A\times B.(\lambda x{:}(B\times A).\langle\pi' x,\pi x\rangle)((\lambda x{:}(A\times B).\langle\pi' x,\pi x\rangle)t)=$

$=\lambda t{:}A\times B.(\lambda x{:}(B\times A).\langle\pi' x,\pi x\rangle)\langle\pi' t,\pi t\rangle=\lambda t{:}A\times B.\langle\pi'\langle\pi' t,\pi t\rangle,\pi\langle\pi' t,\pi t\rangle\rangle=$

$=\lambda t{:}A\times B.\langle\pi t,\pi' t\rangle=\lambda t{:}A\times B.t=1_{A\times B}$

Na isti način $M\bullet M'=1_{B\times A}$ pa je i $A\times B\cong_p B\times A$

($\Leftarrow$) Ovaj smer je daleko komplikovaniji i njegov dokaz će biti dat sledećim nizom koraka.

Neka je ">" tranzitivna i slobodna za supstituciju relacija redukcije na tipovima, generisana sa:

1) $A\times T > A$

1') $T\times A > A$

2) $A\times(B\times C) > (A\times B)\times C$

3) $(A\times B)\to C > A\to(B\to C)$

4) $A\to(B\times C) > (A\to B)\times(A\to C)$

5) $A\to T > T$

6) $T\to A > A$

Nije teško ustanoviti da ovakva redukcija vodi strogoj normalizaciji sa Church-Rosser-ovim svojstvom pa odatle sledi da za svaki objekat A postoji jedinstvena normalna forma $nf(A)$. S obzirom da je redukcija definisana tako da $A > B$ povlači $\mathcal{Th}\vdash A=B$, onda korišćenjem dokazanog smera glavnog tvrđenja imamo sledeću lemu.

Lema 3.3.2. $\mathcal{Th}\vdash A=nf(A)$ i odavde $\mathcal{Th}\vdash A=B \Leftrightarrow \mathcal{Th}\vdash nf(A)=nf(B)$. Takođe i $A \cong_p nf(A)$.

Primetimo da ovde redukcija ide nešto drugačije nego kod Solovjova u prve dve faze. Ovde će normalna forma nekog tipa A biti ili tip T, ili tip oblika $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ gde A_i ne sadrži T ili znak $\times$.
Sledećim tvrđenjem prebacujemo problem izomorfizma na normalne forme.

Lema 3.3.3. Neka $F:A\longrightarrow nf(A)$ i $G:B\longrightarrow nf(B)$ dokazuju $A \cong_p nf(A)$ i $B \cong_p nf(B)$. Tada $M:A\longrightarrow B$ dokazuje $A\cong_p B$ akko postoji term $M':nf(A)\longrightarrow nf(B)$ koji dokazuje $nf(A) \cong_p nf(B)$ takav da je $M=G^{-1}\bullet M'\bullet F$.

Dokaz. ($\Leftarrow$) Postavimo $N=F^{-1}\bullet M'^{-1}\bullet G$. Lako se vidi da je $N=M^{-1}$.
($\Rightarrow$) Uzmimo za M' term $G\bullet M\bullet F^{-1}$. Njegov inverz je $F\bullet M^{-1}\bullet G^{-1}$.

Primetimo da je $\mathcal{Th}$ zatvorena za osobinu da nije moguća jednakost $T=M$ gde M ne sadrži T u sebi. Prema tome ako je $\mathcal{Th}\vdash A=B$ onda ako A ima normalnu formu oblika $A_1\times A_2\times\ldots\times A_m$ gde su konjunkti čisto implikativni i ne sadrže T, onda i B ima normalnu formu oblika $B_1\times B_2\times\ldots B_n$ sa istim osobinama.

Sledeće tvrđenje, koje dajemo bez dokaza, prebacuje problem sa $\lambda\beta\eta\pi*^t$-računa na $\lambda\beta\eta\pi^t$-račun (nema tipa T i strelica $*A$).
Tvrđenje 3.3.4. Pretpostavimo da su S i R netrivijalne normalne forme tipova. Ako zatvoren term M sa svojim inverzom N dokazuje $S\cong_p R$ u $\lambda\beta\eta\pi*^t$, onda se u njihovim normalnim formama (od M i N) ne pojavljuju konstante oblika $*A$, tj. M i N su $\lambda\beta\eta\pi^t$-termi.

U delu koji sledi navešćemo, bez dokaza, tvrđenja koja pokazuju činjenicu da su netrivijalne normalne forme $A_1\times A_2\times\ldots\times A_m\cong_p B_1\times B_2\times\ldots B_n$, takve, da je m=n i postoji permutacija σ za koju su A_i i $B_{\sigma i}$ po parovima izomorfni.

Lema 3.3.5. Neka su $S\equiv S_1\times\ldots\times S_m$ i $R\equiv R_1\times\ldots\times R_n$ normalne forme tipova takve da S_i-ovi i R_j-ovi ne sadrže T ili znak $\times$. Tada je $S\cong_p R$ akko postoje termi $M_1,\ldots,M_n$ i $N_1,\ldots,N_m$ takvi da:

$$x_1:S_1,\ldots,x_m:S_m \vdash \langle M_1,\ldots,M_n\rangle:(R_1\times\ldots\times R_n)$$
$$y_1:R_1,\ldots,y_n:R_n \vdash \langle N_1,\ldots,N_m\rangle:(S_1\times\ldots\times S_m)$$

(pogledati o računu sa dodeljivanjem tipova) i

$$M_i[\bar{x}\backslash\bar{N}]=_{\beta\eta} y_i,\ \text{za } 1\le i\le n$$
$$N_j[\bar{y}\backslash\bar{M}]=_{\beta\eta} x_j,\ \text{za } 1\le j\le m$$

Lema 3.3.6. Neka je M $\lambda\beta\eta\pi^t$-term u normalnoj formi, takav da $M:A$, gde je A tip u kome se ne pojavljuje $\times$. Tada je M, ustvari, $\lambda\beta\eta^t$-term.

Lema 3.3.7. Pretpostavimo da su $R_1\times\ldots\times R_n$ i $S_1\times\ldots\times S_m$ normalne forme tipova, i $M\equiv\langle M_1,\ldots,M_n\rangle, N\equiv\langle N_1,\ldots,N_m\rangle$ $\lambda\beta\eta\pi^t$-termi takvi da:

$$x_1:S_1,\ldots,x_m:S_m \vdash \langle M_1,\ldots,M_n\rangle:(R_1\times\ldots\times R_n)$$
$$y_1:R_1,\ldots,y_n:R_n \vdash \langle N_1,\ldots,N_m\rangle:(S_1\times\ldots\times S_m)$$
$$M_i[\bar{x}\backslash\bar{N}]=_{\beta\eta} y_i,\ \text{za } 1\le i\le n$$
$$N_j[\bar{y}\backslash\bar{M}]=_{\beta\eta} x_j,\ \text{za } 1\le j\le m$$

Tada je n=m i postoje permutacije σ,π nad n i termi $\bar{P}_i$ i $\bar{Q}_j$ takvi da :

$$M_i\equiv\lambda\bar{u}_i.x_{\sigma i}\bar{P}_i \quad \text{i} \quad N_j\equiv\lambda\bar{v}_j.y_{\pi j}\bar{Q}_j$$

Da bismo pokazali da se izomorfizam normalnih formi sastoji, na neki način, iz izomorfizama implikativnih komponenti i da bismo dovršili dokaz tvrđenja 3.3.1. neophodno je uvesti dodatne pojmove.

Df. Neka je M $\lambda\beta\eta$-term (račun bez tipova). Tada je M **konačna nasleđena permutacija (f.h.p.)** ako je ili

(i) $\lambda\beta\eta\vdash M=\lambda x.x$, ili

(ii) $\lambda\beta\eta\vdash M=\lambda z.\lambda\bar{x}.z\bar{N}_\sigma$, pri čemu ako je n dužina od $\bar{x}$ onda je σ permutacija nad n i $z\bar{N}_\sigma$ je $zN_{\sigma 1}N_{\sigma 2}\ldots N_{\sigma n}$ gde su $\lambda x_i.N_i$ konačne nasleđene permutacije za svako $1\le i\le n$.

Svaku f.h.p. možemo razvrstati po nivoima u tzv. Böhm-ovo drvo:

$$\begin{array}{ccccc} & & \lambda z\bar{x}.z & & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ \lambda\bar{v}_1.x_{\sigma 1} & & \ldots & & \lambda\bar{v}_n.x_{\sigma n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

po čijoj ćemo visini, indukcijom, raditi neke dokaze. Na primer, takvom indukcijom je moguće pokazati da je svakom f.h.p. termu moguće dodeliti tip. Prosto z-u dodelimo tip $A_1 \rightarrow (A_2 \ldots \rightarrow B)$ gde su A_i-ovi tipovi $N_{\sigma i}$-ova. Ovo je bitno jer zbog svojstva da svaki $\lambda\beta\eta^t$-tip ima jedinstvenu normalnu formu, sledi da i svaki f.h.p. takođe poseduje normalnu formu.

U daljem radu više puta ćemo iskoristiti sledeću teoremu iz [Dezani 1976].

Teorema 3.3.8. Neka je M $\lambda\beta\eta$-term koji poseduje normalnu formu. Tada M ima $(\lambda\beta\eta)$ inverz akko je on f.h.p.

Df. Neka je M $\lambda\beta\eta^t$-term. Tada sa $e(M)$ označavamo $\lambda\beta\eta$-term nastao od M brisanjem tipova.

Primetimo da zbog istih aksioma i pravila $\lambda\beta\eta^t$ i $\lambda\beta\eta$ računa, važi sledeće: $\lambda\beta\eta^t \vdash M=N$ onda $\lambda\beta\eta \vdash e(M)=e(N)$.

Kao posledicu imamo sledeće:

Tvrđenje 3.3.9. Ako su $M{:}A \rightarrow B$ i $N{:}B \rightarrow A$ međusobno inverzni $\lambda\beta\eta^t$-termi, onda su $e(M)$ i $e(N)$ f.h.p. termi.

Tvrđenje 3.3.10. Neka $M_1,\ldots,M_n,N_1,\ldots,N_n$ i permutacija σ zadovoljavaju uslove leme 3.3.7. Tada su $\lambda x_{\sigma i}.M_i{:}S_{\sigma i} \rightarrow R_i$ i $\lambda y_i.N_{\sigma i}{:}R_i \rightarrow S_{\sigma i}$ međusobno inverzni termi.

Dokaz. Uz odgovarajuće dodeljivanje tipova moguće je formirati sledeće $\lambda\beta\eta^t$-terme:

$$M=\lambda zx_1\ldots x_n.zM_1\ldots M_n$$
$$N=\lambda zy_1\ldots y_n.zN_1\ldots N_n$$

Direktnom proverom se utvrđuje da su ovo međusobno inverzni termi, pa iz tvrđenja 3.3.9. sledi da su $e(M)$ i $e(N)$ f.h.p. termi. Odavde, zbog f.h.p. strukture sledi da svaki od M_i-ova sadrži tačno jedno pojavljivanje promenljive iz $\bar{x}$, konkretno $x_{\sigma i}$. slično važi i za terme N_j. Koristeći uslove iz leme 3.3.7. dobijamo sledeće:

$$M_i[\bar{x}\backslash\bar{N}]\equiv M_i[x_{\sigma i}\backslash N_{\sigma i}]=_{\beta\eta} y_i,\ \text{za } 1\le i\le n,$$
$$N_i[\bar{x}\backslash\bar{M}]\equiv N_i[x_{\pi i}\backslash M_{\pi i}]=_{\beta\eta} x_i,\ \text{za } 1\le i\le n,$$

Odavde direktno sledi da su $\lambda x_{\sigma i}.M_i$ i $\lambda y_i.N_{\sigma i}$ željenih tipova i međusobno inverzni.

■

Ovime smo problem drugog smera tvrđenja 3.3.1. sveli na pokazivanje njegovog važenja u čisto implikativnom fragmentu, odnosno, uz sledeće tvrđenje posao je praktično završen.

Tvrđenje 3.3.11. Označimo sa $\mathcal{S}$ jednakosnu teoriju sa aksiomom

$$A\to(B\to C)=B\to(A\to C)$$

(primetimo da je to podteorija od $\mathcal{Th}$). Dalje, neka su A i B tipovi u kojima se ne pojavljuju T i ×. Tada:

$$A\cong_p B \Rightarrow \mathcal{S}\vdash A=B$$

Dokaz. Pretpostavimo da M sa inverzom N dokazuje $A\cong_p B$. Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da su oni u normalnoj formi. Na osnovu leme 3.3.6. M i N su $\lambda\beta\eta^t$-termi. Po tvrđenju 3.3.9. $e(M)$ i $e(N)$ su f.h.p. termi. Indukcijom po složenosti M (visini odgovarajućeg Böhm-ovog drveta) dokazujemo ovo tvrđenje.

visina 1: $M\equiv\lambda z{:}C.z$ pa je $M{:}C\to C$ a $\mathcal{S}\vdash C=C$ po refleksivnosti.

visina n+1: $M\equiv\lambda z{:}E.\lambda\bar{x}{:}\bar{D}.z\bar{N}_\sigma$ gde je $z\bar{N}_\sigma=zN_{\sigma 1}\ldots N_{\sigma n}$ i važi da je $e(\lambda x_i{:}D_i.N_i)$ f.h.p. term. Pretpostavimo da je $N_i{:}F_i$ za $1\le i\le n$. Da bi se tipovi poklapali tada mora biti ispunjeno da je $E=F_{\sigma 1}\to\ldots\to F_{\sigma n}\to B$ (zagrade su asocirane na desno) za neki tip B. Dakle tip od M je $(F_{\sigma 1}\to\ldots\to F_{\sigma n}\to B)\to(D_1\to\ldots\to D_n\to B)$. Po indukcijskoj pretpostavci, pošto je $e(\lambda x_i{:}D_i.N_i)$ f.h.p. term, to i izomorfizam pa je $D_i\cong_p F_i$, sledi da $\mathcal{S}\vdash D_i=F_i$. Odavde direktno dobijamo da je:

$$\mathcal{S}\vdash(F_{\sigma 1}\to\ldots\to F_{\sigma n}\to B)=(D_{\sigma 1}\to\ldots\to D_{\sigma n}\to B)$$

a da je $\mathcal{S}\vdash(F_{\sigma 1}\to\ldots\to F_{\sigma n}\to B)=(D_1\to\ldots\to D_n\to B)$ direktno dobijamo višestrukom primenom netrivijalne aksime od $\mathcal{S}$.

■

Da bismo dovršili dokaz tvrđenja 3.3.1. treba samo iskoristiti navedena pomoćna tvrđenja. Kao prvo imamo implikaciju $A\cong_p B \Rightarrow nf(A)\cong_p nf(B)$. Ukoliko su obe normalne forme trivijalne, zbog refleksivnosti imamo $\mathcal{T}h\vdash T=T$ pa tvrđenje važi. Ukoliko je $nf(A)=A_1\times\ldots\times A_n$ i $nf(B)=B_1\times\ldots\times B_m$ gde su A_i-ovi i B_i-obi čisto implikativni, kao posledicu prethodnih tvrđenja imamo da je tada n=m i da postoji permutacija σ nad n takva da je $A_i\equiv_p B_{\sigma i}$. Na osnovu tvrđenja 3.3.11. imamo $\mathcal{T}h\vdash A_i=B_{\sigma i}$ pa zbog komutativnosti $\times$ i kongruentnosti jednakosti sledi $\mathcal{T}h\vdash A=B$, što je i trebalo pokazati. ∎

Procedura odlučivanja da li su dva tipa izomorfna u slobodnom $\lambda\beta\eta\pi^{*t}$-računu zasniva se na dokazu tvrđenja 3.3.1. i ostalih pomoćnih.

1° Svodimo A i B na normalne forme $nf(A)=A_1\times\ldots\times A_n$ i $nf(B)=B_1\times\ldots\times B_m$ i proverimo da li je n=m. Ako nije znamo da A i B nisu izomorfni. Ako jeste prelazimo na sledeći korak.

2° Ispitujemo da li postoji permutacija σ od n za koju važi $A_i\cong_p B_{\sigma i}$. Ovo je moguće uz sledeći algoritam provere izomorfnosti implikativnih tipova $R=R_1\to R_2\to\ldots\to R_k$ i $S=S_1\to S_2\to\ldots\to S_l$ (R_k i S_l su generatori).

(i) $R_k\not\equiv S_l$ ili $k\neq l$ onda R i S nisu izomorfni.

(ii) Ukoliko $R_k=S_l$ i k=l onda po ovoj proceduri tražimo permutaciju π nad k-1 za koju važi $R_j\cong_p R_{\pi j}$ za $1\leq j\leq k-1$.

4. ADJUNGOVANE SITUACIJE I IZOMORFIZMI

U ovoj glavi ćemo dati neke posledice stava o izomorfizmima u CCC koje se tiču levo reziduiranih kategorija i odatle ukazati na mogućnost uopštenja na ostale kategorije vezane za supstrukturalne logike.

4.1. Izomorfizmi u kategoriji sa parom adjungovanih funktora

Neka je AD_1 kategorija čiji su objekti kategorije K sa parom adjungovanih funktora na sebi $(K \underset{G_K}{\overset{F_K}{\rightleftarrows}} K)$, a morfizmi su oni funktori $H: K \longrightarrow L$ za koje sledeći dijagrami komutiraju:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "H"] \arrow[d, "F_K"] & L \arrow[d, "F_L"] \\ K \arrow[r, "H"'] & L \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \arrow[r, "H"] \arrow[d, "G_K"] & L \arrow[d, "G_L"] \\ K \arrow[r, "H"'] & L \end{tikzcd}$$

Neka je $J: AD_1 \longrightarrow \mathrm{Set}$ zaboravni funktor i X proizvoljan neprazan skup. Tada univerzalna strelica iz X u J predstavlja kategoriju $(A, F, G) \in ob(AD_1)$ koja je slobodno generisana nad skupom objekata X.

Za kategoriju A važi sledeće:

Tvrdenje 4.1.1. Dva objekta su izomorfna akko su identična.

Dokaz. $(\Leftarrow)$ Trivijalno.

$(\Rightarrow)$ Pretpostavimo da je $\alpha a \cong \beta b$, gde su α i β reči sastavljene od simbola F i G, a $a, b \in X$.

Kao prvo pokazujemo da je tada $\alpha \equiv \beta$.

Zbog slobode kategorije A, postoji AD_1-funktor $H: (A, F, G) \longrightarrow (C, \_\times c, \_^{c})$, gde je C slobodna CCC-kategorija iz prve glave i c jedan od njenih generatora, koji produžuje preslikavanje $h: X \longrightarrow ob(C)$ za koje je $h(a)=c$ i $h(b)=c$. Funktorom H će se, na primer, objekat $\alpha(F,G)a = GFFGGFa$ slikati u :

$$((((c\times c)^c)^c\times c)\times c)^c.$$

Njegova normalna forma po Solovjovu je:

$$c^{c}\times c^{c}\times c^{c\times c\times c}\times c^{c\times c\times c}$$

Ovaj primer dovoljno dobro ilustruje činjenicu da normalna forma na jedinstven način zadaje reč α. Formalno, možemo pokazati da važi sledeća lema:

Lema 4.1.2. Neka je N normalna forma (po Solovjovu) objekta iz C u kojoj se pojavljuje samo slovo c i koja u antecedensima implikacija nema znakova implikacija. Tada postoji jedinstvena reč α po F i G takva da je $H(\alpha a)=H(\alpha b)\cong N$.

Dokaz. Znamo da je N oblika $c^{c^{n_1}}\times c^{c^{n_2}}\times\ldots\times c^{c^{n_k}}$, $n_1\le\ldots\le n_k$, gde je $c^{c^{n}}$ skraćenica za $c^{c\times\ldots\times c}$ (c se u eksponentu javlja n puta). Označimo sa P prevod iz N u $H(\alpha a)$ koji je izveden ne sledeći način:

(i) ako je $n_1=0$ onda je $P(N)=(P(c^{c^{n_2}}\times\ldots\times c^{c^{n_k}}))\times c$

(ii) ako je $n_1>0$ onda je $P(N)=(P(c^{c^{n_1-1}}\times c^{c^{n_2-1}}\times\ldots\times c^{c^{n_k-1}}))^{c}$

Nije teško videti da je on inverzan normalizaciji, odnosno njime se ostvaruje bijekcija skupa ovakvih normalnih formi i reči sastavljenih od F i G. ∎

Kao direktnu posledicu ove leme i toga da različite normalne forme nisu izomorfne imamo dokazano da $\alpha a\cong\beta b$ povlači $\alpha\equiv\beta$.

Pretpostavimo da nije $a\equiv b$. Posmatrajmo sada proizvoljnu kategoriju M koja ima dva neizomorfna objekta m i n. Opet iskoristimo slobodu kategorije A i konstruišimo funktor $H:(A,F,G)\longrightarrow(M,1_M,1_M)$, gde je 1_M identitet na M, koji produžuje preslikavanje $h:X\longrightarrow ob(M)$ za koje je $h(a)=m$ i $h(b)=n$. Očigledno je onda i $H(\alpha a)=m$, a $H(\alpha b)=n$, pa αa i αb ne mogu biti izomorfni. ∎

4.2. Ukratko o pravcu nastavka istraživanja

Tvrđenje 4.1.1 sa jedne strane je interesantno jer pokazuje da jedna adjungovana situacija ne donosi izomorfizme, a sa druge to bi mogla biti neka osnova za rešavanje problema izomorfizma u levo-rezidulranim kategorijama. Naime, ukoliko bismo mogli da pokažemo tvrđenje analogno ovom u kome se zahteva postojanje dva para adjunkcija (F_1, G_1) i (F_2, G_2) u kategoriji $\mathcal{A}$, problem izomorfizma u LR-kategorijama bi bio rešen u smislu da nikoja dva neidentična objekta u slobodnoj LR-kategoriji nisu izomorfna. Naime ako bi αa i βb bila dva izomorfna objekta u slobodnoj LR-kategoriji *FLR* gde su α i β reči po $F_1, F_2, \dots, F_n, G_1, \dots, G_n$ (F_i, G_i predstavljaju par adjungovanih funktora koji odgovaraju generatoru a_i, a a i b su generatori) onda zaključujemo da je $a \equiv b$ korišćenjem utapanja *FLR* u slobodnu kategoriju AD_1 tipa, a $\alpha \equiv \beta$ korišćenjem utapanja *FLR* u slobodnu kategoriju iz AD_2 (postoje dva para adjungovanih funktora).

Još jedna kategorija , naime NAL-kategorija bila bi interesantna sa gledišta ispitivanja povezanosti izomorfizama i adjungovanih situacija u njoj jer se tu pojavljuje novi tip adjunkcije. Ostale kategorije koje odgovaraju supstrukturalnim logikama imaju nešto komplikovanije uvodjenje i time nejasniji karakter ove veze.

LITERATURA:

[B&C&L 1990] K.Bruce, R.Di Cosmo, G.Longo. "Provable isomorphisms of types",Draft ENS Paris, 1990.

[Dezani 1976] M.Dezani-Ciancaglini. "Characterization of normal forms possessing an inverse in $\lambda\beta\eta$-calculus",Theoretical Computer Science 2, pp.323-337.

[Došen 1992+] K.Došen. "A historical introduction to substructural logics", To appear in K.Došen&P.Schroeder-Heister eds.: Substructural Logics-Oxford University Press.

[Gurevič 1985] R.Gurevič. "Equational theory of positive numbers with exponentiation", Proceedings of the American Mathematical Society 94, no1, pp.135-141, May 1985.

[Gurevič 1990] R.Gurevič. "Equational theory of positive numbers with exponentiation is not finitely axiomatizable", Annals of Pure and Applied Logic 49, no1, pp.1-30, 1990.

[Harnik&Makkai 1992] V.Harnik, M.Makkai. "Lambek's categorical proof theory and Läuchli's abstract realizability", The Journal of Symbolic Logic 57, no1, pp.200-230, 1992.

[Henson&Rubel 1984] C.W.Henson, L.A.Rubel. "Some applications of Nevanlinna theory to mathematical logic: Identities of exponential functions", Transactions of the American Mathematical Society 282, no1, pp.1-32, March 1984.

[Henkin 1977] L.Henkin. "The logic of equality", The American Mathematical Monthly 84, no8, pp.597-612, October 1977.

[Lambek&Scott 1986] J.Lambek, P.J.Scott. "Introduction to Higher Order Categorical Logic", Cambridge University Press, Cambridge 1986.

[Läuchli 1970] H.Läuchli. "An abstract notion of realizability for which intuitionistic predicate calculus is complete", Intuitionism and Proof Theory, North-Holland, Amsterdam, pp.227-234, 1970.

[MacLane 1971] S.MacLane. "Categories for the Working Mathematician", Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[Martin 1972] C.F.Martin. "Axiomatic bases for equational theories of natural numbers", Notices of the American Mathematical Society 19, no7, pp.A778-A779, 1972.

[Rasiowa&Sikorski 1963] H.Rasiowa, R.Sikorski. "The Mathematics of Metamathematics", Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1963.

[Соловьёв 1981] С.В.Соловьёв. "Категории конечных множеств и Декартово замкнутые категории" Записки Научных Семинаров ЛОМИ, том 105, 174-193, 1981.

[Steenrod 1966] N.E.Steenrod. "A convenient category of Topological Spaces", Michigan Mathematical Journal 14, pp.133-152, 1967.

[Wilkie 1981] A.J.Wilkie. "On exponentiation-a solution to Tarski's high - school algebra problem", Manuscript, Oxford University 1980.