UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTETI
MATEMATIČKI FAKULTET
BEOGRAD

MIROSLAV D. ĆIRIĆ

DEKOMPOZICIJE POLUGRUPA I IDENTITETI

DOKTORSKA DISERTACIJA

BEOGRAD, 1991.

MENTOR:

Dr Stojan Bogdanović,
Ekonomski fakultet, Niš;

ČLANOVI KOMISIJE:

Dr Branka Alimpić,
Matematički fakultet, Beograd;

Dr Dragica Krgović,
Poljoprivredni fakultet, Beograd;

DATUM ODBRANE:

DATUM PROMOCIJE:

DEKOMPOZICIJE POLUGRUPA I IDENTITETI

U ovoj disertaciji, bavimo se problemima tračnih i idealskih dekompozicija polugrupa. Disertacija sadrži četiri glave.

I UVODNI POJMOVI I REZULTATI
II POLUMREŽE ARHIMEDOVIH POLUGRUPA
III NIL-EKSTENZIJE REGULARNIH POLUGRUPA
IV DEKOMPOZICIJE POLUGRUPA INDUKOVANE IDENTITETIMA

U Glavi I dajemo definicije i rezultate potrebne u daljem radu.

U Glavi II dajemo nove rezultate koji opisuju polumreže Arhimedovih polugrupa i karakterizacije raznih njihovih posebnih slučajeva, kao što su polumreže levo Arhimedovih i polumreže t-Arhimedovih polugrupa, normalne trake t-Arhimedovih polugrupa, polumreže nil-ekstenzija levih i desnih grupa i raznih tipova traka nil-ekstenzija grupa.

U Glavi III opisujemo polugrupe koje su nil-ekstenzije i retraktivne nil-ekstenzije raznih tipova regularnih polugrupa.

U Glavi IV opisujemo sve identitete koji indukuju dekompozicije u polumrežu Arhimedovih polugrupa, polumrežu potpuno Arhimedovih polugrupa, traku nil-ekstenzija grupa, nil-ekstenziju unije grupa, nil-ekstenziju trake grupa, retraktivnu nil-ekstenziju unije grupa itd.

KLJUČNE REČI: *Dekompozicija, idealska ekstenzija, traka, polumreža, Arhimedova polugrupa, unija grupa, nil-ekstenzija, retraktivna ekstenzija, identitet, varijetet.*

DECOMPOSITIONS OF SEMIGROUPS AND IDENTITIES

In this thesis we consider problems of band and ideal decompositions of semigroups. The thesis contains four chapters:

I INTRODUCTORY NOTIONS AND RESULTS
II SEMILATTICES OF ARCHIMEDEAN SEMIGROUPS
III NIL-EXTENSIONS OF REGULAR SEMIGROUPS
IV DECOMPOSITIONS OF SEMIGROUPS INDUCED BY IDENTITIES

In Chapter I we give basic notions and results.

In Chapter II we give new results which describe semilattices of archimedean semigroups in general and some special cases like semilattices of left archimedean and semilattices of t-archimedean semigroups, normal bands of t-archimedean semigroups, semilattices of nil-extensions of left and right groups and several types of bands of nil-extensions of groups.

In Chapter III we describe semigroups which are nil-extensions and retractive nil-extensions of several types of regular semigroups.

In Chapter IV we describe all identities which induce decompositions into a semilattice of archimedean semigroups, semilattice of completely archimedean semigroups, band of nil-extensions of groups, nil-extension of a union of groups, nil-extension of a band of groups, retractive nil-extension of a union of groups etc.

KEY WORDS: *Decomposition, ideal extension, band, semilattice, archimedean semigroup, union of groups, nil-extension, retractive extension, identity, variety.*

UVOD

Teorija plugrupa je aktuelna oblast matematike koja se razvija zadnjih šezdesetak godina. Sa jedne strane, Teorija polugrupa je nastala kao generalizacija nekih drugih matematičkih teorija, u prvom redu kao generalizacija Teorije grupa i Teorije prstena. Na taj način su se u Teoriju polugrupa prenosili mnogi problemi iz Teorije grupa i Teorije prstena. Posebno je značajna primena Teorije polugrupa na proučavanje multiplikativnih polugrupa prestena. Pri tome treba napomenuti da je klasa svih polugrupa mnogo šira od klase polugrupa koje mogu biti multiplikativne polugrupe nekog prstena, jer je poznato da postoje polugrupe koje ne mogu biti multiplikativne polugrupe niti jednog prstena. Sa druge strane, Teorija polugrupa se razvija i kao algebarska apstrakcija kompozicije preslikavanja skupa i kao takva ima značajnu primenu u mnogim oblastima matematike. Rezultati Teorije polugrupa nalaze primenu u Funkcionalnoj analizi, Diferencijalnoj geometriji, Topologiji itd. U poslednje vreme se metode Teorije polugrupa intenzivno primenjuju u oblasti rešavanja diferencijalnih jednačina, sistema diferencijalnih jednačina i u drugim oblastima Teorije diferencijalnih jednačina. Posebno je veliki uticaj Teorije polugrupa na Teoriju formalnih jezika i kodova i Algebarsku teoriju automata.

Početkom proučavanja Teorije polugrupa se smatra rad A.K.Suškeviča iz 1928. godine, o konačnim prostim polugrupama. Sa naročitim intenzitetom, Teorija polugrupa se razvija zadnjih decenija, o čemu svedoči i desetak monografija iz ove oblasti. Kao najznačajnije medju njima, možemo izdvojiti: E.S.LJAPIN, *Semigroups*, Fizmatgiz, Moskow, 1960 (na Ruskom); A.H.CLIFFORD AND G.B.PRESTON, *The algebraic theory of semigroups*, Amer. Math. Soc. Vol. I (1960), Vol II (1967); M.PETRICH, *Introduction to semigroups*, Merill, Columbus, Ohio, 1973; J.M.HOWIE, *An introduction to semigroup theory*, Academic Press, London, 1976; M.PETRICH, *Lectures in semigroups*, Akademie Verlag, Berlin, 1977; G.LALLEMENT, *Semigroups and combinatorial applikations*, J.Wiley Interscience, 1979; M.PETRICH, *Inverse semigroups*, J.Wiley Interscience, 1984; S.BOGDANOVIĆ, *Semigroups with a system of subsemigroups*, Inst. of Math. Novi Sad, 1985; itd. Takodje, postoji specijalizovani časopis iz ove oblasti koji pod nazivom *Semigroup Forum* izdaje poznata izdavačka kuća Springer-Verlag.

Centralni problem Opšte teorije polugrupa predstavlja problem opisivanja strukture polugrupa, dok su medju metodama za opisivanje strukture polugrupa najznačajnije dekompozicije polugrupa. Taj metod se sastoji u razbijanju polugrupe nekom kongruencijom, čime se problem opisivanja njene strukture svodi na dva problema. Prvi je opisivanje strukture svake od komponenti u toj dekompoziciji, a drugu je opisivanje veza koje postoje izmedju različitih komponenti, tj. izmedju elemenata iz različitih komponenti. Te veze su u velikoj meri odredjene strukturom faktor polugrupe koja odgovara toj dekompoziciji. Medjutim, kako je takva veza najčešće suvuše slaba za opisivanje nekih bogatijih struktura, to su u velikom broju slučajeva neophodne neke dodatne veze, koje se najčešće uspostavljaju nekim sistemima preslikavanja, ponekad sistemima (parcijalnih) homomorfizama. Što se tiče opisivanja strukture komponenti, od posebnog značaja su dekompozicije odredjenih "dobrih" osobina. Medju takvim dekompozicijama, istaći ćemo dva glavna tipa. Prvi tip su dekompozicije kod kojih svaka komponenta jeste podpolugrupa - to su *tračne dekompozicije* i odgovarajuća faktor polugrupa je traka. Drugi tip su dekompozicije koje imaju komponentu koja je ideal - to su *idealske dekompozicije,* ili, kako ih obično nazivamo, *idealske ekstenzije,* a odgovarajući faktor je polugrupa sa nulom. U slučaju idealskih dekompozicija, obično posmatramo dekompozicije indukovane Reesovim kongruencijama, koje su najmanje kongruencije sa datim idealom kao klasom.

Početak proučavanja tračnih dekompozicija polugrupa predstavljaju radovi A.H. Clifforda iz 1941. i 1954. god.. Posle toga, tom problematikom su se bavili mnogi poznati autori, najviše R.Croisot, T.Tamura, N.Kimura, M.Yamada, M.Petrich, M.S.Putcha, u novije vreme L.N.Ševrin, J.L.Galbiati, M.L.Veronesi i S.Bogdanović. Pažljivijom analizom rezultata dobijenih u tim istraživanjima, moža se primetiti da su posmatrane uglavnom polumreže polugrupa. Jedan od razloga tome je i veliki značaj koje polumrežne dekompozicije imaju i za opšte tračne dekompozicije, koji je posledica Cliffordovog rezultata da svaka traka polugrupa jeste polumreža pravougaonih traka polugrupa. Drugi važan razlog velikog interesovanja za polumrežne dekompozicije polugrupa je poznati Tamurin rezultat, po kome je svaku polugrupu moguće predstaviti kao polumrežu polumrežno nerazloživih polugrupa. Tim rezultatom je ukazano i na značaj proučavanja polumrežno nerazloživih polugrupa. Struktura tih polugrupa je još uvek maglovita, ali postoje mnoge bolje proučene podklase klase polumrežno nerazloživih polugrupa. Najšira od tih podklasa su *Arhimedove polugrupe.* One su veoma važna klasa polugrupa, koja obuhvata mnoge klase posebno značajnih polugrupa, kao što su proste i potpuno proste polugrupe, nil-ekstenzije prostih i potpuno prostih polugrupa itd. Sve ovo što je do sada rečeno naglašava značaj izučavanja *polumreža Arhimedovih polugrupa.* Osim toga, moguće je primetiti da većina do sada dobijenih rezultata iz oblasti polumrežnih dekompozicija spada u domen polumreža Arhimedovih polugrupa. Naprimer, tu spadaju rezultati iz napred pomenutih istraživanja A.H.Clifforda, R.Croisota, T.Tamure i N.Kimure itd. Više o polumrežama Arhimedovih polugrupa biće rečeno u narednim delovima ove disertacije. Ovde ćemo još napomenuti da je potpunu karakterizaciju čitave ove klase polugrupa dao M.S.Putcha 1973. godine. Neke druge karakterizacije ovih polugrupa će biti date u prvom poglavlju druge glave ove disertacije.

Idealske ekstenzije polugrupa, takodje je prvi počeo da proučava A.H.Clifford, u svom radu iz 1950. god. Osim njega, problemima idealskih ekstenzija su se bavili M.Petrich, P.A.Grillet, L.M.Gluskin, L.N.Ševrin, M.Yamada i drugi. Medju raznim tipovima idealskih ekstenzija, istaći ćemo nekoliko najznačajnijih. Prvi od njih su *nil-ekstenzije,* tj. idealske ekstenzije pomoću nil-polugrupa. U okviru ovog tipa, dosta se proučavaju i *nilpotentne ekstenzije,* tj. idealske ekstenzije pomoću nilpotentnih polugrupa. Drugi veoma značajan tip idealskih ekstenzija su retraktivne ekstenzije, odnosno idealske ekstenzije odredjene parcijalnim homomorfizmima. Retrakcije, odnosno parcijalni homomorfizmi, su veoma dobro sredstvo kako za konstrukciju idealskih ekstenzija, tako i za prenošenje raznih polugrupovnih osobina kroz konstrukcije. Početak njihovog proučavanja je u knjizi A.H.Clifforda i G.B.Prestona 1960. godine i radovima M.Petricha iz 1966. i 1967. godine.

Dosta proučavane su *inflacije polugrupa,* tj. retraktivne ekstenzije pomoću nilpotentnih polugrupa.

U ovoj disertaciji ćemo se baviti proučavanjem tračnih i idealskih dekompozicija polugrupa. Preciznije, proučavaćemo dekompozicije u polumrežu Arhimedovih polugrupa i razne njihove posebne slučajeve, i nil-ekstenzije regularnih polugrupa, sa raznim njihovim posebnim slučajevima. Treba napomenuti da se u tim proučavanjima veoma često dobri rezultati postižu kombinacijom i jednih i drugih metoda - i tračnih i idealskih dekompozicija. Osim toga, uglavnom ćemo razmatrati vezu koja postoji izmedju raznih tipova dekompozicija i nekih tipova algebarskih zakona. Neformalno, opisivanje polugrupa zakonima takvog tipa nazivamo opisivanjem pomoću elemenata i ideala (odnosno ideala, levih ideala, desnih ideala, bi-ideala). Moguće je dati i formalnu definicija ovog tipa zakona, ali za to u ovoj disertaciji nema velike potrebe.

Disertacija sadrži četiri glave. U Glavi I navodimo poznate definicije i tvrdjenja koja su nam neophodna za dalji rad.

U Glavi II dajemo opise polugrupa koje se mogu razložiti u polumrežu Arhimedovih polugrupa i razne posebne slučajeve istih. U poglavlju II 1. navodimo poznati rezultat M.S.Putchae i dajemo nove karakterizacije polumreža Arhimedovih polugrupa. Koristeći pojam radikala, dajemo i neke nove opise za polumreže levo Arhimedovih i polumreže t-Arhimedovih polugrupa. Osim toga, dajemo opise za polumreže nil-ekstenzija prostih i polumreže nil-ekstenzija potpuno prostih polugrupa. Takodje, dajemo neke nove rezultate koji se tiču dekompozicija u traku t-Arhimedovih polugrupa. Naime, opisujemo normalne i levo normalne trake t-Arhimedovih polugrupa. U poglavlju II 2. navodimo osnovne rezultate koji se odnose na dekompozicije u polumrežu potpuno Arhimedovih polugrupa. Takodje, dajemo nove rezultate koji opisuju polumreže nil-ekstenzija levih i desnih grupa i razne posebne tipove istih. U poglavljima II 3. i II 4. izučavamo polugrupe razložive u traku nil-ekstenzija grupa. U II 3. razmatramo opšti i neke posebne slučajeve, kao što su levo regularne, levo normalne i normalne trake π-grupa. U II 4. razmatramo dekompozicije u Rédeievu traku nil-ekstenzija grupa, koje predstavljaju veoma značajan tip dekompozicija.

U Glavi III se razmatrajue idealske i retraktivne ekstenzije raznih tipova regularnih polugrupa pomoću raznih tipova nil-polugrupa. U III 1. se razmatra opšti slučaj, tj. polugrupe koje su nil-ekstenzije regularnih polugrupa. Daje se rezultat S.Bogdanovića i M.Ćirića iz [18], koji opisuje opšti slučaj i razmatraju razni posebni slučajevi, kao što su nil-ekstenzije unije grupa, polumreže levih i desnih grupa, polumreže grupa itd. U III 2. razmatraju se retraktivne nil-ekstenzije regularnih polugrupa i daje se njihov opis pomoću poddirektnih proizvoda. U III 3. se daju nove karakterizacije retraktivnih nil-ekstenzija unije grupa i opisuju se mnogi specijalni slučajevi tih polugrupa. U poglavljima III 4. i III 5. razmatraju se se ratraktivne nil-ekstenzije trake grupa u opštem i nekim specijalnim slučajevima, kao što su retraktivne nil-ekstenzije levo regularnih, normalnih i levo normalnih traka grupa.

U Glavi IV se razmatraju dekompozicije polugrupa indukovane polugrupovnim identitetima. U IV 1. se razmatraju identiteti koji indukuju dekompozicije u polumrežu Arhimedovih polugrupa, u opštem i nekim specijalnim slučajevima, kao što su, naprimer, dekompozicije π-regularnih polugrupa u polumrežu potpuno Arhimedovih polugrupa. Kao posledica pomenutih tvrdjenja daje se rešenje jednog problema L.N.Ševrina i E.V.Suhanova. U IV 2. opisujemo identitete koji indukuju dekompoziciju π-regularnih polugrupa u traku nil-ekstenzija grupa i identitete koji indukuju dekompoziciju unije grupa u traku grupa. U IV 3. opisujemo identitete koji indukuju dekompoziciju u nil-ekstenziju unije grupa, kao i identitete koji indukuju dekompoziciju u nil-ekstenziju polugrupa nekih drugih tipova, kao što su polumreže levih grupa, polumreže grupa i trake grupa. U IV 4. razmatramo identitete koji indukuju dekompoziciju u retraktivnu nil-ekstenziju unije grupa i identitete koji indukuju dekompozicije u n-nilpotentne ekstenzije unije grupa, dok u IV 5. opisujemo identitete nad dvoslovnim alfabetom koji indukuju dekompoziciju u polumrežu Arhimedovih polugrupa i identitete koji indukuju dekompozicije u polumrežu levo Arhimedovih polugrupa, odnosno u polumrežu t-Arhimedovih polugrupa.

Na kraju bih se zahvalio Profesoru Stojanu Bogdanoviću, ne samo za pomoć koju mi je pružio pri izradi ove disertacije, već i na celokupnoj šestogodišnjoj saradnji, koja kao plod donosi rezultate predstavljene u ovoj disertaciji.

SADRŽAJ

GLAVA I

UVODNI POJMOVI I REZULTATI

U ovom poglavlju ćemo dati osnovne pojmove Teorije polugrupa i uvesti pojmove potrebne u daljem radu. Biće reči o nekim od najvažnijih koncepata teorije polugrupa kao što su ideali i idealske ekstenzije, tračne i polumrežne dekompozicije, Arhimedove polugrupe i razne podklase istih, kao i razni tipovi regularnosti.

I 1. OSNOVNI POJMOVI TEORIJE POLUGRUPA

U ovom odeljku definisaćemo osnovne pojmove iz Teorije polugrupa.

I 1.1. Neka su $A_1, A_2, ..., A_n$ neprazni podskupovi polugrupe S. Tada je

$$A_1 A_2 \cdots A_n = \{a_1 a_2 \cdots a_n | a_i \in A_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

Obično nećemo praviti razliku izmedju elementa polugrupe S i jednočlanog skupa koji ga sadrži. Tako ćemo, ako je $A_k = \{a\}$, pisati $A_1 \cdots A_{k-1} a A_{k+1} \cdots A_n$ i, ako je $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$, pisati A^n umesto $A_1 A_2 \cdots A_n$.

I 1.2. Neprazan podskup T polugrupe S je podpolugrupa od S ako je $T^2 \subseteq S$.

I 1.3. Element a polugrupe S je

nula od S ako je $ax = xa = a$ za sve $x \in S$;

jedinica od S ako je $ax = xa = x$ za sve $x \in S$.

Nulu polugrupe obično obeležavamo sa 0 a jedinicu sa 1. Sa S^1 obeležavamo polugrupu koja je nastala na taj način što smo polugrupi S pridružili element 1 koji nije iz S i dodefinisali operaciju tako da 1 bude jedinica u S^1. Polugrupu S^1 ćemo nazivati *jediničnim proširenjem* polugrupe S.

I 1.4. Polugrupa koja sadrži jedinicu je *monoid* .Monoid S sa jedinicom e je *grupa* ako za svaki element $a \in S$ postoji $x \in S$ tako da je $ax = xa = e$. *Podgrupa* polugrupe S je podpolugrupa od S koja je grupa.

I 1.5. Refleksivnu, antisimetričnu i tranzitivnu relaciju na skupu S nazivamo *parcijalnim uredjenjem* na S i obično označavamo sa "$\leq$".

I 1.6. Refleksivnu, simetričnu i tranzitivnu relaciju na skupu S nazivamo *relacijom ekvivalencije* na S . Relacija ekvivalencije ρ na polugrupi S je *desna (leva) kongruencija* na S ako za sve $a, b, c \in S$ iz $a\rho b$ sledi da je $ac\rho bc$ $(ca\rho cb)$. Relacija ρ na polugrupi S je *kongruencija* na S ako ρ jeste desna i leva kongruencija.

Ako ρ jeste kongruencija na polugrupi S tada skup $S/_\rho$ svih ρ-klasa sa multiplikacijom datom sa $(a\rho)(b\rho) = (ab)\rho$ jeste *faktor polugrupa* u odnosu na kongruenciju ρ.

I 1.7. LEMA. *Neka τ i ρ jesu kongruencije na polugrupi S takve da je $\tau \subseteq \rho$. Definišimo relaciju $\rho_{/\tau}$ sa*

$$(a\tau, b\tau) \in \rho_{/\tau} \quad \Leftrightarrow \quad (a, b) \in \rho \ .$$

Tada $\rho_{/\tau}$ jeste kongruencija na $S_{/\tau}$ i

$$(S_{/\tau})_{/\rho_{/\tau}} \cong S_{/\rho} \ .$$

I 1.8. Neka S i T jesu polugrupe. Preslikavanje $\varphi : S \to T$ je *homomorfizam* od S u T ako je $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ za sve $a, b \in S$. Ako φ jeste *jedan-jedan* i *na* , tada φ jeste *izomorfizam* ,kažemo da su polugrupe S i T izomorfne i pišemo $S \cong T$.

Homomorfizam je *monomorfizam* ako je *jedan-jedan,*i *epimorfizam* ako je *na*. Izomorfizam polugrupe na sebe je *automorfizam.*

I 1.9. Element a polugrupe S je *idempotent* ako je $a^2 = a$. Skup svih idempotenata polugrupe S označavamo sa $E(S)$. Polugrupa čiji su svi elementi idempotenti je *traka.*

I 1.10. Komutativnu traku nazivamo *polumrežom* .

I 1.11. Polugrupa s je *levo (desno) nulta traka* ako je $ab = a$ $(ab = b)$ za sve $a, b \in S$. S je *singularna traka* ako S jeste ili levo ili desno nulta traka.

I 1.12. Neka su I i Λ neprazni skupovi. Na Dekartovom proizvodu $S = I \times \Lambda$ definišimo operaciju sa:

$$(i,\lambda)(j,\mu) = (i,\mu),$$

$i, j \in I, \lambda, \mu \in \Lambda$. Tada S sa tako definisanom multiplikacijom jeste traka koju nazivamo *pravougaonom trakom* .Ako je $|\Lambda| = 1(|I| = 1)$, tada S jeste levo (desno) nulta traka.

I 1.13.TEOREMA. *Sledeći uslovi za traku S su ekvivalentni:*

(i) S *je pravougaona traka;*
(ii) S *je direktan proizvod levo i desno nulte trake;*
(iii) $(\forall a, b \in S) ab = ba \Rightarrow a = b$;
(iv) $(\forall a, b \in S) aba = a$;
(v) $(\forall a, b, c \in S) abc = ac$.

I 1.14. Traka S je *levo (desno) regularna* ako je

$$ax = axa \qquad (xa = axa)$$

za sve $a, x \in S$. Traka S je *levo (desno) normalna* ako je

$$axy = ayx \qquad (xya = yxa)$$

za sve $a, x, y \in S$. Traka S je *normalna* ako je

$$axya = ayxa$$

za sve $a, x, y \in S$.

I 1.15. Neka S jeste polugrupa i $E(S) \neq \emptyset$. Relacija $\leq$ definisana na $E(S)$ sa:

$$a \leq b \Leftrightarrow ab = ba = a$$

je parcijalno uredjenje na $E(S)$ i nazivamo ga *prirodnim uredjenjem* na $E(S)$.

Traka u kojoj su svaka dva elementa uporediva , tj. $a \leq b$ ili $b \leq a$ za sve a, b, je *lanac* .Jasno je da svaki lanac jeste polumreža.

I 1.16. Idempotent e polugrupe S bez nule je *primitivan* ako je on minimalan u odnosu na parcijalno uredjenje na $E(S)$, tj. ako

$$f = ef = fe \Rightarrow f = e.$$

Nenula idempotent e polugrupe sa nulom S je *primitivan* ako je minimalan u skupu svih nenula idempotenata polugrupe S.

I 1.17. Ako je a element polugrupe S tada je

$$< a >= \{a, a^2, a^3, \ldots\}$$

ciklična podpolugrupa od S generisana elementom a. Kardinalni broj polugrupe $< a >$ je ***red elementa*** a, u oznaci $r(a)$.

I 1.18. TEOREMA. *Neka a jeste element polugrupe S. Tada je $< a >$ ili izomorfna aditivnoj polugrupi $(Z^+, +)$ svih pozitivnih celih brojeva ili postoje $m, r \in Z^+$ takvi da je $a^r = a^{r+m}$ i*

$$< a >= \{a, a^2, \ldots, a^{m+r-1}\},$$

pri čemu je $r(a) = m + r - 1$ i

$$C_a = \{a^r, a^{r+1}, \ldots, a^{r+m-1}\}$$

je ciklična podgrupa od $< a >$ reda m.

I 1.19. Neka je a element polugrupe S konačnog reda. ***Period elementa*** a, u oznaci $p(a)$, je red grupe C_a date u I 1.17. Jasno je da za $m, n \in Z^+$ takve da $a^n, a^m \in C_a$ iz $p(a) \mid m - n$ sledi da je $a^m = a^n$.

Polugrupa S je ***periodična*** ako svaki njen element jeste konačnog reda. S je periodična ako i samo ako za svaki element iz S postoji neki njegov stepen koji je idempotent.

I 1.20. Neka S jeste polugrupa sa nulom. Element $a \in S$ je ***nilpotent*** ako postoji $n \in Z^+$ tako da je $a^n = 0$. Skup svih nilpotenata polugrupe S označavamo sa $Nil(S)$.

Polugrupa S sa nulom 0 je ***nil-polugrupa*** ako je $Nil(S) = S$, tj. ako za svaki $a \in S$ postoji $n \in Z^+$ tako da je $a^n = 0$. Ako je $S^n = 0, n \in Z^+, n \geq 2$, tada S jeste ***n-nilpotentna polugrupa*** .Najmanji broj $n \in Z^+$ takav da je $S^n = 0$ nazivamo ***klasom nilpotentnosti polugrupe*** S. Polugrupa S je ***nilpotentna*** ako je n-nilpotentna za neki $n \in Z^+$.

I 1.21. Neka A jeste neprazni podskup polugrupe S. ***Radikal skupa*** A je skup $\sqrt{A}$ definisan sa:

$$\sqrt{A} = \{x \in S \mid (\exists n \in Z^+)\ x^n \in A\}.$$

Ako je A ideal (levi, desni, bi-), tada $\sqrt{A}$ nazivamo radikalom ideala (levog, desnog, bi-).

I 1.22. Neka $\{S_i\}_{i \in I}$ jeste familija polugrupa. Polugrupa S je ***poddirektan proizvod familije*** $\{S_i\}_{i \in I}$ polugrupa ako je S izomorfna podpolugrupi T direktnog proizvoda familije polugrupa $\{S_i\}_{i \in I}$ za koju je $\pi_i(T) = S_i$, za svaki $i \in I$, pri čemu sa π_i označavamo projekcioni homomorfizam iz $\Pi_{i \in I} S_i$ na S_i, $i \in I$.

I 1.23. Neka S jeste polugrupa sa nulom 0. Element $a \in S$, $a \neq 0$, je ***delitelj nule*** ako postoji element $b \in S$ različit od 0 takav da je $ab = 0$ ili $ba = 0$.

I 2. IDEALI I IDEALSKE EKSTENZIJE

U ovom odeljku uvodimo neke od najvažnijih pojmova Teorije polugrupa kao što su pojam ideala, idealske ekstenzije i proste polugrupe.

I 2.1. Podskup A polugrupe S je:
levi ideal od S ako je $SA \subseteq A$;
desni ideal od S ako je $AS \subseteq A$;
ideal (dvostrani) od S ako je $SA \cup AS \subseteq A$;
bi-ideal od S ako je $ASA \subseteq A$.

I 2.2. Neka a jeste element polugrupe S. *Glavni ideal* od S *generisan elementom* a je presek svih ideala od S koji sadrže a, i obeležavamo ga sa $J(a)$. *Glavni levi ideal* od S *generisan elementom* a je presek svih levih ideala od S koji sadrže a, i obeležavamo ga sa $L(a)$. Dualno se definiše glavni desni ideal koji sadrži element a i označava sa $R(a)$. Jasno je da je

$$J(a) = a \cup aS \cup Sa \cup SaS \ , \ L(a) = a \cup Sa \ , \ R(a) = a \cup aS \ .$$

I 2.3. Relacije $\mathcal{J}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{H}$ definisane na polugrupi S sa:

$$\begin{aligned} a \mathcal{J} b &\Leftrightarrow J(a) = J(b) \ , \\ a \mathcal{L} b &\Leftrightarrow L(a) = L(b) \ , \\ a \mathcal{R} b &\Leftrightarrow R(a) = R(b) \ , \\ \mathcal{H} &= \mathcal{L} \cap \mathcal{R} \ , \end{aligned}$$

$a, b \in S$, su *Greenove relacije* na polugrupi S. Ove relacije su relacije ekvivalencije i sa J_a, L_a, R_a, H_a označavamo redom $\mathcal{J}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{H}$ klasu koja sadrži elelemnt a polugrupe S.

I 2.4. Polugrupa S je *levo (desno) prosta* ako S jeste jedini njen levi (desni) ideal. Polugrupa S je *prosta* ako S jeste jedini njen ideal.

Polugrupa S sa nulom 0 je *0-prosta* ako važe sledeći uslovi
(i) $\{0\}$ i S su jedini ideali od S;
(ii) $S^2 \neq \{0\}$.

I 2.5. LEMA. *Neka S jeste polugrupa. Tada S jeste levo (desno) prosta ako i samo ako je $Sa = S(aS = S)$ za sve $a \in S$. S je prosta ako i samo ako je $SaS = S$ za sve $a \in S$.*

I 2.6. Neka T jeste ideal polugrupe S. Relacija σ koja je na S definisana sa:

$$x \sigma y \Leftrightarrow (x, y \in T \ \vee \ x = y) \quad (x, y \in S)$$

je *Reesova kongruencija na* S *indukovana idealom* T i faktor polugrupa $S/_\sigma$ se naziva *Reesovom faktor polugrupom* u oznaci $S/_T$. Jasno je da T jeste nula u $S/_T$.

I 2.7. Polugrupa S je *idealska ekstenzija* polugrupe T pomoću polugrupe sa nulom Q ako T jeste ideal od S i Reesova faktor polugrupa $S/_T$ je izomorfna sa Q. Pri tome, obično, identifikujemo Q sa polugrupom koja nastaje na taj način što na skupu $(S-T)\cup 0$ definišemo operaciju " $*$ " sa:

$$x * y = \begin{cases} xy & \text{ako } x, y, xy \in S - T \\ 0 & \text{ako } xy \in T \end{cases}.$$

I 2.8. Polugrupa S je *nil-ekstenzija* polugrupe T ako $S/_T$ jeste nil-polugrupa. U tom slučaju kažemo da T jeste *nil-ideal.*

I 2.9. Podpolugrupa T polugrupe S je *retrakt* od S ako postoji homomorfizam $\varphi : S \to T$ za koji važi

$$\varphi(t) = t \qquad \text{za sve } t \in T.$$

U tom slučaju φ nazivamo *retrakcijom.* Ako pri tome T jeste ideal od S, tada kažemo da T jeste *retraktivni ideal* od S i S jeste *retraktivna ekstenzija* od S.

I 2.10. PROPOZICIJA. *Ako* S *jeste idealska ekstenzija monoida* T *sa jedinicom* e *tada preslikavanje* $\varphi : S \to T$ *definisano sa:*

$$\varphi(x) = xe \qquad (x \in S)$$

jeste ratrakcija od S *na* T.

I 2.11. Neka je $n \in Z^+$. *Polugrupa* S *je* *n-inflacija* polugrupe T ako S jeste retraktivna ekstenzija od T pomoću $(n+1)$-nilpotentne polugrupe (tj. ako S jeste retraktivna ekstenzija od T i $S^{n+1} \subseteq T$).

Za $n = 1$ dobijamo pojam *inflacije* koji su uveli A.H.Clifford i G.B.Preston u [30], dok za $n = 2$ dobijamo *jaku inflaciju* koju je uveo M.Petrich u [56]. Oni su za te polugrupe dali i odgovarajuće konstrukcije. U opštem slučaju, za bilo koje n, pojam n-inflacije su uveli S.Bogdanović i S.Milić u [22].

I 3. π-REGULARNE POLUGRUPE

Kao i mnogi drugi pojmovi iz Teorije polugrupa, tako je i pojam regularnosti najpre uveden u Teoriju prstena i uveo ga je J.von Neuman,[50]. Medjutim, mnogo značajniju ulogu regularnost je imala, i još uvek je ima u Teoriji polugrupa. π-regularnost, generalizaciju regularnosti, prvi je uveo G.Azumaya,[4], 1954.god., takodje u Teoriji prstena, ali je ovo svojstvo više proučavano u Teoriji polugrupa i to pod raznim nazivima: kvaziregularnost kod M.S.Putchae, J.L.Galbiatieve i M.L.Veronesieve, stepeno-regularnost a potom π-regularnost u radovima S.Bogdanovića i S.Milića, eventualna regularnost kod D.Easdowna i R.Edwardsa. π-regularne polugrupe se intenzivno proučavaju u toku poslednje decenije. U ovom odeljku ćemo takodje proučavati i neke druge tipove regularnosti.

I 3.1. Element a polugrupe S je *regularan* ako postoji element $x \in S$ takav da je $a = axa$, tj. ako je $a \in aSa$. Skup svih regularnih elemenata polugrupe S obeležavamo sa $Reg(S)$ i nazivamo *regularnim delom polugrupe* S. Polugrupa S je *regularna* ako svaki njen element jeste regularan.

I 3.2. LEMA. *Neka a jeste regularan element polugrupe S. Tada postoji element $x \in S$ takav da je $a = axa$ i $x = xax$.*

I 3.3. PROPOZICIJA.[15]. *Neka S jeste polugrupa i $Reg(S) \neq \emptyset$. Tada $Reg(S)$ jeste podpolugrupa od S ako i samo ako $< E(S) >$ jeste regularna podpolugrupa od S.*

I 3.4. Element a polugrupe S je *potpuno regularan* ako postoji element $x \in S$ takav da je $a = axa$ i $ax = xa$. Polugrupa S je *potpuno regularna* ako svaki njen element jeste potpuno regularan. U skladu sa I 3.6., potpuno regularnu polugrupu nazivamo i *unijom grupa.* Skup svih potpuno regularnih elemenata polugrupe S ćemo obeležavati sa $Gr(S)$ i nazivati *grupnim delom* polugrupe S.

I 3.5. LEMA. *Za element a polugrupe S su sledeći uslovi ekvivalentni:*
(i) a *je potpuno regularni element;*
(ii) a *leži u nekoj podgrupi od* S;
(iii) $a \in a^2Sa$.

I 3.6. TEOREMA. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*
(i) S *je potpuno regularna;*
(ii) S *je (disjunktna) unija grupa;*
(iii) $(\forall a \in S)\ a \in aSa^2$.

I 3.7. Element a polugrupe S je *π-regularan* ako postoje $n \in Z^+$ i $x \in S$ tako da je $a^n = a^nxa^n$ (odnosno $a^n \in a^nSa^n$). Drugim rečima, a je π-regularan ako je neki njegov stepen regularan. Polugrupa S je *π-regularna* ako svaki njen element jeste π-regularan.

I 3.8. Element a polugrupe S je *potpuno-π-regularan* ako postoje $n \in Z^+$ i $x \in S$ tako da je $a^n = a^nxa^n$ i $a^nx = xa^n$. Polugrupa S je *potpuno-π-regularna* ako je svaki njen element potpuno-π-regularan.

I 3.9. TEOREMA. *Neka e jeste idempotent polugrupe S. Tada*

$$G_e = \{a \in S \mid a = ea = ae \ , \ (Ea'eS) \ e = aa' = a'a \ \}$$
$$= \{a \in S \mid a \in eS \cap Se \ , \ e \in aS \cap Sa \ \} \ ,$$

jeste maksimalna podgrupa od S koja sadrži e kao svoju jedinicu.

I 3.10. TEOREMA. *Neka e i f jesu različiti idempotenti polugrupe S. Tada je $G_e \cap G_f = \emptyset$.*

Sledeća teorema predstavlja jedan veoma važan rezultat koji je dokazao W.D.Munn [49]:

I 3.11. MUNNOVA LEMA. *Neka x jeste element polugrupe S takav da x leži u nekoj podgrupi G od S, za neki $n \in Z^+$. Ako e jeste jedinica grupe G, tada*
(a) $ex = xe \in G_e$,
(b) $x^m \in G_e$ za svaki $m \geq n$.

Naredna teorema daje nam karakterizaciju potpuno-π-regularnih polugrupa.

I 3.12. TEOREMA. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*
(i) S je potpuno-π-regularna;
(ii) za svaki element iz S postoji neki njegov stepen koji leži u nekoj podgrupi od S;
(iii) $(\forall a \in S)(\exists n \in Z^+) \ a \in a^n S a^n$;
(iv) $(\forall a \in S)(\exists n \in Z^+) \ a \in a^{2n} S a^{2n}$.

I 3.13. LEMA. *Ako je S π-regularna polugrupa i svi njeni idempotenti su primitivni, tada S jeste potpuno-π-regularna i njene maksimalne podgrupe su oblika*

$$G_e = eSe \ , \ e \in E(S) \ .$$

I 3.14. LEMA. *Polugrupa S je potpuno-π-regularna i $Gr(S) = E(S)$ ako i samo ako za svaki $a \in S$ postoji $n \in Z^+$ tako da je $a^n = a^{n+1}$.*

I 3.15. Neka S jeste potpuno-π-regularna polugrupa i neka je $T_e = \sqrt{G_e}$, $e \in E(S)$. Definišimo relaciju τ na S sa:

$$x \ \tau \ y \quad \Leftrightarrow \quad (\exists e \in E(S)) \ x, y \in T_e \ .$$

Koristeći I 3.11., lako se pokazuje da τ jeste relacija ekvivalencije.

I 3.16. Element a polugrupe S je ***intra-regularan*** ako je $a \in Sa^2S$. Polugrupa S je ***intra-regularna*** ako svaki njen element jeste intra-regularan.

Element a polugrupe S je *intra-(levo-,desno-)π-regularan* ako za svaki $a \in S$ postoji $n \in Z^+$ tako da:

$$a^n \in Sa^{2n}S \ (\ a^n \in Sa^{n+1} \ , \ a^n \in a^{n+1}S \ ) \ .$$

Polugrupa S je *intra-(levo-,desno-)π-regularna* ako i samo ako svaki njen element jeste intra-(levo-,desno-)π-regularan.

I 4. ARHIMEDOVE POLUGRUPE

U ovom odeljku biće reči o Arhimedovim polugrupama i nekim podklasama te klase polugrupa, kao što su, naprimer, nil-ekstenzije prostih polugrupa (potpuno Arhimedove polugrupe), potpuno proste polugrupe itd.

I 4.1. Polugrupa S je *Arhimedova* ako za sve $a, b \in S$ postoji $n \in Z^+$ tako da je $a^n \in SbS$.

Polugrupa S je *levo (desno) Arhimedova* ako za sve $a, b \in S$ postoji $n \in Z^+$ tako da je $a^n \in Sb$ ($a^n \in bS$).

Polugrupa S je *t-Arhimedova* ako za sve $a, b \in S$ postoji $n \in Z^+$ tako da je $a^n \in bS \cap Sb$ (tj. ako S jeste levo i desno Arhimedova).

Jasno je da su Arhimedove (levo Arhimedove, desno Arhimedove, t-Arhimedove) polugrupe uopštenja prostih (levo prostih, desno prostih, grupa) polugrupa.

I 4.2. Polugrupa S je *stepeno-vezana* ako za sve $a, b \in S$ postoje $m, n \in Z^+$ tako da je $a^m = b^n$.

I 4.3. Polugrupa S je *potpuno prosta* ako S jeste prosta i sadrži primitivni idempotent. Polugrupa S sa nulom je *potpuno 0-prosta* ako je 0-prosta i sadrži primitivni idempotent.

Potpuno 0-proste i potpuno proste polugrupe su jedna od prvih proučavanih klasa polugrupa. D.Rees,[79], je 1940.god. dao lepe konstrukcije tih polugrupa, koje nazivamo Reesovim matričnim polugrupama.

Sledećom teoremom data je još jedna veza izmedju prostih i potpuno prostih polugrupa:

I 4.4. TEOREMA. *Polugrupa S je potpuno prosta ako i samo ako S jeste prosta i potpuno π-regularna.*

I 4.5. ***Pravougaona grupa*** je polugrupa koja je izomorfna direktnom proizvodu grupe i pravougaone trake. Ovaj pojam je dobijen direktno iz konstrukcije Reesovih matričnih polugrupa.

Veza izmedju potpuno prostih polugrupa i pravougaonih grupa data je sledećim rezultatom:

I 4.6. TEOREMA. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*
(i) S *je pravougaona grupa;*
(ii) S *je potpuno prosta i* $E(S)$ *je podpolugrupa od* S;
(iii) S *je regularna i* $E(S)$ *je pravougaona traka.*

I 4.7. Polugrupa S je ***leva (desna) grupa*** ako S jeste izomorfna direktnom proizvodu grupe i levo (desno) nulte trake.

I 4.8. TEOREMA. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*
(i) S *je leva grupa;*
(ii) S *je levo prosta i sadrži idempotent;*
(iii) S *je regularna i* $E(S)$ *je levo nulta traka;*
(iv) $a \in aSx$ za sve $a, x \in S$.

Dualna teorema važi za desne grupe.

I 4.9. TEOREMA [11]. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*
(i) S *je nil-ekstenzija proste polugrupe;*
(ii) $(\forall a, b \in S)(\exists n \in Z^+)\ a^n \in Sb^{2n}S$;
(iii) S *je Arhimedova intra-π-regularna polugrupa.*

I 4.10. TEOREMA [11]. *Polugrupa S je nil-ekstenzija levo proste polugrupe ako i samo ako S jeste levo Arhimedova i levo-π-regularna.*

I 4.11. Polugrupa S je ***potpuno Arhimedova*** ako S jeste Arhimedova i sadrži primitivni idempotent.

Karakterizaciju ovog veoma važnog tipa polugrupa dao je J.Chrislock,[24], 1969.god. rezultatom čija se formulacija može dati na sledeći način:

I 4.12. TEOREMA. *Polugrupa S je potpuno Arhimedova ako i samo ako S jeste nil-ekstenzija potpuno proste polugrupe.*

I 4.13. Neka G jeste podgrupa polugrupe S. Ako za svaki $a \in S$ postoji $n \in Z^+$ tako da $a^n \in G$, tada S jeste *π-grupa.*

I 4.14. TEOREMA. *Sledeći uslovi za polugrupu* S *su ekvivalentni:*

(i) S *je* π*-grupa;*

(ii) S *je nil-ekstenzija grupe;*

(iii) S *je* π*-regularna i sadrži tažno jedan idempotent;*

(iv) S *je Arhimedova polugrupa sa tačno jednim idempotentom.*

I 5. TRAČNE I POLUMREŽNE DEKOMPOZICIJE

U ovom odeljku biće reči o tračnim i polumrežnim dekompozicijama polugrupa koje je, kao i mnoge druge fundamentalne pojmove Teorije polugrupa, prvi počeo da proučava A.H.Clifford u radovima [27] iz 1941.god i [29] iz 1954.god. a nastavili mnogi drugi poznati autori.

I 5.1. Neka $\mathcal{X}$ jeste neka klasa polugrupa. Kongruencija ρ na polugrupi S je *$\mathcal{X}$-kongruencija* ako faktor polugrupa $S_{/\rho}$ je u klasi $\mathcal{X}$. U tom slučaju indukovanu particiju na S nazivamo *$\mathcal{X}$-dekompozicijom.* Ako ρ jeste najmanja $\mathcal{X}$-kongruencija (ako takva postoji) tada odgovarajuća particija jeste jeste *najveća $\mathcal{X}$-dekompozicija* na S i odgovarajuća faktor polugrupa je *najveća $\mathcal{X}$-homomorfna slika* od S.

I 5.2. Ako $\mathcal{X}$ jeste klasa traka, onda govorimo o *tračnoj kongruenciji* i *tračnoj dekompoziciji,*ako $\mathcal{X}$ jeste klasa polumreža (lanaca), onda govorimo o *polumrežnoj (lanačnoj) kongruenciji* i *polumrežnoj (lanačnoj) dekompoziciji.*Ako $\mathcal{X}$ jeste klasa pravougaonih traka, tada izraz "pravougaono tračna kongruencija (dekompozicija)" zamenjujemo sa *"matrična kongruencija (dekompozicija)".*Slično, umesto o "levo-nulto tračnoj kongruenciji (dekompoziciji)" govorimo o *"levo-nultoj kongruenciji (dekompoziciji)".*

Dekompozicije indukovane Reesovim kongruencijama (tj. idealima) nazivamo *idealskim dekompozicijama.* Ukoliko odgovarajuća faktor polugrupa jeste nil-polugrupa, tada govorimo o *nil-dekompoziciji.* Na isti način definišemo *nilpotentnu dekompoziciju.*

I 5.3. Neka ρ jeste tračna kongruencija na polugrupi S. Označimo ρ-klase sa S_i, gde $i \in I$, pri čemu I jeste traka izomorfna sa $S_{/\rho}$ i izomorfizam je dat sa $i \mapsto S_i$. Tada kažemo da S jeste traka I polugrupa S_i, $i \in I$. Ako I pripada nekoj podklasi $\mathcal{Y}$ klase svih traka i svaka klasa S_i jeste iz neke klase $\mathcal{X}$ polugrupa, tada kažemo da S jeste *$\mathcal{Y}$-traka I polugrupa S_i* iz klase $\mathcal{X}$. Ako I jeste polumreža (lanac), tada govorimo o *polumreži (lancu) I* polugrupa S_i iz klase $\mathcal{X}$. Ako je I pravougaona, levo (desno) nulta, normalna, levo)desno) regularna, levo (desno) normalna traka, tada govorimo o *pravougaonoj, levo (desno) nultoj, normalnoj, levo (desno) regularnoj, levo (desno) normalnoj traci* I *polugrupa* S_i *iz klase* $\mathcal{X}$.

I 5.4. Polugrupa S je *ordinalna suma* Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, ako S jeste lanac Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, i za sve $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha < \beta$, $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$ povlači da je $ab = ba = a$.

I 5.5. Neka $\mathcal{X}$ jeste neka klasa traka. Polugrupa S je $\mathcal{X}$*-nerazloživa* ako $S \times S$ jeste jedina $\mathcal{X}$-kongruencija na S. Tako možemo govoriti o *tračno, polumrežno, matrično nerazloživim polugrupama* itd.

I 5.6. Na svakoj polugrupi S možemo definisati relaciju $\mathcal{K}$ sa:

$$x\mathcal{K}y \quad \Leftrightarrow \quad (\exists m,n \in Z^+)\ x^m = y^n\ (\ x,y \in S\ )\ .$$

Relacija $\mathcal{K}$ jeste relacija ekvivalencije i svaka $\mathcal{K}$-klasa sadrži najviše jedan idempotent. Svaka $\mathcal{K}$-klasa polugrupe S sadrži idempotent ako i samo ako S jeste periodična.

Presek svih kongruencija koje sadrže $\mathcal{K}$ (tj. kongruencija na S generisana relacijom $\mathcal{K}$) je, jasno, neprazan i on jeste *najmanja tračna kongruencija na polugrupi* S,[59]. Prema tome, postoji najmanja tračna kongruencija na S i najveća tračna dekompozicija polugrupe S.

Sa K_a označavamo $\mathcal{K}$-klasu polugrupe S koja sadrži element a polugrupe S. Ako e jeste idempotent, tada je $K_e = \{x \in S \mid (\exists n \in Z^+)\ x^n = e\ \}$. Takodje, polugrupa S je stepeno-vezana ako i samo ako sadrži tačno jednu $\mathcal{K}$-klasu, pa je stepeno-vezana polugrupa tračno nerazloživa.

Primetimo da na potpuno π-regularnoj polugrupi je $\mathcal{K} \subseteq \tau$, dok je na periodičnoj polugrupi $\mathcal{K} = \tau$ (što sledi prema I 3.11.).

Trake polugrupa iz raznih klasa su razmatrane u mnogim radovima i o njima će više reči biti u narednim glavama. Ovde ćemo navesti neke rezultate iz radova S.Bogdanovića, [6,7,8], koji daju karakterizaciju traka stepeno vezanih polugrupa:

I 5.7. TEOREMA. *Sledeći uslovi za polugrupu* S *su ekvivalentni:*

(i) S *je traka stepeno vezanih polugrupa;*

(ii) $(\forall a,b \in S)(\forall m,n \in Z^+)(\exists r,s \in Z^+)\ (ab)^r = (a^m b^n)^s$;

(iii) $(\forall a,b \in S)\ ab\mathcal{K}a^2b\mathcal{K}ab^2$.

I 5.8. NAPOMENA. Primetimo da se uslov (ii) u I 5.7. može zapisati u sledećem obliku:

(ii^*) $(\forall a,b \in S)(\exists m,n \in Z^+)\ ab\mathcal{K}a^m b^n$.

Takodje ćemo dati i nekoliko rezultata koji će nam biti od velike koristi u daljem radu. Prvi od njih direktna je posledica konstrukcije Reesove matrične polugrupe, dok druga sledi direktno iz definicije I 4.7.

I 5.9. LEMA. S *je potpuno prosta polugrupa ako i samo ako* S *jeste pravougaona traka grupa.*

I 5.10. LEMA. *S je leva (desna) grupa ako i samo ako S jeste levo nulta (desno nulta) traka grupa.*

U ovom odeljku će više reči biti o polumrežnim dekompozicijama. Polumrežne dekompozicije je prvi počeo da proučava A.H.Clifford u radu [27] iz 1941.god. U tom radu je dokazan sledeći veoma važni rezultat:

I 5.11. TEOREMA. *S je unija grupa (potpuno regularna polugrupa) ako i samo ako S jeste polumreža potpuno prostih polugrupa.*

Iz ovog rezultata i iz I 4.6. se dobija sledeći rezultat:

I 5.12. TEOREMA. *S je polumreža pravougaonih grupa ako i samo ako S jeste potpuno regularna i $E(S)$ je podpolugrupa od S.*

Posledica Teoreme I 5.11. je i sledeći rezultat Clifforda iz istog rada (koji je dokazao i Mc.Lean 1952.god.,[45]):

I 5.13. TEOREMA. *S je traka ako i samo ako S jeste polumreža pravougaonih traka.*

Iz I 5.13. dobijamo još jednu posledicu dokazanu u [29]:

I 5.14. PROPOZICIJA. *Neka $\mathcal{X}$ jeste neka klasa polugrupa. Ako S jeste traka polugrupa iz $\mathcal{X}$, tada S jeste polumreža polugrupa koje su pravougaone trake polugrupa iz $\mathcal{X}$.*

Malo opštiju teoremu od Teoreme I 5.11. Clifforda dokazao je Croisot,[31], 1953.god. i ona glasi:

I 5.15. TEOREMA. *S je intra-regularna polugrupa ako i samo ako S jeste polumreža prostih polugrupa.*

Veliki doprinos izučavanju polumrežnih dekompozicija dao je T.Tamura koji je u saradnji sa nekolicinom drugih autora, u nizu radova, proučavao najveću polumrežnu dekompoziciju polugrupa. Egzistenciju najmanje polumrežne kongruencije na proizvoljnoj polugrupi S, koju ćemo označavati sa ρ_0, dokazali su T.Tamura i N.Kimura 1955.god. u radu [100], a opisao M.Yamada 1955.god. u radu [106]. U radovima T.Tamure, [93] iz 1956.god. i [94] iz 1964.god. je dokazana polumrežna nerazloživost ρ_0-klasa, na dva različita načina. Koristeći neke druge pristupe, M.Petrich je u radu [53] iz 1964.god. dao ekvivalentni rezultat. Lepe karakterizacije najmanje polumrežne kongruencije na proizvoljnoj polugrupi dali su T.Tamura,[98], 1972.god. i M.S.Putcha,[68], 1973.god. Njihovim korišćenjem, M.S.Putcha je 1973.god. u radu [68] opisao klasu svih polugrupa koje su polumreže Arhimedovih polugrupa, o čemu će biti reči u narednoj glavi. Vezano za polumrežnu dekompoziciju polugrupa,interesantan je i rad M.S.Putche i J.Weissglassa,[71], iz 1971.god. u kome je data karakterizacija polumreže polugrupa od kojih svaka ima najviše jedan idempotent (pri tome se pokazuje da svaka od tih polugrupa koja sadrži idempotent ima grupu ideal).

Sledeći važan rezultat je direktna posledica Tamurine karakterizacije polumrežno nerazložive polugrupe iz [98]:

I 5.16. PROPOZICIJA. *Arhimedova polugrupa je polumrežno nerazloživa.*

Na kraju ćemo dati dva rezultata potrebna u daljim razmatranjima:

I 5.17. PROPOZICIJA. *Neka $\mathcal{X}$ jeste jedna od sledećih klasa polugrupa: regularne, intra-regularne, potpuno regularne, π-regularne, intra-π-regularne, levo π-regularne, potpuno π-regularne, periodične polugrupe. Neka S jeste polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$. Tada S jeste iz klase $\mathcal{X}$ ako i samo ako S_α jeste iz klase $\mathcal{X}$ za svaki $\alpha \in Y$.*

I 5.18. PROPOZICIJA. *Neka $\mathcal{X}$ jeste jedna od sledećih klasa polugrupa: potpuno regularne, potpuno π-regularne, periodične polugrupe. Neka S jeste traka I polugrupa S_i, $i \in I$. Tada S jeste iz klase $\mathcal{X}$ ako i samo ako S_i jeste iz klase $\mathcal{X}$ za svaki $i \in I$.*

I 6. IDENTITETI I VARIJETETI

U ovom poglavlju ćemo uvesti osnovne pojmove vezane za slobodne polugrupe, identitete i varijetete.

I 6.1. Neka je A neprazan podskup koji ćemo nazivati *alfabetom* i čije ćemo elemente nazivati *slovima*. *Reč* nad alfabetom A je svaki neprazan konačni niz $x_1x_2\dots x_n$ elemenata iz A. Dve reči $x_1x_2\dots x_n$ i $y_1y_2\dots y_m$ nad alfabetom A su jednake ako su jednake kao nizovi, tj. ako je $m = n$ i $x_i = y_i$ za svaki $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Na skupu A^+ svih reči nad alfabetom A definišimo operaciju

$$x_1x_2\dots x_n \cdot y_1y_2\dots y_m = x_1x_2\dots x_ny_1y_2\dots y_m .$$

Tu operaciju nazivamo *konkatenacijom (dopisivanjem)*. Skup A^+ sa tom operacijom predstavlja polugrupu koju nazivamo *slobodnom polugrupom* nad alfabetom A.

Priroda problema koji će biti razmatrani u ovom radu je takva da će uglavnom biti posmatrane slobodne polugrupe nad konačnim alfabetima. Zbog toga ćemo uvesti nekoliko oznaka za neke konačne alfabete. Ako je $n \in Z^+$, $n \geq 4$, tada ćemo sa A_n obeležavati alfabet $A_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Sa A_3 ćemo označavati alfabet $A_3 = \{x, y, z\}$ (tj. uzimamo slova x, y, z umesto x_1, x_2, x_3 redom) i sa A_2 ćemo označavati alfabet $A_2 = \{x, y\}$ (tj. uzimamo slova x, y umesto x_1, x_2 redom).

Prema I 6.1. se vidi da svaka reč $w \in A^+$ ima *jedinstven zapis* pomoću elemenata iz A, tj. dozvoljava jedinstveno razlaganje u proizvod elemenata iz A. Neposredna posledica toge je sledeće tvrdjenje.

I 6.2. PROPOZICIJA. *Neka A^+ jeste slobodna polugrupa nad alfabetom A, neka S jeste proizvoljna polugrupa i neka je $f : A \to S$ proizvoljno preslikavanje. Tada postoji jedinstveni homomorfizam $F : A^+ \to S$ takav da je $F(x) = f(x)$ za svaki $x \in A$. Pri tome važe sledeći uslovi:*

(a) F je epimorfizam ako i samo ako je $f(A)$ generatorni skup polugrupe S;

(b) F je monomorfizam ako i samo ako je f injektivno preslikavanje.

Prema tome, svaki homomorfizam slobodne polugrupe A^+ je jednoznačno odredjen svojim vrednostima na alfabetu A. Za homomorfizam F koji je proširenje preslikavanja f alfabeta A ćemo govoriti da je *indukovan* (ili *odredjen)* preslikavanjem f. Takodje, ako je P proizvoljni automorfizam polugrupe A^+, tada se lako pokazuje da je $P(A) = A$, odakle možemo zaključiti da je svaki automorfizam slobodne polugrupe A^+ indukovan nekom permutacijom alfabeta A.

I 6.3. Neka je A^+ slobodna polugrupa nad alfabetom A i neka je $\epsilon \notin A^+$ simbol koji ćemo nazivati *praznom reči.* Monoid koji se dobija jediničnim proširenjem polugrupe A^+, u kome ulogu jedinice ima prazna reč ϵ, nazivamo *slobodnim monoidom* nad alfabetom A i označavamo ga sa A^*.

I 6.4. Neka je A^+ slobodna polugrupa nad alfabetom A. Tada definišemo relaciju $\approx$ na A^+ sa: za reči $u, v \in A^+$ je $u \approx v$ ako i samo ako postoji automorfizam P polugrupe A^+ takav da je $u = P(v)$ (tj. ako se reč u može dobiti iz reči v permutacijom slova).

I 6.5. Neka je w reč nad alfabetom A. Reč w' je *podreč* reči w ako postoje $u, v \in A^*$ tako da je $w = uw'v$. Ako je w' podreč reči w, tada ćemo pisati $w' \mid w$ i koristiti sledeće izraze: w' *deli* w, w *sadrži* w'. Reč w' je *levi (desni) rez* reči w ako postoji $u \in A^*$ tako da je $w = w'u$ ($w = uw'$).

I 6.6. Neka je w reč nad alfabetom A. Tada sa $|w|$ označavamo *dužinu* reči w (tj. broj članova niza w, ako w posmatramo kao niz). Ako je $x \in A$ slovo, tada sa $|x|_w$ označavamo broj javljanja slova x u reči w.

I 6.7. Neka je w reč nad alfabetom A. Sa $c(w)$ označavamo *sadržaj* reči w, tj. skup svih slova koja se javljaju u reči w. Ako je $c(w) = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$, tada ćemo pisati da je

$$w = w(x_1, x_2, \ldots, x_n) .$$

Sa $\Pi(w)$ označavamo skup svih slova iz $c(w)$ koja se samo jednom javljaju u reči w, tj. skup

$$\Pi(w) = \{\ x \mid x \in c(w)\ \wedge |x|_w = 1\ \}\ .$$

I 6.8. Neka w jeste reč nad alfabetom A. Čitajući reč w sleva na desno, definišemo:

- o $h(w)$, ***glavu*** reči w, kao prvo slovo u w;
- o $h^{(2)}(w)$, kao levi rez reči w dužine 2;
- o $i(w)$, ***početni (inicijalni) deo*** reči w, kao reč dobijenu iz w zadržavanjem samo prvog javljanja svakog slova iz w (i izbacivanjem svih ostalih), u datom redosledu;
- o $l(w)$, ***levi deo*** reči w, kao najkraći levi rez reči w koji sadrži sva slova koja se javljaju u w;
- o $l_k(w)$, ***k-ti levi deo*** reči w, kao najkraći levi rez reči w koji sadrži tačno k slova (tj. $|l_k(w)| = k$), pri čemu je $k \le |c(u)|$;
- o $\overleftarrow{w}$, ***dualnu*** reč reči w, kao reč dobijenu iz reči w na taj način što se w čita zdesna na levo a piše sleva na desno;
- o $t(w) = h(\overleftarrow{w})$, ***rep*** reči w;
- o $t^{(2)}(w) = h^{(2)}(\overleftarrow{w})$;
- o $f(w) = i(\overleftarrow{w})$, ***završni (finalni) deo*** reči w;
- o $r(w) = l(\overleftarrow{w})$, ***desni deo*** reči w;
- o $r_k(w) = l_k(\overleftarrow{w})$, ***k-ti desni deo*** reči w ($k \le |c(u)|$).

I 6.9. Neka je $w \in A_n^+$, neka S jeste polugrupa i neka je $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in S^n$. Ako $F : A_n^+ \to S$ jeste homomorfizam indukovan preslikavanjem

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

alfabeta A_n, tada element $F(w)$ nazivamo ***vrednošću reči*** w ***u valuaciji*** (ili za valuaciju) $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Raspodelom reči w ***u polugrupi*** S nazivamo šemu koja opisuje vrednosti reči w u svim valuacijama polugrupe S.

I 6.10. Neka A^+ jeste slobodna plugrupa nad alfabetom A. ***Identitetom*** nad alfabetom A nazivamo par reči $(u,v) \in A^+ \times A^+$, i obično ga označavamo sa $u = v$.

Identitet $u = u$ nazivamo ***trivijalnim*** identitetom. Ostale identitete nazivamo ***netrivijalnim identitetima.***

Identitet $u = v$ ***nad alfabetom*** A ***je istotipan (homotipan)*** ako je $c(u) = c(v)$. U suprotnom je identitet $u = v$ ***raznotipan (heterotipan).***

I 6.11. Neka $u = v$ jeste identitet nad alfabetom A. Polugrupa S ***zadovoljava identitet*** $u = v$ ako za svaki homomorfizam $F : A^+ \to S$ važi da je

$$F(u) = F(v)\ .$$

U tom slučaju pišemo $S \models u = v$. U suprotnom pišemo da $S \not\models u = v$.

Neka Σ jeste neki sistem identiteta nad alfabetom A. Polugrupa S ***zadovoljava sistem identiteta*** Σ ako S zadovoljava sve identitete iz Σ, i pišemo da $S \models \Sigma$. U suprotnom pišemo da $S \not\models \Sigma$.

Sa $[\Sigma]$ označavamo klasu svih polugrupa koje zadovoljavaju sistem identiteta Σ nad alfabetom A. Ako se sistem Σ sastoji od konačnog broja identiteta, tj. ako je $\Sigma = \{u_1 = v_1, \dots u_k = v_k\}$, tada pišemo $[u_1 = v_1, \dots, u_k = v_k]$ umesto $[\Sigma]$.

I 6.12. Klasa $\mathcal{X}$ polugrupa je varijetet ako postoji sistem Σ identiteta nad nekim alfabetom A takav da je

$$\mathcal{X} = [\Sigma] .$$

Veoma značajnu osobinu varijeteta daje sledeće tvrdjenje.

I 6.13. PROPOZICIJA. *Klasa $\mathcal{X}$ polugrupa je varijetet ako i samo ako je zatvorena za podpolugrupe, homomorfne slike i direktne proizvode.*

I 6.14. LEMA. *Neka $n, m \in Z^+$, neka $u, v \in A_n^+$ i neka je $T : A_n^+ \to A_m^+$ homomorfizam. Tada je*

$$[u = v] \subseteq [T(u) = T(v)] .$$

I 6.15. LEMA. *Neka je $n \in Z^+$ i neka $u, v, w \in A_n^+$. Tada je*

$$[u = v] \subseteq [uw = vw] \quad i \quad [u = v] \subseteq [wu = wv] .$$

I 6.16. Sistemi Σ i Σ' identiteta nad alfabetom A su ***ekvivalentni*** ako odredjuju isti varijetet polugrupa, tj. ako je $[\Sigma] = [\Sigma']$. Prema tome, identiteti $u = v$ i $u' = v'$ nad alfabetom A su ekvivalentni ako je $[u = v] = [u' = v']$.

Identiteti $u = v$ i $u' = v'$ nad alfabetom A su ***p-ekvivalentni*** ako postoji automorfizam P polugrupe A^+ takav da je $u' = P(u)$ i $v' = P(v)$ (tj. ako se identitet $u' = v'$ može dobiti iz identiteta $u = v$ permutacijom slova). Prema I 6.14. dobijamo da p-ekvivalentni identiteti jesu ekvivalentni.

I 6.17. Neka $\mathcal{X}$ jeste neka klasa polugrupa. Identitet $u = v$ nad alfabetom A je ***$\mathcal{X}$-identitet*** ako svaka polugrupa koja zadovoljava taj identitet jeste u klasi $\mathcal{X}$, tj. ako je

$$[u = v] \subseteq \mathcal{X} .$$

Neka su $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$ neke klase polugrupa. Identitet $u = v$ nad alfabetom A je ***$\mathcal{X}_1 \triangleright \mathcal{X}_2$-identitet*** ako svaka polugrupa iz $\mathcal{X}_1$ koja zadovoljava taj identitet jeste u klasi $\mathcal{X}_2$, tj. ako je

$$\mathcal{X}_1 \cap [u = v] \subseteq \mathcal{X}_2 .$$

I 6.18. Istotipni identitet $u = v$ nad alfabetom A je ***identitet sa levim (desnim) izvrtanjem*** ako je $i(u) \neq i(v)$ ($f(u) \neq f(v)$).

I 6.19. LEMA[60]. *Neka $u = v$ jeste identitet nad alfabetom A sa levim i desnim izvrtanjem. Tada traka S zadovoljava identitet $u = v$ ako i samo ako S jeste normalna traka.*

I 6.20. LEMA [60]. *Neka $u = v$ jeste identitet nad alfabetom A takav da je $i(u) \neq i(v)$ i $t(u) \neq t(v)$. Tada traka S zadovoljava identitet $u = v$ ako i samo ako S jeste levo normalna traka.*

I 7. NEKE ZNAČAJNE POLUGRUPE I KLASE POLUGRUPA

U ovom poglavlju ćemo uvesti oznake za neke polugrupe i klase polugrupe koje će biti od velikog značaja u daljem radu.

I 7.1. Neka S jeste polugrupa. Sa $\overleftarrow{S}$ ćemo označavati ***dualnu polugrupu*** polugrupe S, tj. polugrupu sa operacijom " $*$ " definisanom na skupu S sa:

$$x * y = y \cdot x \ ,$$

gde je " $\cdot$ " operacija u polugrupi S.

I 7.2. Sa B_2 ćemo označavati polugrupu datu tablicom

	a	b	ab	ba	0
a	0	ab	0	a	0
b	ba	0	b	0	0
ab	a	0	ab	0	0
ba	0	b	0	ba	0
0	0	0	0	0	0

ili kopredstavljanjem

$$B_2 = < \ a, b \mid a^2 = b^2 = 0, \ aba = a, \ bab = b \ > \ .$$

Polugrupa B_2 je primer polugrupe koja nije polumreža Arhimedovih polugrupa.

I 7.3. Sa L_2 ćemo označavati dvoelementnu polugrupu levih nula, tj. polugrupu

$$L_2 =< e, f \mid e^2 = e,\ f^2 = f,\ ef = e,\ fe = f > .$$

Sa R_2 ćemo označavati dvoelementnu polugrupu desnih nula, tj. polugrupu

$$R_2 =< e, f \mid e^2 = e,\ f^2 = f,\ ef = f,\ fe = e > .$$

I 7.4. Sa $L_{3,1}$ ćemo označavati polugrupu datu tablicom

	a	e	f	g
a	e	e	g	e
e	e	e	e	e
f	f	f	f	f
g	g	g	g	g

ili kopredstavljanjem

$$L_{3,1} =< a, f \mid a^2 = a^3,\ f^2 = f,\ a^2f = a^2,\ fa = f > .$$

Polugrupa $L_{3,1}$ je primer polugrupe koja je nil-ekstenzija levo nulte trake $\{e, f, g\}$, dakle i nil-ekstenzija unije grupa, ali nije retraktivna nil-ekstenzija unije grupa. Sa $R_{3,1}$ označavamo polugrupu $R_{3,1} = \overleftarrow{L_{3,1}}$, tj. polugrupu datu kopredstavljanjem

$$R_{3,1} =< a, f \mid a^2 = a^3,\ f^2 = f,\ af = f,\ fa^2 = a^2 > .$$

Polugrupa $R_{3,1}$ takodje nije retraktivna nil-ekstenzija unije grupa.

I 7.5. Neka je $n \in Z^+$, $n \geq 2$. Sa $LZ(n)$ obeležavamo polugrupu datu kopredstavljanjem

$$LZ(n) =< a, e \mid a^{n+1} = a\ ,\ e^2 = e\ ,\ ea = a^ne = e > .$$

Polugrupa $LZ(n)$ ima $2n$ elemenata, predstavlja lanac ciklične grupe $< a >= \{a, a^2, \ldots, a^n\}$ i levo nulte trake $\{e, ae, \ldots, a^{n-1}e\}$ i predstavlja primer polugrupe koja je unija grupa i nije traka grupa.

Sa $RZ(n)$ označavamo polugrupu $\overleftarrow{LZ(n)}$, tj. polugrupu datu kopredstavljanjem

$$RZ(n) =< a, e \mid a^{n+1} = a\ ,\ e^2 = e\ ,\ ae = ea^n = e > .$$

I 7.6. Sa $C_{1,1}$ ćemo označavati polugrupu datu tablicom

	0	a	e
0	0	0	0
a	0	0	a
e	0	a	e

ili kopredstavljanjem

$$C_{1,1} =< a, e \mid a^2 = 0,\ e^2 = e,\ ae = a,\ ea = a > .$$

Polugrupa $C_{1,1}$ je primer polugrupe koja nije nil-ekstenzija unije grupa.

I 7.7. Sa $C_{1,2}$ ćemo označavati polugrupu datu tablicom

	0	a	e
0	0	0	0
a	0	0	a
e	0	0	e

ili kopredstavljanjem

$$C_{1,2} =< a, e \mid a^2 = 0,\ e^2 = e,\ ae = a,\ ea = 0 > .$$

Polugrupa $C_{1,2}$ je primer polugrupe koja nije nil-ekstenzija unije grupa. Sa $C_{2,1}$ označavamo polugrupu $C_{2,1} = \overleftarrow{C_{1,2}}$, tj. polugrupu datu kopredstavljanjem

$$C_{2,1} =< a, e \mid a^2 = 0,\ e^2 = e,\ ae = 0,\ ea = a > .$$

Polugrupa $C_{2,1}$ takodje nije nil-ekstenzija unije grupa.

I 7.8. Neka je A_N^+ slobodna polugrupa nad alfabetom

$$A_N = \{ x_k \mid k \in Z^+ \}$$

i neka je

$$I = \{ u \in A_N^+ \mid (\exists x_i \in A_N)\ |x_i|_u \geq 2 \} .$$

Lako se proverava da I jeste ideal od A_N^+. Sa D_N ćemo obeležavati faktor polugrupu polugrupe A_N^+ u odnosu na ideal I. Jasno je da D_N možemo posmatrati kao polugrupu koja se dobija na taj način što se na skupu

$$D_N = \{ u \in A_N^+ \mid \Pi(u) = c(u) \} \cup \{0\}$$

definiše operacija " $\cdot$ " sa

$$u \cdot v = \begin{cases} uv & \text{ako je } u, v \neq 0 \text{ i } c(u) \cap c(v) = \emptyset \\ 0 & \text{inače} \end{cases},$$

$u, v \in D_N$. Polugrupa D_N je nil-polugrupa jer je $u^2 = 0$ za svaki $u \in D_N$. Takodje, D_N nije nilpotentna polugrupa jer za svaki $n \in Z^+$ je

$$x_1 x_2 \dots x_n \in D_N^n ,$$

pa je $D_N^n \neq \{0\}$ za svaki $n \in Z^+$.

I 7.9. Neka je $n \in Z^+$. Sa N_n ćemo označavati polugrupu

$$N_n = < a \mid a^{n+1} = a^{n+2},\ a^n \neq a^{n+1} > .$$

Jasno je da je $(N_n)^{n+1} = \{0\}$ i $(N_n)^n \neq \{0\}$, tj. polugrupa N_n je u klasi $\mathcal{N}_n$ i nije u klasama $\mathcal{N}_k$ za $k < n$.

I 7.10. U ovom radu ćemo koristiti sledeće oznake za neke značajne klase polugrupa :

- $\mathcal{S}$ — klasa svih *polumreža;*
- $\mathcal{B}$ — klasa svih *traka;*
- $\mathcal{N}$ — klasa svih *nil-polugrupa;*
- $\mathcal{N}_k$ — klasa svih $(k+1)$-*nilpotentnih* polugrupa;
- $\pi\mathcal{R}$ — klasa svih π-*regularnih* polugurpa;
- $\mathcal{UG}$ — klasa svih *unija grupa;*
- $\mathcal{A}$ — klasa svih *Arhimedovih* polugrupa;
- $\mathcal{LA}$ ($\mathcal{RA}$) — klasa svih *levo (desno) Arhimedovih* polugrupa;
- $\mathcal{TA}$ — klasa svih *t-Arhimedovih* polugrupa;
- $\mathcal{CA}$ — klasa svih *potpuno Arhimedovih* polugrupa;
- $\mathcal{CS}$ — klasa svih *potpuno prostih* polugrupa;
- $\mathcal{LG}$ ($\mathcal{RG}$) — klasa svih *levih (desnih) grupa;*
- $\mathcal{G}$ — klasa svih *grupa;*
- $\mathcal{GV}$ — klasa svih *GV-polugrupa.*

I 7.11. Neka su $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$ klase polugrupa. *Maljcevski proizvod* klasa $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$, u oznaci $\mathcal{X}_1 \circ \mathcal{X}_2$, je klasa svih polugrupa S za koje postoji kongruencija ρ na S takva da faktor polugrupa $S/_\rho$ leži u $\mathcal{X}_2$ i svaka ρ-klasa koja je polugrupa leži u $\mathcal{X}_1$. Odgovarajuću dekompoziciju nazivaćemo $\mathcal{X}_1 \circ \mathcal{X}_2$-dekompozicijom. Ovaj pojam je uveden u radu A.I.Maljceva,[46] (takodje se može videti i u [47] c.392).

Imamo nekoliko posebno značajnih tipova Maljcevskih proizvoda. Ako je $\mathcal{X}_2$ podklasa klase $\mathcal{B}$, tada $\mathcal{X}_1 \circ \mathcal{X}_2$ predstavlja klasu svih polugrupa koje su $\mathcal{X}_2$-trake polugrupa iz $\mathcal{X}_1$ i odgovarajuća dekompozicija je dekompozicija u $\mathcal{X}_2$-traku polugrupa iz $\mathcal{X}_1$. Ako je $\mathcal{X}_2$ podklasa klase $\mathcal{N}$, tada $\mathcal{X}_1 \circ \mathcal{X}_2$ predstavlja klasu svih polugrupa koje su idealske ekstenzije polugrupa iz $\mathcal{X}_1$ pomoću polugrupa iz $\mathcal{X}_2$.

Koristeći prethodne definicije, uvešćemo još nekoliko oznaka koje ćemo koristiti ravnopravno sa oznakama iz I 7.10.:

- $\mathcal{CA} = \mathcal{CS} \circ \mathcal{N}$;
- $\mathcal{GV} = \mathcal{CA} \circ \mathcal{S} = (\mathcal{CS} \circ \mathcal{N}) \circ \mathcal{S}$.

I 7.12. Neka $\mathcal{X}_1$ jeste neka klasa polugrupa i neka $\mathcal{X}_2$ jeste neka klasa polugrupa sa nulom. Sa $\mathcal{X}_1 * \mathcal{X}_2$ ćemo označavati klasu svih polugrupa koje su retraktivne ekstenzije polugrupa iz $\mathcal{X}_1$ pomoću polugrupa iz $\mathcal{X}_2$.

GLAVA II

POLUMREŽE ARHIMEDOVIH POLUGRUPA

Ispitujući egzistenciju najveće polumrežne dekompozicije polugrupa (odnosno najmanje polumrežne kongruencije na polugrupi), T.Tamura i N.Kimura su u radu [99] iz 1954.god. razmatrali komutativni slučaj. U tom radu je pronadjena najmanja polumrežna kongruencija na komutativnoj polugrupi i dokazano da svaka klasa pri toj kongruenciji jeste Arhimedova polugrupa (zbog komutativnosti, te polugrupe jesu t-Arhimedove). Drugim rečima, oni su dokazali da svaka komutativna polugrupa jeste polumreža Arhimedovih polugrupa. Ovaj rezultat je uopšten na slučaj medijalnih polugrupa, tj. polugrupa koje zadovoljavaju identitet $x_1x_2x_3x_4 = x_1x_3x_2x_4$, u radu J.L.Chrislocka [24] iz 1969.god. i na slučaj eksponencijalnih polugrupa, tj. polugrupa koje zadovoljavaju sistem identiteta $(xy)^n = x^ny^n$ za sve $n \in Z^+$, u radu T.Tamure i J.Shafera [102] iz 1972.god.. Naime, pokazano je da te polugrupe jesu polumreže Arhimedovih polugrupa. Potpun opis polugrupa koje su polumreže Arhimedovih polugrupa dao je M.S.Putcha 1973.god. u radu [68], koristeći Tamurine rezultate o najvećoj polumrežnoj dekompoziciji polugrupa na polumrežno nerazložive polugrupe. Zbog toga se u nekim radovima polugrupe koje su polumreže Arhimedovih polugrupa nazivaju polugrupama Putchae. Prostiji, direktan dokaz Putchainog rezultata dao je T.Tamura 1972.god. u radu [97]. Neke druge karakterizacije polugrupa Putchae date su i u knjizi M.Petricha,[59], 1973.god.

Od specijalnih slučajeva ovih polugrupa dosta su proučavane polumreže levo Arhimedovih polugrupa i polumreže t-Arhimedovih polugrupa, u radovima M.S.Putchae, [68,69, 70], S.Bogdanovića,[5,10], M.Petricha,[59], polumreže potpuno Arhimedovih polugrupa, o kojima će više reči biti u II 2., itd. Naročito je interesantan rad M.S. Putchae,[68], u kome je autor dao karakterizacije polumreža polugrupa iz raznih drugih klasa.

Drugi interesantan specijalnni slučaj polugrupa Putchae su trake levo Arhimedovih i trake t-Arhimedovih polugrupa. Naročito su značajne trake t-Arhimedovih polugrupa, o kojima ćemo ovde više govoriti. Ove polugrupe su u opštem slučaju opisane u radu M.S.Putchae,[69]. Od posebnih slučajeva ovih polugrupa, razmatrane su trake stepeno vezanih polugrupa, koje su opisane u radovima S.Bogdanovića,[6,7,8] (to je I 5.7.), i trake nil-ekstenzija grupa, o kojima će više reči biti u II 3. i II 4.. Takodje, interesantan je i rad M.S.Putchae i J.Weissglassa,[73], u kome su opisane polugrupe koje se mogu razložiti u traku polugrupa koje mogu imati najviše jedan idempotent.

U ovoj glavi dajemo opise polugrupa koje se mogu razložiti u polumrežu Arhimedovih polugrupa i razne posebne slučajeve istih.

U poglavlju II 1. navodimo poznati rezultat M.S.Putchae i dajemo nove karakterizacije polumreža Arhimedovih polugrupa. Koristeći pojam radikala, dajemo i neke nove opise za polumreže levo Arhimedovih i polumreže t-Arhimedovih polugrupa. Osim toga, dajemo opise za polumreže nil-ekstenzija prostih i polumreže nil-ekstenzija potpuno prostih polugrupa. Takodje, dajemo neke nove rezultate koji se tiču dekompozicija u traku t-Arhimedovih polugrupa. Naime, opisujemo normalne i levo normalne trake t-Arhimedovih polugrupa.

U poglavlju II 2. navodimo osnovne rezultate koji se odnose na dekompozicije u polumrežu potpuno Arhimedovih polugrupa. Takodje, dajemo nove rezultate koji opisuju polumreže nil-ekstenzija levih i desnih grupa i razne posebne tipove istih.

U poglavljima II 3. i II 4. izučavamo polugrupe razložive u traku nil-ekstenzija grupa. U II 3. razmatramo opšti i neke posebne slučajeve, kao što su levo regularne, levo normalne i normalne trake π-grupa. U II 4. razmatramo dekompozicije u Rédeievu traku nil-ekstenzija grupa, koje predstavljaju veoma značajan tip dekompozicija.

II 1. OPŠTI REZULTATI

U ovom poglavlju razmatramo polugrupe koje su polumreže Arhimedovih polugrupa, u opštm i nekim specijalnim slučajevima. Glavni rezultat ovog poglavlja je Teorema II 1.2., koja navodi karakterizaciju napred pomenutih polugrupa dokazanu u radu M.S.Putchae, [68], i daje nove karakterizacije tih polugrupa. Veoma je značajno tvrdjenje dato sa $(i) \Leftrightarrow (iv)$ (odnosno $(i) \Leftrightarrow (vi)$), koje će nam u daljim istraživanjima poslužiti kao moćan mehanizam za dokazivanje drugih rezultata. Rezultat dat sa $(i) \Leftrightarrow (vii)$ je generalizacija rezultata L.N.Ševrina iz [87,88]. Osim toga, daju se neke nove karakterizacije (pomoću radikala) za polumreže levo Arhimedovih i polumreže t-Arhimedovih polugrupa, daju se karakterizacije za polumreže nil-ekstenzija prostih polugrupa itd.

Na kraju ovog poglavlja se navodi rezultat M.S.Putchae iz [69], koji opisuje trake t-Arhimedovih polugrupa. Koristeći taj rezultat, dajemo karakterizacije za normalne i levo normalne trake t-Arhimedovih polugrupa (Teoreme II 1.10. i II 1.11.).

II 1.1. DEFINICIJA. *Neka S jeste polugrupa. Uvodimo sledeće relacije:*

(a) $a|b$ ("a deli b") $\Leftrightarrow$ $b \in S^1 a S^1$ $(a, b \in S)$;

(b) $a \underset{r}{|} b$ $\Leftrightarrow$ $b \in aS^1$ $(a, b \in S)$;

(c) $a \underset{l}{|} b$ $\Leftrightarrow$ $b \in S^1 a$ $(a, b \in S)$;

(d) $a \underset{t}{|} b$ $\Leftrightarrow$ $a \underset{l}{|} b$ i $a \underset{r}{|} b$.

Sledećom teoremom navodimo rezultat M.S.Putchae ((i) $\Leftrightarrow$ (ii)) i dajemo nove karakterizacije polumreža Arhimedovih polugrupa:

II 1.2. TEOREMA. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je polumreža Arhimedovih polugrupa;*
(ii) $(\forall a, b \in S)(\, a \mid b \;\Rightarrow\; (\exists n \in Z^+)\; a^2 \mid b^n\,)$;
(iii) $(\forall a, b \in S)(\forall k \in Z^+)(\exists n \in Z^+)\; (ab)^n \in S a^k S$;
(iv) $(\forall a, b \in S)(\exists n \in Z^+)\; (ab)^n \in S a^2 S$;
(v) $(\forall a, b \in S)(\forall k \in Z^+)(\exists n \in Z^+)\; (ab)^n \in S b^k S$;
(vi) $(\forall a, b \in S)(\exists m \in Z^+)\; (ab)^n \in S b^2 S$;
(vii) *radikal svakog ideala od S je ideal.*

DOKAZ: (i) $\Leftrightarrow$ (ii). To je rezultat M.S.Putchae,[68].

(i) $\Rightarrow$ (iii). Neka S jeste polumreža Y Arhimedovih polugrupa S_α, $\alpha \in Y$. Neka $a \in S_\alpha, b \in S_\beta$ za neke $\alpha, \beta \in Y$. Tada imamo da $ab, a^k b \in S_{\alpha\beta}$ za sve $k \in Z^+$, pa postoji $n \in Z^+$ tako da

$$(ab)^n \in S a^k b S \subseteq S a^k S\,.$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Sledi neposredno.

(iv) $\Rightarrow$ (ii). Neka su $a, b \in S$ elementi takvi da $a \mid b$. Tada postoje $u, v \in S^1$ tako da je $b = uav$, odakle dobijamo da je $b^{n+1} = u(avu)^n av$ za sve $n \in Z^+$. Prema (iv) dobijamo da postoji $n \in Z^+$ tako da je $(avu)^n \in S a^2 S$, odakle dobijamo da je

$$b^{n+1} = u(avu)^n av \in u S a^2 S av \subseteq S a^2 S\,.$$

Prema tome, $a^2 \mid b^{n+1}$.

(i) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vi) $\Rightarrow$ (ii). Dokazuje se na isti način kao (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (ii).

(i) $\Rightarrow$ (vii). Neka važi (i). Tada prema prethodno dokazanom dobijamo da važi (iii) i (v). Neka je A proizvoljni ideal od S i neka su $a \in \sqrt{A}$, $b \in S$ proizvoljni elementi. Tada je $a^k \in A$ za neki $k \in Z^+$, pa prema (iii) i (v) imamo da postoje $m, n \in Z^+$ tako da

$$(ab)^n \in S a^k S \subseteq SAS \subseteq A$$

i

$$(ba)^m \in S a^k S \subseteq SAS \subseteq SAS \subseteq A\,.$$

Prema tome, $ab, ba \in \sqrt{A}$, tj. $\sqrt{A}$ je ideal od S.

$(vii) \Rightarrow (iv)$. Neka važi (vii), neka su $a, b \in S$ proizvoljni elementi i neka je $A = Sa^2S$. Tada je jasno da A jeste ideal od S i $a \in \sqrt{A}$. Kako je $\sqrt{A}$ ideal od S, to dobijamo da $ab \in \sqrt{A}$, tj. postoji $n \in Z^+$ tako da je

$$(ab)^n \in A = Sa^2S \; . \quad \blacksquare$$

Sledeća teorema daje razne karakterizacije polumreža levo Arhimedovih polugrupa. Tvrdjenje $(i) \Leftrightarrow (v)$ je nov rezultat, dok su ostale karakterizacije rezultati M.S.Putchae i S.Bogdanoviča.

II 1.3. TEOREMA. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je polumreža levo Arhimedovih polugrupa;*

(ii) $(\forall a, b \in S)(\; a \mid b \;\Rightarrow\; (\exists n \in Z^+)\; a \mid_l b^n \;)$;

(iii) $(\forall a, b \in S)(\forall k \in Z^+)(\exists n \in Z^+)\; (ab)^n \in Sa^k$;

(iv) $(\forall a, b \in S)(\exists n \in Z^+)\; (ab)^n \in Sa$;

(v) *radikal svakog levog ideala od S je ideal.*

DOKAZ: $(i) \Leftrightarrow (ii)$. To je rezultat M.S.Putchae,[70].

$(i) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv)$. To je rezultat S.Bogdanovića,[10].

$(iii) \Rightarrow (v)$. Neka važi (iii). Neka je A proizvoljni levi ideal od S i neka su $a \in \sqrt{A}$, $b \in S$ proizvoljni elementi. Tada imamo da je $a^k \in A$ za neki $k \in Z^+$, pa prema (iii) dobijamo da postoji $n \in Z^+$ tako da je

$$(ab)^n \in Sa^k \subseteq SA \subseteq A$$

i

$$(ba)^{n+1} = b(ab)^n a \in bSa^k a \subseteq Sa^k \subseteq SA \subseteq A \; .$$

Prema tome, $ab, ba \in \sqrt{A}$, pa $\sqrt{A}$ jeste ideal od S.

$(v) \Rightarrow (iv)$. Neka važi (v). Neka su $a, b \in S$ proizvoljni elementi i neka je $A = Sa$. Tada je jasno da je A levi ideal od S i da je $a \in \sqrt{A}$. Kako je $\sqrt{A}$ ideal od S, to imamo da je $ab \in \sqrt{A}$, tj.

$$(ab)^n \in A = Sa \; ,$$

za neki $n \in Z^+$. $\blacksquare$

Rezultat dat u narednoj teoremi sa $(i) \Leftrightarrow (iv)$ je nov rezultat, dok su ostali rezultati iz radova M.S.Putchae,[70], i S.Bogdanovića,[5].

II 1.4. TEOREMA. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je polumreža t-Arhimedovih polugrupa;*

(ii) $(\forall a, b \in S)(\; a \mid b \;\Rightarrow\; (\exists n \in Z^+)\; a \mid_t b^n \;)$;

(iii) $(\forall a, b \in S)(\exists n \in Z^+)\; (ab)^n \in bSa$;

(iv) *radikal svakog bi-ideala od S je ideal.*

DOKAZ: $(i) \Leftrightarrow (ii)$. To je rezultat M.S.Putchae,[70].

$(i) \Leftrightarrow (iii)$. To je rezultat S.Bogdanovića,[5].

$(i) \Rightarrow (iv)$. Neka važi (i). Neka je A proizvoljni bi-ideal od S i neka su $a \in \sqrt{A}$, $b \in S$ proizvoljni elementi. Tada imamo da je $a^k \in A$ za neki $k \in Z^+$, pa prema (i) dobijamo da postoje $m, n \in Z^+$ tako da je

$$(ab)^m \in a^k bSba^k \subseteq ASA \subseteq A$$

i

$$(ba)^n \in a^k bSba^k \subseteq ASA \subseteq A \; .$$

Prema tome, $ab, ba \in \sqrt{A}$, pa $\sqrt{A}$ jeste ideal od S.

$(iv) \Rightarrow (iii)$. Neka važi (iv). Neka su $a, b \in S$ proizvoljni elementi i neka je $A = aSa$, $B = bSb$. Tada je jasno da su A i B bi-ideali od S i da je $a \in \sqrt{A}$, $b \in \sqrt{B}$. Kako su $\sqrt{A}$ i $\sqrt{B}$ ideali od S, to imamo da je $ab \in \sqrt{A} \cap \sqrt{B}$, tj. postoje $m, n \in Z^+$ tako da je

$$(ab)^n \in A = aSa$$

i

$$(ab)^m \in B = bSb \; .$$

Prema tome,

$$(ab)^{m+n} \in bSbaSa \subseteq bSa \; . \quad \blacksquare$$

Sledeće dve teoreme daju nove rezultate koji opisuju polumreže nil-ekstenzija prostih polugrupa i polumreže nil-ekstenzija levo prostih polugrupa.

II 1.5. TEOREMA. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je polumreža nil-ekstenzija prostih polugrupa;*

(ii) $(\forall a, b \in S)(\exists n \in Z^+)(\forall k \in Z^+)\ (ab)^n \in Sa^kS$;

(iii) $(\forall a, b \in S)(\exists n \in Z^+)\ (ab)^n \in Sa^{4n}S$.

(iv) $(\forall a, b \in S)(\exists n \in Z^+)(\forall k \in Z^+)\ (ab)^n \in Sb^kS$;

(v) $(\forall a, b \in S)(\exists n \in Z^+)\ (ab)^n \in Sb^{4n}S$.

DOKAZ: $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka S jeste polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, i za svaki $\alpha \in Y$ S_α jeste nil-ekstenzija proste polugrupe K_α. Neka $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$ za neke $\alpha, \beta \in Y$. Tada je $ab \in S_{\alpha\beta}$, pa postoji $n \in Z^+$ tako da $(ab)^n \in K_{\alpha\beta}$. Sa druge strane, $a^k b \in S_{\alpha\beta}$ za svaki $k \in Z^+$, pa postoji $m \in Z^+$ tako da $(a^k b)^m \in K_{\alpha\beta}$. Kako $K_{\alpha\beta}$ jeste prosta polugrupa, to je

$$(ab)^m \in K_{\alpha\beta}(a^k b)^m K_{\alpha\beta} \subseteq Sa^k S \; .$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Sledi neposredno.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Prema II 1.2. dobijamo da S jeste polumreža Y Arhimedovih polugrupa S_α, $\alpha \in Y$. Neka je $\alpha \in Y$ i neka $a \in S_\alpha$. Tada postoje $u, v \in S$ i $n \in Z^+$ tako da je

$$a^{2n} = ua^{4n}v \; .$$

Uzmimo da je $u \in S_\beta, v \in S_\gamma$ za neke $\beta, \gamma \in Y$. Tada dobijamo da je $\alpha < \beta$ i $\alpha < \gamma$, pa je

$$a^{2n} = ua^{4n}v = ua^n a^{2n} a^n v = (ua^n u)a^{4n}(va^n v) \in S_\alpha a^{4n} S_\alpha .$$

Prema tome, S_α je intra π-regularna Arhimedova polugrupa, pa prema I 4.9. dobijamo da S_α jeste nil-ekstenzija proste polugrupe. $(i) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (i)$. Dokazuje se slično kao $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$. ∎

Na sličan način dokazujemo sledeći rezultat:

II 1.6. TEOREMA. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je polumreža nil-ekstenzija levo prostih polugrupa;*

(ii) $(\forall a, b \in S)(\exists n \in Z^+)(\forall k \in Z^+)\ (ab)^n \in Sa^k$;

(iii) $(\forall a, b \in S)(\exists n \in Z^+)\ (ab)^n \in Sa^{2n+1}$.

DOKAZ: $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka S jeste polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, i za svaki $\alpha \in Y$ S_α jeste nil-ekstenzija levo proste polugrupe K_α. Neka $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$ za neke $\alpha, \beta \in Y$. Tada je $ab \in S_{\alpha\beta}$, pa postoji $n \in Z^+$ tako da $(ab)^n \in K_{\alpha\beta}$. Sa druge strane, $ba^k \in S_{\alpha\beta}$ za svaki $k \in Z^+$, pa postoji $m \in Z^+$ tako da $(ba^k)^m \in K_{\alpha\beta}$. Kako $K_{\alpha\beta}$ jeste levo prosta polugrupa, to je

$$(ab)^m \in K_{\alpha\beta}(ba^k)^m \subseteq Sa^k .$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Sledi neposredno.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Prema II 1.3. dobijamo da S jeste polumreža Y levo Arhimedovih polugrupa S_α, $\alpha \in Y$. Neka je $\alpha \in Y$ i neka $a \in S_\alpha$. Tada postoje $u, v \in S$ i $n \in Z^+$ tako da je

$$a^{2n} = ua^{2n+1}v .$$

Uzmimo da je $u \in S_\beta$ za neki $\beta \in Y$. Tada dobijamo da je $\alpha < \beta$, pa je

$$a^{2n} = ua^{2n+1}v = ua^{2n}a = u^2a^{2n+1}a = (u^2a)a^{2n+1} \in S_\alpha a^{2n+1} .$$

Prema tome, S_α je levo π-regularna Arhimedova polugrupa, pa prema I 4.10. dobijamo da S_α jeste nil-ekstenzija levo proste polugrupe. ∎

Kao što je već rečeno u uvodu za Glavu II, karakterizacija traka t-Arhimedovih polugrupa data je u radu M.S.Putchae,[69], u opštem slučaju. Od posebnih slučajeva tih polugrupa, interesantne su trake stepeno-vezanih polugrupa, koje su opisane u radovima S.Bogdanovića,[6,7,8], i trake nil-ekstenzija grupa, o kojima će više biti rečeno u poglavljima II 3. i II 4. Ovde ćemo, najpre navesti rezultat M.S.Putchae iz [69]. Pre toga, uvešćemo sledeću definiciju.

II 1.7. DEFINICIJA. *Na polugrupi S uvodimo relaciju $\overset{t}{\sim}$ sa*

$$a \overset{t}{\sim} b \quad \Leftrightarrow \quad (\exists m, n \in Z^+)(\ a \underset{t}{|} b^m \ \wedge \ b \underset{t}{|} a^n\ ) .$$

Jasno je da polugrupa S jeste t-Arhimedova ako i samo ako je $\overset{t}{\sim} = S \times S$.

Opis traka t-Arhimedovih polugrupa u radu M.S.Putchae,[69], je dat kao tvrdjenje $(i) \Leftrightarrow (ii)$ iz naredne teoreme. Uslov (iii) je drugačiji zapis uslova (ii), koji ćemo više koristiti.

II 1.8. TEOREMA [69]. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) S je traka t-Arhimedovih polugrupa;

(ii) za sve $a \in S$, $x, y \in S^1$ je

(1)
$$xay \overset{t}{\sim} xa^2y \ ;$$

(iii) za sve $x, y \in S^1$, $a \in S$ postoje $m, n \in Z^+$ tako da je

(2)
$$\begin{cases} (xay)^m \in xa^2ySxa^2y \ , \\ (xa^2y)^n \in xaySxay \ . \end{cases}$$

Neposredna posledica prethodne teoreme je rezultat J.L.Galbiatieve i M.L.Veronesieve, [36], koji glasi:

II 1.9. POSLEDICA [36]. *Polugrupa S je traka π-grupa ako i samo ako S jeste π-regularna i za sve $a \in S$, $x, y \in S^1$ postoje $p, q, r, s \in Z^+$ tako da je*

$$(xay)^pS = (xa^2y)^qS \quad , \quad S(xay)^r = S(xa^2y)^s \ .$$

Kao što se vidi iz formulacije Teoreme II 1.8., uslov (2) koji opisuje trake t-Arhimedovih polugrupa sastoji se od dva uslova. Postavlja se pitanje: da li se ta dva uslova mogu zameniti jednim uslovom? Odgovor na to pitanje dat je Teoremama II 1.10. i II 1.11. u slučaju normalnih i levo normalnih traka t-Arhimedovih polugrupa, i uslovi koji opisuju te polugrupe izgledaju veoma jednostavno. Odgovor u opštem slučaju još uvek nije dat.

II 1.10. TEOREMA. *Polugrupa S je normalna traka t-Arhimedovih polugrupa ako i samo ako za sve $a, b, c \in S$ postoji $n \in Z^+$ tako da*

(3)
$$(abc)^n \in acSac \ .$$

DOKAZ: Neka su $a \in S$, $x, y \in S^1$ proizvoljni elementi. Uzmimo da $x, y \in S$ (slično dokazujemo slučajeve kada je $x = 1$ ili $y = 1$). Tada prema (3) dobijamo da postoji $n \in Z^+$ tako da

$$(xa^2y)^n = ((xa)ay)^n \in xaySxay \ .$$

Takodje, imamo da postoji $m \in Z^+$ tako da je

$$(xay)^{2m} = ((xa)(yx)(ay))^m \in xa^2ySxa^2y \ .$$

Prema tome, važi (2), pa S jeste traka I t-Arhimedovih polugrupa S_i, $i \in I$. Neka su $i, j, k \in I$ proizvoljni elementi. Kako I jeste homomorfna slika polugrupe S, to dobijamo da postoji $n \in Z^+$ tako da je

$$ijk = (ijk)^n = ikuik \ ,$$

za neki $u \in I$, odakle sledi da je

$$ijk = ikijkik \ ,$$

pa prema I 6.19. dobijamo da I jeste normalna traka.

Obrnuto, neka S jeste normalna traka I t-Arhimedovih polugrupa S_i, $i \in I$. Neka su $a, b, c \in S$ proizvoljni elementi. Tada imamo da $a \in S_i$, $b \in S_j$, $c \in S_k$ za neke $i, j, k \in I$ i kako I jeste normalna traka, to dobijamo da je

$$acabc \in S_{ikijk} = S_{ijk}$$

i

$$abcac \in S_{ijkik} = S_{ijk} \ .$$

Kako S_{ijk} jeste t-Arhimedova polugrupa, to dobijamo da postoje $m, n \in Z^+$ tako da

$$(abc)^n \in acabcS \cap Sacabc$$

i

$$(abc)^m \in abcacS \cap Sabcac \ ,$$

odakle dobijamo da je

$$(abc)^{m+n} \in acSac \ .$$

Prema tome, važi (3). ∎

II 1.11. TEOREMA. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) S *je levo normalna traka t-Arhimedovih polugrupa;*

(ii) *za sve* $a, b, c \in S$ *postoji* $n \in Z^+$ *tako da je*

$$(abc)^n \in acSa \ ;$$

(iii) *za sve* $a, b, c \in S$ *postoji* $n \in Z^+$ *tako da je*

$$(abc)^n \in acSb \ .$$

DOKAZ: $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka S jeste levo normalna traka I t-Arhimedovih polugrupa S_i, $i \in I$. Neka su $a, b, c \in S$ proizvoljni elementi. Tada je $a \in S_i$, $b \in S_j$, $c \in S_k$ za neke $i, j, k \in I$, pa je $abc \in S_{ijk}$ i

$$acba \in S_{ikji} = S_{ijk} ,$$

jer I jeste levo normalna traka. Prema tome, postoji $n \in Z^+$ tako da

$$(abc)^n \in acbaSacba \subseteq acSa .$$

Dakle, važi (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka važi (ii) i neka su $a, b, c \in S$ proizvoljni elementi. Tada imamo da postoji $n \in Z^+$ tako da

$$(abc)^n \in acSa \subseteq acS$$

i postoji $m \in Z^+$ tako da je

$$(abc)^{2m} = ((ab)(ca)(bc))^m \in abbcSab \subseteq Sb .$$

Prema tome, imamo da

$$(abc)^{2m+n} \in acSSb \subseteq acSb ,$$

pa važi (iii).

$(iii) \Rightarrow (i)$. Neka va ži (iii) i neka su $x, y \in S^1$ i $a \in S$ proizvoljni elementi. Uzmimo da $x, y \in S$ (slično dokazujemo slučajeve kada je $x = 1$ ili $y = 1$). Tada imamo da postoji $n \in Z^+$ tako da

$$(xay)^{2n} = ((xa)(yx)(ay))^n \in xaaySyx \subseteq xa^2yS .$$

Sa druge strane, imamo da postoji $m \in Z^+$ tako da

$$(ayx)^{2m} = ((ay)(xa)(yx))^m \in ayyxSxa \subseteq Sxa ,$$

odakle dobijamo da je

$$(xay)^{2m+1} = x(ayx)^{2m}ay \in xSxaay \subseteq Sxa^2y .$$

Prema tome, imamo da je

$$(xay)^{2m+2n+1} \in xa^2ySxa^2y .$$

Takodje, imamo da postoji $k \in Z^+$ tako da je

$$(xa^2y)^k = ((xa)ay)^k \in xaySa \subseteq xayS .$$

Osim toga, imamo da postoji $t \in Z^+$ tako da

$$(yxa^2)^t = (y(xa)a)^t \in yaSxa \subseteq Sxa ,$$

odakle dobijamo da je

$$(xa^2y)^{t+1} = xa^2(yxa^2)^t y \in xa^2Sxay \subseteq Sxay .$$

Prema tome,

$$(xa^2y)^{k+t+1} \in xaySxay .$$

Dakle, prema II 1.8. dobijamo da S jeste traka I t-Arhimedovih polugrupa. Kako I jeste homomorfna slika polugrupe S, to imamo da za proizvoljne $i, j, k \in I$ postoji $n \in Z^+$ i $u \in I$ tako da je

$$ijk = (ijk)^n = ikuj ,$$

odakle dobijamo da je

$$ijk = ikijkj ,$$

pa prema I 6.20. dobijamo da I jeste levo normalna traka. Dakle, važi (i). ∎

II 2. POLUMREŽE POTPUNO ARHIMEDOVIH POLUGRUPA (GV-POLUGRUPE)

Dekompozicije polugrupa u polumrežu potpuno Arhimedovih polugrupa prvi je počeo da proučava L.N.Ševrin. Prve rezultate iz tih istraživanja je izneo u saopštenjima [86,87,88]. Na žalost, detalji koji se tiču metoda kojima se došlo do tih rezultata kao i sami dokazi tih rezultata, široj javnosti još uvek nisu poznati. Rezultati L.N.Ševrina se, inače, odnose na dekompozicije potpuno π-regularnih polugrupa. Slične rezultate, koji se tiču dekompozicija π-regularnih polugrupa u polumrežu potpuno Arhimedovih polugrupa, dobile su J.L.Galbiati i M.L.Veronesi u radu [37], u kome je istraživanje otpočelo, i M.L.Veronesi u radu [104], u kome su dobijeni konačni rezultati. Razne druge karakterizacije ovih polugrupa, u opštem i raznim posebnim slučajevima, je dao S.Bogdanović, u nizu svojih radova.

U ovom poglavlju navodimo neke od napred pomenutih rezultata. Teoremom II 2.9. se daju neki noviji rezultati koji opisuju dekompozicije u polumrežu nil-ekstenzija levih i desnih grupa. Pomenuti rezultat je publikovan u radu S.Bogdanovića i M.Ćirića,[16], i prikazan u magistarskom radu autora, ali je ovde ponovo dat zbog veoma interesantne metodologije koja se primenjuje u tim dekompozicijama i koja je dala niz dobrih rezultata u raznim drugim slučajevima. Takodje, daju se razne posledice rezultata II 2.9.

II 2.1. DEFINICIJA. *Neka* S *jeste* π*-regularna polugrupa. Uvodimo relacije* $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{R}^*$, $\mathcal{H}^*$ *i* $\mathcal{J}^*$ *sa:*

$$a\,\mathcal{L}^*\,b \quad\Leftrightarrow\quad Sa^p = Sb^q\;;$$
$$a\,\mathcal{R}^*\,b \quad\Leftrightarrow\quad a^pS = b^qS\;;$$
$$\mathcal{H}^* = \mathcal{L}^* \cap \mathcal{R}^*\;;$$
$$a\,\mathcal{J}^*\,b \quad\Leftrightarrow\quad Sa^pS = Sb^qS\;;$$

gde su $p, q \in Z^+$ *najmanji brojevi takvi da* $a^p, b^q \in Reg(S)$.

Ove relacije su uvedene u [37], predstavljaju relacije ekvivalencije i na regularnoj polugrupi se poklapaju sa poznatim Greenovim relacijama (I 2.3.).

II 2.2 DEFINICIJA. *Polugrupa* S *jeste* GV*-polugrupa (polugrupa Galbiati-Veronesi) ako* S *jeste* π*-regularna i svaki njen regularni element je potpuno regularan, tj.* $Reg(S) = Gr(S)$.

Sledeća teorema prikazuje rezultate M.L.Veronesieve,[104], i S.Bogdanovića,[13], koji opisuju polumreže potpuno Arhimedovih polugrupa.

II 2.3. TEOREMA [104,13]. *Sledeći uslovi za polugrupu* S *su ekvivalentni:*

(i) S *je* GV*-polugrupa;*
(ii) S *je* π*-regularna i svaka* $\mathcal{H}^*$*-klasa je* π*-grupa;*
(iii) S *je potpuno* π*-regularna i* $\tau = \mathcal{H}^*$*;*
(iv) $(\forall a, b \in S)(\exists n \in Z^+)\ (ab)^n \in (ab)^n bS(ab)^n$*;*
(v) S *je polumreža potpuno Arhimedovih polugrupa (polumreža nil-ekstenzija potpuno prostih polugrupa).*

II 2.4. NAPOMENA. *Uslov* (ii) *u II 2.3. može se zameniti sledećim:*
(ii)* S *je (disjunktna) unija* π*-grupa.*

Narednim tvrdjenjima prikazujemo niz rezultata koji opisuju razne posebne slučajeve polumreža potpuno Arhimedovih polugrupa, i koji će nam biti potrebni u daljem radu.

II 2.5. TEOREMA [10]. *Sledeći uslovi za polugrupu* S *su ekvivalentni:*

(i) S *je polumreža nil-ekstenzija pravougaonih grupa;*
(ii) S *je* GV*-polugrupa i za sve* $e, f \in E(S)$ *postoji* $n \in Z^+$ *tako da je*

$$(ef)^n = (ef)^{n+1}\;;$$

(iii) S *je* π*-regularna i*

$$a = axa \quad\Rightarrow\quad a = ax^2a^2\;.$$

II 2.6. DEFINICIJA. *Polugrupa* S *je* LR*-polugrupa ako je*

(1) $$(\forall a, b \in S)(\exists n \in Z^+)\ (ab)^n \in L(a) \cup R(b)\ .$$

II 2.7. LEMA. *Polugrupa* S *je* LR*-polugrupa ako i samo ako je*

(2) $$(\forall a, b \in S)(\exists n \in Z^+)\ (ab)^n \in Sa \cup bS\ .$$

DOKAZ: Neka S jeste LR-polugrupa i neka $a, b \in S$. Tada postoji $n \in Z^+$ tako da je
$$(ab)^n \in L(a) \cup R(b) = a \cup Sa \cup b \cup bS = \{a, b\} \cup Sa \cup bS\ .$$
Ako je $(ab)^n \in \{a, b\}$, tada je
$$(ab)^{2n} \in \{a^2, b^2\} \subseteq Sa \cup bS\ .$$
Prema tome, važi (2).

Obrat sledi neposredno. ∎

Sledeći poznati rezultat će nam poslužiti kao pomoćno tvrdjenje u dokazuvanju Teoreme II 2.9.

II 2.8. LEMA. *Traka* S *jeste polumreža singularnih traka ako i samo ako je*
$$ab = aba \qquad \vee \qquad ab = bab$$
za sve $a, b \in S$.

II 2.9. TEOREMA. *Sledeći uslovi za polugrupu* S *su ekvivalentni:*

(i) S *je polumreža nil-ekstenzija levih i desnih grupa;*

(ii) $(\forall a, b \in S)(\exists n \in Z^+)\ (ab)^n \in (ab)^n S(ba)^n \cup (ba)^n S(ab)^n$;

(iii) S *je* π*-regularna* LR*-polugrupa;*

(iv) S *je* GV*-polugrupa i za sve* $e, f \in E(S)$ *postoji* $n \in Z^+$ *tako da je*

(3) $$(ef)^n = (efe)^n \quad \vee \quad (ef)^n = (fef)^n\ ;$$

(v) S *je* π*-regularna i*

(4) $$a = axa \quad \Rightarrow \quad ax = ax^2a \quad \vee \quad ax = xa^2x\ .$$

DOKAZ: $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka S jeste polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, i za svaki $\alpha \in Y$ neka S_α jeste nil-ekstenzija polugrupe K_α, pri čemu K_α jeste leva ili desna grupa. Neka je $a \in S_\alpha, b \in S_\beta$, $\alpha, \beta \in Y$. Tada imamo da $ab, ba \in S_{\alpha\beta}$, pa postoji $n \in Z^+$ tako da $(ab)^n, (ba)^n \in K_{\alpha\beta}$. Sada prema I 4.8. imamo da je

$$(ab)^n \in (ab)^n K_{\alpha\beta}(ba)^n \subseteq (ab)^n S(ba)^n ,$$

ako $K_{\alpha\beta}$ jeste leva grupa, odnosno

$$(ab)^n \in (ba)^n K_{\alpha\beta}(ab)^n \subseteq (ba)^n S(ab)^n ,$$

ako $K_{\alpha\beta}$ jeste desna grupa. Prema tome, važi (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Sledi neposredno.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Neka S jeste π-regularna LR-polugrupa. Neka $a \in Reg(S)$. Tada postoji $b \in S$ tako da je $a = aba$ i $b = bab$. Prema (2) dobijamo da $ab \in Sa \cup bS$ i $ba \in Sb \cup aS$. Neka je $ab = ua$ za neki $u \in S$. Tada je

$$a = aba = ua^2 = \in Sa^2 .$$

Neka je $ab = bv$ za neki $v \in S$. Tada je $a = aba = bva$ i $a^2 = abva$, pa je

$$a = bva = babva = ba^2 \in Sa^2 .$$

Slično dokazujemo da iz $ba \in Sb \cup aS$ sledi da $a \in a^2 S$. Prema tome, $a \in Gr(S)$, pa S jeste GV-polugrupa.

Neka $e, f \in E(S)$. Tada postoji $n \in Z^+$ tako da je $(ef)^n \in Se \cup fS$. Ako je $(ef)^n = ue$ za neki $u \in S$, tada dobijamo da je

$$(efe)^n = (ef)^n e = uee = ue = (ef)^n .$$

Slično dokazujemo da iz $(ef)^n \in fS$ sledi da je $(fef)^n = (ef)^n$. Dakle, važi (3).

$(iv) \Rightarrow (i)$. Iz (3) dobijamo da je

$$(ef)^{n+1} = (ef)^n ef = (efe)^n f = (ef)^n f = (ef)^n ,$$

ili

$$(ef)^{n+1} = ef(ef)^n = e(fef)^n = e(ef)^n = (ef)^n ,$$

za neki $n \in Z^+$. Sada prema II 2.5. dobijamo da S jeste polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, pri čemu S_α jeste nil-ekstenzija pravougaone grupe K_α za svaki $\alpha \in Y$. Kako za svaki $\alpha \in Y$ imamo da $E_\alpha = E(K_\alpha) = E(S_\alpha)$ jeste pravougaona traka (prema I 4.6.), to za proizvoljne $e, f \in E_\alpha$ postoji $n \in Z^+$ tako da

$$ef = (ef)^n = (efe)^n = e^n = e ,$$

ili

$$ef = (ef)^n = (fef)^n = f^n = f ,$$

pa prema II 2.8. dobijamo da E_α jeste singularna traka. Dakle, prema I 4.8. dobijamo da K_α jeste leva ili desna grupa.

$(i) \Rightarrow (v)$. Neka S jeste polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, i neka za svaki $\alpha \in Y$ S_α jeste nil-ekstenzija polugrupe K_α, pri čemu K_α jeste leva ili desna grupa. Tada je jasno da S jeste π-regularna. Uzmimo da je $a = axa$, pri čemu je $a \in S_\alpha, x \in S_\beta$, za neke $\alpha, \beta \in Y$. Tada

$$ax, xa \in S_{\alpha\beta} \cap E(S) = E(S_{\alpha\beta}) = E_{\alpha\beta} ,$$

odakle dobijamo da je

$$ax = (ax)(xa) = ax^2a ,$$

ako $E_{\alpha\beta}$ jeste levo nulta traka, odnosno

$$ax = (xa)(ax) = xa^2x ,$$

ako $E_{\alpha\beta}$ jeste desno nulta traka. Prema tome, važi (4).

$(v) \Rightarrow (i)$. Neka S jeste π-regularna polugrupa i neka važi (4). Tada za proizvoljni element $a \in Reg(S)$ imamo da postoji $x \in S$ tako da je $a = axa$, pa iz (4) dobijamo da je

$$a = axa = (ax^2a)a = ax^2a^2 ,$$

ili

$$a = axa = (ax)^2a = ax(xa^2x)a = ax^2a(axa) = ax^2a^2 .$$

Dakle, prema II 2.5. dobijamo da S jeste polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, pri čemu S_α jeste nil-ekstenzija pravougaone grupe K_α za svaki $\alpha \in Y$. Neka su $e, f \in E(S_\alpha) = E(K_\alpha) = E_\alpha$ proizvoljni elementi. Kako prema I 4.6. imamo da E_α jeste pravougaona traka, to dobijamo da je $e = efe$ pa prema (4) sledi da je $ef = ef^2e = efe = e$ ili $ef = fe^2f = fef = f$. Dakle, prema II 2.8. i I 4.6. dobijamo da K_α jeste leva ili desna grupa. ∎

Koristeći metode i rezultate iz II 2.9., lako se dokazuju naredna tvrdjenja.

II 2.10. POSLEDICA. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) S *je polumreža nil-ekstenzija levih grupa;*

(ii) $(\forall a, b \in S)(\exists n \in Z^+)\ (ab)^n \in (ab)^nS(ba)^n$;

(iii) S *je* π*-regularna i*

$$(\forall a, b \in S)(\exists n \in Z^+)(ab)^n \in L(a) ;$$

(iv) S *je* GV*-polugrupa i za sve* $e, f \in E(S)$ *postoji* $n \in Z^+$ *tako da je*

$$(ef)^n = (efe)^n ;$$

(v) S *je* π*-regularna i*

$$a = axa \quad \Rightarrow \quad ax = ax^2a \ .$$

II 2.11. TEOREMA. *Sledeći uslovi za polugrupu* S *su ekvivalentni:*
(i) S *je polumreža levih i desnih grupa;*
(ii) S *je regularna i za sve* $a, b \in S$ *je*

(5) $$ab \in Sa \cup bS \ ;$$

(iii) S *je regularna i za sve* $a, b \in S$ *je*

$$ab \in L(a) \cup R(b) \ ;$$

(iv) S *je regularna* LR*-polugrupa;*
(v) S *je potpuno regularna i* $E(S)$ *je polumreža singularnih traka;*
(vi) S *je regularna i*

$$a = axa \quad \Rightarrow \quad ax = ax^2a \ \vee \ ax = xa^2x \ .$$

DOKAZ: $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka S jeste polumreža Y levih i desnih grupa S_α, $\alpha \in Y$. Jasno je da S jeste regularna. Neka su $a, b \in S$ proizvoljni elementi. Tada je $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$ za neke $\alpha, \beta \in Y$, pa $ab, ba \in S_{\alpha\beta}$. Dakle, prema I 4.8. dobijamo da je

$$ab \in abS_{\alpha\beta}ba \subseteq Sa \ ,$$

ako $S_{\alpha\beta}$ jeste leva grupa, odnosno

$$ab \in baS_{\alpha\beta}ab \subseteq bS \ ,$$

ako $S_{\alpha\beta}$ jeste desna grupa. Prema tome, važi (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$ i $(iii) \Rightarrow (iv)$. Sledi neposredno.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Sledi prema II 2.9.

$(ii) \Rightarrow (v)$. Neka S jeste regularna i neka važi (5). Tada prema II 2.9. dobijamo da S jeste potpuno regularna. Neka su $e, f \in E(S)$ proizvoljni elementi. Tada je $ef \in fS \cup Se$, odakle dobijamo da je

$$ef = efe \qquad \text{ili} \qquad ef = fef \ ,$$

i

$$ef = (ef)^2 \ .$$

Prema tome, $E(S)$ je polumreža singularnih traka. Dakle, važi (v).

$(v) \Rightarrow (i)$. Neka važi (v). Tada prema I 5.12. sledi da S jeste polumreža Y pravougaonih grupa S_α, $\alpha \in Y$. Prema I 4.8. sledi da S_α jeste leva ili desna grupa za svaki $\alpha \in Y$. Prema tome, važi (i).

$(iv) \Leftrightarrow (vi)$. Sledi prema II 2.9. ∎

II 2.12. POSLEDICA [59]. *Polugrupa S je polumreža levih grupa ako i samo ako S jeste regularna i*

$$ab \in Sa$$

za sve $a, b \in S$.

II 3. TRAKE NIL-EKSTENZIJA GRUPA

Trake nil-ekstenzija grupa su, u opštem slučaju, proučavane od strane J.L.Galbiatieve i M.L.Veronesieve, u radu [36], i to je rezultat prikazan u II 1.9., i od strane L.N.Ševrina, čiji su rezultati prikazani u saopštenju [89], koje autor, nažalost, nije uspeo da nabavi. Dekompozicije u traku nil-ekstenzija grupa, u nekim specijalnim slučajevima, su proučavane u radovima M.Ćirića i S.Bogdanovića,[33], i S.Bogdanovića i M.Ćirića,[17,19], o čemu će više reči biti u narednom poglavlju. U ovom poglavlju dajemo neke nove karakterizacije traka nil-ekstenzija grupa, u opštem i raznim posebnim slučajevima, i prikazujemo interesantne metode za dekompozicije π-regularnih polugrupa u traku nil-ekstenzija grupa. Posebno interesantan rezultat daje posledica II 3.3., koja nam opisuje veoma značajnu vezu koja postoji izmedju dekompozicija u traku nil-ekstenzija grupa i retrakcija.

Sledeća dva rezultata su veoma interesantna, mada ne daju potpune opise polumreža retraktivnih nil-ekstenzija potpuno prostih polugrupa (tj. polumreža pravougaonih traka nil-ekstenzija grupa) i polumreža retraktivnih nil-ekstenzija levih grupa. Rezultati II 3.1. i II 3.2. će nam, ipak, jako dobro poslužiti u dokazivanju ostalih rezultata iz ovog poglavlja.

II 3.1. TEOREMA. *Neka S jeste π-regularna polugrupa i za sve $a, b \in S$ postoji $n \in Z^+$ tako da*

$$(ab)^n \in a^2Sb^2. \tag{1}$$

Tada S jeste polumreža retraktivnih nil-ekstenzija potpuno prostih polugrupa.

DOKAZ: Neka važi (1). Neka je $a \in Reg(S)$, tj. $a = axa$ za neki $x \in S$. Tada imamo da je

$$\begin{aligned} a = axa = (ax)^n a & \quad \text{za svaki } n \in Z^+ \\ \in a^2Sx^2a & \quad \text{za neki } n \in Z^+, \text{ prema (1)}, \\ \subseteq a^2S & \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} a = axa = a(xa)^n & \quad \text{za svaki } n \in Z^+ \\ \in ax^2Sa^2 & \quad \text{za neki } n \in Z^+, \text{ prema (1)}, \\ \subseteq Sa^2, & \end{aligned}$$

pa $a \in Gr(S)$. Prema tome, S je polumreža Y potpuno Arhimedovih polugrupa $S_\alpha, \alpha \in Y$. Za $\alpha \in Y$ neka S_α jeste nil-ekstenzija potpuno proste polugrupe K_α. Neka su $a \in T_e \subseteq S_\alpha$ i $b \in T_f \subseteq S_\alpha, e, f \in E(K_\alpha)$, proizvoljni elementi. Neka $ab \in T_g$ za neki $g \in E(K_\alpha)$. Prema (1) dobijamo da postoji $n_1 \in Z^+$ tako da

$$(bg)^{n_1} \in b^2Sg,$$

tj. postoji $u_1 \in S$ tako da je

$$(bg)^{n_1} = b^2u_1g.$$

Zatim, postoje $n_2 \in Z^+$ i $u_2 \in S$ tako da je

$$(bg)^{n_1n_2} = (b^2u_1g)^{n_2} = b^{2^2}u_2(u_1g)^2.$$

Nastavljajući dalje ovaj postupak, dobijamo da je

$$(bg)^n = b^{2^k}ug, \tag{2}$$

za neker $u \in S, n \in Z^+$ i $k \in Z^+$ takav da je $b^{2^k} \in K_\alpha$. Kako je $bg \in K_\alpha$, to prema Munnovoj lemi imamo da je $bg\mathcal{H}(bg)^n$, gde je $\mathcal{H}$ Greenova $\mathcal{H}$-relacija na K_α, pa je

$$bg = (bg)^n v$$

za neki $v \in S$. Sada prema (2) dobijamo da je

$$fbg = f(bg)^n v = fb^{2^k}ugv = b^{2^k}ugv = (bg)^n v = bg.$$

Prema tome, važi

$$bg = fbg, \tag{3}$$

i na isti način pokazujemo da je

$$af = eaf, \tag{4}$$

$$eab = eabg, \tag{5}$$

(6) $$eb = ebf.$$

Definišimo preslikavanje $\varphi : S_\alpha \to K_\alpha$ sa

$$\varphi(x) = xe \qquad \text{ako } x \in T_e, e \in E(K_\alpha).$$

Tada je

$$\begin{aligned}
\varphi(ab) &= abg \\
&= afbg && (\text{ prema } (4)\ ) \\
&= eafbg && (\text{ prema } (5)\ ) \\
&= eabg && (\text{ prema } (4)\ ) \\
&= eab && (\text{ prema } (6)\ ) \\
&= aeb && (\text{prema Munnovoj lemi}) \\
&= aebf && (\text{ prema } (7)\ ) \\
&= \varphi(a)\varphi(b).
\end{aligned}$$

Prema tome, φ jeste retrakcija, tj. S_α jeste retraktivna nil-ekstenzija potpuno proste polugrupe K_α.

II 3.2. TEOREMA. *Neka S jeste π-regularna polugrupa i za sve $a, b \in S$ postoji $n \in Z^+$ tako da*

$$(ab)^n \in a^2 Sa.$$

Tada S jeste polumreža retraktivnih nil-ekstenzija levih grupa.

DOKAZ: Prema II 2.10. dobijamo da S jeste polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$ i za $\alpha \in Y$ S_α jeste nil-ekstenzija leve grupe K_α. Neka su $a \in T_e \subseteq S_\alpha$ i $b \in T_f \subseteq S_\alpha, e, f \in E(K_\alpha)$, proizvoljni elementi. Neka $ab \in T_g$ za neki $g \in E(K_\alpha)$. Prema dokazu za II 3.1. dobijamo da važe uslovi (3) i (4) u II 3.1. Sa druge strane, imamo da postoji $m \in Z^+$ tako da

$$(eb)^m \in Se\ ,$$

odakle sledi da je $(eb)^m = (eb)^m e$. Kako je $eb \in K_\alpha$ i $eb\mathcal{H}(eb)^m$, gde je $\mathcal{H}$ Greenova $\mathcal{H}$-relacija na K_α, to dobijamo da je $eb = ebe$, pa je

$$(eb)^n = eb^n\ ,$$

za svaki $n \in Z^+$. Ako je $n \in Z^+$ broj za koji je $b^n \in G_f$ i ako je $u \in K_\alpha$ element za koji je $eb = u(eb)^n$ (jer je $eb\mathcal{H}(eb)^n$), to dobijamo da je

$$eb = u(eb)^n = ueb^n = ueb^n f = ebf\ .$$

Prema tome, važi uslov (6) iz II 3.1.. Na isti način dokazujemo da važi uslov (5) iz II 3.1. Ostatak dokaza je isti kao u II 3.1. ∎

Kao što je već rečeno u uvodu za ovo poglavlje, sledeći rezultat opisuje veoma značajnu vezu koja postoji izmedju dekompozicije π-regularne polugrupe u traku nil-ekstenzija grupa i retrakcija polugrupe na svoj regularni (odnosno grupni) deo.

II 3.3. PROPOZICIJA. *Neka S jeste traka π-grupa i $Reg(S)$ je podpolugrupa od S. Tada $Reg(S)$ jeste traka grupa i retrakt od S.*

Obrnuto, ako S sadrži retrakt K koji je traka grupa i $S = \sqrt{K}$, tada S jeste traka π-grupa.

DOKAZ: Neka S jeste traka I π-grupa S_i, $i \in I$, i neka $Reg(S)$ jeste podpolugrupa od S. Za $i \in I$ neka S_i jeste nil-ekstenzija grupe G_i sa jedinicom e_i. Tada je

$$Reg(S) = Gr(S) = \bigcup_{i\in I} G_i \ .$$

Tada je jasno da $Reg(S)$ jeste traka I grupa G_i, $i \in I$. Definišimo preslikavanje $\varphi : S \to Reg(S)$ sa:

$$\varphi(x) = xe_i \qquad \text{ako} \quad x \in S_i, \ i \in I \ .$$

Neka je $x_i \in S_i$, $x_j \in S_j$, $i, j \in I$. Kako je $e_ie_{ij} = (e_ie_{ij})e_{ij} \in S_{ij}G_{ij} \subseteq G_{ij}$ i $e_{ij}e_j = e_{ij}(e_{ij}e_j) \in G_{ij}S_{ij} \subseteq G_{ij}$, to imamo da je

$$(e_ie_{ij})^2 = e_i(e_{ij}(e_ie_{ij})) = e_i(e_ie_{ij}) = e_ie_{ij} \in S_{ij} \ ,$$

$$(e_{ij}e_j)^2 = ((e_{ij}e_j)e_{ij})e_j = (e_{ij}e_j)e_j = e_{ij}e_j \in S_{ij} \ ,$$

pa kako S_{ij} sadrži tačno jedan idempotent e_{ij}, to dobijamo da je

(7) $$e_ie_{ij} = e_{ij}e_j = e_{ij} \ .$$

Sada dobijamo da je

$$\begin{aligned}
\varphi(x_i)\varphi(x_j) &= (x_ie_i)(x_je_j) \\
&= e_{ij}(x_ie_i)(x_je_j)e_{ij} && (\text{jer je } x_ie_ix_je_j \in G_iG_j \subseteq G_{ij}) \\
&= e_{ij}e_ix_ix_je_je_{ij} && (\text{prema Munnovoj lemi }) \\
&= e_{ij}e_ix_ix_je_{ij}e_je_{ij} && (\text{jer je } e_{ij}e_ix_ix_j \in G_{ij}S_{ij} \subseteq G_{ij}) \\
&= e_{ij}e_ix_ix_je_{ij} && (\text{prema } (7)\ ) \\
&= e_{ij}e_ie_{ij}x_ix_je_{ij} && (\text{jer je } x_ix_je_{ij} \in S_{ij}G_{ij} \subseteq G_{ij}) \\
&= e_{ij}x_ix_je_{ij} && (\text{prema } (7)\ ) \\
&= x_ix_je_{ij} && (\text{jer je } x_ix_je_{ij} \in G_{ij}) \\
&= \varphi(x_ix_j) \ .
\end{aligned}$$

Prema tome, φ je retrakcija od S na $Reg(S)$.

Obrnuto, neka S sadrži retrakt K koji je traka I grupa G_i, $i \in I$, i neka je $\sqrt{K} = S$. Neka $\varphi : S \to K$ jeste retrakcija i $S_i = \varphi^{-1}(G_i)$, $i \in I$. Tada je jasno da je $S_i \cap K = G_i$ i $S_i = \sqrt{G_i}$, za svaki $i \in I$. Prema tome, za svaki $i \in I$ imamo da S_i jeste π-grupa, pa S jeste traka I π-grupa S_i, $i \in I$. ∎

II 3.4. POSLEDICA [36]. (i). *Polugrupa S je retraktivna nil-ekstenzija potpuno proste polugrupe ako i samo ako S jeste pravougaona traka π-grupa.*

(ii). *Polugrupa S je retraktivna nil-ekstenzija leve (desne) grupe ako i samo ako S jeste levo (desno) nulta traka π-grupa.*

Sledeća teorema je glavni rezultat ovog poglavlja.

II 3.5. TEOREMA. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*
(i) S *je π-regularna i za sve $a, b \in S$ postoji $n \in Z^+$ tako da*

(8) $$(ab)^n \in a^2bSab^2;$$

(ii) S *je potpuno π-regularna i za sve $a, b \in S$ je*

(9) $$ab \;\tau\; ab^2 \;\tau\; a^2b;$$

(iii) S *je traka π-grupa.*

DOKAZ: $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka važi (i). Tada prema Teoremi II 3.1. dobijamo da S jeste polumreža Y polugrupa $S_\alpha, \alpha \in Y$, pri čemu za $\alpha \in Y$ S_α jeste retraktivna nil-ekstenzija potpuno proste polugrupe K_α. Prema tome, S jeste potpuno π-regularna. Takodje, prema II 3.4. imamo da za svaki $\alpha \in Y$ S_α jeste pravougaona traka $E(K_\alpha)$ π-grupa $T_e, e \in E(K_\alpha)$, pri čemu T_e jesu τ-klase polugrupe S.

Neka je $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$, $\alpha, \beta \in Y$. $\alpha \neq \beta$. Tada je $ab \in S_{\alpha\beta}$. Uzmimo da je $S_{\alpha\beta}$ pravougaona traka $I \times \Lambda$ π-grupa $T_{i\lambda}, i \in I, \lambda \in \Lambda$. Neka je $ab \in T_{i\lambda}, a^2b \in T_{j\mu}$ i $ab^2 \in T_{l\nu}$ za neke $i, j, l \in I$ i $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$. Neka $e_{j\mu}$ jeste idempotent iz $T_{j\mu}$. Tada imamo da je

$$e_{j\mu}a^2b = e_{j\mu}e_{j\mu}aab \in T_{j\mu}S_{\alpha\beta}T_{i\lambda} \subseteq T_{j\lambda},$$

i sa druge strane je

$$e_{j\mu}a^2b \in T_{j\mu}^2 \subseteq T_{j\mu},$$

odakle dobijamo da je $\mu = \lambda$. Na isti način dokazujemo da je $l = i$. Sa druge strane, prema (8) imamo da postoji $n \in Z^+$ tako da je

$$(ab)^n \in a^2bS_{\alpha\beta}ab^2 \subseteq T_{j\lambda}S_{\alpha\beta}T_{i\nu} \subseteq T_{j\nu},$$

pa kako je $(ab)^n \in T_{i\lambda}$, to dobijamo da je $j = i$ i $\nu = \lambda$. Prema tome

$$ab, a^2b, ab^2 \in T_{i\lambda},$$

pa važi (9).

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka važi (ii). Neka su $a, b \in S$ proizvoljni elementi. Uzmimo da je $a \in T_e, b \in T_f$, za neke $e, f \in E(S)$. Prema (9) neposredno dobijamo da je

$$ab\tau a^k b \quad \text{za svaki } k \in Z^+.$$

Neka je $k \in Z^+$ element takav da je $a^k \in G_e$. Tada je

$$\begin{aligned} eb &= a^k(a^k)^{-1}b \\ &\tau\ (a^k)^2(a^k)^{-1}b \\ &= a^k eb \\ &= a^k b \\ &\tau\ ab. \end{aligned}$$

Dakle , $eb\tau ab$. Na isti način dokazujemo da je $ef\tau eb$. Prema tome, imamo da je $ab\tau ef$, pa τ jeste kongruencija. Jasno je da τ jeste tračna kongruencija pa S jeste traka π-grupa.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Neka S jeste traka I π-grupa $S_i, i \in I$. Neka $a \in S_i, b \in S_j$, $i, j \in I$. Tada imamo da

$$ab, a^2b, ab^2 \in S_{ij},$$

odakle lako dobijamo (8). ∎

Slično kao u II 3.5., dokazujemo naredne rezultate.

II 3.6. TEOREMA. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) S je π-regularna i za sve $a, b \in S$ postoji $n \in Z^+$ tako da

(10) $$(ab)^n \in a^2bSa;$$

(ii) S je potpuno π-regularna i za sve $a, b \in S$ je

(11) $$ab\ \tau\ a^2b\ \tau\ aba;$$

(iii) S je levo regularna traka π-grupa.

DOKAZ: $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka S jeste π-regularna i neka važi (10). Prema II 3.2. dobijamo da S jeste polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, i za svaki $\alpha \in Y$ S_α jeste retraktivna nil-ekstenzija leve grupe. Neka su $a, b \in S$ proizvoljni elementi. Tada imamo da je $a \in S_\alpha, b \in S_\beta$ za neke $\alpha, \beta \in Y$ i da je $ab, aba, a^2b \in S_{\alpha\beta}$. Prema I 4.8. imamo da $S_{\alpha\beta}$ jeste levo nulta traka I π-grupa T_i, $i \in I$. Uzmimo da $ab \in T_i$, $a^2b \in T_j$ i $aba \in T_k$ za neke $i, j, k \in I$. Tada imamo da je $(aba)^2 \in T_k$ i

$$(aba)^2 = ab(a^2ba) \in T_iS_{\alpha\beta} \subseteq T_i\ ,$$

odakle dobijamo da je $k = i$, pa je

$$ab\ \tau\ aba\ .$$

Sa druge strane, prema (10) dobijamo da postoji $n \in Z^+$ tako da je $(ab)^n = a^2bu$ za neki $u \in S$. Uzmimo da je $u \in S_\gamma$ za neki $\gamma \in Y$. Tada se lako pokazuje da je $\alpha\beta\gamma = \alpha\beta$, odakle dobijamo da je

$$(ab)^{n+1} = a^2b(uab) \in T_jS_{\alpha\beta} \subseteq T_j\ ,$$

pa je $j = i$, tj. imamo da je

$$ab\ \tau\ a^2b\ .$$

Kako je jasno da S jeste potpuno π-regularna, to imamo da važi (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka S jeste potpuno π-regularna i neka važi (11). Neka su $a, b \in S$ proizvoljni elementi. Uzmimo da je $a\tau e$ i $b\tau f$ za neke $e, f \in E(S)$. Prema (10) neposredno dobijamo da je

$$ab \;\tau\; a^k b \quad \text{za svaki } k \in Z^+.$$

Neka je $k \in Z^+$ element takav da je $a^k \in G_e$. Tada je

$$\begin{aligned} eb &= a^k(a^k)^{-1}b \\ &\tau\; (a^k)^2(a^k)^{-1}b \\ &= a^k eb \\ &= a^k b \\ &\tau\; ab. \end{aligned}$$

Dakle , $eb\tau ab$, odakle dobijamo da τ jeste desna kongruencija. Sa druge strane, prema (11) imamo da je $ab\tau aba$, odakle dobijamo da je

$$\begin{aligned} ab &\;\tau\; (ab)^2 \\ &= (aba)b \\ &\tau\; (ab)b \qquad \text{jer } \tau \text{ jeste desna kongruencija ,} \\ &= ab^2 \;. \end{aligned}$$

Prema tome, važi (9), pa prema II 3.5. dobijamo da S jeste traka $S_{/\tau}$ π-grupa. Neka su $a\tau, b\tau \in S_{/\tau}$ proizvoljni elementi. Tada prema (12) dobijamo da je

$$(a\tau)(b\tau) = (a\tau)(b\tau)(a\tau) \;.$$

Prema tome, $S_{/\tau}$ jeste levo regularna traka.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Neka S jeste levo regularna traka I π-grupa S_i, $i \in I$. Neka su $a, b \in S$ proizvoljni elementi. Tada imamo da $a \in S_i$, $b \in S_j$ za neke $i, j \in I$, odakle dobijamo da $ab, a^2b \in S_{ij}$ i $aba \in S_{iji} = S_{ij}$. Kako S_{ij} jeste π-grupa, to dobijamo da postoji $n \in Z^+$ tako da

$$(ab)^n \in (a^2b)^n S_{ij}(aba)^n \subseteq a^2bSa \;.$$

Prema tome, važi (11). Jasno je da S jeste π-regularna. ∎

II 3.7. TEOREMA. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*
(i) *S je π-regularna i za sve $a,b,c \in S$ postoji $n \in Z^+$ tako da*

$$(abc)^n \in acSac; \tag{12}$$

(ii) *S je potpuno π-regularna i za sve $a,b,c,d \in S$ je*

$$abcd \ \tau \ acbd; \tag{13}$$

(iii) *S je normalna traka π-grupa.*

DOKAZ: $(i) \Rightarrow (iii)$. Neka važi (i). Tada prema II 1.10. dobijamo da S jeste normalna traka I t-Arhimedovih polugrupa S_i, $i \in I$. Neka je $a \in Reg(S)$ proizvoljni element. Tada je $a = axa$ za neki $x \in S$, pa prema (12) dobijamo da postoje $m,n \in Z^+$ tako da je

$$ax = (axax)^n \in aaxSaax \ ,$$

odakle dobijamo da je

$$a = axa \in a^2xSa^2xa \subseteq a^2Sa^2 \ .$$

Prema tome, $a \in Gr(S)$ pa dobijamo da S jeste potpuno π-regularna i prema I 5.18. dobijamo da S_i jeste potpuno π-regularna za svaki $i \in I$. Dakle, za svaki $i \in I$ S_i jeste π-grupa, tj. S jeste normalna traka π-grupa.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Sledi prema II 1.10.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Neka važi (ii). Tada je jasno da S jeste π-regularna. Neka su $a,b,c \in S$ proizvoljni elementi. Tada prema (13) dobijamo da je

$$(abc)^2 = ab(cab)c \ \tau \ a(cab)bc = acab^2c$$

i

$$(abc)^2 = a(bca)bc \ \tau \ ab(bca)c = ab^2cac \ ,$$

odakle sledi da postoje $m,n \in Z^+$ tako da je

$$(abc)^{2m} \in acS \quad \text{i} \quad (abc)^{2n} \in Sac$$

pa je

$$(abc)^{2m+2n} \in acSac \ .$$

Prema tome, važi (i).

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Sledi neposredno. ∎

Na sličan način kao i prethodna, dokazuje se sledeća teorema.

II 3.8. TEOREMA. *Sledeći uslovi za polugrupu* S *su ekvivalentni:*
(i) S *je* π*-regularna i za sve* $a, b, c \in S$ *postoji* $n \in Z^+$ *tako da*

$$(abc)^n \in acSa;$$

(ii) S *je* π*-regularna i za sve* $a, b, c \in S$ *postoji* $n \in Z^+$ *tako da*

$$(abc)^n \in acSb;$$

(iii) S *je potpuno* π*-regularna i za sve* $a, b, c \in S$ *je*

$$abc \ \tau \ acb \ ;$$

(iv) S *je levo normalna traka* π*-grupa.*

DOKAZ: $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Sledi prema II 1.11. $(ii) \Rightarrow (iv)$. Sledi prema II 1.11. i I 5.18.

$(iv) \Rightarrow (iii)$. Sledi neposredno.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Neka važi (iii). Neka su $a, b, c \in S$ proizvoljni elementi. Tada prema (iii) dobijamo da postoje $m, n \in Z^+$ tako da $(abc)^n, (acb)^m \in G$, gde je G neka podgrupa polugrupe S, odakle sledi da je

$$(abc)^n \in (acb)^m G (acb)^m \subseteq acSb \ .$$

Prema tome, važi (ii). ∎

II 3.9. POSLEDICA. *Sledeći uslovi za polugrupu* S *su ekvivalentni:*
(i) S *je* π*-regularna i za sve* $a, b \in S$ *postoji* $n \in Z^+$ *tako da*

$$(ab)^n \in bSa;$$

(ii) S *je potpuno* π*-regularna i za sve* $a, b \in S$ *je*

$$ab \ \tau \ ba;$$

(iii) S *je* π*-regularna i iz* $a = axa$ *sledi da je* $ax = xa$*;*
(iv) S *je polumreža* π*-grupa.*

DOKAZ: $(i) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv)$. To je rezultat iz [11].

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka važi (ii) i neka je $a = axa$ za neke $a, x \in S$. Tada imamo da je $ax \ \tau \ xa$. Prema tome, imamo da su ax i xa idempotenti koji leže u istoj podgrupi od S, pa je jasno da je $ax = xa$. Dakle, važi (iii).

$(iv) \Rightarrow (ii)$. Sledi neposredno. ∎

II 4. RÉDEIEVA TRAKA NIL-EKSTENZIJA GRUPA

Veoma značajan tip dekompozicija u traku nil-ekstenzija grupa su dekompozicije u Rédeievu traku nil-ekstenzija grupa. Razni posebni slučajevi ovih dekompozicija su proučavani u radovima raznih poznatih autora. Dekompozicije ovakvog tipa, naprimer, imaju veoma značajno mesto u izučavanju polugrupa čije mreže podpolugrupa imaju modularno ili distributivno svojstvo. O tome se više informacija može naći u monografiji M.Petricha,[60], ili preglednom radu L.N.Ševrina i A.J.Ovsyanikova,[91]. Veoma značajne, po tom problemu, su tzv. U-trake polugrupa, koje su poseban slučaj Rédeievih traka polugrupa i koje su izučavane u radovima L.N.Ševrina,[85], i S.Bogdanovića i M.Ćirića,[17]. Drugi posebni slučajevi Rédeievih traka π-grupa su izučavani u radovima S.Bogdanovića i M.Ćirića,[17,19], i M.Ćirića i S.Bogdanovića,[33].

U ovom poglavlju opisujemo Rédeieve trake nil-ekstenzija grupa, u opštem i nekim posebnim slučajevima. Takodje, dajemo niz zanimljivih rezultata koji će nam poslužiti za dokazivanje ostalih rezultata u ovom poglavlju. Naprimer, opisujemo lance nil-ekstenzija pravougaonih grupa i lance nil-ekstenzija levih i desnih grupa.

II 4.1. LEMA. *Polugrupa S je lanac pravougaonih traka ako i samo ako je*

$$(1) \qquad a = aba \quad \vee \quad b = bab$$

za sve $a, b \in S$.

DOKAZ: Neka S jeste lanac Y pravougaonih traka S_α, $\alpha \in Y$. Neka $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$, $\alpha, \beta \in Y$. Ako je $\alpha \leq \beta$, tada $a, ab \in S_\alpha$, pa je

$$aba = a^2ba = a(ab)a = a\ .$$

Slično dokazujemo da iz $\beta \leq \alpha$ sledi da je $bab = b$. Prema tome, važi (1).

Obrnuto, neka važi (1) i neka je $a \in S$. Tada iz (1) dobijamo da je $a = a^3$, pa je

$$a = aa^2a = a^4 = a^2 \quad \text{ili} \quad a^2 = a^2aa^2 = a^5 = a^3 = a\ .$$

Prema tome, S jeste traka, pa S jeste polumreža Y pravougaonih traka. Iz (1) se lako dobija da Y jeste lanac. ∎

Lanci nil-ekstenzija pravougaonih grupa su opisani u radu S.Bogdanovića,[10]. U narednoj teoremi dajemo neke nove (mada slične) karakterizacije ovih polugrupa. Posebno je interesantna metodologija primenjena u dokazu ove teoreme.

II 4.2. TEOREMA. *Sledeći uslovi za polugrupu* S *su ekvivalentni:*
(i) S *je lanac nil-ekstenzija pravougaonih grupa;*
(ii) S *je potpuno* π*-regularna i* $E(S)$ *je lanac pravougaonih traka;*
(iii) S *je* GV*-polugrupa i* $E(S)$ *je lanac pravougaonih traka.*

DOKAZ: $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka S jeste lanac Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, i za svaki $\alpha \in Y$ neka S_α jeste nil-ekstenzija pravougaone grupe K_α. Jasno je da tada S jeste potpuno π-regularna. Neka su $e, f \in E(S)$ proizvoljni elementi. Tada je $e \in S_\alpha$ i $f \in S_\beta$ za neke $\alpha, \beta \in Y$. Prema II 2.5. imamo da je $(ef)^n = (ef)^{n+1}$ za neki $n \in Z^+$, odakle dobijamo da je $(ef)^n e = (ef)^{n+1} e$, odnosno

$$(efe)^n = (efe)^{n+1} .$$

Prema tome, imamo da je $(efe)^n$ idempotent, paje $(efe)^n \in E_{\alpha\beta} = E(S_{\alpha\beta}) = E(K_{\alpha\beta})$. Na isti način dokazujemo da je $(fef)^n \in E_{\alpha\beta}$. Uzmimo da je $\alpha \leq \beta$. Tada imamo da $e, (efe)^n \in E_\alpha$, odakle dobijamo da je

$$(efe)^n = e(efe)^n e = e ,$$

pa je

$$e = (efe)^n = (efe)^{n+1} = e(efe) = efe .$$

Na sličan način dokazujemo da iz $\beta \leq \alpha$ sledi da je $f = fef$. Dakle, prema II 4.1. dobijamo da $E(S)$ jeste lanac pravougaonih traka.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka S jeste potpuno π-regularna i neka $E(S)$ jeste lanac pravougaonih traka. Kako je $E(S)$ podpolugrupa od S, to prema I 3.3. dobijamo da $T = Reg(S)$ jeste regularna podpolugrupa od S. Neka je $a \in T$ proizvoljni element. Tada je $a = axa$ i $x = xax$ za neki $x \in T$. Kako $ax, xa \in E(S)$ i $E(S)$ jeste lanac pravougaonih traka, to prema II 4.1. dobijamo da je

$$a = axa = (ax)(xa)(ax)a = ax^2a^2xa \in Ta^2T ,$$

ili

$$a = axa = a(xa)(ax)(xa) = axa^2x^2a \in Ta^2T .$$

Prema tome, T je intra-regularna polugrupa pa prema I 5.15. sledi da T jeste polumreža Y prostih polugrupa T_α, $\alpha \in Y$. Takodje, prema I 5.17. dobijamo da je T_α potpuno π-regularna za svaki $\alpha \in Y$, pa prema I 4.4. dobijamo da je T_α potpuno prosta za svaki $\alpha \in Y$. Sada prema I 5.11. dobijamo da T jeste potpuno regularna, pa S jeste GV-polugrupa. Prema tome, važi (iii).

$(iii) \Rightarrow (i)$. Neka S jeste GV-polugrupa i neka $E(S)$ jeste lanac pravougaonih traka. Tada je $ef = (ef)^2$ za sve $e, f \in E(S)$, pa prema II 2.5. sledi da S jeste polumreža Y nil-ekstenzija S_α, $\alpha \in Y$ pravougaonih grupa. Prema II 4.1. se lako dokazuje da Y jeste lanac. Dakle, važi (i). ∎

II 4.3. DEFINICIJA. *Polugrupa* S *je oslabljena Rédeieva traka (ili prostije* WR*-traka) ako je*

$$ab \in \{a, b\} \quad \vee \quad ba \in \{a, b\}$$

za sve $a, b \in S$.

Polugrupa S je levo oslabljena Rédeieva traka (ili prostije LWR-traka) ako je

$$ab \in \{a, b\} \quad \vee \quad ba \in \{a, b\}$$

za sve $a, b \in S$.

Polugrupa S je Rédeieva traka ako je

$$ab \in \{a, b\}$$

za sve $a, b \in S$.

Jasno je da svaka polugrupa sa jednim od ovakvih svojstava jeste traka.

II 4.4. LEMA. *Polugrupa S je WR-traka ako i samo ako S jeste lanac singularnih traka.*

DOKAZ: Neka S jeste lanac Y singularnih traka S_α, $\alpha \in Y$. Neka su $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$, $\alpha, \beta \in Y$ proizvoljni elementi. Ako je $\alpha \leq \beta$, tada je $ab, ba \in S_\alpha$, pa je

$$ab = a(ab) = a \ ,$$

ako S_α jeste levo nulta traka, odnosno

$$ba = (ba)a = a \ ,$$

ako S_α jeste desno nulta traka. Sličan dokaz imamo za $\beta \leq \alpha$. Prema tome, S jeste WR-traka.

Obrnuto, neka S jeste WR-traka. Tada S jeste polumreža Y pravougaonih traka S_α, $\alpha \in Y$. Tada je jasno da Y jeste lanac. Neka je $\alpha \in Y$ proizvoljni element i neka je $S_\alpha = I \times \Lambda$. Neka su $(i, \lambda), (j, \mu) \in I \times \Lambda$ proizvoljni elementi. Tada važi jedan od sledećih uslova

$$\begin{aligned}
(i, \mu) &= (i, \lambda)(j, \mu) = (i, \lambda) \ , \\
(i, \mu) &= (i, \lambda)(j, \mu) = (j, \mu) \ , \\
(j, \lambda) &= (j, \mu)(i, \lambda) = (j, \mu) \ , \\
(j, \lambda) &= (j, \mu)(i, \lambda) = (i, \lambda) \ .
\end{aligned}$$

Prema tome, imamo da je $i = j$ ili $\lambda = \mu$, odnosno da je $|I| = 1$ ili $|\Lambda| = 1$. Dakle, S_α je singularna traka, pa S jeste lanac singularnih traka. ∎

II 4.5. POSLEDICA [77,78]. *Polugrupa S je Rédeieva traka ako i samo ako S jeste ordinalna suma singularnih traka.*

II 4.6. POSLEDICA. *Polugrupa S je LWR-traka ako i samo ako S jeste lanac levo nultih traka.*

Koristeći napred dobijene rezultate, lako dokazujemo sledeću teoremu.

II 4.7. TEOREMA. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*
(i) S *je lanac nil-ekstenzija levih i desnih grupa;*
(ii) S *je potpuno* π*-regularna i* $E(S)$ *je* WR*-traka;*
(iii) S *je* GV*-polugrupa i* $E(S)$ *je* WR*-traka.*

DOKAZ: Dokazuje se slično kao II 4.2. ∎

Sledeći rezultat je glavni rezultat ovog poglavlja i opisuje polugrupe koje se mogu razložiti u Rédeievu traku nil-ekstenzija grupa.

II 4.8. TEOREMA. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*
(i) S *je Rédeieva traka* π*-grupa;*
(ii) S *sadrži retrakt* K *koji je Rédeieva traka grupa i* $\sqrt{K} = S$*;*
(iii) $(\forall a, b \in S)(\exists n \in Z^+)\ a^n \in (ab)^n S(ab)^n \ \vee \ b^n \in (ab)^n S(ab)^n$*;*

DOKAZ: $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka S jeste Rédeieva traka I π-grupa S_i, $i \in I$. Za $i \in I$ neka S_i jeste nil-ekstenzija grupe G_i sa jedinicom e_i. Jasno je da je $E(S) = \{e_i \mid i \in I\}$. Neka su $e_i, e_j \in E(S)$, $i, j \in I$, proizvoljni elementi. Tada je $e_ie_j \in S_{ij}$. Ako je $ij = i$, tada je $e_ie_j \in S_i$, pa kako imamo da je $e_ie_j = e_i(e_ie_j) \in G_iS_i \subseteq G_i$, to dobijamo da je

$$(e_ie_j)^2 = ((e_ie_j)e_i)e_j = (e_ie_j)e_j = e_ie_j \ .$$

Ako je $ij = j$, tada na isti način dokazujemo da je $(e_ie_j)^2 = e_ie_j$. Prema tome, $E(S)$ je podpolugrupa od S pa prema I 3.3. dobijamo da je $Reg(S)$ podpolugrupa od S, odakle, prema II 3.3., dobijamo da važi (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Sledi prema II 3.3.

$(i) \Rightarrow (iii)$. Neka S jeste Rédeieva traka I π-grupa S_i, $i \in I$. Za $i \in I$ neka S_i jeste nil-ekstenzija grupe G_i. Neka su $a \in S_i$, $b \in S_j$, $i, j \in I$, proizvoljni elementi. Tada je $ij = i$ ili $ij = j$. Uzmimo da je $ij = i$. Tada je $ab \in S_i$ pa postoji $n \in Z^+$ tako da $(ab)^n, a^n \in G_i$, odakle dobijamo da je

$$a^n = (ab)^n((ab)^n)^{-1}a^n((ab)^n)^{-1}(ab)^n \in (ab)^n S(ab)^n \ ,$$

gde je $((ab)^n)^{-1}$ inverzni element elementa $(ab)^n$ u grupi G_i. Ako je $ij = j$, tada na sličan način dokazujemo da je

$$b^n \in (ab)^n S(ab)^n$$

za neki $n \in Z^+$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Neka važi (iii). Tada je jasno da S jeste potpuno π-regularna. Takodje, prema (iii) dobijamo da je

$$e \in Sf \qquad \text{i} \qquad f \in eS \ ,$$

za sve $e, f \in E(S)$, odakle lako dokazujemo da $E(S)$ jeste Rédeieva traka. Dakle, prema II 4.7. dobijamo da S jeste lanac Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, pri čemu je S_α nil-ekstenzija leve ili desne grupe K_α za svaki $\alpha \in Y$.

Neka je $\alpha \in Y$ i neka su $a, b \in S$ proizvoljni elementi. Uzmimo da $a \in T_e$, $b \in T_f$, $e, f \in E(S_\alpha)$, $e \neq f$. Takodje, uzmimo da K_α jeste leva grupa (slično dokazujemo slučaj kada je K_α desna grupa). Prema (iii) dobijamo da postoji $n \in Z^+$ tako da je

$$a^n \in (af)^n S(af)^n \quad \text{ili} \quad f \in (af)^n S(af)^n .$$

Neka je $f \in (af)^n S(af)^n \subseteq afSaf$. Kako je $af \in S_\alpha K_\alpha \subseteq K_\alpha$, to prema I 3.10. dobijamo da je $af \in G_f$. Sa druge strane, imamo da je $fa = ffa \in G_f K_\alpha \subseteq G_f$, to dobijamo da je

$$af = f(af) = (fa)f = fa .$$

Kako je $a^k \in G_e$ za neki $k \in Z^+$, to dobijamo da je

$$a^k = a^k e = a^k ef = a^k f = fa^k \in G_f G_e \subseteq G_f ,$$

što, prema I 3.10. i Munnovoj lemi, nije moguće. Prema tome, mora biti

$$a^n \in (af)^n S(af)^n \subseteq K_\alpha$$

(jer je $af \in K_\alpha$). Prema tome,

$$a^{2n} \in (af)^n S(af)^{2n} S(af)^n \subseteq afK_\alpha af ,$$

pa je $a^{2n} \mathcal{H}\ ef$ (gde je $\mathcal{H}$ Greenova $\mathcal{H}$-relacija na K_α), odakle sledi da je $af \in G_e$. Slično dokazujemo da je $be \in G_f$, pa prema Munnovoj lemi dobijamo da je

$$be = fbe = bfe = bf = fb ,$$
$$af = eaf = aef = ae = ea$$

i

$$abe = afb = eab .$$

Uzmimo da je $(ab)^m \in G_g$ za neke $g \in E(S_\alpha)$, $m \in Z^+$. Tada je

$$(ab)^m e \in G_g G_e \subseteq G_g \quad \text{i} \quad (ab)^m e = e(ab)^m \in G_e G_g \subseteq G_e .$$

Prema tome, imamo da je $g = e$, tj. $(ab)^m \in G_e$, pa je

$$ab \in T_e = T_{ef} .$$

Dakle, za svaki $\alpha \in Y$ imamo da S_α jeste levo ili desno nulta traka π-grupa.

Neka su $a \in T_e \subseteq S_\alpha$, $b \in T_f \subseteq S_\beta$, $\alpha \neq \beta$ proizvoljni elementi. Uzmimo da je $\alpha < \beta$(sličan dokaz imamo u slučaju da je $\beta < \alpha$). Tada je $ef = fe = e$ i, osim toga, postoji $n \in Z^+$ tako da je

$$b^n \in (be)^n S(be)^n \quad \text{ili} \quad e \in (be)^n S(be)^n .$$

Ako je $b^n = (be)^n u(be)^n$ za neki $u \in S$, tada je $u \in S_\gamma$ za neki $\gamma \in Y$ pa je $\alpha\beta\gamma = \beta$, odakle dobijamo da je $\alpha\beta = \beta$, što nije moguće. Prema tome, imamo da je

$$e \in (be)^n S(be)^n \subseteq beSbe \ .$$

Kako je $be = (be)e \in S_\alpha K_\alpha \subseteq K_\alpha$, to prema I 5.9. i I 3.10. dobijamo da je $b \in G_e$. Na isti način dokazujemo da je $eb \in G_e$, odakle dobijamo da je

$$eb = (eb)e = e(be) = be \ ,$$

pa prema Munnovoj lemi dobijamo da je

$$abe = aeb = eab \ .$$

Neka je $(ab)^m \in G_g$ za neke $g \in E(S_\alpha)$, $m \in Z^+$. Tada je

$$\begin{aligned}(ab)^m &= (ab)^m g = (ab)^m geg = (ab)^m eg = e(ab)^m g \\ &= e(ab)^m = ee(ab)^m = e(ab)^m e \\ &\in eS_\alpha e \\ &= G_e \ .\end{aligned}$$

Prema tome, $(ab)^m \in G_e$, tj. $ab \in T_e = T_{ef}$. Kako prema II 2.3. dobijamo da T_e jeste π-grupa za svaki $e \in E(S)$, to dobijamo da S jeste Rédeieva traka $E(S)$ π-grupa T_e, $e \in E(S)$. ∎

II 4.9. POSLEDICA. *Polugrupa S je Rédeieva traka grupa ako i samo ako je*

$$a \in abSab \qquad \vee \qquad b \in abSab$$

za sve $a, b \in S$.

Posledica napred dobijenih rezultata je i sledeći rezultat dokazan u radu M.Ćirića i S.Bogdanovoća,[33].

II 4.10. TEOREMA. *Polugrupa S je Rédeieva traka periodičnih π-grupa ako i samo ako S jeste π-regularna i za sve $a, b \in S$ postoji $n \in Z^+$ tako da je*

(2) $$(ab)^n \in \langle a \rangle \cup \langle b \rangle \ .$$

DOKAZ: Neka S jeste Rédeieva traka I periodičnih π-grupa S_i, $i \in I$. Tada je jasno da S jeste π-regularna. Neka su $a, b \in S$ proizvoljni elementi. Tada je $a \in S_i$, $b \in S_j$ za neke $i, j \in I$. Ako je $ij = i$ i ako je $E(S_i) = \{e_i\}$, tada imamo da postoje $n, m \in Z^+$ tako da je

$$(ab)^n = e_i = a^m \ ,$$

odakle dobijamo da je $(ab)^n \in < a >$. Na isti način dokazujemo da iz $ij = j$ sledi da je $(ab)^n \in < b >$ za neki $n \in Z^+$. Prema tome, važi (2).

Obrnuto, neka S jeste π-regularna polugrupa i neka važi (2). Neka je $a \in Reg(S)$ proizvoljni element, tj. neka je $a = axa$ za neki $x \in S$. Tada prema (2) dobijamo da

$$ax \in < a > \cup < x > \quad \text{i} \quad xa \in < a > \cup < x > .$$

Ako je $ax = a^k$ ili $xa = a^k$ za neki $k \in Z^+$, tada dobijamo da je $a = a^{k+1}$ pa je $a \in Gr(S)$. Kako imamo da $ax, xa \in E(S)$, to za $ax, xa \in < x >$ dobijamo da je $ax = xa$, pa je $a = xa^2 = a^2x$, tj. $a \in Gr(S)$. Prema tome, S je GV-polugrupa, pa S jeste potpuno π-regularna. Neka je $a \in S$ proizvoljni element. Tada je $a^n \in G_e$ za neki $n \in Z^+$ i neki $e \in E(S)$, pa postoji $u \in S$ tako da je $a^n u = e$. Sada prema (2) dobijamo da postoji $m \in Z^+$ tako da je

$$e = e^m = (a^n u) \in < a^n > \cup < u > .$$

Ako je $e = u^k$ za neki $k \in Z^+$, tada je $e = (a^n)^k u^k = (a^n)^k e = a^{nk}$. Prema tome, imamo da je $e \in < a >$, odakle sledi da S jeste periodična.

Neka su $a, b \in S$ proizvoljni elementi. Prema (2) imamo da postoji $n \in Z^+$ tako da je $(ab)^n \in < a > \cup < b >$. Uzmimo da je $(ab)^n = a^k$ za neki $k \in Z^+$. Kako je S periodična, to postoji $p \in Z^+$ tako da je $(ab)^p \in E(S)$, odakle dobijamo da je

$$a^{kp} = (ab)^{np} = (ab)^p = ((ab)^p)^{3k} \in (ab)^{kp} S (ab)^{kp} .$$

Na isti način dokazujemo da iz $(ab)^n \in < b >$ sledi da je $b^m \in (ab)^m S (ab)^m$ za neki $m \in Z^+$. Dakle, prema II 4.8. dobijamo da S jeste Rédeieva traka periodičnih π-grupa. ∎

II 4.11. DEFINICIJA. *Polugrupa S je $\mathcal{U}$-polugrupa ako unija svakih dvaju podpolugrupa od S jeste podpolugrupa, tj. ako je*

$$ab \in < a > \cup < b >$$

za sve $a, b \in S$.

II 4.12. LEMA. *Neka S jeste $\mathcal{U}$-polugrupa. Tada S jeste nil-polugrupa ako i samo ako je $S^5 = 0$.*

DOKAZ: Neka S jeste $\mathcal{U}$-nil-polugrupa. Tada za proizvoljni element $a \in S$ imamo da je

$$a^5 = a^2 a^3 \in < a^2 > \cup < a^3 > ,$$

odakle sledi da je $a^5 = 0$ za sve $a \in S$. Neka su $a, b \in S$ proizvoljni elementi. Neka je $ab = a$. Tada dobijamo da je $a = ab^5 = a0 = 0$. Slično dokazujemo da iz $ab = b$ sledi da je $b = 0$. Prema tome, imamo da je

(3) $$ab = a^k \quad \text{ili} \quad ab = b^k$$

za neki $k \in Z^+$, $k \geq 2$.

Neka su $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in S$ proizvoljni nenula elementi i neka je $a = a_1a_2a_3a_4a_5$. Tada prema (3) dobijamo da je

$$\begin{aligned}
a_1a_2 &= a_i^k \quad , \quad i \in \{1,2\}\ ,\ k \geq 2\ ,\\
a_i^k a_3 &= a_j^m \quad , \quad j \in \{i,3\}\ ,\ m \geq 3\ ,\\
a_j^m a_4 &= a_l^n \quad , \quad l \in \{j,4\}\ ,\ n \geq 4\ ,\\
a_l^n a_5 &= a_s^r \quad , \quad s \in \{l,5\}\ ,\ r \geq 5\ .
\end{aligned}$$

Prema tome

$$a = a_1a_2a_3a_4a_5 = a_s^r = 0\ . \quad \blacksquare$$

II 4.13. POSLEDICA. *Svaka $\mathcal{U}$-polugrupa S je Rédeieva traka idealskih ekstenzija periodičnih grupa pomoću 5-nilpotentnih polugrupa.*

DOKAZ: Neka je $a \in S$ proizvoljni element. Tada imamo da je

$$a^5 = a^2a^3 \in \langle a^2 \rangle \cup \langle a^3 \rangle\ ,$$

odakle sledi da je S periodična polugrupa. Prema II 4.10. i II 4.12. dobijamo da S jeste Rédeieva traka idealskih ekstenzija periodičnih grupa pomoću 5-nilpotentnih polugrupa. $\blacksquare$

GLAVA III

NIL-EKSTENZIJE REGULARNIH POLUGRUPA

Pored tračnih, druga značajna vrsta polugrupovnih dekompozicija su dekompozicije pomoću ideala, tj. predstavljanje polugrupa kao idealskih ekstenzija polugrupa. Pojam idealske ekstenzije je, kao i većinu fundamentalnih pojmova Teorije polugrupa, uveo A.H.Clifford u radu [28] iz 1950.god. Opštim problemima idealskih ekstenzija su se, osim A.H.Clifforda, bavili i M.Petrich, P.A.Grillet, L.M.Gluskin, L.N.Ševrin, M.Yamada i drugi. Jedan od najvažnijih tipova idealskih ekstenzija su retraktivne ekstenzije, odnosno idealske ekstenzije polugrupa odredjene parcijalnim homomorfizmima. One su od ogromnog značaja za problem konstrukcija idealskih ekstenzija polugrupa, naročito za problem prenošenja raznih polugrupovnih svojstava kroz te konstrukcije. Pojam idealskih ekstenzija odredjenih parcijalnim homomorfizmima uveo je, takodje, A.H.Clifford u napred pomenutom radu. Pojam retraktivne ekstenzije uveo je M.Petrich u radu [55] iz 1966.god., gde je data veza izmedju retraktivnih i ekstenzija odredjenih parcijalnim homomorfizmima. Konstrukciju za retraktivne ekstenzije polugrupa su dali S.Bogdanović i S.Milić u radu [22] iz 1987.god., dok su opis svih parcijalnih homomorfizama jedne polugrupe u drugu dali B.D.Arendt i C.J.Stuth u radovima [2] i [3]. Osim pomenutih, problemima retraktivnih ekstenzija polugrupa su se bavili i mnogi drugi autori. Dosta proučavana vrsta retraktivnih ekstenzija su tzv. n-inflacije, tj. retraktivne ekstenzije pomoću $(n+1)$-nilpotentnih polugrupa. Takve ekstenzije su razmatrane najpre u knjizi A.H.Clifforda i G.B.Prestona,[30], gde je uveden pojam inflacije (prema I 2.11. to je 1-inflacija). U radu [56] iz 1967.god. je M.Petrich uveo pojam jake inflacije (prema I 2.11. to je 2-inflacija), koje je razmatrao još u nekim radovima. Pojam n-inflacije, u opštem slučaju, uveli su S.Bogdanović i S.Milić u napred pomenutom radu. Ovde treba napomenuti da su M.S.Putcha i J.Weissglass u radu [74] iz 1972.god. naziv n-inflacija koristili za pojam sličan, ali različit od pojma koji su n-inflacijom nazivali S.Bogdanović i S.Milić. Odnos izmedju tih pojmova opisan je u doktorskoj disertaciji B.Stamenkovića,[83]. Ovde će naziv n-inflacija biti korišćen u skladu sa definicijom S.Bogdanovića i S.Milića (tj. sa I 2.11.). Proučavanjem n-inflacija polugrupa, pored pomenutih, bavili su se i mnogi drugi autori, o čemu će još biti reči.

U ovoj glavi, biće razmatran jedan poseban, ali veoma značajan tip idealskih ekstenzija. Naime, biće razmatrane idealske i retraktivne ekstenzije raznih tipova regularnih polugrupa pomoću raznih tipova nil-polugrupa.

U poglavlju III 1. biće razmatran opšti slučaj, tj. polugrupe koje su nil-ekstenzije regularnih polugrupa. Biće dat rezultat S.Bogdanovića i M.Ćirića iz [18], koji opisuje opšti slučaj. Takodje, biće razmatrani razni posebni slučajevi, kao što su nil-ekstenzije unije grupa, polumreže levih i desnih grupa, polumreže grupa itd.

U poglavlju III 2. razmatraju se retraktivne nil-ekstenzije regularnih polugrupa. Navodi se rezultat iz knjige M.Petricha,[59], koji opisuje način na koji retraktivne ekstenzije indukuju razlaganje u poddirektan proizvod i razmatraju se neki slučajevi u kojima važi i obratna relacija. Pomoću dobijenih rezultata se opisuju retraktivne nil-ekstenzije regularnih polugrupa, tj. daje se njihov opis pomoću poddirektnih proizvoda.

Retraktivne nil-ekstenzije unije grupa razmatrane su u radu S.Bogdanovića,[15], u opštem slučaju, dok su u nekim specijalnim slučajevima razmatrane u radovima istog i nekih drugih autora, o čemu će više reči biti kasnije. U poglavlju III 3. se daju nove karakterizacije retraktivnih nil-ekstenzija unije grupa i opisuju se mnogi specijalni slučajevi tih polugrupa.

Polugrupe koje su retraktivne nil-ekstenzije raznih tipova polugrupa koje su trake grupa su, do sada, slabo proučena klasa polugrupa. U nekim specijalnim slučajevima, ove polugrupe su razmatrane u radovima J.L.Galbiatieve i M.L.Veronesieve,[36], M.S.Putchae,[68], i S.Bogdanovića i M.Ćirića,[17,18,19]. U poglavljima III 4. i III 5. razmatraju se se ratraktivne nil-ekstenzije trake grupa u opštem i nekim specijalnim slučajevima, kao što su retraktivne nil-ekstenzije levo regularnih, normalnih i levo normalnih traka grupa.

III 1. OPŠTI SLUČAJ

U izučavanju raznih svojstava polugrupa, često se sreću polugrupe koje su nil-ekstenzije regularnih polugrupa. Polugrupe iz te klase razmatrane su u mnogim radovima, od kojih ćemo spomenuti rad S.Bogdanovića i M.Ćirića,[18], gde je dat opis polugrupa iz te klase u opštem i nekim specijalnim slučajevima, kao i radove u kojima su razmatrani neki specijalni slučajevi: S.Bogdanovića,[15], S.Bogdanovića i S.Milića,[21], M.S.Putchae,[68], S.Bogdanovića i B.Stamenkovića,[23], itd. Kao veoma interesantan, pomenućemo rad M.Ćirića i S.Bogdanovića,[34], u kojima se opisuju polugrupe koje su multiplikativne polugrupe prstena i koje su nil-ekstenzije unije grupa.

U ovom poglavlju se razmatraju polugrupe koje su nil-ekstenzije regularnih i raznih posebnih vrsta regularnih polugrupa, kao što su unije grupa, polumreže levih i desnih grupa, polumreže grupa itd. Teoreme III 1.1. i III 1.5. su publikovane u radu S.Bogdanovića i M.Ćirića,[18], dok se ostali rezultati iz ovog poglavlja u ovoj disertaciji prvi put prezentuju. Rezultat III 1.5. je generalizacija rezultata T.Tamure,[96], M.S.Putchae i J.Weissglassa,[74], i S.Bogdanovića i S.Milića,[22].

III 1.1. TEOREMA. *Polugrupa S je nil-ekstenzija regularne polugrupe ako i samo ako za sve $x,a,y \in S$ postoji $n \in Z^+$ tako da je*

$$xa^n y \in xa^n ySxa^n y. \tag{1}$$

DOKAZ: Neka S jeste nil-ekstenzija regularne polugrupe K. Neka su $x,a,y \in S$ proizvoljni elementi. Tada postoji $n \in Z^+$ tako da je $a^n \in K$. Kako K jeste ideal od S, to imamo da je $xa^n y \in K$, i kako K jeste regularna, to dobijamo da važi (1).

Obrnuto, neka važi (1). Tada je jasno da S jeste π-regularna polugrupa. Neka su $x \in S$ i $e \in E(S)$ proizvoljni elementi. Tada je

$$\begin{aligned} xe &= xe^n e && \text{za svaki } n \in Z^+, \\ &\in xe^n eSxe^n e && \text{za neki } n \in Z^+, \text{ prema (1)}, \\ &= xeSxe. \end{aligned}$$

Prema tome, $S \cdot E(S) \subseteq Reg(S)$, odakle dobijamo da je

$$S \cdot Reg(S) = S \cdot Reg(S) \cdot E(S) \subseteq S \cdot E(S) \subseteq Reg(S).$$

Dakle, $Reg(S)$ je levi ideal. Na isti način pokazujemo da $Reg(S)$ jeste desni ideal. Prema tome, $Reg(S)$ je ideal, tj. S jeste nil-ekstenzija regularne polugrupe. ∎

Koristeći III 1.1. možemo dokazati sledeći rezultat.

III 1.2. TEOREMA. *Polugrupa S je nil-ekstenzija unije grupa ako i samo ako za sve $x,a,y \in S$ postoji $n \in Z^+$ tako da je*

$$xa^n y \in xa^n yxSxa^n y. \tag{2}$$

DOKAZ: Neka S jeste nil-ekstenzija unije grupa K. Neka su $x,a,y \in S$ proizvoljni elementi. Tada postoji $n \in Z^+$ tako da je $a^n \in K$. Kako K jeste ideal od S, to imamo da je $xa^n y \in K$, i kako K jeste unija grupa, to dobijamo da je

$$xa^n y \in (xa^n y)^2 Sxa^n y \subseteq xa^n yxSxa^n y.$$

Prema tome, važi (2).

Obrnuto, neka važi (2). Tada prema Teoremi III 1.1. dobijamo da S jeste nil-ekstenzija regularne polugrupe K. Neka je $a \in K$ proizvoljni element. Tada postoji $e \in E(S)$ tako da je $ae = a$, odakle dobijamo da je

$$\begin{aligned} a &= aee^n e && \text{za svaki } n \in Z^+, \\ &\in aee^n eaeSaee^n e && \text{za neki } n \in Z^+, \text{ prema (2)}, \\ &= aeaeSae && \\ &\subseteq aeaKae && \text{jer je } K \text{ ideal i } e \in K, \\ &= a^2Ta. && \end{aligned}$$

Dakle, prema Teoremi I 3.6. dobijamo da K jeste unija grupa, tj. S jeste nil-ekstenzija unije grupa. ∎

Sledeći rezultat daje karakterizacije nil-ekstenzije polumreže levih i desnih grupa.

III 1.3. TEOREMA. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*
(i) S *je nil-ekstenzija polumreže levih i desnih grupa;*
(ii) *za sve* $x, a, y \in S$ *postoji* $n \in Z^+$ *tako da je*

$$xa^ny \in xa^nySya^nx \cup ya^nxSxa^ny.$$

(iii) S *je* π*-regularna i za sve* $x, a, y \in S$ *postoji* $n \in Z^+$ *tako da je*

$$xa^ny \in xa^nySyx \cup yxSxa^ny.$$

DOKAZ: *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* i *(i)* $\Rightarrow$ *(iii)*. Neka S jeste nil-ekstenzija polugrupe K i neka K jeste polumreža levih i desnih grupa. Tada je jasno da S jeste GV-polugrupa, tj. S jeste polumreža Y potpuno Arhimedovih polugrupa $S_\alpha, \alpha \in Y$. Neka je $K_\alpha = K \cap S_\alpha, \alpha \in Y$. Tada je jasno da K_α jeste leva ili desna grupa za svaki $\alpha \in Y$. Neka su $x, a, y \in S$ proizvoljni elementi. Tada postoji $n \in Z^+$ tako da $a^n \in K$, odakle dobijamo da

$$xa^ny, ya^nx, a^nyx, yxa^n \in K.$$

Sa druge strane, ako $x \in S_\alpha, a \in S_\beta, y \in S_\gamma$ za neke $\alpha, \beta, \gamma \in Y$, tada imamo da

$$xa^ny, ya^nx, a^nyx, yxa^n \in S_{\alpha\beta\gamma},$$

odnosno

$$xa^ny, ya^nx, a^nyx, yxa^n \in K_{\alpha\beta\gamma}.$$

Prema tome, dobijamo da je

$$xa^ny \in xa^nyK_{\alpha\beta\gamma}ya^nx$$

i

$$xa^ny \in xa^nyK_{\alpha\beta\gamma}a^nyx,$$

ako $K_{\alpha\beta\gamma}$ jeste leva grupa, odnosno

$$xa^ny \in ya^nxK_{\alpha\beta\gamma}xa^ny$$

i

$$xa^ny \in yxa^nK_{\alpha\beta\gamma}xa^ny,$$

ako $K_{\alpha\beta\gamma}$ jeste desna grupa. Dakle, važi (ii) i (iii).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Neka važi (ii). Tada je jasno da S jeste π-regularna. Neka su $x \in S$ i $e \in E(S)$ proizvoljni elementi. Tada je

$$\begin{aligned} xe &= xee^ne && \text{za svaki } n \in Z^+, \\ &\in xee^neSee^nxe \cup ee^nxeSxee^ne && \text{za neki } n \in Z^+, \text{ prema } (ii), \\ &= xeSxe \cup exeSxe. \end{aligned}$$

Neka je $xe \in exeSxe$. Tada imamo da je $xe = exe$, pa je

$$xe \in exeSxe = xeSxe.$$

Prema tome, $xe \in Reg(S)$, odakle sledi da $Reg(S)$ jeste levi ideal od S. Na isti način dokazujemo da $Reg(S)$ jeste desni ideal od S. Prema tome, S je nil-ekstenzija regularne polugrupe $K = Reg(S)$.

Neka su $a, b \in K$ proizvoljni elementi. Tada postoji $e \in E(S)$ tako da je $a = ae$, odakle dobijamo da je

$$\begin{aligned} ab &= ae^nb && \text{za svaki } n \in Z^+, \\ &\in ae^nbSbe^na \cup be^naSae^nb && \text{za neki } n \in Z^+, \text{ prema } (ii), \\ &\subseteq Ka \cup bK && \text{jer je } K \text{ ideal od } S. \end{aligned}$$

Dakle, prema Teoremi II 2.11. dobijamo da K jeste polumreža levih i desnih grupa, tj. S je nil-ekstenzija polumreže levih i desnih grupa.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Dokaz je sličan dokazu za $(ii) \Rightarrow (i)$. ∎

Neposredna posledica Teoreme III 1.3. je naredno tvrdjenje.

III 1.4. POSLEDICA. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) S *je nil-ekstenzija polumreže levih grupa;*

(ii) *za sve* $x, a, y \in S$ *postoji* $n \in Z^+$ *tako da je*

$$xa^ny \in xa^nySya^nx.$$

(iii) S *je* π*-regularna i za sve* $x, a, y \in S$ *postoji* $n \in Z^+$ *tako da je*

$$xa^ny \in xSx.$$

DOKAZ: $(i) \Rightarrow (ii)$ i $(i) \Rightarrow (iii)$. Dokaz je sličan dokazu za $(i) \Rightarrow (ii)$ i $(i) \Rightarrow (iii)$ Teoreme III 1.3.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Neka važi (ii). Tada, prema Teoremi III 1.3. dobijamo da S jeste nil-ekstenzija polugrupe K, pri čemu K jeste polumreža levih i desnih grupa. Neka su $a, b \in K$ proizvoljni elementi. Tada postoji $e \in E(S)$ tako da je $ae = a$, odakle dobijamo da je

$$\begin{aligned} ab &= ae^n b && \text{za svaki } n \in Z^+, \\ &\in ae^n bSbe^n a && \text{za neki } n \in Z^+, \text{ prema } (ii), \\ &\subseteq Ka && \text{jer je } K \text{ ideal od } S, \end{aligned}$$

pa prema Posledici II 2.12. dobijamo da K jeste polumreža levih grupa. Prema tome, S je nil-ekstenzija polumreže levih grupa.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Neka važi (ii). Neka su $x \in S, e \in E(S)$ proizvoljni elementi. Tada je

$$\begin{aligned} xe &= xee^n e && \text{za svaki } n \in Z^+, \\ &\in xeSxe && \text{za neki } n \in Z^+, \text{ prema } (iii), \end{aligned}$$

pa je $xe \in Reg(S)$, odakle dobijamo da $Reg(S)$ jeste levi ideal od S. Sa druge strane,

$$\begin{aligned} ex &= ee^n x && \text{za svaki } n \in Z^+, \\ &\in eSe && \text{za neki } n \in Z^+, \text{ prema } (iii), \end{aligned}$$

odakle dobijamo da je $ex = exe$. Sada imamo da je

$$\begin{aligned} ex &= exe^n e && \text{za svaki } n \in Z^+, \\ &\in exSex && \text{za neki } n \in Z^+, \text{ prema } (iii), \end{aligned}$$

pa je $ex \in Reg(S)$, odakle dobijamo da $Reg(S)$ jeste desni ideal od S. Dakle, $K = Reg(S)$ je ideal od S.

Neka su $a, b \in K$ proizvoljni elementi. Tada postoji $e \in E(S)$ tako da je $a = ae$, pa je

$$\begin{aligned} ab &= aee^n b && \text{za svaki } n \in Z^+, \\ &\in aSa && \text{za neki } n \in Z^+, \text{ prema } (iii), \\ &\subseteq Ka && \text{jer } K \text{ jeste ideal od } S, \end{aligned}$$

pa prema Posledici II 2.12. dobijamo da K jeste polumreža levih grupa. Dakle, S jeste nil-ekstenzija polumreže levih grupa. ∎

Sledeće tvrdjenje opisuje veoma interesantnu klasu polugrupa koje su nil-ekstenzije polumreže grupa i uopštava neke rezultate iz [96], [74] i [22].

III 1.5. TEOREMA. *Sledeći uslovi za polugrupu* S *su ekvivalentni:*

(i) S *je nil-ekstenzija polumreže grupa;*

(ii) S *je retraktivna nil-ekstenzija polumreže grupa;*

(iii) S *je* π*-regularna i za sve* $x, a, y \in S$ *postoji* $n \in Z^+$ *tako da je*

$$xa^n y \in yxSx \ ;$$

(iv) S *je* π*-regularna i za sve* $x, a, y \in S$ *postoji* $n \in Z^+$ *tako da je*

$$xa^n y \in xSx \cap ySy \ .$$

DOKAZ: $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka S jeste nil-ekstenzija polugrupe K i neka K jeste polumreža grupa. Tada S jeste GV-polugrupa i za sve $e, f \in E(S) = E(K)$ je $ef = fe$, pa prema II 2.10. dobijamo da S jeste polumreža nil-ekstenzija grupa. Sada prema II 3.3. dobijamo da $K = Reg(S)$ jeste retrakt od S, odakle sledi (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Sledi neposredno.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ i $(ii) \Rightarrow (iv)$. Neka S jeste retraktivna nil-ekstenzija polugrupe K i neka K jeste polumreža grupa. Tada je jasno da S jeste polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, pri čemu S_α jeste nil-ekstenzija grupe K_α za svaki $\alpha \in Y$. Jasno je da je $K = \bigcup_{\alpha \in Y} K_\alpha$. Neka su $x, a, y \in S$ proizvoljin elementi. Tada imamo da postoji $n \in Z^+$ tako da je $a^n \in K$, odakle dobijamo da je $xa^n y, yxa^n x \in K$. Kako je jasno da je $xa^n y, yxa^n x \in K_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$ i kako K_α jeste grupa, to dobijamo da je

$$\begin{aligned} xa^n y &\in yxa^n x K_\alpha yxa^n x \subseteq yxSx \ , \\ xa^n y &\in yxa^n x K_\alpha xa^n y \subseteq ySy \ , \\ xa^n y &\in xa^n y K_\alpha yxa^n x \subseteq xSx \ . \end{aligned}$$

Jasno je da S jeste π-regularna. Prema tome, važi (iii) i (iv).

$(iii) \Rightarrow (i)$. Neka važi (iii). Tada imamo da za sve $a, b \in S$ postoji $n \in Z^+$ tako da je

$$(ab)^{n+1} = a(ba)^n b \in bSa \ ,$$

odakle sledi da S jeste GV-polugrupa (prema II 2.9.), tj. da $Reg(S) = Gr(S)$. Neka su $x \in S, e \in E(S)$ proizvoljni elementi. Tada dobijamo da je

$$xe \in exeSxe \qquad \text{i} \qquad ex \in xSe \ ,$$

odakle dobijamo da je

$$xe = exe = ex$$

i

$$xe \in exeSxe = xeSxe \ .$$

Prema tome, $ex = xe \in Reg(S)$, odakle sledi da $Reg(S)$ jeste ideal od S. Kako je jasno da $Reg(S) = Gr(S)$ jeste polumreža grupa, to dobijamo (i).

$(iv) \Rightarrow (i)$. Sledi prema III 1.4. ∎

III 1.6. NAPOMENA. *Može se lako pokazati da se uslov*

$$xa^n y \in yxSx$$

u delu (iii) *formulacije Teoreme III 1.5. može zameniti uslovom oblika*

$$xa^n y \in yuSx$$

ili uslovom oblika

$$xa^n y \in ySvx\ ,$$

gde su u *i* v *bilo koje reči nad alfabetom* $\{x, a, y\}$.

III 1.7. POSLEDICA [22]. *Polugrupa* S *je* n*-inflacija polumreže grupa ako i samo ako je*

$$xS^{n-1} \subseteq y^2 S^n x$$

za sve $x, y \in S$

III 2. RETRAKTIVNE NIL-EKSTENZIJE REGULARNE POLUGRUPE

Jedna od interesantnih osobina ekstenzija polugrupa su njihove veze sa poddirektnim proizvodima. Problemima uspostavljanja tih veza bavio se, naprimer M.S.Putcha u radu [68], dok se više o tome može naći u knjizi M.Petricha,[59]. Naročito je interesantna veza izmedju retraktivnih ekstenzija i poddirektnih proizvoda. U napred pomenutoj knjizi M.Petricha je dokazano da svaka retraktivna ekstenzija indukuje razlaganje u poddirektan proizvod, i taj rezultat je naveden kao Propozicija III 2.1.. U ovom poglavlju ćemo se baviti problemima uspostavljanja obrnute veze. Neki slučajevi, u kojima ona važi, opisani su u Lemama III 2.2. i III 2.3., i njihovom pomoći dokazujemo glavni rezultat ovog poglavlja, Teoremu III 2.4., koja opisuje retraktivne nil-ekstenzije regularnih polugrupa. Pomenuti rezultati se ovde predstavljaju prvi put. Kao posledica Teoreme III 2.4. daje se rezultat III 2.5., koji je ekvivalentan rezultatu M.S.Putchae iz napred pomenutog rada.

III 2.1. PROPOZICIJA [59]. *Svaka retraktivna ekstenzija* S *polugrupe* K *pomoću polugrupe* Q *sa nulom je poddirektan proizvod od* K *i* Q.

Sledeće dve leme opisuju neke slučajeve u kojima se može uspostaviti obrnuta relacija.

III 2.2. LEMA. *Neka* $S \subseteq K \times Q$ *jeste poddirektan proizvod polugrupe* K *i polugrupe* Q *sa nulom* 0 *tako da važi*

$$K \times \{0\} \subseteq S \, . \tag{1}$$

Tada je S *izomorfna polugrupi koja je retraktivna nil-ekstenzija polugrupe* K *pomoću neke polugrupe* Q' *sa nulom. Pri tome je* Q *izomorfna sa nekom faktor polugrupom polugrupe* Q'.

DOKAZ: Neka $S \subseteq K \times Q$ jeste poddirektan proizvod polugrupe K i polugrupe Q sa nulom 0 tako da važi (1). Prema (1) lako dobijamo da je $K \times \{0\} \cong K$ ideal od S. Neka $\pi_1 : S \to K$ i $\pi : K \times \{0\} \to K$ jesu projekcioni homomorfizmi. Neka τ jeste Reesova kongruencija polugrupe S u odnosu na ideal $K \times \{0\}$ i neka ρ jeste kongruencija na S indukovana projekcionim homomorfizmom $\pi_2 : S \to Q$. Tada je jasno da π jeste izomorfizam i π_1 je epimorfizam, pa preslikavanje

$$\varphi = \pi_1 \pi^{-1} : S \to K \times \{0\}$$

jeste retrakcija. Prema tome, S je izomorfna polugrupi koja je retraktivna ekstenzija polugrupe K pomoću polugrupe $Q' \cong S_{/\tau}$ sa nulom.

Osim toga, kako je $S_{/\rho} \cong Q$ to prema I 1.7. dobijamo da je

$$(S_{/\tau})_{/(\rho_{/\tau})} \cong S_{/\rho} \cong Q \, ,$$

odakle sledi da je Q izomorfna nekoj faktor polugrupi polugrupe $Q' \cong S_{/\tau}$. ∎

III 2.3. LEMA. *Neka je* K *polugrupa u kojoj za svaki element postoji idempotent koji je leva ili desna nula tog elementa. Tada polugrupa* S *jeste izomorfna retraktivnoj nil-ekstenziji polugrupe* K *ako i samo ako* S *jeste poddirektan proizvod polugrupe* K *i neke nil-polugrupe.*

DOKAZ: Neka $S \subseteq K \times Q$ jeste poddirektan proizvod polugrupe K i polugrupe Q sa nulom 0. Neka $a \in K$ jeste proizvoljni element. Neka $\pi_1 : S \to K$ jeste projekcioni homomorfizam. Kako π_1 jeste epimorfizam, to dobijamo da postoji $u \in Q$ tako da je $(a, u) \in S$. Takodje, prema pretpostavci Leme, postoji $e \in E(T)$ tako da je $ea = a$ i $ae = a$. Uzmimo da je $ea = a$ (sličan dokaz imamo u slučaju da je $ae = a$). Kako π_1 jeste epimorfizam, to postoji $v \in Q$ tako da je $(e, v) \in S$. Takodje, postoji $n \in Z^+$ tako da je $u^n = 0$. Sada dobijamo da je

$$(e, 0) = (e^n, v^n) = (e, v)^n \in S \, ,$$

pa je

$$(a, 0) = (ea, 0u) = (e, 0)(a, u) \in S\dot{S} \subseteq S \, .$$

Prema tome, $K \times \{0\} \subseteq S$, pa prema III 2.2. dobijamo da je S izomorfna retraktivnoj ekstenziji polugrupe K pomoću polugrupe sa nulom. Neka je $(a, u) \in S$ proizvoljni element. Tada postoji $n \in Z^+$ tako da je $u^n = 0$, pa je $(a, u)^n = (a^n, u^n) = (a^n, 0) \in K \times \{0\}$. Prema tome, S je izomorfna retraktivnoj nil-ekstenziji polugrupe K.

Obrat sledi prema III 2.1. ∎

Sledeće tvrdjenje je glavni rezultat ovog poglavlja i opisuje retraktivne nil-ekstenzije regularne polugrupe.

III 2.4. TEOREMA. *Polugrupa* S *je retraktivna nil-ekstenzija regularne polugrupe* K *ako i samo ako* S *jeste poddirektan proizvod polugrupe* K *i nil-polugrupe.*

DOKAZ: Sledi prema III 2.3. ∎

Sledeće tvrdjenje sledi neposredno iz III 2.4. i ekvivalentno je tvrdjenju 4.5. iz [68].

III 2.5. POSLEDICA. *Polugrupa* S *je retraktivna nil-ekstenzija pravougaone grupe ako i samo ako* S *jeste poddirektan proizvod grupe, levo nulte trake, desno nulte trake i nil-polugrupe.*

DOKAZ: Sledi prema III 2.4., I 4.5. i I 1.13. ∎

Takodje, neposredno iz III 2.4. dobijamo sledeće tvrdjenje:

III 2.6. POSLEDICA. *Polugrupa* S *je* n*-inflacija regularne polugrupe* K *ako i samo ako* S *jeste poddirektan proizvod polugrupe* K *i* $(n+1)$*-nilpotentne polugrupe.*

DOKAZ: Sledi prema III 2.4. ∎

III 3. RETRAKTIVNE NIL-EKSTENZIJE UNIJE GRUPA

Retraktivne nil-ekstenzije unije grupa su u opštem slučaju opisane u radu S.Bogdanovića,[15], dok su u posebnim slučajevima razmatrane u radovima S.Bogdanovića i M.Ćirića,[18], J.L.Galbiatieve i M.L.Veronesieve,[36], M.S.Putchae,[68], i drugih. Posebno mnogo su proučavane n-inflacije unije grupa, koje su u opštem slučaju opisane u radu S.Bogdanovića i S.Milića,[22], dok su u specijalnim slučajevima razmatrane u radovima S.Bogdanovića i B.Stamenkovića,[23], S.Bogdanovića i T.Malinovića,[20], M.S.Putchae i J.Weissglassa, [72,74], M.Petricha,[58], S.Bogdanovića,[12,13], i drugih.

Ovde će biti date nove karakterizacije retraktivnih nil-ekstenzija unije grupa u opštem i nekim specijalnim slučajevima. Rezultati iz ovog poglavlja se ovde prikazuju prvi put. Kao posebno interesantnu, istaći ćemo i Lemu III 3.1. koja opisuje sve retrakcije na nil-ideal polugrupe koji je unija grupa, tj. koja pokazuje da ukoliko retrakcija postoji, tada je ona odredjena na jedinstveni način.

III 3.1. LEMA. *Neka* S *jeste nil-ekstenzija unije grupa* K*. Tada svaka retrakcija* φ *od* S *na* K *ima sledeću reprezentaciju:*

$$\varphi(x) = xe \qquad \text{ako} \quad x \in T_e,\ e \in E(S).$$

DOKAZ: Neka φ jeste proizvoljna retrakcija od S na K i neka je $x \in T_e$ za neki $e \in Z^+$, tj. neka je $x^n \in G_e$ za neki $n \in Z^+$. Kako je

$$(\varphi(x))^n = \varphi(x^n) = x^n \in G_e \ ,$$

to prema III 2.2. dobijamo da $\varphi(x) \in G_e$. Prema tome,

$$\varphi(x) = \varphi(x)e = \varphi(x)\varphi(e) = \varphi(xe) = xe \ . \ \blacksquare$$

III 3.2. NAPOMENA. *Prema Munnovoj lemi imamo da je prethodna reprezentacija ekvivalentna sledećoj:*

$$\varphi(x) = ex \qquad \text{ako} \quad x \in T_e, \ e \in E(S).$$

Sledeće tvrdjenje je glavno tvrdjenje ovog poglavlja i opisuje polugrupe koje su retraktivne nil-ekstenzije unije grupa. Ti opisi su različiti od onog iz rada S.Bogdanovića,[15].

III 3.3. TEOREMA. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*
(i) polugrupa S je retraktivna nil-ekstenzija unije grupa;
(ii) S jeste π-regularna i za sve $x, a, y \in S$ postoji $n \in Z^+$ tako da je

$$(1) \qquad xa^n y \in x^2 S y^2.$$

(iii) S je poddirektan proizvod unije grupa i nil-polugrupe;

DOKAZ: $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka S jeste retraktivna nil-ekstenzija unije grupa K. Neka $\varphi : S \to K$ jeste retrakcija i neka $x, a, y \in S$ jesu proizvoljni elementi. Tada postoji $n \in Z^+$ tako da je $a^n \in K$, pa je $xa^n y \in K$, jer K jeste ideal od S. Neka je $x^m \in G_e, y^k \in G_f$, za neke $m, k \in Z^+, e, f \in E(S)$. Prema III 3.1. imamo da je

$$\varphi(x) = xe = xx^m u \in x^2 S,$$

za neki $u \in G_e$, i

$$\varphi(y) = yf = fy = vy^k y \in Sy^2,$$

za neki $v \in G_f$, odakle dobijamo da je

$$\begin{aligned} xa^n y &= \varphi(xa^n y) \qquad \text{jer je } xa^n y \in K, \\ &= \varphi(x)\varphi(a^n)\varphi(y) \\ &\in x^2 SSSy^2 \\ &\subseteq x^2 Sy^2, \end{aligned}$$

pa važi (1). Jasno je da S jeste π-regularna. Prema tome, važi (i).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Neka S jeste π-regularna i neka važi (1). Neka je $a \in Reg(S)$ proizvoljni element. Tada je $a = axa$ za neki $x \in S$, pa je

$$\begin{aligned} a &= a(xa)^n xa && \text{za svaki } n \in Z^+, \\ &\in a^2 S(xa)^2 && \text{za neki } n \in Z^+, \text{prema (1)} \\ &\subseteq a^2 S. \end{aligned}$$

Na isti način dokazujemo da je $a \in Sa^2$. Prema tome, $Reg(S) = Gr(S)$. Neka su $x \in S, e \in E(S)$ proizvoljni elementi. Tada prema (1) dobijamo da je

$$\begin{aligned} xe &= xee^n e && \text{za svaki } n \in Z^+, \\ &= (xe)^2 u && \text{za neke } n \in Z^+, u \in S, \text{ prema (1)}, \end{aligned}$$

odakle dobijamo da je

(2) $$xe = (xe)^{m+1} u^m,$$

za svaki $m \in Z^+$. Na isti način dokazujemo da postoji $v \in S$ tako da je

$$ex = v^m (ex)^{m+1},$$

za svaki $m \in Z^+$. Sa druge strane, kako je $Reg(S) = Gr(S)$, to imamo da S jeste polumreža Y potpuno Arhimedovih polugrupa $S_\alpha, \alpha \in Y$. Neka za $\alpha \in Y$ S_α jeste nil-ekstenzija potpuno proste polugrupe K_α. Tada imamo da je $xe, ex \in S_\alpha$ za neki $\alpha \in Y$ i postoji $m \in Z^+$ tako da je $(xe)^m \in K_\alpha$. Prema (2) imamo da je $xeu^m \in S_\alpha$, i kako K_α jeste ideal od S_α, to imao da je

$$xe = (xe)^m xeu^m \in K_\alpha S_\alpha \subseteq K_\alpha \subseteq Reg(S).$$

Na isti način dokazujemo da je $ex \in Reg(S)$, odakle lako dokazujemo da $K = Reg(S) = Gr(S)$ jeste ideal od S.

Sa druge strane, dokazaćemo da je

(3) $$xe \in x^m Se$$

za svaki $m \in Z^+$. Zaista, prema (1) lako dobijamo da je

$$\begin{aligned} xe &= xe^n e && \text{za svaki } n \in Z^+, \\ &\in x^2 Se && \text{za neki } n \in Z^+, \text{ prema (1)}. \end{aligned}$$

Neka je $xe \in x^m Se$, za neki $m \in Z^+$, tj. $xe = x^m ue$, za neki $u \in S$. Prema (1) dobijamo da postoji $n \in Z^+$ tako da je

$$x^m (ue)^n e \in x^{2m} Se.$$

Sa druge strane, kako K jeste potpuno regularni ideal od S, to imamo da je $ue \in K$ i postoji $v \in S$ tako da je

$$ue = (ue)^n v$$

(jer je $ue\mathcal{H}(ue)^n$, gde $\mathcal{H}$ jeste Greenova $\mathcal{H}$-relacija na polugrupi K). Prema tome,

$$\begin{aligned} xe &= x^m ue = x^m uee \\ &= x^m (ue)^n ve = x^m (ue)^n eve \\ &\in x^{2m} Seve \\ &\subseteq x^{m+1} Se. \end{aligned}$$

Prema tome, važi (3). Na isti način dokazujemo da je

$$(4) \qquad ex \in eSx^m$$

za svaki $m \in Z^+$.

Definišimo preslikavanje $\varphi : S \to K$ sa

$$\varphi(x) = xe \qquad \text{ako } x \in T_e, e \in E(S).$$

Neka su $x, y \in S$ proizvoljni elementi. Uzmimo da je $x \in T_e, y \in T_f, xy \in T_g$, za neke $e, f, g \in E(S)$, tj. $x^n \in G_e, y^m \in G_f$ i $(xy)^k \in G_g$, za neke $n, m, k \in Z^+$. Prema (3) i (4) imamo da je

$$yg \in y^m Sg = fy^m Sg \quad , \quad xf \in x^n Sf = ex^n Sf \quad ,$$

$$ey \in eSy^m = eSy^m f \quad \text{i} \quad exy \in eS(xy)^k = eS(xy)^k g,$$

odakle dobijamo da je

$$(5) \qquad yg = fyg \quad , \quad xf = exf \quad , \quad ey = eyf \quad \text{i} \quad exy = exyg.$$

Sada, prema (5) dobijamo da je

$$\begin{aligned} \varphi(xy) &= xyg = xfyg = exfyg \\ &= exyg = exy = xey = xeyf \\ &= \varphi(x)\varphi(y). \end{aligned}$$

Prema tome, φ je retrakcija, pa S jeste retraktivna nil-ekstenzija unije grupa.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$. Sledi prema III 2.4. ∎

Teorema III 3.3. predstavlja oupštenje rezultata S.Bogdanovića i S.Milića iz [22]. Naime, prema III 3.3. neposredno sledi sledeće tvrdjenje:

III 3.4. POSLEDICA. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*
(i) polugrupa S je n-inflacija unije grupa;
(ii) za sve $x, y \in S$ je

$$xS^{n-1}y \subseteq x^2S^ny^2 \ ;$$

(iii) S je poddirektan proizvod unije grupa i n-nilpotentne polugrupe.

DOKAZ: Sledi prema III 3.3. ∎

Narednim tvrdjenjima ćemo opisati neke posebne slučajeve retraktivnih nil-ekstenzija unije grupa.

III 3.5. TEOREMA. *Polugrupa S je retraktivna nil-ekstenzija polumreže levih i desnih grupa ako i samo ako S jeste π-regularna i za sve $x, a, y \in S$ postoji $n \in Z^+$ tako da je*

$$xa^ny \in x^2Sy^2x \cup yx^2Sy^2. \tag{6}$$

DOKAZ: Neka S jeste retraktivna nil-ekstenzija polugrupe K i neka K jeste polumreža Y levih i desnih grupa K_α, $\alpha \in Y$. Neka $\varphi : S \to K$ jeste retrakcija i neka $x, a, y \in S$ jesu proizvoljni elementi. Tada postoji $n \in Z^+$ tako da je $a^n \in K$, pa je $xa^ny, a^ny^2x, yx^2a^n \in K$, jer K jeste ideal od S. Neka je $x^m \in G_e, y^k \in G_f$, za neke $m, k \in Z^+$, $e, f \in E(S)$. Prema Lemi III 3.1. imamo da je

$$\varphi(x) = xe = xx^mu \in x^2S,$$

za neki $u \in G_e$, i

$$\varphi(y) = yf = fy = vy^ky \in Sy^2,$$

za neki $v \in G_f$, odakle dobijamo da je

$$\begin{aligned} xa^ny &= \varphi(xa^ny) \\ &= \varphi(x)\varphi(a^n)\varphi(y) \\ &\in x^2SSSy^2 \\ &\subseteq x^2Sy^2. \end{aligned}$$

Sa druge strane, jasno je da $xa^ny, a^ny^2x, yx^2a^n \in K_\alpha$ za neki $\alpha \in Y$, pa prema I 4.8. dobijamo da je

$$\begin{aligned} xa^ny &\in xa^nyK_\alpha a^ny^2x \\ &\subseteq x^2Sy^2Sy^2x \\ &\subseteq x^2Sy^2x \ , \end{aligned}$$

ako K_α jeste leva grupa, odnosno

$$\begin{aligned} xa^ny &\in yx^2a^nK_\alpha xa^ny \\ &\subseteq yx^2Sx^2Sy^2 \\ &\subseteq yx^2Sy^2 \ , \end{aligned}$$

ako K_α jeste desna grupa. Prema tome, važi (6). Jasno je da S jeste π-regularna.

Obrnuto, neka S jeste π-regularna i neka važi (6). Neka su $a, b \in S$ proizvoljni elementi. Tada imamo da postoji $n \in Z^+$ tako da je

$$(ab)^{n+1} = a(ba)^n b \in a^2Sb^2a \cup ba^2Sb^2 \subseteq Sa \cup bS \ ,$$

pa prema II 2.9. dobijamo da S jeste polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, pri čemu za $\alpha \in Y$ S_α jeste nil-ekstenzija leve ili desne grupe K_α.

Neka su $x \in S, e \in E(S)$ proizvoljni elementi. Tada prema (6) dobijamo da je

$$\begin{aligned} xe &= (xe)e^n e && \text{za svaki } n \in Z^+, \\ &\in (xe)^2 Sexe \cup e(xe)^2 Se && \text{za neke } n \in Z^+, u \in S, \text{ prema (6)}, \\ &\subseteq (xe)^2 S \cup e(xe)^2 S && . \end{aligned}$$

Neka je $xe \in e(xe)^2S$. Tada je jasno da je $xe = exe$, pa je $xe \in e(xe)^2S = (xe)^2S$. Prema tome, imamo da je

$$xe = (xe)^2 u \ ,$$

za neki $u \in S$, odakle dobijamo da je

(7) $$xe = (xe)^{m+1}u^m,$$

za svaki $m \in Z^+$. Na isti način dokazujemo da postoji $v \in S$ tako da je

$$ex = v^m(ex)^{m+1},$$

za svaki $m \in Z^+$.. Sa druge strane, imamo da je $xe, ex \in S_\alpha$ za neki $\alpha \in Y$ i postoji $m \in Z^+$ tako da je $(xe)^m \in K_\alpha$. Prema (7) imamo da je $xeu^m \in S_\alpha$, i kako K_α jeste ideal od S_α, to imamo da je

$$xe = (xe)^m xeu^m \in K_\alpha S_\alpha \subseteq K_\alpha \subseteq Reg(S).$$

Na isti način dokazujemo da je $ex \in Reg(S)$, odakle lako dokazujemo da $K = Reg(S) = Gr(S)$ jeste ideal od S. Jasno je da K jeste polumreža levih i desnih grupa.

Sa druge strane, dokazaćemo da je

(8) $$xe \in x^m Se$$

za svaki $m \in Z^+$. Najpre razmotrimo slučaj kada je

(9) $$xe = exe \ .$$

Tada se lako dobija da je $(xe)^m = x^m e$ za svaki $m \in Z^+$. Kako je $xe \in K$, to imamo da je $xe\mathcal{H}(xe)^m = x^m e$ (gde $\mathcal{H}$ jeste Greenova $\mathcal{H}$-relacija na K), odakle lako dobijamo da važi (8). Uzmimo da ne važi (9). Prema (6) dobijamo da je

$$\begin{aligned} xe &= xe^n e && \text{za svaki } n \in Z^+, \\ &\in x^2Sex \cup ex^2Se && \text{za neki } n \in Z^+, \text{ prema (6)}. \end{aligned}$$

Ako je $xe \in ex^2Se$, tada dobijamo (9). Prema tome, imamo da je $xe \in x^2S$, tj. $xe \in x^2Se$. Neka je $xe \in x^mSe$ za neki $m \in Z^+$, tj. neka je $xe = x^mue$ za neki $u \in S$. Prema (6) dobijamo da postoji $n \in Z^+$ tako da je

$$x^m(ue)^ne \in x^{2m}Sex^m \cup ex^{2m}Se \ .$$

Sa druge strane, kako je $ue \in K$ i $ue\mathcal{H}(ue)^n$, to imamo da postoji $v \in K$ tako da je

$$ue = (ue)^nv = (ue)^nev \ .$$

Ako je

$$x^m(ue)^ne \in ex^{2m}Se \ ,$$

tada je

$$xe = x^mue = x^m(ue)^neve \in ex^{2m}S \ ,$$

odakle dobijamo (9). Prema tome, imamo da je

$$x^m(ue)^ne \in x^{2m}Se \ ,$$

pa je

$$xe = x^mue = x^m(ue)^neve \in x^{2m}Se \subseteq x^{m+1}Se \ .$$

Prema tome, važi (8).Na isti način dokazujemo da je

(10) $$ex \in eSx^m$$

za svaki $m \in Z^+$. Sada kao u dokazu Teoreme III 3.3. dokazujemo da je preslikavanje $\varphi : S \to K$ definisano sa

$$\varphi(x) = xe \qquad \text{ako } x \in T_e, e \in E(S),$$

retrakcija. Prema tome, S jeste retraktivna nil-ekstenzija polumreže levih i desnih grupa. ∎

III 3.6. POSLEDICA. *Polugrupa S je n-inflacija polumreže levih i desnih grupa ako i samo ako je*

(11) $$xS^{n-1}y \subseteq x^2S^ny^2x \cup yx^2S^ny^2$$

za sve $x, y \in S$.

DOKAZ: Neka S jeste n-inflacija polugrupe K i neka K jeste polumreža Y levih i desnih grupa K_α, $\alpha \in Y$. Neka je $\varphi : S \to K$ jeste retrakcija i neka su $x, x_2, \cdots, x_n, y \in S$ proizvoljni elementi. Tada imamo da je

$$xx_2 \cdots x_ny, xx_2 \cdots x_ny^2x, yx^2x_2 \cdots x_ny \in K_\alpha$$

za neki $\alpha \in Y$ i prema dokazu Teoreme III 3.3. dobijamo da je $\varphi(x) \in x^2 S$ i $\varphi(y) \in Sy^2$, odakle dobijamo da je

$$\begin{aligned} xx_2\cdots x_n y &\in xx_2\cdots x_n y K_\alpha xx_2\cdots x_n y^2 x \\ &= \varphi(xx_2\cdots x_n y) K_\alpha xx_2\cdots x_n y^2 x \\ &= \varphi(x)\varphi(x_2\cdots x_n y) K_\alpha xx_2\cdots x_n y^2 x \\ &\subseteq x^2 S^n y^2 x \ , \end{aligned}$$

ako K_α jeste leva grupa, odnosno

$$\begin{aligned} xx_2\cdots x_n y &\in yx^2 x_2\cdots x_n y K_\alpha xx_2\cdots x_n y \\ &= yx^2 x_2\cdots x_n y K_\alpha \varphi(xx_2\cdots x_n y) \\ &= yx^2 x_2\cdots x_n y K_\alpha \varphi(xx_2\cdots x_n)\varphi(y) \\ &\subseteq yx^2 S^n y^2 \ , \end{aligned}$$

ako K_α jeste desna grupa. Prema tome, važi (11).

Obrnuto, neka važi (11). Neka je $x \in S$ proizvoljni element. Tada prema (11) dobijamo da je

$$xS^{n-1}x \subseteq x^2 S^n x^2 \ ,$$

odakle lako dobijamo da je

$$xS^{n-1}x \subseteq x^{2^n} S^n x^{2^n} \subseteq x^{n+1} S x^{n+1} \ ,$$

pa je $x^{n+1} \in Reg(S)$. Prema tome, S je π-regularna. Prema III 3.5. imamo da S jeste retraktivna nil-ekstenzija polugrupe K i da K jeste polumreža levih i desnih grupa. Neka su $x, y \in S$ proizvoljni elementi. Tada prema (11) dobijamo da je

$$\begin{aligned} xS^{n-1}y &\subseteq x^2 S^n y^2 x \cup yx^2 S^n y^2 \\ &\subseteq xS^{n-1}x \cup yS^{n-1}y \\ &\subseteq x^{n+1} S x^{n+1} \cup y^{n+1} S y^{n+1} \\ &\subseteq KSK \\ &\subseteq K \ . \end{aligned}$$

Prema tome, $S^{n+1} \subseteq K$, pa S jeste n-inflacija polugurpe K. ∎

III 3.7. TEOREMA. *Polugrupa S je retraktivna nil-ekstenzija polumreže levih grupa ako i samo ako S jeste π-regularna i za sve $x, a, y \in S$ postoji $n \in Z^+$ tako da je*

$$xa^n y \in x^2 S x. \tag{12}$$

DOKAZ: Neka S jeste retraktivna nil-ekstenzija polugrupe K i K jeste polumreža levih grupa. Neka $\varphi : S \to K$ jeste retrakcija i neka su $x, a, y \in S$ proizvoljni elementi.

Tada prema dokazu Teoreme III 3.3. dobijamo da postoji $n \in Z^+$ tako da je $xa^n y \in K$ i da je

$$xa^n y = xux$$

za neki $u \in S$. Takodje, kao u dokazu Teoreme III 3.3. dobijamo da je $\varphi(x) \in x^2 S$, odakle dobijamo da je

$$\begin{aligned} xa^n y &= \varphi(xa^n y) \\ &= \varphi(xux) \\ &= \varphi(x)\varphi(u)\varphi(x) \\ &\in x^2 SSSx \\ &\subseteq x^2 Sx \ . \end{aligned}$$

Prema tome, važi (12).

Obrnuto, neka S jeste π-regularna i neka važi (12). Tada prema III 1.4. dobijamo da S jeste nil-ekstenzija polugrupe K i K jeste polumreža levih grupa. Neka su $x \in S$, $e \in E(S)$ proizvoljni elementi. Tada kao u dokazu Teoreme III 3.3. dokazujemo da je

$$xe \in x^m S \ ,$$

za svaki $m \in Z^+$. Sa druge strane, prema (12) dobijamo da je $ex \in eSe$, pa je $ex = exe$, odakle sledi da je $(ex)^m = ex^m$ za svaki $m \in Z^+$. Kako imamo da je $ex\mathcal{H}(ex)^m = ex^m$ u K, to je

$$ex \in Sx^m$$

za svaki $m \in Z^+$. Sada kao u dokazu Teoreme III 3.3. dokazujemo da je preslikavanje $\varphi : S \to K$ definisano sa

$$\varphi(x) = xe \qquad \text{ako } x \in T_e, e \in E(S),$$

retrakcija. Prema tome, S je retraktivna nil-ekstenzija polumreže levih grupa. ∎

III 3.8. POSLEDICA. *Polugrupa S je n-inflacija polumreže levih grupa ako i samo ako je*

$$xS^{n-1}y \subseteq x^2 S^n x$$

za sve $x, y \in S$.

DOKAZ: Dokazuje se slično kao III 3.7. ∎

III 4. RETRAKTIVNE NIL-EKSTENZIJE TRAKE GRUPA

Polugrupe koje su retraktivne nil-ekstenzije trake grupa su do sada slabo istraživana klasa polugrupa. U vezi ovih polugrupa postoji samo nekoliko rezultata koji se odnose na neke usko specijalne slučajeve, od kojih ćemo pomenuti rezultate J.L.Galbiatieve i M.L.Veronesieve,[36], koji se odnose na retraktivnu nil-ekstenziju pravougaone trake grupa (potpuno proste polugrupe) i S.Bogdanovića i M.Ćirića,[18], koji se odnose na retraktivnu nil-ekstenziju polumreže grupa. U vezi problema opisivanja polugrupa iz napred pomenute klase, treba se podsetiti Propozicije II 3.3. koja daje vezu izmedju dekompoziciju u traku π-grupa i retrakcija na grupni deo polugrupe. Neposredna posledica te veze su gore pomenuti rezultati J.L.Galbiatieve i M.L.Veronesieve i S.Bogdanovića i M.Ćirića, kao i rezultati S.Bogdanovića i M.Ćirića,[17,19], koji opisuju razne tipove retraktivnih nil-ekstenzija nekih tipova traka grupa i rezultati S.Bogdanovića i S.Milića,[22], i M.S.Putchae i J.Weissglassa,[74], koji opisuju nilpotentne ekstenzije polumreže grupa.

U ovom poglavlju biće opisane retraktivne nil-ekstenzije trake grupa u opštem i nekim posebnim slučajevima, kao što su n-inflacije trake grupa, retraktivne nil-ekstenzije levo regularne trake grupa itd. Rezultati iz ovog poglavlja se ovde prikazuju prvi put.

Sledeće tvrdjenje je glavni rezultat ovog poglavlja.

III 4.1. TEOREMA. *Polugrupa S je retraktivna nil-ekstenzija trake grupa ako i samo ako S jeste π-regularna i za sve $x, a, y \in S$ postoji $n \in Z^+$ tako da je*

$$xa^n y \in x^2 aSay^2. \tag{1}$$

DOKAZ: Neka S jeste π-regularna polugrupa i neka važi (1). Tada prema III 3.3. dobijamo da S jeste retraktivna nil-ekstenzija unije grupa K. Tada je jasno da je $K = Reg(S)$. Sa druge strane, za proizvoljne elemente $a, b \in S$ dobijamo da postoji $n \in Z^+$ tako da je

$$(ab)^{n+1} = a(ba)^n b \in a^2 baSbab^2 \subseteq a^2 bSab^2 .$$

Dakle, prema II 3.5. dobijamo da $K = Reg(S)$ jeste traka grupa, pa S jeste retraktivna nil-ekstenzija trake grupa.

Obrnuto, neka S jeste retraktivna nil-ekstenzija polugrupe K i neka K jeste traka I grupa G_i, $i \in I$. tada je jasno da S jeste π-regularna. Neka $\varphi : S \to K$ jeste retrakcija i neka su $x, a, y \in S$ proizvoljni elementi. Tada postoji $n \in Z^+$ tako da je

$a^n \in K$, odakle dobijamo da $xa^ny, x^2a^ny^2 \in K$. Neka $\varphi(x) \in G_i$, $\varphi(a) \in G_j$, $\varphi(y) \in G_k$, za neke $i,j,k \in I$. Tada imamo da je

$$xa^ny = \varphi(xa^ny) = \varphi(x)(\varphi(a))^n\varphi(y) \in G_iG_jG_k \subseteq G_{ijk}$$

i

$$x^2a^ny^2 = \varphi(x^2a^ny^2) = (\varphi(x))^2(\varphi(a))^n(\varphi(y))^2 \in G_iG_jG_k \subseteq G_{ijk} ,$$

odakle dobijamo da je

$$xa^ny \in x^2a^ny^2G_{ijk}x^2a^ny^2 \subseteq x^2aSay^2 .$$

Prema tome, važi (1). ∎

Karakterizacije slične onim iz III 4.1. možemo dati i za n-inflacije trake grupa, sledećim tvrdjenjima.

III 4.2. POSLEDICA. *Neka je* $n \in Z^+$, $n \geq 3$. *Polugrupa* S *je* n*-inflacija trake grupa ako i samo ako je*

(2) $$xaS^{n-3}by \subseteq x^2aS^nby^2$$

za sve $x, a, y, b \in S$.

DOKAZ: Neka važi (2). Tada prema III 4.1. dobijamo da S jeste retraktivna nil-ekstenzija polugrupe K, pri čemu K jeste traka grupa. Prema III 3.4. dobijamo da je $S^{n+1} \subseteq K$, pa S jeste n-inflacija trake grupa.

Obrnuto, neka S jeste n-inflacija polugrupe K i neka K jeste traka I grupa G_i, $i \in I$. Neka $\mathcal{H}$ jeste Greenova $\mathcal{H}$-relacija na polugrupi K i neka $\varphi : S \to K$ jeste retrakcija. Neka su $x, x_2, ..., x_n, y \in S$ proizvoljni elementi. Tada imamo da $xx_2\cdots x_ny, x^2x_2\cdots x_ny^2 \in K$, odakle dobijamo da je

$$\begin{aligned} xx_2\cdots x_ny &= \varphi(xx_2\cdots x_ny) \\ &= \varphi(x)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)\varphi(y) \\ &\mathcal{H}\ (\varphi(x))^2\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)(\varphi(y))^2 \\ &= \varphi(x^2x_2\cdots x_ny^2) \\ &= x^2x_2\cdots x_ny^2, \end{aligned}$$

jer $\mathcal{H}$ jeste kongruencija na K. Prema tome

$$\begin{aligned} xx_2\cdots x_ny &\in x^2x_2\cdots x_ny^2Kx^2x_2\cdots x_ny^2 \\ &\subseteq x^2x_2S^nx_ny^2 . \end{aligned}$$

Dakle, važi (2). ∎

III 4.3. POSLEDICA. *Polugrupa* S *je 2-inflacija (jaka inflacija) trake grupa ako i samo ako je*

$$xay \in x^2aSay^2$$

za sve $x,a,y \in S$.

DOKAZ: Dokazuje se slično kao III 4.2. ▮

III 4.4. POSLEDICA. *Polugrupa* S *je inflacija trake grupa ako i samo ako je*

$$xy \in x^2ySxy^2$$

za sve $x,y \in S$.

DOKAZ: Dokazuje se slično kao III 4.2. ▮

Jako značajan tip traka grupa su levo regularne trake grupa (odnosno desno regularne trake grupa). Sledećim tvrdjenjima opisujemo retraktivne nil-ekstenzije i n-inflacije polugrupa iz te klase.

III 4.5. TEOREMA. *Polugrupa* S *je retraktivna nil-ekstenzija levo regularne trake grupa ako i samo ako* S *jeste* π*-regularna i za sve* $x,a,y \in S$ *postoji* $n \in Z^+$ *tako da je*

(3) $$xa^ny \in x^2aSx.$$

DOKAZ: Neka S jeste π-regularna i neka važi (3). Prema III 3.7. dobijamo da S jeste retraktivna nil-ekstenzija polugrupe K, pri čemu K jeste polumreža levih i desnih grupa. Sa druge strane, za proizvoljne elemente $a,b \in S$ dobijamo da postoji $n \in Z^+$ tako da je

$$(ab)^{n+1} = a(ba)^nb \in a^2baSa \subseteq a^2bSa\ ,$$

pa prema II 3.6. i II 3.3. dobijamo da K jeste levo regularna traka grupa. Dakle, S je retraktivna nil-ekstenzija levo regularne trake grupa.

Obrnuto, neka S jeste retraktivna nil-ekstenzija polugrupe K i neka K jeste levo regularna traka grupa. Neka $\mathcal{H}$ jeste Greenova $\mathcal{H}$-relacija na polugrupi K i neka je $\varphi : S \to K$ retrakcija. Neka su $x,a,y \in S$ proizvoljni elementi. Tada postoji $n \in Z^+$ tako da je $a^n \in K$, odakle dobijamo da je $xa^ny, x^2a^nyx \in K$, pa je

$$\begin{aligned} xa^ny &= \varphi(xa^ny) \\ &= \varphi(x)(\varphi(a))^n\varphi(y) \\ &\mathcal{H}\ (\varphi(x))^2(\varphi(a))^n\varphi(y)\varphi(x) \\ &= \varphi(x^2a^nyx) \\ &= x^2a^nyx\ , \end{aligned}$$

odakle dobijamo da je

$$xa^ny \in x^2a^nyxKx^2a^nyx \subseteq x^2aSx\ .$$

Prema tome, važi (3). ▮

III 4.6. NAPOMENA. *Umesto uslova (3) u III 4.5. može se staviti*

$$xa^n y \in x^2 aSa\ .$$

Koristeći III 4.5., lako možemo pokazati sledeća tvrdjenja.

III 4.7. POSLEDICA. *Neka je $n \in Z^+$, $n \geq 2$. Polugrupa S je n-inflacija levo regularne trake grupa ako i samo ako je*

$$xaS^{n-2}y \subseteq x^2 aS^n x \tag{4}$$

za sve $x, a, y \in S$.

DOKAZ: Neka važi (4). Tada prema III 4.5. dobijamo da S jeste retraktivna nil-ekstenzija polugrupe K, pri čemu K jeste levo regularna traka grupa. Takodje, prema III 3.4. dobijamo da je $S^{n+1} \subseteq K$. Prema tome, S je n-inflacija levo regularne trake grupa.

Obrnuto, neka S jeste n-inflacija polugrupe K i neka K jeste levo regularna traka grupa. Neka $\mathcal{H}$ jeste Greenova $\mathcal{H}$-relacija na polugrupi K, neka $\varphi : S \to K$ jeste retrakcija i neka su $x, x_2, \cdots, x_n, y \in S$ proizvoljni elementi. Tada imamo da je

$$xx_2 \cdots x_n y,\, x^2 x_2 \cdots x_n yx \in K\ ,$$

pa kako $\mathcal{H}$ jeste kongruencija na K, to dobijamo da je

$$\begin{aligned} xx_2 \cdots x_n y &= \varphi(xx_2 \cdots x_n y) \\ &= \varphi(x)\varphi(x_2) \cdots \varphi(x_n)\varphi(y) \\ &\mathcal{H}\ (\varphi(x))^2 \varphi(x_2) \cdots \varphi(x_n)\varphi(y)\varphi(x) \\ &= \varphi(x^2 x_2 \cdots x_n yx) \\ &= x^2 x_2 \cdots x_n yx\ . \end{aligned}$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} xx_2 \cdots x_n y &\in x^2 x_2 \cdots x_n yxKx^2 x_2 \cdots x_n yx \\ &\subseteq x^2 x_2 Sx\ . \end{aligned}$$

Dakle, važi (4). ∎

III 4.8. POSLEDICA. *Polugrupa S je inflacija levo regularne trake grupa ako i samo ako je*

$$xy \in x^2 ySx$$

za sve $x, a, y \in S$.

DOKAZ: Dokazuje se slično kao III 4.7. ∎

III 5. RETRAKTIVNE NIL-EKSTENZIJE NORMALNE TRAKE GRUPA

Retraktivne nil-ekstenzije normalnih traka grupa su do sada razmatrane jedino u nekim vrlo uskim slučajevima: u radu M.Ćirića i S.Bogdanovića,[34], u kome se korišćenjem n-inflacija normalne trake grupa opisuju tzv. n-distributivne polugrupe, u radu M.Petricha,[57], u kome se za opisivanje tzv. distributivnih polugrupa koristi 2-inflacija normalne trake i u radovima E.A.Golubova i M.V.Sapira,[41,42], u kojima se opisuju varijeteti koji se sastoje od inflacija normalnih traka grupa u kojima idempotenti čine podpolugrupu. U ovom poglavlju biće opisane retraktivne nil-ekstenzije normalne trake grupa i levo normalne trake grupa, kao i odgovarajuće posledice koje se odnose na n-inflacije. Dobijeni rezultati su novi i ovde će biti prvi put predstavljeni.

Sledeći rezultat je jedan od najvažnijih rezultata u ovom poglavlju i opisuje retraktivne nil-ekstenzije normalne trake grupa. U njenom dokazu se koriste rezultati II 3.3. i II 3.5.

III 5.1. TEOREMA. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*
(i) S *je retraktivna nil-ekstenzija normalne trake grupa;*
(ii) S *je π-regularna i za sve* $x, a, y \in S$ *postoji* $n \in Z^+$ *tako da važi*

$$xa^n y \in xyaSaxy; \tag{1}$$

(iii) S *je GV-polugrupa i za sve* $x, a, y \in S$ *postoji* $n \in Z^+$ *tako da važi*

$$xa^n y \in xySxy. \tag{2}$$

DOKAZ: $(iii) \Rightarrow (i)$. Neka S jeste GV-polugrupa i neka važi (2). Tada je $Reg(S) = Gr(S)$. Neka je $K = Reg(S)$. Neka su $x \in S, e \in E(S)$ proizvoljni elementi. Tada prema (2) dobijamo da je

$$xe \in xeSxe \quad \text{i} \quad ex \in exSex,$$

odakle dobijamo da K jeste ideal od S.

Sa druge strane, imamo da S jeste polumreža Y potpuno Arhimedovih polugrupa $S_\alpha, \alpha \in Y$. Neka S_α jeste nil-ekstenzija potpuno proste polugrupe K_α, $\alpha \in Y$. Jasno je da je $K_\alpha = K \cap S_\alpha$ za svaki $\alpha \in Y$.

Neka je $\alpha \in Y$ proizvoljni element. Uzmimo da K_α jeste pravougaona traka $I \times \Lambda$ grupa $H_{i\lambda}$ sa jedinicama $e_{i\lambda}$, $i \in I, \lambda \in \Lambda$. Neka je $T_{i\lambda} = \sqrt{H_{i\lambda}}$, $i \in I, \lambda \in \Lambda$. Jasno je da $T_{i\lambda}$ jesu τ-klase polugrupe S, pa prema Teoremi II 2.3. dobijamo da $T_{i\lambda}$ jeste π-grupa za svaki $i \in I, \lambda \in \Lambda$. Neka su $a, b \in S_\alpha$ proizvoljni elementi, tj. neka

$a \in T_{i\lambda}, b \in T_{j\mu}$, za neke $i,j \in I, \lambda,\mu \in \Lambda$. Uzmimo da je $ab \in T_{l\eta}$ za neke $l \in I, \eta \in \Lambda$. Tada je jasno da $be_{l\eta} \in H_{k\eta}$ za neki $k \in I$, pa je $be_{k\eta} = e_{k\eta}be_{l\eta}$. Takodje, $ae_{k\eta} \in H_{s\eta}$, za neki $s \in I$, odakle dobijamo da je

$$\begin{aligned}
ae_{k\eta} &= ae_{k\eta}e_{s\eta} && \text{jer je } e_{s\eta} \text{ jedinica u } H_{s\eta},\\
&= ae_{s\eta}uae_{s\eta} && \text{za neki } u \in S, \text{ prema (2)},\\
&= ae_{s\eta}e_{s\eta}uae_{s\eta} && \\
&\in ae_{s\eta}K_\alpha ae_{s\eta} && \text{jer je } e_{s\eta}u \in K_\alpha,\\
&\subseteq H_{t\eta}K_\alpha H_{t\eta} && \text{jer je } ae_{s\eta} \in H_{t\eta} \text{ za neki } t \in I,\\
&\subseteq H_{t\eta}\ ,
\end{aligned}$$

odakle dobijamo da je $s = t$, $ae_{s\eta} \in H_{s\eta}$, pa je

$$ae_{s\eta} = e_{s\eta}ae_{s\eta}.$$

Sada imamo da je

$$(ae_{s\eta})^r = a^r e_{s\eta},$$

za svaki $r \in Z^+$. Neka je $r \in Z^+$ broj takav da je $a^r \in H_{i\lambda}$. Tada imamo da je

$$(ae_{s\eta})^r = a^r e_{s\eta} \in H_{i\lambda}H_{s\eta} \subseteq H_{i\eta},$$

i kako je $(ae_{s\eta})^r \in H_{s\eta}$, to dobijamo da je $s = i$, tj. $ae_{k\eta} \in H_{i\eta}$. Prema tome,

$$abe_{l\eta} = ae_{k\eta}be_{l\eta} \in H_{i\eta}H_{k\eta} \subseteq H_{i\eta},$$

i kako, prema Munnovoj lemi, imamo da je $abe_{l\eta} \in H_{l\eta}$, to je $l = i$, tj.

$$ab \in T_{i\eta}.$$

Na isti način dokazujemo da je $\eta = \mu$, tj.

$$ab \in T_{i\mu}.$$

Prema tome, S_α je pravougaona traka $I \times \Lambda$ π-grupa $T_{i\lambda}$, $i \in I, \lambda \in \Lambda$, pa S jeste polumreža polugrupa koje su pravougaone trake π-grupa.

Neka su $a, b \in S$ proizvoljni elementi. Tada imamo da je $ab, a^2b, ab^2 \in S_\alpha$ za neki $\alpha \in Y$. Uzmimo da S_α jeste pravougaona traka $I \times \Lambda$ π-grupa $T_{i\lambda}$, $i \in I, \lambda \in \Lambda$. Uzmimo da je $ab \in T_{i\lambda}$ za neke $i \in I, \lambda \in \Lambda$. Tada se lako dokazuje da je $a^2b \in T_{j\lambda}$ i $ab^2 \in T_{i\mu}$ za neke $j \in I, \mu \in \Lambda$. Takodje, prema (2) dobijamo da postoji $n \in Z^+$ tako da je

$$a(ab)^n b = abuab,$$

za neki $u \in S$. Lako se dokazuje da je $u(ab)^2u \in S_\alpha$, odakle dobijamo da je

$$\begin{aligned}
(a(ab)^n b)^2 &= (abuab)^2\\
&= ab(u(ab)^2u)ab\\
&\in T_{i\lambda}ST_{i\lambda}\\
&\subseteq T_{i\lambda}\ ,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(a(ab)^n b)^2 &= a^2 b((ab)^{n-1} ba(ab)^{n-1})ab^2 \\
&\in a^2 b S_\alpha ab^2 \\
&\subseteq T_{j\lambda} S T_{i\mu} \\
&\subseteq T_{j\mu} ,
\end{aligned}
$$

odakle dobijamo da je $i = j$ i $\lambda = \mu$, pa je

$$ab, a^2 b, ab^2 \in T_{i\lambda}.$$

Prema tome

$$ab \tau a^2 b \tau ab^2,$$

pa prema Teoremi II 3.5. imamo da S jeste traka π-grupa. Prema Propoziciji II 3.3. dobijamo da S jeste retraktiva nil-ekstenzija polugrupe K, pri čemu K jeste traka π-grupa. Neka ρ jeste odgovarajuća tračna kongruencija na K. Tada $K/_\rho$ zadovoljava (2), pa prema (2) i Teoremi II 1.10. dobijamo da $K/_\rho$ jeste normalna traka. Prema tome, S je retraktivna nil-ekstenzija normalne trake grupa.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Neka S jeste retraktivna nil-ekstenzija polugrupe K i neka K jeste normalna traka I grupa $G_i, i \in I$. Neka φ jeste ratrakcija od S na K. Neka su $x, a, y \in S$ proizvoljni elementi. Tada postoji $n \in Z^+$ tako da $a^n \in K$. Neka $\varphi(x) \in G_i, \varphi(a) \in G_j$ i $\varphi(y) \in G_k$, za neke $i, j, k \in I$. Tada imamo da je

$$
\begin{aligned}
xa^n y &= \varphi(xa^n y) && \text{jer je } a^n \in K \text{ i } K \text{ je ideal;} \\
&= \varphi(x)(\varphi(a))^n \varphi(y) \\
&\in G_i G_j G_k \\
&\subseteq G_{ijk},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
xya^n xy &= \varphi(xya^n xy) && \text{jer je } a^n \in K \text{ i } K \text{ je ideal,} \\
&= \varphi(x)\varphi(y)(\varphi(a))^n \varphi(x)\varphi(y) \\
&\in G_i G_k G_j G_i G_k \\
&\subseteq G_{ikjik} \\
&= G_{ijk} && \text{jer je } I \text{ normalna traka.}
\end{aligned}
$$

Prema tome,

$$
\begin{aligned}
xa^n y &\in xya^n xy G_{ijk} xya^n xy && \text{jer } G_{ijk} \text{ jeste grupa,} \\
&\subseteq xyaSaxy.
\end{aligned}
$$

Prema tome, važi (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka važi (ii). Neka je $a \in Reg(S)$ proizvoljni element. Tada je $a = axa$ za neki $x \in S$, pa je

$$
\begin{aligned}
a &= ax(ax)^n a && \text{za svaki } n \in Z^+, \\
&\in axaaxSaxaxa && \text{za neki } n \in Z^+, \text{ prema (1),} \\
&\subseteq a^2 S &&,
\end{aligned}
$$

Na isti način dokazujemo da je $a \in Sa^2$. Prema tome, S je GV-polugrupa. Ostatak dokaza sledi neposredno. ∎

III 5.2. NAPOMENA. *Umesto uslova (1) u Teoremi III 5.1. može se staviti bilo koji uslov sledećeg oblika*

$$xa^n y \in xyuSvxy,$$

gde su u, v bilo koje (neprazne) reči nad alfabetom $\{x, a, y\}$.

III 5.3. POSLEDICA. *Neka je $n \in Z^+$, $n \geq 2$. Polugrupa S je n-inflacija normalne trake grupa ako i samo ako je*

$$xS^{n-1}y \subseteq xyS^n xy \tag{3}$$

za sve $x, y \in S$.

DOKAZ: Neka S jeste n-inflacija polugrupe K i neka K jeste normalna traka grupa. Neka $\mathcal{H}$ jeste Greenova $\mathcal{H}$-relacija na polugrupi K, neka $\varphi : S \to K$ jeste retrakcija i neka su $x, x_2, \cdots, x_n, y \in S$ proizvoljni elementi. Tada imamo da

$$xx_2 \cdots x_n y,\, xyx_2 \cdots x_n,\, x_2 \cdots x_n xy \in K\ ,$$

pa kako $K_{/\mathcal{H}}$ jeste normalna traka, to dobijamo da je

$$\begin{aligned} xx_2 \cdots x_n y &= \varphi(xx_2 \cdots x_n y) \\ &\mathcal{H}\ \varphi(xx_2 \cdots x_n y)\varphi(xx_2 \cdots x_n y) \\ &= \varphi(x)\varphi(x_2 \cdots x_n)\varphi(y)\varphi(x)\varphi(x_2 \cdots x_n)\varphi(y) \\ &\mathcal{H}\ \varphi(x)\varphi(y)\varphi(x_2 \cdots x_n)\varphi(x_2 \cdots x_n)\varphi(x)\varphi(y) \\ &= \varphi(xyx_2 \cdots x_n x_2 \cdots x_n xy) \\ &= xyx_2 \cdots x_n x_2 \cdots x_n xy\ , \end{aligned}$$

odakle dobijamo da je

$$\begin{aligned} xx_2 \cdots x_n y &\in xyx_2 \cdots x_n x_2 \cdots x_n xyKxyx_2 \cdots x_n x_2 \cdots x_n xy \\ &\subseteq xyS^n xy\ . \end{aligned}$$

Prema tome, važi (3).

Obrnuto, neka važi (3). Tada za proizvoljni element $x \in S$ dobijamo da je

$$xS^{n-1}x \subseteq x^2 S^n x^2\ ,$$

odakle dobijamo da je

$$xS^{n-1}x \subseteq x^{2^n} S^n x^{2^n} \subseteq x^{n+1} S x^{n+1}\ ,$$

pa je $x^{n+1} \in Reg(S)$. Dakle, S je π-regularna. Prema III 5.1. dobijamo da S jeste retraktivna nil-ekstenzija polugrupe K i da K jeste normalna traka grupa. Neka su $x, y \in S$ proizvoljni elementi. Tada imamo da je

$$\begin{aligned} xS^{n-1}y &\subseteq xyS^n xy \\ &\subseteq (xy)^{n+1}S(xy)^{n+1} \\ &\subseteq KSK \\ &\subseteq K\,. \end{aligned}$$

Prema tome, imamo da je $S^{n+1} \subseteq K$, pa S jeste n-inflacija normalne trake grupa. ∎

III 5.4. TEOREMA. *Polugrupa S je retraktivna nil-ekstenzija levo normalne trake grupa ako i samo ako S jeste π-regularna i za sve $x, a, y \in S$ postoji $n \in Z^+$ tako da je*

$$xa^n y \in xySx. \tag{4}$$

DOKAZ: Neka S jeste retraktivna nil-ekstenzija polugrupe K i neka K jeste normalna traka I grupa $G_i, i \in I$. Neka φ jeste ratrakcija od S na K. Neka su $x, a, y \in S$ proizvoljni elementi. Tada postoji $n \in Z^+$ tako da $a^n \in K$. Neka $\varphi(x) \in G_i, \varphi(a) \in G_j$ i $\varphi(y) \in G_k$, za neke $i, j, k \in I$. Tada imamo da je

$$\begin{aligned} xa^n y &= \varphi(xa^n y) && \text{jer je } a^n \in K \text{ i } K \text{ je ideal;} \\ &= \varphi(x)(\varphi(a))^n \varphi(y) \\ &\in G_i G_j G_k \\ &\subseteq G_{ijk}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xya^n x &= \varphi(xya^n x) && \text{jer je } a^n \in K \text{ i } K \text{ je ideal,} \\ &= \varphi(x)\varphi(y)(\varphi(a))^n \varphi(x) \\ &\in G_i G_k G_j G_i \\ &\subseteq G_{ikji} \\ &= G_{ijk} && \text{jer je } I \text{ levo normalna traka.} \end{aligned}$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} xa^n y &\in xya^n x G_{ijk} xya^n x && \text{jer } G_{ijk} \text{ jeste grupa,} \\ &\subseteq xyaSx. \end{aligned}$$

Prema tome, važi (4).

Obrnuto, neka S jeste π-regularna i neka važi (4). Tada prema III 1.4. dobijamo da S jeste nil-ekstenzija polugrupe K, pri čemu K jeste polumreža levih grupa. Takodje, kako za proizvoljne $a, b \in S$ imamo da postoji $n \in Z^+$ tako da je

$$(ab)^{n+1} = a(ba)^n b \in abSa \subseteq Sa\,,$$

to prema II 2.10. dobijamo da S jeste polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, pri čemu S_α jeste nil-ekstenzija leve grupe K_α za svaki $\alpha \in Y$. Jasno je da je $K_\alpha = K \cap S_\alpha$ za svaki $\alpha \in Y$.

Neka je $\alpha \in Y$ proizvoljni element. Uzmimo da K_α jeste levo nulta traka I grupa H_i sa jedinicama e_i, $i \in I$. Neka je $T_i = \sqrt{H_i}$, $i \in I$. Jasno je da T_i jesu τ-klase polugrupe S, pa prema Teoremi II 2.3. dobijamo da T_i jeste π-grupa za svaki $i \in I$. Neka su $a, b \in S_\alpha$ proizvoljni elementi, tj. neka $a \in T_i, b \in T_j$, za neke $i, j \in I$. Uzmimo da je $ab \in T_l$ za neki $l \in I$. Tada je jasno da $be_l \in H_k$ za neki $k \in I$, pa je $be_k = e_k be_l$. Takodje, $ae_k \in H_s$, za neki $s \in I$, odakle dobijamo da je

$$\begin{aligned} ae_k &= ae_k e_s && \text{jer je } e_s \text{ jedinica u } H_s, \\ &= ae_s uae_s && \text{za neki } u \in S, \text{ prema (2)}, \\ &= ae_s e_s uae_s && \\ &\in ae_s K_\alpha ae_s && \text{jer je } e_s u \in K_\alpha, \\ &\subseteq H_t K_\alpha H_t && \text{jer je } ae_s \in H_t \text{ za neki } t \in I, \\ &\subseteq H_t \,, \end{aligned}$$

odakle dobijamo da je $s = t$, tj. $ae_s \in H_s$, pa je

$$ae_s = e_s ae_s .$$

Sada imamo da je

$$(ae_s)^r = a^r e_s \,,$$

za svaki $r \in Z^+$. Neka je $r \in Z^+$ broj takav da je $a^r \in H_i$. Tada imamo da je

$$(ae_s)^r = a^r e_s \in H_i H_s \subseteq H_i \,,$$

i kako je $(ae_s)^r \in H_s$, to dobijamo da je $s = i$, tj. $ae_k \in H_i$. Prema tome,

$$abe_l = ae_k be_l \in H_i H_k \subseteq H_i \,,$$

i kako, prema Munnovoj lemi, imamo da je $abe_l \in H_l$, to je $l = i$, tj.

$$ab \in T_i .$$

Prema tome, S_α je levo nulta traka I π-grupa T_i, $i \in I$, pa S jeste polumreža polugrupa koje su levo nulte trake π-grupa.

Neka su $a, b \in S$ proizvoljni elementi. Tada imamo da je $ab, a^2b, ab^2 \in S_\alpha$ za neki $\alpha \in Y$. Uzmimo da S_α jeste levo nulta traka I π-grupa T_i, $i \in I$. Uzmimo da je $ab \in T_i$, $a^2b \in T_j$ za neke $i, j \in I$. Tada se lako dokazuje da je $ab^2 \in T_i$. Takodje, prema (4) dobijamo da postoji $n \in Z^+$ tako da je

$$a(ab)^n b = abua \,,$$

za neki $u \in S$. Lako se dokazuje da je $ua^2bu \in S_\alpha$, odakle dobijamo da je

$$\begin{aligned}(a(ab)^n b)^2 &= (abua)^2\\ &= ab(ua^2bu)a\\ &\in T_i S_\alpha\\ &\subseteq T_i\ ,\end{aligned}$$

i sa druge strane dobijamo da je

$$\begin{aligned}(a(ab)^n b)^2 &= a^2b((ab)^{n-1}ba(ab)^{n-1})ab^2\\ &\in a^2bS_\alpha\\ &\subseteq T_jS_\alpha\\ &\subseteq T_j\ ,\end{aligned}$$

odakle dobijamo da je $i = j$, pa je

$$ab, a^2b, ab^2 \in T_i\ .$$

Prema tome

$$ab\tau a^2b\tau ab^2\ ,$$

pa prema Teoremi II 3.5. imamo da S jeste traka π-grupa. Prema Propoziciji II 3.3. dobijamo da S jeste retraktiva nil-ekstenzija polugrupe K i K jeste traka π-grupa. Neka ρ jeste odgovarajuća tračna kongruencija na K. Tada $K_{/\rho}$ zadovoljava (4), pa prema (4) i Teoremi II 1.11. dobijamo da $K_{/\rho}$ jeste levo normalna traka. Prema tome, S je retraktivna nil-ekstenzija levo normalne trake grupa. ∎

III 5.5. NAPOMENA. *Umesto uslova (4) u Teoremi III 5.4. može se staviti i uslov*

$$xa^ny \in xySa\ .$$

III 5.6. POSLEDICA. *Neka je* $n \in Z^+$, $n \geq 2$. *Polugrupa* S *je* n*-inflacija normalne trake grupa ako i samo ako je*

$$xS^{n-1}y \subseteq xyS^nx$$

za sve $x, y \in S$.

DOKAZ: Dokazuje se slično kao III 5.4. ∎

GLAVA IV

DEKOMPOZICIJE POLUGRUPA INDUKOVANE IDENTITETIMA

Važan problem Teorije polugrupa je problem opisivanja strukture polugrupa koje zadovoljavaju odredjeni polugrupovni identitet. U opisivanju strukture tih polugrupa, kako je ranije već rečeno, centralno mesto zauzimaju dekompozicije polugrupa, u prvom redu tračne i idealske. U ovom radu ćemo uglavnom razmatrati identitete koji indukuju strukturu polugrupa koja se opisuje dekompozicijama - tračnim i idealskim. Osim toga, napred pomenuti problem možemo podeliti u dva dela. Prvi deo je problem nalaženja tipa dekompozicije koju indukuje identitet odredjenog tipa i problem nalaženja identiteta koji indukuju odredjeni tip dekompozicija. Drugi deo je problem konstruisanja polugrupe koje zadovoljavaju dati identitet. Ovde će biti razmatran samo prvi deo pomenutog problema, tj. razmatraćemo identitete koji indukuju odredjeni tip polugrupovnih dekompozicija.

Problem nalaženja identiteta koji indukuju odredjeni tip polugrupovnih dekompozicija načet je u poznatom radu T.Tamure i N.Kimure,[99], iz 1954. god. U njemu je dokazano da svaka polugrupa koja zadovoljava identitet $xy = yx$ (tj. komutativna polugrupa) jeste polumreža Arhimedovih polugrupa. Osim u ovom radu, identiteti koji indukuju dekompoziciju u polumrežu Arhimedovih polugrupa su razmatrani i u radovima J.Chrislocka,[24], T.Tamure,[95], T.Tamure i J.Shafera,[102], T.Tamure i T.Nordala,[101], T.Nordala,[51], i M.V.Sapira i E.V.Suhanova,[80]. Drugi tip dekompozicija indukovanih identitetima koje su proučavane su dekompozicije u nil-ekstenziju unije grupa, koje se, prema II 2.3., takodje mogu posmatrati kao dekompozicije u polumrežu Arhimedovih polugrupa. Početak njihovog proučavanja predstavljaju radovi E.J.Tullya,[103], T.Tamure,[96], iz 1969. god. i rad M.Petricha,[57], iz iste godine. U drugom od ovih radova su postavljeni poznati *Tamurini problemi* čijim su se rešavanjem bavili mnogi drugi autori. Osim napred pomenutih radova, dekompozicije u nil-ekstenziju unije grupa su proučavane i u radovima G.Clarkea,[26], Lee Sin-Mina,[82], J.Gerharda,[40], S.Bogdanovića,[13], M.Ćirića i S.Bogdanovića,[34], i S.Bogdanovića i B.Stamenkovića,[23].

U pomenutim radovima razmatrani su uglavnom pojedinačni identiteti. Mi ćemo ovde pokušati da napravimo sistematičniji pristup ovom problemu. Naime postavićemo sledeći problem:

(P1) ako je $\mathcal{X}$ data klasa polugrupa, naći sve $\mathcal{X}$-identitete.

Problem ovakvog oblika u napred pomenutim radovima je razmatran jedino u radu G.Clarkea,[26], gde je $\mathcal{X}$ bila klasa svih polugrupa koje su inflacije unije grupa. Medjutim, problem $(P1)$ je u nekim slučajevima previše uzak. Naprimer, identiteti koji indukuju dekompoziciju u polumrežu levo Arhimedovih polugrupa, u opštem slučaju, još nisu opisani, ali su opisani identiteti koji indukuju dekompoziiju π-regularnih polugrupa u polumrežu levo Arhimedovih polugrupa. Prema tome, interesantan je problem sledećeg oblika:

(P2) ako su $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$ date klase polugrupa, naći sve $\mathcal{X}_1 \triangleright \mathcal{X}_2$-identitete.

Problemi koje ćemo razmatrati u ovoj glavi biće razni oblici problema $(P1)$ i $(P2)$.

U poglavlju IV 1. biće razmatrani identiteti koji indukuju dekompozicije u polumrežu Arhimedovih polugrupa, u opštem i nekim specijalnim slučajevima. Svi identiteti sa pomenutom osobinom su opisani u IV 1.2., što je glavni rezultat ovog poglavlja. Takodje, važan je i rezultat IV 1.3., koji opisuje identitete koji indukuju dekompoziciju π-regularnih polugrupa u polumrežu potpuno Arhimedovih polugrupa. Kao posledica pomenutih tvrdjenja daje se IV 1.4., što predstavlja rešenje problema L.N.Ševrina i E.V.Suhanova, problem III 7.1. iz [92].

U poglavlju IV 2. opisujemo identitete koji indukuju dekompoziciju π-regularnih polugrupa u traku nil-ekstenzija grupa. Ti identiteti su opisani Teoremom IV 2.8.. Teoremom IV 2.9. su opisani svi identiteti koji indukuju dekompoziciju unije grupa u traku grupa.

U poglavlu IV 3. opisujemo identitete koji indukuju dekompoziciju u nil-ekstenziju unije grupa. U opštem slučaju, oni su opisani Teoremom IV 3.4. Osim toga, opisujemo identitete koji indukuju dekompoziciju u nil-ekstenziju polugrupa nekih drugih tipova, kao što su polumreže levih grupa, polumreže grupa i trake grupa.

U poglavlju IV 4. razmatramo identitete koji indukuju dekompoziciju u retraktivnu nil-ekstenziju unije grupa i identitete koji indukuju dekompozicije u n-nilpotentne ekstenzije unije grupa. U vezi prvih, opšte rešenje je dato Teoremom IV 4.1. i razmatrani su i neki posebni slučajevi. Drugi pomenuti tip identiteta je opisan Teoremom IV 4.4.

U poglavlju IV 5. opisujemo identitete nad dvoslovnim alfabetom koji indukuju dekompoziciju u polumrežu Arhimedovih polugrupa. Teoremom IV 5.1. dajemo opis tih identiteta, vizuelno jasniji od onog iz IV 1.2.. Veoma su interesantni rezultati IV 5.2. i IV 5.3. koji opisuju identitete koji indukuju dekompozicije u polumrežu levo Arhimedovih polugrupa, odnosno u polumrežu t-Arhimedovih polugrupa. Treba napomenuti da problem ovakvog oblika u opštem slučaju (tj. u slučaju alfabeta A_n, $n \geq 3$,) nije rešen.

Na kraju, napomenimo da se u ovoj glavi razmatraju samo istotipni identiteti. Što se tiče raznotipnih identiteta, njih je razmatrao J.L.Chrislock u radu [25] iz 1969. godine, u kome je dokazao da svaka polugrupa koja zadovoljava raznotipni identitet jeste nil-ekstenzija periodične potpuno proste polugrupe. Neke uže klasifikacije raznotipnih identiteta moguće je izvršiti na veoma jednostavan način, koristeći metode primenjene u ovoj disertaciji, pa zato o njima neće biti reči. Sa druge strane, pomenućemo da je problematika koja je razmatrana u ovoj glavi dosta vezana sa problemima varijeteta polugrupa, kojima se bavi ekipa ruskih matematičara iz Sverdlovska, sa L.N.Ševrinom na čelu. Ta veza je naročito jaka u onom delu njihovih istraživanja koji se bavi problemima varijeteta koji se sastoji od polugrupa sa odredjenom strukturom, i ta problematika je razmatrana u radovima M.V.Sapira i E.V.Suhanova,[80], V.V.Rasina,[76], kao i francuskog matematičara M.Schutzenbergera,[81]. Naročito su interesantni ekspozitorni radovi L.N.Ševrina i M.V.Volkova,[90], i L.N.Ševrina i E.V.Suhanova,[92], posebno glava III drugog rada. Kao što je već rečeno, rezultat IV 1.4. je rešenje jednog od problema postavljenih u [92].

IV 1. DEKOMPOZICIJE U POLUMREŽU ARHIMEDOVIH POLUGRUPA INDUKOVANE IDENTITETIMA

Podsetimo se, najpre, da sa $\mathcal{A}\circ\mathcal{S}$-označavamo klasu svih polugrupa koje su polumreže Arhimedovih polugrupa. Kao što je već rečeno u uvodu Glave IV, $\mathcal{A}\circ\mathcal{S}$-identiteti su razmatrani u radovima T.Tamure i N.Kimure,[99], gde je razmatran identitet $xy = yx$, J.L.Chrislocka,[24], u kome je razmatran identitet $x_1x_2x_3x_4 = x_1x_3x_2x_4$, T.Tamure i J.Shafera,[102], i T.Tamure i T.Nordahla,[101], u kojima je razmatran sistem identiteta $(xy)^n = x^ny^n$, $n \in Z^+$, T.Nordahla,[51], gde je razmatran identitet $(xy)^m = x^my^m$, M.V.Sapira i E.V.Suhanova,[80], gde su razmatrani identiteti

$$(xy)^m = ((xy)^m(yx)^m)^n(xy)^m \quad \text{i} \quad x_1x_2\dots x_n = F(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

itd. U njima je dokazano da nabrojeni identiteti jesu $\mathcal{A}\circ\mathcal{S}$-identiteti.

U ovom poglavlju će, pomoću homomorfizama slobodnih polugrupa, biti opisani svi $\mathcal{A}\circ\mathcal{S}$-identiteti nad proizvoljnim (konačnim) alfabetom. Glavni rezultati su IV 1.2. i IV 1.3.. Interesantno je tvrdjenje, koje je deo Teoreme IV 1.2., da neki identitet jeste $\mathcal{A}\circ\mathcal{S}$-identitet ako i samo ako nije zadovoljen u polugrupi B_2. Prema tome, neki vizuelno jasniji opis $\mathcal{A}\circ\mathcal{S}$-identiteta je moguće dati opisom identiteta koji nisu zadovoljeni u polugrupi B_2, odnosno i preko opisa identiteta koji su zadovoljeni u toj polugrupi. Opis identiteta koji su zadovoljeni u B_2 dat je u radu G.I.Maševickog,[48], ali autor ove disertacije nije bio u mogućnosti da taj rad nabavi. Informacije o njemu su veoma oskudne i bile su mu dostupne samo posredno, preko ekspozitornog rada [90], strana 35, gde sam rezultat takodje nije dat, jer je veoma glomazan. Osim toga, iz rezultata IV 1.2. i IV 1.3. se lako može dobiti odgovor na Problem III 7.1. (odnosno Zadatak III 7.1.) iz [92]. Taj odgovor je dat Posledicom IV 1.4.

Takodje, u ovom poglavlju se razmatraju i neki posebni tipovi $\mathcal{A}\circ\mathcal{S}$-identiteta i daju neki značajni primeri $\mathcal{A}\circ\mathcal{S}$-identiteta.

U narednim razmatranjima ćemo posmatrati istotipni identitet

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = v(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{1}$$

nad alfabetom A_n, $n \geq 2$.

Kao što je poznato iz opšte algebre, svaka polugrupa je izomorfna faktor polugrupi neke slobodne polugrupe. Sledećom lemom opisujemo kongruenciju na slobodnoj polugrupi A_2^+ koja indukuje faktor izomorfan polugrupi B_2, što ćemo koristiti u daljem radu.

IV 1.1. LEMA. *Neka ϑ jeste relacija ekvivalencije na polugrupi A_2^+ odredjena particijom*

$$C_a = \{(xy)^n x \mid n \in Z^+ \cup \{0\}\}\ ,\ C_b = \{(yx)^n y \mid n \in Z^+ \cup \{0\}\}\ ,$$

$$C_{ab} = \{(xy)^n \mid n \in Z^+\}\ ,\ C_{ba} = \{(yx)^n \mid n \in Z^+\}\ ,$$

$$C_0 = A_2^+ - (C_a \cup C_b \cup C_{ab} \cup C_{ba}).$$

Tada ϑ jeste kongruencija i preslikavanje $\Phi : A_2^+/_\vartheta \to B_2$ definisano sa

$$\Phi = \begin{pmatrix} C_a & C_b & C_{ab} & C_{ba} & C_0 \\ a & b & ab & ba & 0 \end{pmatrix}$$

je izomorfizam.

DOKAZ: Dokazuje se jednostavnom proverom. ∎

Sledeći rezultat je glavni rezultat ovog poglavlja, opisuje sve identitete koji indukuju dekompoziciju u polumrežu Arhimedovih polugrupa i daje još neke interesantne rezultate.

IV 1.2. TEOREMA. *Sledeći uslovi za identitet (1) su ekvivalentni:*
(i) (1) jeste $\mathcal{A} \circ \mathcal{S}$-identitet;
(ii) polugrupa B_2 ne zadovoljava (1);
(iii) postoji homomorfizam $T : A_n^+ \to A_2^+$ takav da

(2) $$(T(u), T(v)) \notin \vartheta;$$

(iv) postoji homomorfizam $T : A_n^+ \to A_2^+$ i permutacija π skupa $\{u, v\}$ tako da važi jedan od sledećih uslova:

$$(A1)\quad T(\pi(u)) \in C_{ab}\ \text{ i }\ T(\pi(v)) \notin C_{ab}\ ;$$
$$(A2)\quad T(\pi(u)) \in C_a\ \text{ i }\ T(\pi(v)) \notin C_a\ .$$

(v) Postoji $k \in Z^+$ i $w \in C_0 \subset A_2^+$ tako da je

$$[u = v] \subseteq [(xy)^k = w]\ .$$

DOKAZ: $(i) \Rightarrow (ii)$. Sledi neposredno.
$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka važi (ii). Uzmimo da ne važi (iii), tj. da je

$$(T(u), T(v)) \in \vartheta,$$

za svaki homomorfizam $T: A_n^+ \to A_2^+$. Neka je $F: A_n^+ \to B_2$ proizvoljni homomorfizam. Uzmimo da je $T: A_n^+ \to A_2^+$ homomorfizam odredjen sa

$$(3) \qquad T(x_i) = \begin{cases} x & \text{ako je } F(x_i) = a \\ y & \text{ako je } F(x_i) = b \\ xy & \text{ako je } F(x_i) = ab \\ yx & \text{ako je } F(x_i) = ba \\ x^2 & \text{ako je } F(x_i) = 0 \end{cases},$$

$i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Neka je $G = \mathrm{nat}\,\vartheta : A_2^+ \to B_2$ prirodni homomorfizam indukovan kongruencijom ϑ. Prema (3) imamo da je

$$G(T(x_i)) = F(x_i)$$

za svaki $x_i \in A_n$, odakle sledi da je

$$(4) \qquad G(T(w)) = F(w)$$

za svaki $w \in A_n^+$. Kako je, prema pretpostavci, $(T(u), T(v)) \in \vartheta$, to prema (4) dobijamo da je

$$F(u) = G(T(u)) = G(T(v)) = F(v),$$

odakle sledi da ne važi (ii), što je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom. Prema tome, važi (iii).

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Neka postoji homomorfizam $T: A_n^+ \to A_2^+$ takav da važi (2). Tada je jasno da jedna od reči $T(u)$ i $T(v)$ nije u C_0. Ne umanjujući opštost dokaza možemo uzeti da $T(u) \notin C_0$. Tada je

$$T(u) \in C_a \cup C_{ab} \cup C_b \cup C_{ba}.$$

Ako je $T(u) \in C_a$, tada prema (2) dobijamo da $T(v) \notin C_a$, i ako je $T(u) \in C_{ab}$, tada prema (2) dobijamo da $T(v) \notin C_{ab}$, pa dobijamo $(A2)$ odnosno $(A1)$.

Neka je $T(u) \in C_b$. Tada prema (2) dobijamo da $T(v) \notin C_b$. Uzmimo da je P automorfizam polugrupe A_n^+ odredjen permutacijom

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$$

alfabeta A_2. Tada se lako proverava da

$$P(T(u)) \in C_a \quad \text{i} \quad P(T(v)) \notin C_a,$$

pa dobijamo $(A2)$. Ako je $T(u) \in C_{ba}$, tada isti način dokazujemo da se permutacijom slova dobija $(A1)$. Prema tome, važi (iv).

$(iv) \Rightarrow (v)$. Neka postoji homomorfizam $T : A_n^+ \to A_2^+$ takav da važi jedan od uslova $(A1)$ ili $(A2)$.

Uzmimo da važi $(A1)$. Ne umanjujući opštost dokaza možemo uzeti da je $T(u) \in C_{ab}$ i $T(v) \notin C_{ab}$. Tada prema I 6.14. i I 6.15. dobijamo da je

$$[u = v] \subseteq [T(u) = T(v)] \subseteq [xyT(u)xy = xyT(v)xy] .$$

Kako je jasno da je $xyT(v)xy \in C_0$ i da je $xyT(u)xy = (xy)^k$ za neki $k \in Z^+$, to dobijamo da važi (vi).

Uzmimo da važi $(A2)$. Ne umanjujući opštost dokaza možemo uzeti da je $T(u) \in C_a$ i $T(v) \notin C_a$. Tada prema I 6.14. i I 6.15. dobijamo da je

$$[u = v] \subseteq [T(u) = T(v)] \subseteq [xyT(u)y = xyT(v)y] .$$

Kako je jasno da je $xyT(v)y \in C_0$ i da je $xyT(u)y = (xy)^k$ za neki $k \in Z^+$, to dobijamo da važi (v).

$(v) \Rightarrow (i)$. Neka važi (v), neka je $S \in [(xy)^k = w]$, $w \in C_0$, proizvoljna polugrupa i neka su $a, b \in S$ proizvoljni elementi. Neka je $F : A_2^+ \to S$ homomorfizam odredjen preslikavanjem

$$\begin{pmatrix} x & y \\ a & b \end{pmatrix} .$$

Kako je jasno da

$$x^2 \mid w \quad \text{ili} \quad y^2 \mid w ,$$

to dobijamo da je

$$(ab)^k = F((xy)^k) = F(w) \in \begin{cases} S^1a^2S^1 & \text{ako } x^2 \mid w , \\ S^1b^2S^1 & \text{ako } y^2 \mid w . \end{cases}$$

Dakle, prema II 1.2. dobijamo da je $S \in \mathcal{A} \circ \mathcal{S}$, pa imamo da je

$$[u = v] \subseteq [(xy)^k = w] \subseteq \mathcal{A} \circ \mathcal{S} .$$

Prema tome, važi (i). ∎

Sledeća teorema opisuje identitete koji indukuju dekompoziciju π-regularnih polugrupa u polumrežu potpuno Arhimedovih polugrupa.

IV 1.3. TEOREMA. *Identitet (1) je $\pi\mathcal{R} \triangleright \mathcal{CA} \circ \mathcal{S}$-identitet ako i samo ako (1) jeste $\mathcal{A} \circ \mathcal{S}$-identitet.*

DOKAZ: Neka (1) jeste $\pi\mathcal{R} \triangleright \mathcal{CA} \circ \mathcal{S}$-identitet. Tada je

$$\pi\mathcal{R} \cap [u = v] \subseteq \mathcal{CA} \circ \mathcal{S} .$$

Kako je $B_2 \in \pi\mathcal{R}$ i $B_2 \notin \mathcal{CA} \circ \mathcal{S}$, to dobijamo da $B_2 \notin [u = v]$, pa prema IV 1.2. dobijamo da (1) jeste $\mathcal{A} \circ \mathcal{S}$-identitet.

Obrnuto, neka (1) jeste $\mathcal{A}\circ\mathcal{S}$-identitet i neka $S \in \pi\mathcal{R}\cap[u=v]$ jeste proizvoljna polugrupa. Neka je $a \in Reg(S)$ proizvoljni element. Tada postoji $b \in S$ tako da je

$$a = aba \quad \text{i} \quad b = bab \ .$$

Takodje, prema IV 1.2. dobijamo da postoje $k \in Z^+$ i $w \in C_0 \subset A_2^+$ tako da je

$$S \in [u=v] \subseteq [(xy)^k = w] \ .$$

Prema tome, imamo da $S \models (xy)^k = w$. Kako je $w \in C_0$, to dobijamo da $x^2 \mid w$ ili $y^2 \mid w$, pa postoje reči $w' \in A_2^+$ i $w'' \in A_2^*$ i $m \in Z^+ \cup \{0\}$ tako da je $w = w''w'$ i

$$w' = x^2(yx)^m \text{ ili } w' = (yx)^m y \text{ ili } w' = y^2(xy)^m \text{ ili } w' = y^2(xy)^m x.$$

Ako je $w' = y^2(xy)^m$, tada za homomorfizam $G : A_2^+ \to S$ odredjen preslikavanjem

$$\begin{pmatrix} x & y \\ b & a \end{pmatrix}$$

dobijamo da je

$$ba = (ba)^k = G((xy)^k) = G(w) = G(w'')G(w') = G(w'')a^2 \in Sa^2 \ ,$$

odakle sledi da je

$$a = aba \in Sa^2 \ .$$

U ostalim slučajevima, ako posmatramo homomorfizam $F : A_2^+ \to S$ odredjen preslikavanjem

$$\begin{pmatrix} x & y \\ a & b \end{pmatrix} \ ,$$

tada dobijamo da je

$$ab = (ab)^k = F((xy)^k) = F(w) = F(w'')F(w') = F(w'')a^2 \in Sa^2$$

ako je $w' = x^2(yx)^m$, ili

$$ab = (ab)^k = F((xy)^k) = F(w) = F(w'')F(w') = F(w'')a^2 b \in Sa^2 b \ ,$$

ako je $w' = x^2(yx)^m y$, ili

$$ab = (ab)^k = F((xy)^k) = F(w) = F(w'')F(w') = F(w'')b^2 a \in Sb^2 a \ ,$$

ako je $w' = y^2(xy)^m x$, odakle sledi da je

$$a = aba \in Sa^2 a \subseteq Sa^2 \ ,$$

ili

$$a = aba \in Sa^2 ba = Sa^2 \ ,$$

ili

$$a = aba \in Sb^2 a^2 \subseteq Sa^2 \ .$$

Prema tome, dokazali smo da je $a \in Sa^2$. Na isti način dokazujemo da je $a \in a^2 S$. Prema tome, imamo da je $a \in Gr(S)$, tj. da je $Reg(S) = Gr(S)$, pa prema II 2.3. dobijamo da je $S \in \mathcal{CA}\circ\mathcal{S}$. Dakle, (1) jeste $\pi\mathcal{R}\triangleright\mathcal{CA}\circ\mathcal{S}$-identitet. ∎

Na osnovu rezultata iz IV 1.2. i IV 1.3. možemo dokazati sledeće tvrdjenje, koje predstavlja rešenje Problema III 7.1. postavljenog u radu L.N.Ševrina i E.V.Suhanova,[92].

IV 1.4. POSLEDICA. *Neka $\mathcal{X}$ jeste neki varijetet polugrupa. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A} \circ \mathcal{S}$;
(ii) $\mathcal{X}$ *ne sadrži polugrupu* B_2;
(iii) svaka regularna polugrupa iz $\mathcal{X}$ *je potpuno regularna;*
(iv) svaka potpuno 0-prosta polugrupa iz $\mathcal{X}$ *je bez delitelja nule;*
(v) u svakoj polugrupi sa nulom iz $\mathcal{X}$ *skup svih nilpotenata čini podpolugrupu;*
(vi) u svakoj polugrupi sa nulom iz $\mathcal{X}$ *skup svih nilpotenata čini ideal.*

DOKAZ: $(i) \Rightarrow (ii)$. Sledi neposredno.

$(ii) \Rightarrow (i)$ i $(ii) \Rightarrow (iii)$. Ako važi (ii) i ako je $\mathcal{X} = [\Sigma]$, tada sistem Σ identiteta mora sadržati bar jedan od identiteta koji nije zadovoljen u B_2, tj. mora sadržati bar jedan $\mathcal{A} \circ \mathcal{S}$-identitet, pa prema IV 1.2. i IV 1.3. dobijamo da važi (i) i (iii).

$(iii) \Rightarrow (ii), (iv) \Rightarrow (ii)$ i $(v) \Rightarrow (ii)$. Sledi neposredno iz činjenice da polugrupa B_2 jeste regularna i nije potpuno regularna, da jeste potpuno 0-prosta ali ima delitelja nule i da je polugrupa sa nulom u kojoj skup svih nilpotenata ne čini podpolugrupu.

$(vi) \Rightarrow (v)$. Sledi neposredno.

$(i) \Rightarrow (vi)$. Sledi prema II 1.2. jer za svaku polugrupu sa nulom 0 je skup svih nilpotenata jednak radikalu ideala $\{0\}$.

$(i) \Rightarrow (iv)$. Neka S jeste potpuno 0-prosta polugrupa sa nulom 0 iz $\mathcal{X}$. Tada prema (i) dobijamo da je S polumreža Y Arhimedovih polugrupa $S_\alpha, \alpha \in Y$. Neka je $\alpha \in Y$ element takav da je $0 \in S_\alpha$. Tada je S_α Arhimedova polugrupa sa nulom, pa S_α jeste nil-polugrupa i $S_\alpha \subseteq Nil(S)$. Sa druge strane, $Nil(S)$ je ideal od S i $Nil(S) \neq S$, jer S sadrži nenula idempotent i on ne može biti nilpotent, odakle dobijamo da je $Nil(S) = \{0\}$, tj. $S_\alpha = \{0\}$. Neka je $a \in S$, $a \neq 0$, proizvoljni element. Tada je $a \in S_\beta$ za neki $\beta \in Y$, $\beta \neq \alpha$. Neka je $I = \{\gamma \in Y \mid \gamma\beta = \alpha\}$. Lako se proverava da je I ideal od Y i jasno je da je $I \neq Y$, jer $\beta \notin I$. Ako uzmemo da je $T = \cup\{S_\gamma \mid \gamma \in I\}$, tada se lako dokazuje da je T ideal polugrupe S različit od S, odakle dobijamo da je $T = \{0\} = S_\alpha$. Prema tome, imamo da je $I = \{\alpha\}$, odakle sledi da je

$$ab \neq 0 \quad \text{i} \quad ba \neq 0$$

za svaki $b \in S$, $b \neq 0$. Dakle, a nije delitelj nule, pa važi (iv). ∎

Osim identiteta koji indukuju dekompozicije u polumrežu Arhimedovih polugrupa, interesantno je pitanje opisivanja identiteta koji indukuju dekompoziciju u polumrežu levo Arhimedovih polugrupa. U opštem slučaju, ovaj problem nije rešen. Sledećom teoremom dajemo dajemo rešenje tog problema u jednom specijalnom slučaju, tj. opisujemo identitete koji indukuju dekompoziciju π-regularnih polugrupa u polumrežu nil-ekstenzija levih grupa.

IV 1.5. TEOREMA. *Sledeći uslovi za identitet (1) su ekvivalentni:*

(i) (1) je $\pi\mathcal{R} \triangleright (\mathcal{LG} \circ \mathcal{N}) \circ \mathcal{S}$*-identitet;*
(ii) polugrupe B_2 *i* R_2 *ne zadovoljavaju (1);*
(iii) (1) jeste $\mathcal{A} \circ \mathcal{S}$*-identitet i važi:*

(5) $$t(u) \neq t(v).$$

DOKAZ: $(i) \Rightarrow (ii)$. Sledi neposredno.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka važi (ii). Tada prema IV 1.2. sledi da (1) jeste $\mathcal{A} \circ \mathcal{S}$-identitet. Kako polugrupa R_2 ne zadovoljava (1), to dobijamo da važi (5). Prema tome, važi (iii).

$(iii) \Rightarrow (i)$. Neka važi (iii). Neka $S \in \pi\mathcal{R} \cap [u = v]$ jeste proizvoljna polugrupa. Tada prema IV 1.3. dobijamo da S jeste GV-polugrupa. Neka su $e, f \in E(S)$ proizvoljni elementi. Neka je $F : A_n^+ \to S$ homomorfizam odredjen sa

$$F(t(u)) = e \quad , \quad F(x_i) = f \ \text{ za } x_i \neq t(u), x_i \in A_n.$$

Tada je jasno da je $F(u) = F(v)$. Sa druge strane, imamo da je

$$F(u) = (fe)^k \quad \text{ili} \quad F(u) = (ef)^k e,$$

za neki $k \in Z^+$, i

$$F(v) = (ef)^m \quad \text{ili} \quad F(v) = f(ef)^m,$$

za neki $m \in Z^+$, odakle dobijamo da je

$$(ef)^{m+1} \in Se.$$

Prema tome,

$$(ef)^{m+1} = (ef)^{m+1}e = (efe)^{m+1},$$

pa prema Teoremi II 2.10. dobijamo da S jeste polumreža nil-ekstenzija levih grupa. Prema tome, imamo da je

$$\pi\mathcal{R} \cap [u = v] \subseteq (\mathcal{LG} \circ \mathcal{N})\mathcal{S} \ ,$$

pa (1) jeste $\pi\mathcal{R} \triangleright (\mathcal{LG} \circ \mathcal{N}) \circ \mathcal{S}$-identitet. ∎

Iz IV 1.5. neposredno sledi sledeći rezultat:

IV 1.6. POSLEDICA. *Sledeći uslovi za identitet (1) su ekvivalentni:*
(i) (1) je $\pi\mathcal{R} \triangleright (\mathcal{G} \circ \mathcal{N}) \circ \mathcal{S}$-identitet;
(ii) polugrupe B_2, L_2 i R_2 ne zadovoljavaju (1);
(iii) (1) jeste $\mathcal{A} \circ \mathcal{S}$-identitet i važi:

$$h(u) \neq h(v) \quad i \quad t(u) \neq t(v) \ .$$

Veoma su interesantne dekompozicije π-regularnih polugrupa u polumrežu retraktivnih nil-ekstenzija potpuno prostih polugrupa. Identiteti koji indukuju takve dekompozicije će biti opisani Teoremom IV 1.8. Pre dokazivanja te teoreme, moramo dokazati sledeći pomoćni rezultat:

IV 1.7. LEMA. *Neka (1) jeste identitet za koji važi:*

$$h^{(2)}(u) = h^{(2)}(v) .$$

Tada polugrupa $L_{3,1}$ *zadovoljava (1).*

DOKAZ: Neka (1) jeste identitet takav da je $h^{(2)}(u) = h^{(2)}(v)$. Ne umanjujući opštost dokaza, možemo uzeti da je $h(u) = h(v) = x_1$. Neka je $F : A_n^+ \to L_{3,1}$ proizvoljni homomorfizam.

Uzmimo da je $h^{(2)}(u) = h^{(2)}(v) = x_1^2$. Tada imamo da je

$$F(u) = \begin{cases} e & \text{ako je } F(x_1) = e \vee F(x_1) = a \\ f & \text{ako je } F(x_1) = f \\ g & \text{ako je } F(x_1) = g \end{cases} = F(v) ,$$

pa polugrupa $L_{3,1}$ zadovoljava (1).

Uzmimo da je $h^{(2)}(u) = h^{(2)}(v) \neq x_1^2$. Ne umanjujući opštost dokaza, možemo uzeti da je $h^{(2)}(u) = h^{(2)}(v) = x_1x_2$. Tada imamo da je

$$F(u) = \begin{cases} g & \text{ako je } F(x_1) = g \vee (F(x_1) = a \wedge F(x_2) = f) \\ f & \text{ako je } F(x_1) = f \\ g & \text{inače} \end{cases} = F(v) ,$$

pa polugrupa $L_{3,1}$ zadovoljava (1). ∎

IV 1.8. TEOREMA. *Sledeći uslovi za identitet (1) su ekvivalentni:*
(i) (1) je $\pi\mathcal{R} \triangleright (\mathcal{CS} * \mathcal{N}) \circ \mathcal{S}$*-identitet;*
(ii) polugrupe B_2, $L_{3,1}$ *i* $R_{3,1}$ *ne zadovoljavaju (1);*
(iii) (1) je $\mathcal{A} \circ \mathcal{S}$*-identitet i važi*

(6) $$h^{(2)}(u) \neq h^{(2)}(v) \quad i \quad t^{(2)}(u) \neq t^{(2)}(v).$$

DOKAZ: $(i) \Rightarrow (ii)$. Sledi neposredno.
$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka važi (ii), tj. neka

$$B_2,\ L_{3,1},\ R_{3,1} \not\models u = v .$$

Tada prema IV 1.2. dobijamo da (1) jeste $\mathcal{A} \circ \mathcal{S}$-identitet. Takodje, ako je

$$h^{(2)}(u) = h^{(2)}(v),$$

tada se lako dokazuje $L_{3,1} \models u = v$, što nije moguće. Dakle, imamo da je

$$h^{(2)}(u) \neq h^{(2)}(v).$$

Na sličan način dokazujemo da iz $R_{3,1} \not\models u = v$ sledi da je

$$t^{(2)}(u) \neq t^{(2)}(v).$$

Prema tome, važi (iii).

$(iii) \Rightarrow (i)$. Neka (1) jeste $\mathcal{A} \circ \mathcal{S}$-identitet i neka važi (6). Neka $S \in \pi\mathcal{R} \cap [u = v]$ jeste proizvoljna polugrupa. Tada je jasno da S jeste polumreža Y polugrupa $S_\alpha, \alpha \in Y$, i za $\alpha \in Y$ imamo da S_α jeste nil-ekstenzija potpuno proste polugrupe K_α.

Neka je $\alpha \in Y$. Neka je $a \in T_e \subseteq S_\alpha$, za neki $e \in E(S_\alpha)$, i neka je $f \in E(S_\alpha)$. Dokazaćemo da je

$$af = eaf \tag{7}$$

i

$$fa = fae. \tag{8}$$

Neka je $h(u) \neq h(v)$. Prema tvrdjenju dualnom Teoremi IV 1.5. dobijamo da K_α jeste desna grupa, tj. K_α jeste desno nulta traka $E = E(K_\alpha)$ grupa $G_g, g \in E$. Sada imamo da je

$$af = (af)f \in K_\alpha G_f \subseteq G_f,$$

odakle dobijamo da je $af = faf$, pa je $(af)^n = a^n f$, za svaki $m \in Z^+$. Neka je $a^m \in G_e, m \in Z^+$. Tada imamo da

$$af, a^m f \in G_f,$$

odakle dobijamo da postoji $c \in G_f$ tako da je $af = a^m fc$, pa je

$$af = a^m fc = ea^m fc = eaf,$$

tj. važi (7).

Neka je $h(u) = h(v)$. Ne umanjujući opštost dokaza, možemo uzeti da je

$$h^{(2)}(u) = x_1 x_k \quad \text{i} \quad h^{(2)}(v) = x_1 x_l,$$

za neke $k, l \in \{1, 2, \ldots, n\}, k \neq l$. Takodje, imamo da je $k \neq 1$ ili $l \neq 1$. Ne umanjujući opštost dokaza, možemo uzeti da je $k \neq 1$. Dokazaćemo da za svaki $m \in Z^+$ postoje $c, d \in S_\alpha$ tako da je

$$afc = a^m d. \tag{9}$$

Neka je $F_1 : A_n^+ \to S$ homomorfizam odredjen sa

$$F_1(x_1) = a \quad , \quad F_1(x_l) = a \quad , \quad F_1(x_i) = f \quad \text{za} \quad x_i \in A_n, x_i \neq x_1, x_l.$$

Tada je $F_1(u) = F_1(v)$, odakle dobijamo da je

$$afc_1 = a^2 d_1,$$

za neke $c_1, d_1 \in S_\alpha$. Uzmimo da je

$$afc_m = a^m d_m,$$

za neke $m \in Z^+, c_m, d_m \in S_\alpha$. Neka je $F : A_n^+ \to S$ homomorfizam odredjen sa

$$F_m(x_1) = a^m \quad , \quad F_m(x_l) = a \quad , \quad F_m(x_k) = d_m \quad , \quad F_m(x_i) = f$$

za $x_i \in A_n, x_i \neq x_1, x_l, x_k$. Tada je $F_m(u) = F_m(v)$, odakle dobijamo da je

$$a^m d_m c'_m = a^m a d'_m,$$

za neke $c'_m, d'_m \in S_\alpha$. Sada imamo da je

$$afc_m c'_m = a^m d_m c'_m = a^{m+1} d'_m,$$

odakle dobijamo da važi (9). Neka je $m \in Z^+$ broj takav da je $a^m \in G_e$. Neka su $c, d \in S_\alpha$ elementi za koje važi (9). Neka je $af \in G_h$ za neki $h \in E(K_\alpha)$. Tada je

$$afcaf \in G_h S_\alpha G_h \subseteq G_h,$$

pa postoji $c_0 \in G_h$ tako da je $af = afcafc_0$, odakle dobijamo da je

$$af = afcafc_0 = a^m dafc_0 = ea^m dafc_0 = eaf,$$

tj. važi (7).

Na isti način, koristeći da je

$$t^{(2)}(u) \neq t^{(2)}(v),$$

dokazujemo (8).

Definišimo preslikavanje $\varphi : S_\alpha \to K_\alpha$ sa

$$\varphi(a) = ea \qquad \text{ako } a \in T_e, e \in E(S_\alpha).$$

Neka su $a \in T_e, b \in T_f, e, f \in E(S_\alpha)$ proizvoljni elementi. Uzmimo da je $ab \in T_g$ za neki $g \in E(S_\alpha)$. Tada je

$$\begin{aligned}
\varphi(ab) &= gab \\
&= gaeb && \text{(prema (8)),} \\
&= gaebf && \text{(prema (8)),} \\
&= gabf && \text{(prema (8)),} \\
&= abf && \text{(prema (7)),} \\
&= afb && \text{(prema Munnovoj lemi),} \\
&= eafb && \text{(prema (7)),} \\
&= \varphi(a)\varphi(b).
\end{aligned}$$

Dakle, φ je retrakcija. Prema tome, imamo da je

$$\pi\mathcal{R} \cap [u = v] \subseteq (\mathcal{CS} * \mathcal{N}) \circ \mathcal{S} ,$$

pa (1) jeste $(\mathcal{CS} * \mathcal{N}) \circ \mathcal{S}$-identitet. ∎

U nekim od prethodnih tvrdjenja smo razmatrali identitete koji indukuju odredjene dekompozicije π-regularnih polugrupa. Pri tome, svaka polugrupa koja zadovoljava neki od tih identiteta ne mora biti π-regularna. Medjutim, interesantni su identiteti koji sami indukuju π-regularnost, tj. za koje važi da svaka polugrupa koja ih zadovoljava jeste π-regularna. Takvi identiteti će biti opisani u narednom tvrdjenju.

IV 1.9. PROPOZICIJA. *Sledeći uslovi za identitet (1) su ekvivalentni:*

(i) $[u = v]$ *se sastoji iz* π*-regularnih polugrupa;*
(ii) $[u = v]$ *se sastoji iz potpuno* π*-regularnih polugrupa;*
(iii) $[u = v]$ *se sastoji iz periodičnih polugrupa;*
(iv) *postoji* $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ *tako da je*

$$|x_i|_u \neq |x_i|_v. \tag{10}$$

DOKAZ: $(i) \Rightarrow (iv)$. Neka važi (i). Uzmimo da je $|x_i|_u = |x_i|_v$ za svaki $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Tada multiplikativna polugrupa $(Z^+, \cdot)$ nenegativnih celih brojeva zadovoljava (1) i nije π-regularna. Prema tome, važi (iv).

$(iv) \Rightarrow (iii)$. Neka (1) jeste identitet za koji važi (iv). Neka S jeste proizvoljna polugrupa iz $[u = v]$ i neka $a \in S$ jeste proizvoljni element.

Uzmimo da je $|u| \neq |v|$. Neka je $F : A_n^+ \to S$ homomorfizam odredjen sa

$$F(x_j) = a \qquad \text{za svaki } x_j \in A_n^+.$$

Tada je

$$a^{|u|} = F(u) = F(v) = a^{|v|},$$

odakle dobijamo da S jeste periodična.

Neka je $|u| = |v| = s$. Prema (iv) imamo da postoji $x_i \in A_n^+$ tako da je

$$|x_i|_u = k \quad , \quad |x_i|_v = m \quad , \quad k, m \in Z^+ \quad \text{i} \quad k \neq m.$$

Neka je $F : A_n^+ \to S$ homomorfizam odredjen sa

$$F(x_i) = a^2 \quad , \quad F(x_j) = a \qquad \text{za svaki } x_j \in A_n^+, x_j \neq x_i.$$

Tada je

$$a^{s+k} = a^{s-k}(a^2)^k = F(u) = F(v) = a^{s-m}(a^2)^m = a^{s+m},$$

pri čemu je $s + k \neq s + m$, jer je $k \neq m$. Prema tome, S je periodična, pa važi (iii).

$(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$ Sledi neposredno. ∎

Identiteti sa osobinom (10) se u literaturi obično nazivaju neuravnoteženim identitetima. Medjutim, nas će u daljem radu zanimati osobina ovih identiteta opisana uslovom (iii) Propozicije IV 1.9., zbog čega ćemo koristiti nov naziv za ove identitete koji uvodimo sledećom definicijom.

IV 1.10. DEFINICIJA. *Identitet (1) je* ***periodični identitet*** ako zadovoljava uslov (iv) Propozicije IV 1.9. U suprotnom je ***neperiodični identitet.***

Ako (1) jeste periodični identitet, tada je bar jedan od brojeva

$$\big||x_1|_u - |x_1|_v\big|, \big||x_2|_u - |x_2|_v\big|, \ldots, \big||x_n|_u - |x_n|_v\big| \tag{11}$$

veći od nule, pa postoji njihov najveći zajednički delitelj, koji nazivamo ***periodom identiteta*** (1).

Koristeći napred dobijene rezultate, lako se dokazuje sledeći niz tvrdjenja.

IV 1.11. POSLEDICA. *Identitet (1) je $\mathcal{GV}$-identitet ako i samo ako (1) jeste periodični $\mathcal{A} \circ \mathcal{S}$-identitet.*

DOKAZ: Sledi prema IV 1.9. i IV 1.3.

IV 1.12. POSLEDICA. *Identitet (1) je $(\mathcal{LG} \circ \mathcal{N}) \circ \mathcal{S}$-identitet ako i samo ako (1) jeste $\mathcal{GV}$-identitet i važi*

$$t(u) \neq t(v)\ .$$

DOKAZ: Sledi prema IV 1.11. i IV 1.5. ∎

IV 1.13. POSLEDICA. *Identitet (1) je $(\mathcal{G} \circ \mathcal{N}) \circ \mathcal{S}$-identitet ako i samo ako (1) jeste $\mathcal{GV}$-identitet i važi*

$$t(u) \neq t(v) \quad i \quad h(u) \neq h(v).$$

DOKAZ: Sledi prema IV 1.11. i IV 1.6. ∎

IV 1.14. POSLEDICA. *Identitet (1) je $(\mathcal{CS} * \mathcal{N}) \circ \mathcal{S}$-identitet ako i samo ako (1) jeste $\mathcal{GV}$-identitet i važi*

$$h^{(2)}(u) \neq h^{(2)}(v) \quad i \quad t^{(2)}(u) \neq t^{(2)}(v)\ .$$

DOKAZ: Sledi prema IV 1.11. i IV 1.8. ∎

Na kraju ovog poglavlja ćemo dati neke primere $\mathcal{A} \circ \mathcal{S}$-identiteta. O nekim primerima je već bilo reči u uvodu ovog poglavlja. Ovde ćemo pomenuti permutacione i kvazipermutacione identitete i, koristeći rezultate iz IV 1.2., dokazati da oni jesu $\mathcal{A} \circ \mathcal{S}$-identiteti. Inače, ova dva tipa identiteta predstavljaju veoma značajne identitete koji su proučavani u mnogim radovima, naprimer u radovima A.Ajzenštata,[1], M.S.Putchae i A.Yaquba,[75], G.Polláka,[61-66], G.Polláka i M.V.Volkova,[67], M.V.Volkova i M.V.Sapira,[105], itd. Posebnu ulogu ovi identiteti imaju u ispitivanju nekih značajnih osobina varijeteta, o čemu se više može videti u napred pomenutim radovima G.Polláka, M.V.Volkova i M.V.Sapira.

IV 1.15. PRIMER. *Identitet oblika*

$$x_1 x_2 \ldots x_n = x_{\pi(1)} x_{\pi(2)} \ldots x_{\pi(n)} \ , \tag{12}$$

gde je π *neidentička permutacija skupa* $\{1,2,\ldots,n\}$, *nazivamo permutacionim identitetom. Svaki permutacioni identitet je* $\mathcal{A} \circ \mathcal{S}$*-identitet.*

DOKAZ: Posmatrajmo identitet (12). Neka je $k \in \{1,2,\ldots,x_n\}$ najmanji broj takav da je $\pi(k) \neq k$. Neka je $k = 1$. Tada za homomorfizam $T : A_n^+ \to A_2^+$ odredjen sa

$$T(x_1) = x \quad , \quad T(x_i) = yx \ \text{ za } \ x_i \in A_n - \{x_1\} \ ,$$

imamo da je

$$T(x_1 x_2 \ldots x_n) = x(yx)^{n-1} = (xy)^{n-1} x \in C_a$$

i

$$\begin{aligned} T(x_{\pi(1)} x_{\pi(2)} \ldots x_{\pi(n)}) &= T(x_{\pi(1)}) T(x_{\pi(2)} \ldots x_{\pi(n)}) \\ &= yxT(x_{\pi(2)} \ldots x_{\pi(n)}) \\ &\notin C_a \ . \end{aligned}$$

Dakle, prema IV 1.2. dobijamo da (12) jeste $\mathcal{A} \circ \mathcal{S}$-identitet.

Neka je $k \geq 2$ i neka je $T : A_n^+ \to A_2^+$ homomorfizam odredjen sa

$$\begin{cases} T(x_i) = xy & \text{za } \ i \in \{1,\ldots,k-1\} \\ T(x_k) = x & \\ T(x_i) = yx & \text{za } \ i \in \{k+1,\ldots,n\} \end{cases} .$$

Kako je $\pi(k) > k$, to je (12) oblika

$$x_1 \ldots x_{k-1} x_k \ldots x_n = x_1 \ldots x_{k-1} x_{\pi(k)} \ldots x_{\pi(n)} \ ,$$

odakle dobijamo da je

$$T(x_1 \ldots x_{k-1} x_k \ldots x_n) = (xy)^{k-1} x (yx)^{n-k} = (xy)^{n-1} x \in C_a$$

i

$$\begin{aligned} T(x_1 \ldots x_{k-1} x_{\pi(k)} \ldots x_{\pi(n)}) &= (xy)^{k-1} yxT(x_{\pi(k)} \ldots x_{\pi(n)}) \\ &\notin C_a \ , \end{aligned}$$

pa prema IV 1.2. dobijamo da (12) jeste $\mathcal{A} \circ \mathcal{S}$-identitet. ∎

IV 1.16. PRIMER. *Identitet oblika*

$$x_1 \ldots x_{k-1} y x_k y x_{k+1} \ldots x_n = x_{\pi(1)} \ldots x_{\pi(l-1)} y^2 x_{\pi(l)} \ldots x_{\pi(n)} \ , \tag{13}$$

gde je π permutacija skupa $\{1,2,\ldots,n\}$, nazivamo kvazipermutacionim identitetom. Svaki kvazipermutacioni identitet je $\mathcal{A}\circ\mathcal{S}$-identitet.

DOKAZ: Neka je $T: A_{n+1}^{+} \to A_2^{+}$ homomorfizam odredjen sa

$$\begin{cases} T(x_i) = xy & \text{za } i\in\{1,\ldots,k-1\} \\ T(y) = x & \\ T(x_k) = y & \\ T(x_i) = yx & \text{za } i\in\{k+1,\ldots,n\} \end{cases}.$$

Tada je

$$T(x_1\ldots x_{k-1}yx_kyx_{k+1}\ldots x_n) = (xy)^{k-1}xyx(yx)^{n-k} = (xy)\,nx \in C_a$$

i

$$x^2 \mid T(x_{\pi(1)}\ldots x_{\pi(l-1)}y^2x_{\pi(l)}\ldots x_{\pi(n)}),$$

odakle sledi da

$$T(x_{\pi(1)}\ldots x_{\pi(l-1)}y^2x_{\pi(l)}\ldots x_{\pi(n)}) \notin C_a .$$

Dakle, prema IV 1.2. dobijamo da (13) jeste $\mathcal{A}\circ\mathcal{S}$-identitet. ∎

IV 2. DEKOMPOZICIJE U TRAKU π-GRUPA INDUKOVANE IDENTITETIMA

Važan, i do sada slabo proučavan tip identiteta su identiteti koji indukuju dekompozicije u traku t-Arhimedovih polugrupa. Medju identitetima koji su dp sada istraživani ima takvih identiteta, mada su oni razmatrani uglavnom u vezi sa nekim drugim svojim svojstvima. Naprimer, medijalni identitet $x_1x_2x_3x_4 = x_1x_3x_2x_4$ indukuje dekompoziciju u normalnu traku t-Arhimedovih polugrupa, što neposredno sledi iz II 1.10.. Zatim, razmatran je i identitet $(xy)^2 = x^2y^2$, za koji je M.S.Putcha u radu [69] dokazao da indukuje dekompoziciju u traku t-Arhimedovih polugrupa. Takodje, prema rezultatima S.Bogdanovića,[6] (ili videti I 5.7.), imamo da sistem identiteta $(xy)^k = (x^2y)^m$, $(xy)^r = (xy^2)^s$ indukuje dekompoziciju u traku stepeno-vezanih polugrupa, dok prema rezultatima L.N.Ševrina,[89] (ili [92], strana 22), dobijamo da identitet $(xy)^k = (x^ky^k)^k$, $k\in Z^+$, $k \geq 2$ indukuje dekompoziciju u traku nil-ekstenzija periodičnih grupa.

Ovde će problem identiteta koji indukuju dekompoziciju u traku t-Arhimedovih polugrupa biti razmatran samo u nekim posebnim slučajevima. Naime, Teoremom IV 2.8. ćemo opisati identitete koji indukuju dekompoziciju π-regularnih polugrupa u traku nil-ekstenzija grupa, dok ćemo Teoremom IV 2.9. opisati identitete koji indukuju dekompoziciju unije grupa u traku grupa. Od radova iz oblasti proučavanja varijeteta polugrupa, vezano za ove probleme, pomenućemo rad V.V.Rasina,[76], u kome su razmatrani varijeteti koji se sastoje iz traka grupa, dok se neki rezultati mogu naći i u ekspozitornom članku L.N.Ševrina i E.V.Suhanova,[92] (strana 22).

U narednim razmatranjima ćemo posmatrati istotipni identitet

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = v(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

nad alfabetom A_n, $n \geq 2$.

IV 2.1. DEFINICIJA. *Neka je (1) identitet za koji je*

$$i(u) = i(v) = x_{\pi(1)} x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(n)}$$

za neku permutaciju π *skupa* $\{1, 2, \ldots, n\}$. *Za* $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ *ćemo sa* $u_k = l_k(u)$ ($v_k = l_k(v)$) *obeležavati najveći levi rez reči* u (v) *koji sadrži tačno* k *slova (tj. najveći levi rez koji ne sadrži slovo* $x_{\pi(k+1)}$). *Jasno je da je*

$$u_k = u_k(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(k)}) \ , \ v_k = v_k(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(k)}) \ .$$

Za $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ *i* $i \in \{1, \ldots, k\}$ *ćemo koristiti oznaku*

$$l_{k,i} = \left| |x_{\pi(i)}|_{u_k} - |x_{\pi(i)}|_{v_k} \right| \ .$$

IV 2.2. DEFINICIJA. *Levom karakteristikom identiteta (1) nazivamo broj* l *odredjen sa:*

(i) $l = 1$, *ako je (1) identitet sa levim izvrtanjem;*

(ii) l *je najveći zajednički delitelj brojeva*

$$p,\ l_{k,i}\ ,\ k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}\ ,\ i \in \{1, \ldots, k\}, \tag{2}$$

gde su brojevi $l_{k,i}$ *definisani kao u IV 2.1. i* p *je period identiteta (1), ako je (1) bez levog izvrtanja i bar jedan od brojeva iz (2) je različit od nule;*

(iii) $l = 0$, *ako je (1) bez levog izvrtanja i svi brojevi iz (2) su jednaki nuli.*

Desnom karakteristikom identiteta (1) nazivamo levu karakteristiku identiteta $\overline{u} = \overline{v}$.

Pre nego što predjemo na glavne rezultate ovog poglavlja, dokazaćemo niz pomoćnih tvrdjenja.

IV 2.3. LEMA. *Neka je (1) neperiodični identitet. Tada svaka komutativna grupa zadovoljava (1).*

DOKAZ: Neka je G proizvoljna komutativna grupa koja zadovoljava (1) i neka je $F: A_n^+ \to G$ proizvoljni homomorfizam. Kako je (1) neperiodičan, to je

$$|x_i|_u = |x_i|_v$$

za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pa je

$$\begin{aligned} F(u) &= (F(x_1))^{|x_1|_u}(F(x_2))^{|x_2|_u}\cdots(F(x_n))^{|x_n|_u} \\ &= (F(x_1))^{|x_1|_v}(F(x_2))^{|x_2|_v}\cdots(F(x_n))^{|x_n|_v} \\ &= F(v)\ . \end{aligned}$$

Prema tome, G zadovoljava (1). ∎

IV 2.4. LEMA. *Neka (1) jeste periodični identitet perioda p i neka S jeste proizvoljna polugrupa koja zadovoljava (1). Tada S jeste periodična i period svakog elementa iz S deli p.*

DOKAZ: Prema Propoziciji 1. imamo da S jeste periodična polugrupa. Neka je $a \in S$ element perioda $p(a)$. Tada postoji $m \in Z^+$ i $e \in E(S)$ tako da je $a^m = e$. Neka je $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takav da važi (10) i neka je $F: A_n^+ \to S$ homomorfizam odredjen sa

$$F(x_i) = a \quad , \quad F(x_j) = e \ \text{ za } j \in \{1, 2, \ldots, n\}, j \neq i.$$

Kako je $F(u) = F(v)$, to dobijamo da je

$$a^{m+|x_i|_u} = ea^{|x_i|_u} = ea^{|x_i|_v} = a^{m+|x_i|_v},$$

odakle dobijamo da

$$p(a) | (m + |x_i|_u - m - |x_i|_v) = |x_i|_u - |x_i|_v.$$

Prema tome, $p(a)$ deli sve brojeve iz (3) koji su različiti od nule, odakle dobijamo da $p(a)$ deli p.

IV 2.5. LEMA. *Neka je (1) periodični identitet perioda p. Tada svaka ciklična grupa čiji red deli p zadovoljava (1).*

DOKAZ: Neka je $G = < a >$ ciklična grupa reda $|G| = d$ takva da $d \mid p$. Neka je $F: A_n^+ \to G$ proizvoljni homomorfizam. Kako

$$d \mid p \mid |x_i|_u - |x_i|_v$$

za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to imamo da je

$$(F(x_i))^{|x_i|_u} = (F(x_i))^{|x_i|_v}$$

za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Kako je G komutativna, to je

$$\begin{aligned} F(u) &= (F(x_1))^{|x_1|_u}(F(x_2))^{|x_2|_u} \ldots (F(x_n))^{|x_n|_u} \\ &= (F(x_1))^{|x_1|_v}(F(x_2))^{|x_2|_v} \ldots (F(x_n))^{|x_n|_v} \\ &= F(v) . \end{aligned}$$

Prema tome, G zadovoljava (1). ∎

IV 2.6. LEMA. *Neka je (1) identitet leve karakteristike* $l = 0$. *Tada polugrupa* $LZ(d)$ *zadovoljava (1) za svaki* $d \in Z^+$, $d \geq 2$.

DOKAZ: Kako je $l = 0$, to imamo da je (1) identitet bez izvrtanja. Ne umanjujući opštost dokaza, možemo uzeti da je

$$i(u) = i(v) = x_1 x_2 \ldots x_n .$$

Neka je $F : A_n^+ \to LZ(d)$ proizvoljni homomorfizam.

Uzmimo da je $F(x_i) \in < a >$ za svaki $x_i \in A_n$. Kako je identitet (1), po pretpostavci, neperiodičan, to prema IV 2.3. dobijamo da je $F(u) = F(v)$.

Neka postoji $x_i \in A_n$ tako da $F(x_i) \notin < a >$, i neka je $k \in \{1, \ldots, n\}$ najmanji broj za koji $F(x_k) \notin < a >$. Ako je $k = 1$, tada dobijamo da je

$$F(u) = F(x_1) = F(v) .$$

Uzmimo da je $k \geq 2$. Kako je

$$u = u_{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}) x_k u' \ , \ v = v_{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}) x_k v' \ ,$$

i iz $l = 0$ sledi da je identitet

$$u_{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}) = v_{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1})$$

neperiodičan, to prema IV 2.3. dobijamo da je

$$F(u_{k-1}) = F(v_{k-1}) ,$$

pa je

$$\begin{aligned} F(u) &= F(u_{k-1}) F(x_k) F(u') \\ &= F(u_{k-1}) F(x_k) \\ &= F(v_{k-1}) F(x_k) \\ &= F(v_{k-1}) F(x_k) F(v') \\ &= F(v) . \end{aligned}$$

Prema tome, $LZ(d)$ zadovoljava (1). ∎

IV 2.7. LEMA. *Neka je (1) identitet leve karakteristike $l \geq 2$. Tada polugrupa $LZ(l)$ zadovoljava (1).*

DOKAZ: Kako je $l \geq 2$, to imamo da je (1) identitet bez levog izvrtanja. Ne umanjujući opštost dokaza, možemo uzeti da je

$$i(u) = i(v) = x_1 x_2 \dots x_n \ .$$

Neka je $F : A_n^+ \to LZ(l)$ proizvoljni homomorfizam.

Uzmimo da je $F(x_i) \in < a >$ za svaki $x_i \in A_n$. Ako je identitet (1) neperiodičan i $< a >$ je komutativna grupa, to prema IV 2.3. dobijamo da $< a > \models u = v$, pa je $F(u) = F(v)$. Neka je (1) periodični identitet perioda p. Kako je $< a >$ grupa reda l i kako $l \mid p$, to prema IV 2.5. dobijamo da $< a > \models u = v$, pa je $F(u) = F(v)$.

Neka postoji $x_i \in A_n$ tako da $F(x_i) \notin < a >$, i neka je $k \in \{1, \dots, n\}$ najmanji broj za koji $F(x_k) \notin < a >$. Ako je $k = 1$, tada dobijamo da je

$$F(u) = F(x_1) = F(v) \ .$$

Uzmimo da je $k \geq 2$. Imamo da je

$$u = u_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}) x_k u' \ , \quad v = v_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}) x_k v' \ .$$

Ako je identitet

$$u_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}) = v_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1})$$

neperiodičan, to prema IV 2.3. dobijamo da $< a > \models u_{k-1} = v_{k-1}$, pa je $F(u_{k-1}) = F(v_{k-1})$. Uzmimo da je identitet $u_{k-1} = v_{k-1}$ periodičan. Tada prema definiciji leve karakteristike identiteta (1) imamo da l deli period identiteta $u_{k-1} = v_{k-1}$, pa prema IV 2.5. dobijamo da $< a > \models u_{k-1} = v_{k-1}$, pa je $F(u_{k-1} = v_{k-1})$. Prema tome, imamo da je

$$\begin{aligned} F(u) &= F(u_{k-1}) F(x_k) F(u') \\ &= F(u_{k-1}) F(x_k) \\ &= F(v_{k-1}) F(x_k) \\ &= F(v_{k-1}) F(x_k) F(v') \\ &= F(v) \ . \end{aligned}$$

Dakle, $LZ(d)$ zadovoljava (1). ∎

Sledeći rezultat je glavni rezultat ovog poglavlja i opisuje identitete koji indukuju dekompoziciju π-regularnih polugrupa u traku nil-ekstenzija grupa.

IV 2.8. TEOREMA. *Sledeći uslovi za identitet (1) su ekvivalentni:*

(i) (1) je $\pi\mathcal{R} \triangleright (\mathcal{G} \circ \mathcal{N}) \circ \mathcal{B}$-identitet;

(ii) polugrupe B_2, $L_{3,1}$, $R_{3,1}$, $LZ(d)$ i $RZ(d)$ za $d \in Z^+$, $d \geq 2$, ne zadovoljavaju (1);

(iii) *(1)* je $\pi\mathcal{R} \triangleright (\mathcal{CS} * \mathcal{N}) \circ \mathcal{S}$*-identitet* *leve i desne karakteristke* 1.

DOKAZ: $(i) \Rightarrow (ii)$. Sledi neposredno.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Sledi prema IV 1.8., IV 2.6. i IV 2.7.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Neka važi (iii) i neka je S proizvoljna π-regularna polugrupa koja zadovoljava (1). Tada S jeste polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, koje su pravougaone trake π-grupa. Neka su $a, b \in S$ proizvoljni elementi i neka je $a\tau e$, $b\tau f$ za neke $e, f \in E(S)$. Tada imamo da je $ab \in S_\alpha$ za neki $\alpha \in Y$. Neka je S_α pravougaona traka $I \times \Lambda$ π-grupa $T_{i\lambda}$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$, i neka za $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$ $T_{i\lambda}$ jeste nil-ekstenzija grupe $G_{i\lambda}$ sa jedinicom $e_{i\lambda}$. Uzmimo da je $ab \in T_{i\lambda}$ za neke $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$. Tada za svaki $m \in Z^+$ postoji $j_m \in I$ tako da je

(3) $$a^m b \in T_{j_m\lambda} .$$

Zaista, neka je $a^m b \in T_{j_m\mu}$ za neke $j_m \in I$, $\mu \in \Lambda$. Tada imamo da je $e_{j_m\mu}a^m b \in T_{j_m\mu}$ i

$$e_{j_m\mu}a^m b = e_{j_m\mu}e_{j_m\mu}a^{m-1}ab \in T_{j_m\mu}S_\alpha T_{i\lambda} \subseteq T_{j_m\lambda} .$$

Prema tome, imamo da je $\mu = \lambda$, pa važi (3). Dokazaćemo da je

(4) $$ab \ \tau \ eb$$

i

(5) $$eb \ \tau \ ef .$$

Neka je $h(u) \neq h(v)$. Tada prema IV 1.5. dobijamo da $I \times \Lambda$ jeste desno nulta traka, pa je $|I| = 1$, tj. $I = \{i\}$. Sada prema (3) dobijamo da je $ab \ \tau \ a^2b$, pa prema dokazu za II 3.5. dobijamo da važi (4).

Neka je $h(u) = h(v)$ i $i(u) \neq i(v)$. Ne umanjujući opštost dokaza, možemo uzeti da je

$$i(u) = x_1x_2\dots x_n \quad \text{i} \quad i(v) = x_{\pi(1)}x_{\pi(2)}\dots x_{\pi(n)} ,$$

za neku permutaciju π skupa $\{1, 2, \dots, n\}$. Neka je $k \in \{2, \dots n\}$ najmanji broj takav da je $\pi(k) \neq k$. Tada je $\pi(i) = i$ za $i \in \{1, \dots, k-1\}$ i $\pi(k) > k$. Prema tome,

$$u = u'(x_1, \dots, x_{k-1})x_k u'' \ , \ v = v'(x_1, \dots, x_{k-1})x_{\pi(k)}v'' .$$

Neka je $m = |u'|$ i $r = |v'|$. Neka je $q \in Z^+$ proizvoljni broj i neka je $F_1 : A_n^+ \to S$ homomorfizam odredjen sa

$$\begin{cases} F_1(x_i) = a & \text{za } 1 \leq i \leq k-1 \\ F_1(x_k) = b & \\ F_1(x_i) = a^q b & \text{za } k+1 \leq i \leq n \end{cases} .$$

Tada iz $F_1(u) = F_1(v)$ sledi da je

(6) $$a^m bc_1 = a^{r+q}bd_1$$

za neke $c_1, d_1 \in S_\alpha$. Prema (3) imamo da $a^m b \in T_{j\lambda}$ i $a^{r+q}b \in T_{l\lambda}$ za neke $j, l \in I$. Kako je

$$a^m bc_1 \in T_{j\lambda}c_1 \subseteq T_{j\xi} ,$$
$$a^{r+q}bd_1 \in T_{l\lambda}d_1 \subseteq T_{l\zeta} ,$$

za neke $\xi, \zeta \in \Lambda$, to prema (6) dobijamo da je $j = l$. Prema tome, imamo da je

(7) $$a^m b \ \tau \ a^{r+q}b$$

za svaki $q \in Z^+$. Kako je $h^{(2)}(u) \neq h^{(2)}(v)$, to imamo da je $h^{(2)} \neq x_1^2$ ili je $h^{(2)}(v) \neq x_1^2$. Ne umanjući opštost dokaza, možemo uzeti da je $h^{(2)}(u) \neq x_1^2$. Tada je $h^{(2)}(u) = x_1x_2$, pa je

$$u = x_1x_2u''' \quad \text{i} \quad v = x_1^s x_{\pi(2)}v''' ,$$

za neki $s \in Z^+$. Uzmimo da je $s = 1$. Tada iz $h^{(2)}(u) \neq h^{(2)}(v)$ sledi da je $\pi(2) \neq 2$. Neka je homomorfizam $F_2 : A_n^+ \to S$ odredjen sa

$$\begin{cases} F_2(x_1) = a & \\ F_2(x_2) = b & \\ F_2(x_i) = ab & \text{za } 3 \leq i \leq n \end{cases} .$$

Tada iz $F_2(u) = F_2(v)$ sledi da je

$$abc_2 = a^2bd_2$$

za neke $c_2, d_2 \in S_\alpha$, pa na isti način kao u slučaju (6) dokazujemo da je $ab \ \tau \ a^2b$, odakle, prema dokazu za II 3.5., dobijamo da važi (4). Uzmimo da je $s \geq 2$. Neka je $F_3 : A_n^+ \to S$ homomorfizam odredjen sa

$$\begin{cases} F_3(x_1) = a & \\ F_3(x_i) = b & \text{za } 2 \leq i \leq n \end{cases} .$$

Tada iz $F_3(u) = F_3(v)$ sledi da je

$$abc_3 = a^sbd_3$$

za neke $c_3, d_3 \in S_\alpha$, pa kao u slučaju (6) dobijamo da je $ab \ \tau \ a^sb$. Na isti način dokazujemo da je

$$a^{s^t}b \ \tau \ (a^{s^t})^s b \ \tau \ a^{s^{t+1}}b ,$$

za svaki $t \in Z^+$, to dobijamo da je

(8) $$ab \ \tau a^{s^t}b$$

za svaki $t \in Z^+$. Takodje, na isti način dokazujemo da je

(9) $$a^2b \ \tau \ (a^2)^{s^t} = a^{2s^t}$$

za svaki $t \in Z^+$. Neka je $t \in Z^+$ broj takav da je $s^t \geq r$ i neka je $s_0 = s^t$. Tada prema (7),(8) i (9) dobijamo da je

$$ab \;\tau\; a^{s_0}b \;\tau\; a^m b \;\tau a^{2s_0}b \;\tau\; a^2 b\ .$$

Prema tome, dokazali smo da je $ab \;\tau a^2 b$, pa kao u II 3.5. dokazujemo da važi (4).

Neka je $i(u) = i(v)$. Ne umanjujući opštost dokaza, možemo uzeti da je

$$i(u) = i(v) = x_1 x_2 \dots x_n\ .$$

U daljem radu ćemo koristiti oznake iz IV 2.1.. Neka je

$$m_{k,i} = \min\{|x_i|_{u_k}, |x_i|_{v_k}\}\ ,\ 1 \leq k \leq n-1\ ,\ 1 \leq i \leq k\ .$$

Tada je

$$\max\{|x_i|_{u_k}, |x_i|_{v_k}\} = m_{k,i} + l_{k,i}\ ,\ 1 \leq k \leq n-1\ ,\ 1 \leq i \leq k\ .$$

Kako postoje $r \in Z^+$ i $c \in G_e$ takvi da je $e = ca^r$, to na isti način kao u dokazu za (3), dokazujemo da za svaki $m \in Z^+$ postoji $j_m \in I$ tako da je

(10) $$a^m eb \in T_{j_m \lambda}\ .$$

Neka su $k \in \{1, \dots n-1\}$ i $i \in \{1, \dots, k\}$ proizvoljni elementi i neka je $F : A_n^+ \to S$ homomorfizam odredjen sa

$$\begin{cases} F(x_i) = a & \\ F(x_j) = e & \text{za } 1 \leq j \leq k,\ j \neq i\ . \\ F(x_j) = eb & \text{za } k+1 \leq j \leq n \end{cases}$$

Tada iz $F(u) = F(v)$ i Munnove leme sledi da je

$$a^{|x_i|_{u_k}} ebc = a^{|x_i|_{v_k}} ebd$$

za neke $c, d \in S_\alpha$, pa na isti način kao u slučaju (6) dokazujemo da je

$$a^{|x_i|_{u_k}} eb \;\tau\; a^{|x_i|_{v_k}} eb\ ,$$

odnosno

(11) $$a^{m_{k,i}} eb \;\tau\; a^{l_{k,i}} a^{m_{k,i}} eb\ .$$

Dokažimo da za svaki $m \in Z^+$ važi

(12) $$a^t a^s eb \;\tau\; a^s eb \;\Rightarrow\; a^t a^m eb \;\tau\; a^m eb\ ,$$

gde su $s,t \in Z^+$. Zaista neka je $a^m eb \in T_{j\lambda}$ i $a^t a^s eb, a^s eb \in T_{l\lambda}$, za neke $j,l \in I$, i neka je $r \in Z^+$ broj takav da je $r > s$ i $a^r \in G_e$. Tada je $e = ca^r$ za neki $c \in G_e$, pa je

$$\begin{aligned} a^m ca^{r-s} e_{l\lambda} a^s eb &= a^m ca^{r-s} a^s ebe_{l\lambda} \\ &= a^m ca^r ebe_{l\lambda} = a^m ebe_{l\lambda} \\ &\tau\ a^m eb \in T_{j\lambda} \ , \end{aligned}$$

odakle dobijamo da je $a^m ca^{r-s} e_{l\lambda} \in T_{j\lambda}$, pa je

$$\begin{aligned} a^t a^m eb\ \tau a^t a^m ebe_{l\lambda} &= a^m ea^t ebe_{l\lambda} \\ &= a^m ca^{r-s} a^s a^t ebe_{l\lambda} \\ &= a^m ca^{r-s} e_{l\lambda} a^s a^t eb \\ &\in T_{j\lambda} T_{l\lambda} \subseteq T_{j\lambda} \ . \end{aligned}$$

Prema tome, važi (12). Na isti način dokazujemo da

(13) $$a^t a^s eb\ \tau\ a^s eb \ \Rightarrow\ a^t eb\ \tau\ eb \ ,$$

gde su $s,t \in Z^+$.

Kako je $h^{(2)}(u) \neq h^{(2)}(v)$, to imamo da je $h^{(2)}(u) \neq x_1^2$ ili $h^{(2)}(v) \neq x_1^2$. Ne umanjujući opštost dokaza, možemo uzeti da je $h^{(2)}(u) \neq x_1^2$, tj. da je $h^{(2)}(u) = x_1x_2$. Tada je jasno da je

$$u = x_1x_2u_0 \quad \text{i} \quad v = x_1^q x_2 v_0 \ ,$$

za neke $u_0, v_0 \in A_n^*$, $q \in Z^+$, $q \geq 2$. Neka je $H : A_n^+ \to S$ homomorfizam odredjen sa

$$\begin{cases} H(x_1) = a & \\ F(x_i) = b & \text{za } 2 \leq i \leq n \end{cases} .$$

Tada iz $H(u) = H(v)$ sledi da je

$$abc_0 = a^q bd_0$$

za neke $c_0, d_0 \in S_\alpha$, odakle dobijamo da je $ab\ \tau\ a^q b$. Kako na isti način možemo dokazati da je

$$a^{q^r} b\ \tau\ (a^{q^r})^q b = a^{q^{r+1}} b \ ,$$

za svaki $r \in Z^+$, to dobijamo da je $ab\ \tau\ a^{q^r} b$ za sve $r \in Z^+$. Neka je $r \in Z^+$ broj takav da $a^{q^r} \in G_e$ i neka je $q_o = q^r$. Tada imamo da je

(14) $$ab\ \tau\ a^{q_o} b \ .$$

Neka je p period identiteta (1). Neka je (1) periodični identitet, tj. neka je $p \geq 1$. Kako su brojevi

$$p,\ l_{k,i}\ ,\ k \in \{1,2,\ldots,n-1\}\ ,\ i \in \{1,\ldots,k\}\ ,$$

uzajamno prosti, to postoje celi brojevi

$$s_0,\ s_{k,i}\ ,\ k \in \{1,2,\ldots,n-1\}\ ,\ i \in \{1,\ldots,k\}\ ,$$

takvi da je

$$s_0 p + \Sigma_A s_{k,i} l_{k,i} = q_0\ ,$$

gde je $A = \{(k,i) |\ 1 \le k \le n-1,\ 1 \le i \le k\ \}$, odakle dobijamo da je

(15) $$\Sigma_A s_{k,i} l_{k,i} \equiv q_0 \pmod{p}\ .$$

Primetimo da relacija (15) ostaje u važnosti i ukoliko bilo koji od brojeva $s_{k,i}$ zamenimo bilo kojim brojem koji je sa njime kongruentan po modulu p. Prema tome, bez umanjenja opštosti dokaza, možemo uzeti da su brojevi $s_{k,i}$ pozitivni i da su dovoljno veliki da važi

(16) $$a^{\Sigma_A s_{k,i} l_{k,i}} \in G_e\ .$$

Kako je $a^{q_0} \in G_e$, to prema (15),(16) i IV 2.4. dobijamo da je

$$a^{\Sigma_A s_{k,i} l_{k,i}} = a^{q_0}\ .$$

Sa druge strane, prema (11),(12) i (13) dobijamo da je

$$eb\ \tau\ a^{\Sigma_A s_{k,i} l_{k,i}} eb = a^{q_0} eb = a^{q_0} b\ \tau\ ab\ .$$

Prema tome, važi (4).

Uzmimo da je (1) neperiodični identitet, tj. da je $p = 0$. Tada dobijamo da su brojevi

$$l_{k,i}\ ,\ k \in \{1,2,\ldots,n-1\}\ ,\ i \in \{1,\ldots,k\}\ ,$$

uzajamno prosti, pa postoje celi brojevi

$$s_{k,i}\ ,\ k \in \{1,2,\ldots,n-1\}\ ,\ i \in \{1,\ldots,k\}\ ,$$

takvi da je

$$\Sigma_A s_{k,i} l_{k,i} = q_0\ .$$

Neka je $(m,j) \in A$ proizvoljni par za koji je $l_{m,j} \ge 1$ i neka je $B = A - \{(m,j)\}$. Tada imamo da je

(17) $$\Sigma_B s_{k,i} l_{k,i} \equiv q_0 \pmod{l_{m,j}}\ .$$

Jasno je da relacija (17) ostaje u važnosti i ukoliko bilo koji od brojeva $s_{k,i}, (k,i) \in B$, zamenimo bilo kojim brojem koji je sa njime kongruentan po modulu $l_{m,j}$. Prema tome, bez umanjenja opštosti dokaza, možemo uzeti da su brojevi $s_{k,i}$, $(k,i) \in B$ pozitivni i da su dovoljno veliki da važi

$$\Sigma_B s_{k,i} l_{k,i}\ >\ q_0\ .$$

Tada prema (17) sledi da je

$$\Sigma_B s_{k,i} l_{k,i} = q_0 + s_0 l_{m,j} \ ,$$

za neki $s_0 \in Z^+ \cup \{0\}$. Sa druge strane, prema (11),(12) i (13) dobijamo da je

$$eb \ \tau a^{\Sigma_B s_{k,i} l_{k,i}} eb = a^{q_0} a^{s_0 l_{m,j}} eb \ .$$

Takodje, prema (11) i (13) dobijamo da je

$$a^{s_0 l_{m,j}} eb \ \tau \ eb \ .$$

Uzmimo da je $eb \in T_{l\lambda}$ za neki $l \in I$. Tada imamo da je

$$\begin{aligned} a^{q_0} e_{l\lambda} a^{s_0 l_{m,j}} eb &= a^{q_0} a^{s_0 l_{m,j}} ebe_{l\lambda} \\ &\tau \ a^{q_0} a^{s_0 l_{m,j}} eb \\ &\tau \ eb \in T_{l\lambda} \ , \end{aligned}$$

odakle sledi da je $a^{q_0} e_{l\lambda} \in T_{l\lambda}$. Prema tome, imamo da je

$$ab \ \tau \ a^{q_0} b = a^{q_0} eb \ \tau \ a^{q_0} ebe_{l\lambda} = a^{q_0} e_{l\lambda} eb \ \tau \ eb \ .$$

Dakle, dobili smo da važi (4).

Na isti način, koristeći činjenicu da je desna karakteristika identiteta (1) jednaka jedinici, dokazujemo da važi (5). Prema tome, τ je kongruencija, pa S jeste traka π-grupa. Dakle, važi (i). ∎

Sledećim rezultatom opisujemo identitete koji indukuju dekompoziciju unija grupa u traku grupa.

IV 2.9. TEOREMA. *Sledeći uslovi za identitet (1) su ekvivalentni:*

(i) (1) je $\mathcal{UG} \triangleright \mathcal{G} \circ \mathcal{B}$*-identitet;*

(ii) polugrupe $LZ(d)$ *i* $RZ(d)$*, za* $d \in Z^+$*,* $d \geq 2$*, ne zadovoljavaju (1);*

(iii) (1) je leve i desne karakteristike 1.

DOKAZ: $(i) \Rightarrow (ii)$. Sledi neposredno.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Sledi prema IV 2.6. i IV 2.7.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Neka važi (iii) i neka S jeste proizvoljna unija grupa koja zadovoljava (1). Tada S jeste polumreža potpuno prostih polugrupa K_α, $\alpha \in Y$. Neka su $a, b \in S$ proizvoljni elementi, neka je $a \in G_e$ i $b \in G_f$, za neke $e, f \in E(S)$, i neka je a^{-1} inverzni element elementa. Dokazaćemo da je

(18) $$ab \ \mathcal{H} \ eb$$

i

(19) $$eb \ \mathcal{H} \ ef \ .$$

Neka je $ab \in K_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$, i neka K_α jeste pravougaona traka $I \times \Lambda$ grupa $H_{i\lambda}$ sa jedinicama $e_{i\lambda}$, $i \in I, \lambda \in \Lambda$. Uzmimo da je $eb \in H_{i\lambda}$ za neke $i \in I, \lambda \in \Lambda$. Tada se lako dokazuje da za svaki $c \in G_e$ postoji $j \in I$ tako da je

(20)
$$cb \in H_{j\lambda} \,.$$

Neka je $h(u) \neq h(v)$. Tada $I \times \Lambda$ jeste desno nulta traka, pa je $I = \{i\}$, odakle sledi da važi (18).

Neka je $h(u) = h(v)$ i $i(u) \neq i(v)$. Ne umanjući opštost dokaza, možemo uzeti da je

$$i(u) = x_1 x_2 \dots x_n \quad \text{i} \quad i(v) = x_{\pi(1)} x_{\pi(2)} \dots x_{\pi(n)} \,,$$

za neku permutaciju π skupa $\{1, 2, \dots, n\}$. Neka je $k \in \{2, \dots, n\}$ najmanji broj za koji je $\pi(k) \neq k$. Tada je $\pi(k) > k$ i

$$u = u'(x_1, \dots, x_{k-1}) x_k u'' \quad \text{i} \quad v = v'(x_1, \dots, x_{k-1}) x_{\pi(k)} v'' \,.$$

Neka je $m = |u'|$, $r = |v'|$ i neka je $F : A_n^+ \to S$ homomorfizam odredjen sa

$$\begin{cases} F(x_i) = a & \text{za } 1 \leq i \leq k-1 \\ F(x_k) = (a^{-1})^m b & \\ F(x_i) = (a^{-1})^{r-1} b & \text{za } k+1 \leq i \leq n \end{cases} \,.$$

Tada iz $F(u) = F(v)$ sledi da je

$$ebc = a^m (a^{-1})^m bc = a^r (a^{-1})^{r-1} bd = abd$$

za neke $c, d \in K_\alpha$, odakle, koristeći (20), dobijamo da važi (18).

Neka je $i(u) = i(v)$. Ne umanjujući opštost dokaza, možemo uzeti da je

$$i(u) = i(v) = x_1 x_2 \dots x_n \,.$$

U daljem radu ćemo koristiti oznake iz IV 2.1.. Neka je

$$m_{k,i} = \min\{|x_i|_{u_k}, |x_i|_{v_k}\} \,, \ 1 \leq k \leq n-1 \,, \ 1 \leq i \leq k \,.$$

Tada je

$$\max\{|x_i|_{u_k}, |x_i|_{v_k}\} = m_{k,i} + l_{k,i} \,, \ 1 \leq k \leq n-1 \,, \ 1 \leq i \leq k \,.$$

Neka su $k \in \{1, \dots n-1\}$ i $i \in \{1, \dots, k\}$ proizvoljni elementi i neka je $H : A_n^+ \to S$ homomorfizam odredjen sa

$$\begin{cases} H(x_i) = a & \\ H(x_j) = e & \text{za } 1 \leq j \leq k, \ j \neq i \\ H(x_j) = (a^{-1})^{m_{k,i}} b & \text{za } k+1 \leq j \leq n \end{cases} \,.$$

Tada iz $H(u) = H(v)$ sledi da je

$$a^{l_{k,i}} a^{m_{k,i}} a^{-m_{k,i}} bc_0 = a^{m_{k,i}} a^{-m_{k,i}} bd_0$$

za neke $c_0, d_0 \in K_\alpha$, odakle, koristeći (20), dobijamo da je

$$a^{l_{k,i}} b \,\mathcal{H}\, eb \in H_{i\lambda} .$$

Kako je

$$a^{l_{k,i}} e_{i\lambda} eb = a^{l_{k,i}} b \in H_{i\lambda} ,$$

to dobijamo da je

(21) $$a^{l_{k,i}} e_{i\lambda} \in H_{i\lambda} .$$

Na isti način, razmatrajući element a^{-1} umesto elementa a, dobijamo da je

(22) $$a^{-l_{k,i}} e_{i\lambda} \in H_{i\lambda} .$$

Sada, prema (21) i (22) dobijamo da je

(23) $$a^{s_{k,i} l_{k,i}} e_{i\lambda} \in H_{i\lambda} ,$$

za svaki $s_{k,i} \in Z$. Kako su brojevi

$$p,\ l_{k,i}\ ,\ k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}\ ,\ i \in \{1, \ldots, k\}\ ,$$

uzajamno prosti, to postoje celi brojevi

$$s_0,\ s_{k,i}\ ,\ k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}\ ,\ i \in \{1, \ldots, k\}\ ,$$

takvi da je

$$s_0 p + \Sigma_A s_{k,i} l_{k,i} = 1\ ,$$

gde je $A = \{(k,i) |\ 1 \le k \le n-1,\ 1 \le i \le k\ \}$. Kako je $a^p = e$, to dobijamo da je

$$a = a^1 = a^{s_0 p} a \Sigma_A s_{k,i} l_{k,i} = a^{\Sigma_A s_{k,i} l_{k,i}}\ ,$$

pa prema (23) dobijamo da je

$$\begin{aligned} a e_{i\lambda} &= a^{\Sigma_A s_{k,i} l_{k,i}} \\ &= \left(\Pi_A (a^{s_{k,i} l_{k,i}})\right) e_{i\lambda} \\ &= \Pi_A (a^{s_{k,i} l_{k,i}} e_{i\lambda}) \\ &\in H_{i\lambda} . \end{aligned}$$

Prema tome, imamo da je

$$ab = aeb = ae_{i\lambda}eb \in H_{i\lambda}H_{i\lambda} \subseteq H_{i\lambda} \ .$$

Dakle, važi (18). Na isti način, koristeći da je desna karakteristika identiteta (1) jednaka jedinici, dokazujemo da važi (19). Dakle, prema (18) i (19) dobijamo da važi (i). ∎

IV 3. $\mathcal{UG} \circ \mathcal{N}$-IDENTITETI

Kao što je ranije već rečeno, razni tipovi $\mathcal{UG} \circ \mathcal{N}$-identiteta su izučavani u radovima E.J.Tullya,[103], gde je razmatran identitet $xy = y^m x^n$, $(m + n \geq 3)$, T.Tamure,[96], gde su razmatrani razni tipovi identiteta $xy = f(x, y)$, $(|f(x, y)| \geq 3)$ i postavljeni poznati Tamurini problemi, J.Gerharda,[40], u kome je razmatran identitet $xy = (xy)^n$, $(n \geq 2)$, Lee Sin-Mina,[82], S.Bogdanovića,[13], i G.Clarkea,[26], u kojima su rešavani razni slučajevi Tamurinih problema, M.Petricha,[57], u kome je razmatran sistem identiteta $xyz = xyxz = xzyz$, M.Ćirića i S.Bogdanovića,[34], u kome je razmatran sistem identiteta $x_1x_2 \dots x_{n+1} = (x_1x_2)(x_1x_3)\dots(x_1x_{n+1}) = (x_1x_{n+1})(x_2x_{n+1})\dots(x_nx_{n+1})$, $n \geq 2$, i S.Bogdanovića i B.Stamenkovića,[23], u kome su razmatrani neki identiteti oblika $x_1x_2 \dots x_{n+1} = F(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$. Posebno je interesantan napred već pomenuti rad G.Clarkea, u kome su opisani svi identiteti koji indukuju dekompoziciju u inflaciju unije grupa. Osim toga, značajni su i rezultati dati u radovima M.S.Putchae i J.Weissglassa, [72,74], koji se mogu primeniti u istraživanju raznih polugrupovnih identiteta.

Analizom rezultata iz napred pomenutih radova, može se primetiti da su razmatrani samo identiteti koji indukuju dekompozicije u nilpotentne ekstenzije unije grupa. Identiteti koji indukuju dekompozicije u nil-ekstenzije unije grupa koje nisu nilpotentne ekstenzije, do sada nisu posmatrane. Ovde će biti opisani i takvi identiteti. U ovom poglavlju će biti opisani svi identiteti koji indukuju dekompozicije u nil-ekstenziju unije grupa u opštem slučaju (Teorema IV 3.4.) i nekim specijalnim slučajevima.

U ovom poglavlju ćemo razmatrati istotipni identitet

(1) $$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = v(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

nad alfabetom A_n, $n \geq 2$.

Pre dokazivanja glavnog rezultata ovog poglavlja, dokazaćemo nekoliko pomoćnih tvrdjenja.

IV 3.1. LEMA. *Polugrupa* $C_{1,1}$ *zadovoljava identitet* (1) *ako i samo ako je*

(2) $$\Pi(u) = \Pi(v)\ .$$

DOKAZ: Neka polugrupa $C_{1,1}$ zadovoljava (1). Uzmimo da ne važi (2), tj. da je $\Pi(u) \neq \Pi(v)$. Tada imamo da postoji $x_k \in \Pi(u) - \Pi(v) \cup \Pi(v) - \Pi(u)$. Ne umanjujući opštost dokaza, možemo uzeti da je $x_k \in \Pi(u) - \Pi(v)$, tj. da je

$$|x_k|_u = 1 \quad \text{i} \quad |x_k|_v \geq 2\ .$$

Neka je $F : A_n^+ \to C_{1,1}$ homomorfizam odredjen sa

$$F(x_k) = a \quad \text{i} \quad F(x) = e \ \text{ za } \ x \in A_n - \{x_k\}\ .$$

Tada dobijamo da je

$$F(u) = a \neq 0 = F(v)\ ,$$

pa dobijamo da $C_{1,1}$ ne zadovoljava (1), što je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom. Prema tome, važi (2).

Obrnuto, neka važi (2). Uzmimo da je $\Pi(u) = \Pi(v) = \emptyset$. Tada dobijamo da reči u i v imaju u $C_{1,1}$ raspodelu

$$\begin{cases} e & \text{za valuaciju } (e, e, \ldots, e) \\ 0 & \text{inače}\ , \end{cases}$$

odakle dobijamo da $C_{1,1}$ zadovoljava (1). Neka je $\Pi(u) = \Pi(v) \neq \emptyset$ i neka je $F : A_n^+ \to C_{1,1}$ proizvoljni homomorfizam. Tada dobijamo da je

$$F(u) = \begin{cases} a & \text{ako je } |\{x \mid x \in \Pi(u) \wedge F(x) = a\}| = 1 \\ e & \text{ako je } F(x_1) = \cdots = F(x_n) = e \\ o & \text{inače} \end{cases} = F(v)\ .$$

Prema tome, $C_{1,1}$ zadovoljava (1). ∎

IV 3.2. NAPOMENA. *Prema dokazu Leme IV 3.1. lako dobijamo da je* $\Pi(u) \neq \Pi(v)$ *ako i samo ako postoji* $x_k \in c(u) (= c(v))$ *tako da je*

(3) $$(|x_k|_u = 1 \ \ i \ \ |x_k|_v \geq 2) \ \ ili \ \ (|x_k|_v = 1 \ \ i \ \ |x_k|_u \geq 2)\ .$$

IV 3.3. LEMA. *Neka je* $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_n^+$ *reč takva da je* $h(u) = x_1$. *Tada* u *nema u* $C_{1,2}$ *raspodelu*

(4) $$\begin{cases} e & \text{za valuaciju } (e, e, \ldots, e) \\ 0 & \text{inače}\ , \end{cases}$$

ako i samo ako je u *oblika*

$$u = x_1 u'(x_2, \ldots, x_n)\ .$$

U tom slučaju u *ima u* $C_{1,2}$ *raspodelu*

$$(5) \qquad \begin{cases} a & \textit{za valuaciju } (a, e, \ldots, e) \\ e & \textit{za valuaciju } (e, e, \ldots, e) \\ 0 & \textit{inače}\ . \end{cases}$$

DOKAZ: Neka reč u nema u $C_{1,2}$ raspodelu (4). Neka je $u = x_1 w$ za neku reč $w \in A_n^+$. Uzmimo da $x_1 \mid w$. Neka je $F : A_n^+ \to C_{1,2}$ proizvoljni homomorfizam. Ako postoji $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tako da je $F(x_i) = 0$, tada je jasno da je $F(u) = 0$. Uzmimo da je $F(x_i) \neq 0$ za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ako je $F(x_i) = e$ za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tada je jasno da je $F(u) = e$. Uzmimo da postoji $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tako da je $F(x_i) = a$. Ako je $F(x_1) = e$, tada dobijamo da je $F(u) = 0$, jer $a \mid F(w)$. Na kraju, neka je $F(x_1) = a$. Kako imamo da $x_1 \mid w$, to dobijamo da $0 = a^2 \mid F(u)$, pa je, prema tome, $F(u) = 0$. Dakle, dobili smo da reč u ima u $C_{1,2}$ raspodelu (4), što nije moguće. Prema tome, imamo da $x_1 \nmid w$, pa je

$$u = x_1 u'(x_2, \ldots, x_n)\ .$$

Obrnuto, ako je $u = x_1 u'(x_2, \ldots, x_n)$, tada prema prethodno dokazanom lako dobijamo da u ima u $C_{1,2}$ raspodelu (5). ∎

Sledeća teorema je glavni rezultat ovog poglavlja i opisuje identitete koji indukuju dekompozicije u nil-ekstenzije unije grupa.

IV 3.4. TEOREMA. *Sledeći uslovi za identitet (1) su ekvivalentni:*

(i) *(1) je* $\mathcal{UG}$ o $\mathcal{N}$*-identitet;*

(ii) *polugrupe* $C_{1,1}$, $C_{1,2}$ *i* $C_{2,1}$ *ne zadovoljavaju (1);*

(iii) $\Pi(u) \neq \Pi(v)$ *i identitet (1) je p-ekvivalentan nekom identitetu jednog od sledećih oblika:*

$$x_1 u'(x_2, \ldots, x_n) = v'(x_1, \ldots, x_{n-1}) x_n \ , \tag{A1}$$

pri čemu reč $u'(x_2, \ldots, x_n)$ *nije oblika* $u''(x_2, \ldots, x_{n-1})x_n$ *i reč* $v'(x_1, \ldots, x_{n-1})$ *nije oblika* $x_1 v''(x_2, \ldots, x_{n-1})$*;*

$$x_1 u'(x_2, \ldots, x_{n-1}) x_n = v'(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ , \tag{A2}$$

pri čemu reč $v'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *nije oblika* $x_1 v''(x_2, \ldots, x_n)$ *niti oblika* $v'''(x_1, \ldots, x_{n-1})x_n$.

$$x_1 u'(x_2, \ldots, x_n) = v'(x_2, \ldots, x_n) x_1 \ . \tag{A3}$$

DOKAZ: $(i) \Rightarrow (ii)$. Sledi neposredno.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka važi (ii). Tada prema IV 3.1. dobijamo da je $\Pi(u) \neq \Pi(v)$. Kako $C_{1,2} \not\models u = v$, to dobijamo da jedna od reči u i v nema u $C_{1,2}$ raspodelu (4). Ne umanjujući opštost dokaza, možemo uzeti da to važi za reč u. Osim toga, ne umanjujući opštost dokaza, možemo uzeti da je $h(u) = x_1$. Tada prema IV 3.3. dobijamo da je

$$u = x_1 u'(x_2, \ldots, x_n). \ .$$

Sa druge strane, kako $C_{2,1} \not\models u = v$, to dobijamo da jedna od reči u i v nema u $C_{2,1}$ raspodelu

$$\begin{cases} e & \text{za valuaciju } (e, e, \ldots, e) \\ 0 & \text{inače} \ . \end{cases} \tag{6}$$

Uzmimo da reč u nema u $C_{2,1}$ raspodelu (6). Ne umanjujući opštost dokaza, možemo uzeti da je $t(u) = x_n$. Tada prema dualu Leme IV 3.3. dobijamo da je

$$u = x_1 u''(x_2, \ldots, x_{n-1}) x_n \ .$$

Ako je reč v oblika

$$v = x_1 v''(x_2, \ldots, x_n) \ ,$$

tada dobijamo da reči u i v imaju u $C_{1,2}$ raspodelu (5), odakle dobijamo da je $C_{1,2} \models u = v$, što nije moguće. Prema tome, v nije oblika $x_1 v''(x_2, \ldots, x_n)$. Na isti način, koristeći dual Leme IV 3.3., dokazujemo da v nije oblika $v'''(x_1, \ldots, x_{n-1})x_n$. Dakle, važi $(A2)$.

Uzmimo da reč v nema u $C_{2,1}$ raspodelu (6). Uzmimo da je $t(v) = x_1$. Tada prema dualu Leme IV 3.3. dobijamo da je v oblika

$$v = v'(x_2, \dots, x_n)x_1 \ ,$$

odakle dobijamo $(A3)$. Neka je $t(v) \neq x_1$. Ne umanjujući opštost dokaza, možemo uzeti da je $t(v) = x_n$. Tada prema dualu Leme IV 3.3. dobijamo da je v oblika

$$v = v'(x_1, \dots, x_{n-1})x_n \ .$$

Takodje, imamo da reč $v'(x_1, \dots, x_{n-1})$ nije oblika $x_1 v''(x_2, \dots, x_{n_1})$, jer u suprotnom dobijamo da reči u i v imaju u $C_{1,2}$ raspodelu (5), što nije moguće. Na isti način, koristeći dual Leme IV 3.3., dobijamo da reč $u'(x_2, \dots, x_n)$ nije oblika $u''(x_2, \dots, x_{n-1})x_n$. Prema tome, važi $(A1)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Neka važi (iii) i neka je S polugrupa takva da $S \models u = v$. Tada prema (3) i prema Propoziciji IV 1.9. dobijamo da S jeste periodična. Neka su $a \in S$ i $e \in E(S)$ proizvoljni elementi. Neka je $x_i \in A_n$ slovo za koje važi (3). Neka su $H, G : A_n^+ \to S$ homomorfizmi odredjeni sa

$$H(x_i) = ea \quad \text{i} \quad H(x_j) = e \quad \text{za} \quad j \neq i,$$

$$G(x_i) = ae \quad \text{i} \quad G(x_j) = e \quad \text{za} \quad j \neq i.$$

Tada je $H(u) = H(v)$ i $G(u) = G(v)$, odakle dobijamo da je

$$(7) \qquad \begin{cases} eae^l = (ea)^k e^m \\ e^p ae = e^q (ae)^k \end{cases} \qquad \text{za neke} \quad l, m, p, q \in Z^+ \cup \{0\},$$

gde je $k = \max\{|x_i|_u, |x_i|_v\}$.

Uzmimo da je identitet (1) p-ekvivalentan nekom identitetu oblika $(A1)$. Ne umanjujući opštost dokaza možemo uzeti da je identitet (1) upravo oblika $(A1)$. Neka su $F, T : A_n^+ \to S$ homomorfizmi odredjeni sa

$$F(x_1) = ae \quad , \quad F(x_j) = e \quad \text{za} \quad j \neq 1,$$

$$T(x_n) = ea \quad , \quad T(x_j) = e \quad \text{za} \quad j \neq n.$$

Tada je $F(u) = F(v)$ i $T(u) = T(v)$, pa imamo da je

$$(8) \qquad \begin{cases} ae = e^s (ae)^{|x_1|_{v'}} \\ ea = (ea)^{|x_n|_{u'}} e^t \end{cases} \qquad \text{za neke} \quad s, t \in Z^+ \cup \{0\}.$$

Ako je $s = 0$, tada dobijamo da reč $v'(x_1, \dots, x_{n-1})x_n$ počinje sa x_1, pa prema $(A1)$ dobijamo da je $|x_1|_{v'} \geq 2$, odakle sledi da je

$$ae = (ae)^{|x_1|_{v'}} \in Gr(S) \ .$$

Uzmimo da je $s \geq 1$. Tada, prema (8), dobijamo da je $ae = eae$, pa prema (7) sledi da je

$$ae = (ae)^k \in Gr(S) \ .$$

Na isti način pokazujemo da je

$$ea \in Gr(S) \ .$$

Prema tome, imamo da je

$$S \cdot E(S) \cup E(S) \cdot S \subseteq Gr(S) \ . \tag{9}$$

Neka je identitet (1) p-ekvivalentan nekom identitetu oblika $(A2)$. Ne umanjujući opštost dokaza možemo uzeti da je (1) upravo oblika $(A2)$. Tada, na isti način kao u prethodnom slučaju, dobijamo da je

$$\begin{cases} ae = e^s(ae)^{|x_1|_{v'}} \\ ea = (ea)^{|x_n|_{v'}} e^t \end{cases} \quad \text{za neke} \quad s,t \in Z^+ \cup \{0\}. \tag{10}$$

Ako je $s = 0$, tada prema $(A2)$ dobijamo da je $|x_1|_{v'} \geq 2$, pa je

$$ae = (ae)^{|x_1|_{v'}} \in Gr(S) \ .$$

Neka je $s \geq 1$. Tada, prema (10), dobijamo da je $ae = eae$, pa prema (7) sledi da je

$$ae = (ae)^k \in Gr(S) \ .$$

Na isti način pokazujemo da je

$$ea \in Gr(S) \ .$$

Prema tome, imamo da važi (9).

Na kraju, neka je identitet (1) ekvivalentan nekom identitetu oblika $(A3)$. Ne umanjujući opštost dokaza možemo uzeti da je (1) oblika $(A3)$. Neka su $F, T : A_n^+ \to S$ homomorfizmi odredjeni sa

$$F(x_1) = ae \quad , \quad F(x_j) = e \quad \text{za} \quad j \neq 1 \ ,$$
$$T(x_1) = ea \quad , \quad T(x_j) = e \quad \text{za} \quad j \neq 1 \ .$$

Tada je $F(u) = F(v)$ i $T(u) = T(v)$, pa imamo da je

$$ae = eae = ea \ ,$$

pa prema (7) dobijamo da je

$$ae = ea = (ae)^k = (ea)^k \in Gr(S) \ ,$$

odakle sledi da važi (9).

Prema tome, u svim slučajevima dobijamo da važi (9), odakle sledi da je

$$S \cdot Gr(S) \cup Gr(S) \cdot S \subseteq Gr(S) \ . \tag{11}$$

Dakle, $Gr(S)$ je ideal polugrupe S, pa S jeste nil-ekstenzija unije grupa, tj. (1) jeste $\mathcal{UG} \circ \mathcal{N}$-identitet. ∎

Naredna teorema opisuje identitete koji indukuju dekompozicije u nil-ekstenzije polumreže levih grupa.

IV 3.5. TEOREMA. *Sledeći uslovi za identitet (1) su ekvivalentni:*
(i) (1) je $(\mathcal{LG} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{N}$*-identitet;*
(ii) polugrupe $C_{1,1}$, $C_{1,2}$, $C_{2,1}$ *i* R_2 *ne zadovoljavaju (1);*
(iii) (1) jeste $\mathcal{UG} \circ \mathcal{N}$*-identitet i važi*

$$t(u) \neq t(v)\ . \tag{12}$$

DOKAZ: $(i) \Rightarrow (ii)$. Sledi naposredno.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka važi (ii). Tada prema IV 3.4. dobijamo da (1) jeste $\mathcal{UG} \circ \mathcal{N}$-identitet. Takodje je jasno da važi (12) jer u suprotnom imamo da polugrupa R_2 zadovoljava (1), što nije moguće. Prema tome, važi (iii).

$(iii) \Rightarrow (i)$. Neka važi (iii) i neka S jeste polugrupa takva da $S \models u = v$. Tada imamo da S jeste nil-ekstenzija unije grupa K. Kako $K \models u = v$, to prema IV 1.5. imamo da K jeste polumreža levih grupa. Prema tome, (1) jeste $(\mathcal{LG} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{N}$-identitet. ∎

Koristeći prethodnu teoremu i tvrdjenje dualno njoj, dobijamo sledeću posledicu:

IV 3.6. POSLEDICA. *Sledeći uslovi za identitet (1) su ekvivalentni:*
(i) (1) je $(\mathcal{G} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{N}$*-identitet;*
(ii) (1) je $(\mathcal{G} \circ \mathcal{S}) * \mathcal{N}$*-identitet;*
(iii) polugrupe $C_{1,1}$, $C_{1,2}$, $C_{2,1}$, L_2 *i* R_2 *ne zadovoljavaju (1);*
(iv) (1) je $\mathcal{UG} \circ \mathcal{N}$*-identitet i važe sledeći uslovi:*

$$t(u) \neq t(v) \quad i \quad h(u) \neq h(v)\ .$$

DOKAZ: Sledi prema Teoremi IV 3.5., njoj dualnoj teoremi i prema III 1.5. ∎

Interesantna klasa identiteta su identiteti koji indukuju dekompoziciju u nil-ekstenziju trake grupa. Takvi identiteti će biti opisani u sledećoj teoremi. Njen dokaz sledi neposredno iz IV 3.4. i IV 2.9.

IV 3.7. TEOREMA. *Sledeći uslovi za identitet (1) su ekvivalentni:*
(i) (1) je $(\mathcal{G} \circ \mathcal{B}) \circ \mathcal{N}$*-identitet;*
(ii) polugrupe $C_{1,1}$, $C_{1,2}$, $C_{2,1}$, $LZ(d)$ *i* $RZ(d)$ *za* $d \in Z^+$, $d \geq 2$, *ne zadovoljavaju (1);*
(iii) (1) jeste $\mathcal{UG} \circ \mathcal{N}$*-identitet leve i desne karakteristike 1.*

DOKAZ: $(i) \Rightarrow (ii)$. Sledi neposredno.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ i $(iii) \Rightarrow (i)$. Sledi prema IV 3.4. i IV 2.9. ∎

IV 4. $\mathcal{UG} * \mathcal{N}$-IDENTITETI

U uvodu prethodnog poglavlja je data primedba da su u svim dosadašnjim istraživanjima $\mathcal{UG} \circ \mathcal{N}$-identiteta razmatrani samo $\mathcal{UG} \circ \mathcal{N}_k$-identiteti. Druga stvar koju pri analizi pomenutih radova možemo primetiti je da su skoro sva ta istraživanja usmerena ka raznim tipovima inflacija unija grupa, tj. ka $\mathcal{UG} * \mathcal{N}$-identitetima. Razlog tome je značaj koje retrakcije, kao homomorfizmi, imaju u pogledu kompozicija polugrupa. Naime, one predstavljaju veoma dobro sredstvo kojim, prilikom konstrukcija idealskih ekstenzija, osim lakšeg definisanja operacija, prenosimo i razne osobine polugrupa, naročito osobine zadovoljenja identiteta.

U ovom poglavlju će biti opisani svi identiteti koji indukuju retraktivne nil-ekstenzije unije grupa, sa raznim specijalnim slučajevima, kao i identiteti koji indukuju n-nilpotentne ekstenzije unije grupa.

U narednim razmatranjima ćemo posmatrati istotipni identitet

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = v(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{1}$$

nad alfabetom A_n, $n \geq 2$.

Sledeća teorema je jedan od dvaju glavnih rezultata ovog poglavlja. U njoj opisujemo identitete koji indukuju dekompozicije u retraktivne nil-ekstenzije unije grupa. Zanimljivo je uporediti rezultate iz IV 4.1. sa rezultatima iz IV 1.8.

IV 4.1. TEOREMA. *Sledeći uslovi za identitet (1) su ekvivalentni:*
(i) (1) je $\mathcal{UG} * \mathcal{N}$-identitet;
(ii) polugrupe $C_{1,1}$, $C_{1,2}$, $C_{2,1}$, $L_{3,1}$ i $R_{3,1}$ ne zadovoljavaju (1);
(iii) (1) je $\mathcal{UG} \circ \mathcal{N}$-identitet i važi:

$$h^{(2)}(u) \neq h^{(2)}(v) \quad i \quad t^{(2)}(u) \neq t^{(2)}(v)\,. \tag{2}$$

DOKAZ: $(i) \Rightarrow (ii)$. Sledi neposredno.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka važi (ii). Tada prema IV 3.4. sledi da (1) jeste $\mathcal{UG} \circ \mathcal{N}$-identitet. Takodje, prema IV 1.7. i njenom dualu dobijamo da važi (12), jer u suprotnom dobijamo da jedna od polugrupa $L_{3,1}$ i $R_{3,1}$ zadovoljava (1).

$(iii) \Rightarrow (i)$. Neka važi (iii) i neka S jeste polugrupa koja zadovoljava (1). Jasno je da S jeste nil-ekstenzija unije grupa K. Takodje, prema Teoremi II 2.3. sledi da S jeste polumreža Y polugrupa $S_\alpha, \alpha \in Y$ i za svaki $\alpha \in Y$ S_α jeste nil-ekstenzija potpuno proste polugrupe K_α. Neka su $a \in S$ i $f \in E(S)$ proizvoljni elementi i neka je $a^m \in G_e$ za neke $m \in Z^+$ i $e \in E(S)$.

Prema Teoremi IV 3.4. imamo da je (1) p-ekvivalentan nekom identitetu oblika $(A1), (A2)$ ili $(A3)$. Ne umanjujući opštost dokaza možemo uzeti da je (1) oblika $(A1), (A2)$ ili $(A3)$. Ako je (1) oblika $(A3)$, tada prema Posledici IV 3.6. dobijamo da je S u klasi $\mathcal{UG} * \mathcal{N}$. Uzmimo da je (1) oblika $(A1)$ ili $(A2)$. Tada imamo da je

$$|x_1|_u = 1 \quad \text{i} \quad h^{(2)}(u) = x_1 x_k \quad \text{za neki } k \in \{2, 3, \ldots, n\} .$$

Uzmimo da je $h(v) \neq x_1$. Neka je $F : A_n^+ \to S$ homomorfizam odredjen sa

$$F(x_1) = af \quad , \quad F(x_i) = f \quad \text{za } i \in \{2, 3, \ldots, n\} .$$

Kako je $F(u) = F(v)$, to imamo da je

$$af = f(af)^r ,$$

gde je $r = |x_1|_v$, odakle dobijamo da je $af = faf$ pa se lako dobija da je

$$a^m f = (af)^m .$$

Kako je $af \in K$ i K jeste unija periodičnih grupa, to je $af\mathcal{H}(af)^m$, gde je $\mathcal{H}$ Greenova $\mathcal{H}$-relacija na K. Prema tome, postoji $c \in K$ tako da je $af = (af)^m c = a^m fc$, odakle dobijamo da je

$$af = eaf . \tag{3}$$

Neka je $h(v) = x_1$. Tada prema (2) dobijamo da je

$$h^{(2)}(v) = x_1^2 \quad \text{ili} \quad h^{(2)}(v) = x_1 x_j ,$$

za $j \in \{2, 3, \ldots, n\}, j \neq k$. Uzmimo, najpre, da je $h^{(2)}(v) = x_1^2$. Neka je $F : A_n^+ \to S$ homomorfizam odredjen sa

$$F(x_1) = a \quad , \quad F(x_i) = f \quad \text{za } i \in \{2, 3, \ldots, n\} .$$

Kako je $F(u) = F(v)$, to dobijamo da je

$$af = a^r fs \quad \text{za neke } r \in Z^+, r \geq 2 \text{ i } s \in S .$$

Sada se lako dobija da je

$$af = a^{m(r-1)} afs^m ,$$

odakle dobijamo (3). Neka je $h^{(2)}(v) = x_1 x_j$, za $j \in \{2, 3, \ldots, n\}, j \neq k$. Neka je $a \in S_\alpha, f \in S_\beta$ za neke $\alpha, \beta \in Y$. Tada $af \in K_{\alpha\beta}$ i $K_{\alpha\beta}$ jeste pravougaona traka

$I \times \Lambda$ grupa $H_{i\lambda}, i \in I, \lambda \in \Lambda$. Neka je $af \in H_{i\lambda}$ za neke $i \in I, \lambda \in \Lambda$ i neka $e_{i\lambda}$ jeste jedinica u $H_{i\lambda}$. Neka je $ae_{i\lambda} \in H_{j\mu}$ za neke $j \in I, \mu \in \Lambda$. Tada je

$$ae_{i\lambda} = (ae_{i\lambda})e_{i\lambda} \in H_{j\mu}H_{i\lambda} \subseteq H_{j\lambda} ,$$

odakle sledi da je $\mu = \lambda$, tj. $ae_{i\lambda} \in H_{j\lambda}$. Sa druge strane, ako je $F : A_n^+ \to S$ homomorfizam odredjen sa

$$F(x_1) = a \quad , \quad F(x_k) = f \quad \text{i} \quad F(x_l) = e_{i\lambda} \quad \text{za } l \in \{2, 3, \ldots, n\}, l \neq k,$$

tada iz $F(u) = F(v)$ dobijamo da je

(4) $$afs_1 = ae_{i\lambda}s_2 \quad \text{za neke } s_1, s_2 \in K_{\alpha\beta} .$$

Kako je

$$afs_1 \in H_{i\lambda}K_{\alpha\beta} \subseteq H_{i\eta} ,$$

za neki $\eta \in \Lambda$ i

$$ae_{i\lambda}s_2 \in H_{j\lambda}K_{\alpha\beta} \subseteq H_{j\nu} ,$$

za neki $\nu \in \Lambda$, to prema (4) dobijamo da je $i = j$. Dakle,

$$ae_{i\lambda} \in H_{i\lambda} ,$$

odakle sledi da je $ae_{i\lambda} = e_{i\lambda}ae_{i\lambda}$ pa je

$$a^m e_{i\lambda} = (ae_{i\lambda})^m .$$

Kako je $af\mathcal{H}ae_{i\lambda}\mathcal{H}(ae_{i\lambda})^m$ to postoji $s \in H_{i\lambda}$ tako da je

$$af = (ae_{i\lambda})^m s = a^m e_{i\lambda} s ,$$

odakle dobijamo (3). Prema tome, u svim slučajevima važi (3). Na dualan način, koristeći činjenicu da je

$$t^{(2)}(u) \neq t^{(2)}(v) ,$$

dobijamo da je

(5) $$fa = fae .$$

Definišimo preslikavanje $\varphi : S \to T$ sa

$$\varphi(a) = ea \quad \text{ako} \quad a^m \in G_e \quad \text{za neke } m \in Z^+, e \in E(S) .$$

Neka su $a, b \in S$ proizvoljni elementi i neka $a^m \in G_e, b^k \in G_f$ i $(ab)^l \in G_g$ za neke $m, k, l \in Z^+$ i $e, f, g \in E(S)$. Tada je

$$\begin{aligned}
\varphi(a)\varphi(b) &= eafb \\
&= afb && (\text{ prema } (3)) \\
&= abf && (\text{ prema Munnovoj lemi}) \\
&= gabf && (\text{ prema } (3)) \\
&= gaebf && (\text{ prema } (5)) \\
&= gaeb && (\text{ prema } (5)) \\
&= gab && (\text{ prema } (5)) \\
&= \varphi(ab).
\end{aligned}$$

Dakle, φ je retrakcija, pa (1) jeste $\mathcal{UG} * \mathcal{N}$-identitet. ∎

Sledećom teoremom opisujemo identitete koji indukuju dekompozicije u retraktivne nil-ekstenzije polumreže levih grupa.

IV 4.2. TEOREMA. *Sledeći uslovi za identitet (1) su ekvivalentni:*
(i) (1) je $(\mathcal{LG} \circ \mathcal{S}) * \mathcal{N}$-identitet;
(ii) polugrupe $C_{1,1}$, $C_{1,2}$, $C_{2,1}$, $L_{3,1}$ i R_2 ne zadovoljavaju (1);
(iii) (1) je $\mathcal{UG} \circ \mathcal{N}$-identitet i važi:

$$h^{(2)}(u) \neq h^{(2)}(v) \quad i \quad t(u) \neq t(v) \ . \tag{6}$$

DOKAZ: $(i) \Rightarrow (ii)$. Sledi neposredno.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Sledi prema IV 3.5. i IV 1.7.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Neka važi (iii) i neka S jeste proizvoljna polugrupa koja zadovoljava identitet (1). Tada S jeste nil-ekstenzija unije grupa K i prema IV 1.5. sledi da K jeste polumreža levih grupa. Neka su $a \in S$ i $f \in E(S)$ proizvoljni elementi i neka je $a^m \in G_e$ za neke $m \in Z^+$ i $e \in E(S)$. Tada na isti način kao u dokazu za IV 4.1. dobijamo da je

$$af = eaf \ .$$

Sa druge strane, ne umanjujući opštost dokaza, možemo uzeti da je (1) oblika $(A1), (A2)$ ili $(A3)$. Ako je (1) oblika $(A3)$, tada prema IV 3.6. sledi da važi (i). Uzmimo da je (1) oblika $(A1)$ ili $(A2)$. Neka je $F : A_n^+ \to S$ homomorfizam odredjen sa

$$F(x_n) = fa \quad , \quad F(x_i) = f \quad \text{za } x_i \in A_n - \{x_n\} \ .$$

Tada iz $F(u) = F(v)$ i (6) sledi da je

$$fa = (fa)^r f \ ,$$

gde je $r = |x_n|_v$, ako je (1) oblika $(A1)$, odnosno $r = |x_n|_u$, ako je (1) oblika $(A2)$. Prema tome, lako dobijamo da je $fa = faf$, odakle sledi da je

$$fa^m = (fa)^m .$$

Kako je $fa \in K$ i K jeste unija periodičnih grupa, to je $fa\mathcal{H}(fa)^m$, gde je $\mathcal{H}$ Greenova $\mathcal{H}$-relacija na K. Prema tome, postoji $c \in K$ tako da je $fa = c(fa)^m = a^m fc$, odakle dobijamo da je

$$fa = fae .$$

Sada na potpuno isti način kao u dokazu za IV 4.1. dobijamo da preslikavanje $\varphi : S \to T$ definisano sa

$$\varphi(a) = ea \quad \text{ako} \quad a^m \in G_e \quad \text{za neke } m \in Z^+, e \in E(S)$$

jeste retrakcija. Prema tome, važi (i). ∎

Sledeće interesantno tvrdjenje je dokazano u radu M.V.Sapira i E.V.Suhanova,[80], i ovde će nam poslužiti kao pomoćno tvrdjenje.

IV 4.3. LEMA [80]. *Za svaku nil-polugrupu Q koja zadovoljava identitet*

$$x_1 x_2 \dots x_n = w ,$$

gde je $|w| \geq n+1$, je $S^n = \{0\}$.

Sledeće tvrdjenje je drugi veoma važan rezultat iz ovog poglavlja i opisuje identitete koji indukuju dekompozicije u k-nilpotentne ekstenzije unije grupa.

IV 4.4. TEOREMA. *Neka je $k \in Z^+$. Tada su sledeći uslovi za identitet (1) ekvivalentni:*

(i) (1) je $\mathcal{UG} \circ \mathcal{N}_k$-identitet;
(ii) polugrupe $C_{1,1}$, $C_{1,2}$, $C_{2,1}$, D_N i N_{k+1} ne zadovoljavaju (1);
(iii) $n \leq k+1$ i (1) je oblika

$$x_1 x_2 \dots x_n = w , \tag{7}$$

gde je w reč dužine $|w| \geq n+1$ koja nije oblika $x_1 w'(x_2, \dots, x_n)$ niti oblika $w''(x_1, \dots, x_{n-1}) x_n$.

DOKAZ: $(i) \Rightarrow (ii)$. Sledi neposredno.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka važi (ii). Tada prema IV 3.4. dobijamo da (1) jeste $\mathcal{UG} \circ \mathcal{N}$-identitet. Ako je

$$\Pi(u) \neq c(u) \quad \text{i} \quad \Pi(v) \neq c(v) ,$$

tada je jasno da je

$$F(u) = 0 = F(v)$$

za svaki homomorfizam $F : A_n^+ \to D_N$, odakle sledi da D_N zadovoljava (1), što je u suprotnosti sa (ii). Prema tome, imamo da je

$$\Pi(u) = c(u) \quad \text{ili} \quad \Pi(v) = c(v) .$$

Ne umanjući opštost dokaza, možemo uzeti da je $\Pi(u) = c(u)$. Takodje, ne umanjujući opštost dokaza, možemo uzeti da je

$$u = x_1 x_2 \dots x_n .$$

Prema tome, identitet (1) je p-ekvivalentan identitetu oblika

$$x_1 x_2 \dots x_n = w ,$$

pa prema dokazu za IV 3.4. dobijamo da je $|w| \geq n+1$ (tj. postoji $x_i \in A_n$ tako da je $|x_i|_w \geq 2$) i da w nije oblika $x_1 w'(x_2, \dots, x_n)$ niti oblika $w''(x_1, \dots, x_{n-1})x_n$.

Ako je $n \geq k+2$, tada za proizvoljni homomorfizam $F : A_n^+ \to N_{k+1}$ važi

$$\begin{cases} F(u) = F(x_1)F(x_2)\cdots F(x_n) \in (N_{k+1})^n = \{0\} , \\ F(w) \in (N_{k+1})^{|w|} = \{0\} , \end{cases}$$

jer je $|w| \geq k+2$, odakle dobijamo da N_{k+1} zadovoljava (1), što je u suprotnosti sa (ii). Prema tome, mora biti $n \leq k+1$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Neka važi (iii). Ne umanjujući opštost dokaza, možemo uzeti da je (1) oblika (7). Neka S jeste proizvoljna polugrupa koja zadovoljava (1). Tada prema IV 3.4. dobijamo da S jeste nil-ekstenzija unije grupa K. Neka je $Q = S_{/K}$. Tada je jasno da Q zadovoljava (1), pa prema IV 4.3. sledi da je $Q^n = \{0\}$, pa $Q \in \mathcal{N}_k$. Prema tome, važi (i). ∎

IV 5. IDENTITETI NAD ALFABETOM A_2

U ovom poglavlju se daje opis $\mathcal{A} \circ \mathcal{S}$-identiteta nad alfabetom A_2, vizuelno jednostavniji od onog u IV 1.2.. Kao posebno interesantan, spomenućemo rezultat dat Teoremom IV 5.2., koji opisuje sve $\mathcal{LA} \circ \mathcal{S}$-identitete nad alfabetom A_2. Kao što je napred već rečeno, problem opisivanja $\mathcal{LA} \circ \mathcal{S}$-identiteta nad alfabetom A_n, $n \geq 3$, u opštem slučaju nije rešen.

U narednim razmatranjima ćemo posmatrati istotipni identitet

$$u(x,y) = v(x,y) \tag{1}$$

nad alfabetom A_2.

Sledeća teorema daje vizuelano jasniji opis dvoslovnih identiteta koji indukuju dekompozicije u polumrežu Arhimedovih polugrupa, od onog iz IV 1.2.

IV 5.1. TEOREMA. *Identitet (1) je $\mathcal{A}\circ\mathcal{S}$-identitet ako i samo je p-ekvivalentan identitetu jednog od sledećih oblika:*

(A1) $xy = w$,

gde je w *reč različita od* xy*;*

(A2) $(xy)^k = w$,

gde je $k \in Z^+, k \geq 2$ *i reč* w *nije oblika* $(xy)^m, m \in Z^+$*;*

(A3) $(xy)^k x = w$,

gde je $k \in Z^+$ *i reč* w *nije oblika* $(xy)^m x, m \in Z^+$*;*

(A4) $xy^k = w$,

gde je $k \in Z^+, k \geq 2$ *i reč* w *nije oblika* $xy^m, m \in Z^+$*;*

(A5) $x^k y = w$,

gde je $k \in Z^+, k \geq 2$ *i reč* w *nije oblika* $x^m y, m \in Z^+$.

DOKAZ: Neka (1) jeste $\mathcal{A}\circ\mathcal{S}$-identitet. Tada prema Teoremi IV 1.2. dobijamo da postoji homomorfizam $T : A_2^+ \to A_2^+$ takav da važi jedan od uslova $(A1)$ ili $(A2)$ Teoreme IV 1.2.. Ne umanjujući opštost dokaza, možemo uzeti da je π identička permutacija. Tada imamo da je

(2) $$T(u) \notin C_0$$

i

(3 .) $$(T(u), T(v)) \notin \vartheta$$

Ne umanjujući opštost dokaza, možemo uzeti da reč u počinje slovom x, pa je jasno da važi

(4) $$xy \mid u\ .$$

Uzmimo da
$$x^2, y^2 \mid u.$$

Tada je jasno da
$$T(x), T(y) \in C_{ab} \quad \text{ili} \quad T(x), T(y) \in C_{ba},$$

jer u suprotnom dobijamo da je $T(u) \in C_0$, što je u suprotnosti sa (2). Medjutim, tada imamo da je
$$T(u), T(v) \in C_{ab} \quad \text{ili} \quad T(u), T(v) \in C_{ba},$$

što je u suprotnosti sa (3). Prema tome, reč u ne sadrži bar jednu od reči x^2 i y^2.

Uzmimo da
$$x^2 \nmid u \quad \text{i} \quad y^2 \mid u.$$

Tada je jasno da je $T(y) \in C_{ab} \cup C_{ba}$, jer u suprotnom dobijamo da ne važi (2). Uzmimo da je $T(y) \in C_{ab}$. Neka $yx \mid u$. Prema (2) dobijamo da je $T(x) \in C_{ab} \cup C_a$, dok prema (4) i (2) dobijamo da je $T(x) \in C_{ab} \cup C_b$, odakle sledi da je $T(x) \in C_{ab}$. Prema tome, imamo da je
$$T(u), T(v) \in C_{ab},$$

što je u suprotnosti sa (3). Prema tome,

$$yx \nmid u \,,$$

pa je

(5) $$u = xy^k \ , \ k \in Z^+, \ k \geq 2.$$

Na isti način dokazujeo slučaj kada je $T(y) \in C_{ba}$.

Ako važi da

$$x^2 \mid u \quad \text{i} \quad y^2 \nmid u,$$

tada na sličan način dokazijemo da je

(6) $$u = x^k y \ , \ k \in Z^+, \ k \geq 2.$$

Na kraju, neka važi

$$x^2 \nmid u \quad \text{i} \quad y^2 \nmid u.$$

Tada je jasno da je

(7) $$u = (xy)^k \ , \ k \in Z^+,$$

ili

(8) $$u = (xy)^k x \ , \ k \in Z^+.$$

Uzmimo da važi (5). Ako je $v = xy^m$, za neki $m \in Z^+$, $m \geq 2$, tada se lako proverava da $B_2 \models u = v$, što nije moguće. Ako je $v = xy$, tada dobijamo da važi $(A1)$. Preostali slučajevi povlače da važi $(A4)$.

Uzmimo da važi (6). Tada, kao u prethodnom slučaju dokazujemo da važi $(A1)$ ili $(A5)$.

Neka važi (7). Ako je $k = 1$, tada dobijamo da je $v \neq xy$ (jer u suprotnom sledi da $B_2 \models u = v$), odakle dobijamo da važi $(A1)$. Uzmimo da je $k \geq 2$. Ako je $v = (xy)^m$, za neki $m \in Z^+$, $m \geq 2$, tada se alko proverava da $B_2 \models u = v$, što nije moguće. Ako je $v = xy$, tada dobijamo da važi $(A1)$. Preostali slučajevi povlače da važi $(A2)$.

Na kraju, neka važi (8). Ako je $v = (xy)^m x$, za neki $m \in Z^+$, tada se lako proverava da $B_2 \models u = v$, što nije moguće. Prema tome, važi $(A3)$.

Obrnuto, neka je identitet (1) p-ekvivalentan identitetu jednog od oblika $(A1)$, $(A2)$, $(A3)$, $(A4)$ ili $(A5)$. Ne umanjujući opštost dokaza, možemo uzeti da je (1) jednog od oblika $(A1)$, $(A2)$, $(A3)$, $(A4)$ ili $(A5)$.

Ako je (1) oblika $(A2)$ ili $(A3)$, tada prema Teoremi IV 1.2. dobijamo da (1) jeste $\mathcal{A} \circ \mathcal{S}$-identitet.

Neka je (1) oblika $(A1)$, tj. $u = xy \ , \ v = w$. Tada je $v \neq xy$, odakledobijamo da

$$x^2 \mid v \quad \text{ili} \quad y^2 \mid v \quad \text{ili} \quad yx \mid v.$$

Ako $x^2 \mid v$ ili $y^2 \mid v$, tada neposredno dobijamo da važi uslov (iv) Teoreme IV 1.2.. Uzmimo da $yx \mid v$. Neka T jeste endomorfizam polugrupe A_2^+ odredjen preslikavanjem

$$\begin{pmatrix} x & y \\ x & yx \end{pmatrix} \tag{9}$$

alfabeta A_2. Tada imamo da je $T(u) = xy$ i $x^2 \mid T(v)$, pa važi uslov (iv) Teoreme IV 1.2.. Prema tome, (1) je $\mathcal{A} \circ \mathcal{S}$-identitet.

Neka je (1) oblika $(A4)$, tj. $u = xy^k$, $k \in Z^+$, $k \geq 2$ i $v = w$. Ako je $v = xy$, tada kao u prethodnom slučaju dokazujemo da (1) jeste $\mathcal{A} \circ \mathcal{S}$-identitet. Uzmimo da je $v \neq xy$. Prema $(A4)$ dobijamo da

$$x^2 \mid v \quad \text{ili} \quad yx \mid v \; .$$

Neka T jeste endomorfizam polugrupe A_2^+ odredjen preslikavanjem (9). Tada je jasno da $T(u) = x(yx)^k = (xy)^k y$ i $x^2 \mid T(v)$, pa važi uslov (iv) Teoreme IV 1.2.. Prema tome, (1) je $\mathcal{A} \circ \mathcal{S}$-identitet. Na sličan način dokazujemo slučaj kada je (1) oblika $(A5)$.

Dakle, svaki identitet p-ekvivalentan nekom identitetu oblika $(A1)$, $(A2)$, $(A3)$, $(A4)$ ili $(A5)$ je $\mathcal{A} \circ \mathcal{S}$-identitet. ∎

Sledeće tvrdjenje je najinteresantniji rezultat ovog poglavlja, i opisuje dvoslovne identitete koji indukuju dekompozicije u polumreže levo Arhimedovih polugrupa.

IV 5.2. TEOREMA. *Sledeći uslovi za identitet (1) su ekvivalentni:*
(i) (1) je $\mathcal{LA} \circ \mathcal{S}$*-identitet;*
(ii) polugurpe B_2 *i* R_2 *ne zadovoljavaju (1);*
(iii) (1) je $\mathcal{A} \circ \mathcal{S}$*-identitet i važi*

$$t(u) \neq t(v) \; ;$$

(iv) (1) je p-ekvivalentan identitetu jednog od sledećih oblika:
(B1) $(xy)^k = wx$;
(B2) $(xy)^k x = wy$;
(B3) $xy^k = wx$;
(B4) $x^k y = wx$;
za neki $k \in Z^+$ *i neku reč* $w \in A_2^+$;

DOKAZ: $(i) \Rightarrow (ii)$ i $(ii) \Rightarrow (iii)$. Sledi neposredno.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Neka važi (iii). Prema Teoremi IV 5.1. dobijamo da je (1) p-ekvivalentan nekom identitetu oblika $(A1)$, $(A2)$, $(A3)$, $(A4)$ ili $(A5)$. Ne umanjujući opštost dokaza, možemo uzeti da je (1) jednog od oblika $(A1)$,$(A2)$, $(A3)$, $(A4)$ ili $(A5)$. Ako je $t(u) = t(v)$, tada imamo da svaka polugrupa desnih nula zadovljava (1), što nije moguće. Prema tome, imamo da je

$$t(u) \neq t(v),$$

odakle dobijamo da važi jedan od uslova $(B1)$, $(B2)$, $(B3)$ ili $(B4)$.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Neka važi (iv). Uzmimo da je (1) jednog od oblika $(B1)$, $(B2)$, $(B3)$ ili $(B4)$ (to možemo uzeti bez umanjenja opštosti dokaza). Neka je S prooizvoljna polugrupa koja zadovoljava (1), i neka su $a, b \in S$ proizvoljni elementi.

Uzmimo da je (1) oblika $(B1)$. Neka je $F : A_2^+ \to S$ homomorfizam odredjen preslikavanjem

$$\begin{pmatrix} x & y \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Tada je $T(u) = T(v)$, pa dobijamo da je

$$(ab)^m \in Sa, \tag{10}$$

za neki $m \in Z^+$.

Uzmimo da je (1) oblika $(B2)$. Neka je $F : A_2^+ \to S$ homomorfizam odredjen preslikavanjem

$$\begin{pmatrix} x & y \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Tada je $T(u) = T(v)$, pa dobijamo da je

$$(ba)^k b \in Sa,$$

odakle dobijamo (10).

Uzmimo da je (1) oblika $(B4)$. Neka je $F : A_2^+ \to S$ homomorfizam odredjen preslikavanjem

$$\begin{pmatrix} x & y \\ ba & b \end{pmatrix}.$$

Tada je $T(u) = T(v)$, pa dobijamo da je

$$(ba)^k b \in Sba \subseteq Sa,$$

odakle dobijamo (10).

Uzmimo da je (1) oblika $(B3)$. Neka (1) nije periodični identitet. Tada, prema Teoremi IV 5.1. dobijamo da je

$$v = y^k x,$$

pa se, permutacijom slova, ovaj slučaj svodi na prethodni. Uzmimo da (1) jeste periodični identitet. Tada, prema Teoremi IV 1.3. dobijamo da S jeste GV-poligrupa. Neka su $e, f \in E(S)$ proizvoljni elementi. Neka je $F : A_2^+ \to S$ homomorfizam odredjen preslikavanjem

$$\begin{pmatrix} x & y \\ e & f \end{pmatrix}.$$

Tada je $T(u) = T(v)$, pa dobijamo da je

$$ef \in Se,$$

odakle dobijamo da je $ef = efe$, pa prema Teoremi IV 2.10. dobijamo da S jeste polumreža levo Arhimedovih polugrupa.

Dakle, dokazali smo da važi (10), pa prema Teoremi II 1.3. dobijamo da S jeste polumreža levo Arhimedovih polugrupa. Prema tome, važi (i). ∎

Iz IV 5.2. i njemu dualnog tvrdjenja, neposredno sledi sledeće tvrdjenje.

IV 5.3. POSLEDICA. *Sledeći uslovi za identitet (1) su ekvivalentni:*

(i) (1) je $\mathcal{TA} \circ \mathcal{S}$*-identitet;*

(ii) polugurpe B_2, L_2 *i* R_2 *ne zadovoljavaju (1);*

(iii) (1) je $\mathcal{A} \circ \mathcal{S}$*-identitet i važi*

$$h(u) \neq h(v) \quad \text{i} \quad t(u) \neq t(v)\ ;$$

(iv) (1) je p-ekvivalentan identitetu jednog od sledećih oblika:

(C1) $(xy)^k = ywx;$

(C2) $(xy)^k x = ywy;$

(C3) $xy^k = ywx;$

(C4) $x^k y = ywx;$

za neki $k \in Z^+$ *i neku reč* $w \in A_2^+$;

DOKAZ: Sledi prema Teoremi IV 5.2. i njoj dualnom tvrdjenju. ∎

LISTA SPECIJALNIH SIMBOLA

INDEKS POJMOVA

LITERATURA

[1] А.Я.АЙЗЕНШТАТ, *О перестановочных тождествах*, Совр. алгебра Л., Т3, 1975, 3-12.

[2] B.D.Arendt and C.J.Stuth, *On the structure of commutative periodic semigroups* , Pacif. J. Math., 35 (1970), 1-6.

[3] B.D.Arendt and C.J.Stuth, *On partial homomorphisms of semigroups*, Pacif. J. Math., 35 (1970), 7-9.

[4] G.Azumaya, *Strongly π-regular rings*, J. Pac. Sci. Hokkaido Univ. 13(1954), 34-39.

[5] S.Bogdanović, *O slabo komutativnoj polugrupi*, Matematički vesnik, 5 (18) (33) (1981), 145-148.

[6] S.Bogdanović, *Some characterizations of bands of power joined semigroups*, Algebraic conf. Novi Sad, 1981, 121-125.

[7] S.Bogdanović, *Bands of power joined semigroups*, Acta. Sci. Math. 44 (1982), 3-4.

[8] S.Bogdanović, *Bands of periodic power joined semigroups*, Math. Sem. Notes 10 (1982), 667-670.

[9] S.Bogdanović, *Power regular semigroups*, Zbornik radova PMF Novi Sad 12 (1982), 418-428.

[10] S.Bogdanović, *Semigroups of Galbiati-Veronesi*, Proc. of the conf. "Algebra and Logic", Zagreb, (1984), 9-20.

[11] S.Bogdanović, *Semigroups with a system of subsemigroups*, Inst. of Math. Novi Sad, 1985.

[12] S.Bogdanović, *Inflations of a union of groups*, Matematički vesnik 37 (1985), 351-353.

[13] S.Bogdanović, *Semigroups of Galbiati-Veronesi II*, Facta Universitatis (Niš), Ser. Math. Inform. 2 (1987), 61-66.

[14] S.Bogdanović, *Generalized $\mathcal{U}$-semigroups*, Zbornik radova Fil. fak. u Nišu, Ser. Mat. II (1988), 3-7.

[15] S.Bogdanović, *Nil-extensions of a completely regular semigroup*, Proc. of the conf. "Algebra and Logic", Sarajevo 1987, Univ. of Novi Sad 1988.

[16] S.Bogdanović and M.Ćirić, *Semigroups of Galbiati-Veronesi III (Semilattice of nil-extensions of left and right groups)*, Facta Universitatis (Niš), Ser. Math. Inform. 4 (1989), 1-14.

[17] S.Bogdanović and M.Ćirić, *$\mathcal{U}_{n+1}$-semigroups*, MANU (u štampi).

[18] S.Bogdanović and M.Ćirić, *A nil-extension of a regular semigroup*, Glasnik Matematički (u štampi).

[19] S.Bogdanović and M.Ćirić, *Tight semigroups*, Publ. Inst. Math. (u štampi).

[20] S.Bogdanović and T.Malinović, *(m,n)-Two-sided pure semigroups*, Comm. Math. Univ. Sancti Pauli, 35 (1986), 215-221.

[21] S.Bogdanović and S.Milić, *A nil-extension of a completely simple semigroup*, Publ. Inst. Math. 36 (50), (1984), 45-50.

[22] S.Bogdanović and S.Milić, *Inflations of semigroups*, Publ. Inst. Math. 41 (55), (1987), 63-73.

[23] S.Bogdanović and B.Stamenković, *Semigroups in which S^{n+1} is a semilattice of right groups (Inflations of a semilattice of right groups)*, Note di Matematica, 8 (1988), 155-172.

[24] J.L.Chrislock, *On medial semigroups*, J. Algebra 12 (1969), 1-9.

[25] J.L.Chrislock, *A certain class of identities on semigroups*, Proc. Amer. Math. Soc. 21 (1969), 189-190.

[26] G.Clarke, *Semigroup varieties of inflations of union of groups*, Semigroup Forum, 23 (1981), 311-319.

[27] A.H.Clifford, *Semigroups admiting relative inverses*, Ann. of Math. 42 (1941), 1037-1042.

[28] A.H.Clifford, *Extensions of semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1950), 165-173.

[29] A.H.Clifford, *Bands of semigroups*, Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), 499-504.

[30] A.H.Clifford and G.B.Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Math. Surveys N^{0}7, Amer. Math. Soc. Providence, R.I., Vol I (1960), Vol II (1967).

[31] R.Croisot, *Demi-groupes inversifs et demi-groupes reunions de demi-groupes simples*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) 70 (1953), 361-379.

[32] M.Ćirić, *Polumreže Arhimedovih polugrupa*, Magistarski rad, Univerzitet u Novom Sadu, 1990.

[33] M.Ćirić and S.Bogdanović, *Rédei's band of periodic π-groups*, Zbornik radova Fil. fak. u Nišu, Ser. Mat. 3 (1989), 31-42.

[34] M.Ćirić and S.Bogdanović, *Rings whose multiplicative semigroups are nil-extensions of a union of groups*, PU.M.A. Budapest-Siena (u štampi).

[35] P.M.Edwards, *Eventually regular semigroups*, Bull. Austral. Math. Soc. 28 (1983), 23-38.

[36] J.L.Galbiati e M.L.Veronesi, *Sui semigruppi che sono un band di t-semigruppi*, Rend. Ist. Lombardo, Cl. Sc. (A) 114 (1980), 217-234.

[37] J.L.Galbiati e M.L.Veronesi, *Sui semigruppi quasi regolari*, Rend. Ist. Lombardo, Cl. Sc. (A) 116 (1982).

[38] J.L.Galbiati e M.L.Veronesi, *Sui semigruppi quasi completamente inversi*, (privatna komunikacija).

[39] J.L.Galbiati and M.L.Veronesi, *On quasi completely regular semigroups*, Semigroup Forum, 29 (1984), 271-275.

[40] J.A.Gerhard, *Semigroups with idempotent power II*, Semigroups Forum, 14 (1977), 375-388.

[41] Э.А.Голубов и М.В.Сапир, *Многообразия финитно аппроксимируемых полугрупп*, ДАН СССР, 247, 5, (1979), 1037-1041.

[42] Э.А.Голубов и М.В.Сапир, *Многообразия финитно аппроксимируемых полугрупп*, Изв. вузов. Математика , 11, (1982), 21-29.

[43] J.M.Howie, *An introduction to semigroup theory*, Academic Press, London, 1976.

[44] С.И.Кублановский, *О финитной аппроксимируемости предмногообразий полугрупп относительно предикатов*, Совр. Алгебра Группоиды и их гомоморфизмы, Л. 1980, 58-88.

[45] D.Mc Lean, *Idempotent semigroups*, Amer. Math. Monthly 61 (1954), 110-113.

[46] А.И.Мальцев, *Об умножении классов алгебраических систем*, Сиб. Матем. Журн., Т. 8, 2, 1967, 346-365.

[47] А.И.Мальцев, *Алгебраические системы*, Мир, 1970, с.392.

[48] Г.И.Машевицкий, *Тождества в полугруппах Брандта*, Полугруппов. многообразия и полугруппы эндоморфизмов, Л. 1979, 126-137.

[49] W.D.Munn, *Pseudoinverses in semigroups*, Proc. Camb. Phil. Soc. 57 (1961), 247-250.

[50] J.Von Neuman, *On regular rings*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 22 (1936), 707-713.

[51] T.Nordahl, *Semigroup satisfying* $(xy)^m = x^m y^m$, Semigroup Forum 8 (1974), 332-346.

[52] J.Pelikan, *On semigroups in which products are equal to one of the factors*, Per. Math. Hungarica 4 (2-3) (1973), 103-106.

[53] M.Petrich, *The maximal semilattice decomposition of a semigroup*, Math. Zeitchr. 85 (1964), 68-82.

[54] M.Petrich, *Semigroups certain of whose subsemigroups have identities*, Czecl. Math. J. 16 (1966), 186-198.

[55] M.Petrich, *On extensions of semigroups determined by partial homomorphisms*, Nederl. Acad. Wetensch. Indag. Math. 28 (1966), 49-51.

[56] M.Petrich, *Sur certaines classes de demi-groupes III*, Bull. Cl. des Sc. Acad. R. de Belgique 53 (1967), 60-73.

[57] M.Petrich, *Structure des demi-groupes et anneaux distributifs*, C. R. Acad. Sc. Paris, Ser. A 268 (1969), 849-852.

[58] M.Petrich, *A simple construction of semigroups all of whose subsemigroups are left ideals*, Semigroup Forum 4 (1972), 262-266.

[59] M.Petrich, *Introduction to semigroups*, Merill, Ohio, 1973.

[60] M.Petrich, *Lectures in semigroups*, Akad. Verlag, Berlin, 1977.

[61] G.Pollák, *On the consequences of permutation identities*, Acta Sci. Math. 34 (1973), 323-333.

[62] G.Pollák, *On hereditarily finitely based varieties of semigroups*, Acta Sci. Math. 37 (1975), 3-4.

[63] G.Pollák, *A class of hereditarily finitely based varieties of semigroups*, Alg. theory of semigroups, Amsterdam 1979, 433-445.

[64] G.Pollák, *On identities which define hereditarily finitely based varieties of semigroups*, Alg. theory of semigroups, Amsterdam 1979, 447-452.

[65] G.Pollák, *On two classes of hereditarily finitely based semigroup identities*, Semigroup Forum 25 (1982), 9-33.

[66] G.Pollák, *Some sufficient conditions for hereditarily finitely based varieties of semigroups*, Preprint. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. 19 (1983).

[67] G.Pollák and M.V.Volkov, *On almost simple semigroup identities*, Semigroups, structure and universal algebraic problems, Amsterdam, 1985, 287-323.

[68] M.S.Putcha, *Semilattice decomposition of semigroups*, Semigroup Forum, 6 (1973), 12-34.

[69] M.S.Putcha, *Bands of t-archimedean semigroups*, Semigroup Forum, 6 (1973), 232-239.

[70] M.S.Putcha, *Rings which are semilattices of archimedean semigroups*, Semigroup Forum, 23 (1981), 1-5.

[71] M.S.Putcha and J.Weissglass, *A semilattice decomposition into semigroups with at most one idempotent*, Pacific J. Math. 39 (1971), 225-228.

[72] M.S.Putcha and J.Weissglass, *Semigroups satisfying variable identities*, Semigroup Forum 3 (1971), 64-67.

[73] M.S.Putcha and J.Weissglass, *Band decompositions of semigroups*, Proc. Amer. Math. Soc., 33 (1972), 1-7.

[74] M.S.Putcha and J.Weissglass, *Semigroups satisfying variable identities II*, Trans. Amer. Math. Soc. 168 (1972), 113-119.

[75] M.S.PUTCHA AND A.YAQUB, *Semigroups satisfying permutation identities*, Semigroup Forum 3 (1971), 68-73.

[76] V.V.RASIN, *On the varieties of cliffordian semigroups*, Semigroup Forum 23 (1981), 201-220.

[77] L.RÉDEI, *Das "Shiefe Produkt" in der Gruppentheorie*, Comment. Math. Helvet. 20 (1947), 225-264.

[78] L.RÉDEI, *Algebra I*, Pergamon Press, Oxford, 1967, pp. 81.

[79] D.REES, *On semigroups*, Proc. Camb. Phil. Soc. 36 (1940), 387-400.

[80] М.В.САПИР И Е.В.СУХАНОВ, *О многообразиях периодических полугрупп*, Изв. вузов. Математика, 12, 1985, 71-74.

[81] M.SCHUTZENBERGER, *Sur le produit de concatenation non ambigu*, Semigroup Forum 13 (1976), 47-75.

[82] LEE SIN-MIN, *Rings and semigroups which satisfy the identity* $(xy)^n = xy = x^n y^n$, Nanta Math. 6 (1) (1973), 21-28.

[83] B.STAMENKOVIĆ, *Strukturna svojstva proširenja nekih klasa polugrupa*, Doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu, Prirodno-matematički fakultet, 1989.

[84] Е.В.СУХАНОВ, *О многообразиях полугрупп, финитно аппроксимируемых относительно предикатов*, III Всесоюзн. симпозиум по теории полугрупп, Тезисы докл., Свердловск, 1988, с.90.

[85] Л.Н.ШЕВРИН, *Сильные связки полугрупп*, Изв. вузов. Математика, 6, 1965, 156-165.

[86] Л.Н.ШЕВРИН, *О разложении квазипериодической полугруппы в связку архимедовых полугрупп*, XIV Всесоюзн. алгебр. конф. Тезисы докл., Новосибирск, 1977, Ч1, 104-105.

[87] Л.Н.ШЕВРИН, *Квазипериодические полугруппы обладающие разбиением на унипотентные полугруппы*, XVI Всесоюзн. алгебр. конф. Тезисы докл., Л., 1981, Ч1, 177-178.

[88] Л.Н.ШЕВРИН, *Квазипериодические полугруппы, разложимые в связку архимедовых полугрупп*, XVI Всесоюзн. алгебр. конф. Тезисы докл., Л., 1981, Ч1, с.188.

[89] Л.Н.ШЕВРИН, *О разложений квазипериодических полугрупп в связки*, XVII Всесоюзн. алгебр. конф. Тезисы докл., Минск, 1983, Ч1, с.267.

[90] Л.Н.ШЕВРИН И М.В.ВОЛКОВ, *Тождества полугрупп*, Изв. вузов. Математика, 11, 1985, 3-47.

[91] L.N.ŠEVRIN AND A.J.OVSYANIKOV, *Semigroups and their subsemigroup lattices*, Semigroup Forum 27 (1983), 1-154.

[92] Л.Н.ШЕВРИН И Е.В.СУХАНОВ, *Структурные аспекты теории многообразий полугрупп*, Изв. вузов. Математика, 6, 1989, 3-39.

[93] T.TAMURA, *The theory of construction of finite semigroups I*, Osaka Math. J. 8 (1956), 243-261.

[94] T.TAMURA, *Another proof of a theorem concerning the greatest semilattice decomposition of a semigroup*, Proc. Japan Acad. 40 (1964), 777-780.

[95] T.TAMURA, *Notes on medial archimedean semigroups without idempotent*, Proc. Japan Acad. 44 (1968), 776-778.

[96] T.TAMURA, *Semigroups satisfying identity* $xy = f(x,y)$, Pacific J.Math. 31 (1969), 513-521.

[97] T.TAMURA, *On Putcha's theorem cocerning semilattice of archimedean semigroups*, Semigroup Forum 4 (1972), 83-86.

[98] T.TAMURA, *Note on the greatest semilattice decomposition of semigroups*, Semigroup Forum 4 (1972), 255-261.

[99] T.TAMURA AND N.KIMURA, *On decomposition of a commutative semigroup*, Kodai Math. Sem. Rep. 4 (1954), 109-112.

[100] T.TAMURA AND N.KIMURA, *Existence of greatest decomposition of a semigroup*, Kodai Math. Sem. Rep. 7 (1955), 83-84.

[101] T.TAMURA AND T.NORDAHL, *On exponential semigroups II* , Proc. Japan Acad. 48 (1972), 474-478.

[102] T.TAMURA AND J.SHAFER, *On exponential semigroups I* , Proc. Japan Acad. 48 (1972), 77-80.

[103] E.J.TULLY, *Semigroups satisfying an identity of the form* $xy = y^m x^n$.

[104] M.L.VERONESI, *Sui semigruppi quasi fortemente regolari*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) 10 (1984), 319-329.

[105] М.В.ВОЛКОВ И М.В.САПИР, *Наследственная конечная базируемость и строение полугрупп*, XVIII Всесоюзн. алгебр. конф. Тезисы докл., Кишинев, Ч 1, 1985, с.98.

[106] M.YAMADA, *On the greatest semilattice decomposition of a semigroup*, Kodai Mat. Sem. Rep. 7 (1955), 59-62.