20 128

UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET

Mr Dragoljub Cvetković

TRAJEKTORIJE PRAMENOVA PRAVIH I SNOPOVA RAVNI U NEKIM NEEUKLIDSKIM GEOMETRIJAMA

Doktorski rad

BEOGRAD, 1985.

P R E D G O V O R

U magistarskom radu "Epiciklično projektovanje hiperboličnog prostora" razmatrali smo projektovanje prostora Lobačevskog na datu ravan (poluravan) tog prostora. Zraci tog projektovanja mogu biti oricikli, ekvidistante ili krugovi odgovarajućeg prostora. Istovremeno razmatranje ovog projektovanja, bez obzira na prirodu zrakova, ostvarili smo zahvaljujući definiciji pomenutih krivih pomoću određenih grupa rotacija. Proučavanje "Neeuklidskih geometrija" i "Neeuklidskih prostora" B.A. Rozenfeljda podstaklo nas je da razmatramo mogućnost epicikličkih projektovanja i u tim prostorima. Prirodno je bilo što smo ta projektovanja počeli da ostvarujemo u geometrijama idealne oblasti proširenog prostora Lobačevskog. Ti pokušaji, uz odgovarajuće proučavanje potrebne literature, pokazali su da je za ostvarenje cilja koji smo postavili neophodno prethodno izgraditi odgovarajuće poluformalne geometrije. Naime, epicikličko projektovanje u geometriji Lobačevskog razvijali smo u duhu geometrijskih koncepcija Hilberta i Bahmana, a ne koncepcije koju je H. Weyl izložio prvi put u knjizi "Prostor, vreme i materija". Većina dela koja se odnose na tu problematiku koriste uglavnom metode koje proističu iz ove, nazovimo je, "vektorske" koncepcije zasnivanja geometrije. Povodom tih metoda primetimo sada još jedino to, da se za razliku od drugih neeuklidskih geometrija, tim metodama ni u približno dovoljnoj meri u odnosu na zahteve cilja koji smo postavili, nisu proučavale upravo geometrije koje nas interesuju.

Što se tiče sintetičkog proučavanja na osnovu detaljnog razmatranja literature zaključili smo da ne postoji aksiomatika nijedne od ovih geometrija. Sistemi aksioma dvodimenzione pseudoeuklidske i trodimenzione parabolične geometrije izloženi u radovima /36/ i /37/ samo donekle su nam mogli pomoći u formiranju sistema aksioma geometrija idealnih oblasti ravni i prostora Lobačevskog. Zato smo, na osnovu opšteg principa klasifikacije projektivnih metrika primenjenog na ove prostore ustanovili takođe opšti princip formiranja aksiomatika dvodimenzionih projektivno metričkih geometrija. Pri formiranju tih aksioma koristili smo glavne modele tih geometrija koji se ostvaruju u odgovarajućim oblastima projektivne ravni. Na taj način smo u § 2. prve glave rada, osim sistema aksioma pomenutih geometrija, izložili i sisteme aksioma i svih ostalih dvodimenzionih projektivno metričkih geometrija. Mada su, kao što smo već napomenuli, neke od tih geometrija ne računajući klasične već bile aksiomatizovane, dali smo i naše varijante i njima odgovarajućih sistema aksioma, jer je proces formiranja sistema aksioma koji smo primenili tekao uporedo za sve te geometrije, pa nam to nije oduzelo mnogo prostora. Ovakav način formiranja sistema aksioma razjasnio je pravi smisao nekih aksioma klasičnih, pa i euklidske geometrije. Tako se na primer pokazalo da se aksiomama paralelnosti određuje, pravom (pravama) kroz tačku van date prave prava priroda te date prave. Takođe se zahvaljujući takvom načinu moglo zaključiti da je činjenica da za svake dve tačke klasičnih geometrija postoji prava koja ih sadrži specifičnost tih geometrija, ravnopravna svojstvu po kome se svake dve prave eliptične ili geometrije idealne oblasti proširene ravni Lobačevskog seku. Prednost zamene aksioma podudarnosti Hilbertovog sistema aksiomama transformacija podudarnosti u slučaju projektivno metričkih geometrija, zbog prirode njihovih glavnih modela, ovde je došlo do punog izražaja. Svojim značajnim doprinosom u proučavanju tih geometrija smatramo i smanjenje broja tih aksioma. Za razliku od A.V. Pogorelova, koji je za aksiome "kretanja" apsolutne geometrije predložio sedam aksioma, mi smo predložili samo tri i to u okviru geometrija grupa aksioma incidencije i poretka dvodimenzionih projektivno metričkih geometrija. Potpunost tog sistema aksioma, pod pretpostavkom njegovog proširivanja četvrtom i petom grupom aksioma, u slučaju apsolutne geometrije u Boljajevom smislu dokazali smo posredno, dokazujući ekvivalentnost aksioma podudarnosti i aksioma transformacija podudarnosti u okviru aksioma incidencije i poretka u radu istog naslova (rad /37/).

Od formiranja sistema aksioma svih dvodimenzionih projektivno metričkih geometrija do formiranja zajedničkog aksiomatskog jezgra svih tih geometrija bio je potreban samo jedan korak. Učinivši ga, ostvarili smo težnju koja se posle završetka određene faze u razvoju geometrije uvek iznova javljala: formiranje sistema apsolutne geometrije. Da bismo istakli da se, za razliku od Bahmanove apsolutne geometrije koja je zajednička osnova samo tri od mogućih devet takvih geometrija, naša apsolutna geometrija može proširiti do svake ravne metričke geometrije, tu geometriju smo nazvali "apsolutno" apsolutnom. Uporedno razmatranje glavnih (projektivnih) modela svih projektivno metričkih geometrija navelo nas je na uopštavanje nekih značajnih relacija i transformacija podudarnosti tih geometrija. Opšte definicije osne i centrlne simetrije razlikuju se od postojećih. Pomoću osnih simetrija uopštili smo definiciju normalnosti pravih do definicije normalnosti likova tih geometrija. Na taj način obuhvatili smo i uzajamnu normalnost pravih i nizova tačaka koji ne pripadaju pravama u odgovarajućim geometrijama. Slično smo, koristeći se našom definicijom centralne simetrije definisali i pojam suprotnih tačaka u nekim od tih geometrija.

U § 3. dokazali smo potpunost sistema aksioma nekih projektivno metričkih geometrija i to na dva načina. Jedan od njih sledio je iz dokaza kategoričnosti tih geometrija. Drugi smo ostvarili pretpostavljajući da smo formalizovali pomenute geometrije. Pokazalo se da naša, na izgled samo teorijska analiza izraza "aksiomatika poluformalnog karaktera" na koji smo naišli samo u srednjoškolskom udžbeniku "Geometrija" D. Lopandića, daje i praktične rezultate. To će se pokazati naročito u slučaju ostvarenja modela pomenutih geometrija u geometriji Lobačevskog. Smatramo da smo do takvog modela geometrije kojoj su, u glavnom modelu, prave predstavljene presekom sečica apsolute sa spoljšnjošću apsolute, došli samo zahvaljujući pomenutoj analizi koja je doprinela da bolje shvatimo i objasnimo i neke druge pojmove teorije modela uopšte. Pošto su u tom modelu tačke predstavljene pravama, a prave hiperboličnim pramenovima pravih geometrije Lobačevskog, koristeći izomorfizam projektivnih modela ovih geometrija mogli smo i "geometriju pravih i hiperboličnih pramenova pravih geometrije Lobačevskog" ostvariti u toj geometriji idealne oblasti proširene ravniLobačevskog. Predstavljanje transformacija podudarnosti geometrija idealne oblasti proširene ravni Lobačevskog u modelu tih geometrija u geometriji Lobačevskog otkrila je mnoga važna svojstva i transformacija podudarnosti geometrije Lobačevskog, naročito u odnosu na transformacije pramenova pravih te geometrije. Kraj ovog paragrafa posvetili smo proveri tačnosti aksioma transformacija podudarnosti apsolutne geometrije u glavnim modelima geometrija koje smo proučavali. Na taj način smo upoznali još neka bitna svojstva simetrija tih geometrija u njihovim glavnim modelima.

Zbog obimnosti, prilikom određivanja sadržaja ovog rada, ograničili smo se samo na upoznavanja svojstava trajektorija pramenova pravih i snopova ravni razmatranih geometrija. Posle formiranja sistema aksioma tih geometrija mogli smo neposredno, u poluformalnim geometrijama, odrediti svojstva tih trajektorija. Pri tome bi nam glavni modeli odgovarajućih geometrija predstavljali osnovnu inspiraciju i putokaz za formulisanje i izvođenje teorema. Međutim odlučili smo da upravo taj deo procesa, koji se obično u radovima ne izlaže, posebno istaknemo. S obzirom na način predstavljanja transformacija podudarnosti ovih geometrija u njihovim glavnim (projektivnim) modelima bili smo u mogućnosti da odgovarajuća razmatranja izvodimo u sve tri geometrije proširene ravni Lobačevskog istovremeno. Projektivni model proširene ravni Lobačevskog tj. projektivne ravni u kojoj je zadata nedegenerisana kriva drugog reda kao apsoluta označili smo, po ugledu na B.A.Rozenfeljda, ravan ${}^1S_2$. Razmatranja u ravni ${}^1S_2$ izvodili smo na takav način da se gotovi svi rezultati tih razmatranja skoro neposredno mogu "preneti" u odgovarajuće poluformalne teorije. Zahvaljujući tome veoma često i u radu, a i u ovom predgovoru sa jezika modela prelazimo na jezik odgovarajuće poluformalne teorije i obratno.

Pojam trajektorija ponikao u geometriji, kao i mnogi drugi pojmovi ne samo geometrije već i matematike uopšte, doživeo je u algebri značajna uopštenja. Zato kada je to potrebno u ovom, a i u drugim slučajevima, primene algebarskih metoda u geometriji daju veoma značajne rezultate. Ovo se odnosi naročito na korišćenje svojstava preslikavanja čijem upoznavanju je algebra dala najznačajniji doprinos. Među preslikavanjima osnovnog skupa date geometrije posebno se ističu ona koja osnovne podskupove tog skupa - prave preslikavaju na podskupove iste vrste. To su kolinearna preslikavanja. U radu smo se ograničili na takvu vrstu preslikavanja. Stav koji smo u radu najviše koristili i koji je omogućio da u istom ostvarimo veoma mnogo značajnih rezultata je, kao i njegov dokaz veoma jednostavan. Prema tom stavu, ako je element g' date grupe konjugovan (izveden unutrašnjim automorfizmom te grupe) iz elementa g (tj. ako je $g' = hgh^{-1}$), tada je slika lika $L_1 = h(L)$ pri preslikavanju g' lik $L_1' = h(L')$ gde su L i L' odgovarajući lik i slika pri preslikavanju g. Iz ovog stava sledi i stav koji smo takođe često koristili: svaki lik invarijantan u preslikavanju g' je slika lika koji je invarijantan u preslikavanju g i to preslikavanjem h. Važi obratno: svaki lik invarijantan u transformaciji g odgovara liku invarijantnom u transformaciji g' pri preslikavanju transformacijom h^{-1}.

Grupa transformacija podudarnosti ma koje geometrije spoljašnjosti apsolute je podgrupa svih bijektivnih kolineacija osnovnog skupa svake od geometrija. Te transformacije su u modelima koje ovde razmatramo predstavljene suženjima automorfizama apsolute na oblast svake od tih geometrija. Korišćenjem prethodno navedenog stava dokazali smo teoremu po kojoj svaka transformacija podudarnosti preslikava bilo koju trajektoriju datog pramena pravih, na trajektoriju pramena pravih iste vrste (pa dakle i trajektoriju iste vrste). Ovaj stav je i uobičajenim metodama jednostavno dokazati kada su u pitanju krugovi geometrija koje proučavamo. Međutim, sintetički dokazi odgovarajuće činjenice u slučaju trajektorija različitih od krugova veoma je složen, te obično i kada je u pitanju dobro poznata geometrija Lobačevskog, izostaje.

Smatrali smo da je veoma važno i u geometrijama ravni ${}^1S_2$, kao i prostora ${}^1S_3$ odrediti preslikavanja koja trajektorije određene vrste preslikavaju na trajektorije te iste vrste, ali koja su različita od transformacija podudarnosti. Ovo smo ostvarili u dve faze. Najpre smo rešili jednostavniji problem: odredili smo sva takva preslikavanja ali koja zadovoljavaju i sledeći uslov - ona svaku trajektoriju datog pramena pravih preslikavaju na trajektoriju tog istog pramena pravih. Korišćenjem svojstava unutrašnjih automorfizama dokazali smo da je u slučaju bilo koje od ovih geometrija zato potrebno i dovoljno da je takvo preslikavanje element normalizatora upravo one grupe u odnosu na koju je definisana ta trajektorija. Ove grupe su generisane osnim simetrijama u odnosu na prave datog pramena pravih te smo ih zato nazvali grupama simetrija tog pramena pravih. Trajektorije pramenova pravih mogu se u duhu grupa definisati i na drugi način. Takvu definiciju izložili smo u magistarskom radu i u još nekim radovima u kojima smo razvijali teoriju epicikličkog projektovanja . U ovom radu dokazali smo da su naša i postojeća definicija ekvivalentne u svim slučajevima koji se ne odnose na degenerisane trajektorije pramenova pravih. Naša definicija je definicija trajektorija pramenova pravih ne u odnosu na grupe simetrija tih pramenova, već u odnosu na njihove prave podgrupe koje su skup svih proizvoda po dve simetrije u odnosu na prave datog pramena pravih. Prednost ove definicije, koja se sastoji u tome što je svaka od tih podgrupa jednostavno tr-anzitivna na svakoj trajektoriji (različitoj od tačke) koja je definisana u odnosu na tu podgrupu, koristili smo i u dokazima nekih teorema. U projektivnim modelima razm-atranih geometrija dokazali smo i da je svako preslikava-nje koje trajektorije datog pramena pravih preslikava na trajektorije tog istog pramena, preslikavanje koje polari-tet koji je na osnovi tog pramena indukovan apsolutnim polaritetom preslikava na taj isti polaritet. Da bi pom-enuti uslov bio i dovoljan, potrebno je da kolineacije odgovarajuće projektivne ravni preslikavaju i duž osnove tog pramena čiji krajevi pripadaju apsoluti na tu istu duž.

Presek hiperboličnog pramena prve vrste sa unutra-šnjošću (spoljašnjošću) apsolute predstavlja hiperboli-čni pramen pravih Beltrami-Klajnovog modela geometrije Lobačevskog odnosno geometrije spoljašnjosti apsolute čije su prave preseci sečice apsolute sa njenom spolj-ašnjošću. Ali pomenuti presek sa spoljašnjošću apsolute ne predstavlja pramen pravih one druge od geometrije spoljašnjosti apsolute već pramen hiperboličnih nizova tačaka te geometrije. Hiperbolični pramen druge vrste je hiperbolični pramen pravih te druge geometrije; on predstavlja pramen eliptičnih nizova tačaka prve od tih geometrija. Oni elementi normalizatora koji pomenutu pr-ojektivnu duž osnove preslikavaju na njoj dopunsku pre-slikavaju trajektorije pramena pravih jedne vrste na trajektorije pramena pravih druge vrste istog središta. Na ovakav način u modelima pomenutih geometrija protuma-čena je činjenica po kojoj postoje i elementi normaliza-tora unije datog pramena pravih i pramena nizova tačaka koji trajektorije datog pramena pravih preslikavaju na trajektorije pramena niza tačaka istog središta i obratno.

U skupu elemenata normalizatora date grupe simetrija karakteristični su oni koji dati pramen pravih preslikavju na taj isti pramen pravih i to pravu po pravu. Elementi grupe simetrija te vrste su centralne i osne simetrije koje su u projektivnim modelima predstavljene harmonijskim homologijama čiji su centar i osa pol i polara u apsolutnom polaritetu. Oni među njima koji ne pripadaju datoj grupi simetrija su perspektivne kolineacije kojima su središte i osa pol i polara u apsolutnom polaritetu. Svaki element datog normalizatora koji nije element odgovarajuće grupe simetrija može se predstaviti kao proizvod jedne od takvih perspektivnih kolineacija i nekog elementa te grupe simetrija. Pri tome je središte te kolineacije središte tog pramena pravih a osa njegova osnova.

U euklidskoj geometriji elementi normalizatora grupe simetrija datog eliptičnog (konkurentnog) pramena pravih te geometrije predstavljaju transformacije sličnosti u odnosu na središte tog pramena. Perspektivnim kolineacijama u odgovarajućem modelu euklidske ravni odgovaraju homotetije euklidske geometrije pomenutog središta. To isto važi i u pseudoeuklidskoj geometriji. Analogija na koju smo ukazali navela nas je da i elemente normalizatora date grupe simetrija određenog pramena pravih smatramo preslikavanjima sličnosti čije središte tog pramena pravih i u geometrijama ravni ${}^1S_2$. Osnovna razlika između transforamacija sličnosti euklidske i pseudoeuklidske geometrije i odgovarajućih preslikavanja osnovnih skupova geometrija ravni ${}^1S_2$ ogleda se u tome što su transformacije sličnosti euklidske i pseudoeuklidske geometrije transformacije osnovnog skupa tih geometrija, dok su u drugom slučaju ta preslikavanja preslikavanja osnovnog skupa na skup koji se razlikuje od tog skupa. Ova činjenica zahtevala je posebna obrazloženja kojima smo u radu posvetili odgovarajuću pažnju. Jedan od razloga te razlike proizlazi iz činjenice da u projektivnim modelima euklidske i pseudoeuklidske geometrije zbog degenerisanog polariteta koji im odgovara, sve tačke sopstvene oblasti tih geometrija imaju istu polaru - apsolutnu pravu, dok se u slučaju geometrija ravni ${}^1S_2$ te polare razlikuju. Dok su osnove pramenova pravih čija su središta predstavljena sopstvenim tačkama pomenutih modela euklidske i pseudoeuklidske geometrije istovetne apsoluti, dotle se osnova bilo kog pramena pravih geometrija ravni ${}^1S_2$ razlikuje od apsolute. Zato su u prvom slučaju sva preslikavanja sličnosti automorfizmi apsolute, pa i oblasti interpretacija ovih geometrija. U drugom slučaju među preslikavanjima za koje smo pokazali da su preslikavanja sličnosti geometrija proširenih prostora Lobačevskog postoje i ona koja apsolutu tih prostora preslikavaju na površ drugog reda različitu od apsolute, pa i oblasti interpretacije tih geometrija na oblasti koje se od njih razlikuju. Dokaz kojim smo pokazali da u graničnom slučaju pri prelazu odgovarajućih geometrija prostora ${}^1S_n$ u euklidsku i pseudoeuklidsku geometriju iste dimenzije, preslikavanja sličnosti geometrija prostora ${}^1S_n$ takođe prelaze u transformacije sličnosti euklidske odnosno pseudoeuklidske geometrije, smatramo veoma značajnim.

Analiza primene ovih preslikavanja u fizici u potpunosti je potvrdila naš stav da se ova preslikavanja moraju smatrati uopštenjima transformacija sličnosti euklidske i pseudoeuklidske geometrije. Ta analiza je pokazala da se tim preslikavanjima predstavljaju ravnomerne kontrakcije ili dilatacije prostora kojima odgovaraju te geometrije. Svako od tih preslikavanja geometriju određenog poluprečnika krivine preslikava na geometriju poluprečnika krivine različitog od poluprečnika krivine date geometrije. Ukoliko se radi o euklidskoj i pseudoeuklidskoj geometriji čiji je poluprečnik krivine nula prirodno je , što smo detaljnije obrazložili u radu, da se te geometrije preslikavaju na geometrije istog poluprečnika krivine, dakle te iste geometrije. Sva kretanja prostora koja su predstavljena preslikavanjima sličnosti su ravnomerna. Ovo svojstvo"obezbeđeno"je zahtevom koji zadovoljavaju ta preslikavanja: trajektorije pramena pravih preslikavaju na trajektorije iste vrste. Teorema kojom se izražava ravnomernost tih kretanja i koju smo izložili u radu utvrđuje da su slike dva međusobno podudarna lika pri preslikavanjima sličnosti takođe međusobno podudarna.

Zahvaljujući koncepciji koja odgovara izgradnji geometrija kao invarijanata određenih grupa, otkrili smo i pravu suštinu činjenice po kojoj su svi oricikli geometrije Lobačevskog, pa i svih ostalih geometrija ravni ${}^1S_2$ međusobno podudarni. Za razliku od grupe normalizatora eliptičnih pramenova pravih u kojoj su svi elementi tog normalizatora koji su transformacije podudarnosti elementi grupe simetrija tog normalizatora, u slučaju grupe normalizatora paraboličnog pramena pravih postoje i transformacije podudarnosti koje taj pramen preslikavaju na taj isti pramen ali koje nisu elementi grupe simetrija tog paraboličnog pramena pravih.

U radu smo mnoge teoreme projektivne geometrije dokazali na jednostavniji način, i u novom svetlu prikazali sadržaje tih teorema. Takođe smo znatnu pažnju obratili i na degenerisane trajektorije pramenova pravih.

Smatramo da je rad u potpunosti ostvario prvobitni cilj. Svojstva trajektorija geometrija ravni ${}^1S_2$ i prostora ${}^1S_3$ koja smo ovde utvrdili omogućuju da se i u geometrijama takve ravni i prostora razvija teorija epicikličkih projektovanja koju smo zasnovali u pomenutom magistarskom radu. Osim toga ostvarili smo i mnoge druge rezultate značajne za geometriju uopšte. Primena jednog od njih - preslikavanja sličnosti tih geometrija novo su otkriće u geometriji Lobačevskog. Ovaj rad je još više naglasio značaj koji krive i površi stalne krivine imaju u geometriji.

Sadržaj

s a d r ž a j 2

G L A V A I

S I S T E M I A K S I O M A D V O D I M E N Z I O N I H P R O J E K T I V N O M E T R I Č K I H G E O M E T R I J A

§ 1. GEOMETRIJE PROJEKTIVNO METRIČKIH PROSTORA

1. Uvod. Na osnovu izlaganja u geometrijama projektivno metričkih prostora ili Kelijevim geometrijama uopšte odredićemo princip pomoću koga ćemo formirati sisteme aksioma svih dvodimenzionih projektivno metričkih geometrija. Taj princip omogućiće nam da odredimo i sistem aksioma čije su aksiome zajedničke za sve geometrije. Mada ćemo u radu razmatrati samo još dve "neklasične" od mogućih 27 trodimenzionih projektivno metričkih geometrija, izlaganju o ovim geometrijama uopšte (uključujući povremeno i n-dimenzione geometrije za bilo koje konačno n) posvetićemo više pažnje iz sledećih razloga:

a) U literaturi na našem jeziku ne postoje udžbenik, monografija ili rad koji bi bili posvećeni ovoj temi. Doduše u uvodnim radovima Đ. Lisulova /15/ i M. Milojevića /18/ navodi se da prema osnovnoj zamisli Keli-Klajna u ravni (projektivnoj) postoji devet geometrija ili geometrijskih sistema. U navedenim radovima govori se ukratko o osnovnom principu na osnovu koga se određuje broj tih geometrija, ali se detaljnije ne obrazlažu osnovni razlozi iz kojih ovaj princip važi. Da je podrobnija analiza ovih principa neophodna biće očiglednije na osnovu sledeća dva primera. Klajn, koji je prema monografiji B.A. Rozenfeljda /27/ prvi izvršio klasifikaciju projektivnih metrika u dvodimenzionom i trodimenzionom slučaju, poistovetio je one geometrije projektivne ravni kod kojih je metrika određena istom apsolutom. Zbog toga je on smatrao da se u ravni može odrediti "sedam različitih neeuklidskih geometrija" (/17/, fusnota 1. na str. 274.). Slično se i u radu/25/, koji je novijeg datuma, u prvom delu istovremeno razvijaju dve pseudoeuklidske geometrije. Najverovatnije je da je Klajn u odgovarajućem radu (vidi literaturu navedenu u radu N.M. Makarove /17/ pod /2/) identifikovao geometrije EH i HH jer su to geometrije projektivne ravni čija je metrika određena istom apsolutom - realnom nedegenerisanom krivom drugog reda - i istim skupom tačaka spoljašnjosti apsolute. Kasnije ćemo pokazati da u tako identifikovanim geometrijama nisu zadovoljeni ni najosnovniji zahtevi aksioma podudarnosti (npr. da na svakoj polupravoj postoji tačka takva da je duž određena krajem te poluprave i tom tačkom, podudarna datoj duži).

b) Na osnovu pregleda inostrane literature zaključili smo da su delo B.A. Rozenfeljda i delo čiji su autori osim Rozenfeljda JaglomiE.U. Jasinskaja (/27/ i /11/) dela koja čitaocu pružaju najpotpuniju informaciju o projektivnim metrikama uopšte,njihovoj klasifikaciji, kao i značaju za geometriju i druge naučne oblasti. U njima su veoma detaljno izložene i zasluge pojedinih matematičara za razvoj ove oblasti. Međutim u ovim kao i u ostalim radovima sovjetskih autora koje smo proučavali (/8/,/10/, /12/ i /17/) koji takođe podrobno izlažu "istoriju" projektivnih metrika ne pominje se G. Hamel, mada je prema H. Busemann-u (/3/, str. 149.) on prvi rešio poznati četvrti problem D. Hilberta koji se odnosi na određivanje svih projektivnih metrika (postavljen u Mathematische probleme, 1900.). G. Hamel je dao zapravo opšti analitički metod kojim se ove metrike mogu odrediti. Da njegovo delo Über die Geometrien in denen die Geraden die Kürzesten sind", (1901. i 1903.)prethodi delu Klassification of geometries with projective metric" - koje sovjetski autori označavaju kao prvo delo u kome je na najpogodniji način izvedena potpuna klasifikacija projektivnih metrika(1910) - utvrdili smo upravo u /28/ od D.M.Y. Sommerville-a koji je i autor prethodno navedenog dela. U odgovarajućem delu rada ipak ćemo navesti i neke teoreme Hamela jer ih smatramo izvesnim doprinosom u razjašnjavanju suštine principa te klasifikacije.

c) U radu /18/ detaljno su izloženi projektivni modeli dvodimenzione pseudoeuklidske i njoj dualne geometrije. Ostale geometrije koje odgovaraju drugim metrikama projektivne ravni prikazane su samo u kratkim crtama. Ali upravo taj deo ovog rada bio je jedan od podsticaja da "Teoriju epicikala i episfera" ravni i prostora Lobačevskog u kojoj su ovi pojmovi definisani kao putanje (trajektorije) tačke na koju dejstvuje određena podgrupa grupe izometrijskih transformacija te ravni, odnosno prostora[1] izgrađujemo i u tim geometrijama. Smatramo da je opravdano očekivati da će naša analiza projektivnih metrika poslužiti kao podsticaj izradi nekih drugih radova.

2. Pojam projektivno metričkih geometrija. Na osnovu proučavanja dela /11/ i /27/ može se zaključiti da se u njima pod metričkim n- prostorom [2] podrazumeva proje-

---

1) Ovu "teoriju" na pomenuti način razvijamo još od 1979. (Saopštenje u okviru Sekcije za geometriju na VII kongresu matematičara, fizičara i astronom Jugoslavije; predavanja na PMF u Kragujevcu; definicije u radovima /4/ i /5/ kao i sadržaj radova /5/ i /6/ u kojima se bliže određuju svojstva podgrupa čije su to putanje).

2) n -prostor je skraćenica za n - dimenzioni prostor. Ovu skraćenicu preuzeli smo iz dela /27/.

ktivni n - prostor u kome je datom površi drugog reda [3] određena metrika. S obzirom na njenu prirodu ova metrika naziva se projektivnom. U delu /1/ F. Bahmana projektivno -metričkom ravni smatra se projektivna ravan u kojoj je zadat neki projektivni plaritet. Ovim polaritetom u skupu kolineacija te projektivne ravni određene su one koje predstavljaju transformacije podudarnosti odgovarajuće projektivno-metričke ravni. Pošto je bilo kojom površi drugog reda n-projektivnog prostora određen polaritet tog prostora, a bilo kojim polaritetom n-projektivnog prostora odgovarajuća površ drugog reda, može se zaključiti da pomenute definicije projektivno metričkih prostora predstavljaju ekvivalentne definicije. U ostalim delima koje smo naveli u literaturi, a koje se odnose i na tu problematiku, postoji saglasnost u određivanju ovog pojma. Međutim u delima /3/ i /13/, kao i u pomenutom delu /1/ ovaj pojam ima uže značenje (v.primedbu prevodioca na str. 120. i 121. tog dela).

Ako je površ drugog reda - apsoluta projektivno metričkog prostora - nedegenerisana, tada se u raznim oblastima tog prostora može razvijati više geometrija. Zato u dvodimenzionom slučaju postoji devet raznih projektivno metričkih geometrija, a samo sedam projektivno metričkih ravni. U radu /18/ ove geometrije nazvane su projektivnim modelima u onom smislu u kome se skup svih tvrđenja kojasu istinita u izvesnom modelu datog jezika,naziva teorijom modela tog jezika (v/34/ str. 52 i 53.). Neke od ovih geometrija još nisu aksiomatizovane. Dve od njih, poznate kao geometrije spoljašnjosti apsolute (HH i EH) biće

---

3) U delu /27/ umesto ranijih izraza hiperravan, hiperpovrš upotrebljava se samo ravan, površ. I u radu ćemo usvojiti te nazive.

predmet proučavanja u ovom radu. Kada bi se ove geometrije formalizovale, onda bi pomenute geometrije HH i EH predstavljale glavni model tih formalnih teorija. U ovom radu formiraćemo samo aksiomatiku poluformalnog karaktera geometrija spoljašnjosti apsolute. Pod pojmom poluformalne teorije [4] podrazumevaju se relacijsko - operacijske strukture skupa čiji su elementi proizvoljne prirode. U radu ćemo ih nazivati često i skupovnim modelom odgovarajuće formalne geometrije. Geometrije projektivno metričkih ravni i nekih 3-projektivno metričkih prostora zavisno od situacije tretiraćemo i kao geometrije ravni ili njene određene oblasti, ili kao poluformalne teorije. Iz ovg razloga smo se i opredelili za naziv ovih geometrija: smatramo da se nazivom " dvodimenzione projektivno-metričke geometrije" najadekvatnije izražava i mogućnost interpretacije ovih geometrija u projektivnoj ravni ili nekoj njenoj oblasti - ako su poluformalizvoane, kao i mogućnost da se uvođenjem metrike u projektivnu ravan izgrađuje geometrija tako metrizovane projektivne ravni koja se razlikuje od do sada izgrađenih geometrija.

3. Projektivno metrički n-prostori. U izlaganju o projektivnim metrikama i odgovarajućim projektivno-metričkim geometrijama uopšte, oslanjaćemo se u najvećoj meri - u prvom delu izlaganja - na ono što je o tome izneto u delu /27/. Pre svega ukazaćemo na izvesne termine koji se odnose na pomenutu problematiku, koji se razlikuju od dosad upotrebljavanih i od kojih ćemo neke i mi usvojiti. Za razliku od tradicionalne terminologije, u /27/ se pod hiperboličnim n-prostorom indeksa i podrazumeva projektivni prostor P_n [5] u kome se datom nedegene-

---

4) Pojam naveden u § 1. udžbenika D. Lopandića /16/. U ostaloj literaturi kojom smo se služili nema ovog pojma.

5) n-dimenzioni projektivni prostor.

risanom kvadrikom [6] indeksa i [7] na odgovarajući način određuju rastojanja u tom prostoru. Hiperbolični prostori indeksa 1 nazivaju se u tom delu prostorima Lobačevskog. i označavaju sa ${}^{1}S_n$ gde je n oznaka dimenzije tih prostora. U /27/ ${}^{1}S_n$ je oznaka uglavnom proširenog n-proširenog prostora Lobačevskog, mada se ponekad odnosi i na n-prostor Lobačevskog.

Pomenuta data nedegenerisana kvadrika razlaže prostor P_n na dve oblasti: U jednoj od njih nalaze se i temena autopolarnog simpleksa ove kvadrike, a u drugoj n+l-i temena ovog simpleksa. Zato se u /27/ sem o hiperboličnim n-prostorima odgovarajućeg indeksa i ${}^{i}S_n$ govori i o hiperboličnim n-prostorima odgovarajućeg indeksa n-i+1 (${}^{n-i+1}S_n$). Ona od tih oblasti na koju data nedegenerisana kvadrika - apsoluta prostora ${}^{i}S_n$ i (${}^{n-i+1}S_n$) - razlaže prostor P_n, koja sadrži i odnosno n-i+1 temena autopolarnog simpleksa, naziva se sopstvenom oblašću prostora ${}^{i}S_n$ odnosno ${}^{n-i+1}S_n$; sopstvena oblast prostora ${}^{i}S_n$ naziva se idealnom oblašću prostora ${}^{n-i+1}S_n$ i obratno(/27/, str.211.).

Napomenimo da su sopstvena oblast prostora ${}^{1}S_n$ kao i sfera imaginarnog poluprečnika prostora ${}^{n}R_{n+1}$ pseudoeuklidskog n+1 dimenzionog prostora indeksa n, odnosno ${}^{1}R_{n+1}$ rimanovi n-prostori stalne negativne krivine (/27/ 3.2.1. str.119.), dok su sopstvene i idealne oblasti prostora ${}^{i}S_n$ isto kao i n-sfere prostora ${}^{i}R_{n+1}$ sem sopstvene oblasti prostora ${}^{1}S_n$ i sfere imaginarnog poluprečnika prostora ${}^{n}R_{n+1}$(${}^{1}R_{n+1}$) pseudorimanovi prostori sta-

6) Izraz kvadrika kao skraćenje izraza "površ drugog reda" upotrebljava se u mnogim drugim delima (/3/, /11/, /13/, /26/ itd.).

7) U radu umesto sa 1 indeks kvadrike označavamo sa i da bi se izbeglo identifikovanje indeksa sa brojem 1.O pojmu indeksa kvadrike vidi npr. u /11/ (1.1. str. 55.) ili u /26/ (na str, 297.).

lne pozitivne ili negativne krivine (/27/, 4.1.1. str. 211.). Uzimajući u obzir sa jedne strane složenost izloženog načina označavanja koja proizlazi iz složenosti same problematike, a sa druge činjenicu da potrebe našeg rada to ne zahtevaju nećemo se zadržavati na prikazu načina označavanja koji se za ostale vrste prostora upotrebljava u /27/ već ćemo odmah preći na prikaz izlaganja izlaganja o principima klasifikacije projektivnih metrika kao i samoj klasifikaciji projketivnih metrika u delu /27/.

4. Klasifikacija projektivnih metrika. U osnovi u /27/, princip klasifikacije kao i sama klasifikacija oslanjaju se na princip klasifikacije kao i samu klasifikaciju projektivnih metrika DMY. Sommerville-a izloženih u već navedenom delu Classification of geometries with projective metric". "Geometrija" prave na kojoj"apsolutu" predstavljaju dve različite imaginarne tačke, u /27/ se označavaju sa S_1; ${}^1S_1$ je projektivno metrička prava na kojoj metriku određuju dve razne realnetačke. "Za razliku od prostora S_n i sopstvene oblasti prostora ${}^1S_n$ gde je rastojanje između tačaka uvek realno, u prostoru ${}^1S_n$ postoje parovi tačaka s realnim, čisto imaginarnim i rastojanjem koje je jednako nuli i tri vrste pravih - koje seku, ne seku i dodiruju apsolutu" (/27/ str. 212.). Prave koje ne seku apsolutu u /27/ nazivaju se eliptičnim, prave koje je seku hiperboličnim, a prave koje je dodiruju izotropnim pravim. Rastojanje bilo koje dve tačke iste izotropne prave jednako je nuli. Zbog značaja za našu dalju analizu klasifikacija projektivnih metrika navešćemo i uopštenje prethodnog citata iz /27/ koje se odnosi i na m - ravni za m $\neq$ 1 :

"U m - ravnima, čiji je presek sa apsolutom nedegenerisana imaginarna kvadrika, ostvaruje se geometrija prostora S_m (sa S_m se u /27/ označava eliptični m-prostor prim. D.C.), u m ravnima koje seku apsolutu po nedegenerisanim kvadrikama indeksa k važi geometrija prostora ${}^kS_m$ ili ${}^{m-k+1}S_m$. Ove m-ravni nazivaćemo respektivno eliptičnim i hiperboličnim m-ravnima, a ravni čiji je presek sa apsolutom degenerisana kvadrika izotropnim m-ravnima." (/27) 4.1.1. str.212.).

Kao i kod Sommerville-a opšta klasifikacija projektivnih metrika vrši se prema metrici pravih i pramenova pravih svih dimenzija, koja je određena prirodom apsolute i oblasti na koju ona razlaže projektivni n-prostor. Sem pramenova pravih i ravni u P_n postoje i n-2 tipova pramenova m-ravni($m = 1, \ldots n-2$). Svaki pramen m-ravni - za $m \neq n-2$, pripada(m+1)-ravni i svaka m-ravan pramena sadrži istu (m-1)-ravan. Kao što na svakoj pravoj zavisno od prirode apsolute i oblasti projektivnog prostora može važiti jedna od tri moguće metrike rastojanja tačaka tako je i u svakom pramenu ravni, kao i u pramenu m-ravni određena jedna od tri moguće metrike uglova tih pramenova: eliptična, hiperbolična i parabolična. Na primer ako se radi o realnoj nedegenerisanoj ovalnoj apsoluti i (m+1)-ravan koja sadrži dati m-pramen ravni nema zajedničkih tačaka sa apsolutom (uglovna) metrika datog m-pramena je eliptična jer u tom m-pramenu ne postoji nijedna m-ravan koja sa apsolutom ima tačno jednu zajedničku tačku tj. pošto nijedna od tih m-ravni nema uopšte zajedničkih tačaka sa apsolutom, nijedna od njih nije tangentna ravan apsolute. Ako pak (m+1)-ravan seče apsolutu po nedegenerisanoj kvadrici indeksa (k+1), tada ako zajednička (m-1)-ravan datog pramena pripada spoljašnjosti presečne kvadrike, postoje dve m-ravni koje su tangentne ravni te kvadrike, pa dakle i apsolute, i ove dve ravni određuju "apsolutu" datog pramena m-ravni.

U ovom slučaju metrika tog m-pramena ravni je hiperbolična. Prema tome, pošto na pravim, m-pramenovima ravni i pramenovima ravni kojih u n-dimenziomom projektivnom prostoru ima ukupno n, proizvoljna (ali data) apsoluta može određivati tri vrste metrika - na pravim metriku rastojanja, a u pramenovima ravni i pramenovima m-ravni metriku uglova, broj svih projektivnih metrika jednak je 3^n. Na str. 315. i 317. dela /27/ date su i pregledne tabele projektivnih metrika 2-ravni i 3-prostora.

Najednostavnije od ovih metrika - pa dakle i najednostavnije projektivno metričke geometrije koje im odgovaraju: n-prostori Lobačevskog, hiperbolični n-prostori i eliptični n-prostori - okarakterisani su time da je svaka od prethodno pomenutih metrika rastojanja tačaka prave i metrika uglova pramenova ravni i m-ravninedegenerisana (eliptična ili hiperbolična) [8]. Da bi se odredio ukupan broj projektivnih metrika koje odgovaraju ovakvim geometrijama dovoljno je, u prethodnom razmatranju (na osnovu koga smo zaključili da je ukupan broj projektivnih metrika n-prostora 3^n) odbaciti sve izotropne prave na kojima su rastojanja bilo kojih dveju tačaka jednaka nuli i sve pramenove ravni i m-ravni u kojima je ugao između ma koje dve ravni (ma koje dve m-ravni) jednak nuli. Uz takvo ograničenje metrika pravih može biti samo eliptična i hiperbolična, a metrika uglova pramenova ravni i m-ravni takođe isključivo eliptična i hiperbolična. Zato je broj takvih metrika ne 3^m već 2^n. Obzirom da su tabele ovih metrika

8) Pokazalo se da stepen složenosti projektivno metričkih geometrija koje odgovaraju ovim metrikama zavisi od stepena složenosti grupe transformacija koje u Klajnovom smislu odgovaraju ovim geometrijama, Kako su ove grupe grupe Li, stepen složenosti ovih geometrija tesno je vezan sa stepenom složenosti odgovarajuće Lijeve grupe (/11/, str. 52.)

kao i odgovarajući cteži, za n = 2 i n = 3 dati vrlo pregledno na str. 216. i 217. dela /27/ kopija ovih stranica pridružena je kao prilog 1. priloženim crtežima na kraju rada. U "tablici metrike ravni S_2 i $^1S_2$" u svakom od četiri polja u preseku redova - metrike uglova - i kolona - metrike rastojanja uz oznaku 2-ravni u zagradi je na prvom mestu oznaka pravih date metrike, a na drugom pravih koje su polare tačaka date metrike (metrika takvih pravih istovetna je uglovnoj metrici pramena pravih) /27/, str. 216.). Tako je $^1S_2$ $(^1S_1, S_1)$ (desno gornje polje tablica) metrike projektivne ravni određena ovalnom krivom drgog reda ($^1S_2$- (proširena) ravan Lobačevskog) kod koje je metrika rastojanja (pravih) hiperbolična $(^1S_1, .)$ a metrika uglova (pramenova pravih) eliptična $(., S_1)$; $^1S_2$ $(S_1, {}^1S_1)$ je metrika iste te ravni $^1S_2$ ali sa eliptičnom metrikom pravih $(S_1, .)$ i hiperboličnom metrikom pramenova pravih (uglova): $(^1S_1)$. U ovom slučaju, s obzirom da je oblast odgovarajuće projektivno metričke geometrije spoljašnjost apsolute što neposredno sledi iz činjenice da njene prave ne seku apsolutu, smatramo opravdanim i oznaku $^2S_2$ $(S_1, {}^1S_1)$ čime ističemo da je sopstvena oblast ove geometrije zapravo idealna oblast ravni $^1S_2$ (vidi str.211. dela /27/). Slično je i u slučaju metrike $^1S_2$ $(^1S_1, {}^1S_1)$ ovo je metrika ravni $^1S_2$ kojoj su i metrike pravih kao i metrika pramenova pravih hiperbolične. Oblasti, tačke i prave odgovarajućih projektivno metričkih geometrija predstavljene su na sl.4.t.2. (/27/, str. 216.). Pošto su poslednje dve od navedenih geometrija neke od projektivno metričkih geometrija čije će trajektorije pramenova pravih biti takođe predmet proučavanja rada izložićemo i drugi način označavanja ovih geometrija.

5. <u>Označavanje geometrija čije ćemo trajektorije proučavati</u>- Označavanje ovih geometrija u delu /12/ (gl. XV str.210-216, ovu glavu je redigovao I.M.Jaglom) neposrednije ukazuje na tip metrike pravih ("linearne"metrike) i pramena pravih (uglovne metrike) određene "kružnom" [9] apsolutom. Tako je projektivno metrička geometrija $^1S_2$ (S_1, $^1S_1$), o kojoj se u radu /12/ govori kao o "geometriji van kružne apsolute" čije su prave eliptične" i najpre označava sa II_1 (str.211.)označena sa EH čime se, prvim slovom oznake ističe da je metrika rastojanja eliptična a drugim (slovom H) da je metrika uglova hiperbolična. Druga od geometrija "van kružne apsolute" čije prave pripadaju "kategoriji pravih koje seku apsolutu"(/12/, str.211.) označena je sa HH jer su obe metrike u tom slučaju hiperbolične: Isti način označavanja korišćen je i u radovima /17/ i /18/. U radu ćemo usvojiti ovaj poslednji način označavanja zbog njegove tehničke jednostavnosti i primeniti ga i u trodimenzionom slučaju.

Obzirom da ćemo proučavati trajektorije pramenova pravih i snopova ravni samo dve od mogućih 27 trodimenzionih projektivno metričkih geometrija (a izvesne rezultate "prenositi" u druge dve, tzv. klasične neeuklidske geometrije: eliptičnu i geometriju Lobačevskog) ovde ćemo odrediti oznake ove četiri geometrije. Prvim slovom označavaćemo vrstu-tip metrike rastojanja, drugim slovom tip metrike pramena pravih, a trećim tip metrike pramena ravni. Kako je u slučaju eliptične geometrije svaki od ovih tipova eliptičan jer je određen imaginarnom apsolutom oznake ove geometrije biće EEE. Što se tiče hiperbolinih geometrija među pomenutim su isključivo one koje

9)Što je bez uticaja obzirom da su metrike određene kružnom apsolutom i krivom drugog reda projektivno ekvivalentne.

odgovaraju metrici određenoj ovalnom apsolutom [10]. Prvu od njih, poznatu geometriju Lobačevskog označavaćemo sa HEE. Projektivno metričku geometriju spoljašnosti ovalne apsolute čije su prave projektivne duži čiji krajevi pripadaju apsoluti a sve ostale tačke njenoj spoljašnosti, označavaćemo sa HHE. Oznake neposredno ukazuju da su metrike rastojanja i pramenova pravih hiperbolične, a metrika pramenova ravni eliptična. Pri utvrđivanju osnovnih pojmova ove geometrije nismo naveli da su ravni ove geometrije skupovi spoljašnjih tačaka projektivnih ravni koje seku apsolutu smatrajući da to neposredno proizlazi iz činjenice da prave ove geometrije pripadaju projektivnim pravim koje seku apsolutu. Naime ako neka ravan projektivno metričke geometrije HHE ne bi sekla apsolutu tada toj ravni ne bi pripadala nijedna prava te geometrije što bi, što ćemo kasnije podrobnije objasniti, protivurečilo nekim osnovnim svojstvima koje zadovoljavaju metričke geometrije [11]. Pošto na osnovu 2. slova zaključujemo da su središta pramenova pravih tačke spoljašnosti apsolute, dovoljno bi bilo reći da su prave ove geometrije projektivne duži čiji krajevi pripadaju apsoluti, jer obzirom da je skup tačaka ove geometrije skup tačaka spoljašnosti apsolute ako bi prave bile one od takvih projektivnih duži koje pripadaju unutrašnjosti apsolute

---

10) Ovde smo upotrebili izraz iz /8/ (str.395). Inače u P_3 sem ovalnih površi koje su nedegenerisane površi drugog reda topološki ekvivalentne sferi euklidskog prostora postoje i realne nedegenerisane površi drugog reda koje su topološki ekvivalentne torusu: takve površi sadrže prave (/8/, str.395.). U /13/ se ovakve površi nazivaju "quadriques reglees (str.311.); u /19/"pravčaste kvadrike" (str.65. i 91.); Ove kvadrike predstavljane su na sl4.t.4.(/27/,str.216.).

11) Naravno, pod pretpostavkom da relaciju incidencije "shvatimo" na prirodan način tj. kao suženje relacije incidencije projektivnog prostora na skup tačaka, pravih i ravni odgovarajuće projektivno metričke geometrije.

onda takve prave ne bi sadržale nijednu tačku ove geometrije i ne bi bile ni likovi (figure) ove geometrije.

Projektivno metrička geometrija EHH ili samo geometrija EHH (ovo skraćenje naziva ubuduće ćemo redovno primenjivati) je geometrija kojoj je metrika rastojanja eliptična, a uglovna metrika pramenova pravih i ravni hiperbolična. Dakle iz ovog nedvosmisleno sledi da su prave ove geometrije projektivne prave koje ne seku apsolutu, a ravni spoljašne oblasti projektivnih ravni koje seku apsolutu (da ove ravni seku apsolutu sledi iz toga što je uglovna metrika pramenova pravih hiperbolična a da su ravni ove geometrije spoljašnje oblasti tih ravni sledi iz činjenice da su prave ove geometrije projektivne prave spoljašnosti apsolute. Znači prva dva slova oznake ove geometrije, ako je poznato da je ona trodimenziona, u potpunosti određuju prirodu ove geometrije - treće slovo sem što ukazuje da se radi o trodimenzionoj hiperboličnoj geometriji u izvesnoj meri olakšava identifikovanje geometrije. Inače ako ne bi bilo poznato da se radi o hiperboličnim geometrijama ovalne apsolute, onda se bez trećeg slova one ne bi mogle razlikovati od ostalih hiperboličnih 3 - geometrije te je, u tom širem kontekstu, ono neophodno.

Geometrija EEH je hiperbolična 3- geometrija ovalne apsolute tj 3 - geometrija Lobačevskog čije su prave i ravni projektivne prave i ravni koje ne seku apsolutu (za ravni smo to zaključili na osnovu drugog slova oznake na sledeći način: ako bi projektivne ravni, koje u celini ili pak samo njihove oblasti "shvatimo" kao ravni geometrije EEH, sekle apsolutu onda bi uglovna metrika pramena pravih ove geometrije bila hiperbolična).

Navešćemo i način označavanja koji se za ove geometrije primenjuje u /27/. "Klasična geometrija Lobačevskog prema načinu na koji je označena njoj odgovarajuća metrika označavala bi se sa ${}^1S_3$ (${}^1S_2$, ${}^1S_1$, S2) (gornje levo polje tabele "hiperbolična metrika rastojanja" /27/ str. 217. ili prilog 1 rada). Tu su (uzagradi posle oznake ${}^1S_3$ hiperboličnog 3-prostora date oznake ravni, pravih kao i ravni čiji su polovi tačke date metrike, navedenim redom. Metrike ravni čiji su polovi tačke date metrike istovetne su uglovnoj metrici snopa ravni date geometrije. Oznake metrike geometrije HHE nalaze se u istoj tabeli, u desnom gornjem uglu. Oznake geometrije EEH i EHH nalaze se, na istoj strani u prvoj tabeli: "eliptična metrika rastojanja" (vidi prilog 1.). Oznaka metrike koja odgovara geometriji EHH je u donjem desnom polju te tabele, a metrike koja odgovara geometriji EEH u njnom donjem levom polju. Sve pomenute geometrije su specijalni hiperbolični 3-prostori, naime 3-prostori Lobačevskog na šta ukazuje indeks i = 1 u oznaci ${}^1S_3$ - ispred zagrade -ovih prostora. Smatramo da je i u ovom slučaju, za geometrije spoljašnjosti apsolute, umesto oznake ${}^1S_3$ pogodnije bilo upotrebiti oznaku ${}^3S_3$ čime bi se odmah nagovestilo da je sopstvena oblast odgovarajućeg prostora spoljašnjosti apsolute (u ostalom ovo bi bilo u skladu sa onim što o tome isti autor u istoj knjizi /27/ izlaže na str. 211.). Ilustracije ovih geometrija date su na sl.4.3. (/27/, str.216.); prilog 1. dopunili smo našim oznakama ovih geometrija uz odgovarajuće slike. Na sl. 4.4. (/27/, str. 216.) ilustrovani su ostali hiperbolični 3-prostori. Apsoluta ovakvih prostora je "pravčasta" kvadrika. Projektivni trodimenzioni prostor u kome je zadata ovakva apsoluta označena je u /27/ sa ${}^2S_3$ jer je indeks i "pravičaste površi drugog reda trodimenzionog projektivnog prostora jednak 2 (vidi npr./8/, gl.V, § 13. str. 394 - 395.).

6. <u>Projektivno metričke geometrije istih projektivnih n-prostora</u>. Razlozi iz kojih se u slučaju kada je apsoluta nedegenerisana kvadrika u odgovarajućem metričkom prostoru izgrađuje više projektivno metričkih geometrija izloženi su implicitno još u tački 4. kada se, na osnovu rezultata dela /27/, istaklo da je broj projektivnih metrika veći od broja projektivnom metričkih prostora. Ovu činjenicu, u slučaju dvodimenzionih projektivno metričkih prostora, pomenuli smo još u uvodu, a zatim i na str. 4. rada. U tački 5, koju smo posvetili označavanju projektivno metričkih geometrija dvodimenzionih i trodimenzionih proširenih prostora Lobačevskog, određujući likove tih prostora koji predstavljaju osnovne pojmove tih geometrija i nabrajajući te geometrije još detaljnije smo se približili neposrednom objašnjenju pravih razlog iz kojih se geometrije istog projektivno metričkog prostora treba da razlikuju međusobno.

U tački 1. § 4. dela /10/ korišćenjem relacija (1) i (2) (str. 328. i 329.) za određivanje projektivne mere ugla i projektivne mere duži ravni ${}^1S_2$ izvodi se sledeći zaključak:

"Takav je opšti karakter ustanovljene metrike. Vidimo da za dobijanje realnih značenja rastojanja i uglova moramo u različitim delovima ravni na razne načine izabrati značenje množitelja k u formulama (1) i (2), tako k u formuli (1) za tačke spoljašnjosti apsolute k^2 mora biti realan broj, a za tačke unutrašnjosti apsolute ovaj množitelj mora biti imaginaran (misli se na tačke koje su temena uglova čiji merni broj određujemo. Detaljno obrazloženje ove činjenice u slučaju kada je teme ugla tačka unutrašnjosti apsolute može se naći u /23/, str. 219-220.-primedba D.Cvetković). Da bismo dobili jedinstvenu metriku u celoj ravni neophodno je odrediti vrednosti množitelja k u formulama (1) i (2) i samim tim odvojiti imaginarne uglove i rastojanja od realnih". Dakle, merenje rastojanja tačaka nekog prostora mora se obavljati na jedinstven način. Slikovitije rečeno ne može se rastojanje dveju tačaka istog prostora meriti relnim, a drugih dveju imaginarnim "metrom". Sem toga za svake dve tačke bilo koje prave prostora postoji određeno rastojanje. Zato ako se radi o tačkama spoljašnjosti ovalne apsolute, moramo se odlučiti za jednu od sledećih dveju mogućnosti. Mogućnost određivanja rastojanja bilo kojih dveju tačaka spoljašnjosti apsolute koje pripadaju pravoj koja ne seče apsolutu povlači, na osnovu prethodnog, nemogućnost određivanja rastojanja bilo kojih dveju tačaka te spoljašnjosti koje određuju projektivnu pravu koja seče apsolutu i obratno. Zato su, u prvom slučaju prave dvodimenzione projektivne metričke geometrije spoljašnjosti apsolute projektivne prave koje ne seku apsolutu, a u drugom slučaju preseci projektivnih pravih koje seku apsolutu sa spoljašnjošću apsolute.

Pri određivanju likova izvesnog projektivno metričkog prostora koji predstavljaju prave njemu odgovarajuće geometrije (odgovarajućih geometrija) može biti korisna i teorema Hamela: "U jednom istom prostoru s projektivnom metrikom ne mogu istovremeno postojati oba tipa linija: ili su sve prave tog prostora metričke prave (misli se na prave podskupove odgovarajućih projektivnih pravih - prim. D.C.) ili su sve one veliki krugovi jednake dužine"(/3/, str.149.). Pojam metričke prave kao i pojam velikog kruga definisani su na str. 146. istog dela /3/.

Sva prethodna obrazložrnja određivanja projektivno metričkih geometrija izvesnog projektivno metričkog prostora, pa samim tim i razlikovanja dve ili više geometrija u nekim od tih prostora u osnovi su u primeni početne Kelijeve ideje uvođenja metrike, prvo na pravoj, a zatim i u ravni korišćenjem kvadratnih formi[12]. U svakom slučaju nijedno od tih obrazloženja nije sintetičke prorode.

Na osnovu proučavanja do sada aksiomatizovanih geometrija, i to u duhu Hilberta ili Bahmana, a ne H. Weyl-a i J. Dieudonné-a, zaključili smo da je pretpostavka svojstva slobodne pokretljivosti neophodan uslov za definisanje metrike odgovarajuće geometrije. Naime bez mogućnosti "prenošenja" jedinične duži i jediničnog ugla ne mogu se duži i uglovi čak ni upoređivati a kamoli meriti. O tome koliki značaj Hilbert pridaje činjenici da u geometriji prve tri grupe aksioma njegovog sistema aksioma važi slobodna pokretljivost može se zaključiti po tome što i pre § 6. posvećenog posledicama aksioma podudarnosti (i tako nazvanog), Hilbert odmah po uvođenju svake od aksioma podudarnosti ukazuje na ulogu koju ta aksioma ima u obezbeđenju slobodne pokretljivosti ravni koja odgovara geometriji prve tri grupe aksioma njegovog sistema. Tako, odmah posle formulisanja aksiome III_1 (/32/,str.11.) ističe: "Ova aksioma zahteva mogućnost prenošenja duži" a posle aksiome III_3 "Ova aksioma izražava zahtev mogućnosti sabiranja duži" da bi se, posle aksiome III_4 ukratko zaključilo "svaki ugao se može na jednoznačan način preneti u datoj ravni na datu polupravu sa date strane." Zatim se, na istoj strani 14. u delu /32/zaključuje da je prenošenje duži jednoznačno. U § 6. "Posledice aksioma podudarnosti" (str. 15-26. istog dela) zasnivanje upoređivanja uglova kao i upoređivanja

12) Sem proučavanja originala "On quantics" i prevoda samo šestog od ukupno deset memoara tog dela na ruski ("Šestoj memuar o formah,...") oradu Kelija, o ulozi koje su njegove ideje imale u formiranju Klajnove koncepcije, može se steći prava slika iz § 70. dela /12/str.130-146.

veličina duži (str.20. i 21.) smatraju se značajnim karakteristikama geometrije prve tri grupe aksioma ovog sistema.

Za razliku od Hilberta, koji aksiomama podudarnosti određuje svojstva ossnovne relacije podudarnosti na osnovu kojih se tek naknadno definišu transformacije podudarnosti, mnogi drugi matematičari [13] izgradivali su istu geometriju tako što su umesto aksioma podudarnosti koristili aksiome kretanja (ili preciznije, aksiome transformacija podudarnosti). Zasnivanje geometrije na osnovu pojma simetrija, čiji je danas najznačajniji predstavnik F. Bahman, u suštini je sada najaktuelnija varijanta te koncepcije geometrije. U njegovom delu navedena je i teorema 26., koji bismo mogli opisatti kao teoremu o strogoj određenosti kretanja: "Neka je dat par: tačka S i njoj incidentna prava t; izaberimo još jedan takav isti par. Ako postoji kretanje f, koje prvi par prevodi u drugi, tada postoje tačno četiri kretanja, koja prvi par prevode u drugi. Ona se dobijaju množenjem elemenata 1,S,t,St četvoročlane grupe Klajna kretanjem f" (/1/, str. 78.).

Ako bi se zahtevalo da za svaka dva para: tačku S injoj incidentnu pravu t i tačku S′ i njoj incidentnu pravu t′ metričke (apsolutne) geometrije postoji element grupe kretanja, koji par (S,t) preslikava na par (S′,t′) tada bi taj zahtev bio ekvivalentan pretpostavci da metrička (apsolutna) geometrija raspolaže slobodnom pokretljivovošću. Ovaj zahtev, u odgovarajućem delu rada formulisan

---

13) U Hilbertovo doba po tome je najpoznatiji Schur F. (i u vezi s tim njegove, takođe"Grundlagen der Geometrie", iz 1909. god.) čija ideja zamene Hilbetrovih aksioma podudarnosti aksiomama kretanja u znatnoj meri potiče još od Giuseppe Peano-a i M. Pieri-a.

kao aksioma G2 grupe aksioma transformacije podudarnosti zajedničke za sve sisteme aksioma projektivno metričkih geometrija koje ćemo formirati u sledećoj glavi, obezbeđuje svojstvo slobodne pokretljivosti u svakoj od tih geometrija.

A.V. Pogorelov, koji takođe zastupa koncepciju takvog razvijanja geometrije u kojoj se umesto posredno, na osnovu aksioma podudarnosti, kretanje uvodi neposredno - aksiomama kretanja-slobodnu pokretljivost obezbeđuje sledećom aksiomom:

Aksioma III_7. Neka su α i β ma koje ravni, a i b prave ovih ravni, A i B tačke pravih a i b. Tada postoji jedinstveno kretanje, koje prevodi tačku A na B, zaddatu polupravu prave a, određenu tačkom A, - na zadatu polupravu prave b, određenu tačkom B, zadatu poluravan ravni α, određenu pravom a, - u zadatu poluravan β, određenu pravom b. (/29/, str. 32.).

U monografiji /25/ Paul Rossier iz ubeđenja da je svojstvo slobodne pokretljivosti bitno svojstvo ma koje metričke geometrije "prevazilazi" nedostatak "apstraktne" pseudoeuklidske geometrije", za koju prethodno pokazuje da je geometrija Ajnštajnove specijalne teorije relativnosti, razvijanjem još jedne-"sintetičke projektivne geometrije". Apstraktnom pseudoeuklidskom geometrijom autor naziva upravo geometriju koja je, prema shvatanju sovjetskih autora koje smo i mi usvojili, pseudoeuklidskaj geometrija - jedna od devet ravnih projektivno metričkih geometrija. Pomenutu autor, iz razloga za koje bi se moglo pretpostaviti i da su posledica nepoznavanja radova sovjetskih autora o projektivno metričkim geometrijama, previđa mogućnost da se pomenuti nedostatak može ukloniti i tako što se u projektivnom (ili afinom) modelu pseudoeuklidske geometrije ne moraju sve projektivne prave bez tačke (ili sve afine prave) smatrati pravama pseudoeuklidske geometrije.

Na osnovu razmatranja u drugom delu ove tačke možemo, ali sada na sintetički način, obrazložiti zašto na primer u ravni $^1S_2$ postoje tri metričke geometrije. Kao što je dobro poznato transformacije podudarnosti bilo koje geometrije te ravni predstavljene su suženjem automorfizama apsolute na oblast te geometrije. S obzirom da su ti automorfizmi istovremeno i automorfizmi kako unutrašnjosti, tako i spoljašnjosti apsolute, neophodno je, prema delu zahteva izloženom u poslednjem stavu str. 18. rada, u ravni $^1S_2$ razlikovati najmanje dve geometrije. Ali pošto se tim automorfizmima nijedna prava koja seče apsolutu ne može preslikati na pravu koja je ne seče i obratno, prema pomenutom zahtevu i u spoljašnjoj oblasti apsolute postoje najmanje dve geometrije. Na sličan način možemo obrazložiti i zbog čega u prostoru $^1S_3$ postoje najmanje četiri projektivno metričke geometrije. Jedina razlika sasojala bi se u tome što umesto pomenutog zahteva uzimamo u obzir i njegovo uopštenje na trodimenzioni prostor čiji je sadržaj skoro istovetan aksiomi III_7. Ovo isto se odnosi i na utvrđivanje najmanjeg broja projektivno metričkih geometrija prostora ^1S_n.

7. <u>Odnos stranica trougla projektivno metričkih geometrija</u>. U delima /1/, /3/ i /13/ kao projektivno metričke dvodimenzione geometrije navode se samo euklidska, eliptična i geometrija Lobačevskog. U svakom od tih dela ograničenja iz kojih proizlazi ovo uže shvatanje projektivno metričke geometrije data su u različitim vidovima. Na osnovu detaljnog proučavanja tih dela zaključili smo da se u osnovi ta ograničenja mogu svesti na sledećim

dvema pretpostavkama:

a) Za svake dve tačke bilo koje projektivno metričke geometrije postoji prava koja ih sadrži.

b) U svakoj od projektivno metričkih geometrija važi nejednakost trougla u strogom smislu.

Ubeđenje da u svim projektivno metričkim geometrijama važe pretpostavke a) i b) proisteklo je iz toga što one važe u svim klasičnim geometrijama: euklidskoj, eliptičnoj i geometriji Lobačevskog koje su najpoznatije, najviše proučene i najpotpunije razvijene. Međutim sledećim razmatranjem pokazaćemo da nejednakost trougla u strogom smislu važi samo u klasičnim geometrijama. U ovim razmatranjima, ukoliko se tiču dvodimenzionih projektivno metričkih geometrija različitih od geometrije ravni ${}^{1}S_{2}$ oslanjaćemo se na rezultate izložene u delu /27/. Tako "Prostor ${}^{i}R_{n}$ (pseudoeuklidski n-prostor indeksa i - prim. D.C.) nije metrički prostor u smislu 1.1.2. jer rastojanje AB između tačaka A i B ovde ne mora biti realan broj, a nejednakost trougla (1.22.) ovde je zadovoljena samo u onim 2-ravnima, u kojima je zadovoljena Košijeva nejednakost, a u takvim istim 2-ravnima, u kojima važi nejednakost (3.8.) (slobodnije rečeno "anti-Košijeva" nejednakost-dodao D.C.) za trougao ABC čije su sve tri stranice realne važi

$$AC \geqslant AB + BC \qquad (3.10)$$

To nas nimalo neće sprečavati da za prostor ${}^{i}R_{n}$ upotrebljavamo termine "metrika" ili "izometrični" (/27/ s3.1.2. str. 118.)".

I za koeuklidske tj. geometrije dualne euklidskoj i kopseudoeuklidske tj. geometrije dualne pseudoeuklidskoj autor dela /27/ sa istim pravom upotrebljava termine "metrika" i "izometričnost", iako u njima postoji trougao stranica AB,BC,AC takav da je

$$AC = AB + BC \qquad (5.43)\ (/27/str.276)$$

tj. da za takav trougao važi "jednakost trougla".

I u idealnim oblastima prostora ^1S_n " strane a,b,c trougla mogu biti ne samo realne već i čisto imaginarne" (/27/ 4.1.1. str. 213.). Tako na primer, u geometriji HH ravni $^1S_2$ postoje tri tačke takve da dve od njih određuju pravu koja ne seče apsolutu, a svaka od njih sa preostalom određuje prave koje seku apsolutu. U tom slučaju u datoj geometriji nije određeno rastojanje dveju od tri pomenute tačke te se u toj geometriji ne može odrediti dužina odgovarajuće stranice trougla čija su temena pomenute tačke pa se ona ne može upoređivati sa zbirom dužina preostalih dveju stranica.

O pretpostavci a) biće dovoljno reči u sledećem paragrafu.

§ 2. SISTEMI AKSIOMA DVODIMENZIONIH PROJEKTIVNO METRIČKIH GEOMETRIJA

1. Uvod. Aksiomatizovanjem geometrija različitih od klasičnih nije se bavio veliki broj autora. Ovo se može objasniti činjenicom da ozbiljnije interesovanje za ove geometrije počinje da raste tek od četrdesetih godina ovog veka. Čak i proučavanje najprostijih hiperboličnih prostora (ili kako su ih ranije nazivali: neuklidskih prostora) različitih od klasičnih teklo je veoma sporo. Tako je prva monografija u kojoj se detaljno izlaže o geometrijama ovih prostora bila "Neeuklidova geometrija" B. A. Rozenfeljda označena u literaturi rada sa /26/. Njegovo delo "Neeuklidovi prostori", /27/ sigurno je najsveobuhvatnije delo posvećeno toj problematici. Međutim sistemi njegovih aksioma uključuju i aksiome odgovarajućih vektorskih prostora te se može smatrati da on u izvesnom smislu razvija geometriju po osnovnoj koncepciji Weyl-a. Od aksiomatika tih geometrija formiranih u sintetičkom duhu navešćemo aksiomatiku R.G. Proskurine izloženu u radu "Aksiomatsko izgrađivanje dvodimenzione pseudoeuklidske geometrije" označenom u literaturi sa /36/ i "Aksiomatsko izgrađivanje trodimenzione parabolične geometrije" V.I. Parnaskog označenog u literaturi sa /35/. Na osnovu proučavanja literature zaključili smo da uopšte ne postoje sistemi aksioma geometrija prostora ${}^1S_n$.

U ovom delu rada odredićemo princip formiranja sistema aksioma i na osnovu tog principa odrediti sisteme aksioma svih dvodimenzionih projektivno metričkih geometrija. S obzirom da će treću grupu aksioma predstavljati aksiome transformacija podudarnosti, a ne aksiome podudarnosti, na osnovu takvih sistema aksioma ove geometrije se mogu izgrađivati ne u Hilbertovom, već u Bahmanovom duhu. Pre nego što pređemo na ostvarenje postavljenog cilja izložićemo nekoliko napomena opšte prirode.

U izgrađivanju bilo koje dvodimenzione geometrije polazi se od izvesnog skupa S čije elemente nazivamo tačkama i određene vrste podskupova tog skupa koje nazivamo pravama. "Skup S, njegovi elementi i njegovi podskupovi prave i ... su polazni pojmovi (objekti) u geometriji.

U skupu S definisaćemo razne relacije. Neke od njih su polazne relacije pa ih, kao i polazne pojmove, ne definišemo eksplicitno nego implicitno, preko aksioma." (/24/, str. 1.).

Osnovne (polazne) relacije ovih geometrija su, osim relacije incidencije i relacije poretka. Pošto je svaka od ovih geometrija metrička, u svakoj od njih uvodi se i relacija podudarnosti likova odgovarajuće geometrije. S obzirom da u radu usvajamo koncepciju izgrađivanja geometrija u kojoj je III grupa aksioma grupa aksioma transformacija podudarnosti, u radu će transformacije podudarnosti - unarne operacije biti osnovni pojam, dok je relacija podudarnosti izvedeni pojam ovako koncipiranih geometrija.

I skup (sistem) aksioma projektivno metričkih geometrija različitih od klasičnih razložićemo na podskupove (grupe) aksioma. S obzirom da se aksiomama I grupe karakteriše relacija incidencije koja je relacija skupovne prirode jer određuje da li je dati element skupa S element datog podskupa - prave skupa S odnosno da li data prava tog skupa sadrži dati element skupa S [14]) može se očekivati da je većina aksioma incidencije zajednička za sveprojektivno metričke geometrije. Dve aksiome grupe aksioma transformacija podudarnosti koje ćemo predložiti u radu zajedničke su za svih devet dvodimenzionih projektivno metričkih geometrija. Još u klasičnim geometrijama znatnije razlike nastaju usled toga što je relacija poretka euklidske geometrije i geometrije Lobačevskog tromesna, a odgovarajuća relacija eliptične geometrije četvoromesna relacija. Ovo odgovara razlici metrike rastojanja u ovim geometrijama: u prvom slučaju ona je hiperbolična ili parabolična, a u drugom eliptična. S obzirom da u slučaju geometrija različitih od klasičnih i metrika uglova nije uvek eliptična ovo povećava broj tih geometrija. Kao što se iz ove kratke napomene može naslutiti osnovni princip formiranja aksioma projektivno metričkih geometrija koji ćemo primeniti u ovom radu biće u tesnoj vezi sa osnovnim

14) Mada je moguće istu definisati i na "neprirodan" način, na što ukazuje fusnota 1 na str.348. dela "Geometričeskie preobrazovanija" I.M.Jaglom-a (II deo, Moskva 1956.). Ali u okvirima ovog rada i u većini drugih radova pa i udžbenika geometrijskog sadržaja tumačenje relacije incidencije kao relacije skupovne prirode ne dovodi do protivurečnosti i pokazuje se vrlo korisnim.

principom klasifikacije metrika koje odgovaraju tim geometrijama. Aksiome koje smo nazvali aksiomama korincidencije - takođe zajedničke svim ovim geometrijama - omogući će da dokažemo tvrđenja koja će biti neposredan podsticaj za uvođenje V grupe aksioma u čijem sastavu se nalaze i aksiome koje odgovaraju aksiomama V grupe aksioma klasične geometrije. S obzirom da aksiome grupe aksioma neprekidnosti, budući da će biti usaglašene sa aksiomama poretka, ne povećavaju broj razmatranih geometrija, njihov konačan broj dobija se tek uvođenjem V grupe aksioma.

Kao što se iz prethodnog moglo naslutiti ovaj uporedni način formiranja sistema aksioma svih projektivno metričkih geometrija dovodi do sistema aksioma koji nisu nezavisni. Međutim, pokazaće se da u svim slučajevima, osim u slučaju geometrije HH, naknadno formiranje nezavisnih sistema aksioma iz tako dobijenih sistema ne predstavlja znatnu teškoću.

2. <u>Aksiome incidencije</u>. Upoređivanja aksioma incidencije projektivno metričkih geometrija koje su dosad aksiomatizovane sa onim formulama projektivno metrički geometrija koje se tek izgrađuju kao geometrije određenih oblasti projektivne ravni, za koje smatramo da bi trebalo da predstavljaju aksiome incidencije tih geometrija, to i potvrđuju. Ta upoređivanja pokazala su da je formula "Za svake dve tačke postoji prava koja ih sadrži" specifičnost klasičnih geometrija (eliptične, euklidske i geometrije Lobačevskog) u onoj meri u kojoj je specifičnost aksioma dvodimenzione eliptične geometrije po kojoj se svake dve prave seku (što ćemo kasnije detaljno obrazložiti).U cilju pripremanja formiranja zajedničkog aksiomatskog jezgra za sve projektivno metričke geometrije

uklonićemo iz prve grupe Hilbertovog sistema aksioma prvu aksiomu (aksiome incidencije Hilbertovog sistema sem na str. 4. dela /32/ gde se nazivaju aksiomama veze mogu se videti i na str. 1. udžbenika /24/). Iz ove aksiome (označene i u /32/ i u /24/ sa I_1) proizlazi da svaka tačka pripada bar onolikom broju pravih koliko bilokoja prava sadrži tačaka. Prema tome u sistemu aksioma koji sadrži pomenutu aksiomu svaka tačka incidentna je sa bar dve prave. Izostavljanjem ove aksiome bez odgovarajućih proširivanja Hilbertovog sistema aksioma u geometriji tog sistema aksioma ne može se dokazati ni da tačka pripada bar dvema pravim niti da ne pripada bar dvema pravim. Zato ćemo aksiomama incidencije pridružiti i sledeću aksiomu:

I_3 Svaka tačka incidentna je sa najmanje dve prave.

Prema tome prvu grupu aksioma incidencije, zajedničku za sve dvodimenzione projektivno metričke geometrije sačinjavaju sledeće tri aksiome:

I_1 Za svake dve tačke A i B postoji najviše jedna prava koja je incidentna sa svakom od tačaka A i B.

I_2 Za svaku pravu postoje bar dve tačke koje su sa njom incidentne. Postoje bar tri tačke koje nisu incidentne sa istom pravom.

I_3 Svaka tačka incidentna je sa najmanje dve prave.

3. <u>Aksiome poretka</u>. Upoređivanje aksiome poretka koje se odnose na klasične geometrije ukazuje da se grupe aksioma poretka apsolutne geometrije u Boljajevom smislu bitno razlikuju od grupe aksioma poretka eliptične geometrije. Aksiomama poretka apsolutne geometrije određuje se troelementna (ternarna ili tromesna) relacija "između" u skupu tačaka iste prave. Međutim u skupu ta-

čaka iste prave eliptične geometrije ne može se u toj geometriji grupom aksioma poretka okarakterisati troelementna već četvoroelementna relacija "razdvojenosti parova tačaka" te prave. Proučavanje ostalih projektivno metričkih geometrija - bilo onih koje su aksiomatizovane bilo onih koje se tek izgrađuju i to uglavnom kao geometrije određene oblasti projektivne ravni-ukazuje da se aksiomama poretka u nekim od njih u skupu tačaka iste prave može uvesti (inplicitno) tromesna relacija "između" dok je u drugim moguće tim aksiomama u tom skupu odrediti jedino četvoromesnu relaciju razdvojenosti parova tačaka. To proučavanje ukazuje da se jedino u dvodimenzionim projektivno metričkim geometrijama kod kojih je metrika rastojanja (linearna metrika) različita od eliptične aksiomama poretka može uvesti u skup tačaka prave troelementna relacija "između" dok se u slučaju projektivno metričkih geometrija kod kojih je metrika rastojanja eliptična tim aksiomama ne može okarakterisati tromesna, već četvoromesna relacija razdvojenosti parova tačaka.
U projektivnim modelima nekih od ovih geometrija i projektivno metričkim geometrijama određenih oblasti projektivne ravni (kojima smo posvetili dovoljno pažnje u paragrafu 1 rada i u njima detaljno ukazali na izvore kojima smo se pri tome služili) prave su pretstavljene na tri načina: ili su sve prave nekih od tih geometrija predstavljene projektivnim pravama, ili su u drugim od tih geometrija predstavljene otvorenim projektivnim dužima ili su u preostalim projektivno metričkim geometrijama prave predstavljene projektivnim pravama bez samo jedne tačke. Pošto se u skupu tačaka projektivne prave ne može uvesti troelementna relacija "između" već četvorelementna relacijarazdvojenosti parova tačaka, aksiomama poret-

ka skupa tačaka prave projektivno metričkih geometrija čije su prave predstavljene projektivnim pravama određuje se aksiomama poretka tih geometrija relacija razdvojenosti parova tačaka. Sve ove geometrije su projektivno metričke geometrije koje odgovaraju eliptičnoj metrici rastojanja.

Skup tačaka iste prave bilo koje od projektivno metričkih geometrije neeliptične metrike rastojanja predstavljen je skupom svih tačaka otvorene projektivne duži ili projektivnom pravom bez tačke. Suženje četvoroelementne relacije razdvojenosti parova tačaka projektivne prave koja sadrži taj skup tačaka na taj skup tačaka, pri čemu tačno jedna tačka četvorke tačaka ne pripada tom skupu predstavlja tromesnu relaciju "između" tog skupa tačaka. Prema tome u svakoj od takvih projektivno metričkih geometrija moguće je aksiomama poretka okarakterisati, u skupu tačaka iste prave, troelementnu relaciju "između". Metrika rastojanja odgovarajućih projektivnih metrika tih geometrija je ili hiperbolična ili parabolična. Iz ovog sledi da iste aksiome poretka mogu imati i različite projektivno metričke geometrije sa čime smo se već sreli u slučaju klasičnih geometrija-euklidska i geometrija Lobačevskog su dve takve geometrije. Razlikovanje eliptične od ostalih klasičnih geometrija počinje već od aksioma incidencije. Dok se aksiomom I_3 Hilbertovog sistema(/32/ str. 4. ili /24/ str.1.) "zahteva" da svakoj pravoj pripadaju najmanje dve tačke aksiomom I_3 (v.str.157. u /23/) odnosno aksiomom I.1.(/16/str.216) eliptične geometrije zahteva se da svakoj pravoj pripadaju najmanje tri tačke. Težnju da grupa aksioma incidencije bude istovetna za sve projektivno metričke geometrije možemo ostvariti na sledeća dva načina:

1) Aksiomu I_3 Hilbertovog sistema možemo preformulisati tako da njen sadržaj bude istovetan sadržaju aksiome I_3 eliptične geometrije.

2) grupu aksioma poretka svake od projektivno metričkih geometrija za koju je odgovarajuća metrika rastojanja eliptična, možemo proširiti sledećom aksiomom:

Aksioma II_0. Za svake dve razne tačke A i B koje su incidentne istoj pravoj postoje dve razne tačke C i D takve da par tačaka A,B razdvaja par tačaka C i D.

U radu se odlučujemo za drugi od ovih načina.

U euklidskoj, geometriji Lobačevskog i eliptičnoj geometriji u kojima važi da za svake dve tačke postoji prava koja ih sadrži važi i da je svaka tačka incidentna sa bezbroj pravih. Takav skup pravih nazvaćemo u radu konkurentnim pramenom pravih. Na osnovu I grupe našeg sistema aksioma, prema poslednjoj aksiomi te grupe svaka tačka incidentna je sa bar dve prave. Bez novih aksioma, na osnovu dosad predloženih aksioma ne može se dokazati da je, sem pomenute dve, tačka incidentna sa još nekom pravom.

Zato ćemo grupu aksioma poretka proširiti podgrupom aksioma poretka konkurentnog pramena pravih. Ukoliko je u projektivnom modelu ili oblasti projektivne ravni u kojoj se izgrađuje ugaona metrika odgovarajuće projektivno metričke geometrije hiperbolična, tada će ovom podgrupom aksiomom poretka u skupu pravih istog konkurentnog pramena pravih biti okarakterisana troelementna relacija "između";, ako je ugaona metrika takve geometrije eliptična, u skupu pravih konkurentnog pramena pravih aksiomama poretka ne može se okarakterisati troelementna već četvoroelementna relacija razdvojenosti parova pravih. Razlog tome je analogan odgovarajućem razlogu u slučaju aksioma poretka prave: svaki konkurentan pramen pravih projektivno metričke geometrije eliptične ugaone metrike predstavljen je u projektivnoj ravni pramenom pravih projektivne ravni a svaki konkurentan pramen pravih neeliptične ugaone metrike otvorenim projektivnim uglom ili projektivnim pramenom pravih bez tačno jedne prave. Radi kraćeg izražavanja u poslednja dva slučaja govorićemo da je konkurentan pramen pravih predstavljen u projektivnoj ravni "delom projektivnog pramena pravih". Podgrupu aksioma poretka skupa pravih konkurentnog pramena pravih kojima se određuje troelementna relacija "između" označićemo sa H a podgrupu aksioma poretka takvog skupa pravih kojom se određuje relacija razdvojenosti parova pravih sa E.

Podgrupu H čine aksiome dualne linearnim aksiomama poretka (rasporeda) Hilbertovog sistema (/32/ § 3. str. 5.) izloženih i na str.3. udžbenika /24/.

Podgrupu E čine aksiome dualne [15] aksiomama poretka eliptične geometrije i i aksiomama II_0' dualna aksiomi II_0.

I aksiome podgrupe aksioma koje se odnose na poredak tačaka prave označićemo na isti način. Radi kraćeg izražavanja ovu podgrupu aksioma nazivaćemo prvom podgrupom aksioma poretka odgovarajuće geometrije, a podgrupu aksioma poretka koja se odnosi na poredak pravih konkurentnog pramena pravih drugom podgrupom aksioma poretka. I način označavanja geometrija prve dve grupe aksioma uskladićemo upravo sa oznakama podgrupa aksiome poretka ovih geometrija. Prvo slovo oznake date geometrije H ili E zavisno od prirode relacije okarakterisane prvom podgrupom aksioma poretka, a drugo (takođe H ili E) ukazuje na prirodu relacije okarakterisane drugom podgrupom aksioma

---

15) U svim slučajevima radi se o "malom" principu dualnosti tj. principu dualnosti u ravni.

poretka. Iznad ta dva slovapovlačimo crticu čime naglašavamo da sistem aksioma ovih geometrija nije potpun. S obzirom da je prva grupa aksioma istovetna za sve projektivno metričke geometrije broj različitih projektivnih metričkih geometrija prvih dveju grupa aksioma vezan je isključivo za prirodu aksioma podgrupa aksioma poretka. Sasvim jednostavno se može zaključiti da postoje tačno četiri projektivno metričke geometrije prve dve grupe aksioma koje smo u ovom radu predložili. To su geometrije $\overline{EE}$, $\overline{EH}$, $\overline{HE}$, $\overline{HH}$. Pod uslovom da tačke ovih geometrija predstavljamo tačkama projektivne ravni a prave projektivnom pravama može se dokazati da postoji ukupno devet raznih modela ovih geometrija u projektivnoj ravni. Uz taj uslov, postoji tačno jedan takav model geometrije $\overline{EE}$ (poznati projektivni model eliptične geometrije je istovremeno model i geometrije $\overline{EE}$ i i to u smislu u kome je projektivni model euklidske geometrije). Projektivni model geometrije $\overline{EH}$ pomenute prirode su geometrija spoljašnjosti apsolute čije su prave projektivne prave (v./12/, str. 213. sl. 91.) tj geometrija ${}^{1}S_2({}S_1,{}^{1}S_1)$ (/27/, str.216. ili str. 11. rada) kojoj smo posvetili dovoljno pažnje u paragrafu 1. rada i model u kome je apsoluta "imaginarna kriva drugog reda koja se sastoji od para konjugovano kompleksnih pravih $\overline{p}$ i $\overline{q}$, koje se seku u realnoj tački Q" (/18/, str. 5. i 6. i sl. 1.6.; /12/, str. 225. "Geometrije dualne euklidskoj i pseudoeuklidskoj"). Keli-Klajnov model geometrije Lobačevskog istovremeno je model i geometrije $\overline{HE}$; to isto se može reći i za uobičajeni projektivni model euklidske geometrije. Postoji četiri razna modela geometrije $\overline{HH}$: geometrija spoljašnosti apsolute kojoj su sve prave otvorene projektivne duži (v./12/, str. 210. sl. 89; geometrija koja odgovara projektivnoj metrici označenoj sa ${}^{1}S_2$ (${}^{1}S_1$, ${}^{1}S_1$) i sl.

4.2. u/27/ na str. 2i6.; /18/ str. 5. i sl. 1.3. na str. 6.); projektivni modeli pseudoeuklidske i njoj dualne geometrije (v. /12/ str. 224. i 225. i/18/ str. 6. i slika 1.7. i 1.8. na str. 7.); projektivni model parabolične geometrije u kome je apsoluta dvojna realna tačka Q i dvojna realna prava l koja je incidentna sa tom tačkom (v.npr./18/ str. 6. i sl. 1.9. na str. 7.).

Razlog većem broju projektivnih modela geometrije $\overline{EE}$, $\overline{HH}$, $\overline{EH}$ i $\overline{HE}$ u kojima su prave tih geometrija predstavljene projektivnim pravama ili delovima tih pravih je i nepotpunost sistema aksioma ovih geometrija (ovi modeli su i neizomorfni jer su ove geometrije nekategorične).

4. <u>Aksiome transformacija podudarnosti.</u> U uvodu ovog paragrafa istakli smo da su osnovne (polazne) operacije transformacije podudarnosti projektivno metričkih geometrija. Ova transformacija <u>na</u>[16] skupa tačaka odgovarajuće geometrije nazvaćemo transformacijama podudarnosti te geometrije. Svojstva transformacija podudarnosti bilo koje od geometrija $\overline{EE}$, $\overline{EH}$, $\overline{HE}$ i $\overline{HH}$ odredićemo implicitno sledećim aksiomama:

Aksioma G1. Transformacije podudarnosti osnovnog skupa tačaka bilo koje geometrije saglasne su sa relacijajama poretka te geometrije.

Aksioma G2. Za ma koje dve prave a i b i tačke A i B takve da je tačka A incidentna sa pravom a i tačka B incidentna sa pravom b postoje tačno četiri transformacije podudarnosti koje pravu a preslikavaju na pravu b i tačku A na tačku B.

---

16) Podvučeni predlog na iza reči transformacija ukazuje da je i kodomen ove transformacije skup svih tačaka iste geometrije. S obzirom da većina matematičara pod transformacijama podrazumeva preslikavanja skupa na taj isti skup a ne u taj isti skup ubuduće iza reči transformacija nećemo dodavati predlog <u>na</u>.

Aksioma G3. Za bilo koje dve polupravé a′i b′ zajedničkog početka postoji transformacija podudarnosti koja polupravu a′preslikava na polupravu b′, a polupravu b′ na polupravu a′.

U radu " Ekvivalentnost aksioma podudarnosti i aksioma transformacija podudarnosti" koje ćemo uskoro objaviti dokazali smo da su transformacije podudarnosti bijekcije osnovnog skupa tačaka bilo koje od geometrija $\overline{EE}$, $\overline{EH}$, $\overline{HE}$ i $\overline{HH}$. Na osnovu toga sledi važna posledica:

Posledica 1. Skup G transformacija podudarnosti je model grupe.

I geometrije čiji su sistemi aksioma sistemi aksioma geometrije $\overline{EE}$, $\overline{EH}$, $\overline{HE}$ i $\overline{HH}$ prošireni grupom aksioma transformacija podudarnosti označavaćemo takođe sa $\overline{EE}$, $\overline{EH}$, $\overline{HE}$ i $\overline{HH}$. U pomenutom radu koristeći teoremu po kojoj je pri savakoj bijekciji slika preseka presek slika (v.npr. /30/ str.9 i 10.) dokazali smo i da svaka transformacija podudarnosti bilo koje od tih geometrija preslikava orijentisanu pravu na pravu koja je takođe orijentisana.

Aksiomom G2 osigurali smo svojstvo slobodne pokretljivosti u svakoj od tih geometrija, za koje smo u analizi izvedenoj u t.6. § 1 rada pokazali da je neophodno za određivanje metrike bilo koje geometrije. U radu "Ekvivalentnost aksioma podudarnosti i aksioma transformacija podudarnosti" koji će biti oblavljen uporedili smo sistem aksioma transformacija podudarnosti koji smo mi predložili sa aksiomama kretanja izloženim u udžbeniku /29/ A.V. Pogorelova. Tamo smo utvrdili da je naša aksioma G1 po smislu [17]istovetna aksiomi III_2 udžbenika/29/ (v.str. 31.) a iz

17) Mada po formulaciji ista naša aksioma je opštija jer se odnosi na relacije poretka svih dvodimenzionih projektivno metričkih geometrija.

naše aksiome G3 sledi aksioma III_6 (/29/ str. 31.). U delu /29/ nije se dokazivala ekvivalentnost aksioma kretanja i aksioma podudarnosti Hilbertovog sistema aksioma u okviru aksioma incidencije i poretka sistema. Dokazavši-u pomenutom okviru - ekvivalentnost aksioma transformacija podudarnosti i aksioma podudarnosti Hilbertovog sistema aksioma, istovremeno smo u pomenutom delu koji ćemo objaviti, dokazali i neprotivrečnost geometrije čije su aksiome aksiome incidencije Hilbertovog sistema, aksiome poretka istog sistema i aksiome transformacije podudarnosti G1,G2, G3. Činjenicu,da umesto sedam aksioma kretanja izloženih u delu /29/ kao aksiome III grupe aksioma uvodimo samo 3 aksiome transformacija podudarnosti, smatramo značajnom prednošću. Mada nismo dokazivali i nezavisnost aksioma G1, G2,G3 očekujemo, s obzirom na njihov do sada najmanji broj, da su sve one nezavisne. Okolnost da autor dela /29/ za dve od svojih sedam aksioma kretanja dokazuje da su zavisne od ostalih aksioma euklidske geometrije (vidi dokaz aksiome III_5 na str. 71. i aksiome III_6 na str. 72) ne može se tretirati kao dokaz nezavisnosti tih aksioma u okviru prve dve grupe aksioma Hilbertovog sistema jer se dokaz zasniva na korišćenju Dedekindove aksiome. Jedino je dokaz aksiome III_4 dokaz zavisnosti te aksiome u okviru prve dve grupe Hilbertovog sistema proširenog preostalim aksiomama kretanja.

Tek posle proširivanja prve dve grupe sistema aksioma ovih geometrija aksiomama transformacija podudarnosti o ovim geometrijama se može govoriti kao o metričkim geometrijama u pravom smislu. Razlozi iz kojih geometrije $\overline{\overline{EE}}$, $\overline{\overline{EH}}$,$\overline{\overline{HE}}$ i $\overline{\overline{HH}}$ smatramo metričkim istovetni su razlozima iz kojih i apsolutnu geometriju u Bahmanovom smislu smatramo metričkom: sistemi aksioma i ovih geometrija mogu se proširivati do sistema aksioma metričkih geometija. U tom cilju dovoljno je proširiti sistem aksioma ovih geometrija aksioma neprekidnosti.

5. <u>Aksiome neprekidnosti</u>. U daljem proširivanju sistema aksioma geometrije $\overline{\overline{EE}}$, $\overline{\overline{EH}}$, $\overline{\overline{HE}}$ i $\overline{\overline{HH}}$ da bi se u njima uvela metrika moguće je tim sistemima dodati samo Arhimedovu aksiomu.

Sistem aksioma ovih geometrija proširivaćemo, ipak, Dedekindovom aksiomom. Osnovni razlog tome je da je dalje izgrađivanje tih geometrija u projektivnoj ravni ili nekoj njenoj oblasti znatno jednostavnije u projektivnoj ravni u kojoj je aksioma i aksioma Dedekinda. Tako je i određivanje projektivnih modela ovih geometrija znatno jednostavnije u takvoj projektivnoj ravni. I težnja da nam neki od sistema aksioma budu potpuni (pri čemu će među njima obavezno biti sistemi aksioma geometrija čije ćemo trajektorije proučavati) jednostavnije se ostvaruje na takav način: takvom sistemu aksioma ne mora se dodavati ni kantorova ni aksioma linearne potpunosti (ova poslednja formulisana je na str. 28. /32/.

U klasičnim geometrijama aksioma Dedekinda odnosi se na skup tačaka prave. Koristeći aksiomu po kojoj se za svake dve tačke postoji prava koja ih sadrži u tim geometrijama jednostavno se može dokazati teorema koja se odnosi na skup pravih istog konkurentnog pramena pravih čiji je smisao istovetan Dedekindovoj aksiomi. Ali u našem sistemu aksioma formula "za svake dve tačke postoji prava koja ih sadrži" nije aksioma a ni teorema svih onih geometrija u čijoj oznaci je H drugo slovo - dakle u geometrijama $\overline{\overline{EH}}$, i $\overline{\overline{HH}}$ kao i svim geometrijama čiji su sistemi aksioma proširenja sistema aksioma geometrija $\overline{\overline{EH}}$ i $\overline{\overline{HH}}$. Zato je u ovom slučaju neophodno uvesti i Dedekindovu aksiomu kojom se izražava i neprekidnost skupa pravih bilo kog konkurentnog pramena pravih. Sadržaj ovih aksioma mora se uskladiti sa prirodom relacija poretka konkretne geometrije. Upravo zahvaljujući tom usklađivanju sa drugom grupom aksioma sistema aksioma koju smo predložili, kao i u slučaju aksioma G1 grupe aksiome transformacija podudarnosti, razne mogućnosti u pogledu formulisanja Dedikindove aksiome ne povećavaju broj metričkih geometrija. Ako je reč o geometriji $\overline{EH}$ npr. u kojoj se prvom podgrupom aksioma poretka E određuje relacija razdvojenosti parova tačaka, Dedekindova aksioma kojom se utvrđuje neprekidnost skupa tačaka iste prave biće formulisana na način na koji se ona formuliše u eliptičnoj (v./16/ str.218.ili /23/ § 4.str. 165.) ili projektivnoj geometriji (/22/ t.4.str.11). Dedekindova aksioma kojom se utvrđuje neprekidnost skupa pravih bilo kog konkurentnog pramena pravih iste geometrije $\overline{EH}$ je formula dualna Dedekindovoj aksiomi hiperbolične (euklidske) geometrije (v.npr. Dedekindov princip na str.75.udžbenika /24/). Tek u ovakvim sistemima aksiomanaziv "četvrta grupa aksioma sistema aksioma" ima opravdanje jer se radi o dve, a ne o jednoj aksiomi neprekidnosti (mislimo na sisteme aksioma npr. eliptične ili projektivne geometrije). Dve Dedekindove aksiome označavaćemo na sledeći način: indeks 1 uz slovo D ukazuje da je u pitanju Dedekindova aksioma koja se odnosi na skup tačaka prave - to je prva Dedekindova aksioma, a indeks 2 uz slovo D ukazuje da se ta aksioma odnosi na skup pravih bilo kog konkurentnog pramena pravih - ovo je druga Dedekindova aksioma. Tako npr. aksioma D_1 je aksioma neprekidnosti koja se sigurno odnosi na skup tačaka prave - da li je to aksioma neprekidnosti hiperbolične (euklidske) ili uopšte geometrije u čijoj oznaci je prvo slovo H ili pak geometrije u čijoj je oznaci prvo slovo E zavisi od prirode prve podgrupe aksioma poretka date geometrije.

Ako je ta podgrupa aksioma podgrupa H, prvu Dedekindovu aksiomu označićemo sa D_{1H} ; a ako je pomenuta podgrupa E sa D_{1E}. Aksioma D_{2E} je aksioma neprekidnosti koja se odnosi na bilo koji konkurentan pramen pravih - priroda te aksiome zavisi neposredno od prirode druge podgrupe aksioma poretka date geometrije. Na osnovu slova E u indeksu oznake druge Dedekindove aksiome zaključujemo da se radi o aksiomama poretka kojima se u skupu bilo kog konkurentnog premena pravih određuje relacija razdvojenosti parova pravih.

Geometrije čiji je sistem aksioma geometrija $\overline{EE}$, $\overline{EH}$, $\overline{HE}$ i $\overline{HH}$ proširen aksiomama transformacija podudarnosti i aksiomama neprekidnosti na prethodno izloženi način označavaćemo sa $\overline{EE}'$, $\overline{EH}'$, $\overline{HE}'$ i $\overline{HH}'$. Ove geometrije, koje su tek posle navedenih proširenja u pravom smislu projektivno metričke možemo i dalje proširivati ka potpunim geometrijama. S obzirom da ćemo prvim proširenjem sistema aksioma geometrija $\overline{EE}$, $\overline{EH}$, $\overline{HE}$ i $\overline{HH}$ pripremiti konačno proširivanje sistema tih aksioma do sistema aksioma svih devet dvodimenzionih projektivno metričkih geometrija sledeću tačku nazvaćemo upravo "prvim proširenjem" sistema aksioma tih geometrija.

6. <u>Prvo proširenje sistema aksioma geometrija $\overline{EE}'$, $\overline{EH}'$, $\overline{HE}'$ i $\overline{HH}'$</u>. Kao što smo pomenuli na osnovu ispitivanja projektivnih modela geometrija $\overline{EE}'$ i $\overline{HE}'$, dakle geometrija u čijoj je oznaci drugo slovo E, formula: "Za svake dve tačke postoji prava koja ih sadrži" tačna je u svakom od tih modela. Uverenje u ispravnost takvog zaključka potkrepićemo i sledećim zaključivanjem. U svakoj od geometrija u čijoj oznaci je drugo slovo E drugom podgrupom aksioma poretka u skupu pravih bilo kog konkurentnog pramena pravih određuje se četvoromesna relacija razdvojenosti parova tih pravih. Na osnovu toga zaključujemo da se u takvim geometrijama aksiomama poretka ne može okarakterisati tromesna relacija

"između" skupa pravih bilo kog konkurentnog pramena pravih. Na prethodnoj strani detaljno smo obrazložili da je u geometrijama te vrsta druga aksioma neprekidnosti aksioma D_{2E}. U svim projektivnim modelima geometrija $\overline{EE'}$ i $\overline{HE'}$ u kojima se prave tih geometrija predstavljaju projektivnim pravim ili "delovima" tih pravih pramen pravih odgovarajuće geometrije predstavljen je pramenom pravih projektivne ravni. Naime u suprotnom slučaju - ako bi neki konkurentan pramen pravih geometrije $\overline{EE'}$ i $\overline{HE'}$ bio predstavljen samo podskupom skupa pravih projektivnog pramena pravih ili presekom tog podskupa sa oblašću date geometrije - suočili bismo se sa sledećom protivrečnošću. U takav podskup pravih, ako je on "deo" projektivnog pramena pravih može se uvesti tromesna relacija "između", te bi u modelu tih geometrija važila podgrupa aksioma poretka koju smo označili sa **H**; takođe bi u tom "delu" projektivnog pramena pravih bila zadovoljena druga aksioma neprekidnosti D_{2H} - dakle takvi projektivni modeli ne bi bili modeli geometrija o kojima je reč. Ako bi pramenovi pravih bilo koje od dosad aksiomatizovanih geometrija bili u modelu predstavljeni podskupom pravih projektivnog pramena pravih, koji je različit od "dela" projektivnog pramena pravih ili preseka tog dela sa oblašću interpretacije, u takvom modelu ne bi bile zadovoljene ni druga podgrupa aksioma poretka, a ni druga aksioma neprekidnosti.

Na ovaj način pokazali smo da je svaki pramen pravih geometrija $\overline{EE'}$ i $\overline{HE'}$ predstavljen u projektivnom modelu (pod uslovom da su prave ovih geometrija u tom modelu predstavljene projektivnim pravama ili njihovim "delovima") projektivnim pramenom pravih ili presekom projektivnog pramena pravih sa oblašću interpretacija tih geometrija. Pretpostavimo da za neke dve tačke A i B jedne od geometrija $\overline{EE'}$ i $\overline{HE'}$

ne postoji prava koja ih sadrži. Pramen pravih središta A, prema prethodnom, predstavljen je u projektivnom modelu tih geometrija projektivnim pramenom pravih središta A ili presekom takvog pramena sa oblašću interpretacije odgovarajuće geometrije (sa A smo označili i tačku kojom je u modelu predstavljena tačka A jedne ili druge od ovih geometrija). Pošto je tačka B tačka te ravni, tada u modelu projektivna prava p(AB) na osnovu pretpostavke dokaza ne bi predstavljala pravu pramena pravih središta A,te pramen pravih središta A bilo koje od tih geometrija ne bi bio predstavljen projektivnim pramenom pravih središta A, niti njegovim presekom sa oblašću interpretacije tih geometrija. Na sličan način pokazaćemo da se svake dve prave geometrija u čijoj oznaci je prvo slovo E seku. U modelima ovih geometrija u kojima je osnovni skup tačaka S tih geometrija predstavljen skupom tačaka projektivne ravni ili skupom tačaka određene oblasti te ravni, a prave tih geometrija projektivnim pravama ili presekom tih pravih sa oblasti interpretacije tih geometrija, prave geometrija u čijoj je oznaci prvo slovo E ne mogu biti predstavljene "delom" projektivne prave iz sledećih razloga. Ako bi prave tih geometrija bile predstavljene podskupom tačaka projektivne prave različitom od skupa tačaka otvorene projektivne duži ili projektivne prave bez jedne tačke u takvom modelu ne bi bile zadovoljene ni prva podgrupa aksioma poretka, a ni prva Dedekindova aksioma neprekidnosti ovih geometrija. Ako bi prave tih geometrija bile predstavljene "delom" projektivne prave tada bi se u skupu tačaka te prave mogla uvesti relacija "između" te bi i u tim geometrijama aksiomama poretka koje se odnose na skup tačaka prave bila okarakterisana troelementna relacija "između" što je u suprotnosti sa činjenicom da je prva podgrupa aksioma poretka ovih geometrija podgrupa E, a ne H. Na taj način pokazali smo da se u projektivnim modelima koje razmatramo prave geometrija $\overline{\overline{EE}}'$ i $\overline{\overline{EH}}'$ predstavljaju isključivo projektivnim pravama. Ako se dve prave neke od ovih geometrija ne bi sekle tada se ni projektivne prave kojima su u modelu predstavljene te dve prave ne bi sekle, što je u suprotnosti sa aksiomom projektivne ravni po kojoj za svake dve prave projektivne ravni postoji tačka koja je incidentna sa svakom od njih.

Na osnovu prethodnog izlaganja sisteme aksioma geometrija $\overline{\overline{EE}}'$ i $\overline{\overline{HE}}'$ potrebno je proširiti (u težnji ka formiranju potpunog sistema aksioma tih geometrija) sledećom aksiomom incidencije:

Aksioma I_0. Za svake dve tačke postoji prava koja je incidentna sa tim tačkama.

Iz istih razloga sisteme aksioma geometrija $\overline{\overline{EE}}'$ i $\overline{\overline{EH}}'$ treba proširiti takođe aksiomom incidencije:

Aksioma I_4. Za svake dve prave postoji tačka koja je incidentna sa svakom od njih.

Sledećom definicijom uvodimo izvesno preslikavanje skupa tačaka prave u skup pravih konkurentnog pramena pravih čije središte ne pripada toj pravoj.

Definicija. Ako je svaka tačka prave a, ili otvorene duži te prave, incidentna sa nekom pravom pramena pravih središta A koje ne pripada pravoj a tada relaciju u kojoj svakoj tački prave a odgovara prava pramena središta A koja je sa tom tačkom incidentna nazivamo korincidencijom skupa tačaka prave u skup pravih pramena pravih.

Na osnovu aksiome I_2 korincidencija je injekcija skupa tačaka date prave ili neke njene otvorene duži u skup pravih datog pramena pravih.

Sledećom aksiomom poretka proširićemo sisteme aksioma svih dosada razmatranih geometrija.

Aksioma S1. Ako je svaka tačka prave a ili bilo koje otvorene duži te prave incidentna sa nekom pravom pramena središta A koje ne pripada pravoj a, tada u skupu takvih pravih pramena središta A važi relacija poretka iste prirode kao i u odgovarajućem skupu tačaka prave a; isto se može reći i o prirodi Dedekindove aksiome (formule) tog skupa pravih. Korncidencija pomenutog skupa tačaka na pomenuti skup pravih je izmmorfizam u odnosu na relaciju poretka tih skupova.

Pre definicije korincidencije skupa pravih pramena pravih u skup tačaka prave koja ne sadrži središte tog pramena definisaćemo otvoreni ugao.

Definicija. Ako je neki pramen pravih središta A pramen pravih geometrije u kome je druga podgrupa aksioma H, tada je otvoreni ugao pramena pravih središta A skup svih pravih tog pramena koje su između dveuju datih pravih tog pramena. Ako se radi o pramenu pravih geometrije čija je druga podgrupa aksiomaporetka E, pojam otvorenog ugla tog pramena pravih istovetan je pojmu otvorenog projektivnog ugla. U oba slučaja dve date prave su granične prave otvorenog projektivnog ugla.

Definicija. Ako je svaka prava pramena pravih središta A ili otvorenog ugla tog pramena pravih incidentna sa nekom tačkom prave a koja ne sadrži tačku A, tada relaciju u kojoj svakoj pravoj takvog skupa pravih odgovara njoj incidentna tačka skupa tačaka prave a nazivamo korincidencijom skupa pravih pramena središta A u skup tačaka prave a.

Na osnovu teoreme po kojoj za dve razne prave postoji najviše jedna tačka koja je incidentna sa svakom od tih pravih sledi da je koincidencija injekcija skupa pravih datog pramena pravih ili skupa pravih otvorenog ugla tog pramena u skup tačaka prave.

Aksioma S2. Ako je svaka prava pramena središta A ili bilo kog otvorenog ugla tog pramena incidentna sa nekom tačkom prave a koja ne sadrži tačku A, tada u skupu takvih tačaka prave a važi relacija poretka iste prirode kao i u pomenutom skupu pravih; to isto važi i za prirodu Dedekindove formule tog skupa tačaka. Koincidencija pomenutog skupa pravih na pomenuti skup tačaka je izomorfizam u odnosu na relacije poretka tih skupova.

Koristeći aksiome S1 i S2 možemo, u svakoj od razmatranih geometrija dokazati da je koincidencija bijekcija kako skupa tačaka date prave ili neke njene otvorene duži u skupu pravih konkurentnog pramena pravih, tako i skupa pravih datog pramena pravih ili skupa pravih otvorenog ugla tog pramena na skup tačaka prave ili otvorene duži te prave.

U oznaci aksioma S1 i S2 upotrebilo smo S da bismo istakli da se ovim aksiomama utvrđuje saglasnost relacije poretka razmatranih geometrija sa koincidencijom.

Pošto aksiomama S1 i S2 proširujemo sisteme aksioma svih dosad razmatranih geometrija, u cilju pojednostavljenja označavanja zadržaćemo dosadašnje oznake tih geometrija i u tekstu koji sledi pod geometrijama $\overline{\overline{EE}}'$, $\overline{\overline{EH}}'$, $\overline{\overline{HE}}'$, $\overline{\overline{HH}}'$ podrazumevati geometrije sistema aksioma geometrija $\overline{\overline{EE}}'$, $\overline{\overline{EH}}'$, $\overline{\overline{HE}}'$, $\overline{\overline{HH}}'$ proširenim aksionama S1 i S2. Geometrije koje odgovaraju sistemima aksioma geometrija $\overline{\overline{EE}}'$ i $\overline{\overline{EH}}'$ proširenim aksiomom I_4 označavaćemo redom sa $\overline{\overline{EE}}''$ i $\overline{\overline{EH}}''$, a geometriju koja odgovara sistemu aksioma geometrije $\overline{\overline{HE}}'$ koji je proširen aksiomom I_0 sa $\overline{\overline{HE}}''$.

7. <u>V grupa aksioma sistema aksioma projektivno metričkih geometrija</u>. U geometrijama $\overline{\overline{EH}}''$ i $\overline{\overline{HE}}''$ dokazaćemo

dve teoreme suštinskog značaja za dalje proširenje sistema aksioma tih geometrija. Ove teoreme su međusobno dualne: druga od njih je poznata teoreme apsolutne geometrije u Boljajevom smislu koja je u radu dokazana na drugi način s obzirom da se sistemi aksioma te geometrije u radu razlikuju od uobičajenog sistema aksioma iste (apsolutna geometrija u Boljajevom smislu je zapravo geometrija $\overline{HE}''$).

Teorema 4. Ako su tačka A i prava a geometrije $\overline{EH}''$ neincidentne, tada na pravoj a postoji najmanje jedna tačka takva da ne postoji prava koja je incidentna sa tom tačkom i tačkom A.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno- da je svakom tačkom prave a i tačkom A određena prava. Tada postoji korincidencija skupa tačaka prave a na podskup pravih pramena središta A. Na osnovu aksiome S1 u tom podskupu pramena pravih središta A relacija poretka je iste prirode kao i relacija određena prvom podgrupom E aksioma poretka geometrije $\overline{EH}''$. U tom slučaju se u skupu pravih pramena pravih središta A, koje su određene tačkom A i svim tačkama prave a, poredak tog skupa pravih ne može okarakterisati tromesnom relacijom "između" već na osnovu aksiome S1 četvoromesnom relacijom poretka koju smo označili sa E. Ovo je u suprotnosti sa činjenicom da se u geometriji $\overline{EH}''$ aksiomama poretka u skupu pravih istog pramena određuje upravo tromesna relacija "između" (na to ukazuje drugo slovo H oznake te geometrije).

Posledica 4a. U geometriji $\overline{EH}''$ postoje bar dve tačke za koje ne postoji prava incidentna sa svakom od njih.

Prema teoremi 4. svaka prava geometrije $\overline{EH}''$ incidentna je sa najmanje jednom tačkom koja sa tačkom koja toj pravoj ne pripada ne određuje pravu. U toj geometriji ne može se dokazati niti da je to jedina tačka te prave, niti da na toj pravoj postoje bar dve tačke koje sa tačkom koja toj pravoj ne pripada ne određuju prave. Zato je sistem aksioma geometrije $\overline{EH}''$ moguće proširiti jednom od sledećih dveju aksioma.

Aksioma V. P. Za svaku pravu i tačku A koja joj ne pripada postoji tačno jedna tačka te prave koja sa tačkom A nije kolinearna.

Aksioma V.H. Za svaku pravu i tačku A koje nisu incidentne postoje bar dve tačke te prave koje nisu kolinearne sa tačkom A.

Geometriju čiji je sistem aksioma sistem aksioma geometrije $\overline{EH}''$ proširen aksiomom V. P označićemo sa $\overline{EP}$ a geometriju čiji je sistem aksioma sistem aksioma geometrije $\overline{EH}''$ proširen aksiomom V.H sa $\overline{EH}'''$.

Teorema 5. Ako su prava a i tačka A geometrije $\overline{HE}''$ neincidentne, tada u prammenu pravih središta A postoji najmanje jedna prava takva da ne postoji tačka koja je incidentna sa tom pravom i pravom a.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno - da svaka prava pramena pravih središta A seče pravu a. Tada postoji korincidencija skupa pravih pramena pravih središta A na podskup skupa tačaka prave a. Na osnovu aksiome S2 taj podskup tačaka zadovoljava aksiome poretka koje određuju relaciju razdvojenosti parova tačaka skupa tačaka prave koju smo označili sa E. Ovo je u protivurečnosti sa činjenicom da je prvom podgrupom aksioma poretka u skupu tačaka prave određena tromesna relacija "između".

Posledica 5a. U geometriji $\overline{HE}''$ postoje bar dve disjunktne prave.

Teoremom 5. ne utvrđuje se da li je pomenuta prava pramena pravih središta A i jedina prava koja ne seče pravu a ili u pramenu pravih središta A sem te prave postoji bar još jedna prava koja ne seče pravu a. U sistemu aksioma ove geometrije možemo proširiti jednom od dveju sledećih aksioma:

Aksioma V P. U svakom pramenu pravih čije središte nije incidentno izvesnoj pravoj ravni $\overline{HE}''$ postoji tačno jedna prava koja je sa tom pravom disjunktna.

Za razliku od aksiome V. P koja je dualna aksiomi V P u oznaci prethodne aksiome nismo upotrebili tačku između V i P. Tačka između V i P upućuje da se odgovarajućom aksiomom utvrđuje "broj" tačaka koje sa središtem pramena nisu kolinearne.

Aksioma VH. U svakom pramenu pravih čije središte nije incidentno izvesnoj pravoj ravni $\overline{HE}''$ postoje bar dve prave disjunktne sa tom pravom.

Geometriju koja odgovara sistemu aksioma geometrije $\overline{HE}''$ proširenom aksiomom V P označavaćemo sa PE. Jednostavno se može dokazati da je sistem aksioma ove geometrije ekvivalentan sistemu aksioma euklidske geometrije tj. da je geometrija PE euklidska geometrija. Geometriju koja odgovara sistemu aksioma geometrije $\overline{HE}''$ proširenu aksiomom V H označavamo sa HE. Sistem aksioma geometrije HE ekvivalentan je sistemu aksioma geometrije Lobačevskog tj. geometrije HE je geometrija Lobačevskog.

Analizom sadržaja aksioma V P i V H i načina označavanja geometrije PE i HE koje odgovaraju sistemima aksioma koji sadrže aksiome V P i V H stiče se utisak da način označavanja ovih geometrija nije u duhu načina označavanja koji smo dosad primenjivali. Naime geometrije PE i HE nastale su proširivanjem sistema aksioma geometrije $\overline{HE}''$ aksiomama V P i V H redom. Aksiome V P i V H odnose se na prave pramena pravih, a ne na tačke skupa tačaka iste prave. Geometrije koje smo dosada razmatrali označavali smo tako što smo prvim slovom ukazivali na prirodu aksioma poretka skupa tačaka pravih , a ne skupa pravih pramena pravih. Međutim radi se o prividnoj nedoslednosti u označavanju. Aksioma-ma V P i V H, uprkos tome što se na prvi pogled odnose uglavnom na prave pramena pravih, u suštini se određuju svojstva podskupa tačaka projektivne prave kojom se u modelu predstavlja prava odgovarajuće geometrije. Naime pr vom podgrupom aksioma poretka okarakterisane su u svim dosad razmatranim geometrijama dve vrste relacija poretka skupa tačaka prave: četvoroelementna relacija razdvojenosti parova tačaka("opisana" podgrupom E aksioma poretka) i troelementna relacija "između" ("opisana" podgrupom H aksioma poretka). Međutim ova druga relacija zadovoljena je, u projektivnim modelima ovih geometrija kako u skupu tačaka projektivne prave bez tačke, tako i u skupu tačaka otvorene projektivne duži. Pošto ni ta jedina tačka u prvom slučaju, ni najmanje dve tačke u drugom slučaju, nisu tačke osnovnog skupa tačaka S geometrije $\overline{\overline{HE}}''$ nemoguće je tako neposredno (kao u modelu) razlikovati ta dva slučaja. Zato se, aksiomama V P i V H (aksiomom paralelnosti i aksiomom Lobačevskog) na posredan način ostvaruje to razlikovanje priroda pravih u geometrijama PE (euklidskoj) i HE (geometriji Lobačevskog) čiji su sistemi aksiomasistemi koji sem aksioma sistema aksioma geometrije $\overline{\overline{HE}}''$(apsolutne geometrije u Boljajevom smislu) sadrže i aksiome VP i VH redom.

"Dualno" prethodnom, u skupu pravih pramena pravih geometrije $\overline{\overline{EH}}''$, drugom podgrupom aksioma poretka "opisuje" se relacija "između". Na osnovu toga se, slično kao što smo to učinili na str. 93. i 94. rada, može pokazati da je bilo koji pramen pravih geometrije $\overline{\overline{EH}}''$ u pomenutom projektivnim modelima te geometrije predstavljen ili projektivnim pramenom pravih bez tačno jedne prave ili otvorenim projektivnim uglom. Jedini način da se u geometriji $\overline{EH}''$ izdvoje te dve mogućnosti je da formulama V.P. ili V. H. - koje se odnose neposrednije na skup tačaka prave koja nije incidentna sa središtem tog pramena pravih nego na prave tog pramena - proširimo sistem aksioma te geometrije $\overline{EH}''$ i time "odvojimo" geometrije $\overline{EP}$ i $\overline{EH}'''$ prema prirodi pramenova pravih u svakoj od tih geometrija kao geometrija određenih oblasti projektivne ravni (model geometrije $\overline{EP}$ predstavljen je u /18/ na sl. 1.6. na str. 7. a model geometrije $\overline{EH}'''$ na sl. 1.2. na str. 6. istog rada.

8. Dualnost nekih projektivno metričkih geometrija. Kao što je geometrija $\overline{HE}''$ apsolutna geometrija geometrija PE i HE, tako je i geometrija $\overline{EH}''$ apsolutna geometrija gegeometrija $\overline{EP}$ i $\overline{EH}'''$ kao i svih geometrija koje odgovaraju svim mogućim proširenjima sistema aksioma tih geometrija. Ako pokažemo da su geometrije $\overline{EH}''$ i $\overline{HE}''$ dualne geometrije iz dualnosti formula V.P i V.P kojima smo proširili redom sisteme aksioma geometrija $\overline{EH}''$ i $\overline{HE}''$ do sistema aksioma geometrija $\overline{EP}$ i PE proizaći će dualnost i ovih geometrija. Iz analognih razloga to će važiti i za geometrije $\overline{EH}'''$ i HE.

Prve grupe aksioma geometrija $\overline{EH}''$ i $\overline{HE}''$. razlikuju se u sledećem. Formula:"Za svake dve prave postoji tačka koja je incidnetna sa svakom od tih pravih" koja je aksioma I_4 geometrije $\overline{EH}''$ nije ni aksioma ni teorema geometrije $\overline{HE}''$, a formula: "Za svake dve tačke postoji prava koja je incidentna sa svakom od tih tačaka" koja je aksioma I_0 geometrije $\overline{HE}''$ nije ni aksioma ni teorema geometrije $\overline{EH}''$. Jednostavno se proverava da su aksiome I_4 i I_0 međusobno dualne.

Aksioma I_1 (označena u /24/ sa I_2) je zajednička aksioma ovih dveju geometrija. Formula dualna toj aksiomi dokazuje se isključivo korišćenjem aksiome I_1 te ja ta formula teorema i jedne i druge geometrije. Pošto važi i obratno umesto aksiome I_1 mogla bi se kao aksioma, u sistemu aksioma geometrije $\overline{EH}''$ izdvojiti formula dualna toj aksiomi. Prvom delu aksiome I_2 (kao što smo naglasili pri uvođenju ove aksiome njen sadržaj istovetan je sadržaju aksiome I_3 u udžbeniku /24/) dualna je aksioma I_4 a drugom delu tvrđenje: "Postoje bar tri prave koje nisu incidentne sa istom tačkom". Ova formula je teorema i jedne i druge geometrije koje upoređujemo. Evo dokaza te teoreme: Neka je prava a bilo koja prava geometrije koja odgovara aksiomama incidencije našeg rada (ili geometrija koje upoređujemo). Na osnovu aksiome I_2 za pravu a postoje najmanje dve tačke, npr. B i C koje su sa pravom a incidentne. Na osnovu drugog dela iste aksiome postoje bar tri tačke koje nisu incidentne sa istom pravom. Prema tome postoji bar jedna tačka, obeležimo je sa A, različita od tačaka B i C koja nije incidentna sa pravom a. Prema aksiomi I_4 postoje bar dve prave, ozančimo ih sa b i c, incidentne tački A. Prave a, b i c nisu incidentne istoj tački.

Grupa aksioma poretka geometrije $\overline{EH}''$ i $\overline{HE}''$ sadrži dve podgrupe aksioma. Prvom podgrupom aksioma poretka određuje se priroda relacije poretka skupa tačaka prave, a a drugom prirada relacije poretka skupa pravih pramena pravih. Ako se aksiomama poretka određuje četvoroelementna relacija razdvojenosti parova elemenata jednog od ta dva "dualna"skupa (koje kao i u projektivnoj geometriji možemo nazvati i pravim nizom tačaka, odnosno pramenom pravih) odgovarajuću podgrupu aksioma poretka označavali smo sa E. Ako je u tim skupovima bilo moguće podgrupom aksioma poretka odrediti svojstva troelementne relacije "između" takvu podgrupu aksioma poretka označavali smo sa H. Svakoj aksiomi prve podgrupe aksioma geometrije $\overline{EH}''$ dualna je odgovarajuća aksioma druge grupe aksioam poretka geometri- $\overline{HE}''$. Uostalom, u radu smo na takav način i uveli drugu podgrupu E aksioma poretka, u bilo kojoj od geometrija koje smo razmatrali. To isto važi i za drugu grupu aksioma poretka $\overline{EH}''$: svaka aksioma druge podgrupe aksioma poretka te geometrije dualna je odgovarajućoj aksiomi poretka prve podgrupe aksiomi poretka $\overline{HE}''$.

Prvoj Dedekindovoj aksiomi D_{1E} prve geometrije, kojom smo "odredili" da je skup tačaka prave te geometrije neprekidan i to na način na koji je neprekidna projektivna prava, odgovara druga aksioma D_{2E} druge geometrije kojom se "utvrđuje" da je pramen pravih te geometrije neprekidan isto kao što je neprekidan projektivan pramen pravih. Upoređujući sadržaj ovih dveju aksioma (v.str. 37. rada) jednostavno se može proveriti da je ova aksioma dualna prethodnoj, tj. da su ove aksiome međusobno dualne. To isto važi i za drugu Dedekindovu aksiomu D_{2H} geometrije $\overline{EH}''$ i prvu Dedekindovu aksiomu D_{1H} geometrije $\overline{HE}''$.

I aksiome S_1 i S_2 (v.str. 41. i 42. rada) kojima smo proširili sisteme aksioma svih do tada razmatranih geometrija dualne su međusobno.

Prvom aksiomom Gl aksioma transformacije podudarnosti "utvrdili" smo da su transformacije podudarnosti saglasne sa relacijama poretka određenih aksiomama poretka odgovarajućih projektivno metričkih geometrija. Operacije dualne transformacijama podudarnosti osnovnog skupa tačaka bilo koje od geometrija ravni ${}^1S_2$ su transformacije skupa pravih tog skupa. U pomenutom radu /37/ koji će biti objavljen dokazali smo, u okviru sistema prve tri grupe gde su aksiome treće grupe aksiome transformacija podudarnosti Gl, G2, G3 da transformacije podudarnosti preslikavaju skup pravih na taj isti skup pravih. Dakle transformacije dualne transformacijama podudarnosti su te iste transformacije podudarnosti.

Pošto su prema aksiomi G1 transformacije podudarnosti bilo koje geometrije ravni $^1S_2$ saglasne sa relacijama poretka, one su saglasne i sa relacijama poretka ustanovljenog u odgovarajućim pramenovima pravih tih geometrija, prema prethodnom u svakoj od tih geometrija, tvrđenje dualno aksiomi G1 je teorema.

Na osnovu sadržaja aksiome G2 (str.32.) neposredno se zaključuje da se ovo odnosi i na tu aksiomu.

Prema aksiomi G3 za svake dve poluprave zajedničkog početka postoji transformacija podudarnosti koja jednu od tih polupravih preslikava na onu drugu i obratno. Na osnovu ekvivalentnosti aksioma podudarnosti i aksioma transformacija podudarnosti dokazane u radu /37/ sledi da se u svakoj od geometrija čije smo sisteme aksioma formirali u ovom radu može dokazati da za svaku duž postoji središte. Iz istog razloga sledi i egzistencija centralnih simetrija u tim geometrijama. Ako su A i B bilo koje dve tačke jedne od pomenutih geometrija, tada centralna simetrija u odnosu na središte duži AB preslikava tačku A na tačku B i obratno. Na taj način smo dokazali da je tvrđenje dualno aksiomi G3 teorema bilo koje 2-projektivno metričke geometrije.

Na prethodni način dokazali smo da je geometrija $\overline{EH}''$ dualna geometriji $\overline{HE}''$ iz čega, pošto su i aksiome V.P i V P međusobno dualne, sledi da su takve i geometrije $\overline{EP}$ i PE, a iz dualnosti aksioma V.H i V H sledi i dualnost geometrija $\overline{EH}'''$ i HE.

U § 2.8. dokazali smo da je geometrija $\overline{EE}'$ dualna sebi samoj. Sistem aksioma geometrije $\overline{EE}''$ je sistem aksioma geometrije $\overline{EE}'$ proširen aksiomama I_0 i I_4. Pošto su te aksiome međusobno dualne i sistem aksioma geometrije $\overline{EE}''$ je dualan samom sebi. Ovaj sistem aksioma je, kao što smo

smo ranije pokazali, jedna od varijanata sistema aksioma eliptične geometrije.

Iz načina na koji smo formirali sistema aksioma $\overline{HH}'$, što se iz načina na koji smo ga označili neposredno može zaključiti i na jednostavan način obrazložiti, sledi da je taj sistema aksioma dualan samom sebi što važi i za odgovarajuću geometriju. Sistem aksioma geometrije $\overline{HH}'$ proširen aksiomom V.P označićemo sa HP. Ovaj sistem aksio-ma odgovara geometriji dualnoj pseudoeuklidskoj. Sistem ak-sioma pseudoeuklidske geometrije formiran u skladu sa nači-nom na koji smo u ovom radu formirali sve sisteme aksioma projektivno metričkih geometrija je sistem aksioma geomet-rije $\overline{HH}'$ proširen aksiomom V P. Ovaj sistem označavamo sa PH. Ako sistem aksioma $\overline{HH}'$ proširimo aksiomama V.P i V P dobićemo sistem aksioma paraboločne geometrije PP. Ako si-stem aksioma geometrije $\overline{HH}'$ proširimo aksiomama V.H i V H dobijamo sistem aksioma HH. Ovaj sistem smo formirali na osnovu glavnog modela geometrije HH pa očekujemo da pred-stavlja sistem aksioma te geometrije, pa dakle potpun sis-tem aksioma. U sledećem paragrafu dokazaćemo kategoričnost svih nabrojanih geometrija osim geometrije HH. Međutim na osnovu nekih obrazloženja u tom paragrafu može se sa zna-tnom sigurnošću očekivati da je i sistem aksioma te geome-trije potpun.

Pošto smo sisteme aksioma geometrija HP i PH formirali proširivanjem sistema aksioma $\overline{HH}'$ dualnog samom sebi, aksiomama V.P i V P koje su međusobno dualne, i si-stemi aksioma HP i PH su međusobno dualni. Aksiome V.H i V H su međusobno dualne. Zato je i sistem aksioma HH, do-bijen proširenjem sistema aksioma $\overline{HH}'$ dualnog samom sebi aksiomama V.H i V H, takođe dualan samom sebi. Na sličan način pokazuje se i da je geometrija PP dualna samoj sebi.

9. <u>Sistem aksioma "apsolutno" apsolutne dvodimenzione metričkegeometrije.</u> Upoređujući sisteme aksioma svih projektivno metričkih geometrija koje smo predložili u prvih sedam tačaka ovog paragrafa zaključujemo da su aksiome incidencije formulisane na str. 26. (§ 2.2. rada) aksiome svakog od predloženih sistema aksioma. To je istovremeno i najširi nezavisan skup tvrđenja kojima se utvrđuju svojstva relacije incidencije u svim geometrijama tih sistema aksioma. Geometriju tog sistema aksioma nazivaćemo apsolutnom ravni. Pokazaće se, da osim aksioma incidencije I_1, I_2, I_3 i aksioma transformacija podudarnosti nema drugih aksioma koje su zajedničke za sve projektivno metričke geometrije. Geometriju čiji sistem aksioma, sem navedenih aksioma incidencije sadrži i odgovarajuću grupu aksioma transformacija podudarnosti, nazivali smo "apsolutno" apsolutnom geometrijom da bismo istakli razliku između našeg i Bahmanovog sistema aksioma apsolutno metričke geometrije. Dok je naš sistem aksioma podsistem aksioma svih devet, Bahmanov sistem aksioma apsolutne metričke geometrije je podsistem aksioma samo tri projektivno metričke geometrije. Ubuduće ćemo apsolutnu geometriju nazivati apsolutno metričkom geometrijom ili samo apsolutnom geometrijom.

Osnovni (polazni) pojmovi ove geometrije su tačke i prave, jedina osnovna relacija je relacija incidencije, a osnovne transformacije transformacije podudarnosti. Priroda relacija poretka u raznim projektivno metričkim geometrijama (u nekim je ona, bilo da se odnosi na skup tačaka prave ili skup pravih pramena pravih odgovarajućih geometrija, tromesna a u nekim četvoromesna). Zato ova relacija ne može biti ni izvedena relacija apsolutne geometrije.

U formulisanju Dedekindove, pa dakle i Kantorove i Arhimedove aksiome, koristimo relacije poretka. Na osnovu prethodnog ni Dedekindova, pa ni Kantorova ni Arhimedova aksioma nisu aksiome apsolutne geometrije. Aksiome V grupe aksioma projektivno metričkih geometrija se razlikuju zavisno od geometrija na koje se odnose. Zato sistem aksioma apsolutne geometrije ne sadrži ni grupu aksioma paralelnosti.

Međutim aksiome G1 i G3 transformacija podudarnosto formulisali smo koristeći pojmove koji se definišu i na osnovu relacija izvedenih iz relacija poretka. Zato moramo izvršiti odgovarajuće izmene u formulisanju aksioma transformacija podudarnosti apsolutne geometrije koje po smislu odgovaraju aksiomama G1 i G2. Čak i same osnovne operacije - transformacije podudarnosti iz istog razloga nisu transformacije <u>na</u> apsolutne ravni, već bijekcije te ravni[18]. Takođe smo koristeći saglasnost transformacija podudarnosti sa relacijama poretka, kao i teoremu po kojoj su transformacije podudarnosti bijekcije, u /37/ dokazali da su transformacije podudarnosti kolineacije. Kako se, na osnovu prethodnog ta teorema ne može dokazati u apsolutnoj geometriji aksiomu G1A apsolutne geometrije formulisaćemo na sledeći način:

Aksioma G1A. Transformacije podudarnosti su izomorfizmi apsolutne ravni.

Na ovaj način istovremeno smo odredili dva svojstva transformacija podudarnosti: da su one bijekcije apsolutne ravni i da su saglasne sa osnovnom relacijom - relacijom incidencije apsolutne geometrije.

Aksioma G2A istovetna je aksiomi G2 formulisanoj na str. 32. rada.

---

18) Transformacije koje smo bliže odredili u t.4. i nazvali transformacijama podudarnosti prema aksiomi G1 saglasen su sa relacijama poretka svake od projektivno metričkih geometrija. Zajvaljujući tome, u tim geometrijama mogli smo za te transformacije dokazati da su bijekcije.

U formulaciji aksiome G3A umesto izraza poluprava upotrebićemo izraz prava. U verziji prilagođenoj apsolutnoj geometriji aksioma G3 (str.33. rada) glasi:

Aksioma G3A. Za svake dve prave a i b postoji najmanje jedna transformacija podudarnosti koja pravu a preslikava na pravu b, i pravu b na pravu a.

Međutim ovo prilagođenje zahteva dodavanje još jedne aksiome transformacija podudarnosti, tako da grupa aksioma transformacija podudarnosti apsolutne geometrije sadrži četiri aksiome za razliku od odgovarajuće grupe aksioma projektivno metričkih geometrija. Ta četvrta aksioma apsolutne geometrije je:

Aksioma G4A. Za svake dve tačke A i B postoji najmanje jedna transformacija podudarnosti koja tačku A preslikava na tačku B, a tačku B na tačku A.

U tački 8. dokazali smo da su geometrije $\overline{EH}''$ i $\overline{HE}''$ geometrije čiji su sistemi aksioma dualni međusobno. Pri tome smo posebnu pažnju posvetili jednostavnom dokazu stava po kome su tvrđenja dualna aksiomama incidencije I_1, I_2, I_3 teoreme one geometrije čiji sistem aksioma sadrži samo aksiome I_1, I_2, I_3. Prema tome apsolutna ravan je sama sebi dualna. Da bismo dokazali da odgovarajući stav važi i za apsolutnu geometriju potrebno je dokazati da je svako tvrđenje dualno bilo kojoj aksiomi grupe aksioma transformacija podudarnosti apsolutne geometrije ili jedna od aksioma te grupe ili teorema apsolutne geometrije. Pre svega operacije dualne transformacijama podudarnosti apsolutne geometrije su prema aksiomi G1A bijekcije skupa pravih apsolutne ravni. S obzirom da je relacija incidencije dvomesna simetrična relacija sa skupa tačaka ka skupu pravih, kao i da je ona dualna samoj sebi iz prethodnog se može zaključiti da je tvrđenje dualno aksiomi G1A aksioma G1A apsolutne geometrije. Pri tome treba imati u vidu i da su pomenute bijekcije skupa pravih apsolutne ravni istovetne transformacija podudarnosti te ravni. Iz istog razloga je i aksioma G2A dualna sebi samoj. Aksiome G3A i G4A međusobno su dualne, što se može dokazati na isti način.

Time smo dokazali sledeći stav:

Stav. Apsolutna geometrija je dualna samoj sebi. Tačnost ovog stava može se obrazložiti i na drugačiji način. Naime, prema tački 8. svaka projektivno metrička geometrija različita od geometrije EE ili HH dualna je izvesnoj projektivno metričkoj geometriji različitoj od geometrija EE i HH. Ova dualnost je uzajamna. Geometrija EE (HH) dualna je samoj sebi. Zato svako tvrđenje dualno tvrđenju koje važi u svim projektivno metričkim geometrijama, takođe važi u svim tim geometrijama.

10. Neke značajne relacije i transformacije podudarnosti projektivno metričkih geometrija. Proučavanjem glavnih modela projektivno metričke geometrije zaključili smo da su, kao i u klasičnim, među transformacijama podudarnosti tih geometrija najznačajnije centralne i osne simetrije. Na isti način, definicije tih transformacija u klasičnim geometrijama, uopštili smo do sledećih definicija centralne i osne simetrije koje važe u svim projektivno metričkim geometrijama.

Definicija 1. Transformacija podudarnosti projektivno metričke geometrije u kojoj su invarijantne sve prave incidentne istoj tački, ali nijedna od tih pravih nije invarijantna tačka po tačka, naziva se centralnom simetrijom te geometrije.

Definicija 2. Transformacija podudarnosti projektivno metričke geometrije u kojoj su invarijantne najmanje dve tačke i to tako da su u toj transformaciji invarijantne najviše dve prave koje su incidentne sa svakom od pomenutih invarijantnih tačaka je osna simetrija.

Na osnovu aksioma projektivno metričkih geometrija, kao i u radu /37/ može se dokazati da je tačka incidentna svim tim invarijantnim pravama pomenutim u definiciji 1. takođe invarijantna. Ova tačka naziva se centrom ili središtem centralne simetrije.

Na isti način se dokazuje da sem dve invarijantne tačke pomenute u definiciji osne simetrije u osnoj simetriji postoji bezbroj invarijantnih tačaka takvih da nijedna od tih tačaka nije incidentna sa više od dve invarijantne prave. Može se dokazati i nešto više od ovog: u projektivno metričkim geometrijama u čijoj oznaci je prvo slovo E a drugo različito od E svaka tačka tog skupa tačaka koje su invarijantne u osnoj simetriji i nijedna nije incidentna sa više od dve invarijantne prave incidentna je sa tačno jednom invarijantnom pravom; u projektivno metričkim geometrijama u kojima je drugo slovo oznake tih geometrija E svaka takva tačka incidentna je sa tačno dve invarijantne prave. Skup svih takvih invarijantnih tačaka nazivamo osom osne simetrije. Na prethodni način možemo razvijati poluformalne geometrije predloženih sistema aksioma.

Međutim, u ovom radu opredeljujemo se za drugačiji put. To je put koji se u delu /34/ opisuje kao razvijanje teorije modela odgovarajuće geometrije. Tim putem smo, uostalom i formirali sisteme aksioma projektivno metričkih geometrija. Na osnovu tih sistema aksioma, ako prethodno dokažemo da su ti sistemi aksioma potpuni (ili kategorični, iz čega sledi i potpunost tih sistema) možemo razvijati odgovarajuće geometrije. Kada se, kao što smo prethodno naglasili, opredeljujemo za utvrđivanje stavova ovih geometrija na osnovu njihovih glavnih modela, ipak ćemo u sledećem paragrafu dokazati kategoričnost (potpunost) nekih od predloženih sistema aksioma i odrediti i nezavisne sisteme aksioma odgovarajućih geometrija. Time omogućujemo da, ukoliko se ukaže potreba za izgrađivanjem neke od poluformalnih projektivno metričkih geometrija možemo sve rezultate dobijene na osnovu njihovih glavnih modela, bez znatnih teškoća poluformalizovati. Takav je uostalom bio i put aksiomatizacije geometrije Lobačevskog, kao i izvođenja dokaza mnogih njenih teorema za čije su formulisanje osnovni podsticaji potekli iz izgrađivanja teorije Beltrami - Klajnovog ili nekog njenog drugog modela. Ovo uglavnom važi i za većinu drugih teorija.

Definicija 1. i 2. centralne i osne simetrije, u to se ovim drugim putem sasvim jednostavno možemo uveriti, važe u svim projektivno metričkim geometrijama. One su osim toga izražene i jezikom apsolutne geometrije. Zato ih možemo smatrati i definicijama osne i centralne simetrije apsolutne metričke geometrije.

Na osnovu upoređivanja glavnih modela svih projektivno metričkih geometrija zaključili smo takođe da je pogodno i uopštiti pojam normalnosti pravih tako da se može govoriti i o normalnosti eliptičnog (hiperboličnog) niza tačaka na pravu i obratno pa čak i o uzajamnoj normalnosti izotropnog niza tačaka i prave. Podstaknuti time uvodimo i sledeću definiciju:

Definicija 3. Lik L_1 je normalan na liku L ako i samo ako je lik L_1 invarijantan u simetriji ose L i takođe ako je lik L invarijantan u simetriji ose L_1.

Na isti način zaključili smo da se suprotne tačke mogu definisati korišćenjem centralnih simetrija.

Definicija 4. Tačka $\bar{A}$ je suprotna tački A ako je različita od te tačke i ako je invarijantna u simetriji u odnosu na tačku A.

§ 3. POTPUNOST NEKIH NEKLASIČNIH PROJEKTIVNO METRIČKIH GEOMETRIJA. FORMIRANJE NEZAVISNIH SISTEMA AKSIOMA NEKIH NEKLASIČNIH PROJEKTIVNO METRIČKIH GEOMETRIJA

Ubeđenje da proširivanjem sistema aksioma geometrija $\overline{EE}$, $\overline{EH}$, $\overline{HE}$, $\overline{HH}$ te sisteme možemo proširiti do potpunih sistema aksioma tj. da ćemo pomenute geometrije proširiti[18] do potpunih geometrija, zasnivalo se na lemi 4. po kojoj "Neprotivurečan specijalni kvantifikatorski račun prvog reda ima neprotivurečno i potpuno proširenje" (/20/str. 120). Mada su pomenute geometrije teorije u kojima se aksiomatsko zasnivanje ostvaruje u okviru predikatskog računa II reda[19] smatramo da se aksiome te teorije mogu izraziti i predikatskim jezikom prvog reda[20]. Slično tome, ali uz više argumenata verujemo da se ove teorije, koje raspolažu sa dve vrste promenljivih mogu zasnovati i kao teorije sa samo jednom vrstom promenljivih. U delu /31/, na str. 26. novodi se primer u kome se u svojstvu "individua" geometrije prve dve grupe Hilbertovog sistema aksioma uzimaju samo tačke. U fusnoti 1. na istoj stranici tog dela povodom toga se primećuje: "Način izlaganja geometrije, pri kojem se u svojstvu individua (promenljivih -D.C.) koriste jedino tačke, uzima se kao osnova u aksiomatici Osvalda Veblena. Pri tom Veblen sve geometrijske relacije određuje relacijom "između". Prema tome, sve ono što se odnosi na specijalne kvantifikatorske račune prvog reda,

18) O proširenju specijalnog kvantifikatorskog računa v.definiciju 2. na str. 120 u /20/. Za razliku od načina označavanja po kome se proširenje nekog računa označava crticom iznad oznake tog računa, mi smo primenjivali suprotno pravilo smatrajući da crtica iznad ukazuje na ograničenje.

19) V.fusnotu 1. na str.152.dela /21/.

20) Nadamo se da takvo prilagođavanje neće dovesti do situacije koja je nastala prilagođavanjem Peanovih aksioma na predikatski jezik I reda i koja je dovela do teorije brojeva (elementarne) za koju je dokazano da je esencijalno nepotpuna (v.npr.str.243 u /21/.

možemo koristiti i u slučaju geometrija koje ovde razmatramo. Tako su, prema zaključku "račun je neprotivurečan ako i samo ako ima model" na str. 124. rada - udžbenika /20/ i načina na koji smo formirali sisteme aksioma geometrija $\overline{EE}$, $\overline{EH}$, $\overline{HE}$ i $\overline{HH}$ te geometrije, kao i sva njihova proširenja izložena u ovom radu, neprotivurečna. Ove geometrije tretirali smo u prethodnom razmatranju kao formalne teorije iako su aksiomatike koje smo za njih u ovom radu predložili bile poluformalnog karaktera (o ovom pojmu v.kraj t.2.§ 1. na str. 5.i fusnotu 4. na str. 5 rada). Ali poluformalne teorije veoma su po svojoj strukturi bliske formalnim, a utvrđivanje tačnosti odgovarajućih teorema analogno je u suštini izvođenju dokaza tih teorema u odgovarajućoj formalnoj teoriji. Zato ćemo neke geometrije sistema aksioma koje smo predložili povremeno identifikovati sa njima odgovarajućim poluformalnim teorijama kao što smo to učinili u uvodu ovog paragrafa i kao što ćemo to učiniti u sledećoj tački.

1. <u>Potpunost geometrija sistema aksioma $\overline{EP}$ i $\overline{EH}''$:</u>

Osnovni stav ove tačke je:

Stav 1. Ako je geometrija potpuna, tada je potpuna i geometrija koja joj je dualna.

Dokaz. Prema definiciji 1. str. 119. u /20/ geometrija je potpuna ako svaka zatvorena formula F te geometrije zadovoljava uslov: F je teorema te geometrije ili je negacija F teorema te geometrije . Ako je geometrija dualna potpunoj geometriji nepotpuna, tada u toj geometriji, prema prethodnom, postoji formula F_1 takva da ni formula F_1 ni njena negacija nisu teoreme te geometrije.Međutim, tada u odgovarajućoj potpunoj geometriji postoji formula F dualna formuli F_1 takva da ni formula F ni njena negacija nisu teoreme te potpune geometrije.

Na osnovu st. 2. sledi:

Stav 2. Geometrija $\overline{EP}$ je potpuna.

Dokaz. Geometrija $\overline{EP}$ je, što smo dokazali na str. 50. rada, dualna geometriji PE. Kao što smo u radu već nekoliko puta nagalsili geometrija PE je euklidska geometrija. Pošto je euklidska geometrija potpuna tada je, prema stavu 2. i geometrija $\overline{EP}$ potpuna. Mada je dokaz da je geometrija PE istovetna euklidskoj jednostavan, s obzirom na obimnost onog dela tog dokaza kojim se dokazuje da su sve aksiome geometrije PE aksiome ili teoreme euklidske geometrije ukazujemo da za dokaz stava 2. taj deo dokaza i nije neophodan. Naime, upoređivanjem aksioma geometrije PE sa aksiomama auklidske geometrije azključuje se da su sve aksiome euklidske geometrije istovremeno i aksiome geometrije PE (mislimo na aksiome koje smo predložili u radu). Iz toga sledi da je s obzirom na potpunost euklidske geometrije takva i geometrija PE.

Pošto smo dokazali da je geometrija $\overline{EH}'''$ dualna geometriji HE (str.103. i str.106. rada), na isti način kao što smo to učinili u slučaju geometrije $\overline{EP}$ dokazujemo da je i geometrija $\overline{EH}'''$ potpuna (podsećamo da je geometrija HE geometrija Lobačevskog). Prema tome važi:

Stav 3. Geometrija $\overline{EH}'''$ je potpuna.

2. <u>Kategoričnost geometrija $\overline{EP}$ i $\overline{EH}'''$</u>.

U § 1. 2. utvrdili smo da se pod pojmom poluformalne teorije podrazumeva relacijsko - operacijska struktura čiji su elementi proizvoljne prirode. Formiranju sistema aksioma poluformalnog karaktera projektivno metričkih geometrija u prethodnom paragrafu, prethodio je proces formiranja sistema aksioma tih geometrija sadržajnog karaktera odgovarajućih oblasti projektivne ravni, koji pri tome nismo eksplicitno istakli. Pošto se prema ovom obrazloženju geometrije čije smo sisteme formirali mogu smatrati i modelima u skupu čiji su elementi proizvoljne prirode, da bismo ih razlikovali od modela čiji su elementi konkretizovani, u ovoj tački modele prve vrste označavaćemo sa S-- ispred reči model. U dokazu osnovnog stava pomoću koga ćemo dokazati kategoričnost geometrija $\overline{\overline{EP}}$ i $\overline{\overline{EH}}'''$ koristićemo sledeću lemu:

Lema. Bilo koja dva međusobno dualna modela istog sistema aksioma neke geometrije međusobno su izmorfna. Dokaz ove leme nećemo, zbog jednostavnosti, navoditi.

Stav 4. Geometrija dualna kategoričnoj geometriji takođe je kategorična.

Dokaz. Pretpostavimo da geometrija G′čiji je sistem aksioma dualan sistemu aksioma geometrije G nije kategorična. Na osnovu te pretpostavke postoji bar jedan model M′sistema aksioma geometrije G′koji nije izomorfan sa S - modelom istog sistema aksioma. Prema prethodnoj lemi S - model sistema aksioma geometrije G′izomorfan je sa modelom istog sistema aksioma u S - modelu geometrije G. Ovaj izomorfizam ostvaruje se dualnim preslikavanjem u kome svakoj tački S - G′modela odgovara prava S - G modela, a svakoj pravoj S - G′modela pdgovara tačka S - G modela sistema aksioma geometrija G′i G redom. Taj model nazivaćmo S - G modelom sistema aksioma geometrije G′. Ako u modelu M′zamenimo mesta račima tačka i prava dobićemo model M geometrije G. S - model i Model M sistema aksioma geometrije G su, prema pretpostavci kategoričnosti sistema aksioma geometrije G, međusobno izomorfni. Zamenjivanjem reči tačka i prava u S - G modelu sistema aksioma geometrije G′ostvarujemo izomorfizam između S - G modela tog sistema aksioma i modela istog sistema aksioma u M modelu geometrije G. Ali ovaj poslednji model je zapravo model sistema aksioma geometrije koji smo označili sa M′.

Na osnovu tranzitivnosti relacije izomorfnosti modela istog sistema aksioma sledi da je S - model sistema aksioma geometrije G' izomorfan modelu M' istog sistema aksioma. Neposredna posledica stava 5. i dualnosti sistema aksioma geometrija $\overline{EP}$ i $\overline{EH}'''$ sa sistemima aksioma euklidske geometrije i geometrije Lobačevskog redom je:

Posledica. Geometrije $\overline{EP}$ i $\overline{EH}'''$ su kategorične.

Jedan od dokaza kategoričnosti euklidske geometrije izložen je na str. 210. udžbenika /24/. Dokaz analogan navedenom može se izvesti i za geometriju Lobačevskog: izomofrnost svih modela te geometrije obezbeđuje izomorfnost svih tih modela sa analitičkim modelom te geometrije (ovaj model izložen je npr. u delu /12/). Na osnovu stava po kome je svaka ketegorična teorija potpuna teorija[23] sledi da su geometrije sistema aksioma $\overline{EP}$ i $\overline{EH}$ potpune. Ovo je drugi, neposredniji dokaz potpunosti geometrija tih sistema aksioma.

Na osnovu prethodne, značajne posledice, svi modeli geometrija $\overline{EP}$ i $\overline{EH}'''$ su međusobno izomorfni pa je svaka posledica bilo kog modela ovih geometrija istovremeno i posledica sistema aksioma odgovarajućih S - modela tih geometrija.

3. <u>Formiranje nezavisnih sistema aksioma nekih projektivno metričkih geometrija</u>. Koristeći dualnost geometrija $\overline{EP}$ i $\overline{EH}'''$ i njima u toj dualnosti odgovarajućih geometrija nezavisnih sistema aksioma dokazaćemo da su sistemi aksioma geometrija $\overline{EP}$ i $\overline{EH}'''$ zavisni. Stavom 4. obuhvatimo i jedan iDdragi slučaj.

Stav . Sistemi aksioma geometrija $\overline{EP}$ i $\overline{EH}'''$ nisu nezavisni.

---

23) Dokaz ovog stava izložen je i na str. 209. udžbenika /24/- kao dokaz poslednje teoreme ne toj stranici.

Dokaz. Geometrije $\overline{EP}$ i $\overline{EH}'''$ redom dualne su geometrijama PE i HE. Sistemi aksioma geometrija PE i HE nisu nezavisni jer prvi od njih sadrži sve aksiome euklidske geometrije čiji je sistem aksioma nezavisan, a drugi sve aksiome geometrije Lobačevskog čiji je sistem aksioma takođe nezavisan. Ako bi sistem aksioma geometrije $\overline{EP}$ bio nezavisan tada bi i sistem aksioma njoj dualne geometrije PE (predložen u radu) bio nezavisan. Do iste protivurečnosti dovodi i pretpostavka da je sistem aksioma geometrije $\overline{EH}'''$ nezavisan.

Najednostavniji način formiranja nezavisnog sistema aksioma geometrija $\overline{EP}$ i $\overline{EH}'''$, sobzirom da smo pokazali da su one dualne geometrijama PE' i HE''' redom (koje su neprotivrečne i sadrže sisteme aksioma euklidske geometrije i geometrije Lobačevskog redom) je usvajanje dualnih aksioma aksiomama euklidske geometrije i geometrije Lobačevskog za aksiome pomenutih geometrija. Uprkos tome što na taj način dobijamo iste geometrije, označavaćemo ih sa EP i EH čime ističemo da je njihova aksiomatika upravo dualna aksiomatici euklidske geometrije i geometrije Lobačevskog. Dokazujući dualnost sistema aksioma $\overline{EH}''$ i $\overline{HE}''$ većinu od aksioma dulanih aksiomama euklidske geometrije i geometrije Lobačevskog smo ili formulisali ili pak ukazali na specifičnosti te formulacije ukoliko je to bilo potrebno. Na dualnost aksioma V.P i V.H aksiomama paralelnosti euklidske geometrije i aksiomi Lobačevskog ukazali smo još prilikom njihovog uvođenja. Ovoga puta jedino ćemo se zadržati na razmatranju aksiome dualne Pašovoj i formulaciji te aksiome.

Aksioma dualna Pašovoj je aksioma svih projektivno metričkih geometrija u sistemima aksioma tih geometrija koje smo formulisali formirajući sisteme aksioma tih geometrija neposredno sledeći klasifikaciju tih geometrija.

Pre nego što formulišemo tu aksiomu istaknimo i da se Pašova aksioma geometrije $\overline{\overline{EE}}$ može odstraniti iz skupa aksioma te geometrije i pre nego što bismo dokazali potpunost tog sistema aksioma. Naime i u geometriji $\overline{\overline{EE}}$ trougao bismo, kao i u projektivnoj geometriji definisali na takav način da je za takav trougao Pašova aksioma tačna. U tom sistemu aksioma teorema koja bi odgovarala teoremi 6(/24/str.16.) neposredno se može dokazati bez korišćenja u dokazu Pašove aksiome. Sobzirom na to da je sistem aksioma geometrije $\overline{\overline{EE}}$ sam sebi dualan, dokaz tvrđenja dualnog Pašovoj aksiomi u tom sistemu aksioma može se izvesti dualno dokazu Pašove aksiome. (Dakle u geometriji $\overline{\overline{EE}}$ izbor figure dualne trouglu određen je potrebom da za tu figuru bude zadovoljena aksioma dualna Pašovoj). Posle ovog svođenja sistema aksioma geometrije $\overline{\overline{EE}}$ odstranjivanjem i Pašove i aksiome dualne Pašovoj iz sistema aksioma geometrije $\overline{\overline{EE}}$, sasvim jednostavno se dokazuje ekvivalentnost tog sistema aksioma i sistema aksioma eliptične geometrije. Pri tome se jednostavno dokazuje da su aksiome S1 i S2 "ekvivalentne" aksiomi II_6 (v.str.159. u /23/) eliptične geometrije. Pošto smo prethodno pomenuli i figuru dualnu trouglu detaljnije ćemo analizirati i taj pojam. Pri tome smo pod trouglom podrazumevali trougao eliptične ravni. Pojam dualan stranici trougla eliptične ravni je pojam dualan duži te ravni. To je upravo ugao eliptične ravni koji je određen definicijom 5 (/23/str.162.). Međutim, u svakoj od projektivno metričkih geometrija u čijoj oznaci je drugo slovo H (ili P) može se govoriti o pojmu koji je dualan duži ali samo geometrije u čijoj je oznaci H(P) prvo slovo. To je pojam koji se odnosi na podskup svih pravih konkurentnog pramena pravih koje su između date dve prave tog pramena. Ovaj pojam se iz dva razloga razlikuje od pomenutog pojama ugla eliptične geometrije. Pre svega u pramenu pravih geometrija u čijoj je oznaci drugo slovo H, za razliku od geometrija u čijoj je oznaci drugo slovo E pa dakle i eliptične geometrije, dvema pravama bilo kog konkurentnog pramena pravih jednoznačeno je određen "ugao" u smislu definicije 5. dela /23/. Sem toga u nekim od tih geometrija ugao je moguće definisati i kao skup tačaka sa iste strane ugaone linije. U tom slučaju skup tačaka na taj način definisanog ugla je podskup skupa tačaka ugladefinisanog na način na koji se to čini u eliptičnoj geometriji. To je razlog iz koga se u ovim geometrijama opredeljujemo za drugačiji naziv tog pojma: skup pravih koje su između dve prave konkurentnog pramena pravih bilo koje projektivno metričke geometrije u čijoj oznaci je drugo slovo H nazivaćemo "delom pramena pravih"; ukoliko tom skupu pripadaju i te dve prave-granice dela pramena pravih, taj skup pravih nazivaćemo zatvoreni deo pramena pravih. Pojam dualan pojmu trougla apsolutne geometrije u Boljajevom smislu je sledeći pojam geometrije EH'': Unija tri zatvorena dela tri konkurentna pramena pravih pri čemu je granica bilo kog od tih delova istovremeno granica tačno još jednog dela (iz čega sledi i da te tri granice nisu konkurentne). Da se ovaj pojam znatno razlikuje od uobičajne predstave trougla može se zaključiti u glavnim modelima npr. geometrija EP i EH tj. geometrija odgovarajućih oblasti projektivne ravni.

Aksioma geometrija EP i EH dualna Pašovoj je:

II_4': Ako su a,b,c tri nekonkurentne prave i P tačka koja nije incidentna sa pravom a i incidentna je sa pravom koja je između pravih b i c, tada je tačka P incidentna sa pravom koja je između pravih a i c, ili sa pravom koja je između pravih a i b.

U glavnim modelima ovih geometrija neposredno se može proveriti tačnost ove aksiome.

§ 4. MODELI GEOMETRIJA EH I HH U GEOMETRIJI LOBAČEVSKOG

U tački 3. prethodnog paragrafa formirali smo nezavisne sisteme aksioma geometrija EP i EH na taj način što smo kao aksiome tih geometrija odabrali tvrđenja dualna aksiomama eukldiske geometrije i geometrije Lobačevskog redom. Tom dualnošću ostvaruje se i izomorfizam S-modela ovih geometrija. S obzirom da ćemo u ovom radu proučavati samo trajektorije geometrija ravni $^{1}S_{2}$, čime ćemo istovremeno doprineti još boljem upoznavanju tih geometrija, ogrničićemo se samo na izlaganje o modelu geometrije EH u geometriji Lobačevskog. Razmatranja druge tačke ovog paragrafa biće posvećena modelu geometrije HH u geometriji Lobačevskog. Izomorfizam S - modela tih geometrija nije bilo moguće tako jednostavno kao u prethodnom slučaju uočiti.

1. <u>HE - model geometrije EH.</u> Model geometrije EH u geometriji Lobačevkog označili smo kao HE - model te geometrije jer je oznaka Baltrami-Klajnovog modela geometrije Lobačevskog u opštoj šemi označavanja dvodimenziono projektivno metričkih geometrija HE. U tom modelu prave geometrije EH biće predstavljene tačkama geometrije Lobačevskog a tačke pravama geometrije Lobačevskog. Ako su prave a,b,c, geoometrije EH takve da je prava b između pravih a i c što ćemo označavati sa (a-b-c) tada su tačke A,B,C geometrije Lobačevskog kojima su predstavljene te prave biti takve da je (A-B-C). Provera prve dve grupe aksioma geometrije EH u HE-modelu te geometrije je sasvim jednostavna te se njome nećemo baviti.

Prilikom utvrđivanja dualnosti nekih projektivno metričkih geometrija (v.§ 2.8.) pokazali smo da su operacije dualne transformacijama podudarnosti bilo koje projektivno metričke geometrije transformacije skupa pravih njoj odgovarajuće geometrije. Tada smo pokazali i da su takve transformacije skupa pravih istovremeno i transformacije skupa tačaka te geometrije i da su one istovetne tranformacijama podudarnosti te geometrije. Ovo poslednje posebno smo istakli i u tački 1. paragrafa 3. Iz toga sledi da su transformacije podudarnosti geometrije EH u HE modelu te geometrije predstavljene transformacijama podudarnosti geometrije Lobačevskog tj. da je grupa transformacija podudarnosti geometrije EH predstavljena grupom transformacija podudarnosti geometrije Lobačevskog u HE modelu geometrije EH.

Neposredno na osnovu definicije 1. centralne simetrije može se zaključiti da je centralna simetrija u HE - modelu geometrije EH predstavljena osnom simetrijom geometrije Lobačevskog.

Središtu C centralne simetrije geometrije EH u HE-modelu odgovara osa c osne simetrije geometrije Lobačevskog. Skupu invarijantnih pravih incidentnih sa tačkom C odgovara, u HE - modelu, skup invarijantnih tačaka prave c. Prema definiciji 1. skup svih invarijantnih pravih incidentnih sa središtem C centralne simetrije je upravo konkurentan pramen pravih središta C. Prema prethodnom tom pramenu pravih u HE-modelu odgovara skup svih tačaka ose c simetrije. Iz ovoga sledi da je skup pravih konkurentnog pramena pravih geometrije EH istobrojan sa skupom tačaka bilo koje prave geometrije Lobačevskog. Za svaku tačku incidentnu sa pravom c u simetriji geometrije Lobačevskog ose c invarijantna je i normala na pravu c u toj tački. Svakom od tih normala predstavljena je dakle u HE modelu invarijantna tačka centralne simetrije središta C geometrije EH. Tačka preseka svake od tih normala sa osom c predstavlja u modelu pravu incidentnu kako sa središtem C centralne simetrije geometrije EH, tako i sa tačkom predstavljenom u HE-modelu odgovarajućom normalom. Bilo koja normala na pravu c invarijantna je u osnoj simetriji ose c. Pošto je simetrijom u odnosu na c predstavljena simetrija u odnosu na tačku C geometrije EH, tačke predstavljene pomenutim normalama invarijantne su u simetriji središta C geometrije EH. Prema definiciji 4. ove tačke su suprotne tački C; iz prethodnog takođe sledi i da je svaka od tih tačaka kolinearna sa tačkom C (jer za svaku od normala na pravu c postoji tačka preseka te normale i prave c - tom tačkom preseka u HE modelu predstavljena je prava geometrije EH incidentna kako sa pravom c tako i sa pomenutom normalom).

Skup svih pravih normalnih na pravoj c pripada hiperboličnom pramenu pravih osnove c. Prema tome skup svih tačaka geometrije EH suprotnih tački C predstavlja hiperbolični niz tačaka te geometrije. Ovaj niz tačaka takođe ćemo zvati niz tačaka suprotan tački C. Prema prethodnom skup svih pravih invarijantnih u osnoj simetriji ose c predstavlja u HE modelu geometrije EH skup svih tačaka invarijantnih u centralnoj simetriji središta C. Skup svih takvih pravih je unija prave c i svih pravih normalnih na pravoj c. Iz potpunosti sistema aksioma geometrije EH (što smo dokazali u § 3.1) sledi i da je svaka posledica bilo koga modela tog sistema aksioma teorema geometrije EH. Posledica koje smo prethodno izveli formulisaćemo kao sledeću teoremu:

Teorema. Skup svih invarijantnih tačaka centralne simetrije geometrije EH je unija središta te centralne simetrije i skupa svih tačaka suprotnih tom središtu. Svaka tačka suprotna središtu je kolinearna sa središtem. Skup svih tačaka suprotnih tački C je hiperbolični niz tačaka geometrije EH.

Neka su a,b,c prave normalne na osi osne simetrije geometrije Lobačevskog, a A,B,C tačke preseka tih normala sa tom osom. Smatraćemo da je normala b između normala a i c i to zapisivati sa (a - b - c) ako je A - B - C. U geometriji Lobačevskog uzajamno jednoznačno preslikavanje normala na osu izvesne simetrije te geometrije i tačaka preseka tih normala sa tom osom je izomorfizam tromesne relacije ustanovljene u skupu tih normala na prethodno predloženi način i tromesne relacije između skupa tačaka preseka koje tim normalama odgovaraju u tom preslikavanju. Ova poslednja relacija je upravo osnovna relacija "između" čija su svojstva implicitno određena aksiomama poretka geometrije Lobačevskog. Iz izomorfizma na kojismo ukazali neposredno sledi da je u skupu pravih hiperboličnog pramena pravih zadovoljeno i Dedekindovo tvrđenje analogno Dedekindovom principu koji se odnosi na skup tačaka prave. Skup pravih bilo kog hiperboličnog pramena pravih u HE modelu geometrije EH predstavlja skup tačaka hiperboličnog niza tačaka te geometrije koji je suprotan centru simetrije predstavljene u modelu simetrijom u odnosu na osnovu tog hiperboličnog pramena pravih. Prema prethodnom za svaki takav hiperbolični niz tačaka važi da su u skupu tačaka tog niza može uvesti tromesna relacija "između" čija su svojstva istovetna svojstvima relacije između skupa tačaka pravih geometrije Lobačevskog. Za taj skup tačaka važi takođe i tvrđenje istovetno tvrđenju Dedekinda koje su odnosi na skup tačaka prave geometrije Lobačevskog tj. tvrđenje istovetno aksiomi Dedekinda te geometrije. S obzirom da je bilo koji hiperbolični niz tačaka geometrije EH predstavljen u HE modelu hiperboličnim pramenom pravih, a svaki takav pramen je u simetriji u odnosu na osnovu tog pramena invarijantan prava po prava, može se zaključiti da je ma koji hiperbolični niz geometrije EH invarijantan u simetriji u odnosu na tačku suprotnu tom nizu. Iz ovoga sledi da se prethodni rezultati odnose na bilo koji hiperboličan niz tačaka. Ove rezultate formulisaćemo u vidu sledeće teoreme:

Teorema. Svaki hiperbolični niz tačaka geometrije EH je istobrojan skupu tačaka bilo koje prave geometrije Lobačevskog. U skupu tačaka hiperboličnog niza tačaka može se uvesti troelementna relacija između čija su svojstva istovetna svojstvima relacije između skupa tačaka bilo koje prave geometrije Lobačevskog. U skupu tačaka bilo kog hiperboličnog niza tačaka važi tvrđenje istovetno Dedekindovoj aksiomi geometrije Lobačevskog.

Napominjemo da je aksioma neprekidnosti geometrije Lobačevskog Dedekindova aksioma, a ne Kantorova i Arhimedova aksioma. Ovo odstupanje od uobičajenog kod nas sistema aksioma apsolutne geometrije u Boljajevom smislu, nametnuto je u našem radu pogodnošću interpretacija takvih sistema aksioma u projektivnim modelima tih sistema. U formulaciji prethodne teoreme često smo umesto izraza hiperbolični niz tačaka upotrebljavali izraz hiperbolični niz. Ovo skraćenje koristićemo i ubuduće i to i za druge vrste nizova tačaka. Takođe ćemo, ukoliko neka prava pripada hiperboličnom pramenu pravih geometrije Lobačevskog govoriti da je taj hiperboličan pramen pravih incidentan sa tom pravom. Na isti način postupićemo i ako prava pripada pramenu pravih neke druge vrste.

Hiperbolični pramen pravih čija je osnova osa izvesne osne simetrije geometrije Lobačevskog je jedini hiperboličan pramen koji je invarijantan prava po prava u toj osnoj simetriji. Međutim u toj osnoj simetriji invarijantni su i svi hiperbolični pramenovi pravih incidentni sa osom te osne simetrije. Ali za razliku od hiperboličnog pramena čija je osnova osa te simetrije, jedina invarijantna prava bilo kog od pomenutih hiperboličnih pramenova pravih je osa te osne simetrije. Kao i u prethodnom slučaju, ako prava pripada hiperboličnom pramenu pravih tada tačka predstavljena u HE modelu geometrije EH tom pravom pripada onom hiperboličnom nizu te geometrije koji je predstavljen u tom modelu tim hiperboličnim pramenom. Skup hiperboličnih pramenova incidentnih sa osom c simetrije ravni Lobačevskog, istovetan je skupu hiperboličnih pramenova te ravni invarijantnih u simetriji ose c, bez hiperboličnog pramena pravih čija je osnova osa c. Osnova svakog takvog pramena normalna je na pravoj c. Prema tome broj takvih hiperboličnih pramenova istovetan je broju normala na pravoj c kojih ima isto onoliko koliko i tačaka te prave. Svaka tačka geometrije EH predstavljena je u HE modelu pravom. Prema prethodnom, svaka tačka geometrije EH incidentna je sa isto onoliko hiperboličnih nizova koliko prava geometrije Lobačevskog ima tačaka. Svaki od tih hiperboličnih nizova invarijantan je u simetriji čije je središte data tačka.

U HE-modelu geometrije EH u skupu svih hiperboličnih pramenova pravih incidentnih sa izvesnom pravom c, hiperboličan pramen pravih osnove b je između hiperboličnih pramenova pravih osnova a i d ako i samo kao je tačka preseka B pravih b i c između tačaka preseka A i D pravih a i d sa pravom c redom. Na taj način može se u skupu hiperboličnih pramenova incidetnih pravoj c ustanoviti troelementna relacija "između" čija su svojstva istovetna svojstvima relacije između skupa tačaka prave geometrije Lobačevskog okarakterisane aksiomama poretka te geometrije. Skupom hiperboličnih pramenova pravih incidentnih sa tačkom C u HE-modelu geometrije EH, kao što smo prethodno pokazali, predstavljen je skup hiperboličnih nizova incidentnih sa tačkom C. Znači i u skupu hiperboličnih nizova incidentnih sa istom tačkom koji ćemo nazvati pramenom hiperboličnih nizova čije je središte pomenuta tačka može se uvesti troelementna relacija između čija su svojstva istovetna svojstvima relacije između skupa tačaka prave geometrije Lobačevskog. Na sličan način se u HE-modelu geometrije EH pokazuje da za pramen hiperboličnih nizova središta C važi i tvrđenje analogno Dedekindovoj aksiomi geometrije Lobačevskog. Sistem aksioma geometrije EH dualan je sistemu aksioma geometrije Lobačevskog. Prema tome aksomama poretka te geometrije implicitno se određuju svojstva troelementne relacije poretka skupa pravih konkurentnog pramena pravih te geometrije. To isto važi i za Dedekindovu aksiomu - ona se odnosi na skup pravih pramena pravih geometrije EH. Zato se na osnovu prethodno izloženog može zaključiti da u geometriji EH važi i sledeća teorema:

Teorema. Sva tvrđenja koja se formulišu na taj način što se u aksiomama poretka geometrije EH reč prava zameni izrazom "hiperbolični niz, a izraz "konkurentan pramen pravih" izrazom"konkurentan pramen hiperboličnih nizova" su teoreme te geometrije. Dedekindova aksioma geometrije EH u kojoj je izvršena prethodno objašnjena izmena izraza je takođe teorema geometrije EH.

Osnove hiperboličnih pramenova incidentnih sa istom pravom c geometrije Lobačevskog ne pripadaju tim hiperboličnim pramenovima pravih. Svaka od tih osnova predstavlja u HE modelu tačku suprotnu hiperboličnom nizu tačaka predstavljenog u modelu hiperboličnim pramenom pravih čija je to osnova.

U simetriji ose c invarijantna su tačno dva parabolična pramena pravih; to su oni parabolični pramenovi koji su incidentni sa pravom c. Pošto su u HE modelu geometrije EH paraboličnim pramenovima pravih predstavljeni izotropni nizovi tačaka iz ovoga sledi i da je svaka tačka geometrije EH incidentna sa tačno dva izotropna niza. Ovi izotropni nizovi su invarijantni u simetriji čije je središte tačka kojoj su incidentni. Na osnovu prethodne teoreme sledi i da su izotropni nizovi granični nizovi pramena pravih čije je središte tačka koja je incidentna sa svakim od tih nizova i takođe grnični nizovi pramena hiperboličnih nizova istog središta.

U geometriji EH postoje dve vrste osnih simetrija. Prva od njih predstavljena je u HE modelu te geometrije centralnom simetrijom geometrije Lobačevskog, a druga osnom simetrijom te geometrije. Naime u centralnoj simetriji središta C geometrije Lobačevskog invarijantne su sve prave incidnetne tom središtu. Tim pravama predstavljene su u modelu invarijantne tačke odgovarajuće transformacije podudarnosti geometrije EH. Pošto je svaka od tih invarijantnih pravih simetrije središta C incidentna samo sa jednom invarijantnom tačkom te simetrije-središtem C koje u modelu predstavlja jedinu invarijantnu pravu odogvarajuće transformacije - prema definiciji 2. (rad str.55.) simetrijom središta C predstavljena je u modelu simetrija geometrije EH čija je osa prava c koja odgovara tački C. Svaka prava geometrije EH je osa neke osne simetrije te geometrije jer je svaka tačka geometrije Lobačevskog kojom je u HE modelu predstavljena odgovarajuća prava središte neke centralne simetrije geometrije Lobačevskog. Na osnovu toga, definicije 3. rada (str. 56.) i svojstva osne simetrije na koje smo neposredno pre ovog ukazali možemo zaključiti da geometriji EH važi sledeća teorema:

Teorema. Ni za jednu pravu geometrije EH ne postoji prava normalna na toj pravoj.

U centralnoj simetriji središta C geometrije Lobačevskog invarijantni su i svi hiperbolični pramenovi pravih koji su incidentni sa nekom pravom koja sadrži tačku C i kojima je osnova takođe incidentna sa tom tačkom. Da bi se neki heiperboličan pramen pravih geometrije Lobačevskog preslikao nekom transformacijom podudarnosti na taj isti pramem potrebno je i dovoljno da se osnova tog pramena u toj transformaciji podudarnosti preslikava sama na sebe. Prema tome u geometriji EH važi i teorema:

Teorema. Svaka tačka bilo koje prave incidentna je sa tačno jednim hiperboličnim nizom tačaka invarijantnim u simetriji u odnosu na tu pravu.

Pre nego što u HE modelu izvedemo odgovarajući zakljućak u odnosu na izotropne nizove utvrdićemo u HE modelu nešto preciznije interpretaciju relacije incidencije tačaka i izotropnih nizova geometrije EH. Zapravo protumačićemo šta u tom modelu znači teorema po kojoj je svaka tačka geometrije EH incidentna sa tačno dva izotropna niza tačaka (ovu teoremu dokazali smo koristeći u modelu svojstva osne simetrije kojom je interpretirana centralna simetrija geometrije EH). Pomenuta tačka predstavljena je u modelu pravom koja je incidentna sa tačno dva parabolična pramena pravih koji predstavljaju pomenute izotropne nizove. Tom pravom određene su u geometriji Lobačevskog dve orijentisane prave od kojih jedna pripada jednom, a druga drugom paraboličnom pramenu pravih. Da bi se neki paraboličan pramen pravih geometrije Lobačevskog u centralnoj simetriji te geometrije preslikao na sam sebe potrebno je da se orijentisana prava koja pripada tom pramenu i sadrži središte te centralne simetrije preslikava na tu istu orijentisanu pravu. Međutim svaka takva orijentisana prava u toj centralnoj simetriji preslikava se na pravu suprotno orjentisanu u odnosu na prethodnu. U geometriji Lobačevskog bilo koja transformacija podudarnosti preslikava praboličan pramen pravih na paraboličan pramen pravih koji je određen slikom u toj transformaciji bilo koje orijentisane prave tog pramena. Dakle u geometriji EH važi sledeća teorema:

Teorema. U simetriji u odnosu na pravu ne postoji izotropni niz tačaka koji se preslikava sam na sebe. Svaki izotropni niz tačaka incidentan sa bilo kojom tačkom ose osne simetrije preslikava se na izotropni niz tačaka incidentan sa tom istom tačkom.

Sve ove teoreme odnosile su se na osne simetrije geometrije EH u odnosu na pravu što smo nagalsili samo na početku, kada smo nagovestili da u geometriji EH postoje i simetrije čija osa nije prava. Postojanje ovakvih osnih simetrija utvrđuje se, u modelu, na sledeći način. U bilo kojoj osnoj simetriji geometrije Lobačevskog invarijantne su sve prave hiperboličnog pramena pravih čija je osnova osa te simetrije. Svaka od tih pravih incidentna je sa tačno jednom invarijantnom tačkom te simetrije - presekom te prave sa osom te simetrije. Svakom od pravih tog hiperboličnog pramena predstavljena je invarijantna tačka transformacije podudarnosti predstavljene u HE modelu geometrije EH pomenutom osnom simetrijom. Jedina invarijantna tačka svake od pravih heiperboličnog pramena pravih na koji smo prethodno ukazali predstavlja jedinu invarijantnu pravu incidentu odgovarajućoj invarijatnoj tački u transformaciji podudarnosti geometrije EH predstavljene osnom simetrijom geometrije Lobačevskog. Prema definiciji 6. osnom simetrijom geometrije Lobačevskog predstavljena je simetrija geometrije EH u odnosu na hiperbolični niz tačaka predstavljen u modelu hiperboličnim pramenom pravih čija je osnova osa te osne simetrije. Ista osna simetrija geometrije Lobačevskog predstavlja i simetriju geometrije EH u odnosu na tačku suprotnu hiperboličnom nizu koji je predstavljen hiperboličnim pramenom čija je osnova osa te osne simetrije (što smo dokazali na samom početku razmatranja posvećenog centralnim simetrijama geometrije EH). Na taj način smo u modelu dokazali da je svaka centralna simetrija geometrije EH istovremeno osna simetrija u odnosu na hiperboličan niz suprotan središtu te centralne simetrije i obratno. Prema teoremi formulisanoj na str. 74. rada svaka tačka bilo koje prave incidentna je sa tačno jednim hiperboličnim nizom invarijantnim u simetriji u odnosu na tu pravu. Iz dokaza te teoreme u HE modelu zaključuje se da je taj hiperbolični niz upravo suprotan tački incidentnoj toj pravoj. Ranije smo pokazali da je ta prava invarijanta prava simetrije u odnosu na pomenutu tačku. Zato je ta prava invarijantna i u simetriji u odnosu na pomenuti hiperboličan niz tačaka. Na osnovu prethodnog i definicije 3. sledi da je svaki hiperbolični niz invarijantan u osnoj simetriji u odnosu na neku pravu normalan na toj pravoj.

Paraboličan pramen pravih ravni Lobačevskog invarijantan je samo u osnim simetrijama u odnosu na neku pravu tog pramena - preciznije: da bi neki paraboličan pramen pravih bio invarijantan u nekoj osnoj simetriji potrebno je i dovoljno da je osa te simetrije prava tog paraboličnog pramena pravih. Svaka tačka te prave invarijantna je u toj osnoj simetriji. Takođe je i svaka od tih tačaka incidentna osim sa osom, i sa tačno još jednom invarijantnom pravom te osne simetrije. Ovom osnom simetrijom predstavljena je transformacija podudarnosti ravni EH koja je prema definiciji 1. (str. 55. rada) centralna simetrija ravni EH. U ovoj centralnoj simetriji invarijantan je izotropan niz tačaka koji odgovara pomenutom paraboličnom pramenu pravih geometrije Lobačevskog. Ali pošto, što smo ranije pokazali, ne postoji centralna simetrija koja dati paraboličan pramen pravih geometrije Lobačevskog preslikava na taj isti pramen, može se u

HE modelu zaključiti da ne pstoji osna simetrija geometrije EH čija je osa prava u kojoj bi bio invarijantan makar jedan izotropni niz tačaka. Međutim u osnoj simetriji geometrije Lobačevskog čija je osa prava paraboličnog pramena pravih invarijantne su i sve prave normalne na toj osi. Zato ova osna simetrija predstavlja simetriju u odnosu na odgovarajući hiperbolični niz geometrije EH u kojoj je invarijantan izotropni niz tačaka koji odgovara datom paraboličnom pramenu. Pri tom u tom izotropnom nizu invarijantna je samo jedna tačka - tačka koja odgovara osi te osne simetrije. Jednostavno se utvrđuje, u HE modelu, da je ta tačka suprotna tom hiperboličnom nizu.

2. HE - Model geometrije HH. Neka je f_0 identično preslikavanje skupa tačaka spoljašnosti apsolute na taj isti skup. Ovim preslikavanjem se svaka projektivna duž čiji krajevi pripadaju apsoluti, a sve ostale tačke spoljašnosti apsolute, preslikava na tu istu projektivnu duž. Ako usvojimo da ovo preslikavanje preslikava svaku takvu projektivnu duž na skup svih tačaka incidentnih toj duži, tada u takvom preslikavanju svakoj pravoj S - HH modela te geometrije odgovara skup svih tačaka incidentnih toj pravoj. Takav S - model geometrije HH odgovarao bi izgrađivanju te geometrije kao teorije sa samo jednom vrstom preomenljivih koje bi u S - modelu te geometrije bile predstavljene tačkama. Neposredno se zaključuje da je preslikavanjem f_0 izomorfizam glavnog modela geometrije HH i modelu te geometrije u istoj oblasti projektivne ravni, ali u kome su prave predstavljene skupom tačaka projektivne duži čiji krajevi pripadaju apsoluti. Prema štavu 3. i svojstvima suženja apsolutnog polariteta W na spoljašnjost apsolute, taj polaritet je izomorfizam tog projektivnog modela geometrije HH u spoljašnosti apsolute različitog od galvnog i projektivnog modela geometrije

HH ostvarenog u unutrašnjosti apsolute. Proizvod Wof_0 je izomorfizam glavnog modela geometrije HH i modela te geometrije u unutrašnjosti apsolute. U ovom izomorfizmu svakoj tački spoljašnjosti apsolute odgovara projektivna duž unutrašnjosti apsolute kojoj krajevi pripadaju apsoluti; svakoj projektivnoj duži spoljašnjosti apsolute čiji krajevi pripadaju apsoluti odgovara skup projektivnih duži unutrašnjosti apsolute čiji krajevi pripadaju apsoluti i koje pripadaju hiperboličnom pramenu pravih čije je središte pol projektivne duži spoljašnjosti apsolute. Iz ovog izomorfizma i izomorfizma glavnog i S - modela geometrije HH na osnovu tranzitivnosti relacije izomorfizma sledi da je i S - model geometrije HH izomorfan modelu te geometreije u unutrašnjosti apsolute. Prema tome i prethodnom, svakoj tački geometrije HH odgovara projektivna duž unutrašnjosti apsolute, a pravoj te geometrije skup projektivnih duži unutrašnjosti apsolute čiji krajevi pripadaju apsoluti i koje pripadaju projektivnim pravama incidentim istoj tački spoljašnjosti apsolute. U izomorfizmu Beltrami - Klajnovog modela geometrije Lobačevskog i S - modela te geometrije svakoj projektivnoj duži unutrašnjosti apsolute čiji krajevi pripadaju apsoluti odgovara prava S - modela geometrije Lobačevskog, a skupu projektivnih duži unutrašnjosti apsolute čiji krajevi pripadaju apsoluti i koje pripadaju projektivnim pravama koje su incidentne sa istom tačkom spoljašnjosti apsolute hiperboličan pramen pravih S - modela geometrije Lobačevskog. Skup tačaka glavnog modela geometrije HH incidentnih sa projektivnom pravom spoljašnjosti apsolute nazivaćemo eliptičnim nizom tačaka ili samo eliptičnim nizom geometrije HH. U razmatranom izomorfizmu eliptičnom nizu tačaka odgovara eliptični pramen pravih geometrije Lobačevskog, a izotropnom nizu paraboličan pramen pravih iste geometrije. Iz izomorfizma S - modela geometrije HH i glavnog modela te geometrije i izomorfizma glavnog modela te geometrije sa prethodno pomenutim modelom te geometrije u geometriji Lobačevskog, i tranzitivnosti relacije izomorfizma sledi da je S - model geometrije HH izomorfan sa modelom te geometrije u S - modelu geometrije Lobačevskog. Ovaj poslednji model nazivaćemo kratko HE - modelom geometrije HH. Mada se na osnovu izlaganja o formiranju sistema aksioma geometrije HH može navesti spisak tih aksioma, iskoristićemo ovu priliku da u koloni u kojoj će biti navedeni pojmovi, relacije i transformacije geometrije HH upišemo i sadržaj tih aksioma. U desnoj koloni biće navedeni pojmovi, relacije, transformacije i tvrđenja koja odgovaraju aksiomama geometrije HH u pomenutom izomorfizmu. Pri tome ćemo u levoj koloni najpre navesti osnovne pojmove, relacije i transformacije geometrije HH, a zatim neke bitne izvedene pojmove i relacije te geometrije. Napominjemo da se ovde radi o izomorfizmu dva modela geometrije HH, a ne o izomorfizmu dva modela sistema aksioma te geometrije. Međutim okolnost da su svi modeli svih ostalih sistema aksioma dvodimenzionih projektivno metričkih geometrija koje u oznaci nemaju nijedno slovo E ukazuje, s obzirom da smo sisteme aksioma i tih geometrija formirali na isti način kao i sisteme aksioma ostalih, da je vrlo verovatno da su i pomenuta dva modela sistema aksioma geometrije HH izomorfna kao i da je sistem aksioma te geometrije potpun.

Pojmovi, relacije i transformacije S - modela geometrije HH		Odgovarajući pojmovi, relacije i transformacije HE - modela geometrije HH
tačka	-	prava
prava	-	hiperboličan pramen pravih
tačka je incidentna	-	prava je incidentna odgovara-

pravoj i obratno	jućem pramenu pravih (prava pripada tom pramenu) i obratno
tačka A je između tačka B i C. Ove tačke incidentna su sa pravom p	odgovarajuće prave a,b,c incidentne su sa hiperboličnim pramenom pravih čija osnova p odgovara pravoj p; presečna tačka A pravih a i p je između presečnih tačaka B i C pravih b i c sa pravom p
prava a konkurentnog pramena pravih središta S je između pravih b i c tog pramena	osnova hiperboličnog pramena koji odgovara pravoj a seče pravu s koja odgovara tački S u tački koja je između tačaka preseka osnova hiperboličnih pramenova pravih koji odgovaraju pravama b i c sa pravom s redom. Pri tome je prava s incidentna sa svakim od tih hiperboličnih pramenova
transformacije na skupa S koje predstavljaju transformacije podudarnosti S - modela geometrije HH	transformacije na skupa pravih indukovane transformacijama podudarnosti grupe transformacija podudarnosti geometrije Lobačevskog.
Izotropni niz	Paraboličan pramen pravih
Eliptičan niz	Eliptičan pramen pravih
Aksiome incidencije geometrije HH	Odgovarajuće teoreme geometrije Lobačevskog
I_1 Za svake dve tačke postoji najviše jedna prava incidentna sa svakom od tih tačaka	Za svake dve prave postoji najviše jedan hiperboličan pramen incidentan sa svakom od tih pravih

I_2 Za svaku pravu postoje bar dve tačke koje su sa njom incidentne. Postoje bar tri tačke koje nisu incidentne sa istom pravom	Za svaki hiperboličan pramen pravih postoje bar dve prave koje su incidentne sa tim pramenom pravih. Postoje bar tri prave koje nisu incidentne sa istim hiperboličnim pramenom pravih.
I_3 Svaka tačka incidentna je sa najmanje dve prave	Svaka prava incidentna je sa bar dva hiperbolična pramena pravih.
Prva podgrupa aksioma poretka geometrije HH	Teoreme geometrije Lobačevskog koje odgovaraju prvoj podgrupi aksioma poretka geometrije HH
II_1 Ako je tačka B između tačaka A i C tada su tačke A,B,C incidentne istoj pravoj i tačka B je između tačaka A i C	Ako je prava b između pravih a i c, tada su prave a,b,c incidentne sa istim hiperboličnim pramenom pravih i prava b je između pravih a i c.
II_2 Za ma koje dve tačke incidentne su istom pravom postoji tačka C incidentna sa tom pravom takva da je tačka B između tačaka A i C.	Za ma koje dve prave a i b incidentne su istim hiperboličnim pramenom pravih postoji prava c tog pramena takva da je prava b između pravih a i c.
II_3 Za ma koje tri tačke A,B,C incidentne su istom pravom <u>ili</u> je tačka B između tačaka A i C <u>ili</u> je tačka A između tačaka B i C <u>ili</u> je tačka C između tačaka A i B.	Za ma koje tri prave a,b,c incidentne su istim hiperboličnim pramenom pravih <u>ili</u> je prava b između pravih a i c <u>ili</u> je prava a između pravih b i c <u>ili</u> je prava c između pravih a i b.

Podvalačenjem reči ili u formulaciji aksiome II_3 naglašavamo da je u pitanju isključna disjunkcija.

U geometriji Lobačevskog prirodno je definisati relaciju između skupa pravih hiperboličnog pramena pravih na taj način što za pravu b tog pramena smatramo da je između pravih a i c tog pramena ako i samo ako je presečna tačka B prave b sa osnovom tog pramena između presečnih tačaka A i C pravih a i c sa tom osnovom. Mada smo načelno utvrdili da je proizvod uzajmno jednoznačnih preslikavanja niza modela geometrije HH koji počinje S - modelom a završava se HE - modelom te geometrije izomorfizam, ipak ćemo na primeru relacije između to i proveriti (ova provera odnosi se samo na tu relaciju). Tačka A S-modela geometrije HH je između tačaka B i C tog modela ako i samo ako odgovarajuće tačke A,B,C glavnog modela geometrije HH pripadaju projektivnoj duži spoljašnosti apsolute čiji krajevi pripadaju apsoluti koja odgovara pravoj S- modela geometrije HH koja je incidentna tačkama A,B,C i ako tačka A sa jednim od krajeva te duži obrazuje par koji razdvaja par tačaka B i C. Preslikavanje f_o glavnog modela geometrije HH na model te geometrije iste oblasti apsolute pomenute tačke preslikava na te iste tačke. S obzirom da je apsolutni polaritet projektivno preslikavanje u tom polaritetu tačkama A i pomenutom kraju projektivne duži odgovaraće sečica a apsolute i njena tangenta koja će obrazovati par pravih koji razdvaja par pravih b i c koje u tom polaritetu odgovaraju tačkama B i C. Presečne tačke pravih a,b i c i tangente apsolute incidentne sa jednim krajem pomenute projektivne duži i projektivne duži dopunske toj duži određuju dva para tačaka koji se takođe međusobno razdvajaju. Suženje te četvoromesne relacije skupa tačaka zatvorene projektivne duži čiji krajevi pripadaju apsoluti, a sve ostale tačke njenoj unutrašnjosti je tromesna relacija između. Na osnovu prethodnog tačka preseka prave a sa tom zatvorenom projektivnom duži biće između tačaka preseka pravih b i c sa tom duži. Zato će i otvorene projektivne duži - preseci pravih a,b i c sa unutrašnjošću apsolute - biti u istovetno odnosu u odnosu na relaciju između. Ova relacija je suženje četvoromesne relacije razdvojenosti parova pravih skupa pravih zatvorenog projektivnog ugla kome su granične prave tangente apsolute i koji sadrži apsolutu pri čemu je jedna od pravih četvorke pravih granična, a ostale tri različite od graničnih, na unutrašnjost apsolute. Tim otvorenim projektivnim dužima odgovaraju prave a,b,c hiperboličnog pramena pravih čija osnova odgovara preseku polare temena pomenutog ugla sa unutrašnjošću apsolute, a tačkama preseka pravih a,b,c sa tom polarom tačke preseka pravih a,b,c geometrije Lobačevskog sa osnovom pomenutog hiperboličnog pramena pravih. Na osnovu izomorfnosti Beltrami - Klajnovog i S - modela geometrije Lobačevskog sledi da su tačke preseka pravih a,b,c S - modela geometrije Lobačevskog sa osnovom hiperboličnog pramena kome te prave pripadaju takve da je prva od njih između preostalih dveju; iz istog razloga sledi i da je prava a između pravih b i c.

Razmatranje slično prethodnom uverilo nas je da se tromesna relacija između skupa hiperboličnih pramenova pravih S - modela geometrije Lobačevskog incidentnih sa istom pravom p tog pramena mora definisati na sledeći način. Hiperbolični pramen pravih osnove a tog skupa hiperboličnih pramenova pravih je između hiperboličnih pramenova osnova b i c tog istog skupa ako i samo kao je tačka preseka A osnove a sa zajedničkom pravom p svih tih pramenova između tačaka preseka osnova b i c sa pravom p.

Ova relacija skupa hiperboličnih pramenova pravih odgovara u HE - modelu geometrije HH relacije između skupa pravih konkurentnog pramena pravih geometrije HH tj. njenog S - modela.

II podgrupa aksioma poretka geometrije HH		Teoreme geometrije Lobačevskog koje odgovaraju aksiomama druge podgrupe aksioma poretka geometrije HH.
II_1' Ako je prava b između pravih a i c tada su prave a,b,c tri različite prave istog konkurentnog pramena pravih središta S i prava b je između pravih a i c.	-	Ako je hiperboličan pramen pravih osnove b između hiperboličnih pramenova pravih osnova a i c,tada su hiperbolični pramenovi pravih osnova a,b,c, tri različita hiperbolična pramena pravih istog pramena hiperboličnih pramenova incidentnih pravoj s i hiperbolični pramen pravih osnove b je između hiperboličnih pramenova pravih osnova a i c.
II_2' Za makoje dve prave a i b koje su incidentne sa istom tačkom postoji prava c incidentna sa tom tačkom takva da je prava b između pravih a i c.	-	Za makoja dva hiperbolična pramena pravih osnova a i b koji su incidentni sa istom pravom postoji hiperboličan pramen pravih incidentan sa tom pravom čija je osnova prava c, takav da je hiperboličan pramen pravih osnove b između pramenova pravih osnova a i c.
II_3' Za makoje tri prave a,b,c incidentne sa istom tačkom <u>ili</u> je prava b	-	Za ma koje tri hiperbolična pramena pravih osnova a,b i c incidentna sa istom pravom

između pravih a i e ili je prava a između pravih b i i c ili je prava c između pravih a i b.

ili je pramen pravih osnova b između pramenova osnova a i c ili je pramen osnova a između pramenova osnova b i c ili je premen osnove c između pramenova osnova a i b.

Za razliku od geometrija EP i EH u kojima Pašova aksioma nije aksioma tih geometrija već tvrđenje dualno Pašovom, u geometriji HH sem tog tvrđenja aksioma je i Pašova aksioma. Ali ova aksioma se ne može formulisati na isti način kao i u apsolutnoj geometriji u Boljajevomsmislu. U geometriji HH važi tvrđenje koje sem sadržaja istovetnog Pašovoj aksiomi sadrži i određeno ograničenje. Da Pašova aksioma bez pomenutih dodatnih uslova nije ni aksioma ni teorema geometrije HH možemo se uveriti iz sledećgg primera. Neka su A,B,C tri tačke glavnog modela geometrije HH od kojih svake dve pripadaju pravoj te geometrije, ali ne postoji prava koja sadrži sve te tačke. Ove tri tačke određuju tri duži geometrije HH. Ako nijedan od pramenova pravih središta A,B,C geometrije HH ne sadrži sve tačke unije te tri duži, tada postoji prava geometrije HH koja seče tačno jednu duž pomenutog lika (v. sl. 2. rada). Ovo ćemo i posebno obrazložiti. U projekitvnoj ravni tri nekolinearne tačke određuju šest projektivnih duži. Po tri takve duži određuje samo četiri projektivna trougla. Osim zahteva da svake dve od tri takve duži ne pripadaju istoj proąektivnoj pravoj i zahtev da za lik istovetan uniji tih duži bude zadovoljena Pašova aksioma je bitno ograničenje koje umanjuje broj onih među tim likovima koji su trouglovi. Od četiri projektivna trougla određena tačkama A,B,C glavnog modela geometrije HH najviše jedan je trougao geometrije HH. Naime na svakoj sečici apsolute određenoj dvema od tačaka A,B,C samo jedna od projektivnih duži određena tim tačkama je duž geometrije HH. Prema tome u ovom slučaju od šest projektivnih samo tri duži mogu predstavljati stranice projektivnog trougla koje pripadaju spoljašnjosti apsolute. Ali ako unija tih triju duži ne zadovoljava zahtev Pašove aksiome, onda ta unija ne predstavlja projektivni a ni trougao geometrije HH. Sem kriterijuma po kome je takva unija duži geometrije HH trougao ako i samo ako ta unija pripada bar jednom od pramenova pravih čije je središte bar jedna od tačaka A,B,C (ili što je tome ekvivalentno: tačno dvema od tih pramenova pravih) možemo koristiti i jednostavniji kriterijum. Prema ovom kriterijumu da bi pomenuta unija tri duži bila trougao neophodno je i da svaka prava dela pramena pravih, čije granične prave sadrže dve duži te unije, seče i treću duž te unije. Samo za ovako definisani trougao Pašova aksioma je zadovoljena u glavnom modelu geometrije HH. U preslikavanju f_o tako definisanom trouglu odgovara skup svih tačaka koje pripadaju stranicama trougla. U suženju apsolutnog polariteta **W** na spoljašnost apsolute tome skupu tačaka odgovara unija tri preseka tri "dela" pramenova pravih čija su središta polovi pravih koje sadrže stranice tog trougla, sa unutrašnjošću apsolute. Pri tome je granica svakog od tih delova polara određenog temena trougla. Svaki od tih delova je skup pravih koje u polaritetu **W** odgovaraju tačkama odgovarajuće stranice trougla. Pošto svako teme trougla pripada dvema njegovim stranicama, svaka granična prava biće incidentna sa dva pomenuta dela odgovarajućih pramenova pravih. U izomorfizmu Beltrami - Klajnovog modela geometrije Lobačevskog i S - modela te geometrije prethodno opisanom liku odgovara unija tri "dela" tri hiperbolična pramena pravih takvih da je granica svakog od tih delova zajednička prava samo još jednog od preostala dva pomenuta dela.

U proizvodu prethodnih izomorfizama svaka granica odgovara izvesnom temenu trougla glavnog modela geometrije HH. Zato su svake dve od tih granica međusobno hiperparalelne. Jer u suprotnom slučaju - ako dve granične prave npr. a i b ne bi bile hiperparalelne - onda bi njima odgovarajuća temena A i B glavnog modela geometrije HH pripadale tangenti ili spoljašnjoj pravoj apsolute, dakle ne bi bila incidentna pravoj geometrije HH. Pod "delom" hiperboličnog pramena pravih geometrije Lobačevskog podrazumevali smo skup svih pravih tog pramena između dve date prave tog pramena - granice pramena. Uslovu po kome svaka prava dela pramena pravih čije je središte jedno od temena trougla geometrije HH, a granice prave koje sadrže stranice incidentne tom temenu u HE - modelu geometrije HH odgovara sledeći uslov: bilo koji hiperbolični pramen pravih koji sadrži jednu od granica prethodno opisana tri dela tri hiperbolična pramena pravih, sadrži pravu onog dela pomenutih delova tri hiperbolična pramena pravih, koji je ograničen drugim dvema granicama. Samo za tri dela hiperboličnih delova pramenova pravih koji zadovoljavaju sve prethodno navedene uslove u HE - modelu geometrije HH tačno je tvrđenje: "Svaki hiperboličan pramen pravih koji sadrži pravu incidentnu jednom od tri dela hiperboličnih pramenova pravih sadrži i pravu koja pripada jednom od preostalih delova". Ovo tvrđenje u pomenutom izomorfizmu odgovara Pašovoj aksiomi geometrije HH formulisane za trougao te geometrije. Aksioma II_4' geometrije HH je tvrđenje dualno Pašovoj aksiomi apsolutne geometrije u Boljajevom smislu. Ovo tvrđenje formulisali smo na str. 65. rada. Teoremu geometrije Lobačevskog koja odgovara toj aksiomi geometrije HH nećemo navoditi s obzirom da nema principijalnog značaja. Mada se to isto može reći i za teoreme koje odgovaraju aksiomama S1 i S2 i aksiome D_{1H} i D_{2H} s obzirom na specifičnost aksioma S1 i S2 odgovarajućoj teoremi aksiome S1 formulisanoj korišćenjem izomorfizma posvetićemo nešto veću pažnju. Pre toga pomenimo samo da aksiomi D_{1H} odgovara teorema geometrije Lobačevskog čiji je sadržaj analogan Dedekindovom tvrđenju geometrije Lobačevskog koje se odnosi na skup pravih hiperboličnog pramena pravih te geometrije; aksioma D_{2H} utvrđuje da za skup pravih pramena pravih geometrije HH važi tvrđenje analogno aksiomi D_{1H} koja se odnosi na skup tačaka prave te geometrije - skupu pravih konkurentnog pramena pravih geometrije HH u pomenutom izomorfizmu odgovara skup svih hiperboličnih pramenova pravih koje sadrže istu pravu geometrije Lobačevskog.

Neka je S središte konkurentnog pramena pravih geometrije HH, a p prava kojoj tačka S ne pripada. Ako neke dve prave pramena središta S seku pravu p, tada i sve prave između tih dveju pravih seku pravu p. Kasnije ćemo pokazati[24)] da je skup tačaka prave p incidentnih sa pravama pramena središta S - ako nije prazan - istovetan skupu tačaka poluprave prave p ili uniji skupa tačaka dve disjunktne poluprave te prave. U cilju formulisanja teoreme koja odgovara aksiomi S1 za sada je dovoljno ono što smo prethodno utvrdili - da je skup pravih pramena središta S incidentnih sa tačkama prave p deo pramena pravih i da skup odgovarajućih tačaka prave p pripada duži te prave. U izomorfizmu S - modela geometrije HH i modela te geometrije u S - modelu geometrije Lobačevskog delu konkurentnog pramena pravih geometrije HH odgovara skup hiperboličnih pramenova pravih incidentnih sa istom pravom s

24) Prilikom dokazivanja tačnosti aksioma V H u HE-modelu geometrije HH. To isto sasvim neposredno se može utvrditi i u glavnom modelu geometrije HH.

koja u tom izomorfizmu odgovara tački S pri čemu tačke preseka osnova tih hiperboličnih pramenova predstavljaju skup istovetan skupu tačaka odgovarajuće duži prave s. Skupu tačaka prave p incidentnih sa pravama pramena središta Su istom izomorfizmu odgovara deo hiperboličnog pramena pravih čija osnova p odgovara pravoj p geometrije HH. Svakoj tački prave p incidentnoj pravoj pramena središta S odgovara prava koja pripada i pramenu pravih osnove p i onom hiperboličnom pramenu pravih koji sadrži pravu s koji odgovara pomenutoj pravoj pramena pravih središta S. Prema tome svaka prava odgovarajućeg dela hiperboličnog pramena pravih osnove p je zajednička normala prave p i izvesne osnove odgovarajućeg dela pramena hiperboličnih pramenova incidentnih sa pravom s. Zbog izomorfizma prave tog dela hiperboličnog pramena osnove p su u istovetnom odnosu rasporeda sa odgovarajućim odnosom hiperboličnih p pramenova pravih koji pripadaju pramenu hiperboličnih pramenova incidentnih sa pravom s.

Svakoj transformaciji podudarnosti geometrije HH odgovara neka transformacija podudarnosti geometrije Lobačevskog. U prvom od preslikavanja proizvoda preslikavanja kojim se ostvaruje izomorfizam S - modela geometrije HH i geometrije Lobačevskog transformacijama podudarnosti geometrije HH odgovaraju suženja na spoljašnjost apsolute svih automorfizama apsolute. Transformacija svakog od tih suženja preslikavanjem f_0 istovetno je tom suženju. Neka je g bilo koji automorfizam apsolute. Tada je, ako g posmatramo kao projektivno preslikavanje skupa pravih projektivne ravni, transmutacija $W \circ g \circ W^{-1}$ projektivne kolineacije g apsolutnim polaritetom W projektivna kolineacija koja je takođe automorfizam apsolute. Ako je $g(p)=p'$, tada je $W \circ g \circ W^{-1}(P)=P'$ gde je $W(p)=P'$. Ako umesto transformacije g razmatramo suženje $\hat{g}$ te kolineacije na unutrašnjost apsolute, tada će u toj transformaciji projektivnim dužima unutrašnjosti apsolute čiji krajevi pripadaju apsoluti odgovarati projektivne duži iste vrste. Projektivna kolineacija $\hat{W} \circ \hat{g} \circ \hat{W}^{-1}$ je suženje na spoljašnjost apsolute projektivne kolineacije $W \circ g \circ W^{-1}$ takvo da ako je $\hat{g}(d)=d'$ gde su d i d' duži unutrašnjosti apsolute čiji krajevi pripadaju apsoluti, tada je $\hat{W}\circ\hat{g}\circ\hat{W}^{-1}(D)=D'$ gde je $\hat{W}(d')=D$[25]. Na isti način pokazujemo da u izomorfizmu ostvarenom preslikavanjem $\hat{W}$ suženju h nekog automorfizma apsolute na spoljašnjost apsolute odgovara suženje automorfizma $\hat{W}^{-1}\circ h \circ \hat{W}$ na unutrašnjost apsolute. Pri tom ako je $\hat{h}(D)=D'$, tada je $\hat{W}^{-1}\circ \hat{h} \circ \hat{W}(d)=d'$ gde je $d=\hat{W}(D)$ a $d'=\hat{W}(D')$. Pošto projektivnim dužima d i d' unutrašnjosti apsolute čiji krajevi pripadaju apsoluti, u izomorfizmu Baltrami-Klajnovog i S - modela geometrije Lobačevskog odgovaraju prave geometrije Lobačevskog, prema prethodnom ako tački D geometrije HH odgovara tačka D'u nekoj transformaciji podudarnosti te geometrije, tada pravoj d geometrije Lobačevskog odgovarajućoj u tom izomorfizmu tački D, u odgovarajućoj transformaciji podudarnosti geometrije Lobačevskog odgovara prava d', koja u tom izomorfizmu odgovara tački D'. Na prethodnoj stranici dokazali smo ne samo da svakoj transformaciji podudarnosti geometrije HH odgovara transformacija podudarnosti geometrije Lobačevskog, već i da svakoj transfromaciji podudarnosti geometrije Lobačevskog odgovara transfromacija podudarnosti geometrije HH. Pošto je u dokazu te značajne činjenice ključnu ulogu igrao izomorfizam glavnog modela geometrije HH ostvaren suže-

---

25) Sa $W(d)=D$ i $\hat{W}(d')=D'$ označili smo zapravo da duži d odgovara tačka D u apsolutnom polaritetu W. Prema tome smo sa W u ovom slučaju označili, suženje apsolutnog polariteta W na unutrašnjost apsolute. Slično tome u polaritetu W tački D odgovara ne prava W(D), već presek te prave sa unutrašnjošću apsolute. Umesto W^{-1} mogli smo svuda pisati samo W jer je W involutivna transformacija.

njem apsolutnog polariteta na spoljašnjost apsolute i Beltrami-Klajnovog modela geometrije Lobačevskog iz tog dokaza sledi takođe vrlo važan stav:

Stav 4. Skup transformacija podudarnosti geometrije HH predstavljen je u glavnom modelu te geometrije skupom suženja na spoljašnjost apsolute svih automorfizama apsolute.

Navešćemo i primer: odredićemo transformaciju podudarnosti geometrije HH koja odgovara osnoj simetriji geometrije Lobačevskog. Pri tom određivanju koristićemo stav po kome je skup svih invarijantnih tačaka (i uopšte invarijantnih likova) transmutacije neke transformacije istovetan skupu slika invarijantnih tačaka (i uopšte invarijantnih likova) transformacije koju transmutujemo u transformaciji kojom izvodimo transmutaciju. Ako je p osa simetrije geometrije Lobačevskog, tačka P = W(p) je prema prethodnom invarijantna tačka transformacije koja toj osnoj simetriji odgovara u glavnom modelu geometrije HH. Pošto su u razmatranoj simetriji invarijantne i sve prave hiperboličnog pramena pravih osnove p, a svakoj od tih pravih u polaritetu W odgovara invarijantna tačka odgovarajuće transformacije, u Beltrami - Klajnovom modelu geometrije Lobačevskog skupu pravih hiperboličnog pramena pravih osnove p odgovaraće skup projektivnih duži unutrašnjosti apsolute čiji krajevi pripadaju apsoluti takvih da projektivne prave koje te duži sadrže, sadrže i pol P projektivne prave p koja odgovara osi p simetrije. Zato će i svaka tačka koja tim dužima odgovara u suženju apsolutnog polariteta W na unutrašnjost apsolute pripadati polari p tačke P u polaritetu W. Preciznije: skupu tih duži odgovaraće skup svih tačaka projektivne duži spoljašnjosti apsolute čiji krajevi pripadaju apsoluti i koja pripada polari tačke P. Dakle hiperboličnom pramenu pravih osnove p koji je u osnoj simetriji ose p invarijantan prava po prava u transformaciji koja odgovara toj simetriji, odgovara projektivna duž koju smo prethodno opisali, i koja je u toj transformaciji invarijantna tačka po tačka. Kako je tom projektivnom duži predstavljena prava geometrije HH, možemo konačno zaključiti da je transformacija poduarnosti geometrije HH odgovarajuća osnoj simetriji geometrije Lobačevskog transformacije koja zadovoljava sve zahteve definicija 1. i 2. istovremeno (v.str.55. rada). Preme tome transformacija koja odgovara osnoj simetriji geometrije Lobačevskog je transformacija koja je istovremeno i centralna i osna simetrija geometrije HH, te bismo je mogli nazvati i centralno-osnom simetrijom te geometrije. Primetimo uzgred da je centralno-osna simetrija geometrije HH u glavnom modelu te geometrije predstavljena suženjem harmonijske homologije projektivne ravni na spoljašnost apsolute pri čemu su središte i osa te homologije odgovarajući pol i polara apsolutnog polariteta. Osim ovog primera, nećemo više davati primere korišćenja izomorfizma na koji smo ukazali, u cilju određivanja svih vrsta transformacija podudarnosti geometrije HH, kao i njihovih svojstava.

Aksiomama paralelnosti geometrije HH odgovaraće teoreme geometrije Lobačevskog koje se odnose na odnos incidencije prave te geometrije i određenih hiperboličnih pramenova pravih iste. Od dveju mogućih formulisaćemo samo teoremu koja odgovara aksiomi V H geometrije HH. Prema toj aksiomi ako tačka P nije incidentna sa pravom a geometrije HH, postoje najmanje dve prave incidentne sa tačkom P koje pravu a ne seku. u slavnom modelu geometrije HH tački P odgovara neka tačka P spoljašnjosti apsolute, a pravoj a projektivna duž spoljašnjosti apsolute čiji krajevi pripadaju apsoluti, koja nije incidentna sa tačkom A. Ovu Projektivnu duž označićemo takođe sa a. Sve prave pramena pravih središta P koje seku apsolutu i projektivnu duž komplementnu duži a u unutrašnjim tačkama te duži sadrže projektivne duži koje predstavljaju prave pramena središta P koje ne seku pravu a. Tački P u polaritetu W odgovara sečica apsolute. Presek te sečice sa unutrašnjošću apsolute označićemo sa p. Taj presek u Beltrami - Klajnovom modelu geometrije Lobačevskog predstavlja pravu p te geometrije. Projektivnim dužima spoljašnjosti apsolute čiji krajevi pripadaju apsoluti i koje sadrže tačku P odgovaraju hiperbolični pramenovi pravih koji sadrže pravu p. Onim od tih duži koje predstavljaju prave pramena središta P koje ne seku pravu a, odgovaraće hiperbolični pramenovi pravih koji ne sadrže nijednu pravu hiperboličnog pramena pravih osnove a. Ovo se neposredno zaključilo iz Beltrami - Klajnovog modela geometrije Lobačevskog i glavnog modela geometrije HH. Naime pošto projektivna duž spoljašnjosti apsolute koja sadrži tačku P i pripada opisanoj vrsti projektivnih duži nema nijednu zajedničku tačku sa projektivnom duži a, za hiperbolične pramenove pravih koji odgovaraju tim dužima u izomorfizmu glavnog modela geometrije HH i modela te geometrije u geometriji Lobačevskog ne može postojati nijedna zajednička prava.

U izomorfizmu koji smo razmatrali tačkama i pravama geometrije HH odgovaraju prave i hiperbolični pramenovi pravih geometrije Lobačevskog, osnovnim i izvedenim relacijama geometrije HH osnovne i izvedene relacije geometrije Lobačevskog, transformacijama podudarnosti geometrije HH transformacije podudarnosti geometrije Lobačevskog pri čemu su te relacije relacije pravih ili relacije između pravih i hiperboličnih pramenova pravih te geometrije, a transformacije podudarnosti transformacije skupa pravih i skupa hiperboličnih pramenova pravih geometrije Lobačevskog. Ovo poslednje sledi iz čeinjenice da je slika bilo kog hiperboličnog pramena pravih geometrije Lobačevskog, hiperboličan pramen pravih čija je osnova slika sonove datog hiperboličnog pramena. Neke od teorema koje su odgovarale aksiomama geometrije HH i bile upisane u odgovarajućoj desnoj koloni na stranicama 81, 82, 84, 85. rada, a naročito teorema koja odgovara Pašovoj, pa i aksiomi Sl, koje se odnose na prave i heiperbolične pramenove geometrije Lobačevskog vrlo je teško dokazati u toj geometriji. Ali u izomorfizmu "geometrije pravih i hiperboličnih pramenova geometrije Lobačevskog" i glavnog modela geometrije HH svim tim teoremama odgovaraju sasvim jednostavne teoreme projektivne geometrije. Dakle zahvaljujući tom izomorfizmu u stanju smo ne samo da formulišemo, već i da utvrđujemo na neuporedivo jednostavniji način nego što bismo to činili u S - modelu geometrije Lobačevskog sve te teoreme.

S - modeli bilo koje geometrije u skupu svih modela te geometrije zauzimaju istaknuto mesto. Oblast interpretacije promenljivih date geometrije je skup čiji su elementi proizvoljne prirode i, ukoliko se ta geometrija razvija kao geometrija dve vrste promenljivih, klasa određene vrste podskupova tog skupa pri čemu se takvim podskupovima interpretiraju promenljive druge vrste. Ako je, kao što je to uobičajeno u geometriji, u pitanju S - model sistema aksioma te geometrije, utvrđivanje tačnosti tvrđenja te geometrije, odnosno određivanja svih posledica tog sistema aksioma u S - modelu u suštini se gotovo ne razlikuje od izvođenja dokaza odgovarajućih teorema u toj geometriji. Razlog tome je, istaknimo još jednom, proizvolja priroda elementa oblasti interpretacije. Zato se iz praktičnih razloga i kao što smo to prethodno obrazložili, sasvim opravdano, geometrije razvijaju kao teorije njihovih S - modela, tj. kao poluformalne teorije. Smatramo da ovaj poslednji izraz koji je povodom toga upotrebio pisac dela /16/ na najadekvatniji način izražava prirodu takvih modela. Upravo ta okolnost što poluformalna teorija, mada model, ima sva svojstva kojom se u suštini odlikuje i odgvarajuća teorija omogućuje da se pomoću nje ustanovi neposredna veza sintakse sa semantikom. U tom smislu u geometriji se S - model konkretne geometrije najčešće indentifikuje sa tom geometrijom.

Izomorfizam S - modela geometrije EH i HE - modela te geometrije posle identifikacije S - modela sa odgovarajućom geometrijom može se protumačiti i na drugačiji način kao interpretacija geometrije EH u geometriji Lobačevskog. Ovu interpretaciju u prethodnoj tački nazvali smo HE - modelom geometrije EH i tek naknadno "otkrili" da je osnovna pobuda formiranja takvog modela bio izomorfizam S - modela pomenutih geometrija. Izomorfizam S - modela geometrije HH i geometrije Lobačevskog može se slično prethodnom protumačiti i kao interpretacija geometrije HH u geometriji Lobačevskog ili se može opisati i kao HE - model geometrije HH. Sve teoreme geometrije Lobačevskog odgovarajuće aksiomama geometrije HH koje smo izložili u desnoj koloni, a i teoreme koje smo formulisali kao tvrđenja koja odgovaraju Pašovoj aksiomi, aksiomi S2 su interpretacije sistema aksioma geometrije HH. Izomorfizam na koji smo ukazali garantuje da su sva ta tvrđenja teoreme geometrije Lobačevskog, tj. osigurava tačnost aksioma geometrije HH u tom modelu tog sistema aksioma. Ipak ćemo radi ilustracije proveriti tačnost aksioma paralelnosti sistema aksioma geometrije HH u njenom HE - modelu. Skrećemo pažnju da se osnovni i neki izvedeni pojmovi, relacije i transformacije koji odgovaraju odgovarajućim pojmovima geometrije HH, izloženi u desnoj koloni na stranama 79, 80 i 81. rada, u "novom svetlu" mogu shvatiti i kao tumačenja odgovarajućih osnovnih i nekih izvedenih pojmova geometrije HH kao i osnovnih relacija i transformacija te geometrije u HE - modelu sistema aksioma HH. Koristeći izomorfizam odgovarajućih modela pokazali smo da je osnom simetrijom geometrije Lobačevskog predstavljena osno-centralna simetrija geometrije HH (ovo se takođe može proveriti i u HE - modelu geometrije HH na način istovetan načinu na koji smo to učinili u slučaju HE - modela geometrije EH). Svaka prava hiperboličnog pramena pravih geometrije Lobačevskog osnove p invarijantna je u simetriji ose p. Kako ta simetrija predstavlja u modelu i centralnu simetriju geometrije HH prema prethodnom svaka prava hiperboličnog pramena pravih ose p predstavlja u modelu tačku geometrije HH invarijantnu u toj centralnoj simetriji. Prema definiciji 4. (str.57. rada) svaka prava hiperboličnog pramena pravih osnove p predstavlja u modelu tačku suprotnu tački koja je u modelu predstavljena pravom p. Pošto je i prava p invarijantna u simetriji u odnosu na bilo koju pravu normalnu na pravoj p, sledi na osnovu iste definicije 4. da je tačka predstavljena pravom p suprotna svakoj tački predstavljenoj bilo kojom pravom hiperboličnog pramena pravih osnove p.

Neka su prave a koja ne pripada hiperboličnom pramenu pravih osnove p i taj hiperbolični pramen pravih interpretacije date tačke i date prave geometrije HH pri čemu ta tačka i ta prava nisu incidentne. Pretpostavimo najpre da je prava a istovetna pravoj p. Tada nijedan hiperboličan pramen pravih koji sadrži pravu a ne sadrži nijednu pravu hiperboličnog pramena pravih osnove p tj. a jer su osnove svih tih hiperboličnih pramenova prave pramena osnove p, tj. a. Dakle u ovom slučaju nijedna prava koja sadrži tačku A, koja je u modelu predstavljena pravom a, ne seče pravu p koja je u modelu predstavljena hiperboličnim pramenom pravih osnove p.

U ovom kao i u sledećim slučajevima oslanjali smo se na stav po kome je potreban i dovoljan uslov da hiperboličan pramen pravih incidentan sa pravom a sadrži pravu hiperboličnog pramena osnove p postojanje zajedničke normale osnova tih pramenova. Pošto ova zajednička normala pripada i jednom i drugom pramenu pomenutih osnova, ona u modelu predstavlja tačku preseka pravih predstavljenih tim pramenovima. Kako svaki hiperboličan pramen koji sadrži pravu a predstavlja pravu koja sadrži tačku a, a svaka prava pramena osnove p tačku prave p geometrije HH predstavljene hiperboličnim pramenom pravih osnove p, prema prethodnom skup pravih pramena pravih središta A koje seku pravu p predstavljen je u modelu skupom hiperboličnih pramenova koji sadrže pravu a i čije su osnove hiperparalelne sa osnovom p hiperboličnog pramena pravih osnove p. Skup svih pravih pramena pravih središta A koje ne seku pravu p biće predstavljen u modelu skupom svih hiperboličnih pramenova pravih koji sadrže pravu a, ali čije osnove nisu hiperparalelne sa pravom p.

Razmotrimo prvo slučaj kada se prave a i p seku. Pošto prema predpostavci prava a nije prava hiperboličnog pramena pravih osnove p ugao pravih a i p je oštar. Svaka od polupravih na koju pravu a razlaže tačka preseka pravih a i p je krak jednog od dva oštra ugla koje obrazuju prave a i p. Prema poznatoj teoremi geometrije Lobačevskog skup svih normala na jedan od tih krakova može se razložiti na skup normala koje seku drugi krak i skup normala koje taj krak ne seku. Ti drugi krakovi pomenutih oštrih uglova su poluprave prave p na koju tu pravu razlaže tačka preseka pravih a i p. Na osnovu prethodnog može se jednostavno zaključiti da je svaka tačka zatvorene duži prave a čiji su krajevi tačke preseka normala na pravu a koje su paralelne sa pravom p tačka preseka one normale na pravu a koja nije hiperparalelna sa pravom p. Prema tome ni za jednu od takvih normala ne postoji zajednička normala te normale i prave p. Hiperbolični pramenovi pravih čije su osnove opisane normale su hiperbolični pramenovi pravih [illegible] pravih koje sadrže pravu a ali nijedan od njih ne sadrži nijednu pravu hiperboličnog pramena pravih osnove p. S obzirom da svaka duž sadrži neprebrojivo mnogo tačaka takvih hiperboličnih pramenova pravih ima takođe neprebrojivo mnogo.

Ako je prava a hiperparalelna sa pravom p na sličan način kao u prethodnom slučaju može se dokazati da skup tačaka zatvorene duži prave a čiji su krajevi tačke preseka onih dveju normala na pravu a koje su paralelne sa pravom p predstavlja skup tačaka preseka onih normala na pravu a koje nisu hiperparalelne sa pravom p. Svaka od tih normala je osnova hiperboličnog pramena pravih koji sadrži pravu a i ne sadrži nijednu pravu hiperboličnog pramena pravih osnove p.

Ako je prava a hiperparalelna sa pravom p ,za razliku od prethodnih slučajeva skup tačaka preseka svih normala na pravu a koje nisu hiperparalelne sa pravom p nije skup tačaka duži već zatvorene poluprave prave a, čije početak tačka preseka one normale na pravu a koja je paralelna sa pravom p. Od dveju polupravih prave a čiji je početak tačka p pomenuta poluprava je poluprava koja pripada onoj od orjentisanih pravih prave a koja je paralelna pravoj p. Pošto je i skup tačaka poluprave neprebrojiv i u ovom slučaju postoji beskonačno mnogo hiperboličnih pramenova pravih koji u modelu predstavljaju prave pramena središta A koje ne seku pravu p.

Prema aksiomi V.H geometrije HH svakoj pravoj p te geometrije pripadaju najmanje dve tačke koje sa središtem A pramena pravih ne određuju pravu. Provera tačnosti ove aksiome u HE - modelu geometrije HH, pod uslovom da su umesto skupa hiperboličnih pramenova pravih koji sadrže pravu a razmatra skup hiperboličnih pramenova pravih koji sadrže pravu p, analogna je prethodnoj. Naime svaka prava hiperboličnog pramena osnove p pretstavlja u modelu neku tačku prave p. Pošto je tačka A predstavljena u modelu pravom a koje ne pripada pramenu osnove p prava koja je incidentna sa tačkom A i nekom tačkom B prave p predstavljena je u modelu hiperboličnim pramenom pravih koji sadrži i pravu a i pravu b pramena pravih osnove p pri čemu pravu b predstavlja tačka B. Dabi u geometriji Lobačevskog neki hiperboličan pramen pravih sadržao dve prave potrebno je i dovoljno da je osnova tog pramena zajednička normala tih pravih. Ako takva zajednička normala ne postoji, tada te dve prave nisu incidentne sa istim hiperboličnim pramenom te u modelu predstavljaju tačke za koje ne postoji prava koja je incidetna sa svakom od tih tačaka. Drugim rečima skup svih normala na pravu p koje nisu hiperparalelne sa pravom a predstavlja u HE-modelu skup svih tačaka prave p geometrije HH za koje ne postoji prava pramena pravih središta A koje incidentna sa bilo kojom od tih tačaka.

3. <u>Provera tačnosti aksioma apsolutne geometrije u geometrijama ravni $^1S_2$</u> . Sistem aksioma incidencije "apsolutno" apsolutne dvodimenzione geometrije (§ 2.9.) formirali smo kap presek svih aksioma grupa aksioma incidencije dvodimenzionih projektivno metričkih geometrija. Skup

aksioma svake od tih grupa je nezavisan. Zato je i skup aksioma incidencije apsolutne geometrije istovremeno i najširi nezavisan skup tvrđenja kojima se utvrđuju zajednička svojstva relacije incidencije svih projektivno metričkih geogeometrija. Aksiome incidencije projektivno metričkih geometrija različitih od klasičnih formirali smo kao aksiome geometrije odgovarajućih oblasti projektivne ravni. Dakle, i skup aksioma incidencije apsolutne geometrije, na prethodno ukazani, posredan način, takođe je vezan za relacije incidencije koje važe za odgovarajuće likove tih oblasti projektivno metričke ravni. Prema tome nema potrebe proveravati tačnost aksiome incidencije apsolutne geometrije u geometrijama određenih oblasti projektivne ravni (projektivno metričkim geometrijama).

Podsticaj za utvrđivanje aksioma transformacija podudarnosti bio je ipak drugačije prirode. U tom slučaju pre svega smo se oslanjali na princip po kome se bitna svojstva pojmova određenih na osnovu iskustava u izvesnoj oblasti, prilikom proširivanja tih pojmova i na područja koja obuhvataju tu oblast, ili na nove njoj slične oblasti, zadržavaju (princip permanencije). Tako smo na primer, sadržaj teorema kojom se u /1/ izražavalo bitno svojstvo "kretanja" klasičnih geometrija usvojili kao aksiomu G2A grupa aksioma transf ormacija podudarnosti svih projektivno metričkih geometrija, pa dakle i apsolutne geometrije. Naravno da ovaj drugi put zahteva proveru tako odabranih aksioma u modelima svih pomenutih geometrija. Mi smo tu proveru i izvršili. Ovde ćemo izložiti smo onaj njen deo koji se odnosi na geometrije ravni $^1S_2$.

Pre toga izložićemo u osnovnim crtama ono što se odnosi na predstavljanje transformacija podudarnosti u geometrijama ravni $^1S_2$ i odrediti koje projektivne kolineacije predstavljaju centralne i osne simetrije tih geometrija. Mada je to dovoljno poznatno i iz opštih izlaganja o geometrijama ravni ${}^1S_2$, stavom 4. rada (§ 4. 2.)- u modelu jedne od tih geometrija u geometriji Lobačevskog, potvrdili smo da je skup transformacija podudarnosti i te geometrije skup suženja na spoljašnjost apsolute svih automorfizama te apsolute. Na sličan način to smo mogli utvrditi i u onoj drugoj geometriji idealne oblasti ravni ${}^1S_2$.

Na osnovu teoreme 13.t.3. (/3/str.93.) čiji smo sadržaj izložili i na str. 140. rada /6/, skup svih automorfizama apsolute istovetan je skupu svih kolineacija f projektivne ravni takvih da je foW = Wof gde je W polaritet projektivne ravni određen apsolutom. Ovaj plaritet ćemo u daljem tekstu često nazivati apsolutnim polaritetom. Identifikovanje automorfizama apsolute sa kolineacijama projektivne ravni koje zadovoljavaju prethodno navedeni uslov od velikog je značaja jer su u radu /13/ navedene sve vrste projektivnih kolineacija koje su permutabilne[26] sa nedegenerisanim hiperboličnim polaritetom, a takođe i važna svojstva tih kolineacija. Na osnovu tih svojststva može se zaključiti da jedino suženja perspektivnih kolineacija projektivne ravni na određenu oblast interpretacije odgovarajuće geometrije zadovoljavaju zahteve definicije 1. centralne simetrije, pod uslovom da je centar te perspektive tačka oblasti interpretacije. Međutim na osnovu teoreme 3. (/6/str.140) ako je neka perspektivna kolineacija permutabilna sa apsolutnim polaritetom, tada je ta perspektivna kolineacija harmonijska homologija koja je centar pol ose. Prema tome bilo koja centralna simetrija apsolutne ge-

26) Za kolineaciju f kaže se u /13/ da je permutabilna sa polaritetom W ako i samo ako važi fW=Wof. Ovaj izraz u istom značenju upotrebljavaćemo i u radu.

ometrije u njenim modelima u odgovarajućim oblastima ravni ${}^{1}S_{2}$ predstavljena je suženjem harmonijske homologije projektivne ravni na odgovarajuću oblast interpretacije apsolutne geometrije u ravni ${}^{1}S_{2}$ uz uslov da središte te homologije pripada oblasti interepretacije, i da je to središte pol ose homologije u apsolutnom polaritetu. Ako je središte takve harmonijske homologije tačka unutrašnjosti apsolute, tada je njena osa spoljašnja prava apsolute. Zato je u modelu apsolutne geometrije u sopstvenoj oblasti ravni ${}^{1}S_{2}$ (koji je istovremeno i Beltrami Klajnov model geometrije Lobačevskog) središte centralne simetrije[27)] jedina invarijantna tačka te transformacije. Osa harmonijske homologije čije središte pripada idealnoj oblasti ravni ${}^{1}S_{2}$, koji ćemo odsad kratko zvati spoljašnjošću apsolute, i koja je automorfizam apsolute, seče apsolutu. Sve tačke preseka ose sa spoljašnjošću apsolute su invarijantne tačke centralne simetrije onih modela apsolutne geometrije čija je oblast interpretacije ta spoljašnjost. Pošto su ti modeli istovremeno modeli geometrija EH i HH, na osnovu prethodnog sledi da u tim geometrijama svaka centralna simetrija raspolaže sa bezbroj invarijantnih tačaka. U harmonijskoj homologiji čijim je suženjem na oblast interpretacije tih geometrija predstavljena ta centralna simetrija svaka tačka ose te homologije incidentna je sa tačno dvema invarijantnim projektivnim pravama. U glavnim modelima geometrija EH i HH presek samo jedne od tih pravih sa oblasti interpretacije predstavlja pravu odgovarajuće geometrije, dok u Beltrami - Klajnovom modelu presek svake od tih pravih sa unutrašnjošću apsolute predst-

---

27) Ovde smo, radi kraćeg izražavanja, identifikovali suženje projektivne kolineacije na oblast interepretacije odgovarajuće geometrije sa transformacijom podudarnosti koja je predstavljena tim suženjem. Tako ćemo često postupati i ubuduće.

avlja pravu geometrije Lobačevskog. U svakom slučaju na osnovu definicije 2. suženje hormonijskih homologija čije središte pripada spoljašnjosti apsolute na oblast interpretacije jedne od pomenutih geometrija predstavlja osnu simetriju odgovarajuće geometrije. Time je u tim modelima apsolutne geometrije predstavljena i osna simetrija te geometrije. Sem na opisani način osna simetrija apsolutne geometrije predstavljena je u modelu te geometrije, koji je istovremeno i glavni model geometrije EH, harmonijskom homologijom kojoj je osa prava spoljašnjosti apsolute a središte pol ose. Osa te harmonijske homologije je prava geometrije EH te je u ovom slučaju osa odgovarajuće osne simetrije geometrije EH prava. Istom harmonijskom homologijom predstavljena je i osna simetrija geometrije HH ali u odnosu na eliptičan niz tačaka.

<u>Provera tačnosti aksioma transformacija podudarnosti apsolutne geometrije u geometrijama ravni ${}^{1}S_{2}$</u>

Prema prethodnom transformacija podudarnosti geometrija ravni ${}^{1}S_{2}$ predstavljene su suženjima automorfizama apsolute na odgovarajuće oblasti te ravni. Zato je, s obzirom da je svako od tih suženja bijekcija te oblasti, zadovoljen jedan deo zahteva aksiome G1A. Kako su ta suženja saglasna sa relacijom incidencije likova tih oblasti koji predstavljaju tačke i prave odgovarajućih geometrija, zahtevi te aksiome u potpunosti su zadovoljeni u sve tri geometrije ravni ${}^{1}S_{2}$.

<u>Dokaz tačnosti aksiome G2A</u>. Dokaz tačnosti ove aksiome izvešćemo istovremeno u sve tri geometrije ravni ${}^{1}S_{2}$. Ovaj dokaz u zantanoj meri oslanja se na teoremu projektivne geometrije po kojoj: "Auto morfizmi apsolute preslikavaju polarni trotemenik u odnosu na apsolutni polaritet na trotemenik koji je takodje autopolaran u odnosu

na taj polaritet. Dokaz ove teoreme izostavljamo uz napomenu da je ona neposredna posledica teoreme 37.1.dela/13/ (str.157.). Prema teoremi 36.1. istog dela (str.155.) koja se odnosi na hiperbolični polaritet suženje hiperboličnog polariteta na dve stranice autopolarnog trotemenika u odnosu na apsolutni polaritet je hiperbolična, a na preostaloj stranici eliptična involucija. Ovoj teoremi odgovara teorema 59.8.(/13/str.238.) čiji drugi deo pogrešno formulisan: "Ako je ABC autopolarni trotemenik u odnosu na datu koniku, dve stranice tog trotemenika seku tu koniku, a treća je ne seče; dva temena ovog autopolarnog trotemenika su spoljašnje tačke konike a treće je unutrašnja tačka iste".

S obzirom da je polaritet određen apsolutom, kada je ona kao u ovom slučaju kriva drugog reda koja nije degenerisana, hiperbolični polaritet prethodne dve teoreme možemo koristiti kada je u pitanju bilo koja geometrija ravni ${}^1S_2$. Neka su tačka A i prava p i tačka A_1 i prava p_1 dva incidentna para tačka - prava apsolutne geometrije. Ovi parovi predstavljeni su odgovarajućim incidetnim parovima tačka - projektivna prava (preciznije: presek te projektivne prave sa odgovarajućom oblašću interpretacije apsolutne geometrije). Ove parove označićemo i u modelu na isti način kao i u samoj apsolutnoj geometriji. Projektivne prave koje sadrže interpretacije apsolutnih pravih p i p_1 označićemo redom sa p' i p_1'. Tačkom A i pravom p' koje su incidentne jednoznačno je određen autopolarni trotemenik u odnosu na apsolutni polaritet kome su tačka A i prava p' teme i stranica. To isto važi i za tačku A_1 i pravu p_1'. Označimo preostala temena prethodno opisanih trotemenika sa B i C odnosno B_1 i C_1. Prema prethodno navedenoj teoremi dve stranice svakog od tih trotemenika seku apsolutu a treća je ne seče. Tačke preseka dveju odgovarajućih stranica pomenutih trotemenika i apsolute označićemo sa D,E i D_1 i E_1 redom. Tačke preseka drugih dveju odgovarajućih stranica tih trotemenika i apsolute označićemo sa F,G i F_1, G_1 redom. Četvorke tačaka D,E,F,G i D_1,E_1,F_1,G_1 su takve da nijedna trojka iste četvorke nije trojka kolinearnih tačaka. Svaki automorfizam apsolute koji par A,p' preslikava na par A_1,p_1' preslikava i trotemenik ABC na trotemenik $A_1 B_1 C_1$. Pošto važi obratno svi automorfizmi apsolute koji par A,p' preslikavaju na par A_1,p_1' istovremeno su automorfizmi apsolute koji trotemenik ABC preslikavaju na trotemenik $A_1B_1C_1$. Dokazaćemo da postoje tačno četiri takva automorfizma. Svaki od tih automorfizama preslikava i četvorku tačaka D,E,F,G na četvorku tačaka D_1,E_1,F_1,G_1. Pri tom se tačka D može preslikavati jedino na tačke D_1 odnosno E_1 što važi i za tačku E. Pri tom, ako je slika tačke D tačka D_1 tada je slika tačke E tačka E_1. Prema tome postoje tačno četiri mogućnosti preslikavanja prve četvorke tačaka na drugu četvorku:

a) (D,D_1), (E,E_1),(F,F_1),(G,G_1) b) (D,D_1),(E,E_1),(F,G_1),(G,F_1)
c) (D,E_1), (E,D_1),(F,F_1),(G,G_1) d) (D,E_1),(E,D_1),(F,G_1),(G,F_1)

Pošto je sa dve četvorke tačaka "opšteg položaja" jednoznačno odredjena projektivna kolineacija na osnovu prethodnog sledi da postoje tačno četiri automorfizma apsolute koji tačku A i pravu p' preslikavaju na tačku A_1 i pravu p_1'. Kako su ti automorfizmi istovremeno i automorfizmi oblasti interpretacije apsolutne geometrije u ravni ${}^1S_2$, suženja tih automorfizama na te oblasti, koja pretstavljaju odgovarajuće transformacije podudarnosti apsolutne geometrije, preslikavaju i preseke pravih p' i p_1' sa tim oblastima - koji predstavljaju prave p i p_1 - jedan na drugi.

U tekstu koji sledi skup automorfizama apsolute koja kao što smo to ranije pokazali predstavlja grupu transformacija podudarnosti apsolutne geometrije označavaćemo takođe sa G.

Pošto se provera tačnosti aksiome G3 može jednostavnije izvesti posle provere aksiome G4 najpre ćemo dokazati tačnost aksiome G4 u $^1S_2$ - modelima te geometrije.

Provera aksiome G4. Neka su A i B bilo koje dve tačke jedne od geometrija ravni $^1S_2$. Pokazaćemo da su svakoj od tih geometrija postoji automorfizam apsolute - hormonijska homologija koja "razmenjuje" tačke A i B. Suženje te harmonijske homologije, ako postoji, na pravu p(A,B) je hiperbolična involucija: neophodno je da par tačaka A,B bude harmonijski konjugovan sa parom invarijantnih tačaka C i C_1 te involucije. Zato je par tačaka C,C_1 par dvostruko odgovarajućih tačaka hiperbolične involucije prave p(A,B) kojoj su A,B invarijantne tačke. Ovu involuciju označićemo sa h_p. Ali pošto je jedna od tačaka C i C_1 središte a druga presek ose harmonijske homologije koja tačku A preslikava na tačku B koja pripada grupi G neophodno je da tačke C i C_1 budu konjugovane tačke apsolutnog polariteta W. Zato je par tačaka C,C_1, ako postoji, par odgovarajućih tačaka suženja W_p apsolutnog polariteta W na pravu p. Ako je prava p prava spoljašnjosti apsolute tada je W_p eliptična involucija. Prema teoremi na str.77. dela /22/postoji tačno jedan par tačaka koji je zajednički, par homologih elemenata involucija W_p i h_p. Ovaj par tačaka je upravo par tačaka C i C_1, a jedine dve harmonijske homologije koje "razmenjuju" tačke A i B i predstavljaju harmonijske homologije grupe G su homologije h_C i h_{C_1} središte C i C_1 čije su ose polare - u odnosu na apsolutni polaritet - tačaka C i C_1. Svaka od tih osa prema tome sadrži tačke C i C_1 pa pošto su te tačke spoljašnje tačke apsolute te ose seku apsolutu. U geometriji EH te ose su hiperbolični nizovi tačaka, a u geometriji HH prave.

Uzimajući u obzir da suženja prethodno opisanih harmonijskih homologija na odgovarajuće oblasti ravni ${}^1S_2$ predstavljaju ne samo centralne i osne simetrije apsolutne geometrije, već i centralne i osne simetrije geometrija EH i HH prethodne rezultate možemo iskoristiti i u cilju utvrđivanja svojstava ovih geometrija značjnih u našem daljem radu. Tako na osnovu prethodnog možemo formulisati i sledeći stav:

Stav. Za bilo koje dve tačke A i B geometrije EH (HH) koje pripadaju pravoj (eliptičnom nizu) te geometrije postoje tačno dve simetrije u odnosu na tačke C i C_1 te prave (tog eliptičnog niza) koje tačku A preslikavaju na tačku B. Ove dve tačke su središta duži odredjenih tačkama A i B (odsečaka eliptičnog niza koji su određeni tačkama A i B) i uzajamno su suprotne. U geometriji HH ove simetrije u odnosu na tačke C i C_1 istovremeno su i osne simetrije u odnosu na pravu koje sadrže tačke C i C_1 i uzajamno su normalne. U geometriji EH te simetrije su istovremeno i simetrije u odnosu na hiperbolične nizove koji sadrže tačke C i C_1 i takođe su uzajmno normalni.

Uzajamna normalnost osa ovih simetrija dokazuje se neposredno na osnovu definicije normalnosti likova ustanovljene u ovom radu. Koristeći ovu definiciju takođe se jednostavno utvrđuje i uzajamna normalnost prave p (A,B) i osa ovih simetrija .

Ako projektivna prava p (A,B) seče apsolutu takođe ćemo utvrditi da postoji bar jedna centralna simetrija apsolutne geometrije koja tačku A preslikava na tačku B. Mada se taj dokaz može izvesti na način istovetan prethodnom izvešćemo ga u ovom slučaju na drugi, nešto jednostavniji način. Ako sa M i N označimo tačke preseka prave p (A,B) i apsolute tada par tačaka M,N ne razdvaja par tačaka A,B jer tačke A i B pripadaju oblasti interpretacije apsolutne geometrije u ravni ${}^1S_2$ pa su ili obe tačke unutrašnjosti ili obe tačke spoljašnjosti apsolute. Na osnovu poznate teoreme u ovom slučaju postoji tačno jedan par tačaka C i C_1 koji je harmonijski konjugovan kako sa parom tačaka A,B tako i sa parom tačaka M,N. U hiperboličnoj involuciji prave p (A,B) u kojoj su invarijantne tačke C i C_1 par tačaka M,N je dvostruko odgovarajući par tačaka. Zato je i u harmonijskim homologijama h_C i h_{C_1} grupe G taj par tačaka dvostruko odgovarajući, što je potreban uslov da te harmonijske homologije budu automorfizmi apsolute. Ali pošto su tačke C i C_1 harmonijski konjugovane i sa parom tačaka A i B te harmonijske homologije "razmenjuju" tačke A i B. Pošto je par tačaka C,C_1 harmonijski konjugovan sa parom tačaka apsolute jedna od tačaka C i C_1 pripada unutrašnjosti a druga spoljašnjosti apsolute. Prema tome u ovom slučaju samo jedna od tačaka C i C_1 pripada datoj oblasti interpretacije apsolutne geometrije u ravni ${}^1S_2$. Polara unutrašnje tačke apsolute je njena spoljašnja prava; polara spoljašnje tačke je sečica apsolute. Harmonijske homologije središta C i C_1 su automorfizmi apsolute pa su pomenute polare ose tih harmonijskih homologija. Suženje jedne od ovih harmonijskih homologija na odgovarajući oblast interpretacije apsolutne geometrije u ravni ${}^1S_2$ je ne samo centralna simetrija apsolutne, već predstavlja i centralnu simetriju geometrije odgovarajuće oblasti ravni ${}^1S_2$. Ako je ta oblast idealna tada to suženje predstavlja takođe i simetriju u odnosu na pravu geometrije HH. Pri tom je prava p (A,B) normalna na toj pravoj i središte te centralne simetrije je tačka suprotna osi pomenute osne simetrije.

Ovo suženje je takođe i simetrija geometrije EH u odnosu na hiperbolični niz u odnosu na koji je središte te centralne simetrije suprotna tačka. Takođe se na osnovu definicije 3. normalnosti likova koju smo ustanovili u ovom radu može dokazati da je prava p (A,B) normalna na tom hiperboličnom nizu. Prema toj definiciji: "Lik L_1 je normalan na liku L ako i samo ako je lik L_1 invarijantan u simetriji ose L i takođe ako je lik L invarijantan u simetriji ose L_1". S obzirom da je prava p (A,B) invarijantna u centralnoj simetriji središta C, pa dakle u njoj istovetnoj simetriji u odnosu na hiperbolični niz c dovoljno je još samo dokazati da je i hiperbolični niz tačaka c invarijantan u simetriji geometrije EH u odnosu na niz h(A,B). Harmonijska homologija grupe G u odnosu na pravu p(A,B) preslikava pravu c na tu istu pravu jer je prava c polara u apsolutnom polaritetu invarijantne tačke C prave p(A,B) u harmonijskoj homologiji p(A,B). Presek projektivne prave c sa spoljašnjošću apsolute je hiperbolični niz c geometrije EH, a suženje harmonijske homologije ose p(A,B) na spoljašnjost apsolute je simetrija geometrije EH u odnosu na hiperbolični niz H(A,B).

Osim simetrije u odnosu na c, i u harmonijskoj homologiji grupe G čija osa sadrži tačku C spoljašnjosti apsolute a središte joj je tačka C_1, par tačaka A,B je dvostruko odgovarajući par tačaka. Suženje ove harmonijske homologije na spoljašnjost apsolute predstavlja simetriju u odnosu na pravu geometrije EH, a simetriju u odnosu na eliptični niz geometrije HH predstavljen osom te harmonijske homologije.

U slučaju kada tačke A i B pripadaju tangenti apsolute, kao i u prethodna dva slučaja, središte i presek ose harmonijske homologije grupe G sa pravom p(A,B), pošto ta homologija razmenjuje tačke A i B, moraju biti harmonijski konjugovane sa parom tačaka A i B. Da bi ta harmonijska homologija bila istovremeno automorfizam apsolute neophodno je da se dodirna tačka tangente koja sadrži tačke A i B preslikava na tu istu tačku. Prema tome ta dodirna tačka je ili središte, ili tačka ose te harmonijske homologije. Međutim harmoniska homologija kojoj je središte tačka apsolute ne može biti automorfizam apsolute jer bi u tom slučaju ta harmoniska homologija bila elacija. Zato je dodirna tačka prave p(A,B) i apsolute tačka ose harmoniske homologije koja razmenjuje tačke A i B. Središte te harmoniske homologije grupe G je tačka C koja sa tom tačkom dodira obrazuje par koji je harmonijski konjugovan sa parom tačaka A,B. Osa te homologije c je sečica apsolute koja sadrži tačku dodira prave p(A,B) i apsolute. Suženje te harmoniske homologije na spoljašnjost apsolute je simetrija geometrija EH i HH središta C koja tačku A preslikava na tačku B i istovremeno osna simetrija tih geometrija u odnosu na presek prave c sa spoljašnjošću apsolute. Taj presek je hiperbolični niz geometrije EH, a prava geometrije HH. Osim pomenutih simetrija nema drugih simetrija ovih geometrija koje "razmenjuju" tačke A i B .

Provera aksiome G3. Neka su a i b bilo koje dve apsolutne prave. U svakom od modela apsolutne geometrije u ravni $^1S_2$ prave a i b su sadržane - pripadaju odgovarajućim projektivnim pravama koje ćemo takođe označiti sa a i b. U svakom automorfizmu apsolute koji pravu a preslikava na pravu b i obratno presečna tačka P tih pravih preslikava se na tu istu tačku. Kao što smo ranije istakli svaki automorfizam je kolineacija projektivne ravni koja je permutabilna sa apsolutnim polaritetom W. Prema teoremi 2. (/6/str. 140.) u toj kolineaciji invarijantna je i polara p tačke P u tom polaritetu. Neka su A i B polovi pravih a i b koji prema prethodnom pripadaju pravoj p. Na osnovu teoreme 2.(/6/ str.140.) svaki automorfizam apsolute koji "razmenjuje" prave a i b "razmenjuje" i tačke A i B i obratno. Znači harmonijske homologije grupe G koja tačku A preslikava na tačku B i obratno, preslikavaju i pravu a na pravu b i obratno. Na taj način provera aksiome G3 svodi na utvrđivanje tačnosti aksiome G4, koju smo prethodno izložili.

Na ovaj način dokazali smo i da se u sve tri geometrije ravni ${}^1S_2$ mogu ostvariti modeli apsolutne geometrije. Ponovimo još jednom da smo izvršili proveru tačnosti aksioma transformacija podudarnosti, i u svim ostalim projektivno metričkim geometrijama ali da za ostvarenje preostalih ciljeva postavljenih u ovom radu to nije potrebno izložiti. Ova provera znatno će nam koristiti u daljem radu jer ćemo se iz razloga koje ćemo obrazložiti u uvodu sledeće glave opredeliti za razvijanje teorije trajektorija pramenova pravih u glavnim modelima geometrija ravni ${}^1S_2$.

G L A V A II

T R A J E K T O R I J E P R A M E N O V A P R A V I H G E O M E T R I J A R A V N I $^{1}S_2$

U prethodnoj glavi ostvarili smo prvi deo postavljenog cilja - formirali smo sisteme aksioma poluformalnog karaktera geometrija spoljašnjosti apsolute. Tom prilismo otkrili mnoge činjenice koje smo, iako nisu neposredno vezane sa osnovnom temom našeg rada, ipak izložili smatrajući ih veoma značajnim za geometriju. Pri izlaganju takvih činjenica trudili smo se da istaknemo ono što se može primeniti na trajektorije tih geometrija. Tako smo i dok smo razmatrali modele ovih geometrija u geometriji Lobačevskog, veću pažnju posvetili predstavljanju transformacija podudarnosti, jer će poznavanje tih transformacija biti veoma korisno za upoznavanje izvesnih svojstava tih trajektorija. I pri proveri aksioma transformacija podudarnosti apsolutne geometrije posebno smo se zadržali na utvrđivanju onih svojstava tih transformacija koja će se koristiti pri proučavanju trajektorija pramenova pravih i snopova ravni projektivno metričkih geometrija spoljašnjosti apsolute.

Pojam trajektorija pramenova pravih proučavao se do sada uglavnom u klasičnim geometrijama, pre svega u geometriji Lobačevskog. Ovaj pojam bio je poznatiji pod imenom linija koje dopuštaju slobodno kretanje po samim sebi ili krivih stalne krivine. Ranije definicije ovih krivih zasnivale su se na pojmu "sečice jednakog nagiba". Po novijoj definiciji ove krive su trajektorije (putanje, orbite) tačke u odnosu na podgrupu grupe transformacija podudarnosti odgovarajuće geometrije. Ove podgrupe su generisane osnim simetrijama čije ose pripadaju datom pramenu pravih. Jedna od definicija u tom duhu izložena je i na str. 161. udžbenika M. Prvanović "Osnovi geometrije" (/24/). Prethodnom definicijom, na istoj strani, definisana je relacija skupa tačaka geometrije Lobačevskog po kojoj je tačka X u toj relaciji sa tačkom Y ako postoji element date grupe transformacija koja tačku X preslikava na tačku Y. Pošto se ukazalo da je ta relacija relacija ekvivalencije definisana je trajektorija T(X) tačke X u odnosu na grupu G,kao ona klasa ekvivalencije u odnosu na prethodno definisanu relaciju,koja sadrži tačku X.

Trajektorije grupa čije je određenje vezano sa pramenovima pravih nazvane su trajektorijama pramenova pravih. Kasnije se zaključuje da su te trajektorije upravo krive stalne krivine ravni Lobačevskog.

U radu /5/, a pre toga i u radu /4/, trajektorije pramenova pravih nazivali smo epiciklima po ugledu na pisca udžbenika /16/. Ovaj termin upotrebljen je u istom smislu i u delu /13/. U radu /5/ sem drugačijeg naziva upotrebili smo i drugačiju definiciju trajektorije pramenova pravih (v.definiciju 2.na str.175.rada /2/). Ovu definiciju ustanovili smo i koristili još od 1978. godine, dakle u vreme kada nam druga definicija na str. 161. dela /24/ nije mogla biti poznata. Mada su ove definicije u istom duhu i u našoj definiciji radi se o trajektoriji tačke u odnosu na grupu vezanu za dati pramen pravih - kasnija upotrebljavanja, koja ćemo izložiti u radu, ukazala da naša definicija tog pojma ima izvesnu prednost u odnosu na postojeće. Ova definicija trajektorije datog pramena pravih koja sadrži tačku A u našoj varijanti glasi:

Definicija 5. Trajektorija pramena pravih koja sadrži tačku A je skup slika te tačke u svim proizvodima po dve osne simetrije u odnosu na ose tog pramena pravih.

U radu /6/ pokazali smo da je skup takvih proizvoda prava podgupa grupe generisane osnim simetrijama u odnosu na prave datog pramena pravih. Upravo u odnosu na ovu grupu se dosada definisala odgovarajuća trajektorija.

Pošto smo u prethodnoj glavi formirali sisteme aksioma i svih geometrija ravni ${}^1S_2$, moguće je u svakoj od tih geometrija razvijati teoriju trajektorija pramenova pravih tih geometrija neposredno u njihovim S - modelima. U tom slučaju odgovarajući odnosi u glavnim (projektivnim) modelima tih geometrija bili bi nam samo osnovna inspiracija i putokaz u formulisanju i dokazivanju teorema kojima se utvrđuju svojstva trajektorija odgovarajućih poluformalnih geometrija. U konačnoj verziji, kada je put već pređen, obično se u radovima ovakve vrste poklanja neznatna pažnja pomenutoj inspiraciji. Suprotno tome u preostalom delu rada naglasićemo baš tu stranu procesa izgrađivanja poluformalne teorije na taj način što ćemo prvo razvijati teoriju njoj odgovarajućeg modela, u ovom slučaju određene oblasti ravni ${}^1S_2$. Način tog razvijanja biće takav da formulisanje odgovarajućih teorema i izvođenja njihovih dokaza na osnovu aksioma geometrija ravni ${}^1S_2$ neće predstavljati nikakvu teškoću. Ovim putem na mnogo jednostavniji način dolazimo do rezultata koji će se, ukoliko se za to ukaže potreba, moći skoro neposredno "prevesti" na jezik odgovarajuće poluformalne teorije. Uostalom na sličan način se izgrađivala i geometrija Lobačevskog, što se može reći i za većinu drugih geometrijskih pa i matematičkih teorija.

S obzirom da je određivanje trajektorija pramenova pravih vezano sa pramenovima pravih geometrija ravni ${}^1S_2$ sada ćemo dati samo opštu napomenu o odnosu pramenova pravih geometrija ravni ${}^1S_2$ i projektivnih pramenova pravih. Pramenovi pravih tih geometrija su preseci projektivnih pramenova pravih sa odgovarajućom oblasti interpretacije tih geometrija.

Pokazalo se da je korisnije najpre razvijati teoriju trajektorija pramenova pravih ravni ${}^1S_2$. Na taj način utvrdićemo veoma značajna svojstva ovih trajektorija i to u mnogo opštijem vidu nego što bi to bio slučaj kada bi trajektorije ravni ${}^1S_2$ razmatrali u svakoj od geometrija te ravni posebno. I dokazi teorema kojima se izražavaju pomenuta svojstva su opštiji: najčešće na ovaj način umesto tri posebna dokaza imamo samo jedan. Istovremeno proučavanje trajektorija geometrija ravni ${}^1S_2$ kao trajektorija te ravni omogućuje i bolje povezivanje dobijenih rezultata. Upravo takvo proučavanje omogućilo nam je da uočimo mogućnost definisanja ovih trajektorija i kao trajektorija nizova tačaka što takođe ima u izvesnim slučajevima prednosti.

Posle proučavanja trajektorija pramenova pravih ravni ${}^1S_2$ na veoma jednostavan način utvrdićemo koju vrstu trajektorija te trajektorije predstavljaju u svakoj od geometrija ravni ${}^1S_2$ ponaosob.

Uporedni način razmatranja trajektorija geometrija ravni ${}^1S_2$ omogućiće i da se sagledaju dublji razlozi iz kojih su trajektorije paraboličnih pramenova pravih iste oblasti svake od geometrija ravni ${}^1S_2$ međusobno podudarne dok za trajektorije ostalih vrsta pramenova pravih tih geometrija to ne važi.

§ 1. TRAJEKTORIJE PRAMENOVA PRAVIH RAVNI ${}^1S_2$

1. Pramenovi pravih ravni ${}^1S_2$. Između pramenova pravih projektivne ravni i ravni ${}^1S_2$ postoji izvesna razlika na koju ćemo ukazati u ovoj tački. Pre svega ta razlika određena je odnosom središta datog pramena pravih i apsolute. Pramenove pravih ravni ${}^1S_2$ čija su središta unutrašnje tačke apsolute nazivaćemo eliptičnim i ta središta ćemo u ovom radu obeležavati sa U. Pramenove pravih iste ravni čija su središta tačke apsolute nazivaćemo paraboličnim, a ta središta obeležavati uglavnom sa D. Što se tiče pramenova pravih čija središta pripadaju spoljašnjosti apsolute i ko-

ja ćemo označavati sa V, u ravni $^1S_2$ neophodno je razlikovati dve vrste takvih - hiperboličnih - pramenova pravih. Prvom vrstom tih pramenova smatraćemo one hiperbolične pramenove pravih (čije je središte prema prethodnom spoljašnja tačka apsolute) čije su prave samo one prave odgovarajućeg projektivnog pramena pravih koje seku apsolutu. Hiperbolični pramen pravih druge vrste predstavlja skup svih spoljašnjih pravih projektivnog pramena pravih čije je središte tačka spoljašnjosti apsolute. Napominjemo da unija dva hiperbolična pramena pravih ravni $^1S_2$ istog središta nije projektivni pramen pravih tog središta. Naime nijednom od ta dva hiperbolična pramena pravih ne pripadaju tangente apsolute kroz zajedničko središte tih pramenova. Slično važi i u slučaju paraboličnog pramena pravih: unija paraboličnog pramena središta D i dirke d apsolute u tački D predstavlja projektivni pramen pravih središta D. Jedino se eliptični pramen pravih središta U ne razlikuje od odgovarajućeg projektivnog pramena pravih.

Osim središta kod pramenova pravih ravni $^1S_2$, za razliku od odgovarajućih projektivnih pramenova, važnu ulogu ima i polara središta u odnosu na apsolutni polaritet. Polaru središta datog pramena pravih ravni $^1S_2$ nazvaćemo osnovom tog pramena pravih ako je taj pramen eliptičan. U slučaju paraboličnog pramena pravih ravni $^1S_2$ središta D osnovom smatramo dirku d apsolute u tački D bez tačke D. Osnova hiperboličnog pramena pravih prve vrste središta V je presek polare tog središta v sa unutrašnjošću apsolute, a osnova hiperboličnog pramena pravih istog središta ali druge vrste, presek polare v sa spoljašnjošću apsolute. Središtem i osnovom svaka prava neparaboličnog pramena pravih ravni $^1S_2$ razložena je na dve poluprave pa se u ovom slučaju može govoriti i o pramenovima polupravih ravni ${}^1S_2$. Dok eliptični pramenovi pravih ravni ${}^1S_2$ sadrže tačno po jedan odgovarajući pramen polupravih, hiperbolični pramenovi pravih bilo koje vrste sadrže po dva takva pramena.

Kao što je poznato presek eliptičnog pramena pravih ravni ${}^1S_2$ sa unutrašnjošću apsolute predstavlja eliptičan pramen pravih geometrije Lobačevskog u Beltrami - Klajnovom modelu te geometrije. Presek tog istog pramena sa spoljašnjošću apsolute predstavlja eliptičan pramen pravih geometrije HH i eliptičan pramen hiperboličnih nizova tačaka geometrije EH. Naglašavamo da eliptičan pramen pravih geometrije HH nije istovremeno i konkurentan pramen pravih te geometrije. Presek paraboličnog pramena pravih ravni ${}^1S_2$ sa spoljašnjošću apsolute predstavlja paraboličan pramen ili pramen paralelnih pravih geometrije HH odnosno paraboličan pramen hiperboličnih nizova tačaka geometrije HH. Presek hiperboličnog pramena pravih prve vrste ravni ${}^1S_2$ sa idealnom oblasti te ravni predstavlja hiperboličan pramen pravih geometrije HH, odnosno pramen hiperboličnih nizova tačaka geometrije EH. Presek hiperboličnog pramena pravih druge vrste sa istom oblasti je hiperboličan pramen pravih druge vrste sa istom oblasti je hiperboličan pramen pravih geometrije EH istog središta, odnosno pramen eliptičnih nizova tačaka geometrije HH istog središta. I u ovom slučaju hiperboličan pramen pravih geometrija EH i HH je konkurentan pramen pravih tih geometrija što je suprotno odgovarajućoj situaciji geometrije Lobačevskog.

2. <u>Grupe simetrija i grupe automorfizama pramenova pravih ravni ${}^1S_2$</u>. Pod simetrijama ravni ${}^1S_2$ podrazumevaćemo harmonijske homologije grupe G te ravni. U ovoj tački, a i u ovoj glavi - sem kad to posebno ne naglasimo - razmatraćemo isključivo automorfizme apsolute. Ove auto-

morfizme nazvaćemo povremeno i kolineacijama ravni ${}^1S_2$ i razlikovati ih od kolineacija odgovarajuće projektivne ravni. Grupa simetrija pramena pravih ravni ${}^1S_2$ je grupa generisana harmonijskim homologijama grupe G kolineacija ravni ${}^1S_2$ čije ose pripadaju datom pramenu pravih. Na osnovu posledice teoreme 1. na str. 142. dela /14/ neposredno se zaključuje da je svaki element grupe simetrija datog pramena pravih ili simetrija u odnosu na pravu tog pramena ili proizvod konačnog broja tih simetrija. Dokazaćemo da je svaki element ove grupe ili simetrija te grupe ili proizvod dve takve simetrije. Grupu simetrija eliptičnog pramena pravih označavaćemo sa G_{Uh}; odgovarajuću grupu paraboličnog pramena sa G_{Dh}, a grupa simetrija hiperboličnog pramena pravih prve vrste sa G_{Vh}, a druge vrste sa $\overline{G}_{Vh}$. Zbog značaja prethodnog tvrđenja formulisaćemo ga kao posebnu teoremu.

Teorema 6. Svaki element grupe simetrija bilo kog pramena pravih ravni ${}^1S_2$ je ili simetrija u odnosu na pravu tog pramena ili proizvod dve takve simetrije.

U slučaju grupa G_{Uh}, G_{Dh}, G_{Vh} teorema je neposredna posledica sledeće leme 2: "Proizvod ma koje tri apsolutne harmonijske homologije čije ose sadrže tačku O i seku apsolutu je harmonijska homologija kojoj osa sadrži tačku O i seče apsolutu" (lema 2. rad /6/ str.143.). Napominjemo da smo u radu /6/ pod apsolutnim harmonijskim homologijama podrazumevali one harmonijske homologije kojima su središta i osa pol i polara u odnosu na apsolutu. Pošto u slučaju grupe $\overline{G}_{Vh}$ ose ovih homologija ne seku apsolutu u ovom slučaju se za razliku od prethodnog ne može u dokazu koristiti lema 2. Zato ćemo u dokazu ovog dela teoreme 6. koristiti teoremu 4. rada /6/ (v.str.145.). Prema toj teoremi proizvod ma koje tri harmonijske homologije grupe G_{Oh} je harmonijska homologija te grupe[28] (U radu /6/ sa G_{Oh} smo označili grupu generisanu svim harmonijskim homologijama grupe G u odnosu na prave koje pripadaju projektivnom pramenu pravih središta O). Kada je O tačka spoljašnjosti apsolute grupe G_{Oh} sadrži kako grupu G_{Vh}, tako i grupu $\bar{G}_{Vh}$ kao svoje prave podgrupe-pod uslovom da je O = V. U slučaju grupe $\bar{G}_{Vh}$ nijedan od osa simetrija te grupe ne seče apsolutu. Prema delu d) dokaza pomenute teoreme 4. proizvod tri takve simetrije je harmonijska homologija čija osa sadrži tačku V i ne seče apsolutu - dakle takođe simetrija grupe $\bar{G}_{Vh}$. Na osnovu toga neposredno sledi da teorema 6. važi i u ovom slučaju.

Veoma jednostavno se može zaključiti da je suženje bilo koje simetrije ravni $^1S_2$ na idealnu oblast ravni $^1S_2$ simetrija geometrije HH ili geometrije EH, te da je suženje grupe simetrija bilo kog pramena pravih ravni $^1S_2$ na idealnu oblast te ravni grupa simetrija pramena pravih geometrije HH ili geometrije EH. Na osnovu toga i teoreme 6. sledi da i u svim geometrijama ravni $^1S_2$ važi teorema:

Teorema 7. Svaki element grupe simetrija bilo kog pramena pravih bilo koje od geometrija ravni $^1S_2$ je osna simetrija u odnosu na neku pravu tog pramena ili proizvod dve takve simetrije.

Na osnovu leme 2. i teoreme 4. rada /6/ takođe se vrlo jednostavno utvrđuje da u geometrijama ravni $^1S_2$ važi teorema po kojoj je proizvod tri simetrije u odnosu na bilo koje tri prave istog pramena pravih bilo koja od tih geometrija simetrija u odnosu na pravu tog pramena.

---

28) Teorema 4. rada 6. je uopštenje leme 2. tog rada. Na osnovu njih, kao što ćemo i u samom tekstu obrazložiti sledi da u svakoj od geometrija ravni $^1S_2$ važi teorema "tri simetrije".

To isto važi i za proizvod tri simetrije u odnosu na hiperbolične nizove istog pramena tih nizova geometrije EH kao i za proizvod tri simetrije u odnosu na tri eliptična niza tačaka istog pramena eliptičnih nizova geometrije HH. Na osnovu toga neposredno sledi da u tim geometrijama važe i teoreme koje odgovaraju teoremi 7. a odnose se na grupe simetrija odgovarajućih pramenova nizova tačaka geometrija EH i HH.

Svaki element grupe simetrija datog pramena pravih ravni ${}^1S_2$ je automorfizam tog pramena. Naime, da bi neki element grupe G bio automorfizam datog pramena pravih ravni ${}^1S_2$ potrebno jei dovoljno da je taj element automorfizam središta tog pramena. Isti uslov važi i u slučaju odgovarajućeg projektivnog pramena pravih. Kao što smo ranije ukazali jedino kada je pramen pravih ravni ${}^1S_2$ eliptičan takav pramen je istovetan odgovarajućem pramenu pravih projektivne ravni. Pošto svaka simetrija takvog pramena pravih sadrži središte U tog pramena, prema teoremi 6. rada svaki element grupe G_{Uh} je automorfizam tog pramena. Ali tada, prema teoremi 5. rada /6/ (str.147.), važi da je i skup svih automorfizama G_U tačke U tj. središta pramena istovetan grupi G_{Uh}. Na način istovetan načinu kojim smo pokazali da u svakoj od geometrija ravni ${}^1S_2$ važi teorema 7. pokazali bismo da u svakoj od tih geometrija važi i:

Teorema 8. Grupa simetrija bilo kog eliptičnog pramena pravih bilo koje od geometrija ravni ${}^1S_2$ istovremeno je skup svih automorfizama tog pramena.

Skup preseka pravih eliptičnog pramena pravih ravni ${}^1S_2$ sa idealnom oblašću te ravni predstavlja eliptičan pramen hiperboličnih nizova tačaka geometrije EH. Na osnovu prethodnog lako zaključujemo da teorema 8. važi i u slučaju kada se radi o eliptičnom pramenu hiperboličnih nizova geometrije EH.

Kao što smo već napomenuli, mada se paraboličan pramen pravih ravni ${}^{1}S_{2}$ u izvesnoj meri razlikikuje od odgovarajućeg projektivnog pramena pravih grupe simetrija tih pramenova su istovetne. Ali prema teoremi 5. (rad/6/str. 147.) ako je središte pramena pravih tačka apsolute tada je grupa simetrija tog pramena pravih prava podgrupa skupa svih automorfizama istog. Kako je i taj skup grupa, koju ćemo označiti sa G_D, prethodni zaključak formulisaćemo u vidu posledice 10.

Posledica 10. Grupa simetrija G_{Dh} paraboličnog pramena pravih ravni ${}^{1}S_{2}$ je prava podgrupa najšire grupe G_D automorfizama tog pramena pravih.

Na osnovu posledice 10. jednostavno se pokazuje da važi sledeća teorema:

Teorema 9. Grupa simetrija paraboličnog pramena pravih bilo koje od geometrija ravni ${}^{1}S_{2}$ je prava podgrupa grupe svih automorffizama tog pramena.

Pošto je presek paraboličnog pramena pravih ravni ${}^{1}S_{2}$ sa idealnom oblašću te ravni paraboličan pramen hiperboličnih nizova tačaka geometrije EH može se zaključiti da u toj geometriji za grupu simetrija paraboličnog pramena hiperboličnih nizova važi teorema koja odgovara teoremi 9.

Kada je tačka O, koja u radu /6/ predstavlja središte datog pramena pravih, tačka spoljašnjosti apsolute tada je grupa koju smo u radu /6/ označili sa $\overline{G}_{Oh}$ istovetna grupi koju smo u ovom radu označili sa G_{Vh}. Prema teoremi 5. rada /6/ u tom slučaju je ta grupa prava podgupa grupe svih automorfizama odgovarajućeg pramena pravih. Ovaj pramen pravih je hiperboličan pramen pravih prve vrste ravni ${}^{1}S_{2}$. U dokazu odgovarajućeg dela teoreme 5. rada /6/ ukazali smo da je osnovni razlog razlikovanja grupe $\overline{G}_{Oh}$ i grupe G_O svih automorfizama pramena pravih središta O činjenica da harmonijska homologija središta O nije element grupe $\overline{G}_{Oh}$: Ali ova homologija je proizvod dve harmonijske homologije grupe G_O od kojih osa jedne seče, a osa druge ne seče apsolutu, te je ona element grupe G_{Oh}, koju bismo u skladu sa terminologijom usvojenom u ovom radu, mogli nazvati grupom simetrija projektivnog pramena pravih čije središte pripada idealnoj oblasti ravni ${}^1S_2$. Ova grupa je prema teoremi 5.u/6/ istovetna grupi svih automorfizama središta odgovarajućeg pramena, poa dakle i grupi svih automorfizama pramena pravih tog središta. Pošto je, kao što smo to ranije istakli, potreban i dovoljan uslov da neka kolineacija ravni ${}^1S_2$ bude automorfizam pramena pravih središta V, da je ta kolineacija automorfizam središta V, dovoljno je da je neki element grupe G automorfizam bar dve prave nekog pramena pravih da bi taj element bio automorfizam tog pramena pravih ravni ${}^1S_2$. Iz ovog sledi da je skup svih automorfizama bilo hiperboličnog pramena pravih prve vrste, bilo hiperboličnog pramena pravih druge vrste ravni ${}^1S_2$ istog središta istovetan skupu svih automorfizama projektivnog pramena pravih tog središta. Pošto nijedan element grupe simetrija hiperboličnog pramena pravih druge vrste ravni ${}^1S_2$, prema teoremi 6. rada, nije proizvod dve simetrije u odnosu na dve prave od kojih jedna pripada jednom, a druga drugom hiperboličnog pramenu pravih istog središta ali raznih vrsta, harmonijska homologija grupe G čije je središte središte datog pramena nije element ni ove grupe simetrija. Prema tome i grupa $\overline{G}_{Vh}$ je prava podgupa grupe G_V svih automorfizama projektivnog pramena središta V, a takođe na osnovu obrazloženja iznetog na prethodnoj stranici i grupe svih automorfizama pramena pravih u odnosu na koje je $\overline{G}_{Vh}$ grupa simetrija. Na ovaj način pokazali smo da važi i sledeća teorema:

Teorema 10. Grupa simetrija bilo kog hiperboličnog pramena pravih bilo koje od geometrija ravni ${}^1S_2$ je prava podgrupa grupe svih automorfizama tog pramena pravih.

Hiperboličan pramen druge vrste ravni ${}^1S_2$ je pramen eliptičnih nizova tačaka geometrije HH. Presek hiperboličnog pramena pravih prve vrste ravni ${}^1S_2$ sa idealnom oblašću te ravni je hiperboličan pramen hiperboličnih nizova tačaka geometrije EH. Kao i u prethodnim slučajevima lako utvrđujemo da i za odgovarajuće pramenove nizova tačaka geometrija EH i HH važi teorema analogna teoremi 10.

Harmonijsku homologiju u odnosu na središte datog pramena pravih ravni ${}^1S_2$ označavaćemo sa h u čijem indeksu upisujemo i središte te homologije. Ova homologija je istovremeno i simetrija u odnosu na polaru središta te homologije. U slučaju paraboličnog pramena pravih ravni ${}^1S_2$ harmonijska homologija u odnosu na središte tog pramena koja bi istovremeno bila element grupe G ne postoji. Ova harmonijska homologija je element grupe G_{Uh} ali nije element grupe G_{Vh} niti $\overline{G}_{Vh}$. Dokazaćemo da je grupa G_V svakom od svojih podgrupa G_{Vh} i $\overline{G}_{Vh}$ razložena na tačno po dve susedne klase, Prema teoremi 5. (rad /6/str.147.) grupa G_V istovetna je grupi simetrija projektivnog pramena pravih središta V. Zato je svaki element skupa $G_V - G_{Vh}$ ili simetrija grupe $\overline{G}_{Vh}$ ili proizvod dve simetrije grupe G_V pri čemu osa jedne pripada jednoj, a osa druge drugoj od grupe G_{Vh} i $\overline{G}_{Vh}$. Proizvod dve takve simetrije ubuduće ćemo zvati kraće proizvodom dveju simetrija mešovitih osa. Proizvodi dve simetrije grupe $\overline{G}_{Vh}$ nisu elementi ove razlike $G_V - G_{Vh}$ skupova (grupa) G_V i G_{Vh} jer su prema lemi 3. (rad /6/ str.145.) ovi proizvodi istovremeno proizvodi dve simetrije grupe G_{Vh}.[29)]

29) Radi se o različitim načinima predstavljanja takvih kolineacija ravni ${}^1S_2$ kao proizvoda dve simetrije pramena pravih središta V.

Jedan od elemenata skupa $G_V - G_{Vh}$ je i simetrija h_V tj. h_v gde je $v = W(V)$. Ovaj element kao element grupe simetrija projektivnog pramena pravih središta V predstavljen je proizvodom dve simetrije mešovitih osa pri čemu su te dve ose uzajamno konjugovane prave apsolutnog polariteta. Dokazaćemo da je svaki element skupa $G_V - G_{Vh}$ proizvod h_v i nekog elementa grupe G_{Vh}. Neka je h_r bilo koja simetrija grupe $\overline{G}_{Vh}$. Središte R te simetrije kao pol spoljašnje prave r koja sadrži tačku V je unutrašnja tačka apsolute koja pripada pravoj v. Ako je P presek pravih r i v tada je $h_r = h_v h_p$ gde je $p = W(P)$. Ako je f element skupa $G_V - G_{Vh}$ koji je proizvod simetrije mešovitih osa, tada se simetrija grupe $\overline{G}_{Vh}$ tog proizvoda na isti način kao u prethodnom slučaju može predstaviti kao proizvod simetrije h_v i odgovarajuće simetrije grupe G_{Vh}. Na osnovu teoreme 30.7. (/13/str.137.) h_v je komutativna sa svakim od preostalih činioca dobijenog proizvoda. Na sličan način dokazujemo i teoremu po kojoj je svaki element skupa $G_V - \overline{G}_{Vh}$ proizvod simetrije h_v i nekog elementa grupe G_{Vh}. Prethodne rezultate izložićemo u vidu sledeće teoreme:

Teorema 11. Grupa automorfizama G_V hiperboličnog pramena pravih središta V ravni ${}^1S_2$ razložena je svakom od svojih podgrupa G_{Vh} i $\overline{G}_{Vh}$ na tačno dve susedne klase.

Svaki element klase susedne klasi G_{Vh} je ili proizvod simetrije h_v središta V sa nekom simetrijom grupe G_{Vh} ili pak proizvod simetrije h_v sa proizvodom dve simetrije te grupe. Svaki element klase susedne klasi $\overline{G}_{Vh}$ je ili proizvod simetrije h_v sa simetrijom grupe $\overline{G}_{Vh}$ ili proizvod simetrije h_v sa proizvodom dve simetrije grupe $\overline{G}_{Vh}$.

Dokazujući teoremu 11. ukazali smo i da je svaki proizvod dve simetrije grupe G_{Vh} istovremeno i proizvod dve simetrije grupe $\overline{G}_{Vh}$ i obratno. Prema tome proizvod dve simetrije u odnosu na dve prave istog hiperboličnog pramena pravih prve ili druge vrste ravni ${}^1S_2$ pripada preseku grupa simetrija hiperboličnog pramena prve vrste i hiperboličnog pramena druge vrste ravni ${}^1S_2$ istog središta. Iz teoreme 6. (rada str.118.) sledi da je svaki element pomenutog preseka upravo proizvod dve simetrije jednog od dva hiperbolična pramena pravih ravni ${}^1S_2$ istog središta. Prema poznatoj teoremi po kojoj je presek bilo koje dve podgrupe date grupe takođe podgrupe te grupe i skup svih proizvoda po dve simetrije grupe G_{Vh} odnosno $\overline{G}_{Vh}$ predstavlja podgrupu svake od tih grupa. Da je ta podgrupa prave neposredno se zaključuje na osnovu teoreme 6. rada. Proizvode po dve simetrije bilo koje grupe simetrija pramena pravih ravni ${}^1S_2$ nazivaćemo kao i u radu /6/(v.tekst ispod posledice 4. na str. 146. tog rada) epicikličkim rotacijama te grupe. U tekstu na koji smo uputili dokazali smo i da je skup svih epicikličkih rotacija grupe simetrija bilo kog pramena pravih ravni ${}^1S_2$ grupa (/6/ posledica 5. str.146.). Posledica 6. na str. 147. rada /6/ je nešto opštija jer se odnosi na grupu simetrija projektivnog prmena pravih ravni ${}^1S_2$ koja je istovetna grupi svih automorfizama tog pramena pravih pod uslovom da je taj pramen pravih različit od paraboličnog pramena pravih ravni ${}^1S_2$. Grupe epicikličkih rotacija eliptičnih, paraboličnih, hiperboličnih pramenova prve i hiperboličnih pramenova druge vrste ravni ${}^1S_2$ označavaćemo redom sa G_{Ue}, G_{De}, G_{Ve} i $\overline{G}_{Ve}$, a grupu epicikličkih rotacija projektivnog pramena pravih čije je središte tačka spoljašnjosti apsolute sa G_{Ve}. Elementi grupe G'_{Ve} različiti od elemenata njene prave podgrupe G_{Ve}(tj. $\overline{G}_{Ve}$ koja je toj podgrupi istovetna) su epicikličke rotacije od kojih je svaka proizvod dve simetrije mešovitih osa grupe simetrija pramena pravih središta V. Ove simetrije nazivaćemo kratko epicikličkim rotacijama mešovitih osa date grupe simetrija. Na osnovu drugog dela teoreme 11. svaka epiciklička rotacija mešovitih osa grupe simetrija pramena pravih središta V je proizvod simetrije H_V sa odgovarajućom epicikličkom rotacijom grupe G_{Ve} (odnosno grupe $\overline{G}_{Ve}$). Prethodne rezultate izložićemo u vidu sledeće teoreme pri čemu ćemo u njenoj formulaciji krostiti termine i oznake koje smo pri izvođenju tih rezultata uvodili.

Teorema 12. Svaka grupa simetrija bilo kog pramena pravih ravni $^1S_2$ sadrži kao svoju pravu podgrupu grupe epicikličkih rotacija tog pramena. Svaka od tih podgrupa sem G'_{Ve} ne sadrži podgrupu različite od trivijalnih. Grupa epicikličkih rotacija G'_{Ve} projektivnog pramena pravih središta V razložena je svojom pravom podgrupom epicikličkih rotacija hiperboličnog pramena pravih središta V na tačno dve susedne klase. Svaki element klase susedne klasi $G_{Ve} = \overline{G}_{Ve}$ je epiciklička rotacija grupe G'_{Ve} mešovitih osa.

Osnova bilo kog pramena pravih ravni $^1S_2$ predstavlja pravu jedne od geometrija te ravni. Koristeći rezultate provere aksiome G4 zaključujemo da za svake dve tačke osnove datog pramena pravih postoji bar jedna simetrija grupe simetrija tog pramena koja jednu od pomenutih tačaka preslikava na onu drugu. Iz istih rezultata sledi da samo za po dve tačke osnove eliptičnog pramena pravih ravni $^1S_2$ postoje tačno po dve simetrije grupe simetrija tog pramena koje jednu od tih tačaka preslikavaju na onu drugu. U slučaju neeliptičnih pramenova pravih ravni $^1S_2$ za svake dve tačke osnove postoji tačno po jedna simetrija odgovarajućeg pramena. Dakle, u svakom slučaju je grupa simetrija datog pramena pravih bar jedanput tranzitivna na osnovu tog pramena. U ravni $^1S_2$ važi i sledeća posledica teorema 11. i 12.

Posledica 11. U grupama simetrija pramenova pravih ravni ${}^{1}S_{2}$ koje sadrže i simetriju u odnosu na središta tih pramenova postoje tačno po dva elementa čija su suženja na osnovu odgovarajućeg pramena pravih istovetna. U grupi simetrija bilo kog pramena pravih ravni ${}^{1}S_{2}$ koja ne sadrži simetriju u odnosu na središte tog pramena ne postoje dva elementa čija su suženja na osnovu tog pramena istovetna.

Pošto ova posledica nije neposredna posledica pomenutih teorema izložićemo i njen dokaz. U daljem tekstu projektivni pramen pravih ravni ${}^{1}S_{2}$ čije je središte idealna tačka te ravni, bez tangenata apsolute koje sadrže to središte nazivaćemo hiperboličnim pramenom pravih. Hiperbolični pramen pravih je unija hiperboličnog pramena pravih prve i druge vrste istog središta. Kao što smo ranije istakli jedino grupa simetrija eliptičnih i hiperboličnih pramenova ravni ${}^{1}S_{2}$ sadrže i simetriju u odnosu na središte takvih pramenova tj. simetriju u odnosu na pravu koja sadrži osnovu odgovarajućeg pramena. Prema teoremi 6. (v.str. 118) svaki element grupe simetrija bilo kog pramena pravih ravni ${}^{1}S_{2}$ je simetrija ili proizvod dve simetrije te grupe. Ako je taj element simetrija h te grupe, tada je h_{0} h simetrija te grupe kojoj je osa određena središtima simetrija h_{0} i h a središte je presek ose simetrije h_{0} koja sadrži osnovu datog pramena sa osom simetrije h.. Suženja simetrija h i $h_{0}h$ na osnovu pramena središta O su hiperbolične involucije odnosno suženja tih involucija na osnovu. Kako su invarijantne tačke ovih hiperboličnih involucija iste dve tačke ta suženja su međusobno istovetna. Ako je O tačka unutrašnjost apsolute, tada ona sa središtima homologija - simetrija h i h_{0} obrazuje autopolarni trotemenik u odnosu na apsolutu. Ovaj autopolarni trotemenik je invarijantan u pomenutim simetrijama i to teme po teme. Ako bi sem pomenutih postojao još neki element grupe simetrija pramena središta

O, čije bi suženje na osnovu pramena bilo istovetno suženju simetrije h na tu osnovu, tada bi i taj element preslikavao pomenuti autopolarni trotemenik na taj isti trotemenik i to teme po teme. Pošto se svaka stranica pomenutog trotemenika u svakom od automorfizama apsolute koji taj trotemenik preslikavaju naukazani način preslikava na samu sebe, presečne tačke te stranice sa apsolutom preslikavaju se ili na same sebe ili jedna na drugu u svakom od tih automorfizama. Ako nijedan od tih automorfizama nije identična kolineacija na osnovu teoreme 38.2. na str. 161. dela /13/ svaki od tih automorfizama je simetrija date grupe simetrija. Načinom zaključivanja analognim onom kojim smo prilikom utvrđivanja tačnosti aksioma G2A zaključili da postoje tačno četiri mogućnosti preslikavanja dveju četvorki tačaka preseka apsolute sa odgovarajućim autopolarnim trotemenicima, zaključili bismo da postoje tačno dve takve simetrije. U slučaju kada je tačka O tačka spoljašnjosti apsolute na isti način kao u prethodnom slučaju zaključujemo da je $h_O h$ jedina simetrija date grupe simetrija čije je suženje na pravu o = W(O) koja sadrži osnovu tog pramena istovetno suženju simetrija h.

Ako element grupe simetrija koja zadovoljava zahteve posledice 11. predstavlja proizvod dve simetrije te grupe tada pstoji mogućnost i da je taj element identična kolineacija ravni ${}^1S_2$ ili simetrija u odnosu na središte tog pramena. Pošto je suženje takvog elementa na pravu ravni ${}^1S_2$ koja sadrži osnovu tog pramena u slučaju bilo koje od navedenih mogućnosti identično preslikavanje te prave, identična kolineacija i simetrija u odnosu na središte datog pramena su jedine dve kolineacije grupe simetrija tog pramena čije je suženje na pravoj koja sadrži osnovu pramena identično preslikavanje. Neka je taj proizvod f dve simetrije različit od identične kolineacije i simetrije h_O u odnosu na središte O datog pramena pravih. Najpre ćemo dokazati da je h_Of, čije je suženje na pravu koja sadrži osnovu datog pramena istovetno suženju f na tu pravu, kolineacija različita od f. Na osnovu pretpostavke o f i teoreme 38.1. (/13/ str. 161.) u kojoj su nabrojane sve vrste automorfizama apsolute sledi da u suženju f, pa dakle i h_Of, na pravu koja sadrži osnovu datog pramena pravih: postoje sledeće dve mogućnosti:

a) Ako je taj pramen eliptičan u tom suženju ne postoji nijedna invarijantna tačka.

b) Ako je taj pramen projektivan pramen pravih čije središte O pripada idealnoj oblasti ravni ${}^1S_2$, jedine invarijantne tačke tog suženja su tačke preseka prave koja sadrži osnovu i apsolute.

U slučaju a) bilo koja prava eliptičnog pramena središta O preslikava se bilo kojom transformacijom grupe simetrija tog pramena, koja je proizvod dve simetrije te grupe i čije je suženje na osnovu tog pramena istovetno suženje f na tu osnovu, na pravu različitu od date. Neka su tačke preseka date prave p i apsolute tačke C i D, a tačke preseka prave $p' = f(p)$ i apsolute tačke E i F. Ako je $f(C)=E$, tada je $h_Of(C)=F$. Ako je $f(C)=F$, tada je $h_Of(C)=E$. Uz ograničenje da prava p ne može biti tangenta apsolute, na isti način se i u slučaju b) dokazuje da su f i h_Of međusobno različite.

S obzirom da u ovom delu dokaza pretpostavljamo i da je suženje f na osnovu datog pramena različito od identičnog preslikavanja te osnove nijedan par četvorke tačaka C,D,E i F nije uzajamno odgovarajući ni u jednom proizvodu dve simetrije date grupe simetrija čije je suženje na osnovu tog pramena istovetno suženju f. Uzimajući u obzir da svaki takav proizvod preslikava četvorku tačaka C, D,E i F na isti četvoruku, i prethodno pomenuta svojstva koja taj proizvod mora zadovoljavati pri preslikavanju te četvorke, zaključujemo da postoje tačno dva takva proizvoda.

Pretpostavimo da su f i g dva različita elementa grupe $G_{Vh}(\overline{G}_{Vh})$ istih suženja na osnovu tog pramena. Tada su, prema već dokazanom delu teoreme, $h_V f$ i $h_V g$ elementi grupe G_V, čija su suženja na pravoj $v = W(V)$ takođe međusobno istovetna, elementi kojisu redom različiti od elementa f i g. Ovi elementi $h_V f$ i $h_V g$ različiti su i međusobno jer bi u suprotnom slučaju važilo $f = g$. Element f različit je od elementa $h_V g$ jer pripada podgrupi G_{Vh} $(\overline{G}_{Vh})$ grupe G_V, dok je $h_V g$ element klase susedne toj podgrupi u razlaganju grupe G_V po toj podgrupi (v.teoremu 11. rada). Iz istog razloga je i g različito od $h_V f$. Nabrojana četviri elementa bila bi četiri različita elementa grupe G_V istih suženja na pravoj v što je suprotno već dokazanom delu teoreme. U slučaju grupe G_{Dh} simetrija paraboličnog pramena pravih središta D, ako je element te grupe proizvod dve njene simetrije tada je taj element kolineacija kojoj je jedina invarijanta tačka D, a jedina invarijanta prava $d = W(D)$ (prema delu b) teoreme 38.1. na str. 161. dela /13/). Ako je h bilo koja simetrija grupe G_{Dh}, tada je u toj simetriji sem tačke D invarijantno i središte H te simetrije. Zato element grupe G_{Dh} čije je suženje na pravu d istovetno suženju h na tu pravu ne može biti proizvod dve simetrije. Ako je taj element simetrije grupe G_{Dh} njeno središte mora biti tačka H. Ali svaka simetrija ravni ${}^1S_2$ jednoznačno je određena svojim središtem.

Preostali deo ove tačke posvetićemo određivanju važnih svojstava preslikavanja grupe G_V. Tačka V i tačka dodira M i N tangenata apsolute koje sadrže tačku V određuju četiri trougla ravni ${}^1S_2$. Dva od tih trouglova pripadaju jednom, a dva drugom od projektivnih uglova određenih tangentama VM i VN apsolute. Jedan od tih uglova sadrži, a drugi ne sadrži apsolutu. Svako preslikavanje grupe G_V preslikava svaki od tih uglova na isti taj ugao. Projektivne trouglove određene tačkama V,N,M koji pripadaju onom od tih projektivnih uglova koji sadrži apsolutu označavaćemo sa VMN i VMN', a projektivne trouglove koji pripadaju njemu dopusnkom uglu sa $\overline{VMN}$ i $\overline{VMN}'$. Zbog značajne uloge trotemenika VMN, ovaj trotemenik VMN će se često koristiti u daljem radu te ćemo ga uvek označavati na isti način i uglavnom nazivati karakterističnim trotemenikom temena V. Pomenuti projektivni ugao nazivaćemo karakterističnim uglom temena V. Dokazaćemo da važi sledeća, u daljem radu, vrlo značajna teorema.

Teorema 13. U svakoj simetriji grupe G_{Vh} unutrašnjost svakog od trouglova VMN i VMN' preslikava se na tu istu unutrašnjost, dok se unutrašnjost trougla $\overline{VMN}$ u takvoj simetriji preslikava na unutrašnjost trougla $\overline{VMN}'$. U svakoj simetriji grupe $\bar{G}_{Vh}$ unutrašnjost trougla VMN preslikava se na unutrašnjost trougla VMN', a unutrašnjost svakog od trouglova $\overline{VMN}$ i $\overline{VMN}'$ na unutrašnjost tog istog trougla.

Dokaz. Neka je tačka X bilo koja tačka unutrašnjosti trougla VMN. Središte bilo koje simetrije grupe G_{Vh} je tačka duži dopunske stranici MN trougla VMN, jer je svaka simetrija ravni ${}^1S_2$ harmonijska homologija kojoj su središte i osa pol i polara apsolutnog polariteta. Zato, ako je središte te simetrije tačka H, prema teoremi 25.3. (/13/ str.115.) prava HX sadrži bar jednu tačku jedne od stranica trougla VMN. Iz ovoga i Pašove aksiome sledi da prava HX seče tačno još jednu stranicu tog trougla. Zajedničke tačke prave HX i stranica trougla VMN nisu tačke stranice

MN jer tačka H pripada dopuni te stranice. Prema tome prava HX seče stranice VM i VN trougla VMN. Ako bi slika X' tačke X u datoj simetriji pripadala unutrašnjosti trougla VMN', tada bi na osnovu iste teoreme 25.3. u /13/ prava HX' sekla i stranicu VM ili VN trougla VMN'. Ali ove stranice su dopune stranica trougla VMN označenih takođe sa VM i VN. Pošto je prava HX' istovetna pravoj HX iz prethodnog bi sledilo da je ta prava jedna od pravih VM ili VN. Ovo je nemoguće jer tačka X ne pripada nijednoj od tih pravih. Na isti način dokazali bismo teoremu i u slučaju kada tačka X pripada trouglu VMN'.

Ako tačka X pripada trouglu $\overline{VMN}$, prava HX, prema Pašovoj aksiomi, seče tačno još jednu stranicu trougla $\overline{VMN}$. Pretpostavimo, određenosti radi, da tu pravu seče stranicu VM tog trougla. Ta stranica je zajednička stranica trougla $\overline{VMN}$ i jednog od trouglova istih temena koji pripadaju projektivnom uglu određenom pravama VM i VN koji sadrži apsolutu. Neka je taj trougao npr. trougao VMN. Na osnovu Pašove aksiome prave HX seče i stranicu VM trougla VMN. Osa simetrije središta H kao prava projektivnog ugla određenog pravama VM i VN koji sadrži apsolutu seče pravu HX u tački H_1 koja je istovremeno i tačka unutrašnjosti trougla VMN. Ako bi tačka $X' = h_H(X)$ pripadala takođe trouglu $\overline{VMN}$, tada par tačaka H, H_1 ne bi razdvajao par tačaka X, X'. Suženje simetrija h_H središta H na pravu HX je hiperbolična involucija čije su dvojne tačke H i H_1. Zato ovaj par tačaka razdvaja svaki par odgovarajućih tačaka, pa i par tačaka X i X'.

Drugi deo teoreme 13. dokazuje se na isti način.

Neposredna posledica teoreme 13. je:

Posledica 12. Svaka epiciklička rotacija podgrupe G_{Ve} grupe epicikličkih rotacija G_V preslikava svaki od trouglova temena V,M,N na taj isti trougao. Svaka epiciklička rotacija grupe G'_{Ve} koja ne pripada podgrupi G_{Ve} preslikava svaki od tih trouglova na njemu dopunski u odnosu na projektivni ugao kome taj trougao pripada.

Epicikličke rotacije grupe G_{Ve} su proizvodi po dve simetrije grupe G_{Vh} tj. grupe $\bar{G}_{Vh}$. Kao što smo to izložili u radu grupa G_{Ve} je prava podgrupa svake od grupa G_{Vh} i $\bar{G}_{Vh}$. Svaki element grupe G'_{Ve} , koji ne pripada njenoj pravoj podgrupi G_{Ve}, je epiciklička rotacija mešovitih osa (ovaj pojam uveli smo na str.123. rada.). Prema teoremi 12. svaka epiciklička rotacija mešovitih osa je proizvod neke rotacije grupe G_{Ve} sa simetrijom središta V.

Na str.116. rada uveli smo i pojam pramena polupravih ravni $^1S_2$. Tada smo pokazali i da je bilo koji hiperboličan pramen pravih ravni $^1S_2$ razložen na tačno dva pramena polupravih. Ako je središte tog pramena tačka V, a tačke dodira dirki apsolute kroz tačku V tačke M i N, tada jedan od dva pramena polupravih hiperboličnog pramena pravih središta V pripada jednom, a drugi drugom od dva trougla temena V,M,N zajedničke stranice MN. Neposredna posledica teoreme 13. je posledica 13. koja se odnosi na "dejstvo" simetrija grupe $G_{Vh}(\bar{G}_{Vh})$ na pramenove polupravih hiperboličnog pramena prve vrste (druge vrste) ravni $^1S_2$.

Posledica 13. U svakoj simetriji grupe G_{Vh} bilo koji pramen polupravih hiperboličnog pramena pravih prve vrste središta V preslikava se na taj isti pramen polupravih, a bilo koji pramen polupravih hiperboličnog pramena pravih druge vrste istog središta V preslikava se na njemu dopunski pramen polupravih. U svakoj simetriji grupe $\bar{G}_{Vh}$ bilo koji od dva pramena polupravih hiperboličnog pramena pravih središta V preslikava se na njemu dopunski pramen polupravih, ako je taj pramen pravih prve vrste, i na taj isti pramen polupravih ako taj pramen pripada hiperboličnom pramena pravih središta V druge vrste.

U formulisanju posledice upotrebili smo termin "dopunski pramen polupravih". Smisao ovog termina koji je neposredno jasan možemo opisati i na sledeći način: Pramen polupravih dopunski datom je skup svih polupravih dopunskih svim polupravama datog pramena polupravih.

Neposredna posledica posledice 12. je posledica 14.

Posledica 14. Svaka epiciklička rotacija podgrupe G_{Ve} preslikava svaki od četiri pramena polupravih hiperboličnih pramenova pravih središta V na taj isti pramen polupravih. Svaka epiciklička rotacija grupe G'_{Ve}, koja ne pripada pravoj podgrupi G_{Ve} te grupe, preslikava svaki od pramenova polupravih središta V na njemu dopunski pramen polupravih.

3. Grupa simetrija nizova tačaka ravni $^1S_2$. Grupu generisanu harmonijskim homologijama (simetrijama) grupe G čije ose sardže istu tačku O ravni $^1S_2$ nazvali smo grupom simetrija pramena pravih središta O te ravni. Pošto središta svih tih simetrija pripadaju polari o tačke O u odnosu na apsolutni polaritet, sa istim pravom mogli smo tu grupu nazvati i grupom simetrija niza tačaka prave o. Obrazložićemo ukratko iz kojih razloga ima smisla uvoditi i ovaj naziv koji, dok razmatramo ravan $^1S_2$ kao celinu, ima isto značenje kao i grupa simetrija pramena pravih, te u pomenutom kontekstu odnosi takođe na određenu podgrupu grupe G generisanu harmonijskim homologijama. U predgovoru, a i uvodu ove tačke ukazali smo da nam je krajnji cilj da omogućimo neposredno prenošenje svih rezultata koji se odnose na svojstva trajektorija pramenova pravih ravni $^1S_2$ u svaku od geometrija te ravni posebno. Za razliku od geometrije Lobačevskog, pokazaće se da je u njoj dualnoj

geometriji EH kao generatore grupe transformacija podudarnosti umesto osnih smatrati centralne simetrije. U slučaju trajektorija eliptičnog pramena pravih ravni ${}^1S_2$, presek tog pramena i idealne oblasti te ravni ne predstavlja pramen pravih već pramen hiperboličnih nizova tačaka geometrije EH. Zato je, ukoliko težimo da u određivanju odgovarajuće trajektorije koristimo osnovne, a ne izvedene pojmove te geometrije, neophodno pojam grupe simetrija pramena pravih ravni ${}^1S_2$ odrediti kao grupu simetrija niza tačaka osnove tog pramena koja predstavlja pravu geometrije EH. Čak i u geometriji Lobačevskog, u kojoj se sve transformacije podudarnosti mogu predstaviti kao proizvodi osnih a ne centralnih simetrija upotreba ovog pojma može biti u izvesnim slučajevima opravdana. Tako se na primer "dvograna" ekvidistanta u toj geometriji ne može ni na koji način definisati kao trajektorija grupe simetrija odgovarajućeg pramena pravih. Međutim ona je trajektorija grupe simetrija niza tačaka njene osnove.

S obzirom da je pojam niza tačaka dualan pojam pramena pravih, i da se u ravni ${}^1S_2$ ta dualnost ostvaruje apsolutnim polaritetom, nećemo se posebno zadržavati na definisanju pojmova koji u tom dualitetu odgovaraju pojmu pramena pravih, grupe simetrija tog pramena i nekim svojstvima izraženim teoremama u prethodnoj tački. Značajnije od tih teorema ćemo samo navesti, što važi i za neke pojmove. Sledeće definicije su definicije pojmova dualnih pojmovima pramenova pravih raznih vrsta ravni ${}^1S_2$.

Definicija 6. Eliptičan niz tačaka ravni ${}^1S_2$ je skup svih tačaka bilo koje spoljašnje prave apsolute.

Definicija 7. Paraboličan niz tačaka ravni ${}^1S_2$ je skup tačaka bilo koje tangente apsolute bez njene tačke dodira.

Definicija 8. Hiperboličan niz tačaka prve vrste ravni $^1S_2$ je skup svih spoljašnjih tačaka bilo koje sečice apsolute. Hiperbolični niz tačaka druge vrste ravni $^1S_2$ je skup svih unutrašnjih tačaka bilo koje sečice apsolute. Hiperbolični niz tačaka ravni $^1S_2$ je unija unutrašnjih i spoljašnjih tačaka bilo koje sečice apsolute.

Ubuduće ćemo često izostavljati reč "tačaka" u izrazu "niz tačaka".

Simetriji središta O odgovara simetrija ose o gde je $o = W(O)$. Ova simetrija se može predstaviti kao proizvod dve centralne simetrije u odnosu na dve konjugovane tačke prave o u odnosu na apsolutni polaritet.

Što se tiče izražavanja odnosa grupa simetrija pramenova pravih ravni $^1S_2$ i grupa simetrija njima odgovarajućih nizova tačaka zadržaćemo se samo na slučaju hiperboličnih pramenova pravih.

Grupi G_{Vh} odgovara grupa simetrija G_{vh} hiperboličnog niza tačaka prve vrste. Grupi simetrija hiperboličnog pramena pravih druge vrste $\overline{G}_{Vh}$ odgovara grupa simetrija hiperboličnog niza tačaka druge vrste koju ćemo označiti sa $\overline{G}_{vh}$. Grupi G_V hiperboličnog pramena pravih ravni $^1S_2$ odgovara grupa simetrija G_v hiperboličnog niza v te ravni. Simetrija u odnosu na pravu v pripada toj grupi simetrija jer se može predstaviti kao proizvod dve simetrije u odnosu na dve konjugovane tačke hiperboličnog niza tačaka v. Ali ova simetrija nije element nijedne od grupa G_{vh} i $\overline{G}_{vh}$. Pošto je prema poznatoj teoremi proizvod dve harmonijske homologije projektivne ravni harmonijska homologija te ravni ako i samo ako središte jedne od tih homologija pripada osi druge i obratno a simetrije ravni $^1S_2$ su harmonijske homologije kod kojih su središte i osa pol i polara u apsolutnom polaritetu možemo formulisati i sledeću teoremu:

Teorema. Proizvod dve simetrije ravni ${}^1S_2$ je simetrija te ravni ako i samo kao središte jedne od tih simetrija pripada osi one druge.

Teoremi 6. odgovara teorema: "Svaki element grupe simetrija bilo kog niza tačaka ravni ${}^1S_2$ je ili simetrija u odnosu na tačku tog niza ili proizvod dve takve simetrije", a teorema 7.: "Svaki element grupe simetrija bilo kog niza tačaka bilo koje od geometrija ravni ${}^1S_2$ je centralna simetrija čije središte pripada tom nizu tačaka ili proizvod dve takve simetrije".

Teoremi "tri simetrije" odgovara sledeća teorema:

Teorema 14. Proizvod tri simetrije u odnosu na tačke istog niza tačaka bilo koje geometrije ravni ${}^1S_2$ je simetrija u odnosu na tačku tog niza tačaka.

Teoremama 8,9 i 10. prethodne tačke koje se tiču odnosa grupe simetrija pramenova pravih geometrija ravni ${}^1S_2$ i grupa svih automorfizama tih pramenova, i koje su neposredne posledice odgovarajućeg odnosa grupa simetrija ravni ${}^1S_2$ odgovaraju sledeće teoreme:

Teorema 15. Grupa simetrija eliptičnog niza tačaka odgovarajuće geometrije ravni ${}^1S_2$ predstavlja skup svih automorfizama tog niza tačaka.

Teorema 16. Grupa simetrija paraboličnog niza tačaka odgovarajućih geometrija ravni ${}^1S_2$ je prava podgrupa grupe svih automorfizama tog niza tačaka.

Teorema 17. Grupa simetrija hiperboličnog niza tačaka bilo kog hiperboličnog niza odgovarajuće geometrije ravni ${}^1S_2$ je prava podgrupa grupe svih automorfizama tog niza tačaka.

Proizvod dve simetrije grupe simetrija nekog pramena pravih ravni ${}^1S_2$ nazivali smo epicikličkom rotacijom tog pramena. U slučaju hiperboličnog pramena središta V ako osa jedne simetrije pripada hiperboličnom pramenu jedne od dveju vrsta hiperboličnih pramenova pravih tog istog središta, a osa druge hiperboličnom pramenu pravih one druge vrste proizvod dve takve simetrije grupe simetrija G_V tog hiperboličnog pramena nazvali smo epicikličkom rotacijom mešovitih osa te grupe simetrija. Iste nazive upotrebljavaćemo i u slučaju proizvoda dve simetrije u odnosu na tačke istog niza tačaka ravni ${}^1S_2$. Sasvim ravnopravno ovim nazivima u oba slučaja možemo upotrebljavati i nazive: "epicikličke translacije ravni ${}^1S_2$ datog pramena pravih (niza tačaka)" te ravni i "epicikličke translacije mešovitih osa pramena pravih datog središta (niza tačaka date osnove)". S obzirom na zadržavanje ovih naziva nema potrebe navoditi tvrđenje koje odgovara teoremi 12. prethodne tačke. Dovoljno je samo u formulaciji te teoreme izraz pramen pravih zameniti izrazom niz tačaka.

Zahvaljujući načinu na koji smo formulisali važnu teoremu 13. (rad t.2.str.187.) dovoljno je da bi se formulisala njoj odgovarajuće teoreme ove tačke u indeksu oznaka grupa simetrija umesto V upisati "malo" v. Upoređujući tu teoremu sa teoremom 13. zaključujemo da važi od nje opštiji stav:

Stav 5. Svaka simetrija grupe simetrija hiperboličnog pramena pravih prve ili druge vrste središta V ravni ${}^1S_2$ preslikava unutrašnjost nekog od trouglova temena V,M, N na unutrašnjost istog trougla ako i samo ako taj trougao pripada onom projektivnom uglu određenom pravama VM i VN koji sadrži dati hiperbolični pramen pravih, a unutrašnjost onih trouglova temena V,M,N koji pripadaju uglu dopunskom pomenutom projektivnom uglu jednu na drugu. Svaka simetrija grupe simetrija hiperboličnog niza prve ili druge vrste osnove v = W(V) ravni ${}^1S_2$ preslikava unutrašnjost nekog od trouglova temena V,M,N na unutrašnjost istog ako i samo ako taj trougao <u>ne</u> pripada onom projektivnom uglu koji sadrži taj niz tačaka. Ako neki od tih trouglova pripada projektivnom uglu određenom pravama VM i VN koji sadrži dati hiperbolični niz tačaka, tada svaka simetrija odgovarajuće grupe simetrija preslikava unutrašnjost tog trougla na unutrašnjost onog drugog trougla koji pripada pomenutom projektivnom uglu.

4. <u>Trajektorija pramenova pravih ravni</u> $^1S_2$. U uvodu ove glave razmotrili smo u osnovnim crtama načine definisanja krivih stalne krivine geometrije Lobačevskog koje se, ukoliko se definišu u odnosu na određene podgrupe grupe transformacija podudarnosti, nazivaju i trajektorijama pramenova pravih ravni $^1S_2$. Na stranama 112. i 113. pomenutog uvoda naveli smo jednu od takvih definicija iz udžbenika /24/ M.Pravanović. Istovremeno smo formulisali i našu definiciju tog pojma. (definicija 5. str.113.). Prvom teoremom ove tačke utvrdićemo da su ove definicije u slučaju ekvivalentne. Pošto naša definicija još nije dovoljno poznata, iako smatramo da ima izvesnih prednosti u odnosu na postojeće, u početku ćemo uglavnom se oslanjati na definiciju datu u duhu udžbenika /24/. Grupe simetrija pramenova pravih geometrije Lobačevskog u Beltrami - Klajnovom modelu predstavljene su suženjem grupe simetrija odgovarajućih pramenova pravih ravni $^1S_2$. U skladu sa osnovnim ciljem ove glave najpre ćemo pojam trajektorije pramena pravih geometrije Lobačevskog, proširiti i na ravan $^1S_2$ služeći se analogijom sa odgovarajućom situacijom u sopstvenoj oblasti te ravni tj. Beltrami - Klajnovim modelom geometrije Lobačevskog. Zatim ćemo dobijene rezultate protumačiti u svakoj od geometrija idealne oblasti ravni $^1S_2$ i to na takav način da se oni bez teškoća mogu izraziti i kao rezultati odgovarajućih poluformalnih

teorija.

Prema drugoj tački ovog paragrafa u ravni ${}^1S_2$ postoji pet grupa simetrija pramenova pravih ravni ${}^1S_2$. Iz razloga koje ćemo uskoro dati njima će odgovarati šest vrsta trajektorija. To su trajektorije grupa G_{Uh}, G_{Dh}, G_{Vh}, $\overline{G}_{Vh}$ i grupe svih automorfizama hiperboličnog pramena pravih središta V koju smo u t.2. označili sa G_V. Ova grupa je grupa simetrija projektivnog pramena pravih ravni ${}^1S_2$ središta V koja kao svoje prave podgrupe sadrži grupe G_{Vh} i $\overline{G}_{Vh}$. Pošto se radi o trajektorijama tačke u označavanju trajektorija sem grupe neophodno je i označiti i tu tačku. U vezi sa ovim usvojićemo način označavanja koji je primenjen u delu /14/. U tom delu trajektorija (ili orbita kako se u tom delu naziva ovaj pojam, ili putanja - što bi najviše odgovaralo duhu našeg jezika) koja sadrži tačku X u odnosu na grupu G označava se sa G(X) (v.str.303.u /14/). U ravni ${}^1S_2$ moguće je razlikovati i dve vrste trajektorija grupe G_{Vh} kao i dve vrste trajektorija grupe $\overline{G}_{Vh}$. Naime na osnovu teoreme 2.13.i posledice 2.12.ako tačka pripada unutrašnjosti jednog od trouglova temena V,M,N, tada $G_{Vh}(X)$ pripada unutrašnjosti tog istog trougla kao i samo ako taj trougao pripada onom projektivnom uglu određenom pravama VM i VN koji sadrži apsolutu. Ako u tom slučaju tačka X pripada jednom od trouglova temena V,M, N koji pripadaju onom karakterističnom projektivnom uglu temena V koji ne sadrži apsolutu na osnovu iste teoreme 13. (str.131. rada) i iste posledice 12. (str.132.rada) $G_{Vh}(X)$ je skup tačaka koje pripadaju unutrašnjosti i pomenutog, ali i njemu dopunskog trougla u odnosu na taj projektivni ugao. U ovom drugom slučaju, radi kraćeg obeležavanja umesto X pisaćemo $\overline{X}$. Potpuna oznaka te trajektorije bila bi $G_{Vh}(X)$. U duhu naziva koji smo u radovima /4/ i /5/ upotrebili za trajektrorije pramenova pravih trajektorije hiperboličnih pramenova pravih nazvaćemo hiperciklima. Ako tačka X pripada karakterističnom projektivnom uglu koji sadrži hiperbolični pramen pravih prve vrste tada takav hipercikl nazivamo hiperciklom prve, a ako tačka Xpripada projektivnom uglu MVN koji sadrži hiperbolični pramen druge vrste, tada takav hipercikl nazivamo hiperciklom druge vrste. Ako tačka X nije tačka onog hiperboličnog pramena pravih prve ili druge vrste pomoću koga je definisan odgovarajući hipercikl, tada ispred izraza hipercikl prve ili druge vrste stavljamo pridev "dvograni". Tako je $G_{Vh}(X)$ hipercikl prve vrste, a G_{Vh} (X) dvograni hipercikl druge vrste. Crticom iznad X označili smo da tačka X pripada hiperboličnom pramenu pravih druge vrste. Iz istih razloga kao u slučaju trajektorija gruge G_{Vh}(teorema 2.13. i posledica 2.12.) ako X pripada hiperboličnom pramenu druge vrste(te je zato označavamo sa $\overline{X}$), tada trajektorija $\overline{G}_{Vh}(\overline{X})$ pripada onom trouglu temena VMN čijoj unutrašnjosti pripada tačka $\overline{X}$; ako X pripada hiperboličnom pramenu prve vrste, tada skup tačaka trajektorije $\overline{G}_{Vh}(X)$ pripada unutrašnjosti dva trougla temena V,M,N koji pripadaju projektivnom uglu određenom pravama VM i VN koji sadrži apsolutu. Zato u ovom poslednjem slučaju trajektoriju $\overline{G}_{Vh}(X)$ nazivamo dvogranim hiperciklom i to prve vrste jer tačke tog hipercikla pripadaju hiperboličnom pramenu pravih prve vrste. Primetimo da u predloženom načinu označavanja, X bez crtice iznad ukazuje da se radi o hiperciklu prve, a X sa crticom iznad da se radi o hiperciklu druge vrste. Hipercikl je dvograni kada se u njegovoj oznaci iznad G i X nalazi ukupno tačno jedna crtica. Može se dokazati da je svaki dvograni hipercikl istovetan odgovarajućoj trajektoriji grupe G_V. Međutim dokaz ove, kao i većine drugih teorema kojima su utvrđuju svojstva trajektorija kao i njihov međusobni odnos, mnogo je jednostavniji ako se koristi definicija trajektorije koju smo ustanovili i primenjivali još od

1979. godine. Prema toj definiciji trajektorije pramenova pravih (epicikli) ravni ${}^1S_2$ su trajektorije grupa epicikličkih rotacija pramenova pravih te ravni. Pojam epicikličkih rotacija i grupa epicikličkih rotacija u radu smo uveli na str.125. Svaka od tih grupa je takođe podgrupa odgovarajuće grupe svih automorfizama datog pramena pravih ravni ${}^1S_2$. Ali takva grupa je i prava podgrupa odgovarajuće grupe simetrija tog pramena pravih. I to je jedna od značajnih prednosti ovakve definicije trajektorija:jednostavnije izvođenje dokaza, što smo malopre pomenuli, proizilazi iz činjenice da se prilikom dokazivanja uzima u obzir manji broj mogućnosti s obzirom na manji broj elemenata tih grupa. Sledećom teoremom utvrdićemo relativnu ekvivalentnost naše i postojeće definicije epicikla.

Teorema 18. Svaki epicikl tačke X u odnosu na datu grupu epicikličkih rotacija ravni ${}^1S_2$ različit od epicikla tangenata apsolute ako je data grupa hiperboličnog pramena pravih, ali ne i od središta tog pramena, istovetna je epiciklu tačke X u odnosu na grupu simetrija koja sadrži datu grupu epicikličkih rotacija.

Dokaz. Iz činjenice da grupa simetrija G_{Oh} datog pramena pravih sadrži grupu epicikličkih rotacija G_{Oe} sledi da epicikl $G_{Oh}(X)$ sadrži epicikl $G_{Oe}(X)$. Prema teoremi 2.6.(str.118.rada) svaki element grupe simetrija bilo kog pramena pravih ravni ${}^1S_2$ je ili simetrija u odnosu na neku pravu tog pramena ili epiciklička rotacija tog pramena. Sadržajem ove teoreme nismo obuhvatili neposredno i slučaj hiperboličnog pramena pravih ravni ${}^1S_2$ središta V jer je, za razliku od hiperboličnih pramenova prve i druge vrste i njima odgovarajućih grupa simetrija, grupa simetrija hiperboličnog pramena pravih G_V istovetna grupi simetrija projektivnog pramena pravih središta V pa je taj deo te-

oreme neposredna posledica posledice 4. (rad/6/str.146.).
Prema tome da bismo dokazali da i epicikl $G_{Oe}(X)$ sadrži
epicikl $G_{Oh}(X)$, dovoljno je dokazati da je bilo koja tač-
ka X'koja je slika tačke X u nekoj simetriji grupe G_{Oh} is-
tovremeno i slika tačke X u nekoj epicikličkoj rotaciji gr-
upe G_{Oe}. Ali ovo neposredno sledi iz činjenice da je proiz-
vod pomenute simetrije i simetrije grupe G_{Oh} čija osa sadrž
ži tačku X epiciklička rotacija grupe G_{Oe} koja tačku X pre-
slikava na tačku X'.

Ako tačka X pripada jednoj od projektivnih duži od-
ređenih tačkama V i M, odnosno tačkama V i N, tada je $G_{Vh}(X)$
ili $\overline{G}_{Vh}(X)$ skup dve stranice jednog od trouglova temena V,M,
N; koje pripadaju tangentama VM i VN. Razlog tome je što sv-
aka simetrija grupa G_{Vh} i $\overline{G}_{Vh}$ preslikava tangentu VM na ta-
ngentu VN i obratno. Da se pri tome stranica VM pomenutog
trougla preslikava na stranicu VN istog trougla sledi iz te-
oreme koja se dokazuje na isti način kao i teorema 2.13.Ali
pošto svaki element grupe G_{Ve} preslikava svaku od projekti-
vnih duži VM i VN na tu istu duž (da bi se ovo pokazalo ne-
ophodno je koristiti i posledicu koja u prethodnom smislu
odgovara posledici 2.12.)epicikl $G_{Ve}(X)$ je ona od tih proj-
ektivnih duži koja sadrži tačku X. Slično, dok je $G_V(X)$skup
tačaka tangenata VM i VN bez tačaka V,M,N datle je $G'_{Ve}(X)$
unija dve otvorene projektivne duži određene ili tačkama V,
M ili tačkama V,N u zavisnosti od toga da li X pripada tan-
genti VM ili tangenti VN. Tačka V, kao uostalom i svako sr-
edište bilo kog pramena pravih ravni ${}^1S_2$, je epicikl svih
grupa simetrija pramenova pravih tog središta. Međutim epic-
ikl $G_{Vh}(M)$, $\overline{G}_{Vh}(M)$, $G_V(M)$, $G_{Ve}(M)$, $G'_{Ve}(M)$ tačke M u odnosu
na sve grupe simetrija i sve grupe epicikličkih rotacija hi-
perboličnih pramenova pravih središta V kao i epicikli ta-
čke N u odnosu na iste grupe su par tačaka M,N u slučaju

epicikala prve tri grupe, a samo tačka M ili samo tačka N u slučaju poslednje dve navedene grupe (npr. $G_{Ve}(M) = M$, $G'_{Ve}(N) = N$).

Sada smo u mogućnosti da na jednostavniji način dokažemo teoremu da su dvograne trajektorije iste tačke X u odnosu na grupe G_{Vh} i $\bar{G}_{Vh}$ istovetne trajektoriji te tačke u odnosu na grupu G_V; u ovom kao i sledećim slučajevima, osim ako to posebno ne istaknemo, pretpostavljamo da se ne radi o epiciklima koji predstavljaju nizove tačaka ravni ${}^1S_2$ ili podskupove tih nizova. Takve epicikle ubuduće ćemo nazivati degenerisanim epiciklima.

Teorema 19. Ako tačka X pripada otvorenom projektivnom uglu određenom pravama VM i VN koji sadrži apsolutu epicikl $G_V(X)$ je istovetan dvogranom epiciklu $\bar{G}_{Vh}(X)$. Ako tačka $\bar{X}$ pripada otvorenom projektivnom uglu određenom pravama VM i VN, koji ne sadrži apsolutu, epicikl $G_V(\bar{X})$ istovetan je dvogranom epiciklu $G_{Vh}(\bar{X})$.

Dokaz. Neka je tačka X tačka pomenutog otvorenog ugla temena V koji sadrži apsolutu. Dokazujući teoremu 2.12. dokazali smo da je grupa epicikličkih rotacija G'_{Ve} prava podgrupa grupe simetrija G_V hiperboličnog pramena pravih središta V. Zato je, na osnovu teoreme 18, epicikl-hipercikl $G_V(X)$ istovetan hiperciklu $G'_{Ve}(X)$.[30] Grupa G_V sadrži grupu $\bar{G}_{Vh}$(v. teoremu 2.10. na str. 122. rada). Zato hipercikl $G_V(X)$ sadrži hipercikl $\bar{G}_{Vh}(X)$. Ako dokažemo da i hipercikl $\bar{G}_{Vh}(X)$ sadrži hipercikl $G'_{Ve}(X)$, na osnovu $G'_{Ve}(X) = G_V(X)$ sledi i tvrđenje prvog dela teoreme.

Ako je X' slika tačke X u epicikličkoj rotaciji podgrupe G_{Ve} grupe G'_{Ve}, pošto je G_{Ve} podgrupa grupe $\bar{G}_{Vh}$, X'

30) Skrećemo pažnju da se teorema 18. odnosila samo na epicikle koje smo uveli na početku ove tačke, dakle na epicikle $G_{Uh}(X)$, $G_{Vh}(X)$, $\bar{G}_{Vh}(\bar{X})$, $G_V(X)$ a ne i na epicikle $G_{Vh}(X)$ i $\bar{G}_{Vh}(X)$. Dokazom teoreme 19. dokazujemo da i ovi epicikli pošto su istovetni epiciklima grupe G_V spadaju u epicikle ravni ${}^1S_2$ koje smo definisali na početku.

je slika tačke X u toj istoj epicikličkoj rotaciji grupe G_{Vh}. Zato je u tom slučaju tačka X'hipercikla $G'_{Ve}(X)$ takođe i tačka hipercikla $G_{Vh}(X)$. Prema teoremi 2.12.(str.126.) svaki element grupe G'_{Ve} koji nije epiciklička rotacija njene podgrupe G_{Ve} je epiciklička rotacija mešovitih osa. U cilju jednostavnijeg dokaza da i kada je X'slika tačke X u epicikličkoj rotaciji mešovitih osa, X'pripada hiperciklu $G_{Vh}(X)$ dokazaćemo lemu koja ima i širi značaj pošto se primenjuje i u dokazima mnogih drugih teorema.

Lema. Bilo koja epiciklička rotacija koja tačku X preslikava na tačku X'može se predstaviti kao proizvod dve simetrije grupe simetrija kojoj pripada data epiciklička rotacija tako da osa jedne od tih simetrija sadrži tačku X.

Dokaz. Neka je epiciklička rotacija f koja tačku X preslikava na tačku X'proizvod simetrija u odnosu na ose c i d koje se seku u tački O ravni $^1S_2$. Pretpostavimo da ta epiciklička rotacija f = dc[31] nije epiciklička rotacija mešovitih osa. Tada prave c i d sadrže prave jedne od geometrija ravni $^1S_2$ pa se na način istovetan onome kojima smo proverili tačnost aksiome G3 apsolutne geometrije dokazuje da postoji simetrija h_s grupe G_{Oh} kojoj pripada i epiciklička rotacija f koja pravu d preslikava na pravu OX koju ćemo označiti sa a, pod pretpostavkom da tačka X pripada onoj oblasti ravni $^1S_2$ koja sadrži i tačke pravih c i d. U suprotnom slučaju prema lemi 3. na str.145. rada/6/ f se može predstaviti kao proizvod dve harmonijske homologije - simetrije grupe G_{Oh} -u odnosu na ose koje imaju zajedničkih tačaka sa oblasti kojoj pripadaju tačke X i X'. Radi istovremenog dokaza i pomenuti prikaz rotacije f označićemo na isti način, pa dakle i osu simetrije koja osu drugog činioca tog prikaza

---

31) Radi se o primeni Bahmanove konvencije o zapisivanju osnih simetrija zapisivanjem samo njihovih osa.

preslikava na pravu a i pripada grupi G_{Oh} označićemo takođe sa s. Neka je h_s (c) prava b. Dokazaćemo da je f proizvod simetrija h_a i h_b navedenim redom. U stvari taj dokaz, mada se ne odnosi na simetrije apsolutne ravni u Boljajevom smislu, zahvaljujući tome što se odnosi na njima odgovarajuće involutivne transformacije, u principu se ne razlikuje od dokaza drugog dela teoreme 4.3. na str. 77. udžbenika /16/.

Neka je epiciklička rotacija f grupe G_{Oh} mešovitih osa, i neka je određenosti radi osa d ona od tih osa koja sadrži pravu one od geometrija ravni $^1S_2$ čijoj oblasti interpretacije pripada tačka X. U koliko tačka X pripada oblasti interpretacije dve geometrije te ravni onda je sasvim svejedno da li ćemo je smatrati tačkom geometrije EH ili HH: u tom slučaju ulogu ose d igra ona od osa koja sadrži pravu te geometrije. U svakom slučaju onu drugu osu predstavićemo kao proizvod dve harmonijske homologije od kojih je jedna harmonijska homologija h_O. Pošto prema poznatoj teoremi osa druge od tih homologija sem središta O, sadrži i središte homologije - simetrije h_c tada ako c ne seče apsolutu osa te druge simetrije seče apsolutu i obratno. Na ovaj način rotacija f se, na osnovu prethodnog i leme 1 rada /6/, može predstaviti kao proizvod h_O i epicikličke rotacije u odnosu na ose pramena pravih središta O čije ose ili obe seku ili obe ne seku apsolutu. Na način istovetan onome na koji smo ukazali dokazujući prvi deo teoreme ta epiciklička rotacija može se predstaviti kao epiciklička rotacija kojoj je prva simetrija simetrija grupe G_{Oh} ose a. Time smo f prikazali kao proizvod tri simetrije grupe G_{Oh} od kojih je jedna simetrija h_O a osa druge sadrži tačku X dok osa treće sadrži pravu koja seče ili ne seče apsolutu zavisno od toga da li prava a seče ili ne seče apsolutu. Međutim proizvod te treće simetrije i simetrije h_O, s obzirom da centar jedne od tih simetrija pripada osi druge, je simetrije grupe G_{Oh} čija osa ne seče apsolutu ako osa te treće simetrije seče apsolutu, i obratno. Na taj način f smo prikazali i u ovom slučaju kao epicikličku rotaciju mešovitih osa i to tako da je jedna od simetrija te rotacije simetrija u odnosu na osu koja sadrži tačku X.

Ističemo da se slučaj "mešovitih osa" ostvaruje jedino kada je tačka O spoljašnja tačka apsolute dakle u slučaju grupe koju smo u ovom radu označavali sa G_{Vh}. Na osnovu predhodne leme ako tačka X pripada unutrašnjosti karakterističnog ugla MVN, određenog zahtevom da je u pitanju onaj od tih uglova koji sadrži apsolutu, i ako je f epiciklička rotacija grupe G'_{Ve} "mešovitih osa", tada se f može predstaviti kao proizvod simetrije grupe G_V u odnosu na osu koja sadrži tačku X i osu koja pripada hiperboličnom pramenu druge vrste središta V. Pošto se u pr voj od tih simetrija tačka X preslikava na tu istu tačku, zbog $f(X)=X'$ druga simetrija takođe preslikava X na X'. Pošto je ta simetrija simetrija grupe $\bar{G}_{Vh}$ dokazali smo da i kada je tačka X' slika tačke X u epicikličkoj rotaciji koja nije element grupe $\bar{G}_{Vh}$ tada postoji simetrija te grupe koja tačku X preslikava na tačku X'. Prema tome i svaka tačka hipercikla $G'_{Ve}(X)$ istovremeno i tačka hipercikla $\bar{G}_{Ve}(X)$. Na taj način dokazali smo da su ovi hipercikli međusobno jednaki. Ali prema teoremi 18. rada epicikl - hipercikl $G'_{Ve}(X)$ istovetan je hiperciklu $G_V(X)$. Zato je hipercikl $\bar{G}_{Ve}(X)$ istovetan i hipercikl $G_V(X)$. Na isti način dokazali bismo teoremu i u slučaju kada X pripada onom od projektivnih uglova određenih pravama VM i VN koji ne sadrži apsolutu. U tom slučaju, za razliku od prethodnog, radi se o hiperciklu $G_{Vh}(X)$ druge vrste, i to dvogranom hiperciklu. Time smo istovremeno dokazali da je svaki hipercikl grupe G_V različit od degenerisanog dvograni hipercikl. Iz tog razloga smo na početku ove tačke uvodeći epicikle govorili o trajektorijama pet vrsta pramenova pravih kojima odgovarajupet vrsta grupa simetrija. Međutim na osnovu prethodnih razmatranja i imajući u vidu da teoriju epicikla ravni $^1S_2$ razvijamo i u cilju određivanja vrsta epicikala svih geometrija te ravni zaključujemo da je korisno razlikovati dve vrste hipercikala grupe G_V: dvograne hipercikle prve i dvograne hipercikle druge vrste. Na osnovu prethodne leme sledi:

Posledica 15. Bilo koja grupa epicikličkih rotacija jednostavno (prosto) je tranzitivna na svakom epiciklu te grupe.

Dokaz. Tranzitivnost svake od ovih grupa neposredno sledi iz definicije. Pretpostavimo da osim epicikličke rotacije f koja tačku X odgovarajućeg epicikla preslikava na tačku X'tog istog epicikla, postoji i epiciklička rotacija g koja X preslikava na X'. Tada se prema pomenutoj lemi f može predstaviti kao proizvod dve simetrije grupe simetrija koja sadrži datu grupu epicikličkih rotacija tako da osa prve simetrije sadrži tačku X a druga simetrija preslikava tačku X na tačku X'. Neka je ta simetrija ravni $^1S_2$ simetrija h_b . Iz istog razloga i epiciklička rotacija g koja X preslikava na X'može se predstaviti kao proizvod dve simetrije pomenute grupe simetrija od kojih osa prve sadrži tačku X, a druga simetrija h_c preslikava tačku X na tačku X'. Na osnovu pretpostavke dokaza teoreme X ne pripada ni jednoj od pravih b i c koje su međusobno različite. Pošto su h_b i h_c simetrije grupe simetrija koja sadrži datu grupu epicikličkih rotacija h_bh_c je epiciklička rotacija iste grupe epicikličkih rotacija. U toj rotaciji tački X odgovara ta ista tačka što je moguće samo u slučaju kada je dati epicikl degenerisan i to upravo središte grupe simetrija kojoj pripada data grupa epicikličkih rotacija ili ako je ta epiciklička rotacija istovetna simetriji h_O grupe simetrija središta O a tačka X tačka polare o tačke O u apsolutnom polaritetu. Ali i u tom slučaju se radi o degenerisanom epiciklu.

U slučaju kada je epicikl datog pramena pravih središte tog pramena, sve simetrije i sve epicikličke rotacije grupe simetrija tog pramena pravih preslikavaju taj epicikl -središte na to središte. Ovo je u skladu sa teoremom na str. 161. udžbenika /24/ po kojoj: "Svaki element grupe simetrija u odnosu na koji je definisana izvesna trajektorija preslikava tu trajektoriju na tu istu ratjektoriju" koja je u tom udžbeniku formulisana u najopštijem vidu: za trajektoriju tačke u odnosu nabilo koju grupu G[32]. I tačke M i N su bez obzira na vrstu definicije, epicikli-ravni $^1S_2$ za koje posledica 15. ne važi.

Kasnije ćemo pokazati da svaka tačka bilo kog nedegenerisanog epicikla pripada tačno jednoj osi pramena pravih u odnosu na koji je definisan epicikl (pod uslovom da dvograne epicikle definišemo u odnosu nagrupu G_V, a ne pomoću njenih podgrupa G_{Vh} i $\overline{G}_{Vh}$. U slučaju naše definicije epicikala ovo ograničenje je suvišno: dvograni hipercikl je isključivo hipercikla grupe G'_{Ve}.). U slučaju degenerisanih epicikala situacija je u tom pogledu različita: središta pramenova pravih su jedini epicikli koji sadrže sve ose odgovarajućeg pramena pravih dok tačke M i N ne sadrže nijednu osu pramena pravih u odnosu na koji su te tačke hipercikli. Ovo poslednje važi i za projektivne duži VM i VN. Karakteristično je da skupu tačaka M i N i tangentama VM i VN pripadaju jedini epicikli - hipercikli grupa G_{Vh}, $\overline{G}_{Vh}$, G_V koji nisu istovetni odgovarajućim hiperciklima grupe

32) Sadržaj i dokaz te teoreme nalaze se između sadržaja druge definicije i jedine teoreme na str. 161.

$G_{Ve}=\bar{G}_{Ve}$ i G'_{Ve} redom (ovim smo predizirali teoremu 4.18. rada). Za ove hipercikle ne važi ni mogućnost njihovog definisanja u odnosu na grupe simetrija G_{Vh} i $\bar{G}_{Vh}$, ukoliko se radi o dvogranim hiperciklima. Jedina mogućnost definisanja dvogranog hipercikla tačke X koja pripada jednoj od otovrenih projektivnih duži određenih tačkama V, M, odnono V, N je definisanje trajektorije tačke X u odnosu na grupu G_V. Međutim i za ovu vrstu epicikala ipak važi posledica 15. dok za hipercikle prave MN ne važi. Dve projektivne duži te prave, ukoliko ih tretiramo kao epicikle grupe G_V, kao i osnove eliptičnih pramenova pravih su jedine vrste epicikala ravni $^1S_2$ različite od tačaka, za koje ne važi posledica 15. Središte pramena pravih u odnosu na koji je definisan dati epicikl nazivaćemo središtem tog epicikla, a pravu-polaru tog središta osnovom tog epicikla. S obzirom da svi epicikli istog pramena pravih imaju isto središe, takve epicikle nazivaćemo i koncentričnim.

5. "Homotetije" ravni $^1S_2$. Transformacija sličnosti ravni $^1S_2$. Projektivne kolineacije ravni $^1S_2$ koje ćemo nazvati homotetijama te ravni i homotetije euklidske ravni su transformacije koje se međusobno znatno razlikuju. Uprkos tome mogućnost da se ove transformacije ravni $^1S_2$ definišu skoro na isti način kao i homotetije euklidske ravni navela nas je da i ove transformacije nazovemo homotetijama ravni $^1S_2$. Da ta mogućnost nije slučajna potvrdila su uporedna proučavanja projektivnog modela euklidske geometrije i ravni $^1S_2$, o kojima će biti rači nešto kasnije. Pošto ćemo tu vrstu transformacija nazvali - homotetijama, prirodno je da proizvode takvih transformacija i transformacija podudarnosti ravni $^1S_2$ (tj. transforamcija grupe G) nazovemo transformacijama sličnosti te ravni. Jedno od svojstava homotetija euklidske ravni je da svaka homotetija datog ce-

ntra O preslikava skup koncentričnih krugova središta O na taj isti skup. To isto važi i u slučaju transformacija sličnosti. Ako se u bilo kojoj od tih transformacija središta S skupa koncentričnih krugova preslikava na tačku S_1, tada ta transformacija preslikava skup koncentrisanih krugova središta S naskup koncentričnih krugova središta S_1. Upravo ovo će biti polazna tačka određivanja projektivnih kolineacija ravni ${}^1S_2$koje ćemo smatrati homotetijama i transforacijama sličnosti te ravni. Radi ostvarenja tog cilja dokazaćemo najpre sledeću teoremu.

Teorema 20. Da bi neka kolineacija projektivne ravni bilo koji epicikl neke grupe simetrija ravni ${}^1S_2$ preslikavala na epicikla te iste grupe simetrija, potrebno je i dovoljno, da je ta kolineacija kolineacija normalizatora[33] te grupe u grupi svih kolineacija odgovarajuće projektivne ravni.

Dokaz. Pretpostavimo da kolineacije g pripada normalizatoru $N(G_{Oh})$ bilo koje grupe simetrija ravni ${}^1S_2$. Slika epicikla $G_{Oh}(X)$ u kolineaciji g je skup slika svake njegove tačke u toj kolineaciji. Neka je $X_1=g(X)$. Dokazaćemo da je svaka druga tačka skupa $g(G_{Oh}(X))$ tačka epicikla $G_{Oh}(X_1)$. Neka je $Y_1 = g(Y)$ bilo koja tačka pomenutog skupa različita od X_1. Pošto je Y tačka epicikla $G_{Oh}(X)$ različita od X, prema definiciji postoji element f grupe G_{Oh} koji je zbog pretpostavke o Y različit od identiteta, takav da je $f(X) = Y$. Transformacija $gofog^{-1}$ preslikava tačku X_1 na tačku Y_1. Na osnovu pretpostavke po kojoj g pripada normalizatoru grupe G_{Oh} i činjenice da je f element te grupe sledi da je i gfg^{-1} element te grupe. Zato je, prema definiciji, $Y_1 = gfg^{-1}(X_1)$ tačka epicikla $G_{Oh}(X_1)$.

33) O pojmu normalizatora podgrupe u grupi v.npr. t.3.§ 2. gl.7.na str. 305. dela /14/.

Pretpostavimo sada da kolineacije projektivne ravni u kojoj je ravan ${}^1S_2$, preslikava epicikl $G_{Oh}(X)$ na epicikl $G_{Oh}(X_1)$. Ako je $g(X)$ tačka različita od X_1 pošto prema pretpostavci i ona pripada epiciklu $G_{Oh}(X_1)$, možemo je odabrati za predstavnika istog tog epicikla (svaki epicikl iste grupe simetrija je jedna klasa ekvivalencije te je svejedno koji element je predstavnik te klase). Prema tome možemo smatrati da je tačka X_1 slika tačke X pri preslikavanju g. Svaki element f grupe G_{Oh} preslikava tačku X na neku tačku Y epicikla $G_{Oh}(X)$. Ako je $g(Y)=Y_1$, tada je $gfg^{-1}(X_1) = Y_1$. Prema tome grupa izvedena iz grupe G_{Oh} konjugovanjem svakog elementa grupe G_{Oh} preslikavanjem g "preslikava"[34] epicikl $G_{Oh}(X_1)$ u taj isti epicikl. Na sličan način može se pokazati i da je svaka tačka epicikla $G_{Oh}(X_1)$ slika tačke X_1 u preslikavanju nekim elementom grupe" $gG_{Oh}g^{-1}$" Iz ovog sledi da je epicikl $G_{Oh}(X_1)$ istovetan epiciklu "$gG_{Oh}g^{-1}$"(X_1). Pokazaćemo najpre da je svaki element grupe $goG_{Oh}g^{-1}$ harmonijska homologija ili proizvod dve harmonijske homologije. Ako je h harmonijska homologija grupe G_{Oh}, tada je ghg^{-1} homologija čija je osa slika ose homologija h u kolineaciji g, a središta s slika središta homologije h u kolineaciji g(ovo sledi npr. iz teoreme 30.2.u /13/, na str. 136.).

Na osnovu stava po kome je transfromacija konjugovana involutivnoj transformaciji takođe involutivna transformacija homologija ghg^{-1} je harmonijska homologija. Na osnovu pretpostavke teoreme $g(O) = O$, jer je O jedini epicikl - tačka u skupu svih epicikala grupe G_{Oh}.[35] Zato je

---

34) U smislu da svaki element te grupe preslikava taj epicikla na taj isti epicikl.

35) Prema definiciji hipercikala kao trajektorija grupa G_{Vh}, G_{Vh}, i G_V hipercikli tačaka M i N su par tačaka M, N(v.str. 203.rada)

i $ghg^{-1}(O) = O$. Pošto to važi za svaku harmonijsku homologiju izvedenu konjugovanjem kolineacijom g bilo koje harmonijske homologije grupe G_{Oh}, može se jednostavno zaključiti da ose svih tih harmonijskih homologija sadrže tačku O. Prava o je takođe invarijantna prava svih harmonijskih homologija izvedenih na prethodni način iz sledećih razloga. Prema pretpostavci g preslikava svaki epicikl grupe G_{Oh} na epicikl te iste grupe. Pravoj o =W(O) pripada najmanje jedan epicikl te grupe koji je istovetan ili pravoj o, ili pravoj o bez jedne tačke ili projektivnoj duži te prave. Ako bi se prava o preslikavala na neku drugu pravu, onda bi prema prethodnom i ta prava bila epicikl grupe G_{Oh} ili bi sadržavala epicikl te grupe. U t.4. rada, naročito prilikom dokazivanja teoreme 18. pokazali smo da su prave koje zadovoljavaju taj uslov prava o, i u slučaju grupe simetrija čije je središte spoljašnja tačka apsolute i prave VM i VN. U cilju dokaza ovog dela teoreme 20. potrebno je dokazati i sledeću lemu.

Lema. Ako tačka O nije tačka spoljašnjosti apsolute, tada je prava o =W(O) jedina prava koja sadrži epicikl grupe G_{Oh} različit od tačke. Ako je tačka O tačka spoljašnjosti apsolute, osim prave o, takve su jedino još tangente kroz O na apsolutu.

Dokaz. Prema teoremi koja je uopštenje teoreme na str. 161. udžbenika /24/ (v. i fusnotu 65. na str. 209. rada) svaki element grupe G_{Oh} preslikava svaki epicikl te grupe na taj isti epicikl. Ako f nije simetrija grupe G_{Oh}, tada je ona prema teoremi 38.1. (/13/str.161.)jedna od kolineacija koje su navedene u poslednje tri tačke te teoreme. Tačkama označenim sa b) i d) odgovaraju epicikličke rotacije grupe G_{Oh} u slučaju kada tačka O pripada apsoluti ili je tačka unutrašnjosti apsolute (navedenim redom). U svakom od tih slučajeva jedina invarijantna prava je prava o. Slučaj označen sa c) odgovara epicikličkim rotacijama grupe G_{Oh} kada je O tačka spoljašnjosti apsolute. Tada su, prema c) jedine invarijantne prave prava o i tangente apsolute koje sadrže tačku O.

S obzirom da je g projektivna kolineacija, slika prave o može biti prava koja sadrži epicikl grupe G_{Oh} različita od o jedino u slučaju kada je tačka O spoljašnja tačka apsolute. Prema prethodnoj lemi u tom slučaju slika prave o, koja je tada sečica apsolute, može biti jedino jedna od tangenata apsolute koja sadrži tačku O. Međutim kako u ovom slučaju tačka O i prava o nisu incidentne, i $g(O)= O$ ni u ovom slučaju $g(o)$ ne može biti različito od o. Pošto je prava o invarijantna prava svih harmonijskih homologija grupe $gG_{Oh}g^{-1}$ čije su sve ose različite prava o sadrži središta svih harmonijskih homologija te grupe.

Pokazaćemo i da je svaka harmonijska homologija izvedena iz harmonijske homologije grupe G_{Oh} koloneacijom g harmonijska homologija grupe G tj. simetrija grupe simetrija grupe G_{Oh}. Apsoluta ravni $^1S_2$ je epicikla bilo koje grupesimetrija bilo kog eliptičnog pramena pravih ravni $^1S_2$, odnosno sadrži epicikle svake grupe simetrija neeliptičnih pramenova pravih te ravni različite od tačke ili para tačaka. Prema pretpostavci teoreme g preslikava epicikl apsolute na neki epicikl grupe G_{Oh}, koji ćemo označiti sa e. Neka je h_1 bilo koja harmonijska homologija grupe $gG_{Oh}g^{-1}$. Ova homologija se može predstaviti kao ghg^{-1}, gde je h simetrija grupe G_{Oh}. S obzirom da je ta homologija kao harmonijska involutivna transformacija, ta homologija se može prikazati i kao $g^{-1}hg$. Jednostavno se dokazuje da je $g^{-1}hg$ automorfizam apsolute: g preslikava epicikl apsolute na epicikl e grupe G_{Oh}, simetrija h te grupe je automorfizam tog epicikla, a g^{-1} preslikava taj epicikl na epicikl apsolute. S obzirom da je taj epicikl različit od tačke, kao i para tačaka, u harmonijskoj homologiji $g^{-1}hg = ghg^{-1}$ tri tačke epicikla apsolute preslikavaju se na tri tačke epicikla apsolute. Prema poznatoj teoremi projektivna kolineacija koja tri tačke nedegenerisane krive drugog reda preslikava na tri tačke te iste krive je automorfizam te krive. Prema tome svaka harmonijska homologija grupe $gG_{Oh}g^{-1}$ predstavlja harmonijsku homologiju grupe G u odnosu na osu koja sadrži tačku O i središte koje pripada pravoj o. Ukoliko tačka O nije središte hiperboličnog pramena pravih ravni $^1S_2$ prve ili druge vrste, neposredno se može zaključiti da je svaka od tih harmonijskih homologija istovremeno i simetrija grupe G_{Oh}. Dokazaćemo da to isto važi i u slučaju kada je O središte hiperboličnog pramena pravih prve vrste. U slučaju kada je $G_{Oh}(X)$ jednograni hipercikl, tačka X prema obrazloženju izloženom u uvodu t.4, pripada onoj od oblasti projektivnog ugla određenog dvema tangentama apsolute kroz tačku O koja sadrži apsolutu. Ova kao i njoj dopusnka oblast invarijantne su u svakoj kolineaciji grupe G koja je automorfizam tačke O, tj. svaki element grupe G_O je automorfizam svake od tih oblasti. Pošto i hipercikl G_{Oh} (X), kao i svaki drugi nedegenerisani jednograni hipercikl prve vrste, pripada takođe onoj od pomenutih oblasti koja sadrži apsolutu i to istom trouglu na koji tu oblast razlaže prava o =W(O), prema teoremi 13.(rad str.131.) osa svake harmonijske homologije grupe $gG_{Oh}g^{-1}$takođe pripada pomenutoj oblasti (to sledi i na osnovu stava 5 na str. 138.rada). Prema tome i u ovom slučaju svaka harmonijska homologija grupe $gG_{Oh}g^{-1}$ je i simetrija grupe G_{Oh}. Ako je u pitanju dvograni hipercikl $G_O(X)$ druge vrste i ako je taj hipercikl definisan pomoću podgrupe G_{Vh}, tada kolineacija g preslikava svaki takav hipercikl na hipercikl iste vrste. Prema obrazloženju na kraju str.140. ovako definisan hipercikl pripada onom od projektivnih uglova određenih tangentama apsolute koji ne sadrži apsolutu. Pošto je g(O) = O, kolineacija g preslikava taj ugao na taj isti ugao. Neka su X i X'[36] odgovarajuće tačke u simetriji h grupe G_{Oh}. Prema teoremi 13. rada (ili stava 5.) tačke X i X' pripadaju unutrašnjostima dva razna trougla na koje oblast pomenutog ugla razlaže prava o. Zato i tačke X_1 = g(X) i X_1' = g (X')pripadaju jedna jednom, a druga drugom od tih trouglova. Ovo ćemo i detaljnije obrazložiti. Pošto g preslikava, prema pretpostavci teoreme, svaki epicikl - hipercikl druge vrste grupe G_{Oh} na hipercikl iste vrste iste grupe, g će preslikavati svaku od projektivnih duži prave o čiji krajevi pripadaju apsoluti na tu istu duž. Iz ovoga sledi da će g preslikavati dodirne tačke M i N apsolute i tangenata apsolute koje sadrže tačku O ili jednu na drugu ili svaku od tih tačaka na te iste tačke. Pošto je u prvom slučaju suženje kolineacije g na pravu o involucija, i pošto se prema prethodnom svaka tačka jedne od projektivnih duži krajeva M i N preslikava u toj involuciji na tačku te iste duži, parovi tačaka M i N i bilo koji par odgovarajućih tačaka te involucije ne razdvajaju jedan drugi pa je suženje kolineacije g na pravu o hiperbolična involucija. Zato na toj pravoj postoje dve invarijantne tačke P i Q kolineacije g. Kako je i g(O) = O, g je kolineacija tipa I (v.§ 30. na str.135-136.u /13/). Ako je g(M) = M i g(N) = N, tada je takođe kolineacija g tipa I. Prema teoremi 30.2.na str. 136. dela /13/ svaka kolineacija I tipa preslikava unutrašnjost svakog projektivnog trougla određenog invarijantnim tačkama te kolineacije

---

36) Ovaj način označavanja - X sa crticom iznad - je prema dogovoru utvrđenom na str. 140 rada.

na unutrašnjost istog trougla, ili pak razmenđuje oblasti po dva od tih trouglova i to onih na čijoj zajedničkoj stranici ta kolineacija "očuvava" orijentaciju. S obzirom da je u slučaju kada su invarijantne tačke kolineacije g osim tačke O invarijantne tačke i P i R a stranica PR stranica na kojoj kolineacija g u svakom slučaju "očuvava" orijentaciju,[37] kolineacija g će u pogledu dejstva na oblasti trougla OMN biti analogna dejstvu te kolineacije na oblasti trougla OPR. Na osnovu prethodnog ako tačka X_1 pripada onoj oblasti trougla OMN kojoj pripada tačka X, tada tačka X_1' pripada onoj oblasti tog trougla koja sadrži tačku X'. Isto tako ako tačka X_1 pripada onoj oblasti trougla OMN koja sadrži tačku X' tada tačka X_1' pripada onoj oblasti tog trougla koja sadrži tačku X_1. U oba slučaja, dakle, tačke $X_1=g(X)$ i $X_1'= g(X')$ pripadaju dvema raznim oblastima na koje prava O = W(O) razlaže pomenuti projektivni ugao. Kako su ove dve tačke odgovarajuće tačke harmonijske homologije ghg^{-1} koja pripada grupi G i čija osa sadrži tačku O, to prema teoremi 13. (rad str. 131.) osa te homologije pripada hiperboličnom pramenu prve vrste ravni ${}^1S_2$.

Na isti način dokazujemo da teorema važi i u slučaju dvogranog hipercikla prve vrste $\bar{G}_{Vh}(X)$.

Dokazujući ovu teoremu dokazali smo da je svaka projektivna kolineacija ravni, koja sadrži ravan ${}^1S_2$ i koja svaki epicikl date grupe simetrija ravni ${}^1S_2$ preslikava na epicikl iste te grupe i epicikl iste vrste[38], normalizatora skupa svih simetrija date grupe simetrija. Međutim svaki drugi element te grupe simetrija je proizvod dve simetrije te grupe. Na osnovu toga i prethodno dokazanog dela teoreme

---

37) U vezi sa ovim v. teoremu 30.3. (/13/str.136.).
38) Dopuna u pogledu vrste epicikla odnosi se upravo na dvograne hipercikle definisane u odnosu na grupe G_{Vh} i $\bar{G}_{Vh}$.

sledi da je kolineacija projektivne ravni koja zadovoljava prethodno izložene zahteve element normalizatora grupe G_{Oh}. Dokazujući teoremu 20. dokazali smo, pored ostalog, i sledeću posledicu:

Posledica 16. Svaka harmoniska homologija izvedena iz bilo koje simetrije grupe G_{Oh} elementom normlaizatora grupe G_{Oh} je simetrija te grupe.

S obzirom da je simetrija grupe G_{Oh} istovremeno i simetrija ravni ${}^1S_2$ (tj. grupeG) iz posledice 16. sledi i da svaki normalizator grupe G_{Oh} svaku pravu pramena pravih središta O i pol te prave preslikava na pravu tog pramena i pol te prave redom. Ako je taj pramen pravih eliptičan, tada je suženje pomenutog polariteta koji apsolutni polaritet indukuje u pramenu pravih središta O na pravu o eliptična involucija te prave. Iz prethodnog zaključujemo da bilo koji normalizator grupe G_{Oh} "preslikava" involuciju koju na pravoj o indukuje apsolutni polaritet na tu istu involuciju. To isto važi i u slučaju hiperboličnih i paraboličnih pramenova pravih ravni ${}^1S_2$ pri čemu je u poslednjem slučaju ta involucija degenerisana - parabolična involucija tangente apsolute u tački O te apsolute. Ako suženje apsolutnog polariteta W na bilo koju pravu ravni ${}^1S_2$ nazovemo apsolutnom involucijom te prave prethodni zaključak možemo formulisati u vidu posledice 17.

Posledica 17. Svaki element normalizatora grupe G_{Oh} preslikava apsolutnu involuciju prave $o = W(O)$ na tu istu apsolutnu involuciju.

Jedina razlika između ove i odgovarajuće situacije u projektivnom modelu euklidske ravni proističe iz različitosti priroda apsoluta ravni ${}^1S_2$ i projektivnog modela euklidse ravni. Apsoluta ravni ${}^1S_2$ je nedegenerisana, a apsoluta projektivnog modela euklidse ravni degenerisana kriva drugog reda. Zato je apsolutni polaritet ravni ${}^1S_2$ nedegenerisan, a projektivnog modela euklidske ravni degenerisan polaritet. Dok u prvom od njih različitim tačkama odgovaraju različite polare, u drugom svim tačkama projektivne ravni koje ne pripadaju apsolutnoj pravoj odgovara ista polara - apsolutna prava. Ove tačke su središta pramenova pravih koji odgovaraju eliptičnim pramenovima pravih ravni ${}^1S_2$. Sem toga apsolutna involucija polare bilo koje svojstvene tačke projektivnog modela euklidske ravni istovetna je apsolutnoj involuciji apsolute, dok u ravni ${}^1S_2$ ovo ne važi ni za jednu tačku te ravni. U projektivnom modelu euklidske ravni svaki element normalizatora ne samo grupe simetrija pramenova pravih čija su središta tačke te ravni koje ne pripadaju apsoluti, već i svaki element normalizatora grupe simetrija pramenova pravih čija središta pripadaju apsoluti, preslikava apsolutu na apsolutu. Međutim u ravni ${}^1S_2$, za svaku grupu simetrija te ravni postoje i elementi normlaizatora koji apsolutu preslikavaju na epicikle različite od apsolute. U projektivnom modelu euklidske ravni ne važi samo posledica 17. već i posledica 16. i teorema 20. Dokaz teoreme odgovarajuće teoremi 20. je u principu, u tom modelu euklidske ravni, istovetan je dokazu teoreme 20. i znatno je jednostavniji. Termin "Kolineacija preslikava apsolutnu involuciju na tu istu involuciju" je skraćenje za odgovarajući precizan izraz "involucija izvedena iz apsolutne involucije suženjem projektivne kolineacije ravni na apsolutnupravu je apsolutna involucija". Da bi se moglo govoriti o suženju kolineacije projektivne ravni na neku pravu, koje je transformacija te prave, neophodno je da je ta prava invarijantna u toj kolineaciji. Kao što smo dokazujući teoremu 20. dokazali, svaki element normalizatora grupe G_{Oh} je automorfizam prave o = W(O) dakle zadovoljava prethodni uslov. Suženje datog elementa normalizatora grupe G_{Oh} na pravu o označićemo oznakom togelementa, a suženje apsolutnog polariteta W na pravu označavaćemo sa w. U skladu sa tim činjenicu da element g normalizatora grupe G_{Oh} preslikava apsolutnu involuciju w prave o na tu istu involuciju zapisaćemo: $gwg^{-1} = w$. Iz ove relacije, s obzirom da su g i w, gde je g suženje kolineacije g na pravu o, projektivne transformacije prave o te pripadaju grupi svih projektivnih preslikavanja prave o na tu istu pravu, sledi da je: gw = wg. Kada se g smatra, kao u § 31. (/13/ str.140.), ne suženjem kolineacije g na pravu o, već kolineacijom projektivne ravni, onda se u /13/ kaže da je kolineacija g permutabilna sa involucijom w. Na ovaj način pokazali smo da je svaka kolineacija koja involuciju date prave preslikava na tu istu involuciju "permutabilna" sa tom involucijom. Kao što smo pomenuli kada je O unutrašnja tačka apsolute, tada je apsolutna involucija prave o eliptična. Prema teoremi 31.1. (/13/str.141.) kolineacija permutabilne sa datom eliptičnom involucijom su:

a) homologija i elacija ose o;

b) hormonijske homologije takve da centar svake od njih pripada pravoj o, a odgovarajuća osa sadrži sliku centra u involuciji w;

c) proizvod dve ili više perspektivnih kolineacija opisanih u a) i b).

U konkretnom slučaju element g grupe G_{Oh} preslikava tačku O na tu istu tačku, a pravu o na tu istu pravu, pri čemu tačka O i prava o nisu incidentne. Zato tada element g ne može biti elacija ose o, već homologija središta O i ose o. Ako je g kolineacija tipa b) i C centar te harmonijske homologije, a C_1 presek ose harmonijske homologije g sa pravom o, tada je prema b) $w(C) = C_1$. Pošto je i tačka O konjugovana tački C u apsolutnom polaritetu W, osa OC_1 harmonijske homologije g je polara njenog središta C. Zato je harmonijska homologija g u ovom slučaju simetrija grupe G_{Oh}. Na ovaj način dokazali smo sledeću teoremu:

Teorema 21. Svaki element normalizatora grupe simetrija G_{Oh} eliptičnog pramena pravih ravni $^1S_2$ u grupi kolineacija projektivne ravni koja sadrži grupu G je ili element grupe G_{Oh}, ili homologija središta O i ose o = W(O), ili proizvod dve takve homologije, ili proizvod bilo koje homologije središta O i ose o sa nekim elementom grupe G_{Oh}.

Napominjemo da odgovarajuća teorema važi i u projektivnom modelu euklidske ravni pri čemu je prava o za svaku grupu simetrija G_{Oh} čije središte O ne pripada apsoluti apsoluta. Primetimo i da smo prilikom prethodnih upoređivanja povremeno poistovećivali projektivni model euklidske ravni sa projektivnom ravni u kojoj jedna od pravih ima istaknutu ulogu i naziva se apsoluta. Ovom poslednjom pojmu odgovara u potpunosti pojam ravni $^1S_2$ u kojoj ulogu apsolute ima nedegenerisana kriva drugog reda. I grupa G transformacija ravni $^1S_2$ preslikava apsolutnu involuciju na tu istu involuciju. Ali za razliku od apsolutne involucije u slučaju projektivnog modela euklidske ravni koja je eliptična involucija pomenute istaknute prave, apsolutna involucija ravni $^1S_2$ -s obzirom da je kao i u prethodnom slučaju suženje polariteta određenog apsolutom na tu istu apsolutu je u ovom slučaju identično preslikavanje apsolute. Znači dok u prvom slučaju u apsolutnoj involuciji nema nijedne invarijantne tačke, u drugom slučaju se u apsolutnoj involuciji svaka tačka preslikava na tu istu tačku. Zato je u ovom slučaju svaka projektivna kolineacija ravni koja sadrži apsolutu, koja tu apsolutu preslikava na apsolutu, permutabilna sa apsolutnom involucijom tj. apsolutnu involuciju "preslikava" na tu istu involuciju. Međutim u projektivnoj ravni u kojoj je polaritet određen degenerisanom apsolutom, i to "dvostrukom" pravom, nije svaki automorfizam apsolute istovremeno i projektivna kolineacija koja apsolutnu involuciju apsolute preslikava na tu istu involuciju. Ali u ovom slučaju ni svaka projektivna kolineacija, koja apsolutnu involuciju preslikava na apsolutnu involuciju, ne predstavlja transformaciju podudarnosti euklidske ravni. Tako su u skupu svih elemenata normalizatora bilo koje grupe simetrija G_{Oh} čije središte O ne pripada apsoluti, čiji elementi kao i u odgovarajućem slučaju ravni ${}^1S_2$ apsolutnu involuciju ali u ovom slučaju apsolute preslikavaju na tu istu involuciju, "transformacije podudarnosti" samo oni elementi koji svaki epicikl grupe G_{Oh} preslikavaju na taj isti epicikl - krug središta O. Elementi normalizatora grupe G_{Oh} koji ne zadovoljavaju taj uslov predstavljaju transformacije sličnosti euklidske ravni središta O. Zato ćemo i normalizatore grupe G_{Oh} ravni ${}^1S_2$ koji epicikle te grupe ne preslikavaju identički na te iste epicikle (ali ne tačka po tačka) nazvati transformacijama sličnosti ravni ${}^1S_2$ središta O. Ako je tačka O unutrašnja tačka apsolute, tada su prema teoremi 21. transformacije sličnosti središta O homologije tog središta zajedničke ose $o = W(O)$ ili proizvodi takvih homologija sa nekim elementom grupe G_{Oh} koji predstavljaju transformacije podudarnosti ravni ${}^1S_2$ koje tačku O preslikavaju na tu istu tačku, a pravu o na tu istu pravu. Zato ćemo homologije središta O i ose o nazvati homotetijama ravni ${}^1S_2$ istog središta i iste ose o. Među ovim homotetijama jedino je harmonijska homologija središta O i ose o istovremeno i element grupe G_{Oh} te je ona jedina homotetija središta O i ose o, koja je istovremeno i transformacija podudarnosti ravni ${}^1S_2$. Ova harmonijska homologija je centralna simetrija središta O, i istovremeno simetrija u odnosu na pravu o ravni ${}^1S_2$. Slično su i ostale homotetije središta O istovremeno i homotetije ose o ravni ${}^1S_2$.

Normalizator date podgrupe u grupi koja tu podgrupu sadrži je takođe podgrupa te grupe. U slučaju kada je tapodgrupa grupa simetrija G_{Oh}, normalizator te podgrupe nazvaćemo grupom transformacija sličnost središta O (ose o) ravni ${}^1S_2$, i obeležavati sa $G_{Sl,O}$. Osim podgrupe G_{Oh} grupa $G_{Sl,O}$ sadrži kao svoju pravu podgrupu i grupu svih homotetija središta O i ose o. Grupa $G_{Sl,O}$ je prava podgrupa grupe svih automorfizama tačke O i prave o = W(O) grupe kolineacija projektivne ravni. Ta grupa $G_{Sl,O}$ je grupa svih automorfizama tačke O, prave o, pramena pravih središta O i skupa svih epicikala grupe G_{Oh}. Grupa homotetija središta O i ose o je skup svih autmorfizama unije prethodno navedenog skupa likova i pramena pravih središta O ali i prava po prava. S obzirom da je identična kolineacija pomenute projektivne ravni automorfizam bilo kog lika te ravni ona je element svake od tih podgrupa pa se može smatrati i specijalnom homotetijom središta O i ose o. Na osnovu teoreme 21. i prethodnog sledi:

Posledica 18. Svaka transformacija sličnosti grupe $G_{Sl,O}$ je proizvod nekog elementa grupe G_{Oh} i izvesne homotetije središta O i ose o.

Kada je G_{Oh} grupa simetrija eliptičnog pramena pravih središta O, tada je svaki element te grupe ili simetrija u odnosu na pravu tog pramena ili proizvod dve takve simetrije. Pod transformacijama podudarnosti prve vrste podrazumevaćemo one transformacije podudarnosti ravni ${}^1S_2$ koje ne menjaju orijentaciju apsolute, a pod transformacijama podudarnosti druge vrste one transformacije podudarnosti ravni ${}^1S_2$ koje tu orijentaciju menjaju. Prema prethodnom svaka transformacija sličnosti grupe $G_{Sl,O}$, gde je O unutrašnja tačka apsolute, je proizvod simetrije grupe G_{Oh}

sa homotetijom središta O i ose o, ili proizvod epicikličke rotacije grupe G_{Oh} sa nekom homotetijom središta O i ose o. U prvom slučaju središte homotetije pripada osi simetrije, a u drugom je istovetno sa središtem epicikličke rotacije (presekom osa simetrija kojima je predstavljena te rotacija). Ako je transformacija sličnosti grupe $G_{S1,O}$ proizvod homotetije te grupe i epicikličke rotacije grupe G_{Oh}, tada takvu transformaciju sličnosti smatramo transformacijom sličnosti prave, a kao je transformacija sličnosti grupe $G_{S1,O}$ proizvod homotetije i simetrije te grupe, smatramo je transformacijom sličnosti druge vrste. S obzirom da je svaka transformacija sličnosti grupe $G_{S1,O}$ proizvod konačnog broja kolineacija projektivne ravni koja sadrži ravan $^1S_2$, svaka takva teansformacija je takođe kolineacija ravni $^1S_2$.

Određivanje normalizatora grupa simetrija hiperboličnih pramenova pravih središta V ravni $^1S_2$ je nešto složenije. Suženje w apsolutnog polariteta W na pravu v =W(V) je u ovom slučaju hiperbolična involucija te prave, kojoj su invarijantne tačke M i N presečne tačke prave v i apsolute. Prema posledici 17. rada svaki element normalizatora grupa G_V, G_{Vh} i $\bar{G}_{Vh}$ preslikava tu involuciju na tu istu involuciju. Ali prema teoremi 20. rada nije svaka projektivna kolineacija ravni $^1S_2$ koja pomenutu involuciju w - apsolutnu involuciju prave v - preslikava na w normalizator navedenih grupa. Prema toj teoremi da bi kolineacija koja w preslikava na w bila normalizator bilo koje od grupa G_{Vh}($\bar{G}_{Vh}$) neophodno je i da ta kolineacija preslikava svaku od projektivnih duži MN na tu istu projektivu duž. Ovaj zahtev zadovoljava svaki element bilo koje od grupa G_V, G_{Vh} i $\bar{G}_{Vh}$ što je u skladu sa činjenicom da je svaki element tih grupa normalizator odgovarajuće grupe. Na način analogan onome na kojim smo, u slučaju kada je O unutrašnja tačka apsolute, utvrdili da je svaka homologija središta O i ose o = W(O) normalizator grupe G_{Oh} utvrdili bismo i da je svaka homologija središta V i ose v normalizator svake od grupa G_V, G_{Vh}, $\overline{G}_{Vh}$. S obzirom da su, prema teoremi 2.10. rada, grupe G_{Vh} i $\overline{G}_{Vh}$ podgrupe grupe G_V dovoljno je dokazati da je neka kolineacija projektivne ravni normalizator grupa G_{Vh} ili $\overline{G}_{Vh}$, da bi se iz toga zaključilo da je ona normalizator grupe G_V. Pre nego što utvrdimo i ostale normalizatore navedenih grupa dokazaćemo neke teoreme koje su nam neophodne u tom cilju. Ove teoreme su vrlo značajne i za dalje razvijanje teorije epicikala ravni $^1S_2$.

Teorema 22. Svaki hipercikl $G_V(X)$ je unija hipercikla $G_{Vh}(X)$i $G_{Vh}(h_V(X))$. Svaki hipercikl $G_V(\overline{X})$ je unija hipercikala $\overline{G}_{Vh}(\overline{X})$ i $\overline{G}_{Vh}(h_V(\overline{X}))$. U oba slučaja h_V je simetrija središta V.

Dokaz. Prema dogovoru izloženom u uvodu t.4.crtica iznad X označava da se radi o tački hiperboličnog pramena pravih druge vrste središta V. Prema tome drugi deo teoreme odnosi se na dvograni hipercikl $G_V(\overline{X})$ druge vrste i (jednograne) hipercikle druge vrste. S obzirom da je dokaz drugog dela teoreme istovetan dokazu prvog dela ograničićemo se na dokaz prvog dela. Dokaz možemo pojednostaviti na taj način što ćemo umesto postojeće koristiti našu definiciju epicikala tj. definiciju po kojoj su epicikli trajektorije grupe epicikličkih rotacija pramenova pravih ravni $^1S_2$. Prema teoremi 4.18. ove dve definicije su ekvivalentne u slučaju nedegenerisanih epicikala - što je zadovoljeno i u slučaju teoreme 22. Prema teoremi 4.18. hipercikl $G_V(X)$ istovetan je hiperciklu $G'_{Ve}(X)$, a hipercikli $G_{Vh}(X)$ i $G_{Vh}(h_V(X))$ istovetni su hiperciklima $G_{Ve}(X)$ i $G_{Ve}(h_V(X))$ redom. Prema teoremi 2.12.grupa G'_{Ve}razložena je svojom podgrupom G_{Ve} na dve susedne klase: G_{Ve} i $h_V o G_{Ve}$. Pošto grupa G'_{Ve} sadrži grupu G_{Ve}, hipercikl $G'_{Ve}(X)$ sadrži hipercikl $G_{Ve}(X)$. Neka je tačka Y bilo koja tačka hipercikla $G_{Ve}(X_1)$ gde je $X_1=h_V(X)$. Prema definiciji postoji epiciklička rotacija f grupe G_{Ve} koja tačku X_1 preslikava na tačku Y. Pošto je f istovremeno i epiciklička rotacija grupe G'_{Ve}, epiciklička rotacija fh_V je epiciklička rotacija iste grupe. Pošto je $fh_V(X) = Y$, Y je prema definiciji tačka hipercikla $G'_{Ve}(X)$. Na taj način dokazali smo da hipercikl $G'_{Ve}(X)$ sadrži hipercikle $G_{Ve}(X)$ i $G_{Ve}(X_1)$. Treba još dokazati i da je svaka tačka hipercikla $G'_{Ve}(X)$ tačka jednog od poslednja dva hipercikla. Neka je Z bilo koja tačka navedenog hipercikla. Ako je ona slika tačke X pri preslikavanju nekim elementom grupe G_{Ve}, tada je Z tačka hipercikla $G_{Ve}(X)$. U suprotnom slučaju Z je slika tačke X pri preslikavanju nekim elementom klase $h_V G_{Ve}$, npr. h_Vg. Prema dopuni teoreme[39] 30.7.(/13/, str. 137.) svaki element grupe G_{Ve} komutativan je sa h_V. Zato je $h_Vg=gh_V$. Iz ovogai prethodnog sledi da je $gh_V(X) = Z$. Zbog $h_V(X) = X_1$ iz ove jednakosti sledi da je $g(X_1) = Z$. Pošto je g element grupe G_{Ve}, Z je tačka hipercikla $G_{Ve}(X_1)$.

Epiciklička rotacija h_V grupe G'_{Ve} je kao homologija središta V i ose v element normalizatora kako grupe G'_{Ve}, tako i grupe G_{Ve}. Zato je prema teoremi 20. rada $h_V(G_{Ve}(X))$ hipercikl $G_{Ve}(X_1)$, gde je $X_1 = h_V(X)$. Iz ovoga sledi i posledica teoreme 22.

Posledica 19. Svaki hipercikl $G'_{Ve}(X)$ je unija hipercikla $G_{Ve}(X)$ i $h_V(G_{Ve}(X))$. Svaki hipercikl $G'_{Ve}(\bar{X})$ je unija hipercikala $G_{Ve}(\bar{X})$ i $h_V(G_{Ve}(\bar{X}))$.

Na osnovu definicije epicikala neposredno sledi da

---

39) Ovu dopunu izložili smo i dokazali na str.141-143. rada /6/. Na osnovu komutativnosti svakog elementa grupe G_{Ve} sa h_V može se zaključiti i da je grupa G_{Ve} normalna podgrupa grupe G'_{Ve}.

je apsoluta ravni ${}^1S_2$ unija epicikala bilo koje grupe simetrija te ravni. Sledećom teoremom preciziraćemo ovu karakteristiku apsolute.

Teorema 23. Apsoluta je jedini zajednički epicikl svih eliptičnih pramenova pravih ravni ${}^1S_2$. Apsoluta je unija dva oricikla bilo paraboličnog pramena pravih središta D: tačke D i skupa tačaka apsolute različitih od tačke D. Apsoluta je unija dva hipercikla hiperboličnog pramena pravih središta V. Jedan od njih je par presečnih tačaka M i N prave v = W(V) sa apsolutom, a drugi skup tačaka apsolute različitih od tačka M i N. Apsoluta je unija tri hipercikla prve vrste: prvi je par presečnih tačaka M i N prave v sa apsolutom, drugi je jedan luk apsolute određen tačkama M i N bez tih tačaka, a treći je drugi luk apsolute određen istim tačkama, takođe bez tih tačaka. Ovi hipercikli su hipercikli datog hiperboličnog pramena pravih prve vrste središta V.

Dokaz. Neka je U središte bilo kog eliptičnog pramena pravih ravni ${}^1S_2$, a X i Y bilo koje dve tačke apsolute k te ravni. Prave UX i UY označićemo kratko sa x i y, a tačke preseka tih pravih sa pravom u = W(U) sa X_1 i Y_1. Prava u kao polara unutrašnje tačke U apsolute je prava spoljašnjosti apsolute. Zato je ona prava geometrije spoljašnje oblasti apsolute. Prema tome za svake dve tačke prave u, pa i za tačke X_1 i Y_1, na osnovu aksiome G4A apsolutne geometrije (I.29.str.54.) postoji automorfizam apsolute koji "razmenjuje" te tačke. Prilikom provere te aksiome u ${}^1S_2$ - modelima te geometrije pokazali smo da je taj automorfizam harmonijska homologija. Središte H te harmonijske homologije pripada pravoj u jer uzajemno odgovarajuće tačke X_1 i Y_1 te homologije pripadaju pravoj u. Ova harmonijska homologija je kao automorfizam apsolute element grupe transformacija podudarnosti G ravni $^1S_2$, dakle simetrija te grupe. Zato je njena osa polara W(H) njenog središta, Prema poznatoj teoremi pošto H pripada pravoj u, prava W(H) sadrži pol U prave u. Znači ova simetrija, označimo je da h je istovremeno i simetrija grupe simetrija G_{Uh}. Ovoj grupi simetrija pripada i simetrija središta U, pa za nju važi posledica 2. 11. Prema toj posledici, pored simetrije h postoji tačno još jedan element grupe G_{Uh} koji razmenjuje tačke X_1 i Y_1, koji je takođe simetrija koju ćemo označiti sa h_1. Jedna od ovih dveju simetrija preslikava tačku X na tačku Y, a druga na drugu presečnu tačku prave y i apsolute. Na ovaj način, dokazavši da za bilo koje dve tačke apsolute postoji element grupe G_{Uh} koji jednu od tih tačaka preslikava na onu drugu, dokazali smo da sve tačke apsolute pripadaju istoj klasi ekvivalencije - istom epiciklu grupe simetrija G_{Uh}. Pretpostavimo da sem apsolute k postoji i još neki epicikl e eliptičnog pramena pravih središta U koji je istovremeno epicikl i nekog drugog eliptičnog pramena pravih, npr. središta U_1. Neka je X_1 neka tačka epicikla e. Pošto je U unutrašnja tačka apsolute, prava UX_1 seče apsolutu (prema teoremi 59.11.na str. 239.dela /13/). Neka je X jedna od tačaka preseka prave UX_1 i apsolute. U homologiji h određenoj središtem U, osom u i parom odgovarajućih tačaka X i X_1, apsoluta k preslikava se na krivu drugog reda koja sadrži tačku X_1. Ova homologija h je prema teoremi 21. rada element, normlaizatora grupe G_{Uh}. Na osnovu teoreme 20. rada svaki element normalizatora grupe G_{Uh} preslikava svaki epicikl te grupe na epicikl iste te grupe. Zato je i h(k) jedan od epicikala, i to upravo epicikl te grupe. Na isti način se može dokazati da homologija h_1 središta U_1 i ose u_1 koja odgovarajuću tačku apsolute k preslikava na odgovarajuću tačku epicikla e, takođe preslikava apsolutu k na epicikl e.

Na osnovu poznate teoreme[40] po kojoj svaka projektivna kolineacija koja datu krivu drugog reda preslikava na neku krivu drugog reda, preslikava unutrašnjost date krive na unutrašnjost slike te krive, zaključujemo da su tačke U i U_1 ne samo unutrašnje tačke apsolute već i unutrašnje tačke apicikla e. Zato prava UU_1, prema teoremi 59.11. u /13/ seče epicikl e u tačkama A_e i B_e. Neka su tačke A i B tačke preseka prave UU_1 i apsolute k. S obzirom da jedna od krivih drugog reda - trajektorija k i e pripada unutrašnjosti druge, parovi tačaka A,B i A_e, B_e ne razdvajaju jedan drugi. Neka su tačke E i P_1 tačke preseka prave UU_1 sa pravama u i u_1 redom. Tačke P i U su, s obzirom da P pripada polari u tačke U u apsolutnom polaritetu, harmonijski konjugovane sa parom tačaka A,B. Iz istog razloga je i par tačaka P_1, U_1 harmonijski konjugovan sa parom tačaka A,B. Harmonijska homologija h_U kao element grupe G_{Uh} preslikava epicikl e te grupe na taj isti epicikl. Zato je i par tačka A_e i B_e kao par uzajamno odgovarajućih tačaka harmonijske homologije h_U harmonijski konjugovan sa parom tačaka U,P. Iz istih razloga je par tačaka A_e,B_e harmonijski konjugovan sa parom tačaka U_1, P_1. Prema prethodnom za dva para tačaka A,B i A_e, B_e koji ne razdvajaju jedan drugi postoje dva para tačaka P, U i U_1, P_1 koji su harmonijski konjugovani sa svakim od njih. Međutim to je prema poslednjoj teoremi na str.34. dela /22/ nemoguće.

U slučaju paraboličnog pramena pravih središta D tog pramena pripada apsoluti k. S obzira da svaki generator grupe simetrija G_{Dh} sadrži tačku D, $G_{Dh}(D) = D$ je oricikl apsolute. Tačka D je jedina invarijantna tačka bilo koje ep-

---

40) Ova teorema je neposredna posledica npr. poslednjeg dela teoreme 64.4.(/13/str.257.), po kojoj se elementi konjugovani u odnosu na datu krivu k pri projektivnom preslikavanju preslikavaju na elemente konjugovane u odnosu na sliku te krive.

icikličke rotacije grupe G_{Dh}. Zato je D jedini oricikl ravni ${}^1S_2$ istovetan tački. Sve tačke dirke d apsolute k koja sadrži tačku D različite od tačke D, pripadaju oblasti interpretacije geometrije EH i HH. Prilikom provere aksiome G4 apsolutne geometrije dokazali smo da za svake dve tačke koje pripadaju skupu tačaka dirke d koji ne sadrži tačku D, postoji harmonijska homologija - simetrija grupe G_{Dh} koja jednu od tih tačaka preslikava na onu drugu. Neka su A i B bilo koje dve tačke apsolute k različite od tačke D, a A_1 i B_1 tačke preseka tangenata apsolute u tačkama A i B sa dirkom d. Simetrija grupe G_{Dh} koja tačku A_1 preslikava na tačku B_1, preslikava i tačku A na tačku B. Prema tome za svake dve tačke apsolute različite od tačke D postoji simetrija grupe G_{Dh} koja jednu od tih tačaka preslikava na onu drugu. Iz ovoga sledi da je skup tačaka apsolute različitih od tačke D drugi oricikl apsolute.

Povodom teoreme 4.18. rada razmatrali smo i degenerisane hipercikle hiperboličnih pramenova pravih središta V i zaključili da su tačke dodira M i N tangenata apsolute koje sadrže tačku V epicikl, odnosno dva epicikla - zavisno od toga da li epicikle definišemo kao trajektorije grupa simetrija ili njima odgovarajućih podgrupa epicikličkih rotacija pramenova pravih ravni ${}^1S_2$. Neka su A i B bilo koje dve tačke skupa tačka apsolute različitih od tačaka M i N, a A_1 i B_1 tačke preseka pravih VA i VB sa pravom v = W(V). Pošto su prave VA i VB prave onog od projektivnih uglova određenog tangentama VM i VN koji sadrži apsolutu, tačke A_1 i B_1 su tačke one projektivne duži određene tačkama M i N koja pripada unutrašnjosti apsolute. Zato i u ovom slučaju postoji simetrija h grupe G_V koja tačku A_1 preslikava na tačku B_1. Ta simetrija preslikava pravu VA na pravu VB_1. S obzirom da prava VB_1 sadrži unutrašnju tačku B_1 apsolute ona seče apsolutu u još jednoj tački P različitoj od tačke B. Ako simetrija h preslikava tačku A na tačku P, tada drugi element grupe G_V čije je suženje na pravu v istovetno suženju simetrije h na tu pravu preslikava tačku A na tačku B(ovaj element uvek postoji prema posledici 2.11. rada). Na taj način smo dokazali da je skup tačaka apsolute različitih od tačkka M i N hipercikl grupe simetrija G_V hiperboličnog pramena pravih ravni ${}^1S_2$.

Ako tačke A,B pripadaju istom luku apsolute određenom tačkkama M i N, i različite su od tih tačaka, tada te tačke pripadaju i istom projektivnom trouglu temena VMN i to onom od dva takva trougla koji pripadaju pomenutom uglu koji sadrži taj luk apsolute. Prilikom provere aksiome G4 (I § 4. 3. rada) dokazali smo da postoje dve harmonijske homologije grupe G koje tačku preseka prave VA sa pravom v, koju ćemo kao i u prethodnom slučaju označiti sa A_1, preslikavaju na presečnu tačku B_1 pravih VB i v=W(V). Središta jedne od tih homologija pripadaju jednoj, a središte druge drugoj od projektivnih duži određenih tačkama M i N. Prema stavu 3. 5. samo ona od tih simetrija grupe G_V čije središte pripada spoljašnjosti apsolute a osa onom od projektivnih uglova određenih tangentama VM i VN koji sadrži apsolutu, preslikava tačku A na tačku B. Prema istom stavu ne postoji element grupe G_{Vh} koji bi tačku A preslikavao na bilo koju tačku trougla VMN' koji je komplementan trouglu VMN koji sadrži tačku A. Zato nijedna tačka luka apsolute, određenog tačkama M i N koji ne sadrži tačku A, nije tačka hipercikla prve vrste $G_{Vh}(A)$ za koju smo prethodno dokazali da je otvoreni luk apsolute određen tačkama M i N, koji sadrži tačku A. Na isti način se dokazuje i da je njemu komplementni luk apsolute bez tačaka M i N još jedan hipercikl prve vrste hiperboličnog pramena pravih središta V koji pripada apsoluti.

Poslednji deo teoreme koju smo dokazali je u potpunom skladu sa teoremom 22.

Da bismo formulisali sledeću veoma značajnu posledicu teoreme 23. u najopštojem vidu, dokazaćemo lemu koja se odnosi na normalizatore grupe G_{Dh}.

Lema. Svaka elacija sreišta D i ose d = W(D) je normalizator grupe G_{Dh}.

Lema je neposredna posledica teoreme 30.7.(/3/, str. 137). Sadržaj ove teoreme može se videti i na str. 141. rada /6/ u kome su data i sva potrebna objašnjenja tog sadržaja.

Posledica 20. Bilo koji epicikl eliptičnog pramena pravih središta U je slika apsolute k u preslikavanju odgovarajućim elementom normalizatora grupe G_{Uh}. Svaki dvograni hipercikl prve vrste hiperboličnog pramena pravih središta V je slika odgovarajućeg nedgenerisanog hipercikla apsolute u odgovarajućem preslikavanju nekim elementom normalizatora grupe G_V. Svaki hipercikl prve vrste hiperboličnog pramena pravih prve vrste središta V je slika jednog od dva odgovarajuća nedegenerisana hipercikla apsolute pri preslikavanju odgovarajućim elementom normalizatora grupe G_{Vh}. Svaki oricikl paraboličnog pramena pravih središta D je slika nedegenerisanog oricikla apsolute koji pripada tom pramenu pravih, pri preslikavanju nekim elementom normalizatora grupe G_{Dh}.

Radi kraćeg izražavanja pri formulisanju dela teoreme koji se odnosi na hipercikle upotrebili smo izraz "odgovarajući hipercikl apsolute". Pod takvim hiperciklom podrazumevali smo one hipercikle apsolute koji su definisani u odnosu na grupe simetrija hiperboličnih pramenova pravih kojima pripadaju (u odnosu nakoje su definisani) dati hipercikli. Tako smo pri formulisanju ove teoreme odstupili od odgovara po kome, ako to posebno ne istaknemo, pod epiciklima podrazumevamo nedegenerisane epicikle. Smatrali smo da time u ovom slučaju ostvarujemo neophodnu preciznost. Ovako formulisana teorema (zapravo posledica) obuhvata sadržaj poznate teoreme po kojoj je "svaki krug Beltrami-Klajnovog modela geometrije Lobačevskog slika apsolute u homologiji čije je središte istovetno središtu tog kruga a osa polara središta, svaka ekvidistanta tog modela slike apsolute u homologiji čija je osa osnova te ekvidistante a središte pol osnove, a svaki oricikl slika apsolute u elaciji čije je središte tačka dodira tog oricikla i apsolute a osa tangenta apsolute u toj tački". Nepreciznost u slučaju citiranog dela teoreme koji se odnosi na ekvidistante i oricikle, nije rezultat težnje ka kraćem izražavanju autora dela /27/ (v. I 9.3.10.) u šta smo se uverili analizom dokaza delova teoreme koji se odnose na ekvidistante m-ravni ili m-ekvidistante i m-orisfere (kojii je izložen na str. 238. i 239. dela/27/ i koji nije sintetički). Zato smo u teoremi 23. naveli kao teoremu čija je posledica posledica 2o., mada u njenom dokazu značajnu ulogu ima teorema 20. Međutim posledica 20. ne samo što otklanja uobičajenu nepreciznost pri formulisanju prethodno citirane teoreme već tu teoremu i upotpunjuje u sadržajnom smislu, jer su navedene homologije samo neki od elemenata normalizatora odgovarajućih grupa simetrija u odnosu na koje su definisani dati epicikli. U duhu načina izražavanja koji naglašava činjenicu da ravan ${}^1S_2$ tretiramo kao ravan u čijim oblastima izgrađujemo odgovarajuće projektivno metričke geometrije, prethodna razlika bi se mogla opisati i na sledeći način. U ranijim formulacijama epicikli navedenih geometrija razmatrani su isključivo kao slike "apsolute[41)] pri odgovarajućim homotetijama ravni ${}^1S_2$; posledicom 20. ukazali smo da su ti epicikli slike "apsolute" i u svim transformacijama sličnosti ravni ${}^1S_2$ čija su središta istovetna središtima tih epicikala (odnosno čije su ose osnove tih epicikala).

Posledica 20, pa dakle i citirana teorema vrlo su značajne jer se na osnovu njih zaključuje da su svi epicikli, osim hipercikala druge vrste, kao slike "apsolute" pri preslikavanju odgovarajućim elementima normalizatora grupa u odnosu na koje su ti epicikli definisani, specijalne krive drugog reda. Pre nego što ukažemo na neka svojstva koja neposredno slede iz prethodne činjenice dokazaćemo teoremu kojom se za skup epicikala grupe simetrija datog pramena pravih ravni ${}^1S_2$ utvrđuje da predstavljaju određenu familiju krivih drugog reda.. Familija krivih drugog reda naziva se u /13/ kratko pramen konusnih preseka (gl.II § 14.str.101-108.), a u /13/ još kraće: pramen konika. U radu ćemo zato upotrebiti ovaj poslednji izraz. S obzirom da pri formulisanju ove teoreme koristimo klasifikaciju pramenova konika izloženu u § 63. (/13/ str.251.) kao i oznake vrsta ovih pramenova, upućejemo čitaoca da se sa tim vrstama upozna upravo u označenom delu.

Osim toga sve vrste ovih pramenova vrlo pregledno su prikazane na sl. 93.(str.252.) istog dela.

Teorema 24. Skup epicikala ma kog pramena pravih ravni ${}^1S_2$ je pramen konika odgovarajuće projektivne ravni kome pripada apsoluta ravni ${}^1S_2$. Skup epicikala eliptičnog

41) Kao i u nekoliko prethodnih slučajeva apsoluta je pod navodnicima da bi se njima istaklo da se u pojedinim slučajevima ne radi o skupu svih tačaka apsolute, već o određenom podskupu tačaka apsolute (na takvu mogućnost ukazuje se u posledici 20.).

pramena pravih je pramen konika III vrste. Skup oricikala paraboličnog pramena pravih je pramen konika IV vrste. Skup dvogranih hipercikala bilo kog hiperboličnog pramena pravih je pramen konika V vrste.

Dokaz. U razmatranjima izloženih na kraju 4. tačke pokazali smo da skupu epicikala istog pramena pravih pripadaju najviše tri tačke. Prema definiciji izloženoj u /13/ (str.252.) "Skup konika ravni, dopunjen sa najviše koničnim brojem degenerisanih konika, biće nazvan pramen konika ako kroz svaku tačku ravni prolazi - izuzev kroz konačan broj tačaka - jedan i samo jedan element ovog skupa". Na osnovu opšte definicije trajektorije neke tačke u odnosu na neku grupu, trajektorija je klasa ekvivalencije u odnosu na relaciju definisanu tom grupom (v.str.161.u udžbeniku /24/). Zato ni za koja dva epicikla definisana u odnosu na istu grupu ne postoji zajednička tačka. Pošto je prema posledici 20. svaki epicikl kao slika "apsolute" kriva drugog reda, skup epicikala istog pramena pravih zadovoljava navedenu definiciju.

Primedba. U cilju pojednostavljenja formulacije teoreme 24. dozvolili smo sebi izvesnu nepreciznost. Prvi deo prve rečenice u najkorektnijoj verziji trebalo bi da glasi: Skup epicikala ma kog pramena pravih ravni ${}^1S_2$ je unija "tačaka osnove" odgovarajućeg pramena konika i skupa tačaka konika tog pramena različitih od tačaka njegove osnove. Tačke osnove pramena konika koji odgovara skupu epicikala određenog pramena pravih su tačke dodira tangenata apsolute koje sadrže središte hiperboličnog pramena pravih. Mada se na osnovu poslednjeg dela teoreme 24. moglo zaključiti da se teorema ne odnosi na "jednograne" hipercikle, teorema se može proširiti i na takve hipercikle. Međutim, pošto je to proširenje sasvim jednostavna posledica nekih teorema koje ćemo tek dokazati, to proširenje izvršićemo nešto kasnije. Prvom lemom tačke 5. utvrdili smo da u slučaju eliptičnog pramena pravih ravni ${}^1S_2$, polara središta predstavlja jedinu pravu koja sadrži epicikl tog pramena, što važi i za paraboličan pramen. Ali u slučaju paraboličnog pramena pravih ta prava sadrži i središte pramena. U prvom slučaju osnova pramena je jedan epicikl odgovarajućeg eliptičnog pramena pravih dok je u drugom središte jedan, a osnova bez središta drugi oricikl te osnove. U slučaju hiperboličnih pramenova pravih osim njegove osnove i tangente VM i VN apsolute, koje sadrže središte tog pramena, sadrže i hipercikle tog pramena različite od tačke. Karakteristično je da u svim ovim slučajevima, nabrojane prave predstavljaju jedine prave ravni ${}^1S_2$ koje sadrže tačke samo konačnog broja epicikala odgovarajućeg pramena pravih. Sem ovih pravih, jedine prave koje sadrže epicikle odgovarajućeg pramena su prave tog pramena, i prave koje sadrže tačke M i N u slučaju hiperboličnog pramena pravih i pod uslovom da se radi o našoj definiciji hipercikala.

Tangentne VM i VN hiperboličnog pramena pravih nazivaćemo i izotropnim pravama tog pramena pravih. U slučaju skupa dvogranih hipercikala hiperboličnog pramena pravih središta V homologija čija je osa jedna od izotropnih pravih pramena, a središte tačka dodira druge od tih pravih sa apsolutom, može preslikati skup dvogranih hipercikala jedne vrste na skup dvogranih hipercikala druge vrste tog pramena pravih. Dokaz ovog tvrđenja izvodi se u dva dela: najpre se dokaže da je pomenuta homologija element normalizatora a grupe G_V, a zatim da za razliku od homologije središta V i ose v može preslikati hipercikle jedne na hipercikle druge vrste. Pošto je prema teoremi 2.6.svaki element grupe simetrija G_V simetrija te grupe ili proizvoddveju simetrija iste grupe, dovoljno je za izvođenje prvog dela dokaza, dokazati da je kolineacija izvedena iz bilo koje simetrije grupe G_V "izotropnom homologijom" takođe simetrija te grupe. Na način analogan onome kojimsmo dokazali odgovarajuću činjenicu prilikom dokaza teoreme 5.20. i u ovom slučaju dokazali bismo da je ta kolineacija harmonijska homologija čija osa sadrži tačku V, a centar pripada pravoj v = W(V). Centar i osa te harmonijske homologije su pol i polara u odnosu na apsolutni polaritet W iz sledećih razloga. Suženje "izotropne" homologije hiperboličnog pramena pravih središta V je hiperbolično projektivno preslikavanje osnove v tog pramena čije su invarijantne tačke tačke preseka v tog pramena čije su invarijantne tačke tačke preseka M i N osnove v i apsolute. Prema 3. delu teoreme 17.8. (/13/str.89.) ovo suženje je komutativno sa suženjem w apsolutnog polariteta na pravu v. Zato ovo suženje svake dve tačke prave v konjugovane u apsolutnom polaritetu preslikava na dve tačke te prave, takođe konjugovane u istom polaritetu. Pošto su središte i tačka preseka ose bilo koje simetrije grupe G_V sa pravom v konjugovane tačke u apsolutnoj involuciji prave v, prema prethodnom i njima odgovarajuće tačke pri preslikavanju homologijom su takođe konjugovane u toj involuciji w prave v. Zato je osa harmonijske homologije izvedene iz razmatrane simetrije grupe G_V izotropnom homologijom polara centra te harmonijske homologije. Zbog toga je ta harmonijska homologija takođe simetrija grupe G_V. Iz ovoga, kao što smo na početku dokaza ovog tvrđenja obrazložili, neposredno sledi da je izotropna homologija element normalizatora grupe G_V. Zato ona, prema teoremi 5.20. preslikava svaki hipercikl definisan u odnosu na tu grupu na hipercikl definisan u odnosu na istu grupu. Neka je $G_V(X)$ bilo koji od tih hipercikala prve vrste. Ako izotropna homologija preslikava duž određenu tačkama M i N na njoj dopunsku duž, ta izotropna homologija će tačku X karakterističnog projektivnog ugla središta V koji sadrži apsolutu, preslikati na tačku njemu dopunskog ugla. Zato takva izotropna homologija svaki hipercikl prve, preslikava na hipercikl druge vrste. Proizvodi simetrija grupe G_V sa izotropnim homologijama pramena pravih središta V (jednom od tih homologija) "razmenjuju" presečne tačke prave v i apsolute. Pošto su ti proizvodi takođe elementi grupe normalizatora grupe G_V u grupi svih projektivnih kolineacija ravni ${}^1S_2$ prema posledici 5.17. i oni su permutabilni sa involucijom w prave v. Pošto je ta involucija hiperbolična, a ovakvi normalizatori razmenjuju invarijantne tačke te apsolutne involucije prave v, prema teoremi 17, 8. (/13/ str. 89.) suženja takvih elemenata normalizatora mogu biti ili hiperbolične ili eliptične involucije prave v. Pošto svaka simetrija grupe G_V menja smer prave v, proizvod neke simetrije grupe G_V sa izotropnom homologijom će takođe menjati smer prave v ako i samo ako ta izotropna homologija ne menja smer te prave, tj. ako ona presek prave v sa unutrašnjošću apsolute preslikava na taj isti presek. Na osnovu ranijih razmatranja možemo zaključiti takve izotropne homologije hipercikle jedne vrste preslikavaju na hipercikla iste vrste, što se odnosi i na hiperbolične pramenove pravih središta V prve, odnosno druge vrste. Takve izotropne homologije su elementi normlaizatora ne samo grupe G_V, već i grupa G_{Vh} i $\bar{G}_{Vh}$. Ranije smo pokazali da istim svojstvima raspolažu i homologije središta V i ose v. Proizvodi takvih elemenata normalizatora sa elementima grupe G_V su na osnovu prethodnog razmatranja, u svakom slučaju kolineacija tipa I, pri čemu su invarijantne tačke tih kolineacija tačka V i invarijantne tačke hiperbolične involucije prave v koja predstavlja suženje tih kolineacija na pravu v. S obzirom da su tačke preseka M i N prave v i apsolute uzajamno odgovarajuće tačke te involucije, njene invarijantne tačke su konjugovane u odnosu na apsolutni polaritet. Prema tome invarijantne tačke karakteristične za kolineacije tipa I (/13/ § 30.str.135.) su invarijantne tačke trotemenika središta V autopolarnog u odnosu na apsolutu. Jedino u slučaju kada je jedna od pomenutih homologija element grupe G, moguće je da su ovi proizvodi "specijalne" kolineacije tipa I tj. kolineacije tipa V (v.takođe str. 135. u /13/), i to jedino u slučaju kada je ta homologija simetrija središta V.

Suženje proizvoda bilo koje simetrije grupe G_V i izotropne homologije čija osa sadrži tačku V može biti eliptična involucija prave v samo u slučaju kada to suženje ne menja smer prave v. Ovo je moguće jedino pod uslovom da i suženje izotropne homologije na pravu v menja smer te prave. Takve izotropne homologije nazivaćemo imaginarnim izotropnim homologijama ravni $^1S_2$. Prema teoremi 30.9. (/13/ str. 138.), i činjenici da je suženje proizvoda simetrije grupe G_V sa imaginarnim izotropnim homologijama eliptična involucija prave v, takav proizvod može biti jedino kolineacija tipa III perioda 4. (v./13/ str.135.) kojoj je jedina invarijantna tačka tačka V, i jedina invarijantna prava. Svaki takav proizvod preslikava hiperbolični pramen pravih središta V jedne vrste na hiperbolični pramen druge vrste, skup svih kolineacija izvedenih iz grupe G_{Vh} ($\overline{G}_{Vh}$) konjugovanjem takvih proizvodima je grupa $\overline{G}_{Vh}$ (G_{Vh}), i sledstveno tome svaki hipercikl pramena pravih središta V jedne, preslikava na hipercikl tog pramena druge vrste. Takve elemente normalizatora grupe G_V nazivaćemo imaginarnim, za razliku od prethodnih koje ćemo ponekad zvati i realnim.

Proizvod epicikličke rotacije grupe G_V i homologije središta V i ose v, odnosno realne izotropne homologije pramena pravih središta V je proizvod dva činioca: simetrije grupe G_V, i proizvoda simetrije grupe G_V sa jednom od pomenutih homologija. Pri tome su navedene simetrije simetrije čijim je proizvodom predstavljena data epiciklička rotacija. Prema prethodnom taj proizvod će preslikavati tačke M i N na te iste tačke, a projektivnu duž MN na tu istu duž. Na osnovu teoreme 17.8.(/13/ str.89.) suženje ovog proizvoda na pravu v je neinvolutivno hiperbolično preslikavanje.

Slično kao u prethodnom slučaju, predstavljanjem proizvoda neke epicikličke rotacije i jedne od imaginarnih izotropnih homologija pramena pravih središta V kao proizvoda simetrije grupe G_V i kolineacije perioda 4. kojoj su jedina invarijantna tačka i prava tačka V i prava v da je proizvod kolineacija kojoj su invarijantne tačke tačke V,M, N. Suženje ove kolineacije na pravu v, kao i u prethodnom slučaju, ne može biti involucija ali je za razliku od tog slučaja to suženje indirektna projektivna transformacijama prave v.

Zahvaljujući činjenici da je kolineacija izvedena iz bilo koje harmonijske homologije -simetrije grupe G_V, bilo kojim elementom normalizatora te grupe, takođe simetrija grupe G_V problem određivanja tipova kolineacija koje su proizvodi jedne od homologija čije je središte jedno od temena trotemenika VMN, a osa stranica tog trotemenika suprotna središtu može se svesti na prethodni. Naime, na osnovu pomenute činjenice proizvod jedne od tih homologija sa datom simetrijom grupe G_V jednak je proizvodu određene simetrije grupe G_V i te homologije.

Proizvodi bilo koje dve homologije čija su središta tačke trotemenika VMN, a ose suprotne strane tih središta je takođe kolineacija čije su jedine invarijantne tačke u opštem slučaju tačke V,M,N i čije je suženje na pravu v neinvolutivna hiperbolična projektivna transformacija te prave. Jedino u slučaju proizvoda jedne od izotropnih homologija pramena središta V i homologije središta V i ose v ta traansformacija može biti hiperbolična involucija, i to pod uslovom da je ta izotropna homologija harmonijska. Ako je tada i homologija središta V i ose v harmonijska, pomenuti proizvod je ona druga izotropna harmonijska homologija pramena pravih središta V. Proizvod dve izotropne harmonijske homolologije je simetrija središta V.

Normalizator grupe simetrija G_V hiperboličnog pramena pravih središta V nazivaćemo transcedentnom grupom tranformacija sličnosti ravni ${}^1S_2$ središta V i označavati sa $\ddot{G}_{SI,V}$. Iz prethodnih razmatranja može se zaključiti da grupa $\ddot{G}_{Sl,V}$ sadrži kao svoje prave podgrupe normalizatore grupe G_{Vh} i $\bar{G}_{Vh}$. Pre određivanja nekih svojstava ovih grupa utvrdićemo da su one istovetne. Kao i ranije dovoljno je utvrditi samo odnose elemenata normalizatora simetrija tih grupa. Isto tako, ako ovi elementi normalizatora pripadaju "razlici" grupe G_V i grupa G_{Vh} ($\bar{G}_{Vh}$), dovoljno je razmatrati kolineacije izvedne iz simetrija grupa $G_{Vh}(G_{Vh})$ samo simetrijama grupa $\bar{G}_{Vh}$ (G_{Vh}). Pretpostavimo da je h_1 simetrija grupe G_{Vh}, a h_2 bilo koja simetrija grupe $\bar{G}_{Vh}$: Tada je $h_2h_1h_2$ takođe simetrija grupe G_{Vh}. Slično se, korišćenjem činjenice da je svaki od elemenata grupe G_V automorfizam i svakog od projektivnih uglova određenih izotropnim pravama pramena središta V dokazuje i da je svaki element grupe G_V element normalizatora i grupe $\bar{G}_{Vh}$. Ali na osnovu razmatranja o elementima normalizatora grupe G_V, a naročito određivanja tipova kolineacija projektivne ravni kojima ti elementi pripadaju, može se zaključiti da i svaki element normalizatora grupe G_V koji je istovremeno element normalizatora i grupe G_{Vh}(odnosno grupe $\overline{G}_{Vh}$) takođe predstavlja automorfizam projektivnih uglova određenih izotropnim pravama kroz V. Prema tome ako je neki element normalizatora grupe G_V element normalizatora i grupe G_{Vh}, tada je taj element element normalizatora i grupe $\overline{G}_{Vh}$. Jasno je da važi i obratno: element normalizatora grupa G_V i $\overline{G}_{Vh}$ je element normalizatora i grupe G_{Vh}. Pošto je svaki element normalizatora grupe G_{Vh}(odnosno grupe $\overline{G}_{Vh}$) istovremeno element normalizatora grupe G_V iz prethodnog sledi da su normalizatora grupa G_{Vh} i $\overline{G}_{Vh}$ istovetni međusobno. Noramlaizator grupe G_{Vh}($\overline{G}_{Vh}$) nazivaćemo grupom transformacija sličnosti ravni ${}^{1}S_2$ središta V i obeležavati sa $G_{Sl,V}$.

Iz rezultata dobijenih određivanjem tipova elemenata normalizatora grupe G_V izdvojićemo one koji se odnose na elemente normalizatora grupe G_{Vh}. Ovo činimo zbog toga što suženja elemenata grupe $G_{Sl,V}$na odgovarajuće oblasti ravni ${}^{1}S_2$ predstavljaju preslikavanja sličnosti odgovarajuće geometrije, dok za suženja elemenata normalizatora grupe G_V ovo ne važi. Transformacije sličnosti kada se odnose na ravan ${}^{1}S_2$ su lokalne (u tački V, ili pak u odnosu na pravu v). Transformacije sličnosti iste prirode, tj. elementi normalizatora grupa čija su središta različite tačke projektivne ravni u kojoj je zadata hiperbolična involucija iste, istaknute prave te ravni kao apsolutna, kao se tako može reći, nisu u toj meri kao prethodne lokalne i predstavljaju transformacije, a ne preslikavanja sličnosti oblasti te ravni bez te istaknute prave. Ova oblast je oblast interpretacije poznate pseudoeuklidske geometrije. "Manji stepen lokalnosti" ovih transformacija sličnosti proističe iz toga što je, u tom slučaju, "istaknuti element" grupe normalizatora bilo koje grupe G_{Oh} te ravni - homologija središta O kojoj je osa apsolutna prava, ili elacija iste ose - istovremeno element normalizatora i svake druge grupe $G_{O'h}$ te ravni. Ove rezultate izložićemo u vidu teoreme koja, uz izvesno ograničenje odgovara teoremi 31.1.(/13/ str.141.)

Teorema 25. Svaka transformacija sličnosti grupe transformacija sličnosti središta V ravni $^1S_2$ je:

a) element grupe G_V; b) homologija središta V i ose v;

c) realna izotropna homologija pramena pravih središta V;

d) proizvod konačnog broja prethodnih transformacija;

Svaka od tih transformacija je tipa I ili tipa V.

U oba slučaja osim tačke V invarijantne su i najmanje dve tačke prave v; tačke M i N ili par tačaka harmonijski konjugovan sa parom tačaka M i N. Ako suženje ovih kolineacija na pravu v nije identična transformacija i invarijantne tačke tog suženja su tačke M i N, ovo suženje je neinvolutivna hiperbolična direktna transformacija prave v; ako su pak jedine invarijantne tačke tog suženja harmonijski konjugovane parom tačaka M i N to suženje je hiperbolična involucija.

Za razliku od teoreme 31.1./13/ kojom se utvrđuju sve projektivne kolineacije koje predstavljaju transformacije sličnosti euklidske geometrije, ako pravu v smatramo apsolutom na kojoj je invarijantnim tačakama M i N zadata apsolutna involucija, teoremom 25. utvrđuju se projektivne kolineacije koje predstavljaju transformacije sličnosti projektivnog modela dvodimenzione pseudoeuklidske geometrije. Ograničenje o kome je bilo reči neposredno pre formulisanja teoreme 25. odnosi se načinjenicu da tu teoremu u principu i nije bilo moguće izložiti u vidu teoreme 31.1.(iz /13/):

Svaka transformacija sličnosti grupe $G_{S1,V}$ tj. transformacija sličnosti projektivne ravni kojoj je apsoluta prava v je permutabilna sa apsolutnom involucijom te prave; ali u ovom slučaju nije i svaka projektivna kolineacija date projektivne ravni permutabilna sa apsolutnom involucijom prave v transformacija sličnosti odgovarajuće grupe $G_{S1,V}$ tj. ne predstavlja transformaciju odgovarajuće pseudoklidske geometrije.

Iz tog razloga i posledicu 17. nismo izložili u vidu ekvivalencije, već kao implikaciju. Ako pod grupom G_{Oh} ne podrazumevamo grupu G_{Vh} ($\bar{G}_{V_h}$) tu posledicu bismo mogli formulisati na sledeći način.

Posledica. Da bi neka kolineacija projektivne ravni pripadale normalizatoru grupe G_{Oh} potrebno je idovoljno da ta kolineacija preslikava apsolutnu involuciju prave $o = W(O)$ na tu istu apsolutnu involuciju.

Na osnovu teoreme 24. može se, u duhu metoda koje smo primenjivali u ovom radu, dokazati i Šturmova teorema (v.npr./13/ str.254.). Dokaz ove teoreme u pomenutom duhu ne samo što je jednostavniji od dosada izvedenih, već i otkriva u potpunosti pravu prirodu interpretacije te teoreme u ravni $^1S_2$, pa dakle i u geometrijama te ravni. Pre toga dokaza ukažujemo da se sledećom lemom:

Lema. Ako neki element f normalizatora $N(G_V)$ u grupi projektivnih kolineacija preslikava hipercikl $G_{Vh}(X)$ prve, ili hipercikl $\bar{G}_{Vh}(\bar{X})$ druge vrste na odgovarajući hipercikl $G_{Vh}(X')$ odnosno hipercikl $\bar{G}_{Vh}(\bar{X}')$, tada f preslikava hipercikl $h_V(G_{Vh}(X))$ "komplementan" hiperciklu $G_{Vh}(X)$ u odnosu na hipercikl $G_V(X)$ na hipercikl $h_V(G_{Vh}(X'))$ "komplementan" hiperciklu $G_{Vh}(X')$ u odnosu na dvograni hipercikl $G_V(X')$, odnosno hipercikl $h_V(\bar{G}_{Vh}(\bar{X}))$ na hipercikl $h_V(\bar{G}_{Vh}(\bar{X}'))$ dvogranog hipercikla $G_V(\bar{X}')$.

Lema je neposredna posledica teorema 20. i 22.

Zahvaljujući njoj važenje teoreme 24. proširuje se i na jednograni hipercikle, pri čemu se u tom slučaju pod skupom epicikla ne podrazumeva skup hipercikala pramena pravih središta V samo jedne, već unija skupova hipercikala i prve i druge vrste pramenova pravih i prve i druge vrste istog središta V.

Neposredno posle primedbe povodom teoreme 24. izveli smo nekoliko važnih zaključaka. Jedan od njih izdvojićemo u vidu sledeće leme:

Lema. Svaka prava ravni ${}^1S_2$ različita od osnove datog pramena pravih i izotropnih pravih, ukoliko ih taj pramen pravih sadrži, sadrži tačke beskonačno mnogo epicikala tog pramena pravih. Svaka osa epicikla definisanog u odnosu na grupu simetrija koja sadrži i simetriju u odnosu na središte tog epicikla, pod uslovom da je taj epicikl nije degenerisan, sadrži tačno dve tačke tog epicikla.
Bilo koja osa epicikla definisanog u odnosu na grupu simetrija pramena pravih koja ne sadrži simetriju u odnosu na središte tog pramena sadrži tačno jednu tačku tog epicikla.

Ose epicikla su prave pramena pravih ravni ${}^1S_2$ u odnosu nakoji je definisan epicikl ukoliko taj pramen nije hiperboličan. Ukoliko je taj pramen hiperboličan ose hipercikla su prave hiperboličnog pramena pravih prve vrste ako je taj hipercikl prve vrste, odnosno prave hiperboličnog pramena pravih druge vrste ukoliko je taj hipercikl druge vrste.

Dokazaćemo druga dva dela leme jer ovi delovi, za razliku od prvog dela nisu neposredno posledica pomenutih zaključaka. Najpre ćemo dokazati da svaka osa epicikla sadrži bar jednu tačku tog epicikla. To je zapravo neposredna posledica definicije ose epicikla izložena odmah posle leme: na osnovu te definicije svakom tačkom epicikla i središtem odgovarajućeg pramena određena je bar jedna osa tog epicikla ukoliko taj epicikl nije "bez osa"[42].

Suženje simetrije grupe u odnosu nakoji je definisan dati epicikl, kojoj je središte središte odgovarajućeg pramena pravih, nabilo koju osu tog epicikla je hiperbolična

42)Takvi su isključivo hipercikli i oricikli izotropnih pravih.

involucija kojoj su invarijantne tačke to središte i presek te ose sa osnovom tog pramena pravih. Zato se svaka druga tačka ose preslikava u toj simetrija na tačku različitu od te tačke. I ova tačka prema definiciji epicikla pripada epiciklu. Pošto je svaki epicikl, prema posledici 20. podskup tačaka neke krive drugog reda, nemoguće je da bilo kojaprava, različita od osnove odgovarajućeg pramena pravih i izotropnih pravih ukoliko ih taj pramen sadrži, sadrži više od dve tačke istog epicikla.

Grupa simetrija u odnosu na koju je definisan neki epicikl ne sadrži simetriju u odnosu na središte odgovarajućeg pramena pravih samo ako je taj epicikl oricikl ili (jednograni) hipercikl. I u ovom slučaju, kao i u prethodnom sasvim jednostavno se dokazuje da, ukoliko se ne radi o epiciklu "bez osa", svakoj osi pripada bar jedna tačka epicikla. U slučaju oricikla ta tačkaje i jedina, jer je druga tačka preseka ose i krive drugog reda koja taj oricikl sadrži središte pramena pravih koji odgovara tom oriciklu. U slučaju (jednogranog) hipercikla ta tačka je jedina jer bi u suprotnom slučaju hipercikl "komplementan" datom u odnosu na dvograni hipercikl koji sadrži dati hipercikl, i ista osa imali takođe dve zajedničke tačke, te bi ta osa sadržala četiri tačke tog dvogranog hipercikla. Međutim ovo je u suprotnosti sa prethodno dokazanim delom leme. Načinom na koji smo dokazali taj deo leme možemo dokazati i sledeću teoremu:

Teorema 26. Skup parova presečnih tačaka epicikala definisanih u odnosu na grupu simetrija datog pramena pravih koja sadrži simetriju u odnosu na središte tog pramena, i bilo koje ose tog pramena je skup parova odgovarajućih tačaka simetrije u odnosu na središte tog pramena.

Napominjemo da se u dokazu ove teoreme korišćenja činjenica da je svaka osa invarijantna prava simetrije u odnosu na središte pramena pravih kome pripada ta osa. Ako dokažemo da i za svaku pravu ravni $^1S_2$ različitu od osnove datog pramena pravih, ili pravih koje sadrže tačke dodira izotropnih pravih i hiperboličnog pramena pravih i apsolute ako je dati pramen hiperboličan, postoji simetrija grupe simetrija datog pramena pravih, dokazali smo i teoremu koja je uopštenje teoreme 26.

Teorema 27. Skup parova tačaka preseka epicikla skupa epicikala definisanih u odnosu na grupu simetrija G_{Oh} ravni $^1S_2$ sa pravom te ravni različitom od prave $o=W(O)$ i pravih koje sadrže tačke dodira izotropnih pravih kroz tačku O, je skup parova tačaka uzajamno odgovarajućih u tačno jednoj simetriji grupe G_{Oh}.

Dokaz. Neka je prava p bilo koja prava koja zadovoljava zahteve teoreme. Ako je prava p osa, tada je teorema tačna na osnovu teoreme 26. Ako prava p nije osa, tada ona seče osnovu o pramena pravih u tački P različitoj od središta, ili tačka dodira izotropnih pravih hiperboličnog pramena pravih središta O ukoliko je takav pramen u pitanju. Simetrija h_P grupe G_{Oh} je jedina simetrija te grupe u kojoj se prava p preslikava na tu istu pravu. U toj simetriji se i savki epicikl grupe G_{Oh} preslikava na taj isti epicikl. Pošto je suženje simetrije h_P na pravup p hiperbolična involucija, osim tačke P na pravoj p postoji samo još jedna invarijantna tačka te involucije - presek ose $W(P)$ homologije h_P sa pravom p. Ova tačka, označena je sa R, je istovremeno i tačka dodira prave p sa epiciklom grupe G_{Oh}. Pošto tačka P pripada osnovi, epicikl osnove koji je sadrži- pošto je po pretpostavci teoreme različit od tačke - seče pravu p u tački P. Ovim smo dokazali i sledeću posledicu:

Posledica. Za svaku pravu koja zadovoljava pretpostavke teoreme 27, različitu od ose pramena pravih središta O i prave koja seče osnovu hiperboličnog pramena pravih u tački hipercikla koji pripada datom skupu hipercikala, postoji tačno jedan epicikl grupe G_{Oh} koja se pominje u toj teoremi, takav da je ta prava tangenta tog epicikla.

Ograničenje koje se odnosi na hipercikle proizlazi iz činjenice da invarijantna tačka simetrije grupe u odnosu na koju je definisan skup hipercikala prve odnosno druge vrste, koja pripada pravoj p i različita je od tačke P, nije tačka projektivnog ugla određenog izotropnim pravima odgovarajućeg hiperboličnog pramena pravih kome pripadaju svi hipercikli tog skupa hipercikala.

Teorema 28. Ako neki element normalizatora grupe G_{Oh} preslikava neku tačku apsolute na tačku njene spoljašnjosti, tada taj element preslikava svaku tačku apsolute različitu od tačaka preve o = W(O) na spoljašnju tačku apsolute. Ako neki element normalizatora grupe G_{Oh} preslikava neku tačku apsolute koja ne pripada pravoj o na tačku apsolute, tada je taj element automorfizam apsolute. Ako neki element normalizatora grupe G_{Oh} preslikava neku tačku apsolute natačku unutrašnjosti apsolute, onda taj element preslikava svaku tačku apsolute koja ne pripada pravoj o, natačku unutršnjosti apsolute.

Dokaz. Dokazaćemo samo prvi deo teoreme. Prema teoremi 23. apsoluta je, ako je tačka O tačka njene unutrašnjosti, epicikl; ako ova tačka pripada apsoluti, apsoluta je unija te tačke i epicikla komplementnog toj tački u odnosu na apsolutu; ako je O spoljašnja tačka apsolute, tada je apsoluta unija tačaka dodira izotropnih pravih kroz O i apsolute i dvogranog hipercikla središta O koji je komplementan paru tih tačaka u odnosu na apsolutu. Prema pretpostavci teoreme tačka apsolute koju preslikava pomenuti element normalizatora pripada u svakom slučaju epiciklu apsolute različitom od tačke. Zato je, na osnovu posledice 20. a i teoreme 20. slika te tačke tačka epicikla središta O. S obzirom da taj epicikl i epicikl apsolute čija je on slika, ako je ostvarena pretpostavka prvog dela teoreme, kao različite klase ekvivalencije ne mogu imati zajedničkih tačaka, jedine zajedničke tačke apsolute i njene slike su u tom slučaju zajedničke tačke apsolute i prave o. Unija tih tačaka i slike epicikla apsolute različitog od tih tačaka je kriva drugog reda. Na osnovu prethodnog, ako je neka tačka te krive tačka unutrašnjosti apsolute, ta tačka mora pripadati epiciklu te krive različitom od tačke. Pošto prema pretpostvaci bar jedna tačka tog epicikla pripada spoljašnjosti apsolute, taj epicikl kao neprekidna kriva seče apsolutu u tački koja pripada epiciklu apsolute različitom od tačke.

Preostali deo teoreme dokazuje se jednostavnim svođenjem na protivrečnost sa prethodno dokazanim delom teoreme.

Na osnovu prethodne teoreme sledi:

Posledica 21. Ako je k′ slika apsolute k pri preslikavanju elementom f normalizatora bilo koje grupe simetrija bilo kog pramena pravih ravni $^1S_2$, tada ili unutrašnjost apsolute pripada unutrašnjosti krive k′, ili unutrašnjost krive k′ pripada unutrašnjosti apsolute.

Primetimo da smatramo da smo oznakom k′ različitom od oznake apsolute k ukazali da su te dve krive različite.

Sledeću teoremu, kojom se utvrđuju vrste transformacija sličnosti grupe $G_{Sl,D}$ ravni $^1S_2$, gde je D tačka apsolute, nećemo dokazivati jer je njen dokaz u načelu analogan dokazu teoreme 25. Uzimajući u obzir da je ta grupa normalizator grupe simetrija G_{Dn}, možemo reći i da je njen sadržaj analogan dadržaju teoreme 21. uz uslov da se u njemu izraz "homologija središta O" zameni izrazom "elacija" središta D i ose d = W(D). Da je takva elacija normalizator grupe G_{Dh} dokazali smo u lemi na str. 232.

6. <u>Sličnost i podudarnost epicikala ravni</u> ${}^1S_2$.

Pošto elemente grupe G automorfizama apsolute ravni ${}^1S_2$ smatramo transformacijama poduadrnosti te ravni, smatraćemo da je neki lik L ravni ${}^1S_2$ podudarna liku L_1 te ravni ako i samo ako postoji element f grupe G takav da je $f(L) = L_1$.

Teorema 29. Lik e′ ravni ${}^1S_2$ podudaran epiciklu e te ravni je epicikl iste vrste koje je i epicikl e.

Dokaz. Prema pretpostavci teoreme i definiciji podudarnosti likova ravni ${}^1S_2$ postoji element f grupe G takav da je f(e) = e′. Pre svega dokazaćemo da je e′ trajektorija grupe $fG_{Oh}f^{-1}$ gde le G_{Oh} grupa simetrija pramena pravih središtaO u odnosu na koju je definisan epicikl e. Ako je X tačka epicikla e, tada je f(X) = X′ tačka lika e′. Neka je Y′ bilo koja tačka lika e′. Tada je tačka $Y = f^{-1}(Y')$ tačka epicikla e. Na osnovu definicije postoji element g grupe G_{Oh} koji tačku X preslikava na tačku Y. Element fgf^{-1} grupe $fG_{Oh}f^{-1}$ preslikava tačku X′ na tačku Y′.

Da bismo dokazali da je trajektorija e′ grupe $fG_{Oh}f^{-1}$ epicikl dovoljno je dokazati da je ta grupa grupa simetrija pramena pravih ravni ${}^1S_2$. Kao i u ranijim slučajevima sličnim ovom, za to je dovoljno dokazati da je kolineacija izvedena iz bilo koje simetrije grupe G_{Oh} konjugovanjem te simetrije elementom f simetrija grupe simetrija izvesnog pramena pravih. Kako je svaka simetrija grupe G_{Oh} harmonijska homologija kojoj su središte i osa pol i polara u apsolutnom polaritetu, kolineacija izvedena iz te harmonijske homologije konjugovanjem elementom f grupe G je takođe harmonijska homologija kojoj su središte i osa pol i polara u odnosu na apsolutni polaritet. Ova poslednja činjenica sledi na osnovu teoreme 3. (/6/ str. 140.) i stava po kome su svi automorfizmi apsolutno permutabilni sa apsolutnim polaritetom. Osa te harmonijske homologije kao slika ose odgovarajuće harmonijske homologije grupe G_{Oh} sadrži tačku f(O) = O'. Pošto ovo važi za sve harmonijske homologije izvedene iz harmonijskih homologija grupe G_{Oh} konjugovanjem transformacijom f, ose svih tih homologija sadrže tačku O'. Prema prethodnom sve te harmonijske homologije su simetrije grupe simetrija $G_{O'h} = fG_{Oh}f^{-1}$ pramena pravih središta O'. Automorfizam apsolute f preslikava unutrašnju tačku O na unutrašnu tačku O'; tačku apsolute O na tačku apsolute O'; spoljašnju tačku O na spoljašnju tačku apsolute O'. U poslednjem slučaju ako je hiperboličan pramen pravih središta O prve vrste, tada je, takođe zbog toga što je f automorfizam apsolute - i hiperboličan pramen pravih središta O' hiperboličan pramen pramen prve vrste. Isto se može reći i u pogledu hiperboličnog pramena pravih druge vrste. Zato je, ako je e hipercikl prve, i e' hipercikl prve vrste, a ako je e hipercikl druge, i e' je hipercikl druge vrste. Da se jednograni hipercikl preslikava bilo kojom transformacijom podudarnosti na jednograni hipercikl, a dvograni na dvograni sledi iz toga što je grupa izvedena iz grupe simetrija hiperboličnog pramena pravih prve (druge vrste) transformacijom podudarnosti takođe grupa simetrija hiperboličnog pramena pravih prve(druge vrste), a grupa simetrija hiperboličnog pramena pravih ravni ${}^1S_2$ dobijena na isti način takođe grupa simetrija hiperboličnog pramena pravih te ravni.

Neposredna posledica prethodne teoreme je:

Posledica 22. Svakom epiciklu grupe simetrija G_{Oh} datog pramena pravih ravni ${}^{1}S_2$ pri preslikavanju bilo kojom transformacijom podudarnosti te ravni odgovara tačno jedan epicikl iste vrste grupe simetrija $G_{O'h}$ gde je O' slika tačke O pri tom preslikavanju.

Teorema 30. Svaki epicikl grupe simtrija $G_{O\,h}$ eliptičnog (hiperboličnog) pramena pravih ravni ${}^{1}S_2$ podudaran je sa samo jednim epiciklom tog pramena pravih. Svaki epicikl grupe simetrija G_{Oh} hiperboličnog pramena pravih prve vrste (druge vrste) podudaran je sa tačno dva epicikla tog pramena pravih. Svaki epicikl paraboličnog pramena pravih ravni ${}^{1}S_2$ podudaran je sa svim oriciklima tog pramena pravih, iste oblasti te ravni.

Dokaz. Da bi neki epicikl e′grupe simetrija eliptičnog pramena pravih središta O bio podudaran datom epiciklu e istog pramena pravih potrebno je i dovoljno da postoji transformacija podudarnosti koja je istovremeno i element normalizatora pomenute grupe simetrija. Kako svaki element normalizatora te grupe preslikava središte O tog pramena pravih na to isto središte, potrebno je i da je ta transformacija podudarnosti element grupe G_O automorfizama tačke O u G (tu grupu smo u radu /6/ nazvali stacionarnom podgrupom u G tačke O). Međutim prema teoremi 5. (/6/ str. 147.) grupa G_O istovetna je u ovom slučaju grupi G_{Oh}. Zato svaki element te grupe preslikava epicikl e na taj isti epicikl, te je e jedini epicikl eliptičnog pramena pravih središta O koji je popodudaran tom istom epiciklu e. Pošto je, iz istih razloga(grupa G_{Oh} je u ovom slučaju u radu označena sa G_V) svaki element grupe G koji je istovremeno automorfizam tačke O u slučaju kada je ta tačka tačka spoljašnjosti apsolute element grupe simetrija hiperboličnog pramena pravih središta O, teorema važi i u slučaju epicikala takvog pramena pravih.

Grupa simetrija hiperboličnog pramena pravih prve vrste koju smo u radu označili G_{Vh}, u radu /6/ označili smo sa $\overline{G}_{Oh}$.[43] Prema teoremi 5.(/6/ str. 147.) grupa G_{Oh} i u tomslučaju je prava podgrupa grupe G_O. Na osnovu teoreme 2.11. svi elementi grupe G_O[44] različiti od elemenata grupe G_{Oh}su elementi klase $h_V G_{Oh}$ susedne klasi G_{Oh} pri razlaganju grupe G_O po njenoj podgrupi G_{Oh}. Iz dokaza teoreme 22. sledi da svi takvi elementi preslikavaju hipercikl prve vrste e na isti, njemu "komplementan" hipercikl e′ u odnosu na dvograni hipercikl koji sadrži hipercikl e.

Teoremom 5. u radu /6/ nismo obuhvatili i slučaj grupe simetrija hiperboličnog pramena pravih druge vrste. Zato smo u radu, teoremom 2.10. dokazali da je ta grupa prava podgrupa grupe simetrija hiperboličnog pramena pravih istog središta, Na osnovu toga, na isti način kao u prethodnom slučaju dokazuje se da u datom hiperboličnom pramenu pravih druge vrste postoje tačno dva (jednograna) hipercikla podudarna datom hiperciklu e tog pramena. Ovi hipercikli su hipercikl e i hipercikl $h_O(e)$ gde je h_O simetrija središta O. Ovaj hipercikl je, prema teoremi 5.20, komplementan hiperciklu e u odnosu na dvograni hipercikl istog pramena pravih koji sadrži hipercikl e.

---

43) U radu /6/ grupa označena sa G_{Oh} predstavljala je podgrupu grupe G generisanu harmonijskim homologijama te grupe u odnosu na ose pramena pravih središta O uključujući i one koje seku apsolutu. Sa $\overline{G}_{Oh}$ označili smo odgovarajuću podgrupu kojoj su generatori samo one od prethodno opisanih harmonijskih homologija čije ose seku apsolutu.

44) Prema teoremi 5. u /6/, grupa G_V je grupa G_O.

Ako je G_{Dh} grupa simetrija paraboličnog pramena pravih središta D, tada je na osnovu posledice 2.10. ta grupa prava podgrupa grupe automorfizama tačke D u grupi G. Neka je o dati oricikl tog pramena pravih, a o′ bilo koji oricikl istog pramena pravih različit od oricikla o, one oblasti ravni $^1S_2$ koja sadrži oricikl o. Neka su tačke P i P_1 preseka bilo koje ose pramena pravih središta D sa oriciklima o i o′ redom. Prema pretpostavci teoreme tačke P i P_1 pripadaju oblasti interpretacije jedne od geometrija ravni $^1S_2$. Zato prema aksiomi G4 apsolutne geometrije postoji simetrija ravni $^1S_2$ čije suženje na tu oblast "razmenjuje" tačke P i P_1. Središte C te simetrije je jedna od jedinstvenog para tačaka koji je harmonijski konjugovan sa parom tačaka P i P_1 kao i sa parom presečnih tačaka prave PP_1 i apsolute (jedna od ovih tačaka je D, a drugu ćemo označiti sa D_1). U cilju interpretacije ovih rezultata u geometrijama ravni $^1S_2$, kojoj ćemo posvetiti sledeći, poslednji, paragraf rada, smatraćemo da je tačka C tačka one oblasti ravni $^1S_2$ kojoj ne pripadaju tačke P i P_1. Proizvod simetrije čija osa sadrži tačku P i pol prave PP_1 (koji pripada pravoj d = W(D) i simetrija središta C predstavlja epicikličku rotaciju f grupe automorfizama G_D u grupi G koja tačku P preslikava na tačku P_1. Na osnovu teoreme 27. f(o) je oricikl ravni $^1S_2$ koji sadrži tačku P_1. Ali iz dokaza te teoreme sledi da je taj oricikl oricikl grupe $fG_{Dh}f^{-1}$ koja je takođe grupa simetrija pramena pravih središta f(D). Ova grupa je zbog f(D)=D i zbog toga što D nije tačka spoljašnjosti apsolute istovetna grupi G_{Dh}. Zato je f(o) = o′.

Koristeći dokaz poslednjeg dela teoreme možemo dokazati posledicu 23.

Posledica 23. Grupa G_D automorfizama tačke D apsolute u grupi transformacija podudarnosti ravni ${}^1S_2$ jednostavno je tranzitivna u svakoj od oblasti te ravni.

U dokazu ove posledice koristi se i posledica 4.15. Teorema 28. ima osnovnu ulogu u dokazu sledeće, opštije teoreme, kojom se utvrđuje broj epicikala bilo kog pramena pravih ravni ${}^1S_2$ podudarnih datom epiciklu pramena pravih iste vrste.

Teorema 31. Ako je e epicikl eliptičnog pramena pravih središta O, tada za bilo koji eliptičan pramen pravih postoji tačno jedan epicikl definisan u odnosu na grupu simetrija tog pramena podudaran sa epiciklom e. Ako je e dvograni hipercikl hiperboličnog pramena pravih središta V, tada za bilo koji hiperboličan pramen pravih središta V′ postoji tačno jedan hipercikl iste vrste koji je podudaran hiperciklu e. Ako je e hipercikl prve vrste (druge vrste) hiperboličnog pramena pravih prve (druge) vrste središta V, tada za bilo koji hiperboličan pramen pravih prve (druge) vrste središta V′ postoje tačno dva hipercikla prve (druge) vrste koji su podudarni hiperciklu e. Ako je oricikl paraboličnog pramena pravih središta D, tada su za bilo koji paraboličan pramen pravih svi oricikli tog pramena podudarni sa oriciklom o.

Dokaz. Ako je O′ središte nekog eliptičnog pramena pravih, a f jedna od transformacija podudarnosti koja tačku O preslikava na tačku O′, tada je prema posledici 22. f(e) = e′ epicikl eliptičnog pramena pravih središta O′. Ovaj epicikl je prema definiciji podudarnosti likova ravni ${}^1S_2$ podudaran epiciklu e. Pretpostavimo da je epicikl e′′ drugi epicikl pramena pravih središta O′ koji je podudaran sa epiciklom e. Prema definiciji podudarnosti likova tada postoji transformacija podudarnosti g takva da je g(e) = e′′. Transformacija podudarnosti gf^{-1} preslikava epicikl e′na epicikl e′′. Ali ovo je u protivrečnosti sa teoremom 28. U slučaju dvogranog hipercikla e teorema se dokazuje na isti način.

Ako je e hipercikl prve vrste hiperboličnog pramena pravih središta V, a V′ središte bilo kog hiperboličnog pramena pravih ravni ${}^1S_2$, tada prema posledici 22. transformacija podudarnosti f koja tačku V preslikava na tačku V′, preslikava hipercikl e na hipercikl prve vrste hiperboličnog pramena pravih središta V′. Međutim i transformacija podudarnosti $h_V \cdot f$ preslikava hipercikl e na hipercikl prve vrste različit od prethodnog koji je takođe podudaran sa epiciklom e. Ako bi osim ova dva hipercikla prve vrste pramena pravih središta V′ postojao i treći hipercikl prve vrste tog pramena pravih, tada bi i ova tri hipercikla budući podudarna istom hiperciklu e bila podudarna i međusobno što je u suprotnosti sa teoremom 28.

Ako je D′središte bilo kog paraboličnog pramena pravih ravni ${}^1S_2$, tada prema posledici 22. transformacija podudarnosti f koja tačku D preslikava na tačku D′, preslikava i oricikl o na oricikl o′paraboločnog pramena pravih središta D′. Na osnovu teoreme 28. oricikl o′je podudaran sa svim oriciklima pramena pravih središta D′. Zato je, na osnovu tranzitivnosti relacije podudarnosti, oricikl o podudaran sa svakim od tih oricikala. Naravno, i u ovom slučaju radi se o oriciklima paraboličnog pramena pravih središta O′ koji pripadaju istoj oblasti ravni ${}^1S_2$. Ovo ograničenje proizlazi iz odgovarajućeg ograničenja izloženog u teoremi 28. koju smo koristili u dokazu ovog dela teoreme.

Neposredan posledica poslednjeg dela teoreme 29. je posledica :

Posledica. Svi oricikli iste oblasti ravni ${}^1S_2$

međusobno su podudarni.

7. Transformacije sličnosti ravni $^1S_2$. Pre definicija transformacija sličnosti ravni $^1S_2$ izložićemo još nekoliko teorema koje se odnose na transformacije sličnosti datog središta (ili u datoj tački) te ravni.

Teorema 32. Svaki trotemenik temena O autopolaran u odnosu na apsolutni polaritet W autopolaran je i u polaritetu u odnosu na bilo koji nedegenerisani epicikl definisan u odnosu na grupu simetrija G_{Oh} pramena pravih središta O.

Dokaz. Neka su P i Q druga dva temena bilo kog autopolarnog trotemenika apsolute čije je jedno teme tačka O, a e bilo koji nedegenerisani epicikl pramena pravih središta O. S obzirom da nijedno teme autopolarnog trotemenika ne može pripadati krivoj drugog reda u odnosu na koju je taj trotemenik auropolaran, tačka O, ukoliko ne proširimo definiciju autopolarnosti, ne može pripadati apsoluti. Pod tim uslovom grupa simetrije G_{Oh} je grupa simetrije eliptičnog ili hiperboličnog pramena pravih ravni $^1S_2$. U svakom od tih slučajeva simetrija središta O je element te grupe. Zato je $h_O(e) = e$ pa su tačke preseka bilo koje ose epicikla e [45] harmonijski konjugovane sa parom tačaka od kojih je jedna tačka O, a druga tačka preseka te ose i prave $o = W(O)$. A osnovu toga je prava o polara tačke O i u odnosu na polaritet određen epiciklom e.

Na osnovu teoreme koja je neposredna posledica definicije trajektorija pramenova pravih (/24/ str. 161.) harmonijska homologija središta P i ose OQ preslikava epicikl e na taj isti epicikl. Zato je, prema teoremi 3. rada /6/ (ili teoremi 38.1. u /13/, str. 161.) središte P

---

45) Ose epicikla definisali smo u produžetku sadržaja leme na str.185.

te harmonijske homologije pol njene ose OQ, i u odnosu na polaritet W_1 određen krivom drugog reda koja je ili epicikl e ili ga sadrži. Na taj isti način dokazuje se da je tačka Q pol ose OP odgovarajuće simetrije grupe G_{Oh}, i u odnosu na polaritet W_1.

Teorema 33. Bilo koja realna izotropna homologija grupe $G_{Sl,V}$ može se predstaviti kao proizvod izvesne epicikličke rotacije grupe simetrija G_{Vh} i homologije h_V središta V.

Dokaz. Neka je $h_N(X) = X'$ slika neke tačke X različite od središta N date izotropne homologije, kao i od tačaka ose te homologije. Neka je h simetrija grupe G_{Vh} u odnosu na osu koja sadrži tačku X, a h_1 simetrija iste grupe koja pravu VX preslikava na pravu VX'. Prema definiciji tačka $X''= h_1h(X)$ je tačka hipercikla $G_{Vh}(X)$, a prema pretpostavci tačka prave VX'. Neka je h_V homologija ose v = W(V) koja tačku X''preslikava na tačku X'. Proizvod epicikličke rotacije h_1h homologije h_V preslikava tačku X na tačku X'. Ovaj proizvod preslikava tačke M,N,V na te iste tačke. Kako su tačke M,N,V invarijantne tačke i izotropne homologije h_N, ova homologija istovetna je navedenom proizvodu epicikličke rotacije središta V koja je predstavljena proizvodom h_1h simetrije h i h_1 grupe G_{Vh} i homologije h_V središta V i ose v koja tačku X'' preslikava na X'.

Uzgred primetimo da, ukoliko simetrija h_1 preslikava tačku X na tačku prave VX' koja ne pripada hiperciklu $G_{Vh}(X)$ već njemu dopunskom hiperciklu u odnosu na hipercikl $G_V(X)$ tada je h_1 simetrija grupe $\overline{G}_{Vh}$ pa je h_1h epiciklička rotacija grupe G_V mešovitih osa. Primetimo i da smo dokaz izveli pretpostavljajući da tačka X pripada hiperboličnom pramenu pravih središta V prve vrste. Na isti način bismo dokazali teoremu i u slučaju kada je tačka X tačka hiperboličnog pramena pravih središta V druge vrste. Međutim tada je proizvod simetrije h_1 i simetrije h_V("specijalne" homologije središta V) takođe simetrija grupe G_{Vh}.

Teoremom 33. još bliže smo odredili vrste transformacija sličnosti grupe $G_{Sl, V}$ nego u teoremi 5.25. Na osnovu teoreme 33. može se formulisati teorema prema kojoj je i svaka transformacija sličnosti grupe $G_{Sl,V}$ proizvod izvesne transformacije podudarnosti grupe G_V i homologije središta V. Uzimajući u obzir, osim sadržaja ove teoreme, i sadržaje teorema 5.21. i teoreme koja bi se dobila proširivanjem sadržaja leme na str. 172. u odgovarajućem smislu mogli bismo formulisati i teoremu:

Teore,a 34. Svaki element bilo koje grupe $G_{Sl,O}$ može se predstaviti kao proizvod određenog elementa grupe G_{Oh} i homologije središta O i ose o, odnosno elacije središta O i ose o.

Lema. Proizvod bilo koje transformacije grupe simetrija G_{Oh} pramena pravih središta O i perspektivne kolineacije središta O i ose o=W(O) [46] jednak je proizvodu te iste perspektivne kolineacije i te iste transformacije grupe simetrija G_{Oh}.

Lema je neposredna posledica "dopunjene" teoreme 30.7.(/13/, str. 137.). Dopunu ove teoreme izvršili smo u radu /6/ (nastrani 141.). Međutim, dokaz leme je sasvim jednostavan i nezavisno od navedenih teorema, i implicitno smo ga izveli nešto ranije i u ovom radu.

Perspektiva središta O i ose o u opštem slučaju preslikava apsolutu k na izvesni epicikl k' grupe simetrija

---

46) Kao i u udžbeniku /33/ pod perspektivnom kolineacijom podrazumevamo homologiju ili elaciju projektivne ravni.

G_{Oh} pramena pravih središta O. Prema posledici 5.21. unutrašnjost jedne od ovih krivih pripada unutrašnjosti one druge. Osim toga unutrašnjost apsolute se preslikava na unutrašnjost krive k'u pomenutoj perspektivnoj kolineaciji. Ako krivu k' smatramo drugom apsolutom projektivne ravni koja sadrži ravan ${}^1S_2$, s obzirom da se pri preslikavanju ravni ${}^1S_2$ perspektivnom kolineacijom središta O sopstvena oblast te ravni, prema prethodnom, preslikala na sopstvenu oblast projektivne ravni u kojoj je zadata kriva k' kao apsoluta[47], prethodno preslikavanje možemo shvatiti kao preslikavanje ravni ${}^1S_2$ na ravan ${}^1S_2'$ pri čemu obe ravni pripadaju istoj projektivnoj ravni. Kao što smo homologije kojima se ostvaruju ta preslikavanja, u slučaju kada središta tih homologija pripadaju unutrašnjosti apsolute nazvali homotetijama odgovarajućeg središta, tako ćemo i u slučaju kada je središte spoljašnja tačka apsolute nazvati odgovarajuće homologije homotetijama. Neka je e neki epicikl grupe G_{Oh}, a e' njegova slika u homotetiji središta O. Ako i e' pripada unutrašnjosti apsolute k tada ćemo dvorazmeru četvorke tačaka E',E, O, P', gde su tačke E,E', P' tačke preseka bilo koje ose epicikla e sa epiciklom e, e' i osnovom o (tj. epiciklom iste grupe G_{Oh} koji sadrži ta osnova) nazvati koeficijentom homotetije koja je u pitanju. S obzirom da je homotetija jednoznačno određena središtem, osom i parom odgovarajućih tačaka, ako je data vrednost koeficijenta homotetija središta O i ose o jednoznačno je određena i slika tačke E u toj homotetiji, pa dakle i ta homotetija. Da koeficijent homotetije ne zavisi od izbora tačke E na istoj osi sledi iz poznate činjenice da je dvorazmera invarijanta projektivnih preslikavanja i da je bilo koja osa epicikala pramena pravih

---

47) I naravno idealnu oblast ravni ${}^1S_2$ na idealnu oblast projektivne ravni u odnosu na kruvu k' kao apsolutu.

središta O invarijantna prava homotetije - homologije središta O. Nezavisnost tog koeficijenta od izbora ose proističe iz sledećeg. Tačke E i E′su pripadale epiciklima e i e′ gde je e′slika epicikla e pri preslikavanju datom homotetijom. Neka su E_1 i E_1' tačke preseka neke druge ose pramena pravih središta O sa epiciklima e i e′, a tačka P_1' tačka preseka te ose i prave o. U simetriji grupe G_{Oh} koja osu OE preslikava na osu OE_1 tačke O,E,E′, P′ preslikavaju se na tačku O,E_1, E_1' P_1' redom. Zato su iz istih razloga kao u prethodnom slučaju dvorazmere ovih četvorki tačaka međusobno jednake. U zavisnosti od toga da li par tačaka E,E′ne razdvaja ili razdvaja par tačaka O,P′ koeficijent homotetije središta O i ose o je pozitivan ili negativan. Ako je tačka O spoljašnja tačka apsolute, dakle u slučaju hiperboličnog pramena pravih, i ako tačke E i E′pripadaju njenoj unutrašnjosti pogodnije je[48] umesto dvorazmere četvorke tačaka E′,E , O,P′razmatrati dvorazmeru četvorke tačaka čija je vrednost jednaka reciprnočnoj vrednosti prethodne dvorazmere. Ako umesto tačaka E i E′izaberemo tačke preseka U i U′bilo koje ose epicikla grupe G_{Oh} sa apsolutama k i k′ravni ${}^1S_2$ i ${}^1S_2'$, saobzirom da su i k i k′takođe odgovarajući epicikli pramena pravih središta O u razmatranoj homotetiji središta O, i dvorazmera četvorke U′, U, O,P′je jednaka koeficijentu te homotetije. Iz toga sledi da je i dvorazmera četvorke tačaka E′E, O,U gde su E i E′tačke preseka bilo koje ose skupa epicikala pramena pravih središta O sa bilo kojim epiciklom e≠k tog skupa i njemu odgovarajućim epiciklom e′u toj homotetiji konstantna. U slučaju kada je O unutrašnja tačka apsolute, kao i kada je ona spoljašnja tačka a epicikli odgovarajući u toj homotetiji pripadaju unutrašnjosti aps-

---

48) U cilju eventualne interpretacije u geometriji sopstvene oblasti ravni ${}^1S_2$.

olute, tačke O i P pripadaju raznim oblastima geometrija ravni ${}^1S_2$. Zato ćemo u takvim slučajevima koeficijentom homotetije smatrati dvorazmeru četvorke tačaka E',E, O,U ili četvorke tačaka E',E,P,U gde je P tačka preseka ose EE' i prave o. Za ovu poslednju mogućnost odlučivaćemo se onda kada tačka O ne pripada oblasti ravni ${}^1S_2$ kojoj i epicikli e i e'. Uzimajući u obzir da smo pretpostavili da e i e' pa i njihove tačke preseka sa odgovarajućim osama pripadaju istoj oblasti ravni ${}^1S_2$, zatim dogovor o izboru koeficijenta homotetije i činjenicu da je svaka od oblasti ravni ${}^1S_2$ oblast interpretacije jedne od metričkih geometrija, svaka od odgovarajućih dvorazmera pomenutih četvorki tačaka u svakoj od odgovarajućih oblasti predstavlja razmeru trojke tačaka odnosno razmeru dve odgovarajuće duži te homotetije, pod pretpostavkom da je jedan kraj i jedne i druge duži središte homotetije, ili tačka ose homotetije, a te duži pripadaju "zracima" homotetije. I u slučaju kada su i e i e' dvograni (jednograni) hipercikli druge vrste, s obzirom da su tada tačke O i P suprotne tačke odgovarajućih geometrija te je njihovo međusobno rastojanje u odgovarajućoj geometriji uvek isto, dvorazmera četvorke tačaka E',E,O,P odnosno E',E,P,O što je u osvom slučaju ravnopravna mogućnost, predstavljaju razmeru odgovarajućih duži. U svakom slučaju, iz nabrojane pretpostavke i kada se radi o dvorazmeri u kojoj ulogu tačke P "preuzima" tačka U, odgovarajuća vrednost razmere pomenutih duži je u datoj geometriji realan broj koji je pozitivan kada par tačaka O,U ne razdvaja par tačaka E,E'a negativan kada ih razdvaja. Ako se u homotetiji središta O epicikl e jedne oblasti ravni ${}^1S_2$ preslikava na epicikl e'druge oblasti te ravni, tada su epicikli e i e'epicikli e i e'epcikli iste oblasti ravni ${}^1S_2'$ koja odgovara ravni ${}^1S_2$ u toj homotetiji. Pri tom, ako je e epicikl sopstvene (idealne) oblasti ravni ${}^{1}S_{2}$ i epicikl e'će biti epicikl sopstvene (idealne) oblasti ravni ${}^{1}S_{2}'$. Pošto ovakvom homotetijom epicikl e'"menja" oblast za koeficijent ove homoetije usvojićemo imaginaran broj čija je apsolutna vrednost jednaka koeficijentu koji bismo odredili po istom principu kojim smo ga određivali u slučaju, kada su e i e'pripadali istoj oblasti ravni ${}^{1}S_{2}$.

Homotetijom središta O koja ravan ${}^{1}S_{2}$ preslikava na ravan ${}^{1}S_{2}'$ kao što smo pokazali apsolutu k ravni ${}^{1}S_{2}$ preslikava se na apsolutu k'ravni ${}^{1}S_{2}'$, a unutrašnjost apsolute k na unutrašnjost apsolute k'. Zato se i eliptičan pramen pravih ravni ${}^{1}S_{2}$ preslikava na eliptičan pramen pravih ravni ${}^{1}S_{2}'$, hiperboličan (ili hiperboličan bilo koje vrste) na hiperboličan (ili hiperboličan iste vrste) a paraboličan na paraboličan pramen pravih ravni ${}^{1}S_{2}'$. Posledica ovog rezultata primenjena na odgovarajuće geometrije ravni ${}^{1}S_{2}$ i njima homotetične slike - odgovarajuće geometrije ravni ${}^{1}S_{2}'$ ukazuje na još jednu analogiju sa homotetijama (translacijama) euklidske ravni. Prema toj posledici homotetije (translacija) središta O preslikava dve paralelne (hiperparalelne) prave ravni ${}^{1}S_{2}$ na dve takođe paralelne (hiperparalelne) prave njoj homotetične (u toj istoj homotetiji) ravni ${}^{1}S_{2}'$. Homotetije središta O realnih koeficijenta koje unutrašnjost apsolute prema definiciji preslikavaju u unutrašnjost apsolute značajne su za geometriju unutrašnje oblasti apsolute pa dakle iza geometriju Lobačevskog. Suženja tih homotetija na unutrašnjost apsolute predstavljaju odgovarajuće transformacije dvodimenzione geometrije Lobačevskog. Da bismo razjasnili prave razloge dosadašnjeg negiranja postojanja sličnih likova, pa dakle i transformacija sličnosti dvodimenzione geometrije Lobačevskog razmotrićemo sledeći primer. Neka je g suženje homotetija čije je središte O unutrašnja tačka apsolute na unutrašnjost apsolute, a tačke A i B tačke istog epicikla grupe G_{Oh} pramena pravih središta O. Tačke $A'= \hat{g}(A)$ i $B'=\hat{g}(B)$ i tačka O su temena trougla koji u toj homotetiji odgovara trouglu OAB. Neka je ON osa simetrije grupe G_{Oh} koja tačku A preslikava na tačku B. Ova simetrija preslikava i tačku A′na tačku B′. Ako označimo sa M i M′tačke preseka ose te simetrije sa stranicama AB i A′B′pomenutih trouglova, homotetija $\hat{g}$preslikava tačku M na tačku M′. Trouglovi OAM i OA′M′su takođe odgovarajući trouglovi te homotetije. Pošto su u simetriji ose ON prava OM = ON preslikava na tu istu pravu, prava AB na pravu AB, a prava A′B′ na pravu A′B′uglovi kod temena M i M′predstavljaju prave uglove. Razmera duži OA′i OA je koeficijent ove homotetije što važi i za razmeru duži OM i OM′. S obzirom da su, za razliku od euklidke geometrije, u geometriji Lobačevskog duži i uglovi u tesnoj vezi prirodno je, u ovoj geometriji očekivati da će promenama dužina odgovarajućih duži u datoj homotetiji odgovarati i promene odnosa njima odgovarajućih uglova. U ovom specijalnom slučaju promena veličine ugla kod temena A vezana je za promenu veličine duži AM u toj homotetiji, i to poznatom funkcijom Lobačevskog. Zahvaljujući izboru homotetičnih trouglova OAM i OA′M′i odnos AM i A′M′odgovarajućih duži ove homotetije određen je funkcijom opisanom u udžbeniku /24/ na str. 148.-150 (/24/ gl.VII t.4). Da li je i taj odnos u tom, pa možda i u opštijem slučaju moguće bliže odrediti, može biti predmet veoma složenih ispitivanja. Uporedjivanjem relacije (4) (/24/str.150.) sa odgovarajućom relacijom euklidske geometrije jedino se može neposredno zaključiti da odnos duži AM i A′M′odgovarajućih u toj homotetiji nije jednak njenom koeficijentu.

Dok smo prilikom razmatranja preslikavanja sličnosti ravni ${}^1S_2$ imali u vidu sopstvenu oblast te ravni i u skladu sa tim relanim homotetijama smatrali one koje tu sopstvenu oblast preslikavaju u sopstvenu oblast, u slučaju kada iz određenih razloga (npr. kasnijeg proučavanja geometrija idealnih oblasti te ravni) prvenstvo ima idealna oblast te ravni, realnim homotetijama smatraćemo one koje idealnu oblast te ravni preslikavaju u idealnu oblast. Jednostavno se može zaključiti da su realne homotetije sopstvene oblasti idealne homotetije idealne oblasti ravni ${}^1S_2$ i obratno. Ubuduće ćemo idealne homotetije sopstvene oblasti ravni ${}^1S_2$ nazivati realnim homotetijama ravni ${}^2S_2$ ili samo homotetijama ravni ${}^2S_2$, i u skladu sa tim realne homotetije ravni ${}^1S_2$ samo homotetijama te ravni.

U cilju daljeg proučavanja homotetija i sličnosti središta O, a i kasnijeg proučavanja "preslikavanja sličnosti iz tačke O na tačku O′" uvešćemo i sledeću definiciju "G_{Oh} - podudarnosti.

Definicija 12. Lik L ravni ${}^1S_2$ je G_{Oh}-podudaran liku L_1 te ravni ako i samo ako postoji kolineacija grupe G_{Oh} koja lik L preslikava na lik L_1.

Teorema 35. Ako su likovi L i L_1 međusobno O-podudarni, tada su i slike L′ i L_1' tih likova pri preslikavanju nekom homotetijom središta O takođe međusobno G_{Oh} - podudarni.

Dokaz. Iz definicije 12. i pretpostavke teoreme sledi da postoji transformacija g grupe G_{Oh} koja lik L preslikava na lik L_1. Na osnovu leme na str. 199. transformacija izvedena iz g datom homotetijom središta O je ta ista transformacija g. Zato transformacija g sliku L′ lika L pri preslikavanju tom homotetijom, preslikava na sliku L_1' lika L_1 pri preslikavanju istom homotetijom.

Za pravilnu interpretaciju rezultata izraženog teoremom 35. u slučaju pojedinih oblasti ravni ${}^1S_2$ potrebno je i sledeća teorema:

Teorema 36. Elementi grupe simetrija G_{Oh} pramena pravih određene oblasti ravni ${}^1S_2$ središta O ili ose o = W(O) i elementi grupe simetrija G'_{Oh} pramena pravih središta O odnosno ose o = W'(O) odgovarajuće oblasti ravni ${}^1S'_2$, koja je slika ravni ${}^1S_2$ u izvesnoj homotetiji središta o, predstavljaju suženja na odgovarajuće oblasti ravni ${}^1S_2$ i ${}^1S'_2$ odgovarajućih elemenata iste grupe simetrija G_{Oh} pramena pravih središta O te ravni.

Dokaz. Homotetija koja preslikava ravan ${}^1S_2$ na ravan ${}^1S'_2$ je izomorfizam tih ravni. Prema prethodnim razmatranjima homotetija ravni ${}^1S_2$ preslikava sopstvenu (idealnu) oblast ravni ${}^1S_2$ na sopstvenu (idealnu) oblast ravni ${}^1S'_2$. Zato je ta homotetija izomorfizam i sopstvenih (idealnih) oblasti ravni ${}^1S_2$ i ${}^1S'_2$. Na osnovu leme na str.199. i svojstva konjugovanja, u tom izomorfizmu svakoj simetriji sopstvene (idealne) oblasti ravni ${}^1S_2$ odgovara simetrija sopstvene (idealne) oblasti ravni ${}^1S'_2$ kojoj su središta i osa slike središta i ose date simetrije pri preslikavanju razmatranom homotetijom. Zato, što smo ranije već dokazali ali s drugim ciljem, u tom izomorfizmu svakoj simetriji grupe G_{Oh} odgovara simetrija grupe G'_{Oh}.

Teorema se može dokazati i na drugi način. Bilo koja simetrija grupe G_{Oh} sopstvene (idealne) oblasti ravni ${}^1S_2$ je suženje harmonijske homologije ravni ${}^1S_2$ kojoj je centar te simetrije, a osa osa iste na odgovarajuću oblast te ravni. Pri tome su taj centar i osa pol i polara u apsolutnom polaritetu W. Ovo isto važi i za bilo koju simetriju grupe G'_{Oh}, s tom razlikom što se u tom slučaju radi o apsolutnom polaritetu W' određenom slikom k' apsolute k ravni ${}^1S_2$ u razmatranoj homotetiji. Iz prethodnog i teoreme 32. sledi da je svaka simetrija grupe G_{Oh} istovremeno i simetrija grupe

G'_{Oh} i obratno, pa će to isto važiti i za suženje tih grupa na odgovarajuće oblasti ravni ${}^1S_2$ i ${}^1S'_2$.

Posledica 24. Ako je neki lik L sopstvene (idealne) oblasti ravni ${}^1S_2$ O - podudaran sa likom L_1 te ravni, tada je slika L'lika L pri preslikvanju homotetijom središta O (ose o = W(O)) sopstvene (idelane) oblasti ravni ${}^1S_2$ na sopstvenu (idealnu) oblast ravni ${}^1S'_2$ G'_{Oh} - podudaran slici L'_1 lika L_1 pri preslikavanju istom homotetijom.

Ova posledica je neposredna posledica definicije 12. koja predstavlja definiciju koja se dobija prilagodjavanjem definicije 12. sopstvenoj (idealnoj) oblasti ravni ${}^1S_2$, i teoreme 35.

Naglašavamo da se za razliku od teoreme 35. gde nije bilo neophodno posebno isticati da su slike međusobno G_{Oh} - podudarnih likova ravni ${}^1S_2$ pri preslikavanju homotetijom središta O međusobne G'_{Oh} - podudarne jer je u slučaju ravni ${}^1S_2$ $G_{Oh} = G'_{Oh}$ (v. teoremu 36.), u posledici to se mora učiniti. U suprotnom, posledica 24. ne bi bila tačna u sledećim slučajevima, koji se mogu dogoditi samo pod uslovom da se radi o homotetijama ravni ${}^1S_2$ (${}^2S_2$) koje smo nazvali idealnim. Neka se u idealnoj homotetiji ravni ${}^1S_2$ apsoluta k preslikava na "novu" apsolutu k'slike ${}^1S'_2$ u toj homotetiji, i neka je e onaj epicikl grupe G_{Oh} koji se u toj homotetiji preslikava na apsolutu k. S obzirom na pretpostavku o prirodi homotetije, k je epicikl grupe G_{Oh} koji pripada sopstvenoj oblasti ravni ${}^1S'_2$. Na osnovu iste pretpostavke, teoreme 28. i posledice 21. "prsten" između epicikala e i k ravni ${}^1S_2$ koji u sopstvenoj oblasti te ravni predstavlja skup spoljašnjih tačaka epicikla e preslikava se na "prsten" između epicikala k i k'ravni ${}^1S'_2$ koji u sopstvenoj oblasti te ravni predstavlja skup spoljašnjih tačaka epicikala k. Ako je bilo koje teme npr. A nekog trougla ABC tačka spoljašnjosti epicikla e ravni ${}^1S_2$, tada je slika A'tog temena pri preslikavanju razmatranom homotetijom tačka spoljašnjosti epicikla k sopstvene oblasti ravni ${}^1S_2'$. Kako ta spoljašnjost predstavlja skup tačaka te oblasti koje nisu tačke sopstvene oblasti ravni ${}^1S_2$, nijedna transformacija podudarnosti sopstvene oblasti ravni ${}^1S_2$ ne dejstvuje na tu tačku, te se ne može utvrditi podudarnost trougla A'B'C'i trougla A_1' B_1' C_1' koji je slika trougla $A_1 B_1 C_1$ G_{Oh} - podudarnog trougla ABC pri preslikavanju istom homotetijom, u okviru podudarnosti definisane u sopstvenoj oblasti ravni ${}^1S_2$.

Međutim, u slučaju (realnih) homotetija ravni ${}^1S_2$ unutrašnjost sopstvene oblasti (idealne oblasti) slike ${}^1S_2'$ ravni ${}^1S_2$ pri preslikavanju takvih homotetijama pripada unutrašnjost sopstvene (idealne) oblasti ravni ${}^1S_2$. Zato su G_{Oh} - transformacije podudarnosti sopstvne (idealne) oblasti ravni ${}^1S_2'$ suženja odgovarajućih transformacija sopstvene (idealne) oblasti ravni ${}^1S_2$ na sopstvenu (idealnu) oblast ravni ${}^1S_2'$. U ovom slučaju svaka dva lika koja su međusobno G_{Oh}' - podudarna takođe su i međusobno G_{Oh} - podudarna. Tada se posledica 24. može formulisati slično teoremi 36. i time sasvim "približili" odgovarajućoj situaciji u projektivnom modelu "proširene" euklidske ravni. Mada je i tada prisutna osnovana razlika između homotetija središta O sopstvene oblasti (idealne oblasti) tih ravni - u prvoj je ta homotetija preslikavanje tih oblasti, a u drugoj transformacija - ta razlika je u ovom slučaju umanjena ne samo time što se posledica 24. tada može formulisati na isti način kao i u projektivnoj ravni u kojoj je apsoluta prava sa zadatom eliptičnom involucijom, već i iz sledećeg razloga. U takvoj projektivnoj ravni realnim homotetijama središta O ravni ${}^1S_2$ odgovaraju one homotetije središta O kod kojih je apsolutna vrednost koeficijenta homotetije manja od jedinice. U takvim homotetijama spoljašnjost bilo kog epicikla, ako je središte O tačka sopstvene oblasti takve projektivne ravni preslikava se u unutrašnjost tog epicikla. Ove homotetije, uz isti uslov da je O tačka sopstvene oblasti tih ravni, preslikavaju u oba slučaja spoljašnjost bilo kog kruga središta O na njegovu unutrašnjost.

Ako umesto projektivnih modela razmatramo modele ovih geometrija u skupovima čiji su elementi proizvoljne prirode, prethodne zaključke možemo interpretirati i na sledeći način. U cilju pojednostavljenja izlaganja, ograničićemo se samo na poslednja razmatranja u kojima smo pretpostavili da je tačka O unutrašnja tačka apsolute. Tada su pomenutim epiciklima predstavljeni koncentrični krugovi S - modela geometrije Lobačevskog datog poluprečnika krivine, odnosno koncentrični krugovi euklidske geometrije. Homotetije čije je središte pomenutog skupa koncentraičnih krugova, predstavljaju izomorfizme datog S - modela geometrije Lobačevskog i S - modela geometrija Lobačevskog različitih poluprečnika krivine koji su manji od poluprečnika krivine datog modela. Apsoluta svake od tih geometrija (u smislu S-modela) je krug date geometrije. Prema tome koeficijent homotetije neposredno zavisi od odnosa poluprečnika krivina date i njoj izomorfne geometrije. U slučaju euklidske geometrije poluprečnik krivine je za svaku euklidsku geometriju beskonačan te odnos tih poluprečnika može biti ma koji broj.

Razmotrićemo u osnovnim crtama na koji način određujemo transformacije podudarnosti koje u tom izomorfizmu između S - modela date geometrije Lobačevskog i modela iste vrste neke od njoj odgovarajućih geometrija odgovaraju transformacijama podudarnosti date geometrije. Svakoj osnoj simetriji date geometrije odgovara osna simetrija slike te geometrije, pri čemu je osa te simetrije slika ose simetrije date geometrije u homotetiji koja ostvaruje izomorfizam tih dveju geometrija. Za razliku od odgovarajuće situacije izražene teoremom 36., u ovom opštijem slučaju simetrija izvedena iz date nije suženje date simetrije na sliku date geometrije već, suženje neke druge simetrije date geometrije na tu sliku. Pošto je moguće svaku transformaciju podudarnosti date geometrije Lobačevskog predstaviti kao proizvod od njaviše tri osne simetrije, iz prethodnog sledi da važi:

Posledica 25. Ako je apsolutna vrednost koeficijenta homotetije koja datu geometriju Lobačevskog preslikava na njoj izomorfnu geometriju manji od jedan, tada je skup transformacija podudarnosti slika date geometrije skup suženja transformacija podudarnosti date geometrije na njenu sliku. Pri tom je, osim u slučaju identične transformacije i transformacija grupe simetrija pramena pravih središta istovetnog središtu homotetije, svaka transformacija podudarnosti geometrije izmorfne datoj suženje transformacije podudarnosti date geometrije različite od transformacije podudarnosti koja joj u tom izomorfizmu odgovara.

Dokaz teoreme koja odgovara, u projektivnom modelu ovih geometrija, posledici 25. zasniva se na teoremi 64. 4. (/13/ str. 257.).

Na osnovu posledice 25. može se uopštiti posledica 24. u tom smislu što se za likove L i L_1 pretpostavlja da su samo podudarni, a ne i G_{Oh} - podudarni.

Ako data geometrija predstavlja geometriju određenog fizičkog prostora,[49] tada možemo smatrati da homoteti-

49) Uz pretpostavku da je ta geometrija odgovarajuće dimenzije. S obzirom da su metode koje koristimo vrlo opšte uopštenje prethodnih rezultata na trodimenzione i četvorodimenzione geometrije u principu ne predstavlja znatne teškoće. To uopštenje za n=3, izvršili smo u poslednjem paragrafu rada.

ije kojima je apsolutna vrednost koeficijenta manja od jedan predstavlja skupljanje tog prostora pri preslikavanju takvim homotetijama, pa prema tome povećanje "zakrivljenosti" tog prostora vezano je sa "zgušnjavanjem" materije koja tom prostoru odgovara. Suprotno tome homotetije kod kojih su apsolute vrednost koeficijenata veće od jedan, predstavljaju širenja datog prostora uz razređivanje materije koja tom prostoru odgovara. Posledicom 24. i njenim uopštenjem izražava se činjenica da su pomenuta pulsiranja prostora ravnomerna. Onim delovima svemira bez materije odgovara geometrija čija je krivina nula. Pošto u tim delovima nema materije, nema onoga što bi se zgušnjavalo ili razređivalo, te se takvi delovi prostora ne mogu ni skupljati ni širiti. Geometrije krivine nula[50] su euklidska i pseudoeuklidska geometrija. Za razliku od homotetija geometrije Lobačevskog čija je krivina različita od nule, homotetije euklidske (pseudoeuklidske) geometrije tu geometriju preslikavaju uvek na istu geometriju.

Prethodno tretiranje geometrije kao geometrije određenog fizičkog prostora ukazuje da ne treba praviti bitnu razliku između "realnih" i "idealnih" homotetija.

I izomorfizam koji se ostvaruje transformacijama sličnosti ravni ${}^1S_2$ i njoj odgovarajuće ravni ${}^1S_2'$ je značajan kako u prethodnom smislu, tako i za geometriju uopšte. Sledećom definicijom preciziraćemo i taj pojam.

Definicija 13. Ako element f grupe $G_{S1,O}$ preslikava ravan ${}^1S_2$ na ravan ${}^1S_2'$, tada kažemo da su te dve ravni slične u odnosu na središte sličnosti O. Element f grupe $G_{S1,O}$ je preslikavanje sličnosti ravni ${}^1S_2$ na ravan ${}^1S_2'$.

---

50) Sve razmatrane geometrije su geometrije konstantne krivine.

Prema teoremi 34. Svaki element normalizatora grupe G_{Oh} koji pripada i odgovarajućoj grupi sličnosti G_{S1},O može se predstaviti kao proizvod određenog elementa te grupe i homotetije središta O pod uslovom da je, ako se radi o hiperboličnom pramenu pravih, taj element element normalizatora grupe simetrije i hiperboličnog pramena pravih prve (druge) vrste. Na osnovu leme formulisane neposredno posle teoreme 34. redosled činilaca tog proizvoda nije bitan. Na osnovu prethodnog, definicije 13. i teoreme 36. sledi posledica:

Posledica 26. Ako je ravan ${}^1S_2'$ slična ravni ${}^1S_2$ u odnosu na središte O, tada je ravan ${}^1S_2'$ slika ravni ${}^1S_2$ i pri preslikavanju onom homotetijom čiji je proizvod sa određenim elementom grupe simetrija G_{Oh} jednak elementu normalizatora te grupe koji ravan ${}^1S_2$ preslikava na ravan ${}^1S_2'$.

Element normalizatora grupe simetrija G_{Oh} koji ravan ${}^1S_2$ preslikava na ravan ${}^1S_2'$ nazivamo preslikavanjem sličnosti središta O koje ravan ${}^1S_2$ preslikava na ravan ${}^1S_2'$. Koeficijent homotetije čiji proizvod sa odgovarajućim elementom grupe G_{Oh} predstavlja razmatranu transformaciju sličnosti nazivamo koeficijentom te sličnosti. Zahvaljujući komutativnosti homotetije središta O i bilo koje transformacije podudarnosti grupe simetrija G_{Oh} kao i teorema 34. i 36. može se dokazati da važi teorema koja se dobija iz teoreme 35. zamenom reči homotetija rečju sličnost. Ako je homotetija koja učestvuje u predstavljanju odgovarajuće transformacije sličnosti homotetija koja sopstvenu (idealnu) oblast ravni ${}^1S_2$ preslikava na sopstvenu (idealnu) oblast ravni ${}^1S_2'$, tada i ta sličnost preslikava sopstvenu (idealnu) oblastravni ${}^1S_2$ na odgovarajuću oblast ravni ${}^1S_2'$. U prvom slučaju apsolutna vrednost koeficijenta te sličnosti je manja od jedan, a u drugom – koji se odnosi na idealnu oblast –

veća od jedan. Za preslikavanja sličnosti koja odgovarajuću oblast ravni $^1S_2$ preslikavaju na oblast iste vrste - preciznije za suženja tih preslikavanja na pomenutu oblast važi teorema analogna posledici 24. U izomorfizmu dve geometrije Lobačevskog različitih poluprečnika krivine koji se ostvaruje preslikavanjem sličnosti čiji koeficijent zavisi od odnosa poluprečnika krivina tih geometrija, ako je apsolutna vrednost tog koeficijenta manja od jedan, transformaciji podudarnosti prve geometrije odgovara transformacija podudarnosti druge geometrije koja je suženje neke transformacije podudarnosti prve geometrije na oblast interpretacije druge geometrije. Osim u slučaju identične transformacije, pomenuta transformacija podudarnosti prve geometrije nije odgovarajuća transformacija druge geometrije. Ovo je rezultat koji u potpunosti odgovara posledici 25. i može se dokazati korišećenjem te posledice, teoreme 34. i teoreme 64.4. (ova poslednja teorema formulisana je u /13/ na str. 257.). Iz "fizičke" interpretacije homotetija geometrija ravni $^1S_2$ i teoreme 34. sledi da preslikavanja sličnosti takođe predstavljaju kretanja određenih delova svemira koja uključuju i njegovo pulsiranje. Ali ova kretanja su nešto složenija od isključivo pulsiranja. Tako preslikavanje sličnosti koje je proizvod homotetije središta O i epicikličke rotacije istog središta predstavlja pulsiranje tog dela svemira sa središtem u tački O uz istovremenu rotaciju tog dela svemira oko iste tačke. Teoreme koje smo naveli kao odgovarajuće teoreme teoremama kojima se utvrđuje da su slike dva podudarna lika određene oblasti ravni $^1S_2$ pri preslikavanju homotetijom koja tu oblast preslikava na odgovarajuću oblast ravni $^1S_2'$, takođe podudarne, ali u opštem slučaju u odnosu na podudarnost definisanu u toj oblasti ravni $^1S_2'$, izražavaju važnu činjenicu da su i kretanja određenog dela svemira predstavljena preslikavanjima sličnosti ravnomerna. I ta kretanja prostor kome odgovara geometrija stalne krivine preslikavaju na prostor kome odgovara geometrija takođe stalne krivine. U vezi sa konstatacijom koju smo dali povodom realnih (idealnih) homotetija, prema kojoj je realna homotetija sopstvene oblasti ravni $^1S_2$ idealna homotetija idealne oblasti te ravni i obratno možemo izvesti sledeći zaključak koji se odnosi na odgovarajuća skupljanja (širenja) prostora koji odgovaraju tim oblastima ravni $^1S_2$. Ako se prostor čija je geometrija geometrija sopstvene oblasti ravni $^1S_2$ širi, tada se prostor čija je geometrija geometrija idealne oblasti ravni $^1S_2$ skuplja i obratno. Pri tom, ako je skupljanje jednog od tih prostora u odnosu na datu tačku, tada je širenje onog drugog u odnosu na njoj polarnu pravu. Oslanjajući se na teoremu 34. prethodni zaključak možemo proširiti i na kretanja prostora složenija od onih koja su i pulsiranja i koja smo predstavljali preslikavanjima sličnosti u odnosu na datu tačku - središta te sličnosti.

Definicija 14. Preslikavanje sličnosti iz tačke O određene oblasti ravni $^1S_2$ do tačke O′ iste oblasti te ravni je proizvod transformacije podudarnosti ravni $^1S_2$ koja tačku O preslikava na tačku O′ i sličnosti središta O′ ili proizvod preslikavanja sličnosti središta O i transformacije podudarnosti ravni $^1S_2$ koja tačku O preslikava na tačku O′.

Iz ove definicije i teoreme 34. uzimajući u obzir i da, uz odgovarajuće ograničenje, elemente normalizatora grupe G_{Oh} smatramo preslikavanjima sličnosti središta O sledi:

Posledica 27. Svaka transformacija sličnosti iz tačke O do tačke O′ može se predstaviti kao proizvod transformacije podudarnosti ravni $^1S_2$ koja tačku O preslikava na tačku O′i homotetije središta O′ili kao proizvod homotetije središta O i transformacije podudarnosti ravni ${}^1S_2$ koja tačku O preslikava na tačku O′.

Sledećom teoremom utvrdićemo odnos između homotetija koje se pominju u posledici 27. pod pretpostavkom da je transformacija podudarnosti koja tačku O preslikava na tačku O′i čiji je proizvod sa homotetijama središta O i O′ iste preslikavanje sličnosti, ista transformacija podudarnosti ravni ${}^1S_2$.

Teorema 37. Ako su h_O i g homotetija središta O i transformacija podudarnosti ravni ${}^1S_2$ koja tačku O preslikava na tačku O′, tada je koeficijent homotetije $h_{O'}$ središta O′, takve da je proizvod transformacije g i te homotetije istovetan preslikavanju sličnosti gh_O, jednak koeficijentu homotetije h_O.

Dokaz. Svaka komponenta proizvoda $h_{O'}og$, kao i svaka komponenta proizvoda gh_O preslikava bilo koji epicikl pramena pravih središta O na neki epicikl pramena pravih središta O′. Zato i ti proizvodi preslikavaju bilo koji epicikl pramena pravih središta O na neki epicikl pramena pravih središta O′. Pošto ovi proizvodi predstavljaju isto preslikavanje sličnosti, oni će dati epicikl pramena pravih središta O preslikati na isti peicikl pramena pravih središta O′. Prema teoremi 23. apsoluta je takođe epicikl pramena pravih središta O[51] pa se pri tim preslikavanjima preslikava na isti epicikl središtaO′. Taj epicikl je apsoluta slike ravni ${}^1S_2$ pri tim preslikavanjima. Toj slici odgovara određeni poluprečnik krivine različit od poluprečnika krivi-

---

51) Ili unija jednog epicikla i jedne tačke ili para tačaka ukoliko pramen pravih središta O nije eliptičan. Ali na osnovu razmatranja povodom teoreme 24. zaključili smo da ovakav način skraćenog izražavanja praktično nije pogrešan.

ne geometrija ravni ${}^1S_2$. Odnos poluprečnika krivine slike ravni ${}^1S_2$ i poluprečnika krivine ravni ${}^1S_2'$ određuje, u pomenutoj funkcionalnoj zavisnosti, koeficijent homotetija h_O i $h_{O'}$, jer transformacije podudarnosti ravni ${}^1S_2$ ne utiču na taj odnos.

Koeficijent homotetije koja učestuje u predstavljanju nekog preslikavanja sličnosti iz tačke O do tačke O′ smatraćemo i koeficijentom te sličnosti.

Primedba. Definicijom 14. nismo obuhvatili preslikavanja koja se mogu smatrati preslikavanjima iz tačke O jedne oblasti ravni ${}^1S_2$ do tačke slike te ravni, gde ta tačka ne pripada razmatranoj oblasti ravni ${}^1S_2$. Npr. neka je homotetija h_O idealna homotetija sopstvene oblasti ravni ${}^1S_2$, a tačka O′tačka ravni ${}^1S_2' = h_O({}^1S_2)$ koja nije tačka sopstvene oblasti ravni ${}^1S_2$ ali pripada slici te sopstvene oblasti – sopstvenoj oblasti ravni ${}^1S_2'$. Neka je g' transformacija podudarnosti ravni ${}^1S_2'$. Preslikavanje $g'h_O$ ima neka bitna svojstva preslikavanja sličnosti iz tačke O na tačku O′, ali preslikavanje $h_O g'$ nema smisla ukoliko se prethodno ne definiše unapred slika ${}^1S_2'$ ravni ${}^1S_2$, jer g' nije transformacija podudarnosti ravni ${}^1S_2$. Ako se zadovolji i taj dodatni zahtev, ipak neće biti zadovoljena teorema 37. jer nijedna homotetija središta O′ne zadovoljava zahtev te teoreme.

Transformacijama sličnosti iz tačke O do tačke O′ pri čemu obe tačke pripadaju istoj oblasti ravni ${}^1S_2$ možemo predstaviti još složenija kretanja delova svemira čije su geometrije geometrije određenih oblasti ravni ${}^1S_2$. Npr. ako se radi o oblasti prostora čija je geometrija geometrija Lobačevskog, a transformacija podudarnosti g koja tačku O preslikava na tačku O′predstavlja transformaciju geometrije Lobačevskog, onda proizvod preslikavanja sličnosti središta O i transformacija g može predstavljati kretanje te oblasti prostora koje je kompozicija ravnomernog skupljanja (širenja)[52] u odnosu na tačku O, eventualne rotacije oko tačke O i translacije određene translacionom duži OO'. Kretanja koja su predstavljena transformacijama podudarnosti ravni $^1S_2$ ($^1S_2'$) s obzirom da ne menjaju međusobna rastojanja tačaka te ravni sem što su ravnomerna, niti skupljaju niti šire prostor, te se pri tim kretanjima gustina materije odgovarajućeg prostora ne menja. Karakteristično je da su bar u slučaju kada su geometrije koje odgovaraju tim prostorima geometrije određene oblasti ravni $^1S_2$, što su potvrdila naša dosadašnja ispitivanja, takva kretanja transformacije tog prostora tj. taj prostor preslikavaju na taj isti prostor. Kretanja različita od ovih, određena definicijom 14, od svih nabrojanih svojstava zadržavaju samo svojstvo koje smo nazvali ravnomernošću. Smatramo da je ovo svojstvo, u slučaju preslikavanja koja ih predstavljaju, obezbeđeno osobinom kojom raspolažu ta preslikavanja: ona preslikavaju bilo koji epicikl ravni $^1S_2$ na epicikl iste vrste slike te ravni. Ova osobina proističe iz definicije tačkvih preslikavanja i teoreme 5.20. S obzirom da izloženom osobinom raspolažu i preslikavanja o kojima je bilo reči u primedbi povodom definicije 14. smatramo da i takva preslikavanja treba da uvrstimo u preslikavanja sličnosti iz tačke O do tačke O', gde O i O' ne moraju pripadati istoj oblasti ravni $^1S_2$. Uz tako proširen pojam preslikavanja sličnosti formulisaćemo sledeći stav:

Stav 8. Skup svih ravnomernih kretanja određene oblasti realnog prostora može se predstaviti skupom preslikavanja sličnosti iz tačke O geometrije koja odgovara toj oblasti prostora, do tačke O' slike tog prostora pri preslikavanju nekom homotetijom središta O.

---

52) Ili "naučnije": kontrakcije (diletacije).

Stav 8. dokazali smo samo u slučaju kada su geometrije koje odgovaraju određenoj oblasti realnog prostora dvodimenziona euklidska geometrija ili dvodimenzione geometrije ravni $^1S_2$. Očekujemo da taj stav važi, ako uopšte, onda bar u većini oblasti prostora.

8. <u>Trajektorije pramenova pravih geometrija ravni</u> $^1S_2$. Definisanjem epicikala ravni $^1S_2$, utvrđivanjem njihovih svojstava i korišćenjem tih svojstava za definisanje preslikavanja sličnosti te ravni kao i njenih oblasti, praktično smo, istovremeno razvili i teoriju epicikala svake od geometrija ravni $^1S_2$. Da bismo te rezultate neposredno primenili na svaku od tih geometrija posebno, potreno je utvrditi koje vrste epicikala date geometrije predstavljaju odgovarajući epicikli ravni $^1S_2$. S obzirom na način na koji smo odgovarajuće pojmove definisali i nazivali prilikom izlaganja o ravni $^1S_2$ ovo neće predstavljati ozbiljniju teškoću. Pošto je geometrija sopstvene oblasti ravni $^1S_2$ Beltrami-Klajnov model geometrije Lobačevskog, pažnju ćemo uglavnom usredsrediti na geometrije idealne oblasti ravni $^1S_2$ tj. sopstvene oblasti ravni $^2S_2$.

Epicikli eliptičnih pramenova pravih koji pripadaju idealnoj oblasti ravni $^1S_2$ predstavljaju ekvidistante geometrije HH. Osnove ovih ekvidistanti su odgovarajući eliptični nizovi tačaka geometrije HH. Ovo ćemo pokazati u glavnom modelu te geometrije (to se odnosi i na sve ostale pojmove geometrije HH i EH). Međutim većinu rezultata tumačićemo i u skupovnim modelima tih geometrija. Eliptični pramen pravih geometrije HH predstavlja presek eliptičnog pramena pravih ravni $^1S_2$ sa idealnom oblašću te ravni. Pošto osnova, a ne središte pripadaju oblasti geometrije HH, ovaj pramen će u toj geometriji biti određen osnovom. Suženje simetrije ravni $^1S_2$ u odnosu na tu osnovu je simetrija geometrije HH u odnosu na istu osnovu. (v.definiciju 2. na str. 55.rada). Svaka prava tog pramena invarijantna je u simetriji u odnosu na tu osnovu. Međutim i ta osnova je invarijantna u ma kojoj simetriji u odnosu na bilo koju pravu tog pramena. Zato je, prema definiciji 3. (str.57.) svaka prava eliptičnog pramena pravih geometrije HH normalna na osnovu tog pramena. Prema tome eliptični pramen pravih geometrije HH predstavlja skup svih pravih normalnih na odgovarajućem eliptičnom nizu tačaka geometrije HH. Neka je A bilo koja tačka geometrije HH. Epicikl eliptičnog pramena pravih osnove o te geometrije koji sadrži tačku A je prema definiciji skup svih tačaka koje odgovaraju tački A pri preslikavanjima koja su suženja transformacija grupe simetrija G_{Oh} eliptičnog pramena pravih ravni $^1S_2$, koji sadrži odgovarajući eliptični pramen geometrije HH, na idealnu oblast te ravni. Skup tih preslikavanja pripada grupi simetrija tog eliptičnog pramena pravih geometrije HH. Svaki element te grupe preslikava osnovu o tog pramena na istu tu osnovu. Neka je B preseka one ose epicikla koja sadrži tačku A sa osnovom o. Bilo koji element grupe simetrija u odnosu na koju je definisan razmatrani epicikl preslikava tačku A na tačku A'tog epicikla, a tačku B na tačku B'osnove o tog pramena pravih. Kako je grupa simetrija bilo kog pramena pravih skup automorfizama istog, prava A'B'je takođe prava tog pramena. Zato je A'B'rastojanje tačke A'od osnove o tog pramena. Pošto postoji transformacija podudarnosti geometrije HH - to je upravo razmatrani element grupe simetrija eliptičnog pramena pravih osnove o - prame definiciji podudarnosti duž A'B'podudarna je duži AB.

Osnova o je degenerisana ekvidistanta odgovarajućeg eliptičnog pramena pravih. Na osnovu posledice 2.11. ova ekvidistanta je dvaput uzet eliptični niz tačaka geometrije HH koji pripada projektivnoj pravoj o.

Parabolični pramen pravih geometrije HH je presek paraboličnog pramena pravih ravni $^1S_2$ sa idealnom oblasti te ravni. To isto se može reći i za oricikl geometrije HH. Na osnovu teoreme 28. i posledice 20. kao i leme na str. 172. sledi da ako najmanje jedna tačka nekog oricikla ravni $^1S_2$ pripada idealnoj oblasti te ravni, tada i sve tačke tog oricikla pripadaju istoj oblasti. Jedini degenerisani oricikli geometrije HH su preseci izotropnih pravih ravni $^1S_2$ i idealne oblasti te ravni. Ove preseke smo u § 5. I gl. nazvali izotropnim nizovima tačaka.

Hiperbolični pramen pravih geometrije HH je presek hiperboličnog pramena pravih prve vrste ravni $^1S_2$ sa idealnom oblasti te ravni. Prema tome hiperbolični pramen pravih geometrije HH je pramen konkurentnih pravih te geometrije. Trajektorije tog pramena su takođe preseci hipercikala prve vrste odgovarajućeg pramena pravih ravni $^1S_2$. Kao i u prethodnim slučajevima, i u slučaju hipercikala prve vrste važi da ako jedna tačka takvog hipercikla pripada idealnoj oblasti ravni $^1S_2$, tada i sve ostale tačke tog hipercikla pripadaju istoj oblasti ravni $^1S_2$. Jedini degenerisani hipercikl prve vrste koji pripada idealnoj oblasti ravni $^1S_2$ je središte hiperboličnog pramena pravih. Pokazaćemo da je svaki hipercikl prve vrste krug geometrije HH čije je središte središte hiperboličnog pramena pravih te geometrije kome taj hipercikl pripada. Na osnovu definicije hipercikl prve vrste je trajektorija grupe simetrija G_{Vh} hiperboličnog pramena pravih prve vrste središta V. Skup suženja elemenata te grupe simetrija na idealnu oblastravni $^1S_2$ predstavlja grupu simetrija hiperboličnog pramena pravih središta V geometrije HH koju ćemo označavati takođe sa G_{Vh}. Svaka simetrija, kao i epiciklička rotacija središta V te grupe tj. na osnovu teoreme 6. (str.116.) svaki element te grupe predstavlja transformaciju podudarnosti geometrije HH jer je, prema stavu I § 5. 3.6. (st.6.),skup transformacija podudarnosti geometrije HH istovetan skupu suženja na spoljašnjost apsolute svih automorfizama apsolute. Neka je tačka X tačka bilo kog hipercikla prve vrste grupe simetrija G_{Vh}, npr. hipercikla G_{Vh} (A). Na osnovu definicije, postoji element grupe G_{Vh} koji tačku X preslikava na tačku A. Pošto svaki element te grupe tačku V preslikava na tačku V, pomenuti element grupe G_{Vh} preslikava duž VX na duž VA pa su prema definiciji te dve duži podudarne. Duž VX je poluprečnik kruga $G_{Vh}(X)$ koji u geometriji HH možemo obeležiti i sa k (V,X) gde je V središte tog kruga. U ovom slučaju unutrašnjošću tog kruga možemo smatrati skup tačaka onog pramena polupravih hiperboličnog pramena pravih središta V čije poluprave sadrže tačke tog kruga i čije je rastojanje od tačke V manje od poluprečnika tog kruga, pod uslovom da težimo da zadržimo uobičajenu definiciju kruga. Ali tada za bilo koju tačku geometrije HHi bilo koju tačku unutrašnjosti datog kruga postoji ili duž , ili podskup tačaka nekog niza tačaka geometrije HH čiji su krajevi pomenute tačke koji nemaju zajedničkih tačaka sa tim krugom. Ako spoljašnjost kruga središta V definišemo kao skup tačaka pomenutog pramena polupravih čije je rastojanje od tačke V veće od poluprečnika tog kruga, onda ni za koji par tačaka geometrije HH koje ne pripadaju krugu, od kojih je samo jedna tačka njegove spoljašnjosti ne postoji "duž u širem smislu" geometrije HH koja sa tim krugom nema zajedničkih tačaka.

Dvograni hipercikl prve vrste ravni $^1S_2$ je takođe trajektorija pramena pravih geometrije HH. Međutim on se ne može definisati kao trajektorija pramena pravih te geometrije u tom smislu da je taj hipercikl trajektorija grupe simetrija nekog pramena pravih te geometrije. Razlog tome je što smo dvograni hipercikl ravni ${}^1S_2$ definisali kao trajektoriju hiperboličnog pramena pravih te ravni, a presek tog pramena sa idealnom oblašću te ravni je unija hiperboličnoga pramena pravih istog središta geometrije HH i pramena eliptičnih nizova tačaka tog središta iste geometrije. Ovo ukazuje na jednu od mogućnosti prevazilaženja opisanog problema: pramenom pravih i eliptičnih nizova središta V geometrije HH smatraćemo presek hiperboličnog pramena pravih središta V ravni ${}^1S_2$ i idealne oblasti te ravni. Grupu simetrija u odnosu na prave tog pramena i njegove eliptične nizove obeležavaćemo sa G_V i dvograni hipercikl geometrije HH smatrati dvogranim krugom središta V te geometrije. Druga mogućnost prevazilaženja istog problema odgovarala bi načinu na koji se odgovarajući problem rešava u geometriji Lobačevskog prilikom definisanja dvogranih ekvidistanti. Umesto grupe simetrija G_{Vh} generisanu simetrijama u odnosu na pravu hiperboličnog pramena pravih središta V, u ovom slučaju koristićemo širu grupu $\ddot{G}_{Vh}$ čiji je skup generatora unija generatora prethodne grupe i simetrije u odnosu na tačku V. Karakteristika ovih dvogranih krugova je da je njihova spoljašnjost takođe zatvorena oblast. Pošto, prema odgovarajućim svojstvima dvogranih hipercikala prve vrste ravni ${}^1S_2$, sledi da svaka osa dvogranog kruga središta V geometrije HH sadrži tačno dve tačke tog kruga i to tako da jedna od polupravih početka V te prave sadrži jednu, a druga drugu od tih tačaka dvograni krug središta V možemo nazvati i krugom pramena pravih središta V geometrije HH, a krug središta V krugom pramena polupravih središta V ili samo krugom središta V. Ali primenom teoreme 4.19. krug pramena pravih središta V koji sadrži tačku X može se definisati i kao trajektorija $\bar{G}_{Vh}(X)$ gde je $\bar{G}_{Vh}$ u ovom slučaju skup suženja na idealnu oblast ravni ${}^1S_2$ grupe simetrija hiperboličnog pramena pravih druge vrste središta V te ravni. Tom pramenu pravih u geometriji HH odgovara pramen eliptičnih nizova tačaka središta V.

Hiperboličnom pramenu pravih druge vrste središta V ravni ${}^1S_2$ odgovara hiperbolični pramen pravih središta V geometrije EH. Zato i grupi simetrija takvog pramena pravih ravni ${}^1S_2$ koji smo označili sa $\bar{G}_{Vh}$ odgovara, u geometriji Eh, grupa simetrija hiperboličnog pramena pravih te geometrije koju ćemo takođe označiti sa $\bar{G}_{Vh}$. Kao i u slučaju geometrije HH, iz prethodnog zaključujemo da je hiperboličan pramen pravih geometrije EH središta V skup pravih koje sadrže tačku V. Na isti način kao i u geometriji HH zaključujemo da je trajektorija hiperboličnog pramena pravih središta V geometrije EH krug središta V. Za razliku od krugova istog središta V geometrije HH među kojima je samo jedan degenerisan, skupu koncentričnih krugova središta V geometrije EH pripada osim središta i još jedan degenerisani krug – osnova pramena pravih središta V. Ova osnova je hiperbolični niz tačaka geometrije EH. Tom osnovom i bilo kojim krugom polupramena pravih središta V određena je zatvorena oblast geometrije HH. Isto važi i za bilo koja druga dva kruga tog polupramena. I u ovom slučaju lik ravni EH koji odgovara dvogranom hiperciklu druge vrste ravni ${}^1S_2$ ne može se definisati kao trajektorija grupe simetrija $\bar{G}_{Vh}$ pramena pravih središta V geometrije EH. Taj lik je trajektorija grupe simetrija pramena hiperboličnih nizova tačaka središta V. Ovu trajektoriju ćemo, uz isto obrazloženje kao i povodom odgovarajuće situacije u geometriji HH, nazivati krugom pramena pravih središta V, za razliku od kruga $\bar{G}_{Vh}(X)$ gde je sa X naglašeno da tačka X pripada nekoj pravoj hiperboličnog pramena pravih središta V, koji nazivamo krugom pramena polupravih središta V ili samo krugom središta V. Drugi način definisanja, u geometriji EH, lika koji odgovara dvogranom hiperciklu druge vrste ravni ${}^1S_2$ je definisanje tog lika kao trajektorije grupe $\ddot{\overline{G}}_{Vh}$ koja je generisana unijom generatora grupe $\overline{G}_{Vh}$ i simetrijom u odnosu na tačku V. Zahtev da u slučaju krugova središta V geometrije HH (EH) tačka koju taj krug sadrži (koja je predstavnik odgovarajuće klase ekvivalencije)pripada nekoj pravoj hiperboličnog pramena pravih središta V te geometrije je u ovom slučaju neophodan. Ako npr. tačka X ne pripada nijednoj pravoj hiperboličnog pramena pravih središta V geometrije EH, tada $\overline{G}_{Vh}(X)$ nije krug hiperboličnog pramena polupravih središta V te geometrije, već krug pramena hiperboličnih nizova tačka središta V ove geometrije. Skup tih krugova istovetan je skupu dvogranih hipercikala prve vrste pramena pravih središta V ravni ${}^1S_2$.

Za razliku od krugova pramena polupravih, kao i krugova pramena pravih središta V geometrije HH, krugovi geometrije EH ukoliko su krugovi pramena pravih (polupravih) datog središta V istovremeno su i ekvidistante u odnosu na osnovu v tog pramena pravih. Ova osnova je, prema definiciji 4. na str.57, rada skup svih tačaka suprotnih tački V. U simetriji središta V osim osnove v invarijantne su i sve prave hiperboličnog pramena pravih središta V. Ali i u bilo kojoj simetriji u odnosu na neku pravu tog pramena pravih osnova v je takođe invarijantna. Ovo neposredno sledi i iz činjenice da je simetrija geometrije EH u odnosu na bilo koju pravu te geometrije suženje simetrije ravni ${}^1S_2$, kojoj je osa ta prava, na idealnu oblast te ravni. Središte takve simetrije ravni ${}^1S_2$ je pol njene ose. Ako je osa simetrije ravni ${}^1S_2$ prava hiperboličnog pramena pravih središta V geometrije EH, tada pol te ose pripada polari tačke V, dakle pravoj v. Presek te prave i idealne oblasti ravni ${}^{1}S_{2}$ je osnova v hiperboličnog pramena pravih središta V geometrije EH. Zato je osnova invarijantna u suženju razmatrane simetrije ravni ${}^{1}S_{2}$ na idealnu oblast ravni ${}^{1}S_{2}$. Pošto je svaka prava pramena pravih središta V geometrije EH invarijantna u simetriji te geometrije u odnosu na središte (odnosno osnovu) tog pramena, kao i pošto je prema prethodnom osnova tog pramena invarijantna u svakoj simetriji u odnosu na bilo koju pravu tog pramena, prema definiciji 3. normalnosti likova bilo koje metričke geometrije, svaka prava hiperboličnog pramena pravih središta V normalna je na osnovi tog pramena. Zato duž, određena bilo kojom tačkom neke prave hiperboličnog pramena pravih središta V i tačkom preseka sa osnovom v tog pramena, predstavlja rastojanje te tačke od osnove. Neka je X bilo koja tačka kruga $\overline{G}_{Vh}(A)$ geometrije EH. Na osnovu primene posledice 15. (str.148. rada) postoji epiciklička rotacija te grupe simetrija $\overline{G}_{Vh}$, u odnosu na koji je definisan taj krug, koja tačku A preslikava na tačku X. Ako su tačke A_1 i X_1 tačke preseka osa VA i VX tog kruga sa njegovom osnovom v, tada ta rotacija preslikava i tačku A_1 na tačku X_1. Zato je rastojanje bilo koje tačke tog kruga od njegove osnove jednake rastojanju tačke A tog kruga od njegove osnove. Dakle krug $\overline{G}_{Vh}(A) = k(V,A)$ središta V i poluprečnika VA istovremeno je ekvidistanta e(v,A) osnove v i parametra AA_1 (A_1 je presek prave VA i osnove v) geometrije EH. Ovo je u skladu sa prethodno nagoveštenu činjenicu po kojoj je svaka (epiciklička) rotacija središta V istovremeno translacija ose v geometrije EH.

Ako je tačka A tačka osnove v hiperboličnog pramena pravih središta V geometrije EH, tada je VA poluprečnik degenerisanog kruga v te geometrije. Zato su rastojanja tačke V od tačaka osnove v međusobno podudarna i jednaka polovini dužine bilo koje prave tog pramena pravih. Ovo poslednje sledi iz toga što se u simetriji središta V svaki poluprečnik - poluprava tog pramena preslikava na njoj dopunsku polupravu u odnosu na pravu koja sadrži taj pluprečnik. Zato je zbir poluprečnika i parametra istog kruga - ekvidistante geometrije EH jednak polupravoj pramena pravih čije je središte središte tog kruga. Ako je degenerisani krug-ekvidistanta v krug -ekvidistanta hiperboličnog pramena polupravih središta V geometrije EH, tada je taj krug - ekvidistanta hiperbolični niz tačaka v te geometrije. Ako je on krug - ekvidistanta hiperboličnog pramena pravih središta V tada je taj krug - ekvidistanta dvaput uzeti hiperbolični niz tačaka v geometrije EH. Razlog tome je što u prvom slučaju grupa u odnosu na koji je definisan taj krug - ekvidistanta ne sadrži simetriju središta V (ose v) dok je u drugom slučaju sadrži (v. posledicu 2.11.). Osim osnove hiperboličnom pramenu pravih središta V pripadaju i degenerisani epicikli kako geometrije EH, tako i geometrije HH. Ako su ti epicikli epicikli pramena polupravih središta V ovih geometrija, tada su oni dva para polupravih izotropnih pravih tih geometrija koje sadrže tačku V. Pri tom ako se radi o epiciklima geometrije HH te poluprave su kraci ugla temena V koji sadrži jedan od dva pramena polupravih tog središta; ako su ti parovi polupravih epicikli geometrije EH, onda je svaki od tih epicikala par takvih polupravih koje su kraci onog ugla središta V koji sadrži jedan od pramenova polupravih hiperboličnog pramena pravih središta V geometrije EH. Lik koji odgovara dvogranom hiperciklu ravni ${}^1S_2$ je u tom slučaju skup tačaka izotropnih nizova tačaka kroz tačku V bez te tačke.

Oricikli ravni $^1S_2$ koji pripadaju idealnoj oblasti te ravni su oricikli paraboličnog pramena hiperboličnih nizova tačaka geometrije EH. Kao i u slučaju geometrije HH izotropni niz tačaka pomenutog paraboličnog pramena predstavlja degenerisani oricikl geometrije EH. Epicikli eliptičnih pramenova pravih ravni $^1S_2$ koji pripadaju idealnoj oblasti te ravni su ekvidistante eliptičnog pramena hiperboličnih nizova tačaka geometrije EH. Osnova tih ekvidistanti je osnova o eliptičnog pramena pravih središta O ravni $^1S_2$, čiji je presek sa idealnom oblasti te ravni eliptični pramena hiperboličnih nizova tačaka u odnosu na koji su definisane te ekvidistante. Ta osnova - degenerisana ekvidistanta opisanog skupa ekvidistanti - je dvaput uzeta prava geometrije EH.

9. Primena homotetija ravni $^1S_2$ na utvrđivanje odnosa trajektorija različitih geometrija te ravni.

Svaki epicikl ravni $^1S_2$ (pa dakle na osnovu prethodnog i svaki epicikl jedne od geometrije te ravni) invarijantan je u svakoj transformaciji grupe u odnosu na koju je definisan. Zato se može razmatrati i skup suženja elemenata te grupe na taj epicikl. Taj skup predstavlja grupu transformacija podudarnosti tog epicikla. Ova grupa je na osnovu načina na koji smo je uveli generisana simetrijama u odnosu na tačke tog epicikla, i svaki njen element je ili takva simetrija ili proizvod dve takve simetrije. Priroda te grupe i priroda odgovarajućeg epicikla u tesnoj su vezi. Tako na primer, jedino u slučaju kada je u pitanju epicikl eliptičnog pramena pravih proizvod dve simetrije u odnosu na dve tačke epicikla predstavlja identičnu transformaciju. Primenjujući definiciju 4. (str.57. rada) na taj slučaj, možemo zaključiti da su takve dve tačke suprotne. U skupu tačaka istog epicikla mogu se definisati relacija između, odnosno relacija razdvojenosti parova tačaka, a pošto je skup likova tog epicikla svaki nepprazan skup njegovih tačaka, ima smisla kao osnovnu relaciju smatrati i relaciju incidencije. Za dva lika epicikla smatramo da su podudarna ako postoji transformacija podudarnosti tog epicikla koja jedan od tih likova preslikava na onaj drugi. Jednom reči, kao što se može govoriti o geometriji prave može se govoriti i o geometriji epicikla. Osnovni pojam te geometrije je tačka. Pre nego što ukažemo na izomorfizme geometrija epicikala pramenova pravih iste vrste ravni ${}^1S_2$ primetimo da se na prethodni način ne mogu definisati dvograni hipercikli. Međutim ovo ne predstavlja značajniji nedostatak pošto je prema teoremi 5.22. svaki takav hipercikl unija dva (jednograna) hipercikla.

Izomorfizam između ma koja dva epicikla eliptičnog pramena pravih središta O ravni ${}^1S_2$ različita od tačke O može se ostvariti homotetijom te ravni središta O i ose o =W(O) koja tačku jednog od tih epicikala preslikava na tačku onog drugog. Pošto je ta homotetija element normalizatora grupe G_{Oh}, na osnovu teoreme 5.20. ona i taj epicikl preslikava na drugi od tih epicikala. Na osnovu toga može se zaključiti da su ekvidistante geometrija HH i EH po svojim osobinama istovetne krugovima geometrije HE . Ovo je u skladu i sa sledećom činjenicom. Svaka ekvidistanta osnove o geometrije HH (EH) predstavljena je u glavnom modelu tih geometrija epiciklom e eliptičnog pramena pravih osnove o i središta O = W(o) koji pripada idealnoj oblasti ravni ${}^1S_2$ (ako pod ekvidistantom geometrije EH ne podrazumevamo i ekvidistantu - krug). Neka je e_1 epicikl sopstvene oblasti ravni ${}^1S_2$ istog pramena pravih središta O. Homotetija središta O i ose o koja epicikl e_1 preslikava na epicikl e, apsolutu k ravni ${}^1S_2$ preslikava na apsolutu k' slike ${}^1S_2'$

ravni ${}^{1}S_{2}$ pri preslikavanju tom homotetijom. Pošto epicikl e_1 pripada sopstvenoj oblasti ravni ${}^{1}S_{2}$, njegova slika e pripadaće sopstvenoj oblasti ravni ${}^{1}S_{2}'$. Geometrija te oblasti je Beltrami-Klajnov model geometrije Lobačevskog, pa epicikl e predstavlja krug središta O te geometrije.

Na osnovu teoreme 5.20. homotetije središta O ose o, kao bijekcije ravni ${}^{1}S_{2}$, ne mogu preslikavati nijedan epicikl pramena pravih središta O na osnovu o tog pramena. Uostalom na osnovu teoreme 5.24.(kojom smo skup nedegenerisanih epicikala datog pramena pravih identifikovali sa skupom nedegenerisanih krivih odgovarajuće familije konika) i svojstva projektivnih kolineacija to je nemoguće i za kolineacije različite od homotetija. Na osnovu leme na str.185. osa pramena središta O seče svaki nedegenerisani epicikl tog eliptičnog pramena pravih u dvema, a pravu o u jednoj tački. Preslikavanje koje svake dve tačke određenog nedegenerisanoga epicikla pramena pravih središta O koje pripadaju istoj osi preslikava na tačku preseka te ose i osnove tog pramena pravih je sirjekcija tačaka tog epicikla na tačke osnove. Na osnovu posledice 2.11. jednostavno se dokazuje da je ta sirjekcija homomorfizam geometrije koja odgovara tom epiciklu i osnovi o pramena pravih središta O. Ova osnova je ne samo prava geometrije EH, već i projektivna prava. Na osnovu prethodnog može se zaključiti da je geometrija prave geometrije EH, tretirane kao degenerisane ekvidistante eliptičnog pramena hiperboličnih nizova tačaka geometrije EH, homomorfna geometriji bilo koje ekvidistante te geometrije čija je osnova ta prava. Svaka od tih ekvidistanti "obavija" odgovarajuću osnovu na isti način kao što ivica Mebiusove trake obavija "dvaput" njenu srednju liniju. Iz izomorfizma geometrija ekvidistanti geometrije EH (HH) i krugova geometrije HE (Beltrami-Klajnovog modela geometrije Lobačevskog i prethodnog sledi i homomorfizam geometrija prave geometrije EH i geometrije kruga Lobačevskog. Kako je geometrija prave geometrije EH izomorfna geometriji prave eliptične geometrije prethodni zaključci odnose se i na odgovarajuće odnose geometrije prave eliptične geometrije. Identifikovanjem tačaka odgovarajućeg epicikla (ekvidistante ili kruga) koje su simetrične u odnosu na središte tog epicikla pomenutu sirjekciju prevodimo u bijekciju , a odgovarajući homomorfizam u izomorfizam. Ovo identifikovanje simetričnih tačaka ima za posledicu identifikovanje svaka dva elementa grupe G_{Oh} takva da je jedan od njih proizvod simetrije h_O te grupe i onog drugog elementa.

Slično kao u prethodnom slučaju pokazuje se da je geometrija bilo kog kruga geometrije HH(ali kruga koji odgovara jednogranom hiperciklu) izomorfna geometriji odgovarajuće ekvidistante geometrije Lobačevskog (takođe jednograne). Preslikavanje ostvareno na taj način što se presečne tačke osa hiperboličnog pramena prve vrste u odnosu na koji su definisani hipercikli koji predstavljaju odgovarajući krugove i ekvidistante sa jednim od tih hipercikala i sa osnovom v smatraju odgovarajućim, je u ovom slučaju bijekcija. Na osnovu toga sledi da je geometrija bilo kog kruga datog pramena polupravih geometrije HH ili geometrija ma koje ekvidistante (jednograne) geometrije Lobačevskog izomorfna geometriji prave geometrije Lobačevskog.

Izotropnom homologijom u odnosu na jednu od izotropnih pravih pramena pravih središta V, prema teoremi 5. 25., ostvaruje se izomorfizam geometrije bilo kog (jednogranog) hipercikla prve i geometrije odgovarajućeg hipercikla druge vrste. Iz ovoga sledi da je geometrija ma koje ekvidistante (jednograne) geometrije Lobačevskog ili kruga geometrije HH izomorfna geometriji kruga - ekvidistante geometrije EH, pri čemu su pomenuti likovi epicikli istog hiperboličnog pramena pravih središta V ravni ${}^1S_2$. Iz ovoga takođe sledi da je geometrija prave geometrija Lobačevskog izomorfna geometriji prave geometrije HH.

Svi prethodni zaključci ne moraju se vezivati za epicikle istog pramena pravih ravni ${}^1S_2$ zahvaljujući tome što se odgovarajuće bijekcije (sirjekcije) kojima se ostvaruju pomenuti izomorfizmi (homomorfizmi) umesto homotetijama mogu ostvariti preslikavanjima sličnosti iz središta datog do središta odgovarajućeg pramena pravih ravni ${}^1S_2$.

Izomorfnost geometrija oricikala geometrije Lobačevskog, ili geometrije HH (EH) ili jedne i druge geometrije ostvaruje se odgovarajućom elacijom čije je središte središte pramena pravih u odnosu na koji su definisani ti oricikli, a osa osnova tog pramena pravih. Izomorfizam geometrije oricikla i osnove njemu odgovarajućeg pramena pravih ostvaruje se "projektovanjem" tačaka tog oricikla na tačke te osnove pri čemu je tačka koja odgovara tački oricikla tačka preseka tangente oricikla u toj tački i osnove odgovarajućeg pramena pravih.

U vezi sa geometrijama oricikala raznih pramenova pravih važi isto ono što smo povodom odgovarajuće situacije u slučaju hipercikala izložili.

10. <u>Trajektorije grupa simetrija nizova tačaka ravni ${}^1S_2$ i nizova tačaka geometrija ravni</u> ${}^1S_2$. U tački 3. § 1. pokazali smo da se epicikli ravni ${}^1S_2$ mogu definisati i kao trajektorije grupe simetrija nizova tačaka te ravni. U nekim od geometrija ravni ${}^1S_2$ kao i u slučaju definisanja dvogranih hipercikala u svim tim geometrijama ova definicija ima izvesnu prednost. Najpre ćemo ukazati na primere prve vrste. U prvom delu ove tačke pokazali smo da se ni ekvidistante, ni oricikli geometrije EH ne mogu definisa-

ti kao trajektorije grupe simetrija pramenova pravih te geometrije. Umesto grupe simetrija pramenova pravih bilo je neophodno pomenute likove definisati kao trajektorije pramenova nizova tačaka te ravni. Tako je bilo koja ekvidistanta osnove o definisane kao trajektorija grupe simetrija eliptičnog pramena hiperboličnih nizova tačaka geometrije EH. Izvestan nedostatak ove definicije sastoji se u tome što hiperbolični niz nije osnovni pojam geometrije EH. Ovaj nedostatak bez ikakvih teškoća prevazilazi se definisanjem ekvidistante osnove o kao grupe simetrija niza tačaka te osnove koji je u ovom slučaju skup svih tačaka prave o geometrije EH. Svaka simetrija te grupe je simetrija u odnosu na tačku geometrije EH; svaka simetrija grupe simetrija eliptičnog pramena hiperboličnih nizova geometrije EH nije simetrija u odnosu na pravu, već u odnosu na skup tačaka koji smo nazvali hiperboličnim nizom tačaka i koji nije osnovni pojam te geometrije. Primedba iste vrste odnosi se i na definiciju oricikala geometrije EH.

Kao i u slučaju likova koji odgovaraju dvogranim hiperciklima ravni ${}^1S_2$, i u geometriji Lobačevskog bilo je nemoguće dvograne ekvidistante definisati kao trajektorije grupe simetrija datog pramena pravih. Naime, za njihovo definisanje u duhu trajektorija bilo je neophodno proširiti grupu simetrija hiperboličnog pramena pravih simetrijom u odnosu na osnovu tog pramena koja nije prava tog pramena. Na osnovu teoreme 4.19. po kojoj je dvograni hipercikl prve vrste $\bar{E}_V(X)$ istovetan trajektoriji tačke X u odnosu na grupu $\bar{G}_{Vh}$ moguće je prevazići nedostatak na koji smo ukazali. Grupa $\bar{G}_{Vh}$ je grupa simetrija hiperboličnog pramena pravih druge vrste ravni ${}^1S_2$. Ako je tačka V središte tog pramena, tada je središte svake simetrije te grupe tačka hiperboličnog niza tačaka druge vrste tj. tačka one projektivne duži polare v tačke V, koja je presek prave v sa sopstvenom oblašću ravni $^1S_2$. Ova duž u Beltrami-Klajnovom modelu geometrije Lobačevskog predstavlja osnovu hiperboličnog pramena pravih u odnosu na koji je definisana razmatrana ekvidistanta. Simetrije u odnosu na te tačke su generatori grupe simetrija niza tačaka prave v koju smo u t.3. § 1. označili sa $\overline{G}_{vh}$. Dvograni hipercikl prve vrste $G_V(X)$ koji, ako X pripadasopstvenoj oblasti ravni $^1S_2$ predstavlja dvogranu ekvidistantu geometrije Lobačevskog koja sadrži tačku X i čija je osnova v, istovetan je trajektoriji $\overline{G}_{vh}(X)$. Ukoliko želimo da u odnosu na grupu vezanu sa nizom tačaka osnove v definišemo samo (jednogranu) ekvidistantu dovoljno je umesto grupe simetrija tog niza tačaka koristiti njenu pravu podgrupu čiji su elementi proizvodi po dve simetrije od kojih je svaka simetrija u odnosu na tačku prave v. Ove elemente smo u pomenutoj t.3. takođe nazvali epicikličkim rotacijama (translacijama). U konkretnom slučaju to su translacije osnove v, a ta grupa je grupa translacija te osnove.

Na isti način možemo postupiti i prilikom definisanja krugova - ekvidistanti središta V - osnove v geometrije EH kada ti likovi odgovaraju dvogranim hiperciklima druge vrste pramena pravih istog središta V ravni $^1S_2$. Takve krugove - ekvidistante definisali smo u geometriji EH kao trajektorije hiperboličnog pramena hiperboličnih nizova središta V. I njih, kao i odgovarajuće likove u izomorfizmu na koji smo ukazali u prvom delu ove tačke, - dvograne ekvidistane geometrije Lobačevskog, možemo definisati kao trajektorije grupe generisane simetrijama hiperboličnog pramena pravih središta V i simetrijom u odnosu na osnovu v tog pramena. U prvom slučaju definisali smo ih kao trajektorije pramena, ali ne (pramena) pravih geometrije EH; nijenda od tih simetrija nije simetrija u odnosu na pravu geometrije EH. U drugom slmčaju simetrija u odnosu na središte V tj. pravu v nije simetrija u odnosu na pravu pramena pravih središta V. Na osnovu teoreme 4.19. grupi simetrija hiperboličnog pramena hiperboličnih nizova središta V odgovara grupa simetrija G_{vh} hiperboličnog pramena pravih prve vrste središta V ravni $^1S_2$. Toj grupi odgovara grupa simetrija G_{vh} hiperboličnog niza tačaka prve vrste (v.str.136.). Taj niz tačaka je skup tačaka osnove v hiperboličnog pramena pravih središta V geometrije EH. Ukoliko želimo da na isti način definišemo i krug - ekvidistantu hiperboličnog pramena polupravih središta V geometrije EH, dovoljno je da umesto grupe G_{vh} koristimo njenu pravu podgrupu čiji su elementi proizvodi po dve simetrije grupe G_{vh}.

Definisanje epicikala geometrija ravni $^1S_2$ na pokazani način nije moguće jedino u slučaju krugova i oricikala ravni Lobačevskog. Iz tog razloga definicmju epicikala kao trajektorija grupe simetrija nizova tačaka predlažemo samo kao definicuju epicikala geometrija EH i HH.

Uzimajućm u obzir da je geometrija EH dualna geometriji Lobačevskog (kao i model geometrije HH u geometriji Lobačevskog - v.I § 4.) ovu definiciju možemo tumačiti i na drugi način. Pošto pravama geometrije Lobačevskog odgovaraju tačke geometrije EH, pramenu pravih geometrije Lobačevskog u toj dualnosti odgovara prav niz tačaka geometrije EH. Ako upoređujemo projektivne modele ovih geometrija u istoj ravni $^1S_2$ pramenu pravih središta O geometrije Lobačevskog odgovara niz tačaka polare o te tačke u odnosu na apsolutni polaritet. Prema rezultatima izloženim u I § 5., simetriji u odnosu na pravu pramena pravih središta O geometrije Lobačevskog u pomenutoj dualnosti odgovara simetrija u odnosu na tačku pravog niza tačaka prave o.

Tački X koja je predstavnik određenog epicikla središta O geometrije Lobačevskog odgovara prava x geometrije EH. Slikama tačke X pri preslikavanju elementima grupe simetrija G_{Oh} geometrije Lobačevskog odgovaraju, u toj dualnosti, slike prave x u elementima grupe simetrija G_{oh} niza tačaka prave o geometrije EH. Prema tome trajektoriju $G_{oh}(x)$ geometrije EH možemo smatrati trajektorijom prave x definisanom u odnosu na grupu simetrija G_{oh} niza tačaka geometrije EH.

§ 2. Trajektorije snopova ravni prostora ${}^1S_3$

U uvodnom delu rada dali smo pregled klasifikacije projektivnih metrika ppojektivnih n-prostora oslanjajući se uglavnom na odgovarajući sadržaj dela B.A.Rozenfeljda koji smo spisku literature označili sa /27/. Metrike datog prostora zavise od prirode apsolute tog prostora i oblasti na koje apsoluta razlaže taj prostor. Prošireni 3-prostor Lobačevskog je prema terminologiji predloženoj u /27/ projektivni 3-prostor[53] u kome je apsoluta ovalna nedegenerisana površ drugog reda (ovalna kvadrika). Ovaj prostor ćemo kao i u /27/ označavati sa ${}^1S_3$. Prostor ${}^1S_3$ je uopštenje ravni ${}^1S_2$ za n = 3. Epicikle ravni ${}^1S_2$ definisali smo kao trajektorije određenih grupa generisanih simetrijama te ravni u odnosu na prave istog pramena pravih. Episferama prostora ${}^1S_3$ nazivaćemo likove tog prostora koji u pomenutom uopštenju odgovaraju epiciklima ravni ${}^1S_2$. U skladu sa tim i oni će biti trajektorije određenih grupa prostora ${}^1S_3$ koje su uopštenje grupa simetrija pramenova pravih ravni ${}^1S_2$. Simetrijama ravni ${}^1S_2$ nazvali smo harmonijske homologije te ravni kojima su centar i osa pol i polara u odnosu na polaritet određen apsolutom te ravni. Pošto automorfizmi i samo automorfizmi apsolute predstavljaju transformacije podudarnosti svake od geometrija ravni ${}^1S_2$ te automorfizme nazvali

---

53)Trodimenzioni prostor (način označavanja koji je takođe preuzet iz /27/).

smo transformacijama podudarnosti te ravni, a grupu tih
automorfizama označili sa G. Pokazali smo i na koji se na-
čin svaki element te grupe predstavlja kao proizvod od na-
javiše dve simetrije te grupe (što je uostalom dobro pozn-
ato, ali smo to detaljnije obrazložili i primenjivali). U
radu /7/ utvrdili smo sve vrste kolineacija prostora ${}^1S_3$
koje, po analogiji sa ravni ${}^1S_2$, predstavljaju transforma-
cije podudarnosti tog prostora. Grupu tih kolineacija ta-
kođe smo označili sa G. Zatim smo u tom radu dokazali da
se svaka takva kolineacija može predstaviti kao proizvod
od najviše četiri harmonijske homologije grupe G, gde smo
pod harmonijskim homologijama te grupe podrazumevali harm-
onijske homologije odgovarajućeg projektivnog prostora či-
ji su centri i osnova pol i polarna ravan u odnosu na pol-
aritet određen apsolutom. Takođe smo za svaku vrstu kolin-
eacija grupe G odredili njihovu "minimalnu" harmonijsku re-
prezentaciju. Na osnovu svega toga prirodno je harmonijske
homologije čiji su centri i osnove uzajamno polarni u apso-
lutnom polaritetu nazvati simetrijama prostora ${}^1S_3$. Iste
tako i grupu generisanu simetrijama prostora ${}^1S_3$ čije osno-
ve sadrže istu tačku O prirodno je smatrati uopštenjem gru-
pe simetrija pramena pravih ravni ${}^1S_2$. Pošto svaka osnova
generatora te grupe sadrži istu tačku, taj skup predstavlja
snop ravni središta O. Zato ćemo ovu grupu nazivati grupom
simetrija snopa ravni središta O. I nju ćemo, kao i odgova-
rajuću grupu ravni ${}^1S_2$, označavati uglavnom sa G_{Oh}, a jedi-
no kada postoji mogućnost da se značenje ove oznake protuma-
či kao oznaka grupe ravni ${}^1S_2$ sa 3-G_{Oh}. U prethodnom delu
rada pokazalo se da vrste epicikala ravni ${}^1S_2$, kao i njiho-
va svojstva neposredno zavise od prirode grupe simetrija u
odnosu na koju su oni definisani. Zato ćemo sledeću tačku
posvetiti grupama simetrija snopova ravni prostora ${}^1S_3$.

1. Grupe simetrija snopova ravni prostora $^1S_3$. Na osnovu poznatog opšteg svojstva polariteta odredenog datom kvadrikom sledi da je skup središta simetrija u odnosu na ravni koje pripadaju istom snopu ravni središta O skup tačaka ravni W(O) gde je W apsolutni polaritet prostora $^1S_3$. Ovo je prva karakteristika koja ukazuje na razliku između snopa ravni projektivnog i snopa ravni prostora $^1S_3$: u projektivnom snopu ravni osim ravni snopa ne postoji nijedna druga ravan koja igra istaknutu ulogu. Ako središte snopa ravni pripada sopstvenoj oblasti prostora $^1S_3$ takve snopove nazivaćemo eliptičnim; ako je središte tačka apsolute, takav snop je paraboličan. Ali pošto projektivna ravan odgovarajućeg projektivnog snopa ravni istog središta koja je tangentna ravan apsolute nije osnova nijedne simetrije prostora $^1S_3$, tu ravan nećemo smatrati ravni odgovarajućeg paraboličnog snopa ravni. Ni tangentne ravni projektivnog snopa ravni čije je središte V tačka idealne oblasti prostora $^1S_3$ nisu osnove nijedne simetrije odgovarajuće grupe simetrija hiperboličnog snopa ravni središta V prostora $^1S_3$ - ni ove ravni ne smatramo ravnima hiperboličnog snopa ravni tog prostora. Prema tome, u skupovnom smislu, jedino je eliptičan snop ravni prostora $^1S_3$ istovetan odgovarajućem snopu ravni odgovarajućeg projektivnog prostora.

U radu /7/ (v.str.181.) dokazali smo da je skup svih harmonijskih homologija hiperboličnog snopa ravni čije osnove seku apsolutu i čija su središta polovi tih osnova u apsolutnom polaritetu i skup svih konačnih proizvoda tih homologija grupa. Pošto u tom dokazu koristimo isključivo svojstvo involutivnosti tih harmonijskih homologija, naisti način bismo to mogli dokazati i za skup generisan harmonijskim homologijama u odnosu na ravni hiperboličnog snopa ravni čije osnove ne seku apsolutu. To isto važi - iz istih razloga

- i za skup generisan harmonijskim homologijama u odnosu na bilo kakve ravni hiperboličnog snopa ravni. Ovo se odnosi i na paraboličan i eliptičan snop ravni. Ako sa G_O označimo grupu automorfizama središta O snopa ravni prostora $^1S_3$, čija je odgovarajuća grupa simetrija označena sa G_{Oh}, međusobni odnosi tih grupa za razne vrste snopova ravni tog prostora utvrđeni su teoremom 4 (/7/ str.182.). Na osnovu posledice 5. istog rada (/7/ str.186.) možemo formulisati uopštenje teoreme 6. (rad str.118.) po kome u predstavljanju elemenata grupe simetrija snopova ravni simetrijama te grupe učestvuje jedna, dve ili najviše tri takve simetrije.

S obzirom da smo se u dokazima teoreme koje se odnose na ravan $^1S_2$ koristili teoremama teorije grupa i nekim najopštijim teoremama algebre, kao i u slučaju navedene teoreme, i većina ostalih teorema su neposredna uopštenja teorema koje smo izveli u delu rada koji se odnosio na ravan $^1S_2$. Tako se, iz neznatnu odgovarajuću izmenu koja proističe iz izmene u uopštenju teoreme 6. može formulisati uopštenje teoreme 11. (rad str. 124.). U sadržaju tog uopštenja pod h_V u prostoru $^1S_3$ podrazumevamo simetriju u odnosu na središte snopa V. Izmena o kojoj je prethodno bilo reči sastoji se u tome što u ovom slučaju postoje i elementi klase susedne klasi $G_{Vh}(\overline{G}_{Vh})$ koji su proizvodi simetrije h_V i proizvoda po tri simetrije grupe $G_{Vh}(\overline{G}_{Vh})$. I u slučaju grupe simetrija snopova ravni prostora $^1S_3$ pojmovi epicikličke rotacije te grupe simetrija 3-ima smisla, kao i epicikličke rotacije mešovitih osa u slučaju rada je odgovarajući snop hiperboličan. Takođe se te epicikličke rotacije mogu smatrati epicikličkim translacijama ako zavisne od oblasti prostora $^1S_3$ osnova snopa ravni igra značajniju ulogu od njegovog središta. Na osnovu teoreme 5.(/7/ str.185.) skup epicikličkih rotacija određene grupe simetrija snopa ravni prostora $^1S_3$ takođe predstavlja grupu, a iz dokaza te teoreme sledi da je ta grupa prava podgrupa odgovarajuće grupe simetrija. Ovo ukazuje da bi se i u prostoru ${}^1S_3$ mogla ustanoviti definicija trajektorija snopova ravni tih geometrija, alternativna uobičajenoj.

Epicikl paraboličnog snopa ravni prostora ${}^1S_3$ nazivaćemo orisferom tog prostora. Pošto smo pokazali da sem grupe simetrija hiperboličnog snopa ravni središta V postoje i dve njene podgrupe koje su generisane, jedna simetrijama u odnosu na ravni tog hiperboličnog snopa koje seku apsolutu i koje obrazuju hiperboličan snop ravni prve vrste, i druga generisana simetrijama u odnosu na ravni hiperboličnog snopa središta V druge vrste, i u prostoru ${}^1S_3$ postoje dve vrste hipersfera od kojih svaka može biti jednograna ili dvograna. Dok je u ravni ${}^1S_2$ ulogu "granice" između hiperboličnog pramena prve i hiperboličnog pramena druge vrste istog središta imao projektivni ugao određen izotropnim pravama koje sadrže to središte, u prostoru tu ulogu ima izotropni konus čiji vrh predstavlja središte datog snopa ravni. Ovaj konus obrazuje izotropne ravni prostora ${}^1S_3$ koje sadrže središte pomenutog snopa, odnosno izotropne prave koje sadrže to središte. Ovaj konus sa osnovom odgovarajućeg snopa ravni razlaže prostor ${}^1S_3$ na tri oblasti. Dve od njih pripadaju onoj oblasti konusa koja sadrži apsolutu. Hiperboličan snop ravni prve vrste središta V je skup svih onih ravni hiperboličnog snopa ravni istog središta koje seku "granični konus" vrha V; hiperboličan snop ravni druge vrste je skup svih onih ravni odgovarajućeg hiperboličnog snopa ravni koje taj konus ne seku. Trajektoriju $G_{Vh}(X)$ gde X pripada onoj oblasti graničnog konusa vrha V koja sadrži apsolutu nazivamo hipersferom prve vrste; trajektoriju $\overline{G}_{Vh}(\overline{X})$ gde smo sa $\overline{X}$ označili da X pripada onoj drugoj oblasti tog graničnog konusa nazivamo hipersferom druge vrste. Trajektorije $G_V(X)$ gde je G_V grupa simetrija ("celog") hiperboličnog snopa ravni središta V nazivamo dvogranom hipersferom prve ili druge vrste, zavisno od toga da li je tačka X tačka oblasti graničnog konusa koja sadrži ili ne sadrži apsolutu. Ako je X tačka graničnog konusa, tada je odgovarajuća trajektorija grupe simetrija hiperboličnog snopa ravni degenerisana. Ako je ta grupa simetrija G_{Vh}, onda je ta trajektorija ona "kupa" graničnog konusa bez njegovog vrha V i bez osnove "koju predstavlja konika po kojoj granični konus dodiruje apsolutu, koja sadrži tačku X. Ako je ta grupa grupa simetrija G_V hiperboličnog snopa ravni (i onih koje seku i onih koje ne seku apsolutu), onda je ta trajektorija granični konus bez vrha i krive drugog reda po kojoj taj konus dodiruje apsolutu. Ova kriva je istovremeno presek ravni polarne središtu V hiperboličnog snopa ravni i takođe predstavlja degenerisanu trajektoriju tog snopa ravni. Osim nabrojanih degenerisana trajektorija pomenutog snopa ravni su još jedino središte tog pramena, unutrašnjost pomenute dodirne krive kao i njena spoljašnjost. Dakle polarna ravan središta hiperboličnog snopa ravni sadrži tri degenerisane hipersfere tog snopa: presek te ravni sa apsolutom, njen presek sa unutrašnjošću i njen presek sa spoljašnjošću apsolute. Ta ravan je jedina ravan koja sadrži hipersfere odgovarajućeg snopa ravni različite od tačke.

U slučaju eliptičnog snopa ravni osim središta tog snopa jedina degenerisana episfera je osnova tog snopa. I ona je jedina ravan prostora ${}^1S_3$ koja sadrži episferu eliptičnog snopa ravni različitu od tačke. Jedina razlika u pomenutom smislu između skupa ovih sfera paraboličnog snopa ravni središta D i odgovarajućeg skupa episfera eliptičnog snopa što osnova paraboličnog snopa sadrži jednu orisferu više - središte D. Druga degenerisana erisfera je osnova snopa bez tačke D. Iz činjenice da grupa simetrija eliptičnog snopa ravni sadrži i simetriju u odnosu na središte tog snopa, a da grupa simetrija paraboličnog snopa ne sadrži simetriju u odnosu na središte tog snopa sledi da je osnova snopa u prvom slučaju dvaput "uzeta" tj. da je shvatimo kao dve ravni koje su se poistovetile, dok u slučaju paraboličnog snopa nema te "dvostrukosti".

2. Homotetije i transformacije sličnosti prostora $^1S_3$. I u skupu svih projektivnih kolineacija prostora $^1S_3$ osim kolineacija grupe G ističu se i normalizatori grupa simetrija snopova ravni tog prostora, kao i proizvodi elemenata tih normalizatora i elemenata grupe G. Elementi normalizatora grupe simetrija G_{Oh} snopa ravni datog središta O prostora $^1S_3$ u skupu svih projektivnih kolineacija tog prostora su jedine kolineacije prostora $^1S_3$ različite od transformacija grupe simetrija G_{Oh} koje bilo koju episferu definisanu u odnosu na tu grupu preslikavaju na neku episferu koja je takođe definisana u odnosu na grupu G_{Oh}. Ovo je upravo uopštenje teoreme 5.20. na prostor $^1S_3$. Dokaz ove teoreme je analogan dokazu teoreme 5.20. te ga nećemo ponavljati. To se odnosi i na uopštenje posledice 5.16. po kome je svaka harmonijska homologija izvedena iz bilo koje simetrije grupe G_{Oh} prostora $^1S_3$ takođe simetrija te grupe, pod uslovom da je pomenuto konjugovanje izvedeno elementom normalizatora grupe G_{Oh}. Ako je konjugovanje izvedne bilo kojom homologijom čije je središte tačka O, a osnova snopa ravni središta O, tada je simetrija izvedena iz date simetrije ta ista simetrija. Iz ovoga sledi da je svaka takva homologija element normalizatora grupe G_{Oh}. Kao i u slučaju ravni $^1S_2$ zaključujemo da i u prostoru $^1S_3$ važi uopštenje posledice 17. (str. 158.).

Međutim u slučaju prostora $^1S_3$ ne radi se o apsolutnoj involuciji prave o, već o apsolutnom polaritetu osnove odgovarajućeg snopa ravni. Ovaj apsolutni polaritet možemo smatrati suženjem apsolutnog polariteta prostora $^1S_3$ određenog apsolutom na osnovu tog snopa. Ako je snop eliptičan, tada je apsolutni polaritet njegove osnove eliptičan. Ako je snop ravni hiperboličan, tada je i apsolutni polaritet osnove tog snopa hiperboličan. Taj polaritet određen je presekom osnove snopa i apsolute prostora $^1S_3$. Ako je snop paraboličan, tada je apsolutni polaritet njegove osnove degenerisan. U tom polaritetu svakoj tački osnove različitoj od tačke dodira osnove i apsolute odgovara prava koja sadrži tu tačku dodira. Međutim toj tački dodira odgovara bezbroj polara osnove. Određeivanje vrste elemenata normalizatora grupe simetrija eliptičnog snopa ravni praktično ne predstavlja problem jer su ti elementi prema prethodnom ili transformacije te grupe simetrija ili projektivne kolineacije prostora $^1S_3$ koje bi predstavljale transformacije sličnosti čije je središte središte razmatranog snopa ravni, onog projektivnog modela trodimenzione euklidske geometrije u projektivnom prostoru koji sadrži apsolutu prostora $^1S_3$, u kome je beskonačno daleka ravan osnova tog eliptičnog snopa ravni. Na taj način smo uostalom odredili i sve vrste elemenata normalizatora grupe simetrija eliptičnog pramena pravih ravni $^1S_2$(teorema 5.21. na str.161.). Iz toga bi sledilo uopštenje posledice 5.18. po kojoj bi u ovom slučaju svaki element normalizatora grupe simetrija eliptičnog snopa ravni bio proizvod neke transformacije te grupe i homologije čije su središte i osnova središte i osnova tog eliptičnog snopa ravni. I u ovom slučaju kao i u odgovarajućem dvodimenzionom slučaju sasvim jednostavno se dokazuje da redosled komponenata u tom proizvodu nema uticaja.

Određivanje vrsta normalizatora grupe simetrija hiperboličnog snopa ravni, mada složenije, u načelu je istovetno prethodno izloženom načinu određivanja tih vrsta u slučaju eliptičnog snopa ravni. I ovde su ti elementi ili elementi te grupe simetrija, ili projektivne kolineacije koje bi predstavljale transformacije sličnosti čije je središte središte razmatranog snopa ravni onog projektivnog modela trodimenzione pseudoeuklidske geometrije istog projektivnog prostora u kome beskonačno daleku ravan predstavlja osnova tog hiperboličnog snopa ravni. Apsolutni polaritet te ravni određen njenim presekom sa apsolutom prostora $^1S_3$ i za odgovarajući pseudoeuklidski prostor je od bitnog značaja. Pošto je ta ravan ravan $^1S_2$ skup transformacija prostora $^1S_3$ (ili njemu u prethodnom smislu odgovarajućeg pseudoeuklidskog prostora) koje apsolutni polaritet preslikavaju na taj isti polaritet je skup transformacija koje apsolutu te ravni $^1S_2$ preslikavaju na samu sebe. Ove transformacije predstavljaju transformacije sličnosti pomenutog pseudoeuklidskog prostora (v./27/,str.267.). Sve projektivne kolineacije prostora $^1S_3$ koje presek apsolute tog prostora sa osnovom datog hiperboličnog snopa ravni središta V preslikavaju na taj isti presek, preslikavaju i tu osnovu na tu istu osnovu. Ako su te kolineacije i elementi normalizatori grupe G_{Vh}, ili grupe koja je sadrži G_V, na isti način kao i u oodgovarajućem dvodimenzionom sličaju pokazuje se da ti elementi preslikaju središte V na to isto središte. Homologija čiji je centar tačka apsolute ravni $^1S_2$ koja pripada osnovi razmatranog hiperboličnog snopa ravni, i čija je osnova bilo koja tangentna ravan graničnoga (izotropnog) konusa središta V mada zadovoljava ovaj poslednji uslov - središte V i osnova tog hiperboličnog snopa ravni preslikava na to isto središte i tu istu osnovu - nije element normalizatora grupe G_{Vh} jer "apsolutu" osnove snopa ne preslikava na tu istu apsolutu. U odgovarajućem dvodimenzionom slučaju homologije koje odgovaraju prethodno opisanim homologijama nazvali smo izotropnim i pokazali da pripadaju normalizatoru grupe simetrija odgovarajućeg hiperboličnog pramena pravih. Osnovni razlog ove razlike je utome što u dvodimenzionom slučaju "apsolutu" osnove hiperboličnog pramena pravih predstavlja par tačaka, koje su u odgovarajućem "pseudoeuklidskom slučaju" poznate kao cikličke tačke. S obzirom da u prostoru $^1S_3$ "izotropne" homologije ne pripadaju normalizatoru grupe simetrija odgovarajućeg hiperboličnog snopa ravni, u trodimenzionom slučaju neće postojati transcedentne homotetije, niti transformacije sličnosti koje hipersfere jedne preslikavaju na hipersfere druge vrste. Pošto u odgovarajućeg "pseudoeuklidskom slučaju" ove hipersfere predstavljaju sfere središta V iz ovoga zaključujemo da ne pstoje ni transformacije sličnosti pseudoeuklidskog prostora koje sferu jedne preslikavaju na sferu druge vrste (realne na idealne sfere i obratno). Prema prethodnom svaka transformacija sličnosti središta V, gde je V tačka idealne oblasti prostora $^1S_3$, može se predstaviti kao proizvod homologije središta O čija je osnova osnova hiperboličnog snopa ravni središta V i nekog elementa grupe simetrija tog snopa ravni. Po analogiji sa "euklidskim" i "psedudoeuklidskim" slučajem ovakve homologije nazivaćemo homotetijama odgovarajućeg središta. I u ovom slučaju, kao i u slučaju ravni $^1S_2$ sasvim jednostavno i po analogiji sa tim slučajem, dokazuje se da su homotetija središta V i element grupe simetrija G_{Vh} čiji proizvod predstavlja transformaciju sličnosti središta V komutativni. Analogije između transformacija sličnosti euklidskog, i transformacija prostora ${}^{1}S_{3}$ koje smo nazvali transformacijama sličnosti u određenoj tački tog prostora nije slučajna. Premа 5.1.4.(/27/ str.268.) prošireni N-euklidski prostor (R_n) može se dobiti graničnim prelazom iz n-prostora Lobačevskog ${}^{1}S_n$. Pri tom graničnom prelazu mnogostrukost tangentnih ravni apsolute prostora ${}^{1}S_n$ prelazi u mnogostrukost tanentnih ravni (n-2) - kvadrike beskonačne daleke ravni koje predstavljaju (ta ravan sa tom kvadrikom) apsolutu odgovarajućeg prostora R_n. Ta beskonačno daleka ravan dobijena je pri tom graničnom prolazu iz apsolute prostora ${}^{1}S_n$. I kvadrika te ravni koja u ovom slučaju predstavlja apsolutu (n-1) -eliptičnog metričkog prostora (S_{n-1}) dobija se pomenutim graničnim prelazom iz apsolute prostora ${}^{1}S_n$. Uglu dveju pravih prostora R_n odgovara rastojanje onih tačaka metričkog prostora S_{n-1} beskonačne daleke ravni, koje su beskonačno daleke tačke tih pravih. Kolineacija projektivnog prostora P_n koje ut kvadriku - apsolutu ravni S_{n-1} preslikavaju na nju samu su transformacije sličnosti prostora R_n. Pre svega ove kolineacije su afine transformacije prostora R_n jer preslikavajući apsolutu ravni S_{n-1} na tu istu apsolutu, preslikavaju i beskonačno daleku ravan na tu istu ravan. Međutim pošto preslikavaju apsolutu na apsolutu one predstavaljaju transformacije podudarnosti apsolutne ravni S_{n-1} te očuvavaju rastojanje tačaka te ravni. Iz toga sledi da ove transformacije očuvavaju i uglove između pravih prostora R_n.

Pseudoeuklidski prostor ${}^{i}R_n$(n-pseudoeuklidski prostor indeksa i) može se dobiti graničnim prelazom iz prostora ${}^{i}S_n$ i ${}^{n-i+1}S_n$(n-hiperboličnih prostora indeksa i). Zato se i apsoluta prostora ${}^{i}R_n$ takođe može dobiti graničnim prelazom iz apsolute odgovarajućeg hiperboličnog prostora (/27/5.1.4.). Pri tom graničnom prelazu apsoluta prostora ${}^{i}S_n$ prelazi u par ravni koje su istovetne beskonačno dalekoj ravni prostora ${}^{i}R_n$. Ali i mnogostrukost tangentnih ravni apsolute prostora ${}^{i}S_n$ pri tom graničnom prelazu prelazi u mnogostrukost tangentnih ravni (n-2) - kvadirke koja predstavlja apsolutu prostora ${}^{i}S_{n-1}$ beskonačne daleke ravni prostora ${}^{i}R_n$. Ovaj prostor ${}^{i}S_{n-1}$ naziva se apsolutom prostora ${}^{i}R_n$. Prema tome i apsoluta beskonačne daleke ravni prostora ${}^{i}R_n$ dobija se odgovarajućim graničnim prelazom apsolute prostora ${}^{i}S_n$. Pseudoeuklidski prostori indeksa 1 imaju istaknutu ulogu među pseudoeuklidskim prostorima jer je geometrija prostora ${}^{1}R_4$ geometrija koja odgovara Ajnštajnovoj specijalnoj teoriji relativnosti. Ovi prostori su prema prethodnom granični slučajevi N-prostora Lobačevskog (prostora ${}^{1}S_n$). Skup svih tangentnih ravni prostora ${}^{1}S_n$ koje pripadaju hiperboličnog snopu ravni središta V obrazuju (n-1) - izotropni konus vrha V. Ovaj konus dodiruju apsolutu prostora ${}^{1}S_n$ po (n-2) - kvadrici. Ravan koja sadrži tu kvadriku je polarna ravan tačke V u apsolutnom polaritetu tog prostora . Pošto, što smo posebno itakli pri pomenutom graničnom procesu sve tangentne ravni apsolute prelaze u tangentne ravni apsolute beskonačne daleke ravni, i tangentne ravni izotropnog konusa vrha V prećiće u tangentne ravni apsolute prostora ${}^{1}S_{n-1}$ beskonačne daleke ravni odgovarajućeg pseudoeuklidskog prostora. Iz ovoga slede dva važna zaključka. Prvi je da polarna ravan bilo koje tačke prostora ${}^{1}S_n$ pri tom graničnom procesu prelazi u beskonačnu daleku ravan odgovarajućeg pseudoeuklidskog${}_1$prostora. Iz toga neposredno sledi da sve tačke prostora R_n imaju istu polarnu ravan - beskonačno daleku ravan tog prostora. Drugi zaključak je da apsolutni polaritet osnove bilo kog hiperboličnog snopa ravni prostora ${}^{1}S_n$ prelazi u tom graničnom procesu u apsolutni polaritet beskonačno daleke ravni određen (n-2) - kvadrikom (apsolutom). Zato u tom graničnom procesu normalizatorv grupe simetrija G_{Vh} hiperboličnog snopa ravni datog središta V odgovara normalizator grupe simetrija bilo kog hiperboličnog snopa ravni odgovarajućeg pseudoeuklidskog prostora. S obzirom da svaki element normalizatora bilo koje grupe simetrija hipeerboličnog snopa ravni prostora ^1R_n preslikava apsolutni polaritet prostora $^1S_{n-1}$ beskonačno daleke ravni na taj isti polaritet, iz istih razloga kao u slučaju euklidskog prostora svaki element tog normalizatora predstavlja transformaciju sličnosti odgovarajućeg pseudoeuklidskog prostora. Zavisno od toga da li taj element pripada normalizatoru grupe simetrijehiperboličnog snopa ravni središta V ili npr. središta V_1 taj element je transformacija sličnosti središta V ili npr. središta V_1. Kako je u slučaju prostora ^1S_n svaki element normalizatora grupe simetrija hiperboličnog snopa ravni središta V permutabilan sa apsolutnim polaritetom osnove tog snopa ravni određenim presečnom (n-2) - kvadrikom apsolute prostora ^1S_n, taj element tu kvadriku preslikava na tu istu kvadriku. Kao što smo ranije pokazali nisu svi elementi normalizatora grupe G_{Vh} transformacije podudarnosti prostora ^1S_n. Među njima su takvi sve homolgije središta V čija je osnova osnova hiperboličnog snopa ravni središta V i svi proizvodi takvih homologija sa elementima grupe G_{Vh}. Zato svaki takav element normalizatora apsolutu prostora ^1S_n preslikava na (n-1) - kvadriku tog prostora različitu od apsolute. Međutim kako u ganičnom procesu ta apsoluta prelazi u beskonačno daleku ravan, u koju je prešla i osnova razmatranog hiperboličnog snopa ravni koju svaki element normalizatora grupe G_{Vh} prostora ^1S_n ostavlja invarijantnom, "granica" apsolute - beskonačno daleka ravan pseudoeuklidskog prostora je invarijantna svakog elementa normalizatora grupe simetrija bilo kog snopa ravni prostora ^1R_n. U istom graničnom procesu i apsolutni polaritet osnove bilo kog hiperboličnog snopa ravni prostora ^1S_n prelazi u apsolutni polaritet određen apsolutom ravni $^1S_{n-1}$. Kako je apsolutni polaritet osnove hiperboličnog snopa ravni prostora ^1S_n invarijantan u svakom elementu normalizatora odgovarajuće grupe simetrija, i njegova "granica" apsolutni polaritet ravni $^1S_{n-1}$ biće invarijantan pri preslikavanju bilo kojim elementom te grupe simetrija.

Smatramo da smo prethodnom analizom u potpunosti opravdali naziv "transformacije sličnosti" koji smo upotrebili za transformacije ravni $^1S_2$, čije je osnovno svojstvo da svaki epicikl iste grupe simetrija ravni $^1S_2$ preslikavaju na epicikl grupe simetrija koja je "slika" date grupe simetrija pri preslikavanju nekom transformacijom podudarnosti te ravni ili proizvodom takve transformacije sa nekim elementom normalizatora te grupe simetrije ili njene slike pri preslikavanju tom transformacijom podudarnosti. Ove transformacije otkrili smo pobuđeni težnjom da proučavanje epicikala ravni $^1S_2$ obogatimo novom metodom koja će dati i nove rezultate. Tu težnju smo u potpunosti ostvarili. Međutim pokazalo se da su te transformacije značajne i u geometriji uopšte. Predstavljanje složenih kretanja oblasti svemira kojima bi odgovarala neka od geometrija ravni (prostora) $^1S_2$ ($^1S_3$), čemu smo posvetili znatnu pažnju dovoljno ukazuju na široke mogućnosti primene ovih transformacija u raznim oblastima nauke. S obzirom da su uopštenja teorije epicikala ravni $^1S_2$ na prostor $^1S_3$ uglavanom neposredna, na tim uopštenjima zadržali smo se samo u onoj meri za koju smo smatrali da je neophodno za formiranje osnovnih pojmovoa te teorije. Pri tom smo detaljnije razmatrali ona uopštenja teorema koja se odnose na ravan $^1S_2$ koja nisu tako jednostavno i unose izvesnu razliku u odnosu na dvodimenzioni prostor. Tako smo naprimer istakli da izotropne homologije nisu transformacije sličnosti prostora ${}^1S_3$. Obrazloženju razloga iz koji se uopštenja transforamacija sličnosti ne smo na prostora ${}^1S_3$, nego i na bilo koji konačno dimenzioni prostor Lobačevskog treba da smatraju takođe transformacijama sličnosti, posvetili smo znatnu pažnju upravo zbog njihove moguće primene u fizici. Ukoliko i ne postoji i nije tako značajna neka teorija relanog prostora čija bi geometrija bila n-geometrija Lobačevskog verujemo da će metode na koje smo ukazali i koje smo koristili omogućiti, s obzirom na njihovu opštost, da se na sasvim jednostavan način razvije teorija preslikavanja sličnosti u odgovarajućoj geometriji. Na utvrđivanju svojstava episfera i preslikavanja sličnosti svake od geometrija prostora ${}^1S_3$ nismo se zadržavali smatrajući da smo te probleme načelno rešili u geometrijama ravni ${}^1S_2$. Ovim ne želimo da kažemo da takva proučavanja nisu od značaja. Formiranje aksiomatike svih neklasičnih dvodimenzionih projektivnih metričkih geometrija, ukazivanje na modele geometrije idealnog prostora ravni ${}^1S_2$ u geometriji sopstvene oblasti te ravni, a pogotovu detaljno ispitivanje epicikala te ravni u sintetičkom duhu kojim smo istovremeno utvrdili i osnovna svojstva transformacija podudarnosti u glavnim modelimatih geometrija , uticala su da obim ovog rada bude znatno veći nego što je uobičajeno za radove ovakve vrste. Zato smo se u ovom radu ograničili samo na izgrađivanje osnova za dalja proučavanja geometrija prostora ${}^1S_3$. Ovo nam je onemogućilo da i na nekim drugim primerima u odgovarajućem trodimenzionom slučaju primenimo metode kojima smo se koristili u dvodimenzionom slučaju, i još ubedljivije ilustrujemo njihovu prednost nad dosada primenjivanim. Primena ovako opštih metoda omogućena je razvijanjem geometrija na način u kome osnovnu ulogu imaju transformacije i preslikavanja. Ukazaćemo samo da određivanje preseka episfere geometrija prostora ${}^1S_3$ sa ravnima i drugim episferama tih geometrija, što ćemo objaviti u posebnom radu, u pravom svetlu prikazuje sve prednosti primene tih metoda. Slično se može reći i za utvrđivanje raznih modela geometrija ravni ${}^1S_2$ na episferama geometrija prostora ${}^1S_3$. Da tih modela ima daleko više nego u geometriji Lobačevskog samo smo nagovestili u delu u kome smo obradili modele svih pravih geometrija ravni ${}^1S_2$ na epiciklima odgovarajuće vrste tih geometrija. Zato očekujemo da će formiranje odgovarajućih modela u prostoru ${}^1S_3$ biti sadržaj i drugih radova iz ove oblasti.

PRILOG I

обозначения 2-плоскости приведены обозначения прямых данной метрики и прямых, являющихся полярами точек

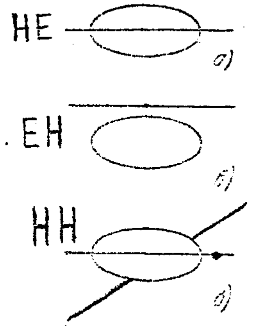

Рис. 4.2.

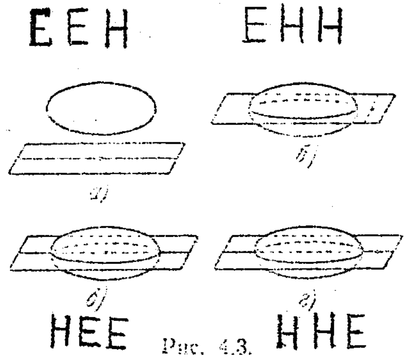

Рис. 4.3.

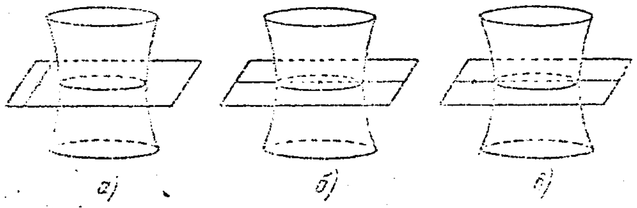

Рис. 4.4.

данной метрики (метрика таких прямых совпадает с угловой метрикой в пучках прямых):

Метрики плоскостей S_2 и $^1S_2$

Метрика углов	Метрика расстояний: эллиптическая	Метрика расстояний: гиперболическая
Эллиптическая	$S_2(S_1, S_1)$	$^1S_2(^1S_1, S_1)$
Гиперболическая	$^1S_2(S_1, {}^1S_1)$	$^1S_2(^1S_1, {}^1S_1)$

На рис. 4.2 изображены точки и прямые плоскости, соответствующие трем указанным здесь метрикам.

При $n=3$ имеются 8 метрик, указанных в следующей таблице, где в каждой клетке после обозначения 3-пространства приведены обозначения плоскостей и прямых данной метрики и плоскостей, полосами которых являются точки данной метрики (метрика таких плоскостей совпадает с угловой метрикой в связках плоскостей):

Метрика пространств S_3, $^1S_3$ и $^2S_3$

Эллиптическая метрика расстояний

Метрика в пучках плоскостей	Метрика в пучках прямых: эллиптическая	Метрика в пучках прямых: гиперболическая
Эллиптическая	$S_3(S_2, S_1, S_0)$	$^2S_3(S_2, S_1, {}^1S_2)$
Гиперболическая	$^1S_3(S_2, S_1, {}^1S_2)$	$^1S_3(^1S_2, S_1, {}^1S_2)$

Гиперболическая метрика расстояний:

Метрика в пучках плоскостей	Метрика в пучках прямых: эллиптическая	Метрика в пучках прямых: гиперболическая
Эллиптическая	$^1S_3(^1S_2, {}^1S_1, S_2)$	$^1S_3(^1S_2, {}^1S_1, {}^1S_2)$
Гиперболическая	$^2S_3(^1S_2, {}^1S_1, {}^1S_2)$	$^2S_3(^2S_2, {}^1S_1, {}^1S_2)$

На рис. 4.3 и 4.4 изображены точки, прямые и плоскости пространства $^1S_3$ и $^2S_3$, соответствующие указанным здесь метрикам (две последние метрики пространства $^2S_3$ соответствуют эллиптической и гиперболической угловым метрикам в пучках прямых).

§ 2. Геометрия m-плоскостей

4.2.1. Эллиптические m-плоскости. В пространстве ^lS_n, так же как в пространствах S_n и ^lS_n, m-плоскости определяются векторными уравнениями (2.32) и (2.33),

L I T E R A T U R A

1. Бахман, Ф. /1969/: Построение геометрии на основе понятия симетрии.- Издательство "Наука" , Москва.

2. Božić M., Vujić S. (1980): Matematička logika sa elementima opšte logike.- Naučna knjiga, Beograd.

3. Буземан, Г. Келли, /1957/ : Проективная геометрия проективные метрики. Издательство иностранной литературы, Москва.

4. Cvetković D.,(1981): Epiciklično projektovanje u hiperboličnom prostoru, - Magistarski rad, Boegrad.

5. Cvetković D., (1982.): Osnove epicikličkog projektovanja prostora L^n (n=2,3) na datu hiperravan (poluhiperravan) tog prostora.- Zbornik radova Prirodno matematičkog fakulteta, 3. 173-189., Kragujevac.

6. Cvetković D., (1983.): Neke projektivne transformacije ravni.- Zbornik radova Prirodno - matematičkog fakulteta 4 139-152., Kragijevac.

7. Cvetković D., (1983.): Neke transformacije projektivnog prostora.- Zbornik radova Prirodno-mataematičkog fakulteta 4. 167-168., Kragujevac.

8. Ефимов, Н.В. /1961/: Высшая геометрия.- Госудрственное издательство физико-мафтематической литературы, Москва.

9. Gans D., (1973.): An Introduction to Non-Euklidiean Geometry.- Academic press, New York and London.

10. Глаголв, Н. А. /1963/: Проективная геометрия.- Государственное издательство "высшая школа", Москва.

11. Яглом, И. М., Розенфельд Б. А. и Ясинская Е. У., /1964/: Проективные метрики.- Успехи математических наук.- том 19. выпуск. 5/119./.

12. Каган, В. Ф. /I956/: Основания геометрии.- часть вторая.- Государсвенное издательство, Москва.

13. Kerékjártó B.,(1966.): Les fondements de la géométrie -tome deux- géométrie projective.- Akadémiai Kiadó, Budapest.

14. Кострикин И. А. /I977/: Введениев в алгебру.- Издательство "Наука", Москва.

15. Lisulov D., (1980.): Krive drugog reda u geometrijskim sistemima Cayley-Klein-a.- Univerzitet u Beogradu Prirodno-matematički fakultet, Boegrad.

16. Lopandić D., (1981.): Osnovi geometrije - udžbenik za III razred usmerenog obrazovanja matematičko-tehničke struke.- Naučna knjiga, Beograd.

17. Макарова Н. М., /I965/,5:Проективные мероопределения плоскости.- Ученые записки Моск. гос. пед. ин-та.

18. Milojević M., (1981.): Projektivna ravan kao model neeuklidske geometrija u smislu Cayley-Klein-a.- Prirodno-matemetički fakultet Univerziteta, Beograd.

19. Niče V., (1979): Deskriptivna geometrija.- Školska knjiga, Zagreb.

20. Prešić S., (1972): Elementi matematičke logike.- Zavod za izdavanie udžbenika SRS, Beograd.

21. Prešić M. i Prešić S. (1979): Uvod u matematičku logiku.- Matematički institut, Beograd.

22. Prvanović M., 1968.): Projektivna geometrija-. Naučna knjiga, Boegrad.

23. Prvanović M. (1971.): Neeuklidske geometrije.- Prirodno-matematički fakultet Unuverziteta u Novom Sadu.

24. Prvanović M., (1980.): Osnovi geometrije.- Građevinska knjiga, Boegrad.

25. Rossier P., (1975.):Géométries pseudo-euklidiennes.- Archives des Sciences, fasc. 2.28, 141-146.

26. Розенфельд, Б.А., /1955/: Неевклидовы геометрии.- Государственное издательство, Москва.

27. Розенфельд, Б.А., /1969/5:Неевклидовы пространство.- Наука, Москва.

28. Sommerville D.M.Y., (1970.): Bibliography of non-euclidean geometry.- Chelsea publishing company, New York, N.Y.

29. Погорелов, В. А., /1979/: Геометриа.-
29. Москва "Наука".- Москва.

30. Zamansky M., (1967.): Introduction a l′ algèbre et l′ analyse modernes.- Dunod, Paris.

31. Гильберт,Д., Бернайс П., /1979/: Основания математики.- Москва "Наука", Москва.

32. Hilbert D.(1957.): Osnove geometrije.- Matematički institut, Boegrad.

33. Šnajder Z., (1976.): Nacrtna geometrija.- Izdavački studenstski centar, Beograd

34. Кейслер, Г.,Чэн Ч.,/1977/: Теория моделей.- Издательство"Мир", Москва.

35. Парнасский, И. В.,/1956/: Аксиматическое построение трехмерной параболической геометрии.- Орловский государственный педагогический институт Том XI. вып. II, 1956 г.

36. Проскурина, Р. Г.,/1970/: Аксиоматическое построение двумерной псевдоевклидовой геометрии,"Ученые записки Курский гос. пед. ин-т",66, 142-187.

37. Cvetković D., (1986.): Ekvivalentnost aksioma podudarnosti i aksioma pransformacija podudarnosti.- rad koji će biti objavljen