УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

Математички факултет

Владимир И. Драговић

R-МАТРИЦЕ И АЛГЕБАРСКЕ КРИВЕ

докторска дисертација

1992. година - Београд

Научни руководилац: д.ф-м.н. Б.А.Дубровин,
професор катедре више геометрије и топологије Мех-мат.факултета МГУ

Ментор

Чланови комисије

Датум одбране

Датум промоције

R-матрице и алгебарске криве.

4x4 решења једначине Јанга

$$RZZ' = Z'ZR$$

и једначине Јанга-Бакстера

$$R^{12}(\theta_1)R^{13}(\theta_2)R^{23}(\theta_1-\theta_2) = R^{23}(\theta_1-\theta_2)R^{13}(\theta_2)R^{12}(\theta_1)$$

су разматрана у оквиру "коначнозоне" интеграције, приступа који је засновао Кричевер.

Неопходни и довољни услови за решења ранга 1 са рационалним разложивим и неразложивим спектралним кривама су дати у терминима обратног задатка.

Познати проблем везан са R-матрицом Чередника је решен помоћу нетривијалног баждарног лимеса, и неколико фамилија нових решења једначине Јанга-Бакстера ранга 2 је конструисано.

Метод Бакстерове редукције је развијен и решења једначине Јанга-Бакстера су класификована са тачношћу до баждарне еквиваленције:

$$R \to (T \otimes T)R(T^{-1} \otimes T^{-1})$$

и нађена је фамилија решења ранга 2.

Кључне речи: једначина Јанга-Бакстера, једначина Јанга, вакуумни вектори, спектралне криве, спектрални параметар, рационалне криве са обичном двоструком тачком, уопштени дивизори.

R-matrices and Algebraic Curves.

4 4 solutions of the Yang equation

$$\mathcal{R} \mathcal{Z} \mathcal{Z}' = \mathcal{Z}' \mathcal{Z} \mathcal{R}$$

and the Yang-Baxter equation

$$R^{12}(\theta_1) R^{13}(\theta_2) R^{23}(\theta_1-\theta_2) = R^{23}(\theta_1-\theta_2) R^{13}(\theta_2) R^{12}(\theta_1)$$

were studies in the frame of the "finite-zone" integration aproach founded by Krichever.

Necessery and sufficient conditions for solutions of rank 1 with rational reducible and irreducible spectral curves were done in terms of datum of inverse problem.

The famous Cherednik matrix problem was solved using the nontrivial gauge limit, and several families of new solutions of the Yang-Baxter equation of rank 2 were constructed.

The method of Baxter reduction was developed,andsolutions of the Yang-Baxter equation were classified up to the gauge equivalense :

$$R \to (T \otimes T) R (T^{-1} \otimes T^{-1})$$

and family of new solutions of rank 2 was found.

С А Д Р Ж А Ј

У В О Д

§ 1. ДЕФИНИЦИЈЕ И ТЕРМИНОЛОГИЈА ТЕОРИЈЕ ЈЕДНАЧИНА ЈАНГА–БАКСТЕРА И ЈАНГА

Тачка је написана на основу једног од првих прегледа на ту тему објављеног П.П.Кулишом и Е.К.Скљанином [1].

Нека је V N -димензиони комплексни векторски простор; $\mathbb{R}(u)$ означава фамилију оператора који пресликавају $V\otimes V$ у себе, $u\in\mathbb{C}$. Једначина

$$\mathbb{R}^{12}(u)\,\mathbb{R}^{13}(v)\,\mathbb{R}^{23}(u-v)=\mathbb{R}^{23}(u-v)\,\mathbb{R}^{13}(v)\,\mathbb{R}^{12}(u) \qquad /1/$$

оператора у $V^{\otimes 3}$, где, на пример, $\mathbb{R}^{12}(u)$ означава оператор $\mathbb{R}\otimes\mathrm{I}: V^{\otimes 3}\to V^{\otimes 3}$, зове се једначина Ј а н г а – Б а к с т е р а. Ако запишемо дејство оператора $\mathbb{R}(u)$ на базисни вектор $e_\gamma\otimes e_\delta$ простора $V\otimes V$ формулом

$$\mathbb{R}(u)(e_\gamma\otimes e_\delta)=(e_\alpha\otimes e_\beta)\,R^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}\quad,$$

тада оператори $\mathbb{R}^{ij}: V\otimes V\otimes V\to V\otimes V\otimes V$ дејствују по следећим формулама:

$$\mathbb{R}^{12}(e_\gamma\otimes e_{\gamma'}\otimes e_{\gamma''})=(e_\alpha\otimes e_{\alpha'}\otimes e_{\gamma''})\,\mathcal{R}^{\alpha\alpha'}_{\gamma\gamma'}$$

$$\mathbb{R}^{13}(e_\gamma\otimes e_{\gamma'}\otimes e_{\gamma''})=(e_\alpha\otimes e_{\gamma'}\otimes e_{\alpha''})\,\mathcal{R}^{\alpha\alpha''}_{\gamma'\gamma''}$$

$$\mathbb{R}^{23}(e_\gamma\otimes e_{\gamma'}\otimes e_{\gamma''})=(e_\gamma\otimes e_{\alpha'}\otimes e_{\alpha''})\,\mathcal{R}^{\alpha'\alpha''}_{\gamma'\gamma''},$$

а сама једничина /1/ поприма вид:

$$R^{\alpha\alpha'}_{\gamma\gamma'}(u)\,R^{\gamma\alpha''}_{\beta\gamma''}(v)\,R^{\gamma'\gamma''}_{\beta'\beta''}(u-v)=R^{\alpha'\alpha''}_{\gamma'\gamma''}(u-v)\,R^{\alpha\gamma''}_{\gamma\beta''}(v)\,R^{\gamma\gamma'}_{\beta\beta'}(u)$$

Претпоставља се да се по индексима који се понављају врши сумирање.

Фамилија решења $\mathbb{R}(u)$ једначине /1/ се зове прамен Јанга-Бакстера. Димензијом прамена назива димензију простора V. Ми ћемо се бавити праменовима димензије 2.

Параметар u се зове спектрални. Прамен је регуларан ако $\mathbb{R}(0)=\mathbb{P}$, где $\mathbb{P}$ означава оператор пермутације

$$P^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}=\delta_{\alpha\delta}\,\delta_{\beta\gamma}\qquad\text{, Кронекеров симбол } \delta$$

Лако се проверава да $\mathbb{P}$ задовољава једначину /1/. Обично се разматра фамилија праменова $\mathbb{R}(u,\eta)$. η се тада назива Планкова константа. Ако постоји η_0 такво да једнакост

$$\mathbb{R}(u,\eta_0)=I$$

важи за свако u, где I означава јединични оператор у $V\otimes V$, т.ј.

$$I^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}=\delta_{\alpha\gamma}\,\delta_{\beta\delta}$$

тада кажемо да је фамилија $\mathbb{R}(u,\eta)$ квазикласична. Претпостављаћемо да је матрица $\mathbb{R}(u,\eta)$ несингуларна.

Ако је $\mathbb{R}(u)$ решење једначине /1/, тада је и

$$R'(u) = f(u)\,\mathbb{R}(u)$$

решење једначине /1/. $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}'$ су х о м о т е т и ч н и. Слично, ако је T недегенерисани оператор $V \to V$, тада је и

$$\mathbb{R}''(u) = (T \otimes T)\,\mathbb{R}(u)\,(T^{-1} \otimes T^{-1}) \qquad /2/$$

решење једначине /1/. Решења $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}''$ повезана релацијом /2/ ћемо називати б а ж д а р н о[1] е к в и в а л е н т н а у с м и с л у Ј а н г а - Б а к с т е р а, да бисмо избегли поистовећивање са баждарном еквиваленцијом у смислу Кричевера, коју ћемо да дефинишемо касније. Ако је из контекста јасно о којој релацији је реч, говорићемо просто баждарна еквиваленција.

У методу обратног задатка, једначина /1/ се обично назива квантна једначина Јанга-Бакстера, а нена решења — квантна R-матрица. Прелазимо на дефинисање њихових класичних аналогона. Ако је $\mathbb{R}(u,\eta)$ квазикласична фамилија са $\eta_0 = 0$, тада

$$r(u) = \frac{\partial}{\partial \eta} \mathbb{R}(u,\eta)\Big|_{\eta=0}$$

се назива к л а с и ч н а r-матрица. Диференцирајући једначину /1/ по η, при $\eta = 0$ добијамо да $r(u)$ задовољава следећу једначину:

1/ реч баждарно је изабрана као аналог руског калибровочно, односно енглеског **gauge**

$$r_{12}(u)\,r_{13}(v) + r_{12}(u)\,r_{23}(u-v) + r_{13}(v)\,r_{23}(u-v) =$$

$$= r_{23}(u-v)\,r_{13}(v) + r_{23}(u-v)\,r_{12}(u) + r_{13}(v)\,r_{12}(u)$$

Последња једначина, која може да се запише у компактном облику

$$[r_{12}(u), r_{13}(v) + r_{23}(u-v)] + [r_{13}(v), r_{23}(u-v)] = 0 \qquad /3/$$

се назива класичном једначином Јанга-Бакстера. Трансформацији хомотетије у квантном случају одговара, у класичном, трансформација транслације

$$r'(u) = r(u) + f(u)I$$

а баждарна задржава свој облик.

Означимо

$$\tilde{R}^{\gamma\gamma'}_{\alpha'\alpha} := R^{\alpha\alpha'}_{\gamma\gamma'}(u) \; ; \; Z^{\beta\gamma''}_{\gamma\alpha''} := R^{\gamma\alpha''}_{\beta\gamma''}(v),$$

$$Z'^{\beta'\beta''}_{\gamma'\gamma''} = R^{\gamma'\gamma''}_{\beta'\beta''}(u-v).$$

Тада $\tilde{R}, Z, Z'$ очигледно представља решење једначине

$$\tilde{R}^{kl}_{pq}\, Z^{i\gamma}_{k\beta}\, Z'^{j\alpha}_{l\gamma} = Z'^{k\gamma}_{p\beta}\, Z^{l\alpha}_{q\gamma}\, \tilde{R}^{ij}_{kl} \qquad /4/$$

Једначину /4/ ћемо називати једначином Јанга и понекад записивати у простијем облику

$$R Z Z' = Z' Z R$$

Једначине /1/ и /4/ се појављују у теорији потпуно интеграбилних система. О томе ћемо говорити у следећој тачки.

§ 2. ПОЈАВА ЈЕДНАЧИНЕ ЈАНГА И ЈАНГА-БАКСТЕРА И ВАКУУМНИХ ВЕКТОРА У МОЗ.[1] ЗАМОЛОДЧИКОВЉЕВА АЛГЕБРА.

Нека је $\mathbb{R}(u)$ регуларни прамен димензије N . Означимо са $\mathcal{H}=V_1\otimes\ldots\otimes V_M$, где $V_i\equiv\mathbb{C}^N$ простор стања квантног система. Дефинишимо хамилтонијан

$$H=\sum_{n=1}^{M-1}H_{n+1,n}+H_{1,M}$$

где је $H_{n+1,n}=\frac{d}{du}(\mathbb{R}_{n+1,n}(u)|_{u=0})\mathbb{P}_{n+1,n}$; $\mathbb{R}_{n+1,n}(\mathbb{P}_{n+1,n})$ дејствује на $V_{n+1}\otimes V_n$ као $\mathbb{R}(\mathbb{P})$, а на преосталим компонентама он дејствује као јединични оператор.

Означимо са $\widehat{\mathcal{H}}=Q\otimes Q'\otimes\mathcal{H}$, где је $Q\equiv Q'\equiv\mathbb{C}^N$, а са $\mathbb{T}_1^M(u)$ такозвани оператор прелаза

$$\mathbb{T}_1^M(u)=\mathbb{L}_M(u)\mathbb{L}_{M-1}(u)\ldots\mathbb{L}_1(u)$$

где је $\mathbb{L}_n(u)=\mathbb{R}_{qn}(u)$ оператор, који дејствује на $Q\otimes V_n$. Слично се дефинишу $\mathbb{L}'_n(u)$ и $\mathbb{T}'^M_1(u)$.

Тада /1/ можемо да запишемо као

1/ МОЗ — метод обратног задатка

$$\mathbb{R}_{qq'}(u)\,\mathbb{L}_n(v)\,\mathbb{L}_n'(u-v)=\mathbb{L}_n'(u-v)\,\mathbb{L}_n(v)\,\mathbb{R}_{qq'}(u) \quad /5/$$

Из /5/ имамо / в. [2] /

$$\mathbb{R}_{qq'}(u)\,\mathbb{T}_1^M(v)\,\mathbb{T}_1'^M(u-v)=\mathbb{T}_1'^M(u-v)\,\mathbb{T}_1^M(v)\,\mathbb{R}_{qq'}(u) \quad /6/$$

Ако дефинишемо

$$t(u)=tr_q\,\mathbb{T}_1^M(u)$$

рачунајући траг по простору Q добијамо / в. [2] / из /6/ фамилију комутативних оператора у $\mathcal{H}$:

$$[\,t(u),t(v)]=0$$

Фамилија $\mathbb{J}_n$ дефинисана формулом

$$\mathbb{J}_n=\frac{d^n}{du^n}\ln(t^{-1}(0)\,t(u))\Big|_{u=0}$$

представља скуп комутативних интеграла за хамилтонијан $H=\mathbb{J}_1$. Тако видимо да се свакој регуларној фамилији $\mathbb{R}(u)$ може придружити квантни потпуно интеграбилни систем.

У конкретним примерима квантне теорије поља на решетки или тачно решивим моделима статистичке физике, оператор $\mathbb{L}$ обично није једнак оператору $\mathbb{R}$. Тада једначина /5/ / то јест једначина Јанга /4// није последица једначине /1/ и представља основу квантног метода обратног задатка / КМОЗ /. Конструкција комутативних интеграла кретања се врши по горњој шеми, а такође је помоћу једначина типа /5/ и /6/ често могуће наћи спектар оператора H .

У случају XYZ -модела то је урађено у [2]. R-матрицу XYZ модела нашао је, као што је познато, Бакстер 1971. године заједно са једначином /1/, и тако решио осмиугаони модел и квантни магнетик Хајзенберга. Ми ћемо дати Чередникову реализацију Бакстерове матрице на крају ове тачке / в. прилог 2 у [2] и [3] /. За то постоје два разлога. Први — модификацијом те реализације, Чередник је конструисао R-матрице над елементарним функцијама, којима је, углавном, посвећена глава 1. Та модификација ће бити изложена у тачки 4. Други разлог : реализација је заснована на појму Замолодчиковљеве алгебре. Генератори Замолодчиковљеве алгебре представљају праобраз појма вакуумног вектора, једног од централних инструмената Кричеверове теорије / в. тачку 3 /.

Вакуумни вектори Бакстерове R -матрице играју не малу улогу и у [2] . Формуле (4.36) из [2]

$$(\widetilde{X}_{\ell+1}(\mu)\otimes\widetilde{X}_{\ell}(\lambda))\mathcal{R}(\lambda,\mu)=$$
$$=h(\lambda-\mu+2\eta)\widetilde{X}_{\ell+1}(\lambda)\otimes\widetilde{X}_{\ell}(\mu)$$

природу и уопштене којих је аутор схватио благодарећи разговорима са И.М.Кричевером, су биле мотивација леме 6 главе 2.

Замолодчиковљева алгебра / в. [3] и цитирано тамо [4,5] /. То је фактор тензорне алгебре TA векторног простора

$\mathcal{A} = \bigoplus_{x,\theta} \mathbb{C} A_x(\theta)$ по релацијама

$$A_x(\theta_1) \otimes A_y(\theta_2) = \sum_{a,b\in X} S_{x\,y}^{a\,b}(\theta_1-\theta_2) A_a(\theta_2) \otimes A_b(\theta_1) \quad /7/$$

где су x, y елементи коначног скупа X, а θ_i елементи Абелове групе E, $S_{x,y}^{a,b}$ - комплекснозначне функције на E, ако при фиксираним $\theta_1, \dots, \theta_s$ су слике монома $A_{x_1}(\theta_1) \otimes \dots \otimes A_{x_s}(\theta_s)$ у $T\mathcal{A}$ линеарно-независне над $\mathbb{C}$ при свим изборима међусобно различитих елемената $\{x_1, \dots, x_s\}$. Из дефиниције следи да S задовољавају једначину /1/.

Нека је L - решетка на $\mathbb{C}^1$ са генераторима 1 и τ. Тада се линеарно раслојење V над $\zeta = \mathbb{C}^1/L$ може реализовати као $V = \widetilde{V}/L$, где је $\widetilde{V} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ и L дејствује на $\widetilde{V}$ по формули:

$$\omega_0(z, u) = (z+\omega, \alpha_{N,\beta}(z,\omega)u), \qquad \omega = n_1 + n_2\tau$$

$$\alpha_{N,\beta}(z,\omega) = \exp\{n_2(-2\pi i N(z + (\tfrac{n_2-1}{2})\tau) + \beta)\}, N \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{C}$$

Базу у простору сечења $\mathcal{H}(2, \beta_0)$ раслојења V_{2,β_0}, $\beta_0 = \pi i(1-2\tau)$ образују функције

$$f_1(z) = V_1(2z, q^2), \; f_2(z) = V_4(2z, q^2), \; q = e^{\pi i \tau},$$

где су V_i стандардне тета-функције.

Ако реализујемо $A_i(x)$ као операторе из $\mathcal{H}(N,\beta)$ у $\mathcal{H}(N+2,\ \beta+\beta_0+2\pi i N\eta+4\pi i x)$ по формулама

$$A_i(x)\,f(z)=f_i(z-x)\,f(z-\eta)$$

добијамо да оператори $A_i(x)A_k(y)$ и $A_\ell(y)A_j(x)$ из $\mathcal{H}(N,\beta)$ у $\mathcal{H}(N+\eta,\ \beta+2\beta_0+4\pi i N\eta+4\pi i(x+y+\eta))$ задовољавају једначину типа /7/ ако

$$f_i(w-v)\,f_k(w-\eta)=S_{ij}^{k\ell}(v,\eta)\,f_\ell(z-y)\,f_j(z-x-\eta) \qquad /8/$$

где је $w=z-\eta$, $v=x-y$. Матрица S повезује две базе простора $\mathcal{H}(4,\ 2\beta_0+4\pi i(v-\eta))$ и одређује се из /8/ једнозначно и има облик

$$S=\begin{bmatrix} 1 & & & k\,\mathrm{sn}\theta\,\mathrm{sn}\eta \\ & \mathrm{sn}\theta/\mathrm{sn}(\theta+\eta) & \mathrm{sn}\eta/\mathrm{sn}(\theta+\eta) & \\ & \mathrm{sn}\eta/\mathrm{sn}(\theta+\eta) & \mathrm{sn}\theta/\mathrm{sn}(\theta+\eta) & \\ k\,\mathrm{sn}\theta\,\mathrm{sn}\eta & & & 1 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

S и јесте Бакстерова матрица. Означаваћемо је са R_B.

§ 3. ВАКУУМНИ ВЕКТОРИ И АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЈСКИ ПРИСТУП У ТЕОРИЈИ R-МАТРИЦА. СЛУЧАЈ ОПШТЕГ ПОЛОЖАЈА — ПРЕГЛЕД РЕЗУЛТАТА И.М.КРИЧЕВЕРА.

Други приступ у методу обратног задатка, различит од изложеног више, који се заснивао на једначинама /1/ и /4/, алгебро-геометријски, је био развијен С.П.Новиковим и његовим сарадницима почев од 1974. године / в.,напр. [6] /. И.М.Кричевер је успео / в. [7] / да примени сличну технику на изучавање непосредно решења једначина /1/ и /4/.

Аналог функције Бејкера-Ахиезера у његовој теорији је појам вакуумног вектора. $(2n\times 2n)$ матрица $\mathcal{L}$ се разматра као линеарни оператор у $\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^2$, т.ј. као матрица (2×2) која има као елементе матрице $(n\times n$. Вакуумни вектори су вектори вида $X\otimes U$, које $\mathcal{L}$ преводи у векторе истог таквог вида $Y\otimes V$, $X,Y\in\mathbb{C}^n$, $U,V\in\mathbb{C}^2$, т.ј.

$$\mathcal{L}(X\otimes U)=h(Y\otimes V)\ ,\ h\in\mathbb{C}$$

или у координатама

$$\mathcal{L}^{i\alpha}_{j\beta}X_iU_\alpha=hY_jV_\beta\ .$$

Крива, која параметризује такве векторе, се задаје једначином

$$P(u,v)=\det L(u,v)=0$$

где је L оператор са координатама $L^i_j=\tilde{V}^\beta\mathcal{L}^{i\alpha}_{j\beta}U_\alpha$,

$$(\tilde{V})=(1,-v)\ ,\ X_n=Y_n=U_2=V_2=1\ ,\ U_1=u\ ,\ V_1=v\ ,$$

и назива се спектрална.

Доказује се, да у општем положеју / као и у "коначнозоном" интегрирану [8] / је род спектралне криве Γ једнак $g=(n-1)^2$, а број полова $X(z)$ једнак $N=g+n-1$.

(4×4) матрицама $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ одговарају криве Γ и Γ' рода 1, дефинисане полиномима

$$P(u,v)=\sum a_{ij}u^i v^j=0$$
и $\qquad\qquad i,j=0,1,2$
$$P_1(u,v)=\sum a^1_{ij}u^i v^j=0$$

Важе следеће једнакости

$$\mathcal{L}(X(u,v)\otimes U)=h(u,v)(Y(u,v)\otimes V)$$
$$\mathcal{L}'(X'(u',v')\otimes U')=h'(u',v')(Y'(u',v')\otimes V') \qquad /10/$$

где су x, y, x', y' мераморфне функције на Γ и Γ' са по два пола.

Означимо са Λ_1 и Λ_2

$$\Lambda_1=\Lambda_{1\,pq\beta}^{\;ij\alpha}=\mathcal{L}'^{\,k\gamma}_{\,p\beta}\,\mathcal{L}^{l\alpha}_{q\gamma}\,\mathcal{R}^{ij}_{kl}$$

$$\Lambda_2=\Lambda_{2\,pq\beta}^{\;ij\alpha}=\mathcal{R}^{kl}_{pq}\,\mathcal{L}^{i\gamma}_{k\beta}\,\mathcal{L}'^{\,j\alpha}_{\,l\gamma}$$

леву и десну страну једначине /4/. Λ_i су такође матрице са парном димензијом. Одговарају им спектралне криве $\widetilde{\Gamma}_i$ задане једначинама

$$Q_i(u,w)=0 \quad , i=1,2$$

Ако су u, v, w решена система

$$P(u,v)=0 \qquad \text{и} \qquad P_1(v,w)=0 \qquad /11/$$

тада из /10/ добијамо

$$\Lambda_1(\hat{X}(u,w)\otimes U) = \qquad /12/$$
$$=h(u,v)h_1(v,w)(Y^1(v,w)\otimes Y(u,v)\otimes W),$$

где је $\hat{X}(u,w)=R^{-1}(X^1(v,w)\otimes X(u,v))$

одакле имамо $Q_1(u,w)=0$.

Из

$$P_1(u,\tilde{v})=0,\ P(\tilde{v},w)=0 \qquad /13/$$

добијамо

$$\Lambda_2(X(\tilde{v},w)\otimes X'(u,\tilde{v})\otimes U) = \qquad /14/$$
$$=h_1(u,\tilde{v})h(\tilde{v},w)(\hat{Y}(u,w)\otimes W),$$

где је $\hat{Y}(u,w)=R(Y(\tilde{v},w)\otimes Y'(u,\tilde{v}))$

из чега следи $Q_2(u,w)=0$

ЛЕМА 1. /лема 1 из [7] / Ако $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ и $\mathcal{R}$ задовољавају једначину /4/, полиноми P и P_1 "комутирају" у смислу композиције, т.ј. једначине /11/ и /13/ одређују једну исту криву $\hat{\Gamma}$ са једначином

$$Q(u,w)=Q_1(u,w)=Q_2(u,w)=0$$

ЛЕМА 2. /лема 2 из [7] / Полином $Q(u,w)$ је разложив, т.ј. разлаже се као производ два полинома.

Максимално ℓ , за које постоји $\widetilde{Q}$ такав да је $Q = \widetilde{Q}^{\ell}$ називамо р а н г решења једначине Јанга.

Ако су тројке $(\mathcal{L}, \mathcal{L}', \mathcal{R})$ и $(\widetilde{\mathcal{L}}, \widetilde{\mathcal{L}}', \widetilde{\mathcal{R}})$ повезане релацијама

$$\widetilde{\mathcal{L}} = (G_x \otimes G_u)\mathcal{L}(G_x^{-1} \otimes G_u^{-1}),$$

$$\widetilde{\mathcal{L}}' = (G_{x'} \otimes G_u)\mathcal{L}'(G_{x'}^{-1} \otimes G_u^{-1}),$$

$$\widetilde{\mathcal{R}} = (G_{x'} \otimes G_x)\mathcal{R}(G_x^{-1} \otimes G_{x'}^{-1}),$$

где су G_x , G_v , $G_{x'}$ дводимензијоне матрице, говорићемо да су б а ж д а р н о е к в и в а л е н т н а у с м и с л у К р и ч е в е р а / в. [7] /40–42//.

ТЕОРЕМА 1. / в. [7] последицу са стр. 31 / Сва решења ранга 1 једначине /4/ су баждарно еквивалентна или решењима Бакстера /9/, или решењима, која се добијају из Бакстерових помоћу пројективних трансформација групе $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

ЛЕМА 3. / лема 3 из [7] / Ако су $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ решења ранга 2, то на баждарну еквиваленцију можемо сматрати да се њихове спектралне криве Γ и Γ_1 задају једначинама

$$P(u,v) = u^2v^2 - \alpha u^2 - \beta v^2 + 1 = 0$$

$$P_1(u,v) = u^2v^2 - \alpha_1 u^2 + \beta_1 v^2 + 1 = 0$$

$$\alpha + \beta = \alpha_1 + \beta_1$$

ТЕОРЕМА 2. / последица са стр. 35 из [7] / Сва решења ранга 2 једначине /4/ су баждарно еквивалентна решењима Фел–

дергофа:

$$\phi = \begin{bmatrix} a & & & d \\ & b & c & \\ & c & b & \\ d & & & a' \end{bmatrix}$$

где је $a = \alpha\, \mathrm{sn}\,\eta\, \mathrm{dn}\,\eta$, $a' = \beta\, \mathrm{sn}\,\eta\, \mathrm{dn}\,\eta$, $d = \mathrm{sn}\,\eta\, \mathrm{cn}\,\eta$, $b = \sqrt{\alpha\beta}\, \mathrm{cn}\,\eta$, $c = \sqrt{\alpha\beta}\, \mathrm{dn}\,\eta$.

§ 4. ПОЛАЗНИ ПРОБЛЕМ ДИСЕРТАЦИЈЕ.

У [9] И.В. Чередник је дао алгебарску варјанту конструкције из [3] / в.крај тачке 2 /.

Нека f^{ρ} и A^{ρ} означавају слику елемената f, односно подпростора A простена полинома $\mathbb{C}[t]$ при дејству аутоморфизма $\rho: t \mapsto \alpha t + \beta$. $x \in \mathbb{C}^{*}$ се идентификује са аутоморфизмом $t \mapsto xt$, а $x \in \mathbb{C}^{+}$ са аутоморфизмом $t \mapsto t + x$. $A \cdot A'$ означава линеарни омотач елемената облика $f \cdot f'$, где је $f \in A$, $f' \in A'$. Ако је n-димензиони подпростор у $\mathbb{C}[t]$ за који постоје четири аутоморфизма p, q, r, s, таква да је $A^{p} \cdot A^{q} \subset A^{r} \cdot A^{s}$ и $\dim A^{r} \cdot A^{s} = n^2$ тада је једнозначно дефинисано разлагање

$$A_x^{p} \cdot A_y^{q} = \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_n} S_{xy}^{ab} A_a^{r} A_b^{s} ,$$

где су $x, y \in \mathbb{Z}$, $S_{xy}^{ab} \in \mathbb{C}$, а $\{A_0, \dots, A_{n-1}\}$ база у A.

Примењујући тај метод у случају

a/ $A_0 = t$, $A_1 = t^2+1$, $p, q, r, s \in \mathbb{C}^1$, $pq = rs$, $r \neq s$;

Чередник је добио

$$R_{CH}(\theta,\eta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{sh}\,\theta/\mathrm{sh}(\theta+\eta) & \mathrm{sh}\,\eta/\mathrm{sh}(\theta+\eta) & 0 \\ 0 & \mathrm{sh}\,\eta/\mathrm{sh}(\theta+\eta) & \mathrm{sh}\,\theta/\mathrm{sh}(\theta+\eta) & 0 \\ -4\,\mathrm{sh}\,\theta\,\mathrm{sh}\,\eta & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

а у случају

б/ $A_0 = 1$, $A_1 = t^2$, $p, q, r, s \in \mathbb{C}^{1+}$, $p+q = r+s$, $r \neq s$

$$R(\theta,\eta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\theta\eta & \theta(\theta+\eta)^{-1} & \eta(\theta+\eta)^{-1} & 0 \\ -\theta\eta & \eta(\theta+\eta)^{-1} & \theta(\theta+\eta)^{-1} & 0 \\ -\theta^3\eta-\theta^2\eta^2-\theta\eta^3 & \theta\eta & \theta\eta & 1 \end{bmatrix}$$

Постоји још једна позната (4×4) R-матрица над елементарним функцијама. То је R_{XXZ}-матрица тзв. шестоуглоног и XXZ-модела / в. нпр. [2] /, која се добија из Бакстерове лимесом при $k \to 0$:

$$R_{XXZ}(\lambda,\eta)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\lambda/\sin(\lambda+\eta) & \sin\eta/\sin(\lambda+\eta) & 0 \\ 0 & \sin\eta/\sin(\lambda+\eta) & \sin\lambda/\sin(\lambda+\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

У [10] је било показано да класична Γ-матрица, која одговара матрици R_{XXZ}, означаваћемо је са Γ_{XXZ}, није еквивалентна класичној Γ-матрици $\Gamma^{(a)}_{CH}$, која одговара Чередниковој матрици "а", што је представљено дијаграмом:

$$\begin{tikzcd}
R_B(\theta,\eta,k) \arrow[d, "k\to 0"'] \arrow[drr, dashed, bend left, "?"] & & \\
R_{XXZ}(\theta,\eta) \arrow[rr, dashed, "?"] \arrow[d, "\partial/\partial\eta"'] & & R^{a}_{CH}(\theta,\eta) \arrow[d, "\partial/\partial\eta"] \\
\Gamma_{XXZ}(\theta) \arrow[rr, "\not\sim"] & & \Gamma^{(a)}_{CH}(\theta)
\end{tikzcd}$$

Тако долазимо до следећих питања:

1/ може ли се добити Чередникова матрица лимесом из Бакстерове;

2/ како се уклапа Чередникова матрица у спектралну теорију Кричевера / в. тачка 3 теорема 1 /.

§ 5. ПРЕГЛЕД ПРОБЛЕМА И РЕЗУЛТАТА ДИСЕРТАЦИЈЕ.

Ако би постојала фамилија $T(\kappa)$ таква да

$$\lim_{\kappa\to 0}(T(\kappa)\otimes T(\kappa))R_B(\kappa)(T(\kappa)\otimes T(\kappa))^{-1}=R_{CH} \quad /I5/$$

имали бисмо

$$(T_0\otimes T_0)\,R_{XXZ}\,(T_0\otimes T_0)^{-1}=R_{CH}$$

што би противуречило резултатима Белавина и Дринфелда [I0] . Последње расуђивање је тачно, наравно, само уз услов да

$$\lim_{\kappa\to 0}T(\kappa)=T_0$$

постоји. Тако видимо, да ако је одговор на питање 1/ из §4 потврдан /на шта је указивало [9, 3]/, фамилија $T(\kappa)$ нема лимес при $\kappa\to 0$.

Ако се R_0 добија из фамилије $R(\kappa)$ по формули типа(I-5), уз услов да фамилија $T(\kappa)$ нема лимес при $\kappa\to 0$, говорићемо да се R_0 добија нетривијалним баждарним лимесом / НБЛ / из $R(\kappa)$.

Нашли смо експлицитне формуле које доказују да $R_{CH}(\theta,\eta)$ представља НБЛ Бакстерових матрица $R_B(\theta,\eta,\kappa)$.

Рачунајући спектралне карактеристике R_{CH} , нашли смо да је спектрална крива Γ рационална неразложива са обичном двоструком тачком. Ако означимо са $\widehat{\Gamma}_{a,b}$ нормализацију криве Γ , где тачке a, b образују слој над сингуларном тачком, добијамо да су вакуумни вектори рационалне функције на $\widehat{\Gamma}_{a,b}$ са дивизорима полуса степена 2, које задоволавају услове лепљења типа $X(a)=X(b)$. То показује да се, и ван случаја општег положаја, који је разматрао Кричевер, у коме су спектралне криве елиптичке, налазе позната решења једначине /1/.

Помоћу технике уопштених јакобијана /в. нпр. [11] /, као што је рађено и у теорији солитона /в. нпр. [12] /, у глави 1 се испитују (4×4) решења једначине /1/ ранга 1 с неразложивим рационалним спектралним кривама.

У [7] се имплицитно претпостављало да су спектралне криве решења једначине /4/ неразложиве, у шта се можемо уверити упоређујући полином $P(u,v)=u^2-\alpha^2 v^2+2\alpha v-1$ са лемом 3 / в. § 3 /. Испоставило се, да је спектрална крива R_{xxz} матрице рационална разложива. Решењима са таквим спектралним кривама је посвећена глава 2.

Аналог транслација на елиптичким кривама представљају, у случају рационалних кривих / како разложивих, тако и неразложивих /, к о м у т а т и в н е фамилије разломљено-линеарна пресликавања. Међутим, у случају разложивих кривих услов комутативности није довољан. Потребан је / и довољан / допунски услов који је еквивалентан с и м е т р и ч н о с т и полинома /11/ по u и v .

Спектралном параметру у теорији једначина /1/ и /4/ последњих година је посвећена довољно опширна литература у оквиру тако зване БАКСТЕРИЗАЦИЈЕ / в. [13] /. У полазе од решења најспецијалније варијанте једначина /1/ и /4/ -- изоловане једначине Јанга-Бакстера

$$\mathbb{R}^{12}\,\mathbb{R}^{13}\,\mathbb{R}^{23}=\mathbb{R}^{23}\,\mathbb{R}^{13}\,\mathbb{R}^{12}\ .$$

Помоћу групе симетрија те једначине конструише се дискретна фамилија решења, чије затварање даје фамилију решења једначине /1/.

Метод Б а к с т е р о в е р е д у к ц и ј е , који предлажемо, је у основе супротан горепоменутом. У њему се из највећег скупа — фамилије решења једначине /4/ — издваја фамилија решења једначине /1/. Такав приступ је омогућио да се

1/ изврши класификација решења једначине /1/ не само са тачношћу до баждарне еквиваленције у смислу Кричевера, као што је урађено у [7] / в. § 3 /, већ и у односу на суптилнију, баждарну еквиваленцију у смислу Јанга-Бакстера, дифинисану у § 1;

2/ у случају рационалних разложивих спектралних кривих / гл. 2 /, конструишу нове фамилије решења једначине /1/ ранга 2.

И нетривијални баждарни лимес представља метод конструкције суштински нових решења. Као што је речено у почетку овог параграфа, НБЛ омогућава да се из фамилије решења са елиптичким спектралним кривама добију решења са рационалним спектралним кривама, како разложивим тако и неразложивим / в.такође §4/. Слично се, на крају главе 2, помоћу НБЛ из фамилије матрица ранга 1 са рационалним разложивим спектралним кривама, конструишу решења ранга 2. Тим методом могу да се нађу и рационални аналогони R -матрице Фелдерхофа / в.Додатак /.

Примене. О примени решења једначина Јанга-Баксера и Јанга у МОЗ се већ говорило у § 2. Теорема о егзистенцији вакуумног стања, која је доказана у глави 2, омогућава да се алгебарски анзап Бете примени на решења које смо конструисали.

Као што је познато, једначине /1/ и /4/ се појављују и примењују и у другим областима математике: топологији многострукости малих димензија и теорији фон Нојманових алгебри, некомутативној геометрији и квантним групама итд. Зато је представљало интерес да се на основу обратних задатака,решених у гл.1 и 2, који представљају у суштини алгоритам, направи програм за рачунање R -матрица. Међутим, без обзира на ентузијазам групе са Катедре ниских температура МГУ, на челу са Борком Вујичићем, нисмо, у оквиру технике којом смо располагали, успели да решемо проблем меморије. Наши су напори остали на нивоу алгоритма записаног на формалном језику — REDUCE 286. Листинг смо, и поред тога, укључили у оквиру Прилога — из захвалности колегама за труд и као илустрацију ефективности нашег метода.

Дисертација се састоји из увода и две главе, који се деле на параграфе, додатка, прилога и литературе. Глава 1 има осам параграфа, а глава 2 — седам. Нумерација формула и теорема при позивању садржи два броја, први указује на редни број главе, а други — на број формуле или теореме / нпр. формула (0.4) означава четврту формулу у уводу/. Распоред резултата по параграфима је описан у уводу сваке главе.

Основни резултати главе 1 су публиковани у [18,19] , а главе 2 у [20] .

Аутор изражава дубоку благодарност научном руководиоцу, професору Б.А.Дубровину за поставку задатака, сталну пажњу и свестрану помоћ у раду. Аутор је такође захвалан А.П.Веселову и И.М.Кричеверу на корисним разговорима. Велики потстрек је представљало интересовање колектива Семинара из функционалне анализе професора Б. Мирковића к раду. Резултати дисертације су излагани на Семинару у неколико наврата у току 1990-91 године.

Г Л А В А 1

РЕШЕЊА ЈЕДНАЧИНЕ ЈАНГА С РАЦИОНАЛНИМ НЕРАЗЛОЖИВИМ СПЕКТРАЛНИМ КРИВАМА

§ 1. УВОД

Аксиоматика спектралних даних, којом ћемо се бавити у овој глави, је одређена на основу анализе Чередникове R-матрице / в. пример 1 ниже /.

У почетку / § 2-5 / се разматра случај рационалне криве са обичном двоструком тачком. Дају се неопходни /§ 2/ и довољни /§ 3/ услови у терминима спектралних карактеристика (4×4) матрица $\mathcal{R},\mathcal{Z},\mathcal{Z}'$ под којима оне претстављају решења једничине Јанга ранга I, уз услов да дивизори полова њихових вакуумних вектора не садрже двоструку тачку. Као резултат, поред фамилија решења, које се добијају из Чередниковог решења баждарним / у Кричеверовом смислу / трансформацијама, налазе се и нове /укупно четири/, које се могу добити из првих неким простим трансформацијама. Решења Чередника су јединствена / са тачношћу до баждарне еквиваленције у смислу Кричевера / решења једначине Јанга-Бакстера / 0.1 /. У § 4 наводи се потпун списак изолованих спектралних карактеристика. Показује се у § 5, да се случај поклапања полова и двоструке тачке, у који спада решење "б" из /[9]/, пренормирањем своди на претходни. Нађена је у експлицитном облику у § 6 фамилија матрица, баждарно еквивалентних Бакстеровим, чији је лимес Чередникова R-матрица.

Случај рационалне криве са сингуларитетом типа каспа се испитује аналогно. Међутим, испоставља се да фамилија решења не постоји. Томе је посвећен седми параграф.

Тако су решења једначине Јанга / која задовољавају А3 / ранга 1 са неразложивом рационалном спектралном кривом описана у потпуности.

У § 8 се развија метод Бакстерове редукције, који омогућава да се тачно из једне од четири нађене фамилије решења једначине Јанга издвајају фамилије решења једначине Јанга-Бакстера, а такође и да се последња класификују у односу на баждарну еквиваленцију у смислу Јанга-Бакстера.

§ 2. СЛУЧАЈ ОБИЧНЕ ДВОСТРУКЕ ТАЧКЕ.

Разматраћемо рационалну неразложиву криву Γ са обичном двоструком тачком или, еквивалентно, неразложиву регуларну криву са двема обележеним тачкама a и b и условом на прстен функција на $\Gamma = \Gamma_{a,b}$

А1/ $$f(a) = f(b)\ ,\quad a \neq b$$

где је $f = f(z)$ рационална функција комплексне промењиве. Називаћемо такве функције рационалне на $\Gamma_{a,b}$.

Ако се специјално не каже другачије, сматраћемо, да дивизори полова $D_{\infty x}$ функције x рационалне на Γ , задовољавају услов:

А2/ $$a, b \notin D_{\infty x}$$

Појам линеарне еквиваленције дивизора на сингуларној кривој се уводи стандардним начином

$$x_1 + \dots + x_n \sim y_1 + \dots + y_n \ ,$$

ако постоји рационална на $\Gamma_{a,b}$ функција $f(z)$ са половима у тачкама $x_1, \dots, x_n$ и нулама у $y_1, \dots, y_n$. Да бисмо олакшали рад са дивизорима уводимо следеће ознаке:

$$\vartheta_{a,b}(x_1,\dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{a-x_i}{b-x_i}$$

Лако је видети, да су дивизори $x_1 + \dots + x_n$ и $y_1 + \dots + y_n$ линеарно еквивалентни ако и само ако

$$\vartheta_{a,b}(x_1, \dots, x_n) = \vartheta_{a,b}(y_1, \dots, y_n)$$

Приметимо, да су сви дивизори степена више или једнако два неспецијални / в. [2I, 22] /.

ТЕОРЕМА 1. Нека је задана рационална крива Γ са обележеним тачкама a и b. За произвољне рационалне вектор-функције $X(z), Y(z), U(z), V(z)$ на Γ, које испуњавају услов A1/, и за чије дивизоре полова важи

1/ $$\vartheta_{a,b}(D_x + D_u) = \vartheta_{a,b}(D_y + D_v) \qquad /1/$$

A3/ $$\deg D_x = \deg D_u = n \qquad /2/$$

постоји јединствена до на скаларни множилац, матрица Z таква да

$$Z^{i\alpha}_{j\beta} X_i U_\alpha = h(z) Y_j V_\beta \ ; \ i,j = 1, \dots n \ ; \ \alpha, \beta = 1, 2 \ ,$$

где је h рационална функција на $\Gamma_{a,b}$.

Доказ. Из Риман-Рохове теореме следи да је $\dim \tilde{L}(D)=2n$ где $\tilde{L}(D)$ означава линеаран простор функција на $\Gamma_{a,b}$, чији су дивизори већи или једнаки D. Нека је h функција дефинисана / једнозначно са тачношћу до константног множиоца/ условима

$$D_{0h}=D_y+D_v \quad ; \quad D_{\infty h}=D_x+D_u \; .$$

Захваљујући /1/, h задовољава A1/. $X_i(z)\cdot U_\alpha(z)$ и $h(z)\cdot Y_j(z)\cdot V_\beta(z)$ образују две базе простора $\tilde{L}(D)$, одакле и добијамо тврђење теореме. ∎

Наводимо неке резултате, који се аутоматски добијају по аналогији са [7].

При $n=2$ рационалне криве са сингуларитетима $\Gamma_{a,b}$ и $\Gamma_{a',b'}$, и мераморфне на њима функције $u(z),V(z)$, $u_1(z'),V_1(z')$ / z је параметар на $\Gamma_{a,b}$, а z' на $\Gamma_{a',b'}$ /, које имају по два пола, одређују следеће полиноме

$$P(u,V)=\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}\, u^i V^j=0 \quad , \qquad /1*/$$

$$P_1(u_1,V_1)=\sum_{i,j=0}^{2} a'_{ij}\, u_1^i V_1^j=0 \; .$$

На основу теореме 1 / $n=2$ / мероморфне функције $X(z)$, $y(z)$, $u(z),V(z)$, $X'(z')$, $y'(z')$, $u_1(z'),V_1(z')$, које имају по два пола на $\Gamma_{a,b}$ и $\Gamma_{a',b'}$ тим редом, и које задовољавају /1/, /2/ и A1/, одређују (4×4) матрице $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$:

$$\mathcal{L}(X(z)\otimes U(z))=h(z)(Y(z)\otimes V(z)) \qquad /2*/$$

$$\mathcal{L}'(X'(z)\otimes U'(z'))= \\ =h_1(z')(Y'(z')\otimes V'(z')), \qquad /3*/$$

/ где je, на пример, $X(z)=\begin{bmatrix} x(z) \\ 1 \end{bmatrix}$ /.

Нека je R произволна (4×4) матрица. Тензорима

$$\Lambda_1=\Lambda_{1\,pq\beta}^{\;ij\alpha}=\mathcal{L}'^{k\gamma}_{p\beta}\,\mathcal{L}^{l\alpha}_{q\gamma}\,R^{ij}_{kl} \qquad /4*/$$

$$\Lambda_2=\Lambda_{2\,pq\beta}^{\;ij\alpha}=R^{kl}_{pq}\,\mathcal{L}^{i\gamma}_{k\beta}\,\mathcal{L}'^{j\alpha}_{l\gamma} \qquad /5*/$$

одговарају спектралне криве Γ_i и полиноми $Q_i(u,w)=0,\ i=1,2,$ степена 4 по свакој променљивој. Ако je $P(u,v)=0$, $P_1(v,w)=0,$ из /2*/, /3*/ следи

$$\Lambda_1(R^{-1}(X'(v,w)\otimes X(u,v))\otimes U)= \\ =h(u,v)h_1(v,w)(Y'(v,w)\otimes Y(u,v)\otimes W), \qquad /6*/$$

одакле добијамо $Q(u,w)=0$.

Полазећи од $P_1(u,\tilde{v})=0$ и $P(\tilde{v},w)=0$ имамо

$$\Lambda_2(X(\tilde{v},w)\otimes X'(u,\tilde{v})\otimes U)= \\ =h_1(u,\tilde{v})h(\tilde{v},w)(R(Y(\tilde{v},w)\otimes Y'(u,\tilde{v}))\otimes W) \qquad /7*/$$

и $Q_2(u,w)=0$.

Једначина Јанга је $\Lambda_1=\Lambda_2$.

Ако су $\mathcal{Z},\mathcal{Z}',\mathcal{R}$ решења једначине Јанга P и P_1 комутирају, то јест једна те иста крива $\hat{\Gamma}$ се одређује једначинама $Q(u,w)=Q_1(u,w)=Q_2(u,w)=0$.

Разматраћемо решења ранга 1. Полином $Q(u,w)$ је разложив, т.ј. $Q(u,w)=Q'(u,w)\,Q''(u,w)$. Нека је $\hat{\Gamma}'$ компонента $\hat{\Gamma}$, која одговара Q'. Свакој њеној тачки одговарају јединствене тачке на кривама Γ и Γ'.

Нека је $(u(z),w(z))$ параметризација тачака криве $\hat{\Gamma}'$. Тада су $(u(z),v(z))$ и $(u(z),\tilde{v}(z))$ параметризације кривих Γ и Γ'.

Из $P_1(v(z),w(z))=0$ и из $P_1(u(z),\tilde{v}(z))=0$ на основу теореме о морфизмима у $\mathbb{P}^n$ / в. [22] / имамо $v(z)=u(\psi(z))$ и $\tilde{v}(z)=u(\psi_1(z))$, / а такође $w(z)=$ $=\tilde{v}(\psi(z)), w(z)=v(\psi_1(z)))$ /, где су ψ,ψ_1 разломљено-линеарна пресликавања.

Претпоставимо да су за скоро све u корени w_i једначине $Q(u,w)=0$ различити. / У случају ранга 1 то не умањује општост, што ће ниже да буде јасно./ Упоређујући вакуумне векторе из /6*/ и /7*/ једног те истог тензора $\Lambda=\Lambda_1=\Lambda_2$, на основу теореме 1, добијамо да $\mathcal{R}$ мора да задовољава:

$$\mathcal{R}(X(\psi_1(z))\otimes X'(z)=g(z)(X'(\psi(z))\otimes X(z)).$$

Пошто таква једначина мора да важи и за Y и Y', аналогно случају пара (u,v), имамо следеће релације међу X и Y, X' и Y':

$$Y(z)=X(\psi_2(z)),\ Y'(z)=X'(\psi_2(z)),$$

$$X'(\Psi(\Psi_2(z))) = X'(\Psi_2(\Psi(z)))\,,$$

$$X(\Psi_1(\Psi_2(z))) = X(\Psi_2(\Psi_1(z)))\,,$$

где је Ψ_2 разломлено-линеарно пресликаване.

Узимајући у обзир услове еквивалентности дивизора типа /1/ и захтев да се не излази из прстена, одређеног условом А1 /, добијамо

ТВРЂЕЊЕ 1. Да би $\mathcal{R}, \mathcal{Z}, \mathcal{Z}'$ били решења једначине Јанга ранга 1 са неразложивим рационалним спектралним кривама, неопходно је:

1/ $\mathcal{R}(X(\Psi_1(z)) \otimes X'(z)) = g(z)(X'(\Psi(z)) \otimes X(z))\,,$ /3/

2/ $\mathcal{Z}(X(z) \otimes U(z)) = h(z)(X(\Psi_2(z)) \otimes U(\Psi(z))\,,$ /4/

3/ $\mathcal{Z}'(X'(z) \otimes U(z)) = h_1(z)(X'(\Psi_2(z)) \otimes U(\Psi_1(z)))\,,$ /5/

где су X, X', U неке рационалне вектор-функције степена 2, које задовољавају следеће услове

4/ $X(\alpha) = X(b)$ /6/

5/ $X'(\alpha) = X'(b)$ /7/

6/ $U(\alpha) = U(b)$ /8/

7/ $X(\Psi_i(\alpha)) = X(\Psi_i(b)),\ i = 1, 2\,.$ /9, 10/

8/ $X'(\Psi_i(\alpha)) = X'(\Psi_i(b))\,,\ i = 0, 2\,,$ /11, 12/

9/ $U(\psi_i(a)) = U(\psi_i(b))\ ,\ i=0,1\ ,$ /13,14/

10/ $\vartheta_{a,b}(D_{X\circ\psi_1} + D_{X'}) = \vartheta_{a,b}(D_{X\circ\psi} + D_X)$ /15/

11/ $\vartheta_{a,b}(D_X + D_u) = \vartheta_{a,b}(D_{X\circ\psi_2} + D_{u\circ\psi})$ /16/

12/ $\vartheta_{a,b}(D_{X'} + D_u) = \vartheta_{a,b}(D_{X'\circ\psi_2} + D_{u\circ\psi_1})$ /17/

13/ $X(\psi_1\circ\psi_2) = X(\psi_2\circ\psi_1)$ /ком/

14/ $X'(\psi\circ\psi_2) = X'(\psi_2\circ\psi)$

са неким разломљено-линеарним пресликавањима $\psi(z), \psi_1(z), \psi_2(z)$ / овде и даље $\psi_0(z) = \psi(z)$ /.

Трансформишимо координате тако да U постане парна функција. То је увек могуће. Ако U има или двоструку нулу, или двоструки пол, претпоставимо пол, њега треба пресликати у 0. Ако U има и нулу, и пол двоструки, то $U = \varphi^2(z)$. Тада φ и представља нужну трансформацију. Из /8/ добијамо $a \mapsto A$ и $b \mapsto -A$. / ϑ ће означавати $\vartheta_{A,-A}$ /.

ЛЕМА 1. Трансформације ψ_i , одређене системом /9-14/ се не мењају при замени X на $\tilde{X}$, где $\tilde{X}(A) = \tilde{X}(-A)$ и $D_X \sim D_{\tilde{X}}$.

Доказ. Као и у доказу теореме 1, добијамо да су X и $\tilde{X}$ повезани релацијом:

$$T_X \begin{bmatrix} X(z) \\ 1 \end{bmatrix} = h(z) \begin{bmatrix} \widetilde{X}(z) \\ 1 \end{bmatrix} \qquad /18/$$

где је T_X константна (2×2) матрица, и $h(A)=h(-A)$. Из /9,10/ и /18/ добијамо да ће релације /9,10/ да задовољавају и $h\cdot X(z)$ и $h(z)$. Ако $h(\psi_i(A))=h(\psi_i(-A))\neq 0$ релације /9,10/ ће задовољава $\widetilde{X}(z)$. У супротном, из $h(\psi_i(-A))=0$ имамо $\vartheta(\psi_i(A),\psi_i(-A))=\vartheta(D_X)$.

Тврђење леме је тачно и тада, ако се схвати у раширеном смислу " $\infty=\infty$ ". То следи из конструкције функције h. □

ПРИМЕДБА. Ако су испунени услови /6-8/ решења система

$$\psi_i(\pm A)=\pm A \quad , i=0,1,2 , \qquad /9'-14'/$$

а такође и решења система

$$\psi_i(\pm A)=\mp A \quad , i=0,1,2 . \qquad /9''-14''/$$

су решења система /9-14/. Нека је

$$\psi(z)=\frac{(z+b)}{(cz+d)} \quad , \psi_i(z)=\frac{z+b_i}{c_i z+d_i} \quad , i=1,2 .$$

Тада се систем /9'-14'/ решава у виду $A^2c_i=b_i$, $d_i=1$;
а систем /9''-14''/

$$A^2c_i=b_i \quad , d_i=-1 .$$

§ 3. ФАМИЛИЈЕ РЕШЕЊА.
СПЕКТРАЛНЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ ЧЕРЕДНИКОВЕ R-МАТРИЦЕ.

За 2×2 R-матрице са елиптичким спектралним кривама, као што се види из [2, 7], спектрални параметар се појављује као класа дивизора вакуумних вектора. Уз то, трансформације аналогне нашим $\Psi(z), \Psi_1(z), \Psi_2(z)$ су транслације на елиптичким кривама и аутоматски не зависе од тих класе. У овом параграфу ћемо да нађемо R-матрице са рационалним спектралним кривама, које имају аналогно својство.

ЛЕМА 2. Сва решења система /9–14/, уз испуњеност услова /6–8/, која не зависе од $\partial(D_X)$ и $\partial(D_{X'})$, се описују условима

$$A^2 c_i = b_i d_i \quad , \quad d_i = \pm 1 \quad , \quad i = 0,1,2,$$

где су $\Psi_i(z) = (z+b_i)/(c_i z + d_i)$, $i = 0,1,2$ ./ Овде је, као и раније $\Psi_0(z) = \Psi(z)$, $c_0 = c$, $b_0 = b$, $d_0 = d$. /

Доказ. Приметимо да за парну функцију Y степена 2 услов $Y(\Psi(A)) = Y(\Psi(-A))$, где је $\Psi(z) = (z+b)/(cz+d)$, је еквивалентан услову

$$A^2 c = b d \qquad /19/$$

Идеја доказа се састоји у томе да се конструјише трансформација $\varphi_\lambda(w) = (w+\delta)/(\gamma w + \delta)$, где је $\lambda = \partial(D_X)$, за коју ће $\tilde{X}(w) = X(\varphi_\lambda(w))$ бити парна функција. Тада за $\varphi^{-1}\circ\Psi$ мора да важи услов типа /19/.

Нека је $f(y,\lambda)$ дифинисана тако да важи $\partial(y, f(y,\lambda)) = \lambda$. Лако се добија израз за f :

$$f(y,\lambda) = \frac{A((A-y)-\lambda(A+y))}{(A-y)+\lambda(A+y)} \qquad /20/$$

Из /8/ имамо $x_2 = f(x_1,\lambda)$, $x_4 = f(x_3,\lambda)$. Услов парности функције $\widetilde{X}(w) = X \circ \varphi$ можемо да запишемо у виду

$$\frac{\beta - \delta x_i}{1 - \gamma x_i} = -\frac{\beta - \delta f(x_i,\lambda)}{1-\gamma f(x_i,\lambda)}\ , \quad i=1,3\ ,$$

или еквивалентно

$$2\beta + 2\gamma\delta f(x_i,\lambda)x_i - (\delta-\beta\gamma)x_i - \\ -(\delta-\beta\gamma)f(x_i,\lambda) = 0,\ i=1,3. \qquad /21/$$

Нађимо β, γ, δ као функције од λ из услова да се /21/ испуњава идентично по x_i. Добијамо систем:

$$2\beta A(1+\lambda) = (\delta-\beta\gamma)A^2(1-\lambda)\ , \qquad /22/$$

$$2\beta(\lambda-1) + 2\gamma\delta A^2(1-\lambda) = 0\ , \qquad /23/$$

$$2\gamma\delta A(1+\lambda) = (\delta-\beta\gamma)(1-\lambda)\ . \qquad /24/$$

$$/23/ \Rightarrow \quad \beta = \gamma\delta A^2 \qquad /25/$$

$$/24,25/ \Rightarrow \quad 2\gamma\delta(1+\lambda)=\delta(1-\gamma^2)A(1-\lambda) \qquad /26/$$

/25/ и /24/ $\Rightarrow$ /22/. У /26/ можемо да претпоставимо да $\delta \neq 0$ и да поделимо са δ , у супротном би, заједно са /25/, добили φ константа. И тако из /26/ имамо

$$\gamma^2 A(1-\lambda)+2(1+\lambda)\gamma - A(1-\lambda)=0 . \qquad /27/$$

Како је δ неодређено, ставимо $\delta = 1$. На крају добијамо:

$$\varphi_\lambda(z)=\frac{z+\gamma(\lambda)A^2}{\gamma(\lambda)z+1} .$$

Сада услов типа /19/ за $\varphi^{-1}\circ\psi$ даје

$$A^2(\gamma(\lambda)-c)(\gamma(\lambda)A^2c-1)-(\gamma(\lambda)b-d)(\gamma(\lambda)A^2d-b)=0 \qquad /28/$$

Захтевајући да се /28/ испуњава идентично по λ , добијамо

$$A^2c=bd\ ,\quad (A^2-b^2)(1-d^2)=0$$

Одбацујући решење $b=\pm A$, јер се у том случају добија ψ константно, добијамо тврђење леме. $\blacksquare$

/15/ можемо да препишемо у облику

$$\frac{\mu}{\lambda}=\frac{\partial(d\tilde{x}_3,d\tilde{x}_4)\cdot\partial(d/c,d/c)}{\partial(d_1x_3,d_1x_4)\cdot\partial(d_1/c_1,d_1/c_1)} \qquad /29/$$

где је $\lambda = \vartheta(D_X)$, $(X_3, X_4) = D_{\infty X}$, $(\widetilde{X}_3, \widetilde{X}_4) = D_{\infty X'}$, $\mu = \vartheta(D_{X'})$. Замењујући у /29/ прво $\mu = \lambda = 1$, добијамо $\vartheta(d/c, d/c) = \vartheta(d_1/c_1, d_1/c_1)$, одакле, замењујући у /29/ $\lambda = 1$, μ произвољно, добијамо $d = 1$ и, слично, замењујући $\mu = 1$, λ произвољно, добијамо $d_1 = 1$. На тај исти начин, из /16/ се добија $d_2 = 1$.

На крају, остају само случајеви $A^2 c_i = b_i$, $d_i = 1$. Из /29/ имамо $\vartheta^2(1/c) = \vartheta^2(1/c_1) \Rightarrow c_1 = c$ или $c_1 = A^2/c$. Из /16/ добијамо $c_2 = -c$ или $c_2 = -A^2/c$.

На тај начин долазимо до четири једнопараметарске фамилије

$$\psi_i(z) = \psi_i(z, c) = \frac{z + b_i}{c_i z + d_i}, \quad i = 0, 1, 2:$$

(i) $c_0 = c$, $c_1 = c$, $c_2 = -c$, $d_i = 1$, $b_i = A^2 c_i$;

(ii) $c_0 = c$, $c_1 = c$, $c_2 = -A^2/c$, $d_i = 1$, $b_i = A^2 c_i$;

(iii) $c_0 = c$, $c_1 = A^2/c$, $c_2 = -c$, $d_i = 1$, $b_i = A^2 c_i$;

(iv) $c_0 = c$, $c_1 = A^2/c$, $c_2 = -A^2/c$, $d_i = 1$, $b_i = A^2 c_i$.

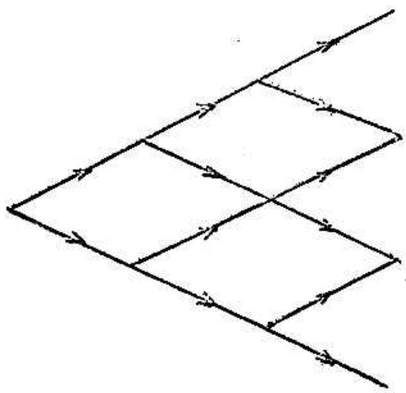
Лако се проверава да фамилије $(i - iv)$ задовољавају услов /ком/.

Претходно расуђивање ћемо да формулишемо у виду леме после следеће примедбе.

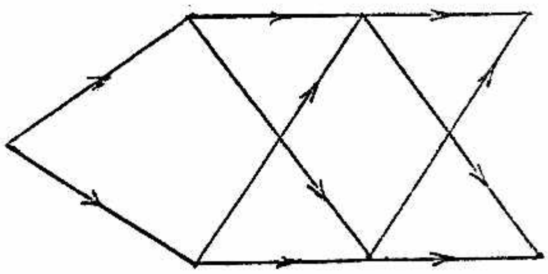
ПРИМЕДБА. Размотримо диаграм 1. Лако се проверава да је $\omega_1 \neq \omega_3$, ако $\psi_1\psi \neq I$, а $\omega_2 = \omega_4$. Тако видимо да конструисана решења имају ранг 1 и линеаран раст броја слика при итерацијама / в. [23] и диаграм 2 /, ако је $\psi_1\psi \neq I$. Ако је $\psi_1\psi \neq I$ решења имају ранг 2 / в. Додатак/ и раст слика константан / в. диаграм 3 /.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & W_1 = u(\psi_1(\psi(z))) \\
 & V_1 = u(\psi(z)) \arrow[ur, dash] \arrow[r, dash] & W_2 = u(\psi_1(-\psi(z))) \\
u(z) \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
 & V_2 = u(\psi(-z)) \arrow[r, dash] \arrow[dr, dash] & W_3 = u(\psi_1(\psi(-z))) \\
 & & W_4 = u(\psi_1(-\psi(-z)))
\end{tikzcd}
$$

диаграм 1



диаграм 2



диаграм 3

Преформулишимо резултате добијене више у терминима рационалне криве са обележеним тачкама $a=0$, $b=1$, ради усаглашавања са главом 2. Тако добијамо

ЛЕМА 3. Постоје четири једнопараметарске фамилије

$$\psi_i(z)=\psi_i(z,\delta_i)=z/((1-\delta_i)z+\delta_i)\ ,\ i=0,1,2.$$

(а) $\delta_0=\delta\ ,\ \delta_1=\delta\ ,\ \delta_2=\delta^{-1};$

(б) $\delta_0=\delta\ ,\ \delta_1=\delta\ ,\ \delta_2=-\delta^{-1};$

(в) $\delta_0=\delta\ ,\ \delta_1=-\delta\ ,\ \delta_2=\delta^{-1};$

(г) $\delta_0=\delta\ ,\ \delta_1=-\delta\ ,\ \delta_2=-\delta^{-1}.$

решења система /9-17/ са произвољним X, X', U , које задовољавају /6-8/. Помоћу сваке од тих фамилија се конструише, једнозначна са тачношћу до баждарне еквиваленције, неконстантна по λ, μ фамилија $\mathcal{R}(\lambda,\mu,c), \mathcal{Z}(\lambda,c), \mathcal{Z}'(\mu,c)$.

ТЕОРЕМА 2. Фамилије $\mathcal{R}(\lambda,\mu,c), \mathcal{Z}(\lambda,c), \mathcal{Z}'(\mu,c)$, указане у леми 3 су решења ранга 1 једначине Јанга, ако $\Psi_1\Psi \neq I$.

Доказ теореме је аналоган доказу теореме 2 у глави 2. Експлицитне формуле су тамо неопходне за додатно расуђивање, те се стога тамо и наводе.

Следеће тврђење је последица теореме 1 и леме 1.

ТВРЂЕЊЕ 2. Фамилије (i–iv) су баждарно нееквивалентне .

ЛЕМА 4. Фамилије решења $\tilde{\mathcal{R}}(\lambda,\mu,c), \tilde{\mathcal{Z}}(\lambda,c), \tilde{\mathcal{Z}}'(\mu,c)$, које одговарају случајевима (ii – iv) леме 3 се добијају из фамилије решења $\mathcal{R}(\lambda,\mu,c), \mathcal{Z}(\lambda,c), \mathcal{Z}'(\mu,c)$ случаја (i) на следећи начин:

$$(ii)\quad \tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R},\ \tilde{\mathcal{Z}}(\lambda,c) = (T(X,c)\otimes I)\mathcal{Z}(\lambda,c),$$

$$\tilde{\mathcal{Z}}'(\mu,c) = (T(X',c)\otimes I)\mathcal{Z}'(\mu,c)$$

$$(iii)\quad \tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}(T^{-1}(X,c)\otimes I),\ \tilde{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z},\ \tilde{\mathcal{Z}}' = (I\otimes T(U,c))\mathcal{Z}'$$

$$(iv)\quad \tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}(T^{-1}(X,c)\otimes I),\ \tilde{\mathcal{Z}} = (T(X,c)\otimes I)\mathcal{Z},$$

$$\tilde{\mathcal{Z}}' = (T(X',c)\otimes T(X,c))\mathcal{Z}';$$

где

$$T(X,c) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix},$$

$$\alpha = \frac{X(A)\dfrac{(A^3/c+1)^2}{(cA+1)^2} - \dfrac{(1-X_1A^2/c)(1-X_2A^2/c)}{(1-X_3c)(1-X_4c)}}{X(A)-X(1/c)} \ ,$$

$$\beta = \frac{(1-X_1A^2/c)(1-X_2A^2/c)}{(1-X_3c)(1-X_4c)} - \alpha X(1/c) \ ,$$

$$\gamma = \frac{\dfrac{(A^2/c+1)^2}{(-cA+1)^2} - \dfrac{(1-X_3A^2/c)(1-X_4A^2/c)}{(1-X_3c)(1-X_4c)}}{X(A)-X(1/c)} \ ,$$

$$\delta = \frac{(1-X_3A^2/c)(1-X_4A^2/c)}{(1-X_3c)(1-X_4c)} - \gamma X(1/c) \ ,$$

$$(X_1, X_2) = D_{0X} \ , \quad (X_3, X_4) = D_{\infty X} \ .$$

Доказ. Нека је $\psi(z) = (z + A^2c)/(cz+1)$, $\tilde{\psi}(z) = = (z + A^4/c)/(1 + A^2 z/c)$. Из доказа леме 3 следи да је

$$\partial(D_{X\circ\psi}) = \partial(D_{X\circ\tilde{\psi}})$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \circ \psi \\ 1 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} X \circ \tilde{\psi} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ако обележимо $X \circ \psi = f_1/f_2$, $X \circ \tilde{\psi} = g_1/g_2$ имамо:

$$\alpha \frac{f_1(A)}{f_2(A)} + \beta = \frac{g_1(A)}{f_2(A)} = \frac{f_1(A)}{f_2(A)} \left(\frac{1 + A^3/c}{cA + 1} \right)^2,$$

$$\alpha X(1/c) + \beta = \frac{(1 - X_1 A^2/c)(1 - X_2 A^2/c)}{(1 - X_3 c)(1 - X_4 c)},$$

$$\gamma X(1/c) + \delta = \frac{(1 - X_3 A^2/c)(1 - X_4 A^2/c)}{(1 - X_3 c)(1 - X_4 c)},$$

$$\gamma f_1(A)/f_2(A) + \delta = g_2(A)/f_2(A) = (1 - A^3/c)^2/(1 - cA)^2,$$

одакле и добијамо доказ леме.

□

Фамилија $\mathcal{R}(\theta)$ се назива неконстантном, ако је $\mathcal{R}(\theta_1)$ баждарно нееквивалентно $\mathcal{R}(\theta_2)$ када $\theta_1 \neq \theta_2$.

ТВРЂЕЊЕ 3. Ако неконстантна и непрекидна по θ фамилија $\mathcal{R}(\theta, \eta)$ решења једначине Јанга-Бакстера има спектралне карактеристике, за које важи A1- 3/, то Ψ, Ψ_1, Ψ_2 одређени из $\mathcal{R}^{12}(\theta_1 - \theta_2, \eta)$, $\mathcal{R}^{13}(\theta_1, \eta)$, $\mathcal{R}^{23}(\theta_2, \eta)$ припадају једној од фамилија $(i) - (ii)$. Ако таква фамилија $R(\theta, \eta)$ постоји, одређена је једнозначно са тачношћу до баждарне еквиваленције.

Доказ. Фиксирајмо $\mathcal{R}^{23}(\theta_2,\eta)$ и на $\mathcal{R}^{12}(\theta_1-\theta_2,\eta)$, $\mathcal{R}^{13}(\theta_1,\eta)$, $\mathcal{R}^{23}(\theta_2,\eta)$ уз разне θ_1 применимо тврђење 1. Из неконстантности фамилије по θ добијамо да Ψ_2 задовољава /12/ са разним $\partial(D_{X'})$. Претходне леме дају $A^2 c_2 = b_2 d_2$, $d_2 = \pm 1$. /17/ уз $\partial(D_{X'})=1$ даје $\partial(d_2/c_2, d_2/c_2)\cdot\partial(d_1/c_1, d_1/c_1)=1$. Сада /29/, као и у доказу леме 3, уз $\mu=1$ даје $d_1=1$ из чега следи $d=1$.

Из услова непрекидности фамилије $\mathcal{R}(\theta,\eta)$ по θ, пуштајући да /5/ тежи ка /4/ добијамо $\Psi_1=\Psi$. Тако добијамо прво тврђење. Једнозначност са тачношћу до баждарне еквиваленције сада следи из /3/.

$\square$

Таква фамилија решења једначине Јанга–Бакстера постоји. То је, као што показује следећи пример, решење Чередника "а" из .

ПРИМЕР 1.

$$R_{CH}(\theta,\eta)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sh\,\theta/sh(\theta+\eta) & sh\,\eta/sh(\theta+\eta) & 0 \\ 0 & sh\,\eta/sh(\theta+\eta) & sh\,\theta/sh(\theta+\eta) & 0 \\ -4\,sh\,\theta\, sh\,\eta & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L=\begin{bmatrix} u-v\,sh\,\theta/sh(\theta+\eta) & -uv\,sh\,\eta/sh(\theta+\eta) \\ 4uv\,sh\,\theta\cdot sh\,\eta+sh\,\eta/sh(\theta+\eta) & u\,sh\,\theta/sh(\theta+\eta)-v \end{bmatrix}$$

$$P^{(\theta,\eta)}(u,v)=u^2v^2a+u^2b+v^2b+uvc$$

где је $a = 4\,sh\theta\, sh^2\eta / sh(\theta+\eta)$, $b = sh\theta / sh(\theta+\eta)$,

$c = (sh^2\eta - sh^2\theta - sh^2(\theta+\eta))/sh^2(\theta+\eta)$.

Крива Γ је одређена једначином $P=0$ и има три сингуларне тачке. У хомогеним координатама (u,v,t) то су $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$. Бесконачно далеке сингуларне тачке $(0,1,0)$, $(1,0,0)$ су сингуларне тачке спектралне криве произвољне матрице R. Крива Γ је раванска крива степена четири са три сингуларне тачке и значи рационална.

Рационална параметризација $\hat{\Gamma}$

$$v^{-1}(\lambda) = \frac{\lambda^2 - 2k\lambda - (ck/b+1)}{\lambda^2 + \lambda c/b + 1}, \quad u^{-1}(\lambda) = -\frac{\lambda^2(k+c/b) + 2\lambda - k}{\lambda^2 + \lambda c/b + 1},$$

где је k корен једначине $a+b+bk+ck=0$, представља наткривајући простор криве Γ, где над сингуларном тачком $(u,v)=(0,0)$ леже $(u(\lambda_1),v(\lambda_1))$ и $(u(\lambda_2),v(\lambda_2))$, где су λ_1,λ_2 корени полинома $r(\lambda)=\lambda^2+\lambda c/b+1$. То су наше обележене тачке a и b.

$$X(\lambda) = \frac{d(\lambda^2+\lambda c/b+1)}{\lambda^2(1+bk+c) + \lambda(2b-2k) - (ck/b+1+kb)}$$

је прва компонента вакуумног вектора. Очигледно важи: $X(a)=X(b)$.

Тако добијамо

ТЕОРЕМА 3. Сва решења једначине Јанга-Бакстера са спектралном кривом рационалном са обичном двоструком тачком, чији вакуумни вектори задовољавају A1–3/, баждарно / у смислу Кричевера/ су еквивалентни решенима Чередника.

Очигледно се остала решења једначине Јанга са спектралним параметром могу добити из Чередникове R-матрице трансформацијама типа леме 4.

§4. ИЗОЛОВАНА РЕШЕЊА.

Под изолованим решенима $R(\lambda,\mu)$, $Z(\lambda)$, $Z'(\mu)$ једначине Јанга ћемо подразумевати решења конструисана по Ψ, Ψ_1, Ψ_2, D_X, $D_{X'}$, D_u , који задоволавају /9–17/ са фиксираним $\partial(D_X)=\lambda$, $\partial(D_{X'})=\mu$. Из леме 1 следи да /9–14/ представља услове независности система /15–17/ од представника класа, заданих условима $\partial(D_X)=\lambda$, $\partial(D_{X'})=\mu$, т.ј. ако је испуњено /9–14/ решења једначина /15–17/ на Ψ, Ψ_1, Ψ_2 не зависе од избора нула и полава X и X' .

Узимајући у обзир да је $A^2c=bd$, $A^2c_1=b_1d_1$, /15–17/ можемо да запишемо у виду /30–32/:

$$\frac{\mu}{\lambda}=\frac{\dfrac{[\tilde{X}_3^2Q_2(\mu,d)-\tilde{X}_3Q_1(\mu,d)+Q_0(\mu,d)](A+A^2/b)}{[\tilde{X}_3^3P_2(\mu,d)-\tilde{X}_3P_1(\mu,d)-P_0(\mu,d)](-A+A^2/b)^2}}{\dfrac{[\tilde{X}_3^2Q_2(\lambda,d_1)-\tilde{X}_3Q_1(\lambda,d_1)+Q_0(\lambda,d_1)](A+A^2/b_1)^2}{[\tilde{X}_3^2P_2(\lambda,d_1)-\tilde{X}_3P_1(\lambda,d_1)-P_0(\lambda,d_1)](-A+A^2/b_1)^2}} \qquad /30/$$

$X_3\in D_{\infty X}$, $\tilde{X}_3\in D_{\infty X'}$

$$Q_2(\mu,d)=A(1+\mu)+A(\mu-1)/d\,,\quad P_2(\mu,d)=A(1+\mu)-A(\mu-1)/d\,,$$

$$Q_1(\mu,d)=(1-\mu)(A^2-A^2/d^2),\quad P_1(\mu,d)=(1-\mu)(A^2-A^2/d^2),$$

$$Q_0(\mu,d)=A^3/d(1-\mu-(1+\mu)/d)\,,\quad P_0(\mu,d)=(A^3/d)(1-\mu+(1+\mu)/d),$$

$$\lambda=\frac{[X_3^2\widetilde{Q}_2(\lambda,b_2,c_2,d_2)-X_3\widetilde{Q}_1(\lambda,b_2,c_2,d_2)+\widetilde{Q}_0(\lambda,b_2,c_2,d_2)]}{[X_3^2\widetilde{P}_2(\lambda,b_2,c_2,d_2)-X_3\widetilde{P}_1(\lambda,b_2,c_2,d_2)+\widetilde{P}_0(\lambda,b_2,c_2,d_2)]}Q_{00} \qquad /31/$$

$$Q_{00}=\frac{(c_2A+d_2)^2(A+A^2/b)^2}{(-c_2A+d_2)^2(-A+A^2/b)^2}\,,$$

$$\widetilde{Q}_2(\lambda,b_2,c_2,d_2)=(A(1+\lambda)+(A+b_2)(\lambda-1)/(Ac_2+d_2)\,,$$

$$\widetilde{Q}_1(\lambda,b_2,c_2,d_2)=(1-\lambda)(A^2-(A+b_2)^2/(Ac_2+d_2)^2)$$

$$\widetilde{Q}_0(\lambda,b_2,c_2,d_2)=(A+b_2)A(A(1-\lambda)-(A+b_2)(1+\lambda)/(c_2A+b_2))/(Ac_2+d_2),$$

$$\widetilde{P}_2(\lambda,b_2,c_2,d_2)=A(1+\lambda)+(-A+b_2)(\lambda-1)/(-Ac_2+d_2)\,,$$

$$\widetilde{P}_1(\lambda,b_2,c_2,d_2)=(1-\lambda)(A^2-(-A+b_2)^2/(-Ac_2+d_2)^2\,,$$

$$\widetilde{P}_0(\lambda,b_2,c_2,d_2)=(A(-A+b_2)/(-Ac_2+d_2))(A(1-\lambda)-(1+\lambda)(-A+b_2)/(-Ac_2+d_2)$$

Табл.I.

	b_1	b_2
i	b	$B_2(b)$
ii	b	$A^2/B_2(b)$
iii	A^2/b	$B_2(b)$
iv	A^2/b	$A^2/B_2(b)$

Табл.2.

	d	d_1	d_2	$B_2(b)$	$\lambda,\ \mu$		c, c_1, c_2
I	-1	-1	1	$B_2=-b$	$\lambda=-\mu$ $\lambda=\mu$		$c_i=\frac{b_i d_i}{A^2}$
II	-1	1	1	$B_2=-b$	$\mu=1$ $\mu=-1$	λ -любое	
III	1	-1	1	$B_2=-b$	$\lambda=1$ $\lambda=-1$	μ-любое	
IV	1	1	-1	$B_2=\frac{A((A-b)-\mu(A+b))}{(A-b)+\mu(A+b)}$	$\lambda=-\mu$ $\lambda=\mu$		

$$\mu = \frac{[\tilde{X}_3^2 Q_2(\mu,b_2,c_2,d_2) - \tilde{X}_3\tilde{Q}_1(\mu,b_2,c_2,d_2) + \tilde{Q}_0(\mu,b_2,c_2,d_2)]}{[\tilde{X}_3^2 \tilde{P}_2(\mu,b_2,c_2,d_2) - \tilde{X}_3^2\tilde{P}_1(\mu,b_2,c_2,d_2) + \tilde{P}_0(\mu,b_2,c_2,d_2)]} P_{00} \qquad /32/$$

$$P_{00} = \frac{(c_2A+d_2)^2(A+A^2/b_1)^2}{(-c_2A+d_2)^2(-A+A^2/b_1)^2} \;.$$

Из /30/ и услова независности од представника класа μ и λ добијамо да је или $(1-\mu)(A^2-A^2/d^2)=0$ или $A(1+\mu)+A(\mu-1)/d = A(1+\mu)-A(\mu-1)/d$, одакле имамо $\mu=1$ или $d=\pm 1$; и $\lambda=1$ или $d_1=\pm 1$. Аналогно /31/ даје $\lambda=1$ или $A^2=(A+b_2)^2/(Ac_2+d_2)^2$. После тога остаје да се провери услов комутативности трансформација Ψ, Ψ_1 и Ψ_2 . Као резултат добијамо потпун списак изолованих решења. Свако решење, одређено параметрима A, d, d_1, d_2, b, b_1, b_2, c, c_1, c_2, λ, μ који су указани у таблицама 1,2, /или скуп решења/ су индексирани паровима (i,j) где је j редни број врсте у таблици 1, а i редни број врсте у таблици 2.

§ 5. СЛУЧАЈ $D_x=(A,-A)$

Размотримо услов А2/. Претпоставимо да важи не А2/ већ

НЕА2/ $\quad D_{\infty x}=(A,-A)$.

ПРИМЕР 2. /решење "б" у [9] /

$$R(\theta,\eta)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\theta\eta & \theta(\theta+\eta)^{-1} & \eta(\theta+\eta)^{-1} & 0 \\ -\theta\eta & \eta(\theta+\eta)^{-1} & \theta(\theta+\eta)^{-1} & 0 \\ -\theta^3\eta-\theta^2\eta^2-\theta\eta^3 & \theta\eta & \theta\eta & 1 \end{bmatrix}$$

$$L=\begin{bmatrix} u+\theta\eta uv-\theta(\theta+\eta)^{-1}v & (\theta^3\eta+\theta^2\eta^2+\theta\eta^3)uv-\theta\eta(u+v)+\eta(\theta+\eta)^{-1} \\ -uv\eta(\theta+\eta)^{-1} & \theta(\theta+\eta)^{-1}u-v-\theta\eta uv \end{bmatrix}.$$

Спектрална крива Γ се задаје једначином:

$$P(u,v)=u^2v^2\frac{\theta\eta^4}{\theta+\eta}-u^2v\frac{2\theta\eta^2}{\theta+\eta}-uv^2\frac{2\theta\eta^2}{\theta+\eta}+uv\frac{2\eta}{\theta+\eta}+u^2\frac{\theta}{\theta+\eta}+v^2\frac{\theta}{\theta+\eta}=0$$

Као и у примеру 1 налазимо сингуларне тачке $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$ и добијамо $g(\Gamma)=0$. Означимо

$$a=\theta\eta^4/(\theta+\eta)\ ,\ b=-2\theta\eta^4/(\theta+\eta)\ ,$$

$$c=2\eta/(\theta+\eta)\ ,\ d=\theta/(\theta+\eta)\ ,\ \bar{u}=1/u\ ,\ \bar{v}=1/v\ ,$$

$$\tilde{P}(\bar{u},\bar{v})=P(u,v)/u^2v^2\ ,$$

$$\widetilde{P}(\bar{u},\bar{v}) = a + b\bar{u} + b\bar{v} + cu\bar{v} + d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2 = 0$$

Нађимо рационалну параметризацију криве Γ .

$\bar{u} - u_0 = \lambda(\bar{v} - v_0)$, $u_0 = 0$, $v_0 = \eta^2$ заменимо у /33/ и тако добијамо

$$\bar{v}(\lambda) = -\frac{b + v_0 d + \lambda b - \lambda^2 d v_0}{d + c\lambda + d\lambda^2} \ ,$$

$$\bar{u}(\lambda) = -\frac{(b + 2v_0 d)\lambda + \lambda^2(b + cv_0)}{d + c\lambda + d\lambda^2} \ ,$$

одакле се види да

$$X = \frac{\theta(\theta+\eta)^{-1}u - v - \theta\eta uv}{uv\eta(\theta+\eta)^{-1}} \ ,$$

има пол у сингуларној тачки $(0,0)$.

На $(A,-A)$ услов A1/ не дејствује, т.ј. $\dim \widetilde{L}(A,-A) = 3$, као у случају произвољног дивизора степена 2 на регуларној кривој. Нека је

$$X(z) = \frac{(z-x_1)(z-x_2)}{(z-A)(z+A)} \ , \quad Y(z) = \frac{(z-y_1)(z-y_2)}{(z-A)(z+A)} \ .$$

Услов постојања (2×2) матрице T такве да

$$TX = hY \qquad /34/$$

је $\vartheta(x_1,x_2)=\vartheta(y_1,y_2)$, т.ј. класама дивизора нула $\vartheta(D_{0x})$, $L(A,-A)$ се раслојава на једнодимензиону фамилију дводимензионих класа еквиваленције, која је дефинисана у /34/. Случај /HEA2/ се своди на случај /A2/ пренормирањем:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{(X-X_1)(X-X_2)}{(X-A)(X+A)} \\ 1 \end{bmatrix} \frac{(X-A)(X+A)}{(X-X_3)(X-X_4)} = \begin{bmatrix} \dfrac{(X-X_1)(X-X_2)}{(X-X_3)(X-X_4)} \\ \dfrac{(X-A)(X+A)}{(X-X_3)(X-X_4)} \end{bmatrix}$$

где је $\vartheta(X_3,X_4)=\vartheta(X_1,X_2)$. Делећи на прву координату добијамо ново нормирање

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{X-A}{X-X_1} \cdot \dfrac{X+A}{X-X_2} \end{bmatrix}.$$

Ново нормирање се своди на стандардно пермутацијом, којој, на нивоу решења једначине Јанга, одговара баждарна трансформација $\mathcal{R}\to(T\otimes I)\mathcal{R}(T\otimes I)$, где је

$$T=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Тако, из теореме 3 и примера 2 добијамо:

ТЕОРЕМА 4. Решење Чередника "б" је баждарно / у смислу Кричевера/ еквивалентно решењу Чередника "а".

§ 6. РЕШЕЊА ЧЕРЕДНИКА КАО БАЖДАРНИ ЛИМЕС БАКСТЕРОВИХ.

Као што се већ говорило у уводу / § 4 /, из рада Белавина и Дринфелда [10] следи нееквивалентност класичних r-матрица, које одговарају R-матрици Чередника и XXZ R-матрици / последња се добија као лимес Бакстерових /. Показаћемо, како без обзира на то, може да се и R-матрица Чередника добије као лимес из матрица еквивалентних бакстеровим /таква могућност се претсказивала у [9, 3] /.

ТЕОРЕМА 5. Постоји фамилија (2×2) матрица $T(k)$, таква да

$$\lim_{k\to 0}(T(k)\otimes T(k))B(k)(T^{-1}(k)\otimes T^{-1}(k))=R_{CH}(i\theta) \qquad (*)$$

Доказ. Нека је $(e)=(e_1,e_2,e_3,e_4)^T$ база, у којој $B(k)$ има уобичајен облик:

$$[B(k)]_e=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & d \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ d & 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

где је $a=1$, $b=\operatorname{sn}u\,\operatorname{sn}^{-1}(u+\eta)$, $c=\operatorname{sn}\eta\,\operatorname{sn}^{-1}(u+\eta)$, $d=k\operatorname{sn}\eta\operatorname{sn}u$. Нађимо базу (e'), која се добија из e:

$$e'=Qe,$$

Основни факти о елиптичким функцијама могу да се нађу у [24].

где је

$$Q = \begin{bmatrix} \alpha & & & \beta \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \gamma & & & \delta \end{bmatrix}$$

и у којој $B(k)$ има облик

$$[B(k)]_{e'} = \begin{bmatrix} a & & & d' \\ & b & c & \\ & c & b & \\ d'' & & & a \end{bmatrix}$$

Разлажући $B(k)e_i'$ по бази (e) , замењујући разлагање e_i' по (e) прво у леву страну, а затим у десну страну разлагања $B(k)e_i'$ по (e') добијамо:

$$B(k)e_1' = (\alpha a + \beta d)e_1 + (\beta a + \alpha d)e_4 = (\alpha a + d'\gamma)e_1 + (\beta a + d'\delta)e_4 ,$$

$$B(k)e_4' = (\gamma a + \delta d)e_1 + (\gamma d + \delta a)e_4 = (\gamma a + \alpha d'')e_1 + (d''\beta + \delta a)e_4 ,$$

одакле следи:

$$d'\gamma = \beta d , \; d''\alpha = \delta d , \; d'\delta = \alpha d , \; d''\beta = \gamma d \quad , \text{ т.ј.}$$

$$\frac{d'}{d} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\delta} \quad \text{и} \quad \frac{d''}{d} = \frac{\delta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} , \qquad /35/$$

што даје услов $d'd'' = d^2$.

Нека је: $d' = -4\, \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{sn}\, \eta$ и $d'' = -(k^2/4)\, \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{sn}\, \eta$.

При $k \to 0$: $a \to 1$, $b \to \sin u \sin(u+\eta)^{-1}$,

$$c \to \sin\eta \sin(u+\eta)^{-1},\ d\to 0,\ d'\to -4\sin u \sin\eta\ .\ d''\to 0.$$

Тада из /35/ добијамо релације међу елементима матрице Q :

$$\frac{d'}{d} = -\frac{4}{k} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\delta} \longrightarrow -\frac{k}{4}\beta = \gamma \text{ и } -\frac{k}{4}\alpha = \delta.$$

Нађимо сада услове неопходне да би Q имала облик $T(k)\otimes T(k)$

Нека је $T: V \to V$, где је $V = L\{f_1, f_2\}$,

задано формулама

$$\begin{bmatrix} f_1' \\ f_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}.$$

Из

$$f_1'\otimes f_1' = \alpha_1^2 f_1\otimes f_1 + \alpha_1\beta_1 f_1\otimes f_2 + \alpha_1\beta_1 f_2\otimes f_1 + \beta_1^2 f_2\otimes f_2$$

имамо $\beta_1 = 0 \Rightarrow \beta = 0$;

$$f_2'\otimes f_2' = \gamma_1^2 f_1\otimes f_1 + \gamma_1\delta_1 f_1\otimes f_2 + \gamma_1\delta_1 f_2\otimes f_1 + \delta_1^2 f_2\otimes f_2$$

имамо $\gamma_1 = 0 \Rightarrow \beta = 0$, и из

$$f_1'\otimes f_2' = \alpha_1\gamma_1 f_1\otimes f_1 + \alpha_1\gamma_1 f_1\otimes f_2 + \beta_1\gamma_1 f_2\otimes f_1 + \beta_1\delta_1 f_2\otimes f_2,$$

$$\alpha_1 = 1/\delta_1 \Rightarrow \alpha_2 = -4/k \Rightarrow \alpha_1 = (-4/k)^{1/4}.$$

Тако добијамо да за

$$T(k) = \begin{bmatrix} (-4/k)^{1/4} & 0 \\ 0 & (-k/4)^{1/4} \end{bmatrix}$$ важи /*/.

ПРИМЕДБА. Потсетимо да $\mathbb{Z}_n$ симетрија матрице S означава релације

$$S^{a'b'}_{x'y'} = S^{ab}_{xy} \qquad (z'=z+\ell\ ,\ \ell\in\mathbb{Z}_n)$$

и $$S^{ab}_{xy} = 0 \quad , \quad x+y \neq a+b$$

Лако је видети да су матрице Бакстера, Фелдерхофа и XXZ-модела $\mathbb{Z}_2$ симетричне. Теорема 5 даје експлицитне формуле нарушавања $\mathbb{Z}_2$ симетрије / в. [9,3] /.

§ 7. СПЕКТРАЛНЕ КРИВЕ СА СИНГУЛАРИТЕТОМ ТИПА КАСПА.[1)]

Нека је R (4×4) матрица са регуларном неразложивом рационалном спектралном кривом и вакуумним векторима $X\otimes U$, који задовољавају A3/. Тада простор, разапет над $X\otimes U$, је четвородимензиони подпростор W петодимензионог простора $L(D)$, где је $D=D_{\infty\times u}$. Из дифиниције вакуумних вектора $\mathcal{R}(X\otimes U)=h(Y\otimes V)$, следи да $L\{h(Y\otimes V)\}\leq W$. Пошто се четвородимензиони подпростор $W\leq L(D), \deg D=4$, задаје или условом

$$(i)\ \exists\, A,B: f\in W \Leftrightarrow f\in L(D) \text{ и } f(A)=f(B)\ ,$$

или условом

$$(ii)\ \exists\, A: f\in W \Leftrightarrow f\in L(D) \text{ и } f'(A)=0\ ,$$

до потпуног описа решења ранга 1 једначине Јанга са рационалним неразложивим спектралним кривама остаје да се размотри

1/Касп — тип сингуларитета, двострука тачка са јединственом тангентом.

случај неразложиве рационалне криве са сингуларитетом типа каспа, или, еквивалентно, регуларне рационалне криве са условом на прстен функција:

/НЕА1/ $\qquad f'(0)=0$

Тај се случај разматра аналогно случају обичне двоструке тачке / в. § 2 /. Нека је

$$\vartheta_0(X_1, \ldots, X_n) = \lim_{A\to 0} \frac{\vartheta_{A,-A}(X_1, \ldots, X_n)^{-1}}{A}$$

Ако је $P(X)=(X-X_1)(X-X_2)$, то

$$\vartheta_0(X_1, X_2) = \frac{2P'(0)}{P(0)} = -\frac{2(X_1+X_2)}{X_1X_2} = -2\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{X_i}$$

Такође је $\vartheta_0(X_1,X_2,X_3,X_4)=-2\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{X_i}$, одакле добијамо

$$\vartheta_0(X_1,X_2,X_3,X_4)=\vartheta_0(X_1,X_2)+\vartheta_0(X_3,X_4).$$

Следећа теорема се добија на исти начин као и тврђење 1 и теорема 2 у § 2.

ТЕОРЕМА 2. Да би $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{L}'$ били решења ранга 1 једначине Јанга, неопходно је и довољно:

1/ $\quad \mathcal{R}(X(\psi_1(z))\otimes X1(z))=g(z)(X1(\psi(z))\otimes X(z)) \qquad$ /36/

2/ $\mathcal{Z}(X(z)\otimes U(z)) = h(z)(X(\psi_2(z))\otimes U(\psi(z)))$ /37/

3/ $\mathcal{Z}'(X1(z)\otimes U(z)) = h_1(z)(X1(\psi_2(z)\otimes U(\psi_1(z)))$ /38/

4/ $X'(0)=0$ /39/

5/ $X1'(0)=0$ /40/

6/ $U'(0)=0$ /41/

7/ $X(\psi_i(0))'=0\ ,\ i=1,2$ /42,43/

8/ $X1(\psi_i(0))'=0\ ,\ i=0,2$ /44,45/

9/ $U(\psi_i(0))'=0\ ,\ i=0,1$ /46,47/

10/ $\partial_0(D_{X\circ\psi_1}+D_{X1}) = \partial_0(D_{X1\circ\psi}+D_X)$ /48/

11/ $\partial_0(D_X+D_u) = \partial_0(D_{X\circ\psi_2}+D_{u\circ\psi})$ /49/

12/ $\partial_0(D_{X1}+D_u) = \partial_0(D_{X1\circ\psi_2}+D_{u\circ\psi_1})$ /50/

13/ $X(\psi_1\circ\psi_2) = X(\psi_2\circ\psi_1)$ /ком/

14/ $X1(\psi\circ\psi_2) = X1(\psi_2\circ\psi)$

Ако је $\psi = (z+b)/(cz+d)$, $D_{0X} = (x_1, x_2)$, $\vartheta_0(D_X) = \lambda$, то $D_{X\circ\psi} = (z_1, z_2)$, где су $z_1 = (b - dx_1)/(1 - cx_1)$, $z_2 = [(b\lambda + 2d)x_1 + 2b]/[(\lambda + 2c)x_1 + z]$, одакле добијамо

$$\vartheta_0(D_{X\circ\psi}) = -2\,\frac{(z_1+z_2)}{z_1 z_2} = -2\,\frac{-((cb+d)\lambda + 4cd)x_1^2 + 2b\lambda x_1 + 4b}{-(db\lambda + 2d_2)x_1^2 + b_1\lambda x_1 + 2b_2} \qquad /51/$$

Једначине /48–50/ можемо да запишемо

$$\lambda - \mu = \vartheta_0(D_{X\circ\psi_1}) - \vartheta_0(D_{X1\circ\psi}), \qquad /52/$$

$$\lambda = \vartheta_0(D_{u\circ\psi}) + \vartheta_0(D_{X\circ\psi_2}), \qquad /53/$$

$$\mu = \vartheta_0(D_{u\circ\psi_1}) + \vartheta_0(D_{X1\circ\psi_2}). \qquad /54/$$

Као и у случају обичне двоструке тачке / в. почетак § 4 /, /39–41/ представља услов независности /48–50/ од представника класа $\vartheta_0(D_X) = \lambda$, $\vartheta_0(D_{X1}) = \mu$, т.ј. од избора нула и полова функција X, $X1$ и u. Зато из /51/ имамо или:

$$1^\circ \quad b = 0 \Rightarrow \vartheta_0(D_{X\circ\psi}) = -(\lambda + 4c)/d,$$

или

$$2^\circ \quad b = 0 \Rightarrow \vartheta_0(D_{X\circ\psi}) = -4/d.$$

Решења (Ψ, Ψ_1, Ψ_2) система /42-50/, која не зависе од класа функција X, X', u, спадају у случај 1°. Из /52-54/:

$$\lambda - \mu = -(\lambda + 4c_1)/d_1 + (\mu + 4c)/d \Rightarrow \qquad /55/$$

$$\Rightarrow \quad d = d_1 = -1 \, , \; c = c_1 \, ,$$

$$\lambda = -4c/d - (\lambda + 4c_2)/d_2 \Rightarrow \qquad /56/$$
$$\Rightarrow d_1 = -1 \, , \; c = -c_2 \, .$$

Као резултат добијамо

ТВРЂЕНЕ 4. Постоји јединствена једнопараметарска фамилија

$$(\Psi(c), \Psi_1(c), \Psi_2(c)) = \left(\frac{z}{cz-1} \, , \frac{z}{cz-1} \, , \frac{z}{-cz-1} \right)$$

решења система /42-50/, уз произвольне $X, X1, U$, које задоволавају /39-41/. Та фамилија не задовољава услов /ком/.

§ 8. БАКСТЕРОВА РЕДУКЦИЈА РАЦИОНАЛНИХ РЕШЕЊА ЈЕДНАЧИНЕ ЈАНГА.

Као што је речено у Уводу у § 1., решења једначине Јанга-Бакстера су решења једначине Јанга. У овом параграфу ћемо да покажемо, у којој од четири фамилије решења једначине Јанга, нађене у § 3, могу да се налазе решења једначине Јанга-Бакстера, и како их је ефективно могуће издвојити. Такође ће бити дат критеријум баждарне еквиваленције решења једначине Јанга-Бакстера. У свом параграфу ће бити реч о баждарној еквиваленпији у смислу Јанга-Бакстера.

ТЕОРЕМА 6. а/ Постоји једнопараметарска фамилија разломљено-линеарна трансформација φ_θ и вектор-функција U такви да је $R(\theta)$ дифинисано једначином

$$R(\theta)(U\circ\varphi_\theta \otimes U) = h(U\circ\varphi_\theta\circ\psi_2 \otimes U\circ\psi_0) \qquad /57/$$

б/ Тројка (ψ_0, ψ_1, ψ_2), која задаје $(R(\theta_1), R(\theta_2), R(\theta_3=\theta_1-\theta_2))$ припада фамилији а/ леме 3.

в/ Фамилија φ_θ дифинише фамилију решења $R(\theta)$ једнозначно са тачношћу до баждарне еквиваленције.

Доказ. а/ $\mathcal{R}=R(\theta_1-\theta_2)$, $\mathcal{Z}=R(\theta_1)$ и $\mathcal{Z}'=R(\theta_2)$ задовољава једначину Јанга и зато задовољава једнакости 1/-3/ тврђења 1. Означимо вакуумне векторе X, X' матрица $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}'$ са X_{θ_1}, X_{θ_2} тим редом. Размотримо сада тројку $(\mathcal{R}, \mathcal{Z}, \mathcal{Z}')$, у којој је $\mathcal{Z}=R(\theta_1-\theta_2)$. Упоређујући вакуумне векторе матрице $R(\theta_1-\theta_2)$, одређене у првом случају једнакошћу 1/, а у другом — једнакошћу 2/ тврђења 1, добијамо да постоји разломљено-линеарна трансформација φ_{θ_2} таква да

$$(X_{\theta_1}\circ\psi_1 \otimes X_{\theta_2})\circ\varphi_{\theta_2}^{-1} = X_{\theta_1-\theta_2}\otimes U$$

т.ј. $\quad X_{\theta_2} = U\circ\varphi_{\theta_2}$

и аналогно

$$X_{\theta_1} = U\circ\varphi_{\theta_1}\ ,\ X_{\theta_2-\theta_1} = U\circ\varphi_{\theta_3}\ .$$

б/ Из 2/ и 3/ тврђења 1 , из непрекидности, добијамо $\psi_0=\psi_1$. Слично тачки а/ из једнакости типа 1/ и 2/ имамо

$$R(U\circ\varphi_{\theta_3}\otimes U)=h'(U\circ\varphi_{\theta_3}\circ\psi_2\otimes U\circ\psi_0)$$

$$R(U\circ\varphi_{\theta_1}\circ\psi_1\circ\varphi_{\theta_2}^{-1}\otimes U)=$$

$$=g'(U\circ\varphi_{\theta_1}\circ\varphi_{\theta_2}^{-1}\otimes U\circ\varphi_{\theta_2}\circ\psi_0\circ\varphi_{\theta_2}^{-1})\ ,$$

одакле добијамо

$$U\circ\varphi_{\theta_2}\circ\psi_0\circ\varphi_{\theta_2}^{-1}=U\circ\psi_0 \quad \text{и} \quad U\circ\varphi_{\theta_1}\circ\psi_1\circ\varphi_{\theta_2}^{-1}\circ\psi_2=U\circ\varphi_{\theta_1}\circ\varphi_{\theta_2}^{-1}\ .$$

Ако претпоставимо да је $\varphi_{\theta_1}=\varphi_{\theta_2}$ и узмемо у обзир једнакост $\psi_0=\psi_1$ добијамо $\psi_1=\psi_2^{-1}$.

в/ Тврђење следи из б/, ако приметимо да избору функције U одговара баждарна трансформација T , т.ј. замена у /57/ $U\longrightarrow\widetilde{U}=T\cdot U$ је еквивалентна замени

$$R\rightarrow\widetilde{R}=(T\otimes T)R(T^{-1}\otimes T^{-1})\ .$$

■

ПРИМЕДБА. Трансформација φ_θ представља трансформацију дуж времена система обичних диференцијалних једначина

$$\frac{d}{dt}R((\theta_1+t)-(\theta_2+t))=0$$

записаног у терминима вакуумних вектора. Избор функције U одговара избору почетних вредности.

ПРИМЕР 3. Нека је U произвољна парна функција и

$\varphi_c(z)=(z+A^2c)/(cz+1)$. Дифинишимо $X(c):=U\circ\varphi_c$ а $L(c,\eta)$ једначином

$$L(c,\eta)X(c)\otimes U = X(c)\circ\varphi_\eta\otimes U\circ\varphi_\eta^{-1} .$$

Означимо $R(\theta,\eta)=L(c,\eta)$, где је

$$\theta=\ln(\partial(D_{X(c)})/\partial(D_U))-\ln\phi(\eta) ,$$

где се ϕ одређује из услова $\partial(D_{X\circ\varphi_\eta})=\partial(D_X)\cdot\phi(\eta)$ Очигледно, $R(\theta,\eta)$ представља решење ранга 1 једначине Јанга-Бакстера. Конструисано решење је регуларно и квазикласично.

Потсетимо да се фамилија $R(\theta)$ назива регуларном, ако постоји θ_0 такво да $R(\theta_0)=P$, где је P матрица пермутација.

ТЕОРЕМА 7. Регуларна решена $R(\theta)$ једначине Јанга-Бакстера су баждарно еквивалентна решењу Чередника "а"".

Доказ. Претпостављаћемо да : разматрана крива има обележене тачке $A,-A$.

Из регуларности фамилије $R(\theta)$ следи да $\varphi_0\in\{\varphi_\theta\}$. Из услова $X_\theta=U\circ\varphi_\theta\in\mathcal{M}(\Gamma_{-A,A})$ и парности функције U имамо

$$\varphi_\theta(A)=-\varphi_\theta(-A) \qquad /58/$$

Нека је $X_1=U\circ\varphi_0$. Из $X_1\circ\varphi_\theta\in\mathcal{M}(\Gamma_{-A,A})$ добијамо

$$X_1\circ\varphi_\theta(-A)=X_1\varphi_\theta(A) ,$$

што са /58/ даје

$$X_1(-\varphi_\theta(A)) = X_1\varphi_\theta(A) ,$$

$$U \circ \psi_0(\omega) = U \circ \psi_0(-\omega)$$

где је $\omega = \varphi_\theta(A)$. Није тешко добити да је $\omega = \pm A$, т.ј.

$$\varphi_\theta(A) = \pm A$$

Из непрекидности по θ и услова $\psi_0 = \psi_{\theta_0}$ добијамо на крају

$$\varphi_\theta(A) = A \quad , \forall \theta .$$

Из спектралних карактеристика, израчунатих у примеру 1 и на основу в/ теореме 6, добијамо тврђење теореме. ∎

ПОСЛЕДИЦА. Фамилија решења једначине Јанга-Бакстера, конструисана у примеру 3, баждарно је еквивалентна фамилији решења Чередника.

Г Л А В А 2

РЕШЕЊА ЈЕДНАЧИНЕ ЈАНГА
СА РАЦИОНАЛНИМ РАЗЛОЖИВИМ СПЕКТРАЛНИМ КРИВАМА .

§ 1. УВОД.

R_{XXZ} матрице се не уклапају у шему прве главе. Њихове спектралне криве су рационалне и разложиве. Ова глава је посвећена (4×4) решењима једначине Јанга са таквим спектралним карактеристикама. Налазе се неопходни / § 2,3 / и довољни / § 3 / услови на спектар (4×4) матрица $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{L}'$ под којим оне представљају решења једначине Јанга ранга 1 / појам ранга је дат у § 3 Увода /. За разлику од случаја разматраног у главе 1, овде се појављује нови неопходни услов — симетричност спектралног полинома. Као резултат се испоставља, да се фамилије $\mathcal{R}(\theta)$ решења једначине Јанга, које зависе од комплексног параметра θ , са разложивим рационалним спектралним кривама , своде на решење $\mathcal{R}_{XXZ}(\theta)$. Дају се довољни услови за решење ранга 2 једначине Јанга, и у § 4 се конструише пребројива фамилија $\mathcal{R}(\theta)$ решења једначине Јанга-Бакстера ранга 2, međусобно баждарно нееквивалентних.

У § 5 је доказано постојање вакуумног стања, што даје могућност да се уопштење алгебарског анзаца Бете примени на фамилије решења, које су конструисане у § 4.

Случај R-матрица са рационалним разложивим спектралним кривама,таквих да се нула и полови вакуумних вектора налазе у тачкама пресека компонената, се разматра у § 6. У § 7 из фамилије $\mathcal{R}_{XXZ}$, се нетривиалним баждарним лимесом добија R -матрица ранга 2, чији спектрални полином дефинише 1-1 пресликавање.

§ 2. КОМУТАТИВНОСТ ПОЛИНОМА $\det L(u,v)$ и $\det L'(u,v)$

Означимо са $\Gamma_{a,b}^{a',b'}$ рационалну разложиву криву са регуларним неразложивим компонентама $\Gamma^1_{a,b}$ и $\Gamma^2_{a',b'}$, са обележеним тачкама a, b и a', b' тим редом, и са прстеном функција $\mathcal{M}(\Gamma_{a,b}^{a',b'})$ дефинисаним условом

$$f\in\mathcal{M}(\Gamma_{a,b}^{a',b'})\leftrightarrow f=(f_1,f_2),\ f_i\in\mathcal{M}(\Gamma^i),\ f_1(a)=f_2(a'),\ f_1(b)=f_2(b').$$

Елементе $\mathcal{M}(\Gamma_{a,b}^{a',b'})$ ћемо називати рационалним функцијама на $\Gamma_{a,b}^{a',b'}$. Линеарна еквиваленција дивизора на таквој кривој се дефинише као и обично

$$x_1+\ldots+x_n+x_1'+\ldots+x_m' \sim y_1+\ldots+y_n+y_1'+\ldots+y_m'$$

где су $x_i, y_i\in\Gamma^1_{a,b}$, $x_i', y_i'\in\Gamma^2_{a',b'}$, ако постоји рационална на $\Gamma_{a,b}^{a',b'}$ функција f са половима у тачкама $x_1,\ldots,x_n,x_1',\ldots,x_m'$ и нулама у $y_1,\ldots,y_n,y_1',\ldots,y_m'$. Означимо

$$\vartheta_{a,b}^{a',b'}(x_1,\ldots,x_n|x_1',\ldots,x_m') = \prod_{i=1}^{n}\frac{a-x_i}{b-x_i}\Big/\prod_{j=1}^{m}\frac{a'-x_i'}{b'-x_i'} .$$

Очигледно је да се услов линеарне еквиваленције дивизора x_1+ $+\ldots+x_n+x_1'+\ldots+x_m'$ и $y_1+\ldots+y_n+y_1'+\ldots+y_m'$ може записати у облику

$$\vartheta_{a,b}^{a',b'}(x_1,\dots,x_n|x_1',\dots,x_m')=\vartheta_{a,b}^{a',b'}(y_1,\dots,y_n|y_1',\dots,y_m')$$

ТВРЂЕЊЕ 1. За произволне рационалне вектор-функције X, Y, U, V на $\Gamma_{a,b}^{a',b'}$, чији дивизори полова задовољавају услове

а/ $D_X+D_U\sim D_Y+D_V$

б/ $\deg(D_X)^i=\deg(D_U)^i=n/2$, где $(D_X)^i$ означава пројекцију D_X на Γ^i, $i=1,2$,

постоји јединствена / са тачношћу до скаларног множиоца / матрица $\mathcal{Z}$, таква да

$$\mathcal{Z}_{j\beta}^{i\alpha}X_iU_\alpha=hY_jV_\beta\ ,\quad i,j=1,\dots,n;\ \alpha,\beta=1,2,$$

где је $h\in\mathcal{M}(\Gamma_{a,b}^{a',b'})$.

Доказ. Нека $\mathfrak{L}(D)$ означава линеаран простор функција на $\Gamma_{a,b}^{a',b'}$, чији су дивизори већи или једнаки D. Теорема Римана-Роха даје $\dim\mathfrak{L}(D)=2n$. Ако је функција h дефинисана условима $D_{\infty h}=D_X+D_U$, $D_{0h}=D_Y+D_V$, из а/ имамо да је $h\in\mathcal{M}(\Gamma_{a,b}^{a',b'})$. Пошто функције X_iU_α и hY_jV_β образују две базе простора $\mathfrak{L}(D)$, матрица $\mathcal{Z}$ је одређена једнозначно. ∎

Функције $u=(u^{(1)},u^{(2)})$, $v=(v^{(1)},v^{(2)})$ на $\Gamma_{a,b}^{a',b'}$, $u'=(u'^{(1)},u'^{(2)})$, v' на $\Gamma_{\alpha,\beta}^{\alpha',\beta'}$, где координатне функције имају степен 1 на одговарајућим кривама, одређују полиноме

$$P(u,v)=P_1(u^{(1)},v^{(1)})\cdot P_2(u^{(2)},v^{(2)})=0$$ на $\Gamma_{a,b}^{a',b'}$ и

$$P'(u',v')=P'_1(u'^{(1)},v'^{(1)})\cdot P'_2(u'^{(2)},v'^{(2)})=0$$ на $\Gamma_{\alpha,\beta}^{\alpha',\beta'}$, где

$$P_s(u^{(s)},v^{(s)})=\sum_{i,j=0}^{1} a_{ij}^{(s)} u^{(s)i} v^{(s)j}=0$$ на Γ^{s},

$$P'_s(u'^{(s)},v'^{(s)})=\sum_{i,j=0}^{1} a_{ij}'^{(s)} u'^{(s)i} v'^{(s)j}$$ на Γ'^{s}, $s=1,2$.

Нека функције x,y,u,v рационалне на $\Gamma_{a,b}^{a',b'}$ и x', y',u',v' рационалне на $\Gamma_{\alpha,\beta}^{\alpha',\beta'}$ испуњавају услове тврђења 1, при $n=2$. Тада оне одређују (4×4) матрице $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{Z}'$:

$$\mathcal{Z}(X\otimes U)=h(Y\otimes V)$$

$$\mathcal{Z}'(X'\otimes U')=h'(Y'\otimes V')$$, где је, на пример, $X=\begin{bmatrix} x\\ 1\end{bmatrix}$.

Означимо

$$\Lambda_1=\Lambda_{1\,pq\beta}^{\;ij\alpha}=\mathcal{Z}'^{\,k\gamma}_{\;p\beta}\,\mathcal{Z}^{\,l\alpha}_{\;q\gamma}\,R^{\,ij}_{\;kl}$$

$$\Lambda_2 = \Lambda_{2\,pq\beta}^{\;ij\alpha} = \mathcal{R}_{pq}^{k\ell}\, \mathcal{Z}_{k\beta}^{i\gamma}\, \mathcal{Z}_{\ell\gamma}^{\prime j\alpha}$$

где је $\mathcal{R}$ произвољна (4×4) матрица. Тензорима Λ_i одговарају полиноми $Q_i=0$ степена 4 по свакој променљивој, и криве Γ_i .

Из [7] се добија да из једначине Јанга, а то је једнакост $\Lambda_1=\Lambda_2$, следи да полиноми P и P' комутирају и да се вакуумни вектори тензора Λ_i изражавају преко вакуумних вектора матрица $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{Z}'$, т.ј.:
из $P(u,v)=0$ и $P'(v,w)=0$ имамо

$$\Lambda_1(\mathcal{R}^{-1}(X'(v,w)\otimes X(u,v))\otimes U)= \qquad /1*/$$
$$=h(u,v)h'(v,w)(Y'(v,w)\otimes Y(u,v)\otimes W)$$

и из $P'(u,\tilde v)=0$ и $P(\tilde v,w)=0$

$$\Lambda_2(X(\tilde v,w)\otimes X'(u,\tilde v)\otimes U)= \qquad /2*/$$
$$=h'(u,\tilde v)h(\tilde v,w)(\mathcal{R}(Y(\tilde v,w)\otimes Y'(u,\tilde v))\otimes W)\ .$$

Из $P(u,v)=P_1(u^{(1)},v^{(1)})P_2(u^{(2)},v^{(2)})=0$ и $P(\tilde v,w)=0$ следи да постоји $\Psi_1=(\Psi_{11},\Psi_{12})$, где су Ψ_{1j} разломљено-линеарна пресликавања на Γ^i , такво да $\tilde v=u\circ\Psi_1$, $w=v\circ\Psi_1$, т.ј. $\tilde v_i=u_i\circ\Psi_{1i}$, $w_i=v_i\circ\Psi_{1i}$. Такође се из $P_1'(u,\tilde v)=0$ и $P'(v,w)=0$ добија да постоји $\Psi_0=(\Psi_{01},\Psi_{02})$ за које важи $v=u\circ\Psi_0$ и $w=\tilde v\circ\Psi_0$.

У случају ранга 1, из /1*/ и /2*/ имамо да за $\mathcal{R}$ важи

$$\mathcal{R}(X\circ\Psi_1\otimes X')=g(X'\circ\Psi_0\otimes X)$$
$$\mathcal{R}(Y\circ\Psi_1\otimes Y')=g'(Y'\circ\Psi_0\otimes Y) \qquad /3*/$$

из чега добијамо да постоји $\Psi_2=(\Psi_{21},\Psi_{22})$ такво да

$$Y=X\circ\Psi_2\,,\ Y'=X'\circ\Psi_2 \text{ и } X\circ\Psi_1\circ\Psi_2=X\circ\Psi_2\circ\Psi_1\,, \text{ и}$$
$$X'\circ\Psi_0\circ\Psi_2=X'\circ\Psi_2\circ\Psi_0\,.$$

Резимирајући, узимајући у обзир услове еквиваленције дивизора на $\Gamma_{a,b}^{a',b'}$ и услове лепљења, добијамо следећу теорему

ТЕОРЕМА 1. Да би $\mathcal{R},\mathcal{Z},\mathcal{Z}'$ били решења једначине Јанга ранга 1 са разложивим рационалним спектралним кривама неопходно је да се оне одређују условима:

а/ $\mathcal{R}(X\circ\Psi_1\otimes X^1)=g(X^1\circ\Psi_0\otimes X)$ /4*/

б/ $\mathcal{Z}(X\otimes U)=h(X\circ\Psi_2\otimes U\circ\Psi_0)$ /5*/

в/ $\mathcal{Z}^1(X^1\otimes U)=h_1(X^1\circ\Psi_2\otimes U\circ\Psi_1)$ /6*/

где су $X,X^1,U\in\mathcal{M}(\Gamma_{a,b}^{a',b'})\times\mathcal{M}(\Gamma_{a,b}^{a',b'})$ функције степена 2, која задовољавају

1/

а/ $X\circ\Psi_i\in\mathcal{M}(\Gamma_{a,b}^{a',b'})\ ,\ i=1,2\,;$

б/ $X^{1}\circ\psi_i \in \mathcal{M}(\Gamma^{a',b'}_{a,b})$, $i=0,2$;

в/ $U\circ\psi_i \in \mathcal{M}(\Gamma^{a',b'}_{a,b})$, $i=0,1$;

2/

а/ $\partial^{a',b'}_{a,b}(D_{X\circ\psi_1}+D_{X^1}) = \partial^{a',b'}_{a,b}(D_{X^1\circ\psi_0}+D_X)$;

б/ $\partial^{a',b'}_{a,b}(D_X+D_U) = \partial^{a',b'}_{a,b}(D_{X\circ\psi_2}+D_{U\circ\psi_0})$;

в/ $\partial^{a',b'}_{a,b}(D_{X^1}+D_U) = \partial^{a',b'}_{a,b}(D_{X^1\circ\psi_2}+D_{U\circ\psi_1})$;

3/

а/ $X\circ\psi_1\circ\psi_2 = X\circ\psi_2\circ\psi_1$;

б/ $X^1\circ\psi_0\circ\psi_2 = X^1\circ\psi_2\circ\psi_0$;

са неким ψ_0, ψ_1, ψ_2 , где су $\psi_i = (\psi_{i1}, \psi_{i2})$, где су ψ_{ij} разломљено-линеарна пресликавања на Γ^j, $i=0,1,2$; $j=1,2$.

Решења једначине Јанга и Јанга-Бакстера, која представљају тензорни производ се сматрају тривијалним. Ако је $\partial(X)=\partial(X^1)$, лако је видети да се $\mathcal{R}$, дефинисана у тачки а/ теореме 1, разлаже као $T_1\otimes T_2$. Зато да би испитали нетривијалне фамилије решења једначине Јанга-Бакстера, је неопходно наћи ψ_i које задоволавају услове типа 1/ теореме 1, $X\circ\psi_i \in \mathcal{M}(\Gamma^{a',b'}_{a,b})$ са разним $X\in\mathcal{M}(\Gamma^{a',b'}_{a,b})$, за које

$X=(u^1\circ\varphi_\lambda, u^1),\ \lambda\in\Omega$.

Нека $\psi_1^\lambda(z)=(z+b(\lambda))/(c(\lambda)z+d)$ испуњава услов

$$\varphi_\lambda\circ\psi_1=\psi_1^\lambda\circ\varphi_\lambda .$$

Сада услов $X\circ\psi\in\mathcal{M}(\Gamma_{0,1}^{0,1})$ даје

$$u^1\circ\psi_1^\lambda(0)=u^2\circ\psi_2(0)\ ,\quad u^1\circ\psi_1^\lambda(1)=u^2\circ\psi_2(1) .$$

и као у почетку доказа добијамо

$$\frac{b(\lambda)}{d(\lambda)}=\frac{\beta_2}{\delta_2}=\frac{\beta_1}{\delta_1} \qquad /1/$$

$$\frac{1+b(\lambda)}{c(\lambda)+d(\lambda)}=\frac{1+\beta_1}{\gamma_1+\delta_1} \qquad /2/$$

Из дефиниције ψ_1^λ имамо

$$\beta_1=\frac{\lambda\cdot b(\lambda)}{1+b(\lambda)(1-\lambda)} \qquad /3/$$

$$1-\lambda+\gamma_1\lambda=\frac{c(\lambda)+d(\lambda)(1-\lambda)}{1+b(\lambda)(1-\lambda)} \qquad /4/$$

$$(1-\lambda)\beta_1+\lambda\delta_1=\frac{\lambda\cdot d(\lambda)}{1+b(\lambda)(1-\lambda} \qquad /5/$$

Из /1/, /3/, /5/ добијамо

$$\frac{\beta_1}{(1-\lambda)\beta_1+\lambda\delta_1}=\frac{-\beta_1}{\delta_1}\ .$$

т.j. или $\beta_1=0$, или $\beta_1=\delta_1$.

При $\beta_1=0$ /4/ даје

$$c(\lambda)=\lambda(\gamma_1-1)+1-\delta_1(1-\lambda)$$

што са /2/ даје

$$\gamma_1+\delta_1=\lambda(\gamma_1+\delta_1-1)+1\qquad ,\ \text{т.j.}\ \ \gamma_1+\delta_1=1\ .$$

$\beta_1=0$ и $\gamma_1+\delta_1=1$ је еквивалентно $\Psi_1(0)=0$ и $\Psi_1(1)=1$.

У случају $\beta_1=\delta_1$, множећи /3/+/4/ са /2/ добијамо

$$\frac{1+b(\lambda)}{1+b(\lambda)(1-\lambda)}=\frac{1+\beta_1}{\gamma_1+\beta_1}\,(1+\beta_1+\lambda(\gamma_1-1)),$$

што даје $\beta_1=-1$. $\beta_1=\delta_1$ и $\delta_1=-1$ је еквивалентно условима $\Psi_i(0)=1,\Psi_i(1)=0$.

∎

Приметимо да је услов 3/ теореме 1 еквивалентан условима

$$\Psi_1\circ\Psi_2=\Psi_2\circ\Psi_1\ \ ,\ \Psi_0\circ\Psi_2=\Psi_2\circ\Psi_0\ ,$$

јер координатне функције X и X^1 имају степен 1.

Друга фамилија добијена у леми 2

$$\Psi'_\gamma=\frac{z-1}{\gamma z-1}$$

је некомутативна. Прва фамилија

$$\psi_\delta(z) = \frac{z}{(\delta-1)z+\delta}$$

задовољава следећу лему

ЛЕМА 3.

$$a/\quad \psi_{\delta_1}\circ\psi_{\delta_2} = \psi_{\delta_1\delta_2}\quad ;$$

$$б/\quad \partial(X\circ\psi_\delta) = \delta\, D(X)\ .$$

Доказ. Непосредним рачуном добијамо

а/

$$\psi_{\delta_1}\circ\psi_{\delta_2}(\omega) = \frac{\dfrac{\omega}{-(\delta_2-1)\omega+\delta_2}}{-(\delta_1-1)\dfrac{\omega}{-(\delta_2-1)\omega+\delta_2}+\delta_1} =$$

$$= \frac{\omega}{(-(\delta_1-1)-\delta_1(\delta_2-1))\omega+\delta_2\delta_1} = \psi_{\delta_1\delta_2}\ .$$

б/ Нека је $X=(z-X_1)/(z-X_3)$. Тада

$$X\circ\psi_\delta(\omega) = \frac{\dfrac{\omega}{(\delta-1)\omega+\delta}-X_1}{\dfrac{\omega}{(\delta-1)\omega+\delta}-X_3} = \frac{\omega(1-X_1(\delta-1))-X_1\delta}{\omega(1-X_3(\delta-1))-X_3\delta} =$$

$$= \frac{1-X_1(\delta-1)}{1-X_3(\delta-1)}\cdot\frac{\omega-X_1\delta/(1-X_1(\delta-1))}{\omega-X_3\delta/(1-X_3(\delta-1))}\ .$$

$$\partial(X\circ\psi_\delta)=\frac{-x_1\delta}{1-x_1(1-\delta)}\Big/\left(1-\frac{x_1\delta}{1-x_1(1-\delta)}\right)$$

Сада је очигледно

$$\frac{\partial(X)}{\partial(X\circ\psi_\delta)}=\frac{(1-x_1(1-\delta)-x_1\delta)/(1-x_1(1-\delta))}{(1-x_1)\delta/(1-x_1(1-\delta))}=\frac{1}{\delta}\,.$$

∎

Из а/ леме 3 следи комутативност фамилије ψ_δ .

Нека $\psi(\delta_1,\delta_2)$ означава пар $(\psi_{\delta_1},\psi_{\delta_2})$, а

$$D(\psi(\delta_1,\delta_2)):=\delta_1/\delta_2\,.$$

Из леме 3 добијамо

ЛЕМА 4. Тројка $(\psi_0,\psi_1,\psi_2)=(\psi(\alpha_1,\alpha_2),\psi(\beta_1,\beta_2),\psi(\gamma_1,\gamma_2))$ задовољава услове 1/-3/ теореме 1, ако и само ако

$$D(\psi_0)=D(\psi_1)=D^{-1}(\psi_2). \qquad /6/$$

Из комутативности полинома $P(u,v)=0$ и $P_1(v,w)=0$, добијамо, да на спектралној кривој тензора $\Lambda_1=\Lambda_2$, фиксираном u одговарају w_i :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & w_1=u\circ\psi_{01}\circ\psi_{11} \\
 & v_1=u\circ\psi_{01} \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & w_2=u\circ\psi_{01}\circ\psi_{12} \\
u \arrow[uur, dash] \arrow[ddr, dash] & & \\
 & & w_3=u\circ\psi_{02}\circ\psi_{11} \\
 & v_2=u\circ\psi_{02} \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & w_4=u\circ\psi_{02}\circ\psi_{12}
\end{tikzcd}$$

Из услова $D(\Psi_0)=D(\Psi_1)$ добијамо $\omega_2=\omega_3$.

У [23] се испитивао раст броја слика многозначног пресликавања и веза 2-2 релација са једначином Јанга-Бакстера. Примери случаја 1/ и 3/ / в. тврђења 2 и 3 у [23] / су тим редом решења Бакстера и Фелдерхофа. Једнакост $\omega_2=\omega_3$ показује да и нашим решењима одговарају пресликавања са полиномијалним растом. Она спадају у случај 2/ тврђења 2 у [23] .

Из диаграма 1 следи да је услов поклапања ω_1 и ω_4 — $D^2(\Psi_0)=D^2(\Psi_1)=1$. Тако добијамо да је услов $D^2(\Psi_0)\neq 1$ неопходан да би $\mathcal{R},\mathcal{Z},\mathcal{Z}'$ дефинисани у тачкама а/-в/ теореме 1 са (Ψ_0,Ψ_1,Ψ_2) , описаним у леми 5, били решења ранга 1.

§ 3. СИМЕТРИЧНОСТ ПОЛИНОМА $\det L(u,v)$.

ЛЕМА 6. Ако $\mathcal{Z}$ задовољава услов

$$\mathcal{Z}(X\otimes U)=h(X\circ\Psi_2\otimes U\circ\Psi_0)$$, то

$$(\tilde{X}\circ\Psi_2\otimes\tilde{U}\circ\Psi_0\circ\phi)\mathcal{Z}= \\ =\tilde{X}\circ\phi\otimes\tilde{U}$$, где $\phi=(\phi_1,\phi_2)$,

$$\phi_2=\Psi_{02}^{-1}\circ\Psi_{01} \quad , \quad \phi_1=\Psi_{01}^{-1}\circ\Psi_{02}$$

Доказ. Означимо вакуумне ковекторе матрице $\mathcal{Z}$ са A, B, C, D , т.ј. претпоставимо да

$$(A^j\otimes B^\beta)\mathcal{Z}^{i\alpha}_{j\beta}=h(C^i\otimes D^\alpha)$$

Тада имамо $P_{\mathcal{Z}}^{11}(a,d)=0$, где је са $P_{\mathcal{Z}}^{ij}$ означена детерминанта матрице $L^{(ij)}$, која се добија из $\mathcal{Z}$ конволуцијом по i -ом горњем и j -ом доњем индексу. / Тако, на пример, полиноми P, Q , дефинисани выше, могу да се означе P^{22}, Q^{33} /. Из услова леме иимамо

$$P_{\mathcal{Z}}^{11}(X\circ\psi_1, u)=0$$

Из последње две једнакости следи да можемо да претпоставимо

$$A=\widetilde{X\circ\psi_1}\quad,\quad D=\widetilde{U}$$

Аналогно, разматрајући парове (B, C) и $(U\circ\psi_0, X)$ добијамо $B=\widetilde{U}\circ\psi_0\circ\phi$, $C=\widetilde{X}\circ\phi$, где је ϕ неко разломљено-линеарно пресликавање.

Нађимо ϕ . Унакрсни парови дају

$$P_{\mathcal{Z}}^{21}(u\circ\psi_0, u)=0$$

$$P_{\mathcal{Z}}^{21}(b, u)=0$$

Пошто једној вредности $u(z)$ на кривој Γ^{21} одговарају две вредности прве координате:

$$\begin{tikzcd} & u(\psi(z))=u\circ\psi_2(z) \\ u(z) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & u(\psi(\tau_u(z))=u\circ\psi_1(z) \end{tikzcd} \quad , z\in\Gamma_2, \tau_u(z)\in\Gamma_1$$

/ овде τ_u означава инволуцију у односу на u ; претпоставља се да је $\partial(u)=1$ /, имамо две могућности за B :

1. $B=\widetilde{U}\circ\psi_0$

$$2.\quad B = \widetilde{U} \circ \Psi_0 \circ \tau_u$$

У првом случају је $\phi = I$, а у другом $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, где је $\phi_1 = \Psi_{01}^{-1} \circ \Psi_{02}$, $\phi_2 = \Psi_{02}^{-1} \circ \Psi_{01}$.

Да је тачно 2/, убеђујемо се упоређујући дивизоре леве и десне стране матричне једначине

$$A^{j} \mathcal{Z}_{j\beta}^{i\alpha} U_\alpha = \widetilde{B}\, \widetilde{X}$$

Последња једнакост важи, јер $A^{j} \mathcal{Z}_{j\beta}^{i\alpha} U_\alpha$ је (2×2) матрица ранга 1/у обичном, линеарно-алгебарском смислу/, чији Im је разапет на $\widetilde{B}$, а Ker на X, по дефиницији матрице $\mathcal{Z}$. ■

Из леме 5 добијамо да матрице дефинисане у а/-в/ теореме 1 имају следеће ковекторне репрезентације:

$$(\widetilde{X}' \circ \psi \circ \phi \otimes \widetilde{X}(z))\, \mathcal{R} = \widetilde{X}'(z) \otimes \widetilde{X} \circ \psi_1 \circ \phi$$

$$(\widetilde{X} \circ \psi \otimes \widetilde{U} \circ \psi \circ \phi)\, \mathcal{Z} = \widetilde{X} \circ \phi \otimes \widetilde{U}(z) \qquad (*)$$

$$(\widetilde{X}' \circ \psi_2 \otimes \widetilde{U} \circ \psi_1 \circ \phi_1)\, \mathcal{Z}' = \widetilde{X}' \circ \phi_1 \otimes \widetilde{U}(z)$$

Сада хоћемо да, аналогно томе како су у /1*/ и /2*/ из векторних репрезентација за $\mathcal{R}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}'$ нађене векторне репрезентације за Λ_1 и Λ_2, добијамо ковекторне репрезентације за Λ_i из ковекторних репрезентација /*/.

$$[\,R^{-1}(\tilde{X}'^{\ell}(v,w)\otimes \tilde{X}^{k}(u,v))\otimes \tilde{U}^{\beta}(z)]\,\Lambda_2 =$$

$$= (\tilde{X}'^{\ell}(v,w)\otimes \tilde{X}^{k}(\psi\circ\psi_2)\otimes \tilde{U}^{\beta}(z))\,\mathcal{Z}^{i\gamma}_{k\beta}\,\mathcal{Z}'^{j\alpha}_{\ell\gamma} =$$

$$= (\tilde{X}'^{\ell}(\psi\circ\psi_1\circ\psi_2)\otimes \tilde{X}^{i}(\psi\circ\phi)\otimes \tilde{U}^{\gamma}(\psi))\,\mathcal{Z}'^{j\alpha}_{\ell\gamma} = \qquad /7/$$

$$= \tilde{X}'^{j}(\psi_1\circ\psi\circ\phi_1)\otimes \tilde{U}^{\alpha}(\psi\circ\psi_1)\otimes \tilde{X}^{i}(\psi\circ\phi)\,.$$

$$(\tilde{X}^{q}(\tilde{v},w)\otimes \tilde{X}'^{p}(u,\tilde{v})\otimes \tilde{U}^{\beta}(z))\,\mathcal{Z}'^{k\gamma}_{p\beta}\,\mathcal{Z}^{\ell\alpha}_{q\gamma}\,\mathcal{R}^{ij}_{k\ell} =$$

$$= (\tilde{X}^{q}(\tilde{v},w)\otimes \tilde{X}'^{p}(\psi_1\circ\psi_2)\otimes \tilde{U}^{\beta}(z))\,\mathcal{Z}'^{k\gamma}_{p\beta}\,\mathcal{Z}^{\ell\alpha}_{q\gamma}\,\mathcal{R}^{ij}_{k\ell} =$$

$$= (\tilde{X}^{q}(\tilde{v},w)\otimes \tilde{X}'^{k}(\phi_1\circ\psi_1)\otimes \tilde{U}^{\gamma}(\psi_1))\,\mathcal{Z}^{\ell\alpha}_{q\gamma}\,\mathcal{R}^{ij}_{k\ell} = \qquad /8/$$

$$= (\tilde{X}^{q}(\psi\circ\psi_1\circ\psi_2)\otimes \tilde{X}'^{k}(\phi_1\circ\psi_1)\otimes \tilde{U}^{\gamma}(\psi_1))\,\mathcal{Z}^{\ell\alpha}_{q\gamma}\,\mathcal{R}^{ij}_{k\ell} =$$

$$= \tilde{X}^{\ell}(\phi\circ\psi\circ\psi_1)\otimes \tilde{X}'^{k}(\phi_1\circ\psi_1)\otimes \tilde{U}^{\alpha}(\psi_1\circ\psi))\,\mathcal{R}^{ij}_{k\ell} =$$

$$= (\tilde{X}'^{k}(\phi_1\circ\psi_1)\otimes \tilde{X}^{\ell}(\phi\circ\psi\circ\psi_1))\,\mathcal{R}^{ij}_{k\ell}\otimes U^{\alpha}(\psi_1\circ\psi)\,.$$

Као што је из /1*/ и /2*/ следило /3*/, добијамо

$$(\tilde{X}^{q}(\psi\circ\psi_1\circ\psi_2)\otimes\tilde{X}^{p}(\psi_1\circ\psi_2))\,\mathcal{R}^{k\ell}_{pq} =$$

$$= \tilde{X}'^{\ell}(\psi\circ\psi_1\circ\psi_2)\otimes\tilde{X}^{k}(\psi\circ\psi_2) \qquad (**)$$

$$(\tilde{X}^{q}\otimes\tilde{X}'^{p}(\psi^{-1}))\mathcal{R}^{k\ell}_{pq} = \tilde{X}'^{\ell}\otimes\tilde{X}^{k}(\psi_1^{-1})$$

Из леме 3 и услова $D(\psi_0)=D(\psi_1)$ имамо

$$\psi_{01}/\psi_{02} = \psi_{11}/\psi_{12} \quad ,$$

што даје

$$\phi_{01} = \phi_{11}$$

Слично се добија $\phi_{02}=\phi_{12}$, тако да важи

$$\phi_0 = \phi_1 \quad .$$

Упоредимо услов /**/ са ковекторном репрезентацијом за R /*/. Добијамо

$$\tilde{X}'\circ\psi^{-1} = \tilde{X}'\circ\psi\circ\phi$$

$$\psi^{-1} = \psi\circ\phi \quad , \quad \psi_{01}^{-1} = \psi_{02} \quad ,$$

из чега следи

$$\psi_1^{2} = \psi_0^{2} \qquad /9/$$

а такође и следеће тврђење

ТВРЂЕЊЕ 2. Ако су $\mathcal{R}, \mathcal{Z}, \mathcal{Z}'$ решења ранга 1 једначине Јанга са разложивим рационалним спектралним кривама, тада су њихови спектрални полиноми симетрични.

Приметимо да из $\psi_1^2 = \psi_0^2$ и $D(\psi_0) = D(\psi_1)$ следи симетричност полинома.

ТЕОРЕМА 2. Ако су за $\mathcal{R}, \mathcal{Z}, \mathcal{Z}'$ испуњени услови теореме 1 и услови /6/ и /9/, они представљају решења једначине Јанга

а/ ранга 1, ако $D(\psi_0) \neq 1$

б/ ранга 2, иначе.

Доказ. Из /1*/, /2*/, /3*/ добијамо да Λ_i задовољавају једнакост

$$\Lambda_i X'(\psi \circ \psi_1) \otimes X(\psi \circ \phi^{-1}) \otimes U(\psi \circ \psi_1) =$$

$$= (X'(\phi^{-1} \circ \psi_1 \circ \psi_2) \otimes X(\psi \circ \psi_1 \circ \psi_2) \otimes U(\psi^2 \circ \psi_1^2)$$

а из /8/, /7/ једнакост

$$(\tilde{X}'(\psi_1 \circ \psi_2) \otimes \tilde{X}(\psi \circ \psi_1 \circ \psi_2) \otimes \tilde{U}(z))\Lambda_i = \qquad /10/$$

$$= \tilde{X}'(\psi_1 \circ \psi \circ \phi) \otimes \tilde{X}(\psi \circ \phi) \otimes \tilde{U}(\psi \circ \psi_1)$$

из чега следи да (2×2) матрице

$$\tilde{X}(\psi \circ \psi_1 \circ \psi_2) \otimes \tilde{U}(z) \Lambda_i X(\psi \circ \phi) \otimes U(\psi \circ \psi_1)$$

имају ранг 1 са Im разапетим над $X'(\psi_1 \circ \psi_2)$, а Ker на $X'(\psi \circ \psi_1)$, одакле имамо систему једначина за елементе матрица Λ_i :

$$(\tilde{X}(\psi \circ \psi_1 \circ \psi_2) \otimes \tilde{U}(z))\Lambda_i (X(\psi \circ \phi) \otimes U(\psi \circ \psi_1)) = \qquad /11/$$

$$= \alpha_i X'(\psi_1 \circ \psi_2) \tilde{X}'(\psi \circ \psi_1) .$$

Такође из

$$\Lambda_i(X'(\psi\circ\psi_1\circ\phi^2)\otimes X(\psi\circ\phi)\otimes U(\psi\circ\psi_1\circ\phi^2)) =$$

$$=(X'(\phi\circ\psi_1\circ\psi_2)\otimes X(\phi^2\circ\psi\circ\psi_1\circ\psi_2)\otimes U(\phi^2\circ\psi^2\circ\psi_1^2))$$

и из /10/ добијамо

$$(\tilde{X}(\psi\circ\psi_1\circ\psi_2)\otimes\tilde{U}(z))\Lambda_i(X\circ\psi^{-1}\otimes U\circ\psi^{-1}\circ\psi_1^{-1})= \qquad /12/$$

$$=\beta_i\, X'(\psi_1\circ\psi_2)\,\tilde{X}'(\psi^{-1}\circ\psi_1^{-1}).$$

Из система /11/, /12/ следи доказ теореме. $\blacksquare$

§ 4. КОНСТРУКЦИЈА РЕШЕЊА ЈЕДНАЧИНЕ ЈАНГА-БАКСТЕРА.

Нека је $\mathcal{R}(\theta)$ фамилија решења једначине Јанга-Бакстера. Из теореме 1, $\mathcal{R}(\theta_1)$, $\mathcal{R}(\theta_2)$, $\mathcal{R}(\theta_3=\theta_2-\theta_1)$ задовољавају једначине /4*-6*/. Тада $\mathcal{R}(\theta_3)$ задовољава и неку једначину типа 1, т.ј.

$$\mathcal{R}(\theta_3)(X_{\theta_3}\otimes U)=h_1(X_{\theta_3}\circ\tilde{\psi}_2\otimes U\circ\tilde{\psi}_1) \qquad /13/$$

Ако претпоставимо да су $\tilde{\psi}_i$ фиксирани / в. тврђење 1.3/, то из непрекидности добијамо $\tilde{\psi}_0=\tilde{\psi}_1$. Упоређујући /13/ и /6*/, добијамо да мора постојати φ_{θ_2} , за које важи

$$X_{\theta_3}\circ\varphi_{\theta_2}=X_{\theta_1}\circ\tilde{\psi}_1\circ\varphi_{\theta}\ ,\ U\circ\varphi_{\theta_2}=X_{\theta_2}\ ,$$

$$U\circ\widetilde{\Psi}_1\circ\varphi_{\theta_2}=X_{\theta_2}\circ\widetilde{\Psi}_1 \quad , \quad X_{\theta_3}\circ\widetilde{\Psi}_2\circ\varphi_{\theta_2}=X_{\theta_1} \quad ,$$

одакле имамо да φ_{θ_2} комутира са $\widetilde{\Psi}_1$ и да важи $\widetilde{\Psi}_1=\widetilde{\Psi}_2^{-1}$.

Обрнуто, дефинишимо

$$X_\delta^{(n)}:=U\circ\Psi(\delta^n,\delta^{-1}) \quad ,$$

где је U произвољна рационална функција на $\Gamma_{0,1}^{0,1}$ са $\nu_{0,1}^{0,1}(U)=1$,

$$\widetilde{\Psi}_0^{(n)}=\Psi(\delta_0^n,\delta_0^{-1}) \, , \, \widetilde{\Psi}_1^{(n)}=\widetilde{\Psi}_0^{(n)} \, , \, \widetilde{\Psi}_2^{(n)}=\widetilde{\Psi}_0^{(n)-1} \, .$$

Ако је матрица $\mathcal{R}$ одређена условом $\mathcal{R}(X\otimes U)=h(Y\otimes V)$ дефинишимо $d^\circ(R)=\nu(X)/\nu(U)$.

ТЕОРЕМА 3. Фамилије матрица $\mathcal{R}_\delta^{(n)}$, дефинисане једнакостима

$$\mathcal{R}_\delta^{(n)}(X_\delta^{(n)}\otimes U)=h(X_\delta^{(n)}\circ\widetilde{\Psi}_2^{(n)}\otimes U\circ\widetilde{\Psi}_1^{(n)})$$

су фамилије решења једначине Јанга-Бакстера, ако је испуњен услов $\widetilde{\Psi}_0^{(n)}=\Psi(\delta_0,\delta_0^{-1})$, т.ј. $\delta^{n-1}=1$. То су решења ранга 2 са мултипликативним параметром, одређеним једнакошћу

$$d(\mathcal{R}_\delta^{(n)})=d^\circ(\mathcal{R}_\delta^{(n)})/D(\widetilde{\Psi}_0^{(n)}) \, .$$

Доказ. Непосредно се проверава да

$$\mathcal{Z}=\mathcal{R}_\delta^{(n)}(\theta_1) \, , \, \mathcal{Z}'=\mathcal{R}_\delta^{(n)}(\theta_2) \, , \, R_{pq}^{ij}=\mathcal{R}_{\delta\,qp}^{(n)\,ij}(\theta_1/\theta_2) ,$$

задовољавају једначине а/-в/ теореме 1. Доказ сада следи из теореме 2 / в. такође диаграм 1 /. ∎

Аналогно теореми 1.6 в/ / в. § 1.8 / добијамо

ТВРЂЕЊЕ 3. Фамилије решења, конструисане у теореми 3, су при разним n баждарно / у смислу Јанга-Бакстера/ нееквивалентне.

§ 5. УОПШТЕЊЕ АЛГЕБАРСКОГ АНЗАЦА БЕТЕ.

У овом параграфу показујемо, како се може уопштити алгебарски анзац Бете / ААБ / из [2] и применити на решења, конструисана у претходном параграфу. Суштина је у томе да за ААБ нису неопходне експлицитне формуле елемената R-матрица, већ њихових вакуумних вектора.

Аналогно 2 / в. такође § 2 Увода / нека је $\mathcal{L}_n(\lambda,\eta) = R(\lambda,\eta)$, где је R једна од фамилија, конструисаних у § 4, локална матрица прелаза. Ако означимо X са X_ℓ, а $X_\ell \circ \Psi$ са $X_{\ell+1}$, $\mathcal{L}_n$ задовољава једнакост

$$\mathcal{L}_n(\lambda,\eta)(X_\ell \otimes U_\ell) = h(X_{\ell+1} \otimes U_{\ell-1}) \qquad /14/$$

Нека M_ℓ означава (2×2) матрицу, чије су колоне X_ℓ и $X_{\ell+1}$, т.ј.

$$M_\ell = \begin{pmatrix} X_\ell & X_{\ell+1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тада имамо

$$\mathcal{M}_\ell^{-1} = \frac{1}{x_\ell - x_{\ell+1}} \begin{pmatrix} 1 & -x_{\ell+1} \\ -1 & x_\ell \end{pmatrix} .$$

Заменимо локалну матрицу прелаза на

$$\mathcal{L}_n^\ell(\lambda) = \mathcal{M}_{n+\ell}^{-1}(\lambda)\mathcal{L}_n(\lambda)\mathcal{M}_{n+\ell-1}(\lambda) = \begin{bmatrix} \alpha_n^\ell(\lambda) & \beta_n^\ell(\lambda) \\ \gamma_n^\ell(\lambda) & \delta_n^\ell(\lambda) \end{bmatrix}$$

Тада матрица монодромије

$$\mathcal{T}(\lambda) = \prod_{n=1}^{(N)} \mathcal{L}_n(\lambda)$$

прелази у $\mathcal{T}_N^\ell(\lambda)$

$$\mathcal{T}_N^\ell(\lambda) = \mathcal{M}_{N+\ell}^{-1}(\lambda)\,\mathcal{T}(\lambda)\mathcal{M}_\ell(\lambda) .$$

Означимо, као и у [2] , матричне елементе последње са $A_N^\ell(\lambda)$, $B_N^\ell(\lambda)$, $C_N^\ell(\lambda)$, $D_N^\ell(\lambda)$.

Неопходно је доказати да постоје, независни од λ , локални вакууми w^ℓ , за које важе једначине

$$\gamma_n^\ell(\lambda)w_n^\ell = 0 ,$$

$$\alpha_n^\ell(\lambda)w_n^\ell = q(\lambda)w_n^{\ell-1} ,$$

$$\delta_n^\ell(\lambda)w_n^\ell = q'(\lambda)w_n^{\ell+1} .$$

Тада би $\Omega_N^{\ell} = w_1^{\ell} \otimes \ldots \otimes w_N^{\ell}$ задовољавали

$$A_N^{\ell}(\lambda)\,\Omega_N^{\ell} = q^N(\lambda)\,\Omega_N^{\ell-1} \quad ,$$

$$D_N^{\ell}(\lambda)\,\Omega_N^{\ell} = q'^N(\lambda)\,\Omega_N^{\ell+1} \quad ,$$

$$C_N^{\ell}(\lambda)\,\Omega_N^{\ell} = 0 \quad ,$$

и образовали фамилију генерирајућих вектора.

Из леме 5 и /14/ имамо

$$(\widetilde{X}_{\ell+1} \otimes \widetilde{U}_{\ell+1})\mathcal{Z} = h'(\widetilde{X}_{\ell+2} \otimes \widetilde{U}_{\ell}) \qquad /15/$$

ТЕОРЕМА 4. / о егзистенцији вакуумног стања / Важе следеће релације

$$\gamma^{\ell}(\lambda)\,U_{\ell} = 0 \quad ,$$

$$\alpha^{\ell}(\lambda)\,U_{\ell} = q(\lambda)\,U^{\ell-1} \quad ,$$

$$\delta^{\ell}(\lambda)\,U_{\ell} = q'(\lambda)\,U^{\ell+1} \quad .$$

Доказ. Лако се проверава да

$$\gamma^{\ell}(\lambda) = \widetilde{X}_{\ell+1}\,\mathcal{Z}(\lambda)\,X_{\ell} \quad ,$$

одакле добијамо

$$\gamma^{\ell}(\lambda)\,U_{\ell} = \widetilde{X}_{\ell+1}\,\mathcal{Z}(\lambda)\,X_{\ell}\,U_{\ell} = h\,\widetilde{X}_{\ell+1}\,X_{\ell+1}\,U = 0$$

Аналогно

$$\alpha^{\ell}(\lambda)\,U_{\ell} = \widetilde{X}_{\ell+2}\,\mathcal{Z}(\lambda)\,X_{\ell}\,U_{\ell} =$$

$$= h\,\tilde{X}_{\ell+2}(\lambda)\,X_{\ell+1}(\lambda)\,U_{\ell-1} = q(\lambda)\,U_{\ell-1}$$

У последњем случају је потребно да се израчуна

$$\delta^{\ell}(\lambda)\,U_\ell = \tilde{X}_{\ell+1}\,\mathcal{Z}(\lambda)\,X_{\ell+1}\,U_\ell\,.$$

/15/ даје

$$\tilde{X}_{\ell+1} \otimes \tilde{U}_{\ell+1}\,\mathcal{Z}\,U_\ell = 0$$

т.ј. $\operatorname{Im}(\tilde{X}_{\ell+1}\mathcal{Z}\,U_\ell) \perp \tilde{U}_{\ell+1}$, из чега следи

$$\tilde{X}_{\ell+1}\,\mathcal{Z}(\lambda)\,X_{\ell+1}\,U_\ell = q'(\lambda)\,U_{\ell+1}$$

што је и требало доказати. ∎

ЛЕМА 6. Важи следећа релација

$$\mathcal{Z}X_{\ell+1} \otimes U_\ell = \alpha\,X_{\ell+1} \otimes U_\ell + \beta\,X_\ell \otimes U_{\ell+1} \qquad /16/$$

Доказ следи из /14/ и /15/, понављајући аргументе са краја доказа теореме 4.

Једначине типа /14-16/ су довољне да би се доказале комутативне релације

$$B^{k}_{\ell+1}(\lambda)\,B^{k+1}_{\ell}(\mu) = B^{k}_{\ell+1}(\mu)\,B^{k+1}_{\ell}(\lambda)\,,$$

$$B^{k}_{\ell-2}(\lambda)\,A^{k+1}_{\ell-1}(\mu) = h_1\,A^{k}_{\ell}(\mu)\,B^{k+1}_{\ell-1}(\lambda) + h_2\,B^{k}_{\ell-2}(\mu)\,A^{k+1}_{\ell-1}(\lambda)\,,$$

$$B^{k+2}_{\ell}(\mu)\,D^{k+1}_{\ell-1}(\lambda) = k_1\,D^{k}_{\ell}(\lambda)\,B^{k+1}_{\ell-1}(\mu) + k_2\,B^{k+2}_{\ell}(\lambda)\,D^{k+1}_{\ell-1}(\mu)\,,$$

на основу којих могу да се конструишу сопствени вектори и израчунају сопствене вредности трансфер-матрице $T(\lambda)=A(\lambda)+D(\lambda)$.

§ 6. СПЕКТРАЛНЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ XXZ R-МАТРИЦЕ. СЛУЧАЈ ПОКЛАПАЊА ПОЛОВА И ТАЧАКА ЛЕПЉЕЊА.

Размотримо фамилију (4×4) матрица $\mathcal{M}_\theta$ облика

$$\mathcal{M}_\theta=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & b(\theta) & c(\theta) & \\ & d(\theta) & e(\theta) & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \qquad (***)$$

где су осталих десет елемената једнаки нули. Тим матрицама одговарају спектралне матрице $L_\theta(u,v)$

$$L_\theta(u,v)=\begin{bmatrix} u-ev & -duv \\ c & bu-v \end{bmatrix}$$

и спектралне криве задане полиномима $P_\theta(u,v)=\det L_\theta(u,v)$:

$$P_\theta(u,v)=bu^2+ev^2+(dc-be-1)uv=0 \qquad /17/$$

Из /17/ се види да је спектрална крива Γ_θ матрице $\mathcal{M}_\theta$ рационална разложива, т.ј. $\Gamma_\theta=\Gamma_\theta^1\cup\Gamma_\theta^2$ и да важе релације

$$u_1=\alpha_1 v_1 \quad , \; u_2=\alpha_2 v_2 \qquad /18/$$

где је $u_i = u|_{\Gamma^i}$, $v_i = v|_{\Gamma^i}$, $i=1,2$.
/18/ показује да су тачке лепљења кривих Γ_θ^1 и Γ_θ^2 нуле и полови функција u_i и v_i. Из

$$\mathcal{M}_\theta (X_\theta \otimes U_\theta) = h(Y_\theta \otimes V_\theta) \qquad /19/$$

узимајући у обзир да је $\mathcal{M}_{\theta 1,1} = \mathcal{M}_{\theta 4,4} = 1$, а $\mathcal{M}_{\theta 1,i} = \mathcal{M}_{\theta 4,j} = 0$ где $j=1,2,3$, $i=2,3,4$, добијамо да је $h=1$ и

$$x_1 = (1/\alpha_1) y_1 \quad , x_2 = (1/\alpha_2) y_2 \qquad /20/$$

Из /20/ имамо

$$x_i = \beta_i(\theta) u_i .$$

Тако из /19/ добијамо да су $b(\theta), c(\theta), d(\theta), e(\theta)$ решења система линеарних једначина:

$$\beta_i(\theta) b(\theta) + c(\theta) = \alpha_i \beta_i(\theta) \qquad /21/$$

$$\beta_i(\theta) d(\theta) + e(\theta) = 1/\alpha_i$$

Нека су $\mathcal{Z} = \mathcal{M}_\theta$, $\mathcal{Z}^1 = \mathcal{M}_{\theta_1}$, $\mathcal{R}_{j\beta}^{i\alpha} = \mathcal{M}_{\theta\beta j}^{i\alpha}$. Нађимо неопходне и довољне услове под којима су $\mathcal{R}, \mathcal{Z}, \mathcal{Z}'$ решења једначине Јанга. Као и у § 2 добијамо да $\mathcal{R}, \mathcal{Z}, \mathcal{Z}'$ морају да задовољавају релације

$$\mathcal{Z}(X_\theta \otimes U) = \qquad /22/$$
$$= (X_\theta \circ \psi(\tilde{\mathcal{Z}}_1(\theta), \tilde{\mathcal{Z}}_2(\theta)), U \circ \psi(1/\alpha_1(\theta), 1/\alpha(\theta))$$

$$\mathcal{Z}^1(X_{\theta_1} \otimes U) = \qquad /23/$$
$$= (X_{\theta_1} \circ \psi(\tilde{\mathcal{Z}}_1(\theta), \tilde{\mathcal{Z}}_2(\theta)), U \circ \psi(1/\alpha_1(\theta_1), 1/\alpha_2(\theta_1))$$

$$\mathcal{R}(X_\theta \circ \Psi(1/\alpha_1(\theta_1), 1/\alpha_2(\theta_1), X_{\theta_1}) = $$
$$= (X_{\theta_1} \circ \Psi(1/\alpha_1(\theta), 1/\alpha_2(\theta)), X_\theta) \qquad /24/$$

где је $x_\theta = X'_\theta = (\beta_1(\theta)u_1, \beta_2(\theta)u_2)$. Приметимо да је

$$x_\theta \circ \Psi(\delta, \delta_1) = ((1/\delta)X^1, (1/\delta_1)X^2).$$

Из /22/, /20/, /18/ добијамо да је

$$\widetilde{\mathcal{L}}_i(\theta) = \alpha_i(\theta) \qquad /25/$$

а из /23/, /20/, /18/ добијамо да је

$$\widetilde{\mathcal{L}}_i(\theta) = \alpha_i(\theta_1) \qquad /26/$$

одакле следи

$$\alpha_i(\theta) = \alpha_i(\theta_1) \qquad /27/$$

Из /21/ произилази

$$\beta_1(\theta_2) = \frac{\beta_i(\theta)}{\beta_i(\theta_1)\alpha_i(\theta)}, \quad \alpha_i(\theta_2) = \alpha_i(\theta), \; i=1,2. \qquad /28/$$

Пошто матрице $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{L}^1$ имају специјални облик /***/, то и тензори Λ_1 и Λ_2 имају специјални облик /29,30/, где кружић означава елементе Λ_{1ij}, Λ_{2ij}, за које важи $\Lambda_{1ij} = \Lambda_{2ij}$. Овде се не претпоставља да $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{L}^1$ испуњавају услове /22-28/, већ се само претпоставља да имају облик /***/. Звездица означава остале елементе различите од нуле.

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & * & 0+f_i & & * & & & \\ & 0 & * & & * & & & \\ & & & 0 & & * & * & \\ & * & * & & 0 & & & \\ & & & * & & * & 0 & \\ & & & * & & 0+f_i & * & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad /29,30/$$

Очигледно важи следеће тврђење.

ТВРЂЕЊЕ 4. Да би $\mathcal{R}, \mathcal{Z}, \mathcal{Z}'$ били решења једначине Јанга неопходно је $f_1 = f_2$, т.ј.

$$b(\theta_2)c(\theta)d(\theta_1) = d(\theta)c(\theta_1)e(\theta_2) \qquad /31/$$

Побројани услови су и довољни.

ТЕОРЕМА 5. $\mathcal{R}, \mathcal{Z}, \mathcal{Z}^1$ дефинисани системима /21/, који се задају релацијама /22-28/ су решења једначине Јанга, ако је испуњен услов /31/.

Доказ. Из /29-31/ имамо да у сваком реду матрица Λ_1 и Λ_2 је најмање шест одговарајућих елемената једнако. Означимо са $\ell_\alpha^{(i)} = (\ell_{\alpha i}^{(i)}, \ell_{\alpha j}^{(i)})$ преостале елементе реда α у Λ_i. $\ell_\alpha^{(i)}$ су решења система од две линеарне једначине, које следе из ограничења релације

$$\Lambda_i \hat{X} \otimes U = \hat{Y} \otimes W$$

на Γ^1 и Γ^2 / /1*/, /2*/, /24/ /. Одавде и добијамо $\ell_\alpha^{(1)} = \ell_\alpha^{(2)}$, а значи и $\Lambda_1 = \Lambda_2$. ∎

ПРИМЕР. XXZ R-матрице. Експлицитне формуле су дате у Уводу § 4.

$$P(u,v) = u^2 \sin\theta/\sin(\theta+\eta) + v^2 \sin\theta/\sin(\theta+\eta) +$$

$$+ uv\left(\frac{\sin^2\theta - \sin^2\eta}{\sin^2(\theta+\eta)} - 1\right) = (u - \alpha_1 v)(u - (1/\alpha_1)v),$$

т.ј. $\alpha_2 = 1/\alpha_1$, и из система /21/ добијамо $\beta_2 = 1/\beta_1$, а сам систем се редукује у

$$\beta_1(\theta)\,b(\theta) + c(\theta) = \alpha_1(\theta)\,\beta_1(\theta),$$

$$\beta_1(\theta)\,c(\theta) + b(\theta) = 1/\alpha_1(\theta).$$

Очигледно важи следеће

ТВРЂЕЊЕ 5. XXZ R-матрице имају ранг 1.

§ 7. БАЖДАРНИ ЛИМЕС И КОНСТРУКЦИЈА РАЦИОНАЛНЕ R-МАТРИЦЕ РАНГА 2.

Систем

$$\tilde{\beta}_1 b + kc = \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_1$$

$$\tilde{\beta}_1 \frac{c}{k} + b = 1/\tilde{\beta}_1$$

$$\tilde{\beta}_2 b + kc = \tilde{\alpha}_2 \tilde{\beta}_2$$

$$\tilde{\beta}_2 \frac{c}{k} + b = 1/\tilde{\beta}_2$$

који се добија из /21/ пертурбацијом $c' = \kappa c$, $d' = d/\kappa$, $e = b$ је сагласан уз услов $\alpha_2 = 1/\alpha_1$, $\beta_2 = \kappa^2/\beta_1$. Из тога следи да матрица $R(\kappa)$

$$R(\kappa) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & b(\theta) & \kappa c(\theta) & \\ & c(\theta)/\kappa & b(\theta) & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

има вакуумни вектор

$$\widetilde{X}(\kappa,\theta) = U \circ \Psi(\widetilde{\beta}_1, \kappa^2/\widetilde{\beta}_1) =$$

$$= U \circ \Psi(\kappa,\kappa) \circ \Psi(\widetilde{\beta}_1/\kappa, \kappa/\widetilde{\beta}_1) = U_1 \circ \Psi(\beta_1, 1/\beta_1),$$

из чега добијамо

ТВРЂЕЊЕ 6.

$$R(\kappa) = (T^{-1}(\kappa) \otimes T^{-1}(\kappa))\, R(1)\, (T(\kappa) \otimes T(\kappa)),$$

где је $T(\kappa)U = U \circ \Psi(\kappa,\kappa) = U_1$, т.ј. $T(\kappa) = \begin{bmatrix} 1/\kappa & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Означимо са $\widetilde{R}(\theta)$ фамилију матрица

$$\widetilde{R}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 0 & \\ & 1/\sin\theta & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

ТЕОРЕМА 6. а/ $\dot{\widetilde{R}} := \lim\limits_{\eta \to 0} R_{xxz}(\eta)$;

б/ $\widetilde{R}$ је R-матрица ранга 2.

Доказ.

а/ Проверава се непосредно.

б/ $\widetilde{R}$ је решење једначине Јанга-Бакстера, јер се добија лимесом из фамилије $R(\eta)$, која на основу претходног тврђења представља баждарну трансформацију R_{xxz}. Лако се налази одговарајући спектрални полином

$$\widetilde{P}(\theta, u, v) = (u - v)^2$$

Значи, $\widetilde{R}$ је ранга 2. ∎

ПРИМЕДБА. Матрица $\widetilde{R}$ је, као што се види из доказа теореме 6, више него R-матрица ранга 2. Она има сопствени ранг 2, т.ј. / многозначно / пресликавање, задано спектралним полиномом, у случају матрице $\widetilde{R}$ је 1-1 релација.

Д О Д А Т А К

РАЦИОНАЛНИ АНАЛОГОНИ R-МАТРИЦЕ ФЕЛДЕРХОФА.

Претходне две главе су биле посвећене R-матрицама са рационалним спектралним кривама, које задоволавају услов типа /3*/ //1.3* / и /2.3*//. У случају ранга 1 то је био неопходан услов, али је био испунен и за сва решења ранга 2, која смо разматрали. Решења Фелдерхофа, споменута у § 0.3, такав услов не задоволавају. Стога је интересантно питање постоје ли слична решења са рационалним спектралним кривама / подсетимо да су решења Фелдерхофа параметризована функцијама на елиптичким кривама /в.такође [25] //. Одговор је позитиван. Конструисаћемо решења полазећи од решења Фелдерхофа, нетривијалним баждарним лимесом, слично начинима на које су добијене R_{XXZ} и R_{CH} из Бакстерове R-матрице.

Полазимо од параметризације решења Фелдерхофа, предложене Кричевером у [7] :

$$\phi(\theta,\alpha,\beta,e)=\begin{bmatrix} 1 & & & ed/\alpha a \\ & \sqrt{\beta/\alpha}\cdot b/a & e\sqrt{\beta/\alpha}\cdot c/a & \\ & e\sqrt{\beta/\alpha}\cdot c/a & \sqrt{\beta/\alpha}\cdot b/a & \\ ed/\alpha a & & & \beta/\alpha \end{bmatrix}$$

где су $a=\mathrm{sn}\,\theta\,\mathrm{dn}\,\theta$, $d=\mathrm{sn}\,\theta\,\mathrm{cn}\,\theta$, $b=\mathrm{cn}\,\theta$, $c=\mathrm{dn}\,\theta$, $e=\pm 1$ елиптичке функције на кривој модула $k=1/\sqrt{\alpha\beta}$.

Означимо са $T(\alpha)$ следећу фамилију 2×2 матрица:

$$T(\alpha)=\begin{bmatrix} (-1/\alpha)^{1/4} & 0 \\ 0 & (-\alpha)^{1/4} \end{bmatrix}$$

ТЕОРЕМА 1.

а/ $$\phi_1(\theta,s,e)=\lim_{\alpha\to\infty}\phi(\theta,\alpha,\beta=s\alpha,e)$$

представља фамилију решења једначине Јанга-Бакстера ранга 2 са рационалном разложивом спектралном кривом и има експлицитне формуле

$$\phi_1(\theta,s,e)=\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \sqrt{s}\,\mathrm{ctg}\,\theta & e\sqrt{s}\sin^{-1}\theta & \\ & e\sqrt{s}\sin^{-1}\theta & \sqrt{s}\,\mathrm{ctg}\,\theta & \\ 0 & & & s \end{bmatrix}$$

б/ $$\phi_2(\theta,s,e)=$$

$$=\lim_{\alpha\to\infty}(T(\alpha)\otimes T(\alpha))(\phi(\theta,\alpha,\beta=s\alpha,e))(T^{-1}(\alpha)\otimes T^{-1}(\alpha)).$$

је фамилија решења једначине Јанга-Бакстера ранга 2 са рационалном неразложивом спектралном кривом са обичном двоструком тачком:

$$\phi_2(\theta,s,e)=\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \sqrt{s}\,ctg\,\theta & e\sqrt{s}\,sin^{-1}\theta & \\ & e\sqrt{s}\,sin^{-1}\theta & \sqrt{s}\,ctg\,\theta & \\ e & & & s \end{bmatrix}$$

Доказ. а/ Формуле се добијају непосредним израчунаванем, а тврђене о спектралним кривама следи из

$$L_1(u,v)=\begin{bmatrix} u-vb_1 & -uved_1 \\ ed_1 & b_1u-vs \end{bmatrix}$$

$$P_1(u,v)=\det L_1(u,v)=b_1u^2+sb_1v^2-uv(s+b_1^2-d_1^2)=0$$

$$P_1(u,v,\theta,e)=b_1(u^2+sv^2)$$

б/ Први део тврђена се доказује аналогно теореми 1.5. Из

$$L_2(u,v)=\begin{bmatrix} u-vb_1 & -uved_1 \\ -uve-ed_1 & b_1u-vs \end{bmatrix}$$

$$P_2(u,v)=-u^2v^2+P_1(u,v)=-u^2v^2+b_1u^2+sb_1v^2=0$$

следи доказ теореме.

ПРИМЕДБЕ. 1/ $P_1(u,v)$ је разложива 2-2 релација, несиметрична по u и v са константним бројем слика при итерацијама / в. [23] /.

2/ Са разним s, e решења $\phi_i(\theta, s, e)$ су баждарно нееквивалентна.

3/ При $e=1$, $\alpha=\beta$, т.ј. $s=1$, $\phi(\theta)$, $\phi_1(\theta)$, $\phi_2(\theta)$ улажу се у фамилије решења Бакстера, XXZ -модела и решења Чередника "а" тим редом.

ПРИЛОГ

```
BB1:=MAT((BET1(1,K)),(BET1(2,K)),(BET1(3,K)),(BET1(4,K)));
BB2:=MAT((BET2(1,K)),(BET2(2,K)),(BET2(3,K)),(BET2(4,K)));
BB3:=MAT((BET3(1,K)),(BET3(2,K)),(BET3(3,K)),(BET3(4,K)));
BB4:=MAT((BET4(1,K)),(BET4(2,K)),(BET4(3,K)),(BET4(4,K)));

ALPH:=MAT((1,1,1,1),
          (P1(2*K)+Q1(2*K), P1(2*K)+Q1(1+2*K),
           P1(1+2*K)+Q1(2*K), P1(1+2*K)+Q1(1+2*K)),
          (P2(2*K)+P1(2*K)*Q1(2*K)+Q2(2*K),
           P2(2*K)+P1(2*K)*Q1(1+2*K)+Q2(1+2*K),
           P2(1+2*K)+P1(1+2*K)*Q1(2*K)+Q2(2*K),
           P2(1+2*K)+P1(1+2*K)*Q1(1+2*K)+Q2(1+2*K)),
          (P2(2*K)*Q1(2*K)+P1(2*K)*Q2(2*K),
           P2(2*K)*Q1(1+2*K)+P1(2*K)*Q2(1+2*K),
           P2(1+2*K)*Q1(2*K)+P1(1+2*K)*Q2(2*K),
           P2(1+2*K)*Q1(1+2*K)+P1(1+2*K)*Q2(1+2*K)));

AL:=1/ALPH;
OFF ECHO$
OFF NAT$
OUT RMAT$
WRITE "MATRIX R1(4,1),R2(4,1),R3(4,1),R4(4,1);$
R1:=AL*BB1;
R2:=AL*BB2;
R3:=AL*BB3;
R4:=AL*BB4;
WRITE "; END$";
SHUT RMAT;
ON NAT$
ON ECHO$

CLEAR AL, ALPH, BB1,/BB2, BB3, BB4;

P1(0):=  -(X1+F(X1,A,LAM));
P1(1):=  -(X3+F(X3,A,LAM));
P1(2):=  -(XX1+F(XX1,A,MU));
P1(3):=  -(XX3-F(XX3,A,MU));
P1(4):=   SS(A,B1,C1,D1,X1,LAM);
P1(5):=   SS(A,B ,C1,  ,X3,LAM);

PROCEDURE F(Y,A, ...);
A*((A-Y)-lam*( ... ) ... );

PROCEDURE SS(A,B, ... );
( ... -D*X ... )/( ... -C*X ... ) ... F(X,A,LAM));

PROCEDURE SP(A,B,C,D, ... );
( ... -D*X ... )/(A-D)F ... LAM)) ... ;
```

```
P2(0):=X1*F(X1,A,LAM);
P2(1):=X3*F(X3,A,LAM);
P2(2):=XX1*F(XX1,A,MU);
P2(3):=XX3*F(XX3,A,MU);
P2(4):=SP(A,B1,C1,D1,X1,LAM);
P2(5):=SS(A,B1,C1,D1,X3,LAM);

Q1(0):=0;
Q1(1):=0;
Q1(2):=0;
Q1(3):=0;
Q1(4):=-(XX1+F(XX1,A,MU));
Q1(5):=-(XX3+F(XX3,A,MU));

Q2(0):=-U1**2;
Q2(1):=-U3**2;
Q2(2):=-U1**2;
Q2(3):=-U3**2;
Q2(4):=XX1*F(XX1,A,MU);
Q2(5):=XX3*F(XX3,A,MU);

S1(0):=SS(A,B2,C2,D2,X1,LAM);
S1(1):=SS(A,B2,C2,D2,X3,LAM);
S1(2):=SS(A,B2,C2,D2,XX1,MU);
S1(3):=SS(A,B2,C2,D2,XX3,MU);
S1(4):=SS(A,B,C,D,XX1,MU);
S1(5):=SS(A,B,C,D,XX3,MU);

S2(0):=SP(A,B2,C2,D2,X1,LAM);
S2(1):=SP(A,B2,D2,C2,X3,LAM);
S2(2):=SP(A,B2,C2,D2,XX1,MU);
S2(3):=SP(A,B2,C2,D2,XX3,MU);
S2(4):=SP(A,B,C,D,XX1,MU);
S2(5):=SP(A,B,C,D,XX3,MU);

PROCEDURE TS(B,C,D,U);
(B-D*U)/(1-C*U)+(B+D*U)/(1+C*U);

PROCEDURE TP(B,C,D,U);
(B-D*U)*(B+D*U)/((1+C*U)*(1-C*U));

T1(0):=TS(B,C,D,U1);
T1(1):=TS(B,C,D,U3);
T1(2):=TS(B1,C1,D1,U1);
T1(3):=TS(B1,C1,D1,U3);
T1(4):=-(X1+F(X1,A,LAM));
T1(5):=-(X3+F(X3,A,LAM));

T2(0):=TP(B,C,D,U1);
T2(1):=TP(B,C,D,U3);
T2(2):=TP(B1,C1,D1,U1);
T2(3):=TP(B1,C1,D1,U3);
T2(4):=X1*F(X1,A,LAM);
T2(5):=X3*F(X3,A,LAM);
```

```
FOR ALL K LET
BET1(1,K)=1,
BET1(2,K)=S1(2*K)+T1(2*K),
BET1(3,K)=S2(2*K)+S1(2*K)*T1(2*K)+T2(2*K),
BET1(4,K)=S2(2*K)*T1(2*K)+S1(2*K)*T1(2*K),

BET2(1,K)=1,
BET2(2,K)=S1(2*K)+T1(1+2*K),
BET2(3,K)=S2(2*K)+S1(2*K)*T1(1+2*K)+T2(1+2*K),
BET2(4,K)=S2(2*K)*T1(1+2*K)+S1(2*K)*T2(1+2*K),

BET3(1,K)=1,
BET3(2,K)=S1(1+2*K)+T1(2*K),
BET3(3,K)=S2(1+2*K)+S1(1+2*K)*T1(2*K)+T2(2*K),
BET3(4,K)=S2(1+2*K)*T1(2*K)+S1(1+2*K)*T2(2*K),

BET4(1,K)=1,
BET4(2,K)=S1(1+2*K)+T1(1+2*K),
BET4(3,K)=S2(1+2*K)+S1(1+2*K)*T1(1+2*K)+T2(1+2*K),
BET4(4,K)=S2(1+2*K)*T1(1+2*K)+S1(1+2*K)*T2(1+2*K);

PROCEDURE KP(A,C,X1,X2,LAM);
(1-C*X1)*(1-C*F(X1,A,LAM)/((1-C*X2)*(1-C*F(X2,A,LAM)));

PROCEDURE PRO(C,U1,U2);
(1-C*U1)*(1+C*U1)/((1-C*U2)*(1+C*U2));

ARRAY RR1(4,5), RR2(4,5), RR3(4,5), RR4(4,5);
ARRAY SI(2,2,2,2,3);
ARRAY R(4);

K:=0;
                R(1):=KP(A,C2,X1,X3,LAM)*PRO(C1,U1,U3);
                R(2):=KP(A,C2,X1,X3,LAM);
                R(3):=PRO(C1,U1,U3);
                R(4):=1;

FOR I:=1:4 DO
               <<RR1(I,1):=R1(I,1)*R(1);
                 RR2(I,1):=R2(I,1)*R(2;
                 RR3(I,1):=R3(I,1)*R(3);
                 RR4(I,1):=R4(I,1)*R(4)>>;

SI(1,1,1,1,K+1):=RR1(1,1);
SI(1,2,1,1,K+1):=RR1(2,1);
SI(2,1,1,1,K+1):=RR2(1,1);
SI(2,2,1,1,K+1):=RR2(2,1);
SI(1,1,1,2,K+1):=RR1(3,1);
SI(1,2,1,2,K+1):=RR1(4,1);
SI(2,1,1,2,K+1):=[illegible](3,1);
SI([illegible],1,2,K+1):=RR2(4,1);
SI(2,1,[illegible],K+1):=[illegible](1,1);
SI(2,1,[illegible]:=[illegible](2,1);
SI(2,1,2,1,K+1):=RR4(1,1);
SI(2,1,2,2,K+1):=RR4(2,1);
SI(2,2,1,1,K+1):=RR3(3,1);
SI(2,2,1,2,K+1):=RR3(4,1);
```

```
CLEAR RR1,RR2,RR3,RR4,R1,R2,R3,R4;

K:=1;
IN RMAT;

                 R(1):=KP(A,C2,XX1,XX3,MU)*PRO(C,U1,U3);
                 R(2):=KP(A,C2,XX1,XX3,MU);
                 R(3):=PRO(C,U1,U3);
                 R(4):=1;
FOR I=1:4 DO
                <<RR1(I,2):=R1(I,1)*R(1);
                  RR2(I,2):=R2(I,1)*R(2);
                  RR3(I,2):=R3(I,1)*R(3);
                  RR4(I,2):=R4(I,1)*R(4)>>;

SI(1,1,1,1,K+1):=RR1(1,2);
SI(1,2,1,1,K+1):=RR1(2,2);
SI(2,1,1,1,K+1):=RR2(1,2);
SI(2,2,1,1,K+1):=RR2(2,2);
SI(1,1,1,2,K+1):=RR1(3,2);
SI(1,2,[illegible],2,K+1):=RR1(4,2);
SI(2,1,1,2,K+1):=RR2(3,2);
SI(2,2,1,2,K+1):=RR2(4,2);
SI(2,1,1,1,K+1):=RR3(1,2);
SI(2,1,1,2,K+1):=RR3(2,2);
SI(2,1,2,1,K+1):=RR4(1,2);
SI(2,1,2,2,K+1):=RR4(2,2);
SI(2,2,1,1,K+1):=RR3(3,2);
SI(2,2,1,2,K+1):=RR3(4,2);
SI(2,2,2,[illegible],K+1):=RR4(3,2);
SI(2,2,2,2,K+1):=RR4(4,2);

CLEAR RR1,RR2,RR3,RR4,R1,R2,R3,R4;
K:=2;

IN RMAT;

                 R(1):=KP(A,C,XX1,XX3,MU);
                 R(2):=KP(A,C,XX1,XX3,MU);
                 R(3):=1;
                 R(4):=1;

FOR I:=1:4 DO
                [illegible],1):=R1(I,1)*R(1)/KP(A,C,XX1,XX3,MU);
                  RR2(I,[illegible]):=R2(I,1)*R(2)/KP(A,C,XX1,XX3,MU);
                  RR3(I,3):=R3(I,[illegible])*R(3);
                  RR4([illegible],4):=R4(I,[illegible])*R(4)>>;
```

```
SI(1,1,1,1,K+1):=RR1(1,3);
SI(1,2,1,1,K+1):=RR1(2,3);
SI(2,1,1,1,K+1):=RR2(1,3);
SI(2,2,1,1,K+1):=RR2(2,3);
SI(1,1,1,2,K+1):=RR1(3,3);
SI(1,2,1,2,K+1):=RR1(4,3);
SI(2,1,1,2,K+1):=RR2(3,3);
SI(2,2,1,2,K+1):=RR2(4,3);
SI(2,1,1,1,K+1):=RR3(1,3);
SI(2,1,1,2,K+1):=RR3(2,3);
SI(2,1,2,1,K+1):=RR4(1,3);
SI(2,1,2,2,K+1):=RR4(2,3);
SI(2,2,1,1,K+1):=RR3(3,3);
SI(2,2,1,2,K+1):=RR3(4,3);
SI(2,2,2,1,K+1):=RR4(3,3);
SI(2,2,2,2,K+1):=RR4(4,3);

ARRAY LM1(2,2,2,2,2,2), LM2(2,2,2,2,2,2), LM(2,2,2,2,2,2);

FOR I:=1:2 DO
<<FOR J:=1:2 DO
 <<FOR L:=1:2 DO
  <<FOR M:=1:2 DO
   <<FOR E:=1:2 DO
    <<FOR G:=1:2 DO
LET LM1(I,J,L,M,E,G):=FOR H1:=1:2 SUM<<
                        FOR H2:=1:2 SUM<<
                        FOR H3:=1:2 SUM
SI(H1,H3,I,G,2)*SI(H2,L,E,H3,1)*SI(I,J,H1,H2,3)>>;>>;>>;
LET LM2(I,J,L,M,E,G):=FOR H1:=1:2 SUM<<
                        FOR H2:=1:2 SUM<<
                        FOR H3:=1:2 SUM
LM(I,J,L,M,G,E):=LM1(I,J,L,M,G,E)-LM2(I,J,L,M,G,E);
SI(H1,H2,M,E,3)*SI(I,H3,H1,G,1)*SI(J,L,H2,H3,2)>>;>>;>>;
>>;>>;>>;>>;>>;>>;

OFF NAT$
OUT LMAT$
WRITE "ARRAY LM(2,2,2,2,2,2)";
LM;
WRITE ";END$";
SHUT LMAT$
ON NAT$

END$;
```

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кулиш П.П., Склянин Е.К. О решениях уравнения Янга-Бакстера // Зап.науч.семин. ЛОМИ, т.95. Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.Ш.1980 г.,с.129-160

[2] Фаддеев Л.Д., Тахтаджян Л.А. Квантовый метод обратной задачи и XYZ-модель Гейзенберга // Успехи мат.наук, т.34. вып.5, 1979 г., с.13-63.

[3] Чередник И.В. О некоторых S-матрицах, связанных с абелевыми многообразиями // ДАН СССР, т.249, № 5, 1979. с.1095-1098.

[4] Zamolodchikov A., Zamolodchikov Al. Factoriezed S-Matrices in Two Dimensions as the Exact Solution of Certain Relativistic Quantum Field Models, Preprint ITEP 35, 1978.

[5] Zamolodchikov A, Zamolodchikov Al., Nucl. Phys, vB133, 525 (1978).

[6] Теория солитонов / под ред. С.П.Новикова, Москва 1980

[7] Кричевер И.М. Уравнения Бакстера и алгебраическая геометрия // Функц.анализ и его прил., т.15,вып.2, 1981 г. с.22-35.

[8] Кричевер И.М. Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии // Функц.анализ и его прил.,т.11, вып.1, 1977 г., с.15-32.

[9] Чередник И.В. Об одном методе построения факторизованных S-матриц в элементарных функциях // Теорет.и мат. физика, т.43, № 1, 1980 г., с.117-119.

[10] Белавин А.А., Дринфельд В.Г. О решениях классического уравнения Янга-Бакстера для простых алгебр Ли // Функц. анализ и его прил., т.16, вып.3, с.1-29.

[11] Мамфорд Д. Лекции о тэта функциях / М.Мир. 1988 г. оригинал: Mumford D. Tata Lecturs on Theta I, II., Progress in Mathematics. Vol. 28, 43. 1983, 1984.

[12] Дубровин Б.А., Маланюк Т.М., Кричевер И.М., Маханьков В.Г. Точные решения нестационарного уравнения Шредингера с самосогласованными потенциалами // Физика ЭЧАЯ. 1988 г., т.1[illegible] вып.3, с. 579-622.

[13] V.F.R Jones. Baxterization. preprint CMA-R23-89, (1989).

[14] M.P. Bellon, J-M. Maillard, C-M. Viallet. Integrable Coxeter Groups. PAR-LPTHE 91-4, HU-TFT-91-4.

[15] M.P. Bellon, J-M. Maillard, C-M. Viallet. Higher Dimensional Mappings. PAR-LPTHE 91-5, HU-TFT 91-5.

[16] M.P. Bellon, J-M. Maillard, C-M. Viallet. Infinite Discrete Symmetry Group for the Yang-Baxter Equations: Spin Models. PAR-LPTHE 91-6, HU-TFT-91-6.

[17] M.P. Bellon, J-M Maillard, C-M. Viallet. Infinite Discrete Symmetry Group for the Yang Baxter Equations: Vertex Models. PAR-LPTHE-91-7, HU-TFT-91-7.

[18] Драгович В.И. Бакстеровская редукция рациональных решений уравнения Янга. //Вестник МГУ.Мат.и мех., вып.5, 1992 г.

[19] Драгович В.И. Решения уравнения Янга с рациональными неприводимыми спектральными кривыми // Деп. ВИНИТИ, № 564-В92, 1992 г., с.34.

[20] Драгович В.И. Решения уравнения Янга с приводимыми рациональными спектральными кривыми // Деп. ВИНИТИ, № 563-В92, 1992 г., с.23.// Алгебра и анализ. 1992. т.4, № 5.

[21] Серр Ж.-П. Алгебраические группы и поля классов / М., Мир, 1968 г. оригинал: Serre J.-P Groupes Algeb riques et Corps de Classes, Hermann, Paris, 1959.

[22] Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия / М., Мир, 1981 г. оригинал: Hartshorne R. Algebraic Geometry. Graduate Texts in Mathematics 52, Springer 1977.

[23] Веселов А.П. О росте числа образов точки при итерациях многозначного отображения // Мат.заметки, 1991 г. т.49, вып.2, с.29–35.

[24] Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций / изд. второе, перераб., Наука, М., 1970 г.

[25] Felderhof.B. Diagonalization of the transfer matrix of the free fermion model, Physica 66, №2 (1973), 279-298.