Prirodno-matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Ljubomir Čukić

O LINEARNIM PRESLIKAVANJIMA VEKTORSKIH PROSTORA SNABDEVENIH TOPOLOGIJOM GENERALISANE INDUKTIVNE GRANICE

- doktorski rad -

Beograd
1981.

U V O D

U ovom radu su dati rezultati naših istraživanja osobina linearnih preslikavanja lokalno konveksnog prostora E u lokalno konveksan prostor F, pri čemu je bar jedan od ova dva prostora snabdeven topologijom generalisane induktivne granice. Topologija generalisane induktivne granice predstavlja prirodnu generalizaciju topologije (obične) induktivne granice: Neka je E vektorski prostor, $E_a(t_a)$ lokalno konveksni prostori, $S_a \subset E_a$ apsolutno konveksni skupovi i $f_a: E_a \to E$ linearna preslikavanja, onda je topologija generalisane induktivne granice $g(t_a, S_a, a \in A)$ na E najjača lokalno konveksna topologija na E za koju su restrikcije $f_a | S_a$ t_a- neprekidne. I pored toga što topologija generalisane induktivne granice predstavlja generalizaciju (obične) topologije induktivne granice, ona niti je nastala kao generalizacija poslednje, niti je bitna zbog toga. Njena važnost se ogleda u tome što ona predstavlja prirodnu topologiju nekih klasa funkcionalnih prostora, koji, praktično, nemaju nikakve veze s topologijom (obične) induktivne granice. Da bismo preciznije rekli o čemu je reč, napravićemo jedan kratak istorijski pregled.

Godine 1950. Orlicz je u radu (58) definisao Saksove prostore (videti (1.2.1)), vodjen potrebama matrične teorije sumiranja. Kako Saksovi prostori nisu vektorski prostori, već samo podskupovi vektorskih prostora, to je 1954. godine Alexiewicz u radu (2) uveo pojam γ-konvergencije (videti (1.2.2)) u prostoru sa dve norme i na taj način linearizovao Saksove prostore. Osnovni nedostatak γ-konvergencije je bio taj što ona nije bila topološka. Taj nedostatak ispravlja Wiweger godine 1957., topologizujući Saksove i dvo-normirane prostore. S takvom topologijom su ovi prostori postali topološki vektorski prostori.

Modifikujući Wiwegerovu (mešovitu) topologiju, da bi izbegao neka njena ograničenja, Garling 1964. godine definiše u radu (30) topologiju generalisane induktivne granice, koja je u sebi sadržala i maločas razmatrane prostore i obične induktivne granice. Istine radi, primetomo da je jedan specijalan slučaj ovakvih topologija ispitivao Persson 1963. godine u radu (63).

Garling je u pomenutom radu, ispitujući opšte osobine topologije generalisane induktivne granice, bio previše pod uticajem teorije običnih induktivnih granica (videti str.11 ovog rada), tako da topologije generalisane induktivne granice jedno vreme (do početka sedamdesetih godina) nije izazvala praktično nikakvo interesovanje. Početkom sedamdesetih godina situacija se menja. Tada je primećeno da se jedan specijalan tip topologije generalisane induktivne granice može primeniti na ispitivanje problema kada neka familija ograničenih skupova ima fundamentalan niz i, što je mnogo važnije, dokazano je da su striktne topologije funkcionalnih prostora - topologije generalisane induktivne granice (u suštini, to je dikazao još Wiweger 1961. godine u radu (82)).

Striktne topologije (pod tim nazivom) je definisao Buck 1958. godine u (11) na prostoru $C^b(X)$ neprekidnih i ograničenih funkcija na lokalno kompaktnom prostoru X, kao i na prostoru $H^{\infty}(U)$ ograničenih i holomorfnih funkcija na otvorenom jediničnom krugu kompleksne ravni (na prvom od ova dva prostora su 1957. godine Le Cam i Mařik takodje ispitivali ovakve topologije, s tim što je Le Cam "svoju" topologiju definisao u suštini kao topologiju generalisane induktivne granice, dok su Buck i Mařik koristili prednorme, tako da se u to vreme nije videlo da su u pitanju iste topologije). Razloga za uvodjenje striktnih topologija je bilo više, a skoro svi su posledice činjenice da u mnogo slučajeva sup-norma topologija na $C^b(X)$ i $H^{\infty}(U)$ nije adekvatna generalizacija sup-norma topologije na ovim prostorima u slučaju kada je X kompaktan prostor, a U zatvoren jedinični krug. Na primer, ako su $C^b(X)$ i $C^b(Y)$ izomorfni prostori sa sup-norma topologijom (X i Y su lokalno kompaktni), onda X i Y ne moraju biti homeomorfni- dovoljno je uzeti da je Y Stone-Čechova kompaktifikacija prostora X.

Još jedan razlog je veoma važan: dual prostora $C^b(X)$, snabdevenog striktnom topologijom, je prostor svih Radonovih (ograničenih) mera na X.

Sve ovo je uticalo da se stvori interes za generalisane induktivne granice i pojavljuje se više radova o generalisanim induktivnim granicama tipa $g(t,S_a,a\in A)$(u većini tih radova je $A=\mathbb{N}$, a u nekima od njih se koristi termin "mešovita topologija"), dakle o topologijama generalizovanih induktivnih granica dovoljno specijalnog tipa.

Naše interesovanje za topologije generalisane induktivne granice opštijeg tipa od maločas pomenutog je bilo izazvano dvema stvarima. Prva od njih je mogućnost fleksibilnijeg pristupa problemu utvrdjivanja da li neka familija ograničenih skupova ima fundamentalan niz. Druga od njih je činjenica da neki tipovi striktnih topologija nisu ništa drugo do topologije generalisane induktivne granice veoma opšteg tipa (videti str. 18), a duali prostora $C^b(X)$, snabdevenog tim tim topologijama su prostori odredjenih klasa mera na prostoru X(videti (56),(75) i (79)).

Zbog ovoga je od interesa ispitivanje osobina linearnih preslikavanja prostora s topologijama generalisane induktivne granice. Jedini radovi u vezi sa ovom problematikom su (16), (39) i (7o) (ako ne uzmemo u obzir radove o Saksovim i dvo-normiranim prostorima) i u svim ovim radovima su posmatrane topologije tipa $g(t,S_a,a\in A)$.

Sada ćemo izložiti kratak pregled rezultata ovog rada. Dopunske informacije o sadržaju pojedinih glava se mogu naći u uvodnom tekstu svake glave.

U glavi 0 je dat pregled osnovnih definicija i rezultata teorije lokalno konveksnih prostora.

Glava 1 se sastoji iz dva paragrafa. U prvom su dokazane neke osobine topologija generalisane induktivne granice koje su nam potrebne za dalji rad, a u drugom su dati neki primeri prostora koji imaju topologiju generalisane induktivne granice. Skoro svi rezultati prvog paragrafa se mogu naći u Garlingovom radu (3o), s tim što ih je on dokazao uz jače pretpostavke, koje, kao što smo već naveli, proističu iz teorije običnih induktivnih granica. Naši dokazi su jednostavniji od Garling-ovih.

U §1. glave 2 je definisana specijalna klasa prostora s topologijom generalisane induktivne granice- klasa (GLF)--prostora. Ova klasa sadrži sve Saksove prostore u smislu (1.2.1), najvažnije dvo-normirane prostore u smislu (1.2.2), prostore $C^b(X)$ sa striktnom topologijom (gde je X lokalno kompaktan σ-kompaktan prostor), kao i (LF)-prostore. Ovde je od posebnog značaja teorema (2.1.5), koja opisuje vezu izmedju (GLF)-prostora i (LF)-prostora.

U §2. su dokazane neke nasledne osobine (GLF)-prostora u slabijem smislu od uobičajenih, ali u smislu koji je dovoljan za ono što je naš cilj u ovoj glavi- za dokaz teorema o zatvorenom grafiku i otvorenom preslikavanju (videti str.23).

Paragraf 3. je centralni deo ove glave. U njemu su dokazane teoreme o zatvorenom grafiku i otvorenom preslikavanju za (GLF)-prostore, koje predstavljaju uopštenja poznatih Grothendieckovih teorema za (LF)-prostore. U dokazu ovih teorema glavnu ulogu ima teorema (2.1.5), jer se pomoću nje dokaz svodi na korišćenje poznatih teorema o zatvorenom grafiku i otvorenom preslikavanju.

U §4. su rezultati §3. iskorišćeni za dobijanje niza rezultata o prostorima s fundamentalnim nizom neke familije ograničenih skupova. Najvažniji rezultat ovog paragrafa je teorema (2.4.8). U ovom paragrafu je kontraprimerom dat odgovor na jednu dilemu iz Mirkovićevog rada (54).

U §1. glave 3 je dokazana Banach-Steinhausova teorema za prostore s topologijom generalisane induktivne granice i primerom je pokazano da bolji rezultat ne može biti dobijen. Drugi po važnosti rezultat ovog paragrafa je teorema (3.1.11), dovoljan uslov (da je on i potreban, očigledno je) za jaku ograničenost skupa linearnih preslikavanja.

Korišćenjem rezultata §1., u §2. se dokazuju potrebni i (ili) dovoljni uslovi za neprekidnost slabo neprekidnog preslikavanja, za jednakost topologije generalisane induktivne granice i njene Mackeyeve topologije, kao i nekih topologija bliskih Mackeyevoj.Ove jednakosti su od značaja za striktne topologije (videti (13)).

U §3. dokazujemo da poznata Kaltonova teorema važi i za širu klasu prostora od one iz Kalton (41), a zatim ovaj rezultat (kao i rezultate §1.) koristimo za dokaz teoreme o zatvorenom preslikavanju u slučaju kada je domen preslikavanja prostor s topologijom generalisane induktivne granice.

Najzad, u §4. dokazujemo jednu Collinsovu hipotezu iz 1968. godine u vezi s dualom prostora snabdevenog striktnom topologijom, koja do sada nije bila dokazana i pored napora Collinsa i njegovih učenika.

Glava 4 se sastoji iz dva paragrafa. U prvom paragrafu su dokazana neka tvrdjenja u vezi sa dobrom smeštenošću potprostora prostora s topologijom generalisane induktivne granice, a koja su bolja od niza rezultata, ranije dokazanih za običnu induktivnu granicu.Ovde su data poboljšanja i (ili) proširenja nekih tvrdjenja koja nisu u vezi sa induktivnim granicama.Osnovna teorema ovog paragrafa, iz koje su izvedeni pomenuti rezultati, je teorema (4.1.2).

U paragrafu 2. su jedno uopštenje teoreme (4.1.2)i jedno tvrdjenje iz opšte topologije (lema (4.2.5)) iskorišćeni za dobijenje nekoliko teorema o zatvorenom grafiku za slučaj kada su oba prostora snabdevena topologijama generalisane induktivne granice.Iz ovih teorema se dobijaju poboljšanja nekoliko McIntoshevih, Iyahenovih i Ruessovih teorema o zatvorenom grafiku (kod prvog od njih se ne radi o prostorima s topologijom generalisane induktivne granice!).

U glavi 0 nijedan rezultat nije originalan. U ostalim glavama smatramo da su potpuno originalna ona tvrdjenja kod koji nije naveden autor.Kod rezultata koji predstavljaju proširenja, uopštenja ili analogone poznatih rezultata je navedeno u čemu se sastoji razlika izmedju naših i poznatih rezultata.

U radu smo koristili standardne oznake i termine (jedino što umesto Bourbakijevog termina "prostor prebrojiv u beskonačnosti" koristimo termin "σ-kompaktan prostor").

Na kraju se zahvaljujemo dr Branislavu Mirkoviću na korisnim sugestijama, kao i mr Draganu Jankoviću na korisnim informacijama iz opšte topologije (skrenuo nam je pažnju na (4.2.5) i na činjenicu da se (3.4.4) u formalno slabijem obliku može naći u (32)).

G L A V A 0

OSNOVNI POJMOVI I REZULTATI TEORIJE TOPOLOŠKIH VEKTORSKIH PROSTORA

§1. Definicije topološkog vektorskog prostora, projektivne i induktivne granice

(o.1.1) DEFINICIJA Uredjen par (E,t), gde je E vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$ realnih ili kompleksnih brojeva, a t topologija na E, je topološki vektorski prostor ako i samo ako su preslikavanja

1° $(x,y) \mapsto x+y$ prostora E^2 u E

2° $(k,x) \mapsto kx$ prostora $\mathbb{K}\times E$ u E,

neprekidna, ako je $\mathbb{K}$ snabdeven uobičajenom topologijom.

Ako je uslov 2° zamenjen uslovom: za svako k iz $\mathbb{K}$ je preslikavanje $x \mapsto kx$, prostora E u E, neprekidno, onda je (E,t) topološka vektorska grupa.

Često ćemo umesto (E,t) pisati $E(t)$ ili E_t i govorićemo da je prostor E snabdeven topologijom t.

(o.1.2) DEFINICIJA Neka je E vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ i $A \subset E$.

(a) Skup A je uravnotežen ako i samo ako iz $x \in A$ i $|k| \leq 1$ sledi $kx \in A$.

(b) Skup A guta skup $B \subset E$ ako i samo ako postoji $r > 0$ tako da je $kB \subset A$ za svako k takvo da je $0 < |k| \leq r$.

(c) Skup A je gutajući u E ako i samo ako on guta svako $x \in E$.

(d) Skup A je konveksan ako i samo ako iz $r,s \geq 0, r+s=1$, $x,y \in A$ sledi $rx+sy \in A$.

(e) Skup A je apsolutno konveksan ako i samo ako je on konveksan i uravnotežen.

(f) Apsolutno konveksan omotač skupa A je najmanji apsolutno konveksan skup koji sadrži A; oznaka je $\Gamma(A)$.

(o.1.3)<u>TEOREMA</u> Vektorski prostor E nad poljem $\mathbb{K}$, s topologijom t je topološki vektorski prostor ako i samo ako on ima bazu (filtra) okolina nule $\mathcal{U}$ takvu da:

(a) svaki element iz $\mathcal{U}$ je uravnotežen,

(b) svaki element iz $\mathcal{U}$ je gutajući u E,

(c) za svako $U\in\mathcal{U}$ postoji $V\in\mathcal{U}$ takvo da je $V+V\subset U$.

(o.1.4)<u>DEFINICIJA</u> Topološki vektorski prostor (E,t) je <u>lokalno konveksan</u> ako i samo ako on ima bazu okolina nule čiji su svi elementi apsolutno konveksni skupovi.

Ako je data familija lokalno konveksnih prostora, od nje se mogu konstruisati novi lokalno konveksni prostori:

(o.1.5)<u>DEFINICIJA</u> Neka su E i $E_a (a\in A)$ vektorski prostori nad poljem $\mathbb{K}$, $T_a:E \longrightarrow E_a$ linearna preslikavanja i t_a-lokalno konveksna topologija na E_a. Najslabija lokalno konveksna topologija na E, za koju su neprekidna sva preslikavanja T_a, je topologija <u>projektivne granice</u>. Označavaćemo je sa $Pr(E_a,t_a,T_a)$.

Ako je F vektorski potprostor prostora E(t) i $i:F \longrightarrow E$ identičko utapanje, onda je $Pr(E,t,i)$ topologija na F, indukovana topologijom t; ako su $p_a:\prod_{a\in A} E_a \longrightarrow E_a(t_a)$ projekcije, onda je $Pr(E_a,t_a,p_a)$ topologija proizvoda na $\prod_{a\in A} E_a$.

(o.1.6)<u>DEFINICIJA</u> Neka su E i $E_a (a\in A)$ vektorski prostori nad poljem $\mathbb{K}$, $T_a:E_a \longrightarrow E$ linearna preslikavanja i t_a-lokalno konveksna topologija na E_a. Najjača lokalno konveksna topologija na E za koju su sva preslikavanja T_a neprekidna, je topologija <u>induktivne granice</u>. Označavaćemo je sa $Ind(E_a,t_a,T_a)$.

Ako je F vektorski potprostor prostora E(t), $q:E \longrightarrow E/F$ faktor-preslikavanje, onda je $Ind(E,t,q)$ faktor-topologija na E/F ; ako je $E=\bigoplus_{a\in A} E_a$ algebarska suma i $i_a:E_a \longrightarrow E$ injekcije, onda je E s topologijom $Ind(E_a,t_a,i_a)$ topološka suma familije $\{E_a(t_a): a\in A\}$.

(o.1.7)<u>TEOREMA</u> Sa oznakama iz (o.1.6), uz uslov $E=\bigcup_{a\in A} T_a(E_a)$, familija skupova tipa

$$\Gamma\left[\bigcup_{a\in A} T_a(U_a)\right],$$

gde je U_a okolina nule u $E_a(t_a)$, je baza okolina nule topologije $\mathrm{Ind}(E_a,t_a,T_a)$.

§2. Linearna preslikavanja; dualnost

U celom radu ćemo, bez posebnog naglašavanja, smatrati da su vektorski prostori E i F nad istim poljem skalara, kad god je reč o linearnom preslikavanju $E \to F$.

Neka je $L(E,F)$ vektorski prostor svih neprekidnih linearnih preslikavanja $E \to F$, gde su E i F lokalno konveksni prostori i neka je $\mathcal{A}$ familija apsolutno konveksnih skupova iz E s osobinom: za svako $A,B\in\mathcal{A}$ postoji $C\in\mathcal{A}$, $A\cup B\subset C$. Onda je familija svih skupova tipa $L(A,U)=\{T\in L(E,F):\ T(A)\subset U\}$, gde je $A\in\mathcal{A}$ i U apsolutno konveksna okolina nule u F, baza okolina nule topologije $t_{\mathcal{A}}$ na $L(E,F)$, s kojom je $L(E,F)$ lokalno konveksna grupa.

(o.2.1)DEFINICIJA Topologija $t_{\mathcal{A}}$ je topologija $\mathcal{A}$-konvergencije (ili topologija uniformne konvergencije na elementima iz $\mathcal{A}$).

Topologija $t_{\mathcal{A}}$ je lokalno konveksna ako i samo ako je skup $T(A)$ ograničen za svako $A\in\mathcal{A}$ i svako $T\in L(E,F)$, pri čemu se ograničen skup definiše na sledeći način:

(o.2.2)DEFINICIJA Skup A iz $E(t)$ je ograničen ako i samo ako ga guta svaka t-okolina nule.

(o.2.3)DEFINICIJA Skup $H\subset L(E,F)$ je ekvineprekidan ako i samo ako za svaku okolinu nule V iz F postoji okolina nule U iz E, takva da je $T(U)\subset V$ za svako $T\in H$.

(o.2.4)DEFINICIJA Neka su E,F vektorski prostori i b bilinearan funkcional na $E\times F$ koji ima sledeće osobine:

(a) ako je $b(x,y)=o$ za svako $y\in F$, onda je $x=o$,

(b) ako je $b(x,y)=o$ za svako $x\in E$, onda je $y=o$.

Trojka (E,F,b) je dualni sistem (ili dualnost). Funkcional b ćemo označavati sa $\langle\ ,\ \rangle$, a trojku (E,F,b)- sa $\langle E,F\rangle$.

(o.2.5)<u>OZNAKE</u> Neka je $E(t)$ lokalno konveksan prostor.

(a) E^* je vektorski prostor svih linearnih funkcionala na E;

(b) $(E,t)^+$ je vektorski prostor svih sekvencijalno neprekidnih linearnih funkcionala na E;

(c) $(E,t)'$ je vektorski prostor svih neprekidnih linearnih funkcionala na E.

Ako je $\langle x,f\rangle := f(x)$, gde je $f\in E^*$ (resp. $f\in(E,t)^+$, $f\in(E,t)'$), onda je $\langle E,E^*\rangle$ (resp. $\langle E,E^+\rangle$, $\langle E,E'\rangle$) dualnost (ako je t Hausdorffova topologija, što ćemo <u>uvek pretpostavljati kada je reč o poslednje dve dualnosti</u>).

(o.2.6)<u>DEFINICIJA</u> <u>Slaba</u> <u>topologija</u> $\sigma(E,F)$ za dualnost $\langle E,F\rangle$ je najslabija lokalno konveksna topologija na E za koju su sva preslikavanja $x\longmapsto\langle x,y\rangle$ neprekidna.

(o.2.7)<u>TEOREMA</u> Ako je $\langle E,F\rangle$ dualnost, onda je $(E,\sigma(E,F))'=F$.

Iz (o.2.7) sledi da je $\sigma(E,F)$ topologija uniformne konvergencije na apsolutno konveksnim omotačima konačnih podskupova prostora F.

(o.2.8)<u>DEFINICIJA</u> Neka je $\langle E,F\rangle$ dualnost.

(a) <u>Mackeyeva</u> <u>topologija</u> $\tau(E,F)$ je toplogija uniformne konvergencije na svim apsolutno konveksnim $\sigma(E,F)$-kompaktnim skupovima iz F.

(b) Topologija $\underline{\tau_c(E,E)}$ je topologija uniformne konvergencije na svim kompaktnim skupovima iz $E(t)$.

(c) <u>Jaka</u> <u>topologija</u> $\beta(E,F)$ je topologija uniformne konvergencije na svim $\sigma(F,E)$-ograničenim skupovima iz F.

(d) Topologija $\underline{\beta^*(E,F)}$ je topologija uniformne konvergencije na svim $\beta(F,E)$-ograničenim skupovima iz F.

(o.2.9)<u>DEFINICIJA</u> Neka je $\langle E,F\rangle$ dualnost.

(a) Polara skupa $A \subset E$ je skup $A^o := \{f \in F : |\langle x,f\rangle| \leq 1, x \in A\}$.
(b) Bipolara skupa $A \subset E$ je skup $A^{oo} := \{x \in E : |\langle x,f\rangle| \leq 1, f \in A^o\}$.

(o.2.10) TEOREMA Neka je $\langle E,F\rangle$ dualnost i neka su A_i, A, B podskupovi iz E. Tada:

(a) $A^o \supset B^o$, ako $A \subset B$
(b) $(rA)^o = r^{-1}A^o$, ako $r \in \mathbb{K}$ i $r \neq 0$
(c) $(\bigcup A_i)^o = \bigcap A_i^o$
(d) $(\bigcap A_i)^o = \overline{\Gamma(\bigcup A_i^o)}^{\sigma(F,E)}$, ako su A_i $\sigma(E,F)$- zatvoreni i apsolutno konveksni
(e) $A^{oo} = \overline{\Gamma(A)}^{\sigma(E,F)}$
(f) U^o je $\sigma(F,E)$- kompaktan skup za svaku okolinu nule U iz E.

(o.2.11) TEOREMA Neka je $\langle E,F\rangle$ dualnost. Bazu okolina nule topologije $t_{\mathcal{A}}$ na F, uniformne konvergencije na elementima $A \in \mathcal{A}$, $A \subset E$, čine skupovi rA^o, $r > 0$.

(o.2.12) TEOREMA Neka je $\langle E,F\rangle$ dualnost i neka je t lokalno konveksna topologija na E.

(a) $(E,t)' = F$ ako i samo ako je $\sigma(E,F) \leq t \leq \tau(E,F)$.
(b) Ako je A konveksan skup iz E, onda je $\overline{A}^t = \overline{A}^{\sigma(E,E')}$.
(c) Svaki $\sigma(E,F)$- ograničen skup je $\tau(E,F)$-ograničen.

(o.2.13) DEFINICIJA Neka su E i F vektorski prostori i $T: E \longrightarrow F$ linearno preslikavanje. Preslikavanje $T^*: F^* \longrightarrow E^*$, definisano sa $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$, gde je $x \in E$, $y \in F^*$ je algebarski konjugovano preslikavanje preslikavanju T, a ako je $T^*(F^*) \subset E^*$, onda je T^* (topološki) konjugovano; konjugovano preslikavanje ćemo označavati sa T'.

(o.2.14) DEFINICIJA Linearno preslikavanje $T: E \longrightarrow F$ je slabo neprekidno ako i samo ako je ono neprekidno kad su prostori E i F snabdeveni slabim topologijama.

(o.2.15) TEOREMA

(a) Linearno preslikavanje je slabo neprekidno ako i samo ako je njemu konjugovano preslikavanje slabo neprekidno.

(b) Neka je linearno preslikavanje $T:E \longrightarrow F$, $A \subset E$ i $B \subset F$. Tada:

1) $(T(A))^{o} = (T')^{-1}(A^{o})$

2) Iz $T(A) \subset B$ sledi $T'(B^{o}) \subset A^{o}$

3) U 2) važi i obrat ako su A i B slabo zatvoreni apsolutno konveksni skupovi.

§3. Neke klase lokalno konveksnih prostora

(o.3.1) DEFINICIJA Neka je (E,t) lokalno konveksan prostor

(a) E je bačvast (resp. kvazi-bačvast) ako i samo ako je svaki $\sigma(E',E)$-ograničen (resp. $\beta(E',E)$-ograničen) skup iz E' ekvineprekidan.

(b) E je prebrojivo bačvast (resp. prebrojivo kvazi-bačvast) ako i samo ako je svaki $\sigma(E',E)$-ograničen (resp. $\beta(E',E)$-ograničen) skup iz E' koji je prebrojiva unija ekvineprekidnih skupova, ekvineprekidan.

(c) E je σ-bačvast (resp. σ-kvazi-bačvast) ako i samo ako je svaki $\sigma(E',E)$-ograničen (resp. $\beta(E',E)$-ograničen) niz iz E' ekvineprekidan.

(d) E je sekvencijalno bačvast ako i samo ako je svaki $\sigma(E',E)$-nula-niz iz E' ekvineprekidan.

(o.3.2) DEFINICIJA Neka je (E,t) lokalno konveksan prostor.

(a) E je (F)-prostor ako i samo ako je on metrizabilan i kompletan.

(b) E je Baireov ako i samo ako je svaki neprazan otvoren skup iz E druge kategorije u E.

(c) E je (LF)-prostor ako i samo ako je on induktivna granica niza (F)-prostora.

(d) E je strog (LF)-prostor ako i samo ako je on induktivna granica niza $\{(E_n,t_n) : n \in \mathbb{N}\}$ (F)-prostora takvih da je $E_n \subset E_{n+1}$, $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ i $t_{n+1}|E_n = t_n$.

(e) E je <u>ultrabornološki</u> ako i samo ako je on induktivna granica familije Banachovih prostora.

(f) E je <u>(DF)-prostor</u> ako i samo ako je on prebrojivo bačvast i ima niz ograničenih skupova, takav da je svaki ograničen skup sadržan u nekom članu niza.

(o.3.3)<u>DEFINICIJA</u> Neka je (E,t) lokalno konveksan prostor.

(a) E je <u>B-kompletan</u> ako i samo ako je svaki vektorski potprostor $Q \subset E'$ $\sigma(E',E)$-zatvoren, čim su preseci $Q \cap A$ $\sigma(E',E)$-zatvoreni za svaki ekvineprekidan skup A.

(b) E je <u>B_r-kompletan</u> ako i samo ako uslov iz (a) važi uz dopunsku pretpostavku: Q je $\sigma(E',E)$-gust u E'.

(c) E je <u>C_r-prostor</u> ako i samo ako uslov iz (a) važi za potprostore Q kao u (b), uz dopunsku pretpostavku: skupovi A su $\sigma(E',E)$-ograničeni.

(o,3.4)<u>DEFINICIJA</u> Neka je (E,t) lokalno konveksan prostor. On je <u>prostor s mrežom</u> ako i samo ako postoje skupovi $e_{n_1 \dots n_k} \subset E$ $(k, n_i \in \mathbb{N})$, takvi da je:

(a) $E = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} e_{n_1}$

(b) $e_{n_1 \dots n_k} = \bigcup_{n_{k+1}=1}^{\infty} e_{n_1 \dots n_{k+1}}$

(c) za svaki rastući niz prirodnih brojeva (k_i) postoji niz (r_n) nenegativnih realnih brojeva, od kojih samo konačno mnogo njih može biti jednako nuli, tako da red $\sum_{i=1}^{\infty} s_i x_i$ konvergira u E za sve $s_i \in [o, r_i]$ i sve $x_i \in e_{n_1 \dots n_{k_i}}$.

§4. Teoreme o zatvorenom grafiku

(o.4.1)<u>TEOREMA</u> Neka su E i F lokalno konveksni prostori i neka linearno preslikavanje $T: E \to F$ ima zatvoren grafik.

(a) (Banach) Ako su E i F (F)-prostori, onda je T neprekidno.

(b) (Dieudonne, Schwartz) Ako su E i F strogi (LF)--prostori, onda je T neprekidno.

(c) (Köthe) Ako su E i F (LF)-prostori, onda je T neprekidno.

(d) (Grothendieck) Ako je E ultrabornološki, a F (LF)--prostor, onda je T neprekidno.

(e) (Ptak) Ako je E bačvast, a F B_r-kompletan, onda je T neprekidno.

(f) (Robertson, Robertson) Ako je E induktivna granica Baireovih prostora, a F induktivna granica B--kompletnih prostora $Ind(F_n,t_n,T_n)$ takvih da je $F=\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(F_n)$, onda je T neprekidno.

(o.4.2)<u>TEOREMA</u> (Mahowald) Ako je svako linearno preslikavanje s zatvorenim grafikom lokalno konveksnog prostora E u svaki Banachov prostor neprekidno, onda je prostor E bačvast.

(o.4.3)<u>TEOREMA</u> (De Wilde) Ako je E induktivna granica Baireovih prostora, F prostor s mrežom i $T:E \longrightarrow F$ linearno preslikavanje s zatvorenim grafikom, onda je T neprekidno.

(o.4.4)<u>TEOREMA</u> (Kalton) Za lokalno konveksan prostor E su sledeća tvrdjenja ekvivalentna (ako je E Mackeyev):

(a) Dual E' je $\sigma(E',E)$-sekvencijalno kompletan.

(b) Za svaki separabilan B_r-kompletan prostor F, svako linearno preslikavanje iz E u F s zatvorenim grafikom je neprekidno.

(c) Svako linearno preslikavanje iz E u c_o s zatvorenim grafikom je neprekidno.

(o.4.5)<u>TEOREMA</u> (McIntosh) Neka su E i F lokalno konveksni prostori, T linearno preslikavanje iz E u F s zatvorenim grafikom. Tada je T neprekidno ako je E Mackeyev i ako je ispunjen jedan od sledećih uslova:

(i) E je bačvast, a F je C_r-prostor.

(ii) E'je $\sigma(E',E)$-kompletan.

(iii) E' je $\tau(E',E)$-sekvencijalno kompletan, a F'je $\tau(F',F)$-metrizabilan.

(iv) E je ultrabornološki, a F zadovoljava jedan od sledećih uslova: 1) F je C_r-prostor; 2) F je Suslinov prostor; 3) F je induktivna granica niza B-kompletnih prostora, $\mathrm{Ind}(F_n, t_n, T_n)$, takvih da je $F=\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(F_n)$.

(v) E je sekvencijalno kompletan, E' je $\beta(E',E)$-kompletan, a F je semirefleksivan prostor i zadovoljava jedan od uslova iz (iv).

(vi) E je sekvencijalno kompletan, (E',t) je kvazi-kompletan za neku lokalno konveksnu topologiju t za koju je $\sigma(E',E) \leq t \leq \beta(E',E)$, a F je semirefleksivan C_r-prostor.

(vii) E je sekvencijalno kompletan, (E',t) je sekvencijalno kompletan u nekoj topologiji t koja je kao u (vi), a F je semirefleksivan prostor čiji je dual F' $\beta(F',F)$-metrizabilan.

(viii) F je $\sigma(F,F')$-kompletan.

Sve ove teoreme se mogu naći u Kötheovoj knjizi (44),II.

G L A V A 1

TOPOLOGIJA GENERALISANE INDUKTIVNE GRANICE

U ovoj glavi su dati: definicija, osnovne osobine (potrebne za dalji rad) i primeri prostora s topologijom generalisane induktivne granice.

Sva tvrdjenja koja su data bez dokaza su poznata. Tvrdjenja koja su data s dokazom su ili nova, ili su uopštenja poznatih (ako se radi o uopštenju, to je napomenuto).

§1. Definicija i osnovne osobine

Topologiju generalisane induktivne granice je definisao i ispitivao Garling u radu (3o), imajući (očigledno) kao inspiraciju radove Wiwegera (81),(82). Istine radi, treba reći da je specijalan, ali veoma važan, tip generalisanih induktivnih granica istovremeno proučavao i Persson u radu (63) (takodje pod uticajem pomenutih Wiwegerovih radova).

(1.1.1)<u>DEFINICIJA</u> Neka su E i $E_a (a \in A)$ vektorski prostori nad poljem skalara $\mathbb{K}$, neka su $S_a \subset E_a$ apsolutno konveksni skupovi, t_a-lokalno konveksne topologije na E_a i $j_a: E_a \to E$ linearna preslikavanja. <u>Topologija generalisane induktivne granice</u> na E (definisana familijom $\{(E_a, S_a, t_a, j_a): a \in A\}$) je najjača lokalno konveksna topologija na E za koju su sve restrikcije $j_a S_a$ neprekidne.

Iz definicije neposredno sledi (Garling (3o), str. 1):

(1.1.2)<u>TEOREMA</u> Neka je vektorski prostor E snabdeven topologijom generalisane induktivne granice, definisane familijom $\{(E_a, S_a, t_a, j_a): a \in A\}$ i neka je F lokalno konveksan prostor.

Linearno preslikavanje T iz E u F je neprekidno ako i samo ako su restrikcije $Tj_a|S_a$ t_a-neprekidne za svako $a\in A$.

(1.1.3)PRIMEDBA Topologija generalisane induktivne granice se uvek može realizovati tako da je $S_a\subset E$, da su t_a lokalno konveksne topologije na span S_a i da su j_a identička utapanja span $S_a\longrightarrow E$. Dokažimo prvo da se umesto E_a može u definiciji uzeti span S_a: neka je F_a=span S_a, $s_a=t_a|F_a$ i $j_a'=j_a|F_a$. Kako su j_a, j_a' i s_a, t_a jednaki na S_a, to su topologije generalisane induktivne granice, definisane familijama $\{(E_a,S_a,t_a,j_a):a\in A\}$ i $\{(F_a,S_a,s_a,j_a'):a\in A\}$, jednake, a to je i trebalo dokazati. Neka je sada $G_a=F_a/j_a'^{-1}(o)$ i neka je $j_a'=k_aq_a$ kanonsko razlaganje preslikavanja j_a' :

$$F_a\xrightarrow{q_a} G_a\xrightarrow{k_a} E .$$

Ako sa s_a° označimo faktor-topologiju na G_a, a sa s_a'' njenu sliku na $k_a(G_a)$, onda iz (1.1.2) i injektivnosti preslikavanja k_a sledi da su topologije generalisane induktivne granice, definisane familijama $\{(F_a,S_a,s_a,j_a') : a\in A\}$ i $\{(k_a(G_a), j_a(S_a), s_a'', i_a) : a\in A\}$, gde je i_a identičko utapanje $k_a(G_a)\to E$, identične.

<u>U daljem ćemo uvek pretpostavljati da su $S_a\subset E$, da su t_a lokalno konveksne topologije na E_a=span S_a, kao i da su j_a identička utapanja $E_a\longrightarrow E$, a topologiju generalisane induktivne granice, definisanu familijom $\{(E_a,S_a,t_a,j_a) : a\in A\}$, označavaćemo sa $g(t_a,S_a,a\in A)$, ili kraće- sa g, ako ne postoji mogućnost konfuzije.</u>

Kao što smo videli, učinjena pretpostavka ne smanjuje opštost. Garling u pomenutom radu nije uveo ovu pretpostavku; on je, pored pretpostavke da su j_a injekcije, imao u vidu i sledeće tri pretpostavke: $\bigcup_{a\in A} j_a(S_a)$ je gutajući skup u E; za svako $a,b\in A$ postoji $c\in A$, takvo da je $j_a(S_a)+j_b(S_b)\subset j_c(S_c)$; ako je $j_a(S_a)\subset j_b(S_b)$, onda je preslikavanje

$$(j_b|S_b)^{-1}(j_a|S_a) : S_a\longrightarrow S_b$$

neprekidno. Prva od ove tri pretpostavke, kao što će se videti, je u većem broju tvrdjenja bitna, dok ostale dve nisu.

Veza izmedju "obične" induktivne granice i generalisane induktivne granice data je u teoremi koja sledi, a koja je uz jače pretpostavke (maločas navedene) dokazana u (3o). Pre nego što formulišemo teoremu, primetimo da se za svako fiksirano $a \in A$ na E_a može definisati topologija generalisane induktivne granice $g_a = g(t_a, kS_a, k \in \mathbb{N})$.

(1.1.4) <u>TEOREMA</u> Topologija g jednaka je topologiji t "obične" induktivne granice prostora (E_a, g_a).

<u>DOKAZ</u> Neka je $i: E(t) \to E(g)$ identičko preslikavanje. Ono je neprekidno ako i samo ako su restrikcije $i|E_a$ g_a-neprekidne za svako $a \in A$, odnosno ako i samo ako su restrikcije $i|kS_a$ t_a-neprekidne za svako $k \in \mathbb{N}$, $a \in A$, zbog (1.1.2). Ako je P g-okolina nule, onda iz definicije topologije g sledi da postoje t_a-okoline nule U_a^k, takve da je $U_a^k \cap S_a \subset k^{-1}P, k \in \mathbb{N}$. Onda je $i(kU_a^k \cap kS_a) = kU_a^k \cap kS_a \subset P$, tj. restrikcije $i|kS_a$ su t_a-neprekidne za svako $k \in \mathbb{N}$, $a \in A$. Dakle, i je neprekidno preslikavanje, pa je $t \geqslant g$.

Neka je sada $j: E(g) \to E(t)$ identičko preslikavanje. Zbog (1.1.2), ono je neprekidno ako i samo ako su restrikcije $j|S_a$ t_a-neprekidne za svako $a \in A$. Ako je Q t-okolina nule, onda postoje g_a-okoline nule V_a, takve da je $V_a \subset Q$ za svako $a \in A$. Kako su V_a g_a-okoline nule, to postoje t_a-okoline nule W_a, za koje je $W_a \cap S_a \subset V_a, a \in A$. Onda je $j(W_a \cap S_a) = W_a \cap S_a \subset V_a \subset Q$, pa su restrikcije $j|S_a$ t_a-neprekidne. Zbog toga je $g \geqslant t$.

Primetimo da je naš dokaz jednostavniji i kraći od dokaza u (3o).

Sada nam je cilj da opišemo g-okoline nule. Za to će nam trebati Lemma 1. i Lemma 2. iz (67), koje dajemo u objedinjenom obliku:

(1.1.5) <u>LEMA</u> Neka je (A_n) rastući niz apsolutno konveksnih podskupova lokalno konveksnog prostora X(s) čija je unija gutajuća u X i koji ima osobinu: za svako $p, q \in \mathbb{N}$ postoji $r \in \mathbb{N}$ takvo da je $A_p + A_q \subset A_r$. Tada svaka od familija skupova tipa

$$\Gamma_{n=1}^{\infty}(U_n \cap A_n)$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} U_i \cap r_i A_i,$$ gde je (r_n) niz realnih brojeva, takav da je $\sum_{n=1}^{\infty} |r_n| = \infty$

$$U_o \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n + A_n),$$

$$\overline{U_o \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{(U_n + \overline{A}_n)}},$$

čini bazu okolina nule topologije $g(s, A_n, n \in \mathbb{N})$ (U_n su s-okoline nule).

(1.1.6)<u>TEOREMA</u> Ako je $\bigcup_{a \in A} S_a$ gutajući skup u E, onda svaka od familija skupova tipa

$$\Gamma_{a \in A} \left[\bigcap_{k=1}^{\infty} (U_a^k \cap kS_a) \right],$$

$$\Gamma_{a \in A} \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} U_a^i \cap i r_a^{(i)} S_a \right],$$ gde su $(r_a^{(i)})$ nizovi realnih brojeva: $\sum_{i=1}^{\infty} |r_a^{(i)}| = \infty$ za $a \in A$

$$\Gamma_{a \in A} \left[U_a^o \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} (U_a^k + kS_a) \right],$$

$$\Gamma_{a \in A} \left[\overline{U_a^o \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{(U_a^k + k\overline{S}_a^a)}^a}^a \right],$$ gde je sa $\overline{B}^a$ označeno t_a-zatvorenje skupa B,

čini bazu g-okolina nule (U_a^k su t_a-okoline nule, $k=o,1,\ldots$).

<u>DOKAZ</u> s obzirom na (1.1.4), svaka g-okolina nule je tipa $\Gamma_{a \in A} V_a$, gde su V_a g_a-okoline nule, a kako za svako fiksirano $a \in A$, niz $A_n = nS_a$ zadovoljava uslove leme (1.1.5), to je dokaz završen.

(1.1.7)<u>POSLEDICA</u> ((3o),Prop.4) Ako je $\bigcup_{a \in A} S_a$ gutajuća u E, onda je

$$g(t_a, S_a, a \in A) = g(t_a, \overline{S}_a^a, a \in A),$$

gde je sa $\overline{S}_a^a$ označeno t_a-zatvorenje skupa S_a.

(1.1.8)<u>POSLEDICA</u> Neka je $\bigcup_{a \in A} S_a$ gutajuća u E. Apsolutno konveksan skup P je g-okolina nule ako i samo ako je za svako $a \in A$ i svako $k \in \mathbb{N}$ skup $P \cap kS_a$ t_a-okolina nule u kS_a.

(1.1.9)<u>PRIMEDBA</u> Ako se u (1.1.8) uslov da je $\bigcup_{a \in A} S_a$ gutajući skup zameni uslovom: P je gutajući skup, onda tvrdjenje iz (1.1.8) ostaje tačno, što sledi iz (1.1.4) i (1.1.5).

U (1.1.7) smo videli da se topologija g ne menja ako se skupovi S_a zamene svojim zatvorenjima. Sada ćemo videti da se ona ne menja ni kada se skupovi S_a zamene skupovima r_aS_a:

(1.1.10) TEOREMA Neka su $r_a \in \mathbb{K}$, $|r_a| \geq 1$ za svako $a \in A$. Tada je

$$g(t_a, S_a, a \in A) = g(t_a, r_aS_a, a \in A).$$

DOKAZ Označimo topologiju $g(t_a, r_aS_a, a \in A)$ sa g'. Neka je P apsolutno konveksna g-okolina nule. Onda je i $r_a^{-1}P$ g-okolina nule, pa iz (1.1.9) sledi da postoje t_a-okoline nule U_a^k takve da je $U_a^k \cap kS_a \subset r_a^{-1}P \cap kS_a$ za svako $a \in A$ i svako $k \in \mathbb{N}$. Odatle dobijamo:

$$P \cap kr_aS_a = r_a(r_a^{-1}P \cap kS_a) \supset r_a(U_a^k \cap kS_a) = r_aU_a^k \cap kr_aS_a.$$

Iz (1.1.9) sledi da je P g'-okolina nule, pa je $g \leq g'$.

Neka je sada Q apsolutno konveksna g'-okolina nule. Iz (1.1.9) sledi da za svako $a \in A$ i svako $k \in \mathbb{N}$ postoje t_a-okoline nule V_a^k takve da je $V_a^k \cap kr_aS_a \subset Q \cap kr_aS_a$. Onda je

$$r_a^{-1}V_a^k \cap kS_a \subset r_a^{-1}Q \cap kS_a \subset Q \cap kS_a \quad (\text{zbog } |r_a| \geq 1),$$

pa je Q g-okolina nule, tj. $g \geq g'$.

Pre nego što predjemo na osobine generalisanih induktivnih granica tipa $g(t, S_a, a \in A)$, navedimo tvrdjenje koje neposredno sledi iz definicije:

(1.1.11) TEOREMA Za svako $a \in A$ i svako $k \in \mathbb{N}$ je $g|kS_a \leq t_a|kS_a$.

Ako je E(t) lokalno konveksan prostor i $S_a \subset E$ apsolutno konveksni skupovi, onda se na E može definisati topologija generalisane induktivne granice $g(t, S_a, a \in A)$, koja je interesantna zbog (1.1.4). Njene najvažnije osobine su date u sledećoj teoremi, koja je za slučaj $A = \mathbb{N}$ dokazana u (67):

(1.1.12) TEOREMA Neka je E(t) lokalno konveksan prostor i $g_t = g(t, S_a, a \in A)$. Tada:

(a) $t \leq g_t$

(b) $t|kS_a = g_t|kS_a$ za svako $a \in A$ i svako $k \in \mathbb{N}$

(c) g_t je najjača lokalno konveksna topologija na E koja ima osobinu (b).

DOKAZ (a) Ako je U apsolutno konveksna okolina nule u topologiji t, onda je za svako $a\in A, k\in \mathbb{N}$ skup $U\cap kS_a$ t-okolina nule u kS_a, pa iz (1.1.9) sledi da je U g_t-okolina nule.

(b) Sledi iz (a) i (1.1.11).

(c) Neka je g' lokalno konveksna topologija na E sa osobinom (b) i neka je P g'-okolina nule. Zbog (b) je skup $P\cap kS_a$ t-okolina nule u kS_a, pa iz (1.1.9) sledi da je P g_t-okolina nule, tj. $g'\leq g_t$.

U slučaju kada je $\{S_a : a\in A\}$ familija svih t-ograničenih skupova, topologiju g_t Collins u radu (13) naziva striktnom (mi ćemo ovaj naziv koristiti u drugom smislu), ako je pomenuta familija podfamilija familije svih ograničenih skupova, onda je g_t Perssonova mešovita topologija. Ako je $\{S_n : n\in\mathbb{N}\}$ fundamentalan niz familije svih ograničenih skupova, ako su S_n zatvoreni i $S_n+S_n\subset S_{n+1}$, onda je g Cooperova mešovita topologija.

Biće nam potreban i jedan rezultat u vezi s dualom prostora snabdevenog topologijom g. Uvedimo prvo pojam dopustive familije:

(1.1.13) DEFINICIJA Familija $\mathcal{B}$ apsolutno konveksnih podskupova vektorskog prostora E je dopustiva ako i samo ako ima sledeće osobine:

1) $\bigcup\{B : B\in\mathcal{B}\}=E$
2) za svako $A,B\in\mathcal{B}$ postoji $C\in\mathcal{B}$ takvo da je $A\cup B\subset C$

Lako se vidi da familija $\{S_a : a\in A\}$ apsolutno konveksnih konveksnih skupova s osobinama: $\bigcup_{a\in A} S_a$ je gutajuća, za svako $a,b\in A$ postoji $c\in A$ takvo da je $S_a\cup S_b\subset S_c$, generiše familiju $\{kS_a : a\in A, k\in\mathbb{N}\}$, koja je dopustiva. Ako je $E(t)$ lokalno konveksan prostor, onda je njegov dual E'_t snabdeven topologijom uniformne konvergencije na elementima dopustive familije, lokalno konveksna grupa ; ona je Hausdorffova, ako je E Hausdorffov prostor.

Uopštavajući poznatu Grothendieckovu kompletizacionu teoremu, Roelcke je dokazao da važi:

(1.1.14)TEOREMA ((68), Thm.5) Neka je $E(t)$ lokalno konveksan prostor, $\{S_a : a\in A\}$ familija apsolutno konveksnih podskupova iz E, takva da je $\bigcup_{a\in A} S_a$ gutajuća u E i takva da za svako $a,b\in$ $\in A$ postoji $c\in A$ za koje je $S_a \cup S_b \subset S_c$. Ako je $g_t = g(t, S_a, a\in A)$, onda je dual $(E,g_t)'$, s topologijom uniformne konvergencije na elementima familije $\{kS_a : a\in A, k\in \mathbb{N}\}$, kompletna lokalno konveksna grupa i dual $(E,t)'$ je gust u $(E,g_t)'$. Ako je, još, $A=\mathbb{N}$, onda je $(E,g_t)'$ metrizabilan u pomenutoj topologiji.

§2. Primeri

Ovde ćemo dati najvažnije primere prostora snabdevenih topologijom generalisane induktivne granice.

(1.2.1)SAKSOVI PROSTORI Zbog potreba teorije matrične zbirljivosti, Orlicz je u radu (58) definisao Saksove prostore : neka je X vektorski prostor s dve norme $\| \ \|, \| \ \|^*$. Jedinična kugla $X_s = \{x : \|x\| \leq 1\}$, s metrikom koju indukuje norma $\| \ \|^*$ je Saksov prostor ako i samo ako je ona kompletna u pomenutoj metrici. Saksovi prostori su ispitivani u nizu radova:(46), (47),(48),(58)-(62).

Osnovni nedostatak definicije Saksovog prostora je taj što Saksov prostor nije vektorski. Taj nedostatak je ispravio Wiweger u radovima (81),(82) definišući na X tzv. mešovitu topologiju, koja je u opštem slučaju vektorska, tako da su neprekidni operatori i konvergentni nizovi isti i u mešovitoj topologiji i u topologiji Saksovog prostora. Wiwegerova mešovita topologija (u ovom slučaju) nije ništa drugo, već topologija $g(t, nX_s, n\in\mathbb{N})$, gde je t lokalno konveksna topologija indukovana normom $\| \ \|^*$.

Mi ćemo pod Saksovim prostorom podrazumevati ceo prostor X, snabdeven Wiwegerovom mešovitom topologijom.

(1.2.2)DVO-NORMIRANI PROSTORI Dvo-normirane prostore je definisao Alexiewicz u radu (2) linearizujući Saksove prostore i generališući Lebesgueovu teoremu o dominantnoj konvergenciji: neka je X vektorski prostor s dve norme $\| \ \|, \| \ \|^*$, takve da je $\|x\|^* \leq \|x\|$ za svako $x \in X$; uredjena trojka $(X, \| \|, \| \|^*)$ je dvo-normiran prostor. U njemu se definiše konvergencija nizova na sledeći način: niz (x_n) γ-konvergira ka x ako i samo ako je $\sup \|x_n\| < \infty$ i $\|x_n - x\|^* \to 0$. Dvo-normirani prostori, s opisanom konvergencijom, su proučavani u (2)-(6),(73),(74),(82). U skoro svim navedenim radovima su posmatrani kvazi-normalni dvo-normirani prostori, tj. oni kod kojih je jedinična kugla $B = \{x: \|x\| \leq 1\}$ t-zatvorena, gde je t topologija generisana normom $\| \|^*$. U tom slučaju su konvergentni nizovi i neprekidna linearna preslikavanja isti i u smislu γ-konvergencije i u smislu Wiwegerove mešovite topologije ((82),Thm.2.6.1.), koja nije ništa drugo do $g(t, nB, n \in \mathbb{N})$.

(1.2.3)STRIKTNE TOPOLOGIJE Neka je X kompletno regularan Hausdorffov topološki prostor i $\mathcal{S}$ saturirana familija zatvorenih podskupova prostora X (što znači da je $\overline{\cup\{S: S \in \mathcal{S}\}} = X$ i da je familija $\mathcal{S}$ zatvorena u odnosu na konačne unije). Označimo sa $C^b(X)$ prostor svih ograničenih neprekidnih preslikavanja X u $\mathbb{K}$, sa B zatvorenu jediničnu kuglu u normi $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ i sa p_S prednorme na $C^b(X)$, definisane sa : $p_S(f) = \sup_{x \in S} |f(x)|$. Striktna topologija $\beta_{\mathcal{S}}$ na $C^b(X)$ je , po definiciji, topologija $g(t_{\mathcal{S}}, nB, n \in \mathbb{N})$, gde je $t_{\mathcal{S}}$ lokalno konveksna topologija generisana familijom prednormi $\{p_S : S \in \mathcal{S}\}$ ((16),str. 78).

Striktnu topologiju su skoro istovremeno definisali i proučavali Buck u (11), Mařik u (52) i Le Cam u (49) za slučaj kada je X lokalno kompaktan prostor, a $\mathcal{S} = \mathcal{K}$ familija svih kompaktnih podskupova. Prva dvojica su striktnu topologiju definisali familijom prednormi, dok ju je Le Cam definisao kao najjaču lokalno konveksnu topologiju na $C^b(X)$ koja se poklapa sa kompaktno-otvorenom topologijom na kugli B. Sam termin (striktna topologija) je uveo Buck, dok je identičnost Buckove i Le Camove topologije (tj. topologije $\beta_{\mathcal{K}}$) dokazana u (15),(22),(29) (u suštini, to je još dokazano u (82)). Pomenuta familija prednormi je $p_h(f) = \sup_{x \in X} |f(x)h(x)|$, gde je h neprekidna funkcija koja teži nuli u beskonačnosti, tj. za svako $r > 0$ je skup $\{x: h(x) \geq r\}$ kompaktan.

Jedan od najvažnijih razloga za proučavanje striktnih topologija je činjenica da je prostor svih ograničenih Radonovih mera na X jednak dualu prostora $(C^b(X), \beta_{\mathcal{K}})$, što je za lokalno kompaktan prostor X dokazao Buck u (11), a za opšti slučaj- Fremlin, Garling, Haydon u (29), Hofmann-Jørgensen u (35), Sentilles u (75). Ovo omogućuje da se teoriji mere na kompletno regularnim prostorima pridje na način različit od onog koji je dat u Bourbaki (10).

S tačke gledišta teorije mere je interesantna i generalisana striktna topologija, koju je uveo Mosiman u radu (56) u opštem obliku, dok su ranije Sentilles u (75) i Wheeler u (79) posmatrali neke specijalne, ali važne, slučajeve.

Neka je βX Stone-Čechova kompaktifikacija kompletno regularnog Hausdorffovog prostora X i neka je $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}(\beta X \setminus X)$, gde je $\mathcal{K}(\beta X \setminus X)$ familija svih kompaktnih podskupova prostora $\beta X \setminus X$. Generalisana striktna topologija $\beta_{\mathcal{L}}$ na $C^b(X)$ je, po definiciji, (obična) induktivna granica prostora $C^b(\beta X \setminus K), K \in \mathcal{L}$, snabdevenih Buckovom striktnom topologijom, pri čemu je izvršena identifikacija prostora $C^b(\beta X \setminus K), K \in \mathcal{L}$, i $C^b(X)$ (tu identifikaciju ostvaruje preslikavanje definisano sa $T_K(f) = f|X, f \in C^b(\beta X \setminus K)$). Ako sa B_K označimo zatvorenu jediničnu kuglu prostora $C^b(\beta X \setminus K)$ u sup-normi, a sa t_K kompaktno-otvorenu topologiju na $C^b(\beta X \setminus K)$, onda je $g(t_K, nB_K, n \in \mathbb{N})$ Buckova striktna topologija na $C^b(\beta X \setminus K)$, pa iz (1.1.4) sledi da je $\beta_{\mathcal{L}} = g(t_K, B_K, K \in \mathcal{L})$, tj. $\beta_{\mathcal{L}}$ je topologija generalisane induktivne granice.

Na prostorima $L^\infty(X, \mu)$ i $H^\infty(U)$ se, takodje, mogu definisati striktne topologije ((16), (11)). Striktna topologija na $H^\infty(U)$ ima dobre osobine u vezi sa separabilnošću, glavnim i maksimalnim idealima ((11), (16)).

Literatura u vezi sa striktnim topologijama je veoma bogata- videti ekspozitorni članak Collinsa (13) i Cooperovu knjigu (16).

(1.2.4) TOPOLOGIJA $\mathcal{T}_c(E', E)$ Ako je E kompletan lokalno konveksan prostor, onda je najjača lokalno konveksna topologija na E′ koja se poklapa sa $\sigma(E', E)$ na ekvineprekidnim skupovima jednaka topologiji $\mathcal{T}_c(E', E)$, pa iz (1.1.12) sledi da je $\mathcal{T}_c(E', E) = g(\sigma(E', E), U_a^o, a \in A)$, gde je $\{U_a : a \in A\}$ baza okolina nule u E ((30), Example B).

(1.2.5) <u>(DF)-PROSTORI</u> Ako je E_t (DF)-prostor i (B_n) fundamentalan niz familije ograničenih skupova, onda je $t=g(t,B_n,n\in\mathbb{N})$. Opštije, ako je E_t b-prostor (ili b-bačvast, k-bačvast) u smislu (57), onda je $t=g(t,B,B\in\mathcal{B})$, gde je $\mathcal{B}$ odgovarajuća familija ograničenih skupova (ovo sledi iz (1.1.12)).

(1.2.6) <u>GROTHENDIECKOVA KOMPLETIZACIJA</u> Ako je E_t lokalno konveksan prostor i $\mathcal{B}$ dopustiva familija ograničenih skupova iz E, onda je dual $(E,g(t,B,B\in\mathcal{B}))'$ kompletizacija prostora E' u topologiji uniformne konvergencije na elementima iz $\mathcal{B}$.

G L A V A 2

TEOREME O ZATVORENOM GRAFIKU I OTVORENOM PRESLIKAVANJU ZA (GLF)-PROSTORE

Kao što je u naslovu rečeno, glavna tema ove glave su teoreme o zatvorenom grafiku i otvorenom preslikavanju za (GLF)-prostore, koji predstavljaju specijalan tip prostora snabdevenih topologijom generalisane induktivne granice. Klasa (GLF)-prostora sadrži sve (LF)-prostore (i predstavlja prirodnu generalizaciju poslednjih-otuda i naziv), ali sadrži i prostore koji nisu čak ni prebrojivo bačvasti (dok su (LF)-prostori ne samo prebrojivo bačvasti, već i bačvasti), tako da dobijene teoreme o zatvorenom grafiku i otvorenom preslikavanju imaju veću mogućnost primene od odgovarajućih teorema za (LF)-prostore. Jedna takva primena je data u §4. Tu su dokazana neka tvrdjenja u vezi s prostorima koji imaju fundamentalan niz neke familije ograničenih skupova. Pored ostalog, tu je dat primer metrizabilnog prostora s fundamentalnim nizom familije Banachovih diskova koji nije normabilan, kao i kriterijum za egzistenciju fundamentalnog niza familije svih ograničenih skupova.

§1. Definicija i neke osobine (GLF)-prostora

Kao što je već pomenuto, (GLF)-prostor je prirodna generalizacija (LF)-prostora:

(2.1.1) DEFINICIJA Lokalno konveksan prostor $E(t)$ je (GLF)-prostor ako i samo ako postoje apsolutno konveksni skupovi $S_n \subset E$ i lokalno konveksne topologije s_n na $E_n = \operatorname{span} S_n$, takve da su ispunjeni sledeći uslovi:

1) skup $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ je gutajući u E;
2) za svako $n \in \mathbb{N}$ je skup S_n pseudometrizabilan i kompletan u topologiji $s_n|S_n$;
3) $t = g(s_n, S_n, n \in \mathbb{N})$.

Niz $\{(S_n,s_n):n\in\mathbb{N}\}$ je <u>definicioni niz</u> topologije t, a topologija t je <u>(GLF)-topologija</u>.

Važni primeri (GLF)-prostora su:

(2.1.2)<u>PRIMERI</u>

(a) Svaki (LF)-prostor (a samim tim i svaki strog (LF)-prostor i svaki (F)-prostor) je (GLF)-prostor. Obrnuto ne mora biti tačno-videti (2.1.3).

(b) Svaki Saksov prostor je (GLF)-prostor.

(c) Svaki γ-kompletan kvazi-normalan dvo-normiran prostor je (GLF)-prostor.

Sada ćemo dati primer (GLF)-prostora koji nije (LF)-prostor. Primetimo da je svaki (LF)-prostor bačvast, kao induktivna granica bačvastih prostora. Primer (GLF)-prostora koji dajemo je primer prostora koji nije čak ni prebrojivo kvazi-bačvast:

(2.1.3)<u>PRIMER</u> Ako skup $\mathbb{N}$ snabdemo diskretnom topologijom, onda je $C^b(\mathbb{N})=l^\infty$ i $\mathbb{N}$ je lokalno kompaktan Hausdorffov prostor, pa se na l^∞ može definisati Buckova striktna topologija $\beta=$ $=g(s,nB,n\in\mathbb{N})$, gde je s topologija konvergencije tačka po tačka(=kompaktno-otvorena topologija), a B zatvorena jedinična kugla u sup-normi na l^∞. Prostor (l^∞,β) je separabilan (videti (16),str.156-157). Ako bi on bio prebrojivo kvazi-bačvast, onda bi, zbog separabilnosti, bio i kvazi-bačvast ((21),Cor.4a). Kugla B je β-zatvorena i guta sve β-ograničene skupove (što sledi iz (67),Thm.4), pa bi ona bila β-okolina nule, što je nemoguće. Zaista, iz $s|B=\beta|B$ (videti (1.1.12)) i (67),Thm. 18 bi onda sledilo da je topologija s jednaka sup-norma topologiji.

Još jedna razlika izmedju (GLF)-prostora i (LF)-prostora sastoji se u sledećem: ako su $\{(S_n,s_n):n\in\mathbb{N}\}$ i $\{(S_n',s_n'):n\in\mathbb{N}\}$ dva definiciona niza (GLF)-prostora E(t), onda <u>ne moraju</u> za svako $m\in\mathbb{N}$ da postoje $n,p\in\mathbb{N}$ takvi da je $S_m'\subset S_n\subset S_p'$ (kod (LF)-prostora oni postoje).

(2.1.4) PRIMER Neka je $\{U_n : n\in \mathbb{N}\}$ baza okolina nule metrizabilnog lokalno konveksnog prostora E i neka je $\beta = \beta(E', E)$. Onda je $E'(\beta) = \operatorname{Ind}(E'_{U_n^o}, u_n)$, gde je $E'_{U_n^o} = \operatorname{span} U_n^o$ i u_n je Banachova topologija čija je jedinična kugla U_n^o; dakle, $E'(\beta)$ je (GLF)-prostor s definicionim nizom $\{(E'_{U_n^o}, u_n) : n\in\mathbb{N}\}$. S obzirom na (1.1.12) je $u_n | U_n^o = g(u_n, kU_n^o, k\in\mathbb{N}) | U_n^o$, pa je $u_n = g(u_n, kU_n^o, k\in\mathbb{N})$ (što sledi iz (67), Lemma 8). Iz toga i iz (1.1.4) sledi da je $\beta = g(u_n, U_n^o, n\in\mathbb{N})$, pa je i $\{(U_n^o, u_n) : n\in\mathbb{N}\}$ definicioni niz topologije β, a uvek je $E'_{U_n^o} \not\subset U_m^o$.

Izmedju (GLF)-prostora i (LF)-prostora postoji sledeća veza:

(2.1.5) TEOREMA Ako je E(t) (GLF)-prostor, onda na E postoji lokalno konveksna topologija s, koja je topologija (obične) induktivne granice niza pseudometrizabilnih kompletnih lokalno konveksnih prostora, takva da je $t \le s$. Ako je, još, E(t) Hausdorffov prostor, onda je E(s) (LF)-prostor.

DOKAZ Neka je $\{(S_n, s_n) : n\in\mathbb{N}\}$ definicioni niz topologije t. Kako je topologija $s_n | S_n$ pseudometrizabilna, to postoje apsolutno konveksne s_n-zatvorene s_n-okoline nule U_n^k, takve da je $\{U_n^k \cap S_n : k\in\mathbb{N}\}$ baza okolina nule topologije $s_n | S_n$. Neka je $V_n^k = U_n^k \cap 2^{-k} S_n$. Skupovi V_n^k su apsolutno konveksni, s_n-zatvoreni, s_n-kompletni i gutajući u $E_n = \operatorname{span} S_n$, pa su oni baza okolina nule neke lokalno konveksne topologije t_n na E_n koja je pseudometrizabilna. Kako je $s_n \le t_n$ i kako su skupovi V_n^k s_n-zatvoreni i s_n-kompletni, to je topologija t_n kompletna ((34), Chap.2, Prop.36). Skup S_n je t_n-okolina nule, pa je $t_n = g(t_n, kS_n, k\in\mathbb{N})$ ((67), Lemma 8). Iz $s_n \le t_n$ sledi $g(s_n, kS_n, k\in\mathbb{N}) \le g(t_n, kS_n, k\in\mathbb{N}) = t_n$. Stavimo $s = \operatorname{Ind}(E_n, t_n)$. Tada je, zbog (1.1.4) i prethodnog:

$$s \ge \operatorname{Ind}(E_n, g(s_n, kS_n, k\in\mathbb{N}), n\in\mathbb{N}) = g(s_n, S_n, n\in\mathbb{N}) = t$$

i dokaz prvog dela je završen.

Ako je E(t) još i Hausdorffov, onda iz $t | S_n \le s_n | S_n$ sledi da je topologija $s_n | S_n$ takodje Hausdorffova, pa je i t_n takva, što je i trebalo dokazati.

Kombinujući (2.1.5) sa (2o), IV.3.1 i IV.4.6, dobijamo:

(2.1.6)TEOREMA Ako je $E(t)$ Hausdorffov (GLF)-prostor, onda je on prostor s mrežom.

§2. Nasledne osobine (GLF)-prostora

Nasledne osobine (GLF)-prostora nas jedino interesuju s gledišta teorema o zatvorenom grafiku i otvorenom preslikavanju. Zbog toga nas neće interesovati da li je, recimo, potprostor (GLF)-prostora takodje (GLF)-prostor, već će nas interesovati da li na potprostoru (GLF)-prostora postoji (GLF)-topologija koja je jača od originalne. Veza izmedju ovakvih naslednih osobina i teoreme o zatvorenom grafiku (analogno je za teoremu o otvorenom preslikavanju) vidi se iz sledećeg: ako preslikavanje $T:F(s) \longrightarrow E(t)$ ima zatvoren grafik i ako je t' topologija na E, jača od t, onda je grafik preslikavanja T zatvoren i u $F(s)\times E(t')$. Ako je preslikavanje $T:F(s) \longrightarrow E(t')$ neprekidno, onda je i $T:F(s) \longrightarrow E(t)$ neprekidno.

Ovde je dokazano da na potprostoru, faktor-prostoru, prebrojivoj sumi i prebrojivoj (običnoj) induktivnoj granici (GLF)-prostora postoje (GLF)-topologije koje su jače od originalne i dokazano je da to nije slučaj sa prebrojivim proizvodom.

(2.2.1)TVRDJENJE Neka je F vektorski potprostor prostora E, snabdevenog topologijom $g=g(s_a,S_a,a\in A)$. Tada je

$$g|F \leq g(t_a,S_a \cap F,a\in A),$$

gde je $t_a=s_a|F \cap \operatorname{span} S_a$.

DOKAZ Na jednostavan način sledi iz (1.1.8).

U (2.2.1) može da stoji stroga nejednakost čak i kada je g stroga (LF)-topologija (videti (33)), ili kada je g Wiwegerova mešovita topologija γ-kompletnog kvazi-normalnog dvo-normiranog prostora (videti (3) ili (74)). U pomenutim slučajevima je $A=\mathbb{N}$.

(2.2.2)POSLEDICA Ako je $E(t)$ (GLF)-prostor i F njegov sekvencijalno zatvoren vektorski potprostor, onda na F postoji (GLF)-

-topologija s, takva da je $t|F \leq s$.

DOKAZ Dovoljno je u (2.2.1) staviti $s=g(t_n, S_n \cap F, n\in \mathbb{N})$.

Dokažimo još jedan zanimljiv rezultat u vezi s potprostorima (GLF)-prostora:

(2.2.3) TVRDJENJE Neka je F vektorski potprostor, najviše prebrojive kodimenzije, lokalno konveksnog prostora E(t). Ako je F(t) (GLF)-prostor, onda na E postoji (GLF)-topologija $s \geq t$ za koju je $s|F=t|F$.

DOKAZ Neka je $\{(S_n, s_n): n\in \mathbb{N}\}$ definicioni niz topologije $t|F$ i neka je $\{x_k: k\in \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}\}$ kobaza potprostora F. Stavimo da je $S_{n,k}=S_n+\Gamma\{x_1,\dots,x_k\}, n\in \mathbb{N}$ i $k\in \mathbb{N}_1$. Dokažimo da je unija skupova $S_{n,k}$ gutajuća u E. Iz $x\in E$ sledi da postoje $f\in F, p\in \mathbb{N}_1$ i skalari r_i takvi da je $x=f+r_1x_1+\dots+r_px_p$. Iz $f\in kS_m$ (za neko $k,m\in \mathbb{N}$) i iz $r_1x_1+\dots+r_px_p \in (|r_1|+\dots+|r_p|)\,\Gamma\{x_1,\dots,x_p\}$ sledi da je $x\in \max\{k, |r_1|+\dots+|r_p|\}\, S_{m,p}$, što je i trebalo dokazati.

Na $\mathrm{span}\{x_1,\dots,x_k\}$ postoji jedinstvena Hausdorffova topologija- neka je to e_k. Na $\mathrm{span}\, S_n \oplus \mathrm{span}\{x_1,\dots,x_k\}$ posmatramo lokalno konveksnu topologiju $s_{n,k}=s_n\oplus e_k$. Kako je topologija $s_n|S_n$ pseudometrizabilna, a e_k metrizabilna, to je i topologija $s_{n,k}|S_{n,k}$ pseudometrizabilna (jer je prostor $\mathrm{span}S_n \oplus \mathrm{span}\{x_1,\dots,x_k\}$ izomorfan prostoru $\mathrm{span}\, S_n \times \mathrm{span}\{x_1,\dots,x_k\}$).

Skup S_n je s_n-kompletan, skup $\Gamma\{x_1,\dots,x_k\}$ je e_k-kompletan, pa je skup $S_{n,k}$ $s_{n,k}$-kompletan. Prema tome, $\{(S_{n,k}, s_{n,k}): n\in \mathbb{N}, k\in \mathbb{N}_1\}$ je definicioni niz za neku (GLF)-topologiju s na E.

Dokažimo da je $s \geq t$. Neka je V proizvoljna apsolutno konveksna t-okolina nule. Tada je $V\cap F$ $t|F$-okolina nule, pa je $U_n^m \cap mS_n \subset 2^{-1}V \cap mS_n$ za neke s_n-okoline nule U_n^m $(m\in \mathbb{N})$ i postoje $q_m\in \mathbb{N}$ takvi da je $q_m^{-1}B_k \cap m\Gamma\{x_1,\dots,x_k\} \subset 2^{-1}V \cap m\Gamma\{x_1,\dots,x_k\}$, gde je B_k zatvorena jedinična kugla normabilne topologije e_k. Onda je $(U_n^m+q_m^{-1}B_k)\cap mS_{n,k} \subset V\cap mS_{n,k}$, tj. V je s-okolina nule, pa je $s \geq t$.

Još treba dokazati da je $s|F=t|F$. Iz $S_{n,k}\cap F=S_n$, $s_{n,k}|S_{n,k}\cap F=s_n|S_n$ i (2.2.1) sledi:

$$s|F=g(s_{n,k}, S_{n,k}, n\in \mathbb{N}, k\in \mathbb{N}_1)|F \leq g(s_n, S_n, n\in \mathbb{N})=t|F.$$

Iz ovoga i iz $s \geqslant t$ sledi da je $s|F=t|F$.

Primenom Kötheove teoreme o zatvorenom grafiku za (LF)--prostore, iz prethodnog tvrdjenja se može dobiti sledeće : ako je F sekvencijalno zatvoren vektorski potprostor (LF)--prostora E i ako je F najviše prebrojive kodimenzije, onda je F (LF)-prostor.

(2.2.4)<u>TVRDJENJE</u> Ako je $E(t)$ (GLF)-prostor, a F njegov vektorski potprostor, onda na E/F postoji (GLF)-topologija jača od originalne faktor-topologije.

<u>DOKAZ</u> Topologija s iz (2.1.5) je (GLF)-topologija, pa njena faktor-topologija ima osobine koje su navedene u formulaciji, što sledi iz (2.1.5), karakterizacije faktor-topologije (obične) induktivne granice (videti (23),Exc.6.2o) i činjenice da je slika pseudometrizabilnog i kompletnog prostora prostor istog tipa, ako je preslikavanje neprekidno i otvoreno.

U prethodnom tvrdjenju može da stoji stroga nejednakost čak i kada je E strog (LF)-prostor (Grothendieck (33)).

Faktor-topologija je induktivna topologija s definicionim preslikavanjem koje nije injektivno; za induktivne topologije sa injektivnim definicionim preslikavanjima važi:

(2.2.5)<u>TVRDJENJE</u> Neka su $E_n(t_n)$ (GLF)-prostori, E vektorski prostor i $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Tada je $\mathrm{Ind}(E_n,t_n,n\in\mathbb{N})$ (GLF)-topologija na E, tj. induktivna granica (GLF)-prostora koji pokrivaju E je (GLF)-prostor.

Ovo tvrdjenje je direktna posledica opštijeg:

(2.2.6)<u>TEOREMA</u> Neka $E_a (a\in A)$ vektorski potprostori vektorskog prostora E i neka je svaki E_a snabdeven topologijom $g_a=g(s_b^a, S_b^a, b\in B_a)$. Tada je

$$\mathrm{Ind}(E_a,g_a,a\in A)=g(s_b^a,S_b^a,a\in A,b\in B_a).$$

<u>DOKAZ</u> Zbog (1.1.4) je

$$g(s_b^a,S_b^a,a\in A,b\in B_a)=\mathrm{Ind}(\mathrm{span}S_b^a,g(s_b^a,kS_b^a,k\in\mathbb{N}),a\in A,b\in B_a).$$

Korišćenjem osobine tranzitivnosti (obične) induktivne granice((34),str.137) i (1.1.4), dobijamo:

$$\mathrm{Ind}(\mathrm{span}\, S_b^a, g(s_b^a, kS_b^a, k\in\mathbb{N}), a\in A, b\in B_a)=$$
$$=\mathrm{Ind}(E_a, \mathrm{Ind}(\mathrm{span}\, S_b^a, g(s_b^a, kS_b^a, k\in\mathbb{N}), b\in B_a), a\in A)$$
$$=\mathrm{Ind}(E_a, g(s_b^a, S_b^a, b\in B_a), a\in A)$$
$$=\mathrm{Ind}(E_a, g_a, a\in A),$$

što je i trebalo dokazati.

Sada ćemo dokazati neka tvrdjenja u vezi s proizvodom (GLF)-prostora.Dokažimo prvo jedan negativan rezultat:

(2.2.7)<u>TVRDJENJE</u> Na prebrojivom proizvodu (GLF)-prostora ne mora da postoji (GLF)-topologija koja je jača od topologije proizvoda.

<u>DOKAZ</u> U (65) je dokazano da je prostor distribucija D' zatvoren potprostor prebrojivog proizvoda (LF)-prostora, a samim tim i (GLF)-prostora.Ako bi na tom proizvodu postojala (GLF)-topologija koja je jača od topologije proizvoda, onda bi, zbog (2.2.2), na D' postojala (GLF)-topologija, jača od indukovane, pa bi iz (2.1.5) sledilo da se D' može prekriti prebrojivom unijom (F)-prostora, što nije tačno- videti (65).

Za dokaz nekih pozitivnih rezultata o proizvodu (GLF)-prostora potrebna nam je sledeća lema:

(2.2.8)<u>LEMA</u> Neka su $E_a (a\in A)$ vektorski prostori, $X_a\subset E_a$ i $X_a=E_a$ za $a\notin\{a_1,\dots,a_p\}$.Ako $o\in X_a$ za $a\in\{a_1,\dots,a_p\}$, onda

$$\prod_{a\in A}\Gamma X_a\subset(p+1)\Gamma(\prod_{a\in A}X_a).$$

<u>DOKAZ</u> Ako je $x\in\prod\Gamma X_a$, onda je $x=(x_a)$, gde je $x_a\in E_a$ za $a\notin\{a_1,\dots,a_p\}$ i $x_a=r_a^1x_a^1+\dots+r_a^{n_a}x_a^{n_a}$, $x_a^i\in X_a$, $|r_a^1|+\dots+|r_a^{n_a}|\leq$ ≤ 1 za $a\in\{a_1,\dots,a_p\}$.Neka je $y=(y_a)$, gde je $y_a=x_a$ za $a\notin\{a_1,\dots,a_p\}$ i $y_a=o$ za $a\in\{a_1,\dots,a_p\}$; neka je $z_i=(u_a^i)$, $u_a^i=o$ za $a\notin\{a_1,\dots,a_p\}$ i $u_a^i=x_a^i$ za $a\in\{a_1,\dots,a_p\}$, $i=1,\dots,n_{a_p}$. Tada je

$$(p+1)^{-1}x=(p+1)^{-1}y+\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n_{a_j}}(p+1)^{-1}r_{a_j}^i z_i\in\Gamma(\prod X_a),$$

jer je $y\in\prod X_a$, $z_i\in\prod X_a$ i $(p+1)^{-1}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_{a_j}}(p+1)^{-1}|r^i_{a_j}|\leq(p+1)^{-1}+$ $+p(p+1)^{-1}=1$ i dokaz je završen.

(2.2.9)<u>TVRDJENJE</u> Konačan proizvod (GLF)-prostora je (GLF)-prostor.

Kako je proizvod konačno mnogo kompletnih pseudometrizabilnih ravnomernih prostora prostor istog tipa, to (2.2.9) sledi iz:

(2.2.1o)<u>TEOREMA</u> Neka je $E=\prod_{i=1}^{n}E_i$ i neka je svaki E_i snabdeven topologijom $g_i=g(s^i_a,S^i_a,a\in A)$, pri čemu je skup $\bigcup_{a\in A}S^i_a$ gutajući u E_i, $i=1,\dots,n$. Tada je

$$\prod_{i=1}^{n}g_i=g\Big(\prod_{i=1}^{n}s^i_{a_i},\ \prod_{i=1}^{n}k_iS^i_{a_i},\ (k_i)\in\mathbb{N}^n,\ (a_i)\in A^n\Big).$$

<u>DOKAZ</u> Neka je P apsolutno konveksna $\prod_{i=1}^{n}g_i$-okolina nule. Tada postoje apsolutno konveksne g_i-okoline nule P_i, takve da je $\prod_{i=1}^{n}P_i\subset P$. Dalje, zbog (1.1.9), postoje $s^i_{a_i}$-okoline nule $U^{i,k_i}_{a_i}$ sa osobinom: $U^{i,k_i}_{a_i}\cap k_iS^i_{a_i}\subset P_i$. Onda je

$$P\supset\prod_{i=1}^{n}P_i\supset\prod_{i=1}^{n}(U^{i,k_i}_{a_i}\cap k_iS^i_{a_i})=\prod_{i=1}^{n}U^{i,k_i}_{a_i}\cap\prod_{i=1}^{n}k_iS^i_{a_i},$$

pa je, zbog (1.1.9), P okolina nule u topologiji g (koja se nalazi na desnoj strani jednakosti koju dokazujemo). Samim tim je $\prod_{i=1}^{n}g_i\leq g$.

Neka je Q apsolutno konveksna g-okolina nule. Zbog (1.1.9) postoje $s^i_{a_i}$-okoline nule $V^{i,k_i}_{a_i}$, takve da je

$$Q\supset\prod_{i=1}^{n}V^{i,k_i}_{a_i}\cap\prod_{i=1}^{n}k_iS^i_{a_i}=\prod_{i=1}^{n}(V^{i,k_i}_{a_i}\cap k_iS^i_{a_i}).$$

Odatle sledi da je

$$\prod_{i=1}^{n}\Big[\bigcup_{a_i\in A}\bigcup_{k_i=1}^{\infty}(V^{i,k_i}_{a_i}\cap k_iS^i_{a_i})\Big]=\bigcup_{(a_i)}\bigcup_{(k_i)}\prod_{i=1}^{n}(V^{i,k_i}_{a_i}\cap k_iS^i_{a_i})\subset Q.$$

Iz ove inkluzije i leme (2.2.8) dobijamo da je:

$$\prod_{i=1}^{n}\Gamma\Big\{\bigcup_{a_i\in A}\Gamma\Big[\bigcup_{k_i=1}^{\infty}(V^{i,k_i}_{a_i}\cap k_iS^i_{a_i})\Big]\Big\}\subset(n+1)\Gamma\Big\{\prod_{i=1}^{n}\bigcup_{a_i\in A}\Gamma\Big[\bigcup_{k_i=1}^{\infty}(V^{i,k_i}_{a_i}\cap k_iS^i_{a_i})\Big]\Big\}$$

$$\subset(n+1)\Gamma\Big\{\prod_{i=1}^{n}\Gamma\Big[\bigcup_{a_i\in A}\bigcup_{k_i=1}^{\infty}(V^{i,k_i}_{a_i}\cap k_iS^i_{a_i})\Big]\Big\}\subset(n+1)\Gamma\Big\{(n+1)\Gamma\Big[\prod_{i=1}^{n}\bigcup_{a_i\in A}\bigcup_{k_i=1}^{\infty}(V^{i,k_i}_{a_i}\cap$$

$$\cap k_iS^i_{a_i})\Big]\Big\}\subset$$

$$\subset (n+1)\Gamma\left[(n+1)\Gamma(Q)\right] = (n+1)^2 Q.$$

Prema tome, postoji $\prod_{i=1}^{n} g_i$-okolina nule (videti i (1.1.6)) koja je sadržana u $(n+1)^2 Q$, pa je $\prod_{i=1}^{n} g_i \geqslant g$. Time je dokaz završen.

Topološka suma $\bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n$ je induktivna granica prostora $\prod_{i=1}^{n} E_i$, pa iz (2.2.5) i (2.2.9) sledi:

(2.2.11)TVRDJENJE Prebrojiva topološka suma (GLF)-prostora je (GLF)-prostor.

U vezi s (2.2.7) primetimo da se može dokazati da na prebrojivom proizvodu (GLF)-prostora postoji (GLF)-topologija slabija od originalne. Dokaz je sličan dokazu tvrdjenja (2.2.10).

§3. Teoreme o zatvorenom grafiku i otvorenom preslikavanju

Od fundamentalnog značaja za ovaj paragraf je teorema (2.1.5), jer ona omogućuje da se teoreme o zatvorenom grafiku i otvorenom preslikavanju izvedu iz odgovarajućih poznatih teorema.

Svuda ćemo sa $G(T)$ označavati grafik preslikavanja T.

(2.3.1)TEOREMA Neka je vektorski prostor E snabdeven topologijom $g=g(s_a,S_a,a\in A)$, takvom da je za neko $b\in A$ skup S_b pseudometrizabilan i kompletan u topologiji $s_b|S_b$; neka je $F(s)$ lokalno konveksan prostor i $T:F\longrightarrow E$, $R:E\longrightarrow F$ linearna preslikavanja, pri čemu je R sirjekcija. Tada:

(a) Ako je g Hausdorffova topologija, $G(T)\cap(F\times S_b)$ zatvoren skup u $F(s)\times S_b(s_b)$ i ako za svaku apsolutno konveksnu s_b-okolinu nule U postoji apsolutno konveksna okolina nule V u F takva da je $V\subset\overline{T^{-1}(U\cap S_b)}$, onda je preslikavanje $T: F(s)\longrightarrow E(g)$ neprekidno i $F=T^{-1}(\text{span } S_b)$.

(b) Ako je s Hausdorffova topologija, $G(R)\cap(S_b\times F)$ zatvoren skup u $S_b(s_b)\times F(s)$ i ako za svaku apsolutno konveksnu s_b-okolinu nule U postoji apsolutno konveksna okolina nule V u F takva da je $V\subset \overline{R(U\cap S_b)}$, onda je preslikavanje $R:E(g)\longrightarrow F(s)$ otvoreno i $F=R(\text{span } S_b)$.

DOKAZ (a) Skup $U\cap S_b$ je gutajući u $E_b=\text{span } S_b$, pa je $E_b=\bigcup_{n=1}^{\infty} n(U\cap S_b)$. Onda je

$$\overline{T^{-1}(E_b)}=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} nT^{-1}(U\cap S_b)}\supset \bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{nT^{-1}(U\cap S_b)}\supset \bigcup_{n=1}^{\infty} nV=F\ ,$$

pa je $F=\overline{T^{-1}(E_b)}$. Ako je $\{U_n\cap S_b : n\in\mathbb{N}\}$ baza okolina nule topologije $s_b|S_b$, kao u dokazu (2.1.5), familija $\{U_n\cap 2^{-n}S_b : n\in\mathbb{N}\}$ je baza okolina nule (F)-topologije t_b na E_b, koja je jača od s_b, a samim tim i od $g|E_b$. Dokažimo sada da je $G(T)$ zatvoren u $F(s)\times E_b(t_b)$. Neka je $(x_i : i\in I)$ generalisan niz i $(x_i, Tx_i)\longrightarrow (x,y)$ u topologiji $s\times t_b$. Iz definicije topologije t_b sledi da za svako $n\in\mathbb{N}$ postoji $i_n\in I$ takvo da je $Tx_i-y\in U_n\cap 2^{-n}S_b$ za $i\geqslant i_n$. Takodje, postoji $p\in\mathbb{N}$ za koje je $y\in pS_b$. Onda je $Tx_i\in y+U_1\cap 2^{-1}S_b\subset pS_b+2^{-1}S_b\subset (p+1)S_b$ za $i\geqslant i_1$, tj. $(p+1)^{-1}Tx_i\in S_b$ za $i\geqslant i_1$ i važi

$$(p+1)^{-1}Tx_i-(p+1)^{-1}y\in (p+1)^{-1}(U_n\cap 2^{-n}S_b)\subset (p+1)^{-1}U_n\subset U_n$$

za $i\geqslant i_n$. Odatle sledi da je

$$(p+1)^{-1}Tx_i\in ((p+1)^{-1}y+U_n)\cap S_b \quad \text{za} \quad i\geqslant i_1, i_n.$$

Kako i $(p+1)^{-1}x_i\longrightarrow (p+1)^{-1}x$, to $((p+1)^{-1}x_i, (p+1)^{-1}Tx_i)\longrightarrow ((p+1)^{-1}x, (p+1)^{-1}y)$ u prostoru $F(s)\times S_b(s_b)$. Kako je skup $G(T)\cap (F\times S_b)$ zatvoren, to je $(p+1)^{-1}y=T((p+1)^{-1}x)$, tj. $y=T(x)$, što je i trebalo dokazati.

Dalje, iz

$$\overline{T^{-1}(U_n\cap 2^{-n}S_b)}=2^{-n}\overline{T^{-1}(2^nU_n\cap S_b)}\supset 2^{-n}V_n,$$

(korišćen je uslov $V\subset\overline{T^{-1}(U\cap S_b)}$) sledi da je restrikcija preslikavanja T na $T^{-1}(E_b)$ skoro neprekidna, pa iz poznate teoreme o zatvorenom grafiku (videti (23), Thm. 6.4.2.b) sledi da je $T^{-1}(E_b)=F$ i da je preslikavanje $T:F(s)\longrightarrow E_b(t_b)$ neprekidno. Kako je $g|E_b\leq t_b$, to je T i s-g-neprekidno.

(b) Neka je E_b kao u dokazu (a) i neka je $R_1=R|E_b$. Skup $G(R_1)$ je zatvoren u $E_b\times R_1(E_b)$ (dokaz je analogan dokazu da je $G(T)$ zatvoren- umesto Tx_i pišemo x_i), pa je $R_1^{-1}(o)$ zatvoren potprostor prostora E_b ((44), §34.5.(7)), tj. $E_b/R_1^{-1}(o)$ je (F)-prostor (E_b je pseudometrizabilan i kompletan). Preslikavanje R_1 razlažemo na sledeći način:

$$E_b \xrightarrow{f} E_b/R_1^{-1}(o) \xrightarrow{R_2} R_1(E_b) ,$$

gde je f faktor-preslikavanje. Grafik $G(R_2)$ je zatvoren u $E_b/R_1^{-1}(o) \times R_1(E_b)$ ((44), §34.5.(7)), pa i preslikavanje R_2^{-1} ima zatvoren grafik u $R_1(E_b) \times E_b/R_1^{-1}(o)$. Lako se dokazuje da je preslikavanje R_2^{-1} skoro neprekidno (dokaz kao za T u (a), uz korišćenje činjenice da je $R_2 f = R_1$). Sem toga, prostor $R_1(E_b) = R(E_b)$ je gust u F, zbog uslova $V \subset \overline{R(U \cap S_b)}$. Iz (23), Thm. 6.4.2.b onda sledi da je R_2^{-1} neprekidno i da je $R_1(E_b) = F$. Iz ovoga sledi da je R_2 otvoreno preslikavanje $E_b/R_1^{-1}(o)$ <u>na</u> F , pa je R_1 otvoreno preslikavanje E_b <u>na</u> F. Još treba dokazati da iz ovoga sledi da je R otvoreno preslikavanje. Ako je P apsolutno konveksna g-okolina nule, onda iz (1.1.9) sledi da postoji s_b-okolina nule U, takva da je $U \cap S_b \subset P$. Onda je $R(P) \supset R(U \cap S_b) = R_1(U \cap S_b)$, pa je R(P) okolina nule u F (R_1 je otvoreno preslikavanje $E_b(t_b)$ <u>na</u> F). Time je teorema u potpunosti dokazana.

Iz prethodne teoreme možemo dobiti teoreme o zatvorenom grafiku i otvorenom preslikavanju za (GLF)-prostore (one su se mogle dobiti iz De Wildove teoreme o zatvorenom grafiku, uzimajući u obzir (2.1.6)):

(2.3.2) <u>TEOREMA</u> Neka je E(g) (GLF)-prostor s definicionim nizom $\{(S_n, s_n) : n \in \mathbb{N}\}$, F(s) induktivna granica Baireovih (resp. pseudometrizabilnih i kompletnih) lokalno konveksnih prostora i neka su $T: F \longrightarrow E$, $R: E \longrightarrow F$ linearna preslikavanja, pri čemu je R sirjekcija. Tada važe sledeća tvrdjenja:

(a) Ako je g Hausdorffova topologija i G(T) zatvoren (resp. sekvencijalno zatvoren), onda je T neprekidno.

(b) Ako je s Hausdorffova topologija i G(R) zatvoren (resp. sekvencijalno zatvoren), onda je R otvoreno.

<u>DOKAZ</u> Dokaz ćemo dati za slučaj kada je F induktivna granica Baireovih prostora; dokaz za drugi slučaj je, praktično, isti.

(a) Neka je F induktivna granica prostora $F_i(t_i), i \in I$, s definicionim preslikavanjima $f_i : F_i \longrightarrow F$. Preslikavanje T je neprekidno ako i samo ako su preslikavanja Tf_i neprekidna za svako $i\in I$.

Lako se dokazuje da je $G(Tf_i)$ zatvoren u $F_i\times E$. Iz $g|S_n\leq s_n|S_n$ onda sledi da je skup $G(Tf_i)\cap(F_i\times S_n)$ zatvoren u $F_i(t_i)\times S_n(s_n)$ za svako $n\in\mathbb{N}$, pa je ispunjen prvi uslov iz (2.3.1)(a). Sada ćemo dokazati da je ispunjen i drugi uslov. Neka je $\{U_n^k\cap S_n : k\in\mathbb{N}\}$ baza okolina nule topologije $s_n|S_n$. Skup $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ je gutajući u E, pa je

$$F=(Tf_i)^{-1}(E)=\bigcup_{p,n=1}^{\infty} p(Tf_i)^{-1}(U_n^1\cap S_n).$$

Prostor F_i je Baireov, pa je skup $p_1(Tf_i)^{-1}(U_m^1\cap S_m)$ druge kategorije u F_i za neke $p_1,m\in\mathbb{N}$. Iz

$$p_1(Tf_i)^{-1}(U_m^1\cap S_m)\subset\bigcup_{p=1}^{\infty} p(Tf_i)^{-1}(U_m^2\cap S_m)$$

sledi da je skup $p_2(Tf_i)^{-1}(U_m^2\cap S_m)$ druge kategorije u F_i za neko $p_2\in\mathbb{N}$. Nastavljajući induktivno ovaj proces, dobijamo skupove $p_k(Tf_i)^{-1}(U_m^k\cap S_m)$ koji su druge kategorije u F_i, pa postoje $x_k\in\overline{p_k(Tf_i)^{-1}(U_m^k\cap S_m)}$ i apsolutno konveksne okoline nule V_k iz F, takve da je

$$x_k+V_k\subset\overline{p_k(Tf_i)^{-1}(U_m^k\cap S_m)}\ ,\ k=1,2,\dots\ .$$

Onda je

$$2V_k=(x_k+V_k)-(x_k+V_k)\subset 2p_k\overline{(Tf_i)^{-1}(U_m^k\cap S_m)}\ ,$$

pa iz (2.3.1)(a) sledi da je Tf_i neprekidno i da je $F_i=(Tf_i)^{-1}(\text{span } S_m)$. Time je dokaz ovog dela teoreme završen.

(b) Neka je $H=E/R^{-1}(o)$, $f:E\longrightarrow H$ faktor-preslikavanje i $R=R_1 f$ kanonsko razlaganje. Kako je $G(R)$ zatvoren u $E\times F$, to je $G(R_1)$ zatvoren u $H\times F$, pa je i $G(R_1^{-1})$ zatvoren u $F\times H$. Prostor H je Hausdorffov, jer je potprostor $R^{-1}(o)$ zatvoren u E ((44), §34.5.(7)), pa iz (2.2.4) sledi da postoji Hausdorffova (GLF)-topologija g' na H, jača od originalne, a samim tim je $G(R_1^{-1})$ zatvoren u $F\times H(g')$. Iz (a) sledi da je $R_1^{-1}:F\longrightarrow H(g')$ neprekidno, pa je takvo i $R_1^{-1}:F\longrightarrow H$, tj. R_1 je otvoreno. Samim tim je i R otvoreno preslikavanje.

Primetimo da iz neprekidnosti preslikavanja $R_1^{-1}:F\rightarrow H(g')$ i iz kraja dokaza tvrdjenja (a) sledi da za svako $i\in I$ postoji $m\in\mathbb{N}$, takvo da je $F_i=f_i^{-1}(R(\text{span } S_m))$. Na taj način, usput je dokazano i sledeće:

(2.3.3) TVRDJENJE

(a) Neka su E,F i T kao u (2.3.2)(a) i neka su $f_i:F_i \to F$ definiciona preslikavanja. Tada za svako $i\in I$ postoji $m\in \mathbb{N}$, takvo da je $F_i=(Tf_i)^{-1}(\mathrm{span}\ S_m)$.

(b) Neka su E,F i R kao u (2.3.2)(b) i neka je f_i kao pod (a). Tada za svako $i\in I$ postoji $m\in \mathbb{N}$, takvo da je $F_i=f_i^{-1}(R(\mathrm{span}\ S_m))$.

Prethodno tvrdjenje ima zanimljivu posledicu (uporediti sa (2.1.4)):

(2.3.4) POSLEDICA Neka su $E(t)$ i $F(s)$ (GLF)-prostori s definicionim nizovima $\{(S_n,s_n):n\in\mathbb{N}\}$ i $\{(S_n',s_n'):n\in\mathbb{N}\}$, redom, i neka su $T:F\to E$ i $R:E\to F$ linearna preslikavanja, pri čemu je R sirjekcija. Tada važe sledeća tvrdjenja:

(a) Ako je t Hausdorffova topologija i $G(T)$ sekvencijalno zatvoren, onda za svako $p\in\mathbb{N}$ postoji $q\in\mathbb{N}$, takvo da je $T(\mathrm{span}\ S_p')\subset \mathrm{span}\ S_q$.

(b) Ako je s Hausdorffova topologija i $G(R)$ sekvencijalno zatvoren, onda za svako p $\mathbb{N}$ postoji q $\mathbb{N}$, takvo da je $\mathrm{span}\ S_p'\subset R(\mathrm{span}\ S_q)$.

(c) Ako je t Hausdorffova topologija i $E(t)=F(s)$, onda za svako $n\in\mathbb{N}$ postoje $p,q\in\mathbb{N}$, takvi da je $\mathrm{span}\ S_n\subset \mathrm{span}\ S_p' \subset \mathrm{span}\ S_q$.

DOKAZ (a) Neka je $F_n=\mathrm{span}\ S_n'$ snabdeven topologijom t_n, opisanom u dokazu teoreme (2.1.5) i neka je $F(s')$ induktivna granica prostora $F_n(t_n)$ sa identičkim utapanjima $f_n:F_n\to F$. Prostori $F_n(t_n)$ su pseudometrizabilni i kompletni i $s\leqslant s'$, pa iz (2.3.3)(a) sledi da za svako $p\in\mathbb{N}$ postoji $q\in\mathbb{N}$, takvo da je $\mathrm{span}\ S_p' =(Tf_p)^{-1}(\mathrm{span}\ S_q)$. Kako je $f_p(\mathrm{span}\ S_p')=\mathrm{span}\ S_p'$, to iz prethodnog sledi da je $T(\mathrm{span}\ S_p')\subset \mathrm{span}\ S_q$.

(b) Analogno dokazu pod (a).

(c) Dobija se primenom tvrdjenja (a) i (b) na identičko preslikavanje $E(t)\to E(t)$.

(2.3.5) PRIMEDBA Preslikavanje T (resp, R) iz (2.3.4) ne mora biti neprekidno (resp. otvoreno). Zaista, ako bi svako svako linearno preslikavanje s zatvorenim grafikom iz nekog (GLF)-

-prostora F u svaki (GLF)-prostor bilo neprekidno, onda bi, s obzirom na činjenicu da je svaki Banachov prostor istovremeno i (GLF)-prostor, iz Mahowaldove teoreme sledilo da je F bačvast prostor, što ne mora biti tačno (primer (2.1.3)).(Analogno za R, prelaskom na faktor-prostor, ako se uzme u obzir da se u Mahowaldovoj teoremi može pretpostaviti da su preslikavanja injektivna, što sledi iz dokaza Mahowaldove teoreme, datog u (8o).)

S obzirom na to da su Saksovi i dvo-normirani prostori važni primeri (GLF)-prostora, od interesa je i sledeća teorema o zatvorenom grafiku i otvorenom preslikavanju:

(2.3.6)TEOREMA Neka (GLF)-prostor E(g) ima definicioni niz $\{(S_n,s_n):n\in\mathbb{N}\}$, takav da je za neko $p\in\mathbb{N}$ skup S_p gutajući u E, neka je F(s) bačvast prostor i $T:F\to E$, $R:E\to F$ linearna preslikavanja, pri čemu je R sirjekcija. Tada važe sledeća tvrdjenja:

(a) Ako je g Hausdorffova topologija i G(T) zatvoren, onda je T neprekidno.

(b) Ako je s Hausdorffova topologija i G(R) zatvoren, onda je R otvoreno.

DOKAZ (a) Za svaku apsolutno konveksnu okolinu nule U topologije s_p je skup $U\cap S_p$ gutajući u E, pa je skup $T^{-1}(U\cap S_p)$ bačva, tj. okolina nule u F. Tvrdjenje onda sledi iz (2.3.1)(a), jer je $G(T)\cap(F\times S_p)$ zatvoren u $F(s)\times S_p(s_p)$.

(b) Dokaz je analogan dokazu pod (a).

Kod prethodnih teorema o otvorenom preslikavanju figuriše pretpostavka da je preslikavanje R sirjekcija. Ta pretpostavka se može donekle oslabiti:

(2.3.7)TEOREMA Neka je E(g) (GLF)-prostor, F(s) Hausdorffova induktivna granica Baireovih lokalno konveksnih prostora(resp. (F)-prostora) i neka je $R:E\to F$ linearno preslikavanje. Ako je G(R) zatvoren (resp. sekvencijalno zatvoren) i ako R(E) ima algeberski komplement H na kome postoji (GLF)-topologija

s_1, jača od $s|H$, onda je R otvoreno preslikavanje, R(E) i H su zatvoreni i topološki komplementarni u F i pri tome je $s_1 = s|H$.

Dokaz ove teoreme je isti kao dokaz opštije De Wildeove teoreme (videti (44), §35.5.(1)), pa ga ne dajemo.

Ako je $H(s_1)$ prostor najviše prebrojive dimenzije, snabdeven najjačom lokalno konveksnom topologijom, onda je on izomorfan topološkoj sumi $\bigoplus_{i\in I} \mathbb{K}$ (card I=dim H), pa je on (GLF)-prostor(zbog (2.2.9), odnosno (2.2.11)).Uzimajući ovo u obzir, iz prethodne teoreme dobijamo:

(2.3.8)<u>POSLEDICA</u> Neka su E(g) i F(s) kao u (2.3.7),$R:E \longrightarrow F$ linearno preslikavanje s zatvorenim (resp.sekvencijalno zatvorenim) grafikom.Ako je R(E) najviše prebrojive kodimenzije u F, onda je R otvoreno preslikavanje, R(E) je zatvoren, svaki algebarski komplement H za R(E) je topološki komplement i $s|H$ je najjača lokalno konveksna topologija na H.

(2.3.9)<u>PRIMEDBA</u> Ako su E i F kao u (2.3.6), onda tvrdjenja (2.3.7) i (2.3.8) ostaju tačna (i isto se dokazuju).

(2.3.1o)<u>PRIMEDBA</u> Iz dokaza tvrdjenja (2.3.2)-(2.3.4),(2.3.7) i (2.3.8) se vidi da se umesto zatvorenosti G(T) (resp. G(R)) može uzeti bitno slabija pretpostavka: za svako $n\in\mathbb{N}$ je skup $G(T)\cap(F\times S_n)$ (resp. $G(R)\cap(S_n\times F)$) zatvoren u $F(s)\times S_n(s_n)$ (resp. u $S_n(s_n)\times F(s)$).

Vratimo se sada tvrdjenju (2.3.3)(a) i dokažimo da važi jače tvrdjenje:

(2.3.11)<u>TEOREMA</u> Neka je E(g) Hausdorffov (GLF)-prostor s definicionim nizom $\{(S_n,s_n):n\in\mathbb{N}\}$, F(s) Baireov lokalno konveksan prostor (resp. pseudometrizabilan i kompletan) i $T:F\longrightarrow E$ linearno preslikavanje s zatvorenim grafikom (resp. sekvencijalno zatvorenim grafikom).Tada postoji $p\in\mathbb{N}$ takav da za svaku s_p-okolinu nule U postoji s-okolina nule V za koju je $T(V)\subset \subset U\cap S_p$.Specijalno, postoji s-okolina nule V za koju je $T(V)\subset S_p$.

DOKAZ U dokazu (2.3.2)(a) je dokazano da postoji $p\in\mathbb{N}$ takvo da za svaku sp-okolinu nule U postoji s-okolina nule W za koju je $W\subset T^{-1}(U\cap S_p)$, a iz dokaza (2.3.1)(a) sledi da onda postoji s-okolina nule V za koju je $V\subset T^{-1}(U\cap S_p)$.

Da bismo dokazali analogon prethodne teoreme, trebaće nam pojam c-regularnosti:

(2.3.12)DEFINICIJA Lokalno konveksan prostor $E(g), g=g(s_a, S_a, a\in A)$, je c-regularan ako i samo ako za svaki g-konvergentan niz (x_n) postoji $b\in A$ i $p\in\mathbb{N}$ tako da je niz (x_n) s_b-konvergentan i $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}\subset pS_b$.

(2.3.13)TEOREMA Neka je vektorski prostor E snabdeven topologijom $g=g(s_n, S_n, n\in\mathbb{N})$, neka je F(s) metrizabilan lokalno konveksan prostor i $T:F\longrightarrow E$ neprekidno linearno preslikavanje. Ako je E c-regularan, onda postoji $p\in\mathbb{N}$, takvo da za svaku s_p-okolinu nule U postoji s-okolina nule V za koju je $T(V)\subset U\cap S_p$. Specijalno, postoji s-okolina nule V za koju je $T(V)\subset S_p$.

DOKAZ Za dokaz nam je potrebna sledeća Grothendieckova lema ((33),Lemme 7): neka je $\mathcal{F}$ filter s prebrojivom bazom na skupu X i neka je $(\mathcal{F}_n)$ niz filtera na X; ako svaki niz iz X koji konvergira po $\mathcal{F}$, konvergira i po nekom $\mathcal{F}_n$, onda filter $\mathcal{F}$ majorira bar jedan od filtera $\mathcal{F}_n$.

Neka je $\{V_k : k\in\mathbb{N}\}$ baza okolina nule u F(s). Onda je $\{T(V_k) : k\in\mathbb{N}\}$ prebrojiva baza filtera- označimo ga sa $\mathcal{F}$. Dalje, neka je $\mathcal{F}_{m,n}$ filter čija je baza sastavljena od skupova tipa $U\cap mS_n$, gde U prolazi bazom s_n-okolina nule. Ako niz (y_n) konvergira po filteru $\mathcal{F}$, onda je on slika nula-niza iz F, pa iz neprekidnosti preslikavanja T sledi da (y_n) g-konvergira nuli. Prostor E je c-regularan, pa postoje $j,k\in\mathbb{N}$ takvi da je $\{y_n : n\in\mathbb{N}\}\subset jS_k$ i niz (y_n) s_k-konvergira nuli, tj. (y_n) konvergira po filteru $\mathcal{F}_{j,k}$. Iz citirane Grothendieckove leme onda sledi da postoje $p,q\in\mathbb{N}$, takvi da filter $\mathcal{F}$ majorira filter $\mathcal{F}_{p,q}$, tj. za svaku s_p-okolinu nule U postoji s-okolina nule V_k, takva da je $T(V_k)\subset U\cap qS_p$. Odatle je $T(q^{-1}V_k)\subset q^{-1}U\cap S_p\subset U\cap S_p$ i dokaz je završen.

Prethodnu teoremu je, za slučaj obične induktivne granice, dokazao Floret u (26) (Satz 4.2), a dati dokaz je poboljšanje Floretovog dokaza.

§4. Primena na prostore s fundamentalnim nizom ograničenih skupova

Ovde ćemo dati primene nekih rezultata prethodnog paragrafa. Precizirajmo prvo šta ćemo podrazumevati pod fundamentalnim nizom neke familije ograničenih skupova:

(2.4.1) <u>DEFINICIJA</u> Neka je $\mathcal{B}$ neka familija ograničenih skupova lokalno konveksnog prostora E. Ako postoje $B_n \in \mathcal{B}$ $(n=1,2,\dots)$ takvi da za svako $B \in \mathcal{B}$ postoje $p,q \in \mathbb{N}$ za koje je $B \subset qB_p$, onda je familija $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ <u>fundamentalan</u> <u>niz</u> familije $\mathcal{B}$.

Ako je B apsolutno konveksan ograničen podskup iz $E(t)$, onda na E_B=span B postoji normabilna topologija t_B; norma je funkcional Minkowskiog skupa B. U slučaju kada je E_B Banachov prostor (u topologiji t_B), skup B zovemo <u>Banachov</u> <u>disk</u>. Oznake E_B i t_B ćemo koristiti u preostalom delu paragrafa.

(2.4.2) <u>TVRDJENJE</u> Neka je E(s) Baireov lokalno konveksan Hausdorffov prostor na kome postoji (GLF)-topologija $g(s_n,S_n,n\in\mathbb{N})=g$, takva da je $s|S_n \leq s_n|S_n (n\in\mathbb{N})$ i da su skupovi S_n s-ograničeni (resp. s-kompaktni). Tada je E(s) normiran (resp. konačnodimenzionalan) prostor.

<u>DOKAZ</u> Iz pretpostavki sledi da je $s\ g(s,S_n,n\in\mathbb{N}) \leq \leq g(s_n,S_n,n\in\mathbb{N})$, pa identičko preslikavanje $T:E(s)\longrightarrow E(g)$ ima zatvoren grafik. Iz (2.3.11) sledi da za neko $p\in\mathbb{N}$ postoji s-okolina nule V, takva da je $V=T(V)\subset S_p$. Onda je V s-ograničena (resp. s-kompaktna) okolina nule, pa je E normiran (resp. konačnodimenzionalan) prostor po teoremi Kolmogorova (resp. Banacha).

(2.4.3) <u>POSLEDICA</u> Ako Baireov lokalno konveksan Hausdorffov prostor E(s) ima fundamentalan niz familije svih Banachovih diskova, onda je on Banachov prostor.

DOKAZ Neka je $\{B_n : n\in \mathbb{N}\}$ fundamentalan niz. Skupovi $\overline{B_n}^{n} = B_n'$ (=zatvorenje skupa B_n u topologiji t_{B_n}) su s-ograničeni, $s|B_n' \leq t_{B_n}|B_n'$ i $g(t_{B_n}, B_n', n\in \mathbb{N})$ je (GLF)-topologija, pa iz (2.4.2) sledi da je E normiran prostor. Štaviše, neko B_p' je s-okolina nule, pa je $s = t_{B_p}$, tj. E je Banachov prostor.

(2.4.4) POSLEDICA Beskonačnodimenzionalan Baireov lokalno konveksan Hausdorffov prostor ne može imati niz kompaktnih apsolutno konveksnih skupova čija je unija gutajuća u E.

DOKAZ Analogno prethodnom.

Posledica (2.4.3) je paralelna sa Statement 2. iz (54) i Cor. 2 iz (55).

Ako u (2.4.4) kompaktnost zamenimo slabom kompaktnošću, onda dobijamo:

(2.4.5) POSLEDICA Ako je E(s) Baireov lokalno konveksan Hausdorffov prostor koji ima niz slabo kompaktnih apsolutno konveksnih skupova čija je unija gutajuća u E, onda je E refleksivan Banachov prostor.

DOKAZ Kao u (2.4.3) se dokazuje da prostor E ima slabo kompaktnu apsolutno konveksnu okolinu nule, pa je E ref - leksivan Banachov prostor.

Iz definicije fundamentalnog niza familije $\mathcal{B}$ sledi da je unija članova fundamentalnog niza gutajuća u E ako i samo ako je unija članova familije $\mathcal{B}$ gutajuća u E. Stoga je sledeći rezultat najbolji mogući:

(2.4.6) TEOREMA Neka je E(s) Hausdorffov lokalno konveksan prostor. On ima fumdamentalan niz familije svih Banachovih diskova ako i samo ako on ima niz Banachovih diskova čija je unija gutajuća u E.

DOKAZ $\Longrightarrow$: Jasno.

$\Longleftarrow$: Neka je (B_n) niz Banachovih diskova čija je unija gutajuća u E i neka je B proizvoljan Banachov disk. Ako je B_n' t_{B_n}-zatvorenje skupa B_n, onda je B_n' Banachov disk, topologija $g=$ $=g(t_{B_n}, B_n', n\in\mathbb{N})$ je Hausdorffova (jer $s\leq g$) (GLF)-topologija i identičko utapanje $T:E_B \to E(g)$ ima zatvoren grafik, jer je $s\times s|E_B\times E\leq t_B\times g|E_B\times E$. Iz (2.3.11) onda sledi da postoji $p\in\mathbb{N}$, takvo da je $T(V)\subset B_p'$ za neku t_B-okolinu nule V. Kako je $B\subset qV$ za neko $q\in\mathbb{N}$, to je $B\subset qV=qT(V)\subset qB_p'$. Prema tome, familija $\{B_n':n\in\mathbb{N}\}$ je fundamentalan niz familije svih Banachovih diskova.

Svaki slabo kompaktan apsolutno konveksan skup je Banachov disk, pa iz prethodne teoreme dobijamo:

(2.4.7)<u>POSLEDICA</u> Ako je (K_n) niz slabo kompaktnih apsolutno konveksnih podskupova Hausdorffovog lokalno konveksnog prostora E čija je unija gutajuća u E, onda je on fundamentalan niz familije svih Banachovih diskova (i samim tim, svaki Banachov disk je relativno slabo kompaktan).

Garling je u (31) dokazao slabiji rezultat od prethodnog: (K_n) je fundamentalan niz familije slabo kompaktnih skupova.

Sada ćemo, koristeći (2.3.13), dokazati jedno veoma opšte tvrdjenje u vezi s fundamentalnim nizom familije svih ograničenih skupova:

(2.4.8)<u>TEOREMA</u> Neka je $E(s)$ Hausdorffov lokalno konveksan prostor i (B_n) niz ograničenih skupova iz E čija je unija gutajuća u E. Ako postoji $k\in\mathbb{N}$ takav da je polara B_k^o sekvencijalno kompletna u topologiji uniformne konvergencije na elementima neke dopustive familije $\mathcal{B}$, čiji je svaki element progutan nekim B_n, onda je $\{B_n:n\in\mathbb{N}\}$ fundamentalan niz familije svih ograničenih skupova.

<u>DOKAZ</u> Bez smanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je (B_n) rastući niz apsolutno konveksnih i zatvorenih skupova.

Dokažimo da je $E(g)$ c-regularan, gde je $g=g(s,B_n,n\in\mathbb{N})$. Neka niz (x_n) g-konvergira ka x i neka je $y_n=x_n-x$. Pretpostavimo da za svako $n\in\mathbb{N}$ postoji $z_n=x_{m_n}\notin nB_n$. Skupovi nB_n su zatvoreni, pa postoje s-okoline nule U_n takve da $z_n\notin U_n+nB_n$. Onda se nijedan član niza (z_n) ne nalazi u skupu $\bigcap_{n=1}^{\infty}(U_n+nB_n)$, što je nemoguće, jer je ovaj skup g-okolina nule (videti (1.1.5)), a $z_n \xrightarrow{g} o$. Dakle, postoji $p\in \mathbb{N}$ takvo da je $\{y_n : n\in \mathbb{N}\} \subset pB_p$. Niz (B_n) je rastući i gutajući, pa postoji $q\in\mathbb{N}$, $q\geq p$, za koje je $x\in qB_q$. Onda je $x_n=y_n+x\in pB_p+qB_q\subset 2qB_{2q}$, za svako $n\in\mathbb{N}$. S obzirom da je $s\leq g$, to je niz (x_n) s-konvergentan. Prema tome, prostor $E(g)$ je c-regularan.

Dokažimo sada da su svi s-ograničeni skupovi istovremeno i g-ograničeni. Kako je neka polara B_k^o sekvencijalno kompletna, to iz (4.1.2) sledi da je $(E,s)'=(E,g)'$, a odavde sledi da je svaki s-ograničen skup i g-ograničen.

Neka je B proizvoljan apsolutno konveksan s-ograničen skup. Identičko utapanje $T:E_B \longrightarrow E(g)$ je neprekidno, jer je B i g-ograničen skup, pa iz (2.3.13) sledi da je $n^{-1}B=T(n^{-1}B)\subset$ $\subset B_m$, za neke $m,n\in\mathbb{N}$, što je i trebalo dokazati.

Mirković je u (54), str. 173, naveo da mu nije poznato da li metrizabilan lokalno konveksan prostor s fundamentalnim nizom familije svih Banachovih diskova obavezno mora biti normiran. U (55) je dokazano da je prethodno tvrdjenje tačno ako je prostor još i bačvast. Mi ćemo primerom pokazati da pomenuto tvrdjenje ne važi u opštem slučaju i daćemo potreban i dovoljan uslov za normabilnost prostora s gornjim osobinama.

(2.4.9) PRIMER Neka je $E=\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathbb{R}$ snabdeven topologijom s, definisanom prednormama $p_n(x)=|x_n|$ za $x=(x_k)$. Prostor E je metrizabilan, ali nije normabilan. Zaista, u suprotnom bi on imao ograničenu apsolutno konveksnu okolinu nule B, pa bi za neke $n_1,\dots,n_k\in\mathbb{N}$ i neke $e_1,\dots,e_k>o$ bilo $P=\bigcap_{i=1}^{k}\{x:p_{n_i}(x)<e_i\}\subset$ $\subset B$, što je nemoguće, jer je skup P neograničen-on sadrži neograničen skup

$$\prod_{i=1}^{n-1}\{o\}\times\mathbb{R}\times\prod_{i=n+1}^{\infty}\{o\},$$

gde je $n\neq n_i$ za $i=1,\dots,k$.

Dalje, neka je

$$B_n=\prod_{i=1}^{n}[-1,1]\times\{o\}\times\{o\}\times\dots .$$

Skupovi B_n su apsolutno konveksni, ograničeni i njihova unija je gutajuća u E. Prostor E_{B_n} je n-dimenzionalan Hausdorffov prostor, pa je on Banachov, tj. B_n je Banachov disk. Iz (2.4.6) sledi da je $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ fundamentalan niz familije svih Banachovih diskova. Prema tome, E(s) je metrizabilan lokalno konveksan prostor s fundamentalnim nizom familije svih Banachovih diskova, a nije normabilan.

(2.4.10) TEOREMA Neka je E(s) metrizabilan lokalno konveksan prostor s fundamentalnim nizom $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ familije svih Banachovih diskova. Prostor E je Banachov ako i samo ako je za neko $p \in \mathbb{N}$ polara B_p^o sekvencijalno kompletna u nekoj topologiji uniformne konvergencije na elementima dopustive familije $\mathcal{B}$, čiji je svaki član progutan nekim B_n.

DOKAZ $\Longrightarrow$: Prostor E je Banachov, pa je svaki ograničen skup progutan nekim B_n i polare B_n^o su $\beta(E',E)$-sekvencijalno kompletne, jer je $(E', \beta(E',E))$ Banachov prostor.

$\Longleftarrow$: Iz (2.4.8) sledi da je $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ fundamentalan niz familije svih ograničenih skupova. Kako je E metrizabilan, to iz (44), §29.1.(2) sledi da je neko B_n okolina nule, pa je E Banachov prostor.

Može se dokazati i delimično uopštenje prethodnog rezultata:

(2.4.11) TEOREMA Neka je E(s) sekvencijalno bačvast prostor čija kompletizacija $\hat{E}(\hat{s})$ je Baireov prostor. Ako postoji niz ograničenih skupova (B_n) čija je unija gutajuća u E, onda je E normabilan prostor.

DOKAZ Neka su B_n' zatvorenja skupova B_n u $\hat{E}$. Tada je $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n'$ gutajući skup u $\hat{E}$. Da bismo to dokazali, pretpostavimo suprotno; neka je $x \in \hat{E}$ i $x \notin nB_n'$. Iz Hahn-Banachove teoreme sledi da postoje $f_n \in B_n'^{o}$ takvi da je $|f_n(x)| > n$. Iz $B_n'^{o} = B_n^o$ sledi da je $f_n \in B_n^o$, pa $f_n \longrightarrow o$ u topologiji uniformne konvergencije na skupovima B_n. Ova topologija je jača od $\sigma(E',E)$, jer je $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ gutajući skup u E, pa $f_n \longrightarrow o$ u topologiji $\sigma(E',E)$. Iz sekvencijalne bačvastosti sledi da postoji s-okolina nule U za koju je $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset U^o = \hat{U}^o$. Skup $\hat{U}$ je $\hat{s}$-okolina nule, pa je $x \in k\hat{U}$ za neko $k \in \mathbb{N}$. Onda je $|f_n(x)| \leq k$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Kontradikcija.

Skupovi B_n' su kompletni, pa su oni Banachovi diskovi. Iz (2.4.6) sledi da je $\{B_n' : n \in \mathbb{N}\}$ fundamentalan niz familije svih Banachovih diskova u $\hat{E}$, a iz (2.4.3) sledi da je $\hat{E}$ Banachov prostor. Prema tome, E je normiran.

Primetimo da Corollary 2. iz (55) sledi i iz (2.4.10) i iz (2.4.11). Posledica teoreme (2.4.8) je i Thm. 6. iz (55):

(2.4.12) TEOREMA ((55), Thm.6.) Ako je E(s) $\mathcal{M}$-kvazi-bačvast prostor i ako familija $\mathcal{M}$ ima fundamentalan niz, onda je E (DF)-prostor.

DOKAZ Dovoljno je dokazati da familija svih ograničenih skupova ima fundamentalan niz. Mi ćemo dokazati da je dual E' sekvencijalno kompletan u topologiji $t_{\mathcal{M}}$ uniformne konvergencije na elementima familije $\mathcal{M}$, pa će tvrdjenje slediti iz (2.4.8). Neka je (f_n) $t_{\mathcal{M}}$-Cauchyjev niz u E'. On je $t_{\mathcal{M}}$-ograničen, pa polara $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}^o$ guta sve elemente iz $\mathcal{M}$. Iz $\mathcal{M}$-kvazi-bačvastosti sledi da je pomenuta polara okolina nule u E, pa je skup $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ekvineprekidan. Odatle sledi da je niz (f_n) $t_{\mathcal{M}}$-konvergentan u E'.

Ako je E(s) Hausdorffov lokalno konveksan prostor i (B_n) niz ograničenih apsolutno konveksnih skupova iz E čija je unija gutajuća u E, onda je za primenu teoreme (2.4.8) dovoljno da E' bude $\sigma(E',E)$-sekvencijalno kompletan, ili da bude $s = g(s, B_n, n \in \mathbb{N})$. Zaista, u prvom slučaju je E' sekvencijalno kompletan i u topologiji uniformne konvergencije na elementima dopustive familije (što sledi iz (44), §18.5.(4)), a u drugom slučaju je E' sekvencijalno kompletan u topologiji uniformne konvergencije na $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ (videti (1.1.14)). Prostor E' je $\sigma(E',E)$-sekvencijalno kompletan za sve tipove bačvastih prostora (σ-bačvaste, b-bačvaste itd.), tako da je teorema (2.4.8) široko primenljiva.

G L A V A 3

BANACH-STEINHAUSOVA TEOREMA ZA GENERALISANE INDUKTIVNE GRANICE I NJENE PRIMENE

Kao što je naslovom rečeno, od fundamentalnog značaja za ovu glavu je teorema Banach-Steinhausa, dokazana u §1. Njenim korišćenjem se u §2. dokazuju neke osobine slabo neprekidnih preslikavanja, a u §3- neke teoreme o zatvorenom grafiku za slučaj kada je domen preslikavanja-prostor snabdeven topologijom generalisane induktivne granice.

U poslednjem paragrafu se dokazuje, primenom Banach-Steinhausove teoreme, jedna Collinsova hipoteza iz 1968. godine, postavljena u radu (12), u vezi s dualom prostora snabdevenog striktnom topologijom.

U ovoj glavi ćemo pretpostavljati da je $\bigcup_{a\in A} S_a$ gutajuća u E, kad god je reč o E(g), $g=g(s_a,S_a,a\in A)$.

§1. Banach-Steinhausova teorema

Razni tipovi bačvastih prostora se definišu tako što se pretpostavi da su odredjeni, slabo ili jako ograničeni skupovi linearnih funkcionala, ekvineprekidni (videti (o.3.1)), odnosno, definišu se tako što se pretpostavi da za te prostore važi Banach-Steinhausova teorema odredjenog tipa. Kako prostori s topologijom generalisane induktivne granice ne moraju biti čak ni σ-kvazi-bačvasti, to se u teoremi Banach-Steinhausa za generalisane induktivne granice mora uzeti jača pretpostavka od pretpostavke da je neki skup funkcionala jako ograničen (videti primer (3.1.2)).

Biće nam potrebna sledeća definicija, koju je za Saksove prostore uveo Orlicz u (58) (videti i (16),I.4.9):

(3.1.1)DEFINICIJA Ako je S apsolutno konveksan podskup lokalno konveksnog prostora E(t), onda par (S,t) ima osobinu (Σ_1) ako i samo ako za svako $x_o \in S$ i svaku apsolutno konveksnu okolinu nule U postoji okolina nule V, takva da je

$$V \cap S \subset (x_o+U)\cap S - (x_o+U)\cap S \quad .$$

Prostor E s topologijom generalisane induktivne granice $g=g(s_a,S_a,a\in A)$ ima osobinu (Σ_1) ako i samo ako za svako $a\in A$ par (S_a,s_a) ima osobinu (Σ_1).

Jasno je da osobina (Σ_1) zavisi od geometrije skupa S, odnosno skupova S_a. Tako, na primer, svaki vektorski potprostor ima osobinu (Σ_1). U (58) i (48) je dat niz konkretnih Saksovih prostora sa ovom osobinom.

Primetimo da ako par (S,t) ima osobinu (Σ_1), onda i par (rS,t) ima osobinu (Σ_1) za svako $r\in \mathbb{K}$, $r\neq o$.

Sada ćemo pokazati da prostor veoma specijalnog tipa, s topologijom generalisane induktivne granice, ne mora biti σ-kvazi-bačvast:

(3.1.2)PRIMER Neka je X lokalno kompaktan σ-kompaktan Hausdorffov topološki prostor, m pozitivna Radonova mera na X, $\| \ \|$ uobičajena norma na $L^\infty=L^\infty(X,m)$ i neka je t lokalno konveksna topologija na L^∞, definisana prednormama $p_K(f)=\int_K |f|\,dm$, gde su $K\subset X$ kompaktni skupovi. Dalje, neka je $B=\{f:\ \|f\|\leq 1\}$ i $g=g(t,nB,n\in\mathbb{N})$. Prostor (L^∞,g) ima sledeće osobine (videti (16), str. 161-165): B je t-metrizabilan i t-kompletan skup, par (B,t) ima osobinu (Σ_1), $(L^\infty,g)'=L^1$ i $g=\tau(L^\infty,L^1)$; bilinearan funkcional za dualnost $\langle L^\infty,L^1\rangle$ je dat sa $\langle f,f'\rangle = \int_X ff'\,dm$. Dokazaćemo sledeće: ako je mera m ograničena, onda prostor (L^∞,g) nije σ-kvazi-bačvast.

Zbog navedenih osobina prostora X, postoje otvoreni relativno kompaktni skupovi U_n, takvi da je $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ i $\overline{U}_n\subset U_{n+1}$ ((8),I §9.9,Prop.15). Skupovi U_n su integrabilni ((9),IV §4.6, Prop.lo,Cor.1), kao i X (jer je $m(X)<\infty$), pa su takvi i skupovi $X\setminus U_n$ (ibid. IV §4.5,Prop.7). Iz $\lim_n m(U_n)=m(X)$ sledi da je $\lim_n m(X\setminus U_n)=o$ (ibid. Prop.8). Neka je $r_n=m(X\setminus U_n)$ i

$f_n'=r_n^{-1}k_n$, gde je k_n karakteristična funkcija skupa $X\setminus U_n$. Jasno je da $f_n'\in L^1$. Niz (f_n') je $\sigma(L^1,L^\infty)$-ograničen:

$$\left|\int_X ff_n'dm\right|=\left|\int_{X\setminus U_n} ff_n'dm\right|\leq\int_{X\setminus U_n}|f|f_n'dm\leq\|f\|r_n, \text{ za svako } f\in L^\infty,$$

ali nije g-ekvineprekidan, jer nije 1-ekviintegrabilan ((16), III,1.8): ako je $d>0$, onda postoji $p\in\mathbb{N}$, takvo da je $r_p<d$, pa je

$$\left|\int_{X\setminus U_p} f_n'dm\right|=\int_{X\setminus U_p} f_n'dm\geq\int_{X\setminus U_p} f_n'dm=1 \quad \text{za } n\geq p.$$

Prema tome, prostor (L^∞,g) nije σ-bačvast. Kako je prostor L^1 $\sigma(L^1,L^\infty)$-sekvencijalno kompletan ((34),5.4.1,Cor.3), to prostor (L^∞,g) nije ni σ-kvazi-bačvast ((37),str.163,Cor.1).

Iz navedenog primera se vidi da je za Banach-Steinhausovu teoremu za generalisane induktivne granice potreban jači uslov od uslova da je niz neprekidnih linearnih funkcionala jako ograničen. Sada ćemo videti da je dovoljan uslov : pomenuti niz je Cauchyjev. Dokazaćemo prvo jednu "lokalnu" Banach-Steinhausovu teoremu:

(3.1.3)TEOREMA Neka je $E(t)$ lokalno konveksan prostor, $S\subset E$ apsolutno konveksan podskup i neka par (S,t) ima osobinu (Σ_1). Dalje, neka je F topološki vektorski prostor i $T_n:E\longrightarrow F$ niz linearnih preslikavanja, takvih da su restrikcije $T_n|S$ neprekidne i takvih da je niz $(T_n(x))$ Cauchyjev za svako $x\in S$. Ako je S druge kategorije u sebi, onda za svaku okolinu nule V u F postoje okolina nule U u E i prirodan broj p_0 , takvi da je

$$(T_p-T_q)(U\cap S)\subset V, \text{ za svako } p,q\geq p_0.$$

DOKAZ Neka je V' uravnotežena zatvorena okolina nule u F za koju je $V'+V'\subset V$ i neka je

$$S_n=\{x\in S:\ (T_p-T_q)x\in V',\ p,q\geq n\}.$$

Onda je $S=\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n$, jer je niz $(T_n(x))$ Cauchyjev za svako $x\in S$. Dalje, skupovi S_n su zatvoreni u S. Zaista, restrikcije $T_p-T_q|S$ su neprekidne, skup V' je zatvoren, pa je u S zatvoren i skup $(T_p-T_q)^{-1}(V')\cap S$; samim tim, u skupu S je zatvoren i skup

$$\bigcap_{p,q=n}^{\infty}(T_p-T_q)^{-1}(V')\cap S=S_n.$$

Skup S je druge kategorije u sebi, pa postoje $x_0\in S$, okolina nule U' u E i $p_0\in\mathbb{N}$, takvi da je

$$(x_o+U')\cap S\subset S_{p_o}.$$

Kako par (S,t) ima osobinu (Σ_1), to postoji okolina nule U u E sa osobinom:

$$U\cap S\subset(x_o+U')\cap S-(x_o+U')\cap S\subset S_{p_o}-S_{p_o}.$$

Onda je, za $p,q\geqslant p_o$:

$$(T_p-T_q)(U\cap S)\subset V'-V'=V'+V'\subset V.$$

Iz ove "lokalne" Banach-Steinhausove teoreme dobijamo "globalnu" Banach-Steinhausovu teoremu:

(3.1.4)<u>TEOREMA</u> Neka lokalno konveksan prostor $E(g)$, $g=g(s_a,S_a)$, ima osobinu (Σ_1) i neka su skupovi S_a s_a-druge kategorije u sebi.Dalje, neka je F lokalno konveksan prostor i $T_n:E\to F$ niz g-neprekidnih linearnih preslikavanja, takvih da je niz $(T_n(x))$ Cauchyjev u F za svako $x\in E$.Onda je niz (T_n) ekvineprekidan.Ako još $T_n(x)\longrightarrow T(x)$ za svako $x\in E$, onda je T g-neprekidno preslikavanje i $T_n\longrightarrow T$ uniformno na svakom pretkompaktnom skupu iz E.

<u>DOKAZ</u> Neka je V proizvoljna zatvorena okolina nule u F i V' apsolutno konveksna zatvorena okolina nule u F, takva da je $V'+V'\subset V$.Neka su $a\in A$ i $k\in\mathbb{N}$ proizvoljni.Iz g-neprekidnosti preslikavanja T_n sledi s_a-neprekidnost restrikcija $T_n|kS_a$, pa su ispunjeni uslovi iz (3.1.3).Zbog toga postoje s_a-okoline nule U_a^k i $p_a^k\in\mathbb{N}$, takvi da je

$$(T_p-T_q)(U_a^k\cap kS_a)\subset V', \text{ za } p,q\geqslant p_a^k,$$

pa je

$$(T_p-T_{p_a^k})(U_a^k\cap kS_a)\subset V', \text{ za } p\geqslant p_a^k .$$

Restrikcije $T_n|kS_a$ su s_a-neprekidne, pa postoji s_a-okolina nule V^k, takva da je $T_p(V_a^k\cap kS_a)\subset V'$ za $p=1,\dots,p_a^k$.Konačno, neka je W_a^k presek skupova U_a^k i V_a^k .Onda je

$$(T_p-T_{p_a^k})(W_a^k\cap kS_a)\subset V', \text{ za } p\geqslant p_a^k$$

$$T_p(W_a^k\cap kS_a)\subset V', \text{ za } p=1,\dots,p_a^k.$$

Zbog toga je

$$T_p(W_a^k\cap kS_a)\subset(T_p-T_{p_a^k})(W_a^k\cap kS_a)+T_{p_a^k}(W_a^k\cap kS_a)\subset V'+V'\subset V$$
$$\text{za } p\geqslant p_a^k ,$$

$$T_p(W_a^k \cap kS_a) \subset V' \subset V \ , \ \text{za} \quad p=1,\dots,p_a^k .$$

Odatle sledi da je $W_a^k \cap kS_a \subset \bigcap_{p=1}^{\infty} T_p^{-1}(V)$. Ako je $P = \Gamma \bigcup_{a\in A} \bigcup_{k=1}^{\infty} (W_a^k \cap kS_a)$, onda je $P \subset \bigcap_{p=1}^{\infty} T_p^{-1}(V)$, pa je niz (T_n) ekvineprekidan, jer je P g-okolina nule (videti (1.1.6)).

Ako $T_n(x) \longrightarrow T(x)$ za svako $x \in E$, onda je T neprekidno, zbog ekvineprekidnosti niza (T_n), a zbog istog razloga se na skupu $\{T\} \cup \{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ poklapaju topologija konvergencije tačka po tačka i topologija uniformne konvergencije na pretkompaktnim skupovima ((44), §39.4.(2)), pa odatle sledi poslednji deo tvrdjenja.

(3.1.5)<u>POSLEDICA</u> Ako je E kao u (3.1.4), a F kompletan lokalno konveksan prostor, onda je prostor $L(E,F)$ sekvencijalno kompletan u topologiji konvergencije tačka po tačka.

Specijalno, E' je $\sigma(E',E)$-sekvencijalno kompletan, štaviše, svaki $\sigma(E',E)$-Cauchyjev niz iz E' je ekvineprekidan.

Prvi deo teoreme (3.1.4) je za Saksove prostore (kako ih je definisao Orlicz) dokazan u (59),(46) i (48), a za jedan specijalan tip generalisane induktivne granice- u (16),I.4.11.

Teorema (3.1.4) ne mora biti tačna ako se ne pretpostavi osobina (Σ_1). Štaviše, u tom slučaju dual E' ne mora biti $\sigma(E',E)$-sekvencijalno kompletan. Naime, Orlicz i Ptak su u (62) konstruisali primer ((62),str.65-66) Saksovog prostora, koji je čak kompaktan, čiji dual nije slabo kompletan, što znači da ako se iz (3.1.4) izostavi osobina (Σ_1), a pretpostavi da je $s_a=s$, $S_a=S$ za svako $a\in A$ i da je S s-metrizabilan s-kompaktan skup, onda tvrdjenje iz (3.1.4) ne mora da važi.

(3.1.6)<u>TEOREMA</u> Neka su ispunjeni svi uslovi iz (3.1.4), osim osobine (Σ_1). Tada za svaku okolinu nule V u F postoje $x_a^k \in kS_a$ i s_a-okoline nule U_a^k, takvi da je

$$T_n((x_a^k + U_a^k) \cap kS_a) \subset V \ , \ \text{za svako} \ n \in \mathbb{N}.$$

Dokaz ove teoreme je sadržan u dokazu teoreme (3.1.4), tako da ga nećemo navoditi. Ovu teoremu je dokazao Alexiewicz u (1) za slučaj kada je $k=1, S_a=S$ i $s_a=s$.

Već smo videli da slabo ograničen niz iz E' ne mora biti ekvineprekidan, pa ćemo sada videti u kom slučaju su slabo ograničeni skupovi iz E' jako ograničeni. Korišćenje osobine (Σ_1) u ovom slučaju možemo izbeći zahvaljujući sledećoj lemi:

(3.1.7)LEMA Neka je S apsolutno konveksan skup, B uravnotežen skup, U okolina nule i $x_o \in S \cap B$. Ako postoji skalar r takav da je $(x_o+U) \cap S \subset rB$, onda postoje $e \in [0,1[$ i okolina nule V, takvi da je

$$V \cap S \subset r(1-e)^{-1}B + e(1-e)^{-1}B.$$

DOKAZ. Neka je U' uravnotežena okolina nule, $U'+U' \subset U$. Ona je gutajući skup, pa postoji $e \in [0,1[$ za koji je $(1-e)x_o \in U'$, tj. $ex_o \in x_o+U'$. Onda je $ex_o+U' \subset x_o+U'+U' \subset x_o+U$, pa je $(ex_o+U') \cap S \subset rB$. Odatle je

$$U' \cap (S-ex_o) \subset rB-ex_o \subset rB+eB.$$

Ako stavimo da je $V=(1-e)^{-1}U'$ i dokažemo da je $(1-e)S \subset S-ex_o$, lema će biti dokazana. Iz $x \in (1-e)S$ sledi da je, za neko $y \in S$, $x=(1-e)y=((1-e)y+ex_o)-ex_o$, pa je $x \in S-ex_o$, jer je S konveksan skup i $y,x_o \in S$.

U dokazu ove leme korišćena je ideja dokaza drugog dela teoreme 2.b) iz (18) (str.553-554).

(3.1.8)TVRDJENJE Neka je $\mathcal{F}$ familija linearnih preslikavanja iz E u F (E,F su topološki vektorski prostori), takva da su restrikcije $T|S, T \in \mathcal{F}$, neprekidne, gde je S apsolutno konveksan skup druge kategorije u sebi. Ako su skupovi $\{Tx : T \in \mathcal{F}\}$ ograničeni u F za svako $x \in S$, onda za svaku okolinu nule V u F postoje okolina nule U u E i $k \in \mathbb{K}$, takvi da je

$$\mathcal{F}(U \cap S) \subset kV.$$

DOKAZ Neka je V' uravnotežena i zatvorena okolina nule u F, $V'+V' \subset V$ i neka je $W = \bigcap \{T^{-1}(V') : T \in \mathcal{F}\}$. Skup W guta svaku tačku iz S, pa je $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} (nW \cap S)$. Skupovi $T^{-1}(V') \cap S$ su zatvoreni u S, jer su restrikcije $T|S$ neprekidne, pa su i skupovi $nW \cap S$ zatvoreni u S. Kako je S druge kategorije u sebi, to postoje $x_o \in S$ i okolina nule U' u E, takvi da je, za neko

$p\in\mathbb{N}$: $(x_0+U')\cap S\subset pW\cap S$.Kako skup W guta svaku tačku iz S, to je $x_0\in qW$ za neko $q\in\mathbb{N}$, $q\geqslant p$.Onda je $x_0\in qW\cap S$ i

$$(x_0+U')\cap S\subset qW\cap S\subset qW ,$$

pa iz (3.1.7) sledi (za r=q i B=W) da postoje $e\in[0,1[$ i okolina nule U, tako da je $U\cap S\subset q(1-e)^{-1}W + e(1-e)^{-1}W$.Onda je

$$\mathcal{F}(U\cap S)\subset q(1-e)^{-1}V'+e(1-e)^{-1}V'\subset q(1-e)^{-1} V ,$$

što je i trebalo dokazati.

(3.1.9)<u>TVRDJENJE</u> Neka je E(g), $g=g(s_a,S_a,a\in A)$, takav da su skupovi S_a s_a-druge kategorije u sebi i neka je $\mathcal{F}$ familija neprekidnih linearnih preslikavanja iz E u F, gde je F topološki vektorski prostor.Skup $\{Tx:T\in\mathcal{F}\}$ je ograničen u F za svako $x\in E$ ako i samo ako za svaku okolinu nule V u F postoje s_a-okoline nule U_a i skalari $r_a\neq 0$, takvi da je

$$r_a^{-1}(U_a\cap S_a)\subset \bigcap\{T^{-1}(V):T\in\mathcal{F}\}, \text{ za svako } a\in A.$$

<u>DOKAZ</u> $\Longrightarrow$: Iz (3.1.8) sledi da postoje s_a-okoline nule U_a i skalari r_a, takvi da je $\mathcal{F}(U_a\cap S_a)\subset r_aV$, tj. takvi da je $r_a^{-1}(U_a\cap S_a)\subset \bigcap\{T^{-1}(V):T\in\mathcal{F}\}$.

$\Longleftarrow$: Neka je $x\in E$ i V okolina nule u F.Unija skupova S_a je gutajuća u E, pa postoje $b\in A$ i $r\in\mathbb{K}$, tako da je $x\in rS_b$. Iz pretpostavke sledi da je $r_b^{-1}(U_b\cap S_b)\subset\bigcap\{T^{-1}(V):T\in\mathcal{F}\}$. Kako je $x\in rS_b$, to je $x\in r'U_b$ za neko $r'\in\mathbb{K}$, $|r'|\geqslant|r|$ .Onda je $x\in r'(U_b\cap S_b)\subset r_br'(\bigcap\{T^{-1}(V):T\in\mathcal{F}\})$, tj. $\{Tx:T\in\mathcal{F}\}\subset r_br'V$, pa je skup $\{Tx:T\in\mathcal{F}\}$ ograničen u F.

Sada ćemo uvesti pojam regularne generalisane induktivne granice.Za "obične" induktivne granice taj pojam je uveo Makarov u (51).

(3.1.1o)<u>DEFINICIJA</u> Prostor E(g), $g=g(s_a,S_a,a\in A)$, je <u>regularan</u> ako i samo ako za svaki g-ograničen skup B postoji $a\in A$, takvo da S_a guta skup B i da je skup B s_a-ograničen.

(3.1.11)<u>TEOREMA</u> Neka su E,F i $\mathcal{F}$ kao u (3.1.9) i neka je E regularan prostor.Ako je skup $\{Tx:T\in\mathcal{F}\}$ ograničen u F za svako $x\in E$, onda je skup $\bigcup\{T(B):T\in\mathcal{F}\}$ ograničen u F za svaki ograničen skup B iz E.

DOKAZ Neka je V proizvoljna okolina nule u F i B ograničen skup u E. Zbog (3.1.9) postoje s_a-okoline nule U_a i skalari r_a, takvi da je $U_a \cap S_a \subset r_a(\cap\{T^{-1}(V):T\in\mathcal{F}\})$. Prostor E je regularan, pa je $B\subset r(U_b\cap S_b)$, za neko $b\in A$, $r\in\mathbb{K}$. Tada je

$$B\subset r(U_b\cap S_b)\subset rr_b(\cap\{T^{-1}(V):T\in\mathcal{F}\})$$

i dokaz je završen.

(3.1.12)POSLEDICA Neka je E kao u (3.1.11). Tada je svaki $\sigma(E',E)$-ograničen skup i $\beta(E',E)$-ograničen; a samim tim je i svaki $\sigma(E,E')$-ograničen skup $\beta(E,E')$-ograničen.

Ako se u (3.1.11) još pretpostavi da su S_a vektorski potprostori, tj. ako se pretpostavi da je E "obična" induktivna granica, onda važi mnogo jače tvrdjenje: familija $\mathcal{F}$ je ekvineprekidna, što sledi iz činjenice da su tada S_a bačvasti prostori (videti (72), III.4.2).

§ 2. O slabo neprekidnim preslikavanjima

U ovom paragrafu nam je cilj da dokažemo neke dovoljne uslove za neprekidnost slabo neprekidnog preslikavanja.

Uvedimo oznake:

N_1 je klasa svih normiranih prostora;

N_2 je klasa separabilnih normiranih prostora;

N_3 je klasa čiji je jedini element polje $\mathbb{K}$.

(3.2.1)DEFINICIJA

(a) Prostor E(t) ima osobinu (A,N_i) (i=1,2) ako i samo ako za svako $F\in N_i$, svako slabo neprekidno linearno preslikavanje iz E u F je neprekidno.

(b) Prostor E(t) ima osobinu (B,N_i) (i=1,2,3) ako i samo ako za svako $F\in N_i$, svaki niz (T_n) neprekidnih linearnih preslikavanja iz E u F, takvih da je niz $(T_n(x))$ konvergentan za svako $x\in E$, jeste ekvineprekidan.

Maločas definisane osobine su za Saksove prostore proučavali Orlicz u (6o) i Orlicz,Ptak u (62).

Ako je $\hat{F}$ kompletizacija prostora F, onda je $F'=\hat{F}'$ i ako je $F\in N_2$, onda je $\hat{F}$ separabilan prostor ((44), $\S$14.3(3)), pa su osobine (A,N_i) ekvivalentne osobinama koje se dobijaju iz osobina (A,N_i) kada se klase N_i zamene odgovarajućim klasama Banachovih prostora.Analogna primedba važi i za osobine (B,N_i).Primetimo, takodje, da su osobine (A,N_i) (resp. (B,N_i)) ekvivalentne osobinama koje se dobijaju iz (A,N_i) (resp. (B,N_i)) kada se klase N_i zamene klasama projektivnih granica prostora iz N_i.Iz ovoga sledi da je osobina (A,N_1) ekvivalentna sa $t=\tau(E,E')$ (a za striktne topologije je od značaja da se utvrdi kada su one Mackeyeve- videti (13)).

U prethodnom paragrafu smo dobili dovoljan uslov za važenje osobina (B,N_i).Ovde ćemo, kao prvo,naći potrebne i (ili) dovoljne uslove za važenje osobina (A,N_i).Sledeća dva tvrdjenja su opštija nego što nam je potrebno:

(3.2.2)<u>TVRDJENJE</u> Neka lokalno konveksan prostor E(t) ima osobinu (A,N_2) i neka je $E'=E^+$.Ako je svaki $\sigma(E',E)$-ograničen niz iz E' $\beta(E',E)$-ograničen, onda je svaki $\sigma(E',E)$-Cauchyjev niz iz E' ekvineprekidan.Specijalno, E' je $\sigma(E',E)$-sekvencijalno kompletan.

<u>DOKAZ</u> Neka je (f_n) slabo Cauchyjev niz iz E' i neka je linearno preslikavanje $T:E\longrightarrow c$ definisano sa $Tx=(f_n(x))$ (c je separabilan Banachov prostor svih konvergentnih nizova iz $\mathbb{K}$).Kako E ima osobinu (A,N_2), to je, da bi se dokazala neprekidnost preslikavanja T, dovoljno dokazati da je T $\sigma(E,E')$- $\sigma(c,l)$-neprekidno.S obzirom da je $E'=E^+$, za slabu neprekidnost preslikavanja T je dovoljno dokazati da je za svaki nula-niz (x_n) iz E i svako $f\in l$ tačna jednakost $\lim_n f(Tx_n)=o$.Niz (x_n) je $\sigma(E,E')$-ograničen, niz (f_n) je $\beta(E',E)$-ograničen, jer je $\sigma(E',E)$-ograničen, pa je

$$\sup_n \sup_k |f_n(x_k)| < \infty \text{ , tj. } \sup_k \|Tx_k\| < \infty .$$

Dakle, niz (Tx_k) je ograničen u c i on pokoordinatno teži nuli, pa je $\sigma(c,1)$-lim $Tx_k=0$ (videti na pr. (40), 27.11 i 1810). Odatle je $\lim_n f(Tx_k)=0$, a to smo i hteli da dokažemo. Znači, preslikavanje T je neprekidno, pa postoji okolina nule U u E takva da je $\|Tx\| \leq 1$ za svako $x \in U$. Onda je $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset U^0$.

(3.2.3)<u>TVRDJENJE</u> Neka je E(t) lokalno konveksan prostor čiji je dual slabo sekvencijalno kompletan. Prostor E ima osobinu (A,N_2) ako i samo ako je svaki apsolutno konveksan slabo kompaktan i slabo metrizabilan skup iz E' ekvineprekidan.

<u>DOKAZ</u> $\Rightarrow$: Neka je $K \subset E'$ apsolutno konveksan slabo kompaktan i slabo metrizabilan skup i neka je linearno preslikavanje $T: E \longrightarrow C(K)$ definisano sa $T(x)(k)=k(x)$, $k \in K$. Preslikavanje T ima zatvoren grafik (videti na pr.(80)), C(K) je separabilan Banachov prostor, pa iz Kaltonove teoreme o zatvorenom grafiku (videti (41), Thm.4.2 ili (0.4.4)) sledi da je T slabo neprekidno. Zbog osobine (A,N_2) je T neprekidno preslikavanje, pa je $T^{-1}(B)$ okolina nule u E, ako je B zatvorena jedinična kugla u C(K). Kako je $T^{-1}(B)=K^0$, to je K ekvineprekidan skup.

$\Leftarrow$: Neka je $F \in N_2$, $T: E \longrightarrow F$ slabo neprekidno preslikavanje. Onda je i $T': F' \longrightarrow E'$ slabo neprekidno. Ako je V zatvorena jedinična kugla u F, onda je V^0 slabo kompaktan, slabo metrizabilan (zbog separabilnosti) skup u F', pa je $T'(V^0)$ slabo kompaktan i slabo metrizabilan apsolutno konveksan skup u E'((41), Lemma 1.2). Onda je on ekvineprekidan skup u E': $T'(V^0) \subset P^0$ za neku okolinu nule P iz E, koja je apsolutno konveksna i zatvorena. Iz (0.4.1) sledi da je $T(P) \subset V$, tj. preslikavanje T je neprekidno.

(3.2.4)<u>PRIMEDBA</u> Slaba sekvencijalna kompletnost prostora E' je korišćena samo u prvom delu dokaza teoreme (3.2.3).

(3.2.5)<u>TVRDJENJE</u> Neka je E(t) lokalno konveksan prostor čiji je dual slabo sekvencijalno kompletan. Ako je svaki apsolutno konveksan slabo kompaktan i slabo metrizabilan skup iz E' ekvineprekidan, onda prostor E ima osobinu (B,N_3).

<u>DOKAZ</u> Neka su $T_n \in E'$ i neka $T_n x \longrightarrow Tx$ za svako $x \in E$. On-

da je niz (T_n) slabo Cauchyjev, pa je skup $\overline{\Gamma\{\bar{T}_n : n\in\mathbb{N}\}}$ slabo metrizabilan ((41), str.4o2) i slabo pretkompaktan. Zbog slabe sekvencijalne kompletnosti je ovaj skup slabo kompaktan, pa je on, po pretpostavci, ekvineprekidan. Samim tim i skup $\{T_n : n\in\mathbb{N}\}$ je ekvineprekidan.

Sada možemo dokazati glavni rezultat ovog paragrafa:

(3.2.6)<u>TEOREMA</u> Neka je prostor E snabdeven topologijom $g=g(s_a,S_a,a\in A)$. Tada:

(a) Ako su parovi (S_a,s_a) druge kategorije u sebi i ako prostor E ima osobinu (Σ_1), onda prostor E ima osobinu (B,N_1).

(b) Ako su parovi (S_a,s_a) metrizabilni i ako prostor E ima osobinu (B,N_3), onda je svaki apsolutno konveksan slabo kompaktan i slabo metrizabilan skup iz E' ekvineprekidan (štaviše, svaki slabo sekvencijalno kompaktan skup iz E' je ekvineprekidan).

(c) Ako su parovi (S_a,s_a) druge kategorije u sebi i ako prostor E ima osobinu (Σ_1), onda važi obrat u (b).

(d) Ako su parovi (S_a,s_a) metrizabilni i ako prostor E ima osobinu (B,N_3), onda on ima i osobinu (A,N_2).

(e) Ako su parovi (S_a,s_a) metrizabilni, druge kategorije u sebi, ako je E regularan i ima osobinu (A,N_2), onda je svaki slabo Cauchyjev niz iz E' ekvineprekidan (pa E ima osobinu (B,N_3)).

(e') Ako su ispunjeni uslovi iz (e), onda E ima osobinu (B,N_2).

(e") Ako su ispunjeni uslovi iz (e), pri čemu je osobina (A,N_2) zamenjena osobinom (A,N_1), onda E ima osobinu (B,N_1).

(f) Ako su parovi (S_a,s_a) metrizabilni, druge kategorije u sebi i ako prostor E ima osobinu (Σ_1), onda on ima i osobinu (A,N_2).

(g) Ako je prostor E separabilan, onda on ima osobinu (A,N_1) ako i samo ako ima osobinu (A,N_2).

<u>DOKAZ</u> (a) Ovo je specijalan slučaj (3.1.4).

(b) Neka je $K\subset E'$ apsolutno konveksan slabo kompaktan i slabo metrizabilan skup iz E' koji nije ekvineprekidan. Tipična g-okolina nule je $\Gamma[\bigcup_{a\in A}\bigcup_{k=1}^{\infty}(U_a^k \cap kS_a)]$, pa iz toga što K nije ekvineprekidan sledi da postoje $b\in A, k\in \mathbb{N}$ i $e>o$ takvi da $K \not\subset e(U_b \cap kS_b)^o$ za svaku s_b-okolinu nule U_b. Neka je $\{V_b^n \cap kS_b : n\in \mathbb{N}\}$ baza okolina nule topologije $s_b|kS_b$. Onda postoje $f_n \in K \setminus e(V_b^n \cap kS_b)^o$, tj. postoje $f_n \in K$ i $x_n \in V_b^n \cap kS_b$, takvi da je $|f_n(x_n)| > e$ za svako $n\in \mathbb{N}$. Skup K je slabo sekvencijalno kompaktan, pa postoji podniz (f_{n_i}) niza (f_n) koji slabo konvergira. Zbog (B,N_3) je taj podniz ekvineprekidan, pa je $\{f_{n_i} : i\in \mathbb{N}\}\subset eP^o$ za neku g-okolinu nule P. S obzirom da su $x_n \in V_b^n \cap kS_b$, to je g-lim $x_n=o$, pa je i g-lim $x_{n_i}=o$. Onda postoji $j\in \mathbb{N}$, takvo da je $x_{n_i}\in P$ za $i\geq j$, a to je nemoguće zbog $\{f_{n_i} : i\in \mathbb{N}\}\subset eP^o$ i $|f_{n_i}(x_{n_i})| > e$. Prema tome, skup K je ekvineprekidan.

(c) S obzirom na (3.2.5), dovoljno je dokazati da je E' slabo sekvencijalno kompletan, a ovo je sadržano u (3.1.5).

(d) Sledi iz (b), (3.2.3) i (3.2.4).

(e) Dokažimo da su ispunjeni uslovi iz (3.2.2). Neka je $f\in E^+$. Treba dokazati da je $f\in E'$, tj. da su restrikcije $f|S_a$ s_a-neprekidne. Prostori (S_a, s_a) su metrizabilni, pa je dovoljno dokazati da su pomenute restrikcije s_a-sekvencijalno neprekidne. Neka $x_n \in S_b$, lim $x_n = x \in S_b$. Kako je $g|S_b \leq s_b|S_b$, to je g-lim $x_n = x$, pa je lim $f(x_n)=f(x)$ zbog $f\in E^+$, a to je i trebalo dokazati. Dalje, zbog (3.1.12) je svaki slabo ograničen niz iz E' jako ograničen. Prema tome, ispunjeni su uslovi iz (3.2.2), pa je svaki slabo Cauchyjev niz iz E' ekvineprekidan.

(e′) Neka su $T_n : E \longrightarrow F$ neprekidna linearna preslikavanja, $F\in N_2$, i neka je niz $(T_n x)$ konvergentan za svako $x\in E$. Ako je $f\in F'$, onda je niz $(fT_n x)$ konvergentan, $fT_n x \longrightarrow fTx$, pa je on ekvineprekidan, zbog (e). Onda je $fT \in E'$, tj. T je slabo neprekidno preslikavanje, pa je ono neprekidno, zbog (A,N_2).

Preslikavanja $R_n = T_n - T$ su neprekidna, pa su preslikavanja $L_n, L : E \longrightarrow c_o(F)$, definisana sa

$$L_n(x) = (R_1 x, \ldots, R_n x, o, o, \ldots)$$
$$L\ (x) = (R_n x),$$

dobro definisana (ovde je $c_o(F)$ separabilan- jer je F separabilan- Banachov prostor nula-nizova iz F, snabdeven normom $\|(y_n)\| = \sup_n \|y_n\|$).Kako $R_n x \longrightarrow o$, to $L_n x \longrightarrow Lx$ za svako $x \in E$. Preslikavanja R_n su neprekidna, pa su takva i preslikavanja L_n.Onda je neprekidno i preslikavanje L (dokaz isti kao za preslikavanje T).Zato postoji g-okolina nule P, takva da je $\|L(P)\| \leq 1$, tj. $R_n(P) \subset B$ za svako $n \in \mathbb{N}$, gde je B zatvorena jedinična kugla u F.Neka je Q apsolutno konveksna g-okolina nule sa osobinama: $2Q \subset P$ i $T(Q) \subset B$.Skup $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ je ekvineprekidan, jer je $T_n(Q) \subset 2B$ za svako $n \in \mathbb{N}$.Zaista, ako je $y = T_n q$, $q \in Q$, onda je

$$y = (T_n q - Tq) + Tq = R_n q + Tq \in B + B = 2B.$$

(e") Dokaz je isti kao za (e′), s tim što se ne pominje separabilnost.

(f) Sledi iz (a), (d) i trivijalne implikacije:iz (B,N_1) sledi (B,N_3).

(g) Neka je skup $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ svuda gust u E, $F \in N_1$.Onda je $F_1 = \mathrm{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ normiran i separabilan prostor.Kako je $\sigma(F_1, F_1') = \sigma(F, F')|F_1$, to je preslikavanje T $\sigma(E,E')$-- $\sigma(F_1,F_1')$-neprekidno, pa iz (A,N_2) sledi (A,N_1).Obrnuta implikacija je trivijalna.

(Ideja za dokaz tvrdjenja (e′) je uzeta iz Orlicz,Ptak (62), str. 6o-61)

Dakle, ako je prostor E(g) regularan, ako ima osobinu (Σ_1) i ako su parovi (S_a, s_a) metrizabilni i druge kategorije u sebi, onda su tačne implikacije:

$$\begin{array}{ccccc}
(A,N_1) & \Rightarrow & (A,N_2) & \Leftarrow & \\
\Downarrow & & \Downarrow & & (B,N_3) \\
(B,N_1) & \Rightarrow & (B,N_2) & \Rightarrow &
\end{array}$$

Ako je prostor E(g) još i separabilan, onda se sve implikacije u prethodnoj shemi mogu zameniti ekvivalencijama i g je Mackeyeva topologija.

Svaki Saksov prostor s Wiwegerovom mešovitom topologijom (opštije, svaki Hausdorffov (GLF)-prostor) zadovoljava maločas navedene uslove (izuzev (Σ_1) i separabilnosti), pa iz (3.2.6) dobijamo kao specijalne slučajeve sledeće rezultate: (58),Thm.1′; (59),Thm.12(r_1),(r_2); (62), str. 59 i 1.32; (6o), (α)-(δ), kao i (16),I.4.11-12. Iz (3.2.6) sledi i (48),3.2.(i), ako se zna sledeće:

(3.2.7)TVRDJENJE Ako su parovi (S_a,s_a) metrizabilni i F metrizabilan lokalno konveksan prostor, onda je niz neprekidnih linearnih preslikavanja T_n:E(g) $\rightarrow$ F ekvineprekidan ako i samo ako je on sekvencijalno ekvineprekidan (niz (T_n) je sekvencijalno ekvineprekidan ako i samo ako iz $T_nx \rightarrow o$ za svako $x \in E$ sledi da $T_nx_n \rightarrow o$ za svaki nula-niz (x_n) iz E).

Dokaz ovog tvrdjenja ne dajemo.Napomenimo da se u jednom delu dokaza koristi činjenica da je niz konvergentan ako i samo ako svaki podniz tog niza ima konvergentan podniz, a drugi deo dokaza je analogan dokazu (3.2.6)(b).

Prethodne primedbe se odnose na tačke (a),(d),(e),(e′), (f) i (g), dok tačke (b),(c) i (e") nisu bile poznate za Saksove prostore.

Ostatak ovog paragrafa je posvećen dokazu rezultata boljeg od (3.2.6)(f).

(3.2.8)DEFINICIJA Topološki vektorski prostor E pripada klasi (Sep) ako i samo ako za svaku okolinu nule $V \subset E$ postoje $y_n \in E$ takvi da je $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}(y_n+V)$.

Jasno je da svaki separabilan topološki vektorski prostor pripada klasi (Sep), kao i da svaki metrizabilan prostor iz klase (Sep) jeste separabilan.Sledeće tvrdjenje daje karakterizaciju klase (Sep) (videti i (3.3.2)).Dokaz ne dajemo, zbog njegove jednostavnosti.

(3.2.9)TVRDJENJE Sledeća tvrdjenja su ekvivalentna:

(a) $E \in$ (Sep)

(b) Za svaku okolinu nule $V \subset E$ postoji potprostor F najviše prebrojive dimenzije, takav da je $E=F+V$.

(c) Za svaku okolinu nule $V\subset E$ postoji separabilan potprostor F, takav da je $E=F+V$.

Klasa (Sep) ima mnogo bolje nasledne osobine od klase separabilnih prostora:

(3.2.10) TVRDJENJE

(a) Ako je $E\in(\mathrm{Sep})$ i ako je $F\subset E$ vektorski potprostor, onda je $F\in(\mathrm{Sep})$.

(b) Ako je $E\in(\mathrm{Sep})$ i ako je $F\subset E$ vektorski potprostor, onda je $E/F\in(\mathrm{Sep})$.

(c) Neka E ima topologiju induktivne granice, definisanu preslikavanjima $f_n:E_n\longrightarrow E$ i neka je $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(E_n)$. Ako su $E_n\in(\mathrm{Sep})$, onda je $E\in(\mathrm{Sep})$.

(d) Ako su $E_i\in(\mathrm{Sep}), i\in I$, onda je $\prod_{i\in I} E_i\in(\mathrm{Sep})$.

(e) Ako su $E_n\in(\mathrm{Sep})$, onda je $\bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n\in(\mathrm{Sep})$.

(f) Ako su $E_i\in(\mathrm{Sep})$, onda je projektivna granica prostora E_i u klasi (Sep).

(g) Ako je $E\in(\mathrm{Sep})$, onda je kompletizacija $\hat{E}\in(\mathrm{Sep})$.

DOKAZ (a) Neka je V okolina nule u F, W okolina nule u E, takva da je $W\cap F\subset V$ i neka je W' uravnotežena okolina nule u E za koju je $W'+W'\subset W$. Postoje $y_n\in E$ tako da je $\bigcup_{n=1}^{\infty}(y_n+W')=E$. Neka je $M=\{n\in\mathbb{N}: (y_n+W')\cap F\neq\emptyset\}$. Skup M je neprazan, jer je $F\subset E=\bigcup_{n=1}^{\infty}(y_n+W')$. Neka je, za svako $n\in M$, x_n proizvoljan element iz $(y_n+W')\cap F$. Tada je $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}(x_n+V)$. Zaista, jasno je da je $\bigcup_{n=1}^{\infty}(x_n+V)\subset F$. Neka je $x\in F$. Onda je $x\in y_p+W'$ za neko $p\in\mathbb{N}$, pa je $x=(x-y_p)+(y_p-x_p)+x_p\in W'+W'+x_p\subset x_p+W$, tj. $x-x_p\in W$ i $x-x_p\in F$. Odatle sledi da je $x-x_p\in V$, što je i trebalo dokazati.

(b) Ovo je specijalan slučaj tvrdjenja (c).

(c) Ako je $V\subset E$ okolina nule, onda je $f_n^{-1}(V)$ okolina nule u E_n za svako $n\in\mathbb{N}$, pa postoje $y_n^p\in E_n (p=1,2,\dots)$, takvi da je $E_n=\bigcup_{p=1}^{\infty}(y_n^p+f_n^{-1}(V))$. Odatle je

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(E_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{p=1}^{\infty}(f_n(y_n^p)+f_nf_n^{-1}(V))\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{p=1}^{\infty}(f_n(y_n^p)+V)\subset E.$$

(d) Ako je V okolina nule u proizvodu, onda postoje okoline nule $V_{i_n}\subset E_{i_n} (n=1,\dots,k)$ takve da je $V\supset\prod_{n=1}^{k} V_{i_n}\times\prod_{i\in I\setminus\{i_1,\dots,i_k\}} E_i$

i postoje $y^p_{i_n} \in E_{i_n}$, $E_{i_n} = \bigcup_{p=1}^{\infty}(y^p_{i_n}+V_{i_n})$. Neka je M skup svih $z \in \in \prod E_i$ kod kojih su prvih k koordinata razne kombinacije elemenata $y^p_{i_n}$, a ostalo su nule. Skup M je najviše prebrojiv i $\prod_{i \in I} E_i = {}^n\bigcup_{z \in M}(z+V)$.

(e) Sledi iz (c) i (d), jer je $\bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n$ induktivna granica prostora $\prod_{k=1}^{n} E_k$.

(f) Projektivna granica je potprostor proizvoda, pa ovo tvrdjenje sledi iz (a) i (d).

(g) Dokaz je analogan dokazu ovakvog tvrdjenja za separabilne prostore.

Vratimo se sada osnovnoj temi:

(3.2.11)<u>TEOREMA</u> Neka prostor $E(g)$, $g=g(s_a,S_a,a\in A)$, ima osobinu (Σ_1), neka su parovi (S_a,s_a) druge kategorije u sebi i neka je lokalno konveksan prostor $F(t)\in$ (Sep). Ako je s lokalno konveksna topologija na F, takva da je $s \leqslant t$, da t ima bazu okolina nule od s-zatvorenih skupova, onda je svako s-neprekidno linearno preslikavanje $T:E \longrightarrow F$ i t-neprekidno.

<u>DOKAZ</u> Ako je V t-okolina nule, onda postoji s-zatvorena uravnotežena t-okolina nule W takva da je $W+W\subset V$. Kako je $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}(y_n+W)$ za neke y_n, to je, za svako $a\in A, k\in \mathbb{N}$:

$$kS_a = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[(T^{-1}(y_n+W)\cap kS_a\right].$$

Preslikavanje T je s-neprekidno, pa su skupovi $T^{-1}(y_n+W)\cap kS_a$ zatvoreni u kS_a. Zbog ovoga i zbog činjenice da su (kS_a,s_a) druge kategorije u sebi postoje $x^k_a\in kS_a$ i s_a-okoline nule U^k_a tako da je

$$(x^k_a+U^k_a)\cap kS_a\subset T^{-1}(y_n+W)\cap kS_a\subset T^{-1}(y_n+W) .$$

Iz ovoga, korišćenjem osobine (Σ_1), sledi da postoje s_a-okoline nule V^k_a, takve da je $V^k_a\cap kS_a\subset T^{-1}(V)$, pa je T t-neprekidno.

Specijalan slučaj prethodne teoreme je 1.1 iz (46) i Thm.1 iz (58), a dokaz koji smo dali je modifikacija dokaza iz (46).

(3.2.12)<u>POSLEDICA</u> Neka je $E(g)$ kao u (3.2.11) i neka F ima topologiju $t=g(s,S'_n,n\in\mathbb{N})$, gde je (S'_n) rastući niz. Ako je preslikavanje T iz E u F s-neprekidno i ako je $F(t) \in$ (Sep), onda je T t-neprekidno.

DOKAZ Zbog (1.1.5) topologija t ima bazu okolina nule sastavljenu od s-zatvorenih skupova.

§3. Teorema o zatvorenom grafiku- domen je prostor s topologijom generalisane induktivne granice

Ovde ćemo dokazati neke teoreme o zatvorenom grafiku za slučaj kada je domen preslikavanja snabdeven topologijom generalisane induktivne granice. Zbog Mahowaldove teoreme (videti (o.4.2)), kao i zbog činjenice da prostor, veoma specijalnog tipa, s topologijom generalisane induktivne granice ne mora biti čak ni σ-kvazi-bačvast (videti (3.1.2)), to klasa prostora-slika mora biti uža od klase svih Banachovih prostora. Osnovnu pomoć nam pruža Kaltonova teorema o zatvorenom grafiku, koju ćemo sada formulisati u obliku koji je različit od originalnog (uporediti sa (o.4.4)):

(3.3.1) TEOREMA ((41), Thm. 2.4.) Neka je E lokalno konveksan prostor. Tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:

(a) Za svaki separabilan B_r-kompletan prostor F, svako linearno preslikavanje iz E u F s zatvorenim grafikom je slabo neprekidno.

(b) Svako linearno preslikavanje iz E u c_0 s zatvorenim grafikom je slabo neprekidno.

(c) Dual E' je slabo sekvencijalno kompletan.

Mi ćemo malo proširiti Kaltonovu teoremu: dokazaćemo da u tački (a) prostor F može pripadati klasi (Sep).

(3.3.2) LEMA Ako je F lokalno konveksan prostor, onda su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:

(a) $F \in$ (Sep).

(b) Svaki ekvineprekidan skup iz F' je $\sigma(F', F)$-metrizabilan.

DOKAZ (a) $\Rightarrow$ (b): Neka je U proizvoljna okolina nule. Postoje $x_n \in F$ takvi da je $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}(x_n+U)$. Ako je $\mathcal{F}$ familija svih konačnih podskupova skupa $\mathbb{N}$, onda skupovi $k^{-1}\{x_n : n\in\varphi\}^{o}$ $k\in\mathbb{N}$, $\varphi\in\mathcal{F}$, obrazuju bazu okolina nule za neku lokalno konveksnu topologiju s na F', koja je pseudometrizabilna. Dokažimo da je topološki prostor $(U^{o}, s|U^{o})$ Hausdorffov. Neka nije. Tada postoji $o\neq f\in U^{o}$ tako da je $o\in(f+k^{-1}\{x_n : n\in\varphi\}^{o})\cap U^{o}$ za svako $k\in\mathbb{N}$, $\varphi\in\mathcal{F}$, pa je $f\in -k^{-1}\{x_n\}^{o}=k^{-1}\{x_n\}^{o}$, odnosno $|f(x_n)|\leq k^{-1}$ za svako $k,n\in\mathbb{N}$, pa je $f(x_n)=o$ za svako $n\in\mathbb{N}$. Neka je $x\in F$ proizvoljno. Tada je $x=x_p+u$, za neko $p\in\mathbb{N}$ i neko $u\in U$. Iz ovoga i prethodnog sledi da je

$$|f(x)|\leq|f(x_p)|+|f(u)|=|f(u)|\leq 1.$$

Dakle, za svako $x\in F$ je $|f(x)|\leq 1$, tj. $f=o$, što je u kontradikciji sa $f\neq o$. Znači, topologija $s|U^{o}$ je Hausdorffova. Kako je $\sigma(F',F)\geq s$ i kako je U^{o} $\sigma(F',F)$-kompaktan skup, to iz (42), 5.8 sledi da je $\sigma(F',F)|U^{o}=s|U^{o}$, pa je U^{o} $\sigma(F',F)$-metrizabilan.

(b) $\Rightarrow$ (a) : Neka je U zatvorena apsolutno konveksna okolina nule. Polara U^{o} je slabo metrizabilan skup, pa postoje $y_n\in F$, takvi da je familija skupova $k^{-1}\{y_n : n\in\varphi\}^{o}\cap U^{o}$ $k\in\mathbb{N}$, $\varphi\in\mathcal{F}$, baza okolina nule topologije $\sigma(F',F)|U^{o}$. Neka je $F_1=\operatorname{span}\{y_n : n\in\mathbb{N}\}$. Tada je $F=F_1+U$. Zaista, neka je $x\in F$. Tada je skup $\{x\}^{o}\cap U^{o}$ okolina nule u topologiji $\sigma(F',F)|U^{o}$, pa postoje $k\in\mathbb{N}$ i $\varphi\in\mathcal{F}$, takvi da je $\{x\}^{o}\cap U^{o}\supset k^{-1}\{y_n : n\in\varphi\}^{o}\cap U^{o}$. Uzimajući polare obeju strana, dobijamo

$$\overline{\Gamma(\overline{\Gamma\{x\}}\cup U)}\subset\overline{\Gamma(k\overline{\Gamma\{y_n : n\in\varphi\}}\cup U)}.$$

Skup φ je konačan, pa je $\Gamma\{y_n : n\in\varphi\}=\overline{\Gamma\{y_n : n\in\varphi\}}$ i ovaj skup je kompaktan. Iz ovoga i iz

$$\overline{\Gamma(k\Gamma\{y_n : n\in\varphi\}\cup U)}\subset\overline{k\Gamma\{y_n : n\in\varphi\}+U}=k\Gamma\{y_n : n\in\varphi\}+U$$

(zbir kompaktnog i zatvorenog skupa je zatvoren skup) sledi:

$$\overline{\Gamma(\overline{\Gamma\{x\}}\cup U)}\subset k\Gamma\{y_n : n\in\varphi\}+U,$$

pa je $x\in F_1+U$, što smo i hteli da dokažemo. Onda iz (3.2.9) sledi da je $F\in(\mathrm{Sep})$.

Sada možemo dokazati pomenuto proširenje Kaltonove teoreme:

(3.3.3)TEOREMA Ako je E lokalno konveksan prostor, onda je svako od tvrdjenja (a),(b),(c) iz (3.3.1) ekvivalentno sa:

(a')Za svaki B_r-kompletan prostor F iz klase (Sep), svako linearno preslikavanje iz E u F s zatvorenim grafikom je slabo neprekidno.

DOKAZ Implikacija (a') $\Rightarrow$ (a) je trivijalna, dok se implikacija (c) $\Rightarrow$ (a') dokazuje na isti način kao implikacija (c) $\Rightarrow$ (a) u (41),Thm.2.4. , s tim što mi koristimo lemu (3.3.2), umesto 1.1 iz (41).

Da bismo dokazali da je prethodna teorema proširenje Kaltonove teoreme, potrebno je još dokazati da postoji B_r-kompletan prostor iz klase (Sep) koji nije separabilan. Biće nam potrebna sledeća lema:

(3.3.4)LEMA Ako je F lokalno konveksan prostor, onda je prostor $(F, \sigma(F,F'))$ u klasi (Sep).

DOKAZ Neka je U slaba okolina nule u F. Onda postoje $f_i \in F'$ $(i=1,\dots,n)$, takvi da je $\{f_1,\dots,f_n\}^o \subset U$. Uzimajući polare obeju strana, dobijamo da je $U^o \subset \{f_1,\dots,f_n\}^{oo}$ .Skup $\{f_1,\dots,f_n\}^{oo}$ je n-dimenzionalan, pa je on metrizabilan u topologiji $\sigma(F',F)$. Samim tim i skup U^o je takav, pa tvrdjenje sledi iz (3.3.2).

(3.3.5)PRIMER Neka je $F = \mathbb{K}^I$, gde je I skup sa osobinom da je $\mathrm{Card}(I) > 2^c$ i neka je F snabdeven topologijom proizvoda. Ta topologija nije ništa drugo do slaba topologija, pa iz prethodne leme sledi da je F u klasi (Sep). Prostor F nije separabilan: ako bi bio, onda bi bilo da je $\mathrm{Card}(F) \leq 2^{2^{\aleph_0}}$, što nije tačno, jer je

$$\mathrm{Card}(F) = (\mathrm{Card}(\mathbb{K}))^{\mathrm{Card}(I)} > 2^{2^c}$$

(videti (7),II,zadatak 122). Prostor F je B_r-kompletan (čak je B-kompletan), što sledi iz poznate karakterizacije B_r-kompletnih prostora ((44), §34.2.(2)) i iz sledeće činjenice: svako neprekidno linearno preslikavanje iz F u lokalno konveksan prostor G je topološki homomorfizam ((34),4.1.6,Exc. 1.b)

Vratimo se sada teoremi o zatvorenom grafiku. Iz (3.1.5), (3.3.3) i (3.2.11) sledi:

(3.3.6)<u>TEOREMA</u> Neka prostor $E(g)$, $g=g(s_a,S_a,a\in A)$, ima osobinu (Σ_1), neka su parovi (S_a,s_a) druge kategorije u sebi i neka je lokalno konveksan prostor $F\in(\mathrm{Sep})$ B_r-kompletan. Ako linearno preslikavanje iz E u F ima zatvoren grafik, onda je ono neprekidno.

§ 4. Dokaz jedne Collinsove hipoteze

Godine 1968. je H.S. Collins u radu (12), str. 371, postavio sledeću hipotezu (uzimamo u obzir i 5.2 iz navedenog rada): ako je $E=C^b(T)$ prostor neprekidnih i ograničenih funkcija (realnih ili kompleksnih) nad ekstremalno diskoneksnim lokalno kompaktnim Hausdorffovim topološkim prostorom T i ako je on snabdeven striktnom topologijom β, onda je svaki $\sigma(E',E)$-Cauchyjev niz iz E' ekvineprekidan.

Mi ćemo dokazati da je ova hipoteza tačna.

Poznato je da važi jednakost $\beta=g(t,nB,n\in\mathbb{N})$, gde je t kompaktno-otvorena topologija na E (prednorme su $p_K(x)=\sup_{t\in K}|x(t)|$, K su kompaktni skupovi) i $B=\{x\in E:\ \sup_{t\in T}|x(t)|\leq 1\}$ (videti primer (1.2.3)).

S obzirom na (3.1.5), hipoteza će biti dokazana ako dokažemo da prostor (E,β) ima osobinu (Σ_1) i da je skup B t-druge kategorije u sebi (ovo poslednje je ekvivalentno sa: nB je t-druge kategorije u sebi za svako $n\in\mathbb{N}$).

U daljem ćemo sa T uvek označavati ekstremalno diskoneksan lokalno kompaktan Hausdorffov prostor, a sa $\|\ \|$ uniformnu normu na E ($\|x\|=\sup_{t\in T}|x(t)|$).

Dokažimo prvo tri leme koje su, po svoj prilici, dobro poznate:

(3.4.1)<u>LEMA</u> Ako je $K\subset T$ kompaktan skup, onda postoji otvoreno-zatvoren kompaktan skup $L\supset K$.

DOKAZ Svaka tačka $x\in K$ ima otvorenu okolinu U_x, takvu da je $\overline{U}_x$ kompaktan skup. Iz $K\subset\bigcup_{x\in K}U_x$ sledi da postoje $x_i\in K$ $(i=1,\dots,n)$, takvi da je $K\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_{x_i}\subset\bigcup_{i=1}^{n}\overline{U}_{x_i}=L$. Skup L je otvoreno-zatvoren i kompaktan, jer su takvi i skupovi $\overline{U}_x$, zbog ekstremalne diskoneksnosti prostora T.

(3.4.2) POSLEDICA Familija skupova tipa $\{x:\ p_K(x)<e\}, e>o$, $K\subset T$ otvoreno-zatvoren kompaktan skup, čini fundamentalan sistem okolina nule topologije t.

(3.4.3) LEMA Ako su $K,L\subset T$ otvoreno-zatvoreni kompaktni skupovi i $a>b>o$, onda iz $\{x:\ p_L(x)<b\}\subset\{x:\ p_K(x)<a\}$ sledi da je $K\subset L$.

DOKAZ Neka postoji $t\in K\setminus L$. Skupovi $\{t\}$ i L su kompaktni, pa postoji $x\in C^b(T)$ takvo da je $x(t)=a+1$ i $x(L)=\{o\}$. Onda je $x\in\{x:\ p_L(x)<b\}$ i $x\notin\{x:\ p_K(x)<a\}$. Kontradikcija.

Dok su prethodne dve leme trivijalne, s trećom to nije slučaj (ona je formalno jača od jednog zadatka iz (32)):

(3.4.4) LEMA Neka je $G\subset T$ otvoren skup i x neprekidna i ograničena funkcija na G. Tada postoji $y\in C^b(T)$, tako da je $y|G=x$, $y(T\setminus\overline{G})=\{o\}$ i $\sup_{t\in G}|x(t)|=\|y\|$.

DOKAZ Funkcija x je neprekidna ako i samo ako su funkcije $Re(x)$ i $Im(x)$ neprekidne, pa se bez smanjenja opštosti može pretpostaviti da je x realna funkcija.

Neka je $G(r)=\{t\in G:\ x(t)<r\}$. Jasno je da važi jednakost $x(t)=\inf\{r\in\mathbb{R}:\ t\in G(r)\}$. Označimo sa $H(r)$ zatvorenja skupova $G(r)$ u $\overline{G}$ i sa z funkciju definisanu jednakošću $z(t)=$ $=\inf\{r\in\mathbb{R}:\ t\in H(r)\}$. Oblast definisanosti funkcije z je $\overline{G}$: iz $G(r)=G$ za $r\gg\sup_{t\in G}|x(t)|$ sledi $H(r)=\overline{G}$ za iste r.

Sada ćemo dokazati da je $z|G=x$. Iz $G(r)\subset H(r)$ sledi da je $\{r\in\mathbb{R}:t\in G(r)\}\subset\{r\in\mathbb{R}:t\in H(r)\}$, a odavde- da je $x(t)\geqslant z(t)$ za svako $t\in G$. Neka postoji $t_o\in G$ sa osobinom da je $x(t_o)>$ $>z(t_o)$ i neka su $a,b\in\mathbb{R}$ takvi da je $x(t_o)>a>b>z(t_o)$. Tada je $t_o\in H(b)\cap G$ i $t_o\notin G(a)$. Iz $b<a$ dobijamo da je

$\overline{G(b)}^{G} \subset G(a)$, pa iz $H(b) \cap \overline{G} = \overline{G(b)}^{\overline{G}} \cap G = \overline{G(b)}^{G} \subset G(a)$ sledi $t_o \in G(a)$. Kontradikcija.

Sledeći korak dokaza je dokaz neprekidnosti funkcije z. Za to je dovoljno dokazati sledeće: 1^o skupovi $H(r)$ su otvoreni u $\overline{G}$; 2^o $\overline{H(r)}^{\overline{G}} \subset H(s)$ za $r < s$; 3^o $\bigcup_{r \in \mathbb{R}} H(r) = \overline{G}$; 4^o $\bigcap_{r \in \mathbb{R}} H(r) = \emptyset$ (videti, na pr. (4o),12.1). Skupovi $G(r)$ su otvoreni u G (x je neprekidna funkcija), pa su oni otvoreni i u $\overline{G}$, jer je G otvoren u T. Skup $\overline{G}$ je otvoren u T (ekstremalna diskoneksnost), pa je on ekstremalno diskoneksan u indukovanoj topologiji ((24), 6. §2. Ćwiczenie G.(b)). Zbog toga su skupovi $H(r)$ otvoreno-zatvoreni u $\overline{G}$, pa su ispunjeni uslovi 1^o i 2^o (poslednji i zbog $G(r) \subset G(s)$ za $r < s$). Uslov 3^o je, kao što smo već videli, takodje ispunjen ($H(r) = \overline{G}$ za dovoljno veliko r). Konačno i uslov 4^o je ispunjen, jer iz $G(r) = \emptyset$ za $r < -\sup_{t \in G} |x(t)|$ sledi $H(r) = \emptyset$ za iste r.

Prema tome, funkcija z je neprekidna, ograničena i $z|G = x$.

Funkciju y definišemo na sledeći način: $y(t) = z(t)$ za $t \in \overline{G}$ i $y(t) = o$ za $t \notin \overline{G}$. Pošto je skup $\overline{G}$ otvoreno-zatvoren skup, to funkcija y ima sve nabrojane osobine.

Sada možemo da dokažemo ono što smo želeli:

(3.4.5) TVRDJENJE Prostor (E, β) ima osobinu (Σ_1).

DOKAZ Neka je $x_o \in B$ i U proizvoljna t-okolina nule. Bez smanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $x_o \neq o$. Sa $U' \subset U$ označimo onu apsolutno konveksnu t-okolinu nule za koju je $x_o \notin 2^{-1}U'$. Postoji $r \in]o,1[$, takvo da je $(1-r)x_o \in 2^{-1}U'$, tj. da je $rx_o \in x_o + 2^{-1}U'$. Odatle je $rx_o + 2^{-1}U' \subset x_o + U' \subset x_o + U$.

Dalje, neka je $V = \{x : p_K(x) < e\} \subset 2^{-1}U'$, gde je $e > o$ i K kompaktan skup. Iz (3.4.1) sledi da postoji otvoreno-zatvoren kompaktan skup $L \supset K$. Neka je $W = \{x : p_L(x) < d\}$, gde je $d = \min\{2^{-1}, e, 1-r\}$. Tada je

$$W \cap B \subset (rx_o + V) \cap B - (rx_o + V) \cap B \subset (x_o + U) \cap B - (x_o + U) \cap B.$$

Zbog prethodnog je dovoljno dokazati samo prvu inkluziju.

Neka je $x \in W \cap B$. Definišemo x_1 i x_2 na sledeći način: $x_1 = x + rx_o - (dx + (1-d)rx_o) \cdot \varphi$, $x_2 = rx_o - (dx + (1-d)rx_o) \cdot \varphi$, gde je

φ karakteristična funkcija skupa $T\setminus L$. Ona je neprekidna, jer je L otvoreno-zatvoren skup, pa su $x_1, x_2 \in C^b(T)$. Jasno je da je $x=x_1-x_2$. Sada ćemo dokazati da $x_1, x_2 \in (rx_o+V)\cap B$. Sledeće nejednakosti su jasne:

$$p_K(x_1-rx_o) \leq p_L(x_1-rx_o)=p_L(x) < d \leq e$$

$$p_K(x_2-rx_o) \leq p_L(x_2-rx_o)=o < e \ ,$$

pa $x_1, x_2 \in rx_o+V$.

Dalje je:

$$\text{za } t\in L: \ |x_1(t)|=|x(t)+rx_o(t)| \leq |x(t)| +r|x_o(t)|< d+r \leq 1$$

$$|x_2(t)|=r|x_o(t)| \leq r<1 \ ;$$

$$\text{za } t\notin L: \ |x_1(t)|=|(1-d)x(t)+drx_o(t)| \leq 1-d+dr \leq 1$$

$$|x_2(t)|=|-dx(t)+drx_o(t)| \leq d+dr< 2d \leq 1 \ ,$$

(koristili smo da je $\|x\| \leq 1$, $\|x_o\| \leq 1$), pa je $x_1, x_2 \in B$, što je i trebalo dokazati.

(3.4.6)PRIMEDBA S obzirom da se x_1 i x_2 iz prethodnog dokaza mogu napisati i u obliku $x_1=(1-d)x+drx_o+(dx+(1-d)rx_o)\cdot\varphi_1$, $x_2=-dx+drx_o+(dx+(1-d)rx_o)\cdot\varphi_1$, gde je φ_1 karakteristična funkcija skupa L, to prethodno tvrdjenje važi i za prostore $C_o(T)$ i $C_{oo}(T)$ funkcija koje teže nuli u beskonačnosti, odnosno funkcija s kompaktnim nosačem, ako su oni snabdeveni Buckovom striktnom topologijom.

Još je preostalo da se dokaže:

(3.4.7)TVRDJENJE Skup $B=\{x\in C^b(T): \|x\| \leq 1\}$ je t-druge kategorije u sebi.

DOKAZ Neka su $B_n(n=1,\ldots)$ $t|B$-otvoreni i $t|B$-gusti u B i $A\subset B$ $t|B$-otvoren skup. Treba dokazati da je $A\cap\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\neq\emptyset$.

Skup $A\cap B_1$ je $t|B$-otvoren i neprazan, pa postoje $x_1\in A\cap B_1$ i $U_1=\{x: p_{K_1}(x)< e_1\}$, takvi da je $(x_1+U_1)\cap B\subset A\cap B_1$, gde je K_1 otvoreno-zatvoren kompaktan skup (zbog (3.4.2)) i $o< e_1< 1$. Skup $(x_1+U_1)\cap B_1$ je $t|B$-otvoren i neprazan, pa postoje $x_2\in(x_1+U_1)\cap B_2$ i $U_2=\{x: p_{K_2}(x)< e_2\}$, takvi da je $(x_2+\bar{U}_2)\cap B\subset(x_1+U_1)\cap B_2$, gde je $e_2< 2^{-1}e_1$, $U_2\subset U_1$, K_2 otvoreno-

-zatvoren kompaktan skup i $K_1 \subset K_2$ (zbog leme (3.4.3)).Nastavljajući induktivno ovaj postupak, uz korišćenje (3.4.2) i (3.4.3), dobijamo x_n, K_n, e_n, U_n sa sledećim osobinama: $x_n \in \in (x_{n-1}+U_{n-1}) \cap B_n$, $(x_n+\bar{U}_n) \cap B \subset (x_{n-1}+U_{n-1}) \cap B_n$, $U_n \subset U_{n-1}$, $e_n < < 2^{-1} e_{n-1}$, $U_n = \{x : p_{K_n}(x) < e_n\}$, K_n otvoreno-zatvoren kompaktan skup, $K_n \supset K_{n-1}$ (za $n=2,3,\ldots$).

Iz prethodnog, za $m > n$, dobijamo:

$$x_m \in (x_m+\bar{U}_m) \cap B \subset (x_{m-1}+U_{m-1}) \cap B_m \subset ((x_{m-1}+\bar{U}_{m-1}) \cap B) \cap B_m \subset$$
$$\subset (x_{m-2}+U_{m-2}) \cap B_{m-1} \cap B_m \subset \cdots \subset$$
$$\subset (x_n+U_n) \cap B_{n+1} \cap \ldots \cap B_m,$$

pa je $x_m - x_n \in U_n$.Ako je još $n \geqslant q$, onda iz $U_n \subset U_q$ sledi da je $x_m - x_n \in U_q$, tj.

$$(*) \qquad p_{K_q}(x_m-x_n) < e_q \quad \text{za } m > n \geqslant q.$$

Neka je $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ i $x_n' = x_n | G$.Ako je $t \in G$ i $e > 0$, onda postoje $i, j \in \mathbb{N}$ za koje je $e_i < e$ i $t \in K_j$, pa je $e_k < e$ i $t \in \in K_k$ za $k = \max\{i,j\}$ .Iz $(*)$ onda sledi

$$|x_m'(t) - x_n'(t)| \leq p_{K_k}(x_m - x_n) < e_k < e \quad \text{za } m > n \geqslant k,$$

tj. niz $(x_n'(t))$ je Cauchyjev u $\mathbb{K}$, a samim tim i konvergentan.Dakle, za svako $t \in G$, $x_n'(t) \longrightarrow x(t)$. Sada ćemo dokazati da je ova konvergencija uniformna na svakom kompaktnom skupu K iz G.Skupovi K_n su otvoreni u T, pa su otvoreni i u G, jer je G otvoren u T, pa iz $K \subset G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ i $K_n \subset K_{n+1}$ sledi da je $K \subset K_a$ za neko $a \in \mathbb{N}$.Neka je $f > 0$ i $b \in \mathbb{N}$, takvo da je $e_b < < f$.Onda je $K \subset K_c$ i $e_c < f$ za $c = \max\{a,b\}$, pa iz $(*)$ sledi:

$$p_K(x_m' - x_n') \leq p_{K_c}(x_m - x_n) < e_c < f, \quad \text{za } m > n \geqslant c,$$

tj. niz $(x_n'|K)$ je ravnomerno Cauchyjev, a samim tim i ravnomerno konvergentan na K.Prema tome, niz (x_n') ravnomerno konvergira funkciji x na svakom kompaktu K, pa su restrikcije $x|K$ neprekidne.Kako je G, kao otvoren podskup, lokalno kompaktan ((24),3. §3.Twierdzenie 5.), to iz prethodnog sledi da je x neprekidna funkcija.

Kako je $\sup_{t \in G} |x_n'(t)| \leq \|x_n\| \leq 1$ za svako $n \in \mathbb{N}$, to je i $\sup_{t \in G} |x(t)| \leq 1$, pa iz leme (3.4.4) sledi da postoji neprekidna i ograničena funkcija y na T, takva da je $y|G=x$ i $\|y\|\leq 1$.

Dokažimo sada da je $y\in A\cap\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$. Iz (*) sledi (za $m\to\infty$, $n=q$ i uzimajući u obzir $p_{K_q}(x_m'-x_n')=p_{K_q}(x_m-x_n)$): $p_{K_n}(x-x_n)\leq e_n$ tj. $x\in x_n+\overline{U}_n$, pa je (zbog $y|G=x$) i $y\in x_n+\overline{U}_n$ za svako $n\in\mathbb{N}$. Zbog inkluzije

$$(x_n+\overline{U}_n)\cap B\subset(x_{n-1}+U_{n-1})\cap B_n$$

je $y\in B_n$ za $n=2,3,\ldots$, a zbog inkluzije $(x_1+\overline{U}_1)\cap B\subset A\cap B_1$ je $y\in A\cap B_1$ i dokaz je završen.

Prema tome, Collinsova hipoteza je tačna:

(3.4.8) TEOREMA Ako je $E=(C^b(T),\beta)$, onda je svaki $\sigma(E',E)$-Cauchyjev niz iz E' ekvineprekidan.

Za neke klase topoloških prostora T (različite od naših) su dokazana tvrdjenja tipa (3.4.8) (videti na pr. (14), Thm. 5.1). Kod tih dokaza je suštinski korišćena činjenica da je dual prostora E jednak prostoru svih Radonovih ograničenih mera na T. Prema tome, naš dokaz je potpuno različit od pomenutih.

Primetimo da smo ovde dokazali više nego što je navedeno u (3.4.8). Naime, iz prethodnih rezultata i (3.1.4) neposredno sledi:

(3.4.9) TEOREMA Neka je E kao u (3.4.8) i F lokalno konveksan prostor. Ako su $R_n:E\longrightarrow F$ neprekidna linearna preslikavanja i niz $(R_n(x))$ je Cauchyjev za svako $x\in E$, onda je niz (R_n) ekvineprekidan. Ako još $R_n(x)\longrightarrow R(x)$, onda je R neprekidno preslikavanje i $R_n\longrightarrow R$ uniformno na svakom pretkompaktnom skupu iz E.

Druga hipoteza u (12), str. 371, je sledeća: ako je S prostor T snabdeven diskretnom topologijom, onda postoji neprekidna projekcija $C^b(S)\longrightarrow C^b(T)$ (oba prostora su snabdevena odgovarajućim striktnim topologijama), tj. $C^b(T)$ ima topološki komplement u prostoru $C^b(S)$. Ovu hipotezu nismo uspeli ni da dokažemo ni da opovrgnemo, ali smo dobili neke rezultate u vezi s tim:

(3.4.1o) TEOREMA Ako je G T otvoreno-zatvoren skup, onda je

$$C^b(T)=C^b(G)\oplus C^b(T\setminus G),$$

pri čemu su svi prostori snabdeveni odgovarajućim striktnim topologijama β,β_1,β_2; i važe jednakosti $\beta_1=\beta|C^b(G)=$ $=g(t|C^b(G),nB_1,n\in\mathbb{N})$, gde je B_1 zatvorena jedinična kugla prostora $C^b(G)$; analogno za β_2.

DOKAZ Karakteristična funkcija φ skupa G je neprekidna, pa je dobro definisano linearno preslikavanje P iz $C^b(T)$ u $C^b(G)$, $P(x)(t)=x(t)\cdot\varphi(t)$. Ono je sirjekcija: ako je $y\in C^b(T)$, onda je $P(x)=y$ za $x\in C^b(G)$, definisano sa $x(t)=$ $=y(t)$ za $t\in G$ i $x(t)=o$ za $t\notin G$.

Dokažimo prvo da je preslikavanje $P:(C^b(T),\beta)\to(C^b(G),\beta|C^b(G))$ neprekidno. Ako je $U=\bigcup_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}U_i\cap iB$ proizvoljna β-okolina nule (U_i su t-okoline nule), onda je $P(U)\subset U\cap C^b(G)$ (što sledi iz definicije preslikavanja P), pa je P neprekidno. Samim tim, tačna je jednakost

$$(C^b(T),\beta)=(C^b(G),\beta|C^b(G))\oplus(C^b(T\setminus G),\beta|C^b(T\setminus G)).$$

Preostalo je još da se dokažu jednakosti $\beta_1=\beta|C^b(G)=$ $=g(t|C^b(G),nB_1,n\in\mathbb{N})$ (i analogne jednakosti za β_2). Neka je $V=\bigcup_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}V_j\cap jB$ proizvoljna β-okolina nule; $V_j=\{x\in C^b(T): p_{K_j}(x)<e_j\}$, $e_j>o$ i K_j su otvoreno-zatvoreni kompaktni skupovi iz T. Ako je $K_j\cap G=\emptyset$, onda je $W_j\cap jB_1\subset P(V_j\cap jB)\subset V_j\cap$ $\cap jB\cap C^b(G)$, gde je $W_j=\{x\in C^b(G): p_{L_j}(x)<e_j\}$ i L_j je proizvoljan otvoreno-zatvoren kompaktan skup iz G (ovde i dalje smatramo da je izvršena identifikacija prostora $C^b(G)$ i $\{x\varphi: x\in C^b(T)\}$). Ako je pak, $K_j\cap G\neq\emptyset$, onda je $L_j=K_j\cap G$ otvoreno-zatvoren kompaktan skup, pa ako W_j definišemo kao maločas, dobićemo iste inkluzije. Zbog toga je

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}W_j\cap jB_1\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}V_j\cap jB\cap C^b(G)\subset\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}V_j\cap jB\Big)\cap C^b(G),$$

tj. $\beta_1\geq g(t|C^b(G),jB_1,j\in\mathbb{N})\geq\beta|C^b(G)$.

Na sličan način se dokazuju obrnute nejednakosti (za β_2 je dokaz analogan).

(3.4.11) TVRDJENJE Neka je F metrizabilan lokalno konveksan prostor s bazom (U_n) okolina nule, $U_n+U_n\subset U_{n-1}$ $(n=2,3,\ldots)$ i neka je $R:(C^b(T),\|\ \|)\longrightarrow F$ neprekidno linearno preslikavanje. Ono je β-neprekidno ako i samo ako za svako $n\in\mathbb{N}$ postoji otvoreno-zatvoren skup $K_n\subset T$, $K_n\subset K_{n+1}$ $(n=1,2,\ldots)$ sa osobinama: K_n je kompaktan i iz $\|x\|\leq 1$, $x|K_n=\{o\}$ sledi $R(x)\in U_n$.

DOKAZ $\Longrightarrow$: Restrikcija $R|B$ je t-neprekidna, pa postoje t-okoline nule $V_n=\{x:p_{K_n}(x)<e_n\}$, takve da je $R(V_n\cap B)\subset U_n$ za svako $n\in\mathbb{N}$, pri čemu su K_n otvoreno-zatvoreni kompaktni skupovi (zbog (3.4.2)) i oni obrazuju rastući niz. Neka je $\|x\|\leq 1$ i $x|K_n=\{o\}$. Tada je $x\in V_n\cap B$, pa je $R(x)\in U_n$.

$\Longleftarrow$: Preslikavanje R je norma-neprekidno, pa postoje $r_n>o$, takvi da je $R(B)\subset r_nU_{n+1}$. Neka je $W_{n-1}=\{x:p_{K_n}(x)<r_{n-1}^{-1}\}$. Tada je $R(W_n\cap B)\subset U_n$. Zaista, iz $x\in W_n\cap B$ sledi $x=x\varphi_1+x\varphi_2$ (φ_1 je karakteristična funkcija skupa K_{n+1}, a φ_2 -njegovog komplementa), $\|x\varphi_2\|\leq\|x\|\leq 1$ i $x\varphi_2|K_{n+1}=o$, pa je $R(x\varphi_2)\in U_{n+1}$. Dalje je $\|x\varphi_1\|=p_{K_{n+1}}(x)<r_n^{-1}$, pa je $x\varphi_1\in r_n^{-1}B$. Konačno je

$$R(x)=R(x\varphi_1)+R(x\varphi_2)\in R(r_n^{-1}B)+R(x\varphi_2)\subset U_{n+1}+U_{n+1}\subset U_n.$$

(3.4.12) POSLEDICA Ako je R β-neprekidno, onda postoji rastući niz otvoreno-zatvorenih kompaktnih skupova $K_n\subset T$ sa osobinom: iz $x\in C^b(T)$ i $x|\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n=\{o\}$ sledi $R(x)=o$.

Kombinovanjem (3.4.10) i (3.4.12) dobijamo:

(3.4.13) TEOREMA Neka je F metrizabilan lokalno konveksan prostor i $R:(C^b(T),\beta)\longrightarrow F$ neprekidno linearno preslikavanje. Tada postoji rastući niz otvoreno-zatvorenih kompaktnih skupova $K_n\subset T$, takav da je :

(a) $(C^b(T),\beta)=(C^b(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n}),\beta_1)+(C^b(T\setminus\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n}),\beta_2)$

(b) $R(C^b(T\setminus\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n}))=\{o\}$

gde su β_1 i β_2 odgovarajuće striktne topologije.

DOKAZ Tvrdjenje pod (a) je specijalan slučaj (3.4.10) (za $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n$), a (b) sledi iz (3.4.12), jer je $C^b(T\setminus\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n})$ izomorfan sa $\{x\varphi_{T\setminus\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n}}:x\in C^b(T)\}$, a ovaj (zbog (3.4.4)) sa $\{x\varphi_{T\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n}:x\in C^b(T)\}$.

G L A V A 4

PRODUŽENJE LINEARNIH FUNKCIONALA I TEOREME O ZATVORENOM GRAFIKU

U §1. su dati uslovi pri kojima je linearan funkcional f neprekidan na lokalno konveksnom prostoru E, ako su neprekidne restrikcije $f|S_n (n=1,2,\ldots)$, gde su S_n apsolutno konveksni podskupovi prostora E. Dobijeni rezultati su opštiji i (ili) bolji od niza rezultata u vezi s neprekidnim produženjem linearnog funkcionala, neprekidnog na potprostoru prostora s topologijom (obične) induktivne granice, koji su dokazani u (17),(18),(27),(28),(43),(51),(64),(66),(76). U svim ovim radovima (izuzev (18) i (27)) rezultati o kojima je reč se odnose na induktivne granice Banachovih prostora, dok naši rezultati važe i za neke prostore čiji duali nisu čak ni slabo sekvencijalno kompletni. Iz naših rezultata se dobijaju i poboljšanja nekih rezultata (koji su raznih tipova) iz (19), (25),(71) i (77).

U §2. su neki rezultati iz §1. prošireni na linearna preslikavanja. Dobijeni rezultati su iskorišćeni za dokaz nekih teorema o zatvorenom grafiku, kod kojih su oba prostora snabdevena topologijama generalisane induktivne granice, a iz ovih teorema su dobijena proširenja i (ili) poboljšanja nekih McIntoshevih (53) i Iyahenovih (38),(39) teorema o zatvorenom grafiku i dobijene su teoreme o zatvorenom grafiku iz (7o).

§1. Produženje linearnih funkcionala neprekidnih na članovima niza apsolutno konveksnih skupova

Ovde ćemo uvek pretpostavljati da je (S_n) niz apsolutno

$f_n \in (E,t)'$, to je $f_m - f_n \in S_p^o$ za $m > n \geq j$. Odatle je $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset$ $\subset \{f_1,\dots,f_j\} + S_p^o$. Skup $\{f_1,\dots,f_j\}$ je $t_{\mathcal{B}}$ -sekvencijalno kompaktan, pa iz (4.1.1) sledi da je skup $\{f_1,\dots,f_j\}+S_p^o$ $t_{\mathcal{B}}$-sekvencijalno kompletan. Kako je $t_{\mathcal{B}} \leq t_{\varphi}|(E,t)'$ (jer je svaki element iz $\mathcal{B}$ progutan nekim S_n), to je niz (f_n) $t_{\mathcal{B}}$-Cauchyjev. Zbog ovog i prethodnog, postoji $f' \in \{f_1,\dots,f_j\}+S_p^o \subset$ $\subset (E,t)'$ takvo da je $t_{\mathcal{B}}$-$\lim f_n = f'$. Dokažimo da je $f=f'$. Iz $\bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\} = E$ i $\bigcup_{k,n=1}^{\infty} kS_n = E$ sledi da je $\sigma(E_t',E) \leq t_{\mathcal{B}}$ i $\sigma(E_g',E) \leq$ $\leq t_{\varphi}$, pa iz $t_{\mathcal{B}}$-$\lim f_n = f'$ i t_{φ}-$\lim f_n = f$ sledi $\lim f_n(x) =$ $= f'(x)$ i $\lim f_n(x) = f(x)$ za svako $x \in E$. Odatle je $f(x)=f'(x)$ za svako $x \in E$ i dokaz je završen.

Neka je, sada, E' $\tau(E',E)$-sekvencijalno kompletan i neka je $\mathcal{B}$ familija svih apsolutno konveksnih slabo kompaktnih skupova iz E. Ako je $K \in \mathcal{B}$, onda je K druge kategorije u sebi u topologiji $\sigma(E,E')$, pa iz $K \subset \bigcup_{k,n=1}^{\infty} kS_n$ sledi da postoje i, $j \in \mathbb{N}$ i $x \in K \cap iS_j$, kao i slaba apsolutno konveksna okolina nule U, takvi da je $(x+U) \cap K \subset i\overline{S}_j$. Kako U guta K, to iz (3.1.7) onda sledi da $\overline{S}_j$ guta K. Tvrdjenje onda sledi iz prvog dela teoreme, iz (1.1.7) i $\overline{S}_j^o = S_j^o$.

Maločas dokazana teorema je uopštenje teoreme 2.a,b iz (18). Ta teorema je dokazana za slučaj kada je (S_n) rastući niz potprostora, $\mathcal{B}$ familija ograničenih skupova i E' $t_{\mathcal{B}}$-sekvencijalno kompletan. Prva i treća pretpostavka su od suštinskog značaja za dokaz u (18). Specijalan slučaj je u (18) dokazan uz (kao što se maločas videlo) suvišnu pretpostavku da su S_n zatvoreni potprostori.

(4.1.3)<u>PRIMEDBA</u> Ako se u specijalnom slučaju teoreme (4.1.2) pretpostavi još da je niz (S_n) rastući, onda je dovoljna pretpostavka da je E' $\beta^*(E',E)$-sekvencijalno kompletan. Za to je dovoljno dokazati da je svaki jako ograničen skup iz E progutan nekim S_n, a ovo sledi iz (21), Thm.1.

Uz jače uslove od uslova iz (4.1.2) se dobija potreban i dovoljan uslov za neprekidnost linearnog funkcionala f čije su restrikcije $f|S_n$ neprekidne. Koristićemo oznaku $E_n = \mathrm{span} S_n$.

(4.1.4)TVRDJENJE Neka je niz (S_n) rastući, $\mathcal{B}_n$ dopustiva familija u E_n čiji je svaki član progutan sa S_n, $\mathcal{B}$ familija svih konačnih unija $\bigcup_{i=1}^{k} B_i, B_i \in \mathcal{B}_{n_i}$ i neka je svaki dual E_n' $t_{\mathcal{B}_n}$-sekvencijalno kompletan. Prostor E' je $t_{\mathcal{B}}$-sekvencijalno kompletan ako i samo ako je linearan funkcional f na E neprekidan čim su neprekidne restrikcije $f|S_n$.

DOKAZ $\Rightarrow$: Zbog $\sigma(E',E) \leq t_{\mathcal{B}}$ su polare S_n^o $t_{\mathcal{B}}$-zatvorene, pa su $t_{\mathcal{B}}$-sekvencijalno kompletne. Tvrdjenje onda sledi iz teoreme (4.1.2).

$\Leftarrow$: Neka je (f_n) $t_{\mathcal{B}}$-Cauchyjev niz iz E' i neka je $f_n^m = f_n|E_m$. Niz (f_n^m) je $t_{\mathcal{B}_m}$-Cauchyjev u E_m'. Zaista, jasno je da $f_n^m \in E_m'$. Ako je $B \in \mathcal{B}_m$, onda postoji $j \in \mathbb{N}$, takvo da je $f_p - f_q \in B^o$ za $p > q \geq j$, pa je $f_p^m - f_q^m \in B^{om}$ za $p > q \geq j$ (B^{om} je polara u E_m'), tj. niz (f_n^m) je $t_{\mathcal{B}_m}$-Cauchyjev u E_m'. Zato postoje $g_m \in E_m'$ takvi da je $t_{\mathcal{B}_m}\text{-}\lim f_n^m = g_m$. Kako je niz (S_n) rastući, to je preslikavanje f iz E u $\mathbb{K}$, definisano sa $f|E_n = g_n$, linearan funkcional, koji je neprekidan, jer su restrikcije $f|S_n = g_n|S_n$ neprekidne. Dokazaćemo da je $t_{\mathcal{B}}\text{-}\lim f_n = f$. Ako je $B \in \mathcal{B}$, onda je $B \in \mathcal{B}_k$ (jer je niz (S_n) rastući) za neko $k \in \mathbb{N}$. Kako je $t_{\mathcal{B}_k}\text{-}\lim f_n^k = g_k$, to postoji $i \in \mathbb{N}$, takvo da je $f_n^k - g_k \in B^{ok}$ za $n \geq i$. Iz toga i iz $f_n^k = f_n|E_k$, $f|E_k = g_k$ sledi: za $x \in B \subset E_k$ je $|f_n(x) - f(x)| = |f_n^k(x) - g_k(x)| \leq 1$ za $n \geq i$, tj. $f_n - f \in B^o$, što je je i trebalo dokazati.

Ovaj rezultat je uopštenje teoreme 3.a,b iz (18), koje se sastoji u tome što su u (18) S_n vektorski potprostori. Prethodno tvrdjenje nije tačno ako se umesto sekvencijalne kompletnosti duala E_n' pretpostavi da su polare S_n^{on} (polare su u odnosu na dualnost $\langle E_n, E_n' \rangle$) sekvencijalno kompletne. Naime, u tom slučaju iz sekvencijalne kompletnosti prostora E' sledi da je funkcional f neprekidan čim su restrikcije $f|S_n$ neprekidne (zbog (4.1.2)), ali obrat ne važi. Zaista, neka je E lokalno konveksan prostor čiji slab dual nije sekvencijalno kompletan (na primer, $E = l$ s topologijom $\tau(l, c_o)$) i neka je U apsolutno konveksna okolina nule u E. Ako je $S_n = nU$, onda je $E_n' = E'$, S_n^o su $\sigma(E',E)$-kompaktni skupovi, pa su i $\sigma(E',E)$-sekvencijalno kompletni. Iz neprekidnosti restrikcija $f|S_n$ sledi neprekidnost f, a E′ nije slabo sekvencijalno kompletan.

Teorema (4.1.2) je veoma jaka. Dokaz za to su, sem (4.1.4), sledeća tvrdjenja (sva su posledice naše teoreme), koja su uopštenja i proširenja poznatih rezultata (o tome će biti reči kasnije):

(4.1.5) <u>TVRDJENJE</u> Neka je F zatvoren vektorski potprostor prostora E koji je najviše prebrojive kodimenzije i neka je skup $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kobaza od F. Ako je $F^o \subset E'$ $t_{\mathcal{B}}$-sekvencijalno kompletna, gde je $\mathcal{B}$ dopustiva familija u E, takva da je svaki element iz $\mathcal{B}$ sadržan u nekom $F+\mathrm{span}\{x_1,\dots,x_n\}$, onda je svako linearno produženje funkcionala $f \in F'$ neprekidno.

(4.1.6) <u>TVRDJENJE</u> Neka je (S_n) rastući niz apsolutno konveksnih skupova iz E (čija unija ne mora biti gutajuća u E), $F = \mathrm{span}\,(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n)$ i neka je $S_p^o \subset F'$ $t_{\mathcal{B}}$-sekvencijalno kompletna, gde je $\mathcal{B}$ dopustiva familija u F čiji je svaki element progutan nekim S_n. Ako je svaki $\sigma(F',F)$-konvergentan niz istovremeno i $\sigma(F',\overline{F})$-konvergentan, onda je zatvorenje skupa $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ jednako algebarskom zatvorenju skupa $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{S}_n$, tj.

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n} = \bigcap_{e>0} (1+e) \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{S}_n .$$

(4.1.7) <u>TVRDJENJE</u> Neka su ispunjeni uslovi iz (4.1.6) za niz (S_n) i $F = \mathrm{span}\,(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{S}_n)$ i neka je F najviše prebrojive kodimenzije u E. Tada je F zatvoren potprostor.

Tvrdjenje (4.1.5) ima slabije pretpostavke nego I.2.1. iz (77), a samim tim i slabije pretpostavke nego Lemma 2. iz (71) (pretpostavka u (77) je da je prostor $(E', \tau(E',E))$ lokalno kompletan). Ovo tvrdjenje se dokazuje na isti način kao Lemma 2. iz (71), s tim što se neprekidnost funkcionala dokazuje primenom (4.1.2).

Tvrdjenje (4.1.6) je uopštenje Thm.2 iz (21). Dokaz našeg tvrdjenja je, uz neke izmene i korišćenje (4.1.2), kao u pomenutom radu. Primetimo da su u (19), Thm.2.1 i (69), Cor.2.2

dokazana navodna uopštenja Thm. 2 iz (21). Naime, iz učinjenih pretpostavki u pomenutim radovima i iz (37),VI,Thm.1. sledi da su te pretpostavke ekvivalentne sa pretpostavkom iz (21): E je σ-bačvast.

Konačno, tvrdjenje (4.1.7) je uopštenje (71), Lemma 3. (tu je pretpostavka da je E' slabo sekvencijalno kompletan), a dokaz je analogan dokazu iz pomenutog rada, s tim što se koristi (4.1.2).

Teorema (4.1.2) ima još jednu posledicu koja je proširenje niza poznatih rezultata. Za dokaz će nam biti potrebne sledeće tri leme:

(4.1.8)<u>LEMA</u> Neka su s i t lokalno konveksne topologije na E i neka je S apsolutno konveksan skup iz E. Ako je $s|S \leq t|S$, onda je $\sigma(E,E_s')|S \leq \sigma(E,E_t')|S$.

<u>DOKAZ</u> Neka je $U=\{x\in E: \max_{1\le i\le n} |f_i(x)|<e\}$ proizvoljna $\sigma(E,E_s')$-okolina nule. Zbog nejednakosti $s|S\leq t|S$ su restrikcije $f_i|S$ t-neprekidne. Iz (68),Thm.4 sledi da postoje $g_i\in E_t'$ takvi da je $|f_i(x)-g_i(x)|< e/2$, za svako $x\in S$. Neka je $V=\{x\in E: \max_{1\le i\le n} |g_i(x)|< e/2\}$. Skup V je $\sigma(E,E_t')$-okolina nule i važi inkluzija $V\cap S\subset U\cap S$, koja se lako proverava.

(4.1.9)<u>OZNAKA</u> Sa σt ćemo označavati topologiju $\sigma(E,E_t')$.

(4.1.1o)<u>LEMA</u> Neka je (S_n) rastući niz apsolutno konveksnih podskupova vektorskog prostora E, neka su t_n lokalno konveksne topologije na E_n=span S_n, takve da su skupovi S_n σt_n-kompaktni i da je $\sigma t_n|S_n \geq \sigma t_{n+1}|S_n$ i neka je $g=g(t_n,S_n,n\in\mathbb{N})$. Tada:

(a) Prostor (E,g) je Hausdorffov.

(b) Prostor (E,g) je regularan.

(c) Familija svih g-ograničenih skupova ima fundamentalan niz od σg-kompaktnih skupova.

<u>DOKAZ</u> (a) Neka je $x\neq o$. Kako je unija članova niza (S_n) gutajuća u E i kako je taj niz rastući, to je $x\in pS_p$ za neko $p\in\mathbb{N}$. Topologija t_p je Hausdorffova, pa postoji σt_p-zat-

vorena σt_p-okolina nule V_p takva da $x \notin V_p \cap pS_p$. Skup $V_p \cap pS_p$ je σt_p-kompaktan, pa je on i σt_{p+1}-kompaktan, pa postoji (t_{p+1} je Hausdorffova topologija) apsolutno konveksna σt_{p+1}-zatvorena σt_{p+1}-okolina nule V_{p+1}, takva da je $(x+V_{p+1}) \cap \cap (V_p \cap pS_p + V_{p+1}) = \emptyset$. Onda je $x \notin V_p \cap pS_p + V_{p+1} \cap (p+1)S_{p+1}$. Zaista, ako to ne bi bilo, onda bi postojali $v \in V_p \cap pS_p$ i $w \in \in V_{p+1} \cap (p+1)S_{p+1}$ takvi da je $x=v+w$. Odatle je $x-w/2=v+w/2$, pa je $x-w/2 \in (x+V_{p+1}) \cap (V_p \cap pS_p + V_{p+1})$, što je nemoguće. Skupovi $V_p \cap pS_p$ i $V_{p+1} \cap (p+1)S_{p+1}$ su σt_{p+1}-kompaktni, pa su oni i σt_{p+2}-kompaktni. Takav je onda i njihov zbir ((44), $\oint$15.6.(8)), pa iz $x \notin V_p \cap pS_p + V_{p+1} \cap (p+1)S_{p+1}$ sledi da postoji apsolutno konveksna σt_{p+2}-zatvorena σt_{p+2}-okolina nule V_{p+2} takva da je $(x+V_{p+2}) \cap (V_p \cap pS_p + V_{p+1} \cap (p+1)S_{p+1} + V_{p+2}) = \emptyset$. Onda $x \notin \notin V_p \cap pS_p + V_{p+1} \cap (p+1)S_{p+1} + V_{p+2} \cap (p+2)S_{p+2}$ (dokaz kao maločas). Natavljajući induktivno ovaj postupak, dobijamo niz $(V_n)_{n \geq p}$ apsolutno konveksnih σt_n-zatvorenih σt_n-okolina nule, takvih da $x \notin V_p \cap pS_p + \ldots + V_n \cap nS_n$ za svako $n \geq p$. Neka je $V= = \bigcup_{n=p}^{\infty} (V_p \cap pS_p + \ldots + V_n \cap nS_n)$. Onda je V g-okolina nule i važi $o \notin x+V$, tj. (E,g) je Hausdorffov prostor.

(b) Iz $g|S_n \leq t_n|S_n$ i (4.1.1o). sledi $\sigma g|S_n \leq \sigma t_n|S_n$. Skup S_n je σt_n-kompaktan, σg je Hausdorffova topologija, pa je $\sigma g|S_n = \sigma t_n|S_n$ (videti na pr. (42),5.8). Zbog toga je svaki skup S_n g-zatvoren i tačna je jednakost $g(\sigma t_n, S_n, n \in \mathbb{N}) = =g(\sigma g, S_n, n \in \mathbb{N})$ $(=g')$. Ako je B g-ograničen skup, onda je on i g'-ograničen, jer je $g' \leq g$. Iz (67), Thm.4 onda sledi da je $B \subset pS_p$ za neko $n \in \mathbb{N}$, kao i da je (zbog $\sigma g|pS_p = \sigma t_p|pS_p$) B σt_p-ograničen. Prema tome, (E,g) je regularan.

(c) U dokazu tvrdjenja pod (b) je dokazano da niz (nS_n) ima potrebne osobine.

Prethodna lema pokazuje da poznate teoreme o regularnosti induktivne granice lokalno konveksnih prostora kod kojih su povezujuća preslikavanja kompaktna ili slabo kompaktna (teoreme iz (43),(64),(76)) važe za mnogo širu klasu lokalno konveksnih prostora, koji ne samo da ne moraju biti bačvasti, već im ni dual ne mora biti slabo sekvencijalno kompletan (videti primer u (62)).

(4.1.11)<u>LEMA</u> Neka su S_n i t_n kao u (4.1.lo) i neka je C konveksan skup iz E. Tada je C g-zatvoren ako i samo ako su preseci $C\cap nS_n$ t_n-zatvoreni.

<u>DOKAZ</u> $\Longrightarrow$: Skup C je konveksan, pa je σg-zatvoren. Iz $\sigma g|S_n = \sigma t_n|S_n$ (videti dokaz prethodne leme) sledi $\sigma g|C\cap nS_n = \sigma t_n|C\cap nS_n$, pa je $C\cap nS_n$ σt_n-zatvoren. On je onda t_n-zatvoren, jer je konveksan.

$\Longleftarrow$: Zbog (4.1.lo)(c) je $(E_g', \beta(E_g', E)) = (E_g', \tau(E_g', E))$ i ovaj prostor je (F)-prostor, a njegov dual je E. Ako je B σg-zatvoren σg-ograničen skup iz E, onda je presek $B\cap C$ σg-zatvoren. Zaista, zbog (4.1.lo)(b) je $B\subset pS_p$ za neko $p\in\mathbb{N}$, pa je $B\cap C = B\cap C\cap pS_p$ σt_p-zatvoren skup. Onda iz $\sigma g|pS_p = \sigma t_p|pS_p$ sledi $\sigma g|B\cap C = \sigma t_p|B\cap C$, pa je skup $B\cap C$ σg-zatvoren. Dakle, za svaki σg-zatvoren σg-ograničen skup B je presek $B\cap C$ σg-zatvoren, pa iz jedne posledice Banach-Dieudonneove teoreme ((44), §21.lo.(5)) sledi da je C σg-zatvoren, a samim tim i g-zatvoren skup.

I za (4.1.11) važe slične primedbe kao za (4.1.lo).

(4.1.12)<u>TEOREMA</u> Neka su S_n i t_n kao u (4.1.lo) i neka je F potprostor prostora E takav da su preseci $F\cap S_n$ t_n-zatvoreni. Ako je $f\in F^*$ i ako su restrikcije $f|F\cap S_n$ t_n-neprekidne, onse f može produžiti do $g=g(t_n, S_n, n\in\mathbb{N})$-neprekidnog funkcionala na E.

<u>DOKAZ</u> Zbog (4.1.11) je F g-zatvoren, pa je $\tau(F_g', F)$ faktor-topologija topologije $\tau(E_g', E)$ mod F^o. Kako je, zbog (4.1.lo)(c), $\tau(E_g', E)$ Frechetova topologija, to je i $\tau(F_g', F)$ Frechetova, pa su polare $(F\cap S_n)^o$ $\tau(F_g', F)$-sekvencijalno kompletne. Tvrdjenje onda sledi iz (4.1.2).

Iz prethodne teoreme se dobijaju poznati rezultati iz (51),(28),(17),(18) (s tim što je u ovim radovima umesto uslova $\sigma t_n|S_n \geq \sigma t_{n+1}|S_n$ uzet jači uslov: $t_n|S_n \geq t_{n+1}|S_n$):

(4.1.13)<u>POSLEDICA</u> Neka je $E(t)$ stroga induktivna granica niza refleksivnih Banachovih prostora $E_n(t_n)$ i neka je F potprostor prostora E, takav da su preseci $F\cap E_n$ t_n-zatvoreni. Ako je $f\in F^{*}$ i ako su restrikcije $f|F\cap E_n$ t_n-neprekidne, onda se f može produžiti do t-neprekidnog funkcionala na E.

<u>DOKAZ</u> Ako su B_n zatvorene jedinične kugle u E_n, onda su one σt_n-kompaktne, pa su i σt_{n+1}-kompaktne. Zbog toga postoje $k_n\in\mathbb{N}$, takvi da je $B_n\subset k_nB_{n+1}$. Neka je $S_1=B_1$ i $S_n=$ $=k_1\dots k_{n-1}B_n$ za $n>1$. Zbog (4.1.12) postoji $g(t_n,S_n,n\in\mathbb{N})$-neprekidno produženje f' funkcionala f. S obzirom da su S_n t_n-okoline nule, to je $t_n=g(t_n,kS_n,k\in\mathbb{N})$, pa je $g(t_n,S_n,n\in\mathbb{N})=$ $=\mathrm{Ind}\,(E_n,g(t_n,kS_n,k\in\mathbb{N}))=\mathrm{Ind}\,(E_n,t_n)=(E,t)$. Odatle sledi da je funkcional f' t-neprekidan.

Može se dobiti i precizniji i bolji rezultat od prethodnog. Za to će nam biti potrebna sledeća lema, koja je poboljšanje i proširenje Thm.2.5.1 iz (82) (u (82) ona je dokazana za jedan specijalan tip prostora s mešovitom topologijom).

(4.1.14)<u>LEMA</u> Neka je F potprostor prostora E_t i (S_n) rastući niz apsolutno konveksnih skupova iz E, takav da za svako $n\in\mathbb{N}$ i svaki zatvoren skup $B_n\subset \overline{S}_n$ takav da je $B_n\cap\overline{F}=\emptyset$ postoji okolina nule U_n sa osobinom: $(B_n+U_n)\cap F=\emptyset$. Tada se na $\overline{F}$ poklapaju topologije $g(t,S_n,n\in\mathbb{N})$ i $g(t|\overline{F},\overline{S}_n\cap\overline{F},n\in\mathbb{N})$.

<u>DOKAZ</u> Lako se vidi da iz $(B_n+U_n)\cap F=\emptyset$ sledi da je $(B_n+1/2U_n)\cap\overline{F}=\emptyset$. Neka je $P=V_0\cap\bigcap_{n=1}^{\infty}(V_n\cap\overline{F}+nS_n\cap\overline{F})$ proizvoljna $g(t|\overline{F},\overline{S}_n\cap\overline{F},n\in\mathbb{N})$-okolina nule. Postoje t-otvorene t-okoline nule W_n, $W_n+W_n\subset V_n$. Skup $B_n=n\overline{S}_n\setminus(n\overline{S}_n\cap\overline{F}+W_n)$ je t-zatvoren i $B_n\cap\overline{F}=\emptyset$. Zaista, iz $x\in B_n\cap\overline{F}$ sledi $x\in n\overline{S}_n\cap\overline{F}\subset n\overline{S}_n\cap\overline{F}+W_n$, što je nemoguće. Onda je $n^{-1}B_n\subset\overline{S}_n$, $n^{-1}B_n\cap\overline{F}=\emptyset$, pa postoje t-okoline nule U_n sa osobinom $(1/nB_n+U_n\tfrac{1}{2})\cap\overline{F}=\emptyset$, tj. $(B_n+n/2U_n)\cap\overline{F}=$ $=\emptyset$. Neka je $U_n'=W_n\cap n/2U_n$. Onda je:

$$\overline{F}\cap(n\overline{S}_n+U_n')\subset\overline{F}\cap((B_n+U_n')\cup(n\overline{S}_n\cap\overline{F}+W_n+U_n'))\subset$$
$$\subset\overline{F}\cap((B_n+U_n')\cup(n\overline{S}_n\cap\overline{F}+V_n))=$$

$$=(\overline{F}\cap(B_n+U_n'))\cup(\overline{F}\cap(n\overline{S}_n\cap\overline{F}+V_n))$$
$$=\overline{F}\cap(n\overline{S}_n\cap\overline{F}+V_n)\subset$$
$$\subset\overline{F}\cap n\overline{S}_n+V_n\cap\overline{F}\quad,\ \text{za}\quad n=1,2,\ldots$$

pa je

$$\overline{F}\cap V_0\cap\bigcap_{n=1}^{\infty}(U_n'+n\overline{S}_n)\subset V_0\cap\bigcap_{n=1}^{\infty}(V_n\cap\overline{F}+n\overline{S}_n\cap\overline{F})\ ,$$

tj. $g(t,S_n,n\in\mathbb{N})|\overline{F}\geq g(t|\overline{F},\overline{S}_n\cap\overline{F},n\ \mathbb{N})$. Obrnuta nejednakost je uvek tačna, pa je dokaz završen.

Navedeni dokaz je poboljšanje dokaza iz (82).

(4.1.15)<u>TEOREMA</u> Neka su S_n,t_n i F kao u (4.1.12) i neka je $g=g(t_n,S_n,n\in\mathbb{N})$. Tada je

$$g(\sigma t_n,S_n\cap F,n\in\mathbb{N})=g(\sigma g,S_n,n\in\mathbb{N})|F\ .$$

<u>DOKAZ</u> Iz $g|S_n\leq t_n|S_n$ i (4.1.8) sledi $\sigma g|S_n\leq\sigma t_n|S_n$, a kako je σg Hausdorffova topologija (zbog (4.1.1o)), to je $\sigma g|S_n=\sigma t_n|S_n$. Onda je $\sigma g|S_n\cap F=\sigma t_n|S_n\cap F$. Kako su skupovi S_n σg-kompaktni i F σg-zatvoren (zbog (4.1.11)), to su ispunjeni uslovi iz (4.1.14), pa je $g(\sigma g,S_n,n\in\mathbb{N})|F=$ $=g(\sigma g,S_n\cap F,n\in\mathbb{N})=g(\sigma t_n,S_n\cap F,n\in\mathbb{N})$.

Lako se vidi da iz prethodne teoreme sledi (4.1.12), ako se uzme u obzir da je $g(\sigma g,S_n,n\in\mathbb{N})\leq g(t_n,S_n,n\in\mathbb{N})$.

Navedimo još jednu posledicu leme (4.1.14):

(4.1.16)<u>TEOREMA</u> Neka su S_n,t_n i F kao u (4.1.12) i neka su, još, S_n t_n-kompaktni skupovi. Tada je

$$g(t_n,S_n\cap F,n\in\mathbb{N})=g(g,S_n,n\in\mathbb{N})|F\ ,$$

gde je $g=g(t_n,S_n,n\in\mathbb{N})$.

Dokaz ove teoreme je analogan dokazu teoreme (4.1.15).

(4.1.17)<u>NAPOMENA</u> Tvrdjenja (4.1.1o)-(4.1.13) ostaju tačna i ako se uslovi: S_n su σt_n-kompaktni, $\sigma t_n|S_n\geq\sigma t_{n+1}|S_n$, zamene uslovima: S_n su σt_{n+1}-kompaktni, $t_n|S_n\geq t_{n+1}|S_n$. Zaista, neka je $s_n=t_{n+1}|E_n=\text{span}\ S_n$. Kako je $\sigma(E_n,E_n'(s_n))=\sigma(E_{n+1},$

$E'_{n+1})|E_n$, to su skupovi S_n σs_n-kompaktni. Za prostor (E,g'), $g'=g(s_n,S_n,n\in\mathbb{N})$, su ispunjeni uslovi iz (4.1.1o), pa zbog $g'\leq g=g(t_n,S_n,n\in\mathbb{N})$ (4.1.1o) važi i za (E,g). Da ostala tvrdjenja važe, vidi se iz sledećih razmatranja. Ako su preseci $C\cap nS_n$ t_n-zatvoreni $(n>1)$, onda su oni σs_{n-1}-zatvoreni, S_{n-1} je σs_{n-1}-kompaktan, pa je $C\cap(n-1)S_{n-1}=(C\cap nS_n)\cap(n-1)S_{n-1}$ σs_{n-1}-zatvoren, a samim tim i s_{n-1}-zatvoren, U tom slučaju je C g'-zatvoren, pa iz $g'\leq g$ sledi da je on g-zatvoren. Ako je C g-zatvoren, onda iz $\sigma g'|S_n=\sigma s_n|S_n=\sigma t_{n+1}|S_n=\sigma g|S_n$ (uzeto je u obzir da je g Hausdorffova topologija) sledi da je skup $nS_n\cap C$ $\sigma g'$-zatvoren, odnosno g'-zatvoren, pa iz (4.1.11) sledi da je on s_n-zatvoren. Kako je $s_n|S_n=t_{n+1}|S_n\leq$ $\leq t_n|S_n$, to je skup $C\cap nS_n$ t_n-zatvoren.

Iz prethodnog sledi da je konveksan skup C g-zatvoren ako i samo ako je on g'-zatvoren, pa je $\sigma g=\sigma g'$ (jer za $f\in F^*$ je $f^{-1}(o)$ g'-zatvoren skup ako i samo ako je on g-zatvoren).

Zbog prethodne napomene, specijalni slučajevi naših rezultata se mogu naći u (17),(27),(51),(64),(66),(76),(43).

Uzimajući u obzir (4.1.17), iz (4.1.15) i (4.1.16) dobijamo:

(4.1.18)<u>TEOREMA</u> Neka su S_n,t_n kao u (4.1.17) i neka je F potprostor prostora E, takav da su preseci $F\cap nS_n$ t_n-zatvoreni skupovi. Tada:

(a) $g(\sigma t_{n+1},S_n\cap F,n\in\mathbb{N})=g(\sigma g,S_n,n\in\mathbb{N})\cap F$

(b) $g(t_{n+1},S_n\cap F,n\in\mathbb{N})=g(g,S_n,n\in\mathbb{N})|F$, ako su S_n t_{n+1}-kompaktni skupovi,

gde je $g=g(t_n,S_n,n\in\mathbb{N})$.

§2. Linearna preslikavanja neprekidna na članovima familije apsolutno konveksnih skupova i teorème o zatvorenom grafiku

Kao prvo, uopštićemo teoremu (4.1.2). Radi kraćeg izražavanja uvešćemo sledeći pojam:

(4.2.1) <u>DEFINICIJA</u> Generalisan niz $(x_i : i \in I)$ je <u>dužine ξ</u> (ξ je kardinalan broj, $\xi \geq \mathrm{Card}(\mathbb{N})$) ako i samo ako je $\mathrm{Card}(I) \leq \xi$.

(4.2.2) <u>TEOREMA</u> Neka su $\mathcal{S} = \{S_a : a \in A\}$ i $\mathcal{B}$ dopustive familije apsolutno konveksnih podskupova lokalno konveksnog prostora $E(t)$, takve da je svaki element familije $\mathcal{B}$ progutan nekim S_a i neka postoji $b \in A$ takvo da je svaki $t_{\mathcal{B}}$-Cauchyjev generalisani niz, dužine $\mathrm{Card}(A)$, elemenata polare $S_b^o \subset (E,t)'$ $t_{\mathcal{B}}$-konvergentan. Ako je f linearan funkcional na E i ako su restrikcije $f|S_a$ neprekidne za svako $a \in A$, onda je f neprekidan funkcional.

Dokaz ove teoreme je uopštenje dokaza teoreme (4.1.2), pa ga nećemo navoditi.

(4.2.3) <u>TEOREMA</u> Neka su $E(t)$, $\mathcal{S}$ i $\mathcal{B}$ kao u (4.2.2) i neka je T linearno preslikavanje iz E u lokalno konveksan prostor F. Ako su restrikcije $T|S_a$ slabo neprekidne, onda je preslikavanje T slabo neprekidno.

<u>DOKAZ</u> Neka je $f \in F'$. Tada su restrikcije $fT|S_a$ slabo neprekidne, a kako je S_a apsolutno konveksan skup, to iz (34), 2.14.Exc.1.b) sledi da su one neprekidne, pa iz (4.2.2) sledi da je fT neprekidan funkcional. Prema tome, T je slabo neprekidno preslikavanje.

Preslikavanje T iz prethodne teoreme ne mora biti neprekidno čak ni kada je $A = \mathbb{N}$, a restrikcije $T|S$ t-σs-neprekidne, gde je s topologija prostora F. Da bi se to videlo dovoljno je uzeti da je T identičko preslikavanje iz $E(t)$ na

$E(g)$, $g=g(t,S_n,n\in\mathbb{N})$.Restrikcije $T|S_n$ su neprekidne, a ako bi T bilo neprekidno, onda bi bila tačna nejednakost $t\geqslant g$, što sa $t\leqslant g$ (ovo je uvek tačno) daje $t=g$.Sada ćemo dati primer prostora koji zadovoljava uslove teoreme, a kod koga je $t\neq g$.

(4.2.4)PRIMER Neka je $E=X'$ beskonačnodimenzionalan refleksivan Banachov prostor, $t=\sigma(X',X)$, B zatvorena jedinična kugla u X i $S_n=nB^o$.Topologija g nije ništa drugo do topologija $\mathcal{T}_c(X',X)$ uniformne konvergencije na pretkompaktnim skupovima iz X (po Banach-Dieudonneovoj teoremi).Ako bi bilo $t=g$, onda bi svaki pretkompaktan skup iz X bio konačnodimenzionalan, a to nije slučaj: neka je $x_n\in B$ niz linearno nezavisnih elemenata.Skup B je ograničen, pa $n^{-1}x_n \to o$ i skup$\{n^{-1}x_n : n\in\mathbb{N}\}$ je pretkompaktan, a nije konačne dimenzije.S druge strane, zbog refleksivnosti, je S_n^o $\sigma(X,X')$-kompaktan skup, a samim tim i $\sigma(E',E)=\sigma(X,X')$-sekvencijalno kompletan skup, tj. ispunjeni su uslovi teoreme za $t_{\mathcal{B}}=\sigma(E',E)$.

Jasno je da će preslikavanje T iz (4.2.3) biti neprekidno ako je t Mackeyeva topologija, ili u slučaju da je $t=g$ (pod uslovom da su restrikcije $T|S_a$ neprekidne).U daljem ćemo pokazati da je u tim slučajevima dovoljno pretpostaviti da T ima zatvoren grafik.

Počećemo s jednim tvrdjenjem iz opšte topologije (videti, na pr.(45), §41.IV.Thm.2.):

(4.2.5)LEMA Neka su X i Y topološki prostori, Y kompaktan i Hausdorffov.Preslikavanje f iz X u Y je neprekidno ako i samo ako ono ima zatvoren grafik.

U dokazu svih teorema o zatvorenom grafiku (teorema koje slede) koristićemo ovu lemu.

(4.2.6)TEOREMA Neka su $E(t)$ i $F(s)$ lokalno konveksni prostori, $\{K_a : a\in A\}$ familija slabo kompaktnih apsolutno konveksnih (resp. kompaktnih apsolutno konveksnih) podskupova prostora F i $T:E(t) \to F(s)$ linearno preslikavanje sa zatvorenim grafikom.Tada je preslikavanje T neprekidno ako se prostori

E i F snabdeju topologijama $g(\sigma t, T^{-1}(K_a), a\in A)$ i $g(\sigma s, K_a, a\in A)$ redom (resp. topologijama $g(t, T^{-1}(K_a), a\in A)$ i $g(s, K_a, a\in A)$).

DOKAZ Dokaz ćemo dati za slučaj slabih topologija; dokaz za drugi slučaj je analogan. Neka je V apsolutno konveksna $g(\sigma s, K_a, a\in A)$-okolina nule. Onda postoje σs-okoline nule V_a, takve da je $V_a \cap K_a \subset V \cap K_a$. Ako je $T_a = T|T^{-1}(K_a)$, onda je grafik preslikavanja T_a zatvoren u $(T^{-1}(K_a), \sigma t) \times (K_a, \sigma s)$, jer je grafik preslikavanja T zatvoren u $E(t) \times F(s)$, a samim tim i u $E(\sigma t) \times F(\sigma s)$. Iz (4.2.5) sledi da je T_a neprekidno, pa postoje σt-okoline nule U_a, takve da je $T_a(U_a \cap T^{-1}(K_a)) \subset \subset V_a \cap K_a$, tj. $T(U_a \cap T^{-1}(K_a)) \subset V_a \cap K_a \subset V$. Prema tome, restrikcije $T|T^{-1}(K_a)$ su σt-$g(\sigma s, K_a, a\in A)$-neprekidne, pa tvrdjenje sledi iz (1.1.2).

Na isti način se dokazuje i sledeća varijanta prethodne teoreme:

(4.2.7) TEOREMA Neka je E(t) lokalno konveksan prostor, F vektorski prostor, K_a $(a\in A)$ apsolutno konveksni skupovi iz F i s_a lokalno konveksne topologije na $F_a = \text{span } K_a$, takve da su skupovi K_a σs_a-kompaktni (resp. s_a-kompaktni). Ako linearno preslikavanje $T: E \longrightarrow F$ ima zatvoren grafik u $E(t) \times F(g(\sigma s_a, K_a))$ onda je T neprekidno ako su prostori E i F snabdeveni topologijama $g(\sigma t, T^{-1}(K_a), a\in A)$ i $g(\sigma s_a, K_a, a\in A)$ redom (resp. topologijama $g(t, T^{-1}(K_a), a\in A)$ i $g(s_a, K_a, a\in A)$).

(4.2.8) PRIMEDBA (a) Teorema (4.2.6) je tačna i kada se topologije $g(\sigma s, K_a, a\in A)$ i $g(s, K_a, a\in A)$ zamene topologijama σs i s, redom (jer su one slabije od prvih).

(b) Teoreme (4.2.6) i (4.2.7) su tačne i ako se skupovi $T^{-1}(K_a)$ zamene skupovima $\overline{T^{-1}(K_a)}$, uz pretpostavku da je unija skupova $T^{-1}(K_a)$ gutajuća u E (ovo sledi iz (1.1.7)).

(4.2.9) POSLEDICA Neka su E(t) i F(s) lokalno konveksni prostori, E' $\beta^*(E', E)$-sekvencijalno kompletan i neka F ima niz

(K_n) slabo kompaktnih skupova čija je unija gutajuća u F. Ako linearno preslikavanje T iz E u F ima zatvoren grafik, onda je ono slabo neprekidno.

DOKAZ Možemo pretpostaviti da je niz (K_n) rastući (ako nije, onda je $(\Gamma(\bigcup_{i=1}^{n} K_i))$ rastući niz slabo kompaktnih skupova-(44), § 2o.7.(5)). Zbog (4.2.6) i (4.2.8)(a),(b) je preslikavanje T $g(\sigma t, \overline{T^{-1}(K_n)}, n \in \mathbb{N})$- σs-neprekidno, tj. restrikcije $T|\overline{T^{-1}(K_n)}$ su σt- σs-neprekidne, pa su i t-σs-neprekidne. Niz $(\overline{T^{-1}(K_n)})$ je ratući niz zatvorenih apsolutno konveksnih skupova čija je unija gutajuća u E, pa iz (21), Thm.1. sledi da je svaki jako ograničen skup iz E progutan nekim članom tog niza. Iz ovoga sledi da su ispunjeni uslovi iz (4.2.3), pa je T slabo neprekidno preslikavanje.

Primetimo da prostor F iz (4.2.9) ima fundamentalan niz familije svih slabo kompaktnih apsolutno konveksnih skupova (sledi iz (2.4.7)), pa je dual F' $\tau(F',F)$-metrizabilan (važi i: ako je F' $\tau(F',F)$-metrizabilan, onda F ima fundamentalan niz familije svih slabo kompaktnih apsolutno konveksnih skupova). Zbog toga je Thm.1.(iii) iz (53) (videti (o.4.5)) posledica tvrdjenja (4.2.9) (primetimo da je u McIntoshevoj teoremi jači uslov: E' je $\tau(E',E)$-sekvencijalno kompletan). I Thm.1.(vii) iz (53) (videti (o.4.5)) je, takodje, posledica tvrdjenja (4.2.9). Zaista, ako je E sekvencijalno kompletan i E' t-sekvencijalno kompletan za neku topologiju t, $\sigma(E',E) \leq t \leq \beta(E',E)$, onda iz Banach-Mackeyeve teoreme sledi $\beta(E',E) = \beta^*(E',E)$, pa je E' $\beta^*(E',E)$-sekvencijalno kompletan. Ako je F semirefleksivan prostor s $\beta(F',F)$-metrizabilnim dualom, onda i F zadovoljava uslove iz (4.2.9). Jasno je, s obzirom na (4.2.9), da je ovde dovoljno pretpostaviti samo da je F' $\tau(F',F)$-metrizabilan, što je mnogo slabije od pretpostavki u Thm.1.(vii) iz (53)!

Sada ćemo dokazati da važi jače tvrdjenje od (2o), Prop. IV.6.12. (tj. od (44), § 35.1o.(1)). U pomenutom radu je samo dokazano da je preslikavanje T iz sledećeg tvrdjenja slabo neprekidno.

(4.2.1o) TVRDJENJE Neka je $E(t)$ lokalno konveksan prostor čiji je dual E' $t_{\mathcal{B}}$-kompletan, gde je $\mathcal{B}$ familija svih Banachovih diskova; $F(s)$ lokalno konveksan prostor koji ima refleksivnu mrežu, ili je semirefleksivan (GLF)-prostor. Ako linearno preslikavanje $T:E(t)\to F(s)$ ima zatvoren grafik, onda je T $g(\sigma t,B,B\in\mathcal{B})$-$g(\sigma s,\overline{T(B)},B\in\mathcal{B})$-neprekidno preslikavanje. Specijalno, T je slabo neprekidno preslikavanje.

DOKAZ Iz teoreme o zatvorenom grafiku za prostore s mrežom (odnosno, za (GLF)-prostore) sledi da je skup $T(B)$ σs-relativno kompaktan za svako $B\in\mathcal{B}$ (za to je dovoljno posmatrati restrikciju preslikavanja T na E_B i primeniti teoremu o zatvorenom grafiku na tu restrikciju). Iz (4.2.6) onda sledi da je T $g(\sigma t,T^{-1}(\overline{TB}),B\in\mathcal{B})$-$g(\sigma s,\overline{TB},B\in\mathcal{B})$-neprekidno preslikavanje. Iz $B\subset T^{-1}(\overline{TB})$ dobijamo da je $g(\sigma t,B,B\in\mathcal{B})\geqslant$ $\geqslant g(\sigma t,T^{-1}(\overline{TB}),B\in\mathcal{B})$, pa je T $g(\sigma t,B,B\in\mathcal{B})$-$g(\sigma s,\overline{TB},B\in\mathcal{B})$-neprekidno.

Iz ovoga i iz (4.2.8)(a), (4.2.3) sledi da je T slabo neprekidno.

Sada ćemo dokazati mnogo opštije tvrdjenje od prethodnog. Iz njega se može dobiti niz teorema o zatvorenom grafiku, dokazanih u (39) i (7o).

(4.2.11) TEOREMA Neka je $\{S_a:a\in A\}$ familija apsolutno konveksnih podskupova vektorskog prostora E, t_a lokalno konveksne topologije na span S_a, F vektorski prostor i $T:E\to F$ linearno preslikavanje, takvo da na span $T(S_a)$ postoje lokalno konveksne topologije s_a u kojima su skupovi $T(S_a)$ σs_a-kompaktni (resp. s_a-kompaktni). Ako preslikavanje T ima zatvoren grafik u topologiji $g(\sigma t_a,S_a,a\in A)\times g(\sigma s_a,T(S_a),a\in A)$ i ako je $g(\sigma s_a,T(S_a),a\in A)$ Hausdorffova topologija, onda je preslikavanje T $g(\sigma t_a,S_a,a\in A)$-$g(\sigma s_a,T(S_a),a\in A)$-neprekidno (resp. $g(t_a,S_a,a\in A)$-$g(s_a,T(S_a),a\in A)$-neprekidno).

DOKAZ Dokazaćemo samo prvi slučaj (sa slabim topologijama), dokaz drugog slučaja je analogan.

Neka je $t=g(\sigma t_a,S_a,a\in A)$. Iz (4.2.7) sledi da je preslikavanje T $g(\sigma t,T^{-1}(TS_a),a\in A)$-$g(\sigma s_a,TS_a,a\in A)$-neprekidno, pa je i $g(\sigma t, S_a, a\in A)$-$g(\sigma s_a, TS_a, a\in A)$-neprekidno (kao u dokazu (4.2.1o)). Kako je $\sigma t|S_a \leq \sigma t_a|S_a$ (videti (4.1.8)), to je $g(\sigma t, S_a, a\in A)\leq g(\sigma t_a, S_a, a\in A)=t$ i dokaz je završen.

(4.2.12)<u>POSLEDICA</u>

(a) ((39),(7o),Prop.3.4) Neka su $E(t)$, $F(s)$ lokalno konveksni prostori, $\mathcal{S}$ familija apsolutno konveksnih skupova iz E, takvih da je topologija $g=g(t,S,S\in\mathcal{S})$ saglasna s dualnošću $\langle E,E'\rangle$ (resp. $t=g$). Onda je svako linearno preslikavanje T iz E u F, koje skupove iz $\mathcal{S}$ preslikava u σs-relativno kompaktne (resp. s-relativno kompaktne) skupove i koje ima zatvoren grafik, slabo neprekidno (resp. neprekidno).

(b) ((7o),Thm.3.5) Neka je $E(t)$ lokalno konveksan prostor, $\mathcal{B}$ familija svih ograničenih apsolutno konveksnih skupova iz E i neka je topologija $g=g(t,B,B\in\mathcal{B})$ saglasna s dualnošću $\langle E,E'\rangle$ (resp. $t=g$). Onda je svako linearno preslikavanje T iz E u F sa zatvorenim grafikom, koje preslikava ograničene skupove u ograničene skupove, slabo neprekidno (resp. neprekidno), ako je F semirefleksivan (resp. semi-Montelov) prostor.

Primetimo da su i tvrdjenja 3.6-3.1o iz (7o) takodje posledice teoreme (4.2.11), ali ih nećemo navoditi.

(4.2.13)<u>TEOREMA</u> Neka je $E(t)$ Hausdorffov lokalno konveksan prostor, (K_n) rastući niz apsolutno konveksnih kompaktnih skupova čija je unija gutajuća u E. Ako linearno preslikavanje T iz E u E ima zatvoren grafik, onda je ono $g(t,K_n,n\in\mathbb{N})$-$g(t,K_n,n\in\mathbb{N})$-neprekidno.

<u>DOKAZ</u> Kako je $t\leq g=g(t,K_n,n\in\mathbb{N})$, to je grafik preslikavanja T zatvoren i u topologiji $t\times g$, pa iz (4.2.7) sledi da je T g'-g-neprekidno, gde je $g'=g(t,T^{-1}(K_n),n\in\mathbb{N})$. Ako dokažemo da je $g'\leq g$, dokaz će biti završen. Zbog $t|K_m=g|K_m$ (videti (1.1.12)) su skupovi K_m g-kompaktni, pa su i g-zatvoreni. Onda su skupovi $T^{-1}(K_m)$ g'-zatvoreni, pa iz $g'|T^{-1}(K_m)=t|T^{-1}(K_m)$ sledi da su oni t-zatvoreni. Dakle, niz $(T^{-1}(K_m))$ je rastući niz zatvorenih apsolutno konveksnih skupova čija

je unija gutajuća u E, pa iz kompaktnosti skupova K_m i (3.1.7) sledi da postoje prirodni brojevi p_n, takvi da je $K_n \subset p_n T^{-1} K_{p_n}$. Odatle sledi da je $g \geqslant g(t, p_n T^{-1} K_{p_n}, n \in \mathbb{N})$, pa iz (1.1.1o) i $g(t, T^{-1} K_{p_n}, n \in \mathbb{N}) = g(t, T^{-1} K_n, n \in \mathbb{N})$ sledi $g \geqslant g'$, što je i trebalo dokazati.

Ova teorema je proširenje Thm.3.1. iz (38).U (38) je $E = X'$, gde je X (F)-prostor, $t = \sigma(X', X)$ i $K_n = U_n^o$, gde je $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ baza okolina nule u X.U tom slučaju je $g = \tau_c(X', X)$ (u (38) je formulacija teoreme 3.1. data bez pominjanja topologije g).

Prethodna teorema se može uopštiti:

(4.2.14)<u>TEOREMA</u> Neka je E(t) lokalno konveksan prostor, F vektorski prostor u kome postoje: niz (K_n) apsolutno konveksnih skupova čija je unija gutajuća u F i lokalno konveksne topologije s_n na span K_n, takve da su K_n σs_n-kompaktni (resp. s_n-kompaktni) skupovi i da je topologija $g = g(s_n, K_n, n \in \mathbb{N})$ Hausdorffova.Neka je $\{B_a : a \in A\}$ familija apsolutno konveksnih ograničenih skupova iz E koji su druge kategorije u sebi u topologiji σt (resp. u topologiji t).Ako linearno preslikavanje T iz E u F ima zatvoren grafik u topologiji $t \times g(\sigma s_n, K_n)$, onda je ono $g(\sigma t, B_a, a \in A)$-$g(\sigma s_n, K_n, n\ \mathbb{N})$-neprekidno (resp. $g(t, B\ , a \in A)$-g-neprekidno).

<u>DOKAZ</u> Dokazaćemo samo drugi slučaj, dokaz prvog je analogan.

Iz (4.2,7) sledi da je T $g(t, T^{-1} K_n, n \in \mathbb{N})$-g-neprekidno. Ako dokažemo da je $g(t, B_a, a \in A) \geqslant g(t, T^{-1} K_n, n \in \mathbb{N})$ $(=g')$, dokaz će biti završen.Kao u dokazu (4.2.13) dobijamo da postoje $p_a \in \mathbb{N}$, takvi da je $B_a \subset p_a T^{-1} K_{p_a}$ za svako $a \in A$.Odatle sledi da je $g(t, B_a, a \in A) \geqslant g(t, p_a T^{-1} K_{p_a}, a \in A)$.Kako je $g(t, p_a T^{-1} K_{p_a}, a \in A) = g(t, T^{-1} K_{p_a}, a \in A)$ (videti (1.1.1o)) i $g(t, T^{-1} K_{p_a}, a \in A) = g(t, T^{-1} K_n, n \in \mathbb{N})$ (jer smo mogli, zbog $K_n \subset K_{n+1}$, da pretpostavimo da je $\mathrm{Card}(\{p_a : a \in A\}) = \mathrm{Card}(\mathbb{N})$), to je dokaz završen.

L I T E R A T U R A

(1) Alexiewicz A.: On sequences of operations I, Studia Math. 11(195o),1-3o

(2) Alexiewicz A.: On the two-norm convergence, Studia Math. 14(1954),49-56

(3) Alexiewicz A., Semadeni Z.: Linear functionals on two--norm spaces, Studia Math. 17(1958),121-14o

(4) Alexiewicz A., Semadeni Z.: A generalization of two-norm spaces, Bull.Acad.Polon.Sci. 6(1958), 135-139

(5) Alexiewicz A., Semadeni Z.: The two-norm spaces and their conjugate spaces, Studia Math. 18(1959), 275-293

(6) Alexiewicz A., Semadeni Z.: Some properties of two-norm spaces and a characterization of reflexivity of Banach spaces, Studia Math. 19(196o),115-133

(7) Arhangel´ski A.V., Ponomarev V.I.: Osnovy obšćej topologii v zadačah i upražnenijah, Moskva 1974.

(8) Bourbaki N.: General topology, Addison-Wesley, Reading, Mass. 1966.

(9) Bourbaki N.: Integration, Ch.1-4, Hermann, Paris 1965.

(1o) Bourbaki N.: Integration, Ch. 9, Hermann, Paris 1969.

(11) Buck R.C.: Bounded continuous functions on a locally compact space, Mich. Math. J. 5(1958), 95-1o4

(12) Collins H.S.: On the space $l^{\infty}(S)$, with the strict topology, Math. Zeitsch. 1o6(1968),361-373

(13) Collins H.S.: Strict, weighted and mixed topologies, Advances in Math. 19(1976),2o7-237

(14) Collins H.S.; Dorroh J.R.: Remarks on certain function spaces, Math. Ann. 176(1968),157-168

(15) Cooper J.B.: The strict topology and spaces with mixed topologies, Proc. Amer. Math. Soc. 3o(1971), 583-592

(16) Cooper J.B.: Saks spaces and applications to functio-

nal analysis, North-Holland, Amsterdam 1978

(17) De Wilde M.: Sur une type particulier de limite inductive, Bull. Soc. Roy. Liege 35(1966), 545-551

(18) De Wilde M.: Quelques theoremes d´extension de fonctionnelles lineaires, Bull.Soc. Roy. Sci. Liege, 35(1966),552-557

(19) De Wilde M.: Various types of barrelledness and increasing sequences of balanced and convex sets in locally convex spaces, Summer school on topological vector spaces, Springer Lect. Notes Math. 331(1973),211-217

(2o) De Wilde M.: Closed graph theorems and webbed spaces, Pitman, London 1978.

(21) De Wilde M., Houet C.: On increasing sequences of absolutely convex sets in locally convex spaces, Math. Ann. 192(1971),257-261

(22) Dorroh J.R.: The localization of the strict topology via bounded sets, Proc. Amer. Math. Soc. 2o(1969), 413-414

(23) Edwards R.E.: Functional analysis-Theory and applications, Holt, Rinehart and Winston, New York 1965.

(24) Engelking R.: Topologia ogolna, PWN, Warszawa 1975.

(25) Floret K.: Lokalkonvexe sequenzen mit kompakten abbildungen, J.reine angew. Math. 247(1971), 155-195

(26) Floret K.: Folgenretraktive sequenzen lokalkonvexer räume, J.rene angew.Math. 259(1973),65-85

(27) Floret K.: On well-located subspaces of distribution spaces, Math. Ann. 221(1976), 147-151

(28) Foias C., Marinescu G.: Fonctionnelles lineaires dans les reunions denimbrables d´espaces de Banach reflexivs, C.R.Acad.Sci.Paris 261(1965). 4958-496o

(29) Fremlin D.H., Garling D.J.H., Haydon R.G.: Bounded measures on topological spaces, Proc.London Math. Soc. 25(1972), 115-136

(3o) Garling D.J.H.: A generalized form of inductive limit topology for vector spaces, Proc. London Math. Soc. 14(3)(1964), 1-28

(31) Garling D.J.H.: Locally convex spaces with denumerable systems of weakly compact subsets, Proc. Cambridge Phil. Soc. 6o(1964), 813-815

(32) Gillman L., Jerison M.: Rings of continuous functions, Springer, New York 1976.

(33) Grothendieck A.: Sur les espaces (F) et (DF), Summa Brasil. Math. 3(1954), 57-123

(34) Grothendieck A.: Topological vector spaces, Gordon and Breach, New York 1973.

(35) Hofmann-Jørgensen J.: A generalization of the strict topology, Math. Scand. 3o(1972), 313-323

(36) Husain T.: The open mapping and closed graph theorems in topological vector spaces, Oxford Math. Monographs 1965.

(37) Husain T., Khaleelulla S.M.: Barrelledness in topological and ordered vector spaces, Springer Lect. Notes Math. 692, Berlin 1978.

(38) Iyahen S.O.: On the closed graph theorem, Israel J. Math. 1o(1971), 96-1o5

(39) Iyahen S.O.: A closed graph theorem, Proc. Amer. Math. Soc. 53(1975), 165-166

(4o) Jameson G.J.O.: Topology and normed spaces, Chapman and Hall, London 1974.

(41) Kalton N.J.: Some forms of the closed graph theorem, Proc. Cambridge Phil. Soc. 7o(1971), 4o1-4o8

(42) Kelley J.L.: General topology, Van Nostrand, Princeton 1955.

(43) Komatsu H.: Projective and injective limits of weakly compact sequences of locally convex spaces, J. Math. Soc. Japan 19(1967), 366-383

(44) Köthe G.: Topological vector spaces I, II, Springer, New York 1969, 1979.

(45) Kuratowski K.: Topology II, PWN, Warszawa 1968.

(46) Labuda I.: Continuity of operators on Saks spaces, Studia Math. 51(1974), 11-21

(47) Labuda I.: On the existence of non-trivial Saks sets and continuity of linear mappings acting on them, Bull. Acad. Polon. Sci.23(1975), 885-89o

(48) Labuda I., Orlicz W.: Some remarks on Saks spaces, Bull. Acad. Polon. Sci. 22(1974), 9o9-914

(49) Le Cam L.: Convergence in distributions of stochastic processes, Univ. Calif. Publ. Statistics 11(1957), 2o7-236

(5o) Mahowald M.: Barrelled spaces and the closed graph theorem, J. London Math. Soc. 36(1961), 1o8-11o

(51) Makarov B.M.: O induktivnyh predelah normirovannyh prostranstv, Vestnik Leningr. Univ. 13(1965), 5o-58

(52) Mařík J.: Les fonctionnelles sur l´ensemble des fonctions continues bornees, definies dans un ensemble topologique, Studia Math. 16(1957), 86-94

(53) McIntosh A.: On the closed graph theorem, Proc. Amer. Math. Soc. 2o(1969), 397-4o4

(54) Mirković B.: A note on locally convex spaces with a basic sequence of β-disks, Mat. Vesnik 7(22)(197o), 173-177

(55) Mirković B.: On locally convex spaces of the type (DF) defined by an arbitrary family of bounded sets, Mat. Vesnik 11(26)(1974),127-13o

(56) Mosiman S.: Strict topology and the ordered vector space C(S), preprint

(57) Noureddine K.: Nouvelles classes d´espaces localement convexes, Publ. Dep. Math. Lyon 1o-3(1973) 259-277

(58) Orlicz W.: Linear operations on Saks spaces I, Studia Math. 11(195o), 237-272

(59) Orlicz W.: Linear operations on Saks spaces II, Studia Math. 15(1955), 1-25

(6o) Orlicz W.: Contributions to the theory of Saks spaces, Fund. Math. 44(1957), 27o-294

(61) Orlicz W.: On the theory of linear operators in Saks spaces with an application to the theory of summability, Studia Math. 16(1957), 69-73

(62) Orlicz W., Ptak V.: Some remarks on Saks spaces, Studia Math. 16(1957),56-68

(63) Persson A.: A generalization of two-norm spaces, Ark. för Math. 5(1963), 27-36

(64) Raîkov D.A.: O dvuh klassah lokal'no vypuklyh prostranstv, važnyh v priloženiah, Trudy seminara po funkc. anal., Vyp. 5, Voro - než(1957),22-34

(65) Raîkov D.A. Nekotorye lineîno-topologičeskie svoîsstva prostranstv D i D'; dodatak 2 knjizi:Robertson A., Robertson V.: Topologičeskie vektornye prostranstva, Mir, Moskva 1967.

(66) Retah V.S.: O soprjažennom k podprostranstvu sčetnogo induktivnogo predela, DAN SSSR 184:1 (1969), 44-47

(67) Roelcke W.: On the finest locally convex topology agreeing with a given topology on a sequence of absolutely convex sets, Math. Ann. 198(1972), 57-8o

(68) Roelcke W.: On the behaviour of linear mappings on absolutely convex sets and A. Grothendieck's completion of locally convex spaces, Ill. J. Math. 17(1973),311-316

(69) Ruess W.: Generalized inductive limit topologies and barrelledness properties, Pacif. J. Math. 63(1976), 499-516

(7o) Ruess W.: Closed graph theorems for generalized inductive limit topologies, Proc.Cambridge Phil. Soc. 82(1977), 67-83

(71) Saxon S., Levin M.: Every countable codimensional sub-

space of a barrelled space is barrelled, Proc. Amer. Math. Soc. 29(1971), 91-96

(72) Schaefer H.: Topological vector spaces, Macmillan, New York 1966.

(73) Semadeni Z.: Extensions of linear functionals in two--norm spaces, Bull. Acad. Polon. Sci. 8(196o), 427-432

(74) Semadeni Z.: Embedding of two-norm spaces into the space of bounded continuous functions on a half-straight line, Bull. Acad. Polon. Sci. 8(196o), 421-426

(75) Sentilles F.D.: Bounded continuous functions on a completely regular space, Trans. Amer. Math. Soc. 168(1972), 311-336

(76) Silva J.S. e: Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni, Rend. Mat. e Appl. 14(1953), 388-41o

(77) Tsirulnikov B.: On conservation of barrelledness properties in locally convex spaces, Bull. Soc. Roy. Sci. Liege 49(198o), 5-25

(78) Webb J.H.: Sequential convergence in locally convex spaces, Proc. Cambridge Phil. Soc. 64(1968), 341-364

(79) Wheeler R.F.: The strict topology, separable measures and paracompactness, Pacif. J. Math. 47(1973), 287-3o2

(8o) Wilansky A.: On a characterization of barrelled spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 57(1976),375

(81) Wiweger A.: A topologization of Saks spaces, Bull. Acad. Polon. Sci. 5(1957), 773-777

(82) Wiweger A.: Linear spaces with mixed topology, Studia Math. 2o(1961), 47-68

S A D R Ž A J

UVOD .... I - VI

GLAVA 0. OSNOVNI POJMOVI I REZULTATI TEORIJE TOPOLOŠKIH VEKTORSKIH PROSTORA

1. Definicije topološkog vektorskog prostora, projektivne i induktivne granice 1
2. Linearna preslikavanja; dualnost 3
3. Neke klase lokalno konveksnih prostora 6
4. Teoreme o zatvorenom grafiku 7

GLAVA 1. TOPOLOGIJE GENERALISANE INDUKTIVNE GRANICE

1. Definicija i osnovne osobine 10
2. Primeri 16

GLAVA 2. TEOREME O ZATVORENOM GRAFIKU I OTVORENOM PRESLIKAVANJU ZA (GLF)-PROSTORE

1. Definicija i neke osobine (GLF)-prostora.... 20
2. Nasledne osobine (GLF)-prostora 23
3. Teoreme o zatvorenom grafiku i otvorenom preslokavanju 28
4. Primena na prostore s fundamentalnim nizom ograničenih skupova 36

GLAVA 3. BANACH-STEINHAUSOVA TEOREMA ZA GENERALISANE INDUKTIVNE GRANICE I NJENE PRIMENE

1. Banach-Steinhausova teorema 42
2. O slabo neprekidnim preslikavanjima 49
3. Teorema o zatvorenom grafiku- domen je prostor s topologijom generalisane induktivne granice 58
4. Dokaz jedne Collinsove hipoteze 61

GLAVA 4. PRODUŽENJE LINEARNIH FUNKCIONALA I TEOREME O ZATVORENOM GRAFIKU

1. Produženje linearnih funkcionala neprekidnih na članovima niza apsolutno konveksnih skupova 69
2. Linearna preslikavanja neprekidna na članovima familije apsolutno konveksnih skupova i teoreme o zatvorenom grafiku 80

LITERATURA 87