

UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTETI
MATEMATIČKI FAKULTET

Univerzitet u Beogradu
Prirodno-matematički fakulteti
MATEMATIČKI FAKULTET
BIBLIOTEKA
Broj Dokt. 571 / Datum 4.09.1990.

Zoran V. Drašković

JEDNAČINE POLJA U TEORIJI TANKE LJUSKE - INVARIJANTAN PRISTUP

(doktorska disertacija)

DO MEH. 2

BEOGRAD 1990.

S A D R Ž A J

0. PREGOVOR	4
1. UVOD	6
1.1. Uvodne napomene	6
1.2. Cilj i sadržaj rada	6
1.3. Spisak upotrebljenih oznaka	8
2. INVARIJANTNO UVODJENJE OSNOVNIH RELACIJA U TEORIJU TANKE LJUSKE	10
2.1. Tanka ljuska kao Koseva površ	10
2.2. Invarijantne aproksimacije polja napona, deformacije i pomeranja	17
2.2.1. Invarijantan oblik aproksimacije položaja tačke ljuskastog tela	17
2.2.2. Aproksimacija polja napona	17
2.2.3. Aproksimacija polja deformacije	20
2.3. Granični uslovi (po silama) na licima tanke ljuske	22
2.3.1. Granični uslovi za površinske sile	22
2.3.2. Granični uslovi na licima ljuske	23
2.3.3. Zadovoljavanje graničnih uslova	24
3. JEDNAČINE POLJA TANKE LJUSKE NEUNIFORMNE DEBLJINE ...	27
3.1. O izvodjenju jednačina polja ljuske iz trodimenzione teorije	27
3.2. Jednačine polja trodimenzionog kontinuuma	28
3.2.1. Jednačine kretanja u trodimenzionoj teoriji	28
3.2.2. Tenzor deformacije	30
3.2.3. Konstitutivne jednačine	31
3.3. Redukcija trodimenzionih jednačina polja na dvodimenzione	32
3.3.1. Galerkinov postupak	32
3.3.1.1. O racionalnom izboru težinskih funkcija	35
3.3.1.2. O racionalnom izboru težinskog faktora	35
3.3.2. Redukcija trodimenzionih jednačina kretanja Galerkinovim postupkom	36
3.3.3. O redukciji trodimenzionog tenzora deformacije	49
3.3.4. Redukcija trodimenzionih konstitutivnih jednačina Galerkinovim postupkom	50
3.4. Poredjenje dobijenih jednačina polja sa uobičajenim jednačinama polja u teoriji (tanke) ljuske	68
3.4.1. Jednačine kretanja tanke ljuske	69
3.4.2. Mere deformacije tanke ljuske	74
3.4.3. Konstitutivne jednačine	78

4. ZAVRŠNE NAPOMENE, ZAKLJUČCI I BUDUĆE AKTIVNOSTI	84
4.1. Završne napomene	84
4.2. Zaključci	84
4.2.1. Invarijantnost aproksimacija polja napona, deformacije i pomeranja	84
4.2.2. Invarijantnost i geometrijska doslednost u izvodjenju jednačina polja tanke ljuske	85
4.3. Buduće aktivnosti	87
4.3.1. Poredjenje uobičajenih i invarijantnih aproksimacija konačnim elementima	87
4.3.2. Invarijantna izoparametarska formulacija KE jednačina polja u teoriji tanke ljuske	87
4.3.3. Procena povećanja broja računskih operacija u invarijantnom pristupu - potreba za razvijanjem softvera na superračunaru	88
5. REFERENCE	90
6. PRILOZI	95
6.1. O DIFERENCIRANJU INTEGRALA OBLIKA REZULTANTI NAPONA U TEORIJI TANKE LJUSKE	96
6.1.1. Uvod	96
6.1.2. Diferenciranje integrala vektorskog polja	96
6.1.3. Završne napomene	99
6.2. O UVODJENJU REZULTANTI NAPONA U TEORIJI TANKE LJUSKE	101
6.2.1. Uvod	101
6.2.2. Neinvarijantnost rezultanti napona u klasičnoj teoriji ljusaka	101
6.2.3. Veza invarijantnih i neinvarijantnih rezultanti napona	111
6.2.4. Završne napomene	112

0. PREDGOVOR

Disertacija je nastala u toku angažovanja na naučnoistraživačkom zadatku Vazduhoplovnotehničkog instituta MODEL TRI POLJA U NELINEARNOJ ANALIZI TANKE LJUSKE METODOM KONAČNIH ELEMENATA. Razvoj modela tri polja, tj. mešovitog modela u teoriji tanke ljuske započeo je 1985. godine neobjavljenim radom [44], a plodotvornost ideje o nezavisnom aproksimiranju polja napona, polja deformacije i polja pomeranja tanke ljuske već je došla do izražaja u disertacijama [55] i [60]. Predmet ove disertacije jeste invarijantan (tj. nezavisan od izbora koordinatnog sistema) postupak redukcije trodimenzionih jednačina polja Galerkinovom procedurom na jednačine polja tanke ljuske neuniformne debljine. Zahtev za koordinatnom invarijantnošću (koji se u fizici naziva principom simetrije) bio je nezaobilazan, s obzirom na to da je krajnji cilj, u stvari, bio poboljšavanje osnovnih postavki teorije tankih ljuski u skladu sa principima savremene fizike.

Želim da istaknem da bi bavljenje takvim fundamentalnim istraživanjima teško bilo moguće da u Vazduhoplovnotehničkom institutu nije prisutan i stalan interes za unapređivanje teorijskih osnova raznih računskih metoda, kakva je i metoda konačnih elemenata, a u kojoj bi rezultati disertacije trebalo u krajnjoj liniji da se primene.

Izražavam iskrenu zahvalnost prof. M. Berkoviću, koji je, svojim primedbama i sugestijama kao rukovodilac pri izradi disertacije, nesebično doprineo kako nastajanju tako i ostvarivanju ideje iznete u disertaciji.

Takodje zahvaljujem na pažnji, strpljenju i veoma korisnim i sugestivnim pitanjima članovima Seminara za reologiju u Institutu za mehaniku Matematičkog fakulteta u Beogradu, pred kojima sam saopštavao pojedine delove disertacije.

U Beogradu,
februara 1990. godine

Z. Drašković

1. UVOD

1.1. Uvodne napomene

U radu će da bude upotrebljena Galerkinova procedura za dobijanje jednačina polja tanke ljuske neuniformne debljine iz jednačina polja trodimenzionog kontinuuma. Tako će (s obzirom na to da je u [54], odnosno u [57] već bilo reči o konstitutivnim jednačinama tanke ljuske) da bude zaokružen rad na razvoju tzv. mešovito modela u teoriji tanke ljuske – to je model tri polja, koji predstavlja neklasičan pristup u metodi konačnih elemenata i odlikuje se nezavisnim aproksimiranjem polja pomeranja, polja deformacije i polja napona, a u cilju uzimanja u obzir i graničnih uslova na licima ljuske (što je inače nemoguće u klasičnoj metodi konačnih elemenata). Osnovna odlika pristupa u radu biće korišćenje invarijantnih (tj. nezavisnih od izbora koordinatnog sistema) aproksimacija (i to Ležandrovim polinomima) tih polja, što je način koji je nov u literaturi, a treba da omogući, s jedne strane, geometrijski doslednije, a, sa druge strane, jednostavnije dobijanje jednačina polja tanke ljuske iz trodimenzione teorije, koristeći Galerkinovu proceduru.

1.2. Cilj i sadržaj rada

U teoriji tri polja ([47]), kada je u pitanju mešoviti model za tanku ljusku i cela ljuska se u suštini posmatra kao konačni element¹, ali samo u ζ -pravcu, vrši se, pri izvodjenju

1

S tom idejom smo se prvi put susreli u [44]!

jednačina polja tanke ljuske iz trodimenzione teorije ([48], [49]), interpolacija u tom pravcu (Ležandrovim polinomima) polja pomeranja, polja deformacije i polja napona. S druge strane, u [50], odnosno [53] je formulisan zahtev za invarijantnošću aproksimacija¹ konačnim elementima, pa će sada za takvu ljusku (numerički dakle, modeliranu kao konačni element) biti izložen invarijantan pristup pri izvodjenju njenih jednačina polja iz trodimenzione teorije, koristeći Galerkinovu proceduru. Suština je u tome da se polazi od invarijantnih aproksimacija polja napona, deformacije i pomeranja i da se, pri traženju tzv. slabog rešenja trodimenzionih jednačina polja, dosledno primenjuje Eriksenov koncept o integraljenju vektorskih i tenzorskih polja u krivolinijskim koordinatama (v. str. 808 u [7]).

Medjutim, iako će se raditi o jednom (od niza mogućih, ali geometrijski doslednijem) postupku izvodjenja jednačina po-

1

Naime, u [50], odnosno u [53] je izraženo uverenje da bi koordinatnu invarijantnost trebalo zahtevati i za aproksimacije fizičkih zakona (odnosno za aproksimacije polja koja u tim zakonima učestvuju); na to je uticala pre svega činjenica da ni zakoni fizike zapravo nikada nisu tačni, a ipak se zahteva njihova koordinatna invarijantnost (v. npr. [6], str. 222 ili [26], str. 15) i oni se opisuju tenzorskim jednačinama. Istina, u [11] se na str. 130 izražava sumnja u to da egzaktni prirodni zakoni moraju biti obavezno izraženi u tenzorskom obliku (pa bi utoliko manje trebalo insistirati na tenzorskoj reprezentaciji aproksimativnih teorija), ali se ipak ne odustaje od primene tenzorskog računa u teoriji ljusaka (što se pravda najviše elegancijom tenzorske notacije); druga je stvar što ta primena nije uvek dosledna (o čemu će posebno biti reči u prilogu 6.2.). Inače, pravi razlog za tolikim insistiranjem na invarijantnosti jeste činjenica da je to osnovni zahtev (obično se naziva principom simetrije) u savremenoj fizici, a tenzorski račun (kao račun invarijanata) je još uvek u njoj nezamenljiv.

lja tanke ljuske iz trodimenzione teorije, za polje pomera-
nja, odnosno položaja tačke ljuskastog tela biće uzeta tak-
va aproksimacija koja u potpunosti odgovara kinematičkim
pretpostavkama Koseira teorije površi. Stoga ćemo izlaganje
u sledećem poglavlju i započeti iznošenjem, u obimu neophod-
nom za dalji rad, nekih osnovnih relacija vezanih za Koseira
površ kao model za tanku ljusku, a potom će biti navedeni
invarijantni oblici približnih izraza za polje napona, polje
deformacije i polje pomeranja.

1.3. Spisak upotrebljenih oznaka

Navode se neke od oznaka koje će u radu biti upotrebljene:

- * - označava da je veličina uz koju
stoji vezana za trodimenzioni
prostor
- δ - malo grčko slovo "delta" koristi
se kao nosilac indeksa (kernel) u
Kronekerovom (Kronecker) simbolu
- $I, i; J, j; \dots$ - veliki i mali latinski indeksi
koji uzimaju vrednosti iz skupa
{1,2,3}, a odnose se na pravouglo
Dekartove (Descartes) koordinate
u nedeformisanoj i deformisanoj
konfiguraciji respektivno
- $A, a; B, b; \dots$ - veliki i mali latinski indeksi
koji uzimaju vrednosti iz skupa
{1,2,3}, a odnose se na konvek-
tivne koordinate u nedeformisa-
noj i deformisanoj konfiguraciji
respektivno
- $\Phi, \phi; \Psi, \psi; \dots$ - veliki i mali grčki indeksi
koji uzimaju vrednosti iz skupa
{1,2}, a odnose se na konvek-
tivne koordinate u nedeformisa-
noj i deformisanoj konfiguraci-
ji respektivno

- $\begin{matrix} I \\ Y \end{matrix}, \begin{matrix} i \\ Y \end{matrix}$ - pravougla Dekartove koordinate tačke ljuske u nedeformisanoj i deformisanoj konfiguraciji respektivno
- $\begin{matrix} I \\ X \end{matrix}, \begin{matrix} i \\ x \end{matrix}$ - pravougla Dekartove koordinate tačke u referentnoj površi ljuske u nedeformisanoj i deformisanoj konfiguraciji respektivno
- $\begin{matrix} A \\ E \end{matrix}, \begin{matrix} a \\ \xi \end{matrix}$ - veliko i malo grčko slovo "ksi" odnosi se na konvektivne koordinate u nedeformisanoj i deformisanoj konfiguraciji respektivno
- ζ - malo ¹ grčko slovo "dzeta" koristi se za "treću" koordinatu (konvektivnu koordinatu koja ne leži u referentnoj površi ljuske) u teoriji ljusaka
- $\begin{matrix} .a \\ v \\ b \end{matrix}$ - koordinate operatora paralelnog pomeranja duž normale na površ (referentnu) ljuske
- $\begin{matrix} ab \\ t \end{matrix}$ - Košijev tenzor napona
- $\begin{matrix} e \\ ab \end{matrix}$ - relativni prostorni, Ojlerov (Euler) ili Almansijev (Almansi) tenzor deformacije

1

Strogo govoreći, u reprezentaciji koja je vezana za referentnu konfiguraciju trebalo bi da stoji Z (a ne ζ), jer se ono razlikuje od ζ u tekućoj konfiguraciji na isti način kako se uopšte konvektivne koordinate razlikuju u dvema konfiguracijama, premda je:

$$\zeta = \delta \begin{matrix} a & a & A \\ & E & \\ & & A \end{matrix} .$$

2. INVARIJANTNO UVODJENJE OSNOVNIH RELACIJA U TEORIJU TANKE LJUSKE

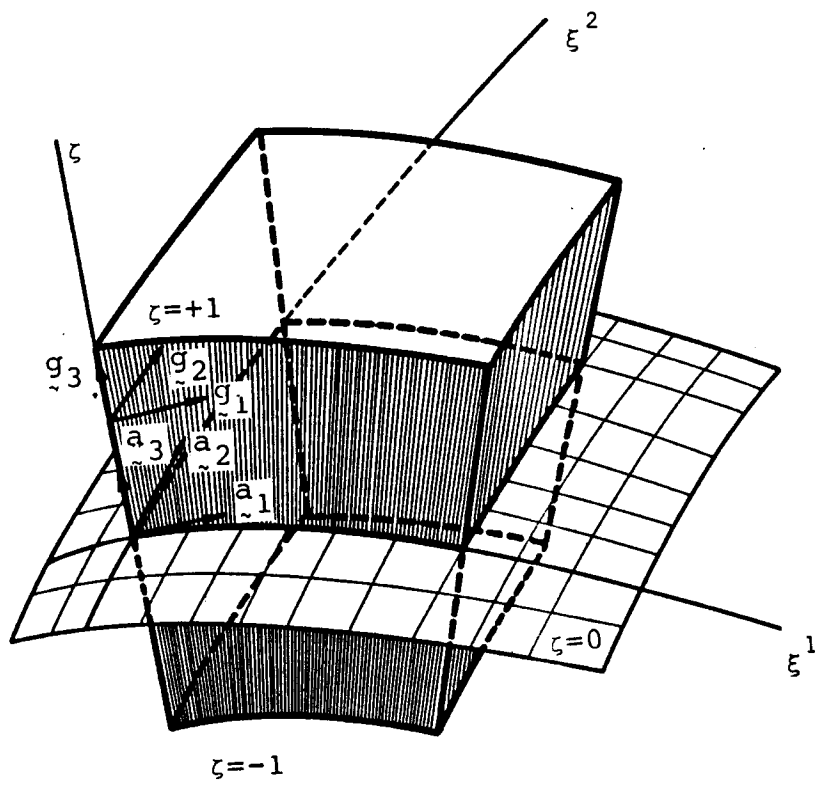
2.1. Tanka ljuska kao Koseva površ

Uočimo u unutrašnjosti trodimenzionog tela neku površ (tzv. referentnu površ) i zamislimo materijalna vlakna koja, duž normala na tu površ, prolaze kroz svaku njenu tačku. Krajnje tačke tih vlakana obrazuju granične površi posmatranog tela (gornju i donju površ ili gornje i donje lice). Takvo telo se naziva ljuskom ako je dimenzija duž vlakana (debljina) manja od neke karakteristične dužine za referentnu površ - npr. najmanjeg poluprečnika krivine R ili najmanje dužine L (v. [35], str. 2).

Ako je debljina znatno manja od te karakteristične dužine, radiće se o tankoj ljuski. Tanka ljuska, međutim, može da se opiše i orijentisanim dvodimenzionim modelom - taj model, nazvan Koseva površ, sastoji se od (referentne) površi sa jednim¹ direktorom (tj. deformabilnim vektorom) pridruženim svakoj tački površi. Dodeljeni direktor je namenjen opisivanju "zadebljavanja" oko referentne površi trodimenzione ljuske, a njegova komponenta duž normale na površ može se posmatrati kao da predstavlja debljinu trodimenzione ljuske.

1

Treba napomenuti da ima i pristupa u kojima se ljuska modelira pomoću Koseva površi koja se sastoji od površi i tri deformabilna direktora pridružena svakoj tački površi; ipak, smatra se da je za razvoj ljuske direktnim pristupom dovoljno pridruživati samo jedan deformabilni direktor svakoj tački površi (v. str. 446 u [18]).



Slika 1.

U početnoj konfiguraciji Kosera površi obično se uzima da je deformabilni direktor \underline{H} upravan na referentnu površ ljuske, tj. da je:

$$\underline{H} = H \underline{D} \quad , \quad (2.1.1)$$

gde je H debljina ljuske u nedeformisanoj konfiguraciji, a \underline{D} je jedinični vektor koji ima pravac normale na referentnu površ ljuske u toj konfiguraciji. Tada se položaj tačke tela modeliranog pomoću Kosera površi može, u referentnoj konfiguraciji, opisati pomoću (v. izraz (2.6) u [35]):

$$Y^I = X^I + \frac{1}{2} \zeta H^I D^I \quad , \quad (2.1.2)$$

ili, potpunije:

$$Y^I(\Xi) = X^I(\Xi) + \frac{1}{2} \zeta H^I(\Xi) D^I(\Xi) \quad ; \quad (2.1.3)$$

ovde su Y^I ($I=1,2,3$) pravougla Dekartove koordinate proizvoljne tačke ljuske, a X^I ($I=1,2,3$) su Dekartove koordinate odgovarajuće tačke u referentnoj površi ljuske u podnožju normale na tu površ kroz tačku Y^I ; Ξ^A ($A=1,2,3$) su krivolinijske konvektivne koordinate, pri čemu se za koordinate Ξ^Φ ($\Phi=1,2$) pretpostavlja da leže u referentnoj površi, dok je treća konvektivna koordinata $\Xi^3 \equiv \zeta$ u stvari prava linija i upravna je na referentnu površ ljuske u referentnoj konfiguraciji; tako uvedena ζ -koordinata je bezdimenziona i pri tom je $\zeta = 0$ u referentnoj površi, dok je $\zeta = \pm 1$ na licima ljuske.

Medjutim, u Kosera teoriji površi, i u deformisanoj konfiguraciji položaj tačke ljuske može da se opiše izrazom analognim izrazu (2.1.2):

$$\underline{y}^i = \underline{x}^i + \frac{1}{2} \zeta h d^i \quad (2.1.4)$$

(v. izraz (2.10) u [35]), gde je \underline{d} jedinični direktor, koji u opštem slučaju ne mora da ima pravac normale na srednju površ ljuske u deformisanoj konfiguraciji. Ipak, pretpostavićemo da važi prvi deo hipoteze Kirhofa-Lava (v. npr. str. 478 u [7]), što znači da je (u Koseira teoriji) direktor i u deformisanoj i u nedeformisanoj konfiguraciji upravan na referentnu površ ljuske. To će omogućiti da se uspostavi veza između baznih vektora (u sistemu konvektivnih koordinata) u tačkama srednje površi i odgovarajućim tačkama na normali na srednju površ ljuske. Naime, u vektorskom obliku bi izraz (2.1.4) tada ovako glasio:

$$\begin{aligned} \underline{p} &= \underline{r}(\xi^\phi) + \frac{1}{2} \zeta h(\xi^\phi) \underline{d} \\ &= \underline{r}(\xi^\phi) + \frac{1}{2} \zeta h(\Xi^\phi) \underline{a}_3^o, \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

gde je \underline{a}_3^o jedinični vektor normale na srednju površ ljuske u deformisanoj konfiguraciji, pa se za bazne vektore \underline{g}_a u sistemu koordinata $\{\xi^\phi, \zeta\}$ dobija:

$$\begin{aligned} \underline{g}_\phi &= \frac{\partial \underline{p}}{\partial \xi^\phi} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi^\phi} + \frac{1}{2} \zeta h_{;\phi} \underline{a}_3^o + \frac{1}{2} \zeta h \underline{a}_{3;\phi}^o \\ &= \underline{a}_\phi^o + \frac{1}{2} \zeta h_{;\phi} \underline{a}_3^o - \frac{1}{2} \zeta h b_\phi^\psi \underline{a}_\psi^o \\ &= \left(\delta_\phi^\psi - \frac{1}{2} \zeta h b_\phi^\psi \right) \underline{a}_\psi^o + \frac{1}{2} \zeta h_{;\phi} \underline{a}_3^o \\ \underline{g}_3 &= \frac{1}{2} h \underline{a}_3^o, \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

pri čemu je iskorišćena Vajngartenova (Weingarten) formula, a \tilde{b} je drugi metrički tenzor srednje površi ljuske u deformisanoj konfiguraciji (up. sa str. 471 u [18]). Medjutim, treba primetiti da \tilde{a}_3^0 nije bazni vektor u tom koordinatnom sistemu - bazni vektor je \tilde{g}_3 , a iz (2.1.6) je jasno da se on ne menja duž ζ -ose i zgodno je da ga u tački srednje površi (makar da se on nije promenio) obeležimo sa:

$$\tilde{a}_3^0 = \tilde{g}_3 = \frac{1}{2} h \tilde{a}_3^0. \quad (2.1.7)$$

Razlog zbog kog insistiramo na uvođenju baznog vektora i u pravcu ζ -ose jeste namera da uspostavimo vezu izmedju baznih vektora u sistemu koordinata $\{\xi, \zeta\}$ u tačkama srednje površi i odgovarajućim tačkama na normali na srednju površ ljuske. Naime, ako iskoristimo (2.1.7), možemo (2.1.6) da prepíšemo u obliku:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_\phi &= \left(\delta_\phi^\psi - \frac{1}{2} \zeta h b_\phi^\psi \right) \tilde{a}_\psi + \frac{\zeta}{h} h_{;\phi} \tilde{a}_3 \\ \tilde{g}_3 &= \tilde{a}_3, \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

odnosno:

$$\tilde{g}_a^{\cdot b} = v_a^{\cdot b} \tilde{a}_b, \quad (2.1.9)$$

gde je stavljeno ^{1,2}:

$$v_a^{\cdot b} = \delta_a^b - \frac{1}{2} \zeta h \delta_a^\phi \delta_\psi^b + \delta_a^\phi \delta_\psi^b \frac{\zeta}{3 a h}; \phi \quad (2.1.10)$$

1

Prvi indeks, bilo da je gornji ili donji, odnosi se na tačku ljuske za koju je $\zeta \neq 0$, dok se drugi indeks odnosi na odgovarajuću tačku u referentnoj površi ljuske za koju je $\zeta = 0$.

2

Takav "kondenzovani" oblik predstavlja, zbog uzimanja u obzir i pretpostavke o neuniformnosti debljine ljuske, proširenje izraza (2) u [45].

Tako su bazni vektori u sistemu koordinata $\{\xi^\phi, \zeta\}$ u nekoj tački na normali na srednju površ ljuske u referentnoj konfiguraciji izraženi preko baznih vektora u tom istom sistemu koordinata, ali u odgovarajućoj tački srednje površi ljuske. No, upravo je osobina operatora paralelnog pomeranja da povezuju bazne vektore u različitim tačkama prostora, pa se ovde radi o specijalnom obliku tih operatora kada povezuju bazne vektore u proizvoljnoj tački ljuske sa baznim vektorima u odgovarajućoj tački srednje površi. Koordinate operatora paralelnog pomeranja duž ζ -ose u sistemu koordinata $\{\xi^\phi, \zeta\}$ eksplicitno su date izrazima (2.1.10), pri čemu je upotrebljena oznaka v_{b1}^a zato da bismo ukazali na njihovu sličnost sa onima na str. 471 u [18].

Zadržimo se sad na inverziji matrice $\tilde{v} = \{v_{ab}^b\}$ operatora paralelnog pomeranja, tj. na odredjivanju takve matrice $\tilde{v}^{-1} = \{(v)_{ab}^{-1}\}$ da je:

$$\tilde{v} \cdot \tilde{v}^{-1} = \tilde{I} \quad \text{i} \quad \tilde{v}^{-1} \cdot \tilde{v} = \tilde{I}, \quad (2.1.11)$$

što je svakako moguće u ovde korišćenoj teoriji tanke ljuske (v. npr. str. 442 i 630 u [18]). Koordinatni oblik prethodnog uslova glasi:

$$\begin{matrix} .c & -1 & a \\ v & (v) & \\ a & .b & \end{matrix} = \begin{matrix} c \\ \delta \\ b \end{matrix}, \quad \begin{matrix} -1 & c & .b \\ (v) & v & \\ .b & a & \end{matrix} = \begin{matrix} c \\ \delta \\ a \end{matrix} \quad (2.1.12)$$

1

Treba istaći da je u [18] taj operator nepotpun - indksi mu uzimaju vrednosti iz skupa $\{1,2\}$; doduše, on se u [18] ni ne naziva operatorom paralelnog pomeranja. Inače, u teoriji ljusaka se za takve operatore upotrebljava naziv "šifteri" ili "tenzori prenosa" (v. npr. str. 24 u [36]; up. i (7.38) u [18]).

(up. te izraze npr. sa (16.5) u [7], odnosno sa izrazima (A.3.18) u [18] ili (2.15g) u [36]), pa kako je (što sledi iz (2.1.10)):

$$\tilde{v} = \begin{Bmatrix} v_a \\ v_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{.1}{v_1} & \frac{.1}{v_2} & 0 \\ \frac{.2}{v_1} & \frac{.2}{v_2} & 0 \\ \frac{\zeta}{h} h_{;1} & \frac{\zeta}{h} h_{;2} & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.1.13)$$

onda se za članove tražene inverzne matrice lako dobija ¹:

$$\begin{aligned} \begin{matrix} -1 \\ (v) \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ .1 \end{matrix} &= + \frac{1}{v} \frac{.2}{v_2}, & \begin{matrix} -1 \\ (v) \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ .2 \end{matrix} &= - \frac{1}{v} \frac{.1}{v_2}, & \begin{matrix} -1 \\ (v) \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ .3 \end{matrix} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{matrix} -1 \\ (v) \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ .1 \end{matrix} &= - \frac{1}{v} \frac{.2}{v_1}, & \begin{matrix} -1 \\ (v) \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ .2 \end{matrix} &= + \frac{1}{v} \frac{.1}{v_1}, & \begin{matrix} -1 \\ (v) \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ .3 \end{matrix} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{matrix} -1 \\ (v) \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ .1 \end{matrix} &= + \frac{\zeta}{v h} \left[\frac{.2}{v_1} h_{;2} - \frac{.2}{v_2} h_{;1} \right], & \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

$$\begin{aligned} \begin{matrix} -1 \\ (v) \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ .2 \end{matrix} &= - \frac{\zeta}{v h} \left[\frac{.1}{v_1} h_{;2} - \frac{.1}{v_2} h_{;1} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{matrix} -1 \\ (v) \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ .3 \end{matrix} &= + \frac{1}{v} \left[\frac{.1}{v_1} \frac{.2}{v_2} - \frac{.2}{v_1} \frac{.1}{v_2} \right] = 1. \end{aligned}$$

1

To se sve može obuhvatiti i jednom formulom:

$$\begin{aligned} \begin{matrix} -1 \\ (v) \end{matrix} \begin{matrix} a \\ .b \end{matrix} &= \frac{1}{v} \left[\begin{matrix} a & \theta & \phi\psi & .\omega \\ \delta & \delta & \delta & v \end{matrix} + \frac{\zeta}{h} \begin{matrix} a & \phi & \theta\omega & .\psi \\ \delta & \delta & e & \delta \end{matrix} \frac{v}{h} \right] \\ &+ \frac{a}{3} \frac{\delta}{b} \quad \left(v = \det \begin{Bmatrix} v_a \\ v_b \end{Bmatrix} \right) \end{aligned}$$

(up. sa izrazom (A.3.19) u [18], gde indksi uzimaju vrednosti iz skupa {1,2} ; inače, u [36] se mogu naći potpuni i do kraja razvijeni izrazi za koordinate inverznih operatora paralelnog pomeranja).

2.2. Invarijantne aproksimacije polja napona, deformacije i pomeranja

U ovom odeljku biće dati invarijantni oblici aproksimacija polja napona, polja deformacije i polja pomeranja (zapravo položaja).

2.2.1. Invarijantan oblik aproksimacije položaja tačke ljuskastog tela. U odeljku 2.1. navedeno je da se položaj tačke ljuskastog tela može opisati izrazom:

$$\mathbf{y}^i = \mathbf{x}^i + \frac{1}{2} \zeta h^i d^i \quad (2.2.1)$$

gde je $h^i = h^i d^i$ tzv. deformabilni direktor. Međutim, za invarijantan pristup nećemo da koristimo taj izraz u Dekartovim koordinatama, već ćemo od vektorskog oblika te relacije (v. (2.1.5)):

$$\underline{\mathbf{p}} = \underline{\mathbf{r}} + \frac{1}{2} \zeta h \underline{\mathbf{d}} \quad (2.2.2)$$

dobiti koordinatni oblik u krivolinijskim (i to konvektivnim $\{ \xi^1, \xi^2, \zeta \}$) koordinatama:

$$\mathbf{p}_a = v_a^{\cdot b} \mathbf{r}_b + \frac{1}{2} \zeta h v_a^{\cdot b} \mathbf{d}_b ; \quad (2.2.3)$$

pri tome smo, budući da su vektori $\underline{\mathbf{r}}$ i $\underline{\mathbf{d}}$ definisani u referentnoj površi ljuske, dok je $\underline{\mathbf{p}}$ vezano za odgovarajuću tačku ljuskastog tela, morali da upotrebimo i operatore paralelnog pomeranja $\underline{\mathbf{v}}$ uvedene u prethodnom odeljku.

2.2.2. Aproksimacija polja napona. Zalažući se za u uvodnom poglavlju istaknutu invarijantnost aproksimacija i tenzorskih polja, prirodno je da prilikom aproksimiranja polja na-

pona podjemo od ovakve, invarijantne reprezentacije tenzora napona:

$$\tilde{t} = \frac{1}{2} T_{\tilde{o}} + \frac{3}{2} \zeta T_{\tilde{1}} + \frac{5}{4} (3 \zeta^2 - 1) T_{\tilde{2}}, \quad (2.2.4)$$

gde $T_{\tilde{o}}$, $T_{\tilde{1}}$ i $T_{\tilde{2}}$ ne zavise od ζ ; pri tom smo upotreбили Ležandrove polinome zaključno sa redom 2, mada se pokazuje (o tome će biti reči i u odeljku 2.3.) da je, u cilju zadovoljavanja ¹graničnih uslova na licima tanke ljuske, dovoljno aproksimirati "poprečne" komponente napona t ^{α³} Ležandrovim polinomima drugog reda s obzirom na koordinatu ζ , dok se za komponente u površima $\zeta = \text{const}$ mogu uzeti i polinomi prvog reda.

U dijadskom bi obliku reprezentacija (2.2.4) glasila:

$$t_{\tilde{a}\tilde{b}} = \frac{1}{2} T_{\tilde{o}} \tilde{a} \tilde{a} + \frac{3}{2} \zeta T_{\tilde{1}} \tilde{a} \tilde{a} + \frac{5}{4} (3 \zeta^2 - 1) T_{\tilde{2}} \tilde{a} \tilde{a}, \quad (2.2.5)$$

gde su \tilde{a} zapravo bazni vektori \tilde{g}_a u tačkama srednje površi ljuske:

$$\tilde{a}(\xi) = \tilde{g}_a(\xi, 0), \quad (2.2.6)$$

a iz (2.2.5) se lako dobija ²:

$$t_{\tilde{a}\tilde{b}} = \frac{1}{2} T_{\tilde{o}} \tilde{c} \tilde{d} + \frac{3}{2} \zeta T_{\tilde{1}} \tilde{c} \tilde{d} + \frac{5}{4} (3 \zeta^2 - 1) T_{\tilde{2}} \tilde{c} \tilde{d}. \quad (2.2.7)$$

1

To je i bio razlog da se, još u skalarnom pristupu u teoriji tri polja, upotrebe baš Ležandrovi polinomi.

2

Prelaz na koordinatni oblik uslovljen je oblikom (2.3.11) graničnih uslova na licima ljuske koje treba zadovoljiti.

Integraljenjem relacije (2.2.7) dolazi se do:

$$T_{0 \quad cd} = \int_{-1}^{+1} t \begin{matrix} ab \\ v \\ a \end{matrix} \begin{matrix} .c \\ v \\ b \end{matrix} .d d\zeta \quad (2.2.8)$$

$$T_{1 \quad cd} = \int_{-1}^{+1} t \begin{matrix} ab \\ v \\ a \end{matrix} \begin{matrix} .c \\ v \\ b \end{matrix} \zeta d\zeta .$$

Ukoliko se za indekse c i d uzimaju vrednosti samo iz skupa $\{1,2\}$ i iskoristi osobina operatora paralelnog pomeranja v da je $v_{3 \quad 1} = v_{3 \quad 2} = 0$, onda se iz prethodnog izraza dobija da je:

$$T_{0 \quad \phi\psi} = \int_{-1}^{+1} t \begin{matrix} \theta\omega \\ v \\ \theta \end{matrix} \begin{matrix} .\phi \\ v \\ \omega \end{matrix} .\psi d\zeta \quad (2.2.9)$$

$$T_{1 \quad \phi\psi} = \int_{-1}^{+1} t \begin{matrix} \theta\omega \\ v \\ \theta \end{matrix} \begin{matrix} .\phi \\ v \\ \omega \end{matrix} \zeta d\zeta .$$

Veličine definisane izrazima (2.2.8), odnosno (2.2.9) imaju ulogu rezultanti napona ¹ u predloženom invarijantnom pristupu u izvodjenju jednačina kretanja (i uopšte jednačina polja) tanke ljuske iz trodimenzionone teorije kontinuuma, a uz upotrebu aproksimacija tri polja.

1

O vezama tako uvedenih i uobičajenih rezultanti napona u teoriji tanke ljuske, kao i uopšte o "sprezanju" predloženog invarijantnog pristupa iz trodimenzionone teorije i tzv. direktnog pristupa (zasnovanog na Koseva teoriji površi) trebalo bi da bude reči u odeljku 6.2. (koji se zasniva na [52], odnosno na [56], a zapravo predstavlja sadržaj rada [61]).

Treba naglasiti da je to nov način uvođenja rezultanti napona u teoriju ljustaka; neposredna posledica mu je očigledna simetrija tih rezultanti, što do sada nije bilo slučaj ukoliko se "sprezanje" tzv. direktnog postupka (zasnovanog na Kosera modelu orijentisane površi) i pristupa na osnovu trodimenzione teorije vršilo na uobičajeni (neinvarijantan¹) način, izuzev u naročitim slučajevima kada se γ svodi na Kronekerov delta-simbol.

2.2.3. Aproximacija polja deformacije. Radi konzistentnosti sa aproximacijama polja napona usvojenim u pododeljku 2.2.2. i polje deformacije $\underline{\tilde{e}} = e_{ab}^a g^b$ predstavili bismo na analogan način pomoću Ležandrovih polinoma drugog reda. Međutim, tamo se pošlo od pretpostavke o prisutnosti svih veličina istog reda u aproximacijama polja napona, ali je nagovešteno da će biti dovoljno da se neke komponente aproksimiraju i polinomima prvog reda. U skladu s tim bi se za polje deformacije imale ovakve aproximacije:

$$e_{ab}^{(v)} \begin{matrix} -1 a & -1 b \\ \cdot \phi & \cdot \psi \end{matrix} = \frac{1}{2} e_{\phi\psi}^o + \frac{3}{2} \zeta e_{\phi\psi}^1 \quad (2.2.10)$$

$$e_{ab}^{(v)} \begin{matrix} -1 a & -1 b \\ \cdot \phi & \cdot 3 \end{matrix} = \frac{1}{2} e_{\phi 3}^o + \frac{3}{2} \zeta e_{\phi 3}^1 + \frac{5}{4} (3 \zeta^2 - 1) e_{\phi 3}^2$$

$$e_{ab}^{(v)} \begin{matrix} -1 a & -1 b \\ \cdot 3 & \cdot 3 \end{matrix} = \frac{1}{2} e_{33}^o + \frac{3}{2} \zeta e_{33}^1$$

i te reprezentacije će biti iskorišćene pri uvođenju dvodi-

1

Ističemo da se integraljenje u (2.2.8) vrši u skladu sa Eriksenovim konceptom o integraljenju tenzorskih polja posle prelaska u koordinatni oblik u krivolinijskim koordinatama (v. [7], str. 808).

menzionih mera deformacije, odnosno pri redukciji trodimenzi-
onih konstitutivnih jednačina.

Naime, integraljenjem relacija (2.2.10) se, analogno onom u
(2.2.8), dolazi do izraza:

$$\begin{aligned}
 e_{\phi\psi}^0 &= \int_{-1}^{+1} e_{ab}^{(v)} \begin{matrix} -1 & a & -1 & b \\ (\nu) & & (\nu) & \end{matrix} \begin{matrix} \cdot \phi & \cdot \psi \end{matrix} d\zeta \\
 e_{\phi\psi}^1 &= \int_{-1}^{+1} e_{ab}^{(v)} \begin{matrix} -1 & a & -1 & b \\ (\nu) & & (\nu) & \end{matrix} \begin{matrix} \cdot \phi & \cdot \psi \end{matrix} \zeta d\zeta \quad (2.2.11) \\
 e_{\phi 3}^0 &= \int_{-1}^{+1} e_{ab}^{(v)} \begin{matrix} -1 & a & -1 & b \\ (\nu) & & (\nu) & \end{matrix} \begin{matrix} \cdot \phi & \cdot 3 \end{matrix} d\zeta
 \end{aligned}$$

i njih navodimo zato što će upravo koeficijenti $e_{\phi\psi}^0$, $e_{\phi\psi}^1$ i $e_{\phi 3}^0$ imati ulogu mera deformacije u jednačinama polja tanke ljuske pri njihovom izvodjenju iz trodimenzionalne teorije pomoću invarijantnih aproksimacija tri polja, o čemu je u radu reč. Sto se tiče geometrijskog tumačenja gornjih izraza, moglo bi se reći da oni predstavljaju neke "rezultantne", "u-srednjene" mere deformacije (o njihovom poredjenju sa uobičajenim merama deformacije u teoriji tanke ljuske biće reči u pododeljku 3.4.2.).

1

Primetimo da se integraljenje u (2.2.11), kao i u (2.2.8), vrši u skladu sa Eriksenovim konceptom o integraljenju tenzorskih polja posle prelaska u koordinatni oblik u krivolinijskim koordinatama (v. [7], str. 808). Stoga bismo o ovakvom pristupu mogli da govorimo kao o invarijantnom uvodjenju mera deformacije u teoriji tanke ljuske.

2.3. Granični uslovi (po silama) na licima tanke ljuske

U ovom odeljku biće reči o graničnim uslovima po silama na licima tanke ljuske, kao i o zadovoljavanju tih uslova.

2.3.1. Granični uslovi za površinske sile. Podjimo od uobičajenog oblika graničnog uslova (po silama) na površi s u deformisanoj konfiguraciji:

$$\left. \tilde{t} \right|_s = \underline{p} ; \quad (2.3.1)$$

u tom uslovu ¹ se zapravo izjednačavaju vektor napona \tilde{t} , meren po jedinici površine u deformisanoj konfiguraciji, i spoljašnja sila ² \underline{p} , računata takodje po jedinici deformisane površine; (indeksom s ističemo da se granični uslov na površi ljuske uspostavlja u deformisanoj konfiguraciji).

U koordinatnom obliku taj uslov glasi:

$$\tilde{t}^{ab} n_b = p^a , \quad (2.3.2)$$

gde su p^a kontravarijantne koordinate ³ površinskih (ili kontaktnih) sila, a n_b kovarijantne koordinate jediničnog vektora spoljašnje normale na graničnu površ deformisanog te-

1 Granični uslovi po silama slede iz okolnosti da u tačkama granične površi deformisanog tela vektor napona mora biti jednak gustini površinskih sila.

2 Samo zadavanje i izračunavanje koordinata opterećenja zavisice od toga da li se u konkretnom slučaju radi npr. o "mrtvom" ili o "pratećem" teretu.

U sistemu konvektivnih koordinata.

1a. Ukoliko predjemo na Dekartove koordinate y^j ($j=1,2,3$) u trenutnoj konfiguraciji, ti uslovi će da glase:

$$t \frac{\partial y^j}{\partial \xi^a} n_j = p^a \quad (2.3.3)$$

odnosno, kraće:

$$t \frac{\partial y^j}{\partial \xi^a} n_j = p^a \quad (2.3.4)$$

2.3.2. Granični uslovi na licima ljuske. Na licima ljuske je:

$$y^j_{;\phi} n_j = 0 \quad (\phi=1,2) \quad , \quad (2.3.5)$$

pa se granični uslov (2.3.4), koji nas i zanima na licima ljuske, tada svodi na:

$$t \frac{\partial y^j}{\partial \xi^a} n_j = p^a_{\pm} \quad , \quad (2.3.6)$$

(up. sa (4.4) u [35]), a kako je u slučaju tanke ljuske (v. (2.10) u [35]):

$$\begin{aligned} y^j_{;3} &= (x^j + 0.5 \zeta h d^j)_{;3} \\ &= 0.5 h d^j_{;3} \quad , \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

gde su d^j koordinate jediničnog direktora na licu ljuske u deformisanoj konfiguraciji, a ζ konvektivna koordinata koja ne leži u referentnoj površi ljuske, to se najzad za granične uslove na licima tanke ljuske može pisati:

$$p^a_{\pm} = 0.5 h c t^a \quad ; \quad (2.3.8)$$

pri tome je stavljeno:

$$c = d^j_{;i} n_j \quad . \quad (2.3.9)$$

No, s obzirom na to da se kosinusi uglova između jediničnog vektora normale na referentnu površ ljuske i jediničnog vektora direktora na licu ljuske razlikuju samo po znaku, na kraju se uzima:

$$p_{\pm}^a = \pm 0.5 h |c| t^{a3}, \quad (2.3.10)$$

a otuda je i:

$$t^{a3} = \pm 2 p_{\pm}^a / h |c|, \quad (2.3.11)$$

što predstavlja traženi oblik graničnih uslova na licima ljuske u slučaju rada sa Košijevim tenzorom napona.

2.3.3. Zadovoljavanje graničnih uslova. Zadovoljavanje graničnih uslova po silama na licima tanke ljuske i jeste bilo razlog¹ da se pri aproksimiranju polja napona upotrebe Ležandrovi polinomi. Naime, u [54], odnosno u [57] je pokazano da se u cilju uzimanja u obzir graničnih uslova na licima ljuske mogu uzeti i polinomi prvog reda², izuzev za komponente napona $t^{\alpha 3}$ koje se predstavljaju polinomima drugog stepena. U tom slučaju se reprezentacija (2.2.7), kada je $c = 1, 2$ i $d = 3$, može izraziti preko graničnih uslova na sledeći način (up. sa (2.7.17) u [54], odnosno u [59]):

1

V. i prvu fusnotu u pododeljku 2.2.2.

2

Preciznije, neuzimanje nekih članova višeg reda nema nikakvih reperkusija na zadovoljavanje graničnih uslova na licima ljuske. Moglo bi se reći da je ovaj prilaz restriktivan u tom smislu što aproksimacije drugog reda koristimo samo gde se javljaju veličine koje treba da budu određene neposredno iz graničnih uslova; ostale aproksimacije su prvog reda.

$$\begin{aligned}
t \begin{matrix} ab \\ v \\ a \end{matrix} \begin{matrix} \cdot \phi \\ v \\ b \end{matrix} \cdot 3 &= \frac{3}{4} (1 - \zeta)^2 T_o^{\phi 3} + \\
&+ \frac{1}{2 h |c|} (1 + \zeta) (3\zeta - 1) p_+^{\theta} \begin{matrix} \cdot \phi \\ v \\ \theta \end{matrix} \Big|_{\zeta=+1} + \\
&+ \frac{1}{2 h |c|} (1 - \zeta) (3\zeta + 1) p_-^{\theta} \begin{matrix} \cdot \phi \\ v \\ \theta \end{matrix} \Big|_{\zeta=-1} + \\
&+ \frac{1}{8 h} (1 + \zeta) (3\zeta - 1) h \begin{matrix} \phi \psi \\ \omega \\ o \end{matrix} T_o^{\psi} \begin{matrix} -1 \\ (v) \\ \cdot \psi \end{matrix} \Big|_{\zeta=+1} + \\
&+ \frac{1}{8 h} (1 - \zeta) (3\zeta + 1) h \begin{matrix} \phi \eta \\ \omega \\ o \end{matrix} T_o^{\eta} \begin{matrix} -1 \\ (v) \\ \cdot \eta \end{matrix} \Big|_{\zeta=-1} + \\
&+ \frac{3}{8 h} (1 + \zeta) (3\zeta - 1) h \begin{matrix} \phi \eta \\ \omega \\ 1 \end{matrix} T_1^{\eta} \begin{matrix} -1 \\ (v) \\ \cdot \eta \end{matrix} \Big|_{\zeta=+1} - \\
&- \frac{3}{8 h} (1 - \zeta) (3\zeta + 1) h \begin{matrix} \phi \eta \\ \omega \\ 1 \end{matrix} T_1^{\eta} \begin{matrix} -1 \\ (v) \\ \cdot \eta \end{matrix} \Big|_{\zeta=-1} ,
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

dok se, za slučaj kada je $c = d = 3$, dobija (v. (2.7.28) u [54], odnosno u [59]):

$$\begin{aligned}
t \begin{matrix} ab \\ v \\ a \end{matrix} \cdot 3 \begin{matrix} \cdot 3 \\ v \\ b \end{matrix} &= \\
&= \frac{1}{h |c|} (p_+^3 - p_-^3) + \frac{2}{h |c| h} h \begin{matrix} \theta \\ \theta \end{matrix} (p_+^{\theta} + p_-^{\theta}) + \\
&+ \frac{1}{4 h h} h \begin{matrix} \phi \psi \\ \theta \\ \omega \end{matrix} T_o^{\psi} \left[\begin{matrix} -1 \\ (v) \\ \cdot \phi \end{matrix} \Big|_{\zeta=+1} \begin{matrix} -1 \\ (v) \\ \cdot \psi \end{matrix} \Big|_{\zeta=+1} + \begin{matrix} -1 \\ (v) \\ \cdot \phi \end{matrix} \Big|_{\zeta=-1} \begin{matrix} -1 \\ (v) \\ \cdot \psi \end{matrix} \Big|_{\zeta=-1} \right] + \\
&+ \frac{3}{4 h h} h \begin{matrix} \phi \psi \\ \theta \\ \omega \end{matrix} T_1^{\psi} \left[\begin{matrix} -1 \\ (v) \\ \cdot \phi \end{matrix} \Big|_{\zeta=+1} \begin{matrix} -1 \\ (v) \\ \cdot \psi \end{matrix} \Big|_{\zeta=+1} - \begin{matrix} -1 \\ (v) \\ \cdot \phi \end{matrix} \Big|_{\zeta=-1} \begin{matrix} -1 \\ (v) \\ \cdot \psi \end{matrix} \Big|_{\zeta=-1} \right] +
\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\zeta}{h |c|} (p_+^3 + p_-^3) + \frac{2 \zeta}{h |c| h} h ; \theta \left(p_+^\theta - p_-^\theta \right) + \\
& \hspace{15em} (2.3.13) \\
& + \frac{\zeta}{4 h h} h ; \theta ; \omega \begin{matrix} \phi \psi \\ T \\ o \end{matrix} \left[\begin{matrix} -1 \theta \\ (v) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -1 \omega \\ (v) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -1 \theta \\ (v) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -1 \omega \\ (v) \end{matrix} \right]_{\zeta=+1}^{\phi} \middle|_{\zeta=+1}^{\psi} - \left[\begin{matrix} -1 \theta \\ (v) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -1 \omega \\ (v) \end{matrix} \right]_{\zeta=-1}^{\phi} \middle|_{\zeta=-1}^{\psi} + \\
& + \frac{3 \zeta}{4 h h} h ; \theta ; \omega \begin{matrix} \phi \psi \\ T \\ 1 \end{matrix} \left[\begin{matrix} -1 \theta \\ (v) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -1 \omega \\ (v) \end{matrix} \right]_{\zeta=+1}^{\phi} \middle|_{\zeta=+1}^{\psi} + \left[\begin{matrix} -1 \theta \\ (v) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -1 \omega \\ (v) \end{matrix} \right]_{\zeta=-1}^{\phi} \middle|_{\zeta=-1}^{\psi} .
\end{aligned}$$

Lako se može pokazati da se reprezentacija (2.3.12), u slučaju ljuske konstantne debljine (što ima za posledicu i da je $|c| = 1$), koja je, uz to, i dovoljno plitka da se operatori ψ mogu smatrati Kronekerovim simbolima, svodi na uobičajene izraze koji se uzimaju za napone i u tzv. momentnoj teoriji drugog reda¹.

I reprezentacija (2.3.13) bi se, u slučaju ljuske konstantne debljine u referentnoj konfiguraciji, koja je uz to dovoljno plitka da se operatori ψ mogu zameniti Kronekerovim simbolima, svela na izraz koji se može naći u literaturi.

Reprezentacije (2.3.12) i (2.3.13) bice iskorišćene prilikom izvodjenja jednačina kretanja, odnosno konstitutivnih jednačina tanke ljuske Galerkinovom procedurom (pododeljci 3.3.3. i 3.3.4.).

1

Takodje u cilju zadovoljavanja graničnih uslova na licima ljuske (v. izraze (13.11h) u [36], uz napomenu da se tu radilo o malim deformacijama; treba dodati da se u [36], već na početku (str. 29), uvodi pretpostavka da je ljuska dovoljno tanka ili plitka da se tenzori prenosa, tj. operatori paralelnog pomeranja mogu zameniti Kronekerovim simbolima).

3. JEDNAČINE POLJA TANKE LJUSKE NEUNIFORMNE DEBLJINE

3.1. O izvodjenju jednačina polja ljuste iz trodimenzione teorije

U uvodnom poglavlju je rečeno da je cilj rada da se Galerkinovom procedurom¹ izvedu jednačine polja (tanke) ljuste iz trodimenzione teorije kontinuuma. Pri tome ćemo se opredeliti za izvodjenje u trenutnoj konfiguraciji, pre svega zato što bi dosledno svodjenje jednačina kretanja na referentnu konfiguraciju, uz upotrebu konvektivnih koordinata, zahtevalo dodatna razmatranja koja ćemo odložiti za kasnije (u okviru rada [62]). Osim toga, da bismo i u trenutnoj konfiguraciji koristili invarijantne rezultante napona uvedene u pododeljku 2.2.2., poći ćemo od pretpostavke da važi prvi deo hipoteze Kirhofa - Lava²; to omogućava da se iskoriste i odgovarajući rezultati iz [54], odnosno [57] (gde su rezul-

1

Sam postupak izvodjenja iz trodimenzione teorije je aproksimativan, pa je jasno da ima i više načina izvodjenja jednačina polja tanke ljuste iz trodimenzionih jednačina (v. npr. str. 569 u [18]). Medjutim, ovde će biti reči samo o jednoj (od niza mogućih, ali čini se veoma opštoj) proceduri dobijanja jednačina polja tanke ljuste; ona je korektna sa tačke gledišta rešavanja jednačina Galerkinovim aproksimacijama.

2

No, budući da se svaka trenutna konfiguracija može, pri tzv. inkrementalnom postupku, smatrati osnovnom za neku sledeću, to se može jednostavno i u trenutnoj konfiguraciji uzeti sistem konvektivnih koordinata na način na koji je to u [52], odnosno u [56] urađeno u osnovnoj konfiguraciji, pa se onda pitanje uvodjenja pomenute hipoteze ne bi više postavljalo.

tante napona uvedjene u referentnoj konfiguraciji¹, a uz korišćenje upravnosti ζ -pravca na referentnu površ ljuske). Stoga će na kraju dobijene jednačine kretanja, i uopšte jednačine polja, tanke ljuske sadržati simetrične rezultante napona, što će biti istaknuto pri poredjenju tih jednačina sa uobičajenim jednačinama polja u teoriji (tanke) ljuske (v. odeljak 3.4.).

3.2. Jednačine polja trodimenzionog kontinuuma

S obzirom na to da predstojeća (u odeljku 3.3.) redukcija trodimenzionih jednačina polja na dvodimenzione neće biti izvršena na isti način za sve te jednačine, smatrali smo da je podesnije da se već i samo navodjenje pojedinih jednačina polja² trodimenzione teorije izvrši u posebnim pododeljcima (a slično ćemo postupiti i pri njihovom redukovanju).

3.2.1. Jednačine kretanja u trodimenzionoj teoriji. U analizi, posebno nelinearnoj, pomoću konačnih elemenata³, uobičajeno je da se kretanje tela posmatra u pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu. U odsustvu spregova i naponskih sprego-

1

Inače, u [52], odnosno u [56] invarijantan postupak je sproveden u trenutnoj konfiguraciji, a detalji će biti izneti u odeljku 6.2. (u okviru jednog od priloga radu).

2

Što se tiče graničnih uslova (po silama), koji takodje pripadaju jednačinama polja, o njima je bilo reči ranije (u odeljku 2.3.).

3

U njoj bi rezultati rada trebalo u krajnjoj liniji da se primene.

va, koriste se jednačine kretanja trodimenzionog kontinuuma u obliku (tzv. Košijevi zakoni kretanja):

$$t_{,j}^{ij} + \rho (f^i - \ddot{y}^i) = 0 \quad (i,j=1,2,3) \quad (3.2.1)$$

$$t^{ij} = t^{ji},$$

gde su t^{ij} koordinate (Košijevog) tenzora napona, ρ gustina mase, f^i koordinate zapreminskih sila po jedinici mase, a \ddot{y}^i koordinate ubrzanja u tacki y^i ($i=1,2,3$) u Dekartovom sistemu prostornih koordinata.

Medjutim, radi podesnijeg opisivanja fizičkog tela, pogodno je da se upotrebi skup opštijih, krivolinijskih konvektivnih koordinata ξ^a ($a=1,2,3$). Tenzorom napona u konvektivnim koordinatama¹ nazvaćemo sistem veličina dobijen od t^{ij} uobičajenom koordinatnom transformacijom:

$$t^{ab} = \frac{\partial \xi^a}{\partial y^i} \frac{\partial \xi^b}{\partial y^j} t^{ij}, \quad (3.2.2)$$

pri čemu smo namerno zadržali isti "kernel". Same jednačine kretanja u konvektivnim koordinatama² biće takodje oblika

¹ U [35] se na str. 9 govori o pseudo-naponu, ali ga treba razlikovati od pseudo-napona o kojima se govori na str. 553 u [6].

² Navedimo da se na str. 9 u [35] ističe da su jednačine kretanja oblika:

$$\left(\frac{\partial y^i}{\partial \xi^a} t^{ab} \right)_{,b} + \rho f^i = \rho \ddot{y}^i$$

veoma pogodne za analizu konačnim elementima, gde su y^i

(3.2.1); naime, one će da glase:

$$t_{,b}^{ab} + \rho (f^a - w^a) = 0 \quad (a,b=1,2,3) \quad (3.2.3)$$

$$t_{,b}^{ab} = t_{,a}^{ba},$$

(v. npr. jednačine (5.21) u [19]), pri čemu sada zarez označava kovarijantno diferenciranje po konvektivnim koordinatama ξ^a .

Budući da je, za ljuskasto telo, koordinata $\zeta \equiv \xi^3$ mnogo manja (dok određuje položaj tačaka takvog tela) nego li izvesna karakteristična dužina u referentnoj površi, može biti korisno da se članovi u (3.2.3) koji sadrže tipične kombinacije indeksa α , β i 3 razdvoje:

$$t_{,\beta}^{\alpha\beta} + t_{,3}^{\alpha 3} + \rho (f^\alpha - w^\alpha) = 0 \quad (\alpha,\beta=1,2) \quad (3.2.4)$$

$$t_{,\beta}^{3\beta} + t_{,3}^{33} + \rho (f^3 - w^3) = 0.$$

3.2.2. Tenzor deformacije. Umesto jednačina polja trodimenzionog kontinuuma u kojima je tenzor deformacije povezan sa vektorom pomeranja (v. npr. izraz (7.12) u [51]), u daljem radu ćemo polaziti od same relacije (v. npr. izraz (7.11) u [51] ili izraz (7.27) u [18]):

$$2 e_{ab} = g_{ab} - G_{ab}, \quad (3.2.5)$$

Dekartove koordinate. Ipak, zbog dosledne invarijantnosti u pristupu, čini nam se da je bolje da se podje od jednačina kretanja u krivolinijskim (konvektivnim) koordinatama (3.2.3), pa da se u taj njihov oblik uvedu invarijantne aproksimacije odgovarajućeg polja.

kojom se definiše relativni prostorni tenzor deformacije¹. Razlog za to je okolnost da mere deformacije koje su uvedene postupkom opisanim u pododeljku 2.2.3. treba uporediti sa uobičajenim merama deformacije u teoriji ljusaka, a te mere se u literaturi sreću prvenstveno u jednačinama polja oblika sličnog onom u (3.2.5) (o tome će biti reči u pododeljku 3.4.2.).

3.2.3. Konstitutivne jednačine. Iako će redukcija trodimenzionalnih konstitutivnih jednačina Galerkinovom procedurom do kraja biti sprovedena za tanke ljuske od izotropnog elastičnog materijala (prvenstveno zbog praktičnog značaja i mogućnosti poredjenja sa postojećim relacijama u literaturi), ipak ćemo u početku pretpostaviti samo da je u pitanju elastičan materijal prvog reda, tj. Hukov (Hooke) materijal, što znači da mu je ponašanje opisano linearnim² konstitutivnim jednačina-

¹ Upotreba malih (latinskih) indeksa uz metrički tenzor nedeformisane konfiguracije omogućena je zbog činjenice da se ovde koriste konvektivne koordinate; naime, te koordinate u trenutnoj i referentnoj konfiguraciji povezane su relacijama oblika:

$$\xi^a = \delta^a_A E^A,$$

tako da se potpuni izraz za koordinate relativnog tenzora deformacije (v. (7.11) i (7.3) u [51]):

$$e_{ab}^2 = g_{ab} - G_{AB} E^A E^B; a; b,$$

zbog svodjenja gradijenata deformacije na Kronekerove simbole, tada može zameniti izrazom (3.2.5).

² Napomenimo da linearnost jednačina (3.2.6) ne znači da je i cela teorija linearna, jer tenzor deformacije može relinearno zavisiti od gradijenata deformacije (o redu njihove veličine za sada ne uvodimo nikakve pretpostavke).

ma oblika (up. sa (301.1) u [6]):

$$t = E \frac{ab}{cd} e_{cd}, \quad (3.2.6)$$

u kojima su E tzv. koeficijenti elastičnosti prvog reda i, kao što je poznato, karakterišu materijalne simetrije posmatranog materijala.

3.3. Redukcija trodimenzionih jednačina polja na dvodimenzione

Pre nego što pristupimo izvodjenju jednačina polja (tanke) ljuske iz jednačina polja trodimenzionog kontinuuma, biće dato nekoliko osnovnih napomena o samoj Galerkinovoj proceduri kojom će ta redukcija biti izvršena. Takođe treba istaći da je već u [54], odnosno u [57] (doduše uz svodjenje na referentnu konfiguraciju) izvršena invarijantna redukcija trodimenzionih konstitutivnih jednačina Galerkinovim postupkom, ali će, radi potpunosti u izvodjenju jednačina polja tanke ljuske, ta redukcija biti ovde ponovljena, s tim što ćemo sada upotrebom "racionalnog" faktora (v. dalje) ceo postupak učiniti kraćim i opštijim (ostavljajući za sami kraj uvodjenje pretpostavke o zanemarivanju malih članova višeg reda, što je inače odlika Kosera teorije površi), pa zato i smatramo da ga treba izneti.

3.3.1. Galerkinov postupak. Galerkinov postupak (v. npr. u [19], [21] i [34]) je jedan od načina da se dodje do aproksimacije tzv. slabog rešenja neke jednačine ili, uopšte, nekog graničnog problema oblika na primer:

$$\begin{aligned} \tilde{D}[\tilde{f}(\tilde{x})] &= 0 & (\tilde{x} \in V) \\ \tilde{B}[\tilde{f}(\tilde{x})] &= 0 & (\tilde{x} \in \partial V) \end{aligned}, \quad (3.3.1)$$

gde su \underline{D} i \underline{B} neki npr. diferencijalni operatori (linearni ili nelinearni), a $\underline{f}(\underline{x})$ su tražene (dovoljno glatke) skalarne, vektorske ili uopšte tenzorske funkcije definisane u oblasti V , koja je npr. podskup trodimenzionog euklidskog prostora, tj. $V \subset E^3$. Sâmo slabo rešenje, za razliku od jakog ili tačnog rešenja, zadovoljava polazni problem samo integralno, a ne u svim tačkama oblasti V u kojoj se rešenje traži. Naime, klasa funkcija medju kojima bi se tražilo jako rešenje po pravilu je ograničena; stoga se pribegava njenom proširivanju, a za rešenje (tzv. slabo rešenje) se uzimaju takve funkcije $\underline{f}(\underline{x})$ koje imaju osobinu da anuliraju skalarni proizvod:

$$\langle \underline{D}[\underline{f}(\underline{x})], \underline{h}(\underline{x}) \rangle = 0 \quad (3.3.2)$$

za ma koju funkciju $\underline{h}(\underline{x})$ iz proširenog skupa funkcija; pri tome skalarni proizvod dveju funkcija iz tog skupa može biti definisan npr. izrazom:

$$\langle \underline{f}(\underline{x}), \underline{g}(\underline{x}) \rangle = \int_V \underline{f}(\underline{x}) \cdot \underline{g}(\underline{x}) \, dV, \quad (3.3.3)$$

kada se (3.3.2) svodi na:

$$\int_V \underline{D}[\underline{f}(\underline{x})] \cdot \underline{h}(\underline{x}) \, dV = 0, \quad (3.3.4)$$

pa se vidi zašto se, u slučaju traženja slabog rešenja, govori o integralnom zadovoljavanju problema. Budući da se uslovom (3.3.4) zahteva samo da je integral (unutrašnjeg) proizvoda $\underline{D}[\underline{f}(\underline{x})] \cdot \underline{h}(\underline{x})$ jednak nuli, a ne i samo $\underline{D}[\underline{f}(\underline{x})]$, jasno je da je klasa svih slabih rešenja posmatranog problema po pravilu mnogo šira od klase jakih rešenja.

Medjutim, treba odmah naglasiti da ni nalaženje slabog rešenja nije jednostavno. Stoga je sledeći korak aproksimiranje slabog rešenja; to i predstavlja sadržaj različitih metoda nalaženja približnih rešenja (linearnih i nelinearnih) operatorskih jednačina oblika (3.3.1). Suština je u tome da se umesto beskonačnodimenzionog prostora koji sadrži slabo rešenje posmatra njegov konačnodimenzioni potprostor i da se u tom potprostoru traži aproksimacija slabog rešenja; naime, svaka funkcija tog potprostora može se prikazati preko linearno nezavisnog (konačnog) skupa njegovih baznih funkcija:

$$\tilde{F}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^N P^i(\underline{x}) a_{\tilde{i}} \quad , \quad (3.3.5)$$

gde su $P^i(\underline{x})$ te bazne funkcije, a $a_{\tilde{i}}$ konstante, pa se dalji postupak sastoji u biranju koeficijenata $a_{\tilde{i}}$ tako da (3.3.5) aproksimira slabo rešenje polaznog problema (3.3.1), tj. da je zadovoljena relacija:

$$\langle D[\tilde{F}(\underline{x})] , \tilde{H}(\underline{x}) \rangle = 0 \quad (3.3.6)$$

za ma koju funkciju $\tilde{H}(\underline{x})$, ali sad iz konačnodimenzionog potprostora slabih rešenja. Uzimajući u obzir (3.3.3), možemo (3.3.6) da prepíšemo u obliku:

$$\int_V D[\tilde{F}(\underline{x})] \cdot \tilde{H}(\underline{x}) dV = 0 \quad (3.3.7)$$

i, zavisno od toga da li je D linearan ili nelinearan operator, dobija se linearan ili nelinearan sistem jednačina za određivanje koeficijenata $a_{\tilde{i}}$. Pri tome treba na neki način izabrati tzv. težinske funkcije $\tilde{H}(\underline{x})$.

3.3.1.1. O racionalnom izboru težinskih funkcija. Različitim izborom težinskih funkcija dobijaju se različite metode aproksimacije. Galerkinov postupak se zasniva na "racionalnom" (v. str 123 u [19]) izboru težinskih funkcija, tj. u saglasnosti sa oblikom upotrebljene (konačnoelementne) aproksimacije (3.3.5) za slabo rešenje :

$$\bar{h}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^N P^i(\underline{x}) b_i \quad ; \quad (3.3.8)$$

o detaljima se može videti u [19], [21] i [34].

3.3.1.2. O racionalnom izboru težinskog faktora. Budući da je Galerkinova procedura zapravo postupak dobijanja približnih jednačina (ovde će to biti jednačine polja tanke ljuske) i da se uz upotrebu različitih težinskih funkcija dobijaju i različite jednačine, to insistiranje na racionalnosti izbora težinskih funkcija ima za cilj i da dovede do što jednostavnijih približnih jednačina, a uz zadovoljavanje zadatog reda tačnosti. No, u radu će ta jednostavnost biti postignuta upotrebom i podesnog (težinskog) faktora uz uobičajene težinske funkcije u postupcima redukcije jednačina polja trodimenzionog kontinuuma; činjenica da će se na taj način veoma pojednostavniti postupci dobijanja jednačina kretanja ili konstitutivnih jednačina tanke ljuske u punoj meri opravdava reč racionalan u naslovu ovog pododeljka.

1
Razume se, valjanost samog slabog rešenja, pa dakle i težinskih funkcija, veoma zavisi od osobina upotrebljenih baznih funkcija ([34], str. 15).

3.3.2. Redukcija trodimenzionih jednačina kretanja Galerkinovim postupkom. Slabo rešenje jednačina kretanja (3.2.3):

$$t_{,b}^{ab} + \rho^* (f^a - w^a) = 0 \quad (3.3.9)$$

mogli bismo da potražimo u obliku:

$$\int_v \left[t_{,b}^{ab} + \rho^* (f^a - w^a) \right] p_a dv = 0, \quad (3.3.10)$$

pri čemu je sam vektor položaja p_a upotrebljen kao težinska funkcija, a dv je element zapremine u trenutnoj konfiguraciji. Dalje bi se mogla iskoristiti činjenica da je (v. npr. (2.24) i (2.27) u [35]):

$$\begin{aligned} dv &= \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\zeta \\ &= \sqrt{g/a} d\zeta \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 \\ &= \sqrt{g/a} d\zeta ds, \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

1

Pri skalarnom prilazu u izvodjenju jednačina kretanja tanke ljuske u teoriji tri polja ([47]), kao težinske funkcije korišćene su koordinate vektora brzine, ali u Dekartovom sistemu. Međutim, činjenica da nam se prelaz iz relacije:

$$\dot{\tilde{p}}_a = \dot{\tilde{r}}_a + \frac{1}{2} \zeta h_a^i \dot{\tilde{d}}_i + \frac{1}{2} \zeta h_a^i \dot{\tilde{d}}_i$$

(koja neposredno sledi iz (2.1.5)) na koordinatni oblik u krivolinijskim konvektivnim koordinatama nije činio ni lakim ni očiglednim (zbog nedoumica oko rotacije i njenog izražavanja u tim koordinatama, kao i zbog pitanja da li je izvod po vremenu operatora paralelnog pomeranja jednak nuli, sto bi zahtevalo da se pobliže raspravi i pitanje brzine u konvektivnim koordinatama, s obzirom na to da se i one deformišu sa telom (v. u (5.25) u [19] uvodjenje u brziranja u takvim koordinatama)), navela nas je da pokušamo sa samim vektorom položaja kao "racionalnijom" težinskom funkcijom; takav izbor, uz upotrebu odgovarajućeg "racionalnog" faktora (v. dalje), omogućiće vrlo jednostavno redukovanje trodimenzionih jednačina kretanja.

a potom, ukoliko se pretpostavi da je u pitanju tanka ljuska, i aproksimacija (v. (2.21) u [35]):

$$dv = \frac{h}{2} \left(1 - \zeta \frac{h}{2a} \right) d\zeta ds \quad (3.3.12)$$

Medjutim, uvođenjem "racionalnog" faktora $\sqrt{a/g}$ uz težinske funkcije u (3.3.10), biće izbegnuta potreba za stalnim procenjivanjem reda veličine pojedinih promenljivih (što je do sada činjeno u skalarnom pristupu Galerkinovoj proceduri), a (budući da se neće uvoditi aproksimacija (3.3.12) koja je vezana za tanke ljuske) dobijeni rezultati će važiti za teoriju ljusaka izvedenu iz trodimenzione teorije na osnovu ranije uvedenih aproksimacija polja napona, pomeranja i deformacije. Stoga ćemo slabo rešenje jednačina kretanja tražiti u obliku:

$$\int_v \left[\begin{matrix} t_{ab} & \cdot \\ & \rho (f^a - w^a) \end{matrix} \right] p_a \sqrt{a/g} dv = 0 \quad (3.3.13)$$

što se, zbog (v. (2.2.3)):

$$p_a = v_a^b r_b + \frac{1}{2} \zeta h v_a^b d_b \quad (3.3.14)$$

može napisati na sledeći način:

$$\int_v \left[\begin{matrix} r & d \\ c & c \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} v^c \\ a \\ \frac{1}{2} \zeta h v^c \\ a \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} t_{ab} & \cdot \\ & \rho (f^a - w^a) \end{matrix} \right] \sqrt{a/g} dv = 0 \quad (3.3.15)$$

medjutim, ako iskoristimo relaciju (3.3.11), u prethodnom se izrazu može razdvojiti integracija:

$$\int_s \begin{bmatrix} r & d \\ c & c \end{bmatrix} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} v & .c \\ a & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ab & * & a & a \\ t & ,b & + \rho & (f - w) \end{bmatrix} d\zeta ds = 0 . \quad (3.3.16)$$

No, kako ta relacija treba da bude zadovoljena u ma kojoj tački srednje površi ljuske s , to za traženje slabog rešenja preostaje uslov:

$$\int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} v & .c \\ a & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ab & * & a & a \\ t & ,b & + \rho & (f - w) \end{bmatrix} d\zeta = 0 . \quad (3.3.17)$$

Posmatrajmo prethodnu integraciju član po član, s tim što ćemo odmah razlikovati slučajeve kad je c iz skupa $\{1,2\}$ i kad je $c = 3$, jer će nam to pomoći da lakše izdvojimo neke karakteristične veličine pri redukciji. Tako ako iskoristimo relaciju (v. izraz (2.1.12)):

$$\delta_b^c = \frac{.f - 1}{b} \frac{c}{(v)} , \quad (3.3.18)$$

a potom i rezultat ¹(6.1.17) iz priloga 6.1., možemo da napišemo:

1

Upotreba "racionalnog" faktora pri Galerkinovoj redukciji upravo u ovom koraku dobija svoje puno opravdanje; naime, da je u izrazu (3.3.19) i dalje bio prisutan član $\sqrt{g/a}$ očit bi primena rezultata (6.1.17) dovela, zbog kovarijantne nekonstantnosti tog člana, do uslozljavanja daljih izraza. Istina, valja priznati da smo se u prvi mah ponadali, videvši u (inače izuzetno korisnoj knjizi) [9] na str. 169 tvrdnju o kovarijantnoj konstantnosti determinante metričkog tenzora, da će biti vrlo jednostavno ako se u daljem radu zadrži faktor $\sqrt{g/a}$; međutim, uvidev-

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^{+1} v \cdot \gamma \begin{matrix} ab \\ a \quad ,b \end{matrix} d\zeta &= \int_{-1}^{+1} t \begin{matrix} ab \\ ,c \end{matrix} v \cdot \gamma \begin{matrix} v \cdot f \\ a \quad b \end{matrix} \begin{matrix} -1 \\ (v) \end{matrix} c \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} d\zeta \\
 &= \int_{-1}^{+1} t \begin{matrix} ab \\ ,c \end{matrix} v \cdot \gamma \begin{matrix} v \cdot \phi \\ a \quad b \end{matrix} \begin{matrix} -1 \\ (v) \end{matrix} c \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} d\zeta + \\
 &+ \int_{-1}^{+1} t \begin{matrix} ab \\ ,c \end{matrix} v \cdot \gamma \begin{matrix} v \cdot 3 \\ a \quad b \end{matrix} \begin{matrix} -1 \\ (v) \end{matrix} c \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} d\zeta \\
 (3.3.19) \quad &= \left(\int_{-1}^{+1} t \begin{matrix} ab \\ v \quad a \end{matrix} v \cdot \gamma \begin{matrix} v \cdot \phi \\ v \quad b \end{matrix} d\zeta \right) , \phi + \\
 &+ \int_{-1}^{+1} \left(t \begin{matrix} ab \\ v \quad a \end{matrix} v \cdot \gamma \begin{matrix} v \cdot 3 \\ v \quad b \end{matrix} \right) , c \begin{matrix} -1 \\ (v) \end{matrix} c \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} d\zeta ;
 \end{aligned}$$

ako ovde, s jedne strane, iskoristimo definiciju (2.2.9) za rezultantu napona $T^{\alpha\beta}$, a, sa druge strane, okolnost da je $(v)_{-1}^1 = (v)_{-1}^2 = 0$ i da je $(v)_{-1}^3 = 1$ (v. izraze (2.1.14)), onda se može pisati da je:

ši da se radi o omaški (što je zapravo jasno iz dobro poznatog rezultata o vrednosti parcijalnog izvoda determinante metričkog tenzora (v. npr. izraz (8.6) u [17])), pribegli smo uvođenju "racionalnog" faktora $\sqrt{a/g}$ u Galerkinovu proceduru. No, treba naglasiti da to omogućava da se odmah uvrste i u (2.2.9) uvedene rezultante napona, koje se od uobičajenih u teoriji ljsaka razlikuju prisustvom još "jednog" operatora v i odsustvom faktora $\sqrt{g/a}$ (o uspostavljanju veze između takvog uvođenja rezultanti napona na osnovu trodimenzione teorije i tzv. direktnog pristupa u teoriji tanke ljske biće reči u prilogu 6.2.).

$$\dots = T_{o,\phi}^{\gamma\phi} + \int_{-1}^{+1} \left(t^{ab} v_{\cdot\gamma} v_{\cdot 3} \right)_{,3} d\zeta ; \quad (3.3.20)$$

medjutim, izraz u zagradi jeste dvostruko tenzorsko polje, a li koje nema slobodnih indeksa vezanih za tačku $\zeta \neq 0$ (jedini slobodni indeksi γ i 3 odnose se na tačku $\zeta = 0$), pa se parcijalno kovarijantno diferenciranje po trećoj konvektivnoj koordinati, tj. po ζ (u nekoj tacki $\zeta \neq 0$) može zameniti "običnim" parcijalnim diferenciranjem (opet, razume se, u tacki $\zeta \neq 0$ ili, preciznije, za neku od vrednosti integracione promenljive):

$$\dots = T_{o,\phi}^{\gamma\phi} + \int_{-1}^{+1} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(t^{ab} v_{\cdot\gamma} v_{\cdot 3} \right) d\zeta . \quad (3.3.21)$$

No, to je dalje jednako: (3.3.22)

$$\dots = T_{o,\phi}^{\gamma\phi} + \left(t^{ab} v_{\cdot\gamma} v_{\cdot 3} \right) \Big|_{\zeta=+1} - \left(t^{ab} v_{\cdot\gamma} v_{\cdot 3} \right) \Big|_{\zeta=-1} ,$$

a ako se iskoristi (2.3.12), najzad bi se dobilo:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} v_{\cdot\gamma} t^{ab}{}_{,b} d\zeta &= T_{o,\phi}^{\gamma\phi} + \\ &+ \frac{2}{h|c|} \left(p_{+}^{\theta} v_{\cdot\gamma} \Big|_{\zeta=+1} + p_{-}^{\theta} v_{\cdot\gamma} \Big|_{\zeta=-1} \right) + \\ (3.3.23) \quad &+ \frac{1}{2h} h_{;\omega} T_{o}^{\gamma\delta} \left(\begin{matrix} -1 & \omega \\ (v) & \cdot\delta \end{matrix} \Big|_{\zeta=+1} + \begin{matrix} -1 & \omega \\ (v) & \cdot\delta \end{matrix} \Big|_{\zeta=-1} \right) + \\ &+ \frac{3}{2h} h_{;\omega} T_{1}^{\gamma\delta} \left(\begin{matrix} -1 & \omega \\ (v) & \cdot\delta \end{matrix} \Big|_{\zeta=+1} - \begin{matrix} -1 & \omega \\ (v) & \cdot\delta \end{matrix} \Big|_{\zeta=-1} \right) ; \end{aligned}$$

pa ako se sad iskoristi (2.3.13), dobilo bi se:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^{+1} v_a^{\cdot 3} t^{ab}{}_{,b} d\zeta = T_o^{\cdot 3\phi}{}_{,\phi} + \\
 & + \frac{2}{h|c|} (p_+^3 + p_-^3) + \frac{4}{h|c|h} h_{;\theta} (p_+^{\theta} - p_-^{\theta}) + \\
 & + \frac{1}{2hh} h_{;\theta} h_{;\omega} T_o^{\phi\psi} \left[\begin{array}{c} -1 \theta \\ (\nu) \end{array} \middle| \begin{array}{c} -1 \omega \\ (\nu) \end{array} \middle|_{\zeta=+1} - \begin{array}{c} -1 \theta \\ (\nu) \end{array} \middle| \begin{array}{c} -1 \omega \\ (\nu) \end{array} \middle|_{\zeta=-1} \right] + \\
 & + \frac{3}{2hh} h_{;\theta} h_{;\omega} T_1^{\phi\psi} \left[\begin{array}{c} -1 \theta \\ (\nu) \end{array} \middle| \begin{array}{c} -1 \omega \\ (\nu) \end{array} \middle|_{\zeta=+1} + \begin{array}{c} -1 \theta \\ (\nu) \end{array} \middle| \begin{array}{c} -1 \omega \\ (\nu) \end{array} \middle|_{\zeta=-1} \right],
 \end{aligned} \tag{3.3.25}$$

što bi se, ako je ljuska uniformne debljine i nema opterećenja na njenim licima, svelo samo na prvi član sa desne strane znaka jednakosti.

Posmatrajmo sad sledeći izraz:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^{+1} v_a^{\cdot \gamma} t^{ab}{}_{,b} \zeta d\zeta = \int_{-1}^{+1} \left(\zeta t^{ab}{}_{,b} \right) v_a^{\cdot \gamma} d\zeta - \\
 & - \int_{-1}^{+1} v_a^{\cdot \gamma} t^{ab}{}_{,b} \zeta d\zeta.
 \end{aligned} \tag{3.3.26}$$

Na prvi sabirak sa desne strane prethodnog izraza može se u celosti primeniti postupak upotrebljen u (3.3.19) - (3.3.23), s tim što bi se iskoristila definicija (2.2.9) za rezultantu napona $T_{13}^{\alpha\beta}$. Što se tiče drugog sabirka u (3.3.26), on se, zbog $\zeta_{,b} = \delta_b^3$, svodi na:

$$\int_{-1}^{+1} v_a^{\gamma} t^{ab} \zeta_{,b} d\zeta = \int_{-1}^{+1} v_a^{\gamma} t^{a3} d\zeta \quad (3.3.27)$$

Medjutim, ako sad reprezentaciju (2.2.7) prepíšemo za slucaj kad je $c = 1, 2$ i $d = 3$, biće:

$$t_{ab}^{\gamma} v_a^{\gamma} v_b^{\gamma} = \frac{1}{2} T_o^{\gamma 3} + \frac{3}{2} \zeta T_1^{\gamma 3} + \frac{5}{4} (3 \zeta^2 - 1) T_2^{\gamma 3},$$

ili:

$$t_{a3}^{\gamma} v_a^{\gamma} v_3^{\gamma} + t_{a\omega}^{\gamma} v_a^{\gamma} v_\omega^{\gamma} = \frac{1}{2} T_o^{\gamma 3} + \frac{3}{2} \zeta T_1^{\gamma 3} + \frac{5}{4} (3 \zeta^2 - 1) T_2^{\gamma 3}, \quad (3.3.29)$$

odnosno (znajući da je $v_3^{\gamma} = v_\omega^{\gamma} = 0$ i $v_3^{\gamma} = 1$, što sledi iz (2.1.13), tj. iz (2.1.10)):

$$t_{\alpha 3}^{\gamma} v_\alpha^{\gamma} + t_{\alpha \omega}^{\gamma} v_\alpha^{\gamma} v_\omega^{\gamma} = \frac{1}{2} T_o^{\gamma 3} + \frac{3}{2} \zeta T_1^{\gamma 3} + \frac{5}{4} (3 \zeta^2 - 1) T_2^{\gamma 3} \quad (3.3.30)$$

Integraljenjem poslednje relacije dobijamo sledeći izraz za integral na desnoj strani u (3.3.27):

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} v_a^{\gamma} t^{a3} d\zeta &= \int_{-1}^{+1} v_\alpha^{\gamma} t^{\alpha 3} d\zeta \\ &= T_o^{\gamma 3} - \int_{-1}^{+1} t^{\alpha \omega} v_\alpha^{\gamma} v_\omega^{\gamma} d\zeta; \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

na taj način smo integral (3.3.27) izrazili preko rezultante $T_o^{\gamma 3}$ i još jednog integrala koji se, medjutim, u slučaju

ljuske uniformne debljine, svodi na nulu (budući da je tada $v_{\omega 1}^3 = 0$; v. (2.1.13)). Taj drugi integral, koji ćemo obeležiti sa:

$$\bar{T}_0^{\gamma 3} = \int_{-1}^{+1} t^{\alpha \omega} v_{\alpha}^{\gamma} v_{\omega}^3 d\zeta, \quad (3.3.32)$$

geometrijski bi se mogao protumačiti kao rezultanta koja odgovara nesimetričnom polju $\{ t_{11}, t_{12}, 0; t_{21}, t_{22}, 0; t_{31}, t_{32}, t_{33} \}$; no, na tome se sad nećemo posebno zadržavati; jedino bismo istakli da bi postupak u (3.3.31) trebalo da nam olakša kasnije upoređivanje dobijenih jednačina sa u literaturi uobičajenim jednačinama kretanja tanke ljuske uniformne debljine.

Na osnovu prethodno rečenog, moguće je da se (3.3.26) napiše u sledećem obliku:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} v_a^{\gamma} t_{ab}^{\alpha} \zeta d\zeta &= T_{1, \phi}^{\gamma \phi} + \\ &+ \left(\zeta t_{ab}^{\alpha} v_a^{\gamma} v_b^3 \right) \Big|_{\zeta=+1} - \left(\zeta t_{ab}^{\alpha} v_a^{\gamma} v_b^3 \right) \Big|_{\zeta=-1} \\ &- T_0^{\gamma 3} + \bar{T}_0^{\gamma 3} \\ &= T_{1, \phi}^{\gamma \phi} - T_0^{\gamma 3} + \bar{T}_0^{\gamma 3} \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

1

Up. sa postupkom u (4.100) u [23] kada je, prilikom izvodenja jednačina ravnoteže tanke ljuske, izraz koji ne predstavlja neku od rezultanti napona (a sadrži koordinate, preciznije izvode koordinata tenzora napona) takodje jednostavno zamenjen novom oznakom koja se kasnije pojavljuje u jednačinama ravnoteže.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{h |c|} \left(\left. \begin{matrix} \theta & \cdot \gamma \\ p & v \\ + & \theta \end{matrix} \right|_{\zeta=+1} - \left. \begin{matrix} \theta & \cdot \gamma \\ p & v \\ - & \theta \end{matrix} \right|_{\zeta=-1} \right) + \\
 (3.3.33) & + \frac{1}{2 h} h ; \omega \begin{matrix} \gamma \delta \\ T \\ o \end{matrix} \left(\left. \begin{matrix} -1 & \omega \\ (v) & . \delta \end{matrix} \right|_{\zeta=+1} - \left. \begin{matrix} -1 & \omega \\ (v) & . \delta \end{matrix} \right|_{\zeta=-1} \right) + \\
 & + \frac{3}{2 h} h ; \omega \begin{matrix} \gamma \delta \\ T \\ 1 \end{matrix} \left(\left. \begin{matrix} -1 & \omega \\ (v) & . \delta \end{matrix} \right|_{\zeta=+1} + \left. \begin{matrix} -1 & \omega \\ (v) & . \delta \end{matrix} \right|_{\zeta=-1} \right) ;
 \end{aligned}$$

ako je ljuska uniformne debljine i nema opterećenja na njenim licima, sa desne strane poslednjeg znaka jednakosti bi preostala samo prva dva sabirka.

Postupajući slično kao od (3.3.26) - (3.3.33), dobili bismo:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^{+1} v_{a,b}^{.3} t^{ab} \zeta d\zeta = \int_{-1}^{+1} \left(\zeta t^{ab} \right)_{,b} v_a^{.3} d\zeta - \\
 & - \int_{-1}^{+1} v_{a,b}^{.3} t^{ab} \zeta d\zeta \\
 & = T_{1,\phi}^{3\phi} + \\
 & + \left(\zeta t^{ab} v_a^{.3} v_b^{.3} \right) \Big|_{\zeta=+1} - \left(\zeta t^{ab} v_a^{.3} v_b^{.3} \right) \Big|_{\zeta=-1} \\
 & - T_o^{33} + \bar{T}_o^{33} \qquad (3.3.34) \\
 & = T_{1,\phi}^{3\phi} - T_o^{33} + \bar{T}_o^{33} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{h|c|} (p_+^3 - p_-^3) + \frac{4}{h|c|h} h; \theta (p_+^\theta + p_-^\theta) + \\
& + \frac{1}{2hh} h; \theta h; \omega T_o^{\phi\psi} \left[\begin{array}{c} -1 \theta \\ (v) \end{array} \left| \begin{array}{c} -1 \omega \\ (v) \end{array} \right| \begin{array}{c} -1 \theta \\ (v) \end{array} \left| \begin{array}{c} -1 \omega \\ (v) \end{array} \right| \right]_{\zeta=+1}^{\zeta=+1} + \left[\begin{array}{c} -1 \theta \\ (v) \end{array} \left| \begin{array}{c} -1 \omega \\ (v) \end{array} \right| \begin{array}{c} -1 \theta \\ (v) \end{array} \left| \begin{array}{c} -1 \omega \\ (v) \end{array} \right| \right]_{\zeta=-1}^{\zeta=-1} + \\
& + \frac{3}{2hh} h; \theta h; \omega T_1^{\phi\psi} \left[\begin{array}{c} -1 \theta \\ (v) \end{array} \left| \begin{array}{c} -1 \omega \\ (v) \end{array} \right| \begin{array}{c} -1 \theta \\ (v) \end{array} \left| \begin{array}{c} -1 \omega \\ (v) \end{array} \right| \right]_{\zeta=+1}^{\zeta=+1} - \left[\begin{array}{c} -1 \theta \\ (v) \end{array} \left| \begin{array}{c} -1 \omega \\ (v) \end{array} \right| \begin{array}{c} -1 \theta \\ (v) \end{array} \left| \begin{array}{c} -1 \omega \\ (v) \end{array} \right| \right]_{\zeta=-1}^{\zeta=-1} ,
\end{aligned}$$

gde je (up. sa (3.3.32)) stavljeno:

$$\bar{T}_o^{33} = \int_{-1}^{+1} t \frac{a\omega}{v} \frac{.3}{a} \frac{.3}{\omega} d\zeta , \quad (3.3.35)$$

što bi se geometrijski moglo protumačiti kao rezultanta koja odgovara nesimetričnom polju $\{ t_{11}, t_{12}, 0; t_{21}, t_{22}, 0; t_{31}, t_{32}, 0 \}$. U svakom slučaju, može se reći da će se (3.3.34), za ljusku uniformne debljine i u odsutnosti opterećenja na njenim licima, svesti samo na prva dva sabirka.

Najzad, preostalo je da u (3.3.17) analiziramo i sledeća dva integrala:

$$\int_{-1}^{+1} \rho (f^a - w^a) v_a^{\cdot c} d\zeta \quad (3.3.36)$$

i:

$$\int_{-1}^{+1} \rho (f^a - w^a) v_a^{\cdot c} \zeta d\zeta \quad (3.3.37)$$

Postupićemo na način sličan uobičajenim postupcima u teoriji ljusaka (v. npr. str. 44-45 u [10], odnosno str. 513 u [18] ili str. 157-159 u [20]) i definisati¹ sledeće veličine:

1

Saglasno Eriksenovom konceptu o integraljenju vektorskih polja u krivolinijskim koordinatama (v. [7] str. 308).

$$F^c = \int_{-1}^{+1} \rho (f^a - w^a) v_a^{\cdot c} d\zeta \quad (3.3.38)$$

i:

$$L^c = \int_{-1}^{+1} \rho (f^a - w^a) v_a^{\cdot c} \zeta d\zeta ; \quad (3.3.39)$$

prvi integral u (3.3.38), odnosno prvi integral u (3.3.39) može se interpretirati kao rezultujuća zapreminska sila, odnosno rezultujući zapreminski spreg koji dejstvuje na referentnu površ ljuske; što se tiče drugog integrala u (3.3.38), odnosno u (3.3.39), on bi mogao biti određen posle specifikacije gustine i pomeranja (up. sa onim što je rečeno na str. 44-45 u [10]), a što se tiče geometrijskog tumačenja tu se ni u kom slučaju ne može govoriti o ubrzanju neke tačke referentne površi ljuske, već samo o usrednjenoj vrednosti ubrzanja svih tačaka na normali kroz uočenu tačku referentne površi (v. str. 564 u [6]).

Sada smo u mogućnosti da iz uslova (3.3.17) (uzimajući u obzir (3.3.23), (3.3.25), (3.3.33), (3.3.34), (3.3.38) i (3.3.39)), kao slabo rešenje, tačnije kao aproksimaciju slabog rešenja jednačina kretanja trodimenzionog kontinuuma, izvedemo jednačine kretanja tanke ljuske neuniformne debljine:

$$\begin{aligned} T_{o, \phi}^{\gamma \phi} + F^{\gamma} + \frac{2}{h |c|} \left(p_{+}^{\theta} v_{\theta}^{\cdot \gamma} \Big|_{\zeta=+1} + p_{-}^{\theta} v_{\theta}^{\cdot \gamma} \Big|_{\zeta=-1} \right) + \\ + \frac{1}{2 h} h_{; \omega} T_{o}^{\gamma \delta} \left(\begin{matrix} -1 & \omega \\ (v) & \cdot \delta \end{matrix} \Big|_{\zeta=+1} + \begin{matrix} -1 & \omega \\ (v) & \cdot \delta \end{matrix} \Big|_{\zeta=-1} \right) + \\ + \frac{3}{2 h} h_{; \omega} T_{1}^{\gamma \delta} \left(\begin{matrix} -1 & \omega \\ (v) & \cdot \delta \end{matrix} \Big|_{\zeta=+1} - \begin{matrix} -1 & \omega \\ (v) & \cdot \delta \end{matrix} \Big|_{\zeta=-1} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & T_{0,\phi}^{3\phi} + F^3 + \frac{2}{h|c|} (p_+^3 + p_-^3) + \\
 & + \frac{4}{h|c|h} h_{;\theta} (p_+^\theta - p_-^\theta) + \\
 & + \frac{1}{2hh} h_{;\theta} h_{;\omega} T_{0,\phi}^{\phi\psi} \left[\begin{array}{c|c} -1 & \theta \\ \hline (v) & \omega \end{array} \right]_{\zeta=+1} \left[\begin{array}{c|c} -1 & \omega \\ \hline (v) & \psi \end{array} \right]_{\zeta=+1} - \begin{array}{c|c} -1 & \theta \\ \hline (v) & \omega \end{array} \left[\begin{array}{c|c} -1 & \omega \\ \hline (v) & \psi \end{array} \right]_{\zeta=-1} \left[\begin{array}{c|c} -1 & \omega \\ \hline (v) & \psi \end{array} \right]_{\zeta=-1} \right] + \\
 & + \frac{3}{2hh} h_{;\theta} h_{;\omega} T_{1,\phi}^{\phi\psi} \left[\begin{array}{c|c} -1 & \theta \\ \hline (v) & \omega \end{array} \right]_{\zeta=+1} \left[\begin{array}{c|c} -1 & \omega \\ \hline (v) & \psi \end{array} \right]_{\zeta=+1} + \begin{array}{c|c} -1 & \theta \\ \hline (v) & \omega \end{array} \left[\begin{array}{c|c} -1 & \omega \\ \hline (v) & \psi \end{array} \right]_{\zeta=-1} \left[\begin{array}{c|c} -1 & \omega \\ \hline (v) & \psi \end{array} \right]_{\zeta=-1} \right] = \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & T_{1,\phi}^{\gamma\phi} - T_{0,\phi}^{\gamma^3} + \bar{T}_{0,\phi}^{\gamma^3} + L^\gamma + \\
 & + \frac{2}{h|c|} \left(\begin{array}{c|c} \theta & \cdot \gamma \\ \hline p_+ & v \\ \theta & \end{array} \right)_{\zeta=+1} - \begin{array}{c|c} \theta & \cdot \gamma \\ \hline p_- & v \\ \theta & \end{array} \left[\begin{array}{c|c} -1 & \omega \\ \hline (v) & \delta \end{array} \right]_{\zeta=+1} \left[\begin{array}{c|c} -1 & \omega \\ \hline (v) & \delta \end{array} \right]_{\zeta=-1} \right] + \\
 & + \frac{1}{2h} h_{;\omega} T_{0,\phi}^{\gamma\delta} \left(\begin{array}{c|c} -1 & \omega \\ \hline (v) & \delta \end{array} \right)_{\zeta=+1} - \begin{array}{c|c} -1 & \omega \\ \hline (v) & \delta \end{array} \left[\begin{array}{c|c} -1 & \omega \\ \hline (v) & \delta \end{array} \right]_{\zeta=-1} \right) + \\
 & + \frac{3}{2h} h_{;\omega} T_{1,\phi}^{\gamma\delta} \left(\begin{array}{c|c} -1 & \omega \\ \hline (v) & \delta \end{array} \right)_{\zeta=+1} + \begin{array}{c|c} -1 & \omega \\ \hline (v) & \delta \end{array} \left[\begin{array}{c|c} -1 & \omega \\ \hline (v) & \delta \end{array} \right]_{\zeta=-1} \right) = \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & T_{1,\phi}^{3\phi} - T_{0,\phi}^{33} + \bar{T}_{0,\phi}^{33} + L^3 + \frac{2}{h|c|} (p_+^3 - p_-^3) + \\
 & + \frac{4}{h|c|h} h_{;\theta} (p_+^\theta + p_-^\theta) + \\
 & + \frac{1}{2hh} h_{;\theta} h_{;\omega} T_{0,\phi}^{\phi\psi} \left[\begin{array}{c|c} -1 & \theta \\ \hline (v) & \omega \end{array} \right]_{\zeta=+1} \left[\begin{array}{c|c} -1 & \omega \\ \hline (v) & \psi \end{array} \right]_{\zeta=+1} + \begin{array}{c|c} -1 & \theta \\ \hline (v) & \omega \end{array} \left[\begin{array}{c|c} -1 & \omega \\ \hline (v) & \psi \end{array} \right]_{\zeta=-1} \left[\begin{array}{c|c} -1 & \omega \\ \hline (v) & \psi \end{array} \right]_{\zeta=-1} \right] + \\
 & + \frac{3}{2hh} h_{;\theta} h_{;\omega} T_{1,\phi}^{\phi\psi} \left[\begin{array}{c|c} -1 & \theta \\ \hline (v) & \omega \end{array} \right]_{\zeta=+1} \left[\begin{array}{c|c} -1 & \omega \\ \hline (v) & \psi \end{array} \right]_{\zeta=+1} - \begin{array}{c|c} -1 & \theta \\ \hline (v) & \omega \end{array} \left[\begin{array}{c|c} -1 & \omega \\ \hline (v) & \psi \end{array} \right]_{\zeta=-1} \left[\begin{array}{c|c} -1 & \omega \\ \hline (v) & \psi \end{array} \right]_{\zeta=-1} \right] = \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

3.3.3. O redukciji trodimenzionog tenzora deformacije. Ako bismo želeli da dodjemo do eksplicitnih izraza za koeficijente $e_{\phi\psi}^0$, $e_{\phi\psi}^1$ i $e_{\phi^3}^0$ (za koje je u pododeljku 2.2.3. rečeno da će imati ulogu mera deformacije u ovde usvojenom pristupu pri izvodjenju jednačina polja tanke ljuske), trebalo bi poći od izraza (2.2.11) za te koeficijente i u njih zameniti izraze za operatore paralelnog pomeranja.

Medjutim, kako će nam eksplicitni izrazi za uvedene kinematičke mere biti potrebni tek u pododeljku 3.4.2. pri poredjenju tih mera sa uobičajenim merama deformacije u teoriji tanke ljuske, sad se na tome nećemo zadržavati, ali ćemo istaći sledeće: Galerkinovim bi se postupkom mogla izvršiti redukcija i jednačina (3.2.5):

$$2 e_{ab}^2 = g_{ab} - G_{ab}, \quad (3.3.41)$$

odnosno:

$$e_{ab} - \frac{1}{2} (g_{ab} - G_{ab}) = 0, \quad (3.3.42)$$

čije bismo slabo rešenje mogli da potražimo u obliku:

$$\int_V t^{ab} [e_{ab} - \frac{1}{2} (g_{ab} - G_{ab})] \sqrt{a/g} dv = 0, \quad (3.3.43)$$

uzimajući sad koordinate tenzora napona kao težinske funkcije¹, ali koristeći i ovde "racionalni" faktor $\sqrt{a/g}$. Dalje bi se u (3.3.43) zamenile aproksimacije za tenzore napona (2.2.7) i deformacije (2.2.10) itd.; ipak, potreba za takvom redukcijom trodimenzionih mera deformacije prevazidje-

¹ Tako je učinjeno i u [44], s tim što je tada umesto jednačina (3.3.42) korišćena veza deformacija i pomeranja.

na je neposrednim integraljenjem relacija (2.2.10) i dobijanjem izraza (2.2.11).

3.3.4. Redukcija trodimenzionih konstitutivnih jednačina Galerkinovim postupkom. Polazimo od Galerkinove aproksimacije veze (3.2.6) napona i deformacije za trodimenziono linearno elastično telo:

$$\int_V e_{ab} (t^{ab} - E^{abcd} e_{cd}) \sqrt{a/g} dv = 0 \quad ; \quad (3.3.44)$$

pri tome smo (za razliku od onog u [54], odnosno [57], a slično onom u pododeljku 3.3.2) uz težinske funkcije e_{ab} uveli i "racionalni" faktor $\sqrt{a/g}$.

Medjutim, poslednji izraz možemo da prepíšemo i ovako:

$$\int_V e_{ab} \left[\begin{matrix} -1 & a & -1 & b & & .c & .d & ef \\ (v) & :c & (v) & .d & [& v & v & t \\ & & & & e & f & & - \end{matrix} \right. \quad (3.3.45)$$

$$\left. - \frac{.c}{e} \frac{.d}{f} E^{efgh} \frac{.p}{g} \frac{.q}{h} \frac{-1}{.p} \frac{u}{.q} \frac{-1}{uv} v \right] \sqrt{a/g} dv = 0$$

i to treba da nam omogući upotrebu ranije uvedenih reprezentacija (2.2.7) i (2.2.10) za tenzore napona i deformacije.

Pri tome izraz:

$$E_{r \quad cdpq} = \frac{.c}{e} \frac{.d}{f} E^{efgh} \frac{.p}{g} \frac{.q}{h} \quad (3.3.46)$$

predstavlja konstitutivne koeficijente trodimenzionog kontinuuma (u odnosu na trenutnu konfiguraciju) paralelno pomerene duž ζ -pravca u odgovarajuću tačku referentne površi ljuske i , radi jednostavnijeg daljeg pisanja, obeležili smo ga sa $E_{r \quad cdrs}$. S obzirom na to da stepeni aproksimacije nisu isti za sve koordinate u reprezentacijama (2.2.7) i

(2.2.10), biće zgodno da relaciju (3.3.45), koja će kasnije dati konstitutivne jednačine tanke ljske kao slabo rešenje (tačnije, kao aproksimaciju slabog rešenja) konstitutivnih jednačina trodimenzionog tela po ζ -koordinati, prepíšemo na sledeći način (koristeći simetriju tenzora napona i deformacije i odgovarajuću simetriju koeficijenata elastičnosti):

$$\int_V \begin{bmatrix} e & -1 a & -1 b \\ ab & (\nu) & (\nu) \\ \cdot \phi & \cdot \psi & \cdot 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 e & -1 a & -1 b \\ ab & (\nu) & (\nu) \\ \cdot \phi & \cdot \psi & \cdot 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & -1 a & -1 b \\ ab & (\nu) & (\nu) \\ \cdot 3 & \cdot 3 & \cdot 3 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \left[\begin{bmatrix} \cdot \phi & \cdot \psi & ef \\ \nu & \nu & t \\ e & f & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \psi \theta \omega & \phi \psi \theta 3 & \phi \psi 33 \\ E_r & E_r & E_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 u & -1 v \\ (\nu) & (\nu) \\ \cdot \theta & \cdot \omega \\ e & uv \end{bmatrix} \right] \times$$

$$\times \left[\begin{bmatrix} \cdot \phi & \cdot 3 & ef \\ \nu & \nu & t \\ e & f & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi 3 \theta \omega & \phi 3 \theta 3 & \phi 3 33 \\ E_r & E_r & E_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 u & -1 v \\ (\nu) & (\nu) \\ \cdot \theta & \cdot 3 \\ e & uv \end{bmatrix} \right] \times$$

$$\times \left[\begin{bmatrix} \cdot 3 & \cdot 3 & ef \\ \nu & \nu & t \\ e & f & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 33 \theta \omega & 33 \theta 3 & 33 33 \\ E_r & E_r & E_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 u & -1 v \\ (\nu) & (\nu) \\ \cdot 3 & \cdot 3 \\ e & uv \end{bmatrix} \right] \times$$

$$\times \sqrt{a/g} \, dv = 0 \quad . \quad (3.3.47)$$

Ono što bi dalje trebalo da se uradi, jeste da se u (3.3.47) zamene aproksimacije (2.2.10) za mere deformacije, aproksimacije (2.3.12) i (2.3.13) za mere napona, kao i reprezentacija prvog stepena za $t^{\theta\omega}$ koja se dobija iz (2.2.7) odbacivanjem kvadratnih članova¹, i najzad izraz (3.3.11) za zapre-

¹

Već smo naveli da je u [54], odnosno u [57] pokazano da da je, u cilju zadovoljavanja graničnih uslova na licima tanke ljske, dovoljno aproksimirati samo "poprečne" komponente napona Ležandrovim po inomima drugog reda s obzirom na koordinatu ζ , dok se za komponente u površima $\zeta = \text{const}$ mogu uzeti i polinomi prvog reda.

minski element trodimenzionog tela. Za sada ćemo to, međju-
tim, učiniti samo delimično, naime:

$$\int_s \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ e_{\phi\psi} & e_{\phi\psi} & e_{\phi 3} & e_{\phi 3} & e_{\phi 3} & e_{33} & e_{33} \end{matrix} \right\} \times$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} \zeta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \zeta & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} (3\zeta^2 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \zeta \end{bmatrix} \times$$

$$\times \left[\begin{matrix} \begin{bmatrix} \cdot\phi & \cdot\psi & ef \\ v & v & t \\ e & f & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \phi\psi\theta\omega & \phi\psi\theta 3 & \phi\psi 33 \\ E & E & E \\ r & r & r \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 u & -1 v \\ (v) & (v) \\ \cdot\theta & \cdot\omega \\ e & uv \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \cdot\phi & \cdot 3 & ef \\ v & v & t \\ e & f & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \phi 3\theta\omega & \phi 3\theta 3 & \phi 333 \\ E & E & E \\ r & r & r \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 u & -1 v \\ (v) & (v) \\ \cdot\theta & \cdot 3 \\ e & uv \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \cdot 3 & \cdot 3 & ef \\ v & v & t \\ e & f & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 33\theta\omega & 33\theta 3 & 3333 \\ E & E & E \\ r & r & r \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 u & -1 v \\ (v) & (v) \\ \cdot 3 & \cdot 3 \\ e & uv \end{bmatrix} \end{matrix} \right] \times$$

$$\times d\zeta \} ds = 0 \quad , \quad (3.3.48)$$

pa ćemo zahtevati da poslednja relacija vazi u ma kakvoj
tački površi s , tako da, vodeći računa da koeficijenti
 $e_{\phi\psi}^0$, $e_{\phi\psi}^1$, ... mogu da budu proizvoljni, dobijamo:

U slučaju homogenog i izotropnog elastičnog materijala u polaznim trodimenzionim jednačinama koeficijenti elastičnosti E_{abcd} su jednaki (up. sa izrazom (3.5.3) u [22]; takodje v. i izraz (19.3) u [7], koji se u linearnoj teoriji navodi za inicijalno homogen i izotropan materijal):

$$E_{abcd} = \lambda g_{ab} g_{cd} + \mu (g_{ac} g_{bd} + g_{ad} g_{bc}), \quad (3.3.51)$$

gde su λ i μ Laméove (Lamé) konstante elastičnosti:

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad (3.3.52)$$

u njima je E Jungov (Young) modul elastičnosti, a ν Poissonov (Poisson) broj. Međutim, kao što je u opštem slučaju paralelno preneti osnovni (metrički) tenzor iz jedne u drugu tačku euklidskog prostora jednak osnovnom tenzoru u toj drugoj tački (v. str. 98 u [17]), tako je i pri paralelnom pomeranju duž normale na srednju površ:

$$a_{ab} = \nu \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} g_{cd}, \quad (3.3.53)$$

pa se odmah vidi da se za koeficijente E_{abcd} iz (3.3.46), u slučaju izotropnog elastičnog materijala, dobija:

$$C_{abcd} = E_r \begin{pmatrix} ab & cd \\ a & a \end{pmatrix} = \lambda a_{ab} + \mu (a_{ac} a_{bd} + a_{ad} a_{bc}); \quad (3.3.54)$$

očigledno je da oni ovde ne zavise od ζ -koordinate, što će svakako pojednostavniti ¹ integraciju u (3.3.50). Pri tome

1

Na str. 67 u [54], odnosno [57] ističe se da je zapravo insistiranje na invarijantnosti upotrebljenih i egzaktnih i aproksimativnih izraza omogućilo da u Galerkinovoj proceduri izbegnemo neke od koraka aproksimacije; naime, u [48] smo morali da koristimo približne izraze za koordina-

smo koeficijente elastičnosti obeležili sa C^{abcd} i tu ćemo oznaku dalje upotrebljavati kako bismo naglasili da je reč o određenoj klasi materijala. Dalje pojednostavljivanje rada može se postići ako se uzme u obzir da je (za razliku od $g^{\phi 3}$) $a^{\phi 3} = 0$ (zbog $\underline{a}^3 \perp \underline{a}^\phi$; up. sa (2.12c) u [36]), tako da se za matricu elastičnih koeficijenata C^{abcd} može napisati:

$$\begin{bmatrix} C^{\phi\psi\theta\omega} & C^{\phi\psi\theta 3} & C^{\phi\psi 33} \\ C^{\phi 3\theta\omega} & C^{\phi 3\theta 3} & C^{\phi 333} \\ C^{33\theta\omega} & C^{33\theta 3} & C^{3333} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{\phi\psi\theta\omega} & 0 & C^{\phi\psi 33} \\ 0 & C^{\phi 3\theta 3} & 0 \\ C^{33\theta\omega} & 0 & C^{3333} \end{bmatrix} \quad (3.3.55)$$

gde su članovi različiti od nule jednaki:

$$\begin{aligned} C^{\phi\psi\theta\omega} &= \lambda a^\phi a^\psi a^\theta a^\omega + \mu (a^\phi a^\theta a^\psi a^\omega + a^\phi a^\omega a^\psi a^\theta) \\ C^{\phi\psi 33} &= \lambda (2/h)^2 a^{\phi\psi} \\ C^{\phi 3\theta 3} &= \mu (2/h)^2 a^{\phi\theta} \\ C^{33\theta\omega} &= \lambda (2/h)^2 a^{\theta\omega} \\ C^{3333} &= (\lambda + 2\mu) (2/h)^4 \end{aligned} \quad (3.3.56)$$

Sada ćemo izraz (3.3.50) napisati sa koeficijentima elastičnosti C^{abcd} , vodeći računa da su neki od njih jednaki nuli:

te metričkog tenzora, a ovde smo, zahvaljujući operatorima \underline{v} , tenzor g_{ab} "zamenili" sa a_{ab} .

$\int_{-1}^{+1} d\zeta = 2$	$\int_{-1}^{+1} \zeta^2 d\zeta = \frac{2}{3}$
$\int_{-1}^{+1} (3\zeta^2 - 1) d\zeta = 0$	$\int_{-1}^{+1} (3\zeta^2 - 1)^2 d\zeta = \frac{8}{5}$
$\int_{-1}^{+1} \zeta(3\zeta^2 - 1) d\zeta = 0$	$\int_{-1}^{+1} \zeta^2(3\zeta^2 - 1) d\zeta = \frac{8}{15}$
$\int_{-1}^{+1} (1 + \zeta)(3\zeta - 1) d\zeta = 0$	$\int_{-1}^{+1} (1 - \zeta)(3\zeta + 1) d\zeta = 0$
$\int_{-1}^{+1} \zeta(1 + \zeta)(3\zeta - 1) d\zeta = \frac{4}{3}$	$\int_{-1}^{+1} \zeta(1 - \zeta)(3\zeta + 1) d\zeta = \frac{4}{3}$
$\int_{-1}^{+1} \zeta^2(1 + \zeta)(3\zeta - 1) d\zeta = \frac{8}{15}$	$\int_{-1}^{+1} \zeta^2(1 - \zeta)(3\zeta + 1) d\zeta = -\frac{8}{15}$

Tabela 1.

Do sada sprovedeni postupak redukcije nije se mnogo razlikovao od onog u [54], odnosno u [57], ali se, zahvaljujući upotrebi "racionalnog" faktora $\sqrt{a/g}$ u (3.3.44), dobio sistem linearnih jednačina (3.3.58) koji je znatno jednostavniji od sistema (3.3.16) u [54], odnosno u [57], tako da ga možemo u celosti rešiti, ne procenjujući prethodno pojedine njegove članove kako bi se odbacile male veličine višeg reda. Tako izvedene konstitutivne jednačine će odgovarati teoriji ljsaka okarakterisanoj polaznim pretpostavkama o mogućnosti aproksimiranja trodimenzionih polja napona, deformacije i pomeranja Ležandrovim polinomima, ali bi trebalo da se svedu na konstitutivne jednačine tanke ljske u Koseira teoriji (v. u [54], odnosno u [57]) ukoliko bi se izvršilo zanemarivanje malih veličina višeg reda, što opet može, pod određenim pretpostavkama, da se svede na konstitutivne jednačine u klasičnoj teoriji ljsaka.

Iz prve tri jednačine sistema (3.3.58) neposredno se dobija:

$$\begin{aligned}
 T_{\sigma\xi}^{\phi\psi} &= C_{\sigma\xi}^{40\phi\psi\sigma\xi} e_{\sigma\xi}^0 + C_{33}^{\phi\psi33} e_{33}^0 \\
 T_{\sigma\xi}^{\phi\psi} &= C_{\sigma\xi}^{\phi\psi\sigma\xi} e_{\sigma\xi}^1 + C_{33}^{\phi\psi33} e_{33}^1 \\
 T_{\sigma3}^{\phi3} &= 2 C_{\sigma3}^{\phi3\sigma3} e_{\sigma3}^0
 \end{aligned} \tag{3.3.59}$$

Ako prva dva izraza zamenimo u poslednje dve jednačine sistema (3.3.58), dobiće se sledeći sistem iz kog bi trebalo da se odrede koeficijenti e_{33}^0 i e_{33}^1 :

Ako prethodni sistem, radi kratkoće, prepisemo na sledeći način:

$$\begin{aligned} [c - (a + b)] e_{33}^0 - 3(a - b) e_{33}^1 &= A \\ - (a - b) e_{33}^0 + [3c - 3(a + b)] e_{33}^1 &= B, \end{aligned} \quad (3.3.61)$$

onda se za njegovo rešenje može odmah pisati:

$$\begin{aligned} e_{33}^0 &= \frac{1}{d} \left| \begin{array}{cc} A & -3(a - b) \\ B & 3c - 3(a + b) \end{array} \right| \\ e_{33}^1 &= \frac{1}{d} \left| \begin{array}{cc} c - (a + b) & A \\ -(a - b) & B \end{array} \right|, \end{aligned} \quad (3.3.62)$$

gde je sa d označena determinanta sistema (3.3.61):

$$d = 3 [c^2 - 2c(a + b) + 4ab], \quad (3.3.63)$$

dok se značenje uvedenih oznaka A , B , a , b i c neposredno dobija upoređivanjem sistema (3.3.60) i (3.3.61).

Zamenom izraza (3.3.62) u relacije (3.3.59) biće izraženi koeficijenti $T_{\phi\psi}^0$, $T_{\phi\psi}^1$ i $T_{\phi\psi}^3$ preko graničnih uslova na licima ljuske i koeficijenata $e_{\phi\psi}^0$, $e_{\phi\psi}^1$ i $e_{\phi\psi}^3$, pa te relacije, s obzirom na interpretaciju ovih koeficijenata, predstavljaju tražene konstitutivne jednačine tanke ljuske:

1
Primetimo da sad, za razliku od onog u [54], odnosno u [57], zahvaljujući jednostavnijem obliku sistema (3.3.58) nismo koristili njegovu četvrtu i petu jednačinu za eliminisanje:

$e_{\phi\psi}^1$, $e_{\phi\psi}^2$
 $e_{\phi\psi}^3$, $e_{\phi\psi}^3$
jer nije bilo potrebe za tim, dok su za eliminisanje koeficijenata:

e_{33}^0 , e_{33}^1
iskorišćene poslednje dve jednačine.

$$\begin{aligned}
 T_0^{\psi} = & \left\{ c^{\psi\sigma\xi} + \frac{3c^{\psi33}}{d} \left[\frac{1}{2hh} h h h \begin{pmatrix} -1\theta & -1\omega \\ (v) & (v) \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right. + \left. \frac{-1\theta}{(v)} \begin{pmatrix} -1\omega \\ (v) \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right] \left(c^{\alpha\beta\sigma\xi} c^{3333} + c^{\alpha\beta33} c^{33\sigma\xi} \right) - c^{33\sigma\xi} c^{3333} \\
 & - \frac{1}{2hhhh} h h h h \begin{pmatrix} -1\theta & -1\omega & -1\rho & -1\pi \\ (v) & (v) & (v) & (v) \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{matrix} \left[\left(c^{\alpha\beta\sigma\xi} c^{\gamma\delta33} - c^{\gamma\delta\sigma\xi} c^{\alpha\beta33} \right) \right] \left. \right\} \sigma\xi \\
 & + \frac{9c^{\psi33}}{d} \left[\frac{1}{2hh} h h h \begin{pmatrix} -1\theta & -1\omega \\ (v) & (v) \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right. - \left. \frac{-1\theta}{(v)} \begin{pmatrix} -1\omega \\ (v) \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right] \left(c^{\alpha\beta\sigma\xi} c^{3333} - c^{\alpha\beta33} c^{33\sigma\xi} \right) - \\
 & - \frac{1}{2hhhh} h h h h \begin{pmatrix} -1\theta & -1\omega & -1\rho & -1\pi \\ (v) & (v) & (v) & (v) \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{matrix} \left[\left(c^{\alpha\beta\sigma\xi} c^{\gamma\delta33} - c^{\gamma\delta\sigma\xi} c^{\alpha\beta33} \right) \right] \left. \right\} \sigma\xi \\
 & + \frac{3c^{\psi33}}{d} \left[\left(\frac{4}{h|c|h} h h h \begin{matrix} \theta \\ \rho \end{matrix} + \frac{4}{h|c|h} h h h \begin{matrix} \theta \\ \rho \end{matrix} - \frac{2}{h|c|} h h h \begin{matrix} \theta \\ \rho \end{matrix} + \frac{2}{h|c|} h h h \begin{matrix} \theta \\ \rho \end{matrix} \right) c^{3333} - \right. \\
 & - \frac{4}{hh|c|hh} h h h h \begin{pmatrix} \rho-1\theta & -1\omega \\ p(v) & (v) \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} + \frac{\rho-1\theta}{p(v)} \begin{pmatrix} -1\omega \\ (v) \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \left. \right] c^{\gamma\delta33} + \\
 & + \frac{1}{h|c|hh} h h h h \begin{pmatrix} 3-1\theta & -1\omega \\ p(v) & (v) \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} - \frac{3-1\theta}{p(v)} \begin{pmatrix} -1\omega \\ (v) \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \left. \right] c^{\gamma\delta33} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_1^{\psi} = & \left\{ c^{\psi\sigma\xi} + \frac{3c^{\psi33}}{d} \left[\frac{1}{2hh} h h h \begin{pmatrix} -1\theta & -1\omega \\ (v) & (v) \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right. + \left. \frac{-1\theta}{(v)} \begin{pmatrix} -1\omega \\ (v) \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right] \left(c^{\alpha\beta\sigma\xi} c^{3333} + c^{\alpha\beta33} c^{33\sigma\xi} \right) - c^{33\sigma\xi} c^{3333} \\
 & - \frac{1}{2hhhh} h h h h \begin{pmatrix} -1\theta & -1\omega & -1\rho & -1\pi \\ (v) & (v) & (v) & (v) \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{matrix} \left[\left(c^{\alpha\beta\sigma\xi} c^{\gamma\delta33} - c^{\gamma\delta\sigma\xi} c^{\alpha\beta33} \right) \right] \left. \right\} \sigma\xi \\
 & + \frac{c^{\psi33}}{d} \left[\frac{1}{2hh} h h h \begin{pmatrix} -1\theta & -1\omega \\ (v) & (v) \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right. - \left. \frac{-1\theta}{(v)} \begin{pmatrix} -1\omega \\ (v) \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right] \left(c^{\alpha\beta\sigma\xi} c^{3333} - c^{\alpha\beta33} c^{33\sigma\xi} \right) - \\
 & - \frac{1}{2hhhh} h h h h \begin{pmatrix} -1\theta & -1\omega & -1\rho & -1\pi \\ (v) & (v) & (v) & (v) \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{matrix} \left[\left(c^{\alpha\beta\sigma\xi} c^{\gamma\delta33} - c^{\gamma\delta\sigma\xi} c^{\alpha\beta33} \right) \right] \left. \right\} \sigma\xi \\
 & + \frac{c^{\psi33}}{d} \left[\left(\frac{4}{h|c|h} h h h \begin{matrix} \theta \\ \rho \end{matrix} - \frac{4}{h|c|h} h h h \begin{matrix} \theta \\ \rho \end{matrix} + \frac{2}{h|c|} h h h \begin{matrix} \theta \\ \rho \end{matrix} + \frac{2}{h|c|} h h h \begin{matrix} \theta \\ \rho \end{matrix} \right) c^{3333} + \right. \\
 & + \frac{4}{hh|c|hh} h h h h \begin{pmatrix} \rho-1\theta & -1\omega \\ p(v) & (v) \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} - \frac{\rho-1\theta}{p(v)} \begin{pmatrix} -1\omega \\ (v) \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \left. \right] c^{\gamma\delta33} - \\
 & - \frac{1}{h|c|hh} h h h h \begin{pmatrix} 3-1\theta & -1\omega \\ p(v) & (v) \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} + \frac{3-1\theta}{p(v)} \begin{pmatrix} -1\omega \\ (v) \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \left. \right] c^{\gamma\delta33} \right]
 \end{aligned}$$

$$T_0^{\psi} = 2c^{\psi3\sigma3} \sigma^3$$

(3.3.64)

pri čemu je:

$$\begin{aligned}
 d &= 3 \left[\left(C^{3333} \right)^2 - \right. && (3.3.65) \\
 &- \frac{1}{h h} h h ; \theta ; \omega \left(\begin{array}{c|c} -1 \theta & -1 \omega \\ (v) & (v) \end{array} \Big|_{\zeta=+1} \begin{array}{c} \cdot \alpha \\ \cdot \beta \end{array} \Big|_{\zeta=+1} + \begin{array}{c|c} -1 \theta & -1 \omega \\ (v) & (v) \end{array} \Big|_{\zeta=-1} \begin{array}{c} \cdot \alpha \\ \cdot \beta \end{array} \Big|_{\zeta=-1} \right) \times \\
 &\quad \times C^{\alpha\beta 33} C^{3333} + \\
 &+ \frac{1}{h h h h} h h h h ; \theta ; \omega ; \rho ; \pi \left(\begin{array}{c|c} -1 \theta & -1 \omega \\ (v) & (v) \end{array} \Big|_{\zeta=+1} \begin{array}{c} \cdot \alpha \\ \cdot \beta \end{array} \Big|_{\zeta=+1} \begin{array}{c|c} -1 \rho & -1 \pi \\ (v) & (v) \end{array} \Big|_{\zeta=-1} \begin{array}{c} \cdot \gamma \\ \cdot \delta \end{array} \Big|_{\zeta=-1} \right) \times \\
 &\quad \times C^{\alpha\beta 33} C^{\gamma\delta 33} \left. \right] .
 \end{aligned}$$

3.4. Poredjenje dobijenih jednačina polja sa uobičajenim jednačinama polja u teoriji (tanke) ljuske

Ono što bismo posebno želeli da naglasimo na početku ovog odeljka, a odnosi se na sve dobijene jednačine polja, jeste da te jednačine sadrže simetrične¹ rezultante napona, što nije slučaj sa jednačinama koje se sreću u literaturi iz teorije ljusaka, a i ako postoji simetrija rezultanti onda je ona rezultat naknadne simetrizacije (v. npr. (5.35) u [10]), dok je to svojstvo ovde prirodno i posledica je u geometrijskom smislu doslednog uvodjenja² rezultanti napona.

Medjutim, s obzirom na to da se te rezultante (koje smo mi uveli invarijantnim postupkom) razlikuju od onih koje se sreću u literaturi, jasno je da će nagovešteno poredjenje dobijenih jednačina polja sa uobičajenim jednačinama polja u teoriji (tanke) ljuske imati smisla samo u naročitim slučajevima kada u tim jednačinama figurišu iste rezultante napona.

1

Što, čini se, pruža npr. mogućnost da se pokuša sa pronalženjem neposrednog analogona tzv. teoremi korespondencije (poznatoj kao statičko-geometrijska analogija, koja važi u trodimenzionoj linearnoj teoriji sa naponskim spregovima) i u slučaju klasične (nepolarne) trodimenzione teorije (v. [18], str. 613-614), ali se ovde nećemo na tome posebno zadržavati.

2

Ipak, treba istaći da su i u [35] uvedene rezultante napona takodje simetrične, ali se pri tom radilo o "skalar-nom", tj. neinvarijantnom pristupu. Naravno, ne treba misliti da nema još načina da se uvedu rezultante napona u teoriji ljuske. Tako npr. u [32] se u rezultatama pojavljuju mešovite koordinate tenzora napona.

3.4.1. Jednačine kretanja tanke ljsuske. Predjimo sad na analizu izvedenih jednačina kretanja (3.3.40) tanke ljsuske i njihovo poredjenje sa uobicajenim jednačinama kretanja u teoriji tanke ljsuske. Pre svega, s obzirom na to da se u literaturi najčešće sreću jednačine kretanja ljsuske uniformne debljine, pretpostavimo prvo da je h nezavisno od konvektivnih koordinata. Tada se (3.3.40) svodi na:

$$\begin{aligned}
 T_{0,\phi}^{\gamma\phi} + F^{\gamma} + \frac{2}{h} \left(p_{+}^{\theta} v_{\theta}^{\cdot\gamma} \Big|_{\zeta=+1} + p_{-}^{\theta} v_{\theta}^{\cdot\gamma} \Big|_{\zeta=-1} \right) &= 0 \\
 T_{0,\phi}^{3\phi} + F^3 + \frac{2}{h} (p_{+}^3 + p_{-}^3) &= 0 \quad (3.4.1) \\
 T_{1,\phi}^{\gamma\phi} - T_{0}^{\gamma3} + L^{\gamma} + \frac{2}{h} \left(p_{+}^{\theta} v_{\theta}^{\cdot\gamma} \Big|_{\zeta=+1} - p_{-}^{\theta} v_{\theta}^{\cdot\gamma} \Big|_{\zeta=-1} \right) &= 0 \\
 T_{1,\phi}^{3\phi} - T_{0}^{33} + L^3 + \frac{2}{h} (p_{+}^3 - p_{-}^3) &= 0 .
 \end{aligned}$$

Očigledno, ukoliko bi se zanemario uticaj opterećenja na licima ljsuske², tada bi se poslednje jednačine svele na:

¹ U slučaju ljsuske uniformne debljine je $|c| = 1$ (v. (2.3.9)); osim toga, u tom slučaju je (što, na osnovu (2.1.13), tada neposredno sledi iz (3.3.32) i (3.3.35)):

$$\bar{T}_{0}^{\gamma3} = \bar{T}_{0}^{33} = 0 .$$

² Primetimo da je uobicajeno (v. npr. str. 157 u [20] ili str. 40 u [23]) i da se opterećenja na licima ljsuske "uvuku" u rezultujuće sile i spregove koji dejstvuju na referentnu površ ljsuske.

$$\begin{aligned}
 T_{0,\phi}^{\gamma\phi} + F^{\gamma} &= 0 \\
 T_{0,\phi}^{3\phi} + F^3 &= 0 \\
 T_{1,\phi}^{\gamma\phi} - T_{0}^{\gamma3} + L^{\gamma} &= 0 \\
 T_{1,\phi}^{3\phi} - T_{0}^{33} + L^3 &= 0 .
 \end{aligned}
 \tag{3.4.2}$$

Ukoliko bismo još pretpostavili da važi i drugi deo¹ hipoteze Kirhofa-Lava (v. str. 478 u [18]), tj. da se radi o klasičnoj teoriji ljusaka (v. str. 581 u [18]), što znači da se zanemaruje uticaj transverzalnog smicanja ($t^{\alpha 3} = 0$) i transverzalnih normalnih napona ($t_{33} = 0$), tada bi se u (3.4.2) anulirali članovi $T_{0}^{\gamma 3}$ i T_{0}^{33} (v. (2.2.8)).

Medjutim, treba imati u vidu da u izvedenim jednačinama kretanja zarez označava kovarijantni izvod s obzirom na metriku trodimenzionog prostora (ali računat baš u tačkama referentne površi ljuske), dok je u literaturi iz teorije ljusaka uobičajeno da u jednačinama kretanja figuriše kovarijantno diferenciranje s obzirom na metriku referentne površi ljuske. Stoga jednačine (3.4.2) prepíšimo u obliku:

1

Prvi deo hipoteze je omogućio da operatore paralelnog pomeranja uvedemo u obliku (2.1.10) uobičajenom u teoriji ljusaka!

$$\begin{aligned}
T_{0|\phi}^{\gamma\phi} - b_{\phi 0}^{\gamma 3\phi} - b_{\phi 0}^{\phi \gamma^3} + F^{\gamma} &= 0 \\
T_{0|\phi}^{3\phi} + b_{\alpha\phi 0}^{\alpha\phi} - b_{\phi 0}^{\phi 33} + F^3 &= 0 \\
T_{1|\phi}^{\gamma\phi} - b_{\phi 1}^{\gamma 3\phi} - b_{\phi 1}^{\phi \gamma^3} - T_o^{\gamma^3} + L^{\gamma} &= 0 \\
T_{1|\phi}^{3\phi} + b_{\alpha\phi 1}^{\alpha\phi} - b_{\phi 1}^{\phi 33} - T_o^{33} + L^3 &= 0,
\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

gde smo simbolom "|" označili kovarijantni izvod u dvodimenzionom prostoru referentne površi; pri tome smo iskoristili okolnost da je npr. (v. npr. [20], str. 139 i str. 135-136):

$$\begin{aligned}
T_{0,\phi}^{\gamma\phi} &= \frac{\partial}{\partial \xi} T_o^{\gamma\phi} + T_o^{a\phi} \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ a \phi \end{matrix} \right\} + T_o^{\gamma a} \left\{ \begin{matrix} \phi \\ a \phi \end{matrix} \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi} T_o^{\gamma\phi} + T_o^{\alpha\phi} \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha \phi \end{matrix} \right\} + T_o^{\gamma\alpha} \left\{ \begin{matrix} \phi \\ \alpha \phi \end{matrix} \right\} + \\
&\quad + T_o^{3\phi} \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ 3 \phi \end{matrix} \right\} + T_o^{\gamma^3} \left\{ \begin{matrix} \phi \\ 3 \phi \end{matrix} \right\} \\
&= T_{0|\phi}^{\gamma\phi} - b_{\phi 0}^{\gamma 3\phi} - b_{\phi 0}^{\phi \gamma^3}
\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

i slicno:

$$\begin{aligned}
T_{0,\phi}^{3\phi} &= \frac{\partial}{\partial \xi} T_o^{3\phi} + T_o^{a\phi} \left\{ \begin{matrix} 3 \\ a \phi \end{matrix} \right\} + T_o^{3a} \left\{ \begin{matrix} \phi \\ a \phi \end{matrix} \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi} T_o^{3\phi} + T_o^{\alpha\phi} \left\{ \begin{matrix} 3 \\ \alpha \phi \end{matrix} \right\} + T_o^{3\alpha} \left\{ \begin{matrix} \phi \\ \alpha \phi \end{matrix} \right\} + \\
&\quad + T_o^{3\phi} \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3 \phi \end{matrix} \right\} + T_o^{33} \left\{ \begin{matrix} \phi \\ 3 \phi \end{matrix} \right\} \\
&= T_{0|\phi}^{3\phi} + b_{\alpha\phi 0}^{\alpha\phi} - b_{\phi 0}^{\phi 33}
\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Jednačine (3.4.3) su, bar na prvi pogled, po obliku uporedive sa jednačinama kretanja koje se sreću u literaturi iz teorije ljusaka. Ipak, da bi takvo poredjenje imalo smisla, moraju u tim jednačinama figurisati na isti način definisane rezultante napona. S obzirom na to kako smo mi uveli rezultante napona, jasno je da će se one podudarati sa uobičajenim samo ako se operatori paralelnog pomeranja mogu zameniti Kronekerovim simbolima (up. npr. izraz (2.2.8) sa odgovarajućim izrazom u (12.36) u [18] ili u (4.26) u [35]), što bi pak značilo da se radi o dovoljno plitkoj ljuski ili ploči (v. (3.1) i (3.3) u [36]). U tom slučaju bi se $T_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}$, $T_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}$, $T_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}$ i $T_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}$ podudarilo sa $N_{\alpha\beta}$, $V_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}$ (v. str. 526 u [18]), tj. sa rezultatama u linearnoj teoriji ljusaka.

Medjutim, poredeći tada jednačine (3.4.3) npr. sa odgovarajućim jednačinama¹ u (12.42) u [18], vidimo da u (3.4.3) posto-

1

To su linearizovane jednačine koje odgovaraju nelinearizovanim jednačinama (12.28) i (12.29) u [18] i u linearnoj teoriji ljusaka (v. str. 524-526 u [18]) one će (pod pretpostavkom da je $\tilde{v} = \tilde{\delta}$ i u našim oznakama) da glase:

$$T_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta} = 0$$

$$T_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta} = 0$$

$$T_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} - T_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} + L_{\alpha\beta} = 0$$

$$T_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} - T_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} + L_{\alpha\beta} = 0$$

je i dodatni članovi¹ koji će se anulirati samo u slučaju referentne površi za koju je srednja krivina² $H = \frac{1}{2} b \frac{\phi}{\gamma^3} = 0$ (rezultante T^0 i T^3 će se anulirati pod pretpostavkama klasične teorije). Ti članovi su neposredna posledica našeg pristupa u izvodjenju jednačina kretanja tanke ljuske.

Ipak, u opštem slučaju, kada se operatori paralelnog pomera-
nja ne mogu zameniti Kronekerovim simbolima, rezultante napo-
na, koje smo mi uveli invarijantnim postupkom, razlikuju se
od onih koje se sreću u literaturi; stoga ni poredjenje jed-
načina kretanja ne bi tada imalo nikakvog smisla.

1 Što se tiče efekta takvih članova, on bi se mogao proce-
njivati numeričkim eksperimentisanjem posle zaokruživanja
rada na invarijantnom izvodjenju jednačina polja u teori-
ji tanke ljuske.

2 Tzv. minimalna površ.

3.4.2. Mere deformacije tanke ljuske. Da bismo izvršili poređenje u pododeljku 2.2.3. definisanih koeficijenata $e_{\phi\psi}^0$, $e_{\phi\psi}^1$ i $e_{\phi\psi}^3$ sa uobičajenim merama deformacije u teoriji tanke ljuske, bilo bi potrebno da se u izraze (2.2.11) za te koeficijente zamene izrazi za operatore paralelnog pomeranja. Medjutim, budući da se u opštem slučaju ti koeficijenti razlikuju od mera deformacije koje se sreću u literaturi i ne mogu se za njih dobiti neki eksplicitni izrazi, preostaje da poredjenje uvedenih mera deformacije sa uobičajenim merama izvršimo u nekim naročitim slučajevima.

Iskoristimo, pre svega, pretpostavku da se radi o tankoj ljuski, kada se (uz zanemarivanje članova višeg reda po H/R i L/R) za koordinate prvog metričkog tenzora u referentnoj konfiguraciji može pisati (v. npr. izraz (Pl.8) u [54], odnosno u [57]):

$$\begin{aligned} G_{\phi\psi} &= A_{\phi\psi} - \zeta H B_{\phi\psi} \\ G_{\phi 3} &= \frac{1}{2} \zeta \left[\left(\frac{H}{2} \right)^2 \right] ; \phi \\ G_{33} &= \left(\frac{H}{2} \right)^2 , \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

a zbog još ranije uvedene pretpostavke o važenju prvog dela hipoteze Kirhofa-Lava, analogne relacije važe i za koordinate prvog metričkog tenzora u deformisanoj konfiguraciji:

$$\begin{aligned} g_{\phi\psi} &= a_{\phi\psi} - \zeta h b_{\phi\psi} \\ g_{\phi 3} &= \frac{1}{2} \zeta \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 \right] ; \phi \\ g_{33} &= \left(\frac{h}{2} \right)^2 . \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Ako još pretpostavimo da je ljuska uniformne debljine i da se debljina ljuske ne menja¹ prilikom deformisanja (tj. da je $h = H$),² onda se može pisati :

$$\begin{aligned} e_{\phi\psi}^2 &= g_{\phi\psi} - G_{\phi\psi} \\ &= a_{\phi\psi} - A_{\phi\psi} - \zeta H (b_{\phi\psi} - B_{\phi\psi}) \\ e_{\phi 3} &= 0 \\ e_{33} &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

S druge strane, za tanke ljuske se u literaturi obično usvaja da se operatori paralelnog pomeranja mogu zameniti Kronekerovim simbolima (v. npr. (20.30) u [18]³), tako da bi se uz sve uvedene pretpostavke izrazi (2.2.11) sada mogli i eksplicitno odrediti:

$$\begin{aligned} e_{\phi\psi}^0 &= a_{\phi\psi} - A_{\phi\psi} \\ e_{\phi\psi}^1 &= -\frac{H}{3} (b_{\phi\psi} - B_{\phi\psi}) \\ e_{\phi 3}^0 &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

¹ To je drugi deo hipoteze Kirhofa-Lava koja se uvodi u klasičnoj teoriji ljusaka (v. str. 478 u [18]).

² Da nisu u pitanju konvektivne koordinate i ovde bi se umesto izraza (3.2.5) za tenzor deformacije morao koristiti potpuno izraz koji je naveden u fusnoti uz (3.2.5).

³ I ovde bi se (kao što se napominje uz (20.30) u [18]) mogli prvo koristiti razvoji inverznih operatora paralelnog pomeranja u stepene redove po ζ (v. npr. (9.5) u [20]), a odbacivanje malih veličina višeg reda da se izvrši tek posle integracije kojom se dolazi do (3.4.9), ali bi se dobio isti rezultat kao i kad se ti operatori pre integriranja zamene Kronekerovim simbolima.

a to su, zapravo, mere deformacije koje se sreću u literatu-
¹
 ri iz teorije ljustaka.

Medjutim, u opštem slučaju (kada se operatori paralelnog po-
 meranja ne mogu zameniti Kronekerovim simbolima), mere defor-
 macije za ljustke, koje su predloženim pristupom uvedene na
 invarijantan način i geometrijski se mogu tumačiti kao rezul-
 tat "integralnog usrednjavanja" (v. izraze (2.2.11)) trodi-
 menzionih mera deformacije, razlikuju se od uobičajenih, pa
 se o nekom poredjenju ne može govoriti.

Napomenimo da smo predloženim uvodjenjem mera deformacije,
 koje (pod navedenim pretpostavkama) dovode do mera oblika
 (3.4.9), izbegli dilemu na koji način da se odredi promena
 krivine referentne površi ljustke. Naime, ta promena je (isti-
 na u aproksimativnom obliku) sada nedvosmisleno okarakterisa-
 na razlikom baš oblika:

$$b_{\phi\psi} - B_{\phi\psi} \quad (3.4.10)$$

izmedju tenzora krivine površi pre i posle deformacije, dok
 se npr. u [20] izmedju tri tamo navedene mogućnosti (v. str.
 151 u [20]): $b_{\phi\psi} - B_{\phi\psi}$, $b_{\phi\psi} - B_{\psi\phi}$ i $b_{\phi\psi} - B_{\phi\psi}$ na kraju
 daje prednost razlici mešovitih koordinata tenzora krivine i
 ona se definiše kao mera promene zakrivljenosti referentne
 površi ljustke. No, dok je iz predloženog pristupa potpuno ja-
 sno da je (3.4.10) zapravo razlika oblika $b_{\phi\psi} - B_{\phi\psi}$ $\delta_{\phi\psi}$ $\delta_{\psi\phi}$

 1

I mogu se videti praktično u svim navedenim referencama
 na kraju rada (te reference se uglavnom sve odnose na kla-
 sičnu teoriju ljustaka, a opštije mere koje su uvedene kod
 Nahdija (v. (5.32) u [18]) takodje se u klasičnom slučaju
 svode na gornje mere; v. (7.76), (5.32) i (6.24) u [18]).

(v. fusnotu uz (3.2.5)), dotle bi se iz onog što je npr. u [20] rečeno moglo zaključiti da se radi o razlici tenzorskih veličina zadatih u različitim tačkama prostora (i u odnosu na različite, istina konvektivne, koordinatne sisteme). Međutim, da bi tako shvaćena razlika imala u opštem slučaju tenzorski karakter, neophodno bi bilo da se upotrebe operatori paralelnog pomeranja¹ kako bi se te tenzorske veličine dovele u istu tačku prostora. Razume se, u slučaju linearne teorije (o kojoj i jeste reč u [20]), kada se ne pravi razlika između deformisane i nedeformisane konfiguracije (pa se operatori paralelnog pomeranja, kojima bi se vršio prenos između tih konfiguracija, svode na Kronekerove simbole), izlišno je da se toliko insistira na različitom tumačenju mera deformacije, tačnije na mogućim interpretacijama razlike (3.4.10). Ipak, celo prethodno izlaganje imalo je za cilj da ukaze na teškoće koje se mogu javiti u nelinearnoj teoriji ljusaka ako se koristi uobičajeno, apriorno definisanje mera deformacije ljuske, umesto njihovog geometrijski doslednog dobijanja iz trodimenzionih mera deformacije.

1

Primetimo da bi se tada radilo o paralelnom pomeranju u obvojnem trodimenzionom euklidskom prostoru (od ljuske u referentnoj do ljuske u deformisanoj konfiguraciji), iako je reč o veličinama koje treba da mere deformisanje površi (dakle dvodimenzionog, u opštem slučaju neeuklidskog, prostora). No, na tome se ovde ne možemo zadržavati, iako smo uvereni da će kad-tad u vezi sa teorijom ljusaka morati bliže da se razmotri i pitanje paralelnog pomeranja u površima.

3.4.3. Konstitutivne jednačine. Preostalo je još da izvršimo analizu izvedenih konstitutivnih jednačina (3.3.64) tanke ljske i njihovo poredjenje sa uobičajenim konstitutivnim jednačinama u teoriji tanke ljske. I ovde ćemo (kao i u prethodna dva pododeljka), s obzirom na to da se u literaturi obično sreću i konstitutivne jednačine ljske uniformne debljine, pretpostaviti prvo da je h nezavisno od konvektivnih koordinata. Tada se (3.3.64) svodi na:

$$\begin{aligned}
 T_{\sigma}^{\phi\psi} &= \left(C^{\phi\psi\sigma\xi} - \frac{3 C^{\phi\psi 33}}{d} C^{33\sigma\xi} \right) e_{\sigma\xi}^o + \\
 &\quad + \frac{3 C^{\phi\psi 33}}{d} \left(\frac{2}{h} p_+^3 - \frac{2}{h} p_-^3 \right) C^{3333} \\
 T_{\sigma}^{\phi\psi} &= \left(C^{\phi\psi\sigma\xi} - \frac{3 C^{\phi\psi 33}}{d} C^{33\sigma\xi} \right) e_{\sigma\xi}^1 + \\
 &\quad + \frac{C^{\phi\psi 33}}{d} \left(\frac{2}{h} p_+^3 + \frac{2}{h} p_-^3 \right) C^{3333} \\
 T_{\sigma}^{\phi 3} &= 2 C^{\phi 3\sigma 3} e_{\sigma 3}^o, \tag{3.4.11}
 \end{aligned}$$

gde je sada:

$$d = 3 \left(C^{3333} \right)^2; \tag{3.4.12}$$

uz korišćenje izraza (3.3.56) i prelazak na tzv. inženjerske oznake, prethodne konstitutivne jednačine ljske uniformne debljine mogu da se napišu u obliku:

$$T_{\phi\psi}^{\theta} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-\nu} a^{\phi\psi} a^{\theta\omega} + a^{\phi\theta} a^{\psi\omega} \right) e^{\theta\omega} + \frac{\nu}{1-\nu} a^{\phi\psi} \frac{h}{2} \left(p_+^3 - p_-^3 \right) \quad (3.4.13)$$

$$T_{\phi\psi}^1 = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-\nu} a^{\phi\psi} a^{\theta\omega} + a^{\phi\theta} a^{\psi\omega} \right) e^{\theta\omega} + \frac{\nu}{1-\nu} a^{\phi\psi} \frac{h}{6} \left(p_+^3 + p_-^3 \right)$$

$$T_{\phi\psi}^{\theta 3} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{2}{h} \right)^2 a^{\phi\theta} e^{\theta 3}$$

a ukoliko bi se pretpostavilo i da su zanemarljivi uticaji na konstitutivne jednačine površinskog opterećenja na licima ljuske (v. opaske pri dnu strana 572, 573 i 579 u [18]), konstitutivne jednačine bi glasile:

$$T_{\phi\psi}^{\theta} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-\nu} a^{\phi\psi} a^{\theta\omega} + a^{\phi\theta} a^{\psi\omega} \right) e^{\theta\omega} \quad (3.4.14)$$

$$T_{\phi\psi}^1 = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-\nu} a^{\phi\psi} a^{\theta\omega} + a^{\phi\theta} a^{\psi\omega} \right) e^{\theta\omega}$$

$$T_{\phi\psi}^{\theta 3} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{2}{h} \right)^2 a^{\phi\theta} e^{\theta 3}$$

Sa druge strane, može se pokazati da će se izvedene konstitutivne jednačine (3.3.64), ukoliko se u njima izvrši zanemari-¹vanje malih veličina višeg reda, svesti na:

¹ Na način koji je uobičajen u Kosera teoriji tanke ljuske (v. [35]).

$$\begin{aligned}
T_0^{\phi\psi} &= \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-\nu} a^{\phi\psi} a^{\Theta\omega} + a^{\phi\Theta} a^{\psi\omega} \right) e_{\Theta\omega}^o + \\
&+ \frac{3}{8} h_{;\sigma} h_{;\xi} \left[\begin{array}{c} -1 \sigma \\ (\nu) \end{array} \left| \begin{array}{c} -1 \xi \\ (\nu) \end{array} \right|_{\zeta=+1} - \begin{array}{c} -1 \sigma \\ (\nu) \end{array} \left| \begin{array}{c} -1 \xi \\ (\nu) \end{array} \right|_{\zeta=-1} \right] \times \\
&\times \frac{E \nu}{(1-\nu)(1+\nu)} a^{\phi\psi} \left(\frac{\nu}{1-\nu} a^{\lambda\delta} a^{\Theta\omega} + a^{\lambda\Theta} a^{\delta\omega} \right) e_{\Theta\omega}^1 + \\
&+ \frac{\nu}{1-\nu} a^{\phi\psi} h_{;\Theta} \left(p_+^{\Theta} + p_-^{\Theta} \right) / |c| + \\
&+ \frac{\nu}{1-\nu} a^{\phi\psi} \frac{h}{2} \left(p_+^3 - p_-^3 \right) / |c| \tag{3.4.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_1^{\phi\psi} &= \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-\nu} a^{\phi\psi} a^{\Theta\omega} + a^{\phi\Theta} a^{\psi\omega} \right) e_{\Theta\omega}^1 + \\
&+ \frac{1}{24} h_{;\sigma} h_{;\xi} \left[\begin{array}{c} -1 \sigma \\ (\nu) \end{array} \left| \begin{array}{c} -1 \xi \\ (\nu) \end{array} \right|_{\zeta=+1} - \begin{array}{c} -1 \sigma \\ (\nu) \end{array} \left| \begin{array}{c} -1 \xi \\ (\nu) \end{array} \right|_{\zeta=-1} \right] \times \\
&\times \frac{E \nu}{(1-\nu)(1+\nu)} a^{\phi\psi} \left(\frac{\nu}{1-\nu} a^{\lambda\delta} a^{\Theta\omega} + a^{\lambda\Theta} a^{\delta\omega} \right) e_{\Theta\omega}^o + \\
&+ \frac{\nu}{3(1-\nu)} a^{\phi\psi} h_{;\Theta} \left(p_+^{\Theta} - p_-^{\Theta} \right) / |c| + \\
&+ \frac{\nu}{1-\nu} a^{\phi\psi} \frac{h}{6} \left(p_+^3 + p_-^3 \right) / |c|
\end{aligned}$$

$$T_0^{\phi 3} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{2}{h} \right)^2 a^{\phi\Theta} e_{\Theta 3}^o,$$

a upravo su takvog oblika konstitutivne jednačine tanke ljuške (3.3.31) u [54], odnosno u [57]. Međutim, dok smo sad do jednačina (3.4.15) došli aproksimiranjem tačnog rešenja (3.3.64) algebarskog sistema (3.3.58), u [54] je prvo izvr-

šen čitav niz procenjivanja reda veličine i potom odbacivanja pojedinih članova odgovarajućeg (ali znatno "punijeg" od (3.3.58)) sistema, pa su rešavanjem približnog sistema dobijene odgovarajuće konstitutivne jednačine. Jednostavnost sad izloženog izvodjenja neposredna je posledica uvođenja posebno izabranog "racionalnog" faktora u relaciju (3.3.44).

Odmah se vidi da se prethodne jednačine, ukoliko se radi o ljski uniformne debljine, svode na:

$$T_0^{\phi\psi} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-\nu} a^{\phi\psi} a^{\Theta\omega} + a^{\phi\Theta} a^{\psi\omega} \right) e^{\Theta\omega} + \frac{\nu}{1-\nu} a^{\phi\psi} \frac{h}{2} \left(p_+^3 - p_-^3 \right) \quad (3.4.16)$$

$$T_1^{\phi\psi} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-\nu} a^{\phi\psi} a^{\Theta\omega} + a^{\phi\Theta} a^{\psi\omega} \right) e^{\Theta\omega} + \frac{\nu}{1-\nu} a^{\phi\psi} \frac{h}{6} \left(p_+^3 + p_-^3 \right)$$

$$T_0^{\phi 3} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{2}{h} \right)^2 a^{\phi\Theta} e^{\Theta 3},$$

a to su već navedene jednačine (3.4.13). Prema tome, u slučaju ljske uniformne debljine, nema razlike između tačnih konstitutivnih jednačina¹ i onih koje su dobijene rešavanjem približnog sistema, tako da se bar tada može govoriti da već ranije (u [54], odnosno u [57]) nadjeni oblik konstitutivnih jednačina ostaje očuvan i ukoliko se ne vrši odbacivanje ma-

1

Celo vreme je reč o konstitutivnim jednačinama homogenog i izotropnog elastičnog materijala.

lih veličina višeg reda, tj. i u teoriji ljusaka koja je određena samo polaznim pretpostavkama o mogućnosti navedenog aproksimiranja polja napona, deformacije i pomeranja.

Dobijene konstitutivne jednačine mogu se uporediti sa konstitutivnim jednačinama koje se sreću u literaturi, a koje su vezane za linearnu i klasičnu teoriju ljusaka. Međutim, da bi takvo poredjenje imalo smisla, moraju biti u pitanju na isti način definisane rezultante napona i mere deformacije. S obzirom na način na koji smo mi uveli rezultante napona i mere deformacije, jasno je da je za njihovo podudaranje sa uobičajenim neophodno da se operatori paralelnog pomeranja v^a mogu zameniti Kronekerovim simbolima δ^a_b ¹, što bi pak značilo da se radi o plitkoj ljuski² (ili ploči). No, kako je cela ta analiza konstitutivnih jednačina već sprovedena u [54], odnosno u [57], ovde se na tome nećemo zadržavati, nego ćemo samo navesti tamošnji zaključak da se, u slučaju klasične teorije ljusaka, izvedene konstitutivne jednačine svode na one u literaturi.

Medjutim, u opštem slučaju, kada se operatori v^a _b ne mogu zameniti Kronekerovim simbolima, rezultante napona i mere deformacije, koje smo mi uveli invarijantnim postupkom, razlikuju se od onih koje se sreću u literaturi³. Stoga ni pore-

1

Up. npr. izraz (2.2.9) sa odgovarajućim izrazom u (12.36) u [18], a o identifikaciji uvedenih sa u literaturi uobičajenim merama deformacije v . u prethodnom pododeljku.

2

V. (3.1) i (3.3) u [36].

3

Osim toga, treba naglasiti da su uzeti u obzir i granični

djenje izvedenih konstitutivnih jednačina sa uobičajenim ne¹
 bi tada imalo nikakvog smisla .

 uslovi na licima ljuske, bez pretpostavke o infinitezimalnosti deformacija, dok se prisustvo tih uslova zapaža u literaturi samo u nekim od linearizovanih teorija ljuski (v. [18], str. 572).

1

Ipak, treba primetiti da smo konstitutivne jednačine izveli bez pretpostavki o geometrijskoj linearnosti i dobijeni oblik je (ukoliko se radi o plitkoj ljuski uniformne debljine) isti kao i oblik tih jednačina u linearnoj teoriji; prema tome, pokazana je nezavisnost od veličine deformacija uobičajenog oblika konstitutivnih jednačina za tanku ljusku (od homogenog i izotropnog elastičnog materijala); to je postignuto zahvaljujući tome što je uvodjenje i rezultanti napona i mera deformacije izvršeno invarijantnim postupkom izloženim u pododeljcima 2.2.2. i 2.2.3..

4. ZAVRŠNE NAPOMENE, ZAKLJUČCI I BUDUĆE AKTIVNOSTI

4.1. Završne napomene

Treba primetiti da je rad na dobijanju jednačina polja tanke ljuske zahtevao da se razmotre i neka pitanja (kao što je diferenciranje integrala oblika rezultanti napona; v. prilog 6.1.), koja se mogu odnositi ne samo na teoriju ljusaka, nego i na druge oblasti mehanike neprekidnih sredina ili, opštije, teorije polja. To je još jedna potvrda otvorenosti teorije ljusaka, ali i njene povezanosti sa drugim teorijama.

4.2. Zaključci

Rad je, u suštini, nastao s ciljem da se poboljšaju osnovne postavke u teoriji tanke ljuske na način koji je ispravan sa stanovišta savremene fizike (a njen deo je i mehanika neprekidnih sredina). O rezultatima takvih nastojanja biće reči u sledećim pododeljcima.

4.2.1. Invarijantnost aproksimacija polja napona, deformacije i pomeranja.

Da bi neki zakon fizike bio prirodni zakon on mora biti invarijantan (kovarijantan) u odnosu na promenu koordinatnog sistema; pri tom se fizički zakoni opisuju tenzorskim jednačinama, jer tenzorska polja predstavljaju invarijantne matematičke objekte. Medjutim, činjenica da je ono što se naziva "prirodnim zakonom" samo približan oblik nekih pravih zakona iz prirode (a ipak se zahteva njegova koordinatna invarijantnost) navela je na pomisao da bi takvu neza-

visnost od koordinatnih transformacija trebalo zahtevati i za aproksimacije fizičkih zakona, odnosno za aproksimacije polja koja u tim zakonima učestvuju.

Budući da smo u radu izvršili takvo (numeričko) modeliranje ljuske da se ona shvata kao konačni element trodimenzionog kontinuuma u ζ -pravcu, a potom se opredelili za tzv. koncept teorije tri polja, koji predstavlja neklasičan pristup i odlikuje se nezavisnim aproksimiranjem polja napona, polja deformacija i polja pomeranja, preostalo je da gornji zahtev za invarijantnošću aproksimacija tenzorskih polja dosledno primenimo i prilikom uvođenja približnih izraza za polja napona, deformacije i pomeranja.

Treba istaći da takav pristup, koji se pokazao, čini se, plodotvornim pri izvodjenju jednačina polja tanke ljuske, sadrži i velike mogućnosti uopštavanja na probleme koji se odnose na bilo koju aproksimativnu teoriju.

4.2.2. Invarijantnost i geometrijska doslednost u izvodjenju jednačina polja tanke ljuske. U radu su izvedene jednačine polja tanke ljuske neuniformne debljine iz trodimenzionone teorije; pri tome je iskorišćen koncept teorije tri polja (zasnovan na nezavisnom aproksimiranju polja pomeranja, deformacije i napona), a redukcija trodimenzionih jednačina polja izvršena je Galerkinovom procedurom. Osnovna odlika u radu predloženog pristupa jeste da je taj koncept primenjen na način koji je i u fizičkom i u geometrijskom pogledu dosledniji od uobičajenih pristupa, budući da se pomenuta polja aproksimiraju na invarijantan način, a pri njihovom integra-

ljenju se primenjuje Eriksenov koncept o integraciji tenzorskih i vektorskih polja u krivolinijskim koordinatama.

To je, s jedne strane, dovelo do uvođenja rezultanti napona na način koji je nov u teoriji ljustaka, a direktna posledica je simetrija tih rezultanti (takvo svojstvo ne postoji¹ pri uobičajenom "sprezanju" tzv. direktnog pristupa, zasnovanog na teoriji orijentisane Kosera površi, i razvoja iz trodimenzione teorije, izuzev u specijalnim slučajevima kada se operatori paralelnog pomeranja svode na Kronekerove simbole). S druge strane, osim geometrijskom konsekvencijom, takav (invarijantan)² pristup odlikuje se i pojednostavljenjem u odnosu na uobičajeni ("skalarni") pristup.

Dobijene jednačine polja se, pod određenim uslovima, svode na uobičajene, ali ističemo da su, pod istim pretpostavkama, proširenje onih koje se sreću u literaturi. Međutim, u opštem slučaju (kada se rezultante napona, koje smo uveli invarijantnim postupkom, razlikuju od uobičajenih), takvo poređenje ne bi imalo smisla. Jedino bi se moglo naglasiti da je i tada, u izvesnom smislu, oblik tih jednačina očuvan.

1

Vec se pribegava određenim naknadnim simetrizacijama (v. npr. (5.35) u [10]).

2

Integraljenja duž ζ -pravca, jer je izbegnuta potreba za procenjivanjem reda veličine koordinata osnovnog metričkog tenzora radi zanemarivanja pojedinih podintegralnih izraza, a lako su mogle biti prepoznate (invarijantne) rezultante napona u odgovarajućim izrazima. Na slično pojednostavljenje integraljenja ukazano je i pri izvodenju konstitutivnih jednačina tanke ljustke u [54], odnosno u [57].

4.3. Buduće aktivnosti

Već je istaknuto da rad više predstavlja nastojanje da se poboljšaju osnovne postavke u teoriji tanke ljuske na način ispravan sa stanovišta savremene mehanike kontinuuma. O praktičnim prednostima odgovarajućeg proračuna bi se moglo govoriti tek posle korišćenja invarijantnih aproksimacija pri modeliranju tankozidnih konstrukcija konačnim elementima tanke ljuske. Stoga će u sledećim pododeljcima biti reči o tome na šta bi bilo potrebno da se obrati posebna pažnja u budućem radu.

4.3.1. Poredjenje uobičajenih i invarijantnih aproksimacija konačnim elementima. Pre svega, buduci da se pri izvodjenju jednačina polja tanke ljuske invarijantni pristup pokazao plodotvornim; trebalo bi pokušati da se on primeni i pri aproksimiranju konačnim elementima. Medjutim, prethodno bi se trebalo pozabaviti procenom uticaja invarijantnosti na kvalitet samih aproksimacija konačnim elementima, a što je i nagovešteno u [50], odnosno [53]; naime, tada je zapravo bio formulisan zahtev za invarijantnošću takvih aproksimacija, a tek potom je u teoriji tri polja, kada je u pitanju mešoviti model za tanku ljusku i cela ljuska se u suštini posmatra kao konačni element, ali samo u ζ -pravcu, vršena invarijantna interpolacija (Ležandrovim polinomima) u tom pravcu pri izvodjenju jednačina polja tanke ljuske iz trodimenzione teorije.

4.3.2. Invarijantna izoparametarska formulacija KE jednačina polja u teoriji tanke ljuske. Ako bi se rad sa invarijantnim

aproksimacijama konačnim elementima pokazao opravdanim i u numeričkom pogledu, onda bi dalje trebalo, uz upotrebu takvih aproksimacija, izvesti i odgovarajuće konačnoelementne jednačine polja u teoriji tanke ljuske. Međutim, invarijantnost upotrebljenih aproksimacija nije garancija i jednostavnosti jednačina polja, jer će se u njima, u slučaju proizvoljnih krivolinijskih koordinata¹, eksplicitno pojavljivati i operatori paralelnog pomeranja (što je nagovešteno u [50], odnosno u [53]).

4.3.3. Procena povećanja broja računskih operacija u invarijantnom pristupu - potreba za razvijanjem softvera na superračunaru. Predloženi invarijantni pristup ima za posledicu eksplicitno pojavljivanje euklidskih "šiftera", tj. operatora paralelnog pomeranja u euklidskom prostoru u KE aproksimacijama; naime, umesto uobičajenih KE aproksimacija nekog vektorskog polja:

$$v(x) = P(x) v(x) = P(x) v(x) \quad (4.3.1)$$

koristile bi se KE aproksimacije oblika (v. [50], tj. [53]):

$$v(x) = P(x) g(x, x) v(x) \quad (4.3.2)$$

u kojima su:

$$g(x, x) = \frac{\partial x}{\partial z} \bigg|_x \frac{\partial z}{\partial x} \bigg|_x \quad (4.3.3)$$

1

Tada bi se postavilo i pitanje neholonomnosti zajedničkog (za konačne elemente) koordinatnog sistema!

pomenuti operatori paralelnog pomeranja (u prethodnim izrazima koristi se konvencija o sabiranju po ponovljenim indeksima). Upoređujući (4.3.1) i (4.3.2) zaključujemo da je u prvom slučaju, za određivanje koordinata vektorskog polja u nekoj tački unutar npr. četvorotemenog ($K=1,2,3,4$) konačnog elementa, potrebno da se izračunaju vrednosti četiri interpolacione funkcije u toj tački; međutim, u (4.3.2) je, pored vrednosti te četiri interpolacione funkcije, potrebno da se odredi još i $4 \times 3 \times 3 = 36$ vrednosti koordinata operatora paralelnog pomeranja između 4 čvora konačnog elementa i u njemu uočene tačke. Prema tome, ne ulazeći sad u sam broj računskih operacija potreban da bi se odredile pojedine vrednosti, vidi se da je u (4.3.2) broj tih vrednosti za red veličine veći nego u (4.3.1), a s obzirom na strukturu operatora (4.3.3) jasno je da će se po jednom konačnom elementu imati i za red veličine veći broj operacija. To dalje ukazuje na korisnost da se odgovarajući softver, bez obzira na njegove teorijske prednosti, zbog povećanog obima računanja (pri formiranju odgovarajućih matrica KE modela), implementira na superračunar. Ipak, treba imati u vidu da samo formiranje matrica elemenata nije najveći potrošač računarskog vremena - već formiranje, a posebno rešavanje sistema. Prema tome, i implementacija na standardnom računaru može da ima smisla, posebno ako se uzme u obzir očekivano povećanje tačnosti sa istim brojem elemenata (ili očuvanje tačnosti sa manjim brojem elemenata).

5. REFERENCE

- [1] A.E. Green and W. Zerna, The equilibrium of thin elastic shells, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 3, 9-22, 1950.
- [2] A.E. Green and W. Zerna, *Theoretical Elasticity*, Clarendon Press, Oxford, 1954.
- [3] T.P. Andjelić, *Teorija vektora*, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1959.
- [4] C. Truesdell, Invariant and complete stress functions for general continua, *Arch. Rational Mech. Anal.* 4, 1-29, 1959.
- [5] A.E. Green and J.E. Adkins, *Large Elastic Deformations*, Clarendon Press, Oxford, 1960.
- [6] C. Truesdell and R.A. Toupin, *The Classical Field Theories*, *Handbuch der Physik*, Bd. III/1, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960.
- [7] J.L. Ericksen, *Tensor Fields*, *Handbuch der Physik*, Bd. III/1, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960.
- [8] W.T. Koiter, A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells, *Proc. Symp. on the Theory of Thin Elastic Shells*, 12-33, North-Holland, Amsterdam/Delft, 1960.
- [9] R. Aris, *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
- [10] P.M. Naghdi, *Foundations in elastic shell theory*, *Progress in Solid Mechanics* 6, 1-90, North-Holland, 1963.
- [11] B. Budiansky and J.L. Sanders, On the "best" first-order linear shell theory, *Progress in Applied Mechanics*, *The Prager Anniv. Vol.*, 129-140, Macmillan, New York, 1963.
- [12] A.G. Fredrickson, *Principles and Applications of Rheology*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.

- [13] W.T. Koiter, Foundations and basic equations of shell theory. A survey of recent progress, Proc. 2nd IUTAM Symp. on Shell Theory, 93-105, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1969.
- [14] C.B. Sensenig, A shell theory compared with the exact three-dimensional theory of elasticity, Int. J. Eng. Sci. 6, 435-464, 1968.
- [15] M.B. Marlowe, Some new developments in the foundations of shell theory, Ph. D., Stanford University, 1968.
- [16] L.E. Malvern, Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
- [17] T.P. Andjelić, A Survey of Tensor Calculus, International Centre for Mechanical Sciences, Udine, 1970.
- [18] P.M. Naghdi, The Theory of Shells and Plates, Handbuch der Physik, Bd. VIa/2, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [19] J.T. Oden, Finite Elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill, New York, 1972.
- [20] W. Flügge, Tensor Analysis and Continuum Mechanics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.
- [21] J.T. Oden, Finite element applications in mathematical physics, The Mathematics of Finite Elements and its Applications, Academic Press, London, 1973.
- [22] H.S. Rutten, Theory and Design of Shells on the Basis of Asymptotic Analysis, Rutten+Kruisman, Consulting Engineers, Voorburg, 1973
- [23] J.F. Wilson, The finite element analysis of thin elastic shells, Arizona State University, Ph. D., 1973.
- [24] A.J. Morris, A deficiency in current finite elements for thin shell applications, Int. J. Solids Structures 9, 331-346, 1973.
- [25] A.C. Eringen and E.S. Suhubi, Elastodynamics I, Academic Press, New York, 1974.
- [26] A.J. Morris, A summary of appropriate governing equations and functionals in the finite element analysis of thin shells, Finite Elements for Thin Shells & Curved Members, John Wiley & Sons, London, 1976.

- [27] L.S.D. Morley and A.J. Morris, Conflict between finite elements and shell theory, Proc. II World Cong. Finite Element Meth., Bournemouth, 1978.
- [28] R. Hill, Aspects of invariance in solid mechanics, Adv. Appl. Mech. 18, 1-75, 1978.
- [29] M. Berković, Thin shell analysis, Advanced Topics and New Developments in Finite Element Analysis, MARC Analysis Research Corporation, 1979.
- [30] A.I. Lurie, Nelinejnaja teorija uprugosti, Nauka, Moskva, 1980.
- [31] W.B. Krätzig, On the structure of consistent linear shell theories, Proc. 3rd IUTAM Symp. on Shell Theory, 353-368, North-Holland, 1980.
- [32] W. Wunderlich, On a consistent shell theory in mixed tensor formulation, Proc. 3rd IUTAM Symp. on Shell Theory, 607-633, North-Holland, 1980.
- [33] M.E. Gurtin, An Introduction to Continuum Mechanics, Academic Press, New York, 1981.
- [34] E.B. Becker, G.F. Carey and J.T. Oden, Finite Elements: An Introduction, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.
- [35] M. Berković, Equations of motion of shell finite elements, Memorial Volume SAZU, Ljubljana, 1982.
- [36] I.N. Vekua, Nekotore obschie metodi postroenija razlicnih variantov teorii obolock, Nauka, Moskva, 1982.
- [37] W.B. Krätzig, Y. Basar and U. Wittek, Nonlinear behavior and elastic stability of shells, Proceedings of a State-of-the-Art Colloquium Universität Stuttgart, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.
- [38] E. Stein, A. Berg and W. Wagner, Different levels of nonlinear shell theory in finite element stability analysis, Proceedings of a State-of-the-Art Colloquium Universität Stuttgart, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.
- [39] G.F. Carey and J.T. Oden, Finite Elements: A Second Course, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.
- [40] J.T. Oden and G.F. Carey, Finite Elements: Special Problems in Solid Mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.

- [41] G. Grioli, Linear problems associated to the theory of elastic continua with finite deformations, Lecture Notes in Physics 195, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1984.
- [42] S.N. Atluri, Alternate stress and conjugate strain measures, and mixed variational formulations involving rigid rotations, for computational analyses of finitely deformed solids, with applications to plates and shells, Computers & Structures 18 (1), 93-116, 1984.
- [43] M. Berković and Z. Drašković, Stress continuity in the finite element analysis, Proc. IV World Cong. Finite Element Meth., Interlaken, 1984.
- [44] M. Berković, Thin shell theory - a three-field approximations approach, 1985. (nije objavljeno)
- [45] R. Kienzler and A. Golebiewska-Hermann, Material conservation laws in higher-order shell theories, Int. J. Solids Structures 21 (10), 1035-1045, 1985.
- [46] F.I. Niordson, Shell Theory, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1985.
- [47] M. Berković, Three-field approximations in nonlinear finite element analysis, Third International Conference on Numerical Methods for Non-Linear Problems, Dubrovnik, 1986.
- [48] Z. Drašković i M. Berković, O konstitutivnim jednačinama u teoriji tanke ljuske, XVII Jugoslovenski kongres teorijske i primenjene mehanike, Zadar, 1986.
- [49] M. Berković, A. Sedmak and Z. Drašković, Thin shell equilibrium equations, Yugoslav - Polish Conference on New Trends in Mechanics of Solids and Structures, Dubrovnik, 1987.
- [50] Z.V. Drašković, On invariance of finite element approximations, Yugoslav - Polish Conference on New Trends in Mechanics of Solids and Structures, Dubrovnik, 1987.
- [51] J. Jarić, Mehanika kontinuuma, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1988.
- [52] Z.V. Drašković, Prilog invarijantnom uvodjenju rezultanti napona u teoriju ljusaka, XVIII Jugoslovenski kongres teorijske i primenjene mehanike, Vrnjačka Banja, 1988.

- [53] Z.V. Drašković, On invariance of finite element approximations, *Mechanika teoretyczna i stosowana* 26 (4), 597-601, 1988.
- [54] Z.V. Drašković, Konstitutivne jednačine tanke ljuske u teoriji tri polja, Magistarski rad, PMF - MF, Beograd, 1988.
- [55] A. Sedmak, Zakon održanja tipa J integrala za tanku ljusku, Doktorska disertacija, PMF - MF, Beograd, 1988.
- [56] Z.V. Drašković, Prilog invarijantnom uvodjenju rezultanti napona u teoriju ljusaka, Zbornik L. Vujoševića, Titograd, 1988.
- [57] Z.V. Drašković, Konstitutivne jednačine tanke ljuske u teoriji tri polja, Saopštenje VTI, VS-347, Beograd, 1989.
- [58] Z.V. Drašković, Thin shell equations of motion - an invariant three-field approximations approach, Polish - Yugoslav Conference on New Trends in Mechanics of Solids and Structures, Rzeszow, 1989.
- [59] Z.V. Drašković, O diferenciranju integrala oblika rezultanti napona u teoriji tanke ljuske, 3. Simpozijum teorijske i primenjene mehanike, Skoplje, 1989.
- [60] A. Janković, Neki problemi nelinearne analize ljuski metodom konačnih elemenata, Doktorska disertacija, PMF - MF, Beograd, 1989.
- [61] Z.V. Drašković, Thin shell stress-resultants in an invariant three-field approximations development from the three-dimensional theory of continuum mechanics (u pripremi)
- [62] Z.V. Drašković, O izražavanju jednačina kretanja u konvektivnim koordinatama u odnosu na referentnu konfiguraciju (u pripremi)

6. PRILOZI

Na sledećim stranicama nalaze se prilozi koji čine sastavni deo rada, ali su dovoljno samostalni da mogu biti izdvojeni u zasebne celine kako ne bi odvrćali pažnju od glavnog toka izlaganja.

1

6.1. O DIFERENCIRANJU INTEGRALA OBLIKA REZULTANTI NAPONA U TEORIJI TANKE LJUSKE

6.1.1. Uvod. Pri uobičajenom izvodjenju jednačina kretanja tanke ljuske iz jednačina kretanja trodimenzionog kontinuuma javlja se i korak u kom se integral izvoda (po površinskoj konvektivnoj koordinati) tenzora ili vektora napona transformise u izvod integrala koji predstavlja na ovaj ili onaj način uvedenu rezultantu napona u teoriji ljuske (v. npr. [10], str. 44 i [20], str. 157, odnosno [36], str. 113). Budući da se, s jedne strane, na tom prelazu posebno ne zadržava čitačeva pažnja (već se jednostavno "prepoznaje" izvod neke rezultante; v. komentar posle (9.59) u [20]), a da, sa druge strane, ta izvodjenja nisu geometrijski dovoljno konsekventna (u smislu da nisu u skladu sa Eriksenovim konceptom o integraljenju vektorskih i tenzorskih polja posle prelaska na koordinatni oblik u krivolinijskim koordinatama (v. [7], str. 808)), smatrali smo da je od interesa, pre nego što se predje na izvodjenje (o kojem će biti reči u 3.3.2.) jednačina kretanja tanke ljuske u tzv. teoriji tri polja ([47]) (ali uz upotrebu invarijantnih aproksimacija ([53]) Ležandrovim polinomima polja napona, deformacije i pomeranja), da se posebno razmotri samo to diferenciranje integrala vektorskog (i uopšte tenzorskog) polja.

6.1.2. Diferenciranje integrala vektorskog polja. Neka je dato dovoljno glatko vektorsko polje:

$$\underline{v}(z^i, \zeta) \quad (i=1,2,3) \quad . \quad (6.1.1)$$

Integral:

$$\int_{-1}^{+1} \underline{v}(z^i, \zeta) d\zeta \quad (6.1.2)$$

može se posmatrati kao funkcija parametara z^i , pa svakako važi izraz za diferenciranje tog integrala po parametru:

1

U ovom prilogu zapravo je u celosti dat rad [42], koji je saopštavan 13. septembra 1988. godine na redovnom sastanku Seminara za reologiju u Institutu za mehaniku Matematičkog fakulteta Prirodno-matematičkih fakulteta u Beogradu.

$$\frac{\partial}{\partial z^i} \int_{-1}^{+1} \tilde{v}(z^j, \zeta) d\zeta = \int_{-1}^{+1} \frac{\partial}{\partial z^i} \tilde{v}(z^j, \zeta) d\zeta \quad (6.1.3)$$

Ta formula ostaje na snazi i ako z^i interpretiramo kao Dekartove koordinate u trodimenzionom euklidskom prostoru, a ζ kao pravu liniju upravnu na neku površ (referentnu površ ljske), s tim da se sada o odredjenom integralu može govoriti kao o krivolinijskom integralu prve vrste ili Rimanovom integralu na liniji ζ , pri čemu je za parametar umesto luka (tj. debljine ljske) uzeta bezdimenziona velicina ζ (time se izbegava pojavljivanje promenljivih granica u (6.1.3), što bi, kao što je poznato, učinilo tu formulu nešto složenijom!).

Uvedimo sad umesto Dekartovih koordinata z^i , pomoću:

$$\xi^a = \xi^a(z^i) \quad (6.1.4)$$

proizvoljne krivolinijske koordinate ξ^a ($a=1,2,3$), pa se (6.1.3) može prepisati u obliku:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^a} \left[\int_{-1}^{+1} \tilde{v}(\xi^b, \zeta) d\zeta \right] \frac{\partial \xi^a}{\partial z^i} = \int_{-1}^{+1} \frac{\partial}{\partial \xi^a} [\tilde{v}(\xi^b, \zeta)] \frac{\partial \xi^a}{\partial z^i} d\zeta \quad (6.1.5)$$

Primetimo da se izraz u uglastoj zagradi sa leve strane može smatrati vektorskom funkcijom vezanom za odredjenu tačku ζ -linije, npr. za $\zeta = 0$; sa desne strane se u uglastoj zagradi nalaze vektorske funkcije uzete u svim tačkama integracione putanje (a posle integracije se i tu dobija vektorska funkcija vezana za jednu tačku puta). Ako sad izvršimo identifikaciju:

$$\xi^3 = \zeta \quad (6.1.6)$$

(dok ćemo ξ^α ($\alpha=1,2$) nadalje smatrati konvektivnim koordinatama u referentnoj površi ljske), onda sledi da će se sa leve strane koordinatna transformacija vršiti u jednoj odredjenoj tački ζ -pravca, npr. u tački $\zeta = 0$, dok će se sa desne strane koordinatna transformacija vršiti u svim tačkama integracione putanje. Stoga će (6.1.5) sada da glasi:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^a} \left[\int_{-1}^{+1} \tilde{v}(\xi^\beta, \zeta) d\zeta \right] \frac{\partial \xi^a}{\partial z^i} \Bigg|_{\zeta=0} = \int_{-1}^{+1} \frac{\partial}{\partial \xi^a} [\tilde{v}(\xi^\beta, \zeta)] \frac{\partial \xi^a}{\partial z^i} d\zeta \quad (6.1.7)$$

gde se izvod $\frac{\partial \xi^a}{\partial z^i}$ (sa desne strane) odnosi na ma koju tačku ζ -pravca u granicama integracije.

Posle kompozicije sa $\left. \frac{\partial z^i}{\partial \xi^b} \right|_{\zeta=0}$, (6.1.7) postaje:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^b} \int_{-1}^{+1} \tilde{v} d\zeta = \int_{-1}^{+1} \frac{\partial}{\partial \xi^a} (\tilde{v}) \left. \frac{\partial \xi^a}{\partial z^i} \frac{\partial z^i}{\partial \xi^b} \right|_{\zeta=0} d\zeta, \quad (6.1.8)$$

a kako su:

$$\left. \frac{\partial \xi^a}{\partial z^i} \frac{\partial z^i}{\partial \xi^b} \right|_{\zeta=0} \quad (6.1.9)$$

po definiciji jednaki operatorima paralelnog pomeranja¹ (v. [7], str. 807), koje ćemo obeležiti sa v (što je uobičajeno u teoriji ljuske; v. [18], str. 471, kao i [10], str. 22), to se (6.1.8) može prepisati u obliku:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^b} \int_{-1}^{+1} \tilde{v} d\zeta = \int_{-1}^{+1} \frac{\partial}{\partial \xi^a} (\tilde{v}) (v)^{-1} \frac{\partial \xi^a}{\partial \xi^b} d\zeta; \quad (6.1.10)$$

pri tom je vodjeno računa da su (6.1.9) koordinate zapravo inverznih operatora paralelnog pomeranja (v. npr. str. 17 u [10]).

U (6.1.10) će nas više zanimati izvodi po površinskim konvektivnim koordinatama, odnosno sledeći deo izraza (6.1.10):²

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \int_{-1}^{+1} \tilde{v} d\zeta = \int_{-1}^{+1} \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} (\tilde{v}) (v)^{-1} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \xi^\beta} d\zeta. \quad (6.1.11)$$

¹ Duz ζ -ose u sistemu konvektivnih koordinata $\{\xi^1, \xi^2, \zeta\}$.

² Tj. po koordinatama ξ^α u referentnoj površi ljuske. Primetimo da se u (6.1.10), za $b = 3$, sa leve strane neće dobiti nula, jer vektorsko polje koje ne zavisi od neke krivolinijske koordinate ne mora, u opštem slučaju, imati izvod po njoj jednak nuli.

Da bismo dobili koordinatni oblik prethodnog izraza, transformisamo ga na sledeći način:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \left(\int_{-1}^{+1} v^a \cdot v^b \cdot d\zeta \right) = \int_{-1}^{+1} v^a \cdot v^b \cdot g_a^{-1 c} \cdot d\zeta \quad (6.1.12)$$

$$= \left(\int_{-1}^{+1} v^a \cdot v^b \cdot d\zeta \right) \cdot g_a^{-1 c} \cdot \xi^c$$

gde su:

$$g_a^{-1 c} \quad (6.1.13)$$

bazni vektori u konvektivnim koordinatama ξ^a u nekoj tački na normali na referentnu površ ljuske, a:

$$\xi^a \quad (6.1.14)$$

su bazni vektori u istom koordinatnom sistemu, ali u odgovarajućoj tački referentne površi.

Koristeći se okolnošću da je parcijalni izvod vektora moguće izraziti preko kovarijantnih izvoda njegovih koordinata, iz (6.1.12) dobijamo:

$$\left(\int_{-1}^{+1} v^a \cdot v^b \cdot d\zeta \right)_{,\beta} = \int_{-1}^{+1} v^a \cdot v^b \cdot g_a^{-1 c} \cdot d\zeta \quad , \quad (6.1.15)$$

uz napomenu da je u pitanju kovarijantni izvod u obvojnem, trodimenzionom prostoru, s tim što je on na levoj strani računat baš u tački koja leži u referentnoj površi ljuske.

6.1.3. Završne napomene. Poslednji izraz ¹ pokazuje kako se vrši kovarijantno diferenciranje integracijom dobijenog vektorskog polja (naime, integracijom na levoj strani, zbog prisustva operatora paralelnog pomeranja, dobiće se vektorsko polje). Čini se da je i trebalo očekivati takvo uopštenje uobičajene formule za diferenciranje integrala po parametru, budući da se u (6.1.15) s leve strane vrši kovarijantno dife-

1

Treba istaći da rezultat (6.1.15) nije u suprotnosti sa napomenom uz (18.6) u [7] da se u opštem slučaju ne mogu konvertovati indeksi po kojima se vrši kovarijantno diferenciranje, jer se sad radi o "integralnom" povezivanju izvoda u različitim tačkama!

renciranje baš u tački referentne površi $\zeta = 0$, a desno je u pitanju diferenciranje u tačkama ζ -ose, pa je u skladu s pomenutim Eriksenovim konceptom da se ti izvodi sa desne strane, koji su zapravo koordinate tenzora drugog reda, pri integraciji "pokupe" sa dva operatora paralelnog pomeranja. Šta više, izgleda da bi se odmah moglo krenuti od tog izraza (bez posebnih obrazloženja) kao prirodne generalizacije na slučaj krivolinijskih koordinata, uz njen puni geometrijski smisao.

Razlog da se pokuša sa doslednim uopštavanjem formule za diferenciranje integrala (po parametru koji predstavlja konvektivnu krivolinijsku koordinatu) nalazi se u činjenici da nam se u literaturi često navodjeni postupci izvodjenja jednačina kretanja tanke ljuske iz jednačina kretanja trodimenzionog kontinuuma, ne čine prihvatljivim sa geometrijskog stanovišta, između ostalog i kad je u pitanju razmena operacija integraljenja i kovarijantnog diferenciranja. Tako npr. u [36] se pri prelasku sa (12.21) na (12.22) ne uzima u obzir da veličina koja se diferencira u (12.22) sadrži, zbog (12.23) i (1.18a), integral ne od vektora, nego od koordinate vektorskog polja. Šta više, i pre prepoznavanja izvoda jedne rezultante u prvom članu izraza (9.59) u [36], sam prelaz (v. str. 156 u [36]) sa trodimenzionog kovarijantnog izvoda (zasnovanog na metrici u nekoj tački ζ) na dvodimenzioni kovarijantni izvod (zasnovan na metrici referentne površi ljuske) ne izgleda korektan, jer je u ovom drugom zadržan parcijalni izvod koordinata tenzora napona u nekoj tački ζ , a zapravo bi u njemu trebalo da figurise izvod baš u tački $\zeta = 0$ koja leži u referentnoj površi ljuske.

Na kraju bismo rekli da nam se čini da su pomenute nedoumice prevaziđjene postupkom koji je doveo do izraza (6.1.11), odnosno (6.1.15), a koje do sada nismo sretali u literaturi (pogotovo ne u onoj vezanoj za teoriju ljuske). Očigledno je da se te formule mogu proširiti i na neko tenzorsko polje, npr. na tenzorsko polje drugog reda:

$$\tilde{t} = t \begin{matrix} ab \\ g_a \otimes g_b \end{matrix}, \quad (6.1.16)$$

kada će biti:

$$\left(\int_{-1}^{+1} t \begin{matrix} ab \\ v_a \cdot v_b \end{matrix} d\zeta \right)_{,\beta} = \int_{-1}^{+1} t \begin{matrix} ab \\ ,c \ v_a \cdot v_b \end{matrix} \begin{matrix} .e \ .f \\ (v) \end{matrix} d\zeta \quad , \quad (6.1.17)$$

što je relacija koja će se koristiti pri izvodjenju jednačina kretanja tanke ljuske iz jednačina kretanja trodimenzionog kontinuuma Galerkinovom procedurom, uz korišćenje invarijantnih aproksimacija Ležandrovim polinomima polja napona, deformacije i pomeranja.

6.2. O UVODJENJU REZULTANTI NAPONA U TEORIJI TANKE LJUSKE¹

6.2.1. Uvod. U odeljku 2.2. izvršeno je numeričko modeliranje tanke ljuske na taj način što se ona shvata kao konačni element trodimenzionog kontinuuma u ζ -pravcu. Ta ideja (s kojom smo se prvi put sreli u [44] i koja je još jedna potvrda si- renja numeričkih metoda u mnoge oblasti naučnog istraživanja) omogućila je i da se, u primeni metode konačnih elemenata, opredelimo za koncept teorije tri polja ([47]), koji pred- stavlja neklasičan pristup i odlikuje se nezavisnim aproksi- miranjem polja napona, polja deformacija i polja pomeranja. Medjutim, budući da se radi o aproksimacijama tenzorskih po- lja, insistirali smo (u skladu sa stavom u [53] da konačnoe- lementne aproksimacije treba da budu invarijantne) na invari- jantnosti tih aproksimacija. Takav pristup, u slučaju invari- jantnih aproksimacija polja napona, doveo je do uvođenja re- zultanti napona oblika (v. (2.2.8)):

$$\tau_o = \int_{-1}^{+1} t \begin{matrix} ab & .c & .d \\ v & v & \\ a & b & \end{matrix} d\zeta, \quad (6.2.1)$$

za koji je rečeno da je nov u teoriji ljusaka i da je u geo- metrijskom pogledu dosledniji od uobicajenih, budući da je integracija u (6.2.1) izvršena u skladu sa Eriksenovim kon- ceptom o integraljenju tenzorskih polja posle prelaska u ko- ordinatni oblik u krivolinijskim koordinatama (v. [7], str. 808). U ovom prilogu trebalo bi da bude izvršeno poredjenje tog invarijantnog pristupa sa uobičajenim pristupima u kla- sičnoj teoriji ljusaka i da bude istaknuto u čemu se ogleda njihova neinvarijantnost.

6.2.2. Neinvarijantnost rezultanti napona u klasičnoj teori- ji ljusaka. Zadržimo se prvo na uvođenju rezultanti napona koje je izloženo u [6], str. 560 - 561. Tu se, u suštini, po- lazi od koordinatnog oblika uslova da je dejstvo kontaktne sile N na deo krive u referentnoj površi ljuske ekvivalen- tno dejstvu vektora napona t na odgovarajući deo "cilindar- ske" (lateralne) površi u trenutnoj konfiguraciji (v. izraz (213.1) u [6]):

1

U ovom prilogu, koji se zasniva na [52], odnosno na [56], zapravo je iznet deo rada [61].

$$\int_c N^{\psi} n_{\psi} ds = \int_{b(c)} t^{ab} n_b da \quad ; \quad (6.2.2)$$

*
 n je jedinični vektor normale na "cilindarsku" površ ∂P (v. Sliku 2), a n jedinični vektor (u referentnoj površi ljuske) normale na krivu ∂P ; c je deo krive ∂P koja predstavlja granicu neke oblasti P u referentnoj površi ljuske, dok je $b(c)$ odgovarajući deo pomenute "cilindarske" površi koja se podudara sa ∂P na $\zeta = 0$ i "proteže" od jednog do drugog lica ljuske (određenog sa $\zeta = \pm 1$).

za "cilindarsku" površ ∂P je uobičajena pretpostavka da je ona obrazovana od normala na referentnu površ ljuske i u trenutnoj konfiguraciji (v. [6], str. 560). Dalje, za koordinatne površi $\zeta = \text{const}$ se pretpostavlja da su paralelne referentnoj površi ljuske (to odgovara pretpostavci o uniformnosti debljine ljuske). Najzad, što se pravda "nekim formalnim teškoćama u upotrebi opštih koordinata na površi" ([6], str. 562), za koordinatne linije na referentnoj površi ljuske uzimaju se linije krivine. Sa takvim izborom koordinatnih površi i linija element da "cilindarske" površi može se izraziti kao (v. str. 561 u [6]):

$$da = \sqrt{g/a} d\zeta ds \quad , \quad (6.2.3)$$

dok se za koordinate vektora normala n i n može pisati:

$$\frac{\partial n}{\partial b} = \frac{\partial n}{\partial c} = \frac{\partial n}{\partial \omega} \quad (n_3 = n_3 = 0) \quad (6.2.4)$$

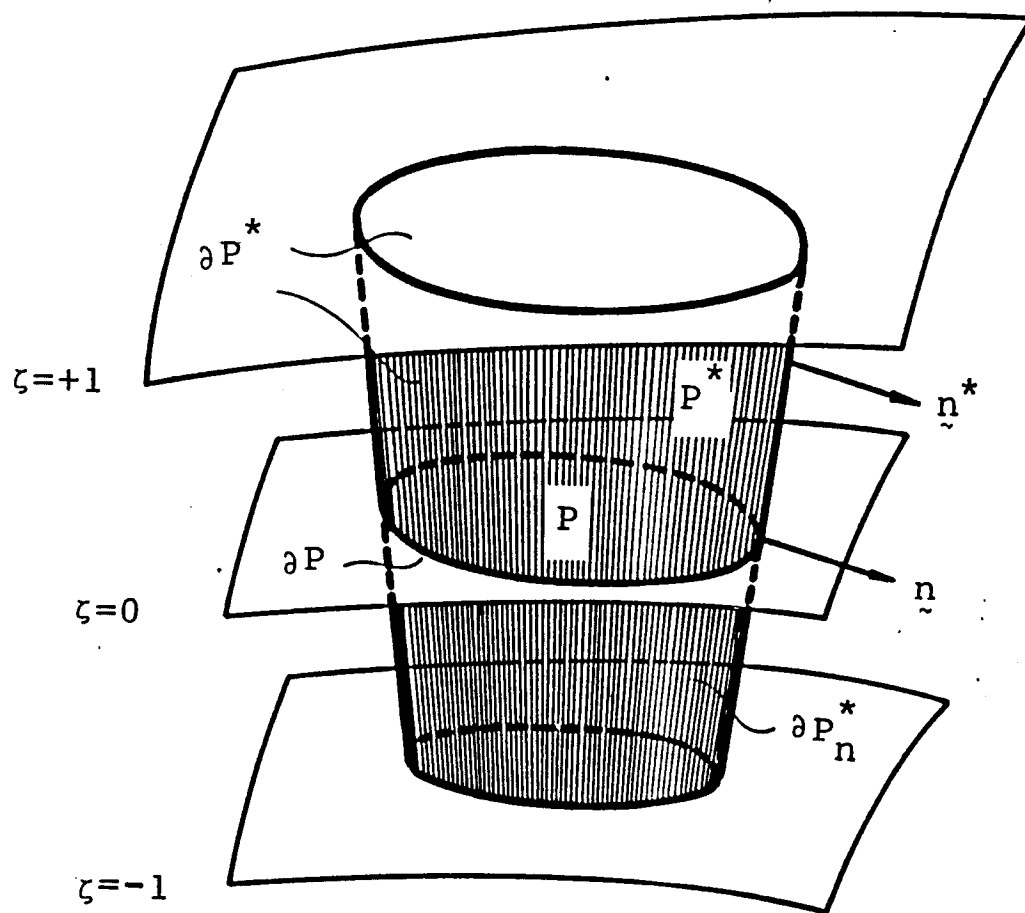
(to je obrazac (213.6)¹ iz [6]), što znači da se normala na "cilindarsku" površ ne menja duž ζ -izvodnice:

$$\frac{\partial n}{\partial \zeta} = 0 \quad (6.2.5)$$

(to je posledica pretpostavke da je "cilindarska" površ ∂P sačinjena od izvodnica upravnih na referentnu površ ljuske duž konture obrazovane od linija krivine te površi; naime, takva pretpostavka povlači da je pravoizvodna "cilindarska" površ razvojna (v. str. 214 i 227 u [3]), a odlika razvojne pravolinijske površi jeste da njena tangentna ravan ostaje nepromenjena u svim tačkama date izvodnice).

1

S tim što se, zbog pretpostavke o uniformnosti debljine ljuske, izrazi (2.1.10) za koordinate operatora paralelnog pomeranja ovde svode na prva dva sabirka.



slika 2.

Ako se sad (6.2.3) i (6.2.4) zameni u (6.2.2), dobiće se (v. (2.13.7) u [6]):

$$N^a \psi = \int_{-1}^{+1} t^a \frac{v^b \cdot \psi}{b} \sqrt{g/a} d\zeta, \quad (6.2.6)$$

odnosno, znajući (v. (2.1.13)) da je $v^1_3 = v^2_3 = 0$:

$$N^a \psi = \int_{-1}^{+1} t^a \frac{v^\omega \cdot \psi}{\omega} \sqrt{g/a} d\zeta; \quad (6.2.7)$$

specijalno, ako indeks a uzima vrednosti samo iz skupa $\{1,2\}$, iz prethodnog se izraza dobija:

$$N^{\phi\psi} = \int_{-1}^{+1} t^{\phi\omega} \frac{v^\omega \cdot \psi}{\omega} \sqrt{g/a} d\zeta \quad (6.2.8)$$

Ako se (6.2.7) uporedi sa (6.2.1), vidi se da se rezultante (6.2.1) od uobičajenih razlikuju odsustvom faktora $\sqrt{g/a}$, ali i prisustvom još jednog operatora paralelnog pomeranja. No, ako bi se u opisanom postupku iz [6] krenulo od vektorskog oblika uslova da je dejstvo kontaktne sile N na deo krive u referentnoj površi ljuske ekvivalentno dejstvu vektora napona t na odgovarajući deo "cilindarske" površi (up. sa (11.34) u [18]):

$$\int_c N ds = \int_{b(c)} t da, \quad (6.2.9)$$

onda bi se i u (6.2.7) pojavio još jedan operator v . Zaista, ako se iskoriste sledeće reprezentacije za kontaktnu silu i vektor napona (up. sa (9.11) i (11.7) u [18]):

$$N = N^{\phi} n_{\phi} = N^a \phi n_a, \quad t = t^b n_b = t^{ab} n_b g_a, \quad (6.2.10)$$

kao i okolnost da je (v. (2.1.9)):

$$g_a^b = v_a^b, \quad (6.2.11)$$

zamenom (6.2.10) i (6.2.11) uslov (6.2.9) postaje:

$$\int_c N^c \psi_n a ds = \int_{b(c)} t^{ab} v_n^c a da, \quad (6.2.12)$$

odakle se za rezultantu napona, koristeći pri tom i (6.2.4), dobija sledeći izraz:

$$N^c \psi = \int_{-1}^{+1} t^{ab} v_n^c v_b \sqrt{g/a} d\zeta. \quad (6.2.13)$$

Sušтина je u tome što je sam koordinatni uslov (6.2.2) (tj. (213.1) u [6]) postuliran, dok je (6.2.13) izvedeno množenjem vektorskog oblika (6.2.9) definicije rezultanti baznim vektorima, a to je (zbog (6.2.11)) nužno uvuklo i "druge" operatore paralelnog pomeranja (prisustvo "prvih" operatora v u izrazima (6.2.6) - (6.2.8) za rezultante napona posledica je korišćenja obrasca (6.2.4)!). U stvari, moglo bi se reći da iako se uz koordinatni oblik definicije rezultanti napona (213.1) u [6] pominje Eriksenov koncept integraljenja vektorskih i tenzorskih polja u krivolinijskim koordinatama, sam taj koncept ipak nije dosledno primenjen; naime, dok se npr. rezultante (6.2.13) mogu u geometrijskom pogledu tumačiti kao veličine dobijene graničnim procesom nakon što je izvršeno paralelno prenošenje tenzora napona u neku zajedničku tačku (npr. $\zeta = 0$) duž puta integracije, uz upotrebu operatora paralelnog pomeranja (dakle, saglasno s tim konceptom), dotle se za rezultante oblika (6.2.6) vidi da su tenzori napona paralelno prenošeni u zajedničku tačku samo s obzirom na drugi indeks, dok je s obzirom na prvi indeks vršeno tzv. prevlačenje tenzora napona (takav proces je još ocigledniji u slučaju rezultanti napona oblika:

$$\int_{-1}^{+1} t^{\phi\omega} d\zeta$$

(v. str. 14 u [35]) kada se pri integraciji ne menjaju koordinate podintegralne veličine).

[Razume se, pomenuto paralelno prenošenje tenzora napona nije neophodno, jer se njegove koordinate mogu posmatrati, svaka za sebe, kao neke skalarne funkcije, ali veličine dobijene integracijom tih funkcija u opštem slučaju neće biti koordinate nekog invarijantnog objekta!]

Medjutim, i kad se u literaturi¹ (v. npr. [10] i [18]) iz teorije ljsaka kreće od vektorskog oblika (6.2.9), odnosno (6.2.12) uslova ekvivalentnosti dejstava kontaktne sile i vektora napona, opet se dolazi do rezultanti oblika (6.2.7), a ne (6.2.13)! Takva, naizgled paradoksalna, situacija da se, polazeći od drukčijeg uslova (koji se suštinski razlikuje od ranijeg (6.2.2)), dolazi do istog rezultata, očigledno zaslužuje posebnu pažnju. Stoga ćemo se sad i na tome zadržati.

Pre svega, kad se u [10] krene od uslova oblika (6.2.9), dolazi se do relacije (v. (5.11) u [10]):

$$\int_c N ds = \int_{b(c)} t \begin{matrix} ab \\ n \\ b \end{matrix} \begin{matrix} * \\ g \\ a \end{matrix} da = \int_{b(c)} t \begin{matrix} ab \\ n \\ b \end{matrix} \begin{matrix} * \\ g \\ a \end{matrix} d\zeta ds, \quad (6.2.14)$$

gde je element da "cilindarske" (lateralne) površi izražen kao (v. (5.10) u [10]):

$$da = d\zeta ds, \quad (6.2.15)$$

$a ds$ je element luka dobijenog presekom "cilindarske" površi i površi $\zeta = \text{const}$. No, umesto da se onda upotrebi relacija oblika (6.2.4):

$$\begin{matrix} * \\ n \\ b \end{matrix} = v \begin{matrix} .c \\ n \\ b \end{matrix} \begin{matrix} c \\ c \end{matrix} \quad (6.2.16)$$

(makar da se ona² u [10] uspostavlja; v. (5.3) u [10]), dalje se koriste relacije (v. (5.5) u [10] ili npr. [46], str. 81):

$$\begin{matrix} * \\ n \\ \alpha \end{matrix} ds = \sqrt{g/a} \begin{matrix} * \\ n \\ \alpha \end{matrix} ds, \quad (6.2.17)$$

koje se (v. str. 41 u [10]) izvode iz relacija:

$$\begin{matrix} * \alpha \\ \lambda \end{matrix} ds = \begin{matrix} \alpha \\ \lambda \end{matrix} ds, \quad (6.2.18)$$

gde je (v. (2.56) i (5.1) u [10]):

1

Okolnost da se u ogromnom broju radova iz teorije ljsaka vrši, bar kad su u pitanju osnovne postavke te teorije, pozivanje na Nahdijeve monografije [10] i [18], učinila je da i mi najveću pažnju poklonimo baš tim referencama.

2

Istina, moglo bi se postaviti pitanje njene korektnosti u opštem slučaju, jer je važenje relacije (6.2.4), odnosno (6.2.5) bilo neposredna posledica okolnosti da se radilo o razvojnoj "cilindarskoj" površi. Medjutim, na tome se ovde ne možemo zadržavati.

$$\lambda^{*\alpha} = d\xi^{\alpha} / ds \quad , \quad \lambda^{\alpha} = d\xi^{\alpha} / ds \quad . \quad (6.2.19)$$

Otuda je jasno zašto "drugi" operatori paralelnog pomeranja nisu mogli da se pojave u rezultatima napona (5.12) u [10] - jednostavno govoreći, tih operatora nema ni u upotrebljenim relacijama (6.2.17). Odmah se nameće pitanje da li su relacije (6.2.17) korektne; odgovor je potvrđan, jer su one neposredne posledice izjednačavanja izraza:

$$i: \quad \begin{aligned} \lambda^{*\alpha} ds &= d\xi^{\alpha} \\ \lambda^{\alpha} ds &= d\xi^{\alpha} \quad , \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

što jeste numerički korektno, ali je geometrijski nedosledno. Naime, tu se radi o dva vektora (u različitim površima $\zeta \neq 0$ i $\zeta = 0$, pa dakle i) u različitim tačkama prostora:

$$d\xi^{\alpha} g_{\alpha} \quad i \quad d\xi^{\alpha} a_{\alpha} \quad (6.2.21)$$

koji imaju jednake koordinate u odnosu na dva različita skupa baznih vektora (v. str. 143-144 u [20]), a kako je za upoređivanje (pa dakle i eventualno izjednačavanje) neka dva vektora neophodno da se oni prvo dovedu u zajedničku tačku, sledi da relacije kojima se same koordinate u (6.2.21) izjednačavaju (a bez prenošenja u istu tačku) ne predstavljaju koordinatni oblik neke vektorske jednakosti, pa zato takve relacije nemaju invarijantan karakter. No, stoga nisu invarijantne ne samo relacije (6.2.18) i (6.2.17), nego ni celo dalje izvodjenje koje bi usledilo posle (6.2.14), a može da se nadje u [10].

Usudjujemo se da pretpostavimo ¹ da su pomenute poteškoće oko očuvanja invarijantnosti izvodjenja bile razlog da se u [18] pokuša sa unekoliko drukčijim pristupom pri uvodjenju rezultanti napona. Naime, opet se kreće od uslova oblika (6.2.9) (v. (11.34) u [18]):

$$\int_{\partial P} N ds = \int_{\partial P}^{*n} t da \quad , \quad (6.2.22)$$

što se, uz korišćenje reprezentacije (6.2.10) za vektor napo-

1

Tim pre što se na str. 585 u [18] eksplicitno iznosi zahtev za koordinatnom invarijantnošću konstitutivnih jednačina ljasaka pri njihovom izvodjenju iz trodimenzione teorije (a u tim jednačinama učestvuju i rezultante napona!).

na, kao i relacija (v. (11.32) u [18]):

$$\begin{aligned} n_1^* da &= \sqrt{g} d\xi^2 d\zeta \\ n_2^* da &= -\sqrt{g} d\xi^1 d\zeta, \end{aligned} \quad (6.2.23)$$

odnosno relacija (v. (11.33) u [18]):

$$\begin{aligned} n_1 ds &= \sqrt{a} d\xi^2 \\ n_2 ds &= -\sqrt{a} d\xi^1, \end{aligned} \quad (6.2.24)$$

prepisuje na sledeći način (up. sa (11.38) u [18]):

$$\begin{aligned} \int_{\partial P} N ds &= \int_{\partial P} t_{*n}^b n_b^* da \\ &= \int_{\partial P} (t_{*n}^1 n_1^* + t_{*n}^2 n_2^*) da \\ &= \int_{\partial P} \int_{-1}^{+1} \sqrt{g} (t^1 d\xi^2 - t^2 d\xi^1) d\zeta \\ &= \int_{\partial P} \sqrt{a} (N^1 d\xi^2 - N^2 d\xi^1) \\ &= \int_{\partial P} N^\phi n_\phi ds; \end{aligned} \quad (6.2.25)$$

pri tom se rezultante N^ϕ (up. sa (11.36) u [18]) definišu u obliku:

1

Oblik u [18] se razlikuje odsustvom faktora \sqrt{g} , što je

$$N^{\phi} \sqrt{a} = \int_{-1}^{+1} t^{\phi} \sqrt{g} d\zeta, \quad (6.2.26)$$

što se, pri linearizaciji (v. (12.36) u [18]), svodi na već navedene rezultante napona (6.2.8). Dakle, ni vektorska definicija (6.2.26) nije dovela do rezultanti napona u kojima bi se integraljenje vršilo u skladu sa Eriksenovim konceptom! No, obrazloženje je vrlo jednostavno: u relaciji (6.2.26) ne figurišu operatori paralelnog pomeranja - veza između N^1 , N^2 i t^1 , t^2 , t^3 uspostavlja se kao da su to jednostavno samo vektori, a ne i koordinate vektora. Međutim, ako se vektori t^1 , t^2 i t^3 posmatraju kao koordinate vektorskog polja $\{t^1, t^2, t^3\}$ u trodimenzionom prostoru (a da oni to i jesu vidi se iz (6.2.10)), a vektori N^1 i N^2 kao koordinate "površinskog" polja $\{N^1, N^2\}$ (što je isto tako moguće na osnovu reprezentacije (6.2.10)), onda bi, pri izjednačavanju koordinata tog "površinskog" polja sa odgovarajućim "površinskim" koordinatama rezultujućeg trodimenzionog polja dobijenog integracijom polja $\{t^1, t^2, t^3\}$ duž ζ -ose, trebalo upotrebiti operatore paralelnog pomeranja ψ , tako da bi definicija (6.2.26) bila zamenjena definicijom oblika:

$$N^{\phi} \sqrt{a} = \int_{-1}^{+1} t^{\psi} \psi^{\phi} \sqrt{g} d\zeta, \quad (6.2.27)$$

odakle neposredno slede rezultante napona (6.2.13).

Treba primetiti da dok se oblik (6.2.27) odmah nameće ako se u (6.2.25) upotrebe relacije (6.2.3) i (6.2.4), dotle to ipak nije slučaj ako bi se insistiralo na korišćenju relacija (6.2.23) i (6.2.24). Naime, tada bi (ako se želi izbeći već uz (6.2.20) i (6.2.21) pomenuto neinvarijantno izjednačavanje diferencijala određene krivolinijske koordinate) trebalo izvršiti paralelno prenošenje (na konačno rastojanje) prvog diferencijalno malog vektora u (6.2.21) iz površi $\zeta = \text{const}$ u odgovarajuću tačku površi $\zeta = 0$, a zatim ga porediti sa drugim od vektora u (6.2.21) koji leži u površi $\zeta = 0$. Eventualno bi se pri izjednačavanju površinskog i krivolinijskog integrala u (6.2.22), odnosno u (6.2.25) mogli posmatrati i odgovarajući granični procesi kako bi se na očigledniji način prikazalo prenošenje svih veličina u neku tačku u referentnoj površi ljuske. Međutim, potreba za takvim razmatranjima (koja su neophodna ako se u uobičajenim pristupima pri uvodjenju rezultanti napona u teoriji ljusaka insistira na invarijantnosti) prevaziđena je postupkom opi-

samo posledica razlike između usvojene reprezentacije (6.2.10) i reprezentacije (11.7) koja se u [18] koristi za vektor napona.

sanim u odeljku 2.2., kada su rezultante napona uvedene u obliku (2.2.8), odnosno (6.2.1). Što se tiče fizikalno-geometrijske interpretacije takvog postupka, on se može protumačiti (v. (6.2.1)) kao izjednačavanje dejstva u nekoj tački referentne površi sa rezultujućim dejstvom duž ζ -pravca kroz tu tačku, dok se u (6.2.9), tj. u uobičajenim pristupima radi o izjednačavanju dejstava duž neke konture u referentnoj površi i duž odgovarajuće "cilindarske" površi kroz tu konturu (a takva "globalna ravnoteža" u opštem slučaju ne mora da znači da će jednakost važiti i za svaku tačku konture i odnosnu izvodnicu lateralne površi!).

Ono što bi još trebalo raspraviti jeste činjenica da se rezultante napona uobičajene u teoriji ljsaka (npr. (6.2.7)) razlikuju od rezultanti (6.2.1) (uvedenih u odeljku 2.2.) i prisustvom faktora $\sqrt{g/a}$. Taj faktor se, u suštini, pojavljuje zbog upotrebe izraza (6.2.3) za element "cilindarske" površi (ukoliko se radi o pristupu iz [6]), odnosno zbog korišćenja relacije (6.2.17) (kad je reč o pristupu iz [10]) ili pak pri zameni relacija (6.2.23) i (6.2.24) u (6.2.22) (ako je reč o izvodjenju u [18]). Medjutim (ne zadržavajući se ovde na analizi izraza (6.2.3) za element lateralne površi koji se navodi u [6]), primetimo da se pri tom i u [10] i u [18] zapravo radilo o korišćenju jednakosti diferencijala određene krivolinijske koordinate u različitim tačkama (v. (6.2.20) i (6.2.21)), pa ako bi se takvo rasudjivanje primenilo i na element luka u (6.2.15), onda ne bi bilo potrebe ni da se pravi razlika između tih elemenata zavisno od toga koliko je ζ (u [36] je na str. 106 i usvojeno da je element lateralne površi jednak $da = d\zeta ds$); no, tada se ne bi ni pojavio faktor $\sqrt{g/a}$ u toku izvodjenja! Ipak, na detaljnijem obrazlaganju nelegitimnosti pojave faktora $\sqrt{g/a}$ u rezultatama (6.2.7) nećemo se više zadržavati zato što je, s jedne strane, u teoriji tanke ljske čest slučaj da se on aproksimira jedinicom (v. npr. (3.2) u [36]), a sa druge strane, ako bismo želeli da se taj faktor pojavi i u rezultatama napona (6.2.1), odnosno (2.2.8), bilo bi dovoljno da se umesto od reprezentacije (2.2.4) krene od reprezentacije:

$$\sqrt{g/a} t = \frac{1}{2} T_0 + \frac{3}{2} \zeta T_1 + \frac{5}{4} (3 \zeta^2 - 1) T_2, \quad (6.2.28)$$

ali takva reprezentacija (zato što novouvedeni faktor ¹ nije apsolutna invarijanta, već relativno i to dvostruko skalarno polje) ne bi više imala svojstvo invarijantnosti, pa bi i ceo takav pristup bio neinvarijantan.

1

Koji figuriše u uobičajenim rezultatama napona i zapravo doprinosi njihovom neinvarijantnom karakteru!

[U vezi sa prethodnim razmatranjima treba istaći da je i u izrazu (3.3.11)

$$\begin{aligned} dv &= \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\zeta \\ &= \sqrt{g/a} d\zeta \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 \\ &= \sqrt{g/a} d\zeta ds, \end{aligned}$$

zapravo za svaku nezavisno promenljivu, tj. koordinatu izvršeno izjednačavanje njenih diferencijala u različitim tačkama prostora; ali, s obzirom na okolnost da je to ovde radjeno u okviru izraza za jednu skalarnu invarijantu, sada takav postupak (kojim je ona izražena preko dvostrukog skalarnog polja) nije narušio njen invarijantan karakter.]

6.2.3. Veza invarijantnih i neinvarijantnih rezultanti napona. Zadržimo se sad na pokušaju uspostavljanja veza između rezultanti napona koje su uvedene u odeljku 2.2. i uobičajenih rezultanti napona u teoriji ljusaka. U tom cilju možemo npr. u (v. (2.2.9)):

$$T_o^{\phi\psi} = \int_{-1}^{+1} t \begin{matrix} \theta\omega & \cdot\phi & \cdot\psi \\ v & \theta & v \\ \omega & & \omega \end{matrix} d\zeta \quad (6.2.29)$$

jedan operator paralelnog pomeranja da zamenimo njegovim eksplisnim izrazom (2.1.10) (pretpostavljajući još da je u pitanju ljuska uniformne debljine) kada se dobija:

$$\begin{aligned} T_o^{\phi\psi} &= \int_{-1}^{+1} t \begin{matrix} \phi\omega & \cdot\psi \\ v & \omega \end{matrix} d\zeta - \\ &- \frac{1}{2} h b \begin{matrix} \phi & \\ \theta & \end{matrix} \int_{-1}^{+1} t \begin{matrix} \phi\omega & \cdot\psi \\ v & \omega \end{matrix} \zeta d\zeta \end{aligned} \quad (6.2.30)$$

(sto je po obliku isto kao pseudo-rezultanta $N^{\sim\phi\psi}$ koja je definisana u (5.35) u [10]!). Sa druge strane, ako npr. u (v. (6.2.8)):

$$N^{\phi\psi} = \int_{-1}^{+1} t \begin{matrix} \phi\omega & \cdot\psi \\ v & \omega \end{matrix} \sqrt{g/a} d\zeta \quad (6.2.30)$$

zamenimo sledeći aproksimativni izraz (v. (2.21) u [35]):

$$\sqrt{g/a} = \frac{h}{2} \left(1 - \zeta \frac{hb}{2a} \right), \quad (6.2.32)$$

gde je:

$$a = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 \quad (6.2.33)$$

$$b = a_{11} b_{22} + a_{22} b_{11} - 2 a_{12} b_{12}$$

dobićemo:

$$N^{\phi\psi} = \frac{h}{2} \left(\int_{-1}^{+1} t^{\phi\omega} \frac{\psi}{\omega} d\zeta - \frac{h b}{2 a} \int_{-1}^{+1} t^{\phi\omega} \frac{\psi}{\omega} \zeta d\zeta \right) \quad (6.2.34)$$

pa se poredjenjem sa (6.2.30) vidi da je u opštem slučaju teško uspostaviti čak i neku približnu vezu rezultanti (6.2.29) i (6.2.31). Ipak, u slučaju dovoljno plitke ljuske, kada se može uzeti da je $b \approx 0$, drugi sabirci u (6.2.30) i (6.2.34) se anuliraju, pa se može pisati da je:

$$N^{\phi\psi} = \frac{h}{2} T_o^{\phi\psi} \quad (6.2.35)$$

Inače, $b \approx 0$ povlači i da je $v \approx \delta$, pa se (6.2.29) tada neposredno svodi na:

$$\int_{-1}^{+1} t^{\phi\psi} d\zeta \quad (6.2.36)$$

a to su rezultante napona oblika koji je postuliran u [35].

6.2.4. Završne napomene. Na kraju treba istaći da drukčije uvođenje rezultanti napona u odeljku 2.2. (u odnosu npr. na rezultante u [10] ili [18]) ne bi trebalo, samo za sebe, da čudi, jer ni sve do sada uvedene rezultante napona nisu ekvivalentne (v. fusnotu na str. 562 u [6]). Naime, pri izvođenju teorije ljusaka iz trodimenzione teorije, radi se o definisanju rezultanti, a to ne mora uvek biti učinjeno na isti način. No, zbog neinvarijantnosti (na koju je u ovom prilogu i ukazano) uobičajenih pristupa pri tom izvođenju teorije ljusaka, čini se da se pokazuje u punoj meri opravdanim pristup izložen u odeljku 2.2., kada je (koristeći koncept teorije tri polja ([47])) izvršeno invarijantno uvođenje rezultanti napona u teoriju ljusaka (invarijantnost se ogleda u tome što je, prilikom definisanja tih rezultanti preko trodimenzionog tenzora napona, dosledno sproveden Eriksonov koncept o integraljenju tenzorskih polja posle prelaska

u koordinatni oblik u krivolinijskim koordinatama). Razume se, to sigurno nije jedini mogući način da se uspostavi invarijantna veza između tzv. direktnog pristupa i pristupa iz trodimenzione teorije prilikom razvoja teorije ljusaka; stoga bismo ipak naglasili da u odeljku 2.2. izložen koncept dovodi do uvođenja rezultanti napona u teoriju ljusaka postupkom koji je nov u literaturi, ali pri tome (na invarijantan način) objedinjuje, s jedne strane, geometrijski ne u potpunosti dosledno uvođenje tih rezultanti oblika npr. (6.2.8), i, sa druge strane, a priori u [35] obezbeđenu simetriju rezultanti oblika (6.2.36).

Takodje bismo se usudili da dodamo da je tek sad svoje puno značenje dobila Rutenova (H.S. Rutten) opaska (v. str. 502 u [22]) da je određivanje rezultanti napona jedna od najvažnijih oblasti primene operatora paralelnog pomeranja.

Najzad, podvucimo da nam je invarijantnost u uvođenju rezultanti napona bila neophodna da bismo ostvarili i krajnji cilj celog rada - to je dobijanje jednačina kretanja i, uopšte, jednačina polja u teoriji tanke ljuske na invarijantan način (pri tome, budući da nije zahtevana uniformnost debljine ljuske pri definisanju rezultanti napona, nije bilo potrebe ni da se takvo ograničenje kasnije uvodi).

Priručno-matematički fakultet
MATEMATIČKI FAKULTET
BIBLIOTEKA

Broj _____ Datum _____