UNIVERZITET U BEOGRADU

Matematički fakultet

GEOMETRIJA GEODEZIJSKIH SFERA I CEVI

Doktorska disertacija

Beograd 1994.

Đorić Đ. Mirjana

Mentor: **Neda Bokan**
Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet
Beograd

Članovi komisije: **Neda Bokan**
Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet
Beograd

Novica Blažić
Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet
Beograd

Miodrag Mateljević
Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet
Beograd

Lieven Vanhecke
Katholieke Universiteit Leuven
Departement Wiskunde
Leuven, Belgium

Datum odbrane:

Datum promocije:

Doktorska disertacija

GEOMETRIJA GEODEZIJSKIH SFERA I CEVI

Apstrakt

Izučavanje geometrije Rimanovih mnogostrukosti ispitivanjem osobina geometrijskih objekata na njima predstavlja veoma interesantan problem. Ova izučavanja pokazuju da osobine geometrije familije objekata na Rimanovim mnogostrukostima imaju jak uticaj na geometriju ambijentnog prostora.

U ovom radu u centru pažnje je ista vrsta problema, pri čemu se ovom prilikom izučava spoljašnja i unutrašnja geometrija cevi duž geodezijskih linija u Kelerovim i Sasakijevim mnogostrukostima. Osnovna tehnika u ovom radu koristi Jakobijeva vektorska polja, s obzirom da je to jedan od najboljih načina za analizu geometrije normalnih i cevastih okolina.

U drugoj glavi ovog rada izračunata je matrica operatora cevi duž φ-geodezijskih linija na Sasakijevim prostornim formama, koristeći tehniku Jakobijevih vektorskih polja.

Dalje, u trećoj glavi, date su karakterizacije lokalno hermitski simetričnih prostora i kompleksnih prostornih formi, izučavanjem operatora oblika i Ričijevog operatora cevi duž geodezijskih linija na Kelerovim mnogostrukostima.

Na kraju, u četvrtom poglavlju, okarakterisane su Sasakijeve prostorne forme i lokalno φ-simetrični prostori, analiziranjem dejstva operatora oblika i Ričijevog operatora na cevima duž φ-geodezijskih linija na Sasakijevim mnogostrukostima.

Ključne reči:

povezanost, krivina, metrika, Kelerova mnogostrukost, Sasakijeva mnogostrukost, kompleksna prostorna forma, Sasakijeva prostorna forma, lokalno hermitski simetričan prostor, lokalno φ-simetričan prostor, geodezijska sfera, geodezijska cev, operator oblika, Ričijev operator, Jakobijevo vektorsko polje.

GEOMETRY OF GEODESIC SPHERES AND TUBES

Abstract

It is an interesting problem to study the geometry of Riemannian manifolds by investigating the propetries of geometric objects on them. It turns out that the features of the geometry of a family of geometric objects on a Riemannian manifold strongly influence the geometry of the ambient space.

In this paper we focus on the same kind of problems considering the extrinsic and intrinsic geometry of tubes about geodesics on Kähler and Sasakian manifolds. In order to obtain our results we mainly work with Jacobi vector fields because this falls among the best ways of analysing the geometry of normal and tubular neighborhoods.

In Chapter II we compute the explicit formulas for the shape operator of tubes about φ-geodesics on Sasakian space forms, using the technique of Jacobi vector fields.

Further, in Chapter III we characterize locally Hermitian symmetric spaces and complex space forms considering the shape operator and the Ricci operator of tubes about geodesics on Kähler manifolds.

Finally, in Chapter IV we characterize Sasakian space forms and locally φ-symmetric spaces by analysing the action of the shape operator and the Ricci operator on tubes about φ-geodesics on Sasakian manifolds.

Key words:

connection, curvature, metric, Kähler manifold, Sasakian manifold, complex space form, Sasakian space form, locally Hermitian symmetric space, locally φ-symmetric space, geodesic sphere, geodesic tube, shape operator, Ricci operator, Jacobi vector field.

PREDGOVOR

Sadržaj ovog rada je izučavanje uticaja osobina geodezijskih cevi na Rimanovim mnogostrukostima na geometriju ambijentnog prostora. Ispitivanjem niza osobina spoljašnje i unutrašnje geometrije geodezijskih cevi, još jednom se pokazuje koliko je jak njihov uticaj. Ovom prilikom autor posmatra geodezijske cevi na Kelerovim i Sasakijevim mnogostrukostima i analizirajući dejstvo operatora oblika i Ričijevog operatora na ovim cevima, daje karakterizacije lokalno hermitski simetričnih Kelerovih mnogostrukosti, kompleksnih prostornih formi, lokalno φ-simetričnih Sasakijevih mnogostrukosti i Sasakijevih prostornih formi.

Inače, jaka veza između osobina krivine Rimanove mnogostrukosti $(M; g)$ i spoljašnje i unutrašnje geometrije malih geodezijskih sfera i cevi na ovim mnogostrukostima je utvrđena odavno i bila je predmet mnogih istraživanja. Izbor poznatih i novih rezultata u ovoj problematici moguće je naći u radu [79] i knjizi [42], gde se takođe može naći i opširna, detaljna bibliografija objavljenih radova o ovoj temi.

Specijalno, pogodna situacija se pojavljuje u kompleksnoj geometriji, kada je Rimanova mnogostrukost skoro hermitski prostor (M, g, J). Neka $G_m(r)$ označava geodezijsku sferu (jasno, neparne dimenzije) sa centrom u m i dovoljno malim poluprečnikom r. Tada je $\dfrac{\partial}{\partial r}$ jedinično normalno vektorsko polje, a $J\dfrac{\partial}{\partial r}$ je tangentno vektorsko polje na hiperpovrši $G_m(r)$. U radu [22] su izučavane neke osobine ovog vektorskog polja: na primer, posmatrane su integralne krive i ispitivano je ponašanje ovog polja izučavanjem dejstva operatora oblika i Ričijevog operatora sfere $G_m(r)$ na ovom polju. To je dovelo do novih karakterizacija lokalno hermitski simetričnih prostora, skoro Kelerovih mnogostrukosti konstantne holomorfne sekcione krivine i kompleksnih prostornih formi. Takođe, dokazano je i nekoliko teorema o određenosti lokalno 3-simetričnih i s-regularnih mnogostrukosti uz pomoć osobina simetrija reda 3 i tenzorskog polja simetrija.

Slična istraživanja izvršena su i u slučaju kada je ambijentni prostor Sasakijeva mnogostrukost ([24]). U ovom slučaju, mala geodezijska sfera $G_m(r)$ je parno-dimenziona i duž φ-geodezijske linije kroz m, dvodimenziona ravan određena sa ξ i $\varphi\frac{\partial}{\partial r}$ je paralelna i tangentna na geodezijsku sferu. Izučavanjem dejstva operatora oblika i Ričijevog operatora sfere $G_m(r)$ na vektore ξ, $\varphi\frac{\partial}{\partial r}$, ili na dvo-dimenzionu ravan određenu njima, dobijen je niz karakterizacija nekih specijalnih klasa Sasakijevih mnogostrukosti, tj., Sasakijevih prostornih formi i lokalno φ-simetričnih Sasakijevih mnogostrukosti.

Kako su geodezijske sfere specijalni slučajevi cevi (tj., one nastaju kada se podmnogostrukost duž koje je cev definisana zameni tačkom), to se sasvim prirodno nameće pitanje u kojoj meri osobine operatora oblika i Ričijevog operatora cevi određuju krivinu ambijentnog prostora.

Prva istraživanja sa ovom idejom navedena su u radu [25], gde su posmatrane cevi duž karakterističnih linija na Sasakijevim mnogostrukostima. Naime, poznato je da je Sasakijeva mnogostrukost Rimanova mnogostrukost snabdevena jediničnim Kilingovim vektorskim poljem ξ čiji Rimanov tenzor krivine R zadovoljava relaciju $R_{XY}\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X$ (za sva vektorska polja X, Y na M), pri čemu η označava dualnu 1-formu polja ξ. Integralne krive vektorskog polja ξ su na ovim mnogostrukostima geodezijske linije koje zovemo ξ-geodezijske linije, ili karakteristične linije. Takođe, linije toka polja ξ su (geodezijski) listovi Rimanove folijacije $\mathcal{F}$. Lokalno, $\mathcal{F}$ je Rimanova submersija nad Kelerovom mnogostrukošću. Koristeći ove osobine, u navedenom radu su izučavana svojstva operatora oblika i Ričijevog operatora malih cevi duž linija toka. Na ovaj način su dobijene karakteristične osobine Sasakijevih prostornih formi i lokalno φ-simetričnih prostora.

Pored karakterističnih linija, istaknutu ulogu u Sasakijevoj geometriji imaju i φ- geodezijske linije. Naime, poznato je da na Sasakijevim mnogostrukostima geodezijska linija koja je normalna na ξ u jednoj tački, ostaje normalna na ξ u svakoj svojoj tački. Ove specijalne geodezijske linije nose naziv φ-geodezijske linije i njihovo istraživanje je deo izučavanja "transverzalne" geometrije Rimanove folijacije sa jedno-dimenzionim listovima generisanim jediničnim Kilingovim vektorskim poljem ξ ([34], [75], [76]). U četvrtom poglavlju ovog rada se izučavaju osobine operatora oblika i Ričijevog operatora cevi duž ovih linija.

Glavni rezultati u ovom radu (kao i u gore istaknutim radovima), dobijeni su uz pomoć Jakobijevih vektorskih polja. Uloga ovih polja u izučavanju Rimanove geometrije zapažena je odavno i ona imaju centralno mesto u proučavanju unutrašnje i spoljašnje geometrije geodezijskih sfera i cevi ([22]-[29]), simetrija u odnosu na tačku, krivu i podmnogostrukost ([13]-[18]), rotacija oko krive i podmnogostrukosti ([55]-[58]), u izračunavanju zapremina malih geodezijskih sfera i cevi ([20], [23], [39]-[41]) i analizi sličnih problema ([23], [80]). Izučavanje ovih problema uvek vodi detaljnoj analizi nekih aspekata teorije krivine i osvetljava odgovor na mnogo puta postavljano opšte pitanje (koje je tema i ovog rada, takođe):

Do kog stepena geometrijske osobine familije geometrijskih objekata na Rimanovoj mnogostrukosti (M, g) utiču, ili čak, određuju geometriju ambijentnog prostora (M, g)? Specijalno, koja je veza sa krivinom mnogostrukosti (M, g)?

Ovaj rad je još jedan prilog odgovoru na ovo pitanje, pri čemu su za geometrijske objekte, ovog puta, izabrane cevi duž geodezijskih linija, dok je ambijentni prostor Kelerova ili Sasakijeva mnogostrukost. Izučavanjem dejstva operatora oblika i Ričijevog operatora na ovim cevima, dobijene su nove karakterizacije nekih specijalnih klasa ovih mnogostrukosti, tj., lokalno hermitski simetričnih prostora, Kelerovih mnogostrukosti konstantne holomorfne sekcione krivine, lokalno φ-simetričnih Sasakijevih mnogostrukosti i Sasakijevih mnogostrukosti konstantne φ-sekcione krivine. Ovi rezultati izloženi su u trećoj i četvrtoj glavi, pri čemu i druga glava sadrži originalne rezultate, tj., uz pomoć Jakobijevih polja tu je izračunata matrica operatora oblika cevi duž geodezijskih linija, smeštenih u Sasakijevim mnogostrukostima konstantne φ-sekcione krivine.

Preciznije, rad je podeljen u četiri glave:

I Uvod

II Jakobijeva vektorska polja

III Neke karakterizacije lokalno hermitski simetričnih Kelerovih mnogostrukosti i kompleksnih prostornih formi

IV Neke karakterizacije lokalno φ-simetričnih Sasakijevih mnogostrukosti i Sasakijevih prostornih formi

Prva glava se sastoji od tri poglavlja:

1. Osnovni pojmovi iz teorije o mnogostrukostima

2. Kompleksna geometrija

3. Kontaktna geometrija

U prvom poglavlju su uvedeni osnovni pojmovi iz teorije o mnogostrukostima, npr., Rimanova mnogostrukost, Rimanova metrika, afina koneksija, Rimanov tenzor krivine, Ričijev tenzor, sekciona krivina, raslojenje, eksponencijalno preslikavanje, Fermijeve koordinate, cevi i dr., koji se javljaju u ovom radu. Sem toga, navedene su i poznate teoreme koje se koriste u radu.

Drugo poglavlje sadrži osnovni materijal o kompleksnoj geometriji (specijalno, o Kelerovim mnogostrukostima), koji će biti korišćen u narednim glavama. Uvedeni su pojmovi (skoro) kompleksnih i (skoro) kompleksnih metričkih mnogostrukosti i definisane su neke specijalne klase ovih mnogostrukosti: skoro Kelerove i Kelerove mnogostrukosti. Dalje, uz pomoć izvesnih krivinskih uslova, definisane su neke specijalne klase Kelerovih mnogostrukosti: kompleksne prostorne forme i lokalno hermitski simetrični prostori. Takođe, navedene su i neke dobro poznate teoreme o karakterizaciji ovih prostora.

U trećem poglavlju uvedeni su osnovni pojmovi iz kontaktne geometrije. Posle definisanja (skoro) kontaktnih i (skoro) kontaktnih metričkih mnogostrukosti, kao i njihovih specijalnih klasa (K-kontaktnih i Sasakijevih mnogostrukosti), uvedene su specijalne klase Sasakijevih mnogostrukosti (Sasakijeve prostorne forme i lokalno φ-simetrični prostori), uz pomoć izvesnih krivinskih uslova. Pored nekoliko teorema o karakterizaciji ovih prostora, u ovom poglavlju je ukazano na jaku vezu između skoro kontaktnih i skoro kompleksnih mnogostrukosti, tj., pokazano je da je mnogostrukost sa invarijantnom strogo regularnom skoro kontaktnom strukturom glavno raslojenje nad mnogostrukošću sa skoro kompleksnom strukturom.

Druga, treća i četvrta glava sadrže originalne rezultate.

Druga glava se sastoji od tri poglavlja:

1. Osnovni pojmovi o Jakobijevim vektorskim poljima
2. Geometrija cevi i razvoj u red operatora oblika i Ričijevog operatora
3. Jakobijeva vektorska polja i operator oblika cevi duž φ-geodezijskih linija na Sasakijevim prostornim formama

U prvom poglavlju su definisana Jakobijeva vektorska polja, koja čine osnovu nekih tehnika korišćenih u ovom radu. Poznato je da je Jakobijevo vektorsko polje rešenje Jakobijeve jednačine:

$$Y'' + R(Y, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0$$

duž geodezijske linije γ na Rimanovoj mnogostrukosti (M, g), pri čemu je R oznaka za Rimanov tenzor krivine na M, uz dogovor $R(X,Y) = \nabla_{[X,Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y]$. Simetrično tenzorsko polje

$$R_\gamma := R(\cdot, \dot{\gamma})\dot{\gamma}$$

nosi naziv Jakobijev operator duž γ. U opštem slučaju, eksplicitno određivanje Jakobijevih polja je vrlo težak problem, osim u slučaju Rimanovih mnogostrukosti sa jednostavnim tenzorom krivine.

U drugom poglavlju je objašnjeno kako se računaju komponente (u odnosu na Fermijeve koordinate) fundamentalnih geometrijskih veličina (kao što su metrički tenzor, operator oblika, Ričijev operator), uz pomoć Jakobijevih vektorskih polja. Takođe, navedena su dva poznata primera, korišćenjem tehnike razvoja u red.

Dobro je poznato da, kada je Rimanova mnogostrukost specijalnog tipa (npr., ima specijalnu krivinu), Jakobijeva vektorska polja imaju specijalan oblik i geometrijske veličine na toj mnogostrukosti su potpuno određene. Time su nametnuta velika ograničenja na unutrašnju i spoljašnju geometriju objekata (npr., geodezijskih sfera i cevi) na ovim Rimanovim mnogostrukostima. U trećem poglavlju autor je izračunao matricu operatora oblika (a time i Ričijevog operatora) u svim tačkama cevi P_σ duž φ-geodezijskih linija, pri čemu je ambijentni prostor Sasakijeva prostorna forma. Ovim je opisana tzv. spoljašnja geometrija cevi. Naime, podsetimo se definicije operatora oblika površi u euklidskom prostoru E^3. "Matematička" mera oblika površi u E^3 izražena je operatorom oblika definisanim na sledeći način ([63]): Neka je p tačka površi $\mathcal{S} \subset E^3$. Tada se, za svaki tangentni vektor v na $\mathcal{S}$ u p, definiše:

$$S_p(v) = \nabla_v U \,,$$

pri čemu je U jedinično normalno vektorsko polje u okolini tačke $p \in \mathcal{S}$. S_p je operator oblika površi $\mathcal{S}$ u tački p i u pravcu v. Zaista, tangentna ravan površi $\mathcal{S}$ u bilo kojoj tački $q \in \mathcal{S}$ se sastoji od svih euklidskih vektora normalnih na $U(q)$. Tada nam promena $\nabla_v U$ vektorskog polja U u v-pravcu pokazuje kako se tangentne ravni površi $\mathcal{S}$ menjaju u v-pravcu i ovo nam daje infinitezimalan opis načina kako se površ $\mathcal{S}$ zakrivljuje u E^3. Lako se pokazuje da je, za svaku tačku $p \in \mathcal{S}$, operator oblika simetričan linearan operator i kako je definisan na dvodimenzionom vektorskom prostoru, to je on vrlo "prost" objekat, čije karakteristične vrednosti, karakteristični vektori, trag i determinanta imaju vrlo veliko geometrijsko značenje. Naime, koriste se u definicijama normalne krivine površi $\mathcal{S}$, glavnih krivina i vektora i Gausove i srednje krivine. U literaturi je odavno primećena uloga ovog operatora i u n-dimenzionoj Rimanovoj geometriji ([4], [5], [22], [24]), pa je sasvim prirodno interesovanje za osobine njegovog dejstva. Zaista, u trećoj i četvrtoj glavi autor dobija nove karakterizacije nekih specijalnih vrsta Kelerovih i Sasakijevih mnogostrukosti, ispitivanjem dejstva operatora oblika na nekim istaknutim vektorskim poljima. Naime, neka je (M, g, J) n-dimenziona Kelerova mnogostrukost i neka je $P_\sigma(r)$ cev poluprečnika r duž geodezijske linije σ na M, tangentna na jedinični vektor u. Posmatrajući specijalne tačke $p = \exp_{\sigma(t)}(rv)$, $v \in \sigma(t)^\perp$, $v(\sigma(t)) = Ju(\sigma(t))$ na $P_\sigma(r)$ i geodezijske linije jedinične brzine $\gamma : s \mapsto \exp_{\sigma(t)}(sv)$, koje povezuju $\sigma(t)$ i p, autor je ispitivao dejstvo operatora oblika ovakvih cevi na vektorima $J\frac{\partial}{\partial s}$. Pri tome je jasno da je duž γ $v = \gamma'(s) = \frac{\partial}{\partial s}$ i da je u $p = \exp_m(rv)$ ovaj vektor jedinični vektor normalan na $P_\sigma(r)$. Autor je takođe je proučavao i krivinu $\kappa^\sigma(p)$ ovih cevi, definisanu relacijom

$$\kappa^\sigma(p) = g\left(S^\sigma\left(J\frac{\partial}{\partial s}\right), J\frac{\partial}{\partial s}\right)(p) \,.$$

U slučaju Sasakijevih mnogostrukosti, autor je izučavao cevi $P_\sigma(r)$ duž φ-geodezijskih linija σ, čiji je tangentni vektor jedinični vektor u, ortogonalan na ξ. Posmatrajući specijalne tačke $p = \exp_{\sigma(t)}(rv)$ ovih cevi, autor je razlikovao dva slučaja: kada je $v(\sigma(t)) = \varphi u(\sigma(t))$ i kada je $v(\sigma(t)) \perp \varphi u(\sigma(t))$, $v(\sigma(t) \perp \xi$. U oba slučaja je ravan razapeta vektorima ξ i φv paralelna duž φ-geodezijske linije tangentne na horizontalnom vektoru v i u tački p je ova ravan tangentna na cev $P_\sigma(r)$. Ispitujući dejstvo operatora oblika na ovoj ravni, kao i osobine krivine $\kappa^{\sigma}(p)$, autor je dobio nekoliko gore spomenutih karakterizacija Sasakijevih mnogostrukosti specijalne krivine.

Dok operator oblika određuje spoljašnju geometriju objekata na Rimanovim mnogostrukostima, to Ričijev operator Q, koji je definisan relacijom

$$g(QX,Y) = \rho(X,Y) = \sum_{\alpha=1}^{n} R_{XE_\alpha YE_\alpha},$$

određuje unutrašnju geometriju ovih objekata. U trećoj i četvrtoj glavi autor je dokazao da je moguće dobiti nove karakterizacije Kelerovih i Sasakijevih mnogostrukosti specijalnih krivina, izučavajući dejstva ovog operatora na prethodno opisanim vektorima, uz napomenu, da dokazi ovih teorema zahtevaju mnogo složeniju tehniku nego u slučaju operatora oblika.

Prijatna mi je dužnost da se ovom prilikom zahvalim prof. dr. Lieven-u Vanhecke-u sa Katoličkog univerziteta u Luvenu, u Belgiji, koji me je upoznao sa teorijom Jakobijevih polja i njihovom primenom u izučavanju Rimanove geometrije. Česti dogovori sa njim prilikom mojih poseta Univerzitetu u Luvenu, kao i brojne primedbe i sugestije, imale su veliki uticaj na kvalitet ove teze.

Takođe izražavam veliku zahvalnost prof. dr. Nedi Bokan, na čiju inicijativu sam počela proučavanje geometrije geodezijskih sfera i čiju sam podršku imala tokom izrade ove teze. Njene sugestije i komentari doprineli su kvalitetu ovog rukopisa.

Beograd 1994. Đorić Đ. Mirjana

SADRŽAJ

I UVOD

1. Osnovni pojmovi iz teorije o mnogostrukostima

Ovo poglavlje počećemo sa uvođenjem nekih oznaka i ponavljanjem nekih opšte poznatih činjenica. Sa M ćemo označavati glatku (tj. C^∞) diferencijabilnu mnogostrukost, a sa $T(M)$ njeno tangentno raslojenje. Ponekad ćemo pisati M^n da bismo naglasili da M ima dimenziju n. Kao i obično, neka je $\mathcal{F}(M)$ prsten C^∞ funkcija na M, a $\mathcal{X}(M)$ linearan prostor glatkih vektorskih polja na M. Obično ćemo tangentni vektor u tački označavati sa malim slovom, a njegovu ekstenziju u vektorsko polje, sa odgovarajućim velikim slovom. Osnovne ideje u vezi sa pojmovima podmnogostrukosti, imersije, submersije, difeomorfizma itd., mogu se potražiti u [47].

Rimanov metrički tenzor na M je simetrična pozitivno-definitna $\mathcal{F}(M)$-bilinearna forma g na $\mathcal{X}(M)$ sa vrednostima u $\mathcal{F}(M)$. On indukuje unutrašnji proizvod (koji ćemo takođe označavati sa g) na svakom tangentnom prostoru mnogostrukosti M u tački m (koji ćemo označavati sa M_m). *Rimanova mnogostrukost* je diferencijabilna mnogostrukost M snabdevena metričkim tenzorom g i ukoliko ne naglasimo drugačije, sve mnogostrukosti će ubuduće biti klase C^∞ i parakompaktne.

Afina koneksija (povezanost) je bilinearno preslikavanje

(1) $$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M),$$

sa sledećim osobinama:

$$\nabla_{fV}W = f\nabla_V W\,, \tag{2}$$

$$\nabla_V fW = (Vf)W + f\nabla_V W \tag{3}$$

za sve $f \in \mathcal{F}(M)\,, V, W, \in \mathcal{X}(M)$. $\nabla_V W$ je *kovarijantni izvod* od W u pravcu V. Za svaku Rimanovu metriku postoji jedinstvena afina koneksija (po fundamentalnoj teoremi Rimanove geometrije), zvana *Rimanova koneksija* (ili *Levi Čivita konecksija*), koja zadovoljava sledeće uslove:

$$Xg(V, W) = g(\nabla_X V, W) + g(V, \nabla_X W)\,, \tag{4}$$

$$\nabla_V W - \nabla_W V - [V, W] = 0\,, \tag{5}$$

pri čemu $[,]$ označava Liove zagrade, tj., $[X, Y]f = (XY - YX)f$.

Iz (1) i (2) je lako videti da je $(\nabla_V W)(p)$ određeno sa W i $V(p)$ i nije teško dokazati da je određeno sa $V(p)$ i restrikcijom W na bilo koju krivu kroz p u pravcu $V(p)$. Ako je α neka 1-forma, tada $\nabla_V\alpha$ definišemo formulom

$$(\nabla_V\alpha)(W) + \alpha(\nabla_V W) = V(\alpha(W))\,. \tag{6}$$

Proširujući ∇ kao izvod, definišemo $\nabla_V\sigma$ za bilo koje tenzorsko polje σ.

Rimanov tenzor krivine R na mnogostrukosti M definisan je sa

$$R_{XY}Z = \nabla_{[X,Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]\,Z\,, \tag{7}$$

za sve $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$. Često ćemo koristiti oznaku

$$R_{XYZW} = R(X, Y, Z, W) = g(R_{XY}Z, W)$$

za $(0, 4)$-tenzorsko polje pridruženo R. Rimanov tenzor krivine zadovoljava sledeće identitete, koje ćemo često koristiti:

$$R_{XY}Z = -R_{YX}Z\,, \tag{8}$$

$$R_{XYZW} = -R_{XYWZ}\,, \tag{9}$$

$$R_{XYZW} = R_{ZWXY}\,, \tag{10}$$

$$R_{XY}Z + R_{ZX}Y + R_{YZ}X = 0\,, \tag{11}$$

za $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$. Identitet (11) je poznat kao *Jakobijev* ili *prvi Bjankijev identitet*. Dalje, kovarijantni izvod ∇R Rimanovog tenzora krivine na mnogostrukosti M definisan je sa

$$(12) \quad (\nabla_V R)_{WXYZ} = V\Big(R_{WXYZ}\Big) - R_{\nabla_V WXYZ} - R_{W\nabla_V XYZ} - R_{WX\nabla_V YZ} - R_{WXY\nabla_V Z}$$

za $V, W, X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ i zadovoljava *drugi Bjankijev identitet*:

$$(13) \quad (\nabla_V R)_{WXYZ} + (\nabla_X R)_{VWYZ} + (\nabla_W R)_{XVYZ} = 0\,.$$

Algebarski, tenzor krivine je komplikovan objekat, pa je često vrlo važno izučavati njegove kontrakcije. Da bismo ih definisali, uočimo polje ortonormiranih baza $\{E_1, \ldots, E_n\}$ definisano na otvorenom podskupu mnogostrukosti M. Tada je *Ričijev tenzor* ρ (ili *Ričijeva krivina*) definisan relacijom

$$(14) \quad \rho(X, Y) = \sum_{\alpha=1}^{n} R_{XE_\alpha YE_\alpha}$$

za sve $X, Y, \in \mathcal{X}(M)$, pri čemu je n dimenzija mnogostrukosti M. Zbog osobine (10), Ričijeva krivina ρ je simetrična po X i Y. Dalje, odavde sledi da postoji jedinstveni endomorfizam $Q : T(M) \to T(M)$, takav da važi :

$$(15) \quad \rho(X, Y) = g(QX, Y) = g(X, QY)\,.$$

Q se naziva *Ričijevim operatorom* (ili *Ričijevim endomorfizmom*) mnogostrukosti M. Ukoliko je Ričijev tenzor ρ oblika $\rho = a\,g$, pri čemu je a konstanta, tada se M naziva *Ajnštajnova mnogostrukost*.

Slično, *skalarna krivina* τ definisana je sa

$$(16) \quad \tau = \sum_{\alpha=1}^{n} \rho(E_\alpha, E_\alpha) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} R_{E_\alpha E_\beta E_\alpha E_\beta}\,.$$

Lako je proveriti da ove definicije ne zavise od izbora polja lokalnih ortonormiranih baza $\{E_1, \ldots, E_n\}$.

Dalje, neka je Π ravan u tangentnom prostoru M_p, tj., 2-dimenzioni potprostor od M_p i neka X i Y čine ortonormiranu bazu za Π. Tada je, za svaku ravan Π u tangentnom prostoru M_p, *sekciona krivina* $K(\Pi)$ za Π definisana sa:

$$K(\Pi) = R(X, Y, X, Y)\,. \tag{17}$$

$K(\Pi)$ ne zavisi od izbora ortonormirane baze X, Y i može se pokazati da vrednosti $K(\Pi)$ za sve ravni Π u M_p određuju Rimanov tenzor krivine u tački $p \in M$. Specijalno, kada je M dvodimenziona mnogostrukost, $\Pi_p = M_p$, tako da postoji samo jedna sekciona krivina, koja se obično naziva Gausova krivina. Ukoliko je $K(\Pi)$ konstantno za sve sve ravni Π u M_p i za sve tačke p iz M, tada je M *prostor konstantne krivine.* Rimanovu mnogostrukost konstantne krivine zovemo i *prostorna forma.* Navedimo i dobro poznatu Šurovu teoremu.

Teorema 1.1. *Neka je M povezana Rimanova mnogostrukost dimenzije > 2. Ako sekciona krivina $K(\Pi_p)$ zavisi samo od tačke p, tada je M prostor konstantne krivine.*

Dalje, za prostor konstantne krivine k takođe važi i sledeća relacija:

$$R_{XY}Z = k\,(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y)\,. \tag{18}$$

Za svaki realan broj k može se konstruisati prosto povezana, kompletna Rimanova mnogostrukost konstantne krivine k. Za Rimanovu mnogostrukost konstantne krivine kažemo da je *eliptička, hiperbolička* ili *ravna* (ili *lokalno euklidska*) u zavisnosti od toga da li je sekciona krivina pozitivna, negativna ili nula. Takođe, svaka prosto povezana kompletna mnogostrukost konstantne krivine k je izometrična gore pomenutom konstruisanom modelu. Za detalje o ovim konstrukcijama i dokazima, pogledati [47] i [86].

Važnu klasu Rimanovih mnogostrukosti čine mnogostrukosti čiji je tenzor krivine paralelan, tj.,

$$\nabla R = 0$$

i koje nazivamo *lokalno simetrične mnogostrukosti.* Kompletan lokalno simetričan prostor je *simetričan prostor.* Jasno je da je svaka Rimanova mnogostrukost konstantne krivine lokalno simetričan prostor([47], 86]). Uprkos sličnosti između drugog Bjankijevog identiteta i uslova $\nabla R = 0$, ovaj drugi je mnogo jači. S druge strane, klasifikacija svih Rimanovih mnogostrukosti nema smisla, dok se klasifikacija kompletnih prosto povezanih lokalno simetričnih prostora svodi na klasifikaciju globalno simetričnih prostora, koju je izvršio E. Kartan.

Na kraju, za bilo koje vektorsko polje $X \in \mathcal{X}(M)$, tzv. *Liov izvod* $\mathcal{L}_X$ je izvod definisan sa

(19)
$$\mathcal{L}_X f = X(f) \quad \text{i} \quad \mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

za sve diferencijabilne funkcije f i sva vektorska polja X i Y. Za datu jedan-formu α, njen diferencijal $d\alpha$ definišemo na sledeći način: ako se u odnosu na neki koordinatni sistem $(x^1, \ldots, x^n)$, jedan-forma α može napisati kao

$$\alpha = \sum_i \alpha_i dx^i ,$$

tada je diferencijal $d\alpha$ dva-forma data sa

(20)
$$d\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i .$$

Ova definicija je u skladu sa onom datom u [3] i lako se proverava da tada važi

(21)
$$d\alpha(X, Y) = \frac{1}{2}\Big((\nabla_X \alpha) Y - (\nabla_Y \alpha) X\Big)$$

za sva vektorska polja X, Y tangentna na M.

Navedimo sada, kratko, definiciju glavnog raslojenja, koje će imati važnu ulogu u narednim poglavljima. Detaljnije informacije o raslojenjima mogu se naći u [10], [46], [47], [56], [68].

Raslojenje je (geometrijski) objekat koji se sastoji od

1. mnogostrukosti M (dimenzije $n+p$), koju zovemo *totalni prostor* (ili *Raslojeni prostor*);
2. mnogostrukosti $\mathcal{B}$ (dimenzije n), koju zovemo *bazni prostor*;
3. *projekcije* $\pi : M \to \mathcal{B}$, tj., (glatkog) preslikavanja maksimalnog ranga n;
4. mnogostrukosti F dimenzije p, koju zovemo *fiber*;
5. grupe G difeomorfizama fibera F, koju zovemo *strukturna grupa*.

Ovi objekti dopuštaju tzv. *fiber strukturu*, tj., mora postojati otvoreni pokrivač $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ bazne mnogostrukosti $\mathcal{B}$, zajedno sa kolekcijom difeomorfizama

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha)$$

takva da, za svako α važi,

$$\pi \circ \psi_\alpha = p_2 ,$$

pri čemu je $p_2 : U_\alpha \times F \to F$ prirodna projekcija na drugi faktor proizvoda. Dalje, ako je $U_\alpha \cap U_\beta = U_{\alpha\beta} \neq$, mogu se definisati funkcije, za svako $x \in U_{\alpha\beta}$,

$$T_{\alpha\beta}(x) : F \to F : f \mapsto p_2 \circ \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha(x, f) .$$

Ove funkcije nose naziv *funkcije prelaska* i one moraju biti elementi strukturne grupe G.

U specijalnom slučaju kada je fiber F Liova grupa G, a elementi strukturne grupe $\tilde{G} \cong G$ su leva dejstva L_g elemenata iz G na G definisana levim translacijama $L_g(p) = gp$, raslojenje nazivamo *glavno raslojenje.*

Koneksija (povezanost) Γ na glavnom raslojenju $(M, \mathcal{B}, G, \pi)$ pridružuje svakoj tački $p \in M$ potprostor $Q_p \subset M_p$, koji zovemo *horizontalan tangentni prostor*, tako da važi:

1. $M_p = Q_p \oplus T_pG$ za svako $p \in M$, pri čemu je T_pG potprostor tangentan na fiber G, koji nazivamo *vertikalan tangentni prostor*;

2. $Q_{gp} = L_{g*}Q_p$ za sve $g \in G$ i sve $p \in M$;

3. Q_p zavisi diferencijabilno od p. Dalje, neka je X vektorsko polje na baznoj mnogostrukosti $\mathcal{B}$. Tada se može pokazati da postoji jedinstveno vektorsko polje X^* na M koje je horizontalno i takvo da je $\pi_*(X^*) = X$. Ovo vektorsko polje X^* nazivamo *(horizontalan) lift* od X (u odnosu na koneksiju Γ).

Dalje, pre definicija cevi i Fermijevih koordinata, navedimo oznake za geodezijske linije i esponencijalno preslikavanje. Naime, neka je $c : [0, 1] \to M$ glatka kriva i neka $c'(t)$ označava njen tangentni vektor. Za bilo koje $v \in M_{c(0)}$ postoji jedinstveni vektor $V(t) \in M_{c(t)}$, takav da je $V(0) = v$ i $\nabla_{c'(t)}V(t) \equiv 0$. $V(t)$ zovemo *paralelnim poljem*, a $V(1)$ *paralelnim prenosom* od v duž $c(t)$. U stvari, lako se mogu naći glatka vektorska polja duž $c(t)$, $E_1(t), \ldots, E_n(t)$ takva da je $\{E_i(t)\}$ ortonormirana baza za $M_{c(t)}$. Ovaj uslov se može zapisati kao sistem diferencijalnih jednačina prvog reda:

$$\frac{d}{dt}g(V, E_i) = c'g(V, E_i) = g(\nabla_{c'}V, E_i) + g(V, \nabla_{c'}E_i) = g(\nabla_{c'}E_i, V) , \tag{22}$$

i teorema o egzistenciji rešenja diferencijalnih jednačina prvog reda nam obezbeđuje rešenje $V(t)$. Kako je gornja jednačina linearna, dobijamo linearno preslikavanje $P_c : M_{c(0)} \to M_{c(1)}$, definisano sa $v \mapsto V(1)$. Koristeći (3) dobijamo da je P_c izometrija.

Glatka kriva c je *geodezijska linija* ako je

$$\nabla_{c'} c' \equiv 0 \,. \tag{23}$$

Kako je uslov (6) deferencijalna jednačina drugog reda, to za datu tačku $p \in M$ i vektor $v \in M_p$, postoji jedinstvena geodezijska linija γ_v kroz p čiji je tangentni vektor u p baš v. Ako je $\gamma_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ geodezijska linija parametrizovana sa t, tada je kriva $c : (-\frac{\varepsilon}{s}, \frac{\varepsilon}{s}) \to M$ definisana sa $c(t) = \gamma_v(st)$ (s fiksirano) takođe geodezijska linija, jer je $\nabla_{c'} c' = s^2 \nabla_{\gamma_v} \gamma_v = 0$. Takođe je $c'(0) = sv$, pa je $c = \gamma_{sv}$.

Eksponencijalno preslikavanje $\exp_p : M_p \to M$ je definisano sa $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$ za $v \in M_p$ tako da je 1 u domenu γ_v. Gore smo istakli da za bilo koje fiksirano v postoji broj $s > 0$ takav da je $\gamma_{sv}(1)$ definisano. Dakle, $\exp_p$ je definisano u okolini početka u M_p, to je glatko preslikavanje i lokaloni difeomorfizam (po teoremi o imlicitnoj funkciji). Kako je $\exp_p : M_p \to M$, za svako $p \in M$, to možemo definisati uniju ovih preslikavanja $\exp : T(M) \to M$. Tako ćemo definisati exp na uniji nad p domena od $\exp_p$, što je okolina nula sekcije u $T(M)$.

Ako izaberemo ortonormiranu bazu $\{e_i\}$ za M_p, tada možemo definisati koordinatni sistem u okolini p dodeljujući tački $\exp_p\left(\sum x^i e_i\right)$ koordinate $(x_1, \ldots, x_n)$. Ovako definisane koordinate zovemo *normalne koordinate* u p. Za ove koordinate važi da je

$$\left(\nabla_v \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\Big|_p = 0 \tag{24}$$

i zato se vrlo često koriste, naročito u izučavanju geometrije geodezijskih lopti, koje su specijalni slučajevi cevi.

Definišimo sada i Fermijeve koordinate, koje su uopštenje normalnih koordinata i služe za bolje razumevanje geometrije Rimanovih mnogostrukosti u okolini podmnogostrukosti P. Definišimo ove koordinate u okolini podmnogostrukosti, iako nas u drugoj, trećoj i četvrtoj glavi interesuje samo slučaj kada je P geodezijska linija.

Neka je P topološki smeštena podmnogostrukost u M i neka ν označava *normalno raslojenje* za P u M, tj.,

$$\nu = \{(p, v) | p \in P \text{ i } v \in P_p^{\perp}\} \,, \tag{25}$$

pri čemu $P_p^\perp$ označava ortogonalni komplement od P_p u M_p. Tada je ν vektorsko raslojenje nad P i dakle, diferencijabilna mnogostrukost. (U stvari, ν je podraslojenje restrikcije P na tangentno raslojenje od M.) *Eksponencijalno preslikavanje normalnog raslojenja* ν je preslikavanje $\exp_\nu$ definisano sa

$$\exp_\nu(p, v) = \exp_p(v) \tag{26}$$

za $(p, v) \in \nu$. (Ovde $\exp_p$ označava eksponencijalno preslikavanje za M u p.) Dakle,

$$\exp_\nu : \nu \to M\,,$$

iako, strogo govoreći, $\exp_\nu$ može biti definisano samo u okolini nula sekcije ν. Možemo identifikovati P sa nula sekcijom od ν, tako da P može biti posmatrano kao podmnogostrukost od ν, ali i kao podmnogostrukost od M. Odavde sledi da za svako $p \in P$ imamo inkluziju $P_p \subseteq \nu_{(p,0)}$, gde $\nu_{(p,0)}$ označava tangentni prostor za ν u $(p, 0)$. Štaviše, iz definicije za ν takođe imamo da je $P_p^\perp \subseteq \nu_{(p,0)}$; sa ovim identifikacijama je jasno da je

$$\nu_{(p,0)} = P_p \oplus P_p^\perp\,.$$

Moguće je definisati na prirodan način Rimanovu metriku na ν i to je specijalan slučaj konstrukcije metrike na totalnom prostoru Rimanove submersije ([42]).

Sada se lako može dokazati da preslikavanje $\exp_\nu : \nu \to M$ preslikava okolinu od $P \subset \nu$ difeomorfno na okolinu od $P \subset M$, pri čemu je P topološki smeštena podmnogostrukost Rimanove mnogostrukosti M ([42,str.17]).

Dalje, neka je $\mathcal{O}_P$ podskup od ν definisan sa

$$\mathcal{O}_P = \text{najveća okolina nula sekcije } \nu \text{ za koju je } \exp_\nu : \mathcal{O}_P \mapsto \exp_\nu(\mathcal{O}_P)$$
$$\text{difeomorfizam}\,.$$

Da bismo definisali sistem Fermijevih koordinata potreban nam je proizvoljan sistem koordinata $(y_1, \ldots, y_q)$ definisan u okolini $\mathcal{V} \subset P$ tačke $p \in P$, kao i ortonormirane sekcije $E_{q+1}, \ldots, E_n$ restrikcije ν na $\mathcal{V}$.

Fermijeve koordinate $(x_1, \ldots, x_n)$ za $P \subset M$ sa centrom u p (u odnosu na dati koordinatni sistem $(y_1, \ldots, y_q)$ na P i date ortonormirane sekcije $E_{q+1}, \ldots, E_n$ iz ν) definisane su relacijom

$$\begin{aligned} x_a\Big(\exp_\nu\Big(\sum_{j=q+1}^{n} t_j E_j(p')\Big)\Big) &= y_a(p') \quad (a = 1, \ldots, q)\,, \\ x_i\Big(\exp_\nu\Big(\sum_{j=q+1}^{n} t_j E_j(p')\Big)\Big) &= t_i \quad (i = q+1, \ldots, n)\,, \end{aligned} \tag{27}$$

za $p' \in \mathcal{V}$, pri čemu zahtevamo da su brojevi $t_{q+1}, \ldots, t_n$ dovoljno mali da $\sum_{j=q+1}^{n} t_j E_j(p') \in \mathcal{O}_P$.

Kako je $\exp_\nu$ difeomorfizam na $\mathcal{O}_P$, jednačine (13) zaista definišu koordinatni sistem u okolini tačke p.

Kako Fermijeve koordinate "mere" geometriju Rimanove mnogostrukosti M u okolini podmnogostrukosti P, to smo najviše zainteresovani kako se x_a i x_i menjaju duž geodezijskih linija normalnih na P.

Sledeće dve elementarne teoreme, čiji dokazi se mogu naći u [42,str.18], biće potrebne u narednom poglavlju.

Teorema 1.2. *Ako je $(x_1, \ldots, x_n)$ sistem Fermijevih koordinata sa centrom u $p \in P$, tada je restrikcija na P koordinatnih vektorskih polja*

$$\frac{\partial}{\partial x_{q+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$$

ortonormiran sistem vektora.

Teorema 1.3. *Neka je ξ geodezijska linija jedinične brzine normalna na P pri čemu je $\xi(0) = p \in P$ i neka je $u = \xi'(0)$. Tada postoji sistem Fermijevih koordinata $(x_1, \ldots, x_n)$ takav da za malo t (tj., za $(p, tu) \in \mathcal{O}_P$) važi*

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_{q+1}}\right|_{\xi(t)} = \xi'(t),$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_a}\right|_p \in P_p, \quad \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \in P_p^\perp$$

za $1 \le a \le q$ i $q+1 \le i \le n$ i

$$(x_\alpha \circ \xi)(t) = \begin{cases} t, & \alpha = q+1, \\ 0, & \alpha \ne q+1 \end{cases}$$

za $1 \le \alpha \le n$.

Na kraju, navedimo i definiciju cevi-geometrijskih objekata koji su glavna tema ovog rada. Neka je P topološki smeštena podmnogostrukost (po mogućstvu sa granicom) u Rimanovoj mnogostrukosti M. Tada je *cev* $T(P, r)$ poluprečnika $r \ge 0$ duž P skup

$$T(P,r) = \{m \in M \mid \text{postoji geodezijska linija } \xi \text{ dužine } L(\xi) \le r \text{ iz } M \text{ koja seče } P \text{ pod pravim uglom}\}. \tag{28}$$

Navedimo prvo neke važne primedbe:

1. Ukoliko P ima granicu, tada je

$$T(P,r) \neq \{m \in M |\ \text{rastojanje}\,(m,P) \leq r\}\,, \tag{29}$$

jer krajevi skupa na desnoj strani moraju biti isključeni da bi se dobila leva strana.

2. Iako relacija (28) ima smisla i u opštem slučaju, nadalje ćemo pretpostavljati da je ambijentna mnogostrukost M kompletna (pri čemu mislimo kompletna kao metrički prostor).

3. Takođe ćemo pretpostavljati da nema samopresecanja cevi.

4. Dalje, pretpostavljaćemo da je

$$\exp_\nu : \{(p,v) \in \nu | \|v\| \leq r\} \to T(P,r) \subset \exp_\nu(\mathcal{O}_P) \tag{30}$$

difeomorfizam.

Ukoliko je M kompletna i zatvorenje od P kompaktno, tada se uslov 4. može uvek dostići za dovoljno malo $r > 0$.

5. Kada je uslov (30) ispunjen, relaciju (28) možemo zapisati kao

$$T(P,r) = \bigcup_{p \in P} \{\exp_p(v) | v \in P_p^\perp \text{ i } \|v\| \leq r\}\,.$$

Kako će u ovom radu biti reči samo o cevima duž geodezijskih linija, napišimo kako u ovom, specijalnom, slučaju izgledaju definicije cevi i Fermijevih koordinata.

Neka je $\sigma : [a,b] \to M$ glatka kriva smeštena u povezanu n-dimenzionu Rimanovu mnogostrukost (M,g) klase C^∞. *Cevasta okolina* $\mathcal{U}_\sigma(r)$ poluprečnika r oko (duž) σ definisana je relacijom

$$\mathcal{U}_\sigma(r) = \{\exp_{\sigma(t)} v \mid v \in T^\perp_{\sigma(t)}\sigma\,,\ \| v \| < r\,,\ a \leq t \leq b\}\,, \tag{31}$$

pri čemu je $T^\perp_{\sigma(t)}\sigma$ fiber normalnog raslojenja ν nad $\sigma(t)$, tj., ortogonalni komplement tangentnog prostora $T_{\sigma(t)}\sigma$ krive σ u $M_{\sigma(t)}$. Za malo $s > 0$ skup

$$P_\sigma(s) = \{p \in \mathcal{U}_\sigma(r) \mid d(\sigma,p) = s\} \tag{32}$$

je glatka hiperpovrš u M koju zovemo *cevasta hiperpovrš* ili samo *cev* poluprečnika s duž σ. Cevi $P_\sigma(s)$ određuju folijaciju okoline $\mathcal{U}_\sigma = \mathcal{U}_\sigma(r)$ hiperpovršima P_σ. Primetimo da je radijalno vektorsko polje $\frac{\partial}{\partial s}$ jedinično vektorsko polje koje je ortogonalno na listove folijacije. Ukoliko je σ geodezijska linija na M, tada cevi P_σ nazivamo *geodezijske cevi* na M duž σ.

Neka je, sada, $\sigma : [a,b] \to M$ kriva jedinične brzine i neka je $\{e_1 = \dot{\sigma}(a), e_2, \dots, e_n\}$ ortonormirana baza tangentnog prostora $M_{\sigma(a)}$. Dalje, neka je F_1 jedinično tangentno polje $\dot{\sigma}$ i neka su $F_2, \dots, F_n$ normalna vektorska polja duž σ, koja su paralelna u odnosu na normalnu koneksiju $\nabla^\perp$ normalnog raslojenja ν, takva da je $F_i(a) = e_i$, $i = 2, \dots, n$. (Primetimo da je u ovom slučaju, kada je σ geodezijska linija, ova translacija baš paralelna translacija u odnosu na Levi Čivita koneksiju ∇.) Tada su *Fermijeve koordinate* $(x_1, \dots, x_n)$ u odnosu na $\sigma(a)$ i polje baza $\{F_1, \dots, F_n\}$ definisane sa

$$
\begin{aligned}
x_1\left(\exp_{\sigma(t)}\left(\sum_{j=2}^n t_j F_j\right)\right) &= t - a, \\
x_i\left(\exp_{\sigma(t)}\left(\sum_{j=2}^n t_j F_j\right)\right) &= t_i, \quad i = 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{33}
$$

2. Kompleksna geometrija

2.1. Skoro kompleksne i kompleksne mnogostrukosti

Skoro kompleksna struktura na (povezanoj) realnoj diferencijabilnoj mnogostrukosti je (glatko) polje automorfizama J tangentnog raslojenja TM koje zadovoljava relaciju

$$J_x^2 = -I_x\,, \quad x \in M\,, \tag{34}$$

pri čemu I označava identičnu transformaciju.

Ekvivalentno, skoro kompleksna struktura na M je dejstvo polja $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva na tangentnom raslojenju TM, koje mu daje strukturu kompleksnog vektorskog raslojenja nad M.

Mnogostrukost M sa definisanom skoro kompleksnom strukturom J je *skoro kompleksna mnogostrukost.* Svaka skoro kompleksna mnogostrukost je parne dimenzije.

Skoro kompleksna struktura J indukuje razdvajanje kompleksificiranog tangentnog raslojenja $T_{\mathbb{C}}M \simeq TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ na dva komplementarna kompleksna podraslojenja, konjugovana jedno drugom:

$$T_{\mathbb{C}}M \simeq T'M \oplus T''M\,, \tag{35}$$

pri čemu su u svakoj tački $x \in M$, fiberi T'_xM (respektivno T''_xM) sopstveni prostori za J_x u odnosu na sopstvenu vrednost $+i$ (respektivno $-i$). Obrnuto, svako kompleksno podraslojenje $T'M$ od $T_{\mathbb{C}}M$ sa komplementarnim konjugatom određuje skoro kompleksnu strukturu J na M. Elementi $T'M$ (respektivno $T''M$) su (kompleksni) *vektori tipa* $(1,0)$ (respektivno *tipa* $(0,1)$).

Svaki realni tangentni vektor X može se (na jedinstven način) predstaviti kao suma

$$X = U + \bar{U}\,, \tag{36}$$

gde je U (respektivno $\bar{U}$) njegov deo tipa $(1,0)$ (respektivno tipa $(0,1)$). Kompleksne komponente U i $\bar{U}$ su redom određene sa

$$U = \frac{1}{2}(X - iJX) \qquad \bar{U} = \frac{1}{2}(X + iJX)\,. \tag{37}$$

Razlaganje (35) kompleksificiranog tangentnog raslojenja $T_{\mathbb{C}}M$ indukuje razlaganje celog kompleksnog tenzorskog raslojenja. Specijalno, imamo

$$(38) \qquad \bigwedge_{\mathbb{C}}^{r} M = \sum_{p+q=r} \bigwedge^{p}(T'M)^* \otimes \bigwedge^{q}(T''M)^*,$$

pri čemu je $\bigwedge_{\mathbb{C}}^{r} M = \bigwedge^{r} \otimes \mathbb{C}$ raslojenje $\mathbb{C}$-vrednosnih r-formi, a $\bigwedge^{p}(T'M)^*$ (respektivno $\bigwedge^{q}(T''M)^*$)) označava raslojenje $\mathbb{C}$-linearnih alternativnih p-formi (respektivno q-formi) na $T'M$ (respektivno $T''M$). Raslojenje $\bigwedge^{p}(T'M)^* \otimes \bigwedge^{q}(T''M)^*$ ćemo označavati sa $\bigwedge_{\mathbb{C}}^{p,q} M$ i njegove elemente ćemo zvati (kompleksnim) *formama tipa* (p,q).

Skoro kompleksna struktura J je *integrabilna* ako je ispunjen jedan od ekvivalentnih uslova:

i) Spoljašnji diferencijal $d\theta$ proizvoljne 1-forme θ tipa $(1,0)$ pripada idealu generisanom 1-formama tipa $(1,0)$ (ekvivalentno, $d\theta$ nema komponentu tipa $(0,2)$);

ii) *Kompleksni tenzor torzije* ili Nijenhuisov tenzor N definisan sa

$$4N(X,Y) = [X,Y] + J[JX,Y] + [X,JY] - [JX,JY], \quad \forall X,Y \in M_x, \forall x \in M,$$

jednak je nuli;

iii) Za bilo koja dva vektorska polja X, Y tipa $(1,0)$ i $[X,Y]$ je vektorsko polje tipa $(1,0)$.

Ekvivalentnost gornja tri uslova je lako utvrditi ([54]) i svi oni impliciraju da je skoro kompleksna struktura J indukovana (jedinstvenom) kompleksnom strukturom.

Podsetimo se da je *kompleksna mnogostrukost* (kompleksne) dimenzije m (parakompaktan, Hausdorfov) topološki prostor koji dopušta pokrivanje otvorenim podskupovima, homeomorfnim sa otvorenim podskupovima od $\mathbb{C}^m$ i sa holomorfnim funkcijama prelaska. Kompleksna mnogostrukost je tada (glatka) mnogostrukost čije je tangentno raslojenje prirodno snabdeveno kompleksnom strukturom J, za koju se lako utvrđuje da je integrabilna u gornjem smislu (tj., svaka kompleksna mnogostrukost M nosi prirodnu skoro kompleksnu strukturu).

S druge strane, skoro kompleksna struktura J ne može biti indukovana sa dve ne-ekvivalentne kompleksne strukture ([47], II deo, str. 123), tj., važi

Teorema 2.1. *Neka je M skoro kompleksna mnogostrukost sa skoro kompleksnom strukturom J. Tada je J kompleksna struktura ako i samo ako J nema torzije.*

2.2. Hermitske mnogostrukosti

Neka je M skoro kompleksna mnogostrukost sa skoro kompleksnom strukturom J. *Hermitska metrika* na M je Rimanova metrika g takva da važi

$$g(JX, JY) = g(X, Y) \tag{39}$$

za sva vektorska polja X, Y na M.

Skoro kompleksnu mnogostrukost sa hermitskom metrikom zovemo *skoro hermitskom mnogostrukošću*, a kompleksnu mnogostrukost sa hermitskom metrikom zovemo *hermitskom mnogostrukošću.*

Može se dokazati ([86]) da je svaka skoro kompleksna mnogostrukost koja dopušta hermitsku metriku parakompaktna, pa ćemo nadalje pretpostavljati da je M takva.

Fundamentalna 2-forma Φ na skoro hermitskoj mnogostrukosti sa skoro kompleksnom strukturom J i hermitskom metrikom g definisana je sa

$$\Phi(X, Y) = g(X, JY)\,, \tag{40}$$

za sva vektorska polja X, Y na M. Tada je

$$\Phi(JX, JY) = \Phi(X, Y)\,, \tag{41}$$

$\Phi^p \neq 0$ u svakoj tački i M je orijentabilna.

Dalje, navedimo još jednu teoremu koja daje neophodan uslov za skoro kompleksnu mnogostrukost da bude kompleksna.

Teorema 2.2. *Neka je M skoro kompleksna mnogostrukost sa skoro kompleksnom strukturom J. Tada je M kompleksna mnogostrukost ako i samo ako*

M dopušta linearnu koneksiju ∇, takvu da je $\nabla J = 0$ i $T = 0$, pri čemu je T oznaka za torziju koneksije ∇.

Hermitska metrika g na skoro kompleksnoj mnogostrukosti M je *Kelerova metrika* ako je fundamentalna 2-forma zatvorena. Skoro kompleksnu mnogostrukost M sa Kelerovom metrikom nazivamo *skoro Kelerova mnogostrukost*, a kompleksnu mnogostrukost M sa Kelerovom metrikom nazivamo *Kelerova mnogostrukost*. Kako važi

Teorema 2.3. ([86]) *Neka je M skoro kompleksna mnogostrukost sa kompleksnom strukturom J i hermitskom metrikom g. Neka je ∇ kovarijantno diferenciranje u odnosu na Rimanovu koneksiju, određenu metrikom g. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

i) $\nabla J = 0$;

ii) $\nabla \Phi = 0$;

iii) skoro kompleksna struktura nema torziju i fundamentalna 2-forma je zatvorena, tj., $N = 0$ i $d\Phi = 0$;

Dakle, hermitska mnogostrukost M je Kelerova mnogostrukost ako i samo ako je $\nabla J = 0$.

Skoro hermitska mnogostrukost M sa skoro kompleksnom strukurom J je *skoro Kelerova mnogostrukost (K-prostor)* ako važi

$$(\nabla_X J)Y + (\nabla_Y J)X = 0 \tag{42}$$

za proizvoljna vektorska polja X, Y na M, ili, ekvivalentno

$$(\nabla_X J)X = 0 \tag{43}$$

za svako vektorsko polje X na M.

2.3. Kelerove mnogostrukosti

Neka je M realna $2n$-dimenziona Kelerova mnogostrukost sa skoro kompleksnom strukturom J i Kelerovom metrikom g. Označimo sa R i ρ Rimanov tenzor krivine i Ričijev tenzor od M, redom. Tada važi:

$$(44)\ i)\quad R(X,Y)J = JR(X,Y) \qquad ii)\quad R(JX,JY) = R(X,Y),$$

$$(45)\ i)\quad \rho(JX,JY) = \rho(X,Y) \qquad ii)\quad \rho(X,Y) = \frac{1}{2}(Tr\,JR(X,JY)),$$

za proizvoljna vektorska polja $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Relacija (44) i) poznata je pod nazivom *Kelerov identitet*.

Interesantno je primetiti da za Kelerove mnogostrukosti važi sledeća

Teorema 2.4. *Neka je M realna $2n$-dimenziona Kelerova mnogostrukost. Ako je M konstantne krivine, tada je M ravna, za $n > 1$.*

Odavde sledi da pojam konstantne sekcione krivine nije esencijalan za Kelerove mnogostrukosti, pa se zato uvodi pojam konstantne holomorfne sekcione krivine.

Pretpostavimo da je ravan Π u tangentnom prostoru M_x J-invarijantna, tj., $J\Pi = \Pi$. Tada je X, JX ortonormirana baza za Π, za proizvoljan jedinični vektor X u Π. Pri ovim uslovima *holomorfna sekciona krivina* $K(\Pi)$ data je formulom:

$$(46)\qquad K(\Pi) = R(X,JX,X,JX) = g(R(X,JX)JX,X),$$

pri čemu je X jedinični vektor u Π.

Lako se vidi da holomorfna sekciona krivina $K(\Pi)$ za sve J-invarijantne ravni Π u M_x određuje Rimanov tenzor krivine R u $x \in M$. Ako je $K(\Pi)$ konstantno za sve J-invarijantne ravni Π u M_x i za sve tačke $x \in M$, tada M zovemo *prostor konstantne holomorfne sekcione krivine* ili *kompleksna prostorna forma.*

Na Kelerovoj mnogostrukosti važi sledeća teorema, analogna Šurovoj teoremi:

Teorema 2.5. *Neka je M povezana Kelerova mnogostrukost kompleksne dimenzije $n > 1$. Ako holomorfna sekciona krivina $K(\Pi)$, pri čemu je Π J-invarijantna ravan u M_x, zavisi samo od x, tada je M kompleksna prostorna forma.*

Dokazujući ovu teoremu, nailazimo i na sledeću korisnu formulu: ako je M Kelerova mnogostrukost konstantne holomorfne sekcione krivine c, tada je njen Ričijev tenzor ρ određen formulom:

$$\rho = \frac{1}{2}(n+1)\,c\,g\,, \tag{47}$$

pri čemu je n kompleksna dimenzija mnogostrukosti M.

Takođe, važe i sledeće teoreme;

Teorema 2.6. *Kelerova mnogostrukost M je konstantne holomorfne sekcione krivine c ako i samo ako za njen Rimanov tenzor krivine važi:*

$$\begin{aligned} R_{XY}Z = \frac{c}{4}\Big(g(X,Z)Y - g(Y,Z)X + g(JX,Z)JY \\ -g(JY,Z)JX + 2g(JX,Y)JZ\Big)\,, \end{aligned} \tag{48}$$

za proizvoljna vektorska polja X, Y, Z na M.

Teorema 2.7. *Ako je Kelerova mnogostrukost M konstantne holomorfne sekcione krivine, tada je M Ajnštajnova mnogostrukost.*

Teorema 2.8. ([73]) *Neka je M, $\dim M \geq 4$, skoro Kelerova mnogostrukost. Tada je M konstantne holomorfne sekcione krivine ako i samo ako je za proizvoljno vektorsko polje X na M, $R_{XJX}X$ proporcionalno sa JX.*

U zavisnosti od toga da li je holomorfna sekciona krivina pozitivna, negativna ili nula, razlikujemo tri tipa kompleksne prostorne forme: eliptički, hiperbolički i ravan:

I slučaj.

Neka je $\mathbb{C}P^n$ n-dimenzioni kompleksni projektivni prostor sa homogenim koordinatnim sistemom $\{z^0, z^1, \ldots, z^n\}$. Za svaki indeks j, neka je U_j otvoren podskup u $\mathbb{C}P^n$ definisan sa $z^j \neq 0$. Definišimo

$$t_j^k = \frac{z^k}{z^j}\,, \quad j,\, k = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Na svakom U_j, uzmimo $t_j^0, \ldots, \hat{t}_j^j, \ldots, t_j^n$ (pri čemu $\hat{t}_j^j$ znači da t_j^j nedostaje) za lokalni koordinatni sistem i posmatrajmo funkciju $f_j = \sum_{k=0}^{n} t_j^k \bar{t}_j^k$. Tada je

$$f_j = f_k t_j^k \bar{t}_j^k$$

na $U_j \cap U_k$. Stavljajući

$$\Phi = -4id'd'' \log f_j \quad \text{na} \quad U_j\,,$$

dobijamo globalno definisanu zatvorenu $(1,1)$-formu na $\mathbb{C}P^n$. Pridružena metrika (često zvana *Fubini-Study metrika*) je data sa

$$ds^2 = 4\frac{(1+\sum t^\alpha \bar{t}^\alpha)(\sum dt^\alpha d\bar{t}^\alpha) - (\sum \bar{t}^\alpha dt^\alpha)(\sum t^\alpha d\bar{t}^\alpha)}{(1+\sum t^\alpha \bar{t}^\alpha)^2}\,. \tag{49}$$

Definicije za d, d', d'' i detaljnija objašnjenja mogu se naći u [47] i [86].

Takođe, može se pokazati da važi sledeća teorema o egzistenciji prostora konstantne pozitivne holomorfne sekcione krivine:

Teorema 2.9. *Za proizvoljan pozitivan broj c, kompleksan projektivan prostor $\mathbb{C}P^n$ nosi Kelerovu metriku konstantne holomorfne sekcione krivine c. U odnosu na nehomogeni koordinatni sistem $z^1, \dots, z^n$ metrika je data sa*

$$ds^2 = \frac{4}{c}\frac{(1+\sum z^\alpha \bar{z}^\alpha)(\sum dz^\alpha d\bar{z}^\alpha) - (\sum \bar{z}^\alpha dz^\alpha)(\sum z^\alpha d\bar{z}^\alpha)}{(1+\sum z^\alpha \bar{z}^\alpha)^2}\,.$$

II slučaj.

Neka je D^n otvorena jedinična lopta u $\mathbb{C}^n$ definisana sa

$$D^n = \{(z^1, \dots, z^n) : \sum z^\alpha \bar{z}^\alpha < 1\}\,.$$

Stavljajući

$$\Phi = 4id'd''(1 - \sum z^\alpha \bar{z}^\alpha)\,,$$

dobijamo da je pridružena metrika (*Bergmanova metrika*) data sa

$$ds^2 = 4\frac{(1-\sum z^\alpha \bar{z}^\alpha)(\sum dz^\alpha d\bar{z}^\alpha) + (\sum \bar{z}^\alpha dz^\alpha)(\sum z^\alpha d\bar{z}^\alpha)}{(1-\sum z^\alpha \bar{z}^\alpha)^2}\,. \tag{50}$$

i da je D^n Kelerova mnogostrukost.

I ovde važi teorema o egzistenciji prostora konstantne negativne holomorfne sekcione krivine:

Teorema 2.10. *Za proizvoljan negativan broj c, otvorena jedinična lopta D^n u $\mathbb{C}^n$ nosi kompletnu Kelerovu metriku konstantne holomorfne sekcione krivine c. U odnosu na koordinatni sistem $z^1, \ldots, z^n$ u $\mathbb{C}^n$, metrika je data sa:*

$$ds^2 = -\frac{4}{c}\frac{(1-\sum z^\alpha \bar{z}^\alpha)(\sum dz^\alpha d\bar{z}^\alpha) + (\sum \bar{z}^\alpha dz^\alpha)(\sum z^\alpha d\bar{z}^\alpha)}{(1-\sum z^\alpha \bar{z}^\alpha)^2}\,.$$

III slučaj.

Posmatrajmo kompleksni n-prostor $\mathbb{C}^n$ sa metrikom

$$ds^2 = \sum_{j=1}^{n} dz^j d\bar{z}^j\,. \tag{51}$$

Fundamentalna 2-forma je u ovom slučaju data sa

$$\Phi = -i\sum_{j=1}^{n} dz^j \wedge d\bar{z}^j\,.$$

Jasno je da je Φ je zatvorena, pa metrika definiše Kelerovu strukturu na $\mathbb{C}^n$ i, dakle, $\mathbb{C}^n$ je kompletna, ravna Kelerova mnogostrukost.

Na kraju, kako se lako može dokazati da su svake dve prosto povezane kompletne Kelerove mnogostrukosti konstantne holomorfne sekcione krivine c holomorfno izometrične jedna drugoj, to se koristeći teoreme 2.9. i 2.10., može dokazati sledeća teorema, (koja ujedno daje osnovu za razlikovanje tri gore navedena slučaja):

Teorema 2.11. *Prosto povezana kompletna Kelerova mnogostrukost konstantne holomorfne sekcione krivine c holomorfno je izometrična kompleksnom projektivnom prostoru $\mathbb{C}P^n$, otvorenoj jediničnoj lopti D^n ili $\mathbb{C}^n$, u zavisnosti od toga da li je $c > 0$, $c < 0$ ili $c = 0$.*

Konačno, primetimo da je za Kelerove i skoro Kelerove mnogostrukosti, holomorfna ravan $\{\gamma', J\gamma'\}$ paralelna duž geodezijske linije γ. Uzimajući restrikciju funkcije holomorfne sekcione krivine na polje ovih ravni, direktno dobijamo da je ova restrikcija konstantna funkcija ako i samo važi:

$$(\nabla_{\gamma'} R)_{\gamma' J\gamma' \gamma' J\gamma'} = 0\,,$$

a ovo važi za svaku geodezijsku liniju ako i samo ako je

$$(\nabla_X R)_{X\,JX\,X\,JX} = 0$$

za sva vektorska polja X na M. Ovo je vrlo koristan uslov za karakterizaciju nekih specijalnih klasa skoro hermitskih mnogostrukosti. Zaista, važi sledeća

Teorema 2.12. ([36],[67]) *Kelerova mnogostrukost je lokalno hermitski simetrična ako i samo je*

$$(\nabla_X R)_{X\,JX\,X\,JX} = 0$$

za sva vektorska polja X na M.

3. Kontaktna geometrija

$(\eta \otimes \xi)(X) = \eta(X)\xi$

3.1. Skoro kontaktne i kontaktne mnogostrukosti

Za diferencijabilnu mnogostrukost M^{2n+1} kažemo da ima *skoro kontaktnu strukturu* ako dopušta (nesingularno) vektorsko polje ξ (tzv. *karakteristično vektorsko polje*), 1-formu η i $(1,1)$-tenzorsko polje φ (koje često posmatramo kao polje endomorfizama tangentnih prostora u svim tačkama), koji zadovoljavaju

(52) $$\eta(\xi) = 1\,, \qquad \varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi\,,$$

gde I označava polje identičnih transformacija tangentnog prostora u svim tačkama. Iz ovih uslova sledi da važi

(53) $$\varphi\xi = 0\,, \qquad \eta \circ \varphi = 0\,, \qquad rank\varphi = 2n\,.$$

Skoro kontaktna mnogostrukost je mnogostrukost M snabdevena sa skoro kontaktnom strukturom (φ, ξ, η) i označavamo je sa (M, φ, ξ, η).

Po definiciji, svaka skoro kontaktna mnogostrukost mora imati nesingularno vektorsko polje ξ na M. Međutim, Ojlerova karakteristika bilo koje kompaktne mnogostrukosti jednaka je nuli i tada postoji najmanje jedno nesingularno vektorsko polje na mnogostrukosti. Zato se može smatrati da uslovi za skoro kontaktnu i skoro kompleksnu strukturu nameću skoro isti stepen restrikcije za neparno i parno dimenzione mnogostrukosti.

Takođe, svaka skoro kontaktna mnogostrukost dopušta Rimanovo me- tričko tenzorsko polje koje ima analognu ulogu kao skoro hermitsko metričko tenzorsko polje. Preciznije, za Rimanovu metriku g na skoro kontaktnoj mnogostrukosti (M, φ, ξ, η) koja zadovoljava

(54) $$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)\,,$$

za svako $X, Y \in \mathcal{X}$, kažemo da je *kompatibilna* sa (ili *pridružena*) skoro kontaktnom strukturom. Za (φ, ξ, η, g) kažemo da je *skoro kontaktna metrička struktura* na M i M nazivamo *skoro kontaktnom metričkom mnogostrukošću.* Primetimo da stavljajući $Y = \xi$ u (54) dobijamo

(55) $$\eta(X) = g(X, \xi)\,,$$

za sve $X \in \mathcal{X}(M)$, što znači da je η metrički dual za vektorsko polje ξ. Dalje, zamenjujući $X = \xi$ u (55) i koristeći (52) dobijamo da je ξ vektorsko polje jedinične dužine. Uobičajeno je da vektorska polja X ortogonalna na ξ nose naziv *horizontalna vektorska polja.*

Neka je h neka Rimanova metrika na skoro kontaktnoj mnogostrukosti (M,φ,ξ,η,g). Stavljajući

$$h'(X,Y)=h(\varphi^2X,\varphi^2Y)+\eta(X)\eta(Y)\,, \tag{56}$$

može se pokazati da je Rimanova metrika g, definisana sa

$$g(X,Y)=\frac{1}{2}\Big(h'(X,Y)+h'(\varphi X,\varphi Y)+\eta(X)\eta(Y)\Big)\,, \tag{57}$$

kompatibilna sa datom skoro kontaktnom strukturom (φ,ξ,η), tj., skoro kontaktna mnogostrukost uvek dopušta najmanje jednu kompatibilnu metriku. Dalje, iz (52),(54) i (55) sledi

$$g(\varphi X,Y)+g(X,\varphi Y)=0\,, \tag{58}$$

tj., φ je koso-simetrično tenzorsko polje u odnosu na g.

Neka je M^{2n+1} skoro kontaktna mnogostrukost sa skoro kontaktnom strukturom (φ,ξ,η) i pretpostavimo da je g kompatibilna metrika. Neka je U koordinatna okolina na M i izaberimo jedinično vektorsko polje X_1 koje je ortogonalno na ξ svuda na U. Tada sledi iz (52) i (54) da je $\bar{X}_1=\varphi X_1$ ponovo jedinično vektorsko polje na U, svuda ortogonalno na X_1 i ξ. Dalje, izaberimo jedinično vektorsko polje X_2 ortogonalno na ξ, X_1 i $\bar{X}_1$ i neka je $\bar{X}_2=\varphi X_2$. Nastavljajući na sličan način, konačno dobijamo ortogonalno polje baza $\{\xi,X_1,\bar{X}_1,\dots,X_n,\bar{X}_n\}$ na U, koje nazivamo *adaptirano* polje baza. U bilo kojoj tački $m\in M$, adaptirano polje baza $\{\xi,X_1,\bar{X}_1,\dots,X_n,\bar{X}_n\}$ inicira ortonormiranu bazu tangentnog prostora M_m $\{\xi,X_1,\varphi X_1,\dots,X_n,\varphi X_n\}$. Ovakve specijalne baze nazivamo *φ-baze.*

Koristeći činjenicu da možemo (lokalno) konstruisati adaptirano polje baza, može se pokazati (videti na primer [3],[66]) da su uslovi (52) ekvivalentni činjenici da se strukturna grupa tangentnog raslojenja TM mnogostrukosti M može redukovati na $\mathcal{U}(n)\times 1$, tj., da se može konstruisati otvoren pokrivač $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ mnogostrukosti M^{2n+1}, zajedno sa ortonormiranim poljem baza koje se transformišu na presecima $U_\alpha\cap U_\beta$ dejstvom $\mathcal{U}(n)\times 1$. Odavde se lako može zaključiti da je svaka skoro kontaktna mnogostrukost orijentabilna.

Za svaku skoro kontaktnu metričku mnogostrukost (M,φ,ξ,η,g) možemo definisati dva-formu ϕ na M sa

$$\phi(X,Y)=g(X,\varphi Y) \tag{59}$$

za sve $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Ovu dva-formu ϕ nazivamo *fundamentalna dva-forma* ili *Sasakijeva forma* mnogostrukosti $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$. Sasakijeva dva-forma proizvoljne skoro kontaktne mnogostrukosti zadovoljava

$$\eta \wedge \phi^n \neq 0. \tag{60}$$

Može se pokazati da je uslov (60) karakterističan za skoro kontaktne mnogostrukosti. Ovo daje treću definiciju skoro kontaktne mnogostrukosti: mnogostrukost M dimenzije $2n+1$ nosi skoro kontaktnu strukturu ako i samo ako dopušta globalnu jedan-formu η i globalnu dva-formu ϕ koje zadovoljavaju (60) svuda na M. (U [3] se mogu naći dokazi ekvivalentnosti ovih definicija.)

3.2. Kontaktne mnogostrukosti

Za mnogostrukost M^{2n+1} kažemo da je *kontaktna mnogostrukost* ako ima globalnu jedan-formu η takvu da važi

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0 \tag{61}$$

svuda na M. Jedan-formu η nazivamo *kontakt forma*. Jasno je (koristeći treću definiciju) da se kontaktna mnogostrukost uvek može snabdeti skoro kontaktnom strukturom (φ, ξ, η) ([3]).

Neka je g Rimanova metrika na M kompatibilna sa skoro kontaktnom strukturom i neka je ϕ Sasakijeva forma definisana relacijom (59). Ako ϕ zadovoljava relaciju

$$\phi = d\eta, \tag{62}$$

tada se $(\varphi, \xi, \eta, g, \phi)$ naziva *kontaktnom metričkom strukturom*, a $(M, \varphi, \xi, \eta, g, \phi)$ *kontaktnom metričkom mnogostrukošću.* Napomenimo da uvek postoji ovakva kompatibilna metrika. (Za dokaz pogledati [3].)

Interesantno je primetiti da su integralne krive karakterističnog vektorskog polja ξ na kontaktnoj mnogostrukosti $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ geodezijske linije. Zaista, kako vektorsko polje ξ ima konstantnu dužinu, imamo

$$g(\nabla_\xi \xi, \xi) = 0.$$

S druge strane

$$\frac{1}{2} g(\nabla_\xi \xi, X) = d\eta(\xi, X) = \phi(\xi, X) = 0$$

za sva vektorska polja X ortogonalna na ξ, tj., $\nabla_\xi \xi = 0$. Nadalje ćemo te (specijalne) geodezijske linije zvati *ξ-geodezijske linije.*

3.3. K-kontaktne mnogostrukosti

Neka je M^{2n+1} kontaktna metrička mnogostrukost sa kontaktnom metričkom strukturom (φ, ξ, η, g). Ako je karakteristično vektorsko polje ξ Kilingovo vektorsko polje u odnosu na g, tj, ako

$$\mathcal{L}_\xi g = 0$$

ili, ekvivalentno, ako

$$g(\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi) = 0 \tag{63}$$

za sve $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, tada za M kažemo da je K-*kontaktna (metrička) mnogostrukost.* Geometrijski, ovo znači da su sva stanja ψ_t (lokalnih) "tokova" ψ od ξ (lokalne) izometrije na (M, g).

Koristeći (62) i (63), sledi da je

$$\nabla_X \xi = -\varphi X \tag{64}$$

za sve $X \in \mathcal{X}(M)$. Obrnuto, ako strukturni tenzori (φ, ξ, η, g) na skoro kontaktnoj metričkoj mnogostrukosti M zadovoljavaju (64) za sve $X \in \mathcal{X}(M)$, mnogostrukost M je automatski K-kontaktna mnogostrukost. Zaista, koristeći (21) i (64), dobijamo da je

$$d\eta(X, Y) = \frac{1}{2}\left(g(\nabla_X \xi, Y) - g(X, \nabla_Y \xi)\right) = \phi(X, Y)$$

za sve $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, što znači da je $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ kontaktna mnogostrukost. Dalje, iz (64) odmah sledi (63), tj., ξ je Kilingovo vektorsko polje.

Dalje, uočimo neke geometrijske karakterizacije K-kontaktnih mnogostrukosti: naime uslov da je M K-kontaktna mnogostrukost implicira vrlo interesantne restrikcije na krivinu od M, tj. važe sledeće teoreme:

Teorema 3.1. *Da bi $(2n+1)$-dimenziona Rimanova mnogostrukost M bila K-kontaktna mnogostrukost, neophodno je i dovoljno da sledeća dva uslova budu zadovoljena:*

(1) M dopušta jedinično Kilingovo vektorsko polje ξ;

(2) sekciona krivina svake sekcione ravni koja sadrži ξ jednaka je 1, tj. $R_{\xi X \xi X} = g(X,X)$, za sva horizontalna vektorska polja X.

Teorema 3.2. *Kontaktna metrička mnogostrukost M^{2n+1} je K-kontaktna mnogostrukost ako i samo ako je Ričijeva krivina $\rho(\xi,\xi)$ u pravcu karakterističnog vektorskog polja ξ jednaka $2n$.*

Jasno je da su u slučaju K-kontaktnih mnogostrukosti integralne krive za ξ geodezijske linije, ali važi i više. Naime, možemo pokazati da geodezijska linija γ koja je ortogonalna na ξ u jednoj tački (tj., $\eta(\dot\gamma(t_0)) = 0$ za neko t_0), ostaje ortogonalna na ξ duž γ. Zaista, neka je γ geodezijska linija na M. Tada iz (64) sledi

$$\nabla_{\dot\gamma}(g(\dot\gamma,\xi)) = g(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma,\xi) + g(\dot\gamma,\nabla_{\dot\gamma}\xi) = 0\,.$$

Dakle, $\eta(\dot\gamma) = g(\dot\gamma,\xi)$ je konstantno duž proizvoljne geodezijske linije γ ortogonalne na ξ u jednoj tački. Ove specijalne geodezijske linije ortogonalne na ξ nazivamo *φ-geodezijske linije.*

3.4. Sasakijeve mnogostrukosti

Neka je M^{2n+1} skoro kontaktna mnogostrukost sa skoro kontaktnom strukturom (φ,ξ,η). Tada možemo definisati skoro kompleksnu strukturu J na $M\times\mathbb{R}$ sa

$$J(X, f\frac{d}{dt}) = (\varphi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt})\,, \tag{65}$$

pri čemu je f (diferencijabilna) funkcija na $M\times\mathbb{R}$, t je koordinata na $\mathbb{R}$ i $X\in\mathcal{X}(M)$. Za skoro kontaktnu strukturu (φ,ξ,η) kažemo da je *normalna* ako je skoro kompleksna struktura J integrabilna. Koristeći dobro poznatu teoremu Newlander-Nirenberg-a [54], može se pokazati ([3],[66]) da je ovo ekvivalentno anuliranju tenzorskih polja N_1, N_2, N_3, N_4 definisanih sa

$$N_1(X,Y) = [\varphi,\varphi](X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi, \tag{66}$$
$$N_2(X,Y) = (\mathcal{L}_{\varphi X}\eta)(Y) - (\mathcal{L}_{\varphi Y}\eta)(X), \tag{67}$$
$$N_3(X,Y) = (\mathcal{L}_{\xi}\varphi)X, \tag{68}$$
$$N_4(X,Y) = (\mathcal{L}_{\xi}\eta)(X). \tag{69}$$

Ovde smo sa $[\varphi, \varphi]$ označili *Nijenhuis-ov tenzor torzije* od φ, definisan sa

$$[\varphi,\varphi](X,Y) = \varphi^2[X,Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y]. \tag{70}$$

Moguće je pokazati ([3],[65],[66]) da anuliranje N_1 implicira anuliranje i preostala tri tenzorska polja. Naime važe sledeće teoreme:

Teorema 3.3. *Skoro kontaktna mnogostrukost* (M, φ, ξ, η) *je normalna ako i samo ako je* $[\varphi, \varphi] + 2d\eta \otimes \xi = 0$.

Teorema 3.4. *Neka je* $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ *kontaktna metrička mnogostrukost. Tada se tenzori* N_2 *i* N_4 *identički anuliraju. Dalje, tenzor* N_3 *se anulira ako i samo ako je karakteristično vektorsko polje* ξ *Kilingovo u odnosu na* g.

Kontaktna metrička mnogostrukost $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ čija je kontaktna metrička struktura normalna, naziva se *Sasakijeva mnogostrukost*. Sledeća teorema pokazuje kako je moguće ova dva uslova (da je M normalna i kontaktna metrička mnogostrukost) izraziti preko jedne tenzorske jednačine.

Teorema 3.5. *Skoro kontaktna metrička mnogostrukost* $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ *je Sasakijeva ako i samo ako je*

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X, \tag{71}$$

za sva vektorska polja X *i* Y.

(Dokazi ovih teorema mogu se naći u [3].)

Iz Teoreme 3.4. sledi da je svaka Sasakijeva mnogostrukost i K-kontaktna. Interesantno je da u 3-dimenzionom slučaju važi i obrnuto.

Dalje, činjenica da M ima Sasakijevu strukturu ima uticaja na Rimanov tenzor krivine. Naime, važi

$$\begin{aligned} R_{XY}\xi &= \eta(Y)X - \eta(X)Y, \\ R_{X\xi}Y &= g(X,Y)\xi - \eta(Y)X. \end{aligned} \tag{72}$$

Interesantno je da Sasakijeve mnogostrukosti mogu biti karakterisane i na sledeći način:

Teorema 3.6. ([3]) *Neka je* M^{2n+1} *Rimanova mnogostrukost sa jediničnim Kilingovim vektorskim poljem* ξ *takvim da važi*

$$R_{XY}\xi = g(\xi, X)Y - g(\xi, Y)X$$

za sve $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Tada je M Sasakijeva mnogostrukost. Sasakijeva struktura na M određena je vektorskim poljem ξ, jedan-formom η datom sa $\eta(X) = g(\xi, X)$ i $(1,1)$-tenzorskim poljem φ definisanim sa $\varphi X = -\nabla_X \xi$.

Na kraju, navedimo još neke korisne osobine tenzora krivine Sasakijevih mnogostrukosti:

$$R_{\varphi X\, \varphi Y\, \varphi Z\, \varphi W} = R_{XYZW} \tag{73}$$

za sve X, Y, Z, W ortogonalne na ξ;

$$\begin{aligned} R_{XYZ\varphi W} + R_{XY\varphi ZW} &= g(X, \varphi Z)g(Y, W) - g(X, \varphi W)g(Y, Z) \\ &\quad - g(Y, \varphi Z)g(X, W) + g(Y, \varphi W)g(X, Z) \end{aligned} \tag{74}$$

za sve $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$.

3.5. Raslojavanje na skoro kontaktim mnogostrukostima

U ovom odeljku ćemo ukazati na (bar lokalno) jaku vezu između skoro kontaktnih i skoro kompleksnih mnogostrukosti. Ponovimo prvo neke pojmove iz opšte lokalne teorije. Naime, neka je M^n (glatka) n-dimenziona mnogostrukost i pretpostavimo da je $X \in \mathcal{X}(M)$ (glatko) vektorsko polje na M. Ako je $p \in M$ tačka takva da je $X(p) \neq 0$, tada uvek možemo naći koordinatnu okolinu $\mathcal{U}$ oko p snabdevenu sa koordinatnim sistemom

$$\psi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n : q \mapsto \psi(q) = (x_1(q), \ldots, x_n(q))$$

takvim da je

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

svuda na $\mathcal{U}$ i takvim da je presek $\mathcal{U}$ sa integralnim krivim od X dat sa

$$x_2 = const., \ldots, x_n = const.$$

(Dokaz ovoga se može naći u [62].) Koordinatna okolina $(\mathcal{U}, \psi)$ ovog tipa je *regularna* okolina (u odnosu na tačku p i vektorsko polje X). Nadalje ćemo posmatrati regularnu okolinu $\mathcal{U}$ kao glatku n-dimenzionu mnogostrukost (sa diferencijabilnom strukturom indukovanom diferencijabilnom strukturom na

M) i restrikciju vektorskog polja X na $\mathcal{U}$. Dalje, pretpostavićemo da tačka p ima koordinate $\psi(p) = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Tada je *rez* $\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$, definisan sa

$$\tilde{\mathcal{U}} = \{q \in \mathcal{U} | x_1(q) = p_1\}$$

jedna $(n-1)$-dimenziona (glatka) podmnogostrukost od $\mathcal{U}$ zvana *bazna mnogostrukost* i preslikavanje

$$\pi : \mathcal{U} \to \tilde{\mathcal{U}} : q(q_1, q_2, \ldots, q_n) \mapsto \tilde{q}(p_1, q_2, \ldots, q_n)$$

je submersija sa $\mathcal{U}$ na $\tilde{\mathcal{U}}$. *Fiberi* $\pi^{-1}(\tilde{q})$ submersije π su (restrikcije) integralnih krivih X na $\mathcal{U}$.

Primenimo ovo na skoro kontaktni slučaj. Pretpostavimo da je M^{2n+1} skoro kontaktna mnogostrukost sa skoro kontaktnom strukturom (φ, ξ, η, g) i neka je p proizvoljna tačka na M. Kako je karakteristično vektorsko polje ξ nenula u p, možemo naći regularnu okolinu $\mathcal{U}$ oko p, baznu okolinu $\tilde{\mathcal{U}}$ i submersiju $\pi : \mathcal{U} \to \tilde{\mathcal{U}}$ koja preslikava svaku integralnu krivu od ξ u tačku. Nadalje ćemo se ograničiti na (otvorenu) podmnogostrukost $\mathcal{U}$. Jasno je da restrikcija skoro kontaktnih strukturnih tenzora na regularnu okolinu $\mathcal{U}$ čini $(\mathcal{U}, \varphi, \xi, \eta, g)$ skoro kontaktnom mnogostrukošću, koju ćemo nazivati *regularnom* skoro kontaktnom mnogostrukošću ([56]).

Neka je $\mathcal{U}$ regularna skoro kontaktna mnogostrukost sa skoro kontaktnim strukturnim tenzorima (φ, ξ, η). Skoro kontaktna struktura (φ, ξ, η) je *invarijantna* ([56]) ako važi

$$\mathcal{L}_\xi \eta = 0 \quad \text{i} \quad \mathcal{L}_\xi \varphi = 0 \tag{75}$$

svuda na $\mathcal{U}$. Geometrijski, ovo znači da su η i ξ invarijantni u odnosu na sva stanja ψ_t(t dovoljno blizu 0) (lokalnih) tokova ξ, tj. za sve (dovoljno male) $t \in \mathbb{R}$ i sve $q \in \mathcal{U}$ takve da $\psi_t(q) \in \mathcal{U}$, imamo $\psi_t^*|_q \eta_q = \eta_{\psi_t(q)}$ i $\psi_t^*|_q \circ \varphi_q = \varphi_{\psi_t(q)} \circ \psi_{t*}|_q$. Ako pretpostavimo da je (φ, ξ, η) invarijantna skoro kontaktna struktura na $\mathcal{U}$, možemo definisati $(1,1)$-tenzorsko polje $\tilde{J}$ na $\tilde{\mathcal{U}}$ sa

$$\tilde{J}_{\tilde{p}}\left(\tilde{X}(\tilde{p})\right) = \pi_*|_p \varphi_p \left(\tilde{X}^*(p)\right), \tag{76}$$

gde je $\pi(p) = \tilde{p}$, a $\tilde{X}^*(p)$ je *lift* of $\tilde{X}$ u odnosu na η (u tački p), tj., (jedinstveni) vektor $\tilde{X}^*$ tangentan na $\mathcal{U}$ u p takav da $\eta(\tilde{X}^*) = 0$ i $\pi_*|_p(\tilde{X}^*) = \tilde{X}$. Primetimo da je invarijantnost (75) za η i φ ekvivalentna činjenicama

$$\begin{aligned} \eta\left(\tilde{X}^*(p)\right) &= \eta\left(\tilde{X}^*(p')\right), \\ \pi_*\varphi\left(\tilde{X}^*(p)\right) &= \pi_*\varphi\left(\tilde{X}^*(p')\right), \end{aligned} \tag{77}$$

kadgod je $\pi(p) = \pi(p')$. (Videti npr. [47].) Dakle, iz invarijantnosti skoro kontaktne strukture sledi da je tenzorsko polje $\tilde{J}$ dobro definisano. Dalje, lako je pokazati da je $\tilde{J}^2 = -\tilde{I}$, gde je $\tilde{I}$ identična transformacija na tangentnom raslojenju $T\tilde{\mathcal{U}}$ bazne mnogostrukosti $\tilde{\mathcal{U}}$, pa $\tilde{\mathcal{U}}$ dopušta (prirodnu) skoro kompleksnu strukturu, zvanu *indukovana skoro kompleksna struktura.*

Dalje ćemo posmatrati strukturu skoro kompleksne bazne mnogostrukosti $(\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{J})$ u slučaju kada mnogostrukost M (a time i regularna podmnogostrukost $\mathcal{U}$) nosi jaču strukturu. Preciznije, pretpostavimo da je $\mathcal{U}$ (regularna) skoro kontaktna mnogostrukost, snabdevena invarijantnom strukturom (φ, ξ, η) i posmatrajmo Rimanovu metriku g na $\mathcal{U}$ koja je invarijantna pri stanjima ψ_t lokalnih tokova od ξ, (tj., $\mathcal{L}_\xi g = 0$ svuda na $\mathcal{U}$, što znači da je ξ Kilingovo vektorsko polje u odnosu na metriku g) i koja je pridružena datoj skoro kontaktnoj strukturi. Tada možemo definisati metriku G na $\tilde{\mathcal{U}}$ sa

$$G(\tilde{X}, \tilde{Y}) = g(\tilde{X}^*, \tilde{Y}^*) \tag{78}$$

za sva vektorska polja $\tilde{X}, \tilde{Y}$ tangentna na $\mathcal{U}$. Metriku G zovemo *indukovana metrika* na $\tilde{\mathcal{U}}$ i može se pokazati ([56]) da je $(\tilde{\mathcal{U}}, G, \tilde{J})$ skoro hermitska mnogostrukost. Primetimo da je, u ovom slučaju, projekcija $\pi : \mathcal{U} \to \tilde{\mathcal{U}}$ *Rimanova submersija.* (Dalji detalji o ovim submersijama mogu se naći u [62].)

Ako je $(\mathcal{U}, \varphi, \xi, \eta, g)$ (regularna) kontaktna metrička mnogostrukost, koristeći Teoremu 3.4., sledi da ako je kontaktna metrička struktura (φ, ξ, η, g) na $\mathcal{U}$ invarijantna, ona automatski mora da bude i K-kontaktna struktura. Obrnuto, ako je $\mathcal{U}$ (regularna) K-kontaktna mnogostrukost, njeni strukturni tenzori su sigurno invarijantni u odnosu na tok karakterističnog vektorskog polja ξ. Zbog toga ćemo nadalje posmatrati samo K-kontaktne metričke mnogostrukosti. U tom slučaju se može dokazati ([56]) da $\tilde{\mathcal{U}}$ sa skoro hermitskom strukturom $(G, \tilde{J})$ postaje skoro Kelerova mnogostrukost, tj., $d\tilde{\Omega} = 0$, pri čemu je $\tilde{\Omega}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = G(\tilde{X}, \tilde{J}\tilde{Y})$ *Kelerova forma* na $(\tilde{\mathcal{U}}, G, \tilde{J})$. Dokazi i detaljnija diskusija mogu se naći u [10], [55].

U [55] je pokazano da ako je (regularna i invarijantna) skoro kontaktna metrička struktura na $\mathcal{U}$ normalna, tada je indukovana struktura na $\tilde{\mathcal{U}}$ integrabilna, tj., $\tilde{\mathcal{U}}$ snabdeveno sa indukovanom strukturom $(G, \tilde{J})$ je kompleksna mnogostrukost. Takođe, možemo zaključiti da ako je $\mathcal{U}$ regularna Sasakijeva mnogostrukost, njeni strukturni tenzori su automatski invarijantni (jer je ξ Kilingovo vektorsko polje i jer zbog $N_3 = N_4 = 0$ sledi (75)). Dalje, skoro hermitska struktura $(G, \tilde{J})$ indukovana na baznoj mnogostrukosti $\tilde{\mathcal{U}}$ je integrabilna i skoro Kelerova, pa je $(\tilde{\mathcal{U}}, G, \tilde{J})$ Kelerova mnogostrukost.

Na kraju, navedimo odnos između Rimanovog tenzora krivine regularne Sasakijeve mnogostrukosti $\mathcal{U}$ i njenog baznog prostora $\tilde{\mathcal{U}}$. Neka je $(\mathcal{U}, \varphi, \xi, \eta, g)$ Sasakijev prostor i označimo sa $(\tilde{\mathcal{U}}, G, \tilde{J})$ njegov bazni prostor, snabdeven sa indukovanom Kelerovom strukturom. Dalje, označimo sa ∇ i $\tilde{\nabla}$ Levi-Čivita koneksiju za $(\mathcal{U}, g)$ i $(\tilde{\mathcal{U}}, G)$, redom. Tada važi sledeća relacija:

$$\left(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}\right)^* = \nabla_{\tilde{X}^*}\tilde{Y}^* - \eta(\nabla_{\tilde{X}^*}\tilde{Y}^*)\,\xi, \tag{79}$$

za sva vektorska polja $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ i $\tilde{Z}$ tangentna na $\tilde{\mathcal{U}}$. Koristeći relacije (75) i (79) lako se dobija ([55])

$$\begin{aligned}(\tilde{R}_{XY}Z)^* = {} & R_{\tilde{X}^*\tilde{Y}^*}\tilde{Z}^* + g(\varphi\tilde{X}^*, \tilde{Z}^*)\,\varphi\tilde{Y}^* \\ & - g(\varphi\tilde{Y}^*, \tilde{Z}^*)\,\varphi\tilde{X}^* + 2\,g(\varphi\tilde{X}^*, \tilde{Y}^*)\,\varphi\tilde{Z}^*,\end{aligned} \tag{80}$$

$$\tilde{\rho}(\tilde{X}, \tilde{Y})^* = \rho(\tilde{X}^*, \tilde{Y}^*) + 2\,g(\tilde{X}^*, \tilde{Y}^*), \tag{81}$$

$$\tilde{\tau}^* = \tau + 2n, \tag{82}$$

pri čemu su R, ρ, τ oznake za Rimanov tenzor krivine, Ričijev tenzor (tipa (0,2)) i skalarnu krivinu na $(\mathcal{U}, g)$, a $\tilde{R}$, $\tilde{\rho}$, $\tilde{\tau}$ su analogne oznake za $(\tilde{\mathcal{U}}, G)$. Dalje, važe i sledeće relacije

$$\left(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{R}\right)_{\tilde{Y}\tilde{Z}\tilde{V}\tilde{W}} \circ \pi = (\nabla_{\tilde{X}^*}R)_{\tilde{Y}^*\tilde{Z}^*\tilde{V}^*\tilde{W}^*}, \tag{83}$$

$$\left(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{\rho}\right)_{\tilde{Y}\tilde{Z}} \circ \pi = (\nabla_{\tilde{X}^*}\rho)_{\tilde{Y}^*\tilde{Z}^*}, \tag{84}$$

za $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}, \tilde{V}, \tilde{W} \in \mathcal{X}(\tilde{\mathcal{U}})$.

3.6. Sasakijeve prostorne forme

Neka je $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ Sasakijeva mnogostrukost. Sekcionu ravan u tangentnom prostoru M_m, $m \in M$ nazivamo *φ-sekcijom* ako sadrži ortonormiranu bazu oblika $\{X, \varphi X\}$, pri čemu je vektor $X \in M_m$ ortogonalan na ξ u m. Sekcionu krivinu φ-sekcije nazivamo pridruženom *φ-sekcionom krivinom*. Poznato je da φ-sekciona krivina potpuno određuje krivinu Sasakijeve mnogostrukosti ([3]).

Sasakijevu mnogostrukost sa konstantnom φ-sekcionom krivinom c nazivamo *Sasakijeva prostorna forma* i označavamo sa $M^{2n+1}(c)$. Njen tenzor krivine određen je relacijom:

$$(85)\qquad \begin{aligned} R_{XY}Z =& \frac{c+3}{4}\{g(X,Z)Y - g(Y,Z)X\} + \frac{c-1}{4}\{\eta(Y)\,\eta(Z)\,X \\ & - \eta(X)\,\eta(Z)Y - g(Z,\varphi Y)\,\varphi X + g(Z,\varphi X)\,\varphi Y \\ & -2\,g(X,\varphi Y)\,\varphi Z - g(X,Z)\,\eta(Y)\,\xi + g(Y,Z)\,\eta(X)\,\xi\}, \end{aligned}$$

za sve $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$. Primetimo da, ukoliko je φ-sekciona krivina (povezane) Sasakijeve mnogostrukosti dimenzije ≥ 5 u svakoj tački mnogostrukosti nezavisna od izbora φ-sekcije u tački, tada je konstantna i na celoj mnogostrukosti.

Sledeću karakterizaciju Sasakijevih mnogostrukosti konstantne φ-sekcione krivine dao je Tanno u radu [73]:

Teorema 3.7. *Povezana Sasakijeva mnogostrukost M dimenzije $\geqslant 5$ je Sasakijeva prostorna forma ako i samo ako je, za svaki horizontalan vektor X, $R_{X\varphi X}X$ kolinearno sa φX.*

Koristeći (75) i (80) vidimo da je bazna mnogostrukost Sasakijeve prostorne forme pri (lokalnoj) fibraciji $\pi : M \to \tilde{M}$ Kelerova mnogostrukost konstantne holomorfne sekcione krivine $c+3$, tj., važi

Teorema 3.8. ([59]) *Povezana Sasakijeva mnogostrukost ima konstantnu φ-sekcionu krivinu ako i samo ako je holomorfna sekciona krivina svake bazne mnogostrukosti konstantna.*

Dalje, primetimo da kada je $c = 1$, Sasakijeva mnogostrukost M^{2n+1} ima konstantnu sekcionu krivinu 1 i lokalno je izometrična jediničnoj sferi $S^{2n+1}(1)$. Konačno, navedimo da su Sasakijeve prostorne forme potpuno klasifikovane ([3], [72]) i da lokalno postoje tri različite klase u zavisnosti od znaka $c+3$:

I slučaj.

Posmatrajmo neparno-dimenzioni vektorski prostor $\mathbb{R}^{2n+1}$ kao diferencijabilnu mnogostrukost, snabdevenu sa standardnim koordinatnim sistemom $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, z)$. Jedan-forma η, definisana u odnosu na ove koordinate sa

$$\eta = \frac{1}{2}\Big(dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i\Big),$$

definiše kontaktnu strukturu na $\mathbb{R}^{2n+1}$. Skoro kontaktna metrička struktura pridružena ovoj kontaktnoj strukturi zadana je karakterističnim vektorskim poljem

$$\xi = 2\frac{\partial}{\partial z},$$

Rimanovom metrikom

$$g = \eta \otimes \eta + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(dx^i\right)^2 + \left(dy^i\right)^2\right),$$

i $(1,1)$-tenzorskim poljem φ čije su komponente u odnosu na standardnu bazu

$$\varphi\frac{\partial}{\partial x^i} = -\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \varphi\frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} + y^i\frac{\partial}{\partial z}, \quad \varphi\frac{\partial}{\partial z} = 0, \quad i = 1,\dots,n.$$

Lako se proverava da važi Teorema 3.3., pa je ova kontaktna metrička struktura normalna i $(\mathbb{R}^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ je Sasakijeva mnogostrukost. Takođe se može proveriti da je sa ovom metrikom $\mathbb{R}^{2n+1}$ Sasakijeva prostorna forma sa $c = -3$.([61])

II slučaj.

U radu [74], Y. Tashiro je dokazao da svaka C^∞ orijentabilna hiperpovrš skoro kompleksne mnogostrukosti ima skoro kontaktnu strukturu. Ovde ćemo iskoristiti taj rezultat da opišemo skoro kontaktnu (metričku) strukturu na jediničnoj sferi $S^{2n+1}(1)$ u $\mathbb{R}^{2n+2}$.

Prvo, posmatrajmo $\mathbb{R}^{2n+2}$ snabdeveno sa njegovom standardnom skoro hermitskom strukturom, tj., standardnom metrikom G i $(1,1)$-tenzorskim poljem J definisanim sa

$$JE_i = E_{i+n+1}, \quad JE_{i+n+1} = -E_i, \quad i = 1,\dots,n+1,$$

gde su $E_1,\dots,E_{2n+2}$ bazna vektorska polja standardnog koordinatnog sistema $(x^1,\dots,x^{2n})$ na $\mathbb{R}^{2n+2}$. Dalje, neka je $S^{2n+1}(1)$ jedinična sfera u $\mathbb{R}^{2n+2}$, definisana sa $\sum_{i=1}^{2n+2}(x^i)^2 = 1$, označimo sa $N = (x^1,\dots,x^{2n+2})$ jedinično spoljašnje normalno vektorsko polje na $S^{2n+1}(1)$ i sa g indukovanu Rimanovu metriku. Stavljajući $\xi = JN$, $\eta(X) = G(X,\xi)$, za proizvoljno vektorsko polje X tangentno na $S^{2n+1}(1)$ i

$$\varphi X = JX - G(JX,N)N = JX + \eta(X)N,$$

dobijamo skoro kontaktnu metričku strukturu (φ, ξ, η, g) na $S^{2n+1}(1)$, poznatu kao *standardna skoro kontaktna metrička struktura.* (Može se pokazati da je indukovana metrika g zaista pridružena skoro kontaktnoj strukturi.) Poznato je da je $S^{2n+1}(1)$ snabdevena standardnom (tj. indukovanom iz $\mathbb{R}^{2n+2}$) Rimanovom metrikom g prostor konstantne krivine 1 ([3]).

Dalje, posmatrajmo deformisanu strukturu prethodno uočene strukture (φ, ξ, η, g):

$$\eta^* = \alpha\eta, \quad \xi^* = \frac{1}{\alpha}\xi, \quad \varphi^* = \varphi,$$
$$g^* = \alpha g + \alpha(\alpha - 1)\eta \otimes \eta,$$

pri čemu je α pozitivna konstanta. S. Tanno je u radu [71] pokazao da je S^{2n+1} sa ovakvom strukturom Sasakijeva mnogostrukost sa konstantnom φ-sekcionom krivinom $c = \dfrac{4}{\alpha} - 3$.

III slučaj.

Neka je B^n prosto povezana ograničena oblast u $\mathbb{C}^n$ i označimo sa (J, G) Kelerovu strukturu na B sa konstantnom holomorfnom sekcionom krivinom $k < 0$. Dalje, posmatrajmo (trivijalno) linijsko raslojenje $B^n \times \mathbb{R}$ i neka je t standardni koordinatni sistem na $\mathbb{R}$. Kako je fundamentalna 2-forma Ω Kelerove strukture (J, G) zatvorena, to postoji realna analitička 1-forma ω, takva da važi $\Omega = d\omega$. Može se pokazati da jedan-forma

$$\eta = \pi^*\omega + dt,$$

zajedno sa Rimanovom metrikom

$$g = \pi^*G + \eta \otimes \eta$$

definiše Sasakijevu strukturu na $B^n \times \mathbb{R}$ sa krivinskom formom

$$d\eta = \pi^*\Omega.$$

Direktnim izračunavanjem ([59]) dobija se

$$K(\tilde{\pi}X, \tilde{\pi}Y) = K_*(X, Y) - 3\eta\Big(\nabla_{\tilde{\pi}X}\tilde{\pi}Y\Big)^2,$$

pri čemu je K oznaka za sekcionu krivinu mnogostrukosti $B^n \times \mathbb{R}$, K_* sekciona krivina za B^n, $\tilde{\pi}$ označava horizontalni lift, a $\{X, Y\}$ je ortonormirani par na B^n. Tada je

$$g\left(\nabla_{\tilde{\pi}X}\tilde{\pi}Y, \xi\right) = -g\left(\tilde{\pi}Y, \nabla_{\tilde{\pi}X}\xi\right) = g(\tilde{\pi}Y, \varphi\tilde{\pi}X),$$

pa kako je $\varphi\tilde{\pi}X = \tilde{\pi}JX$, to $B^n \times \mathbb{R}$ ima konstantnu φ-sekcionu krivinu $c = k - 3$ ([72]).

3.7. Simetrični i φ-simetrični Sasakijevi prostori

Poznato je da je lokalna simetrija, tj., $\nabla R = 0$, vrlo strog uslov za K-kontaktne mnogostrukosti. Zaista, dokazano je u [70], ([86]) da važi sledeća teorema:

Teorema 3.9. *Povezana lokalno simetrična K-kontaktna mnogostrukost ima konstantnu krivinu 1.*

Dakle, iz ove teoreme sledi da je svaka lokalno simetrična K-kontaktna mnogostrukost M^{2n+1} lokalno izometrična jediničnoj sferi $S^{2n+1}(1)$. U radu [60], M.Okumura je već bio dokazao sledeću teoremu:

Teorema 3.10. *Povezana, lokalno simetrična Sasakijeva mnogostrukost ima konstantnu krivinu 1.*

Ovo je iniciralo uvođenje nove klase tzv. *lokalno φ-simetričnih prostora.* Takahashi je u radu [69] definisao ove mnogostrukosti kao Sasakijeve mnogostrukosti koje zadovoljavaju uslov

$$\varphi^2(\nabla_V R)_{XY} Z = 0$$

za sve horizontalne vektore X, Y, Z, V.

Ova definicija je sasvim prirodna. Naime, koristeći (64), (72), (79) i (80), dobijamo

$$\left((\overline{\nabla}_V \overline{R})_{XY}\, Z\right)^* = -\varphi^2(\nabla_{V^*} R)_{X^* Y^*} Z^*,$$

za proizvoljne vektore X, Y, Z, V na $\mathcal{U}$.

Primetimo da postoji mnogo primera lokalno φ-simetričnih prostora. Specijalnu klasu primera čine Sasakijeve prostorne forme, iako postoje i mnogi drugi primeri, koji nemaju konstantnu φ- sekcionu krivinu. Razni primeri φ-simetričnih prostora se mogu naći u [69] i [83]. Nedavno su (globalno) φ-simetrične prostore klasifikovali O. Kowalski, S. Wegrzynowski i J. Jiménez ([44], [49]). Postoje četiri klase ovih prostora, od kojih dve sadrže sve Sasakijeve prostorne forme.

Dalje, u radu [69] T. Takahashi je okarakterisao φ-simetrične prostore na sledeći način:

Teorema 3.11. *Sasakijeva mnogostrukost je lokalno φ-simetrična ako i samo ako je svaka Kelerova mnogostrukost, koja je bazni prostor lokalnog raslojenja, lokalno izometrična hermitskom simetričnom prostoru.*

Takođe, D.E.Blair i L.Vanhecke su u radu [7] dokazali sledeću teoremu koja karakteriše φ-simetrične prostore.

Teorema 3.12. *Sasakijeva mnogostrukost M^{2n+1} je lokalno φ-simetrična ako i samo ako važi*

$$(\nabla_X R)_{X\,\varphi X\,X\,\varphi X} = 0$$

za sve horizontalne $X \in \mathcal{X}(M)$.

Na kraju, napomenimo da je T.Takahashi u radu [69] uveo definiciju φ-geodezijske simetrije i to iskoristio za jednu od karakterizacija φ-simetričnih prostora. Preciznije, lokalni difeomorfizam s_x Sasakijeve mnogostrukosti M, $x \in M$, je *φ-geodezijska simetrija* u x, ako je njen domen $\mathcal{U}$ takav da za svaku φ-geodezijsku liniju $\gamma = \gamma(t)$ takvu da $\gamma(0)$ leži u preseku $\mathcal{U}$ sa integralnom krivom od ξ kroz x, važi

$$s_x\gamma(t) = \gamma(-t)$$

za svako t.

Sada je lako dokazati (koristeći Teoremu 3.11.) ([69]) da važi sledeća teorema:

Teorema 3.13. *Neophodan i dovoljan uslov za Sasakijevu mnogostrukost da bude lokalno φ-simetričan prostor je da u svakoj tački dopušta φ-geodezijsku simetriju, koja je lokalni automorfizam.*

II JAKOBIJEVA VEKTORSKA POLJA

1. Osnovni pojmovi o Jakobijevim vektorskim poljima

Neka je (M,g) Rimanova mnogostrukost i pretpostavimo da je $\gamma : [a,b] \to M$ kriva na M. *Varijacija* krive γ je dvo-parametarsko preslikavanje

$$\Gamma : [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M : (s,t) \mapsto \Gamma(s,t)$$

takvo da je $\Gamma(s,0) = \gamma(s)$ za sve $s \in [a,b]$. Za datu konstantu u, kriva $\delta_u = \Gamma(u,t)$ je *transverzala*, a krive $\gamma_v(s) = \Gamma(s,v)$, za konstantno v, su *longitudinale*. Vektorsko polje V duž γ, definisano relacijom

$$V(s) = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,0)\,,$$

(tj., $V(s)$ je početni vektor brzine transverzale δ_s) je *varijaciono vektorsko polje* varijacije Γ i intuitivno je jasno da ovo vektorsko polje pokazuje, infinitezimalno, kakvo je ponašanje varijacije Γ u okolini krive γ.

Pretpostavimo da je γ geodezijska linija i da je Γ varijacija za γ takva da je svaka longitudinala γ_u za Γ geodezijska linija. Tada varijaciju Γ nazivamo *geodezijska varijacija* ili *jedno-parametarska familija geodezijskih linija*. Varijaciono vektorsko polje geodezijskih varijacija je usko povezano sa krivinom mnogostrukosti M. Zaista, može se pokazati ([19], [30]) da varijaciono vektorsko polje geodezijske varijacije Γ (geodezijske linije γ) zadovoljava tzv. *Jakobijevu diferencijalnu jednačinu*

$$V'' + R_{\gamma' V}\gamma' = 0\,, \tag{1}$$

pri čemu $'$ označava diferenciranje (duž γ) po s.

Vektorska polja duž geodezijskih linija, koja zadovoljavaju Jakobijevu diferencijalnu jednačinu (1) zovemo *Jakobijeva vektorska polja.* Jasno je da su sva varijaciona vektorska polja geodezijskih varijacija primeri Jakobijevih vektorskih polja. Obratno, svako Jakobijevo vektorsko polje Y duž geodezijske linije γ je varijaciono vektorsko polje neke geodezijske varijacije Γ od γ ([31]).

Neka je $\gamma : [a, b] \to \gamma(s)$ geodezijska linija u M i pretpostavimo da je V Jakobijevo vektorsko polje duž γ. Dalje, izaberimo ortonormiranu bazu $\{e_1, \dots, e_n\}$ tangentnog prostora $M_{\gamma(a)}$ i označimo sa $\{E_1, \dots, E_n\}$ polje baza duž γ, dobijeno paralelnim pomeranjem u odnosu na Levi-Civita koneksiju ∇. Tada možemo V predstaviti u odnosu na E_i, $i = 1, \dots, n$, sa

$$V(s) = \sum_{i=1}^{n} V_i(s) E_i(s)\,.$$

Kako su E_i paralelni duž γ, to je

$$V''(s) = \sum_{i=1}^{n} V_i''(s) E_i(s)\,.$$

Dalje, možemo videti da je

$$\begin{aligned} R_{\gamma'(s)V(s)}\gamma'(s) &= \sum_{i=1}^{n} V_i(s) R_{\gamma'(s)E_i(s)}\gamma'(s) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} V_i(s) R_{\gamma'(s)E_i(s)\gamma'(s)E_j(s)} E_j(s)\,. \end{aligned}$$

Kako $E_i(s)$, $i = 1, \dots, n$ formiraju ortonormiranu bazu tangentnog prostora $M_{\gamma(s)}$ u bilo kojoj tački $\gamma(s)$, Jakobijeva jednačina (1) je ekvivalentna sledećem sistemu diferencijalnih jednačina:

$$V_j''(s) + \sum_{i=1}^{n} R_{\gamma'(s)E_i(s)\gamma'(s)E_j(s)} V_i(s) = 0 \tag{2}$$

za $j = 1, \ldots, n$. Iz teorije o linearnim diferencijalnim jednačinama drugog reda znamo da početni uslovi $V_j(0)$ i $V_j'(0)$, $j = 1, \ldots, n$ definišu (jedinstveno) rešenje sistema (2), tj., početni uslovi $V(0)$ i $V'(0)$ definišu jedinstveno Jakobijevo vektorsko polje duž γ.

Sledeća teorema određuje opšti oblik Jakobijevog vektorskog polja V duž geodezijske linije γ, koje ujedno zadovoljava i početni uslov $V(0) = 0$.

Teorema 1.1. *Neka je $\gamma : [0, a] \to M$ geodezijska linija na M. Tada je Jakobijevo vektorsko polje V duž γ sa početnim uslovom $V(0) = 0$ i $V'(0) = X$ dato sa*

$$V(s) = (d\exp_{\gamma(0)})_{s\gamma'(0)}(sX)$$

za svako $s \in [0, a]$.

Lako se može pokazati da važi i sledeća teorema i njena vrlo važna posledica. Više detalja o Jakobijevim vektorskim poljima može se naći u [30], [62].

Teorema 1.2. *Neka je V Jakobijevo vektorsko polje duž geodezijske linije γ. Tada je*

$$g(V(s), \gamma'(s)) = g(V'(0), \gamma'(0))s + g(V(0), \gamma'(0))$$

za sve vrednosti s.

Posledica. *Pretpostavimo da je V Jakobijevo vektorsko polje duž γ koje zadovoljava $V(0) = 0$ i takvo da je $V'(0)$ normalno na $\gamma'(0)$. Tada je V svuda normalno na γ'.*

2. Geometrija cevi i razvoj u red operatora oblika i Ričijevog operatora

Kako su Jakobijeva vektorska polja blisko povezana sa varijacijom geodezijskih linija, može se očekivati i njihova velika uloga u izučavanju geodezijskih sfera i cevi. Detalje o ovom načinu razmišljanja i eksplicitna izračunavanja mogu se naći u [5], [20], [22]-[29], [39], [77], [79], [80].

Takođe, kao i u slučaju geodezijskih sfera i normalnih okolina, Jakobijeva vektorska polja duž geodezijskih linija ortogonalnih na krivu σ imaju veliku ulogu u opisivanju nekih geometrijskih objekata pridruženih cevima i cevastim okolinama, čije izučavanje je tema ovog rada. Preciznije, neka je $p = \exp_{\sigma(t)}(su)$ (jedinstvena) geodezijska linija parametrizovana dužinom luka koja spaja $\sigma(t)$ i p i seče σ pod pravim uglom. Neka je $\{F_1, \ldots, F_n\}$ polje baza duž σ, takvo da je $F_1(t) = \dot{\sigma}(t)$ i $F_n(t) = \gamma'(0)$. Dalje, neka je $\{E_1, \ldots, E_n\}$ polje baza duž γ, dobijeno paralelnom translacijom $\{F_1, \ldots, F_n\}$ u odnosu na Levi-Čivita koneksiju ∇ i neka su $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ Jakobijeva vektorska polja duž γ, koja zadovoljavaju sledeće početne uslove

$$(3) \qquad \begin{cases} Y_1(0) = F_1(t), & Y_1'(0) = \left(\nabla_{\gamma'} \dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)(\sigma(t)), \\ Y_i(0) = 0, & Y_i'(0) = F_i(t), \qquad i = 2, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Lako se može pokazati da je veza između ovih Jakobijevih polja i baznih vektorskih polja $\frac{\partial}{\partial x_i}$ Fermijevog koordinatnog sistema (u odnosu na $\sigma(a)$ i $\{F_1, \ldots, F_n\}$), izražena sa:

$$(4) \qquad \begin{cases} Y_1(s) = \dfrac{\partial}{\partial x_1}(\gamma(s)), \\ Y_i(s) = s\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(s)), \qquad i = 2, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Pokažimo sada kako se početni uslov

$$Y_1'(0) = \left(\nabla_{\gamma'} \frac{\partial}{\partial x_1}\right)(\sigma(t))$$

može lepše izraziti. Primetimo prvo da je

$$\begin{aligned}\left(\nabla_{\gamma'}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)(\sigma(t)) &= \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}}\gamma'\right)(\sigma(t))\\ &= \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}}u\right)(\sigma(t))\\ &= \dot{u}(\sigma(t)) = \dot{F}_n(\sigma(t)).\end{aligned}$$

Kako je F_n paralelno u odnosu na $\nabla^\perp$, to važi

$$\begin{aligned}\dot{F}_n(t) &= \left(\nabla_{\dot{\sigma}}F_n\right)(\sigma(t))\\ &= \left(\nabla^\perp_{\dot{\sigma}}F_n\right)(\sigma(t)) + g(\dot{F}_n(t),\dot{\sigma}(t))\dot{\sigma}(t)\\ &= g(\dot{F}_n(t),\dot{\sigma}(t))\dot{\sigma}(t),\end{aligned} \tag{5}$$

i takođe je

$$g(F_n,\dot{\sigma}) = 0 \tag{6}$$

svuda duž σ. Diferenciranjem relacije (6) dobijamo

$$g(\dot{F}_n,\dot{\sigma}) + g(F_n,\ddot{\sigma}) = 0\,. \tag{7}$$

Koristeći relacije (5) i (7) sledi

$$\dot{F}_n = -g(F_n,\ddot{\sigma})\dot{\sigma}\,, \tag{8}$$

ili, ekvivalentno,

$$\dot{F}_n = -\kappa_u\dot{\sigma}\,, \tag{9}$$

pri čemu je $\kappa_u = g(u,\ddot{\sigma}(t))$ *(srednja) krivina* krive σ u odnosu na u. Zamenom (9) u (3) dobijamo alternativan izraz za početni uslov.

Primetimo da je moguće identifikovati sve prostore $\{\gamma'(t)\}^\perp$ sa $n-1$-dimenzionim vektorskim prostorom $V = \{\gamma'(0)\}^\perp$, koristeći paralelnu translaciju duž γ u odnosu na Levi-Čivita koneksiju ∇. U narednom tekstu ćemo često koristiti ovu identifikaciju bez eksplicitnog naglašavanja. Sada možemo definisati funkciju koja svakom s dodeljuje endomorfizam, tj., $B : s \mapsto B(s)$ (tj., preslikavanje $[0, r] \subset \mathbb{R} \to GL(V)$), relacijom

$$Y_i(s) = (B\,E_i)(s)\,, \quad i = 1, \dots, n-1\,. \tag{10}$$

Lako se proverava da za svako $s \in [0, r]$ endomorfizam $B(s)$ zadovoljava Jakobijevu jednačinu

$$B'' + R \circ B = 0\,, \tag{11}$$

pri čemu je R funkcija čije su vrednosti endomorfizmi, tj., $t \mapsto R(t) = R_{\gamma'(t)}.\gamma'(t)$, definisana sa $R(t)X = R_{\gamma'(t)X}\gamma'(t)$ za sve $X \in \{\gamma'(t)\}^{\perp}$. Koristeći (3), dobijamo sledeće početne uslove za B:

$$B(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad B'(0) = \begin{pmatrix} -\kappa_u & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\,. \tag{12}$$

Snabdeveni ovim formulama, možemo izučavati geometriju cevastih okolina duž krive σ, izražavajući komponente metričkog tenzora g, zapreminskog elementa θ_σ, operatora oblika S^σ, srednje krivine h_σ i.t.d. Koristeći Jakobijevu diferencijalnu jednačinu (11) i početne uslove (12), možemo naći razvoje u red gore pomenutih funkcija. Ove formule ćemo direktno koristiti u dokazima teorema u trećoj i četvrtoj glavi i time još jednom pokazati kako su razvoji u red vrlo moćan aparat u izučavanju nekih problema u cevastim okolinama. Više detalja o ovoj tehnici može se naći u radu [79].

Spoljašnja geometrija cevi određena je njenim operatorom oblika. Da bismo odredili razvoj u red ovog operatora, primetimo prvo da je $\frac{\partial}{\partial r}$ jedinični normalni vektor cevi $\mathcal{P}_\sigma(r)$ u tački $p = \exp_{\sigma(t)}(rv)$. Tada je *operator oblika* S^σ cevi $\mathcal{P}_\sigma(r)$ u tački p definisan sa

$$(S^\sigma X)(p) = \left(\nabla_X \frac{\partial}{\partial r}\right)(p) \tag{13}$$

za svaki vektor X tangentan na $\mathcal{P}_\sigma(r)$ u tački p. Kako koristeći Teoremu 1.2 sledi da Jakobijeva vektorska polja Y_i, $i = 1, \dots, n-1$ koja zadovoljavaju početne uslove (3), formiraju bazu prostora $\{\gamma'(t)\}^{\perp}$, a time i tangentnog prostora cevi $\mathcal{P}_\sigma(r)$ u tački p, dovoljno je izračunati

$$S^\sigma(p)Y_i \quad i = 1, \dots, n-1\,.$$

Primetimo prvo da važi

$$S^\sigma(p)Y_i = \left(\nabla_{Y_i}\frac{\partial}{\partial r}\right)(p) = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}Y_i\right)(p) = Y_i'(r)$$

za $i = 1, \ldots, n-1$. Dalje, iz (10) sledi da je

$$S^\sigma(p)B(r) = B'(r)\,,$$

pa operator oblika $S^\sigma(p)$ možemo izraziti na sledeći način

$$S^\sigma(p) = \left(B'B^{-1}\right)(r)\,. \tag{14}$$

Koristeći relaciju (11) i početne uslove (12), možemo izračunati razvoj u red za B po dužini luka s duž geodezijske linije γ. Dalje, uz pomoć relacije (14), dobijamo razvoj u red komponenti operatora oblika $S^\sigma_{\alpha\beta}(p) = g(S^\sigma F_\alpha, F_\beta)(p)$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, n-1$. Kako ćemo u iskazima teorema u trećoj i četvrtoj glavi imati samo slučajeve kada je σ geodezijska linija, navešćemo samo ovaj slučaj. (Opštiji slučaj je obrađen u disertaciji [32].) Dobro je poznato da je $\kappa_u = 0$ za sve $u \in \sigma(t)^\perp$ i sve $t \in [a, b]$, kada je σ geodezijska linija, pa je tada

$$\begin{cases} S^\sigma_{11}(p) = -r\,R_{1v1v}(m) - \dfrac{r^2}{2}\nabla_v R_{1v1v}(m) + O(r^3)\,, \\ S^\sigma_{1\alpha}(p) = -\dfrac{r}{2}\,R_{1v\alpha v}(m) - \dfrac{r^2}{3}\nabla_v R_{1v\alpha v}(m) + O(r^3)\,, \\ S^\sigma_{\alpha\beta}(p) = \dfrac{1}{r}\,\delta_{\alpha\beta} - \dfrac{r}{3}R_{\alpha v\beta v}(m) - \dfrac{r^2}{4}\nabla_v R_{\alpha v\beta v}(m) + O(r^3)\,, \end{cases} \tag{15}$$

pri čemu α, $\beta = 1, \ldots, n{-}1$ i R označava Rimanov tenzor krivine ambijentnog prostora M. Ovde su uvedene oznake $R_{\alpha v\beta v}(m) = R_{F_\alpha(t)vF_\beta(t)v}(\sigma(t))$ i $\nabla_v R_{\alpha v\beta v}(m) = (\nabla_v R)_{F_\alpha(t)vF_\beta(t)v}(\sigma(t))$ za α, $\beta = 1, \ldots, n-1$.

Dalje, *Ričijev operator* Q^σ cevi $P_\sigma(r)$ sadrži mnogo informacija o unutrašnjoj geometriji cevi $P_\sigma(r)$. Njegov razvoj u red može se dobiti korišćenjem metode Jakobijevih vektorskih polja i Gausove jednačine. Ovo je urađeno u radu [32] i mi ćemo koristiti formule za komponente *Ričijevog tenzora* ρ^σ (tipa

(0,2)) geodezijske cevi $P_\sigma(r)$:

$$
\begin{aligned}
\rho^\sigma_{11}(p) = {} & \Big(\rho_{11} - (n-1)\, R_{1v1v}\Big)(m) + r\, \Big(\nabla_v \rho_{11} - \frac{n}{2}\, \nabla_v R_{1v1v}\Big)\,(m) \\
& + r^2 \Big(\frac{1}{2}\, \nabla^2_{vv}\rho_{11} - \frac{n+1}{6}\, \nabla^2_{vv}\, R_{1v1v} + \frac{1}{3}\, R_{1v1v}\, \rho_{vv} \\
& - \frac{n-1}{3}\, R^2_{1v1v} - \frac{n+1}{12} \sum_{\lambda=3}^{n} R^2_{1v\lambda v}\Big)(m) + O(r^3)\,, \\
\rho^\sigma_{1\alpha}(p) = {} & \Big(\rho_{1\alpha} - \frac{n-1}{2}\, R_{1v\alpha v}\Big)(m) + r\, \Big(\nabla_v \rho_{1\alpha} - \frac{n}{3}\, \nabla_v R_{1v\alpha v}\Big)\,(m) \\
& + r^2 \Big(\frac{1}{2}\, \nabla^2_{vv}\rho_{1\alpha} - \frac{n+1}{8}\, \nabla^2_{vv}\, R_{1v\alpha v} + \frac{1}{6}\, R_{1v\alpha v}\, \rho_{vv} \\
& - \frac{3n-5}{24}\, R^2_{1v1v} R_{1v\alpha v} - \frac{n+1}{24} \sum_{\lambda=3}^{n} R_{1v\lambda v} R_{\alpha v\lambda v}\Big)(m) + O(r^3)\,, \\
\rho^\sigma_{\alpha\beta}(p) = {} & \frac{n-3}{r^2}\delta_{\alpha\beta} + \Big(\rho_{\alpha\beta} - \frac{n-1}{3}\, R_{\alpha v\beta v} - \frac{1}{3}\rho_{vv}\delta_{\alpha\beta} - \frac{2}{3} R_{1v1v}\delta_{\alpha\beta}\Big)\,(m) \\
& + r\, \Big(\nabla_v \rho_{\alpha\beta} - \frac{n}{4}\, \nabla_v R_{\alpha v\beta v} - \frac{1}{4}\nabla_v \rho_{vv}\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\nabla_v R_{1v1v}\delta_{\alpha\beta}\Big)\,(m) \\
& + r^2 \Big(\frac{1}{2}\, \nabla^2_{vv}\rho_{\alpha\beta} - \frac{n+1}{10}\, \nabla^2_{vv}\, R_{\alpha v\beta v} + \frac{1}{9}\, R_{\alpha v\beta v}\, \rho_{vv} + \frac{2}{9} R_{1v1v} R_{\alpha v\beta v} \\
& - \frac{n-1}{20}\, R_{1v\alpha v} R_{1v\beta v} - \frac{n+1}{45} \sum_{\gamma=3}^{n} R_{\alpha v\gamma v} R_{\beta v\gamma v} - \frac{1}{10}\nabla^2_{vv}\rho_{vv}\delta_{\alpha\beta} \\
& - \frac{1}{15}\nabla^2_{vv} R_{1v1v}\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} R^2_{1v1v}\delta_{\alpha\beta} - \frac{2}{15} \sum_{\gamma=3}^{n} R^2_{1v\gamma v}\delta_{\alpha\beta} \\
& - \frac{1}{45} \sum_{\gamma,\mu=3,}^{n} R^2_{\gamma v\mu v}\delta_{\alpha\beta}\Big)(m) + O(r^3)\,,
\end{aligned}
$$

(16)

pri čemu $\alpha, \beta = 1, \ldots, n-1$ i ρ označava Ričijev tenzor za M.

3. Jakobijeva vektorska polja i operator oblika cevi duž φ-geodezijskih linija na Sasakijevim prostornim formama

U ovom poglavlju ćemo posmatrati Sasakijeve prostorne forme i Jakobijeva polja na ovim mnogostrukostima. Jakobijeva diferencijalna jednačina koja se pojavljuje u ovom slučaju je relativno jednostavnog oblika i njenim rešavanjem (uz specijalne početne uslove) dolazimo do izraza za Jakobijeva polja, koje zatim koristimo za izračunavanje matrice operatora oblika cevi duž φ-geodezijskih linija na ovim mnogostrukostima. Neki od ovih rezultata su takođe navedeni i u radovima [27] i [28].

Razlikovaćemo tri slučaja, u zavisnosti od položaja tačke $p = \exp_{\sigma(t)}(rv)$, $v \in \sigma(t)^{\perp}$, $\| v \| = 1$ na cevi $P_\sigma(r)$ poluprečnika r duž φ-geodezijske linije σ.

Slična posmatranja opisana su u radovima :

- [5], gde su Jakobijeva polja iskorišćena za izračunavanje matrice operatora oblika geodezijskih sfera na Sasakijevim prostornim formama;

- [12], gde su Jakobijeva polja iskorišćena pri izučavanju lokalnih simetrija u odnosu na φ-geodezijske linije na Sasakijevim prostornim formama;

- [4], gde je posmatrana druga fundamentalna forma cevi duž geodezijskih linija na Sasakijevim prostornim formama.

Napišimo prvo eksplicitno Jakobijevu jednačinu u slučaju kada je mnogostrukost Sasakijeva prostorna forma. Dakle, neka je m tačka na Sasakijevoj mnogostrukosti M^{2n+1} sa strukturnim tenzorima (φ, ξ, η, g) i konstantne φ-sekcione krivine c. Dalje, neka je γ φ-geodezijska linija parametrizovana dužinom luka kroz $m = \gamma(0)$ sa početnim vektorom brzine $\gamma'(0) = v$. Često ćemo, zbog jednostavnijeg zapisivanja, označavati vektor brzine $\gamma'(s)$ u bilo kojoj tački $\gamma(s)$ sa v. Tada je, (kako je M Sasakijeva prostorna forma, a v horizontalan vektor), koristeći relaciju (85) iz prve glave, Rimanov tenzor krivine dat relacijom

$$(17)\qquad R_{vX}v = \frac{c+3}{4}\Big(X - g(v,X)v\Big) - \frac{c-1}{4}\Big(\eta(X)\xi + 3g(v,\varphi X)\varphi v\Big),$$

dok Jakobijeva jednačina

$$\nabla_v \nabla_v X + R_{vX} v = 0 \tag{18}$$

postaje,

$$\nabla_V \nabla_V X + \frac{c+3}{4}\Big(X - g(V,X)V\Big) - \frac{c-1}{4}\Big(\eta(X)\xi + 3g(V,\varphi X)\varphi V\Big) = 0\,. \tag{19}$$

Dalje ćemo izučavati rešenja Jakobijeve jednačine (19) u slučajevima:

(A) $p = \exp_{\sigma(t)}(rv)$, $v(\sigma(t)) = \varphi u(\sigma(t))$;

(B) $p = \exp_{\sigma(t)}(rv)$, $v(\sigma(t)) \perp \varphi u(\sigma(t))$, $v(\sigma(t)) \perp u(\sigma(t))$, $v \perp \xi$;

(C) $p = \exp_{\sigma(t)}(rv)$, $v(\sigma(t)) \perp u(\sigma(t))$, $g(\varphi v(\sigma(t)), u(\sigma(t))) = a$, $v \perp \xi$.

Slučaj A:

Izaberimo sada ortonormiranu bazu $\{e_1, \ldots, e_{2n+1}\}$ tangentnog prostora M_m u tački $m = \sigma(t)$, tako da je $e_1 = v$, $e_2 = -\varphi v$ i $e_3 = \xi$. Dalje, neka je $\{E_1, \ldots, E_{2n+1}\}$ baza dobijena paralelnim pomeranjem baze $\{e_1, \ldots, e_{2n+1}\}$ duž γ. Tada lako dobijamo duž γ, koristeći činjenicu da je $\mathrm{span}\{\xi\,, \varphi v\}$ paralelno duž γ:

$$\begin{cases} E_2(s) = \sin s\, \xi(s) - \cos s\, \varphi v(s)\,, \\ E_3(s) = \cos s\, \xi(s) + \sin s\, \varphi v(s)\,, \end{cases} \tag{20}$$

pri čemu s označava dužinu luka duž γ, počevši od tačke m. Sada, koristeći relacije (17) i (20), dobijamo da važi

$$\begin{cases} R_{vE_2} v = (\sin^2 s + c\cos^2 s)\, E_2 + (1-c)\sin s\cos s\, E_3\,, \\ R_{vE_3} v = (1-c)\sin s\cos s\, E_2 + (\cos^2 s + c\sin^2 s)\, E_3\,, \\ R_{vE_a} v = \dfrac{c+3}{4}\, E_a\,, \quad a = 4, \ldots, 2n+1\,. \end{cases} \tag{21}$$

Proizvoljno Jakobijevo vektorsko polje X normalno na φ-geodezijsku liniju γ može biti predstavljeno u odnosu na polje baza $E_1, \ldots, E_{2n+1}$ kao

$$X(s) = f_2(s)\, E_2(s) + f_3(s) E_3(s) + \sum_{a=4}^{2n+1} f_a\, E_a\,. \tag{22}$$

Koristeći relacije (21) i (22), iz Jakobijeve diferencijalne jednačine (19), dobijamo sledeći sistem diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} f_2''(s) + f_3(s)\,(1-c)\sin s\cos s + f_2(s)\,(\sin^2 s + c\cos^2 s) &= 0\,, \\ f_3''(s) + f_3(s)\,(\cos^2 s + c\sin^2 s) + f_2(s)\,(1-c)\sin s\cos s &= 0\,, \end{aligned} \tag{23}$$

$$f_a''(s) + f_a(s)\frac{c+3}{4} = 0\,, \quad a = 4,\dots,2n+1\,. \tag{24}$$

Ove jednačine možemo eksplicitno rešiti, uzimajući u obzir da će rešenja zavisiti od znaka $c+3$. Dakle, posmatrajmo smenu

$$\begin{aligned} z_2(s) &= \sin s\, f_2(s) + \cos s\, f_3(s)\,, \\ z_3(s) &= -\cos s\, f_2(s) + \sin s\, f_3(s)\,. \end{aligned} \tag{25}$$

Tada jednačine (23) postaju

$$\begin{aligned} z_2''(s) + 2\,z_3(s) &= 0\,, \\ z_3''(s) - 2\,z_2(s) + (c-1)\,z_3(s) &= 0\,. \end{aligned} \tag{26}$$

Dalje, stavimo $w = z_3'$. Diferenciranje druge jednaǐne u (26) daje

$$\begin{aligned} w''(s) + (c+3)\,w(s) &= 0\,, \\ z_2''(s) + 2\,w(s) &= 0\,. \end{aligned} \tag{27}$$

Sada smo dobili sistem diferencijalnih jednačina koji je lako rešiti. Konačno, koristeći standardna rešenja za $2n-2$ jednačine (24), dobijamo kompletna rešenja za sva tri slučaja.

Prvi slučaj: $\mathbf{c+3=0}$

Ovde je

$$\begin{aligned} f_2(s) &= -\beta\cos s + \gamma\sin s\,, \\ f_3(s) &= \beta\sin s + \gamma\cos s\,, \\ f_a(s) &= A_a s + B_a\,, \quad a = 4,\dots,2n+1\,, \end{aligned}$$

pri čemu je $\beta = \frac{1}{2}As^2 + Bs + C$, $\gamma = -\frac{1}{3}As^3 - Bs^2 + \frac{1}{2}(A-4C)s + D$ i A, B, C, D, A_a, B_a su konstante duž γ.

Drugi slučaj: $\mathbf{c+3>0}$

U ovom slučaju, stavljajući $k = \sqrt{c+3}$, dobijamo

$$f_2(s) = -\hat{\beta} \cos s + \hat{\gamma} \sin s\,,$$
$$f_3(s) = \hat{\beta} \sin s + \hat{\gamma} \cos s\,,$$
$$f_a(s) = \hat{A}_a s + \hat{B}_a\,, \quad a = 4, \dots, 2n+1\,,$$

pri čemu je $\hat{\beta} = \frac{1}{k}(A \sin ks - B \cos ks) + C$, $\hat{\gamma} = \frac{2}{k^2}(A \cos ks + B \sin ks) + \frac{k^2-4}{2} C s + D$ i $A, B, C, D, \hat{A}_a, \hat{B}_a$ su konstante duž γ.

Treći slučaj: $\mathbf{c + 3 < 0}$

Ovog puta stavimo $k = \sqrt{-c-3}$. Ponavljajući isti račun, dobijamo

$$f_2(s) = -\hat{\hat{\beta}} \cos s + \hat{\hat{\gamma}} \sin s\,,$$
$$f_3(s) = \hat{\hat{\beta}} \sin s + \hat{\hat{\gamma}} \cos s\,,$$
$$f_a(s) = \hat{\hat{A}}_a s + \hat{\hat{B}}_a\,, \quad a = 4, \dots, 2n+1\,,$$

pri čemu je $\hat{\hat{\beta}} = \frac{1}{k}(A \sinh ks + B \cosh ks) + C$, $\hat{\hat{\gamma}} = -\frac{2}{k^2}(A \cosh ks + B \sinh ks) - \frac{k^2+4}{2} C s + D$ i $A, B, C, D, \hat{\hat{A}}_a, \hat{\hat{B}}_a$ su ponovo konstante duž γ.

Da bismo dokazali da su specijalni uslovi karakterizacije u teoremama u trećoj i četvrtoj glavi neophodni, biće nam potrebna dva specijalna sistema Jakobijevih vektorskih polja duž geodezijske linije γ, koja zadovoljavaju sledeće početne uslove:

(28) $\quad X_2(0) = E_2(0)\,, \quad X_2'(0) = 0\,,$

(29) $\quad X_i(0) = 0\,, \quad X_i'(0) = E_i(0)\,, \quad i = 3, \dots, 2n+1.$

Zato ćemo izračunati ova specijalna Jakobijeva polja u sva tri prethodno opisana slučaja.

Izračunajmo prvo Jakobijeva vektorska polja $X_2(s)$ duž γ sa početnim uslovima (28) i za specijalnu ortonormiranu bazu $\{E_1(s), \dots, E_{2n+1}(s)\}$, prethodno definisanu. Iz gornjih formula dobijamo

$$X_2(s) = (-\rho \sin s + \lambda \cos s)\, E_2(s) - (\lambda \sin s + \rho \cos s)\, E_3(s)\,,$$

pri čemu su funkcije λ i ρ zadane tablicom:

	$c+3<0$	$c+3=0$	$c+3>0$
λ	$\frac{1}{k^2}\left\{(k^2+2)\cosh ks - 2\right\}$	$1+s^2$	$\frac{1}{k^2}\left\{(k^2-2)\cos ks + 2\right\}$
ρ	$-\frac{2}{k^3}(k^2+2)\sinh ks + (1+\frac{4}{k^2})s$	$-\frac{2}{3}s^3 - s$	$-\frac{2}{k^3}(k^2-2)\sin ks + (1-\frac{4}{k^2}$

Posmatrajmo dalje Jakobijeva vektorska polja $X_i(s)$, $i = 3,\ldots,2n{+}1$ duž γ, koja zadovoljavaju početne uslove (29). Iz prethodno izračunatih formula, dobijamo

$$X_3(s) = (\nu \sin s - \mu \cos s)\, E_2(s) + (\mu \sin s + \nu \cos s)\, E_3(s)\,,$$

pri čemu je

	$c+3<0$	$c+3=0$	$c+3>0$
μ	$\frac{2}{k^2}(\cosh ks - 1)$	s^2	$-\frac{2}{k^2}(\cos ks - 1)$
ν	$-\frac{4}{k^3}\sinh ks + \frac{1}{k^2}(k^2+4)\,s$	$-\frac{2}{3}s^3 + s$	$\frac{4}{k^3}\sin ks + \frac{1}{k^2}(k^2-4)\,s$,

i

	$c+3<0$	$c+3=0$	$c+3>0$
$X_i(s)$	$\frac{2}{k}\sinh \frac{k}{2}s\, E_a(s)$	$s\, E_a(s)$	$\frac{2}{k}\sin \frac{k}{2}s\, E_a(s)$

za $i = 4,\ldots,2n+1$.

Konačno, posmatrajmo cev $P_\sigma(r)$ poluprečnika r duž φ-geodezijske linije σ konačne dužine, smeštene u M, čiji je tangentni vektor horizontalan vektor u. Neka je γ geodezijska linija jedinične brzine koja seče σ pod pravim uglom u tački $m = \sigma(t)$ i čiji je tangentni vektor horizontalan vektor v, takav da je $v(m) = \varphi u(m)$. Dalje, neka je $\{E_1,\ldots,E_{2n+1}\}$ polje ortonormiranih baza definisano kao na početku ovog odeljka. Konačno, koristeći relacije (4) i (10)-(14) i izračunata Jakobijeva vektorska polja, napišimo eksplicitno matrični oblik operatora oblika $S^\sigma(p)$ (u specijalnim, prethodno definisanim tačkama p) dovoljno malih φ-geodezijskih cevi duž σ, poluprečnika r u nekoj cevastoj okolini $\mathcal{U}_\sigma$, u slučaju kada je ambijentni prostor M Sasakijeva prostorna forma. Baza u odnosu na koju ćemo napisati matricu operatora oblika je $\{\varphi v, \xi, E_4, \ldots, E_{2n+1}\}$.

$$S^\sigma(p) = \left[\begin{array}{cc|ccc} A(r) & B(r) & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ B(r) & C(r) & & & 0 \\ \hline 0 & & D(r) & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & 0 & & & D(r) \end{array}\right]. \tag{30}$$

Polja ove matrice su funkcije $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$, $D(r)$, koje zavise od znaka $c+3$, pri čemu se funkcija $D(r)$ pojavljuje $2n-2$ puta.

Prvi slučaj: $\quad \mathbf{c+3=0}$

$$A(r) = \frac{3}{3r+4r^3}, \qquad B(r) = \frac{3-4r^2}{3+4r^2},$$
$$C(r) = \frac{12r}{3+4r^2}, \qquad D(r) = \frac{1}{r};$$

Drugi slučaj: $\quad \mathbf{c+3>0}$

$$A(r) = \frac{1}{\omega}\, k^3 \cos kr,$$
$$B(r) = \frac{1}{\omega}\left[2(k^2-2)\sin kr - k(k^2-4) r \cos kr\right],$$
$$C(r) = -\frac{1}{\omega} k^2(k^2-4) r \sin kr,$$
$$D(r) = \frac{k}{2} \coth \frac{k}{2} r,$$

pri čemu je $\omega = k\,(k^2-4)\,r\, \cos kr + 4 \sin kr$;

Treći slučaj: $\quad \mathbf{c+3<0}$

$$A(r) = \frac{1}{\theta}\, k^3 \cosh kr,$$
$$B(r) = -\frac{1}{\theta}\left[2(k^2+2)\sinh kr - k(k^2+4) r \cosh kr\right],$$
$$C(r) = -\frac{1}{\theta} k^2(k^2+4) r \sinh kr,$$
$$D(r) = \frac{k}{2} \cot \frac{k}{2} r,$$

pri čemu je $\theta = -k\,(k^2+4)\,r\,\cosh kr + 4\,\sinh kr$.

Konačno, koristeći izraz za tenzor krivine Sasakijeve prostorne forme $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ i Gausovu jednačinu, dobijamo da Ričijev operator $Q^{\sigma}(p)$ cevi $P_{\sigma}(r)$ ima sličan oblik kao $S^{\sigma}(p)$ u (30), ali sa drugačijim funkcijama na odgovarajućim poljima.

Slučaj B:

Ovog puta, da bismo rešili jednačinu (19), izaberimo bazu $\{e_1, \dots, e_{2n+1}\}$ u m, prilagođenu novom položaju tačke p, tj., takvu da je: $e_1 = v$, $e_{2n-1} = u$, $e_{2n} = \xi$ i $e_{2n+1} = \varphi v$, (pri čemu je u horizontalan vektor normalan na v i φv) i označimo sa $\{E_1, \dots, E_{2n+1}\}$ ortonormiranu bazu duž γ dobijenu paralelnim pomeranjem vektora e_i duž γ. Kako, koristeći relacije (64) i (71) iz prve glave, sledi da je dvodimenziona ravan $\{\xi, \varphi v\}$ paralelna duž γ, dobijamo lako da duž γ važi:

$$\left\{\begin{aligned} E_{2n} &= \varphi v\,\sin s + \xi\,\cos s, \\ E_{2n+1} &= \varphi v\,\cos s - \xi\,\sin s, \end{aligned}\right. \tag{31}$$

pri čemu je s dužina luka duž γ, računajući od m. Sada, koristeći relacije (17) i (31), dobijamo da važi

$$\left\{\begin{aligned} R_{vE_a}v &= \frac{c+3}{4}\,E_a\,, \quad a = 2, \dots, 2n-1\,, \\ R_{vE_{2n}}v &= (\cos^2 s + c\sin^2 s)\,E_{2n} + \frac{c-1}{2}\,\sin 2s\,E_{2n+1}\,, \\ R_{vE_{2n+1}}v &= \frac{c-1}{2}\,\sin 2s\,E_{2n} + (\sin^2 s + c\,\cos^2 s)\,E_{2n+1}\,. \end{aligned}\right. \tag{32}$$

Dalje, iz naše konstrukcije polja ortonormiranih baza $\{E_1, \dots, E_{2n+1}\}$, lako se vidi da se bilo koje vektorsko polje X normalno na φ-geodezijsku liniju γ može napisati u obliku

$$X = \sum_{a=2}^{2n-2} l_a\,E_a + l_{2n-1}\,E_{2n-1} + l_{2n}E_{2n} + l_{2n+1}\,E_{2n+1}\,. \tag{33}$$

Odavde lako dobijamo da je jednačina (19), u ovom slučaju, ekvivalentna sledećem sistemu diferencijalnih jednačina:

$$l_a'' + \frac{c+3}{4}\,l_a = 0\,, \quad a = 2, \dots, 2n-1\,, \tag{34}$$

$$\left\{\begin{aligned} l_{2n}'' + l_{2n} + (c-1)\sin s\,(l_{2n}\sin s + l_{2n+1}\cos s) &= 0\,, \\ l_{2n+1}'' + l_{2n+1} + (c-1)\cos s\,(l_{2n}\sin s + l_{2n+1}\cos s) &= 0\,. \end{aligned}\right. \tag{35}$$

Ove jednačine se mogu eksplicitno rešiti, imajući u vidu da rešenja zavise od znaka $c+3$. Dakle, posmatrajmo smenu

$$\begin{aligned} z_{2n}(s) &= \sin s\, l_{2n}(s) + \cos s\, l_{2n+1}(s)\,, \\ z_{2n+1}(s) &= \cos s\, l_{2n}(s) - \sin s\, l_{2n+1}(s)\,. \end{aligned} \tag{36}$$

Tada jednačine (35) postaju

$$\begin{aligned} z''_{2n+1}(s) + 2\, z_{2n}(s) &= 0\,, \\ z''_{2n}(s) - 2\, z_{2n+1}(s) + (c-1)\, z_{2n}(s) &= 0\,. \end{aligned} \tag{37}$$

Dalje, stavimo $w = z'_{2n}$. Diferenciranjem druge jednačine u (37) dobijamo

$$\begin{aligned} w''(s) + (c+3)\, w(s) &= 0\,, \\ z''_{2n+1}(s) + 2\, w(s) &= 0\,. \end{aligned} \tag{38}$$

Na ovaj način smo došli do sistema diferencijalnih jednačina koji se lako može rešiti. Konačno, koristeći standardna rešenja $2n-2$ jednačine (34), dobijamo kompletna rešenja u sva tri slučaja.

Prvi slučaj: $\quad \mathbf{c+3=0}$

U ovom slučaju dobijamo da je

$$\begin{aligned} l_a(s) &= A_a s + B_a\,, \quad a = 2,\ldots,2n-1\,, \\ l_{2n}(s) &= \beta \sin s + \gamma \cos s\,, \\ l_{2n+1}(s) &= \beta \cos s - \gamma \sin s\,, \end{aligned}$$

pri čemu je $\beta = \frac{1}{2}As^2 + Bs + C$, $\gamma = -\frac{1}{3}As^3 - Bs^2 + \frac{1}{2}(A-4C)s + D$ i A, B, C, D, A_a, B_a su konstantc duž γ.

Drugi slučaj: $\quad \mathbf{c+3>0}$

U ovom slučaju, stavljajući $k = \sqrt{c+3}$, dobijamo

$$\begin{aligned} l_a(s) &= \hat{A}_a s + \hat{B}_a\,, \quad a = 2,\ldots,2n-1\,, \\ l_{2n}(s) &= \hat{\beta} \sin s + \hat{\gamma} \cos s\,, \\ l_{2n+1}(s) &= \hat{\beta} \cos s - \hat{\gamma} \sin s\,, \end{aligned}$$

pri čemu je $\hat{\beta} = \frac{1}{k}(A \sin ks - B \cos ks) + C$, $\hat{\gamma} = \frac{2}{k^2}(A \cos ks + B \sin ks) + \frac{k^2-4}{2} C s + D$ i $A, B, C, D, \hat{A}_a, \hat{B}_a$ su konstante duž γ.

Treći slučaj: $\quad c + 3 < 0$

Ovog puta stavimo $k = \sqrt{-c-3}$. Ponavljajući isti račun, dobijamo

$$\begin{aligned} l_a(s) &= \hat{\hat{A}}_a s + \hat{\hat{B}}_a , \quad a = 2, \dots, 2n-1 , \\ l_{2n}(s) &= \hat{\hat{\beta}} \sin s + \hat{\hat{\gamma}} \cos s , \\ l_{2n+1}(s) &= \hat{\hat{\beta}} \cos s - \hat{\hat{\gamma}} \sin s , \end{aligned}$$

pri čemu je $\hat{\hat{\beta}} = \frac{1}{k}(A \sinh ks + B \cosh ks) + C$, $\hat{\hat{\gamma}} = -\frac{2}{k^2}(A \cosh ks + B \sinh ks) - \frac{k^2+4}{2} C s + D$ i $A, B, C, D, \hat{\hat{A}}_a, \hat{\hat{B}}_a$ su konstante duž γ.

U daljem tekstu ćemo koristiti Jakobijeva vektorska polja duž φ-geodezijske linije γ, koja zadovoljavaju sledeće početne uslove :

$$\begin{array}{llll} (39) & X_i(0) = 0 , & X_i'(0) = e_i , & i = 2, \dots, 2n-2, 2n, 2n+1 , \\ (40) & X_{2n-1}(0) = u , & X_{2n-1}'(0) = 0 . & \end{array}$$

Dakle, izračunajmo ova Jakobijeva vektorska polja u tri gore opisana slučaja.

Izračunajmo prvo Jakobijeva vektorska polja $X_i(s)$, $i = 2, \dots, 2n-2$ duž γ sa početnim uslovima (40) i za specijalnu ortonormiranu bazu $\{E_1(s), \dots, E_{2n+1}(s)\}$ utvrđenu na početku ovog odeljka. Koristeći prethodno izračunate funkcije l_a, $a = 2, \dots 2n+1$, dobijamo

	$c+3<0$	$c+3=0$	$c+3>0$
$X_i(s)$	$\frac{2}{k} \sinh \frac{k}{2} s\, E_a(s)$	$s\, E_a(s)$	$\frac{2}{k} \sin \frac{k}{2} s\, E_a(s)$

za $i = 2, \dots, 2n-2$. Posmatrajmo dalje Jakobijevo vektorsko polje $X_{2n-1}(s)$ duž γ koje zadovoljava početne uslove (40). Iz prethodno dobijenih formula sledi

	$c+3<0$	$c+3=0$	$c+3>0$
$X_{2n-1}(s)$	$\cosh \frac{k}{2} s\, E_{2n-1}(s)$	$E_{2n-1}(s)$	$\cos \frac{k}{2} s\, E_{2n-1}(s)$.

Konačno, posmatrajmo Jakobijeva vektorska polja $X_{2n}(s)$ i $X_{2n+1}(s)$ duž γ, koja zadovoljavaju početne uslove (39). Ponovo koristeći prethodno izračunate funkcije l_a, $a = 2, \dots 2n+1$, dobijamo

$$X_{2n}(s) = (\rho \sin s + \lambda \cos s)\, E_{2n}(s) + (\rho \cos s - \lambda \sin s)\, E_{2n+1}(s)$$
$$X_{2n+1}(s) = (\nu \sin s - \rho \cos s)\, E_{2n}(s) + (\nu \cos s + \rho \sin s)\, E_{2n+1}(s)$$

pri čemu važi

	$c+3<0$	$c+3=0$	$c+3>0$
ρ	$\frac{2}{k^2}(\cosh ks - 1)$	s^2	$-\frac{2}{k^2}(\cos ks - 1)$
λ	$-\frac{4}{k^3}\sinh ks - \frac{c-1}{k^2}s$	$-\frac{2}{3}s^3 + s$	$\frac{4}{k^3}\sin ks + \frac{c-1}{k^2}s$
ν	$\frac{1}{k}\sinh ks$	s	$\frac{1}{k}\sin ks$.

Dalje, posmatrajmo cev $P_\sigma(r)$ poluprečnika r duž φ-geodezijske linije σ konačne dužine, smeštene u M čiji je tangentni vektor horizontalni vektor u. Neka je γ geodezijska linija jedinične brzine normalna na σ u $m = \sigma(t)$ i čiji je tangentni vektor horizontalan vektor v, takav da je $v(m) \perp u(m)$ i $v(m) \perp \varphi u(m)$. Dalje, neka je $\{E_1, \dots, E_{2n+1}\}$ polje ortonormiranih baza duž γ, definisano ranije. Napišimo sada eksplicitne formule za operator oblika S^σ u specijalnim tačkama $p = \exp_{\sigma(t)}(rv)$ dovoljno male cevi duž φ-geodezijske linije, pri čemu je ambijentni prostor M Sasakijeva prostorna forma. Pri izračunavanju ovih izraza, koristili smo relacije (4) i (10)-(14) i prethodno izračunata Jakobijeva vektorska polja. Konačno, dobijamo da se operator oblika S^σ može pretstaviti pomoću kvazi-dijagonalne matrice

$$(41) \qquad S^\sigma(p) = \begin{bmatrix} A(r) & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B(r) & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & C(r) & D(r) \\ 0 & \dots & 0 & 0 & D(r) & E(r) \end{bmatrix}$$

u odnosu na bazu $\{E_2, \dots, E_{2n-1}, \xi, \varphi v\}$. I u ovom slučaju su polja različite funkcije koje zavise od znaka $c+3$, a funkcija $A(r)$ se pojavljuje $2n-3$ puta.

Prvi slučaj: $\quad c + 3 = 0$

$$A(r) = \frac{1}{r}, \qquad B(r) = 0,$$

$$C(r) = \frac{3}{r(r^2+3)}, \qquad D(r) = -\frac{r^2}{r^2+3},$$

$$E(r) = \frac{4r^2+3}{r(r^2+3)};$$

Drugi slučaj: $\quad c + 3 > 0$

$$
\begin{aligned}
A(r) &= \frac{k}{2}\cot\frac{kr}{2}, \\
B(r) &= -\frac{k}{2}\tan\frac{kr}{2}, \\
C(r) &= \frac{k^3}{\omega}\sin kr, \\
D(r) &= -\frac{k^2-4}{\omega}\,(kr\sin kr + 2\cos kr - 2), \\
E(r) &= \frac{k}{\omega}\left(4\sin kr + kr(k^2-4)\cos kr\right);
\end{aligned}
$$

pri čemu je $\omega = k^3 r\sin kr - 4kr\sin kr - 8\cos kr + 8$;

Treći slučaj: $\quad c + 3 < 0$

$$
\begin{aligned}
A(r) &= -\frac{k}{2}\coth\frac{kr}{2}, \\
B(r) &= \frac{k}{2}\tanh\frac{kr}{2}, \\
C(r) &= -\frac{k^3}{\theta}\sinh kr, \\
D(r) &= \frac{k^2+4}{\theta}\,(kr\sinh kr - 2\cosh kr + 2), \\
E(r) &= \frac{k}{\theta}\left(4\sinh kr - kr(k^2+4)\cosh kr\right);
\end{aligned}
$$

pri čemu je $\theta = 8\cosh kr - k^3 r\sinh kr - 4kr\sinh kr - 8$.

I u ovom slučaju se lako može zaključiti da Ričijev operator $Q^\sigma(p)$ cevi $P_\sigma(r)$ ima sličan oblik kao i operator oblika $S^\sigma(p)$ (predstavljen matricom (41)), ali jasno, sa različitim vrednostima na odgovarajućim poljima.

Slučaj C:

Da bismo izračunali operator oblika $S^\sigma(p)$ cevi $P_\sigma(r)$ u tačkama $p = \exp_{\sigma(t)}(rv)$, pri čemu je $v(\sigma(t)) \perp u(\sigma(t))$, $g(\varphi v(\sigma(t)), u(\sigma(t))) = a$, $v \perp \xi$, izabraćemo specijalnu ortonormiranu bazu tangentnog prostora $M_{\sigma(t)}$ u tački $\sigma(t)$, tako da možemo da koristimo rešenja sistema (34) i (35). Dakle, neka je $\{e_1, \dots, e_{2n+1}\}$ ortonormirana baza tangentnog prostora $M_{\sigma(t)}$ u tački $\sigma(t) = m$, takva da je $e_1 = v(m)$, $e_{2n-1} = u(m)$, $e_{2n} = \xi(m)$, $e_{2n+1} = \frac{1}{b}(\varphi v(m) - a\,u(m))$, pri čemu je $a = g(\varphi v(m), u(m))$ i $a^2 + b^2 = 1$. Označimo, dalje, sa $\{E_1, \dots, E_{2n+1}\}$ polje ortonormiranih baza duž φ-geodezijske linije γ (definisane na početku ovog poglavlja), dobijeno paralelnim pomeranjem vektora e_i duž γ. Tada se bilo koje Jakobijevo vektorsko polje X normalno na φ-geodezijsku liniju γ može zapisati u obliku:

$$
\begin{aligned}
(42) \qquad X = \sum_{i=2}^{2n-2} g_i(t)\, E_i(t) \;+\; & g_{2n-1}(t)\, E_{2n-1}(t) + g_{2n}(t) E_{2n}(t) \\
& + g_{2n+1}(t)\, E_{2n+1}(t)\,,
\end{aligned}
$$

pri čemu je

$$
\begin{aligned}
g_i(t) &= l_i(t)\,, \quad i = 2, \dots, 2n-2, 2n\,, \\
g_{2n-1}(t) &= b\, l_{2n-1}(t) + a\, l_{2n+1}(t)\,, \\
g_{2n+1}(t) &= -a\, l_{2n-1}(t) + b\, l_{2n+1}(t)\,,
\end{aligned}
$$

a l_i, $i = 2, \dots, 2n+1$ su funkcije definisane relacijom (33). Koristeći izraze za l_i, $i = 2, \dots, 2n+1$ dobijene u slučaju B, mogu se izračunati Jakobijeva vektorska polja duž φ-geodezijske linije γ, koja zadovoljavaju sledeće početne uslove:

$$
\begin{aligned}
&(43) \qquad X_i(0) = 0\,, \qquad X_i'(0) = e_i\,, \quad i = 2, \dots, 2n-2\,, 2n\,, 2n+1\,, \\
&(44) \qquad X_{2n-1}(0) = u\,, \quad X_{2n-1}'(0) = 0\,.
\end{aligned}
$$

Analognim postupkom kao u slučajevima A i B i koristeći relacije (4) i (10)-(14), dobija se matrica operatora oblika S^σ cevi $P_\sigma(r)$ u odnosu na bazu

$$\{E_2, \ldots, bE_{2n-1} - aE_{2n+1}, \xi, \varphi v\}.$$

$$S^{\sigma}(p) = \begin{bmatrix} A(r) & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & B(r) & E(r) & F(r) \\ 0 & \ldots & 0 & E(r) & C(r) & G(r) \\ 0 & \ldots & 0 & F(r) & G(r) & D(r) \end{bmatrix} \tag{45}$$

U ovom slučaju, tačka p je na cevi $P_{\sigma}(r)$ duž φ-geodezijske linije σ čiji je tangentni vektor horizontalan vektor u, i to takva da je $p = \exp_{\sigma(t)}(rv)$, pri čemu je horizontalan vektor v tangentni vektor φ-geodezijske linije γ, takav da je $v(m) \perp u(m)$, $g(\varphi v(m), u(m)) = a$. I ovde su polja matrice različite funkcije koje zavise od znaka $c+3$ i redom imaju sledeće vrednosti:

Prvi slučaj: $\mathbf{c + 3 = 0}$

$$\begin{aligned}
A(r) &= \frac{1}{r}, \\
B(r) &= \frac{1}{r\theta}(4b^2r^2 + 3b^2 - 4r^2 - 3), \\
C(r) &= -\frac{3}{r\theta}, \\
D(r) &= \frac{1}{r\theta}(8b^2r^2 - 3b^2 - 12r^2), \\
E(r) &= -\frac{3ab}{\theta}, \\
F(r) &= -\frac{1}{r\theta}ab(2r^2 - 3), \\
G(r) &= \frac{1}{\theta}(-3b^2r^2 + 3b^2 + 4r^2 - 3);
\end{aligned}$$

pri čemu je $\theta = 3b^2r^2 - 4r^2 - 3$;

Drugi slučaj: $\quad c+3>0$

$$A(r) = k\cot kr\,,$$
$$B(r) = \frac{k}{2\theta}\left(-b^2\sin\frac{kr}{2}(\alpha\sin kr+8\beta)+2a^2\cos\frac{kr}{2}(\alpha\cos kr-4\sin kr)\right),$$
$$C(r) = -\frac{k^3}{2\theta}(2a^2\sin\frac{kr}{2}\cos kr+b^2\sin kr\cos\frac{kr}{2}),$$
$$D(r) = \frac{k}{\theta}(2a^2\alpha\sin\frac{kr}{2}\sin kr+b^2\cos\frac{kr}{2}(4\sin kr-\alpha\cos kr),$$
$$E(r) = \frac{2k^2ab\beta}{\theta};$$
$$F(r) = \frac{kab}{\theta}(4\sin kr-\alpha);$$
$$G(r) = \frac{1}{\theta}\Big(2a^2\sin\frac{kr}{2}(2(2-k^2)\sin kr-\alpha\cos kr) + b^2\cos\frac{kr}{2}(2(k^2-4)\beta-\alpha\sin kr)\Big);$$

pri čemu je $k=\sqrt{c+3}$, $\alpha = 4kr-k^3r$, $\beta=\cos kr-1$, $\theta = b^2\cos\frac{kr}{2}(\alpha\sin kr+ 8\beta)+2a^2\sin\frac{kr}{2}(\alpha\cos kr-4\sin kr)$;

Treći slučaj: $\quad c+3<0$

$$A(r) = k\coth kr\,,$$
$$B(r) = \frac{k}{2\theta}\left(-b^2\sinh\frac{kr}{2}(\alpha\sinh kr+8\beta)+2a^2\cosh\frac{kr}{2}(\alpha\cosh kr-4\sinh kr)\right),$$
$$C(r) = -\frac{k^3}{2\theta}(2a^2\sinh\frac{kr}{2}\cosh kr+b^2\sinh kr\cosh\frac{kr}{2}),$$
$$D(r) = \frac{k}{\theta}(2a^2\alpha\sinh\frac{kr}{2}\sinh kr+b^2\cosh\frac{kr}{2}(4\sinh kr-\alpha\cosh kr),$$
$$E(r) = \frac{2k^2ab\beta}{\theta};$$
$$F(r) = \frac{kab}{\theta}(4\sinh kr-\alpha);$$
$$G(r) = \frac{1}{\theta}\Big(2a^2\sinh\frac{kr}{2}(2(2-k^2)\sinh kr-\alpha\cosh kr) + b^2\cosh\frac{kr}{2}(2(k^2-4)\beta-\alpha\sinh kr)\Big);$$

pri čemu je $k = \sqrt{-c-3}$, $\alpha = 4kr - k^3 r$, $\beta = \cosh kr - 1$,
$\theta = b^2 \cosh \frac{kr}{2}(\alpha \sinh kr + 8\beta) + 2a^2 \sinh \frac{kr}{2}(\alpha \cosh kr - 4 \sinh kr)$.

Konačno, i u ovom slučaju se može zaključiti da Ričijev operator $Q^\sigma(p)$ cevi $P_\sigma(r)$ ima sličan oblik kao i operator oblika $S^\sigma(p)$ (predstavljen matricom (45)), ali jasno, sa različitim vrednostima na odgovarajućim poljima.

III KARAKTERIZACIJE LOKALNO HERMITSKI SIMETRIČNIH KELEROVIH MNOGOSTRUKOSTI I KOMPLEKSNIH PROSTORNIH FORMI

Ova glava je posvećena izučavanju problema u kolikoj meri osobine cevi duž geodezijskih linija na Kelerovoj mnogostrukosti utiču na geometriju ambijentnog prostora. Posmatrajući dejstvo operatora oblika i Ričijevog operatora na ovim cevima, daćemo neke nove karakterizacije izvesnih Kelerovih mnogostrukosti, preciznije, lokalno hermitski simetričnih Kelerovih mnogostrukosti i Kelerovih prostornih formi.

Dakle, neka je (M, g, J) n-dimenziona Kelerova mnogostrukost i neka je $P_\sigma(r)$ cev poluprečnika r duž geodezijske linije σ na M, tangentna na jedinični vektor u. Dalje, posmatrajmo specijalnu tačku $p = \exp_{\sigma(t)}(rv)$, $v \in \sigma(t)^\perp$, , $v(\sigma(t)) = Ju(\sigma(t))$ na $P_\sigma(r)$ i pretpostavimo da je $\gamma : s \mapsto \exp_{\sigma(t)}(sv)$ geodezijska linija jedinične brzine koja povezuje $\sigma(t)$ i p. Primetimo takođe da je duž γ $v = \gamma'(s) = \frac{\partial}{\partial s}$ i da je u $p = \exp_m(rv)$ ovaj vektor jedinični vektor normalan na $P_\sigma(r)$. Dokažimo prvo sledeću teoremu:

Teorema 1. *Neka je (M, g, J) Kelerova mnogostrukost dimenzije $n = \dim M \geq 4$. Tada je, uz gore navedene dogovore, M kompleksna prostorna forma ako i samo ako je, za svaku dovoljno malu geodezijsku cev $P_\sigma(r)$,*

$\left(J\frac{\partial}{\partial s}\right)(p)$ *sopstveni vektor operatora oblika* S^σ, *za svako* $m \in M$ *i sve geodezijske linije kroz* m.

Dokaz:

Prvo, neka je M mnogostrukost konstantne holomorfne sekcione krivine c. Tada se Jakobijeva jednačina može eksplicitno rešiti i koristeći relacije (4) i (10)-(14) iz druge glave, dobijamo da se operator oblika S^σ može pretstaviti pomoću sledeće matrice

$$S^\sigma(p) = \begin{bmatrix} A(r) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B(r) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B(r) \end{bmatrix} \tag{1}$$

u odnosu na bazu $\{E_1, \dots, E_{n-1}\}$ definisanu u drugoj glavi ovog rada. Eksplicitni izrazi za polja ove matrice su:

$$\begin{aligned} &A(r) = 0, && B(r) = \frac{1}{r}, && \text{for } c = 0; \\ &A(r) = -\sqrt{c}\tan\sqrt{c}r, && B(r) = \frac{\sqrt{c}}{2}\cot\frac{\sqrt{c}}{2}r, && \text{for } c > 0; \\ &A(r) = \sqrt{|c|}\tanh\sqrt{|c|}r, && B(r) = \frac{\sqrt{|c|}}{2}\coth\frac{\sqrt{|c|}}{2}r, && \text{for } c < 0. \end{aligned}$$

Dakle, odavde sledi da je $J\frac{\partial}{\partial s}$ sopstveni vektor operatora oblika S^σ.

Dokažimo sada i da je uslov teoreme dovoljan. Neka je (M, g, J) Kelerova mnogostrukost. Tada je $J\frac{\partial}{\partial s}$ paralelno duž γ i koristeći relaciju (15) iz druge glave, dobijamo da važi

$$\begin{aligned} S^\sigma(p)(Jv) = \frac{r}{2}\Big(R_{Ju\,u\,Ju\,u}u + R_{Ju\,u}Ju\Big)(m) + \frac{r^2}{6}\Big(&3(\nabla_{Ju}R)_{Ju\,u\,Ju\,u}u \\ &+2(\nabla_{Ju}R)_{Ju\,u}Ju\Big)(m) + O(r^3). \end{aligned} \tag{2}$$

Sada je $\left(J\frac{\partial}{\partial s}\right)(p)$ sopstveni vektor za operator oblika S^σ u p ako i samo ako je

$$g\left(S^\sigma\left(J\frac{\partial}{\partial s}\right)(p), x\right) = 0$$

za sve paralelne vektore x normalne na paralelnu ravan $\left\{\frac{\partial}{\partial s}, J\frac{\partial}{\partial s}\right\}$ duž γ. Koristeći relaciju (2), odavde sledi

$$R_{Ju\,u\,Ju\,x}(m) = 0 \tag{3}$$

za sve $x \in M_m$, normalne na $\{v, Jv\}$ u m. Dakle, iz pretpostavke sledi da $R_{Ju\,u}Ju$ mora biti proporcionalno sa u, za sve u i svako $m \in M$, pa je M, koristeći Teoremu 2.8. iz prve glave, kompleksna prostorna forma.

Teorema 2. *Neka je (M, g, J) Kelerova mnogostrukost dimenzije $n = \dim M \geq 4$. Tada, uz gore navedene dogovore, M ima konstantnu holomorfnu sekcionu krivinu ako i samo ako je svaka integralna kriva vektorskog polja JN, gde je N normala na cev, u tački p, svake dovoljno male geodezijske cevi $P_\sigma(r)$, geodezijska linija na ovoj cevi, za svako $m \in M$ i sve geodezijske linije σ kroz m.*

Dokaz:

Lako dokazujemo da su integralne krive vektora JN geodezijske linije u p ako i samo ako važi

$$g(J\nabla_{Jv}v, X) = 0$$

za sve vektore X tangentne na cev $P_\sigma(r)$, tj., ako i samo ako je $S^\sigma\Big(J\frac{\partial}{\partial s}\Big)(p)$ proporcionalno sa $\Big(J\frac{\partial}{\partial s}\Big)(p)$. Ovo je ekvivalentno uslovu da je $\Big(J\frac{\partial}{\partial s}\Big)(p)$ sopstveni vektor operatora oblika $S^\sigma(r)$, pa rezultat sledi iz Teoreme 1.1.

Navedimo sada jednu karakterizaciju lokalno hermitski simetričnih mnogostrukosti, koristeći krivinu $\kappa^\sigma(p)$ geodezijskih linija na cevi $P_\sigma(r)$ čiji je tangentni vektor $J\frac{\partial}{\partial s}$ u $p = \exp_m(rv)$. Ova krivina je definisana sa

$$\kappa^\sigma(p) = g\left(S^\sigma\left(J\frac{\partial}{\partial s}\right), J\frac{\partial}{\partial s}\right)(p) \tag{4}$$

i koristeći relaciju (2) dobijamo sledeći razvoj za krivinu $\kappa^\sigma(p)$:

$$\kappa^\sigma(p) = -r\,R_{u\,Ju\,u\,Ju}(m) - \frac{r^2}{2}(\nabla_{Ju}R)_{u\,Ju\,u\,Ju}(m) + O(r^3), \tag{5}$$

pa možemo dokazati sledeću teoremu:

Teorema 3. *Neka je (M, g, J) Kelerova mnogostrukost. Tada je, uz gore navedene dogovore, M mnogostrukost lokalno izometrična hermitski simetričnoj mnogostrukosti ako i samo ako je*

$$\kappa^{\sigma}(\exp_m(rv)) = \kappa^{\sigma}(\exp_m(-rv)) \tag{6}$$

za sve dovoljno male r, svako $m \in M$ i sve geodezijske linije σ kroz m.

Dokaz:

Pretpostavimo prvo da κ^{σ} zadovoljava relaciju (6). Tada, koristeći relacije (5) i (6), dobijamo da važi

$$(\nabla_{Ju} R)_{u\, Ju\, u\, Ju}(m) = 0\,,$$

pa zaključujemo, koristeći Teoremu 2.12. iz prve glave, da je M lokalno hermitski simetrična mnogostrukost.

Dokaz da je uslov teoreme neophodan sledi iz činjenice da su geodezijske refleksije holomorfne izometrije.

Dalje, posmatrajmo Ričijev operator cevi $P_{\sigma}(r)$ i dokažimo slične teoreme kao za operator oblika.

Teorema 4. *Neka je (M, g, J) Kelerova mnogostrukost dimenzije $n = \dim M \geq 4$. Tada je, uz gore navedene dogovore, M mnogostrukost sa konstantnom holomorfnom sekcionom krivinom ako i samo ako je $\left(J\dfrac{\partial}{\partial s}\right)(p)$ sopstveni vektor Ričijevog operatora Q^{σ} cevi $P_{\sigma}(r)$, za svako dovoljno malo r, svako $m \in M$ i sve geodezijske linije kroz m.*

Dokaz:

Pretpostavimo prvo da je (M, g, J) kompleksna prostorna forma. Tada iskaz teoreme sledi odmah, korišćenjem Gausove jednačine i izraza (1) za operator oblika cevi $P_{\sigma}(r)$ u kompleksnim prostornim formama, dobijenog u Teoremi 1.1.

Dokažimo sada da je uslov teoreme dovoljan. Uočimo prvo razvoj u red Ričijevog operatora $Q^{\sigma}(p)$, $p = \exp_m(rv)$ cevi $P_{\sigma}(r)$, koji dobijamo korišćenjem relacije (16) iz druge glave:

$$Q^\sigma(p)(Jv) = \Big(-Qu + \frac{n-1}{2}\, R_{Ju\,u}Ju + \frac{n-1}{2}\, R_{Ju\,u\,Ju\,u}u\Big)(m)$$
$$+ r\Big\{-(\nabla_{Ju}Q)\,u + \frac{n}{3}\,(\nabla_{Ju}R)_{Ju\,u}\,Ju + \frac{n}{6}\,(\nabla_{Ju}R)_{Ju\,u\,Ju\,u}\,u\Big\}(m)$$
$$+ r^2\Big\{-\frac{1}{2}\,(\nabla^2_{Ju\,Ju}Q)\,u + \frac{n+1}{8}\,(\nabla^2_{Ju\,Ju}R)_{Ju\,u}\,Ju - \frac{1}{6}\,\rho_{u\,u}R_{Ju\,u}Ju$$
$$+ \frac{n-3}{12}\,R_{Ju\,u\,Ju\,u}R_{Ju\,u}Ju + \frac{n+1}{24}R_{Ju\,R_{Ju\,u}Ju}Ju$$
$$- \frac{1}{6}\,\rho_{u\,u}R_{Ju\,u}Ju + \Big(\frac{n+1}{24}\,(\nabla^2_{Ju\,Ju}R)_{Ju\,u\,Ju\,u} - \frac{1}{6}\,\rho_{u\,u}R_{Ju\,u\,Ju\,u}$$
$$+ \frac{11-5n}{12}\,R^2_{Ju\,u\,Ju\,u} + \frac{n+1}{24}\sum_{\lambda=2}^{n-1} R^2_{Ju\,u\,Ju\,\lambda}\Big)\,u\Big\}(m) + O(r^3)\,. \tag{7}$$

Odavde zaključujemo da je $\left(J\dfrac{\partial}{\partial s}\right)(p)$ sopstveni vektor za $Q^\sigma(p)$ ako i samo ako je

$$g\Big(Q^\sigma\left(J\frac{\partial}{\partial s}\right)(p), x\Big) = 0\,, \tag{8}$$

uz iste dogovore za x kao u Teoremi 1.1. Tada, korišćenjem relacija (7) i (8), dobijamo da važe sledeći uslovi:

$$2\,g\,(Q\,u\,,\,x)\,(m) = (n-1)\,R_{Ju\,u\,Ju\,x}(m)\,, \tag{9}$$

$$3\,g\,\Big((\nabla_{Ju}Q)\,u, x\Big)(m) = n\,(\nabla_{Ju}R)_{Ju\,u\,Ju\,x}\,(m)\,, \tag{10}$$

$$g\,\Big((\nabla^2_{Ju\,Ju}Q)\,u, x\Big)(m) = \frac{1}{12}\Big\{3(n+1)\,(\nabla^2_{Ju\,Ju}R)_{Ju\,u\,Ju\,x} - 4\rho_{u\,u}\,R_{Ju\,u\,Ju\,x}$$
$$+2(n-3)R_{Ju\,u\,Ju\,u}\,R_{Ju\,u\,Ju\,x} + (n+1)R_{Ju\,R_{Ju\,u}Ju\,Ju\,x}\Big\}(m). \tag{11}$$

Primetimo ovde da relacija (9) automatski važi za $x = Ju$, jer je (M, g, J) Kelerova mnogostrukost. Dakle, relacija (9) važi za sve u normalne na x. Stavimo sada $u = \alpha y + \beta z$ za $y,\, z \in x^\perp$ u relaciju (9) i napišimo koeficijent uz $\alpha\beta^2$. Koristeći Kelerov i prvi Bjankijev identitet (relacije (44) ii) i (11) iz prve glave), dobijamo da važi sledeća relacija

$$2\,\Big(g(z,z)\,\rho(y,x) + 2\,g(z,y)\,\rho(z,x)\Big)(m) =$$
$$(n-1)\,\Big(3\,R_{Jy\,z\,Jx\,z} + R_{zxzy}\Big)(m). \tag{12}$$

Dalje, stavimo $z = e_i,\ i = 1, \ldots n-1$ i $x = e_n$, pri čemu je $\{e_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ ortonormirana baza tangentnog prostora M_m, i sumirajmo po i. Tako dobijamo

$$2\,(n-3)\,\rho(x,y)(m) = 3\,(n-1)\,R_{Jx\,x\,Jx\,y}(m). \tag{13}$$

Odavde, i iz relacije (9), sledi

$$(n-6)\,\rho(x,y)(m) = 0\,,$$

pa za $n \neq 6$, imamo

$$\rho(x,y)(m) = 0\,,$$

što zajedno sa (13), daje

$$R_{Jx\,x\,Jx\,y}(m) = 0$$

za sve $y \in x^{\perp}$. Dakle, za $n \neq 6$, rezultat sledi iz Teoreme 2.8. iz prve glave ovog rada.

Dalje, neka je $n = 6$. Tada, diferencirajući relaciju (9) i koristeći relaciju (10), dobijamo da važi

$$(\nabla_{Ju} R)_{Ju\,u\,Ju\,x}(m) = 0 \tag{14}$$

i

$$(\nabla_{Ju}\rho)(u,x)(m) = 0. \tag{15}$$

Sada, neka je $u \in \{x, Jx\}^{\perp}$. Tada iz relacije (14) takođe sledi

$$(\nabla_u R)_{u\,Ju\,u\,x}(m) = 0 \tag{16}$$

i koristeći Kelerov i drugi Bjankijev identitet u relaciji (16), dobijamo da važi

$$(\nabla_{Jx} R)_{u\,Ju\,u\,Ju}(m) = 0. \tag{17}$$

Kako je M Kelerova mnogostrukost, odavde sledi

$$(\nabla_{Jx} R)_{u\,v\,w\,t}(m) = 0 \tag{18}$$

za sve $u, v, w, t \in \{x, Jx\}^{\perp}$, pa važi

$$(\nabla_{Jx} R)_{u\,v\,u\,v}(m) = 0 \tag{19}$$

za sve $u, v \in \{x, Jx\}^{\perp}$. Ponovo, neka je $\{e_i, i = 1, \dots, n\}$ ortonormirana baza tangentnog prostora M_m, sa $x = e_{n-1}$, $Jx = e_n$. Stavimo $v = e_i$ u relaciju (19) i sumirajmo po i. Tada dobijamo

$$\nabla_{Jx}\tau - 4\,(\nabla_{Jx}\rho)(x,x) + 2\,(\nabla_{Jx}R)_{x\,Jx\,x\,Jx} = 0 \tag{20}$$

za bilo koji jedinični vektor x, tj., za proizvoljan vektor x važi

$$2\,(\nabla_{Jx}R)_{x\,Jx\,x\,Jx} - 4\,g(x,x)\,(\nabla_{Jx}\rho)(x,x) + g(x,x)\,g(x,x)\nabla_{Jx}\tau = 0\,. \tag{21}$$

Dalje, linearizacijom relacije (21) dobijamo, za $y \in \{x\}^{\perp}$:

$$\begin{aligned} &2\,(\nabla_{Jy}R)_{x\,Jx\,x\,Jx} + 8\,(\nabla_{Jx}R)_{y\,Jx\,x\,Jx} - 4g(x,x)\,(\nabla_{Jy}\rho)(x,x) \\ &\qquad -8\,(\nabla_{Jx}\rho)(x,y) + g(x,x)\,g(x,x)\nabla_{Jy}\tau = 0\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Pretpostavimo sada da $y \in \{x, Jx\}^{\perp}$. Posle korišćenja Kelerovog i drugog Bjankijevog identiteta u relaciji (22) i zamenom Jx sa x, saberimo dobijenu relaciju sa relacijom (22). Tako dobijamo da važi sledeća relacija

$$\begin{aligned} 12\,(\nabla_{Jy}R)_{x\,Jx\,x\,Jx} &= 8\,g(x,x)\,(\nabla_{Jy}\rho)(x,x) + 8\,g(x,x)\,(\nabla_{Jx}\rho)(x,y) \\ &\quad +8\,g(x,x)\,(\nabla_{x}\rho)(Jx,y) - 2\,g(x,x)\,g(x,x)\nabla_{Jy}\tau\,. \end{aligned} \tag{23}$$

Tada iz relacija (17) i (23) sledi

$$4\,(\nabla_{Jy}\rho)(x,x) + 4\,(\nabla_{Jx}\rho)(x,y) + 4\,(\nabla_{x}\rho)(Jx,y) = g(x,x)\nabla_{Jy}\tau\,, \tag{24}$$

za sve $y \in \{x, Jx\}^{\perp}$. Iskoristimo ponovo proceduru sumiranja, da bismo dobili da važi

$$(6-n)\,\nabla_{Jy}\tau - 8\,(\nabla_{Jy}\rho)(y,y) = 0\,. \tag{25}$$

Kako je $n = 6$, dobijamo

$$(\nabla_{Jy}\rho)(y,y) = 0\,. \tag{26}$$

Konačno, linearizacija relacije (26) daje

$$(\nabla_{Jx}\rho)(z,z) + 2\,(\nabla_{Jz}\rho)(x,z) = 0 \tag{27}$$

i korišćenjem ponovo sumacije, dobijamo

$$2\,\nabla_{Jx}\tau - 4\,(\nabla_{Jx}\rho)(x,x) = 0\,. \tag{28}$$

Sada, koristeći relaciju (26), dobijamo

(29) $$\nabla_{Jx}\tau = 0$$

i tada korišćenjem relacija (26) i (29), iz relacije (20) sledi

(30) $$(\nabla_{Jx}R)_{x\,Jx\,x\,Jx} = 0\,,$$

za sve jedinične vektore x iz M_m. Dakle, iz Teoreme 2.12. iz prve glave, sledi da je (M,g,J) lokalno hermitski simetrična mnogostrukost.

Dalje, pretpostavimo da je mnogostrukost (M,g,J) lokalno ireducibilna. Tada je ona Ajnštajnov prostor i, sa sličnim izborom x kao gore, relacija (9) postaje

$$R_{Ju\,u\,Ju\,x} = 0\,.$$

Korišćenjem Teoreme 2.8. iz prve glave, odavde sledi da je mnogostrukost (M,g,J) lokalno izometrična kompleksnoj prostornoj formi.

Dalje, ako je mnogostrukost (M,g,J) lokalno reducibilna, ona je lokalno proizvod $M_1 \times \cdots \times M_k$ Kelerovih prostora koji su ujedno i Ajnštajnovi. S druge strane, iz relacije (9) sledi da je svaki faktor M_i, čija je $\dim M_i \geq 4$, kompleksna prostorna forma. Isti rezultat sledi i kada je $\dim M_i = 2$, korišćenjem relacije (30).

Dalje, zapišimo relaciju (9) u obliku

(31) $$2\,Qu - (n-1)R_{Ju\,u}Ju = \alpha u\,.$$

Tada projektujući vektore iz relacije (31) na prvi faktor M_1, dobijamo

$$2\,(Qu)_1 - (n-1)(R_{Ju\,u}Ju)_1 = \alpha u_1\,.$$

Kako ovaj faktor ima konstantnu holomorfnu sekcionu krivinu, recimo c_1, važi sledeća relacija

(32) $$c_1\Big\{(n_1+2) - 2(n-1)\cos^2\alpha_1\Big\} = 2\alpha\,,$$

pri čemu je $n_1 = \dim M_1$, $g(u_1,u_1) = \cos^2\alpha_1$ i τ_1 označava skalarnu krivinu za M_1. Slično, uzimajući projekciju vektora iz relacije (31) na drugi faktor M_2, dobijamo

(33) $$c_2\Big\{(n_2+2) - 2(n-1)\cos^2\alpha_2\Big\} = 2\alpha\,,$$

pri čemu je $n_2 = \dim M_2$, $g(u_2, u_2) = \cos^2 \alpha_2$ i τ_2 označava skalarnu krivinu za M_2. Uzimajući različite vrednosti za α_1 i α_2 u relacijama (32) i (33), dobijamo

$$c_1 + c_2 = 0 . \tag{34}$$

Konačno, dokažimo da je $c_1 = c_2 = 0$. Primetimo prvo da, korišćenjem relacija (14) i (15), relacija (11) može biti zapisana u obliku

$$4\,\rho_{uu} R_{Juu} Ju - 2(n-3)\, R_{JuuJuu} R_{Juu} Ju - (n+1)\, R_{Ju\, R_{Juu}Ju} Ju = \beta u . \tag{35}$$

Projektujući ovo na tangentne prostore faktora M_1 i M_2 i koristeći relaciju (34), dobijamo

$$c_1 = c_2 = 0 .$$

Nastavljajući istu proceduru za ostale moguće faktore, dolazimo do zaključka da je mnogostrulost (M, g, J) ravna, što smo i hteli da dokažemo.

Konačno, posmatrajmo Ričijevu krivinu cevi $P_\sigma(r)$ u odnosu na $J\dfrac{\partial}{\partial s}$ u p. Ona je definisana sa

$$\rho^\sigma\Big(J\frac{\partial}{\partial s}, J\frac{\partial}{\partial s}\Big)(p) = g\Big(Q^\sigma\Big(J\frac{\partial}{\partial s}\Big), J\frac{\partial}{\partial s}\Big)(p) \tag{36}$$

i koristeći relaciju (7) dobijamo sledeći razvoj za ovu krivinu:

$$\begin{aligned} \rho^\sigma\left(J\frac{\partial}{\partial s}, J\frac{\partial}{\partial s}\right)(p) &= \Big(\rho_{uu} - (n-1)\, R_{JuuJuu}\Big)(m) \\ &\quad + r\left((\nabla_{Ju}\rho)_{uu} - \frac{n}{2}\,(\nabla_{Ju}R)_{JuuJuu}\right)(m) + O(r^2) . \end{aligned} \tag{37}$$

Tada važi sledeća teorema:

Teorema 5. *Kelerova mnogostrukost dimenzije $n = \dim M \geq 4$, je lokalno izometrična hermitskom simetričnom prostoru, ako i samo ako Ričijeva krivina geodezijske cevi $P_\sigma(r)$, uz gore navedene dogovore, zadovoljava relaciju*

$$\rho^\sigma(Jv, Jv)(\exp_m(rv)) = \rho^\sigma(Jv, Jv)(\exp_m(-rv)) \tag{38}$$

za svako dovoljno malo r, svako $m \in M$ i sve geodezijske linije σ kroz m.

Dokaz:

Neka je prvo mnogostrukost (M, g, J) lokalno izometrična hermitskom simetričnom prostoru. Tada rezultat sledi iz činjenice da su geodezijske refleksije holomorfne izometrije.

Obrnuto, pretpostavimo da važi relacija (38). Tada iz relacije (37) sledi

$$n\,(\nabla_{Ju}R)_{Ju\,u\,Ju\,u}(m) = 2\,(\nabla_{Ju}\rho)_{u\,u}(m)\,. \tag{39}$$

Sada, ponavljajući proceduru linearizacije i sumacije, kao u Teoremi 1.4., dobijamo da važi

$$(n-3)\;(\nabla_x\rho)_{x\,x}(m) = g(x,x)\,\nabla_x\tau(m)\,. \tag{40}$$

Ponavljajući sada isti postupak sa relacijom (40), dobijamo da važi sledeća relacija

$$\nabla_x\tau(m) = 0\,. \tag{41}$$

Konačno, koristeći relacije (40) i (41), iz relacije (39) sledi

$$(\nabla_{Ju}R)_{Ju\,u\,Ju\,u}(m) = 0$$

i dakle, koristeći Teoremu 2.12. iz prve glave, možemo zaključiti da je mnogostrukost M lokalno izometrična hermitski simetričnom prostoru.

IV KARAKTERIZACIJE LOKALNO φ-SIMETRIČNIH SASAKIJEVIH MNOGOSTRUKOSTI I SASAKIJEVIH PROSTORNIH FORMI

U prethodnoj glavi smo se još jednom uverili koliki je uticaj geometrije cevi na izgled ambijentnog prostora, u slučaju kada je ovaj prostor Kelerova mnogostrukost. U ovoj glavi nastavljamo izučavanje ove problematike, pri čemu je sada ambijentni prostor Sasakijeva mnogostrukost.

Precizirajmo prvo nekoliko dogovora oko cevi $P_\sigma(r)$ koje ćemo izučavati u ovoj glavi. Neka je m tačka na povezanoj Sasakijevoj mnogostrukosti $(M^{2n+1}, \varphi, \eta, \xi, g)$ i neka je $P_\sigma(r)$ geodezijska cev poluprečnika r duž φ-geodezijske linije σ konačne dužine, smeštene u M i čiji je tangentni vektor jedinični vektor u, ortogonalan na ξ. Nadalje ćemo ovakve cevi nazivati *φ-geodezijske cevi.* Ovom prilikom ćemo posmatrati dve vrste tačaka na ovim cevima. Naime, neka je prvo γ φ-geodezijska linija jedinične brzine, na M, u pravcu v, ortogonalna na σ i takva da je $v(m) = \varphi u(m)$, $m = \sigma(t)$. Već smo primetili (u drugoj glavi), da je ravan razapeta vektorima ξ i φv paralelna duž γ i primetimo sada da je u $p = \exp_m(rv)$ ova ravan tangentna na φ-geodezijsku cev $P_\sigma(r)$.

Dokažimo prvo osobinu operatora oblika, koja takođe sledi iz rezultata navedenog u radu [4], pri čemu je način dokazivanja različit.

Teorema 1. *Neka je $(M^{2n+1}, \varphi, \eta, \xi, g)$ Sasakijeva mnogostrukost dimenzije ≥ 5. Tada je, uz gore navedene dogovore, M Sasakijeva prostorna forma ako i samo ako, za svaku dovoljno malu φ-geodezijsku cev $P_\sigma(r)$, $S^\sigma(p)\varphi v$ (ili $S^\sigma(p)\xi$, respektivno) pripada ravni $\{\xi, \varphi v\}(p)$ za svako $m \in M$ i sve v, pri čemu je $p = \exp_m(rv)$.*

Dokaz:

Prvo, ako je M Sasakijeva prostorna forma, koristeći eksplicitne izraze za operator oblika S^σ cevi $P_\sigma(r)$ u p, koji su dobijeni u drugoj glavi, odmah primećujemo da u ovom slučaju dejstvo operatora oblika S^σ čuva ravan $\{\xi, \varphi v\}(p)$ duž φ-geodezijske linije γ tangentne na horizontalni vektor v, tj., $S^\sigma(p)\varphi v \in \operatorname{span}\{\xi, \varphi v\}(p)$ i $S^\sigma(p)\xi v \in \operatorname{span}\{\xi, \varphi v\}(p)$.

Da bismo dokazali da važi i obratno, prvo navedimo formule za $S^\sigma(p)\varphi v$ i $S^\sigma(p)\xi$ dobijene korišćenjem formula (15) i (20) iz druge glave.

(1)
$$S^\sigma(p)\varphi v = \xi(m) + \frac{r}{2}\Big[R_{\varphi u\, u}\varphi u + R_{\varphi u\, u\, \varphi u\, u} u\Big](m)$$
$$+ \frac{r^2}{6}\Big[2(\nabla_{\varphi u} R)_{\varphi u\, u}\varphi u + (\nabla_{\varphi u} R)_{\varphi u\, u\, \varphi u\, u} u - 3\,\xi\Big](m) + O(r^3),$$

(2)
$$S^\sigma(p)\xi = \frac{1}{r}\,\xi(m) - \frac{5}{6} r\,\xi(m)$$
$$- \frac{r^2}{12}\Big[5\,R_{\varphi u\, u\, \varphi u\, u} u + 4\,u + 3\,R_{\varphi u\, u}\varphi u\Big](m) + O(r^3).$$

Sada, $S^\sigma(p)\varphi v$ pripada paralelnom polju ravni $\{\xi(p), \varphi v(p)\}$ ako i samo ako

$$g(S^\sigma(p)\varphi v, x(r)) = 0$$

za sve paralelne vektore x koji su ortogonalni na ovu ravan duž φ-geodezijske linije γ. Koristeći relaciju (1), odavde sledi

(3)
$$R_{\varphi u\, u\, \varphi u\, x}(m) = 0$$

za svako $m \in M$ i sve horizontalne u. Dalje, kako je $R_{\varphi u\, u\, \varphi u\, \xi} = 0$, iz relacije (3) sledi da je $R_{\varphi u\, u}\varphi u$ proporcionalno φv. Dakle, koristeći da je $\varphi v(m) = -u(m)$ i Teoremu 3.7., zaključujemo da je M Sasakijeva prostorna forma.

Za drugi deo dokaza dovoljno je koristiti relaciju (2) i ponoviti sličan postupak.

Teorema 2. *Neka je* $(M^{2n+1}, \varphi, \eta, \xi, g)$ *Sasakijeva mnogostrukost dimenzije* ≥ 5. *Tada je, uz gore navedene dogovore,* M *Sasakijeva prostorna forma, ako i samo ako su, za svako* v *i za svaku dovoljno malu* φ*-geodesijsku cev* $P_\sigma(r)$, *integralne krive za* φv *geodezijske linije na ovim cevima.*

Dokaz:

Neka je M Sasakijeva mnogostrukost i označimo sa $\widetilde{\nabla}$ indukovanu Rimanovu koneksiju na $P_\sigma(r)$. Tada su integralne krive vektora φv geodezijske linije ako i samo ako je

$$\widetilde{\nabla}_{\varphi v}(\varphi v) = 0,$$

tj., ako i samo ako

$$g\left(\nabla_{\varphi v}(\varphi v), X\right) = 0$$

za sve vektore X tangentne na $P_\sigma(r)$. Koristeći relacije (52)-(54), (55) i (71) iz prve glave, direktno zaključujemo da je ovaj uslov ekvivalentan uslovu

$$g\left(S^\sigma(p)\varphi v, \varphi X\right) = 0,$$

što znači da $S^\sigma(p)\varphi v$ mora pripadati ravni $\{\xi, \varphi v\}(p)$ i obrnuto. Dakle, rezultat sledi iz Teoreme 4.1.

Primedba. Primetimo da je lako dokazati (kada je $\dim M \geq 5$) da Sasakijeva mnogostrukost ima konstantnu φ-sekcionu krivinu ako i samo ako vektorsko polje φv (t.j., $\varphi\frac{\partial}{\partial r}$) na dovoljno maloj $P_\sigma(r)$ zadovoljava Kilingovu jednačinu u tačkama $p = \exp_m(rv)$, za svako $m \in M$ i sve v.

Dalje, navedimo jednu karakterizaciju lokalno φ-simetričnih prostora. Posmatrajmo geodezijsku liniju na cevi $P_\sigma(r)$, čiji je tangentni vektor φv u tački $p = \exp_m(rv)$. Njena krivina $\kappa^\sigma(p)$ u M definisana je izrazom

(4) $$\kappa^\sigma(p) = g\left(S^\sigma(p)\varphi v, \varphi v\right).$$

Koristeći ovu realno-vrednosnu funkciju i φ-geodezijsku simetriju s_m sa centrom u m, dobijamo sledeću teoremu

Teorema 3. *Neka je* $(M^{2n+1}, \varphi, \eta, \xi, g)$ *Sasakijeva mnogostrukost. Tada, sa gore utvrđenim dogovorima,* M *je lokalno* φ*-simetričan prostor ako i samo ako je*

(5) $$\kappa^\sigma(p) = \kappa^\sigma(s_m(p)), \quad p = \exp_m(rv),$$

za svako $m \in M$, sve v i svako dovoljno malo r.

Dokaz:

Prvo, ako je M lokalno φ-simetrična Sasakijeva mnogostrukost, koristeći Teoremu 3.13. iz prve glave, s_m je lokalni automorfizam Sasakijeve strukture (φ, η, ξ, g), pa relacija (5) sledi direktno.

Obrnuto, pretpostavimo da važi relacija (5). Tada, koristeći relaciju (1), relacija (4) postaje:

$$\kappa^\sigma(p) = r - r\, R_{\varphi u\, u\, \varphi u\, u}(m) - \frac{r^2}{2}\,(\nabla_{\varphi u} R)_{\varphi u\, u\, \varphi u\, u}(m) + O(r^3)\,. \tag{6}$$

Tada iz relacija (5) i (6) sledi

$$(\nabla_{\varphi u} R)_{\varphi u\, u\, \varphi u\, u}(m) = 0$$

za sve horizontalne vektore u i svaku tačku $m \in M$. Dakle, koristeći Teoremu 3.12. iz prve glave, zaključujemo da je M lokalno φ-simetrična Sasakijeva mnogostrukost

Teorema 4. *Neka je $(M^{2n+1}, \varphi, \eta, \xi, g)$ Sasakijeva mnogostrukost dimenzije ≥ 5. Tada je, uz gore navedene dogovore, M Sasakijeva prostorna forma ako i samo ako, za svaku dovoljno malu φ-geodezijsku cev $P_\sigma(r)$, $Q^\sigma(p)\varphi v$ (ili $Q^\sigma(p)\xi$, respektivno) pripada ravni $\{\xi, \varphi v\}(p)$ za svako $m \in M$ i sve v, pri čemu je $p = \exp_m(rv)$.*

Dokaz:

Dokažimo prvo da je uslov dovoljan. Neka je $P_\sigma(r)$ φ-geodezijska cev prethodno opisana i pretpostavimo da je $\{E_1, \ldots, E_n\}$ ortonormirana baza paralelna duž γ, definisana u slučaju A, trećeg poglavlja, druge glave. Tada, koristeći relacije (16) i (20) iz prve glave, dobijamo:

$$
\begin{aligned}
(7)\quad Q^{\sigma}(p)\,\varphi v = {} & \frac{2n-2}{r}\,\xi(m) + \Big(-Q\,u + n\,R_{\varphi u\,u}\varphi u + n\,R_{\varphi u\,u\,\varphi u\,u}u\Big)(m) \\
& + r\left\{\frac{2n+1}{3}\,(\nabla_{\varphi u}R)_{\varphi u\,u}\,\varphi u + \frac{2n+1}{6}\,(\nabla_{\varphi u}R)_{\varphi u\,u\,\varphi u\,u}\,u \right. \\
& \qquad \left. - (\nabla_{\varphi u}Q)\;u + \frac{1}{3}\,(3n+1-\rho_{u\,u} - 2R_{\varphi u\,u\,\varphi u\,u})\;\xi\right\}(m) \\
& + r^2\left\{\frac{1}{4}\,R_{\varphi u\,u}\varphi u + \frac{n+1}{4}\,\big(\nabla^2_{\varphi u\,\varphi u}R\big)_{\varphi u\,u}\;\varphi u - \frac{1}{2}\,Q\,u \right. \\
& \qquad - \frac{1}{6}\,\rho_{u\,u}R_{\varphi u\,u}\,\varphi u - \frac{1-n}{6}\,R_{\varphi u\,u\,\varphi u\,u}R_{\varphi u\,u}\varphi u \\
& \qquad + \frac{n+1}{12}R_{\varphi u\,R_{\varphi u\,u}\,\varphi u}\varphi u - \frac{1}{2}\;\big(\nabla^2_{\varphi u\,\varphi u}Q\big)\;u \\
& \qquad - \Big(\frac{1}{6}\,\rho_{u\,u}R_{\varphi u\,u\,\varphi u\,u} - \frac{5n+1}{12}\,R^2_{\varphi u\,u\,\varphi u\,u} \\
& \qquad - \frac{n+1}{12}\,\sum_{\alpha=3}^{2n+1}\,R^2_{\varphi u\,u\,\varphi u\,\alpha} + \frac{4n-1}{12}\,R_{\varphi u\,u\,\varphi u\,u} - \frac{4n-1}{3} \\
& \qquad - \frac{n+1}{12}\;\big(\nabla^2_{\varphi u\,\varphi u}R\big)_{\varphi u\,u\,\varphi u\,u}\Big)\;u \\
& \qquad \left. - \frac{1}{4}\,\Big((\nabla_{\varphi u}\rho)_{u\,u} + (\nabla_{\varphi u}R)_{\varphi u\,u\,\varphi u\,u}\Big)\;\xi\right\}(m) + O(r^3)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(8)\quad Q^{\sigma}(p)\,\xi = {} & \frac{2n-2}{r^2}\,\xi(m) + \frac{1}{3}\Big(n+3-\rho_{u\,u} - 2\,R_{\varphi u\,u\,\varphi u\,u}\Big)\,\xi(m) \\
& + r\left\{\frac{1-2n}{4}R_{\varphi u\,u}\,\varphi u + \frac{1-10n}{12}\,R_{\varphi u\,u\,\varphi u\,u}u + \frac{4n-1}{3}\,u \right. \\
& \qquad \left. - \frac{1}{4}\,\Big((\nabla_{\varphi u}\rho)_{u\,u} + (\nabla_{\varphi u}R)_{\varphi u\,u\,\varphi u\,u}\Big)\;\xi\right\}(m) \\
& + r^2\left\{\frac{1-4n}{15}\,(\nabla_{\varphi u}R)_{\varphi u\,u}\;\varphi u - \frac{7n+2}{30}\,(\nabla_{\varphi u}R)_{\varphi u\,u\,\varphi u\,u}\,u \right. \\
& \qquad + \Big(\frac{16}{90}\,\rho_{u\,u} + \frac{5}{9}\,R_{\varphi u\,u\,\varphi u\,u} - \frac{1}{10}\;\big(\nabla^2_{\varphi u\,\varphi u}R\big)_{\varphi u\,u\,\varphi u\,u} \\
& \qquad - \frac{1}{15}\;\big(\nabla^2_{\varphi u\,\varphi u}R\big)_{\varphi u\,u\,\varphi u\,u} - \frac{1}{3}\,R^2_{\varphi u\,u\,\varphi u\,u} - \frac{2}{15}\,\sum_{\alpha=3}^{2n+1}\,R^2_{\varphi u\,u\,\varphi u\,\alpha} \\
& \qquad \left. - \frac{1}{45}\,\sum_{\alpha\,,\,\beta=3}^{2n+1}\,R^2_{\alpha\,\varphi u\,\beta\,\varphi u} - \frac{77n+23}{180}\Big)\;\xi\right\}(m) + O(r^3)\,.
\end{aligned}
$$

Posmatrajmo prvo dejstvo operatora Q^{σ} na vektoru φv. Neka je x paralelno vektorsko polje ortogonalno na paralelnu ravan razapetu vektorima $\xi(p)$ i $(\varphi v)(p)$ duž geodezijske linije $\gamma : r \mapsto \exp_m(rv)$. Tada sledi da $Q^\sigma(p)\,\varphi v$ pripada ovoj ravni ako i samo ako važi

$$g\big(Q^\sigma(p)\,\varphi v, x(p)\big) = 0$$

za sve ovakve x. Koristeći (7), dobijamo sledeće neophodne uslove:

$$g(Q\,u\,,\,x) = n\,R_{\varphi u\,u\,\varphi u\,x}\,, \tag{9}$$

$$3\,g\Big((\nabla_{\varphi u}Q)\;u, x\Big) = (2n+1)\;(\nabla_{\varphi u}R)_{\varphi u\,u\,\varphi u\,x}\,, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &\frac{2n-1}{4}\,R_{\varphi u\,u\,\varphi u\,x} + \frac{1}{2}\,g\Big(\big(\nabla^2_{\varphi u\,\varphi u}Q\big)\;u, x\Big)\\ &-\frac{n+1}{4}\,\big(\nabla^2_{\varphi u\,\varphi u}R\big)_{\varphi u\,u\,\varphi u\,x} + \frac{1}{6}\,\rho_{u\,u}\,R_{\varphi u\,u\,\varphi u\,x}\\ +&\frac{1-n}{6}\,R_{\varphi u\,u\,\varphi u\,u}\,R_{\varphi u\,u\,\varphi u\,x} - \frac{n+1}{12}\,R_{\varphi u\,R_{\varphi u\,u\varphi u}\,\varphi u\,x} = 0\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Diferenciranje relacije (9) i relacija (10), tada impliciraju

$$(\nabla_{\varphi u}R)_{\varphi u\,u\,\varphi u\,x} = 0\,. \tag{12}$$

Koristeći formule lokalnog raslojavanja (76) i (83) iz prve glave, dobijamo da je relacija (12) ekvivalentna sa relacijom

$$\big(\overline{\nabla}_{Jw}\overline{R}\big)_{Jw\,w\,Jw\,y} = 0\,, \tag{13}$$

pri čemu je $u = w^*$, $x = y^*$, za sve (jedinične) w normalne na y.

Dalje, postoji nekoliko metoda kako dobiti više informacija iz relacije (13). Umesto da koristimo uobičajenu tehniku linearizacije i kontrakcije, ovde ćemo koristiti metodu integracije (videti npr. [20], [40] za više informacija o ovoj tehnici). Neka je $\bar{m} = \pi(m) \in \mathcal{B}$, pri čemu je $(\mathcal{B}, G, J)$ bazni prostor lokalnog raslojenja $\mathcal{U} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$, $m \in \mathcal{U}$. Dalje, neka je

$$w = \sum_{i=1}^{2n} a_i\,e_i$$

jedinični vektor iz $\mathcal{B}_{\bar{m}}$, pri čemu je $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ ortonormirana baza za $\mathcal{B}_{\bar{m}}$. Dalje, stavljajući

$$H_{i\,j\,k\,l} = \big(\overline{\nabla}_{Je_i}\overline{R}\big)_{Je_j\,e_k\,Je_l\,y}\,, \tag{14}$$

H_{wwww} se može posmatrati kao funkcija na jediničnoj sferi $S^{2n-1}(1) \subset \mathcal{B}_{\bar{m}}$. Tada imamo

$$\int\limits_{S^{2n-1}(1)} H_{wwww}(\bar{m})dw = \sum_{i,j,k,l=1}^{2n} H_{ijkl}(\bar{m}) \int\limits_{S^{2n-1}(1)} a_i\, a_j\, a_k\, a_l\, dw\,. \tag{15}$$

Koristeći sada relacije $(13)\,,(14)\,,(15)$ za $\{y\}^{\perp}$ i dobro poznate formule integracije za desnu stranu relacije (15), dobijamo relaciju

$$2\,\overline{\nabla}_{Jy}\overline{\tau} - 7\,\left(\overline{\nabla}_{Jy}\overline{\rho}\right)(y,y) + 3\left(\overline{\nabla}_{Jy}\overline{R}\right)_{Jyy\,Jyy} = 0 \tag{16}$$

za sve jedinične vektore y iz $\mathcal{B}_{\bar{m}}$.

Dalje, neka $w \in \{y, Jy\}^{\perp}$. Tada iz relacije (13) takođe sledi

$$\left(\overline{\nabla}_w\overline{R}\right)_{w\,Jw\,w\,y} = 0\,, \tag{17}$$

ili, ekvivalentno, koristeći Kelerov i drugi Bjankijev identitet,

$$\left(\overline{\nabla}_{Jy}\overline{R}\right)_{Jw\,w\,Jw\,w} + \left(\overline{\nabla}_{J\,w}\overline{R}\right)_{w\,Jw\,Jy\,w} = 0\,. \tag{18}$$

Sada, koristeći Kelerov identitet, relacije (13) i (18) daju relaciju

$$\left(\overline{\nabla}_{Jy}\overline{R}\right)_{Jw\,w\,Jw\,w} = 0\,, \tag{19}$$

za sve $y \in \{w, Jw\}^{\perp}$. Dalje, integracijom poslednje relacije po jediničnoj sferi $S^{2n-3}(1)$ u $\{y, Jy\}^{\perp} \subset \mathcal{B}_{\bar{m}}$, dobijamo relaciju

$$\overline{\nabla}_{Jy}\overline{\tau} - 4\,\left(\overline{\nabla}_{Jy}\overline{\rho}\right)(y,y) + 2\left(\overline{\nabla}_{Jy}\overline{R}\right)_{Jyy\,Jyy} = 0\,. \tag{20}$$

Tada iz relacija (16) i (20) sledi relacija

$$\overline{\nabla}_{Jy}\overline{\tau} - 2\left(\overline{\nabla}_{Jy}\overline{\rho}\right)(y,y) = 0 \tag{21}$$

za jedinične vektore y, ili

$$G(y,y)\,\overline{\nabla}_{Jy}\overline{\tau} - 2\left(\overline{\nabla}_{Jy}\overline{\rho}\right)(y,y) = 0 \tag{22}$$

za bilo koji vektor y. Linearizacija poslednje relacije daje

$$G(t,t)\,\overline{\nabla}_{Jz}\overline{\tau} + 2\,G(t,z)\,\overline{\nabla}_{Jt}\overline{\tau} - 2\left\{\left(\overline{\nabla}_{Jz}\overline{\rho}\right)(t,t) + 2\,\left(\overline{\nabla}_{Jt}\overline{\rho}\right)(t,z)\right\} = 0 \tag{23}$$

i kako je $\dim M = 2n+1 \geq 5$, kontrakcija daje

$$\overline{\nabla}_{Jz}\overline{\tau} = 0 .$$

Konačno, koristeći relacije (20) i (21), iz poslednje relacije sledi

$$\left(\overline{\nabla}_{Jy}\overline{R}\right)_{Jy\,y\,Jy\,y} = 0 , \tag{24}$$

za sve jedinične vektore y iz $\mathcal{B}_{\tilde{m}}$. Teorema 3.11. iz prve glave tada implicira da je $\mathcal{B}$ lokalno hermitski simetričan prostor i koristeći Teoremu 2.12. (takođe iz prve glave), možemo zaključiti da je M lokalno φ-simetričan prostor.

Dalje, koristeći relaciju (9) i uz pomoć relacija (76), (80) i (81) iz prve glave, dobijamo da važi relacija

$$G\left(\overline{Q}\,w\,,\,y\right) = n\,\overline{R}_{Jw\,w\,Jw\,y} \tag{25}$$

na $(\mathcal{B}, G, J)$. Ispitajmo prvo slučaj kada je $\mathcal{B}$ lokalno ireducibilan prostor. Tada je to i Ajnštajnov prostor i, kako je y normalno na w i Jw, to iz relacije (25) dobijamo da važi relacija

$$\overline{R}_{Jw\,w}Jw = \zeta\,w ,$$

odakle sledi da $\mathcal{B}$ ima konstantnu holomorfnu sekcionu krivinu ($\dim \mathcal{B} \geq 4$). Dalje, ako je $\mathcal{B}$ lokalno reducibilan prostor, tada je on je lokalno proizvod $\mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_k$ Kelerovih prostora, koji su ujedno i Ajnštajnovi prostori ([2], [47]). Kako je za svaki faktor $\mathcal{B}_i$ ($\dim \mathcal{B}_i \geq 4$), zadovoljena relacija (25), to su svi ovi prostori $\mathcal{B}_i$ kompleksne prostorne forme. Ako je $\dim \mathcal{B}_i = 2$, isti rezultat sledi iz relacije (24). Da bismo i u ovom slučaju dokazali da je $\mathcal{B}$ takođe kompleksna prostorna forma, primetimo prvo da se relacija (25) može zapisati i u obliku

$$\overline{Q}\,w - n\,\overline{R}_{Jw\,w}Jw = \zeta\,w . \tag{26}$$

Projektujući ove vektore na tangentni prostor prvog faktora $\mathcal{B}_1$ dobijamo

$$\left(\overline{Q}\,w\right)_1 - n\,\left(\overline{R}_{Jw\,w}Jw\right)_1 = \zeta\,(w)_1 . \tag{27}$$

Kako je holomorfna sekciona krivina ovog faktora konstantna, npr. c_1, to važi

$$\left(\overline{Q}\,w\right)_1 = \frac{\overline{\tau}_1}{n_1}w_1 , \quad \left(\overline{R}_{Jw\,w}Jw\right)_1 = (c_1\cos^2\alpha_1)w_1 \tag{28}$$

pri čemu je $G(w_1, w_1) = \cos^2 \alpha_1$. Ovde je $n_1 = \dim \mathcal{B}_1$ i $\overline{\tau}_1$ je oznaka za skalarnu krivinu od $\mathcal{B}_1$, tj.

$$4\,\overline{\tau}_1 = n_1\,(n_1 + 2)\,c_1\,. \tag{29}$$

Koristeći relacije (27) i (28), iz prethodne formule sledi relacija

$$c_1 \Big[(n_1 + 2) - 4\,n\,\cos^2 \alpha_1\Big] = 4\,\zeta\,. \tag{30}$$

Ponavljajući istu proceduru sa drugim faktorom, dobijamo relaciju

$$c_2 \Big[(n_2 + 2) - 4\,n\,\cos^2 \alpha_2\Big] = 4\,\zeta\,. \tag{31}$$

Dakle, iz relacija (30) i (31) sledi relacija

$$c_1 + c_2 = 0\,. \tag{32}$$

Konačno, koristićemo relaciju (11) da dokažemo da je $c_1 = c_2 = 0$. Primetimo prvo da važe sledeće relacije, pošto smo već zaključili da je M lokalno φ-simetričan prostor:

$$\begin{cases} \Big(\nabla_{\varphi u} R\Big)_{\varphi u\,\xi\,\varphi u\,x} = -R_{\varphi u\,u\,\varphi u\,x}\,, \\ (\nabla_{\varphi u} R)_{\varphi u\,u\,\varphi u\,x} = 0\,, \\ \Big(\nabla^2_{\varphi u\,\varphi u} R\Big)_{\varphi u\,u\,\varphi u\,x} = -R_{\varphi u\,u\,\varphi u\,x}\,. \end{cases} \tag{33}$$

Dalje, kako je $Q\,\xi = 2n\,\xi$, to iz relacije (9) sledi relacija

$$\begin{cases} g\,((\nabla_{\varphi u} Q)\,\xi, x) = -n\,R_{\varphi u\,u\,\varphi u\,x}\,, \\ g\,\big((\nabla^2_{\varphi u\,\varphi u} Q)u, x\big) = -n\,R_{\varphi u\,u\,\varphi u\,x}\,. \end{cases} \tag{34}$$

Dalje, koristeći relacije (33) i (34), iz relacije (11) sledi relacija

$$\begin{gathered} 3\,n\,R_{\varphi u\,u}\varphi u + 2\,\left(\rho_{u\,u} + (1-n)\,R_{\varphi u\,u\,\varphi u\,u}\right) R_{\varphi u\,u}\varphi u \\ -(n+1) R_{\varphi u\,R_{\varphi u\,u}\varphi u}\varphi u = \vartheta u\,. \end{gathered} \tag{35}$$

Koristeći formule lokalnog raslojavanja dobijamo da važi relacija

$$(12n-7)\,\overline{R}_{Jw\,w}Jw + 2\,\overline{\rho}_{w\,w}\,\overline{R}_{Jw\,w}Jw + 2\,(1-n)\,\overline{R}_{Jw\,w\,Jw\,w}\overline{R}_{Jw\,w}Jw$$
$$-(n+1)\,\overline{R}_{Jw\,\overline{R}_{Jw\,w}Jw}Jw = \varsigma w\,, \tag{36}$$

pri čemu je $u = w^*$. Posmatrajući ponovo faktore $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ i koristeći relacije (32) i (36), dobijamo da je

$$c_1 = c_2 = 0\,.$$

Isti postupak za ostale faktore pokazuje da je prostor $\mathcal{B}$ lokalno ravan prostor.

Dakle, možemo zaključiti da je prostor $\mathcal{B}$ kompleksna prostorna forma, pa je, koristeći Teoremu 3.8. iz prve glave, mnogostrukost M Sasakijeva prostorna forma. Ovim je završen prvi deo dokaza teoreme.

Da bismo dokazali i drugi deo, neka $Q^\sigma(p)\,\xi$ pripada ravni razapetoj sa $\xi(p)$ i $(\varphi v)(p)$ duž geodezijske linije $\gamma : r \mapsto \exp_m(rv)$. Tada iz relacije (8) sledi relacija

$$R_{\varphi u\, u\, \varphi u\, x}(m) = 0$$

za sve horizontalne vektore $u, u(m) = -\varphi v(m)$ i sve horizontalne vektore x normalne na φv i ξ. Dakle, $R_{\varphi u\, u}\varphi u$ je proporcionalno u, za sve horizontalne vektore u, i rezultat sledi korišćenjem Teoreme 3.7. iz prve glave.

Obrat sledi direktno iz formula za Ričijev operator φ-geodezijskih cevi na Sasakijevim prostornim formama, dobijenih u trećem poglavlju druge glave.

Ovim je završen dokaz teoreme.

Sledeća teorema daje karakterizaciju lokalno φ-simetričnih Sasakijevih mnogostrukosti na sličan način kao Teorema 3, gde je korišćena funkcija κ^σ. Neka je $P_\sigma(r)$ φ-geodezijska cev definisana ranije. Pridružena *Ričijeva krivina* cevi $P_\sigma(r)$ u odnosu na φv u p definisana je relacijom

$$\rho^\sigma(\varphi v, \varphi v)(p) = g\left(Q^\sigma(p)\varphi v, \varphi v\right)\,. \tag{37}$$

Koristeći relacije (16) (iz druge glave) i (7) dobijamo sledeći izraz za ovu krivinu:

$$\rho^\sigma(\varphi v, \varphi v)(p) = 2n - 2 + \Big(2n\, R_{\varphi u\, u\, \varphi u\, u} - \rho_{uu}\Big)(m)$$
$$+ r\left(\frac{2n+1}{2}\,(\nabla_{\varphi u} R)_{\varphi u\, u\, \varphi u\, u} - (\nabla_{\varphi u}\rho)_{uu}\right)(m) + O(r^2)\,. \tag{38}$$

Tada važi sledeća

Teorema 5. *Neka je* $(M^{2n+1}, \varphi, \eta, \xi, g)$ *Sasakijeva mnogostrukost dimenzije* ≥ 5. *Tada je, uz gore navedene dogovore,* M *lokalno* φ*-simetrična Sasakijeva mnogostrukost ako i samo ako, za svaku dovoljno malu* φ*-geodezijsku cev* $P_\sigma(r)$,

$$\rho^\sigma(\varphi v, \varphi v)(\exp_m(rv)) = \rho^\sigma(\varphi v, \varphi v)(\exp_m(-rv)) \tag{39}$$

za svako $m \in M$ *i sve* v.

Dokaz:

Pretpostavimo prvo da važi relacija (39). Tada iz relacije (38) sledi relacija

$$(2n+1)\,(\nabla_{\varphi u} R)_{\varphi u\, u\, \varphi u\, u}(m) = 2\,(\nabla_{\varphi u}\rho)_{u\, u}(m) \tag{40}$$

i ponovo koristeći tehniku lokalnog raslojavanja, dobijamo, uz ranije navedene dogovore,

$$(2n+1)\,\left(\overline{\nabla}_{Jw}\overline{R}\right)_{Jw\, w\, Jw\, w}(m) = 2\left(\overline{\nabla}_{Jw}\overline{\rho}\right)_{w\, w}(m). \tag{41}$$

Iz poslednje dve relacije sledi relacija

$$(2n+1)\,\left(\overline{\nabla}_{z}\overline{R}\right)_{Jz\, z\, Jz\, z}(m) = 2\left(\overline{\nabla}_{z}\overline{\rho}\right)_{z\, z}(m). \tag{42}$$

Stavimo $z = \alpha x + \beta y$ u relaciju (42) i napišimo koeficijent uz $\alpha^3\beta^2$. Koristeći Kelerov i Bjankijeve identitete, dobijamo

$$\begin{aligned}
&(2n+1)\left\{\left(\overline{\nabla}_x\overline{R}\right)_{x\,y\,x\,y} + 5\,\left(\overline{\nabla}_x\overline{R}\right)_{y\,Jx\,y\,Jx} - 2\,\left(\overline{\nabla}_{Jx}\overline{R}\right)_{y\,Jx\,y\,x}\right\} = \\
&\quad 2\left\{\left(\overline{\nabla}_x\overline{\rho}\right)_{x\,x} G(y,y) + 2\left[\left(\overline{\nabla}_y\overline{\rho}\right)_{x\,x} + 2\,\left(\overline{\nabla}_x\overline{\rho}\right)_{x\,y}\right] G(x,y)\right. \\
&\qquad \left. + \left[\left(\overline{\nabla}_x\overline{\rho}\right)_{y\,y} + 2\,\left(\overline{\nabla}_y\overline{\rho}\right)_{x\,y}\right] G(x,x)\right\}.
\end{aligned} \tag{43}$$

Stavimo sada $y = e_i, i = 1, \ldots, 2n$ (pri čemu je $\{e_i, i = 1, \ldots, 2n\}$ ortonormirana baza bazne mnogostrukosti $\mathcal{B}$) i sumirajmo po i. Tada dobijamo

$$(4n-3)\left(\overline{\nabla}_x\overline{\rho}\right)_{x\,x} = G(x,x)\,\overline{\nabla}_x\overline{\tau}. \tag{44}$$

Ponavljajući postupak sa x u relaciji (44), dobijamo da važi relacija

(45) $$(3n-4)\,\overline{\nabla}_x\overline{\tau} = 0\,.$$

Konačno, koristeći relacije (45) i (44), iz relacije (42) sledi da važi relacija

$$\left(\overline{\nabla}_z\overline{R}\right)_{Jz\,z\,Jz\,z} = 0$$

pa, koristeći Teoremu 2.12. iz prve glave, možemo zaključiti da je $(\mathcal{B}, G, J)$ lokalno hermitski simetričan prostor. Tada, koristeći Teoremu 3.11. iz prve glave, zaključujemo da je $(M^{2n+1}, \varphi, \eta, \xi, g)$ lokalno φ-simetrična Sasakijeva mnogostrukost.

Koristeći Teoremu 3.13. iz prve glave, direktno zaključujemo da ako je $(M^{2n+1}, \varphi, \eta, \xi, g)$ lokalno φ-simetrična Sasakijeva mnogostrukost, tada važi relacija (39).

Ovim je dokaz Teoreme 5. završen.

Nastavimo sada izučavanje istih ovih problema, ali posmatrajući tačke $p = \exp_{\sigma(t)}(rv)$ na φ-geodezijskoj cevi $P_\sigma(r)$, (na Sasakijevoj mnogostrukosti $(M^{2n+1}, \varphi, \eta, \xi, g)$), takve da je $v(m) \perp \varphi u(m)$, $m = \sigma(t)$. Kao i u prethodnom slučaju, σ je φ-geodezijska linija tangentna na horizontalnom jediničnom vektoru u, a γ je φ-geodezijska linija u pravcu jediničnog horizontalnog vektora v, ortogonalna na σ. I u ovom slučaju je moguće ustanoviti veliki uticaj geometrije cevi na izgled ambijentnog prostora. Naime, važe sledeće teoreme:

Teorema 8. *Neka je $(M^{2n+1}, \varphi, \eta, \xi, g)$ Sasakijeva mnogostrukost dimenzije ≥ 5. Tada je, uz gore navedene dogovore, M Sasakijeva prostorna forma ako i samo ako, za svaku dovoljno malu φ-geodezijsku cev $P_\sigma(r)$, $S^\sigma(p)\varphi v$ (ili $S^\sigma(p)\xi$, respektivno) pripada ravni $\{\xi, \varphi v\}(p)$ za svako $m \in M$ i sve v, pri čemu je $p = \exp_m(rv)$.*

Dokaz:

Pretpostavimo prvo da je M Sasakijeva prostorna forma. Tada, koristeći formule za operator oblika S^σ cevi $P_\sigma(r)$ u tački p, dobijenih u slučaju B, trećeg poglavlja druge glave, odmah možemo zaključiti da u ovom slučaju dejstvo operatora oblika S^σ čuva ravan $\{\xi, \varphi v\}(p)$ duž φ-geodezijske linije γ, čiji je tangentni vektor horizontalan vektor v, tj., $S^\sigma(p)\varphi v \in \operatorname{span}\{\varphi v, \xi\}$ i $S^\sigma(p)\xi \in \operatorname{span}\{\varphi v, \xi\}$.

Da bismo dokazali drugi deo teoreme, napišimo prvo formule za $S^\sigma(p)\varphi v$ i $S^\sigma(p)\xi$ dobijene korišćenjem relacija (15) i (31) iz druge glave.

$$
\begin{aligned}
(42)\quad S^\sigma(p)\varphi v = \frac{1}{r}\varphi v(m) + \xi(m) - \frac{r}{6}\Big[3\varphi v + 2R_{v\,\varphi v}v + R_{u\,v\,\varphi v\,v}u\Big](m) \\
- \frac{r^2}{12}\Big[6\xi + (\nabla_v R)_{u\,v\,\varphi v\,v}u + 3(\nabla_v R)_{v\,\varphi v}v\Big](m) + O(r^3)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(43)\quad S^\sigma(p)\xi = \frac{1}{r}\xi(m) - \varphi v(m) - \frac{5}{6}r\xi(m) \\
+ \frac{r^2}{12}\Big[2\varphi v + R_{v\,\varphi v\,v\,u}u + R_{v\,\varphi v}v\Big](m) + O(r^3)\,.
\end{aligned}
$$

Sada, $S^\sigma(p)\varphi v$ pripada paralelnoj ravni $\{\xi(p), \varphi v(p)\}$ ako i samo ako je

$$g(S^\sigma(p)\varphi v, x(r)) = 0$$

za sve paralelne vektore x koji su normalni na tu ravan duž φ-geodezijske linije γ. Koristeći relaciju (42), odavde sledi relacija

$$(44)\qquad \Big(2\,R_{v\,\varphi v\,v\,x} + R_{v\,\varphi v\,v\,u}g(u,x)\Big)(m) = 0$$

za svaku tačku $m \in M$, sve horizontalne vektore u i sve horizontalne vektore v normalne na u i φu u tački m. Dalje, kako je u normalno na ξ i φv u m, posle zamene x sa u u relaciji (39), dobijamo $R_{v\,\varphi v\,v\,u}(m) = 0$. Tada iz relacije (44) sledi da je $R_{v\,\varphi v\,v\,x}(m) = 0$ i tada, kako je $R_{v\,\varphi v\,v\,\xi} = 0$, zaključujemo da je $R_{v\,\varphi v}v$ proporcionalno φv. Konačno, koristeći Teoremu 3.7. iz prvog poglavlja, zaključujemo da je M Sasakijeva prostorna forma.

Da bismo završili dokaz teoreme, dovoljno je koristiti relaciju (43) i ponoviti postupak.

Teorema 9. *Neka je $(M^{2n+1}, \varphi, \eta, \xi, g)$ Sasakijeva mnogostrukost dimenzije ≥ 5. Tada je, uz gore navedene dogovore, M Sasakijeva prostorna forma ako i samo ako su, za svako v i svaku dovoljno malu φ-geodezijsku cev $P_\sigma(r)$, integralne krive vektora φv, geodezijske linije na ovim cevima.*

Dokaz:

Neka je M Sasakijeva mnogostrukost i označimo sa $\widetilde{\nabla}$ indukovanu Rimanovu koneksiju na $P_\sigma(r)$. Tada su integralne krive od φv geodezijske linije ako i samo ako je

$$\widetilde{\nabla}_{\varphi v}(\varphi v) = 0\,,$$

tj., ako i samo ako je

$$g\left(\nabla_{\varphi v}(\varphi v), X\right) = 0$$

za sve vektore X tangentne na cev $P_\sigma(r)$. Koristeći relacije (52)-(54), (55) i (71) iz prve glave, odmah primećujemo da je to ekvivalentno sledećem uslovu:

$$g\left(S^\sigma(p)\varphi v, \varphi X\right) = 0\,.$$

Odavde sledi da su integralne krive vektora φv geodezijske linije na cevima $P_\sigma(r)$ ako i samo ako $S^\sigma(p)\varphi v$ pripada ravni $\{\xi, \varphi v\}(p)$ i obrnuto, pa teorema sledi iz Teoreme 8.

Primedba. Primetimo takođe da nije teško dokazati, kada je $\dim M \geq 5$, da Sasakijeva mnogostrukost ima konstantnu φ-sekcionu krivinu ako i samo ako vektorsko polje φv (tj. $\varphi\frac{\partial}{\partial r}$) na dovoljno maloj cevi $P_\sigma(r)$ zadovoljava Kilingovu jednačinu u tačkama $p = \exp_m(rv)$, za svako $m \in M$ i sve v i uz gore navedene dogovore za vektor v.

Sledeća teorema daje još jednu karakterizaciju lokalno φ-simetričnih prostora koristeći krivinu $\kappa^\sigma(p)$. Naime, posmatrajmo geodezijsku liniju cevi $P_\sigma(r)$, čiji je tangentni vektor φv u tački $p = \exp_m(rv)$, pri čemu je $v(m) \perp \varphi u(m)$, $v(m) \perp u(m)$, $m = \sigma(t)$.. Njena krivina $\kappa^\sigma(p)$ u tački $p = \exp_{\sigma(t)}(rv)$ definisana je relacijom (4) u ovoj glavi. Koristeći ovu funkciju i φ-geodezijsku simetriju s_m sa centrom u tački $m \in M$, dobijamo sledeću teoremu:

Teorema 10. *Neka je $(M^{2n+1}, \varphi, \eta, \xi, g)$ Sasakijeva mnogostrukost. Tada je, uz gore navedene dogovore, M lokalno φ-simetričan prostor ako i samo ako važi*

$$\kappa^\sigma(p) = \kappa^\sigma(s_m(p))\,, \quad p = \exp_m(rv)\,, \tag{45}$$

za svaku tačku $m \in M$, sve horizontalne vektore v i svako dovoljno malo r.

Dokaz:

Prvo, ako je M lokalno φ-simetrična mnogostrukost, koristeći Teoremu 3.13. iz prve glave, s_m je lokalni automorfizam Sasakijeve strukture (φ, η, ξ, g), pa važi relacija (45).

Dokažimo da važi i obrnuto, tj. okarakterišimo lokalno φ-simetrične prostore. Koristeći relacije (42) i (45), dobijamo da umesto relacije (4) važi relacija

$$\kappa^{\sigma}(p) = \frac{1}{r} - 3r + \frac{8r}{3} R_{v\,\varphi v\,v\,\varphi v}(m) - \frac{r^2}{4} (\nabla_v R)_{v\,\varphi v\,v\,\varphi v}(m) + O(r^3)\,. \tag{46}$$

Tada iz relacija (45) i (46) sledi relacija

$$(\nabla_v R)_{v\,\varphi v\,v\,\varphi v}(m) = 0$$

za sve horizontalne vektore v normalne na u i φu u tački m i za svaku tačku $m \in M$. Sada, kako horizontalan vektor u može biti izabran proizvoljno, to rezultat sledi korišćenjem Teoreme 3.12. iz prve glave.

Teorema 11. *Neka je $(M^{2n+1}, \varphi, \eta, \xi, g)$ Sasakijeva mnogostrukost dimenzije ≥ 5. Tada je, uz gore navedene dogovore, M Sasakijeva prostorna forma ako i samo ako, za svaku dovoljno malu φ-geodezijsku cev $P_\sigma(r)$, $Q^\sigma(p)\varphi v$ (ili $Q^\sigma(p)\xi$, respektivno) pripada ravni $\{\xi, \varphi v\}(p)$ za svako $m \in M$ i sve v, pri čemu je $p = \exp_m(rv)$.*

Dokaz:

Dokažimo prvo da je uslov dovoljan. Dakle, neka je $P_\sigma(r)$ φ-geodezijska cev opisana na početku i neka je $\{E_1, \ldots, E_n\}$ ortonormirana baza paralelna duž γ i definisana u slučaju B, trećeg poglavlja druge glave ovog rada. Tada, koristeći relacije (16) i (31), iz druge glave, dobijamo da važe relacije

$$
\begin{aligned}
Q^\sigma(p)\varphi v = {} & \frac{2n-2}{r^2}\varphi v(m) + \frac{2n-2}{r}\xi(m) + \Big\{ Q\varphi v - \frac{2n}{3} R_{v\varphi v} v \\
& - \frac{n}{3} R_{v\varphi vvu} u - \Big[n-1 + \frac{1}{3}\left(\rho_{vv} + 2R_{vuvu}\right)\Big] \varphi v \Big\}(m) \\
& + r\Big\{ \frac{1}{3}(3n+1 - \rho_{vv} - 2R_{vuvu})\xi + (\nabla_v Q)\,\varphi v - \frac{2n+1}{4}\left(\nabla_v R\right)_{v\,\varphi v} v \\
& - \frac{2n+1}{12}\left(\nabla_v R\right)_{v\varphi vvu} u - \frac{1}{4}\Big[(\nabla_v \rho)_{vv} + (\nabla_v R)_{vuvu} \Big] \varphi v \Big\}(m) \\
& + r^2 \Big\{ \frac{1}{2} Q\varphi v - \frac{2n+3}{12} R_{v\varphi v} v + \frac{1}{2}\left(\nabla^2_{vv} Q\right)\varphi v - \frac{n+1}{5}\left(\nabla^2_{vv} R\right)_{v\,\varphi v} v \\
& + \frac{1}{9}\rho_{vv} R_{v\varphi v} v + \frac{2}{9} R_{vuvu} R_{v\varphi v} v - \frac{n+1}{18} R_{v\varphi vvu} R_{vu} v \\
& - \frac{2n+2}{45} R_{vR_{v\varphi v}v} v + \Big[\frac{2-17n}{12} + \frac{1}{6}\left(\rho_{vv} + 2R_{vuvu}\right) - \frac{1}{10}\left(\nabla^2_{vv}\rho\right)_{vv} \\
& - \frac{1}{15}\left(\nabla^2_{vv} R\right)_{vuvu} - \frac{1}{3} R^2_{vuvu} - \frac{2}{15}\sum_{\lambda=3}^{2n+1} R^2_{v\lambda vu} - \frac{1}{45}\sum_{\lambda,\mu=3}^{2n+1} R^2_{v\lambda v\mu}\Big] \varphi v \\
& - \frac{1}{4}\Big[(\nabla_v \rho)_{vv} + (\nabla_v R)_{vuvu} \Big]\xi + \Big[-\frac{1}{12} R_{v\varphi vvu} \\
& - \frac{n+1}{20}\left(\nabla^2_{vv} R\right)_{v\varphi vvu} + \frac{1}{18}\rho_{vv} R_{v\varphi vvu} - \frac{27n+7}{180} R_{vuvu} R_{v\varphi vvu} \\
& - \frac{7n+7}{180}\sum_{\lambda=3}^{2n+1} R_{v\varphi vv\lambda} R_{v\lambda vu}\Big] u \Big\}(m) + O(r^3)\,,
\end{aligned}
\tag{47}
$$

$$
\begin{aligned}
Q^\sigma(p)\xi = {} & \frac{2n-2}{r^2}\xi(m) - \frac{2n-2}{r}\varphi v(m) + \frac{1}{3}\Big(n + 3 - \rho_{vv} - 2R_{vuvu}\Big)\xi(m) \\
& + r\Big\{ \frac{2n-3}{12} R_{v\,\varphi v} v + \frac{2n-1}{12} R_{v\varphi vvu} u + \Big[-\frac{14n+1}{12} + \frac{1}{3}\big(\rho_{vv} \\
& + 2R_{vuvu}\big)\Big]\varphi v - \frac{1}{4}\Big[(\nabla_v \rho)_{vv} + (\nabla_v R)_{vuvu} \Big]\xi \Big\}(m) \\
& + r^2 \Big\{ (\nabla_v Q)\,\varphi v - \frac{2n+2}{5}\left(\nabla_v R\right)_{v\,\varphi v} v - \frac{n+1}{10}\left(\nabla_v R\right)_{v\,\varphi v\,v\,u} u \\
& + \Big[\frac{5}{18}\rho_{vv} - \frac{113n+23}{180} + \frac{5}{9} R_{vuvu} - \frac{1}{10}\left(\nabla^2_{vv}\rho\right)_{vv} - \frac{1}{15}\left(\nabla^2_{vv} R\right)_{vuvu} \\
& - \frac{1}{3} R^2_{vuvu} - \frac{2}{15}\sum_{\lambda=3}^{2n+1} R^2_{v\lambda vu} - \frac{1}{45}\sum_{\lambda,\mu=3}^{2n+1} R^2_{v\lambda v\mu}\Big]\xi \Big\}(m) + O(r^3)\,.
\end{aligned}
\tag{48}
$$

Posmatrajmo prvo dejstvo operatora Q^σ na φv i neka je x paralelan vektor normalan na paralelnu ravan razapetu sa $\xi(p)$ i $(\varphi v)(p)$ duž geodezijske linije

$\gamma : r \mapsto \exp_m(rv)$. Tada $Q^\sigma(p)\,\varphi v$ pripada ovoj ravni ako i samo ako je

$$g\big(Q^\sigma(p)\,\varphi v, x(p)\big) = 0$$

za sve ovakve vektore x. Dakle, koristeći relaciju (47), dobijamo sledeće neophodne uslove:

$$3\,g\,(Q\varphi v, x)\,(m) = \Big(2n\,R_{v\,\varphi v\,v\,x} + n\,R_{v\,\varphi v\,v\,u}\,g(u,x)\Big)(m)\,, \tag{49}$$

$$\begin{aligned} 12\,g\Big((\nabla_v Q)\,\varphi v, x\Big)(m) = (2n+1)\,\Big(&3\,(\nabla_v R)_{v\,\varphi v\,v\,x} \\ &+ (\nabla_v R)_{v\,\varphi v\,v\,u}\,g(u,x)\Big)(m)\,, \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned} &\Big\{\frac{1}{2}\,g\,(Q\varphi v, x) + \frac{1}{2}\,g\Big((\nabla^2_{vv} Q)\,\varphi v, x\Big) - \frac{2n+3}{12} R_{v\,\varphi v\,v\,x} \\ &-\frac{n+1}{5}\,(\nabla^2_{vv} R)_{v\,\varphi v\,v\,x} + \frac{1}{9}\rho_{vv} R_{v\,\varphi v\,v\,x} + \frac{2}{9} R_{uvuv} R_{v\,\varphi v\,v\,x} - \frac{n+1}{18} R_{v\,\varphi v\,v\,u} R_{vuvx} \\ &-\frac{2n+2}{45} R_{v\,R_{v\,\varphi v}\,v\,v\,x}\Big\}(m) = \Big\{\Big(\frac{1}{6} R_{v\,\varphi v\,v\,u} + \frac{n+1}{20}\,(\nabla^2_{vv} R)_{v\,\varphi v\,v\,u} - \frac{1}{18}\rho_{vv} R_{v\,\varphi v\,v\,u} \\ &\qquad + \frac{27n+7}{180} R_{uvuv} R_{v\,\varphi v\,v\,u} + \frac{7n+7}{180} \sum_{\lambda=3}^{2n+1} R_{v\,\varphi v\,v\,\lambda} R_{v\cdot\lambda\,v\,u}\Big)\,g(u,x)\Big\}(m)\,. \end{aligned} \tag{51}$$

Diferenciranjem relacije (49) dobijamo relaciju

$$3\,g\Big((\nabla_v Q)\;\varphi v, x\Big)(m) \;=\; n\,\Big(2\,(\nabla_v R)_{v\,\varphi v\,v\,x} + (\nabla_v R)_{v\,\varphi v\,v\,u}\;g(u,x)\Big)(m)\,. \tag{52}$$

Sada, koristeći relaciju (50), iz prethodne formule sledi relacija

$$(3-2n)\;(\nabla_v R)_{v\,\varphi v\,v\,x}\,(m) = (2n-1)\,\Big((\nabla_v R)_{v\,\varphi v\,v\,u}\;g(u,x)\Big)(m)\,. \tag{53}$$

Kako je vektor u normalan na ξ i φv u tački m, zamenjujući vektor x sa u u poslednjoj relaciji, dobijamo relaciju

$$(\nabla_v R)_{v\,\varphi v\,v\,u}\,(m) = 0\,. \tag{54}$$

Takođe, koristeći poslednju relaciju i relaciju (53) dobijamo da važi relacija

$$(\nabla_v R)_{v\,\varphi v\,v\,x}\,(m) = 0\,. \tag{55}$$

Formule lokalanog raslojavanja (76) i (83) (iz prve glave), pokazuju da je relacija (55) ekvivalentna relaciji

(56)
$$\left(\overline{\nabla}_w \overline{R}\right)_{w\,Jw\,w\,y}(\bar{m}) = 0\,,$$

pri čemu je $v = w^*$, $x = y^*$, $\bar{m} = \pi(m)$, za svaki (jedinični) vektor w normalan na Jy.

Dalje, koristićemo metodu integracije (kao u Teoremi 4), umesto metodu linearizacije i kontrakcije. Neka je $\bar{m} = \pi(m) \in \mathcal{B}$, pri čemu je $\mathcal{B}$ bazna mnogostrukost lokalnog raslojenja $\mathcal{U} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$, $m \in \mathcal{U}$. Dalje, neka je

$$w = \sum_{i=1}^{2n} a_i\, e_i$$

jediniñi vektor tangentnog prostora $\mathcal{B}_{\bar{m}}$, pri čemu je $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ ortonormirana baza za $\mathcal{B}_{\bar{m}}$. Dalje, stavljajući

(57)
$$H_{i\,j\,k\,l} = \left(\overline{\nabla}_{e_i} \overline{R}\right)_{e_j\,Je_k\,e_l\,y}\,,$$

$H_{w\,w\,w\,w}$ možemo posmatrati kao funkciju na jediničnoj sferi $S^{2n-1}(1) \subset \mathcal{B}_{\bar{m}}$. Tada važi relacija

(58)
$$\int\limits_{S^{2n-1}(1)} H_{w\,w\,w\,w}(\bar{m})dw = \sum_{i,j,k,l=1}^{2n} H_{ijkl}(\bar{m}) \int\limits_{S^{2n-1}(1)} a_i\, a_j\, a_k\, a_l\, dw\,.$$

Koristeći sada relacije (56), (57), (58) za $\{y\}^{\perp}$ i dobro poznate formule integracije za desnu stranu relacije (58) ([20],[39]), dobijamo da važi relacija

(59)
$$2\,\overline{\nabla}_y \bar{\tau} - 7\,\left(\overline{\nabla}_y \bar{\rho}\right)(y, y) + 3\left(\overline{\nabla}_y \overline{R}\right)_{y\,Jy\,y\,Jy} = 0$$

za sve jedinične vektore y iz $\mathcal{B}_{\bar{m}}$.

Dalje, neka je $w \in \{y, Jy\}^{\perp}$. Tada iz relacije (56) sledi sledeća relacija

(60)
$$\left(\overline{\nabla}_{Jw} \overline{R}\right)_{Jw\,w\,Jw\,y} = 0\,,$$

ili, ekvivalentno, koristeći Kelerov i drugi Bjankijev identitet,

(61)
$$\left(\overline{\nabla}_{Jy} \overline{R}\right)_{Jw\,w\,Jw\,w} + \left(\overline{\nabla}_w \overline{R}\right)_{Jw\,w\,y\,w} = 0\,.$$

Sada, koristeći Kelerov identitet, iz relacija (56) i (61) sledi relacija

$$(62) \qquad \left(\overline{\nabla}_y \overline{R}\right)_{w\,Jw\,w\,Jw} = 0\,,$$

za proizvoljno $y \in \{w, Jw\}^{\perp}$. Dalje, integracijom poslednje relacije po jediničnoj sferi $S^{2n-3}(1)$ u $\{y, Jy\}^{\perp} \subset \mathcal{B}_{\bar{m}}$, dobijamo relaciju

$$(63) \qquad \overline{\nabla}_y \overline{\tau} - 4\,\left(\overline{\nabla}_y \overline{\rho}\right)(y,y) + 2\,\left(\overline{\nabla}_y \overline{R}\right)_{y\,Jy\,y\,Jy} = 0\,.$$

Tada iz relacija (59) i (63) sledi relacija

$$(64) \qquad \overline{\nabla}_y \overline{\tau} - 2\,\left(\overline{\nabla}_y \overline{\rho}\right)(y,y) = 0$$

za bilo koji jedinični vektor y, tj., važi relacija

$$(65) \qquad G(y,y)\,\overline{\nabla}_y \overline{\tau} - 2\,\left(\overline{\nabla}_y \overline{\rho}\right)(y,y) = 0$$

za proizvoljan vektor y. Linearizacijom poslednje relacije dobijamo relaciju

$$(66) \qquad G(t,t)\,\overline{\nabla}_z \overline{\tau} + 2\,G(t,z)\,\overline{\nabla}_t \overline{\tau} - 2\left\{\left(\overline{\nabla}_z \overline{\rho}\right)(t,t) + 2\,\left(\overline{\nabla}_t \overline{\rho}\right)(t,z)\right\} = 0$$

i kako je $\dim M = 2n+1 \geq 5$, to kontrakcijom dobijamo

$$\overline{\nabla}_z \overline{\tau} = 0\,.$$

Konačno, koristeći relacije (63) i (64), iz poslednje relacije sledi relacija

$$(67) \qquad \left(\overline{\nabla}_y \overline{R}\right)_{y\,Jy\,y\,Jy} = 0\,,$$

za sve jedinične vektore y iz $\mathcal{B}_{\bar{m}}$. Iz Teoreme 2.12. iz prve glave, tada sledi da je $\mathcal{B}$ lokalno hermitski simetričan prostor i koristeći Teoremu 3.11. iz prve glave, zaključujemo da je M lokalno φ-simetričan prostor.

Dalje, kako je vektor u normalan na ξ i φv u tački m, zamenjujući x sa u u relaciji (49), dobijamo da važi relacija

$$(68) \qquad g\,(Q\varphi v, u)\,(m) \;=\; n\,R_{v\,\varphi v\,v\,u}(m)\,.$$

Koristeći ovo, iz relacije (49) sledi relacija

$$(69) \qquad 3\,g\,(Q\varphi v, x)\,(m) \;=\; \Big(2n\,R_{v\,\varphi v\,v\,x} + g\,(Q\varphi v, u)\;g(u,x)\Big)(m)\,.$$

S druge strane, koristeći relacije (54) i (55), relacija (52) se svodi na relaciju

$$g\Big((\nabla_v Q)\ \varphi v, x\Big)(m) = 0. \tag{70}$$

Dalje, kako je $Q\,\xi = 2n\,\xi$, iz relacija (69) i (70) sledi relacija

$$\left\{\begin{aligned} 3\,g\left((\nabla_v Q)\,\xi, x\right)(m) &= \Big(2n\, R_{v\,\varphi v\,v\,x} + g\left(Q\,\varphi v, u\right)\, g(u,x)\Big)(m), \\ 3\,g\left((\nabla^2_{vv} Q)\varphi v, x\right)(m) &= -\Big(2n\, R_{v\,\varphi v\,v\,x} + g\left(Q\,\varphi v, u\right)\, g(u,x)\Big)(m). \end{aligned}\right. \tag{71}$$

Dalje, kako je x paralelan vektor normalan na paralelnu ravan razapetu sa $\xi(p)$ i $(\varphi v)(p)$ duž geodezijske linije $\gamma : r \mapsto \exp_m(rv)$, to važi sledeća formula

$$(\nabla_v R)_{v\,\xi\,v\,x}(m) = R_{v\,\varphi v\,v\,x}(m). \tag{72}$$

Sada, koristeći relacije (55) i (72), dobijamo da važi relacija

$$\Big(\nabla^2_{vv} R\Big)_{v\,\varphi v\,v\,x}(m) = -R_{v\,\varphi v\,v\,x}(m). \tag{73}$$

Kako je vektor u normalan na ξ i φv u tački m, to koristeći relacije (68), (71), (72) i (73), dobijamo da važi relacija

$$\left\{\begin{aligned} (\nabla_v R)_{v\,\xi\,v\,u}(m) &= R_{v\,\varphi v\,v\,u}(m), \\ \Big(\nabla^2_{vv} R\Big)_{v\,\varphi v\,v\,u}(m) &= -R_{v\,\varphi v\,v\,u}(m), \\ g\left((\nabla^2_{vv} Q)\varphi v, u\right)(m) &= -n\, R_{v\,\varphi v\,v\,u}(m). \end{aligned}\right. \tag{74}$$

Konačno, koristeći poslednju relaciju i relacije (51) i (68), sa $x = u$, dobijamo relaciju

$$\begin{aligned} \Big\{ R_{v\varphi v v u}\Big[\frac{n-2}{12} + \frac{1}{6}\rho_{vv} + \frac{23-37n}{180} R_{vuvu}\Big] - \frac{7n+7}{180} \sum_{\lambda=3}^{2n+1} R_{v\varphi v v\lambda} R_{v\lambda v u} \\ - \frac{2n+2}{45} R_{v R_{v\,\varphi v} v\, v\, u}\Big\}(m) = 0. \end{aligned} \tag{75}$$

Tada, koristeći relacije (49), (51), (68), (71), (73), (74) i (75), dobijamo da važi relacija

$$\begin{aligned} &\frac{2n-3}{60} R_{v\,\varphi v\,v\,x} + \frac{1}{9}\rho_{vv} R_{v\,\varphi v\,v\,x} + \frac{2}{9} R_{vuvu} R_{v\,\varphi v\,v\,x} \\ &- \frac{n+1}{18} R_{v\,\varphi v\,v\,u} R_{vuvx} - \frac{2n+2}{45} R_{v\,R_{v\,\varphi v} v\,x} + \Big[\frac{3-2n}{60} R_{v\,\varphi v\,v\,u} \\ &- \frac{1}{9}\rho_{vv} R_{v\,\varphi v\,v\,u} + \frac{n-3}{18} R_{vuvu} R_{v\,\varphi v\,v\,u} + \frac{2n+2}{45} R_{v\,R_{v\,\varphi v} v\,v\,u}\Big]\, g(u,x) = 0. \end{aligned} \tag{76}$$

S druge strane, koristeći relaciju (69), dobijamo (uz pomoć formula za lokalno raslojavanje (76), (80) i (81) iz prve glave), da na prostoru $(\mathcal{B}, G, J)$ važi sledeća relacija

$$3\, G\left(\overline{Q}\, Jw, y\right) = 2n\, \overline{R}_{w\, Jw\, w\, y} + G\left(\overline{Q}\, Jw, z\right)\, G(z, y)\,, \tag{77}$$

pri čemu je $v = w^*$, $u = z^*$ i $x = y^*$. Prvo ćemo ispitati slučaj kada je $\mathcal{B}$ lokalno ireducibilan prostor. Tada je to Ajnštajnov prostor ([2], [47]) i kako su vektori y i z normalni na Jw u $\bar{m} = \pi(m) \in \mathcal{B}$, to iz relacije (77) sledi relacija

$$\overline{R}_{w\, Jw} w = \zeta\, Jw\,,$$

što znači, korišćenjem Teoreme 2.8. iz prve glave, da prostor $\mathcal{B}$ ima konstantnu holomorfnu sekcionu krivinu, jer je još $\dim \mathcal{B} \geq 4$. Ukoliko je $\mathcal{B}$ lokalno reducibilan prostor, on je lokalno proizvod $\mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_k$ Kelerovih prostora koji su ujedno i Ajnštajnovi ([2], [47]). Za svaki faktor $\mathcal{B}_i$ sa $\dim \mathcal{B}_i \geq 4$, relacija (77) je zadovoljena, pa su svi ovi $\mathcal{B}_i$ kompleksne prostorne forme. Ako je $\dim \mathcal{B}_i = 2$, isti rezultat sledi korišćenjem relacije (67).

Da bismo završili dokaz, primetimo prvo da relaciju (77) možemo zapisati u obliku

$$3\, \overline{Q}\, Jw - 2n\, \overline{R}_{w\, Jw} w - \overline{\rho}(Jw, z) z = \eta\, Jw\,. \tag{78}$$

Projektujući ove vektore na tangentni prostor prvog faktora $\mathcal{B}_1$ dobijamo

$$3\, \left(\overline{Q}\, Jw\right)_1 - 2n\, \left(\overline{R}_{w\, Jw} w\right)_1 - \nu z_1 = \eta (Jw)_1\,, \tag{79}$$

pri čemu je $\nu = \overline{\rho}(Jw, z)$. Kako ovaj faktor ima konstantnu holomorfnu sekcionu krivinu c_1, to važi relacija

$$\left(\overline{Q}\, Jw\right)_1 = \frac{\overline{\tau}_1}{n_1} (Jw)_1\,, \quad \left(\overline{R}_{w\, Jw} w\right)_1 = (c_1 \cos^2 \alpha_1)(Jw)_1 \tag{80}$$

pri čemu je $G(w_1, w_1) = \cos^2 \alpha_1$. Ovde je $n_1 = \dim \mathcal{B}_1$ i $\overline{\tau}_1$ označava skalarnu krivinu prostora $\mathcal{B}_1$, tj.,

$$4\, \overline{\tau}_1 = n_1\, (n_1 + 2)\, c_1\,. \tag{81}$$

Korišćenjem relacija (80) i (81), iz relacije (79) sledi relacija

$$\frac{3}{4} (n_1 + 2) c_1\, (Jw)_1 - 2n c_1 \cos^2 \alpha_1\, (Jw)_1 - \nu\, z_1 = \eta\, (Jw)_1\,. \tag{82}$$

Slično, projektovanjem vektora iz relacije (78) na tangentni prostor drugog faktora $\mathcal{B}_2$, dobijamo

$$\frac{3}{4}(n_2+2)c_2\,(Jw)_2 - 2nc_2\cos^2\alpha_2\,(Jw)_2 - \nu\, z_2 = \eta\,(Jw)_2\,. \tag{83}$$

Ovde je $n_2 = \dim\mathcal{B}_2$, $\overline{\tau}_2$ označava skalarnu krivinu prostora $\mathcal{B}_2$ i $G(w_2,w_2) = \cos^2\alpha_2$. Kako horizontalni vektori u i v (normalni na φu u m) mogu biti izabrani proizvoljno, to koristeći relacije (82) i (83) dobijamo da važi relacija

$$c_1 + c_2 = 0\,. \tag{84}$$

Konačno, koristićemo relaciju (51) da dokažemo da je $c_1 = c_2 = 0$. Prvo primetimo da se relacija (76) može zapisati u obliku

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{6n-5}{36} + \frac{1}{9}\overline{\rho}_{ww} + \frac{2}{9}\overline{R}_{zwzw}\Big)\overline{R}_{w\,Jw}w - \frac{n+1}{18}\overline{R}_{w\,Jw\,w\,z}\overline{R}_{wz}w\\ &-\frac{2n+2}{45}\overline{R}_{w\,\overline{R}_{w\,Jw}w}w + \Big(\frac{5-6n}{36}\overline{R}_{w\,Jw\,w\,z} - \frac{1}{9}\overline{\rho}_{ww}\,\overline{R}_{w\,Jw\,w\,z}\\ &+\frac{n-3}{18}\overline{R}_{zwzw}\,\overline{R}_{w\,Jw\,wz} + \frac{2n+2}{45}\overline{R}_{w\,\overline{R}_{w\,Jw}w\,w\,z}\Big)\,z = \zeta\,Jw\,,\end{aligned} \tag{85}$$

koristeći formule lokalnog raslojavanja (76), (80) i (81) iz prve glave, pri čemu je $v = w^*$ i $u = z^*$.

Dalje, množeći relaciju (85) sa Jz, dobijamo relaciju

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{6n-5}{36} + \frac{1}{9}\overline{\rho}_{ww} + \frac{2}{9}\overline{R}_{zwzw}\Big)\overline{R}_{w\,Jw\,w\,Jz} - \frac{n+1}{18}\overline{R}_{w\,Jw\,w\,z}\overline{R}_{w\,z\,w\,Jz}\\ &\qquad -\frac{2n+2}{45}\overline{R}_{w\,\overline{R}_{w\,Jw}w\,w\,Jz} = 0\,.\end{aligned} \tag{86}$$

Neka je sada $w \in \{y, Jy\}^\perp$. Tada iz relacije (86) takođe sledi relacija

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{6n-5}{36} + \frac{1}{9}\overline{\rho}_{ww} + \frac{2}{9}\overline{R}_{z\,Jw\,z\,Jw}\Big)\overline{R}_{Jw\,w\,Jw\,Jz}\\ &-\frac{n+1}{18}\overline{R}_{Jw\,w\,Jw\,z}\overline{R}_{Jw\,z\,Jw\,Jz} - \frac{2n+2}{45}\overline{R}_{Jw\,\overline{R}_{Jw\,w}Jw\,Jw\,Jz} = 0\,,\end{aligned} \tag{87}$$

ili, ekvivalentno, uzimajući u obzir Kelerov identitet,

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{6n-5}{36} + \frac{1}{9}\overline{\rho}_{ww} + \frac{2}{9}\overline{R}_{Jz\,w\,Jz\,w}\Big)\overline{R}_{w\,Jw\,w\,z} - \frac{n+1}{18}\overline{R}_{Jw\,w\,Jw\,z}\overline{R}_{w\,Jz\,w\,z}\\ &\qquad +\frac{2n+2}{45}\overline{R}_{Jw\,\overline{R}_{Jw\,w}Jw\,Jw\,Jz} = 0\,.\end{aligned} \tag{88}$$

Sada, koristeći relacije (85), (88) i Kelerov identitet, dobijamo relaciju

$$
\begin{aligned}
(89) \qquad & \Big(\frac{6n-5}{36} + \frac{1}{9}\overline{\rho}_{ww} + \frac{2}{9}\overline{R}_{zwzw}\Big)\,\overline{R}_{w\,Jw}w - \frac{n+1}{18}\overline{R}_{w\,Jw\,w\,z}\overline{R}_{wz}w \\
& -\frac{2n+2}{45}\overline{R}_{w\,\overline{R}_{w\,Jw}w}w + \Big(\frac{2}{9}\overline{R}_{w\,Jz\,w\,Jz}\overline{R}_{w\,Jw\,w\,z} - \frac{n+1}{18}\overline{R}_{w\,z\,w\,Jz}\,\overline{R}_{w\,Jw\,w\,Jz} \\
& + \frac{n-3}{18}\overline{R}_{zwzw}\,\overline{R}_{w\,Jw\,w\,z}\Big)\,z \;=\; \zeta\, Jw\,.
\end{aligned}
$$

Konačno, posmatrajući ponovo faktore $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$, i koristeći relacije (84) i (89), dobijamo da je

$$c_1 = c_2 = 0\,.$$

Koristeći isti postupak i za ostale faktore, zaključujemo da je $\mathcal{B}$ ravan prostor.

Dakle, možemo zaključiti da je $\mathcal{B}$ kompleksna prostorna forma, što, korišćenjem Teoreme 3.8. iz prve glave, znači da je M Sasakijeva prostorna forma. Ovim je prvi deo teoreme dokazan.

Da bismo dokazali drugi deo teoreme, neka $Q^{\sigma}(p)\xi$ pripada ravni razapetoj vektorima $\xi(p)$ i $(\varphi v)(p)$ duž φ-geodezijske linije $\gamma\,:\,r\mapsto \exp_m(rv)$. Tada iz relacije (48) sledi relacija

$$
(90) \qquad (2n-3)\,R_{v\,\varphi v\,v\,x}(m) = (1-2n)\,\Big(R_{v\,\varphi v\,v\,u}\,g(u,x)\Big)(m)
$$

za sve horizontalne vektore u, v, takve da je $u(m)\perp \varphi v(m)$, $u(m)\perp v(m)$ i sve horizontalne vektore x normalne na φv i ξ. Stavljajući $x=u$ u poslednju relaciju, dobijamo

$$R_{v\,\varphi v\,v\,x}(m) = 0\,,$$

za sve horizontalne vektore v i sve horizontalne vektore x normalne na φv i ξ (kako vektor u može biti izabran proizvoljno). Konačno, odavde sledi da je $R_{v\,\varphi v}v$ proporcionalno sa φv, i tada, korišćenjem Teoreme 3.7. iz prve glave, zaključujemo da je M Sasakijeva prostorna forma.

Da je uslov teoreme neophodan, neposredno sledi iz formula za Ričijev operator ovih φ-geodezijskih cevi na Sasakijevim prostornim formama, dobijenih u slučaju B, trećeg poglavlja, druge glave.

Na kraju, navedimo još jednu karakterizaciju lokalno φ-simetričnih prostora, koristeći Ričijevu krivinu definisanu relacijom (37) u ovom poglavlju. Koristeći relacije (31) (iz druge glave) i (47) (iz ove glave), dobijamo da se krivina

$\rho^\sigma(\varphi v, \varphi v)(p)$ može izraziti sledećom formulom:

$$(91)\quad \rho^\sigma(\varphi v, \varphi v)(p) = \frac{2n-2}{r^2} + \frac{2}{3}\Big(\rho_{vv} - 3R_{vuvu} - nR_{v\,\varphi v\,v\,\varphi v}\Big)(m)$$
$$- \frac{r}{4}\Big[5\,(\nabla_v\rho)_{vv} + (2n+1)\,(\nabla_v R)_{v\,\varphi v\,v\,\varphi v} + (\nabla_v R)_{vuvu}\Big](m) + O(r^2)\,.$$

Tada imamo sledeći teoremu:

Teorema 12. *Neka je $(M^{2n+1}, \varphi, \eta, \xi, g)$ Sasakijeva mnogostrukost dimenzije ≥ 5. Tada je, uz gore navedene dogovore, M lokalno φ-simetričan prostor ako i samo ako za svaku dovoljno malu φ-geodezijsku cev $P_\sigma(r)$ važi*

$$(92)\qquad \rho^\sigma(\varphi v, \varphi v)(\exp_m(rv)) = \rho^\sigma(\varphi v, \varphi v)(\exp_m(-rv))$$

za svaku tačku $m \in M$ i sve horizontalne vektore v.

Dokaz:

Pretpostavimo prvo da važi relacija (92). Tada iz relacije (91) sledi relacija

$$(93)\qquad (2n+1)\;(\nabla_v R)_{v\,\varphi v\,v\,\varphi v}\,(m) + (\nabla_v R)_{vuvu}\,(m) + 5\,(\nabla_v\rho)_{vv}\,(m) = 0$$

i koristeći ponovo tehniku lokalnog raslojavanja, uz prethodne dogovore, dobijamo da važi relacija

$$(94)\quad (2n+1)\;\big(\overline{\nabla}_w\overline{R}\big)_{w\,\varphi w\,w\,\varphi w}\,(m) + \big(\overline{\nabla}_w\overline{R}\big)_{wzwz}\,(m) + 5\,\big(\overline{\nabla}_w\overline{\rho}\big)_{ww}\,(m) = 0\,.$$

Stavimo $w = \alpha x + \beta y$ u relaciji (94) i napišimo koeficijent uz $\alpha^3\beta^2$. Koristeći Kelerov i Bjankijeve identitete, dobijamo relaciju:

$$\begin{aligned}
&(2n+1)\Big\{\big(\overline{\nabla}_x\overline{R}\big)_{xyxy} + 5\,\big(\overline{\nabla}_x\overline{R}\big)_{yJxyJx} - 2\,\big(\overline{\nabla}_{Jx}\overline{R}\big)_{yJxyx}\Big\} + \big(\overline{\nabla}_x\overline{R}\big)_{xzxz}\,G(y,y)\\
&+2\Big[\big(\overline{\nabla}_y\overline{R}\big)_{xzxz} + 2\,\big(\overline{\nabla}_x\overline{R}\big)_{zxzy}\Big]\,G(x,y) + \Big[\big(\overline{\nabla}_x\overline{R}\big)_{yzyz} + 2\,\big(\overline{\nabla}_y\overline{R}\big)_{zxzy}\Big]G(y,y)\\
(95)\qquad &+2\Big\{\big(\overline{\nabla}_x\overline{\rho}\big)_{xx}\,G(y,y) + 2\,\Big[\big(\overline{\nabla}_y\overline{\rho}\big)_{xx} + 2\,\big(\overline{\nabla}_x\overline{\rho}\big)_{xy}\Big]\,G(x,y)\\
&\qquad + \Big[\big(\overline{\nabla}_x\overline{\rho}\big)_{yy} + 2\,\big(\overline{\nabla}_y\overline{\rho}\big)_{xy}\Big]\,G(x,x)\Big\} = 0\,.
\end{aligned}$$

Sada, stavimo $y = e_i\,, i = 1, \ldots, 2n$ (pri čemu je $\{e_i, i = 1, \ldots, 2n\}$ ortonormirana baza bazne mnogostrukosti $\mathcal{B}$) i sumirajmo po i. Tada dobijamo

$$\begin{aligned} &2(n+3)\left(\overline{\nabla}_x\overline{R}\right)_{zxzx} + 2(11n+18)\left(\overline{\nabla}_x\overline{\rho}\right)_{xx} \\ (96)\qquad &+3G(x,x)\left(\overline{\nabla}_x\overline{\rho}\right)_{zz} - 2G(x,x)\left(\overline{\nabla}_z\overline{\rho}\right)_{zx} + 10G(x,x)\overline{\nabla}_x\overline{\tau} = 0\,. \end{aligned}$$

Dalje, stavimo $x = \alpha w + \beta v$ u relaciji (96) i napišimo koeficijent uz $\alpha\beta^2$.

$$\begin{aligned} &2(n+3)\Big[2\left(\overline{\nabla}_v\overline{R}\right)_{zvzw} + 2\left(\overline{\nabla}_w\overline{R}\right)_{zvzv}\Big] + 2(11n+18)\Big[\left(\overline{\nabla}_w\overline{\rho}\right)_{vv} + 2\left(\overline{\nabla}_v\overline{\rho}\right)_{wv}\Big] \\ (97)\qquad &+3\Big[G(v,v)\left(\overline{\nabla}_w\overline{\rho}\right)_{zz} + 2G(v,w)\left(\overline{\nabla}_v\overline{\rho}\right)_{zz}\Big] \\ &-2\Big[G(v,v)\left(\overline{\nabla}_z\overline{\rho}\right)_{zw} + 2G(v,w)\left(\overline{\nabla}_z\overline{\rho}\right)_{zv}\Big] + 10\Big[G(v,v)\overline{\nabla}_w\overline{\tau} + 2G(v,w)\overline{\nabla}_v\overline{\tau}\Big] = 0\,. \end{aligned}$$

Stavljajući $v = e_i\,, i = 1, \ldots, 2n$ i sumirajući po i dobijamo da važi relacija

$$(98)\qquad (7n+15)\left(\overline{\nabla}_w\overline{\rho}\right)_{zz} - 4(n+2)\left(\overline{\nabla}_z\overline{\rho}\right)_{zw} + 2(16n+23)\overline{\nabla}_w\overline{\tau} = 0\,.$$

Ponavljajući isti postupak za vektor z u relaciji (98), dobijamo da važi relacija

$$(99)\qquad \overline{\nabla}_w\overline{\tau} = 0\,.$$

Korišćenjem iste procedure za vektor z u relaciji (96), iz poslednje relacije sledi relacija

$$(100)\qquad \left(\overline{\nabla}_y\overline{\rho}\right)_{yy} = 0\,.$$

Dalje, koristeći relacije (94) i (96) u (98), (99) i (100), dobijamo relaciju

$$(101)\qquad (n+3)\Big[\left(\overline{\nabla}_w\overline{\rho}\right)_{zz} - 4(n+2)\left(\overline{\nabla}_w\overline{R}\right)_{zwzw}\Big] = 0\,.$$

Dalje, stavljajući $w = \alpha u + \beta v$ u poslednju relaciju, koeficijent uz $\alpha^2\beta$ možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} (102)\qquad &G(u,u)\left(\overline{\nabla}_v\overline{\rho}\right)_{zz} + 2G(u,v)\left(\overline{\nabla}_u\overline{\rho}\right)_{zz} = \\ &4(n+2)\Big[2\left(\overline{\nabla}_u\overline{R}\right)_{zuzv} + \left(\overline{\nabla}_v\overline{R}\right)_{zuzu} + \left(\overline{\nabla}_u\overline{R}\right)_{zvzu}\Big] \end{aligned}$$

Stavimo sada $u = e_i\,, i = 1, \ldots, 2n$ i sumirajmo po i. Tada se poslednja relacija, uz pomoć relacija (98) i (99), svodi na relaciju

$$(103)\qquad (n+2)\left(\overline{\nabla}_u\overline{\rho}\right)_{zz} = 0\,.$$

Konačno, koristeći relacije (100), (101) i (103), iz relacije (94) sledi

$$(\overline{\nabla}_w \overline{R})_{w\,Jw\,w\,Jw} = 0\,.$$

Dakle, korišćenjem Teoreme 2.12. iz prve glave, zaključujemo da je $(\mathcal{B}, G, J)$ lokalno hermitski simetričan prostor, pa je, korišćenjem Teoreme 3.11. iz prve glave, lako zaključiti da je $(M^{2n+1}, \varphi, \eta, \xi, g)$ lokalno φ-simetrična Sasakijeva mnogostrukost.

Drugi deo teoreme sledi direktno, korišćenjem Teoreme 3.13. iz prve glave.

LITERATURA

[1] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet, *Le Spectre d'une Varété Riemannienne*, Lecture Notes in Math. 194, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1971.

[2] A. Besse, *Einstein manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[3] D.E. Blair, *Contact manifolds in Riemannian geometry*, Lecture Notes in Mathematics 509, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.

[4] D.E. Blair and B.J. Papantoniou, A characterization of Sasakian space forms by geodesic tubes, *Math. J. Toyama Univ.* 16 (1993), 65-90.

[5] D.E. Blair and L. Vanhecke, Geodesic spheres and Jacobi vector fields in Sasakian space forms, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* Sect. A105 (1987), 17-22.

[6] D.E. Blair and L. Vanhecke, Symmetries and φ-symmetric spaces, *Tôhoku Math. J.* 39 (1987), 373-383.

[7] D.E. Blair and L. Vanhecke, New characterizations of φ-symmetric spaces, *Kodai Math. J.* 10 (1987), 102-107.

[8] D.E. Blair and R.Sharma, Three-dimensional locally symmetric contact metric manifolds, *Boll. Un. Mat. Ital.* Ser. 7, 4A (1990), 385-390.

[9] D.E. Blair and J. Sierra, Five-dimensional locally symmetric contact metric manifolds, preprint.

[10] W. Boothby and H. Wang, On contact manifolds, *Ann. Math.* 68 (1958), 721-734.

[11] P. Bueken, *Reflections and rotations in contact geometry*, doctoral dissertation, Katholieke Universiteit Leuven, 1992.

[12] P. Bueken and L. Vanhecke, Geometry and symmetry on Sasakian manifolds, *Tsukuba Math.J.* 12 (1988), 403-422.

[13] P. Bueken and L. Vanhecke, Harmonic reflections on Sasakian manifolds, *Math. J. Okayama Univ.* 30 (1988), 187-197.

[14] P. Bueken and L. Vanhecke, Isometric reflections on Sasakian space forms, *Proc. VIth Intern. Coll. Differential Geometry, Santiago de Compostela,* (ed. L. Cordero), Universidade de Santiago de Compostela, 1988, 51-59.

[15] P. Bueken and L. Vanhecke, Reflections in K-contact geometry, *Math. Rep. Toyama Univ.* 12 (1989), 41-49.

[16] P. Bueken and L. Vanhecke, Reflections in contact geometry, *Proc. Curvature Geometry Workshop, Lancaster* 1989, (Ed. C. T. J. Dodson), 175-190.

[17] P. Bueken and L. Vanhecke, Rotations and harmonicity in contact geometry, *Rend. Matematica* Ser. 7, 12 (1992), 127-142.

[18] P. Bueken and L. Vanhecke, Reflections with respect to submanifolds in contact geometry, *Arch. Math. (Brno)* 29 (1993), 43-57.

[19] J. Cheeger and D. Ebin, *Comparison theorems in Riemannian Geometry,* North-Holland, Amsterdam 1975.

[20] B.Y. Chen and L. Vanhecke, Differential geometry of geodesic spheres, *J. Reine Angew. Math.* 325 (1981), 28-67.

[21] M. Đorić and L. Vanhecke, Naturally reductive quasi-Kähler manifolds, *C. R. Math. Rep. Sci. Canada* XI(2) (1989), 69-74.

[22] M. Đorić and L. Vanhecke, Almost Hermitian geometry, geodesic spheres and symmetries, *Math. Okayama Univ.* 32 (1990), 187-206.

[23] M. Đorić and L. Vanhecke, A theorem of Archimedes about spheres and cylinders and two-point homogeneous spaces, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 40 (1991), 377-386.

[24] M. Đorić and L. Vanhecke, Geometry of geodesic spheres on Sasakian manifolds, *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino* 49 (1991), 329-357.

[25] M. Đorić and L. Vanhecke, Geometry of tubes about characteristic curves on Sasakian manifolds, *Rend. Circ. Mat. Palermo* XLI (1992), 111-122.

[26] M. Đorić, Geometry of geodesic spheres on Sasakian manifolds, *Zbornik radova Prir.-matem. fakulteta u Kragujevcu*, 16 (1994), 33-40.

[27] M. Đorić, Geometry of tubes about φ-geodesics on Sasakian manifolds,

predato za štampu.

[28] M. Đorić, On characterizations of Sasakian space forms and locally φ-symmetric spaces by φ-geodesic tubes, primljeno za štampu, *Publ. Math-Debrecen*, 46 (1995).

[29] M. Đorić, Characterizations of complex space forms and locally Hermitian symmetric spaces by geodesic tubes, u pripremi.

[30] M. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, IMPA, 1979; *Riemannian geometry*, (Translated by Francis Flaherty), Mathematics: Theory and applications, Birkhäuser, Boston-Berlin, 1992.

[31] S. Gallot, D. Hulin and J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1987.

[32] L. Gheysens, *Riemannse differentiaalmeetkunde van buisvormige omgevingen*, Ph.D. Thesis, Katholieke Universiteit Leuven, 1981.

[33] L. Gheysens and L. Vanhecke, Total scalar curvature of tubes about curves, *Math. Nachr.* 103 (1981), 177-197.

[34] J. C. González Dávila, M. C. González Dávila and L. Vanhecke, Killing-transverzally symmetric spaces, *Proc. Workshop on Recent Topics in Differential Geometry, Puerto de la Cruz* 1990, (Eds. D. Chinea and J. M. Sierra), Secret. Public. Univ. de La Laguna, Serie Informes 32 (1991), 77-88.

[35] P. J. Graham and A. J. Ledger, s-regular manifolds, *Differential Geometry*, Kinokuniya, Tokyo, 1972, 133-144.

[36] A. Gray, Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3, *J. Differential Geometry* 7 (1972), 343-369.

[37] A. Gray, The volume of a small geodesic ball in a Riemannian manifold, *Michigan Math. J.* 20 (1973), 329-344.

[38] A. Gray, Classification des variétés approximativement kählériennes de courbure sectionnelle holomorphe constante, *C. R. Acad. Sci. Paris* 279 (1974), 797-800.

[39] A. Gray and L. Vanhecke, Riemannian geometry as determined by the

volumes of small geodesic balls, *Acta Math.* 142 (1979), 157-198.

[40] A. Gray and L. Vanhecke, The volumes of tubes in a Riemannian manifold, *Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino* 39 (1981), 1-50.

[41] A. Gray and L. Vanhecke, The volume of tubes about curves in a Riemannian manifold, *Proc. London Math. Soc.* 44 (1982), 215-243.

[42] A. Gray, *Tubes*, Addison-Wesley Publ. Co., Reading, (1990).

[43] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press, New York, 1978.

[44] J. Jiménez and O. Kowalski, The classification of φ-symmetric Sasakian manifolds, *Mh. Math.* 115 (1993), 83-98.

[45] T. Kato and K. Motomiya, A study on certain homogeneous spaces, *Tôhoku Math. J.* 21 (1969), 1-20.

[46] S. Kobayashi, Principal fibre bundles with 1-dimensional toroidal group, *Tôhoku Math. J.* 8 (1956), 29-45.

[47] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential geometry*, I,II, Interscience, New York, 1963, 1969.

[48] O. Kowalski, *Generalized symmetric spaces*, Lecture Notes in Mathematics 805, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.

[49] O. Kowalski and S. Węgrzynowski, A classification of five-dimensional φ-symmetric spaces, *Tensor* 46 (1987), 379-386.

[50] A. J. Ledger and L. Vanhecke, Symmetries and locally s-regular manifolds, *Ann. Global Anal. Geom.* 5 (1987), 151-160.

[51] A. J. Ledger and L. Vanhecke, Symmetries on Riemannian manifolds, *Math. Nachr.* 136 (1988), 81-90.

[52] R. Lutz, Quelque remarques historiques et prospectives sur la géométrie de contact, *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, Supplemento al vol.* 58 (1988), 361-393.

[53] K. Motomiya, A study on almost contact manifolds, *Tôhoku Math. J.* 29

(1968), 73-90.

[54] A. Newlander and L. Nirenberg, Complex analytic coordinates in almost complex manifolds, *Ann. Math.* 65 (1957), 391-404.

[55] L. Nicolodi and L. Vanhecke, Rotations and Hermitian symmetric spaces, *Monatsh. Math.* (1990), 279-291.

[56] L. Nicolodi and L. Vanhecke, Isometric and harmonic rotations around a curve, *Illinois J. Math.* 37 (1993), primljeno za štampu.

[57] L. Nicolodi and L. Vanhecke, Rotations on a Riemannian manifold, *Proc. Workshop on Recent Topics in Differential Geometry, Puerto de la Cruz* 1990, (Eds. D. Chinea and J. M. Sierra), Secret. Public. Univ. de La Laguna, Serie Informes 32 (1991), 89-101.

[58] L. Nicolodi and L. Vanhecke, Harmonic and isometric rotations around a submanifold, *Math. J. Okayama Univ.*, primljeno za štampu.

[59] K.Ogiue, On fiberings of almost contact manifolds, *Kōdai Math. Sem. Rep.* 17 (1965), 53-62.

[60] M. Okumura, Some remarks on spaces with a certain contact structure, *Tôhoku Math. J.* 14 (1962), 135-145.

[61] M. Okumura, On infinitesimal conformal and projective transformations of normal contact spaces, *Tôhoku Math. J.* 14 (1962), 398-412.

[62] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, New York, Academic Press, 1983.

[63] B. O'Neill, *Elementary Differential Geometry*, New York, Academic Press, 1966.

[64] B. Reinhart, *Differential Geometry of Foliations*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 99, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1983.

[65] S. Sasaki and Y. Hatakeyama, On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure II, *Tôhoku Math. J.* 13 (1961), 281-294.

[66] S. Sasaki, *Almost contact manifolds* I,II,III, Lecture Notes, Mathematical Institute, Tôhoku University, 1965, 1967,1968.

[67] S.Sekigawa and L.Vanhecke, Symplectic geodesic symmetries on Kähler manifolds,
Quart. J. Math. Oxford 37 (1986), 95-103.

[68] N. Steenrood, *The topology of fiber bundles*, Princeton University Press, Princeton 1951.

[69] T. Takahashi, Sasakian φ-symmetric spaces, *Tôhoku Math. J.* 29 (1977), 91-113.

[70] S. Tanno, Locally symmetric K-contact Riemannian manifolds, *Proc. Japan Acad.* 43 (1967), 581-583.

[71] S. Tanno, The topology of contact Riemannian manifolds, *Illinois J. Math.* 12 (1968), 700-717.q

[72] S. Tanno, Sasakian manifolds with constant φ-holomorphic sectional curvature, *Tôhoku Math. J.* 21 (1969), 501-507.

[73] S. Tanno, Constancy of holomorphic sectional curvature in almost Hermitian manifolds, *Kōdai Math. Sem. Rep.* 25 (1973), 190-201.

[74] Y. Tashiro, On contact structures of hypersurfaces in almost complex manifolds I, *Tôhoku Math. J.* 15 (1963), 62-78.

[75] Ph. Tondeur, *Foliations on Riemannian Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1988.

[76] Ph. Tondeur and L. Vanhecke, Transversally symmetric Riemannian foliations, *Tôhoku Math. J.* 42 (1990), 307-317.

[77] L. Vanhecke and T. J. Willmore, Jacobi fields and geodesic spheres, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* Sect. A 82 (1979), 233-240.

[78] L. Vanhecke and T. J. Willmore, Interaction of spheres and tubes, *Math. Ann.* 263 (1983), 31-42.

[79] L. Vanhecke, *Geometry in normal and tubular neighborhoods*, Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, Supplemento al Vol.58 (1988), 73-176.

[80] L. Vanhecke, Jacobi vector fields and some aspects of the geometry in normal neighborhoods, *Proc. Curvature Geometry Workshop, Lancaster* 1989, (Ed. C. T. J. Dodson), 5-33.

[81] L. Vanhecke, Geometry and symmetry, *Proc. Workshop Advances in Differential Geometry and Topology Torino* 1987, World Scentific Publ. Co., Singapore, 1990, 115-129.

[82] Y. Watanabe, Geodesic symmetries in Sasakian locally φ-symmetric spaces, *Kodai Math. J.* 3 (1980), 48-55.

[83] Y. Watanabe and H. Fujita, A family of homogeneous Sasakian structures on $S^2 \times S^3$, *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada* 10 (1988), 57-61.

[84] K. Yano, *Differential geometry on complex and almost complex spaces*, Pergamon Press, New York, 1965.

[85] K. Yano and M. Kon, *CR submanifolds of Kaehlerian and Sasakian manifolds*, Progress in Mathematics 30, Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart, 1983.

[86] K. Yano and M. Kon, *Structures on manifolds*, Series in Pure Mathematics, 3, World Scientific Publ. Co., . Singapore, 1984.

[87] W. Ziller, The Jacobi equation on naturally reductive compact Riemannian homogeneous spaces, *Comment. Math. Helvetici* 52 (1977), 573-590.