UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

KUREPA JURIJ-ARHIMED

MODELIRANJE PONAŠANJA AUTOMATA U JEDNOJ KLASI LAVIRINATA

(MAGISTARSKI RAD)

25.04.2000 15:00

Komisija:
1. Goran Kilibarda (mentor)
2. Žarko Mijajlović
3. Šćepan Ušćumlić (pred. kom.)
4. Miodrag Živković

1. Vrsta perika AutLav
2. Druge prezentacije
3. Teorema potpunosti

BEOGRAD
MART 2000

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

UVOD

Teorija automata je deo teorije sistema upravljanja [13] , koji proučava matematičke modele pretvarača diskretne informacije , tzv. automate. Pojavila se sredinom dvadesetog veka u vezi sa izučavanjem karakteristika konačnih automata, kao matematičkih modela nervnih sistema i računskih mašina. Konačni automat je neformalno, uređaj koji ima ulazni i izlazni kanal i koji se u svakom trenutku diskretnog vremena nalazi u jednom od konačno mnogo stanja. U svakom diskretnom trenutku, preko ulaznog kanala, automat prima ulazne signale, koji pripadaju nekom konačnom skupu signala. Stanje automata u svakom sledećem trenutku, prema određenom zakonu, menja se u zavisnosti od ulaznog signala i njegovog stanja u prethodnom trenutku. Vrednost izlaznog signala automata u tekućem trenutku je određen njegovim stanjem i ulaznim signalom u tom trenutku.

Proučavanje mogućnosti automata pri preradi ulazne informacije u izlaznu i niz stanja, ne uzimajući u obzir njegovu unutrašnju strukturu rezultiralo, je razvojem teorije apstraktnih automata. Na taj način apstraktni automat može biti zadat pomoću sloga preslikavanja, kojima se opisuje njegovo »spoljašnje« funkcionisanje. Ukoliko se uzima u obzir struktura uređaja, funkcionisanje i veza između njegovih delova dolazi se do pojma konačnog strukturnog automata kao osnovnog objekta proučavanja u teoriji strukturnih automata.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

U teoriji apstraktnih automata razmatraju se različite relacije između ulazne i izlazne informacije i stanja automata, koje se nazivaju ponašanjima automata. Može se izdvojiti nekoliko najvažnijih tipova ponašanja, koja se mogu podesno opisati na modelu apstraktnog automata i čije proučavanje, tim samim, predstavlja određeni sadržaj teorije apstraktnih automata. To su ponašanje automata kao pretvarača i ponašanje automata kao akceptora, a takođe i neke njihove modifikacije kao što su ponašanje automata kao ω-akceptora i ponašanje automata kao prebrojivača.

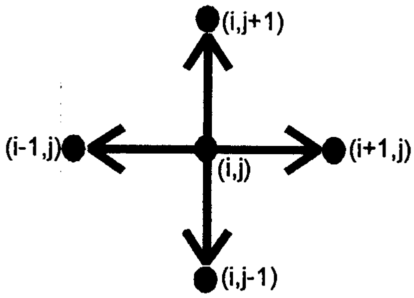
Važna klasa ponašanja automata se dobija prilikom razmatranja njegovog funkcionisanja u različitim »spoljašnjim sredinama« koje, specijalno, mogu biti opisane pomoću konačnog automata. Ovoj klasi ponašanja automata pripada i ponašanje automata u lavirintima.

Proučavanje ponašanja automata u lavirintima započeto je K. Šenonom [14] pedesetih godina ovog veka. Na ovu temu objavljeno je oko stotinu radova u kojima se razmatraju dva osnovna problema: problem analize i problem sinteze. Problem sinteze se sastoji u opisu automata ili kolektiva automata koji obilaze lavirinte iz zadate klase, a problem analize u opisu svih lavirinata, ili lavirinata odgovarajuće klase, koje obilaze zadati automati. Problemima analize i sinteze bliski su problemi prepoznavanja geometrijskih figura, grafova, formalnih jezika i drugih diskretnih sistema.

Neka je $D=\{w,n,e,s\}$, $r\in N$ i G konačan orijentisan povezan graf, čijem je svakom čvoru incidentno r grana. Proizvoljnoj grani p grafa G pridružujemo par $(|p|,<p>)$ iz $D\times\{1,2,\ldots,r\}$. Simbole $|p|$ i $<p>$ nazivamo, redom, smerom i oznakom grane p. Izdvojmo u G čvorove v' i v'' i nazovimo ih početnim i završnim. Neka graf G zadovoljava sledeće uslove:

1) Ako različite grane p_1 i p_2 izlaze iz istog čvora, onda je $|p_1| \neq |p_2|$.

2) Čvorovi grafa G su tačke ravni sa celobrojnim koordinatama pri čemu grana koja izlazi iz čvora sa koordinatama (i,j) ulazi u jedan od sledećih čvorova $(i+1,j)$, $(i,j+1)$, $(i-1,j)$ ili $(i,j-1)$ u zavisnosti od $|p|$, na način kako je to predstavljeno na Slici 1.



Slika 1.

3) Ako je grana p_1 iz čvora v u čvor u, onda iz čvora u vodi grana p_2 u čvor v tako da je ispunjeno $|p_1| = |p_2|^{-1}$, tj. $e^{-1} = w, s^{-1} = n, w^{-1} = e, n^{-1} = s$.

Grafove koji imaju navedene karakteristike nazivamo ravnim pravouglim mozaičnim r-lavirintima ili kratko r-lavirintima. Sa $[v]$ označimo skup grana koje izlaze iz čvora v grafa G i uzmimo da je $\delta(v,G) = \{(|p|, <p>) | p \in [v]\}$.

Konačnim automatom nazivamo petorku $\mathfrak{A} = (A,Q,B,\varphi,\psi)$, gde su A,Q,B – konačni skupovi, koje nazivamo redom, ulazna azbuka, azbuka stanja i izlazna azbuka, $\varphi: Q \times A \to Q$ funkcija prelaska i $\psi: Q \times A \to B$ funkcija izlaska automata. Automat $\mathfrak{A} = (A,Q,B,\varphi,\psi)$, sa izdvojenim početnim stanjem naziva se inicijalni i predstavlja uređenu šestorku $\mathfrak{A}_{q_0} = (A,Q,B,\varphi,\psi,q_0)$.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Neka je $\mathfrak{A}_{q_0}=(A,Q,B,\varphi,\psi,q_0)$, inicijalni automat, gde je A skup svih nepraznih podskupova skupa $D\times\{1,2,\ldots,r\}$, gde su oblika $\{(d_1,e_1),(d_2,e_2),\ldots,(d_k,e_k)\}$, $d_i\neq d_j$ za $i\neq j$, $1\leq k\leq 4$; $B=D\times I_r$, gde je $I_r=\{1,2,\ldots,r\}$ za $r\geq 1$ i $I_0=\{0\}$; ako je $q\in Q$ i $a\in\{(d_1,e_1),(d_2,e_2),\ldots,(d_k,e_k)\}\in A$ onda je $\psi(q,a)=(b_1,b_2)$, $b_1\in\{d_1,d_2,\ldots,d_k\}$.

Ovako definisane automate nazivamo dopustivim za razmatranu klasu r-lavirinata i označavamo sa M_r. Ukoliko takav automat ima p stanja, skup svih takvih automata se označava $M_{r,p}$.

Ponašanjem automata $\mathfrak{A}_{q_0}=(A,Q,B,\varphi,\psi,q_0)$ iz M_r u r-lavirintu G nazivamo niz (v_0,q_0,G_0), $(v_1,q_1,G_1),\ldots$, za koji važi: v_0 je početni čvor lavirinta G, $G_0=G$, $\delta(v_0,G_0)=\psi(q_0,a)$ gde je a skup označenih grana incidentnih sa čvorom v_0; ako je određena trojka (v_i,q_i,G_i) i $\psi(q_i,\delta(v_i,G_i))=(\alpha_i\beta_i)$, onda je v_{i+1} čvor u koji vodi grana iz čvora v_i čiji je pravac α_i, $q_{i+1}=\varphi(q_i,\delta(v_i,G_i))$; G_{i+1} je r-lavirint koji se dobija iz lavirinta G_i zamenom oznake grane koja vodi iz v_i u v_{i+1} sa β_i. Niz $v_0,v_1,v_2,\ldots$ je niz čvorova lavirinta G po kojima se pomera automat $\mathfrak{A}_{q_0}$; $q_0,q_1,q_2,\ldots$ je niz stanja u koja, pri tome, prelazi automat $\mathfrak{A}_{q_0}$; $G_0,G_1,G_2,\ldots$ je niz lavirinata u kojem se G_{i+1} može razlikovati od G_i samo u oznaci grane koja vodi iz v_i u v_{i+1}. Ako niz $v_0,v_1,v_2,\ldots$ sadrži sve čvorove lavirinta G kažemo da automat $\mathfrak{A}_{q_0}$ obilazi lavirint G, a u protivnom slučaju nazivamo ga zamkom za automat $\mathfrak{A}_{q_0}$.

U ovom radu razmatra se ponašanje automata u lavirintima specijalnog oblika, takozvanih r-lavirinata, razmatranih po prvi put u radu [11]. U radu se razmatra problem njihovog obilaženja: automat krećući se po r-lavirintu obilazi sve njegove čvorove (barem jedanput). Posmatra se, u suštini problem konstrukcije univerzalnih

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

automata za datu klasu lavirinata, tj. takvih koji obilaze svaki lavirint iz date klase.

Uobičajeni načini zadavanja "lavirintnih" automata veoma su glomazni i komplikovani čak i u slučaju kada je broj slova ulazne i izlazne azbuke i stanja automata relativno mali. U ovom radu konstruiše se AutLav jezik u kojem je pomoću relativno malog broja operatora (5) moguće zadati svaki "lavirintni" automat. Time se postiže kompaktnost i uniformnost u zadavanju ovakvih automata, a takođe i automatizuje simulacija njihovog ponašanja u proizvoljnim lavirintima (u radu se konkretno posmatraju *r*-lavirinti). Takođe je moguće ispitati i korektnost algoritma ponašanja zadatog automata u automatnom režimu. Naime, na računaru je implementiran odgovarajući program koji zadati opis na AutLav jeziku kodira u odgovarajuću AutLav tablicu. U isto vreme, program proverava korektnost AutLav opisa, tj. "postojanje" odgovarajučeg lavirintnog automata. Program omogućava za proizvoljno zadati lavirint vizuelno opserviranje ponašanja opisanog automata u njemu. U interaktivnom režimu su dopuštene promene na lavirintima, i time on predstavlja veoma pogodnu "pomoćnu" alatku za rešavanje nekih lavirintnih problema. Nalazimo da je veoma pogodan u procesu traženja univerzalnih automata za zadatu klasu lavirinata. U slučaju da takvih automata nema daje mogućnost da se putem eksperimentisanja konstruiše lavirint-zamka iz date klase lavirinata za posmatrani automat.

Prvi deo rada posvećen je osnovnim pojimovima i rezultatima teorije automata u lavirintima. Definiše se pojam konačnog automata, pojam lavirinta i neke klase lavirinata, funkcionisanja automata u lavirintima i osnovni tipovi ponašanja. Opisuje se uzajamno dejstvo konačnih automata i ponašanje automata u lavirintima.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

U drugoj glavi razmatra se problem modeliranja automata pomoću tablica i operatora. Radi toga opisuje se AutLav programski jezik i ilustruje primerima.

Treća glava rada je posvećena modeliranju ponašanja automata. Najpre se formuliše pojam i navode primeri r-lavirinta. Zatim se daje model ponašanja automata u tzv. r-lavirintima pomoću AutLav programa. Na kraju se daje opis AutLav programa.

Zahvaljujem se prof.dr G.Kilibardi i prof.dr Š.Ušćumliću na sugestijama i podršci koju su mi pružili pri izradi ovog rada.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

SADRŽAJ

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

1. KONAČNI AUTOMATI U LAVIRINTIMA

1.1. Osnovni pojimovi iz teorije grafova

Pojimove koje navodimo u ovom odeljku uzeti su iz [7] i [12].

Neka je X proizvoljan skup. Uvedimo sledeće oznake

$$\tilde{X}^{[2]} = \{\{x,y\} | x,y \in X \wedge x \neq y\} \text{ i } \vec{X}^{[2]} = \{(x,y) | x,y \in X \wedge x \neq y\}.$$

Par $G=(V,E)$, gde je V proizvoljan skup, a $E \subseteq \tilde{V}^{[2]}$, je *graf* (slika 1.1. a)). Elemente skupova V i E nazivamo redom *čvorovima* i *granama* grafa G. Za granu $e=\{u,v\} \in E$ kažemo da *spaja* čvorove u i v, tj. da je ta grana *incidentna* čvorovima u i v (što je isto da su čvorovi u i v *incidentni* grani $\{u,v\}$).

Dva različita čvora $u,v \in V$ su *susedna* ako je $\{u,v\} \in E$.Dve različite grane su *susedne* ako postoji čvor iz V koji je incidentan i jednoj i drugoj grani. Broj svih grana incidentnih nekom čvoru $v \in V$ se zove *stepen* čvora v i označava se sa $st(v)$.

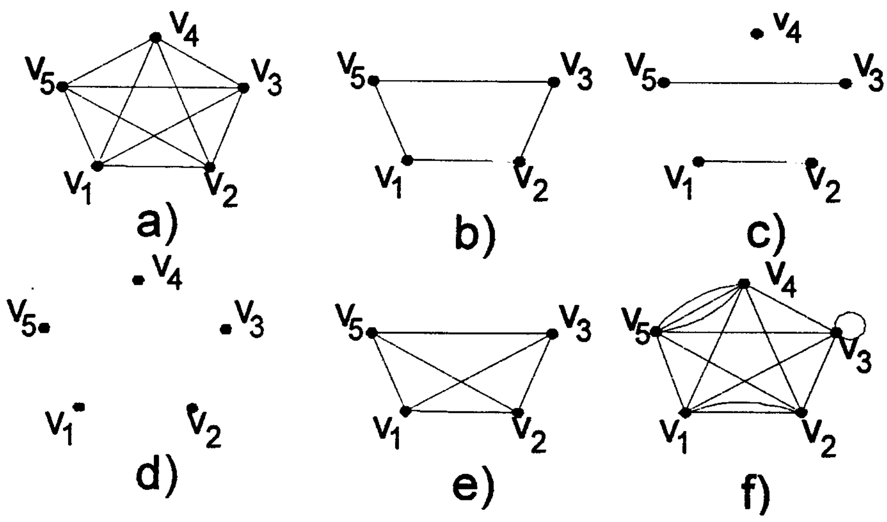
Graf $G=(V,E)$ je *konačan* odnosno *beskonačan* ako je skup njegovih čvorova konačan tj. beskonačan.

Svaki niska grana oblika $\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\},\ldots,\{v_{m-1},v_m\}$ se zove *put* (*put sa početkom u čvoru* v_1 i *sa krajem u čvoru* v_m).

Neka je $e_1,e_2,\ldots,e_m$ put i neka je $v_1,v_2,\ldots,v_{m+1}$ niska čvorova takvih da je $e_i=\{v_i,v_{i+1}\}$ za svako $i \in \{1,\ldots,m\}$. Kažemo da je put $e_1,e_2,\ldots,e_m$ *lanac* ako u niski $e_1,e_2,\ldots,e_m$ nema ponavljanja elemenata, a kažemo da je on *prost lanac* ako u niski $v_1,v_2,\ldots,v_{m+1}$ nema ponavljanja elemenata. Put $e_1,e_2,\ldots,e_m$ je *zatvoren* ako je $v_1=v_{m+1}$. Zatvoreni lanac je *cikl*. Ako je $e_1,e_2,\ldots,e_m$ cikl i u niski $v_1,v_2,\ldots,v_m$ (izostavljen je čvor v_{m+1}) nema ponavljanja elemenata, onda je put $e_1,e_2,\ldots,e_m$ *prost cikl*.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Graf je *povezan* ako za svaka dva čvora postoji put koji ih spaja (slika 1.1. a), b) i e) daje primere povezanih grafova, a c) pokazuje primer nepovezanog grafa). Graf koji je povezan i koji nema cikl nazivamo *drvo*.



Slika 1.1.

Graf $G'=(V',E')$ je *delimični podgraf* (slika 1.1. pod b)) grafa $G=(V,E)$ (slika 1.1. pod a)) ako je $V'\subseteq V$ i $E'\subseteq E$. Ako je delimični podgraf $G'=(V',E')$ takav da je $V'=V$ onda takav graf zovemo *delimični graf* (slika 1.1. pod c) i d)) grafa $G=(V,E)$. Ako je $V'\subseteq V$ i $E'=E\cap V'^2$ onda je $G'=(V',E')$ *podgraf* (slika 1.1. pod e))od G (podgraf generisan skupom čvorova V').

Dva grafa $G_1=(V_1,E_1)$ i $G_2=(V_2,E_2)$ su *izomorfna* ako postoji bijekcija $i:V_1\rightarrow V_2$ takva da je $\{u,v\}\in E_1$ ako i samo ako je $\{i(u),i(v)\}\in E_2$. Izomorfne grafove ne razlikujemo i pišemo da je $G_1=G_2$. Bijekcija i se zove *izomorfizam* grafova G_1 u G_2.

Neka su A i B proizvoljni skupovi. Ako granama grafa $G=(V,E)$ pridružimo neke oznake iz skupa A tada kažemo da je G *graf označen po granama* sa oznakama iz A. Ako čvorovima grafa

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

$G=(V,E)$ pridružimo neke oznake iz skupa B tada kažemo da je G *graf označen po čvorovima* sa oznakama iz B.

Graf može biti označen i po granama i po čvorovima. Strogo takav graf je ustvari trojka (G,f,g) gde je $f{:}V\to A$ i $g{:}E\to B$.

Ako kod grafa $G=(V,E)$ umesto skupa $E\subseteq\tilde{V}^{[2]}$ uzmemo multiskup ili uzmemo konačnu familiju $(e_\lambda,\lambda\in\Lambda)$ elemenata $e_\lambda\in\tilde{V}^{[2]}$ iz $\tilde{V}^{[2]}$ onda dolazimo do definicije *multigrafa* (i kod multiskupa i kod familije jedan te isti elemenat se može pojaviti u nekoliko istovetnih kopija). Kod multigrafa postoje takozvane *višestruke grane*, tj. dva čvora mogu biti spojena sa više grana. Ako dozvolimo postojanje i grana koje su incidentne samo sa jednim čvorom, takozvanih *petlji*, onda dolazimo do pojima *pseudografa*. Primer multigrafa imamo na slici 1.1. pod f).

Par $G=(V,E)$, gde je V neki proizvoljni skup, a $E\subseteq\tilde{V}^{[2]}$, je *orijentisani graf* ili *orgraf* (u literaturi se koristi i termin *digraf*).

Elemente skupova V i E nazivamo redom *čvorovima* i *orgranama* orgrafa $G=(V,E)$. Za orgranu $e=(u,v)\in E$ kažemo da *izlazi* iz čvora u, a *ulazi* u čvor v (kažemo da je u *početni čvor* te orgrane, a da je v *krajnji čvor* te orgrane); pišemo u tom slučaju takođe i da je $u=pr_1(e)$ i $v=pr_2(e)$. Čvor v je *incidentan* orgrani e (ili orgrana e je *incidentna* čvoru v) ako je $v=pr_1(e)$ ili $v=pr_2(e)$.

Dva različita čvora $u,v\in V$ su *susedna* ako je $(u,v)\in E$ ili $(v,u)\in E$. Broj svih orgrana koje ulaze u neki čvor $v\in V$ se zove *ulazni stepen čvora* v, a broj svih orgrana koje izlaze iz nekog čvora $v\in V$ se zove *izlazni stepen čvora* v .

Zavisno od toga da li je skup V konačan ili beskonačan, orgraf $G=(V,E)$ je *konačan* odnosno *beskonačan*.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Konačan niska $e_1, e_2, \ldots, e_m$ orgrana iz orgrafa G je *orijentisani put* ili *orput* ako je $pr_1(e_i) = pr_2(e_{i-1})$ za svako $i = 2, \ldots, m$. *Orlanac* je orput kod koga nema ponavljanja orgrana. Orlanac $e_1, e_2, \ldots, e_m$ je *prost orlanac* ako u niski $pr_1(e_1), pr_1(e_2), pr_1(e_3), \ldots, pr_1(e_m), pr_2(e_m)$ nema ponavljanja elemenata. Orput je *zatvoren* ako je $pr_1(e_1) = pr_2(e_m)$. Zatvoren orlanac se zove *orcikl*, a zove se *prost orcikl* ako u niski $pr_1(e_1), pr_1(e_2), pr_1(e_3), \ldots, pr_1(e_m)$ nema ponavljanja elemenata.

Pojmove *delimičnog podorgrafa*, *delimičnog orgrafa* i *podorgrafa* definičemo analogno kao redom pojmove delimičnog podgrafa, delimičnog grafa i podgrafa. Takođe pojam *izomorfizma orgrafova* definišemo analogano kao izomorfizam grafova.

Kod orgrafova možemo posmatrati više tipova povezanosti.

Niska orgrana $e_1, e_2, \ldots, e_m$ je *poluorput* ako postoji niz čvorova $v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}$ tako da je $e_i = (v_i, v_{i+1})$ ili $e_i = (v_{i+1}, v_i)$ za $i = 1, \ldots, m$.

Orgraf je *slabo povezan* ako za svaki par različitih čvorova postoji poluorput koji ih spaja. Orgraf je *jako povezan* ako za svaki par različitih čvorova $(u,v) \in V^2$ postoji orput iz u u v. Kažemo da je *jednostrano povezan* ako za svaki par različitih čvorova $(u,v) \in V^2$ postoji orput iz u u v ili iz v u u.

Ako kod orgrafa $G = (V, E)$ umesto skupa E uzmemo familiju uređenih parova onda dolazimo do definicije *multiorgrafa*. Kod multiorgrafa mogu postojati takozvane višestruke orgrane, tj. dva čvora mogu biti povezana sa više orgrana. Ako dozvolimo i postojanje takvih orgrana koje su incidentne samo sa jednim čvorom, takozvanih *petlji*, onda dolazimo do pojima *pseudoorgrafa*.

Orgraf $G = (V, E)$ je *simetričan* ako zajedno sa orgranom $(u,v) \in E$ sadrži i orgranu $(v,u) \in E$.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

1.2. Neformalni model i pojam konačnog automata

Svi ovde navedeni pojimovi uzeti su iz [5].

Neformalni model automata. Prilikom proučavanja realnih uređaja i procesa paralelno sa konstrukcijom njihovih neprekidnih matematičkih modela često se vidi da su, takođe, korisni i njihovi diskretni modeli kojima se opisuje sama logika promena koje se u njima odvijaju, pri čemu se ne vodi računa o njihovim numeričkim karakteristikama. Konstrukciju diskretnog modela i procesa funkcionisanja nekog uređaja možemo podeliti u sledeće faze:

a) Pretpostavlja se da se proces odvija u diskretnim vremenskim trenucima koji se numerišu brojevima 1,2,3,... . Ovi trenuci vremena ne nailaze jedan za drugim u jednakim vremenskim razmacima. Njihov izbor može zavisiti od promene spoljnih faktora koji deluju na razmatrani proces.

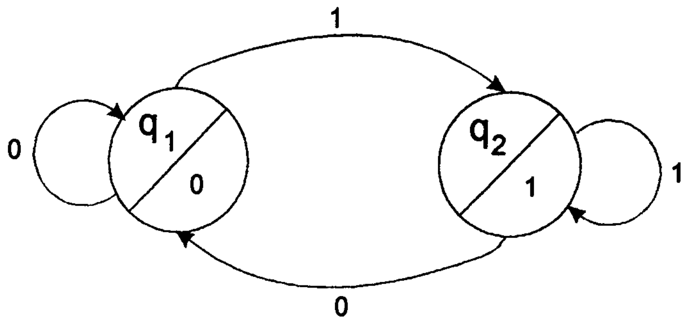
b) Biraju se parametri koji opisuju: unutrašnje stanje razmatranog uređaja, moguće delovanje spoljne sredine na uređaj, moguće delovanje uređaja na spoljnu sredinu. Skupovi mogućih vrednosti ovih parametara se razbijaju na konačan broj klasa, koje su međusobom disjunktne. Neka su $\{q_1,q_2,\dots,q_n\}$ klase na koje se razbijaju vrednosti parametra koji opisuju unutrašnje stanje uređaja, $\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$ klase na koje se razbijaju vrednosti parametra kojima se opisuje uticaj spoljne sredine na uređaj i neka su $\{b_1,b_2,\dots,b_p\}$ klase na koje se razbijaju vrednosti parametara kojima se opisuje uticaj uređaja na spoljnu sredinu. Ako parametri prvog tipa pripadaju klasi q_i, drugog tipa pripadaju klasi a_j i trećeg tipa pripadaju klasi b_k onda kažemo da se diskretni model uređaja nalazi u stanju q_i, da na ulazu prima signal a_j i da na izlazu daje signal b_k.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

c) Razbijanje na klase q_i, a_j, b_k skupova vrednosti odgovarajućih parametara moguće je izvršiti tako da su stanje $q(t+1)$ modela, u diskretnom vremenskom trenutku $t+1$, i njegov izlazni signal $b(t)$ u trenutku t, jednoznačno određeni stanjem $q(t)$ i ulaznim signalom uređaja $a(t)$, u razmatranom vremenskom trenutku t. Da bi smo završili konstrukciju modela dovoljno je da se zadaju funkcije, definisane na konačnim skupovima, koje opisuju navedenu zavisnost vrednosti stanja $q(t+1)$ i izlaznog signala $b(t)$ od stanja $q(t)$ i ulaznog signala $a(t)$.

Primer: element zadrške. Pri konstrukciji elektronskih računskih mašina se koristi element zadrške, kao vremenska zadrška impulsnih signala. Ulazni signali elementa zadrške su 0 (ne postojanje električnog impulsa) i 1 (postojanje električnog impulsa), izlazni signali su analogno 0 i 1 sa istim značenjem. Element zadrške ima dva stanja q_1 i q_2. Ako se u trenutku t na ulazu elementa zadrške prima signal $x, x \in \{0,1\}$, tada se na njegovom izlazu predaje taj isti signal u trenutku $t+1$. Ovakvim radom se i objašnjava naziv element zadrške. Ukoliko je u stanju q_1, element zadrške "pamti" da je u predhodnom trenutku na njegovom ulazu primljen signal 0, a u stanju q_2 on "pamti" da je u predhodnom trenutku na njegovom ulazu primljen signal 1. Dijagram prelaza sl.1.2. ilustrovani su prelazi elementa zadrške, pod uticajem spoljašnjih signala, iz jednog u drugo stanje. Na njoj kružići odgovaraju stanjima automata i u donjem delu kružića upisan je izlazni signal koji automat predaje nalazeći se u stanju koje odgovara kružiću. Strelice koje izlaze iz kružića odgovaraju ulaznim signalima, koji se predaju na ulazu automata u trenutku kada se on nalazi u stanju koje odgovara kružiću, i svojim krajem pokazuje u koje stanje automat prelazi u sledećem trenutku.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs



Slika 1.2.

Na primer, ukoliko se element zadrške u početnom trenutku nalazi u stanju q_1, prerađuje niz ulaznih signala 0,0,1,1,1,0,0,1,1 u niz izlaznih signala 0,0,0,1,1,1,0,0,1,1.

Konačnim apstraktnim automatom nazivamo petorku $\mathfrak{A}=(A,Q,B,\varphi,\psi)$, gde su $A=\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$, $Q=\{q_1,q_2,\dots,q_n\}$ i $B=\{b_1,b_2,\dots,b_p\}$ konačni skupovi, koje nazivamo redom, ulazna azbuka, azbuka stanja i izlazna azbuka, $\varphi\colon Q\times A\to Q$ funkcija prelaska i $\psi\colon Q\times A\to B$ funkcija izlaska automata.

Zadavanje automata možemo predstaviti pomoću *tablica funkcija* φ *i* ψ ili pomoću *Murovog dijagrama.* To su inače najstandardniji načini.

Tabelarno zadavanje automata $\mathfrak{A}$, predstavljeno na slici 1.3., možemo svesti na zadavanje funkcija φ i ψ. One se mogu zadati

	q_1	...	q_j	...	q_n
a_1			$\vdots$		
$\vdots$			$\vdots$		
a_i	...		$\psi(q_j,a_i)$		
$\vdots$					
a_m					

	q_1	...	q_j	...	q_n
a_1			$\vdots$		
$\vdots$			$\vdots$		
a_i	...		$\varphi(q_j,a_i)$		
$\vdots$					
a_m					

Slika 1.3.

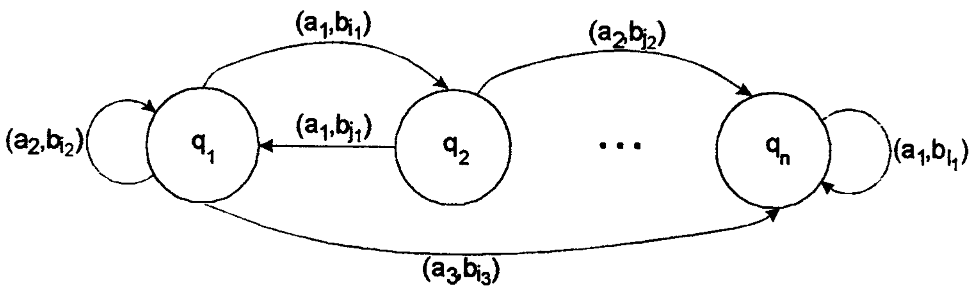
Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

pomoću tablica sa dva ulaza. Ove dve tablice možemo objediniti u jednu, koja u preseku i-te vrste i j-te kolone sadrži uređeni par $(\varphi(q_j,a_i),\psi(q_j,a_i))$. Takav način zadavanja ilustrujemo na slici 1.4.

	q_1	$\ldots$	q_j	$\ldots$	q_n
a_1			$\vdots$		
$\vdots$			$\vdots$		
a_i	$\ldots$		$(\varphi(q_j,a_i),\psi(q_j,a_i))$		
$\vdots$					
a_m					

Slika 1.4.

Konstrukcija *Murovog dijagrama* se izvodi na sledeći način: u ravni konstruišemo n krugova, koji se uzajamno jednoznačno pridružuju stanjima automata $\mathfrak{A}$ i unutar svakog kruga upisuje se njemu odgovarajuće stanje . Zatim se iz svakog kruga konstruiše po m strelica kojima se na jednoznačan način raspodele



Slika 1.5.

slova azbuke A. Strelica kojoj odgovara slovo a_i se označava parom (a_i,b_{r_i}), ako je $b_{r_i}=\psi(q_j,a_i)$. Ova strelica se usmerava u krug (stanje)

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

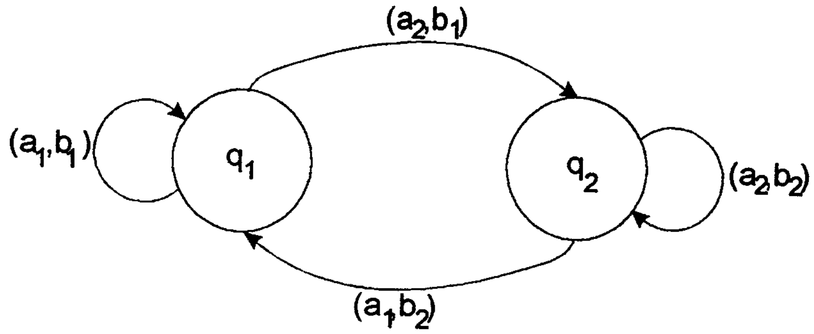
q_ω, ako je $q_\omega = \varphi(q_j, a_i)$. Na slici 1.5. prikazan je deo takvog dijagrama.

Primer. Neka je $\mathfrak{A} = (\{a_1, a_2\}, \{q_1, q_2\}, \{b_1, b_2\}, \varphi, \psi)$ automat čije su funkcije φ i ψ zadate tablicom predstavljenom sa slikom 1.6.

	q_1	q_q
a_1	(q_1, b_1)	(q_2, b_2)
a_2	(q_2, b_1)	(q_2, b_2)

Slika 1.6.

Murov dijagram automata $\mathfrak{A}$ vidimo na slici 1.7. Ukoliko kod njega simbole a_1, b_1 zamenimo sa 0, a simbole a_2, b_2 sa 1 dobijamo dijagram koji ilustruje rad elementa zadrške, opisanog na početku poglavlja.



Slika 1.7.

Homomorfizam automata $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ na automat $\mathfrak{A}' = (A', Q', B', \varphi', \psi')$ je trojka preslikavanja (f, g, h) za koje važi:

$$f: A \to A' \quad , \quad g: Q \to Q' \quad , \quad h: B \to B' \quad \text{takvih da je}$$

$$g(\varphi(q,a)) = \varphi'(g(q), f(a)) \quad , \quad h(\psi(q,a)) = \psi'(g(q), f(a)).$$

Ako postoji homomorfizam automata $\mathfrak{A}$ na automat $\mathfrak{A}'$ tada se automat $\mathfrak{A}'$ naziva homomorfnom slikom automata $\mathfrak{A}$.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Izomorfizam *automata* $\mathfrak{A}=(A,Q,B,\varphi,\psi)$ na automat $\mathfrak{A}'=(A,Q',B,\varphi',\psi')$ je trojka (f,g,h) uzajamno-jednoznačnih preslikavanja $f{:}A\to A'$, $g{:}Q\to Q'$, $h{:}B\to B'$ takvih da je $g(\varphi(q,a))=\varphi'(g(q),f(a))$, $h(\psi(q,a))=\psi'(g(q),f(a))$.

Ako je (f,g,h) izomorfizam automata $\mathfrak{A}$ na automat $\mathfrak{A}'$ tada je, očigledno, (f^{-1},g^{-1},h^{-1}) (sa F^{-1} je označeno inverzno preslikavanje preslikavanja F), izomorfizam automata $\mathfrak{A}'$ na automat $\mathfrak{A}$. Ako postoji izomorfizam automata $\mathfrak{A}$ na automat $\mathfrak{A}'$ onda se kaže da su $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$ *izomorfni*. Izomorfni automati se međusobno razlikuju samo drugačijim oznakama slova azbuka A,Q i B pa se prilikom rešavanja mnogih zadataka poistovećuju.

Neka je data neka azbuka C. Elemente azbuke C nazivamo slovima, a konačne nizove slova rečima nad azbukom C. Dužina reči α nad azbukom C je broj slova u toj reči i označava se sa $|\alpha|$. Skup svih reči dužine $m, m=1,2,\ldots$, azbuke C zajedno sa praznom reči (reči koje ne sadrže ni jedno slovo), koju označavamo sa $\wedge$, označava se sa C^* . Skup $C^*\setminus\wedge$ označavamo sa C^+. Beskonačni nizovi slova azbuke L označava se sa C^∞.

Reči nad azbukama A,Q i B se redom nazivaju ulazne reči, reči stanja i izlazne reči.

Oblast definisanosti $Q\times A$ funkcija φ i ψ može se proširiti na skup $Q\times A^*$, pri čemu je:

$$\varphi(q,\Lambda)=q,\varphi(q,\alpha a)=\varphi(\varphi(q,\alpha),a),q\in Q,a\in A,\alpha\in A^*,$$

$$\psi(q,\Lambda)=\Lambda,\psi(q,\alpha a)=\psi(\varphi(q,\alpha),a),q\in Q,a\in A,\alpha\in A^*.$$

Ako je (v_3,q_1,G) reč dužine m, onda sa $\alpha]_n$, $0\le n\le m$, označimo početak reči α dužine n, pri čemu $\alpha]_0$ označava Λ (prazna reč). Neka je zadato stanje $q\in Q$ i proizvoljna reč $\alpha\in A^*$ dužine m. Tada je

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

$$\overline{\varphi}(q,\alpha)=\varphi(q,\alpha]_0)\varphi(q,\alpha]_1)...\varphi(q,\alpha),$$

reč stanja, a reč

$$\overline{\psi}(q,\alpha)=\psi(q,\alpha]_1)\psi(q,\alpha]_2)...\psi(q,\alpha),$$

izlazna reč automata $\mathfrak{A}$.

1.3. Funkcionisanje automata. Osnovni tipovi ponašanja automata

Jedna od najvažnijih karakteristika apstraktnih automata je takozvano ponašanje automata. Izdvajamo sledeće tipove ponašanja automata.

Automat $\mathfrak{A}$ kod koga je izdvojeno neko njegovo stanje q_0, nazivaćemo ga početno stanje, zove se inicijalni automat. Takav automat ćemo označavati sa $\mathfrak{A}_{q_0}$. Prema tome inicijalni automat je uređena šestorka $\mathfrak{A}_{q_0}=(A,Q,B,\varphi,\psi,q_0)$.

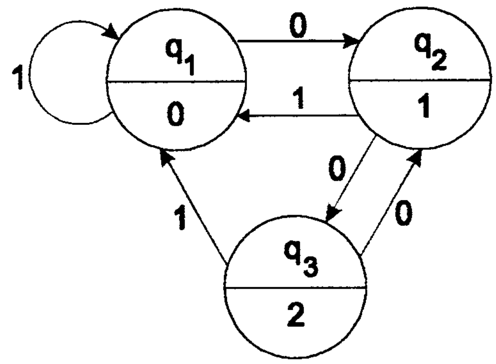
Rečnička funkcija $f(\alpha^{(m)})=\overline{\psi}(q_0,\alpha^{(m)})$, koja preslikava skup A^* u skup B^*, predstavlja *ponašanje inicijalnog automata* $\mathfrak{A}_{q_0}$ *kao pretvarača.* Funkciju $f(\alpha^{(m)})$ nazivamo *konačno automatnom funkcijom*, koja se realizuje ili izračunava automatom $\mathfrak{A}_{q_0}$. Ovakav inicijalni automat nazivamo *automat pretvarač.*

U inicijalnom automatu $\mathfrak{A}_{q_0}=(A,Q,B,\varphi,\psi,q_0)$ izdvojimo podskup $B', B'\subseteq B$, i razmotrimo skup $L_{B'}$ reči azbuke A definisane na sledeći način $L_{B'}=\{\alpha^m \mid \alpha^m\in A^*\wedge\psi(q,\alpha^{(m)})\in B'\}$. Skup $L_{B'}$ nazivamo *ponašanje inicijalnog automata* $\mathfrak{A}_{q_0}$ *kao akceptora u odnosu na skup* B'. Na taj način, *ponašanje inicijalnog automata* $\mathfrak{A}_{q_0}$ predstavlja skup ulaznih reči na koje automat $\mathfrak{A}_{q_0}$ reaguje pojavom na njegovom izlazu signala iz izdvojenog skupa B'. U ovom slučaju automat $\mathfrak{A}_{q_0}$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

tretiramo kao uređaj koji raspoznaje ove ili one klase ulaznih reči. Ovakav inicijalni automat naziva se *automat akceptor*.

Definišimo Murov automat. Konačni automat $\mathrm{A}=(A,Q,B,\varphi,\psi)$ naziva se *Murov automat*, u slučaju kad izlazna funkcija ψ ne zavisi od promenljive a, tj. $\psi(q,a)=\psi(q)$. U ovom slučaju se može izmeniti Murov dijagram automata, jer izlazno slovo zavisi samo od stanja automata pa se ono može upisati u kružić koji odgovara tom stanju. Na slici 1.8. je predstavljen izmenjen dijagram Murovog automata.



Slika 1.8.

Ponašanje inicijalnog konačnog automata $\mathfrak{A}_{q_0}=(A,Q,B,\varphi,\psi,q_0)$ *naziva se objekat* $(\mathfrak{A}'_{q'_0},\pi)$, gde je $\mathfrak{A}'_{q'_0}=(A,Q',B,\varphi',\psi',q'_0)$ inicijalni konačni Murov automat, π niz slogova (q_0,q'_0,a_0,b_0), $(q_1,q'_1,a_1,b_1),\ldots$, za koje je $a_0=\psi'(q'_0)$, $b_0=\psi(q_0,a_0)$, $q_{i+1}=\varphi(q_i,a_i)$, $q'_{i+1}=\varphi'(q'_i,b_i)$, $a_{i+1}=\psi'(q'_{i+1})$, $b_{i+1}=\psi(q_{i+1},a_{i+1})$. Niz π opisuje rad sistema, koji se dobija kao rezultat izjednačavanja izlaza automata $\mathfrak{A}_{q_0}$ sa ulazom automata $\mathfrak{A}'_{q'_0}$, a ulaza automata $\mathfrak{A}_{q_0}$ sa izlazom automata $\mathfrak{A}'_{q'_0}$. Za proizvoljno $i=0,1,\ldots,q_i$ je stanje automata $\mathfrak{A}_{q_0}$ u trenutku $t=i$; q'_i je stanje automata $\mathfrak{A}'_{q'_0}$, u trnutku $t=i$, a_i ulazni signal a b_i izlazni signal automata $\mathfrak{A}_{q_0}$ u trenutku $t=i$. Navedeno uzajamno delovanje

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

automata $\mathfrak{A}_{q_0}$ i $\mathfrak{A}'_{q'_0}$ se može razmatrati kao model procesa upravljanja u kojem je $\mathfrak{A}_{q_0}$ upravljački uređaj a $\mathfrak{A}'_{q'_0}$ objekat upravljanja.

Funkcionisanje inicijalnog automata se može zadati i pomoću sistema takozvanih kanoničkih jednačina. Neka se na ulazu inicijalnog automata $\mathfrak{A}_{q_0} = (A,Q,B,\varphi,\psi,q_0)$ pojavljuje reč $\alpha = \alpha(1)\ldots\alpha(m)$, tada je izlazna reč $b(1)\ldots b(m)$ i reč stanja $q(1)\ldots q(m)q(m+1)$ određena sledećim relacijama:

$$q(1) = q_0$$

$$q(t+1) = \varphi(q(t), a(t))$$

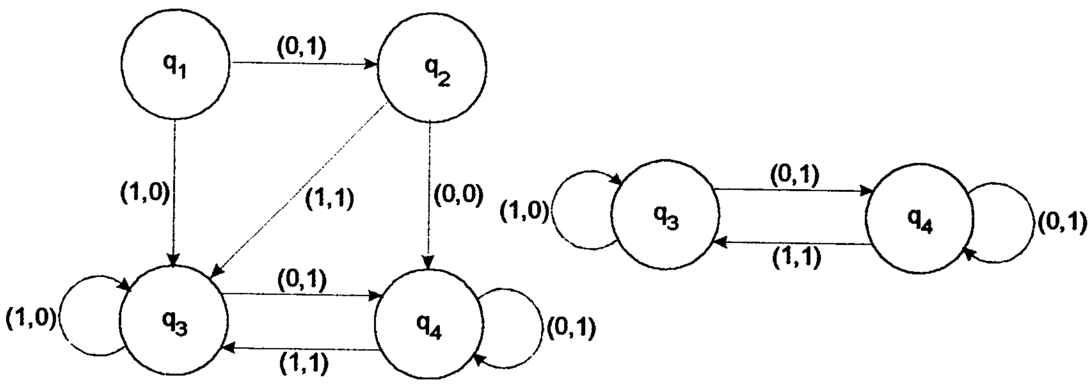
$$b(t) = \psi(q(t), a(t)),$$

gde je $t = 1,2,\ldots,m.$ Poslednje relacije se nazivaju kanoničkim jednačinama za inicijalni automat $\mathfrak{A}_{q_0}$

Automat $\mathfrak{A}' = (A,Q',B,\varphi',\psi')$ je *podautomat* automata $\mathfrak{A} = (A,Q,B,\varphi,\psi)$, ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1) $Q' \subseteq Q$

2) ako je $q \in Q'$ i $a \in A$ onda je $\varphi'(q,a) = \varphi(q,a)$ i $\psi'(q,a) = \psi(q,a)$.



Slika 1.9.

Na slici 1.9. predstavljen je Murov dijagram automata $\mathfrak{A} = (\{0,1\}, \{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0,1\}, \varphi, \psi)$ i njegovog jednog podautomata $\mathfrak{A}' = (\{0,1\}, \{q_3, q_4\}, \{0,1\}, \varphi, \psi)$.

1.4. Definicija lavirinta. Neke klase lavirinata

Lavirint je jako povezani pseudoorgraf čiji su čvorovi obeleženi slovima azbuke Ω, a orgrane obeležene slovima azbuke Σ, gde su azbuke Ω i Σ dve proizvoljne konačne azbuke koje zadovoljavaju $\Lambda \in \Omega \setminus \Sigma$ (Λ je prazan simbol), pri čemu su različite grane koje izlaze iz istog čvora obeležene sa različitim slovima.

Oznake čvorova $v \in V$ obeležavaćemo sa $|v|_L$ a oznake grana $e \in E$ obeležavaćemo sa $|e|_L$. Ukoliko je iz konteksta jasno o kojem lavirintu se radi umesto $|v|_L$ i $|e|_L$ pisaćemo samo $|v|$ odnosno $|e|$.

Klasu svih lavirinata sa oznakama čvorova Ω i oznakama grana Σ označavaćemo sa $\mathfrak{L}(\Omega, \Sigma)$.

L' je podlavirint datog lavirinta L ako je L' podorgraf orgrafa L i ako su sve oznake grana i čvorova u L' iste kao u L.

Lavirint $L = (V, E)$ sa izdvojenim skupom čvorova V_0, koje nazivamo početnim ili inicijalnim, nazivamo ***inicijalnim*** i označavamo ga sa L_{V_0}. Ukoliko je $V_0 = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ koristimo i oznaku $L_{v_0, v_1, \ldots, v_n}$. Skup čvorova V_0 nazivamo i skupom ulaza lavirinta L_{V_0}. U lavirintu L_{V_0} može biti izdvojen još jedan skup čvorova V_1, $V_0 \cap V_1 = \emptyset$,i tada ćemo dati lavirint označavati sa $L_{V_0}^{V_1}$, a skup čvorova V_1 zovemo *skupom izlaza* lavirinta $L_{V_0}^{V_1}$. Mi ćemo se u daljem radu ograničiti lavirintima koji imaju najviše jedan ulaz i najviše jedan izlaz (ako postoji ulaz).

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Neke klase lavirinata. Označimo sa $E^n = \{e_1, \dots e_n\}$ bazu n-dimenzionalnog vektorskog prostora R^n, i sa $\overline{E}^n = \{e_1, \dots e_n, \overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$, gde je $\overline{e_i} = -e_i$, $1 \le i \le n$. Kada je $n=2$, tj. kad je $\overline{E}^2 = \{i, j, -i, -j\}$, elemente skupa $\overline{E}^2$ ubuduće ćemo označavati redom sa e, n, w, s (što predstavlja početna slova strana sveta na engleskom jeziku).

Lavirint $L \in \mathfrak{L}(\Omega, \Sigma)$ zovemo *n-dimenzionalnim lavirintom*, $n \ge 2$, ako je ispunjeno:

1) L je simetrični orgraf

2) $\Sigma = \overline{E}^n$, $\Omega = \{\Lambda\}$

3) za svako $u, v \in V$ i ako je $(u,v) \in E$ tada je $|(u,v)| = -|(v,u)|$.

Neka su $M, N \in R^n$, $M \ne N$, i $e \in \overline{E}^n$. Kažemo da je vektor $\overrightarrow{MN}$ e-vektor ako je $\overrightarrow{MN} = \alpha e$ i $\alpha > 0$. Skup T duži iz R^n nazivamo n-konfiguracijom ako svake dve duži mogu imati najviše jednu zajedničku tačku, i ako ona postoji, onda je ona krajnja tačka obe duži.

Za n-dimenzionalne lavirinte $L_1 = (V_1, E_1)$ i $L_2 = (V_2, E_2)$ kažemo da su *slabo izomorfni* ako postoji bijekcija $g: V_1 \to V_2$ takva da je $(u,v) \in E_1$ ako i samo ako je $(g(u), g(v)) \in E_2$, i pri tome ako jedan od lavirinata ima ulaz (ima ulaz i izlaz), to i drugi lavirint ima ulaz (ima ulaz i izlaz) i pri tome $g(v_0^1) = v_0^2$, gde je v_0^1 ulaz lavirinta L_1, a v_0^2 ulaz lavirinta L_2 (i pri tome $g(v_0^1) = v_0^2$, gde je v_0^1 ulaz lavirinta L_1, a v_0^2 ulaz lavirinta L_2 i $g(v_1^1) = v_1^2$, gde je v_1^1 izlaz lavirinta L_1, a v_1^2 izlaz lavirinta L_2). Ako je još $|(u,v)|_{L_1} = |(g(u), g(v))|_{L_2}$ za sve $\{u,v\} \in E_1$ tada kažemo da su lavirinti L_1 i L_2 *izomorfni*. Izomorfne lavirinte nećemo razlikovati i pisaćemo da je $L_1 = L_2$.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

n-dimenzionalni lavirint $L=(V,E)$, gde je $V \subseteq R^n$, nazivamo *n-dimenzionim pravouglim lavirintom*, ako je:

1) za svako $(u,v) \in E$ vektor $\overrightarrow{uv}$ je $|(u,v)|$-vektor,

2) skup duži $T=\{\overline{uv}:(u,v) \in E\}$ je n-konfiguracija.

Ako je n-dimenzioni lavirint L izomorfan nekom n-dimenzionom pravouglom lavirintu, tada kažemo da je lavirint L *kvazipravougaon*.

Neka je L n-dimenzioni pravougaoni lavirint. Skup

$$\overline{L} = \bigcup_{(u,v) \in E} \overline{uv} \quad \text{u } R^n$$

nazivamo *realizacijom* n-dimenzionog pravouglog lavirinta L.

Neka je Z^n celobrojna rešetka u R^n. Ako je $V \subseteq Z^n$ tada n-dimenzioni pravougaoni lavirint $L=(V,E)$ nazivamo *n-dimenzioni celobrojni lavirint*, a ako je $T=\{\overline{uv}:(u,v) \in E\}$ skup segmenata dužine 1, onda kažemo da je lavirint L *n-dimenzioni mozaični lavirint.*

Čvor v u n-dimenzionom mozaičnom lavirintu L je *otvoren* u L, ako postoji beskonačni n-dimenzioni mozaični lavirint L_1 takav da je $\overline{L} \cap \overline{L_1} = \{v\}$.

Ako je čvor v_1 otvoren u L, to n-dimenzioni mozaični lavirint $L_{v_0}^{v_1}$ nazivamo *n-dimenzionim pravilnim lavirintom.*

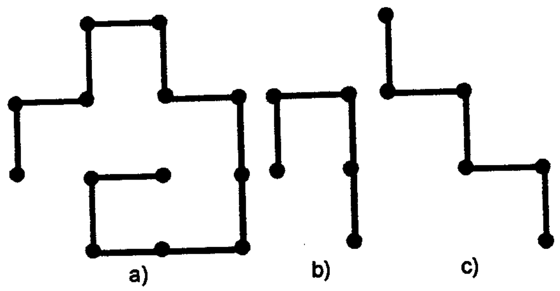
Ako je $n=2$ lavirint nazivamo *ravanski.* Tako ćemo ubuduće umesto, 2-dimenzioni mozaički lavirint govoriti ravanski mozaički lavirint, a umesto 2-dimenzioni pravilni lavirint govoriti ravanski pravilni lavirint, itd.

Nacrtajmo sve prave linije paralelne koordinatnim osama koje prolaze kroz čvorove iz Z^n. Tako dobijena mreža je realizacija beskonačnog n-dimenzionog mozaičkog lavirinta koji označavamo sa Z_n. Skup čvorova ovog lavirinta je Z^n. Podlavirint lavirinta Z_n nazivamo *n-dimenzionim šahovskim lavirintom.*

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

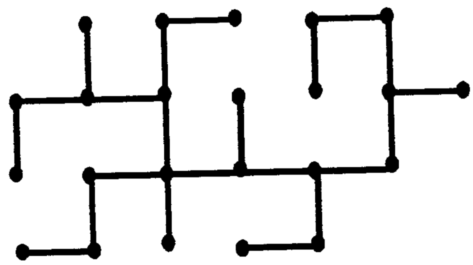
Ako u lavirintu L odbacimo oznake orgrana dobijamo orgraf $G(L)$. Ako je L simetričan i ako odbacimo oznake orgrana i sve parove orgrana oblika (u,v) i (v,u) zamenimo sa granom $\{u,v\}$, onda dobijamo graf koji označavamo sa $\overline{G}(L)$.

Navedimo klase nekih najprostijih mozaičkih lavirinata. *Zmijoliki lavirint* je mozaičko drvo iz čijeg svakog čvora izlaze najviše dve orgrane. Na slici 1.10. predstavljeni su primeri zmijolikih lavirinata.



Slika 1.10.

Mozaičko drvo je mozaički lavirint kod koga je $\overline{G}(L)$ drvo. Primer mozaičkog drveta predstavljen je na slici 1.11.



Slika 1.11.

Neka je $L=(V,E)$ neki ravanski pravougaoni lavirint. Skup $R^n \setminus \overline{L}$ je otvoren i nepovezan (sem ako $\overline{G}(L)$ nije drvo). Lavirint L

nazivamo *(r+1)-povezanim* ako skup $R^n \setminus \overline{L}$ ima r ograničenih povezanih komponenenata.

Neka je L neki ravnski šahovski lavirint, i neka su $U_1,\dots,U_r$ sve komponente povezanosti skupa $R^n \setminus \overline{L}$. Neprazan skup D oblika $U_l \cap Z^n$ $(1 \le l \le r)$ nazivamo *šahovskom rupom* lavirinta L. Ravnski šahovski lavirint nazivamo šahovski $(r+1)$-povezanim ako ima tačno r konačnih šahovskih rupa, $r \in \{0,1,\dots\}$. Tako naprimer, ako je $r=0$ lavirint se zove *šahovski jednopovezan*.

Ako je D konačno onda šahovsku rupu nazivamo *konačnom*, a u suprotnom se naziva *beskonačnom*.

1.5. Uzajamno dejstvo konačnih automata i ponašanje automata u lavirintima.

Kažemo da je automat $\mathfrak{A}$ dopustiv za klasu lavirinata $\mathfrak{L}(\Omega,\Sigma)$, ako se njegov ulazni alfabet sastoji od slova a oblika $(\omega,\{\sigma_1,\dots,\sigma_n\})$, gde je $\omega \in \Omega$, $\{\sigma_1,\dots,\sigma_n\} \subseteq \Sigma$, izlazni alfabet je $\Sigma \cup \{k\}$, gde je $k \notin \Sigma$, i $\psi(q,a) \in \mathrm{Pr}_2(a) \cup \{k\}$ za svako $q \in Q$ i $a \in A$. Označićemo sve takve automate sa $At(\Omega,\Sigma)$. Neka je $\mathfrak{A}_{q_0}$ inicijalni automat iz $At(\Omega,\Sigma)$, i neka je L_{v_0} inicijalni lavirint iz $\mathfrak{L}(\Omega,\Sigma)$. Opišimo funkcionisanje automata $\mathfrak{A}_{q_0}$ u lavirintu L_{v_0}. U početku je automat $\mathfrak{A}_{q_0}$ postavljen u čvor v_0 lavirinta L_{v_0}. Pretpostavimo da se automat u nekom trenutku našao u čvoru v i stanju q. Automat "osmatra" označene grane koje izlaze iz tekućeg čvora. Ulaz automata u tom trenutku je uređeni par koga čine oznaka čvora i oznake grana koje izlaze iz čvora. U sledećem koraku ako je $\psi(q,a) \ne k$ automat prelazi u čvor granom koja je označena sa $\psi(q,a)$, a ako je $\psi(q,a)=k$ automat ostaje u mestu, a novo stanje je u oba slučaja $\varphi(q,a)$. Na ovaj način, automat se, korak

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

po korak, kreće lavirintom menjajući stanje i u svakom trenutku odlučuje o pravcu svog daljeg kretanja. Na taj način, "funkcionisanje" automata $\mathfrak{A}_{q_0}$ u lavirintu L_{v_0} "najbolje se opisuje" ponašanjem automata $\mathfrak{A}_{q_0}$ u lavirintu L_{v_0}: niz

$$\pi(\mathfrak{A}_{q_0}; L_{v_0}) = (q_0, v_0), (q_1, v_1), \ldots$$

nazivamo *ponašanje automata* $\mathfrak{A}_{q_0}$ *u lavirintu* L_{v0}, ako je v_{i+1} čvor lavirinta u koji automat stiže iz čvora v_i, prelazeći pri tom stanje iz q_i u stanje q_{i+1}. Ako za neki čvor $v \in L_{v_0}$, postoji stanje q automata $\mathfrak{A}_{q_0}$ takvo da uređeni par (q,v) pripada nizu $\pi(\mathfrak{A}_{q_0}; L_{v_0})$, kažemo da automat $\mathfrak{A}_{q_0}$ *obilazi* čvor v lavirinta L_{v_0}. Uočimo skup $\bigcup_{i=1}^{\infty}\{v_i\}$ svih čvorova lavirinta L_{v_0} koje automat $\mathfrak{A}_{q_0}$ obilazi i označimo ga sa $\mathrm{Int}(\mathfrak{A}_{q_0}; L_{v_0})$.

Neka je $L_{v_0} \in L(\Omega, \Sigma)$ i $\mathfrak{A}_{q_0} \in At(\Omega, \Sigma)$. Ako je skup $\mathrm{Int}(\mathfrak{A}_{q_0}; L_{v_0})$ jednak skupu čvorova lavirinta L_{v_0}, kažemo da automat $\mathfrak{A}_{q_0}$ *obilazi* lavirint L_{v0}, u protivnom lavirint L_{v_0} nazivamo ***zamkom*** za automat $\mathfrak{A}_{q_0}$. Ovi pojmovi se mogu proširiti i na neinicijalne automate i na neinicijalne lavirinte, kao i na bilo koju kombinaciju (ne)inicijalnih automata i (ne)inicijalnih lavirinata.

Neka je $L \in \mathfrak{L}(\Omega, \Sigma)$ i neka je $\mathfrak{A} \in At(\Omega, \Sigma)$ gde i L i $\mathfrak{A}$ mogu biti ili inicijalni ili neinicijalnui. Neka su $\alpha, \beta \in \{\mathrm{I}, \mathrm{A}, \mathrm{E}\}$. Parametri α i β imaju sledeći smisao: ako je $\beta = \mathrm{I}$ lavirint je inicijalan, u suprotnom $\beta \neq \mathrm{I}$; ako je $\alpha = \mathrm{I}$ automat $\mathfrak{A}$ je inicijalni automat, u suprotnom je $\alpha \neq \mathrm{I}$. Slovo A ukazuje da se svi čvorovi neinicijalnog lavirinta, odnosno sva stanja neinicijalnog automata razmatraju, a slovo E ukazuje da se samo neki čvorovi neinicijalnog lavirinta, odnosno da samo neka stanja neinicijalnog automata razmatraju. Sada

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

možemo uvesti pojam $\alpha\beta$-obilaska i $\beta\alpha$-zamke. Naprimer, $L_{v_0} \in \mathfrak{L}(\Omega,\Sigma)$ je IA-zamka za $\mathfrak{A} \in At(\Omega,\Sigma)$, ako za svako stanje $q \in Q_V$, lavirint L_{v_0} je zamka za automat $\mathfrak{A}_q$. Automat $\mathfrak{A} \in At(\Omega,\Sigma)$ AA-obilazi lavirint L ako za bilo koje stanje automata, automat sa takvim početnim stanjem obilazi lavirint krenuvši iz bilo kojeg čvora lavirinta.

Do sada smo razmatrali ponašanje jednog automata u lavirintu. Moguće je razmatrati i ponašanje sistema automata u lavirintu. Neka je dat lavirint $L_{v_1,\dots,v_n} \in \mathfrak{L}(\Omega,\Sigma)$ i neka je dat sistem dopustivih automata $\mathcal{A}=(\mathfrak{A}^1_{q_1},\dots,\mathfrak{A}^1_{q_n})$. Ako pod ponašanjem sistema, podrazumevamo n-torku koju čine ponašanja svakog automata pojedinačno, tj. $(\pi(\mathfrak{A}_{q_1}; L_{v_1}),\dots,\ \pi(\mathfrak{A}_{q_n}; L_{v_n}))$, onda takav sistem nazivamo nezavisnim sistemom, a ponašanje nazivamo ponašanjem nezavisnog sistema. Nezavisni sistem opravdava svoj naziv zato što automati ni na koji način nisu svesni prisustva drugih automata, pa samim tim i njihovo ponašanje uopšte ne zavisi od ponašanja drugih automata.

Ponašanje sistema možemo ojačati uvođenjem "svesnosti" automata drugih automata i njihovih ponašanja. Ovakva "svesnost" se može uvesti na različite načine. Neka su automati kodirani slovima $u_1,\dots,u_n$ gde je u_i ili stanje i-tog automata $\mathfrak{A}^i_{q_i}$ u datom trenutku ili Λ. Neka je ulazna azbuka automata $\mathfrak{A}^i_{q_i}$, $1 \le i \le n$ sastavljena od slova $a=(\omega,\{u_1,\dots,u_{i-1},u_{i+1},\dots,u_n\},\{\sigma_1,\dots,\sigma_n\})$, gde je $\omega \in \Omega$ i $\{\sigma_1,\dots,\sigma_n\} \subseteq \Sigma$, a izlazna azbuka je $\Sigma \cup \{k\}$, gde $k \notin \Sigma$, i funkcija izlaska ψ_i zadovoljava uslov $\psi_i(q,a) \in \mathrm{Pr}_3(a) \cup \{k\}$, za sve dozvoljene vrednosti a i q, tada sistem $\mathfrak{A}$ nazivamo kolektivom.

Ponašanje kolektiva $\mathcal{A}=(\mathfrak{A}^1_{q_1},\dots,\mathfrak{A}^1_{q_n})$ u lavirintu $L_{v_1,\dots,v_n} \in \mathfrak{L}(\Omega,\Sigma)$ opisujemo na sledeći način. U početnom momentu automati $\mathfrak{A}^i_{q_i}$ se

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

nalaze u čvorovima v_i, $1 \le i \le n$. Neka se u trenutku t automat $\mathfrak{A}^i_{q_i}$ nalazi u čvoru v_i^t i stanju q_i^t. Tada automat proverava uređenu trojku koju čine: oznaka čvora, kodovi svih automata sistema (kod automata sistema koji se ne nalaze u datom čvoru v_i^t je Λ) osim automata $\mathfrak{A}^i_{q_i}$ i oznake grana koje izlaze iz čvora v_i^t. Ako je $\psi_i(q_i^t, a_i^t) \neq k$ automat prelazi u čvor u koji vodi grana označena sa $\psi_i(q_i^t, a_i^t)$, a ako je $\psi_i(q_i^t, a_i^t) = k$ onda automat ostaje u čvoru v_i^t. Nakon toga automat prelazi u stanje $\varphi_i(q_i^t, a_i^t)$. Ponašanje automata $\mathfrak{A}^i_{q_i}$ u lavirintu $L_{v_1,\dots,v_n}$ je niz uređenih parova $(q_i^0, v_i^0), (q_i^1, v_i^1), \dots$, gde je $(q_i^0, v_i^0) = (q_i, v_i)$, v_i^{j+1} je čvor u koji automat $\mathfrak{A}^i_{q_i}$ prelazi iz čvora v_i^j menjajući stanje iz q_i^j u q_i^{j+1}. Kažemo da automat $\mathfrak{A}^i_{q_i}$ obilazi čvorove $v_i^0, v_i^1, \dots$. Taj skup čvorova označimo sa $\mathrm{Int}(\mathcal{A}, L_{v_1,\dots,v_n}, i)$. Niz

$$\pi(\mathcal{A}, L_{v_1,\dots,v_n}) = (q_1^0, \dots, q_n^0, v_1^0, \dots, v_n^0), (q_1^1, \dots, q_n^1, v_1^1, \dots, v_n^1), \dots,$$

gde je $(q_i^0, v_i^0), (q_i^1, v_i^1), \dots$ ponašanje automata $\mathfrak{A}^i_{q_i}$ u lavirintu L, nazivamo ponašanjem kolektiva automata $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}^1_{q_1}, \dots, \mathfrak{A}^1_{q_n})$ u lavirintu $L_{v_1,\dots,v_n}$. Neka je $\mathrm{Int}(\mathcal{A}, L_{v_1,\dots,v_n}) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Int}(\mathfrak{A}_{q_i}, L_{v_i}; i)$. Ako je $\mathrm{Int}(\mathcal{A}, L_{v_1,\dots,v_n}) = V$ kažemo da kolektiv *obilazi* lavirint $L_{v_1,\dots,v_n}$, a u suprotnom kažemo da je lavirint $L_{v_1,\dots,v_n}$ *zamka* za kolektiv $\mathcal{A}$. Kažemo da $\mathcal{A}$ *jako obilazi* lavirint L ako za bilo koji izbor inicijalnog čvora lavirinta L, kolektiv $\mathcal{A}$ ga obilazi (tj., posmatramo slučaj kada je $v_0 = v_1^0 = v_2^0 = \dots = v_n^0$, gde je v_0 početni čvor lavirinta L).

Automate $\mathfrak{A}^{i_1}_{q_{i_1}}, \dots, \mathfrak{A}^{i_m}_{q_{i_m}}$, $1 \le i_1 < \dots < i_m \le n$, iz kolektiva $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}^1_{q_1}, \dots, \mathfrak{A}^1_{q_n})$ nazivamo *kamenima* ukoliko je:

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

1) automat $\mathfrak{A}^{i_j}_{q_{i_j}}$, $1 \le j \le m$, ima samo jedno stanje q_{i_j};

2) ako za neki ulaz $a = (\omega, \{u_1, \dots, u_{i_l-1}, u_{i_l+1}, \dots, u_n\}, \{\sigma_1, \dots, \sigma_s\})$ automata $\mathfrak{A}^{i_l}_{q_{i_l}}$ $(1 \le l \le m)$ važi $\psi_{i_l}(q_{i_l}, a) = \sigma_k$, $1 \le k \le s$, to postoji $j \ne i_l$ $(1 \le j \le n,\quad 1 \le l \le m)$ takav da je $u_j \ne \Lambda$ i $\psi_j(u_j, a') = \sigma_k$, gde je $a' = (\omega, \{u'_1, \dots, u'_{j-1}, u'_{j+1}, \dots, u'_n\}, \{\sigma_1, \dots, \sigma_s\})$, pri čemu $u'_i = u_i$ za sve $i \ne i_l, j$, $1 \le i \le n$, a $u'_{i_l} = q_{i_l}$.

Drugim rečima, automat kamen je automat koji ima samo jedno stanje i ukoliko ne stoji u mestu tada postoji automat koji se nalazi na istom mestu i vuče ga za sobom.

Kolektiv sa m automata koji su kameni, naziva se ***kolektivom od $n-m$ automata s m kamenova*** (kolektiv tipa $(n-m,m)$).

Navedimo samo neke rezultate vezane za ponašanje automata u lavirintima. Pregled ovih i svih ostalih važnijih rezultata ove oblasti teorije automata je dat u [5].

Jedan od osnovnih problema koji se postavlja kada se razmatra neka fiksirana klasa lavirinata je mogućnost sinteze automata koji obilazi sve lavirinte iz posmatrane klase. Neka je $\mathfrak{L}$ proizvoljna klasa lavirinata. Ako za $\mathfrak{L}$ postoji automat takav da obilazi svaki lavirint iz te klase, onda kažemo da je on univerzalan automat za klasu $\mathfrak{L}$. Jasno je da ako bar jedan univerzalan automat postoji za posmatranu klasu, to tada za nju postoji beskonačno mnogo takvih automata. S druge strane za sve klase lavirinata ne mora da postoji univerzalan automat. U [3] je dokazano da za klasu svih konačnih ravanskih pravilnih lavirinata takav automat ne postoji. Dokaz tog tvrđenja u [3] je izveden korišćenjem složenog algebarskog aparata (teorije kategorija) što je rezultiralo i velikom njegovom dužinom i komplikovanošću (prva njegova varijanta je bila čak na 190 stranica).

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Logički on nije bio sasvim potpun — nije razmatran jedan od mogućih slučajeva. U [4] je data druga mnogo kraća verzija tog istog dokaza, koja je dobijena njegovom preradom na jezik teorije automata i njegovim logičkim upotpunjavanjem. U [9] je dat sasvim drugi (induktivni) dokaz ovog tvrđenja, još kraći od izloženog u [4].

Tvrđenje iz [3] možemo preformulisati i na sledeći način: za svaki automat postoji zamka koja pripada klasi konačnih pravilnih mozaičnih lavirinata. Interesantan problem koji se ovde postavlja je problem složenosti takve zamke. Složenost se ovde može posmatrati kako u smislu broja rupa, tako i u smislu broja čvorova konstruisane zamke. Obe ove vrste složenosti su razmatrane. U [6] je pokazano da za svaki inicijalni automat postoji konačna ravanska pravilna r-povezana zamka tako da je $r \leq 3$, a u [2] da za svaki inicijalni automat sa n stanja postoji konačna ravanska pravilna zamka sa brojem čvorova ne većim od $c^{\sqrt{2n\log_2(2n)}}$.

Primetimo da i u slučaju konačnih nezavisnih sistema inicijalnih automata i klase svih konačnih ravanskih pravilnih lavirinata odgovor na postavljeno pitanje ostaje isti ([1],[8]).

Dovoljno trivijalno je pokazati da je u slučaju konačnih klasa ravanskih mozaičnih lavirinata odgovor na postavljeno pitanje (postojanje univerzalnog automata) potvrdan. Lako je primetiti da je on i u slučaju nekih beskonačnih klasa potvrdan. Na primer, takva je klasa svih konačnih ravanskih mozaičkih drva (jedan od mogućih univerzalni automata za ovu klasu je automat koji se služi pravilom ili leve, ili desne ruke). Navedimo ovde i jedan manje trivijalan slučaj beskonačne klase ravanskih mozaičnih lavirinata za koju skup svih univerzalnih lavirinata nije prazan.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Neka je L konačan ravanski mozaički lavirint. Za svaku stranu (strana je cikl koji se dobija kada iz proizvoljnog čvora sa oboda rupe ide po granici oko nje protivno kretanju kazaljke na satu dok se ne dođe u isti čvor) $f = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ lavirinta L skup čvorova $\{pr_1(\gamma_j) | 1 \le j \le n\}$ označavamo sa $[f]$. Skup svih strana koje ograničavaju konačne rupe lavirinta L označavamo sa $F(L)$. Broj $\max\{diam[f] \mid f \in F(L)\}$ nazivamo *r.-dijametrom* lavirinta L. U [10] je pokazano da za svako $d \in N$ postoji inicijalni automat $\mathfrak{A}$ koji jako obilazi klasu svih konačnih ravnih mozaičkih lavirinata čiji *r-dijametar* nije veći od d, broj stanja automat $\mathfrak{A}$ je jednak Cd, a vreme obilaska lavirinta sa n čvorova iz ove klase je ograničen sa Cn.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

2. MODELIRANJE AUTOMATA U AutLav PROGRAMU

2.1. Modeliranje automata pomoću AutLav-tablica.

U ovom odeljku razmotrićemo problem modeliranja jedne klase automata dopustivih za tzv. r-lavirintečije ćemo ponašanje modelirati u poglavlju 3. Neka je $\mathfrak{A}_{q_0}=(A,Q,B,\varphi,\psi,q_0)$, inicijalni automat, gde je A skup svih nepraznih podskupova skupa $D\times\{1,2,\dots,r\}$, gde su oblika $\{(d_1,e_1),(d_2,e_2),\dots,(d_k,e_k)\}$, $d_i\neq d_j$ za $i\neq j$, $1\leq k\leq 4$; $B=D\times I_r$, gde je $I_r=\{1,2,\dots,r\}$ za $r\geq 1$ i $I_0=\{0\}$; ako je $q\in Q$ i $a\in\{(d_1,e_1),(d_2,e_2),\dots,(d_k,e_k)\}\in A$ onda je $\psi(q,a)=(b_1,b_2)$, $b_1\in\{d_1,d_2,\dots,d_k\}$.

Skup svih takvih konačnih automata $\mathfrak{A}_{q_0}=(A,Q,B,\varphi,\psi,q_0)$ se označava sa M_r. Ukoliko takav automat ima p stanja, skup svih takvih automata se označava $M_{r,p}$.

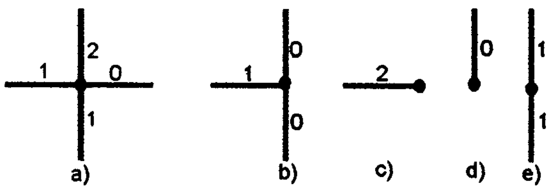
U toku daljeg rada razmatraćemo zadavanje automata ovakvog tipa. U odeljku1.2. smo videli koji se načini zadavanja automata najćešće koriste u nekim dosadašnjim iskustvima. Iz priloženog se vidi da su ti načini vrlo komplikovani, odnosno glomazni, jer su vrlo daleko od realnog zadavanja.

Ceo ovaj problem mora se prilagoditi što jednostavnijem pristupu za programiranje, pošto je jedan od osnovnih zadataka ovog rada pisanje softvera za zadavanje automata i lavirinata, kao i njihovo ponašanje. Taj program se zove “AutLav”. Njegovo funkcionisanje je opisano u odeljku 3.3.

Elemente skupa A predstavljamo, u programu AutLav, kao skup niski dužine četiri čiji članovi predstavljaju celobrojne veličine (njihova deklaracija u programu je ulaz: array[1..10000] of string[4];).

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Indeks niza predstavlja redni broj ulaza. Prvo mesto predstavlja šta imamo na istoku (*e*), drugo mesto predstavlja šta imamo na jugu (*s*), treće mesto predstavlja šta imamo na zapadu (*w*) i četvrto mesto predstavlja šta imamo na severu (*n*). Celobrojna veličina koja se nalazi na određenom mestu ima sledeća značenja: ukoliko je celobrojna veličina 0 u tom pravcu ne postoji put, ako je celobrojna veličina 1 u tom pravcu postoji put koji nije obeležen i ako je celobrojna veličina veća od jedan taj put je obeležen sa oznakom za jedan manje od te oznake (u ovom programu najveća moguća oznaka je 8, jer je na tom mestu iskorišćena celobrojna veličina 9). Na slici 2.1. vidimo neke elemente skupa a i njihovo grafičko prikazivanje. Pod *a*) ulazna veličina iz programu ima vrednost 1223 što odgovara stvarnom stanju ka



Slika 2.1.

e imamo oznaku 0, ka *s* imamo oznaku1, ka *w* imamo oznaku 1 i ka *n* imamo oznaku 2; pod *b*) ulazna veličina iz programu ima vrednost 0121 što odgovara stvarnom stanju ka *e* uopšte nemamo put, da *s* nije označen ili da mu je oznaka 0, ka *w* imamo oznaku 1 i *n* nije označen; pod *c*) ulazna veličina iz programa ima vrednost 0030 što odgovara da ka *e*, *s* i *n* nemamo put a ka *w* imamo oznaku 2; pod *d*) ulazna veličina iz programu ima vrednost 0001 što odgovara da ka *e*, *s* i *w* nemamo put a da put *n* nema oznaku; i pod *e*)

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

ulazna veličina iz programu ima vrednost 0202 što odgovara da su putevi ka s i n označeni sa 1 a da putevi sa e i w nisu označeni, odnosno da su označeni sa 0.

Rezultate funkcija φ i ψ predstavljamo, u programu AutLav, kao dvodimenzionalni niz stringova dužine tri čiji članovi predstavljaju celobrojne veličine (njihova deklaracija u programu je izlaz : array[1..10000,1..9] of string [3];). Prvi indeks niza predstavlja redni broj izlaza, a drugi u kom je stanju automat. Prvo mesto nam označava u kom pravcu će automat da ide, elementi prvog mesta su iz skupa D, na drugom mestu je stvarna vrednost oznake (nije povećana za jedan) i treće mesto predstavlja celobrojnu veličinu koja označava u koje stanje automat prelazi. Npr vrednost nekog člana *izlaz*[123,2] je *e*21 što predstavlja da je 123 član niza *izlaz* (taj broj ustvari predstavlja redni broj ulaza) i da je automat u stanju q_2 (vrednost drugog indeksa) da će ići na istok (e)(prvo polje vrednosti niza *izlaz*[123,2]), da će se taj put označiti sa 2 (drugo polje vrednosti niza) i da će preći u stanje q_1 (treće polje vrednosti niza).

Odavde vidimo da je automat $\mathfrak{A}_{q0}=(A,Q,B,\varphi,\psi,q_0)$ i njegovo kretanje definisano, u programu, sa dva niza *ulaz* i *izlaz*. Lako se može izračunati broj članova tih nizova i to po formuli

$$broj\_clanova := (broj\_oznaka + 2)^4 - 1$$

gde se pod brojem oznaka podrazumeva 0 ako automat ne označava lavirint. Na kraju oduzimanje jedinice je zbog toga što automat ne može da se nađe u tački iz koje ne postoji ni jedan put.

Sledeći primer predstavlja automat sa četiri stanja i bez oznake. To je automat koji obilazi sva drveta i drži se leve strane:

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

redni broj	vrednost ulaza	izlazi po stanjima q_1	q_2	q_3	q_4
1	*0001*	*n04*	*n04*	*n04*	*n04*
2	*0010*	*w03*	*w03*	*w03*	*w03*
3	*0011*	*n04*	*w03*	*w03*	*w03*
4	*0100*	*s02*	*s02*	*s02*	*s02*
5	*0101*	*n04*	*s02*	*s02*	*n04*
6	*0110*	*s02*	*s02*	*w03*	*w03*
7	*0111*	*n04*	*s02*	*s02*	*w03*
8	*1000*	*e01*	*e01*	*e01*	*e01*
9	*1001*	*n04*	*e01*	*n04*	*n04*
10	*1010*	*e01*	*e01*	*w03*	*w03*
11	*1011*	*n04*	*e01*	*w03*	*e01*
12	*1100*	*e01*	*e01*	*s02*	*e01*
13	*1101*	*n04*	*e01*	*s02*	*n04*
14	*1110*	*e01*	*e01*	*s02*	*w03*
15	*1111*	*n04*	*e01*	*s02*	*w03*

Tako da ako se automat nađe u okolini pod rednim brojem 11 to znaći da može da ide u pravcu *e*, *w* ili *n*, i ako je npr u stanju q_3 automat odlučuje da ide ka zapadu (*w*), da će ga obeleziti sa 0, odnosno ostaviće istu oznaku, i preći će u stanje q_3.

Ovakav način zadavanja automata možemo izvršiti u ma kom editoru, ali njegova mana je u ogromnom broju unosa pogotovo kad automat koji ima više oznaka, ali je zato potpuno prilagođen programu AutLav.

2.2. Modeliranje automata pomoću AutLav-operatora.

Ovde ćemo pokazati kako uz pomoć operatora, koji su vrlo bliski opisu automata, možemo zadati bilo koji automat. U zavisnoti koliko je komplikovan automat, u smislu opisivanja, toliko je i velik njegov opis pomoću operatora. Imamo više operatora.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Operator pravca. Ovde ćemo objasniti zapis i funkcionisanje dva operatora pravca: operator pravca koji kao rezultat daje pravac, oznaku i stanje, i operator koji daje samo pravac.

Bekusova notacija operatora pravca koji kao rezultat daje pravac, oznaku i stanje izgleda

$p(uslov\{,uslov\})niz2$

gde su:

- *p* (malo pe) oznaka operatora pravca
- *uslov* predstavljamo kao $pravac\{\pm\}*niz1$ gde je:
    - promenljiva *pravac* može biti bilo koje slovo iz skupa $\{x,e,s,w,n\}$, i predstavlja, ukoliko je:
        - *x* zamenjuje sve pravce koji se vide iz čvora. Iza njega ne sme da se stavi ±
        - *e,s,w,n* određuje odgovarajuću stranu sveta
    - ± možemo uzeti ili + ili — ili ništa. + označava da idemo u pozitivnom smeru od zadatog pravca promenljive *pravac* (suprotno kretanju kazaljke na satu), a — označava da idemo u negativnom smeru od zadatog pravca promenljive *e,s,w,n* (u pravcu kazaljke na satu)
    - * predstavlja ma koji simbol iz skupa simbola *pravac* i redom predstavljaju:
        - simbol < predstavlja relacijski znak <
        - simbol > predstavlja relacijski znak >
        - simbol [predstavlja relacijski znak ≤
        - simbol] predstavlja relacijski znak ≥
        - simbol = predstavlja relacijski znak =
        - simbol ! predstavlja relacijski znak ≠

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

- *niz*1 predstavlja niz dozvoljenih oznaka koje nisu razdvojene zarezom. Može ih biti najmanje jedna a najviše sve dozvoljene.

- *niz*2 može da ima dva oblika:
  - *pravac*{±}{(*oznaka*)}{[*stanje*]} ili
  - *stanje*1 *pravac*{±}{(*oznaka*)}{[*stanje*2]}

    {*stanje*1 *pravac*{±}{(*oznaka*)}{[*stanje*2]}}

  gde su:
  - *stanje*1 označava u kom je stanju automat i može imati celobrojne vrednosti dozvoljenih stanja za automat
  - *pravac* u kom će pravcu ići i ima vrednosti iz skupa {*y*,*e*,*s*,*w*,*n*} gde su *e*,*s*,*w*,*n* oznake za odgovarajuću stranu sveta, a *y* označava da se ide u pravcu *pravac* koji je zadovoljen zadnjim uslovom, odnosno poslednjim zapisom oblika *pravac* * *niz*1 iz operatora
  - *oznaka* označava oznaku kojom će automat označiti navedeni pravac (ako se izostavi pravac ostaje nepromenjen, ostaje onaj koji je bio u tom pravcu
  - *stanje*2 označava stanje u koje će automat preći (ako se izostavi stanje će u tom slučaju biti nepoznato)

Funkcionisanje operatora *p* (malo pe) možemo objasniti na sledeći način: tražimo *ulaz* koji zadovoljava sve uslove *uslov* (treba voditi računa da se uslovi međusobno ne potiru jer je tada tako napisan operator beskorisan, neće prouzrokovati nikakvu štetu ali neće učiniti ništa korisno), a zatim uz pomoć *niz*2 dodeljujemo

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

promenljivoj *izlaz* sa odgovarajućim stanjima na prvo mesto *pravac*, na drugo *oznaka* ako je navedena odnosno ne menjamo je okoliko je izostavljena i na treće mesto *stanje*2 ako je navedeno odnosno ništa ako nije. Funkcionisanje operatora p ćemo najbolje videti na primerima koji su navedeni malo kasnije.

Bekusova notacija operatora pravca koji kao rezultat daje samo pravac izgleda

$P(pravac1\pm,\{pravac2\}\pm)$

gde su:

- P (veliko pe) ozaka operatora pravca
- promenljiva *pravac*1 može biti bilo koje slovo i skupa $\{e,s,w,n\}$, i predstavlja odgovarajuću stranu sveta
- $\pm$ kao i malopre
- promenljiva *pravac*2 može biti bilo koje slovo iz skupa $\{e,s,w,n\}$, i predstavlja odgovarajuću stranu sveta. Ali vazno je napomenuti da ako nju izostavimo računanje vršimo od pravca koji smo dobili sa *pravac*1$\pm$

Funkcionisanje operatora P (veliko pe) možemo objasniti na sledeći način: pročitaj oznaku sa pravca koji je određen sa *pravac*1$\pm$ pa traži pravac po pravilu $\{pravac2\}\pm$ sa istom tom oznakom, i taj pravac je rezultat našeg operatora. Funkcionisanje ćemo ipak najbolje videti na primerima.

Primeri za operator *p* (malo pe).

1) $p(w=2,w+=0)1w+(1)2w$ treba pronaći *ulaz* čiji je zapad obeležen sa 2 i prvi sledeći koji postoji od severa, istoka ili juga koji je obeležen sa 0. Za tako nađeni *ulaz* i njegov redni broj u promenljivu *izlaz* sa tim rednim brojem (prvi indeks promenljive *izlaz*) i drugim indeksom 1 stavljamo na prvo mesto prvi pravac koji

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

postoji od pravaca sever, istok, jug ili zapad, a na drugu poziciju stavljamo oznaku 1. A u promenljivu *izlaz* sa istim rednim brojem kao prvim indeksom i sa 2 kao drugi indeks stavljamo na prvo mesto w a na drugo mesto 2 jer je zapad obeležen sa 2 (ukoliko se oznaka izostavi oznaka odgovarajućeg pravca se nemenja).

2) $p(x=1,e]0)1e$ ovaj uslov zahteva da svi pravci koji postoje moraju biti obeleženi sa 1, a među njima mora postojati pravac ka istoku.Vrlo je bitno napomenuti da uslov u kojem figuriše x mora biti na prvom mestu uslova. U promenljivu *izlaz* upisujemo samo za drugi indeks jednak 1 na prvo mesto e, a na drugo mesto mesto se upisuje 1, pošto je to i bilo. Ostali drugi indeksi se ne upisuju.

3) p(x]1,n!1,e!1,s!1,s+=1)y(2) traži *ulaz* čiji su svi pravci obeleženi sa brojem većim ili jednakim od jedan, s tim što sever,istok i jug nisu obeleženi sa jedinicom, a prvi sledeći pravac koji postoji od juga u pozitivnom smeru je obeležen sa jedan. Kao rezultat treba upisati u *izlaz* za sve druge indekse pravac koji zadovoljava $s+=1$ na prvo mesto, a na drugo mesto oznaku koja je bila u tom pravcu.

4) $p(e=12,w!2)y(3)$ prvi uslov zahteva da je istok označen sa 1 ili sa 2, a drugi uslov zahteva da je zapad označen sa oznakom različitom od 2 ili uopšte ne postoji. promenljiva *izlaz* za sva stanja na prvo mesto dobijaju pravac zapad ako postoji, odnosno istok ako ne postoji, a na drugu poziciju se stavlja oznaka 3.

5) $p(e>0,n[1)1e+(1)[2]2s-(2)$ prvi uslov zahteva da je istok obeležen (zahteva da bude veći od nule, a nula je putanja bez oznake), a drugi da je sever obeležen sa jedan ili da nije obeležen (moglo je da stoji $n=01$ umesto $n[1)$. Kao rezultat u promenljivoj *izlaz* čiji je drugi indeks jedan na prvo mesto upisujemo prvi pravac koji postoji u pozitivnom smeru počev od juga (zbog $e+$), na drugo

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

mesto stavljamo oznaku 1, a na treće mesto stanje q_2. U promenljivoj *izlaz* čiji je drugi indeks dva na prvo mesto upisujemo prvi pravac koji postoji u negativnom smeru počev od istoka (zbog $s-$), na drugo mesto stavljamo oznaku 2, a na treće mesto ne upisujemo ništa jer je deo za stanje izostavljen (*stanje*2).

Operatorom p (malo pe) možemo za svaku ulaznu veličinu ulaz odrediti izlaznu veličinu izlaz.

Dokaz: Očigledno je da uz pomoću četiri uslova možemo napisati ma koju okolinu proizvoljnog čvora iz pravougaonog lavirinta (korišćenjem elemenata skupa D, relacijskog znaka = i dozvoljenih oznaka za taj automat), a pomoću *stanje*1 *pravac*{±}{(*oznaka*)}{[*stanje*2]}... možemo za svako stanje u kome se automat nalazi (određenog sa *stanje*1) odrediti pravac sa *pravac*{±}, oznaku sa (*oznaka*) i stanje sa [*stanje*2] (normalno ako se navedu).

Očigledno je da kad bi svaki automat definisali korak po korak, na ovaj način, bila potrebna čitava večnost, ali zato sa skupljanjem uslova stvar se mnogo ubrzava. Skupljanjem uslova i pisanjem novih javlja se problem dupliranja. U programu AutLav taj problem je rešen, ako do njega dođe, nuđenjem tri opcije:

- Zadržati stari izlazni kod (promenljivu *izlaz* ostavljamo onakvu kakva je bila pre dupliranja)
- Uneti novi izlazni kod (promenljivoj *izlaz* dodeljujemo novonastalu kombinaciju)
- Uneti potpuno nov izlazni kod (promenljivoj *izlaz* dodeljujemo potpuno novu kombinaciju, koja ne zavisi ni od stare ni od nove). Ova opcija je vrlo korisna jer kod nekih automata prilikom definisanja ukoliko dođe do dupliranja

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

zahteva se novi opis, što bi bilo isuviše komplikovano za automatsku realizaciju.

Primeri za operator *P* (veliko pe).

1) $P(e+,w-)$ čita oznaku sa prvog pravca koji postoji u pozitivnom smeru počev od juga (zbog $e+$), pa traži prvi pravac koji postoji u negativnom smeru počev od juga (zbog $w-$) sa tom oznakom. Kao rezultat u promenljivu *izlaz* na prvo mesto za sva stanja upisuje pravac koji se dobio na kraju.

2) $P(n+,-)$ čita oznaku sa prvog pravca koji postoji u pozitivnom smeru počev od istoka (zbog $n+$), pa od pravca gde smo pročitali oznaku počev od prvog sledećeg u negativnom smeru traži pravac sa istom tom oznakom(zbog $-$), pa taj pravac smešta kao prvi parametar u promenljivoj *izlaz* za sva stanja.

Operator stanja. Ovim operatorom određujemo samo stanje automata u zavisnosti od puta kojim idemo i njegove oznake.

Bekusova notacija operatora stanja je:

s(pravac,zona_oznake,zona_stanja)

gde su:

- *s* (malo s) oznaka operatora stanja
- *pravac* jedan od elemenata skupa $\{e,s,w,n,x\}$ gde su e,s,w i n oznake za odgovarajuću stranu sveta, a x označava sve pravce koje imamo
- *zona_oznake* može imati jedan od sledećih oblika:
    - *oznaka* samo ime kaže da se radi o oznaci
    - *u*(*oznaka*1 *oznaka*2) gde su:
        - *u* skraćenica za uslov
        - *oznaka*1 i *oznaka*2 oznake koje su dozvoljene za automat

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

- *zona_stanja* može imati jedan od sledećih oblika:
  - *stanje* je jedno od dozvoljenih stanja ili znak =
  - *stanje*1*stanje*2 gde su *stanje*1 i *stanje*2 dva dozvoljena stanja ili znak =.

Funkcionisanje operatora *s* možemo objasniti na sledeći način: radi samo sa promenljivim *izlaz* kod kojih su popunjena prva dva polja a treće nije. U svim promenljivim *izlaz* (nebitni su indeksi) tražimo one koji na prvoj poziciji imaju oznaku *pravac* (posle ću objasniti ako je pravac x) a na drugoj poziciji broj jednak sa *oznaka* (ako je *oznaka*1 onda svi ostali pravci moraju biti obeleženi sa *oznaka*2, mora biti bar jedan takav), tada se na treću poziciju upisuje vrednost *stanje*, ako je to vrednost dozvoljenog stanja, odnosno stanje u kome je automat ako je znak =(ako se radi sa uslovom: ako je ispunjen uslov na treće mesto upisujemo *stanje*1 a ako nije upisujemo *stanje*2, ukoliko je neki od njih znak jednakosti radimo isto gao i malopre). Ako je vrednost *pravac* jednaka x tada u promenljive *izlaz* kod kojih je na prvoj poziciji neki od simbola strana sveta a na drugoj *oznaka* upisujemo na treću poziciju *stanje* ukoliko je to neko od dozvoljenih stanja, odnosno upisujemo tekuće stanje ukoliko je *stanje* jednako jednakosti (ovde nemože da se stavlja uslov). Funkcionisanje ćemo ipak najbolje videti na primerima.

Primeri za operator *s*.

1) $s(x,1,=)$ ukoliko se automat kreće po nekoj grani koja je obeležena sa 1, stanje automata se neće promeniti.

2) $s(w,2,1)$ ako automat krene na zapad i ta grana je obeležena sa 2 tada automat prelazi u stanje q_1.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

3) $s(n,u(01),12)$ ukoliko automat krene na sever koji nije obeležen (zbog nule) a sve ostale grane su obeležene sa 1 (mora postojati bar jedna takva grana) tada automat prelazi u stanje q_1, a ako bar jedan uslov nije ispunjen prelazi u stanje q_2.

4) $s(s,u(12),=2)$ ukoliko automat krene na jug koji je obeležen sa 1 a sve ostale grane su obeležene sa 2 (mora postojati bar jedna takva grana) tada automat ostaje u istom stanju kao do sada, a ako bar jedan uslov nije ispunjen prelazi u stanje q_2.

Operator oznake. Ovde ćemo objasniti zapis i funkciju dva operatora oznake: operator oznake koji zavisi samo od predhodne oznake i operator oznake koji zavisi od okoline.

Bekusova notacija za operator koji zavisi samo od predhodne oznake izgleda:

$o(oznaka1, oznaka2)$

gde su:

- o (malo o) oznaka operatora koji zavisi od predhodne oznake
- *oznaka*1 i *oznaka*2 dozvoljene oznake za automat

Funkcionisanje operatora o (malo o) se zasniva na sledećem: sve grane koje su bile obeležene sa *oznaka*1 obeležiće se sa *oznaka*2 kad automat prelazi preko njih. Funkcionisanje ćemo ipak najbolje videti na primerima koji slede kasnije.

Bekusova notacija za operator oznake koji zavisi od okoline izgleda:

$O(pravac\ niz\_oznaka1\{pravac\ niz\_oznaka1\}, uslov, zona\_oznaka)$

gde su:

- O (veliko o) oznaka operatora koji zavisi od okoline
- *pravac* je element skupa $\{e,s,w,n\}$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

- *niz_oznaka*1 je niz brojeva dozvoljenih oznaka jedan do drugog bez zareza između njih
- *uslov* može biti jedna od dve varijante:
  - — (crtica) nema uslova
  - *o*(*oznaka*2) gde je *oznaka*2 dozvoljena oznaka
- *zona_oznaka* u zavisnosti od uslova može biti redom:
  - *oznaka* je dozvoljena oznaka ili znak =
  - *oznaka*3 *oznaka*4 gde su *oznaka*3 i *oznaka*4 dozvoljene oznake za automat ili znak =.

Funkcionisanje operatora *O* (veliko o) se zasniva na sledećem: mora prvo mesto u promenljivoj *izlaz* da bude kao prvo pojavljivanje *pravac*, pa zatim otkrijemo sve promenljive *ulaz* koje zadovoljavaju sve (*pravac* može biti obeležen sa bilo kojom oznakom iz *niz_oznaka*1), ako su bez uslova (—) tada će u promenljivu *izlaz* za sve indekse na drugu poziciju upisati *oznaka* ili ostaviti oznaku sa prvog *pravac* ukoliko je znak =, odnosno ako postoji uslov koji zahteva da ima još oznaka sem prve navedene u prvom navođenju *niz_oznaka*1 (prva oznaka u prvoj *niz_oznaka*1 mora biti ista sa *oznaka*2, inače je neispravan unos), ako je to ispunjeno na treću poziciju ide *oznaka*3 a ako nije ispunjeno stavlja se *oznaka*4. Funkcionisanje ćemo ipak najbolje videti na primerima.

Primeri za operator *o* (malo o).

1) *o*(1,2) sve grane koje su bile obeležene sa jedinicom, nakon prolaska automata, biće izbrisane i automat će ih obeležiti sa 2.

Primeri za operator *O* (veliko O).

1) *O*(*w*0*e*1,–,2) kad automat naiđe na čvor koji zadovoljava: zapadni pravci koji nisu obeleženi (glavni uslov) i istok koji je obeležen sa 1, tamo gde bude išao staviće oznaku 2, odnosno na

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

zapad (mora odgovarajuća promenljiva *izlaz* na prvoj poziciji imati w).

2) $O(e123n1,-,=)$ kad automat naiđe na čvor koji zadovoljava: istok je obeležen sa 1, 2 ili sa 3, a sever sa 1, pošto ide na istok ostaviće istu oznaku koja je i bila.

3) $O(s1w0,o(1),12)$ kad automat naiđe na čvor koji zadovoljava: jug je obeležen sa 1, a zapad nije obeležen, tada ako je u promenljivoj *izlaz* na prvoj poziciji s i postoji još puteva iz tog čvora obeleženih sa 1 tada će oznaka na jugu postati 1, ako nema onda će ga označiti sa 2.

Iz dosadašnjeg izlaganja možemo videti da su operatori vrlo slični njihovom opisu pri definisanju automata, koji je ipak najzgodniji za predstavljanje automata, pa samim tim, možemo konstruisati još mnogo novih operatora. Ali gde se zaustaviti?

Na primeru automata koji obilazi sva n-dimeziona mozaička drva držeći se leve strane iz $M_{4,0}$ (skup svih automata sa četiri stanja i bez oznake) videćemo olakšanje kod zadavanja. Ukupno imamo pet komandi, i to:

p(w+ = 0)1w + 2n + 3e + 4s +

s(e,0,1)

s(s,0,2)

s(w,0,3)

s(n,0,4)

koji menjaju petnaest redova iz odeljka 2.1. Kod operatora p potrebno je navesti neki uslov koji je uvek tačan. Ako je automat u stanju q_1 (što znači da je došao sa zapada) ići će na prvi sledeći pravac u pozitivnom smeru od zapada; ako je automat u stanju q_2 (što znači da je došao sa severa) ići će na prvi sledeći pravac u

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

pozitivnom smeru od severa; ako je automat u stanju q_3 (što znači da je došao sa istoka) ići će na prvi sledeći pravac u pozitivnom smeru od istoka; ako je automat u stanju q_4 (što znači da je došao sa juga) ići će na prvi sledeći pravac u pozitivnom smeru od juga. Preostale četiri komande određuju stanja automatima i to: ako se ide na istok automat prelazi u stanje q_1, na jug u stanje q_2, na zapad u stanje q_3 i na sever prelazi u stanje q_4. To se nije moglo odmah staviti u prvu naredbu jer nismo znali odmah pravce.

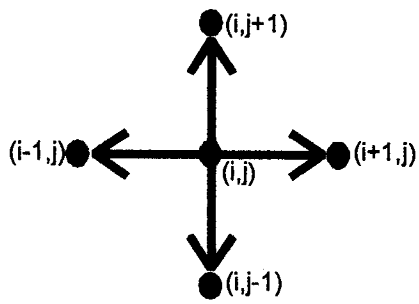
Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

3. MODELIRANJE PONAŠANJA AUTOMATA U r-LAVIRINTIMA POMOĆU AutLav PROGRAMA

3.1. Pojam i primeri r-lavirinta.

U radu ćemo se ograničiti na klasu mozaičkih ravanskih lavirinta, takvih gde je $D=\{w,n,e,s\}$, $r \in N$ i G konačan orijentisan povezan graf, čijem je svakom čvoru incidentno r grana. Proizvoljnoj grani p grafa G pridružujemo par $(|p|,<p>)$ iz $D\times\{1,2,...,r\}$. Simbole $|p|$ i $<p>$ nazivamo, redom, smerom i oznakom grane p. Izdvojmo u G čvorove v' i v'' i nazovimo ih početnim i završnim. Neka graf G zadovoljava sledeće uslove:

1) Ako različite grane p_1 i p_2 izlaze iz istog čvora, onda je $|p_1|\neq|p_2|$.
2) Čvorovi grafa G su tačke ravni sa celobrojnim koordinatama pri čemu grana koja izlazi iz čvora sa koordinatama (i,j) ulazi u jedan od sledećih čvorova $(i+1,j)$, $(i,j+1)$, $(i-1,j)$ ili $(i,j-1)$ u zavisnosti od $|p|$, na način kako je to predstavljeno na Slici 3.1.



Slika 3.1.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

3) Ako je grana p_1 iz čvora v u čvor u, onda iz čvora u vodi grana p_2 u čvor v tako da je ispunjeno $|p_1|=|p_2|^{-1}$, tj. $e^{-1}=w, s^{-1}=n, w^{-1}=e, n^{-1}=s$.

Grafove koji imaju navedene karakteristike nazivamo jednosmernim ravnim pravouglim mozaičnim r-lavirintima ili kratko jednosmernim r-lavirintima.

Ukoliko je još ispunjeno i to da je:

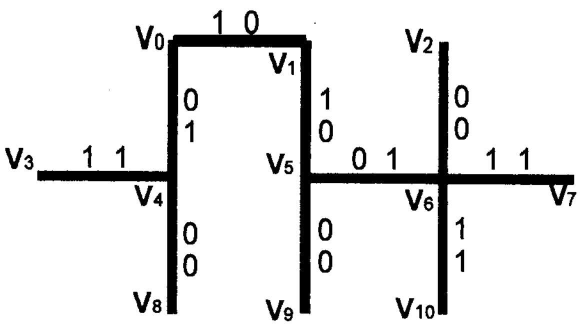
4) $<p_1>=<p_2>$,

onda takve grafove nazivamo dvosmernim ravnim pravouglim mozaičnim r-lavirintima ili kratko dvosmernim r-lavirintima.

Sa $[v]$ označimo skup grana koje izlaze iz čvora v grafa G i uzmimo da je $\delta(v,G)=\{(|p|,<p>) | p\in[v]\}$.

Na slici 3.2. prikazan je jedan jednosmerni pravougli r-lavirint. Takvi lavirinti imaju na svakoj orgrani dve oznake, brojevi koji pripadaju skupu $\{1,2,\ldots,r\}, r\in N$ ili 0 (0 predstavlja da ta orgrana nije obeležena). Zbog preglednosti, kod orgrana koje su horizontalne (mogući pravci su istok (e) i zapad (w)) oznake orgrana su stavljene sa gornje strane po sredini, s tim što je prva oznaka (leva) vidljiva samo za čvor koji je na levom kraju te orgrane a druga oznaka (desna) je vidljiva za desni čvor, a kod orgrana koje su vertikalne (mogući pravci su jug (s) i sever (n)) oznake su stavljene sa desne strane orgrane po sredini tako što je gornja oznaka vidljiva samo za čvor koji je na gornjem kraju te orgrane a donja oznaka je vidljiva za donji čvor. Tako na primer, ukoliko

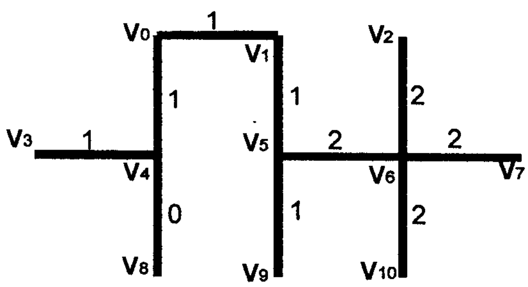
Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs



Slika 3.2.

se ide iz čvora v_5 na istok ka čvoru v_6 vidi se oznaka orgrane 0, a kada se ide iz čvora v_6 na zapad ka čvoru v_5 vidi se oznaka orgrane 1.

Na slici 3.3. prikazan je jedan dvosmerni pravougli r-lavirint. Takvi lavirinti imaju na svakoj orgrani oznaku (broj koji pripada skupu $\{1,2,\ldots,r\}, r \in N$) ili orgrane koje još nisu označene (takve orgrane označavamo sa 0). Zbog preglednosti, kod orgrana koje su horizontalne (mogući pravci su istok (e) i zapad (w)) oznaka orgrane je postavljena sa gornje strane po sredini, a kod orgrana koje su vertikalne (mogući pravci su jug (s) i sever (n)) oznaka orgrane je postavljena sa desne strane orgrane po sredini. Tako na primer,ukoliko se ide iz čvora v_5 na istok ka čvoru v_6 vidi se oznaka



Slika 3.3.

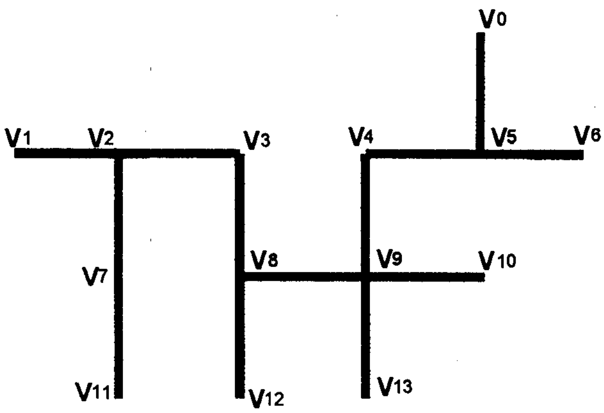
oznaka orgrane 2, a takođe se vidi ista ta oznaka orgrane kada se iz čvora v_6 ide ali na zapad ka čvoru v_5.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Nadalje, ćemo zbog kraćeg pisanja, pisati umeso orput samo put, umesto mozaičko drvo samo drvo i slično.

3.2. Modeliranje ponašanja automata u *r*-lavirintima pomoć AutLav programa

1) Neka je automat $\mathfrak{A}$ iz $M_{4,0}$ automat definisan u odeljku 2.2. On je univerzalni automat za sva n-dimeziona mozaička drva.



Slika 3.4.

Svejedno je iz kog čvora krene i u kom je stanju. Ako uzmemo npr. da je automat u stanju q_1 i da polazi iz čvora v_8 njegov obilazak drva G predstavljenog na slici 3.4. izgleda: (v_8,q_1,G), (v_3,q_4,G), (v_2,q_3,G), (v_7,q_2,G), (v_{11},q_2,G), (v_7,q_4,G), (v_2,q_4,G), (v_1,q_3,G), (v_2,q_1,G), (v_3,q_1,G), (v_8,q_2,G), (v_9,q_1,G), (v_4,q_4,G), (v_5,q_1,G), (v_0,q_4,G), (v_5,q_2,G), (v_6,q_1,G), (v_5,q_3,G), (v_4,q_3,G), (v_9,q_2,G), (v_{10},q_1,G), (v_9,q_3,G), (v_{13},q_2,G). Lako se može primetiti da je lavirint G uvek isti, pošto je automat bez oznaka.

2) Neka je automat $\mathfrak{A}_{q_1}$ iz $M_{2,1}$ (dva stanja i jedna oznaka). On je univerzalni automat za sva drva sa jednosmernom oznakom. Njegov opis izgleda:

- Određivanje pravca:

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

1. Ako su sve oznake na granama iz čvora u kome se našao automat označene sa 0 tada :
   - ako je automat u stanju q_1 ići će u prvi mogući pravac gledano od juga u pozitivnom smeru
   - ako je automat u stanju q_2 ići će u prvi mogući pravac gledano od severa u pozitivnom smeru
2. Ako su oznake na granama iz čvora u kome se našao automat 0 i 1 (obadve oznake su zastupljene) tada :
   1. ako je istok obeležen sa 1 a prvi sledeći pravac u pozitivnom smeru od njega sa 0, tada ako je u stanju q_1 automat će ići u pravcu istoka, a ako je u stanju q_2 ići će u prvi sledeći pravac u pozitivnom smeru počev od istoka.
   2. ako je jug obeležen sa 1 a prvi sledeći pravac u pozitivnom smeru od njega sa 0, ići će u prvi sledeći pravac u pozitivnom smeru počev od juga.
   3. ako je zapad obeležen sa 1 a prvi sledeći pravac u pozitivnom smeru od njega sa 0, tada ako je u stanju q_1 automat će ići u prvi sledeći pravac u pozitivnom smeru počev od zapada, a ako je u stanju q_2 ići će u pravacu zapada.
   4. ako je sever obeležen sa 1 a prvi sledeći pravac u pozitivnom smeru od njega sa 0, ići će u prvi sledeći pravac u pozitivnom smeru počev od severa
3. Ako su sve oznake na granama iz čvora u kome se našao automat označene sa 1 tada :
   1. ukoliko postoji istočni pravac i automat je u stanju q_1 tada će automat ići na istok

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

2. ukoliko postoji zapadni pravac i automat je u stanju q_2 tada će automat ići na zapad

4. Ukoliko za jedan ulaz ima više izlaza, ili ako neki ulaz nije obrađen ovim opisom automat će ići u prvi mogući pravac počev od zapada u pozitivnom smeru

- Određivanje oznaka:

5. Automat prilikom prolaska po granama koje su obeležene sa 0 obeležava ih sa 1

- Određivanje stanja:

6. Ako automat $\mathfrak{A}_{q_1}$ prelazi preko grane koja je označena sa 1, stanje se ne menja

7. Ako automat $\mathfrak{A}_{q_1}$ prelazi preko grane koja je označena sa 0, dešavaju se sledeće situacije:

   1. ako se ide na istok, onda ako su sve ostale grane obeležene sa 1 (mora biti bar jedna obeležena) prelazi u stanje q_1, a u suprotnom prelazi u stanje q_2
   2. ako se ide na jug, automat prelazi u stanje q_2
   3. ako se ide na zapad, onda ako su sve ostale grane obeležene sa 1 (mora biti bar jedna obeležena) prelazi u stanje q_2, a u suprotnom prelazi u stanje q_1
   4. ako se ide na sever,automat prelazi u stanje q_1.

Vidimo da je opis ovog automata veoma komplikovan. Njegov opis uz pomoću operatora izgleda:

1. $\quad p(x=0)1s+(1)2n+(1)$

2.1. $\quad p(e=1,e+=0)1e(1)2e+(1)$

2.2. $\quad p(s=1,s+=0)s+(1)$

2.3. $\quad p(w=1,w+=0)1w+(1)2w(1)$

2.4. $\quad p(n=1,n+=0)n+(1)$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

3.1. p(x = 1, e]0)1e(1)

3.2. p(x = 1, w]0)2w(1)

4. Pošto pri unosu automata program stalno kontroliše, između ostalog, da li je automat kompletno zadat i ako nije daje nam mogućnost manuelnog unosa promenljivih *izlaz*

5. *o*(0,1)

6. s(x,1,=)

7.1. s(e,u(01),12)

7.2. s(s,0,2)

7.3. s(w,u(01),21)

7.4. s(n,0,1)

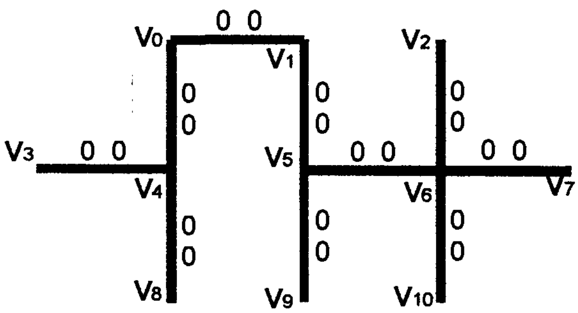
Izgled promenljivih *ulaz* i *izlaz* koje se stvaraju programom AutLav je:

ulaz	izlaz(I)	izlaz(II)	ulaz	izlaz(I)	izlaz(II)	ulaz	izlaz(I)	izlaz(II)
0001	n11	n11	0002	n11	n12	0010	w12	w12
0011	w11	w11	0012	w12	w12	0020	w11	w12
0021	n11	w12	0022	w11	w12	0100	s12	s12
0101	n11	s12	0102	s12	s12	0110	w11	s12
0111	w11	s12	0112	s12	s12	0120	s12	w12
0121	n11	w12	0122	s12	s12	0200	s11	s12
0201	n11	n11	0202	n11	n12	0210	w12	w12
0211	w11	w11	0212	w12	w12	0220	w11	w12
0221	n11	w12	0222	w11	w12	1000	e11	e11
1001	n11	e12	1002	e11	e11	1010	w11	e12
1011	w11	e12	1012	e12	e12	1020	e11	w12
1021	n11	w12	1022	e11	e11	1100	e12	e12
1101	n11	e12	1102	e12	e12	1110	w11	e12
1111	w11	e12	1112	e12	e12	1120	e12	w12
1121	n11	w12	1122	e12	e12	1200	e11	e11
1201	n11	n11	1202	e11	e11	1210	w11	w12
1211	w11	w12	1212	w11	w12	1220	e11	w12
1221	n11	w12	1222	e11	e11	2000	e11	e12
2001	e11	n11	2002	e11	n12	2010	e11	w12

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

2011	e11	w11	2012	e11	w12	2020	e11	w12
2021	n11	w12	2022	e11	w12	2100	e11	s12
2101	e11	s12	2102	e11	s12	2110	e11	s12
2111	e11	s12	2112	e11	s12	2120	e11	s12
2121	w11	w12	2122	e11	s12	2200	e11	e12
2201	n11	n11	2202	e11	n12	2210	w12	w12
2211	w11	w11	2212	w12	w12	2220	e11	w12
2221	n11	w12	2222	e11	w12			

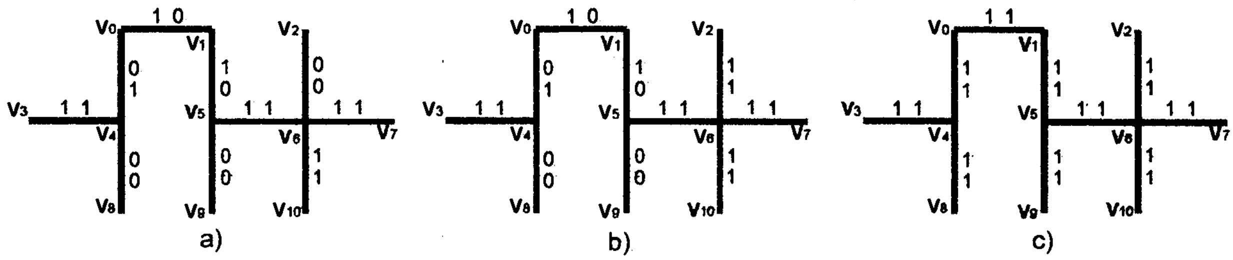
Ponašanje inicijalnog automata $\mathfrak{A}_{q_1}$, nalazi se u stanju q_1, u drvu sa jednosmernim oznakama G (slika 3.5.) s početkom u čvoru v_3 izgleda: (v_3,q_1,G_1), (v_4,q_1,G_2), (v_3,q_1,G_3), (v_4,q_1,G_4), (v_0,q_1,G_5),



Slika 3.5.

(v_1,q_2,G_6), (v_5,q_2,G_7), (v_6,q_2,G_8), (v_7,q_2,G_9), (v_6,q_2,G_{10}), (v_{10},q_2,G_{11}), (v_6,q_1,G_{12}), (v_5,q_1,G_{13}), (v_6,q_1,G_{14}), (v_2,q_1,G_{15}), (v_6,q_2,G_{16}), (v_5,q_2,G_{17}), (v_9,q_2,G_{18}), (v_5,q_1,G_{19}), (v_1,q_1,G_{20}), (v_0,q_2,G_{21}), (v_4,q_2,G_{22}), (v_8,q_2,G_{23}), (v_4,q_1,G_{24}). Gde je $G_1=G$, a ostali G_i se dobijaju promenama oznaka između dva čvora. Tako na primer na slici 3.6. pod a) vidimo lavirinte $G_{13}=G_{14}$, u delu b) vidimo lavirinte $G_{16}=G_{17}$ i u delu pod c) vidimo krajnji oblik lavirinta G_{24}.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs



Slika 3.6.

3) Neka je automat $\mathfrak{A}$ iz $M_{1,2}$. On je univerzalni automat za klasu lavirinata sa jednosmernom oznakom. Njegov opis izgleda:

- Određivanje pravca:

1. Automat čita oznaku sa pravca koji je prvi moguć od zapada u negativnom pravcu, pa od pravca gde je stao ali u pozitivnom pravcu traži pravac sa istom oznakom, u koji će da ide

- Određivanje oznake:

2. Ukoliko je oznaka bila 0 ili 1 automat će te pravce obeležiti sa 2
3. Ukoliko je oznaka bila 2 automat će taj pravac obeležiti sa 1

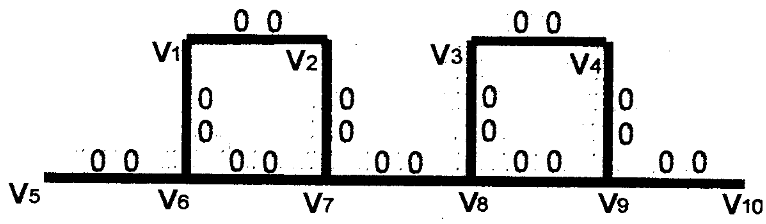
- Automat je stalno u stanju q_1 (4., 5., 6.)

Njegov opis uz pomoću operatora izgleda:

1. P(w-,+)
2. o(01,2)
3. o(2,1)
4. s(x,0,1)
5. s(x,1,1)
6. s(x,2,1)

Vrednosti promenljivih *ulaz* i *izlaz*, koje stvara program AutLav, nećemo navesti jer ih ima po 255.

Da bi smanjio pisanja, staviću samo oznake čvorova po kojima će automat $\mathfrak{A}$ ići kroz lavirint G sa slike 3.7. Niz čvorova je: v_5, v_6, v_5, v_6, v_1, v_2, v_1, v_6, v_7, v_6, v_5, v_6, v_1, v_2, v_7, v_2, v_1, v_6, v_7, v_8, v_7, v_6, v_5, v_6, v_1, v_2, v_7, v_2, v_1, v_6,



Slika 3.7.

v_7, v_8, v_3, v_4, v_3, v_8, v_9, v_8, v_7, v_6, v_5, v_6, v_1, v_2, v_7, v_2, v_1, v_6, v_7, v_8, v_3, v_4, v_9, v_4, v_3, v_8, v_9, v_{10}.

4) Neka je automat $\mathfrak{A}$ iz $M_{1,2}$. On je univerzalni automat za sva drva sa dvosmernom oznakom. Njegov opis izgleda:

- Određivanje pravca:
  1. Ukoliko iz čvora postoji bar jedan put koji nije obeležen, automat će ići u prvi takav počev od severa u pozitivnom smeru
  2. Ukoliko iz čvora postoji bar jedan put koji je obeležen sa 1 a nema neobeleženih puteva, automat će ići u prvi takav počev od severa u pozitivnom smeru
  3. Ukoliko iz čvora postoje samo putevi obeleženi sa 2 utomat je obišao lavirint (svejedno je sa čime ćemo popuniti ostatak promenljivih *izlaz*)
- Određivanje oznaka:

  Automat prelaskom određenog puta povećava njegovu oznaku za jedan
- Određivanje stanja:

Automat ima samo jedno stanje, koje se ne menja.

Opis ovog automata uz pomoć operatora izgleda:

1.1. p(w+ = 0)y(1) [1]

1.2. p(n!0, n+ = 0)y(1) [1]

1.3. p(n!0, e!0, e+ = 0)y(1) [1]

1.4. p(n!0, e!0, s!0, s+ = 0)y(1) [1]

2.1. p(x]1, w+ = 1)y(2) [1]

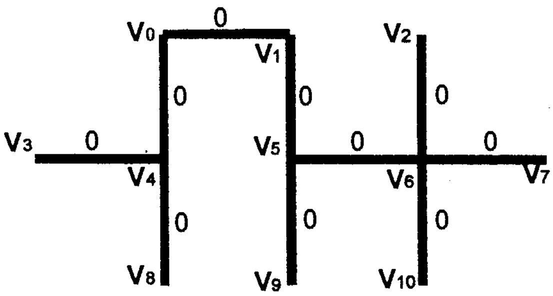
2.2. p(x]1, n!1, n+ = 1)y(2) [1]

2.3. p(x]1, n!1, e!1, e+ = 1)y(2) [1]

2.4. p(x]1, n!1, e!1, s!1, s+ = 1)y(2) [1]

3. p(x = 3)w + (2)[1]

Ponašanje automata $\mathfrak{A}$ u drvu G sa dvosmernim oznakama (slika 3.8.) s početkom u čvoru v_3 izgleda: (v_3,q_1,G_1), (v_4,q_1,G_2),

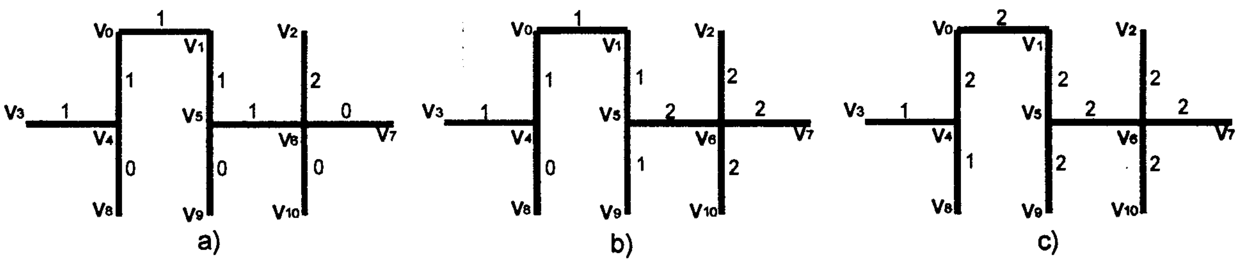


Slika 3.8.

(v_0,q_1,G_3), (v_1,q_1,G_4), (v_5,q_1,G_5), (v_6,q_1,G_6), (v_2,q_1,G_7), (v_6,q_1,G_8), (v_7,q_1,G_9), (v_6,q_1,G_{10}) (v_{10},q_1,G_{11}), (v_6,q_1,G_{12}), (v_5,q_1,G_{13}), (v_9,q_1,G_{14}), (v_5,q_1,G_{15}), (v_1,q_1,G_{16}), (v_0,q_1,G_{17}), (v_4,q_1,G_{18}), (v_8,q_1,G_{19}). Gde je $G_1 = G$, a ostali G_i se dobijaju promenama oznaka između dva čvora. Tako na primer na slici 3.9. pod a) vidimo lavirint G_8, u delu b)

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

vidimo lavirinte G_{14} i u delu pod c) vidimo krajnji oblik lavirinta G_{19}.



Slika 3.9.

3.3. Opis AutLav programa

Poznati algoritmi obilaženja lavirinata automatima su, čak i u slučaju malih kardinalnosti skupova A,Q i B, veoma komplikovani pa i teško razumljivi.

Iznalaženje optimalnog algoritma sa stanovišta, na primer njegove univerzalnosti ili vremena obilaska automatom,... zahteva eksperimentisanje sa automatima i lavirintima, pa je i vizuelizacija postavljenih problema,takođe, od interesa. Dokazivanje univerzalnosti automata za klase konačnih lavirinata predstavlja, jedan od mogućih puteva, rešavanje navedenog problema za beskonačne klase lavirinata.

Prema tome, osetila se velika potreba za stvaranje nekog softvera.

Startovanje programa. Program se startuje sa diskete, nalazi se u prilogu ovog rada, izborom "AutLav.exe". Na taj način dolazimo do prve strane programa, koja pored opštih napomena o programu ima i dve opcije: "Lavirinti sa jednosmernim oznakama" i "Lavirinti sa dvosmernim oznakama". U zavisnosti s kojim lavirintima želimo da radimo vršimo izbor odgovarajuće opcije. Dalje korišćenje programa je ekvivalentno bez obzira koju opciju smo izabrali.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Izborom odgovarajuće opcije dolazimo do druge strane na kojoj je ispisana izabrana opcija i zahtev "OK". U ovom delu programa se nameštaju odgovarajući parametri.

Pritiskom na "OK" dolazimo do glavnog menija. Glavni meni ima četiri opcije:

"KRAJ" (ovom opcijom završavamo sa radom)

"LAVIRINT" (izborom ove opcije, odlazimo na stranicu gde se zadaje ili menja odgovarajući lavirint)

Na ekranu dobijamo pravougaonu mrežu koja ima po vertikali 18 čvorova i po horizontali 21 čvor u koju se može upisati lavirint sa odgovarajućim oznakama (jednosmerne ili dvosmerne). Ukoliko je to prvi poziv ovog ekrana mreža će biti prazna, a ako je i pre pozivan, u mreži će biti ucrtan onaj lavirint koji je bio zadat u poslednjem pozivu ovog ekrana.

Upisivanje i ispravljanje lavirinata je u trendu windows programa. Jednim klikom na levi taster miša u okolini proizvoljnog čvora ucrtava se crveni kvadratić oko tog čvora, a dvoklikom na isti taster u polju proizvoljnog kvadratića se briše odgovarajući kvadratić. Analogno radimo i sa granama, s tim što se ucrtava grana (crna linija) na odgovarajuće mesto i to ukoliko se radi o lavirintima sa jednosmernim oznakama iznad (horizontalna grana) ili sa desne strane(vertikalne grane) linije biće upisane dve nule (u prvom slučaju jedna pored druge, a u drugom jedna iznad druge), a ako se radi o lavirintima sa dvosmernim oznakama po jedna nula. Analogno se dvoklikom briše odgovarajuća grada sa njenim oznakama, odnosno oznakom.

Ukoliko imamo dosta grešaka prilikom zadavanja lavirinta, ili iz nekog drugog razloga, ponuđena je opcija "NOV" kojom brišemo sve do sada zadato i ponovo dobijamo početnu mrežu.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Opcijom "OK" završavamo rad na zadavanju ili menjanju lavirinta. Ukoliko lavirint nije korektan (mora biti povezan i svaku ucrtanu granu moraju biti ucrtana oba čvora), što će nas sam program obavestiti, moramo ga popraviti do korektnosti.

Opcije "OTVORI" i "SNIMI" su standardne opcije koje nam omogućuju otvaranje, pre zadatih lavirinata, i snimanje samo korektno ucrtanih lavirinata. Ekstenzije lavirinata sa jednosmernim oznakama su la1 (npr. "prvi.la1" , "drvo.la1",...), odnosno la2 (npr. "prvi.la2" , "drvo.la2",...) za lavirinte sa dvosmernim oznakama.

"AUTOMAT" (izborom ove opcije, odlazimo na stranicu gde se zadaje ili menja odgovarajući automat)

U ovom prozoru imamo pet opcija.

"NOV" koristimo kada želimo da zadamo nov automat. nakon tog izbora od nas se zahteva inicijalizacija, zadavanje broja stanja (prirodan broj između 1 i 9) i broja oznaka (prirodan broj između 0 i 8). Ograničenja kontroliše sam program. Nakon zadavanja pritiskamo "OK" i ulazimo u glavni prozor za zadavanje automata.

Automat možemo zadati na dva načina ili njihovom kombinacijom. Pomoću operatora, opisano u odeljku 2.2., i korak po korak, opisano u odeljku 2.1. Odgovarajući operator unosimo u horizontalni okvir za tekst (Edit) pa "OK". Postupak ponavljamo sve dok imamo operatore. Ukoliko neki operator nije korektan program će javiti. Nakon unosa poslednjeg operatora i "OK" potrebno je još jednom pritisnuti "OK", za overu. Ukoliko je zadavanje završeno program nas vraća u prozor "AUTOMAT" , a ukoliko nije, program traži da za ispisani ulaz upišemo odgovarajući izlaz (potrebno je popuniti samo prazna polja kod izlaza) pa "OK". Kada završimo popunu i poslednjeg praznog izlaza program nas vraća u prozor

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

"AUTOMAT". Normalno, automat možemo zadati i korak po korak, za svaki ulaz upisujemo kompletan izlaz.

Ukoliko nismo zadovoljni sa unosom automata imamo opciju "PONISTI", kojom sve poništavamo i vraćamo se u prozor "AUTOMAT".

Opcija "ISPRAVKA" može se koristiti samo ako smo zadali ili učitali ("OTVORI") automat, o tome nas obaveštava program. Ulaskom u prozor "ISPRAVLJANJE AUTOMATA" unosimo ulaz (koji želimo da ispravimo) i novi izlaz pa "OK". Nakon zadnjeg ispravljanja uzimamo opciju "No".

Opcije "OTVORI" i "SNIMI" su standardne opcije koje nam omogućuju otvaranje, pre zadatih automata, i snimanje novozadatih ili ispravljenih automata. Ekstenzija za automate je aut (npr "levi.aut", "desni.aut",...).

Opcijom "OK" se vraćamo u prozor "GLAVNI MENI". Ukoliko automat nismo zadali ili otvorili program nam neće dozvoliti povratak u prozor "GLAVNI MENI".

"START" (ovom opcijom startujemo zadati automat kroz zadati lavirint)

U prozor "PONASANJE AUTOMATA U LAVIRINTU" dolazimo samo ukoliko smo zadali i lavirint i automat, inače će nas program obavestiti šta nedostaje.

Na ekranu imamo zadati lavirint, zajedno sa mrežom, i ponuđene opcije, "START" i "OK", u desnom donjem delu ekrana.

Izborom "START" program traži inicijalizaciju: početno stanje i početni čvor. Početno stanje se zadaje slovom q i brojem stanja (npr. q1,q5,...), a početni čvor sa klikom miša na određeni čvor na lavirintu.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Nakon toga, izabrani početni čvor se farba u crveno, u gornjem desnom uglu ekrana se pojavljuje izveštaj u kom je stanju automat, u kom će pravcu ići, kojom oznakom će biti označen i u koje će stanje preći (npr. automat je u stanju q1, ići će u pravcu w, označiće ga sa 1 i preći u stanje q1), a po sredini desne strane ekrana se pojavljuje prozor sa pitanjem "Zaustavi automat", sa "No" automat odrađuje svoj sledeći potez: čvor u kojem je bio farba u plavo a čvor u koji ide u crveno, a sa "Yes" staje. Ako smo stali, ponovo biramo "START" ili "OK".

Sa "OK" vršimo povratak u "GLAVNI MENI"

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

LITERATURA

1. Antelmann H., Budach L., Rollik H.A. On universal traps, Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. - 1979. - V. 15, No. 3. - P. 123-131.
2. Antelmann H. An application of the prime number theorem in automata theory, ICS PAS Reports 411. - 1980. - P. 9-11. (1978).
3. Budach L., Automata and labyrinths, Math. Nachrichten 86, pp. 195-282 (1978).
4. Kudrjavcev V.B., Podkolzin A.S., Ušćumlić Š.: Uvod u teoriju apstraktnih automata, Beograd, Naučna knjiga, 1986.
5. Kudryavtsev V.B., Ushchumlich Sh., Kilibarda G.: On behavior of automata in labyrinths, Discrete Math. Appl., Vol.3, No. 1, pp. 1-28 (1993).
6. Muler H. Automata catching labyrints with at most three components, Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. - 1979. - V. 15, No. 1/2. - P. 3-9.
7. Зыков А.А. Основы теории графов, М.: Наука, 1987. - 384 с.
8. Килибарда Г. Об универсальных лабиринтах-ловушках для конечных множеств автоматов, Дискретная математика. - 1990. - Т. 2, вып. 1. - С. 71-82.
9. Килибарда Г. Новое доказательство теоремы Будаха-Подколзина, Дискретная математика. - 1991. - Т. 3, вып. 2. - С. 135-146.
10. Килибарда Г. О сложности автоматного обхода лабиринтов, Дискретная математика. - 1993. - Т. 5, вып. 3. - С. 116-124.
11. Кудрявцев Г.Ю. О времени решения лабиринтных задач конечными автоматами: Дис. канд. физ.-мат. наук. - Саратов, 1990. - 127 с.
12. Харари Ф. Теория графов, М.: Мир, 1973.
13. Яблонский С.В., Основные понятия кибернетики Сб. Проблемы кибернетики. — Вып. 2, Москва, 1959.
14. Шенон К., Сообщение о машине решающей лабиринтную задачу. В книге К. Шенон, Работы по теории информации и кибернетики, М., ИЛ, 1963.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs