Графови делитеља нуле матрица над комутативним прстенима

Ивана Божић
Математички факултет
Универзитет у Београду
ментор: др Зоран Петровић

Садржај

$$\chi(\{x,y\}) = \begin{cases} 1, & xy = 0 \\ 0, & xy \neq 0 \end{cases}$$

$S \subseteq R$ homogen

$$\bigwedge_{\substack{x,y \in S \\ x \neq y}} xy = 0$$

$$\bigwedge_{\substack{x,y \in S \\ x \neq y}} xy \neq 0$$

Ramsey th.

Komisija:

1. Zoran Petrović (mentor)
2. Žarko Mijajlović
3. Gojko Kalajdžić
4. Aleksandar Lipkovski

1. Konačni i beskonačni putevi ...
2. Ako prsteni čine alg. varijetet ..
3. Teoreme reprezentacije za prstene ~~...~~ pomoću matrica (prosti, poluprosti ..)
4. Coloring of commutative ~~...~~ rings
Ramsey th.
5. Umesto $xy = 0$ uzeti $xy \in I$

Глава 1

Увод

Појам графа делитеља нуле комутативног прстена увео је Бек у раду [1]. Особине графове делитеља нуле комутативних прстена проучаване су у радовима [3],[4]. Појам графа делитеља нуле некомутативног прстена увео је Редмонд у раду [5], а неки од радова у којима је он проучаван су [6],[8]. У радовима [4], [9] проучавана је веза између графа делитеља нуле комутативног прстена R и графова делитеља нуле прстена полинома $R[X]$ и прстена степених редова $R[[X]]$.

Циљ овог рада је проучавање односа између особина графа делитеља нуле комутативног прстена R и графа делитеља нуле прстена матрица над њим. У том циљу прво доказујемо нека основна тврђења у вези са графовима делитеља нуле комутативних прстена, затим уводимо појам графа делитеља нуле некомутативног прстена и наводимо његове особине. У последњем поглављу дајемо тврђења која су у вези са матрицама и системима једначина над комутативним прстенима, која ће нам помоћи при описивању делитеља нуле у прстенима матрица. Део 4.4 садржи наш оригинални допринос и у њему се највише бавимо проучавањем односа између дијаметара графа делитеља нуле комутативног прстена R и графа делитеља нуле прстена $M_n(R)$.

Глава 2

Граф делитеља нуле у комутативним прстенима

2.1 Делитељи нуле

У овом одељку ћемо навести неколико тврђења која ће нам бити потребна у проучавању графова делитеља нуле у комутативним прстенима. Подсетимо се, елемент x је делитељ нуле у комутативном прстену R ако постоји $y \in R$ тако да важи $xy = 0$.

На почетку наводимо неколико тврђења у вези са простим идеалима. Наравно, у комутативном прстену R идеал I је прост ако из $ab \in I$ следи $a \in I$ или $b \in I$.

Теорема 2.1.1 *Нека је S мултипликативно затворен скуп у комутативном прстену R и нека је I идеал у R који је максималан међу идеалима који не садрже S. Тада је I прост.*

Доказ. Нека $ab \in I$. Треба да покажемо да су a или b из I. Претпоставимо супротно. Тада је идеал (I, a) генерисан са I и a строго већи од I, па према томе има непразан пресек са S. Дакле, постоји елемент $s_1 \in S$ облика $s_1 = i_1 + xa$ $(i_1 \in I, x \in R)$. Слично, постоји $s_2 \in S$, $s_2 = i_2 + yb$.

Али тада је

$$s_1 s_2 = (i_1 + xa)(i_2 + yb),$$

и сва четири сабирка на десној страни су у I. Дакле, $s_1 s_2 \in I$, што је контрадикција.

Ако пажљивије погледамо комплемент простог идеала, приметићемо да то није само мултипликативно затворен скуп, већ и нешто више: он је и *засићен* у смислу да ако садржи елемент x, он садржи и све делитеље од x.

Теорема 2.1.2 *Следећи искази су еквивалентни за скуп S у комутативном прстену R:*
(1) S је засићен мултипликативно затворен скуп,
(2) комплемент скупа S је унија простих идеала у R.

Доказ. Да (2) повлачи (1) следи директно из дефиниција. Да бисмо доказали да (1) повлачи (2) узмимо x из комплемента од S. Тада је главни идеал (x) дисјунктан са S, јер је S засићен. Користећи Цорнову лему, проширимо (x) до идеала I који је максималан међу идеалима дисјунктним са S. На основу претходне теореме, I је прост. Дакле, свако x које није у S се налази у простом идеалу дисјунктном са S, па важи (2).

Наравно, када изражавамо комплемент од S као унију простих идеала ми можемо да одбацимо све просте идеале који нису максимални у комплементу у корист максималних.

Пример 2.1.1 Нека је скуп S скуп свих елемената комутативног прстена R који нису нула-делитељи. S је засићен мултипликативно затворен скуп. Дакле, нула-делитељи у R су унија простих идеала. Максималне међу овим простим идеалима зовемо *максималним простим* прстена R.

Теорема 2.1.3 *Нека је R комутативни прстен и I идеал у R који је максималан међу свим анулаторима ненула елемената из R. Тада је I прост.*

Доказ. Нека је I анулатор за $x \in R$ (у ознаци $I = \mathrm{ann}(x)$). Нека $ab \in I$, и претпоставимо да a није у I. Тада је $ax \neq 0$. Такође, приметимо да је $\mathrm{ann}(ax) \supset I$. Према хипотези (пошто је I максималан), $\mathrm{ann}(ax) = I$. Како b анулира ax, $b \in I$.

Неке "јаче" теореме о делитељима нуле могу се доказати уз претпоставку да је прстен Нетерин (комутативни прстен R је Нетерин ако је сваки идеал у R коначно генерисан, или еквивалентно, ако идеали у R задовољавају услов растућег ланца).

Теорема 2.1.4 *Нека је R Нетерин прстен. Тада постоји само коначан број максималних простих у R, и сваки од њих је анулатор неког ненула елемента из R.*

Доказ. Посматрајмо скуп свих анулатора ненула елемената из R. Сваки анулатор је садржан у неком максималном (због услова растућег ланца). Очигледно, скуп делитеља нуле прстена R, $Z(R)$, је унија ових максималних идеала. Према претходној теореми, сви они су прости.

Сада показујемо да их има коначно много. Означимо их са $\{P_i\}$, и нека је P_i анулатор за a_i. Потпрстен разапет елементима a_i је коначно генерисан и према томе разапет, рецимо, елементима $a_1, ..., a_n$. Ако постоје a_k за $j > k$ за њих важи

$$a_k = x_1 a_1 + ... + x_n a_n,$$

где су x_i из R. Одатле следи да је

$$P_1 \cap ... \cap P_n \subset P_k,$$

одакле следи да неко P_j $(j = 1, ..., n)$ мора бити садржано у P_k, што је у супротности са максималношћу P_j.

Да бу се комплетирао доказ ове теореме, довољно је доказати да је било који идеал који је садржан у $Z(R)$ такође садржан и у једном од $P_1, ..., P_n$. Ово ћемо доказати у следећој теореми.

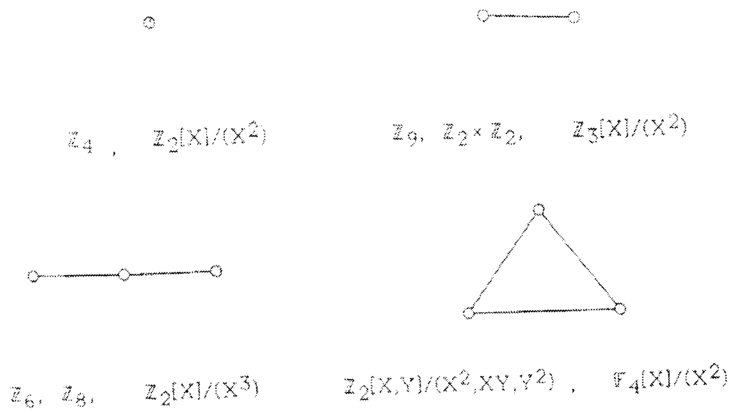
Теорема 2.1.5 *Нека је R комутативни прстен, $J_1, ..., J_n$ коначно много идеала у R, и S потпрстен од R који је садржан у унији $J_1 \cup ... \cup J_n$. Претпоставимо да су бар $n-2$ од ових идеала прости. Тада је S садржан у неком J_k.*

Примедба. У овој и у следећој теореми потпрстен не мора да садржи јединични елемент већег прстена.

Доказ. Доказ ћемо извести индукцијом по n. За свако k можемо претпоставити да не важи

$$S \subseteq J_1 \cup ... \cup \hat{J}_k \cup ... \cup J_n$$

(ознака $\hat{J}_k$ значи да је J_k изузето). Приметимо да када избришемо J_k ми чувамо и можда и јачамо хипотезу да највише два међу J-овима нису прости. Изаберимо $x_k \in S$ које се не налази у десној страни последње формуле. Тада x_k мора да припада J_k пошто не



Слика 2.1: Примери графова делитеља нуле

припада ни једном другом J_i. Приметимо да је теорема тривијална за $n = 1$. За $n = 2$, означимо $y = x_1 + x_2$ и добићемо контрадикцију да y припада S али не и у неком од J_i. За $n > 2$ бар један од J_i је прост, и можемо претпоставити да је то J_1. Ако узмемо $y = x_1 + x_2 x_3 \cdots x_n$, тада поново $y \in S$ али не припада ни једном J_i.

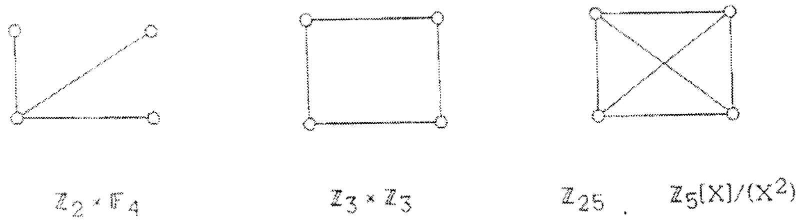
Комбиновањем претходне две теореме добијамо следећи врло користан резултат.

Теорема 2.1.6 *Нека је R комутативни Нетерин прстен и S потпрстен садржан у $Z(R)$. Тада постоји један ненула елемент a из R тако да је $Sa = 0$.*

2.2 Дијаметар и комплетни графови

Нека је R комутативни прстен са јединицом и нека је $Z(R)$ скуп његових делитеља нуле. Прстену R додељујемо граф $\Gamma(R)$ са теменима у скупу $Z(R)^* = Z(R) - \{0\}$, такав да су различита темена $x, y \in Z(R)^*$ суседна ако и само ако је $xy = 0$.

Пример 2.2.1 Примери графова делитеља нуле:



Слика 2.2: Примери графова делитеља нуле

На основу ових примера се види да неизоморфни прстени могу имати исте графове делитеља нуле.

Пример 2.2.2 Не могу сви графови бити реализовани као $\Gamma(R)$.

Показаћемо да граф Γ са теменима $\{a,b,c,d\}$ и ивицама $a-b$, $b-c$, $c-d$ не може бити граф делитеља нуле прстена R. Претпоставимо да постоји такав прстен. Тада је $Z(R)=\{0,a,b,c,d\}$ и међу делитељима нуле важе само горње релације. Тада $a+c\in Z(R)$ јер је $(a+c)b=0$. Дакле, $a+c$ мора бити 0, a, b, c, или d. Једноставном провером добија се да је $a+c=b$. Слично, $b+d=c$. Према томе, $b=a+c=a+b+d$, па је $a+d=0$. Одатле је $bd=b(-a)=0$, што је контрадикција.

Кажемо да је граф Γ *повезан* ако постоји пут између било која два различита темена. За различита темена графа, x и y, нека $d(x,y)$ означава дужину најкраћег пута од x до y ($d(x,y)=\infty$ ако такав пут не постоји). *Дијаметар* графа Γ, у ознаци $\mathrm{diam}(\Gamma)=\sup\{d(x,y)|\ x$ и y су различита темена графа $\Gamma\}$.

Теорема 2.2.1 *Нека је R комутативни прстен. Тада је $\Gamma(R)$ повезан и $\mathrm{diam}(\Gamma)\leq 3$.*

Доказ. Нека су $x,y\in Z(R)^*$ различити. Ако је $xy=0$, тада је $d(x,y)=1$. Дакле, претпоставимо да xy није 0. Ако је $x^2=y^2=0$, тада је $x-xy-y$ пут дужине 2, па је $d(x,y)=2$. Ако је $x^2=0$ и $y^2\neq 0$, тада постоји $b\in Z(R)^*-\{x,y\}$ тако да је $by=0$. Ако је $bx=0$, тада је $x-b-y$ пут дужине 2. Ако је $bx\neq 0$, онда је $x-bx-y$ пут дужине 2. У сваком случају, $d(x,y)=2$. Слично важи и у случају да је $y^2 = 0$ и $x^2 \neq 0$, тако да надаље можемо узети да су xy, x^2 и y^2 сви различити од 0. То значи да постоје $a, b \in Z(R)^* - \{x, y\}$ тако да је $ax = by = 0$. Ако је $a = b$, тада је $x - a - y$ пут дужине 2. Даље претпоставимо да је $a \neq b$. Ако је $ab = 0$, тада је $x - a - b - y$ пут дужине 3, па је $d(x, y) \leq 3$. Ако је $ab \neq 0$, онда је $x - ab - y$ пут дужине 2, па је $d(x, y) = 2$. Дакле, $d(x, y) \leq 3$, па је самим тим и $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) \leq 3$.

Теорема 2.2.2 *Нека је R комутативни прстен. Тада постоји теме графа $\Gamma(R)$ које је суседно сваком другом темену ако и само ако је или $R \cong \mathbf{Z}_2 \times A$, где је A интегрални домен, или је $Z(R)$ анулатор неког елемента из $Z(R)^*$ (а тиме и прост).*

Доказ. ($\Rightarrow$) Претпоставимо да $Z(R)$ није анулатор и да је $0 \neq a \in Z(R)$ суседно сваком другом темену. Тада a није у $\mathrm{ann}(a) = I$, јер би иначе $Z(R) = I$ био анулатор. Зато је I максималан међу анулаторима, и због тога прост (теорема 2.1.3). Ако је $a^2 \neq a$, тада је $a^3 = a^2 a = 0$, па $a \in I$, што је контрадикција. Дакле, $a^2 = a$, па је $R = Ra \oplus R(1-a)$. Дакле, можемо претпоставити да је $R = R_1 \times R_2$ са (1,0) које је суседно свим осталим теменима. За било које $1 \neq c \in R_1$, $(c, 0)$ је делитељ нуле , па је $(c, 0) = (c, 0)(1, 0) = (0, 0)$, што је контрадикција осим у случају $c = 0$. Према томе, $R_1 \cong \mathbf{Z}_2$. Ако R_2 није интегрални домен, тада постоји не-нула $c \in Z(R_2)$. Тада је $(1, b)$ делитељ нуле у R који није суседан елементу (1,0), што је контрадикција. Дакле, R_2 мора бити интегрални домен. Приметимо да ако је $Z(R)$ анулатор-идеал, тада је он сигурно максималан међу анулатор-идеалима, и самим тим прост.

($\Leftarrow$) Ако је $R \cong \mathbf{Z}_2 \times A$, где је A интегрални домен, тада је (1,0) суседно сваком другом темену. Ако је $Z(R) = \mathrm{ann}(x)$ за неко ненула $x \in R$, тада је x суседно сваком другом темену.

Сада ћемо утврдити када је $\Gamma(R)$ комплетан граф (граф у коме су сваке две ивице суседне). По дефиницији, $\Gamma(R)$ је комплетан ако и само ако је $xy = 0$ за све различите $x, y \in Z(R)$. Осим у случају кад је $R \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$, следећа теорема показује да мора да важи и $x^2 = 0$ за све $x \in Z(R)$ кад је $\Gamma(R)$ комплетан.

Теорема 2.2.3 *Нека је R комутативни прстен. Тада је $\Gamma(R)$ комплетан ако и само ако је или $R \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ или је $xy = 0$ за све $x, y \in Z(R)$.*

Доказ. (⇒) По дефиницији.

(⇐)Претпоставимо да је $\Gamma(R)$ комплетан, али да постоји $x \in Z(R)$ тако да је $x^2 \neq 0$. Показаћемо да је тада $x^2 = x$. Ако није, тада је $x^3 = x^2 x = 0$. Дакле, $x^2(x+x^2) = 0$ и $x^2 = 0$, па је $x+x^2 \in Z(R)$. Ако је $x+x^2 = x$, тада је $x^2 = 0$, што је контрадикција. Према томе, $x + x^2 \neq x$, па је $x^2 = x^2 + x^3 = x(x + x^2) = 0$ јер је $\Gamma(R)$ комплетан, што је поново контрадикција. Одатле следи да је $x^2 = x$. Као у доказу претходне теореме, имамо $R \cong \mathbf{Z}_2 \times A$, и обавезно $A \cong \mathbf{Z}_2$.

2.3 Тотални квоцијентни прстен и графови дијаметра 2

Многе важне теореме у вези са графовима делитеља нуле могу се доказати коришћењем тоталног квоцијентног прстена (под тоталним квоцијентним прстеном подразумева се локализација у односу на све елементе прстена који нису делитељи нуле).

Теорема 2.3.1 *Нека је R комутативни прстен са тоталним квоцијентним прстеном $T(R)$. Тада је* $\mathrm{diam}(\Gamma(T(R)))$ =diam $(\Gamma(R))$.

Доказ. Означимо $T = T(R)$. Очигледно $\mathrm{diam}(\Gamma(T)) = 1$ ако и само ако је $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = 1$. Претпоставимо да је $\mathrm{diam}(\Gamma(T)) = 2$. Тада је $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) \geq 2$. Нека су $a, b \in Z(R)^*$ тако да је $a \neq b$ и $ab \neq 0$. Тада је $aq = 0 = bq$ за неко $q \in Z(T)^* - \{a, b\}$. Нека је $q = c/t$, где је $c \in R$ и $t \in R - Z(R)$. Тада је $ac = 0 = bc$. Дакле, $d(a, b) = 2$, па је и $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = 2$. Слично се показује да је $\mathrm{diam}(\Gamma(T)) = 2$ ако је $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = 2$. Резултат за дијаметар сада следи јер је дијаметар графа делитеља нуле највише 3 (теорема 2.2.1).

Следећа теорема класификује прстене чији графови делитеља нуле имају дијаметар мањи или једнак 2.

Теорема 2.3.2 *Нека је R комутативан прстен за који је* $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) \leq 2$. *Тада важи тачно једно од следећег:*

(1) $Z(R)$ је прост идеал у R

(2) $T(R) = K_1 \times K_2$, где су оба K_i поља.

Доказ. Означимо $T = T(R)$. Приметимо да (1) важи ако и само ако T има јединствени максимални идеал. Претпоставимо да је $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) \leq 2$ и да $Z(R)$ није прост идеал у R. Тада постоје различити максимални идеали M и N у T. Дакле, $x+y = 1$ за неке $x \in M$

и $y \in N$, па је $\text{ann}(x) \cap \text{ann}(y) = \{0\}$. Како је $\text{diam}(\Gamma(T)) = \text{diam}(\Gamma(R)) \leq 2$, мора да важи $xy = 0$, па су одатле x и y идемпотентни. Дакле, $T = T_1 \times T_2$. Претпоставимо да постоји $c \in Z(T_1)^*$. Тада $a = (c, 1)$ и $b = (1, 0)$ припадају $Z(T)^*$ и $d(a, b) \geq 3$, што је контрадикција. Дакле, T_1 мора бити интегрални домен, односно поље. Слично, и T_2 мора бити поље. Одатле следи да је $T(R) = K_1 \times K_2$, где су оба K_i поља, те важи (2).

Глава 3

Граф делитеља нуле у некомутативним прстенима

За дати прстен R, $Z(R)$ означава скуп делитеља нуле прстена R, тј. $Z(R) = \{x \in R \mid xy = 0$ или $yx = 0$ за неко $y \in R^*\}$. Нека $Z_L(R)$ означава скуп левих делитеља нуле у R, тј. $Z_L(R) = \{x \in R \mid xa = 0$ за неко $a \in R^*\}$. Слично, $Z_R(R)$ означава скуп десних делитеља нуле у прстену R.

Граф делитеља нуле у некомутативном прстену може се дефинисати на више начина, од којих су најзначајнија следећа два.

Дефиниција 3.0.1 *Нека је R прстен. Дефинишемо (усмерени) граф $\Gamma(R)$ са теменима у $Z(R)^*$, где је $x \to y$ ивица између различитих темена x и y ако и само ако је $xy = 0$.*

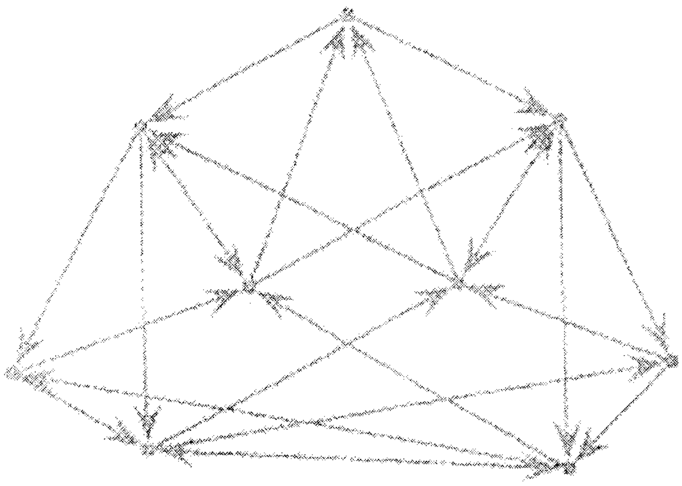
Дефиниција 3.0.2 *Нека је R прстен. Дефинишемо неусмерени граф $\bar{\Gamma}(R)$ са теменима у $Z(R)^*$, где су различита темена x и y суседна ако и само ако је или $xy = 0$ или $yx = 0$.*

Пример 3.0.1 *Усмерени граф 2×2 матрица над $\mathbf{Z}_2$.*

За овако дефинисане графове делитеља нуле важе следеће теореме.

Теорема 3.0.3 *Нека је R прстен. Тада је $\Gamma(R)$ повезан ако и само ако је $Z_L(R) = Z_R(R)$. Такође, ако је $\Gamma(R)$ повезан, тада је* $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) \leq 3$.

Доказ. Претпоставимо да је $Z_L(R) = Z_R(R)$. Нека су x и y различита темена графа $\Gamma(R)$. (Тада је $x \neq 0$ и $y \neq 0$.)



Слика 3.1: $\Gamma(M_2(\mathbf{Z}_2))$

Случај 1: $xy = 0$. Тада је $x \to y$ пут.
Случај 2: $xy \neq 0$, $x^2 = 0$ и $y^2 = 0$. Тада је $x \to xy \to y$ пут.
Случај 3: $xy \neq 0$, $y^2 \neq 0$ и $x^2 = 0$. Тада постоји $b \in R - \{x, y, 0\}$ тако да је $by = 0$. Ако је $xb = 0$, тада је $x \to b \to y$ пут. Ако $xb \neq 0$, тада је $x \to xb \to y$ пут.
Случај 4: $xy \neq 0$, $x^2 \neq 0$ и $y^2 = 0$. Тада постоји $a \in R - \{0, x, y\}$ тако да је $xa = 0$. Ако је $ay = 0$, тада је $x \to a \to y$ пут. Ако је $ay \neq 0$, онда је $x \to ay \to y$ пут.
Случај 5: $xy \neq 0$, $x^2 \neq 0$ и $y^2 \neq 0$. Тада постоји $a \in R - \{0, x, y\}$ тако да је $xa = 0$ и $b \in R - \{x, y, 0\}$ тако да је $by = 0$.
Подслучај 1: $a = b$. Тада је $x \to a \to y$ пут.
Подслучај 2: $a \neq b$. Ако је $ab = 0$, тада је $x \to a \to b \to y$ пут. Ако је $ab \neq 0$, тада је $x \to ab \to y$ пут.

Дакле, $\Gamma(R)$ је повезан и $\operatorname{diam}(\Gamma) \leq 3$.

Обрнути смер је тривијалан.

Теорема 3.0.4 *Нека је R прстен. Тада је $\bar{\Gamma}(R)$ повезан граф и* $\operatorname{diam}(\bar{\Gamma}(R)) \leq 3$.

Доказ. Нека су x и y различита темена графа $\bar{\Gamma}(R)$.
Случај 1: $xy = 0$ или $yx = 0$. Тада је $x - y$ пут.
Претпоставимо да је $xy \neq 0$ и $yx \neq 0$.

Случај 2: $x^2 = y^2 = 0$. Тада је $x - xy - y$ пут.
Случај 3: $x^2 = 0$ и $y^2 \neq 0$. Тада постоји $b \in R - \{x, y, 0\}$ тако да важи $by = 0$ или $yb = 0$. Ако важи да је $xb = 0$ или $bx = 0$, тада је $x - b - y$ пут. Ако је $xb \neq 0$ и $bx \neq 0$, тада је $x - bx - y$ пут ако је $yb = 0$ и $x - xb - y$ пут ако је $by = 0$.
Случај 4: $x^2 \neq 0$ и $y^2 = 0$. Слично као претходни случај.
Случај 5: $x^2 \neq 0$ и $y^2 \neq 0$. Тада постоје $a, b \in R - \{0, x, y\}$ тако да је или $ax = 0$ или $xa = 0$ и тако да је или $by - 0$ или $yb = 0$. Ако је $a = b$, тада је $x - a - y$ пут. Ако је $a \neq b$ и важи једно од следећег: $ab = 0$ или $ba = 0$, тада је $x - a - b - y$ пут. Дакле, претпоставимо да важи $ab \neq 0$, $ba \neq 0$ и $a \neq b$.

Подслучај 1: $x - a - y$ је пут ако је $ay = 0$ или $ya = 0$.
Подслучај 2: $x - ab - y$ је пут ако је $xa = 0$ и $by = 0$.
Подслучај 3: $x - ba - y$ је пут ако је $ax = 0$ и $yb = 0$.
Подслучај 4: $x - ay - b - y$ је пут ако је $xa = 0$, $yb = 0$ и $ay \neq 0$.
Подслучај 5: $x - ya - b - y$ је пут ако је $ax = 0$, $by = 0$ и $ya \neq 0$.

Дакле, $\bar{\Gamma}(R)$ повезан и $\mathrm{diam}(\bar{\Gamma}(R)) \leq 3$.

За неусмерени граф G, *обим* од G, у ознаци $gr(G)$, је дужина најкраћег цикла у G (и $gr(G) = \infty$ ако G нема циклова).

Теорема 3.0.5 *Нека је R прстен. Ако $\bar{\Gamma}(R)$ садржи цикл, тада је $gr(\bar{\Gamma}(R)) \leq 4$.*

Доказ. Нека је $x_0 - x_1 - ... - x_n - x_0$ цикл најмање дужине у $\bar{\Gamma}(R)$. Претпоставимо да је $gr(\bar{\Gamma}(R)) > 4$, тј. претпоставимо да је $n \geq 4$.
Случај 1: Постоји неко x_j тако да $x_j \in I = \mathrm{ann_L(x_{j+1})} \cap \mathrm{ann_L(x_{j-1})}$. Без губитка општости, нека је $j = 1$. Ако постоји неко $y \in I^*$ такво да је $y \neq x_1$, тада је $x_0 - x_1 - x_2 - y - x_0$ цикл у $\bar{\Gamma}(R)$. Дакле, претпоставимо да је $I = \{0, x_1\}$. Тада је или $x_3x_4 = 0$ или $x_4x_3 = 0$. Приметимо да $x_3x_1 \neq 0$, $x_1x_3 \neq 0$, $x_4x_1 \neq 0$ и $x_1x_4 \neq 0$. Према томе, $x_3x_1 = x_4x_1 = x_1$ јер је $I = \{0, x_1\}$ леви идеал. Али тада $x_3x_4 = 0$ повлачи $x_3x_1 = x_3(x_4x_1) = (x_3x_4)x_1 = 0$, и $x_4x_3 = 0$ повлачи $x_4x_1 = x_4(x_3x_1) = (x_4x_3)x_1 = 0$. Контрадикција.
Случај 2: Постоји неко x_j тако да $x_j \in I = \mathrm{ann_R(x_{j+1})} \cap \mathrm{ann_R(x_{j-1})}$. До контрадикције долазимо на начин сличан оном у случају 1.
Случај 3: За свако j, $x_j \notin \mathrm{ann_L(x_{j+1})} \cap \mathrm{ann_L(x_{j-1})}$ и $x_j \notin \mathrm{ann_R(x_{j+1})} \cap \mathrm{ann_R(x_{j-1})}$. Тада, без губитка општости, имамо пут у $\Gamma(R)$ облика $x_0 \to x_1 \to ... \to x_n \to x_0$ тако да свака ивица има само један смер.

Подслучај 1: $x_0^2 = x_n^2 = 0$. Приметимо да $x_0x_n \notin \{0, x_0, x_n\}$. Тада је $x_0 \to x_0x_n \to x_n \to x_0$ пут у $\Gamma(R)$.

Подслучај 2: $x_0^2 = 0$ и $x_n^2 \neq 0$. Приметимо да $x_0 x_{n-1} \notin \{0, x_0, x_n\}$. Тада је $x_0 \to x_0 x_{n-1} \to x_n \to x_0$ пут у $\Gamma(R)$.

Подслучај 3: $x_0^2 \neq 0$ и $x_n^2 = 0$. Приметимо да $x_1 x_n \notin \{0, x_0, x_n\}$. Тада је $x_0 \to x_1 x_n \to x_n \to x_0$ пут у $\Gamma(R)$.

Подслучај 4: $x_0^2 \neq 0$ и $x_n^2 \neq 0$. Приметимо да $x_1 x_{n-1} \notin \{0, x_0, x_n\}$. Тада је $x_0 \to x_1 x_{n-1} \to x_n \to x_0$ пут у $\Gamma(R)$.

У сваком од ових случајева нашли смо цикл у $\bar{\Gamma}(R)$ дужине не веће од 4. То је контрадикција.

Како смо добили контрадикцију у свим могућим случајевима, мора бити $gr(\bar{\Gamma}(R)) \leq 4$.

Глава 4

Граф делитеља нуле матрица над комутативним прстенима

4.1 Ранг матрице

Нека $A \in M_{m \times n}(R)$, где је R комутативни прстен.

Дефиниција 4.1.1 *За свако $t = 1, \ldots, r = \min\{m, n\}$, $I_t(A)$ ће означавати идеал у R генерисан свим $t \times t$ минорима матрице A.*

Дакле, да бисмо нашли $I_t(A)$, треба да израчунамо детерминанту сваке $t \times t$ подматрице од A и нађемо идеал у R који ове детерминанте генеришу. По Лапласовој теореми о израчунавању детерминанте, сваки $(t+1) \times (t+1)$ минор матрице A лежи у $I_t(A)$. Дакле, имамо следећи растући низ идеала у R:

$$I_r(A) \subseteq I_{r-1}(A) \subseteq \ldots \subseteq I_2(A) \subseteq I_1(A) \subseteq R.$$

Биће нам корисно да продужимо дефиницију за $I_t(A)$ за све вредности $t \in \mathbf{Z}$ на следећи начин:

$$I_t(A) = \begin{cases} (0) & \text{за } t > \min\{m, n\} \\ R & \text{за } t \leq 0 \end{cases}$$

Тада имамо

$$(0) = I_{r+1}(A) \subseteq I_r(A) \subseteq \ldots \subseteq I_1(A) \subseteq I_0(A) = R.$$

Теорема 4.1.1 *Нека је $B \in M_{m \times p}(R)$ и $C \in M_{p \times n}(R)$. Тада је $I_t(BC) \subseteq I_t(B) \cap I_t(C)$ за све $t \in \mathbf{Z}$.*

Доказ. Претпоставимо да је $1 \leq t \leq \min\{m, n\}$ (остали случа-јеви су тривијални). Поделићемо доказ теореме у три тврђења.

Тврђење 1. $I_t(BC) \subseteq I_t(C)$.

Да бисмо ово показали, поделимо C у колоне $C = (\delta_1|\delta_2|...|\delta_n)$. Тада је $BC = (B\delta_1|B\delta_2|...|B\delta_n)$. Нека је Δ $t \times t$ минор матрице BC, тј. генератор идеала $I_t(BC)$. Претпоставимо да је Δ дефинисано колонама означеним бројевима $j_1 < j_2 < ... < j_t$ матрице BC. Како је

$$I_t((\delta_{j_1}|...|\delta_{j_t})) \subseteq I_t(C)$$

и

$$\Delta \in I_t((B\delta_{j_1}|...|B\delta_{j_t})) = I_t(B(\delta_{j_1}|...|\delta_{j_t}))$$

довољно је показати да је

$$I_t(B(\delta_{j_1}|...|\delta_{j_t})) \subseteq I_t((\delta_{j_1}|...|\delta_{j_t})).$$

Другим речима, при доказивању да $\Delta \in I_t(C)$, можемо претпоставити без губљења општости да је $t = n \leq m$. Према томе, $\Delta = \Delta(i_1, ..., i_n; 1, ..., n)$ за неки избор ознака врста $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_n \leq m$.

Претпоставимо да је $B = (b_{ij}) \in M_{m\times p}(R)$. Означимо са $V_i(A)$ i-ту врсту матрице A. Тада важи

$$V_i(BC) = \sum_{j=1}^{p} b_{ij} V_j(C)$$

за све $i = 1, ..., m$.

Користећи чињеницу да је детерминанта мултилинеарна функција својих врста, имамо

$$\Delta(i_1, ..., i_n; 1, ..., n) = \det((\mathrm{V_{i_1}(BC)}; ...; \mathrm{V_{i_n}(BC)}))$$

$$= \det((\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{p}} \mathrm{b_{i_1 j} V_j(C)}; ...; \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{p}} \mathrm{b_{i_n j} V_j(C)})$$

$$= \sum_{\alpha_1, ..., \alpha_n = 1}^{p} c_{\alpha_1 ... \alpha_n} \det((\mathrm{V_{\alpha_1}(C)}; ...; \mathrm{V_{\alpha_n}(C)})),$$

где су $c_{\alpha_1 ... \alpha_n}$ различите константе у R које се добијају у развоју детерминанте. За све изборе $\alpha_1, ..., \alpha_n$, $\det((\mathrm{V_{\alpha_1}(C)}; ...; \mathrm{V_{\alpha_n}(C)})) \in \mathrm{I_n(C)}$. Ове детерминанте су све нула за $n > p$. У сваком случају, $\Delta(i_1, ..., i_n; 1, ..., n) \in I_t(C)$. Како је Δ произвољни генератор од $I_t(BC)$, закључујемо да је $I_t(BC) \subseteq I_t(C)$.

Тврђење 2. $I_\alpha(A^T) = I_\alpha(A)$ за све $\alpha \in \mathbf{Z}$.
Ово јасно следи из дефиниција.

Тврђење 3. $I_t(BC) \subseteq I_t(B)$ за све $t \in \mathbf{Z}$.
Нека $\alpha \in \mathbf{Z}$. Користећи тврђења 1 и 2, имамо

$$I_\alpha(BC) = I_\alpha((BC)^T) = I_\alpha(C^T B^T) \subseteq I_\alpha(B^T) = I_\alpha(B).$$

Ово доказује тврђење 3, а тврђење теореме очигледно следи из тврђења 1 и 3.

На основу ове теореме доказује се следећа важна теорема.

Теорема 4.1.2 *Нека је $A \in M_{m\times n}(R)$, $P \in Gl(m,R)$ и $Q \in Gl(n,R)$. Тада је $I_t(PAQ) = I_t(A)$ за све $t \in \mathbf{Z}$.*

Доказ. На основу претходне теореме,

$$I_t(PA) \subseteq I_t(A) = I_t(P^{-1}(PA)) \subseteq I_t(PA).$$

Према томе, $I_t(PA) = I_t(A)$ за све $t \in \mathbf{Z}$. Слично показујемо да је $I_t(PA) = I_t(PAQ)$.

Сада можемо да дефинишемо ранг матрице $A \in M_{m\times n}(R)$. Посматрајмо растући низ идеала

$$(0) = I_{r+1}(A) \subseteq I_r(A) \subseteq ... \subseteq I_1(A) \subseteq I_0(A) = R.$$

Израчунавањем анулатора сваког од идеала у овом низу, добијамо следећи низ идеала

$$(0) = \mathrm{ann_R(R)} \subseteq \mathrm{ann_R(I_1(A))} \subseteq ... \subseteq \mathrm{ann_R(I_r(A))} \subseteq \mathrm{ann_R((0))} = \mathrm{R}.$$

Приметимо да ако $\mathrm{ann_R(I_t(A))} \neq (0)$, тада је $\mathrm{ann_R(I_t(A))} \neq (0)$ за све $k \geq t$.

Дефиниција 4.1.2 *Нека је $A \in M_{m\times n}(R)$. Ранг од A, у ознаци $rk(A)$, је следећи цео број: $rk(A) = max\{t|\mathrm{ann_R(I_t(A))} = (0)\}$.*

Неколико очигледних особина ранга следе директно из дефиниције.

Теорема 4.1.3 *Нека је* $A \in M_{m\times n}(R)$. *Тада важи:*
(а) $0 \le rk(A) \le \min\{m,n\}$,
(б) $rk(A) = rk(A^T)$,
(в) $rk(A) = rk(PAQ)$ *за било које* $P \in Gl(m,R)$ *и* $Q \in Gl(n,R)$,
(г) $rk(A) = 0$ *ако и само ако је* $\mathrm{ann_R(I_1(A))} \neq 0$,
(д) ако је $m = n$, *тада је* $rk(A) < n$ *ако и само ако* $\mathrm{det(A) \in Z(R)}$.

Приметимо да, ако матрицу A посматрамо као матрицу над пољем, и $rk(A)$ и класични ранг представљају највећи цео број t тако да A садржи $t\times t$ подматрицу чија је детерминанта различита од 0. Дакле, када је R поље, дефиниција 4.1.2 се поклапа са класичном дефиницијом ранга.

4.2 Линеарне једначине

Сада ћемо дати основне теореме о линеарним системима једначина над комутативним прстеном R. Посматрајмо следећи систем једначина

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

где су $x_1, ..., x_n$ промењљиве, а коефицијенти a_{ij} и константе $b_1, ..., b_m$ су из R. Овај систем се може записати и у форми

$$AX = B,$$

где је $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(R)$, $B = (b_1, ..., b_m)^T \in R^m$ и $X = (x_1, ..., x_n)^T \in (R[x_1, ..., x_n])^n$.

Овај систем једначина има решење (у R^n) ако постоји вектор $\xi \in R^n$ такав да је $A\xi = B$. Ако је $B = 0$, тада систем $AX = 0$ зовемо хомогеним системом једначина. Хомогени систем једначина увек има решење, то је $\xi = (0, ..., 0)^T \in R^n$, и ово решење зовемо тривијалним. Вектор $\xi \in R^n$ ћемо звати нетривијалним решењем система $AX = 0$ ако је $\xi \neq 0$ и $A\xi = 0$.

Сада ћемо навести основни резултат у вези са хомогеним системима линеарних једначина над комутативним прстенима, теорему Мекоја.

Теорема 4.2.1 *Нека је* $A \in M_{m\times n}(R)$. *Хомогени систем једначина* $AX = 0$ *има нетривијално решење ако и само ако је* $rk(A) < n$.

Доказ. Претпоставимо да $AX = 0$ има нетривијално решење $\xi \in R^n$. Како је $\xi \neq 0$, нека координата од ξ није нула, нпр. ξ_k. Ако је $m < n$, тада из 4.1.3 (а) следи да је $rk(A) \leq \min\{m, n\} = m < n$. Дакле, у овом случају нема шта да се доказује, па можемо да претпоставимо да је $m \geq n$.

Нека је $\Delta(i_1, ..., i_n; 1, ..., n)$ $n \times n$ минор матрице A. Постоји матрица пермутација $P \in Gl(m, R)$ таква да PA има врсте $i_1, ..., i_n$ из A као својих првих n врста. Дакле, $V_1(PA) = V_{i_1}(A), ..., V_n(PA) = V_{i_n}(A)$. PA можемо представити на следећи начин:

$$PA = \begin{bmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \cdots & a_{i_1 n} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} & \cdots & a_{i_2 n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_n 1} & a_{i_n 2} & \cdots & a_{i_n n} \\ * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \dots & * \end{bmatrix}.$$

Означимо

$$D = \begin{bmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \cdots & a_{i_1 n} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} & \cdots & a_{i_2 n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_n 1} & a_{i_n 2} & \cdots & a_{i_n n} \end{bmatrix}.$$

Тада је $\Delta = \mathrm{det(D)} = \Delta(\mathrm{i_1, ..., i_n; 1, ..., n})$. Како је $A\xi = 0$, важи и $D\xi = 0$. Како је $A\,\mathrm{adj(A)} = \mathrm{det(A)\,I_n}$, где I_n означава јединичну $n \times n$ матрицу, важи $\Delta\xi = (\Delta I_n)\xi = \mathrm{(adj(D))D}\xi = 0$. Специјално, $\Delta\xi_k = 0$. Како је $\Delta = \Delta(i_1, ..., i_n; 1, ..., n)$ произвољан $n \times n$ минор матрице A, закључујемо да $\xi_k \in \mathrm{ann_R(I_n(A))}$. Дакле, $\mathrm{ann_R(I_n(A))} \neq (0)$, и $rk(A) < n$.

Обрнуто, претпоставимо да је $rk(A) = r < n$. Ако је $r \geq m$, можемо додати још једначина са нула коефицијентима полазном систему, тако да број једначина буде већи од r. Очигледно, свако ненула решење $\xi \in R^n$ проширеног система је и ненула решење система $AX = 0$ и обрнуто. Такође, једноставно се показује и да је

$$I_t(\frac{A}{O}) = I_t(A),$$

за сваку $p \times n$ нула матрицу O и за свако $t \in \mathbf{Z}$. Дакле,

$$rk(A) = rk(\frac{A}{O})$$

.

Дакле, можемо претпоставити да је $r < \min\{m, n\}$. Како је $rk(A) = r$, идеал $\mathrm{ann_R(I_{r+1}(A))}$ није нула. Нека је a ненула елемент из $\mathrm{ann_R(I_{r+1}(A))}$. Ако је $r = 0$, тада $a \in \mathrm{ann_R(I_1(A))}$. Специјално, $\xi = (a, ..., a)^T \in R^n$ је нетривијално решење система $AX = 0$. Дакле, можемо претпоставити да је $1 \leq r < \min\{m, n\}$.

Како је $rk(A) = r$, идеал $\mathrm{ann_R(I_r(A))}$ је нула. Специјално, постоји $r \times r$ минор $\Delta = \Delta(i_1, ..., i_r; j_1, ..., j_r)$ матрице A тако да је $a\Delta = \Delta(i_1, ..., i_r; j_1, ..., j_r) \neq 0$. Можемо померити врсте $i_1, ..., i_r$ и колоне $j_1, ..., j_r$ од A тако да буду првих r врста и првих r колона нове матрице множећи матрицу A слева и сдесна одговарајућим матрицама пермутација $P \in Gl(m, R)$ и $Q \in Gl(n, R)$.

Претпоставимо да једначина $(PAQ)X$ има нетривијално решење $\beta \in R^n$. Како су P и Q инвертибилне, $\xi = Q\beta \neq 0$, и $A\xi = 0$. Дакле, $Ax = 0$ има нетривијално решење. Такође, приметимо да је $I_t(PAQ) = I_t(A)$ за све $t \in \mathbf{Z}$ (на основу 4.1.2). Према томе, довољно је показати да $(PAQ)X = 0$ има нетривијално решење. Другим речима, замењујући A са PAQ ако је потребно, можемо претпоставити без губљења општости да је

$$\Delta(i_1, ..., i_r; j_1, ..., j_r) = \Delta(1, ..., r; 1, ..., r).$$

Нека је $\Delta = \Delta(1, ..., r; 1, ..., r)$. Тада је

$$A = \begin{bmatrix} C & * \\ * & * \end{bmatrix},$$

где је

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{bmatrix}$$

и $\mathrm{det(C)} = \Delta$. Такође, $a\Delta \neq 0$.

Означимо

$$C' = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rr+1} \\ a_{r+11} & \dots & a_{r+1r} & a_{r+1r+1} \end{bmatrix} \in M_{(r+1)\times(r+1)}(R),$$

и нека је $d_j = \mathrm{cof_{r+1,j}(C')}$ за $j = 1, ..., r+1$. Дакле, $d_1, ..., d_{r+1}$ су кофактори последње врсте матрице C'. На основу Лапласовог развоја, имамо

$$\sum_{j=1}^{r+1} a_{r+1j} d_j = \mathrm{det(C')} \in \mathrm{I_{r+1}(A)}.$$

Нека је $\xi = (ad_1, ..., ad_{r+1}, 0, ..., 0)^T \in R^n$. Приметимо да је $\xi \neq 0$ јер је $ad_{r+1} = a\Delta \neq 0$. Показаћемо да је ξ решење система $AX = 0$.

$A\xi = 0$ ако и само ако је $\sum_{j=1}^{r+1} a_{ij}(ad_j) = 0$ за све $i = 1, ..., m$. Овде могу постојати два случаја. Претпоставимо да је $1 \leq i \leq r$. Тада је

$$\sum_{j=1}^{r+1} a_{ij}(ad_j) = a(\sum_{j=1}^{r+1} a_{ij} d_j) = 0.$$

Ако је $i \geq r+1$, тада је

$$\sum_{j=1}^{r+1} a_{ij}(ad_j) = a \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr+1} \\ a_{i1} & \dots & a_{ir+1} \end{bmatrix} \in \mathrm{aI_{r+1}(A)} = (0).$$

Према томе, $A\xi = 0$, чиме је доказ теореме завршен.

4.3 Делитељи нуле

Нека је R комутативни прстен. Матрица $A \in M_{n\times n}(R)$ је леви делитељ нуле у $M_{n\times n}(R)$ ако је $AB = 0$ за неку ненула матрицу $B \in M_{n\times n}(R)$. Слично, A је десни делитељ нуле ако је $CA = 0$ за неку ненула матрицу $C \in M_{n\times n}(R)$. У $M_{n\times n}(R)$, матрица је леви делитељ нуле ако и само ако је десни делитељ нуле. Ово следи из следеће теореме.

Теорема 4.3.1 *Нека је $A \in M_{n\times n}(R)$.*

(а) A је леви делитељ нуле у $M_{n\times n}(R)$ ако и само ако $\mathrm{det(A)} \in \mathrm{Z(R)}$.

(б) A је десни делитељ нуле у $M_{n\times n}(R)$ ако и само ако $\mathrm{det(A)} \in \mathrm{Z(R)}$.

Доказ. Претпоставимо да det(A) ∈ Z(R). Тада из 4.1.3(д) следи да је $rk(A) < n$. Користећи теорему 4.2.1 добијамо $A\xi = 0$ за неки ненула вектор $\xi \in R^n$. Означимо $B = (\xi|\xi|...|\xi) \in M_{n\times n}(R)$. Тада је $B \neq 0$ и $AB = (A\xi|A\xi|...|A\xi) = (0|0|...|0) = 0$. Дакле, A је леви делитељ нуле у $M_{n\times n}(R)$.

Како је $\det(A^T) = \det(A)$, следи да из det(A) ∈ Z(R) следи да је A^T леви нула делитељ у $M_{n\times n}(R)$. Дакле, $A^TB = 0$ за неко ненула $B \in M_{n\times n}(R)$. Тада је и $B^T \neq 0$, и $(B^TA)^T = A^TB = 0$, па је и $B^TA = 0$, па је A десни делитељ нуле у $M_{n\times n}(R)$.

Обрнуто, претпоставимо да је A леви делитељ нуле у $M_{n\times n}(R)$. Тада је $AB = 0$ за неко ненула $B \in M_{n\times n}(R)$. Претпоставимо да је $B = (\xi_1|...|\xi_n)$ подела на колоне матриве B. Како B није 0, неко ξ_j је ненула вектор у R^n. $0 = AB = (A\xi_1|...|A\xi_n)$ повлачи $A\xi_i = 0$ за све $i = 1, ..., n$. Дакле, једначина $AX = 0$ има нетривијално решење, па из теореме 4.2.1 следи $rk(A) < n$, а затим и det(A) ∈ Z(R) из теореме 4.1.3(д).

Ако је A десни делитељ нуле, онда је A^T десни делитељ нуле. Дакле, $\det(A) = \det(A^T) \in Z(R)$.

4.4 Граф делитеља нуле

У овом делу рада проучавамо својства усмерених графова делитеља нуле матрица над комутативним прстенима (видети дефиницију 3.0.1), поклањајући највише пажње односу између дијаметра графа делитеља нуле комутативног прстена R и дијаметра графа делитеља нуле прстена $M_n(R)$ (приметимо да прстен $M_n(R)$ у општем случају није комутативан). Подразумевамо да R садржи јединицу.

На почетку доказујемо теорему о односу ова два дијаметра.

Теорема 4.4.1 *Нека је R комутативни прстен. Тада је* $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) \leq \mathrm{diam}(\Gamma(M_n(R)))$.

Доказ. Из теореме 2.2.1 следи да је $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) \leq 3$. Разликоваћемо три случаја.

(1) Нека је $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = 1$. Како за сваки нетривијалан граф Γ важи $\mathrm{diam}(\Gamma) \geq 1$, то је и $\mathrm{diam}(\Gamma(M_n(R))) \geq 1 = \mathrm{diam}(\Gamma((R)))$.

(2) Нека је $\mathrm{diam}(\Gamma((R)) = 2$. Тада постоје međусобно различити ненула елементи a, b, c прстена R за које важи $ab = 0$, $bc = 0$ и $ac \neq 0$. Тада матрице $A = aI_n$ и $C = cI_n$ припадају $Z(M_n(R))^*$, али

$AC = acI_n \neq 0$, па је према томе $\mathrm{diam}(\Gamma(M_n(R))) > 1$, па важи и $\mathrm{diam}(\Gamma(M_n(R))) \geq 2 = \mathrm{diam}(\Gamma(R))$.

(3) Нека је $\mathrm{diam}(\Gamma((R)) = 3$. Тада постоје међусобно различити ненула елементи a, b, c, d прстена R за које важи $ab = 0$, $bc = 0$, $cd = 0$ и $a - b - c - d$ је најкраћи пут од a до d у $\Gamma(R)$. Тада матрице $A = aI_n$ и $D = dI_n$ припадају $Z(M_n(R))^*$ и очигледно $AD \neq 0$. Претпоставимо да постоји матрица $C = (c_{ij}) \in Z(M_n(R))^*$ тако да је $AC = CD = 0$. То значи да је $AC = aC = 0$ и $CD = dC = 0$. Дакле, за све $i, j = 1, ..., n$ важи $ac_{ij} = dc_{ij} = 0$, а како једино нула поништава и a и d следи да је $c_{ij} = 0$ за све $i, j = 1, ..., n$, тј. $C = 0$. Контрадикција. Према томе, $\mathrm{diam}(\Gamma(M_n(R))) \geq 3 = \mathrm{diam}(\Gamma(R))$.

Видели смо у другој глави да је граф делитеља нуле комутативног прстена увек повезан, док исто не мора да важи за некомутативне прстене (видети 2.2.1 и 3.0.3). Међутим, граф делитеља нуле прстена $M_n(R)$, где је R комутативни прстен, је увек повезан.

Теорема 4.4.2 *Нека је R комутативни прстен. Тада је $\Gamma(M_n(R))$ повезан и $\mathrm{diam}(\Gamma(M_n(R))) \leq 3$.*

Доказ. Користећи теорему 4.3.1 закључујемо да је $Z_L(M_n(R)) = Z_R(M_n(R))$, па тврђење теореме директно следи из теореме 3.0.3.

На основу изнетог закључујемо да ако је дијаметар графа $\Gamma(R)$ једнак 3, исти дијаметар мора да има и $\Gamma(M_n(R))$.

Следећу теорему доказао је Ву у раду [6].

Теорема 4.4.3 *Ако је F поље, тада је* $\mathrm{diam}(\Gamma(M_n(R)))2$.

Доказ. Показаћемо да за све матрице $A, B \in Z(M_n(F))^*$ постоји матрица $C \in Z(M_n(F))^*$ тако да је $AC = CB = 0$. Ово важи јер постоје инвертибилне матрице $P, Q \in R$ такве да су последња колона матрице AP и прва врста матрице QB нула. Ако за C узмемо матрицу

$$P \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} Q,$$

онда је $C \neq 0$ и $AC = CB = 0$.

Ово тврђење ћемо уопштити тако што ћемо доказати да оно важи и за домене.

Теорема 4.4.4 *Нека је R домен. Тада је* $\mathrm{diam}(\Gamma(M_n(R)))2$.

Доказ. Означимо са $T = T(R)$ тотални квоцијентни прстен домена R. Како је R домен, T је поље. Произвољне матрице $A, B \in Z(M_n(R))^*$ можемо посматрати као матрице из $Z(M_n(T))^*$. Тада из претходне теореме следи да постоји матрица $C \in Z(M_n(T))^*$ тако да важи $AC = CB = 0$. Нека је $C = (c_{ij}) = (\frac{p_{ij}}{q_{ij}})$ за $i, j = 1, ..., n$, и где $p_{ij} \in R$ и $q_{ij} \in R - \{0\}$. Ако узмемо $q = NZS(\{q_{ij} | i, j = 1, ..., n\})$ и овим помножимо матрицу C, добићемо матрицу $C' = qC \in Z(M_n(R))^*$ за коју важи $AC' = C'B = 0$.

Са прстена који немају делитеље нуле прелазимо на прстене чији је граф делитеља нуле комплетан, и бавимо се проучавањем дијаметра прстена матрица над њима.

Теорема 4.4.5 *Нека је R коначан комутативни прстен који није изоморфан са $\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2$, чији је граф делитеља нуле комплетан (тј.* $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = 1$*). Тада је* $\mathrm{diam}(\Gamma(M_n(R))) = 2$.

Доказ. Како је R коначан, то су сви елементи из R или инвертибилни или делитељи нуле. Ако су $A, B \in Z(M_n(R))^*$, тада постоје инвертибилне матрице $P, Q \in M_n(R)$ тако да се у последњој колони матрице AP и првој врсти матрице QB налазе само делитељи нуле.

Да бисмо ово показали, приметимо прво да је су трансформације

(1) множење врсте (колоне) матрице $A \in M_n(R)$ инвертибилним скаларом из R,

(2) множење врсте (колоне) матрице $A \in M_n(R)$ скаларом из R и додавање другој врсти (колони) исте матрице и

(3) промена места двема врстама (колонама) матрице $A \in M_n(R)$

еквивалентне множењу матрице A слева (сдесна) инвертибилном матрицом из $M_n(R)$.

Вратимо се матрицама $A, B \in Z(M_n(R))^*$. Ако матрица B садржи врсту у којој су само делитељи нуле, тада заменом те и прве врсте матрице B (што постижемо множењем слева одговарајућом матрицом Q) добијамо матрицу QB траженог облика. Претпоставимо да свака врста матрице B садржи неки елемент који није делитељ нуле (тј. елемент који је инвертибилан).

Нађимо колону матрице B са најмањим редним бројем која садржи неки инвертибилни елемент x_1. Користећи трансформације врста, матрицу B можемо довести до матрице која у колони у којој се налази x_1 осим њега има само нуле, и затим можемо врсту у којој се налази елемент x_1 заменити са последњом врстом.

У наредном кораку посматрајмо матрицу B_1 која се добија када се из матрице B избаци последња врста. Приметимо да матрица B_1 садржи колону која има само нуле. Ако ни матрица B_1 не садржи врсту која се састоји само од делитеља нуле, нађимо колону матрице B_1 са најмањим редним бројем која садржи неки инвертибилни елемент x_2. Користећи трансформације врста, матрицу B_1 можемо довести до матрице која у колони у којој се налази x_2 осим њега има само нуле, и можемо затим врсту у којој се налази елемент x_2 заменити са последњом врстом.

Настављајући поступак, или ћемо добити матрицу која садржи врсту која се састоји само од делитеља нуле, или ћемо у последњем кораку добити $1 \times n$ матрицу B_{n-1}, која само на једном месту може да има елемент x_n различит од нуле. Ако је овај елемент делитељ нуле, матрица B се трансформацијама врста може довести до матрице чија се прва врста састоји само од делитеља нуле, па постоји инвертибилна матрица $Q \in M_n(R)$ тако да прва врста матрице QB садржи само делитеље нуле. Ако је x_n инвертибилан, тада се добијена матрица QB може трансформацијама колона описаним горе довести до горње троугаоне матрице код које су на дијагонали само инвертибилни елементи, тј. до инвертибилне матрице, одакле би следило да је и B инвертибилна матрица, а то је контрадикција.

Слично се показује и да постоји инвертибилна матрица P тако да последња колона матрице AP садржи само делитеље нуле.

Сада узмимо матрицу

$$C = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ d & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} Q,$$

где је d произвољни елемент из $Z(R)^*$. Очигледно је $C \neq 0$. Пошто је $dx = 0$ за свако $x \in Z(R)$ (теорема 2.2.3), то важи да је $AC = CB = 0$, па је $\operatorname{diam}(\Gamma(M_n(R))) = 2$.

Преласком на $T(R)$ уместо на R следећу теорему можемо уопштити и на прстене који нису коначни.

Теорема 4.4.6 *Нека је R комутативни прстен који није изоморфан* *са $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$, чији је граф делитеља нуле комплетан (тј.* $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) =$ 1*). Тада је* $\mathrm{diam}(\Gamma(M_n(R))) = 2$.

Доказ. У прстену $T(R)$ сви елементи су или делитељи нуле или инвертибилни, па на основу претходне теореме за произвољне матрице $A, B \in Z(M_n(R))^*$ (ако их посматрамо као матрице из $Z(M_n(T(R)))^*$ постоји матрица $C \in Z(M_n(T(R)))^*$ за коју је $AC = CB = 0$. Нека је $C = (c_{ij}) = (\frac{p_{ij}}{q_{ij}})$ за $i, j = 1, ..., n$, и где $p_{ij} \in R$ и $q_{ij} \in R - \{0\}$. Ако узмемо $q = NZS(\{q_{ij} | i, j = 1, ..., n\})$ и овим помножимо матрицу C, добићемо матрицу $C' = qC \in Z(M_n(R))^*$ за коју важи $AC' = C'B = 0$.

Како ћемо видети касније, $\mathrm{diam}(\Gamma(M_n(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2))) = 3$ (видети теорему 4.4.7), па смо тиме описали дијаметре графа $\Gamma(M_n(R))$ за све прстене R чији је граф делитеља нуле $\Gamma(R)$ комплетан.

При проучавању дијаметра графа $\Gamma(M_n(R))$ прстена R за које је $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = 2$, подсетимо се да ако је R прстен чији граф делитеља нуле има дијаметар 2, тада важи тачно једно од следећег (теорема 2.3.2):

(1) $Z(R)$ је прост идеал у R

(2) $T(R) = K_1 \times K_2$, где су оба K_i поља.

Са тим у вези прво доказујемо следећу теорему.

Теорема 4.4.7 *Нека је R комутативни прстен такав да је $T(R) = K_1 \times K_2$, где су оба K_i поља. Тада је $diam(\Gamma(M_n(R))) = 3$.*

Доказ. За матрицу $A \in M_n(K_1 \times K_2)$, $A = ((a'_{ij}, a''_{ij})), i, j = 1, ..., n$, уведимо ознаке $A' = (a'_{ij}) \in M_n(K_1)$ и $A'' = (a''_{ij}) \in M_n(K_2)$. Очигледно, $A \in Z(M_n(K_1 \times K_2))$ ако и само ако $A' \in Z(M_n(K_1))$ или $A'' \in Z(M_n(K_2))$.

Посматрајмо матрице $A = \begin{bmatrix} (1,1) & (0,0) \\ (0,0) & (a,0) \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} (1,1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,b) \end{bmatrix}$ које су обе делитељи нуле у прстену $M_n(T(R))$ ($a \in K_1, b \in K_2$ различити од 0).

Приметимо да су матрице $A' \in M_n(K_1)$ и $B'' \in M_n(K_2)$ инвертибилне, и да $A'' \in Z(M_n(K_2))^*$, $B' \in Z(M_n(K_1))^*$. Када би постојало $C \in Z(M_n(K_1 \times K_2))^*$ тако да је $AC = 0$ и $CB = 0$, морало би да важи $C' = C'' = 0$.

Како без умањења општости можемо узети да $A, B \in M_n(R)$ ($(a, 0)$ и $(0, b)$ припадају R за неке $a, b \neq 0$ јер R има бар два различита делитеља нуле) закључујемо да је $\mathrm{diam}(\Gamma(M_n(R))) \geq 3$, па је

$\text{diam}(\Gamma(M_n(R))) = 3$.

У другом случају, када је $Z(R)$ је прост идеал у R, доказујемо теорему за дијаметар графа $\Gamma(M_n(R))$ у случају када је прстен R Нетерин.

Теорема 4.4.8 *Нека је R Нетерин прстен такав да је* $\text{diam}(\Gamma(R)) = 2$. *Ако је $Z(R) = \mathcal{P}$ прост идеал у R, тада је* $\text{diam}(\Gamma(M_n(R))) = 2$.

Доказ. Нека су A, B различите матрице из $Z(M_n(R))^*$. АКо је $AB \neq 0$, тада у постоје инвертибилне матрице P, Q из $M_n(T(R))$ тако да се последња колона од AP и прва врста од QB састоје само од делитеља нуле. Ако је a елемент из $Z(R)^*$ који анулира све остале (видети теорему 2.1.6), посматрајмо матрицу

$$C = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} Q.$$

Тада је $C \neq 0$ и $AC = CB = 0$, па је и $\text{diam}(\Gamma(M_n(R))) = 2$.

Овим смо одредили дијаметре графа $\Gamma(M_n(R))$ у зависности од дијаметра графа $\Gamma(R)$ за све случајеве, осим у случају када је $\text{diam}(\Gamma(R)) = 2$, $Z(R)$ је прост идеал у R и R није Нетерин прстен.

На крају ћемо доказати и тврђење о обиму графа $\Gamma(M_n(R))$, на основу кога закључујемо да сви графови $\Gamma(M_n(R))$ имају исти обим. Подсетимо се, ако нас интересује обим графа делитеља нуле некомутативног прстена, ограничавамо се на неусмерени граф (видети 3.0.2 и 3.0.5).

Теорема 4.4.9 *Нека је R комутативни прстен. Тада за обим графа* $\Gamma(M_n(R))$ *важи* $gr(\Gamma(M_n(R))) = 3$.

Доказ. Докажимо тврђење прво за $n = 2$. Нека је $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. A, B и C су очигледно различите ненула матрице из $Z(M_2(R))^*$ за које важи $AB = BC = CA = 0$. За произвољно n, врсте и колоне матрица A, B, C са редним бројем већим од 2 попунимо нулама.

Литература

[1] I. Beck, *Coloring of commutative rings*, Journal of Algebra 116, 208-226 (1988)

[2] Irving Kaplansky, *Commutative Rings*, The University of Chicago Press, 1974

[3] David Anderson and Philip Livingston, *The zero-divisor graph of a commutative ring*, Journal of Algebra 217, 434-447 (1999)

[4] David Anderson and S.B.Mulay, *On the diameter and girth of a zero-divisor graph*, Journal of Pure and Applied Algebra (2006)

[5] Shane Redmond, *The zero-divisor graph of a non-commutative ring*, International Journal of Commutative Rings Volume 1, Number 4, pp. 203-211 (2002)

[6] Tongsuo Wu, *On directed zero-divisor graphs of finite rings*, Discrete Mathematics 296, 73-86 (2005)

[7] William Brown, *Matrices over commutative rings*, Marcel Dekker, Inc. 1993

[8] S. Akbari and A. Mohammadian, *Zero-divisor graphs of non-commutative rings*, Journal of Algebra 296, 462-479 (2006)

[9] Michael Axtell, James Coykendall and Joe Stickles, *Zero-divisor graphs of polynomial and power series over commutative rings*, Communications in Algebra 33, 2043-2050 (2005)