Žarko

Univerzitet u Beogradu

Matematički fakultet

Łukasiewiczeve deduktivne implikativne algebre

magistarski rad

Srdjan Ognjanović

Beograd 1996.

Predgovor

Ovaj magistarski rad, koji se predlaže Naučno-nastavnom veću Matematičkom fakulteta u Beogradu, ima za cilj algebarsku analizu implikativnog segmenta Łukasiewiczeve trovalentne logike.

U toku rada autor je naišao na veliku i svestranu pomoć dr. Milana Božića i dr. Žarka Mijajlovića na čemu im svesrdno zahvaljuje. Posebnu zahvalnost autor duguje dr. Djordju Vukomanoviću koji je predložio ovu zanimljivu temu i u svemu pomogao korisnim savetima i sugestijama pri izradi rada. Zahvalnost duguje i dr. Slaviši Prešiću, dugogodišnjem rukovodiocu seminara za algebru i logiku, čiji je autor bio učesnik, za pomoć u toku postdiplomskih studija.

U Beogradu, 1996.

Autor
Srdjan Ognjanović
iz Beograda

Odbrana: 27.09.96
Komisija
1. M. Božić (mentor)
2. Đ. Vukomanović (dao temu)
3. Ž. Mijajlović

Pitanja
1. Proširenja na druge logike
a. sa dodatnim log. vezn. ◇, □
b. kvantorima
(Primer: Korn. f-le)

2. T. 1.24. tvrdi da je F^3_n posledica od F^3_{n+1} - obrat? | str. 3, 13

3. Sinteza kvazivarijeteta impl. algebri
(t-upr., karakt. alg.)

Uvod

Krajem XIX i početkom XX veka, nakon otkrivanja poznatih paradoksa u nekim delovima teorije skupova, kao odgovor na neophodnost izmena u samim temeljima matematike, došlo je do burnog razvoja matematičke logike; pored Russelovog logicizma, pojavili su se Hilbertov formalizam i Brouwerov intuicionizam. Posebno je Brouwer bio radikalan u kritici klasične matematike i logike. Ali, osim njega i drugi matematičari kritikovali su razne aspekte klasične logike, u prvom redu implikaciju i negaciju. Tako su se pojavile nove logike, Lewisova modalna logika (1918.), kao ekstenzija klasične, sa jedne strane i sa druge strane Łukasiewiczeva polivalentna logika (1920.), konstruktivne logike, relevantne logike itd. kao nove alternativne logike.

Odlučujući korak ka uvodjenju polivalentnih logika, kao uopštenju najjednostavnijih - dvovalentnih logika, načinio je slavni poljski matematičar Jan Łukasiewicz oko 1920. godine. Inspiraciju za svoj rad Łukasiewicz je našao u IX glavi Aristotelovog logičkog spisa "O tumačenju". Za Aristotela Łukasiewicz tvrdi da takodje pokušava, možda ne naročito uspešno, da vodi raspravu sa istih, polivalentnih pozicija. Tako se dogodilo da ono što se naziva ne-Aristotelova logika (tj. logika sa više od dve istinitosne vrednosti) nastaje baš pod uticajem čuvenog Aristotelovog vidjenja iznesenog u pomenutom spisu. U Łukasiewiczevim polivalentnim logikama ne važe neki klasični zakoni Aristotelove logike, kao na primer zakon "tertium non datur": $p \vee \neg p$, kao ni zakon "negacija kontradikcije": $\neg(p \wedge \neg p)$, jer se pretpostavlja da, osim istinitih i lažnih iskaza, čije istinitosne vrednosti se označavaju sa 0 , odnosno 1 , postoje i druge istinitosne vrednosti, koje se nalaze izmedju ove dve. U trovalentnoj logici je to još jedna - označava se sa ½ , u n-valentnoj ($n=3,4,\ldots$) ima ih još $n-2$: $1/(n-1), 2/(n-1), \ldots, (n-2)/(n-1)$. Postoje i polivalentne logike sa beskonačo mnogo (prebrojivo ili neprebrojivo mnogo) istinitosnih vrednosti.

Ako vrednost iskaza p obeležimo sa $/p/$ tada se na sledeći način definišu vrednosti iskaznih formula u Łukasiewiczevim polivalentnim logikama:

$/\neg p/ = 1 - /p/$,

$/p \vee q/ = \max\{/p/, /q/\}$,

$/p \wedge q/ = \min\{/p/, /q/\}$,

$$/p \Rightarrow q/ = \begin{cases} 1 & , /p/ \leq /q/ \\ 1 - /p/ + /q/ & , /p/ > /q/ \end{cases} ,$$

$$/p \Leftrightarrow q/ = /(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)/ = 1 - \left| /p/ - /q/ \right| .$$

Tako je, na primer, izgled tablice za implikaciju i negaciju u trovalentnoj logici sledeći:

$\Rightarrow$	0	½	1	$\neg$
0	1	1	1	1
½	½	1	1	½
1	0	½	1	1

Od posebnog je značaja da mnoge formule, koje su tautologije u klasičnoj dvovalentnoj logici, to, nisu i u trovalentnoj. Osim već pomenutih $p \vee \neg p$ i $\neg(p \wedge \neg p)$, pomenimo još dve, koje su od značaja za ovaj rad:

$$(p \Rightarrow (p \Rightarrow q)) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \quad \text{(zakon kontrakcije)},$$
$$((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p \quad \text{(Peirceov zakon)}.$$

Postoji niz aksiomatizacija trovalentne Łukasiewiczeve logike Ł$_3$. Jednu od njih, posebno elegantnu, dao je Wajsberg 1931. godine [22]:

$$\text{(W1)} \quad \alpha \to (\beta \to \alpha)$$
$$\text{(W2)} \quad (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$$
$$\text{(W3)} \quad (\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$$
$$\text{(W4)} \quad ((\alpha \to \neg\alpha) \to \alpha) \to \alpha$$

Ovo su shema aksiome, a jedino pravilo izvodjenja je MODUS PONENS.

Sledećim definicijama se uvode $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$:

$\alpha \vee \beta$ je zamena za $(\alpha \to \beta) \to \beta$
$\alpha \wedge \beta$ je zamena za $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$
$\alpha \leftrightarrow \beta$ je zamena za $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$.

Za rezultate ovog rada značajno je napomenuti i da je formulacija teoreme dedukcije u Ł$_3$ modifikovana u odnosu na formulaciju teoreme dedukcije u dvovalentnoj logici. Teorema dedukcije u Ł$_3$ glasi:

$$\text{Ako } \Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta \text{ , onda } \Gamma \vdash \alpha \to (\alpha \to \beta) \text{ .}$$

Algebarska ispitivanja raznih neklasičnih logika započela je poljska logička škola dvadesetih i tridesetih godina XX veka u terminima logičkih matrica koje su izvesne apstraktne algebre. Uvodjenje algebarskih metoda u logiku dovelo je i do pojave brojnih novih algebarskih struktura.

Ovaj rad posvećen je algebarskoj analizi implikativnih fragmenata Łukasiewiczevog Ł$_3$ računa.

U prvom poglavlju, posvećenom deduktivnim Ł$_3$ implikativim algebrama, po analogiji sa klasičnim i intuicionističkim deduktivnim implikativnim algebrama iz [19] , definisane su slabo deduktivne Ł$_3$ implikativne algebre SDŁ$_3$IA, 1-deduktivne Ł$_3$ implikativne algebre 1-DŁ$_3$IA, n-deduktivne Ł$_3$ n-DŁ$_3$IA ($n=2,3,\ldots$) i konačno deduktivne Ł$_3$ implikativne algebre FDŁ$_3$IA. Ispostavlja se da implikativne algebre IA obuhvataju slabo deduktivne Ł$_3$ implikativne algebre, a ove sadrže 1-deduktivne Ł$_3$ implikativne algebre itd... da je svaka n-deduktivna Ł$_3$ implikativna algebra istovremeno i k-deduktivna za svako $1 \leq k \leq n$ i da je Łukasiewiczeva Ł$_3$ implikativna algebra Ł$_3$IA , koja karakteriše implikativni fragment Łukasiewiczevog trovalentnog računa istovremeno i konačno deduktivna Ł$_3$ implikativna algebra:

$$\text{IA} \supseteq \text{SDŁ}_3\text{IA} \supseteq \text{1-DŁ}_3\text{IA} \supseteq \ldots \supseteq \text{n-DŁ}_3\text{IA} \supseteq \text{(n+1)-DŁ}_3\text{IA} \supseteq \ldots \supseteq \text{FDŁ}_3\text{IA} \supseteq \text{Ł}_3\text{IA}.$$

Medjutim, pokazuje se da dodavanje jednog prirodnog zakona - zakona jake permutacije antecedenata (SP) delimično poništava hijerarhiju deduktivnih Ł$_3$ implikativnih algebri:

$IA \supseteq SDŁ_3IA + SP \supseteq 1\text{-}DŁ_3IA + SP = \ldots = n\text{-}DŁ_3IA + SP = \ldots = FDŁ_3IA + SP \supseteq Ł_3IA$.

Ostaje otvoreno pitanje da li se uz pretpostavke dva slaba zakona permutacije antecedenata (WP) i (WP") (koji imaju za posledice još neke takve zakone) ruši hijerarhija n-deduktivnih $Ł_3$ implikativnih algebri za $n \geq 2$. Inače, ovde se prirodno izdvaja 1-deduktivna $Ł_3$ implikativna algebra u kojoj važi (WP) i (WP"): $1\text{-}DŁ_3IA + WP + WP"$.

U ovom poglavlju veći broj teorema ima za cilj da osvetli medjuzavisnost nekoliko važnih zakona deduktivnih $Ł_3$ implikativnih algebri, posebno neke oblike zakona permutacije antecedenata i zakona tranzitivnosti prefiksiranja i sufiksiranja. Takodje je pokazano da su, za razliku od klase svih implikativnih algebri, koje su kvazivarijeteti i nisu jednakosno definabilne, konačno deduktivne $Ł_3$ implikativne algebre su varijeteti i kao takve zatvorene za podalgebre, direktne proizvode algebri i za homomorfne slike.
U drugom poglavlju razmatrani su implikativni filtri u $Ł_3$ deduktivnim implikativnim algebrama i njihove veze sa homomorfizmima i kongruencijama tih algebri.
U trećem poglavlju razmatraju se deduktivni uredjeni (reziduirani) neasocijativni grupoidi, za koje se ispostavlja da se u njima mogu modelirati $Ł_3$ implikacije.

Postulati i zakoni koji se pojavljuju u radu

(i_1) $a \to a = 1$.

(i_2) Ako $a \to b = 1$ i $b \to c = 1$, onda $a \to c = 1$ - slaba tranzitivnost.

(i_3) Ako $a \to b = 1$ i $b \to a = 1$, onda $a = b$.

(i_4) $a \to 1 = 1$.

(i_5) $0 \to a = 1$.

(i_6) $1 \to a \leq a$.

(WC_3) Ako $a \to (a \to (a \to b)) = 1$, onda $a \to (a \to b) = 1$ - slaba Ł$_3$-kontrakcija.

(C_2) $(a \to (a \to c)) \to (a \to c) = 1$.

(C_3) $(a \to (a \to (a \to b))) \to (a \to (a \to b)) = 1$ (jaki zakoni kontrakcije) .

(WP) Ako $a \to (b \to c) = 1$, onda $b \to (a \to c) = 1$ - slabi zakon permutacije antecedenata.

(WP') Ako $a \to (b \to c) = 1$, onda $b \to (a \to (a \to c)) = 1$.

(WP") Ako $a \to (a \to (b \to c)) = 1$, onda $b \to (a \to (a \to c)) = 1$.

(WP''') Ako $b \to (a \to (b \to c)) = 1$, onda $b \to (b \to (a \to (a \to c))) = 1$.

(WP^{IV}) Ako $b \to (a \to (a \to c)) = 1$, onda $a \to (a \to (b \to c)) = 1$.

(WDP) Ako $a \to (a \to (b \to (b \to c))) = 1$, onda $b \to (b \to (a \to (a \to c))) = 1$.

(WDP') Ako $b \to (a \to (b \to (a \to c))) = 1$, onda $b \to (b \to (a \to (a \to c))) = 1$.

(WDP") Ako $a \to (b \to (b \to (a \to c))) = 1$, onda $b \to (b \to (a \to (a \to c))) = 1$.

(SP) $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$ - jaki zakon permutacije antecedenata.

(SP') $(a \to (b \to c)) \to (b \to (a \to c)) = 1$.

(SP") $(a \to (a \to (b \to c))) \to (b \to (a \to (a \to c))) = 1$

(AC) $a \to (b \to a) = 1$ - zakon afirmacije konsekventa.

(AC') $a \to (a \to (b \to (b \to a))) = 1$.

(D_0) Ako $b = 1$ i $a \to (b \to c) = 1$, onda $a \to c = 1$.

(D_{01}) Ako $b = 1$ i $c_1 \to (a \to (b \to c)) = 1$, onda $c_1 \to (a \to c) = 1$.

(D_{10}) Ako $c_1 \to b = 1$ i $a \to (b \to c) = 1$, onda $c_1 \to (a \to c) = 1$.

(D_{11}") Ako $c_1 \to b = 1$ i $c_1 \to (a \to (b \to c)) = 1$, onda $c_1 \to (c_1 \to (a \to (a \to c))) = 1$.

(T_{01}) Ako $a \to b = 1$ i $c_1 \to (b \to c) = 1$, onda $c_1 \to (a \to c) = 1$.

(T_{10}) Ako $c_1 \to (a \to b) = 1$ i $b \to c = 1$, onda $c_1 \to (a \to c) = 1$.

(T_{11}') Ako $a \to (b \to c) = 1$ i $a \to (a \to b) = 1$, onda $a \to (a \to c) = 1$.

(T_{11}") Ako $c_1 \to (a \to b) = 1$ i $c_1 \to (b \to c) = 1$, onda $c_1 \to (c_1 \to (a \to (a \to c))) = 1$.

(WTS) Ako $a \to b = 1$, onda $(b \to c) \to (a \to c) = 1$ - slaba tranzitivnost sufiksiranja .

(WTP) Ako $b \to c = 1$, onda $(a \to b) \to (a \to c) = 1$ - slaba tranzitivnost prefiksiranja .

(STP) $(b \to c) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$, jaka tranzitivnost prefiksiranja .

(STS) $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1$, jaka tranzitivnost sufiksiranja .

(F_0^3) Ako $a \to (a \to (b \to c)) = 1$ i $a \to (a \to b) = 1$, onda $a \to (a \to c) = 1$.

(F_n^3) Ako $c_n \to (c_n \to (\ldots \to (c_1 \to (c_1 \to (a \to (a \to (b \to c)))))) \ldots)) = 1$ i
$c_n \to (c_n \to (\ldots \to (c_1 \to (c_1 \to (a \to (a \to b)))) \ldots)) = 1$,
onda $c_n \to (c_n \to (\ldots \to (c_1 \to (c_1 \to (a \to (a \to c)))) \ldots)) = 1$.

(F_0") Ako $a \to (b \to c) = 1$ i $a \to b = 1$, onda $a \to (a \to c) = 1$.

(F_{10}') Ako $c_1 \to (a \to (b \to c)) = 1$ i $a \to b = 1$, onda $c_1 \to (a \to (a \to c)) = 1$.

(F_{01}') Ako $a \to (b \to c) = 1$ i $c_1 \to (a \to b) = 1$, onda $c_1 \to (a \to (a \to c)) = 1$.

(F_{11}') Ako $c_1 \to (a \to (b \to c)) = 1$ i $c_1 \to (a \to b) = 1$, onda $c_1 \to (c_1 \to (a \to (a \to c))) = 1$.

(F) Fregeov zakon (samodistributivnost implikacije) :
$(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$.

(F') $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to (a \to c))) = 1$.

(F") $(a \to (a \to (b \to c))) \to ((a \to (a \to b)) \to (a \to (a \to c))) = 1$.

(f_1)	$1 \in F$.
(f_2)	Ako $a \in F$ i $a \to b \in F$, onda $b \in F$.
(f_3)	Ako $a \in F$, onda $b \to a \in F$.
(f_4)	Ako $a \to b \in F$ i $b \to c \in F$, onda $a \to c \in F$.
(f_5)	Ako $b \to a \in F$ i $c \to d \in F$, onda $(a \to c) \to (b \to d) \in F$.

Aksiome deduktivnih integralnih (parcijalno) uredjenih Ł$_3$ grupoida :

Ax1.	$a \leq a$.
Ax2.	Ako $a \leq b$ i $b \leq a$ onda $a = b$.
Ax3.	Ako $a \leq b$ i $b \leq c$ onda $a \leq c$.
Ax4.	$a \leq 1$.
Ax5.	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
Ax6.	Ako $a \leq b$, onda $a \cdot c \leq b \cdot c$ i $c \cdot a \leq c \cdot b$.
Ax7.	$a \cdot b = b \cdot a$.
Ax8.	$(a \cdot a) \cdot a = a \cdot a$ i $(a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a \cdot a$.
Ax9.	Ako $a \leq b$, onda $a \to b = 1$.
Ax10.	$a \cdot (a \to b) \leq b$ (MODUS PONENS).
Ax11.	Ako $b \cdot a \leq c$, onda $a \leq b \to c$.
Ax12.	$a \cdot (a \cdot (b \cdot b)) \leq (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)$.
Ax13.	$a \to (a \to (a \to b)) \leq a \to (a \to b)$ (Ł$_3$ kontrakcija).
Ax14.	$a \cdot (a \cdot b) \leq b \cdot (a \cdot a)$.

I Implikativne algebre, slabo deduktivne Ł$_3$ implikativne algebre, n-deduktivne i ω-deduktivne (konačno deduktivne) Ł$_3$ implikativne algebre (elementarna teorija)

Glavna ideja ovog poglavlja je razvijanje elementarne teorije "razlaganja" Łukasiewiczeve trovalentne implikacije (koje se lako uopštava za n-vrednosnu Łukasiewiczevu implikaciju) analogno "dekompoziciji" klasične,intuicionističke i striktne S4 i S5 implikacije u radu [19].

Najslabija klasa algebri koja obuhvata kao specijalne slučajeve algebre koje karakterišu sve navedene implikacije,uključujući i Łukasiewiczevu polivalentnu,je klasa implikativnih algebri.

Definicija 1.1.(Rasiowa [15]) Implikativna algebra IA je apstraktna algebra $\langle A,1,\rightarrow\rangle$,gde je A neprazan skup, 1 nularna operacija (konstanta),
a $\rightarrow$ je binarna operacija i one zadovoljavaju sledeće aksiome:

(i_1) $a\rightarrow a=1$.
(i_2) **Ako $a\rightarrow b=1$ i $b\rightarrow c=1$,onda $a\rightarrow c=1$. (slaba tranzitivnost)**
(i_3) **Ako $a\rightarrow b=1$ i $b\rightarrow a=1$,onda $a=b$.**
(i_4) **$a\rightarrow 1=1$.**

Ako,pored ovoga,postoji u A element 0 takav da važi
(i_5) **$0\rightarrow a=1$**
(lako se dokazuje da postoji najviše jedan takav element),onda se $\langle A,1,\rightarrow\rangle$ naziva ograničena implikativna algebra.

Neposredne posledice definicije 1.1. su sledeće teoreme:

Teorema 1.2. Ako $a=1$ i $a\rightarrow b=1$, onda $b=1$.
Dokaz 1. $a=1$ hyp
2. $a\rightarrow b=1$ hyp
3. $b\rightarrow 1=1$ (i_4)
4. $1\rightarrow b=1$ iz 1,2
5. $b=1$ iz 3,4,(i_3).

Teorema 1.3. Ako $a=1$, onda $b\rightarrow a=1$.
Dokaz sledi neposredno iz (i_4).

Teorema 1.4. Ako $a=1$ i $a\rightarrow(a\rightarrow b)=1$,onda $b=1$.
Dokaz sledi iz teoreme 1.2.

Teorema 1.5. Ako $a=1$, $a\rightarrow b=1$ i $a\rightarrow(b\rightarrow c)=1$,onda $c=1$.
Dokaz sledi iz teoreme 1.2.

Poznato je da klasa implikativnih algebri nije varijetet (jednakosno definabilna) jer nije zatvorena za homomorfne slike.ali je očigledno kvazivarijetet (i kao takva zatvorena za podalgebre i direktne proizvode).

U svakoj implikativnoj algebri se na prirodan način uvodi (parcijalno) uredjenje s najvećim i , u slučaju ograničene implikativne algebre, najmanjim elementom.

Definicija 1.6. Neka je $(A,1,\to)$ implikativna algebra.Relacija $\leq$ se definiše na sledeći način:

$a \leq b$ ako i samo ako $a\to b=1$.

Teorema 1.7. Relacija $\leq$ u implikativnoj algebri $\langle A,1,\to\rangle$ je (parcijalno) uredjenje na A. Elment 1 je najveći element u parcijalno uredjenom skupu $(A,\leq)$.
Dokaz. Refleksivnost relacije $\leq$ sledi iz (i_1) ,antisimetričnost iz (i_2) , a tranzitivnost iz (i_3).Da za svaki element a skupa A važi $a\leq 1$, sledi iz (i_4).

Zamenom u aksiomatskom sistemu za implikativne algebre slabe tranzitivnosti (i_2) jednim jačim zahtevom

(F_0^2) Ako $a\to(b\to c)=1$ i $a\to b=1$,onda $a\to c=1$

dobijaju se slabo deduktivne implikativne algebre implicitno definisane kod Rasiowe i eksplicitno u [19] u kojima se postiže da "gornji konusi"(tj. skupovi oblika $\{x\in A:a\leq x\}$,gde je $\leq$ definisano u 1.6.) postaju implikativni filtri.Medjutim,uslov (F_0^2) zajedno sa (i_1) ima za posledicu slabi zakon kontrakcije (za a=b)

(WC_2) Ako $a\to(a\to c)=1$,onda $a\to c=1$

kojim se eliminiše polivalentna Łukasiewiczeva implikacija.Zbog toga se definicija slabo deduktivnih $Ł_3$ implikativnih algebri mora modifikovati.

Definicija 1.8. Slabo deduktivna $Ł_3$ implikativna algebra SD$Ł_3$IA je algebra $\langle A,1,\to\rangle$, gde su 1 i $\to$ redom nularna i binarna operacija koje zadovoljavaju sledeće aksiome:

(i_1) $a\to a=1$.
(i_2) **Ako** $a\to b=1$ **i** $b\to c=1$ **, onda** $a\to c=1$.
(i_3) **Ako** $a\to b=1$ **i** $b\to a=1$ **, onda** $a=b$.
(i_4) $a\to 1=1$.
(i_6) $1\to a\leq a$.
(F_0^3) **Ako** $a\to(a\to(b\to c))=1$ **i** $a\to(a\to b)=1$ **,onda** $a\to(a\to c)=1$.

Ograničena slabo-deduktivna $Ł_3$ implikativna algebra je slabo-deduktivna $Ł_3$ implikativna algebra u kojoj važi

(i_5) $0\to a=1$ **za neki element** $0\in A$.

Za razliku od slabo deduktivnih implikativnih algebri,gde je (i_2) posledica (F_0^2),(i_3) i (i_4) , (i_2) ne sledi iz (F_0^3) i ostalih postulta implikativne algebre.
Postoje implikativne algebre u kojima ne važi (F_0^3) pa nisu slabo deduktivne.To pokazuje sledeći primer:

Primer 1. Neka je $A=\{a,b,c,1\}$ i operacija $\to$ definisana tablicom

$\to$	c	a	b	1
c	1	1	1	1
a	b	1	a	1
b	a	b	1	1
1	c	a	b	1

Tada je $a\to(a\to b)=a\to a=1$, $a\to(a\to(b\to c))=a\to(a\to a)=1$, a $a\to(a\to c)=a\to b=a\neq 1$.

Dokazaćmo sada neke teoreme (1.9-1.11.) koje su posledice aksioma slabo deduktivne $Ł_3$ implikativne algebre.

Teorema 1.9. Ako $a\to(a\to(a\to b))=1$,onda $a\to(a\to b)=1$ (WC_3) - slaba $Ł_3$-kontrakcija.

Dokaz 1. $a\to(a\to(a\to b)) = 1$ hyp
2. $a\to(a\to a) = 1$ $(i_1),(i_4)$
3. $a\to(a\to b) = 1$ iz 1,2,(F_0^3) (zamenom b sa a i c sa b).

U implikativnoj algebri $1\to a \leq a$ je posledica (F_0^2). U slabo deduktivnoj $Ł_3$ implikativnoj algebri to se mora uzeti kao postulat. Naime ,u implikativnoj algebri iz (F_0^3) sledi slabiji rezultat:

Teorema 1.10. $1\to a \leq (1\to a)\to a$.

Dokaz 1. $(1\to a)\to((1\to a)\to(1\to a)) = 1$ (i_1),teorema 1.3.
2. $(1\to a)\to((1\to a)\to 1) = 1$ (i_4),teorema 1.3.
3. $(1\to a)\to((1\to a)\to a) = 1$ iz 1,2 (F_0^3)
4. $1\to a \leq (1\to a)\to a$ iz 3,definicija 1.7.

Teorema 1.11.1. Ako $a\to(b\to c)=1$ i $a\to b=1$,onda $a\to(a\to c)=1$ $(F_0")$.

1.11.2. Ako $a\to(b\to c)=1$ i $a\to(a\to b)=1$,onda $a\to(a\to c)=1$ (T_{11}').

1.11.3. Ako $a\to b=1$ i $a\to(a\to(b\to c))=1$, onda $a\to(a\to c) = 1$.

Dokaz 1.11.1. Neposredna posledica aksiome (F_0^3).

1.11.2. 1. $a\to(a\to b) = 1$ hyp
2. $a\to(b\to c) = 1$ hyp
3. $a\to(a\to(b\to c)) = 1$ iz 2,po (i_4)
4. $a\to(a\to c) = 1$ iz 3,1 ,po (F_0^3).

1.11.3. 1. $a\to b = 1$ hyp
2. $a\to(a\to(b\to c)) = 1$ hyp
3. $a\to(a\to b) = 1$ iz 1,(i_4)
4. $a\to(a\to c) = 1$ iz 2,3 ,po (F_0^3).

Dodavanje aksiomama implikativnih algebri jednog prirodnog postulata - slabog zakona permutacije antecedenata:

(WP) Ako $a \to (b \to c) = 1$, onda $b \to (a \to c) = 1$

ima dalekosežnu posledicu jer implikacija gubi striktni karakter u smislu da operacija $\to$ preslikava $A \times A$ na A . U teoremama 1.12. -1.21. pretpostavljaju se ,pored (WP) samo aksiome implikativne algebre.

Teorema 1.12. Zakon afirmacije konsekventa

$a \to (b \to a) = 1$ (AC).

Dokaz 1. $b \to (a \to a) = 1$ $(i_1),(i_4)$

2. $a \to (b \to a) = 1$ iz 1,primenom (WP)

Teorema 1.13. $a = 1 \to a$.

Dokaz. 1. $(1 \to a) \to (1 \to a) = 1$ (i_1)

2. $1 \to ((1 \to a) \to a) = 1$ (WP)

3. $(1 \to a) \to a = 1$ iz 2, po teoremi 1.2.

4. $a \to (1 \to a) = 1$ (AC)

5. $a = 1 \to a$ iz 3,4 ;po (i_3).

Teorema 1.14. $a \to ((a \to b) \to b) = 1$,

Dokaz 1. $(a \to b) \to (a \to b) = 1$ (i_1)

2. $a \to ((a \to b) \to b)) = 1$ iz 1,po (WP).

Teorema 1.15. $a \to (a \to b) \leq a \to (a \to (a \to b))$.

(obrat jake $Ł_3$-kontrakcije)

Dokaz. Neposredno sledi iz (AC) i definicije 1.6. (zamenom a sa $a \to (a \to b)$ i b sa a).

Teorema 1.16. Ako $b = 1$ i $a \to (b \to c) = 1$,onda $a \to c = 1$ (D_0).

Dokaz 1. $b = 1$ hyp

2. $a \to (b \to c) = 1$ hyp

3. $b \to (a \to c) = 1$ iz 2, (WP)

4. $a \to c = 1$ iz 3,teorema 1.2.

Teorema 1.17.

Ako $b = 1$ i $c_1 \to (a \to (b \to c)) = 1$,onda $c_1 \to (a \to c) = 1$ (D_{01}).

Dokaz 1. $b = 1$ hyp

2. $c_1 \to (a \to (b \to c)) = 1$ hyp

3. $c_1 \to (a \to (1 \to c)) = 1$ iz 1,2

4. $1 \to c = c$ teorema 1.13.

5. $c_1 \to (a \to c) = 1$ iz 3,4.

Teorema 1.18.

Ako $a \to b = 1$ i $c_1 \to (b \to c) = 1$, onda $c_1 \to (a \to c) = 1$ (T_{01}).

Dokaz 1. $a \to b = 1$ hyp

2. $c_1 \to (b \to c) = 1$ hyp

3. $b \to (c_1 \to c) = 1$ iz 2,(WP)

4. $a \to (c_1 \to c) = 1$ iz 1,3,(i_2)

5. $c_1 \to (a \to c) = 1$ iz 4,(WP).

Napomena: (F''_0) neposredno sledi iz (T_{01}) za $c_1=a$, dakle može se dokazati i bez primene (F_0^3), ali uz pretpostavku (WP). (v. teorema 1.11.1.)

Teorema 1.19. Ako $a\to b=1$, onda $(b\to c)\to(a\to c)=1$ (WTS).
(slaba tranzitivnost sufiksiranja)
Dokaz 1. $(b\to c)\to(b\to c)=1$ (i_1)
2. $a\to b = 1$ hyp
3. $(b\to c)\to(a\to c) = 1$ iz 1,2 , primenom teoreme 1.18.

Teorema 1.20. $a\to b=((a\to b)\to b)\to b$.
Dokaz 1. $((a\to b)\to b)\to((a\to b)\to b) = 1$ (i_1)
2. $(a\to b)\to(((a\to b)\to b)\to b) = 1$ iz 1, po (WP).
3. $(a\to(a\to b))\to b = 1$ teorema 1.14.
4. $(((a\to b)\to b)\to b)\to(a\to b) = 1$ iz 2, teorema 1.19.
5. $((a\to b)\to b)\to b = a\to b$ iz 2,4, (i_3).

Napomena: Očigledno je da su (i_2) i (T_{01}) neposredne posledice (WTS) u implikativnoj algebri.

Teorema 1.21. U implikativnoj algebri (tačnije - dovoljno je pretpostaviti (i_1) i (i_2)) (WP) i (D_{10}) su ekvivalentni, pri čemu je

(D_{10}) Ako $c_1\to b=1$ i $a\to(b\to c)=1$, onda $c_1\to(a\to c)=1$.
Dokaz. 1. (D_{10}) je posledica (WP) i (i_2):
1. $c_1\to b = 1$ hyp
2. $a\to(b\to c) = 1$ hyp
3. $b\to(a\to c) = 1$ iz 2, po (WP)
4. $c_1\to(a\to c) = 1$ iz 1,3 , primenom (i_2).
2. (WP) je posledica (D_{10}) i (i_1):
1. $a\to(b\to c) = 1$ hyp
2. $b\to b = 1$ (i_1)
3. $b\to(a\to c) = 1$ iz 1,2 , po (D_{10}).

U slabo deduktivnoj $Ł_3$ implikativnoj algebri ne može se dokazati ni oslabljeni algebarski analogon treoreme dedukcije. Pojačavanjem uslova (F_0^3), uz još neke dodatne prirodne pretpostavke dobijaju se nove $Ł_3$ implikativne algebre u kojima se taj nedostatak otklanja, ali koje su ipak slabije od Łukasiewiczeve trovalentne implikativne algebre $Ł_3IA$.

Definicija 1.22. n-deduktivna $Ł_3$ implikativna algebra (n-prirodni broj) n-D$Ł_3$IA je algebra $\langle A,1,\to\rangle$, gde su 1 i $\to$ redom nularna i binarna operacija koje zadovoljavaju sledeće aksiome:

(i_1) $a\to a = 1$
(i_2) **Ako** $a\to b=1$ **i** $b\to c=$, **onda** $a\to c=1$
(i_3) **Ako** $a\to b=1$ **i** $b\to a=1$, **onda** $a=b$
(i_4) $a\to 1=1$
(i_6) $1\to a \le a$
(AC) $a\to(b\to a) = 1$

(WTP) Ako $b \to c = 1$,onda $(a \to b) \to (a \to c) = 1$
(WTS) Ako $a \to b = 1$,onda $(b \to c) \to (a \to c) = 1$
(C_3) $(a \to (a \to (a \to b))) \to (a \to (a \to b)) = 1$
(F_n^3) Ako $c_n \to (c_n \to (\ldots \to (c_1 \to (c_1 \to (a \to (a \to (b \to c))))) \ldots)) = 1$ i
$c_n \to (c_n \to (\ldots \to (c_1 \to (c_1 \to (a \to (a \to b)))) \ldots)) = 1$,
onda $c_n \to (c_n \to (\ldots \to (c_1 \to (c_1 \to (a \to (a \to c)))) \ldots)) = 1$.

Ograničena n-deduktivna $Ł_3$ implikativna algebra je n-deduktivna $Ł_3$ implikativna algebra u kojoj važi

(i_5) $0 \to a = 1$ za neki element $0 \in A$.

(Ograničena) ω-deduktivna(konačno deduktivna) $Ł_3$ implikativna algebra FD$Ł_3$IA je (ograničena) $Ł_3$ implikativna algebra koja je n-deduktivna za svaki prirodni broj n .

Očigledno, aksioma (i_2) je suvišna jer je posledica,bilo (WTP),bilo (WTS),kao i aksioma (i_3) i (i_4).Takodje je očigledno da iz (i_6) i (AC) sledi $1 \to a = a$.

Naredne dve teoreme tvrde da je u implikativnoj algebri uslov (F_0^3) slabiji od uslova (F_1^3), a da je za svaki prirodni broj n (F_{n+1}^3) jače od (F_n^3).

Teorema 1.23. U implikativnoj algebri (zapravo,dovoljno je pretpostaviti samo (i_3) i (i_4)) uslov (F_0^3) je posledica uslova (F_1^3):
Ako $c_1 \to (c_1 \to (a \to (a \to (b \to c)))) = 1$ i $c_1 \to (c_1 \to (a \to (a \to b))) = 1$,onda
$c_1 \to (c_1 \to (a \to (a \to c))) = 1$ (F_1^3).
Drugim rečima, 1-deduktivne $Ł_3$ implikativne algebre su slabo deduktivne $Ł_3$ implikativne algebre.Obrnuto,slabo deduktivne $Ł_3$ implikativne algebre u kojima važi (F_1^3),(AC),(WTP),(WTS) i (C_3) su 1-deduktivne $Ł_3$ implikativne algebre.
Dokaz teoreme 1.23. 1. $a \to (a \to (b \to c)) = 1$ hyp
2. $a \to (a \to b) = 1$ hyp
3. $1 \to (1 \to (a \to (a \to (b \to c)))) = 1$ iz 1 teorema 1.3.
4. $1 \to (1 \to (a \to (a \to b))) = 1$ iz 2.teorema 1.3.
5. $1 \to (1 \to (a \to (a \to c))) = 1$ iz 3,4.po (F_1^3)
6. $a \to (a \to c) = 1$ iz 5.teorema 1.2.

Da ima slabo deduktivnih $Ł_3$ implikativnih algebri koje nisu 1-deduktivne $Ł_3$ implikativne algebre pokazuje sledeći primer:
Primer 2. Neka je $A = \{a,b,c,1\}$ i operacija $\to$ definisana tablicom

$\to$	c	a	b	1
c	1	1	1	1
a	b	1	c	1
b	a	c	1	1
1	c	a	b	1

Tada je $\langle A,1,\rightarrow\rangle$ slabo dedktivna $Ł_3$ implikativna algebra, koja nije 1-deduktivna, što se vidi iz sledećeg primera: $b\rightarrow(b\rightarrow(a\rightarrow(a\rightarrow(b\rightarrow c))))=b\rightarrow(b\rightarrow(a\rightarrow(a\rightarrow a)))=1$; $b\rightarrow(b\rightarrow(a\rightarrow(a\rightarrow b)))=b\rightarrow(b\rightarrow(a\rightarrow c))=b\rightarrow(b\rightarrow b)=1$, ali $b\rightarrow(b\rightarrow(a\rightarrow(a\rightarrow c)))=b\rightarrow(b\rightarrow(a\rightarrow b))=b\rightarrow(b\rightarrow c)=b\rightarrow a=c\neq 1$.

Teorema 1.24. U implikativnoj algebri (preciznije, dovoljni su uslovi (i_3) i (i_4)) uslov (F_n^3) je posledica uslova (F_{n+1}^3), za sve prirodne brojeve n.

Dokaz 1. $c_n\rightarrow(c_n\rightarrow(\ldots\rightarrow(c_1\rightarrow(c_1\rightarrow(a\rightarrow(a\rightarrow(b\rightarrow c)))))\ldots))=1$ hyp

2. $c_n\rightarrow(c_n\rightarrow(\ldots\rightarrow(c_1\rightarrow(c_1\rightarrow(a\rightarrow(a\rightarrow c))))\ldots))=1$ hyp

3. $1\rightarrow(1\rightarrow(c_n\rightarrow(c_n\rightarrow(\ldots\rightarrow(c_1\rightarrow(c_1\rightarrow(a\rightarrow(a\rightarrow(b\rightarrow c)))))\ldots))))=1$ iz1, teorema1.3.

4. $1\rightarrow(1\rightarrow(c_n\rightarrow(c_n\rightarrow(\ldots\rightarrow(c_1\rightarrow(c_1\rightarrow(a\rightarrow(a\rightarrow b))))\ldots))))=1$ iz 2, teorema 1.3.

5. $1\rightarrow(1\rightarrow(c_n\rightarrow(c_n\rightarrow(\ldots\rightarrow(c_1\rightarrow(c_1\rightarrow(a\rightarrow(a\rightarrow c))))\ldots))))=1$ iz3,4,(F_{n+1}^3)

6. $c_n\rightarrow(c_n\rightarrow(\ldots\rightarrow(c_1\rightarrow(c_1\rightarrow(a\rightarrow(a\rightarrow c))))\ldots))=1$ iz 5, teorema 1.2.

Naredne teoreme (1.25-1.31.) daju neke posledice aksioma 1-deduktivnih $Ł_3$ implikativnih algebri.

Teorema 1.25. $a\rightarrow(a\rightarrow b)=a\rightarrow(a\rightarrow(a\rightarrow b))$.

Dokaz sledi neposredno iz teoreme 1.16. i aksioma (C_3) i (i_3).

Teorema 1.26. $a\rightarrow(a\rightarrow(b\rightarrow(b\rightarrow a)))=1$ (AC').

Dokaz 1. $a\rightarrow(b\rightarrow a)=1$ (AC)

2. $(b\rightarrow a)\rightarrow(b\rightarrow(b\rightarrow a))=1$ iz 1 , (WTP)

3. $(a\rightarrow(b\rightarrow a))\rightarrow(a\rightarrow(b\rightarrow(b\rightarrow a)))=1$ iz 2 , (WTP)

4. $a\rightarrow(b\rightarrow(b\rightarrow a))=1$ iz 1,3 . teorema 1.2.

5. $a\rightarrow(a\rightarrow(b\rightarrow(b\rightarrow a)))=1$ iz 4 ,(i_4).

Teorema 1.27. U implikativnoj algebri (dovoljno je pretpostaviti (i_1) i (i_2))aksioma (WTP) ekvivalentna je uslovu (T_{10}) :

Ako $c_1\rightarrow(a\rightarrow b)=1$ i $b\rightarrow c=1$,onda $c_1\rightarrow(a\rightarrow c)=1$ (T_{10}).

Dokaz 1. (T_{10}) je posledica (WTP) i (i_2): 1. $c_1\rightarrow(a\rightarrow b)=1$ hyp

2. $b\rightarrow c=1$ hyp

3. $(a\rightarrow b)\rightarrow(a\rightarrow c)=1$ iz 2, po (WTP)

4. $c_1\rightarrow(a\rightarrow c)=1$ iz 3, po (i_2).

2. (WTP) je posledica (T_{10}) i (i_1) :

1. $b\rightarrow c=1$ hyp

2. $(a\rightarrow b)\rightarrow(a\rightarrow b)=1$ (i_1)

3. $(a\rightarrow b)\rightarrow(a\rightarrow c)=1$ iz 1,2 po (T_{10}) (za $c_1=a\rightarrow b$) .

Posledica 1.28. Ako $a\rightarrow(a\rightarrow b)=1$ i $b\rightarrow c=1$, onda $a\rightarrow(a\rightarrow c))=1$.

Dokaz. Neposredno iz (T_{10}) za $c_1=a$.

Teorema 1.29. Ako $c_1\rightarrow(a\rightarrow(b\rightarrow c))=1$ i $a\rightarrow b=1$,onda

$c_1\rightarrow(a\rightarrow(a\rightarrow c))=1$ (F_{10}') .

Dokaz 1. $c_1\rightarrow(a\rightarrow(b\rightarrow c))=1$ hyp

2. $a\rightarrow b=1$ hyp

3. $(b\to c)\to(a\to c) = 1$ iz 2,(WTS)
4. $(a\to(b\to c))\to(a\to(a\to c)) = 1$ iz 3,(WTP)
5. $(c_1\to(a\to(b\to c)))\to(c_1\to(a\to(a\to c))) = 1$ iz 4,(WTP)
6. $c_1\to(a\to(a\to c)) = 1$ iz 1,5 ,po teoremi 1.2.

Posledica 1.30. Ako $a\to b=1$ i $a\to(a\to(b\to c))=1$,onda $a\to(a\to c)=1$.
Dokaz 1. $a\to b = 1$ hyp
2. $a\to(a\to(b\to c)) = 1$ hyp
3. $a\to(a\to(a\to c)) = 1$ iz 1,2 po teoremi 1.29. $(c_1=a)$
4. $a\to(a\to c) = 1$ iz 3,(WC_3) .

Teorema 1.31. Ako $a\to b=1$,onda $(a\to(b\to c))\to(a\to(a\to c))=1$.
Dokaz 1. $a\to b = 1$ hyp
2. $(a\to(b\to c))\to(a\to(b\to c)) = 1$ (i_1)
3. $(a\to(b\to c))\to(a\to(a\to c)) = 1$ iz 1,2,po teoremi 1.29. (za $c_1=a\to(b\to c)$)

Uvodjenje prirodne pretpostavke u 1-deduktivnu $Ł_3$ implikativnu algebru - slabog zakona permutacije antecedenata (WP) ima zanimljive posledice (teoreme 1.32-1.37.).

Teorema 1.32. Ako $a\to(b\to c)=1$ i $c_1\to(a\to b)=1$,onda
$c_1\to(a\to(a\to c))=1$ (F_{01}').
Dokaz 1. $a\to(b\to c) = 1$ hyp
2. $c_1\to(a\to b) = 1$ hyp
3. $b\to(a\to c) = 1$ iz 1,(WP)
4. $(a\to b)\to(a\to(a\to c))= 1$ iz 3,(WTP)
5. $(c_1\to(a\to b))\to(c_1\to(a\to(a\to c))) = 1$ iz4,(WTP)
6. $c_1\to(a\to(a\to c)) = 1$ iz 2,5 ,po teoremi 1.2.

Posledica 1.33. Ako $a\to(b\to c)=1$,onda $(a\to b)\to(a\to(a\to c)) = 1$.
Dokaz 1. $a\to(b\to c)=1$ hyp
2. $(a\to b)\to(a\to b) = 1$ (i_1)
3. $(a\to b)\to(a\to(a\to c)) = 1$ iz 1,2,po teoremi 1.32. (za $c_1=a\to b$)

Posledica 1.34. $((b\to c)\to b) \to ((b\to c)\to((b\to c)\to c)) = 1$.
Dokaz iz teoreme 1.33. za $a=b\to c$.

Teorema 1.35. Ako $c_1\to(a\to(b\to c))=1$ i $c_1\to(a\to b) = 1$,onda
$c_1\to(c_1\to(a\to(a\to c))) = 1$ (F_{11}').
Dokaz 1. $c_1\to(a\to(b\to c)) = 1$ hyp
2. $c_1\to(a\to b) = 1$ hyp
3. $a\to(c_1\to(a\to(b\to c))) = 1$ iz 1,po (i_4)
4. $c_1\to(a\to(a\to(b\to c))) = 1$ iz 3,(WP)
5. $c_1\to(c_1\to(a\to(a\to(b\to c)))) = 1$ iz 4,(i_4)
6. $a\to(c_1\to(a\to b)) = 1$ iz 2,(i_4)
7. $c_1\to(a\to(a\to b)) = 1$ iz 6,(WP)
8. $c_1\to(c_1\to(a\to(a\to b))) = 1$ iz 7,(i_4)
9. $c_1\to(c_1\to(a\to(a\to c))) = 1$ iz 5,8 ,(F_1^3)

Teorema 1.36. Ako $c_1\to(a\to b)=1$ i $c_1\to(b\to c)=1$,onda
$c_1\to(c_1\to(a\to(a\to c)))=1$ $(T_{11}")$.
Dokaz 1. $c_1\to(a\to b)=1$ hyp
2. $c_1\to(b\to c)=1$ hyp
3. $a\to(c_1\to(a\to b))=1$ iz 1,(i_4)
4. $c_1\to(a\to(a\to b))=1$ iz 3,(WP)
5. $c_1\to(c_1\to(a\to(a\to b)))=1$ iz 4,(i_4)
6. $a\to(c_1\to(b\to c))=1$ iz 2,(i_4)
7. $c_1\to(a\to(b\to c))=1$ iz 6,(WP)
8. $a\to(c_1\to(a\to(b\to c)))=1$ iz 7,(i_4)
9. $c_1\to(a\to(a\to(b\to c)))=1$ iz 8,(WP)
10. $c_1\to(c_1\to(a\to(a\to(b\to c))))=1$ iz 9,(i_4)
11. $c_1\to(c_1\to(a\to(a\to c)))=1$ iz 5,10,(F_1^3).

Teorema 1.37. Ako $c_1\to b=1$ i $c_1\to(a\to(b\to c))=1$, onda
$c_1\to(c_1\to(a\to(a\to c)))=1$ $(D_{11}")$.
Dokaz 1. $c_1\to b=1$ hyp
2. $c_1\to(a\to(b\to c))=1$ hyp
3. $a\to(c_1\to b)=1$ iz 1,(i_4)
4. $c_1\to(a\to b)=1$ iz 3,(WP)
5. $a\to(c_1\to(a\to b))=1$ iz 4,(i_4)
6. $c_1\to(a\to(a\to b))=1$ iz 5,(WP)
7. $c_1\to(c_1\to(a\to(a\to b)))=1$ iz 6,(i_4)
8. $a\to(c_1\to(a\to(b\to c)))=1$ iz 2,(i_4)
9. $c_1\to(a\to(a\to(b\to c)))=1$ iz 8,(WP)
10. $c_1\to(c_1\to(a\to(a\to(b\to c))))=1$ iz 9,(i_4)
11. $c_1\to(c_1\to(a\to(a\to c)))=1$ iz 7,10,(F_1^3)

Fregeov zakon (samodistributivnost implikacije) (F) :
$$(a\to(b\to c))\to((a\to b)\to(a\to c)) = 1 \qquad (F)$$
i slabi zakon permutacije antecedenata (WP) imaju za posledicu,u implikativnoj algebri,jaku kontrakciju (C_2). Naime,iz (F) , za b=a imamo
$$(a\to(a\to c))\to((a\to a)\to(a\to c)) = 1$$
odakle po (WP) dobijamo
$$(a\to a)\to((a\to(a\to c))\to(a\to c)) = 1$$
a odavde,po (i_1) i teoremi 1.2. sledi
$$(C_2) \quad (a\to(a\to c))\to(a\to c) = 1 .$$
Medjutim,ovaj oblik kontrakcije eliminiše $Ł_3$-implikaciju.Zbog toga se,u vezi sa $Ł_3$-implikacijom mora razmotriti neko oslabljenje Fregeovog zakona koje je kompatibilno s tom implikacijom:
$$(a\to(b\to c))\to((a\to b)\to(a\to(a\to c))) = 1 \qquad (F') .$$
Naime, u implikativnoj algebri u kojoj važe (WTP) i (C_3), (F') je posledica jakog zakona permutacije antecedenata (SP) :
$$a\to(b\to c) = b\to(a\to c) \qquad (SP) ,$$
koji je,očigledno,ekvivalentan sa
$$(a\to(b\to c))\to(b\to(a\to c)) = 1 \qquad (SP')$$
(i koji,očigledno,povlači slabi zakon permutacije antecedenata (WP)).
Ovo sledi iz naredne tri teoreme:

Lema 1.38. U implikativnoj algebri uslov

Ako $c_1\to(a\to(b\to c))=1$ i $c_2\to(a\to b)=1$, onda $c_1\to(c_2\to(a\to(a\to c)))=1$

posledica je (SP) i (WTP) .

Dokaz 1. $c_1\to(a\to(b\to c))=1$ hyp

2. $c_2\to(a\to b)=1$ hyp
3. $c_1\to(b\to(a\to c))=1$ iz 1, (SP)
4. $b\to(c_1\to(a\to c))=1$ iz 3, (WP)
5. $(a\to b)\to(a\to(c_1\to(a\to c)))=1$ iz 4,(WTP)
6. $c_2\to(a\to(c_1\to(a\to c)))=1$ iz 2,5 ,(i_2)
7. $c_2\to(c_1\to(a\to(a\to c)))=1$ iz 6 , (SP)
8. $c_1\to(c_2\to(a\to(a\to c)))=1$ iz 7 , (WP).

Lema 1.39. U implikativnoj algebri uslov (STP') :

$$(b\to c)\to((a\to b)\to(a\to(a\to c))) = 1 \quad \text{(STP')}$$

posledica je (SP) i (WTP).

Dokaz 1. $(b\to c)\to(a\to(b\to c))=1$ (AC) (teorema 1.12.)

2. $(a\to b)\to(a\to b)=1$ (i_1)
3. $(b\to c)\to((a\to b)\to(a\to(a\to c)))=1$ iz 1,2 po lemi 1.38. ($c_1=b\to c, c_2=a\to b$).

Lema 1.40. U implikativnoj algebri (F') je posledica (SP),(WTP) i (C_3).

Dokaz 1. $(b\to c)\to((a\to b)\to(a\to(a\to c)))=1$ (STP') (lema 1.39.)

2. $(a\to(b\to c))\to(a\to((a\to b)\to(a\to(a\to c))))=1$ iz 1,(WTP)
3. $(a\to(b\to c))\to((a\to b)\to(a\to(a\to(a\to c))))=1$ iz 2,(SP)
4. $(a\to(b\to c))\to((a\to b)\to(a\to(a\to c)))=1$ iz 3,(C_3) .

Zakon (F") :

$$(a\to(a\to(b\to c))) \to ((a\to(a\to b))\to(a\to(a\to c))) = 1 \quad \text{(F")} \ ,$$

koji u implikativnoj algebri sledi iz (F'),(WTP) i (C_3) , zajedno sa (SP), povlači ukidanje hijerarhije deduktivnih $Ł_3$ implikativnih algebri.

Teorema 1.41. U implikativnoj algebri (F") je posledica (F'),(WTP) i (C_3) .

Dokaz 1. $(a\to(b\to c)) \to ((a\to b)\to(a\to(a\to c))) = 1$ (F')

2. $(a\to(a\to(b\to c))) \to (a\to((a\to b)\to(a\to(a\to c)))) = 1$ iz 1,(WTP)
3. $[a \to ((a\to b)\to(a\to(a\to c)))] \to$
   $[(a\to(a\to b)) \to (a\to(a\to(a\to(a\to c))))] = 1$ (F')
4. $[a\to(a\to(b\to c))] \to [(a\to(a\to b)) \to (a\to(a\to(a\to(a\to c))))] = 1$ iz 2,3,(i_2)
5. $a\to(a\to(a\to(a\to c))) = a\to(a\to(a\to c)) = a\to(a\to c)$ (C_3)
6. $[a\to(a\to(b\to c))] \to [(a\to(a\to b)) \to (a\to(a\to c))] = 1$ iz 4,5.

Teorema 1.42. U implikativnoj algebri (F_n^3) je posledica (F") i (SP) za sve prirodne brojeve.

Dokaz se izvodi matematičkom indukcijom.

Za n = 1 : 1. $c_1\to(c_1\to(a\to(a\to(b\to c)))) = 1$ hyp

2. $c_1\to(c_1\to(a\to(a\to b))) = 1$ hyp
3. $(a\to(a\to(b\to c))) \to ((a\to(a\to b))\to(a\to(a\to c))) = 1$ (F")
4. $c_1\to(c_1\to((a\to(a\to(b\to c))) \to ((a\to(a\to b))\to(a\to(a\to c)))))=1$ iz 3,(i_4)
5. $c_1\to(c_1\to((a\to(a\to(b\to c))) \to ((a\to(a\to b))\to(a\to(a\to c))))) \to$
   $(c_1\to(c_1\to(a\to(a\to(b\to c))))) \to (c_1\to(c_1\to((a\to(a\to b))\to(a\to(a\to c)))))=1$ (F")

6. $c_1\to(c_1\to(a\to(a\to(b\to c)))) \to (c_1\to(c_1\to((a\to(a\to b))\to(a\to(a\to c)))))=1$ iz 4,5,teorema 1.2.
7. $c_1\to(c_1\to((a\to(a\to b))\to(a\to(a\to c))))=1$ iz 1,6,teorema 1.2.
8. $(c_1\to(c_1\to((a\to(a\to b))\to(a\to(a\to c))))) \to$
$((c_1\to(c_1\to(a\to(a\to b)))) \to (c_1\to(c_1\to(a\to(a\to c))))) = 1$ (F")
9. $(c_1\to(c_1\to(a\to(a\to b)))) \to (c_1\to(c_1\to(a\to(a\to c))))=1$ iz 7,8,teorema 1.2.
10. $c_1\to(c_1\to(a\to(a\to c))) = 1$ iz 2,9,teorema 1.2.

Vidi se da su prve dve formule u prethodnom nizu konjunkti iz antecedenta uslova (F_1^3),a poslednja formula je konsekvent tog uslova.Pored toga, svaka formula ovog niza (osim prve dve) je ili dobijena iz neke dve prethodne primenom

(*) Ako $1\to d=1$, onda $d=1$ (teorema 1.2.) ,

ili je dobijena iz neke prethodne formule niza primenom

(**) Ako $d=1$,onda $x\to(x\to d)=1$ (primena (i_4)) ,

ili je formula (F").

Pretpostavimo sada da je niz formula

$$f_1=1,\ f_2=1,\dots,f_m=1$$

dokaz za (F_n^3), gde je:

$$f_1=c_n\to(c_n\to(\dots\to(c_1\to(c_1\to(a\to(a\to c))))\dots))=1\ ,$$
$$f_2=c_n\to(c_n\to(\dots\to(c_1\to(c_1\to(a\to b)))\dots))=1\ ,$$
$$\dots$$
$$f_m=c_n\to(c_n\to(\dots\to(c_1\to(c_1\to(a\to c)))\dots))=1$$

i svaka formula u nizu je ili (F") ili je dobijena iz nekih prethodnih formula niza primenom (*), ili je dobijena iz neke prethodne formule niza primenom (**), ili je dobijena iz neke prethodne formule niza primenom (SP).

Formirajmo niz formula:

$$c_{n+1}\to(c_{n+1}\to f_1) = 1\ ,$$
$$c_{n+1}\to(c_{n+1}\to f_2) = 1\ ,$$
$$\dots$$
$$c_{n+1}\to(c_{n+1}\to f_m) = 1$$

i pokažimo kako se umetanjem konačnog broja novih formula može konstruisati dokaz za (F_{n+1}^3) u kome se koriste ista pravila zaključivanja.

Očigledno je da su $c_{n+1}\to(c_{n+1}\to f_1) = 1$ i $c_{n+1}\to(c_{n+1}\to f_2) = 1$ konjunkti iz antecedenta uslova (F_{n+1}^3) , a $c_{n+1}\to(c_{n+1}\to f_m) = 1$ je konsekvent tog uslova.

Razmotrimo formulu $c_{n+1}\to(c_{n+1}\to f_i) = 1$, $2<i<m$ i pretpostavimo da je niz upotpunjen zaključno sa $c_{n+1}\to(c_{n+1}\to f_{i-1}) = 1$. Mogu nastupiti sledeći slučajevi:

1) $f_i=1$ je (F").Tada $c_{n+1}\to(c_{n+1}\to f_i) = 1$ sledi iz $f_i=1$ po (**) i tu formulu treba umetnuti ispred $c_{n+1}\to(c_{n+1}\to f_i) = 1$.

2) Ako je $f_i=1$ dobijeno iz neke formule $f_j=1$ $(j<i)$ primenom (**) , tada je $f_i=d\to(d\to f_j)$ i postoji dokaz za $c_{n+1}\to(c_{n+1}\to f_j) = 1$. Umetanjem formule $d\to(d\to(c_{n+1}\to(c_{n+1}\to f_j)))=1$, koja inače sledi iz $c_{n+1}\to(c_{n+1}\to f_j)=1$ po (**) i iz koje po (SP) sledi $c_{n+1}\to(c_{n+1}\to(d\to(d\to f_j))) = c_{n+1}\to(c_{n+1}\to f_i) = 1$, dobijen je dokaz za $c_{n+1}\to(c_{n+1}\to f_i) = 1$.

3) Ako $f_i=1$ sledi iz $f_j=1$ i $f_k=f_j\to f_i=1$ $(j,k<i)$ po (*) i postoje dokazi za $c_{n+1}\to(c_{n+1}\to f_j)=1$ i $c_{n+1}\to(c_{n+1}\to f_k)=c_{n+1}\to(c_{n+1}\to(f_j\to f_i))=1$, onda se umetanjem formula:
$(c_{n+1}\to(c_{n+1}\to(f_j\to f_i))) \to ((c_{n+1}\to(c_{n+1}\to f_j))\to(c_{n+1}\to(c_{n+1}\to f_i))) = 1$ (F")
i

$(c_{n+1}\to(c_{n+1}\to f_j)) \to (c_{n+1}\to(c_{n+1}\to f_i)) = 1$
dobija dokaz za $c_{n+1}\to(c_{n+1}\to f_i)=1$.
4) Najzad,ako je $f_i=1$ dobijena iz formule $f_j=1$ $(j<i)$ primenom (SP) , onda se i $c_{n+1}\to(c_{n+1}\to f_i)=1$ dobija primenom (SP) iz formule $c_{n+1}\to(c_{n+1}\to f_j)=1$ za koju postoji dokaz.

Prema tome , u implikativnoj algebri (F_n^3) , $n\geq 0$ sledi iz (SP) , (WTP) i (C_3) (teorema 1.42. i 1.23.).

Videli smo da jaki zakon permutacije antecedenata (SP) poništava hijerarhiju n-deduktivnih $Ł_3$ implikativnih algebri $(n\geq 1)$.S druge strane,njegova posledica ,slabi zakon permutacije antecedenata (WP),nedovoljan je za izvodjenje nekih stavova o implikativnim filtrima u 1-deduktivnim $Ł_3$ implikativnim algebrama. Zbog toga se u 1-deduktivnim $Ł_3$ implikativnim algebrama prirodno nameće još jedan oblik slabog zakona permutacije antecedenata :

Ako $a\to(a\to(b\to c))=1$, onda $b\to(a\to(a\to c))=1$ (WP") ,

koji je,ipak , slabiji od (SP).
Značajno je da u implikativnoj algebri zakon (WP") , zajedno sa (WTP),(F_1^3) i (AC) , povlači (WDP):

Ako $a\to(a\to(b\to(b\to c))) = 1$, onda $b\to(b\to(a\to(a\to c))) = 1$ (WDP).

Teorema 1.43. U 1-deduktivnoj $Ł_3$ implikativnoj algebri iz (WP") sledi (WDP).
Dokaz 1. $a\to(a\to(b\to(b\to c))) = 1$ hyp
2. $b\to(a\to(a\to(b\to c))) = 1$ iz 1.(WP")
3. $b\to(b\to(a\to(a\to(b\to c)))) = 1$
4. $b\to(b\to(a\to(a\to b))) = 1$ teorema 1.26.
5. $b\to(b\to(a\to(a\to c))) = 1$ iz 3.4 (F_1^3).

Zanimljivo je da je zakon

$(a\to(a\to(b\to c)) \to (b\to(a\to(a\to c))) = 1$ (SP")

(koji predstavlja jaku verziju (WP")) posledica (F") i (WP) u implikativnoj algebri.

Teorema 1.44. U implikativnoj algebri (F") i (WP) povlače (SP").
Dokaz 1.
1. $(a\to(a\to(b\to c))) \to ((a\to(a\to b))\to(a\to(a\to c))) = 1$ (F")
2. $a\to(a\to b) \leq (a\to(a\to(b\to c))\to(a\to(a\to c))$ iz 1,(AC),definicija 1.6.
3. $b \leq a\to b \leq a\to(a\to b)$ (AC),definicija 1.6.
4. $b \leq (a\to(a\to(b\to c))\to(a\to(a\to c))$ iz 2,3
5. $a\to(a\to(b\to c)) \leq b\to(a\to(a\to c))$ iz 4,(AC)
6. $(a\to(a\to(b\to c)) \to (b\to(a\to(a\to c))) = 1$ iz 5,definicija 1.6.

Inače u 1-deduktivnoj $Ł_3$ implikativnoj algebri, u kojoj važi (WP), važi i jedan oblik slabijeg zakona permutacije antecedenata :

Ako $a\to(b\to c) = 1$, onda $b\to(a\to(a\to c)) = 1$ (WP').

Teorema 1.45. U implikativnoj algebri (WP) i (WTP) povlače (WP').
Dokaz 1. $a\to(b\to c) = 1$ hyp
2. $(a\to b) \to (a\to(a\to c)) = 1$ iz 1.teorema 1.33.
3. $(b\to(a\to b)) \to (b\to(a\to(a\to c))) = 1$ iz 2,(WTP)

4. $b\to(a\to b) = 1$ (AC)
5. $b\to(a\to(a\to c)) = 1$ iz 3,4 ,teorema 1.2.

Očigledno u implikativnoj algebri (WP') je posledica (WP"):

Teorema 1.46. U implikativnoj algebri (WP') sledi iz (WP").
Dokaz 1. $a\to(b\to c) = 1$ hyp
2. $a\to(a\to(b\to c)) = 1$ iz 1,(i_4)
3. $b\to(a\to(a\to c)) = 1$ iz 2,(WP").

Navedimo još tri posledice (WP) u 1-deduktivnoj $Ł_3$ implikativnoj algebri.

Teorema 1.47. Ako $b\to(a\to(b\to c))=1$, onda $b\to(b\to(a\to(a\to c)))=1$ (WP''').
Dokaz sledi neposredno iz (F_{11}') (teorema 1.35.) za $c_1=b$,jer je tada $b\to(a\to b)=1$ zbog (AC).

Posledica 1.48. Ako $b\to(a\to(b\to(a\to c)))=1$, onda $b\to(b\to(a\to(a\to c)))=1$ (WDP').
Dokaz 1. $b\to(a\to(b\to(a\to c)))=1$ hyp
2. $b\to(b\to(a\to(a\to(a\to c))))=1$ iz 1,teorema 1.47. (za $c=a\to c$)
3. $b\to(b\to(a\to(a\to c)) = 1$ iz 2,(C_3).

Posledica 1.49. Ako $a\to(b\to(b\to(a\to c)))=1$, onda $b\to(b\to(a\to(a\to c)))=1$ (WDP").
Dokaz sledi neposredno iz posledice 1.48. primenom (WP).
Primetimo da se jednostavno iz (WP"), zamenom c sa $b\to c$,dobija obrat zakona (WDP"):

Ako $a\to(a\to(b\to(b\to c)))=1$, onda $b\to(a\to(a\to(b\to c)))=1$,

odakle se primenom (WP) dobija i obrat zakona (WDP'):

Ako $a\to(a\to(b\to(b\to c)))=1$, onda $a\to(b\to(a\to(b\to c)))=1$.

Posledica prethodnih razmatranja je sledeća teorema:

Teorema 1.50. Sledeće ekvivalencije su posledice (WP) i (WP") u 1-deduktivnim $Ł_3$ implikativnim algebrama:

$a\to(a\to(b\to(b\to c)))=1$ ako i samo ako $b\to(b\to(a\to(a\to c)))=1$
ako i samo ako $a\to(b\to(a\to(b\to c)))=1$
ako i samo ako $b\to(a\to(b\to(a\to c)))=1$
ako i samo ako $a\to(b\to(b\to(a\to c)))=1$
ako i samo ako $b\to(a\to(a\to(b\to c)))=1$.

Značajno je da oba zakona jake tranzitivnosti prefiksiranja i sufiksiranja (STP) i (STS):

$$(b\to c) \to ((a\to b)\to(a\to c)) = 1 \quad \text{(STP)},$$
$$(a\to b) \to ((b\to c)\to(a\to c)) = 1 \quad \text{(STS)}$$

slede, u implikativnoj algebri,iz (SP) i (WTP).

Lema 1.51. U implikativnoj algebri, u kojoj važi (SP) i (WTP), važi i

ako $c_1\to(b\to c)=1$ i $c_2\to(a\to b)=1$, onda $c_1\to(c_2\to(a\to b))=1$.

Dokaz 1. $c_1\to(b\to c)=1$ hyp
2. $c_2\to(a\to b)=1$ hyp
3. $b\to(c_1\to c)=1$ iz 1,(WP)
4. $(a\to b)\to(a\to(c_1\to c))=1$,iz 3,(WTP)

5. $c_2\to(a\to(c_1\to c))=1$,iz 2,4,(i_2)
6. $c_2\to(c_1\to(a\to c))=1$,iz 5,(SP)
7. $c_1\to(c_2\to(a\to c))=1$,iz 6,(WP).

Posledica 1.52. U implikativnoj algebri,u kojoj važe (SP) i (WTP),važe i zakoni (STP) i (STS).
Dokaz. Iz leme 1.51. za $c_1=b\to c$ i $c_2=a\to b$ dobija se (STP),dok se (STS) dobija neposredno iz (STP) i (WP).

Uz ovo videli smo da je u implikativnoj algebri zakon (F') posledica (SP),(WTP) i (C_3) (lema 1.40),odnosno da je zakon (F") posledica (F'),(WTP) i (C_3) (teorema 1.41).Pored toga, u implikativnoj algebri svi zakoni (F_n^3) (n=0,1,2,..) posledica su (F") i (SP) (teorema 1.42),što znači da su u implikativnoj algebri zakoni (F_n^3) (n=0,1,2,...) posledice (SP),(WTP) i (C_3).Prema tome,važi sledeća teorema:

Teorema 1.53. Konačno deduktivna $Ł_3$ implikativna algebra u kojoj važi (SP) ima sledeće aksiome:

1) $a\to a = 1$ (i_1) ,
2) $1\to a = a$,
3) $a\to(b\to a) = 1$ **(AC)**,
4) $(a\to b)\to((b\to c)\to(a\to c)) = 1$ **(STS)** ,
5) $(a\to(b\to c))\to(b\to(a\to c)) = 1$ **(SP')** ,
6) $(a\to(a\to(a\to b)))\to(a\to(a\to b)) = 1$ (C_3) ,
7) Ako $a\to b=1$ i $b\to a=1$, onda $a=b$ (i_3) ,
8) $a\to 1 = 1$ (i_4) .

Ograničena konačna deduktivna $Ł_3$ implikativna algebra ima još i aksiomu
9) $0\to a = 1$ **za neki element 0 iz A** .

Ovde je,očigledno , aksioma 3) posledica aksioma 1),5),7) i 8). Značajno je da su konačno deduktivne $Ł_3$ implikativne algebre jednakosno definabilne,što je posledica naredne teoreme:

Lema 1.54. U konačno deduktivnoj $Ł_3$ implikativnoj algebri važi zakon
$(a\to b)\to[(a\to b)\to((b\to a)\to((b\to a)\to b))] = (b\to a)\to[(b\to a)\to((a\to b)\to((a\to b)\to a))]$.
Obratno, aksioma 7) je posledica prethodne jednakosti.Prema tome, konačno deduktivne $Ł_3$ implikativne algebre su varijetet jer se aksioma 7) može zameniti jednakošću.
Dokaz.Najpre dokazujemo da je pomenuta jednakost posledica aksioma 1)-8): 1. $b\to a \le b\to a$ (i_1)
2. $b \le (b\to a)\to a$ iz 1,(WP)
3. $(b\to a)\to b \le (b\to a)\to((b\to a)\to a)$ iz 2,(WTP)
4. $(b\to a)\to((b\to a)\to b) \le (b\to a)\to((b\to a)\to((b\to a)\to a))$ iz 3,(WTP)
5. $(b\to a)\to((b\to a)\to b) \le (b\to a)\to((b\to a)\to a)$ (C_3)
6. $(a\to b)\to((b\to a)\to((b\to a)\to b)) \le (a\to b)\to((b\to a)\to((b\to a)\to a))$ iz 4,5,(WTP)
7. $(a\to b)\to[(a\to b)\to((b\to a)\to((b\to a)\to b))] \le (a\to b)\to[(a\to b)\to((b\to a)\to((b\to a)\to a))]$ iz 6,(WTP)
8. $(a\to b)\to[(a\to b)\to((b\to a)\to((b\to a)\to a))] = (b\to a)\to[(b\to a)\to((a\to b)\to((a\to b)\to a))]$ po (SP)
9. $(a\to b)\to[(a\to b)\to((b\to a)\to((b\to a)\to b))] \le (b\to a)\to[(b\to a)\to((a\to b)\to((a\to b)\to a))]$ iz 7,8.

Jasno je da ,zbog simetrije,važi
$$(a\to b)\to[(a\to b)\to((b\to a)\to((b\to a)\to b))] = (b\to a)\to[(b\to a)\to((a\to b)\to((a\to b)\to a))].$$

Da je aksioma 7) posledica ove jednakosti vidi se neposredno. Naime, ako je $a \to b = 1$ i $b \to a = 1$,zbog $1 \to x = x$,važiće $a = b$.

Ostaje otvoreno da li je aksiomama 1)-8) okarakterisan implikativni fragment Łukasiewiczevog trovalentnog iskaznog računa,odnosno na pr. nije jasno da li je uopštenje Peirceovog zakona $(a \to (a \to b)) \to a) \to a = 1$,koje važi u Łukasiewiczevoj $Ł_3$ implikativnoj algebri posledica navedenih aksioma konačno deduktivne $Ł_3$ implikativne algebre.

II Implikativni filtri u $Ł_3$ deduktivnim implikativnim algebrama

U ovom poglavlju razmatraju se implikativni filtri u kontekstu $Ł_3$ deduktivnih implikativnih algebri i njihove veze sa homomorfizmima i kongruencijama tih algebri.Poznati rezultati A.Diega , A.Monteira i H.Rasiowe ,kao i neki rezultati iz [19],uopšteni su i dokazana je po neka analogna karakterizacija.Inače,glavne primene implikativnih filtara u deduktivnim implikativnim algebrama su u algebarskim dokazima teoreme dedukcije za implikativne fragmente čiji su modeli te algebre,kao i u nekim stavovima o kongruencijama i homomorfizmima.

Definicija 2.1. Skup F elemenata implikativne algebre $\langle A,1,\to\rangle$ naziva se implikativni filtar te algebre ako i samo ako ispunjava uslove:

(f_1) $1 \in F$.

(f_2) Ako $a \in F$ i $a\to b \in F$,onda $b \in F$.

Ni u implikativnoj algebri,ni u slabo deduktivnoj $Ł_3$ implikativnoj algebri skup K(a) svih elemenata koji su veći il jednaki nekom fiksiranom elementu a te algebre (gornji konusi elementa a) ne mora biti implikativni filtar.Zapravo, potreban i dovoljan uslov da u impikativnoj algebri K(a) bude implikativni filtar za svako a je važenje već spomenutog uslova (F_0^2) :

$$\text{Ako } a\to(b\to c)=1 \text{ i } a\to b=1 \text{ ,onda } a\to c=1 \text{ ,}$$

koji je prejak za $Ł_3$ deduktivne implikativne algebre (v. komentar pre definicije 1.8).Ispostavlja se da je (F_0^3) potreban i dovoljan uslov da izvesni nadskupovi gornjih konusa budu implikativni filtri.

Definicija 2.2. Neka je $\langle A,1,\to\rangle$ implikativna algebra.Tada je

$K(a) = \{ x\in A : a \le x \}$ - gornji konus elementa a,

$F(a) = \{ x\in A : a\to(a\to x) = 1 \}$.

Teorema 2.3. Za sve elemente a implikativne algebre $\langle A,1,\to\rangle$ važi

$$K(a) \subseteq F(a).$$

Dokaz 1. $x \in K(a)$ hyp

2. $a \le x$ iz 1,definicija 2.2.

3. $a\to x = 1$ iz 2.

4. $a\to(a\to x) = 1$ iz 3,(i_4)

5. $x \in F(a)$ iz 4,definicija 2.2.

Lema 2.4. Za sve elemente a implikativne algebre $\langle A,1,\to\rangle$ važi $a \in F(a)$.

Dokaz 1. $a\to a = 1$ (i_1)

2. $a\to(a\to a) = 1$ iz 1,(i_4)

3. $a \in F(a)$ iz 2,definicija 2.2.

Lema 2.5. U slabo deduktivnoj $Ł_3$ implikativnoj algebri $\langle A,1,\to\rangle$ skup $F(a) = \{ x\in A : a\to(a\to x) = 1 \}$ je za svako $a\in A$ implikativni filtar.

Dokaz 2.5.1. Dokazaćemo prvo: $1 \in F(a)$ (f_1)

1. $a\to 1 = 1$ (i_4)

2. $a\to(a\to 1) = 1$ iz 1,(i_4)
3. $1 \in F(a)$ iz 2,definicija 2.2.

2.5.2. Sada dokažimo da:

ako $b\in F(a)$ i $b\to c\in F(a)$,onda $c\in F(a)$ (f_2)

1. $b \in F(a)$ hyp
2. $b\to c \in F(a)$ hyp
3. $a\to(a\to b) = 1$ iz 1,definicija 2.2.
4. $a\to(a\to(b\to c)) = 1$ iz 2,definicija 2.2.
5. $a\to(a\to c) = 1$ iz 3,4,(F_0^3).

Lema 2.6. Neka je F implikativni filtar u implikativnoj algebri $\langle A,1,\to\rangle$ .Tada $a \in F$ ako i samo ako $F(a) \subseteq F$.

Dokaz. Pretpostavimo prvo da $a\in F$.

1. $a \in F$ hyp
2. F je implikativni filtar hyp
3. $b \in F(a)$ hyp
4. $a\to(a\to b) = 1 \in F$ iz 3,2,definicija 2.2.
5. $a\to b \in F$ iz 1,4,2.
6. $b \in F$ iz 1,5,2.

Neka je sada $F(a)\subseteq F$.

1. $F(a)\subseteq F$ hyp
2. $a\in F(a)$ lema 2.3.
3. $a\in F$ iz 1,2.

Posledica 2.7. U slabo deduktivnoj $Ł_3$ implikativnoj algebri $F(a)$ je najmanji implikativni filtar koji sadrži element a te algebre. Za $F(a)$ se kaže da je glavni implikativni filtar generisan elementom a . Važi i obrat ovog tvrdjenja.

Teorema 2.8. Ako je za svako $a \in A$, $F(a)$ implikativni filtar implikativne algebre $\langle A,1,\to\rangle$,onda u toj algebri važi (F_0^3).
Dokaz.Kako iz $b\in F(a)$ i $b\to c\in F(a)$ sledi $c\in F(a)$,to po definiciji 2.2. važi da $a\to(a\to b)=1$ i $a\to(a\to(b\to c))=1$ povlači $a\to(a\to c)=1$,a to je upravo (F_0^3).

Prema tome u implikativnoj algebri $\langle A,1,\to\rangle$ skup $F(a) = \{x\in A:a\to(a\to x)=1\}$ je ,za svako $a\in A$, implikativni filtar ako i samo ako je $\langle A,1,\to\rangle$ implikativna algebra u kojoj važi (F_0^3).

Konstatujmo sada jednu očiglednu činjenicu:

Teorema 2.9. Presek proizvoljne neprazne klase implikativnih filtara u implikativnoj algebri je implikativni filtar u toj algebri.

Prethodna teorema omogućuje definiciju implikativnog filtra generisanog nekim skupom elemenata implikativne algebre.

Definicija 2.10. Ako je A_0 skup elemenata implikativne algebre $\langle A,1,\to\rangle$, onda se presek svih implikativnih filtara koji sadrže skup A_0 naziva implikativnim filtrom generisanim skupom A_0 i označava sa $F(A_0)$.

Očigledno, u implikativnoj algebri $F(A_0)$ je najmanji implikativni filtar koji sadrži skup A_0. Takodje je jasno da je u implikativnoj algebri $F(\emptyset)$ upravo singlton $\{1\}$. Uz to, u slabo deduktivnoj $Ł_3$ implikativnoj algebri važi $F(\{a\}) = F(a)$. Pored toga očigledno je da važi:

Teorema 2.11. Klasa Φ_A svih implikativnih filtara implikativne algebre $\langle A,1,\rightarrow\rangle$ je potpuna mreža u kojoj je $\{1\}$ najmanji, a A najveći element. U toj mreži, infimum proizvoljne klase implikativnih filtara je (skupovni) presek te klase, dok se supremum klase $\{F_j : j\in J\}$ implikativnih filtara implikativne algebre definiše kao implikativni filtar generisan unijom te klase:

$$\bigvee\{F_j : j\in J\} = F(\cup\{F_j : j\in J\}).$$

U slučaju dvočlane klase $\{F_1,F_2\}$ implikativnih filtara, koristićemo uobičajenu infiksnu notaciju:

$$F_1 \vee F_2 = \bigvee\{F_1,F_2\} = F(F_1 \cup F_2).$$

Potpuna mreža svih implikativnih filtara implikativne algebre $\langle A,1,\rightarrow\rangle$ je, dakle, algebarska struktura $\langle \Phi_A, \bigcap, \bigvee, \{1\}, A\rangle$.
Dokaz je trivijalan i izostavljen je.

Naredne definicije i stavovi u vezi su sa algebarskim analogonima teoreme dedukcije u deduktivnim $Ł_3$ implikativnim algebrama (2.12-2.19).

Definicija 2.12. U implikativnoj algebri

$$F(a,c) = \{\ x\in A:\ a\rightarrow(a\rightarrow x) \in F(c)\ \}$$
$$= \{\ x\in A:\ c\rightarrow(c\rightarrow(a\rightarrow(a\rightarrow x))) = 1\ \}.$$

Lema 2.13. $F(a,c)$ je implikativni filtar u 1-deduktivnoj $Ł_3$ implikativnoj algebri $\langle A,1,\rightarrow\rangle$.
Dokaz 2.13.1. Dokažimo prvo da $1 \in F(a,c)$ (f_1).

Po (i_4) imamo $c\rightarrow(c\rightarrow(a\rightarrow(a\rightarrow 1)))=c\rightarrow(c\rightarrow(a\rightarrow 1))=c\rightarrow(c\rightarrow 1)=c\rightarrow 1=1$, pa po definiciji 2.12 $1\in F(a)$.
Sada dokazujemo:
2.13.2. Ako $x\in F(a,c)$ i $x\rightarrow y\in F(a,c)$, tada $y\in F(a,c)$ (f_2).

1. $x \in F(a,c)$ hyp
2. $x\rightarrow y \in F(a,c)$ hyp
3. $c\rightarrow(c\rightarrow(a\rightarrow(a\rightarrow x))) = 1$ .iz 1, definicija 2.12.
4. $c\rightarrow(c\rightarrow(a\rightarrow(a\rightarrow(x\rightarrow y)))) = 1$,iz 2, definicija 2.12.
5. $c\rightarrow(c\rightarrow(a\rightarrow(a\rightarrow y))) = 1$ .iz 3,4 ,primenom (F_1^3)
6. $y \in F(a,c)$ iz 5, definicija 2.12.

Lema 2.14. Za svaki element a implikativne algebre $\langle A,1,\rightarrow\rangle$ važi

$$a \in F(a,c).$$

Dokaz 1. $a\rightarrow a = 1$ (i_1)
2. $a\rightarrow(a\rightarrow a) = 1$ iz 1, (i_4)
3. $c\rightarrow(a\rightarrow(a\rightarrow a)) = 1$ iz 2, (i_4)
4. $c\rightarrow(c\rightarrow(a\rightarrow(a\rightarrow a))) = 1$ iz 3, (i_4)
5. $a \in F(a,c)$ iz 4, definicija 2.12.

Lema 2.15. Za svaki element c 1-deduktivne implikativne algebre $\langle A,1,\rightarrow\rangle$ važi $c \in F(a,c)$.
Dokaz 1. $c\rightarrow(a\rightarrow c) = 1$ (AC)

2. $(a\to c)\to(a\to(a\to c)) = 1$ iz 1,(WTP)
3. $c\to(a\to c) \to (c\to(a\to(a\to c))) = 1$ iz 2,(WTP)
4. $c\to(a\to(a\to c)) = 1$ iz 1,3 ,teorema 1.2.
5. $c\to(c\to(a\to(a\to c))) = 1$ iz 4,(i_4)
6. $c \in F(a,c)$ iz 5,definicija 4.

Lema 2.16. U 1-deduktivnoj $Ł_3$ implikativnoj algebri $F(a,c)$ je najmanji implikativni filtar koji sadrži elemente a i c ,tj. ako je F implikativni filtar u 1-deduktivnoj implikativnoj algebri $\langle A,1,\to\rangle$ i $a\in F$ i $c\in F$,tada je $F(a,c) \subseteq F$.

Dokaz 1. $a\in F$, $c\in F$ hyp
2. F je implikativni filtar hyp
3. $b \in F(a,c)$ hyp
4. $c\to(c\to(a\to(a\to b))) = 1 \in F$ iz 3,2,(f_1)
5. $c\to(a\to(a\to b)) \in F$ iz 1,2,4 ,po (f_2)
6. $a\to(a\to b) \in F$ iz 1,2,5 ,po (f_2)
7. $a\to b \in F$ iz 1,2,6 ,po (f_2)
8. $b \in F$ 1,2,7 ,po (f_2).

Teorema 2.17. Za sve elemente 1-deduktivne $Ł_3$ implikativne algebre važi:

2.17.1. $F(c) \subseteq F(a,c)$;
2.17.2. $F(a) \subseteq F(a,c)$;
2.17.3. $F(F(a)\cup F(c)) = F(\{a,c\}) = F(a) \vee F(c) \subseteq F(a,c)$;
2.17.4. $F(a,c) = F(a) \vee F(c) = F(c,a)$ ako i samo ako važi (WDP).

Napomena. Očigledno je da jednakosti u 2.17.3 :$F(F(a)\cup F(c)) = F(\{a,c\}) = F(a) \vee F(c)$ važe već u slabo deduktivnoj $Ł_3$ implikativnoj algebri.

Dokaz. 2.17.1 i 2.17.2 sledi iz lema 2.6,2.15,2.14 i 2.13.

2.17.3 sledi iz teoreme 2.5 i iz 2.17.1 i 2.17.2.

2.17.4 Da je $F(a,c) = F(a) \vee F(c)$ sledi iz 2.17.3 i leme 2.16. Takodje, imamo $x\in F(a,c)$ ako i samo ako $c\to(c\to(a\to(a\to x)))=1$ ako i samo ako (po WDP) $a\to(a\to(c\to(c\to x)))=1$ ako i samo ako $x\in F(a,c)$.

Teorema 2.18. Ako u slabo deduktivnoj $Ł_3$ implikativnoj algebri $\langle A,1,\to\rangle$ važi $F(a,c) = F(a) \vee F(c)$, onda u toj algebri važe (F_1^3),(WDP), kao i (AC'):

$$c\to(c\to(a\to(a\to c))) = 1 \quad (AC') .$$

Dokaz. Najpre dokazujemo da važi (F_1^3):
1. $c_1\to(c_1\to(a\to(a\to(b\to c)))) = 1$ hyp
2. $c_1\to(c_1\to(a\to(a\to b)) = 1$ hyp
3. $b\to c \in F(a,c_1)$ iz 1
4. $b \in F(a,c_1)$ iz 2
5. $c \in F(a,c_1)$ iz 3,4 ,(f_2)
6. $c_1\to(c_1\to(a\to(a\to c)) = 1$ iz 5.

Da važi (WDP) zaključujemo na sledeći način:
Zbog $F(a,c) = F(a) \vee F(c) = F(c) \vee F(a) = F(c,a)$ imamo da $x\in F(a,c)$ ako i samo ako $x\in F(c,a)$,pa je po definiciji 2.12 $c\to(c\to(a\to(a\to x)))=1$ ako i samo ako $a\to(a\to(c\to(c\to x)))$ $= 1$.

Na kraju dokazujemo da važi (AC'):

Kako $c \in F(c)$,to $c \in F(a,c)$,pa po definiciji 2.12 imamo
$c \to (c \to (a \to (a \to c))) = 1$.

Teoreme 2.19. i 2.20. su analogoni Diegovih teorema [7] za pozitivne implikativne algebre.

Teorema 2.19. Ako je , u implikativnoj algebri $\langle A,1,\to\rangle$ ispunjen bilo koji od uslova :

$$(a\to(a\to(b\to c))) \to ((a\to(a\to b))\to(a\to(a\to c))) = 1 \quad (F'') \text{ ili}$$
$$(a\to(a\to b)) \to ((a\to(a\to(b\to c)))\to(a\to(a\to c))) = 1 \quad (F''')$$

onda, za svaki implikativni filtar F_0 u $\langle A,1,\to\rangle$ i za svako $a \in A$,
skup $F(a,F_0) = \{x \in A : a\to(a\to x) \in F_0\}$ je implikativni filtar.
Ako, uz to u implikativnoj algebri važi i (AC), onda je $F(a,F_0)$ implikativni filtar generisan skupom $\{a\} \cup F_0$,tj.

$$F(a,F_0) = \{x \in A : a\to(a\to x) \in F_0\} = F(\{a\} \cup F_0) = F(a) \vee F_0 \ (*) .$$

Otuda,jednakost (*) važi u konačno deduktivnoj $Ł_3$ implikativnoj algebri u kojoj važi (SP), dakle i u Łukasiewiczevoj $Ł_3$ implikativnoj algebri $Ł_3$IA.Inače, u implikativnoj algebri zakoni (F'') i (F''') su posledice (F'),(WTP) i (C_3), odnosno posledice (SP),(WTP) i (C_3) (teorema 1.40 i 1.41.).

Dokaz teoreme 2.19. (1) Dokažimo najpre da $1 \in F(a,F_0)$:
1. $a\to(a\to 1) = 1 \in F_0$ $(i_4),(f_1)$
2. $1 \in F(a,F_0)$ iz 1.

(2) Dokažimo sada da ako $b \in F(a,F_0)$ i $b\to c \in F(a,F_0)$, onda $c \in F(a,F_0)$.
1. $b \in F(a,F_0)$ hyp
2. $b\to c \in F(a,F_0)$ hyp
3. $a\to(a\to b) \in F_0$ iz1
4. $a\to(a\to(b\to c)) \in F_0$ iz2
5. $a\to(a\to c) \in F_0$ iz 3,4,(F'') ili (F'''),(f_1),$f_2)$
5. $c \in F(a,F_0)$ iz 5.

Iz (1) i (2) sledi da je $F(a,F_0)$ implikativni filtar.

(3) Sada dokazujemo da $a \in F(a,F_0)$.
1. $a\to(a\to a) = 1 \in F_0$ $(i_4),(f_1)$
2. $a \in F(a,F_0)$ iz 1.

(4) Dokazujemo da ako $b \in F_0$,onda $b \in F(a,F_0)$.
1. $b \in F_0$ hyp
2. $b\to(a\to b) = 1 \in F_0$ (AC),(f_1)
3. $a\to b \in F_0$ iz 1,2,(f_2)
4. $(a\to b)\to(a\to(a\to b)) = 1 \in F_0$ (AC),(f_1)
5. $a\to(a\to b) \in F_0$ iz 3,4,(f_2)
6. $b \in F(a,F_0)$ iz 5.

Iz (4) sledi da je $F_0 \subseteq F(a,F_0)$.

(5) Na kraju dokazujemo da ako je F' implikativni filtar takav da je $F_0 \subseteq F'$ i $a \in F'$, tada iz $b \in F(a,F_0)$ sledi $b \in F'$.
1. $b \in F(a,F_0)$ hyp
2. $a\to(a\to b) \in F_0 \subseteq F'$ iz 1
3. $a \in F'$ hyp
4. $a\to b \in F'$ iz 2,3,(f_2)

5. $b \in F'$ iz 3,4,(f_2).
Iz (5) dobijamo $F(a,F_0) \subseteq F'$,dakle $F(a,F_0)$ je najmanji implikativni filtar koji sadrži a i F_0 i zato važi $F(a,F_0) = F(a) \vee F_0$.

Teorema 2.20. Neka je $\langle A,1,\to\rangle$ konačno deduktivna $Ł_3$ implikativna algebra u kojoj važi (SP) , dakle i neka je A_0 neprazni podskup skupa A . Ako je $F(A_0)$ implikativni filtar generisan skupom A_0 tada važi
$F(A_0)=\{x\in A:(\exists c_1,\ldots c_n\in A_0)\ c_n\to(c_n\to(\ldots\to(c_1\to(c_1\to x))\ldots)) = 1\}$.

Dokaz. Neka je
$F_0 = \{x\in A:(\exists c_1,\ldots c_n\in A_0)\ c_n\to(c_n\to(\ldots\to(c_1\to(c_1\to x))\ldots)) = 1\}$.
Dokažimo najpre da (1) $1 \in F_0$.
1. $A_0 \neq \emptyset$ hyp
2. $\exists c_1 \in A_0$ iz 1
3. $c_1\to(c_1\to 1) = 1$ (i_4)
4. $1 \in F_0$ iz 3.
Dokažimo sada da
(2) Ako $a\in F_0$ i $a\to b\in F_0$, onda $b\in F_0$.
1. $\exists a_1,\ldots,a_n\in A_0$ $a_n\to(a_n\to(\ldots\to(a_1\to(a_1\to a))\ldots)) = 1$ hyp
2. $\exists b_1,\ldots,b_m\in A_0$ $b_m\to(b_m\to(\ldots\to(b_1\to(b_1\to(a\to b)))\ldots)) = 1$ hyp
3. $a_n\to(a_n\to(\ldots\to(a_1\to(a_1\to(b_m\to(b_m\to(\ldots\to(b_1\to(b_1\to(b_1\to(a\to b))))\ldots)))))\ldots))=1$
iz 2,teorema 1.2,(C_3)
4. $a_n\to(a_n\to(\ldots\to(a_1\to(a_1\to(b_m\to(b_m\to(\ldots\to(b_1\to(b_1\to(b_1\to a)))\ldots)))))\ldots))=1$
iz 1,teorema 1.2,(C_3),(SP)
5. $a_n\to(a_n\to(\ldots\to(a_1\to(a_1\to(b_m\to(b_m\to(\ldots\to(b_1\to(b_1\to(b_1\to b)))\ldots)))))\ldots))=1$
iz 3,4,(F_{n+m})
6. $a_n\to(a_n\to(\ldots\to(a_1\to(a_1\to(b_m\to(b_m\to(\ldots\to(b_1\to(b_1\to b))\ldots)))))\ldots))=1$
iz 5,(C_3)
7. $\exists a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_m \in A_0$
$a_n\to(a_n\to(\ldots\to(a_1\to(a_1\to(b_m\to(b_m\to(\ldots\to(b_1\to(b_1\to b)))\ldots)))))\ldots))=1$ iz 1,2,6
8. $b\in F_0$ iz 7.
Iz (1) i (2) zaključujemo da je F_0 implikativni filtar.
Očigledno je (3) $A_0 \subseteq F_0$ zbog (i_1).
Neka je F implikativni filtar koji sadrži A_0 . Dokažimo :
(4) Ako $a \in F_0$, onda $a \in F$.
1. $\exists a_1,\ldots,a_n\in A_0$ $a_n\to(a_n\to(\ldots\to(a_1\to(a_1\to a))\ldots))=1 \in F$ hyp,(f_1)
2. $a_n,a_{n-1},\ldots,a_2,a_1 \in A_0 \subseteq F$ hyp
3. $a \in F$ iz 1,2,(f_2).
Dakle, $F_0 \subseteq F$.
Iz (1),(2),(3) i (4) dobijamo da je F_0 najmanji implikativni filtar koji sadrži A_0.

Stavovi i definicije do kraja ovog poglavlja odnose se na relacije kongruencije u implikativnim algebrama, homomorfna preslikavanja implikativnih algebri, kao i njihove veze sa implikativnim filtrima.Izlaganje je uglavnom prema [19].

Ako je $\sim$ relacija ekvivalencije skupa A , klasu ekvivalencije relacije $\sim$ odredjenu elementom a ,označavaćemo C_a , a odgovarajući količnički skup $A/\sim$ .Naredne definicije (2.21 i 2.22.) i teoreme (2.26-2.28) su specijalizacije, u kontekstu implikativnih algebri, poznatih definicija i stavova iz univerzalne algebre.

Definicija 2.21. Kongruencija u implikativnoj algebri $\langle A,1,\rightarrow\rangle$ je relacija ekvivalencije $\sim$ skupa A koja je saglasna sa operacijom $\rightarrow$: Ako $a\sim b$ i $c\sim d$, onda $a\rightarrow c\sim b\rightarrow d$. Skup $K_{\sim} = \{a\in A: a\sim 1\}$ naziva se jezgro kongruencije $\sim$.

Definicija 2.22. Funkcija $h: A\rightarrow B$, gde su $\langle A,1,\rightarrow\rangle$ i $\langle B,1',\rightarrow'\rangle$ implikativne algebre, je homomorfizam algebre $\langle A,1,\rightarrow\rangle$ u $\langle B,1',\rightarrow'\rangle$, ako h "čuva" operacije,tj. ako je ispunjeno:

(1) $h(a\rightarrow b) = h(a)\rightarrow' h(b)$,

(2) $h(1) = 1'$.

Homomorfizam algebre u samu sebe naziva se endomorfizam.Homomorfizam, koji je **na** zove se epimorfizam.Monomorfizam (utapanje) je homomorfizam koji je **1-1**. Izomorfizam je homomorfizam koji je bijekcija. Za dve implikativne algebre se kaže da su izomorfne ako i samo ako postoji izomorfizam izmedju njih.

Jezgro homomorfizma h implikativne algebre $\langle A,1,\rightarrow\rangle$ u $\langle B,1',\rightarrow'\rangle$ je skup

$$K(h) = \{ a\in A : h(a)=1'\}.$$

Definicija 2.23. Specijalni implikativni filtar u implikativnoj algebri $\langle A,1,\rightarrow\rangle$ je implikativni filtar F te algebre, koji , pored , uslova (f_1) i (f_2) zadovoljava još tri uslova:

(f_3) Ako $a\in F$, onda $b\rightarrow a\in F$;

(f_4) Ako $a\rightarrow b\in F$ i $b\rightarrow c\in F$, onda $a\rightarrow c\in F$;

(f_5) Ako $b\rightarrow a\in F$ i $c\rightarrow d\in F$. onda $(a\rightarrow c)\rightarrow(b\rightarrow d)\in F$.

Sledeće dve leme bave se elementarnim svojstvima homomorfizama i kongruencija implikativnih algebri.

Lema 2.24. Neka su $\langle A,1,\rightarrow\rangle$ i $\langle B,1',\rightarrow'\rangle$ dve implikativne algebre neka je $h:A\rightarrow B$ funkcija koja zadovoljava uslov

$$h(a\rightarrow b) = h(a) \rightarrow' h(b) .$$

Tada:

2.24.1. $h(1)=1'$,tj. h je homomorfizam $\langle A,1,\rightarrow\rangle$ u $\langle B,1',\rightarrow'\rangle$.

2.24.2. h "čuva" poredak:

ako $a\leq b$, onda $h(a)\leq' h(b)$.

2.24.3. h je monomorfizam ako i samo ako je $K(h) = \{1\}$.

2.24.4. $K(h)$ je implikativni filtar koji zadovoljava uslove (f_3) i (f_4).

2.24.5. Ako u implikativnoj algebri $\langle B,1',\rightarrow'\rangle$ važe zakoni (WTP) i (WTS) ,tada je $K(h)$ specijalni implikativni filtar.

Dokaz 2.24.1. $h(1)=h(a\rightarrow a)=h(a)\rightarrow' h(a)=1'$.

2.24.2. 1. $a\leq b$ hyp

2. $a\rightarrow b = 1$ definicija 1.6.

3. $h(a)\rightarrow' h(b) = h(a\rightarrow b) = h(1) = 1'$ iz 2.24.1.

4. $h(a) \leq' h(b)$ iz 3,definicija 1.6.

2.24.3. Pretpostavimo prvo da je $K(h)=\{1\}$. Dovoljno je dokazati da $h(a) \leq h(b)$ povlači $a\leq b$:

1. $K(h) = 1$ hyp

2. $h(a) \leq' h(b)$ hyp

3. $h(a) \to' h(b) = 1'$ iz 2,definicija 1.6.
4. $h(a \to b) = h(a) \to' h(b) = 1'$ iz 3
5. $a \to b \in K(h)$ iz 4,definicija 2.21.
6. $a \to b = 1$ iz 5,1
7. $a \leq b$ iz 6,definicija 1.6.

Sada, zbog simetrije, sledi da je h **1-1** :
(*) ako $h(a) = h(b)$, onda $a = b$.
Pretpostavimo sada da važi (*). Tada $1 \in K(h)$ zbog 2.24.1. Ako u implikativnoj algebri $\langle A,1,\to\rangle$ postoji element 1_1 takav da $1_1 \in K(h)$, tada, zbog (*), iz $h(1)=h(1_1)=1'$ sledi $1 = 1_1$.

2.24.4. (1) Najpre dokazujemo da K(h) zadovoljava (f_1). Očigledno, $1 \in K(h)$ zbog 2.24.1.
(2) Sada dokažimo :

ako $a \in K(h)$ i $a \to b \in K(h)$, onda $b \in K(h)$ (f_2).

1. $a \in K(h)$ hyp
2. $a \to b \in K(h)$ hyp
3. $h(a) = 1'$ iz 1
4. $1' = h(a \to b) = h(a) \to' h(b)$ iz 2
5. $h(b) = 1'$ iz 3,4,teorema 1.2.
6. $b \in K(h)$ iz 5.

Iz (1) i (2) sledi da je K(h) implikativni filtar.
(3) Dokažimo da važi (f_3):
1. $a \in K(h)$ hyp
2. $h(a) = 1'$ iz 1
3. $h(b \to a) = h(b) \to' h(a) = h(b) \to' 1' = 1'$ (i_4)
4. $b \to a \in K(h)$ iz 3.

(4) Na kraju, dokazujemo da važi i uslov (f_4) :
1. $a \to b \in K(h)$ hyp
2. $b \to c \in K(h)$ hyp
3. $h(a \to b) = h(a) \to' h(b) = 1'$ iz 1
4. $h(b \to c) = h(b) \to' h(c) = 1'$ iz 2
5. $h(a) \to' h(c) = 1'$ iz 3,4 (i_2)
6. $h(a \to c) = h(a) \to' h(c) = 1'$ iz 5
7. $a \to c \in K(h)$ iz 6.

2.24.5. Obzirom na 2.24.4 dovoljno je dokazati da važi (f_5):
1. $b \to a \in K(h)$ hyp
2. $c \to d \in K(h)$ hyp
3. $h(b \to a) = h(b) \to' h(a) = 1'$ iz 1
4. $h(c \to d) = h(c) \to' h(d) = 1'$ iz 2
5. $(h(a) \to' h(c)) \to' (h(b) \to' h(c)) = 1'$ iz 3,(WTS)
6. $(h(b) \to' h(c)) \to' (h(b) \to' h(d)) = 1'$ iz 4,(WTP)
7. $(h(a) \to' h(c)) \to' (h(b) \to' h(d)) = 1'$ iz 5,6,(i_2)
8. $h(a \to c) \to' h(b \to d) = 1'$ iz 7
9. $(a \to c) \to (b \to d) \in K(h)$ iz 8.

Lema 2.25. Neka je $\sim$ kongruencija u implikativnoj algebri $\langle A,1,\to\rangle$ u kojoj važi slabi zakon permutacije antecedenata (WP). Tada je jezgro $K_\sim$ te kongruencije implikativni filtar koji zadovoljava uslov (f_3).
Dokaz. (1) (f_1) je ispunjeno jer, zbog $1 \sim 1$, $1 \in K_\sim$.

(2) Sada dokazujemo da važi (f_2):
1. $a \in K_{\sim}$ hyp
2. $a{\to}b \in K_{\sim}$ hyp
3. $a \sim 1$ iz 1
4. $a{\to}b \sim 1$ iz 2
5. $1 \sim a{\to}b \sim 1{\to}b$ iz 3,4($\sim$ je saglasna sa $\to$)
6. $1{\to}b = b$ teorema 1.13.
7. $b \sim 1$ iz 5,6

(3) Na kraju, dokažimo (f_3):
1. $a \in K_{\sim}$ hyp
2. $a \sim 1$ iz 1
3. $b{\to}a \sim b{\to}1 = 1$ iz 2,(i_4)
4. $b{\to}a \in K_{\sim}$ iz 3.

Jednostavno se dokazuje sledeća teorema :

Teorema 2.26. Za svaku kongruenciju $\sim$ implikativne algebre $\langle A,1,\to\rangle$ jednakostima

$$C_a \to_{\sim} C_b = C_{a\to b} \quad \text{i} \quad 1_{\sim} = C_1$$

korektno su definisane odgovarajuće operacije u tzv. količničkoj algebri $\langle A/_{\sim},1_{\sim},\to_{\sim}\rangle$. Preslikavanje $h_{\sim}$: $A \to A/_{\sim}$, $h_{\sim}(a) = C_a$ je tkz. prirodni epimorfizam $\langle A,1,\to\rangle$ na $\langle A/_{\sim},1_{\sim},\to_{\sim}\rangle$.

Lema 2.27. Ako je $h_{\sim}$ prirodni epimorfizam implikativne algebre $\langle A,1,\to\rangle$ na $\langle A/_{\sim},1_{\sim},\to_{\sim}\rangle$, tada je $K(h_{\sim}) = K_{\sim}$.

Dokaz $x \in K(h_{\sim})$ ako i samo ako $h_{\sim}(x) = 1_{\sim} = C_1$
ako i samo ako $C_x = C_1$
ako i samo ako $x \sim 1$
ako i samo ako $x \in K_{\sim}$.

I, kao što svakoj relaciji kongruncije implikativne algebre odgovara jedan prirodni epimorfizam, tako se i svakom epimorfizmu neke implikativne algebre može pridružiti kongruencija:

Teorema 2.28. Ako je h epimorfizam implikativne algebre $\langle A,1,\to\rangle$ u implikativnu algebru $\langle B,1',\to'\rangle$, tada relacija $\sim_h$ uvedena sa

$$a \sim_h b \ \text{ ako i samo ako } \ h(a)=h(b)$$

relacija kongruenije u $\langle A,1,\to\rangle$ (za koju se kaže da je indukovana epimorfizmom h). Količnička algebra $\langle A,1,\to\rangle/_{\sim h}$ izomorfna je sa algebrom $\langle B,1',\to'\rangle$. Jezgro K(h) epimorfizma h poklapa se sa jezgrom kongruencije indukovane tim epimorfizmom: $K(h) = K_{\sim h}$.

Dokaz je elementaran i poznat.

Sada ćemo definisati jednu interesantnu relaciju u implikativnoj algebri odredjenu nekim implikativnim filtrom te algebre.

Definicija 2.29. Ako je F implikativni filtar u implikativnoj algebri $\langle A,1,\to\rangle$, onda je

$$a \sim_F b \ \text{ ako i samo ako } \ a{\to}b \in F \ \text{ i } \ b{\to}a \in F .$$

Za relaciju $\sim_F$ kaže se da je odredjena implikativnim filtrom F.

Teorema 2.30. (analogon teoreme 1.6. Rasiowa [15]) Neka je F implikativni filtar konačno deduktivne $Ł_3$ implikativne algebre $\langle A,1,\rightarrow\rangle$ u kojoj važi jaki zakon permutacije antecedenata (SP). Tada je relacija $\sim_F$ odredjena implikativnim filtrom F relacija kongruencije ove implikativne algebre.

Dokaz. Podsetimo se da (teorema 1.52) u implikativnoj algebri u kojoj važe (SP) i (WTP) važe i zakoni (STS) i (STP). Prvo dokazujemo da je $\sim_F$ relacija ekvivalencije skupa A :

(1) $a \sim_F a$ ako i samo ako $a\rightarrow a=1\in F$ (f_1).

(2) $a \sim_F b$ ako i samo ako $a\rightarrow b\in F$ i $b\rightarrow a\in F$
ako i samo ako $b\rightarrow a\in F$ i $a\rightarrow b\in F$
ako i samo ako $b \sim_F a$.

(3) Nakon refleksivnosti i simetrije, sada dokazujemo tranzitivnost relacije $\sim_F$:

1. $a \sim_F b$ hyp
2. $b \sim_F c$ hyp
3. $a\rightarrow b\in F$ i $b\rightarrow a\in F$ i $b\rightarrow c\in F$ i $c\rightarrow b\in F$ iz 1,2
4. $a\rightarrow b\in F$ i $b\rightarrow c\in F$ i $c\rightarrow b\in F$ i $b\rightarrow a\in F$ iz 3
5. $(b\rightarrow c)\rightarrow(a\rightarrow c)=1\in F$ i $b\rightarrow c\in F$ i $(b\rightarrow a)\rightarrow(c\rightarrow a)=1\in F$ i $b\rightarrow a\in F$ iz 3,(STS),(f_1),(f_2)
6. $a\rightarrow c\in F$ i $c\rightarrow a\in F$ iz 5,(f_2)
7. $a \sim_F c$ iz 6,definicija 2.29.

(4) Sada dokazujemo da je relacija $\sim_F$ saglasna sa operacijom $\rightarrow$:

1. $a \sim_F b$ hyp
2. $c \sim_F d$ hyp
3. $c\rightarrow d\in F$ iz 2,definicija 2.29.
4. $(c\rightarrow d)\rightarrow((a\rightarrow c)\rightarrow(a\rightarrow d)) = 1 \in F$ (STP),(f_1)
5. $(a\rightarrow c)\rightarrow(a\rightarrow d) \in F$ iz 3,4,(f_2)
6. $b\rightarrow a\in F$ iz 1,definicija 2.29.
7. $(b\rightarrow a)\rightarrow((a\rightarrow d)\rightarrow(b\rightarrow d)) = 1 \in F$ (STS),(f_1)
8. $(a\rightarrow d)\rightarrow(b\rightarrow d) \in F$ iz 6,7,(f_2)
9. $[(a\rightarrow c)\rightarrow(a\rightarrow d)] \rightarrow [((a\rightarrow d)\rightarrow(b\rightarrow d))\rightarrow((a\rightarrow c)\rightarrow(b\rightarrow d))] = 1 \in F$ (STS),(f_1)
10. $((a\rightarrow d)\rightarrow(b\rightarrow d))\rightarrow((a\rightarrow c)\rightarrow(b\rightarrow d)) \in F$ iz 5,9,(f_2)
11. $(a\rightarrow c)\rightarrow(b\rightarrow d) \in F$ iz 8,10,(f_2).

Na isti način se iz $b \sim_F a$ i $d \sim_F c$ dobija

11.' $(b\rightarrow d)\rightarrow(a\rightarrow c) \in F$.

12. $a\rightarrow c \sim_F b\rightarrow d$ iz 11 i 11' po definiciji 2.29.

Lema 2.31. (upor. Rasiowa [15]) U konačno deduktivnoj $Ł_3$ implikativnoj algebri $\langle A,1,\rightarrow\rangle$ svaki implikativni filtar F te algebre je i specijalni implikativni filtar.

Dokaz. Prema teoremi 1.52 u $\langle A,1,\rightarrow\rangle$ važe (STP) i (STS).

(1) Dokažimo prvo da F zadovoljava uslov (f_3):

1. $a \in F$ hyp
2. $a\rightarrow(b\rightarrow a) = 1 \in F$ (AC),(f_1)
3. $b\rightarrow a \in F$ iz 1,2,(f_2)

(2) Sada dokazujemo da F zadovoljava uslov (f_4):

1. $a\rightarrow b \in F$ hyp
2. $b\rightarrow c \in F$ hyp
3. $(a\rightarrow b)\rightarrow((b\rightarrow c)\rightarrow(a\rightarrow c)) = 1 \in F$ (STS),(f_1)
4. $(b\rightarrow c)\rightarrow(a\rightarrow c) \in F$ iz 1,3,$(f_2$0
5. $a\rightarrow c \in F$ iz 2,4,(f_2).

(3) Na kraju, dokazujemo da F zadovoljava uslov (f_5):
1. $b \to a \in F$ hyp
2. $c \to d \in F$ hyp
3. $(c \to d) \to ((a \to c) \to (a \to d)) = 1 \in F$ (STP),(f_1)
4. $(a \to c) \to (a \to d) \in F$ iz 2,3,(f_2)
5. $(b \to a) \to ((a \to d) \to (b \to d)) = 1 \in F$ (STS),(f_1)
6. $(a \to d) \to (b \to d) \in F$ iz 2,5,(f_2)
7. $(a \to c) \to (b \to d) \in F$ iz 4,6,(f_3).

Sledeća lema koristi se u dokazu teoreme 2.33.

Lema 2.32. Za svaki specijalni implikativni filtar F u implikativnoj algebri $\langle A,1,\to\rangle$ važi $a \in F$ ako i samo ako $a \sim_F 1$, gde je $\sim_F$ relacija definisana u 2.29.
Dokaz. Dokažimo prvo:
(1) Ako $a \sim_F 1$, onda $a \in F$.
1. $a \sim_F 1$ hyp
2. $1 \to a \in F$ iz 1,definicija 2.29.
3. $1 \in F$ (f_1)
4. $a \in F$ iz 2,3,(f_2).
Sada dokazujemo obratno:
(2) Ako $a \in F$, onda $a \sim_F 1$.
1. $a \in F$ hyp
2. $1 \in F$ (f_1)
3. $1 \to a \in F$ iz 1,2,(f_3)
4. $a \to 1 = 1 \in F$ (i_4),(f_2)
5. $a \sim_F 1$ iz 3,4,definicija 2.29.

Sledeća teorema daje semantičku karakterizaciju pripadnosti implikativnom filtru generisanom nekim skupom elemenata u konačno deduktivnoj $Ł_3$ implikaivnoj algebri u kojoj važi jaki zakon permutacije antecedenata (SP).

Teorema 2.33. (Analogon teoreme 3.41 , str. 63, [19]) U konačno deduktivnoj $Ł_3$ implikativnoj algebri $\langle A,1,\to\rangle$ u kojoj važi (SP) element $a \in A$ pripada implikativnom filtru $F(A_0)$ generisanim skupom $A_0 \subseteq A$ ako i samo ako za svaki homomorfizam h iz $\langle A,1,\to\rangle$ u konačno deduktivnu $Ł_3$ implikativnu algebru $\langle B,1',\to'\rangle$ u kojoj važi (SP) , vredi

(*) ako za svako $c \in A_0$, $h(c)=1'$, onda $h(a)=1'$.

Dokaz. Po teoremi 2.30. relacija $\sim_{F(Ao)}$ odredjena implikativnim filtrom $F(A_0)$ je kongruencija u $\langle A,1,\to\rangle$ i jezgro $K(h_{\sim F(Ao)})$ kanonskog epimorfizma $h_{\sim F(Ao)}$ algebre $\langle A,1,\to\rangle$ na količničku algebru
$\langle A,1,\to\rangle/\sim_{F(Ao)}$ (koja je takodje konačno deduktivna $Ł_3$ implikativna algebra u kojoj važi (SP)) poklapa se sa jezgrom kongruencije $K_{\sim F(Ao)}$ (lema 2.27). Po lemi 2.24.5 ovo jezgro je specijalni implikativni filtar (jer u $\langle B,1',\to'\rangle$ važe (STP) i (STS), teorema 1.52 , pa tim pre važe i (WTP) i (WTS)). Dokažimo još da je $K_{\sim F(Ao)}=F_0$:
$x \in K_{\sim F(Ao)}$ ako i samo ako $x \sim_{F(Ao)} 1$
ako i samo ako $x \in F(A_o)$ (leme 2.31,2.32).
Otuda je, za svako $c \in A_0 \subseteq F(A_o)$, $c \in K(h_{F(Ao)})$, što po definiciji znači da za svako $c \in A_0$ $h_{F(Ao)}(c) = C_1$, a kako je i $h(a) = 1'$, zbog (*), to je $h_{F(Ao)}(a) = C_1$, tj. $a \in$

$K(h_{F(A_0)}) = F(A_0)$.

Obrnuto, po teoremi 2.20 , element a pripada implikativnom filtru $F(A_0)$ generisanom skupom $A_0 \subseteq A$ konačno deduktivne $Ł_3$ implikativne algebre $\langle A, 1, \rightarrow\rangle$ ako i samo ako postoje $c_1, \ldots, c_n \in A_0$ takvi da

$$(^{**}) \quad c_n \rightarrow (c_n \rightarrow (\ldots \rightarrow (c_1 \rightarrow (c_1 \rightarrow a))\ldots)) = 1 \ .$$

Ako je h homomorfizam iz $\langle A, 1, \rightarrow\rangle$ u $\langle B, 1', \rightarrow'\rangle$ i ako je za sve $c \in A_0$, $h(c) = 1'$, onda je ispunjeno $h(c_1) = \ldots = h(c_n) = 1'$,što sa posledicom (**):

$$h(c_n) \rightarrow' (h(c_n) \rightarrow' (\ldots \rightarrow' (h(c_1) \rightarrow' (h(c_1) \rightarrow' h(a)))\ldots)) = 1' \ ,$$

višestrukom primenom teoreme 1.2 daje $h(a) = 1'$.

III Ł$_3$ deduktivne implikativne algebre i reziduirani grupoidi

Algebarski gledano , praktično sve poznate implikacije su reziduumi neke operacije generički nazvane fuzija.Ispostavlja se da se i slabe Ł$_3$ implikacije mogu modelovati u tzv. deduktivnim integralnim (parcijalno) uredjenim (reziduiranim) grupoidima (upor.[8],[1] i [2]).

Definicija 3.1. Slabo deduktivni integralni (parcijalno) uredjeni Ł$_3$ grupoid je struktura $\langle A, \leq, 1, \cdot, \rightarrow\rangle$, gde je A neprazni skup,a $\leq$ (parcijalno) uredjenje na A, $1 \in A$ je konstanta (nularna operacija) , a $\cdot$ i $\rightarrow$ binarne operacije na A , pri čemu su ispunjne aksiome:

Ax1. $a \leq a$.

Ax2. Ako $a \leq b$ i $b \leq a$ onda $a=b$.

Ax3. Ako $a \leq b$ i $b \leq c$ onda $a \leq c$.

Ax4. $a \leq 1$.

Dakle, u (parcijalnom) uredjenju $\leq$ na A , 1 je najveći element.

Ax5. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Dakle, 1 je multiplikativni neutral grupoida.

Ax6. Ako $a \leq b$, onda $a \cdot c \leq b \cdot c$ i $c \cdot a \leq c \cdot b$.

Operacija množenja je izotona po svakoj komponenti.

Ax7. $a \cdot b = b \cdot a$.

Operacija množenja je komutativna.

Ax8. $(a \cdot a) \cdot a = a \cdot a$ i $(a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a \cdot a$.

Kako grupoid nije asocijativan ne može se nedvosmisleno definisati stepenovanje.Medjutim, posledica je Ax7. i Ax8. da su svi mogući proizvodi samo elementa a u kojima se taj element a pojavljuje dva ili više puta jednaki $a \cdot a = a^2$.Ovo se lako dokazuje indukcijom.

Ax9. Ako $a \leq b$, onda $a \rightarrow b = 1$.

Implikativna operacija $\rightarrow$ je kompatibilna (parcijalnom) uredjenju.

Ax10. $a \cdot (a \rightarrow b) \leq b$ (MODUS PONENS).

Slabo deduktivni integralni (parcijalno) uredjeni reziduirani Ł$_3$ grupoid je struktura $\langle A, \leq, 1, \cdot, \rightarrow\rangle$ u kojoj , pored Ax1-Ax10 važi zakon eksportacije:

Ax11. Ako $b \cdot a \leq c$, onda $a \leq b \rightarrow c$.

Konačno-deduktivni integralni (parcijalno) uredjeni reziduirani Ł$_3$ grupoid se dobija dodavanjem još tri aksiome:

Ax12. $a \cdot (a \cdot (b \cdot b)) \leq (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)$.

Ax13. $a \rightarrow (a \rightarrow (a \rightarrow b)) \leq a \rightarrow (a \rightarrow b)$ (**Ł$_3$ kontrakcija**).

Ax14. $a \cdot (a \cdot b) \leq b \cdot (a \cdot a)$.

Navedimo posledice aksioma Ax1-Ax10 slabo deduktivnih integralnih (parcijalno) uredjenih Ł$_3$ grupoida (teorema 3.2-teorema 3.6.). Specijalno (teorema 3.5), otuda sledi da postulati implikativne algebre važe u slabo deduktivnim integralnim (parcijalno) uredjenim Ł$_3$ grupoidima.

Teorema 3.2. Ako $d \leq a$ i $b \leq c$, onda $d \cdot b \leq a \cdot c$.

Dokaz 1. $d \leq a$ hyp

2. $b \leq c$ hyp
3. $d \cdot b \leq a \cdot b$ iz 1, Ax6.
4. $a \cdot b \leq a \cdot c$ iz 2, Ax6.
5. $d \cdot b \leq a \cdot c$ iz 3,4 ,Ax3.

Teorema 3.3. 1. $a \cdot b \leq a$;
3.3. 2. $a \cdot b \leq b$;
3.3. 3. $a \cdot a \leq a$.

Dokaz 3.3.1. 1. $b \leq 1$ Ax4.
2. $a \cdot b \leq a$ iz 1, Ax 6 ;
3.3.2. U 3.3.1 primenimo Ax 7 $a \cdot b = b \cdot a$;
3.3.3. Dobija se iz 3.3.1 za $b = a$.

Teorema 3.4. Ako $a \leq b \to c$, onda $b \cdot a \leq c$ (IMPORTACIJA).
Dokaz 1. $a \leq b \to c$ hyp
2. $b \cdot a \leq b \cdot (b \to c)$ iz 1, Ax6.
3. $b \cdot (b \to c) \leq c$ Ax9.
4. $b \cdot a \leq c$ iz 2,3 ,Ax3.

Teorema 3.5.1. Ako $a \to b = 1$, onda $a \leq b$;
3.5.2. $a \leq b$ ako i samo ako $a \to b = 1$;
3.5.3. $a \to a = 1$ (i_1) ;
3.5.4. ako $a \to b = 1$ i $b \to a = 1$, onda $a = b$ (i_3) ;
3.5.5. ako $a \to b = 1$ i $b \to c = 1$, onda $a \to c = 1$ (T_0),tj. (i_2) ;
3.5.6. $a \to 1 = 1$ (i_4) ;
3.5.7. $1 \to a \leq a$ (i_6) ;
3.5.8. ako $a = 1$ i $a \to b = 1$, onda $b = 1$ (MP) ;
3.5.9. ako $a = 1$, onda $b \to a = 1$.

Dokaz 3.5.1. 1. $a \to b = 1$ hyp
2. $a \cdot (a \to b) \leq b$ Ax10.
3. $a \cdot 1 \leq b$ iz 1,2
4. $a \leq b$ iz 3, Ax5.
3.5.2. Dobija se iz 3.5.1 i Ax9.
3.5.3. Dobija se iz 3.5.2 i Ax1. za $a = b$.
3.5.4. 1. $a \to b = 1$ hyp
2. $b \to a = 1$ hyp
3. $a \leq b$ iz 1 ,po teoremi 3.5.1.
4. $b \leq a$ iz 2 ,po teoremi 3.5.1.
5. $a = b$ iz 3,4 ,po Ax2.
3.5.5. 1. $a \to b = 1$ hyp
2. $b \to c = 1$ hyp
3. $a \leq b$ iz 1, po teoremi 3.5.1.
4. $b \leq c$ iz 2, po teoremi 3.5.1.
5. $a \leq c$ iz 3,4 ,po Ax3.
6. $a \to c = 1$ iz 5,po teoremi 3.5.2.
3.5.6. 1. $a \leq 1$ Ax4.
2. $a \to 1 = 1$ iz 1 , Ax9.

3.5.7. 1. $1\cdot(1\to a)\leq a$ Ax10.
2. $1\cdot(1\to a)=1\to a$ Ax5.
3. $1\to a\leq a$ iz 1,2.

3.5.8. 1. $a=1$ hyp
2. $a\to b=1$ hyp
3. $a\cdot(a\to b)=1\cdot 1=1$ iz 1,2 ,Ax5.
4. $a\cdot(a\to b)\leq b$ Ax7
5. $1\leq b$ iz 3,4
6. $b=1$ iz 5 i Ax4. i Ax2.

3.5.9. 1. $a=1$ hyp
2. $b\to a=b\to 1$ iz 1.
3. $b\to 1=1$ teorema 3.5.6.
4. $b\to a=1$ iz 2,3.

Napomenimo da u slabo deduktivnim integralnim (parcijalno) uredjenim $Ł_3$ grupoidima ne može da važi zakon idempotencije $a\cdot a = a$.
Naime, tada bi važila slaba kontrakcija (WC_2) :

$$\text{Ako } a\to(a\to b) = 1 \text{ , onda } a\to b = 1$$

kojom se eliminiše polivalentna Łukasiewiczeva implikacija. Zaista, iz $a\to(a\to b) = 1$, na osnovu teorema 3.5.1 i 3.4 , sledi $a\cdot a \leq b$, a odatle, zbog idempotencije, $a \leq b$, što na osnovu aksiome Ax9. daje $a\to b = 1$.

Teorema 3.6. Ako $a\to(b\to c)=1$ i $a\to b=1$, onda $a\cdot a \leq c$ (F'_0).
Dokaz 1. $a\to(b\to c)=1$ hyp
2. $a\to b=1$ hyp
3. $a\cdot(a\to(b\to c)) \leq b\to c$ Ax10.
4. $a\cdot(a\to b)\leq b$ Ax10.
5. $[a\cdot(a\to b)]\cdot[a\cdot(a\to(b\to c))] \leq b\cdot(b\to c)$ iz 3,4 ,po teoremi 3.2.
6. $b\cdot(b\to c)\leq c$ Ax10.
7. $[a\cdot(a\to b)]\cdot[a\cdot(a\to(b\to c))] \leq c$ iz 5,6 ,po Ax3.
8. $(a\cdot 1)\cdot(a\cdot 1) \leq c$ iz 1,2,7.
9. $a\cdot a \leq c$ iz 8 , po Ax5.

Teoreme 3.7-3.12 slede iz Ax1-Ax11. slabo deduktivnih integralnih (parcijalno) uredjenih reziduiranih $Ł_3$ grupoida. Odatle se vidi da postulati slabo deduktivnih $Ł_3$ implikativnih algebri u kojima važi (WP), važe u slabo deduktivnim integralnim (parcijalno) uredjenim reziduiranim $Ł_3$ grupoidima.

Teorema 3.7. $b\cdot a \leq c$ ako i samo ako $a \leq b\to c$.
Dokaz. Primena teoreme 3.4 i Ax11.

Teorema 3.8. $1\to a = a$.
Dokaz 1. $1\cdot a = a \leq a$ Ax5 ,Ax1.
2. $a\leq 1\to a$ iz 1 , po Ax 11.
3. $1\to a \leq a$ teorema 3.5.7.
4. $1\to a = a$ iz 2,3 ,po Ax2.

Teorema 3.9. Ako $a \to (a \to b) = 1$ i $a \to (a \to (b \to c)) = 1$,onda $a \to (a \to c) = 1$ (F_0^3).

Dokaz 1. $a \to (a \to b) = 1$ hyp
2. $a \to (a \to (b \to c)) = 1$ hyp
3. $a \leq a \to b$ iz 1,teorema 3.5.1.
4. $a \cdot a \leq b$ iz 3 ,teorema 3.4.
5. $a \leq a \to (b \to c)$ iz 2,teorema 3.5.1.
6. $a \cdot a \leq b \to c$ iz 5,teorema 3.4.
7. $(a \cdot a) \cdot (a \cdot a) \leq b \cdot (b \to c)$ iz 4,6,teorema 3.2.
8. $a \cdot a = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a)$ Ax 8.
9. $a \cdot a \leq b \cdot (b \to c)$ iz 7,8.
10. $b \cdot (b \to c) \leq c$ Ax 10.
11. $a \cdot a \leq c$ iz 9,10, Ax 3.
12. $a \leq a \to c$ iz 11, Ax 11.
13. $a \to (a \to c) = 1$ iz 12,Ax 9.

Teorema 3.10.1. Ako $b \to c = 1$, onda $(a \to b) \to (a \to c) = 1$ (WTP) .
3.10.2. Ako $a \to b = 1$, onda $(b \to c) \to (a \to c) = 1$ (WTS) .
3.10.3. $a \to (b \to a) = 1$ (AC) .

Dokaz 3.10.1. 1. $b \to c = 1$ hyp
2. $a \cdot (a \to b) \leq b$ Ax 10.
3. $(a \cdot (a \to b)) \cdot (b \to c) \leq b \cdot (b \to c)$ iz 2, Ax 6.
4. $b \cdot (b \to c) \leq c$ Ax 10.
5. $(a \cdot (a \to b)) \cdot 1 \leq c$ iz 3.4.1 ,Ax 3.
6. $a \cdot (a \to b) \leq c$ iz 5, Ax 5.
7. $a \to b \leq a \to c$ iz 6, Ax 11.
8. $(a \to b) \to (a \to c) = 1$ iz 7, Ax 9.

3.10.2. 1. $a \to b = 1$ hyp
2. $a \cdot (a \to b) \leq b$ Ax 10.
3. $(a \cdot (a \to b)) \cdot (b \to c) \leq b \cdot (b \to c)$ iz 2, Ax 6.
4. $b \cdot (b \to c) \leq c$ Ax 10.
5. $(a \cdot 1) \cdot (b \to c) \leq c$ iz 3.4.1 . Ax 3.
6. $a \cdot (b \to c) \leq c$ iz 5, Ax 5.
7. $(b \to c) \leq (a \to c)$ iz 6. Ax 11.
8. $(b \to c) \to (a \to c) = 1$ iz 7. Ax 9.

3.10.3. 1. $b \cdot a \leq a$ teorema 3.3.2.
2. $a \leq b \to a$ iz 1 , Ax 11.
3. $a \to (b \to a) = 1$ iz 2 , Ax 9.

Teorema 3.11. Ako $a \to (b \to c) = 1$,onda $b \to (a \to c) = 1$ (WP).

Dokaz 1. $a \to (b \to c) = 1$ hyp
2. $a \leq b \to c$ iz 1,teorema 3.5.1.
3. $b \cdot a \leq c$ iz 2,teorema 3.4.
4. $a \cdot b \leq c$ iz 3,Ax7.
5. $b \leq a \to c$ iz 4,Ax11.
6. $b \to (a \to c) = 1$ iz 5,Ax 9.

Inače, poznato je da komutativnost operacije $\cdot$ u grupoidu (Ax 7.), uz pretpostavku aksioma Ax1-Ax6 i Ax8-Ax11 , sledi iz (WP). Naime, po 3.5.2 i 3.7 uslov $a \to (b \to (a \cdot b)) = 1$

ekvivalentan je uslovu $b \cdot a \leq a \cdot b$, odakle, zbog simetrije, važi $a \cdot b = b \cdot a$.

Mada je slaba $Ł_3$ kontrakcija (WC_3) posledica ($F_0{}^3$) (teorema 1.9 , lema 3.9) , zanimljivo je navesti njen dokaz iz aksioma Ax1-Ax11:

Teorema 3.12. Ako $a \to (a \to (a \to b)) = 1$,onda $a \to (a \to b) = 1$ (WC_3).
Dokaz 1. $a \to (a \to (a \to b)) = 1$ hyp
2. $a \leq a \to (a \to b)$ iz 1,teorema 3.5.1.
3. $a \cdot a \leq a \to b$ iz 2,teorema 3.4.
4. $a \cdot (a \cdot a) \leq b$ iz 3,teorema 3.4.
5. $a \cdot a = a \cdot (a \cdot a)$ iz 4,Ax 8.
6. $a \cdot a \leq b$ iz 4,5.
7. $a \leq a \to b$ iz 6,Ax 11.
8. $a \to (a \to b) = 1$ iz 7,Ax 9.

Teoreme 3.13 - 3.16 posledice su svih aksioma Ax1-Ax14 konačno-deduktivnih integralnih (parcijalno) uredjenih reziduiranih $Ł_3$ grupoida. Odatle kao posledicu imamo da konačno deduktivne $Ł_3$ implikativne algebre u kojima važi (WP) i (WP"), važe u konačno deduktivnim integralnim (parcijalno) uredjenim reziduiranim $Ł_3$ grupoidima.

Teorema 3.13. Ako $c_1 \to (c_1 \to (a \to (a \to (b \to c)))) = 1$ i $c_1 \to (c_1 \to (a \to (a \to b))) = 1$, onda $c_1 \to (c_1 \to (a \to (a \to c))) = 1$ ($F_1{}^3$).

Dokaz 1. $c_1 \to (c_1 \to (a \to (a \to (b \to c)))) = 1$ hyp
2. $c_1 \to (c_1 \to (a \to (a \to b))) = 1$ hyp
3. $c_1 \leq c_1 \to (a \to (a \to (b \to c)))$ iz 1,teorema 3.5.1.
4. $c_1 \cdot c_1 \leq a \to (a \to (b \to c))$ iz 3,teorema 3.4.
5. $a \cdot (c_1 \cdot c_1) \leq a \to (b \to c)$ iz 4,teorema 3.4.
6. $a \cdot (a \cdot (c_1 \cdot c_1)) \leq b \to c$ iz 5,teorema 3.4.
7. $c_1 \leq c_1 \to (a \to (a \to b))$ iz 2,teorema 3.5.1.
8. $c_1 \cdot c_1 \leq a \to (a \to b)$ iz 7,teorema 3.4.
9. $a \cdot (c_1 \cdot c_1) \leq a \to b$ iz 8,teorema 3.4.
10. $a \cdot (a \cdot (c_1 \cdot c_1)) \leq b$ iz 9,teorema 3.4
11. $(a \cdot (a \cdot (c_1 \cdot c_1))) \cdot (a \cdot (a \cdot (c_1 \cdot c_1))) \leq b \cdot (b \to c)$ iz 10,6,teorema 3.2.
12. $b \cdot (b \to c) \leq c$ Ax 10.
13. $(a \cdot (a \cdot (c_1 \cdot c_1))) \cdot (a \cdot (a \cdot (c_1 \cdot c_1))) \leq c$ iz 11,12,Ax 3.
14. $a \cdot (a \cdot ((a \cdot (c_1 \cdot c_1)) \cdot (a \cdot (c_1 \cdot c_1)))) \leq a \cdot (a \cdot (c_1 \cdot c_1))) \cdot (a \cdot (a \cdot (c_1 \cdot c_1)))$
Ax 12.
15. $a \cdot (a \cdot ((c_1 \cdot c_1) \cdot (c_1 \cdot c_1)) \leq (a \cdot (c_1 \cdot c_1)) \cdot (a \cdot (c_1 \cdot c_1))$ Ax 12.
16. $(c_1 \cdot c_1) \cdot (c_1 \cdot c_1) = c_1 \cdot c_1$ Ax 8.
17. $a \cdot (a \cdot (c_1 \cdot c_1)) \leq (a \cdot (c_1 \cdot c_1)) \cdot (a \cdot (c_1 \cdot c_1))$ iz 15,16.
18. $a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (c_1 \cdot c_1)))) \leq a \cdot (a \cdot ((a \cdot (c_1 \cdot c_1)) \cdot (a \cdot (c_1 \cdot c_1))))$ iz 17,dva puta Ax 6.
19. $a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (c_1 \cdot c_1)))) \leq c$ iz 18,14,13,Ax 3.
20. $a \cdot (a \cdot (a \cdot (c_1 \cdot c_1))) \leq a \to c$ iz 19,Ax 11.
21. $a \cdot (a \cdot (c_1 \cdot c_1)) \leq a \to (a \to c)$ iz 20,Ax 11.
22. $a \cdot (c_1 \cdot c_1) \leq a \to (a \to (a \to c))$ iz 21,Ax 11.
23. $c_1 \cdot c_1 \leq a \to (a \to (a \to (a \to c)))$ iz 22,Ax 11.

24. $a\to(a\to(a\to(a\to c))) \leq a\to(a\to(a\to c)) \leq a\to(a\to c)$ Ax 13.
25. $c_1\cdot c_1 \leq a\to(a\to c)$ iz 23,24,Ax3.
26. $c_1 \leq c_1\to(a\to(a\to c))$ iz 25,Ax 11.
27. $c_1\to(c_1\to(a\to(a\to c)))=1$ iz 26,Ax 9.

Lema 3.14. $a\cdot(a\cdot(a\cdot(a\cdot(b\cdot b)))) \leq (a\cdot(a\cdot b))\cdot(a\cdot(a\cdot b))$.
Dokaz 1. $a\cdot(a\cdot(a\cdot(a\cdot(b\cdot b)))) \leq a\cdot(a\cdot((a\cdot b)\cdot(a\cdot b)))$ Ax12,Ax6.
2. $a\cdot(a\cdot((a\cdot b)\cdot(a\cdot b))) \leq (a\cdot(a\cdot b))\cdot(a\cdot(a\cdot b))$ iz 1,Ax12 (zamenom b sa $a\cdot b$).
3. $a\cdot(a\cdot(a\cdot(a\cdot(b\cdot b)))) \leq (a\cdot(a\cdot b))\cdot(a\cdot(a\cdot b))$,iz 1,2,Ax3.

Teorema 3.15. Ako $c_n\to(c_n\to(\ldots\to(c_1\to(c_1\to(a\to(a\to(b\to c)))))\ldots))=1$ i $c_n\to(c_n\to(\ldots\to(c_1\to(c_1\to(a\to(a\to b))))\ldots))=1$, onda

$$c_n\to(c_n\to(\ldots\to(c_1\to(c_1\to(a\to(a\to c))))\ldots))=1 \quad (F_n^3).$$

Dokaz 1. Ako $c_n\to(c_n\to(\ldots\to(c_1\to(c_1\to(a\to(a\to(b\to c)))))\ldots))=1$ hyp
2. $c_n\to(c_n\to(\ldots\to(c_1\to(c_1\to(a\to(a\to b))))\ldots))=1$ hyp
3. $a\cdot(a\cdot(c_1\cdot(c_1\cdot(\ldots\cdot(c_n\cdot c_n)\ldots)))) \leq b\to c$ iz 1,teorema 3.5.1, 3.4.
4. $a\cdot(a\cdot(c_1\cdot(c_1\cdot(\ldots\cdot(c_n\cdot c_n)\ldots)))) \leq c$ iz 2,teorema 3.5.1, 3.4.
5. $[a\cdot(a\cdot(c_1\cdot(c_1\cdot(\ldots\cdot(c_n\cdot c_n)\ldots))))]\cdot[a\cdot(a\cdot(c_1\cdot(c_1\cdot(\ldots\cdot(c_n\cdot c_n)\ldots))))] \leq (b\to c)\cdot c \leq c$ iz3, 4 ,teorema 3.2,Ax10.
6. $a\cdot(a\cdot(a\cdot(a\cdot(c_1\cdot(c_1\cdot(\ldots\cdot(c_n\cdot c_n)\ldots)))\cdot(c_1\cdot(c_1\cdot(\ldots\cdot(c_n\cdot c_n)\ldots))))))) \leq [a\cdot(a\cdot(c_1\cdot(c_1\cdot(\ldots\cdot(c_n\cdot c_n)\ldots))))]\cdot[a\cdot(a\cdot(c_1\cdot(c_1\cdot(\ldots\cdot(c_n\cdot c_n)\ldots))))]$ iz 5,lema 3.14 $(b=c_1\cdot(c_1\cdot(\ldots\cdot(c_n\cdot c_n)\ldots)))$.
7. $a\cdot(a\cdot(a\cdot(a\cdot(c_1\cdot(c_1\cdot(c_1\cdot(c_1\cdot((c_2\cdot(c_2\cdot(\ldots\cdot(c_n\cdot c_n)\ldots)))\cdot(c_2\cdot(c_2\cdot(\ldots\cdot(c_n\cdot c_n)\ldots))))\ldots)))))) \leq a\cdot(a\cdot(a\cdot(a\cdot(c_1\cdot(c_1\cdot(\ldots\cdot(c_n\cdot c_n)\ldots)))\cdot(c_1\cdot(c_1\cdot(\ldots\cdot(c_n\cdot c_n)\ldots)))))))$ iz 6, lema3.14 $(a=c_1, b=c_2\cdot(c_2\cdot(\ldots\cdot(c_n\cdot c_n)\ldots))$, Ax6.
8. $a\cdot(a\cdot(a\cdot(a\cdot(c_1\cdot(c_1\cdot(c_1\cdot(c_1\cdot(\ldots\cdot(c_{n-1}\cdot(c_{n-1}\cdot(c_{n-1}\cdot(c_{n-1}\cdot((c_n\cdot c_n)\cdot(c_n\cdot c_n))))))\ldots)))))))) \leq [a\cdot(a\cdot(c_1\cdot(c_1\cdot(\ldots\cdot(c_n\cdot c_n)\ldots))))]\cdot[a\cdot(a\cdot(c_1\cdot(c_1\cdot(\ldots\cdot(c_n\cdot c_n)\ldots))))] \leq c$ iz 5,6,7 lema 3.14, Ax3, Ax6.
9. $c_1\cdot(c_1\cdot(c_1\cdot(c_1\cdot(\ldots\cdot(c_{n-1}\cdot(c_{n-1}\cdot(c_{n-1}\cdot(c_{n-1}\cdot((c_n\cdot c_n)\cdot(c_n\cdot c_n))))))\ldots)))) \leq a\to(a\to(a\to(a\to c))) = a\to(a\to c)$ iz 8,Ax11,Ax13,teorema 3.3.2.
10. $c_2\cdot(c_2\cdot(c_2\cdot(c_2\cdot(\ldots\cdot(c_{n-1}\cdot(c_{n-1}\cdot(c_{n-1}\cdot(c_{n-1}\cdot((c_n\cdot c_n)\cdot(c_n\cdot c_n))))))\ldots)))) \leq c_1\to(c_1\to(c_1\to(c_1\to(a\to(a\to c))))) = c_1\to(c_1\to(a\to(a\to c)))$ iz9,Ax11,Ax13,teorema3.3.2.
11. $(c_n\cdot c_n)\cdot(c_n\cdot c_n) = c_n\cdot c_n$ Ax8.
12. $c_n\cdot c_n \leq c_{n-1}\to(c_{n-1}\to(c_{n-1}\to(c_{n-1}\to(\ldots\to(c_1\to(c_1\to(a\to(a\to c))))\ldots)))) = c_{n-1}\to(c_{n-1}\to(\ldots\to(c_1\to(c_1\to(a\to(a\to c))))\ldots))$ iz 10,11,Ax11,Ax13,teorema 3.3.2.
13. $c_n\to(c_n\to(\ldots\to(c_1\to(c_1\to(a\to(a\to c))))\ldots))=1$ iz 12,Ax11.

Teorema 3.16. Ako $a\to(a\to(b\to c))=1$, onda $b\to(a\to(a\to c))=1$ (WP").
Dokaz 1. $a\to(a\to(b\to c))=1$ hyp
2. $a \leq a\to(b\to c)$ iz 1,teorema 3.5.1.
3. $a\cdot a \leq b\to c$ iz 2,teorema 3.4.
4. $b\cdot(a\cdot a) \leq c$ iz 3,teorema 3.4.
5. $a\cdot(a\cdot b) \leq c$ iz 4,Ax14.
6. $a\cdot b \leq a\to c$ iz 5,Ax 11.
7. $b \leq a\to(a\to c)$ iz 6,Ax 11.
8. $b\to(a\to(a\to c))=1$ iz 7,Ax 9.

U dokazu prethodne teoreme bitno se koristi aksioma Ax14. Zanimljivo je da je ta aksioma posledica (WP") i ostalih aksioma konačno-deduktivnih integralnih (parcijalno) uredjenih reziduiranih $Ł_3$ grupoida:

Teorema 3.17. Aksioma Ax14 sledi iz aksioma Ax1-Ax11. i (WP").
Dokaz. 1. Ako $b\cdot(a\cdot a)\leq c$, onda $a\cdot(a\cdot b)\leq c$,iz (WP"),po teoremama 3.5.2 i 3.7.
2. $b\cdot(a\cdot a) \leq b\cdot(a\cdot a)$ Ax1.
3. $a\cdot(a\cdot b) \leq b\cdot(a\cdot a)$ iz 1,2 (za $c = b\cdot(a\cdot a)$).

Iz teorema 3.16 i 3.17 imamo:

Posledica 3.18. Ako se pretpostave aksiome Ax1-Ax11. zakon (WP") ekvivalentan je aksiomi Ax14.

Interesantno je primetiti da važi:

Teorema 3.19. Obrnuta nejednakost u aksiomi Ax14.

$$a\cdot(a\cdot b) \geq b\cdot(a\cdot a) \quad (*)$$

ekvivalentna je (uz pretpostavku aksioma Ax1-Ax11.) sledećem obliku slabog zakona permutacije antecedenta:

$$\text{Ako } b\to(a\to(a\to c)) = 1 \text{, onda } a\to(a\to(b\to c)) = 1 \quad (WP^{IV}).$$

Dokaz. Najpre dokazujemo da (WP^{IV}) sledi iz (*) i aksioma Ax1-Ax11:
1. $b\to(a\to(a\to c)) = 1$ hyp
2. $b \leq a\to(a\to c)$ iz 1,teorema 3.5.1.
3. $a\cdot b \leq a\to c$ iz 2,teorema 3.4.
4. $a\cdot(a\cdot b) \leq c$ iz 3,teorema 3.4.
5. $b\cdot(a\cdot a) \leq c$ iz 4,(*)
6. $a\cdot a \leq b\to c$ iz 5,Ax11.
7. $a \leq a\to(b\to c)$ iz 6,Ax11.
8. $a\to(a\to(b\to c))$ iz 7,Ax9.

Dokažimo sada (*) iz (WP^{IV}) i aksioma Ax1-Ax11:
1. Ako $a\cdot(a\cdot b) \leq c$, onda $b\cdot(a\cdot a) \leq c$, iz (WP^{IV}),po teoremama 3.5.2 i 3.7.
2. $a\cdot(a\cdot b) \leq a\cdot(a\cdot b)$ Ax1.
3. $b\cdot(a\cdot a) \leq a\cdot(a\cdot b)$ iz 1,2 (za $c = a\cdot(a\cdot b)$).

Slično prethodnom važi:

Teorema 3.20. Zakon (WDP):

$$\text{Ako } a\to(a\to(b\to(b\to c))) = 1 \text{, onda } b\to(b\to(a\to(a\to c))) = 1$$

ekvivalentan je (uz pretpostavku aksioma Ax1-Ax11.) sledećem oslabljenom obliku tranzitivnosti:

$$a\cdot(a\cdot(b\cdot b)) = b\cdot(b\cdot(a\cdot a)) \quad (**).$$

Dokaz. Prvo dokazujemo da je (WDP) posledica (**) :
1. $a\to(a\to(b\to(b\to c))) = 1$ hyp
2. $a \leq a\to(b\to(b\to c))$ iz 1.teorema 3.5.1.
3. $a\cdot a \leq b\to(b\to c)$ iz 2. teorema 3.4.
4. $b\cdot(a\cdot a) \leq b\to c$ iz 3. teorema 3.4.

5. $b\cdot(b\cdot(a\cdot a)) \leq c$ iz 4, teorema 3.4.
6. $a\cdot(a\cdot(b\cdot b)) \leq c$ iz 5,(**)
7. $a\cdot(b\cdot b) \leq a\to c$ iz 6, Ax 11.
8. $b\cdot b \leq a\to(a\to c)$ iz 7, Ax 11.
9. $b \leq b\to(a\to(a\to c))$ iz 8, Ax11.
10. $b\to(b\to(a\to(a\to c))) = 1$ iz 9, Ax 9.

Sada dokuzujemo da je (**) posledica (WDP):

1. Ako $b\cdot(b\cdot(a\cdot a)) \leq c$, onda $a\cdot(a\cdot(b\cdot b)) \leq c$, iz (WDP) i teorema 3.5.2 i 3.7.
2. $b\cdot(b\cdot(a\cdot a)) \leq b\cdot(b\cdot(a\cdot a))$ Ax1.
3. $a\cdot(a\cdot(b\cdot b)) \leq b\cdot(b\cdot(a\cdot a))$ iz 1,2 $(c=b\cdot(b\cdot(a\cdot a))$).
4. $a\cdot(a\cdot(b\cdot b)) = b\cdot(b\cdot(a\cdot a))$ iz 3, zbog simetrije.

Posledica 3.21. U konačno deduktivnim integralnim (parcijalno) uredjenim reziduiranim $Ł_3$ grupoidima važi jednakost (**).
Dokaz sledi iz teorema 3.16 , 1.43 i 3.20.

Slede još neke karakterizacije zakona u kojima se pojavljuje samo operacija $\cdot$ množenja zakonima u kojima figuriše samo reziduum.

Teorema 3.22. U U slabo deduktivnom integralnom (parcijalno) uredjenom reziduiranom $Ł_3$ grupoidu oslabljeni oblik idempotencije (upor. Ax8): $(a\cdot a)\cdot a = a\cdot a$ ekvivalentan je slaboj $Ł_3$ kontrakciji (WC_3): ako $a\to(a\to(a\to b))) = 1$, onda $a\to(a\to b) = 1$.
Dokaz. Slaba idempotencija je posledica (WC_3) :

1. Ako $a\cdot(a\cdot a) \leq b$, onda $a\cdot a \leq b$ iz (WC_3),teoreme 3.5.2 i 3.7.
2. $a\cdot(a\cdot a) \leq (a\cdot a)\cdot a$ Ax7,Ax1.
3. $a\cdot a \leq (a\cdot a)\cdot a$ iz 1,2 , za $b = (a\cdot a)\cdot a$
4. $(a\cdot a)\cdot a \leq a\cdot a$ teorema 3.3.1.
5. $(a\cdot a)\cdot a = a\cdot a$ iz 3.4,Ax2.

Obratno tvrdjenje je sadržano u teoremi 3.12.

Kada bi se pretpostavila asocijativnost operacije množenja u reziduiranom $Ł_3$ grupoidu onda bismo odmah dobili jaki zakon tranzitivnosti prefiksiranja i sufiksiranja (STP) i (STS),zatim jaki zakon permutacije antecedenata (SP) i $Ł_3$ kontrakciju (C_3):

(1) Dokaz za (STP):

1. $(a\cdot(a\to b))\cdot(b\to c) \leq b\cdot(b\to c) \leq c$ Ax 10.
2. $a\cdot((a\to b)\cdot(b\to c)) \leq c$ iz 1,asocijativnost
3. $(a\to b)\cdot(b\to c) \leq a\to c$ iz 2,Ax11.
4. $b\to c \leq (a\to b)\to(a\to c)$ iz 3,Ax 11.
5. $(b\to c)\to((a\to b)\to(a\to c)) = 1$ iz 4,Ax9.

Očigledno je da je (STS) posledica (STP) i (WP) (teorema 3.11.).

(2) Dokaz za (SP'): 1. $b\cdot(a\cdot(a\to(b\to c))) \leq b\cdot(b\to c) \leq c$ Ax10.
2. $b\cdot(a\cdot(a\to(b\to c))) = (b\cdot a)\cdot(a\to(b\to c))$ asocijativnost
3. $(b\cdot a)\cdot(a\to(b\to c)) = (a\cdot b)\cdot(a\to(b\to c))$ iz 2,Ax7.
4. $(a\cdot b)\cdot(a\to(b\to c)) = a\cdot(b\cdot(a\to(b\to c))$ iz 3,asocijativnost
5. $a\cdot(b\cdot(a\to(b\to c)) \leq c$ iz 1,2,3,4

6. $b\cdot(a\to(b\to c) \leq a\to c$ iz 5,Ax11.
7. $a\to(b\to c) \leq b\to(a\to c)$ iz 6.Ax11.
Odavde, zbog simetrije sledi (SP).

(3) Dokaz za (C_3):
1. $a\cdot(a\cdot(a\cdot(a\to(a\to(a\to b))))) \leq a\cdot(a\cdot(a\to(a\to b))) \leq a\cdot(a\to b) \leq b$ Ax10,Ax6.
2. $((a\cdot a)\cdot a)\cdot(a\to(a\to(a\to b))) \leq b$, iz 1,asocijativnost
3. $a\cdot a = (a\cdot a)\cdot a$ Ax8.
4. $(a\cdot a)\cdot(a\to(a\to(a\to b))) \leq b$ iz 2,3
5. $a\cdot(a\cdot(a\to(a\to(a\to b)))) \leq b$ iz 4, asocijativnost
6. $a\to(a\to(a\to b)) \leq a\to(a\to b)$ iz 5,Ax11.

Značajno je da je u reziduiranom $Ł_3$ grupoidu jaki zakon permutacije antecedenata (SP) ekvivalentan sa činjenicom da je operacija $\cdot$ asocijativna.

Teorema 3.23. U slabo deduktivnim integralnim (parcijalno) uredjenim reziduiranim $Ł_3$ grupoidima jaki zakon permutacije antecedenata (SP) ekvivalentan je sa

$$a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c .$$

Dokaz. Da iz asocijativnosti sledi zakon (SP) dokazano je u (2). Pretpostavimo sada da u konačno deduktivnim integralnim (parcijalno) uredjenim reziduiranim $Ł_3$ grupoidima važi jaki zakon permutacije antecedenata. Tada važi i zakon:

(4) Ako $c\to(b\to(a\to x)) = 1$, onda $b\to(a\to(c\to x)) = 1$.

Sada imamo: 1. Ako $a\cdot(b\cdot c) \leq x$, onda $c\cdot(a\cdot b) \leq x$ iz (4),teoreme 3.5.2 i 3.7.
2. Ako $a\cdot(b\cdot c) \leq x$, onda $(a\cdot b)\cdot c \leq x$ iz 1.Ax7.
3. $a\cdot(b\cdot c) \leq a\cdot(b\cdot c)$ Ax1.
4. $(a\cdot b)\cdot c \leq a\cdot(b\cdot c)$ iz 2,3 ($x = a\cdot(b\cdot c)$).
Na potpuno isti način iz zakona

Ako $b\to(a\to(c\to x)) = 1$, onda $c\to(b\to(a\to x)) = 1$,

koji je takodje posledica (SP). dobijamo $a\cdot(b\cdot c) \leq (a\cdot b)\cdot c$, pa zaključujemo da važi $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$.

Prethodna razmatranja imaju za posledicu važnu činjenicu da konačno deduktivni asocijativni integralni (parcijalno) uredjeni reziduirani $Ł_3$ grupoidi predstavljaju varijetet.

Definicija 3.24. Konačno deduktivni asocijativni integralni (parcijalno) uredjeni reziduirani $Ł_3$ grupoid je algebra $\langle A,1,\cdot,\to\rangle$ tipa (0,2,2) takva da je relacija definisana sa

$$a \leq b \text{ ako i samo ako } a\to b = 1$$

parcijalno uredjenje na A i sistem $\langle A,\leq,1,\cdot,\to\rangle$ je konačno deduktivni integralni (parcijalno) uredjeni reziduirani $Ł_3$ grupoid u kome je operacija $\cdot$ asocijativna.

Teorema 3.25. Algebra $\langle A,1,\cdot,\to\rangle$ tipa (0,2,2) je konačno deduktivni asocijativni integralni (parcijalno) uredjeni reziduirani $Ł_3$ grupoid ako i samo ako je $\langle A,1,\cdot\rangle$ komutativna semi grupa s jedinicom (dakle, komutativni monoid):
1) $a\cdot 1 = a$,
2) $a\cdot b = b\cdot a$,
3) $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$
u kome još važe i sledeći postulati :

4) $a\cdot(a\cdot a) = a\cdot a$,
5) $(a\to b)\to((a\cdot c)\to(b\cdot c)) = 1$,
6) $(a\cdot(a\to b))\to b = 1$,
7) $(a\cdot b)\to c = a\to(b\to c)$,
8) $a\to a = 1$,
9) $a\to 1 = 1$,
10) $1\to a = a$,
11) $(a\to b)\to((b\to c)\to(a\to c)) = 1$,
12) $(a\to b)\to[(a\to b)\to((b\to a)\to((b\to a)\to b))] = (b\to a)\to[(b\to a)\to((a\to b)\to((a\to b)\to a))]$.

Dokaz. Definišimo: $a \le b$ ako i samo ako $a\to b = 1$. Tada su Ax1 i Ax4 , redom, posledice 8) i 9); Ax2 sledi iz 12) i 10), a Ax3 iz 10) i 11); Ax5 je posledica 1) i 2);Ax6 sledi iz 2),5) i 10); Ax7 je 2); Ax8 sledi iz 4) i 3) : $(a\cdot a)\cdot(a\cdot a) = ((a\cdot a)\cdot a)\cdot a = (a\cdot a)\cdot a = a\cdot a$; Ax9 sledi iz definicije relacije $\le$; Ax10 je posledica 6) i definicije relacije $\le$; Ax11 očigledno sledi iz 7),2) i definicije relacije $\le$;Ax12 i Ax14 su posledice 2),3) i 8); Ax13) sledi,kao što je pokazano u (3) iz 2),3),4),5),6),7) i 10).
Time je dokazano da su aksiome Ax1-Ax14 posledice navedenih jednakosti.
Obrnuto, jednakosti 1),2),4),6),8),9) i 10) očigledno slede iz aksioma Ax1-Ax11 (upor. teorema 3.5); jednakost 11) je,kao što je pokazano u (1) posledica asocijativnosti i Ax9,Ax10,Ax11 ; jednakost 12) je posledica zakona (SP) (lema 1.54) koji, kao što je dokazano u (2), sledi iz asocijativnosti i Ax7,Ax10 i Ax11.
Dokažimo 5):
1. $(a\cdot c)\cdot(a\to b) = c\cdot(a\cdot(a\to b)) \le c\cdot b = b\cdot c$ asocijativnost,Ax7,Ax9,Ax6
2. $a\to b \le (a\cdot c)\to(b\cdot c)$ iz 1,Ax11
3. $(a\to b)\to((a\cdot c)\to(b\cdot c)) = 1$ iz 2,Ax9.
Preostaje još dokaz za 7) :
1. $(a\cdot b)\cdot((a\cdot b)\to c) \le c$ Ax10.
2. $b\cdot(a\cdot((a\cdot b)\to c)) \le c$ iz 1, asocijativnost, Ax7.
3. $(a\cdot b)\to c \le a\to(b\to c)$, iz 2, Ax11.
4. $b\cdot(a\cdot(a\to(b\to c))) \le b\cdot(b\to c) \le c$ Ax10, Ax6.
5. $(a\cdot b)\cdot(a\to(b\to c)) \le c$ iz 4.asocijativnost, Ax7.
6. $a\to(b\to c) \le (a\cdot b)\to c$ iz 5.Ax11.
7. $(a\cdot b)\to c = a\to(b\to c)$ iz3,6. Ax2.

Ostaje otvoreno pitanje da li je konačno deduktivni integralni (parcijalno) uredjeni reziduirani $Ł_3$ grupoid varijetet. Takodje ostaje otvoreno pitanje da li se konačno deduktuvna $Ł_3$ implikativna algebra u kojoj važi (WP) i (WP") može okarakterisati kao podalgebra reziduacijskog redukta nekog konačno deduktivnog integralnog (parcijalno) uredjenog reziduiranog $Ł_3$ grupoida. Isto tako, da li su konačno deduktuvne $Ł_3$ implikativne algebre u kojima važi (SP) podalgebre reziduacijskog redukta nekog konačno deduktivnog asocijativnog integralnog (parcijalno) uredjenog reziduiranog $Ł_3$ grupoida.

BIBLIOGRAFIJA

[1] Birkhoff, G. ON THE STRUCTURE OF ABSTRACT ALGEBRAS, Proc. of the Cambridge Phil.Soc. Vol.31, 1935, pp.433-454.

[2] Blyth, T.S. , Janowitz, M.F. RESIDUATION THEORY, Pergamon Press, Oxford 1972.

[3] Chang, C.C. ALGEBRAIC ANALYSIS OF MANY VALUED LOGIC, American Mathematical Society.Transastions Vol.88,1958,pp.467-490.

[4] Church, A. INTRODUCTION TO MATHEMATICAL LOGIC, Princeton University Press, Princeton 1956.

[5] Curry, H.B. FOUNDATIONS OF MATHEMATICAL LOGIC, Dover Publ. New York 1977.

[6] Daigneaut, A. STUDIES IN ALGEBRAIC LOGIC, Math.Asoc. of America,1974.

[7] Diego, A. SUR LES ALGÈBRES DE HILBERT, Collection de Logique Mathematique, Gauthier-Villars, 1966, pp.1-52.

[8] Fuchs, L. TEILWEISE GEORDNETE ALGEBRAISCHE STRUKTUREN, Akademiai Kiado, Budapest 1966.

[9] Grätzer, G. UNIVERSAL ALGEBRA, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin 1979.

[10] Herman, L.,Marsden, E.L.,Piziak, R. IMPLICATION CONNECTIVE IN ORTHOMODULAR LATTICES, Notre Dame Journal of Formal Logic, vol.16(3),1975.

[11] Iturrioz L. AN AXIOM SYSTEM FOR THREE-VALUED ŁUKASIEWICZ PROPOSITIONAL CALCULUS, Notrre Dame Journal of Formal Lgic Volume XVIII,Number 4, October 1977, pp. 616-620.

[12] Moisil, Gr.C. ESSAIS SUR LES LOGIQUES NON CHRYSIPPIENNES, Bucarest, 1972,p.820.

[13] Patzig, G. ARISTOTLE, ŁUKASIEWICZ AND THE ORIGINS OF MANY-VALUED LOGIC, Proceedings of the Fourth International Congress for Logic, Methoddogy and Philosophy of Sciencep, Bucharest 1971,pp. 921-929. Edited by P.Suppes-L.Henkin,Gr.C.Moisil. A.Joja, Amsterdam 1973, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics,vol 74.

[14] Prior, A.N. FORMAL LOGIC. Oxford University Press 1962,p.341.

[15] Rasiowa, H. AN ALGEBRAIC APPROACH TO NON-CLASSICAL LOGICS, Studies in Logic and the Foundations in Mathematics, Vol.78, North-Holland, Amsterdam 1974,p.XV+403.

[16] Rescher, N. MANY-VALUED LOGIC, McGraw-Hill Book Company. 1969,p. XV+359.
(Sadrži potpunu bibliografiju o polivalentnim logikama do 1965.)

[17] Sicoe, O.C. A CHARACTE RIZATION OF LUKASIEWICZIAN ALGEBRA. I,II, Proc. Japan Acad., Vol.43, 1967.pp. 729-736.

[18] Tarski, A. LOGIC,SEMATICS,MATAMATHEMATICS, papers from 1923 to 1928, Oxford, at the Clarendon Press. 1969,p. XIV+471.

[19] Vukomanović, Dj. IMPLIKACIJA I MREŽE (Ogled o implikaciji) -doktorska disertacija- Beograd 1985.

[20] Vukomanović, Dj. 1-DEDUCTIVENESS AND NON-ASSOCIATIVE COMMUTATIVE RESIDUATED GRUPOIDS (Abstracts of the International Congres of Mathematicians 1986,p.58),Berkeley,California,USA.

[21] Vukomanović, Dj. ALGEBRAIC SEMANTICS FOR 1-DEDUCTIVE RELEVANT IMPLICATON (Abstract-Journal of Symbolic Logic,v.55(1990),pp.433-434).

[22] Wajsberg, M. AKSJOMATYZACJA TRÓJWARTOŚCIOWEGO RACHUNKU ZDAŃ, Comptes Rendus des séances de la Société des Seiences et des Lettres de Varsovie XXIV, 1931. Classe III. Warszawa 1931,p.24.

Sadržaj