UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Silvana Marinković

ALGEBRIZACIJA JEDNE VEROVATNOSNE LOGIKE SA BESKONAČNIM PREDIKATIMA

magistarski rad

mentor:
dr Miodrag Rašković, red. prof.

Odbrana: 28.08.97
Komisija: 1. M. Rašković (mentor)
2. Ž. Mijajlović (pred. kom.)
3. S. Prešić

BEOGRAD
1997

1. Koje su specifičnosti logike sa verovatnosnim kvantifikatorima u odnosu na logike sa generalisanim kvantorima?

2. Kolika je ekspresivnost ove logike?

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

SADRŽAJ

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

UVOD

Sa ciljem da se model-teoretski proučava verovatnoća uvedene su sredinom sedamdesetih godina razne verovatnosne logike. One spadaju (osim u specijalnim slučajevima) u oblast infinitarnih logika sa generalisanim kvantifikatorima. Potreba da definabilni skupovi budu merljivi u svakoj verovatnosnoj strukturi, uslovila je da se umesto uobičajenih kvantifikatora uvedu verovatnosni kvantifikatori ili integralni operatori. Početak proučavanja logika $L_{\mathcal{A}P}$ i $L_{\mathcal{A}\int}$ vezan je za H.J.Keislera ([8]) koji je, zajedno sa D.Hooverom, najviše doprineo razvoju teorije modela za ove logike. Modeli za verovatnosne logike su modeli prvog reda sa verovatnosnom merom na univerzumu. Najviše proučavani problemi su kompletnost i kompaktnost ali i svojstva koja se ne javljaju u logici prvog reda, kao što je zakon velikih brojeva.

Dobro je poznato da logika prvog reda (sa ili bez jednakosti) ima sledeća svojstva:

(1) *sve formule imaju konačno mnogo simbola,*

(2) *svi dokazi su konačni,*

(3) *skup formula je konzistentan ako i samo ako je zadovoljiv.*

Postavlja se pitanje da li se za logike koje ne zadovoljavaju uslov (1) dokaz može tako definisati da važe (2) i (3). U literaturi se mogu naći razne logike sa beskonačno dugim formulama (neke od njih dopuštaju beskonačno mnogo varijabli u formulama, dok druge imaju beskonačno mnogo veznika, kakve su i verovatnosne logike) ali koje ne zadovoljavaju jedan od gornjih uslova. U svom radu *"A complete first-order logic with infinitary predicates"* Keisler uvodi formalni sistem L koji ima relacije sa beskonačno mnogo varijabli i kvantifikatore nad beskonačnim skupovima simbola, ali sadrži samo konačno mnogo veznika i ne sadrži jednakost. Za ovu logiku, koja zadovoljava (2), on dokazuje stav potpunosti, tj. da važi i (3).

Prirodno se nameće pitanje da li se nešto slično može uraditi u slučaju da logika L sadrži i verovatnosne kvantifikatore. Tim problemom se bavi ovaj rad.

U prvom delu rada uvodi se logika L koja sadrži predikate sa beskonačno mnogo varijabli, univerzalne i verovatnosne kvantifikatore nad beskonačnim nizovima varijabli, ali samo konačno mnogo veznika i ne sadrži jednakost. Da bi se sačuvao uslov (2), za kvantifikatore $Px \geq r$ se dopušta da r uzima samo konačno mnogo različitih vrednosti. Za ovu logiku se dokazuje stav potpunosti.

U drugom delu definišemo slabe poliadične verovatnosne algebre, do kojih nas dovodi Tarski-Lindenbaumova algebra logike L. Na kraju, za ovakve algebre beskonačne dimenzije, dokazujemo stav reprezentacije.

1. LOGIKA SA VEROVATNOSNIM KVANTIFIKATORIMA

Da bi se model-teoretski proučavali neki delovi teorije verovatnoće kao, na primer, uslovno očekivanje, stohastički procesi i sl. uvedeni su razni tipovi verovatnosnih logika. Ovde će biti izloženi osnovni rezultati vezani za logiku $L_{\mathcal{A}P}$. Nju je uveo Keisler u [8]. Slična je logici $L_{\mathcal{A}}$ osim što se umesto uobičajenih kvantifikatora koriste verovatnosni kvantifikatori. To je proizišlo iz potrebe da svaki definabilan skup u svakoj verovatnosnoj strukturi bude merljiv.

Pomenimo još neke tipove verovatnosnih logika:

$L_{\mathcal{A}\int}$ je verovatnosna logika ekvivalentna sa $L_{\mathcal{A}P}$ ali primerenija teoriji verovatnoće jer umesto verovatnosnih kvantifikatora koristi integralne operatore $\int \ldots dx$;

$L_{\mathcal{A}E}$ je logika uslovnog očekivanja a dobijena je dodavanjem logici $L_{\mathcal{A}\int}$ novog operatora $E[\cdot \mid \cdot]$ koji ima ulogu uslovnog očekivanja;

L_{ad} – adaptirana verovatnosna logika, posebno je pogodna za izučavanje stohastičkih procesa;

$L_{\mathcal{A}P_1P_2}$ – dvoverovatnosna logika, slična je $L_{\mathcal{A}P}$ izuzev što dopušta dva tipa verovatnosnih kvantifikatora $P_1\vec{x} \geq r$ i $P_2\vec{x} \geq r$.

Neke verovatnosne strukture

Konačno aditivan verovatnosni prostor je trojka (A, S, μ) gde je S polje podskupova od A, $\mu : S \to [0,1]$, $\mu(A) = 1$ i za svako $X, Y \in S$ važi

$$\mu(X \cup Y) = \mu(X \setminus Y) + \mu(Y \setminus X) + \mu(X \cap Y).$$

Za skupove $X \in S$ kažemo da su $\mu-$*merljivi*, a za μ da je *konačno aditivna verovatnosna mera* na A.

Ako je S $\sigma-$polje i μ prebrojivo aditivna funkcija, tj. za $X_0 \subset X_1 \subset \ldots$ iz S važi $\lim_{n\to\infty} \mu(X_n) = \mu(\cup_n X_n)$, onda se trojka (A, S, μ) zove *verovatnosni prostor*, a μ *prebrojivo aditivna verovatnosna mera* na A ili samo verovatnosna mera na A.

Trojka (A^n, S^n, μ^n) gde je S^n $\sigma-$algebra generisana merljivim pravougaonicima $X_1 \times \cdots \times X_n$, za $X_i \in S$, a $\mu^n : S^n \to [0,1]$ verovatnosna mera na A^n definisana sa $\mu^n(X_1 \times \cdots \times X_n) = \mu(X_1) \cdot \ldots \cdot \mu(X_n)$, predstavlja *$n-$stepen verovatnosnog prostora* (A, S, μ).

S obzirom da, u opštem slučaju, dijagonalni skupovi $D_{ij} = \{x \in A^n \mid x_i = x_j\}$ nisu merljivi, za logike sa jednakošću potrebno je napraviti ekstenziju prostora (A^n, S^n, μ^n) tako da ovo bude ispunjeno. O egzistenciji takve ekstenzije govori sledeća teorema.

Teorema 1.1. *Ako je (A, S, μ) verovatnosni prostor sa merljivim singltonima, tada, za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji verovatnosni prostor $(A^n, S^{(n)}, \mu^{(n)})$, gde je $S^{(n)}$ $\sigma-$algebra generisana merljivim pravougaonicima i dijagonalnim skupovima, a $\mu^{(n)}$ jedinstvena ekstenzija mere μ^n na $S^{(n)}$ takva da je $\mu^{(n)}(D_{ij}) = \sum_{x\in A}(\mu(x))^2$. Još važi da za svaki skup $X \in S^{(n)}$ postoji μ^n-merljiv skup U takav da je $\mu^{(n)}(X \bigtriangleup U) = 0$.*

Teorema 1.2 (Fubini). *Neka je (A, S, μ) verovatnosni prostor sa merljivim singltonima i $B \subset A^{m+n}$ $\mu^{(m+n)}$–merljiv skup. Tada*
(i) Svaki odsečak $B_{\overrightarrow{x}} = \{\overrightarrow{y} \mid (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in B\}$ je $\mu^{(n)}$–merljiv.
(ii) Funkcija $f(\overrightarrow{x}) = \mu^{(n)}(B_{\overrightarrow{x}})$ je $\mu^{(m)}$–merljiva.
(iii) $\mu^{(m+n)}(B) = \int f(\overrightarrow{x})\, d\mu^{(m)}$.

Neka je L skup relacijskih simbola R_i dužine n_i, za svako $i \in I$, i konstantnih simbola c_j, za $j \in J$.

Verovatnosna struktura za L je struktura

$$\mathfrak{A} = (A, R_i^{\mathfrak{A}}, c_j^{\mathfrak{A}}, \mu)_{i \in I, j \in J},$$

gde je $(A, R_i^{\mathfrak{A}}, c_j^{\mathfrak{A}})_{i \in I, j \in J}$ struktura logike prvog reda, a μ verovatnosna mera na A takva da je svaki singlton merljiv i svaka relacija $R_i^{\mathfrak{A}}$ je $\mu^{(n_i)}$–merljiva.

Slaba verovatnosna struktura za L je struktura

$$\mathfrak{A} = (A, R_i^{\mathfrak{A}}, c_j^{\mathfrak{A}}, \mu_n)_{i \in I, j \in J, n \in \mathbb{N}}$$

gde je $(A, R_i^{\mathfrak{A}}, c_j^{\mathfrak{A}})_{i \in I, j \in J}$ struktura logike prvog reda, a svako μ_n konačno aditivna verovatnosna mera na A^n takva da je svaki singlton merljiv i svaki skup

$$\{\overrightarrow{b} \in A^n \mid \models_{\mathfrak{A}} \Phi[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]\}$$

je μ_n–merljiv, za svaku formulu $\Phi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ neke verovatnosne logike i svako $\overrightarrow{a} \in A^m$.

Gradirana verovatnosna struktura za L je struktura

$$\mathfrak{A} = (A, R_i^{\mathfrak{A}}, c_j^{\mathfrak{A}}, \mu_n)_{i \in I, j \in J, n \in \mathbb{N}}$$

gde je $(A, R_i^{\mathfrak{A}}, c_j^{\mathfrak{A}})_{i \in I, j \in J}$ struktura logike prvog reda i važi:
(1) μ_n je verovatnosna mera na A^n.
(2) Svaka n_i–arna relacija $R_i^{\mathfrak{A}}$ je $\mu^{(n_i)}$–merljiva, a relacija identiteta μ_2–merljiva.
(3) Ako je skup B μ_m–merljiv, onda je $B \times A^n$ μ_{m+n}–merljiv.
(4) Svako μ_n se čuva za permutacije skupa $\{1, \ldots, n\}$, tj. ako je π permutacija skupa $\{1, \ldots, n\}$ i X μ_n–merljiv skup, onda je i skup $\pi X = \{(a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(n)}) \mid (a_1, \ldots, a_n) \in X\}$ μ_n–merljiv i važi $\mu_n(\pi X) = \mu_n(X)$.
(5) Niz $\{\mu_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ima Fubinijevo svojstvo, tj. ako je B μ_{m+n}–merljiv podskup od A^{m+n} onda važi:
   (i) svaki odsečak $B_{\overrightarrow{x}} = \{\overrightarrow{y} \mid (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in B\}$ je $\mu^{(n)}$–merljiv;
   (ii) funkcija $f(\overrightarrow{x}) = \mu^{(n)}(B_{\overrightarrow{x}})$ je $\mu^{(m)}$–merljiva;
   (iii) $\mu^{(m+n)}(B) = \int f(\overrightarrow{x})\, d\mu^{(m)}$.

Jasno je da, ako je $\mathfrak{A} = (A, R_i^{\mathfrak{A}}, c_j^{\mathfrak{A}}, \mu)$ verovatnosna struktura, onda je $(A, R_i^{\mathfrak{A}}, c_j^{\mathfrak{A}}, \mu_n)$ gradirana verovatnosna struktura

Za teoriju verovatnoće posebno su važne strukture sa slučajnim promenljivim umesto relacija. Dakle, neka je $L = \{X_i, c_j\}_{i \in I, j \in J}$ skup simbola slučajnih varijabli X_i i simbola konstanti c_j.

Svaku $\mu^{(n)}$–merljivu funkciju $X : A^n \to \mathbb{R}$ zvaćemo *slučajnom promenljivom.*

Struktura slučajne promenljive za L je struktura

$$\mathfrak{A} = (A, X_i^{\mathfrak{A}}, c_j^{\mathfrak{A}}, \mu)$$

takva da je μ verovatnosna mera na A sa merljivim singltonima, svako $X_i^{\mathfrak{A}}$ n_i-arna slučajna promenljiva i svako $c_j^{\mathfrak{A}}$ pripada A.

Verovatnosna logika $\mathbf{L}_{\mathcal{A}\mathbf{P}}$

Logika $L_{\mathcal{A}P}$ je slična infinitarnoj logici $L_{\mathcal{A}}$ osim što su kvantifikatori $\forall x$ i $\exists x$ zamenjeni verovatnosnim kvantifikatorima $Px \geq r$. Model za ovakvu logiku je model za logiku prvog reda sa verovatnosnom merom na univerzumu takvom da je svaka relacija merljiva. Formula $(Px \geq r)\Phi(x)$ znači da skup $\{x \mid \Phi(x)\}$ ima meru najmanje r.

Pretpostavićemo da je $\mathcal{A}$ dopustiv skup ([1]) takav da $\omega \in \mathcal{A}$ i svaki $a \in \mathcal{A}$ je prebrojiv, i da je L prebrojiv $\mathcal{A}-$rekurzivan skup finitarnih relacijskih i konstantnih simbola.

Logički simboli logike $L_{\mathcal{A}P}$ su:
(1) prebrojiv niz promenljivih $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
(2) veznici $\neg$ i $\wedge$;
(3) kvantifikatori $(P\vec{x} \geq r)$, gde je $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ $n-$torka različitih varijabli a $r \in \mathcal{A} \cap [0,1]$;
(4) znak jednakosti $=$ (neobavezno).

Skup *formula* logike $L_{\mathcal{A}P}$ je najmanji skup takav da:
(1) svaka atomska formula je formula od $L_{\mathcal{A}P}$;
(2) ako je Φ formula, onda je $\neg\Phi$ formula;
(3) ako je $\Gamma \in \mathcal{A}$ skup formula koji sadrži konačno mnogo slobodnih promenljivih, onda je $\bigwedge \Gamma$ formula;
(4) ako je Φ formula, onda je i $(P\vec{x} \geq r)\Phi$ formula.

Dakle, formule logike $L_{\mathcal{A}P}$ su izgradjene tako da je $L_{\mathcal{A}P} = \mathcal{A} \cap L_{\omega_1 P}$. Očigledno je kvantifikator $Px \geq r$ slab analogon kvantifikatora $\forall x$, dok je $Px > 0$ jači analogon kvantifikatora $\exists x$.

Neka je $\mathfrak{A}$ verovatnosna struktura za L. *Relacija zadovoljenja* formula logike $L_{\mathcal{A}P}$ u strukturi $\mathfrak{A}$ se definiše kao i za logiku $L_{\mathcal{A}}$ osim što za slučaj kvantifikatora imamo:

$$\models_{\mathfrak{A}} (P\vec{y} \geq r)\Phi(\vec{x}, \vec{y})[\vec{a}] \quad \text{akko} \quad \mu^{(n)}\{\vec{b} \mid \models_{\mathfrak{A}} \Phi[\vec{a}, \vec{b}]\} \geq r$$

Iz Fubinijeve teoreme sledi da je za svaku formulu $\Phi(\vec{x}, \vec{y})$ logike $L_{\mathcal{A}P}$ i svako $\vec{a} \in A^m$ skup $\{\vec{b} \mid \models_{\mathfrak{A}} \Phi[\vec{a}\,\vec{b}]\}$ $\mu^{(n)}-$merljiv, odnosno da je gornja definicija korektna.

D.Hoover uvodi aksiome i pravila izvodjenja za logiku $L_{\mathcal{A}P}$ i dokazuje potpunost tog skupa aksioma samo za gradirane verovatnosne strukture. Keisler upotpunjuje skup aksioma za verovatnosne modele aksiomom B_4 i teoremu potpunosti za logiku

L_{AP} dokazuje u dva koraka. Prvi je konstrukcija slabog modela u kome su zadovoljene sve aksiome logike L_{AP}, a drugi konstrukcija jakog, tj. verovatnosnog modela korišćenjem slabog modela.

Aksiome za slabu logiku L_{AP} su:

A_1 Sve aksiome logike L_A bez kvantifikatora.

A_2 $(P\vec{x} \geq r)\Phi \to (P\vec{x} \geq s)\Phi$, gde $r \geq s$.

A_3 $(P\vec{x} \geq r)\Phi(\vec{x}) \to (P\vec{y} \geq r)\Phi(\vec{y})$.

A_4 $(P\vec{x} \geq 0)\Phi$.

A_5 (i) $((P\vec{x} \leq r)\Phi \wedge (P\vec{x} \leq s)\Psi) \to (P\vec{x} \leq r+s)(\Phi \vee \Psi)$;

(ii) $((P\vec{x} \geq r)\Phi \wedge (P\vec{x} \geq s)\Psi \wedge (P\vec{x} \leq 0)(\Phi \wedge \Psi)) \to (P\vec{x} \geq r+s)(\Phi \vee \Psi)$.

A_6 $(P\vec{x} > r)\Phi \leftrightarrow \bigvee_{n \in N}(P\vec{x} \geq r + 1/n)\Phi$.

Dodatne aksiome za gradiranu L_{AP} su:

B_1 $\bigwedge_{\Gamma_1 \subset \Gamma}(P\vec{x} \geq r)\bigwedge \Gamma_1 \to (P\vec{x} \geq r)\bigwedge \Gamma$,
gde je Γ_1 konačan podskup od Γ.

B_2 $(Px_1 \ldots x_n \geq r)\Phi \leftrightarrow (Px_{\pi 1} \ldots x_{\pi n} \geq r)\Phi$,
gde je π permutacija skupa $\{1, \ldots, n\}$.

B_3 $(P\vec{x} \geq r)(P\vec{y} \geq s)\Phi \to (P\vec{x}\vec{y} \geq r \cdot s)\Phi$,
gde su sve promenljive u $\vec{x}$ i $\vec{y}$ različite.

Dodatna aksioma za punu L_{AP}:

B_4 $(P\vec{x} \geq 1)(P\vec{y} > 0)(P\vec{z} \geq r)(\Phi(\vec{x}, \vec{z}) \leftrightarrow \Phi(\vec{y}, \vec{z}))$,
gde su promenljive u $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ različite i $r < 1$.

Aksiome za atomičnu L_{AP}*logiku* sadrže aksiome pune L_{AP} i aksiomu

A $(Px \geq 1)(Py > 0)x = y$.

Napomena 1.3. Aksiome gradirane L_{AP} zajedno sa aksiomom A daju B_4 aksiomu. Zaista, za svako $\vec{a} \in A^n$, $\mu^{(n)}\{\vec{b} \in A^n \mid \models_{\mathfrak{A}} (P\vec{z} \geq r)\Phi(\vec{a}, \vec{z}) \leftrightarrow \Phi(\vec{b}, \vec{z})\} \geq \mu^{(n)}\{\vec{a}\}$ i $\mu^{(n)}\{\vec{a}\} > 0$ za skoro svako $\vec{a}$.

Pravila izvodjenja za sve navedene logike su:

R_1 $\Phi, \Phi \to \Psi \vdash \Psi$ (modus ponens)

R_2 $\{\Phi \to \Psi \mid \Psi \in \Gamma\} \vdash \Phi \to \bigwedge \Gamma$ (konjunkcija)

R_3 $\Phi \to \Psi(\vec{x}) \vdash \Phi \to (P\vec{x} \geq 1)\Psi(\vec{x})$, gde $\vec{x}$ nije slobodno u Φ (generalizacija).

Da u aksiomi B_3 ne važi ekvivalentnost i da kvantifikatori $P\vec{x} \geq r$ i $P\vec{y} \geq s$ ne komutiraju pokazuje sledeći primer.

Primer 1.4. Neka je $A = \{a, b, c\}$, $\mu(a) = \mu(b) = \mu(c) = 1/3$ i R binarni relacijski simbol jezika L.

(a) Ako je $R^{\mathfrak{A}} = \{(a,a), (a,b), (b,b), (b,c)\}$, tada $\models_{\mathfrak{A}} (Px \geq 1/2)(Py \geq 1/2)R(x,y)$ i $\models_{\mathfrak{A}} (Pxy \geq 1/4)R(x,y)$, ali $\not\models_{\mathfrak{A}} (Py \geq 1/2)(Px \geq 1/2)R(x,y)$.

(b) Ako je $R^{\mathfrak{A}} = \{(a,b), (b,c), (c,a)\}$, tada $\models_{\mathfrak{A}} (Pxy \geq 1/4)R(x,y)$, ali ne $\models_{\mathfrak{A}} (Px \geq 1/2)(Py \geq 1/2)R(x,y)$, niti $\models_{\mathfrak{A}} (Py \geq 1/2)(Px \geq 1/2)R(x,y)$.

Teorema 1.5. *Teorija T je konzistentna u slaboj L_{AP}(aksiome $A_1 - A_6$) akko postoji slab verovatnosni model za T u kojem je svaka teorema logike L_{AP} tačna.*

Ova teorema se dokazuje primenom uobičajene Henkinove konstrukcije.

Teorema 1.6. *Teorija T je konzistentna u gradiranoj $L_{\mathcal{A}P}$(aksiome $A_1 - A_6$, $B_1 - B_3$) akko postoji gradirani verovatnosni model za T u kojem je svaka teorema logike $L_{\mathcal{A}P}$ tačna.*

Dokaz se izvodi primenom teoreme 1.5 i tehnika nestandardne analize.

Hoover daje primer poznat kao "White Noise" kojim se odredjuje gradirana verovatnosna struktura koja nije $L_{\mathcal{A}P}$-ekvivalentna nekoj verovatnosnoj strukturi, odakle zaključuje da je potrebno proširiti skup aksioma gradirane $L_{\mathcal{A}P}$. To čini Keisler uvodjenjem aksiome B_4 koja obezbedjuje aproksimaciju skupa $\Phi(\vec{x}, \vec{y})$ konačnom unijom merljivih pravougaonika.

Teorema 1.7. *Ako je $\mathfrak{A}$ gradirana verovatnosna struktura koja zadovoljava sve teoreme logike $L_{\mathcal{A}P}$, $\epsilon > 0$ i $\Phi(\vec{y})$ formula sa slobodnim promenljivim $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, tada postoji konačno mnogo formula $\Psi_{ij}(\vec{x}, y_j)$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ tako da*

$$\models_{\mathfrak{A}} (P\vec{x} > 0)(P\vec{y} > 1 - \epsilon)\left(\Phi(\vec{y}) \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n} \Psi_{ij}(\vec{x}, y_j)\right).$$

Navedena aproksimacija $L_{\mathcal{A}P}$-definabilnih skupova konačnom unijom μ_1^n-merljivih skupova daje mogućnost izgradnje verovatnosnog modela $L_{\mathcal{A}P}$-ekvivalentnog gradiranom verovatnosnom modelu $\widehat{\mathfrak{A}} = ({}^*A, {}^*R_i, {}^*c_j, \widehat{\mu}_n)$, što predstavlja poslednji korak u rešavanju problema potpunosti logike $L_{\mathcal{A}P}$.

Teorema 1.8. *Prebrojiva teorija T je konzistentna u $L_{\mathcal{A}P}$ akko ima verovatnosni model.*

Pretpostavimo sada da jezik L ne sadrži konstantne simbole.

Neka je $\mathfrak{A}$ verovatnosni model. Element $a \in A$ je *atom* ako skup $\{a\}$ ima pozitivnu meru. $\mathfrak{A}$ je *atomična* struktura ako je svaki element atom.

Jasno je da je svaki atomičan model prebrojiv.

Teorema 1.9. *Prebrojiv skup rečenica T atomične $L_{\mathcal{A}P}$ ima model akko je T konzistentna u atomičnoj $L_{\mathcal{A}P}$ logici.*

Lako se može proveriti da se u atomičnim modelima uobičajeni kvantifikatori mogu definisati pomoću verovatnosnih na sledeći način:

$$\models_{\mathfrak{A}} (\forall x)\Phi(x, \vec{y}) \leftrightarrow (Px \geq 1)\Phi(x, \vec{y}) \quad \text{i} \quad \models_{\mathfrak{A}} (\exists x)\Phi(x, \vec{y}) \leftrightarrow (Px > 0)\Phi(x, \vec{y}).$$

Od ostalih model–teoretskih rezultata za logiku $L_{\mathcal{A}P}$ pomenimo Barwiseove teoreme potpunosti i kompaktnosti i konačnu kompaktnost.

Teorema 1.10. *Skup valjanih rečenica logike $L_{\mathcal{A}P}$ je Σ_1-definabilan na $\mathcal{A}$.*

Teorema 1.11. *Ako je T teorija logike $L_{\mathcal{A}P}$ Σ_1-definabilna na $\mathcal{A}$, čiji svaki $\mathcal{A}$-konačan podskup ima verovatnosni model, tada i T ima verovatnosni model.*

Da logika $L_{\mathcal{A}P}$ ne zadovoljava punu kompaktnost pokazuje sledeći primer.

Primer 1.12. Ako je $T = \{(Px \leq 1/n)R(x) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(Px > 0)R(x)\}$ gde je R unarni predikat, onda svaki konačan podskup od T ima verovatnosni model ali T nema model.

Medjutim, kompaktnost važi za neke klase rečenica.

Skup *univerzalno konjuktivnih formula logike* L_{AP} je najmanji skup koji sadrži sve formule bez kvantifikatora i zatvoren je za proizvoljne konjunkcije, konačne disjunkcije i kvantifikatore $P\overrightarrow{x} \geq r$.

Teorema 1.13. *Neka je T skup univerzalno konjuktivnih rečenica logike L_{AP}. Ako svaki konačan podskup od T ima gradirani model, onda i T ima gradirani model.*

Ova teorema ne važi za verovatnosne modele jer aksioma B_4 nije univerzalno konjuktivna.

Na kraju, pomenimo vezu izmedju verovatnosnih struktura i struktura slučajne promenljive. Primenom Fubinijeve teoreme možemo zaključiti da svaka relacija $R(x, \overrightarrow{y})$ u verovatnosnom modelu $\mathfrak{A}$ generiše slučajnu promenljivu $X : A \rightarrow \mathbb{R}$ definisanu sa $X(a) = \mu^{(n)}\{\overrightarrow{b} \mid \models_{\mathfrak{A}} R(a, \overrightarrow{b})\}$. Kako se uslov $X(a) \geq r$ može izraziti sa $\models_{\mathfrak{A}} (P\overrightarrow{y} \geq r)R(x, \overrightarrow{y})[a]$, razne osobine slučajnih promenljivih možemo zapisati rečenicama verovatnosne logike.

Primer 1.14. $X_n \longrightarrow X$ s.s. izražavamo pomoću

$$(Px \geq 1) \bigwedge_{n} \bigvee_{m} \bigwedge_{k \geq m} \mid X_k(x) - X(x) \mid \leq 1/n,$$

gde se $\mid X_k(x) - X(x) \mid \leq 1/n$ može izraziti pomoću

$$\bigwedge_{q \in \mathbb{Q}} (X_k(x) \geq q \rightarrow X(x) \geq q - 1/n) \wedge (X(x) \geq q \rightarrow X_k(x) \geq q - 1/n)$$

Pomoćni jezik za jezik $L = \{X_i, c_j \mid i \in I, j \in J\}$ koga čine simboli slučajnih promenljivih i konstanti je jezik $L' = \{[X_i \geq r], [X_i \leq r], c_j \mid i \in I, j \in J, r \in \mathbb{Q}\}$. *Skup formula* za logiku slučajne promenljive $L_{AP}(\mathbb{R})$ definišemo kao skup formula logike L'_{AP}. *Aksiome i pravila izvodjenja* za $L_{AP}(\mathbb{R})$ su aksiome i pravila izvodjenja za L'_{AP} uz dodatak sledećih aksioma:

C_1 $[X_i \geq r] \rightarrow [X_i \geq s]$, gde $r \geq s$;
C_2 $[X_i > r] \leftrightarrow \bigvee_n [X_i \geq r + 1/n]$;
C_3 $[X_i \geq r] \leftrightarrow \bigwedge_n [X_i \geq r - 1/n]$;
C_4 $\bigvee_n ([X_i \geq -n] \wedge [X_i \leq n])$.

Model–teoretske osobine logike $L_{AP}(\mathbb{R})$ izvodimo iz odgovarajućih osobina logike L'_{AP} tako što verovatnosni model $\mathfrak{A}'$ prevodimo u model slučajne promenljive $\mathfrak{A}$ pomoću

$$X^{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a}) = \sup\{r \in \mathbb{Q} \mid \models_{\mathfrak{A}'} [X \geq r][\overrightarrow{a}]\}.$$

Teorema 1.15. *Prebrojiva teorija T logike $L_{AP}(\mathbb{R})$ ima model slučajne promenljive akko je konzistentna u logici $L_{AP}(\mathbb{R})$.*

2. SLABA VEROVATNOSNA LOGIKA SA INFINITARNIM PREDIKATIMA

U ovom delu definišemo logiku $L(V,\nu,\mathfrak{m},R)$, kraće L, kao logiku koja ima infinitarne predikate iz datog skupa P, generalisane obične i verovatnosne kvantifikatore i iskazne veznike. Karakteristično je da se u svakoj formuli ove logike može pojaviti beskonačno mnogo promenljivih, ali samo konačno mnogo kvantifikatora i iskaznih veznika. To je uslovilo da skup R vrednosti za r (koje se javlja u $Px \geq r$) bude konačan i da se umesto Arhimedove aksiome uvede aksioma A_{11}. Ostale aksiome su aksiome slabe verovatnosne logike kao i aksioma koja izražava vezu izmedju običnih i verovatnosnih kvantifikatora (A_{12}). Slaba verovatnosna struktura za logiku L kao i relacija zadovoljenja formule u modelu se definišu analogno odgovarajućim pojmovima u slaboj logici L_{AP}. Na kraju dokazujemo slab stav potpunosti za logiku L. Dokaz je Henkinovski sa tom razlikom što ulogu konstanti preuzimaju nizovi novouvedenih promenljivih.

Sintaksa za logiku $\mathbf{L}(\mathbf{V},\nu,\mathfrak{m},\mathbf{R})$

Najpre definišemo šta su polazni simboli i kako se grade formule u formalnom sistemu $L(V,\nu,\mathfrak{m},R)$, kraće L.

Neka su:

V i P disjunktni skupovi simbola,

ν preslikavanje skupa P u skup ordinala,

$\mathfrak{m}$ kardinal,

R konačan podskup intervala $[0,1]$ takav da važi

(i) $\{0,1\} \subset R$,

(ii) ako $s \in R$, onda $1-s \in R$,

(iii) ako $s, r \in R$, onda $s+r \in R$ ili $s+r > 1$.

Pretpostavimo da V, ν, $\mathfrak{m}$ zadovoljavaju sledeće uslove:

I V je beskonačan;

II $\mathfrak{m} \leq \overline{\overline{V}}^{+}$;

III $\overline{\overline{\nu(p)}} \leq \overline{\overline{V}}$, za svako p iz P.

Za samu konstrukciju logike L ovi uslovi nisu neophodni, no, kako su potrebni za većinu stavova, mi ćemo ih unapred zadati.

Simboli logike $L(V,\nu,\mathfrak{m},R)$ su:

znak negacije $\neg$,

znak disjunkcije $\vee$,

univerzalni kvantor $\forall$,

verovatnosni kvantori $P.\geq r$, za $r \in R$,

varijable $v \in V$,

predikati $p \in P$,

zagrade (,).

Ako je $p \in P$ i $x \in V^{\nu(p)}$ onda $p(x)$ je *atomska formula.*

(1.1) Atomske formule su *formule.*

(1.2) Ako su Φ i Ψ formule, onda su i $\neg\Phi$ i $(\Phi \vee \Psi)$ *formule.*

(1.3) Ako je Φ formula, $x \in V^{\alpha}$ niz različitih varijabli dužine α, $\overline{\overline{\alpha}} < \mathfrak{m}$, onda su $(\forall x)\Phi$ i $(Px \geq r)\Phi$ *formule.*

(1.4) *Formule* se dobijaju samo konačnom primenom (1.1), (1.2) i (1.3).

Skup formula logike L označavaćemo sa F.

Sada rekurzivno definišemo skup $V_f(\Phi)$ *slobodnih varijabli* formule $\Phi \in F$:

(2.1) ako $\Phi = p(x)$, onda $V_f(\Phi) = rang\, x$;

(2.2) ako $\Phi = \neg\Psi$, onda $V_f(\Phi) = V_f(\Psi)$;

(2.3) ako $\Phi = \Psi \vee \Theta$, onda $V_f(\Phi) = V_f(\Psi) \cup V_f(\Theta)$;

(2.4) ako $\Phi = (\forall x)\Psi$, onda $V_f(\Phi) = V_f(\Psi) \setminus rang\, x$;

(2.5) ako $\Phi = (Px \geq r)\Psi$, onda $V_f(\Phi) = V_f(\Psi) \setminus rang\, x$.

Slično, definišemo skup $V_b(\Phi)$ *vezanih varijabli* formule Φ:

(3.1) ako $\Phi = p(x)$, onda $V_b(\Phi) = \phi$;

(3.2) ako $\Phi = \neg\Psi$, onda $V_b(\Phi) = V_b(\Psi)$;

(3.3) ako $\Phi = \Psi \vee \Theta$, onda $V_b(\Phi) = V_b(\Psi) \cup V_b(\Theta)$;

(3.4) ako $\Phi = (\forall x)\Psi$, onda $V_b(\Phi) = V_b(\Psi) \cup rang\, x$;

(3.5) ako $\Phi = (Px \geq r)\Psi$, onda $V_b(\Phi) = V_b(\Psi) \cup rang\, x$.

Na kraju, definišemo skup $V(\Phi)$ svih *varijabli* formule Φ:

$$V(\Phi) = V_b(\Phi) \cup V_f(\Phi).$$

Za svako $\tau \in V^V$ i svako $\Phi \in F$, rekurzivno definišemo $S(\tau)\Phi$:

(4.1) ako $\Phi = p(x)$, onda $S(\tau)\Phi = p(\tau \circ x)$;

(4.2) ako $\Phi = \neg\Psi$, onda $S(\tau)\Phi = \neg S(\tau)\Psi$;

(4.3) ako $\Phi = \Psi \vee \Theta$, onda $S(\tau)\Phi = S(\tau)\Psi \vee S(\tau)\Theta$;

(4.4) ako $\Phi = (\forall x)\Psi$, onda $S(\tau)\Phi = (\forall \tau \circ x)S(\tau)\Psi$;

(4.5) ako $\Phi = (Px \geq r)\Psi$, onda $S(\tau)\Phi = (P\tau \circ x \geq r)S(\tau)\Psi$.

Jasno je da $S(\tau)$ vrši supstituciju svake varijable v u Φ sa $\tau(v)$.

Slično, definišemo i $S_f(\tau)\Phi$, za svako $\tau \in V^V$ i $\Phi \in F$:

(5.1) ako $\Phi = p(x)$, onda $S_f(\tau)\Phi = p(\tau \circ x)$;

(5.2) ako $\Phi = \neg\Psi$, onda $S_f(\tau)\Phi = \neg S_f(\tau)\Psi$;

(5.3) ako $\Phi = \Psi \vee \Theta$, onda $S_f(\tau)\Phi = S_f(\tau)\Psi \vee S_f(\tau)\Theta$;

(5.4) ako $\Phi = (\forall x)\Psi$, onda $S_f(\tau)\Phi = (\forall x)S_f(\sigma)\Psi$;

(5.5) ako $\Phi = (Px \geq r)\Psi$, onda $S_f(\tau)\Phi = (Px \geq r)S_f(\sigma)\Psi$,

gde je $\sigma \in V^V$ i $\sigma(v) = \begin{cases} \tau(v), & v \in V \setminus rang\, x \\ v, & v \in rang\, x. \end{cases}$

Intuitivno, $S_f(\tau)\Phi$ vrši supstituciju svake slobodne varijable v formule Φ sa $\tau(v)$.

Napomena 2.1. Za $f \in Y^X$ i proizvoljan skup Z, neka je

$$f \restriction Z = \{(x, f(x)) | x \in X \cap Z\} \cup \{(z, z) | z \in Z \setminus X\},$$

tj. $f \restriction Z$ je restrikcija funkcije f na Z, ako je $Z \subset X$, odnosno ekstenzija funkcije f identičnim preslikavanjem, ako je $X \subset Z$.

U skladu sa napomenom, možemo pisati $\sigma = (\tau \restriction (V \setminus rang\, x)) \restriction V$.

Za $\tau \in V^W$, $W \subset V$, neka je $S(\tau)\Phi = S(\tau \restriction V)\Phi$ i $S_f(\tau)\Phi = S_f(\tau \restriction V)\Phi$.

Lema 2.2. (i) *Ako* $\Phi \in F$, $\tau \in V^V$ *i* $\tau \restriction V(\Phi)$ *je 1-1 funkcija, onda* $S(\tau)\Phi \in F$.
(ii) *Ako* $\Phi \in F$, $\tau \in V^V$, *onda* $S_f(\tau)\Phi \in F$.

Dokaz je jednostavan, indukcijom po složenosti formule Φ. S obzirom na definiciju (1.3), uslov da $\tau \restriction V(\Phi)$ bude 1-1 preslikavanje se ne može izostaviti.

Uvedimo sledeće oznake:

$$\begin{array}{rcl}
\Phi \wedge \Psi & \text{za} & \neg(\neg\Phi \vee \neg\Psi), \\
\Phi \to \Psi & \text{za} & \neg\Phi \vee \Psi, \\
\Phi \leftrightarrow \Psi & \text{za} & (\Phi \to \Psi) \wedge (\Psi \to \Phi), \\
(Px < r)\Phi & \text{za} & \neg(Px \geq r)\Phi, \\
(Px > r)\Phi & \text{za} & \neg(Px \geq 1 - r)\neg\Phi, \\
(Px \leq r)\Phi & \text{za} & (Px \geq 1 - r)\neg\Phi, \\
(\exists x)\Phi & \text{za} & \neg(\forall x)\neg\Phi, \\
\top & \text{za} & \Phi \vee \neg\Phi, \\
\bot & \text{za} & \Phi \wedge \neg\Phi.
\end{array}$$

Sada dajemo pravila izvodjenja i aksiome za logiku L.

Pravila izvodjenja za logiku L su sledeća:

R_1 Modus ponens:

$$\Phi,\ \Phi \to \Psi \vdash \Psi,$$

R_2 Generalizacija:

$$\Phi \vdash (\forall x)\Phi,$$

R_3 Supstitucija:

$$\Phi \vdash S(\tau)\Phi, \quad \text{gde} \quad \tau : V(\Phi) \xrightarrow{1-1} V,$$

R_4 Slobodna supstitucija:

$$S_f(\tau)\Phi \vdash \Phi, \quad \text{gde} \quad \tau : V_f(\Phi) \xrightarrow{1-1} V \setminus V_b(\Phi).$$

Aksiome za logiku L su sledeće:

A_1 Iskazne aksiome,

A_2 $(\forall x)(\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to (\forall x)\Psi)$, $\quad$ *rang* $x \subset V \setminus V_f(\Phi)$,

A_3 $(\forall x)\Phi \to S_f(\tau)\Phi$, $\quad$ $\tau :$ *rang* $x \to V \setminus V_b(\Phi)$,

A_4 $(\forall x)\Phi \leftrightarrow (\forall \tau \circ x)\Phi$, $\quad$ gde je τ bijekcija na *rang* x,

A_5 $(Px \geq 0)\Phi$,

A_6 $(Px \geq s)\Phi \rightarrow (Px \geq r)\Phi$, za $s > r$,

A_7 $(Px \geq s)\Phi \wedge (Px \geq r)\Psi \wedge (Px \geq 1)(\neg\Phi \vee \neg\Psi) \rightarrow (Px \geq \min(1, s+r))(\Phi \vee \Psi)$,

A_8 $(Px \leq s)\Phi \wedge (Px < r)\Psi \rightarrow (Px < \min(1, s+r))(\Phi \vee \Psi)$,

A_9 $(Px < s)\Phi \rightarrow (Px \leq s)\Phi$,

A_{10} $(Px \geq s)\Phi \rightarrow (Px > r)\Phi$, za $s > r$,

A_{11} $(Px > s)\Phi \rightarrow (Px \geq s^+)\Phi$, gde je $s^+ = \min\{r \mid r > s,\ r \in R\}$,

A_{12} $(\forall x)\Phi \rightarrow (Px \geq 1)\Phi$,

gde su $\Phi,\ \Psi \in F,\ s, r \in R$ i $x \in V^\alpha$ niz različitih varijabli, za $\overline{\overline{\alpha}} < \mathfrak{m}$.

Dokaz za formulu Φ u L je konačan niz formula čiji je poslednji član formula Φ, a svaki član niza je ili aksioma ili formula dobijena iz prethodnih primenom pravila izvodjenja.

Ako postoji dokaz za Φ u L, onda se Φ zove *teorema* u L i označava $\vdash_L \Phi$.

Za $\Gamma \subset F, \Phi \in F$, kažemo da je Φ *izvodljivo* iz Γ i pišemo $\Gamma \vdash_L \Phi$, ukoliko postoji niz formula $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \in \Gamma$ tako da $\vdash_L \Phi_1 \wedge \cdots \wedge \Phi_n \rightarrow \Phi$.

Skup $\Gamma \subset F$ je *nekonzistentan* ukoliko $\Gamma \vdash_L \perp$, inače je *konzistentan*.

Lema 2.3. *Neka je $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ dokaz u L, $X = V(\Phi_1) \cup \cdots \cup V(\Phi_n)$, $\tau \in V^X$ 1-1 preslikavanje. Tada $S(\tau)\Phi_1, \ldots, S(\tau)\Phi_n$ je takodje dokaz u L.*

Dokaz.

Pretpostavimo da tvrdjenje važi za svaki dokaz dužine manje od n, dokažimo da važi i za dokaz dužine n. Neka je $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ dokaz za Φ_n, tada Φ_n je, ili aksioma, ili dobijeno iz prethodnih formula po pravilima izvodjenja. Ako je Φ_n:

(1) aksioma, recimo A_3, tada

$$\Phi_n = (\forall x)\Phi \rightarrow S_f(\sigma)\Phi, \quad \text{za } \sigma : rang\, x \rightarrow V \setminus V_b(\Phi),$$

pa je

$$S(\tau)\Phi_n = (\forall \tau \circ x)S(\tau)\Phi \rightarrow S(\tau)S_f(\sigma)\Phi.$$

Neka je $\sigma_1 = \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} \restriction rang(\tau \circ x)$, tada $\sigma_1 : rang(\tau \circ x) \rightarrow V \setminus V_b(S(\tau)\Phi)$ i $\tau \circ \sigma \restriction X = \sigma_1 \circ \tau$, pa će biti

$$S(\tau)\Phi_n = (\forall \tau \circ x)S(\tau)\Phi \rightarrow S_f(\sigma_1)S(\tau)\Phi$$

što je aksioma. Slično, za ostale aksiome.

(2) dobijena iz prethodnih formula po R_1, tj. $\Phi_k, \Phi_k \rightarrow \Phi_n \vdash_L \Phi_n$. Odavde, po indukcijskoj hipotezi

$$\vdash_L S(\tau)\Phi_k, \quad \vdash_L S(\tau)(\Phi_k \rightarrow \Phi_n), \quad \text{tj.}$$

$$\vdash_L S(\tau)\Phi_k, \quad \vdash_L S(\tau)\Phi_k \rightarrow S(\tau)\Phi_n$$

odakle, po R_1, dobijamo $\vdash_L S(\tau)\Phi_n$.

(3) dobijena iz prethodnih formula po R_2, tj. $\Phi_k \vdash_L (\forall x)\Phi_k = \Phi_n$. Odavde, po indukcijskoj hipotezi

$$\vdash_L S(\tau)\Phi_k,$$

odakle, po R_2, dobijamo

$$\vdash_L (\forall \tau \circ x) S(\tau)\Phi_k,$$

odnosno,

$$\vdash_L S(\tau)(\forall x)\Phi_k,$$

tj.

$$\vdash_L S(\tau)\Phi_n.$$

(4) dobijena iz Φ_k po R_3, tj.

$$\Phi_k \vdash_L S(\sigma)\Phi_k = \Phi_n, \quad \text{gde } \sigma : V(\Phi_k) \xrightarrow{1-1} V.$$

Tada, po indukcijskoj hipotezi,

$$\vdash_L S(\tau)\Phi_k.$$

Neka je $\sigma_1 = \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} \restriction \tau\left(V(\Phi_k)\right)$, tada $\sigma_1 : V\left(S(\tau)\Phi_k\right) \xrightarrow{1-1} V$, pa, po R_3,

$$S(\tau)\Phi_k \vdash_L S(\sigma_1)S(\tau)\Phi_k.$$

Kako je $\sigma_1 \circ \tau = \tau \circ \sigma$ na $V(\Phi_k)$, to je, dalje,

$$S(\tau)\Phi_k \vdash_L S(\tau)S(\sigma)\Phi_k.$$

(5) dobijena iz Φ_k po R_4, tj.

$$\Phi_k = S_f(\sigma)\Phi_n \vdash_L \Phi_n, \quad \text{gde } \sigma : V_f(\Phi_n) \xrightarrow{1-1} V \setminus V_b(\Phi_n).$$

Tada, po indukcijskoj hipotezi,

$$\vdash_L S(\tau)S_f(\sigma)\Phi_n.$$

Neka je $\sigma_1 = \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} \restriction \tau\left(V_f(\Phi_n)\right)$, tada $\sigma_1 : V_f\left(S(\tau)\Phi_n\right) \xrightarrow{1-1} V \setminus V_b\left(S(\tau)\Phi_n\right)$, pa, po R_4,

$$S_f(\sigma_1)S(\tau)\Phi_n \vdash_L S(\tau)\Phi_n,$$

odnosno,

$$S(\tau)S_f(\sigma)\Phi_n \vdash_L S(\tau)\Phi_n.$$

Semantika za logiku $\mathbf{L}(\mathbf{V}, \nu, \mathfrak{m}, \mathbf{R})$

Slaba verovatnosna struktura tipa ν je struktura

$$\mathfrak{A} = (A, R_p, \mu_\alpha)_{p \in P, \overline{\overline{\alpha}} < \mathfrak{m}}$$

gde je A neprazan skup, $R_p \subset A^{\nu(p)}$, μ_α konačno aditivna verovatnosna mera na A^α ranga R, takva da je skup $\{b \circ x \mid \models_{\mathfrak{A}} \Phi[b],\ b \restriction (V \setminus rang\, x) = a \restriction (V \setminus rang\, x),\ b \in A^V\}$ μ_α merljiv, za svaki niz različitih varijabli $x \in V^\alpha$, za svako $a \in A^V$ i svaku formulu $\Phi \in F$, pri čemu je relacija zadovoljenja definisana na sledeći način:

(6.1) Ako $\Phi = p(x)$, onda $\models_{\mathfrak{A}} \Phi[a]$ ako $a \circ x \in R_p$.

(6.2) Ako $\Phi = \neg\Psi$, onda $\models_{\mathfrak{A}} \Phi[a]$ ako nije $\models_{\mathfrak{A}} \Psi[a]$.

(6.3) Ako $\Phi = (\Psi \vee \Theta)$, onda $\models_{\mathfrak{A}} \Phi[a]$ ako $\models_{\mathfrak{A}} \Psi[a]$ ili $\models_{\mathfrak{A}} \Theta[a]$.

(6.4) Ako $\Phi = (\forall x)\Psi$, onda $\models_{\mathfrak{A}} \Phi[a]$ ako za svako $b \in A^V$ takvo da $b \restriction (V \setminus rang\, x) = a \restriction (V \setminus rang\, x)$ važi $\models_{\mathfrak{A}} \Psi[b]$.

(6.5) Ako $\Phi = (Px \geq r)\Psi$, onda $\models_{\mathfrak{A}} \Phi[a]$ ako $\mu_\alpha\{b \circ x \mid \models_{\mathfrak{A}} \Phi[b]$ i $b \restriction (V \setminus rang\, x) = a \restriction (V \setminus rang\, x)\} \geq r$.

Formula Φ je *zadovoljiva* u modelu $\mathfrak{A}$ ako postoji $a \in A^V$ tako da $\models_{\mathfrak{A}} \Phi[a]$.

Skup formula $\Gamma \subset F$ je *zadovoljiv u modelu* $\mathfrak{A}$ ako postoji $a \in A^V$, tako da, za svako $\Phi \in \Gamma$, važi $\models_{\mathfrak{A}} \Phi[a]$. Γ je *zadovoljiv* ako je zadovoljiv u nekoj slaboj verovatnosnoj strukturi tipa ν.

Formula Φ je *tačna u* $\mathfrak{A}$ ako, za svako $a \in A^V$, važi $\models_{\mathfrak{A}} \Phi[a]$.

Formula Φ je *valjana* ako je tačna u svakoj slaboj verovatnosnoj strukturi tipa ν.

Teorema 2.4. *Neka je $\Gamma \subset F$, $\Phi, \Psi \in \Gamma$, $\mathfrak{A}$ struktura tipa ν, $a \in A^V$. Tada:*
(i) $\models_{\mathfrak{A}} (\Phi \wedge \Psi)[a]$ *akko* $\models_{\mathfrak{A}} \Phi[a]$ *i* $\models_{\mathfrak{A}} \Psi[a]$.
(ii) $\models_{\mathfrak{A}} (\Phi \rightarrow \Psi)[a]$ *akko nije* $\models_{\mathfrak{A}} \Phi[a]$ *ili* $\models_{\mathfrak{A}} \Psi[a]$.
(iii) Ako $\tau : V(\Phi) \xrightarrow{1-1} V$, *onda* $\models_{\mathfrak{A}} S(\tau)\Phi[a]$ *akko* $\models_{\mathfrak{A}} \Phi[a \circ (\tau \restriction V)]$.
(iv) Ako $\tau : V_f(\Phi) \longrightarrow V \setminus V_b(\Phi)$, *onda* $\models_{\mathfrak{A}} S_f(\tau)\Phi[a]$ *akko* $\models_{\mathfrak{A}} \Phi[a \circ (\tau \restriction V)]$.
(v) Ako je Φ teorema logike L, onda je Φ valjana formula.
(vi) Ako je skup formula Γ zadovoljiv u nekom slabom verovatnosnom modelu tipa ν onda je Γ konzistentan skup formula u L.

Dokaz.
(iii) Indukcijom po složenosti formule Φ.
Ako $\Phi = p(x)$, onda

$$\begin{aligned}\models_{\mathfrak{A}} S(\tau)\Phi[a] \text{ akko } & \models_{\mathfrak{A}} p(\tau \circ x)[a], \text{ po } (4.1)\\ \text{akko } & a \circ \tau \circ x \in R_p, \text{ po } (6.1),\\ \text{akko } & \models_{\mathfrak{A}} p(x)[a \circ (\tau \restriction V)].\end{aligned}$$

Za $\Phi = \neg\Psi$ i $\Phi = \Psi \vee \Theta$ je jednostavno.

Neka $\Phi = (\forall x)\Psi$, gde je x niz različitih varijabli dužine α, za $\overline{\overline{\alpha}} < \mathfrak{m}$, i neka $\models_{\mathfrak{A}} S(\tau)\Phi[a]$. Tada po (4.1)

$$\models_{\mathfrak{A}} (\forall \tau\circ x)S(\tau)\Psi[a],$$

odnosno, za svako $b \in A^V$ takvo da $b\restriction(V \setminus rang\, \tau\circ x) = a\restriction(V \setminus rang\, \tau\circ x)$ važi

$$S(\tau)\Psi[b].$$

Neka je $c \in A^V$ takvo da $c \restriction (V \setminus rang\, x) = (a\circ(\tau \restriction V)) \restriction (V \setminus rang\, x)$ i neka $b = c\circ\tau^{-1}\restriction rang\,(\tau\circ x) \cup a\restriction(V \setminus rang\,(\tau\circ x))$. Tada

$$\models_{\mathfrak{A}} S(\tau)\Psi[b],$$

pa po indukcijskoj hipotezi

$$\models_{\mathfrak{A}} \Psi[b\circ(\tau\restriction V)].$$

Kako je $(b\circ(\tau\restriction V))\restriction V(\Phi) = c\restriction V(\Phi)$, to će biti

$$\models_{\mathfrak{A}} \Psi[c],$$

odakle, po definiciji (6.4), sledi

$$\models_{\mathfrak{A}} (\forall x)\Psi[a\circ(\tau\restriction V)].$$

Obrnuto, neka $\models_{\mathfrak{A}} (\forall x)\Psi[a\circ(\tau \restriction V)]$. Tada, za svako $b \in A^V$, takvo da $b\restriction(V \setminus rang\, x) = (a\circ(\tau\restriction V))\restriction(V \setminus rang\, x)$ važi

$$\models_{\mathfrak{A}} \Psi[b].$$

Neka je $c \in A^V$ takvo da $c\restriction(V \setminus rang\,(\tau\circ x)) = a\restriction(V \setminus rang\,(\tau\circ x))$ i $b = c\circ\tau \cup a\restriction (V \setminus V(\Phi))$. Tada $b\restriction(V \setminus rang\, x) = (a\circ(\tau\restriction V))\restriction(V \setminus rang\, x)$, pa

$$\models_{\mathfrak{A}} \Psi[b].$$

Kako je $b\restriction V(\Phi) = (c\circ(\tau\restriction V))\restriction V(\Phi)$, to će biti

$$\models_{\mathfrak{A}} \Psi[c\circ(\tau\restriction V)],$$

pa po indukcijskoj hipotezi,

$$\models_{\mathfrak{A}} S(\tau)\Psi[c],$$

odnosno, po definiciji (6.4),

$$\models_{\mathfrak{A}} (\forall\tau\circ x)S(\tau)\Psi[a], \text{ tj.}$$

$$\models_{\mathfrak{A}} S(\tau)(\forall x)\Psi[a].$$

Neka je $\Phi = (Px \geq r)\Psi$, x niz različitih varijabli dužine α, za $\overline{\overline{\alpha}} < \mathfrak{m}$. Treba pokazati

$$\models_{\mathfrak{A}} S(\tau)(Px \geq r)\Psi[a] \text{ akko } \models_{\mathfrak{A}} (Px \geq r)\Psi[a\circ(\tau \restriction V)], \text{ tj.}$$

$$\models_{\mathfrak{A}} (P\tau\circ x \geq r)S(\tau)\Psi[a] \text{ akko } \models_{\mathfrak{A}} (Px \geq r)\Psi[a\circ(\tau \restriction V)], \text{ odnosno}$$

$$\mu_\alpha\{b\circ\tau\circ x \mid b \restriction (V \setminus rang\,(\tau\circ x)) = a \restriction (V \setminus rang\,(\tau\circ x)), \models_{\mathfrak{A}} S(\tau)\Psi[b]\} \geq r$$

akko

$$\mu_\alpha\{c\circ x \mid c \restriction (V \setminus rang\,x) = (a\circ(\tau \restriction V)) \restriction (V \setminus rang\,x)), \models_{\mathfrak{A}} \Psi[c]\} \geq r.$$

Pokazaćemo da su skupovi

$$S = \{b\circ\tau\circ x \mid b \restriction (V \setminus rang\,(\tau\circ x)) = a \restriction (V \setminus rang\,(\tau\circ x)), \models_{\mathfrak{A}} S(\tau)\Psi[b]\}$$

i

$$T = \{c\circ x \mid c \restriction (V \setminus rang\,x) = (a\circ(\tau \restriction V)) \restriction (V \setminus rang\,x)), \models_{\mathfrak{A}} \Psi[c]\}$$

jednaki.

Neka $c\circ x \in T$ i $b = c\circ\tau^{-1} \cup a \restriction (V \setminus \tau(V(\Phi)))$. Tada

$$c \restriction (V \setminus rang\,x) = (a\circ(\tau \restriction V)) \restriction (V \setminus rang\,x)) \text{ i } \models_{\mathfrak{A}} \Psi[c].$$

Kako je $c \restriction V(\Psi) = (b\circ(\tau \restriction V)) \restriction V(\Psi)$ imaćemo

$$\models_{\mathfrak{A}} \Psi[b\circ(\tau \restriction V)],$$

odakle po indukcijskoj hipotezi sledi

$$\models_{\mathfrak{A}} S(\tau)\Psi[b].$$

Kako je još $b \restriction (V \setminus rang\,(\tau\circ x)) = a \restriction (V \setminus rang\,(\tau\circ x))$, to će biti $b\circ\tau\circ x \in S$, pa, zbog $c\circ x = b\circ\tau\circ x$, sledi da $c\circ x \in S$.

Obrnuto, neka $b\circ\tau\circ x \in S$, tj.

$$b \restriction (V \setminus rang\,(\tau\circ x)) = a \restriction (V \setminus rang\,(\tau\circ x)) \text{ i } \models_{\mathfrak{A}} S(\tau)\Psi[b],$$

i neka $c = b\circ\tau \cup a \restriction (V \setminus V(\Phi))$. Tada, po indukcijskoj hipotezi,

$$\models_{\mathfrak{A}} \Psi[b\circ(\tau \restriction V)].$$

S obzirom da $c \restriction V(\Phi) = (b\circ(\tau \restriction V)) \restriction V(\Phi)$, to će biti

$$\models_{\mathfrak{A}} \Psi[c],$$

što zajedno sa $c \restriction (V \setminus rang\,x) = (a\circ(\tau \restriction V)) \restriction (V \setminus rang\,x)$ daje $c\circ x \in T$, tj. $b\circ\tau\circ x \in T$.

(iv) Slično dokazu pod (iii). Jedini interesantni slučajevi su kada $\Phi = (\forall x)\Psi$ i $\Phi = (Px \geq r)\Psi$.

Neka $\Phi = (\forall x)\Psi$ i $\models_{\mathfrak{A}} S_f(\tau)(\forall x)\Psi[a]$, tj. $\models_{\mathfrak{A}} (\forall x)S_f\,(\tau\restriction V_f(\Psi))\,\Psi[a]$, odnosno, za svako $b \in A^V$ takvo da $b\restriction(V \setminus rang\,x) = a\restriction(V \setminus rang\,x)$ važi

$$\models_{\mathfrak{A}} S_f\,(\tau\restriction V_f(\Psi))\,\Psi[b].$$

Neka je $c \in A^V$ takvo da $c\restriction(V \setminus rang\,x) = (a\circ(\tau\restriction V))\restriction(V \setminus rang\,x)$ i neka $b = c\restriction rang\,x \cup a\restriction(V \setminus rang\,x)$. Tada, po indukcijskoj hipotezi,

$$\models_{\mathfrak{A}} \Psi[b\circ((\tau\restriction V_f(\Psi))\restriction V)],$$

odnosno

$$\models_{\mathfrak{A}} \Psi[b\circ(\tau\restriction V)].$$

Kako je $b\circ(\tau\restriction V) = c\restriction rang\,x \cup (a\circ(\tau\restriction V))\restriction(V \setminus rang\,x) = c$ imaćemo

$$\models_{\mathfrak{A}} \Psi[c],$$

tj.

$$\models_{\mathfrak{A}} \Phi[a\circ(\tau\restriction V)].$$

Obrnuto, neka $\models_{\mathfrak{A}} (\forall x)\Psi[a\circ(\tau\restriction V]$, tj. za svako $b \in A^V$ takvo da $b\restriction(V\setminus rang\,x) = (a\circ(\tau\restriction V))\restriction(V \setminus rang\,x)$ važi

$$\models_{\mathfrak{A}} \Psi[b].$$

Neka $c \in A^V$, $c\restriction(V\setminus rang\,x) = a\restriction(V\setminus rang\,x)$ i $b = c\circ(\tau\restriction V)$. Tada $b\restriction(V\setminus rang\,x) = (a\circ(\tau\restriction V))\restriction(V \setminus rang\,x)$ pa

$$\models_{\mathfrak{A}} \Psi[b],$$

tj.

$$\models_{\mathfrak{A}} \Psi[c\circ(\tau\restriction V)].$$

Kako je $\tau\restriction V = (\tau\restriction V_f(\Psi))\restriction V$ imaćemo po indukcijskoj hipotezi

$$\models_{\mathfrak{A}} S_f\,(\tau\restriction V_f(\Psi))\,\Psi[c],$$

tj.

$$\models_{\mathfrak{A}} S_f\,(\tau\restriction V_f(\Psi))\,\Phi[a].$$

Neka je sada $\Phi = (Px \geq r)\Psi$. Treba pokazati

$$\models_{\mathfrak{A}} S_f(\tau)(Px \geq r)\Psi[a] \quad \text{akko} \quad \models_{\mathfrak{A}} (Px \geq r)\Psi[a\circ(\tau\restriction V)] \quad \text{tj.}$$

$$\models_{\mathfrak{A}} (Px \geq r)S_f(\tau\restriction V_f(\Psi))\Psi[a] \quad \text{akko} \quad \models_{\mathfrak{A}} (Px \geq r)\Psi[a\circ(\tau\restriction V)] \quad \text{tj.}$$

$\mu_\alpha\{b\circ x \mid b\restriction(V \setminus rang\,x) = a\restriction(V \setminus rang\,x), \models_{\mathfrak{A}} S_f(\tau\restriction V_f(\Psi))\Psi[b]\} \geq r$ akko
$\mu_\alpha\{c\circ x \mid c\restriction(V \setminus rang\,x) = (a\circ(\tau\restriction V))\restriction(V \setminus rang\,x), \models_{\mathfrak{A}} \Psi[c]\} \geq r$.

Pokazaćemo da su skupovi

$$S = \{b \circ x \mid b \upharpoonright (V \setminus rang\, x) = a \upharpoonright (V \setminus rang\, x), \models_{\mathfrak{A}} S_f(\tau \upharpoonright V_f(\Psi))\Psi[b]\}$$

i

$$T = \{c \circ x \mid c \upharpoonright (V \setminus rang\, x) = (a \circ (\tau \upharpoonright V)) \upharpoonright (V \setminus rang\, x), \models_{\mathfrak{A}} \Psi[c]\}$$

jednaki.

Ako $b \circ x \in S$, onda $b \upharpoonright (V \setminus rang\, x) = a \upharpoonright (V \setminus rang\, x)$ i $\models_{\mathfrak{A}} S_f(\tau \upharpoonright V_f(\Psi))\Psi[b]$. Kako $\tau : V_f(\Phi) \to V \setminus V_b(\Phi)$, to $(b \circ (\tau \upharpoonright V)) \upharpoonright (V \setminus rang\, x) = (a \circ (\tau \upharpoonright V)) \upharpoonright (V \setminus rang\, x)$. Još je po indukcijskoj hipotezi

$$\models_{\mathfrak{A}} \Psi[b \circ ((\tau \upharpoonright V_f(\Psi)) \upharpoonright V)],$$

odnosno

$$\models_{\mathfrak{A}} \Psi[b \circ (\tau \upharpoonright V)],$$

pa će biti $b \circ (\tau \upharpoonright V) \circ x \in T$. Pošo je $\tau \upharpoonright rang\, x$ identično preslikavanje $b \circ (\tau \upharpoonright V) \circ x = b \circ x$, pa $b \circ x \in T$.

Obrnuto, ako $c \circ x \in T$, onda $c \upharpoonright (V \setminus rang\, x) = (a \circ (\tau \upharpoonright V)) \upharpoonright (V \setminus rang\, x)$ i $\models_{\mathfrak{A}} \Psi[c]$. Neka $b = c \upharpoonright rang\, x \cup a \upharpoonright (V \setminus rang\, x)$, onda $c = b \circ (\tau \upharpoonright V)$, pa

$$\models_{\mathfrak{A}} \Psi[b \circ (\tau \upharpoonright V)],$$

odakle po indukcijskoj hipotezi sledi

$$\models_{\mathfrak{A}} S_f(\tau \upharpoonright V_f(\Psi))\Psi[b].$$

Kako je $b \upharpoonright (V \setminus rang\, x) = a \upharpoonright (V \setminus rang\, x)$, to će biti $b \circ x \in S$.

(v) Najpre pokažimo da u modelu $\mathfrak{A}$ važe sve aksiome. Zadržaćemo se na verovatnosnim aksiomama. Aksiome A_7 do A_{11} važe u svakom slabom verovatnosnom modelu, jer su to osobine konačno aditivne verovatnosne mere. Pokažimo A_{12}, tj. da za bilo koje $a \in A^V$

$$\models_{\mathfrak{A}} (\forall x)\Phi \to (Px \geq 1)\Phi[a].$$

Ako $\models_{\mathfrak{A}} (\forall x)\Phi[a]$, onda za svako $b \in A^V$ takvo da $b \upharpoonright (V \setminus rang\, x) = a \upharpoonright (V \setminus rang\, x)$ važi $\models_{\mathfrak{A}} \Phi[b]$, tj.

$$\text{za svako } b \in A^V,\ b \circ x \in \{c \circ x \mid c \upharpoonright (V \setminus rang\, x) = a \upharpoonright (V \setminus rang\, x), \models_{\mathfrak{A}} \Phi[c]\}.$$

Znači,

$$A^\alpha = \{b \circ x \mid b \in A^V\} = \{c \circ x \mid c \upharpoonright (V \setminus rang\, x) = a \upharpoonright (V \setminus rang\, x), \models_{\mathfrak{A}} \Phi[c]\},$$

pa je

$$\mu_\alpha\{c \circ x \mid c \upharpoonright (V \setminus rang\, x) = a \upharpoonright (V \setminus rang\, x), \models_{\mathfrak{A}} \Phi[c]\} = \mu_\alpha(A^\alpha) \geq 1, \text{ tj.}$$

$$\models_{\mathfrak{A}} (Px \geq 1)\Phi[a].$$

Jednostavno se, takodje, proverava da se od teorema koje važe u svakom slabom verovatnosnom modelu tipa ν, primenom pravila izvodjenja dobijaju formule koje takodje važe u svakom slabom verovatnosnom modelu tipa ν.

(vi) Sledi iz (v).

Leme potrebne za dokaz stava potpunosti

U ovom delu ćemo dokazati četiri leme potrebne za Henkinovski dokaz stava potpunosti.

Označimo sa V^* skup simbola takav da je $V^* \supset V$ i $V^* \cap P = \emptyset$. Neka $L^* = L(V^*, \nu, \mathfrak{m}, R)$ i F^* skup formula u L^*.

Formula Φ je V-formula u L^* ako $\Phi \in F^*$ i $V_b(\Phi) \subset V$. Formula Φ je V-rečenica u L^* ako $\Phi \in F^*$, $V_b(\Phi) \subset V$ i $V_f(\Phi) \subset V^* \setminus V$.

Lema 2.5. *Neka je F' skup svih V-formula u L^*. Tada*

$$\overline{\overline{F'}} = \sum_{\mathfrak{n}<\mathfrak{m}} \overline{\overline{V}}^{\mathfrak{n}} + \sum_{p\in P} \overline{\overline{\overline{\overline{V^*}}^{\nu(p)}}} + \aleph_0.$$

Dokaz.

Za svako $p \in P$, broj atomskih formula je $\overline{\overline{V^{*\nu(p)}}}$, pa je ukupan broj atomskih formula jednak $\sum_{p\in P} \overline{\overline{\overline{\overline{V^*}}^{\nu(p)}}}$ i važi $\sum_{p\in P} \overline{\overline{\overline{\overline{V^*}}^{\nu(p)}}} \le \overline{\overline{F'}}$. Nizova promenljivih $x \in V^\alpha$ za $\overline{\overline{\alpha}} < \mathfrak{m}$ ima $\sum_{\mathfrak{n}<\mathfrak{m}} \overline{\overline{V}}^{\mathfrak{n}}$, što predstavlja i broj univerzalnih i verovatnosnih kvantifikacija, pa važi $\sum_{\mathfrak{n}<\mathfrak{m}} \overline{\overline{V}}^{\mathfrak{n}} \le \overline{\overline{F'}}$. Kako iskaznih veznika ima konačno mnogo i u svakoj formuli se pojavljuju konačno mnogo puta, važiće $\aleph_0 \le \overline{\overline{F'}}$. Iz svega ovoga dobijamo

$$\sum_{\mathfrak{n}<\mathfrak{m}} \overline{\overline{V}}^{\mathfrak{n}} + \sum_{p\in P} \overline{\overline{\overline{\overline{V^*}}^{\nu(p)}}} + \aleph_0 \le \overline{\overline{F'}}.$$

Obrnuto, kako je svaka formula u F' konstruisana od konačno mnogo atomskih formula, iskaznih veznika, univerzalnih i verovatnosnih kvantifikatora, to će broj formula biti manji ili jednak broju konačnih podskupova skupa koji sadrži sve atomske formule, sve univerzalne i verovatnosne kvantore i sve veznike, a taj broj je $\sum_{\mathfrak{n}<\mathfrak{m}} \overline{\overline{V}}^{\mathfrak{n}} + \sum_{p\in P} \overline{\overline{\overline{\overline{V^*}}^{\nu(p)}}} + \aleph_0$. Znači, važi i

$$\overline{\overline{F'}} \le \sum_{\mathfrak{n}<\mathfrak{m}} \overline{\overline{V}}^{\mathfrak{n}} + \sum_{p\in P} \overline{\overline{\overline{\overline{V^*}}^{\nu(p)}}} + \aleph_0.$$

Lema 2.6. *Neka je $\Gamma \subset F$. Tada, Γ je konzistentan skup formula u L^* akko Γ je konzistentan skup formula u L.*

Dokaz.

Ako $\Gamma \vdash_L \bot$, onda $\Gamma \vdash_{L^*} \bot$, jer je svaki dokaz u L takodje dokaz i u L^*.

Obrnuto, neka $\Gamma \vdash_{L^*} \bot$, tj. postoji niz formula $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ iz Γ tako da

$$\vdash_{L^*} \Phi_1 \wedge \cdots \wedge \Phi_n \to \bot.$$

Neka je $\Phi = \Phi_1 \wedge \cdots \wedge \Phi_n \to \bot$, $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$ dokaz za $\Phi = \Psi_m$ u L^* i $X = V(\Psi_1) \cup \cdots \cup V(\Psi_m)$. Jasno, $X \subset V^*$. Medjutim, kako u $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$ ima konačno mnogo predikata $p \in P$ i za svaki je $\overline{\overline{\nu(p)}} \leq \overline{\overline{V}}$ i konačno mnogo kvantifikacija po $\leq \overline{\overline{V}}$ promenljivih, to će biti $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{V}}$, pa postoji $\tau : X \xrightarrow{1-1} V$. Tada, po lemi 2.2, niz $S(\tau)\Psi_1, \ldots, S(\tau)\Psi_m$ je dokaz za $S(\tau)\Phi$ u L^*. Pošto formule $S(\tau)\Psi_1, \ldots, S(\tau)\Psi_m$ pripadaju F ovo je dokaz i u L. Znači,

$$\vdash_L S(\tau)\Phi.$$

Neka $\sigma = \tau \restriction V(\Phi)$. Tada $S(\sigma)\Phi = S(\tau)\Phi$. Pošto $\Phi \in F$, imamo $V(\Phi) \subset V$, a kako je još σ 1-1 preslikavanje, dobijamo da $\sigma^{-1} : V(S(\sigma)\Phi) \xrightarrow{1-1} V$. Po pravilu supstitucije imamo

$$\vdash_L S(\sigma^{-1})S(\sigma)\Phi, \text{ tj.}$$

$$\vdash_L \Phi,$$

što znači $\Gamma \vdash_L \perp$.

Lema 2.7. *Svaki konzistentan skup Γ V-rečenica u L^* se može raširiti u maksimalno konzistentan skup V-rečenica u L^*.*

Dokaz.

Neka je $\{\Psi_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$ skup svih V-rečenica u L^*. Sada širimo, korak po korak, skup Γ dodajući mu one V-rečenice koje ne narušavaju njegovu konzistentnost. Zapravo, definišemo niz $\Gamma_\beta, \beta \leq \alpha$, na sledeći način. Stavimo

$\Gamma_0 = \Gamma$,

$\Gamma_\beta = \begin{cases} \Gamma_\gamma, & \text{ako } \Gamma_\gamma \cup \{\Psi_\gamma\} \vdash_{L^*} \perp \\ \Gamma_\gamma \cup \{\Psi_\gamma\}, & \text{inače} \end{cases}$, ako $\beta = \gamma + 1$.

$\Gamma_\beta = \bigcup_{\gamma < \beta} \Gamma_\gamma$, ako je β granični ordinal različit od nule.

Ako $\Gamma_\alpha \vdash_{L^*} \perp$, onda, zbog finitnosti dokaza, postoji $\beta < \alpha$ tako da $\Gamma_\beta \vdash_{L^*} \perp$ što je nemoguće po konstrukciji Γ_β. Znači, Γ_α je konzistentan. Pretpostavimo da postoji V-rečenica Φ takva da $\Phi \notin \Gamma_\alpha$. Tada $\Phi = \Psi_\beta$, za neko $\beta < \alpha$. Kako $\Psi_\beta \notin \Gamma_{\beta+1}$, to $\Gamma_\beta \cup \{\Psi_\beta\} \vdash_{L^*} \perp$, pa $\Gamma_\alpha \cup \{\Psi_\beta\} \vdash_{L^*} \perp$, što znači da je Γ_α maksimalan konzistentan skup V-rečenica u L^*.

Neka je $V^* \neq V$ i Γ maksimalno konzistentan skup V-rečenica u L^*. Označimo sa $\mathfrak{A}(\Gamma, V)$ strukturu definisanu na sledeći način:

$$A = V^* \setminus V \tag{7.1}$$

$$R_p = \{x \in A^{\nu(p)} \mid p(x) \in \Gamma\}, \text{ za svako } p \in P \tag{7.2}$$

$$\mu_\alpha\{b \circ x \mid S_f(b)\Phi \in \Gamma, b \restriction (V \setminus rang\, x) = a \restriction (V \setminus rang\, x)\} = \max\{r \mid S_f(a)(Px \geq r)\Phi \in \Gamma\} \tag{7.3}$$

za svaku $V-$formulu Φ, svako $a \in A^V$ i svaki niz promenljivih $x \in V^\alpha$.

Lema 2.8. *Neka je*

(i) Γ maksimalno konzistentan skup V-rečenica u L^*,

(ii) za svaku V-rečenicu $(\forall x)\Psi$ postoji $\tau : rang\, x \longrightarrow V^* \setminus V$ tako da $S_f(\tau)\Psi \to (\forall x)\Psi \in \Gamma$.

Tada

(a) $\mathfrak{A}(\Gamma, V)$ je slaba verovatnosna struktura tipa ν,

(b) za svaku V-formulu Φ u L^* i svaku funkciju $b \in (V^* \setminus V)^V$ važi

$$\models_{\mathfrak{A}} \Phi[b \restriction V^*] \text{ akko } S_f(b)\Phi \in \Gamma.$$

Dokaz.

(a) Dokažimo najpre da je μ_α dobro definisana funkcija i da je to konačno aditivna mera na A^α.

(1) μ_α je dobro definisana funkcija. Pokažimo da mera nekog podskupa od A^α ne zavisi od izbora formule kojom je taj skup definisan. Neka je

$$\{b \circ x \mid S_f(b)\Phi \in \Gamma,\ b \restriction (V \setminus rang\, x) = a \restriction (V \setminus rang\, x)\} =$$
$$\{b \circ x \mid S_f(b)\Psi \in \Gamma,\ b \restriction (V \setminus rang\, x) = a \restriction (V \setminus rang\, x)\}.$$

Tada, za svako $b \in A^V$ takvo da je $b \restriction (V \setminus rang\, x) = a \restriction (V \setminus rang\, x)$, ako $S_f(b)\Phi \in \Gamma$ onda $S_f(b)\Psi \in \Gamma$, odnosno

$$S_f(b)(\Phi \to \Psi) \in \Gamma.$$

Po (ii), za $V-$rečenicu $(\forall x)S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))(\Phi \to \Psi)$ postoji $\tau \in A^{rang\, x}$ tako da

$$S_f(\tau)S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))(\Phi \to \Psi) \to (\forall x)S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))(\Phi \to \Psi) \in \Gamma.$$

Odavde, za $b = \tau \cup a \restriction (V \setminus rang\, x)$ imamo

$$S_f(b)(\Phi \to \Psi) \to (\forall x)S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))(\Phi \to \Psi) \in \Gamma,$$

pa, po R_1 dobijamo

$$(\forall x)S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))(\Phi \to \Psi) \in \Gamma.$$

Po A_{12} je dalje

$$(Px \geq 1)S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))(\Phi \to \Psi) \in \Gamma.$$

Ako je

$$\mu_\alpha\{b \circ x \mid S_f(b)\Phi \in \Gamma,\ b \restriction (V \setminus rang\, x) = a \restriction (V \setminus rang\, x)\} \neq$$
$$\mu_\alpha\{b \circ x \mid S_f(b)\Psi \in \Gamma\ b \restriction (V \setminus rang\, x) = a \restriction (V \setminus rang\, x)\},$$

onda postoji $s \in R$ tako da

$$(Px \geq s)S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Phi \in \Gamma \text{ i } (Px \geq s)S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Psi \notin \Gamma.$$

Dakle, imamo

$$(Px \geq s)S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Phi \wedge \neg(Px \geq s)S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Psi \wedge$$
$$(Px \geq 1)S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))(\neg\Phi \vee \Psi) \in \Gamma.$$

Medjutim, po A_8

$$(Px \leq 1 - s)S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\neg\Phi \wedge (Px < s)S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Psi \wedge$$
$$\neg(Px < 1)S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))(\neg\Phi \vee \Psi) \notin \Gamma$$

tj.

$$(Px \geq s)S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Phi \wedge \neg(Px \geq s)S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Psi \wedge$$
$$(Px \geq 1)S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))(\neg\Phi \vee \Psi) \notin \Gamma$$

što je u kontradikciji sa prethodnim.

(2) $\mu_\alpha(A^\alpha) = 1$ i $\mu_\alpha\emptyset = 0$.

Kako je $A^\alpha = \{b \circ x \mid S_f(\Phi \vee \neg\Phi) \in \Gamma,\ b \restriction (V \setminus rang\, x) = a \restriction (V \setminus rang\, x)\}$, imamo

$$\begin{aligned}\mu_\alpha(A^\alpha) &= \mu_\alpha\{b \circ x \mid S_f(b)(\Phi \vee \neg\Phi) \in \Gamma,\ b \restriction (V \setminus rang\, x) = a \restriction (V \setminus rang\, x)\}\\ &= \max\{r \mid S_f(a)(Px \geq r)(\Phi \vee \neg\Phi) \in \Gamma\}.\end{aligned}$$

Pošto $S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Phi \vee \neg S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Phi \in \Gamma$, po R_2

$$(\forall x)(S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Phi \vee \neg S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Phi) \in \Gamma,$$

pa po A_{12}

$$(Px \geq 1)(S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Phi \vee \neg S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Phi) \in \Gamma,$$

odnosno

$$S_f(a)(Px \geq 1)(\Phi \vee \neg\Phi) \in \Gamma,$$

odakle je $\mu_\alpha A^\alpha = 1$.

Pokažimo sada da $\mu_\alpha\emptyset = 0$. Jasno je da je

$$\emptyset = \{b \circ x \mid S_f(b)(\Phi \wedge \neg\Phi) \in \Gamma,\ b \restriction (V \setminus rang\, x) = a \restriction (V \setminus rang\, x)\}.$$

Pretpostavimo da postoji $r > 0$ tako da $S_f(a)(Px \geq r)(\Phi \wedge \neg\Phi) \in \Gamma$. Tada

$$(Px \leq 1 - r)\neg(S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Phi \wedge \neg S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Phi) \in \Gamma, \text{ tj.}$$

$$\neg(Px > 1 - r)(S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Phi \vee \neg S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Phi) \in \Gamma,$$

pa je

$$(Px > 1 - r)S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Phi \vee \neg S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Phi \notin \Gamma,$$

odakle, po aksiomi A_{10} sledi

$$(Px \geq 1)S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Phi \vee \neg S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Phi \notin \Gamma,$$

jer $1 - r < 1$. Znači, dobijamo $S_f(a)(Px \geq 1)(\Phi \vee \neg\Phi) \notin \Gamma$, što je u kontradikciji sa prethodnim.

(3) Funkcija μ_α je nenegativna.

Iz A_5 sledi da $(Px \geq 0)S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Phi \in \Gamma$, odnosno $S_f(a)(Px \geq 0)\Phi \in \Gamma$ za svaku V-formulu Φ i svako $a \in A^V$, pa je

$$\mu_\alpha\{b \circ x \mid S_f(b)\Phi \in \Gamma,\ b \restriction (V \setminus rang\, x) = a \restriction (V \setminus rang\, x)\} \geq 0.$$

(4) $\mu_\alpha(A^\alpha \setminus B) = 1 - \mu_\alpha B$, za svaki skup $B = \{b \circ x \mid S_f(b)\Phi \in \Gamma,\ b \restriction (V \setminus rang\, x) = a \restriction (V \setminus rang\, x)\}$.

Ako je $B = \{b \circ x \mid S_f(b)\Phi \in \Gamma,\ b \restriction (V \setminus rang\, x) = a \restriction (V \setminus rang\, x)\}$, tada

$$\begin{aligned} A^\alpha \setminus B &= \{b \circ x \mid S_f(b)\Phi \notin \Gamma,\ b \restriction (V \setminus rang\, x) = a \restriction (V \setminus rang\, x)\} \\ &= \{b \circ x \mid S_f(b)\neg\Phi \in \Gamma,\ b \restriction (V \setminus rang\, x) = a \restriction (V \setminus rang\, x)\}. \end{aligned}$$

Neka $\mu_\alpha B = s$, $0 < s < 1$. Tada $\max\{r \mid S_f(a)(Px \geq r)\Phi \in \Gamma\} = s$, odakle

$$(Px \geq s)S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Phi \in \Gamma \text{ i } (Px \geq s^+)S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Phi \notin \Gamma.$$

Po A_{11} sledi

$$\neg(Px > s)S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Phi \in \Gamma$$

odakle

$$(Px \geq 1 - s)\neg S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Phi \in \Gamma,$$

odnosno

$$S_f(a)(Px \geq 1 - s)\neg\Phi \in \Gamma,$$

što znači da $1 - s \in \{r \mid S_f(a)(Px \geq r)\neg\Phi \in \Gamma\}$, tj. $\mu_\alpha(A^\alpha \setminus B) \geq 1 - s$. Ako pretpostavimo da postoji $t > 1 - s$ tako da $S_f(a)(Px \geq t)\neg\Phi \in \Gamma$, onda, po A_{10}

$$(Px > 1 - s)\neg S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Phi \in \Gamma,$$

pa

$$(Px \leq 1 - s)\neg S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Phi \notin \Gamma \text{ tj.}$$

$$(Px \geq s)S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Phi \notin \Gamma,$$

što je kontradikcija sa $\mu_\alpha B = s$.

Neka $\mu_\alpha B = 0$ i $\mu_\alpha(A^\alpha \setminus B) \neq 1$, onda $S_f(a)(Px \geq 1)\neg\Phi \notin \Gamma$, odakle

$$(Px < 1)\neg S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Phi \in \Gamma,$$

odnosno

$$(Px > 0)S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Phi \in \Gamma.$$

Odavde, po A_{11} sledi

$$(Px \geq 0^+)S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Phi \in \Gamma,$$

što je kontradikcija sa pretpostavkom $\mu_\alpha B = 0$. Slično, kada $\mu_\alpha B = 1$.

(5) μ_α je monotono rastuća funkcija.

Neka je $C = \{b \circ x \mid S_f(b)\Phi \in \Gamma,\ b \upharpoonright (V \setminus rang\, x) = a \upharpoonright (V \setminus rang\, x)\}$, $D = \{b \circ x \mid S_f(b)\Psi \in \Gamma,\ b \upharpoonright (V \setminus rang\, x) = a \upharpoonright (V \setminus rang\, x)\}$ i $C \subset D$. Tada, kao u (1),

$$(Px \geq 1)(S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Phi \to S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Psi) \in \Gamma.$$

Neka $\mu_\alpha C = s, \mu_\alpha D = t$ i $t < s$. Tada

$$(Px \geq s)S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Phi \in \Gamma \text{ i } (Px \geq s)S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Psi \notin \Gamma, \text{ tj.}$$

$$(Px \leq 1 - s)\neg S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Phi \in \Gamma \text{ i } (Px < s)S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Psi \in \Gamma,$$

odakle po A_8 sledi

$$(Px < 1)(\neg S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Phi \vee S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Psi) \in \Gamma$$

što je kontradikcija sa

$$(Px \geq 1)(S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Phi \to S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Psi) \in \Gamma.$$

(6) μ_α je konačno aditivna funkcija.

Neka je $C = \{b \circ x \mid S_f(b)\Phi \in \Gamma,\ b \upharpoonright (V \setminus rang\, x) = a \upharpoonright (V \setminus rang\, x)\}$, $D = \{b \circ x \mid S_f(b)\Psi \in \Gamma,\ b \upharpoonright (V \setminus rang\, x) = a \upharpoonright (V \setminus rang\, x)\}$, $C \cap D = \emptyset$, $\mu_\alpha C = s$ i $\mu_\alpha D = t$. Tada

$$(Px \geq s)S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Phi \in \Gamma \text{ i } (Px \geq t)S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Psi \in \Gamma.$$

Iz $C \cap D = \emptyset$ sledi

$$(Px \geq 1)\neg(S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Phi \wedge S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Psi) \in \Gamma$$

pa, po A_7, imamo

$$(Px \geq \min(1, s + t))(S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Phi \vee S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Psi) \in \Gamma.$$

Kako je $C \subset A \setminus D$, to je $\mu_\alpha C \leq 1 - t$, odakle $s + t \leq 1$, pa

$$(Px \geq s + t)(S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Phi \vee S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Psi) \in \Gamma.$$

Pokažimo još da

$$(Px \geq (s + t)^+)(S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Phi \vee S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Psi) \notin \Gamma.$$

Iz $(Px \geq s^+)S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Phi \notin \Gamma$ sledi

$$\neg(Px \geq s^+)S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Phi \in \Gamma, \text{ tj. } (Px < s^+)S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Phi \in \Gamma,$$

pa, po A_{11},

$$(Px \leq s)S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Phi \in \Gamma.$$

Takodje, iz $(Px \geq t^+)S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Psi \notin \Gamma$ dobijamo

$$(Px < t^+)S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Psi \in \Gamma,$$

pa, po A_8 imamo

$$(Px < \min\{1, s + t^+\})(S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Phi \vee S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Psi) \in \Gamma.$$

Ako je $s < 1 - t$, onda $t^+ \leq 1 - s$, pa $\min\{1, s + t^+\} = s + t^+$ odakle

$$(Px < s + t^+)(S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Phi \vee S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Psi) \in \Gamma, \text{ tj.}$$

$$(Px \geq s + t^+)(S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Phi \vee S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Psi) \notin \Gamma.$$

Na kraju, odavde je

$$S_f(a)(Px \geq s + t^+)(\Phi \vee \Psi) \notin \Gamma.$$

Pokažimo da $s + t^+ = (s + t)^+$. Svakako je $(s + t)^+ \leq s + t^+$. Ako

$$s + t < (s + t)^+ < s + t^+,$$

onda

$$1 - (s + t) > 1 - (s + t)^+ > 1 - (s + t^+),$$

pa

$$s + 1 - (s + t) > s + 1 - (s + t)^+ > s + 1 - (s + t^+), \text{ tj.}$$

$$1 - t > 1 - (s + t)^+ + s > 1 - t^+.$$

Odavde

$$t < (s + t)^+ - s < t^+$$

što je kontradikcija sa definicijom t^+.

Ako $s = t + 1$, onda $\min\{1, s + t^+\} = 1$, odakle je

$$(Px < 1)(S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Phi \vee S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Psi) \in \Gamma,$$

odnosno

$$S_f(a)(Px \geq 1)(\Phi \vee \Psi) \notin \Gamma.$$

S druge strane, pošto

$$(Px \geq t + s)(S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Phi \vee S_f(a \upharpoonright (V \setminus rang\, x))\Psi) \in \Gamma \quad \text{i} \quad t + s = 1,$$

onda

$$(Px \geq 1)(S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Phi \vee S_f(a \restriction (V \setminus rang\, x))\Psi) \in \Gamma,$$

što je kontradikcija sa prethodnim.

(b) Indukcijom po složenosti formule Φ dokazaćemo

$$\models_{\mathfrak{A}} \Phi[b \restriction V^*] \quad \text{akko} \quad S_f(b)\Phi \in \Gamma.$$

Odatle, iz definicije mere μ_α i konačnosti skupa R slediće da je skup $\{a \circ x \mid a \restriction (V^* \setminus rang\, x) = b \restriction (V^* \setminus rang\, x), \models_{\mathfrak{A}} \Phi[a]\}$ μ_α−merljiv za svaku V−formulu Φ, svako $b \in A^{V^*}$ i svaki niz različitih promenljivih $x \in V^\alpha$, tj. da je $\mathfrak{A}$ slaba verovatnosna struktura.

Neka $\Phi = p(x)$, $b \in A^V$, $x \in V^{\nu(p)}$. Tada

$$\begin{aligned} \models_{\mathfrak{A}} p(x)[b \restriction V^*] & \text{ akko } b \restriction V^* \circ x \in R_p, \text{ po definiciji (6.1)},\\ & \text{ akko } b \circ x \in R_p\\ & \text{ akko } p(b \circ x) \in \Gamma, \text{ po definiciji } R_p,\\ & \text{ akko } S_f(b)p(x) \in \Gamma, \text{ po (5.1)}. \end{aligned}$$

Neka $\Phi = \neg\Psi$ i za Ψ važi tvrdjenje (b). Onda

$$\begin{aligned} \models_{\mathfrak{A}} \neg\Psi[b \restriction V^*] & \text{ akko nije } \models_{\mathfrak{A}} \Psi[b \restriction V^*], \text{ po definiciji (6.2)},\\ & \text{ akko } S_f(b)\Psi \notin \Gamma, \text{ po indukcijskoj hipotezi},\\ & \text{ akko } S_f(b)\neg\Psi \in \Gamma, \text{ po (5.2)}. \end{aligned}$$

Neka $\Phi = \Psi \vee \Theta$ i za Ψ i Θ važi tvrdjenje (b). Onda

$$\begin{aligned} \models_{\mathfrak{A}} (\Psi \vee \Theta)[b \restriction V^*] & \text{ akko } \models_{\mathfrak{A}} \Psi[b \restriction V^*] \text{ ili } \models_{\mathfrak{A}} \Theta[b \restriction V^*], \text{ po definiciji (6.3)},\\ & \text{ akko } S_f(b)\Psi \in \Gamma \text{ ili } S_f(b)\Theta \in \Gamma, \text{ po indukcijskoj hipotezi},\\ & \text{ akko } S_f(b)(\Psi \vee \Theta) \in \Gamma, \text{ po (5.3)}. \end{aligned}$$

Neka je $\Phi = (\forall x)\Psi$, za Ψ važi tvrdjenje i $\models_{\mathfrak{A}} (\forall x)\Psi[b \restriction V^*]$. Tada za svako $a \in A^{V^*}$, takvo da $a \restriction (V^* \setminus rang\, x) = b \restriction (V^* \setminus rang\, x)$ važi $\models_{\mathfrak{A}} \Psi[a]$. Treba pokazati da $S_f(b)(\forall x)\Psi \in \Gamma$, tj. $(\forall x)S_f(b \restriction V \setminus rang\, x)\Psi \in \Gamma$. Formula $(\forall x)S_f(b \restriction V \setminus rang\, x)\Psi$ je V-rečenica, pa, po (ii), postoji $\tau \in (V^* \setminus V)^{rang\, x}$ tako da

$$S_f(\tau)S_f(b \restriction V \setminus rang\, x)\Psi \to (\forall x)S_f(b \restriction V \setminus rang\, x)\Psi \in \Gamma.$$

Neka je $d = \tau \cup b \restriction (V^* \setminus rang\, x)$, tada $d \in (V^* \setminus V)^{V^*}$ i $d \restriction (V^* \setminus rang\, x) = b \restriction (V^* \setminus rang\, x)$, pa $\models_{\mathfrak{A}} \Psi[d]$. Po indukcijskoj hipotezi,

$$S_f(d \restriction V)\Psi \in \Gamma,$$

a, kako je

$$S_f(d \restriction V)\Psi = S_f(\tau)S_f(b \restriction (V \setminus rang\, x))\Psi,$$

sledi, po R_1,

$$(\forall x)S_f(b \restriction (V \setminus rang\, x)\Psi \in \Gamma.$$

Obrnuto, neka je

$$S_f(b)(\forall x)\Psi \in \Gamma, \text{ tj. } (\forall x)S_f\,(b \restriction (V \setminus rang\, x))\,\Psi \in \Gamma.$$

Neka je $c \in (V^* \setminus V)^{V^*}$ takvo da $c \restriction (V^* \setminus rang\, x) = b \restriction (V^* \setminus rang\, x)$. Tada

$$S_f(c)\Psi = S_f(c \restriction rang\, x)S_f\,(b \restriction (V^* \setminus rang\, x))\,\Psi.$$

Kako, po A_3 važi

$$(\forall x)S_f\,(b \restriction (V \setminus rang\, x)) \to S_f(c \restriction rang\, x)S_f\,(b \restriction (V^* \setminus rang\, x))\,\Psi \in \Gamma$$

slediće, po R_1,

$$S_f(c)\Psi \in \Gamma,$$

odnosno, po indukcijskoj hipotezi

$$\models_{\mathfrak{A}} \Psi[c].$$

Po definiciji (6.5) imamo

$$\models_{\mathfrak{A}} (\forall x)\Psi[b \restriction V^*].$$

Ako je $\Phi = (Px \geq r)\Psi$, onda

$\models_{\mathfrak{A}} (Px \geq r)\Psi[b \restriction V^*]$

akko $\mu_\alpha\{a \circ x \mid a \restriction (V^* \setminus rang\, x) = b \restriction (V^* \setminus rang\, x), \models_{\mathfrak{A}} \Psi[a], a \in A^{V^*}\} \geq r$

akko $\mu_\alpha\{c \circ x \mid c \restriction (V \setminus rang\, x) = b \restriction (V \setminus rang\, x), \models_{\mathfrak{A}} \Psi[c \restriction V^*], c \in A^V\} \geq r$

akko $\mu_\alpha\{c \circ x \mid c \restriction (V \setminus rang\, x) = b \restriction (V \setminus rang\, x), S_f(c)\Psi \in \Gamma, c \in A^V\} \geq r$

akko $\max\{s \mid S_f(b)(Px \geq s)\Psi \in \Gamma\} \geq r$

akko $S_f(b)(Px \geq r)\Psi \in \Gamma$.

Stav potpunosti

Teorema 2.9. *Ako je Γ konzistentan skup formula u L, onda je Γ zadovoljivo u nekom slabom verovatnosnom modelu $\mathfrak{A}$ tipa ν.*

Preciznije, ako je $\mathfrak{n}$ kardinal i važi

(1) $$\overline{\overline{F}} \leq \mathfrak{n},$$

i

(2) $$\text{za svako } p \in P, \quad \mathfrak{n} = \mathfrak{n}^{\overline{\overline{\nu(p)}}},$$

onda Γ ima model $\mathfrak{A}$ moći $\mathfrak{n}$.

Dokaz.

Neka je β najmanji ordinal moći $\mathfrak{n}$.

Neka $V' \subset V$ takav da $\overline{\overline{V'}} = \overline{\overline{V \setminus V'}}$ i $\tau_0 : V \xrightarrow{1-1} V'$. Ovakvi V' i τ_0 postoje jer je V, po pretpostavci, beskonačan skup. Još, neka je

$$\Gamma_0 = \{S(\tau_0)\Phi \mid \Phi \in \Gamma\}$$

Jasno, Γ_0 je skup V'-formula u L. Ako Γ_0 nije konzistentan skup formula, onda postoji niz formula $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ u Γ tako da

$$\vdash_L S(\tau_0)\Phi_1 \wedge \cdots \wedge S(\tau_0)\Phi_n \to \bot,$$

odnosno

$$\vdash_L S(\tau_0)(\Phi_1 \wedge \cdots \wedge \Phi_n \to \bot).$$

Ako stavimo $\sigma = \tau_0 \restriction V(\Phi_1 \wedge \cdots \wedge \Phi_n \to \bot)$, onda po R_3 imamo

$$\vdash_L S(\sigma^{-1})S(\tau)(\Phi_1 \wedge \cdots \wedge \Phi_n \to \bot)$$

tj.

$$\vdash_L \Phi_1 \wedge \cdots \wedge \Phi_n \to \bot$$

što je suprotno pretpostavci da je Γ konzistentan skup formula.

Neka je $\tau_1 : V \xrightarrow{1-1} V \setminus V'$ i

$$\Gamma_1 = \{S_f(\tau_1)\Phi \mid \Phi \in \Gamma_0\}.$$

Očigledno, Γ_1 je skup V'-rečenica u L. Ako $\Gamma_1 \vdash_L \bot$, onda postoji niz formula $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ u Γ_0 tako da

$$\vdash_L S_f(\tau_1)\Phi_1 \wedge \cdots \wedge S_f(\tau_1)\Phi_n \to \bot,$$

odnosno

$$\vdash_L S_f(\tau_1)(\Phi_1 \wedge \cdots \wedge \Phi_n \to \bot),$$

odakle, po R_4 imamo

$$\vdash_L \Phi_1 \wedge \cdots \wedge \Phi_n \to \bot$$

što je u suprotnosti sa konzistentnošću skupa Γ_0.

Za svako $v \in V'$ i svako $\gamma < \beta$ uvedimo novu promenljivu $w_{v\gamma}$. Neka je

$$\begin{aligned} &V^* = V \cup \{w_{v\gamma} \mid v \in V', \gamma < \beta\}, \\ &L^* = L(V^*, \nu, \mathfrak{m}, R), \\ &G^* - \text{ skup svih } V'\text{-rečenica u } L^*. \end{aligned}$$

Po lemi 2.5 i pretpostavci (1) imamo

$$\overline{\overline{F}} = \sum_{\mathfrak{p}<\mathfrak{m}} \overline{\overline{V}}^{\mathfrak{p}} + \sum_{p \in P} \overline{\overline{V}}^{\overline{\overline{\nu(p)}}} + \aleph_0 \quad \text{i} \quad \overline{\overline{F}} \leq \mathfrak{n},$$

odakle sledi

$$\sum_{\mathfrak{p}<\mathfrak{m}} \overline{\overline{V}}^{\mathfrak{p}} \leq \mathfrak{n}, \quad \overline{\overline{P}} < \mathfrak{n}, \quad \sum_{p\in P} \overline{\overline{V}}^{\overline{\overline{\nu(p)}}} \leq \mathfrak{n}, \quad \aleph_0 \leq \mathfrak{n}.$$

Pošto je $\overline{\overline{V^*}} = \overline{\overline{V}} + \mathfrak{n}$

(i) za $\overline{\overline{V^*}} = \overline{\overline{V}}$, imamo $\sum_{p\in P} \overline{\overline{V^*}}^{\overline{\overline{\nu(p)}}} = \sum_{p\in P} \overline{\overline{V}}^{\overline{\overline{\nu(p)}}} \leq \mathfrak{n}$,

(ii) za $\overline{\overline{V^*}} = \mathfrak{n}$ imamo $\sum_{p\in P} \overline{\overline{V^*}}^{\overline{\overline{\nu(p)}}} = \sum_{p\in P} \mathfrak{n}^{\overline{\overline{\nu(p)}}} = \sum_{p\in P} \mathfrak{n} = \mathfrak{n}$,

pa je, u svakom slučaju $\sum_{p\in P} \overline{\overline{V^*}}^{\overline{\overline{\nu(p)}}} \leq \mathfrak{n}$. Odavde i iz leme 3.1 dobijamo

$$\overline{\overline{G^*}} \leq \sum_{\mathfrak{p}<\mathfrak{m}} \overline{\overline{V}}^{\mathfrak{p}} + \sum_{p\in P} \overline{\overline{V^*}}^{\overline{\overline{\nu(p)}}} + \aleph_0 \leq \mathfrak{n},$$

što znači da postoji funkcija $\Psi : \beta \xrightarrow{1-1} G^*$, tj. da se skup G^* može prikazati u obliku

$$G^* = \{\Psi_\alpha \mid \alpha < \beta\}.$$

Za svako $\gamma \in \beta$ neka $\sigma_\gamma : V' \longrightarrow V^*$ tako da $\sigma_\gamma(v) = w_{v\gamma}$. Iz (1) i (2) sledi $\overline{\overline{\bigcup_{\alpha<\gamma} V(\Psi_\alpha)}} < \mathfrak{n}$, za svako $\gamma \in \beta$. Tada postoji funkcija $\lambda : \beta \xrightarrow{1-1} \beta$, tako da

$$\sigma_{\lambda(\gamma)}(V') \cap \bigcup_{\alpha\leq\gamma} V(\Psi_\alpha) = \emptyset, \quad \text{za svako } \gamma \in \beta.$$

Za svako $\gamma \in \beta$ definišimo V'-rečenicu Θ_γ na sledeći način:

$$\Theta_\gamma = \begin{cases} S_f(\sigma_{\lambda(\gamma)})\Phi, & \text{za } \Psi_\gamma = (\forall x)\Phi \\ \Psi_\gamma, & \text{ako } \Psi_\gamma \text{ nije oblika } (\forall x)\Phi. \end{cases}$$

Dakle, Θ_γ je, ako $\Psi_\gamma = (\forall x)\Phi$, formula koja se dobija iz Φ zamenom promenljivih iz $rang\, x$ novim promenljivim iz V^* tako odabranim da se ne pojavljuju u $\bigcup_{\alpha\leq\gamma} V(\Psi_\alpha)$. Neka je

$$\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{\Theta_\gamma \rightarrow \Psi_\gamma \mid \gamma \in \beta\}.$$

Jasno, Γ_2 je skup V'-rečenica u L^*. Pokažimo da je Γ_2 konzistentno u L^*. Pošto je Γ_1 konzistentno u L onda je, po lemi 2.6, konzistentno i u L^*. Pretpostavimo $\Gamma_2 \vdash_{L^*} \bot$. Tada postoji niz formula $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \in \Gamma_2$ tako da

$$\vdash_{L^*} \Phi_1 \wedge \cdots \wedge \Phi_n \rightarrow \bot.$$

Možemo $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ tako izabrati da je $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ minimalan nekonzistentan podskup od Γ_2. Bar jedan element skupa $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ ne pripada Γ_1 (inače bi Γ_1 bilo nekonzistentno), tj. je oblika $\Theta_\gamma \rightarrow \Psi_\gamma$. Stavimo

$$\Phi_n = \Theta_\alpha \rightarrow \Psi_\alpha, \quad \text{gde je} \quad \alpha = \max\{\gamma \in \beta \mid \Theta_\gamma \rightarrow \Psi_\gamma \in \{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}\}.$$

Neka je $\Phi = \Phi_1 \wedge \cdots \wedge \Phi_{n-1}$. Tada iz $\vdash_{L^*} \Phi \wedge \Phi_n \rightarrow \perp$ sledi $\vdash_{L^*} \Phi \rightarrow \neg\Phi_n$.

Ako $\Theta_\alpha = \Psi_\alpha$ onda $\vdash_{L^*} \Phi_n$, pa iz

$$\Phi \wedge \Phi_n \rightarrow \perp, \quad \vdash_{L^*} \Phi_n \quad \text{i} \quad \vdash_{L^*} ((\Phi \wedge \Phi_n \rightarrow \perp) \wedge \Phi_n) \rightarrow (\Phi \rightarrow \perp)$$

dobijamo $\vdash_{L^*} \Phi \rightarrow \perp$ što je suprotno pretpostavci da je svaki podskup od $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ konzistentan. Dakle, mora biti

$$\Psi_\alpha = (\forall x)\Psi_0, \quad \Theta_\alpha = S_f(\sigma_{\lambda(\alpha)})\Psi_0,$$

gde je Ψ_0 V'–formula u L^*, $x \in (V')^{\alpha_1}, \overline{\overline{\alpha_1}} < \mathfrak{m}$. Tada $\vdash_{L^*} \neg(\Theta_\alpha \rightarrow \Psi_\alpha) \rightarrow \Psi_\alpha$, što sa $\Phi \rightarrow \neg\Phi_n$ daje $\vdash_{L^*} \Phi \rightarrow \Theta_\alpha$, odnosno

$$\vdash_{L^*} \Phi \rightarrow S_f(\sigma_{\lambda(\alpha)})\Psi_0.$$

Odavde, zbog $V' \cap V_f(\Phi) = \emptyset$, imamo

$$S_f(\sigma_{\lambda(\alpha)})(\Phi \rightarrow \Psi_0).$$

Kako je $V_f(\Phi \rightarrow \Psi_0) \subset V(\Phi) \cup V(\Phi_n)$ i $(V(\Phi) \cup V(\Phi_n)) \cap \sigma_{\lambda(\alpha)}(V') = \emptyset$ sledi da je $V_f(\Phi \rightarrow \Psi_0) \cap \sigma_{\lambda(\alpha)}(V') = \emptyset$, pa je $\sigma_{\lambda(\alpha)} \upharpoonright V_f(\Phi \rightarrow \Psi_0)$ 1-1 funkcija. Sada, po pravilu R_4

$$\vdash_{L^*} \Phi \rightarrow \Psi_0,$$

a odavde, po R_2

$$\vdash_{L^*} (\forall x)(\Phi \rightarrow \Psi_0).$$

Pošto je $V' \cap V_f(\Phi) = \emptyset$ i $rang\, x \subset V'$, po aksiomi A_3 sledi

$$(\forall x)(\Phi \rightarrow \Psi_0) \rightarrow (\Phi \rightarrow (\forall x)\Psi_0),$$

odakle, po R_1

$$\vdash_{L^*} \Phi \rightarrow (\forall x)\Psi_0.$$

Iz $\vdash_{L^*} \Phi \rightarrow \Psi_\alpha$ i $\vdash_{L^*} \Phi \rightarrow \Theta_\alpha$ sledi $\vdash_{L^*} \Phi \rightarrow (\Theta_\alpha \rightarrow \Psi_\alpha)$, tj.

$$\vdash_{L^*} \Phi \rightarrow \Phi_n.$$

Kako je još $\vdash_{L^*} \Phi \wedge \Phi_n \rightarrow \perp$, na kraju dobijamo

$$\vdash_{L^*} \Phi \rightarrow \perp,$$

što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1}\}$ konzistentan skup formula u L^*.

Znači, F_2 je konzistentan skup V'-rečenica u L^* pa se, po lemi 2.7, može raširiti u maksimalno konzistentan skup F_3 V'–rečenica u L^*. Neka je

$$A = V^* \setminus V',$$

$$R_p = \{x \in A^{\nu(p)} \mid p(x) \in F_3\}$$

$$\mu_\alpha\{b \circ x \mid S_f(b)\Phi \in \Gamma_3, b \restriction (V \setminus rang\, x) = a \restriction (V \setminus rang\, x)\} =$$
$$\max\{r \mid S_f(a)(Px \geq r)\Phi \in \Gamma_3\}.$$

Tada, po lemi 2.8
$$\mathfrak{A} = (A,\ R_p,\ \mu_\alpha)_{p \in P, \overline{\overline{\alpha}} < \mathfrak{m}}$$
je slaba verovatnosna struktura tipa ν, i za svako $b \in A^V$ i svaku V'-formulu Φ u L^* važi
$$\models_{\mathfrak{A}} \Phi[b \restriction V^*] \quad \text{akko} \quad S_f(b)\Phi \in \Gamma_3.$$
Neka $\Phi_0 \in \Gamma_0$, tada $S_f(\tau_1)\Phi_0 \in \Gamma_1 \subset \Gamma_3$, i kako je $\tau_1 \in (V \setminus V')^{V'} \subset A^{V'}$, slediće
$$\models_{\mathfrak{A}} \Phi_0[\tau_1 \restriction V^*],$$
a pošto je Φ_0 formula u L imaćemo
$$\models_{\mathfrak{A}} \Phi_0[\tau_1 \restriction V].$$
Neka je $a = \tau_1 \circ \tau_0$. Tada $a : V \xrightarrow{1-1} V \setminus V'$, pa $a \in A^{V'}$. Ako $\Phi \in \Gamma$, onda $S(\tau_0)\Phi \in \Gamma_0$, pa, po prethodnom,
$$S(\tau_0)\Phi[\tau_1 \restriction V],$$
odakle, po teoremi 2.4(iii) sledi
$$\models_{\mathfrak{A}} \Phi[(\tau_1 \restriction V) \circ (\tau_0 \restriction V)].$$
Kako je $\tau_0 \restriction V = \tau_0$ na kraju ćemo imati
$$\models_{\mathfrak{A}} \Phi[\tau_1 \circ \tau_0],$$
tj.
$$\models_{\mathfrak{A}} \Phi[a].$$
Dakle, pokazali smo da je skup formula Γ zadovoljiv u modelu $\mathfrak{A}$. Pokažimo još da postoji model moći $\mathfrak{n}$.

Ako $\nu \notin \{0\}^P$, tj. postoji $p \in P$ takvo da je $\nu(p) \neq 0$, onda, iz $\sum_{p \in P} \overline{\overline{\overline{\overline{V}}^{\nu(p)}}} \leq \mathfrak{n}$ sledi da $\overline{\overline{V}} \leq \mathfrak{n}$. Na kraju, iz $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{n} + \overline{\overline{V}} = \mathfrak{n}$ imamo da je $\mathfrak{A}$ model moći $\mathfrak{n}$.

Ako $\nu \in \{0\}^P$, tj. za svako $p \in P$, $\nu(p) = 0$, onda je svako R_p nularna operacija na A, tj. neki element iz A. Tada, za svaki neprazan skup B, svako $b \in B^V$ i svaku formulu $\Phi \in \Gamma$ važiće $\models_{\mathfrak{B}} \Phi[b]$. Ako izaberemo B tako da bude moći $\mathfrak{n}$, onda dobijamo da je Γ zadovoljivo u modelu moći $\mathfrak{n}$.

Posledica 2.10. *(i) Skup formula Γ je zadovoljiv akko je konzistentan.*
(ii) Formula Φ je valjana akko je teorema.

Dokaz.

(i) sledi iz teorema 2.9 i 2.1(vi).

(ii) iz $\vdash_L \Phi$ sledi Φ je valjana, po teoremi 2.1(v). Obrnuto, ako je Φ valjana i nije teorema, onda $\{\neg\Phi\}$ je konzistentan skup formula, pa postoji slab verovatnosni model $\mathfrak{A}$ i element $a \in A^V$ tako da $\models_{\mathfrak{A}} \neg\Phi[a]$. Odavde $\not\models_L \Phi[a]$ što je suprotno pretpostavci da je Φ valjana.

Posledica 2.11. *Neka $\Gamma \subset F$. Tada, Γ je zadovoljivo akko svaki konačan podskup od Γ ima slab verovatnosni model.*

Dokaz.

Po teoremi 2.1(vi), ako svaki konačan podskup od Γ je zadovoljiv onda svaki konačan podskup od Γ je konzistentan. Tada je, zbog finitnosti dokaza, i Γ konzistentan skup formula, pa je zadovoljiv.

3. ALGEBRIZACIJA LOGIKE $\mathbf{L}(\mathbf{V}, \nu, \mathfrak{m}, \mathbf{R})$

Veza izmedju Bulovih algebri i iskazne logike, cilindričnih algebri i logike prvog reda, Keisler-ove $L(V, \nu, \mathfrak{m})$ logike i poliadičnih algebri [7] nas motiviše da uvedemo algebre koje ćemo zvati slabe verovatnosne poliadične algebre a koje će "odgovarati" našoj logici $L(V, \nu, \mathfrak{m}, R)$.

Poliadične algebre

Neka je β proizvoljan ordinal. *Poliadična algebra dimenzije* β, kraće PA_β, je algebarska struktura

$$\mathbb{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1, C_{(K)}, S_\tau),$$

gde su $+$ i $\cdot$ binarne operacije na B, $-$, $C_{(K)}$, S_τ unarne operacije na B, $0, 1 \in B$, i važe sledeće aksiome, za svako $x, y \in B$, svako $\sigma, \tau \in \beta^\beta$ i svaki niz različitih ordinala (K),(L) iz β dužine α, $\overline{\overline{\alpha}} \leq \overline{\overline{\beta}}$:

(P_1) $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ je Bulova algebra,

(P_2) $C_{(K)}0 = 0$,

(P_3) $x \leq C_{(K)}x$,

(P_4) $C_{(K)}(x \cdot C_{(M)}y) = C_{(K)}x \cdot C_{(M)}y$,

(P_5) $C_{(0)}x = x$,

(P_6) $C_{(K)}C_{(M)}x = C_{(K,M)}x$,

(P_7) $S_{id}x = x$,

(P_8) $S_{\sigma\circ\tau}x = S_\sigma S_\tau x$,

(P_9) $S_\sigma(x + y) = S_\sigma x + S_\sigma y$,

(P_{10}) $S_\sigma(-x) = -S_\sigma x$,

(P_{11}) $S_\sigma C_{(K)}x = S_\tau C_{(K)}x$, ako $\sigma \restriction (\beta \setminus rang\,(K)) = \tau \restriction (\beta \setminus rang\,(K))$,

(P_{12}) $C_{(K)}S_\tau x = S_\tau C_{(\tau^{-1}\circ(K))}x$ ako $\tau \restriction rang\,(\tau^{-1} \circ (K))$ je "1-1" preslikavanje.

(P_{13}) $C_{\tau\circ(K)}x = C_{(K)}x$, gde $\tau \restriction rang(K) : rang(K) \xrightarrow[na]{1-1} rang(K)$.

Neka je M skup, β proizvoljan ordinal. Za svako $(K) \in \beta^\alpha$, $\tau \in \beta^\beta$ i svako $X \subset M^\beta$ neka je:

$$c_{(K)}X = \{a \in M^\beta \mid \text{ postoji } b \in X \text{ tako da } b \restriction (\beta \setminus rang\,(K)) = a \restriction (\beta \setminus rang\,(K))\}$$

$$s_\tau X = \{a \in M^\beta \mid a \circ \tau \in X\}$$

tada $\mathbb{B} = (B, \cup, \cap, \sim, \emptyset, M^\beta, c_{(K)}, s_\tau)$ je *poliadična skupovna algebra dimenzije* β ako je B kolekcija podskupova od M^β zatvorena za sve gornje operacije. Lako se može proveriti da je svaka poliadična skupovna algebra dimenzije β jedna PA_β algebra. Poliadična algebra $\mathbb{B}$ dimenzije β je reprezentabilna ako je izomorfna subdirektnom proizvodu skupovnih poliadičnih algebri dimenzije β. Najinteresantniji problem u vezi sa cilindričnim algebrama je pitanje njihove reprezentabilnosti, pa evo nekih važnijih rezultata. Dokazi ovih teorema se mogu naći u [5].

Teorema 3.1. *Svaka poliadična algebra dimenzije 2 je reprezentabilna.*

Teorema 3.2. *Ako je $3 \leq \beta < \omega$, onda poliadična algebra $\mathbb{B}$ dimenzije β je reprezentabilna akko se može utopiti u atomičnu poliadičnu algebru dimenzije β u kojoj je svaki atom rektangularan, tj. za svaki atom x važi $C_{(K)}x\, C_{(L)}x = C_{(K\cap L)}x$, za svako $K, L \subset \beta$.*

Teorema 3.3. *Za $\beta \geq \omega$ svaka poliadična algebra dimenzije β je reprezentabilna.*

Slabe verovatnosne poliadične algebre

Struktura $(B, +, \cdot, -, 0, 1, C_{(K)}, C^r_{(K)}, S_\tau)$, gde je

$(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ Bulova algebra,

$C_{(K)}$ unarna operacija na B za svaki niz (K) ordinala iz β dužine α, gde je $\overline{\overline{\alpha}} \leq \overline{\overline{\beta}}$,

$C^r_{(K)}$ unarna operacija na B za svako $r \in R$ (R je kao u 1.), i svaki niz (K) različitih ordinala iz β dužine α, gde $\overline{\overline{\beta}} \geq \overline{\overline{\alpha}}$,

S_τ unarna operacija na B, za svako $\tau \in \beta^\beta$,

je slaba verovatnosna poliadična algebra dimenzije β, kraće WPP_β, ako je ispunjeno:

(WPP_1) $(B, +, \cdot, -, 0, 1, C_{(K)}, S_\tau)$ je poliadična algebra dimenzije β,

(WPP_2) (i) $C^r_{(\emptyset)}x = x, \quad r > 0,$

(ii) $C^r_{(K)}0 = 0, \quad r > 0,$

(WPP_3) $C^0_{(K)}x = 1,$

(WPP_4) $C^r_{(K)}x \leq C^s_{(K)}x, \quad r \geq s,$

(WPP_5) $C^r_{(K)}C^s_{(K)}x = C^s_{(K)}x, \quad r > 0,$

(WPP_6) (i) $-C^r_{(K)}x \cdot C^{1-s}_{(K)} - y \leq -C^{\min\{1,r+s\}}_{(K)}(x+y),$

(ii) $C^r_{(K)}x \cdot C^s_{(K)}y \cdot C^1_{(K)} - (x \cdot y) \leq C^{\min\{1,r+s\}}_{(K)}(x+y),$

(WPP_7) (i) $C^r_{(K)} - x \geq -C^{1-r}_{(K)}x,$

(ii) $C^s_{(K)} - x \leq -C^{1-r}_{(K)}x, \quad s > r,$

(iii) $-C^{1-s}_{(K)} - x \leq C^{s^+}_{(K)}x,$

(WPP_8) $S_\sigma C^r_{(K)}x = S_\tau C^r_{(K)}x, \quad$ ako $\sigma \restriction (\beta \setminus rang\,(K)) = \tau \restriction (\beta \setminus rang\,(K)),$

(WPP_9) $S_\sigma C^r_{\sigma^{-1}(K)}x = C^r_{(K)}S_\sigma x, \quad$ ako $\sigma \restriction \sigma^{-1}(K)$ je 1-1 preslikavanje,

(WPP_{10}) (i) $C^r_{(K)}x \leq C_{(K)}x, \quad r > 0,$

(ii) $C_{(K)}C^r_{(K_1)}x = C^r_{(K_1)}x, \quad rang\,K \subset rang\,K_1$

(iii) $C^r_{(K)}C_{(K_1)}x = C_{(K_1)}x, \quad r > 0,\ rang\,K \subset rang\,K_1,$

Operaciju $C_{(K)}$ ćemo zvati cilindrifikacija, $C^r_{(K)}$ verovatnosna cilindrifikacija a S_τ supstitucija.

Teorema 3.4. *U svakoj WPP_β algebri važi*

(1) $C^r_{(K)}1 = 1.$

(2) *Ako* $x \leq y$, *onda* $C^r_{(K)}x \leq C^r_{(K)}y.$

(3) $C^r_{(K)}x + C^r_{(K)}y \leq C^r_{(K)}(x+y).$

(4) $C^r_{(K)}(x \cdot y) \leq C^r_{(K)}x \cdot C^r_{(K)}y.$

(5) $C^1_{(K)}x = x$ *akko* $C_{(K)}x = x$.
(6) $S_\tau 1 = 1$.

Dokaz.

$$(1) \qquad C^1_{(K)}1 = C^{1-0}_{(K)} - 0 \geq -C^{0^+}_{(K)}0 = -0 = 1,$$

na osnovu $(WPP_7)(iii)$ i (WPP_2).
(2) Iz $x \leq y$ sledi $x \cdot -y = 0$ pa je, po $(WPP_6)(i)$ i (1), za $r > 0$

$$C^r_{(K)}x \cdot -C^r_{(K)}y = -C^r_{(K)}y \cdot C^{1-(1-r)}_{(K)} - (-x) \leq -C^1_{(K)}(y + -x) = -C^1_{(K)}1 = 0$$

odakle sledi $C^r_{(K)}x \leq C^r_{(K)}y$. Za $r = 0$ je trivijalno.
(3),(4) Neposredno iz (2) i $x \leq x + y$ i $x \cdot y \leq x$.
(5) Ako $C_{(K)}x = x$ onda, po (WPP_{10}) (iii), $C^1_{(K)}x = C^1_{(K)}C_{(K)}x = C_{(K)}x = x$. Slično na drugu stranu, uz korišćenje (WPP_{10}) (ii).
(6) Iz (1), (WPP_8) i (P_7) dobijamo

$$1 = C^1_{(\beta)}1 = S_{id}C^1_{(\beta)}1 = S_\tau C^1_{(\beta)}1 = S_\tau 1.$$

Tarski–Lindenbaumova algebra

Neka je V_1 skup novih promenljivih takav da $V_1 \cap V = \emptyset$, $V_1 \cap P = \emptyset$, $\overline{\overline{V_1}} = \overline{\overline{V}}$. Još neka je $V^* = V \cup V_1$, $\tau_0 : V^* \xrightarrow{1-1} V_1$, G skup svih rečenica u L^*, $H = \{\Phi \mid V_f(\Phi) \subset V,\ \Phi \in Form_{L^*}\}$ i $\Gamma \subset G$. Za svako $\Phi \in H$ neka je

$$\Phi/\Gamma = \{\Psi \mid \Gamma \vdash_{L^*} \Psi \leftrightarrow \Phi,\ \Psi \in H\}$$

i

$$H_\Gamma = \{\Phi/\Gamma \mid \Phi \in H\}.$$

Za svako Φ, $\Psi \in H$ definišimo

$$\begin{aligned}(\Phi/\Gamma) +_\Gamma (\Psi/\Gamma) &= (\Phi \vee \Psi)/\Gamma,\\ (\Phi/\Gamma) \cdot_\Gamma (\Psi/\Gamma) &= (\Phi \wedge \Psi)/\Gamma,\\ -_\Gamma(\Phi/\Gamma) &= (\neg\Psi)/\Gamma,\\ 1_\Gamma &= \top/\Gamma,\\ 0_\Gamma &= \bot/\Gamma.\end{aligned}$$

Dobro je poznata sledeća lema:

Lema 3.5. *Skup rečenica Γ je konzistentan u L^* akko $(H_\Gamma, +_\Gamma, \cdot_\Gamma, -_\Gamma, 1_\Gamma, 0_\Gamma)$ je netrivijalna Bulova algebra.*

Za svaki niz x različitih promenljivih iz V, svako $r \in R$, svako $\tau \in V^V$ i svaku formulu $\Phi \in H$ definišimo:

$$\begin{aligned}(\exists^\Gamma x)(\Phi/\Gamma) &= \big((\exists x)\Phi\big)/\Gamma,\\ (P^\Gamma x \geq r)(\Phi/\Gamma) &= \big((Px \geq r)\Phi\big)/\Gamma,\\ S^\Gamma(\tau)(\Phi/\Gamma) &= \big(S_f(\tau)S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)\Phi\big)/\Gamma.\end{aligned}$$

Lako se može proveriti da su ove operacije dobro definisane.

Napomena 3.6. Prirodno bi bilo definisati $S^\Gamma(\tau)$ na sledeći način $S^\Gamma(\tau)(\Phi/\Gamma) = (S_f(\tau)\Phi)/\Gamma$. Medjutim, ova definicija ne bi bila dobra, jer iz $\Gamma \vdash_{L^*} \Phi \leftrightarrow \Psi$ ne sledi $\Gamma \vdash_{L^*} S_f(\tau)\Phi \leftrightarrow S_f(\tau)\Psi$, za one $\tau \in V^V$ koji neku slobodnu varijablu formule $\Phi \to \Psi$ slikaju u vezanu varijablu ove formule.

Lema 3.7. *(i) Ako je Φ atomska formula i $\tau \in V^V$ onda*

$$S^\Gamma(\tau)(\Phi/\Gamma) = (S_f(\tau)\Phi)/\Gamma = (S(\tau)\Phi)/\Gamma.$$

(ii) Ako $\tau \in (V \setminus V_b(\Phi))^V$, onda

$$S^\Gamma(\tau)(\Phi/\Gamma) = (S_f(\tau)\Phi)/\Gamma.$$

(iii) Ako $\tau \in V^V$ je 1-1, onda

$$S^\Gamma(\tau)(\Phi/\Gamma) = (S(\tau)\Phi)/\Gamma.$$

Lema 3.8. *Ako $\mathfrak{m} = \overline{\overline{V}}^+$ i Γ konzistentan skup formula u L^* onda $\mathbb{H}_\Gamma = (H_\Gamma, +_\Gamma, \cdot_\Gamma, -_\Gamma, 1_\Gamma, 0_\Gamma, \exists^\Gamma x, P^\Gamma x \geq r, S^\Gamma(\tau))$, gde $\tau \in V^V$, $r \in R$, x niz različitih varijabli iz V dužine α, $\overline{\overline{\alpha}} < \mathfrak{m}$, je slaba verovatnosna poliadična algebra dimenzije V.*

Dokaz.
Radi jednostavnijeg pisanja uvedimo oznaku $\Phi^\Gamma = \Phi/\Gamma$. Po lemi 3.5 $(H_\Gamma, +_\Gamma, \cdot_\Gamma, -_\Gamma, 1_\Gamma, 0_\Gamma)$ je Bulova algebra. Operacije $\exists^\Gamma x$, $P^\Gamma x \geq r$ i $S^\Gamma(\tau)$ su dobro definisane i skup H_Γ je zatvoren za ove operacije. Proverimo još da li važe sve aksiome.

(WPP_1) Aksiome poliadičnih algebri se lako proveravaju, zato ćemo pokazati samo (P_8) i (P_{12}).

(P_8)

$$\begin{aligned}S^\Gamma(\sigma \circ \tau)\Phi^\Gamma &= (S_f(\sigma \circ \tau)S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)\Phi)^\Gamma\\ &= \big(S_f(\sigma)S_f(\tau)S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)\Phi\big)^\Gamma\\ &= S^\Gamma(\sigma)\big(S_f(\tau)S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)\Phi\big)^\Gamma, \quad \text{jer } \sigma \in (V \setminus V_b(\Phi))^V\\ &= S^\Gamma(\sigma)S^\Gamma(\tau)\Phi^\Gamma.\end{aligned}$$

(P_{12}) Kako je

$$\Gamma \vdash_{L^*} S_f(\sigma)S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)\Phi \to S_f(\sigma)S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)(\exists\sigma^{-1}\circ y)\Phi,$$

generalizacijom dobijamo

$$\Gamma \vdash_{L^*} (\forall y)(\neg S_f(\sigma)S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)(\exists\sigma^{-1}\circ y)\Phi \to \neg S_f(\sigma)S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)\Phi),$$

i dalje, po A_2

$$\Gamma \vdash_{L^*} \neg S_f(\sigma)S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)(\exists\sigma^{-1}\circ y)\Phi \to (\forall y)\neg S_f(\sigma)S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)\Phi,$$

odnosno

$$\Gamma \vdash_{L^*} (\exists y)S_f(\sigma)S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)\Phi \to S_f(\sigma)S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)(\exists\sigma^{-1}\circ y)\Phi.$$

Slično se dobije obrnuta implikacija. Odavde je

$$S^\Gamma(\sigma)(\exists^\Gamma\sigma^{-1}\circ y)\Phi^\Gamma = (\exists^\Gamma y)S^\Gamma(\sigma)\Phi^\Gamma.$$

(WPP_2) $(P^\Gamma x \geq r)0^\Gamma = \big((Px \geq r)\bot\big)^\Gamma = 0^\Gamma$, jer $\Gamma \vdash_{L^*} (Px \geq r)\bot \leftrightarrow \bot$ za $r > 0$.

(WPP_3) $(P^\Gamma x \geq 0)\Phi^\Gamma = \big((Px \geq 0)\Phi\big)^\Gamma = 1^\Gamma$, po A_5.

(WPP_4)

$$\begin{aligned}(P^\Gamma x \geq r)\Phi^\Gamma &= \big((Px \geq r)\Phi\big)^\Gamma \\ &\leq_\Gamma \big((Px \geq s)\Phi\big)^\Gamma \quad \text{za } r \geq s, \text{ po } A_6 \\ &= (P^\Gamma x \geq s)\Phi^\Gamma.\end{aligned}$$

(WPP_5) $$(P^\Gamma x \geq r)(P^\Gamma x \geq s)\Phi^\Gamma = (P^\Gamma x \geq s)\Phi^\Gamma$$

što sledi iz tvrdjenja

$$\Gamma \vdash_{L^*} (Px \geq s)\Phi \leftrightarrow (Px \geq r)(Px \geq s)\Phi$$

koje ćemo dokazati.

$$\begin{aligned}&\Gamma \vdash_{L^*} (Px \geq s)\Phi \to (Px \geq s)\Phi \\ \Rightarrow &\Gamma \vdash_{L^*} (Px \geq s)\Phi \to (Px \geq r)(Px \geq s)\Phi, \quad \text{po } R_3 \text{ i } A_6.\end{aligned}$$

Na drugu stranu,

$$\begin{aligned}&\Gamma \vdash_{L^*} (Px < s)\Phi \to (Px < s)\Phi \\ \Rightarrow &\Gamma \vdash_{L^*} (Px < s)\Phi \to (Px \geq 1)(Px < s)\Phi \quad \text{po } R_3, \\ \Rightarrow &\Gamma \vdash_{L^*} (Px < s)\Phi \to (Px > 1 - r)(Px < s)\Phi \quad \text{za } r > 0, \text{ po } A_{10}, \\ \Rightarrow &\Gamma \vdash_{L^*} (Px \leq 1 - r)\neg(Px \geq s)\Phi \to (Px \geq s)\Phi, \quad \text{kontrapozicijom,}\end{aligned}$$

odakle sledi potrebno tvrdjenje.

(WPP_6)

(i)

$$\begin{aligned}
-_\Gamma(P^\Gamma x \geq r)\Phi^\Gamma \cdot_\Gamma (P^\Gamma x \geq 1-s)\Psi^\Gamma &= \big(\neg(Px \geq r)\Phi \wedge (Px \geq 1-s)\Psi\big)^\Gamma \\
&= \big((Px < r)\Phi \wedge (Px \leq s)\neg\Psi)\big)^\Gamma \\
&\leq_\Gamma ((Px < \min\{1, r+s\})(\Phi \vee \Psi))^\Gamma \quad \text{po } A_8 \\
&= -_\Gamma(P^\Gamma x \geq \min\{1, r+s\})(\Phi^\Gamma +_\Gamma \Psi^\Gamma).
\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}
(P^\Gamma x \geq r)\Phi^\Gamma \cdot_\Gamma (P^\Gamma x \geq s)\Psi^\Gamma \cdot_\Gamma (P^\Gamma x \geq 1) -_\Gamma (\Phi^\Gamma \cdot_\Gamma \Psi^\Gamma) &= \\
= \big((Px \geq r)\Phi \wedge (Px \geq s)\Psi \wedge (Px \geq 1)\neg(\Phi \wedge \Psi)\big)^\Gamma & \\
\leq_\Gamma \big((Px \geq \min\{r+s, 1\})(\Phi \vee \Psi)\big)^\Gamma \quad \text{po } A_7 & \\
= (P^\Gamma x \geq \min\{r+s, 1\})(\Phi^\Gamma +_\Gamma \Psi^\Gamma). &
\end{aligned}$$

(WPP_7)

(i)
$$\begin{aligned}
-_\Gamma(P^\Gamma x \geq r) -_\Gamma \Phi^\Gamma &= \big((Px < r)\neg\Phi\big)^\Gamma \\
&\leq_\Gamma \big((Px \leq r)\neg\Phi\big)^\Gamma \quad \text{po } A_9 \\
&= \big((Px \geq 1-r)\Phi\big)^\Gamma \quad \text{po definiciji } (Px \leq r)\Phi \\
&= (P^\Gamma x \geq 1-r)\Phi^\Gamma.
\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}
(P^\Gamma x \geq s) -_\Gamma \Phi^\Gamma &= \big((Px \geq s)\neg\Phi\big)^\Gamma \\
&\leq \big((Px > r)\neg\Phi\big)^\Gamma \quad \text{za } s > r, \text{ po } A_{10} \\
&= \big(\neg(Px \geq 1-r)\Phi\big)^\Gamma \quad \text{po definiciji } (Px > r)\Phi \\
&= -_\Gamma(P^\Gamma x \geq 1-r)\Phi^\Gamma.
\end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned}
-_\Gamma(P^\Gamma x \geq 1-s) -_\Gamma \Phi^\Gamma &= \big(\neg(Px \geq 1-s)\neg\Phi\big)^\Gamma \\
&= \big((Px > s)\Phi\big)^\Gamma \quad \text{po definiciji } (Px > r)\Phi \\
&\leq_\Gamma \big(\neg(Px \geq s^+)\Phi\big)^\Gamma \quad \text{po } A_{11} \\
&= -_\Gamma(P^\Gamma x \geq s^+)\Phi^\Gamma.
\end{aligned}$$

(WPP_8)
$$\begin{aligned}
S^\Gamma(\sigma)(P^\Gamma x \geq r)\Phi^\Gamma &= \big(S_f(\sigma)S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)(Px \geq r)\Phi\big)^\Gamma \quad \text{po definiciji } S^\Gamma(\sigma) \\
&= \big(S_f(\tau)S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)(Px \geq r)\Phi\big)^\Gamma \\
&= S^\Gamma(\tau)(P^\Gamma x \geq r)\Phi^\Gamma,
\end{aligned}$$

jer $V_f\big(S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)(Px \geq r)\Phi\big) \cap rang\, x = \emptyset$.

(WPP_9) Slično (P_{12}).

(WPP_{10})

(i)
$$\begin{aligned}(P^\Gamma x \geq r)\Phi^\Gamma &= \big((Px \geq r)\Phi\big)^\Gamma \\ &\leq_\Gamma \big((Px > 0)\Phi\big)^\Gamma \quad \text{za } r > 0, \text{ po } A_{10} \\ &\leq_\Gamma \big((\exists x)\Phi\big)^\Gamma \quad \text{kontrapozicijom } A_{12} \\ &= (\exists^\Gamma x)\Phi^\Gamma.\end{aligned}$$

(ii) $(\exists^\Gamma x)(P^\Gamma y \geq r)\Phi^\Gamma = \big((\exists x)(Py \geq r)\Phi\big)^\Gamma \leq_\Gamma \big((Py \geq r)\Phi\big)^\Gamma = (P^\Gamma y \geq r)\Phi^\Gamma$,

uz pretpostavku $rang\, x \subset rang\, y$. Gornja nejednakost sledi iz tvrdjenja

$$\Gamma \vdash_{L^*} (\exists x)(Py \geq r)\Phi \rightarrow (Py \geq r)\Phi$$

koje se dobija iz

$$\Gamma \vdash_{L^*} (\forall x)\big((Py < r)\Phi \rightarrow (Py < r)\Phi\big)$$

primenom A_2 i kontrapozicijom. Obrnuta nejednakost je trivijalna.

(iii)
$$\begin{aligned}(\exists^\Gamma y)\Phi^\Gamma &= \big((\exists y)\Phi\big)^\Gamma \\ &\leq_\Gamma \big((Px \geq r)(\exists y)\Phi\big)^\Gamma \quad \text{za } V_f\big((\exists y)\Phi\big) \cap rang\, x = \emptyset, \text{ po } R_3 \text{ i } A_4 \\ &= (P^\Gamma x \geq r)(\exists^\Gamma y)\Phi^\Gamma.\end{aligned}$$

Obrnuto,

$$\begin{aligned}(P^\Gamma x \geq r)(\exists^\Gamma y)\Phi^\Gamma &= \big((Px \geq r)(\exists y)\Phi\big)^\Gamma \\ &\leq_\Gamma \big((Px > 0)(\exists y)\Phi\big)^\Gamma \quad \text{za } r > 0, \text{ po } A_{10} \\ &\leq_\Gamma \big((\exists x)(\exists y)\Phi\big)^\Gamma \quad \text{kontrapozicijom } A_{12} \\ &= \big((\exists y)\Phi\big)^\Gamma \quad \text{iz } A_2, \text{ jer } rang\, x \subset rang\, y \\ &= (\exists^\Gamma y)\Phi^\Gamma.\end{aligned}$$

Dakle, sve aksiome važe u algebri $\mathbb{H}_\Gamma$.

Skupovna slaba verovatnosna poliadična algebra

Neka je $\mathfrak{A} = (A, R_p, \mu_\alpha)_{p\in P, \overline{\overline{\alpha}}<\mathfrak{m}}$ slaba verovatnosna struktura za L, tj. A je neprazan skup, R_p relacija dužine $\nu(p)$ na A, μ_α konačno aditivna verovatnosna mera na A^α konačnog ranga R, takva da je svaki skup oblika $\{b\circ x \mid \models_\mathfrak{A} \Phi[b\restriction V^*],\ b\restriction(V\setminus rang\, x) = a\restriction(V\setminus rang\, x)\}$ μ_α merljiv, za svako $a\in A^V$, svaki niz različitih varijabli $x\in V^\alpha$ i svaku formulu Φ. Neka je (uz aksiomu izbora)

$$V=\beta,\quad \Phi^\mathfrak{A} = \{a\in A^\beta \mid \models_\mathfrak{A} \Phi[a\restriction V^*]\}\quad \text{i}\quad \mathcal{A} = \{\Phi^\mathfrak{A} \mid \Phi\in H\}.$$

Definišimo za svaki niz (K) ordinala iz β dužine $\alpha, \overline{\overline{\alpha}}\le\overline{\overline{\beta}}$, za svako $r\in R$ i svako $\sigma\in\beta^\beta$:

$$c_{(K)}(\Phi^\mathfrak{A}) = \left\{a\in A^\beta \mid \text{ postoji } b\in\Phi^\mathfrak{A} : b\restriction(\beta\setminus rang\,(K)) = a\restriction(\beta\setminus rang\,(K))\right\},$$

$$\begin{aligned} c^r_{(K)}(\Phi^\mathfrak{A}) =\{a\in A^\beta \mid \mu_\alpha\{b\circ(K)\mid b\in\Phi^\mathfrak{A},\ b\restriction(\beta\setminus rang\,(K)) = \\ a\restriction(\beta\setminus rang\,(K))\}\ge r\}\end{aligned}$$

$$s_\sigma(\Phi^\mathfrak{A}) = \left\{a\in A^\beta \mid a_\sigma\in\left(S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)\Phi\right)^\mathfrak{A}\right\}$$

gde je za $a=(a_\alpha)_{\alpha<\beta}$, $a_\sigma = \left(a_{\sigma(\alpha)}\right)_{\alpha<\beta}$.

Lako se proverava da su ove operacije dobro definisane i da su skupovi iz definicije $c^r_{(K)}$ merljivi. Pokažimo da je $\mathcal{A}$ zatvoreno za gornje operacije.

$$\begin{aligned} c_{(K)}(\Phi^\mathfrak{A}) &= \left\{a\in A^\beta \mid \text{ postoji } b\in\Phi^\mathfrak{A}, b\restriction(\beta\setminus rang\,(K)) = a\restriction(\beta\setminus rang\,(K))\right\} \\ &= \{a\in A^\beta \mid \text{ postoji } b \text{ tako da} \models_\mathfrak{A}\Phi[b\restriction V^*], b\restriction(\beta\setminus rang\,(K)) \\ &\qquad = a\restriction(\beta\setminus rang\,(K))\} \\ &= \{a\in A^\beta \mid \models_\mathfrak{A} (\exists x)\Phi[a\restriction V^*]\} \\ &= ((\exists x)\Phi)^\mathfrak{A}\in\mathcal{A}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^r_{(K)}(\Phi^\mathfrak{A}) &= \{a\in A^\beta \mid \mu_\alpha\{b\circ K\mid b\in\Phi^\mathfrak{A},\ b\restriction(\beta\setminus rang\,(K)) = \\ &\qquad a\restriction(\beta\setminus rang\,(K))\}\ge r\} \\ &= \{a\in A^\beta \mid \mu_\alpha\{b\circ K\mid \models_\mathfrak{A}\Phi[b\restriction V^*],\ b\restriction(\beta\setminus rang\,(K)) = \\ &\qquad a\restriction(\beta\setminus rang\,(K))\}\ge r\} \\ &= \left\{a\in A^\beta \mid \models_\mathfrak{A} (Px\ge r)\Phi[a\restriction V^*]\right\} \\ &= ((Px\ge r)\Phi)^\mathfrak{A}\in\mathcal{A}.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S_\sigma(\Phi^{\mathfrak{A}}) &= \left\{a \in A^\beta \mid a \circ \sigma \in \left(S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)\Phi\right)^{\mathfrak{A}}\right\} \\
&= \left\{a \in A^\beta \mid \models_{\mathfrak{A}} S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)\Phi[a \circ (\sigma \restriction V^*)]\right\} \\
&= \left\{a \in A^\beta \mid \models_{\mathfrak{A}} S_f(\sigma)S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)\Phi[a \restriction V^*]\right\} \\
&= \left(S_f(\sigma)S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)\Phi\right)^{\mathfrak{A}} \in \mathcal{A}
\end{aligned}
$$

Algebru $(\mathcal{A}, \cup, \cap, \sim, \emptyset, A^\beta, c_{(K)}, c^r_{(K)}, S_\sigma)$ ćemo zvati *slaba verovatnosna poliadična skupovna algebra.*

Lema 3.9. *Neka je preslikavanje $f : H_\Gamma \to \mathcal{A}$ definisano sa $f(\Phi^\Gamma) = \Phi^{\mathfrak{A}}$. Tada, ako $\models_{\mathfrak{A}} \Gamma$ onda f je homomorfizam $\mathbb{H}_\Gamma$ na $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}$ je slaba verovatnosna poliadična algebra.*

Dokaz.

Pokažimo najpre da je f dobro definisano. Neka $\Phi^\Gamma = \Psi^\Gamma$. Tada važi $\Gamma \vdash_{L^*} \Phi \leftrightarrow \Psi$. Kako je $\models_{\mathfrak{A}} \Gamma$ slediće da za svaku valuaciju $a \in A^\beta$ važi $\models_{\mathfrak{A}} (\Phi \leftrightarrow \Psi)[a]$, odnosno $\Phi^{\mathfrak{A}} = \Psi^{\mathfrak{A}}$.

Lako se proverava da je f homomorfizam:

$f(\Phi^\Gamma +_\Gamma \Psi^\Gamma) = f\left((\Phi \vee \Psi)^\Gamma\right) = (\Phi \vee \Psi)^{\mathfrak{A}} = \Phi^{\mathfrak{A}} \cup \Psi^{\mathfrak{A}}$,

$f(-_\Gamma \Phi^\Gamma) = f\left((\neg\Phi)^\Gamma\right) = (\neg\Phi)^{\mathfrak{A}} = \sim \Phi^{\mathfrak{A}}$,

$f(0^\Gamma) = \perp^{\mathfrak{A}} = \emptyset$,

$f\left((\exists^\Gamma x)\Phi^\Gamma\right) = f\left(((\exists x)\Phi)^\Gamma\right) = ((\exists x)\Phi)^{\mathfrak{A}} = c_{(K)}\Phi^{\mathfrak{A}}$,

$f\left((P^\Gamma x \geq r)\Phi^\Gamma\right) = f\left(((Px \geq r)\Phi)^\Gamma\right) = ((Px \geq r)\Phi)^{\mathfrak{A}} = c^r_{(K)}\Phi^{\mathfrak{A}}$,

$f(S^\Gamma(\sigma)\Phi^\Gamma) = f\left(\left(S_f(\sigma)S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)\Phi\right)^\Gamma\right) = \left(S_f(\sigma)S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)\Phi\right)^{\mathfrak{A}} = s_\sigma(\Phi^{\mathfrak{A}})$.

Znači f je homomorfizam $\mathbb{H}_\Gamma$ na $\mathcal{A}$ pa je $\mathcal{A}$ slaba verovatnosna poliadična algebra kao homomorfna slika jedne takve algebre.

Stav reprezentacije

Teorema 3.10. *Neka je $\mathbb{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1, C_{(K)}, C^r_{(K)}, S_\sigma)$ slaba verovatnosna poliadična algebra beskonačne dimenzije β. Neka je $V = \beta$, $P = \{p \mid p \in B\}$, $\mathfrak{m} = \overline{\overline{\beta}}^+$ i $\overline{\overline{\nu(p)}} = \overline{\overline{\beta}}$ za svako $p \in P$. Tada postoji skup rečenica Γ u logici $L = L(V, \nu, \mathfrak{m}, R)$ tako da je $\mathbb{H}_\Gamma \cong \mathbb{B}$.*

Dokaz.

Stavimo $V = \beta$, $P = B$, $\nu(p) = \beta$ za svako $p \in P$, $x \in \beta^\beta$ "1-1" i "na", tj. jedna permutacija skupa varijabli V. Neka je Γ sledeći skup rečenica:

$$\begin{gathered}(\forall x)\,((-p)(x) \leftrightarrow \neg\,(p(x)))\,,\\ (\forall x)\,((p+q)(x) \leftrightarrow p(x) \vee q(x))\,,\\ (\forall x)\,((p\cdot q)(x) \leftrightarrow p(x) \wedge q(x))\,,\\ (\forall x)\,((S_\tau p)(x) \leftrightarrow S(\tau)p(x))\,,\\ (\forall x)\,\big((C_{(K)}p)(x) \leftrightarrow (\exists y)p(x)\big)\,,\\ (\forall x)\,\Big((C^r_{(K)}p)(x) \leftrightarrow (Py \geq r)p(x)\Big)\,,\end{gathered}$$

gde $p,q \in P$, $\tau \in V^V$, $r \in R$ i $(K) = y$ niz različitih varijabli dužine α, $\overline{\overline{\alpha}} < \mathfrak{m}$. Pokažimo najpre da je

$$H_\Gamma = \Big\{(p(x))^\Gamma \mid p \in P\Big\}.$$

Za svaku formulu $\Phi \in H$ postoji formula $\Psi = S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)\Phi \in H$ takva da $\Phi^\Gamma = \Psi^\Gamma$, $V_b(\Psi) \subset V_1$ i $V_f(\Psi) \subset V$. Zaista,

$$\Psi^\Gamma = S_f(id)S_f(\tau_0)S(\tau_0)\Phi^\Gamma = S^\Gamma(id)\Phi^\Gamma = \Phi^\Gamma.$$

Pokažimo da za svaku formulu iz H čije su slobodne varijable u V a vezane u V_1 postoji formula $\Psi \in F$ tako da je $\Phi^\Gamma = \Psi^\Gamma$. Neka je $\tau_1 : V^* \xrightarrow[na]{1-1} V$. Tada

$$\Gamma \vdash_{L^*} S(\tau_1)\Phi \leftrightarrow S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)S(\tau_1)\Phi,$$

odakle je, po R_3,

$$\Gamma \vdash_{L^*} S(\tau_1^{-1})S(\tau_1)\Phi \leftrightarrow S(\tau_1^{-1})S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)S(\tau_1)\Phi.$$

Kako je $V_b(S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)S(\tau_1)\Phi) \subset V_1$, to je

$$\begin{aligned}S(\tau_1^{-1})S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)S(\tau_1)\Phi &= S_f(\tau_1^{-1})S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)S(\tau_1)\Phi\\ &= S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)S_f(\tau_1^{-1})S(\tau_1)\Phi.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\Gamma \vdash_{L^*} \Phi \leftrightarrow S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)S_f(\tau_1^{-1})S(\tau_1)\Phi.$$

Ako stavimo $\Psi = S_f(\tau_1^{-1})S(\tau_1)\Phi$, dobijamo

$$\Gamma \vdash_{L^*} \Phi \leftrightarrow \Psi, \quad \Psi \in F.$$

Iz dokazanog sledi da je dovoljno dokazati tvrdjenje za formule iz F, tj. da za svaku formulu $\Phi \in F$ postoji $p \in P$ tako da je $\Phi^\Gamma = p(x)^\Gamma$.
Za $\Phi = p(x)$ tvrdjenje je trivijalno ispunjeno.
Za $\Phi = p(y)$, gde $y = \tau \circ x$, $\tau \in V^V$, imamo

$$\begin{aligned}(p(y))^\Gamma &= (p(\tau \circ x))^\Gamma\\ &= (S(\tau)p(x))^\Gamma \quad \text{po (4.1)}\\ &= ((S_\tau p)\,(x))^\Gamma \quad \text{po definiciji } \Gamma.\end{aligned}$$

Za $\Phi = \neg\Psi$ i $\Psi^\Gamma = (p(x))^\Gamma$ dobijamo

$$\begin{aligned}\Phi^\Gamma &= (\neg\Psi)^\Gamma \\ &= -_\Gamma \Psi^\Gamma \quad \text{po definiciji } -_\Gamma \\ &= -_\Gamma (p(x))^\Gamma \quad \text{po indukcijskoj hipotezi} \\ &= (\neg p(x))^\Gamma \quad \text{po definiciji } -_\Gamma \\ &= (-p(x))^\Gamma \quad \text{po definiciji } \Gamma.\end{aligned}$$

Slično se pokazuje za $\Phi = \Psi \vee \Theta$.
Neka $\Phi = (\exists y)\Psi$ i $\Psi^\Gamma = (p(x))^\Gamma$. Tada

$$\begin{aligned}\Phi^\Gamma &= ((\exists y)\Psi)^\Gamma \\ &= (\exists^\Gamma y)\Psi^\Gamma \quad \text{po definiciji } \exists^\Gamma \\ &= (\exists^\Gamma y)\,(p(x))^\Gamma \quad \text{po indukcijskoj hipotezi} \\ &= ((\exists y)p(x))^\Gamma \quad \text{po definiciji } \exists^\Gamma \\ &= \left((C_{(K)}p)(x)\right)^\Gamma \quad \text{po definiciji } \Gamma.\end{aligned}$$

Slično, za $\Phi = (Py \geq r)\Psi$.

Dakle, pokazali smo $H_\Gamma = \left\{(p(x))^\Gamma \mid p \in B\right\}$.

Definišimo preslikavanje $g : B \longrightarrow H_\Gamma$ na sledeći način:

$$g(p) = (p(x))^\Gamma .$$

Za $p = q$ imamo $\vdash_{L^*} p(x) \leftrightarrow q(x)$, tj. $(p(x))^\Gamma = (q(x))^\Gamma$, što znači da je g dobro definisano. Očigledno je g "na" preslikavanje, a da je homomorfizam lako se proverava:

$$g(p+q) = ((p+q)(x))^\Gamma = (p(x) \vee q(x))^\Gamma = (p(x))^\Gamma +_\Gamma (q(x))^\Gamma = g(p) +_\Gamma g(q),$$
$$g(-p) = ((-p)(x))^\Gamma = (\neg p(x))^\Gamma = -_\Gamma (p(x))^\Gamma = -_\Gamma g(p),$$
$$g(C_{(K)}p) = \left((C_{(K)}p)(x)\right)^\Gamma = ((\exists y)p(x))^\Gamma = (\exists^\Gamma y)\,(p(x))^\Gamma = (\exists^\Gamma y)g(p),$$
$$\begin{aligned}g(C^r_{(K)}p) &= \left((C^r_{(K)}p)(x)\right)^\Gamma = ((Py \geq r)p(x))^\Gamma = (P^\Gamma y \geq r)\,(p(x))^\Gamma \\ &= (P^\Gamma y \geq r)g(p),\end{aligned}$$
$$g(S_\tau p) = ((S_\tau p)(x))^\Gamma = (S(\tau)p(x))^\Gamma = S^\Gamma(\tau)\,(p(x))^\Gamma = S^\Gamma(\tau)g(p).$$

Iz $(p(x))^\Gamma = (q(x))^\Gamma$ sledi $\Gamma \vdash_{L^*} p(x) \leftrightarrow q(x)$. Ako još pokažemo da iz

$$\Gamma \vdash_{L^*} p(x) \leftrightarrow q(x) \quad \text{sledi} \quad p = q$$

dobićemo da je g "1-1" preslikavanje, čime će biti pokazano da je g izomorfizam.

Da bismo ovo dokazali definišimo preslikavanje $h : F \rightarrow B$ takvo da, za $\Phi \in F$ važi:

$$\text{ako } \Gamma \vdash_{L^*} \Phi \text{ onda } h(\Phi) = 1.$$

Za formule iz skupa $F' = \{\Phi \in F \mid V_b(\Phi) \cap V_f(\Phi) = \emptyset\}$ preslikavanje h definisaćemo induktivno:

$h\,(p(x)) = p,$
$h\,(p(y)) = S_\tau p, \quad \text{gde } \tau \in V^V, y = \tau \circ x,$
$h(\neg\Phi) = -h(\Phi),$
$h(\Phi \vee \Psi) = h(\Phi) + h(\Psi),$
$h\,((\exists y)\Phi) = C_{(K)} h(\Phi),$
$h\,((Py \geq r)\Phi) = C^r_{(K)} h(\Phi).$

Za $\Phi \in F \setminus F'$, neka je $h(\Phi) = S_{(\tau_1^{-1}|V_f(\Psi))|V}\, h(\Psi)$, gde je $\Psi = S(\tau_1) S_f(\tau_0^{-1}) S(\tau_0)\Phi$ i τ_1 fiksirana bijekcija iz V^* na V.

Dokažimo najpre da za svaku funkciju $\sigma : V_f(\Phi) \longrightarrow V \setminus V_b(\Phi)$ i svaku formulu $\Phi \in F$ važi

$$(*) \qquad h(S_f(\sigma)\Phi) = S_{\sigma|V}\, h(\Phi).$$

Za $\Phi \in F'$ dokažimo indukcijom po složenosti formule.
Za $\Phi = p(x)$, $h(S_f(\sigma)\Phi) = h(p(\sigma \circ x)) = S_\sigma p = S_{\sigma|V}\, h(\Phi)$.
Za $\Phi = p(y)$, $y = \tau \circ x$, $\tau \in V^V$, imamo

$$\begin{aligned} h\,(S_f(\sigma)p(y)) &= h\,(p(\sigma \circ \tau \circ x)) \quad \text{po (4.1)} \\ &= S_{\sigma \circ \tau}\, p \quad \text{po definiciji } h \\ &= S_{\sigma|V} S_\tau p \quad \text{po } P_9 \\ &= S_{\sigma|V}\, h\,(p(y)) \quad \text{po definiciji } h. \end{aligned}$$

Za $\Phi = \neg\Psi$,

$$\begin{aligned} h\,(S_f(\sigma)\Phi) &= h\,(S_f(\sigma)\neg\Psi) \\ &= h\,(\neg S_f(\sigma)\Psi) \quad \text{po (4.2)} \\ &= -h\,(S_f(\sigma)\Psi) \quad \text{po definiciji } h \\ &= -S_{\sigma|V}\, h(\Psi) \quad \text{po indukcijskoj hipotezi} \\ &= S_{\sigma|V}\, h(\neg\Psi) \quad \text{po } P_8. \end{aligned}$$

Slično za $\Phi = \Psi \vee \Theta$.
Ako $\Phi = (Py \geq r)\Psi$ onda

$$\begin{aligned} h\,(S_f(\sigma)\Phi) &= h\,(S_f(\sigma)(Py \geq r)\Psi) \\ &= h((Py \geq r)S_f(\sigma_1)\Psi \quad \text{gde je } \sigma_1 = \sigma \restriction V_f(\Psi) \\ &= C^r_{(K)} S_{\sigma_1|V}\, h(\Psi) \\ &= S_{\sigma_1|V}\, C^r_{\sigma_1^{-1}\circ(K)} h(\Psi) \\ &= S_{\sigma|V}\, C^r_{(K)} h(\Psi) \quad \text{jer } \sigma \restriction (K) = id \\ &= S_{\sigma|V}\, h((Py \geq r)\Psi). \end{aligned}$$

Da bismo pokazali da $(*)$ važi i za formule iz $F \setminus F'$ pokažimo najpre da

$$(**) \qquad h(S(\sigma)\Phi) = S_{(\sigma|V_f(\Phi))|V}\, h(\Phi),$$

za svaku formulu $\Phi \in F$ i svako $\sigma : V(\Phi) \xrightarrow{1-1} V$.

Neka je najpre $\Phi \in F'$.

Za $\Phi = p(x)$, $h(S(\sigma)p(x)) = h(p(\sigma \circ x)) = S_\sigma p = S_{\sigma \upharpoonright V_f(\Phi)} h(\Phi)$.

Za $\Phi = (\exists y)\Psi$,

$$
\begin{aligned}
h(S(\sigma)\Phi) &= h((\exists \sigma \circ y) S(\sigma)\Psi) \\
&= C_{\sigma \circ (K)} h(S(\sigma)\Psi) \\
&= C_{\sigma \circ (K)} S_{(\sigma \upharpoonright V_f(\Psi)) \upharpoonright V} h(\Psi) \quad \text{po indukcijskoj hipotezi} \\
&= S_{(\sigma \upharpoonright V_f(\Psi)) \upharpoonright V} C_{(K)} h(\Psi) \quad \text{po } P_{12} \\
&= S_{(\sigma \upharpoonright V_f(\Phi)) \upharpoonright V} C_{(K)} h(\Psi) \quad \text{po } P_{11} \\
&= S_{(\sigma \upharpoonright V_f(\Phi)) \upharpoonright V} h((\exists y)\Psi) \\
&= S_{(\sigma \upharpoonright V_f(\Phi)) \upharpoonright V} h(\Phi).
\end{aligned}
$$

Za $\Phi \in F \setminus F'$ i $\sigma : V(\Phi) \xrightarrow{1-1} V$ neka je $\Theta = S(\tau_1) S_f(\tau_0^{-1}) S(\tau_0) S(\sigma)\Phi$, $\Psi = S(\tau_1) S_f(\tau_0^{-1}) S(\tau_0)\Phi$, i $\sigma_1 : V(\Psi) \longrightarrow V$ tako da $\sigma_1 \upharpoonright V_b(\Psi) = \tau_1 \circ \tau_0 \circ \sigma \circ \tau_0^{-1} \circ \tau_1^{-1} \upharpoonright V_b(\Psi)$ i $\sigma_1 \upharpoonright V_f(\Psi) = \tau_1 \circ \sigma \circ \tau_1^{-1} \upharpoonright V_f(\Psi)$. Tada

$$
\begin{aligned}
h(S(\sigma)\Phi) &= S_{(\tau_1^{-1} \upharpoonright V_f(\Theta)) \upharpoonright V} h(\Theta) \\
&= S_{(\tau_1^{-1} \upharpoonright V_f(\Theta)) \upharpoonright V} h(S(\tau_1) S_f(\tau_0^{-1}) S(\tau_0) S(\sigma)\Phi) \\
&= S_{(\tau_1^{-1} \upharpoonright V_f(\Theta)) \upharpoonright V} h(S(\sigma_1) S(\tau_1) S_f(\tau_0^{-1}) S(\tau_0)\Phi) \\
&= S_{(\tau_1^{-1} \upharpoonright V_f(\Theta)) \upharpoonright V} h(S(\sigma_1)\Psi \\
&= S_{(\tau_1^{-1} \upharpoonright V_f(\Theta)) \upharpoonright V} S_{(\sigma_1 \upharpoonright V_f(\Psi)) \upharpoonright V} h(\Psi) \\
&= S_{(\tau_1^{-1} \upharpoonright V_f(\Theta)) \upharpoonright V} S_{(\tau_1 \circ \sigma \circ \tau_1^{-1} \upharpoonright V_f(\Psi)) \upharpoonright V} h(\Psi) \\
&= S_{(\tau_1^{-1} \upharpoonright V_f(\Theta)) \upharpoonright V \circ (\tau_1 \circ \sigma \circ \tau_1^{-1} \upharpoonright V_f(\Psi)) \upharpoonright V} h(\Psi) \\
&= S_{(\sigma \upharpoonright V_f(\Phi)) \upharpoonright V} S_{\tau_1^{-1} \upharpoonright V_f(\Psi)) \upharpoonright V} h(\Psi) \\
&= S_{(\sigma \upharpoonright V_f(\Phi)) \upharpoonright V} h(\Phi)
\end{aligned}
$$

Primenom $(**)$ lako se pokazuje da je i za svaku formulu $\Phi \in F'$ važi

$$
h(\Phi) = S_{(\tau_1^{-1} \upharpoonright V_f(\Psi)) \upharpoonright V} h(\Psi), \quad \text{gde je } \Psi = S(\tau_1) S_f(\tau_0^{-1}) S(\tau_o)\Phi.
$$

Dokažimo sada da $(*)$ važi za svaku formulu iz $F \setminus F'$. Neka je $\Theta = S(\tau_1) S_f(\tau_0^{-1}) S(\tau_0) S_f(\sigma)\Phi$ i $\Psi = S(\tau_1) S_f(\tau_0^{-1}) S(\tau_0)\Phi$. Tada

$$
\begin{aligned}
h(S_f(\sigma)\Phi) &= S_{(\tau_1^{-1} \upharpoonright V_f(\Theta)) \upharpoonright V} h(\Theta) \\
&= S_{(\tau_1^{-1} \upharpoonright V_f \Theta)) \upharpoonright V} h(S_f(\tau_1 \circ \sigma \circ \tau_1^{-1}) S(\tau_1) S_f(\tau_0^{-1}) S(\tau_0))\Phi) \\
&= S_{(\tau_1^{-1} \upharpoonright V_f(\Theta)) \upharpoonright V} S_{(\tau_1 \circ \sigma \circ \tau_1^{-1} \upharpoonright V_f(\Psi)) \upharpoonright V} h(\Psi) \\
&= S_{\sigma \upharpoonright V} S_{(\tau_1^{-1} \upharpoonright V_f(\Psi)) \upharpoonright V} h(\Psi) \\
&= S_{\sigma \upharpoonright V} h(\Phi)
\end{aligned}
$$

Dokažimo sada da iz $\Gamma \vdash_{L^*} \Phi$ sledi $h(\Phi) = 1$. Kako $\Gamma \subset F, \Phi \in F$, to je $\Gamma \vdash_{L^*} \Phi$ akko $\Gamma \vdash_L \Phi$ pa je dovoljno pokazati da iz $\Gamma \vdash_L \Phi$ sledi $h(\Phi) = 1$. Pokažimo najpre da se sve aksiome slikaju u 1. Najpre to dokažimo za aksiome iz F'.

(A_1) Dovoljno je pokazati da iz $h(\Phi) \neq 1$ sledi da Φ nije tautologija. Neka je I maksimalan ideal Bulove algebre $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ koji sadrži $h(\Phi)$ i π prirodni homomorfizam iz B na dvoelementnu Bulovu algebru B/I. Iz $h(\Phi) \neq 1$ sledi $\pi \circ h(\Phi) = 0$, tj. Φ nije tautologija.

(A_2)

$$\begin{aligned}
& h\left((\forall y)(\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to (\forall y)\Psi)\right) \\
=& h\left(\neg(\exists y)\neg(\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \neg(\exists y)\neg\Psi)\right) \\
=& C_{(K)}(-h(\neg\Phi \vee \Psi)) + -h(\Phi) + -C_{(K)}(-h(\Psi)) \\
=& C_{(K)}(h(\Phi) \cdot -h(\Psi)) + -h(\Phi) + -C_{(K)}(-h(\Psi)) \\
=& C_{(K)}h(\Phi) \cdot C_{(K)}(-h(\Psi)) + -h(\Phi) + -C_{(K)}(-h(\Psi)) \\
\geq& h(\Phi) \cdot C_{(K)}(-h(\Psi)) + -h(\Phi) + -C_{(K)}(-h(\Psi)) \\
=& -\left(-h(\Phi) - C_{(K)}(-h(\Psi))\right) \cdot h(\Phi) \cdot C_{(K)}(-h(\Psi)) \\
=& -\left(-h(\Phi) \cdot h(\Phi) \cdot C_{(K)}(-h(\Psi)) + -C_{(K)}(-h(\Psi)) \cdot h(\Phi) \cdot C_{(K)}(-h(\Psi))\right) \\
=& -(0 + 0) = 1,
\end{aligned}$$

uz uslov $V_f(\Phi) \cap rang\, y = \emptyset$.

(A_3)

$$\begin{aligned}
& h\left((\forall y)\Phi \to S_f(\tau)\Phi\right) \quad \text{gde } \tau : rang\, y \longrightarrow V \setminus V_b(\Phi) \\
=& h\left((\exists y)\neg\Phi \vee S_f(\tau)\Phi\right) \\
=& C_{(K)}(-h(\Phi)) + S_{\tau'}h(\Phi) \quad \text{gde } \tau' = \tau \restriction V \\
=& S_{\tau'}C_{(K)}(-h(\Phi)) + S_{\tau'}h(\Phi) \quad \text{po } (P_6) \text{ jer } \tau' \restriction (V \setminus rang\, y) = id \restriction (V \setminus rang\, y) \\
=& S_{\tau'}\left(C_{(K)}(-h(\Phi)) + h(\Phi)\right) \\
\geq& S_{\tau'}(-h(\Phi) + h(\Phi)) \\
=& S_{\tau'}1 = 1.
\end{aligned}$$

(A_4)
$$\begin{aligned}
& h\left((\forall y)\Phi \to (\forall \tau \circ y)\right)\Phi \quad \text{gde } \tau : y \xrightarrow[na]{1-1} y \\
=& C_{(K)} - h(\Phi) + -C_{(K)} - h(\Phi) = 1 \quad \text{na osnovu } (P_{13}).
\end{aligned}$$

(A_5)
$$h\left((Py \geq 0)\Phi\right) = C^0_{(K)}h(\Phi) = 1 \quad \text{iz } (WPP_2).$$

(A_6)
$$\begin{aligned}
& h\left((Py \geq r)\Phi \to (Py \geq s)\Phi\right) \quad \text{za } r \geq s, \\
=& -C^r_{(K)}h(\Phi) + C^s_{(K)}h(\Phi) \\
\geq& -C^r_{(K)}h(\Phi) + C^r_{(K)}h(\Phi) \quad \text{po } (WPP_4) \\
=& 1.
\end{aligned}$$

(A_7)

$$h\left((Py \geq r)\Phi \wedge (Py \geq s)\Psi \wedge (Py \leq 0)(\Phi \wedge \Psi) \to (Py \geq \min\{1, r+s\})(\Phi \vee \Psi)\right)$$
$$= - \left(C^{r}_{(K)}h(\Phi) \cdot C^{s}_{(K)}h(\Psi) \cdot C^{1}_{(K)} - (h(\Phi) \cdot h(\Psi))\right) + C^{\min\{1,r+s\}}_{(K)}\,(h(\Phi) + h(\Psi))$$
$$\geq - C^{\min\{1,r+s\}}_{(K)}\,(h(\Phi) + h(\Psi)) + C^{\min\{1,r+s\}}_{(K)}\,(h(\Phi) + h(\Psi)) = 1.$$

(A_8)
$$h\left((Py \leq r)\Phi \wedge (Py < s)\Psi \to (Py < \max\{0, r+s-1\})(\Phi \wedge \Psi)\right)$$
$$= - \left(C^{1-r}_{(K)} - h(\Phi) \cdot -C^{s}_{(K)}h(\Psi)\right) + -C^{\max\{0,r+s-1\}}_{(K)}\,(h(\Phi) \cdot h(\Psi))$$
$$\geq C^{\max\{0,r+s-1\}}_{(K)}\,(h(\Phi) \cdot h(\Psi)) + -C^{\max\{0,r+s-1\}}_{(K)}\,(h(\Phi) \cdot h(\Psi)) = 1.$$

(A_9)
$$\begin{aligned} & h\left((Py < s)\Phi \to (Py \leq s)\Phi\right) \\ &= - C^{s}_{(K)}h(\Phi) + C^{1-s}_{(K)} - h(\Phi) \\ &\geq C^{s}_{(K)}h(\Phi) + -C^{s}_{(K)}h(\Phi) \quad \text{po } (WPP_8) \\ &= 1. \end{aligned}$$

(A_{10})
$$\begin{aligned} & h\left((Py \geq s)\Phi \to (Py > r)\Phi\right) \quad \text{za } s > r, \\ &= - C^{s}_{(K)}h(\Phi) + C^{r}_{(K)}h(\Phi) \\ &\geq - C^{s}_{(K)}h(\Phi) + C^{s}_{(K)}h(\Phi) \quad \text{po } (WPP_8) \\ &= 1. \end{aligned}$$

(A_{11})
$$\begin{aligned} & h\left((Py > s)\Phi \to (Py \geq s^{+})\Phi\right) \\ &= C^{1-s}_{(K)} - h(\Phi) + C^{s^{+}}_{(K)}h(\Phi) \\ &\geq - C^{s^{+}}_{(K)}h(\Phi) + C^{s^{+}}_{(K)}h(\Phi) \quad \text{po } (WPP_8) \\ &= 1. \end{aligned}$$

(A_{12})
$$\begin{aligned} & h\left((\forall y)\Phi \to (Py \geq 1)\Phi\right) \\ &= C_{(K)} - h(\Phi) + C^{1}_{(K)}h(\Phi) \\ &\geq C_{(K)} - h(\Phi) + -C^{0^{+}}_{(K)} - h(\Phi) \quad \text{po } (WPP_7) \text{ (iii)} \\ &\geq C_{(K)} - h(\Phi) + -C_{(K)} - h(\Phi) \quad \text{iz } (WPP_{10}) \text{ (ii)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ako je sada Φ aksioma iz $F \setminus F'$, onda je $\Psi = S(\tau_1)S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)\Phi$ aksioma iz F', pa je $h(\Psi) = 1$. Tada

$$h(\Phi) = S_{(\tau_1^{-1}|V_f(\Psi))|V}\, h(\Psi) = S_{(\tau_1^{-1}|V_f(\Psi))|V}\, 1 = 1$$

Neposredno se proverava da se sve formule iz Γ slikaju u 1.

Pokažimo sada da se od formula koje se slikaju u 1 pravilima izvodjenja dobijaju formule koje se slikaju u 1, tj. da se sve teoreme slukaju u 1. Za pravila R_1 i R_2 ovo se lako proverava.

(R_3) Neka je $\Phi \vdash_L S(\sigma)\Phi$, gde $\sigma : V(\Phi) \xrightarrow{1-1} V$ i $h(\Phi) = 1$. Tada

$$h\left(S(\sigma)\Phi\right) = S_{(\sigma \upharpoonright V_f(\Phi)) \upharpoonright V}\, h(\Phi) = S_{(\sigma \upharpoonright V_f(\Phi)) \upharpoonright V}\, 1 = 1.$$

(R_4) Neka je $S_f(\sigma)\Phi \vdash_L \Phi$ gde $\sigma : V_f(\Phi) \xrightarrow{1-1} V \setminus V_b(\Phi)$ i neka $h\left(S_f(\sigma)\Phi\right) = 1$.

Za $\Phi \in F'$, imamo $\Phi = S_f(\sigma^{-1})S_f(\sigma)$, pa je

$$h(\Phi) = S_{\sigma^{-1} \upharpoonright V}\, h(S_f(\sigma)\Phi) = S_{\sigma^{-1} \upharpoonright V}\, 1 = 1.$$

Za $\Phi \in F \setminus F'$ neka je $\Psi = S(\tau_1)S_f(\tau_0^{-1})S(\tau_0)\Phi$, $\sigma_1 : V(S_f(\sigma)\Phi) \longrightarrow V$, $\sigma_1 \upharpoonright V_b(S_f(\sigma)\Phi) = \tau_1 \circ \tau_0$, $\sigma_1 \upharpoonright V_f(S_f(\sigma)\Phi) = \tau_1 \circ \sigma^{-1}$. Jasno je da je σ_1 "1-1" preslikavanje. Tada

$$\begin{aligned}
h(\Phi) &= S_{(\tau_1^{-1} \upharpoonright V_f(\Psi)) \upharpoonright V}\, h(\Psi) \\
&= S_{(\tau_1^{-1} \upharpoonright V_f(\Psi)) \upharpoonright V}\, h(S(\sigma_1)S_f(\sigma)\Phi) \\
&= S_{(\tau_1^{-1} \upharpoonright V_f(\Psi)) \upharpoonright V}\, S_{(\sigma_1 \upharpoonright V_f(S_f(\sigma)\Phi)) \upharpoonright V}\, h(S_f(\sigma)\Psi) \\
&= S_{(\tau_1^{-1} \upharpoonright V_f(\Psi)) \upharpoonright V}\, S_{(\sigma_1 \upharpoonright V_f(S_f(\sigma)\Phi)) \upharpoonright V}\, 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Dakle, pokazali smo da iz $\Gamma \vdash_{L^*} \Phi$ sledi $h(\Phi) = 1$, za svako $\Phi \in F$.

Pokažimo da je $g : B \rightarrow H_\Gamma$, $g(p) = (p(x))^\Gamma$ "1-1" preslikavanje. Ako je $g(p) = g(q)$ onda $\Gamma \vdash_{L^*} p(x) \leftrightarrow q(x)$, pa je $h(p(x) \leftrightarrow q(x)) = 1$ odakle je $p = q$. Prema tome, g je "1-1" preslikavanje što zajedno sa prethodno dokazanim daje

$$\mathbb{H}_\Gamma \cong \mathbb{B}.$$

Teorema 3.11. *Ako je $\mathbb{B}$ slaba verovatnosna poliadična algebra beskonačne dimenzije β, onda se $\mathbb{B}$ može homomorfno preslikati na neku slabu verovatnosnu poliadičnu skupovnu algebru.*

Dokaz.

Na osnovu prethodne teoreme postoji skup rečenica Γ u logici $L = L(\beta, \nu, \overline{\overline{\beta}}^{+}, R)$ tako da $\mathbb{H}_\Gamma \cong \mathbb{B}$. Kako je $\overline{\overline{B}} > 1$, sledi da je Γ konzistentan skup rečenica u L. Na osnovu stava potpunosti Γ ima slab model $\mathfrak{A}$ u kome važe sve teoreme logike L, pa je po lemi 3.9 $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, \cup, \cap, \sim, A^\beta, \emptyset, c_{(K)}, c^r_{(K)}, s_\tau)$ slaba verovatnosna poliadična skupovna algebra i postoji homomorfizam iz $\mathbb{H}_\Gamma$ na $\mathbb{A}$. To znači da postoji i homomorfizam iz $\mathbb{B}$ na $\mathbb{A}$.

LITERATURA

[1] Barwise J., *Admissible Sets and Structures*, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[2] Chang C.C., H.J. Keisler, *Model Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[3] Halmos P., *Measure Theory*, Van Nostrand, Princeton, New York, 1950.

[4] Henkin L., *The completeness of the first-order functional calculus*, J. Symbolic Logic **14** (1949), 159–166.

[5] Henkin L., D. Monk, A. Tarski, *Cylindric Algebras*, North-Holland, Amsterdam, 1971.

[6] Hoover D., *Probability logic*, Ann. Math. Logic **14** (1978), 287–313.

[7] Keisler H.J., *A complete first-order logic with infinitary predicates*, Fund. Math. **LII** (1963), 177–203.

[8] Keisler H.J., *Probability quantifiers*, in: Model Theoretic Logics (J. Barwise and S. Feferman, eds.), Springer-Verlag, Berlin, 1985, pp. 509–556.

[9] Mijajlović Ž., *An Introduction to Model Theory*, Institute of Mathematics, Novi Sad, 1987.

[10] Monk J.D., *Mathematical Logic*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[11] Rašković M., *Weak completeness theorem for $L_{AP\forall}$ logic*, Zb. Rad. (Kragujevac) **8** (1987), 69–72.

[12] Rašković M., R. Đorđević, *Cylindric probability algebras* (to appear).

[13] Rašković M., R. Đorđević, *Probability Quantifiers and Operators*, Vesta Co and Math. Institute SANU, Belgrade, 1996.

[14] Ognjanović Z., *Some properties of probabilistic logics* (to appear).

[15] Đorđević R., *Verovatnosne Logike*, Doktorska disertacija, PMF, Kragujevac, 1991.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX