

Приказивање и обрада статистичких података у настави у средњој школи



Ментор

Милан Божић

Студент

Ненад Цвијановић

Септембар, 2014

Садржај:

Увод	5
Статистика	6
Популација, обележје, узорак	7
Средња вредност.....	16
Аритметичка средина	17
Мод	18
Медијана	19
Стандардна девијација.....	20
Корелација. Коефицијент корелације.....	23
Примери обраде статистичких података у програму наставе математике за основну школу	28
Пети разред.....	28
Шести разред	29
Седми разред.....	30
Осми разред	30
Примери обраде статистичких података на завршном испиту из математике	37
Основни ниво.....	37
Средњи ниво	41
Напредни ниво	43
Завршни испит.....	47
Приказивање и обрада статистичких података у настави у средњој школи	54
Гимназија.....	54
Први разред гимназија	55
Други разред гимназија	56
Трећи разред гимназија.....	57
Четврти разред гимназије	60
Средња економска школа.....	66
Трећи разред	67
Четрти разред.....	70
Обрада статистичких података у оквиру предмета рачунарство и информатика	74
Примена програмског пакета Ексел у решавању задатака из статистике у средњој школи	75

Примена програмског пакета Геогебра у решавању задатака из статистике у средњој школи	84
Есеј.....	91
Перспектива моделирања при математичком расуђивању ученика о подацима.....	91
Теоријски оквир.....	93
Опис студије.....	94
Учесници и подешавања.....	97
Амерички учесници	97
Аустралијски учесници.....	97
Процедуре.....	97
Извори података и анализе.....	98
Резултати	99
Варијације у оквиру модела ученика	109
Дискусија и закључци	116
Истраживање	122
Опис истраживања.....	122
Тест група	124
Прво тестирање	124
Група 1.....	126
Група 2.....	126
Група 3.....	127
Група 4.....	128
Група 5.....	129
Предавање	130
Тест група	136
Друго тестирање.....	136
Група 1.....	139
Група 2.....	141
Група 3.....	144
Група 4.....	146
Група 5.....	149
Коментари	154
Контролна група.....	156
Група 1.....	159

Група 2	160
Група 3	161
Компаративна анализа резултата истраживања	163
Закључак	166
Литература	171

Увод

Током последњих четрдесетак година анализа статистичких података је постала веома популарна. Већа доступност компјутера и статистичких софтверских пакета додатно је повећала улогу статистике у емпиријским истраживањима. Она се због тога користи за истраживања у готово свим областима, од медицине до спорта. Готово сви дневни листови и часописи садрже графиконе и чланке о статистичким истраживањима.

Тема која је обухваћена овим радом јесте обрада и приказивање статистичких података у настави у средњој школи. Рад је подељен у две теметске целине. У оквиру прве целине дефинисани су основни појмови који се користе у статистици и статистичкој обради података. Свака научна област има сопствену терминологију и статистика у том погледу није изузетак. У овом, уводном поглављу биће објашњени основни статистички појмови, који ће помоћи да се разумеју различити концепти и технике изложене у наредним поглављима.

Затим, следи анализа удела који статистика заузима у настави математике и других предмета, како у основној школи тако и средњој школи. Посебно је обрађен и део који се тиче завршног испита за ученике основних школа, као и обрада статистичких података у оквиру наставе информатике у средњим школама.

У оквиру друге целине обухваћен је концепт моделирања статистичких података у настави математике који пребацује фокус учења са проналажења решења неког проблема на креирање система који је општи и може се поново користити. На основу студије која је приказана у есеју, урађено је и истраживање у сарадњи са ученицима прве године средње школе које је имало за задатак да испита како су ученици у нашим школама прихватили нови концепт моделирања, и да ли би тај концепт могао реално да се имплементира у настави математике у средњим школама.

Статистика¹

Статистика је грана математике која се бави прикупљањем, класификацијом, анализом, приказивањем, интерпретацијом различитих података и доношењем закључака на основу тих података.

Статистика (грчки: *statos* – уређен, фиксиран) је данас присутна и у свакодневном животу, а извесним аспектима „обичног“ живота бавила се и у својим почецима. Наиме, статистика је првобитно проучавала такозване масовне појаве у људском друштву кроз прикупљање, упоређивање и тумачење података о становништву, имовини, војној снази, ...

Још је у IV веку пре нове ере Аристотел урадио „попис“ 158 градова-држава на територији где су живели Грци, што би могао да буде, на просторима данашње Европе, зачетак науке о друштву – демографије. Касније, у XVII веку, у Немачкој је такође био урађен компаративни опис држава, а у Енглеској, исто у XVII веку, направљен је, у време епидемије куге, попис умрлих и врста болести од којих су преминули, по парохијама. То је, са данашње тачке гледишта, примена статистике у медицини. У историји статистике важно место има и Едмунд Халеј због својих идеја у вези са уплатом животног осигурања. Свакако, за развој статистике су важни и Карл Фридрих Гаус и Пјер Симон Лаплас, научници и математичари који су познати и ширем кругу, а не само онима који се баве математиком. Мање је, међутим, познат допринос Адолфа Кетлеа из Белгије, који је дао систематизацију и категоризацију криминалног понашања и узрока који до њега доводе. Касније, свакако незаобилазна имена у статистици су и сер Роналд А. Фишер и Чарлс Пирсон, а такође и многи научници из Русије и касније Совјетског Савеза, али и из Индије, док се данас у статистици, као и математици уопште, све чешће срећу имена кинеских научника.

Област примене статистике се много проширила, и практично нема домена људске делатности без мањег или већег примењивања статистичких метода.

Развој рачунарске технике значајно је допринео брзом развоју статистике захваљујући, између осталог, могућностима бржег израчунавања потребних величина на основу прикупљених података. Постоје многи специфични пакети програма намењених за

¹ Проф. Др Јевремовић, В., (2011), *Две лекције из статистике*, Републички семинар за наставу математике, Нови Сад

статистичку обраду података: SPSS, R, Statgraphics, ... али и Excell i Matlab, такође имају широке палете статистичких метода.

Међутим, успешна примена рачунара у статистици подразумева добро познавање основних законитости статистичког закључивања, да би се подаци правилно уносили, да би се изабрале за њих одговарајуће методе обраде и да би се добијени резултати правилно интерпретирали.

У данашње време скоро сваки инжењер, трговац, наставник или научник мораће да се у већој или мањој мери користи статистиком. Он прво сакупља податке рецимо о производњи неког артикла у фабрици, о продаји одређене врсте робе, о успеху ученика, или о неком лабораторијском експерименту. Затим он саставља извештаје у којима обавештава своје претпостављене помоћу табела, графика, и тако даље, како напредује производња, како иде продаја робе, да ли је успех ученика бољи после најновије реформе, како се експериментални подаци уклапају у теорију која се проверава и слично. Претпостављени, са своје стране, морају бити способни да читају такве извештаје, да из табела и графика брзо схвате шта се дешава и да на основу тих података донесу одлуке о томе шта даље треба радити.

Дакле, можемо закључити, да се статистички метод састоји из четири дела:

- сакупљање података,
- приказивање података,
- обрада података (анализа података),
- и доношење закључака на основу те анализе података.

Да би се на овакву проблематику могли применити математички методи, неопходно је да се проблематика преведе на математички језик, што ћемо и учинити.

Популација, обележје, узорак²

Посматрајмо неки скуп S који ћемо звати статистички скуп (**популација**).

Ако сваком елементу скупа S доделимо један реалан број, тиме је дефинисано неко пресликавање $X : S \rightarrow R$ које се назива **обележје** скупа S .

Било који подскуп скупа S се назива **узорак**.

² Кечкић, Ј., (2004), *Математика 4 са збирком задатака за 4. Разред гимназије*, Круг, Београд

Обележје може бити **нумеричко (квантитативно)** или **нenumеричко (квалитативно, атрибутивно)**.

Нумеричка обележја могу бити **дискретна** или **непрекидна**. Ако је на скупу S дефинисано обележје $X: S \rightarrow R$, и ако је $X(S)$ коначан или бесконачан низ реалних бројева, онда кажемо да је обележје X дискретно. На пример, број ученика у школи је дискретно обележје.

С друге стране, ако је $X(S)$ неки интервал реалних бројева, онда кажемо да је обележје X непрекидно. Пример непрекидних обележја су: старост становника, вредност робе...

Атрибутивна обележја се изражавају описно као на пример занимање, боја косе, пол и тако даље.

Она су по правилу дискретна и могу се на одговарајући начин представити као нумеричка.

Квалитативне и квантитативне карактеристике се могу преводити из једног облика у други. Превођење квалитативних у квантитативне карактеристике се назива шифрирање података.

На једној популацији, то јест, на сваком њеном елементу, може се посматрати (мерити) једна особина. Тада се каже да је обележје једнодимензионално. Могу се посматрати две или више особина истовремено. Тада се каже да је обележје вишедимензионално.

Задатак статистике је одређивање расподеле обележја, или бар неких параметара те расподеле. Ради тога се прикупљају подаци о популацији. Подаци се могу прикупљати из целе популације и тако изучавати популација у целини. Међутим, ако популација садржи велики број елемената, тада изучавање целе популације може дуго трајати или проузроковати веће материјалне трошкове. А у неким је случајевима проучавање целе популације немогуће. Стога се из целе популације (на случајан начин) узима један део који се даље проучава. Тај део се назива **узорак**. Број елемената у узорку је **обим узорка**.

Пример 1. Популацију чини скуп свих становника Београда запослених у одређеном месецу, а обележје је њихова месечна плата. Узорак је било који подскуп скупа запослених становника Београда, на пример, сви наставници математике запослени у Београду...

Може се рећи да се један од основних поступака статистике састоји у томе да се испитивање неке масовне појаве (обележја) на целој популацији замени испитивањем те појаве на узорку и да на основу особина тог узорка чине одређени закључци, предвиђања за читаву популацију.

Пример 2. Једна фабрика прави мајице које су тренутно у моди међу ученицима средњих школа. Пре него што пређе на серијску производњу, треба проценити величине мајица које ће се појавити на тржишту. Рецимо, ако је познато да ученици који су виши од 180 cm носе број 52, колико процената од укупне производње треба да отпадне на производњу мајица броја 52?

Нека је S скуп свих ученика средњих школа. За обележје X узимамо висину ученика; другим речима сваком ученику додељујемо неки број $a \in R$, који означава његову висину у сантиметрима. Да би се тачно одредило за колико ученика важи $a \geq 180\text{ cm}$, требало би измерити висине свих ученика, а затим пребројати колико је оних који су виши од 180 cm .

Такав посао се очигледно не исплати, а и готово је немогуће ићи од школе до школе, и од ученика до ученика и мерити њихову висину.

Уместо тога, приступа се испитивању узорка. Случајно се одабере, на пример, 10 школа, и на том узорку лако је тачно одредити проценат ученика који су виши од 180 cm . Рецимо да тај проценат износи 40% . На основу тог податка, производиће се 40% мајица броја 52.

Подаци за узорак се прикупљају по унапред постављеном плану (пописи, анкете, мерења, и тако даље). Према начину добијања података постоје две основне групе: подаци добијени бројањем и подаци добијени мерењем.

Да би се добили што квалитетнији подаци (узорак) неопходно је тачно знати циљ истраживања, критеријум за утврђивање да ли изабрани елемент има одређено својство, начин прикупљања података, методу за утврђивање постојања нетачних података. Такође је потребно прихватити чињеницу да се (скоро сигурно) популација која се проучава (и расподела обележја на популацији) разликује од добијеног узорка (и од расподеле обележја на том узорку). Дакле, једино је од интереса разматрање анализе података и доношење закључака који се односе на ону популацију из које је добијен узорак.

Постоје многе методе за добијање узорка. Избор методе зависи од врсте, величине и структуре популације.

Узорак се најчешће добија на један од следећих начина:

- Изабрани елемент се после бележења особина враћа у популацију, да би се затим из целокупне популације на случајан начин узимао следећи елемент (избор са враћањем).
- Изабрани елемент се после бележења особина не враћа у популацију, а следећи елемент узорка се бира међу преосталим елементима популације (избор без враћања).

Поступци за обраду података из узорка су у вези са врстом узорка и начином његовог добијања. Разликују се методе које се примењују на такозване мале узорке (обима $n < 30$) и на велике узорке (обима $n > 30$). За мале узорке је потребно знати тачне расподеле случајних величина које се користе, док за узорке великог обима тачне расподеле се могу апроксимирати другим расподелама (на пример, нормалном расподелом – на основу централне граничне теореме). Област статистике која се бави овом проблематиком се назива **теорија узорака**.

Како је крајњи задатак статистике одређивање расподеле обележја на популацији на основу обележја на узорку, од велике је важности обезбеђивање репрезентативности узорка. Неопходно је обезбедити узорак који добро репрезентује популацију, то јест, представља „умањену“, а никако „искривљену“, нити „увеличану“ слику једног дела популације.

Методе за добијање узорака и начин анализе добијених података зависе и од обима популације. Наиме, за бесконачне популације или популације великог обима је једна методологија, а за коначне популације мањег обима друга.

За свако испитивање неког обележја треба пажљиво испланирати односно изабрати методу добијања узорка. Посебно је то случај кад на посматрано обележје може да утиче већи број фактора, и онда је неопходно знати који елементи узорка су били под утицајем којих фактора (сва испитивања у медицини су, стога, веома осетљива на погрешне класификације, недовољне обиме узорака, ...). Сер Р. А. Фишер је уочио ту проблематику и развио методологију правилног добијања узорака у оквиру испитивања методама факторске анализе.

Нетачни подаци су неистинит одговор у анкети, груба грешка при мерењу, погрешно унет податак у анкетни лист, и тако даље.

Правилна интерпретација резултата статистичке обраде података из узорка води рачуна о популацији из које је узет узорак. На пример, ако се анкета грађана о одређеном питању остварује кроз интервјуе случајно изабраних возача аутомобила, тада закључци који се доносе могу бити примењени само на популацију оних који возе аутомобил, а не на све грађане посматране области.

Податке добијене посматрањем или експериментом, који представљају вредности посматраног обележја за елемент статистичког скупа или узорка, потребно је средити на подесан начин да би се могла сагледати расподела обележја. Два основна метода представљања расподеле обележја су таблични метод и графички метод.

Постоје два основна начина за таблично представљање података добијених из узорка :

- подаци дати појединачним бројним вредностима,
- подаци дати по интервалима.

Нека посматрано обележје X узима вредности $x_1, x_2, \dots, x_k$, где је $x_1 < x_2 < \dots < x_k$, које се у броју N свих елемената статистичког скупа или узорка појављују редом $f_1, f_2, \dots, f_k$ задовољавају стога услов $f_1 + f_2 + \dots + f_k = N$, и називају се апсолутне фреквенције (учестаности) вредности обележја $x_1, x_2, \dots, x_k$. Уместо апсолутних, често се користе и такозване релативне фреквенције (статистичке вероватноће):

$f_{r1} = \frac{f_1}{N}$, $f_{r2} = \frac{f_2}{N}$, $\dots$, $f_{rk} = \frac{f_k}{N}$, које очигледно задовољавају једнакост $f_{r1} + f_{r2} + \dots + f_{rk} = 1$.

Вредности обележја $x_1, x_2, \dots, x_k$ узете са одговарајућим фреквенцијама и распоређене по растућим вредностима формирају статистичку табелу:

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_k	Σ
f_i	f_1	f_2	f_3	$\dots$	f_k	N
f_{ri}	f_{r1}	f_{r2}	f_{r3}	$\dots$	f_{rk}	1

Табела 1

Пример 3. У једном одељењу има 32 ученика. Међу њима има 4 одлична, 9 врло добра, 10 добра, 3 довољна и 6 недовољних ученика. Ако узмемо да су вредности обележја 5

(одличан успех), 4 (врлодобар успех), 3 (добар успех), 2 (довољан успех), 1 (недовољан успех), тада је одговарајућа табела расподеле апсолутних, односно релативних фреквенција обележја:

X	1	2	3	4	5	Σ
f_i	6	3	10	9	4	32
f_{ri}	18,75	9,375	31,25	28,125	12,5	1

Табела 2

Често се расподела даје за одређене скупове вредности обележја (најчешће интервале одређене дужине) нарочито онда када је број вредности које обележје узима велики. То је увек случај код обележја која су непрекидна. Прво се одреди интервал $[a, b]$ у оквиру кога се налазе све посматане вредности. Овај интервал се подели на број k (најчешће једнаких) делова (класа): $[a, a_1)$, $[a_1, a_2)$, ..., $[a_{k-1}, b)$. Тада се одреде учестаности података који одговарају овим интервалима и резултати прикажу у табели:

X	f_i	f_{ri}
$[a, a_1)$	f_1	f_{r1}
$[a_1, a_2)$	f_2	f_{r2}
$[a_2, a_3)$	f_3	f_{r3}
...	...	...
$[a_{k-1}, b)$	f_k	f_{rk}

Табела 3

Најчешће се узима између 6 и 20 интервала (класа). Неки аутори предлажу да број k класа задовољава неједначину $k \leq 5 \log_{10} n$, а неки, пак, $k \approx 1 + 3.32 \log_{10} n$, где је n број елемената у узорку.

Често се прихватају и следећа правила:

- да средине интервала буду једнаке неким подацима из узорка,
- да границе интервала буду различите од података из узорка.

На пример, ако су подаци дати са d децимала, онда се границе интервала дају са $d + 1$ децимала, и тиме остварује ово правило.

Пример 4. Статистички скуп чини 32 ученика једног одељења. Обележје је висина дата у интервалима дужине 5cm. Тада је табела расподела апсолутних, односно релативних фреквенција:

x	f_i	f_n
140-145	1	1/32
145-150	0	0
150-155	1	1/32
155-160	3	3/32
160-165	7	7/32
165-170	8	8/32
170-175	5	5/32
175-180	3	3/32
180-185	3	3/32
185-190	1	1/32

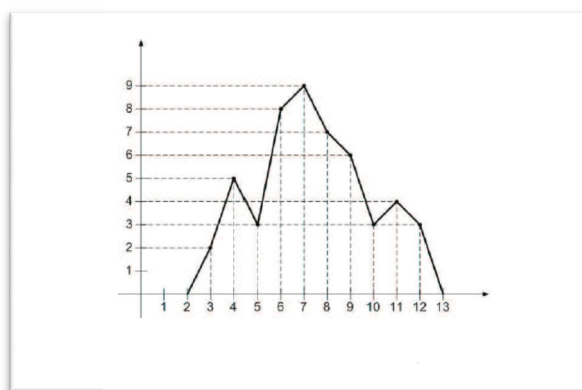
Табела 4

Графичко приказивање података пружа читаоцу више информација него табела са тим истим подацима датим бројчано, јер се лакше праве визуелна поређења него упоређивањем бројчаних података, поготову ако података има више.

Постоји много начина графичког приказивања података. Основним облицима би се могли сматрати **полигони фреквенција** и **хистограми**.

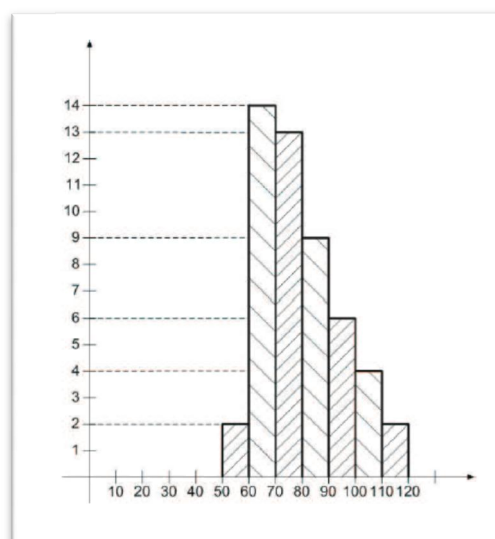
При графичком приказивању, а ту се пре свега мисли на сва представљања у координатном систему, се мора водити рачуна о избору мерних јединица на хоризонталној и вертикалној оси, као и о међусобном односу изабраних мерних јединица и димензији читавог графика. Ово је посебно важно, с обзиром да се на основу графичког представљања података доносе прве претпоставке и закључци о расподели обележја на узорку (а самим тим и на популацији, ако се сматра да је узорак репрезентативан).

Податке из табеле 1 представљамо у координатном систему уношењем тачака чије су апсцисе вредности, а ординате фреквенције обележја (апсолутне или релативне). Нанесене тачке споје се са дужима. Добијена изломљена линија назива се **полигон расподеле учестаности**.



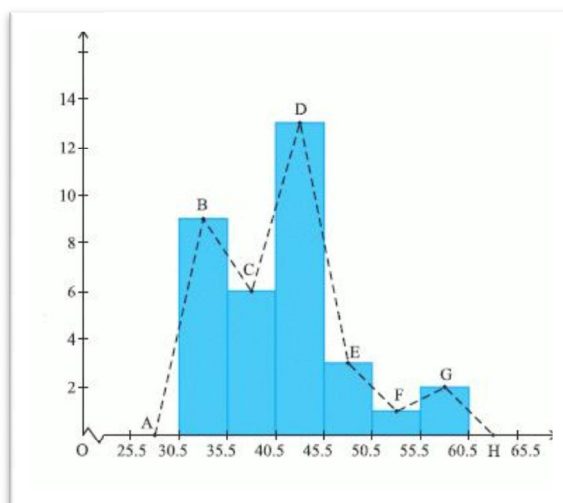
Слика: Пример полигона

Уколико је расподела дата у интервалном облику, графички се она представља тако што се над интервалима цртају правоугаоници са висином једнаком учестаности података у том интервалу. Овако добијени дијаграм, назива се **хистограм учестаности**.



Слика: Пример хистограма

Ако се споје тачке $(x_1, f_1), (x_2, f_2), \dots, (x_k, f_k)$ где су $x_1, x_2, \dots, x_k$ средишта интервала $(a, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_{k-1}, b)$, а $f_1, f_2, \dots, f_k$ су одговарајуће фреквенције, добија се полигон расподеле учестаности.



Слика: Хистограм-полигон

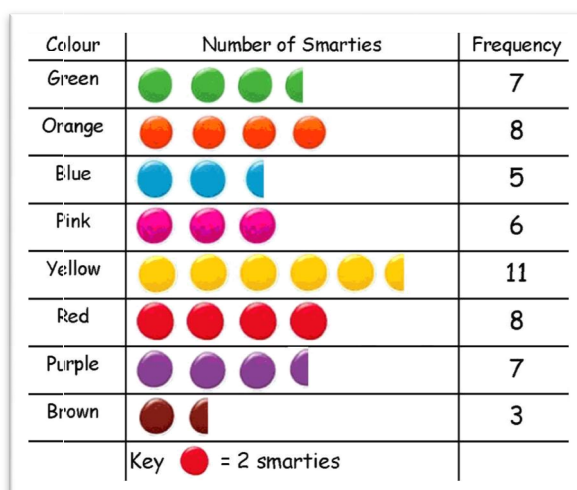
Остали графици су многобројни и разноврсни. На рачунару се, код графичког приказивања података нуди обиље могућности. Погодно је и искористити их, и испробати више графикона за исте податке, док се не изабере „најлепши“.

Кружни дијаграм (pie chart) представља податке тако да су кружни исечци пропорционални фреквенцијама,



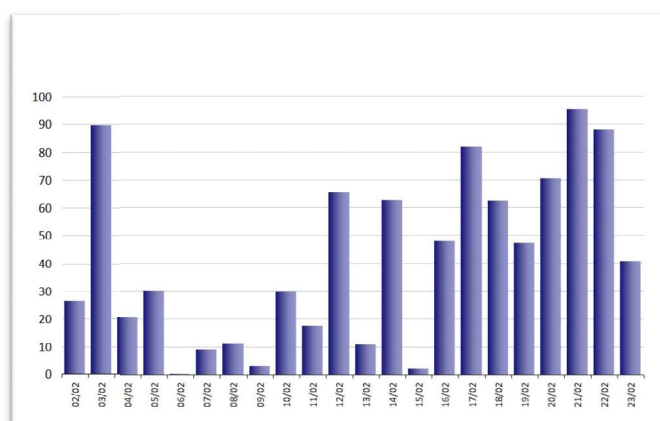
Слика: Кружни дијаграм (pie chart)

Пиктограм (pictogram) представља податке сличицама које личе на елементе популације,



Слика: Пиктограм (pictogram)

дијаграм са дужима (bar chart) представља фреквенције вертикалним одсечцима ...



Слика: Дијаграм са дужима (bar chart)

Средња вредност

Средња вредност обележја је важан статистички податак. То је таква вредност обележја која по дати мерилима репрезентује читав скуп и омогућава упоређивање између разних скупова. Често су вредности обележја тако распоређене да се њихове фреквенције концентришу негде око средине, између најмање и највеће вредности обележја. Уколико су удаљеније од те вредности, фреквенције су мање. Оваква, такозвана централна тенденција распореда фреквенција наводи на помисао да је нека вредност у том скупу константна, а остале вредности обележја варирају око ње, као по некој случајности. Таква вредност постаје на тај начин репрезентативна за цео скуп података и назива се **средња вредност**.

Она се може одређивати према различитим критеријумима. Ако се средња вредност изабере емпиријски између конкретних вредности обележја, тада је то позициона средња вредност (мод). С друге стране, средња вредност може да се израчуна из добијених података као аритметичка, геометријска, хармонијска, квадратна, или нека друга средина.

Аритметичка средина

У статистичкој анализи највише се користи и употребљава **аритметичка средина**. Ако је X посматрано обележје чије су појединачне вредности $x_1, x_2, \dots, x_N$, тада се аритметичка средина рачуна по формули

$$\bar{x} = \frac{1}{N} (x_1 + x_2 + \dots + x_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Пример 1. Ако се у 5 одељења четвртог разреда једне средње школе уписало редом 30, 28, 32, 29, 31 ученика, тада је просек уписаних ученика по одељењу:

$$\bar{x} = \frac{30 + 28 + 32 + 29 + 31}{5} = 30$$

Ово је најједноставнији пример аритметичке средине (или обичне аритметичке средине), где се свака вредност обележја јавља само једанпут (има фреквенцију 1).

Чешће се јављају вредности обележја $x_1, x_2, \dots, x_k$ са различитим апсолутним фреквенцијама $f_1, f_2, \dots, f_k$, па је у том случају аритметичка средина обележја:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} (f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_k x_k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k f_i x_i, \text{ где је } f_1 + f_2 + \dots + f_k = N.$$

Ова аритметичка средина назива се **тежинска аритметичка средина**, јер се вредности $x_1, x_2, \dots, x_k$ узимају онолико пута колико се јављају, то јест, са својим „тежинама“.

Пример 2. У једном одељењу четврте године, оцене из математике су следеће: 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5. Овим оценама одговара следећа таблица расподеле:

X	1	2	3	4	5	Σ
f_i	2	4	5	6	3	20

Табела 5

Аритметичка средина је једнака: $\bar{x} = \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 5 \cdot 3}{20} = \frac{64}{20} = 3,2$.

Ако су подаци дати по интервалима, у рачуну се као вредности обележја узимају средине интервала.

Пример 3. Одредимо просечну висину ученика, ако су висине дате у табели.

X	f_i	f_n
140-145	1	1/32
145-150	0	0
150-155	1	1/32
155-160	3	3/32
160-165	7	7/32
165-170	8	8/32
170-175	5	5/32
175-180	3	3/32
180-185	3	3/32
185-190	1	1/32

Табела 6

Прво одредимо средишта свих интервала:

142,5; 147,5; 152,5; 157,5; 162,5; 167,5; 172,5; 177,5; 182,5; 187,5

$$\bar{x} = \frac{1}{32} (1 \cdot 142,5 + 0 \cdot 147,5 + 1 \cdot 152,5 + 3 \cdot 157,5 + 7 \cdot 162,5 + 8 \cdot 167,5 + 5 \cdot 172,5 + 3 \cdot 177,5 + 3 \cdot 182,5 + 1 \cdot 187,5) = 167,97$$

Мод

По значају, после аритметичке средине као средње вредности статистичких обележја, долазе **мод**, у ознаци Mo , и **медијана**, у ознаци Me . То су позиционе средње вредности које се одређују на основу места, позиције, које заузимају у низу сређених података за неко обележје.

Мод (модус, или модална вредност) је вредност обележја која у посматраном низу података има највећу фреквенцију, то јест, најчешће се јавља. Може се десити да мод не постоји, али може бити и више од једног мода.

Пример 4. Ако су оцене из математике једног ученика четвртог разреда средње школе 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, мод је 4.

Ако су оцене из математике истог ученика 1, 2, 3, 4, 5 онда мод не постоји.

А ако су оцене 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, онда има два мода, 3 и 5.

За груписане вредности обележја по интервалима, односно непрекидне вредности обележја, мод није тако лако уочљив. Треба га тражити у интервалима са највећим фреквенцијама који се иначе зову **модални интервали**. У том случају мод се израчунава помоћу формуле:

$$Mo = a_1 + \frac{f_2 - f_1}{(f_2 - f_1) + (f_2 - f_3)} \cdot d$$

Где је a_1 доња граница модалног интервала, d величина групног интервала, а f_1, f_2, f_3 су редом фреквенције премодалног, модалног и послемодалног интервала.

Пример 5. Израчунајмо мод висине ученика из табеле 6.

Модални интервал је $[165, 170)$, $a_1 = 165$, $f_1 = 7$, $f_2 = 8$, $f_3 = 5$, $d = 5$, па је мод једнак:

$$Mo = 165 + \frac{1}{1 + 3} \cdot 5 = 165 + 1,25 = 166,25$$

Медијана

Медијана је она вредност обележја која се налази у средини свих вредности обележја $x_1, x_2, \dots, x_k$ уређених по величини. При одређивању медијане треба разликовати два случаја: број вредности обележја је паран, односно непаран.

Ако је број вредности обележја непаран, тада у њему постоји једна вредност обележја која је у средини, и то је медијана.

Пример 6. Нека су оцене из математике једног ученика четвртог разреда средње школе 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5.

Медијана је 3.

Ако је број вредности паран, тада постоје два средња члана, па се било који од ова два члана може узети за медијану. Да би се избегла ова неодлучност, за медијану узимамо аритметичку средину тих чланова.

Пример 7. Нека су оцене из метематике једног ученика четвртог разреда средње школе 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5.

Медијана је $Me = \frac{3+4}{2} = 3,5$.

Ако су вредности обележја дате у груписаним интервалима, одређује се такозвани **медијални интервал**, у коме се налази средишњи члан, па се медијана рачуна по формули:

$$Me = a_1 + \frac{d}{f_k} \left(\frac{N}{2} - \sum_{i=1}^{k-1} f_i \right)$$

Где је a_1 доња граница медијалног интервала, d величина групног интервала, а f_k је фреквенција медијалног интервала, N је број чланова статистичког скупа, $\sum_{i=1}^{k-1} f_i$ збир свих фреквенција предмедијалних интервала.

Пример 8. Израчунати медијану висине ученика из табеле 6.

Укупна фреквенција је $N = 32$, значи да се средишњи члан налази на 16. месту, а у табели то је интервал $[165,170)$, дакле $a_1 = 165$, $d = 5$, $f_k = 8$, $\sum_{i=1}^{k-1} f_i = 1 + 0 + 1 + 3 + 7 = 12$, па када се ови подаци замене у формулу, добијамо да је медијана $Me = 167,50$.

Мод и медијана, с обзиром на своје особине, налазе велику примену у разним статистичким истраживањима. Мод се, на пример, употребљава када треба наћи вредност обележја које се најчешће среће. Тако је, на пример при испитивању услова становања бољи показатељ величина стамбене површине коју користи највећи број становника (мод), него просечна површина по једном становнику (аритметичка средина). Медијана пре свега зависи од броја и расподеле вредности обележја, па за њено одређивање није неопходно познавати све вредности ако су оне поређане по величини.

Стандардна девијација

За обележје X једног статистичког скупа чије су вредности $x_1, x_2, \dots, x_N$ и чија је аритметичка средина $\bar{x}$, разлике $x_1 - \bar{x}$, $x_2 - \bar{x}$, $\dots$, $x_N - \bar{x}$ називају се **одступања** или **девијације** вредности обележја од њихове аритметичке средине. Што су одступања мања, подаци су једноличнији, то јест, средња вредност обележја боље представља скуп.

Да би се ова одступања бројно изразила за све вредности обележја, уводе се разни показатељи одступања. Аритметичка средина апсолутних вредности одступања:

$$\theta = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_N - \bar{x}|}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}|$$

представља такозвано **средње апсолутно одступање** вредности обележја

$X: x_1, x_2, \dots, x_N$ од аритметичке средине $\bar{x}$.

Ако се вредности обележја $X: x_1, x_2, \dots, x_N$ појављују са фреквенцијама $f_1, f_2, \dots, f_k$ ($f_1 + f_2 + \dots + f_k = N$), тада је средње апсолутно одступање једнако:

$$\theta = \frac{f_1|x_1 - \bar{x}| + f_2|x_2 - \bar{x}| + \dots + f_k|x_k - \bar{x}|}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i|x_i - \bar{x}|$$

Да би се избегла рачунања са апсолутним вредностима показује се да је најкорисније за меру одступања вредности обележја X од аритметичке средине $\bar{x}$ узети средњи квадрат одступања вредности $x_1, x_2, \dots, x_N$ од $\bar{x}$:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

За статистичко обележје $X: x_1, x_2, \dots, x_k$ појављују са фреквенцијама $f_1, f_2, \dots, f_k$, средњи квадрат одступања x_i ($i = 1, 2, \dots, k$) од $\bar{x}$ (или **дисперзија** обележја X) једнак је:

$$\sigma^2 = \frac{f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_k(x_k - \bar{x})^2}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(x_i - \bar{x})^2$$

где је $f_1 + f_2 + \dots + f_k = N$.

Позитиван корен из σ^2 назива се **стандардна девијација** или **стандардно одступање**. Он показује колико аритметичка средина у просеку одступа од појединих вредности обележја.

$$\sigma = \sqrt{\frac{f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_k(x_k - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(x_i - \bar{x})^2}$$

За израчунавање стандардне девијације може се добити једноставнија формула. Наиме, имамо

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k f_i x_i^2 - \frac{2\bar{x}}{N} \sum_{i=1}^k f_i x_i + \frac{\bar{x}^2}{N} \sum_{i=1}^k f_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k f_i x_i^2 - 2\bar{x}\bar{x} + \bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k f_i x_i^2 - \bar{x}^2\end{aligned}$$

одакле излази $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^k f_i x_i^2 - \bar{x}^2}$.

Количник стандардне девијације и аритметичке средине назива се коефицијент варијације и означава се V . Дакле, $V = \sigma/\bar{x}$. Овај коефицијент је релативна мера одступања и показује које се обележје више мења у односу на аритметичку средину.

Пример 1. Тридесет ученика једног одељења оцењено је на крају школске године из математике и физике на следећи начин:

Оцена из математике	1	2	3	4	5	Σ
Фреквенција f_i	4	8	9	6	3	30

Оцена из физике	1	2	3	4	5	Σ
Фреквенција f_i	2	5	12	5	6	30

Израчунати стандардне девијације за оба предмета. У ком предмету се испољава већа променљивост оцена?

Да бисмо једноставније израчунали стандардну девијацију и коефицијент варијације V , проширимо дате табеле на следечи начин:

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
1	4	4	4
2	8	16	32
3	9	27	81
4	6	24	96
5	3	15	75
Σ	30	86	288

Табела 7. Подаци за математику

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
1	2	2	2
2	5	10	20
3	12	36	108
4	5	20	80
5	6	30	150
Σ	30	98	360

Табела 8. Подаци за физику

Означимо са $\bar{x}_1$, σ_1 , V_1 аритметичку средину, стандардну девијацију и коефицијент варијације за податке из математике, а са $\bar{x}_2$, σ_2 , V_2 за податке из физике. Тада је:

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^5 f_i x_i = \frac{86}{30} = 2,87$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^5 f_i x_i = \frac{98}{30} = 3,27 ;$$

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^5 f_i x_i^2 - \bar{x}_1^2 = \frac{288}{30} - (2,87)^2 = 1,36$$

$$\sigma_1 = \sqrt{1,36} = 1,17 ;$$

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^5 f_i x_i^2 - \bar{x}_2^2 = \frac{360}{30} - (3,27)^2 = 1,31$$

$$\sigma_2 = \sqrt{1,31} = 1,14 .$$

Према томе, имамо

$$V_1 = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} = \frac{1,17}{2,87} = 0,41;$$

$$V_2 = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} = \frac{1,14}{3,27} = 0,35;$$

Напомена: Ако су подаци дати по интервалима, у рачуну се као вредности обележја узимају средишта интервала.

Корелација. Коефицијент корелације

Ако се на одређеном статистичком скупу посматрају два обележја X и Y , кажемо да се посматра дводимензијално обележје које означавамо (X, Y) . Дводимензијално обележје је, дакле, пресликавање статистичког скупа S у скуп R^2 (скуп свих уређених парова реалних бројева).

Један од задатака статистике јесте проучавање повезаности међу обележјима X и Y дводимензијалног обележја (X, Y) . Наиме, често промена једног обележја утиче на промену другог, због међустобне повезаности. Ова повезаност може да се разликује по јачини, смеру или облику повезаности. Кажемо да је смер повезаности позитиван ако

при рашћењу вредности једног обележја расте и вредност другог, и обрнуто. Смер повезаности је негативан ако при расту вредности једног обележја вредности другог опадају, и обрнуто. На пример, ако је X висина, а Y тежина људи, тада између ових обележја постоји позитиван смер повезаности јер ће, по правилу, више људи имати и већу тежину.

Повезаност између обележја се може разликовати и по јачини повезаности. Најјача веза два обележја је **функционална веза**, то јест, свакој вредности једног обележја одговара тачно једна одређена вредност другог. Слабија веза између обележја (која је подложна мањим или већим одступањима) назива се **корелативна (или стохастичка) веза**. На пример, између тежине и висине људи постоји извесна корелативна веза, или краће **корелација**. Постоје и обележја која не показују никакву повезаност, тада кажемо да су таква обележја некорелативна.

Осим смера и јачине повезаности постоје и други облици повезаности. Прву оријентацију о облику повезаности међу обележјима X и Y дају графичко приказивање уређених парова $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ у координативном систему, где су $x_1, x_2, \dots, x_n$ вредности обележја X , а $y_1, y_2, \dots, y_n$ вредности обележја Y . Скуп тачака које приказују парове бројева (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) назива се **дијаграм растурања**. По распореду тачака на дијаграму може се утврдити облик повезаности, смер, а донекле и јачина повезаности. Линија која најбоље репрезентује распоред тачака назива се **линија регресије**. Најједноставнији облик везе између два обележја је линеарна веза. Када се на дијаграму растурања види да би веза између обележја могла бити линеарна, тада се одређује права која ће се најбоље прилагодити тачкама на дијаграму. Помоћу x : $y = ax + b$, узима се она права за коју је збир квадрата вертикалних растојања од праве регресије најмањи. Тај метод је познат под називом **метод најмањих квадрата**. Постоје и други методи тражења једначина регресионих линија.

Претпоставимо да је $y = ax + b$ једначина регресионе праве. Тада за сваку вредност $x_i (1, 2, \dots, n)$ обележја X добијемо из једначине $y = ax + b$ одговарајућу вредност $y_i (= ax_i + b)$ коју означавамо y_i^* (да би се разликовала од познате вредности y_i обележја Y). За мерење јачине линеарне везе између обележја X и Y користи се такозвани коефицијент детерминације који се израчунава помоћу приближне формуле

$$r^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i^* - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

и његов квадратни корен

$$r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i^* - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

који се назива (Пирсонов) коефицијент корелације.

Када се коефицијент корелације приближава броју 1, тада је веза између обележја X и Y јака, а када се приближава 0 она је слаба, то јест, не постоји линеарна веза (што не мора да значи да не постоји нека друга веза, криволинијског облика). Ако је вредност коефицијента корелације једнака 1, тада међу обележјима X и Y постоји функционална зависност облика $Y = aX + b$.

Често је статистичким истраживањима линеарних веза између обележја X и Y подесније најпре наћи коефицијент корелације, а затим једначину регресионе линије. Показује се да се коефицијент детерминације може израчунати по формули

$$r^2 = \frac{(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}))^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\right)^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2}$$

Где је σ_x , односно σ_y , стандардна девијација обележја X , односно Y . Стога је коефицијент корелације r дат са

$$r = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Где је

$$C_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}$$

такозвана **коваријанса**.

Пример 1. Тридесет ученика једног одељења оцењено је на писменом задатку из математике (обележје X) и на усменом одговору (обележје Y), како је то приказанао у табели. Каква корелација постоји између оцена на писменом и оцена на усменом одговору?

X/Y	1	2	3	4	5
1	3	2			
2	1	3	1		
3		2	6	2	
4			1	4	1
5				1	3

Табела 10.

Средња вредност обележја X је

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 5}{30} = \frac{89}{30} = 2,97,$$

А средња вредност обележја Y је

$$\bar{y} = \frac{4 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 4 \cdot 5}{30} = \frac{90}{30} = 3.$$

Такође имамо

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \frac{1}{30} \sum_{i=1}^5 f_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{30} (5 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + 10 \cdot 9 + 6 \cdot 16 + 4 \cdot 25) - \left(\frac{89}{30}\right)^2 \\ &= \frac{311}{30} - \frac{7921}{900} = \frac{1409}{900} = 1,57,\end{aligned}$$

Па је стандардна девијација обележја X једнака $\sigma_x = \sqrt{1,57} = 1,25$.

Слично имамо

$$\begin{aligned}\sigma_y^2 &= \frac{1}{30} \sum_{i=1}^5 f_i y_i^2 - \bar{y}^2 = \frac{1}{30} (4 \cdot 1 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 9 + 7 \cdot 16 + 4 \cdot 24) - 3^2 = \frac{316}{30} - 9 \\ &= \frac{46}{30} = 1,53,\end{aligned}$$

Па је стандардна девијација обележја Y једнака $\sigma_y = \sqrt{1,53} = 1,24$.

Коваријанса се у овом случају израчунава на следећи начин:

$$C_{xy} = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 f_{ij} x_i y_j - \bar{x} \bar{y}$$

Где је f_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5$) означавају фреквенције истовремене реализације оба обележја.

Имамо дакле

$$\begin{aligned} C_{xy} = \frac{1}{30} & ((3 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2) + (1 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 2) + (3 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3) \\ & + (2 \cdot 3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4) + (1 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \cdot 4 + 1 \cdot 4 \cdot 3) \\ & + (1 \cdot 5 \cdot 4 + 3 \cdot 5 \cdot 5)) - 3 \frac{89}{30} = \frac{308}{30} - \frac{267}{30} = \frac{41}{30} = 1,37. \end{aligned}$$

Коефицијент корелације r има дакле вредност

$$r = \frac{1,37}{1,25 \cdot 1,24} = 0,88,$$

Што показује да постоји корелација између обележја X и Y .

Примери обраде статистичких података у програму наставе математике за основну школу³

Ученици се већ у нижим разредима основне школе сусрећу са разним подацима, и непосредно долазе у додир са одређеним елементима статистичке обраде података.

У овом поглављу неће бити обрађен део програма наставе математике у нижим разредима основне школе, од првог до четвртог разреда, већ део програма наставе математике у старијим разредима основне школе, од петог до осмог разреда, где се користе статистичке методе и модели у решавању конкретних задатака.

Елементи статистике обрађују се, у почетку у виду процентног рачуна, аритметичке средине, а у каснијим разредима, претежно осмом, ради се и на озбиљнијој обради података, њиховој интерпретацији како табеларној, тако и графичкој.

Пети разред⁴

У наставном плану петог разреда, у оквиру наставне теме „разломци и операције са разломцима“, обрађује се и појам аритметичке средине у две наставне јединице, једна је предвиђена за обраду, а једна за утврђивање градива.

Задаци су класификовани у три нивоа, основни, средњи и напредни ниво.

Пример 1. Борис је из математике у току једног полугодишта добио три петице, две четворке и једну тројку.

а) Одреди Борисову средњу оцену из математике, заокругљену на две децимале.

б) Да је Борис на писменом уместо тројке добио четворку, колика би била његова средња оцена?

в) Ако Борис одговара усмено и добије петицу, хоће ли му средња оцена из математике тада бити већа од 4,50?

У овом задатку, такође се примењују основна својства аритметичке средине, и припада средњем нивоу.

³ Подаци о наставним плановима и програмима преузети са интернет странице <http://www.zuov.gov.rs/poslovi/nastavni-planovi/nastavni-planovi-os-i-ss/>

⁴ Јешић, Д., Мишић, Д., Игњатовић, М., (2010), *Збирка задатака из математике за 5. Разред основне школе*, Герундијум, Београд

Шести разред⁵

У наставном плану шестог разреда, у оквиру наставне теме „Рационални бројеви“, обрађује се и појам аритметичке средине у две наставне јединице. Једна наставна јединица је предвиђена за обраду, а једна за утврђивање градива.

Пример 2. У табели је су дате оцене из свих предмета за десет ученика шетог разреда једне школе.

	Математике	Српски	Енглески	Руски	Биологија	Географија	Историја	Музичко	Физичко	Ликовно	ТИО	Физика	Спорт	Владаре	
Ученик 1	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	
Ученик 2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	
Ученик 3	2	3	2	3	2	2	2	3	5	4	4	4	5	5	
Ученик 4	3	4	4	4	4	2	2	5	5	4	4	4	5	5	
Ученик 5	5	5	5	5	5	4	5	5	5	5	5	4	5	5	
Ученик 6	5	5	5	5	5	4	4	5	5	5	5	2	5	5	
Ученик 7	2	4	3	5	2	2	3	3	5	5	4	3	5	2	
Ученик 8	2	3	2	2	2	2	2	4	5	4	3	2	5	5	
Ученик 9	5	5	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	
Ученик 10	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	

Табела 1.

а) Одреди просечну оцену сваког ученика, и просечну оцену сваког предмета.

б) Која је просечна оцена свих ученика?

У петом и шестом разреду, као што смо видели у претходним примерима, не ради се на некој озбиљнијој обради статистичких података, али се ученици упознају са основама статистичке обраде и њихове примене у свакодневном животу.

⁵ Јешић, Д., Мишић, Д., Игњатовић, М., (2010), *Збирка задатака из математике за 6. Разред основне школе*, Герундијум, Београд

Седми разред⁶

У седмом разреду основне школе, у овиму наставне теме „зависне величине и њихово графичко представљање“, обрађује се: Координатни систем, координате тачке и растојање две тачке изражено преко њихових координата. Примери зависних величина (време и температура, време пуњења базена водом и дубина воде, итд.) и њихово графичко представљање. Читање својстава с графика. За две променљиве величине x и y дефинише се директна (и обрнута) пропорционалност везом $y = kx$ ($x \cdot y = k$, $x \neq 0$ и $y \neq 0$). Пропорција - својство и решавање по једном непознатом члану. Представљање директне пропорционалности и график зависности величина x и y везаних условом $y = kx$. Не уводи се општи појам функције, али може се говорити о линеарној функцији (у поменутом посебном случају).

Ова наставна тема обухвата 20 наставних јединица, од којих је седам предвиђено за обраду, а тринаест за утврђивање градива.

Осми разред⁷

У осмом разреду основне школе, у оквиру наставне теме „графичко представљање података“, обрађује се:

Представљање зависних величина табеларно и у координатном систему. Графичко представљање статистичких података у облику дијаграма (стубичастих, кружних,...). Рачунање средње вредности и медијане. Поређење вредности узорка са средњом вредношћу. За примере статистичких података наведених у садржају програма бирају се подаци које ученици овог узраста разумеју и који за њих имају релевантно значење: школске оцене и просеци, резултати медицинских мерења и слични подаци.

Ова наставна тема обухвата 7 наставних јединица, од којих су три предвиђене за обраду, а четири за утврђивање градива.

⁶ Јешић, Д., Мишић, Д., Игњатовић, М., Бабачев, Н., (2009), *Збирка задатака из математике за 7. Разред основне школе*, Герундијум, Београд

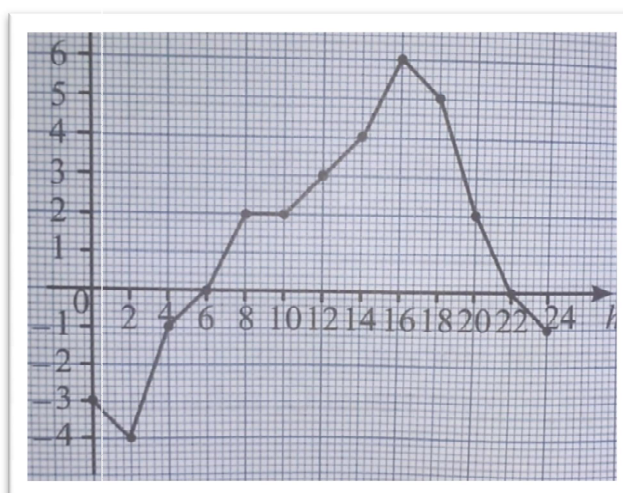
⁷ Јешић, Д., Мишић, Д., Игњатовић, М., Милетић, В., (2009), *Збирка задатака из математике за 8. Разред основне школе*, Герундијум, Београд

Графичко представљање статистичких података	1.	Приказивање и обрада прикупљених података	О
	2.	Статистика и статистички подаци	О
	3.	Приказивање и обрада статистичких података	У
	4.	Приказивање и обрада статистичких података	У
	5.	Средња вредност и медијана	О
	6.	Средња вредност и медијана	У
	7.	Графичко представљање статистичких података	У

Табела 2.

Задатке из ове области, можемо поделити у две категорије. Прву категорију чине задаци код којих су подаци приказани разним врстама графика, па се на основу читања података са графика решавају одређени статистички проблеми.

Пример 3. Од поноћи, у току наредна 24 сата, мерена је температура ваздуха на свака два сата и измерене вредности приказане су графиком.

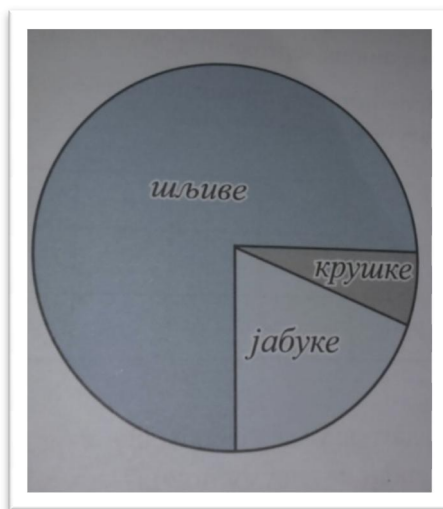


Слика 1.

- Запиши табелу измерене вредности.
- Колико је пута у току мерења измерена температура од 0°C ?
- У којим временским интервалима је температура била испод 0°C ?
- У ком делу дана није забележена промена температуре?
- Када је забележена најмања температура?

Ово је пример задатка где се вежба читање и обрада података задатих графиком у облику полигона.

Пример 4. Дијаграмом је представљен однос количине извезених шљива, јабука и крушака у току једне године. Једно од наведених тврђења није тачно. Које?

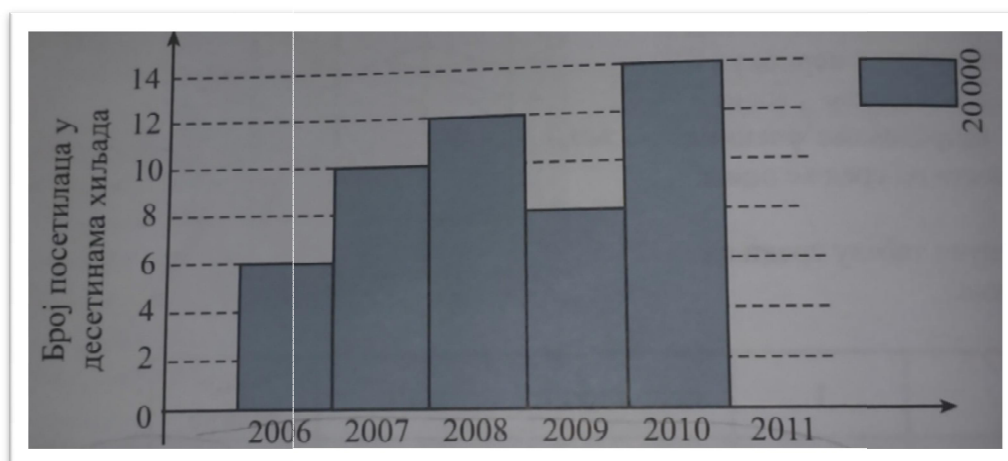


Слика 2.

- а) Шљива је извезено више него крушака и јабука заједно.
- б) Количина извезених јабука је приближно три пута већа од количине извезених крушака.
- в) Укупна количина извезених јабука и крушака представља 25% укупне количине извезеног воћа.
- г) Шљива је извезено четири пута више него јабука.
- д) Да је извезено 33% мање шљива, извезена количина шљива била би приближно два пута већа од извезене количине јабука и крушака заједно.
- ђ) Не може се тврдити да је род шљива био већи од рода јабука.

У овом примеру, ученици донсе закључке на основу података приказаним у виду кружног дијаграма.

Пример 5. Графикон приказује промену броја посетилаца на утакмицама једног спортског клуба, током неколико година.



Слика 3.

- а) Колико је било посетилаца 2009. године ?
- б) За колико се повећао број посетилаца 2010. у односу на 2007. годину ?
- в) За колико процената се повећао број посетилаца 2009. у односу на 2006. годину ?
- г) За колико процената се смањио број посетилаца 2009. у односу на 2007. годину ?
- д) Колико износи просечан број гледалаца у последње 3 године?
- ђ) Цена карте је 2009. године била 300 динара. Колика је зарада клуба те године ако износи 45% од вредности продатих карата ?
- е) Колико би посетилаца требало да буде 2011. године, ако се очекује процентуални пораст у односу на 2010. годину, исти као и 2008. године у односу на 2007. годину ?
- ж) Попуни табелу

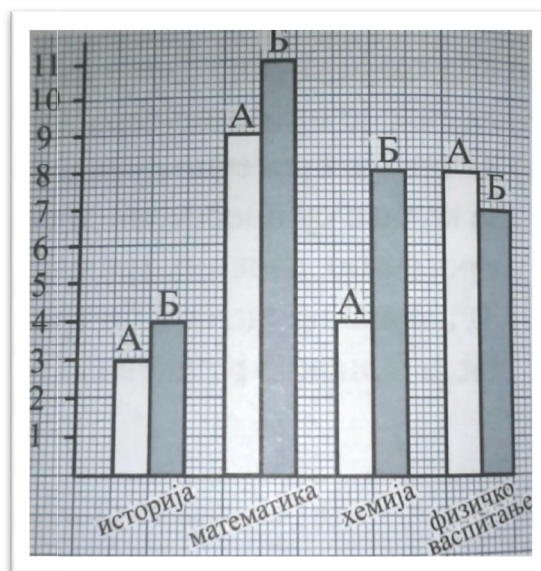
Година	2006.	2007.	2008.	2009.	2010.
Број посетилаца					

Табела 3.

- з) Одреди просечан број гледалаца годишње за ових 5 година.
- и) Упореди просечан број гледалаца годишње за прве три године са просечним бројем гледалаца 2009. године и 2010. године.

У овом примеру, ученици обрађују податке који су приказани графиком у виду стубичастог дијаграма.

Пример 6. Графициони представљају резултате анкете међу ученицима групе А и групе Б. Ученици су се опредељивали за омиљени предмет међу четири понуђена: историје, математике, хемије и физичког васпитања. Број ученика приказан је на вертикалној, а називи предмета на хоризонталној оси.



Слика 4.

а) Попуни табелу према приказаном стубичастом дијаграму.

	Историја	Математика	Хемија	Физичко	Укупно ученика
Број ученика групе А					
Број ученика групе Б					

Табела 4.

б) Одреди два предмета тако да укупан број ученика који су их одабрали чини више од 60% ученика групе А.

в) Одреди два предмета тако да укупан број ученика који су их одабрали чини тачно 40% ученика групе Б.

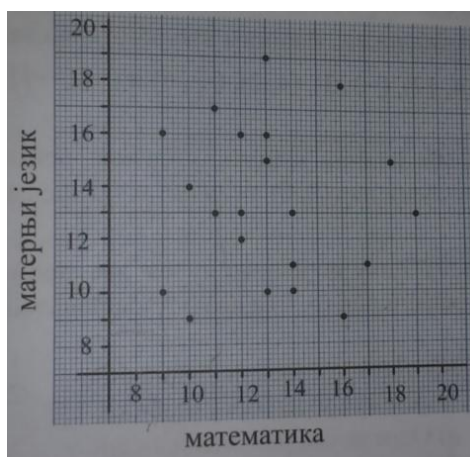
г) Да ли се на основу графикана може закључити да ученици групе Б математику воле више од ученика групе А?

д) Упореди проценат ученика групе А са процентом ученика групе Б који воле математику и изведи закључак.

У овом примеру се такође обрађују подаци који су приказани графиком у виду стубичастог дијаграма. Међутим, битна разлика у односу на претходни пример је то што су два параметра задата паралелно, те се врши међусобно поређење та два параметра и што у задатку постоје питања која захтевају рачунску обраду. Такође подсећа ученике да је анкета један од начина прикупљања статистичких података.

Пример 7. Тачкама на графикону представљени су резултати свих ученика једног одељења на пријемном испиту за средњу школу. Број бодова на пријемном испиту је на вертикалној оси, а из математике на хоризонталној.

Само ученици који су имали више од 11 бодова из матерњег језика и више од 14 бодова из математике, одлучили су да упишу гимназију.



Слика 5.

А) Колико ученика је уписало гимназију?

Б) Одреди број бодова оног ученика овог одељења, који је уписао гимназију, а имао је најмањи број бодова?

В) Одреди број бодова оног ученика овог одељења, који је уписао гимназију, а имао је највећи број бодова?

У овом примеру ученици обрађују податке који су задати тачкастим дијаграмом.

У другу категорију спадају задаци обрнутог типа. Подаци у тим задацима подаци су задати табеларно или експлицитно, па се на основу табела цртају одређени графикони, или се рачунају средње вредности, медијана...

Пример 8. У друпи од 24 ученика спроведена је анкета са понуђеним одговорима о броју минута коришћења мобилног телефона у току једног дана. Резултат анкете дат је табелом.

Минути	10	20	30	40	60
Број ученика	3	5	7	6	3

Табела 5.

а) Одреди просечан број минута коришћења телефона по ученику.

б) Одреди модус и медијану овог узорка.

Пример 9. Ученик осмог разреда се припрема за пријемни испит и ради 10 тестова.

Максималан број бодова које се може добити на тесту је 20.

Резултати су:

14 16 14 17 16 20 17 18 20 14

За дати узорак одреди:

а) средњу вредност,

б) медијану,

в) модус.

У Примеру 8. подаци су задати табеларно, док су у Примеру 9. подаци задати експлицитно.

У претходним примерима дата је једна слика задатака у којима се ради на обради статистичких података у било којем виду. Наравно ту постоје још бројни задаци, али су сви задаци слични задацима приказаним у претходним примерима. Ако бисмо упоредили укупан број часова математике у основној школи, који износи 568 (пети, шести, седми разред по 144 часа годишње, а у осмом 136 часова годишње, наравно без часова допунске и додатне наставе, који броје укупно 72 часа годишње за све године, и око 30 часова предвиђених за припремну наставу за полагање завршног испита код ученика осмог разреда), и укупан број часова где се бар на неки начин употребљавају методе статистичке обраде података, где смо видели да има 32 часа (два у петом разреду, два у шестом разреду, двадесет у седмом разреду и седам у осмом разреду),

закључујемо да статистичка обрада података заузима највише 5,6% укупног градива предвиђеног за учење математике у основној школи.

Примери обраде статистичких података на завршном испиту из математике⁸

Последњих неколико година, тачније од школске 2010/2011 године уведене су нове збирке задатака из математике за припрему завршног испита из математике. Збирка је намењена за вежбање и припремање ученика за полагање завршног испита из математике. Задаци у збирци задатака распоређени су, према сложености захтева, на основни, средњи и напредни ниво. У оквиру сваког нивоа, задаци су разврстани у следеће области: Бројеви и операције са њима, алгебра и функције, геометрија, мерење и обрада података.

У збирци задатака се налазе задаци који ће бити на завршном испиту, потпуно исти или делимично измењени.

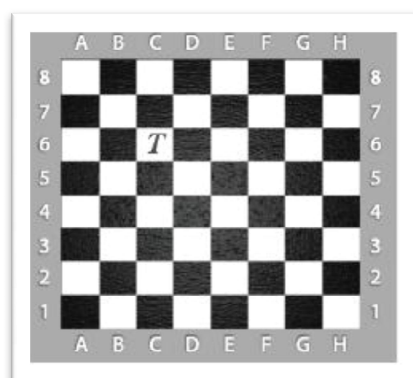
Област „Обрада података“ нас највише занима. Она се обрађује у сва три нивоа, основном, средњем и напредном.

Основни ниво

Задаци распоређени у оквиру основног нивоа обухватају првих 127 задатака у збирци задатака за припрему завршног испита из математике. Од тога, област „обрада података“ обухвата 23 задатка, почевши од 105., завршно са 127. задатком. Од тога, 18 задатака захтева да ученик ишчитава податке са различитих облика графика, табела и осталог, док последњих пет задатака захтевају познавање основног процентног рачуна.

Пример 1. На шаховску таблу постављен је топ (T).

⁸ Спец. Росић, А., Ранчић, Ј., Ђуковић, Ј., мр. Кнежевић, М., Стојсављевић Радовановић, М., Огризовић, П., Богдановић, Р., Малић, Т., (2013), *Збирка задатака из математике за завршни испит у основном образовању и васпитању за школску 2013/2014*, Министарство просвете, науке и технолошког развоја; Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања



Слика 1.

Које су координате поља на коме се налази топ?

У овом примеру, од ученика се захтева елементарно познавање давања координата и координатног система.

Пример 2. У табели је приказан број ученика који су посетили и број ученика који нису посетили позориште.

	Број ученика који су посетили позориште	Број ученика који нису посетили позориште
V разред	117	126
VI разред	123	119
VII разред	119	113
VIII разред	115	120

Табела 1.

На основу података из табеле допуни дате реченице.

а) Број ученика V разреда који нису посетили позориште је _____.

б) Број ученика VIII разреда који су посетили позориште је _____.

в) Од ученика који су посетили позориште, највише је било из _____ разреда.

Овај пример од ученика захтева елементарно читање података из табеле .

Пример 3. У табели су приказани подаци у динарима о просечној потрошњи домаћинства на месечном нивоу у 2011. години.

У ком региону градска насеља имају највећу потрошњу у категорији Опрема за стан и текуће одржавање?

Заокружи слово испред тачног одговора.

а) Београдски регион

б) регион Војводине

в) регион Шумадије и западне Србије

г) регион јужне и источне Србије

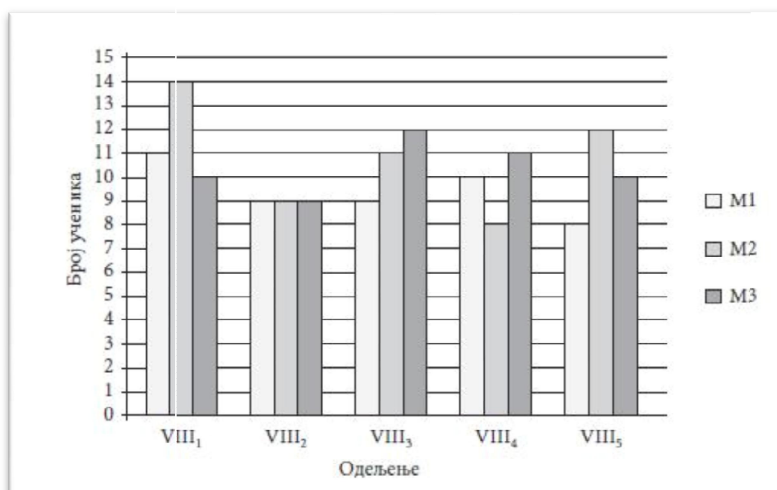
Категорија	Београдски регион		Регион Војводине		Регион Шумадије и западне Србије		Регион јужне и источне Србије	
	Градска насеља	Остала насеља	Градска насеља	Остала насеља	Градска насеља	Остала насеља	Градска насеља	Остала насеља
Храна и безалкохолна пића	23 500	23 300	18 800	19 300	18 500	21 800	19 000	19 300
Одећа и обућа	2 200	2 000	2 400	2 500	2 700	2 100	2 100	1 700
Становање, вода, ел. енергија, гас и остала горива	8 300	8 600	9 300	8 200	7 500	7 200	5 400	4 400
Опрема за стан и текуће одржавање	1 800	2 200	2 200	2 500	2 100	2 000	2 000	1 700
Здравље	2 700	2 400	2 100	1 800	1 400	1 500	1 300	1 300
Транспорт	4 300	5 400	5 300	4 700	3 800	4 800	2 500	2 400
Комуникације	2 400	1 900	2 200	1 800	2 100	1 400	1 600	1 000
Рекреација и култура	3 100	1 500	2 700	1 800	2 400	1 300	1 500	600
Образовање	900	200	400	200	300	400	100	100
Ресторани и хотели	1 400	1 400	800	800	1 100	700	800	500

*Користљени су подаци са сајта Републичког завода за статистику.

Табела 2.

И у овом примеру задатак се своди на читање података, само из сложеније табеле.

Пример 4. Жељана и Санела су истраживале коју од три друштвене мреже (M1, M2 и M3) користе њихови другари. Испитивале су ученике из пет одељења осмог разреда. Добијене податке приказале су на стубичастом дијаграму.



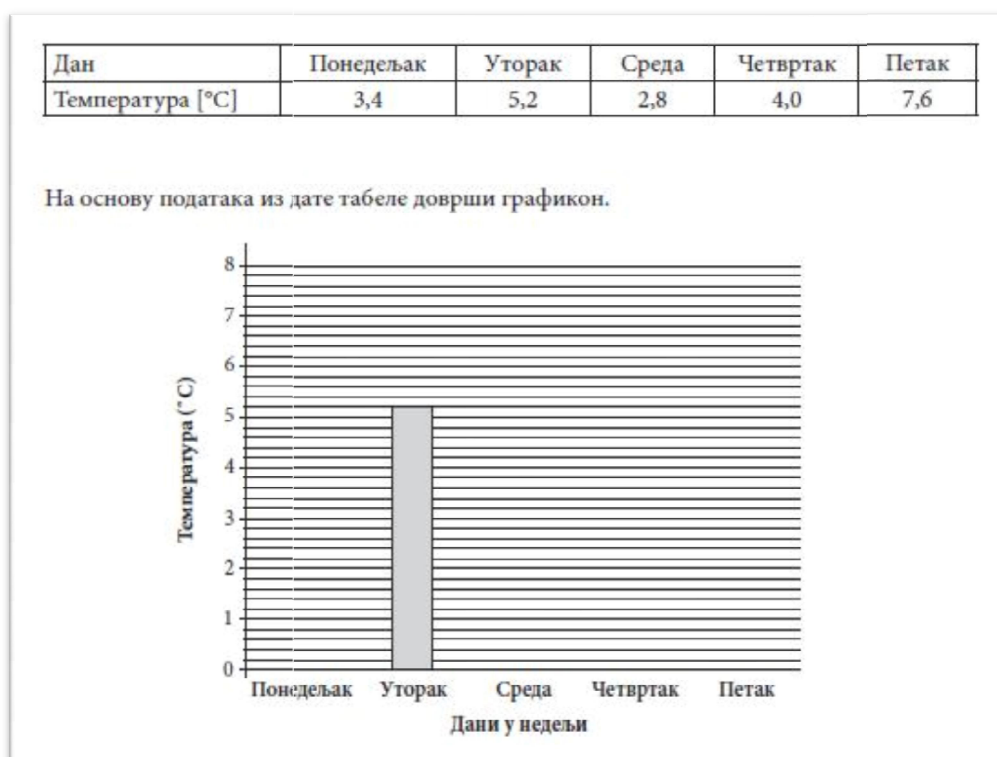
Слика 2.

На основу података из дијаграма допуни следеће реченице.

Највише корисника друштвене мреже M1 има у одељењу _____. Једнак број корисника све три друштвене мреже је у одељењу _____. У одељењу VIII₄ највише се посећује друштвена мрежа _____.

У овом примеру такође ученици имају задатак да прочитају податке задате на стубичастом дијаграму.

Пример 5. У табели су приказане јутарње температуре измерене у Новом Саду у току прве недеље марта 2011. године.



Слика 3.

У овом примеру, од ученика се захтева да на основу обраде података из табеле допуне графикон стубичастог типа.

Пример 6. Ученици VIII разреда прослављају матуру у дискотеци „Звезда”. Потребан број ученика да се реализује прослава је 80% од укупног броја ученика тог одељења. Ако их у одељењу има 30, колико најмање ученика треба да се пријави за прославу?

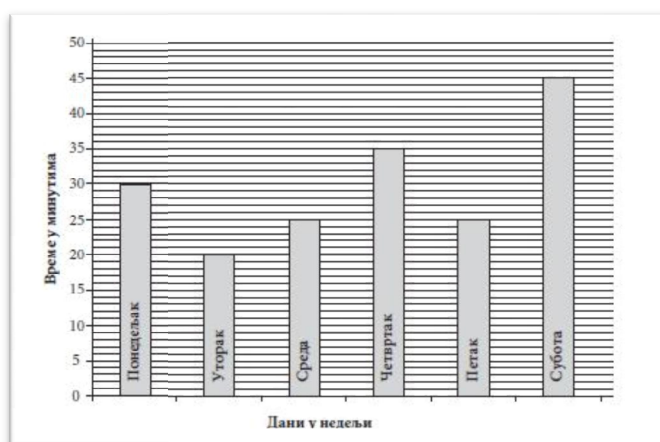
У овом примеру од ученика се захтева елементарно знање у области процентног рачуна.

Средњи ниво

Средњи ниво обухвата 130 задатака у збирци задатака за припрему завршног испита, почевши од 128. задатка, завршно са 257. задатком.

Од тога област „обрада података“ обухвата 25 задатака, почевши од 233. , завршно са 257. задатком. Од тога 19 задатака захтева познавање рада са табелама, графицима, израчунавања медијане и средње вредности , док преосталих шест задатака обухвата рад са процентним рачуном.

Пример 1. На графикону је дато време у минутима које је Радиша провео учећи математику. Колико је у просеку дневно Радиша учио математику за тих шест дана?



Слика 4.

У овом примеру се од ученика захтева да на основу података задатих на стубичастом графикону израчунају средњу вредност.

Пример 2. Јелица у кућној колекцији има шест филмова. Подаци о тим филмовима дати су у табели.

Назив филма	Година снимања	Редитељ	Трајање у минутима
„Боксери иду у рај“	1967.	Бранко Человић	88
„Ко то тамо пева“	1980.	Слободан Шијан	86
„Мајстори, мајстори“	1980.	Горан Марковић	83
„Сећаш ли се Доли Бел?“	1981.	Емир Кустурица	107
„Маратонци трче почасни круг“	1982.	Слободан Шијан	92
„Балкан експрес“	1983.	Бранко Балетић	102

Табела 3.

Колика је просечна дужина трајања ових филмова?

У овом примеру се од ученика захтева да на основу података задатих табеларно израчунају средњу вредност.

Пример 3. Истраживач је на парчету папира записао да је вредност медијане 18. Од датих података заборавио је вредност једног, само се сећао да је сигурно већи од 15, а мањи од 20. Подаци којих се сећа су 20, 13, 17, 15 и 25. Колика је вредност заборављеног податка?

Пример 4. У табели су приказани подаци о броју деце која су боравила у играоници „Колибри” током једне недеље. Колика је медијана за прикупљене податке?

Дан	Понедељак	Уторак	Среда	Четвртак	Петак	Субота	Недеља
Број деце	72	54	64	78	147	251	194

Табела 4.

У Примерима 3. и 4. од ученика се тражи да израчунају медијану за добијене податке, једина је разлика у томе што су подаци у Примеру 3. задати експлицитно, док су подаци у Примеру 4. задати табеларно.

Пример 5. У продавници се викендом даје попуст од 15% за сваки рачун који је већи од 3500 динара. Ако је Маја у петак потрошила 4260 динара, колико би уштедела да је куповину обавила у суботу?

У овом примеру од ученика се захтева примена техника за рад са процентним рачуном.

Напредни ниво

Напредни ниво обухвата 123 задатка у збирци задатака за припрему завршног испита, почевши од 258. задатка, завршно са 380. задатком.

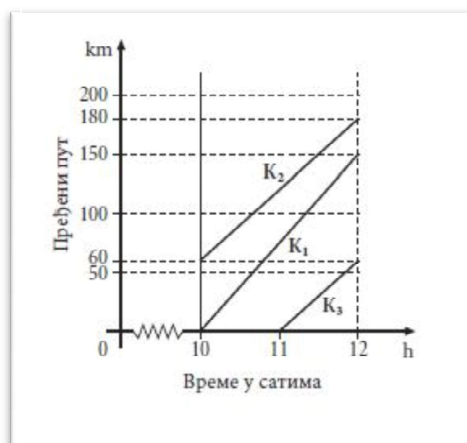
Од тога област „обрада података“ обухвата 24 задатка, почевши од 357., завршно са 380. задатком. Од тога петнаест задатака захтева познавање рада са табелама, графицима, израчунавања медијане и средње вредности, док преосталих девет задатака обухвата рад са процентним рачуном.

Пример 1. Три камиона, K1, K2 и K3, која возе хуманитарну помоћ, кренула су у различито време.

Графикон њиховог кретања приказан је у времену од 10 h до 12 h.

а) Који камион је кренуо пре 10 h?

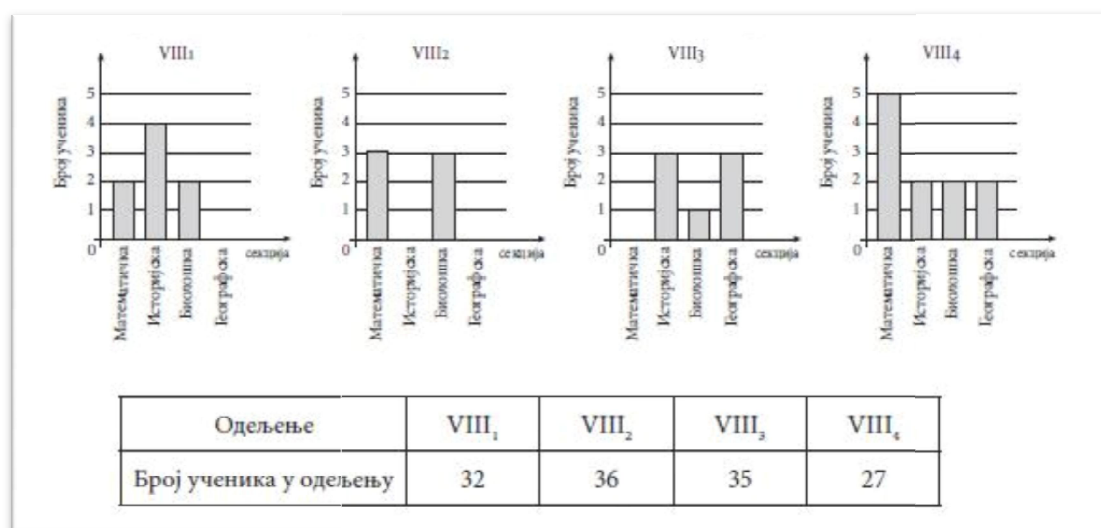
б) Који се камион кретао најбрже?



Слика 5.

У овом примеру од ученика се захтева рад са сложенијим типом графика, његово правилно читање и израчунавање елемената који се не читају директно са графика.

Пример 2. Број ученика VIII разреда који похађају једну од секција приказан је датим дијаграмима. Које одељење има највећи број ученика који не похађају секције?



Слика 6.

У овом примеру од ученика се захтева да упоређују више података који су задати у више стубичастих графика, и њихова правилна интерпретација.

Пример 3. У табели су дата растојања неких градова у километрима.

- Који је град удаљен од Београда 115 km?
- Која два града су удаљена 353 km?
- Која два града су удаљена мање од 50 km?

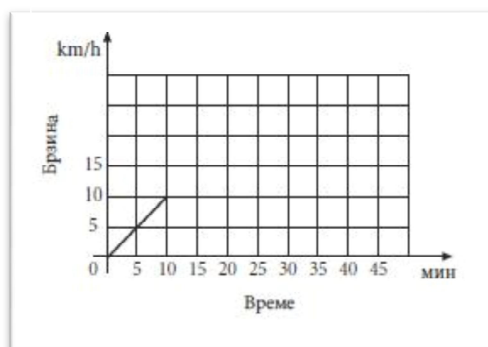
г) Колико је градова из табеле удаљено од Београда више од 200 km?

	Београд	Крагујевац	Ниш	Нови Сад	Нови Пазар	Суботица	Зајечар
Београд	–	115	239	82	271	178	236
Јагодина	165	42	104	217	196	319	117
Крагујевац	115	–	146	197	160	299	159
Краљево	192	54	152	251	106	353	193
Крушевац	192	70	91	274	167	376	132

Слика 7.

У овом примеру се од ученика захтева правилна интерпретација података задатих сложеном табелом.

Пример 4. Маја је возила ролере 45 минута. У првих 10 минута вожње ролера достигла је брзину од 10 km/h. Том брзином се кретала наредних 20 минута, а затим почела равномерно да успорава док се није зауставила. Допуни дијаграм који приказује Мајино кретање, као што је започето.



Слика 8.

На основу података задатих у тексту задатка од ученика се захтева да допуне дијаграм.

Пример 5. У једној школи сто ученика је полагао тест из математике. Након теста представници ученичког парламента организовали су анкету и замолили оне који су полагали да процене тежину теста. Резултати анкете приказани су у табели.

Представи ове податке на кружном дијаграму, као што је започето:



Слика 9.

У овом примеру се од ученика тражи познавање рада са кружним дијаграмом.

Пример 6. Предузеће „Во-зим” наплаћује превоз робе камионом 45 динара за сваки започети километар. За вожњу преко 1000 километара одобрава се попуст од 5 %.

Уколико се ангажује више од 4 камиона, одобрава се додатни попуст од 10% на већ снижену цену. Фирма „Ц-реп” ангажовала је 6 камиона фирме „Во-зим” за превоз робе на релацији од Враћа до Штутгарта. Растојање од Враћа до Штутгарта је 1500 километара. Израчунај колико ће фирму „Ц-реп” коштати превоз робе?

Пример 7. За колико је процената потрошња у категорији Комуникације у региону Шумадије и западне Србије већа у градским насељима у односу на остала насеља?

Категорија	Београдски регион		Регион Војводине		Регион Шумадије и западне Србије		Регион јужне и источне Србије	
	Градска насеља	Остала насеља	Градска насеља	Остала насеља	Градска насеља	Остала насеља	Градска насеља	Остала насеља
Храна и безалкохолна пића	23 500	23 300	18 800	19 300	18 500	21 800	19 000	19 300
Одећа и обућа	2 200	2 000	2 400	2 500	2 700	2 100	2 100	1 700
Становање, вода, ел. енергија, гас и остала горива	8 300	8 600	9 300	8 200	7 500	7 200	5 400	4 400
Опрема за стан и текуће одржавање	1 800	2 200	2 200	2 500	2 100	2 000	2 000	1 700
Здравље	2 700	2 400	2 100	1 800	1 400	1 500	1 300	1 300
Транспорт	4 300	5 400	5 300	4 700	3 800	4 800	2 500	2 400
Комуникације	2 400	1 900	2 200	1 800	2 100	1 400	1 600	1 000
Рекреација и култура	3 100	1 500	2 700	1 800	2 400	1 300	1 500	600
Образовање	900	200	400	200	300	400	100	100
Ресторани и хотели	1 400	1 400	800	800	1 100	700	800	500

*Коришћени су подаци са сајта Републичког завода за статистику.

Слика 10.

У Примерима 6. и 7. од ученика се захтева познавање процентног рачуна, са том разликом што су подаци у Примеру 6. задати текстуално а у Примеру 7. табеларно.

Завршни испит

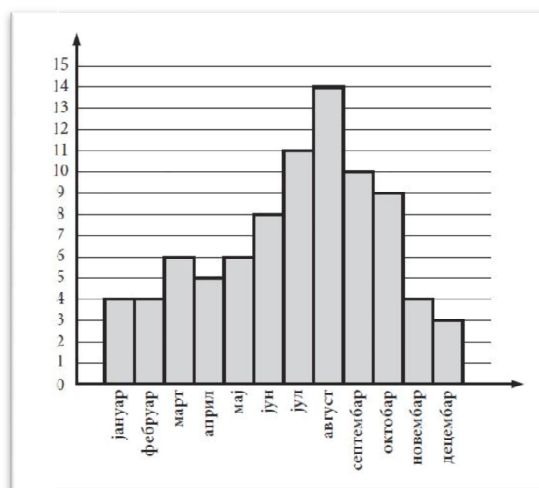
У овом одељку биће обухваћени завршни испити из математике који су рађени од школске 2010/2011 до школске 2013/2014 године, од када постоје нове збирке задатака из математике.

Школска 2010/2011 - На завршном тесту из математике било је 20 задатака. Из области „обрада података“ било је три задатка.

Задатак 1. Дијаграм показује промене у броју сунчаних дана у години по месецима.

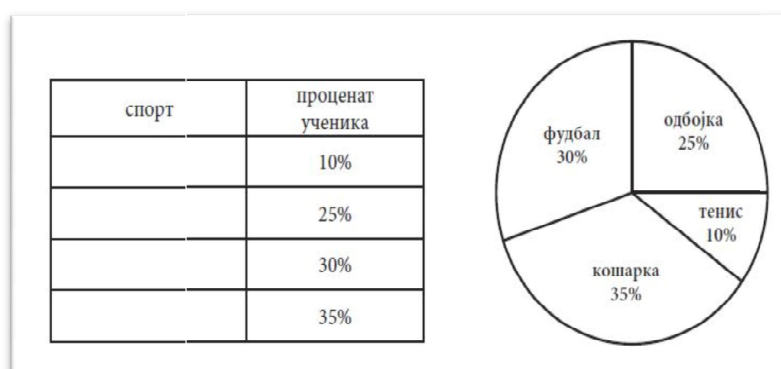
а) Најмање сунчаних дана у години је било у месецу _____.

б) Највише сунчаних дана у години је било у месецу _____.



Слика 11.

Задатак 2. На питање „Који спорт највише волиш?“ у једној школи добијени су резултати који су приказани кружним дијаграмом. Попуни табелу подацима из кружног дијаграма.



Слика 12.

Задатак 3. На крају првог полугодишта ученици одељења VIII₁ имали су 1320 изостанака. У истом периоду ученици одељења VIII₂ имали су 15% више изостанака од VIII₁.

Колико изостанака су имали ученици одељења VIII₂?

У прва два задатка се од ученика захтевало читање података из табела и графикона, док се у трећем задатку захтевало познавање процентног рачуна. Сва три задатка припадају основном нивоу тежине задатака.

Школска 2011/2012- На завршном тесту из математике било је 20 задатака. Из области „Обрада података“ било је четири задатка.

Задатак 1. У апотекама „Детелина“ и „Дрен“ пребројане су бочице са алкохолом. Подаци су приказани табелом. Колико литара алкохола укупно има у апотекама „Детелина“ и „Дрен“?

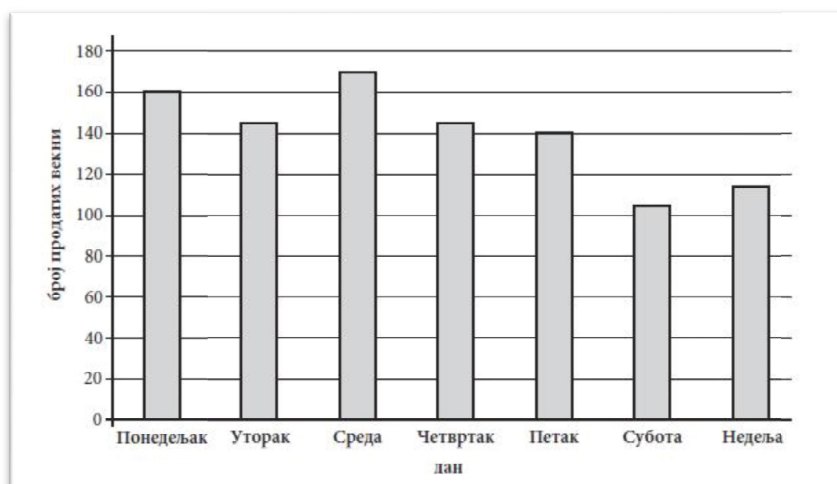
	запремина бочице	број бочица	запремина бочице	број бочица	запремина бочице	број бочица
Апотека „Детелина“	5 dl	4	10 cl	8	50 ml	5
Апотека „Дрен“	4 dl	4	20 cl	6	30 ml	8

Слика 13.

Задатак 2. Дијаграм приказује број продатих векни хлеба у пекари „Добро јутро“ током једне недеље. Подацима са дијаграма попуни празна места тако да реченице буду тачне.

Најмање векни продато је у _____.

У петак је продато _____ векни.



Слика 14.

Задатак 3. Одреди медијану за следеће вредности:

11, 13, 18, 11, 15, 12, 14, 11, 13, 14, 15, 12, 11, 18, 19, 16, 11, 15

Задатак 4. Цена летовања за четворочлану породицу износи 80000 динара. Ако се уплати до 1. марта, цена летовања се умањује за 10%, а ако се уплати до 1. априла, цена се умањује за 4%. Породица Тишић је уплатила летовање 25. фебруара, а породица Мачкић 15. марта. Колико је динара породица Мачкић више уплатила од породице Тишић?

У прва два задатка се од ученика захтевало читање табела и графикона, док се у трећем задатку тражила медијана, а у четвртном познавање процентног рачуна. Прва два задатка припадају основном нивоу тежине задатака, док трећи и четврти припадају средњем нивоу.

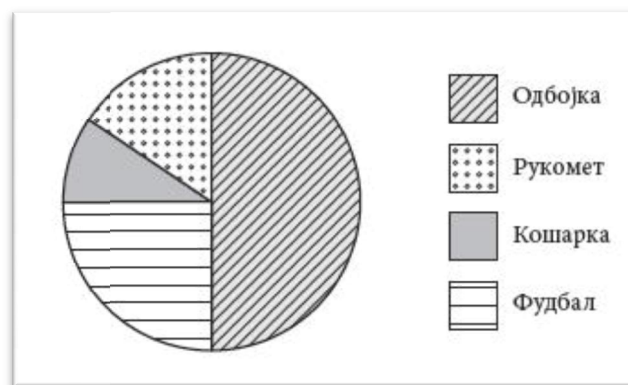
Школска 2012/2013 - На завршном тесту из математике било је 20 задатака. Из области „Обрада података“ било је четири задатка.

Задатак 1. На слици је приказан план биоскопа „Одеон“. Марко је купио карту у осмом реду десно, седиште 4. Обој (осенчи) хемијском оловком Марково седиште.

	лево														десно														
I	1	2	3	4	5	6	7	8	7	6	5	4	3	2	1	I													
II	1	2	3	4	5	6	7	8	7	6	5	4	3	2	1	II													
III	1	2	3	4	5	6	7	8	7	6	5	4	3	2	1	III													
IV	1	2	3	4	5	6	7	8	7	6	5	4	3	2	1	IV													
V	1	2	3	4	5	6	7	8	7	6	5	4	3	2	1	V													
VI	1	2	3	4	5	6	7	8	7	6	5	4	3	2	1	VI													
VII	1	2	3	4	5	6	7	8	7	6	5	4	3	2	1	VII													
VIII	1	2	3	4	5	6	7	8	7	6	5	4	3	2	1	VIII													
IX	1	2	3	4	5	6	7	8	7	6	5	4	3	2	1	IX													
X	1	2	3	4	5	6	7	8	7	6	5	4	3	2	1	X													
XI	1	2	3	4	5	6	7	8	7	6	5	4	3	2	1	XI													
XII	1	2	3	4	5	6	7	8	7	6	5	4	3	2	1	XII													

Слика 15.

Задатак 2. У Основној школи „Дуга” организовано је спортско поподне за ученике осмог разреда. Учествовало је укупно 144 ученика. Сваки ученик могао је да изабере један спорт и то: одбојку, фудбал, кошарку или рукомет. На графикону је приказано колико ученика је изабрало који спорт.



Слика 16.

Колики део од укупног броја ученика је играо фудбал?

Заокружи слово испред тачног одговора.

- а) половина
- б) четвртина
- в) осмина
- г) трећина

Задатак 3. Пет ученика одељења VIII4 формирало је кошаркашки тим „Непобедиви”. Висине ученика у овом тиму су: 170 cm, 171 cm, 168 cm, 165 cm и 171 cm. За колико центиметара је медијана ових података већа од аритметичке средине?

Задатак 4. У првој полуфиналној утакмици кошаркашког турнира дато је укупно 80 кошева, а у другој полуфиналној утакмици 25% кошева више него у првој. У финалној утакмици број датих кошева био је за 50% мањи од укупног броја кошева датих у обе полуфиналне утакмице. Колико је кошева дато у финалној утакмици?

У прва два задатка се од ученика захтевало читање података из табела и графикана, док се у трећем задатку од ученика захтевало да израчунају медијану и средњу вредност, а у четвртом задатку да израчунају проценат. Прва два задатка припадају основном нивоу тежине задатака, док трећи и четврти припадају средњем нивоу.

Школска 2013/2014 - На завршном тесту из математике било је 20 задатака. Из области Обрада података било је два задатка.

Задатак 1. Вера је купила слушалице за мобилни телефон и чија је цена била 2800 динара.

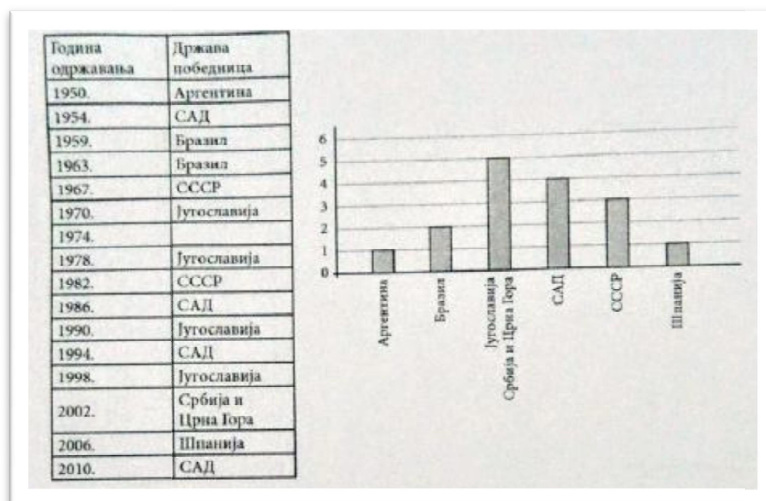
Слушалице је платила готовином и добила попуст од 7%. Колико је Вера платила слушалице?

Задатак 2. У новинама је објављена табела са државама победницима светских првенстава у кошарци и године када су та првенства одржана, као и графикон у коме су приказане државе и укупан број победа сваке од њих на овим првенствима. Влада је приметио да у табели недостаје податак о тиму који је победио 1974.

На основу графика он је тачно одредио која је земља била победник 1974. године.

Заокружи слово испред тачног одговора.

- а) Аргентине;
- б) Бразила;
- в) Југославије/ Србије и Црне Горе
- г) САД
- д) СССР-а
- ђ) Шпаније



Слика 17.

У првом задатку се од ученика захтевало да израчунају проценат, док је у другом задатку захтевано од ученика да читају податке из табеле и графика и да их упореде међусобно.

У претходним примерима дати су модели задатака који прпадају области „Обраде података“ у оквиру збирки за припрему завршног испита из математике.

Евидентно је да област „Обрада података“ обухвата:

23 од 127, или 18,1 %, задатака из основног нивоа;

25 од 130, или 19,2 % задатака из средњег нивоа;

24 од 123, или 19,5 % задатака из напредног нивоа;

Што укупно чини 72 задатка од 380 задатака у збирци за припрему завршног испита из математике, или 18,9%.

Што се тиче самих тестова, примећује се следеће:

Школска 2010/2011 - На завршном тесту из математике било је 20 задатака. Из области „Обрада података“ било је три задатка, и чинили су 15% од укупног броја задатака на тесту.

Школска 2011/2012 - На завршном тесту из математике било је 20 задатака. Из области „Обрада података“ било је четири задатка и чинили су 20% од укупног броја задатака на тесту.

Школска 2012/2013 - На завршном тесту из математике било је 20 задатака. Из области „Обрада података“ било је четири задатка и чинили су 20% од укупног броја задатака на тесту.

Школска 2013/2014 - На завршном тесту из математике било је 20 задатака. Из области „Обрада података“ било је два задатка и чинили су 10% од укупног броја задатака на тесту.

Приказивање и обрада статистичких података у настави у средњој школи⁹

Због великог броја различитих профила и програма средњих школа, овим истраживањем биће обухваћено градиво из предмета математика које се обрађује у гимназијама свих профила. Средње стручне, уметничке и друге школе користе исте или сличне моделе наставних планова и програма, тако да на истраживање које се спроводи у оквиру овог рада ни најмање неће утицати то што се обрађују само модели наставних планова и програма математике за гимназије.

Осим предмета математика, овим истраживањем биће обухваћенан и предмет статистика, који је на листи обавезних предмета у свим школама економског профила (економска школа, правно-биротехничка...)

Гимназија

Циљ наставе математике у гимназији јесте: да ученици усвоје елементарне математичке компетенције (знања, вештине и вредносне ставове) које су потребне за схватање појава и законитости у природи и друштву и које ће да оспособе ученике за примену усвојених математичких знања (у решавању разноврсних задатака из животне праксе) и за успешно настављање математичког образовања и за самообразовање; као и да доприносе развијању менталних способности, формирању научног погледа на свет и свестраном развоју личности ученика.

У оквиру редовне наставе математике, утврђена су три модела наставних планова и програма математике за гимназије:

M1 ($4 + 4 + 4 + 4 = 16$) - за општи тип гимназије,

M2 ($4 + 3 + 2 + 2 = 11$) - за друштвено-језички смер гимназије,

M3 ($4 + 5 + 5 + 4 = 18$) - за природно-математички смер гимназије

⁹ Подаци о наставним плановима и програмима преузети са интернет странице <http://www.zuov.gov.rs/poslovi/nastavni-planovi/nastavni-planovi-os-i-ss/>

Први разред гимназија¹⁰

У првом разреду гимназија свих профила, настава математике се одржава 4 пута недељно, односно, ученици имају у редовној настави 148 часова годишње.

Садржај програма :

Гимназија - сви модели (148)

Логика и скупови (15)

Реални бројеви (14)

Пропорционалност (8)

Увод у геометрију (8)

Подударност (36)

Рационални алгебарски изрази (32)

Сличност (14)

Тригонометрија правоуглог троугла (9)

Обрада статистичких података у првом разреду, обрађује се делимично у оквиру наставне теме „Пропорционалност величина“, и то у 8 наставних јединица, од којих су 5. часова предвиђених за обраду, а три часа за утврђивање градива, од укупно 148 часова годишње, што чини око 5,4% укупног градива предвиђеног за прву годину гимназија. Карактеристика ове теме је што у њој долази до изражаја повезивање и примена разних математичких знања. На бази проширивања и продубљивања раније стечених знања, основну пажњу овде посвећујемо примени функција директне и обрнуте пропорционалности и пропорција у решавању разних практичних задатака, повезујући то и са табличним и графичким приказивањем одређених стања, процеса и појава.

¹⁰ Ивановић, Ж., Огњановић, С., (2011), *Збирка задатака и тестова из математике за 1. разред гимназија и техничких школа*, Круг, Београд

Други разред гимназија¹¹

За други разред гимназија утврђена су три модела наставних планова и програма математике за гимназије и то:

Програм М1 за гимназије општег типа

У оквиру овог наставног програма, ученици похађају 4 часа математике недељно, што укупно чини 140 часова математике годишње.

Садржај програма :

Гимназија општи тип (140)

Степеновање и кореновање (26)

Квадратна једначина и квадратна функција (38)

Експоненцијална и логаритамска функција (24)

Тригонометријске функције (40)

Програм М 2 за гимназије друштвено-језичког смера

У оквиру овог наставног програма, ученици похађају 3 часа математике недељно, што укупно чини 105 часова математике годишње.

Садржај програма:

Гимназија друштвено-језички смер (105)

Степеновање и кореновање (21)

Квадратна једначина и квадратна функција (25)

Експоненцијална и логаритамска функција (17)

Тригонометријске функције (30)

Програм М 3 за гимназије природно-математичког смера

У оквиру овог наставног програма, ученици похађају 5 часова математике недељно, што укупно чини 175 часова математике годишње.

Садржај програма:

¹¹ Ивановић, Ж., Огњановић, С., (2011), *Збирка задатака и тестова из математике за 2. разред гимназија и техничких школа*, Круг, Београд

Природно-математички смер гимназије (175)

Степеновање и кореновање (35)

Квадратна једначина и квадратна функција (46)

Експоненцијална и логаритамска функција (30)

Тригонометријске функције (52)

У оквиру програма гимназија свих типова обрађују се исте наставне теме, само је број часова по свакој теми различит за сваки тип гимназије. Обрада и рад са статистичким подацима није обрађен ни у једној од ових наставних тема директно, него се у оквиру сваке теме део наставних јединица односи на обраду и рад са статистичким подацима.

У оквиру модела М1 наставних планова и програма математике за гимназије општег типа од укупно 140 часова годишње обрада и рад са статистичким подацима обрађује се у 18 наставних јединица, што чини 12,9% укупног градива предвиђеног за другу годину гимназија.

У оквиру модела М2 наставних планова и програма математике за гимназије друштвено-језичког смера од укупно 105 часова годишње обрада и рад са статистичким подацима обрађује се у 14 наставних јединица, што чини 13,3% укупног градива предвиђеног за другу годину гимназија.

У оквиру модела М3 наставних планова и програма математике за гимназије природно-математичког смера од укупно 175 часова годишње, обрада и рад са статистичким подацима обрађује се у 18 наставних јединица, што чини 10,3% укупног градива предвиђеног за другу годину гимназија.

Ако се узме у обзир да сви задаци захтевају само елементарно цртање графика функција на основу табела, закључује се да неког озбиљнијег рада са статистичким подацима готово и да нема ни у једном типу гимназија.

Трећи разред гимназија¹²

За трећи разред гимназија утврђена су сва три модела наставних планова и програма математике за гимназије:

¹² Ивановић, Ж., Огњановић, С., (2011), *Збирка задатака и тестова из математике за 3. разред гимназија и техничких школа*, Круг, Београд

Програм М1 за гимназије општег типа - У оквиру овог наставног програма, ученици похађају 4 часа математике недељно, што укупно чини 144 часова математике годишње.

Садржај програма:

Општи тип (144)

Полиедри (22)

Обртна тела (18)

Вектори (15)

Аналитичка геометрија у равни (44)

Математичка индукција. Низови (23)

Комплексни бројеви (6)

Програм М 2 за гимназије друштвено-језичког смера - У оквиру овог наставног програма, ученици похађају 2 часа математике недељно, што укупно чини 72 часа математике годишње.

Садржај програма :

Друштвено-језички смер (72)

Полиедри (13)

Обртна тела (12)

Вектори (5)

Аналитичка геометрија у равни (22)

Математичка индукција. Низови (8)

Програм М3 за гимназије природно-математичког смера - У оквиру овог наставног програма, ученици похађају 5 часова математике недељно, што укупно чини 180 часова математике годишње.

Садржај програма :

Природно-математички смер гимназије (180)

Полиедри (25)

Обртна тела (20)

Вектори (15)

Аналитичка геометрија у равни (50)

Математичка индукција. Низови (38)

Комплексни бројеви и полиноми (20)

Обрада и рад са статистичким подацима у оквиру свих програма, свих типова гимназија, такође није заступљена експлицитно у оквиру једне наставне теме, чак шта више, програм за трећу годину свих типова гимназија готово да и не садржи било какве задатке везане за статистичку обраду података.

Једино се у оквиру наставне теме „аналитичка геометрија у равни“, и то само у оквиру програма М3 за природно-математички смер појављује се транспортни проблем, као део линеарног програмирања, а самим тим и део статистике. Он се обрађује у две наставне јединице, од којих је једна предвиђена за обраду, а једна за утврђивање. Ако знамо да је за природно-математички смер предвиђено 180 часова математике годишње, обрада и рад са статистичким подацима чини 1,1% укупног градива. У збирци задатака из математике транспортни проблем је постављен у два задатка од укупно 1354 колико их има у збирци и чине 0,15 % од укупног броја задатака.

У оквиру друга два програма (М1 и М2), дакле гимназија општег и друштвено-језичког типа, транспортни проблем се не обрађује.

Пример 1. Рафинерија располаже са 8 милиона барела нафте типа А и 5 милиона барела нафте типа Б. Од тих количина може се производити бензин са зарадом од 4 долара по барелу или уље за ложење са зарадом од 3 долара по барелу.

Постоје два могућа процеса прераде и то следећих карактеристика:

	I процес	II процес
улаз – нафта А	1	5
улаз – нафта Б	1	3
излаз – бензин	1	3
излаз – уље за ложење	1	4

Табела 1.

Како организовати производњу па да укупан профит буде највећи?

Пример 2. У извесној фабрици производе се две врсте артикла – A_1 и A_2 и то од четири врсте сировина – S_1, S_2, S_3 и S_4 . За једну јединицу производа A_1 или A_2 неопходна је одређена количина сваке од сировина S_1, S_2, S_3, S_4 . Зарада фабрике као и резерва сировина која су на располагању да се добију артикли A_1 и A_2 дате су у табели:

врста сировина	резерве сировина	артикл	
		A_1	A_2
S_1	19	2	3
S_2	13	2	1
S_3	15	0	3
S_4	18	3	0
Зарада		7	5

Табела 2.

Како треба организовати оптималну производњу?

Четврти разред гимназије¹³

Програм М1 за гимназије општег типа - У оквиру овог наставног програма, ученици похађају 4 часа математике недељно, што укупно чини 128 часова математике годишње.

Садржај програма :

Општи тип (128)

Функције (28)

Извод функције (26)

Интеграл (22)

Комбинаторика (12)

Вероватноћа и статистика(28)

¹³ Ивановић, Ж., Огњановић, С., (2011), *Збирка задатака и тестова из математике за 4. разред гимназија и техничких школа*, Круг, Београд

Програм М2 за гимназије друштвено-језичког смера - У оквиру овог наставног програма, ученици похађају 2 часа математике недељно, што укупно чини 64 часа математике годишње.

Садржај програма :

Друштвено-језички смер (64)

Функције (14)

Извод функције (17)

Комбинаторика (6)

Вероватноћа и статистика (15)

Програм М3 за гимназије природно-математичког смера - У оквиру овог наставног програма, ученици похађају 4 часа математике недељно, што укупно чини 128 часова математике годишње.

Програм је истоветан са програмом за IV разред гимназије општег типа (програм М1).

Природно-математички смер (128)

Функције (28)

Извод функције (26)

Интеграл (22)

Комбинаторика (12)

Вероватноћа и статистика (28)

Обрада и рад са статистичким подацима обрађује се посебно у наставној теми „вероватноћа и статистика“ - На подесним примерима треба увести појам случајне променљиве и указати на неке њене нумеричке карактеристике и расподеле. Треба истаћи улогу случајног узорка и статистичког експеримента, а затим објаснити начин прикупљања података, њиховог приказивања и одређивања важнијих статистичких карактеристика.

За моделе М1 и М3, оквиру ове наставне теме обрађују се: Случајни догађаји. Вероватноћа. Условна вероватноћа и независност. Случајне величине. Биномна, Пуасонова и нормална расподела. Средња вредност и дисперзија. Популација, обележје и узорак. Прикупљање, сређивање и приказивање података. Појам оцене параметара.

Оцене вероватноће, средње вредности и дисперзије. Интервалне оцене за вероватноћу и средњу вредност.

Док се за модел М2, дакле, друштвено-језички смер гимназије обрађује: Случајни догађаји. Вероватноћа. Условна вероватноћа и независност. Случајне променљиве. Биномна и нормална расподела. Средња вредност и дисперзија. Популација, обележје и узорак. Основни задаци математичке статистике. Прикупљање, сређивање, графичко приказивање и нумеричка обрада података.

Разлика је у томе што програм општег и природно-математичког смера гимназије подразумева да се дата наставна тема обради у 28 наставних јединица, док у програму друштвено-језичког смера гимназије број наставних јединица у оквиру исте теме износи 15.

У табели испод, дат је распоред наставних јединица у оквиру наставне теме „вероватноћа и статистика“ за моделе М1 и М3 наставних планова и програма, односно за општи и природно-математички смер гимназија.

редни број часа	наставна јединица	тип часа
1	Случајни догађај. Вероватноћа	Обрада
2	Случајни догађај. Вероватноћа	Утврђивање
3	Условна вероватноћа	Обрада
4	Условна вероватноћа	Утврђивање
5	Формула тоталне вероватноће	Обрада
6	Бајесова формула	Обрада
7	Формула тоталне вероватноће. Бајесова формула	Утврђивање
8	Појам случајне променљиве. Функција расподеле	Обрада
9	Густина расподеле	Обрада
10	Случајне променљиве	Утврђивање
11	Случајне променљиве	Утврђивање
12	Математичко очекивање, аритметичка средина	Обрада
13	Математичко очекивање, аритметичка средина	Утврђивање
14	Математичко очекивање, аритметичка средина	Утврђивање
15	Дисперзија, стандардна девијација	Обрада
16	Дисперзија	Утврђивање
17	Стандардна девијација	Утврђивање
18	Биномни закон расподеле	Обрада
19	Биномни закон расподеле	Утврђивање
20	Пуасонов закон расподеле	Обрада
21	Пуасонов закон расподеле	Утврђивање
22	Нормални закон расподеле	Обрада
23	Нормални закон расподеле	Утврђивање
24	Биномни, Пуасонов и Нормални закон расподеле	Утврђивање
25	Мод, медијана	Обрада
26	Мод, медијана	Утврђивање
27	Корелација, коефицијент корелације	Обрада
28	Корелација, коефицијент корелације	Утврђивање

Табела 3.

Шта је то статистика и чиме се бави, начини приказивања статистичких података, табеларни и графички, аритметичка средина, мод, медијана, стандардна девијација, корелација, описани у уводном делу овог рада, предвиђени су планом и програмом наставе математике за четврти разред гиназија свих типова, тако да ће бити наведени само задаци из области статистике.

Пример 1. Израчунати математичко очекивање и дисперзију следећих случајних променљивих:

$$\text{а) } X_1: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } X_2: \begin{pmatrix} 1950 & 1975 & 2000 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix};$$

Пример 2. Ради планирања производње фабрика обуће је на случајан начин одабрала групу од 20 људи и код њих регистровала број ципела:

39, 40, 44, 42, 43, 39, 41, 41, 44, 45, 42, 43, 42, 42, 40, 44, 43, 42, 40, 43.

а) Представити узорак табеларно.

б) Нацртати полигон учесталости и кумулативну криву за дати узорак.

Пример 3. У фабрици сатова вршена су мерења одступања пречника осовине од стандардне величине на 300 часовника (у микронима):

Одступања	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
Бр. Осовине	35	65	120	70	10

Табела 4.

Нацртати хистограм, полигон учесталости, емпиријску функцију расподеле и кумулативну криву за дати узорак.

Пример 4. У једном одељењу има 30 ученика. Успех из математике на крају школске године приказана је следећом табелом:

Оцена k	1	2	3	4	5
Број ученика, f_k	4	7	9	6	4

Табела 5.

Израчунати $\bar{x}$, $\overline{S^2}$, $\overline{S}$, а затим нацртати полигон расподеле.

Пример 5. У следећој табели дати су податци о висинама 12 кошаркаша једне екипе:

180 – 190	3
190 – 200	3
200 – 210	2
210 – 220	4

Табела 6.

Израчунати узорачку средину, дисперзију и стандардно одступање (за све вредности сваког интервала узима се средиште тог интервала).

Пример 6. Измерене су дужине у сантиметрима 100 беба рођених у једној болници, у одређеном периоду:

Дужина	40 – 43	43 – 46	46 – 49	49 – 52	52 – 55	55 – 58
Бр. Беба	1	4	20	43	30	2

Табела 7.

Израчунати узорачку средину, дисперзију и стандардно одступање (за све вредности сваког интервала узима се средиште интервала).

Пример 7. У једном одељењу има 30 ученика. У следећој табели приказан је успех из математике (X) и физике (Y) на крају школске године.

Написати једначину линеарне регресије Y на X .

Оцена	5	4	3	2	1
X_k	5	7	8	6	4
Y_k	8	6	9	4	3

Табела 8.

У оквиру програма (М1 и М3), дакле у оквиру општег и природно математичког смерангимназија, у наставној теми „вероватноћа и статистика“, обрађују се елементи вероватноће и математичке статистике и то у 28 наставних јединица, од којих је 14 часова предвиђено за обраду, а 14 за утврђивање градива, од укупно 128 часова годишње, што чини 21,9% укупног градива математике предвиђеног програмом за четврту годину гимназије. Наравно, у овај проценат добрим делом спадају и наставне јединице које се баве вероватноћом, тако да део који се бави искључиво статистиком заузима знатно мањи проценат. Што се задатака из статистике тиче, у збирци задатака из математике, њих 29 се односи на статистичку обраду података, од укупно 711 задатака предвиђених планом и програмом за четврту годину гимназије, што чини 4,1% од укупног броја задатака у збирци задатака.

У оквиру програма М2, дакле гимназије друштвено-језичког смера у наставној теми „вероватноћа и статистика“, обрађују се елементи вероватноће и математичке статистике и то у 15 наставних јединица, од којих је 7 часова предвиђено за обраду, а 8 за утврђивање градива, од укупно 64 часа годишње, што чини 23,4% укупног градива математике предвиђеног програмом за четврту годину гимназије друштвено-језичког смера.

Средња економска школа¹⁴

У средњим стручним школама економског профила, ради се према моделима М1 и М2 наставних планова и програма, исто као и у гимназијама општег и друштвено-језичког смера.

Осим у настави математике, рад са статистичким подацима се обрађује и у оквиру предмета статистика, који је обавезан за све смерове школа економских профила, само што се за неке профиле статистика изучава у трећој и четвртој години, док се у другим профилима изучава само у четвртој години.

Циљ наставног предмета статистика је стицање знања, овладавање вештинама и формирање вредносних ставова који доприносе развоју статистичке писмености неопходне за даље школовање, живот и рад у савременом друштву, као и оспособљавање ученика да ефикасно и рационално примене статистичке поступке у решавању разноврсних проблема и доношењу закључака у свакодневном животу и даљем професионалном развоју.

Задаци наставе предмета статистика су да ученици:

- развијању способности за примену статистичких метода у истраживању економских и других појава у различитим подручјима људске делатности
- оспособљавање ученика за основно статистичко проучавање појава и доношење закључака
- унапреде способности посматрања, опажања, прикупљања, анализе, организације, критичке процене, интерпретације и презентације података

¹⁴ Жижић, М., Вукосављевић, М., Видић, М., (2011), *Збирка задатака из статистике 3,4*, Завод за уџбенике, Београд

- примењују савремене инструменте, алате и средства информационих технологија у креирању писаних статистичких садржаја поштујући основна начела писаног комуницирања
- негују интелектуалну радозналост, логичко, апстрактно и стваралачко мишљење
- унапреде сарадњу са другима, као и способности за тимски рад и неговање социјалних односа;
- примењују стечена знања и вештине при доношењу одлука и решавању проблема из свакодневног живота;
- унапреде стратегије и технике успешног учења и развију самоефикасност и позитивне ставове према учењу и образовању током целог живота;
- унапреде способност аргументације сопствених ставова и критичког мишљења.

Трећи разред

У оквиру профила економски техничар и финансијски техничар, статистика се изучава од треће године. Планом и програмом за трећу годину су предвиђена два часа недељно, односно 72 часа годишње.

Садржај програма:

УВОД

Појам, предмети и задаци статистике

Карактеристике статистичког метода

- варијавилитет и масовност статистичког посматрања

- квантитативно испитивање појава

- квалитативно разликовање појава

Закон великих бројева

Подела статистике

Значај статистике

Организација статистичке службе у нашој земљи

Етапе - фазе статистичког истраживања

СТАТИСТИЧКО ПОСМАТРАЊЕ (10)

Припрема посматрања - програм посматрања и планирање организације истраживања

- циљ посматрања
- предмет посматрања - статистички скуп и јединице посматрања
- обележја јединица посматрања
- извештајна јединица
- методи обухватања јединица посматрања
- извори и начини прикупљања података
- статистички упитник
- планирање организације истраживања

Снимање података и контрола прикупљених података

- снимање података
- контрола прикупљених података

СРЕЂИВАЊЕ И ГРУПИСАЊЕ ПОДАТАКА (8)

Појам, сврха, врсте и фазе сређивања и груписања података

Груписање података и статистичке серије

- атрибутивне серије
- серије дистрибуције фреквенција
- временске серије
- географске серије
- кумулативни облик серије

Техника сређивања и обраде података

- ручно сређивање- машинско сређивање
- контрола статистичког сређивања

ПРИКАЗИВАЊЕ СТАТИСТИЧКИХ ПОДАТАКА (16)

Статистичке табеле

- појам и правила састављања табела

- врсте статистичких табела

Графичко приказивање

- појам, сврха и врсте графичког приказивања
- дијаграми
- картограми
- прикази сликом - пиктограми

АНАЛИЗА ПОДАТАКА (32)

Средње вредности

- појам, значај и врсте средњих вредности
- аритметичка средина
- геометријска средина
- хармонијска средина
- медијана
- модус

Дисперзија серија

- појам дисперзије и њено мерење
- мере дисперзије

Релативни бројеви

- појам, значај и врсте статистичких релативних бројева
- показатељи структуре
- индекси - појам, примена и врсте
- базни и ланчани индекси
- индекси према циљу упоређивања
- индивидуални и групни индекси
- статистички коефицијенти
- статистички коефицијенти природног кретања становништва

- коефицијенти или односи интензитета (фреквенција)

Испитивање веза међу појавама

- појам квантитативних зависности међу појавама

- мерење степена квантитативног слагања појава коефицијентом корелације

Четрти разред

У оквиру профила економски техничар и финансијски техничар, статистика се изучава и у четвртој години. Планови и програмом за четврту годину су предвиђена два часа недељно, односно 66 часова годишње.

Садржај програма:

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ О ПОСЛОВНОЈ СТАТИСТИЦИ (4)

Појам, предмет и значај статистике предузећа.

Предузеће као статистичка јединица.

Извори података статистике предузећа.

Организација и задаци статистичке службе предузећа.

СТАТИСТИЧКО ОБУХВАТАЊЕ ПРОИЗВОДЊЕ И ПРОМЕТА (8)

Натурално и вредносно изражавање производње и промета.

Укупна вредност производње и њено утврђивање за предузеће.

Утврђивање друштвеног производа и нето-продукта предузећа.

Релативни показатељи структуре производње и промета.

Структура производње и промета по врстама производа.

Структура производње по произвођачким јединицама и структура промета по организационим јединицама продаје.

СТАТИСТИЧКО ИСТРАЖИВАЊЕ ДИНАМИКЕ ПРОИЗВОДЊЕ И ПРОМЕТА (15)

Апсолутни показатељи динамике појава - производње и промета

Темпо развоја и раста и средњи темпо развоја и раста производње и промета

Испитивање развојних тенденција и појава

- појам тренда и одређивање линеарног тренда методом најмањих квадрата

Индивидуални и групни индекси физичког обима производње

Индивидуални и групни индекси цене

Индекс трошкова живота

Индекс вредности производње и индекс вредности робног промета

Индивидуални и групни индекси испуњења плана производње и промета

СТАТИСТИЧКО ПРИКАЗИВАЊЕ СТАЛНИХ СРЕДСТАВА ПРЕДУЗЕЋА (12)

Приказивање сталних средстава по вредности

Показатељи стања сталних средстава

- коефицијенти просечне застарелости и очуваности сталних средстава

- просечни век трајања сталних средстава и њихове амортизације

Приказивање структуре сталних средстава

Коефицијент опремљености запоследних средствима као мерило техничког прогреса

Статистичко обухватање опреме

- приказивање енергетске опреме и њеног искоришћења

- капацитет производне опреме и мерење његовог искоришћења

СТАТИСТИЧКО ОБУХВАТАЊЕ ЗАПОСЛЕНИХ (8)

Показатељ запослених

- бројно стање запослених

- структура запослених према основним обележјима

- свођење запослених на условну јединицу

- кретање броја запослених

Радно време запослених и његово искоришћење

СТАТИСТИЧКО ОБУХВАТАЊЕ ПРОДУКТИВНОСТИ РАДА (7)

Појам продуктивности рада

- утрошени рад као основ за мерење продуктивности рада

- статистички показатељи производње као основ за мерење продуктивности рада
- временске јединице за мерење продуктивности рада

Начини мерења продуктивности рада

Индекси продуктивности рада

- индивидуални индекси продуктивности рада
- групни индекси продуктивности рада

СТАТИСТИКА НЕТО ЗАРАДЕ (ПЛАТА) (10)

Подаци и показатељи статистичког истраживања зарада (плата)

Номиналне и реалне нето зараде (плате)

Просечна номинална нето зарада (плата)

Индекси номиналних просечних нето зарада (плата)

- индекс номиналних просечних нето зарада променљивог састава запослених
- индекс номиналних просечних нето зарада непромењеног састава запослених

Индекс реалне просечне нето зараде (плате)

Зависност нето зарада (плата) од продуктивности рада

Програмски садржај статистике усмерен је на оспособљавање ученика за прикупљање података и њихову обраду применом статистичких метода, развијање способности за статистичка истраживања економских и других појава и доношење исправних закључака, исказаних кроз статистичке извештаје и графичке прегледе. Наведени садржаји поред основног теоријског приступа поседују и активан приступ усмерен ка овладавању практичних вештина статистичке обраде података.

Садржај предмета статистика је у корелацији са садржајима других предмета као што су српски језик, историја, математика, пословна економија, рачуноводство, пословна информатика. Ученике треба анимирати да сами потраже везу са другим предметима. Повезивањем садржаја других предмета са садржајем статистике стечена знања, ставови, вредности и вештине у оквиру наставе добијају шири смисао и доприносе остваривању општих образовних и васпитних циљева, посебно оних који се односе на унапређивање когнитивног, емоционалног и социјалног развоја ученика.

У оквиру профила царински техничар, статистика се изучава од четврте године. Планом и програмом за четврту годину су предвиђена два часа недељно, односно 66 часова годишње.

Садржај програма:

УВОД (4)

Појам и задаци статистике. Карактеристике статистичког метода. Варијабилност и масовност статистичког посматрања. Квантитативно испитивање појава. Квантитативно разликовање појава. Закон великих бројева. Подела статистике. Значај статистике. Организација статистичког истраживања.

СТАТИСТИЧКО ПОСМАТРАЊЕ (10)

Припреме и циљ статистичког посматрања. Предмет посматрања и његово одређивање. Јединица посматрања и звештајна јединица. Обележје статистичких јединица и његово обухватање. Дописи, извештајни методи, анкете и узорак. Извори и начини прикупљања података. Статистички упитник. Планирање организације истраживања. Контрола прикупљених података.

СРЕЂИВАЊЕ И ГРУПИСАЊЕ ПОДАТАКА (6)

Појам, врста, сврха и фазе сређивања и груписања података. Статистичке серије, појам и врсте. Серије - атрибутивне, серије дистрибуције фреквенције и временске серије. Кумулативни облик серије. Техника сређивања и обраде података.

ПРИКАЗИВАЊЕ СТАТИСТИЧКИХ ПОДАТАКА (8)

Статистичке табеле - појам, врсте и правила састављања табеле. Графичко приказивање - појам, сврха и врсте. Дијаграми - линијски и површински (једноставни и вишеструки стубићи, сметријски графикон, квадрат и кругови, трафикони структуре у кругу, у полукруговима). Картограми. Прикази сликом - пиктограми...

АНАЛИЗА ПОДАТАКА

СРЕДЊЕ ВРЕДНОСТИ (12)

Појам, значај и врсте средњих вредности. Аритметичка средина из негруписаних и груписаних података. Особиине аритметичких средина. Медијана. Модус. Геометријска средина. Хармонијска средина.

ДИСПЕРЗИЈА СЕРИЈЕ (6)

Појам дисперзије. Мере дисперзије — интервал варијације, стандардна девијација и коефицијент варијације.

КОЕФИЦИЈЕНТ ПРОСТЕ КОРЕЛАЦИЈЕ (4)

Појам и могућност мерења корелације.

Израчунавање коефицијента корелације.

ОСНОВНИ ПОКАЗАТЕЉИ ДИНАМИКЕ ПРОИЗВОДЊЕ И ПРОМЕТА (14)

Појам тренда и његово одређивање по методу најмањих квадрата.

Индивидуални и групни индекс физичког обима производње.

Индивидуални и групни индекс цена.

Индекс трошкова живота.

Индекс вредности.

Индивидуални и групни индекс испуњења плана.

Обрада статистичких података у оквиру предмета рачунарство и информатика¹⁵

¹⁵ Нешић, В., Чабаркапа, М., Видић, М., (2004), *Рачунарство и информатика за 2. разред гимназија*, Круг, Београд

Примена програмског пакета Ексел у решавању задатака из статистике у средњој школи

Основна намена програма за рад са табелама је да омогуће обраду нумеричких података људима који се не баве програмирањем. Назив су добили по томе што се подаци уносе и приказују у виду табела, различите величине и комплексности.

У оквиру предмета рачунарство и информатика, као препорука за рад са табелама, у другој години гимназија свих профила и средњих стручних школа, обрађује се и програмски пакет Microsoft Office Excel, као тренутно најбољи и најпопуларнији програм те врсте.

У оквиру наставних планова и програма у другој години свих типова гимназија рад са табелама се обрађује помоћу програмског пакета Microsoft Office Excel. Рад са табелама обухвата:

- Основни појмови (прикупљање података, њихово табеларно и графичко приказивање на разне начине, као и читање и тумачење таквих приказа),
- Основни појмови о програмима за рад са табелама (структура документа, формати датотека),
- Подешавање радног окружења (палете алатки, пречице, лењир, поглед, зум...),
- Додавање, брисање, премештање и преименовање радних листова,
- Типови података,
- Уношење података у табелу (појединачни садржаји ћелија и аутоматске попуње),
- Подешавање димензија, премештање, фиксирање и сакривање редова и колона
- Уношење формула са основним аритметичким операцијама, користећи референце на ћелије
- Копирање формула, релативно и апсолутно референцирање ћелија,
- Функције за: сумирање, средњу вредност, минимум, максимум, пребројавање, заокруживање,
- Логичке функције,

- Форматирање ћелија (број децималних места, датум, валута, проценат, поравнање, прелом, оријентација, спајање ћелија, фонт, боја садржаја и позадине, стил и боја рама ћелије),
- Сортирање и филтрирање
- Намена различитих типова графикана, приказивање података из табеле помоћу графикана,
- Подешавање изгледа странице документа за штампање (оријентација папира, величина, маргине, прелом, уређивање заглавља и подножја, аутоматско нумерисање страна),
- Прегледање документа пре штампања, аутоматско штампање насловног реда, штампање опсега ћелија, целог радног листа, целог документа, графикана и одређивање броја копија, штампање документа.

Пошто је наш циљ статистичка обрада података уз помоћ програма Microsoft Office Excel, посебну пажњу ћемо посветити функцијама за: сумирање, средњу вредност, минимум, максимум, пребројавање, заокруживање и намени различитих типова графикана, приказивање података из табеле помоћу графикана.

Модерни програми за рад са табелама нам осим рачунања омогућавају да унете податке форматирамо, издвојимо део података који нам је битан у контексту документа на коме радимо и прикажемо их различитим врстама графикана.

Са друге стране, од нас се као корисника захтева да при уносу података будемо систематични и доследни.

Основна намена Ексела јесте да нам уштеди време, посебно за рачунање. Наравно, уколико треба да поделите два броја, то ожете много брже урадити калкулатором, али ако треба сто пута поделити два броја, сигурно је лакше користити Ексел.

Формуле

Када уместо конкретне вредности која треба да буде приказана у ћелији унесемо правило којом се она израчунава кажемо да смо унели формулу.

Функције

Ексел је програм намењен корисницима различитих профила и потреба. Његов саставни део чини и неколико стотина функција које покривају скоро све области у којима постоји потреба за рачунањем.

Нама су најбитније функције које се односе на статистичку обраду података. Неке од њих су:

AVERAGE, COUNTA, COUNTIF, FREQUENCY, GROWTH, MAX, MIN, MEDIAN, PERCENTILE, QUARTILE...

У оквиру наставе рачунарства и информатике, користе се само неке од тих функција, и њихова примена биће илустрована примером.

Пример 1. На писменом задатку из математике, 12 ученика је добило следеће оцене:

5, 3, 1, 4, 2, 3, 3, 4, 3, 2, 5, 4.

Израчунај:

- а) Просечну оцену
- б) Максималну и минималну оцену
- в) Медијану
- г) Прикажи број свих оцена и њихов проценат
- д) Графички представи дате податке

Потребно је на самом почетку дате податке унети у табелу, па тек онда приступити њиховој обради.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Ученик	Оцена								
2	1	5								
3	2	3								
4	3	1								
5	4	4								
6	5	2								
7	6	3								
8	7	3								
9	8	4								
10	9	3								
11	10	2								
12	11	5								
13	12	4								

Слика 1.

а) За израчунавање просечне оцене (средње вредности) користи се функција AVERAGE.

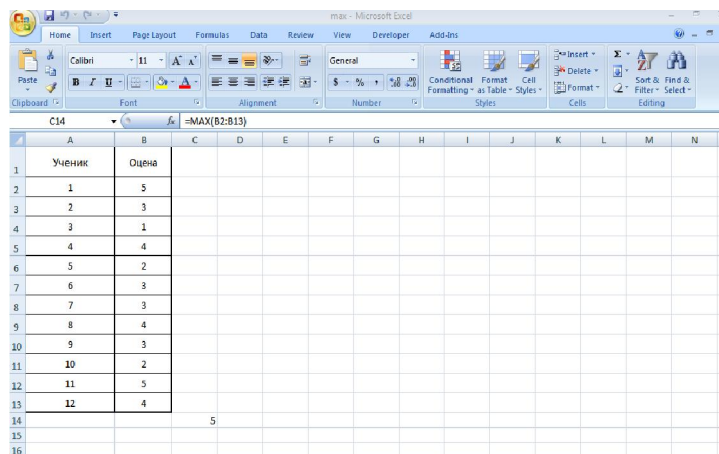
У формула-бару задајемо функцију у облику = AVERAGE (вредност 1: вредност 2), у нашем конкретном примеру = AVERAGE (B2:B13). У ћелији C14 добијамо вредност 3,25 што и јесте просечна оцена.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Ученик	Оцена								
2	1	5								
3	2	3								
4	3	1								
5	4	4								
6	5	2								
7	6	3								
8	7	3								
9	8	4								
10	9	3								
11	10	2								
12	11	5								
13	12	4								
14			3,25							

Слика 2.

б) За израчунавање максималне и минималне оцене користе се функције MAX и MIN. У формула-бару задајемо функцију у облику = MAX (вредност 1: вредност 2) односно

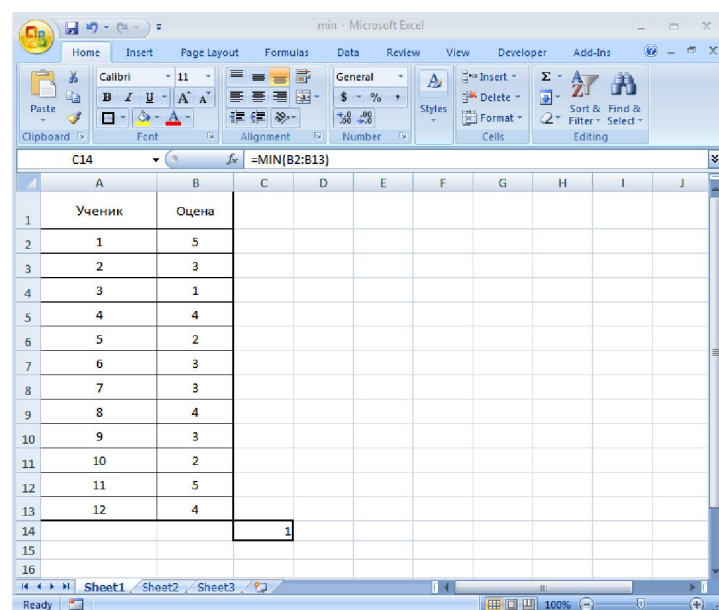
= MIN (вредност 1: вредност 2). У нашем конкретном примеру =MAX (B2:B13) односно MIN (B2:B13). У ћелији C14 добијамо максималну вредност 5 а минималну вредност 1.



Ученик	Оцена
1	5
2	3
3	1
4	4
5	2
6	3
7	3
8	4
9	3
10	2
11	5
12	4

Formula bar: `=MAX(B2:B13)`
Cell C14: 5

Слика 3.

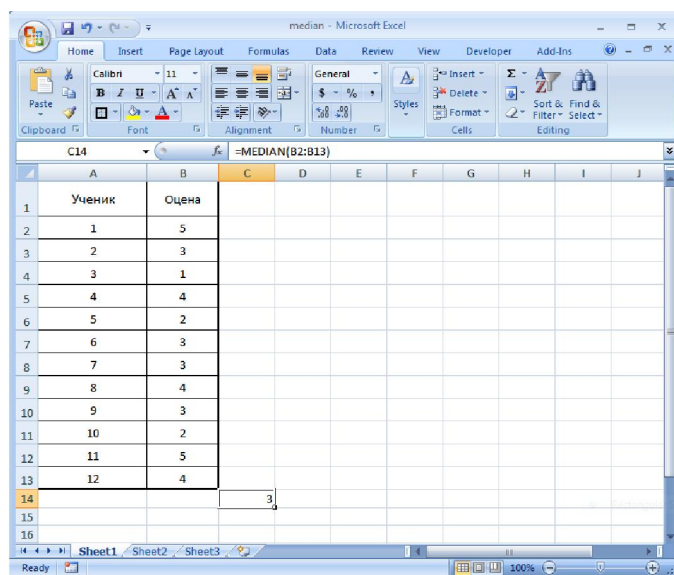


Ученик	Оцена
1	5
2	3
3	1
4	4
5	2
6	3
7	3
8	4
9	3
10	2
11	5
12	4

Formula bar: `=MIN(B2:B13)`
Cell C14: 1

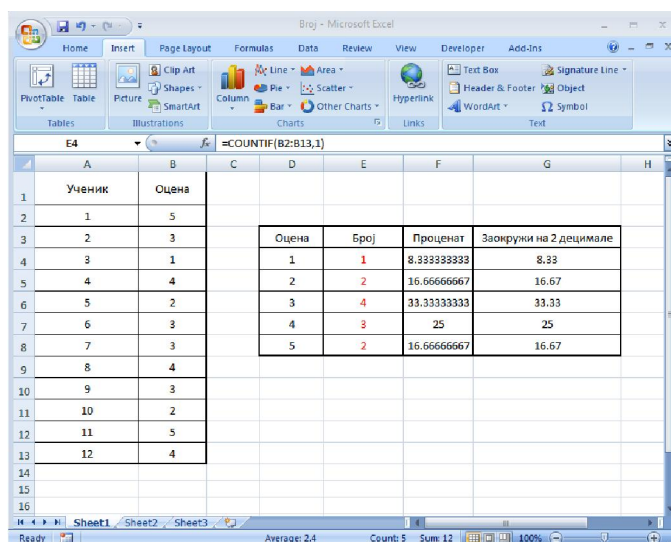
Слика 4.

в) За израчунавање медијане користи се функција MEDIAN. У формула-бару задајемо функцију у облику = MEDIAN (вредност 1: вредност 2), у нашем конкретном примеру = MEDIAN (B2:B13). У ћелији C14 добијамо вредност медијане 3.



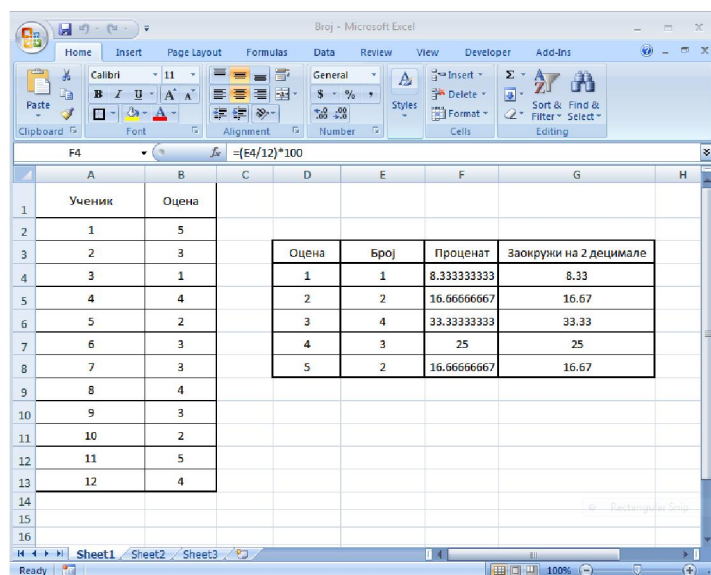
Слика 5.

г) За приказ свих оцена користи се функција COUNTIF. У формула-бару задајемо функцију у облику `= COUNTIF (вредност 1: вредност 2, параметар који броји)`, у нашем конкретном примеру `= COUNTIF (B2:B13,1)` и добијамо колико имамо 1, `= COUNTIF (B2:B13,2)` броји 2 и тако даље до 5 то јест `= COUNTIF (B2:B13,5)`.



Слика 6.

За израчунавање процената користи се његова математичка особина, то јест његов удео у целини помножи се са 100.



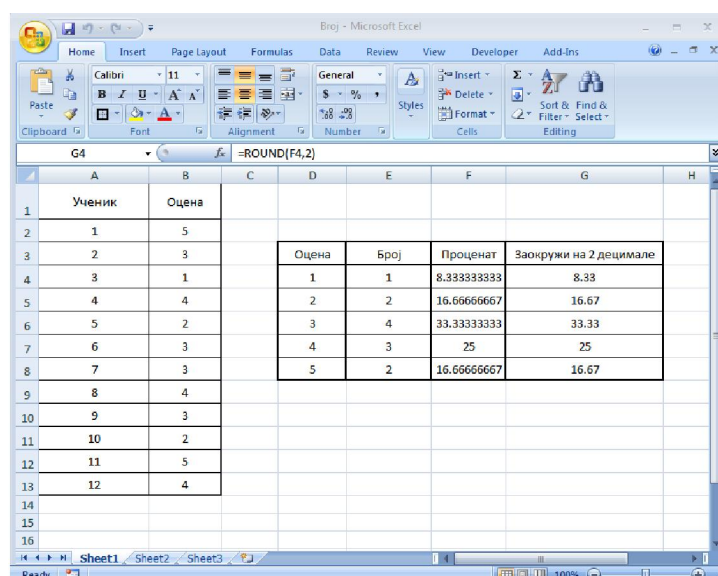
The screenshot shows an Excel spreadsheet with two tables. The first table, located in columns A and B, lists student names (Ученик) and their scores (Оцена). The second table, located in columns D, E, F, and G, is a summary table with headers: Оцена, Број, Процент, and Заокружи на 2 децимале. The formula bar shows the formula $=E4/12*100$.

Ученик	Оцена
1	5
2	3
3	1
4	4
5	2
6	3
7	3
8	4
9	3
10	2
11	5
12	4

Оцена	Број	Процент	Заокружи на 2 децимале
1	1	8.33333333	8.33
2	2	16.66666667	16.67
3	4	33.33333333	33.33
4	3	25	25
5	2	16.66666667	16.67

Слика 7.

За заокруживање бројева користи се функција ROUNDIF. У формула-бару задајемо функцију у облику = ROUNDIF (вредност 1, број децимала), у нашем конкретном примеру = ROUNDIF (F4,2).

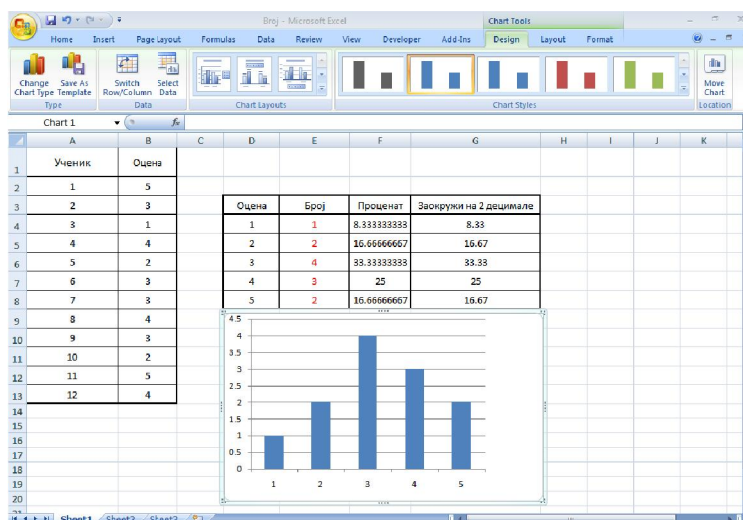


The screenshot shows the same Excel spreadsheet as Screenshot 7, but the formula bar now displays the formula $=ROUND(F4,2)$.

Слика 8.

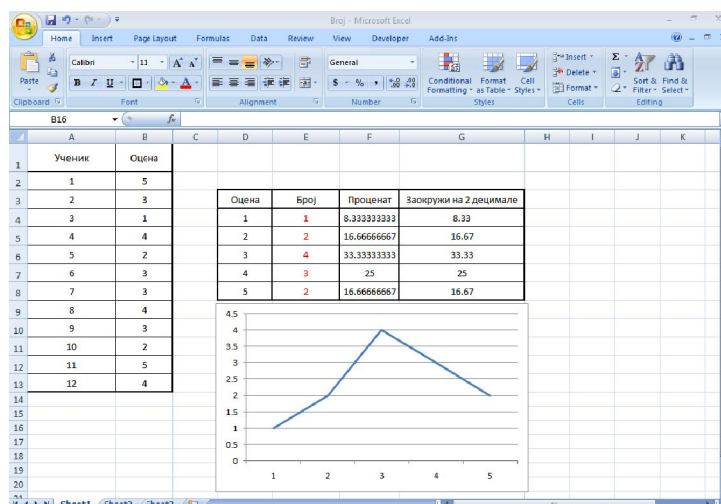
д) За графички приказ имамо више могућности:

- стубичасти приказ, селекујемо податке које хоћемо да представимо, insert/ column



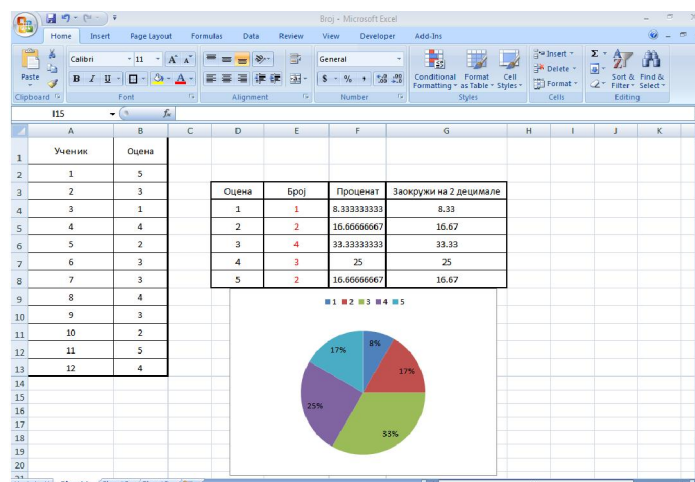
Слика 9.

- полигон, селекујемо податке које хоћемо да представимо, insert/ line.



Слика 10.

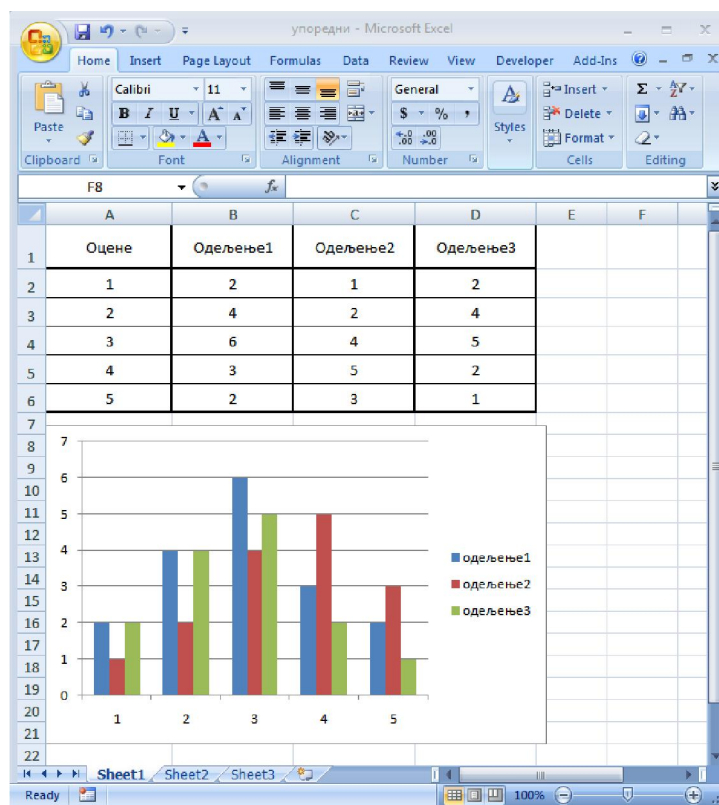
- кружни дијаграм, селекујемо податке које хоћемо да представимо, insert/ pie.



Слика 11.

Пример 2. У табели су date оцене које су ученици три одељења добила на писменом задатку из математике. На једном графичком приказу стубичастим дијаграмом представи успех сва три одељења.

Графички приказ добијамо тако што селекујемо податке и кликнемо на insert/column.

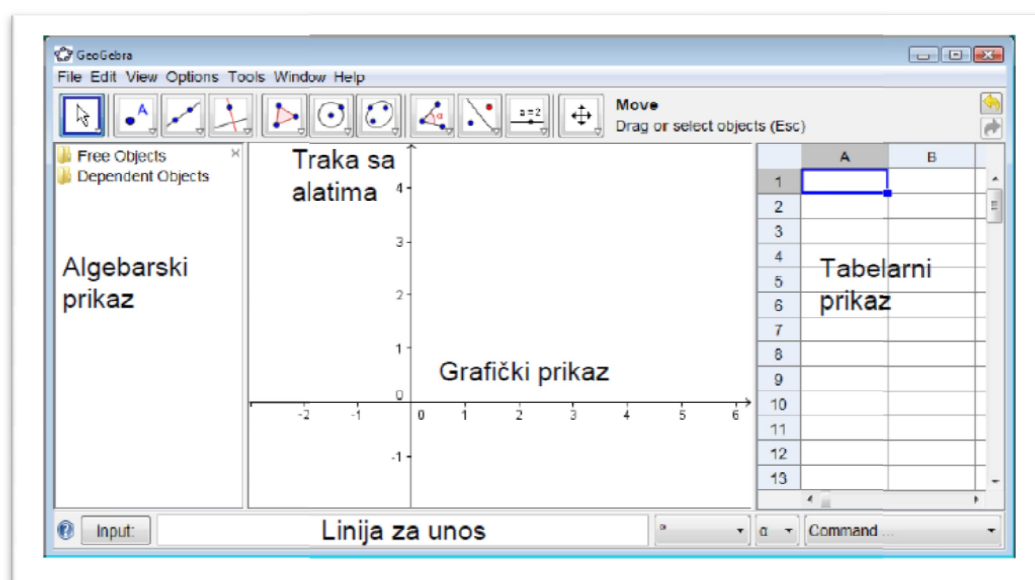


Слика 12.

Примена програмског пакета Геогембра у решавању задатака из статистике у средњој школи¹⁶

У овом делу упознаћемо се са могућностима геогембре, као програма за статистичку анализу. Геогембра је једноставна за употребу како наставнику тако и ученику. Начин рада с таблицом сличан је оном као и у другим програмима. Између геогембриних прозора комуникација је двосмерна. Осим што се промена података у таблицу истовремено одражава на графички приказ, могуће је и обрнуто што с осталим програмима најчешће није случај.

Геогембра има три различита приказа математичких објеката: графички, алгебарски и табеларни приказ. При томе су сви начини приказа истог објекта динамички повезани и аутоматски се прилагођавају свакој промени која се изврши у било којем приказу.



Слика 13.

Геометријске конструкције се праве у графичком приказу, помоћу миша и алата за конструкције који се налазе на траци са алатима. Сви објекти које направимо у графичком приказу имају и алгебарску репрезентацију у алгебарском приказу.

Поље за унос служи за директан унос алгебарских израза у Геогембру. Када притисемо типку Enter, алгебарски унос ће се појавити у алгебарском приказу, а његова графичка

¹⁶ Подаци о програму геогембра преузети са интернет странице <http://www.geogebra.org/cms/en/>

репрезентација ће аутоматски бити приказана у графичком приказу. У ГеоГебрином табеларном приказу свака ћелија има јединствено име помоћу којег можемо директно да је адресирамо. На пример, ћелија у колони А и врсти 1 се зове А1.

Наредбе за табелу

OpsegĆelija[*početna ćelija, završna ćelija*]: Креира листу која садржи вредности из ћелија у овом опсегу

Пример: *OpsegĆelija* [А1, А3] даје листу {А1, А2, А3}

Kolona[*ćelija tabele*]: Враћа колону ћелије као број (почевши од 1)

Пример: *Kolona* [В3] даје број а = 2 пошто је колона В друга колона у табели.

ImeKolone[*ćelija tabele*]: Враћа име колоне ћелије као текст

Пример: *ImeKolone* [А1] даје текст “А” у графичком приказу.

Vrsta[*ćelija tabele*]: Враћа број врсте ћелије (почевши од 1)

Пример: Ако ћелија В3 није празна, тада *Vrsta*[В3] враћа број а = 3.

Статистичке наредбе

Histogram [*lista granica klasa, lista visina*]: Креира хистограм са ступцима задатих висина. Границе класа одређују ширину и позицију сваког ступца у хистограму.

Пример: *Histogram* [{0, 1, 2, 3, 4, 5}, {2, 6, 8, 3, 1}] креира хистограм са 5 стубаца задатих висина. Први стубац се налази на интервалу [0, 1], други је на интервалу [1, 2], и тако даље.

Histogram [*lista granica klasa, lista neobrađenih podataka*]: Креира хистограм од необрађених података. Границе класа одређују ширину и позицију сваког ступца у хистограму и одређују колико података припада свакој класи.

Пример: *Histogram* [{1, 2, 3, 4}, {1.0, 1.1, 1.1, 1.2, 1.7, 2.2, 2.5, 4.0}] креира хистограм са 3 ступца, са висинама 5 (први стубац), 2 (други стубац), и 1 (трећи стубац).

AritmetičkaSredina[*lista brojeva*]: Израчунава аритметичку средину листе елемената.

AritmetičkaSredina X[*lista tačaka*]: Израчунава аритметичку средину х координата тачака из листе.

AritmetičkaSredina Y[lista tačaka]: Израчунава аритметичку средину у координата тачака из листе.

Medijana[lista brojeva]: Одређује медијану листе елемената

Modus[lista brojeva]: Одређује модус(е) листе елемената

Примери:

Modus [{1,2,3,4}] враћа празну листу {}

Modus [{1,1,1,2,3,4}] враћа листу {1}

Modus [{1,1,2,2,3,3,4}] враћа листу {1, 2, 3}

NormalnaRaspodela[sredina, standardna devijacija, vrednost promenljive]: Израчунава функцију $F((x - sredina) / standardna devijacija)$ где је $F(x)$ функција густине вероватноће за $N(0,1)$.

SD[lista brojeva]: Израчунава стандардну девијацију за бројеве из листе.

SigmaXX[lista brojeva]: Израчунава суму квадрата датих бројева.

SigmaXX[lista tačaka]: Израчунава суму квадрата x координата датих тачака.

SigmaXY[lista x koordinata, lista y koordinata]: Израчунава суму производа x и y координата.

SigmaXY lista tačaka: Израчунава суму производа x и y координата.

SigmaYY[lista tačaka]: Израчунава суму квадрата y координата датих тачака.

KoeficijentKorelacije[lista x koordinata, lista y koordinata]: Израчунава производ-момент коефицијената корелације користећи дате x и y координате.

KoeficijentKorelacije[lista tačaka]: Израчунава производ-момент коефицијената корелације користећи координате датих тачака.

Kovarijansa[prva lista brojeva, druga lista brojeva]: Израчунава коваријансу користећи елементе из обе листе.

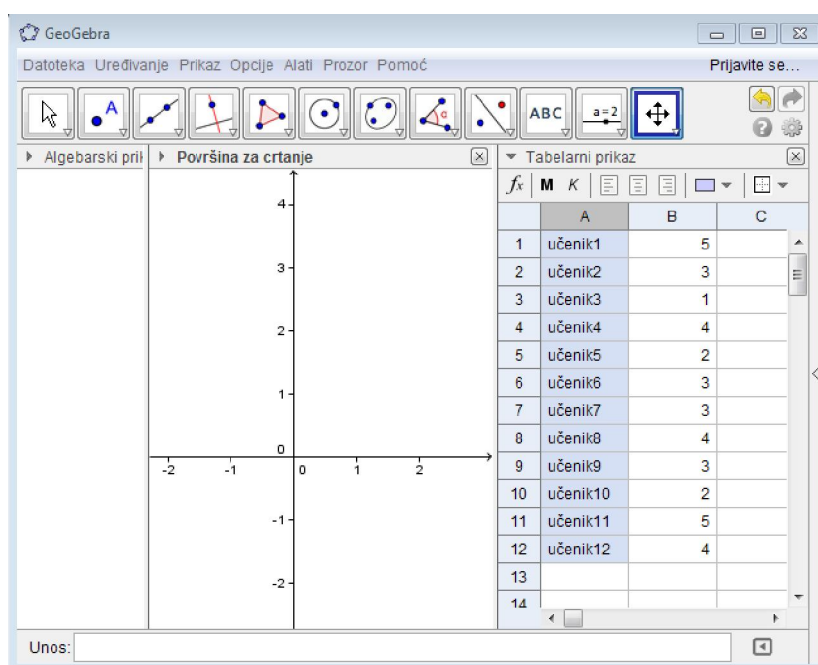
Kovarijansa [lista tačaka]: Израчунава коваријансу користећи x и y координате тачака.

Пример обраде статистичких података уз помоћ програма геогедра биће илустрован на конкретном задатку.

Задатак 1: На писменом задатку из математике дванаест ученика је добило следеће оцене: 5, 3, 1, 4, 2, 3, 3, 4, 3, 2, 5, 4.

Изračунај:

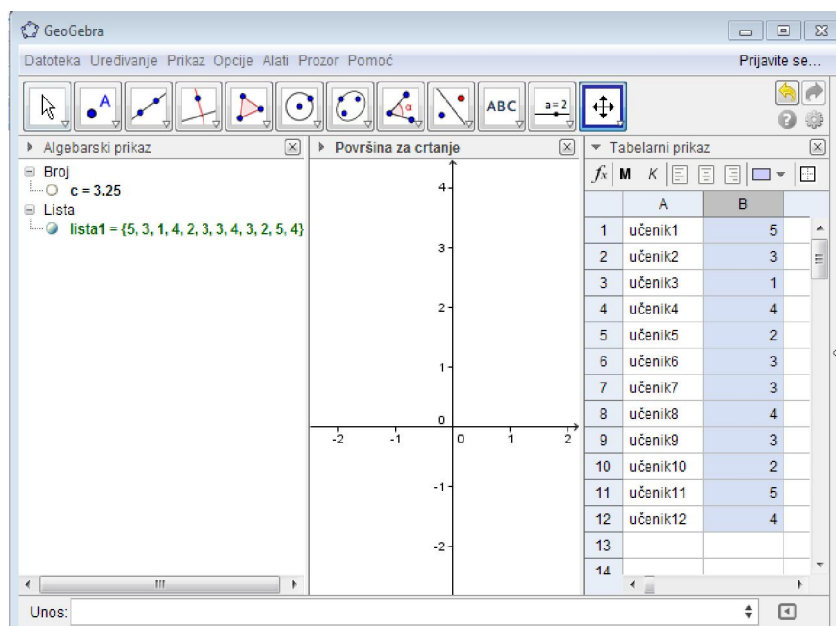
- просечну оцену,
- модус,
- медијана,
- стандардну девијацију,
- графички представити дате податке.



Слика 14.

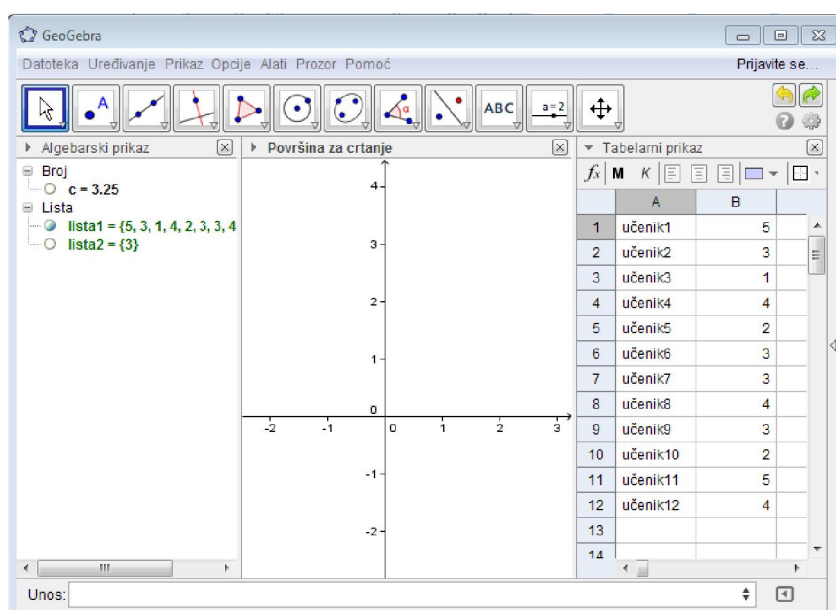
а) Означимо колону В и десним кликом изаберемо опцију креирај листу. Затим у пољу за унос куцамо наредбу $AritmetičkaSredina[lista1]$.

У алгебарском приказу добијамо $s = 3.25$, односно просечну оцену.



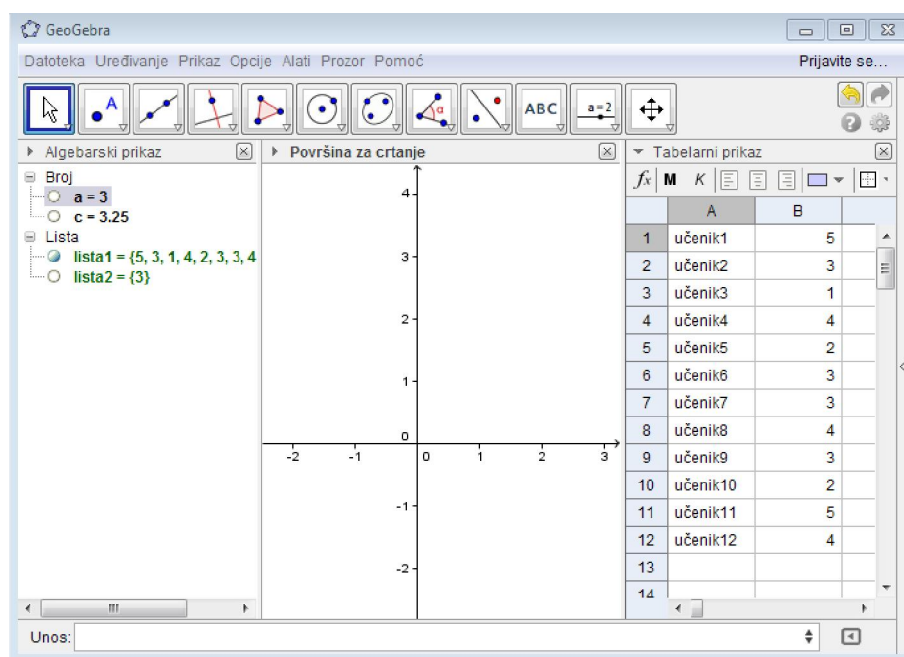
Слика 15.

б) У пољу за унос куцамо наредбу $Modus [lista1]$ и добијамо вредност 3.



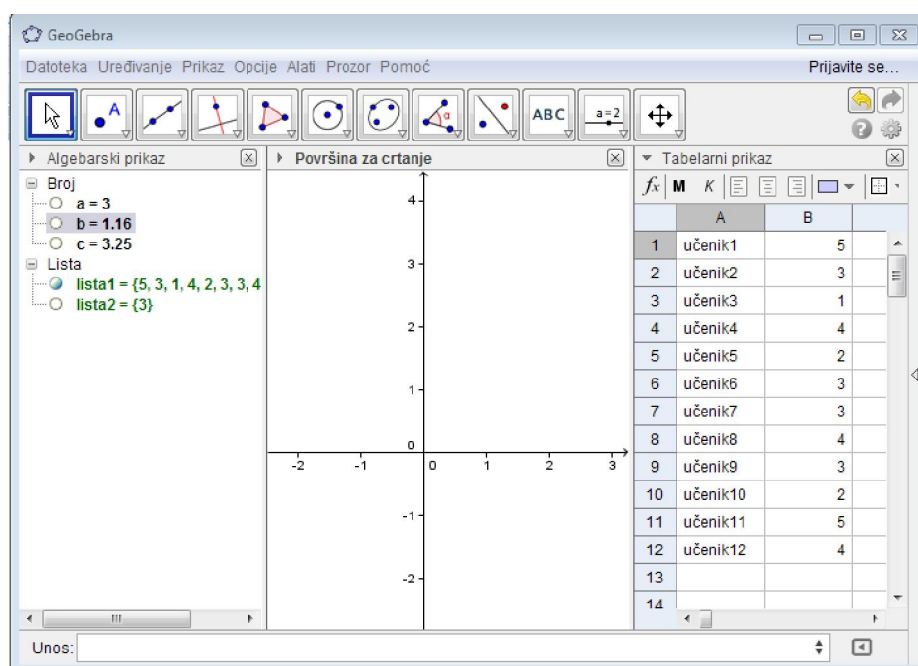
Слика 16.

в) У пољу за унос куцамо наредбу $Medijana [lista1]$ и добијамо вредност 3.



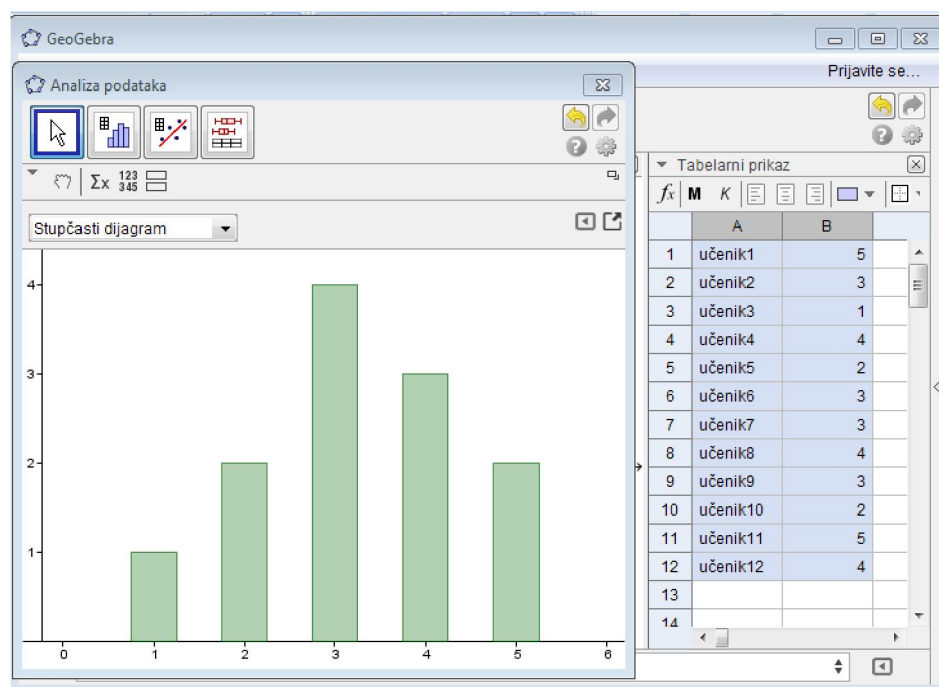
Слика 17.

г) У пољу за унос куцамо наредбу $SD[lista1]$ и добијамо вредност 1.16.



Слика 18.

д) Означимо колону А и В, изаберемо опцију анализа једне променљиве и добијамо следећи графички приказ:



Слика 19.

Есеј

Задаци који су коришћени приликом истраживања које је описано у даљем раду, задати су по узору на задатке који су дати у студији коју су спровели наставници математике у појединим школама у Америци и Аустралији. Њихова студија изложена је у овом поглављу, и представљена је у виду есеја.

Перспектива моделирања при математичком расуђивању ученика о подацима

Приступ моделирања у настави и учењу математике пребацује фокус учења са проналажења решења неког проблема на креирање система који је општи и може се поново користити. У овом чланку разматрамо природу низа задатака који се могу искористити за развој таквих система код ученика виших разреда основних школа. Извештавамо о резултатима нашег истраживања у два нивоа. Прво, представљамо детаљну анализу развоја математичког расуђивања једне мале групе ученика кроз низ задатака. Друго, омогућавамо високу анализу разноврсности шаблона расуђивања што се огледа у два проблемска задатка где укључујемо податке више група ученика. Резултати указују на то да су ученици у могућности да креирају опште моделе за селектовање, рангирање и мерење података. Шта више, обим различитих приступа ученика указује на више начина развоја идеја о рангирању података за доношење одлука.

Кључне речи: Когнитивни развој, концептуално знање, размишљање на вишем нивоу, математичко моделирање, разреди 5-8, решавање проблема, расуђивање, статистика.

Развој расуђивања ученика о подацима задобија очигледну улогу у наставном плану, са јаким освртом на поставку проблема, генерисање података и дискутовање резултата. Примећује се да ученичко статистичко искуство треба да их ангажује да раде са стварним подацима што омогућава разумевање математичких веза које су у основи статистичких концепата и процедура. Таква искуства играју снажну улогу и у математичком контексту јер ангажују ученике у важним друштвеним процесима кад се ухвате у коштац са значајним проблемима стварног света.

Традиционално, расуђивање података схваћено је као “радити нешто с бројевима”, где се подаци не виде као неке конкретне мере у ситуацији око које се доноси одлука. Као последицу имамо да ученици често слепо користе статистичке процедуре, као што је израчунавање средње вредности без обзира на контекст и питање које се тражи. Ово је било очигледно у почетним фазама Цобсовог наставног експеримента (1999) у седмом

разреду где је већина ученика при анализи података користила методе изведене из претходног статистичког искуства. Друго истраживање је показало како, у одсуству релевантног контекста, ученици ретко примене тражену статистичку процедуру у односу на скуп података.

Коришћење сврсисходних скупова за решавање проблема са значајним контекстом је кључни аспект програма који је осмишљен да унапреди ученичко резонување са подацима (Бурил и Ромберг, 1998; Ватсон Моритз, 2000). Као што су Мокрос и Расел 1995. истакли, “просек нема смисла ако скупови података немају смисао правих ентитета”. Ученици морају да разумеју да величине неког скупа података, као што је просечна вредност, представља скуп података као целину. Наставни програми све више истичу важност да се ученици обуче за ситуације у којима постоји права потреба за неком конкретном статистичком процедуром. Искуства која ће ученицима омогућити да пронађу или прераде неке моделе су нарочито значајна за унапређење статистичког расуђивања. Моделирање података обухвата изградњу и коришћење података, што су Лехрер и Сцхаубле 2000. дефинисали као “процес више компоненти за поставку проблема; развој особина појава; мерење и структурирање тих особина; а затим прављење, прерада и приказивање модела”. Вежбање таквих моделирања података се у основној школи ипак не ради. Чак и у средњим школама ученичка искуства су углавном ограничена на примере из уџбеника где су скупови података прерађени и издвојени и од ученика се не захтева да развија стратегије за организацију тих података. Природа моделирања података се значајно заснива на развоју ученичког разумевања. Контексти који су мотивишући, занимљиви и ближи свету ученика чешће доводе до тога да они спонтано примене неку статистичку идеју, као што је израчунавање просечне вредности. Одабир таквих задатака био је један од критеријума за прављење проблема који се користе у студијама у овом артиклу.

Наши задаци обухватају развој модела који захтевају процену, селекцију и рангирање података за потребе одлучивања. Такви модели се често јављају у свакодневном животу и такве ситуације су већини деце познате (на пример процењивање филмова и ресторана, спортских клубова или предмета из потрошачких водича). Тако су ученици стављени у праве, смислене ситуације уместо да решавају често небитне задатке. Корист од оваквог контекста је описан у једном истраживању које је проистекло са Института Фреудентхал.

Други критеријум био је да задатак има могућност да измами математички битне поставке и конструкције. Кључно својство стварног контекста је да омогући платформу за развој математичких вештина код ученика, како би могли да користе математику као генеративни извор у животу изван учионице. Креирали смо задатке који ће неговати способност ученика да изразе и генерализују своје информално разумевање и нагађања. Задаци за ову студију састоје се од низа акција моделирања у којима је фокус математичке идеје на креирању процене величина; операцијама и трансформацијама при тој процени и коначно прављењу веза између тих величина како би се дефинисало објашњење и предвиђени односи.

Теоријски оквир

Модели су системи елемената, операција, веза и закона који се могу користити за опис, објашњење или предвиђање понашања неког другог познатог система. Процес моделирања почиње фазом “измамљивања”, која суочава ученике са потребом да развију такав модел. Нарочито нас интересују они модели код којих је основа структуре модела од математичке важности. Низ активности моделовања фокусираног на развоју система за процене пружа нам окружење у коме можемо испитати развој ученичког тумачења проблема, расуђивања о битним елементима система, њихов одабир величина, операција и представљања и њихова вишеструка тумачења.

Ангажовање у оваквом прављењу модела не проналази решење датог проблема већ развија генерализације које ученик може користити како би дошао до решења. Сматрамо да ученицима треба више искустава која ће им омогућити да истражују математичке конструкције, да примењују њихов систем у новим поставкама и да прошире свој модел на нове начине. Свака од ових фаза развоја модела подразумева више тумачења, описа, нагађања, објашњења и оправдања реконструисаних од стране ученика, обично у интеракцији са другим ученицима. Овакво виђење ученичког концептуалног развоја кроз моделирање обликовано је ранијим истраживањем које поставља нелинеарни, циклични приступ моделу. Генерализација и поновна употреба модела су централне активности оваквог приступа за учење математике. Тако перспектива моделирања најпре ангажује ученике око неке проблемске ситуације што изнуђује развој значајних математичких конструкција, а затим те конструкције проширују и примењују у другим проблемским ситуацијама, што нас доводи до система или модела који се може поновно примењивати у различитим контекстима.

Величине и операције које су потребне за математички приказ неке реалне ситуације често су изнад оних које се уче у школи (бројеви, мере, релације, пропорције, фигуре и четири основне аритметичке операције). У реалним ситуацијама величине које су често потребне су скупови, вероватноћа, учесталост, редови и вектори, а потребне операције подразумевају сортирање, мерење, организовање, одабир и промену читавог скупа података а не само једног. При решавању класичног текстуалног школског проблема ученици у једном или два корака преведу дати проблем у аритметичке операције и величине јер су ти проблеми већ тако осмишљени. Циљ је да ученик препозна математички део и обради дате податке тако да се решење добије коришћењем познатих величина и основних операција. Супротно томе, код задатака моделирања, циљ је да ученик схвати смисао проблема тако да може да га представи математички на начин који је њему значајан. То подразумева кружни процес одабира битних величина, смисленог представљања и дефинисања операција које доводе до нових величина.

Опис студије

Описана идеја се најпре истраживала у неколико одељења у САД код ученика узраста 12-13 година. Касније је прерађена од стране другог аутора за коришћење у аустралијским одељењима код ученика од 10 до 11 година. При истраживању развоја ученичких модела код ових млађих ученика, надали смо се да ћемо проширити ваљаност наших налаза на ширу групу ученика. Имали смо три главне намере у овом проучавању. Прво, желели смо да пратимо развој ученичког размишљања о рангирању, одабиру и мерењу података за системе који би користили за описивање других података и доношење одлука. Друго, желели смо да докажемо да ће ученици у интеракцији са задатком и другим ученицима доћи до низа идеја и истаћи ће се различити начини размишљања. Као последицу различитих тумачења, очекивали смо да ће се међу ученицима препознати различити приступи проблему. Треће, хтели смо да опишемо и илуструјемо како модели могу да се прошире кроз разне контексте.

Низ развоја модела састоји се из пет проблемских ситуација и захтева од ученика да направе користан систем за процењивање у зависности од контекста. Основне математичке идеје концентрисане су у појмовима рангирања, одабиру и повезивању ранжираних величина и процени рангирања. У сваком контексту ученици анализирају и трансформишу цео скуп података или неки његов значајан подскуп, а не само једну изоловану информацију. Ученици претходно нису били формално суочени са овим идејама. Наставна јединица је осмишљена тако да се ученици могу спремно и смислено

ангажовати око проблемске ситуације и могу креирати, користити и мењати величине на начине који су им значајни и тако да их могу поново користити и проширити на нове ситуације. Низ проблемских ситуација осмишљен је тако да се ради у малим групама што обезбеђује да ученици међусобно дискутују о нагађањима и да размењују идеје и објашњења. У учионици се може обезбедити форум за дискусију о специфичним системима које су ученици осмислили. Сада ћемо дати кратак опис сваког од пет задатака у низу.

Први је проблем „патика“, који је осмишљен да наведе ученике на појам рангирања више фактора при доношењу одлуке у куповини. Након њега иде проблем „ресторана“, а затим или проблем „временских прилика“, или проблем „летњег кампа“, који су математички идентични. Ови проблеми треба да истраже и просире конструкције добијене код проблема патика. Последњи задатак у низу, „проблем криминала“, омогућава ученицима да примене конструкције које су развили у претходним задацима, да представе систем који су креирали и усаврше своје поимање о процени фактора.

У проблему „патика“ ученици се сусрећу са више фактора који се могу користити за развој система за процену при куповини патика, као и са чињеницом да нису сви фактори подједнако важни свим људима. Питали смо ученике: „Шта вам је битно при куповини патика?“. На тај начин смо саставили листу фактора где нису сви фактори ученицима били подједнако вазни. Ученици су затим у малим групама радили на томе како да поређају ове факторе при одлуци о куповини. Наставник је поставио проблем, како креирати један скуп фактора при чему би се узело у обзир мишљење целог одељења. Другим речима, рангирања појединачних група ученика требало је саставити у једно рангирање целог одељења.

Други скуп задатака, проблем „ресторана“, „временских прилика“ и „летњег кампа“, осмишљен је да прошири, истражи и усаврши идеје о рангирању, сортирању, селектовању и коришћењу података уопште. У проблему „ресторана“, ученици треба да одреде најбитније карактеристике при одабиру ресторана. На основу рангиране листе приоритета. Иако је други контекст, овај задатак је математички еквивалентан проблему са патикама. Проблем „временских прилика“ користи контекст путних агенција које се баве смештањем туриста који прецизирају да њихов избор одредишта зависи од одређених климатских услова. У табели 1 дат је извод овог проблема.

Ученицима су дате информације о климатским условима различитих градова заједно са писмима двеју муштерија. Њихов задатак је да развију општи систем процене за поређење климе на различитим местима и напишу писмо путној агенцији у којем ће препоручити најбоље, мало лошије и најлошије градове за сваку муштерију. Ученици треба да објасне агенцији по ком принципу ради њихов систем процене и зашто је добар. Проблем „летњег кампа“ у основи има сличну математичку структуру као и проблем временских прилика и тражи од ученика да креирају општи систем за одабир тимова за атлетске догађаје у летњем рекреативном програму.

Информације о клими

Град	Ведрих дана	Дана испод 15°C	Дана изнад 30°C	Годишњи просек падавина (mm)
Сиднеј	85	12	15	1220.4
Елис Спрингс	95	40	169	274.5
Хобарт	36	184	6	516.3

Табела 1.

Драги Глобал Травел,

Моја супруга и ја ћемо се пензионисати кроз неколико месеци и волели бисмо да се тада преселимо у топле и сунчане крајеве. Није нам битно ако има много кише, али свакако не желимо да буде прехладно. Које градове треба да разматрамо?

Ваши искрени,

Г-дин и г-ђа Џонсон

У проблему „криминала“, ученицима су приказане стопе криминала у различитим градовима (кривична дела и прекршаји). Тражи им се да осмисле систем који се може користити за одређивање да ли је неки град са листе „довољно безбедан“ или има гаранција за повећање расхода у полицијском буџету. При превођењу ових података у математику треба узети у обзир да иако је стопа кривичних дела укупно нижа, више ће утицати на одлуку о безбедности од прекршаја.

Учесници и подешавања

У овој сарадничкој истраживачкој студији о ученичком математичком расуђивању са подацима, сваки истраживач изабрао је да ради са школама у својој земљи. При анализи података нисмо наишли на значајне разлике у шаблонима ученичког расуђивања између две земље (САД и Аустралија).

Амерички учесници

Низ задатака развио је први аутор, а наредне две године је мењан, усавршаван и имплементиран од стране пет искусних наставника 5-8. разреда у 4 различите школе у САД-у. Школе су одабране на основу интересовања и воље наставника да ангажују своје ученике изазовним проблемским задацима. Три школе налазе се у варошицама у којима живи средња класа, а једна у граду са нижом класом. Укупно је било 32 одељења ученика узраста 12-13 година, а у сваком одељењу 20-22. Класична имплементација низа моделирања трајала је 2 до 3 недеље. Ученици су одслушали 10 до 12 предавања о низу задатака, где је свако предавање трајало око 40 минута. За време тих предавања од наставника је тражено да слушају алтернативне начине на које ученици могу приступити задацима, да их охрабре да објасне зашто мисле да је њихова стратегија разумна и да негују поређења међу различитим приступима.

Аустралијски учесници

Ови задаци су измењени од стране другог аутора како би омогућили аустралијски приступ проблемима (нпр. Проблем временских прилика у Апендиксу). 14 аустралијских ученика, узраста 10-11 година били су сести разред у школи смештеној у области средњег стајежа. Та школа је изабрана због сопственог интересовања и воље да ангажује своје ученике у решавању изазовних проблемских задатака у периоду од 2 године. Други аутор је убацивао активности на сваке две недеље у периоду од 11 недеља и лично држао предавања ученицима. Деца су радила у 4 групе од по троје-четворо ученика на часовима у трајању од 90 минута. Имплементација овог другог аутора изведена је без знања о претходним резултатима које је добио први аутор, како би се избегле све предрасуде.

Процедуре

И у америчким и у аустралијским одељењима сваки час почињао је дискусијом целог одељења о контексту проблема (на пример код проблема „патика“ о важности

истраживања тржиста при креирању нових производа). Ученици затим прочитају проблем и ако су се договорили о условима који важе за све (на пример, предложили су факторе битне при куповини патика), поделе се у мање групе. Тада раде по групама на развоју својих модела. За то време, други аутор и његов асистент шетају између група посматрајући интеракцију ученика и хватају белешке. Ученицима нису дате инструкције за решавање проблема. Ако група затражи помоћ постави им се неко подпитање које треба да им усмери ток мисли. Пред крај часа групе заједно представљају своја решења. Кад свака група представи своје решење, модели које су развили се опишу, упореде и понекад допуне. Да би се разјасниле и прошириле идеје сваке групе, ученици заједно са аутором постављају питања о презентацији.

Извори података и анализе

Извори података са предавања и у САД-у и у Аустралији укључују: а) аудио и видео снимке одговора ученика на сваки задатак, б) њихове радне листове и коначне извештаје у којима описују своје моделе и како су до њих дошли, и ц) детаљне белешке које су истраживаци и њихови асистенти записали за време посматрања у учионици. У америчким школама, једна или више групица од по троје-четворо ученика одабрано је за ближе посматрање и аудио снимање. Одабрани аудио и видео снимци са целокупних предавања су преснимљени за касније анализе. Са аустралијских предавања за сваку групу постоје аудио снимци, а видео снимци су ротирајући. Сви подаци преснимљени су за анализу. Скуп свих података за ово проучавање састоји се из копија ученичких радова обе стране, бележака и горе поменутих сачуваних записа са предавања.

Анализа података извршена је у 3 фазе. У првој фази, фокусирали смо се на три задатка: проблем „патика“, проблем „летњег кампа“ и проблем „криминала“. У овој фази, анализирано је које величине и односе су ученици у групама разматрали за сваки задатак, разлике у њиховим интерпретацијама задатака, математичко расуђивање њиховог приступа проблему и изразе које користе да би уопстили проблем. Ова фина анализа идентификовала је вишеструка тумачења сваке групице ученика за сваки задатак.

Друга фаза анализе података усредсређена је на описивање различитих модела које су ученици развили за сваки задатак. Анализиране су разлике међу копијама ученичких радова, снимцима дискусија целог одељења и белешкама о ученичким радовима по групама. Категоризација ових разлика биће описана у следећем одељку.

У трећој фази анализирали смо преписе неколико група аустралијанских ученика које смо пратили кроз сваки задатак. Ова анализа доказује развој математичких знања код ученика током рада задатака. Истраживаци су међусобно размењивали описе различитих интерпретација и упоредили то са резултатима претходних скупова података. То је довело до побољшања тумачења. Затим је анализирана разноликост модела развијених у ученичким радовима, преписима и ухваћеним белешкама за сваки задатак у овом одељењу. Ови модели су били конзистентни онима из претходних резултата америчких ученика. Наша анализа није дошла до значајних разлика између ове две земље.

Резултати

Прво ћемо приказати фино структурирану анализу циклуса развоја приказаних од стране једне групе Аустралијских студената- Бен, Ерин и Росе 1- кроз скуп задатака. Група (одавде па надаље ће се наводити као Бенова група) је изабрана из два разлога. Први, испоставило се да је репрезентативна у односу на остале групе када је у питању ранг приказаних приступа. Други, Бен, један од чланова групе слободно је изнео своје размишљање кроз интеракцију са осталим члановима своје групе. Пратећи нашу фино структурирану анализу Бенове групе, представљамо вам анализу на макро нивоу различитости образаца размишљања које смо разматрали у проблему „патика“ и „криминала“, где смо се ослонили на податке из САД-а.

Пратећи развој моделирања једне групе деце (Бенове групе) извештавамо о вишеструким циклусима растуће стабилности и софистицираности које смо посматрали у одговорима деце у и кроз задатке. Закључили смо да ти циклуси, од којих сваки представља промену начина размишљања деце, омогућавају моћне облике информација о расту математичког размишљања ученика. У садашњем случају, циклуси су у опсегу од математичких приступа до софистицираних модела за креирање ранжираних количина операција над тим количинама и креирање веза за објашњавање у и међу количинама.

Проблем „патика“

Циклус 1: Нематематичко рангирање. У почетку проблема „патика“, цео разред је изнео листу фактора које су сматрали важним током куповине пара патика. Изабрани фактори су били удобност, стил, величина, цена, шара, бренд, квалитет и изглед. Затим ученици су радили у својим групама како би одредили на који начин би поређали

факторе приликом одлучивања који пар патика купити. Табела 2 приказује резултате рангирања различитих група. Током креирању ових иницијалних листа групе су користиле нематематичке аргументе и одлуке.

Иницијални поредак фактора креираних од стране студената.

	Групе студената			
Поредак	Група 1	Група 2	Бен, Ерин и Роуз	Група 4
1	стил	стил	стил	удобност
2	величина	величина	цена	величина
3	удобност	цена	величина	стил
4	цена	удобност	удобност	квалитет
5	квалитет	квалитет	квалитет	бренд
6	бренд	изглед	шара	изглед
7	изглед	бренд	бренд	шара
8	шара	шара	изглед	цена

Табела 2.

базиране на њиховом личном искуству куповине патика, као што је следећи пример из Бенове групе:

Ерин: Значи... на првом месту стил.

Роуз: Ја мислим да је на другом месту конфор.

Бен: Да ли се ти слажеш?

Ерин: Сматрам да би на другом месту требало ставити цену.

Бен: Да, ако је цена висока, нећеш их узети.

У следећој компоненти проблема „патика“, наиме, груписање свих листа у заједничку за разред, Бенова група се удаљила од коришћења субјективних одлука према разматрању колико често сваки од фактора се појавио на одређеним местима у листама. Међутим, док указујемо на следеће, том приликом, студенти су се вратили иницијалном начину размишљања у првом циклусу.

Циклус 2: Рангирање по фреквентност. Бенова група је започела задатак груписања посматрањем кроз листе да би видели који фактори се најчешће појављују на првом и другом месту. Следеће извођење илуструје како Бен одолева враћању на њихов претходни неформални приступ.

Ерин: Већина су цена.

Роуз: И стил... И даље мислим стил.

Бен: Стил, па онда величина.

Ерин: Али шта ако им не одговара?

Бен: Није важно!

Ученици су наставили да разматрају рангирање на бази фреквентности одређених рангирања, и ако је Ерин остала неубеђена да би стил требало да буде рангиран изнад величине, приказујући нематематичко размишљање циклуса 1 када је рекла: „Мислим да би требало ставити величину на прво место, зато што ја не водим рачуна о стилу.“ Ипак, остали ученици су остали фокусирани на своју стратегију базирану на фреквентности док нису наишли на потешкоћу 2 фактора- бренд и изглед- који су се појављивали на средини листа. Из овог угла, посматрали смо промену у Беновом размишљању која је водила наредном циклусу кратковечном циклусу.

Циклус 3: Упоредна поређења. Тежина потешкоћа са рангирањем бренда и изгледа је била у томе да су се они такмичили за исти ранг на листи. Иако је стратегија групе базирана на фреквентности била мање корисна из овог угла, Ерин и Роуз су покушале да оцене који од ова два фактора се појавио са већом фреквентношћу у одређеним рангирањима. Бен је одбио стратегију девојака, и уместо тога користио стратегију упоредног поређења поредећи два фактора према релативном поретку у ком су се

појављивали на свим оригиналним листама. Коришћењем овог приступа, Бен је сумирао рангове сваког од два проблематична фактора и онда одредио поредак два фактора базирана према њиховим сумама. Бенова употреба упоредног поређења указује на битност померања према математизирању елеманата у листама ка математичким квантитетима на свој начин.

Бен је коментарисао овај проблем на следећем излагању испред разреда. Пошто је једна група објаснила: “Ставили смо изглед [пре бренда] јер ту постоје два изгледа и постоји само један бренд на 6” [ученица је мислила на шесту позицију на својој листи], Бен је упитао: „Шта ако је обрнуто? Шта ако би изглед био ту где је бренд И бренд ту где је изглед. Да ли бисте изабрали изглед или бренд?” Неки студент су одговорили на субјективан начин (на пример: “Користи своје размишљање.”), док је Бен објаснио на који начин је решио ову дилему: „Имао сам мало проблема, па сам сабрао све брендове и добио 25 ,а када сам сабрао изглед добио сам 27, што значи да је изглед пре Бренда.”

У рангирању преосталих фактора, међутим, Бенова група се ослонила на своју стратегију базирану на фреквентности.

Вербални одговор ученице из друге групе сугерисао је решење проблема означавањем рангова сваког фактора у свакој листи, сабирањем рангова сваког фактора у листама, и онда налажење просека тих рангова. Евидентно, ова ученица је креирала ову стратегију током излагања испред разреда јер није била осмишљена раније од стране њене групе. Ова стратегија просека је потпуно развијена када су ученици радили на следећем задатку, проблем у ресторану.

Проблем ресторана

Следећи проблем у низу, проблем ресторана, је математички еквивалентан првом задатку. (Текст овог задатка појављује се у прилогу). Студентима се даје табела података са приоритетима клијената за факторе који би утицали на њихов избор ресторана. За разлику од првог задатка, међутим, ови приоритети имају експлицитне нумеричке вредности, а не имплицитно место вредности из листе. Ова промена у представљању података из претходног задатка, заједно са предлогом о просеку рангова из дискусије пред разредом, довели су до развоја следећег циклуса.

Циклус 1: Од рангова као ознака до рангова као операбилне количине. Главна карактеристика овог циклуса је приказ значајних математизационих процеса од стране

групе. Од самог почетка, рангиране разлоге за посете корисника Бенова група је видела као количине изведене по просеку, а не као ознаке или позиције на листи. То јест, ако је помфрит главни разлог за посету купаца ресторану, био би означен са резултатом 1; да је постојао други разлог купаца, био би означени са 2, и тако даље. Група је затим додала вредности сваке од колона (разлога) и нашла просечну оцену за сваку колону дељењем са 10 ("Додали смо све помфрите и онда их подели са 10 ... а онда најнижи износ је најбољи"). То је довело до креирања њихове главне листе, наиме, 1. помфрит, 2. пљескавице, 3. брзина, 4. цена, 5. Дечји оброци. Каснија дискусија групе на проналажење просечних резултате навела је на наредни циклус у математизациони систем рангирања студената.

Циклус 2: Инваријантност рангирања. Након стварања својих главних листа, ученици у Беновој групи су покушавали да објасне своје поступке када су дошли до неслагања о укупној просечној оцени. Као што је приказано у следећем изводу, у току дискусије, Ерин приказује имплицитну свест о томе да на просечни резултати не утичу на промену редоследа укупног резултата.

Бен: Требало је да их поделиш са 5 ... то је много лакше него са 10.

Роуз: То је иста ствар ... то је иста ствар

Бен: Због 10 људи. Знам, али ...

Ерин: То је иста ствар.

Бен: Знам, али могли сте их само поделити са 5 зато што постоји 5 избора.

Роуз: Или 10 јер је било 10 корисника.

Ирска: Али то заиста није битно.

Овај циклус илуструје два аспекта скоро општих налаза у свим разредима ученика из обе земље. Први аспект је конфузија између тога да ли да поделе укупно са 5 (број ставки у листи) или 10 (број купаца или листа). Већина ученика је убрзо могло да реши конфликт означавања броја ставки које су сумиране. Уочавамо други знатно занимљивији аспект: дакле, нису сви ученици препознали да је рангирање износа исто као и рангирање просека. Ерин и Роуз су међу неколико студената који су препознали да обим позитивних делилаца дају "исту ствар" и да је "не битно." У свим разредима, када је ово питање постављано за дискусију, студенти су требали да дају аргументе о томе зашто је то тако.

Проблем времена

Даљи развој математичког мишљења ученика о системима рангирања је примећен на следећем задатку, проблему времена. Роуз и Ерин су требале да убеди Бена да одбаци неефикасне стратегије које је покушавао да спроведе.

Циклус 1: Упаривање и елиминација. На почетку проблема, девојке су хтеле да користе систем просека који су развиле у претходном проблему ресторана. Међутим Бен је желео да створи свој сопствени метод:

Роуз: Сматрам да би требало само да... направимо просек... са ведрим данима, просечно... 365 дана...

Бен: Требало би да напишемо овде шта мислимо о Сиднеју... могли бисмо рећи, "Прилично је хладно, прилично вруће. "

Роуз: Или можеш да направиш просек ... 365 дана.

Упркос предлогу девојака, Бен је инсистирао на спровођењу своје стратегије, која се састојала од узимања скупа критеријума (нпр., топло и сунчано) и проналажења свих градова који задовољавају ове критеријуме и одбацивању осталих. У овом тренутку, Роуз и Бен су имали два различита тумачења овог задатка. Роуз се фокусира на број ведрих дана, количину од које се лако може добити просек. Бен је, међутим, истовремено бавио са две променљиве, броју врућих дана и броја хладних дана. Бенова стратегија упаривања и елиминисације се показала као тешко изводљива и био је спреман за субјективно расуђивање.

Фокусирањем на факторе "топло и сунчано" и подсећањем на то да клијенти нису бринули о киши, група је тестирала неколико градова, као што се може видети из Беновог коментара: "Они воле топло време ... које оговара Кернсу ... Сиднеј има хладно време ... зато би требало да узмемо топлије ... а два избора за топлије су мозда Мт. Иса, Дарвин, и Кернс ... А ... Мт. Иса је мало превише врућа ... Дарвин је мало преврућ, јер су они тражили рекли топао ". Роуз је остала неубеђена у Бенов приступ. Неодређено, Бен је тврдио: "Требали би да узмемо наше рангирање и онда видети шта мислимо тако што запишемо све доле и онда видимо шта је најбоље." Сарадник у истраживању који је био у близини групе олако се распитао о критеријумима који су намеравали да овде користе. Као одговор на ово питање, а подстакнуто од стране Росе и Ерин са нагласком

на проналажењу општег система, размишљање ученика се померило ка систематичнијем приступу.

Циклус 2: Тражење општих система. У одговору на питање сарадника у истраживању, Бен је објаснио да „Ми ћемо видети да ли хладни или топли градови и онда ћемо их рангирати на тај начин. Да ли то значи да треба да развијемо метод или само да испишемо зашто.“ Ерин је одговорила на недвосмислен начин: „Метод, метод, зато што мора да ради за сваког од њих.“ Видимо ово као знак да је барем Ерин померила свој начин размишљања ка препознавању потребе за општим системом који би радио за све клијенте.

Девојке су се вратиле својој идеји порналажења просека али су иницијално биле несигурне о томе како да одраде ово. Иако је Росе предлаже коришћење стратегије рангирања „идући од највишег до најмањег или барем до највишег,“ Бен се вратио својој претходној стратегији претраживања датих информација да би пронашао градове који задовољавају критеријуме „топао и сунчан.“ Са даљим погоршавање, Росе је поновила циљ како га она види: „Али то ипак треба да ради за све... али то [Бенова стратегија] неће радити за сваког.“ Као и Ерин, Росе је препознала потребу за општим системом или моделом за избор градова за клијенте. После кратког договора о томе да ли би требало да рангирају градове према сваком фактору, група је напредовала ка новом циклусу у свом начину размишљања.

Циклус 3: Развој система подела (математичких) средина. Група је одлучила да прво рангира градове према броју ведрих дана, са нагласком од Росе о потреби да се нађе просек података („ранг од најнижег до највишег и онда се формира просек“). Група је пратила саве Роуз и пронашла просечни број ведрих дана. Наредни Бенов коментар, „Уколико смо хтели савршен град, требало би да кренемо од узимања свих просека за почетак,“ група је пронашла просек сваког од осталих климатских фактора у табели података. Чинећи ово, група је почела да размишља о фокусирању на само оне градове који су били изнад или испод просека одређеног фактора, систем који ми називамо „подела средина“. Наредна извођења показују значајни математички развој, где студенти користе средине компаративну меру за одређивање које градове да разматрају и које градове да елиминишу.

Бен: Ако би [клијенти] желели топао [град] и он је изнад просека то би требало да значи да је топап.

Ерин: Да, ако је испод онда је хладан.

Како би им помогли у примени њиховог новог система, група је исписала табелу, приказану у табели 3, на којој су записане средине за сваки климатски фактор. У покушају да поправе начин на који примењују свој нови систем, Бен је указао, „Ако људи желе топао дан, нађете такав град, сачекајте, сачекајте, само слушајте, пронађете град који има 118 дана изнад 30 степени“ и „и нећете тражити градове који су најближи просеку..., пошто неће бити прецизни.“ Ова наредна поента је такође поменута од Ерин и Роуз, указујући не софистицираније разумевање на који начин средина може бити примењена за решавање проблема ове природе. То је да, средина више није одговор који су они тражили, већ је постао нова количина која је омогућила ученицима да пореде разлике између средина као и правца тих разлика.

Ведри дани	Дани испод 15 степени	Дани изнад 15 степени	Просечне годишње падавине (mm)
99.2	52.1	118.2	934.7

Табела 3.

Враћањем на писма клијената, Бен је упутио групу на листу градова који су изнад или испод просека према томе шта је клијент тражио.

Ипак, у скенирању својих листа за градове који испуњавају критеријуме, група је постала преплављена са количином информација које се морају узети у обзир. То је довело групу да примени средства за праћење њихове акције.

Циклус 4: Имплементација стратегије елиминације. Група је одлучила да прати њихов напредак ка циљу задатака помоћу елиминационе стратегије. Бен је почео стратегију са својим коментаром: "Запишите свих девет градова, а затим прецртајте оне које не мислимо да јесу све до последња три." Док је група настављала са радом, Росе и Ерин су посматрале напредак који је постигнут и често преусмеравале групу (посебно Бена) на суштину проблема. На пример, одбацивање појединих градова који нису задовољили посебне критеријуме, Роузје опоменула групу: „Не чекајте, ставите их у трећу групу... знате како морамо да их ставимо у три групе.“ Како је група наставила са својом елиминационом стратегијом, Ерин је ишчитавала захтеве клијената и

прокоментарисала да група може бити ефикаснија у испуњавању следећих: „Ишчитаћу питање поново... не морамо да гледамо свако посебно... ми не морамо заиста да бринемо о киши...они дефинитивно не воле хладне дане тако да ми дефинитивно не желимо да буде хладно.“ Студенти су наставили да примењују своју елиминациону и посматрачку стратегију, имајући у виду да сваки критеријум клијента мора бити задовољен. На крају овог циклуса, они морају да елиминишу падавине као критеријум и морају да пронађу три најгора града заснована на њиховој хладној клими. Сада им је задатак да именују шест градова. То је довело до даљег развоја система поделе средина.

Циклус 5: Унапређење система поделе средина. Финални развој система поделе средина од стране студената се појавио када су они прешли на означавање њихових категорија градова квантификујући их према томе колико су близу захтевима клијената. Оцењујући своје категорије као „врло добро, добро, ОК и лоше“ ученици су осмислили оцене 4, 3, 2 и 1 поштујући сваку категорију. Оцена за сваки град била је довољна да одреди који би био најбољи град да задовољи потребе клијената (Мт. Иса... имао је девет поена и био је у вођству... да видимо ста је са Дарвин-ом...). Ови резултати су забележени на радним папирима, пример се појављује у Табели 4.

У објашњењу њиховог генералног система и посебног решења у писму за господина и госпођу Јохнсон, група није поменула ове детаље њиховог ранг система: Нашли смо просек за сваку категорију. Ако људи желе топао дан, ми пронађемо град који има изнад 30° С више од 118 дана у години. Ако људи желе хладне дане морамо пронаћи градове који су испод 15° С више од 52 дана у години.

1. Алице Спрингс
2. Моунт Иса
3. Пертх
4. Цаирнс
5. Суднеу
6. Дарвин

Рад Аустралијских студената о дрвету поретка градова у проблему времена.

Град	Маунт Иса	Перт	Алис Спрингс
Ведри дани	Јако добро	Добро	Јако добро
Дани испод 15°C	Јако добро	ОК	Добро
Дани изнад 15°C	Лоше	Добро	Добро
Укупно	9	9	10

Табела 4.

Посматрали смо исти феномент међу осталим групама студената: дакле, неки детаљи система нису пренети групи у целини или сачувани као писани рад ученика. У неким случајевима, ученици просто могу да не уоче да су неопходне све одређене везе система да би могао да га користи неко други. У другим случајевима, појављују се интересантни детаљи који воде ка развоју система (као раздвојене идеје и ране начине интерпретирања проблема) нису неопходни да би се крајњи модел схватио.

Проблем „криминала“

Последњи проблем у секвенци развоја модела је проблем криминала приказаног у Апендиксу. Намера овог задатка је примена модела који је био изведен у првом задатку (Проблем „патика“) и онда размотрен у друга два задатка (Проблем „ресторана“ и проблем „времена“).

Циклус 1: Примена система поделе средина. Бенова група је почела проблем криминала применом истог система поделе средина који су они развили раније у проблему времена. Пронашли су стопу насилничког криминала у подацима свих градова излистаних у датој табели (погледај Апендикс) и онда су поновили то за имовинске податке. Група је преферирала да одеади израчунавања са оловком и папиром уместо са калкулатором 2. Даље, група је поредила ове две сеукупне просеке особине стопе криминала Ипсвича, како би одлучили да ли је Ипсвич сигурно место за живот. Покушавајући да објасне активности групе овде, Ерин је тврдила, „Додали смо све резултате и добили просек и упоредили са Ипсвичом. Ако су резултати испод просека, онда је безбедније од просека; ако је изнад просека, онда није безбедније од просека“. Иако је имала потешкоће у објашњавању њиховог приступа, Ерин је указала на разумевање тога како се средина може користити да им помогне да одлуче о сигурности Ипсвича. Да би потврдили своје почетни закључак да су просеци стопе

насилног криминала Ипсвича биле ниже од просека свих градова, студенти су одлучили да предузму нешто детаљнију анализу података.

Циклус 2: Даље прецизирање система поделе средина. Друга анализа подразумевала је проналажење просека сваке од компоненти стопе насилног криминала (нпр. Убиство, пљачка, разбојништво, напад, провала, ...). Систем поделе средина је био поново примењен на тим новим просецима. Тако је просек Ипсвича за сваку компоненту упоређен са одоварајућим просеком свих градова и донета је одлука о безбедности Ипсвича у складу са сваком компонентом (нпр. „Убиство је доле, пљачка је доле ...“). У изради својих коначних одлука о сигурности Ипсвича, група је такође узела у обзир петогодишњи тренд криминала за сваки град. Ово се може видети у објашњењу Бена о томе како је група стигла на ову одлуку: "Додали смо доле сваки од њих [колоне података], убиство је око просека, напад је изнад просека, пљачка је изнад просека, провала је изнад просека. Све је изнад просека. Међутим, свеукупни тренд [за Ипсвич] је горе" Бен је додао: "Пронашли смо да је Ипсвич добар у односу на остале градове, али лош за себе ". Уз минималне интервенције које су имали Бен, Ерин и Роуз развили су генерализовани и поновно употребљив систем за избор и рангирање података проблема у преко четири различита контекста.

Варијације у оквиру модела ученика

Сада извештавамо о низу модела за проблем „Патика“ и проблем „Криминала“ које смо нашли преко свих разреда у нашем истраживању. У овој анализи, ми се не фокусирамо на специфичну путању развоја (као што смо урадили горе са Беновом групом), већ ћемо представити спектар модела који су ученици произвели. Овај опсег модела илуструје разноврсност приступа, тумачења установе, прецизирање и напредовање ученика кроз низ задатака. Модел за развој Бенове групе је само један од многих могућих учења секвенци што се одвијао у учионици. Системи ученика су категоризовани према коришћењу различитих количина и према везама између количина. У неким случајевима, добијени су математички системи еквиваленције који ученици примењују на другачије начине. Такви системи се рачунају као другачији, јер су се размишљања ученика разликовала на оперативном нивоу. У проблему „патика“, на пример, када саставе групне листе у једну листу, неки ученици раде просек редова преко листе група и онда поново рангирају те просеке. Остали ученици једноставно износе редове преко листе група, а затим поново рангирају збирове. Очигледно, оба приступа дала су исте коначне ранг листе и стога их можемо посматрати као

математички еквивалентне. Међутим, ученици нису увек видели еквивалентности система и, још важније, изразили су мишљења о два приступа нешто другачије: у првом случају, акценат је био на просечном рангу, а у другом случају, нагласак је био на укупном резултату. Из тог разлога, ми смо рачунали ова два система, као различите. У наредним одељцима, обезбедили смо и резултате ове анализе за проблем патика и проблем криминала.

Проблем „патика“. Идентификовали смо пет различитих система који су ученици развили. У принципу, утврдили смо да се најмање три од ових система појављују у већини разреда. Први систем који утврђује обједињени ранг разреда је била стратегија на бази фреквенције. Фактор са највећим бројем од њих добија прво место и тако даље за други и трећи фактор. Ученици су лако могли да се идентификују са највише и најниже ранжираних фактора овог система. Проблематично са овим системом је био избор и идентификација ранга за фактор у средини, а то је био проблем са којим се суочила Бенова групе. Ови средњи фактори су често додељени ранговима помоћу стратегије процене која деловала "довољно близу" рангу из перспективе ученика. Алтернативна стратегија, као што је Бен предложио, да се повремено користи је узастопно упоредно поређење. Ако су два фактора у конкуренцији за исто место на листи, ова два фактора су пореде према релативном редоследу у ком се појављују на свим оригиналним листама. Фактор са већим бројем виших рангова се касније рангира као већи. Напомињемо да је овај појам упоредног поређења математички моћан и користан. Међутим, он није стратегија која опстаје преко низа задатака. Тешкоћа у решавању проблематичног питања о средњем члану често талочи одбацивање овог модела и прелазак на неки од других система.

У већини случајева, заснован модел фреквенције је рани начин размишљања о проблему који је касније занемарен јер сученици настоје да прикупе све податке у свом систему. Напомињемо да ће прве употребе овог приступа фреквенције бити делом засноване од типа података које ученици имају о овом одређеном задатку. У почетку квалитативни подаци могу бити тежи за студенте него квантитативни подаци када мисле о бројчаном смислу, и самим тим, многи студенти почињу бројањем фреквенције.

Други систем развијен од стране ученика био је да израчунају аритметички просек редова сваког фактора, а затим да поново експлицитно рангирају те просеке. Значајно

је, овај систем је указао на померање од посматрања фактора као квалитативних где су подаци ранжирани имплицитно као позиције на листи ка посматрању рангова фактора као количинама које могу да раде на по упросечење. Новоизграђеним количинама просечног ранга се додељују нумерички експлицитни редове. У једном случају, открили смо да долази од нерешеног резултата у редове довео до префињености система. Повезани фактори су додељени заједничком рангу, и следећи ранг је прескочен. У то време, били смо изненађени овим решењем, јер је најбољи по знању од наших ученика није имао формалну обуку у методама за решавање веза. На наредној рефлексiji, можемо претпоставити да су ученици имали искуства са овим решењем из спортских догађаја у коме ово решење је заједничка стратегија.

Трећи систем који су развили студенти је био да се једноставно рангирају крајњи резултати сваког фактора, а затим да се експлицитно рерангирају ти крајњи резултати. Овај систем рефлектује исто померање у размишљању о рангирању као и горе наведени систем просека. У сваком случају, чини се да се ученици фокусирају на значење квантитета на мало другачији начин; ученици ће изразити крајњи резултат као број поена или скор у смислу вредности приписане фактору. Као што смо раније приметили током развоја система рангирања за проблем „временских прилика“ Беневе групе, Ерин и Роуз су препознале да је редослед фактора исти ако их рангирате на основу крајњих резултата или на основу просека. Међутим, открили смо да ово није тако очигледно већини студената и захтева објашњење и доказивање.

Четврти систем је експлицитно приписао фактор који је на врху листе (односно, рангиран је на првом месту) скору или поенима једнаке вредности укупном броју ставки на листи. Слично томе, фактор који је најниже на листи добио је најмањи број поена, односно скор - вредност један. У овом случају, приметили смо да се ученици експлицитно померају са ознаке или позиције на листи ка квантиету рангирања (скор или вредност поена) што рефлектује релативну ваљаност фактора. Ова рангирања се затим сумирају (као трећи систем) и ови крајњи резултати се рерангирају обрнутим редоследом како би се задржао најбољи фактор, са најбољим резултатом, на првој позицији.

Пети систем, који се користи како би се одредила заједнички ранг одељења, једноставно игнорише групне податке и прибегава стратегији „гласања“. Овај систем се само једном јавио у учионици приликом дискусије комбиновати листе, која је

иницирана не у малим групама, већ у оквиру целог одељења. Одлика рангирања која се истиче постаје вредност дата од стране сваког члана одељења, пре него целе групе. Неки ученици су су тврдили да је ова стратегија „више фер“ него коришћење групних података зато што се мишљења свих у одељењу на тај начин узимају у обзир.

Проблем „криминала“. Таман након што смо открили варијације на интерпретацију и приступ ученика у току првог задатка, такође смо открили разноликост у разматрању података у проблему Злочин. У току наше анализе система за овај проблем илустроваћемо спектар концепата наших ученика. Наша категоризација се заснива на писаним задацима 33 групе америчких ученика од 12-13 година у шест различитих одељења са три различита професора. Током давања инструкција, професори су имали тенденцију да охрабре ученике да развију и изразе своје мишљење о датој проблемској ситуацији. Можемо разликовати 5 различитих категорија система рангирања које су развиле ове групе ученика: 1) сакупљање стопа одабраног злочина, а затим рангирање резултата; 2) рангирање стопа одабраног злочина, затим сакупљање и рангирање резултата; 3) откривање средње вредности стопе одабраног злочина и затим коришћење тих података као мерни систем за поређење градова; 4) коришћење релативног рангирања где је стопа одређеног злочина у неком граду коришћена за поређење са осталим градовима; и 5) систем елиминације одређивања нове стопе за сваки град на основу фреквентности највише стопе злочина међу преосталим градовима. Прва два система је користила најмање по једна група у свакој учioniци. Фреквентност коришћења ових система сумирана је у Табели 5.

Први систем за одређивање да ли је одређени град сигурнији у односу на остале градове на основу података заснива се на сумирању стопа одређених злочина, а затим рерангирање градова на основу овог новог резултата стопе криминала. Одлука да ли је неки град сигуран или не заснива се на основу овог новог рангирања градова. Од 14 група ученика који су користили овај систем, 7 група је нашло просек укупне стопе агресивног злочина и стопу укупног криминала. Чини се да ученици нису у потпуности узели у обзир просек две вредности стопе злочина, али то не мења укупни поредак коначних резултата. Овде увиђамо два могућа објашњења за упорно коришћење просека код ученика: прво, ученици би требало да траже квантитет који у неку руку представља обе категорије злочина у смислу просечне стопе за сваку категорију. Ово, у сваком случају, би наговестило да ученици нису успели да уоче значајну разлику магнитуда између две стопе злочина. Друго објашњење за коришћење просека је

једноставно добро документована прекомерна употреба просека као прорачуна без обзира на његову вредност као пунозначни квантитет.

Две од 14 група су сумирале стопе свих шест злочина (убиство, пљачка, напад, провала, лакша крађа и крађа аутомобила) пре него да користе укупне резултате који су дати у таблеи за агресивне злочине и преступе. Чини се да ови ученици нису у потпуности интерпретирали податке и нису успели да схвате да два главна крајња резултата (за агресивне злочине и преступе) су већ одрађена. Најзад, када су нашли просечну стопу насилних злочина и свеукупну стопу злочина, једна група ученика је поделила збир ова два квантитета са шест пре него са два. Једна интерпретација овог рачунања просека је да они траже квантитет који се изнова појављује код просека свих шест категорија. Код група које су сабрале стопе злочина и онда рангирале вредности резултата, нисмо уочили да су у обзир узели да је и укупна стопа преступа значајно већа од укупне стопе насилних злочина и како ће ово утицати њихово рангирање.

Други систем који су ученици развили заснива се на укупан збир ранжираних стопа злочина пре него сабирање самих стопа злочина. Ови ученици су започели рангирањем специфичних стопа злочина (као што је укупна стопа насилних злочина и укупна стопа преступа) и онда користећи то рангирање рерангирали градове. Од 12 група студената који су користили стратегије у овој категорији, осам група је изабрало да рангира укупну стопу насилних злочина и укупну стопу преступа. Четири од ових осам група нису експлицитно доделиле нова места градовима на листи, али су одлучили да одређени град који их занима буде сигуран, с обзиром да је најниже рангиран по оба критеријума. Студенти нису морали да комбинују листе, с обзиром да су имали довољно информација да донесу одлуку о граду који их занима без даљих прорачуна за остале градове. Четири од ових осам група су сабрале рангирања укупне стопе насилних злочина и укупне стопе преступа и рерангирали те новодобијене вредности како би рангирале све градове.

Четири групе нису користиле укупну стопу насилних злочина и укупну стопу преступа. Једна група је просто рангирала укупну стопу насилног злочина и донела одлуку само на основу тог фактора. Уочили смо да је ово екстремни случај процене: само су насилни злочини били узети у обзир и били су једини аргумент безбедности код ове групе. Остале три групе су рангирале стопе свих шест злочина (убиство, пљачка, напад, провала, лакша крађа и крађа аутомобила), сумирали резултате овог

рангирања и експлицитно рерангирали на основу новодобијених вредности. Заједничка варијација у оквиру ове категорије је да су сученици бирали стопе које су сматрали важним и онда одмах стварали вредности рангирања уместо да прво комбинују стопе злочина.

Трећа категорија система који су развили ученици зове се систем поделе средина као онај који су развили Бен, Ерин и Роуз. Кључне карактеристике овог система су да ученици почињу рачунањем просека стопе насилног злочина, на пример, а онда га упоређују за одређене градове са основном вредношћу. Четири групе ученика су користиле неке варијације овог система. Две групе, сличне Беновој групи, су одредиле просечну укупну стопу насилних злочина и просечну укупну стопу злочина и онда их упоредили за одређене градове са оним што су они назвали „национални просек“. Одлуку су донели на основу овог поређења. Једна од група је израчунала просечну укупну стопу насилних злочина и просечну укупну стопу преступа на два начина: једном изостављајући одређени град, а затим и укључујући одређени град. С обзиром да је укључивање града у рачунање просека смањило оба просека, ученици су закључили да је њихов град безбеднији од просечног. На крају, једна од група је израчунала основну вредност стопе за убиство, пљачку, напад и укупно за насилне злочине. Уочили смо да ова група ученика није узела у обзир чињеницу да је укупна стопа насилног злочина једноставно збир преостале три стопе злочина. У сваком случају, ови ученици су наставили са откривањем разлике у односу на основну вредност за сваки од градова за сваку варијаблу и уочили су да су стопе код неких градова биле много другачије од основне вредности него код других градова. Ученици су онда рангирали те разлике у односу на основну вредност и закључиле да одређени град безбедан зато што је, не само испод основне вредности, већ је и најближи основној вредности у поређењу са осталим градовима.

Четврта категорија у одлуци о безбедности градова се заснива на облику релативног рангирања које су радиле две групе ученика. Релативним рангирањем ученици су посматрали све градове према њиховим стопама злочина у односу на одређени град. Једна група је узела у обзир укупну стопу насилног злочина за одређени град и онда рангирали сваки други град као ниже или више рангиран за вредност насилног злочина. На основу броја градова који су били безбеднији или мање безбедни, доносили су закључке о одређеном граду. Уочили смо да је овај исход математички еквивалентан рангирању свих градова на основу укупне стопе насилног злочина, али је

перспектива ученика била много другачија. У једном случају, ученици су читав сет података рангирани, док у овом случају, ученици посматрају све остале градове само у односу на одређени град.

Друга група је узела у обзир стопе злочина за одређени град у упоредила их са свим осталим градовима у контексту ниже и више ранжираних по свим стопама злочина. Онда су сабрали колико градова има стопу злочина нижу од одређеног града и колико градова има вишу стопу у односу на одређени град. Онда су донели закључак да градови са пет и више нижих места на листи су безбеднији од одређеног града, а они који имају пет и више виших места од одређеног града су мање безбедни. С обзиром да је било више градова који су мање безбедни, ови ученици су закључили да је одређени град безбедан.

Пета категорија се састоји из система који је развила једна група ученика. Ови ученици су открили да је најмање безбедан град тиме што су открили у ком граду је највећа стопа злочина међу свих осам појединачних фактора. Напомињемо да ова група није, изгледа, узела у обзир да су крајњи резултати у ствари збир појединачних резултата који су дати у табели. Након што су открили који град је најмање безбедан, који је експлицитно смештен на листу од 12 места и то на 12. место, елиминисали су га са листе. Онда су поновили процес како би открили који град има највишу стопу злочина по свих 8 ставки и град који је завршио на 11. месту је елиминисан са листе. Ову процедуру су понављали све док свих 12 градови није ранжирано. Повремено се десавало да нека два града имају исте вредности, и у том случају, користе додатне информације како би неки град превагнуо.

Приликом прегледања система рангирања ученика за проблеме „патика“ и „криминала“, открили смо да ови задаци откривају разноликост приступа који показују алтернативне начине размишљања и обраде информација. Иако су готово сви ученици започели своје системе рангирања са приступом заснованим на фреквентности (што је лепо показала Бенова група), софистицираније одлике рангирања, комбиновање података пре рангирања и коришћење основне вредности као основе за поређење развили су студенти приликом ове студије. Вишебројне путање развоја од стране различитих група довеле су до коначног система рангирања које смо горе категоризовали.

Дискусија и закључци

Постоји неколико аспеката ове студије којима придајемо значај у математичкој едукацији. Прво, то су проблеми који нису рутински и које смо дизајнирали тако да се разликују од задатака који ученици обично добијају током школовања (као изузетак овом правилу, погледајте реформски цуррикулум развијен од стране Connected Mathematics Project и других). Као што је показала ова студија, ови задаци дају богату основу за независни развој математичких идеја код ученика. У тренутној студији, фокусирали смо се на стварање квантитета рангирања, операција и трансформација приликом рангирања и на крају, стварање односа међу квантитетима како би се дефинисао дескриптиван и експланаторни однос. Као што смо видели, на сваком стадијуму ових активности, ученици су се ангажовали у мултиплим циклусима интерпретације контекста, квантитета односа међу квантитетима и приказивању ових односа. Ови циклуси обраде сугеришу да се решавање проблема одвија компликованије од једноставног мапирања датих проблема и доласка до циља; да решавање проблема захтева мултипле циклусе интерпретације и реинтерпретације док се решење свара код студената у облицима који су врло описни, јасни и помажу у доношењу одлуке о датом феномену.

Друго, наши задаци захтевају од ученика да комуницирају и деле своје математичке идеје и објасне како се њихови модели могу користити. С обзиром на важност комуникације која произилази из математичког цуррикулум-а (НЦТМ, 2000), верујемо да наши модели активности помажу и мотивишу у приликом развоја ове способности. Посматрали смо како ученици улажу напор како би вербализовали првобитно имплицитно разумевање и које доводи до објашњавања кључних математичких конструкција. То је било очигледно приликом првих покушаја Бенове групе да објасни свој меан-сплит систем; када су успели да га објасне, били су у стању да га ефикасно примене на дати задатак.

Трећи допринос наше студије је што смо показали како овакви задаци допуштају пуно различитих приступа приликом изналажења решења за експерименталне проблеме. Наша прва анализа је показала како група студената развија модел (у овом случају, систем рангирања) који се допуњује, сређује и устаљује низом активности. Бенова група је напредовала од субјективне, нематематичке методе до софистицираног, генерализованог система као што је меан-сплит систем. Међутим, нисмо утврдили одређену путању коју је приказала Бенова група као универзалну; заправо, супротно се

доказало као истинито, то јест, да постоји низ различитих путања приликом решавања ових проблема. Као што смо наговорили приликом друге анализе разноликости решења код проблема „снеакерс“ и „злочин“, постоји неколико система да се подаци интерпретирају тако да буду корисни ученицима који праве систем, као и другима који могу користити такве системе за доношење одлука. Очигледно, овде није био случај искључиво једне путање за свеученике у било којој учионици у којој смо радили. Ови подаци наводе да активности у процесу решавања ових задатака дају могућност за већу разноликост у размишљању него код простих решавања задатака и да се развој идеја ученика јавља током разноликих токова размишљања.

Овакви резултати имплицирају три примене инструкција. Прво, када је дат низ модела развојних задатака, сами ученици се укључују у процес стварања нових квантитета (на пример. рангирања или начина) и вршењем операција са тим квантитетима (нпр. сабирање или поређење разлика) на такав начин да се добије математичка основа за одлуке. Док су ангажовани у овим процесима, сами ученици проверавају и мењају начин размишљања о квантитетима и њиховим односима кроз мултипле циклусе интерпретације. Са тачке гледишта некога ко даје упутства, ова мења фокус са усмеравања ученика ка одређеном начину размишљања ученика о проблему, како би се укључили у проверавање, сређивање и проширивање сопствених мисли о проблему.

Друга примена инструкција је да разноликост приступа који ученици користе приликом развијања система рангирања омогућава ономе који учи, а тако и ономе који подучава да види и разуме алтернативне интерпретације и тачке гледишта. У неким случајевима, увиђање како су други ученици размишљали о проблему (као што смо видели приликом дискусије у одељењу на тему основне вредности за климатске факторе) може помоћи континуираном развоју идеја студената. Комплексност разумевања мултиплих перспектива код задатака развоја модела са тачке гледишта професора не треба потценити. Стога, трећа примена инструкционалне праксе је да категоризација размишљања ученика (односно, категорије које смо утврдили за два задатка) могу бити корисне професорима како би развили схеме за препознавање неких од могућих приступа задацима. Када постоји таква схема приликом давања инструкција, то може поједноставити задатак професора да интерпретира рад ученика и помоћи му код комплексних задатака управљања значајним задацима у којима учествују сви ученици.

Видели смо како дизајн наших проблема производи моделе или системе математичких односа који се проширују изван почетног контекста. Уз минималну интервенцију, ученици су развили генерализоване и примењиве моделе за неколико различитих проблема. Такође, постали су потпуно свесни чињенице да су њихови модели примењиви на друге задатке. Овај циљ опште примењивости (као што је изјавила Ерин „Метод, метод, зато што мора бити примењиво на све њих.“) је постао врло моћна смерница Беновој групи док су развијали и обрађивали своје моделе. Готово све групе ученика су препознале потребу да њихови системи функционишу са било којим сетом података. Ученици су схватили да се подаци могу рангирати на неколико различитих начина (нпр. рангирање или поређење са основном вредношћу) и да се ранг листама може оперисати на неколико начина, као што је сабирање или одабир одређеног начина рангирања, како би се начинила нова ранг листа. Ово указује да су ученици имали стратегије за развој система који су генерализовани и примењиви.

Проблем ресторана

Мек Дес је спровео истраживање код 10 људи да наведу 5 разлога зашто долазе у Мек Дес. Следећа табела показује резултате истраживања. Имате задатак да искористите наведене податке и направите велику ранг листу разлога од најважнијег до најмање важног. Требало би да менаџеру Мек Дес-а објасните како ваш систем функционише.

	Помфрит	Хамбургери	Дечији оброци	Брзина	Цена
Муштерија 1	1	3	2	5	4
Муштерија 2	4	3	1	2	5
Муштерија 3	2	1	5	3	4
Муштерија 4	2	3	5	4	1
Муштерија 5	1	2	4	3	5
Муштерија 6	3	4	5	1	2
Муштерија 7	4	5	1	3	2
Муштерија 8	1	2	5	3	4
Муштерија 9	2	3	4	1	5
Муштерија 10	2	1	5	4	3

Табела 5.

Проблем временских услова

Агенција Глобал Травел је заинтересована да започне са новом услугом која се односи на саветовање људи који желе да се драстично преселе. Путничка агенција од вас тражи помоћ да развије систем саветовања о избору новог места за своје клијенте.

Клијенти су првобитно заинтересовани за климу: колико има кише, колико може бити хладно, колико може бити топло, колико је сунчаних и облачних дана. Сваки од ових фактора, међутим, није од исте важности за сваког клијента.

Два потенцијална клијента су послала писма агенцији, објашњавајући своје преференце и питајући за савет агенције у избору за њих најбољег места за живот. Агенција је такође сакупила неке информације о девет градова на листи испод.

1. Развити систем рангирања климе на различитим местима. Систем мора да помогне агенцији да процени места, чак и она која нису на листи.

2. Напишите два писма путничкој агенцији са препоруком за сваког клијента. Требало би да градове ставите у три групе: најбољи градови, осредњи градови и најгори градови. На овакав начин клијент ће знати које градове да узме у разматрање и које градове да избегава.

3. Путничкој агенцији би требало да објасните како функционише ваш систем рангирања и зашто је добар.

Информације о клими

Град	Ведри дани	Дани испод посека	Дани изнад посека	Годишњи просек падавина
Сиднеј	85	12	15	1220.4
Алис Спрингс	95	40	169	274.5
Хобарт	36	184	6	516.3
Каирнс	71	0	185	2222.4
Мелбурн	45	55	30	661.0
Дарвин	85	0	328	1534.7
Маунт Иса	178	4	237	386.4
Канбера	84	157	36	633.1
Перт	114	10	58	863.7

Табела 6.

Поштовани Глобал Травел:

Моја супруга и ја ћемо се пензионисати у надоласећем периоду и волели бисмо да се преселимо у неки топао и сунчан предео. Није нам битно ако има доста падавина, али дефинитивно не желимо да буде пуно хладно. Које градове бисмо могли да узмемо у обзир за живот?

С поштовањем,

Брачни пар Џонсон

Поштовани Глобал Травел:

У потрази сам за новим пословним приликама у области компјутерског програмирања. Сигурна сам да бих посао могла да нађем у било ком месту. Волим све спортове напољу, нарочито пешачење! Волела бих да се преселим у град који има добре временске услове и где није превише топло. Која места би требало да узмем у разматрање?

С поштовањем,

Дона Смит

Проблем криминала

Колико је безбедно? Ви одлучите!

Градоначелник је на Градском већу рекао да буџет за полицију не треба повећавати. Градоначелник је рекао, “Ипсвич је један од најбезбеднијих градова у земљи и то подаци потврђују!”

Његови критичари му не верују. Они мисле да Ипсвич није најбезбеднији у односу на друге градове и да би Веће требало да повећа буџет полицији!

Веће вас је замолило да им помогнете да утврде да ли је Ипсвич један од најбезбеднијих градова. Дајте Већу своју одлуку и како сте дошли до те одлуке.

Градоначелникова табела са подацима показује просечну годишњу стопу за сваки град за шест озбиљних злочина: убиство, напад, провала, лакша крађа и крађа аутомобила за последњих пет година за које су доступни подаци. Ове стопе су на 100 000 људи. Стопе су подељене у две категорије – категорију тешких злочина и категорију преступа и

свеукупна стопа је дата за обе категорије. Последња колона даје податке о учесталости злочина у последњих пет година.

	Убиств о	Пљачка	Напад	Насиље	Провал а	Крађа	Власништво
Аделаид	0.4	3.2	5.8	9.4	56	304	374
Баларт	0.1	2.4	20.3	22.8	50	299	365
Бризбејн	1.8	31.7	92.5	126.0	186	497	750
Дарвин	0.4	15.9	20.4	36.7	60	162	280
Ипсвич	0.3	9.6	16.2	26.1	83	257	356
Калгори	0.9	53.2	44.2	98.3	103	367	565
Мт. Иса	0.2	2.9	22.1	25.2	62	271	346
Њукасл	1.5	22.9	61.5	85.9	185	421	667
Сиднеј	2.4	107.3	78.1	187.8	131	315	598

Табела 7.

Истраживање

Опис истраживања

Описана идеја се најпре истраживала у неколико одељења у САД код ученика узраста 12-13 година. Касније је прерађена од стране другог аутора за коришћење у аустралијским одељењима код ученика од 10 до 11 година. Слично истраживање одрађено је и у Србији, са ученицима прве године средње „Угоститељско-Туристичке“ школе у Београду, смера туристички техничар, узраста 14-15 година.

Величине и операције које су потребне за математички приказ неке реалне ситуације често су изнад оних које се уче у школи (бројеви, мере, релације, пропорције, фигуре и четири основне аритметичке операције). У реалним ситуацијама величине које су често потребне су скупови, вероватноћа, учесталост, редови и вектори, а потребне операције подразумевају сортирање, мерење, организовање, одабир и промену читавог скупа података а не само једног. При решавању класичног текстуалног школског проблема ученици у једном или два корака преведу дати проблем у аритметичке операције и величине јер су ти проблеми већ тако осмишљени. Циљ је да ученик препозна математички део и обради дате податке тако да се решење добије коришћењем познатих величина и основних операција. Супротно томе, код задатака моделирања, циљ је да ученик схвати смисао проблема тако да може да га представи математички на начин који је њему значајан. То подразумева процес одабира битних величина, смисленог представљања и дефинисања операција које доводе до нових величина.

Истраживање је за циљ имало неколико ставки. Прво, у оквиру истраживања праћен је развој ученичког размишљања о рангирању, одабиру и мерењу података за системе који би користили за описивање других података и доношење одлука. Друго, требало је да се докаже да ће ученици у интеракцији са задатком и другим ученицима доћи до низа идеја и истаћи ће се различити начини размишљања. Као последицу различитих тумачења, очекивало се да ће се међу ученицима препознати различити приступи проблему. Треће, требало је да буде описано је и илустровано како модели могу да се прошире кроз разне контексте.

У истраживању су учествовала два одељења прве године, једно одељење формирало је такозвану **тест** групу, а друго тзв. **контролну** групу. Истраживање је осмишљено тако да се ради у малим групама што обезбеђује да ученици међусобно дискутују о нагађањима и да размењују идеје и објашњења. Ангажовање у оваквом прављењу

модела не проналази решење датог проблема већ развија генерализације које ученик може користити како би дошао до решења.

Анализа података извршена је у 3 фазе:

У првој фази, истраживање је спроведено тако да је у првој, тест групи дат један проблемски задатак, сличан онима описаним у есеју, који захтева од ученика да направе користан систем за процењивање у зависности од контекста. Основне математичке идеје концентрисане су у појмовима рангирања, одабиру и повезивању ранжираних величина и процени рангирања. У сваком контексту ученици анализирају и трансформишу цео скуп података или неки његов значајан подскуп, а не само једну изоловану информацију. Ученици претходно нису били формално суочени са овим идејама. Наставна јединица је осмишљена тако да се ученици могу спремно и смислено ангажовати око проблемске ситуације и могу креирати, користити и мењати величине на начине који су им значајни и тако да их могу поново користити и проширити на нове ситуације.

У другој фази истраживања, због тога што ученицима треба више искустава која ће им омогућити да истражују математичке конструкције, да примењују њихов систем у новим поставкама и да прошире свој модел на нове начине, наставник одржава предавање на тему обраде статистичких података, које траје један школски час, и које има за циљ да на сличном примеру систематизује закључке које су ученици сами донели у оквиру своје студије, и да прошири и усаврши идеје и знање ученика о рангирању, сортирању, селектовању и коришћењу података уопште, и њихову правилну интерпретацију.

Трећа фаза подразумева, да након додатне „обуке“ коју су имали, ученици прве групе добијају сасвим нов задатак, који се бави сличном проблематиком, где имају задатак да сами дођу до закључака примењујући знања и технике до којих су сами дошли, или су их усвојили на претходном предавању. Исти тај проблем представљен је и другој, контролној групи, која без икакве „обуке“ и помоћи наставника има задатак да представи своје идеје и понуди решење датог проблема.

На крају, истраживање укључује међусобну компаративну анализу између:

- а) Тест групе пре и након одржаног предавања
- б) Контролне групе и тест групе након одржаног предавања.

и има циљ да у складу са подацима добијеним компаративном анализом изведе одређени закључак.

Тест група

Прво тестирање

Већ је у уводном делу овог истраживачког рада напоменуто да су у истраживању учествовали ученици прве године средње „Угоститељско-Туристичке“ школе у Београду, смера туристички техничар, узраста 14-15 година. Иако су ученици у аустралијским школама били неколико година млађи, сама форма теста сасвим одговара узрасту ученика средње школе, тако да године живота не представљају никакав битнији фактор у истраживању.

Тест група је формирана од једног одељења прве године које се добровољно пријавило да учествује у истраживању. Сви ученици у одељењу су истих година, и сви су имали истоветно претходно образовање.

У одељењу је било 25 ученика, те су сви подељени у пет мањих група, и свака група је бројала по пет ученика. Пошто су сви ученици према претходном образовању равноправни, можемо да кажемо да су свих пет група равноправне. Тестирање је трајало 90 минута, тј. два школска часа.

Свака група добила је следећи задатак: Милан је решио да купи мобилни телефон. Продавац у радњи мобилних телефона му је дао табелу најпопуларнијих модела мобилних телефона заједно са њиховим карактеристикама. Милан те је замолио да му помогнеш да одабере телефон који је најбољи. На основу параметара задатих у табели, помози Милану да одабере мобилни телефон који је најбољи, и образложи му свој одговор.

Модел телефона	Sony Z1	Samsung S5	Samsung Note 3	HTC M8	Sony Z2	Nokia 1520	LG G3	LG G2
Величина екрана (")	5	5,1	5,7	5	5,2	6	5,5	4,8
Процесор (GHz)	2,2	2,5	2,3	2,4	2,3	2,1	2,6	2
Меморија (gb)	1,5	2	3	2,5	3,2	2,2	3	2,7
Камера (mpx)	20,7	16	13	18	20,7	20	14	14,8
Капацитет батерије (mAh)	3100	2800	3200	2600	3250	3400	3000	3150
Цена (e)	370	430	440	480	490	450	600	350

Табела 1

Као што се у Табели 1 види, дато је осам модела мобилних телефона (Sony Z1, Samsung S5, Samsung Note 3, HTC M8, Sony Z2, Nokia 1520, LG G3, Iphone 5S), и шест њихових **карактеристика**: величина екрана изражена у инчима, брзина процесора изражена у гигахерцима, капацитет радне меморије изражен у гигабајтима, квалитет камере изражен у мегапикселима, капацитет батерије изражен у милиамперсатима и на крају цена изражена у еврима. Овај задатак у даљем тексту ћемо називати „изабери мобилни телефон“.

Свим групама је дато по 45 минута да анализирају проблем, и кроз међусобну комуникацију, дискусију, разматрање, заједнички дођу до решења. Било је потребно, да осим тога што ће навести који је телефон по њиховом мишљењу најбољи, прикажу и који су модел одлучивања користили, како би исту методу могли да примене чак и ако се модели телефона промене.

Осим давања упутства за рад и појашњења евентуалних нејасноћа, наставник никоме није дао инструкције како треба решавати проблем, већ је све то остало на ученицима да сами ураде.

На почетку часа сви ученици су дискутовали о томе, шта значи најбољи телефон. Заједничким снагама дошло се до закључка, да би најбољи телефон требао да буде онај који има најбоље карактеристике, на пример највећи капацитет меморије, најбржи процесор и тако даље, а да притом цена буде што мања.

Када су се установили задаци, и циљеви, свака група је приступила решавању проблема.

Очигледно је било да ученици у нашим школама нису навикли на овакав рад у групама, те је промена овог типа изазвала позитивне реакције. Ученици су унутар својих група врло живахно дискутовали око могућих решења, давали предлоге, међусобно се надопуњавали. Битно је напоменути, да су све групе решиле проблем на свој начин за предвиђених 45 минута, тако да проблема са временом није било.

Наредних 45 минута било је предвиђено да све групе представе своје решење, и да заједно са осталим групама увиде недостатке и могућа побољшања својих модела за решавање.

Група 1

Ученици који су чинили Групу 1 први су излагали своје решење. Њихов резон је био да, пошто не морамо да кажемо који је телефон други, трећи итд, већ нам само треба најбољи, тј. први. Тако је њихов метод, који су назвали „победник остаје“, састојао у томе, да се изабере произвољни телефон из дате групе телефона, и да се упореди са другим телефоном. Онај који има више бољих карактеристика „остаје у игри, он је победник“, и упоређује се са новим телефоном, и тако све док се последња два телефона не упореде и остане најбољи.

Упоређивање се врши тако што један поен добија телефон који има бољу карактеристику. Ако су карактеристике истоветне, нико не добија поен. „Победник“ је онај телефон који сакупи више поена. Уколико се деси да два телефона имају исти број поена, уводи се још једна карактеристика (на пример физички изглед) и који добије поен на тој карактеристици, тај побеђује.

Овај метод се на овом примеру није показао као адекватан, јер је већина резултата заправо била нерешена (3:3), тако је на крају увек одлучивала нека још карактеристика која није била задата таблицом.

Након што су ученици Групе 1 завршили своје излагање, ученици из осталих група су давали своје примедбе, предлоге, коментаре...

Коментар ученика Групе 2: „Модел који су користили ученици Групе 1 није довољно добар, јер уколико би морали да упоредимо 100 телефона, значи да би 100 пута морали да упоређујемо телефоне међусобно.“

Коментар ученика Групе 3: „Проблем са методом који су предложили ученици Групе 1 је и тај што ће се дешавати да резултат буде нерешен, што им се и десило, па морају да уводе још неку карактеристику. Тај проблем би се решио уколико би број карактеристика увек био непаран.“

Група 2

Ученици који су чинили Групу 2 следећи су излагали своје решење. Њихова идеја није била другачија него идеја ученика из Групе 1, само је метод био другачији. Наиме, они су своју методу назвали „систем елиминације“, где су упоређивали карактеристике два по два телефона, на исти начин како су то чинили и ученици из Групе 1. „Победници тих дуела“ би се „пласирали у други круг“, и тако све док не остане само један

телефон који је најбољи.. Њихов систем на примеру овог задатка је био да се осам телефона упореде два по два, па четири која „победи“ да се опет укрсте у било којем поретку, па два „победника“ да оду у финале одакле остаје само један.

Након што су ученици Групе 1 завршили своје излагање, ученици из осталих група су давали своје примедбе, предлоге, коментаре...

Коментар ученика Групе 1: „Морамо признати да је метод много бржи и ефикаснији од нашег, али су се и они сусрели са истим проблемом, што је „резултат дуела“ често био нерешен, па су морали да уводе нову карактеристику“.

Група 3

Ученици Групе 3 следећи су излагали своје решење. Њихов модел је подразумевао следећу методу избора најбољег телефона. Прво су рангирали све телефоне према свим карактеристикама, поређавши телефоне од најбољег до најгорег и тако су формирали следећу табелу:

Величина екрана (")	Процесор (GHz)	Меморија (gb)	Камера (mpx)	Капацитет батерије (mAh)	Цена (e)
Nokia 1520	LG G3	Sony Z2	Sony Z2	Nokia 1520	LG G2
Samsung Note 3	Samsung S5	Samsung Note 3	Sony Z1	Sony Z2	Sony Z1
LG G3	HTC M8	LG G3	Nokia 1520	Samsung Note 3	Samsung S5
Sony Z2	Samsung Note 3	LG G2	HTC M8	LG G2	Samsung Note 3
Samsung S5	Sony Z2	HTC M8	Samsung S5	Sony Z1	Nokia 1520
Sony Z1	Sony Z1	Nokia 1520	LG G2	LG G3	HTC M8
HTC M8	Nokia 1520	Samsung S5	LG G3	Samsung S5	Sony Z2
LG G2	LG G2	Sony Z1	Samsung Note 3	HTC M8	LG G3

Табела 2

Затим су свој одговор образложили на следећи начин: „Пошто је требало одабрати најбољи телефон, највећу пажњу онда треба посветити телефонима који се налазе на првом месту у табели. Бирали смо најбољи телефон тако што смо бројали колико пута је који телефон био први на листи. Пошто је у овом случају испало да су Sony Z2 и Nokia 1520 били по два пута на првом месту, онда смо прешли на позицију број два и испитивали који је од та два телефона више пута био на тој позицији. Према подацима из табеле, види се да је Sony Z2 био једном на другој позицији, док телефон Nokia 1520 није био ни једном. Тако да је наш закључак да је телефон Sony Z2 најбољи.“

Након представљања својег метода доношења одлука, остале групе су давале своје примедбе.

Коментар ученика Групе 4: „Није добро да на основу само два параметра од укупно шест креирамо своју одлуку. Можда је телефон у два параметра био најбољи, а у преосталих четири последњи на листи. Односно, можда и телефон није толико добар колико може да буде лош. Зато сматрамо да за проналажење најбољег телефона, ово није најадекватнија метода. “

Група 4

Ученици Групе 4 су излагали свој модел одмах након ученика Групе 3. Исто као и ученици из Групе 3, и они су формирали табелу тако што су на исти начин рангирани телефоне од најбољег до најгорег, са том разликом што су они поред места у табели дописивали и поене, те је њихова табела изгледала овако:

Поени	Величина екрана (")	Процесор (GHz)	Меморија (gb)	Камера (mpx)	Капацитет батерије (mAh)	Цена (e)
8	Nokia 1520	LG G3	Sony Z2	Sony Z2	Nokia 1520	LG G2
7	Samsung Note 3	Samsung S5	Samsung Note 3	Sony Z1	Sony Z2	Sony Z1
6	LG G3	HTC M8	LG G3	Nokia 1520	Samsung Note 3	Samsung S5
5	Sony Z2	Samsung Note 3	LG G2	HTC M8	LG G2	Samsung Note 3
4	Samsung S5	Sony Z2	HTC M8	Samsung S5	Sony Z1	Nokia 1520
3	Sony Z1	Sony Z1	Nokia 1520	LG G2	LG G3	HTC M8
2	HTC M8	Nokia 1520	Samsung S5	LG G3	Samsung S5	Sony Z2
1	LG G2	LG G2	Sony Z1	Samsung Note 3	HTC M8	LG G3

Табела 3

Образложење ученика Групе 4: „Није битно само поређати телефоне по карактеристикама од најбољег до најгорег, већ је потребно некако искористити сваку позицију коју телефон заузме приликом рангирања, а не само прву. Зато смо увели систем бодовања који телефону на првом месту додељује 8 поена, телефону на другом месту 7 поена и тако даље, све до последњег места, за које телефон добија 1 поен.

Након што смо избројали колико поена „је освојио“ који телефон, формирали смо следећу табелу:

Sony Z1	Samsung S5	Samsung Note 3	HTC M8	Sony Z2	Nokia 1520	LG G3	LG G2
25	25	31	21	34	31	26	23

Табела 4

Тако да на основу те табеле закључујемо да је најбољи телефон Sony Z2. Исти резултат би се добио ако бисмо израчунали и просечну оцену, тако што бисмо број поена сваког телефона поделили са шест, колико има и карактеристика.“

Након њиховог излагања ученици осталих група су дали своје коментаре, предлоге, замерке... Било је доста ученика који су се сложили да је ово до сада најбоља метода одлучивања.

Примедба ученика Групе 5: „Метода коју су искористили ученици Групе 4 је одлична, али је једна ствар ту занемарена, а то су приоритети. Нису исто битне величина екрана и рецимо капацитет радне меморије. Приликом одабира телефона ипак морају неке карактеристике да имају предност у односу на друге.“

Група 5

Последњи су своју методу излагали ученици Групе 5. Њихова метода се садржала у примедби коју су упутили ученицима Групе 4: „Ако већ дајемо оцене карактеристикама телефона, онда морамо водити рачуна и о приоритетима. Ми смо у нашој методи поређали карактеристике према приоритетима, почевши од карактеристике са највећим приоритетом. Наша табела са приоритетима изгледа овако:

	Цена	Процесор	Меморија	Капацитет батерије	Камера	Екран
Коефицијент	3,5	3	2,5	2	1,5	1

Табела 5

Дакле, цена има највећи приоритет, тако да се сви поени које телефони добијају у колони цена множе са 3,5; у колони Процесор са 3 и тако даље.

Табела са поенима је потпуно иста као табела коју су користили ученици Групе 4, само је редослед другачији.

Поени	Цена (€)	Процесор (GHz)	Меморија (gb)	Капацитет батерије (mAh)	Камера (mpx)	Величина екрана (")
8	LG G2	LG G3	Sony Z2	Nokia 1520	Sony Z2	Nokia 1520
7	Sony Z1	Samsung S5	Samsung Note 3	Sony Z2	Sony Z1	Samsung Note 3
6	Samsung S5	HTC M8	LG G3	Samsung Note 3	Nokia 1520	LG G3
5	Samsung Note 3	Samsung Note 3	LG G2	LG G2	HTC M8	Sony Z2
4	Nokia 1520	Sony Z2	HTC M8	Sony Z1	Samsung S5	Samsung S5
3	HTC M8	Sony Z1	Nokia 1520	LG G3	LG G2	Sony Z1
2	Sony Z2	Nokia 1520	Samsung S5	Samsung S5	LG G3	HTC M8
1	LG G3	LG G2	Sony Z1	HTC M8	Samsung Note 3	LG G2

Табела 6

Тако да наша бодовна листа изгледа овако:

Sony Z1	Samsung S5	Samsung Note 3	HTC M8	Sony Z2	Nokia 1520	LG G3	LG G2
57,5	61	70,5	46	70	60,5	57,5	57

Табела 7

На основу табеле, закључујемо да је најбољи телефон Samsung Note 3.“

Након излагања ученика Групе 5, такође су све остале групе давале свој коментар.

Коментар ученика Групе 1: „ Ова метода одређивања није добра јер су ученици Групе 5 поставили приоритете по сопственом нахођењу. Исправно би било, да приликом куповине телефона свако према сопственим потребама и жељама одреди приоритете и тек онда примени овај метод. “

Коментар ученика Групе 3: „Исто тако одређивање коефицијената за сваку карактеристику није адекватно. Наиме, да су коефицијенти били 10, 20, 30, 40, 50, 60, резултат би био свакако другачији. Тако да би морала да постоји и нека стандардна метода за одређивање који коефицијент заслужује која карактеристика.

Предавање

Након првог тестирања које је обављено са **тест групом**, наставник је одржао и предавање које је трајало један школски час, на тему развијања модела за рангирање, анализу и сортирање података. Циљ предавања је био да ученици развију још неке моделе решавања задатака који имају исти захтев као задаци са мобилним телефонима.

Предавање је конципирано тако да се кроз један пример илуструје неколико модела рангирања и оцењивања података. Као пример је узет „проблем временских услова“, који је задат у есеју.

Ученицима је постављен следећи задатак:

Проблем временских услова

Агенција Глобал Травел је заинтересована да започне са новом услугом која се односи на саветовање људи који желе да се драстично преселе. Путничка агенција од вас тражи помоћ да развије систем саветовања о избору новог места за своје клијенте.

Клијенти су првобитно заинтересовани за климу: колико има кише, колико може бити хладно, колико може бити топло, колико је сунчаних и облачних дана. Сваки од ових фактора, међутим, није од исте важности за сваког клијента.

Два потенцијална клијента су послала писма агенцији, објашњавајући своје преференце и питајући за савет агенције у избору за њих најбољег места за живот. Агенција је такође сакупила неке информације о девет градова на листи испод.

1. Развити систем рангирања климе на различитим местима. Систем мора да помогне агенцији да процени места, чак и она која нису на листи.
2. Напишите два писма путничкој агенцији са препоруком за сваког клијента. Требало би да градове ставите у три групе: најбољи градови, осредњи градови и најгори градови. На овакав начин клијент ће знати које градове да узме у разматрање и које градове да избегава.
3. Путничкој агенцији би требало да објасните како функционише ваш систем рангирања и зашто је добар.

Град	Ведри дани	Дани испод просека	Дани изнад просека	Годишњи просек падавина (mm)
Сиднеј	85	12	15	1220.4
Алис Спрингс	95	40	169	274.5
Хобарт	36	184	6	516.3
Каирс	71	0	185	2222.4
Мелбурн	45	55	30	661
Дарвин	85	0	328	1534.7
Монт Иса	178	4	237	386.4
Канбера	84	157	36	633.1
Перт	114	10	58	863.7

Табела 1

Писма клијената:

Поштовани Глобал Травел:

Моја супруга и ја ћемо се пензионисати у надолazeћем периоду и волели бисмо да се преселимо у неки топао и сунчан предео. Није нам битно ако има доста падавина, али дефинитивно не желимо да буде пуно хладно. Које градове бисмо могли да узмемо у обзир за живот?

С поштовањем, Брачни пар Џонсон

Поштовани Глобал Травел:

У потрази сам за новим пословним приликама у области компјутерског програмирања. Сигурна сам да бих посао могла да нађем у било ком месту. Волим све спортове напољу, нарочито пешачење! Волела бих да се преселим у град који има добре временске услове и где није превише топло. Која места би требало да узмем у разматрање?

С поштовањем, Дона Смит

У уводном делу часа наставник се вратио на моделе који су ученици користили на претходном часу, са посебним освртом на коментаре које су ученици давали после сваког излагања неке групе, чиме су поново утврдили недостатке који су ученички модели имали.

Наставник: „ Како смо утврдили све недостатке које су ваши модели имали, схватамо да морамо да развијемо неки нови метод који би могао да буде ефикаснији. Оно на шта ни један ученик из било које групе није обратио пажњу јесу аритметичке средине или просеци. Ни један модел није у себи садржао метод који би рангирао параметре на основу неког спољног фактора, односно просека. Када одредимо просечне вредности за сваку карактеристику, тачно ћемо знати које карактеристике су изнад, а које испод просека.

Остаје нам само да на основу тог рангирања развијемо најбољи систем оцењивања, како би најбоље решили задати проблем.

Као што је речено, модел се састоји из израчунавања аритметичке средине свих карактеристика појединачно, те добијене вредности су:

Град	Ведри дани	Дани испод просека	Дани изнад просека	Годишњи просек падавина (mm)
Сиднеј	85	12	15	1220.4
Алис Спрингс	95	40	169	274.5
Хобарт	36	184	6	516.3
Каирс	71	0	185	2222.4
Мелбурн	45	55	30	661
Дарвин	85	0	328	1534.7
Монт Иса	178	4	237	386.4
Канбера	84	157	36	633.1
Перт	114	10	58	863.7
аритметичка средина	88.11	51.33	118.22	923.61

Табела 2

Овде имамо неколико модела како можемо да вршимо оцењивање.

Први модел

Направи се табела, где се уписују градови који су изнад аритметичке средине по свакој карактеристици. Добијена табела изгледа овако:

Ведри дани	Дани испод просека	Дани изнад просека	Годишњи просек падавина (mm)
Монт Иса	Дарвин	Дарвин	Алис Спрингс
Перт	Каирс	Монт Иса	Монт Иса
Алис Спрингс	Монт Иса	Каирс	Хобарт
	Перт	Алис Спрингс	Канбера
	Сиднеј		Мелбурн
	Алис Спрингс		Перт

Табела 3

Одабир најповољнијег града може се извршити на неколико начина:

а) Избројимо који град је био највише пута на првом месту на листи у табели. У конкретном примеру то би био Дарвин.“

Ученици су сада добили задатак да увиде недостатке и предности овог модела.

Коментар ученика: „Метода увођења просека је добра. Али овде није праведно што је Дарвин први у две карактеристике, а у осталим није на листи уопште, док се Монт Иса нпр. појављује на другом или трећем месту свим категоријама, па је можда она адекватнији град за живот.“

Наставник: „Сасвим исправна констатација. Можда је зато боље да се уведе систем оцењивања, тако што би граду који се налази први изнад листе да дамо један поен, граду који је други два поена итд. Па да на крају саберемо поене које је сваки град добио. На тај начин ћемо добити праведнији резултат. Табела поена изгледа овако:

Град	Поени
Алис Спрингс	9
Монт Иса	15
Хобарт	4
Канбера	3
Мелбурн	2
Перт	6
Сиднеј	2
Дарвин	10
Каирс	7

Табела 4

На основу података из табеле, види се да је Монт Иса заиста најбољи град за живот.“

Коментар ученика: „ Систем давања поена је знатно бољи од обичног пребројавања, али смо овде оцењивали само градове који су по карактеристикама изнад просека, не водећи притом рачуна о карактеристикама истих градова у којима су оне испод просека. “

Други модел

Коментар ученика је и овога пута био добар.

Наставник: „ Да бисмо у разматрање укључили и карактеристике градова у којима су они испод просека, морамо прво рангирати градове од најбољег до најгорег, и обележити просек. Та табела изгледа овако:

Ведри дани	Дани испод просека	Дани изнад просека	Годишњи просек падавина (mm)
Монт Иса	Дарвин	Дарвин	Алис Спрингс
Перт	Каирс	Монт Иса	Монт Иса
Алис Спрингс	Монт Иса	Каирс	Хобарт
Сиднеј	Перт	Алис Спрингс	Канбера
Дарвин	Сиднеј	Перт	Мелбурн
Канбера	Алис Спрингс	Канбера	Перт
Каирс	Мелбурн	Мелбурн	Сиднеј
Мелбурн	Канбера	Сиднеј	Дарвин
Хобарт	Хобарт	Хобарт	Каирс

Табела 5

Раподелу поена можемо извршити на следећи начин: Град који је први изнад листе добија један поен, онај који је на другом месту изнад листе два поена итд, док градови који се налазе на првом месту испод листе добијају -1 поен, град који је на другом месту испод листе -2 итд... На основу тог бодовног система добијамо следећу табелу.

Град	Поени
Алис Спрингс	9
Монт Иса	15
Хобарт	-10
Канбера	-4
Мелбурн	-7
Перт	5
Сиднеј	-4
Дарвин	6
Каирс	0

Табела 6

Из података које видимо у табели, јасно је да је Монт Иса најбољи град, али ако погледамо Дарвин, он више није на другом него на трећем месту.“

Коментар ученика: „Ово је одличан систем рангирања, али овде смо водили рачуна о свим карактеристикама свих градова, док су нам корисници у писму навели које су карактеристике њима битне. Значи, треба применити овај систем бодовања, али треба узети у обзир само карактеристике које корисници захтевају. Или им као приоритетним карактеристикама на неки начин дати предност у односу на друге, мање битне карактеристике.“

Овај коментар ученика уједно је и био добар закључак читавог предавања. За домаћи рад остављено је ученицима да одреде приоритетне карактеристике и да на основу њих изаберу систем оцењивања, и одговоре на писма из задатка.

Тест група

Друго тестирање

Након предавања које је наставник одржао, тест група добија нови задатак који има сличне захтеве као и претходни задаци са којима су се ученици сусрели у досадашњем истраживању. Као и у претходном тестирању, ученици су имали по 90 минута, односно два школска часа, да обраде и представе своја решења. Исти задатак дат је касније и контролној групи која је формирана од ученика другог одељења.

Ученици су се поново поделили у пет група, тако да је сваки ученик поново био у групи са истом екипом као приликом првог тестирања, иако суштински за резултате истраживања није битан поредак ученика по групама.

Свака група добила је следећи задатак: Ви сте по професији спортски статистичар. Селектор одбојкашке репрезентације Србије вам је послао списак играча који ће наступати на предстојећем светском првенству, и доставио вам је списак карактеристика и учинак свих играча. Селектор вас је замолио да му погнете да донесе одлуку од којих шест, односно седам играча (шест играча + либеро) треба да формира најбољу екипу. На основу параметара задатих у табели направи најбољу седморку (шест играча + либеро).

БРОЈ	ИМЕ	ПОЗИЦИЈА	ИДЕАЛАН ПРИЈЕМ СЕРВИСА	БЛОК	НАПАД	АС СЕРВИС	ИДЕАЛНО ДИЗАЊЕ	ОДБРАНА У ПОЉУ
1	Владимир Грбић	примач сервиса	29 од 39	3 од 12	36 од 44	3 од 11	1 од 8	12 од 32
2	Горан Вујевић	примач сервиса	25 од 32	2 од 13	30 од 40	4 од 13	3 од 20	9 од 28
3	Слободан Бошкан	примач сервиса	24 од 30	1 од 7	26 од 34	5 од 23	2 од 17	14 од 36
4	Милош Никић	примач сервиса	17 од 25	4 од 18	30 од 36	6 од 25	4 од 27	8 од 26
5	Никола Ковачевић	примач сервиса	19 од 28	5 од 27	30 од 39	3 од 9	5 од 36	11 од 32
6	Андрија Герић	средњи блокер	0	12 од 26	25 од 30	4 од 14	2 од 13	2 од 17
7	Ђула Мештер	средњи блокер	0	14 од 32	22 од 28	3 од 16	3 од 19	3 од 22
8	Марко Подрашчанин	средњи блокер	0	15 од 34	24 од 28	5 од 20	1 од 9	1 од 8
9	Драган Станковић	средњи блокер	0	11 од 26	21 од 27	1 од 6	4 од 28	4 од 25
10	Никола Грбић	техничар	0	2 од 12	1 од 18	3 од 19	93 од 101	10 од 34
11	Вељко Петковић	техничар	0	6 од 40	2 од 32	2 од 11	91 од 105	7 од 27
12	Иван Миљковић	коректор	0	5 од 12	45 од 52	8 од 22	2 од 18	3 од 17
13	Ђорђе Ђурић	коректор	0	4 од 15	42 од 51	7 од 25	3 од 19	4 од 20
14	Васа Мијић	либеро	46 од 54	0	0	0	5 од 26	24 од 58
15	Марко Самарџић	либеро	42 од 50	0	0	0	7 од 32	21 од 46

Табела 1

Као што се види, у табели су дата имена играча, има их 15 и њихова позиција у екипи. Такође је дато шест карактеристика које су битне за сваку позицију у тиму и за које су дати и учинци за сваког играча појединачно. Те карактеристике су : идеалан пријем сервиса, блок, напад, ас сервис, идеално дизање, одбрана у пољу.

Свим групама је дато по 45 минута да анализирају проблем, и кроз међусобну комуникацију, дискусију и заједнички дођу до решења. Било је потребно, да осим тога што ће навести који играчи заслужују да играју на којој позицији, исто као и у претходном задатку, прикажу који су модел одлучивања користили, како би исти модел применили и ако се промене играчи и њихов учинак.

Пошто су се ученици упознали са проблемом, повели су дискусију о томе колико играча је потребно за коју позицију у тиму. Одговору на ово питање значајно су допринели ученици који се баве одбојком, и који су објаснили да у једном тиму постоји један техничар, један коректор, два примача сервиса, два средња блокера, и плус либеро.

Како је наставник одржао предавање, и како ученицима из било које групе није било први пут да се суоче са задацима са оваквом проблематиком, групе су се међусобно поделиле која ће користити коју методу одређивања најбоље шесторке, па ће на крају упоредити тако добијене резултате.

Пре него што је било која група приступила решавању проблема, заједнички су установили да је начином на који је дат утицај играча немогуће одредити било шта, па су дате учинке представили у виду процента, и креирали нову табелу са процентима.

БРОЈ	ИМЕ	ПОЗИЦИЈА	ИДЕАЛАН ПРИЈЕМ СЕРВИСА	БЛОК	НАПАД	АС СЕРВИС	ИДЕАЛНО ДИЗАЊЕ	ОДБРАНА У ПОЉУ
1	Владимир Грбић	примач сервиса	74.36	25.00	81.82	27.27	12.50	37.50
2	Горан Вујезић	примач сервиса	78.13	15.38	75.00	30.77	15.00	32.14
3	Слободан Бошкан	примач сервиса	80.00	14.29	76.47	21.74	11.76	38.89
4	Милош Никић	примач сервиса	68.00	22.22	83.33	24.00	23.53	30.77
5	Никола Ковачевић	примач сервиса	67.86	18.52	76.92	33.33	13.89	34.38
6	Андрија Герић	средњи блокер	0.00	46.15	83.33	28.57	15.38	11.76
7	Ђула Мештер	средњи блокер	0.00	43.75	78.57	18.75	15.79	13.64
8	Марко Подрашчанин	средњи блокер	0.00	44.12	85.71	25.00	11.11	12.50
9	Драган Станковић	средњи блокер	0.00	42.31	77.78	16.67	14.29	16.00
10	Никола Грбић	техничар	0.00	16.67	5.56	15.79	92.08	29.41
11	Вељко Петковић	техничар	0.00	15.00	6.25	18.18	86.67	25.93
12	Иван Миљковић	коректор	0.00	41.67	86.54	36.36	11.11	17.65
13	Ђорђе Ђурић	коректор	0.00	26.67	82.35	28.00	15.79	20.00
14	Васа Мијић	либеро	85.19	0.00	0.00	0.00	19.23	41.38
15	Марко Самарџић	либеро	84.00	0.00	0.00	0.00	21.88	45.65

Табела 2

Када су се установили задаци, и циљеви, ученици су приступили решавању проблема.

Као и претходни пут, ученици су унутар својих група дискутовали око могућих решења, давали предлоге, међусобно се напуњавали, с том разликом што су у односу на прошло тестирање унапред знали са којим проблемима могу да се суоче, тако да су их унапред решавали тако што је сваки члан у групи имао своје задужење које је морао да одради.

Иако је по обиму овај задатак знатно сложенији од задатка „изабери мобилни телефон“, добрим организовањем послова унутар групе, ученици сваке групе су решили проблем за предвиђених 45 минута, тако да, као и прошлог пута, проблема са временом није било.

Наредних 45 минута било је предвиђено да све групе представе своје решење, и да заједно са осталим групама дискутују решење.

Група 1

Као и у претходном тестирању, ученици који су чинили Групу 1 први су излагали своје решење.

Образложење ученика Групе 1: „Ми смо добили задужење да рангирамо све играче од оног са најбољим процентом до оног са најгорим процентом успешности, за сваку позицију и према свакој карактеристици појединачно. Играчима смо додали и колону поени коју смо формирали тако што је играч који је био на првој позицији у рангирању добијао највећи број поена, а онај који је био на последњем месту у рангирању, најмањи број поена.

Како би те податке приказали, формирали смо следеће табеле:

	Примач сервиса					
Поени	ИДЕАЛАН ПРИЈЕМ СЕРВИСА	БЛОК	НАПАД	АС СЕРВИС	ИДЕАЛНО ДИЗАЊЕ	ОДБРАНА У ПОЉУ
5	Слободан Бошкан	Владимир Грбић	Милош Никић	Никола Ковачевић	Милош Никић	Слободан Бошкан
4	Горан Вујевић	Милош Никић	Владимир Грбић	Горан Вујевић	Горан Вујевић	Владимир Грбић
3	Владимир Грбић	Никола Ковачевић	Никола Ковачевић	Владимир Грбић	Никола Ковачевић	Никола Ковачевић
2	Милош Никић	Горан Вујевић	Слободан Бошкан	Милош Никић	Владимир Грбић	Горан Вујевић
1	Никола Ковачевић	Слободан Бошкан	Горан Вујевић	Слободан Бошкан	Слободан Бошкан	Милош Никић

Табела 3

	Средњи блокер					
Поени	ИДЕАЛАН ПРИЈЕМ СЕРВИСА	БЛОК	НАПАД	АС СЕРВИС	ИДЕАЛНО ДИЗАЊЕ	ОДБРАНА У ПОЉУ
4	0	Андрија Герић	Марко Подрашчанин	Андрија Герић	Ђула Мештер	Драган Станковић
3	0	Марко Подрашчанин	Андрија Герић	Марко Подрашчанин	Андрија Герић	Ђула Мештер
2	0	Ђула Мештер	Ђула Мештер	Ђула Мештер	Драган Станковић	Марко Подрашчанин
1	0	Драган Станковић	Драган Станковић	Драган Станковић	Марко Подрашчанин	Андрија Герић

Табела 4

	Техничари					
Поени	ИДЕАЛАН ПРИЈЕМ СЕРВИСА	БЛОК	НАПАД	АС СЕРВИС	ИДЕАЛНО ДИЗАЊЕ	ОДБРАНА У ПОЉУ
2	0	Никола Грбић	Вељко Петковић	Вељко Петковић	Никола Грбић	Никола Грбић
1	0	Вељко Петковић	Никола Грбић	Никола Грбић	Вељко Петковић	Вељко Петковић

Табела 5

	Либеро					
Поени	ИДЕАЛАН ПРИЈЕМ СЕРВИСА	БЛОК	НАПАД	АС СЕРВИС	ИДЕАЛНО ДИЗАЊЕ	ОДБРАНА У ПОЉУ
2	Васа Мијић	0	0	0	Марко Самарџић	Марко Самарџић
1	Марко Самарџић	0	0	0	Васа Мијић	Васа Мијић

Табела 6

	Коректори					
Поени	ИДЕАЛАН ПРИЈЕМ СЕРВИСА	БЛОК	НАПАД	АС СЕРВИС	ИДЕАЛНО ДИЗАЊЕ	ОДБРАНА У ПОЉУ
2	0	Иван Миљковић	Иван Миљковић	Иван Миљковић	Ђорђе Ђурић	Ђорђе Ђурић
1	0	Ђорђе Ђурић	Ђорђе Ђурић	Ђорђе Ђурић	Иван Миљковић	Иван Миљковић

Табела 7

Затим смо сабрали све поене које је играч добио на основу рангирања, а како би те резултате прегледније представили опет смо формирали табеле. Прва табела представља крајњи број поена које су добили играчи који примају сервис.

Примач сервиса	Поени
Владимир Грбић	21
Милош Никић	19
Никола Ковачевић	18
Горан Вујевић	17
Слободан Бошкан	15

Табела 8

Према подацима из Табеле 8, јасно се види да су два најбоља примача сервиса Владимир Грбић и Милош Никић, те од све петорице бирамо њих двојицу у идеалних седам.

У другој табели представили смо крајњи број поена који су добили средњи блокери.

Средњи блокер	Поени
Андрија Герић	15
Марко Подрашчанин	13
Ђула Мештер	13
Драган Станковић	9

Табела 9

Према подацима из Табеле 9, Андрија Герић је играч који сигурно улази у идеалних седам, док се за другог средњег блокера треба одредити између Марка Подрашчанина и Ђуле Мештера. Критеријум који смо користили приликом одабира другог средњег блокера је следећи: Упредили смо ова два средња блокера тако што смо бројали колико пута су заузели прво место на табели. Пошто су оба блокера по једном била на првом месту у рангирању, онда смо прешли на позицију број два у рангирању, и пребројали колико пута је који блокер био на другом месту у табели. Ђула Мештер је био само једном, док је Марко Подрашчанин био два пута, тако да је други средњи блокер по нашим критеријумима Марко Подрашчанин.

Приликом избора техничара, коректора и либера посао нам је био нешто лакши пошто смо избор вршили само између два играча. Упоредили смо их тако што смо пребројали поене, и видели ко има више. У категорији техничари, Никола Грбић је освојио 8, а

Вељко Петковић 7 поена, тако да је Никола Грбић техничар који је упао у идеалну седморку. Што се тиче коректора, Иван Миљковић је освојио 8 поена, а Ђорђе Ђурић 7 поена. У категорији либеро, Васа Мијић је освојио 4 поена, а Марко Самарџић 5 поена, те су Иван Миљковић и Марко Самарџић последњи чланови идеалне седморке.

Нашу идеалну седморку смо представили табелом:

Седморка	Играч
Техничар:	Никола Грбић
Коректор:	Иван Миљковић
Примач сервиса 1:	Владимир Грбић
Примач сервиса 2:	Милош Никић
Средњи блокер 1:	Андрија Герић
Средњи блокер 2:	Марко Подрашчанин
Либеро:	Марко Самарџић

Табела 10

Група 2

Ученици који су чинили Групу 2 следећи су излагали своје решење.

Образложење ученика Групе 2: „Наша група је добила задатак да на основу рачунања средњих вредности формирамо идеалну седморку. Модел који смо користили је следећи: Израчунали смо средње вредности, тј просек, за сваку позицију у тиму и за сваку карактеристику појединачно, и то у категорији примача сервиса и средњих блокера, јер у тим категоријама вршимо избор између више играча. Почели смо од категорије примачи сервиса.

БРОЈ	ИМЕ	ПОЗИЦИЈА	ИДЕАЛАН ПРИЕМ СЕРВИСА	БЛОК	НАПАД	АС СЕРВИС	ИДЕАЛНО ДИЗАЊЕ	ОДБРАНА У ПОЉУ
1	Владимир Грбић	примач сервиса	74.36	25.00	81.82	27.27	12.50	37.50
2	Горан Вујевић	примач сервиса	78.13	15.38	75.00	30.77	15.00	32.14
3	Слободан Бошкан	примач сервиса	80.00	14.29	76.47	21.74	11.76	38.89
4	Милош Никић	примач сервиса	68.00	22.22	83.33	24.00	23.53	30.77
5	Никола Ковачевић	примач сервиса	67.86	18.52	76.92	33.33	13.89	34.38
Средња вредност:			73.67	19.08	78.71	27.42	15.34	34.74

Табела 11

Затим смо формирали табелу тако што смо уписивали само играче чији је учинак изнад просека, и ту смо их рангирани од играча са најбољим учинком до играча са најгорим учинком.

Примач сервиса					
ИДЕАЛАН ПРИЕМ СЕРВИСА	БЛОК	НАПАД	АС СЕРВИС	ИДЕАЛНО ДИЗАЊЕ	ОДБРАНА У ПОЉУ
Слободан Бошкан	Владимир Грбић	Милош Никић	Никола Ковачевић	Милош Никић	Слободан Бошкан
Горан Вујевић	Милош Никић	Владимир Грбић	Горан Вујевић	Горан Вујевић	Владимир Грбић
Владимир Грбић					

Табела 12

Као и ученици из Групе 1, сада смо оцењивали играче тако што смо им давали поене. Највише поена добија онај ко је први на листи а најмање онај последњи. У овом конкретном примеру, само у категорији идеалан пријем сервиса, играчи су добили од један до три поена, док је расподела поена у осталим категоријама била само један за играча који је први на листи и два поена за играча који је други.

Резултате сабирања поена дали смо у следећој табели:

Примач сервиса	Поени
Владимир Грбић	5
Милош Никић	5
Никола Ковачевић	2
Горан Вујевић	4
Слободан Бошкан	5

Табела 13

Дакле на основу података из Табеле 13 видимо да три играча имају исти број поена, тако морамо искористити нови критеријум оцењивања да бисмо одабрали два играча. И ми смо бројали колико је који играч пута био на првом месту на листи. Слободан Бошкан и Милош Никић су били по два пута први на листи, док је Владимир Грбић био само једном, тако да смо изабрали прву двојицу у идеалну седморку.

На исти начин смо упоређивали играче на позицији средњи блокер. Прво смо израчунали просеке по свим карактеристикама.

		ИДЕАЛАН ПРИЕМ СЕРВИСА	БЛОК	НАПАД	АС СЕРВИС	ИДЕАЛНО ДИЗАЊЕ	ОДБРАНА У ПОЉУ
Андрија Герић	средњи блокер	0,00	46,15	83,33	28,57	15,38	11,76
Ђула Мештер	средњи блокер	0,00	43,75	78,57	18,75	15,79	13,64
Марко Подрашчанин	средњи блокер	0,00	44,12	85,71	25,00	11,11	12,50
Драган Станковић	средњи блокер	0,00	42,31	77,78	16,67	14,29	16,00
	просек	0,00	44,08	81,35	22,25	14,14	13,48

Табела 14

Затим смо формирали табелу тако што смо уписивали само играче чији је учинак изнад просека, и ту смо их рангирали од играча са најбољим учинком до играча са најгорим учинком.

Средњи блокер					
ИДЕАЛАН ПРИЈЕМ СЕРВИСА	БЛОК	НАПАД	АС СЕРВИС	ИДЕАЛНО ДИЗАЊЕ	ОДБРАНА У ПОЉУ
0	Андрија Герић	Марко Подрашчанин	Андрија Герић	Ђула Мештер	Драган Станковић
0	Марко Подрашчанин	Андрија Герић	Марко Подрашчанин	Андрија Герић	Ђула Мештер
0				Драган Станковић	
0					

Табела 15

И у овој категорији смо оцењивали играче тако што смо им давали поене. Највише поена добија онај ко је први на листи а најмање онај последњи. У овом конкретном примеру, само у категорији идеалано дизање, играчи су добили од један до три поена, док је расподела поена у осталим категоријама била само један за играча који је први на листи и два поена за играча који је други. Резултате сабирања поена дали смо у следећој табели:

Средњи блокер	Поени
Андрија Герић	7
Марко Подрашчанин	4
Ђула Мештер	4
Драган Станковић	3

Табела 16

И овог пута, Андрија Герић је имао највише поена, тако да он постаје члан идеалног тима. Да бисмо се определили ко ће бити други члан, да ли Подрашчанин или Мештер, поново ћемо искористити критеријум са позицијама. И Марко Подрашчанин и Ђула Мештер су по једном били први на листи, али је Марко Подрашчанин био два пута на другој позицији на листи, а Ђула Мештер само једном, тако да је Марко Подрашчанин други средњи блокер који ће бити у идеалном тиму.

Приликом одабира техничара, коректора и либера, пошто само од два играча треба да изаберемо једног, једноставно смо упоредили који играч је више пута био на првој позицији на листи, и на основу тога донели одлуку за све три категорије играча. У идеалну седморку ушли су: Никола Грбић- техничар, Иван Миљковић- коректор, и Марко Самарџић-либеро. Тако да наша табела која представља идеалну седморку изгледа овако:

Седморка	Играч
Техничар:	Никола Грбић
Коректор:	Иван Миљковић
Примач сервиса 1:	Слободан Бошкан
Примач сервиса 2:	Милош Никић
Средњи блокер 1:	Андрија Герић
Средњи блокер 2:	Марко Подрашчанин
Либеро:	Марко Самарџић

Табела 17

Група 3

Ученици који су чинили Групу 3 следећи су излагали своје решење.

Образложење ученика Групе 3: „Наша група је добила задатак да такође на основу рачунања средњих вредности формира идеалну седморку, само што је наш модел подразумевао да првенствено израчунамо средње вредности, тј просек, за сваку позицију у тиму по свим карактеристикама, и то у категорији примача сервиса и средњих блокера, јер у тим категоријама вршимо избор између више од два играча, док у осталим категоријама имамо нешто лакши задатак, да упоредимо само по два играча. Те табеле су истоветне као табеле које су користили ученици из Групе 2.

БРОЈ	ИМЕ	ПОЗИЦИЈА	ИДЕАЛАН ПРИЕМ СЕРВИСА	БЛОК	НАПАД	АС СЕРВИС	ИДЕАЛНО ДИЗАЊЕ	ОДБРАНА У ПОЉУ
1	Владимир Грбић	примач сервиса	74.36	25.00	81.82	27.27	12.50	37.50
2	Горан Вујевић	примач сервиса	78.13	15.38	75.00	30.77	15.00	32.14
3	Слободан Бошкан	примач сервиса	80.00	14.29	76.47	21.74	11.76	38.89
4	Милош Никић	примач сервиса	68.00	22.22	83.33	24.00	23.53	30.77
5	Никола Ковачевић	примач сервиса	67.86	18.52	76.92	33.33	13.89	34.38
Средња вредност:			73.67	19.08	78.71	27.42	15.34	34.74

Табела 18

		ИДЕАЛАН ПРИЕМ СЕРВИСА	БЛОК	НАПАД	АС СЕРВИС	ИДЕАЛНО ДИЗАЊЕ	ОДБРАНА У ПОЉУ
Андрија Герић	средњи блокер	0,00	46,15	83,33	28,57	15,38	11,76
Ђула Мештер	средњи блокер	0,00	43,75	78,57	18,75	15,79	13,64
Марко Подрашчанин	средњи блокер	0,00	44,12	85,71	25,00	11,11	12,50
Драган Станковић	средњи блокер	0,00	42,31	77,78	16,67	14,29	16,00
просек		0,00	44,08	81,35	22,25	14,14	13,48

Табела 19

Наш метод рангирања играча и расподеле поена нешто је другачији од метода коју су користили ученици из Групе 2. Наиме, ми смо рангирани играче по позицијама од најбољег до најгорег на исти начин на који су то учинили ученици из Групе 1, с то разликом што смо обележили који играчи се налазе изнад, а који испод средње

вредности за наведене две категорије играча, и то по свим карактеристикама. Наша табеле изгледају овакао:

Примач сервиса					
ИДЕАЛАН ПРИЈЕМ СЕРВИСА	БЛОК	НАПАД	АС СЕРВИС	ИДЕАЛНО ДИЗАЊЕ	ОДБРАНА У ПОЉУ
Слободан Бошкан	Владимир Грбић	Милош Никић	Никола Ковачевић	Милош Никић	Слободан Бошкан
Горан Вујевић	Милош Никић	Владимир Грбић	Горан Вујевић	Горан Вујевић	Владимир Грбић
Владимир Грбић	Никола Ковачевић	Никола Ковачевић	Владимир Грбић	Никола Ковачевић	Никола Ковачевић
Милош Никић	Горан Вујевић	Слободан Бошкан	Милош Никић	Владимир Грбић	Горан Вујевић
Никола Ковачевић	Слободан Бошкан	Горан Вујевић	Слободан Бошкан	Слободан Бошкан	Милош Никић

Табела 20

Средњи блокер					
ИДЕАЛАН ПРИЈЕМ СЕРВИСА	БЛОК	НАПАД	АС СЕРВИС	ИДЕАЛНО ДИЗАЊЕ	ОДБРАНА У ПОЉУ
0	Андрија Герић	Марко Подрашчанин	Андрија Герић	Ђула Мештер	Драган Станковић
0	Марко Подрашчанин	Андрија Герић	Марко Подрашчанин	Андрија Герић	Ђула Мештер
0	Ђула Мештер	Ђула Мештер	Ђула Мештер	Драган Станковић	Марко Подрашчанин
0	Драган Станковић	Драган Станковић	Драган Станковић	Марко Подрашчанин	Андрија Герић

Табела 21

Подебљаним линијама приказана је средња вредност, то јест играчи који у датој карактеристици имају учинак виши од просека се налазе изнад средње вредности и ранжирани су по учинку, док се играчи којима је учинак испод просека налазе испод линије. Затим смо додељивали поене на тај начин што је играч који је први изнад линије добијао један поен, други изнад листе два поена и тако даље, док су играчи који су први испод листе добијали редом -1, -2 и тако даље.

На основу тог система бодовања формирали смо табеле успешности, и на основу табела изабрали играче за идеалну седморку.

Примач сервиса	Поени
Владимир Грбић	2
Милош Никић	-1
Никола Ковачевић	-4
Горан Вујевић	-3
Слободан Бошкан	-6

Табела 22

Средњи блокер	Поени
Андрија Герић	5
Марко Подрашчанин	2
Ђула Мештер	1
Драган Станковић	-3

Табела 23

У категорији примач сервиса изабрани су Владимир Грбић и Милош Никић, а у категорији средњи блокер, Андрија Герић и Марко Подрашчанин. Играчи из осталих категорија су изабрани на потпуно исти начин на који су то учинили ученици из Групе 2. Тако да наш коначни поредак играча изгледа овако:

Седморка	Играч
Техничар:	Никола Грбић
Коректор:	Иван Миљковић
Примач сервиса 1:	Владимир Грбић
Примач сервиса 2:	Милош Никић
Средњи блокер 1:	Андрија Герић
Средњи блокер 2:	Марко Подрашчанин
Либеро:	Марко Самарџић

Табела 24

Група 4

Ученици који су чинили Групу 4 следећи су излагали своје решење.

Образложење ученика Групе 4: „Наша група је добила задатак да на основу одређивања приоритета дође до идеалне седморке. Наша метода је подразумевала следеће: Одредимо које су карактеристике најбитније за коју позицију у тиму и да посматрамо само те карактеристике док друге мање битне уопште не рачунамо и да на тај начин формирамо приоритете. Затим израчунамо средње вредности, тј просек, за сваку позицију у тиму по одабраним карактеристикама и то у категоријама примача сервиса и средњи блокери. У категоријама у којима бирамо између два играча, такође ћемо гледати само приоритете, али нећемо рачунати просеке већ ћемо само упоредити играче по одабраним приоритетима.

Све податке смо представили у виду табела ради боље прегледности.

Сви ученици из наше су се међусобно договарали који карактеристике треба да буду приоритети за коју позицију. Тако је договорено да је за карактеристику примач сервиса, најбитније је да играч добро прима сервис и да има добар напад, тако да су карактеристике идеалан пријем и напад приоритети који имају индекс 1,5. Блок, сервис и одбрана у пољу су важни елементи приликом избора примача сервиса, тако да карактеристике блок, ас сервис и одбрана у пољу чине приоритете чији је индекс 1. Закључено је да идеално дизање није уопште битно за ову категорију играча, тако да ћемо је одбацити.

Примач сервиса					
ИДЕАЛАН ПРИЈЕМ СЕРВИСА	БЛОК	НАПАД	АС СЕРВИС	ОДБРАНА У ПОЉУ	
Слободан Бошкан	Владимир Грбић	Милош Никић	Никола Ковачевић	Слободан Бошкан	
Горан Вујевић	Милош Никић	Владимир Грбић	Горан Вујевић	Владимир Грбић	
Владимир Грбић	Никола Ковачевић	Никола Ковачевић	Владимир Грбић	Никола Ковачевић	
Милош Никић	Горан Вујевић	Слободан Бошкан	Милош Никић	Горан Вујевић	
Никола Ковачевић	Слободан Бошкан	Горан Вујевић	Слободан Бошкан	Милош Никић	

Табела 25

У категорији средњи блокер, приоритете чији је индекс 1,5 имају карактеристике: Блок и напад, док је приоритет са индексом 1 карактеристика ас сервис.

Средњи блокер		
БЛОК	НАПАД	АС СЕРВИС
Андрија Герић	Марко Подрашчанин	Андрија Герић
Марко Подрашчанин	Андрија Герић	Марко Подрашчанин
Ђула Мештер	Ђула Мештер	Ђула Мештер
Драган Станковић	Драган Станковић	Драган Станковић

Табела 26

У категорији коректор, приоритет чији је индекс 1,5 има карактеристика напад, док су приоритети са индексом 1 карактеристике блок и ас сервис.

Коректор		
НАПАД	БЛОК	АС СЕРВИС
Иван Миљковић	Иван Миљковић	Иван Миљковић
Ђорђе Ђурић	Ђорђе Ђурић	Ђорђе Ђурић

Табела 27

У категорији техничар, приоритет чији је индекс 1,5 има карактеристика идеално дизање, док су приоритети са индексом 1 карактеристике блок и ас сервис.

Техничар		
БЛОК	АС СЕРВИС	ИДЕАЛНО ДИЗАЊЕ
Никола Грбић	Вељко Петковић	Никола Грбић
Вељко Петковић	Никола Грбић	Вељко Петковић

Табела 28

У категорији либеро, приоритет чији је индекс 1,5 има карактеристика идеалан пријем, док је приоритет са индексом 1 карактеристика одбрана у пољу.

Либеро	
ИДЕАЛАН ПРИЈЕМ СЕРВИСА	ОДБРАНА У ПОЉУ
Васа Мијић	Марко Самарџић
Марко Самарџић	Васа Мијић

Табела 29

Расподела поена је иста као код ученика Групе 3, дакле код категорија примач сервиса и средњи блокер они играчи који имају учинак изнад просека добијају један, два и три поена у зависности да ли су први, други или трећи изнад средине, а добијају -1, -2, -3 у зависности да ли су први, други или трећи испод средине. Разлика је у томе што приоритет са индексом 1,5 значи да се поени у тој колони множе са 1,5 а код приоритета са индексом 1 множе се са 1.

Затим смо формирали табеле:

Примач сервиса	Поени
Владимир Грбић	5
Милош Никић	-2,5
Никола Ковачевић	-4,5
Горан Вујевић	-4,5
Слободан Бошкан	-2,5

Табела 30

Члан идеалне седморке је сигурно Владимир Грбић док о други играч мора да се изабере између Милоша Никића и Слободана Бошкана. Одлику смо донели тако што смо упоредили само ова два играча, и видели да је Слободан Бошкан први у пријему сервиса, док је Никић први у нападу. Међутим, пошто је Бошкан први и у одбрани у пољу, он је други играч који улази у идеалну седморку.

Код средњих блокера се на основу табеле одмах уочава, да су Андрија Герић и Марко Подрашчанин изнад просека у свакој карактеристици, а друга два играча испод. Тако да су Подрашчанин и Герић још два члана идеалне седморке.

Код осталих категорија, једноставним сабирањем дошли смо до следећих резултата:

У категорији коректор Иван Миљковић је у идеалној седморци је је први у све три карактеристике.

У категорији техничари, Никола Грбић је у идеалној седморци са 2,5 поена, наспрам 1 поена Вељка Петковића.

У категорији либеро, Васа Мијић је у идеалној седморци са освојених 1,5 поена, наспрам 1 поена Марка Самарџића.

Дакле идеалну седморку чине:

Седморка	Играч
Техничар:	Никола Грбић
Коректор:	Иван Миљковић
Примач сервиса 1:	Слободан Бошкан
Примач сервиса 2:	Владимир Грбић
Средњи блокер 1:	Андрија Герић
Средњи блокер 2:	Марко Подрашчанин
Либеро:	Васа Мијић

Табела 31

Група 5

Ученици који су чинили Групу 5 последњи су излагали своје решење.

Образложење ученика Групе 5: „Наша група је дошла на идеју да у спорту стратегију за игру морамо креирати на основу карактеристика противничког стила игре. Зато морамо формирати бар две различите опције за игру, нападачку и одбрамбену. У суштини, наш модел је сличан моделу претходне групе, јер и овде одређујемо приоритете, само што нам је слиста приоритета краћа. У зависности од опције коју изаберемо, да ли нападачку или одбрамбену тако ће нам се и приоритети мењати.

Расподелу поена формираћемо исто као ученици Групе 1. Прво смо рангирати играче у свакој од категорија и по приоритетним карактеристикама, од најбољег до најгорег, а затим расподелили поене тако да играч на првој позицији на листи добије највише поена, а играч на последњој позицији добије најмањи број поена.

Нападачка опција

У овој опцији приоритете имају само нападачке карактеристике.

У категорији примач сервиса нападачке карактеристике су напад и ас сервис. Табела изгледа овако:

	Примач сервиса	
Поени	НАПАД	АС СЕРВИС
5	Милош Никић	Никола Ковачевић
4	Владимир Грбић	Горан Вујевић
3	Никола Ковачевић	Владимир Грбић
2	Слободан Бошкан	Милош Никић
1	Горан Вујевић	Слободан Бошкан

Табела 32

Одавде је лако израчунати колико који играч има колико поена. Владимир Грбић 7, Милош Никић 7, Никола Ковачевић 8, Слободан Бошкан 3 и Горан Вујевић 5. Значи Никола Ковачевић је сигурно члан идеалне седморке, а Милош Никић и Владимир Грбић имају исти број поена. Уколико желимо да нападнемо противника сервисом одабраћемо Владимира Грбића, а уколико нам је битнији напад из игре онда ћемо изабрати Милоша Никића.

У категорији средњи блокер нападачке карактеристике су такође напад и ас сервис. Табела изгледа овако:

	Средњи блокер	
Поени	НАПАД	АС СЕРВИС
4	Марко Подрашчанин	Андрија Герић
3	Андрија Герић	Марко Подрашчанин
2	Ђула Мештер	Ђула Мештер
1	Драган Станковић	Драган Станковић

Табела 33

Марко Подрашчанин и Андрија Герић имају по 7 поена, Ђула Мештер 4, а Драган Станковић 2 поена, тако да су Марко Подрашчанин и Андрија Герић чланови идеалне седморке.

У категорији коректор нападачке карактеристике су такође напад и ас сервис. Табела изгледа овако:

	Коректори	
Поени	НАПАД	АС СЕРВИС
2	Иван Миљковић	Иван Миљковић
1	Ђорђе Ђурић	Ђорђе Ђурић

Табела 34

Овде је ситуација јасна. Иван Миљковић има 4 поена, Ђорђе Ђурић 2 тако да је Иван Миљковић члан идеалне екипе.

У категорији техничар нападчке карактеристике су такође напад, ас сервис и идеално дизање. Табела изгледа овако:

	Техничари		
Поени	НАПАД	АС СЕРВИС	ИДЕАЛНО ДИЗАЊЕ
2	Вељко Петковић	Вељко Петковић	Никола Грбић
1	Никола Грбић	Никола Грбић	Вељко Петковић

Табела 35

У овој категорији, Никола Грбић је освојио 3, а Вељко Петковић 5 поена, тако да је и он члан идеалне седморке.

У категорији либеро не постоје нападчке карактеристике, али карактеристика која омоћава бољи напад је идеалан пријем сервиса. Табела изгледа овако:

	Либеро
поени	ИДЕАЛАН ПРИЈЕМ СЕРВИСА
2	Васа Мијић
1	Марко Самарџић

Табела 36

Тако да је Васа Мијић и последњи члан идеалне седморке.

Дакле, уколико желимо да нападнемо сервисом табела идеалне седморке изгледа овако:

Седморка	Играч
Техничар:	Вељко Петковић
Коректор:	Иван Миљковић
Примач сервиса 1:	Никола Ковачевић
Примач сервиса 2:	Владимир Грбић
Средњи блокер 1:	Андрија Герић
Средњи блокер 2:	Марко Подрашчанин
Либеро:	Васа Мијић

Табела 37

А уколико да желимо да нападнемо противника из игре онда седморка изгледа овако:

Седморка	Играч
Техничар:	Вељко Петковић
Коректор:	Иван Миљковић
Примач сервиса 1:	Никола Ковачевић
Примач сервиса 2:	Милош Никић
Средњи блокер 1:	Андрија Герић
Средњи блокер 2:	Марко Подрашчанин
Либеро:	Васа Мијић

Табела 38

Одбрамбена опција

У овој опцији приоритете имају само одбрамбене карактеристике.

У категорији примач сервиса одбрамбене карактеристике су идеалан пријем, игра у пољу и блок. Табела изгледа овако:

	Примач сервиса		
Поени	ИДЕАЛАН ПРИЈЕМ СЕРВИСА	БЛОК	ОДБРАНА У ПОЉУ
5	Слободан Бошкан	Владимир Грбић	Слободан Бошкан
4	Горан Вујевић	Милош Никић	Владимир Грбић
3	Владимир Грбић	Никола Ковачевић	Никола Ковачевић
2	Милош Никић	Горан Вујевић	Горан Вујевић
1	Никола Ковачевић	Слободан Бошкан	Милош Никић

Табела 39

Владимир Грбић је освојио 12 поена, Милош Никић 7, Никола Ковачевић 7, Слободан Бошкан 11 и Горан Вујевић 8. Значи Владимир Грбић и Слободан Бошкан су сигурно чланови идеалне седморке.

У категорији средњи блокер одбрамбена карактеристика је блок. Табела изгледа овако:

Средњи блокер
БЛОК
Андрија Герић
Марко Подрашчанин
Ђула Мештер
Драган Станковић

Табела 40

Марко Подрашчанин и Андрија Герић чланови идеалне седморке. Овде нисмо морали да дајемо расподелу по поенима, јер се оцењује само једна карактеристика.

У категорији коректор одбрамбене карактеристике су блок и одбрана у пољу. Табела изгледа овако:

	Коректори	
Поени	БЛОК	ОДБРАНА У ПОЉУ
2	Иван Миљковић	Ђорђе Ђурић
1	Ђорђе Ђурић	Иван Миљковић

Табела 41

У категорији коректор Иван Миљковић и Ђорђе Ђурић имају по 3 поена. Пошто су играчи изједначени, критеријум по којем смо одлучили да је Иван Миљковић члан идеалне седморке је то што је бољи нападач.

У категорији техничар одбрамбене карактеристике су такође блок и одбрана у пољу. Табела изгледа овако:

	Техничари		
Поени	БЛОК	АС СЕРВИС	ОДБРАНА У ПОЉУ
2	Никола Грбић	Вељко Петковић	Никола Грбић
1	Вељко Петковић	Никола Грбић	Вељко Петковић

Табела 42

У овој категорији, Вељко Петковић 3, а Никола Грбић је освојио 5 поена, тако да је и он члан идеалне седморке.

У категорији либеро одбрамбена карактеристика је одбрана у пољу. Табела изгледа овако:

Либеро
ОДБРАНА У ПОЉУ
Марко Самарџић
Васа Мијић

Табела 43

Тако да је Марко Самарџић и последњи члан идеалне седморке.

Наш предлог идеалне одбрамбене седморке је:

Седморка	Играч
Техничар:	Никола Грбић
Коректор:	Иван Миљковић
Примач сервиса 1:	Слободан Бошкан
Примач сервиса 2:	Владимир Грбић
Средњи блокер 1:	Андрија Герић
Средњи блокер 2:	Марко Подрашчанин
Либеро:	Марко Самарџић

Табела 44

Коментари

Након што су ученици свих група завршили своја излагања, на табли је остала попуњена следећа табела:

Седморка	Група 1	Група 2	Група 3	Група 4	Група 5 напад	Група 5 одбрана
Техничар:	Никола Грбић	Никола Грбић	Никола Грбић	Никола Грбић	Вељко Петковић	Никола Грбић
Коректор:	Иван Миљковић	Иван Миљковић	Иван Миљковић	Иван Миљковић	Иван Миљковић	Иван Миљковић
Примач сервиса 1:	Владимир Грбић	Слободан Бошкан	Владимир Грбић	Слободан Бошкан	Никола Ковачевић	Слободан Бошкан
Примач сервиса 2:	Милош Никић	Милош Никић	Милош Никић	Владимир Грбић	Милош Никић	Владимир Грбић
Средњи блокер 1:	Андрија Герић	Андрија Герић	Андрија Герић	Андрија Герић	Андрија Герић	Андрија Герић
Средњи блокер 2:	Марко Подрашчанин	Марко Подрашчанин	Марко Подрашчанин	Марко Подрашчанин	Марко Подрашчанин	Марко Подрашчанин
Либеро:	Марко Самарџић	Марко Самарџић	Марко Самарџић	Васа Мијић	Васа Мијић	Марко Самарџић

Табела 45

Ученици су имали задатак да на крају ове студије упореде добијене резултате, да донесу одређене закључке, и да се изјасне о томе од који метод је по њиховом мишљењу најефикаснији и уколико би добили задатак са сличним захтевима који модел оцењивања и рангирања би искористили.

Закључак ученика свих група: „Прва ствар која се примећује јесте да који год модел да смо примењивали у одлучивању, све седморке су имале сличан епилог. Највише

варијација је било у категорији примачи сервиса, што и није чудно, јер се управо у тој категорији налазио највећи број играча који су конкурисали за место у идеалној седморци, што значи да би и на други позицијама било исто толико варијација, само да је било више играча.

Проблем који се јављао у моделу одлучивања код ученика Групе 1 јесте то што нису имали параметар у односу на који требају да врше оцењивање, те су сви играчи добијали поене, чак и ако су се налазили на дну листа, односно добијали су оцене и тамо где им је учинак испод просека.

Код модела који су развијали ученици Групе 2 проблем је био у томе што иако су имали параметар према којем ће рангирати играче, у систему бодовања поене су давали само играчима чији је учинак био изнад просека, док се код истих играча није водило рачуна о карактеристикама у којима им је учинак био испод просека.

Ученици Групе 3 су развили одличан метод бодовања који оцењује и добре и лоше учинке свих играча по свим карактеристикама. Једини је проблем био, исто као и код ученика Група 1 и 2, што није било приоритета приликом оцењивања, па су се нпр. исто бодовале карактеристика идеално дизање и блок у категорији средњи блокери, иако је главни задатак средњих блокера да блокирају, а не да дижу лопту.

Зато је модел који су развили ученици Групе 4 праведнији и ефикаснији. Користи приоритете, има добар систем оцењивања, као у код модела Групе 3. И овде је једино лоше што су приоритети одређивани глобално, а не према потреби утакмице. Тако да је модел који су развили ученици Групе 5 можда и најправеднији и нуди најефикаснији систем за рангирање и оцењивање, јер оцењујемо само параметре који су нам најбитнији. Како смо успели да направимо најбољу нападачку или одбрамбену формацију, могли би и на исти начин да формирамо нпр. најбољу блокерску поставу и тиме се прилагодимо тактици коју и стратегији коју користи противник. “

Ученици свих група су били задовољни начином на који су решили постављени проблем. Сама проблематика је такође била интересантна ученицима, јер у нашем школском систему нису се никада сусретали са задацима који имају сличне захтеве, да се на одређеном проблему развијају различити модели који нуде могуће решење, а не само да се ради на задацима код којих се тражи искључиво тачно, коначно решење.

Контролна група

Већ је у уводном делу овог истраживачког рада напоменуто да су у истраживању учествовали ученици прве године средње „Угоститељско-Туристичке “ школе у Београду, смера туристички техничар, узраста 14-15 година.

Контролна група је формирана од другог одељења прве године које се добровољно пријавило да учествује у истраживању. Сви ученици у одељењу су истих година, и сви су имали истоветно претходно образовање.

У одељењу је било 19 ученика, те су због обима захтева сви ученици подељени у 3 мање групе, тако да су две групе бројале по седам, а једна шест ученика. Пошто су сви ученици према претходном образовању равноправни, можемо да кажемо да су свих пет група равноправне. Тестирање је трајало 90 минута, тј. два школска часа.

Ученици који су формирали контролну групу се никада раније нису сусретали са захтевима овог типа, и наставник им није одржао ни једно предавање на сличну тему.

Ученици контролне групе добили су исти задатак као ученици тест група приликом другог тестирања: Ви сте по професији спортски статистичар. Селектор одбојкашке репрезентације Србије вам је послао списак играча који ће наступати на предстојећем светском првенству, и доставио вам је списак карактеристика и учинак свих играча. Селектор вас је замолио да му погнете да донесе одлуку од којих шест, односно седам играча (шест играча + либеро) треба да формира најбољу екипу. На основу параметара задатих у табели направи најбољу седморку (шест играча + либеро).

A

1

БРОЈ	ИМЕ	ПОЗИЦИЈА	ИДЕАЛАН ПРИЈЕМ СЕРВИСА	БЛОК	НАПАД	АС СЕРВИС	ИДЕАЛНО ДИЗАЊЕ	ОДБРАНА У ПОЉУ
1	Владимир Грбић	примач сервиса	29 од 39	3 од 12	36 од 44	3 од 11	1 од 8	12 од 32
2	Горан Вујевић	примач сервиса	25 од 32	2 од 13	30 од 40	4 од 13	3 од 20	9 од 28
3	Слободан Бошкан	примач сервиса	24 од 30	1 од 7	26 од 34	5 од 23	2 од 17	14 од 36
4	Милош Никић	примач сервиса	17 од 25	4 од 18	30 од 36	6 од 25	4 од 27	8 од 26
5	Никола Ковачевић	примач сервиса	19 од 28	5 од 27	30 од 39	3 од 9	5 од 36	11 од 32
6	Андрија Герић	средњи блокер	0	12 од 26	25 од 30	4 од 14	2 од 13	2 од 17
7	Ђула Мештер	средњи блокер	0	14 од 32	22 од 28	3 од 16	3 од 19	3 од 22
8	Марко Подрашчанин	средњи блокер	0	15 од 34	24 од 28	5 од 20	1 од 9	1 од 8
9	Драган Станковић	средњи блокер	0	11 од 26	21 од 27	1 од 6	4 од 28	4 од 25
10	Никола Грбић	техничар	0	2 од 12	1 од 18	3 од 19	93 од 101	10 од 34
11	Вељко Петковић	техничар	0	6 од 40	2 од 32	2 од 11	91 од 105	7 од 27
12	Иван Миљковић	коректор	0	5 од 12	45 од 52	8 од 22	2 од 18	3 од 17
13	Ђорђе Ђурић	коректор	0	4 од 15	42 од 51	7 од 25	3 од 19	4 од 20
14	Васа Мијић	либеро	46 од 54	0	0	0	5 од 26	24 од 58
15	Марко Самарџић	либеро	42 од 50	0	0	0	7 од 32	21 од 46

Табела 1

Свим групама је дато по 45 минута да анализирају проблем, и кроз међусобну комуникацију, дискусију и заједнички дођу до решења. Било је потребно, да осим тога што ће навести који играчи заслужују да играју на којој позицији, исто као ученици тест групе, прикажу који су модел одлучивања користили.

Пошто су се ученици упознали са проблемом, повели су дискусију о томе колико играча је потребно за коју позицију у тиму. Наставник им је дао додатне упутства којим им је нагласио да у једном тиму постоји један техничар, један коректор, два примача сервиса, два средња блокера, и плус либеро.

Примећено је да су се ученици пре него што су приступили решавању проблема, заједнички установили да је начином на који је дат учинак играча немогуће одредити било шта, па су дали предлог да учинак играча представе у виду процента, и тако креирали нову табелу са процентима, која је иста као и табела коју су формирали ученици тест групе.

БРОЈ	ИМЕ	ПОЗИЦИЈА	ИДЕАЛАН ПРИЕМ СЕРВИСА	БЛОК	НАПАД	АС СЕРВИС	ИДЕАЛНО ДИЗАЊЕ	ОДБРАНА У ПОЉУ
1	Владимир Грбић	примач сервиса	74.36	25.00	81.82	27.27	12.50	37.50
2	Горан Вујевић	примач сервиса	78.13	15.38	75.00	30.77	15.00	32.14
3	Слободан Бошкан	примач сервиса	80.00	14.29	76.47	21.74	11.76	38.89
4	Милош Никић	примач сервиса	68.00	22.22	83.33	24.00	23.53	30.77
5	Никола Ковачевић	примач сервиса	67.86	18.52	76.92	33.33	13.89	34.38
6	Андрија Герић	средњи блокер	0.00	46.15	83.33	28.57	15.38	11.76
7	Ђула Мештер	средњи блокер	0.00	43.75	78.57	18.75	15.79	13.64
8	Марко Подрашчанин	средњи блокер	0.00	44.12	85.71	25.00	11.11	12.50
9	Драган Станковић	средњи блокер	0.00	42.31	77.78	16.67	14.29	16.00
10	Никола Грбић	техничар	0.00	16.67	5.56	15.79	92.08	29.41
11	Вељко Петковић	техничар	0.00	15.00	6.25	18.18	86.67	25.93
12	Иван Миљковић	коректор	0.00	41.67	86.54	36.36	11.11	17.65
13	Ђорђе Ђурић	коректор	0.00	26.67	82.35	28.00	15.79	20.00
14	Васа Мијић	либеро	85.19	0.00	0.00	0.00	19.23	41.38
15	Марко Самарџић	либеро	84.00	0.00	0.00	0.00	21.88	45.65

Табела 2

Осим давања упутства за рад и појашњења евентуалних нејасноћа, наставник никоме није дао инструкције како треба решавати проблем, већ је све то остало на ученицима да сами ураде.

Када су се установили задаци, и циљеви, свака група је приступила решавању проблема.

И код ученика контролне групе уочљиво је било да ученици у нашим школама нису навикли на рад у групама, и на поделу активности унутар групе. Ученици су унутар својих група врло живахно дискутовали око могућих решења, давали предлоге, међусобно се надопуњавали. Битно је напоменути, да су све групе решиле проблем на свој начин за предвиђених 45 минута, тако да проблема са временом није било.

Наредних 45 минута било је предвиђено да све групе представе своје решење, и да заједно са осталим групама увиде недостатке и могућа побољшања својих модела за решавање.

Група 1

Као што је била пракса и у тест групи, ученици који су чинили Групу 1 први су излагали своје решење.

Образложење ученика Групе 1: „Наша метода састојала се од међусобног упоређивања свих играча у оквиру једне категорије по свим карактеристикама. Један поен би добио играч чији је учинак за дату карактеристику бољи Онај ко има више поена значи да је бољи играч. У оквиру групе смо се поделили тако да два ученика упоређују играче у категорији примачи сервиса, два ученика играче у категорији средњи блокери, и по један ученик преостале три категорије.

У категорији примач сервиса, прво смо упоредили Владимира Грбића и Горана Вујевића. Када смо им упоредили карактеристике, резултат је био три према три, али је Владимир Грбић у карактеристикама где је добио поен био знатно убедљивији него што је био Горан Вујевић у карактеристикама где је освојио поен. Затим смо упоредили Слободана Бошкана и Милоша Никића и добили резултат четири према два у корист Милоша Никића. Затим смо Николу Ковачевића упоредили са Владимиром Грбићем и резултат је био четири према два у корист Владимира Грбића, тако да је остало да упоредимо Грбића са Никићем. И у овом „дуелу“ победио је Владимир Грбић резултатом четири према два, и тако директно постао члан идеалне седморке. Затим смо упоредили Ковачевића и Никића. Резултат је био четири према два у корист Никића. Требало је још упоредити Никића и Вујевића. Резултат је био три према три, тако да смо морали да одаберемо једног по истом критеријуму као што смо бирали између Вујевића и Грбића. Тако смо се одлучили за Милоша Никића јер је у карактеристикама где је добио поен био „јачи“ него Вујевић у својим карактеристикама. Тако да су два примача сервиса који чине идеалну седморку Владимир Грбић и Милош Никић.

По истим критеријумима смо изабрали и остале играче за идеалну седморку. Тако да наша табела изгледа овако:

Седморка	Играч
Техничар:	Никола Грбић
Коректор:	Иван Миљковић
Примач сервиса 1:	Владимир Грбић
Примач сервиса 2:	Милош Никић
Средњи блокер 1:	Андрија Герић
Средњи блокер 2:	Марко Подрашчанин
Либеро:	Марко Самарџић

Табела 3

Коментар ученика Групе 2: „Јако компликован и замршен систем упоређивања. Своди се донекле на упоређивање сваког са сваким. Да смо морали од више играча да изаберемо екипу требало би нам много времена да то и учинимо.“

Коментар ученика Групе 3: „Критеријум одлучивања када је резултат нерешен није нарочито убедљив. Своди се на то „ко је кога више одрао“ у карактеристикама у којима је бољи.“

Група 2

Ученици који су чинили Групу два, проблему су пришли на потпуно исти начин на који је то учинила и Група 1 али у другој **тест групи**. Наиме, рангирали су играче од оног са најбољим учинком па све до оног са најгорим учинком и давали су им поене тако што је онај играч који је био први на листи добијао највише, а играч који је био последњи на листи добијао најмање поена. Једина је разлика што су укупан број поена делили са укупним бројем карактеристика за сваког играча појединачно (и на тај начин су добили њихове средње оцене) и тако су их сортирали. Како не би понављали методу и на овом месту, само ће бити представљен крајњи учинак, односно само табела са идеалном седморком.

Седморка	Играч
Техничар:	Никола Грбић
Коректор:	Иван Миљковић
Примач сервиса 1:	Владимир Грбић
Примач сервиса 2:	Милош Никић
Средњи блокер 1:	Андрија Герић
Средњи блокер 2:	Марко Подрашчанин
Либеро:	Марко Самарџић

Табела 4

Коментар ученика Групе 3: „Одличан је систе са бодовањем, али једна ствер није логична. Што су поене добијали сви у у оквиру исте категорије, чак и играчи чији је учинак био и мањи од просечног.“

Група 3

Ученици су у коментаром који су дали за рад претходне групе, на неки начин најавили и представили свој модел рангирања. Они су користили сличан модел рангирања који су искористили и ученици Групе 2, али из друге тест групе. На исти начин су сортирали играче према учинку, од најбољег до најгорег, а затим израчунали њихове просеке, за категорије примач сервиса и средњи блокер за сваку карактеристику посебно. Добили су следеће табеле:

БРОЈ	ИМЕ	ПОЗИЦИЈА	ИДЕАЛАН ПРИЕМ СЕРВИСА	БЛОК	НАПАД	АС СЕРВИС	ИДЕАЛНО ДИЗАЊЕ	ОДБРАНА У ПОЉУ
1	Владимир Грбић	примач сервиса	74.36	25.00	81.82	27.27	12.50	37.50
2	Горан Вујевић	примач сервиса	78.13	15.38	75.00	30.77	15.00	32.14
3	Слободан Бошкан	примач сервиса	80.00	14.29	76.47	21.74	11.76	38.89
4	Милош Никић	примач сервиса	68.00	22.22	83.33	24.00	23.53	30.77
5	Никола Ковачевић	примач сервиса	67.86	18.52	76.92	33.33	13.89	34.38
Средња вредност:			73.67	19.08	78.71	27.42	15.34	34.74

Табела 5

		ИДЕАЛАН ПРИЕМ СЕРВИСА	БЛОК	НАПАД	АС СЕРВИС	ИДЕАЛНО ДИЗАЊЕ	ОДБРАНА У ПОЉУ
Андрија Герић	средњи блокер	0,00	46,15	83,33	28,57	15,38	11,76
Ђула Мештер	средњи блокер	0,00	43,75	78,57	18,75	15,79	13,64
Марко Подрашчанин	средњи блокер	0,00	44,12	85,71	25,00	11,11	12,50
Драган Станковић	средњи блокер	0,00	42,31	77,78	16,67	14,29	16,00
	просек	0,00	44,08	81,35	22,25	14,14	13,48

Табела 6

Затим су издвојили само играче који су по учинку изнад просека за сваку карактеристику, и добили су следеће табеле:

Примач сервиса					
ИДЕАЛАН ПРИЕМ СЕРВИСА	БЛОК	НАПАД	АС СЕРВИС	ИДЕАЛНО ДИЗАЊЕ	ОДБРАНА У ПОЉУ
Слободан Бошкан	Владимир Грбић	Милош Никић	Никола Ковачевић	Милош Никић	Слободан Бошкан
Горан Вујевић	Милош Никић	Владимир Грбић	Горан Вујевић	Горан Вујевић	Владимир Грбић
Владимир Грбић					

Табела 7

Средњи блокер					
ИДЕАЛАН ПРИЈЕМ СЕРВИСА	БЛОК	НАПАД	АС СЕРВИС	ИДЕАЛНО ДИЗАЊЕ	ОДБРАНА У ПОЉУ
0	Андрија Герић	Марко Подрашчанин	Андрија Герић	Ђула Мештер	Драган Станковић
0	Марко Подрашчанин	Андрија Герић	Марко Подрашчанин	Андрија Герић	Ђула Мештер
0				Драган Станковић	
0					

Табела 8

Приликом избора примача сервиса, критеријум који су ученици користили је да преброје ко је највише пута био на првој позицији. Испало је да су Милош Никић и Слободан Бошкан у две карактеристике били на првом месту и њих су одмах уврстили у идеалну седморку.

Исти критеријум су користили и код избора средњег блокера. Андрија Герић је два пута био први на листи, а остали по једном, па је Герић први средњи блокер у седморци. Другог блокера одредила је друга позиција на листи, односно Марко Подрашчанин је два пута заузео друго место, Мештер једном, а Станковић ни једном, тако да је Марко Подрашчанин други средњи блокер у идеалној седморци.

Приликом одабира техничара, коректора и либера, пошто су од два играча требали да изаберу једног, упоредили су који играч је више пута био на првој позицији на листи, и на основу тога донели одлуку за све три категорије играча. У идеалну седморку ушли су: Никола Грбић- техничар, Иван Миљковић- коректор, и Марко Самарџић-либеро. Тако су добили табелу идеалне седморке.

Седморка	Играч
Техничар:	Никола Грбић
Коректор:	Иван Миљковић
Примач сервиса 1:	Слободан Бошкан
Примач сервиса 2:	Милош Никић
Средњи блокер 1:	Андрија Герић
Средњи блокер 2:	Марко Подрашчанин
Либеро:	Марко Самарџић

Табела 9

Коментар ученика Групе 1: „Овај систем рангирања и бодовања није добар, јер ученици Групе 3 су рачунали само категорије у којима су играчи били добри, а нису водили рачуна колико су играчи били лоши у појединим карактеристикама. Ако се погледа нпр. Слободан Бошкан, примач сервиса. Он је био два пута први на листи, али је зато у три карактеристике заузео последње место, а изабран је у идеалну седморку.“

Компаративна анализа резултата истраживања

Након што су ученици и **тест групе** и **контролне групе** завршили тестирање, остало је да још да се упореде резултати истраживања. То ће се извршити на начин тако што ће се прво упоредити резултати тест групе пре и након предавања, а затим ће се упоредити резултати **контролне групе** са резултатима **тест групе** након одржаног предавања.

а) Поређење резултата тест групе пре и након одржаног предавања

Пре било какве анализе потребно је напоменути да се ученици тест групе никада раније нису сусрели са задацима који имају исте или сличне захтеве као задаци који су коришћени приликом истраживања.

Рад у оквиру групе, подела послова, дијалог, заједничка дискусија, сви ти елементи су били нешто на шта се ученици нису навикли, јер је наш школски систем другачије конципиран, тако да им је требало одређено време како би се уклопили.

Приликом другог тестирања, подела у групе и подела задатака унутар групе се одвијала знатно брже и ефикасније, одакле се закључују да су се ученици у кратком временском интервалу, после само два школска часа, привикли на нове услове и стил рада.

Приликом првог тестирања уочено је да се ученици на почетку приликом одабира методе за упоређивање података углавном одлучују за поређење „сваког са сваким“. Међутим велики део се јако брзо одлучује за неки други метод јер је овај метод спор и неефикасан.

Примећено је да ученици имају добар интуитивни осећај за решавање задатака, али да су проблеме имали приликом интерпретације самих података, то јест како нематематичке величине представити као математичке и као такве их обработити.

Од пет група ученици три групе су средили податке табеларно, тј рангирали су податке од оних са највећом вредношћу до оних са најмањом, док су ученици Групе 1 и 2 користили најнеефикасније моделе поређења. Ученици Групе 3 су и поред табеларног представљања података као модел избора и оцењивања користили метод пребројавања, док су само ученици Групе 4 и 5 користили неку бодовну скалу.

Ученици свих група су знали да су неки подаци битнији од других приликом избора, али су само ученици Групе 5 успели да на неки начин одреде приоритете и да на тај начин реше задатак.

Из коментара ученика закључујемо да ученици умеју да уоче недостатак у неком моделу, али и да понуде модел који побољшава претодни.

Оно што се такође уочава јесте да се ученици ни једне групе нису сетили средњих вредности, то јест да могу податке да упоређују на основу неке референтне вредности, а не само међусобно.

На другом тестирању, након предавања, где је наставник указао да постоје још неки модели обраде података, ученици су показали да су знање усвојили и у својим методама имплементирали. Направили су договор између група која ће група користити који модел, како би на крају могли да упореде резултате. Примећен је знатни напредак, јер и поред већих захтева које је имао задатак са одбојкашима, ученици су задатак решили брже и ефикасније.

Закључак који се одмах намеће јесте да ученицима у нашим школама никако не недостаје смисла за решавање задатака, већ их само треба благо усмерити и они ће брзо и лако имплементирати то знање на свим задацима који имају сличне захтеве.

Идеја за решавање проблема и сама реализација нису проблем, него је главни проблем у томе што ученици кроз образовни систем јакно мало раде на обради било каквих типова статистичких података, те имају потешкоћа да проблем препознају као математички и још већих потешкоћа да га представе математички. Те се од ученика често чује следећа реченица: „Знао бих да решим задатак, али не знам да га поставим.“

б) Поређење резултата тест групе и контролне групе након одржаног предавања

Ученици који су чинили контролну групу имали су исто претходно образовање као и ученици тест групе, исти број година и радили су истраживање при истим условима.

Ученици тест групе били су подељени у пет група од по пет ученика, док су ученици контролне групе били подељени у три групе од по шест или седам ученика, и то је једина разлика између услова код ове две групе приликом истраживања.

Примећено је да су ученици контролне групе приступили решавању проблема на скоро идентичан начин као и ученици тест групе пре одржаног предавања. Све што је напоменуто код ученика тест групе пре одржаног предавања.

Ако се упореде модели и методе контролне групе за решавање проблема, са моделима тест групе након одржаног предавања уочиће се велике разлике. Ученици који су имали предавање су много организованије приступили проблему и решавали су проблем методама које су много ефикасније од ученика који су чинили контролну групу.

Тако да је овде истоветна разлика као и разлика између модела тест групе пре и након одржаног предавања. Можда би ово најбоље илустровао коментар једног ученика из тест групе након спроведеног истраживања: „Кад упоредим нас приликом првог и другог тестирања, изгледа ми као да су неке мале бебе понудиле решења задатка из првог теста, а да су неки сурови професионалци понудили решење задатка из другог теста.“

Закључак

Постоји неколико аспеката овог истраживања којима треба придати значај у математичкој едукацији. Прво, то су проблеми који нису рутински и који су дизајнирани тако да се разликују од задатака који ученици обично добијају током школовања. Као што је показало ово истраживање, ови задаци дају богату основу за независни развој математичких идеја код ученика. Као што смо видели, у сваком стадијуму током овог истраживања, ученици су се ангажовали максимално, како би резултати били што меродавнији.

Друго, задаци у овом истраживању захтевају од ученика да комуницирају и деле своје математичке идеје и објасне како се њихови модели могу користити. Посматрали смо како ученици улажу напор како би вербализовали првобитно имплицитно разумевање и које доводи до објашњавања кључних математичких конструкција. Као што је наведено, приликом првог тестирања ученика тест групе: „рад у оквиру групе, подела послова, дијалог, заједничка дискусија, сви ти елементи су били нешто на шта се ученици нису навикли, јер је наш школски систем другачије конципиран, тако да им је требало одређено време како би се уклопили.“

Док је : „Приликом другог тестирања, подела у групе и подела задатака унутар групе се одвијала знатно брже и ефикасније, одакле се закључују да су се ученици у кратком временском интервалу, после само два школска часа, привикли на нове услове и стил рада.“

Јако важно за ово истраживање је и образовање које су ученици стекли током ранијег школовања. Сви учесници овог истраживања су ученици прве године средње школе, који су тек изашли из основне школе. Управо због тога је у одељку „Основна школа“ анализирано градива математике основне школе у којима се користи статистичка обрада података: „Ако бисмо упоредили укупан број часова математике у основној школи, који износи 568 (пети, шести, седми разред по 144 часа годишње, а у осмом 136 часова годишње, наравно без часова допунске и додатне наставе, који броје укупно 72 часа годишње за све године, и око 30 часова предвиђених за припремну наставу за полагање завршног испита код ученика осмог разреда), и укупан број часова где се бар на неки начин употребљавају методе статистичке обраде података, где смо видели да има 32 часа (два у петом разреду, два у шестом разреду, двадесет у седмом разреду и

седам у осмом разреду), закључујемо да статистичка обрада података заузима највише 5,6% укупног градива предвиђеног за учење математике у основној школи.“ Што је у данашње време премало, у односу на важност правилне интерпретације података.

На завршном тесту из математике, проценат који обрада статистичких података заузима је такође анализиран у одељку „Завршни испит“ :

„Евидентно је да област „Обрада података“ обухвата:

23 од 127 , или 18,1 %, задатака из основног нивоа;

25 од 130, или 19,2 % задатака из средњег нивоа;

24 од 123, или 19,5 % задатака из напредног нивоа;

Што укупно чини 72 задатка од 380 задатака у збирци за припрему завршног испита из математике, или 18,9%.

Што се тиче самих тестова, примећује се следеће:

Школска 2010/2011- На завршном тесту из математике било је 20 задатака. Из области „Обрада података“ било је три задатка, и чинили су 15% од укупног броја задатака на тесту.

Школска 2011/2012- На завршном тесту из математике било је 20 задатака. Из области „Обрада података“ било је четири задатка и чинили су 20% од укупног броја задатака на тесту.

Школска 2012/2013- На завршном тесту из математике било је 20 задатака. Из области „Обрада података“ било је четири задатка и чинили су 20% од укупног броја задатака на тесту.

Школска 2013/2014- На завршном тесту из математике било је 20 задатака. Из области „Обрада података“ било је два задатка и чинили су 10% од укупног броја задатака на тесту.“

Евидентно је да је обради статистичких података такође посвећено премало пажње и у оквиру завршног испита. Још ако знамо да се та обрада своди углавном на ишчитавање података из табела и графика, закључујемо да је укупно образовање ученика везано за статистичку обраду података било и више него сиромашно пре него што су учествовали у истраживању.

С обзиром на такву ситуацију, може се такође закључити да су се ученици обе групе, и тест и контролне, одлично снашли у спроведеном истраживању: „Примећено је да ученици имају добар интуитивни осећај за решавање задатака, али да су проблеме имали приликом интерпретације самих података, то јест како нематематичке величине представити као математичке и као такве их обработити.“

Ако је стање у основној школи тако лоше, помислили бисмо да ће се стање у средњој школи поправити, и да ће ученици наших средњих школа у оквиру наставе математике надокнадити пропусте који су имали у ранијем образовању. Међутим, у одељку „Средња школа“, где је анализирано градиво математике у свим типовима гимназија, наилази се на следеће податке: „Обрада статистичких података у првом разреду, обрађује се делимично у оквиру наставне теме „Пропорционалност величина“, и то у 8 наставних јединица, од којих су 5. часова предвиђених за обраду, а три часа за утврђивање градива, од укупно 148 часова годишње, што чини око 5,4% укупног градива предвиђеног за прву годину гимназија.

У другом разреду, у оквиру модела М1 наставних планова и програма математике за гимназије општег типа, од укупно 140 часова годишње обрада и рад са статистичким подацима обрађује се у 18 наставних јединица, што чини 12,9% укупног градива предвиђеног за другу годину гимназија.

У оквиру модела М2 наставних планова и програма математике за гимназије друштвено-језичког смера од укупно 105 часова годишње обрада и рад са статистичким подацима обрађује се у 14 наставних јединица, што чини 13,3% укупног градива предвиђеног за другу годину гимназија.

У оквиру модела М3 наставних планова и програма математике за гимназије природно-математичког смера од укупно 175 часова годишње, обрада и рад са статистичким подацима обрађује се у 18 наставних јединица, што чини 10,3% укупног градива предвиђеног за другу годину гимназија.

Ако се узме у обзир да сви задаци захтевају само елементарно цртање графика функција на основу табела, закључује се да неког озбиљнијег рада са статистичким подацима готово и да нема ни у једном типу гимназија.

Обрада и рад са статистичким подацима у оквиру свих програма, свих типова гимназија, у трећем разреду, такође није заступљена експлицитно у оквиру једне наставне теме, чак шта више, програм за трећу годину свих типова гимназија готово да и не садржи било какве задатке везане за статистичку обраду података.

Једино се у оквиру наставне теме „аналитичка геометрија у равни“, и то само у оквиру програма М3 за природно-математички смер појављује се транспортни проблем, као део линеарног програмирања, а самим тим и део статистике. Он се обрађује у две наставне јединице, од којих је једна предвиђена за обраду, а једна за утврђивање. Ако знамо да је за природно-математички смер предвиђено 180 часова математике годишње, обрада и рад са статистичким подацима чини 1,1% укупног градива. У збирци задатака из математике транспортни проблем је постављен у два задатка од укупно 1354 колико их има у збирци и чине 0,15 % од укупног броја задатака.

У оквиру друга два програма (М1 и М2), дакле гимназија општег и друштвено-језичког типа, транспортни проблем се не обрађује.

У четвртном разреду, у оквиру програма (М1 и М3), дакле у оквиру општег и природно-математичког смера гимназија, у наставној теми „вероватноћа и статистика“, обрађују се елементи вероватноће и математичке статистике и то у 28 наставних јединица, од којих је 14 часова предвиђено за обраду, а 14 за утврђивање градива, од укупно 128 часова годишње, што чини 21,9 % укупног градива математике предвиђеног програмом за четврту годину гимназије. Наравно, у овај проценат добрим делом спадају и наставне јединице које се баве вероватноћом, тако да део који се бави искључиво статистиком заузима знатно мањи проценат. Што се задатака из статистике тиче, у збирци задатака из математике, њих 29 се односи на статистичку обраду података, од укупно 711 задатака предвиђених планом и програмом за четврту годину гимназије, што чини 4,1% од укупног броја задатака у збирци задатака.

У оквиру програма М2, дакле гимназије друштвено-језичког смера у наставној теми „вероватноћа и статистика“, обрађују се елементи вероватноће и математичке статистике и то у 15 наставних јединица, од којих је 7 часова предвиђено за обраду, а 8 за утврђивање градива, од укупно 64 часа годишње, што чини 23,4% укупног градива математике предвиђеног програмом за четврту годину гимназије друштвено-језичког смера.“

Значи мало озбиљнији приступ статистици и статистичкој обради података, имамо тек у четвртој години гимназија и средњих стручних школа. Још ако се узме у обзир да се наведено градиво изучава на самом крају школске године, када многи наставници због нагомиланог претходног градива и не стигну да обраде ову наставну тему, закључујемо да је стање у средњој школи можда и катастрофалније него у основној.

Савремено доба и модерна ера незамислива је без статистичког образовања, те је овакво стање у школском систему веома лоше, и планови и програми наставе математике за основну и за средњу школу би дефинитивно требали да доживе корениту промену и да се у потпуности ревидирају, како бисмо у будуће имали генерације које ће бити способније да се носе са захтевима модерног доба, а то без адекватног образовања никако неће моћи.

Литература

- Проф. Др Јевремовић, В., (2011), *Две лекције из статистике*, Републички семинар за наставу математике, Нови Сад
- Јешић, Д., Мишић, Д., Игњатовић, М., (2010), *Збирка задатака из математике за 5. разред основне школе*, Герундијум, Београд
- Јешић, Д., Мишић, Д., Игњатовић, М., (2010), *Збирка задатака из математике за 6. разред основне школе*, Герундијум, Београд
- Јешић, Д., Мишић, Д., Игњатовић, М., Бабачев, Н., (2009), *Збирка задатака из математике за 7. Разред основне школе*, Герундијум, Београд
- Јешић, Д., Мишић, Д., Игњатовић, М., Милетић, В., (2009), *Збирка задатака из математике за 8. разред основне школе*, Герундијум, Београд
- Јешић, Д., Мишић, Д., Игњатовић, М., (2008), *Математика за 5. разред основне школе*, Герундијум, Београд
- Јешић, Д., Мишић, Д., Игњатовић, М., (2008), *Математика за 6. разред основне школе*, Герундијум, Београд
- Јешић, Д., Мишић, Д., Игњатовић, М., Бабачев, Н., (2009), *Математика за 7. разред основне школе*, Герундијум, Београд
- Јешић, Д., Мишић, Д., Бабачев, Н., (2009), *Математика за 8. разред основне школе*, Герундијум, Београд
- Спец. Росић, А., Ранчић, Ј., Ђуковић, Ј., мр. Кнежевић, М., Стојсављевић Радовановић, М., Огризовић, П., Богдановић, Р., Малић, Т., (2013), *Збирка задатака из математике за завршни испит у основном образовању и васпитању за школску 2013/2014*, Министарство просвете, науке и технолошког развоја; Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања
- Ивановић, Ж., Огњановић, С., (2011), *Збирка задатака и тестова из математике за 1. разред гимназија и техничких школа*, Круг, Београд
- Ивановић, Ж., Огњановић, С., (2011), *Збирка задатака и тестова из математике за 2. разред гимназија и техничких школа*, Круг, Београд

- Ивановић, Ж., Огњановић, С., (2011), *Збирка задатака и тестова из математике за 3. разред гимназија и техничких школа*, Круг, Београд
- Ивановић, Ж., Огњановић, С., (2011), *Збирка задатака и тестова из математике за 4. разред гимназија и техничких школа*, Круг, Београд
- Жижић, М., Вукосављевић, М., Видић, М., (2011), *Збирка задатака из статистике 3,4*, Завод за уџбенике, Београд
- Нешић, В., Чабаркапа, М., Видић, М., (2004), *Рачунарство и информатика за 2. разред гимназија*, Круг, Београд
- Миличић, П., Стојановић, В., Каделбург, З., Боричић, Б., (2003), *Математика 1 за први разред средње школе*, Завод за уџбенике, Београд
- Војводић, Г., Петровић, В., Деспотовић, Р., Шешеља, Б., (2000), *Математика 2 за други разред средње школе*, Завод за уџбенике, Београд
- Кечкић, Ј., (2004), *Математика 3 са збирком задатака за 3. разред средње школе*, Завод за уџбенике, Београд
- Кечкић, Ј., (2004), *Математика 4 са збирком задатака за 4. Разред гимназије*, Круг, Београд