УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

МАСТЕР РАД

ГЕОМЕТРИЈСКА СВОЈСТВА АНАЛИТИЧКИХ ФУНКЦИЈА

Аутор
Бобан Карапетровић

Ментор
проф. Миодраг Матељевић

Јул, 2014.

Садржај

Увод

> Une fonction entiere, qui ne devient jamais ni a a ni a b est necessairement une constante (Цела функција која испушта вредности a и b мора бити константна). É. Picard, 1879.

Геометријска теорија функција, као једна од фундаменталних дисциплина комплексне анализе, настоји да уочи и опише геометријска својства холоморфних функција. Овај мастер рад посвећен је одабраним поглављима геометријске теорије функција. Састоји се из шест глава, при чему свака глава има по три одељка. У свакој од њих обрађена је по једна тема из класичне геометријске теорије функција. Прва глава је посвећена класичној Schwarz[1]-овој леми, при чему су наведена нека од тврђења корисна у наредним главама, тако да ова глава има и уводни карактер. У другом делу ове главе представљена је Schwarz-Pick[2]-ова лема која је уопштење Schwarz-ове леме, као и неке од њених последица. Један од новијих резултата односи се на Schwarz-ову лему на граници коју је доказао Robert Osserman[3] 2000. године. У другој глави су обрађене метрике (кажемо још и *густине*) дефинисане у комплексним областима. Специјално место заузима Poincaré[4]-ова метрика на јединичном диску $\mathbb{D}$. Показује се да је јединични диск $\mathbb{D}$ снабдевен Poincaré-овом метриком комплетан метрички простор. Последица тога, јесте елегантан доказ Farkas[5]-Ritt[6]-ове теореме о фиксној тачки, користећи Banach[7]-ову теорему о фиксној тачки. Уведена је кривина метрике и доказана уопштена Ahlfors[8]-Schwarz-ова лема. Као једну последицу добијамо Liouville[9]-ову теорему. Поред тога, преко резултата добијених у одељку 2.3 доказана је мала Picard[10]-ова теорема. Једна од бројних последица ове теореме јесте основна теорема алгебре. У трећој глави су заступљене теореме Bloch[11]-овог типа, које се односе на величину слике $f(\mathbb{D})$, при холоморфној, неконстантној функцији f. Bloch-ова теорема тврди да слика $f(\mathbb{D})$ садржи неки диск полупречника $\frac{3}{2}-\sqrt{2}\approx 0.0858$, где је f функција која је холоморфна у неком отвореном скупу који садржи јединични диск и која задовољава услов $f'(0)=1$. Иначе, за такву функцију f, са B_f је означен полупречник највећег диска који садржи слика $f(\mathbb{D})$. Своју теорему Bloch је доказао 1924. године, која је, као што се испоставило, имала значајне последице у геометријској теорији функција. Уз извесне напоре, могуће је направити побољшање ове константе на $\frac{3}{2}\sqrt{2}-2\approx 0.1213$. Ahlfors-ова теорема представаља значајан прогрес у овој области. Ahlfors је показао, да под наведеним условима, слика $f(\mathbb{D})$ садржи неки диск полупречника $\frac{\sqrt{3}}{4}\approx 0.433$, што је више него три пута бољи резултат од претходне константе $\frac{3}{2}\sqrt{2}-2\approx 0.1213$. Инфимум вредности B_f, где је

[1] Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) - немачки математичар
[2] Georg Pick (1859-1942) - аустријски математичар
[3] Robert Osserman (1926-2011) - амерички математичар
[4] Henri Poincaré (1854-1912) - француски математичар
[5] Gyula Farkas (1847-1930) - мађарски математичар
[6] Joseph Ritt (1893-1951) - амерички математичар
[7] Stefan Banach (1892-1945) - пољски математичар
[8] Lars Valerian Ahlfors (1907-1996) - фински математичар
[9] Joseph Liouville (1809-1882) - француски математичар
[10] Émile Picard (1856-1941) - француски математичар
[11] André Bloch (1893-1948) - француски математичар

f функција која је холоморфна у неком отвореном скупу који садржи јединични диск и која задовољава услов $f'(0) = 1$, представаља Bloch-ову константу B. Тачна вредност Bloch-ове константе није позната. Ahlfors-ова теорема нам даје да важи $B \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}$. Ahlfors и Grunsky[12] су изнели хипотезу да је тачна вредност Bloch-ове константе дата са $B = \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{11}{12})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \approx 0.4719$. Наведена хипотеза није разрешена од 1936. године. У овој глави, представљен је још један доказ мале Picard-ове теореме, преко резултата из одељка 3.3. Централно место у четвртој глави заузима теорема Montel[13]-а. Paul Montel је први препознао значај издвајања конвергентог подниза неког низа функција. Теорему која је добила име по њему публиковао је 1907. године. Независно од њега, Paul Koebe[14] открио је и доказао исту теорему 1908. године. Осим тога, израз *нормална фамилија* први је употребио Montel у свом раду из 1912. године. Велики део свог живота Montel је посветио изучавању нормалних фамилија. Једна од значајнијих последица његове теореме јесте велика Picard-ова теорема. Picard је своје теореме (малу и велику) доказао 1879. године користећи модуларне функције. Једна од последица Montel-ове теореме јесте теорема Vitali[15]-ја, коју је Vitali, у нешто слабијој варијанти, доказао 1904. године. Побољшана верзија теореме Vitali-ја јесте теорема Carathéodory[16]-ја која је доказана на крају другог дела ове главе. Сасвим неочекивано, многа својства холоморфних функција, укључујући и она геометријска, крију се у њиховим низовима итерација. Итерације холоморфних функција јесу предмет разматрања у петој глави. Најважнија теорема ове главе јесте Cartan[17]-ова теорема која има многе интересантне последице. Такође, у овој глави је описана група $\mathrm{Aut}_a(\Omega)$ аутоморфизама ограничене области $\Omega \subset \mathbb{C}$ који фиксирају тачку $a \in \Omega$. Наиме, показује се да је ова група изоморфна групи $\mathbb{S}^1$ или некој њеној коначној, цикличној подгрупи. Доказана је и теорема која даје довољне услове да при компактној конвергенцији гранична функција не буде константна. У шестој глави се уводе коначна холоморфна пресликавања као и намотавајућа холоморфна пресликавања. У вези са тим, испоставља се да је свако неконстантно холоморфно пресликавање, локално гледано једно намотавајуће пресликавање. Представљена је теорема о карактеризацији коначних холоморфних пресликавања. Централна теорема ове главе, у којој су у великој мери заступљена различита тополошка својства, јесте теорема Radó[18]-а која омогућава дефинисање степена коначног холоморфног пресликавања. Такође, степен композиције пресликавања јесте производ степена пресликавања која формирају ту композицију. Након ових шест глава наведен је списак коришћене литературе.

[12] Helmut Grunsky (1904-1986) - немачки математичар
[13] Paul Montel (1876-1975) - француски математичар
[14] Paul Koebe (1882-1945) - немачки математичар
[15] Giuseppe Vitali (1875-1932) - италијански математичар
[16] Constantin Carathéodory (1873-1950) - грчки математичар
[17] Henri Cartan (1904-2008) - француски математичар
[18] Tibor Radó (1895-1965) - мађарски математичар

Ознаке

• $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ - отворени диск са центром у $z_0 \in \mathbb{C}$ полупречника $r > 0$.

• $D'(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$ - пробушени диск са центром у z_0 полупречника $r > 0$.

• $D[z_0, r] = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leqslant r\}$ - затворени диск са центром у z_0 полупречника $r > 0$.

• $\mathbb{D} = D(0, 1)$ - отворени јединични диск са центром у координатном почетку.

• $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(x + iy) = x$ - реални део комплексног броја $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

• $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(x + iy) = y$ - имагинарни део комплексног броја $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

• $\arg z$ - аргумент комплексног броја $z \in \mathbb{C}$.

• $\nu(f, c)$ - ред броја c као нуле функције $f - f(c)$.

• $|f|_\Omega = \sup \{|f(z)| \mid z \in \Omega\}$.

• $\operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$ - индекс криве γ у односу на тачку $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$.

• $\operatorname{Int} \gamma = \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma \mid \operatorname{ind}_\gamma(z) \neq 0\}$ - унутрашњост криве γ.

• $\operatorname{Ext} \gamma = \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma \mid \operatorname{ind}_\gamma(z) = 0\}$ - спољашњост криве γ.

• $\Omega \subset \mathbb{C}$ област у комплексној равни - непразан, отворен и повезан скуп.

• $d(x, A) = \inf \{d(x, y) \mid y \in A\}$ - растојање тачке $x \in X$ од скупа $A \subset X$ у метричком простору (X, d).

• $d(A, B) = \inf \{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ - растојање између скупова $A \subset X$ и $B \subset X$ у метричком простору (X, d).

• $\operatorname{Hol}(\Omega) = \{f : \Omega \to \Omega \mid f$ је холоморфна функција$\}$.

• $\operatorname{Hol}_a(\Omega) = \{f \in \operatorname{Hol}(\Omega) \mid f(a) = a\}$.

• $\operatorname{Aut}(\Omega) = \{f : \Omega \to \Omega \mid f$ је бихоломорфна функција$\}$.

• $\operatorname{Aut}_a(\Omega) = \{f \in \operatorname{Aut}(\Omega) \mid f(a) = a\}$.

Глава 1

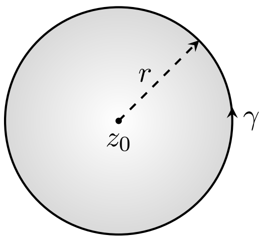
Schwarz-ова лема на граници

1.1 Schwarz-ова лема

Schwarz-ова лема представља једно од основних тврђења комплексне теорије функција. Представља директну примену принципа максимума модула, као једног од фундаменталних принципа комплексне анализе. У овом поглављу представљена је Schwarz-ова лема и неке њене варијанте. Међутим, ова глава има уводни карактер, тако да су најпре наведена нека општа својства холоморфних функција, која ће бити од користи у даљим разматрањима.

Теорема. Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}$ област и f холоморфна, неконстантна функција у Ω. Ако је $V \subset \Omega$ отворен скуп, тада је и скуп $f(V)$ отворен. Специјално, $f(\Omega)$ је област.

Доказ. Нека је $z_0 \in V$ произвољно одабрана тачка и посматрајмо функцију дефинисану са $g(z) \overset{\text{деф}}{=} f(z) - f(z_0)$, где је $z \in \Omega$. Тада је g холоморфна функција у Ω као композиција таквих. Нуле холоморфне функције g јесу изоловане (у супротном би, на основу теореме јединости, важило $g \equiv 0$, тј. f би била константна функција), тако да постоји $r > 0$, такво да функција g нема нула у $D[z_0, r] \setminus \{z_0\}$ и $D[z_0, r] \subset V$. Нека је $\gamma = \partial D(z_0, r)$. Функција $|g|$ јесте непрекидна на компакту $\{|z - z_0| = r\}$ и на њему достиже свој минимум $\delta = \min\limits_{\gamma}|g| > 0$. Нека је b произвољно одабрана тачка из диска $D(f(z_0), \delta)$. Тада је $|f(z_0) - b| < \delta \leqslant |g(z)|$ за све $z \in \partial D(z_0, r)$, па применом Rouché-ове теореме добијамо да функције $g(z) + f(z_0) - b = f(z) - b$ и $g(z)$ имају исти број нула у диску $D(z_0, r)$. Како је $g(z_0) = 0$, то и функција $f(z) - b$ има бар једну нулу у диску $D(z_0, r)$, тако да је $f(z) = b$ за неко $z \in D(z_0, r)$. Из претходног следи $b \in f\left(D(z_0, r)\right)$ и како је $b \in D(f(z_0), \delta)$ произвољно одабрана тачка, важи $D(f(z_0), \delta) \subset f\left(D(z_0, r)\right) \subset f(V)$. Добијамо $D(f(z_0), \delta) \subset f(V)$ и како је $z_0 \in V$ произвољно одабрана тачка, то је $f(V)$ отворен скуп. Специјално, $f(\Omega)$ је отворен скуп, такође. Како је непрекидна слика повезаног скупа, опет повезан скуп, то је $f(\Omega)$ повезан скуп (функција f је холоморфна, а тиме и непрекидна). Према томе, $f(\Omega)$ је област. ∎



$D(z_0, r)$

Претходна теорема се зове *теорема о отвореном пресликавању.* За пресликавање које отворене скупове пресликава опет на отворене скупове, кажемо да је *отворено.* Дакле, под условима претходне теореме, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ је отворено пресликавање.

Став. Ако је f холоморфна и $1-1$ функција у области Ω, тада важи $f'(z) \neq 0$ за све $z \in \Omega$.

Доказ. Претпоставимо да је $f'(z_0) = 0$ за неко $z_0 \in \Omega$. Нека је $g(z) \overset{\text{деф}}{=} f(z) - f(z_0)$ за све $z \in \Omega$. Функција g је холоморфна у области Ω као композиција таквих. Функција f

није константна, јер је $1-1$, а самим тим и функција g није константна. Такође, функција f' није константна, јер би у супротном било $f' \equiv 0$ у Ω (због претпоставке да је $f'(z_0)=0$), односно, f би била константна функција у области Ω. Дакле, нуле холоморфних функција g и f' јесу изоловане. Према томе, постоји $r>0$, такво да функције g и f' немају нула у $D[z_0,r]\setminus\{z_0\}$ и $D[z_0,r]\subset\Omega$. Функција $|g|$ је непрекидна и на компакту $\partial D(z_0,r)$ достиже свој минимум, при чему важи $\delta=\min\limits_{\partial D(z_0,r)}|g|>0$. Нека је $b\in D(f(z_0),\delta)\setminus\{f(z_0)\}$ произвољно одабрана тачка. Тада је $|f(z_0)-b|<\delta\leqslant|g(z)|$ за све $z\in\partial D(z_0,r)$. На основу Rouché-ове теореме фунције $g(z)+f(z_0)-b=f(z)-b$ и $g(z)$ имају исти број нула у диску $D(z_0,r)$. Како је $g(z)=\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\dots$, то функција $g(z)$ има бар две нуле у диску $D(z_0,r)$, а самим тим и функција $f(z)-b$ има бар две нуле у диску $D(z_0,r)$. Осим тога, важи $f(z_0)-b\neq0$, тако да функција $f(z)-b$ има бар две нуле у $D(z_0,r)\setminus\{z_0\}$ и оне морају бити различите, јер је $f'\neq0$ у $D(z_0,r)\setminus\{z_0\}$. Међутим, ово је у контрадикцији са претпоставком да је f једна $1-1$ функција. Дакле, важи $f'(z)\neq0$ за све $z\in\Omega$. ■

Пример. Нека је $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ холоморфна функција. Ако важи $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\infty$, доказати да је тада f полином.

Решење. Функција $g(z)\overset{\text{деф}}{=}f(\frac{1}{z})$ јесте холоморфна у $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Осим тога, важи $\lim\limits_{z\to0}g(z)=\infty$, тако да је 0 пол функције g. За произвољно $M>0$, постоји $R>0$, тако да је $|g(z)|>M$ за све $|z|<R$. Односно, важи $\left|\frac{1}{g(z)}\right|<\frac{1}{M}$ за све $|z|<R$, па је функција $\frac{1}{g(z)}$ ограничена у околини сингуларитета у тачки 0 и самим тим, тај сингуларитет је отклоњив (Riemann-ова теорема о отклоњивом сингуларитету). Добијамо да је $\frac{1}{g(z)}=a_0+a_1z+a_2z^2+\dots$ и како важи $a_0=\lim\limits_{z\to0}\frac{1}{g(z)}=0$, то је $\frac{1}{g(z)}=a_1z+a_2z^2+\dots$ у околини тачке 0. Означимо са a_m, где је $m\geqslant1$, први члан у развоју који је различит од нуле. Следи $\frac{1}{g(z)}=a_mz^m+a_{m+1}z^{m+1}+\dots$, односно $\frac{1}{z^mg(z)}=a_m+a_{m+1}z+\dots$ и дефинишимо функцију $h(z)=z^mg(z)$. Сада је $\lim\limits_{z\to0}h(z)=\frac{1}{a_m}$, па је $h(z)=z^mf(\frac{1}{z})$ холоморфна функција. Самим тим, функција $|h(z)|$ је ограничена на компакту $\overline{\mathbb{D}}$, тј. постоји константа $A>0$, таква да је $|h(z)|\leqslant A$ за све $|z|\leqslant1$. Следи $\left|h(\frac{1}{z})\right|=\left|\frac{1}{z^m}f(z)\right|\leqslant A$ за све $|z|\geqslant1$, тако да важи $|f(z)|\leqslant A|z|^m$ за све $|z|\geqslant1$. Функција $|f(z)|$ јесте ограничена на компакту $\overline{\mathbb{D}}$, тј. постоји константа $B>0$, таква да је $|f(z)|\leqslant B$ за све $|z|\leqslant1$. Добијамо да важи $|f(z)|\leqslant A|z|^m+B$ за све $z\in\mathbb{C}$ и ако узмемо да је $C=\max\{A,B\}$, следи $|f(z)|\leqslant C\,(|z|^m+1)$ за све $z\in\mathbb{C}$. Нека је $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ развој функције $f(z)$ у околини тачке 0 и $\gamma_r=\partial D(0,r)$ за $r>0$. За све $n>m$ важи $|b_n|=\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right|\leqslant\frac{C}{2\pi}\int_{\gamma_r}\frac{|z|^m+1}{|z|^{n+1}}|dz|=\frac{C}{2\pi}\cdot\frac{r^m+1}{r^{n+1}}\cdot2\pi r=C\cdot\frac{r^m+1}{r^n}\to0$ кад $r\to\infty$, тако да је $b_n=0$ за све $n>m$. Дакле, $f(z)$ је полином. ♣

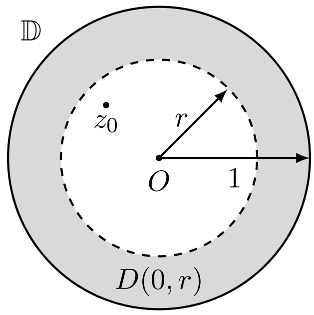
Приметимо да важи и обрат, али за неконстантне полиноме. Наиме, ако је $p:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ неконстантан полином, тада важи $\lim\limits_{z\to\infty}p(z)=\infty$.

Пример. Ако је f холоморфна функција у области Ω и ако је бар једна од функција $\operatorname{Re}f$, $\operatorname{Im}f$, $|f|$ или $\arg f$ константна, доказати да је тада и f константна функција.

Решење. Уколико је $\operatorname{Re}f$ константна функција, тада је слика $f(\Omega)$ подскуп праве која је паралелна имагинарној оси. Ако је пак, $\operatorname{Im}f$ константна функција, слика $f(\Omega)$ је подскуп праве која је паралелна реалној оси. Слично, ако је $|f|$, односно $\arg f$, константна функција, тада је $f(\Omega)$ подскуп кружнице, односно праве са константним аргументом. У сваком случају, $f(\Omega)$ није отворен скуп, тако да f мора бити константна функција. ♣

Лема (Schwarz). Нека је $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ холоморфна функција и $f(0)=0$. Тада важи $|f(z)|\leqslant|z|$ за све $z\in\mathbb{D}$ и $|f'(0)|\leqslant1$, при чему важи једнакост $|f(z)|=|z|$ за неко $z\in\mathbb{D}\setminus\{0\}$ или $|f'(0)|=1$ ако и само ако је $f(z)=e^{i\alpha}z$, $z\in\mathbb{D}$ за неко $\alpha\in\mathbb{R}$.

Доказ. Нека је $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ Taylor-ов развој функције $f(z)$ у диску $\mathbb{D}$. Тада је $a_0 = f(0) = 0$ и $a_1 = f'(0)$, самим тим важи $f(z) = zg(z)$, где је $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$. Функција $g(z)$ је холоморфна у диску $\mathbb{D}$, јер је представљена конвергентим степеним редом. Takoђе је $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ за $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ и $g(0) = f'(0)$. Узмимо $z_0 \in \mathbb{D}$ и нека је $r \in (|z_0|, 1)$ произвољно одабрано. За $z \in \partial D(0, r)$ важи $|g(z)| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant \frac{1}{r}$ тако да нам принцип максимума модула даје $|g(z)| \leqslant \frac{1}{r}$ за све $z \in D(0, r)$. Следи $|g(z_0)| \leqslant \frac{1}{r}$ за све $|z_0| < r < 1$ и ако пустимо да $r \to 1^-$ добијамо $|g(z_0)| \leqslant 1$. Дакле, $|g(z_0)| \leqslant 1$ за све $z_0 \in \mathbb{D}$, тј. $|g(z)| \leqslant 1$ за све $z \in \mathbb{D}$. Одатле је $|f'(0)| = |g(0)| \leqslant 1$ и $|f(z)| = |z| \cdot |g(z)| \leqslant |z|$ за све $z \in \mathbb{D}$. Ако важи једнакост, на основу принципа максимума модула функција $g(z)$ је константна и $|g(z)| = 1$ па је $g(z) = e^{i\alpha}, z \in \mathbb{D}$ за неко $\alpha \in \mathbb{R}$, тј. важи $f(z) = e^{i\alpha} z$ за све $z \in \mathbb{D}$. Обрнуто, ако је $f(z) = e^{i\alpha} z, z \in \mathbb{D}$ тада директно имамо $|f(z)| = |z|$ за $z \in \mathbb{D}$ и $|f'(0)| = 1$. ■



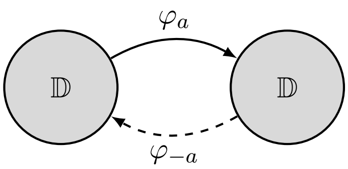
Дефиниција. Области Ω_1 и Ω_2 у комплексној равни су *конформно еквивалентне* ако постоји конформна бијекција $f : \Omega_1 \to \Omega_2$. Конформну бијекцију $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ називамо *конформним изоморфизмом* области Ω_1 и Ω_2. Конформни изоморфизам области на себе јесте *конформни аутоморфизам* те области. ♠

Ако је $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ холоморфно и бијективно пресликавање, где су Ω_1 и Ω_2 области у комплексној равни, тада је $f'(z) \neq 0$ за све $z \in \Omega_1$, тако да је f конформно пресликавање. Нека је $w \in \Omega_2$ произвољно. Тада је $w = f(z)$ за неко $z \in \Omega_1$ и важи $(f^{-1})'(w) = (f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$, тако да је и $f^{-1} : \Omega_2 \to \Omega_1$ холоморфно пресликавање. Према томе, области Ω_1 и Ω_2 су конформно еквивалентне и f је конформни изоморфизам. Осим тога, кажемо још да је f *бихоломорфно* пресликавање и да су области Ω_1 и Ω_2 *бихоломорфно еквивалентне*.

Нека је Ω област у комплексној равни. Скуп свих њених конформних аутоморфизама означавамо са $\mathrm{Aut}(\Omega)$. За функције $f, g \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ имамо $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z) \neq 0$ за све $z \in \Omega$ (јер су f и g конформна пресликавања) тако да је $g \circ f$ конформно пресликавање.

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g \circ f"'] & \Omega \arrow[d, "g"] \\ & \Omega \end{tikzcd}$$

Такође, $g \circ f$ је бијективно пресликавање као композиција два таква. Према томе, $g \circ f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$. Осим тога, важи $(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(z)} \neq 0$ за све $z \in \Omega$, тако да је и f^{-1} конформни изоморфизам области Ω, тј. $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(\Omega)$. Са друге стране, имамо да важи $f \circ \mathrm{id}_\Omega = \mathrm{id}_\Omega \circ f = f$ и $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_\Omega$, где је $\mathrm{id}_\Omega : \Omega \to \Omega$ индентичко пресликавање, при чему $\mathrm{id}_\Omega \in \Omega$. Из свега претходног добијамо да је $\mathrm{Aut}(\Omega)$ једна група, коју зовемо *група аутоморфизама* области Ω. Нека је $a \in \mathbb{D}$ произвољно одабрана тачка. Дефинишимо пресликавање $\varphi_a(z) \overset{\text{деф}}{=} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Из $\varphi_a(z_1) = \varphi_a(z_2)$ добијамо $\left(1 - |a|^2\right)(z_1 - z_2) = 0$ и како $a \in \mathbb{D}$, то имамо да је φ_a *1-1* пресликавање (заправо, φ_a је билинеарно, а тиме и *1-1* пресликавање). Са друге стране, имамо да важи $\left|\varphi_a(e^{i\theta})\right| = \left|\frac{e^{i\theta}-a}{1-\bar{a}e^{i\theta}}\right| = \left|\frac{e^{i\theta}-a}{e^{i\theta}-a}\right| = 1$, тако да је $\varphi_a(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{D}$. Ако искористимо принцип максимума модула добијамо $\varphi_a(\overline{\mathbb{D}}) \subset \overline{\mathbb{D}}$. Како важи $-a \in \mathbb{D}$, то је аналогно претходном $\varphi_{-a}(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{D}$ и $\varphi_{-a}(\overline{\mathbb{D}}) \subset \overline{\mathbb{D}}$. Директно се проверава да је $\varphi_a^{-1} = \varphi_{-a}$. Следи, функција $\varphi_a : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ је бијекција. Сада, из $\partial\mathbb{D} = \varphi_{-a}(\varphi_a(\partial\mathbb{D})) \subset \varphi_{-a}(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{D}$, имамо $\varphi_a(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$ што са чињеницом да је $\varphi_a : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ бијекција даје $\varphi_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ (ово смо могли закључити и на други начин: φ_a је билинерано пресликавање и пресликава праве или кружнице опет на праве или кружнице, тако да из $\varphi_a(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{D}$ одмах добијамо $\varphi_a(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$, а одатле је као у претходном $\varphi_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$). Такође, $\varphi_a'(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2} \neq 0$. Према томе, $\varphi_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ је једна конформна бијекција, односно $\varphi_a \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Приметимо још да је $\varphi_a(a) = 0$, $\varphi_a(0) = -a$, $\varphi_a'(a) = \frac{1}{1-|a|^2}$ и $\varphi_a(0) = 1 - |a|^2$. Опишимо сада све конформне аутоморфизме јединичног диска $\mathbb{D}$. Јасно је да из претходног важи $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \supset \{z \mapsto e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z} | a \in \mathbb{D}, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Нека је $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ произвољно одабран аутоморфизам и означимо $b = f(0)$. Тада је $F = \varphi_b \circ f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ и $F(0) = \varphi_b(b) = 0$. Одатле је $F^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ и $F^{-1}(0) = 0$. Применом Schwarz-ове леме на пресликавање F добијамо $|F(z)| \leqslant |z|$ за све $z \in \mathbb{D}$. Исто тако, можемо применити Schwarz-ову лему и на пресликавање F^{-1} тако да је $|F^{-1}(w)| \leqslant |w|$ за све $w \in \mathbb{D}$. Заменом $w = F(z)$ у последњу неједнакост добијамо да је $|z| \leqslant |F(z)|$ за све $z \in \mathbb{D}$. Из претходног је $|F(z)| = |z|$ за све $z \in \mathbb{D}$ и самим тим, Schwarz-ова лема нам даје $F(z) = e^{i\alpha}z, z \in \mathbb{D}$ за неко $\alpha \in \mathbb{R}$. Следи, $(\varphi_b \circ f)(z) = e^{i\alpha}z$ тј. $f(z) = \varphi_{-b}(e^{i\alpha}z) = e^{i\alpha}\varphi_{-be^{-i\alpha}}(z)$, односно $f \in \{z \mapsto e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z} | a \in \mathbb{D}, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Дакле, $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \{z \mapsto e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z} | a \in \mathbb{D}, \alpha \in \mathbb{R}\}$ и на тај начин смо описали све конформне аутоморфизме јединичног диска $\mathbb{D}$.



Пример. Ако је $f(z)$ холоморфна функција на јединичном диску $\mathbb{D}$, $f(0) = 0$ и $|\mathrm{Re}\, f(z)| < 1$ за све $z \in \mathbb{D}$, тада важи $|f'(0)| \leqslant \frac{4}{\pi}$.

Решење. Функција $g(w) = \frac{e^{\frac{i\pi}{2}w}-1}{e^{\frac{i\pi}{2}w}+1}$ пресликава област $\{|\mathrm{Re}\, w| < 1\}$ на јединични диск $\mathbb{D}$. Према томе, $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $F = g \circ f$ јесте добро дефинисана функција, која је холоморфна као композиција таквих. Како је $F(0) = g(0) = 0$, то из Schwarz-ове леме добијамо $|F'(0)| \leqslant 1$, тј. $|g'(f(0))f'(0)| = |g'(0)||f'(0)| \leqslant 1$. Осим тога, $g'(w) = \frac{i\pi e^{\frac{i\pi}{2}w}}{\left(e^{\frac{i\pi}{2}w}+1\right)^2}$ и одатле је $g'(0) = \frac{i\pi}{4}$. Сада, из свега претходног имамо $|f'(0)| \leqslant \frac{4}{\pi}$. ♣

1.2 Schwarz-Pick-ова лема

Лема (Schwarz-Pick). Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција. Тада важи $\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{1-\overline{f(z_2)}f(z_1)}\right| \leqslant \left|\frac{z_1-z_2}{1-\overline{z_2}z_1}\right|$ и $|f'(z)| \leqslant \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$ за све $z, z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, при чему, у првој или другој неједнакости важи једнакост ако и само ако је $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Доказ. За произвољно одабран елемент $z \in \mathbb{D}$ нека је $a = f(z)$. Функција дефинисана са $F = \varphi_a \circ f \circ \varphi_{-z}$ је холоморфна, као композиција таквих. Следи $F(0) = (\varphi_a \circ f \circ \varphi_{-z})(0) = (\varphi_a \circ f)(z) = \varphi_a(a) = 0$. Према томе, можемо применити Schwarz-ову лему и добијамо $|F'(0)| \leqslant 1$ и $|F(\zeta)| \leqslant |\zeta|$ за све $\zeta \in \mathbb{D}$. Из прве неједнакости добијамо да је $\left|\varphi_a'(f(\varphi_{-z}(0)))f'(\varphi_{-z}(0))\varphi_{-z}'(0)\right| \leqslant 1$ и како важи $\varphi_{-z}(0) = z$, $\varphi_{-z}'(0) = 1 - |z|^2$ то је $|\varphi_a'(a)f'(z)| \leqslant \frac{1}{1-|z|^2}$. Међутим, важи $\varphi_a'(a) = \frac{1}{1-|a|^2} = \frac{1}{1-|f(z)|^2}$, тако да из свега претходног добијамо $|f'(z)| \leqslant \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$. Са друге стране, ако узмемо $z = z_2$ и $\zeta = \varphi_z(z_1)$, а затим, искористимо неједнакост $|F(\zeta)| \leqslant |\zeta|$, добићемо $|(\varphi_a \circ f)(z_1)| \leqslant |\varphi_z(z_1)|$. Како је $a = f(z) = f(z_2)$, то користећи претходну неједнакост следи $\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{1-\overline{f(z_2)}f(z_1)}\right| \leqslant \left|\frac{z_1-z_2}{1-\overline{z_2}z_1}\right|$. На основу Schwarz-ове леме једнакост (у једној од неједнакости) важи ако и само ако је $F = \varphi_a \circ f \circ \varphi_{-z}$ ротација јединичног диска, тј. ако и само ако постоји $\alpha \in \mathbb{R}$ такав да је $\varphi_a \circ f \circ \varphi_{-z} = e^{i\alpha}$. Сада је $f \circ \varphi_{-z} = e^{i\alpha}\varphi_{-ae^{-i\alpha}}$, односно $f = \left(e^{i\alpha}\varphi_{-ae^{-i\alpha}}\right) \circ \varphi_z \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Према томе, једнакост (у једној од неједнакости) важи ако и само ако је $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. ■

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D} \arrow[r, "f"] & \mathbb{D} \arrow[d, "\varphi_a"] \\ \mathbb{D} \arrow[u, "\varphi_{-z}"] \arrow[r, dashed, "F"'] & \mathbb{D} \end{tikzcd}$$

Пример. Холоморфно пресликавање $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ које није идентитет може имати највише једну фиксну тачку.

Решење. Наиме, претпоставимо да пресликавање f има две различите фиксне тачке $a, b \in \mathbb{D}$. Тада је $F = \varphi_a \circ f \circ \varphi_{-a}$ холоморфно пресликавање као композиција таквих и пресликава диск $\mathbb{D}$ у самог себе. Такође је $F(0) = (\varphi_a \circ f \circ \varphi_{-a})(0) = (\varphi_a \circ f)(a) = \varphi_a(a) = 0$. Слично, $F(\varphi_a(b)) = (\varphi_a \circ f)(b) = \varphi_a(b)$ и $\varphi_a(b) \neq 0$, јер је $a \neq b$. Тим пре је $|F(\varphi_a(b))| = |\varphi_a(b)|$, тако да на основу Schwarz-ове леме пресликавање F мора бити ротација, тј. $F(\zeta) = e^{i\alpha}\zeta, \zeta \in \mathbb{D}$ за неко $\alpha \in \mathbb{R}$. Из једнакости $F(\varphi_a(b)) = \varphi_a(b)$ следи $e^{i\alpha} = 1$, односно $F = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$. Добијамо $\varphi_a \circ f \circ \varphi_{-a} = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$ и одатле је $f = \varphi_{-a} \circ \mathrm{id}_{\mathbb{D}} \circ \varphi_a = \varphi_{-a} \circ \varphi_a = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$ што је у контрадицији са претпоставком да f није идентитет. Према томе, f има највише једну фиксну тачку. ♣

Став. За холоморфну функцију $f : D(0, r) \to D(0, R)$, $r > 0, R > 0$ и $z, w \in D(0, r)$ важи

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\right| \leqslant \frac{2Rr}{|r^2-\overline{w}z|}.$$

Доказ. Узмимо произвољне $z, w \in D(0, r)$ и нека је $z_1 = \frac{z}{r}, w_1 = \frac{w}{r}$. Следи $z_1, w_1 \in \mathbb{D}$. Дефинишимо функцију $g(\zeta) \overset{\text{деф}}{=} \frac{f(r\zeta)}{R}$. Тада је $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција као композиција таквих, па применом Schwarz-Pick-ове леме добијамо $\left|\frac{g(z_1)-g(w_1)}{1-\overline{g(w_1)}g(z_1)}\right| \leqslant \left|\frac{z_1-w_1}{1-\overline{w_1}z_1}\right|$. Из претходног следи $\left|\frac{f(z)-f(w)}{1-\left[\overline{f(w)}f(z)\right]/R^2}\right| \leqslant Rr\left|\frac{z-w}{r^2-\overline{w}z}\right|$, тј. важи $\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\right| \leqslant \frac{Rr\left|1-\left[\overline{f(w)}f(z)\right]/R^2\right|}{|r^2-\overline{w}z|}$ и како имамо $\left|1-\frac{\overline{f(w)}f(z)}{R^2}\right| \leqslant 1 + \frac{|f(w)|\cdot|f(z)|}{R^2} \leqslant 2$, то следи тражена неједнакост. ■

Став. Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција и $z \in \mathbb{D}$. Тада је

$$\frac{|f(0)|-|z|}{1-|f(0)||z|} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{|f(0)|+|z|}{1+|f(0)||z|}.$$

Доказ. За произвољно одабране $a, b \in \mathbb{D}$ важи $\left|\frac{a-b}{1-\bar{b}a}\right|^2 = \frac{(a-b)(\bar{a}-\bar{b})}{\left|1-\bar{b}a\right|^2} = \frac{|a|^2+|b|^2-a\bar{b}-\bar{a}b}{\left|1-\bar{b}a\right|^2} = 1-\frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|b|^2\right)}{\left|1-\bar{b}a\right|^2} \geqslant 1-\frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|b|^2\right)}{(1-|a||b|)^2} = \frac{(|a|-|b|)^2}{(1-|a||b|)^2}$ тако да је $\left|\frac{a-b}{1-\bar{b}a}\right| \geqslant \left|\frac{|a|-|b|}{1-|a||b|}\right|$. Ако узмемо да је $a = f(z)$ и $b = f(0)$, а затим искористимо Scwarz-Pick-ову лему добијамо $\left|\frac{|f(z)|-|f(0)|}{1-|f(z)||f(0)|}\right| \leqslant \left|\frac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(0)}f(z)}\right| \leqslant \left|\frac{z-0}{1-\bar{0}z}\right| = |z|$. Из претходног следи $|f(z)| - |f(0)| \leqslant |z| - |z||f(z)||f(0)|$ и $|f(0)| - |f(z)| \leqslant |z| - |z||f(z)||f(0)|$, односно $\frac{|f(0)|-|z|}{1-|f(0)||z|} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{|f(0)|+|z|}{1+|f(0)||z|}$, што је и било потребно доказати. ■

Лема. Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција и $f(0) = 0$. Тада је $|f(z)| \leqslant |z|\frac{|f'(0)|+|z|}{1+|f'(0)||z|}$ за све $z \in \mathbb{D}$.

Доказ. Нека је $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ Taylor-ов развој функције f у јединичном диску $\mathbb{D}$. Тада је $a_0 = f(0) = 0$ и $a_1 = f'(0)$. Функција $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$ је холоморфна у $\mathbb{D}$, јер је представљена конвергентним степеним редом и важи $f(z) = zg(z)$ за све $z \in \mathbb{D}$. Сада је $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ за све $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ и $g(0) = f'(0)$. Применом Schwarz-ове леме добијамо да је $|g(z)| \leqslant 1$ за све $z \in \mathbb{D}$. Најпре, претпоставимо да је $|g(z_0)| = 1$ за неко $z_0 \in \mathbb{D}$. Тада у Schwarz-овој леми важи једнакост, па је f ротација, односно важи $f(z) = e^{i\alpha}z$ за све $z \in \mathbb{D}$ и неко $\alpha \in \mathbb{R}$. Следи $|f(z)| = |e^{i\alpha}z| = |z| = |z|\frac{|e^{i\alpha}|+|z|}{1+|e^{i\alpha}||z|} = |z|\frac{|f'(0)|+|z|}{1+|f'(0)||z|}$ за све $z \in \mathbb{D}$, тј. показали смо лему. Зато, у наставку претпоставимо да је $|g(z)| < 1$ за све $z \in \mathbb{D}$. Тада је $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција, па применом претходног става добијамо да је $|g(z)| \leqslant \frac{|g(0)|+|z|}{1+|g(0)||z|} = \frac{|f'(0)|+|z|}{1+|f'(0)||z|}$ за све $z \in \mathbb{D}$. Специјално, за $z \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$ важи $\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant \frac{|f'(0)|+|z|}{1+|f'(0)||z|}$, односно $|f(z)| \leqslant |z|\frac{|f'(0)|+|z|}{1+|f'(0)||z|}$. Међутим, та неједнакост јесте тачна и за $z = 0$, јер су тада и лева и десна страна једнаке нули. Дакле, важи $|f(z)| \leqslant |z|\frac{|f'(0)|+|z|}{1+|f'(0)||z|}$ за све $z \in \mathbb{D}$. Тиме је доказ леме завршен. ■

1.3 Schwarz-ова лема на граници

Став која следи представља Osserman-ову верзију Schwarz-ове леме на граници. Он је последица леме из претходног одељка. Уопштење овог става представља теорема, наведена на крају овог одељка.

Став. Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција и $f(0) = 0$. Претпоставимо да се функција f може додефинисати у некој тачки $b \in \partial\mathbb{D}$ тако да постоји $f'(b)$ и да је $|f(b)| = 1$. Тада важи $|f'(b)| \geqslant \frac{2}{1+|f'(0)|}$.

Доказ. На основу претходне леме, за произвољну тачку $z \in \mathbb{D}$ имамо $|f(z)| \leqslant |z|\frac{|f'(0)|+|z|}{1+|f'(0)||z|}$. Одатле је $(1 + |f'(0)||z|)\,|f(z)| \leqslant |f'(0)||z| + |z|^2$, односно $(1 - |z|)(1 + |z|) = 1 - |z|^2 \leqslant (1 - |f(z)|)\,(1 + |f'(0)||z|)$. Следи $\frac{1-|f(z)|}{1-|z|} \geqslant \frac{1+|z|}{1+|f'(0)||z|}$. Дакле, за све $z \in \mathbb{D}$ важи $\frac{1-|f(z)|}{1-|z|} \geqslant \frac{1+|z|}{1+|f'(0)||z|}$. Нека је $z_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) b$ за све $n \in \mathbb{N}$. Тада је $|z_n| = 1 - \frac{1}{n} < 1$, тј. $z_n \in \mathbb{D}$ за $n \in \mathbb{N}$. Такође је $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = b$ и $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 1$. Важи $\left|\frac{f(z_n)-f(b)}{z_n-b}\right| = \frac{|f(z_n)-f(b)|}{1/n} = \frac{|f(z_n)-f(b)|}{1-|z_n|} \geqslant \frac{|f(b)|-|f(z_n)|}{1-|z_n|} = \frac{1-|f(z_n)|}{1-|z_n|} \geqslant \frac{1+|z_n|}{1+|f'(0)||z_n|}$, тако да је $\left|\frac{f(z_n)-f(b)}{z_n-b}\right| \geqslant \frac{1+|z_n|}{1+|f'(0)||z_n|}$ за све $n \in \mathbb{N}$. Пустимо да $n \to \infty$ и добијамо да је $|f'(b)| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{f(z_n)-f(b)}{z_n-b}\right| \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+|z_n|}{1+|f'(0)||z_n|} = \frac{2}{1+|f'(0)|}$. ■

Последица. Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција и $f(0) = 0$. Претпоставимо да се функција f може додефинисати у некој тачки $b \in \partial\mathbb{D}$ тако да постоји $f'(b)$ и да је $|f(b)| = 1$. Тада је $|f'(b)| \geqslant 1$. Једнакост важи ако и само ако је f ротација.

Доказ. Ако искористимо претходни став, добијамо да је $|f'(b)| \geqslant \frac{2}{1+|f'(0)|}$. Такође, на основу Schwarz-ове леме имамо да је $|f'(0)| \leqslant 1$. Следи $|f'(b)| \geqslant \frac{2}{1+|f'(0)|} \geqslant \frac{2}{1+1} = 1$. Једнакост важи ако и само ако је $|f'(0)| = 1$, односно, ако и само ако је f ротација, где смо опет искористили класичну Schwarz-ову лему. ■

Теорема. Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција. Претпоставимо да се функција f може додефинисати у некој тачки $b \in \partial\mathbb{D}$ тако да постоји $f'(b)$ и да је $|f(b)| = 1$. Тада је

$$|f'(b)| \geqslant \frac{2(1-|f(0)|)^2}{1-|f(0)|^2+|f'(0)|}.$$

Доказ. Означимо $a = f(0)$ и нека је $\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$. Тада је $\varphi_a \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ и дефинишимо функцију $F = \varphi_a \circ f$. Функција $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ је холоморфна као композиција таквих и важи $F(0) = \varphi_a(a) = 0$. Како је $\varphi_a(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$ и $|f(b)| = 1$, то је $|F(b)| = |\varphi_a(f(b))| = 1$. Такође, важи $F'(b) = \varphi_a'(f(b))f'(b)$ (извод сложене функције). Према томе, испуњени су услови за примену претходног става, тако да је $|F'(b)| \geqslant \frac{2}{1+|F'(0)|}$. Важи $\varphi_a'(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2}$, тако да је $|F'(0)| = |\varphi_a'(f(0))||f'(0)| = |\varphi_a'(a)||f'(0)| = \frac{|f'(0)|}{1-|f(0)|^2}$ и $|F'(b)| = |\varphi_a'(f(b))||f'(b)| = \frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}f(b)|^2}|f'(b)| \leqslant \frac{1-|f(0)|^2}{(1-|\overline{a}f(b)|)^2}|f'(b)| = \frac{1-|f(0)|^2}{(1-|f(0)|)^2}|f'(b)|$. Из свега претходног добијамо да је $\frac{1-|f(0)|^2}{(1-|f(0)|)^2}|f'(b)| \geqslant |F'(b)| \geqslant \frac{2}{1+\frac{|f'(0)|}{1-|f(0)|^2}} = \frac{2(1-|f(0)|^2)}{1-|f(0)|^2+|f'(0)|}$, односно, важи $|f'(b)| \geqslant \frac{2(1-|f(0)|^2)}{1-|f(0)|^2+|f'(0)|} \cdot \frac{1-|f(0)|^2}{(1-|f(0)|)^2} = \frac{2(1-|f(0)|)^2}{1-|f(0)|^2+|f'(0)|}$. Дакле, заиста је $|f'(b)| \geqslant \frac{2(1-|f(0)|)^2}{1-|f(0)|^2+|f'(0)|}$. ■

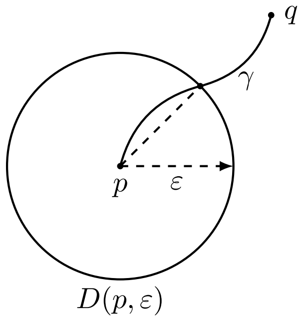
Глава 2

Метрике комплексних домена

2.1 Poincaré-ова метрика. Теорема о фиксној тачки

Дефиниција. Функција $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ је *метрика* или *густина* на области $\Omega \subset \mathbb{C}$ ако је $\rho(z) > 0$ за све $z \in \Omega$ и $\rho \in C^2(\Omega)$. У односу на метрику ρ, *дужина* вектора $v \in \mathbb{C}$ у тачки $z \in \Omega$, једнака је $|v|_{\rho,z} = \rho(z)|v|$, где је $|v|$ стандардна (еуклидска) дужина вектора v. ♠

Такође, дужина непрекидно диференцијабилне криве $\gamma : [a,b] \to \Omega$ јесте дата са $l_\rho(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|_{\rho,\gamma(t)} dt$. Дужина део по део непрекидно диференцијабилне криве јесте сума дужина њених непрекидно диференцијабилних делова. Приметимо да је $l_\rho(\gamma) = \int_a^b \rho(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt = \int_\gamma \rho(z)|dz|$. Растојање између тачака $p, q \in \Omega$, у односу на метрику ρ, дефинишемо као $d_\rho(p,q) = \inf\limits_\gamma l_\rho(\gamma)$, при чему се наведени инфимум узима по свим део по део непрекидно диференцијабилним кривама $\gamma : [0,1] \to \Omega$ таквим да је $\gamma(0) = p$ и $\gamma(1) = q$. Одмах по дефиницији важи $d_\rho(p,q) \geqslant 0$ и $d_\rho(p,p) = 0$ за све $p, q \in \Omega$. Нека је $d_\rho(p,q) = 0$ за неке $p, q \in \Omega$ и претпоставимо да је $p \neq q$. Тада постоји $\varepsilon > 0$ тако да је $D(p,\varepsilon) \subset \Omega$ и $q \notin D(p,\varepsilon)$. Затворен диск $D[p,\varepsilon]$ је компактан скуп, тако да функција ρ на њему достиже свој минимум $m = \min\limits_{D[p,\varepsilon]} \rho > 0$. Како је $d_\rho(p,q) = \inf\limits_\gamma \int_\gamma \rho(z)|dz|$, то постоји део по део непрекидно диференцијабилна крива $\gamma : [0,1] \to \Omega, \gamma(0) = p$ и $\gamma(1) = q$, таква да је $\int_\gamma \rho(z)|dz| < m\varepsilon$. Следи, $m\varepsilon > \int_\gamma \rho(z)|dz| \geqslant \int_{\gamma\cap D[p,\varepsilon]} \rho(z)|dz| \geqslant m\int_{\gamma\cap D[p,\varepsilon]} |dz| \geqslant m\varepsilon$ што је контрадикција ($\gamma \cap D[p,\varepsilon]$ представља део криве γ садржан у затвореном диску $D[p,\varepsilon]$). Према томе, ако је $d_\rho(p,q) = 0$ мора бити $p = q$. За део по део непрекидно диференцијабилну криву $\gamma : [0,1] \to \Omega, \gamma(0) = p$ и $\gamma(1) = q$, дефинишемо $\gamma^-(t) = \gamma(1-t)$. Тада је $\gamma^- : [0,1] \to \Omega$ део по део непрекидно диференцијабилна крива и $\gamma^-(0) = q, \gamma^-(1) = p$. Осим тога, важи $l_\rho(\gamma^-) = \int_0^1 \rho(\gamma^-(t))|(\gamma^-)'(t)|dt = \int_0^1 \rho(\gamma(1-t))|\gamma'(1-t)|dt = \int_0^1 \rho(\gamma(s))|\gamma'(s)|ds = l_\rho(\gamma)$. Добијамо $d_\rho(p,q) = \inf\limits_\gamma l_\rho(\gamma) = \inf\limits_{\gamma^-} l_\rho(\gamma^-) = d_\rho(q,p)$. Нека су $\gamma : [0,1] \to \Omega$ и $\beta : [0,1] \to \Omega$ део по део непрекидно диференцијабилне криве такве да је $\gamma(0) = p, \gamma(1) = u$ и $\beta(0) = u, \beta(1) = q$, где су p, q и u произвољно одабране тачке из Ω. Дефинишемо $\alpha(t) = \beta(2t)$ за $t \in [0, \frac{1}{2}]$ и $\alpha(t) = \gamma(2t-1)$ за $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Тада је $\alpha : [0,1] \to \Omega$ добро дефинисана, део по део непрекидно диференцијабилна крива и важи $\alpha(0) = p, \alpha(1) = q$. Сада је $d_\rho(p,q) \leqslant l_\rho(\alpha) = \int_0^1 \rho(\alpha(t))|\alpha'(t)|dt = \int_0^{1/2} \rho(\gamma(2t))|\gamma'(2t)|d(2t) + \int_{1/2}^1 \rho(\beta(2t-1))|\beta'(2t-1)|d(2t-1) = \int_0^1 \rho(\gamma(s))|\gamma'(s)|ds + \int_0^1 \rho(\beta(s))|\beta'(s)|ds = l_\rho(\gamma) + l_\rho(\beta)$, тј. $d_\rho(p,q) \leqslant l_\rho(\gamma) + l_\rho(\beta)$. Преласком на инфимум, најпре по свим кривама γ, а затим и по свим кривама β, добијамо $d_\rho(p,q) \leqslant d_\rho(p,u) + d_\rho(u,q)$. Коначно, из свега претходног имамо да је (Ω, d_ρ) метрички простор.



Дефиниција. Нека су $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ области и ρ_1, ρ_2 метрике на њима, тим редом. За холоморфно, бијективно пресликавање $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ кажемо да је *изометрија* парова (Ω_1, ρ_1) и (Ω_2, ρ_2) ако важи $(f^*\rho_2)(z) = \rho_1(z)$ за све $z \in \Omega_1$, где је $(f^*\rho_2)(z) = \rho_2(f(z))|f'(z)|$. ♠

Узмимо да је f изометрија парова (Ω_1, ρ_1) и (Ω_2, ρ_2). Ако је $\gamma : [a, b] \to \Omega_1$ део по део непрекидно диференцијабилна крива, означимо $f_*\gamma = f \circ \gamma$. Тада је $f_*\gamma : [a, b] \to \Omega_2$ такође, део по део непрекидно диференцијабилна крива. Важи $l_{\rho_1}(\gamma) = \int_\gamma \rho_1(z)|dz| = \int_\gamma \rho_2(f(z))|f'(z)||dz| = \int_{f\circ\gamma} \rho_2(w)|dw| = \int_{f_*\gamma} \rho_2(w)|dw| = l_{\rho_2}(f_*\gamma)$. Одатле имамо $d_{\rho_1}(p, q) = \inf\limits_{\gamma} l_{\rho_1}(\gamma) = \inf\limits_{f_*\gamma} l_{\rho_2}(f_*\gamma) = d_{\rho_2}(f(p), f(q))$, тј. $d_{\rho_1}(p, q) = d_{\rho_2}(f(p), f(q))$ за све $p, q \in \Omega_1$. Осим тога, важи $\rho_1(z)|(f^{-1})'(f(z))| = \rho_1(z)\frac{1}{|f'(z)|} = \rho_2(f(z))$ за све $z \in \Omega_1$. Из претходног следи $\rho_1(f^{-1}(w))|(f^{-1})'(w)| = \rho_2(w)$ за све $w \in \Omega_2$, тако да је пресликавање f^{-1} изометрија парова (Ω_2, ρ_2) и (Ω_1, ρ_1).

Став. Ако је f изометрија парова (Ω_1, ρ_1) и (Ω_2, ρ_2), g изометрија парова (Ω_2, ρ_2) и (Ω_3, ρ_3), тада је $g \circ f$ изометрија парова (Ω_1, ρ_1) и (Ω_3, ρ_3).

Доказ. Пресликавање $g \circ f : \Omega_1 \to \Omega_3$ је холоморфно и бијективно као композиција таквих. Такође, за произвољно $z \in \Omega_1$ важи $((g \circ f)^*\rho_3)(z) = \rho_3((g \circ f)(z))|(g \circ f)'(z)| = \rho_3(g(f(z)))|g'(f(z))||f'(z)| = \rho_2(f(z))|f'(z)| = \rho_1(z)$, тј. $((g \circ f)^*\rho_3)(z) = \rho_1(z)$. Дакле, $g \circ f$ јесте изометрија парова (Ω_1, ρ_1) и (Ω_3, ρ_3). ■

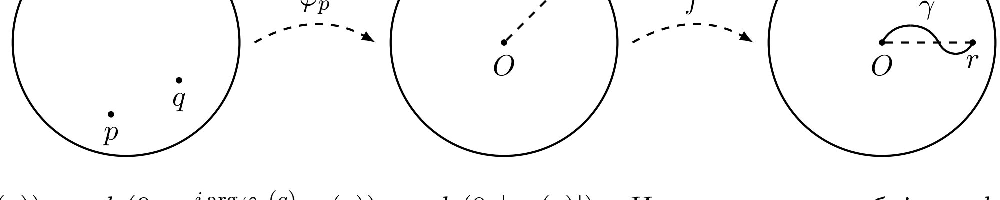
Дефиниција. За метрику $\rho(z) = \frac{2}{1-|z|^2}$ на јединичном диску $\mathbb{D}$ кажемо да је *Poincaré-ова* или *хиперболичка* метрика. ♠

Став. Нека је ρ Poincaré-ова метрика на јединичном диску $\mathbb{D}$ и $h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Тада је h изометрија парова $(\mathbb{D}, \rho)$ и $(\mathbb{D}, \rho)$.

Доказ. Како $h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ то постоје $\alpha \in \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{D}$ такви да је $h(z) = e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ за све $z \in \mathbb{D}$. Осим тога, h је холоморфно, бијективно пресликавање. Сада је $(h^*\rho)(z) = \rho(h(z))|h'(z)| = \frac{2}{1-\left|e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2} \cdot \left|\frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}\right| = \frac{2\left(1-|a|^2\right)}{|1-\bar{a}z|^2-|z-a|^2} = \frac{2\left(1-|a|^2\right)}{(1-|a|^2)(1-|z|^2)} = \frac{2}{1-|z|^2} = \rho(z)$, тј. $(h^*\rho)(z) = \rho(z)$ за све $z \in \mathbb{D}$. Према томе, заиста је h изометрија парова $(\mathbb{D}, \rho)$ и $(\mathbb{D}, \rho)$. ■

Став. За произвољно одабране тачке $p, q \in \mathbb{D}$ важи $d_\rho(p, q) = \ln\frac{1+|\varphi_p(q)|}{1-|\varphi_p(q)|}$, где је ρ Poincaré-ова метрика на јединичном диску $\mathbb{D}$.

Доказ. Ако је $p = q$ тада је $d_\rho(p, p) = 0$ и $|\varphi_p(p)| = 0$ и тривијално следи тражена једнакост. Зато у наставку претпоставимо да је $p \neq q$. Преликавање φ_p јесте аутоморфизам јединичног диска $\mathbb{D}$, па применом претходног става добијамо $d_\rho(p, q) = d_\rho(\varphi_p(p), \varphi_p(q)) = d_\rho(0, \varphi_p(q))$. Ротација $f : z \mapsto e^{-i\arg\varphi_p(q)}z$ јесте такође, један аутоморфизам јединичног диска, тако да је



$d_\rho(0, \varphi_p(q)) = d_\rho(0, e^{-i\arg\varphi_p(q)}\varphi_p(q)) = d_\rho(0, |\varphi_p(q)|)$. Из претходног добијамо $d_\rho(p, q) = d_\rho(0, |\varphi_p(q)|) = d_\rho(0, r)$, где је $r = |\varphi_p(q)|$. Нека је $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{D}$ призвољно одабрана, део по део непрекидно диференцијабилна крива, таква да је $\gamma(0) = 0$ и $\gamma(1) = r$. Нека је $\alpha = \operatorname{Re}\gamma$ и $\beta = \operatorname{Im}\gamma$, тј. $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ за све $t \in [0,1]$. Следи, $\alpha(0) = 0$ и $\alpha(1) = r$. Сада је $l_\rho(\gamma) = \int_\gamma \rho(z)|dz| = \int_\gamma \frac{2}{1-|z|^2}|dz| = \int_0^1 \frac{2|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt \geqslant \int_0^1 \frac{2|\alpha'(t)|}{1-\alpha(t)^2}dt = l_\rho(\alpha)$. Нека је функција $\widetilde{\alpha}$ добијена модификацијом функције α, тако што је $\widetilde{\alpha}$ на интервалима опадања функције α константно једнака вредности функције α у почетној тачки посматраног интервала опадања. Ван интервала опадања функције α, функције $\widetilde{\alpha}$ и α су једнаке. Сада је $\widetilde{\alpha}$ растућа функција, $\widetilde{\alpha}(0) = 0$, $\widetilde{\alpha}(1) = r$ и $l_\rho(\alpha) \geqslant l_\rho(\widetilde{\alpha})$. Према томе, важи $l_\rho(\gamma) \geqslant l_\rho(\alpha) \geqslant l_\rho(\widetilde{\alpha}) = \int_0^1 \frac{2\widetilde{\alpha}'(t)}{1-\widetilde{\alpha}(t)^2}dt = \int_0^r \frac{2}{1-s^2}ds = \ln\frac{1+r}{1-r}$. Преласком на инфимум по свим кривама γ добијамо да важи $d_\rho(0,r) \geqslant \ln\frac{1+r}{1-r}$. Са друге стране, посматрајмо криву $\Gamma : [0,1] \to \mathbb{D}$ дефинисану са $\Gamma(t) = rt$. Важи $\Gamma(0) = 0$ и $\Gamma(1) = r$, тако да је $d_\rho(0,r) \leqslant l_\rho(\Gamma) = \int_0^1 \frac{2\Gamma'(t)}{1-\Gamma(t)^2}dt = \int_0^r \frac{2}{1-s^2}ds = \ln\frac{1+r}{1-r}$. Коначно је $d_\rho(0,r) = \ln\frac{1+r}{1-r}$, односно $d_\rho(p,q) = d_\rho(0,r) = \ln\frac{1+r}{1-r} = \ln\frac{1+|\varphi_p(q)|}{1-|\varphi_p(q)|}$. ■

Став. $(\mathbb{D}, d_\rho)$ је комплетан метрички простор, при чему је ρ Poincaré-ова метрика на јединичном диску $\mathbb{D}$.

Доказ. Нека је (p_n) Cauchy-јев низ у метричком простору $(\mathbb{D}, d_\rho)$. Постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такав да је $d_\rho(p_m,p_n) < 1$ за све $m,n \geqslant n_0$. Важи $d_\rho(0,p_n) \leqslant d_\rho(p_{n_0},p_n) + d_\rho(0,p_{n_0}) < 1 + d_\rho(0,p_{n_0})$ за све $n \geqslant n_0$. Означимо $M = \max\{1 + d_\rho(0,p_{n_0}), d_\rho(0,p_1), \ldots, d_\rho(0,p_{n_0-1})\}$. Тада је $d_\rho(0,p_n) \leqslant M$ за све $n \in \mathbb{N}$, односно $|p_n| \leqslant \frac{e^M-1}{e^M+1}$ за све $n \in \mathbb{N}$, јер је $d_\rho(0,p_n) = \ln\frac{1+|p_n|}{1-|p_n|}$. Како је $d_\rho(p_m,p_n) = \ln\frac{1+|\varphi_{p_m}(p_n)|}{1-|\varphi_{p_m}(p_n)|}$, то важи $|\varphi_{p_m}(p_n)| = \frac{e^{d_\rho(p_m,p_n)}-1}{e^{d_\rho(p_m,p_n)}+1} = \frac{\operatorname{sh} d_\rho(p_m,p_n)/2}{\operatorname{ch} d_\rho(p_m,p_n)/2}$. Одатле следи, $|\varphi_{p_m}(p_n)|^2 = \frac{\operatorname{sh}^2 d_\rho(p_m,p_n)/2}{1+\operatorname{sh}^2 d_\rho(p_m,p_n)/2}$ тј. $\operatorname{sh}^2\frac{d_\rho(p_m,p_n)}{2} = \frac{|\varphi_{p_m}(p_n)|^2}{1-|\varphi_{p_m}(p_n)|^2} = \frac{|p_m-p_n|^2}{(1-|p_m|^2)(1-|p_n|^2)} \geqslant |p_m - p_n|^2$. Добили смо $|p_m - p_n| \leqslant \operatorname{sh}\frac{d_\rho(p_m,p_n)}{2}$ за све $m,n \in \mathbb{N}$. Према томе, (p_n) је Cauchy-јев низ у односу на стандардну (еуклидску) метрику и како је (p_n) низ тачака из компакта $D\left[0, \frac{e^M-1}{e^M+1}\right] \subset \mathbb{D}$, то он конвергира ка некој тачки $p \in D\left[0, \frac{e^M-1}{e^M+1}\right] \subset \mathbb{D}$. Дакле, $\lim\limits_{n\to\infty}|p_n - p| = 0$. Осим тога, користећи једнакост $\operatorname{sh}^2\frac{d_\rho(p_n,p)}{2} = \frac{|p_n-p|^2}{(1-|p_n|^2)(1-|p|^2)}$ добијамо $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{sh}\frac{d_\rho(p_n,p)}{2} = 0$. Коначно је $\operatorname{sh}\frac{\lim\limits_{n\to\infty} d_\rho(p_n,p)}{2} = \lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{sh}\frac{d_\rho(p_n,p)}{2} = 0$, тј. $\lim\limits_{n\to\infty} d_\rho(p_n,p) = 0$, тако да низ (p_n) конвергира у метричком простору $(\mathbb{D}, d_\rho)$. Из претходног имамо да у метричком простору $(\mathbb{D}, d_\rho)$ сваки Cauchy-јев низ конвергира, па је $(\mathbb{D}, d_\rho)$ комплетан метрички простор. Тиме је доказ овог става у потпуности завршен. ■

За произвољне две тачке $p, q \in \mathbb{D}$ важи $d_\rho(p,q) = d_\rho(0,\varphi_p(q)) = d_\rho(0,|\varphi_p(q)|)$. Крива којом се реализује најкраће растојање између тачака 0 и $|\varphi_p(q)|$ јесте $\Gamma(t) = |\varphi_p(q)|t$, при чему $t \in [0,1]$. Ротацијом криве Γ за угао $\arg\varphi_p(q)$ добијамо криву $\tau(t) = e^{i\arg\varphi_p(q)}\Gamma(t) = \varphi_p(q)t$, $t \in [0,1]$ којом се остварује најкраће растојање између тачака 0 и $\varphi_p(q)$. Коначно крива $\gamma = \varphi_{-p} \circ \tau$ реализује најкраће растојање између тачака p и q у јединичном диску $\mathbb{D}$ са Poincaré-овом метриком. Крива γ је *геодезијска* крива између тачака p и q. Приметимо да је $\gamma(t) = \varphi_{-p}(\tau(t)) = \varphi_{-p}(\varphi_p(q)t) = \frac{\varphi_p(q)t+p}{1+\bar{p}\varphi_p(q)t}$, тј. $\gamma(t) = \frac{\varphi_p(q)t+p}{1+\bar{p}\varphi_p(q)t}$ за све $t \in [0,1]$. Како билинерана пресликавања пресликавају праве или кружнице опет, на праве или кружнице, затим чувају углове између њих и како је крива Γ ортогонална на јединичну кружницу $\partial\mathbb{D}$, то је геодезијска крива γ такође, ортогонална на јединичну кружницу $\partial\mathbb{D}$.

Став. Ако је $\widetilde{\rho}$ метрика на јединичном диску $\mathbb{D}$ са својством да је сваки аутоморфизам једниничног диска $\mathbb{D}$ изометрија парова $(\mathbb{D}, \widetilde{\rho})$ и $(\mathbb{D}, \widetilde{\rho})$, тада постоји позитивна константа c таква да је $\widetilde{\rho} = c\rho$, где је ρ Poincaré-ова метрика на јединичном диску $\mathbb{D}$.

Доказ. Пресликавање $h = \varphi_{-z}$ је аутоморфизам јединичног диска $\mathbb{D}$, где је $z \in \mathbb{D}$ произвољно одабрана тачка. Тада је $h^*\widetilde{\rho} = \widetilde{\rho}$ и специјално, $(h^*\widetilde{\rho})(0) = \widetilde{\rho}(0)$. Следи $\widetilde{\rho}(0) = \widetilde{\rho}(h(0))|h'(0)| =$

$\widetilde{\rho}(z)\left(1-|z|^2\right)$, тј. $\widetilde{\rho}(z) = \widetilde{\rho}(0)\frac{1}{1-|z|^2} = \frac{\widetilde{\rho}(0)}{2}\cdot\frac{2}{1-|z|^2} = \frac{\widetilde{\rho}(0)}{2}\cdot\rho(z)$. Узимајући да је $c = \frac{\widetilde{\rho}(0)}{2}$ добијамо $\widetilde{\rho}(z) = c\rho(z)$ за све $z\in\mathbb{D}$, што је и требало доказати. ■

Став. Нека је $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ холоморфно пресликавање и ρ Poincaré-ова метрика. Тада важи:
(а) $(f^*\rho)(z)\leqslant\rho(z)$ за све $z\in\mathbb{D}$.
(б) $l_\rho(f_*\gamma)\leqslant l_\rho(\gamma)$ за сваку део по део непрекидно диференцијабилну криву $\gamma:[0,1]\to\mathbb{D}$.
(в) $d_\rho(f(p),f(q))\leqslant d_\rho(p,q)$ за све $p,q\in\mathbb{D}$.

Доказ. (а) $(f^*\rho)(z) = \rho(f(z))|f'(z)| = \frac{2|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}\leqslant\frac{2}{1-|z|^2} = \rho(z)$ за све $z\in\mathbb{D}$, при чему смо искористили Schwarz-Pick-ову лему.
(б) За произвољну део по део непрекидно диференцијабилну криву $\gamma:[0,1]\to\mathbb{D}$ важи $l_\rho(f_*\gamma) = \int_{f_*\gamma}\rho(z)|dz| = \int_0^1\rho(f(\gamma(t)))|f'(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt = \int_\gamma\rho(f(z))|f'(z)||dz| = \int_\gamma(f^*\rho)(z)|dz|$. Ако искористимо део (а) добијамо $l_\rho(f_*\gamma) = \int_\gamma(f^*\rho)(z)|dz|\leqslant\int_\gamma\rho(z)|dz| = l_\rho(\gamma)$.
(в) Нека је $p,q\in\mathbb{D}$ и $\gamma:[0,1]\to\mathbb{D}$ део по део непрекидно диференцијабилна крива таква да важи $\gamma(0)=p$ и $\gamma(1)=q$. Тада је $f_*\gamma:[0,1]\to\mathbb{D}$ део по део непрекидно диференцијабилна крива, при чему је $(f_*\gamma)(0)=f(p)$ и $(f_*\gamma)(1)=q$. Следи, $d_\rho(f(p),f(q))\leqslant l_\rho(f_*\gamma)\leqslant l_\rho(\gamma)$. Преласком на инфимум по свим таквим кривама γ добијамо $d_\rho(f(p),f(q))\leqslant d_\rho(p,q)$. ■

Узмимо да је K компактан и F затворен скуп у метричком простору (X,d), при чему је $K\cap F=\emptyset$. За произвољне $x,y\in X$ и $u\in F$ важи $d(x,F)\leqslant d(x,u)\leqslant d(x,y)+d(y,u)$, тј. $d(x,F)\leqslant d(x,y)+d(y,u)$. Преласком на инфимум по свим $u\in F$ добијамо $d(x,F)\leqslant d(x,y)+d(y,F)$. Слично је $d(y,F)\leqslant d(x,y)+d(x,F)$. Следи $|d(x,F)-d(y,F)|\leqslant d(x,y)$ за све $x,y\in X$, тако да је $x\mapsto d(x,F)$ непрекидна функција која на компакту K достиже свој минимум у некој тачки $x_0\in K$. Дакле, $d(K,F)=d(x_0,F)$. Такође, $x_0\in K\subset F^c$ и F^c је отворен скуп, па постоји $r>0$ са својством $D(x_0,r)\subset F^c$. За произвољно $u\in F$ важи $u\notin D(x_0,r)$, односно $d(x_0,u)\leqslant r$. Преласком на инфимум по свим $u\in F$ добијамо $d(x_0,F)\geqslant r>0$. Према томе, важи $d(K,F)>0$. У наставку претпоставимо да је (X,d) комплетан метрички простор и да је пресликавање $f:X\to X$ контракција, односно да постоји $\delta\in(0,1)$ тако да важи $d(f(x),f(y))\leqslant\delta d(x,y)$ за све $x,y\in X$. Покажимо да пресликавање f има јединствену фиксну тачку (Banach-ова теорема о фиксној тачки). Индуктивно, дефинишимо пресликавања $f_1=f$ и $f_{n+1}=f\circ f_n$ за $n\geqslant 1$. Тада добијамо да за произвољно одабрану тачку $x\in X$ и произвољно $n\in\mathbb{N}$ важи $d(f_n(x),f_{n+1}(x))\leqslant\delta d(f_{n-1}(x),f_n(x))\leqslant\cdots\leqslant\delta^n d(x,f(x))$. Сада за све $n,m\in\mathbb{N}$ имамо $d(f_n(x),f_{n+m}(x))\leqslant\sum\limits_{k=n}^{n+m-1}d(f_k(x),f_{k+1}(x))\leqslant\left(\sum\limits_{k=n}^{n+m-1}\delta^k\right)d(x,f(x))\leqslant\frac{\delta^n}{1-\delta}d(x,f(x))$. Како $\frac{\delta^n}{1-\delta}d(x,f(x))\to 0$ кад $n\to\infty$, то је $(f_n(x))$ Cauchy-јев низ у комплетном метричком простору (X,d) и самим тим, конвергира ка некој тачки $x_0\in X$, тј. $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=x_0$. Свака контракција је непрекидна функција и следи $f(x_0)=f(\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x))=\lim\limits_{n\to\infty}f(f_n(x))=\lim\limits_{n\to\infty}f_{n+1}(x)=x_0$, односно x_0 је фиксна тачка пресликавања f. Уколико су x_0 и y_0 две фиксне тачке пресликавања f, важи $d(x_0,y_0)=d(f(x_0),f(y_0))\leqslant\delta d(x_0,y_0)$. Одатле је $d(x_0,y_0)=0$, јер $\delta\in(0,1)$, тј. $x_0=y_0$. Према томе, f има јединствену фиксну тачку.

Теорема (Farkas, Ritt). Нека је $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ холоморфна функција и $\overline{f(\mathbb{D})}\subset\mathbb{D}$. Тада f има јединствену фиксну тачку.

Доказ. Скуп $\overline{f(\mathbb{D})}$ је затворен и ограничен, јер је $\overline{f(\mathbb{D})}\subset\mathbb{D}$. Дакле, $\overline{f(\mathbb{D})}$ је компактан скуп. Са друге стране, $\mathbb{D}^c$ је затворен и $\overline{f(\mathbb{D})}\cap\mathbb{D}^c=\emptyset$, тако да је $d(\overline{f(\mathbb{D})},\mathbb{D}^c)>0$, где подразумевамо да је ово растојање одређено у односу на стандардну (еуклидску) метрику у комплексној равни. Постоји $\varepsilon>0$ такво да је $d(\overline{f(\mathbb{D})},\mathbb{D}^c)>2\varepsilon>0$. Нека је $z_0\in\mathbb{D}$ фиксирана тачка и посматрајмо функцију g дефинисану са $g(z)=f(z)+\varepsilon(f(z)-f(z_0))$ за све $z\in\mathbb{D}$. Претпоставимо да $g(z)\in\mathbb{D}^c$ за неко $z\in\mathbb{D}$. Тада је $\varepsilon|f(z)-f(z_0)| =$

$|f(z)-g(z)| \geqslant d(\overline{f(\mathbb{D})}, \mathbb{D}^c) > 2\varepsilon$, односно $|f(z)-f(z_0)| > 2$. Међутим, ово је у контрадикцији са неједнакости $|f(z)-f(z_0)| \leqslant |f(z)| + |f(z_0)| < 2$. Дакле, мора бити $g(z) \in \mathbb{D}$ за све $z \in \mathbb{D}$, тако да је $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ једна холоморфна функција као композиција таквих. Применом претходног става добијамо $(g^*\rho)(z) \leqslant \rho(z)$ за све $z \in \mathbb{D}$, тј. $\rho(g(z))|g'(z)| \leqslant \rho(z)$ где је ρ Poincaré-ова метрика на јединичном диску $\mathbb{D}$. Специјално је $\rho(g(z_0))|g'(z_0)| \leqslant \rho(z_0)$ и како важи $g(z_0) = f(z_0)$ и $g'(z_0) = (1+\varepsilon)f'(z_0)$, то добијамо $\rho(f(z_0))|f'(z_0)| \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon}\rho(z_0)$. Ово важи за све $z_0 \in \mathbb{D}$, тј. $\rho(f(z))|f'(z)| \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon}\rho(z)$ за све $z \in \mathbb{D}$. Следи $(f^*\rho)(z) \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon}\rho(z)$ за све $z \in \mathbb{D}$. Нека је $\gamma : [0,1] \to \mathbb{D}$ део по део непрекидно диференцијабилна крива таква да је $\gamma(0) = p$ и $\gamma(1) = q$, где су p и q произвољно одабране тачке из диска $\mathbb{D}$. Тада је $f_*\gamma : [0,1] \to \mathbb{D}$ део по део непрекидно диференцијабилна крива, $(f_*\gamma)(0) = p$ и $(f_*\gamma)(1) = q$. Важи $d_\rho(f(p), f(q)) \leqslant l_\rho(f_*\gamma) = \int_{f_*\gamma} \rho(z)|dz| = \int_\gamma (f^*\rho)(z)|dz| \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon} \int_\gamma \rho(z)|dz| = \frac{1}{1+\varepsilon} l_\rho(\gamma)$. Према томе, $d_\rho(f(p), f(q)) \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon} l_\rho(\gamma)$ и преласком на инфимум по свим таквим кривама γ добијамо $d_\rho(f(p), f(q)) \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon} d_\rho(p,q)$. Сада је пресликавање $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ контракција, јер је $d_\rho(f(p), f(q)) \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon} d_\rho(p,q)$ за све $p,q \in \mathbb{D}$ и $\frac{1}{1+\varepsilon} \in (0,1)$. Метрички простор $(\mathbb{D}, d_\rho)$ је комплетан, па применом Banach-ове теореме о фиксној тачки добијамо да f има јединствену фиксну тачку, чиме је доказ завршен. ■

Претпоставимо да су испуњени услови претходне теореме, тј. $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ је холоморфна функција са својством $\overline{f(\mathbb{D})} \subset \mathbb{D}$. Нека је $p \in \mathbb{D}$ јединствено одређена фиксна тачка функције f. Означимо са $D_\rho(p,r)$ отворени диск са центром у тачки p, полупречника $r > 0$ у метричком простору $(\mathbb{D}, d_\rho)$. Дакле, $D_\rho(p,r) = \{q \in \mathbb{D} \mid d_\rho(p,q) < r\}$. Слично $D_\rho[p,r] = \{q \in \mathbb{D} \mid d_\rho(p,q) \leqslant r\}$ је затворен диск са центром у тачки p, полупречника $r > 0$ у метричком простору $(\mathbb{D}, d_\rho)$. Приметимо да важи $q \in D_\rho(p,r) \Leftrightarrow d_\rho(p,q) < r \Leftrightarrow \ln \frac{1+|\varphi_p(q)|}{1-|\varphi_p(q)|} < r \Leftrightarrow |\varphi_p(q)| < \frac{e^r-1}{e^r+1} \Leftrightarrow \varphi_p(q) \in D\left(0, \frac{e^r-1}{e^r+1}\right) \Leftrightarrow q \in \varphi_{-p}\left(D\left(0, \frac{e^r-1}{e^r+1}\right)\right)$, односно, добијамо да је $D_\rho(p,r) = \varphi_{-p}\left(D\left(0, \frac{e^r-1}{e^r+1}\right)\right)$. Пресликавање φ_{-p} је билинеарно пресликавање, али и аутоморфизам јединичног диска $\mathbb{D}$, тако да је $\varphi_{-p}\left(D\left(0, \frac{e^r-1}{e^r+1}\right)\right)$ такође, један отворен диск, али у односу на стандардну (еуклидску) метрику. Према томе, сваки отворен диск $D_\rho(p,r)$ у метричком простору $(\mathbb{D}, d_\rho)$ јесте истовремено и неки отворен диск у односу на еуклидску метрику. Индуктивно, дефинишимо пресликавања $f_1 = f$ и $f_{n+1} = f \circ f_n$ за $n \geqslant 1$. Такође, нека је K произвољан компакт садржан у диску $\mathbb{D}$. Сада је $\bigcup_{j=1}^\infty D_\rho(p,j) = \mathbb{D} \supset K$. Фамилија отворених дискова $\{D_\rho(p,j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ у метричком простору $(\mathbb{D}, d_\rho)$ јесте уједно и нека фамилија отворених дискова у односу на еуклидску метрику која покрива компакт K и самим тим, можемо издвојити коначан потпокривач. Према томе, постоји $j \in \mathbb{N}$ тако да је $K \subset D_\rho(p,j)$, а тим пре је $K \subset D_\rho[p,j]$. За произвољно $q \in K \subset D_\rho[p,j]$ важи $d_\rho(f(p), f(q)) \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon} d_\rho(p,q) \leqslant \frac{j}{1+\varepsilon}$, где је $\varepsilon > 0$ као у доказу претходне теореме. Следи, $f(q) \in D_\rho\left[f(p), \frac{j}{1+\varepsilon}\right] = D_\rho\left[p, \frac{j}{1+\varepsilon}\right]$ за све $q \in K$, тако да је $f_1(K) = f(K) \subset D_\rho\left[p, \frac{j}{1+\varepsilon}\right]$. Ако индуктивно наставимо претходни поступак добијамо да је $f_n(K) \subset D_\rho\left[p, \frac{j}{(1+\varepsilon)^n}\right]$ за све $n \in \mathbb{N}$. Одатле је $d_\rho(p, f_n(q)) \leqslant \frac{j}{(1+\varepsilon)^n} \to 0$, кад $n \to \infty$, за све $q \in K$. Коначно, из свега претходног имамо да низ функција (f_n) равномерно конвергира ка константној функцији p на свим компактним подскуповима јединичног диска $\mathbb{D}$ у метричком простору $(\mathbb{D}, d_\rho)$.

2.2 Кривина метрике

Посебно својство метрике јесте њена кривина. Са геометријске тачке гледишта, кривина метрике, коју ћемо нешто касније дефинисати, представља Gauss-ову кривину придружену свакој Riemann-овој метрици у диференцијалној геометрији.

Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}$ област и $f : \Omega \to \mathbb{C}$ непрекидно диференцијабилна функција. Нека су $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ диференцијални оператори дефинисани као $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ и $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Приметимо да важи $\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)} = \frac{1}{2}\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} + i\overline{\frac{\partial f}{\partial y}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial x} + i\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}\right) = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}$, тј. $\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}$. Ако је f холоморфна функција из Cauchy-Riemann-ових услова следи $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$. Осим тога важи $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ и $\frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)$. Нека је $\Omega_1 \subset \mathbb{C}$ област и $g : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ такође, непрекидно диференцијабилна функција. Означимо $\alpha = \operatorname{Re} g$ и $\beta = \operatorname{Im} g$. Тада је $\frac{\partial(f\circ g)}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x} + i\frac{\partial(f\circ g)}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \beta}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + i\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \beta}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right)\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial \alpha}{\partial \overline{z}}\right)$ $+\frac{1}{2}i\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right)\left(\frac{\partial \beta}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial \beta}{\partial \overline{z}}\right) + \frac{1}{2}i\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right)i\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \alpha}{\partial \overline{z}}\right) + \frac{1}{2}i\cdot i\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right)i\left(\frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial \beta}{\partial \overline{z}}\right) = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \alpha}{\partial \overline{z}} +$ $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \alpha}{\partial \overline{z}} + i\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \beta}{\partial \overline{z}} - i\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \beta}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \overline{z}} + i\frac{\partial \beta}{\partial \overline{z}}\right) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \overline{z}} - i\frac{\partial \beta}{\partial \overline{z}}\right) = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\overline{\frac{\partial g}{\partial z}}$. Дакле, $\frac{\partial(f\circ g)}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\overline{\frac{\partial g}{\partial z}}$. Осим тога, важи $4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}f = 2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) =$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} - i\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \Delta f$, тј. $\Delta f = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}f$. У наставку, додатно претпоставимо да је g холоморфна функција. Из претходног следи $\Delta(f\circ g)(z) = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f\circ g)(z) = 4\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial f}{\partial z}(g(z))\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(g(z))\overline{\frac{\partial g}{\partial z}}(z)\right] =$ $4\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(g(z))\overline{g'(z)}\right] = 4\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(g(z))\right)\overline{g'(z)} + 4\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(g(z))\frac{\partial \overline{g'}}{\partial z}(z) = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(g(z))\cdot$ $g'(z)\overline{g'(z)} + 4\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(g(z))\overline{\frac{\partial g'}{\partial \overline{z}}} = (\Delta f)(g(z))|g'(z)|^2 = (\Delta f\circ g)(z)|g'(z)|^2$, односно $\Delta(f\circ g) = (\Delta f\circ g)|g'|^2$. Даље, узмимо да је f холоморфна функција и $f \neq 0$ у области Ω. Покажимо да је $\ln|f|$ хармонијска функција, тј. да важи $\Delta \ln|f| = 0$ у области Ω. Наиме, $\Delta \ln|f| = \frac{1}{2}\Delta \ln|f|^2 = \frac{1}{2}\Delta \ln f + \frac{1}{2}\Delta \ln \overline{f} =$ $2\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\ln f + 2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}\ln \overline{f} = 2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}\ln \overline{f} = 2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}\overline{\ln f} = 2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\overline{\frac{\partial(\ln f)}{\partial \overline{z}}} = 0$, где смо искористили $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\ln f = 0$, јер је f холоморфна функција. Дакле, $\ln|f|$ јесте хармонијска функција. Осим тога, $\ln|f|^2$ јесте такође, хармонијска функција. У ставу који следи користићемо претходно доказана својства.

$$\begin{tikzcd}
\Omega_1 \arrow[r, "g"] \arrow[dr, dashed, "f\circ g"'] & \Omega \arrow[d, "f"] \\
 & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Дефиниција. Кривина метрике ρ на области Ω у тачки $z \in \Omega$ јесте дефинисана са $\kappa_{\Omega,\rho}(z) = \frac{-\Delta \ln \rho(z)}{\rho(z)^2}$. ♠

Став. Ако су Ω_1 и Ω_2 области у комплексној равни, ρ метрика на Ω_2 и $h : \Omega_1 \to \Omega_2$ конформно пресликавање, тада важи $\kappa_{\Omega_1,h^*\rho}(z) = \kappa_{\Omega_2,\rho}(h(z))$ за све $z \in \Omega_1$.

Доказ. Како је $(h^*\rho)(z) = \rho(h(z))|h'(z)| > 0$ за све $z \in \Omega_1$, то је $h^*\rho$ метрика на области Ω_1 ($h^*\rho$ је два пута непрекидно диференцијабилна функција као композиција таквих). Сада за све $z \in \Omega_1$ важи $\kappa_{\Omega_1,h^*\rho}(z) = \frac{-\Delta \ln(h^*\rho)(z)}{(h^*\rho)(z)^2} = \frac{-\Delta((\rho\circ h)|h'|)(z)}{\rho(h(z))^2|h'(z)|^2} = \frac{-\Delta \ln(\rho\circ h)(z) - \Delta \ln|h'|(z)}{\rho(h(z))^2|h'(z)|^2} =$ $\frac{-\Delta \ln(\rho\circ h)(z)}{\rho(h(z))^2|h'(z)|^2} = \frac{-\Delta((\ln\rho)\circ h)(z)}{\rho(h(z))^2|h'(z)|^2} = \frac{-((\Delta \ln\rho)\circ h)(z)|h'(z)|^2}{\rho(h(z))^2|h'(z)|^2} = \frac{-\Delta \ln\rho(h(z))}{\rho(z)^2} = \kappa_{\Omega_2,\rho}(h(z))$, односно $\kappa_{\Omega_1,h^*\rho}(z) = \kappa_{\Omega_2,\rho}(h(z))$ што је и требало доказати. ■

Ако задржимо ознаке из овог става и претпоставимо да је $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ холоморфна функција, таква да је $f'(z) \neq 0$, односно $(f^*\rho)(z) > 0$ за неко $z \in \Omega_1$, тада важи $\kappa_{\Omega_1,f^*\rho}(z) = \kappa_{\Omega_2,\rho}(f(z))$, што директно следи из доказа претходног става.

Пример. Одредимо кривину Poincaré-ове метрике $\rho(z) = \frac{2}{1-|z|^2}$ на диску $\mathbb{D}$. Наиме, важи $\kappa(z) = \frac{-\Delta \ln \rho(z)}{\rho(z)^2} = \frac{\left(1-|z|^2\right)^2}{4}\cdot \Delta \ln \frac{1}{\rho}(z) = \frac{\left(1-|z|^2\right)^2}{4}\cdot \Delta \ln \frac{1-|z|^2}{2} = \frac{\left(1-|z|^2\right)^2}{4}\cdot \Delta \ln\left(1-|z|^2\right) =$ $\frac{\left(1-|z|^2\right)^2}{4}\cdot 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\ln\left(1 - z\cdot\overline{z}\right) = \left(1-|z|^2\right)^2\frac{\partial}{\partial z}\frac{-z}{1-z\cdot\overline{z}} = \left(1-|z|^2\right)^2\cdot\frac{(-1)(1-z\cdot\overline{z})-(-z)(-\overline{z})}{\left(1-|z|^2\right)^2} = -1$ за све $z \in \mathbb{D}$. Дакле, $\kappa(z) \equiv -1$. ♣

Пример. За метрику $\sigma(z) = \frac{2}{1+|z|^2}$ у комплексној равни кажемо да је *сферна метрика.* Као у претходном примеру добијамо да је кривина сферне метрике $\kappa(z) = \frac{-\Delta \ln \sigma(z)}{\sigma(z)^2} = \frac{\left(1+|z|^2\right)^2}{4} \cdot 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \ln\left(1 + z \cdot \overline{z}\right) = \left(1+|z|^2\right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{1+z\cdot\overline{z}} = \left(1+|z|^2\right)^2 \frac{1+z\cdot\overline{z}-z\cdot\overline{z}}{\left(1+|z|^2\right)^2} = 1$ за све $z \in \mathbb{C}$, односно $\kappa(z) \equiv 1$. ♣

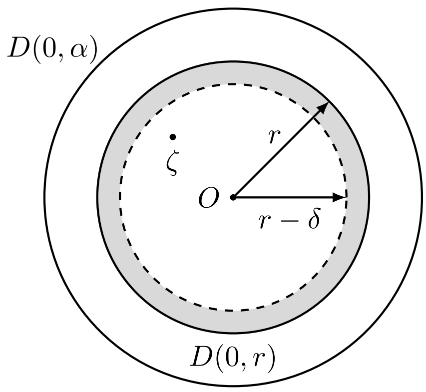
Пример. Стандардна (еуклидска) метрика у комплексној равни јесте дата са $\rho(z) \equiv 1$. Њена кривина јесте $\kappa(z) \equiv 0$. ♣

За произвољне $A > 0$ и $\alpha > 0$ функција $\rho_\alpha^A(z) \overset{\text{деф}}{=} \frac{2\alpha}{\sqrt{A}(\alpha^2-|z|^2)}$ јесте метрика на диску $D(0,\alpha)$. Наиме, $\rho_\alpha^A(z) > 0$ за све $z \in D(0,\alpha)$ и функција ρ_α^A јесте класе C^2 као композиција таквих. Важи $\kappa_{\rho_\alpha^A}(z) = \frac{-\Delta \ln \rho_\alpha^A(z)}{\rho_\alpha^A(z)^2} = \frac{A\left(\alpha^2-|z|^2\right)^2}{4\alpha^2} \cdot \Delta \ln \frac{\sqrt{A}\left(\alpha^2-|z|^2\right)}{2\alpha} = \frac{A\left(\alpha^2-|z|^2\right)^2}{4\alpha^2} \cdot \Delta \ln\left(\alpha^2 - |z|^2\right)$ $= \frac{A\left(\alpha^2-|z|^2\right)^2}{4\alpha^2} \cdot 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \ln\left(\alpha^2 - z\overline{z}\right) = \frac{A\left(\alpha^2-|z|^2\right)^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \frac{-z}{\alpha^2 - z\overline{z}} = \frac{A\left(\alpha^2-|z|^2\right)^2}{\alpha^2} \cdot \frac{(-1)(\alpha^2-z\overline{z})-(-z)(-\overline{z})}{\left(\alpha^2-|z|^2\right)^2} = -A$ за све $z \in D(0,\alpha)$, односно $\kappa_{\rho_\alpha^A} \equiv -A$ на диску $D(0,\alpha)$.

2.3 Мала Picard-ова теорема

Наредна теорема има велики значај и бројне последице, од којих су неке овде наведене.

Теорема. Нека је Ω област у комплексној равни, $A, B, \alpha > 0$, $f : D(0,\alpha) \to \Omega$ холоморфна функција и σ метрика на области Ω, таква да је $\kappa_\sigma \leqslant -B$ у свакој тачки те области. Тада важи $(f^*\sigma)(z) \leqslant \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \rho_\alpha^A(z)$ за све $z \in D(0,\alpha)$.



Доказ. Важи $(f^*\sigma)(z) \geqslant 0$ за све $z \in D(0,\alpha)$. Ако је $f^*\sigma \equiv 0$ тада тривијално следи тражена неједнакост. Зато, претпоставимо да је $(f^*\sigma)(\zeta) > 0$ за неко $\zeta \in D(0,\alpha)$. Нека је $r \in (|\zeta|, \alpha)$ произвољно одабрано и нека је $g \overset{\text{деф}}{=} \frac{f^*\sigma}{\rho_r^A}$ на диску $D(0,r)$. Тада је $g \geqslant 0$ на диску $D(0,r)$ и g је непрекидна функција као композиција таквих. Приметимо да је $\lim\limits_{|z|\to r} \rho_r^A(z) = \infty$ и функција $f^*\sigma$ јесте непрекидна на компакту $D[0,r] \subset D(0,\alpha)$, а самим тим, она је ограничена на њему. Следи $\lim\limits_{|z|\to r} g(z) = 0 < g(\zeta)$. Како је g непрекидна функција, то постоји $\delta \in (0, r - |\zeta|)$ такво да за $r-\delta < |z| < r$ важи $g(z) < g(\zeta)$. Функција g је непрекидна на компакту $D[0, r-\delta]$ који садржи тачку ζ и на њему достиже свој максимум, а на основу претходног, то је уједно и максимум на диску $D(0,r)$. Дакле, функција g достиже максимум на диску $D(0,r)$ у некој тачки $z_0 \in D(0,r)$. Тада је $g(z_0) \geqslant g(\zeta) > 0$. Сада и функција $\ln g$ достиже свој максимум на диску $D(0,r)$ у тачки z_0, тако да је $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln g(z_0) \leqslant 0$ и $\frac{\partial^2}{\partial y^2} \ln g(z_0) \leqslant 0$. Из $g(z_0) > 0$, следи $(f^*\sigma)(z_0) > 0$, па је на основу претходног става $\kappa_{f^*\sigma}(z_0) = \kappa_\sigma(f(z_0)) \leqslant -B$. Добијамо $0 \geqslant \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln g(z_0) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \ln g(z_0) = \Delta \ln g(z_0) = \Delta \ln (f^*\sigma)(z_0) - \Delta \ln \rho_r^A(z_0) = -\kappa_{f^*\sigma}(z_0)(f^*\sigma)(z_0)^2 + \kappa_{\rho_r^A}(z_0)\rho_r^A(z_0)^2 \geqslant B(f^*\sigma)(z_0)^2 - A\rho_r^A(z_0)^2$. Одатле је $g(z_0) = \frac{(f^*\sigma)(z_0)}{\rho_r^A(z_0)} \leqslant \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$, односно важи $g(z) = \frac{(f^*\sigma)(z)}{\rho_r^A(z)} \leqslant \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ за све $z \in D(0,r)$. Према томе, имамо да је $(f^*\sigma)(z) \leqslant \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \rho_r^A(z)$ за све $z \in D(0,r)$ и све $r \in (|\zeta|, \alpha)$. Пустимо да $r \to \alpha^-$ и добијамо да је $(f^*\sigma)(z) \leqslant \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \rho_r^A(z)$ за све $z \in D(0,\alpha)$. Овим је доказ завршен. ■

Као директну последицу претходне теореме у случају $A = B = \alpha = 1$ добијамо *Ahlfors-Schwarz-ову лему: нека је* Ω *област у комплексној равни,* $f : \mathbb{D} \to \Omega$ *холоморфна функција и* σ *метрика на области* Ω, *таква да је* $\kappa_\sigma \leqslant -1$ *у свакој тачки те области. Тада важи* $(f^*\sigma)(z) \leqslant \rho(z)$ *за све* $z \in \mathbb{D}$, *где је* ρ *Poincaré-ова метрика на јединичном диску* $\mathbb{D}$. Осим тога, нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција и $f(0) = 0$. Тада на основу Ahlfors-Schwarz-ове леме важи $(f^*\rho)(z) \leqslant \rho(z)$ за све $z \in \mathbb{D}$. Специјално, за $z = 0$ добијамо $\rho(0)|f'(0)| \leqslant \rho(0)$, тј. $|f'(0)| \leqslant 1$. Дакле, Ahlfors-Schwarz-ова лема повлачи стандардну Schwarz-ову лему.

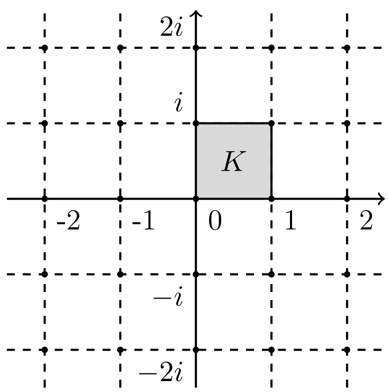
Теорема. Нека је Ω област у комплексној равни и σ метрика на области Ω, таква да је $\kappa_\sigma \leqslant -B$ у свакој тачки те области, где је $B > 0$. Тада је свака холоморфна функција $f : \mathbb{C} \to \Omega$ константна.

Доказ. Одаберимо произвољне $A > 0$ и $\alpha > 0$ и нека је $f : \mathbb{C} \to \Omega$ холоморфна функција. Тада је $f\big|_{D(0,\alpha)} : D(0,\alpha) \to \Omega$ холоморфна функција и на основу претходне теореме важи $0 \leqslant (f^*\sigma)(z) \leqslant \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\rho_\alpha^A(z)$ за све $z \in D(0,\alpha)$. Ово важи за све $\alpha > 0$ и ако пустимо да $\alpha \to \infty$ добијамо $(f^*\sigma)(z) = 0$ за све $z \in \mathbb{C}$, тј. $f^*\sigma \equiv 0$. Одатле је $f' \equiv 0$, тако да је $f = const$, односно f је константна функција. ∎

За функцију која је холоморфна у $\mathbb{C}$ кажемо да је *цела* функција. Као последицу претходне теореме добијамо *Liouville-ову теорему: свака цела, ограничена функција јесте константна.* Наиме, нека је f цела и ограничена функција. Тада постоји $R > 0$ такво да је $|f(z)| < R$ за све $z \in \mathbb{C}$. Посматрајмо функцију $g \overset{\text{деф}}{=} \frac{1}{R}f$. Сада је $g : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција и важи $\kappa_\rho \equiv -1 < 0$, где је ρ Poincaré-ова метрика на јединичном диску $\mathbb{D}$. На основу претходне теореме g је константна функција, а самим тим је и f константна функција.

Пример. Ако је f цела, неконстантна функција, тада је скуп $f(\mathbb{C})$ густ у $\mathbb{C}$.
Решење. Претпоставимо да скуп $f(\mathbb{C})$ није густ у $\mathbb{C}$. Тада постоје $a \in \mathbb{C}$ и $r > 0$ такви да је $f(\mathbb{C}) \cap D(a,r) = \emptyset$. Сада важи $|f(z) - a| \geqslant r$ за све $z \in \mathbb{C}$. Функција $g(z) \overset{\text{деф}}{=} \frac{1}{f(z)-a}$ јесте цела као композиција таквих и ограничена, јер је $|g(z)| = \frac{1}{|f(z)-a|} \leqslant \frac{1}{r}$ за све $z \in \mathbb{C}$. На основу Liouville-ове теореме g је константна функција, тако да је и f константна функција, што је контрадикција. Дакле, почетна претпоставка је погрешна, па је скуп $f(\mathbb{C})$ густ у $\mathbb{C}$. ♣

Пример. Нека је f цела функција таква да важи $f(z) = f(z+1) = f(z+i)$ за све $z \in \mathbb{C}$. Доказати да је f константна функција.

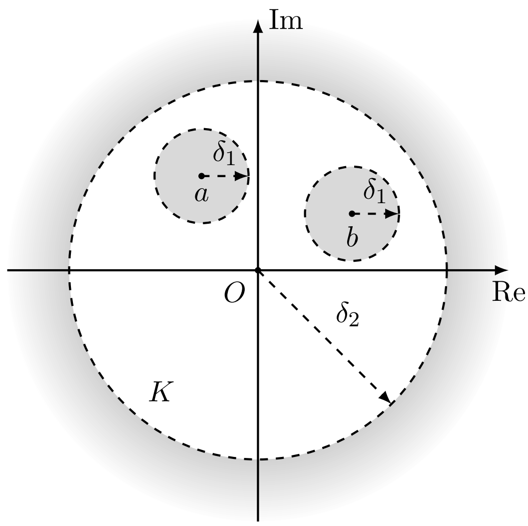


Решење. Уочимо квадрат $K = \{z = x + iy \in \mathbb{C} | x, y \in [0,1]\}$. Функција $|f|$ јесте непрекидна на компакту K, тако да је она ограничена на њему, тј. постоји константа $M > 0$ таква да је $|f(z)| < M$ за све $z \in K$. Како је $f(z) = f(z+1) = f(z+i)$ за све $z \in \mathbb{C}$ то важи $f(z) = f(z + m + ni)$ за све $z \in \mathbb{C}$ и све $m, n \in \mathbb{Z}$. Нека је $z = x + iy \in \mathbb{C}$ произвољно одабран комплексан број. Тада је $f(z) = f(x+iy) = f(x + iy - \lfloor x \rfloor - i\lfloor y \rfloor) = f(x - \lfloor x \rfloor + i\,(y - \lfloor y \rfloor))$, јер је $-\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ и $-\lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$ ($\lfloor \cdot \rfloor$ јесте функција целог дела). Како је $x - \lfloor x \rfloor \in [0,1]$ и $y - \lfloor y \rfloor \in [0,1]$, то је $x - \lfloor x \rfloor + i\,(y - \lfloor y \rfloor) \in K$. Следи $f(z) = f(x - \lfloor x \rfloor + i\,(y - \lfloor y \rfloor)) < M$. Дакле, за све $z \in \mathbb{C}$ важи $|f(z)| < M$ и на основу Liouville-ове теореме имамо да је f константна функција. ♣

Пример. Да ли постоји функција f холоморфна у $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ таква да важи $|f(z)| \geqslant \frac{1}{\sqrt{|z|}}$ за све $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$?

Решење. Претпоставимо да постоји таква функција f. Тада је $\frac{1}{f(z)} \neq 0$ за све $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, па је и функција $\frac{1}{f}$ холоморфна у $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Осим тога, важи $\frac{1}{|f(z)|} \leqslant \sqrt{|z|}$ за све $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, тако да је функција $\frac{1}{f}$ ограничена у околини сингуларитета у тачки 0 и он је отклоњив сингуларитет (Riemann-ова теорема о отклоњивом сингуларитету). Такође је $\lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{f(z)} = 0$, јер је $\frac{1}{|f(z)|} \leqslant \sqrt{|z|}$ за све $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Дакле, функција g дефинисана са $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ за $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ и $g(0) = 0$ јесте цела функција. Приметимо да је $g(z) \neq 0$ за све $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Нека је $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ развој функције g у околини тачке 0. Тада је $a_0 = g(0) = 0$ и нека је a_m први од коефицијената у развоју који је различит од нуле, где је $m \in \mathbb{N}$. Следи, $g(z) = z^m \sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n z^{n-m} = z^m h(z)$, где је $h(z) = \sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n z^{n-m}$ цела функција, јер је представљена конвергентним степеним редом. Важи $h(0) = a_m \neq 0$ (заправо је $h(z) \neq 0$ за све $z \in \mathbb{C}$, јер је $g(z) \neq 0$ за $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$). За $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ имамо $\left|z^{2m-1}h(z)^2\right| = \frac{1}{|z|}\left|z^{2m}h(z)^2\right| = \frac{1}{|z|}|g(z)^2| \leqslant \frac{1}{|z|}|z| = 1$, односно $\left|z^{2m-1}h(z)^2\right| \leqslant 1$, при чему ово важи и за $z = 0$, јер је $2m-1 \geqslant 1$. На основу Liouville-ове теореме $z^{2m-1}h(z)^2$ је константна функција, тј. $z^{2m-1}h(z)^2 = c$ за све $z \in \mathbb{C}$, где је $c \in \mathbb{C}$ нека константа. Заменом $z = 0$ добијамо да је $c = 0$. Са друге стране, за $z = 1$ добијамо $c = h(1)^2 \neq 0$, што је немогуће. Према томе, почетна претпоставка је погрешна и не постоји функција f са наведеним својствима. ♣

Теорема. Нека је Ω област у комплексној равни таква да скуп $\mathbb{C}\setminus\Omega$ садржи бар две тачке. Тада постоји константа $B > 0$ и метрика σ на области Ω тако да је $\kappa_\sigma \leqslant -B$ у свакој тачки те области.



Доказ. Скуп $\mathbb{C}\setminus\Omega$ садржи бар две тачке и означимо их са a и b где је $a \neq b$. Одатле следи $\Omega \subset \mathbb{C}\setminus\{a,b\}$. Нека је функција σ дефинисана са $\sigma(z) = \frac{\left(1+|z-a|^{1/3}\right)^{1/2}}{|z-a|^{5/6}} \cdot \frac{\left(1+|z-b|^{1/3}\right)^{1/2}}{|z-b|^{5/6}}$ за све $z \in \mathbb{C}\setminus\{a,b\}$. Тада је $\sigma(z) > 0$ за све $z \in \mathbb{C}\setminus\{a,b\}$ и функција σ јесте класе C^2 на области $\mathbb{C}\setminus\{a,b\}$ као композиција таквих. Дакле, σ јесте метрика на $\mathbb{C}\setminus\{a,b\}$, а тиме и на области Ω. За произвољно одабрану тачку $z \in \mathbb{C}\setminus\{a,b\}$ важи $\kappa_\sigma(z) = \frac{-\Delta\ln\sigma(z)}{\sigma(z)^2} = -\frac{|z-a|^{5/3}}{1+|z-a|^{1/3}} \cdot \frac{|z-b|^{5/3}}{1+|z-b|^{1/3}} \cdot \Delta\ln\left[\frac{\left(1+|z-a|^{1/3}\right)^{1/2}}{|z-a|^{5/6}} \cdot \frac{\left(1+|z-b|^{1/3}\right)^{1/2}}{|z-b|^{5/6}}\right] = -\frac{|z-a|^{5/3}}{1+|z-a|^{1/3}} \cdot \frac{|z-b|^{5/3}}{1+|z-b|^{1/3}}\left[\Delta\ln\frac{\left(1+|z-a|^{1/3}\right)^{1/2}}{|z-a|^{5/6}} + \Delta\ln\frac{\left(1+|z-b|^{1/3}\right)^{1/2}}{|z-b|^{5/6}}\right] = -\frac{|z-a|^{5/3}}{1+|z-a|^{1/3}} \cdot \frac{|z-b|^{5/3}}{1+|z-b|^{1/3}} \cdot \left[\frac{1}{2}\Delta\ln\left(1+|z-a|^{1/3}\right) - \frac{5}{6}\Delta\ln|z-a| + \frac{1}{2}\Delta\ln\left(1+|z-b|^{1/3}\right) - \frac{5}{6}\Delta\ln|z-b|\right] = -\frac{1}{2}\frac{|z-a|^{5/3}}{1+|z-a|^{1/3}} \cdot \frac{|z-b|^{5/3}}{1+|z-b|^{1/3}}\left[\Delta\ln\left(1+|z-a|^{1/3}\right) + \Delta\ln\left(1+|z-b|^{1/3}\right)\right]$, јер је $\Delta\ln|z-a| \equiv 0$ и $\Delta\ln|z-b| \equiv 0$ у области $\mathbb{C}\setminus\{a,b\}$, као што је раније показано. Са друге стране, важи $\Delta\ln\left(1+|z-a|^{1/3}\right) = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\ln\left(1+|z-a|^{1/3}\right) = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\ln\left(1+(z-a)^{1/6}\left(\overline{z}-\overline{a}\right)^{1/6}\right) = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\frac{1}{6}(z-a)^{1/6}(\overline{z}-\overline{a})^{-5/6}}{1+((z-a)(\overline{z}-\overline{a}))^{1/6}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\frac{(z-a)^{1/6}(\overline{z}-\overline{a})^{-5/6}}{1+((z-a)(\overline{z}-\overline{a}))^{1/6}} = \frac{2}{3}\frac{\frac{1}{6}(z-a)^{-5/6}(\overline{z}-\overline{a})^{-5/6}\left[1+(z-a)^{1/6}(\overline{z}-\overline{a})^{1/6}\right]-(z-a)^{1/6}(\overline{z}-\overline{a})^{-5/6}\frac{1}{6}(z-a)^{-5/6}(\overline{z}-\overline{a})^{1/6}}{\left(1+|z-a|^{1/3}\right)^2} =$

$\frac{1}{9}\frac{|z-a|^{-5/3}+|z-a|^{-4/3}-|z-a|^{-4/3}}{\left(1+|z-a|^{1/3}\right)^2} = \frac{1}{9}\frac{1}{|z-a|^{5/3}\left(1+|z-a|^{1/3}\right)^2}$, односно добијамо $\Delta \ln\left(1+|z-a|^{1/3}\right) = \frac{1}{9}\frac{1}{|z-a|^{5/3}\left(1+|z-a|^{1/3}\right)^2}$. На исти начин имамо да је $\Delta \ln\left(1+|z-b|^{1/3}\right) = \frac{1}{9}\frac{1}{|z-b|^{5/3}\left(1+|z-b|^{1/3}\right)^2}$. Према томе, $\kappa_\sigma(z) = -\frac{1}{18}\cdot\frac{|z-a|^{5/3}}{1+|z-a|^{1/3}}\cdot\frac{|z-b|^{5/3}}{1+|z-b|^{1/3}}\cdot\left[\frac{1}{|z-a|^{5/3}\left(1+|z-a|^{1/3}\right)^2}+\frac{1}{|z-b|^{5/3}\left(1+|z-b|^{1/3}\right)^2}\right]$, тј. важи $\kappa_\sigma(z) = -\frac{1}{18}\left[\frac{|z-b|^{5/3}}{\left(1+|z-a|^{1/3}\right)^3\left(1+|z-b|^{1/3}\right)}+\frac{|z-a|^{5/3}}{\left(1+|z-a|^{1/3}\right)\left(1+|z-b|^{1/3}\right)^3}\right]$. Сада је κ_σ непрекидна функција као композиција таквих и важи $\kappa_\sigma(z) < 0$ за све $z \in \mathbb{C}\setminus\{a,b\}$. Такође је $\lim\limits_{z\to a}\kappa_\sigma(z) = -\frac{\varepsilon}{18}$ и $\lim\limits_{z\to b}\kappa_\sigma(z) = -\frac{\varepsilon}{18}$, где је $\varepsilon = \frac{|a-b|^{5/3}}{1+|a-b|^{1/3}} > 0$. Приметимо да је и $\lim\limits_{z\to\infty}\kappa_\sigma(z) = -\infty$. Како је $-\frac{\varepsilon}{18} < -\frac{\varepsilon}{20}$ то постоји $\delta_1 \in \left(0, \frac{|a-b|}{2}\right)$ такво да је $\kappa_\sigma(z) < -\frac{\varepsilon}{20}$ за све $z \in D(a,\delta_1)$ и све $z \in D(b,\delta_1)$. Осим тога, постоји $\delta_2 > \max\{|a|+\delta_1, |b|+\delta_1\}$ такво да за $|z| > \delta_2$ важи $\kappa_\sigma(z) < -\frac{\varepsilon}{20}$. Сада је $D(a,\delta_1)\subset D(0,\delta_2)$, $D(b,\delta_1)\subset D(0,\delta_2)$ и $D(a,\delta_1)\cap D(b,\delta_1) = \emptyset$. Скуп $K = D[0,\delta_2]\setminus(D(a,\delta_1)\sqcup D(b,\delta_1))$ је компактан, јер је затворен и ограничен и непрекидна функција κ_σ на њему достиже свој максимум, при чему је $\max\limits_K \kappa_\sigma < 0$. Нека је $-B = \max\{-\frac{\varepsilon}{20}, \max\limits_K \kappa_\sigma\} < 0$. Тада је $B > 0$ и $\kappa_\sigma(z) \leqslant -B$ за све $z \in \mathbb{C}\setminus\{a,b\}$. Тиме је доказ теореме завршен. ■

Теорема (Мала Picard-ова теорема). Ако је f цела, неконстантна функција, тада скуп $\mathbb{C}\setminus f(\mathbb{C})$ садржи највише једну тачку.

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. да скуп $\mathbb{C}\setminus f(\mathbb{C})$ садржи бар две тачке. Како је $f(\mathbb{C})$ област, то на основу претходне теореме, постоји константа $B > 0$ и метрика σ на области $f(\mathbb{C})$, такви да је $\kappa_\sigma \leqslant -B$ у свакој тачки те области. Међутим, тада је свака холоморфна функција $g : \mathbb{C}\to f(\mathbb{C})$ константна. Према томе, f је константна функција. Ово је у контрадикцији са почетном претпоставком да је f неконстантна функција. Дакле, скуп $\mathbb{C}\setminus f(\mathbb{C})$ садржи највише једну тачку. ■

Пример. Нека је f цела, неконстантна функција и $f(-z) = -f(z)$ за све $z\in\mathbb{C}$. Доказати да је $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.
Решење. Претпоставимо да је $f(\mathbb{C}) \neq \mathbb{C}$. Тада је на основу мале Picard-ове теореме $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\setminus\{a\}$ за неко $a\in\mathbb{C}$. Важи $f(0) = -f(0)$, па је $f(0) = 0$ и $a \neq 0$. Како је $a \neq f(z)$ за све $z\in\mathbb{C}$, то је и $-a \neq -f(z) = f(-z)$ за све $z\in\mathbb{C}$, тј. $-a \notin f(\mathbb{C})$. Према томе, мора бити $-a = a$, односно $a = 0$, што је немогуће. Следи, $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. ♣

Пример. Ако су f и g целе функције и $e^{f(z)}+e^{g(z)} = 1$ за све $z\in\mathbb{C}$, тада су f и g константне функције.
Решење. За експоненцијалну функцију важи $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Сада је $e^{g(z)} \neq 1$ за све $z\in\mathbb{C}$, јер је $e^{f(z)} \neq 0$. Добијамо да је $g(z) \neq 2n\pi i$ за све $n\in\mathbb{Z}$ и $z\in\mathbb{C}$, тако да цела функција g испушта више од једне тачке у комплексној равни, па је константна на основу мале Picard-ове теореме. Слично је и f константна функција. ♣

Став. Нека је $f : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ холоморфна функција, таква да функција $f\circ f : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ нема фиксну тачку. Тада је f транслација $z\mapsto z+b$, $b\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Доказ. Ако је $z_0\in\mathbb{C}$ фиксна тачка функције f, важи $f(f(z_0)) = f(z_0) = z_0$, односно, z_0 је уједно и фиксна тачка функције $f\circ f$. Према томе, како $f\circ f$ нема фиксних тачака, то и f нема фиксних тачака. Следи да је $g(z) \overset{\text{деф}}{=} \frac{f(f(z))-z}{f(z)-z}$ добро дефинисана функција у целој комплексној равни, која је холоморфна као композиција таквих. Функција $f\circ f$ нема фиксну тачку, па је $g(z)\neq 0$ за све $z\in\mathbb{C}$. Осим тога, важи $f(f(z)) \neq f(z)$ за све $z\in\mathbb{C}$, јер f нема фиксну тачку, тако да је $g(z)\neq 1$ за све $z\in\mathbb{C}$. Из претходног је $g(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, па применом мале Picard-ове теореме следи $g(z) = c$ за све $z \in \mathbb{C}$, где је $c \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ нека константа. Дакле, $f(f(z)) - z = c(f(z) - z)$ за све $z \in \mathbb{C}$. Диференцирањем претходне једнакости, добијамо да је $f'(f(z))f'(z) - 1 = cf'(z) - c$, односно важи $f'(z)\left[f'(f(z)) - c\right] = 1 - c$ за све $z \in \mathbb{C}$. Како је $1 - c \neq 0$ то је $f'(z) \neq 0$ и $f'(f(z)) \neq c$ за све $z \in \mathbb{C}$. Функција $f' \circ f$ је цела и $(f' \circ f)(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \setminus \{0, c\}$, а самим тим, на основу мале Picard-ове теореме је $f' \circ f \equiv b$ за неко $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тада је $f'(w) = 0$ за све $w \in f(\mathbb{C})$. Функција f није константна, јер би у супротном функција $f \circ f$ имала фиксну тачку. На основу мале Picard-ове теореме је $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ или је $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{w_0\}$ за неко $w_0 \in \mathbb{C}$. Ако је $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, тада из $f' \circ f \equiv b$, имамо $f' \equiv b$. Ако је пак, $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{w_0\}$, тада важи $f'(w_0) = f'(\lim\limits_{n\to\infty} w_0 + \frac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} f'\left(w_0 + \frac{1}{n}\right) = b$, јер $w_0 + \frac{1}{n} \in f(\mathbb{C})$ за све $n \in \mathbb{N}$ и f' је непрекидна функција, тако да добијамо $f' \equiv b$ (опет смо користили да је $f' \circ f \equiv b$). У сваком случају је $f'(z) = b$ за све $z \in \mathbb{C}$, тј. $f(z) = az + b$ за све $z \in \mathbb{C}$, где је $a \in \mathbb{C}$ нека константа. Како функција f нема фиксних тачака, то мора бити $a = 1$ (иначе би, тачка $\frac{b}{1-a}$ била фиксна тачка функције f). Коначно је $f(z) = z + b$ за све $z \in \mathbb{C}$, где је $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, тј. f је транслација. ■

Последица мале Picard-ове теореме јесте и *основна теорема алгебре: ако је* $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *неконстантан полином, тада* p *има нулу у* $\mathbb{C}$. Наиме, претпоставимо да је $p(z) \neq 0$ за све $z \in \mathbb{C}$. Тада је $p(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (мала Picard-ова теорема) и како је p неконстантан полином, важи $\lim\limits_{z\to\infty} p(z) = \infty$. Постоји $R > 0$ тако да је $|p(z)| > 1$ за све $|z| > R$. За свако $n \in \mathbb{N}$ важи $\frac{1}{n} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, тако да је $f(z_n) = \frac{1}{n}$ за неко $z_n \in \mathbb{C}$ и на основу претходног, мора бити $z_n \in D[0, R]$. Сада је (z_n) низ тачака из компакта $D[0, R]$, па постоји конвергентан подниз z_{n_k}, тј. $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = z_0 \in D[0, R]$. Следи, $p(z_0) = \lim\limits_{k\to\infty} p(z_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} = 0$, што је немогуће. Дакле, почетна претпоставка је погрешна, тј. полином p има нулу у $\mathbb{C}$.

Пример. Доказати да не постоји полином $p(z)$ степена $N \in \mathbb{N}$, такав да је $\int_{|z|=2} \frac{p(z)}{(n+1)z-1} dz = 0$ за све $n = 0, 1, \ldots, N$.

Решење. Претпоставимо да постоји такав полином $p(z)$. Тада $\frac{1}{n+1} \in \{|z| < 2\}$ за све $n = 0, 1, \ldots, N$, па је на основу Cauchy-јеве интегралне формуле $p\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{p(z)}{z - \frac{1}{n+1}} dz = \frac{n+1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{p(z)}{(n+1)z-1} dz = 0$ за све $n = 0, 1, \ldots, N$. Добили смо да полином $p(z)$ има $N + 1$ нулу у комплексној равни, што је немогуће, јер је $\deg p = N$ и користећи основну теорему алгебре закључујемо да полином $p(z)$ има N нула у комплексној равни. ♣

Пример. Ако је f цела, $1 - 1$ функција, доказати је $f(z) = az + b$, $z \in \mathbb{C}$ за неке $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{C}$.

Решење. Како је f цела и $1 - 1$ функција, то је $f'(z) \neq 0$ за све $z \in \mathbb{C}$. Претпоставимо да је $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{p\}$ за неко $p \in \mathbb{C}$. Важи $\left(f^{-1}\right)'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$ за све $z \in \mathbb{C}$, па је и $f^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$ холоморфна функција. Према томе, простори $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C} \setminus \{p\}$ су хомеоморфни, тј. $\mathbb{C} \approx \mathbb{C} \setminus \{p\}$, што је немогуће, јер је $\mathbb{C}$ просто повезан простор за разлику од простора $\mathbb{C} \setminus \{p\}$. Према томе, на основу мале Picard-ове теореме мора бити $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ и $f^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ је холоморфна функција. Нека је $M > 0$ произвољно. Тада је $f^{-1}(D[0, M])$ компактан скуп (непрекидна слика компакта јесте опет компакт), а самим тим, то је један ограничен скуп. Дакле, постоји $R > 0$, такво да је $D[0, R] \supset f^{-1}(D[0, M])$. Из претходног је $\mathbb{C} \setminus D[0, R] \subset \mathbb{C} \setminus f^{-1}(D[0, M]) = f^{-1}(\mathbb{C} \setminus D[0, M])$, тако да за све $|z| > R$ важи $|f(z)| > M$. Добијамо да је $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$, па је f полином. Претпоставимо да је $\deg f = n \geqslant 2$. Ако f има две различите нуле, тада f није $1 - 1$ функција. Следи, $f(z) = c\,(z - z_0)^n$ за неке $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $z_0 \in \mathbb{C}$. Међутим, сада је $f(z_0 + 1) = f\left(z_0 + e^{\frac{2\pi i}{n}}\right) = c$, па f није $1 - 1$. Самим тим, мора бити $\deg f \geqslant 1$, односно $f(z) = az + b$ за неке $a, b \in \mathbb{C}$. Осим тога, функција f је $1 - 1$, па није константна и мора бити $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. ♣

Глава 3

Теореме Bloch-овог типа

3.1 Bloch-ова теорема

Фундаментална теорема ове главе јесте Bloch-ова теорема и њене последице. Заправо, наведена су и нека побољшања основне верзије Bloch-ове теореме из 1924. године. Најзначајније унапређење ове теореме дело је Ahlfors-а. Изненађујуће је какве последице има ова теорема. Између осталог, она омогућава још један доказ мале Picard-ове теореме. Њена последица је и теорема Schottky-ја која ће нешто касније у четвртој глави довести до доказа велике Picard-ове теореме. Лему која следи искористићемо при доказивању Bloch-ове теореме. Осим тога, она ће бити корисна и у неким даљим разматрањима.

Дефиниција. Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}$ отворен скуп. Тада фамилију свих функција које су холоморфне у Ω означавамо са $\mathcal{H}(\Omega)$, док фамилију свих функција које су холоморфне у неком отвореном скупу који садржи скуп $\overline{\Omega}$ означавамо са $\mathcal{H}(\overline{\Omega})$. Такође, за произвољну функцију $f : \Omega \to \mathbb{C}$ означавамо $|f|_\Omega = \sup\limits_{z\,\in\,\Omega} |f(z)|$. ♠

Лема. Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}$ ограничена област, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ непрекидно и $f\big|_\Omega : \Omega \to \mathbb{C}$ отворено пресликавање. Нека је $a \in \Omega$ тако да важи $s = \min\limits_{z\,\in\,\partial\Omega} |f(z) - f(a)| > 0$. Тада је $D(f(a), s) \subset f(\Omega)$.

Доказ. Скуп $\overline{\Omega}$ је компактан, јер је затворен и ограничен. Непрекидна слика компакта јесте опет компакт, тако да је $f(\overline{\Omega})$ компактан, а тиме и ограничен скуп. Самим тим је $f(\Omega)$ ограничен и отворен скуп (f је отворено пресликавање), па је $f(\Omega) \neq \overline{f(\Omega)}$, односно важи $\partial f(\Omega) \neq \emptyset$. Осим тога, $\partial f(\Omega)$ је компактан скуп, јер је затворен и ограничен и како се растојање од компакта достиже, то је $d\left(f(a), \partial f(\Omega)\right) = |w_0 - f(a)|$ за неко $w_0 \in \partial f(\Omega)$. Постоји низ тачака (w_n) из $f(\Omega)$ такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w_0$. Нека је $z_n \in \Omega$ тако да је $f(z_n) = w_n$, за све $n \in \mathbb{N}$. Сада је (z_n) низ тачака из компакта $\overline{\Omega}$, тако да постоји његов конвергентан подниз (z_{n_k}), тј. $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = z_0 \in \overline{\Omega}$. Користећи непрекидност функције f добијамо да је $f(z_0) = f\left(\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k}\right) = \lim\limits_{k\to\infty} f\left(z_{n_k}\right) = \lim\limits_{k\to\infty} w_{n_k} = w_0$. Како је $w_0 \notin f(\Omega)$, то из претходног мора бити $z_0 \notin \Omega$, а самим тим је $z_0 \in \partial\Omega$. Према томе, важи $d(f(a), \partial f(\Omega)) = |w_0 - f(a)| = |f(z_0) - f(a)| \geqslant s$, односно $d(f(a), \partial f(\Omega)) \geqslant s$. Нека је $w \in D(f(a), s)$ произвољно одабрана тачка. Ако $w \in f(\Omega)^c$ важи $|w - f(a)| \geqslant d(f(a), \partial f(\Omega)) \geqslant s$, што је немогуће, јер је $w \in D(f(a), s)$. Дакле, мора бити $w \in f(\Omega)$. Коначно је $D(f(a), s) \subset f(\Omega)$. ■

Став. Нека је $V = D(0, r)$, $r > 0$ и $f \in \mathcal{H}\left(\overline{V}\right)$ неконстантна функција, при чему је $f(0) = 0$ и $|f'|_{\overline{V}} \leqslant 2|f'(0)|$. Тада важи $D(0, R) \subset f(V)$, где је $R = (3 - 2\sqrt{2})r|f'(0)|$.

Доказ. Приметимо да мора бити $f'(0) \neq 0$ (у супротном би због услова $|f'|_{\overline{V}} \leqslant 2|f'(0)|$ важило $f' \equiv 0$, односно f би била константна функција). Функција $g(z) \overset{\text{деф}}{=} f(z) - f'(0)z$ јесте холоморфна као композиција таквих. Такође је $\int_{[0,z]} (f'(\zeta) - f'(0))\, d\zeta = f(z) - f(0) - f'(0)(z-0) = f(z) - f'(0)z = g(z)$ и ако означимо $\gamma(t) = zt$ за $t \in [0,1]$, добијамо $g(z) = \int_\gamma (f'(\zeta) - f'(0))\, d\zeta = \int_0^1 (f'(zt) - f'(0))\, zdt$. Из основне интегралне неједнакости следи, $|g(z)| \leqslant \int_0^1 |f'(zt) - f'(0)||z|dt$. Ако је $v \in V$ произвољна тачка, тада користећи Cauchy-јеву интегралну формулу, добијамо да важи $f'(v) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V} \frac{f'(\zeta)}{\zeta - v} d\zeta$ и $f'(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V} \frac{f'(\zeta)}{\zeta} d\zeta$, односно $f'(v) - f'(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V} f'(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - v} - \frac{1}{\zeta}\right) d\zeta = \frac{v}{2\pi i}\int_{\partial V} \frac{f'(\zeta)}{\zeta(\zeta - v)} d\zeta$. Из претходног је $|f'(v) - f'(0)| \leqslant \frac{|v|}{2\pi}\int_{\partial V} \frac{|f'(\zeta)|}{|\zeta||\zeta - v|}|d\zeta| \leqslant \frac{|v| \cdot |f'|_{\overline{V}}}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r - |v|} \cdot 2\pi r = \frac{|v|}{r - |v|}|f'|_{\overline{V}}$, тј. $|f'(v) - f'(0)| \leqslant \frac{|v|}{r-|v|}|f'|_{\overline{V}}$. Искористимо претходну неједнакост и добијамо да је $|g(z)| \leqslant \int_0^1 |f'(zt) - f'(0)||z|dt \leqslant \int_0^1 \frac{|zt|}{r - |zt|}|f'|_{\overline{V}}|z|dt \leqslant |z|^2|f'|_{\overline{V}}\frac{1}{r-|z|}\int_0^1 tdt \leqslant \frac{1}{2}\frac{|z|^2}{r-|z|}|f'|_{\overline{V}} \leqslant \frac{|z|^2}{r-|z|}|f'(0)|$, односно важи $|g(z)| \leqslant \frac{|z|^2}{r-|z|}|f'(0)|$. Сада, за произвољне $\alpha \in (0,r)$ и $z \in \partial D(0,\alpha)$ имамо $\frac{\alpha^2}{r-\alpha}|f'(0)| = \frac{|z|^2}{r-|z|}|f'(0)| \geqslant |g(z)| = |f(z) - f'(0)z| \geqslant \alpha|f'(0)| - |f(z)|$, тако да је $\left(\alpha - \frac{\alpha^2}{r-\alpha}\right)|f'(0)| \leqslant |f(z)|$ за све $z \in \partial D(0,\alpha)$. Нађимо максимум функције $\varphi(\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^2}{r-\alpha}$ на интервалу $(0,r)$. Најпре је $\varphi'(\alpha) = 1 - \frac{2\alpha(r-\alpha) - \alpha^2(-1)}{(r-\alpha)^2} = 1 - \frac{2r\alpha - \alpha^2}{(r-\alpha)^2} = \frac{r^2 - 4r\alpha + 2\alpha^2}{(r-\alpha)^2} = \frac{\left(r - (2+\sqrt{2})\alpha\right)\left(r - (2-\sqrt{2})\alpha\right)}{(r-\alpha)^2}$, односно, важи $\varphi'(\alpha) = \frac{2\left(\frac{r}{2+\sqrt{2}} - \alpha\right)\left(\frac{r}{2-\sqrt{2}} - \alpha\right)}{(r-\alpha)^2}$. Како је $0 < \frac{r}{2+\sqrt{2}} < r < \frac{r}{2-\sqrt{2}}$, то је $\varphi'(\alpha) \geqslant 0$ за $\alpha \in \left(0, \frac{r}{2+\sqrt{2}}\right]$ и $\varphi'(\alpha) \leqslant 0$ за $\alpha \in \left[\frac{r}{2+\sqrt{2}}, r\right)$. Према томе, у тачки $\alpha = \frac{r}{2+\sqrt{2}}$ се достиже максимална вредност $\varphi(\frac{r}{2+\sqrt{2}}) = \frac{r}{2+\sqrt{2}} - \frac{r^2}{(2+\sqrt{2})^2 r - (2+\sqrt{2})r} = \frac{r}{2+\sqrt{2}} - \frac{r}{(2+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)r}{2} = (\sqrt{2}-1)^2 r = (3 - 2\sqrt{2})r$. Добијамо да је $(3-2\sqrt{2})r|f'(0)| \leqslant |f(z)|$ за све $z \in \partial D\left(0, \frac{r}{2+\sqrt{2}}\right)$. Област $\Omega = D\left(0, \frac{r}{2+\sqrt{2}}\right)$ је ограничена, функција f је непрекидна на $\overline{\Omega} \subset V$ и $f\big|_\Omega : \Omega \to \mathbb{C}$ је отворено пресликавање (на основу теореме о отвореном пресликавању). Осим тога, $0 \in \Omega$ и $\min\limits_{z \in \partial\Omega}|f(z) - f(0)| = \min\limits_{z \in \partial\Omega}|f(z)| \geqslant (3-2\sqrt{2})r|f'(0)| = R$. Коначно, на основу претходне леме, важи $D(0,R) \subset f\left(D\left(0, \frac{r}{2+\sqrt{2}}\right)\right) \subset f(V)$. ∎

Последица. Нека је $V = D(a,r)$, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ и $f \in \mathcal{H}\left(\overline{V}\right)$ неконстантна функција, при чему је $|f'|_{\overline{V}} \leqslant 2|f'(a)|$. Тада важи $D(f(a),R) \subset f(V)$, где је $R = (3-2\sqrt{2})r|f'(a)|$.

Доказ. Дефинишимо функцију $h(z) \overset{\text{деф}}{=} f(z+a) - f(a)$ и нека је $W = D(0,r)$. Тада је $h \in \mathcal{H}(\overline{W})$, јер је $f \in \mathcal{H}(\overline{V})$ и h је неконстантна функција, јер је f таква. Такође је $h(0) = f(a) - f(a) = 0$ и $h'(z) = f'(z+a)$, па је $h'(0) = f'(a)$. Осим тога, важи $|h'|_{\overline{W}} = \sup\limits_{z \in \overline{W}}|h'(z)| = \sup\limits_{z \in D[0,r]}|f'(z+a)| = \sup\limits_{\zeta \in D[a,r]}|f'(\zeta)| = |f'|_{\overline{V}} \leqslant 2|f'(a)| = 2|h'(0)|$, тј. $|h'|_{\overline{W}} \leqslant 2|h'(0)|$. Према томе, функција h испуњава услове претходног става, тако да је $D(0,R) \subset h(W)$, јер је $R = (3-2\sqrt{2})r|f'(a)| = (3-2\sqrt{2})r|h'(0)|$. Како је $h(W) = f(V) + (-f(a))$ (скуп $f(V) + (-f(a))$ је транслат скупа $f(V)$ за вектор $-f(a)$), то је $D(0,R) \subset f(V) + (-f(a))$, односно, $D(f(a),R) \subset f(V)$, што је и требало доказати. ∎

Претпоставимо да је $f \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$ неконстантна функција. Функција $A(z) = |f'(z)|(1-|z|)$ јесте непрекидна на компакту $\overline{\mathbb{D}}$ и у некој тачки $p \in \overline{\mathbb{D}}$ достиже свој максимум M. Како је $A(z) = 0$ за све $z \in \partial\mathbb{D}$, то можемо изабрати да је $p \in \mathbb{D}$. Уколико би било $M = 0$, имали би $f' \equiv 0$, односно f би била константна функција. Према томе, мора бити $M > 0$. У складу са претходно наведеним ознакама, доказујемо следећу теорему.

Теорема. Ако је $f \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$ неконстантна функција, тада је $D\left(f(p), \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) M\right) \subset f(\mathbb{D})$.

Доказ. Како $p \in \mathbb{D}$, то је $t = \frac{1-|p|}{2} \in (0,1)$ и $M = |f'(p)|(1-|p|) = 2t|f'(p)|$. За $z \in D[p,t]$, важи $|z| = |z-p+p| \leqslant |z-p| + |p| \leqslant t + |p| = \frac{1+|p|}{2} < 1$, а самим тим је $D[p,t] \subset \mathbb{D}$ и $1-|z| \geqslant 1 - \frac{1+|p|}{2} = \frac{1-|p|}{2} = t$. Следи $t|f'(z)| \leqslant |f'(z)|(1-|z|) \leqslant M = 2t|f'(p)|$ за све $z \in D[p,t]$, односно, важи $|f'(z)| \leqslant 2|f'(p)|$ за све $z \in D[p,t]$, па је $|f'|_{D[p,t]} \leqslant 2|f'(p)|$. Ако је $V = D(p,t)$, тада је $f \in \mathcal{H}(\overline{V})$ неконстантна функција и $|f'|_{\overline{V}} \leqslant 2|f'(p)|$. Сада је на основу претходне последице $D(f(p), R) \subset f(V) \subset f(\mathbb{D})$, где је $R = (3-2\sqrt{2})t|f'(p)| = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) M$. Дакле, важи $D\left(f(p), \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) M\right) \subset f(\mathbb{D})$, чиме је доказ завршен. ∎

Теорема (Bloch). Нека је функција $f \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$ са својством $f'(0) = 1$. Тада $f(\mathbb{D})$ садржи диск полупречника $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$.

Доказ. Функција f је неконстантна функција, јер је $f'(0) = 1$. Приметимо да је $M = \max\limits_{z \in \overline{\mathbb{D}}} A(z) \geqslant A(0) = |f'(0)| = 1$, где је $A(z) = |f'(z)|(1-|z|)$. На основу претходне теореме слика $f(\mathbb{D})$ садржи диск полупречника $\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) M \geqslant \frac{3}{2} - \sqrt{2}$, а тим пре, $f(\mathbb{D})$ садржи диск полупречника $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$. ∎

Последица. Нека је функција f холоморфна у области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f'(c) \neq 0$ за неко $c \in \Omega$ и $s \in (0, d(c, \partial\Omega))$. Тада $f(\Omega)$ садржи диск полупречника $\frac{1}{12}s|f'(c)|$.

Доказ. Функција $g(z) \overset{\text{деф}}{=} f(z+c)$ јесте холоморфна у области $\Omega + (-c)$, јер је f холоморфна у Ω (скуп $\Omega + (-c)$ је област као транслат области Ω). Важи $D[c,s] \subset \Omega$, а самим тим је и $D[0,s] \subset \Omega + (-c)$. Одатле следи да за функцију h дефинисану са $h(z) \overset{\text{деф}}{=} \frac{g(sz)}{sg'(0)}$ важи $h \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$. Сада је $h'(z) = \frac{g'(sz)}{g'(0)}$, односно $h'(0) = 1$. На основу Bloch-ове теореме имамо да $h(\mathbb{D})$ садржи диск полупречника $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$, а тиме и диск полупречника $\frac{1}{12}$, јер је $\frac{3}{2} - \sqrt{2} > \frac{1}{12}$. Како је $g\left(D(0,s)\right) = sg'(0)h(\mathbb{D})$, то слика $g\left(D(0,s)\right)$ садржи диск полупречника $\frac{1}{12}s|g'(0)| = \frac{1}{12}s|f'(c)|$. Осим тога, важи $g\left(D(0,s)\right) \subset g\left(\Omega + (-c)\right) = f(\Omega)$. Према томе, $f(\Omega)$ садржи диск полупречника $\frac{1}{12}$. ∎

Приметимо да ако је $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ холоморфна, неконстантна функција, тада на основу претходне последице, $f(\mathbb{C})$ садржи диск произвољног полупречника.

Нека је $f \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$ неконстантна функција. Функција $B(z) = |f'(z)|(1-|z|^2)$ јесте непрекидна на компакту $\overline{\mathbb{D}}$ и на њему достиже свој максимум N у некој тачки $q \in \overline{\mathbb{D}}$. Како је $B(z) = 0$ за све $z \in \partial\mathbb{D}$, то можемо узети да је $q \in \mathbb{D}$. Дефинишимо функцију $F \overset{\text{деф}}{=} f \circ \varphi_{-q}$, тј. $F(z) = f\left(\frac{z+q}{1+\overline{q}z}\right)$. Функција φ_{-q} је аутоморфизам јединичног диска $\mathbb{D}$, однонсно $\varphi_{-q} \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$, па је $F(\mathbb{D}) = f(\varphi_{-q}(\mathbb{D})) = f(\mathbb{D})$. Такође је $\varphi'_{-q}(z) = \frac{1-|q|^2}{(1+\overline{q}z)^2}$ и $\varphi'_q(z) = \frac{1-|q|^2}{(1-\overline{q}z)^2}$. Важи $F'(z) = f'(\varphi_{-q}(z))\varphi'_{-q}(z)$, односно $F'(0) = f'(q)(1-|q|^2)$, па је $|F'(0)| = |f'(q)|(1-|q|^2) = N$. Знамо да је $\varphi_{-q} = \varphi_q^{-1}$ и самим тим $f = F \circ \varphi_q$. Нека је $z \in \mathbb{D}$ произвољна тачка. Тада је $z = \varphi_q(\zeta)$ за неко $\zeta \in \mathbb{D}$. Следи $N \geqslant |f'(\zeta)|(1-|\zeta|^2) = |F'(\varphi_q(\zeta))||\varphi'_q(\zeta)|(1-|\zeta|^2)$, односно $\frac{N}{1-|\varphi_q(\zeta)|^2} \geqslant |F'(\varphi_q(\zeta))|\frac{|\varphi'_q(\zeta)|(1-|\zeta|^2)}{1-|\varphi_q(\zeta)|^2} = |F'(\varphi_q(\zeta))|\frac{(1-|q|^2)(1-|\zeta|^2)}{|1-\overline{q}\zeta|^2-|\zeta-q|^2} = |F'(\varphi_q(\zeta))|\frac{(1-|q|^2)(1-|\zeta|^2)}{(1-|q|^2)(1-|\zeta|^2)} = |F'(\varphi_q(\zeta))|$. Како је $\varphi_q(\zeta) = z$, то из претходног добијамо $|F'(z)| \leqslant \frac{N}{1-|z|^2}$ за све $z \in \mathbb{D}$. У вези са претходним доказујемо следећу теорему.

Теорема. Ако је $f \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$ неконстантна функција, тада је $D\left(f(q), \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2\right) N\right) \subset f(\mathbb{D})$.

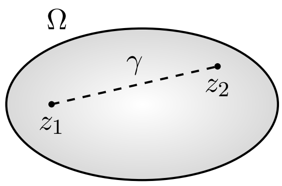
Доказ. Нека је $z \in D\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \subset \mathbb{D}$. Тада важи $|F'(z)| \leqslant \frac{N}{1-|z|^2} \leqslant \frac{N}{1-\frac{1}{2}} = 2N = 2|F'(0)|$, тј. $|F'(z)| \leqslant 2|F'(0)|$. Означимо $V = D\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Функција F је неконстантна, јер је f таква. Према томе, важи $F \in \mathcal{H}(\overline{V})$ је неконстантна функција и $|F'|_{\overline{V}} \leqslant 2|F'(0)|$. Користећи један од претходних ставова добијамо $D(F(0), R) \subset F(V) \subset F(\mathbb{D}) = f(\mathbb{D})$, где је $R = \left(3 - 2\sqrt{2}\right) \frac{\sqrt{2}}{2}|F'(0)| = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2\right) N$. Осим тога, $F(0) = f(\varphi_{-q}(0)) = f(q)$. Коначно је $D\left(f(q), \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2\right) N\right) \subset f(\mathbb{D})$. ■

Последица. Нека је $f \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$ и $f'(0) = 1$. Тада $f(\mathbb{D})$ садржи диск полупречника $\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2$.

Доказ. На основу претходне теореме $f(\mathbb{D})$ садржи диск полупречника $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2\right) N$, где је $N = \max\limits_{z \in \overline{\mathbb{D}}} |f'(z)|(1 - |z|^2) \geqslant |f'(0)| = 1$. Дакле, $f(\mathbb{D})$ садржи и неки диск чији је полупречник једнак $\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2$. ■

3.2 Ahlfors-ова теорема

Претходни резултат се може побољшати. Наиме, ако је $f \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$ и $f'(0) = 1$, тада $f(\mathbb{D})$ садржи диск полупречника $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Такође, тада постоји област $\Omega \subset \mathbb{D}$ која се пресликавањем f бихоломорфно пресликава на тај диск полупречника $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Пре самог доказа, биће нам од користи да докажемо нека тврђења која су сама по себи интересантна.



(1) Претпоставимо да је Ω конвексна област у комплексној равни и нека је $f : \Omega \to \mathbb{C}$ холоморфна функција. Такође, нека је $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ за све $z \in \Omega$. Ако су z_1 и z_2 две различите тачке из области Ω и $\gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2$ за $t \in [0,1]$, тада је $\gamma([0,1]) \subset \Omega$, јер је Ω конвексна област. Тада важи $\int_\gamma f'(z)dz = \int_0^1 f'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^1 (f \circ \gamma)'(t)dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(z_2) - f(z_1)$. Следи $f(z_2) - f(z_1) = \int_0^1 f'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^1 f'(\gamma(t))(z_2 - z_1)dt = (z_2 - z_1)\int_0^1 f'(\gamma(t))dt = (z_2 - z_1)\left[\int_0^1 \operatorname{Re} f'(\gamma(t))dt + i\int_0^1 \operatorname{Im} f'(\gamma(t))dt\right]$, тј. важи $f(z_2) - f(z_1) = (z_2 - z_1)\left[\int_0^1 \operatorname{Re} f'(\gamma(t))dt + i\int_0^1 \operatorname{Im} f'(\gamma(t))dt\right]$. Како је $z_1 \neq z_2$, то је $z_1 - z_2 \neq 0$. Осим тога је $\int_0^1 \operatorname{Re} f'(\gamma(t))dt > 0$, па је $\int_0^1 \operatorname{Re} f'(\gamma(t))dt + i\int_0^1 \operatorname{Im} f'(\gamma(t))dt \neq 0$. Из свега претходног је $f(z_2) - f(z_1) = (z_2 - z_1)\left[\int_0^1 \operatorname{Re} f'(\gamma(t))dt + i\int_0^1 \operatorname{Im} f'(\gamma(t))dt\right] \neq 0$, односно $f(z_1) \neq f(z_2)$. Према томе, функција f је $1-1$ и самим тим је $f : \Omega \to f(\Omega)$ бихоломорфно пресликавање.

(2) У наставку, размотримо функције $p(w) = \frac{\sqrt{3}(1-w)}{3-w}$ и $q(w) = \frac{1}{4}w(3-w)^2$. Нека је $w = u + iv \in \overline{\mathbb{D}}$ произвољно одабрана тачка. Тада је $u^2 + v^2 \leqslant 1$ и важи $3|1-w|^2 = 3\left((1-u)^2 + v^2\right) = 3\left(1 + u^2 + v^2 - 2u\right) = 3 + 3u^2 + 3v^2 - 6u < 9 + u^2 + v^2 - 6u = (u-3)^2 + v^2 = |3-w|^2$. Из претходног је $|\sqrt{3}(1-w)|^2 < |3-w|^2$, односно $|p(w)| = \left|\frac{\sqrt{3}(1-w)}{3-w}\right| < 1$ и како ово важи за све $w \in \overline{\mathbb{D}}$, то је $p(\overline{\mathbb{D}}) \subset \mathbb{D}$. Даље, покажимо да је $p([0,1]) = \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Наиме, за $x \in [0,1]$ имамо $0 \leqslant \frac{\sqrt{3}(1-x)}{3-x} = p(x) = \frac{\sqrt{3}(1-x)}{3(1-\frac{x}{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1-x}{1-\frac{x}{3}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$, тј. $p(x) \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Са друге стране, ако $x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, тада је $p(w) = x$, где је $w = \frac{1-\sqrt{3}x}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}x}$ и важи $0 \leqslant \frac{1-\sqrt{3}x}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}x} = w \leqslant 1$, односно $w \in [0,1]$. Према томе, заиста је $p([0,1]) = \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Такође, приметимо да је $q(p^{-1}(z)) = q\left(\frac{1-\sqrt{3}z}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}z}\right) =$

$\frac{1}{4}\frac{1-\sqrt{3}z}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}z}\left(3-\frac{1-\sqrt{3}z}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}z}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{1-\sqrt{3}z}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}z\right)^3}\left(3-\sqrt{3}z-1+\sqrt{3}z\right)^2 = \frac{1-\sqrt{3}z}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}z\right)^3}$, тј. важи $(p^{-1}(z)) = \frac{1-\sqrt{3}z}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}z\right)^3}$. Коначно, за $w \in \partial\overline{\mathbb{D}}$ добијамо $|q(w)|(1-|p(w)|^2) = \frac{1}{4}|w||3-w|^2\left(1-\frac{3|1-w|^2}{|3-w|^2}\right) = \frac{1}{4}\left(|3-w|^2-3|1-w|^2\right) = \frac{1}{4}\left(9-3w-3\overline{w}+w\overline{w}-3+3w+3\overline{w}-3w\overline{w}\right) = \frac{1}{4}(6-2|w|^2) = 1$.

(3) Нека је $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ холоморфна функција, $f'(0)=1$ и $|f'(z)|\leqslant\frac{1}{1-|z|^2}$ за све $z\in\mathbb{D}$. Тада је $f''(0)=0$. Наиме, нека је $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\dots$ Taylor-ов развој функције f у околини тачке 0 у диску $\mathbb{D}$. Тада је $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ за све $n\in\mathbb{N}_0$. Важи $a_0=f(0)$ и $a_1=f'(0)=1$, тако да је $f(z)-f(0)=z+a_2z^2+a_3z^3+\dots$ за све $z\in\mathbb{D}$. За тачку $z\in\mathbb{D}$ означимо $\gamma(t)=zt$ где је $t\in[0,1]$. Сада је $|f(z)-f(0)|=\left|\int_\gamma f'(z)dz\right|\leqslant\int_\gamma|f'(z)||dz|\leqslant\int_\gamma\frac{1}{1-|z|^2}|dz| = \int_0^1\frac{1}{1-(|z|t)^2}d(|z|t) = \int_0^{|z|}\frac{1}{1-t^2}dt = \int_0^1\left(1+t^2+t^4+\dots\right)dt = |z|+\frac{1}{3}|z|^3+\dots$. Према томе, добили смо да је $\left|z+a_2z^2+a_3z^3+\dots\right|\leqslant|z|+\frac{1}{3}|z|^3+\dots$ за све $z\in\mathbb{D}$. Претпоставимо да је $a_2\neq0$. Тада је $\operatorname{Re}a_2\neq0$ или $\operatorname{Im}a_2\neq0$, тако да је тачна бар једна од неједнакости $\operatorname{Re}a_2>0$, $\operatorname{Re}a_2<0$, $\operatorname{Im}a_2>0$ или $\operatorname{Im}a_2<0$. Размотримо ове четири могућности. У наставку узимамо да је $x\in\mathbb{R}$. Најпре, нека је $\operatorname{Re}a_2>0$. Тада важи $|x+a_2x^2+a_3x^3+\dots|\geqslant\operatorname{Re}(x+a_2x^2+a_3x^3+\dots)=x+(\operatorname{Re}a_2)x^2+(\operatorname{Re}a_3)x^3+\dots>x+\frac{1}{3}x^3+\dots$ за неко довољно мало $x\in(0,1)$, јер на десној страни недостаје квадратни члан. Узимајући да је $z=x\in\mathbb{D}$ добијамо $|z+a_2z^2+a_3z^3+\dots|>|z|+\frac{1}{3}|z|^3+\dots$ што је контрадикција. Затим, претпоставимо да је $\operatorname{Re}a_2<0$. Добијамо да је $|-x+a_2(-x)^2+a_3(-x)^3+\dots|=|-x+a_2x^2-a_3x^3+\dots|\geqslant-\operatorname{Re}(-x+a_2x^2-a_3x^3+\dots)=x+\operatorname{Re}(-a_2)x^2+(\operatorname{Re}a_3)x^3+\dots>x+\frac{1}{3}x^3+\dots$ (на десној страни нема квадратног члана) за неко довољно мало $x\in(0,1)$ и узимајући $z=-x\in\mathbb{D}$ имамо $|z+a_2z^2+a_3z^3+\dots|>|z|+\frac{1}{3}|z|^3+\dots$ што је немогуће. Даље, нека је $\operatorname{Im}a_2>0$. Тада је $|-ix+a_2(-ix)^2+a_3(-ix)^3+\dots|=|-ix-a_2x^2+ia_3x^3+\dots|\geqslant-\operatorname{Im}(-ix-a_2x^2+ia_3x^3+\dots)=x+(\operatorname{Im}a_2)x^2+\operatorname{Re}(-a_3)x^3+\dots>x+\frac{1}{3}x^3+\dots$ за неко довољно мало $x\in(0,1)$, јер на десној страни нема квадратног члана и ако узмемо да је $z=-ix\in\mathbb{D}$, добијамо $|z+a_2z^2+a_3z^3+\dots|>|z|+\frac{1}{3}|z|^3+\dots$, а то је контрадикција. Коначно, нека је $\operatorname{Im}a_2<0$. Важи $|ix+a_2(ix)^2+a_3(ix)^3+\dots|=|ix-a_2x^2-ia_3x^3+\dots|\geqslant\operatorname{Im}(ix-a_2x^2-ia_3x^3+\dots)=x+\operatorname{Im}(-a_2)x^2\operatorname{Re}(-a_3)x^3+\dots>x+\frac{1}{3}x^3+\dots$ за неко довољно мало $x\in(0,1)$ (на десној страни немамо квадратни члан) и ако узмемо да је $z=ix\in\mathbb{D}$ добијамо $|z+a_2z^2+a_3z^3+\dots|>|z|+\frac{1}{3}|z|^3+\dots$, а то није могуће. Дакле, у сваком од случајева добијамо контрадикцију, па мора бити $a_2=0$. Следи $f''(0)=2a_2=0$.

Лема. Нека је $F:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ холоморфна функција, $F'(0)=1$ и $|F'(z)|\leqslant\frac{1}{1-|z|^2}$ за све $z\in\mathbb{D}$. Тада је $\operatorname{Re}F'(z)\geqslant\frac{1-\sqrt{3}|z|}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}|z|\right)^3}$ за све $z\in D\left[0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Доказ. Нека су $p(w)=\frac{\sqrt{3}(1-w)}{3-w}$ и $q(w)=\frac{1}{4}w(3-w)^2$ функције као у (2). Пресликавање p је непрекидно, па је $p^{-1}(\mathbb{D})$ отворен скуп. На основу (2) важи $p(\overline{\mathbb{D}})\subset\mathbb{D}$, тако да је $\overline{\mathbb{D}}\subset p^{-1}(\mathbb{D})$. Дефинишимо функцију $H(w)\overset{\text{деф}}{=}\frac{w}{(1-w)^2}\left(\frac{F'(p(w))}{q(w)}-1\right)$. Како је $\frac{w}{(1-w)^2}\Big|_{w=0}=0$, то узимамо да је $H(0)=0$. Такође је $H(w)=\frac{w}{q(w)}\frac{1}{(1-w)^2}\left(F'(p(w))-q(w)\right)$, $\lim\limits_{w\to1}q(w)=1$ и $\lim\limits_{w\to1}p(w)=0$. Важи $F'(p(w))=F'(0)+F''(0)p(w)+\frac{F^{(3)}(0)}{2!}p(w)^2+\dots$. Из (3) је $F''(0)=0$, па важи $F'(p(w))=1+\frac{F^{(3)}(0)}{2}p(w)^2+\dots$. Одатле је $\frac{F'(p(w))-q(w)}{(1-w)^2}=\frac{1-q(w)}{(1-w)^2}+\frac{F^{(3)}(0)}{2}\frac{p(w)^2}{(1-w)^2}+\dots$. Осим тога, приметимо да је $\lim\limits_{w\to1}\frac{p(w)^n}{(1-w)^2}=0$ за све $n\geqslant3$, $\lim\limits_{w\to1}\frac{1-q(w)}{(1-w)^2}=\lim\limits_{w\to1}\frac{1-\frac{1}{4}w(3-w)^2}{(1-w)^2}=-\frac{1}{4}\lim\limits_{w\to1}\frac{w(w-3)^2-4}{(w-1)^2}=-\frac{1}{4}\lim\limits_{w\to1}\frac{(w-1)^2(w-4)}{(w-1)^2}=\frac{3}{4}$ и $\lim\limits_{w\to1}\frac{p(w)^2}{(1-w)^2}=\lim\limits_{w\to1}\frac{3}{(3-w)^2}=\frac{3}{4}$, тако да можемо дефинисати $H(1)=\frac{3}{4}+\frac{3}{8}F^{(3)}(0)$. Из свега претходног, функција $H(w)$ је холоморфна у $p^{-1}(\mathbb{D})$ као композиција таквих. Следи $H\in\mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$. За произвољну тачку $w\in\partial\mathbb{D}\setminus\{1\}$

важи $\frac{w}{(1-w)^2} = \frac{w(\overline{w}-1)^2}{|w-1|^4} = \frac{w\overline{w}^2-2w\overline{w}+w}{|w-1|^4} = \frac{\overline{w}+w-2}{|w-1|^4} = \frac{2u-2}{((u-1)^2+v^2)^2}$, тако да је $\frac{w}{(1-w)^2} \in \mathbb{R}$ и $\frac{w}{(1-w)^2} = \frac{2u-2}{((u-1)^2+v^2)^2} = \frac{2(u-1)}{4(u-1)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{u-1} \leqslant -\frac{1}{4}$, јер је $u \geqslant -1$. Према томе, важи $\operatorname{Re} H(w) = \frac{w}{(1-w)^2} \operatorname{Re}\left(\frac{F'(p(w))}{q(w)} - 1\right)$ за све $w \in \partial\mathbb{D}$ (због непрекидности функције $z \mapsto \operatorname{Re} z$ важиће и за тачку $w = 1$). Како је $|F'(z)|(1-|z|^2) \leqslant 1$ за све $z \in \mathbb{D}$, то је $|F'(p(w))|(1-|p(w)|^2) \leqslant 1$ за све $w \in \partial\mathbb{D}$. На основу (2) је $|F'(p(w))| = |F'(p(w))|(1-|p(w)|^2)|q(w)| \leqslant |q(w)|$ за све $w \in \partial\mathbb{D}$, тј. $\left|\frac{F'(p(w))}{q(w)}\right| \leqslant 1$, тако да је $\frac{F'(p(w))}{q(w)} \in \overline{\mathbb{D}}$ за све $w \in \partial\mathbb{D}$. Следи $\operatorname{Re}\left(\frac{F'(p(w))}{q(w)} - 1\right) \leqslant 0$, односно важи $\operatorname{Re} H(w) \geqslant 0$, за све $w \in \partial\mathbb{D}$. Сада је $\left|e^{-H(w)}\right| = e^{-\operatorname{Re} H(w)} \leqslant 1$ за све $w \in \partial\mathbb{D}$, па је на основу принципа максимума модула $\left|e^{-H(w)}\right| = e^{-\operatorname{Re} H(w)} \leqslant 1$ за $w \in \overline{\mathbb{D}}$, тј. $\operatorname{Re} H(w) \geqslant 0$ за $w \in \overline{\mathbb{D}}$. За $w \in [0,1)$ важи $q(w) \geqslant 0$ и $\frac{w}{(1-w)^2} \geqslant 0$, тако да је $\operatorname{Re} F'(p(w)) \geqslant q(w)$ за $w \in [0,1]$ (важи и у тачки $w = 1$ због непрекидности функције $z \mapsto \operatorname{Re} z$). За $x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ имамо $w = p^{-1}(x) \in [0,1]$, тако да је $\operatorname{Re} F'(x) \geqslant \frac{1-\sqrt{3}x}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)^3}$. Следи $\operatorname{Re} F'(x) \geqslant \frac{1-\sqrt{3}x}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)^3}$ за све $x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Нека је сада $z \in D\left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ произвољно одабрана тачка и $z = |z|e^{i\theta}$ њена поларна форма (ако је $z = 0$ можемо узети да је $\theta = 0$). Функција $F_\theta : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ дефинисана са $F_\theta(\zeta) = e^{-i\theta}F(e^{i\theta}\zeta)$ јесте холоморфна као композиција таквих. Сада је $F'_\theta(\zeta) = F'(e^{i\theta}\zeta)$, $F'_\theta(0) = F'(0) = 1$ и $|F'_\theta(\zeta)| = |F'(e^{i\theta}\zeta)| \leqslant \frac{1}{1-|e^{i\theta}\zeta|^2} = \frac{1}{1-|\zeta|^2}$ за $\zeta \in \mathbb{D}$, тј. функција F_θ испуњава исте почетне услове као и F, па је на основу претходног $\operatorname{Re} F'_\theta(x) \geqslant \frac{1-\sqrt{3}x}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)^3}$ за све $x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Како $|z| \in D\left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, то је $\operatorname{Re} F'(z) = \operatorname{Re} F'_\theta(|z|) \geqslant \frac{1-\sqrt{3}|z|}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}|z|\right)^3}$, односно $\operatorname{Re} F'(z) \geqslant \frac{1-\sqrt{3}|z|}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}|z|\right)^3}$. Тиме је доказ леме завршен. ■

Теорема (Ahlfors). Нека је $f \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$ и $N = \max\limits_{z \in \overline{\mathbb{D}}}|f'(z)|(1-|z|^2) > 0$. Тада $f(\mathbb{D})$ садржи диск полупречника $\frac{\sqrt{3}}{4}N$.

Доказ. За функцију $g(z) \overset{\text{деф}}{=} \frac{f(z)}{N}$ важи $g \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$. Имамо да је $\max\limits_{z \in \overline{\mathbb{D}}}|g'(z)|(1-|z|^2) = \frac{1}{N}\max\limits_{z \in \overline{\mathbb{D}}}|f'(z)|(1-|z|^2) = 1$, при чему можемо узети да се овај максимум достиже у некој тачки $q \in \mathbb{D}$ и нека је $G = g \circ \varphi_{-q}$. Тада је $|G'(0)| = 1$ и $|G'(z)| \leqslant \frac{1}{1-|z|^2}$ за све $z \in \mathbb{D}$ као што смо раније показивали. Означимо $b = G'(0)$ и нека је $F = \frac{G(z)}{b}$. Функција $F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ је холоморфна, $F'(0) = \frac{G'(0)}{b} = 1$ и $|F'(z)| = \left|\frac{G'(z)}{b}\right| = |G'(z)| \leqslant \frac{1}{1-|z|^2}$ за $z \in \mathbb{D}$, па применом претходне леме добијамо да је $\operatorname{Re} F'(z) \geqslant \frac{1-\sqrt{3}|z|}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}|z|\right)^3}$ за све $z \in D\left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Нека је $D = D\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Како функција f није константна (због услова $\max\limits_{z \in \overline{\mathbb{D}}}|f'(z)|(1-|z|^2) > 0$), то и функција F није константна. Област D је ограничена и конвексна, функција $F\big|_{\overline{D}} : \overline{D} \to \mathbb{C}$ је непрекидна и $F\big|_D : D \to \mathbb{C}$ је отворено пресликавање (теорема о отвреном пресликавању). За $z \in D$ важи $\operatorname{Re} F'(z) \geqslant \frac{1-\sqrt{3}|z|}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}|z|\right)^3} > 0$, тако да је $F\big|_D$ једно $1-1$ пресликавање (искористили смо (1)), тј. $F\big|_D : D \to F(D)$ је бихоломорфно пресликавање. Ако $\zeta \in \partial D$, тада је $\zeta = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\theta}$ за неко $\theta \in [0, 2\pi)$ и $|F(\zeta) - F(0)| = \left|\int_{[0,\zeta]} F'(z)dz\right| = \left|\int_0^1 F'(\zeta t)\zeta dt\right| = \left|\int_0^1 F'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}te^{i\theta}\right) d\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t\right)\right| = \left|\int_0^{1/\sqrt{3}} F'(te^{i\theta})dt\right| \geqslant \int_0^{1/\sqrt{3}} \operatorname{Re} F'(te^{i\theta})dt \geqslant \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1-\sqrt{3}t}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}t\right)^3}dt = 3\sqrt{3}\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1-\sqrt{3}t}{(\sqrt{3}-t)^3}dt = 3\sqrt{3}\int_{\sqrt{3}}^{2/\sqrt{3}} \frac{1-\sqrt{3}(\sqrt{3}-s)}{s^3}(-ds) = 3\sqrt{3}\int_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{s\sqrt{3}-2}{s^3}ds$, односно, добијамо да је $|F(\zeta)-F(0)| = 3\sqrt{3}\int_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{s^2}-\frac{2}{s^3}\right)ds = 3\sqrt{3}\left[-\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}\right] = 3\sqrt{3}\frac{1}{12} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Користећи лему са почетка овог одељка добијамо да $F(D)$ садржи диск полупречника $\frac{\sqrt{3}}{4}$ и како је $|b|=1$ то и $G(D)=bF(D)$ садржи диск полупречника $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Пресликавање $F\big|_D : D \to F(D)$ је бихоломорфно, па је такво и $G\big|_D : D \to G(D)$. Приметимо да је $g(\mathbb{D}) = g(\varphi_{-q}(\mathbb{D})) \supset g(\varphi_{-q}(D)) = G(D)$, тако да $g(\mathbb{D})$ садржи диск полупречника $\frac{\sqrt{3}}{4}$ и постоји област садржана у области $\varphi_{-q}(\mathbb{D})$ која се функцијом g бихоломорфно пресликава на тај диск. Према томе, $f(\mathbb{D}) = Ng(\mathbb{D})$ садржи диск полупречника $\frac{\sqrt{3}}{4}N$ и постоји област садржана у $\mathbb{D}$ која се функцијом f бихоломорфно пресликава на тај диск. ■

Означимо $\mathcal{F} = \left\{f \in \mathcal{H}(\overline{D}) \;\middle|\; f'(0)=1\right\}$ и $\mathcal{F}^* = \left\{f \in \mathcal{F} \;\middle|\; f \text{ је } 1-1\right\}$. Тада је $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$. Ако је $h \in \mathcal{F}$ произвољна функција, нека је L_h полупречник највећег диска садржаног у слици $h(\mathbb{D})$ и нека је B_h полупречник највећег диска садржаног у слици $h(\mathbb{D})$ који је бихоломорфна слика неке подобласти диска $\mathbb{D}$ при пресликавању h. Одмах следи да је $B_h \leqslant L_h$ за све $h \in \mathcal{F}$, па је $\inf\limits_{h\in\mathcal{F}} B_h \leqslant \inf\limits_{h\in\mathcal{F}} L_h$. За константу $B = \inf\limits_{h\in\mathcal{F}} B_h$ кажемо да је Bloch-ова константа, док је $L = \inf\limits_{h\in\mathcal{F}} L_h$ Landau-ова константа. Такође, нека је још $A = \inf\limits_{h\in\mathcal{F}^*} L_h$. Из претходног је $B \leqslant L$ и како је инфимум по ширем скупу мањи, то је $B \leqslant L \leqslant A$. Осим тога, на основу Ahlfors-ове теореме закључујемо да је $B \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}$.

3.3 Теорема Schottky-ja

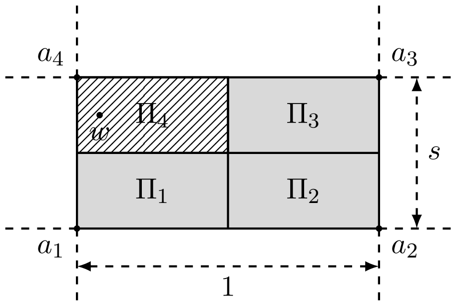
Лема. Нека је Ω просто повезана област и $f : \Omega \to \mathbb{C}$ холоморфна функција, при чему важи $-1 \notin f(\Omega)$ и $1 \notin f(\Omega)$. Тада постоји функција $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ таква да је $f = \cos F$.

Доказ. Функција $1-f^2$ је холоморфна у Ω као композиција таквих и важи $1-f^2 \neq 0$ у Ω. Према томе, можемо издвојити њену холоморфну грану корена, тј. постоји функција $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ таква да је $1-f^2=g^2$ у Ω. Одатле је $(f-ig)(f+ig)=1$ у области Ω. Функција $f+ig$ је холоморфна у Ω као композиција таквих и важи $f+ig \neq 0$ у Ω, тако да можемо издвојити њену холоморфну грану логаритма, тј. постоји функција $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ таква да је $f+ig = e^{iF}$ у Ω. Како важи $(f-ig)(f+ig)=1$ у области Ω, то је и $f-ig=e^{-iF}$ у Ω. Коначно је $f = \frac{f+ig+f-ig}{2} = \frac{e^{iF}+e^{-iF}}{2} = \frac{\cos F + i\sin F + \cos F - i\sin F}{2} = \cos F$ у области Ω, што је и требало доказати. ■

Теорема. Нека је Ω просто повезана област и $f : \Omega \to \mathbb{C}$ холоморфна функција, при чему важи $0 \notin f(\Omega)$ и $1 \notin f(\Omega)$. Тада постоји функција $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, таква да важи $f = \frac{1}{2}\left[1+\cos\pi\left(\cos\pi g\right)\right]$. За такву функцију g, слика $g(\Omega)$ не садржи диск полупречника 1.

Доказ. Функција $2f-1$ је холоморфна у области Ω као композиција таквих. Осим тога, важи $2f-1 \neq -1$ и $2f-1 \neq 1$ у области Ω. На основу претходне леме постоји функција $\widehat{F} \in \mathcal{H}(\Omega)$ таква да је $2f-1=\cos\widehat{F}$. Нека је $F = \frac{1}{\pi}\widehat{F}$. Тада је $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ и $2f-1=\cos\pi F$ у области Ω. Како је $2f-1 \neq \pm 1$, то је $F \neq -1$ и $F \neq 1$ у области Ω, па поновном применом претходне леме закључујемо да постоји функција $\widehat{g} \in \mathcal{H}(\Omega)$, таква да је $F = \cos\widehat{g}$. Нека је $g = \frac{1}{\pi}\widehat{g}$. Тада важи $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ и $F = \cos\pi g$, тј. $2f-1=\cos\pi(\cos\pi g)$. Следи $f = \frac{1}{2}\left[1+\cos\pi\left(\cos\pi g\right)\right]$. Покажимо још да слика $g(\Omega)$ не садржи диск полупречника 1. Претпоставимо супротно да слика $g(\Omega)$ садржи неки диск полупречника 1, односно да је $g(\Omega) \supset D(w,1)$ за неко $w \in \mathbb{C}$. Нека је $A = \left\{m \pm \frac{i}{\pi}\ln\left(n+\sqrt{n^2-1}\right) \;\middle|\; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Ако је $a \in A$ произвољан елемент, тада је $a = m + \frac{i}{\pi}\theta\ln\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)$ за неке $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ и $\theta \in \{-1,1\}$. Важи $\cos\pi a = \frac{1}{2}\left[e^{i\pi a}+e^{-i\pi a}\right] = \frac{1}{2}\left[e^{i\pi m-\theta\ln\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)}+e^{-i\pi m+\theta\ln\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)}\right] =$

$\frac{1}{2}(-1)^m\left[e^{-\theta\ln\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)}+e^{\theta\ln\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)}\right]=\frac{1}{2}(-1)^m\left[n+\sqrt{n^2-1}+\frac{1}{n-\sqrt{n^2-1}}\right]=(-1)^m n$, па је $\cos\pi(\cos\pi a)=\pm 1$. Из претходног је $\frac{1}{2}\left[1+\cos\pi\left(\cos\pi a\right)\right]=0$ или $\frac{1}{2}\left[1+\cos\pi\left(\cos\pi a\right)\right]=1$ и како $0\notin f(\Omega)$ и $1\notin f(\Omega)$ то $a\notin g(\Omega)$. Према томе, важи $g(\Omega)\cap A=\emptyset$. Тачке скупа A формирају правоугаону мрежу у комплексној равни. Тачка w припада неком правоугаонику из те мреже са теменима a_j, $j=1,2,3,4$. Једна страница тог правоугаоника има дужину 1, док је друга дужине $s=\frac{1}{\pi}\ln\left(n+1+\sqrt{(n+1)^2-1}\right)-\frac{1}{\pi}\ln\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)$ за неко $n\in\mathbb{N}$. Сада, приметимо да важи $s=\frac{1}{\pi}\ln\frac{1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}\leqslant\frac{1}{\pi}\ln\left(1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)\leqslant\frac{1}{\pi}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)<1$.



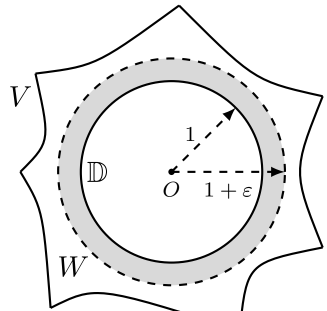
Правоугаоник коме припада тачка w можемо поделити на четири подударна правоугаоника Π_j, $j=1,2,3,4$ који одговарају теменима a_j, $j=1,2,3,4$ тим редом. Тада је $w\in\Pi_j$ за неко $j\in\{1,2,3,4\}$ и нека је $a=a_j$. Сада је $a\in A$ и важи $|a-w|\leqslant\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{s}{2}\right)^2}<1$, односно $a\in D(w,1)\subset g(\Omega)$. Следи $a\in g(\Omega)\cap A=\emptyset$, што је немогуће. Према томе, почетна претпоставка је погрешна, а самим тим $g(\Omega)$ не садржи диск полупречника 1. ■

Претпоставимо да је f цела функција, таква да $0\notin f(\mathbb{C})$ и $1\notin f(\mathbb{C})$. Тада, на основу претходне теореме, постоји функција $g\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$, таква да је $f=\frac{1}{2}\left[1+\cos\pi\left(\cos\pi g\right)\right]$. Осим тога, слика $g(\mathbb{C})$ не садржи диск полупречника 1. Раније смо показивали, као једну од последица Bloch-ове теореме, да слика целе, неконстантне функције садржи диск било којег полупречника и како $g(\mathbb{C})$ не садржи диск полупречника 1, то је g константна функција. Самим тим је и f константна функција. Приметимо да смо на овај начин доказали малу Picard-ову теорему. Наиме, нека је f цела, неконстантна функција. Претпоставимо да скуп $\mathbb{C}\setminus f(\mathbb{C})$ садржи бар две тачке. Нека је $a\in\mathbb{C}\setminus f(\mathbb{C})$ и $b\in\mathbb{C}\setminus f(\mathbb{C})$ за неке $a\neq b$. Тада је $h=\frac{f-a}{b-a}$ цела функција, при чему важи $0\notin h(\mathbb{C})$ и $1\notin h(\mathbb{C})$. Према претходном, h је константна функција. Одатле је и f константна функција, што је у контрадикцији са нашом претпоставком да f није константна функција. Према томе, наша полазна претпоставка је погрешна, тако да скуп $\mathbb{C}\setminus f(\mathbb{C})$ садржи највише једну тачку.

Лема. Ако је $\cos\pi a=\cos\pi b$ за $a,b\in\mathbb{C}$, тада је $b=\pm a+2n$ за неко $n\in\mathbb{Z}$. За свако $w\in\mathbb{C}$ постоји $z\in\mathbb{C}$ такав да је $\cos\pi z=w$ и $|z|\leqslant 1+|w|$.

Доказ. Важи $\cos\pi a-\cos\pi b=\frac{1}{2}\left[e^{i\pi a}+e^{-i\pi a}-e^{i\pi b}-e^{-i\pi b}\right]=\frac{1}{2}\left[e^{i\pi a}-e^{i\pi b}-\frac{e^{i\pi a}-e^{i\pi b}}{e^{i\pi(a+b)}}\right]=\frac{1}{2}\left(e^{i\pi a}-e^{i\pi b}\right)\left(1-\frac{1}{e^{i\pi(a+b)}}\right)=\frac{e^{i\pi b}}{2}\left(e^{i\pi(a-b)}-1\right)\left(1-\frac{1}{e^{i\pi(a+b)}}\right)=0$. Како је $\exp(\mathbb{C})=\mathbb{C}\setminus\{0\}$, то из претходног добијамо $e^{i\pi(a-b)}=1$ или $e^{i\pi(a+b)}=1$. Одатле је $a-b=2m$ за неко $m\in\mathbb{Z}$ или је $a+b=2k$ за неко $k\in\mathbb{Z}$. Следи $b=a+2(-m)$ или $b=-a+2k$. Према томе, важи $b=\pm a+2n$ за неко $n\in\mathbb{Z}$. Нека је w произвољно одабран комплексан број. Функција cos пресликава појас $\{-\pi\leqslant\operatorname{Re}z\leqslant\pi\}$ на комплексну раван $\mathbb{C}$. Самим тим, постоји $z=x+iy\in\mathbb{C}$ такав да је $|x|\leqslant 1$ и $\cos\pi z=w$. Нека је $\varphi(\alpha)=\operatorname{sh}\alpha-\alpha$. Тада је φ растућа функција, јер је $\varphi'(\alpha)=\operatorname{ch}\alpha-1\geqslant 0$. Према томе, за $\alpha\geqslant 0$ важи $\varphi(\alpha)\geqslant\varphi(0)=0$, односно, $\operatorname{sh}\alpha\geqslant\alpha$ и $\operatorname{sh}^2\alpha\geqslant\alpha^2$. Ако је $\alpha<0$, имамо $-\operatorname{sh}\alpha=\operatorname{sh}(-\alpha)\geqslant-\alpha\geqslant 0$, па је $\operatorname{sh}^2\alpha\geqslant\alpha^2$. Дакле, за све $\alpha\in\mathbb{R}$

важи $\operatorname{sh}^2\alpha \geqslant \alpha^2$. Сада је $|w|^2 = |\cos\pi z|^2 = \frac{1}{4}\left|e^{i\pi z}+e^{-i\pi z}\right|^2 = \frac{1}{4}\left|e^{i\pi x}e^{-\pi y}+e^{-i\pi x}e^{\pi y}\right|^2 = \frac{1}{4}\left|e^{-\pi y}\cos\pi x + ie^{-\pi y}\sin\pi x + e^{\pi y}\cos\pi x - ie^{\pi y}\sin\pi x\right|^2 = |\cos\pi x \operatorname{ch}\pi y - i\sin\pi x\operatorname{sh}\pi y|^2$, па је $|w|^2 = \cos^2\pi x\operatorname{ch}^2\pi y + \sin^2\pi x\operatorname{sh}^2\pi y = \cos^2\pi x\left(\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y\right) + \cos^2\pi x\operatorname{sh}^2\pi y + \sin^2\pi x\operatorname{sh}^2\pi y = \cos^2\pi x + \operatorname{sh}^2\pi y \geqslant \operatorname{sh}^2\pi y \geqslant \pi^2 y^2 \geqslant y^2$, тј. $|w|^2 \geqslant y^2$. Коначно је $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \leqslant \sqrt{1+y^2} \leqslant \sqrt{1+|w|^2} \leqslant 1+|w|$. Дакле, $z\in\mathbb{C}$ испуњава тражене услове. ∎



Нека је $f \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$ произвољно одабрана функција. Тада, по дефиницији, постоји отворен скуп V, такав да је $V \supset \overline{\mathbb{D}}$ и $f \in \mathcal{H}(V)$. Скуп V^c је затворен, $\overline{\mathbb{D}}$ је компактан и важи $V^c \cap \overline{\mathbb{D}} = \emptyset$. Следи $d\left(V^c, \overline{\mathbb{D}}\right) > 0$. Нека је ε произвољно узето такво да важи $d\left(V^c,\overline{\mathbb{D}}\right) > \varepsilon > 0$. Диск $W = D(0, 1+\varepsilon)$ је просто повезана област у комплексној равни. Одмах имамо да је $W \supset \overline{\mathbb{D}}$. Покажимо да је $W \subset V$. Нека је $z \in W$ и претпоставимо да $z \in V^c$. Тада $z \notin \overline{\mathbb{D}}$, па је $|z| > 1$ и како $z \in W$, то је $0 < |z|-1 < \varepsilon$. Добијамо $\varepsilon < d\left(V^c,\overline{\mathbb{D}}\right) \leqslant d\left(z,\overline{\mathbb{D}}\right) \leqslant \left|z - \frac{z}{|z|}\right| = |z|\cdot\left|1-\frac{1}{|z|}\right| = |z|\cdot\left|\frac{|z|-1}{|z|}\right| = |z|\cdot\frac{|z|-1}{|z|} = |z|-1 < \varepsilon$, што је немогуће. Дакле, мора бити $z \in V$ и самим тим је $W \subset V$. Према томе, W је просто повезана област, $f \in \mathcal{H}(W)$ и $W \supset \overline{\mathbb{D}}$. На основу претходног, таква, просто повезана област постоји за сваку функцију $f \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$. У наставку који следи, нека је $\beta > 0$ произвољно одабрана константа за коју важи Bloch-ова теорема. На пример, можемо узети да је $\beta = \frac{1}{12}$.

Теорема. Нека функција $f \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$ испушта вредности 0 и 1. Тада постоји функција $g \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$, таква да су испуњени услови
(1) $f = \frac{1}{2}\left[1+\cos\pi(\cos\pi g)\right]$ и $|g(0)| \leqslant 3 + 2|f(0)|$
(2) $|g(z)| \leqslant |g(0)| + \frac{\theta}{\beta(1-\theta)}$ за све $z \in D[0,\theta]$, $\theta \in (0,1)$.

Доказ. Постоји просто повезана област W, таква да је $f \in \mathcal{H}(W)$ и $W \supset \overline{\mathbb{D}}$. Тада функција $2f-1$ испушта вредности -1 и 1 у просто повезаној области W. Самим тим, постоји функција $\widetilde{F} \in \mathcal{H}(W)$, таква да је $2f-1 = \cos\pi\widetilde{F}$. На основу претходне леме, постоји $b\in\mathbb{C}$ такав да је $\cos\pi b = 2f(0)-1$ и $|b| \leqslant 1 + |2f(0)-1| \leqslant 2+2|f(0)|$. Опет, користећи претходну лему, из једнакости $\cos\pi b = 2f(0)-1 = \cos\pi\widetilde{F}(0)$, закључујемо да је $b = \pm\widetilde{F}(0)+2k$ за неко $k\in\mathbb{Z}$. Нека је $F = \pm\widetilde{F}+2k$. Тада је $F \in \mathcal{H}(W)$ и важи $\cos\pi F = \cos\pi\widetilde{F}$, тако да је $2f-1 = \cos\pi F$ и $F(0) = \pm\widetilde{F}(0)+2k = b$. Функција $2f-1$ испушта вредности -1 и 1 и како је $2f-1 = \cos\pi F$, то и функција F испушта вредности -1 и 1. Према томе, постоји функција $\widetilde{g} \in \mathcal{H}(W)$, таква да је $F = \cos\pi\widetilde{g}$. Сада постоји $a \in \mathbb{C}$, такав да је $\cos\pi a = b$ и $|a| \leqslant 1+|b| \leqslant 3+2|f(0)|$. Следи $\cos\pi a = b = F(0) = \cos\pi\widetilde{g}(0)$ и самим тим је $a = \pm\widetilde{g}(0)+2m$ за неко $m\in\mathbb{Z}$. Нека је $g = \pm\widetilde{g}+2m$. Тада је $g \in \mathcal{H}(W)$, а тиме је и $g \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$. Осим тога је $|g(0)| = |\pm\widetilde{g}(0)+2m| = |a| \leqslant 3+2|f(0)|$. Такође, важи $\cos\pi g = \cos\pi\widetilde{g} = F$, односно $2f-1 = \cos\pi F = \cos\pi(\cos\pi F)$, па је $f = \frac{1}{2}\left[1+\cos\pi(\cos\pi g)\right]$. Како је $f = \frac{1}{2}\left[1+\cos\pi(\cos\pi g)\right]$, то на основу претходне теореме закључујемо да слика $g(W)$ не садржи диск полупречника 1. Самим тим и $g(\mathbb{D})$ не садржи диск полупречника 1. Нека су $\theta \in (0,1)$ и $z \in D[0,\theta]$ произвољно одабрани. Ако је $g'(z) = 0$ одмах имамо да важи $\beta(1-\theta)|g'(z)| \leqslant 1$. Зато, нека је $g'(z) \neq 0$. Важи $d\left(z,\partial\mathbb{D}\right) \geqslant 1-\theta$. Нека је $s \in \left(0, d\left(z,\partial\mathbb{D}\right)\right)$ произвољно одабрано. На основу последице Bloch-ове теореме, слика $g(\mathbb{D})$ садржи диск полупречника $\beta s|g'(z)|$, тако да је $\beta s|g'(z)| \leqslant 1$. Пустимо да $s \to d\left(z,\partial\mathbb{D}\right)$ и добијамо да је $\beta d\left(z,\partial\mathbb{D}\right)|g'(z)| \leqslant 1$. Следи $\beta(1-\theta)|g'(z)| \leqslant \beta d\left(z,\partial\mathbb{D}\right)|g'(z)| \leqslant 1$. Дакле, за све $z \in D[0,\theta]$, $\theta \in (0,1)$ важи $|g'(z)| \leqslant \frac{1}{\beta(1-\theta)}$. Осим тога, за такве z и θ имамо $|g(z)-g(0)| = \left|\int_{[0,z]} g'(\zeta)d\zeta\right| \leqslant \int_{[0,z]}|g'(\zeta)||d\zeta| \leqslant \frac{1}{\beta(1-\theta)}|z| \leqslant \frac{\theta}{\beta(1-\theta)}$, односно $|g(z)| \leqslant |g(0)| + |g(z)-g(0)| \leqslant |g(0)| + \frac{\theta}{\beta(1-\theta)}$. Коначно је $|g(z)| \leqslant |g(0)| + \frac{\theta}{\beta(1-\theta)}$ за све $z \in D[0,\theta]$, $\theta\in(0,1)$, тако да функција g испуњава све тражене услове. Овим је доказ теореме завршен. ∎

Ако је $w = u + iv$ произвољан комплексан број, тада важи $|\cos w| = \frac{1}{2}\left|e^{iw} + e^{-iw}\right| = \frac{1}{2}\left|e^{-v}e^{iu} + e^{v}e^{-iu}\right| = \frac{1}{2}\left|e^{-v}(\cos u + i\sin u) + e^{v}(\cos u - i\sin u)\right| = |\operatorname{ch} v\cos u - i\operatorname{sh} v\sin u| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 v\cos^2 u + \operatorname{sh}^2 v\sin^2 u} = \sqrt{\left(\operatorname{ch}^2 v - \operatorname{sh}^2 v\right)\cos^2 u + \operatorname{sh}^2 v\cos^2 u + \operatorname{sh}^2 v\sin^2 u}$, а самим тим је $|\cos w| = \sqrt{\cos^2 u + \operatorname{sh}^2 v} \leqslant \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 v} = \operatorname{ch} v = \frac{e^v + e^{-v}}{2} \leqslant \frac{e^{\sqrt{u^2+v^2}} + e^{\sqrt{u^2+v^2}}}{2} = e^{\sqrt{u^2+v^2}} = e^{|w|}$, тј. важи $|\cos w| \leqslant e^{|w|}$. Сада, на основу претходног, имамо да је $\frac{1}{2}|1 + \cos w| \leqslant \frac{1+|\cos w|}{2} \leqslant \frac{1+e^{|w|}}{2} \leqslant e^{|w|}$, односно $\frac{1}{2}|1 + \cos w| \leqslant e^{|w|}$. Претходно доказане неједнакости користимо у наредној теореми. Пре тога, за $r > 0$ и $\theta \in (0,1)$ дефинишемо фамилију $S(r) = \left\{f \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}}) \;\middle|\; |f(0)| \leqslant r \text{ и } f \text{ испушта вредности 0 и 1}\right\}$ и дефинишемо одговарајућу функцију $L(\theta, r) = \exp\left[\pi\exp\pi\left(3 + 2r + \frac{\theta}{\beta(1-\theta)}\right)\right]$.

Теорема (Schottky). Ако $f \in S(r)$ важи $|f(z)| \leqslant L(\theta, r)$ за све $z \in D[0,\theta]$, $\theta \in (0,1)$.

Доказ. Како $f \in S(r)$, то $f \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$ и функција f испушта вредности 0 и 1. На основу претходне теореме постоји функција $g \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$, таква да важи $f = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\pi(\cos\pi g)\right]$, $|g(0)| \leqslant 3 + 2|f(0)|$ и $|g(z)| \leqslant |g(0)| + \frac{\theta}{\beta(1-\theta)}$ за све $z \in D[0,\theta]$, $\theta \in (0,1)$. Приметимо да је $|g(0)| \leqslant 3+2|f(0)| \leqslant 3+2r$ и $|g(z)| \leqslant |g(0)|+\frac{\theta}{\beta(1-\theta)} \leqslant 3+2r+\frac{\theta}{\beta(1-\theta)}$ за све $z \in D[0,\theta]$, $\theta \in (0,1)$. Следи да за све $z \in D[0,\theta]$, $\theta \in (0,1)$ важи неједнакост $|f(z)| = \frac{1}{2}|1 + \cos\pi(\cos\pi g(z))| \leqslant e^{\pi|\cos\pi g(z)|} \leqslant e^{\pi e^{\pi|g(z)|}} \leqslant e^{\pi e^{\pi\left(3+2r+\frac{\theta}{\beta(1-\theta)}\right)}}$, тј. $|f(z)| \leqslant L(\theta, r)$, што је и требало доказати. ■

Нека је $a \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ произвољан. Узмимо да је $R(a) = 3L\left(\frac{1}{2}, |a|\right) > 0$ и докажимо да не постоји функција $f \in \mathcal{H}\left(\overline{D(0,R(a))}\right)$, таква да је $f(0) = a$ и $f'(0) = 1$, при чему f испушта вредности 0 и 1. Наиме, претпоставимо супротно, да постоји таква функција f. Нека је $g(z) = f(R(a)z)$. Тада је $g \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$ и функција g такође испушта вредности 0 и 1. Приметимо да је $g(0) = f(0) = a$ и $g'(z) = R(a)f'(z)$, односно важи $g'(0) = R(a)f'(0) = R(a)$. Функција $|g|$ је непрекидна и на компакту $D\left[0,\frac{1}{2}\right]$ достиже свој максимум у некој тачки $z_0 \in D\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Применом претходне теореме закључујемо да је $|g(z_0)| \leqslant L\left(\frac{1}{2}, |a|\right) = \frac{1}{3}R(a)$. Нека је $\gamma = \partial D\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Применом Cauchy-јеве интегралне формуле добијамо да је $R(a) = |R(a)| = |g'(0)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(z)}{z^2}dz\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{|g(z)|}{|z|^2}|dz| \leqslant \frac{|g(z_0)|}{2\pi}\int_\gamma \frac{|dz|}{|z|^2} = \frac{|g(z_0)|}{2\pi}\cdot 4\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2} = 2|g(z_0)|$, тј. $\frac{1}{2}R(a) \leqslant |g(z_0)|$. Следи $\frac{1}{2}R(a) \leqslant |g(z_0)| \leqslant \frac{1}{3}R(a)$, што је немогуће, јер је $R(a) > 0$. Према томе, из добијене контрадикције, закључујемо да не постоји таква функција f.

Глава 4

Теорема Montel-а и њене последице

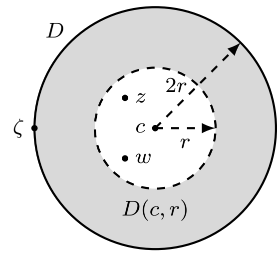
4.1 Компактна конвергенција. Теореме Montel-а и Vitali-ја

Могућност издвајања конвергентог подниза из неког низа функција јесте од изузетног значаја за комплексну теорију функција. Наравно, издвајање конвергентног подниза и тип те конвергенције зависе од особина полазног низа функција. У овој глави је од посебног интереса компактна конвергенција, као и локална ограниченост неког низа функција.

Ако је (z_n) ограничен низ у $\mathbb{C}$, тада постоји $R > 0$ такво да је $z_n \in D[0, R]$ за све $n \in \mathbb{N}$. Према томе, (z_n) је низ тачака из компакта $D[0, R]$ и самим тим можемо издвојити његов конвергентан подниз. У наставку, нека је Ω област у комплексној равни. $(*)$ *Ако су $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ функције са својством да је низ $(f_n(z))$ ограничен за све $z \in \Omega$ и $A \subset \Omega$ пребројив скуп, тада постоји подниз (g_n) низа (f_n), такав да је низ $(g_n(a))$ конвергентан за све $a \in A$.* Наиме, A је пребројив скуп и нека је $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Низ $(f_n(a_1))$ је ограничен, тако да можемо издвојити његов конвергентан подниз $(f_{1n}(a_1))$. Сада је $(f_{1n}(a_2))$ један ограничен низ, па можемо издвојити његов конвергентан подниз $(f_{2n}(a_2))$. Индуктивно настављамо претходни поступак. На тај начин добијамо низове $(f_{mn})_{n=1}^{\infty}$, $m \in \mathbb{N}$, при чему је $(f_{mn}(a_m))_{n=1}^{\infty}$ конвергентан низ за све $m \in \mathbb{N}$. Такође, низ $(f_{mn})_{n=1}^{\infty}$ је подниз низа $(f_{m-1,n})_{n=1}^{\infty}$ за све $m \geqslant 2$ и (f_{1n}) је подниз низа (f_n). Нека је $g_n = f_{nn}$ за све $n \in \mathbb{N}$. По конструкцији, низ (g_n) јесте подниз низа (f_n). Нека је $a_m \in A$ призвољан елемент. Приметимо да је низ $(g_n(a_m))_{n=m}^{\infty}$ подниз конвергентног низа $(f_{mn}(a_m))_{n=1}^{\infty}$, па је и он конвергентан. Следи, низ $(g_n(a_m))_{n=1}^{\infty}$ је конвергентан. Према томе, подниз (g_n) испуњава тражене услове. За фамилију функција $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ кажемо да је *ограничена* у $A \subset \Omega$ ако постоји константа $M > 0$ таква да је $|f|_A \leqslant M$ за све $f \in \mathcal{F}$ (или, еквивалентно, ако је $\sup \big\{ |f|_A \;\big|\; f \in \mathcal{F} \big\} < \infty$). Фамилија $\mathcal{F}$ јесте *локално ограничена* у области Ω ако за свако $z \in \Omega$ постоји отворен скуп V, такав да важи $z \in V \subset \Omega$ и фамилија $\mathcal{F}$ је ограничена у V. Одмах закључујемо да ако је фамилија $\mathcal{F}$ ограничена у Ω, тада је она и локално ограничена у Ω. $(\star)$ *Фамилија $\mathcal{F}$ је локално ограничена у Ω ако и само ако је ограничена у сваком компакту $K \subset \Omega$.* Најпре, претпоставимо да је фамилија $\mathcal{F}$ локално ограничена у Ω и нека је $K \subset \Omega$ неки компакт. За произвољно $z \in K$ постоји отворен скуп V_z такав да је $z \in V_z \subset \Omega$ и фамилија $\mathcal{F}$ је ограничена у V_z. Важи $\bigcup_{z \in K} V_z \supset K$ и из овог отвореног покривача можемо издвојити коначан потпокривач $\bigcup_{j=1}^{n} V_{z_j} \supset K$. За све $j = 1, 2, \ldots, n$ фамилија $\mathcal{F}$ је ограничена у V_{z_j}, тако да постоји константа $M_j > 0$, таква да је $|f|_{V_{z_j}} \leqslant M_j$ за све $f \in \mathcal{F}$. Нека је $M = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} M_j$. Тада је $|f|_K \leqslant M$ за све $f \in \mathcal{F}$. Према томе, фамилија $\mathcal{F}$ је ограничена у K. Са друге стране, претпоставимо да је фамилија $\mathcal{F}$ ограничена у сваком компакту $K \subset \Omega$ и покажимо да је она локално ограничена у Ω. Нека је $z \in \Omega$ произвољно одабран. Тада је $D[z, r] \subset \Omega$ за неко $r > 0$. Скуп $D[z, r]$ је компактан, па је фамилија $\mathcal{F}$ ограничена у њему и самим тим она је ограничена у $D(z, r)$. Диск $D(z, r)$ је отворен скуп и важи $z \in D(z, r) \subset \Omega$. На овај начин смо доказали и овај смер, тако да важи $(\star)$. Такође, кажемо да је низ функција (f_n) из $\mathcal{H}(\Omega)$ (локално) ограничен у Ω ако је фамилија функција $\mathcal{F} = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (локално) ограничена у Ω. Претходно доказана својства користимо у даљим разматрањима.

Дефиниција. За низ функција (f_n) кажемо да *компактно конвергира* у области Ω ако равномерно конвергира на компактним подскуповима од Ω. ♠

Лема. Нека је $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ локално ограничена фамилија функција у области Ω, $c \in \Omega$ и $\varepsilon > 0$. Тада постоји $\delta > 0$ тако да је $D(c,\delta) \subset \Omega$ и $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ за све $f \in \mathcal{F}$ и све $z, w \in D(c,\delta)$.



Доказ. Како је $c \in \Omega$ то постоји $r > 0$ тако да је $D[c,2r] \subset \Omega$. Нека је $D = D(c,2r)$. Применом Cauchy-јеве интегралне формуле, за произвољне $z, w \in D(c,r)$ и произвољно $f \in \mathcal{F}$, добијамо да важи $|f(z) - f(w)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - w}\right)d\zeta\right| = \frac{|z-w|}{2\pi}\left|\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-w)}d\zeta\right| \leqslant \frac{|z-w|}{2\pi}\int_{\partial D}\frac{|f(\zeta)|}{|(\zeta-z)(\zeta-w)|}|d\zeta| \leqslant \frac{|z-w|}{2\pi}\cdot|f|_{\overline{D}}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot 2\pi\cdot 2r = \frac{2}{r}|f|_{\overline{D}}|z-w|$ (искористили смо да за тачку $\zeta \in \partial D$ важи $|\zeta - z| \geqslant |\zeta| - |z| = 2r - |z| \geqslant r$ и слично је $|\zeta - w| \geqslant r$). Нека је $M = \frac{2}{r}\sup\{|f|_{\overline{D}} \mid f \in \mathcal{F}\}$. Ако је $M = 0$ можемо узети да је $\delta = 2r$ и како је тада $f = 0$ на D за све $f \in \mathcal{F}$, то тривијално следи тражени резултат. Нека је зато $M > 0$. На основу $(\star)$, фамилија $\mathcal{F}$ је ограничена у компакту $\overline{D}$, па је $M < \infty$. Нека је $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{2M}, r\}$. Покажимо да овако изабрано δ испуњава тражени услов. Нека су $z, w \in D(c,\delta)$ и $f \in \mathcal{F}$ произвољно одабрани. Важи $D(c,\delta) \subset D(c,r)$ и $|z-w| \leqslant |z-c| + |c-w| < 2\delta$, па је на основу претходног $|f(z) - f(w)| \leqslant \frac{2}{r}|f|_{\overline{D}}|z-w| \leqslant M|z-w| < 2M\delta \leqslant 2M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$, што је заправо и требало доказати. ■

За низ функција $f_n : X \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, где је (X,d) метрички простор, кажемо да *непрекидно конвергира* у X ако за сваки конвергентан низ тачака (x_n) у простору X, важи да је $(f_n(x_n))$ такође, један конвергентан низ. У наставку, претпостављамо да низ функција (f_n) непрекидно конвергира у простору X. Ако је $x \in X$ произвољна тачка, тада је константан низ $x_n = x$, $n \in \mathbb{N}$ конвергентан, тј. важи $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Сада је и $(f_n(x_n))$ конвергентан низ и нека је $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Како ово важи за све $x \in X$, то низ функција (f_n) конвергира тачка по тачка ка функцији f у простору X. Нека је (x_n) прозвољно одабран низ тачака из X такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Покажимо да је тада $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = x$. Нека је $x'_{2n-1} = x$ и $x'_{2n} = x_{2n}$ за све $n \in \mathbb{N}$. Тада је $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = x$ и самим тим је $(f_n(x'_n))$ конвергентан низ. Како је $f_{2n-1}(x'_{2n-1}) = f_{2n-1}(x)$ за све $n \in \mathbb{N}$, то је $(f_{2n-1}(x))$ подниз конвергентног низа $(f_n(x'_n))$. Знамо да је $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, па је $\lim\limits_{n\to\infty} f_{2n-1}(x) = f(x)$, тако да је, на основу претходног, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x'_n) = f(x)$. Следи $\lim\limits_{n\to\infty} f_{2n}(x_{2n}) = \lim\limits_{n\to\infty} f_{2n}(x'_{2n}) = f(x)$ и како је $(f_{2n}(x_{2n}))$ подниз конвергентног низа $(f_n(x_n))$, то је $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$, што је и требало показати. Дакле, за произвољан низ тачака (x_n) из простора X, такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, важи $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$. Осим тога, нека је (f_{n_k}) подниз низа (f_n). Дефинишимо низ (x'_m) на следећи начин: $x'_m = x_1$ за $1 \leqslant m \leqslant n_1$, $x'_m = x_k$ за $n_{k-1} < m \leqslant n_k$ и све $k \geqslant 2$. Тада је $\lim\limits_{m\to\infty} x'_m = x$, па је $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x'_m) = f(x)$. Низ $\big(f_{n_k}(x'_{n_k})\big)$ је подниз низа $(f_m(x'_m))$ и одатле добијамо да је $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x_k) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}\big(x'_{n_k}\big) = f(x)$. Према томе, за произвољан подниз (f_{n_k}) низа (f_n), важи $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x_k) = f(x)$. Са друге стране, гранична функција f је непрекидна, без обзира да ли су функције f_n, $n \in \mathbb{N}$ непрекидне. Наиме, нека је $x \in X$ произвољна тачка и

(x_n) произвољан низ тачака из простора X такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Такође, нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Како је $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_1) = f(x_1)$, то постоји $n_1 \in \mathbb{N}$ такав да је $|f_{n_1}(x_1) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Слично, из $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_2) = f(x_2)$, закључујемо да постоји природан број $n_2 > n_1$, такав да је $|f_{n_2}(x_2) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Настављамо индуктивно претходни поступак и добијамо подниз (f_{n_k}) низа (f_n) такав да је $|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$ за све $k \in \mathbb{N}$. Тада је $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x_k) = f(x)$, тако да постоји $k_0 \in \mathbb{N}$, такво да је $|f_{n_k}(x_k) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ за све $k \geqslant k_0$. Коначно, за $k \geqslant k_0$ имамо да важи $|f(x_k) - f(x)| \leqslant |f(x_k) - f_{n_k}(x_k)| + |f_{n_k}(x_k) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Следи $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(x)$, односно функција f је непрекидна у тачки $x \in X$ и како је x произвољно одабрана тачка из простора X, то је f непрекидна функција. Покажимо још једно важно својство непрекидне конвергенције, а то је да непрекидна конвергенција повлачи компактну конвергенцију. (▲) *Ако низ функција (f_n) непрекидно конвергира у X, тада он компактно конвергира у X.* На основу претходног, низ функција (f_n) конвергира тачка по тачка ка некој функцији f у простору X. Осим тога, f је непрекидна функција. Нека је $K \subset X$ произвољно одабран компакт. Покажимо да је тада $f_n \rightrightarrows f$ $(n \to \infty)$ на K. Претопставимо супротно, да низ функција (f_n) не конвергира равномерно на компакту K ка функцији f. Тада постоји $\varepsilon > 0$, такво да за свако $n_0 \in \mathbb{N}$ постоји $n \geqslant n_0$, тако да важи $|f_n - f|_K > \varepsilon$. Самим тим, постоји (n_k) строго растући низ природних бројева, такав да је $|f_{n_k} - f|_K > \varepsilon$ за све $k \in \mathbb{N}$. Специјално, за свако $k \in \mathbb{N}$, постоји $x_{n_k} \in K$, такав да је $|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| > \varepsilon$. Низ (x_{n_k}) јесте низ тачака из компакта K, па постоји његов конвергентан подниз $\left(x_{n_{k_j}}\right)$, односно, важи $\lim\limits_{j\to\infty} x_{n_{k_j}} = x \in K$. Тада је $\lim\limits_{j\to\infty} f_j\left(x_{n_{k_j}}\right) = f(x)$ и низ $\left(f_{n_{k_j}}\right)$ јесте подниз низа (f_n). Следи $\lim\limits_{j\to\infty} f_{n_{k_j}}\left(x_{n_{k_j}}\right) = f(x)$. Како је f непрекидна функција, то је $\lim\limits_{j\to\infty} f\left(x_{n_{k_j}}\right) = f(x)$. Из претходног је $\lim\limits_{j\to\infty}\left(f_{n_{k_j}}\left(x_{n_{k_j}}\right) - f\left(x_{n_{k_j}}\right)\right) = 0$, што је немогуће, јер је $\left|f_{n_{k_j}}\left(x_{n_{k_j}}\right) - f\left(x_{n_{k_j}}\right)\right| > \varepsilon$ за све $j \in \mathbb{N}$. Из добијене контрадикције закључујемо да је $f_n \rightrightarrows f$ $(n \to \infty)$ на K. Како ово важи за сваки компакт $K \subset X$, то низ функицја (f_n) компактно конвергира у простору X. Са друге стране, важи и обрнуто под једном додатном претпоставком. (▼) *Ако низ функција (f_n) компактно конвергира у простору X ка функцији f и ако је f непрекидна функција, тада низ (f_n) непрекидно конвергира у простору X.* Наиме, нека је (x_n) конвергентан низ у простору X, тј. важи $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Тада је $K = \left\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{x\}$ компактан скуп. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно одабрано. Тада постоји природан број n_1, такав да је $|f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ за све $n \geqslant n_1$ и све $y \in K$. Специјално је $|f_n(x_n) - f(x_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$ за све $n \geqslant n_1$. Како је f непрекидна функција, то је $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, тако да постоји природан број n_2, такав да је $|f(x_n) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ за све $n \geqslant n_2$. Нека је $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Тада за све $n \geqslant n_0$ важи $|f_n(x_n) - f(x)| < \varepsilon$. Добијамо да је $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$. Према томе, низ (f_n) непрекидно конвергира у простору X.

Теорема (Montel). Нека је (f_n) низ функција из $\mathcal{H}(\Omega)$ који је локално ограничен у области Ω. Тада постоји његов подниз који компактно конвергира у Ω.

Доказ. Нека је $A = (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}) \cap \Omega$. Тада је A пребројив скуп који је густ у области Ω. Како је низ функција (f_n) локално ограничен у Ω, то је низ $(f_n(z))$ ограничен за све $z \in \Omega$. Применом $(*)$ добијамо да постоји подниз (g_n) низа (f_n), такав да је $(g_n(a))$ конвергентан низ за све $a \in A$. Покажимо да низ (g_n) непрекидно конвергира у области Ω. Наиме, нека је (z_n) низ тачака из Ω, који конвергира у Ω, тј. важи $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = b \in \Omega$. Такође, нека је $\varepsilon > 0$ произвољно одабрано. Применом претходне леме добијамо да постоји $\delta > 0$ такво да је $D(b,\delta) \subset \Omega$ и $|f_n(z) - f_n(w)| < \frac{\varepsilon}{3}$ за све $n \in \mathbb{N}$ и све $z, w \in D(b,\delta)$. Самим тим, тада важи $|g_n(z) - g_n(w)| < \frac{\varepsilon}{3}$ за све $n \in \mathbb{N}$ и све $z, w \in D(b,\delta)$. Постоји $n_1 \in \mathbb{N}$ такав да је $z_n \in D(b,\delta)$ за све $n \geqslant n_1$. Скуп A је густ у Ω, па је $A \cap D(b,\delta) \neq \emptyset$ и самим тим постоји неки елемент

$a \in A \cap D(b, \delta)$. Низ $(g_n(a))$ је конвергентан, а тиме и Cauchy-јев низ, тако да постоји $n_2 \in \mathbb{N}$ такав да је $|g_m(a) - g_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ за све $m, n \geqslant n_2$. Нека је $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Тада за све $m, n \geqslant n_0$ важи $|g_m(z_m) - g_n(z_n)| \leqslant |g_m(z_m) - g_m(a)| + |g_m(a) - g_n(a)| + |g_n(a) - g_n(z_n)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Према томе, низ $(g_n(z_n))$ јесте Cauchy-јев низ у $\mathbb{C}$, па је он и конвергентан у $\mathbb{C}$. Дакле, низ функција (g_n) непрекидно конвергира у области Ω. На основу (▲) низ функција (g_n) компактно конвергира у области Ω. Тиме је доказ завршен. ■

Последица (Montel-ов критеријум конвергенције). Нека је (f_n) низ функција из $\mathcal{H}(\Omega)$ који је локално ограничен у области Ω и нека је $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Претпоставимо да сваки подниз низа (f_n) који компактно конвергира у Ω конвергира ка функцији f. Тада низ функција (f_n) компактно конвергира у Ω ка функцији f.

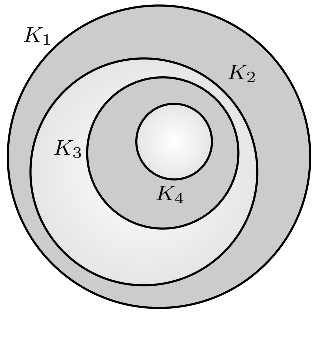
Доказ. Претпоставимо супротно, тј. да низ функција (f_n) не конвергира компактно у области Ω ка функцији f. Тада постоји компакт $K \subset \Omega$, такав да низ функција (f_n) не конвергира равномерно ка функцији f на компакту K. Следи да постоји $\varepsilon > 0$, такво да за свако $n_0 \in \mathbb{N}$ постоји природан број $n \geqslant n_0$, такав да је $|f_n - f|_K > \varepsilon$. Самим тим, постоји подниз (f_{n_k}) низа (f_n), такав да је $|f_{n_k} - f|_K > \varepsilon$ за све $k \in \mathbb{N}$. Низ (f_{n_k}) јесте локално ограничен у Ω, па применом Montel-ове теореме добијамо да постоји његов подниз $\left(f_{n_{k_j}}\right)$ који компактно конвергира у области Ω. Према претпоставци мора бити $f_{n_{k_j}} \rightrightarrows f$ $(j \to \infty)$ на K. Међутим, са друге стране имамо да је $\left|f_{n_{k_j}} - f\right|_K > \varepsilon$ за све $j \in \mathbb{N}$. Ово је контрадикција, тако да низ функција (f_n) компактно конвергира у Ω ка функцији f. ■

Претпоставимо да је (f_n) низ функција из $\mathcal{H}(\Omega)$ који компактно конвергира у области Ω ка функцији f. Покажимо да је тада $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Најпре, функције f_n су холоморфне, а тиме и непрекидне у K. Нека је $K \subset \Omega$ произвољно одабран компактан скуп. Тада је $f_n \rightrightarrows f$ $(n \to \infty)$ на K, па је функција f непрекидна у K. Како ово важи за сваки компакт $K \subset \Omega$, то је функција f непрекидна у Ω. Са друге стране, нека је Δ произвољан троугао садржан у области Ω. Тада је Δ компактан скуп и важи $f_n \rightrightarrows f$ $(n \to \infty)$ на Δ. Функција f_n је холоморфна у Ω, па је $\int_{\partial\Delta} f_n(z)dz = 0$ за све $n \in \mathbb{N}$. Важи $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)dz = \lim\limits_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z)dz = 0$. Дакле, функција f је непрекидна у области Ω и за сваки троугао $\Delta \subset \Omega$, важи $\int_{\partial\Omega} f(z)dz = 0$, тако да је на основу Morera-ине теореме $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ што је и требало показати.

Теорема (Vitali). Нека је (f_n) низ функција из $\mathcal{H}(\Omega)$ који је локално ограничен у области Ω и нека скуп $A = \left\{z \in \Omega \;\middle|\; \text{постоји } \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) \text{ у } \mathbb{C}\right\}$ има тачку нагомилавања у Ω. Тада низ (f_n) компактно конвергира у области Ω.

Доказ. Нека су (g_n) и (h_n) произвољно одабрани поднизови низа (f_n) који компактно конвергирају у области Ω. Затим, нека је g гранична функција низа (g_n) и h гранична функција низа (h_n). Тада су g и h холоморфне функције у Ω. Осим тога, за произвољну тачку $z \in A$ важи $g(z) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = \lim\limits_{n\to\infty} h_n(z) = h(z)$. Из претходног, имамо да је $g = h$ у A, па је на основу теореме јединости $g = h$ у Ω. Према томе, сваки подниз низа (f_n) који компактно конвергира у Ω конвергира ка функцији $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Применом Montel-овог критеријума конвергенције добијамо да низ функција (f_n) компактно конвергира у области Ω. ■

Лема. Нека је $\mathcal{F}$ фамилија непрекидних функција $f : \Omega \to \mathbb{C}$, тако да је скуп $\left\{f(z) \;\middle|\; f \in \mathcal{F}\right\}$ ограничен за сваку тачку z из области Ω. Тада постоји област $S \subset \Omega$, таква да је фамилија $\left\{f\big|_S\right\}_{f\in\mathcal{F}}$ локално ограничена у S.



Доказ. Претпоставимо супротно, тј. да не постоји таква подобласт $S \subset \Omega$. Тада фамилија $\mathcal{F}$ није локално ограничена у Ω и самим тим постоји $z_1 \in \Omega$ и функција $f_1 \in \mathcal{F}$, такви да важи $|f_1(z_1)| > 1$. Следи $z_1 \in \Omega \cap f_1^{-1}(\mathbb{C} \setminus D[0,1])$. Скуп $f_1^{-1}(\mathbb{C} \setminus D[0,1])$ је отворен, јер је f_1 непрекидна функција, па је и $\Omega \cap f_1^{-1}(\mathbb{C} \setminus D[0,1])$ отворен скуп, као пресек два таква. Постоји $r_1 > 0$ тако да је $D[z_1, r_1] \subset \Omega \cap f_1^{-1}(\mathbb{C} \setminus D[0,1])$. Скуп $K_1 = D[z_1, r_1]$ је непразан и компактан. Осим тога, важи $|f_1(z)| > 1$ за све $z \in K_1$. Фамилија функција $\left\{ f\big|_{D(z_1,r_1)} \right\}_{f \in \mathcal{F}}$ није локално ограничена у диску $D(z_1, r_1)$, па постоји $z_2 \in D(z_1, r_1)$ и функција $f_2 \in \mathcal{F}$, такви да је $|f_2(z_2)| > 2$. Важи $z_2 \in D(z_1, r_1) \cap f_2^{-1}(\mathbb{C} \setminus D[0,2])$, при чему је $D(z_1, r_1) \cap f_2^{-1}(\mathbb{C} \setminus D[0,2])$ отворен скуп, као пресек таквих и имамо да постоји $r_2 > 0$ тако да је $D[z_2, r_2] \subset D(z_1, r_1) \cap f_2^{-1}(\mathbb{C} \setminus D[0,2])$. Нека је $K_2 = D[z_2, r_2]$ (ово је један компактан и непразан скуп). Приметимо да је $|f_2(z)| > 2$ за све $z \in K_2$. Настављајући индуктивно претходни поступак добијамо низ (f_n) функција из $\mathcal{F}$ и низ компактних, непразних скупова $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ садржаних у Ω, при чему је $|f_n(z)| > n$ за све $z \in K_n$ и све $n \in \mathbb{N}$. Ако би било $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$, имали би да је $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^c = \mathbb{C} \supset K_1$. Ово је отворени покривач компакта K_1, па можемо издвојити коначан потпокривач $\bigcup_{j=1}^{m} K_{n_j}^c \supset K_1$, за неке природне бројеве $n_1 < \cdots < n_m$. Тада је $K_1 \supset \cdots \supset K_{n_m}$, односно $K_1^c \subset \cdots \subset K_{n_m}^c$, тако да је $K_{n_m}^c \supset K_1$. Како је $K_1 \supset K_{n_m}$, то је $K_{n_m}^c \supset K_1^c$. Из претходног добијамо да је $K_{n_m}^c = \mathbb{C}$, односно $K_{n_m} = \emptyset$, што је немогуће. Према томе, мора бити $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$. Нека је $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ произвољан елемент. Тада је $|f_n(z)| > n$ за све $n \in \mathbb{N}$ и самим тим, скуп $\left\{ f(z) \mid f \in \mathcal{F} \right\}$ није ограничен, контрадикција. Дакле, почетна претпоставка је погрешна, тако да постоји област $S \subset \Omega$, таква да је фамилија $\left\{ f\big|_S \right\}_{f \in \mathcal{F}}$ локално ограничена у S. ■

Теорема. Нека је (f_n) низ функција из $\mathcal{H}(\Omega)$ који конвергира тачка по тачка у области Ω ка функцији f. Тада постоји отворен скуп $V \subset \Omega$ који је густ у Ω, такав да низ функција (f_n) компактно конвергира у V ка функцији f и важи $f \in \mathcal{H}(V)$.

Доказ. Функције f_n су холоморфне, а тиме и непрекидне у области Ω. Важи $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ за све $z \in \Omega$, па је $(f_n(z))$ конвергентан низ за $z \in \Omega$. Одатле је низ $(f_n(z))$ ограничен за све $z \in \Omega$. Нека је $\mathcal{S} = \left\{ S \subset \Omega \mid S \text{ је област} \right\}$ фамилија подобласти од Ω. Ако $S \in \mathcal{S}$ тада на основу претходне леме постоји подобласт $S' \subset S$ таква да је низ $\left(f_n\big|_{S'}\right)$ локално ограничен у S' (приметимо да ако је $S \neq \emptyset$, на основу претходне леме можемо узети да је $S' \neq \emptyset$). Узмимо да је $V = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S'$. Скуп V је отворен као унија таквих и важи $V \subset \Omega$. Нека је $D(z, r) \subset \Omega$ произвољан диск. Тада је $S = D(z, r) \in \mathcal{S}$, па постоји одговарајућа подобласт $S' \subset D(z, r)$ и $S' \neq \emptyset$. Следи $V \cap D(z, r) \supset S' \neq \emptyset$, односно $V \cap D(z, r) \neq \emptyset$. Како ово важи за произвољан диск садржан у области Ω, то је V густ у Ω. За произвољно $S \in \mathcal{S}$ низ $\left(f_n\big|_{S'}\right)$ је локално ограничен у S' и $\left\{ z \in S' \mid \text{постоји } \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) \text{ у } \mathbb{C} \right\} = S'$. Применом теореме Vitali-ја добијамо да низ функција (f_n) компактно конвергира у S' ка функцији f и одатле је $f \in \mathcal{H}(S')$. Добили смо да важи $f \in \mathcal{H}(S')$ за све $S \in \mathcal{S}$, па је $f \in \mathcal{H}(V)$. Покажимо још да низ (f_n) компактно конвергира у V ка функцији f. Нека је $K \subset V$ произвољно одабран компактан скуп. Ако је $z \in K \subset V = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S'$, тада постоји нека област $S_z \in \mathcal{S}$, таква да $z \in S_z'$. Како је S_z' такође област, то постоји $r_z > 0$ такво да је $D[z, r_z] \subset S_z'$. Низ функција (f_n) компактно конвергира у S_z' ка функцији f и $D[z, r_z]$ је компакт, па је $f_n \rightrightarrows f$ $(n \to \infty)$ на S_z'. Важи $\bigcup_{z \in K} D(z, r_z) \supset K$ и како је ово отворени покривач компакта, то можемо издвојити коначан потпокривач $\bigcup_{j=1}^{m} D\left(z_j, r_{z_j}\right) \supset K$. Сада је $f_n \rightrightarrows f$ $(n \to \infty)$ на $D\left(z_j, r_{z_j}\right)$ за све $j = 1, \dots, m$. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно узето. Тада за све $j = 1, \dots, m$ постоји $n_j \in \mathbb{N}$, такав да је $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ за све $n \geqslant n_j$ и све $z \in D\left(z_j, r_{z_j}\right)$. Нека је $n_0 = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} n_j$. Тада за све $n \geqslant n_0$ и све $z \in \bigcup_{j=1}^{m} D\left(z_j, r_{z_j}\right)$

важи $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. Према томе, имамо да је $f_n \rightrightarrows f$ $(n \to \infty)$ на K и како ово важи за сваки компакт $K \subset V$, то низ функција (f_n) компактно конвергира у V ка функцији f. ∎

Претходну теорему можемо размотрити и на нешто другачији начин. Наиме, нека је W произвољно одабран отворен скуп, такав да је $\overline{W} \subset \Omega$. За $z \in \overline{W}$ низ $(f_n(z))$ је конвергентан, а тиме и ограничен, тако да постоји $N \in \mathbb{N}$, такав да је $f_n(z) \in D[0, N]$ за све $n \in \mathbb{N}$. Тада је $z \in |f_n|^{-1}([0, N])$ за све $n \in \mathbb{N}$, односно $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} |f_n|^{-1}([0, N])$. Добијамо да важи $z \in \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} |f_n|^{-1}([0, N])$. Како ово важи за произвољну тачку $z \in \overline{W}$, то је $\overline{W} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} |f_n|^{-1}([0, N]) \cap \overline{W} \right)$. Скуп $\overline{W}$ је затворен у комплетном метричком простору $\mathbb{C}$, па је и он комплетан. Према Baire-овој теореми о категорији, комплетан метрички простор не може бити пребројива унија нигде густих скупова (скуп је нигде густ, ако његово затворење има празну унутрашњост). Самим тим, постоји природан број $N(W)$, такав да затворење скупа $\bigcap_{n=1}^{\infty} |f_n|^{-1}([0, N(W)]) \cap \overline{W}$ има непразну унутрашњост. Функције $|f_n|$ су непрекидне, тако да је сваки од скупова $|f_n|^{-1}([0, N(W)])$ затворен. Према томе, скуп $\bigcap_{n=1}^{\infty} |f_n|^{-1}([0, N(W)]) \cap \overline{W}$ је затворен као пресек таквих. Следи да скуп $\bigcap_{n=1}^{\infty} |f_n|^{-1}([0, N(W)]) \cap \overline{W}$ има непразну унутрашњост, па он садржи неки диск $D(W)$. Приметимо да је $|f_n|_{D(W)} \leqslant N(W)$, $n \in \mathbb{N}$. Нека је $V = \bigcup \left\{ D(W) \;\middle|\; W \text{ је отворен и } \overline{W} \subset \Omega \right\}$. Покажимо да овако дефинисани скуп V испуњава све тражене услове. Најпре, скуп V је отворен као унија таквих и важи $V \subset \Omega$. Нека је $D(z, r)$ произвољан диск у садржан у области Ω. Скуп $W = D\left(z, \frac{r}{2}\right)$ је отворен и важи $\overline{W} \subset D(z, r) \subset \Omega$. Добијамо да је $V \cap D(z, r) \supset V \cap W \supset D(W) \neq \emptyset$, односно, $V \cap D(z, r) \neq \emptyset$. Дакле, скуп V је густ у области Ω. Нека је $K \subset V$ компактан скуп. Тада можемо издвојити коначан потпокривач $K \subset \bigcup_{j=1}^{m} D(W_j)$. Важи $|f_n|_{D(W_j)} \leqslant N(W_j)$ за све $n \in \mathbb{N}$ и све $j = 1, \ldots, m$. Узмимо да је $M = \max\left\{ N(W_j) \;\middle|\; j = 1, \ldots, m \right\}$ и добијамо да је $|f_n|_K \leqslant M$ за све $n \in \mathbb{N}$, тј. низ (f_n) је ограничен у компакту K. Ово важи за сваки компакт $K \subset V$, тако да је низ функција (f_n) локално ограничен у V. Нека је $D \subset V$ диск. Тада је $\left\{ z \in D \;\middle|\; \text{постоји } \lim\limits_{n \to \infty} f_n(z) \text{ у } \mathbb{C} \right\} = D$ и према теореми Vitali-ја низ (f_n) компактно конвергира у Ω ка функцији f и самим тим, важи $f \in \mathcal{H}(D)$. Специјално је $f \in \mathcal{H}(D(W))$ за сваки отворен скуп W, такав да је $\overline{W} \subset \Omega$. Следи $f \in \mathcal{H}(V)$. Нека је $K \subset V$ компакт. За свако $z \in K$ постоји $r_z > 0$, тако да је $D(z, r_z) \subset V$. Из отвореног покривача $K \subset \bigcup_{z \in K} D(z, r_z/2)$ можемо издвојити коначан потпокривач $K \subset \bigcup_{j=1}^{m} D(z_j, r_{z_j}/2)$. Тада је $D[z_j, r_{z_j}/2]$ компакт садржан у диску $D(z_j, r_{z_j}) \subset V$ у којем низ (f_n) компактно конвергира ка функцији f, па је $f_n \rightrightarrows f$ $(n \to \infty)$ на $D[z_j, r_{z_j}/2]$, а тиме је $f_n \rightrightarrows f$ $(n \to \infty)$ на $D(z_j, r_{z_j}/2)$ и ово важи за све $j = 1, \ldots, m$. Следи $f_n \rightrightarrows f$ $(n \to \infty)$ на K. Дакле, низ (f_n) компактно конвергира у V ка f.

4.2 Нормалне фамилије

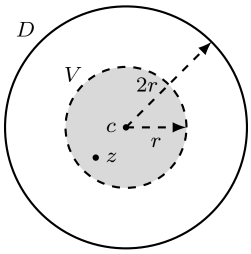
Дефиниција. За фамилију $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ кажемо да је *нормална* у области Ω ако сваки низ функција из $\mathcal{F}$ има подниз који компактно конвергира у Ω. ♠

Став. Фамилија $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ је нормална у Ω ако и само ако је локално ограничена у Ω.

Доказ. Најпре, претпоставимо да је фамилија $\mathcal{F}$ нормална у области Ω и треба показати да је она локално ограничена у Ω. На основу $(\star)$ довољно је показати да је фамилија $\mathcal{F}$ ограничена у сваком компакту садржаном у Ω. Нека је $K \subset \Omega$ компакт. Претпоставимо да фамилија $\mathcal{F}$ није ограничена у компакту K. Тада постоји низ функција (f_n) из $\mathcal{F}$ такав да је $\lim\limits_{n \to \infty} |f_n|_K = \infty$. Како смо претпоставили да је $\mathcal{F}$ нормална фамилија, то постоји подниз (g_n) низа (f_n) који компактно конвергира у Ω и нека је g његова гранична функција. Тада је $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Функције g_n, $n \in \mathbb{N}$ и g су холоморфне, а тиме и непрекидне у области Ω, па су и $|g_n|$, $n \in \mathbb{N}$ и g непрекидне функције, које на компакту K достижу свој максимум. Према томе, важи $|g_n|_K < \infty$ за све $n \in \mathbb{N}$ и $|g|_K < \infty$. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно одабрано. Важи $g_n \rightrightarrows g$ $(n \to \infty)$ на K, па постоји $n_0 \in \mathbb{N}$, такав да је $|g_n - g|_K \leqslant \varepsilon$ за све $n \geqslant n_0$. Осим тога, за све $z \in K$ и све $n \in \mathbb{N}$ важи $|g_n - g|_K \geqslant |g_n(z) - g(z)| \geqslant |g_n(z)| - |g(z)| \geqslant |g_n(z)| - |g|_K$. Преласком на супремум по свим $z \in K$ добијамо да је $|g_n - g|_K \geqslant |g_n|_K - |g|_K$ за све $n \in \mathbb{N}$. Специјално, за $n \geqslant n_0$ важи $|g|_K \geqslant |g_n|_K - |g_n - g|_K \geqslant |g_n|_K - \varepsilon$. Како је $\lim\limits_{n\to\infty} |g_n|_K = \lim\limits_{n\to\infty} |f_n|_K = \infty$, то је и $|g|_K = \infty$, што је контрадикција са тим да је $|g|_K < \infty$. Дакле, фамилија $\mathcal{F}$ јесте ограничена у сваком компакту $K \subset \Omega$. Самим тим, фамилија $\mathcal{F}$ јесте локално ограничена у Ω. Обрнуто, нека је фамилија $\mathcal{F}$ локално ограничена у области Ω и нека је (f_n) низ функција из $\mathcal{F}$. Тада је (f_n) низ функција из $\mathcal{H}(\Omega)$ који је локално ограничен у области Ω, па применом теореме Montel-а закључујемо да постоји његов подниз који компактно конвергира у Ω. Следи, $\mathcal{F}$ је нормална фамилија. ■

Пример. Ако је $M > 0$ тада је фамилија $\mathcal{F}_M = \left\{ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \;\middle|\; |a_n| \leqslant M \text{ за све } n \in \mathbb{N}_0 \right\}$ нормална у јединичном диску $\mathbb{D}$.

Решење. Свака функција $f \in \mathcal{F}_M$ је холоморфна у јединичном диску $\mathbb{D}$, јер је представљена конвергентним степеним редом. Према томе, важи $\mathcal{F}_M \subset \mathcal{H}(\mathbb{D})$. На основу претходног става довољно је показати да је фамилија $\mathcal{F}_M$ локално ограничена у $\mathbb{D}$. Нека је $z \in \mathbb{D}$ произвољно одабрано. Узмимо неко $r \in (|z|, 1)$. Диск $D(0,r)$ је отворен скуп и важи $z \in D(0,r) \subset \mathbb{D}$. За произвољне $z \in D(0,r)$ и $f \in \mathcal{F}_M$ важи $|f(z)| = |\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n \leqslant M \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{M}{1-r}$. Одатле је $|f|_{D(0,r)} \leqslant \frac{M}{1-r}$ за све $f \in \mathcal{F}_M$, односно, фамилија $\mathcal{F}_M$ је ограничена у $D(0,r)$. На овај начин смо показали да за сваку тачку $z \in \mathbb{D}$ постоји отворен скуп V такав да важи $z \in V \subset \mathbb{D}$ и фамилија $\mathcal{F}_M$ је ограничена у V. Самим тим, из свега претходног имамо да је фамилија $\mathcal{F}_M$ локално ограничена, а тиме и нормална у јединичном диску $\mathbb{D}$. ♣



Пример. Нека је $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ нормална фамилија у области Ω и нека је $k \in \mathbb{N}$. Тада је $\mathcal{F}^{(k)} = \left\{ f^{(k)} \;\middle|\; f \in \mathcal{F} \right\}$ такође, једна нормална фамилија у области Ω.

Решење. Како је $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$, то одмах имамо да је $\mathcal{F}^{(k)} \subset \mathcal{H}(\Omega)$. Довољно је показати да је фамилија $\mathcal{F}^{(k)}$ локално ограничена у Ω. Нека је $c \in \Omega$ произвољно одабрано. Постоји $r > 0$ такво да је $D[c, 2r] \subset \Omega$. Нека је $D = D(c, 2r)$ и $V = D(c, r)$. Тада је $c \in V \subset \Omega$ и V је отворен скуп. Скуп $\overline{D} = D[c, 2r]$ је компактан, па је фамилија $\mathcal{F}$ ограничена у $\overline{D}$. Постоји константа $M > 0$ таква да је $|f|_{\overline{D}} \leqslant M$ за све $f \in \mathcal{F}$. Нека су $z \in V$ и $f \in \mathcal{F}$ произвољно одабрани. Применом Cauchy-јеве интегралне формуле добијамо да је $|f^{(k)}(z)| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \right| \leqslant \frac{Mk!}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{1}{|\zeta - z|^{k+1}} |d\zeta| \leqslant \frac{Mk!}{2\pi} \frac{1}{r^{k+1}} 2\pi \cdot 2r = \frac{2Mk!}{r^k}$ (искористили смо да за произвољно $\zeta \in \partial D$ важи $|\zeta - z| \geqslant |\zeta| - |z| = 2r - |z| \geqslant 2r - r = r$). Из претходног је $|f^{(k)}|_V \leqslant \frac{2Mk!}{r^k}$ за све $f \in \mathcal{F}$, па је фамилија $\mathcal{F}^{(k)}$ ограничена у V. Ово важи за произвољну тачку $c \in \Omega$, тако да је фамилија $\mathcal{F}^{(k)}$ локално ограничена у Ω. Применом претходног става добијамо да је $\mathcal{F}^{(k)}$ нормална фамилија у области Ω. ♣

Теорема (Hurwitz). Нека је (f_n) низ функција из $\mathcal{H}(\Omega)$ који компактно конвергира у области Ω ка функцији f и нека је V отворен и ограничен скуп, такав да је $\overline{V} \subset \Omega$, при чему функција f нема нула на ∂V. Тада постоји $n_0 \in \mathbb{N}$, такав да за све $n \geqslant n_0$ функције f и f_n имају исти број нула у $\overline{V}$.

Доказ. Како низ функција (f_n) компактно конвергира у области Ω ка функцији f, то је $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Скупови $\overline{V}$ и ∂V су компактни, јер су затворени и ограничени. Најпре, размотримо специјалан случај, када је V отворени диск. Функција $|f|$ је непрекидна и нема нула на компакту ∂V, па је $\varepsilon = \min\left\{ |f(z)| \;\middle|\; z \in \partial V \right\} > 0$. Такође је $f_n \rightrightarrows f$ $(n \to \infty)$ на ∂V. Постоји $n_0 \in \mathbb{N}$, такав да је $|f_n - f|_{\partial V} < \varepsilon$ за све $n \geqslant n_0$. Тада за произвољне $z \in \partial V$ и $n \geqslant n_0$ важи $|f_n(z) - f(z)| \leqslant |f_n - f|_{\partial V} < \varepsilon \leqslant |f(z)|$, односно, $|f_n(z) - f(z)| < |f(z)|$. Одатле, закључујемо да и функција f_n нема нула на ∂V за све $n \geqslant n_0$, јер f нема нула на ∂V. Са друге стране, применом Rouché-ове теореме добијамо да функције f и $f_n - f + f = f_n$ имају исти број нула у V за све $n \geqslant n_0$. Дакле, за све $n \geqslant n_0$, функције f и f_n имају исти број нула у $\overline{V}$. Размотримо сада општи случај. Функција f има коначан број нула у компакту $\overline{V}$ (у супротном, ако је (z_n) низ нула функције f у $\overline{V}$, тада постоји његов конвергентан подниз (z_{n_k}), па је на основу теореме јединости $f \equiv 0$ у области Ω, што је немогуће, јер f нема нула на $\partial V \subset \Omega$). Нека су $z_1, , \dots, z_k$ нуле функције f у V. Тада постоје $r_j > 0$, $j = 1, \dots, k$, такви да је $D_j = D(z_j, r_j) \subset V$ за све $j = 1, \dots, k$ и дискови D_j, $j = 1, \dots, k$ су међусобно дисјунктни. Тада је $K = \overline{V} \setminus \bigsqcup_{j=1}^{k} D_j$ компактан скуп, јер је затворен и ограничен. На основу претходно изложеног, специјалног случаја за дискове, за све $j = 1, \dots, k$, постоји $n_j \in \mathbb{N}$, такав да за све $n \geqslant n_j$, функције f и f_n имају исти број нула у диску D_j. Функција f нема нула у компакту K, тако да је $\delta = \min\big\{|f(z)| \;\big|\; z \in K\big\}$. Важи $f_n \rightrightarrows f$ $(n \to \infty)$ на K, па постоји $\widehat{n} \in \mathbb{N}$, такав да је $|f_n - f|_K < \delta$ за све $n \geqslant \widehat{n}$. Следи $|f_n(z) - f(z)| \leqslant |f_n - f|_K < \delta \leqslant |f(z)|$ за све $n \geqslant \widehat{n}$ и све $z \in K$. Како функција f нема нула у K, то из претходног закључујемо да и функција f_n нема нула у K, за све $n \geqslant \widehat{n}$. Коначно, нека је $n_0 = \max\{\widehat{n}, n_1, \dots, n_k\}$. Тада за све $n \geqslant n_0$, функције f и f_n имају исти број нула у $\overline{V}$. Овим је доказ завршен. ∎

Последица. Нека је (f_n) низ функција из $\mathcal{H}(\Omega)$ који компактно конвергира у области Ω ка функцији f, при чему функције f_n, $n \in \mathbb{N}$ немају нула у Ω. Ако функција f има нулу у области Ω, тада је f идентички једнака нули у Ω.

Доказ. Претпоставимо супротно, да функција f има нулу у области Ω, али да она није идентички једнака нули у Ω. Нека је $f(c) = 0$ за неко $c \in \Omega$. Како низ функција (f_n) из $\mathcal{H}(\Omega)$ компактно конвергира у области Ω ка функцији f, то је $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Нула $c \in \Omega$ функције f јесте изолована (у супротном би на основу теореме јединости важило $f \equiv 0$ у области Ω), па постоји $r > 0$, такво да је $D[c, r] \subset \Omega$ и да функција f нема нула у $D[c, r] \setminus \{c\}$. Скуп $V = D(c, r)$ је отворен и ограничен и важи $\overline{V} \subset \Omega$, при чему функција f нема нула на граници ∂V. Применом теореме Hurwitz-а добијамо да постоји $n_0 \in \mathbb{N}$, такав да за све $n \geqslant n_0$, функције f и f_n имају исти број нула у $\overline{V}$. Како функција f има нулу у $\overline{V}$, то и функције f_n имају нулу у $\overline{V} \subset \Omega$ за све $n \geqslant n_0$. Ово је у контрадикцији са тим да функције f_n, $n \in \mathbb{N}$ немају нула у области Ω. Дакле, ако функција f има бар једну нулу у Ω, тада је $f \equiv 0$ у области Ω. ∎

Нека је Ω област у комплексној равни и $\mathcal{F} = \big\{f \in \mathcal{H}(\Omega) \;\big|\; f \text{ испушта вредности } 0 \text{ и } 1\big\}$. За произвољне $z \in \Omega$ и $r > 0$ означимо $\mathcal{F}_{z,r} = \big\{f \in \mathcal{F} \;\big|\; |f(z)| \leqslant r\big\}$. Покажимо да је фамилија функција $\mathcal{F}_{z,r}$ ограничена у некој околини тачке z. Наиме, постоји $t > 0$, такво да је $D[z, 2t] \subset \Omega$. Нека је $f \in \mathcal{F}_{z,r}$ произвољно одабрана функција. Дефинишимо функцију $g(\zeta) = f(2t\zeta + z)$. За $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$ важи $|\zeta| \leqslant 1$, па је $|2t\zeta + z - z| \leqslant 2t$, тј. $2t\zeta + z \in D[z, 2t]$. Како је функција f холоморфна у области $\Omega \supset D[z, 2t]$, то је $g \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$. Функција f испушта вредности 0 и 1, па и функција g испушта те вредности. Такође је $|g(0)| = |f(z)| \leqslant r$. Следи $g \in S(r)$, па применом теореме Schottky-ја добијамо да је $|g|_{D[0, \frac{1}{2}]} \leqslant L\left(\frac{1}{2}, r\right)$. За произвољно $w \in D[z, t]$ важи $\frac{w-z}{2t} \in D\left[0, \frac{1}{2}\right]$, па је $|f(w)| = \left|f\left(2t\frac{w-z}{2t} + z\right)\right| = \left|g\left(\frac{w-z}{2t}\right)\right| \leqslant L\left(\frac{1}{2}, r\right)$. Из претходног добијамо да је $|f|_{D[z,t]} \leqslant L\left(\frac{1}{2}, r\right)$. Скуп $D(z, t)$ је отворен, важи $z \in D(z, t) \subset \Omega$ и $|f|_{D(z,t)} \leqslant L\left(\frac{1}{2}, r\right)$ за све $f \in \mathcal{F}_{z,r}$. Према томе, фамилија $\mathcal{F}_{z,r}$ је ограничена у некој околини тачке z области Ω.

Став. За произвољно $p \in \Omega$ фамилија $\mathcal{F}_{p,1}$ је локално ограничена у области Ω.

Доказ. Нека је W скуп свих тачака $z \in \Omega$ са својством да постоји отворен скуп V такав да је $z \in V \subset \Omega$ и фамилија $\mathcal{F}_{p,1}$ је ограничена у V. Скуп W је непразан, јер је на основу претходних разматрања $p \in W$ (фамилија $\mathcal{F}_{p,1}$ је ограничена у некој околини тачке p). Ако је $z \in W$ и V одговарајући отворен скуп, тада за произвољно $\zeta \in V$ важи $\zeta \in W$, јер је $\zeta \in V \subset \Omega$ и фамилија $\mathcal{F}_{p,1}$ је ограничена у V. Самим тим је $V \subset W$, тј. $z \in V \subset W$. Из претходног следи да је W отворен скуп у области Ω. Са друге стране, покажимо да је W затворен скуп у Ω. Наиме, нека је $z \in \overline{W}$ (затворење у области Ω) произвољно одабрана тачка. Претпоставимо да је тада $z \notin W$. Нека је $n \in \mathbb{N}$ произвољно. Ако би било $|f(z)| \leqslant n$ за све $f \in \mathcal{F}_{p,1}$, имали би да је $\mathcal{F}_{p,1} \subset \mathcal{F}_{z,n}$. Али фамилија $\mathcal{F}_{z,n}$ је ограничена у некој околини тачке z, па би и фамилија $\mathcal{F}_{p,1}$ била ограничена у некој околини тачке z, што је немогуће, јер је $z \notin W$. Дакле, постоји неко $f_n \in \mathcal{F}_{p,1}$, тако да је $|f_n(z)| > n$. Тада је (f_n) низ функција из $\mathcal{F}_{p,1}$, при чему важи $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = \infty$. Нека је $g_n = \frac{1}{f_n}$ за све $n \in \mathbb{N}$. Тада за све $n \in \mathbb{N}$ важи $g_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ и функција g_n испушта вредности 0 и 1. Такође, важи $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(z) = 0$. Постоји $n_0 \in \mathbb{N}$, такав да је $|g_n(z)| \leqslant 1$ за све $n \geqslant n_0$. Следи да је $g_n \in \mathcal{F}_{z,1}$ за све $n \geqslant n_0$. Ако узмемо да је $h_n = g_{n+n_0-1}$ за $n \in \mathbb{N}$, тада је (h_n) подниз низа (g_n) и важи $h_n \in \mathcal{F}_{z,1}$ за све $n \in \mathbb{N}$. Специјално је $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(z) = 0$. Фамилија $\mathcal{F}_{z,1}$ је ограничена у неком диску $D(z,t)$, где је $t > 0$ (што следи из разматрања која су претходила овом ставу). Самим тим, фамилија $\mathcal{F}_{z,1}$ је и локално ограничена у диску $D(z,t)$. Применом Montel-ове теореме добијамо да постоји подниз (h_{n_k}) низа (h_n) који компактно конвергира у диску $D(z,t)$ ка некој граничној функцији h. Функције h_{n_k}, $k \in \mathbb{N}$ немају нула у диску $D(z,t)$ (заправо, ове функције испуштају вредности 0 и 1). Функција h има нулу у диску $D(z,t)$, јер је $h(z) = \lim\limits_{k\to\infty} h_{n_k}(z) = \lim\limits_{n\to\infty} h_n(z) = 0$. Применом последице теореме Hurwitz-а закључујемо да је $h \equiv 0$ у диску $D(z,t)$. Дакле, важи $\lim\limits_{k\to\infty} h_{n_k}(\zeta) = h(\zeta) = 0$ за све $\zeta \in D(z,t)$. Одатле је $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(\zeta) = \infty$ за све $\zeta \in D(z,t)$. Како је $z \in \overline{W}$, то је $D(z,t) \cap W \neq \emptyset$ и постоји неко $z_0 \in D(z,t) \cap W$. Из $z_0 \in D(z,t)$ добијамо да је $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(z_0) = \infty$. Са друге стране, из $z_0 \in W$ закључујемо да постоји отворен скуп V_0, такав да је $z_0 \in V_0 \subset \Omega$ и фамилија $\mathcal{F}_{p,1}$ је ограничена у V_0. Дакле, постоји $M > 0$, такво да је $|f|_{V_0} \leqslant M$ за све $f \in \mathcal{F}_{p,1}$. Специјално је $|f(z_0)| \leqslant M$ за све $f \in \mathcal{F}_{p,1}$. Како је (f_{n_k}) низ функција из $\mathcal{F}_{p,1}$, то је $|f_{n_k}(z_0)| \leqslant \mathrm{M}$ за све $k \in \mathbb{N}$. Међутим, ово је у контрадикцији са тим да је $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(z_0) = \infty$. Према томе, наша почетна претпоставка је погрешна, па мора бити $z \in W$. Како ово важи за све $z \in \overline{W}$, то је $W = \overline{W}$, односно, W је затворен скуп у области Ω. Тада је $\Omega = W \sqcup (\Omega \setminus W)$, при чему су W и $\Omega \setminus W$ отворени скупови у Ω и како је Ω повезан скуп (јер је Ω област), то је неки од скупова W и $\Omega \setminus W$ празан. Знамо да $p \in W$, па је $\Omega \setminus W = \emptyset$. Коначно је $\Omega = W$, а самим тим је фамилија $\mathcal{F}_{p,1}$ локално ограничена у области Ω. ∎

У наставку проширујемо концепт нормалних фамилија, тако што претпостављамо да низ функција може компактно да конвергира ка ∞ у некој области $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Теорема. Фамилија $\mathcal{F} = \big\{ f \in \mathcal{H}(\Omega) \bigm| f \text{ испушта вредности 0 и 1} \big\}$ је нормална у области Ω.

Доказ. Фиксирајмо неку тачку $p \in \Omega$ и нека је (f_n) произвољно одабран низ функција из фамилије $\mathcal{F}$. Према претходном ставу фамилија $\mathcal{F}_{p,1}$ је локално ограничена у области Ω, или еквивалентно, фамилија $\mathcal{F}_{p,1}$ је нормална у области Ω. Ако постоји подниз (f_{n_k}) низа (f_n) који припада фамилији $\mathcal{F}_{p,1}$, тада постоји и његов подниз $\left(f_{n_{k_j}}\right)$ који компактно конвергира у области Ω. Дакле, $\left(f_{n_{k_j}}\right)$ је један подниз низа (f_n) који компактно конвергира у Ω. Зато, претпоставимо да низ функција (f_n) нема подниз који припада фамилији $\mathcal{F}_{p,1}$. Тада постоји $n_0 \in \mathbb{N}$, такав да за све $n \geqslant n_0$ важи $f_n \notin \mathcal{F}_{p,1}$. Важи $|f_n(p)| > 1$ за све $n \geqslant n_0$, па је $\left|\frac{1}{f_n(p)}\right| < 1$ за $n \geqslant n_0$. Нека је $g_n = \frac{1}{f_{n+n_0-1}}$ за све $n \in \mathbb{N}$. Тада је (g_n) низ функција из фамилије $\mathcal{F}_{p,1}$ и $\left(\frac{1}{g_n}\right)$ је подниз низа (f_n). Како је $\mathcal{F}_{p,1}$ нормална фамилија, то постоји (g_{n_k}) подниз низа (g_n)

који компактно конвергира у области Ω ка некој функцији g. Тада је $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Свака од функција g_{n_k} испушта вредности 0 и 1, тако да ове функције немају нула у области Ω. Сада разликујемо две могућности, у зависности да ли гранична функција g има или нема нула у области Ω. Најпре, претпоставимо да функција g нема нула у Ω. Нека је $K \subset \Omega$ компактан скуп. Функција $|g|$ је непрекидна у компакту K, тако да на њему достиже свој минимум и како она нема нула у K, то је $\delta = \min\left\{|g(z)| \,\middle|\, z \in K\right\} > 0$. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно одабрано и узмимо да је $\theta \in \left(0, \frac{\varepsilon\delta^2}{\varepsilon\delta+1}\right)$. Важи $\theta < \frac{\varepsilon\delta^2}{\varepsilon\delta+1} < \frac{\varepsilon\delta^2}{\varepsilon\delta} = \delta$ и $g_{n_k} \rightrightarrows g$ $(k \to \infty)$ на K. Постоји природан број k_0, такав да је $|g_{n_k}(z) - g(z)| < \theta$ за све $k \geqslant k_0$ и све $z \in K$. За $k \geqslant k_0$ и $z \in K$ важи $\delta - |g_{n_k}(z)| \leqslant |g(z)| - |g_{n_k}(z)| \leqslant |g_{n_k}(z) - g(z)| < \theta$, односно $\delta - \theta < |g_{n_k}(z)|$. Добијамо да важи $\left|\frac{1}{g_{n_k}(z)} - \frac{1}{g(z)}\right| = \frac{|g_{n_k}(z)-g(z)|}{|g_{n_k}(z)g(z)|} \leqslant \frac{|g_{n_k}(z)-g(z)|}{(\delta-\theta)\delta} < \frac{\theta}{(\delta-\theta)\delta} < \frac{\varepsilon\delta^2/(\varepsilon\delta+1)}{(\delta-\varepsilon\delta^2/(\varepsilon\delta+1))\delta} = \varepsilon$ за све $k \geqslant k_0$ и све $z \in K$. Из претходног је $\frac{1}{g_{n_k}} \rightrightarrows \frac{1}{g}$ $(k \to \infty)$ на K, тако да низ функција $\left(\frac{1}{g_{n_k}}\right)$ компактно конвергира у области Ω ка функцији $\frac{1}{g}$ и $\left(\frac{1}{g_{n_k}}\right)$ је подниз низа (f_n). Претпоставимо сада, да функција g има нулу у области Ω. Према последици теореме Hurwitz-а, важи $g \equiv 0$ у Ω. Нека су компакт $K \subset \Omega$ и $M > 0$ произвољно одабрани. Тада је $g_{n_k} \rightrightarrows 0$ $(k \to \infty)$ на K, тако да постоји природан број k_0, такав да је $|g_{n_k}(z)| < \frac{1}{M}$ за све $k \geqslant k_0$ и све $z \in K$. Одатле је $\left|\frac{1}{g_{n_k}(z)}\right| > M$ за све $k \geqslant k_0$ и све $z \in K$. Самим тим, важи $\frac{1}{g_{n_k}} \rightrightarrows \infty$ $(k \to \infty)$ на K. Дакле, низ функција $\left(\frac{1}{g_{n_k}}\right)$ компактно конвергира у области Ω ка ∞ и $\left(\frac{1}{g_{n_k}}\right)$ је подниз низа (f_n). У сваком случају, добили смо да постоји подниз низа (f_n) који компактно конвергира у области Ω. Како је (f_n) произвољно одабран низ функција из фамилије $\mathcal{F}$, то закључујемо да је $\mathcal{F}$ нормална фамилија у области Ω. ∎

Теорема (Carathéodory). Нека је (f_n) низ функција из $\mathcal{H}(\Omega)$, таквих да свака функција f_n испушта вредности a и b, где су a и b различити комплексни бројеви и нека скуп $A = \left\{z \in \Omega \,\middle|\, \text{постоји } \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) \text{ у } \mathbb{C}\right\}$ има тачку нагомилавања у области Ω. Тада низ функција (f_n) компактно конвергира у области Ω.

Доказ. Дефинишимо функције $g_n = \frac{f_n - a}{b-a}$ за све $n \in \mathbb{N}$. Тада је (g_n) низ функција из фамилије $\mathcal{F} = \left\{f \in \mathcal{H}(\Omega) \,\middle|\, f \text{ испушта вредности 0 и 1}\right\}$. Према претходној теореми, фамилија $\mathcal{F}$ је нормална, а тиме и локално ограничена у области Ω. Дакле, (g_n) је низ функција из $\mathcal{H}(\Omega)$ који је локално ограничен у области Ω. Ако искористимо теорему Vitali-ја добијамо да низ (g_n) компактно конвергира у Ω. Следи да и низ функција (f_n) компактно конвергира у области Ω, што је и требало доказати. ∎

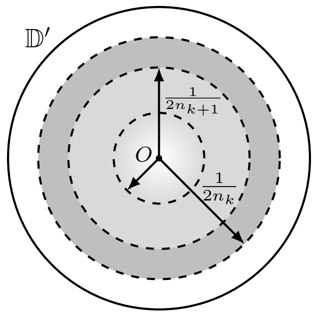
4.3 Велика Picard-ова теорема

Нека је (f_n) низ функција из $\mathcal{H}(\Omega)$ које испуштају вредности 0 и 1. У једној од претходних теорема показали смо да је $\mathcal{F} = \left\{f \in \mathcal{H}(\Omega) \,\middle|\, f \text{ испушта вредности 0 и 1}\right\}$ једна нормална фамилија у области Ω. Из доказа те теореме закључујемо да бар један од низова (f_n) или $\left(\frac{1}{f_n}\right)$ има подниз (g_{n_k}) који компактно конвергира у области Ω ка некој функцији g која узима само коначне вредности (односно, сада немамо конвергенцију ка ∞). Тада је $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Нека су компакт $K \subset \Omega$ и $\varepsilon > 0$ произвољно одабрани. Важи $g_{n_k} \rightrightarrows g$ $(k \to \infty)$ на K, а самим тим, постоји природан број k_0, такав да је $|g_{n_k} - g|_K < \varepsilon$ за све $k \geqslant k_0$. Непрекидна функција $|g|$ на компакту K достиже свој максимум, па је $|g|_K < \infty$. За произвољне $k \geqslant k_0$ и $z \in K$ важи $\varepsilon > |g_{n_k} - g|_K \geqslant |g_{n_k}(z) - g(z)| \geqslant |g_{n_k}(z)| - |g(z)| \geqslant |g_{n_k}(z)| - |g|_K$, па је $|g|_K + \varepsilon > |g_{n_k}(z)|$. Преласком на супремум по $z \in K$ добијамо да је $|g|_K + \varepsilon \geqslant |g_{n_k}|_K$ за све $k \geqslant k_0$. Свака од функција g_{n_k} је непрекидна и на компакту K достиже свој максимум.

Нека је $M = \max\left\{|g_{n_1}|_K, \dots, |g_{n_{k_0-1}}|_K, |g|_K + \varepsilon\right\}$. Тада је $|g_{n_k}|_K \leqslant M$ за све $k \in \mathbb{N}$. Дакле, подниз (g_{n_k}) је ограничен у сваком компакту садржаном у области Ω. Према томе, бар један од низова (f_n) или $\left(\frac{1}{f_n}\right)$ има подниз који је ограничен у компактним подскуповима области Ω.

Ако је V околина тачке z у комплексној равни, тада је $V' = V \setminus \{z\}$ њена пробушена околина. Пробушен диск са центром у тачки z полупречника $r > 0$, јесте скуп $D'(z,r) = D(z,r) \setminus \{z\}$. Сваки пробушени диск јесте област у комплексној равни. Специјално, $\mathbb{D}' = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ је пробушени јединични диск са центром у тачки 0.

Лема. Нека за функцију $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}')$ важи $0, 1 \notin f(\mathbb{D}')$. Тада је бар једна од функција f или $\frac{1}{f}$ ограничена у околини тачке 0.



Доказ. За све $n \in \mathbb{N}$ нека је f_n функција дефинисана са $f_n(z) = f\left(\frac{z}{n}\right)$ за $z \in \mathbb{D}'$. Функција f испушта вредности 0 и 1, тако да свака од функција f_n такође, испушта те вредности. Дакле, (f_n) је низ функција из $\mathcal{H}(\mathbb{D}')$ које испуштају вредности 0 и 1. Према уводном разматрању, бар један од низова (f_n) или $\left(\frac{1}{f_n}\right)$ има подниз који је ограничен у компакту $\partial D\left(0, \frac{1}{2}\right) \subset \mathbb{D}'$. Најпре, претпоставимо да низ (f_n) има подниз (f_{n_k}) који је ограничен у компакту $\partial D\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Тада постоји константа $M > 0$, таква да је $|f_{n_k}(z)| \leqslant M$ за све $k \in \mathbb{N}$ и све $|z| = \frac{1}{2}$. Одатле је $\left|f\left(\frac{z}{n_k}\right)\right| \leqslant M$ за све $k \in \mathbb{N}$ и све $|z| = \frac{1}{2}$. Из претходног добијамо да је $|f(z)| \leqslant M$ за све $k \in \mathbb{N}$ и све $|z| = \frac{1}{2n_k}$. На основу принципа максимума модула закључујемо да је $|f| \leqslant M$ у прстену $\left\{\frac{1}{2n_{k+1}} \leqslant |z| \leqslant \frac{1}{2n_k}\right\}$ за све $k \in \mathbb{N}$. Међутим, како је $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2n_k} = 0$, то је функција f ограничена у околини тачке 0. Са друге стране, претпоставимо да низ $\left(\frac{1}{f_n}\right)$ има подниз $\left(\frac{1}{f_{n_k}}\right)$ који је ограничен у компакту $\partial D\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Тада постоји константа $N > 0$, таква да је $\left|\frac{1}{f_{n_k}(z)}\right| \leqslant N$ за све $k \in \mathbb{N}$ и све $|z| = \frac{1}{2}$. Слично као у претходном случају, добијамо да је $\left|\frac{1}{f(z)}\right| \leqslant N$ за све $k \in \mathbb{N}$ и све $|z| = \frac{1}{2n_k}$. Применом принципа максимума модула, закључујемо да је $\left|\frac{1}{f}\right| \leqslant N$ у прстену $\left\{\frac{1}{2n_{k+1}} \leqslant |z| \leqslant \frac{1}{2n_k}\right\}$ за све $k \in \mathbb{N}$. Како је $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2n_k} = 0$, то је функција $\frac{1}{f}$ ограничена у околини тачке 0. Према томе, бар једна од функција f или $\frac{1}{f}$ је ограничена у околини тачке 0, што је требало показати. ■

Теорема (Велика Picard-ова теорема). Нека је $c \in \mathbb{C}$ изоловани есенцијални сингуларитет функције f. Тада, у свакој околини тачке c, функција f узима сваку комплексну вредност, бесконачно много пута, са једним могућим изузетком.

Доказ. Нека је V произвољна околина тачке c. Тада постоји $r > 0$, такво да је $D(c,r) \subset V$ и важи $f \in \mathcal{H}(D'(c,r))$. Нека је g функција дефинисана са $g(z) = f(rz + c)$. Како $z \in \mathbb{D}'$ ако и само ако $rz + c \in D'(c,r)$, то је $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D}')$ и функција g има изоловани есенцијални сингуларитет у тачки 0. Покажимо да функција g узима све комлексне вредности, са једним могућим изузетком. Претпоставимо супротно, да постоје различити комплексни бројеви a и b, такви да $a, b \notin g(\mathbb{D}')$. Нека је $h = \frac{g-a}{b-a}$. Тада је $h \in \mathcal{H}(\mathbb{D}')$, затим, функција h има изоловани есенцијални сингуларитет у тачки 0 и важи $0, 1 \notin h(\mathbb{D}')$. Из претходне леме добијамо да је бар једна од функција h или $\frac{1}{h}$ ограничена у околини тачке 0. Ако је функција h ограничена у околини тачке 0, тада је сингуларитет у тачки 0 отклоњив (Riemann-ова теорема о отклоњивом сингуларитету). Са друге стране, ако је функција

$\frac{1}{h}$ ограничена у некој околини тачке 0, тада она има отклоњив сингуларитет у тој тачки. Следи да је сингуларитет функције h у тачки 0 или отклоњив или је пол. У сваком случају добијамо контрадикцију, јер функција h има есенцијални сингуларитет у тачки 0. Према томе, наша претпоставка је погрешна, тако да функција g узима све комлексне вредности, са једним могућим изузетком. Самим тим и функција f узима све комплексне вредности, са једним могућим изузетком и ово важи у произвољној околини тачке c. Покажимо још, да у пробушеној околини $D'(c,r)$, функција f узима све комлексне вредности, бесконачно много пута, са једним могућим изузетком. У супротном постоје различити комлексни бројеви w_1 и w_2 које функција f погађа коначно много пута. Тада су $f^{-1}(\{w_1\}) \cap D'(c,r)$ и $f^{-1}(\{w_2\}) \cap D'(c,r)$ коначни скупови (бар један од њих је непразан, јер функција f не може да испусти више од једне комплексне вредности) и нека је $f^{-1}(\{w_1\}) \cap D'(c,r) = \{z_1,\dots,z_n\}$ и $f^{-1}(\{w_2\}) \cap D'(c,r) = \{\zeta_1,\dots,\zeta_m\}$ за неке $n,m \in \mathbb{N}_0$. У наставку, узмимо да је $\varepsilon = \min\left\{|z_k - c|, |\zeta_j - c| \;\middle|\; k = 1,\dots,n, j = 1,\dots,m\right\}$. Тада је $0 < \varepsilon < r$ и у пробушеној околини $D'(c,\varepsilon)$ тачке c, функција f испушта две различите комплексне вредности w_1 и w_2 што је немогуће. Овим је доказ завршен. ■

За целу функцију која није полином, кажемо да је *трансцендентна* функција. Дакле, целе функције делимо на полиноме и трансцендентне функције. Нека је f трансцендентна функција. Тада је $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) \neq \infty$ (у супротном би функција f била полином). Такође, ако постоји $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ у $\mathbb{C}$, тада је на основу Liouville-ове теореме f константна функција, а тиме и полином. Самим тим, не постоји $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ у $\mathbb{C}$. Према томе, функција $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ има есенцијални сингуларитет у тачки 0. Применом велике Picard-ове теореме добијамо да функција g, а тиме и функција f, узима све комплексне вредности, бесконачно много пута, са једним могућим изузетком. Из претходног смо добили да *трансцендентне функције узимају све комплексне вредности, бесконачно много пута, са једним могућим изузетком.* Такође, неконстантан полином узима све вредности у комплексној равни. Коначно, добијамо да свака цела, неконстантна функција узима све комплексне вредности, са једним могућим изузетком. Односно, имамо да из велике Picard-ове теореме следи мала Picard-ова теорема.

Пример. Нека је f цела функција, таква да су $f^{-1}(\{a\})$ и $f^{-1}(\{b\})$ коначни скупови, за нека два различита комплексна броја a и b. Доказати да је f полином.
Решење. Претпоставимо да је f трансцендентна функција. Према претходном разматрању, функција f узима све комлексне вредности бесконачно много пута, са једним могућим изузетком. Међутим, функција f узима две различите комлексне вредности a и b само коначно много пута. Контрадикција! Према томе, функција f мора бити полином. ♣

Глава 5

Итерације холоморфних функција

5.1 Cartan-ова теорема

Нека је Ω област у комплексној равни. Дефинишемо фамилију холоморфних пресликавања $\mathrm{Hol}(\Omega) = \{f : \Omega \to \Omega \mid f \text{ је холоморфна функција}\}$. У неким ранијим разматрањима смо имали да је $\mathrm{Aut}(\Omega) = \{f : \Omega \to \Omega \mid f \text{ је бихоломорфна функција}\}$. Нека је $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ произвољно одабрана функција. Узмимо да је $f_1 = f$ и $f_{n+1} = f \circ f_n$ за све $n \in \mathbb{N}$. За низ (f_n) кажемо да је низ *итерација* функције $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$. Како је $f(\Omega) \subset \Omega$, то је $f_n(\Omega) \subset f(\Omega)$ за све $n \in \mathbb{N}$. Осим тога, композиција холоморфних функција, јесте опет једна холоморфна функција. Према томе, за све $n \in \mathbb{N}$ важи $f_n \in \mathrm{Hol}(\Omega)$. Ако је $f(a) = a$ за неку тачку $a \in \Omega$, тада је $f_n'(a) = f'(a)^n$ за све $n \in \mathbb{N}$.

Пример. Ако је (f_n) низ итерација функције $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ и $f_m \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ за неко $m \in \mathbb{N}$, тада је $f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$.
Решење. Ако је $m = 1$ тривијално следи тражени резултат. Зато, нека је $m \geqslant 2$. Довољно је показати да је функција f бијекција. Нека је $f(a) = f(b)$ за неке a и b из Ω. Тада је $f_n(a) = f_n(b)$ за све $n \in \mathbb{N}$. Специјално је $f_m(a) = f_m(b)$ и како је $f_m \in \mathrm{Aut}(\Omega)$, то је $a = b$. Дакле, f је $1-1$ функција. За све $n \in \mathbb{N}$ важи $f_n(\Omega) \subset f(\Omega)$. Специјално је $\Omega = f_m(\Omega) \subset f(\Omega) \subset \Omega$, па је $f(\Omega) = \Omega$. Добили смо да је функција f бијекција и осим тога, она је холоморфна функција, па је $f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$. ♣

Лема. Нека је (f_{n_k}) подниз низа итерација функције $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ који компактно конвергира у области Ω ка функцији g.
(а) Ако је $g \in \mathrm{Aut}(\Omega)$, тада је и $f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$.
(б) Нека је $h_k = f_{n_{k+1}-n_k}$ за све $k \in \mathbb{N}$. Ако је g неконстантна функција и $\left(h_{k_j}\right)$ неки подниз низа (h_k) који компактно конвергира у области Ω, тада он конвергира ка функцији id_Ω.

Доказ. (а) Довољно је показати да је функција f бијекција. Нека је $f(a) = f(b)$ за неке комплексне бројеве a и b из Ω. Тада је $f_{n_k}(a) = f_{n_k}(b)$ за све $k \in \mathbb{N}$. Следи $g(a) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(a) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(b) = g(b)$ и како је $g \in \mathrm{Aut}(\Omega)$, то имамо $a = b$. Дакле, функција f је $1-1$. Са друге стране, нека је $c \in \Omega$ произвољно. Тада постоји $r > 0$, такво да је $D[c, r] \subset \Omega$ и означимо $V = D(c, r)$. Скуп V је ограничен, отворен и важи $\overline{V} \subset \Omega$. Према претпоставци $g \in \mathrm{Aut}(\Omega)$, тако да је g једна $1-1$ функција, што значи да функција $g - g(c)$ нема нула на граници ∂V. Такође, низ $(f_{n_k} - g(c))$ компактно конвергира у области Ω ка функцији $g - g(c)$. Према Hurwitz-овој теореми, постоји $k_0 \in \mathbb{N}$, такав да за све $k \geqslant k_0$ функције $f_{n_k} - g(c)$ и $g - g(c)$ имају исти број нула у $\overline{V}$. Следи да функција $f_{n_k} - g(c)$ има неку нулу у скупу $\overline{V} \subset \Omega$, где је $k \geqslant k_0$, па је $g(c) \in f_{n_k}(\Omega) \subset f(\Omega)$. Како ово важи за све $c \in \Omega$, то је $\Omega = g(\Omega) \subset f(\Omega) \subset \Omega$. Коначно је $f(\Omega) = \Omega$.
(б) Низ функција (f_{n_k}) из $\mathrm{Hol}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\Omega)$ компактно конвергира у области Ω ка функцији g,

па је $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Нека је $c \in \Omega$. Постоји $r > 0$ такво да је $D[c,r] \subset \Omega$ и функција $g - g(c)$ нема нула у $D[c,r] \setminus \{c\}$ (у супротном би, на основу теореме јединости важило $g - g(c) \equiv 0$, па би g била константна функција, што је супротно претпоставци да је g неконстантна функција). Скуп $V = D(c,r)$ је отворен, ограничен и важи $\overline{V} \subset \Omega$. Такође, функција $g - g(c)$ нема нула на граници ∂V. Осим тога, низ функција $(f_{n_k} - g(c))$ компактно конвергира у области Ω ка функцији $g - g(c)$. Применом Hurwitz-ове теореме закључујемо да постоји природан број k_0, такав да за све $k \geqslant k_0$ функције $f_{n_k} - g(c)$ и $g - g(c)$ имају исти број нула у $\overline{V}$. Следи да функција $f_{n_k} - g(c)$ има неку нулу у $\overline{V} \subset \Omega$, где је $k \geqslant k_0$. Одатле је $g(c) \in f_{n_k}(\Omega) \subset f(\Omega) \subset \Omega$. Ово важи за све $c \in \Omega$, тако да је $g(\Omega) \subset \Omega$. Према томе, важи $g \in \mathrm{Hol}(\Omega)$. Из $h_k = f_{n_{k+1} - n_k}$ добијамо да је $h_k \circ f_{n_k} = f_{n_{k+1}}$ за све $k \in \mathbb{N}$. Како је $\left(h_{k_j}\right)$ подниз низа (h_k) функција из $\mathrm{Hol}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\Omega)$ који компактно конвергира у области Ω ка некој граничној функцији h, то је $h \in \mathcal{H}(\Omega)$. Следи да је h непрекидна функција, па ова компактна конвергенција повлачи непрекидну конвергенцију. Нека је $z \in \Omega$ произвољно узето. Тада је $\lim\limits_{j \to \infty} f_{n_{k_j}}(z) = g(z)$ и из непрекидне конвергенције низа $\left(h_{k_j}\right)$ ка функцији h добијамо $\lim\limits_{j \to \infty} h_{k_j}\left(f_{n_{k_j}}(z)\right) = h(g(z))$. Важи $(h \circ g)(z) = \lim\limits_{j \to \infty} \left(h_{k_j} \circ f_{n_{k_j}}\right)(z) = \lim\limits_{j \to \infty} f_{n_{k_j+1}}(z) = g(z)$ за све $z \in \Omega$. Функција g је холоморфна и неконстантна, па је $g(\Omega)$ један отворен скуп у области Ω (теорема о отвореном пресликавању). Из претходног разматрања добијамо да важи $h(z) = z$ за све $z \in g(\Omega)$. Сада нам теорема јединости даје $h = \mathrm{id}_\Omega$, што је и требало доказати. Овим је доказ завршен. ∎

Последица. Ако низ итерација (f_n) функције $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ компактно конвергира у области Ω ка неконстантној функцији, тада је $f = \mathrm{id}_\Omega$.

Доказ. Користећи ознаке као у претходној леми имамо да је $n_k = k$ и $h_k = f_{n_{k+1} - n_k} = f$ за све $k \in \mathbb{N}$. Тада тривијално следи да низ (h_k) компактно конвергира у области Ω ка функцији f. Према претходној леми (део (б)), мора бити $f = \mathrm{id}_\Omega$. ∎

Теорема (Cartan). Нека је Ω ограничена област и $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$. Претпоставимо да постоји подниз (f_{n_k}) низа итерација функције f који компактно конвергира у области Ω ка некој неконстантној функцији. Тада је $f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$.

Доказ. Важи $f(\Omega) \subset \Omega$ и Ω је ограничена област. Према томе, постоји константа $M > 0$, таква да је $\Omega \subset D[0, M]$. Тада је $|f(z)| \leqslant M$ за све $z \in \Omega$. Следи $|f|_\Omega \leqslant M$. Одатле је $|f_n|_\Omega \leqslant M$ за све $n \in \mathbb{N}$, где је (f_n) низ итерација функције f. Нека је $h_k = f_{n_{k+1} - n_k}$ за све $k \in \mathbb{N}$. Тада је $|h_k|_\Omega \leqslant M$ за све $k \in \mathbb{N}$. Добијамо да је (h_k) низ функција из $\mathcal{H}(\Omega)$ који је ограничен, а тиме и локално ограничен у области Ω. Према теореми Montel-а постоји његов подниз $\left(h_{k_j}\right)$ који компактно конвергира у области Ω и самим тим, на основу претходне леме (део (б)), он мора да конвергира ка функцији id_Ω. Како су функције h_{k_j} неке од итерација функције f, то закључујемо да је нека од функција f_n идентички једнака функцији $\mathrm{id}_\Omega \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ или да постоји подниз низа (f_n) који компактно конвергира у области Ω ка функцији $\mathrm{id}_\Omega \in \mathrm{Aut}(\Omega)$. У првом случају је $f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$, на основу претходног примера, док је у другом случају $f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$, на основу претходне леме (део (а)). Према томе, важи $f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ и тиме је доказ теореме завршен. ∎

5.2 Последице Cartan-ове теореме

Ако је Ω ограничена област у комплексној равни и $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$, тада је низ итерација (f_n) функције f, ограничен, а тиме и локално ограничен у области Ω, што показујемо на исти начин као у претходној теореми. Фиксирајмо неку тачку $a \in \Omega$. Означимо

$\mathrm{Hol}_a(\Omega) = \{f \in \mathrm{Hol}(\Omega) \mid f(a) = a\}$. Слично, нека је $\mathrm{Aut}_a(\Omega) = \{f \in \mathrm{Aut}(\Omega) \mid f(a) = a\}$. Приметимо, да ако је $f \in \mathrm{Hol}_a(\Omega)$, тада је $f_n \in \mathrm{Hol}_a(\Omega)$ за све $n \in \mathbb{N}$ и важи $f_n'(a) = f'(a)^n$. Осим тога, $\mathrm{Aut}_a(\Omega)$ је једна група, подгрупа групе $\mathrm{Aut}(\Omega)$. Cartan-ова теорема има бројне и интересантне последице. Неке од њих наводимо у овом одељку. Такође, у наредном одељку описаћемо групу $\mathrm{Aut}_a(\Omega)$ за ограничене области у комплексној равни. Заправо, група $\mathrm{Aut}_a(\Omega)$ је изоморфна групи $\mathbb{S}^1$ или некој њеној кончној, цикличној подгрупи, где је $\Omega \subset \mathbb{C}$ ограничена област и $a \in \Omega$.

Став. Нека је Ω ограничена област и нека функција $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ има бар две фиксне тачке у области Ω. Тада је $f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$.

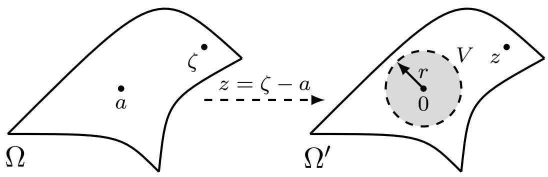
Доказ. Нека су a и b две различите фиксне тачке функције f. Низ итерација (f_n) функције f јесте ограничен, а тиме и локално ограничен у области Ω. Важи $f_n(a) = a$ и $f_n(b) = b$ за све $n \in \mathbb{N}$. На основу теореме Montel-а постоји подниз (f_{n_k}) који компактно конвергира у области Ω ка некој функцији g. Тада је $g(a) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(a) = a \neq b = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(b) = g(b)$, па је g неконстантна функција. Из претходног, према Cartan-овој теореми мора бити $f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$, што је и требало доказати. ■

Став. Нека је Ω ограничена област и $a \in \Omega$. Тада за сваку функцију $f \in \mathrm{Hol}_a(\Omega)$ важи $|f'(a)| \leqslant 1$. Такође је $\mathrm{Aut}_a(\Omega) = \{f \in \mathrm{Hol}_a(\Omega) \mid |f'(a)| = 1\}$.

Доказ. Нека је (f_n) низ итерација функције $f \in \mathrm{Hol}_a(\Omega)$. Тада је $f_n \in \mathrm{Hol}_a(\Omega)$ за све $n \in \mathbb{N}$. Низ (f_n) је локално ограничен у Ω (јер је ограничен у тој области), па према теореми Montel-а постоји његов подниз (f_{n_k}) који компактно конвергира у области Ω ка некој функцији g. Тада је $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Постоји $r > 0$, такво да је $D[a, r] \subset \Omega$. Скуп $V = D(a, r)$ је отворен и важи $\overline{V} \subset \Omega$. Осим тога, ∂V је компактан скуп, јер је затворен и ограничен. Одатле је $f_{n_k} \rightrightarrows g$ $(k \to \infty)$ на ∂V и нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Постоји природан број $k_0 \in \mathbb{N}$, такав да је $|f_{n_k}(z) - g(z)| < r^2\varepsilon$ за све $k \geqslant k_0$ и све $z \in \partial V$. Тада је $\left|\frac{f_{n_k}(z)}{(z-a)^2} - \frac{g(z)}{(z-a)^2}\right| = \frac{|f_{n_k}(z)-g(z)|}{|z-a|^2} = \frac{|f_{n_k}(z)-g(z)|}{r^2} < \varepsilon$ за све $k \geqslant k_0$ и све $z \in \partial V$. Према томе, важи $\frac{f_{n_k}(z)}{(z-a)^2} \rightrightarrows \frac{g(z)}{(z-a)^2}$ $(k \to \infty)$ на ∂V. Користећи ову равномерну конвергенцију и Cauchy-јеву интегралну формулу добијамо да је $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}'(a) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V} \frac{f_{n_k}(z)}{(z-a)^2}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V} \lim\limits_{k\to\infty} \frac{f_{n_k}(z)}{(z-a)^2}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V} \frac{g(z)}{(z-a)^2}dz = g'(a)$. Како је $f_{n_k}'(a) = f'(a)^{n_k}$ за све $k \in \mathbb{N}$, то је на основу претходног $\lim\limits_{k\to\infty} f'(a)^{n_k} = g'(a)$. Дакле, низ $(f'(a)^{n_k})$ је конвергентан, па мора бити $|f'(a)| \leqslant 1$. Ако је $|f'(a)| = 1$, тада је и $|g'(a)| = \lim\limits_{k\to\infty} |f'(a)|^{n_k} = 1$, па је g неконстантна функција. Према Cartan-овој теореми мора бити $f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ и како је $f(a) = a$, то $f \in \mathrm{Aut}_a(\Omega)$. На овај начин смо показали да важи $\mathrm{Aut}_a(\Omega) \supset \{f \in \mathrm{Hol}_a(\Omega) \mid |f'(a)| = 1\}$. Са друге стране, нека је $f \in \mathrm{Aut}_a(\Omega)$. Тада је и $f \in \mathrm{Hol}_a(\Omega)$, тако да је на основу претходног $|f'(a)| \leqslant 1$. Међутим, важи $f^{-1} \in \mathrm{Aut}_a(\Omega)$, па је $|(f^{-1})'(a)| \leqslant 1$. Одатле је $1 \geqslant |(f^{-1})'(a)| = \frac{1}{|f'(a)|}$, односно, $|f'(a)| \geqslant 1$. Коначно је $|f'(a)| = 1$. На овај начин смо добили да је $\mathrm{Aut}_a(\Omega) \subset \{f \in \mathrm{Hol}_a(\Omega) \mid |f'(a)| = 1\}$. Према томе, заиста важи $\mathrm{Aut}_a(\Omega) = \{f \in \mathrm{Hol}_a(\Omega) \mid |f'(a)| = 1\}$. ■

Став. Нека је Ω ограничена област, $a \in \Omega$, $f \in \mathrm{Aut}_a(\Omega)$ и $f'(a) > 0$. Тада је $f = \mathrm{id}_\Omega$.

Доказ. Важи $f \in \mathrm{Aut}_a(\Omega)$, па применом претходног става закључујемо да је $|f'(a)| = 1$. Али како је још $f'(a) > 0$, то мора бити $f'(a) = 1$. Нека је $\Omega' = \Omega + (-a)$. Тада је Ω' ограничена област, као транслат ограничене области Ω. Како $a \in \Omega$, то $0 \in \Omega'$. Дефинишимо функцију h као $h(z) = f(z + a) - a$. Следи $h \in \mathrm{Aut}(\Omega')$, јер је $f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$.



Осим тога, важи $h(0) = f(a) - a = 0$. Такође је $h'(z) = f'(z + a)$, па је $h'(0) = f'(a) = 1$. Из претходног је Taylor-ов развој функције h у тачки 0 дат са $h(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$ и претпоставимо да је a_m први од коефицијената $a_2, a_3, \dots$ који је различит од нуле (дакле, претпостављамо постојање таквог коефицијента). Тада је $h(z) = z + a_mz^m + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_kz^k$, где је $m \geqslant 2$. Нека је (h_n) низ итерација функције h. Покажимо математичком индукцијом, да свака од функција h_n има развој дат са $h_n(z) = z + na_mz^m + \dots$. Најпре, за $n = 1$ то директно следи. Нека је $h_n(z) = z + na_mz^m + \dots$ за неко $n \in \mathbb{N}$. Следи да је $h_{n+1}(z) = h(h_n(z)) = h_n(z) + a_mh_n(z)^m + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_kh_n(z)^k$. Коефицијент уз члан z једнак је 1, јер се он јавља само у развоју функције $h_n(z)$. Коефицијент уз члан z^m једнак је $na_m + a_m$, где је na_m добијено из развоја функције $h_n(z)$, а a_m из развоја функције $a_mh_n(z)^m$. Добијамо да је $h_{n+1}(z) = z + (n+1)a_mz^m + \dots$ и тиме је доказ индукцијом завршен. Како је Ω' ограничена област, то је низ функција (h_n) локално ограничен у Ω', па према теореми Montel-а, постоји његов подниз (h_{n_k}) који компактно конвергира у области Ω' ка некој функцији g. Тада је $g \in \mathcal{H}(\Omega')$. Постоји $r > 0$, такво да је $D[0, r] \subset \Omega'$. Скуп $V = D(0, r)$ је отворен и важи $\overline{V} \subset \Omega'$. Такође, скуп ∂V је компактан, јер је затворен и ограничен. Тада је $h_{n_k} \rightrightarrows g$ $(k \to \infty)$ на ∂V и нека је $\varepsilon > 0$ произвољно одабрано. Постоји природан број k_0, такав да је $|h_{n_k}(z) - g(z)| < r^{m+1}\varepsilon$ за све $k \geqslant k_0$ и све $z \in \partial V$. Сада, за произвољне $k \geqslant k_0$ и $z \in \partial V$, важи $\left|\frac{h_{n_k}(z)}{z^{m+1}} - \frac{g(z)}{z^{m+1}}\right| = \frac{|h_{n_k}(z) - g(z)|}{r^{m+1}} < \varepsilon$. Закључујемо да је $\frac{f_{n_k}(z)}{z^{m+1}} \rightrightarrows \frac{g(z)}{z^{m+1}}$ $(k \to \infty)$ на ∂V. Из ове равномерне конвергенције и Cauchy-јеве интегралне формуле имамо $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{h_{n_k}^{(m)}(0)}{m!} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V} \frac{h_{n_k}(z)}{z^{m+1}}dz \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V} \lim\limits_{k\to\infty} \frac{h_{n_k}(z)}{z^{m+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V} \frac{g(z)}{z^{m+1}}dz = \frac{g^{(m)}}{m!}$. Како је $\frac{h_{n_k}^{(m)}(0)}{m!} = n_ka_m$ за све $k \in \mathbb{N}$, то из претходног добијамо $\lim\limits_{k\to\infty} n_ka_m = \frac{g^{(m)}(0)}{m!}$. Према томе, низ (n_ka_m) је конвергентан, па мора бити $a_m = 0$. Ово је у контрадикцији са избором коефицијента a_m, тако да је наша почетна претпоставка погрешна. Добијамо да је $h(z) = z$ за све $z \in \Omega'$. За свако $z \in \Omega$ важи $z - a \in \Omega'$, па је $f(z) = f(z - a + a) - a + a = h(z - a) + a = z - a + a = z$. Следи $f = \mathrm{id}_\Omega$. Овим је доказ завршен. ∎

5.3 Група аутоморфизама ограничене области

У овом одељку описујемо групу $\mathrm{Aut}_a(\Omega)$, где је Ω ограничена област у комплексној равни и $a \in \Omega$. Најпре, доказујемо следећу теорему.

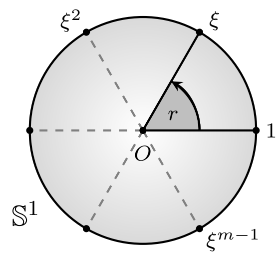
Теорема. Нека је Ω ограничена област и (h_n) низ функција из $\mathrm{Aut}(\Omega)$ који компактно конвергира у области Ω ка функцији h. Ако је h неконстантна функција важи $h \in \mathrm{Aut}(\Omega)$. У супротном је функција h константно једнака некој тачки са границе $\partial\Omega$.

Доказ. Због компактне конвергенције важи $h \in \mathcal{H}(\Omega)$. Нека је $g_n = h_n^{-1} \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ за све $n \in \mathbb{N}$. Тада је низ (g_n) локално ограничен у области Ω, па према теореми Montel-а, постоји његов подниз (g_{n_k}) који компактно конвергира у Ω ка некој фукцији g. Важи $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Нека је $K \subset \Omega$ компакт. За свако $z \in K$ постоји $r_z > 0$, такво да је $D[z, r_z] \subset \Omega$. Из отвореног покривача $\bigcup_{z\in K} D(z, r_z/2)$ компакта K можемо издвојити коначан потпокривач $K \subset \bigcup_{j=1}^{m} D(z_j, r_{z_j}/2)$. Означимо $D_j = D(z_j, r_{z_j})$ за све $j = 1, \dots, m$. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно одабрано и узмимо да је $\delta = \frac{1}{4}\min\left\{r_{z_j} \,\middle|\, j = 1, \dots, m\right\}\varepsilon$. За све $j = 1, \dots, m$ важи $\partial D_j \subset \Omega$ и ∂D_j је компактан скуп, тако да је $g_{n_k} \rightrightarrows g$ $(k \to \infty)$ на ∂D_j. Тада постоји $k_j \in \mathbb{N}$, тако да је $|g_{n_k}(\zeta) - g(\zeta)| < \delta$ за све $k \geqslant k_j$ и све $\zeta \in \partial D_j$. Нека је $k_0 = \max\left\{k_j \;\middle|\; j = 1, \ldots, m\right\}$. Такође, нека су $k \geqslant k_0$ и $z \in K$ произвољно одабрани. Тада је $z \in D\left(z_j, r_{z_j}/2\right)$ за неко $j = 1, \ldots, m$ и за све $\zeta \in \partial D_j$ важи $|\zeta - z| = |\zeta - z_j - (z - z_j)| \geqslant |\zeta - z_j| - |z - z_j| > r_{z_j} - r_{z_j}/2 = r_{z_j}/2$, тј. $\frac{1}{|\zeta - z|^2} \leqslant \frac{4}{r_{z_j}^2}$. Применом Cauchy-јеве интегралне формуле добијамо да је $|g'_{n_k}(z) - g'(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_j} \frac{g_{n_k}(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_j} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta\right| < \frac{1}{2\pi}\delta\frac{4}{r_{z_j}^2}\int_{\partial D_j} |d\zeta| = \frac{1}{2\pi}\delta\frac{4}{r_{z_j}^2} 2\pi r_{z_j} = \frac{4\delta}{r_{z_j}} \leqslant \varepsilon$. Према томе, за све $k \geqslant k_0$ и све $z \in K$ важи $|g'_{n_k}(z) - g'(z)| < \varepsilon$. Из претходног добијамо да важи $g'_{n_k} \rightrightarrows g'$ $(k \to \infty)$ на K. Како ово важи за сваки компакт $K \subset \Omega$, то низ функција $\left(g'_{n_k}\right)$ компактно конвергира у области Ω ка функцији g'. На исти начин показујемо да низ функција $\left(h'_{n_k}\right)$ компактно конвергира у области Ω ка функцији h'. Важи $g_{n_k} \circ h_{n_k} = \mathrm{id}_\Omega$ за све $k \in \mathbb{N}$, па је $g'_{n_k}\left(h_{n_k}(z)\right) h'_{n_k}(z) = 1$ за све $k \in \mathbb{N}$ и све $z \in \Omega$. Компактна конвергенција низа функција $\left(g'_{n_k}\right)$ ка функцији g' повлачи непрекидну конвергенцију, јер је g' непрекидна функција. Самим тим, важи $\lim\limits_{k\to\infty} g'_{n_k}\left(h_{n_k}(z)\right) = g'(h(z))$, јер је $\lim\limits_{k\to\infty} h_{n_k}(z) = h(z)$. Такође је $\lim\limits_{k\to\infty} h'_{n_k}(z) = h'(z)$. Знамо да важи $g'_{n_k}\left(h_{n_k}(z)\right) h'_{n_k}(z) = 1$ за све $k \in \mathbb{N}$. Пустимо да $k \to \infty$ и добијамо да је $g'(h(z))h'(z) = 1$ за све $z \in \Omega \cap h^{-1}(\Omega)$. У наставку разликујемо две могућности у зависности да ли је h неконстантна или константна функција. Најпре, претпоставимо да је h неконстантна функција. Нека је $c \in \Omega$ произвољно. На основу теореме јединости нуле неконстантне холоморфне функције су изоловане, тако да постоји $r > 0$, такво да је $D[c, r] \subset \Omega$ и да функција $h - h(c)$ нема нула у $D[c, r] \setminus \{c\}$. Скуп $W = D(c, r)$ је ограничен, отворен и важи $\overline{W} \subset \Omega$. Осим тога, функција $h - h(c)$ нема нула на граници ∂W и низ функција $(h_{n_k} - h(c))$ компактно конвергира ка функцији $h - h(c)$ у области Ω. Према теореми Hurwitz-а, закључујемо да постоји природан број $\widehat{k}$, такав да за све $k \geqslant \widehat{k}$ функције $h_{n_k} - h(c)$ и $h - h(c)$ имају исти број нула у $\overline{W}$. Специјално је $h(c) \in h_{n_{\widehat{k}}}(\Omega) = \Omega$. Ово важи за све $c \in \Omega$, па је $h \in \mathrm{Hol}(\Omega)$. За све $k \in \Omega$ важи $g_{n_k} \circ h_{n_k} = \mathrm{id}_\Omega = h_{n_k} \circ g_{n_k}$. Имамо $\lim\limits_{k\to\infty} g_{n_k}(z) = g(z)$ за све $z \in \Omega$. Низ (h_{n_k}) компактно конвергира ка функцији h, h је непрекидна, тако да имамо и непрекидну конвергенцију низа функција (h_{n_k}) ка функцији h. Добијамо да је $\lim\limits_{k\to\infty} (h_{n_k} \circ g_{n_k})(z) = h(g(z))$. Са друге стране је $\lim\limits_{k\to\infty} (h_{n_k} \circ g_{n_k})(z) = \mathrm{id}_\Omega(z) = z$ за све $z \in \Omega$. Следи $h \circ g = \mathrm{id}_\Omega$. Слично је $g \circ h = \mathrm{id}_\Omega$. Коначно је из претходног $h \in \mathrm{Aut}(\Omega)$. Даље, претпоставимо да је h константна функција. Нека је $h \equiv c$ у Ω. Тада је $h' \equiv 0$ у Ω. Како је $g'(h(z))h'(z) = 1$ за све $z \in \Omega \cap h^{-1}(\Omega)$, то мора бити $h^{-1}(\Omega) = \emptyset$. Одатле је $c \notin \Omega$. За произвољно $z \in \Omega$ важи $c = \lim\limits_{k\to\infty} h_{n_k}(z) \in \overline{\Omega}$, јер $h_{n_k}(z) \in \Omega$ за све $k \in \mathbb{N}$. Следи $c \in \partial\Omega$. Тиме је доказ завршен. ■

Нека је L затворен скуп и подгрупа адитивне групе поља $\mathbb{R}$, таква да је $L \neq \{0\}$ и $L \neq \mathbb{R}$ (када кажемо да је L затворен скуп, мислимо да је L затворен на реалној правој у тополошком смислу). Најпре, како је $L \neq \{0\}$, то је $\left\{x \in L \;\middle|\; x > 0\right\} \neq \emptyset$. Узмимо да је $r = \inf\left\{x \in L \;\middle|\; x > 0\right\}$. Тада је $r \in \mathbb{R}$ и $r \geqslant 0$. Претпоставимо да је $r = 0$. Нека су $t \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ произвољно одабрани. Тада постоји $s \in L$, такав да је $0 < s < \varepsilon$. Означимо $n_0 = \left\lfloor \frac{t-\varepsilon}{s} \right\rfloor + 1$ ($\lfloor\cdot\rfloor$ је функција целог дела). Тада је $n_0 \in \mathbb{Z}$ и самим тим, важи $x = n_0 s \in L$ (јер је L подгрупа адитивне групе поља $\mathbb{R}$). Приметимо да је $\frac{t-\varepsilon}{s} < \left\lfloor \frac{t-\varepsilon}{s} \right\rfloor + 1 = n_0 \leqslant \frac{t-\varepsilon}{s} + 1 = \frac{t}{s} - \frac{\varepsilon}{s} + 1 < \frac{t+\varepsilon}{s}$, односно, важи $t - \varepsilon < x < t + \varepsilon$. Дакле, за све $t \in \mathbb{R}$ и све $\varepsilon > 0$ постоји $x \in L$, такав да је $|t - x| < \varepsilon$. Специјално, за све $n \in \mathbb{N}$ постоји $x_n \in L$, такав да важи $|t - x_n| < \frac{1}{n}$. Следи $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = t$, па је $t \in L$ (због затворености скупа L). Како ово важи за све $t \in \mathbb{R}$, то је $L = \mathbb{R}$, што је немогуће, јер смо узели да је $L \neq \mathbb{R}$. Према томе, мора бити $r > 0$. Тада за све $n \in \mathbb{N}$, постоји $s_n \in L$, такав да је $r \leqslant s_n < r + \frac{1}{n}$. Из претходног важи $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = r$, па је $r \in L$. Добијамо да је $L \supset r\mathbb{Z}$. Са друге стране, ако је $x \in L$ произвољно одабран елемент, тада је $x \in L \subset \mathbb{R} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} [nr, (n+1)r)$. Постоји $n \in \mathbb{Z}$, такав да је $x \in [nr, (n+1)r)$, тј. $nr \leqslant x < (n+1)r$. Одатле је $0 \leqslant x - nr < r$ и како је $x - nr \in L$, то мора бити $x - nr = 0$, односно $x \in L$. Коначно је $L = r\mathbb{Z}$. Добили смо: *ако је L затворена подгрупа адитивне групе поља $\mathbb{R}$, при чему је $L \neq \{0\}$ и $L \neq \mathbb{R}$, тада важи $L = r\mathbb{Z}$, где је $r = \inf\{x \in L \mid x > 0\}$.* Пре наредне леме, приметимо да је $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ једна група у односу на операцију множења комплексних бројева.

Лема. Нека је H затворена подгрупа групе $\mathbb{S}^1$, таква да је $H \neq \mathbb{S}^1$. Тада је H коначна, циклична подгрупа групе $\mathbb{S}^1$.

Доказ. Приметимо да је $\mathbb{S}^1 = \{e^{ix} \mid x \in \mathbb{R}\} = \{e^{ix} \mid x \in [0, 2\pi)\}$. Нека је пресликавање $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ дефинисано са $p(x) = e^{ix}$. Тада је p непрекидно пресликавање, као композиција таквих. Следи да је $L = p^{-1}(H)$ затворен скуп на реалној правој, јер је H затворен подскуп од $\mathbb{S}^1$. За произвољне $x_1, x_2 \in L$ важи $e^{ix_1}, e^{ix_2} \in H$, па је $x_1 + x_2 \in L$, јер је $e^{i(x_1+x_2)} = e^{ix_1} \cdot e^{ix_2} \in H$. Из свега претходног добијамо да је L затворена подгрупа адитивне групе поља $\mathbb{R}$ и важи $L \neq \mathbb{R}$, јер је $H \neq \mathbb{S}^1$. Осим тога, ако је $L = \{0\}$, тада је $1 = e^{i0} \in H$. Како важи $e^{2\pi i} = 1 \in H$, то је $2\pi \in p^{-1}(H) = L = \{0\}$, што је немогуће. Дакле, мора бити $L \neq \{0\}$. Према уводном разматрању важи $L = r\mathbb{Z}$, где је $r = \inf\{x \in L \mid x > 0\} > 0$. Нека је $\xi = e^{ir} \in H$. Како је $1 = e^{2\pi i} \in H$, то $2\pi \in L$, тако да постоји $m \in \mathbb{N}$, такав да је $2\pi = rm$. Знамо да је H подгрупа групе $\mathbb{S}^1$, па је $H \supset \{1, \xi, \ldots, \xi^{m-1}\}$. Нека је $e^{ix} \in H$ произвољно одабран елемент, где је $x \in [0, 2\pi)$. Тада $x \in L$, па је $x = rn$ за неко $n \in \mathbb{N}_0$. Важи $rn = x < 2\pi = rm$, а самим тим је $n < m$, односно, $n \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Следи $e^{ix} = \xi^n \in \{1, \xi, \ldots, \xi^{m-1}\}$. Дакле, $H = \{1, \xi, \ldots, \xi^{m-1}\}$. У сваком случају је H једна коначна, циклична подгрупа групе $\mathbb{S}^1$. ■



Теорема. Нека је Ω ограничена област и $a \in \Omega$. Тада је група $\mathrm{Aut}_a(\Omega)$ изоморфна групи $\mathbb{S}^1$ или некој њеној коначној, цикличној подгрупи.

Доказ. Нека је $\sigma : \mathrm{Aut}_a(\Omega) \to \mathbb{S}^1$ пресликавање дефинисано са $\sigma(f) = f'(a)$. Ово пресликавање је добро дефинисано, јер је $\mathrm{Aut}_a(\Omega) = \{f \in \mathrm{Hol}_a(\Omega) \mid |f'(a) = 1|\}$. Такође, за произвољне функције f и g из $\mathrm{Aut}_a(\Omega)$ важи $\sigma(f \circ g) = (f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a) = f'(a)g'(a) = \sigma(f) \cdot \sigma(g)$. Према томе, σ је један хомоморфизам група. Следи да је $\sigma(\mathrm{Aut}_a(\Omega)) = \mathrm{Im}\,\sigma$ подгрупа групе $\mathbb{S}^1$. Нека је $\sigma(f) = 1$. Следи $f'(a) = 1$, па је $f = \mathrm{id}_\Omega$. Дакле, $\mathrm{Ker}\,\sigma = \{\mathrm{id}_\Omega\}$, тако да је σ мономорфизам група и важи $\mathrm{Aut}_a(\Omega) \cong \mathrm{Im}\,\sigma$. Са друге стране, нека је (c_n) низ тачака из $\mathrm{Im}\,\sigma$ који конвергира у $\mathbb{S}^1$, тј. нека је $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c \in \mathbb{S}^1$. За свако $n \in \mathbb{N}$, нека је $h_n \in \mathrm{Aut}_a(\Omega)$, тако да је $\sigma(h_n) = c_n$. Низ функција (h_n) је ограничен, а тиме и локално ограничен у области Ω. Према теореми Montel-а, постоји његов подниз (h_{n_k}) који компактно конвергира у области Ω ка некој функцији h. Важи $h(a) = \lim\limits_{k\to\infty} h_{n_k}(a) = a \notin \partial\Omega$, па на основу претходне теореме мора бити $h \in \mathrm{Aut}_a(\Omega)$. Такође, низ (h'_{n_k}) компактно конвергира у области Ω ка функцији h' (опет, ово имамо као у претходној теореми). Специјално је $\sigma(h) = h'(a) = \lim\limits_{k\to\infty} h'_{n_k}(a) = \lim\limits_{k\to\infty} \sigma(h_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} c_{n_k} = c$. Следи $c \in \mathrm{Im}\,\sigma$. Из свега претходног добијамо да је $\mathrm{Im}\,\sigma$ затворена подгрупа групе $\mathbb{S}^1$. Према претходној леми $\mathrm{Im}\,\sigma$ је група $\mathbb{S}^1$ или нека њена коначна, циклична подгрупа. Коначно је група $\mathrm{Aut}_a(\Omega)$ изоморфна групи $\mathbb{S}^1$ или некој њеној коначној, цикличној подгрупи. ■

Нека је $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ затворена, део по део непрекидно диференцијабилна (тј. део по део глатка) крива у комплексној равни. Траг $\gamma^* = \gamma([a, b])$ криве γ јесте компактан скуп (непрекидна слика компакта јесте опет компакт). У наставку, ради једноставности, пишемо само γ уместо трага γ^* (из контекста ће бити јасно да ли је у питању сама крива γ или њена директна слика, тј. њен траг γ^*). За произвољну тачку $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, дефинишемо *индекс* криве γ у односу на тачку z, као $\operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$ (такође, за $\operatorname{ind}_\gamma(z)$ кажемо да је *број намотаја* криве γ у односу на тачку z). Покажимо да је $\operatorname{ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$. Наиме, нека је $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ функција дефинисана као $g(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}ds$. Тада је $g(a) = 0$ и $g(b) = \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}ds = \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta-z} = 2\pi i \operatorname{ind}_\gamma(z)$. Осим тога, у тачкама непрекидности функције γ' важи $g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}$. Дакле, функција g је део по део глатка, јер постоји само коначно много тачака у којима функција γ' није непрекидна. Нека је $h : [a,b] \to \mathbb{C}$ функција дефинисана са $h(t) = (\gamma(t) - z)e^{-g(t)}$. У тачкама непрекидности функције γ' важи $h'(t) = \gamma'(t)e^{-g(t)} - (\gamma(t) - z)e^{-g(t)}g'(t) = \gamma'(t)e^{-g(t)} - \gamma'(t)e^{-g(t)} = 0$. Према томе, важи $h'(t) = 0$ у свим тачкама интервала $[a,b]$, осим у њих коначно много. Како је h непрекидна функција, то закључујемо да је h константна функција на интервалу $[a,b]$. Специјално је $h(a) = h(b)$. Важи $h(a) = (\gamma(a) - z)e^{-g(a)} = \gamma(a) - z$ и $h(b) = (\gamma(b) - z)e^{-2\pi i \operatorname{ind}_\gamma(z)}$, па је $e^{-2\pi i \operatorname{ind}_\gamma(z)} = 1$, јер је $\gamma(a) - z = \gamma(b) - z \neq 0$. Из претходног је $\operatorname{ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$. Дакле, индекс криве γ у односу на тачку z је један цео број. Унутрашњост криве γ дефинишемо као $\operatorname{Int}\gamma = \{z \in \mathbb{C}\setminus\gamma \mid \operatorname{ind}_\gamma(z) \neq 0\}$, док је њена спољашњост $\operatorname{Ext}\gamma = \{z \in \mathbb{C}\setminus\gamma \mid \operatorname{ind}_\gamma(z) = 0\}$. Наравно, тада важи $\mathbb{C} = \operatorname{Int}\gamma \sqcup \gamma \sqcup \operatorname{Ext}\gamma$.

Став. Нека је (g_n) низ функција из $\mathcal{H}(\Omega)$ који компактно конвергира у области Ω ка функцији g, при чему постоји затворена, део по део глатка крива γ у области Ω, таква да скуп $\bigcap_{n=1}^\infty \operatorname{Int}(g_n \circ \gamma)$ садржи бар две тачке. Тада је g неконстантна функција.

Доказ. Претпоставимо супротно, да је g константна функција. Тада је $g(z) \equiv c$, за неко $c \in \mathbb{C}$. Како скуп $\bigcap_{n=1}^\infty \operatorname{Int}(g_n\circ\gamma)$ садржи бар две тачке, то постоји тачка $w \in \bigcap_{n=1}^\infty \operatorname{Int}(g_n\circ\gamma)$, таква да је $w \neq c$. Из претходног важи $\operatorname{ind}_{g_n\circ\gamma}(w) \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ и $\operatorname{ind}_{g_n\circ\gamma}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{g_n\circ\gamma}\frac{d\zeta}{\zeta - w} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g_n'(z)}{g_n(z)-w}dz$ за све $n \in \mathbb{N}$. Добијамо да је $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g_n'(z)}{g_n(z)-w}dz \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ за све $n \in \mathbb{N}$. Низ функција (g_n) компактно конвергира у области Ω ка функцији g, а самим тим, низ (g_n') компактно конвергира у области Ω ка функцији g' (као што смо раније показивали). Функција g је константна, па је $g'(z) \equiv 0$. Нека су компакт $K \subset \Omega$ и $\varepsilon > 0$ произвољно одабрани. Постоји природан број n_1, такав да је $|g_n'(z)| < \frac{1}{2}|c - w|\varepsilon$ за све $z \in K$ и све $n \geqslant n_1$. Такође, постоји природан број n_2, такав да је $|g_n(z) - c| < \frac{1}{2}|c-w|$ за све $z \in K$ и све $n \geqslant n_2$. Нека је $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Тада за произвољне $z \in K$ и $n \geqslant n_0$ важи $|g_n(z)-w| = |c-w-(c-g_n(z))| \geqslant |c-w|-|g_n(z)-c| > |c-w|-\frac{1}{2}|c-w| = \frac{1}{2}|c-w|$, па је $\left|\frac{g_n'(z)}{g_n(z)-w}\right| < \frac{\frac{1}{2}|c-w|\varepsilon}{\frac{1}{2}|c-w|} = \varepsilon$. Према томе, низ функција $\left(\frac{g_n'}{g_n - w}\right)$ компактно конвергира у области Ω ка 0. Како је траг криве γ компактан скуп, то је $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g_n'(z)}{g_n(z)-w}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \lim\limits_{n\to\infty}\frac{g_n'(z)}{g_n(z)-w}dz = 0$. Међутим, ово је немогуће, јер је $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g_n'(z)}{g_n(z)-w}dz \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ за све $n \in \mathbb{N}$. Из добијене контрадикције, закључујемо да је g неконстантна функција. ∎

Глава 6

Степен пресликавања

6.1 Коначна холоморфна пресликавања

Дефиниција. За низ (z_n) кажемо да је *гранични* у области Ω ако је $z_n \in \Omega$ за све $n \in \mathbb{N}$ и ако низ (z_n) нема тачку нагомилавања у Ω. Холоморфна функција $f : \Omega \to \Omega'$ је *коначна* ако за сваки гранични низ (z_n) у области Ω, важи да је $(f(z_n))$ гранични низ у области Ω'. ♠

У разматрањима која следе, претпостављамо да су Ω и Ω' области у комплексној равни. Приметимо да ако је $f : \Omega \to \Omega'$ коначна холоморфна функција, тада она мора бити неконстантна.

Пример. Свака бихоломорфна функција $f : \Omega \to \Omega'$ је коначна.
Решење. Нека је (z_n) произвољно одабран гранични низ у области Ω. Претпоставимо да низ $(f(z_n))$ није гранични у области Ω'. Тада постоји неки његов подниз $(f(z_{n_k}))$ који конвергира у области Ω', тј. важи $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = w \in \Omega'$. Функција f^{-1} је холоморфна, а тиме и непрекидна, тако да важи $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} f^{-1}(f(z_{n_k})) = f^{-1}(w) \in \Omega$. Добијамо да низ (z_n) има конвергентан подниз у Ω, што је немогуће, јер је тај низ гранични у области Ω. Из добијене контрадикције закључујемо да је функција f коначна. ♣

Став. Нека је $f : \Omega \to \Omega'$ коначна холоморфна функција. Тада важи:
(а) Скуп $f^{-1}(\{w\})$ је коначан за све $w \in \Omega'$.
(б) Ако је скуп $L \subset \Omega'$ компактан, тада је и $f^{-1}(L)$ компактан.
(в) $f(\Omega) = \Omega'$.

Доказ. (а) Претпоставимо да је $f^{-1}(\{w\})$ бесконачан скуп за неко $w \in \Omega'$. Тада можемо одабрати неки низ (z_n) различитих тачака из $f^{-1}(\{w\})$. Тада $(f(z_n))$ није гранични низ у области Ω', јер је то један константан низ. Како је функција f коначна, то важи да низ (z_n) није гранични у области Ω. Самим тим, постоји неки његов конвергентан подниз (z_{n_k}) у области Ω. Међутим, како је $f(z_{n_k}) = w$ за све $k \in \mathbb{N}$, то је на основу теореме јединости $f(z) = w$ за све $z \in \Omega$. Ово је немогуће, јер коначна холоморфна функција не може бити константна. Дакле, $f^{-1}(\{w\})$ је коначан скуп за све $w \in \Omega'$.
(б) Нека је $K = f^{-1}(L)$. Тада је K затворен, јер је функција f непрекидна. За произвољан низ тачака (z_n) из K, важи да је $(f(z_n))$ низ тачака из компакта L, тако да можемо издвојити његов конвергентан подниз, а самим тим, низ $(f(z_n))$ не може бити гранични низ у области Ω'. Функција f је коначна, па низ (z_n) не може бити гранични у Ω. Дакле, постоји неки конвергентан подниз (z_{n_k}) низа (z_n) који конвергира у Ω ка некој тачки z и важи $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = z \in K$, јер је K затворен скуп. Према томе, сваки низ тачака из K има конвергентан подниз у K, па је K компактан скуп.

(в) Како је f холоморфна неконстантна функција, то је $f(\Omega)$ отворен скуп (теорема о отвореном пресликавању). Важи $f(\Omega) \subset \Omega'$. Нека је $w \in \overline{f(\Omega)}$ произвољно одабрана тачка (овде подразумевамо да је $\overline{f(\Omega)}$ затворење скупа $f(\Omega)$ у области Ω'). Тада постоји (w_n) низ тачака из $f(\Omega)$, такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w$. За свако $n \in \mathbb{N}$, нека је $z_n \in \Omega$, такав да је $f(z_n) = w_n$. Низ $(f(z_n))$ није гранични у области Ω', тако да низ (z_n) није гранични у области Ω. Самим тим, постоји подниз (z_{n_k}), такав да је $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = z \in \Omega$. Функција f је непрекидна, па је $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = f(z)$. Тада је $w = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = \lim\limits_{k\to\infty} w_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = f(z) \in f(\Omega)$. Следи, скуп $f(\Omega)$ је затворен у области Ω'. Коначно је $\Omega' = f(\Omega) \sqcup (\Omega' \setminus f(\Omega))$, где су $f(\Omega)$ и $\Omega' \setminus f(\Omega)$ отворени скупови у Ω'. Међутим, Ω' је повезан скуп, тако да један од скупова $f(\Omega)$ и $\Omega' \setminus f(\Omega)$ мора бити празан скуп. Како важи $f(\Omega) \neq \emptyset$, то је $\Omega' \setminus f(\Omega) = \emptyset$, односно, $f(\Omega) = \Omega'$. На тај начин је став доказан. ■

Пример. Цела функција је коначна ако и само ако је неконстантан полином.
Решење. Нека је $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ цела функција. Најпре, претпоставимо да је функција f коначна. Тада је $f^{-1}(\{w\})$ коначан скуп за све $w \in \mathbb{C}$ (претходни став, део (а)), па f није трансцендентна функција, тј. f мора бити полином. Такође, коначна функција није константна. Дакле, функција f је неки неконстантан полином. Обрнуто, претпоставимо да је f неки неконстантан полином. Нека је (z_n) неки гранични низ у $\mathbb{C}$. Покажимо да је тада $(f(z_n))$ такође, гранични низ у $\mathbb{C}$. У супротном постоји конвергентан подниз $(f(z_{n_k}))$ низа $(f(z_n))$, тј. важи $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = w \in \mathbb{C}$. Постоји $k_0 \in \mathbb{N}$, такав да је $f(z_{n_k}) \in D[w,1]$ за све $k \geqslant k_0$. Тада је $z_{n_k} \in f^{-1}(D[w,1])$ за све $k \geqslant k_0$. Функција f је непрекидна, па је $f^{-1}(D[w,1])$ затворен скуп. Такође, скуп $f^{-1}(D[w,1])$ је и ограничен. Иначе би постојао неограничен низ тачака (ζ_n) из $D[w,1]$ и тада би низ $(f(\zeta_n))$ такође, био неограничен (јер је функција f неконстантан полином), што је немогуће, јер је $f(\zeta_n) \in D[w,1]$ за све $n \in \mathbb{N}$. Према томе, скуп $f^{-1}(D[w,1])$ је компактан, тако да низ $(z_{n_k})_{k=k_0}^{\infty}$ има неки конвергентан подниз. То је уједно и конвергентан подниз низа (z_n), што је у контрадикцији са тим да је (z_n) гранични низ у $\mathbb{C}$. Следи да је неконстантан полином f коначно пресликавање. ♣

Нека су X и Y тополошки простори. За пресликавање $f : X \to Y$ кажемо да је *затворено* ако за сваки затворен скуп $A \subset X$ важи да је скуп $f(A) \subset Y$ затворен (директна слика сваког затвореног скупа јесте опет, један затворен скуп). У вези са тим, имамо следеће својство затворених пресликавања. ($\diamond$) *Нека је $f : X \to Y$ затворено пресликавање, $y \in Y$ и $U \subset X$ отворен скуп, такав да важи $f^{-1}(\{y\}) \subset U$. Тада постоји отворен скуп $V \subset Y$, такав да је $y \in V$ и $f^{-1}(V) \subset U$.* Наиме, узмимо да је $V = Y \setminus f(X \setminus U)$. Скуп $X \setminus U$ је затворен, па је и $f(X \setminus U)$ затворен скуп, јер је пресликавање f затворено. Следи да је V један отворен скуп. Претпоставимо да $y \notin V$. Тада је $y = f(x)$ за неко $x \in X \setminus U$, па је $x \in f^{-1}(\{y\})$ и $x \notin U$, што је немогуће, јер је $f^{-1}(\{y\}) \subset U$. Дакле, мора бити $y \in V$. За произвољно $x \in f^{-1}(V)$ важи $f(x) \in V$, тако да је $x \notin X \setminus U$, односно, $x \in U$. Из претходног је $f^{-1}(V) \subset U$. Према томе, скуп V испуњава тражене услове.

Теорема. Нека је $f : \Omega \to \Omega'$ холоморфно пресликавање. Тада су следећа тврђења еквивалентна:
(1) f је коначно пресликавање.
(2) Ако је $L \subset \Omega'$ компактан скуп, тада је и $f^{-1}(L)$ компактан скуп.
(3) f је затворено, неконстантно пресликавање.

Доказ. (1) $\Rightarrow$ (2). Овај део следи директно на основу претходног става.
(2) $\Rightarrow$ (3). Најпре, покажимо да је f неконстантно пресликавање. Претоставимо супротно, да је $f(z) \equiv c$ за неко $c \in \mathbb{C}$. Како је скуп $\{c\}$ компактан, то је и $f^{-1}(\{c\}) = \Omega$ компактан скуп у комплексној равни. Добијамо да је Ω затворен скуп. Тада је $\mathbb{C} = \Omega \sqcup \Omega^c$, где

су Ω и Ω^c отворени скупови, па један од њих мора бити празан скуп. Како је $\Omega \neq \emptyset$, то мора бити $\Omega^c = \emptyset$. Следи $\Omega = \mathbb{C}$, што је немогуће, јер $\mathbb{C}$ није компактан скуп. Из добијене контрадикције закључујемо да је f неконстантно пресликавање. Са друге стране, нека је A затворен скуп у области Ω и нека је $w \in \overline{f(A)}$ произвољно одабрана тачка (овде подразумевамо да је $\overline{f(A)}$ затворење скупа $f(A)$ у области Ω'). Тада постоји (z_n) низ тачака из A, такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = w$. Скуп $L = \big\{f(z_n) \bigm| n \in \mathbb{N}\big\} \cup \{w\}$ је компактан, па је и $f^{-1}(L)$ један компактан скуп. Како је (z_n) низ тачака из компакта $f^{-1}(L)$, то постоји његов конвергенатн подниз (z_{n_k}) и важи $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = z \in A$, јер је A затворен скуп. Функција f је холоморфна, а тиме и непрекидна, тако да је $f(z) = \lim\limits_{k\to\infty} f\left(z_{n_k}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = w$. Следи $w = f(z) \in f(A)$. Из претходног добијамо да је $f(A)$ затворен скуп у области Ω'. Према томе, пресликавање f је затворено и неконстантно.
(3) $\Rightarrow$ (1). Претпоставимо супротно, тј. да f није коначно пресликавање. Тада постоји гранични низ (ζ_n) у области Ω, такав да низ $(f(\zeta_n))$ има неки конвергентан подниз у области Ω'. Нека је $(f(z_n))$ конвергентан подниз низа $(f(\zeta_n))$ који конвергира ка некој тачки $w \in \Omega'$. Важи $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = w$ и (z_n) је гранични низ у области Ω. Нека је $n \in \mathbb{N}$ произвољно одабрано. Тада је $D\left(z_n, \frac{1}{n}\right) \cap f^{-1}\left(D\left(f(z_n), \frac{1}{n}\right) \cap \Omega'\right)$ отворен скуп, као пресек два таква и осим тога, он је непразан, јер је $z_n \in D\left(z_n, \frac{1}{n}\right) \cap f^{-1}\left(D\left(f(z_n), \frac{1}{n}\right) \cap \Omega'\right)$. Према томе, скуп $D\left(z_n, \frac{1}{n}\right) \cap f^{-1}\left(D\left(f(z_n), \frac{1}{n}\right) \cap \Omega'\right)$ не може бити подскуп скупа $f^{-1}(\{w\})$, јер би у супротном, на основу теореме јединости f била константна функција. Из претходног добијамо да је $D\left(z_n, \frac{1}{n}\right) \cap f^{-1}\left(D\left(f(z_n), \frac{1}{n}\right) \cap \Omega'\right) \cap \left(\Omega \setminus f^{-1}(\{w\})\right) \neq \emptyset$, тако да можемо одабрати неки елемент $\widehat{z}_n \in D\left(z_n, \frac{1}{n}\right) \cap f^{-1}\left(D\left(f(z_n), \frac{1}{n}\right) \cap \Omega'\right) \cap \left(\Omega \setminus f^{-1}(\{w\})\right)$. На тај начин смо добили низ елемената $(\widehat{z}_n)$ из области Ω, такав да је $f(\widehat{z}_n) \neq w$, $|f(\widehat{z}_n) - f(z_n)| < \frac{1}{n}$ и $|\widehat{z}_n - z_n| < \frac{1}{n}$ за све $n \in \mathbb{N}$. Тада је $(\widehat{z}_n)$ гранични низ у области Ω и важи $\lim\limits_{n\to\infty} f(\widehat{z}_n) = w$. Скуп $\big\{f(\widehat{z}_n) \bigm| n \in \mathbb{N}\big\}$ није затворен, јер је $w \notin \big\{f(\widehat{z}_n) \bigm| n \in \mathbb{N}\big\}$. Са друге стране, $\big\{\widehat{z}_n \bigm| n \in \mathbb{N}\big\}$ је затворен скуп у Ω, јер низ $(\widehat{z}_n)$ нема конвергентан подниз у области Ω. Пресликавање f је затворено, тако да је скуп $\big\{f(\widehat{z}_n) \bigm| n \in \mathbb{N}\big\}$ затворен у области Ω'. Контрадикција! Из добијене контрадикције закључујемо да је f коначно пресликавање. ■

6.2 Намотавајућа пресликавања

(1) Нека је f холоморфно пресликавање у области Ω, тј. $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $c \in \Omega$ и $f'(c) \neq 0$. Узмимо да је $\varepsilon = \frac{|f'(c)|}{2} > 0$. Како је f' непрекидна функција, то постоји $r > 0$, такво да је $D(c,r) \subset \Omega$ и важи $|f'(z) - f'(c)| < \varepsilon$ за све $z \in D(c,r)$. Означимо $D = D(c,r)$. Тада је $|f' - f'(c)|_D \leqslant \varepsilon < |f'(c)|$. Нека су $z, w \in D$ произвољно одабране тачке, такве да је $z \neq w$. Важи $[z,w] \subset D$. Такође је $f(w) - f(z) - f'(c)(w-z) = \int_{[z,w]} \left(f'(\zeta) - f'(c)\right) d\zeta$, односно, добијамо да је $|f(w) - f(z) - f'(c)(w-z)| = \left|\int_{[z,w]} \left(f'(\zeta) - f'(c)\right) d\zeta\right| \leqslant \int_{[z,w]} |f'(\zeta) - f'(c)||d\zeta| \leqslant |f' - f'(c)|_D |w-z|$. Из претходног је $\left|\frac{f(w)-f(z)}{w-z} - f'(c)\right| \leqslant |f' - f'(c)|_D < |f'(c)|$ и самим тим, мора бити $f(z) \neq f(w)$. Дакле, пресликавање f је $1-1$ у диску $D \subset \Omega$. Специјално је $f\big|_D : D \to f(D)$ бихоломорфно пресликавање.

За тачку $z_0 \in \Omega$ кажемо да је нула n-тог реда функције $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ ако важи $g(z_0) = g'(z_0) = \cdots = g^{(n-1)}(z_0) = 0$ и $g^{(n)}(z_0) \neq 0$.

(2) Претпоставимо да је $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ неконстантно пресликавање и $c \in \Omega$. Тада је $f(z) - f(c) = a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \ldots$ и нека је a_n први међу коефицијентима у овом развоју који је различит од нуле (такав коефицијент постоји, јер је f неконстантна функција). Следи да је $f(z) - f(c) = a_n(z-c)^n + a_{n+1}(z-c)^{n+1} + \ldots$, при чему је $a_n \neq 0$ и c је нула n-тог реда функције $f - f(c)$. Иначе, ред комплексног броја c као нуле функције $f - f(c)$ означавамо са $\nu(f, c)$. Дакле, важи $n = \nu(f, c)$. Приметимо да је $f(z) - f(c) = (z - c)^n g(z)$, где је $g(z) = a_n + a_{n+1} z + \dots$ холоморфна функција, јер је представљена конвергентним степеним редом. Тада је $f(z) = f(c) + (z - c)^n g(z)$, при чему важи $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ и $g(c) = a_n \neq 0$. Из непрекидности функције g закључујемо да постоји $r > 0$, такво да је $D[c, r] \subset \Omega$ и важи $g(z) \neq 0$ за све $z \in D(c, r)$. Самим тим, можемо издвојити холоморфну грану n-тог корена функције g у диску $D(c, r)$, тј. постоји функција $G \in \mathcal{H}(D(c, r))$, таква да је $g(z) = G^n(z)$ за све $z \in D(c, r)$. Нека је $h(z) = (z - c)G(z)$ за све $z \in D(c, r)$. Тада је $h \in \mathcal{H}(D(c, r))$ и важи $h'(z) = G(z) + (z - c)G'(z)$. Следи да је $h'(c) = G(c) \neq 0$, јер је $G^n(c) = g(c) \neq 0$. На основу **(1)** постоји $\delta \in (0, r)$, такво да је $h\big|_D : D \to h(D)$ бихоломофна функција, где смо означили $D = D(c, \delta) \subset D(c, r)$. Приметимо да је $\overline{D} \subset D[c, r] \subset \Omega$. Такође, из претходног имамо да важи $f\big|_D = f(c) + h^n$. Дакле, добили смо да постоје диск $D \subset \Omega$ са центром у тачки $c \in \Omega$ и бихоломорфна функција $h\big|_D : D \to h(D)$, тако да је $f\big|_D = f(c) + h^n$ и $\overline{D} \subset \Omega$, где је $n = \nu(f, c)$.

(3) Нека је $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ неконстантно пресликавање и $c \in \Omega$. Применом резултата из **(2)** добијамо да постоје диск $D \subset \Omega$ са центром у тачки c и бихоломорфно пресликавање $h : D \to h(D)$, такви да важи $f\big|_D = f(c) + h^n$ и $\overline{D} \subset \Omega$, при чему је $n = \nu(f, c)$. Тада је $h(c) = 0$, па је $0 \in h(D)$. Скуп $h(D)$ је отворен (теорема о отвореном пресликавању). Самим тим, постоји $r > 0$, тако да важи $D(0, r) \subset h(D)$. Нека је $U = h^{-1}(D(0, r))$. Скуп U је отворен, јер је h непрекидно пресликавање и важи $U \subset D \subset \Omega$. Одатле је $\overline{U} \subset \overline{D} \subset \Omega$ и $\overline{U}$ је компактан скуп, јер је затворен диск $\overline{D}$ компактан. Такође је $c \in U$. Нека је $u : U \to \mathbb{D}$ пресликавање дефинисано са $u(z) = \frac{1}{r} h(z)$. Тада је u добро дефинисано, бихоломорфно пресликавање, јер је h такво. Осим тога, важи $u(c) = \frac{1}{r} h(c) = 0$. Означимо $V = D(f(c), r^n)$ и нека је $v : \mathbb{D} \to V$ пресликавање дефинисано са $v(z) = f(c) + r^n z$. Тада је v добро дефинисано, линеарно пресликавање. Дефинишимо још пресликавање $\sigma_n : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ као $\sigma_n(z) = z^n$. За свако $z \in U$ важи $f(z) = f(c) + h^n(z) = v\left(\frac{1}{r^n} h^n(z)\right) = (v \circ \sigma_n)\left(\frac{1}{r} h(z)\right) = (v \circ \sigma_n \circ u)(z)$. Одатле је $f\big|_U = v \circ \sigma_n \circ u$ и $f(U) = V$, јер су пресликавања u, σ_n и v сурјективна.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D} \arrow[r, "\sigma_n"] & \mathbb{D} \arrow[d, "v"] \\ U \arrow[u, "u"] \arrow[r, dashed, "f|_U"'] & V \end{tikzcd}$$

Дефиниција. За холоморфно, неконстантно пресликавање $f : U \to V$ кажемо да је *намотавајуће* пресликавање у односу на тачку $c \in U$ ако је V диск са центром у $f(c)$ и ако постоје бихоломорфно пресликавање $u : U \to \mathbb{D}$, $u(c) = 0$ и линеарно пресликавање $v : \mathbb{D} \to V$, $v(0) = f(c)$, тако да важи $f = v \circ \sigma_n \circ u$, где је $n = \nu(f, c)$ и $\sigma_n : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ је пресликавање дато са $\sigma_n(z) = z^n$. За број $n = \nu(f, c)$ кажемо да је *степен* намотавајућег пресликавања f у односу на тачку c. ♠

Приметимо да су пресликавања u, σ_n и v из претходне дефиниције затворена, тако да је пресликавање $f = v \circ \sigma_n \circ u$ затворено као композиција таквих. Дакле, f је затворено, неконстантно пресликавање, па је f једно коначно пресликавање. На тај начин смо добили да је свако намотавајуће пресликавање коначно. Поред тога, локално посматрано, свако холоморфно, неконстантно пресликавање јесте намотавајуће. Наиме, нека је $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ неконстантно пресликавање и $c \in \Omega$. Тада на основу резултата из **(3)** постоји околина U тачке c у области Ω, таква да је $f\big|_U : U \to f(U)$ намотавајуће пресликавање степена $n = \nu(f, c)$ у односу на тачку c и $\overline{U}$ је компактан скуп садржан у области Ω.

Став. Нека је $f : U \to V$ намотавајуће пресликавање степена n у односу на тачку $c \in U$. Ако је $V_1 \subset V$ диск са центром у тачки $f(c)$ и $U_1 = f^{-1}(V_1)$, тада је и $f\big|_{U_1} : U_1 \to V_1$ намотавајуће пресликавање степена n у односу на тачку c.

Доказ. Најпре, како је $f(c) \in V_1$, то важи $c \in U_1$. Пресликавање f је намотавајуће степена n у односу на тачку c, тако да према дефиницији, постоје одговарајућа пресликавања u, σ_n и v, таква да је $f = v \circ \sigma_n \circ u$. Пресликавање $u : U \to \mathbb{D}$ је бихоломорфно и важи $u(c) = 0$, док је пресликавање $v : \mathbb{D} \to V$ линеарно и важи $v(0) = f(c)$. Самим тим је $v^{-1}(V_1)$ диск са центром у тачки 0. Дакле, постоји $r > 0$, такво да је $v^{-1}(V_1) = D(0, r) \subset \mathbb{D}$ (тј. имамо да је $0 < r \leqslant 1$). Следи да је $\sigma_n^{-1}(v^{-1}(V_1)) = \sigma_n^{-1}(D(0, r)) = D(0, \sqrt[n]{r})$. Из претходног је $U_1 = f^{-1}(V_1) = (v \circ \sigma_n \circ u)^{-1}(V_1) = u^{-1}(\sigma_n^{-1}(v^{-1}(V_1))) = u^{-1}(D(0, \sqrt[n]{r}))$. Тада за произвољну тачку $z \in U_1$ важи $u(z) \in D(0, \sqrt[n]{r})$, па је $\frac{1}{\sqrt[n]{r}} u(z) \in \mathbb{D}$. Према томе, функција $u_1 : U_1 \to \mathbb{D}$ дефинисана са $u_1(z) = \frac{1}{\sqrt[n]{r}} u(z)$ јесте добро дефеинисана и она је холоморфна, као композиција таквих. Пресликавање u је $1-1$, па је и u_1 једно $1-1$ пресликавање. Покажимо да је u_1 сурјекција. Нека је $w \in \mathbb{D}$ произвољно одабрано. Како је $u : U \to \mathbb{D}$ бихоломорфно пресликавање и $\sqrt[n]{r} w \in \mathbb{D}$, то постоји $z \in U$, тако да важи $u(z) = \sqrt[n]{r} w$. Међутим $\sqrt[n]{r} w \in D(0, \sqrt[n]{r})$, па је $z \in U_1$ и важи $u_1(z) = w$. Из свега претходног закључујемо да је $u_1 : U_1 \to \mathbb{D}$ холоморфна бијекција, односно, u_1 је бихоломорфно пресликавање. Такође, приметимо да је $u_1(c) = \frac{1}{\sqrt[n]{r}} u(c) = 0$. За све $z \in \mathbb{D}$ важи $rz \in D(0, r) = v^{-1}(V_1)$, па је $v(rz) \in V_1$. Добијамо да је пресликавање $v_1 : \mathbb{D} \to V_1$ дефинисано са $v_1(z) = v(rz)$ линеарно пресликавање, јер је v такво и важи $v_1(0) = v(0) = f(c)$. За све $z \in U_1$ важи $(v_1 \circ \sigma_n \circ u_1)(z) = (v \circ \sigma_n) \left(\frac{1}{\sqrt[n]{r}} u(z) \right) = v_1 \left(\frac{1}{r} u^n(z) \right) = v(u^n(z)) = (v \circ \sigma_n \circ u)(z) = f(z)$. Следи $f\big|_{U_1} = v_1 \circ \sigma_n \circ u_1$. Коначно, из свега претходног, добијамо да је $f\big|_{U_1} : U_1 \to V_1$ намотавајуће пресликавање степена n око тачке c. ■

(4) Нека је $f : \Omega \to \Omega'$ холоморфно, неконстантно пресликавање, такво да је $f^{-1}(\{w\})$ коначан скуп за све $w \in \Omega'$. За произвољно $p \in f(\Omega)$ скуп $f^{-1}(\{p\})$ је коначан, тако да је $f^{-1}(\{p\}) = \{c_1, \ldots, c_m\}$ за неке, међусобно различите $c_j \in \Omega$, $j = 1, \ldots, m$, где је $m \in \mathbb{N}$. На основу **(3)** постоје $\widetilde{U}_1, \ldots, \widetilde{U}_m$ међусобно дисјунктне околине тачака $c_1, \ldots, c_m$, тим редом, у области Ω, такве да је $f|_{\widetilde{U}_j} : \widetilde{U}_j \to f(\widetilde{U}_j)$ намотавајуће пресликавање степена $\nu(f, c_j)$ у односу на тачку c_j и затворење околине $\widetilde{U}_j$ је компактан скуп садржан у области Ω, за све $j = 1, \ldots, m$. Тада је тачка $p = f(c_j)$ центар диска $f(\widetilde{U}_j)$ за све $j = 1, \ldots, m$. Скуп $\bigcap_{j=1}^m f(\widetilde{U}_j)$ је отворен као пресек коначно много таквих и важи $p \in \bigcap_{j=1}^m f(\widetilde{U}_j)$. Самим тим, постоји $r > 0$, тако да је $D(p, r) \subset \bigcap_{j=1}^m f(\widetilde{U}_j)$. Нека је $V = D(c, r)$ и $U_j = \left(f|_{\widetilde{U}_j} \right)^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap \widetilde{U}_j$ за све $j = 1, \ldots, m$. Тада су $U_1, \ldots, U_m$ међусобно дисјунктне околине тачака $c_1 \ldots, c_m$, тим редом, у области Ω и на основу претходног става $f|_{U_j} : U_j \to V$ је намотавајуће пресликавање степена $\nu(f, c_j)$ у односу на тачку c_j и $\overline{U}_j$ је компактан скуп садржан у области Ω за све $j = 1, \ldots, m$. Претходни резултат можемо побољшати под додатном претпоставком да је пресликавање f коначно. Наиме, претпоставимо да је $f : \Omega \to \Omega'$ коначно, холоморфно пресликавање. Тада је f неконстантно пресликавање и $f^{-1}(\{w\})$ је коначан скуп за све $w \in \Omega'$, односно, испуњени су почетни услови и можемо поновити претходна разматрања за неку тачку $p \in f(\Omega) = \Omega'$ (коначна пресликавања су сурјективна), такву да је $f^{-1}(\{p\}) = \{c_1, \ldots, c_m\}$ за неке, међусобно различите $c_j \in \Omega$, $j = 1, \ldots, m$, где је $m \in \mathbb{N}$. Дакле, тада постоје $\widetilde{U}_1, \ldots, \widetilde{U}_m$ међусобно дисјунктне околине тачака $c_1, \ldots, c_m$, тим редом, у области Ω, такве да је $f|_{\widetilde{U}_j} : \widetilde{U}_j \to f(\widetilde{U}_j)$ намотавајуће пресликавање степена $\nu(f, c_j)$ у односу на тачку c_j и затворење околине $\widetilde{U}_j$ је компактан скуп садржан у области Ω, за све $j = 1, \ldots, m$. Важи $f^{-1}(\{p\}) \subset \bigsqcup_{j=1}^m \widetilde{U}_j$ и скуп $\bigsqcup_{j=1}^m \widetilde{U}_j$ је отворен. Пресликавање f је затворено (јер је коначно) и ако применимо својство $(\diamond)$ за затворена пресликавања, добијамо да постоји отворен скуп W, такав да је $p \in W$ и $f^{-1}(W) \subset \bigsqcup_{j=1}^m \widetilde{U}_j$. Тада је $p \in \bigcap_{j=1}^m f(\widetilde{U}_j) \cap W$ и скуп $\bigcap_{j=1}^m f(\widetilde{U}_j) \cap W$ је отворен као пресек коначно много таквих. Постоји $r > 0$, тако да је $D(p, r) \subset \bigcap_{j=1}^m f(\widetilde{U}_j) \cap W$. Нека је $V = D(c, r)$ и $U_j = \left(f|_{\widetilde{U}_j} \right)^{-1}(V) =$

$f^{-1}(V) \cap \widetilde{U}_j$ за све $j = 1, \ldots, m$. Приметимо да су тада $U_1, \ldots, U_m$ међусобно дисјунктне околине тачака $c_1 \ldots, c_m$, тим редом, у области Ω. Такође, на основу претходног става имамо да је $f|_{U_j} : U_j \to V$ је намотавајуће пресликавање степена $\nu(f, c_j)$ у односу на тачку c_j и $\overline{U}_j$ је компактан скуп садржан у области Ω, за све $j = 1, \ldots, m$. Међутим, сада додатно имамо да важи $\bigsqcup_{j=1}^m U_j = \bigsqcup_{j=1}^m (f^{-1}(V) \cap \widetilde{U}_j) = f^{-1}(V) \cap \bigsqcup_{j=1}^m \widetilde{U}_j = f^{-1}(V)$, јер је $f^{-1}(V) \subset f^{-1}(W) \subset \bigsqcup_{j=1}^m \widetilde{U}_j$.

Дефиниција. За холоморфно пресликавање $f : \Omega \to \Omega'$ кажемо да је *локално бихоломорфно* ако за сваку тачку $c \in \Omega$ постоји њена околина U у области Ω, таква да је $f\big|_U : U \to f(U)$ бихоломорфно пресликавање. ♠

Нека је $f : \Omega \to \Omega'$ коначно и локално бихоломорфно пресликавање и $p \in f(\Omega) = \Omega'$ (свако коначно пресликавање је сурјективно). Тада је $f^{-1}(\{p\}) = \{c_1, \ldots, c_m\}$ за неке међусобно различите $c_j \in \Omega$, $j = 1, \ldots, m$, где је $m \in \mathbb{N}$. Према **(4)** постоји диск $V \subset \Omega'$ са центром у тачки p и $U_1, \ldots, U_m$ међусобно дисјунктне околине тачака $c_1, \ldots, c_m$, тим редом, у области Ω, тако да је $f\big|_{U_j} : U_j \to V$ намотавајуће пресликавање степена $\nu(f, c_j)$ у односу на тачку c_j, за све $j = 1, \ldots, m$, при чему важи $f^{-1}(V) = \bigsqcup_{j=1}^m U_j$. Међутим, како је f локално бихоломорфно пресликавање, то је $\nu(f, c_j) = 1$ за све $j = 1, \ldots, m$. Осим тога, намотавајуће пресликавање степена 1 је бихоломорфно, као композиција таквих, јер је тада $\sigma_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$ бихоломорфно пресликавање. Дакле, свако од пресликавања $f\big|_{U_j} : U_j \to V$, $j = 1 \ldots, m$ је бихоломорфно. Према томе, за сваку тачку $p \in \Omega'$ постоји диск $V \subset \Omega'$ са центром у тачки p и разбијање скупа $f^{-1}(V) = \bigsqcup_{j=1}^m U_j$ на отворене скупове, тако да је $f\big|_{U_j} : U_j \to V$ бихоломорфно пресликавање за све $j = 1, \ldots, m$.

6.3 Теорема Radó-a

Нека је $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ неконстантно пресликавање. Дефинишемо *функцију степена пресликавања* f као $\deg_w f = \sum_{c \in f^{-1}(\{w\})} \nu(f, c)$ за све $w \in f(\Omega)$ и $\deg_w f = 0$ за све $w \notin f(\Omega)$. Како је f неконстантна функција, то је $1 \leqslant \nu(f, c) < \infty$ за све $c \in \Omega$. Према томе, важи $1 \leqslant \deg_w f < \infty$ ако и само ако је $f^{-1}(\{w\})$ непразан и коначан скуп. Претпоставимо да је f полином степена $n \in \mathbb{N}$ и нека је $w \in \mathbb{C}$ произвољно одабрано. Нека су $c_1, \ldots, c_m$, $m \in \mathbb{N}$ корени полинома $f(z) - w$ вишеструкости $n_1, \ldots, n_m$, тим редом. Према основној теореми алгебре важи $\sum_{j=1}^m n_j = n$. Из претходног добијамо $\deg_w f = \sum_{c \in f^{-1}(\{w\})} \nu(f, c) = \sum_{j=1}^m \nu(f, c_j) = \sum_{j=1}^m n_j = n$. Дакле, ако је f полином степена n, тада за све $w \in \mathbb{C}$ важи $\deg_w f = n$.

Став. Нека је $f : U \to V$ намотавајуће пресликавање степена n у односу на тачку $c \in U$. Тада је $\deg_w f = n$ за све $w \in V$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D} \arrow[r, "z \mapsto z^n"] & \mathbb{D} \arrow[d, "v"] \\ U \arrow[u, "u"] \arrow[r, dashed, "f"'] & V \end{tikzcd}$$

Доказ. Одаберимо неко $w \in V$. Важи $V = f(U)$, јер је свако намотавајуће пресликавање сурјективно. Нека је $f = v \circ \sigma_n \circ u$ одговарајућа декомпозиција намотавајућег пресликавања f, где је $u : U \to \mathbb{D}$ бихоломорфно пресликавање и $v : \mathbb{D} \to V$ је линеарно пресликавање, при чему важи $u(c) = 0$ и $v(0) = f(c)$. Како је V диск са центром у тачки $f(c)$, то је на основу претходног $v(z) = az + f(c)$, $z \in \mathbb{D}$ за неко $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тада је v холоморфна бијекција, односно, једно бихоломорфно пресликавање. Приметимо да је $b \in f^{-1}(\{w\}) \Leftrightarrow f(b) = w \Leftrightarrow \sigma_n(u(b)) = v^{-1}(w) \Leftrightarrow u(b) \in \sigma_n^{-1}\left(\{v^{-1}(w)\}\right)$. Дакле, важи $b \in f^{-1}(\{w\})$ ако и само ако је $u(b) \in \sigma_n^{-1}\left(\{v^{-1}(w)\}\right)$. Нека је $b \in f^{-1}(\{w\})$ и $\nu(f, b) = m$. Тада је $f(z) - f(b) = a_m(z-b)^m + a_{m+1}(z-b)^{m+1} + \ldots$, при чему је $a_m \neq 0$. Следи $v(\sigma_n(u(z))) - v(\sigma_n(u(b))) = a_m(z-b)^m + a_{m+1}(z-b)^{m+1} + \ldots$, па је $\sigma_n(u(z)) - \sigma_n(u(b)) = \frac{a_m}{a}(z-b)^m + \frac{a_{m+1}}{a}(z-b)^{m+1} + \ldots$. Прeликавање $u^{-1} : \mathbb{D} \to U$ је бихоломорфно и ако ставимо $\zeta = u(z)$ добијамо да је $u^{-1}(\zeta) - b = u^{-1}(\zeta) - u^{-1}(u(b)) = \widetilde{a}_1(\zeta - u(b)) + \widetilde{a}_2(\zeta - u(b))^2 + \ldots$, где је $\widetilde{a}_1 = (u^{-1})'(b) \neq 0$. Самим тим, из претходног добијамо да важи $\sigma_n(\zeta) - \sigma_n(u(b)) = \frac{a_m}{a}\left(u^{-1}(\zeta) - b\right)^m + \frac{a_{m+1}}{a}\left(u^{-1}(\zeta) - b\right)^{m+1} + \cdots = \frac{a_m}{a}\left(\widetilde{a}_1(\zeta - u(b)) + \widetilde{a}_2(\zeta - u(b))^2 + \ldots\right)^m + \frac{a_{m+1}}{a}\left(\widetilde{a}_1(\zeta - u(b)) + \widetilde{a}_2(\zeta - u(b))^2 + \ldots\right)^{m+1} + \cdots = \widehat{a}_m\left(\zeta - u(b)\right)^m + \widehat{a}_{m+1}\left(\zeta - u(b)\right)^{m+1} + \ldots$, при чему је $\widehat{a}_m = \frac{a_m}{a}\left(\widetilde{a}_1\right)^m \neq 0$. Према томе, добијамо $\nu(\sigma_n, u(b)) = m$, тј. важи $\nu(f, b) = \nu(\sigma_n, u(b))$. Коначно, према претходном имамо $\deg_w f = \sum_{b \in f^{-1}(\{w\})} \nu(f, b) = \sum_{u(b) \in \sigma_n^{-1}(\{v^{-1}(w)\})} \nu(\sigma_n, u(b)) = \sum_{\xi \in \sigma_n^{-1}(\{v^{-1}(w)\})} \nu(\sigma_n, \xi) = n$, јер је σ_n полином степена n. Тиме је доказ завршен. ∎

Нека је X метрички простор. За функцију $f : X \to \mathbb{C}$ кажемо да је *локално константна* ако за сваку тачку $x \in X$ постоји њена околина U у простору X, таква да је $f\big|_U$ константна функција. Свака локално константна функција јесте непрекидна. Заправо, инверзна слика сваког подскупа комплексне равни, при локално константној функцији, јесте отворен скуп у простору X. Наиме, нека је $A \subset \mathbb{C}$ један подскуп комплексне равни и $x \in f^{-1}(A)$ произвољна тачка (ако је $f^{-1}(A) = \emptyset$ одмах имамо да је $f^{-1}(A)$ отворен скуп). Тада постоји околина U тачке x у простору X, таква да је $f\big|_U$ константна функција и самим тим, важи $f(U) = \{f(x)\} \subset A$. Из претходног је $x \in U \subset f^{-1}(A)$. Према томе, $f^{-1}(A)$ јесте отворен скуп, за све $A \subset \mathbb{C}$. Наводимо још једно значајно својство локално константних функција. *Метрички простор X је повезан ако и само ако је свака локално константна функција $f : X \to \mathbb{C}$ константна.* Најпре, нека је X повезан метрички простор и $f : X \to \mathbb{C}$ нека локално константна функција. Фиксирајмо неку тачку $x \in X$. Тада је $f^{-1}\left(\{f(x)\}\right)$ отворен скуп и он је непразан, јер $x \in f^{-1}\left(\{f(x)\}\right)$. Са друге стране, f је непрекидна функција и $\{f(x)\}$ је затворен скуп у комплексној равни, па је $f^{-1}\left(\{f(x)\}\right)$ затворен скуп. Следи да је $f^{-1}\left(\{f(x)\}\right)$ непразан, отворен и затворен скуп и повезаном метричком простору X, па мора бити $f^{-1}\left(\{f(x)\}\right) = X$. Дакле, f је константна функција. Даље, претпоставимо да је у метричком простору X свака локално константна функција $f : X \to \mathbb{C}$ константна и покажимо да је X повезан. Претпоставимо супротно, да метрички простор X није повезан. Тада постоји скуп отворен и затворен скуп $A \subset X$, такав да је $A \neq \emptyset$ и $A \neq X$. Тада је карактеристична функција $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ скупа A локално константна (јер су A и A^c отворени скупови), али није константна (јер је $A \neq \emptyset$ и $A^c \neq \emptyset$). Контрадикција! Из добијене контрадикције закључујемо да је простор X повезан.

Теорема (Radó). Холоморфно пресликавање $f : \Omega \to \Omega'$ је коначно ако и само ако је $\deg_w f$ функција степена пресликавања f константно једнака некој коначној вредности за све $w \in \Omega'$.

Доказ. Нека је $p \in \Omega'$ произвољно одабрана тачка, таква да је $1 \leqslant \deg_p f < \infty$. Тада је $f^{-1}\left(\{p\}\right)$ непразан и коначан скуп. Следи да је $f^{-1}\left(\{p\}\right) = \{c_1, \ldots, c_m\}$ за неке међусобно различите тачке $c_j \in \Omega$, $j = 1, \ldots, m$ и неко $m \in \mathbb{N}$. Према **(4)** постоји диск V са центром у тачки p и $U_1, \ldots, U_m$ међусобно дисјунктне околине тачака $c_1, \ldots, c_m$, тим редом, у области Ω, тако да је $f\big|_{U_j} : U_j \to V$ намотавајуће пресликавање степена $\nu(f, c_j)$ око тачке c_j и $\overline{U}_j$ компактан скуп садржан у области Ω за све $j = 1, \ldots, m$. Такође, под претпоставком да је f коначно пресликавање, на основу **(4)** имамо $\bigsqcup_{j=1}^m U_j = f^{-1}(V)$. Скуп $U = \bigsqcup_{j=1}^m U_j$ је отворен, као унија таквих и важи $\overline{U} \subset \bigsqcup_{j=1}^m \overline{U}_j \subset \Omega$. Како је $\bigsqcup_{j=1}^m \overline{U}_j$ компактан скуп, као коначна унија таквих, то је и $\overline{U}$ један компактан скуп. Нека је $w \in V$ произвољно одабрана тачка. На основу претходног става имамо да је $\deg_w\left(f|_{U_j}\right) = \nu(f, c_j)$ за све $j = 1, \ldots, m$. Осим тога, важи $\deg_w\left(f|_U\right) = \sum_{c \in (f|_U)^{-1}(\{w\})} \nu(f, c) = \sum_{c \in f^{-1}(\{w\}) \cap U} \nu(f, c) = \sum_{j=1}^m \sum_{c \in f^{-1}(\{w\}) \cap U_j} \nu(f, c) = \sum_{j=1}^m \sum_{c \in (f|_{U_j})^{-1}(\{w\})} \nu(f, c) = \sum_{j=1}^m \deg_w\left(f|_{U_j}\right)$, тако да је

$\deg_w(f|_U) = \sum_{j=1}^{m} \deg_w(f|_{U_j}) = \sum_{j=1}^{m} \nu(f, c_j) = \sum_{c \in f^{-1}(\{p\})} \nu(f, c) = \deg_p f$. Према томе, за све $w \in V$ важи $\deg_w(f|_U) = \deg_p f$. Након ових разматрања враћамо се доказу теореме. Најпре, претпоставимо да је f коначно пресликавање. Нека је $p \in \Omega'$ произвољно одабрана тачка. Тада је $f^{-1}(\{p\})$ непразан и коначан скуп (што следи из својстава коначних пресликавања). Самим тим је $1 \leqslant \deg_p f < \infty$ и можемо поновити уводна разматрања, при чему је сада $U = f^{-1}(V)$. Тада за све $w \in V$ важи $f^{-1}(\{w\}) \subset f^{-1}(V) = U$, па је $\deg_p f = \deg_w(f|_U) = \sum_{c \in f^{-1}(\{w\}) \cap U} \nu(f, c) = \sum_{c \in f^{-1}(\{w\})} \nu(f, c) = \deg_w f$. Из претходног закључујемо да је функција $\deg_w f$ локално константна у области Ω' и како је Ω' повезан скуп, то је $\deg_w f$ константна функција у Ω' и константно је једнака некој коначној вредности у тој области. Са друге стране, претпоставимо да је $\deg_w f$ функција степена пресликавања f константно једнака некој коначној вредности за све $w \in \Omega'$. Покажимо да је тада f коначно пресликавање. Претпоставимо супротно. Тада постоји (ζ_n) гранични низ у области Ω, такав да низ $(f(\zeta_n))$ има неки конвергентан подниз у области Ω'. Означимо тај подниз са $(f(z_n))$ и нека он конвергира ка некој тачки $p \in \Omega'$. Добијамо да је (z_n) један гранични низ у области Ω и важи $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = p$. Тада је $1 \leqslant \deg_p f < \infty$ и можемо применити уводна разматрања. Према томе, за сваку тачку $w \in V$, важи $\sum_{c \in f^{-1}(\{w\}) \cap U} \nu(f, c) = \deg_w(f|_U) = \deg_p f = \deg_w f = \sum_{c \in f^{-1}(\{w\})} \nu(f, c)$, тако да мора бити $f^{-1}(\{w\}) \subset U$. Како је $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = p \in V$, то постоји $n_0 \in \mathbb{N}$, такав да је $f(z_n) \in V$ за све $n \geqslant n_0$. Тада је $z_n \in U$ за све $n \geqslant n_0$. Добијамо да је $(z_n)_{n=n_0}^{\infty}$ низ тачака из компакта $\overline{U} \subset \Omega$, а самим тим, он има неки конвергентан подниз у $\overline{U} \subset \Omega$, тако да низ (z_n) није гранични у области Ω. Контрадикција! Из добијене контрадикције, закључујемо да је f коначно пресликавање. ■

Нека је $f : \Omega \to \Omega'$ коначно, холоморфно пресликавање и нека је $w \in \Omega'$. Дефинишемо *степен пресликавања* f као $\deg f = \deg_w f = \sum_{c \in f^{-1}(\{w\})} \nu(f, c)$. Степен пресликавања јесте добро дефинисан, јер на основу теореме Radó-а, $\deg_w f$ не зависи од избора тачке $w \in \Omega'$. Дакле, степен пресликавања јесте један природан број. Ако је $\deg f = 1$, тада је f бихоломорфно пресликавање. Наиме, f је сурјективно, јер је свако коначно пресликавање сурјективно. Претпоставимо да пресликавање f није $1-1$. Тада постоје $z_1, z_2 \in \Omega$, такви да је $z_1 \neq z_2$ и $f(z_1) = f(z_2) = w \in \Omega'$. Међутим, тада је $1 = \deg f = \deg_w f \geqslant \nu(f, z_1) + \nu(f, z_2) \geqslant 1 + 1 = 2$, што је немогуће. Према томе, f јесте $1-1$ пресликавање. Самим тим, f је холоморфно и бијективно, а тиме и бихоломорфно пресликавање. Осим тога, приметимо да ако је $\deg f = d$, тада је $|f^{-1}(\{w\})| \leqslant \sum_{c \in f^{-1}(\{w\})} \nu(f, c) = \deg_w f = \deg f = d$, тј. важи $|f^{-1}(\{w\})| \leqslant d$ за све $w \in \Omega'$. Нека је $S = \{z \in \Omega \mid f'(z) = 0\}$ и $w \in \Omega' \setminus f(S)$. Тада важи $\nu(f, c) = 1$ за све $c \in f^{-1}(\{w\})$, па је $d = \sum_{c \in f^{-1}(\{w\})} \nu(f, c) = |f^{-1}(\{w\})|$. Важи $z \in \Omega \setminus f^{-1}(f(S))$ ако и само ако је $f(z) \in \Omega' \setminus f(S)$. Из свега претходног добијамо да је индуковано пресликавање $f : \Omega \setminus f^{-1}(f(S)) \to \Omega' \setminus f(S)$ једно d-лисно наткривање.

Теорема. Нека су $f : \Omega \to \Omega'$ и $g : \Omega' \to \Omega''$ коначна и холоморфна пресликавања. Тада је $g \circ f : \Omega \to \Omega''$ коначно и холоморфно пресликавање и важи $\deg(g \circ f) = (\deg g) \cdot (\deg f)$.

Доказ. Пресликавање $g \circ f$ јесте холоморфно, као композиција таквих. Нека је $c \in \Omega$ произвољно одабрано. Покажимо да је тада $\nu(g \circ f, c) = \nu(g, f(c))\nu(f, c)$. Наиме, нека је $\nu(f, c) = n$ и $\nu(g, f(c)) = m$. Тада важи $f(z) - f(c) = a_n(z - c)^n + a_{n+1}(z - c)^{n+1} + \ldots$ и $g(\zeta) - g(f(c)) = \widetilde{a}_m(\zeta - f(c))^m + \widetilde{a}_{m+1}(\zeta - f(c))^{m+1} + \ldots$, при чему је $a_n \neq 0$ и $\widetilde{a}_m \neq 0$. Из претходног добијамо да је $g(f(z)) - g(f(c)) = \widetilde{a}_m(f(z) - f(c))^m + \widetilde{a}_{m+1}(f(z) - f(c))^{m+1} + \cdots = \widetilde{a}_m(a_n(z - c)^n + a_{n+1}(z - c)^{n+1} + \ldots)^m + \widetilde{a}_{m+1}(a_n(z - c)^n + a_{n+1}(z - c)^{n+1} + \ldots)^{m+1} + \cdots = \widetilde{a}_m a_n^m (z - c)^{mn} + \ldots$, при чему је $\widetilde{a}_m a_n^m \neq 0$. Следи да је $\nu(g \circ f, c) = mn = \nu(g, f(c))\nu(f, c)$. Нека је $w \in \Omega''$ произвољно одабрана тачка. Тада је $\deg_w(g \circ f) = \sum_{c \in (g \circ f)^{-1}(\{w\})} \nu(g \circ f, c) = \sum_{c \in f^{-1}(g^{-1}(\{w\}))} \nu(g \circ f, c) = \sum_{b \in g^{-1}(\{w\})} \sum_{c \in f^{-1}(\{b\})} \nu(g \circ f, c)$. Важи $\nu(g \circ f, c) = \nu(g, f(c))\nu(f, c)$ и самим тим за произвољно $b \in g^{-1}(\{w\})$ имамо да је $\sum_{c\in f^{-1}(\{b\})}\nu(g\circ f,c) = \nu(g,b)\sum_{c\in f^{-1}(\{b\})}\nu(f,c) = \nu(g,b)\deg_b f = \nu(g,b)\deg f$. Према томе, добијамо да је $\deg_w(g\circ f) = \sum_{b\in g^{-1}(\{w\})}\nu(g,b)\deg f = (\deg g)\cdot(\deg f) \in \mathbb{N}$. Како ово важи за све $w \in \Omega''$, то је према теореми Radó-а пресликавање $g\circ f$ коначно и важи $\deg(g\circ f) = (\deg g)\cdot(\deg f)$. Тиме је доказ завршен. ■

Литература

[1] L. Ahlfors, *An extension of Schwarz's lemma*, Trans. Amer. Math. Soc. 43(1938), 359-364.

[2] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3^{rd} ed., McGraw-Hill, New York, 1979.

[3] L. Ahlfors, *Conformal Invariants*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[4] M. Арсеновић, M. Достанић, Д. Јоцић, *Теорија мере, Функционална анализа, Теорија оператора*, Завод за уџбенике, Београд, 2012.

[5] A.F. Beardon, D. Minda, *The hyperbolic metric and geometric function theory*, Proceedings of the International Workshop on Quasiconformal Mappings and their Applications, 2006.

[6] C. Berenstein, R. Gay, *Complex Variables*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[7] R. Burckel, *An Introduction to Classical Complex Analysis*, Birkhäuser, Besel, 1979.

[8] T. Gamelin, *Complex Analysis*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[9] T. Gamelin, L. Carleson, *Complex Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1992.

[10] B.R. Gelbaum, *Modern Real and Complex Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., 1995.

[11] S.G. Krantz, *Geometric function theory*, Birkhäuser, Bosotn, 2006.

[12] M. Mateljević, *Kompleksna Analiza 1*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2012.

[13] M. Mateljević, *Kompleksna Analiza 2*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2012.

[14] M. Mateljević, *Kompleksne Funkcije 1 & 2*, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2006.

[15] M. Mateljević, *Topics in Conformal, Quasiconformal and Harmonic Maps*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2012.

[16] R. Osserman, *A sharp Schwarz inequality on the boundary*, Proc. Amer. Math. Soc. 128(2000), 3513-3517.

[17] R. Remmert, *Classical Topics in Complex Function Theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[18] R. Remmert, *Theory of Complex Function*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[19] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1963.

[20] R. A. Silverman, *Complex Analysis with Applications*, Dover Publications, New York, 1974.