Универзитет у Београду

Математички факултет

МАСТЕР РАД

Тема:

Математичка индукција кроз разне нивое образовања

Професор:

др. Ђорђе Кртинић

Студент:

Бојана Жујовић 1117/2012

Београд, фебруар 2015.

САДРЖАЈ

УВОД

Циљ овог рада је да укаже на значај математичке индукције, на њено место у наставно-образовном раду са ученицима средњих школа као и да нагласи тешкоће које настају при објашњавању ове теме ученицима. Приказани су примери примене математичке индукције у различитим областима математике, као и на различитим нивоима образовања. Такође се назначило на којим местима ученици радећи задатке из математичке индукције најчешће греше и самим тим показују недостатке у разумевању математичке индукције.

1. МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА

УОПШТЕНО О МАТЕМАТИЧКОЈ ИНДУКЦИЈИ

Принцип математичке индукције и доказивање коришћењем овог принципа није се одједном развио, већ је то развијање текло постепено, хиљадама година. Имплицитни примери примене математичке индукције постоје још код Платона, Зенона и Еуклида.
Еуклид је доказао да простих бројева има бесконачно много на следећи начин:

претпоставио је супротно, тј.да је скуп простих бројева коначан и да тај скуп садржи следеће елементе $p_1, p_2, \dots, p_n$.Затим је посматрао број $P = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ и тада констатовао да сваки прост делилац броја P мора бити различит од простих бројева $p_1, p_2, \dots, p_{n,}$ јер би у супротном важило да тај прост делилац дели 1, што значи да постоји бар још један прост број што је противречило почетној претпоставци.

На исти начин се трагови математичке индукције, могу наћи код других математичара. Кантор је посебно истакао допринос Блеза Паскала и Франческа Мауролика за развој овог метода.

Примере у којима су Паскал и Мауролико применили индуктивни начин доказивања ћемо овде искористити да покажемо да математичка индукција заправо јесте дедуктивни начин доказивања.

Логика под индуктивним подразумева онај начин мишљења који полази од појединачних разматрања над објектима одређене врсте,а затим их уопштава на читаву врсту, док под дедукцијом сматрају оно закључивање које се креће од општег ка појединачном.

Дедуктивно размиљање полази од хипотезе и креће се кроз коначан број корака, где сваки корак мора бити оправдан аксиомом, дефиницијом, теоремом или било каквим ставом који је доказано тачан или нетачан или пак неким логичким закључком, а као крајњи продукт дедуктивног размишљања имамо доказ претпостављене хипотезе. Свако ко прихвата аксиоме, дефиниције , теореме, ставове и логику кориштене у доказу мора прихватити резултате дедуктивног доказа као тачне.

Са друге стране индуктивно размишљање подразумева коначан број опажања на основу којих се изводи опште правило које не мора бити тачно, и овај начин размишљања не укључује проверу добијеног резултата у односу на неки скуп тврђења.

Када је опште правило претпостављено, односно када је постављена хипотеза, уколико желимо да проверимо њену валидност, онда се у том моменту окрећемо дедуктивном размишљању, и потребан нам је неки дедуктивни метод, а такав један метод је математичка индукција.

Наредна два примера би требало да илуструју како је математичка индукција формално-логички један дедуктивни метод.

Пример 1:Одредити збир првих n непарних природних бројева.

Како је

T_1:	$1 = 1$
T_2:	$1 + 3 = 2^2$
T_3:	$1 + 3 + 5 = 3^2$

постоји могућност да важи

T_n: $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

тј. на основу појединачних разматрања претпостављамо да је збир првих n непарних бројева једнак n^2.

Овај део закључивања представља типично индуктивно размишљање.

Ако сада хоћемо да докажемо нашу опажањеонда прелазимо на дедуктивни начин размишљања, односно у овом конкретном примеру на метод математичке индукције.

Доказ: прво што треба да урадимо је да проверимо да ли наше тврђење важи за случај $n = 1$, а опсервација T_1 је доказ да важи.

Затим је потребно претпоставити да тврђење важи за неки произвољан природан број n, тј претпостављамо да важи $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

Сада морамо показати да ако тврђење важи за n онда важи и за $n + 1$

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Додајмо и левој и десној страни једнакости $2n + 1$

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1$$

Тиме смо добили следеће

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

Чиме је показано да из чињенице да тврђење важи за n следи да тврђење важи за $n + 1$ и тиме за све природне бројеве

Пример 2: посматрајмо распоред бројева, који се назива Паскалов троугао, дефинисан тако да су на ободу јединице, а да су унутрашњи бројеви једнаки збиру два броја која се налазе изнад уоченог броја, тј.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

где је n број који означава врсту, а k позицију у врсти (нумерација креће од 0).

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ \iddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots \end{array}$$

Паскалов троугао

Елементи Паскаловог троугла задовољавају бројне особине, а приликом доказивања је често природно користити индукцију, јер су и сами елементи тако дефинисани. Докажимо неке од особина.

Теорема(Биномна формула): За сваки природан број важи

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Доказ:

Доказ радимо индукцијом по n . За случај када важи $n = 1$ формула је очигледно тачно. Претпоставимо да важи

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Сада показујемо да важи

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(a^{k+1}b^{n-k} + a^k b^{n-k+1}\right) \\ = a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.\end{aligned}$$

На основу математичке индукције закључујемо да тврђење важи за све природне бројеве.

Веома често приликом доказивања одређених идентитета и рачунању сума користимо изводе и интеграле.

Пример 3: Доказати да је

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

Доказ:

Ако израчунамо изводе полинома на левој и десној страни једнакости

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k,$$

добићемо

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}.$$

Да би добили тражени идентитет довољно је уврстити у добијени резултат $x = 1$.

Задаци са биномном формулом су веома чести на пријемним испитима за факултете, тако се међу њима могу наћи следећи примери

- Одредити коефицијент уз x^{10} у сређеном облику полинома $(3-2x^2)^7$
- Одреди константни сабирак у изразу $(x^3 - \frac{2}{x})^{12}$

ПЕАНОВЕ АКСИОМЕ

Помоћу природних бројева могу се дефинисати рационални, а помоћу рационалних реални, па је за рад са реалним бројевима потребно добро дефинисати природне бројеве. Обзиром да су природни бројеви уграђени у све остале и да њихово поимање одређује наше поимање свега осталог у математици, поставља се питање како то да природни бројеви нису били аксиоматизовани попут рецимо геометрије све до 19-тог века. Одговор вероватно лежи у томе да су природни бројеви толико били свакодневни и дубоко укорењени у интуитивно мишљење људи, да је ретко коме и падало на памет да их уопште и треба аксиоматизовати. Тек развојем савремене математике, јавља се тежња да све њене дисциплине буду аксиоматизоване, па се јасно јавила потреба да се аксиоматизују природни бројеви. Ово је први учинио Ђузепе Пеано у 19-том веку.

Пеанове аксиоме гласе:

П.1. 1 је природан број

П.2. Ако јеx природан број, онда је то и његов следбеник x'

П.3. Ако су x и y природни бројеви и $x' = y'$, онда је $x = y$

П.4. За сваки природан број $x, x' \neq 1$

П.5. Нека је Φ било које својство такво да 1 има то својство, и ако важи да из тога да m задовољава својство Φ онда и m' задовољава то својство, онда сваки природан број има својство Φ, тј.

1. $1 \in C$
2. $\forall m (\mathrm{m} \in \mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{m}' \in \mathrm{C})$
   Онда је $\mathrm{C} = \mathbb{N}$.

Аксиому П.5. називамо *Аксиомом индукције или Принцип индукције* и она може бити замењена следећим еквивалентним принципима, на пример:

П.5.' Нека је Φ било које својство такво да ако сви природни бројеви мањи или једнаки са m имају својство Φ онда m' има својство Φ и број 1 има својство Φ. Тада сваки природан број има својство Φ. Тј. ако $(\forall m \in \mathbb{N})\big((\forall n < m)\mathrm{n} \in \mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{m} \in \mathrm{C}\big)$ онда $\mathrm{C} = \mathbb{N}$ (овај други принцип је познат под називом *потпуна индукција*)

П.5.'' Сваки непразан подскуп скупа природних бројева има најмањи елемент (овај принцип се назива *Принцип најмањег елемента*)

ЕКВИВАЛЕНТНИ ОБЛИЦИ МАТЕМАТИЧКЕ ИНДУКЦИЈЕ

Принцип математичке индукције

Нека је Φ било које својство такво да 1 има то својство, и ако m има то својство Φ онда m+1 има својство Φ. Тада сваки природан број има својство Φ. Тј

$$C \subset \mathbb{N}$$

1. $1 \in C$
2. $\forall m (\mathrm{m} \in \mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{m} + 1 \in \mathrm{C})$
   Онда је $\mathrm{C} = \mathbb{N}$.

Пример 1: Доказати да је $2^n > n^2$, за све $n \geq 5$

(БИ) за $n = 5$, имао да $2^5 > 5^2$, па тврђење важи за $n = 5$,

(ХИ) претпоставнимо да за неко $k \in \mathbb{N}$ важи $2^k > k^2$, за неко $k \geq 5$,

(ИК) докажимо да тврђење важи за $k + 1$

$$(\text{ХИ})\ :2^k > k^2$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{25} = 1 + \frac{11}{25} < 2$$

Односноважи $2 > \frac{(k+1)^2}{k^2}$, односно $2k^2 > (k+1)^2$ па на основу индуктивне хипотезе имамо да важи $2^{k+1} > (k+1)^2$

Потпуна индукција

Нека је Φ било које својство такво да ако сви природни бројеви мањи или једнаки са m имају својство Φ онда m+1 има својство Φ. Тада сваки природан број има својство Φ. Тј. ако

$$C \subset \mathbb{N}$$

1. $1 \in C$
2. $(\forall m \in \mathbb{N})\big((\forall n < m)\mathrm{n} \in \mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{m} \in \mathrm{C}\big)$
   Онда је $\mathrm{C} = \mathbb{N}$.

Пример 2: Сваки ненула цео број n може бити изражен у облику $n = \pm {p_1}^{e_1} {p_2}^{e_2} \cdots {p_r}^{e_r}$ где су $p_1, p_2, \dots, p_r$ различити прости бројеви, а $e_1, e_2, \dots, e_r$су позитивни цели бројеви.

Доказ:

- Доказаћемо да тврђење важи за позитивне бројеве, а одатле тривијално се доказује за негативне
- 1. Тврђење је очигледно тачно за $n = 1$
- 2. Затим узмимо неко $n \in \mathbb{N}$ тако да $n > 1$ и претпоставимо да тврђење важи за сваки број мањи од n
- Сада је потребно показати да се n може интерпретирати на горе описан начин
- Постоје две могућности прва да је n прост број и тада је доказ завршен, а ако је n сложен број то онда значи да постоје природни бројеви l, k такви да важи $1 < l < n$,$1 < k < n$ тако да важи $n = l \cdot k$, но како су l, k мањи од n онда се могу написати као производ простих бројева па отуда значи да се и n може написати као производ простих бројева
- Приметимо да је тиме доказано на основу потпуне индукције да сви природни бројеви већи од 1 могу бити интерпретирани на задати начин

Доказ помоћу принципа најмањег елемента

Урадићемо исти пример, али користећи Принцип најмањег елемента.

- Нека је скуп S скуп свих оних ненегативних бројева који се не могу на задани начин интерпретирати
- То онда значи да S мора имати најмањи елемент и нека тај елемент буде означен са n
- Приметимо да n не може бити прост број јер би то значило да може да буде интерпретиран на тражени начин па се не налази у скупу S па самим тим не може бити ни његов најмањи елемент
- Дакле, n је сложен број, па постоје природни бројеви l, k такви да важи $1 < l < n$,$1 < k < n$ тако да важи $n = l \cdot k$
- Такође, обзиром да су l, k мањи од n они не могу бити у S, па се могу инетрпретирати као производ простих бројева, а самим ти се може и n тако представити па n не може бити у S, па ни његов најмањи елемент, што нас доводи до контрадикције
- Што значи да једини скуп бројева који не могу бити записани као производ простих је празан скуп и доказ је завршен

Регресивна индукција

$C \subset \mathbb{N}$

1. $0 \in C$
2. $\forall m(\mathrm{m} \in \mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{m} - 1 \in \mathrm{C})$
3. $\forall m(\mathrm{m} \in \mathrm{C} \Rightarrow 2\mathrm{m} \in \mathrm{C})$

   Онда је $\mathrm{C} = \mathbb{N}$.

Пример 3:

Нека су $x_1, x_2, \dots, x_n$ позитивни реални бројеви.
Аритметичка средина тих бројева

$$A = A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

је увек већа или једнака од њихове геометријске средине

$$\mathrm{G}=\mathrm{G}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

Једнакост вреди једино ако су сви $x_1, x_2, \dots, x_n$ међусобно једнаки.

Доказ: (у доказу ћемо користити Кошијев еквивалент регресивне индукције

$$C \subset \mathbb{N}$$

1. $1 \in C$
2. $\forall m(\mathrm{m} \in \mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{m} - 1 \in \mathrm{C})$
3. $\forall m(\mathrm{m} \in \mathrm{C} \Rightarrow 2\mathrm{m} \in \mathrm{C})$

   Онда је $\mathrm{C} = \mathbb{N}$.)

Нека $P(n)$ буде следеће тврђење за природне бројве:

$$P(n) \vdots \text{ за } x_1, x_2, \dots, x_n \text{ из } \mathbb{R}^+ \text{ је } x_1 x_2 \cdots x_n \le \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n$$

За $n = 2$ твђење $x_1 x_2 \le (\frac{x_1+x_2}{2})^2$ је еквивалентно са $(x_1 - x_2)^2 \ge 0$.

(*) претпоставимо да важи$P(n)$ и онда имамо

$$x_1 x_2 \cdots x_{n-1} \cdot \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} \le \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}}{n}\right)^n$$

Па онда имамо да важи $P(n-1) \vdots\; x_1 x_2 \cdots x_{n-1} \le \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}$

(**) претпоставимо да важи$P(n)$ и онда имамо

$$\begin{aligned} x_1 x_2 \cdots x_n\, x_{n+1} \cdots x_{2n} &= x_1 x_2 \cdots x_n \cdot x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n} \\ &\le \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{n}\right)^n \end{aligned}$$

Сада искористимо да важи $P(2) \vdots\; x_1 x_2 \le (\frac{x_1+x_2}{2})^2$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{n}\right)^n \\ &\qquad = \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \cdot \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{n}\right)^n \end{aligned}$$

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \cdot \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{n}\right)^n \le \left(\frac{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} + \frac{x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{2n}}{n}}{2}\right)^{2n}$$

$$\left(\frac{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} + \frac{x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{2n}}{n}}{2}\right)^2 = \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n}\right)^{2n}$$

Самим тим је доказано $P(2n)$ па је доказ завршен.

Теорема : Принципи индукције , потпуне индукције, принцип најмањег елемента и регресивне индукције су међусобно еквивалентни.

Доказ:

****Докажимо прво да из математичке индукције следи потпуна индукција****

У то име претпоставимо да важи $(\forall m \in \mathbb{N})\big((\forall n < m)\mathrm{n} \in \mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{m} \in \mathrm{C}\big)$

Потребној је показати да је $\mathrm{C} = \mathbb{N}$

нећемо показати да $1\epsilon\mathrm{C}$ и да из $\mathrm{n}\epsilon\mathrm{C}$ онда $\mathrm{n}'\epsilon\mathrm{C}$, већ ћемо увести помоћни скуп

$\mathrm{D} = \{\mathrm{m}\epsilon\mathbb{N}: (\forall \mathrm{n} < m)(\mathrm{n}\epsilon\mathrm{C})\}$

приметимо да ако покажемо да је $\mathrm{D} = \mathbb{N}$ онда важи следеће

$\mathrm{m} \in \mathbb{N}$, како је $\mathrm{m} < \mathrm{m}'$, а $\mathrm{m}' \in \mathrm{D}$ јер је наравно $\mathrm{m}' \in \mathbb{N}$, а

$\mathrm{D} = \mathbb{N}$ то по дефиницијии скупа D следи да $\mathrm{m} \in \mathrm{C}$, па из $\mathbb{N} \subseteq \mathrm{C} \subseteq \mathbb{N}$ следи $\mathrm{C} = \mathbb{N}$

Потребно је још доказати да је $\mathrm{D} = \mathbb{N}$.

1. Приметимо да обзиром нема природних бројева мањих од 1, да је тачно да сви природни бројеви мањи од 1 јесу у скупу C односно $1 \in \mathrm{D}$
2. Ако $m \in \mathrm{D}$ то онда значи да $n \in \mathrm{C}$ за све $\mathrm{n} < m$ па на основу наше претпоставке следи да $m \in \mathrm{C}$ па отуда $\mathrm{m}' \in \mathrm{D}$

Па на основу принципа индукције важи $\mathrm{D} = \mathbb{N}$.

****Докажимо сада да из потпуне индукције следи принцип најмањег елемента****

Претпоставимо супротно, тј нека постоји скуп A, $\mathrm{A} \subset \mathbb{N}$, A нема најмањи елемент

Посматрајмо сада скуп $\mathrm{C} = \mathbb{N} \setminus A$ и приметимо да

Ако $\mathrm{m} \in \mathbb{N}$ и ако $(\forall n < m)\mathrm{n} \in \mathrm{C}$ онда $\mathrm{m} \in \mathrm{C}$ јер у супротном $\mathrm{m} \in A$ и тада би m био најмањи елемент у A обзиром да $(\forall n < m)\mathrm{n} \in \mathrm{C}$
Па онда бажи да је $\mathrm{C} = \mathbb{N}$
А то онда значи да је $A = \emptyset$
Дакле, једино подскуп скупа природних бројева који је празан нема најмањи елемент.

****Докажимо сада да из принцип најмањег елемента следи регресивна индукција****

Нека за скуп C важи да $1 \in \mathrm{C}$ и $k \notin C \implies \exists m \in \mathbb{N}$ тако да $m < k \wedge m \notin C$

Посматрајмо сада скуп $\mathrm{A} = \mathbb{N} \setminus C$, и претпоставимо да је скуп A непразан, на основу принципа најмањег елемента скуп A мора имати најмањи елемент и означимо га са k, међутим онда то значи да постоји $m \in \mathbb{N}$ тако да $m < k$ и $m \notin C$, што значи да $m \in \mathrm{A}$ и да k не може бити најмањи елемент, па на основу те контрадикције закључујемо да је скуп A празан скуп, односно да је $C = \mathbb{N}$.

Преостало је још да се докаже да из регресивне индукције следи принцип математичке индукције

Претпоставимо да важи

1. $1 \in C$
2. $\forall m(\mathrm{m} \in \mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{m}' \in \mathrm{C})$

И потом претпоставимо да не важи да ако $k \notin C \implies \exists m \in \mathbb{N}$ тако да $m < k \wedge m \notin C$, односно то значи да за свако $m < k$ важи $m \in C$. Како је $k \geq 2, k-1 \in \mathbb{N}$ па онда $k-1 \in$ C и $k \notin C$ што нас доводи до контрадикције, па заључујемо да мора да важи ако $k \notin C \implies \exists m \in \mathbb{N}$ тако да $m < k \wedge m \notin C$, па на основу регресивне индукције закључујемо да је $C = \mathbb{N}$. ■

МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА И РЕКУРЗИЈА

Капацитети индукције нису исцрпљени кроз доказивање и успостављање стандардног система природних бројева. Могућности индукције су невероватно велике и значајане. Индукција може бити коришћена и за дефинисање. Нека је f функција која слика скуп X у самог себе. Делује сасвим природно да ако желимо да дефинишемо бесконачан низ$\{u(n)\}$ од елемената скупа Xто учинимо на следећи начин: $a \in X, u(0) = a, u(1) = f(a), u(2) = f(u(1))$и тако даље. Ако би неко од нас очекивао да објаснимо ово „и тако даље" морали бисмо да се ослонимо на индукцију. А ослонити се на индукцију у овом случају значи следеће:

1. изаберемо $a \in X$ и потом дефенишемо као и горе $u(0) = a$
2. Дефинишемо $u(n') = f\big(u(n)\big)$за било које n из скупа природних бројева.

Ово изгледа задовољавајуће, али је свакако недовољно као оправдање за егзистенцију оваквога низа. Принцип математичке индукције лагано доказује јединственост овако дефинисане функције али не и егзистенцију. Оно што нам је потребно је следећа теорема, која је општијег карактера од оног што је нама потребно да оправдамо (1) и (2).

Теорема 1(*Теорема рекурзије*):Нека јеX непразан скуп, и нека је дата функција f тако да$f: X \to Y$ и функција $g: \mathbb{N} \times X \times Y \to Y$ тада постоји и јединствено је одређена функција $u: \mathbb{N} \times X \to Y$ са следећим својствима за свако $x \in X$ $u(0,x) = f(x)$ и $u(n',x) = g\big(n, x, u(n,x)\big)$

Доказ:

- Докажимо прво егзистенцију
- Функција u је уствари подскуп уређеног пара$\mathbb{N} \times X \times Y$
- Посматрајмо колекцију $\mathcal{L}$ свих подскупова А уређеног пара $\mathbb{N} \times X \times Y$ таквих да задовољавају следеће услове за свако $x \in X$ $(0, x, f(x)) \in A$ и за све $n \in \mathbb{N}, x \in X, y \in Y$важи $(n', x, g(n, x, y)) \in A$ кад год важи$(n, x, y) \in A$
- Како $\mathbb{N} \times X \times Y$ има ово својство фамилија $\mathcal{L}$ није празна

- Конструишимо u као пресек свих чланова фамилије $\mathcal{L}$
- Јасно је да u припада фамилији $\mathcal{L}$, и да је најмањи
- Још је потребно показати да је u функција, односно да је задовољен принцип једнозначности, $\forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \in X\ \exists 1 y \in X\, (n, x, y) \in u$
- Доказ изводимо помоћу принципа индукције
- Нека S буде скуп који се састоји од свих природних бројева n у којима u заиста јесте једнозначна за свако $x \in X$, односно $(n, x, y) \in u$ за највише једно y
- Показаћемо да $0 \in S$ и да ако $n \in S$ онда $n' \in S$ па на основу принципа математичке индукције следи $S = \mathbb{N}$, одакле следи да је u једнозначна за сваки природан број и за свако $x \in X$, однсно u јесте функција
- Претпоставимо супротно, односно да u није једнозначна у нули за свако $x \in X$, односно да $0 \notin S$, то онда значи да за неко $x \in X$ постоје бар два елемента нпр $f(x)$ и y из Y тако да важи $(0, x, j(x)) \in u$ и $(0, x, y) \in u$, уочимо сада скуп $u \backslash \{(0, x, y)\}$, приметимо да тај редуковани скуп и даље испуњава тражена својства, за свако $x \in X$ $(0, x, j(x)) \in A$, кадгод важи $(n, x, z) \in u$ важиће и $(n', x, g(n, x, z)) \in u$, а ова импликација је сигурно тачна јер избачени елемент сигурно није једнак ниједном елементу облика $(n', x, g(n, x, z))$ јер $n' \neq 0$, па тако редукован скуп припада нашој колекцији, а мањи је од скупа u што противречи тврдњи да је u најмањи елемент, па закључујемо да $0 \in S$.
- Претпоставимо сада да $n \in S$; то онда значи да за свако $x \in X$ постоји јединствени елемент y у X тако да $(n, x, y) \in u$, међутим то онда значи да $(n', x, g(n, x, y)) \in u$, сада претпоставимо да n'не припада скупу S, а то опет мора да значи да постоји $x \in X$ тако да $(n, x, y) \in u \quad \Rightarrow (n', x, g(n, x, y)) \in u$ и за неко $z \neq g(n, x, y)$ је $(n', x, z) \in u$ формирајмо скуп $u \backslash \{(n', x, z)\}$, приметимо да овако редукован скуп садржи $(0, x, f(x))$ за свако $x \in X$ (обзиром да је $n' \neq 0$) и ако тако сужени скуп садржи (m, t, k) онда мора садржати и $(m', t, g(m, t, k))$, заиста ако је $m = n$ онда t нека буде x па је разлог зашто редуковани скуп садржи $(n', x, g(n, x, y))$ то што је $g(n, x, y) \neq z$, ако је са друге стране $m \neq n$ онда тај нови скуп садржи $(m', t, g(m, t, k))$ јер је $m' \neq n'$ па онда важи $u \backslash \{(n', x, z)\} \in \mathcal{L}$ па скуп u не може бити најмањи из фамилије, $\mathcal{L}$ што је контрадикција, па закључујемо $n' \in S$
- И тиме је егзистенција доказана
- Остаје још да се докаже јединственост, што се лагано доказује помоћу индукције
- Претпоставимо да поред функције u постоји функција u_1 тако да важи $u_1(0, x) = f(x)$ и $u_1(n', x) = g\big(n, x, u_1(n, x)\big)$ за било које n из скупа природних бројева
- Приметимо да за свако $x \in X$ $u(0, x) = f(x) = u_1(0, x)$, сад ако предпоставимо да за свако $x \in X$ важи $u(n, x) = u_1(n, x)$ онда из тога директно имамо $u(n', x) = g\big(n, x, u(n, x)\big) = g\big(n, x, u_1(n, x)\big) = u_1(n', x)$, па на основу принципа математичке индукције имамо да важи $u(n, x) = u_1(n, x)$ за свако n из скупа природних бројева и за свако $x \in X$.

∎

Дефиниције настале коришћењем математичке индукције се називају индуктивне или рекурзивне дефиниције или рекурзивне релације.

ПРИМЕРИ ИЗ ТЕОРИЈЕ

Теорема(Формула укључења и искључења) Нека су $A_1, A_2, \dots, A_n$ коначни скупови. Тада важи следећа формула

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots +$$

$$+(-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

Доказ:

Доказ радимо математичком индукцијом. За случај $n = 1$ и $n = 2$ јасно је да важи тврђење. Претпоставимо да теорема важи за неки природан број n. Нека су $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ произвољни коначни скупови. Тада на основу претпоставке имамо да тврђење важи за n–торку скупова

$$(A_1 \cap A_{n+1}, A_2 \cap A_{n+1}, \dots, A_n \cap A_{n+1})$$

Важи једнакост

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1}) \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{n+1}| -$$

$$- \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1}|$$

Сада користећи се чињеницом да формула важи за случај n и $n = 2$, добијамо

$$|(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \cup A_{n+1}| = |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \cap A_{n+1}|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| + |A_{n+1}| - \left(\sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{i=1}^{n} |A_i \cap A_{n+1}| \right) +$$

$$+ \left(\sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}| \right) -$$

$$- \dots - (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1}| =$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n+1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots +$$

$$+(-1)^{n} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n+1}|$$

тј. формула важи за случај $n + 1$.

■

Формула укључења и искључења има огромну примену у математици, а једна од њих је следећи пример.

Пример 1: (Ојлерова функција) Нека је n произвољан природан број, и нека је $n = {p_1}^{e_1}{p_2}^{e_2}\cdots{p_r}^{e_r}$ канонста факторизација броја n. Доказати да је

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$$

Доказ:

Сваки број мањи од n који није узајамно прост n са мора бити дељив неким од бројева $p_1, p_2, \cdots, p_r$. За све $i = 1,2, \ldots, r$ посматрајмо скупове

$$A_i = \left\{p_i, 2p_i, \ldots, \frac{n}{p_i}, n\right\}\text{-скуп бројева мањих од } n \text{ а дељивих са } p_i$$

$$B\text{-скуп свих бројева мањих од } n$$

Број из B је релативно прост са n ако не припада ниједном од скупова A_i, па онда важи

$$\varphi(n) = |B \backslash (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r)|$$

Из дефиниције скупова A_i можемо закључити да важи

$$|A_i| = \frac{n}{p_i}, |A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}, \ldots, |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_k}}, \ldots$$

Сада на основу формуле укључења и искључења имамо да важи

$$\varphi(n) = n - \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - \cdots - \frac{n}{p_r} + \frac{n}{p_1 p_2} + \cdots + (-1)^k \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_k}} + \cdots$$

Што се може препознати као десна страна формуле коју је требало доказати.

■

Принцип математичке индукције односно принцип најмањег елемента се користи да би се направила еквиваленција између могућности да се из покривача скупа може добити коначан покривач и чињенице да сваки низ у том скупу има подниз који конвергира елементу из тог скупа.

Теорема: Подскупу K метричког простора X је компактан ако и само ако је секвенцијално компактан.

Доказ:

($\Rightarrow$)

Нека се из сваког отвореног покривача скупа K може издвојити коначан потпокривач. Покажимо да онда сваки низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ има конвергентан подниз.

Посматрајмо скупове $(\forall\, m \in \mathbb{N}) F_m = \{\, x_n : n \geq m\}$.

Приметимо да уколико су скупови F_m коначни онда самим тим постоји конвергентан подниз.

У супротном ако су скупови F_m бесконачни, претпоставимо прво да су сви скупови F_m затворени и да не постоји конвергентан подниз.

Тада су скупови $(\forall\, m \in \mathbb{N})\ K \setminus F_m$ отворени. Покажимо да је ово један отворен покривач од K.

Могу наступити два случаја

$$1.\ x = x_l\,, l \in \mathbb{N}, x = x_l \notin F_{l+1} \Rightarrow x = x_l \in K \setminus F_{l+1}$$

$$2.\ x \neq x_l\,, l \in \mathbb{N} \Rightarrow x \notin F_1 \Rightarrow x \in K \setminus F_1.$$

Тиме је доказано да је колекција $\{ K \setminus F_m : m \in \mathbb{N}\}$ отворени покривач скупа K.

Из овог покривача можемо издвојити коначан потпокривач и нека је то

$$\{K \setminus F_{i_1}, K \setminus F_{i_2}, \dots, K \setminus F_{i_k}\}$$

Како је $K = \bigcup_{j=1}^{k}(K \setminus F_{i_j})$, преласком на комплемент добијамо $\emptyset = \bigcap_{i=1}^{k} F_{i_j} = F_{i_k}$, обзиром да важи $F_{i_1} \supseteq F_{i_2} \supseteq \cdots \supseteq F_{i_k}$. Што је у контрадикцији са претпоставком да су скупови F_m бесконачни.

Уколико постоји барем један скуп F_m који је отворен тада ћемо директно доказати да постоји конвергентан подниз, конструишући га индуктивно.

Нека је за неко $m \in \mathbb{N}$ скуп F_mотворен, онда узмимо неко $x_0 \in \overline{F_m} \setminus F_m$.

Даље имамо $x_0 \in \overline{F_m} \setminus F_m \Rightarrow (\mathbb{B}(x_0, 1) \setminus \{x_0\}) \cap F_m \neq \emptyset \Rightarrow (\exists l \in \mathbb{N}) x_l \in (\mathbb{B}(x_0, 1) \setminus \{x_0\}) \cap F_m$

$\Rightarrow (\exists l \in \mathbb{N}, l \geq m) 0 < d(x_0, x_l) < 1.$

Нека је $l_1 = \min\{l \in \mathbb{N}: l \geq m, 0 < d(x_0, x_l) < 1\}$. Ставимо да је $\varepsilon = d(x_0, x_{l_1})$. Тада понављамо поступак $x_0 \in \overline{F_m} \setminus F_m \Rightarrow \left(\mathbb{B}\left(x_0, \frac{\varepsilon}{2}\right) \setminus \{x_0\}\right) \cap F_m \neq \emptyset \Rightarrow (\exists l \in \mathbb{N}) x_l \in \left(\mathbb{B}\left(x_0, \frac{\varepsilon}{2}\right) \setminus \{x_0\}\right) \cap F_m$

$\Rightarrow (\exists l \in \mathbb{N}, l \geq m) 0 < d(x_0, x_l) < \frac{\varepsilon}{2}.$

Нека је $l_2 = \min\{l \in \mathbb{N}: l \geq m, 0 < d(x_0, x_l) < \frac{\varepsilon}{2}\}$. Тада је $0 < d(x_0, x_{l_2}) < \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{2} < 1$

Лако се може показати да је $l_2 > l_1$.

Претпоставимо да су $x_{l_1}, x_{l_2}, \dots, x_{l_k}$ елементи скупа F_m такви да је

$l_1 = \min\{l \in \mathbb{N}: l \geq m, 0 < d(x_0, x_l) < 1\}$

$l_j = \min\{l \in \mathbb{N}: l \geq m, 0 < d(x_0, x_l) < \frac{d\left(x_0, x_{l_{j-1}}\right)}{2} < 1\}\ \ j \in \{1,2, \dots, k\}.$

Тада важи $l_1 < l_2 < \cdots < l_k$ и $0 < d(x_0, x_{l_j}) < \frac{1}{2^{j-1}}\ j \in \{1,2, \dots, k\}.$

Сада нека је $\varepsilon = d(x_0, x_{l_k})$.

Онда имамо

$$x_0 \in \overline{F_m} \setminus F_m \Rightarrow \left(\mathbb{B}\left(x_0, \frac{\varepsilon}{2}\right) \setminus \{x_0\}\right) \cap F_m \neq \emptyset \Rightarrow (\exists l \in \mathbb{N}) x_l \in \left(\mathbb{B}\left(x_0, \frac{\varepsilon}{2}\right) \setminus \{x_0\}\right) \cap F_m$$

$\Rightarrow (\exists l \in \mathbb{N}, l \geq m) 0 < d(x_0, x_l) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Нека је $l_{k+1} = \min\{l \in \mathbb{N}: l \geq m, 0 < d(x_0, x_l) < \frac{\varepsilon}{2}\}$. Тада је $0 < d(x_0, x_{l_{k+1}}) < \frac{\varepsilon}{2}$ и важи $l_{k+1} > l_k$.

На овај начин смо користећи се индукцијом доказали да постоји подниз $(x_{l_k})_{k\in\mathbb{N}}$ низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ за који важи

$$l_1 < l_2 < \cdots < l_k < \cdots$$

$$0 < d\left(x_0, x_{l_k}\right) < \frac{1}{2^{k-1}}, (\forall\, k \in \mathbb{N})$$

Како важи $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 0$ онда важи $\lim_{k\to\infty} d(x_0, x_{l_k}) = 0$ тј. $\lim_{k\to\infty} x_{l_k} = x_0$.

Односно тачка x_0 је тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$(\Leftarrow)$

Доказ супротног смера ћемо опет доказати користећи се индукцијом.

Претпоставимо да је скуп K подскуп метричког простора X секвенцијално компактан. Посматрајмо неки његов отворен покривач. Из њега можемо да извучемо један отворени и пребројиви потпокривач $\{U_n: n \in \mathbb{N}\}$ и претпоставимо супротно да се из њега не може добити један коначан потпокривач. Тада за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји неко $x_n \in K \setminus (U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n)$.

Посматрајмо низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ из K добијен на овакав начин. Овај низ сигурно има неки конвергентан подниз $(x_{l_k})_{k\in\mathbb{N}}$, тј. постоји неко $x_0 \in K$ тако да важи $\lim_{k\to\infty} x_{l_k} = x_0$. Како је

$\{U_n: n \in \mathbb{N}\}$ покривач за K то постоји неко n_0 тако да важи $x_0 \in U_{n_0}$.

Такође важи $(\exists n_1 \in \mathbb{N}) n \geq n_1 \Rightarrow x_{l_n} \in U_{n_0}$.

Нека је $n_2 \in \mathbb{N}$ тако да важи $n_2 \geq n_1, n_2 \geq n_0$ тада имамо да $x_{l_{n_2}} \in K \setminus (U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_{n_2})$

и $l_{n_2} > l_{n_0} \geq n_0$ па закључујемо да

$$x_{l_{n_2}} \in K \setminus (U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_{n_2}) \subseteq K \setminus U_{n_0} \Rightarrow x_{l_{n_2}} \notin U_{n_0} .$$

Што је у супротности са тим да је $(x_{l_k})_{k\in\mathbb{N}}$ конвергентан подниз, па закључујемо да из сваког отворениг покривача можемо да издвојимо коначан потпокривач.

■

Мтематичка индукција налази своју примену и у геометрији што желимо да покажемо следећом теоремом.

Теорема: Нека је задато n хиперравни у $\mathbb{R}^d$ у општем положају. Тих n хиперравни ће поделити $\mathbb{R}^d$ на

$$\binom{n}{d}+\binom{n}{d-1}+\cdots+\binom{n}{1}+\binom{n}{0}$$

различитих области.

Доказ:

У доказу ове теореме ћемо користити математичку индукцију по два индекса n, d

Нека је $a_{n,d}$ број области. У случају када је $d=1$ хиперравни су тачке. Како n тачака подели праву на $n+1$ области, за све $n \in \mathbb{N}$ важи $a_{n,1}=\binom{n}{1}+\binom{n}{0}$.

Предподставимо да је тврђење тачно за произвољан број хиперравни у димензијама мањим од d. Индукцијом по броју хиперравни n доказујемо да тврђење теореме важи и за $a_{n,d}$. Једна хиперраван подели $\mathbb{R}^d$ на два дела, па је $a_{1,d}=\binom{1}{1}+\binom{1}{0}=2$. Претпоставимо да теорема важи за $n-1$ хиперравни у општем положају у $\mathbb{R}^d$.

Сада треба да утврдимо за колико се повећа $a_{n-1,d}$ додавањем нове хиперравни π. Све постојеће хиперравни у $\mathbb{R}^d$ секу π и пресеци су $(d-2)$–димензионе равни (хиперравни у π). По индуктивној претпоставци за -1 , тих $n-1$ равни димензије $d-2$ подели нову раван π на $a_{n-1,d-1}$ области. Сваки од тих $(d-1)$–димензионих региона донесе један нови регион у подели $\mathbb{R}^d$. Стога важи да је $a_{n,d}=a_{n-1,d}+a_{n-1,d-1}$.

На основу индуктивне претпоставке за $a_{n-1,d}$ и $a_{n-1,d-1}$ важи

$$a_{n,d}=a_{n-1,d}+a_{n-1,d-1}=\binom{n-1}{0}+\left[\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{0}\right]+\left[\binom{n-1}{2}+\binom{n-1}{1}\right]+$$

$$+\cdots+\left[\binom{n-1}{d}+\binom{n-1}{d-1}\right]=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{d}.$$

■

2. МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА У НАСТАВИ

МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА У ТРЕЋЕМ РАЗРЕДУ СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

Неку особину природних бројева означимо са P, а чињеницу да та особина важи за број n се означава са $P(n)$. Питање је како проверити да ли сви природни бројеви имају ту особину, и да би то утврдили потребно је проверити следеће ставке

1. Да ли тврђење важи за број 1, односно да ли важи $P(1)$-*база индукције*
2. Претпоставимо да је тврђење тачно за број k односно да важи $P(k)$ и покажимо да то повлачи да твђење важи за $P(k+1)$, тј $P(k) \Rightarrow P(k+1)$-*индуктивни корак*

Па ако су ове две ставке задовољене то онда значи да је тврђење P тачно за било који природан број.

Ученицима се наведе да морају бити опрезни јер тврђење можда неће важити за природне бројеве мање од n_0, али зато ће важити следеће

1. тврђење важи за број n_0, , односно важи $P(n_0)$ -*база индукције*
2. за $k > n_0$, имамо $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ -*индуктивни корак*

Па ако су ове две ставке задовољене то онда значи да је тврђење P тачно за било који природан број n тако да, $n > n_0$.

Наведимо сада неке типичне примере на којима се вежба математичка индукција у гимназији.

Пример 1: доказати Гаусов формулу за сабирање првих n природних бројева.

Формула изгледа овако: $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ односно кажемо да природни број n има особину P ако важи горња једнакост.

Упознајмо се са поступком решења:
(БИ)база индукције: показати да тврђење важи за 1
(ХИ)хипотеза индукције: претпоставимо да тврђење важи за неки природан број k
(ИК)индуктивни корак: доказујемо да из (ХИ) следи да трвђење важи за природни број $k+1$
(ПМИ)принцип математичке индукције: на основу принципа математичке индукције закључујемо да тврђење важи за све природне бројеве

(БИ) за $n = 1$,имао $1 = \frac{2}{2}$, што је тачно па тврђење важи за $n = 1$,

(ХИ) претпоставнимо да за неко $k \in \mathbb{N}$ важи $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

(ИК) докажимо да тврђење важи за $k+1$

$$\text{(ХИ)} \ :1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Саберимо и леву и десну страну ове једнакости са $k+1$

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$1+2+\cdots+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Чиме је доказивање завршено.

(ПМИ) на крају се инсистира да се ученик позове на принцип математичке индукције и на основу њега закључи да ово својство важи за све природне бројеве.

Пример 2: доказати да $3\mid 5^{n-1}+2^n$

(БИ) за $n=1$, имао да $3\mid 5^0+2^1$, па тврђење важи за $n=1$,

(ХИ) претпоставимо да за неко $k\in\mathbb{N}$ важи $3\mid 5^{k-1}+2^k$,

(ИК) докажимо да тврђење важи за $k+1$

(ХИ) :$3\mid 5^{k-1}+2^k$

Приметимо да ако помножимо $5^{k-1}+2^k$ са 2 да ће то и даље бити дељиво са 3, односно

$$3\mid 2\cdot(5^{k-1}+2^k)$$

А са друге стране имамо

$$2\cdot\left(5^{k-1}+2^k\right)=2\cdot 5^{k-1}+2^{k+1}=(5-3)\cdot 5^{k-1}+2^{k+1}=(5^k+2^{k+1})-3\cdot 5^{k-1}$$

Па отуда 5^k+2^{k+1} мора бити дељиво са 3.

(ПМИ) на крају се инсистира да се ученик позове на принцип математичке индукције и на основу њега закључи да ово својство важи за све природне бројеве.

Ученици веома често при обради ове наставне теме мисле да је суштина индукције индуктивни корак, и ако су то урадили сматрају да су сви предуслови да се позову на принцип математичке индукције испуњени.
Следећи пример треба да илуструје где ученици најчешће греше

Пример 3: Испитати за које природне бројеве важи $2^n>n^2$.

(БИ) ученици често изоставе овај корак или ако га не изоставе провере да ли важи за 1, што јесте тачно, али неједнакост неће важити за 2, 3 и 4

(ХИ) претпоставе да за неко $k\in\mathbb{N}$ важи $2^k>k^2$, за неко $k\geq 5$, (ИК) докажу да тврђење важи за $k+1$

$$(\text{ХИ}) \ : \ 2^k > k^2$$

Приметимо да би било идеално када би важило $2 > \frac{(k+1)^2}{k^2}$, па онда леву страну множимо са левом, а десну са десном.
Дакле, посматрајмо $\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{25} = 1 + \frac{11}{25} < 2$

Односно имамо да важи $2 > \frac{(k+1)^2}{k^2}$

Па онда имамо и $2^{k+1} > (k+1)^2$

(ПМИ) на крају ученици често на основу важења једнакости за 1 закључе да неједнакост важи за све природне бројеве или без икаквог испитивања базе индукције донесу исти закључак.

РЕКУРЗИЈА У НАСТАВИ РАЧУНАРСТВА

У настави рачунарства, што у средњој школи, што на факултетима, се често користи пример Ханојских кула за објашњавање принципа математичке индукције и рекурзије.

Пример 1:
Проблем ханојских кула.
Опис проблема: постоје три штапа, на једном штапу се налазе дискови, наравно са толиком рупом на средини да се могу натакнути на штап, и мора диск мањег пречника да се налази на диску већег пречника. Потребно је пребацити дискове са једног штапа тако да се никада не сме десити ситуација да је већи диск на мањем.

Алгоритам решења:
Прво ћемо да поставимо функцију која изражава овај проблем $H(n,x,y,z)$ где је n број дискова, x је штап на коме се налазе дискови, y је штап на који треба пребацити дискове, и z је помоћни штап. Дефинишимо функцију на следећи начин:

$$H(n,x,y,z) = \begin{cases} \text{пребаци диск са } x \text{ на } y \text{ ако је } n = 1 \\ H(n-1,x,z,y), \text{пребаци диск са } x \text{ на } y, H(n-1,z,y,x) \text{ за } \ n > 1 \end{cases}$$

Решење проблема димензије n се заснива на решавању проблема димензије $n-1$ па ова функција дефинитивно јесте рекурзивна.

```
(0)  _|_       |        |
    __|__      |        |
   ___|___     |        |
 ____|____ ____|____ ____|____

(1.1) |        |        |
    __|__      |        |
   ___|___    _|_       |
 ____|____ ____|____ ____|____ (A -> B)
```

```
(1.2) |         |         |
     |         |         |
   __|__     _|_     _|_
  ___|___  ___|___  ___|___ (A -> C)

(1.3) |         |         |
     |         |        _|_
   __|__      |       _|_
  ___|___  ___|___  ___|___ (A -> C)


(2.1) |         |         |
     |         |        _|_
     |       __|__    _|_
  ___|___  ___|___  ___|___ (A -> B)


(3.1) |         |         |
     |         |         |
    _|_     __|__     _|_
  ___|___  ___|___  ___|___ (C -> A)

(3.2) |         |         |
     |        _|_        |
    _|_     __|__       |
  ___|___  ___|___  ___|___ (C -> B)

(3.3) |        _|_        |
     |        _|_        |
     |       __|__       |
  ___|___  ___|___  ___|___ (A -> B)
```

$H(3, \mathrm{A}, B, C)$						
$H(2, A, C, B)$			$A \rightarrow B$	$H(2, C, B, A)$		
$H(1, A, B, C)$	$A \rightarrow C$	$H(1, B, C, A)$		$H(1, C, A, B)$	$C \rightarrow B$	$H(1, A, B, C)$
$A \rightarrow B$		$B \rightarrow C$		$C \rightarrow A$		$A \rightarrow B$

Пример кода у $C++$

```
#include<iostream>
usingnamespacestd;
voidhanoj(intn,charx,chary,charz){
    if(n>1) hanoj(n-1,x,z,y);
    cout<<"prebaci sa "<<x<<" na "<<y<<endl;
    if(n>1) hanoj(n-1,z,y,x);
    }
intmain () {
   intn;
   cout<<"Unesite broj diskova: "<<endl;
   cin>>n;
   hanoj(n,'1','2','3');
return0;
}
```

Сада би било интересантно видети који је број корака. То се може решити тако што ћемо у наш програм ставити бројач, и тада можемо увидети правилност да број корака потребан за решење n димензионог проблема ханојских кула $2^n - 1$. Означимо са $P(n)$ број корака за решење n димензионог проблема и добијамо формулу $P(n) = 2^n - 1$.
Како бисмо ово доказали?
Овај проблем спада у домен енумеративне комбинаторике. Велики број проблема из ове области се решава тако што се прво успостави рекурзивна релација, па се онда тражи експлицитна формула.
Запитајмо се колико нам корака захтева $n + 1$ димензиони проблем и увидимо следеће: да би прво требало пребацити n дискова на помоћни штап, а затим највећи диск са почетног штапа треба пребацити на циљани штап, па онда опет са помоћног штапа треба пребацити n дискова на циљани штап. Другим речима два пута смо пребацивали по n дискова и једном један диск па је $P(n+1) = 2P(n) + 1, P(n) = 1$. И ово је једна рекурзивна релација која је линеарна и нехомогена. А она се решава тако што прво решимо хомогени део $P(n+1) = 2P(n)$ па том решењу придодамо још неко партикуларно решење нехомогене једначине.

Решимо прво хомогени део.
Како је хомогени део $P(n+1) = 2P(n)$ то је његова карактеристична једначина $x = 2$, је опште решење хомогеног дела $P(n) = C2^n$, а једно партикуларно решење је $P(n) = -1$, па је опште решење читаве једначине $P(n) = C2^n - 1$, и још треба одредити колико је C, а то ћемо лако наћи ако у релацију убацимо $n = 1$, па добијамо да је и $C = 1$. И коначно смо показали и доказали да је $P(n) = 2^n - 1$.

■

Рекурзија се у рачунарсту користи и за сортирање низова. Проблем сортирања низова је у рачунарству и даље актуелан и увек се траже начини за убрзање. Класични алгоритми за сортирање су bubble sort или selection sort, док су много бржи алгоритми који се базирају на рекурзији, а то су merge sort и quick sort.

QUICK SORT

Идеја алгоритма:

- одабере се један члан низа који називамо пивот
- низ се сортира тако да сви мањи чланови од пивота буду са леве стране односно да сви већи чланови буду са десне стране
- рекурзивно се на исти начин уреди леви односно десни подниз

Код:

```
void razmeni(ref int x, ref int y)
{
int p = x;
x = y;
y = p;
}
int podeli(int[] a, int leva, int desna)
{
int k, i;
k = leva;
for (i = leva + 1; i <= desna; i++)
if (a[i] < a[leva])
{
razmeni(ref a[i], ref a[k+1]);
```

```
k++;
}
razmeni(ref a[leva], ref a[k]);
return k;
}
void quickSort(int[] a, int l, int d)
{
if (l < d)
{
int k = podeli(a, l, d);
quickSort(a, l, k - 1);
quickSort(a, k + 1, d);
}
}
void Sort(int[] a, int n)
{
quickSort(a, 0, n-1);
}
```

Анализа брзине рада алгоритма и поређење са осталим алгоритмима:

	B	A	W
B	$Q(n)$	$Q(n^2)$	$Q(n^2)$
I	$Q(n)$	$Q(n^2)$	$Q(n^2)$
S	$Q(n^2)$	$Q(n^2)$	$Q(n^2)$
M	$Q(nlnn)$	$Q(nlnn)$	$Q(nlnn)$
Q	$Q(nlnn)$	$Q(nlnn)$	$Q(n^2)$

Bubblesort(B), Insertionsort (I), Selectionsort (S), Mergesort (M), Quicksort (Q), Најбоље време (B), Просечно време (A) Најгоре време (W)

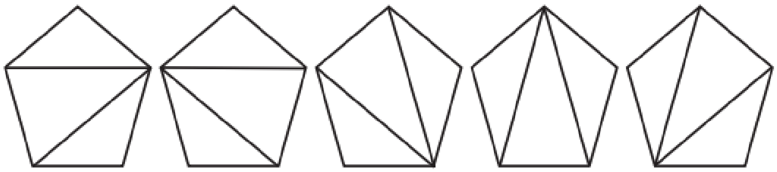
НЕКИ ПРИМЕРИ ПРИМЕНЕ МАТЕМАТИЧКЕ ИНДУКЦИЈЕ У ЗАДАЦИМА

Пример 1:
Одредити број триангулација конвексвног $n + 1$ −тоугла.

Прво објаснимо шта тачно значи триангулација. Дакле, триангулација конвексног n −тоугла, нпр. $P_n = A_1A_2 \ldots A_n$, је подела тог n −тоугла на троуглове помоћу дијагонала тако да за те троуглове важи

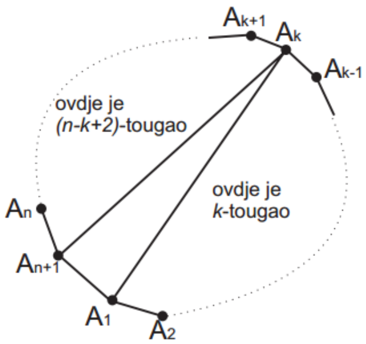
- *или су дисјунктни*
- *или имају само једно заједничко теме*
- *или имају једну заједничку ивицу.*

Број триангулација троугла је један и то означавамо $T_3 = 1$, број тиангулација четвороугла је два, $T_4 = 2$, док је број триангулација петоугла пет и то је јасно на основу слике доле, $T_5 = 5$.



Договоримо се да $T_1 = 0, T_2 = 1$. И сада треба одредити T_n.

Нека је $\mathfrak{I}_{n+1}$ скуп свих могућих триангулација конвексног $n+1$ −тоугла, $P_{n+1} = A_1A_2 \dots A_{n+1}$. Уочимо страницу $A_1A_n + 1$ тог полигона. У свакој триангулацији $T \in \mathfrak{I}_{n+1}$ страница A_1A_{n+1} је страница неког троугла



За све $k = 2,3, \dots, n$, са $\mathfrak{I}_{n+1}^k$ означимо све оне триангулације које садрже троугао $\Delta\, A_1A_kA_{n+1}$.

Ако је један троугао триангулације P_{n+1}, управо троугао $\Delta\, A_1A_kA_{n+1}$, до потпуне триангулације је потребно још извршити триангулацију $k-$ тоугла $A_1A_2 \dots A_k$ и $(n+2-k)-$ тоугла $A_kA_{k+1} \dots A_{n+1}$. Зато је $\left|\mathfrak{I}_{n+1}^k\right| = T_kT_{n+2-k}$.

Како је $\mathfrak{I}_{n+1}$ дисјунктна унија $\mathfrak{I}_{n+1}^2, \mathfrak{I}_{n+1}^3, \dots, \mathfrak{I}_{n+1}^n$, па је

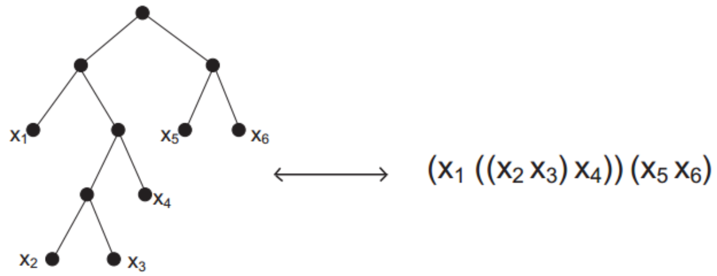
$$T_{n+1} = T_2T_n + T_3T_{n-1} + \cdots + T_nT_2.$$

Ако са C_n означимо број триангулација конвексног $n+2$ −тоугла уз почетне услове $C_0 = C_1 = 1$ добијамо Каталанове бројеве за које важи следећа рекурзивна релација

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_{0.}$$

Каталанови бројеви се веома често појављују као решења разноразних комбинаторних проблема. Ево једног таквог нпр:

Пример 2:
Колико различитих бинарних стабала са $n+1$ листом има?



Број бинарних стабала са $n+1$ листом означимо са b_n, и приметимо да је тај број једнак броју различитих редоследа множења листова $x_1x_2\cdots x_{n+1}$. Редослед множења ћемо одређивати заградама и можемо распоредити укупно $n-1$ заграду, само је питање на колико начина.
Приметимо да је $b_0 = b_1 = 1$,
Даље, сваки производ $x_1x_2\cdots x_n$ можемо да овако да поделимо $(x_1x_2\cdots x_i)(x_{i+1}x_{i+2}\cdots x_{n+1})$где $i = 1,2,\dots,n$. Још је потребно распоредити заграде унутар $x_1x_2\cdots x_i$и $x_{i+1}x_{i+2}\cdots x_n$ и јасно је да се то може учинити на b_{n-1} односно на b_{n-i} начина.
Тако да очигледно важи

$$b_n = b_0b_{n-1} + b_1b_{n-2} + \cdots + b_{n-1}b_{0.}$$

Пример 3:
Ако су u и v n пута диференцијабилне функције онда важи следећа Лајбницова формула

$$(1)\ (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)}$$

Доказ:
Докажимо формулу (1) математичком индукцијом.
За $n=1$је $(uv)' = u'v + uv'$.
Претпоставимо да формула (1) важи за неко $n \in \mathbb{N}$. Тада је

$$(uv)^{(n+1)} = \left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)}\right]' = u^{(n+1)}v + \left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right]u^{(n)}v'$$

$$+\cdots+\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]u^{(n+1-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)}$$

Јер је $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$.

Пример 4: (СССР, 1973.)
Тачка O лежи на правој l; $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \dots, \overrightarrow{OP_n}$ су јединични вектори, такви да тачке $P_1, P_2, \dots, P_n$ леже у равни којој припада права l и налазе се са исте стране те праве. Ако је n непаран број, доказати да је $\left|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \cdots + \overrightarrow{OP_n}\right| \geq 1$.

Доказ:
Доказ ћемо извести методом математичке индукције. Јасно, тврђење је тачно за $n=1$.
Претпоставимо да је оно тачно за сваких n тачака које задовољавају услове задатка и докажемо да је оно тачно и за сваке $n+2$ тачке које задовољавају услове задатка

(доказујемо за $n+2$, јер је n непаран број). Можемо сматрати да су тачке означене тако да је $\angle\left(l, \overrightarrow{OP_1}\right) < \angle\left(l, \overrightarrow{OP_2}\right) < \cdots < \angle\left(l, \overrightarrow{OP_{n+2}}\right)$. У равни у којој се налазе тачке P_i постављамо координатни систем на следећи начин: y −оса је симетрала $\angle P_1 O P_{n+2}$, а x −оса пролази кроз тачку O. Тада је, ако су (x_i, y_i) координате тачке P_i у датом координатном систему, $y_i \geq 0$ и $x_1 = -x_{n+2}$, $y_1 = y_{n+2}$ па је

$$\left|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \cdots + \overrightarrow{OP_n}\right| = (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+2})^2 + (y_1 + y_2 + \cdots + y_{n+2})^2 =$$
$$= (x_2 + \cdots + x_{n+1})^2 + (y_1 + y_2 + \cdots + y_{n+2})^2 \geq (x_2 + \cdots + x_{n+1})^2 + (y_2 + \cdots + y_{n+1})^2 =$$
$$= \left|\overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} + \cdots + \overrightarrow{OP_{n+1}}\right|^2$$

По индуктивној претпоставци је $\left|\overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} + \cdots + \overrightarrow{OP_{n+1}}\right| \geq 1$,па из претходног добијамо $\left|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \cdots + \overrightarrow{OP_n}\right| \geq 1$.

Пример 5: Нека су a, b позитивни бројеви такви да $ab + 1 | a^2 + b^2$ Доказати да је $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ потпун квадрат.

Нека је $\frac{a^2+b^2}{ab+1} = k \in \mathbb{N}$. Очигледно важи $\min\{a, b\} \geq k$. Ако не, узмимо да је $a^2 < k$ онда имамо $b^2 - kab = b(b - ka) = k - a^2 > 0$, $b > ka$. Коначно имамо $b = ka + x$ за $x \in \mathbb{N}$. Па због тога из $a^2 + b^2 = k(ab + 1)$ добијамо $\mathrm{a}^2 + (\mathrm{ka} + \mathrm{x})^2 = \mathrm{ka}(\mathrm{ka} + \mathrm{x}) + \mathrm{k}$, $a^2 + kax + x^2 = k$. Али то онда значи да важи $k \leq kax < a^2 + kax + x^2 = k$, што је немогуће.
Нека је $S = \left\{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : \frac{m^2+n^2}{mn+1} = k, m \geq n\right\}$. Скуп S је непразан јер $(a, b) \in S$ или $(b, a) \in S$. Према принципу најмањег елемента постоји пар $(c, d) \in S$ тако да је његова друга координата d најмањи број. Посматрајмо квадратну једначину $c^2 - kdc + d^2 - k = 0$ и нека су c и c' њена решења. Виетовим формулама добијамо да важи $c' = \frac{d^2-k}{c} \leq \frac{d^2-k}{d} < d$. Како је $d^2 \geq k$ онда је $c' \geq 0$. Ако је $c' > 0$ онда такође $(d, c') \in S$, али тада тај пар има мању другу координату од пара (c, d) што противречи избору од d. Коначно ако је $c' = 0$ онда је $k = d^2$.

Пример 6: Нека је $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таква да $f(n + 1) > f(f(n))$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је $f(n) = n$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

На основу принципа минималног елемента постоји $d = \min\{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$. Узмимо $m \in \mathbb{N}$ тако да $d = f(m)$. Ако је $m > 1$ онда важи $d = f(m) > f(f(m - 1))$, како је $f(m - 1) \in \mathbb{N}$ и има мању вредност од d закључујемо да је $m = 1$.
Слично, најмањи елемент скупа$\{f(n) : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$ је $f(2)$. Ако важи $f(2) = f(1)$ онда је $f(2) = f(1) > f(f(1))$ што је супротно избору $f(1)$. Ако наставимо са овим приступом, имамо $f(1) < f(2) < \cdots < f(n) < \cdots$, и како је $f(1) \geq 1$, добијамо $f(k) \geq k$.
Коначно, ако је $f(k) > k$ за неко $k \in \mathbb{N}$, онда је $f(k) \geq k + 1$ па важи $f(f(k)) \geq f(k + 1)$. Са друге стране према поставци задатка имамо да важи $f\left(f(k)\right) < f(k + 1)$, што је немогуће. Па закључујемо да је $f(k) = k$, за свако $k \in \mathbb{N}$.

Пример 7: (Силвестеров проблем) Ако у коначном скупу од $n \geq 3$ тачака важи да било која права која пролази кроз две тачке пролази и кроз неку трећу тачку, онда су све тачке скупа колинеарне.
Нека је скуп , скуп који има тражену особину. Претпоставимо супротно, тј. да нису све тачке колинеарне. Посматрајмо скуп $\mathcal{L}$, и нека је тај скуп, скуп свих правих одређених тачкама скупа $\mathcal{P}$. Сада, за сваку тачку $P \in \mathcal{P}$ и сваку праву $l \in \mathcal{L}$, за коју важи $P \notin l$ посматрајмо уређени пар (P, l). Очигледно је да је број тих уређених парова коначан. Због тога постоји нека тачка P_0 и права l_0 и уређени пар (P_0, l_0), за који важи да је удаљеност од тачке P_0 од праве l_0, најмања међу свим уређеним паровима. Нека је тачка Q пројекција тачке P_0 на праву l_0. Како права l_0 садржи барем три различите тачке скупа $\mathcal{P}$, барем ће две од тих тачака бити са исте стране тачке у односу на тачку Q. Означимо те тачке са R и

S. Тада тачка R има растојање од праве која је одређена тачкама P_0 и S мање него што је тачка P_0 удаљена од праве l_0. И тиме смо дошли до контрадикције.

Пример 8: Нека је $a = \sqrt[2015]{2015}$. Шта је веће $\left.a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}\right\}2015$ пута или 2015?

Докажимо методом математичке индукције нешт општије тврђење да је

$\left.a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}\right\}n$ пута < 2015, за свако n природан број.

База индукције: за $n = 1$ може се доказати да је ово тачно, јер је $a = \sqrt[2015]{2015} < 2015$.
Индукцијска претпоставка: претпоставимо да је тврђење тачно за неко $n = k$ природан број, тј. нека је $b = \left.a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}\right\}k$ пута < 2015.

Индукцијски корак: ако је тврђење тачно за $n = k$ природан број тада је $b < 2015$, па је $\left.a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}\right\}\kappa + 1$ пута $= a^b < a^{2015} = 2015$. То значи да је тврђење тачно и за $n = k + 1$.

На основу метода математичке индукције доказали смо тврђење за свако n природан број, па ће онда тврђење да важи и за n=2015, а тиме управо добијамо да смо доказали оно што је потребно у задатку. За $n = 2015$ добијамо да је $\left.a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}\right\}2015$ пута < 2015.

Пример 9: Нека је $S \subseteq \mathbb{N}$, који има следећа својства:

1. међу сваких 2015 узастопних природих бројева постоји један који је садржан у S;
2. ако $n \in S$ и $n > 1$, онда и $\left[\dfrac{n}{2}\right] \in S$.

Доказати да је $S = \mathbb{N}$.

Нека је $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ дефинисана са $f(m) = \left[\dfrac{m}{2}\right]$. Како је $f^{-1}\{n\} = \{2n, 2n+1\}$ (за свако $n \in \mathbb{N}$) индукцијом по κ следи да је $\underbrace{f^{-1}\left(f^{-1}\left(\ldots f^{-1}\right.\right.}_{k}\{n\}\left.\left.\ \right)\ \right) = \{2^k n, 2^k n+1, \ldots, 2^k n + 2^k - 1\}$.

1) База k=1: $f^{-1}\{n\} = \{2n,\ 2n+1\}$
2) Индукцијска хипотеза k: $\underbrace{f^{-1}\left(f^{-1}\left(\ldots f^{-1}\right.\right.}_{k}\{n\}\left.\left.\ \right)\ \right) = \{2^k n, 2^k n+1, \ldots, 2^k n + 2^k - 1\}$
3) Индукцијски корак $k \Rightarrow k+1$; за k+1 тврђење гласи
$\underbrace{f^{-1}\left(f^{-1}\left(\ldots f^{-1}\right.\right.}_{k}\{n\}\left.\left.\ \right)\ \right) = \{2^{k+1} n, 2^{k+1} n+1, \ldots, 2^{k+1} n + 2^{k+1} - 1\}$

Када се узме хипотеза следи:

$$\underbrace{f^{-1}\left(f^{-1}\left(\ldots f^{-1}\{n\}\right)\right)}_{k} = f^{-1}\left\{2^k n, 2^k n+1, \ldots, 2^k n+2^k-1\right\} =$$

$$=\left\{2\cdot 2^k n, 2\cdot 2^k n+1, 2\cdot\left(2^k n+1\right), 2\cdot\left(2^k n+1\right)+1, \ldots, 2\cdot\left(2^k n+2^k-1\right), 2\cdot\left(2^k n+2^k-1\right)+1\right\} =$$

$$=\left\{2^{k+1}n, 2^{k+1}n+1, \ldots, 2^{k+1}n+2^{k+1}-2, 2^{k+1}n+2^{k+1}-1\right\}$$

За $\kappa=11$ следи да се за свако $n\in\mathbb{N}$ се $2^{11}>2015$ узастопних бројева након 11 итерација функције слика у n. Како је бар један од њих у S и како f слика број из S опет у S , следи тврђење задатка.

Пример 10: Доказати да је за сваки природан број n број $\left[\left(5+\sqrt{35}\right)^{2n-1}\right]$ дељив са 10^n .

Нека је $a_m=\left(5+\sqrt{35}\right)^m+\left(5-\sqrt{35}\right)^m$ за $m\in\mathbb{N}$. Они задовољавају рекурентну формулу $a_{m+2}=10a_{m+1}+10a_m$ и $a_0=2, a_1=10$.

Добија се опште решење $a_m=c_1\left(5+\sqrt{35}\right)^m+c_2\left(5-\sqrt{35}\right)^m$, заменом за m=0,1 добија се

$$m=0:\quad 2=c_1+c_2$$

$$m=1:\quad 10=c_1\left(5+\sqrt{35}\right)+c_2\left(5-\sqrt{35}\right)$$

$$-2\left(5+\sqrt{35}\right)+10=c_2\left(-5-\sqrt{35}+5-\sqrt{35}\right)$$

$$-2\sqrt{35}=c_2\cdot\left(-2\sqrt{35}\right)\Rightarrow c_2=1 \quad c_1=1 \quad mj.\ a_m=\left(5+\sqrt{35}\right)^m+\left(5-\sqrt{35}\right)^m$$

Докажимо индукцијом да је a_{2m-1} и a_{2m} дељиво са 10^m .

1) База m=1; $a_{2\cdot 1-1}=a_1=10$ и дељиво је са 10^1
   $a_{2\cdot 1}=a_2=10a_1+10a_0=10\cdot 10+10\cdot 2=120$ и дељиво је са 10^1
2) Индукцијска хипотеза: нека тврђење важи за m=k, тј. нека су $a_{2\kappa-1}$ и $a_{2\kappa}$ дељиви са 10^k
3) Идукцијски корак: докажимо да тврђење важи за $m=k+1$ тј. да $a_{2(k+1)-1}$ и $a_{2(k+1)}$ су дељиви са 10^{k+1}

$$a_{2(k+1)-1}=a_{2k+1}=10\cdot a_{2k}+10a_{2k-1}=10\cdot\left(a_{2k}+a_{2k-1}\right)=10\cdot 10^k\cdot l=10^{k+1}\cdot l,\quad l\in\mathbb{N}$$

$$a_{2(k+1)}=a_{2k+2}=10\cdot a_{2k+1}+10a_{2k}=10\cdot 10^{k+1}\cdot l+10\cdot 10^k\cdot t=10^{k+1}\left(10l+t\right),\quad l,t\in\mathbb{N}$$

па је тиме доказано ово помоћно тврђење.

Индукцијом се добија да су за све $m\in\mathbb{N}$ бројеви a_{2m-1} и a_{2m} дељиви са 10^m . Пошто је $-1<5-\sqrt{35}<0$, за непарно m је $-1<\left(5-\sqrt{35}\right)^m<0$, па је $\left[\left(5+\sqrt{35}\right)^m\right]=a_m$.

$a_m = \left[\left(5+\sqrt{35}\right)^m\right]$ за непарно m, тј. $a_{2n-1} = \left[\left(5+\sqrt{35}\right)^{2n-1}\right]$, а управо је доказано да је то дељиво са 10^m.

Пример 11: Нека је n паран број и S скуп свих низова дужине n чији су чланови нуле и јединице, а бар један члан сваког низа једнак је 1. Доказати да се S може поделити на дисјунктне трочлане подскупове тако да важи: за свака три низа $\{a_i\}_{i=1}^n$, $\{b_i\}_{i=1}^n$, $\{c_i\}_{i=1}^n$ који припадају истом подскупу и свако $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ број $a_i + b_i + c_i$ дељив је са 2.

Тврђење доказујемо индукцијом по n. За $n=2$ то је очигледно (скуп S већ и сам има 3 елемента, $S=\{01,10,11\}$). Нека је, зато, $n \geq 4$. Означимо са S_n скуп свих не-нула низова дужине n састављених од нула и јединица. Дефинишимо следеће скупове:

T_0 - скуп свих низова којима су првих $n-2$ чланова једнаки 0 (T_0 има само три елемента; то су $\underbrace{00\ldots0}_{n-2}01$, $\underbrace{00\ldots0}_{n-2}10$, $\underbrace{00\ldots0}_{n-2}11$);

T_{00} - скуп свих низова којима су последња два члана једнака 0 (то су сви низови из S_{n-2} којима је на крају дописано 00);

T_{01} - скуп свих низова из S_{n-2} којима је на крају дописано 01;

T_{10} - скуп свих низова из S_{n-2} којима је на крају дописано 10;

T_{11} - скуп свих низова из S_{n-2} којима је на крају дописано 11;

Јасно је да је $S_n = T_0 \cup T_{01} \cup T_{10} \cup T_{11}$ (дисјунктна унија). Поделимо скуп S_{n-2} на троелементне подскупове који задовољавају постављени услов, и на исти начин ("заборављајући" последње две цифре) поделимо скуп T_{00}. Троелементни скуп T_0 и скупови настали поделом скупа T_{00} задовољавају постављени услов. Остатак троелементних скупова правимо на следећи начин: за сваки скуп $G=\{a,b,c\}$ из поделе скупа S_{n-2} дефинишимо низ:

$$a^{01} = \left(a_i^{01}\right)_{i=1}^n, \qquad a_i^{01} = \begin{cases} a_i, & 1 \leq i \leq n-2, \\ 0, & i = n-1, \\ 1, & i = n \end{cases}$$

и, аналогно, низове $a^{10}, a^{11}, b^{01}, b^{10}, b^{11}, c^{01}, c^{10}, c^{11}$. Јасно је да $a^{01}, b^{01}, c^{01} \in T_{01}$; $a^{10}, b^{10}, c^{10} \in T_{10}$ и $a^{11}, b^{11}, c^{11} \in T_{11}$.

Скупови $G_1 = \{a^{01}, b^{10}, c^{11}\}$, $G_2 = \{a^{10}, b^{11}, c^{01}\}$, $G_3 = \{a^{11}, b^{01}, c^{10}\}$ имају тражено својство. На овај начин смо сваком елементу из поделе скупа S_{n-2} придружили три троелементна подскупа скупа $T_0 \cup T_{10} \cup T_{11}$ са траженом особином. Није тешко проверити да ови подскупови заједно са T_0 и T_{00} у унији дају S_n.

Пример 12: Свака страница и свака дијагонала конвексног n-тоугла, где је $n \geq 3$, обојена је плаво или црвено. Доказати да се темена n-тоугла могу означити са $A_1, A_2, \ldots, A_n$, тако да важи један од следећа два услова:

(а) све дужи $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ обојене су истом бојом;

(б) постоји број $\kappa, 1<k<n$, тако да су дужи $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{\kappa-1}A_\kappa$ плаве, а дужи $A_kA_{k+1}, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ црвене.

Доказ ћемо извести индукцијом по n.
За $n=3$ тврђење очигледно важи. Претпоставимо да је доказано тврђење за $n-1$ где је $n \geq 4$. Нека је $A_1A_2 \ldots A_{n-1}$ тражено означавање типа (a) у $n-1$-тоуглу $A_1A_2 \ldots A_{n-1}$.
Нека су све дужи $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_1$ нпр. плаве. Задржимо исто означавање увек, сем у случају да је дуж $A_{n-1}A_n$ црвена, а дуж A_nA_1 плава. Тада ћемо их означити у редоследу $A_n, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$.
Нека је $A_1A_2 \ldots A_{n-1}$ тражено означавање типа (b) у $n-1$-тоуглу $A_1A_2 \ldots A_{n-1}$ и нека су дужи $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{\kappa-1}A_\kappa$ плаве, а дужи $A_kA_{k+1}, \ldots, A_{n-1}A_1$ црвене. Ако је дуж A_nA_κ плава, тражено означавање темена n-тоугла је $A_1A_2 \ldots A_kA_nA_{k+1} \ldots A_{n-1}$, а ако је црвена $A_1A_2 \ldots A_{k-1}A_nA_k \ldots A_{n-1}$.
На основу математичке индукције смо доказали тврђење.

Пример 13: Ако су $a_1, a_2, \ldots, a_k$ произвољни реални бројеви и $R_k(x)$ и $S_k(x)$ реални полиноми такви да је

$$P_k(x) = (x+a_1-i)(x+a_2-i)\ldots(x+a_k-i) = R_x(x) + iS_k(x)$$

Тада полиноми $R_k(x)$ имају k реалних корена $\alpha_{k,1} < \alpha_{k,2} < \ldots < \alpha_{k,k}$ и при том је

$$\alpha_{k,1} < \alpha_{k-1,1} < \alpha_{k,2} < \alpha_{k-1,2} < \ldots < \alpha_{k-1,k-1} < \alpha_{k,k}$$

где су $\alpha_{k-1,1}$ корени полинома $R_{k-1}(x)$.

Тврђење показујемо математичком индукцијом по k.

За $k=1$, $R_1(x) = x + a_1$ и јасно је да $R_1(x)$ има један реалан корен $\alpha_{1,1} = -a_1$. За $k=2$ имамо да је $R_2(x) = x^2 + (a_1+a_2)x + a_1a_2 - 1$, па из $R_2(-a_1) = -1$ добијамо да $R_2(x)$ има два реална корена $\alpha_{2,1}$ и $\alpha_{2,2}$ и да при том важи $\alpha_{2,1} < \alpha_{1,1} < \alpha_{2,2}$.
Претпоставимо сада да тврђење важи за $k=d$ и покажимо да важи за $k=d+1$.
Имајући у виду да је $P_{m+1}(x) = P_m(x) \cdot (x + a_{m+1} - i)$ добијамо

$$P_{m+1}(x) = (x+a_{m+1})R_m(x) + S_m(x) + i \cdot \left[(x+a_{m+1})S_m(x) - R_m(x)\right].$$

Добијамо да важе рекурентне везе:

$$R_{m+1}(x) = (x+a_{m+1})R_m(x) + S_m(x)$$

$$S_{m+1}(x) = (x + a_{m+1}) S_m(x) - R_m(x)$$

Из прве релације имамо $S_m(x) = R_{m+1}(x) - (x + a_{m+1}) R_m(x)$, а из друге онда налазимо рекурентну везу
$R_{m+2}(x) - (x + a_{m+2}) R_{m+1}(x) = (x + a_{m+1}) \cdot \left[R_{m+1}(x) - (x + a_{m+1}) R_m(x) \right] - R_m(x)$, односно

$$R_{m+2}(x) = R_{m+1}(x) \cdot \left[(x + a_{m+2}) + (x + a_{m+1}) \right] - R_m(x) \cdot \left[(x + a_{m+1})^2 + 1 \right].$$

Сада се враћамо на индукцијски корак:

$$R_{d+1}(x) = R_d(x) \cdot \left[(x + a_{d+1}) + (x + a_d) \right] - R_{d-1}(x) \cdot \left[(x + a_d)^2 + 1 \right].$$

Вредности $\operatorname{sgn}(R_{d+1}(x))$ у тачкама $\alpha_{d,1}, \alpha_{d,2}, \ldots, \alpha_{d,d}$ једнаке су редом

$$\begin{gathered} -\operatorname{sgn}(R_{d-1}(\alpha_{d,1})) = (-1)^d, \\ -\operatorname{sgn}(R_{d-1}(\alpha_{d,2})) = (-1)^{d-1}, \\ \vdots \\ -\operatorname{sgn}(R_{d-1}(\alpha_{d,d})) = -1 \end{gathered}$$

што заједно са чињеницом да је полином $R_{d+1}(x)$ полином $(d+1)$–вог степена (па за довољно мале вредности има знак $(-1)^{d+1}$) повлачи постојање $(d+1)$–ног корена полинома $R_{d+1}(x)$:

$$\alpha_{d+1,1} < \alpha_{d+1,2} < \ldots < \alpha_{d+1,d+1}$$

за које важи

$$\alpha_{d+1,1} < \alpha_{d,1} < \alpha_{d+1,2} < \alpha_{d,2} < \ldots < \alpha_{d+1,d} < \alpha_{d,d} < \alpha_{d+1,d+1}.$$

Овим је доказ индукцијом окончан.

Пример 14: За све целе $0 \le m \le n$ и произвољни полином P степена m важи

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} \binom{n}{i} P(i) = 0$$

Индукција по n. За $n = 0$ је константан полином, па испуњава дату једнакост, јер је $P(0) - P(1) = 0$. Нека је тврђење тачно за $n-1$ и нека је $P'(x) = P(x+1) - P(x)$. P' полином и важи $\deg P' = \deg P - 1 = m - 1 < n - 1$, па важи

$$\begin{aligned}
0 &= -\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i} \binom{n-1}{i} P'(i) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i} \binom{n-1}{i} \left(P(i) - P(i+1)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i} \binom{n-1}{i} P(i) - \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i} \binom{n-1}{i} P(i+1) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i} \binom{n-1}{i} P(i) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i} \binom{n-1}{i-1} P(i) \\
&= P(0) + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i} \left(\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i} \right) P(i) + (-1)^{n} P(n) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} \binom{n}{i} P(i),
\end{aligned}$$

тј. тврђење је тачно и за n.

Пример 15: У свакој од шест кутија $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ на почетку се налази тачно један новчић. Дозвољено је вршити следеће операције:

1. Изабрати непразну кутију B_j за неко $1 \le j \le 5$. Избацити један новчић из B_j и додати два новчића у B_{j+1}.
2. Изабрати непразну кутију B_k за неко $1 \le k \le 4$. Избацити један новчић из B_k и заменити садржаје (могу бити и празни) кутија B_{k+1} и B_{k+2}.

Испитати да ли се коначним низом оваквих операција може постићи да су кутије B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 празне, а кутија B_6 садржи тачно $2010^{2010^{2010}}$ новчића.

Операцијама вршеним на три кутије се од стања $(a,0,0)$ може доћи до стања $(a-k, 2^{k}, 0)$ за $1 \le k \le a$.

Доказ индукцијом; за $k = 1$ једном применом операције 1° се из $(a,0,0)$ добија $(a-1, 2^{1}, 0)$; ако је тврђење тачно за $1 \le k \le a$, из стања $(a-k, 2^{k}, 0)$ се 2^{k} пута примењујући операцију 1° на другу и трећу кутију долази до стања $(a-k, 0, 2^{k+1})$, одакле се применом операције 2° добија $(a-k-1, 2^{k+1}, 0)$. Нека је низ операција којима се из $(a,0,0)$ добија $(0, 2^{a}, 0)$ операција 3°.

Нека је $p_1 = 2,\ p_{n+1} = 2^{p_n}$ за $n \geq 1$. Операцијама вршеним на четири кутије се од стања $(a,0,0,0)$ може доћи до стања $(a-k,\ p_k,0,0)$ за $1 \leq k \leq a$.

Доказ индукцијом; за $k=1$ једном применом операције 1° се из $(a,0,0,0)$ добија $(a-1,2,0,0)=(a-1,\ p_1,0,0)$; ако је тврђење тачно за $1 \leq k \leq a$, из стања $(a-k,\ p_k,0,0)$ се примењујући операцију 3° на другу, трећу и четврту кутију долази до стања $(a-k,0,2^{p_k},0)=(a-k,0,\ p_{k+1},0)$, одакле се применом операције 2°на прве три кутије добија $(a-k-1,\ p_{k+1},0,0)$. Нека је низ операција којима се из $(a,0,0,0)$ добија $(0,\ p_a,0,0)$ операција 4°.

Применом операције 1° за $j=5$ се од $(1,1,1,1,1,1)$ добија $(1,1,1,1,0,3)$, а након тога, узастопним применама операције 2° за $k=4,\ k=3,\ k=2,\ k=1$, редом, долази до $(0,3,0,0,0,0)$. Затим се применом операције 4° (на кутије 2,3,4,5) долази до $(0,0,\ p_3,0,0,0)$, па применом опрерације 4° (на кутије 3,4,5,6) до $(0,0,0,\ p_{p_3},0,0)$. Нека је $4r = 2010^{2010^{2010}} = q$ (важи $4|q$). Како је $2010 < 2^{11}$ и $15 < p_{13}$, следи $q < 2^{11\cdot 2010^{2010}} < 2^{2010^{2011}} < 2^{2^{11\cdot 2011}} < 2^{2^{2^4\cdot 2^{11}}} = 2^{2^{2^{15}}} < 2^{2^{2^{p_{13}}}} = p_{16} = p_{p_3}$, па се $p_{16}-r$ пута примењујући операцију 2° за $k=4$ долази до стања $(0,0,0,r,0,0)$. Коначно, r пута примењујући операцију 1° за $j=4$ се долази до $(0,0,0,0,2r,0)$, а одатле $2r$ пута пимењујући операцију 1° за $j=5$ до $(0,0,0,0,0,4r)$, тј. $(0,0,0,0,0,q)$. Дакле одговор на питање задатка је позитиван.

ЗАКЉУЧАК

Овим радом хтео се нагласити значај математичке индукције, навођењем свих њених еквивалентних облика, у којима се она појављује у најширем спектру математичких проблема, те и колико је она битна за само заснивање математике. Тиме се хтело истаћи колико је њено место у образовном програму битно, па се коментарисало и у ком обиму се она обрађује у средњој школи, што кроз наставу математике, а што кроз наставу рачунарства. На крају је наведен одређен број проблема који на добар и интересантан начин могу да продубе знање ученика и студената.

ЛИТЕРАТУРА:

[1]Tinne Dewolf, Wim Van Dooren, Lieven Verschaffel, Centre for Instructional Psychology and Technology, UPPER ELEMENTARY SCHOOL CHILDREN'S UNDERSTANDING AND SOLUTION OF A QUANTITATIVE PROBLEM INSIDE AND OUTSIDE THE MATHEMATICS CLASS, Katholieke Universiteit Leuven, Received 23 December 20

[2]T. Dreyfus, ADVANCE MATHEMATICAL THINKING - edited by David Tall /Advanced Mathematical Thinking Processes , Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers

[3] Душко Јојић, ЕЛЕМЕНТИ ЕНУМЕРАТИВНЕ КОМБИНАТОРИКЕ , Бања Лука

[4]John F. Lucas INTRODUCTION TO ABSTRACT MATHEMATICS second edition, ,Ardsley House Publishers,1990

[5]N. M. McNeil, E. R. Fyfe "CONCRETENESS FADING"PROMOTE TRANSFER OF MATHEMATICAL KNOWLEDGE,Department of Psychology, University of Notre Dame

[6]Зоран Петровић и Жарко Мијајловић, МАТЕМАТИЧКА ЛОГИКА ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРИЈЕ СКУПОВА, Завод за уџбенике, Београд 2012.

[7]Миодраг Рашковић и Небојша Икодиновић, ПРИЧЕ О МАЛИМ И ВЕЛИКИМ БРОЈЕВИМА О БРОЈАЊУ, МЕРЕЊУ, ЗАКЉУЧИВАЊУ, Завод за уџбенике, Београд 2010.

[8]Gila Ronand, Tommy Dreyfus THE USE OF MODELS IN TEACHING PROOF BY MATHEMATICAL INDUCTION Tel Aviv University, Israel

[9]Hans Freudenthal ,MATHEMATICS AS AN EDUCATIONAL TASK, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht/Holland, 1973.