UNIVERZITET U BEOGRADU

Dragoslav Kuzmanović

TERMOKONSOLIDACIJA U ZASIĆENOJ I NEZASIĆENOJ VESKOELASTIČNOJ SREDINI

(doktorska disertacija)

Beograd, 1986.

A mes parents, pour le jour

A Ljilja, pour l'amour

SADRŽAJ

PREDGOVOR

Ovaj rad je saopštavan na sastancima Grupe za reologiju Jugoslovenskog društva za mehaniku. Tokom izlaganja su vodjene diskusije koje su mi pomogle pri izradi rada, pa se najtoplije zahvaljujem, na pomoći, svim članovima.

Posebnu zahvalnost dugujem Dr Nataliji Naerlović-Veljković koja je u mnogome doprinela, svojim znanjem i iskustvom, da rad dobije ovakav oblik.

Takodje se zahvaljujem Dr Jovu Jariću, koji je imao svog udela u izradi teze, kao i Dr Petru Milanoviću, Dr Jovanu Šutiću i Dr Milošu Vlahoviću koji su mi, kroz plodne diskusije, pomogli da rad dovedem do kraja.

UVOD

Teorija poroznih, fluidom zasićenih i nezasićenih materijala nalazi primenu u mehanici tla, naftnoj industriji, industriji filtracije, keramičkoj industriji, metalurgiji praha, poljoprivredi (navodnjavanje) itd.

Kao početak razvoja teorije može da se uzme 1923. god. kada je Terzaghi /1/ formulisao problem sleganja tla pod dejstvom opterećenja. Rešavajući problem, dokazao je da sleganje uzoraka tla zavisi ne samo od elastičnih konstanti već i od filtracije fluida unutar uzorka.

Tridesetih godina ovog veka sovjetski naučnici, posebno Florian i Gersevanov, uopštili su Terzaghi-ev problem za neke slučajeve. Nezavisno od njih Biot je 1941. god. /2/ takodje uopštio ovaj zadatak za neke slučajeve porozne sredine i to za elastično čvrsto telo zasićeno nestišljivim fluidom. U kasnijim radovima proširio ga je na anizotropna čvrsta tela ispunjena stišljivim fluidom /3/.

Osnovni parametri Biot-ove teorije, koji karakterišu geometrijsku strukturu poroznog skeleta, su poroznost (zapreminska) i koeficijent propustljivosti (za izotropne materijale) ili tenzor propustljivosti (za anizotropne materijale).

Derski /4/ i Kubik /5/,/6/ proširuju ovu teoriju, a pri tom ne pretpostavljaju da se površinska i zapreminska poroznost poklapaju.

Raats i Klute /7/ modifikuju klasičnu teoriju mešavina utoliko što pretpostavljaju da se svaki sastojak karakteriše sopstvenom površinom i zapreminom. Medjutim, u navedenim radovima nisu izvedene konstitutivne relacije.

U radu N.Naerlović-Veljković i R.Mandića /8/ se polazi od odgovarajućih jednačina balansa i disipativnih nejednačina pri izvodjenju odgovarajućih konstitutivnih relacija za čvrstu fazu (elastična sredina) i fluid (viskoelastičan fluid).

U nekim drugim radovima /9/, /1o/, /11/, /12/, /13/, se takodje izvode konstitutivne relacije, ali se u njima obe faze (čvrsta i tečna) posmatraju kao elastična sredina.

Medjutim, poznato je da svaka materijalna sredina poseduje sve tri osnovne reološke osobine: elastičnost, viskoznost i plastičnost. Takodje je eksperimentalno pokazano da skelet, u nizu slučajeva od interesa za praksu, poseduje elastična i viskozna svojstva kao dominantna. Zbog toga je, za opisivanje ponašanja takvih tela, nužno da ih posmatramo kao viskoelastična. Ovaj rad je i nastao u želji da se odrede konstitutivne relacije i jednačine polja koje sadrže i te efekte. Za razliku od nekih radova gde se usvajaju gotove relacije za Kelvinov, Maxvelov i druge modele, u ovom radu se izvode konstitutivne relacije koje uzimaju u obzir i uticaj poroznosti i temperature, što je bitno za porozne materijale.

OSNOVNI KONCEPT

U radu ćemo da posmatramo termokonsolidaciju zasićene i nezasićene porozne sredine.

Pod pojmom KONSOLIDACIJA u širem smislu podrazumevamo strujanje fluida kroz poroznu sredinu /9/. U užem smislu podrazumevamo: ... "svaki proces koji povlači za sobom smanjenje sadržaja vode zasićenog tla, a da pri tom izgubljenu vodu ne zamenjuje vazduh" ... /14/.

U uvodu je napomenuto da su neki autori /7/, /7-a/, modifikovali teoriju mešavina i primenili je na porozne materijale.

Ako želimo da primenimo teoriju mehanike kontinuuma na porozna čvrsta tela (skelet), čije su pore ispunjene fluidom, potrebno je pretpostaviti da svaki zapreminski element tela sadrži čestice skeleta i fluida i da su ti zapreminski elementi dovoljno veliki u odnosu na dimenzije pora, tako da obuhvate mnoge pore.

Ovako usvojen prilaz, preko teorije kontinuuma mešavine, nudi nam mogućnost opisivanja sistema: čvrsto telo--fluid kao "mešavine", jer je nalik na mehaničku teoriju mešavine, ali uz neke dopune. Za razliku od mehaničke teorije mešavine gde je potrebno odrediti polje gustina (ρ^{α}), pomeranja (p_i^{α}) i temperatura (T^{α}), što je dovoljno da se opiše ponašanje mešavine, u ovoj vrsti mešavine potrebno je da se odredi i polje poroznosti, da bi dobili doslednu i fizički opravdanu teoriju poroznih materijala /15/.

Prema tome predmet mehaničke teorije poroznih materijala može da se definiše kao odredjivanje polja gustine (ρ^{α}), pomeranja (p_i^{α}), temperature (T^{α}) i poroznost (n^{α}).

Koristeći mehaniku kontinuuma mešavine, posmatraćemo porozno telo (skelet), ispunjeno tečnošću (zasićena sredina) kao dvokomponentalnu, a porozno telo delimično ispunjeno tečnošću (nezasićena sredina), kao trokomponentalnu mešavinu.

U redu nećemo da uzimamo u obzir hemijske reakcije i uticaj difuzije, što će uticati na oblik balansa mase sastojaka.

Navedimo tri fizička principa, koje je postavio C.Truesdell (prema /16/):

a) Sve osobine mešavine moraju biti matematičke posledice osobina sastojaka,

b) Da bi se opisalo kretanje sastojka, može se, zamišljeno, izdvojiti sastojak od mešavine pod uslovom da na odgovarajući način zamenimo dejstvo drugih sastojaka na njega,

c) Kretanje mešavine je odredjeno istim jednačinama kao i za prosto, jednokomponentalno telo.

Ovi principi su u osnovi svih teorija mešavine.

U daljem tekstu će indeks α uzimati vrednosti 1,2 i 3, pri čemu će indeks 1-biti rezervisan za skelet, 2-za fluid, a 3-za gas ili fluid koji se razlikuje od "2".

1. OSNOVNI POJMOVI

U ovom poglavlju ćemo da definišemo neke pojmove koji se javljaju u teoriji mešavina, uz dodatne pojmove koji se uvode da bi prilagodili i primenili teoriju mešavina na probleme poroznih, zasićenih i nezasićenih, sredina.

Pored ovih pojmova definisaćemo i neke pojmove iz mehanike tla sa kojim ćemo da se sretnemo u daljem radu.

Posmatraćemo dvokomponentalnu (trokomponentalnu) zasićenu (nezasićenu) sredinu i to čvrst skelet - fluid.

Definišimo sledeće pojmove:

raspodela zapremine

$$V^{\alpha} = \int_{V} n^{\alpha} dV \tag{1.1}$$

raspodela površine

$$S^{\alpha} = \int_{\partial V} \lambda^{\alpha} dS \tag{1.2}$$

raspodela mase

$$M^{\alpha} = \int_{V} \rho^{\alpha} dV^{\alpha} \tag{1.3}$$

gde je α -simbol koji se odnosi na skelet ili fluid.

U prethodnim relacijama smo označili sa:

V- zapreminu agregata (skelet sa fluidom),

S - površinu koja ograničava zapreminu V,

M- ukupnu masu, a sa

n^α, λ^α i ρ^α-odgovarajuće "gustine", pri čemu je

(1.4) $$V=\sum_\alpha V^\alpha ; S=\sum_\alpha S^\alpha ; M=\sum_\alpha M^\alpha .$$

V i S se odnose na trenutnu konfiguraciju.

Na osnovu definicija raspodela možemo da izrazimo odgovarajuće "gustine" na sledeći način:

(1.5) $$n^\alpha=\frac{dV^\alpha}{dV} ; \lambda^\alpha=\frac{dS^\alpha}{dS} ; \rho^\alpha=\frac{dM^\alpha}{dV^\alpha} .$$

Odavde slede i sledeće osobine:

(1.6) $$0\leqslant (n^\alpha, \lambda^\alpha) \leqslant 1 ; \sum_\alpha n^\alpha=1 ; \sum_\alpha \lambda^\alpha=1 .$$

Definišimo i:

parcijalnu gustinu

(1.7) $$\rho_*^\alpha=\frac{dM^\alpha}{dV}$$

koja može da se izrazi preko "prave" gustine relacijom

(1.8) $$\rho_*^\alpha = \frac{dM^\alpha}{dV^\alpha} \cdot \frac{dV^\alpha}{dV} = \rho^\alpha n^\alpha$$

i gustinu mešavine

(1.9) $$\rho = \sum_\alpha \rho_*^\alpha$$

Od pojmova iz mehanike tla definišimo prvo zapreminsku i površinsku poroznost:

(1.1o) $$n = \frac{dV^p}{dV}$$

(1.11) $$n_p = \frac{dS^p}{dS}$$

gde je V^p-zapremina pore, a S^p njena površina.

Ove veličine možemo da povežemo sa već definisanim raspodelama površine i zapremine. Naime, kod zasićenih sredina, zapremina (površina) pora je jednaka zapremini (površini) tečnosti, koja se u njoj nalazi, pa je

(1.12) $$n = \frac{dV^p}{dV} = \frac{dV^2}{dV} = n^2 \,,$$

(1.13) $$n^{p} = \frac{dS^{p}}{dS} = \frac{dS^{2}}{dS} = \lambda^{2} \quad *$$

Kod nezasićenih sredina zapremina pora je ispunjena sa tečnošću i gasom, pa je

$$dV^{p} = dV^{2} + dV^{3} \quad .$$

Odavde sledi:

(1.14) $$n = \frac{dV^{p}}{dV} = \frac{dV^{2}+dV^{3}}{dV} = n^{2}+n^{3} \quad .$$

U knjigama iz ove oblasti, koje su nam bile dostupne, govori se samo o poroznosti, pri čemu se ovaj pojam odnosi na zapreminsku poroznost. Medjutim, u nekim radovima /4/, /5/, se govori i o površinskoj poroznosti, ali se kaže /17/ da su u većini problema te dve veličine približno iste, pa se koristi zapreminska poroznost.

---

* Kao što je napred napomenuto gornji indeks "2" ukazuje na to da se ta veličina odnosi na tečnost. Ne treba je mešati sa stepenom. Da ne bi došlo do zabune sve veličine koje treba stepenovati stavićemo u zagradu.

Pored zapreminske poroznosti, u mehanici tla, koristi se i pojam "koeficijent poroznosti". Definiše se sa:

(1.15)-D*
$$e = \frac{dV^p}{dV^1} = \frac{n}{1-n} .$$

Mnoge prirodne naslage, koje leže ispod nivoa podzemnih voda, mogu da se jednostavno posmatraju kao potpuno zasićene. Sa druge strane svi veštački napravljeni zemljani nasipi, kao što su zemljane brane, putni nasipi ili brane protiv poplava, izradjeni su od materijala čije šupljine, posle sabijanja, sadrže i tečnost (voda) i gas (vazduh)/18/. Količnik izmedju zapremine šupljine ispunjene vodom i ukupne zapremine pore:

(1. 16)
$$S_z = \frac{dV^2}{dV^p} = \frac{dV^2/dV}{dV^p/dV} = \frac{n^2}{n}$$

zove se stepen zasićenosti.

---

* Za jednačine uz čiji broj stoji D treba izvodjenje potražiti u dodatku.

2. KINEMATIKA

U prethodnom poglavlju je rečeno da ćemo poroznu sredinu da posmatramo kao mešavinu. U ovom delu ćemo da definišemo kinematičke veličine, kako za pojedine sastojke tako i za mešavinu kao celinu.

Posmatrajmo skup α neprekidnih sredina. Elemente ovog skupa ćemo da zovemo sastojci. Svaki sastojak zauzima deo oblasti trodimenzionog, fizičkog prostora, a zajedno zauzimaju neku oblast K, koja je potpuno ispunjena materijom- - materijalni kontinuum. Porozno telo zauzima, u opštem slučaju, različite oblasti u različitim trenucima i ni jedna od tih oblasti se ne može suštinski poistovetiti sa telom. Pogodno je izabrati jednu takvu oblast K_o, u odnosu na koju ćemo posmatrati kretanje tela. Oblast K_o ćemo zvati referentna konfiguracija. U odnosu na referentnu konfiguraciju čestice tela ćemo identifikovati sa njihovim položajem u K_o .

Tela imaju jednu jasnu fizičku osobinu: ona zauzimaju oblast Euklidskog prostora E. Pošto je prostor Euklidski, u njega možemo da uvedemo Descartes-ov, pravougli koordinatni , u odnosu na koji ćemo da posmatramo kretanje tela.

Tada su jednačine kretanja α -tog sastojka:

(2.1) $$x_i^\alpha = x_i^\alpha (X_K^\alpha ; t) ,$$

gde smo sa X_K^α -označili početni položaj čestice, posmatranog sastojka, koja u trenutku t zauzima položaj x_k^α .

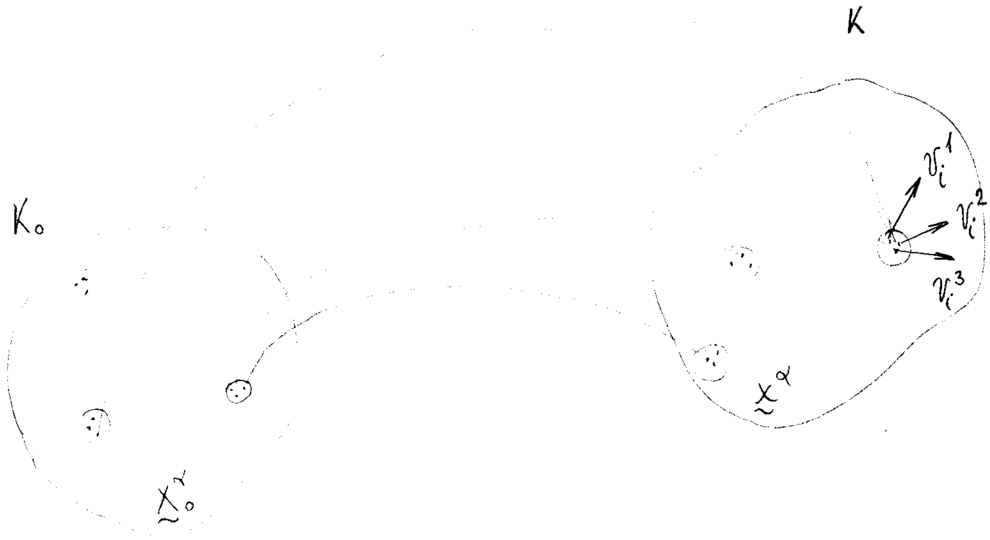
Za vreme kretanja koordinate X_K^α ostaju vezane za individualne čestice, pa govorimo o "čestici X_K^α ", koja u trenutku t zauzima "položaj x_k^α ", u prostoru. Zbog toga koordinate X_K^α zovemo materijalne, a x_i^α prostorne koordinate.

Jednačine (2.1) pretstavljaju jednačine kretanja deformabilnog kontinuuma. Deformacija može da se posmatra kako sa stanovišta $\underset{\sim}{X}$ -koordinata, tako i sa stanovišta $\underset{\sim}{x}$ - koordinata, odakle sledi da moramo da postuliramo postojanje inverzne transformacije:

(2.2) $$X_K^\alpha = X_K^\alpha (x_i^\alpha ; t) .$$

Inverznost nam omogućava da čestica α -tog sastojka u $\underset{\sim}{X}$ ne može da zauzme dva prostorna položaja i da dve čestice ne mogu da zauzmu istovremeno isti prostorni položaj.

Pošto ćemo da koristimo principe teorije kontinuuma za opisivanje ponašanja mešavine faza, postuliraćemo da se u svakoj tački x_k trenutne konfiguracije mešavine nalaze čestice svih sastojaka, dok su njihove brzine, u opštem slučaju, različite.



sl. 1

Na osnovu prethodnog postulata možemo da pišemo:

(2.3) $$x_i = x_i^\alpha(X_K^\alpha; t) .$$

Gradijenti deformacije imaju važnu ulogu u mehanici kontinuuma. Definišemo ih sa:

$$x^{\alpha}_{k,K} = \frac{\partial x^{\alpha}_{k}}{\partial X^{\alpha}_{K}} \quad ; \; X^{\alpha}_{K,k} = \frac{\partial X^{\alpha}_{K}}{\partial x^{\alpha}_{k}} \quad . \tag{2.4}$$

Iz definicije gradijenata deformacije neposredno sledi:

$$x^{\alpha}_{k,K} \, X^{\alpha}_{K,l} = \delta_{kl}$$
$$x^{\alpha}_{k,K} \, X^{\alpha}_{L,k} = \delta_{KL}$$

gde su δ_{kl} i δ_{KL} Cronecker-ovi delta simboli, definisani sa:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \, , & i = j \\ 0 \, , & i \neq j \end{cases} \quad .$$

Dalje nas interesuje promena neke veličine sa vremenom. Takva promena se definiše, sa matematičkog stanovišta, kao materijalni izvod posmatrane veličine. Brzina sastojka je takav izvod:

$$v^{\alpha}_{i} = \frac{\partial x^{\alpha}_{i}(X^{\alpha}_{K};t)}{\partial t} \tag{2.5}$$

Fizički smisao materijalnog izvoda je promena neke veličine u odnosu na posmatrača koji je vezan za odredjenu materijalnu česticu tela.

Podesno je uvesti i srednju brzinu mešavine, definisanu sa:

$$\rho v_i = \sum_{\alpha} \rho_*^{\alpha} v_i^{\alpha} \quad . \tag{2.6}$$

Ovu brzinu možemo da shvatimo kao brzinu "središta masa" sastojaka.

Relativnu brzinu sastojka u odnosu na srednju brzinu

$$u_i^{\alpha} = v_i^{\alpha} - v_i \tag{2.7}$$

zovemo brzina difuzije. Medjutim, nisu sve njene komponente nezavisne, jer moraju da zadovolje uslov:

$$\sum_{\alpha} \rho_*^{\alpha} u_i^{\alpha} = 0 \quad . \tag{2.8}$$

U opštem slučaju materijalni izvodi za neku funkciju f, koja može da bude skalarna, vektorska ili tenzorska, su:

$$\frac{D^{\alpha} f}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + f_{,i} v_i^{\alpha} \quad , \tag{2.9}$$

(2.10)
$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + f_{,i} V_i \quad .$$

Izvod $\frac{D^\alpha f}{Dt}$ "prati" kretanje α-tog sastojka, a $\frac{Df}{Dt}$ "prati" srednje kretanje mešavine.

Možemo, na osnovu prethodnih relacija, da uspostavimo sledeće veze:

$$\frac{D^\alpha f}{Dt} = \frac{D^\beta f}{Dt} + f_{,i}(V_i^\alpha - V_i^\beta) =$$

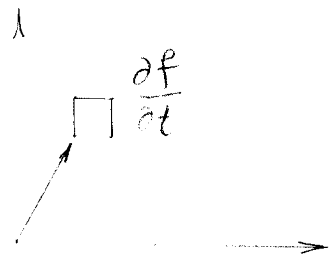
(2.11)
$$= \frac{D^\beta f}{Dt} + f_{,i}(u_i^\alpha - u_i^\beta) =$$

$$= \frac{Df}{Dt} + f_{,i} u_i^\alpha \quad ,$$

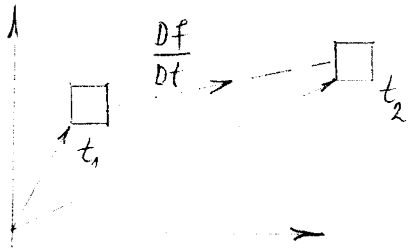
kao i

(2.12)-D
$$\sum_\alpha \rho_*^\alpha \frac{D^\alpha f}{Dt} = \rho \frac{Df}{Dt} \quad .$$

Značenje ovih izvoda po vremenu se može grafički ilustrovati /19/:



parcijalni izvod - promena sa vremenom u fiksnoj tački



materijalni izvod - promena sa vremenom koja prati translaciju materijala

Pored gradijenata deformacije definisaćemo i neke druge deformacije, koje ćemo kasnije da koristimo.

Posmatrajmo element luka, koji ćemo u nedeformisanoj konfiguraciji ($\underset{\sim}{X}^{\alpha}$) da označimo sa dS^{α}, a u deformisanoj ($\underset{\sim}{x}^{\alpha}$) sa ds^{α}. Metrička forma za dva nezavisno izabrana sistema koordinata (materijalni i prostorni) se može napisati u obliku:

$$
(2.13) \qquad \begin{aligned} (dS^{\alpha})^2 &= G_{KL}\, dX_K^{\alpha}\, dX_L^{\alpha} \\ (ds^{\alpha})^2 &= g_{k\ell}\, dx_k^{\alpha}\, dx_\ell^{\alpha} \end{aligned}
$$

Ovde smo sa G_{KL} i $g_{k\ell}$ obeležili osnovne metričke tenzore.

Na osnovu (2.1) relacije (2.13) postaju:

(2.14) $$(dS^{\alpha})^2 = G_{KL} X^{\alpha}_{K,k} X^{\alpha}_{L,\ell} dx^{\alpha}_k dx^{\alpha}_{\ell} = c^{\alpha}_{k\ell} dx^{\alpha}_k dx^{\alpha}_{\ell}$$

(2.15) $$(ds^{\alpha})^2 = g_{k\ell} x^{\alpha}_{k,K} x^{\alpha}_{\ell,L} dX^{\alpha}_K dX^{\alpha}_L = C^{\alpha}_{KL} dX^{\alpha}_K dX^{\alpha}_L ,$$

gde smo označili sa:

$C^{\alpha}_{KL} = g_{k\ell} x^{\alpha}_{k,K} x^{\alpha}_{\ell,L}$ - Green-ov tenzor deformacije,

$c^{\alpha}_{k\ell} = G_{KL} X^{\alpha}_{K,k} X^{\alpha}_{L,\ell}$ - Cauchy-ev tenzor deformacije.

U specijalnom slučaju kada je $C_{KL} = G_{KL}$ i $c_{k\ell} = g_{k\ell}$ imamo kruto kretanje.

Oduzimajući (2.15) od (2.14) dobijamo:

(2.16) $$(ds^{\alpha})^2 - (dS^{\alpha})^2 = (C^{\alpha}_{KL} - G_{KL}) dX^{\alpha}_K dX^{\alpha}_L = (g_{k\ell} - c^{\alpha}_{k\ell}) dx^{\alpha}_k dx^{\alpha}_{\ell} .$$

Veličine:

(2.17) $$2 E^{\alpha}_{KL} = C^{\alpha}_{KL} - G_{KL}$$

(2.18) $$2 e^{\alpha}_{k\ell} = g_{k\ell} - c^{\alpha}_{k\ell}$$

se zovu Lagrang-ev i Euler-ov tenzor deformacije, respektivno.

Ove veličine mogu da se povežu sa brzinama i tada dobijamo:

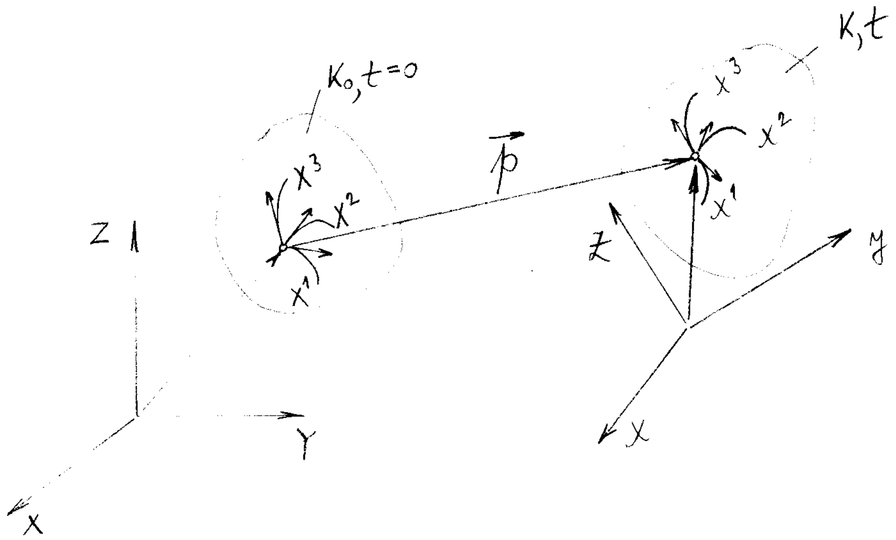
$$(2.19)\text{-D} \qquad \frac{D^{\alpha} C^{\alpha}_{KL}}{Dt} = 2\, d^{\alpha}_{k\ell}\, x^{\alpha}_{k,K}\, x^{\alpha}_{\ell,L} \,.$$

Veličina:

$$d^{\alpha}_{k\ell} = \frac{1}{2}(v^{\alpha}_{k,\ell} + v^{\alpha}_{\ell,k})$$

se zove brzina deformacije.

Ove veličine mogu, takodje, da se povežu i sa vektorom pomeranja. Vektor pomeranja je vektor koji povezuje istu materijalnu tačku u dve konfiguracije, početne K_o i trenutne K (sl. 2).



sl. 2

Veze izmedju vektora pomeranja i tenzora deformacije su:

$$C^{\alpha}_{KL} = G_{KL} + 2\, E^{\alpha}_{KL} = G_{KL} + P^{\alpha}_{K;L} + P^{\alpha}_{L;K} + P^{\alpha}_{M;L} P^{\alpha}$$

(2.2o)

$$c^{\alpha}_{k\ell} = g_{k\ell} - 2\, e^{\alpha}_{k\ell} = g_{k\ell} - p^{\alpha}_{k;\ell} - p^{\alpha}_{\ell;k} + p^{\alpha}_{m;\ell} p^{\alpha}$$

U slučaju linearne teorije poslednji članovi, kao veličine višeg reda, se zanemaruju, pa dobijamo:

$$C^{\alpha}_{KL} = G_{KL} + P^{\alpha}_{K;L} + P^{\alpha}_{L;K}$$

$$c^{\alpha}_{k\ell} = g_{k\ell} - p^{\alpha}_{k;\ell} - p^{\alpha}_{\ell;k}$$

(2.21)

$$\tilde{E}^{\alpha}_{KL} = \frac{1}{2}\left(P^{\alpha}_{K;L} + P^{\alpha}_{L;K} \right) = P^{\alpha}_{(K;L)}$$

$$\tilde{e}^{\alpha}_{k\ell} = \frac{1}{2}\left(p^{\alpha}_{k;\ell} + p^{\alpha}_{\ell;k} \right) = p^{\alpha}_{(k;\ell)}$$

U slučaju linearne teorije (teorija infinitezimalnih deformacija) nestaje razlike izmedju Lagrange-ovog i Euler-ovog tenzora deformacije:

(2.22)
$$\tilde{E}_{KL} = \tilde{e}_{k\ell}\, g_{kK}\, g_{\ell L}$$

Ovde smo sa (;) označili kovarijantni izvod. Medjutim, u slučaju kada se radi sa Descartes-ovim koordinatnim sistemom tada su kovarijantni i parcijalni izvodi jednaki.

3. OPŠTI OBLIK JEDNAČINE BALANSA

Postuliraćemo globalni oblik jednačine balansa, za svaki sastojak.

Neka je ρ_*^α gustina, a ψ^α neka veličina (skalarna, vektorska ili tenzorska) definisana u proizvoljnoj, konačnoj, oblasti tela, zapremine V, po jedinici mase mešavine. Tada je njena ukupna promena odredjena relacijom:

$$(3.1)\qquad \frac{D^\alpha}{Dt}\int_V \rho_*^\alpha \psi^\alpha dV = \int_{\partial V} \mathcal{C}_k^\alpha dS_k + \int_V \rho_*^\alpha s^\alpha dV \; .$$

Veličina $\mathcal{C}_i^\alpha = \mathcal{C}_i^\alpha(\psi^\alpha)$ se zove fluks (protok) i označava promenu veličine ψ^α, tokom vremena, unutar zapremine V, preko konture ∂V.

Veličina $s^\alpha = s^\alpha(\psi^\alpha)$ predstavlja zapreminski priliv veličine ψ^α. Ona se zove još i distribucija zapreminskih izvora.

S obzirom da (3.1) važi za svaku veličinu ψ^α, bez obzira na njeno fizičko značenje, ova relacija je opšteg karaktera i naziva se "opšti zakon balansa".

Iz relacije (3.1), u oblasti u kojoj su odgovarajuće veličine neprekidne, primenom Green-ove teoreme, dobijamo lokalni oblik opšteg zakona balansa:

$$\rho_*^\alpha \frac{D^\alpha \psi^\alpha}{Dt} + A^\alpha \psi^\alpha = \varphi^\alpha_{k,k} + \rho_*^\alpha s^\alpha \tag{3.2}$$

gde je

$$\frac{\partial \rho_*^\alpha}{\partial t} + \left(\rho_*^\alpha v_i^\alpha\right)_{,i} = A^\alpha . \tag{3.3}$$

Koristeći opšti zakon balansa možemo lako da dobijemo odgovarajuće balanse posebnih veličina, kada se izvrši adekvatna "identifikacija" opštih veličina ψ^α, φ_i^α, s^α, što ćemo dalje činiti.

3.1 BALANS MASE

Jednačina balansa mase za poroznu sredinu, ispunjenu fluidom, može da se napiše u sledećem obliku:

$$\frac{D^{\alpha}M^{\alpha}}{Dt} = 0 \quad . \tag{3.1.1}$$

Pri postuliranju jednačine balansa mase pretpostavili smo da nema razmene izmedju sastojaka, usled hemijskih reakcija ili drugih pojava.

Prema (1.3) imamo:

$$M^{\alpha} = \int_V \rho_*^{\alpha}\, dV \quad , \tag{3.1.2}$$

pa relacija (3.1.1) postaje:

$$\frac{D^{\alpha}}{Dt}\int_V \rho_*^{\alpha}\, dV = 0 \; .$$

Uporedjujući ovo sa opštim zakonom balansa (3.1) vidimo da je:

$$\psi^{\alpha} = 1 \; ; \; s^{\alpha} = 0 \quad ; \; \underset{\sim}{\varphi}^{\alpha} = 0 \, .$$

pa na osnovu (3.2)-D dobijamo lokalni oblik balansa mase:

$$\frac{\partial \rho_*^\alpha}{\partial t} + \left(\rho_*^\alpha v_i^\alpha\right)_{,i} = 0 \quad . \tag{3.1.3}$$

Razmatrajući kretanje fluidne faze obično nas interesuju one čestice $\underset{\sim}{X}^\beta$ (ß = 2,3) koje se nadju, u prostoru, unutar oblasti koju zauzima čvrsta faza. Ta oblast može da se menja u vremenu usled deformacije i/ili krutog kretanja čvrste faze. U tim slučajevima je granične uslove, u opštem slučaju za tačku, liniju ili površ, pogodnije izraziti u odnosu na čvrstu fazu. Iz tog razloga transformišimo balans mase za fluidnu fazu (ß).

Promena ρ_*^β, koja prati kretanje čvrste faze je data sa:

$$\frac{D^1 \rho_*^\beta}{Dt} = \frac{\partial \rho_*^\beta}{\partial t} + v_i^1 \rho_{*,i}^\beta \quad .$$

Medjutim, ako iskoristimo (3.1.3), za α = ß, dobijamo:

$$\frac{D^1 \rho_*^\beta}{Dt} + \rho_*^\beta v_{i,i}^1 + \left[\rho_*^\beta\left(v_i^\beta - v_i^1\right)\right]_{,i} = 0 \quad .$$

Zamenom čl. $v_{i,i}^1$ iz (3.1.3), poslednja relacija postaje:

$$\frac{D^1 \rho_*^\beta}{Dt} - \frac{\rho_*^\beta}{\rho_*^1}\frac{D^1 \rho_*^1}{Dt} + \left[\rho_*^\beta (v_i^\beta - v_i^1)\right]_{,i} = 0 \quad .$$

Kombinujući sa:

$$\frac{D^1}{Dt}\left(\frac{\rho_*^\beta}{\rho_*^1}\right) = \frac{1}{\rho_*^1}\left(\frac{D^1 \rho_*^\beta}{Dt} - \frac{\rho_*^\beta}{\rho_*^1}\frac{D^1 \rho_*^1}{Dt}\right),$$

prethodna relacija postaje:

$$\rho_*^1 \frac{D^1}{Dt}\left(\frac{\rho_*^\beta}{\rho_*^1}\right) - \left[\rho_*^\beta (v_i^\beta - v_i^1)\right]_{,i} = 0 \quad . \tag{3.1.4}$$

DVOFAZNI SISTEM

Vodom zasićena, kao i suva tla, mogu da se posmatraju kao dvofazni sistemi, tj. kao mešavine čvrste i fluidne faze. Za takve sisteme, prema (1.8), (1.6)-2 i (1.15)-D, možemo da pišemo:

$$n = \frac{\rho_*^2}{\rho^2} = 1 - n^1 = 1 - \frac{\rho_*^1}{\rho^1} = \frac{e}{1+e} \quad .$$

Na osnovu poslednjih jednakosti relacija (3.1.4) može da se napiše u sledećim oblicima:

$$\rho^1_* \frac{D^1}{Dt}\left(\frac{\rho^2_*}{\rho^1_*}\right) + \left[\rho^2_*\left(v_i^2 - v_i^1\right)\right]_{,i} =$$

$$= -\frac{\rho^2}{\rho^1_*}\frac{D^1\rho^1_*}{Dt} + \left[\rho^2_*\left(v_i^2 - v_i^1\right)\right]_{,i} + \frac{\rho^2}{\rho^1}\frac{D^1\rho^1}{Dt} + \left(\rho^1 - \rho^1_*\right)\frac{D^1}{Dt}\left(\frac{\rho^2}{\rho^1}\right) =$$

$$(3.1.5)\text{-D} \qquad = \frac{\rho^2}{1-n}\cdot\frac{D^1 n}{Dt} + \rho^1 n\cdot\frac{D^1}{Dt}\left(\frac{\rho^2}{\rho^1}\right) + \left[\rho^2 n\left(v_i^2 - v_i^1\right)\right]_{,i} =$$

$$= \frac{\rho^2}{1+e}\cdot\frac{D^1 e}{Dt} + \frac{\rho^1 e}{1+e}\frac{D^1}{Dt}\left(\frac{\rho^2}{\rho^1}\right) + \left[\frac{\rho^2 e}{1+e}\left(v_i^2 - v_i^1\right)\right]_{,i} .$$

TROFAZNI SISTEM

Nezasićena porozna sredina se obično posmatra kao trofazni sistem, tj. kao mešavina čvrste faze i dve fluidne (tečna i gasovita) faze.

I u ovom slučaju nas interesuje ponašanje tečne faze u odnosu na čvrstu fazu. Kao i u prethodnom slučaju dobijamo:

(3.1.6) $$\rho_*^1 \frac{D^1}{Dt}\left(\frac{\rho_*^\beta}{\rho_*^1}\right) + \left[\rho_*^\beta\left(v_i^\beta - v_i^1\right)\right]_{,i} = 0 .$$

Dalje, ako iskoristimo (1.14), dobijamo:

$$\rho_*^1 \frac{D^1}{Dt}\left[\frac{\rho^\beta n^\beta}{\rho^1(1-n)}\right] + \left[\rho_*^\beta\left(v_i^\beta - v_i^1\right)\right]_{,i} =$$

$$= \frac{D^1}{Dt}\left(\rho^\beta n^\beta\right) - \rho^\beta n^\beta \frac{D^1 \rho^1}{Dt} + \frac{\rho^\beta n^\beta}{1-n}\cdot\frac{D^1 n}{Dt} +$$

$$+ \left[\rho^\beta n^\beta\left(v_i^\beta - v_i^1\right)\right]_{,i} = 0 .$$

Na kraju ovog poglavlja napomenimo, još jednom, da nismo posmatrali efekte koji pretstavljaju priliv mase. Član koji se tada javlja je posledica hemijskih reakcija medju sastojcima, kao i posledica upijanja ili ispuštanja materije od strane organizama (biljni koreni, bakterije i slično).

Dakle, u ovoj teoriji se pretpostavlja održanje (konzervacija) ukupne mase svakog sastojka.

3.2 JEDNAČINE BALANSA KOLIČINE KRETANJA

Uočimo neku fiksiranu zapreminu V, čija je površina ∂V. Ako je $\underset{\sim}{\mathcal{F}}^{\alpha}$ zbir svih (zapreminskih i površinskih) sila, koje deluju na α-tu fazu unutar te zapremine, tada je, prema zakonu količine kretanja (Euler-ov zakon /2o/):

$$\underset{\sim}{\mathcal{F}}^{\alpha} = \frac{D^{\alpha} \underset{\sim}{Q}^{\alpha}}{Dt} \tag{3.2.1}$$

U prethodnoj relaciji smo sa $\underset{\sim}{Q}^{\alpha}$ označili količinu kretanja α-te faze, definisanu sa:

$$\underset{\sim}{Q}^{\alpha} = \iint_V \rho_*^{\alpha} v_i^{\alpha} \, dV .$$

V je zapremina (mešavine), fiksirana u odnosu na prostorni koordinatni sistem x_i.

Jednačina (3.2.1) se još zove i balans količine kretanja.

Na uočeni α-ti sastojak, unutar zapremine V, u našem slučaju, deluju sledeće sile:

$\underset{\sim}{P}^{\alpha}$ - površinska sila, kao posledica dejstva površinskih sila svih sastojaka izvan oblasti V;

$\underset{\sim}{F}^{\alpha}$ - spoljašnje zapreminske sile, kao posledica spoljašnjih zapreminskih sila, koje deluju na mešavinu;

$\underset{\sim}{R}^{\alpha}$ - sila interakcije izmedju faza, koja deluje na α-ti sastojak, a posledica je dejstva ostalih sastojaka unutar zapremine V. Po svojoj prirodi je zapreminska sila.

Na osnovu prethodnog možemo da izrazimo jednačinu balansa količine kretanja (3.2.1) u obliku:

$$\frac{D^{\alpha}\underset{\sim}{Q}^{\alpha}}{Dt} = \underset{\sim}{P}^{\alpha} + \underset{\sim}{F}^{\alpha} + \underset{\sim}{R}^{\alpha} \quad (3.2.2)$$

Napred uvedene sile mogu da se izraze na sledeći način:

$$\underset{\sim}{P}^{\alpha} = \oint_{\partial V} t_{ij}^{\alpha}\, dS_j ,$$

gde je:

t_{ij}^{α} -tenzor parcijalnog napona sastojka, definisan u odnosu na površinu mešavine,

∂V -površina koja ograničava zapreminu V.

$$\underset{\sim}{F}^{\alpha} = \int_{V} \rho_{*}^{\alpha} f_i^{\alpha}\, dV$$

gde je:

f_i^{α} -gustina zapreminskih sila sastojka.

$$\underset{\sim}{R}^{\alpha} = \int_V r_i^{\alpha} dV \quad ,$$

gde je:

r_i^{α} -lokalna ili unutrašnja zapreminska sila, jer predstavlja lokalnu interakciju izmedju sastojaka, tj. dejstvo svih ostalih faza na α -tu fazu, u zapremini V. Ovu veličinu Truesdell zove "priliv količine kretanja" /21/.

Konačno možemo da napišemo jednačinu balansa količine kretanja u obliku:

$$\text{(3.2.3)} \qquad \frac{D^{\alpha}}{Dt}\int_V \rho_*^{\alpha} v_i^{\alpha} dV = \oint_{\partial V} t_{ij}^{\alpha} dS_j + \int_V (\rho_*^{\alpha} f_i^{\alpha} + r_i^{\alpha}) dV .$$

Upredjujući ovu relaciju sa opštim zakonom balansa (3.1), vidimo da je:

$$\psi^{\alpha} = v_k^{\alpha} \; ; \; \underset{\sim}{\varphi}^{\alpha} = t_{ij}^{\alpha} \; ; \; \rho_*^{\alpha} \underset{\sim}{s}^{\alpha} = \rho_*^{\alpha} f_i^{\alpha} + r_i^{\alpha} ,$$

pa, koristeći lokalni oblik (3.2)-D i jednačinu balansa mase (3.1.3), dobijamo:

$$\text{(3.2.4)} \qquad \rho_*^{\alpha} \frac{D^{\alpha} v_i^{\alpha}}{Dt} = \rho_*^{\alpha} f_i^{\alpha} + r_i^{\alpha} + t_{ij,j}^{\alpha} .$$

Prethodna relacija predstavlja lokalni oblik zakona balansa količine kretanja, napisan za svaki sastojak. Izvršivši sabiranje po α dobijamo odgovarajući lokalni oblik zakona za mešavinu kao celinu:

(3.2.5)-D
$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = t^*_{ij,j} + \rho f_i \quad ,$$

gde je:

t^*_{ij} -tenzor ukupnog parcijalnog napona, definisan sa:

(3.2.6)
$$t^*_{ij} = \sum_{\alpha} \left(t^{\alpha}_{ij} - \rho^{\alpha}_{*} u^{\alpha}_{i} u^{\alpha}_{j} \right) ,$$

ρf_i -zapreminska sila, definisana sa:

(3.2.7)
$$\rho f_i = \sum_{\alpha} \rho^{\alpha}_{*} f^{\alpha}_{i} \quad .$$

Jednačina

(3.2.8)-D
$$\sum_{\alpha} \hat{c}^{\alpha}_{i} = 0$$

je posledica zahteva da je oblik relacije za količinu kretanja, za mešavinu kao celinu, isti kao odgovarajući za jednokomponentalne materijale.

3.3 JEDNAČINE BALANSA MOMENTA KOLIČINE KRETANJA

U prethodnom poglavlju smo formulisali zakon količine kretanja. U ovom poglavlju ćemo da formulišemo još jedan opšti mehanički zakon: zakon momenta količine kretanja. On glasi:

$$\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{\alpha}_{(0)} = \frac{D^{\alpha} \underset{\sim}{L}^{\alpha}_{(0)}}{Dt} \,. \tag{3.3.1}$$

U gornjoj relaciji smo sa $\underset{\sim}{L}^{\alpha}$ označili moment količine kretanja α-tog sastojka, definisan sa:

$$\underset{\sim}{L}^{\alpha}_{(0)} = \int_V \varepsilon_{ijk}\, \rho^{\alpha}_{*}\, x^{\alpha}_{j}\, v^{\alpha}_{k}\, dV \,.$$

$\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{\alpha}_{(0)}$ predstavlja zbir momenata svih sila i spregova, za tačku O, a definisan je sa:

$$\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{\alpha}_{(0)} = \oint_{\partial V} \varepsilon_{ijk}\left(x^{\alpha}_{j}\, t^{\alpha}_{k\ell} + m^{\alpha}_{jk\ell}\right) dS_{\ell} + \int_V \varepsilon_{ijk}\left(\rho^{\alpha}_{*}\, f^{\alpha}_{k} + r^{\alpha}_{k}\right) x^{\alpha}_{j}\, dV$$

gde je $m^{\alpha}_{jk\ell}$ -tenzor naponskog sprega α-tog sastojka, antisimetričan po indeksima j,k.

Član $\int \varepsilon_{ijk}\, x^{\alpha}_{j} r^{\alpha}_{k}\, dV$ predstavlja moment izazvan lokalnom interakcijom ostalih sastojaka na α-ti sastojak.

Na osnovu prethodnog izraza možemo relaciju (3.3.1) da napišemo u obliku:

$$\frac{D^\alpha}{Dt}\int_V \rho_*^\alpha \varepsilon_{ijk} x_j^\alpha v_k^\alpha dV =$$

(3.3.2)

$$= \oint_{\partial V} \varepsilon_{ijk}(x_j^\alpha t_{kl}^\alpha + m_{jkl}^\alpha) dS_l + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j^\alpha (\rho_*^\alpha f_k^\alpha + \tau_i^\alpha) dV .$$

Ako uporedimo ovu relaciju sa opštim zakonom balansa (3.1), tada možemo da "identifikujemo" opšte veličine iz (3.1):

$$\underset{\sim}{\psi}^\alpha = \varepsilon_{ijk} x_j^\alpha v_k^\alpha \; ; \; \underset{\sim}{\varphi}^\alpha = \varepsilon_{ijk}(x_j^\alpha t_{kl}^\alpha + m_{jkl}^\alpha)$$

$$\rho_*^\alpha \underset{\sim}{s}^\alpha = \rho_*^\alpha \varepsilon_{ijk} x_j^\alpha f_k^\alpha + \varepsilon_{ijk} x_j^\alpha \tau_k^\alpha$$

i posle sredjivanja dobijamo zakon balansa momenta količine kretanja, u lokalnom obliku, za svaki sastojak:

(3.3.3)-D $$\varepsilon_{ijk}(t_{kj}^\alpha + m_{jkl,l}^\alpha) = 0 ,$$

gde je ε_{ijk} Ricci-ev antisimetričan tenzor, definisan sa:

$$\varepsilon_{ijk} = \sqrt{g}\ e_{ijk} = \begin{cases} \sqrt{g} & \text{ako je parna permutacija od } 1,2,3 \\ -\sqrt{g} & \text{ako je neparna permutacija od } 1,2,3 \\ 0 & \text{u ostalim slučajevima,} \end{cases}$$

$g = \det (g_{ij})$

g_{ij} - metrički tenzor,

e_{ijk} - alternativni tenzor.

Na početku smo napomenuli da su veličine koje se javljaju u ovom radu definisane u odnosu na pravougli koordinatni sistem, pa je u našem slučaju:

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad ,$$

tako da dobijamo:

$$e_{ijk} (t^{\alpha}_{k\ell} + m^{\alpha}_{jk\ell,\ell}) = 0 .$$

Medjutim, ako uvedemo oznaku:

$$(3.3.4) \qquad t^{\alpha}_{ij} - m^{\alpha}_{ji\ell,\ell} \equiv M^{\alpha}_{ij}$$

zakon balansa količine kretanja za α-ti sastojak može kratko da se napiše:

(3.3.5) $$e_{ijk} M^{\alpha}_{kj} = 0 \, ,$$

što znači da je tenzor M^{α}_{ij} simetričan.

3.4 BALANS ENERGIJE

U ovom poglavlju ćemo da formulišemo prvi aksiom termodinamike ili kako se još zove prvi zakon termodinamike, odnosno aksiom balansa energije.

Ovaj aksiom, kao i aksiomi balansa mase i količine kretanja, sastoji se iz dva dela. Jedan deo se odnosi na sastojke, a drugi na mešavinu kao celinu.

Pri deformaciji tela, pa i poroznog, zbir brzine promene ukupne energije (unutrašnje i kinetičke) jednak je zbiru efekata mehaničkog i nemehaničkog rada. Na osnovu ovog iskaza, koji pretstavlja prvi aksiom termodinamike, možemo da pišemo:

(3.4.1) $$\frac{D^{\alpha} K^{\alpha}}{Dt} + \frac{D^{\alpha} U^{\alpha}}{Dt} = \frac{D^{\alpha} A^{\alpha}}{Dt} + Q^{\alpha}$$

gde je:

K^α-kinetička energija α-tog sastojka, definisana sa:

$$K^\alpha = \frac{1}{2}\int_V \rho_*^\alpha v_i^\alpha v_i^\alpha dV ,$$

U^α-unutrašnja energija α-tog sastojka, definisana sa:

$$U^\alpha = \int_V \rho_*^\alpha \varepsilon^\alpha dV$$

ε^α- specifična unutrašnja energija α-tog sastojka,

$\frac{D^\alpha A^\alpha}{Dt}$ -efekat rada α-tog sastojka, definisan sa:

$$\frac{D^\alpha A^\alpha}{Dt} = \oint_{\partial V}\left(t_{ij}^\alpha v_j^\alpha + m_{ijk}^\alpha v_{jk}^\alpha\right)dS_i + \int_V \rho_*^\alpha\left(f_i^\alpha v_i^\alpha - M^\alpha \frac{D^\alpha n^\alpha}{Dt}\right)dV$$

M^α- generalisana sila, koja deluje na α-ti sastojak, a javlja se kao posledica poroznosti;

Q^α- toplotni efekat, tj. promena količine toplote α-tog sastojka po jedinici vremena, odredjen sa:

$$Q^\alpha = \oint_{\partial V} q_i^\alpha dS_i + \int_V \rho_*^\alpha$$

q_i^α -toplotni fluks α-tog sastojka, po jedinici površine mešavine;

h^α - gustina toplotne energije α-tog sastojka, po jedinici zapremine mešavine.

Ako uvedemo prethodne izraze u relaciju (3.4.1), dobijamo jednačinu balansa energije, za svaki sastojak, u obliku:

$$\frac{D^{\alpha}}{Dt}\int_{V}\rho_{*}^{\alpha}\left(\varepsilon^{\alpha}+\frac{1}{2}v_{i}^{\alpha}v_{i}^{\alpha}\right)dv =$$

(3.4.2)
$$= \oint_{\partial V}\left(t_{ki}^{\alpha}v_{i}^{\alpha}+m_{ijk}^{\alpha}v_{j,k}^{\alpha}\right)ds_{i}+\int_{V}\rho_{*}^{\alpha}\left(f_{i}^{\alpha}v_{i}^{\alpha}+h^{\alpha}-M^{\alpha}\frac{D^{\alpha}n^{\alpha}}{Dt}\right)dV.$$

Upredivši poslednju relaciju sa opštim zakonom balansa (3.1), vidimo da je:

$$\psi^{\alpha}=\varepsilon^{\alpha}+\frac{1}{2}v_{i}^{\alpha}v_{i}^{\alpha}\ ;\ s^{\alpha}=f_{i}^{\alpha}v_{i}^{\alpha}+h^{\alpha}-M^{\alpha}\frac{D^{\alpha}n^{\alpha}}{Dt}\ ;$$

$$\underset{\sim}{\varphi}^{\alpha}=t_{ij}^{\alpha}v_{j}^{\alpha}+q_{i}^{\alpha}+m_{ijk}^{\alpha}v_{j,k}^{\alpha}.$$

Koristeći lokalni oblik opšteg zakona balansa (3.2)-D dobijamo:

$$\rho_{*}^{\alpha}\frac{D^{\alpha}\varepsilon^{\alpha}}{Dt}=M_{ij}^{\alpha}v_{j,i}^{\alpha}+q_{i,i}^{\alpha}+\rho_{*}^{\alpha}h^{\alpha}-$$

(3.4.3)-D
$$-\rho_{*}^{\alpha}M^{\alpha}\frac{D^{\alpha}n^{\alpha}}{Dt}+m_{ijk}^{\alpha}v_{j,ki}^{\alpha}-\tau_{i}^{\alpha}v_{i}^{\alpha}.$$

Da bismo dobili balans energije za mešavinu kao celinu, izvršićemo sabiranje po α.

Tada dobijamo:

$$\rho \frac{D\mathcal{E}}{Dt} = M_{ij} \Gamma_{j,i} + q_{i,i} + m_{ijk} \Gamma_{jk,i} + \rho h +$$

(3.4.1)-D
$$+ \sum_{\alpha} \Big(u_i^{\alpha} t_{[ij],j}^{\alpha} + m_{ijk,i}^{\alpha} u_{jk}^{\alpha} +$$

$$+ m_{ijk}^{\alpha} u_{jk,i}^{\alpha} - \rho_*^{\alpha} M^{\alpha} \frac{D^{\alpha} n^{\alpha}}{Dt} \Big),$$

gde je, prema /21/i /2o/:

$\mathcal{E}$ -unutrašnja energija mešavine, definisana sa:

$$\rho \mathcal{E} = \rho \mathcal{E}^{I} + \sum_{\alpha} \frac{1}{2} u_i^{\alpha} u_i^{\alpha}$$

$\mathcal{E}^{I}$ -unutrašnji deo unutrašnje energije mešavine, definisan sa:

$$\rho \mathcal{E}^{I} = \sum_{\alpha} \rho_*^{\alpha} \mathcal{E}^{\alpha}$$

h -gustina spoljašnjeg priliva toplote za mešavinu, definisana sa:

$$\rho h = \sum_{\alpha} \rho_*^{\alpha} \left(h^{\alpha} + u_i^{\alpha} f_i^{\alpha} \right)$$

q_i -vektor toplotnog fluksa mešavine, definisan sa:

$$q_i = q_i^{I} + \sum_{\alpha} \left[t_{ij}^{\alpha} u_j^{\alpha} + \rho_*^{\alpha} \left(\mathcal{E}^{\alpha} + \frac{1}{2} u_j^{\alpha} u_j^{\alpha} \right) u_i^{\alpha} \right],$$

q_i^I-unutrašnji deo vektora toplotnog fluksa, mešavine, odredjen sa:

$$q_i^I = \sum_\alpha q_i^\alpha$$

tenzor M_{ij}, definisan za mešavinu kao celinu:

$$M_{ij} = \sum_\alpha \left(t_{ij}^\alpha - \rho_\alpha u_i^\alpha u_j^\alpha + m_{kji,k}^\alpha \right)$$

Takodje imamo:

$$m_{ijk} = \sum_\alpha m_{ijk}^\alpha ,$$

$$\sum_\alpha u_i^\alpha c_i^\alpha = 0 .$$

3.5 DRUGI AKSIOM TERMODINAMIKE

Analizirajući relacije (3.4.1), (3.4.3) ili (3.4.4) moglo bi da se zaključi /22/ da se unutrašnja energija neograničeno povećava, bez učešća mehaničkog rada, ako telu dovedemo toplotu, jer je toplotni efekat pozitivan i unutrašnja energija raste na račun toplote. Medjutim, iskustvo pokazuje da ovo nije tačno. Naime, proces pretvaranja toplote u energiju, u odsustvu mehaničkog rada, nije neograničen, već postoji neka gornja granica toplotnog efekta. Obrnut proces, pretvaranja unutrašnje energije u toplotu, bez vršenja mehaničkog rada, nije ograničen.

Na osnovu prethodno izloženog se vidi da je ovaj proces ireverzibilan (nepovratan), odnosno postoji jedan deo ranije uloženog rada koji ne može da se vrati. "Smisao drugog aksioma ireverzibilnosti ili drugog zakona termodinamike je upravo u utvrdjivanju delimične ireverzibilnosti termodinamičkog procesa" /22/.

Dakle, prema drugom aksiomu termodinamike, toplotni efekat ne može da bude veći od neke granične vrednosti B:

$$Q \leq B \, .$$

Medjutim, ova konstanta B nije univerzalna konstanta, već se menja u zavisnosti od toka samog procesa.

Ovo ograničenje može da se izrazi preko Clausius-Duhem-ovo nejednačine /21/ u obliku (za mešavinu kao celinu):

$$(3.5.1)\qquad \frac{D}{Dt}\int_V \rho\eta\, dV \geqslant \oint_{\partial V}\sum_\alpha \frac{\phi_i^\alpha}{T^\alpha}\, dS_i + \int_V \sum_\alpha \left(\frac{\rho_*^\alpha h^\alpha}{T^\alpha}\right) dV,$$

gde je:

η -entropija mešavine, odredjena sa:

$$\rho\eta = \sum_\alpha \rho_*^\alpha \eta^\alpha$$

ϕ_i^α-fluks α-tog sastojka, veličina koja je vezana sa toplotnim fluksom, ali ta relacija za sad nije poznata /21/,

T^α -apsolutna temperatura α-tog sastojka.

Kao i u prethodnim slučajevima, pomoću (3.1) i (3.2)-D, dobijamo lokalni oblik disipativne nejednačine:

$$(3.5.2)\qquad \rho\frac{D\eta}{Dt} - \sum_\alpha\left[\left(\frac{\phi_i^\alpha}{T^\alpha}\right)_{,i} + \frac{\rho_*^\alpha h^\alpha}{T^\alpha}\right] \geqslant 0 .$$

Za neki termodinamički proces ćemo da kažemo da je dopustiv, ako je zadovoljena disipativna nejednačina (3.5.1) ili (3.5.2).

Nejednačinu (3.5.2) možemo da napišemo u drugom obliku, pogodnijem za kasniju upotrebu.

Kako je prema (D)

$$\rho\frac{D\eta}{Dt} = \sum_{\alpha}\left[\rho_*^{\alpha}\frac{D^{\alpha}\eta^{\alpha}}{Dt} - (\rho_*^{\alpha}\eta^{\alpha}u_i^{\alpha})_{,i}\right],$$

nejednačina (3.5.2) dobija oblik:

$$\sum_{\alpha}\left[\rho_*^{\alpha}\frac{D^{\alpha}\eta^{\alpha}}{Dt} - (\rho_*^{\alpha}\eta^{\alpha}u_i^{\alpha})_{,i} - \left(\frac{\phi_i^{\alpha}}{T^{\alpha}}\right)_{,i} - \frac{\rho_*^{\alpha}h^{\alpha}}{T^{\alpha}}\right] \geq 0. \tag{3.5.3}$$

Često je korisno uvesti, umesto unutrašnje energije ε^{α}, Helmholtz-ovu slobodnu energiju ψ^{α} odredjenu sa:

$$\psi^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha} - \eta^{\alpha}T^{\alpha}, \tag{3.5.4}$$

gde su:

ψ^{α}-slobodna energija α-tog sastojka,

η^{α}-entropija α-tog sastojka,

T^{α}-apsolutna temperatura α-tog sastojka. Po pretpostavci apsolutna temperatura je pozitivna.

Kad unesemo slobodnu energiju u (3.5.3) dobijamo:

$$\sum_{\alpha}\frac{1}{T^{\alpha}}\left[-\rho_*^{\alpha}\frac{D^{\alpha}\psi^{\alpha}}{Dt} + \rho_*^{\alpha}\frac{D^{\alpha}\varepsilon^{\alpha}}{Dt} - \rho_*^{\alpha}\eta^{\alpha}\frac{D^{\alpha}T^{\alpha}}{Dt} - T^{\alpha}(\rho_*^{\alpha}\eta^{\alpha}u_i^{\alpha})_{,i} - T^{\alpha}\left(\frac{\phi_i^{\alpha}}{T^{\alpha}}\right)_{,i} - \rho_*^{\alpha}h^{\alpha}\right] \geq 0.$$

Zamenom $\rho_*^\alpha h^\alpha$ iz (3.4.3)-D dobijamo:

$$\sum_\alpha \frac{1}{T^\alpha}\Big[-\rho_*^\alpha \frac{D^\alpha\psi^\alpha}{Dt} + \rho_*^\alpha\frac{D^\alpha\varepsilon^\alpha}{Dt} - \rho_*^\alpha\eta^\alpha\frac{D^\alpha T^\alpha}{Dt} - T^\alpha(\rho_*^\alpha\eta^\alpha u_i^\alpha)_{,i} - T^\alpha\Big(\frac{\phi_i}{T^\alpha}\Big)_{,i} - \Big(\rho_*^\alpha\frac{D^\alpha\varepsilon^\alpha}{Dt} - M_{kj}^\alpha \bar{v}_{j,k}^\alpha - q_{i,i}^\alpha - m_{jk}^\alpha \bar{v}_{j,ki}^\alpha + \rho_*^\alpha M^\alpha \frac{D^\alpha n^\alpha}{Dt} + \zeta_i^\alpha v_i^\alpha\Big)\Big] \geqslant 0 \tag{3.5.5}$$

odnosno:

$$\sum_\alpha \frac{1}{T^\alpha}\Big[-\rho_*^\alpha \frac{D^\alpha\psi^\alpha}{Dt} - \rho_*^\alpha\eta^\alpha\frac{D^\alpha T^\alpha}{Dt} - T^\alpha(\rho_*^\alpha\eta^\alpha u_i^\alpha)_{,i} - T^\alpha\Big(\frac{\phi_i^\alpha}{T^\alpha}\Big)_{,i} + M_{kj}^\alpha \bar{v}_{j,k}^\alpha + q_{i,i}^\alpha + m_{jk}^\alpha \bar{v}_{j,ki}^\alpha - \rho_*^\alpha M^\alpha \frac{D^\alpha n^\alpha}{Dt} - \zeta_i^\alpha v_i^\alpha\Big] \geqslant 0 . \tag{3.5.6}$$

Kad izvršimo odgovarajuće diferenciranje i grupišemo članove, dobijamo:

$$\sum_\alpha \frac{1}{T^\alpha}\Big[-\rho_*^\alpha \frac{D^\alpha\psi^\alpha}{Dt} - \rho_*^\alpha\eta^\alpha\frac{D^\alpha T^\alpha}{Dt} - T^\alpha(\rho_*^\alpha\eta^\alpha u_i^\alpha)_{,i} - \phi_{i,i}^\alpha + q_{i,i}^\alpha + \frac{\phi_i^\alpha T_{,i}^\alpha}{T^\alpha} + M_{kj}^\alpha \bar{v}_{j,k}^\alpha + m_{jk}^\alpha \bar{v}_{j,ki}^\alpha - \rho_*^\alpha M^\alpha \frac{D^\alpha n^\alpha}{Dt} - \zeta_i^\alpha v_i^\alpha\Big] \geqslant 0 , \tag{3.5.7}$$

odnosno:

$$\sum_\alpha \frac{1}{T^\alpha}\Big[-\rho_*^\alpha\Big(\frac{D^\alpha\psi^\alpha}{Dt} + \eta^\alpha\frac{D^\alpha T^\alpha}{Dt}\Big) + \big(q_i^\alpha - \phi_i^\alpha - T^\alpha\rho_*^\alpha\eta^\alpha u_i^\alpha\big)_{,i} + \Big(\frac{\phi_i^\alpha}{T^\alpha} + \rho_*^\alpha\eta^\alpha u_i^\alpha\Big)T_{,i}^\alpha + M_{kj}^\alpha \bar{v}_{j,k}^\alpha + m_{jk}^\alpha \bar{v}_{j,ki}^\alpha - \rho_*^\alpha M^\alpha \frac{D^\alpha n^\alpha}{Dt} - \zeta_i^\alpha v_i^\alpha\Big] \geqslant 0 . \tag{3.5.8}$$

Specijalno, za mešavine kod kojih su temperature sastojaka jednake, tj.

$$T^1 = T^2 = T^3 = \dots = T$$

disipativna nejednačina postaje:

$$\sum_{\alpha} \Big[-\rho_*^{\alpha} \Big(\frac{D^{\alpha} \psi^{\alpha}}{Dt} + \eta^{\alpha} \frac{D^{\alpha} T}{Dt} \Big) + \big(q_i^{\alpha} - \phi_i^{\alpha} - T \rho_*^{\alpha} \eta^{\alpha} u_i^{\alpha} \big)_{,i} +$$

$$(3.5.9) \qquad + \Big(\frac{\phi_i^{\alpha}}{T} + \rho_*^{\alpha} \eta^{\alpha} u_i^{\alpha} \Big) T_{,i} + M_{kj}^{\alpha} \gamma_{j,k}^{\alpha} + m_{ijk}^{\alpha} \nu_{j,ki}^{\alpha} -$$

$$- \rho_*^{\alpha} M^{\alpha} \frac{D^{\alpha} \eta^{\alpha}}{Dt} - \zeta_i^{\alpha} \nu_i^{\alpha} \Big] \geqslant 0 .$$

Ovaj poslednji oblik disipativne nejednačine ćemo kasnije da koristimo pri izvodjenju konstitutivnih relacija.

4. KONSTITUTIVNE JEDNAČINE ZA POROZNE MATERIJALE

Zakoni balansa mase, količine kretanja, momenta količine kretanja i balansa energije su isti za sva neprekidna tela i ne zavise od svojstva i ponašanja pojedinih tela. Medjutim, poznato je da tela od različitih materijala različito reaguju na spoljne uticaje. Ovo je uslovljeno prirodom materijala od kog su napravljena. Dakle, reagovanje tela, tj. njihov "odgovor" na spoljne uticaje, treba odrediti nekim relacijama koje karakterišu njihova materijalna svojstva. Ove relacije, sa fizičkog stanovišta, predstavljaju jednačine stanja (termin uobičajen u termodinamici) ili konstitutivne jednačine (termin uobičajen u mehanici kontinuuma) /23/. Medjutim, kako su materijalna svojstva vrlo složena, ove relacije ne opisuju u potpunosti njihove karakteristike, već ističu samo dominantne osobine.

Kako je već rečeno u uvodu, naš zadatak je da odredimo polja: gustine, poroznosti, temperature i pomeranja. Da bismo odredili ove nepoznate funkcije na raspolaganju su nam, za sada, jedino jednačine balansa: mase, količine kretanja, momenta količine kretanja i energije, za svaki sastojak.

Navedimo ove jednačine još jednom:

$$\frac{\partial \rho_*^\alpha}{\partial t} + \left(\rho_*^\alpha v_i^\alpha\right)_{,i} = 0 \tag{4.1}$$

$$\rho_*^\alpha \frac{D^\alpha v_i^\alpha}{Dt} = \rho_*^\alpha f_i^\alpha + \zeta_i^\alpha + t_{ij,j}^\alpha \tag{4.2}$$

$$e_{ijk} M_{kj}^\alpha = 0 \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}\rho_*^\alpha \frac{D^\alpha \varepsilon^\alpha}{Dt} = {} & M_{ji}^\alpha v_{i,j}^\alpha + q_{i,i}^\alpha + m_{ijk}^\alpha v_{j,ki}^\alpha + \rho_*^\alpha h^\alpha - \\ & - \rho_*^\alpha M^\alpha \frac{D^\alpha \eta^\alpha}{Dt} - \zeta_i^\alpha v_i^\alpha\end{aligned} \tag{4.4}$$

Pored ovog skupa jednačina imamo i disipativnu nejednačinu:

$$\begin{aligned}\sum_\alpha \Big[& -\rho_*^\alpha \left(\frac{D^\alpha \psi^\alpha}{Dt} + \eta^\alpha \frac{D^\alpha T}{Dt}\right) + \left(q_i^\alpha - \phi_i^\alpha - T\rho_*^\alpha \eta^\alpha u_i^\alpha\right)_{,i} + \\ & + \left(\frac{\phi_i^\alpha}{T} + \rho_*^\alpha \eta^\alpha u_i^\alpha\right) T_{,i} + M_{kj}^\alpha v_{j,k}^\alpha + m_{ijk}^\alpha v_{j,ki}^\alpha - \\ & - \rho_*^\alpha M^\alpha \frac{D^\alpha \eta^\alpha}{Dt} - \zeta_i^\alpha v_i^\alpha \Big] \geq 0 ,\end{aligned} \tag{4.5}$$

koja nameće odredjena ograničenja na konstitutivne jednačine.

Ako malo analiziramo ovaj skup (4.1)-(4.5), vidimo da imamo sledeće grupe promenljivih /25/:

(4.6) x_i^α, T, n^α, ρ_*^α ;

(4.7) h^α, f_i^α ;

(4.8) v_i^α , u_i^α, ε^α ;

(4.9) t_{ij}^α, r_i^α, ϕ_i^α, q_i^α, ψ^α , η^α , M^α, m_{ijk}^α .

U prvoj grupi (4.6) se nalaze veličine koje, prema postavljenom zadatku, treba da odredimo, a koje predstavljaju nezavisne promenljive. Ima ih ukupno ($5\alpha + 1$), tj. 3α (x_i^α) + 1 (T) + α(n^α) + α (ρ^α) $= 5\alpha + 1$. Medjutim, prema $(1.6)_2$ imamo jednu relaciju izmedju n^α, pa ostaje (5α) nezavisno promenljivih veličina.

Napomenimo da je početna raspodela gustina ρ_0^α poznata.

U drugoj grupi (4.7) se nalaze veličine koje su po pretpostavci poznate (gustina toplotne energije, zapreminske sile).

U trećoj grupi (4.8) su veličine koje se mogu odrediti preko ostalih veličina (brzina (2.5), relativna brzina (2.7), unutrašnja energija (3.5.4)).

I konačno u poslednjoj grupi su veličine koje zavise od skupa promenljivih iz (4.6), tj. zavisne promenljive. Ako napišemo konstitutivnu jednačinu za svaku od ovih zavisnih veličina:

$$t_{ij}^{\alpha} = t_{ij}^{\alpha} \; / \, K \, /,$$

$$r_{i}^{\alpha} = r_{i}^{\alpha} \; / \, K \, /,$$

$$m_{ijk}^{\alpha} = m_{ijk}^{\alpha} \; / \, K \, /,$$

$$q_{i}^{\alpha} = q_{i}^{\alpha} \; / \, K \, /,$$

(4.1c)

$$M^{\alpha} = M^{\alpha} \; / \, K \, /,$$

$$\phi_{i}^{\alpha} = \phi_{i}^{\alpha} \; / \, K \, /,$$

$$\psi^{\alpha} = \psi^{\alpha} \; / \, K \, /,$$

$$\eta^{\alpha} = \eta^{\alpha} \; / \, K \, /,$$

imaćemo potpun skup jednačina za odredjivanje veličina iz (4.6).

Sa /K/ je označen skup nezavisno promenljivih, koje ćemo posebno napisati za zasićene, a posebno za nezasićene sredine.

Napomenimo da relacije (4.1o) nisu proizvoljne. One moraju da zadovolje drugi aksiom termodinamike (4.5), tj. treba da su termodinamički dopustive.

Pored ovog ograničenja nameće se još jedno, kao posledica principa objektivnosti, Matematički rečeno ovaj princip kaže da konstitutivne veličine treba da su invarijantne u odnosu na grupu ortogonalnih transformacija.

Procesi koje posmatramo su disipativni. Izvori disipacije su viskozni odgovori tla i fluida na mehaničke uticaje, zatim interakcije izmedju faza, proces provodjenja toplote, difuzija i drugo.

Uobičajeno je da se pri posmatranju disipativnih procesa tenzor napona i neke druge veličine, razlože na dva dela: elastični i disipativni ($\underset{\sim}{t} = {}_{\epsilon}\underset{\sim}{t} + {}_{d}\underset{\sim}{t}$). To ćemo i mi, kasnije, da uradimo.

Pri pisanju konstitutivnih relacija (4.1o) koristili smo princip ekviprezensa, tj. pretpostavili smo da su sve konstitutivne veličine funkcije istog skupa promenljivih, dok se drugačije ne dokaže.

4.1 KONSTITUTIVNE JEDNAČINE ZA ZASIĆENU POROZNU SREDINU

Već smo rekli da ćemo zasićenu poroznu sredinu da posmatramo kao dvokomponentalnu mešavinu. Ranije izvedene relacije su važeće, s tim što u ovom slučaju α može da bude 1 ili 2. Sa indeksom "1" ćemo da označavamo veličine koje se odnose na skelet, a sa "2" veličine koje se odnose na tečnost.

U daljem radu ćemo da pretpostavimo da su temperature sastojaka iste, tj.

$$T^{1} = T^{2} = T \tag{4.1.1}$$

što je fizički opravdano za probleme na koje želimo da primenimo ovu teoriju (konsolidacija). Naime, temperatura vode, koja se zadržala u porama, će posle izvesnog vremena da se izjednači sa temperaturom skeleta.

Ovo znači da naša teorija ne može da se primeni na oblasti u kojima se javljaju lokalni toplotni izvori.

Pretpostavimo da je ponašanje fluidom zasićene porozne sredine odredjeno sledećim skupom nezavisno promenljivih:

$$K = \left\{ T ; T_{,i} ; x^{\beta}_{k,K} ; x^{\beta}_{k;KL} ; \frac{D^{\beta} x^{\beta}_{k,K}}{Dt} ; n ; \rho^{2}_{*} ; V_i \equiv v^{2}_{i} - v^{1}_{i} \right\} \tag{4.1.2}$$

Pri izvodjenju konstitutivnih relacija koristićemo disipativnu nejednačinu (4.5):

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \Big[& -\rho^{\alpha}_{*} \left(\frac{D^{\alpha} \psi^{\alpha}}{Dt} + \eta^{\alpha} \frac{D^{\alpha} T}{Dt} \right) + \left(q^{\alpha}_{i} - \phi^{\alpha}_{i} - T \rho^{\alpha}_{*} \eta^{\alpha} u^{\alpha}_{i} \right)_{,i} + \\ & + \left(\frac{\phi^{\alpha}_{i}}{T} + \rho^{\alpha}_{*} \eta^{\alpha} u^{\alpha}_{i} \right) T_{,i} + M^{\alpha}_{kj} \gamma^{\alpha}_{jk} + m^{\alpha}_{jk} \gamma^{\alpha}_{jki} - \\ & - \rho^{\alpha}_{*} M^{\alpha} \frac{D^{\alpha} n^{\alpha}}{Dt} - \zeta^{\alpha}_{i} v^{\alpha}_{i} \Big] \geq 0 . \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Prema $(1.6)_2$ i (1.12) možemo da pišemo:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} M^{\alpha} \frac{D^{\alpha} n^{\alpha}}{Dt} &= M^{1} \frac{D^{1}(1-n)}{Dt} + M^{2} \frac{D^{2} n}{Dt} = \\ &= -M^{1} \frac{D^{1} n}{Dt} + M^{2} \frac{D^{2} n}{Dt} = \sum_{\alpha} \bar{M}^{\alpha} \frac{D^{\alpha} n}{Dt} . \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Dalje, prema (3.2.6)-D, možemo da uvedemo sledeću smenu:

$$r^{2}_{i} = -r^{1}_{i} = r_{i} \quad , \tag{4.1.5}$$

pa zbir $\sum_{\alpha} r_i^{\alpha}\, v_i^{\alpha}$ postaje:

$$\sum_{\alpha} r_i^{\alpha}\, v_i^{\alpha} = r_i\,(v_i^2 - v_i^1) = r_i V_i \;. \tag{4.1.5}$$

Na osnovu (4.1.4) i (4.1.5) poslednju nejednačinu možemo da napišemo u obliku:

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha}\Big[&-\rho_*^{\alpha}\Big(\frac{D^{\alpha}\psi^{\alpha}}{Dt}+\eta^{\alpha}\frac{D^{\alpha}T}{Dt}\Big)+\Big(q_i^{\alpha}-\phi_i^{\alpha}-T\rho_*^{\alpha}\eta^{\alpha}u_i^{\alpha}\Big)_{,i}+\\ &+\Big(\frac{\phi_i^{\alpha}}{T}+\rho_*^{\alpha}\eta^{\alpha}u_i^{\alpha}\Big)T_{,i}+M_{kj}^{\alpha}v_{j,k}^{\alpha}+m_{jk}^{\alpha}v_{j,ki}^{\alpha}-\\ &-\rho_*^{\alpha}\bar{M}^{\alpha}\frac{D^{\alpha}n}{Dt}\Big]-z_i V_i \geq 0 \;,\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

gde je: $\quad -M^1=\bar{M}^1,\; M^2=\bar{M}^2$.

Proma (4.1o) i (4.1.2) slobodna energija sastojka je:

$$\psi^{\alpha}=\psi^{\alpha}\Big\{T;\, T_{,i};\, x_{k,K}^{\beta};\, x_{k,KL}^{\beta};\, \frac{D^{\beta}x_{k,K}^{3}}{Dt};\, n;\, \rho_*^{2};\, V_i\Big\}$$

pa za $\frac{D^{\alpha}\psi^{\alpha}}{Dt}$ dobijamo:

$$\begin{aligned}\frac{D^{\alpha}\psi^{\alpha}}{Dt}&=\frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial T}\cdot\frac{D^{\alpha}T}{Dt}+\frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial T_{,i}}\cdot\frac{D^{\alpha}T_{,i}}{Dt}+\frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial x_{k,K}^{\beta}}\cdot\frac{D^{\alpha}x_{k,K}^{\beta}}{Dt}+\\ &+\frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial x_{k,KL}^{\beta}}\cdot\frac{D^{\alpha}x_{k,KL}^{\beta}}{Dt}+\frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial\Big(\frac{D^{\beta}x_{k,K}^{\beta}}{Dt}\Big)}\cdot\frac{D^{\alpha}}{Dt}\Big(\frac{D^{\beta}x_{k,K}^{\beta}}{Dt}\Big)+\\ &+\frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial n}\frac{D^{\alpha}n}{Dt}+\frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial\rho_*^{2}}\frac{D^{\alpha}\rho_*^{2}}{Dt}+\frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial V_i}\frac{D^{\alpha}V_i}{Dt}\;.\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Ako ovo uvrstimo u (4.1.6) dobijamo:

$$
\begin{aligned}
-\sum_{\alpha,\beta} \rho_*^\alpha \Big\{ & \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial T}\frac{D^\alpha T}{Dt} + \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial T_{,i}}\frac{D^\alpha T_{,i}}{Dt} + \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial x^\beta_{k,K}}\Big[\acute{x}^\beta_{k,K} + x^\beta_{k,KL} X^\beta_{L,i}\big(v_i^\alpha - v_i^\beta\big)\Big] + \\
& + \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial x^\beta_{k,KL}}\Big[\acute{x}^\beta_{k,KL} + x^\beta_{k,KLM} X^\beta_{M,i}\big(v_i^\alpha - v_i^\beta\big)\Big] + \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial n}\frac{D^\alpha n}{Dt} + \\
& + \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \acute{x}^\beta_{k,K}}\Big[\acute{\acute{x}}^\beta_{k,K} + \acute{x}^\beta_{k,KL} X^\beta_{L,i}\big(v_i^\alpha - v_i^\beta\big)\Big] + \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \rho_*^2}\frac{D^\alpha \rho_*^2}{Dt} + \\
& + \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial V_i}\frac{D^\alpha V_i}{Dt} + \eta^\alpha \frac{D^\alpha T}{Dt} + \bar{M}^\alpha \frac{D^\alpha n}{Dt}\Big\} - \zeta_i V_i + \\
& + \sum_\alpha \Big[\big(q_i^\alpha - \phi_i^\alpha - T\rho_*^\alpha \eta^\alpha u_i^\alpha\big)_{,i} + \Big(\frac{\phi_i^\alpha}{T} + \rho_*^\alpha \eta^\alpha u_i^\alpha\Big)T_{,i} + M^\alpha_{kj} v^\alpha_{j,k} + m^\alpha_{ijk} v^\alpha_{j,ki}\Big] \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{4.1.8}
$$

Kako je (za Descartes-ov koordinatni sistem !):

$$
\frac{D^\alpha x^\alpha_{i,K}}{Dt} = \acute{x}^\alpha_{i,K} = x^\alpha_{j,K} v^\alpha_{i,j}
$$

$$
\frac{D^\alpha x^\alpha_{i,KL}}{Dt} = \acute{x}^\alpha_{i,KL} = x^\alpha_{k,K} x^\alpha_{\ell,L} v^\alpha_{i,k\ell} \tag{4.1.9)-D}
$$

i prema (3.1.2):

$$
\frac{D^2 \rho_*^2}{Dt} = -\rho_*^2 v^2_{i,j}\delta_{ij}\ , \tag{4.1.10}
$$

prethodna nejednačina može da se napiše u obliku:

$$
\begin{aligned}
\sum_\alpha \Big\{ -\rho_*^\alpha \Big[& \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial T}\frac{D^\alpha T}{Dt} + \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial T_{,i}}\frac{D^\alpha T_{,i}}{Dt} + \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial x^\alpha_{k,K}}\acute{x}^\alpha_{k,K} + \\
& + \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial x^\alpha_{k,KL}}\acute{x}^\alpha_{k,KL} + \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \acute{x}^\alpha_{k,K}}\acute{\acute{x}}^\alpha_{k,K} + \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial n}\frac{D^2 n}{Dt} + \\
& + \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \rho_*^2}\frac{D^2 \rho_*^2}{Dt} + \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial V_i}\frac{D^\alpha V_i}{Dt} + \eta^\alpha \frac{D^\alpha T}{Dt}\Big] +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& + \left(q_i^{\alpha} - \varphi_i^{\alpha} - T \rho_*^{\alpha} \eta^{\alpha} u_i^{\alpha}\right)_{,i} + \left(\frac{\varphi_i^{\alpha}}{T} + \rho_*^{\alpha} \eta^{\alpha} u_i^{\alpha}\right) T_{,i} + \\
& + M_{kj}^{\alpha} v_{j,k}^{\alpha} + u_{ijk}^{\alpha} v_{j,ki}^{\alpha} - \rho_*^{\alpha} \bar{M}^{\alpha} \frac{D^2 n}{Dt} \Big\} - \zeta_i V_i + \rho_*^1 V_i \rho_{*,i}^2 \frac{\partial \psi^1}{\partial \rho_*^2} - \\
& - \rho_*^1 \frac{\partial \psi^1}{\partial x^2_{k,K}} {x'}^2_{k,K} + \rho_*^1 \frac{\partial \psi^1}{\partial x^2_{k,K}} x^2_{k,KL} X^2_{L,i} V_i - \rho_*^2 \frac{\partial \psi^2}{\partial x^1_{k,K}} {x'}^1_{k,K} + \rho_*^1 \bar{M}^1 n_{,i} V_i - \\
(4.1.11) \quad & - \rho_*^2 x^1_{k,KL} \frac{\partial \psi^2}{\partial x^1_{k,K}} X^1_{L,i} V_i - \rho_*^1 \frac{\partial \psi^1}{\partial x^2_{k,KL}} {x'}^2_{k,KL} + \rho_*^1 \frac{\partial \psi^1}{\partial x^2_{k,KL}} x^2_{k,KLM} X^2_{M,i} V_i - \\
& - \rho_*^2 \frac{\partial \psi^2}{\partial x^1_{k,KL}} {x'}^1_{k,KL} - \rho_*^2 x^1_{k,KLM} \frac{\partial \psi^2}{\partial x^1_{k,KL}} X^1_{M,i} V_i - \rho_*^1 \frac{\partial \psi^1}{\partial {x'}^2_{k,K}} {x''}^2_{k,K} + \rho_*^1 \frac{\partial \psi^1}{\partial n} n_{,i} V_i + \\
& + \rho_*^1 \frac{\partial \psi^1}{\partial {x'}^2_{k,K}} {x'}^2_{k,KL} X^2_{L,i} V_i - \rho_*^2 \frac{\partial \psi^2}{\partial {x'}^1_{k,K}} {x'}^1_{k,KL} X^1_{L,i} V_i - \rho_*^2 \frac{\partial \psi^2}{\partial {x'}^1_{k,K}} {x''}^1_{k,K} \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Pri dobijanju nejednačine (4.1.11) iskoristili smo i (2.11) :

$$
(4.1.12) \qquad \frac{D^{\alpha} f}{Dt} = \frac{D^{\beta} f}{Dt} + f_{,i} \left(v_i^{\alpha} - v_i^{\beta}\right),
$$

da bi izrazili odgovarajuće članove.

Kad se grupišu odgovarajući članovi i iskoristi:

$$
\begin{aligned}
& \left(q_i^{\alpha} - \varphi_i^{\alpha} - T \rho_*^{\alpha} \eta^{\alpha} u_i^{\alpha}\right)_{,i} = \frac{\partial (\quad)}{\partial T} T_{,i} + \\
(4.1.13) \quad & + \frac{\partial (\quad)}{\partial T_{,j}} T_{,ji} + \frac{\partial (\quad)}{\partial x^{\beta}_{k,K}} x^{\beta}_{k,KL} X^{\beta}_{L,i} + \\
& + \frac{\partial (\quad)}{\partial x^{\beta}_{k,KL}} x^{\beta}_{k,KLM} X^{\beta}_{M,i} + \frac{\partial (\quad)}{\partial {x'}^{\beta}_{k,K}} {x'}^{\beta}_{k,KL} X^{\beta}_{L,i} + \\
& + \frac{\partial (\quad)}{\partial n} n_{,i} + \frac{\partial (\quad)}{\partial \rho_*^2} \rho_{*,i}^2 + \frac{\partial (\quad)}{\partial V_j} V_{j,i}
\end{aligned}
$$

dobijamo:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\alpha}\Big\{-\rho_*^{\alpha}\Big[\Big(\frac{\partial\Psi^{\alpha}}{\partial T}+\eta^{\alpha}\Big)\frac{D^{\alpha}T}{Dt}+\frac{\partial\Psi^{\alpha}}{\partial T_{,i}}\frac{D^{\alpha}T_{,i}}{Dt}-\frac{\partial\Psi^{\alpha}}{\partial\rho_*^{2}}\rho_*^{2}\delta_{ij}v^{2}_{k,l}+\\
&+\Big(\frac{\partial\Psi^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}_{k,K}}x^{\alpha}_{l,K}-\frac{1}{\rho_*^{\alpha}}M^{\alpha}_{lk}\Big)v^{\alpha}_{k,l}+\Big(\frac{\partial\Psi^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}_{j,KL}}x^{\alpha}_{k,K}x^{\alpha}_{l,L}-\frac{1}{\rho_*^{\alpha}}m^{\alpha}_{ljk}\Big)v^{\alpha}_{j,kl}+\\
&+\frac{\partial\Psi^{\alpha}}{\partial x'^{\alpha}_{k,K}}x''^{\alpha}_{k,K}+\Big(\frac{\partial\Psi^{\alpha}}{\partial n}+\bar{M}^{\alpha}\Big)\frac{D^{2}n}{Dt}+\frac{\partial\Psi^{\alpha}}{\partial V_{i}}\frac{D^{\alpha}V_{i}}{Dt}\Big]+\frac{\partial A_i^{\alpha}}{\partial T_{,j}}T_{,ij}+\\
&+\Big(\frac{\partial A_i^{\alpha}}{\partial T}+\frac{\phi_i^{\alpha}}{T}+\rho_*^{\alpha}\eta^{\alpha}u_i^{\alpha}\Big)T_{,i}+\frac{\partial A_i^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}_{k,K}}x^{\alpha}_{k,KL}X^{\alpha}_{L,i}+\frac{\partial A_i^{\alpha}}{\partial x'^{\alpha}_{j,K}}x'^{\alpha}_{j,KL}X^{\alpha}_{L,i}+\\
&+\frac{\partial A_i^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}_{k,KL}}x^{\alpha}_{k,KLM}X^{\alpha}_{M,i}+\frac{\partial A_i^{\alpha}}{\partial n}n_{,i}+\frac{\partial A_i^{\alpha}}{\partial\rho_*^{2}}\rho^{2}_{*,i}+\frac{\partial A_i^{\alpha}}{\partial V_j}V_{j,i}\Big\}-\zeta_i V_i-\\
&-\rho^{1}_*\frac{\partial\Psi^{1}}{\partial x^{2}_{k,K}}x^{2}_{l,K}v^{2}_{k,l}+\rho^{1}_*\frac{\partial\Psi^{1}}{\partial x^{2}_{k,K}}x^{2}_{k,KL}X^{2}_{L,i}V_i-\rho^{2}_*\frac{\partial\Psi^{2}}{\partial x^{1}_{k,K}}x^{1}_{l,K}v^{1}_{k,l}-\\
&-\rho^{2}_*\frac{\partial\Psi^{2}}{\partial x^{1}_{k,K}}x^{1}_{k,KL}X^{1}_{L,i}V_i-\rho^{1}_*\frac{\partial\Psi^{1}}{\partial x^{2}_{k,KL}}x^{2}_{i,K}x^{2}_{j,L}v^{2}_{k,ij}+\rho^{1}_*\frac{\partial\Psi^{1}}{\partial x^{2}_{k,KL}}x^{2}_{k,KLM}X^{2}_{M,i}V_i-\\
&-\rho^{2}_*\frac{\partial\Psi^{2}}{\partial x^{1}_{k,KL}}x^{1}_{i,K}x^{1}_{j,L}v^{1}_{k,ij}-\rho^{2}_*\frac{\partial\Psi^{2}}{\partial x^{1}_{k,KL}}x^{1}_{k,KLM}X^{1}_{M,i}V_i-\rho^{1}_*\frac{\partial\Psi^{1}}{\partial x'^{2}_{k,K}}x''^{2}_{k,K}+\\
&+\rho^{1}_*\frac{\partial\Psi^{1}}{\partial x'^{2}_{k,K}}x'^{2}_{k,KL}X^{2}_{L,i}V_i-\rho^{2}_*\frac{\partial\Psi^{2}}{\partial x'^{1}_{k,K}}x''^{1}_{k,K}-\rho^{2}_*\frac{\partial\Psi^{2}}{\partial x'^{1}_{j,K}}x'^{1}_{j,KL}X^{1}_{L,i}V_i+\\
&+\rho^{1}\Big(\frac{\partial\Psi^{1}}{\partial n}+\bar{M}^{1}\Big)V_i n_{,i}+\rho^{1}_*\frac{\partial\Psi^{1}}{\partial\rho^{2}_*}\rho^{2}_{*,i}V_i+\frac{\partial A_i^{1}}{\partial x^{2}_{k,K}}x^{2}_{k,KL}X^{2}_{L,i}+\\
&+\frac{\partial A_i^{2}}{\partial x^{1}_{k,K}}x^{1}_{k,KL}X^{1}_{L,i}+\frac{\partial A_i^{1}}{\partial x^{2}_{k,KL}}x^{2}_{k,KLM}X^{2}_{M,i}+\frac{\partial A_i^{2}}{\partial x^{1}_{k,KL}}x^{1}_{k,KLM}X^{1}_{M,i}+\\
&+\frac{\partial A_i^{1}}{\partial x'^{2}_{j,K}}x'^{2}_{j,KL}X^{2}_{L,i}+\frac{\partial A_i^{2}}{\partial x'^{1}_{j,K}}x'^{1}_{j,KL}X^{1}_{L,i}\geqslant 0.
\end{aligned}
\tag{4.1.14}
$$

gde je: $\quad A_i^\alpha \equiv q_i^\alpha - \phi_i^\alpha - T\rho_*^\alpha \eta^\alpha u_i^\alpha$.

Nejednačina (4.1.14) je linearna po sledećem skupu nezavisno promenljivih:

$$\frac{D^\alpha T}{Dt};\ \frac{D^\alpha T_{,i}}{Dt};\ v^\alpha_{3jk};\ v'^\alpha_{i,j};\ \frac{D^2 n}{Dt};\ \frac{D^\alpha V_i}{DV};\ T_{,ij};\ x^\alpha_{k,KLM};\ n_{,i};\ V_{i,j};\ \rho^2_{*,i}$$

pa da bi važila za proizvoljan proces, potrebno je da koeficijenti uz te članove budu jednaki nuli. Na osnovu ovog slede relacije:

$$-\rho_*^1\frac{\partial\psi^1}{\partial x^1_{j,KL}}x^1_{k,K}x^1_{l,L}+m^1_{ljk}+\frac{\partial A_i^1}{\partial x'^1_{j,K}}X^1_{L,i}x^1_{k,K}x^1_{l,L}-\rho_*^2\frac{\partial\psi^2}{\partial x'^1_{j,K}}x^1_{k,K}x^1_{l,L}V_iX^1_{L,i}-$$
$$-\rho_*^2\frac{\partial\psi^2}{\partial x^1_{k,KL}}x^1_{i,K}x^1_{j,L}+\frac{\partial A_i^2}{\partial x'^1_{j,K}}x^1_{k,K}x^1_{l,L}X^1_{L,i}=0$$

$$-\rho_*^2\frac{\partial\psi^2}{\partial x^2_{j,KL}}x^2_{k,K}x^2_{l,L}+m^2_{ljk}+\frac{\partial A_i^2}{\partial x'^2_{j,K}}x^2_{k,K}x^2_{l,L}X^2_{L,i}+\rho_*^1\frac{\partial\psi^1}{\partial x'^2_{j,K}}x^2_{k,K}x^2_{l,L}X^2_{L,i}V_i+$$
$$+\frac{\partial A_i^1}{\partial x'^2_{j,K}}x^2_{k,K}x^2_{l,L}X^2_{L,i}-\rho_*^1\frac{\partial\psi^1}{\partial x^2_{k,KL}}x^2_{i,K}x^2_{j,L}=0$$

(4.1.15)

$$\frac{\partial A_i^1}{\partial x^1_{k,KL}}X^1_{M,i}+\frac{\partial A_i^2}{\partial x^1_{k,KL}}X^1_{M,i}-\rho_*^2\frac{\partial\psi^2}{\partial x^1_{k,KL}}X^1_{M,i}V_i=0$$

$$\frac{\partial A_i^2}{\partial x^2_{k,KL}}X^2_{M,i}+\frac{\partial A_i^1}{\partial x^2_{k,KL}}X^2_{M,i}+\rho_*^1\frac{\partial\psi^1}{\partial x^2_{k,KL}}X^2_{M,i}V_i=0$$

$$-\rho_*^1\frac{\partial\psi^1}{\partial x'^1_{k,K}}-\rho_*^2\frac{\partial\psi^2}{\partial x'^1_{k,K}}=0\ ;\quad -\rho_*^2\frac{\partial\psi^2}{\partial x'^2_{k,K}}-\rho_*^1\frac{\partial\psi^1}{\partial x'^2_{k,K}}=0$$

$$\frac{\partial A_i^\alpha}{\partial V_j}=\frac{\partial A_i}{\partial T_{,j}}=\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial V_i}=\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial T_{,i}}=0;$$

$$\eta^\alpha=-\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial T}\ ;\quad \bar{M}^\alpha=-\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial n}\ ;$$

$$\frac{\partial A_i^\alpha}{\partial n}+\rho_*^1\left(\bar{M}^1+\frac{\partial\psi^1}{\partial n}\right)V_i=0\ ;\ \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial\rho_*^2}+\rho_*^1\frac{\partial\psi^1}{\partial\rho_*^2}V_i=0 .$$

Disipativna nejednačina postaje:

$$\left(-\rho_*^2\frac{\partial\Psi^2}{\partial X^2_{k,K}}x^2_{l,K} + M^2_{lk} + \rho^1_*\frac{\partial\Psi^1}{\partial\rho^2_*}\rho^2_*\delta_{kl} + \rho^2_*\frac{\partial\Psi^2}{\partial\rho^2_*}\rho^2_*\delta_{kl} - \rho^1_*\frac{\partial\Psi^1}{\partial X^2_{k,K}}x^2_{l,K}\right)v^2_{k,l} +$$

$$+\left(-\rho^1_*\frac{\partial\Psi^1}{\partial X^1_{k,K}}x^1_{l,K} + M^1_{lk} - \rho^2_*\frac{\partial\Psi^2}{\partial X^1_{k,K}}x^1_{l,K}\right)v^1_{k,l} + \frac{\partial A^2_i}{\partial X^1_{k,K}}x^1_{k,KL}X^1_{L,i} +$$

(4.1.16)

$$+T_{,i}\sum_\alpha\left(\frac{\partial A^\alpha_i}{\partial T}+\frac{\phi^\alpha_i}{T}+\rho^\alpha_*\eta^\alpha u^\alpha_i\right) + \sum_\alpha \frac{\partial A^\alpha_i}{\partial X^\alpha_{k,K}}x^\alpha_{k,KL}X^\alpha_{L,i} + \frac{\partial A^1_i}{\partial X^2_{k,K}}x^2_{k,KL}X^2_{L,i} -$$

$$-V_i\left(r_i - \rho^1_*\frac{\partial\Psi^1}{\partial X^2_{k,K}}x^2_{k,KL}X^2_{L,i} + \rho^2_*\frac{\partial\Psi^2}{\partial X^1_{k,K}}x^1_{k,KL}X^1_{L,i}\right)\geq 0 .$$

Izrazi u zagradama nam sugerišu da rastavimo veličine $\underset{\sim}{M}^\alpha$ i $\underset{\sim}{r}$ na dva dela, tako da je:

$${}_eM^1_{kl} = \rho^1_*\frac{\partial\Psi^1}{\partial X^1_{k,K}}x^1_{l,K} + \rho^2_*\frac{\partial\Psi^2}{\partial X^1_{k,K}}x^1_{l,K}$$

(4.1.17)
$${}_eM^2_{kl} = \rho^2_*\frac{\partial\Psi^2}{\partial X^2_{k,K}}x^2_{l,K} + \rho^1_*\frac{\partial\Psi^1}{\partial X^2_{k,K}}x^2_{l,K} - \rho^1_*\frac{\partial\Psi^1}{\partial\rho^2_*}\rho^2_*\delta_{kl} - \rho^2_*\rho^2_*\frac{\partial\Psi^2}{\partial\rho^2_*}\delta_{kl}$$

$${}_er_i = \rho^1_*\frac{\partial\Psi^1}{\partial X^2_{k,K}}x^2_{k,KL}X^2_{L,i} - \rho^2_*\frac{\partial\Psi^2}{\partial X^1_{k,K}}x^1_{k,KL}X^1_{L,i}$$

pa konačno dobijamo, za disipativnu nejednačinu:

$$\sum_\alpha\left[{}_dM^\alpha_{kl}v^\alpha_{k,l} + T_{,i}\left(\frac{\partial A^\alpha_i}{\partial T}+\frac{\phi^\alpha_i}{T}+\rho^\alpha_*\eta^\alpha u^\alpha_i\right) + \frac{\partial A^\alpha_i}{\partial X^\alpha_{k,K}}x^\alpha_{k,KL}X^\alpha_{L,i}\right] -$$

(4.1.18)

$$-{}_dr_iV_i + \frac{\partial A^1_i}{\partial X^2_{k,K}}x^2_{k,KL}X^2_{L,i} + \frac{\partial A^2_i}{\partial X^1_{k,K}}x^1_{k,KL}X^1_{L,i} \geq 0 .$$

Uvedimo sad disipativnu funkciju D, definisanu sa:

$$
\begin{aligned}
D = \sum_{\alpha} \Big\{ {}_dM^{\alpha}_{kl} d^{\alpha}_{kl} + \Big(\frac{\partial A^{\alpha}_i}{\partial T} + \frac{\bar{\phi}^{\alpha}_i}{T} \Big) T_{,i} \; + \\
+ \Big[\frac{\partial A^{\alpha}_i}{\partial X^{\alpha}_{k,K}} X^{\alpha}_{k,KL} X^{\alpha}_{L,i} + (1-\delta^{\alpha\beta}) \frac{\partial A^{\alpha}_i}{\partial X^{\beta}_{k,K}} X^{\beta}_{k,KL} X^{\beta}_{L,i} \Big] \Big\} - {}_d\zeta_i V_i = \\
= \sum_{\alpha} \sum_{a} Q^{\alpha}_{(a)} \dot{q}^{\alpha}_{(a)} \; ,
\end{aligned}
\tag{4.1.19}
$$

gde su:

$Q_{(b)}$ -ireverzibilne termodinamičke sile, a

$\dot{q}^{(b)}$ -generalisane brzine.

Napomenimo da ovaj izbor nije jednoznačan!

U relaciji (4.1.19) smo uveli smenu:

$$\bar{\phi}^{\alpha}_i \equiv \phi^{\alpha}_i + T \rho^{\alpha}_{*} \eta^{\alpha} u^{\alpha}_i$$

i iskoristili simetričnost tenzora M^{α}_{ij}, da bi napisali:

$$ {}_dM^{\alpha}_{lk} v^{\alpha}_{k,l} = {}_dM^{\alpha}_{kl} d^{\alpha}_{kl} $$

Mi ćemo za ireverzibilne termodinamičke sile da izaberemo sledeće veličine:

$$Q^{\alpha}_{(a)} = \Big\{ {}_dM^{\alpha}_{ij} \, ; \, \bar{\phi}^{\alpha}_i + T \frac{\partial A^{\alpha}_i}{\partial T} \, ; \, \frac{\partial A^{\alpha}_i}{\partial X^{\alpha}_{k,K}} X^{\alpha}_{L,i} \, ; \, {}_d\zeta_i \Big\} \tag{4.1.20}$$

tada su odgovarajuće generalisane brzine:

$$\dot{q}^{\alpha}_{(a)} = \left\{ d^{\alpha}_{ij} \; ; \; \frac{T_{,i}}{T} \; ; \; x^{\alpha}_{k,KL} \; ; V_i \right\} \tag{4.1.21}$$

Onsager je predložio linearnu kombinaciju izmedju ovih veličina /31/, /32/:

$$\dot{q}^{\alpha}_{(a)} = L^{(ab)} Q^{\alpha}_{(b)} ,$$

gde su $L^{(ab)}$ Onsager-ovi fenomenološki (simetrični, $L^{(ab)} = L^{(ba)}$) koeficijenti.

Medjutim, Ziegler /33/, koristeći princip ekstremuma, izvodi opšte relacije izmedju generalisanih termodinamičkih sila i brzina i formuliše princip najmanje ireverzibilne sile:

$$Q_{(a)} = \lambda \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_{(a)}} \tag{4.1.22}$$

gde je:

$$\lambda = \left(\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_{(b)}} \dot{q}_{(b)} \right)^{-1} D$$

i

$$D = D\,(\dot{q}_{(b)}) .$$

Prema (4.1.21) disipativna funkcija zavisi od sledećih veličina:

$$D = D\,(\, d^{\alpha}_{ij} \;;\; T_{,i}/T \;;\; x^{\alpha}_{k,KL} \;;\; V_i \,) \tag{4.1.23}$$

pa prema (4.1.22) dobijamo nelinearne konstitutivne relacije za ireverzibilne termodinamičke sile:

$$
\begin{aligned}
{}_{\alpha}M^{\alpha}_{ij} &= \lambda \frac{\partial D}{\partial d^{\alpha}_{ij}} \;;\quad {}_{\alpha}Z_i = \lambda \frac{\partial D}{\partial V_i} \;; \\
\bar{\phi}^{\alpha}_i + T \frac{\partial A^{\alpha}_i}{\partial T} &= \lambda \frac{\partial D}{\partial (T_{,i}/T)} \;; \\
\frac{\partial A^{\alpha}_i}{\partial x^{\alpha}_{k,K}} x^{\alpha}_{L,i} &= \lambda \frac{\partial D}{\partial x^{\alpha}_{k,KL}} \;.
\end{aligned}
\tag{4.1.24}
$$

Na osnovu dobijenih relacija (4.1.15) zaključujemo:

1. slobodna energija ne zavisi od $T_{,i}$ i V_i ;
2. A^{α}_i nije funkcija od $T_{,i}$ i n.

Medjutim ova ogranjičenja, koja su posledica drugog zakona termodinamike, ne uprošćavaju nam mnogo ove, vrlo opšte, relacije. Na ovom mestu ćemo da učinimo neka ograničenja koja će uprostiti ove opšte relacije, a fizički su opravdana.

Naime, pri izvodjenju relacije (4.1.15) pošli smo od principa ekviprezensa, tj. pretpostavili smo da konstitutivne relacije (4.10) α-tog sastojka zavisi ne samo od α-tih promenljivih, već i od ostalih. Medjutim, za tako-zvane nemešajuće mešavine uvodi se, umesto principa ekviprezensa, "postulat nemešanja" ili "princip fazne odvojenosti". Ovaj princip su, prema /28/, uveli Drew i Segel /30/.

Treba napomenuti da ovaj postulat ne može da se primeni jedino na članove koji se odnose na interakciju izmedju faza, jer oni izražavaju dejstvo jednog sastojka na ostale, pa u tom smislu treba da zavise od svih promenljivih (ekviprezens).

Kao posledica prihvatanja ovog postulata je nezavisnost

$$A_i^\alpha \quad \text{od} \quad \rho_*^\alpha, \; x_{k,K}^\alpha, \; x_{k,KL}^\alpha \qquad \text{i}$$

$$\psi^\alpha \quad \text{od} \quad x_{k,K}^{\prime\alpha},$$

pa dobijamo:

$$m_{ljk}^\alpha = \rho_*^\alpha \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial x_{j,KL}^\alpha} x_{k,K}^\alpha x_{l,L}^\alpha + \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial x_{j,K}^{\prime\alpha}} X_{L,i}^\alpha x_{k,K}^\alpha x_{l,L}^\alpha$$

$${}_eM_{kl}^1 = \rho_*^1 \frac{\partial \psi^1}{\partial x_{k,K}^1} x_{l,K}^1$$

$${}_eM_{kl}^2 = \rho_*^2 \left(\frac{\partial \psi^2}{\partial x_{k,K}^2} x_{l,L}^2 - \rho_*^2 \frac{\partial \psi^2}{\partial \rho_*^2} \tilde{\delta}_{kl} \right).$$

Pored ovog, u daljem radu ćemo da zanemarimo uticaj naponskih spregova, a kao posledica ovog je nezavisnost A_i^α od $x_{k,K}^{\prime\alpha}$ i pretpostavićemo da je /21/: $q_i^\alpha = \bar{\phi}_i^\alpha$, tj. $A_i^\alpha = 0$.

Ova poslednja pretpostavka nam utiče na oblik disipativne funkcije, koja sad dobija oblik:

$$D = \sum_\alpha \left({}_d t_{kl}^\alpha \, d_{kl}^\alpha + \bar{\phi}_i^\alpha / T \; T_{,i} \right) - {}_d r_i V_i \quad . \tag{4.1.25}$$

Slobodna energija je sad funkcija oblika:

$$\psi^\alpha = \psi^\alpha \left(T;\; x_{k,K}^\alpha;\; n;\; \rho_*^2 \right) \tag{4.1.26}$$

Zbog zanemarivanja naponskih spregova

$$M_{kl}^\alpha = t_{kl}^\alpha$$

tenzor napona postaje simetričan.

Napišimo sad konstitutivne relacije:

$$\begin{aligned} t_{kl}^1 &= \rho_*^1 \frac{\partial \psi^1}{\partial x_{k,K}^1} x_{l,K}^1 + \lambda \frac{\partial D}{\partial d_{kl}^1} \quad ; \\ t_{kl}^2 &= \rho_*^2 \left(\frac{\partial \psi^2}{\partial x_{k,K}^2} x_{l,K}^2 - \rho_*^2 \frac{\partial \psi^2}{\partial \rho_*^2} \delta_{kl} \right) + \lambda \frac{\partial D}{\partial d_{kl}^2} \quad ; \\ \eta^\alpha &= - \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial T} \quad ; \quad \bar{M}^\alpha = - \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial n} \quad ; \\ \tau_i &= \lambda \frac{\partial D}{\partial V_i} \quad ; \\ \bar{\phi}_i^\alpha &= \lambda \frac{\partial D}{\partial (T_{,i}/T)} \quad . \end{aligned} \tag{4.1.27}$$

Medjutim, kako je prema (3.3.5) tenzor napona simetričan potrebno je da vazi:

(4.1.28) $$\left(\frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial X^{\alpha}_{k,K}} X^{\alpha}_{\ell,K}\right)_{[k\ell]} = 0 .$$

Ovaj izraz predstavlja uslov objektivnosti /32/ za slobodnu energiju (4.1.26) i konstitutivne relacije (4.1.27).

Prema (4.1.26) slobodna energija je funkcija od 9ß + 3 nezavisnih veličina (T; $x^{\beta}_{k,K}$; n; ρ^2_*), pa sistem od 3ß parcijalnih jednačina (4.1.28) ima 6ß + 3 nezavisna integrala. Ako sad uvedemo Lagrange-ove tenzore deformacije E_{KL} umesto $x_{k,K}$, sistem (4.1.28) ima opšte rešenje oblika:

$$\psi^{\alpha} = \psi^{\alpha} (E^{\alpha}_{KL} ; T; n; \rho^2_*) \quad .$$

Uvrstivši ovo u (4.1.27) dobijamo:

(4.1.29)-D
$$t^{1}_{kl} = \rho^{1}_{*} \frac{\partial \psi^{1}}{\partial E^{1}_{KL}} X^{1}_{k,K} X^{1}_{\ell,L} + \lambda \frac{\partial D}{\partial d^{1}_{k\ell}} \quad ;$$

$$t^{2}_{k\ell} = \rho^{2}_{*} \frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial E^{2}_{KL}} X^{2}_{k,K} X^{2}_{\ell,L} - p\delta_{k\ell} + \lambda \frac{\partial D}{\partial d^{2}_{k\ell}} \quad ;$$

$$z_i = \lambda \frac{\partial D}{\partial V_i} \quad ;$$

$$\eta^{\alpha} = - \frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial T} \quad ; \quad \bar{M}^{\alpha} = - \frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial n} \quad ;$$

$$\bar{\phi}^{\alpha}_i = \lambda \frac{\partial D}{\partial (T_{,i}/T)}$$

gde smo sa p označili termodinamički pritisak:

$$p \equiv \rho_*^2 \rho_*^2 \frac{\partial \psi^2}{\partial \rho_*^2} \quad .$$

4.2 LINEARNE KONSTITUTIVNE RELACIJE I JEDNAČINE POLJA ZA ZASIĆENU SREDINU

Napred izvedene konstitutivne relacije (4.1.29) su, i pored uprošćenja, veoma složene i neprikladne za mnoge primene. U ovom poglavlju ćemo, iz tog razloga, da posmatramo infinitezimalna pomeranja (linearna teorija) i na taj način "osposobimo" ove relacije za dalju primenu.

Posmatraćemo mala pomeranja u odnosu na ravnotežni položaj, u kom su gustine ρ^α_{*o}, temperatura T_o i poroznost n_o konstantne. Promenu ovih veličina, u odnosu na ravnotežni položaj, možemo da izrazimo u obliku:

$$(4.2.1) \qquad x_i^\alpha = \delta_{Ki} X_K^\alpha + p_i^\alpha \ ; \quad \rho_*^\alpha = \rho_{*o}^\alpha \ (\ 1 + \tilde{e}_{ii}^\alpha \ ) \ ;$$
$$T = T_o + \theta \ ; \ n = n_o + \nu \ ,$$

pri čemu je:

$$/T - T_o/ = /\theta/ \ll 1 \ ; \ /n - n_o/ = /\nu/ \ll 1 \ ; \ \tilde{e}_{ii} \equiv \sum e \quad .$$

Relacije za gustinu su dobijene iz balansa mase.

Već smo ranije rekli da u linearnoj teoriji izčezava razlika izmedju Langrange-ovog i Euler-ovog tenzora deformacije:

$$\tilde{E}_{KL} = \tilde{e}_{kl}\, \delta_{kK}\, \delta_{lL} = P^{\alpha}_{(k,l)}\, \delta_{kK}\, \delta_{lL} .$$

Pored ovog imamo i vezu izmedju gradijenata deformacije i vektora pomeranja:

$$x^{\alpha}_{k,K} = (\delta_{MK} + P^{\alpha}_{M,K})\, \delta_{Mk} .$$

Dalje, u linearnoj teoriji se ϕ^{α}_{i} svodi na q^{α}_{i} :

$$q^{\alpha}_{i} = \phi^{\alpha}_{i} + T \rho^{\alpha}_{*} \eta^{\alpha} u^{\alpha}_{i} \approx \phi^{\alpha}_{i} .$$

Posmatrajući (4.1.29) vidimo da se konstitutivne relacije izražavaju preko (α + 1) funkcije:

- slobodne energije ψ^{α}:

$$\psi^{\alpha} = \psi^{\alpha} (\theta ;\ e^{\alpha}_{kl} ;\ \nu)$$

- disipativne funkcije D:

$$D = D (d^{\alpha}_{ij} ;\ \theta_{,i}/T ;\ V_i).$$

Pretpostavimo da su ove funkcije neprekidne i diferencijabilne, tako da možemo da ih razvijemo u red, u okolini ravnotežnog položaja. U linearnoj teoriji se, pri razvoju ovih funkcija, zadržavamo na drugom stepenu:

$$\psi^{\alpha} = \psi^{\alpha}_{0} + A^{\alpha}_{0}\theta + B^{\alpha}_{0}\nu + \psi^{\alpha}_{ij} e^{\alpha}_{ij} + \frac{1}{2} A^{\alpha}(\theta)^2 + \frac{1}{2} B^{\alpha}(\nu)^2 + \frac{1}{2} \psi^{\alpha}_{ijkl} e^{\alpha}_{ij} e^{\alpha}_{kl} +$$
$$+ A^{\alpha}_{1}\theta\nu + A^{\alpha}_{ij}\theta e^{\alpha}_{ij} + B^{\alpha}_{ij}\nu e^{\alpha}_{ij} ,$$

$$D = D_0 + D^{1}_{ij} d^{1}_{ij} + D^{2}_{ij} d^{2}_{ij} + C_i V_i + D_1 \frac{\theta_{,i}}{T} + \frac{1}{2} D^{1}_{ijkl} d^{1}_{ij} d^{1}_{kl} + \frac{1}{2} D^{2}_{ijkl} d^{2}_{ij} d^{2}_{kl} +$$
$$+ \frac{1}{2} D_{ij} V_i V_j + \frac{1}{2} N_{ij} \frac{\theta_{,i}\theta_{,j}}{T^2} + C^{12}_{ijkl} d^{1}_{ij} d^{2}_{kl} + C^{1}_{ijk} d^{1}_{ij} V_k + C^{2}_{ijk} d^{2}_{ij} V_k +$$
$$+ C_{ij} V_i \frac{\theta_{,j}}{T} + N^{1}_{ijk} d^{1}_{ij} \frac{\theta_{,k}}{T} + N^{2}_{ijk} d^{2}_{ij} \frac{\theta_{,k}}{T} ,$$

gde su:

ψ_o^α, A_o^α, B_o^α, ψ_{ij}^α, A^α, B^α, ψ_{ijkl}^α, A_1^α, A_{ij}^α, B_{ij}^α, D_o, D_{ij}^α, C_i, D_1, D_{ijkl}^α, D_{ij}, N_{ij}, C_{ijkl}^{12}, C_{ijkl}^α, C_{ij}, N_{ijk}^α,

konstantne veličine.

Za ovako uvedenu slobodnu energiju i disipativnu funkciju konstitutivne relacije (4.1.29) postaju:

$$\begin{aligned}
t_{kl}^1 &= \rho_{*o}^1\left[\psi_{kl}^1(1-e_{ii}^1) + \psi_{ijkl}^1 e_{ij}^1 + A_{kl}^1\theta + B_{kl}^1\nu\right] + \\
&\quad + \lambda\left(D_{kl}^1 + D_{ijkl}^1 d_{kl}^1 + C_{ijkl}^{12} d_{ij}^2 + C_{ikl}^1 V_i + N_{ikl}^1\frac{\theta_{,i}}{T}\right); \\
t_{kl}^2 &= \rho_{*o}^2\left[\psi_{kl}^2(1-e_{ii}^2) + \psi_{ijkl}^2 e_{ij}^2 + A_{kl}^2\theta + B_{kl}^2\nu\right] - \\
&\quad - \rho_*^2\rho_*^2\frac{\partial\psi^2}{\partial\rho_*^2}\tilde{\delta}_{kl} + \lambda\left(D_{kl}^2 + D_{ijkl}^2 d_{ij}^2 + C_{ijkl}^{12} d_{ij}^1 + \right. \\
&\quad \left. + C_{ikl}^2 V_i + N_{ikl}^2\frac{\theta_{,i}}{T}\right); \\
\tau_i &= \lambda\left(C_i + D_{ij}V_j + C_{ijk}^1 d_{jk}^1 + C_{ijk}^2 d_{jk}^2 + C_{ij}\frac{\theta_{,j}}{T}\right); \\
\eta^\alpha &= -\left(A_o^\alpha + A^\alpha\theta + A_1^\alpha\nu + A_{ij}^\alpha e_{ij}^\alpha\right); \\
\bar{M}^\alpha &= -\left(B_o^\alpha + B^\alpha\nu + A_1^\alpha\theta + B_{ij}^\alpha e_{ij}^\alpha\right); \\
q_i^\alpha &= \lambda\left(D_1 + N_{ij}\frac{\theta_{,j}}{T} + C_{ij}V_j + N_{ijk}^1 d_{jk}^1 + N_{ijk}^2 d_{jk}^2\right).
\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Koračno možemo da izračunamo polja pomeranja, temperature i poroznosti kad poslednje relacije unesemo u balanse količine kretanja i energije:

$$\begin{aligned}\rho^1_{*0}\ddot{p}^1_i = {} & \rho^1_* f^1_i - \lambda C_i - \lambda D_{ij}(\dot{p}^2_j - \dot{p}^1_j) - \frac{1}{2}\lambda C^1_{ijk}(\dot{p}^1_{j,k} + \dot{p}^1_{k,j}) - \\ & - \frac{1}{2}\lambda C^2_{ijk}\dot{p}^2_{j,k} + \bar{C}^{12}_{ijk}\dot{p}^2_{k,j} - \lambda C^1_{kij}\dot{p}^1_{k,j} - \\ & - \bar{C}^1_{ij}\theta_{,j} + (\lambda^1_e + \mu^1_e)p^1_{j,ij} + \mu^1_e p^1_{i,jj} + \rho^1_{*0}B^1_{ij}\nu_{,j} + \\ & + (\lambda^1_v + \mu^1_v)\dot{p}^1_{j,ij} + (\lambda^{12}_v + \mu^{12}_v)\dot{p}^2_{j,ij} + \\ & + \mu^{12}_v\dot{p}^2_{i,jj} + \frac{\lambda N_{kij}}{T}\theta_{,kj} \quad ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho^2_{*0}\ddot{p}^2_i = {} & \rho^2_* f^2_i + \lambda C_i + \lambda D_{ij}(\dot{p}^2_j - \dot{p}^1_j) + \frac{\lambda}{2}C^1_{ijk}(\dot{p}^1_{j,k} + \dot{p}^1_{k,j}) + \\ & + \frac{\lambda}{2}C^2_{ijk}\dot{p}^2_{j,k} + \bar{C}^2_{ijk}\dot{p}^2_{k,j} + \bar{C}^2_{ij}\theta_{,j} - p_{,i} + (\lambda^2_e + \mu^2_e)p^2_{j,ij} + \\ & + \mu^2_e p^2_{i,jj} + \rho^2_{*0}B^2_{ij}\nu_{,j} + (\lambda^2_v + \mu^2_v)\dot{p}^2_{j,ij} + \mu^2_v\dot{p}^2_{i,jj} + \\ & + (\lambda^{12}_v + \mu^{12}_v)\dot{p}^1_{j,ij} + \mu^{12}_v\dot{p}^1_{i,jj} - \lambda C_{kij}\dot{p}^2_{k,j} \quad ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& -T_0 A^1_1\dot{\nu} - T_0 A^1\dot{\theta} - \rho^1(1-n) - \frac{\lambda N_{ij}T_0}{T^2}\theta_{,ij} = \\ & = \bar{A}^1_{ij}\dot{p}^1_{j,i} + \bar{\bar{A}}^1_{ij}\dot{p}^1_{i,j} + \lambda C_i\dot{p}^1_i + \lambda C_{ij}\dot{p}^2_{j,i} + \\ & + \frac{1}{2}N^1_{ijk}(\dot{p}^1_{j,ki} + \dot{p}^1_{k,ij}) + \frac{1}{2}N^2_{ijk}(\dot{p}^2_{j,ki} + \dot{p}^2_{k,ij}) \quad ;\end{aligned}$$

$$-T_0 A_1^2 \dot{\nu} - T_0 A^2 \dot{\theta} - \rho^2 n - \frac{\lambda N_{ij}}{T} \theta_{,ij} =$$

$$= \bar{A}^2_{ij} \overset{\circ}{p}{}^2_{j,i} + \bar{\bar{A}}{}^2_{ij} \dot{p}^2_{i,j} - \lambda C_i \overset{\circ}{p}{}^2_i - \lambda C_{ij} \overset{\circ}{p}{}^1_{j,i} +$$

$$+ \frac{1}{2} \lambda N^1_{ijk} \left(\overset{\circ}{p}{}^1_{j,ki} + \overset{\circ}{p}{}^1_{k,ij} \right) + \frac{1}{2} \lambda N^2_{ijk} \left(\overset{\circ}{p}{}^2_{j,ki} + \overset{\circ}{p}{}^2_{k,ij} \right).$$

gde smo uveli sledeće oznake:

$$\rho^\alpha_{*0} A^\alpha_{ij} \equiv -\beta^\alpha \delta_{ij} \;;\quad \psi^\alpha_{ij} = \underset{0}{\psi}{}^\alpha \delta_{ij} \;;$$

$$\psi^\alpha_{ijkl} = \underline{\psi}^\alpha \tilde{\delta}_{ij} \tilde{\delta}_{kl} + \underline{\underline{\psi}}^\alpha \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \tilde{\delta}_{il} \delta_{jk} \right) ;$$

$$\lambda^\alpha_e \equiv \rho^\alpha_{*0} \underline{\psi}^\alpha - \rho^\alpha_{*0} \underset{0}{\psi}{}^\alpha \;;\quad 2\mu^\alpha_e \equiv \rho^\alpha_{*0} \underline{\underline{\psi}}^1 \;;$$

$$\lambda \underline{D}^\alpha \equiv \lambda^\alpha_v \;;\quad 2\mu^\alpha_v \equiv \lambda \underline{\underline{D}}^\alpha \;;$$

$$\bar{A}^1_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(T_0 A^1_{ij} + \lambda D^1_{ij} \right) - C_{ij} \;;\quad \bar{\bar{A}}{}^1_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(T_0 A^1_{ij} + \lambda D^1_{ij} \right) ;$$

$$\bar{C}^1_{ij} \equiv \frac{\lambda C_{ij}}{T} + \beta^1 \delta_{ij} \;;\quad \bar{C}^{12}_{ijk} \equiv \lambda C^1_{kij} - \frac{1}{2} \lambda C^2_{ijk} \;;$$

$$\bar{A}^2_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(T_0 A^2_{ij} + \lambda D^2_{ij} \right) + \lambda C_{ij} \;;\quad \bar{\bar{A}}{}^2_{ij} = \frac{1}{2} \left(T_0 A^2_{ij} + \lambda D^2_{ij} \right);$$

$$\bar{C}^2_{ijk} \equiv \frac{\lambda}{2} C^2_{ijk} + \lambda C^2_{kij} \;;\quad C^2_{ij} \equiv \frac{\lambda C_{ij}}{T} - \beta^2 \delta_{ij}$$

Na ovaj način smo dobili sistem od osam diferencijalnih jednačina za osam nepoznatih (p^1_i; p^2_i; n; T).

4.3 DARCY-ev ZAKON I JEDNAČINA KONSOLIDACIJE

U mnogim knjigama i radovima o poroznim, čvrstim telima govori se o Darcy-evom zakonu, koji daje empirijsku, linearnu vezu izmedju relativne brzine (izmedju sastojaka) V_i i pritiska P.

Slično Fick-ovom zakonu difuzije u mešavinama i Ohm-ovom zakonu u elektrodinamici i ovaj "zakon" je uprošćen oblik jednačine balansa količine kretanja /15/.

Kod nekih primena ovog zakona govori se o njegovom važenju ili nevaženju. Da li je "ne važenje" posledica zanemarivanja nekih članova?

U našem slučaju balans količine kretanja za fluidnu fazu ima oblik:

$$\rho_*^2 \frac{D^2 v_i^2}{Dt} = \rho_*^2 f_i^2 + \tau_i + t_{ij,j}^2 . \tag{4.3.1}$$

Ako u ovu relaciju unesemo konstitutivne relacije (4.1.29)-D dobijamo:

$$\begin{aligned} \rho_*^2 \frac{D^2 v_i^2}{Dt} &= \rho_*^2 f_i^2 + \lambda \frac{\partial D}{\partial V_i} + \\ &+ \left(\rho_*^2 \frac{\partial \Psi^2}{\partial E_{KL}^2} x_{i,K}^2 x_{j,L}^2 - p \delta_{ij} + \lambda \frac{\partial D}{\partial d_{ij}^2} \right)_{,j} \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Iz definicija veličina, koje se javljaju u (3.2.2), vidimo da smo ih odredili u odnosu na površinu (zapreminu) mešavine. Prema tome i napon $\underset{\sim}{t}^2$ je odredjen u odnosu na površinu mešavine, pa ga možemo, prema (1.5), napisati u obliku:

$$t_{ij}^2 dS = \frac{t_{ij}^2}{\lambda^2} dS^2 .$$

Veličina $\underset{\sim}{t}^2/\lambda^2$ je ustvari stvarni napon u fluidu, jer je definisan u odnosu na površinu fluida.

Sa λ^2 je označena površinska poroznost. Medjutim, kako je napomenuto u /17/, u mnogim konkretnim slučajevima površinska i zapreminska poroznost su približno iste, pa ćemo i mi da ih izjednačimo, da bi naše rezultate uporediti sa već dobro poznatim relacijama iz mehanike tla /18/.

Dakle, za deo napona koji se odnosi na hidrodinamički pritisak, imamo:

$$p/n = P.$$

Ovako definisana veličina P se zove porni pritisak /12/,/17/. Kad je unesemo u relaciju (4.3.2) dobijamo:

$$(4.3.3) \qquad \rho_*^2 \frac{D^2 V_i^2}{Dt} = \rho_*^2 f_i^2 + \lambda \frac{\partial D}{\partial V_i} + \\ + \left(\rho_*^2 \frac{\partial \psi^2}{\partial E_{KL}^2} x_{i,K}^2 x_{j,L}^2\right)_{,j} - \left(n P \delta_{ij}\right)_{,j} .$$

U linearnoj teoriji disipativna funkcija je kvadratni polinom (napred definisan), pa izračunavši $\frac{\partial D}{\partial V_i}$ dobijamo:

$$\rho_*^2 \frac{D^2 V_i^2}{Dt} = \rho_*^2 f_i^2 + \left(\rho_*^2 \frac{\partial \psi^2}{\partial E_{KL}^2} x_{i,K}^2 x_{j,L}^2\right)_{,j} + \lambda D_{ij} V_j +$$

(4.3.4)

$$+\lambda\left(C_i + C_{ijk}^1 d_{jk}^1 + C_{ijk}^2 d_{jk}^2 + \frac{\theta_{,i}}{T} C_{ij}\right) - (Pn)_{,i} \; .$$

U slučaju kad pretpostavimo da je tenzor otpornosti λD_{ij} izotropan, prema /12/, možemo da ga izrazimo u obliku:

$$\frac{\lambda D_{ij}}{n} = \frac{\mu}{k} n \delta_{ij}$$

gde je:

μ - dinamička viskoznost,

k - unutrašnja propustljivost skeleta.

Sad relacija (4.3.4) postaje:

$$\rho_*^2 \frac{D^2 V_i^2}{Dt} = \rho_*^2 f_i^2 + \left(\rho_*^2 \frac{\partial \psi^2}{\partial E_{KL}^2} x_{i,K}^2 x_{j,L}^2\right)_{,j} - P n_{,i} +$$

(4.3.5)

$$+\lambda\left(C_i + C_{ijk}^1 d_{jk}^1 + C_{ijk}^2 d_{jk}^2 + C_{ij} \frac{\theta_{,i}}{T}\right) + \frac{\mu}{k}(n)^2 V_i - n P_{,i} \; .$$

Specijalno kad su u pitanju kvazistatički procesi i kad zanemarimo uticaj zapreminskih sila i viskozne i toplotne efekte, gornja relacija se svodi na:

$$\frac{\mu}{k} n V_i = P_{,i} \quad , \tag{4.3.6}$$

što predstavlja relaciju koja se u mehanici tla zove Darcy-ev zakon /12/, /18/.

Na osnovu svega, napred izloženog, zaključujemo da je relacija (4.3.5) uopšten Darcy-ev zakon.

JEDNAČINA KONSOLIDACIJE

Jednačina konsolidacije, relacija koja se tako zove u mehanici tla, nije ništa drugo do jednačina polja za poroznost (zapreminsku).

Ovu relaciju ćemo da izvedemo na način kako se ona izvodi u mehanici tla /18/.

Pri njenom izvodjenju kombinuje se balans mase (3.1.2) i Darcy-ev zakon (4.3.5), a pretpostavlja se da je ρ^{α} = const. (nestišljivi sastojci).

Relacije (3.1.2) možemo, u ovom slučaju, da napišemo u obliku:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho_*^1}{\partial t} + (\rho_*^1 V_i^1)_{,i} = 0 \quad , \\ &\frac{\partial \rho_*^2}{\partial t} + (\rho_*^2 V_i^2)_{,i} = 0 \, . \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Kako je $\rho_*^1 = \rho^1(1-n)$ i $\rho_*^2 = n\rho^2$, a $\rho^\alpha =$ const., dobijamo:

$$\frac{\partial(1-n)}{\partial t} + \left[(1-n)v_i^1\right]_{,i} = 0,$$

(4.3.8)

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \left(n v_i^2\right)_{,i} = 0.$$

Uvedimo sad smene /18/:

$$\overset{\circ}{v}{}_i^1 = (1-n)v_i^1 \;; \quad \overset{\circ}{v}{}_i^2 = n v_i^2,$$

pa dobijamo:

$$-\frac{\partial n}{\partial t} + \overset{\circ}{v}{}_{i,i}^1 = 0 \;;$$

(4.3.9)

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \overset{\circ}{v}{}_{i,i}^2 = 0.$$

Oduzimajući relacije (4.3.9), dobijamo:

(4.3.10) $$\overset{\circ}{v}{}_{i,i}^1 + \overset{\circ}{v}{}_{i,i}^2 = 0.$$

Poslednju relaciju ćemo da kombinulemo sa Darcy-evim zakonom, da bi eliminisali brzinu skeleta $\overset{\circ}{v}{}_i^1$.

U slučaju linearne teorije, Darcy-ev zakon (4.3.5) ima oblik:

$$\rho_*^2 v_i'^2 = \rho_*^2 f_i^2 + \left(\rho_*^2 \frac{\partial \psi^2}{\partial e_{ij}^2}\right)_{,j} - P n_{,i} +$$

(4.3.11)
$$+ \lambda \left(c_i + C_{ijk}^1 d_{jk}^1 + C_{ijk}^2 d_{jk}^2 + C_{ij} \frac{\theta_{,j}}{T} \right) +$$

$$+ \frac{\mu}{k}(n)^2 \left(V_i - \frac{k}{\mu} \frac{1}{n} P_{,i} \right).$$

Kako je:

$$V_i = v_i^2 - v_i^1 = \frac{\overset{\circ}{v}_i^2}{n} - \frac{v_i^1}{1-n} \quad ,$$

relacija (4.3.11) može da se napiše u obliku:

$$\rho^2 n v_i'^2 = \rho^2 n f_i^2 + \left(\rho^2 n \frac{\partial \psi^2}{\partial e_{ij}^2}\right)_{,j} - P n_{,i} + \frac{\mu}{k} n \left(\overset{\circ}{v}_i^2 - \frac{n}{1-n} \overset{\circ}{v}_i^1 - \frac{k}{\mu} P_{,i} \right) +$$
$$+ \lambda \left(c_i + C_{ijk}^1 d_{jk}^1 + C_{ijk}^2 d_{jk}^2 + C_{ij} \frac{\theta_{,j}}{T} \right)$$

Kad poslednju relaciju podelimo sa $\mu n/k$, zatim diferenciramo po x_i^α i iskoristimo (4.3.10) i (1.15)-D, dobijamo:

$$\left(\frac{k}{\mu} \rho^2 v_i'^2\right)_{,i} = \left(\frac{k}{\mu} \rho^2 f_i^2\right)_{,i} + \left[\frac{k}{\mu n}\left(\rho^2 n \frac{\partial \psi^2}{\partial e_{ij}^2}\right)_{,j}\right]_{,i} -$$

(4.3.12)
$$-\left(\frac{k}{\mu n} P n_{,i}\right)_{,i} - e_{,i} \overset{\circ}{v}_i^1 +$$

$$+ (1+e) \overset{\circ}{v}_{i,i}^2 - \left(\frac{k}{\mu} P_{,i}\right)_{,i} +$$

$$+ \left[\lambda \left(c_i + C_{ijk}^1 d_{jk}^1 + C_{ijk}^2 d_{jk}^2 + C_{ij} \frac{\theta_{,j}}{T} \right)\right]_{,i} .$$

Kad bismo u poslednjoj relaciji zanemarili sve članove, sem podvučenih, dobili bismo jednačinu konsolidacije iz /18/.

Odavde zaključujemo da je naša jednačina konsolidacije (4.3.12) opštija u odnosu na navedenu.

4.4. KONSTITUTIVNE JEDNAČINE ZA NEZASIĆENU POROZNU SREDINU

Nezasićenu poroznu sredinu ćemo, kao što je napred rečeno, da posmatramo kao trokomponentalnu mešavinu.

Ranije izvedene opšte relacije ćemo da koristimo u ovom poglavlju, pri čemu će α da uzima vrednosti 1,2,3. Kao i u prethodnom poglavlju "1" i "2" će da se odnose na skelet i tečnost, respektivno, a indeks "3" na fluid koji se razlikuje od "2".

I u ovom poglavlju ćemo da uzmemo da su temperature svih sastojaka iste:

$$T^1 = T^2 = T^3 = T.$$

Pretpostavićemo da je ponašanje fluidom nezasićene porozne sredine odredjeno sledećim skupom nezavisno promenljivih:

$$K = \left\{ T ; T_{,i} ; x^{\alpha}_{k,K} ; x^{\alpha}_{k,KL} ; x'^{\alpha}_{k,K} ; n ; S_z ; \rho^{\gamma}_{*} ; V_i^{\alpha\beta} \equiv v_i^{\alpha} - v_i^{\beta} \right\} \qquad (4.4.1)$$

$$\gamma = 2,3$$

Pri izvodjenju konstitutivnih relacija koristićemo disipativnu nejednačinu (4.5):

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^{3} \Big[& -\rho^{\alpha}_{*}\left(\frac{D^{\alpha}\psi^{\alpha}}{Dt} + \eta^{\alpha}\frac{D^{\alpha}T}{Dt}\right) + \left(q_i^{\alpha} - \phi_i^{\alpha} - T\rho^{\alpha}_{*}\eta^{\alpha}u_i^{\alpha}\right)_{,i} + \\ & + \left(\frac{\phi_i^{\alpha}}{T} + \rho^{\alpha}_{*}\eta^{\alpha}u_i^{\alpha}\right)T_{,i} + M^{\alpha}_{kj} v^{\alpha}_{j,ik} + m^{\alpha}_{ijk} v^{\alpha}_{j,ki} - \\ & - \rho^{\alpha}_{*} M^{\alpha}\frac{D^{\alpha}n^{\alpha}}{Dt} - \tau_i^{\alpha} v_i^{\alpha} \Big] \geq 0 \, . \end{aligned} \qquad (4.4.2)$$

Prema $(1.6)_2$, (1.14) i (1-16) možemo da pišemo:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^{3} -\rho^{\alpha}_{*}M^{\alpha}\frac{D^{\alpha}n^{\alpha}}{Dt} &= \rho^{1}_{*}M^{1}\frac{D^{1}n}{Dt} - \rho^{2}_{*}M^{2}\frac{D^{2}}{Dt}(S_z n) - \rho^{3}_{*}M^{3}\frac{D^{3}}{Dt}(n - S_z n) = \\ &= \sum_{\alpha} \rho^{\alpha}_{*}\bar{M}^{\alpha}\frac{D^{\alpha}n}{Dt} + n\left(\rho^{2}_{*}\frac{\bar{M}^{2}}{S_z} - \rho^{3}_{*}\frac{\bar{M}^{3}}{1-S_z}\right)\frac{D^{2}S_z}{Dt} + \rho^{3}_{*}M^{3}n\, S_{z,i}V_i^{32} \, , \end{aligned} \qquad (4.4.3)$$

gde je:

$$\bar{M}^{1} \equiv M^{1} \; ; \; \bar{M}^{2} \equiv -M^{2}S_z \; ; \; \bar{M}^{3} \equiv -M^{3}(1-S_z) \, .$$

Dalje, prema (3.2.6)-D, imamo:

(4.4.4) $$r_i^1 = -r_i^2 - r_i^3 \; ,$$

pa zbir $\sum\limits_{\alpha} r_i^{\alpha} v_i^{\alpha}$ postaje:

(4.4.5) $$\sum_{\alpha} r_i^{\alpha} v_i^{\alpha} = r_i^2 V_i^{21} + r_i^3 V_i^{31} \; .$$

Na osnovu (4.4.3) i (4.4.5) poslednju nejednačinu možemo da napišemo u obliku:

(4.4.6) $$\sum_{\alpha}\Big[-\rho_*^{\alpha}\Big(\frac{D^{\alpha}\psi^{\alpha}}{Dt}+\eta^{\alpha}\frac{D^{\alpha}T}{Dt}\Big)+\Big(q_i^{\alpha}-\phi_i^{\alpha}-T\rho_*^{\alpha}\eta^{\alpha}u_i^{\alpha}\Big)_{,i}+M_{kj}^{\alpha}v_{j,k}^{\alpha}+$$
$$+\Big(\frac{\phi_i^{\alpha}}{T}+\rho_*^{\alpha}\eta^{\alpha}u_i^{\alpha}\Big)T_{,i}+u_{ijk}^{\alpha}v_{j,ki}^{\alpha}+\rho_*^{\alpha}\bar{M}^{\alpha}\frac{D^{\alpha}n}{Dt}+r_i^2V_i^{21}+r_i^3V_i^{31}+$$
$$+n\Big(\rho_*^2\frac{\bar{M}^2}{S_z}-\rho_*^3\frac{\bar{M}^3}{1-S_z}\Big)\frac{D^2S_z}{Dt}+\rho_*^3M^3n\,S_{z,i}V_i^{32}\geq 0 \; .$$

Prema (4.1o) i (4.4.1) slobodna energija sastojaka je:

$$\psi^{\alpha}=\psi^{\alpha}\big(T;T_{,i};x^{\beta}_{k;K};x^{\beta}_{k,KL};\acute{x}^{\beta}_{k,K};n;S_z;\rho_*^{\gamma};V^{\alpha\beta}\big)$$

pa za $\dfrac{D^{\alpha}\psi^{\alpha}}{Dt}$ dobijamo:

(4.4.7) $$\frac{D^{\alpha}\psi^{\alpha}}{Dt}=\frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial T}\cdot\frac{D^{\alpha}T}{Dt}+\frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial T_{,i}}\frac{DT_{,i}}{Dt}+$$
$$+\sum_{\beta=1}^{3}\Big(\frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial x^{\beta}_{k,K}}\cdot\frac{D^{\alpha}x^{\beta}_{k,K}}{Dt}+\frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial x^{\beta}_{k,KL}}\frac{D^{\alpha}x^{\beta}_{k,KL}}{Dt}+\frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial\acute{x}^{\beta}_{k,K}}\frac{D^{\alpha}\acute{x}^{\beta}_{k,K}}{Dt}\Big)+$$
$$+\frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial n}\cdot\frac{D^{\alpha}n}{Dt}+\frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial S_z}\frac{D^{\alpha}S_z}{Dt}+\sum_{\gamma=2}^{3}\frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial\rho_*^{\gamma}}\frac{D^{\alpha}\rho_*^{\gamma}}{Dt}+$$
$$+\sum_{\beta}\frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial V_i^{\alpha\beta}}\frac{D^{\alpha}V^{\alpha\beta}}{Dt} \; .$$

Dalje, ako iskoristimo relacije (4.1.9)-D, (3.1.2) i izvršimo odgovarajuće diferenciranje, poslednja nejednačina može da se napiše u obliku:

$$\sum_\alpha \Big\{ -\rho_*^\alpha \Big[\Big(\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial T} + \eta^\alpha\Big)\frac{D^\alpha T}{Dt} + \frac{\partial\psi^\alpha}{\partial T_{,i}}\frac{D^\alpha T_{,i}}{Dt} + \frac{\partial\psi^\alpha}{\partial x'^\alpha_{k,K}} \overset{\prime\prime\alpha}{x}_{k,K} +$$

$$+ \Big(\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial x^\alpha_{i,K}} x^\alpha_{j,K} + M^\alpha_{ji}\Big) v^\alpha_{i,j} + \Big(\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial x^\alpha_{j,KL}} x^\alpha_{k,K} x^\alpha_{i,L} - \frac{1}{\rho^\alpha_*} m^\alpha_{ijk}\Big) v^\alpha_{j,ik} +$$

$$+ \Big(\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial n} + \bar{M}^\alpha\Big)\frac{D^\alpha n}{Dt} + \frac{\partial\psi^1}{\partial S_z}\frac{D^1 S_z}{Dt} +$$

$$+ \Big(\frac{\partial\psi^2}{\partial S_z} - n\rho_*^2 M^2\Big)\frac{D^2 S_z}{Dt} + \Big(\frac{\partial \psi^3}{\partial S_z} + n\rho^3_* M^3\Big)\frac{D^3 S_z}{Dt} +$$

$$+ \sum_{\gamma=2}^{3} \Big(-\rho_*^\gamma \delta_{ij} v^\gamma_{i,j}\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial\rho^\gamma_*} + \frac{\partial\psi^\alpha}{\partial\rho^\gamma_*}\rho^\gamma_{*,i} V_i^{\alpha\gamma}\Big) +$$

(4.4.8)
$$+ \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial\psi^\alpha}{\partial V_i^{\alpha\beta}}\frac{D^\alpha V_i^{\alpha\beta}}{Dt}\Big] + \Big(\rho^\alpha_*\eta^\alpha u^\alpha_i + \frac{\phi^\alpha_i}{T}\Big)T_{,i} +$$

$$+ \frac{\partial A^\alpha_i}{\partial T}T_{,i} + \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial T_{,j}}T_{,ij} + \sum_\beta\Big[\frac{\partial A^\alpha_i}{\partial x^\beta_{k,K}} x^\beta_{k,KL} X^\beta_{L,i} +$$

$$+ \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial x^\beta_{k,KL}} x^\beta_{k,KLM} X^\beta_{M,i} + \sum_\gamma \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial\rho^\gamma_*}\rho^\gamma_{*,i} + \frac{\partial A^\alpha_i}{\partial x'^\beta_{j,K}} X^\beta_{L,i} x^\beta_{k,K} X^\beta_{\ell,L} v^\beta_{j,k\ell} +$$

$$+ \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial n} n_{,i} + \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial S_z} S_{z,i} + \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial V_j^{\alpha\beta}} V^{\alpha\beta}_{j,i}\Big] + \zeta_i^2 V_i^{21} + \zeta_i^3 V_i^{31}\Big\} +$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\rho_*^2\frac{\partial\psi^2}{\partial x^1_{k,K}}+\rho_*^3\frac{\partial\psi^3}{\partial x^1_{k,K}}\right)x^1_{j,K}v^1_{k,j}+x^1_{k,KL}X^1_{L,i}\left(\rho_*^2\frac{\partial\psi^2}{\partial x^1_{k,K}}V_i^{21}+\rho_*^3\frac{\partial\psi^3}{\partial x^1_{k,K}}V_i^{31}\right)+\\
&+\left(\rho_*^1\frac{\partial\psi^1}{\partial x^2_{k,K}}+\rho_*^3\frac{\partial\psi^3}{\partial x^2_{k,K}}\right)x^2_{j,K}v^2_{k,j}+x^2_{k,KL}X^2_{L,i}\left(\rho_*^1\frac{\partial\psi^1}{\partial x^2_{k,K}}V_i^{12}+\rho_*^3\frac{\partial\psi^3}{\partial x^2_{k,K}}V_i^{32}\right)+\\
&+\left(\rho_*^1\frac{\partial\psi^1}{\partial x^3_{k,K}}+\rho_*^2\frac{\partial\psi^2}{\partial x^3_{k,K}}\right)x^3_{j,K}v^3_{k,j}+x^3_{k,KL}X^3_{L,i}\left(\rho_*^1\frac{\partial\psi^1}{\partial x^3_{k,K}}V_i^{13}+\rho_*^2\frac{\partial\psi^2}{\partial x^3_{k,K}}V_i^{23}\right)+\\
&+\left(\rho_*^2\frac{\partial\psi^2}{\partial x^1_{k,KL}}+\rho_*^3\frac{\partial\psi^3}{\partial x^1_{k,KL}}\right)x^1_{i,K}x^1_{j,L}v^1_{k,ij}+x^1_{k,KLM}X^1_{M,i}\left(\rho_*^2\frac{\partial\psi^2}{\partial x^1_{k,KL}}V_i^{21}+\right.\\
&\left.+\rho_*^3\frac{\partial\psi^3}{\partial x^1_{k,KL}}V_i^{31}\right)+\left(\rho_*^1\frac{\partial\psi^1}{\partial x^2_{k,KL}}+\rho_*^3\frac{\partial\psi^3}{\partial x^2_{k,KL}}\right)x^2_{i,K}x^2_{j,L}v^2_{k,ij}+\\
&+x^2_{k,KLM}X^2_{M,i}\left(\rho_*^1\frac{\partial\psi^1}{\partial x^2_{k,KL}}V_i^{12}+\rho_*^3\frac{\partial\psi^3}{\partial x^2_{k,KL}}V_i^{32}\right)+\\
&+\left(\rho_*^1\frac{\partial\psi^1}{\partial x^3_{k,KL}}+\rho_*^2\frac{\partial\psi^2}{\partial x^3_{k,KL}}\right)x^3_{i,K}x^3_{j,L}v^3_{k,ij}+\\
&+x^3_{k,KLM}X^3_{M,i}\left(\rho_*^1\frac{\partial\psi^1}{\partial x^3_{k,KL}}V_i^{13}+\rho_*^2\frac{\partial\psi^2}{\partial x^3_{k,KL}}V_i^{23}\right)+\\
&+\left(\rho_*^2\frac{\partial\psi^2}{\partial x'^1_{k,K}}+\rho_*^3\frac{\partial\psi^3}{\partial x'^1_{k,K}}\right)x''^1_{k,K}+\left(\rho_*^2\frac{\partial\psi^2}{\partial x'^1_{k,K}}V_i^{21}+\rho_*^3\frac{\partial\psi^3}{\partial x'^1_{k,K}}V_i^{31}\right)X^1_{L,i}x^1_{s,K}x^1_{l,L}v^1_{k,sl}+\\
&+\left(\rho_*^1\frac{\partial\psi^1}{\partial x'^2_{k,K}}+\rho_*^3\frac{\partial\psi^3}{\partial x'^2_{k,K}}\right)x''^2_{k,K}+\left(\rho_*^1\frac{\partial\psi^1}{\partial x'^2_{k,K}}V_i^{12}+\rho_*^3\frac{\partial\psi^3}{\partial x'^2_{k,K}}V_i^{32}\right)X^2_{L,i}x^2_{s,K}x^2_{l,L}v^2_{k,sl}+\\
&+\left(\rho_*^1\frac{\partial\psi^1}{\partial x'^3_{k,K}}+\rho_*^2\frac{\partial\psi^2}{\partial x'^3_{k,K}}\right)x''^3_{k,K}+\left(\rho_*^1\frac{\partial\psi^1}{\partial x'^3_{k,K}}V_i^{13}+\rho_*^2\frac{\partial\psi^2}{\partial x'^3_{k,K}}V_i^{23}\right)X^3_{L,i}x^3_{s,K}x^3_{l,L}v^3_{k,sl}\geqslant 0.
\end{aligned}
\tag{4.4.8}
$$

gde je:

$$\overset{\prime\alpha}{\underset{\sim}{x}} \equiv \frac{\tilde{D}x^{\alpha}}{Dt} \quad ; \quad \overset{\prime\prime\alpha}{\underset{\sim}{x}} \equiv \frac{D^{\alpha}\hat{x}'^{\alpha}}{Dt} \; ;$$

$$A_i^{\alpha} \equiv q_i^{\alpha} - \phi_i^{\alpha} - T\rho_*^{\alpha}\eta^{\alpha}u_i^{\alpha} .$$

Nejednačina (4.4.8) je linearna po sledećem skupu nezavisno promenljivih:

$$\frac{D^{\alpha}T}{Dt} \; ; \; \frac{D^{\alpha}T_{,i}}{Dt} \; ; \; T_{,ij} \; ; \; x''^{\alpha}_{k,K} \; ; \; x'^{\alpha}_{k,KL} \; ; \; x^{\alpha}_{k,KLM} \; ;$$

$$V_i'^{\alpha\beta} \; ; \; V_{i,j}^{\alpha\beta} \; ; \; \frac{D^{\alpha}S_z}{Dt} \; ; \; S_{z,i} \; ; \; \frac{D^{\alpha}n}{Dt} \; ; \; n_{,i} \; ; \; \rho^{\gamma}_{*,i} \quad ,$$

pa da bi važila za proizvoljan proces, potrebno je da koeficijenti uz te članove budu jednaki nuli. Na osnovu ovog slede relacije:

$$\begin{aligned}
&-\eta^{\alpha} = \frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial T} \quad ; \quad \frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial T_{,i}} = 0 \; ; \\
&\bar{M}^{\alpha} = -\frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial n} \; ; \; \frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial V_i'^{\alpha\beta}} = 0 = \frac{\partial\psi^{1}}{\partial S_z} \\
&\frac{\partial\psi^{2}}{\partial S_z} + n\rho_*^{2}\frac{\bar{M}^{2}}{S_z} = 0 \; ; \; \frac{\partial\psi^{3}}{\partial S_z} - n\rho_*^{3}\frac{\bar{M}^{3}}{1-S_z} = 0 \; ; \\
&-\sum_{\alpha}\left(\rho_*^{\alpha}\frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial x^{1}_{k,KL}}x^{1}_{i,K}x^{1}_{j,L} + \frac{\partial A_i^{\alpha}}{\partial x'^{1}_{k,K}}x^{1}_{j,K}\right) = m^{1}_{ikj} \; ; \\
&-\sum_{\alpha}\left(\rho_*^{\alpha}\frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial x^{2}_{k,KL}}x^{2}_{i,K}x^{2}_{j,L} + \frac{\partial A_i^{\alpha}}{\partial x'^{2}_{k,K}}x^{2}_{j,K}\right) = m^{2}_{ikj} \; ; \\
&-\sum_{\alpha}\left(\rho_*^{\alpha}\frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial x^{3}_{k,KL}}x^{3}_{i,K}x^{3}_{j,L} + \frac{\partial A_i^{\alpha}}{\partial x'^{3}_{k,K}}x^{3}_{j,K}\right) = m^{3}_{ikj} \; ; \\
&\sum_{\alpha=1}^{3}\left[-\rho_*^{\alpha}\left(\frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial\rho_*^{\gamma}}V_i^{\alpha\gamma}\right) + \frac{\partial A_i^{\alpha}}{\partial\rho_*^{\gamma}}\right] = 0 \; , \; \gamma = 2,3 \; ; \\
&\sum_{\alpha}\rho_*^{\alpha}\frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial x'^{1}_{k,K}} = \sum_{\alpha}\rho_*^{\alpha}\frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial x'^{2}_{k,K}} = \sum_{\alpha}\rho_*^{\alpha}\frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial x'^{3}_{k,K}} = 0 \; ;
\end{aligned} \tag{4.4.9}$$

$$\frac{\partial A_i^\alpha}{\partial T_{,j}} = \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial n} = \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial S_z} = \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial V_j^{\alpha\beta}} = \sum_\alpha \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial \rho_*^\gamma} = 0 \;;$$

$$\rho_*^2 \frac{\partial \Psi^2}{\partial X^1_{k,KL}} V_i^{21} + \rho_*^3 \frac{\partial \Psi^3}{\partial X^1_{k,KL}} V_i^{31} + \sum_\alpha \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial X^1_{k,KL}} = 0 \;;$$

$$\rho_*^1 \frac{\partial \Psi^1}{\partial X^2_{k,KL}} V_i^{12} + \rho_*^3 \frac{\partial \Psi^3}{\partial X^2_{k,KL}} V_i^{32} + \sum_\alpha \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial X^2_{k,KL}} = 0 \;; \qquad (4.4.9)$$

$$\rho_*^1 \frac{\partial \Psi^1}{\partial X^3_{k,KL}} V_i^{13} + \rho_*^2 \frac{\partial \Psi^2}{\partial X^3_{k,KL}} V_i^{23} + \sum_\alpha \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial X^3_{k,KL}} = 0$$

Disipativna nejednačina postaje:

$$\sum_\alpha \Big\{ -\rho_*^\alpha \Big(\frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial X^\alpha_{k,K}} X^\alpha_{i,K} v^\alpha_{k,i} - \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \rho_*^2} \rho_*^2 \delta_{ij} v^2_{i,j} - \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \rho_*^3} \rho_*^3 \delta_{ij} v^3_{i,j} \Big) +$$

$$+ \Big(\frac{\partial A_i^\alpha}{\partial T} + \frac{\phi_i^\alpha}{T} + \rho_*^\alpha \eta^\alpha u_i^\alpha \Big) T_{,i} + \sum_\beta \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial X^\beta_{k,K}} X^\beta_{k,KL} X^\beta_{L,i} + M^\alpha_{kj} v^\alpha_{j,k} \Big\} +$$

$$+ \zeta_i^2 V_i^{21} + \zeta_i^3 V_i^{31} + \Big(\rho_*^2 \frac{\partial \Psi^2}{\partial X^1_{k,K}} + \rho_*^3 \frac{\partial \Psi^3}{\partial X^1_{k,K}} \Big) X^1_{i,K} v^1_{k,i} +$$

$$+ X^1_{k,KL} X^1_{L,i} \Big(\rho_*^2 \frac{\partial \Psi^2}{\partial X^1_{k,K}} V_i^{21} + \rho_*^3 \frac{\partial \Psi^3}{\partial X^1_{k,K}} V_i^{31} \Big) +$$

$$+ \Big(\rho_*^1 \frac{\partial \Psi^1}{\partial X^2_{k,K}} + \rho_*^3 \frac{\partial \Psi^3}{\partial X^2_{k,K}} \Big) X^2_{i,K} v^2_{k,i} + \qquad (4.4.10)$$

$$+ X^2_{k,KL} X^2_{L,i} \Big(\rho_*^1 \frac{\partial \Psi^1}{\partial X^2_{k,K}} V_i^{12} + \rho_*^3 \frac{\partial \Psi^3}{\partial X^2_{k,K}} V_i^{32} \Big) +$$

$$+ \Big(\rho_*^1 \frac{\partial \Psi^1}{\partial X^3_{k,K}} + \rho_*^2 \frac{\partial \Psi^2}{\partial X^3_{k,K}} \Big) X^3_{i,K} v^3_{k,i} +$$

$$+ X^3_{k,KL} X^3_{L,i} \Big(\rho_*^1 \frac{\partial \Psi^1}{\partial X^3_{k,K}} V_i^{13} + \rho_*^2 \frac{\partial \Psi^2}{\partial X^3_{k,K}} V_i^{23} \Big) \geqslant 0 .$$

Kao i u prethodnom poglavlju rastavićemo sledeće veličine tako da je:

(4.4.11)

$$
\begin{aligned}
{}_eM_{ij}^{1} &= \sum_{\alpha} \rho_*^{\alpha} \frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial x_{j,K}^{1}} x_{i,K}^{1} \\
{}_eM_{ij}^{\gamma} &= \sum_{\alpha} \rho_*^{\alpha} \left(\frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial x_{j,K}^{\gamma}} x_{i,K}^{\gamma} + \delta_{ij} \rho_*^{\gamma} \frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial \rho_*^{\gamma}} \right), \quad \gamma = 2,3 \\
{}_e\tau_i^{2} &= x_{k,KL}^{2} X_{L,i}^{2} \rho_*^{1} \frac{\partial \psi^{1}}{\partial x_{k,K}^{2}} - x_{k,KL}^{1} X_{L,i}^{1} \rho_*^{2} \frac{\partial \psi^{2}}{\partial x_{k,K}^{1}} \\
{}_e\tau_i^{3} &= x_{k,KL}^{3} X_{L,i}^{3} \rho_*^{1} \frac{\partial \psi^{1}}{\partial x_{k,K}^{3}} - x_{k,KL}^{1} X_{L,i}^{1} \rho_*^{3} \frac{\partial \psi^{3}}{\partial x_{k,K}^{1}}
\end{aligned}
$$

pa konačno dobijamo, za disipativnu nejednačinu:

(4.4.12)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\alpha} \left[\left(\frac{\partial A_i^{\alpha}}{\partial T} + \frac{\phi_i^{\alpha}}{T} + \rho_*^{\alpha} \eta^{\alpha} u_i^{\alpha} \right) T_{,i} + \sum_{\beta} \frac{\partial A_i^{\alpha}}{\partial x_{k,K}^{\beta}} x_{k,KL}^{\beta} X_{L,i}^{\beta} + {}_dM_{kj}^{\alpha} v_{j,k}^{\alpha} \right] + \\
&+ {}_d\tau_i^{2} V_i^{21} + {}_d\tau_i^{3} V_i^{31} + \left(x_{k,KL}^{2} X_{L,i}^{2} \rho_*^{3} \frac{\partial \psi^{3}}{\partial x_{k,K}^{2}} - x_{k,KL}^{3} X_{L,i}^{3} \rho_*^{2} \frac{\partial \psi^{2}}{\partial x_{k,K}^{3}} \right) V_i^{32} \geqslant 0 .
\end{aligned}
$$

U ovom slučaju disipativna funkcija D je odredjena sa:

(4.4.13)

$$
\begin{aligned}
D = \sum_{\alpha} \Big[{}_dM_{kj}^{\alpha} d_{jk}^{\alpha} &+ \left(\frac{\partial A_i^{\alpha}}{\partial T} + \frac{\bar{\phi}_i}{T} \right) T_{,i} + \\
&+ \sum_{\beta} \frac{\partial A_i^{\alpha}}{\partial x_{k,K}^{\beta}} x_{k,KL}^{\beta} X_{L,i}^{\beta} \Big] + \sum_{\gamma=2}^{3} {}_d\tau_i^{\gamma} V_i^{\gamma 1} ,
\end{aligned}
$$

pri čemu smo pretpostavili da su brzine fluida "2" i "3" približno jednake, tj. $V^{23} \approx 0$ i uveli smenu:

$$\bar{\phi}_i^{\alpha} \equiv \phi_i^{\alpha} + T\rho_*^{\alpha}\eta^{\alpha}u_i^{\alpha} .$$

Za ireverzibilne termodinamičke sile ćemo da izaberemo:

$$Q_{(a)}^{\alpha} = \left\{ {}_dM_{ij}^{\alpha} ; \bar{\phi}_i^{\alpha} + T\frac{\partial A_i^{\alpha}}{\partial T} ; \frac{\partial A_i^{\alpha}}{\partial X_{k,K}^{\alpha}} X_{L,i}^{\alpha} ; {}_d\tau_i^{\gamma} \right\}, \tag{4.4.14}$$

a za generalisane brzine:

$$\dot{q}_{(a)}^{\alpha} = \left\{ d_{ij}^{\alpha} ; \frac{T_{,i}}{T} ; x_{k,KL}^{\alpha} ; V_i^{\gamma 1} \right\}, \tag{4.4.15}$$

pa prema (4.4.15) disipativna funkcija zavisi od:

$$D = D\left(d_{ij}^{\alpha} ; \frac{T_{,i}}{T} ; x_{k,KL}^{\alpha} ; V_i^{\gamma 1} \right), \tag{4.4.16}$$

tako da, koristeći (4.1.22), dobijamo nelinearne konstitutivne relacije za ireverzibilne termodinamičke sile:

$$\begin{aligned}
{}_dM_{ij}^{\alpha} &= \lambda \frac{\partial D}{\partial d_{ij}^{\alpha}} ; \\
{}_d\tau_i^{\gamma} &= \lambda \frac{\partial D}{\partial V_i^{\gamma 1}} ; \\
\bar{\phi}_i^{\alpha} + T\frac{\partial A_i^{\alpha}}{\partial T} &= \lambda \frac{\partial D}{\partial \left(\frac{T_{,i}}{T}\right)} ; \\
\frac{\partial A_i^{\alpha}}{\partial X_{k,K}^{\beta}} X_{L,i}^{\beta} &= \lambda \frac{\partial D}{\partial x_{k,KL}^{\beta}} .
\end{aligned} \tag{4.4.17}$$

Analizom relacija (4.4.9) zaključujemo:

$$\psi^{\alpha} = \psi^{\alpha}(T; x^{\alpha}_{k,K}; \dot{x}^{\alpha}_{k,K}; x^{\alpha}_{k,KL}; n; S_z; \rho^{\gamma}_{*})$$

$$A^{\alpha}_{i} = A^{\alpha}_{i}(T; x^{\alpha}_{k,K}; \dot{x}^{\alpha}_{k,K}; x^{\alpha}_{k,KL}; \rho^{\gamma}_{*})$$

Konstitutivne relacije ćemo da uprostimo, kao i u prethodnom poglavlju, prelaskom sa principa ekviprezensa na princip fazne odvojenosti. Zanemarićemo i uticaj naponskih spregova, tako da disipativna funkcija postaje:

$$D = \sum_{\alpha} \left({}_{d}t^{\alpha}_{ij} d^{\alpha}_{ij} + \frac{\bar{\varphi}^{\alpha}_{i}}{T} T_{,i} \right) + \sum_{\gamma} {}_{d}\tau^{\gamma}_{i} V^{\gamma 1}_{i}, \tag{4.4.18}$$

a slobodna energija je funkcija oblika:

$$\psi^{\alpha} = \psi^{\alpha}(T; x^{\alpha}_{k,K}; n). \tag{4.4.19}$$

Konačno možemo da napišemo konstitutivne relacije:

$$t^{1}_{ij} = \rho^{1}_{*} \frac{\partial \psi^{1}}{\partial x^{1}_{j,K}} x^{1}_{i,K} + \lambda \frac{\partial D}{\partial d^{1}_{ij}} \quad ;$$

$$t^{\gamma}_{ij} = \rho^{\gamma}_{*} \left(\frac{\partial \psi^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}_{j,K}} x^{\gamma}_{i,K} + \delta_{ij} \rho^{\gamma}_{*} \frac{\partial \psi^{\gamma}}{\partial \rho^{\gamma}_{*}} \right) + \lambda \frac{\partial D}{\partial d^{\gamma}_{ij}} ; \tag{4.4.20}$$

$$\tau^{\gamma}_{i} = \lambda \frac{\partial D}{\partial V^{\gamma 1}_{i}} \; ; \; \eta^{\alpha} = -\frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial T} \; ; \; \bar{M}^{\alpha} = -\frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial n} ;$$

$$\bar{\varphi}^{\alpha}_{i} = \lambda \frac{\partial D}{\partial \left(\frac{T_{,i}}{T} \right)} .$$

odnosno, kad iskoristimo uslov objektivnosti (3.3.5) slobodna energija je funkcija oblika:

$$\psi^{\alpha}=\psi^{\alpha}(E^{\alpha}_{KL};T;n),$$

pa dobijamo:

$$\begin{aligned}
t^{1}_{ij}&=\rho^{1}_{*}\frac{\partial\psi^{1}}{\partial E^{1}_{KL}}x^{1}_{i,K}x^{1}_{j,L}+\lambda\frac{\partial D}{\partial d^{1}_{ij}}\ ;\\
t^{\gamma}_{ij}&=\rho^{\gamma}_{*}\Big(\frac{\partial\psi^{\gamma}}{\partial E^{\gamma}_{KL}}x^{\gamma}_{i,K}x^{\gamma}_{j,L}-\frac{p^{\gamma}}{\rho^{\gamma}_{*}}\delta_{ij}\Big)+\lambda\frac{\partial D}{\partial d^{\gamma}_{ij}}\ ;\\
z^{\gamma}_{i}&=\lambda\frac{\partial D}{\partial v^{\gamma 1}_{i}}\ ;\quad \eta^{\alpha}=-\frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial T}\ ;\quad \bar{M}=-\frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial n}\ ;\\
\bar{\phi}^{\alpha}_{i}&=\lambda\frac{\partial D}{\partial\big(\frac{T_{,i}}{T}\big)}\ .
\end{aligned}\tag{4.4.21}$$

Prve dve relacije možemo da napišemo i u obliku:

$$t^{1}_{ij}=\rho^{1}_{*}\frac{\partial\psi^{1}}{\partial e^{1}_{ij}}+\lambda\frac{\partial D}{\partial d^{1}_{ij}}\ ;$$

$$t^{\gamma}_{ij}=\rho^{\gamma}_{*}\frac{\partial\psi^{\gamma}}{\partial e^{\gamma}_{ij}}-p^{\gamma}\delta_{ij}+\lambda\frac{\partial D}{\partial d^{\gamma}_{ij}}\ ,$$

u slučaju linearne teorije, što je predmet sledećeg poglavlja.

4.5 LINEARNE KONSTITUTIVNE RELACIJE I JEDNAČINE POLJA ZA NEZASIĆENU POROZNU SREDINU

U ovom poglavlju ćemo da linearizujemo opšte konstitutivne relacije (4.4.21) i da na taj način omogućimo da se one primene u praksi.

Koristeći isti postupak, kao pri linearizaciji konstitutivnih jednačina za zasićenu sredinu u poglavlju 4.2, pretpostavićemo da su slobodna energija i disipativna funkcija oblika:

$$
\begin{aligned}
\psi^{\alpha} = {} & \psi_0^{\alpha} + A_0^{\alpha}\theta + B_0^{\alpha}\nu + S_0^{\alpha}\Delta + \psi_{ij}^{\alpha} e_{ij}^{\alpha} + \frac{1}{2}A^{\alpha}(\theta)^2 + \\
& + \frac{1}{2}B^{\alpha}(\nu)^2 + \frac{1}{2}S^{\alpha}(\Delta)^2 + \frac{1}{2}\psi_{ijkl}^{\alpha} e_{ij}^{\alpha} e_{kl}^{\alpha} + A_1^{\alpha}\theta\nu + \\
& + S_1^{\alpha}\theta\Delta + A_{ij}^{\alpha}\theta e_{ij}^{\alpha} + B_{ij}^{\alpha}\nu e_{ij}^{\alpha} + B_1^{\alpha}\nu\Delta + S_{ij}^{\alpha}\Delta e_{ij}^{\alpha} \; ;
\end{aligned}
$$

(4.5.1)

$$
\begin{aligned}
D = {} & D_0 + \sum_{\alpha} D_{ij}^{\alpha} d_{ij}^{\alpha} + \sum_{\gamma} C_i^{\gamma} V_i^{\gamma 1} + D_1 \frac{\theta_{,i}}{T} + \\
& + \frac{1}{2}\sum_{\alpha} D_{ijkl}^{\alpha} d_{ij}^{\alpha} d_{kl}^{\alpha} + \frac{1}{2}\sum_{\gamma} D_{ij}^{\gamma} V_i^{\gamma 1} V_j^{\gamma 1} + \frac{1}{2} N_{ij} \frac{\theta_{,i}\theta_{,j}}{T^2} + \\
& + \sum_{\alpha} (1-\delta^{\alpha\beta}) C_{ijkl}^{\alpha\beta} d_{ij}^{\alpha} d_{kl}^{\beta} + \sum_{\alpha} \left(C_{ijk}^{2\alpha} d_{ij}^{\alpha} V_k^{21} + C_{ijk}^{3\alpha} d_{ij}^{\alpha} V_k^{31} \right) + \\
& + \sum_{\gamma} C_{ij}^{\gamma} V_i^{\gamma 1} \frac{\theta_{,j}}{T} + \frac{\theta_{,k}}{T} \sum_{\alpha} N_{ijk}^{\alpha} d_{ij}^{\alpha} \; ,
\end{aligned}
$$

gde su:

Ψ_0, A_0^α, B_0^α, S_0^α, Ψ_{ij}^α, A^α, B^α, S^α, Ψ_{ijkl}^α, A_1^α, S_1^α, A_{ij}^α, B_{ij}^α, B_1^α, S_{ij}^α, D_0, D_{ij}^α, C_i^γ, D_1, D_{ijkl}^α, D_{ij}^γ, N_{ij}, $C_{ijkl}^{\alpha\beta}$, $C_{ijk}^{\gamma\alpha}$, C_{ij}^γ, N_{ijk}^α,

konstantne veličine.

Za ovako uvedenu slobodnu energiju i disipativnu funkciju konstitutivne relacije (4.4.21) postaju:

$$t_{ij}^1 = \rho_{*0}^1(1-e_{kk}^1)\Psi_{ij}^1 + \rho_{*0}^1(\Psi_{ijkl}^1 e_{kl}^1 + A_{ij}^1\theta + B_{ij}^1 \nu + S_{ij}^1 s) + \lambda\Big(D_{ij}^1 + D_{ijkl}^1 d_{kl}^1 + C_{ijkl}^{12} d_{kl}^2 + C_{ijkl}^{13} d_{kl}^3 + C_{ijk}^{21} V_k^{21} + C_{ijk}^{31} V_k^{31} + \frac{\theta_{,k}}{T} N_{ijk}^1\Big) ;$$

(4.5.2)

$$t_{ij}^\gamma = \rho_{*0}^\gamma(1-e_{kk}^\gamma)\Psi_{ij}^\gamma + \rho_{*0}^\gamma(\Psi_{ijkl}^\gamma e_{kl}^\gamma + A_{ij}^\gamma\theta + B_{ij}^\gamma \nu + S_{ij}^\gamma s) + \lambda\Big[D_{ij}^\gamma + D_{ijkl}^\gamma d_{kl}^\gamma + \sum_{\alpha=1}^{3}(1-\delta^{\alpha\gamma}) C_{ijk}^{\alpha\gamma} d_{kl}^\alpha + \sum_{\beta=2}^{3} C_{ijk}^{\beta\gamma} V_k^{\beta 1} + \frac{\theta_{,k}}{T} N_{ijk}^\gamma - p^\gamma \delta_{ij} ;$$

$$\tau_i^\gamma = \lambda\Big(C_i^\gamma + D_{ij}^\gamma V_j^{\gamma 1} + \sum_\alpha C_{kji}^{\gamma 1} d_{kj}^\alpha + C_{ij}^\gamma \frac{\theta_{,j}}{T}\Big) ;$$

$$\eta^\alpha = -(A_0^\alpha + A^\alpha\theta + A_1^\alpha \nu + S_1^\alpha s + A_{ij}^\alpha e_{ij}^\alpha) ;$$

$$\bar{M}^\alpha = -(B_0^\alpha + B^\alpha \nu + A_1^\alpha\theta + B_{ij}^\alpha e_{ij}^\alpha + B_1^\alpha s) ;$$

$$q_i^\alpha = \lambda\Big(D_1 + N_{ij}\frac{\theta_{,j}}{T^2} + \sum_\gamma C_{ij}^\gamma V_j^{\gamma 1} + \sum_{\beta=1}^{3} N_{ijk}^\alpha d_{jk}^\beta\Big).$$

Konačno možemo da izračunamo polja pomeranja, temperature, poroznosti i stepena zasićenosti kad poslednje relacije unesemo u balanse količine kretanja i energije:

$$
\begin{aligned}
\rho^{1}_{*0}\ddot{p}^{1}_{i} = {} & \rho^{1}_{*} f^{1}_{i} + \bar{C}^{1}_{i} + \bar{C}_{ijk}\left(\dot{p}^{1}_{k,j} + \dot{p}^{2}_{k,j} + \dot{p}^{3}_{k,j}\right) + \\
& + \bar{\bar{C}}_{ijk}\left(\dot{p}^{1}_{j,k} + \dot{p}^{2}_{j,k} + \dot{p}^{3}_{j,k}\right) + \\
& + \bar{D}^{1}_{ij}\dot{p}^{1}_{j} - \lambda D^{2}_{ij}\dot{p}^{2}_{j} - \lambda D^{3}_{ij}\dot{p}^{3}_{j} + \bar{C}^{1}_{ij}\frac{\theta_{,j}}{T} + \\
& + \rho^{1}_{*0}\Big[-\Psi^{1}_{ij} p^{1}_{k,kj} + \frac{1}{2}\Psi^{1}_{ijkl}\left(p^{1}_{k,lj} + p^{1}_{l,kj}\right) + \\
& + A^{1}_{ij}\theta_{,j} + B^{1}_{ij}\nu_{,j} + S^{1}_{ij} s_{,j}\Big] + \\
& + \frac{\lambda}{2}\Big[D^{1}_{ijkl}\left(\dot{p}^{1}_{k,lj} + \dot{p}^{1}_{l,kj}\right) + C^{12}_{ijkl}\left(\dot{p}^{2}_{k,lj} + \dot{p}^{2}_{l,kj}\right) + \\
& + C^{13}_{ijkl}\left(\dot{p}^{3}_{k,lj} + \dot{p}^{3}_{l,kj}\right) + 2N^{1}_{ijk}\frac{\theta_{,jk}}{T}\Big] \quad ;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\rho^{\gamma}_{*0}\ddot{p}^{\gamma}_{i} = {} & \rho^{\gamma}_{*} f^{\gamma}_{i} + \lambda\Big[C^{\gamma}_{i} + D^{\gamma}_{ij}\left(\dot{p}^{\gamma}_{i} - \dot{p}^{1}_{i}\right) + \frac{1}{2}\sum_{\alpha} C^{\gamma 1}_{kji}\left(\dot{p}^{\alpha}_{k,j} + \dot{p}^{\alpha}_{j,k}\right) + \\
& + C^{\gamma}_{ij}\frac{\theta_{,j}}{T} + \frac{1}{2}D^{\gamma}_{ijkl}\left(\dot{p}^{\gamma}_{k,lj} + \dot{p}^{\gamma}_{l,kj}\right) + \sum_{\alpha}\left(1-\delta^{\alpha\gamma}\right)\frac{C^{\alpha\gamma}_{ijk}}{2}\left(\dot{p}^{\alpha}_{k,lj} + \dot{p}^{\alpha}_{l,kj}\right) + \\
& + \sum_{\beta=2}^{3} C^{\beta\gamma}_{ijk}\left(\dot{p}^{\beta}_{k,j} + \dot{p}^{1}_{k,j}\right) + N^{\gamma}_{ijk}\frac{\theta_{,jk}}{T} - p^{\gamma}_{,i}\Big] + \\
& + \rho^{\gamma}_{*0}\Big[-p^{\gamma}_{k,kj}\Psi^{\gamma}_{ij} + \Psi^{\gamma}_{ijkl}\left(p^{\gamma}_{k,lj} + p^{\gamma}_{l,kj}\right) + \\
& + A^{\gamma}_{ij}\theta_{,j} + B^{\gamma}_{ij}\nu_{,j} + S^{\gamma}_{ij} s_{,j}\Big] \quad ;
\end{aligned}
$$

$$\bar{A}^1\dot{\nu} + \bar{B}^1\dot{s} - \bar{C}\dot{\theta} - N_{ij}^1\frac{\theta_{,ij}}{T^2} = \rho_*^1 l^1 - \bar{C}_i^1 \dot{p}_i^1 +$$

$$+ \bar{A}_{ij}^1\left(\dot{p}_{i,j}^1 + \dot{p}_{j,i}^1\right) + \sum_{\gamma} C_{ij}^{\gamma}\left(\dot{p}_{j,i}^{\gamma} - \dot{p}_{j,i}^1\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{3} N_{ijk}^1\left(\dot{p}_{j,ki}^{\beta} + \dot{p}_{k,ij}^{\beta}\right) \quad ;$$

$$\bar{A}^2\dot{\nu} + \bar{B}^2\dot{s} - T_0 A^2\dot{\theta} - N_{ij}^2\frac{\theta_{,ij}}{T^2} = \rho_*^2 l^2 - \lambda C_i^2 \dot{p}_i^2 +$$

$$+ \bar{A}_{ij}^2\left(\dot{p}_{i,j}^2 + \dot{p}_{j,i}^2\right) + \sum_{\gamma} C_{ij}^{\gamma}\left(\dot{p}_{j,i}^{\gamma} - \dot{p}_{j,i}^1\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{3} N_{ijk}^2\left(\dot{p}_{j,ki}^{\beta} + \dot{p}_{k,ij}^{\beta}\right) \quad ;$$

$$-T_0 A_1^3\dot{\nu} + \bar{B}^3\dot{s} - \left(A_0^3 + T_0 A^3\right)\dot{\theta} - N_{ij}^3\frac{\theta_{,ij}}{T^2} = \rho_*^3 l^2 -$$

$$-\lambda C_i^3 \dot{p}_i^3 + \bar{A}_{ij}^3\left(\dot{p}_{i,j}^3 + \dot{p}_{j,i}^3\right) + \sum_{\gamma} C_{ij}^{\gamma}\left(\dot{p}_{j,i}^{\gamma} - \dot{p}_{j,i}^1\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{3} N_{ijk}^3\left(\dot{p}_{j,ki}^{\beta} + \dot{p}_{k,ij}^{\beta}\right) .$$

U prethodnim relacijama uveli smo sledece konstante:

$$\bar{C}_i^{1} \equiv -\lambda\left(C_i^{2}+C_i^{3}\right) \;;$$

$$\bar{C}_{ijk} \equiv -\lambda\left(\frac{1}{2}C^{21}_{kji}+\frac{1}{2}C^{31}_{kji}+C^{21}_{ijk}+C^{31}_{ijk}\right) \;;$$

$$\bar{\bar{C}}_{ijk} \equiv -\frac{\lambda}{2}\left(C^{21}_{kji}+C^{31}_{kji}\right) \;;$$

$$\bar{D}^{1}_{ij} \equiv \lambda\left(D^{2}_{ij}+D^{3}_{ij}\right) \;;$$

$$\bar{C}^{1}_{ij} \equiv -\lambda\left(C^{2}_{ij}+C^{3}_{ij}\right) \;;$$

$$\bar{A}^{1} \equiv 2\rho^{1}_{*}B^{1}_{0}-T_0A^{1}_{1} \;;$$

$$\bar{B}^{\alpha} \equiv \rho^{\alpha}_{*0}S^{\alpha}_{0}-T_0S^{\alpha}_{1} \;;$$

$$\bar{A}^{\alpha}_{ij} \equiv \frac{1}{2}\left(\lambda D^{\alpha}_{ij}+T_0A^{\alpha}_{ij}\right) .$$

DODATAK

U dodatku ćemo da izvedemo relacije koje nisu u potpunosti date u radu, a smatramo da nisu sasvim očigledne.

Na početku izvedimo jednu identičnost, koja se često koristi u teoriji mešavina, a na nju ćemo da se više puta pozovemo.

Posmatrajmo neku veličinu $\Gamma(\underset{\sim}{x}^\alpha, t)$, koja se odnosi na mešavinu, a vezana je sa odgovarajućim veličinama sastojka relacijom:

Ona može da bude skalarna, vektorska ili tenzorska.

$$\frac{D^\alpha}{Dt}(\rho_*^\alpha \Gamma^\alpha) = \frac{D^\alpha \rho_*^\alpha}{Dt}\Gamma^\alpha + \rho_*^\alpha \frac{D^\alpha\Gamma^\alpha}{Dt} =$$

$$= \left[\frac{\partial\rho_*^\alpha}{\partial t} + \rho^\alpha_{*,i} v_i^\alpha\right]\Gamma^\alpha + \rho_*^\alpha\frac{D^\alpha\Gamma^\alpha}{Dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_*^\alpha \frac{D^\alpha\Gamma^\alpha}{Dt} = \frac{D^\alpha(\rho_*^\alpha\Gamma^\alpha)}{Dt} - \Gamma^\alpha\left(\frac{\partial\rho_*^\alpha}{\partial t} + \rho^\alpha_{*,i} v_i^\alpha\right) =$$

$$= \frac{\partial(\rho_*^\alpha\Gamma^\alpha)}{\partial t} + \underline{(\rho_*^\alpha\Gamma^\alpha)_{,i}\, v_i^\alpha} - \Gamma^\alpha\left[\frac{\partial\rho_*^\alpha}{\partial t} + (\rho_*^\alpha v_i^\alpha)_{,i} - \underline{\rho_*^\alpha v^\alpha_{i,i}}\right] =$$

$$= \frac{\partial(\rho_*^\alpha\Gamma^\alpha)}{\partial t} + (\rho_*^\alpha\Gamma^\alpha v_i^\alpha)_{,i} - \Gamma^\alpha A^\alpha \quad \Big/ \sum_\alpha$$

$$\sum_\alpha \rho_*^\alpha \frac{D^\alpha\Gamma^\alpha}{Dt} = \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial t}(\rho_*^\alpha\Gamma^\alpha) + \sum_\alpha (\rho_*^\alpha\Gamma^\alpha v_i^\alpha)_{,i} - \sum_\alpha \Gamma^\alpha A^\alpha =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\sum_\alpha \rho_*^\alpha\Gamma^\alpha + \sum_\alpha \left[\rho_*^\alpha\Gamma^\alpha(u_i^\alpha + v_i)\right]_{,i} - \sum_\alpha \Gamma^\alpha A^\alpha =$$

$$= \frac{\partial(\rho\Gamma)}{\partial t} + \sum_\alpha (\rho_*^\alpha\Gamma^\alpha u_i^\alpha)_{,i} + \Big(v_i\sum_\alpha \rho_*^\alpha\Gamma^\alpha\Big)_{,i} - \sum_\alpha \Gamma^\alpha A^\alpha =$$

$$= \frac{\partial(\rho\Gamma)}{\partial t} + (\rho\Gamma v_i)_{,i} + \sum_\alpha (\rho_*^\alpha\Gamma^\alpha u_i^\alpha)_{,i} - \sum_\alpha \Gamma^\alpha A^\alpha =$$

$$= \frac{D(\rho\Gamma)}{Dt} + \rho\Gamma v_{i,i} + \sum_\alpha (\rho_*^\alpha\Gamma^\alpha u_i^\alpha)_{,i} - \sum_\alpha \Gamma^\alpha A^\alpha =$$

$$= \rho\frac{D\Gamma}{Dt} + \cancelto{0}{\Gamma\Big(\frac{D\rho}{Dt} + \rho v_{i,i}\Big)} + \sum_\alpha (\rho_*^\alpha\Gamma^\alpha u_i^\alpha)_{,i} - \sum_\alpha \Gamma^\alpha A^\alpha \Rightarrow$$

$$\underline{\sum_\alpha \rho_*^\alpha \frac{D^\alpha\Gamma^\alpha}{Dt} = \rho\frac{D\Gamma}{Dt} + \sum_\alpha (\rho_*^\alpha\Gamma^\alpha u_i^\alpha)_{,i} - \sum_\alpha \Gamma^\alpha A^\alpha}$$

Medjutim, u našem slučaju je, prema (3.1.3), $A^\alpha = 0$, pa konačno dobijamo:

$$\text{(D)} \qquad \underline{\sum_\alpha \rho_*^\alpha \frac{D^\alpha\Gamma^\alpha}{Dt} = \rho\frac{D\Gamma}{Dt} + \sum_\alpha (\rho_*^\alpha\Gamma^\alpha u_i^\alpha)_{,i}} \; .$$

(1.15)-D

Koristeći definicije (1.5) i (1.15), dobijamo:

$$e = \frac{dV^p}{dV^1} = \frac{dV^p}{dV - dV^p} = \frac{dV^p/dV}{dV/dV - dV^p/dV} = \frac{n}{1-n}.$$

(2.8) -D

Koristeći (1.9), (2.6) i (2.7) dobijamo:

$$\sum_\alpha \rho_*^\alpha u_i^\alpha = \sum_\alpha \rho_*^\alpha (v_i^\alpha - v_i) = \sum_\alpha \rho_*^\alpha v_i^\alpha - v_i \sum \rho_*^\alpha =$$

$$= \rho v_i - \rho v_i = 0.$$

(2.12)-D

$$\frac{D^\alpha f}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + f_{,i} v_i^\alpha = \frac{\partial f}{\partial t} + f_{,i} v_i + f_{,i}(v_i^\alpha - v_i) =$$

$$= \frac{Df}{Dt} + f_{,i} u_i^\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_*^\alpha \frac{Df}{Dt} = \rho_*^\alpha \frac{D^\alpha f}{Dt} - f_{,i} \rho_*^\alpha u_i^\alpha \Big/ \sum_\alpha$$

$$\Rightarrow \rho \frac{Df}{Dt} = \sum_\alpha \rho_*^\alpha \frac{D^\alpha f}{Dt} - f_{,i} \cancel{\sum_\alpha \rho_*^\alpha u_i^\alpha}^{\,0}$$

$$\Rightarrow \qquad \rho \frac{Df}{Dt} = \sum_\alpha \rho_*^\alpha \frac{D^\alpha f}{Dt}.$$

(2.19)-D

Prema (2.15) imamo:

$$(ds^\alpha)^2 = g_{kl}\, x^\alpha_{k,K}\, x^\alpha_{l,L}\, dX^\alpha_K\, dX^\alpha_L = C^\alpha_{KL}\, dX^\alpha_K dX^\alpha_L \; .$$

Diferencirajući po vremenu (materijalni izvod) dobijamo:

$$\overline{(ds^\alpha)^2}^{\,\prime} = \left(g_{ki}\, \overset{\prime}{x}{}^\alpha_{k,j} + g_{jk}\, \overset{\prime}{x}{}^\alpha_{k,i}\right) dx_i^\alpha dx_j^\alpha = 2 d_{ij}^\alpha dx_i^\alpha dx_j^\alpha =$$

$$= \underline{2 d_{ij}^\alpha x^\alpha_{i,K} x^\alpha_{j,L}}\, dX^\alpha_K dX^\alpha_L$$

$$\overline{(ds^\alpha)^2}^{\,\prime} = \overline{\left(C^\alpha_{KL}\, dX^\alpha_K dX^\alpha_L\right)}^{\,\prime} = \underline{\overset{\prime}{C}{}^\alpha_{KL}}\, dX^\alpha_K dX^\alpha_L$$

$$\Rightarrow \quad \overset{\prime}{C}{}^\alpha_{KL} = 2 d_{ij}^\alpha x^\alpha_{i,K} x^\alpha_{j,L} \; .$$

Pri diferenciranju smo koristili:

$$\overline{dX^\alpha_K}^{\,\prime} = 0 \; ;$$

$$\left(\overline{dx^\alpha_k}^{\,\prime}\right) = \frac{D^\alpha}{Dt}\left(dx^\alpha_k\right) = \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial x^\alpha_k}{\partial X^\alpha_K} dX^\alpha_K\right) = \frac{\partial}{\partial X^\alpha_K}\left(\frac{D^\alpha x^\alpha_k}{Dt}\right) dX^\alpha_K =$$

$$= \frac{\partial v^\alpha_k}{\partial X^\alpha_K} dX^\alpha_K = \frac{\partial v^\alpha_k}{\partial x^\alpha_l} \frac{\partial x^\alpha_l}{\partial X^\alpha_K} dX^\alpha_K = v^\alpha_{k,l}\, dx^\alpha_l =$$

$$= \overset{\prime}{x}{}^\alpha_{k,l}\, dx^\alpha_l \; .$$

(3.2) -D

Sa (3.1) postulirali smo globalnu jednačinu balansa:

$$\frac{D^\alpha}{Dt}\int_V \rho_*^\alpha \psi^\alpha dV = \int_{\partial V} \varphi_i^\alpha dS_i + \int_V \rho_*^\alpha s^\alpha dV .$$

Odavde, diferencirajući levu stranu i primenjujući Green-ovu teoremu, dobijamo:

$$\int_V \frac{D^\alpha(\rho_*^\alpha \psi^\alpha)}{Dt} dV + \int_V \rho_*^\alpha \psi^\alpha \frac{D^\alpha}{Dt}(dV) = \int_V \left(\varphi_{i;i}^\alpha + \rho_*^\alpha s^\alpha\right) dV .$$

Kako je $\frac{D^\alpha}{Dt}(dV) = v_{i;i}^\alpha\, dV$ dobijamo:

$$\int_V \left(\rho_*^\alpha \frac{D^\alpha \psi^\alpha}{Dt} + \psi^\alpha \frac{D^\alpha \rho_*^\alpha}{Dt} + \psi^\alpha \rho_*^\alpha v_{k;k}^\alpha\right) dV = \int_V \left(\varphi_{i;i}^\alpha + \rho_*^\alpha s^\alpha\right) dV$$

Konačno, za oblasti u kojima su odgovarajuće veličine neprekidne, sledi:

$$\rho_*^\alpha \frac{D^\alpha \psi^\alpha}{Dt} + \psi^\alpha\left(\frac{D^\alpha \rho_*^\alpha}{Dt} + \rho_*^\alpha v_{i;i}^\alpha\right) = \varphi_{i;i}^\alpha + \rho_*^\alpha s^\alpha ,$$

ili

$$\rho_*^\alpha \frac{D^\alpha \psi^\alpha}{Dt} + \psi^\alpha A^\alpha = \varphi_{i;i}^\alpha + \rho_*^\alpha s^\alpha .$$

(3.1.5)-D

$$I \equiv \rho_*^1 \frac{D^1}{Dt}\left(\frac{\rho_*^2}{\rho_*^1}\right) + \left[\rho_*^2\left(v_i^2 - v_i^1\right)\right]_{,i} =$$

$$= \frac{D^1\rho_*^2}{Dt} - \frac{\rho_*^2}{\rho_*^1}\frac{D^1\rho_*^1}{Dt} + \left[\rho_*^2\left(v_i^2 - v_i^1\right)\right].$$

Izrazimo sad $\frac{D^1\rho_*^2}{Dt}$ preko gustine ρ_*^1 :

$$\frac{D^1\rho_*^2}{Dt} = \frac{D^1}{Dt}\left[\frac{\rho^2}{\rho^1}\left(\rho^1 - \rho_*^1\right)\right] = \left(\rho^1 - \rho_*^1\right)\frac{D}{Dt}\left(\frac{\rho^2}{\rho^1}\right) + \frac{\rho^2}{\rho^1}\left(\frac{D^1\rho^1}{Dt} - \frac{D^1\rho_*^1}{Dt}\right) =$$

$$= -\frac{\rho^2}{\rho^1}\frac{D^1\rho_*^1}{Dt} + \frac{\rho^2}{\rho^1}\frac{D^1\rho^1}{Dt} + \left(\rho^1 - \rho_*^1\right)\frac{D^1}{Dt}\left(\frac{\rho^2}{\rho^1}\right).$$

Ovde smo iskoristili sledeće relacije:

$$n = \frac{\rho_*^2}{\rho^2} = 1 - n^1 = 1 - \frac{\rho_*^1}{\rho^1} \Rightarrow \rho_*^2 = \frac{\rho^2}{\rho^1}\left(\rho^1 - \rho_*^1\right).$$

Dalje, ako uvrstimo ovo u početnu jednakost, dobijamo:

$$I = -\frac{\rho^2}{\rho^1}\frac{D^1\rho_*^1}{Dt} + \frac{\rho^2}{\rho^1}\frac{D^1\rho^1}{Dt} + \left(\rho^1 - \rho_*^1\right)\frac{D^1}{Dt}\left(\frac{\rho^2}{\rho^1}\right) - \frac{\rho_*^2}{\rho_*^1}\frac{D^1\rho_*^1}{Dt} + \left[\quad\right]_{,i} =$$

$$= -\frac{\rho^2}{\rho_*^1}\left(\frac{\rho_*^1}{\rho^1} + \frac{\rho_*^2}{\rho^2}\right)\frac{D^1\rho_*^1}{Dt} + \frac{\rho^2}{\rho^1}\frac{D^1\rho^1}{Dt} + \left(\rho^1 - \rho_*^1\right)\frac{D^1}{Dt}\left(\frac{\rho^2}{\rho^1}\right) + \left[\quad\right]_{,i} =$$

$$= -\frac{\rho^2}{\rho_*^1}\frac{D^1\rho_*^1}{Dt} + \frac{\rho^2}{\rho^1}\frac{D^1\rho^1}{Dt} + \left(\rho^1 - \rho_*^1\right)\frac{D^1}{Dt}\left(\frac{\rho^2}{\rho^1}\right) + \left[\rho_*^2\left(v_i^2 - v_i^1\right)\right]_{,i}.$$

Ovde smo iskoristili (1.6)-2 i (1.8):

$$n+n^1=\frac{\rho_*^2}{\rho^2}+\frac{\rho_*^1}{\rho^1}=1.$$

Na ovaj način smo dobili prvi izraz za relaciju I. Izrazimo je sad preko n i e.

Prethodno izračunajmo potrebne veličine:

$$\rho_*^1=\rho^1 n^1=\rho^1(1-n) \Rightarrow \rho^1-\rho_*^1=\rho^1 n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{D^1\rho_*^1}{Dt}=(1-n)\frac{D^1\rho^1}{Dt}-\rho^1\frac{D^1 n}{Dt},$$

$$n=\frac{e}{1+e} \Rightarrow dn=\frac{de}{(1+e)^2} \Rightarrow \frac{dn}{1-n}=\frac{de}{(1+e)^2(1-n)}=\frac{de}{1+e}.$$

Da bismo dobili prethodnu relaciju izrazili smo e u funkciji od n:

$$e=\frac{n}{1-n},$$

a odavde sledi:

$$1+e=\frac{n}{1-n}+1=\frac{1}{1-n},$$

tj.:

$$(1+e)(1-n)=1.$$

Uvrstivši prethodne relacije u poslednji izraz za I, dobijamo:

$$I = -\frac{\rho^2}{\rho^1(1-n)}\frac{D^1}{Dt}\left[\rho^1(1-n)\right] = \frac{\rho^2}{\rho^1}\frac{D^1\rho^1}{Dt} + \rho^1 n\frac{D^1}{Dt}\left(\frac{\rho^2}{\rho^1}\right) + \left[\quad\right]_{,i} =$$

$$= \cancel{-\frac{\rho^2}{\rho^1}\frac{D^1\rho^1}{Dt}} + \frac{\rho^2}{1-n}\frac{D^1 n}{Dt} + \cancel{\frac{\rho^2}{\rho^1}\frac{D^1\rho^1}{Dt}} + \rho^1 n\frac{D^1}{Dt}\left(\frac{\rho^2}{\rho^1}\right) + \left[\quad\right]_{,i} =$$

$$= \frac{\rho^2}{1-n}\frac{D^1 n}{Dt} + \rho^1 n\frac{D^1}{Dt}\left(\frac{\rho^2}{\rho^1}\right) + \left[\rho^2 n\left(v_i^2 - v_i^1\right)\right]_{,i} =$$

$$= \frac{\rho^2}{1+e}\frac{D^1 e}{Dt} + \frac{\rho^1 e}{1+e}\frac{D^1}{Dt}\left(\frac{\rho^2}{\rho^1}\right) + \left[\frac{\rho^2 e}{1+e}\left(v_i^2 - v_i^1\right)\right]_{,i} .$$

Na ovaj način smo dobili relacije (3.1.5)-D.

$\boxed{(3.2.5)\text{-D}}$

Pri izvodjenju ove relacije koristićemo identičnost (D), izvedenu na početku dodatka. U ovom slučaju je $\Gamma = v_i$, $\Gamma^\alpha = v_i^\alpha$, pa dobijamo:

$$\sum_\alpha \rho_*^\alpha \frac{D^\alpha v_i^\alpha}{Dt} = \rho\frac{Dv_i}{Dt} + \sum_\alpha\left(\rho_*^\alpha v_i^\alpha u_j^\alpha\right)_{,j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho\frac{Dv_i}{Dt} = \sum_\alpha \rho_*^\alpha\frac{D^\alpha v_i^\alpha}{Dt} - \left[\sum_\alpha \rho_*^\alpha\left(u_i^\alpha + v_i^\alpha\right)u_j^\alpha\right]_{,j}$$

$$\Rightarrow \rho\frac{Dv_i}{Dt} = \sum_\alpha \rho_*^\alpha\frac{D^\alpha v_i^\alpha}{Dt} - \left(\sum_\alpha \rho_*^\alpha u_i^\alpha u_j^\alpha\right)_{,j} - \cancelto{0}{\left[v_i\sum_\alpha \rho_*^\alpha u_j^\alpha\right]_{,j}} .$$

Koristeći prethodnu relaciju i (3.2.4), dobijamo:

$$\sum_\alpha \rho_*^\alpha \frac{D^\alpha v_i^\alpha}{Dt} = \sum_\alpha \rho_*^\alpha f_i^\alpha + \sum_\alpha z_i^\alpha + \sum_\alpha t_{ij,j}^\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho \frac{Dv_i}{Dt} + \sum_\alpha (\rho_*^\alpha u_i^\alpha u_j^\alpha)_{,j} = \sum_\alpha \rho_*^\alpha f_i^\alpha + \sum_\alpha z_i^\alpha + \sum_\alpha t_{ij,j}^\alpha$$

$$\Rightarrow \rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho f_i + \sum_\alpha (t_{ij}^\alpha - \rho_*^\alpha u_i^\alpha u_j^\alpha)_{,j} + \sum_\alpha z_i^\alpha$$

$$\Rightarrow \rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho f_i + \overset{*}{t}_{ij,j} + \sum_\alpha z_i^\alpha .$$

Odavde, na osnovu principa C, str.5, sledi i

(3.2.8)-D

$$\sum_\alpha z_i^\alpha = 0 \quad .$$

(3.3.3)-D

Polazeći od lokalnog oblika opšteg zakona balansa (3.2)-D, pri čemu su odgovarajuće veličine definisane sa:

$$\underset{\sim}{\psi}^\alpha = \varepsilon_{ijk} x_j^\alpha v_k^\alpha ; \ \underset{\sim}{\varphi}^\alpha = \varepsilon_{ijk} (x_j^\alpha t_{kl}^\alpha + m_{jkl}^\alpha);$$

$$\rho_*^\alpha \underset{\sim}{s}^\alpha = \rho_*^\alpha \varepsilon_{ijk} x_j^\alpha f_k^\alpha + \varepsilon_{ijk} x_j^\alpha z_k^\alpha ,$$

dobijamo:

$$\rho_*^\alpha \varepsilon_{ijk} \frac{D^\alpha (x_j^\alpha v_k^\alpha)}{Dt} = \varepsilon_{ijk}\left[(x_j^\alpha t_{k\ell}^\alpha)_{,\ell} + m_{jk\ell,\ell}^\alpha\right] +$$

$$+ \rho_*^\alpha \varepsilon_{ijk} x_j^\alpha f_k^\alpha + \varepsilon_{ijk} x_j^\alpha \zeta_k^\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_*^\alpha \varepsilon_{ijk}\left(v_j^\alpha v_k^\alpha + x_j^\alpha \dot{v}_k^\alpha\right) = \varepsilon_{ijk}\left(x_{j,\ell}^\alpha t_{k\ell}^\alpha + x_j^\alpha t_{k\ell,\ell}^\alpha + m_{jk\ell,\ell}^\alpha\right) +$$

$$+ \rho_*^\alpha \varepsilon_{ijk} x_j^\alpha f_k^\alpha + \varepsilon_{ijk} x_j^\alpha \zeta_k^\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{\rho_*^\alpha \varepsilon_{ijk} v_j^\alpha v_k^\alpha}^{\,0} + \varepsilon_{ijk} x_j^\alpha \cancel{\left(\rho_*^\alpha \dot{v}_k^\alpha - t_{k\ell,\ell}^\alpha - \rho_*^\alpha f_k^\alpha - \zeta_k^\alpha\right)}^{\,0} =$$

$$= \varepsilon_{ijk}\left(t_{kj}^\alpha + m_{jk\ell,\ell}^\alpha\right)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{ijk}\left(t_{kj}^\alpha + m_{jk\ell,\ell}^\alpha\right) = 0 .$$

Prvi član je jednak o, jer imamo kombinaciju simetričnog ($v_j^\alpha v_k^\alpha$) i antisimetričnog (ε_{ijk}) tenzora, a drugi član je jednak o na osnovu (3.2.4).

$\boxed{(3.4.3)\text{-D}}$

Polazeći od lokalnog oblika opšteg zakona balansa (3.2)-D, pri čemu su odgovarajuće veličine definisane sa:

$$\psi^{\alpha}=\varepsilon^{\alpha}+\frac{1}{2}v_i^{\alpha}v_i^{\alpha}\ ;\quad \underset{\sim}{\varphi}^{\alpha}=t_{ij}^{\alpha}v_j^{\alpha}+q_i^{\alpha}+m_{ijk}^{\alpha}v_{j,k}^{\alpha}\ ;$$

$$s^{\alpha}=f_i^{\alpha}v_i^{\alpha}+l^{\alpha}-M^{\alpha}\frac{D^{\alpha}n^{\alpha}}{Dt}\ ,$$

dobijamo:

$$\rho_*^{\alpha}\frac{D^{\alpha}}{Dt}\left(\varepsilon^{\alpha}+\frac{1}{2}v_i^{\alpha}v_i^{\alpha}\right)=\left(t_{ij}^{\alpha}v_j^{\alpha}+q_i^{\alpha}+m_{ijk}^{\alpha}v_{j,k}^{\alpha}\right)_{,i}+$$

$$+\rho_*^{\alpha}\left(f_i^{\alpha}v_i^{\alpha}+l^{\alpha}-M^{\alpha}\frac{D^{\alpha}n^{\alpha}}{Dt}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\rho_*^{\alpha}\varepsilon'^{\alpha}+\rho_*^{\alpha}v_i^{\alpha}v_i'^{\alpha}=q_{i,i}^{\alpha}+t_{ij,j}^{\alpha}v_j^{\alpha}+t_{kj}^{\alpha}v_{j,k}^{\alpha}+m_{ijk}^{\alpha}v_{j,ki}^{\alpha}+$$

$$+m_{ijk,i}^{\alpha}v_{j,k}^{\alpha}+\rho_*^{\alpha}f_i^{\alpha}v_i^{\alpha}+\rho_*^{\alpha}l^{\alpha}-\rho_*^{\alpha}M^{\alpha}n'^{\alpha}$$

$$\Rightarrow\rho_*^{\alpha}\varepsilon'^{\alpha}+v_i^{\alpha}\left(\rho_*^{\alpha}v_i'^{\alpha}-t_{ij,j}^{\alpha}-\rho_*^{\alpha}f_i^{\alpha}\right)=q_{i,i}^{\alpha}+\left(t_{kj}^{\alpha}+m_{ijk,i}^{\alpha}\right)v_{j,k}^{\alpha}+$$

$$+m_{ijk}^{\alpha}v_{j,ki}^{\alpha}+\rho_*^{\alpha}l^{\alpha}-\rho_*^{\alpha}M^{\alpha}n'^{\alpha}\ .$$

Dalje, prema (3.2.4), izraz u zagradi sa leve strane možemo da zamenimo sa r_i^{α}, a prema (3.3.4) izraz u zagradi sa desne strane zamenimo sa M_{kj}^{α}, pa konačno dobijamo:

$$\rho_*^{\alpha}\frac{D^{\alpha}\varepsilon^{\alpha}}{Dt}=M_{kj}^{\alpha}v_{j,k}^{\alpha}+q_{i,i}^{\alpha}+m_{ijk}^{\alpha}v_{j,ki}^{\alpha}+\rho_*^{\alpha}l^{\alpha}-$$

$$-\rho_*^{\alpha}M^{\alpha}\frac{D^{\alpha}n^{\alpha}}{Dt}-r_i^{\alpha}v_i^{\alpha}\ .$$

(3.4.4)-D

$$\rho\mathcal{E} \overset{def.}{=} \sum_\alpha \rho_*^\alpha\left(\mathcal{E}^\alpha + \frac{1}{2}u_i^\alpha u_i^\alpha\right),$$

odavde, prema (D) dobijamo:

$$\rho\dot{\mathcal{E}} = \sum_\alpha \rho_*^\alpha\left\{\frac{D^\alpha\mathcal{E}^\alpha}{Dt} + \frac{D^\alpha}{Dt}\left(\frac{1}{2}u_i^\alpha u_i^\alpha\right) - \left[\rho_*^\alpha\left(\mathcal{E}^\alpha + \frac{1}{2}u_i^\alpha u_i^\alpha\right)u_j^\alpha\right]_{,j}\right\}.$$

Dalje, kako je:

$$\frac{D^\alpha}{Dt}\left(\frac{1}{2}u_i^\alpha u_i^\alpha\right) = u_i^\alpha\frac{D^\alpha u_i^\alpha}{Dt} = u_i^\alpha \dot{v}_i'^\alpha - u_i^\alpha\left(\dot{v}_i + v_{i,j}u_j^\alpha\right) =$$

$$= u_i^\alpha \dot{v}_i'^\alpha - u_i^\alpha u_j^\alpha v_{i,j} - u_i^\alpha\frac{Dv_i}{Dt}$$

i, prema (2.8)-D:

$$\sum \rho_*^\alpha u_i^\alpha \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{Dv_i}{Dt}\sum_\alpha \rho_*^\alpha u_i^\alpha = 0,$$

to izraz za $\rho\dot{\mathcal{E}}$, koristeći (3.4.3)-D, postaje:

$$\rho\dot{\mathcal{E}} = \sum_\alpha\Big\{\left(t_{kj}^\alpha + m_{ijk,i}^\alpha\right)v_{j,k}^\alpha + q_{i,i}^\alpha + m_{ijk}^\alpha v_{j,ki}^\alpha +$$

$$+ \rho_*^\alpha h^\alpha - \rho_*^\alpha M^\alpha\frac{D^\alpha n^\alpha}{Dt} + \rho_*^\alpha\left(u_i^\alpha \dot{v}_i'^\alpha - u_i^\alpha u_j^\alpha v_{i,j}\right) -$$

$$- \left[\rho_*^\alpha\left(\mathcal{E}^\alpha + \frac{1}{2}u_i^\alpha u_i^\alpha\right)u_j^\alpha\right]_{,j}\Big\}.$$

Iskoristivši (2.7) i (3.2.4), dobijamo:

$$\rho\dot{\varepsilon} = \sum_{\alpha} \Big\{ t^{\alpha}_{ij}\left(u^{\alpha}_{j,i} + v_{j,i}\right) + m^{\alpha}_{ijk,i}\, v^{\alpha}_{j,k} + q^{\alpha}_{i,i} + \rho^{\alpha}_{*} h^{\alpha} +$$

$$+ m^{\alpha}_{ijk}\, v^{\alpha}_{j,ki} - \rho^{\alpha}_{*} M^{\alpha} \frac{D^{\alpha} n^{\alpha}}{Dt} + u^{\alpha}_{i}\left(\rho^{\alpha}_{*} f^{\alpha}_{i} + r^{\alpha}_{i} + t^{\alpha}_{ij,j}\right) -$$

$$- \rho^{\alpha}_{*} u^{\alpha}_{i} u^{\alpha}_{j} v_{i,j} - \left[\rho^{\alpha}_{*}\left(\varepsilon^{\alpha} + \frac{1}{2} u^{\alpha}_{i} u^{\alpha}_{i}\right) u^{\alpha}_{j}\right]_{,j} \Big\} =$$

$$= \left[\sum_{\alpha}\left(t^{\alpha}_{ij} - \rho^{\alpha}_{*} u^{\alpha}_{i} u^{\alpha}_{j}\right)\right] v_{j,i} + \sum_{\alpha} \Big\{ t^{\alpha}_{ij} u^{\alpha}_{j,i} + u^{\alpha}_{j} t^{\alpha}_{ji,i} +$$

$$+ q^{\alpha}_{i,i} + \left[\rho^{\alpha}_{*}\left(\varepsilon^{\alpha} + \frac{1}{2} u^{\alpha}_{i} u^{\alpha}_{i}\right) u^{\alpha}_{j}\right]_{,j} + m^{\alpha}_{ijk,i}\, v^{\alpha}_{j,k} +$$

$$+ m^{\alpha}_{ijk}\, v^{\alpha}_{j,ki} + \rho^{\alpha}_{*}\left(h^{\alpha} + u^{\alpha}_{i} f^{\alpha}_{i}\right) - \rho^{\alpha}_{*} M^{\alpha} \frac{D^{\alpha} n^{\alpha}}{Dt} + u^{\alpha}_{i} r^{\alpha}_{i} \Big\} =$$

$$= t_{ij} v_{j,i} + \sum_{\alpha} \Big\{ t^{\alpha}_{ij} u^{\alpha}_{j} + q^{\alpha}_{i} + \rho^{\alpha}_{*}\left[\varepsilon^{\alpha} + \frac{1}{2} u^{\alpha}_{j} u^{\alpha}_{j}\right] u^{\alpha}_{i} +$$

$$+ m^{\alpha}_{ijk}\, v^{\alpha}_{j,k} \Big\}_{,i} + \sum_{\alpha} \Big[u^{\alpha}_{j}\left(t^{\alpha}_{ji,i} - t^{\alpha}_{ij,i}\right) + \rho^{\alpha}_{*}\left(h^{\alpha} + u^{\alpha}_{i} f^{\alpha}_{i}\right) +$$

$$+ u^{\alpha}_{i} r^{\alpha} - \rho^{\alpha}_{*} M^{\alpha} \frac{D^{\alpha} n^{\alpha}}{Dt} \Big\} = t_{ij} v_{j,i} + \cancelto{0}{\sum_{\alpha} u^{\alpha}_{i} r^{\alpha}_{i}} +$$

$$+ \sum_{\alpha} \left[t^{\alpha}_{ij} u^{\alpha}_{j} + q^{\alpha}_{i} + \rho^{\alpha}_{*}\left(\varepsilon^{\alpha} + \frac{1}{2} u^{\alpha}_{j} u^{\alpha}_{j}\right) u^{\alpha}_{i} + m^{\alpha}_{ijk} u^{\alpha}_{j,k} \right]_{,i} +$$

$$+ \sum_{\alpha} \Big[\left(m^{\alpha}_{ijk} v_{j,k}\right)_{,i} + \left(u^{\alpha}_{j} t^{\alpha}_{[ij],i} - \rho^{\alpha}_{*} M^{\alpha} \frac{D^{\alpha} n^{\alpha}}{Dt}\right) + \rho^{\alpha}_{*}\left(h^{\alpha} + u^{\alpha}_{i} f^{\alpha}_{i}\right) =$$

$$= t_{ij} v_{j,i} + m_{kji,k} v_{j,i} + m_{ijk} v_{j,ki} + \sum_\alpha \rho_*^\alpha (h^\alpha + u_i^\alpha f_i^\alpha) +$$

$$+ \sum_\alpha \left[q_i^\alpha + t_{ij}^\alpha u_i^\alpha + \rho_*^\alpha \left(\varepsilon^\alpha + \frac{1}{2} u_j^\alpha u_j^\alpha \right) u_i^\alpha \right]_{,i} +$$

$$+ \sum_\alpha \left(u_j^\alpha t_{[ij],i}^\alpha - \rho_*^\alpha M^\alpha \frac{D^\alpha n^\alpha}{Dt} + m_{ijk,i}^\alpha u_{j,k}^\alpha + m_{ijk}^\alpha u_{j,ki}^\alpha \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = M_{ij} v_{j,i} + m_{ijk} v_{j,ki} + \rho h + q_{i,i} +$$

$$+ \sum_\alpha \left(u_j^\alpha t_{[ij],i}^\alpha + m_{ijk,i}^\alpha u_{j,k}^\alpha + m_{ijk}^\alpha u_{j,ki}^\alpha - \rho_*^\alpha M^\alpha \frac{D^\alpha n^\alpha}{Dt} \right).$$

$\boxed{(4.1.9)-D}$

$$\frac{D^\alpha x_{k,K}^\alpha}{Dt} = \frac{D^\alpha}{Dt}\left(\frac{\partial x_k^\alpha}{\partial X_K^\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial X_K^\alpha}\left(\frac{D^\alpha x_k^\alpha}{Dt}\right) = \frac{\partial v_k^\alpha}{\partial X_K^\alpha} = \frac{\partial v_k^\alpha}{\partial x_j^\alpha}\frac{\partial x_j^\alpha}{\partial X_K^\alpha} = v_{k,j}^\alpha x_{j,K}^\alpha ;$$

$$\frac{D^\alpha x_{k,KL}^\alpha}{Dt} = \frac{D^\alpha}{Dt}\left(\frac{\partial^2 x_k^\alpha}{\partial X_K^\alpha \partial X_L^\alpha}\right) = \frac{\partial^2 v_k^\alpha}{\partial X_K^\alpha \partial X_L^\alpha} = \frac{\partial}{\partial X_K^\alpha}\left(\frac{\partial v_k^\alpha}{\partial X_L^\alpha}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial X_K^\alpha}\left(v_{k,j}^\alpha x_{j,L}^\alpha\right) = \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\left(v_{k,j}^\alpha x_{j,L}^\alpha\right)\frac{\partial x_i^\alpha}{\partial X_K^\alpha} =$$

$$= v_{k,ji}^\alpha x_{j,L}^\alpha x_{i,K}^\alpha + v_{k,j}^\alpha \cancelto{0}{\frac{\partial x_{j,L}^\alpha}{\partial x_i} x_{i,K}^\alpha} = v_{k,ji}^\alpha x_{j,L}^\alpha x_{i,K}^\alpha .$$

Član $\frac{\partial x^\alpha_{j,L}}{\partial x_i}$ je jednak nuli jer je $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}\,(\underset{\sim}{X};t)$

(4.1.29)-D

$${}_e t^\alpha_{ij} = \rho^\alpha_* \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial x^\alpha_{i,K}} x^\alpha_{j,K} \;.$$

$$\frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial x^\alpha_{i,K}} = \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial E^\alpha_{MN}} \frac{\partial E^\alpha_{MN}}{\partial x^\alpha_{i,K}} \;;\quad \frac{\partial E^\alpha_{MN}}{\partial x^\alpha_{i,K}} = \frac{1}{2}\left(\delta_{KM} x^\alpha_{i,N} + \delta_{KN} x^\alpha_{i,M}\right)$$

$$\frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial x^\alpha_{i,K}} = \frac{1}{2}\frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial E^\alpha_{MN}}\left(\delta_{KM} x^\alpha_{i,N} + \delta_{KN} x^\alpha_{i,M}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial E^\alpha_{KM}} x^\alpha_{i,M} + \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial E^\alpha_{MK}} x^\alpha_{i,M}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial E^\alpha_{KM}} + \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial E^\alpha_{MK}}\right) x^\alpha_{i,M} = \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial E^\alpha_{KM}} x^\alpha_{i,M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow {}_e t^\alpha_{ij} = \rho^\alpha_* \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial E^\alpha_{KL}} x^\alpha_{i,K} x^\alpha_{j,L} =$$

$$= \rho^\alpha_* \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial e^\alpha_{kl}} \frac{\partial e^\alpha_{kl}}{\partial E^\alpha_{KL}} x^\alpha_{i,K} x^\alpha_{j,L} =$$

$$= \rho^\alpha_* \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial e^\alpha_{kl}} \cdot \delta_{kK} \delta_{lL} x^\alpha_{i,K} x^\alpha_{j,L} =$$

$$= \rho^\alpha_* \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial e^\alpha_{kl}} x^\alpha_{i,k} x^\alpha_{j,l} = \rho^\alpha_* \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial e^\alpha_{kl}} \delta_{ik} \delta_{jl} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \underline{{}_e t^\alpha_{ij} = \rho^\alpha_* \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial e^\alpha_{ij}}} \;.$$

ZAKLJUČAK

Cilj našeg rada je dobijanje adekvatnih konstitutivnih jednačina za viskoelastičnu poroznu sredinu i zatim, sa tako izvedenim relacijama, dobijanje jednačine konsolidacije. Naglašavamo adekvatne, jer postoje radovi u kojim se izvode konstitutivne relacije /2/-/4/, /8/-/13/, /26/, ali po našem mišljenu nisu uzeti u obzir svi efekti koji karakterišu ovakvu vrstu materijala. Tako na primer uzimanje poroznosti kao nezavisne promenljive je neophodno, kao što je pokazao I.Mueller /15/, da bi teorija bila adekvatna i fizički opravdana, ali sem u radu G.Ahmadi-a /28/, ona se ne uzima u obzir.

Dalje, u većini radova /2/-/4/,/9/-/11/,/13/, /26/,/27/, se skelet i fluid posmatraju kao elastične sredine. U manjem broju radova /8/, /12/ se uzima viskoelastičan fluid, a elastičan skelet, mada je jasno da je skelet mnogo složeniji i da ga treba posmatrati kao viskoelastičan.

Rad G.Ahmadi-a je najbliži onome što smo mi radili, ali postoje bitne razlike, jer je oblast primene sasvim drugačija.

Kao prvo, on posmatra jedan osnovni fluid u kom su smešteni komponentalni fluidi, različiti od osnovnog i koji se ne mešaju sa prvim. Za takvu mešavinu izvodi odgovarajuće konstitutivne relacije.

Kod nas je osnovna sredina čvrst skelet, a u njemu se nalazi fluid, tako da se skup nezavisno promenljivih /K/ razlikuje, što dalje povlači i različite konstitutivne relacije. To je i razumljivo, jer se u radu /28/ ne posmatra porozna sredina, ali je prilaz isti, tj. koristi se teorija mešavina, pa sa te strane radovi su formalno slični.

Drugo, u radu /28/ se polazi od principa fazne razdvojenosti, što je opravdano za ono našta želi da primeni svoju teoriju (sedimentacija).

Za razliku od njegovog rada, mi polazimo od principa ekviprezensa, što je opštije, a zatim u specijalnom slučaju, uproščavamo relacije prelaskom na princip fazne razdvojenosti.

U drugom delu rada vršimo linearizaciju i za takve konstitutivne relacije izvodimo jednačinu konsolidacije, koja je opštija od one relacije koja se koristi u mehanici tla /12/, /18/.

Istaknimo još jednom da u radu dobijamo adekvatnije i opštije konstitutivne relacije od već poznatih, kao i opštiji oblik jednačine konsolidacije.

Dalje, napomenimo da smo relacije izvodili pod pretpostavkom da su temperature svih sastojaka iste. To je bilo opravdano za naš slučaj, medjutim na način koji smo mi koristili nismo u mogućnosti da proširimo ovu teoriju na različite temperature. Osnovni razlog je to što u tom slučaju ne bismo imali dovoljno jednačina da odredimo polja svih temperatura. Naime, raspolažemo sa jednačinama (4.1)-(4.5) tj. imamo ukupno 5α nezavisnih jednačina, a imali bismo $6\alpha - 1$ nezavisnu veličinu

$$/\ 3\alpha\ (x_i^\alpha) + \alpha\ (T^\alpha) + (\alpha - 1)\ (n^\alpha - 1) + \alpha\ (\rho^\alpha)\ /$$

Da bismo izašli iz ovakve situacije potrebno je da se nadju nove jednačine balansa. Predlog za takve balanse dali su M.A.Goodman, S.C.Cowin /29/, G.Ahmadi /28/ i drugi.

Predmet daljeg našeg rada će biti proširanje teorije u ovom smislu.

Medjutim, pored ovakvog uopštavanja radiće se i na proširenju modela na elasto- visko- plastićan model, jer je tlo veoma složeno i takva teorija bi bila adekvatnija.

LITERATURA

1. K.Terzaghi : Die Berechnung der Durchlassigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der Hydrodynamischen Spannungserscheinungen, Akad. Wiss. in Wien. Mat. Natur. Klasse, IIa,132, 3/4, 1923

2.M.A.Biot : General Theory of Three-Dimensional Consolidation, J.Appl.Phys. 12, 1941.

3.M.A.Biot : Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid, ibid, 26, 1955, No.2.

4.W.Derski : Equations of Motion for Fluid-saturated Porous Solid, Bull.Acad.Polon.Sci., Vol. 26, 1978.

4.J.Kubik : Permeability Tensor and Porosity of Material with Rectilinear Channels, Bull.Acad.Polon.Sci.,Vol.27,No.10-11,1979.

6. J. Kubik : Balance of Mass for a Fluid-Solid Mixture with Directional Properties of the Skeleton, Bull. Acad. Polon. Sci., Vol. 28, No. 11-12, 1980.

7. P.A.C. Raats, A. Klute : Transport in soils: The balance of mass, Soil Sci. Soc. Amer. Proc. 32, No. 2, 1968.

7a. - / / - : Transport in soils: The balance of momentum, ibid., 32, No. 4, 1968.

8. N. Naerlović-Veljković, R. Mandić : Prilog teoriji konsolidacije, 16. Yu kongres teorijske i primenjene mehanike, Bečići, juni 1984.

9. W. Derski : Constitutive relations in the consolidation theory, Archives of Mechanics, 23, 6, 1971.

10. W. Derski, S. Kowalski : Equations of Linear Thermoconsolidation Bull. Acad. Polon. Sci. Vol. 26, No. 4, 1978.

11. - / / - : Equations of Linear Thermoconsolidation, Archives of Mechanics, 31, 3, 1979.

12. D.F.Kenyon : The Theory of an Incompressible Solid-Fluid Mixture, ARMA, Vol.62, 1976.

13. C.Pecker, H.Deresiewicz : Thermal Effects on Wave Propagation in Liquid-Filled Porous Media, Acta Mechanica, 16, 45-64, 1973.

14. K.Terzaghi : Teorijska mehanika tla, Naučna knjiga, 1972.

15. I.Mueller : Entropy, Absolute Temperature and Coldness in Thermodynamics, CISM, 1971.

16. P.Cvetković : Mikromorfna teorija višeg stepena heteregenih sredina, doktorska teza, Beograd, 1976.

17. I-Shih Liu : On chemical potential and incompressible porous media, J. de Mec., Vol.19, No.2, 198o.

18. L.Šuklje : Rheological Aspects of Soil Mechanics, Wiley- Interscience.

19. R. Darby : Viscoelastic fluids, Chemical Proc. Vol. 9, 1976

20. C. Truesdell, R.A. Toupin, : The classical field theories, in: Handbuch der Physic, III/1, Springer Verlag.

21. R.M. Bowen : The Theory of Mixtures in Continuum Physics, Eringen A.C., Ed. Academic Press, Vol. III, 1976.

22. N. Naerlović-Veljković, : Uvod u termoelastičnost, Naučna knjiga, 1977.

23. J. Jarić : Mehanika kontinuuma, u štampi.

24. R.J. Twiss, A.C. Eringen : Theory of Mixtures for Micromorphic Materials I, Int.J. Engng. Vol. 9, 1971.

25. - / / - : Theory of Mixtures for Micromorphic Materials II, Int.J. Engng. Vol. 1o, 1972.

26. Z. Konczak : Rownania termokonsolidacji budowa ich rozwiazania w przypadku quasi-statycznym, Mechanika, No. 26, 198o.

27. Z. Konczak, Z. S. Konczak : Rownania teorii niesymetrycznej termokonsolidacji,

28. D. A. Drew, L. A. Segel : Studies in Appl. Math. 1, 2o5, 1971.

29. M. A. Goodman, S. C. Cowin : A Continuum Theoty for Granular Materials, ARMA, 44, 249, 1972.

3o. G. Ahmadi : A Generalized Continuum Theory for Multiphase Suspension Flows, Int. J. Engng. Sci. Vol. 23, No. 1, 1985.

31. N. Naerlović-Veljković, M. Plavšić : Thermodiffusion in Elastic Solids with Microstructure, Bull. Acd. Polon. Vol. 22, No. 12, 1974.

32. M. Plavšić,
N. Naerlović-Veljković : Thermodiffusion in Dipolar Elastic Materials, Bull. T.LXIV de Acad. serbe, No. 1o, 1979.

33. H. Ziegler : Progress in solid mechanics, Vol. 4, 1963.