Многоуважаемому
Тадію Живановичу
Пѣвичу
отъ автора
на добрую память.

Ант. Билимовић

Природне једначине кретања чврстог тела

Из XCIX књиге „Гласа“ Српске Краљевске Академије

БЕОГРАД
Штампарија „Мироточиви“, Вука Караџића улица број 26
1922.

Природне једначине кретања чврстог тела

од
Ант. Билимовића

(Примљено на скупу Академије Природних Наука 14. фебруара 1921. г.).

1. Предходне формуле из теорије вектора и кинематике чврстог тела. 2. Закон количине кретања и момента количина кретања за чврсто тело. 3. Општи принцип. Основни правац. Основни триједар. 4. Једначине кретања чврстог тела с обзиром на произвољни основни триједар. 5. Природне једначине кретања чврстог тела. *a*. Основни је правац права у сталној вези са телом. *b*. Основни је правац тангента трајекторије изабране тачке тела. *c*. Основни је правац тренутна угаона брзина. *d*. Основни је правац количина кретања. *e*. Основни је правац моменат количина кретања. 6. Опште примедбе.

У овом чланку[1]) предлажемо неколико нових форма диференцијалних једначина кретања чврстог тела. Ове форме су сједињене општим принципом конструисања оних оса на које се једначине односе. Горње конструисање је у тесној вези са елементима самог кретања, са његовом природом, па због тога можемо ове једначине назвати *природним* једначинама.[2])

1. *Предходне формуле из теорије вектора и кинематике чврстог тела.*

Означимо координате вектора A с обзиром на ортогонални координатни систем Oxyz са A_{ox}, A_{oy}, A_{oz} или са A_x, A_y, A_z, а његову дужину са

[1]) *An. Bilimovitch.* Sur les équations intrinsèques du mouvement d'un corps solide. Comptes rendus, t. 171. p. 616, séance du 4. octobre 1920.

[2]) У специјалном случају проблема о транслаторно покретном телу ове се једначине поклапају са једначинама за материјалну тачку које је извео L. Euler. Ове потоње једначине носе назив: код француза — équations intrinsèques, код енглеза — intrinsic equations, код талијана — equazioni intrinseche, код немаца — natürliche Gleichungen, код руса — натуральныя уравненiя.

$$\overline{A} = +\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}.$$

Тамо, где нема сумње да говоримо о дужини, избацићемо горњу црту. Обележимо са (A, B) скаларни продукат вектора A и B, т.ј.

$$(A, B) = \overline{A}\ \overline{B}\ \mathrm{Cos}\ (A, B) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z.$$

Под [A, B] ћемо разумевати векторски продукат вектора A и B, т.ј. вектор, чији 1) правац стоји нормално на раван паралелну са векторима A и B, 2) и наперен је на ону страну равни откуда посматрана крајна тачка вектора B повлачи оба вектора надовезана један на други у смислу кретања казаљке на сату, 3) величина је површина паралелограма ограниченог векторима A и B; координате овог вектора су:

$$[A, B]_x = A_y B_z - A_z B_y, \quad [A, B]_y = A_z B_x - A_x B_z,$$
$$[A, B]_z = A_x B_y - A_y B_x.$$

Својства ових продуката предпостављамо као позната.

Геометриски извод вектора A, ако је овај функција једног независног аргумента, на пример t, бележимо са $\dot{A}$.

Извод скаларног продукта (A, B) је:

$$\frac{d}{dt}(A, B) = (\dot{A}, B) + (A, \dot{B}).$$

Ако заменимо у овој формули A = V, где је V неки произвољни вектор, а B = u, где је u орт неког правца, т.ј. јединични вектор исто тако наперен као смисао правца, добивамо израз за одређивање пројекције геометријског извода на правац, који се мења

$$(\dot{V}, u) = \frac{d}{dt}(V, u) - (V, \dot{u})$$

или

$$\dot{V}\ \mathrm{Cos}\ (\dot{V}, u) = \frac{d}{dt}\{V\ \mathrm{Cos}\ (V, u)\} - V\ \dot{u}\ \mathrm{Cos}\,(V, \dot{u}).$$

Обратимо још пажњу на израз:

$$(A, [B, C]) = (B, [C, A]) = (C, (A, B]) = \begin{vmatrix} A_x, & A_y, & A_z \\ B_x, & B_y, & B_z \\ C_x, & C_y, & C_z \end{vmatrix}$$

и на једначину

$$[A, [B, C]] = B\,(C, A) - C\,(A, B).$$

Положај чврстог тела, као што је познато, може се одредити положајем једне његове тачке — пола A — и правцима оса $A\xi$, $A\eta$, $A\zeta$ непокретно везаних са чврстим телом с обзиром на апсолутни координатни систем Ox, Oy, Oz.

Обележимо координате тачке A са x_A, y_A, z_A, а косинусе углова оса $A\xi\eta\zeta$ са осама Oxyz по овој шеми:

	ξ	η	ζ
x	λ_x	μ_x	ν_x
y	λ_y	μ_y	ν_y
z	λ_z	μ_z	ν_z

(1)

Сви се ови косинуси могу изразити помоћу Euler-ових углова — φ, ψ, θ:

$$\lambda_x = -\ \mathrm{Sin}\ \theta\ \mathrm{Sin}\ \psi + \mathrm{Cos}\ \theta\ \mathrm{Cos}\ \psi\ \mathrm{Cos}\ \varphi,$$
$$\lambda_y = \mathrm{Sin}\ \theta\ \mathrm{Cos}\ \psi + \mathrm{Cos}\ \theta\ \mathrm{Sin}\ \psi\ \mathrm{Cos}\ \varphi,$$
$$\lambda_z = -\ \mathrm{Sin}\ \varphi\ \mathrm{Cos}\ \theta,$$
$$\mu_x = -\ \mathrm{Cos}\ \theta\ \mathrm{Sin}\ \psi - \mathrm{Sin}\ \theta\ \mathrm{Cos}\ \psi\ \mathrm{Cos}\ \varphi,$$
$$\mu_y = \mathrm{Cos}\ \theta\ \mathrm{Cos}\ \psi - \mathrm{Sin}\ \theta\ \mathrm{Sin}\ \psi\ \mathrm{Cos}\ \varphi,$$
$$\mu_z = \mathrm{Sin}\ \varphi\ \mathrm{Sin}\ \theta,$$
$$\nu_x = \mathrm{Sin}\ \varphi\ \mathrm{Cos}\ \psi,$$
$$\nu_y = \mathrm{Sin}\ \varphi\ \mathrm{Sin}\ \psi,$$
$$\nu_z = \mathrm{Cos}\ \varphi.$$

Кинематичко стање тела је одређено, ако знамо транслаторну брзину тела — брзину пола A, представљену вектором v_A, и тренутну угаону брзину, представљену вектором Ω. Познато је да се његове пројекције P, Q, R на осе триједра Oxyz и пројекције p, q, r на осе триједра $A\xi\eta\zeta$ представљене изразима:

$$
\begin{aligned}
P &= -\varphi' \operatorname{Sin}\psi + \theta' \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\psi,\\
Q &= \varphi' \operatorname{Cos}\psi + \theta' \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\psi,\\
R &= \psi' + \theta' \operatorname{Cos}\varphi; \qquad (2)\\
p &= -\psi' \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\theta + \varphi' \operatorname{Sin}\theta,\\
q &= \psi' \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\theta + \varphi' \operatorname{Cos}\theta,\\
r &= \psi' \operatorname{Cos}\varphi + \theta'.
\end{aligned}
$$

Брзина v неке тачке M тела следује из ове геометријске једначине

$$v = v_A + [\Omega, \rho],$$

ако ρ означава вектор положаја тачке M с обзиром на тачку A.

Сем кретања транслаторног свако кретање чврстог тела може бити интерпретирано као доследан ред кретања завртња. Централна осовина овог завртња има правац једнак са угаоном брзином и пролази кроз тачку B, одређену овим вектором:

$$OB = OA + \frac{1}{\Omega^2}[\Omega, v_A]. \tag{3}$$

Централна оса описује како у телу, тако и у апсолутном простору, површине: у првом — аксоид покретни, у другом — аксоид непокретни. Као површине линијске, аксоиди имају у опште стрикциону криву линију. Тачка S, која је пресек централне осе са овом кривом, одређена је вектором:

$$OS = OB - \frac{1}{\dot\Omega^2}(\dot{OB}, \dot\Omega)\ \Omega. \tag{4}$$

2. *Закон количине кретања и момента количина кретања за чврсто тело.*

Ако су m_i и v_i маса и брзина неке тачке материјалног система, а F_i и R_i сила и реакција, која на њу дејствују, онда геометријска диференцијална једначина кретања за ову тачку има облик

$$(m_i \dot v_i) = (F_i) + (R_i). \tag{5}$$

Сабирањем свих ових једначина добијамо

$$(\dot W) + (F) = (R) \tag{6}$$

где је

$$W = \Sigma\, m_i v_i,\ F = \Sigma\, F_i,\ R = \Sigma\, R_i;$$

W је количина кретања система, F — резултујући вектор сила, које дејствују на материјални систем и R — резултујући вектор реакција.

Једначина (6) изражава закон количине кретања. Ова једначина важи и за материјалне системе, које се састоје из континуираних маса, — на пример, и за чврсто тело.

Помножимо ли једначину (5) векторски са вектором ρ_i, који почиње у ма каквој тачци M, а свршава се у тачци m_i, тада добијамо

$$[\rho_i, m_i \dot v_i] = [\rho_i, F_i] + [\rho_i, R_i].$$

Ако обележимо

$$g_i^{(M)} = [\rho_i, m_i v_i],\ L_i^{(M)} = [\rho_i, F_i],\ \Lambda_i^{(M)} = [\rho_i, R_i],$$

где је $g_i^{(M)}$ — моменат количине кретања $m_i v_i$ тачке m_i око тачке M, $L_i^{(M)}$ и $\Lambda_i^{(M)}$ — моменат силе односно реакције које дејствују на тачку m_i с обзиром на исту тачку — пол M, добијамо с обзиром на једначину

$$\dot\rho_i = v_i - v_M$$

закон момента количине кретања за тачку у случају *покретног пола* у овоме облику

$$\dot g_i^{(M)} + [v_M, m_i v_i] = L_i^{(M)}, \Lambda_i^{(M)}.$$

Сабирањем добијамо сличан закон

$$\dot G^{(M)} + [v_M, W] = L^{(M)} + \Lambda^{(M)} \tag{7}$$

за систем, где је $G^{(M)}$ резултујући моменат количина кретања тачака система, $L^{(M)}$ и $\Lambda^{(M)}$ — резултујући моменти свих сила и реакција, које дејствују на исти систем.

Имамо ли један правац са ортом u и пројецирамо геометријске једначине (6) и (7) на овај правац онда добијамо

$$\frac{d}{dt}(W, u) - (W, \dot{u}) = (F, u) + (R, u), \tag{8}$$

$$\frac{d}{dt}(G^{(M)}, u) - (G^{(M)}, \dot{u}) + ([v_M, W], u) = (L^{(M)}, u) + (\Lambda^{(M)}, u) \tag{9}$$

Обратимо пажњу на изразе живе силе материјалног система:

$$2T = \Sigma m_i v_i^2 = \Sigma (m_i v_i, v_i) = (v_A, W) + (\Omega, G^{(A)}) = M v_A^2 + 2M (v_A [\Omega, \rho_c]) + \Sigma m_i ([\Omega, \rho_i], [\Omega, \rho_i]),$$

где је M маса материјалног система и ρ_c вектор са почетком у A и крајем у тежишту система. Израз

$$\Sigma m_i ([\Omega, \rho_i], [\Omega, \rho_i]) = \Omega^2 \Sigma m_i ([u_\Omega, \rho_i], [u_\Omega, \rho_i]) = \Omega^2 J_\Omega$$

представља продукат квадрата тренутне угаоне брзине и момента инерције J_Ω материјалног система око правца оне угаоне брзине, чији смо орт обележили са u_Ω[1]).

Између извода живе силе по компонентама брзине v_A и тренутне угаоне брзине Ω постоје, као што је познато, просте везе. Ако обележимо са v_{A1}, v_{A2}, v_{A3}; $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ координате ових вектора с обзиром на ма који триједар ортогоналних оса, онда жива сила има израз

$$2T = M(v_{A1}^2 + v_{A2}^2 + v_{A3}^2) + 2M\{v_{A1}(\Omega_2 \rho_{c3} - \Omega_3 \rho_{c2}) + v_{A2}(\Omega_3 \rho_{c1} - \Omega_1 \rho_{c3}) + v_{A3}(\Omega_1 \rho_{c2} - \Omega_2 \rho_{c1})\} + J_1 \Omega_1^2 + J_2 \Omega_2^2 + J_3 \Omega_3^2 - 2\Pi_{23}\Omega_2\Omega_3 - 2\Pi_{31}\Omega_3\Omega_1 - 2\Pi_{12}\Omega_1\Omega_2$$

[1]) Изрази момента инерције J_u око ма каквог правца u и продукта инерције Π_{uv} односно ма каквих двају праваца u и v у нашој форми

$$J_u = \Sigma m_i ([u, \rho_i], [u, \rho_i]), \qquad \Pi_{uv} = -\Sigma m_i ([u, \rho_i], [v, \rho_i])$$

имају исти садржај као и у обичном излагању. Приметимо да ако има три узајамно ортогонална правца односно којих су моменти и продукти инерције представљени са $J_1, J_2, J_3, \Pi_{23}, \Pi_{31}, \Pi_{12}$ и ако u (u_1, u_2, u_3) v (v_1, v_2, v_3), где је, на пример, u_1 косинус угла правца u са првом осом, тада је

$$J_u = J_1 u_1^2 + J_2 u_2^2 + J_3 u_3^2 - 2\Pi_{23} u_2 u_3 - 2\Pi_{31} u_3 u_1 - 2\Pi_{12} u_1 u_2, \tag{10}$$

$$\Pi_{uv} = -\{J_1 u_1 v_1 + J_2 u_2 v_2 + J_3 u_3 v_3 - \Pi_{23}(u_2 v_3 + u_3 v_2) - \Pi_{31}(u_3 v_1 + u_1 v_3) - \Pi_{12}(u_1 v_2 + u_2 v_1)\}. \tag{11}$$

и

$$\frac{\partial T}{\partial v_{A1}} = W_1, \quad \frac{\partial T}{\partial v_{A2}} = W_2, \quad \frac{\partial T}{\partial v_{A3}} = W_3,$$
$$\frac{\partial T}{\partial \Omega_1} = G_1^{(A)}, \quad \frac{\partial T}{\partial \Omega_2} = G_2^{(A)}, \quad \frac{\partial T}{\partial \Omega_3} = G_3^{(A)}.$$

3. *Општи принцип. Основни правац. Основни триједар.*

Кретање чврстог тела дешава се сагласно законима количине кретања и момента количина кретања Двема геометријским једначинама, које представљају ове законе, одговарају шест скаларних једначина; ове последње сачињавају један систем диференцијалних једначина, који је довољан за решење проблема о кретању чврстог тела из датог кинематског стања према дејству датих сила и реакција, ако тело није слободно. Те осе на које се пројецирају геометријске једначине могу бити одређене на различне начине. Овде, у овом чланку, ми ћемо се руководити следећим општим принципом конструисања оса. Уочимо ма какав *променљив* правац и назовимо га *основним* и његов орт, који означавамо са u, *основним ортом.* Правци оса u_1, u_2, u_3 овог триједра, односно којег ћемо формирати наше диференцијалне једначине одредићемо овим начином: орт u_1 је основни правац u; орт u_2 — једнак са правцем геометријског извода $\dot{u}$, који је увек ортогоналан правцу u_1; најзад, орт u_3 има правац вектора $[u, \dot{u}]$ или исти правац $[u_1, u_2]$. За почетак триједра одаберимо ма какву, у опште променљиву, тачку. Триједар добијен на овај начин назваћемо *основним триједром.*

Сваки основни триједар има следеће својство:

Теорема. Пројекције геометријских извода орта u_1, u_2, u_3 оса основног триједра, који одговара датом основном правцу u, на исте осе изражавају се кроз две величине K_u и L_u на следећи начин:

$$\begin{array}{cccc} & u_1 & u_2 & u_3 \\ \dot{u}_1 & (0, & K_u, & 0), \\ \dot{u}_2 & (-K_u, & 0, & L_u), \\ \dot{u}_3 & (0, & -L_u, & 0), \end{array} \tag{12}$$

при чему су изрази ових величина овакви:

$$K_u = \overline{\dot{u}_1} = \sqrt{u_{1x}'^2 + u_{1y}'^2 + u_{1z}'^2} = \sqrt{u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2},$$

$$L_u = \frac{1}{K_u^2}\,(u_1\,[\dot{u}_1, \ddot{u}_1]) = \frac{1}{K_u^2}\begin{vmatrix} u_x, & u_x', & u_x'' \\ u_y, & u_y', & u_y'' \\ u_z, & u_z', & u_z'' \end{vmatrix}.$$

О истинитости ове теореме није се тешко убедити на овај начин: за орт u_1 имамо:

$(\dot{u}_1, u_1) = O$, јер $(u_1, u_1) = \text{Const.} = 1$

$(\dot{u}_1, u_2) = \overline{\dot{u}_1} = K_u$, јер је правац u_2 једнак са правцем вектора $\dot{u}_1$,

$$(\dot{u}_1, u_3) = (\dot{u}_1, \frac{[u_1, \dot{u}_1]}{\overline{[u_1, \dot{u}_1]}}) = \frac{1}{\overline{[u_1, \dot{u}_1]}}(\dot{u}_1, [u_1, \dot{u}_1]) = O;$$

за орт u_2 имамо:

$(\dot{u}_2, u_1) = -(\dot{u}_1, u_2) = -K_u$ шта следује из једначине $(u_1, u_2) = O$ после диференцирања,

$(\dot{u}_2, u_2) = O$, јер и овде $(u_2, u_2) = \text{Const.} = 1$,

$(\dot{u}_2, u_3) = (\dot{u}_2, \frac{[u_1, \dot{u}_1]}{\overline{[u_1, \dot{u}_1]}})$ одавде обзиром на једначине

$$\dot{u}_2 = \left(\frac{\dot{u}_1}{\overline{\dot{u}_1}}\right)^{\cdot} = \frac{\ddot{u}_1}{\overline{\dot{u}_1}} - \left(\frac{1}{\overline{\dot{u}_1}}\right)'\dot{u}_1,$$

$$\overline{[u_1, \dot{u}_1]} = \overline{\dot{u}_1} = K_u$$

добијамо

$$(\dot{u}_2, u_3) = \frac{1}{K_u^2}(u_1\,[\dot{u}_1, \ddot{u}_1]) = L_u;$$

најзад за орт u_3:

$(\dot{u}_3, u_1) = O$, јер из једначине $(u_1, u_3) = O$ добијамо $(\dot{u}_3, u_1) = -(\dot{u}_1, u_3) = O$,

$(\dot{u}_3, u_2) = -(\dot{u}_2, u_3) = -L_u$ из сличне једначине $(u_2, u_3) = O$,

$(\dot{u}_3, u_3) = O$, јер је $(u_3, u_3) = \text{Const.} = 1$.

Ако основни правац није одређен директно ортом, а ма каквим вектором U, који има једнак смисао са основним правцем, онда се горње формуле мењају на овај начин.

Основни орт је одређен једначином

$$u = \frac{1}{\kappa}\,U.$$

где смо са к обележили скалар једнак дужини вектора U; онда су орти основног триједра одређени геометријским једначинама:

$$u_1 = \frac{1}{\kappa}\,U,\quad u_2 = \frac{1}{\Delta}(\kappa\dot{U} - \kappa' U),\quad u_3 = [u_1, u_2] = \frac{1}{\Delta}\,[U, \dot{U}].$$

где је Δ скалар

$$\Delta = \overline{[U, \dot{U}]}.$$

Скалари к и Δ изражавају се помоћу координата вектора U на овај начин:

$$\kappa^2 = U_x^2 + U_y^2 + U_z^2,$$

$$\Delta^2 = (U_y U_z' - U_z U_y')^2 + (U_z U_x' - U_x U_z')^2 + (U_x U_y' - U_y U_x')^2.$$

Величина K_u и L_u које одређују пројекције геометријских извода орта на саме орте, изражавају се у овом случају овако:

$$K_u = \frac{\Delta}{\kappa^2},$$

$$L_u = \frac{\kappa}{\Delta^2}\,(U\,[\dot{U}, \ddot{U}]).$$

4. *Једначине кретања чврстог тела с обзиром на произвољни основни триједар.*

Сада ћемо пројецирати једначине које изражавају закон количине кретања и закон момента количина кретања на осе u_1, u_2, u_3 основног триједра са почетком у ма каквој покретној тачци.

Ако са W_1, W_2, W_3 обележимо пројекције количине W кретања чврстог тела на правце основног триједра, са $G_1^{(M)}$, $G_2^{(M)}$, $G_3^{(M)}$, — пројекције на исте осе момента количина кретања око тачке M, са v_{M1}, v_{M2}, v_{M3} пројекције брзине тачке M, са F_1, F_2, F_3; R_1, R_2, R_3 — пројекције резултујућег вектора сила и реакције, $L_1^{(M)}$, $L_2^{(M)}$, $L_3^{(M)}$; $\Lambda_1^{(M)}$, $\Lambda_2^{(M)}$, $\Lambda_3^{(M)}$ — пројекције резултујућег момента сила и реакција, с обзиром на (8) и (9) лако добивамо:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dW_1}{dt} - W_2 K_u &&= F_1 + R_1,\\
&\frac{dW_2}{dt} + W_1 K_u - W_3 L_u &&= F_2 + R_2,\\
&\frac{dW_3}{dt} + W_2 L_u &&= F_3 + R_3; \qquad (13)\\
&\frac{dG_1^{(M)}}{dt} - G_2^{(M)} K_u + v_{M2} W_3 - v_{M3} W_2 &&= L_1^{(M)} + \Lambda_1^{(M)},\\
&\frac{dG_2^{(M)}}{dt} + G_1^{(M)} K_u - G_3^{(M)} L_u + v_{M3} W_1 - v_{M1} W_3 &&= L_2^{(M)} + \Lambda_2^{(M)},\\
&\frac{dG_3^{(M)}}{dt} + G_2^{(M)} L_u + v_{M1} W_2 - v_{M2} W_1 &&= L_3^{(M)} + \Lambda_3^{(M)}.
\end{aligned}
$$

Ако је кинематско стање тела одређено брзином тачке A тела и тренутном угаоном брзином Ω, т. ј. векторима

$$v_A (v_{A1}, v_{A2}, v_{A3}), \ \Omega (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3),$$

онда жива сила има израз:

$$
\begin{aligned}
2T = {} & M (v_{A1}^2 + v_{A2}^2 + v_{A3}^2) + 2M \{v_{A1} (\Omega_2 \rho_{c3} - \Omega_3 \rho_{c2})\\
&+ v_{A2} (\Omega_3 \rho_{c1} - \Omega_1 \rho_{c3}) + v_{A3} (\Omega_1 \rho_{c2} - \Omega_2 \rho_{c1})\} + J_1 \Omega_1^2\\
&+ J_2 \Omega_2^2 + J_3 \Omega_3^2 - 2\Pi_{23} \Omega_2 \Omega_3 - 2\Pi_{31} \Omega_3 \Omega_1 - 2\Pi_{12} \Omega_1 \Omega_2,
\end{aligned}
$$

овде смо, на пример, са J_1 обележили моменат инерције тела око осе, која пролази кроз тачку A и паралелна је са осом Mu_1.

Пројекције количине кретања и момента количина

$$
\begin{aligned}
&W_1 = \frac{\partial T}{\partial v_{A1}}, \ W_2 = \frac{\partial T}{\partial v_{A2}}, \ W_3 = \frac{\partial T}{\partial v_{A3}},\\
&G_1^{(M)} = \frac{\partial T}{\partial \Omega_1} + b W_3 - c W_2,\\
&G_2^{(M)} = \frac{\partial T}{\partial \Omega_2} + c W_1 - a W_3,\\
&G_3^{(M)} = \frac{\partial T}{\partial \Omega_3} + a W_2 - b W_1,
\end{aligned}
$$

где смо са a, b, c сбележили координате тачке A односно триједра $Mu_1u_2u_3$.

У проширеној форми горње једначине пишемо овако:

$$
\begin{aligned}
W_1 &= M v_{A1} + M (\Omega_2 \rho_{c3} - \Omega_3 \rho_{c2}),\\
W_2 &= M v_{A2} + M (\Omega_3 \rho_{c1} - \Omega_1 \rho_{c3}),\\
W_3 &= M v_{A3} + M (\Omega_1 \rho_{c2} - \Omega_2 \rho_{c1}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_1^{(M)} &= M (\rho_{c2} v_{A3} - \rho_{c3} v_{A2}) + J_1 \Omega_1 - \Pi_{12} \Omega_2 - \Pi_{12} \Omega_3\\
&\qquad + b W_3 - c W_2,\\
G_2^{(M)} &= M (\rho_{c3} v_{A1} - \rho_{c1} v_{A3}) - \Pi_{21} \Omega_1 + J_2 \Omega_2 - \Pi_{23} \Omega_3\\
&\qquad + c W_1 - a W_3,\\
G_3^{(M)} &= M (\rho_{c1} v_{A2} - \rho_{c2} v_{A1}) - \Pi_{31} \Omega_1 - \Pi_{32} \Omega_2 + J_3 \Omega_3\\
&\qquad + a W_2 - b W_1.
\end{aligned}
$$

5. *Природне једначине кретања чврстог тела.*

Ако је избор основног правца и почетка основног триједра у *тесној вези* са самим телом или са којом кинематском или динамском особином кретања тела, онда се једначине кретања тела с обзиром на овакав основни триједар могу назвати *природним једначинама*, јер својства, која ове једначине изражавају нису у вези са положајем тела у простору, а одсијавају суштину саме појаве у њеним елементима.

Ми се заустављамо на случајевима природних једначина, кад су основни правци ови: a) права у сталној вези са телом, b) тангента трајекторије изабране тачке тела, c) тренутна угаона брзина, d) количина а) *Основни је правац права у сталној вези са телом.*

Предпоставимо, да је почетак основног триједра тачка A тела, која припада телу, а основни правац права тела, која пролази кроз тачку A; са с обележимо овај правац. Одредимо изразе за K_c и L_c.

Пошто из основне кинематске формуле (3) следује:

$$(\dot{u}_1) = [\Omega, u_1],$$

а с друге стране из дефиниције основног триједра

$$(u_2) = \frac{1}{\lambda}(\dot{u}_1),$$

где је λ некакав позитиван скалар (дужина вектора $\dot{u}_1$), онда после скаларног множења једначине

$$\lambda u_2 = [\Omega, u_1]$$

са u_3 добивамо

$$\lambda (u_3, u_2) = O = (u_3, [\Omega, u_1]) = (\Omega, [u_1, u_3]) = -(\Omega, u_2)$$

одавде закључујемо да се Ω налази у равни $u_1 u_3$, т.ј. да је $\Omega_2 = O$.

Овим начином добивамо да је у проучаваном случају

$$K_c = \overline{\Omega}_3. \tag{14}$$

Да одредимо величину L_c поступимо овако.

Из једначине

$$(\Omega, u_2) = O$$

следује

$$\dot{\Omega} \operatorname{Cos}(\dot{\Omega}, u_2) = -(\Omega, \dot{u}_2)$$

или према (12)

$$\dot{\Omega} \operatorname{Cos}(\dot{\Omega}, u_2) = \Omega_1 K_c - \Omega_3 L_c$$

шта даје

$$L_c = \frac{1}{\Omega_3}\{\Omega_1 \Omega_3 - \dot{\Omega} \operatorname{Cos}(\dot{\Omega} u_2)\}.$$

Напишимо једначине кретања за специјалан случај да је тачка A центар инерције тела, а да је основни правац главна централна оса елипсоида инерције.

У том случају жива сила има израз:

$$2T = M(v_{A1}^2 + v_{A2}^2 + v_{A3}^2) + J_1\Omega_1^2 + J_2\Omega_2^2 + J_3\Omega_3^2 - 2\Pi_{23}\,\Omega_2\,\Omega_3,$$

при чему је моменат инерције J_1 константан.

Вектори количине кретања и момента количина кретања имају ове координате:

$$W_1 = M v_{A1},\quad W_2 = M v_{A2},\quad W_3 = M v_{A3},$$
$$G_1^{(A)} = J_1\Omega_1,\quad G_2^{(A)} = -\Pi_{23}\,\Omega_3,\quad G_3^{(A)} = J_3\,\Omega_3,$$

због једначине

$$\Omega_2 = O.$$

Зато су једначине кретања

$$M\left(\frac{dv_{A1}}{dt} - v_{A2} K_c\right) = F_1 + R_1,$$
$$M\left(\frac{dv_{A2}}{dt} + v_{A1} K_c - v_{A3} L_c\right) = F_2 + R_2,$$
$$M\left(\frac{dv_{A3}}{dt} + v_{A2} L_c\right) = F_3 + R_3;$$
$$\frac{dG_1^{(A)}}{dt} - G_2^{(A)} K_c = L_1 + \Lambda_1,$$
$$\frac{dG_2^{(A)}}{dt} + G_1^{(A)} K_c - G_3^{(A)} L_c = L_2 + \Lambda_2,$$
$$\frac{dG_3^{(A)}}{dt} + G_2^{(A)} L_c = L_3 + \Lambda_3.$$

Пошто је при решењу проблема за кретање чврстог тела потребно одредити координате овог тела, на пример, координате тачке A (x_A, y_A, z_A) и Euler-ове углове ψ, φ, θ, то су нам потребни изрази, који дају везу наших величина v_{A1}, v_{A2}, v_{A3}, Ω_1, Ω_2, Ω_3, K_c, L_c итд. са координатама тела и његовим изводима.

Ако осе $A\xi\eta\zeta$ стално везане са чврстим телом наперимо тако, да се оса $A\xi$ поклапа са правцем u, а да су две друге наперене по главним осама централног елипсоида инерције, онда с обзиром на шему (1) добијамо ове изразе за пројекције транлаторне брзине:

$$v_{A1} = x'_A \lambda_x + y'_A \lambda_y + z'_A \lambda_z,$$
$$v_{A2} = x'_A \mu_x + y'_A \mu_y + z'_A \mu_z,$$
$$v_{A3} = x'_A \nu_x + y'_A \nu_y + z'_A \nu_z.$$

Познавајући пројекције p, q, r тренутне угаоне брзине Ω као функције Euler-ових углова и његових извода добијамо ове изразе пројекција вектора Ω на осе основног триједра

$$\Omega_1 = p, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = \sqrt{q^2 + r^2}.$$

Косинуси углова оса основног триједра са осама триједра $A\xi\eta\zeta$ или, шта је исто, координате орта u_1, u_2, u_3 су:

$$\begin{array}{cccc} & \xi & \eta & \zeta \\ u_1 & (1, & 0, & 0), \\ u_2 & (0, & \dfrac{r}{\Omega_3}, & -\dfrac{q}{\Omega_3}), \\ u_3 & (0, & \dfrac{q}{\Omega_3}, & \dfrac{r}{\Omega_3}). \end{array}$$

За одредбу главног момента количина кретања је потребно познавати, сем J_1, још J_3 и Π_{23}.

Из (10) и (11) следује без тешкоће

$$J_3 = \frac{1}{\Omega_3^2}(Bq^2 + Cr^2),$$

$$\Pi_{23} = \frac{1}{\Omega_3^2}(C - B)\,qr,$$

где су B и C моменти инерције с обзиром на осе $A\eta$ и $A\zeta$.

Ваља одредити још величине K_c и L_c.

Што се тиче K_c, то због једначине (14) имамо:

$$K_c = \sqrt{q^2 + r^2},$$

а због формуле (15) добијамо:

$$L_c = p - \frac{1}{q^2 + r^2}(rq' - qr').$$

Ако се изабрани под тачка A не налази у центру инерције тела а правац u_1 не поклапа се са главном осом инерције састављање једначина кретања не задаје ни тада тешкоћа.

в) *Основни је правац тангента трајекторије изабране тачке тела.*

Нека нам сад као основни правац послужи тангента трајекторије пола A, тачке тела; обележимо са T овај правац. Геометријски је извод од орта тангенте по дужини лука трајекторије тачке A, као што је познато, кривина, зато је

$$(\dot{u}_1) = (K\bar{v}_A),$$

где је K вектор кривине трајекторије у датој тачци. Због тога је основни триједар у овом случају конструисан тангентом, главном нормалом и бинормалом трајекторије у тачци A.

Транслаторна брзина има на те осе ове пројекције:

$$v_{A1} = v_A, \quad v_{A2} = v_{A3} = 0$$

уз то

$$v_A^2 = x_A'^2 + y_A'^2 + z_A'^2.$$

Сами правци су одређени следећим косинусима углова са непокретним осама:

$$\begin{array}{llll} & x & y & z \\ u_1 & \Big(\dfrac{x'_A}{v_A}, & \dfrac{y'_A}{v_A}, & \dfrac{z'_A}{v_A}\Big), \\ u_2 & \Big(\dfrac{v_A x''_A - x'_A v'_A}{\Delta}, & \dfrac{v_A y''_A - y'_A v'_A}{\Delta}, & \dfrac{v_A z''_A - z'_A v'_A}{\Delta}\Big), \\ u_3 & \Big(\dfrac{y'_A z''_A - z'_A y''_A}{\Delta}, & \dfrac{z'_A x''_A - x'_A z''_A}{\Delta}, & \dfrac{x'_A y''_A - y'_A x''_A}{\Delta}\Big), \end{array} \quad (16)$$

где

$$\Delta^2 = (y'_A z''_A - z'_A y''_A)^2 + (z'_A x''_A - x'_A z''_A)^2 + (x'_A y''_A - y'_A x''_A)^2.$$

Познавајући ове изразе није тешко помоћу израза (2) за P, Q, R добити величине Ω_1, Ω_2, Ω_3, као функције Euler-ових углова и његових извода; у детаљима нећемо улазити. Не даје тешкоће ни рачунање координата $\rho_{c1}, \rho_{c2}, \rho_{c3}$ центра инерције с обзиром на основни триједар.

За природне једначине кретања је потребно још знати K_T и L_T, а такође моменте и продукте инерције с обзиром на осе основног триједра. Што се тиче величина K_T и L_T, оне су представљене из‚азима:

$$K_T = \frac{\Delta}{v_A^2},$$

$$L_T = \frac{v_A}{\Delta}(\dot{v}_A [\dot{v}_A, \ddot{v}_A]).$$

Ако кривину трајекторије и њено завртање ‹ бележимо са K односно L, онда се горњи изрази могу представити овако:

$$K_T = K v_A,$$

$$L_T = L v_A,$$

Најзад, за рачунање момената и продуката инерције може се поступити овако: Шема (16) даје косинусе углова оса u_1, u_2, u_3 са непокретним осама x, y, z, с друге стране помоћу Euler-ових углова φ, ψ, θ изражавају се косинуси углова међу осама x, y, z и и осама ξ, η, ζ стално везаним са телом, које су наперене по главним осама централног елипсоида инерције, — онда ће нам бити познати косинуси углова оса u_1, u_2, u_3 са осама ξ, η, ζ, а у таком случају даће нам формуле (10) и (11) моменте односно продукте инерције у зависности од главних централних момената инерције тела. Није потребно ове изразе у свима појединостима извести.

Једначине кретања овог случаја су дакле у општем облику овакве:

$$\frac{d}{dt}\{Mv_A + M(\Omega_2\rho_{cb} - \Omega_3\rho_{cN})\} - K v_A M(\Omega_3\rho_{cT} - \Omega_1\rho_{cb}) = F_T + R_T,$$

$$\frac{d}{dt}\{M(\Omega_3\rho_{cT} - \Omega_1\rho_{cb})\} - \{- K v_A [M v_A + M(\Omega_2\rho_{cb} - \Omega_3\rho_{cN})] + L v_A M(\Omega_1\rho_{cN} - \Omega_2\rho_{cT})\} = F_N + R_N,$$

$$\frac{d}{dt}\{M(\Omega_1\rho_{cN} - \Omega_2\rho_{cT})\} + L v_A M(\Omega_3\rho_{cT} - \Omega_1\rho_{cb}) = F_b + R_b;$$

$$\frac{dG_1^{(A)}}{dt} - G_2^{(A)} K v_A = L_T^{(A)} + \Lambda_T^{(A)},$$

$$\frac{dG_2^{(A)}}{dt} + v_A(G_1^{(A)} K - G_3^{(A)} L) - v_A M(\Omega_1\rho_{cN} - \Omega_2\rho_{cT}) = L_N^{(A)} + \Lambda_N^{(A)},$$

$$\frac{dG_3^{(A)}}{dt} + G_2^{(A)} L v_A + v_A M(\Omega_3\rho_{cT} - \Omega_1\rho_{cb}) = L_b^{(A)} + \Lambda_b^{(A)},$$

где је

$$G_1^{(A)} = J_1\Omega_1 - \Pi_{12}\Omega_2 - \Pi_{13}\Omega_3,$$
$$G_2^{(A)} = M\rho_{cb} v_A - \Pi_{21}\Omega_1 + J_2\Omega_2 - \Pi_{23}\Omega_3,$$
$$G_3^{(A)} = - M\rho_{cN} v_A - \Pi_{31}\Omega_1 - \Pi_{32}\Omega_2 + J_3\Omega_3.$$

У горњим једначинама ми смо знаковима T, N, b обележили пројекције вектора на правце тангенте односно главне нормале и бинормале.

У специјалном случају ако је пол A центар инерције тела, онда прве три једначине добивају овај једноставни облик:

$$M\frac{dv_c}{dt} = F_T + R_T,$$
$$M K v_c^2 = F_N + R_N,$$
$$O = F_b + R_b$$

па су на тај начин једнаке природним једначинама кретања материјалне тачке масе M, која се креће под утицајем силе F и реакције R.

c) *Основни је правац тренутна угаона брзина.*

Предпоставимо сад, да се основни правац поклапа са правцем тренутне угаоне брзине, а почетак основног триједра нека буде тачка A тела.

Косинуси углова оса основног триједра са осама непокретног триједра у овом случају су ови:

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ u_1 & \left(\dfrac{P}{\Omega},\right. & \dfrac{Q}{\Omega}, & \left.\dfrac{R}{\Omega}\right), \\ u_2 & \left(\dfrac{P'\Omega - \Omega' P}{\Delta},\right. & \dfrac{Q'\Omega - \Omega' Q}{\Delta}, & \left.\dfrac{R'\Omega - \Omega' R}{\Delta}\right), \\ u_2 & \left(\dfrac{QR' - RQ'}{\Delta},\right. & \dfrac{RP' - PR'}{\Delta}, & \left.\dfrac{PQ' - QR'}{\Delta}\right), \end{array}$$

где је

$$\Omega^2 = P^2 + Q^2 + R^2,$$

$$\Delta^2 = (P'\Omega - \Omega' P)^2 + (Q'\Omega - \Omega' Q)^2 + (R'\Omega - \Omega' R)^2$$
$$= (QR' - RQ')^2 + (RP' - PR')^2 + (PQ' - QP')^2.$$

Изрази за K_Ω и L_Ω су ови:

$$K_\Omega = \frac{\Delta}{\Omega^2},\quad L_\Omega = \frac{\Omega}{\Delta^2}\,(\Omega\,[\dot{\Omega},\ \ddot{\Omega}]).$$

Количина кретања има следеће пројекције на осе главног триједра:

$$W_1 = M v_1,$$
$$W_2 = M v_2 - M\,\Omega\,\rho_{c3},$$
$$W_3 = M v_3 + M\,\Omega\,\rho_{c2},$$

а главни моменат количина кретања следеће:

$$G_1^{(A)} = M(\rho_{c2}\, v_3 - \rho_{c3}\, v_2) + J_1\,\Omega,$$
$$G_1^{(A)} = M(\rho_{c3}\, v_1 - \rho_{c1}\, v_3) - \Pi_{21}\,\Omega,$$
$$G_1^{(A)} = M(\rho_{c1}\, v_2 - \rho_{c2}\, v_1) - \Pi_{31}\,\Omega.$$

Па једначине кретања имају облик:

$$\frac{dW_1}{dt} - W_2 K_\Omega = F_1 + R_1,$$
$$\frac{dW_2}{dt} + W_1 K_\Omega - W_3 L_\Omega = F_2 + R_2,$$
$$\frac{dW_3}{dt} + W_2 L_\Omega = F_3 + R_3;$$

$$\frac{dG_1^{(A)}}{dt} - G_2^{(A)} K_\Omega + M\Omega(v_2\rho_{c2} + v_3\rho_{c3}) = L_1^{(A)} + \Lambda_1^{(A)},$$
$$\frac{dG_2^{(A)}}{dt} + G_1^{(A)} K_\Omega - G_3^{(A)} L_\Omega - M\Omega\, v_1\,\rho_{c2} = L_2^{(A)} + \Lambda_2^{(A)},$$
$$\frac{dG_3^{(A)}}{dt} + G_2^{(A)} L_\Omega - M\Omega\, v_1\,\rho_{c3} = L_3^{(A)} + \Lambda_3^{(A)}.$$

Ако се тачка A налази у центру инерције, онда се горње једначине упрошћавају овако:

$$M\frac{dv_1}{dt} - M\, v_2 K_\Omega = F_1 + R_1,$$
$$M\frac{dv_2}{dt} + M(v_1 K_\Omega - v_3 L_\Omega) = F_2 + R_2,$$
$$M\frac{dv_3}{dt} + M\, v_2 L_\Omega = F_3 + R_3;$$

$$\frac{d}{dt}(J_1\,\Omega) + \Pi_{21} K_\Omega\,\Omega = L_1^{(A)} + \Lambda_1^{(A)},$$
$$\frac{d}{dt}(-\Pi_{21}\,\Omega) + J_1 K_\Omega\,\Omega - \Pi_{31} L_\Omega\,\Omega = L_2^{(A)} + \Lambda_2^{(A)},$$
$$\frac{d}{dt}(-\Pi_{31}\,\Omega) - \Pi_{21} L_\Omega\,\Omega = L_3^{(A)} + \Lambda_3^{(A)}.$$

Одређивање момента и продуката инерције не даје тешкоће.

c′) Размотримо још овај случај, кад је основни правац исти, т.ј. правац тренутне угаоне брзине, а као почетак основног триједра нека не служи тачка A тела, него тачка S, која је пресек централне осе кретања са кривом стрикције аксоида. У овом се случају оса u_1 подудара са централном осом уоченога тренутка, оса u_2 представља правац, који се подудара са правцем геометријског извода орта правца вектора Ω, најзад оса u_3 има одговарајући положај.

За образовање једначина кретања у овом случају потребно је одредити осим величина које се појављују у горњој једначини још и пројекције брзине тачке S на осе координата основног триједра. Пошто је радиус вектор тачке S, као тачке, која се налази на линији стрикције аксоида, одређен, због (4), изразом:

$$r_s = A + \frac{(\dot{\Omega}, \dot{A})}{\Omega^2}\,\Omega,$$

где је

$$A = r_A + \frac{[\Omega, v_A]}{\Omega^2},$$

то ће пројекције вектора $\dot{r}_s = v_s$ на осе основног триједра, т.ј. на правце вектора Ω, $\left(\frac{\dot{\Omega}}{\dot{\Omega}}\right)$, $[\Omega, \dot{\Omega}]$ бити ове:

$$v_s \operatorname{Cos}(v_s, u_1) = \frac{1}{\Omega}\left\{(\dot{A}, \Omega) - \frac{(\dot{A}, \dot{\Omega})(\dot{\Omega}, \Omega)}{\dot{\Omega}^2} - \Omega^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{(\dot{A}, \dot{\Omega})}{\dot{\Omega}^2}\right)\right\},$$

$$v_s \operatorname{Cos}(v_s, u_2) = \frac{\Omega'}{\Delta}\left\{\frac{(\dot{A}, \dot{\Omega})(\dot{\Omega}, \Omega)}{\dot{\Omega}^2} - (\dot{A}, \Omega)\right\},$$

$$v_s \operatorname{Cos}(v_s, u_3) = \frac{1}{\Delta}(\dot{A}\,[\Omega, \dot{\Omega}]).$$

За образовање самих једначина морају се употребити једначине (13).

д) *Основни је правац количина кретања.*

Ако је основни правац правац количине кретања, вектора W, онда су основни орти ови:

$$\begin{array}{llll} & x & y & z \\ u_1 \Bigl(& \frac{W_x}{W}, & \frac{W_y}{W}, & \frac{W_z}{W} \Bigr), \\ u_2 \Bigl(& \frac{W'_x W - W' W_x}{D}, & \frac{W'_y W - W' W_y}{D}, & \frac{W'_z W - W' W_z}{D} \Bigr), \\ u_3 \Bigl(& \frac{W_y W'_z - W_z W'_y}{D}, & \frac{W_z W'_x - W_x W'_z}{D}, & \frac{W_x W'_y - W_y W'_x}{D} \Bigr), \end{array}$$

где је

$$D^2 = (W_y W_z^! - W_z W_y^!)^2 + \ldots$$

За K_W и L_W, а такође и за пројекције вектора W и $G^{(A)}$ на осе основног триједра добивамо:

$$K_W = \frac{D}{W^2},\; L_W = \frac{W}{D^2}\,(W\,[\dot{W}, \ddot{W}]);$$

$$W_1 = M\,v_{A1} + M\,(\Omega_2 \rho_{c3} - \Omega_3 \rho_{c2}),$$

$$W_2 = O,$$

$$W_3 = O;$$

$$G_1^{(A)} = M\,(\rho_{c2} v_3 - \rho_{c3} v_2) + J_1 \Omega_1 - \Pi_{12} \Omega_2 - \Pi_{13} \Omega_3,$$

$$G_2^{(A)} = M\,(\rho_{c3} v_1 - \rho_{c1} v_3) - \Pi_{21} \Omega_1 + J_2 \Omega_2 - \Pi_{23} \Omega_3,$$

$$G_3^{(A)} = M\,(\rho_{c1} v_2 - \rho_{c2} v_1) - \Pi_{31} \Omega_1 - \Pi_{21} \Omega_2 + J_3 \Omega_3.$$

Једначине кретања имају облик:

$$\frac{dW_1}{dt} = F_1 + R_1,$$

$$W_1 K_W = F_2 + R_2,$$

$$O = F_3 + R_3;$$

$$\frac{dG_1^{(A)}}{dt} - G_2^{(A)} K_W = L_1^{(A)} + \Lambda_1^{(A)},$$

$$\frac{dG_2^{(A)}}{dt} + G_1^{(A)} K_W - G_3^{(A)} L_W + v_{A3} W_1 = L_2^{(A)} + \Lambda_2^{(A)},$$

$$\frac{dG_3^{(A)}}{dt} + G_2^{(A)} L_W - v_{A2} W_1 = L_3^{(A)} + \Lambda_3^{(A)}.$$

Ако се тачка A подудара са тачком C, центром инерције тела, онда су горње једначине исте као и (17).

е) *Основни је правац моменат количина кретања.*

Као последњи случај узимамо за основни правац моменат количина кретања тела.

Величине, које се појављују у једначинама кретања имају сада ове вредности:

$$K_G = \frac{d}{G^2}, \quad L_G = \frac{G}{d^2}\,(G\,[\dot{G}, \ddot{G}]),$$

где је

$$d^2 = (G_y G'_z - G_z G'_y)^2 + \ldots$$

и

$$\begin{aligned}
W_1 &= M v_{A1} + M(\Omega_2 \rho_{c3} - \Omega_3 \rho_{c2}),\\
W_2 &= M v_{A2} + M(\Omega_3 \rho_{c1} - \Omega_1 \rho_{c3}),\\
W_3 &= M v_{A3} + M(\Omega_1 \rho_{c2} - \Omega_2 \rho_{c1});\\
G_1 &= M(\rho_{c2} v_{A3} - \rho_{c3} v_{A2}) + J_1\Omega_1 - \Pi_{12}\Omega_2 - \Pi_{13}\Omega_3,\\
G_2 &= O,\\
G_3 &= O;
\end{aligned}$$

једноставности ради ми смо овде избацили знак $^{(A)}$ у изразима $G^{(A)}$, $G_1^{(A)}$, и т. д.

Једначине кретања су, дакле, ове:

$$\begin{aligned}
\frac{dW_1}{dt} - W_2 K_G &= F_1 + R_1,\\
\frac{dW_2}{dt} + W_1 K_G - W_3 L_G &= F_2 + R_2,\\
\frac{dW_3}{dt} + W_2 L_G &= F_3 + R_3;\\
\frac{dG_1}{dt} + v_{A2} W_3 - v_{A3} W_2 &= L_1^{(A)} + \Lambda_1^{(A)},\\
G_1 K_G + v_{A3} W_1 - v_{A1} W_3 &= L_2^{(A)} + \Lambda_2^{(A)},\\
v_{A1} W_2 - v_{A2} W_1 &= L_3^{(A)} + \Lambda_3^{(A)}.
\end{aligned}$$

Ако је A центар инерције последња група једначина упрошћава се овако:

$$\begin{aligned}
\frac{dG_1}{dt} &= L_1^{(A)} + \Lambda_1^{(A)},\\
G K_G &= L_2^{(A)} + \Lambda_2^{(A)}.\\
O &= L_3^{(A)} + \Lambda_3^{(A)}.
\end{aligned}$$

6. *Опште примедбе.*

При образовању система диференцијалних једначина кретања чврстог тела није потребно писати све једначине с обзиром на један те исти основни триједар него се може почети са триједром, који одговара једном основном правцу, па затим прећи ка триједру чије су осе конструисане другим начином; најзад се може од неколиких триједра изабрати само оне правце, који су особито згодни у вези са особинама проблема, — само је потребно, да ниједна једначина система није последица других.

Једначине, које смо размотрили, јесу нарочито згодне онде, где су већ познате ове или оне особине кретања, на пример, у случају кретања тела неслободног, или кад су већ познати неки интеграли кретања.

Осим овде изложених начина за конструисање природних једначина могу се развити и други начини, о којима намеравам говорити у другом чланку. Најзад, имам намеру показати и примену наших једначина у разним проблемима кретања чврстог тела.