

Matematički fakultet  
Univerzitet u Beogradu



# PRIMENA VREMENSKIH SERIJA U KONTROLI PROCESA

MASTER RAD

Mentor:  
prof. dr Vesna Jevremović

Kandidat:  
Sandra Periz

Beograd, 2014

## Sadržaj

1. Uvod.....	3
2. Sekvencijalni test količnika verodostojnosti (STKV).....	4
2.1. Primena STKV u statističkoj kontroli kvaliteta.....	8
3. Kontrola procesa .....	10
4. Kontrolne karte .....	12
4.1. Šjuhartove kontrolne karte .....	12
4.2. Kusum kontrolne karte .....	15
4.3. EWMA kontrolne karte .....	16
5. Vremenske serije.....	18
5.1. Nestacionarni modeli.....	20
5.2. Uopšteni oblik ARIMA modela .....	21
5.3. Eksplicitni oblici ARIMA modela.....	22
5.4. IMA(0,1,1) proces .....	25
6. Podešavanje procesa .....	26
6.1. Kontrola povratnom spregom.....	27
6.2. Karte podešavanja povratnom spregom .....	30
6.3. Modifikacije karte podešavanja povratnom spregom.....	31
6.4. Modeliranje sistema povratne sprege .....	33
6.5. Modeli za smetnju i dinamiku procesa.....	35
6.6. Uopštena šema kontrole povratnom spregom .....	38
6.7. Kontrola unapred .....	40
6.8. Kontrola unapred sa višestrukim ulaznim smetnjama.....	42
6.9. Kombinovana kontrola .....	44
Zaključak.....	45
Literatura.....	46

## 1. Uvod

Pojavom masovne proizvodnje javio se problem praćenja i održavanja kvaliteta proizvoda, koji je ukazao na potrebu primena statističkih metoda u procesu proizvodnje. Prvi teorijski radovi i praktični pokušaji primene matematičke statistike i kontrole kvaliteta datiraju još iz 1923. godine, kada je Volter Šjuhart<sup>1</sup> radeći u Bel telefonskoj laboratoriji (eng. Bell Telephone Laboratories) sprovodio istraživanje kako bi se povećao kvalitet, a smanjili troškovi. Šjuhart je predložio rešenje uvođenjem kontrolnih karata kao metode kontrole proizvodnog procesa.

Edwards Deming se nadograđivao po ugledu na Šjuhartov rad i tokom Drugog svetskog rata držao je kurseve o kontroli kvaliteta, čime je uveo nove tehnike u američku industriju. Takođe, koncept statističke kontrole kvaliteta prvi je predstavio japanskoj industriji koja je poznata po kvalitetu proizvoda.

Cilj ovog rada bio je da se prikažu modeli vremenskih serija koji mogu biti primenjeni u kontroli procesa kao i osnovni principi statističke kontrole procesa.

---

<sup>1</sup> Volter A. Šjuhart (1891-1967) – američki fizičar, inženjer i statističar.

## 2. Sekvencijalni test količnika verodostojnosti (STKV)

Ideja sekvencijalnog testa količnika verodostojnosti je da se ne uzima fiksna veličina uzorka prilikom testiranja hipoteza već da se taj uzorak uzima sekvencijalno, tj. da nakon svakog izvlačenja elementa uzorka odlučujemo da li ispitivanu hipotezu prihvatamo, odbacujemo ili se testiranje nastavlja. Ovaj test predstavlja poboljšanje testa količnika verodostojnosti koji primenjujemo pri testiranju  $H_0(\theta = \theta_0)$  protiv  $H_1(\theta = \theta_1)$ , kada se za uzorak  $\mathbf{x}_n = (x_1, \dots, x_n)$  obima  $n$  i dati prag značajnosti  $\alpha$  kritična oblast određuje iz uslova da za količnik verodostojnosti važi

$$\frac{L(\mathbf{x}_n, \theta_1)}{L(\mathbf{x}_n, \theta_0)} > c_\alpha \quad (2.1)$$

pri čemu  $c_\alpha$  zavisi od  $\alpha$  i

$$L(\mathbf{x}_n, \theta_i) = \prod_{j=1}^n f(x_j, \theta_i) \quad i = 1, 2 \quad (2.2)$$

gde su  $f(x_j, \theta_i)$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $i = 1, 2$  odgovarajuće uzoračke gustine.

Postupak testiranja se vrši na sledeći način: u svakom koraku, odnosno za  $n = 1, 2, \dots$ , računamo količnik verodostojnosti  $\frac{L(\mathbf{x}_n, \theta_1)}{L(\mathbf{x}_n, \theta_0)}$ . Za date verovatnoće grešaka  $\alpha$  i  $\beta^2$  računamo konstante  $A$  i  $B$  ( $B < A$ ) i zatim

- (1) ako je  $B < \frac{L(\mathbf{x}_n, \theta_1)}{L(\mathbf{x}_n, \theta_0)} < A$ , testiranje se nastavlja,
- (2) ako je  $\frac{L(\mathbf{x}_n, \theta_1)}{L(\mathbf{x}_n, \theta_0)} \leq B$ , odbacujemo  $H_1$  i testiranje je završeno,
- (3) ako je  $\frac{L(\mathbf{x}_n, \theta_1)}{L(\mathbf{x}_n, \theta_0)} \geq A$ , odbacujemo  $H_0$  i testiranje je završeno.

Označimo sa  $N$  broj elemenata uzorka koje treba uzeti da se obavi testiranje ovom metodom, tj. broj koraka potrebnih da se donese odluka o prihvatanju  $H_0$  ili  $H_1$ . Kako taj broj nije unapred fiksiran to znači da je  $N$  slučajna promenljiva.

Postavljaju se sledeća pitanja u vezi sa STKV:

1. Pod kojim uslovima se postupak završava posle konačno mnogo koraka?
2. Kako se u funkciji od  $\alpha$  i  $\beta$  računaju konstante  $A$  i  $B$ ?
3. Koji je očekivani broj koraka u testiranju u zavisnosti od tačne vrednosti parametra  $\theta$ ?

<sup>2</sup>  $\alpha$  - greška prve vrste tj. greška koja se čini ako se odbaci  $H_0$  u situaciji kada je ona tačna.  
 $\beta$  - greška druge vrste tj. greška koja se čini ako se odbaci  $H_1$  u situaciji kada je ona tačna.

4. Kako se računa funkcija operativne karakteristike<sup>3</sup> i funkcija moći testa<sup>4</sup> kad raspodela zavisi od neprekidnog parametra  $\theta$ ?

Neka je  $Z_k = \log \frac{f(X_k, \theta_1)}{f(X_k, \theta_0)}$ , gde je  $k = \overline{1, n}$ , a  $(X_1, \dots, X_n)$  prost slučajan uzorak za posmatrano obeležje  $X$  čija je gustina raspodele  $f(x, \theta)$ .

1. Ako je  $D(Z_k) > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$  onda je  $P(N < \infty) = 1$ , tj. postupak skoro sigurno dovodi do odluke nakon konačno mnogo koraka.

2. Neka je  $A_n$  skup svih tačaka za koje se na  $n$ -tom koraku odbacuje  $H_0$ , a  $B_n$  skup svih tačaka za koje se na  $n$ -tom koraku odbacuje  $H_1$ . Tada za date verovatnoće grešaka  $\alpha$  i  $\beta$  važi:

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} p_{0n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \quad (2.3)$$

$$1 - \alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n} p_{0n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \quad (2.4)$$

$$\beta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n} p_{1n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \quad (2.5)$$

gde su

$$p_{0n}(x_1, \dots, x_n) = p_{0n}(\mathbf{x}_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta_0) \quad (2.6)$$

$$p_{1n}(x_1, \dots, x_n) = p_{1n}(\mathbf{x}_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta_1) \quad (2.7)$$

funkcije verodostojnosti za uzorke obima  $n$  pri  $\theta = \theta_0, \theta_1$ .

U trenutku odbacivanja  $H_0$  na  $n$ -tom koraku je

$$\frac{L(\mathbf{x}_n, \theta_1)}{L(\mathbf{x}_n, \theta_0)} = \frac{p_{1n}(\mathbf{x}_n)}{p_{0n}(\mathbf{x}_n)} > A \quad (2.8)$$

$$p_{0n}(\mathbf{x}_n) < \frac{p_{1n}(\mathbf{x}_n)}{A} \quad (2.9)$$

odavde sledi da je

$$\alpha \leq \frac{1}{A} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} p_{1n}(\mathbf{x}_n) d\mathbf{x}_n = \frac{1}{A} (1 - \beta) \quad (2.10)$$

<sup>3</sup> Funkcija operativne karakteristike - verovatnoća prihvatanja  $H_0$ .

<sup>4</sup> Funkcija moći testa - verovatnoća odbacivanja  $H_0$ .

pa dobijamo

$$\alpha \leq \frac{1-\beta}{A} \quad (2.11)$$

Na sličan način dobijamo i da je

$$1-\alpha \geq \frac{\beta}{B} \quad (2.12)$$

Iz prethodne dve nejednakosti sledi:

$$A \leq \frac{1-\beta}{\alpha} = A' \quad B \geq \frac{\beta}{1-\alpha} = B' \quad (2.13)$$

U praksi se u postupku STKV, takvog da verovatnoća greške prve vrste ne prelazi  $\alpha$  i da verovatnoća greške druge vrste ne prelazi  $\beta$ , mogu koristiti  $A'$  i  $B'$  umesto  $A$  i  $B$ . Takva aproksimacija može da dovede do neznatnog povećanja broja posmatranja, ali svakako ne dovodi do smanjenja moći testa.

U nastavku pretpostavljamo da raspodela zavisi od neprekidnog parametra  $\theta$ .

3. Neka je

$$U_n = \sum_{k=1}^n Z_k = \sum_{k=1}^n \log \frac{f(X_k, \theta_1)}{f(X_k, \theta_0)} \quad (2.14)$$

$$Z = \log \frac{f(X, \theta_1)}{f(X, \theta_0)} \quad (2.15)$$

Da bismo odredili očekivani broj koraka u postupku STKV formulišimo prvo sledeću teoremu:

*Teorema 1: Fundamentalni identitet Valda*

Neka je  $g_\theta(t) = E_\theta(e^{tZ})$  generatorna funkcija momenata za  $Z$  i neka su ispunjeni sledeći uslovi:

- $E_\theta(Z) \neq 0$ ,
- $P(Z > 0) > 0$  i  $P(Z < 0) > 0$ ,
- $g_\theta(t) < \infty$  za svako konačno  $t$ .

Tada za  $N$  važi:

$$E_\theta \left( \frac{e^{tU_N}}{(g_\theta(t))^N} \right) = 1, \quad \forall t \text{ za koje je } g_\theta(t) > 1 \quad (2.16)$$

Diferenciranjem (2.16) po  $t$ , pri uslovu da je  $E_\theta(Z) \neq 0$ , dobijamo

$$E_{\theta} \left( \frac{e^{tU_N} (U_N - N(g_{\theta}(t))^{-1} g'_{\theta}(t))}{(g_{\theta}(t))^N} \right) = 0 \quad (2.17)$$

Kako je  $g_{\theta}(0) = 1$ ,  $g'_{\theta}(0) = E_{\theta}(Z)$  i ako uzmemo da je  $t = 0$ , to identitet (2.17) postaje

$$E_{\theta}(U_N - NE_{\theta}(Z)) = 0 \quad (2.18)$$

Odavde dobijamo identitet Valda

$$E_{\theta}(N) = \frac{E_{\theta}(U_N)}{E_{\theta}(Z)} \quad (2.19)$$

U praksi, ako se na  $N$ -tom koraku odbaci  $H_0$  onda je  $U_N \approx \log A$ , a ako se prihvati  $H_0$  onda je  $U_N \approx \log B$ . Odavde sledi da će približno raspodela za  $U_N$  biti diskretna

$$\begin{pmatrix} \log A & \log B \\ M(\theta) & 1 - M(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

gde je  $M(\theta) = P_{\theta}(\text{odbacivanja } H_0)$  funkcija moći STKV. Ako to uvrstimo u (2.19) dobijamo da je očekivani broj koraka do donošenja odluke:

$$E_{\theta}(N) \approx \frac{M(\theta) \log A + (1 - M(\theta)) \log B}{E_{\theta}(Z)} \quad (2.21)$$

4. Neka je  $t_0(\theta) \neq 0$  ona vrednost  $t$  za koju je  $g_{\theta}(t_0(\theta)) = 1$  (Teorema 1).

Formula za približno izračunavanje funkcije moći testa glasi:

$$M(\theta) \approx \frac{1 - B^{t_0(\theta)}}{A^{t_0(\theta)} - B^{t_0(\theta)}} \quad (2.22)$$

Kako je  $K(\theta) = 1 - M(\theta)$  funkcija operativne karakteristike, onda sledi da je

$$K(\theta) \approx \frac{A^{t_0(\theta)} - 1}{A^{t_0(\theta)} - B^{t_0(\theta)}} \quad (2.23)$$

Prednost STKV, u odnosu na testove sa fiksnim obimom uzorka i istim verovatnoćama grešaka, ogleda se u tome što zahteva manje posmatranja (i do 50%). To je posebno značajno kada je postupak za dobijanje elemenata uzorka komplikovan ili skup. Još jedna prednost je ta što  $\alpha$  i  $\beta$  zadajemo pre početka testiranja, pa njihove vrednosti mogu biti proizvoljno male.

## 2.1. Primena STKV u statističkoj kontroli kvaliteta

Pretpostavimo da želimo da ispitamo kvalitet skupa proizvoda. Označimo sa  $p$  procenat neispravnih proizvoda u tom skupu (tj. relativni deo neispravnih proizvoda). Pri tome zadajemo sledeće vrednosti  $p_0$ ,  $p_1$  ( $p_0 < p_1$ ),  $\alpha$  i  $\beta$  gde je:

$p_0$  - prihvatljiva granica kvaliteta (maksimalni procenat neispravnih proizvoda u skupu),

$p_1$  - neprihvatljiva granica kvaliteta (procenat neispravnih iznad kog odbacujemo skup),

$\alpha$  - verovatnoća odbacivanja skupa proizvoda kada je  $p \leq p_0$  i

$\beta$  - verovatnoća prihvatanja skupa proizvoda kada je  $p \geq p_1$ .

Cilj nam je da testiramo hipotezu  $H_0(p = p_0)$  protiv  $H_1(p = p_1)$  za date verovatnoće  $\alpha$  i  $\beta$ , gde obeležje  $X$  ima binomnu raspodelu sa parametrom  $p$ . Tada, pri hipotezi  $H_i$ ,  $i = 0, 1$  i za  $k = \overline{1, n}$ , važi:

$$L(\mathbf{x}_n, p_i) = p_i^{\sum x_k} (1 - p_i)^{n - \sum x_k} \quad (2.1.1)$$

Monotonost logaritamske funkcije nam omogućava da u postupku STKV posmatramo logaritam količnika verodostojnosti, pa koristeći (2.1.1) dobijamo:

$$\log \frac{L(\mathbf{x}_n, p_1)}{L(\mathbf{x}_n, p_0)} = \left( \log \frac{p_1}{p_0} - \log \frac{1 - p_1}{1 - p_0} \right) \sum_{k=1}^n x_k + n \log \frac{1 - p_1}{1 - p_0} = a \sum_{k=1}^n x_k + nb \quad (2.1.2)$$

gde je

$$a = \log \frac{p_1}{p_0} - \log \frac{1 - p_1}{1 - p_0}, \quad b = \log \frac{1 - p_1}{1 - p_0} \quad (2.1.3)$$

Procedura STKV određena je na sledeći način:

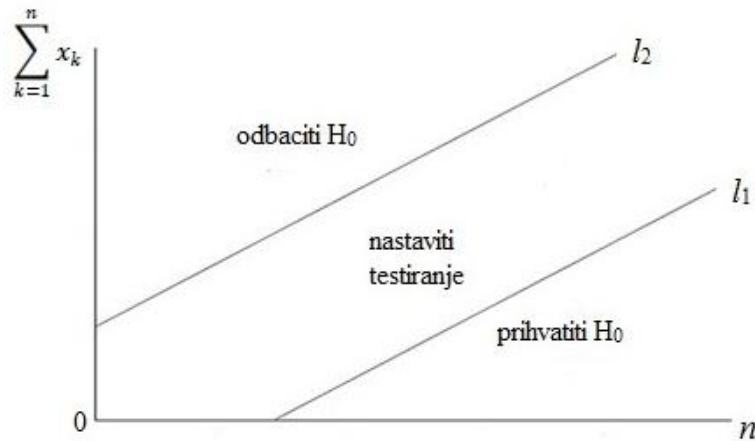
- ako je  $\frac{\log B - nb}{a} < \sum_{k=1}^n x_k < \frac{\log A - nb}{a}$ , testiranje se nastavlja,
- ako je  $\sum_{k=1}^n x_k \leq \frac{\log B - nb}{a}$ , prihvatamo  $H_0$  i
- ako je  $\sum_{k=1}^n x_k \geq \frac{\log A - nb}{a}$ , odbacujemo  $H_0$ ,

pri čemu je  $A \approx A'$ ,  $B \approx B'$  i  $k = \overline{1, n}$ .

Veličine

$$a_n = \frac{\log B - nb}{a}, \quad r_n = \frac{\log A - nb}{a} \quad (2.1.4)$$

nazivaju se brojevi prihvatanja i odbacivanja hipoteze  $H_0$  i grafički se predstavljaju kao dve paralelne prave  $l_1$  i  $l_2$  respektivno, za  $n = 1, 2, \dots$  (Slika 2.1.1).



Slika 2.1.1. Granice prihvatanja i odbacivanja hipoteze  $H_0$

Plan kontrole kvaliteta proizvoda sprovodi se na sledeći način:

- kontrola se nastavlja sve dok za ukupan broj neispravnih proizvoda važi

$$a_n < \sum_{k=1}^n x_k < r_n \quad (2.1.5)$$

- kontrola se obustavlja prihvatanjem skupa proizvoda ako je

$$\sum_{k=1}^n x_k \leq a_n \quad (2.1.6)$$

- kontrola se obustavlja odbacivanjem skupa proizvoda ako je

$$\sum_{k=1}^n x_k \geq r_n \quad (2.1.7)$$

Na sličan način dolazimo i do plana kontrole kvaliteta proizvoda ako obeležje  $X$  ima normalnu  $N(m,1)$  raspodelu. U tom slučaju testiramo hipotezu  $H_0(m = m_0)$  protiv alternative  $H_1(m = m_1)$  za dato  $\alpha$  i  $\beta$ , pri čemu je  $m_0 < m_1$ . Brojevi prihvatanja  $a_n$  i odbacivanja  $r_n$  dati su sledećim formulama:

$$a_n = \frac{\log B}{m_1 - m_0} + n \frac{m_0 + m_1}{2} \quad (2.1.8)$$

$$r_n = \frac{\log A}{m_1 - m_0} + n \frac{m_0 + m_1}{2} \quad (2.1.9)$$

Ovde smo pretpostavili da se proizvodi sa velikim vrednostima  $m$  smatraju neispravnim.

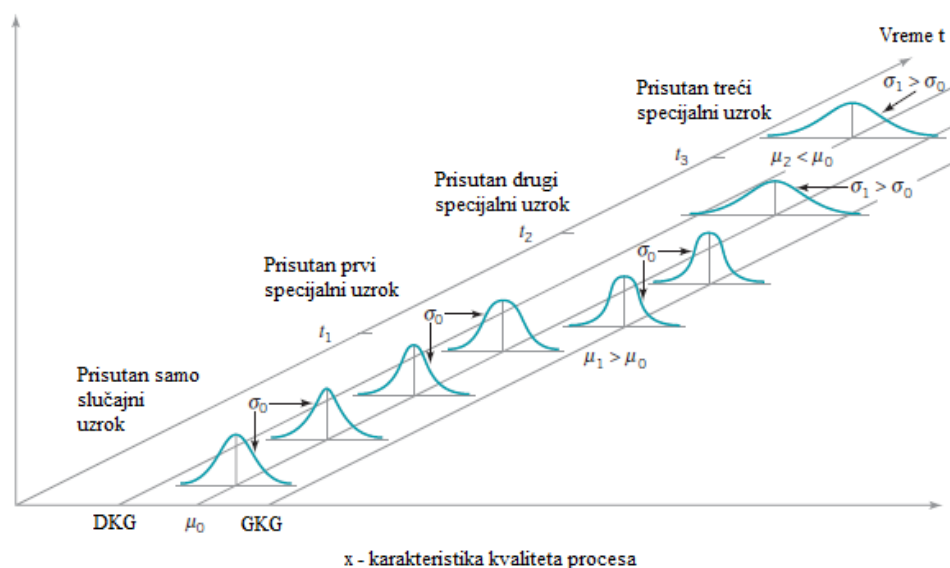
Kontrola kvaliteta se može odvijati i u toku proizvodnje i tada govorimo o statističkoj kontroli proizvodnog procesa. Dokle god je karakteristika proizvedenih elemenata u određenim granicama proizvodnja se nastavlja, a čim se konstatuje izlazak van tih granica proizvodnja se prekida.

### 3. Kontrola procesa

U bilo kom procesu proizvodnje, bez obzira na to koliko dobro je dizajniran ili pažljivo održavan, određena prirodna varijabilnost je uvek prisutna. Ta prirodna varijabilnost ili "pozadinski šum" je kumulativni efekat različitih neizbežnih uzroka. U okviru statističke kontrole kvaliteta, ova prirodna varijabilnost se često naziva "stabilni sistem slučajnih uzroka". Za proces kod koga su prisutni samo slučajni uzroci varijacije kažemo da je u statističkoj kontroli. Drugim rečima, slučajni uzroci su sastavni deo procesa.

Drugi tipovi varijabilnosti mogu povremeno biti prisutni na izlazu procesa. Ova varijabilnost karakteristike kvaliteta obično potiče od tri izvora: nepravilno podešene ili kontrolisane mašine, greške operatera ili loše sirovine. Takva varijabilnost je u opštem slučaju velika u odnosu na pozadinski šum i obično predstavlja neprihvatljivi nivo rada procesa. Takve izvore varijabilnosti, koji nisu deo slučajnog uzroka, nazivamo specijalnim (dodeljenim, specifičnim) uzrocima varijabilnosti. Proces koji radi u prisustvu specijalnog uzroka je proces van kontrole.

Ovi slučajni i specijalni uzroci varijacije ilustrovani su na slici 3.1. Do trenutka  $t_1$  proces koji je prikazan je u stanju kontrole, tj. prisutni su samo slučajni uzroci varijacije. Kao rezultat toga, srednja vrednost i standardno odstupanje procesa su u svojim kontrolnim granicama (npr.  $\mu_0$  i  $\sigma_0$ ). U trenutku  $t_1$  javlja se specijalni uzrok i srednja vrednost procesa se pomera na novu vrednost  $\mu_1 > \mu_0$ . U trenutku  $t_2$ ,  $\mu = \mu_0$  ali je  $\sigma_1 > \sigma_0$ . U trenutku  $t_3$  javlja se još jedan specijalni uzrok varijacije koji doprinosi da i srednja vrednost procesa i standardno odstupanje imaju vrednosti koje su van kontrole.



Slika 3.1. Slučajni i specijalni uzroci varijacije

Termin kontrola procesa koristi se na različite načine. Šjuhartove karte i druge karte za kontrolu kvaliteta najčešće se koriste u industriji za proizvodnju delova i takav oblik kontrole naziva se statistička kontrola procesa. Ovakvom kontrolom zapravo se vrši praćenje procesa kako bi se detektovali, a zatim i uklonili specijalni uzroci varijacije.

Međutim, neki procesi se ne mogu u potpunosti dovesti u zadovoljavajuće stanje stabilnosti na ovaj način. To može biti posledica poznatih uzroka koje ne možemo da kontrolišemo (varijacije u sobnoj temperaturi, vlažnost i kvalitet sirovine,...) ili trenutno nepoznatih uzroka. U takvim okolnostima koriste se sistemi za podešavanje ili regulaciju procesa u kojima se koristi dodatna promenljiva koju možemo da menjamo tzv. kompenzatorna promenljiva pomoću koje nadoknađujemo odstupanje karakteristike kvaliteta od ciljane vrednosti.

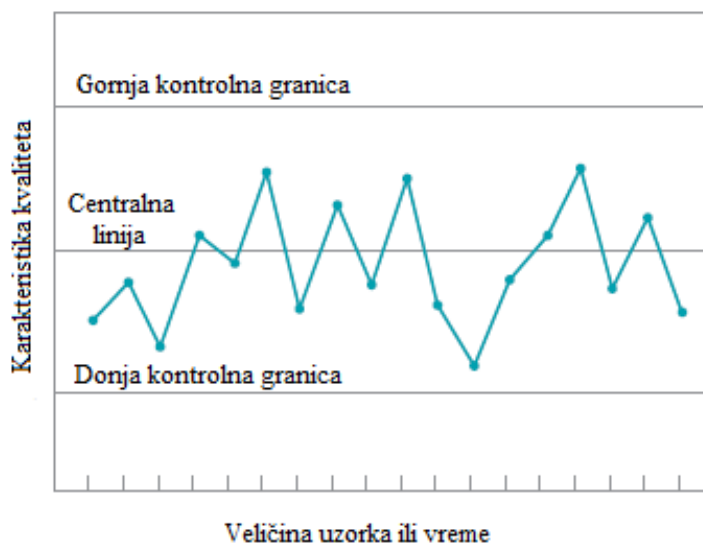
Ukoliko ulaznu smetnju procesa možemo da merimo i da na osnovu tih merenja vršimo podešavanje onda se takav način kontrole zove kontrola unapred (engl. feedforward control). Ako je ulazna smetnja nemerljiva i ako na osnovu izlaznih odstupanja karakteristike kvaliteta podešavamo kompenzatornu promenljivu onda se takav oblik kontrole naziva kontrola povratnom spregom (engl. feedback control). Ovakvi tipovi podešavanja su zastupljeni u procesnoj i hemijskoj industriji i čine inženjersku kontrolu procesa.

Cilj kontrole procesa je da se smanji varijabilnost procesa zato što se entropija sistema<sup>5</sup> koji je izolovan i prepušten samom sebi nikada neće smanjiti već će se obično povećati (sistem će preći iz manje verovatnog u verovatnije stanje).

<sup>5</sup> Entropija sistema - stepen neuređenosti sistema.

## 4. Kontrolne karte

Kontrolna karta je grafički prikaz karakteristike kvaliteta koja se meri u zavisnosti od veličine uzorka ili vremena (Slika 4.1). Karta sadrži centralnu liniju (CL) koja predstavlja prosečnu vrednost karakteristike kvaliteta kada je proces u stanju kontrole (prisutni su samo slučajni uzroci), kao i dve horizontalne linije: gornju kontrolnu granicu (GKG) i donju kontrolnu granicu (DKG). Ove kontrolne granice biraju se tako da ako je proces u stanju kontrole skoro sve uzoračke vrednosti će se naći između njih. Dokle god su unete vrednosti unutar kontrolnih granica za proces se pretpostavlja da je u stanju kontrole i nikakvo delovanje nije potrebno preduzeti. Međutim, vrednost koja se nađe van kontrolnih granica interpretira se kao dokaz da je proces van kontrole i da je potrebno pronaći i otkloniti uzroke koji narušavaju stabilnost procesa. Čak i ako su sve vrednosti unutar kontrolnih granica a istovremeno ispoljavaju neslučajan šablon (npr. 18 od 20 vrednosti nalazi se iznad centralne linije, a samo dve ispod) postoji indikacija da nešto nije u redu.



Slika 4.1. Kontrolna karta

### 4.1. Šjuhartove kontrolne karte

Ovde ćemo prikazati uopšteni model kontrolne karte. Neka je  $w$  uzoračka statistika koja meri posmatranu karakteristiku kvaliteta i pretpostavimo da je njena srednja vrednost  $\mu_w$  a standardno odstupanje  $\sigma_w$ . Onda su centralna linija, gornja i donja kontrolna granica date izrazima:

$$\begin{aligned}GKG &= \mu_w + L\sigma_w \\ CL &= \mu_w \\ DKG &= \mu_w - L\sigma_w\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

gde je  $L$  rastojanje kontrolnih granica od centralne linije i ono je izraženo u jedinicama standardne devijacije (u praksi se najčešće koristi  $L = 3$ ).

Kontrolne karte mogu da se klasifikuju u dve grupe:

- kontrolne karte za numeričke karakteristike kvaliteta (vreme, temperatura, masa,...)
  - $\bar{x}$  kontrolna karta
  - $s$  kontrolna karta
  - $R$  kontrolna karta
- kontrolne karte za atributivne karakteristike kvaliteta (boja, ispravno ili ne,...)
  - $p$  kontrolna karta (za praćenje udela loših jedinica proizvoda)
  - $u$  kontrolna karta (za prosečan broj defekata po jedinici proizvoda)
  - $c$  kontrolna karta (za broj defekata na jedinici proizvoda)

Kada posmatramo karakteristike kvaliteta koje se mogu numerički izraziti, obično je neophodno pratiti i njenu srednju vrednost i njenu varijabilnost. Kontrola srednje vrednosti procesa najčešće se vrši pomoću kontrolne karte za sredinu tj. pomoću  $\bar{x}$  kontrolne karte, a varijabilnost procesa može da se prati pomoću kontrolne karte za standardno odstupanje koja se naziva  $s$  kontrolna karta ili pomoću kontrolne karte za rang tzv.  $R$  kontrolne karte, s tim što je  $R$  karta češće u upotrebi.

Sada ćemo na primeru kontrolnih karata za  $\bar{x}$  i  $R$  ilustrovati postupak određivanja kontrolnih granica i centralne linije.

Pretpostavimo da je posmatrana karakteristika kvaliteta normalno raspodeljena i da su njena srednja vrednost  $\mu$  i standardno odstupanje  $\sigma$  poznati. Ako je  $x_1, x_2, \dots, x_n$  uzorak obima  $n$ , onda je njegova prosečna vrednost

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\tag{4.1.2}$$

i  $\bar{x}$  ima normalnu raspodelu  $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ .

Dalje, imamo da za uzoračku sredinu važi da je

$$P\left(\mu - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \quad (4.1.3)$$

Stoga, ako su  $\mu$  i  $\sigma$  poznati, gornja i donja vrednost intervala poverenja u jednačini (4.1.3) može da se koristi kao gornja i donja kontrolna granica za kontrolnu kartu za uzoračku sredinu. Ako uzoračka sredina nije u ovim granicama, onda je to znak da srednja vrednost procesa nije više jednaka  $\mu$ .

Pretpostavili smo da je raspodela karakteristike kvaliteta normalna. Međutim, gornji rezultati su i dalje aproksimativno tačni čak i ako raspodela nije normalna, zbog centralne granične teoreme. U praksi, obično su  $\mu$  i  $\sigma$  nepoznati. Stoga, njih ocenjujemo na osnovu preliminarnih uzoraka ili podgrupa koji su uzeti u trenutku kada se smatralo da je proces u stanju kontrole. Ove ocene obično se zasnivaju na najmanje 20 do 25 uzoraka. Pretpostavimo da imamo  $m$  uzoraka, od kojih svaki sadrži  $n$  posmatranja karakteristike kvaliteta, gde je  $n$  obično malo 4,5 ili 6. Ovakvi mali uzorci su posledica konstrukcije racionalnih podgrupa i zbog činjenice da su uzimanje uzorka i troškovi proveravanja merenja obično relativno veliki. Neka su  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$  prosečne vrednosti za svaki uzorak. Onda je najbolja ocena za  $\mu$ , srednju vrednost procesa, ukupna prosečna vrednost

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_m}{m} \quad (4.1.4)$$

Zato ćemo  $\bar{\bar{x}}$  koristiti kao centralnu liniju za  $\bar{x}$  kartu.

Da bismo odredili kontrolne granice, moramo da ocenimo standardno odstupanje  $\sigma$ . Ovde ćemo koristiti metod rangova. Ako je  $x_1, x_2, \dots, x_n$  uzorak obima  $n$ , onda je rang uzorka razlika između najveće i najmanje vrednosti, to jest

$$R = x_{\max} - x_{\min} \quad (4.1.5)$$

Neka su  $R_1, R_2, \dots, R_m$  rangovi  $m$  uzoraka. Prosečan rang je

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m} \quad (4.1.6)$$

Sad možemo dati formule za kontrolne granice za  $\bar{x}$  kartu:

$$\begin{aligned} GKG &= \bar{\bar{x}} + A\bar{R} \\ CL &= \bar{\bar{x}} \\ DKG &= \bar{\bar{x}} - A\bar{R} \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Konstanta  $A$  je dobijena iz uzoraka različitih veličina.

Varijabilnost procesa može da se prati ucrtavanjem vrednosti za rang  $R$  uzorka na kontrolnu kartu. Centralna linija i kontrolne granice  $R$  karte su sledeće:

$$\begin{aligned}GKG &= D_2 \bar{R} \\ CL &= \bar{R} \\ DKG &= D_1 \bar{R}\end{aligned}\tag{4.1.8}$$

Konstante  $D_1$  i  $D_2$  računaju se pri različitim vrednostima za  $n$ .

## 4.2. Kusum kontrolne karte

Kusum karte ili karte kumulativnih suma (Slika 4.2.1) koriste se kada su važna mala odstupanja. Neka je

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{j=1}^n x_j}{n}\tag{4.2.1}$$

uzoračka sredina  $i$ -tog uzorka. Ako je  $\mu_0$  ciljana srednja vrednost procesa, onda se za  $j$ -ti uzorak računa rastuća kumulativna suma odstupanja od  $\mu_0$  zaključno sa  $j$ -tim uzorkom, tj.

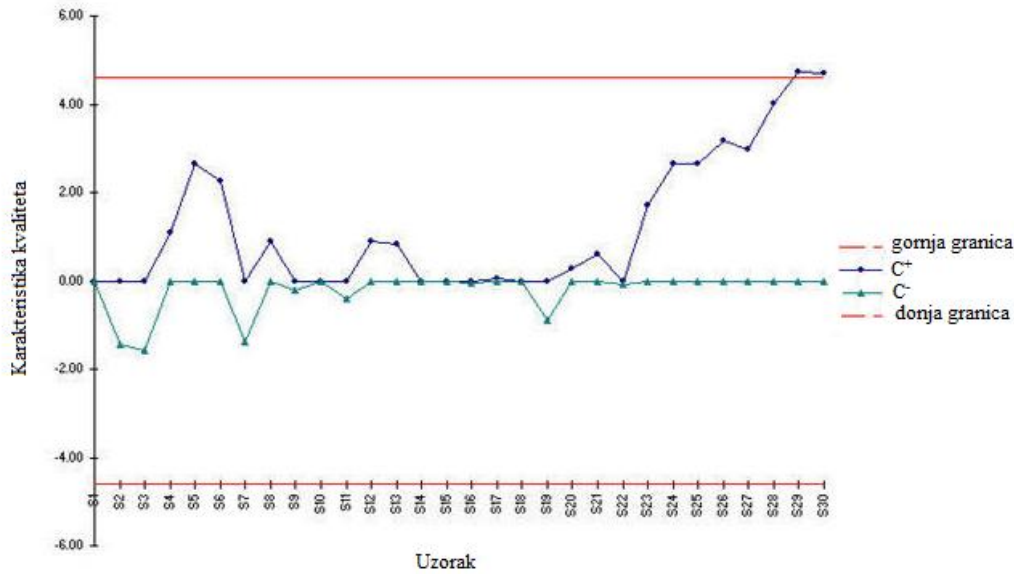
$$C_j = \sum_{i=1}^j (\bar{x}_i - \mu_0)\tag{4.2.2}$$

Ako je proces pod kontrolom on ima normalnu raspodelu sa parametrima  $\mu_0$  i  $\sigma$ . Označimo sa  $C^+$  akumulirano odstupanje od  $\mu_0$  koje je iznad ciljane vrednosti, a sa  $C^-$  akumulirano odstupanje ispod  $\mu_0$ . Parametri  $C^+$  i  $C^-$  su jednostrana gornja i donja kumulativna suma, respektivno:

$$C_i^- = \max \{0, (\mu_0 + K) - x_i + C_{i-1}^-\}\tag{4.2.3}$$

$$C_i^+ = \max \{0, x_i - (\mu_0 - K) + C_{i-1}^+\}\tag{4.2.4}$$

gde su početne vrednosti  $C_0^+ = C_0^- = 0$  i  $K = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2}$  i  $\mu_1$  je srednja vrednost procesa koji nije pod kontrolom. Ako jedna od ove dve kumulativne sume pređe preko granice  $5\sigma$  onda se smatra da je proces van kontrole.



Slika 4.2.1. Kusum kontrolna karta

### 4.3. EWMA kontrolne karte

EWMA kontrolna karta (Slika 4.3.1) je takođe dobra alternativa za Šjuhartovu kartu kada nam je bitno da detektujemo mala pomeranja. Kao i Kusum i EWMA karte se obično koriste za individualna posmatranja. EWMA karta se definiše na sledeći način:

$$z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)z_{i-1} \quad (4.3.1)$$

gde je  $0 < \lambda \leq 1$  konstanta i početna vrednost (neophodna sa prvim uzorkom na  $i = 1$ ) je ciljane vrednost procesa, tj.  $z_0 = \mu_0$ . Ponekad se aritmetička sredina preliminarnih podataka koristi kao početna vrednost za EWMA, odnosno uzima se da je  $z_0 = \bar{x}$ .

EWMA se koriste prilikom modeliranja vremenskih serija i prognoziranja. Kako se EWMA može posmatrati kao težinski prosek svih prošlih i sadašnjeg posmatranja ona je veoma neosetljiva na pretpostavku normalnosti. Zbog toga je idealna kontrolna karta za individualna posmatranja.

Ako su posmatranja  $x_i$  nezavisne slučajne promenljive sa disperzijom  $\sigma^2$ , onda je disperzija za  $z_i$

$$\sigma_{z_i}^2 = \sigma^2 \frac{\lambda}{2 - \lambda} (1 - (1 - \lambda)^{2i}) \quad (4.3.2)$$

Centralna linija i kontrolne granice za EWMA kartu su sledeće:

$$GKG = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1-\lambda)^{2i})} \quad (4.3.3)$$

$$CL = \mu_0$$

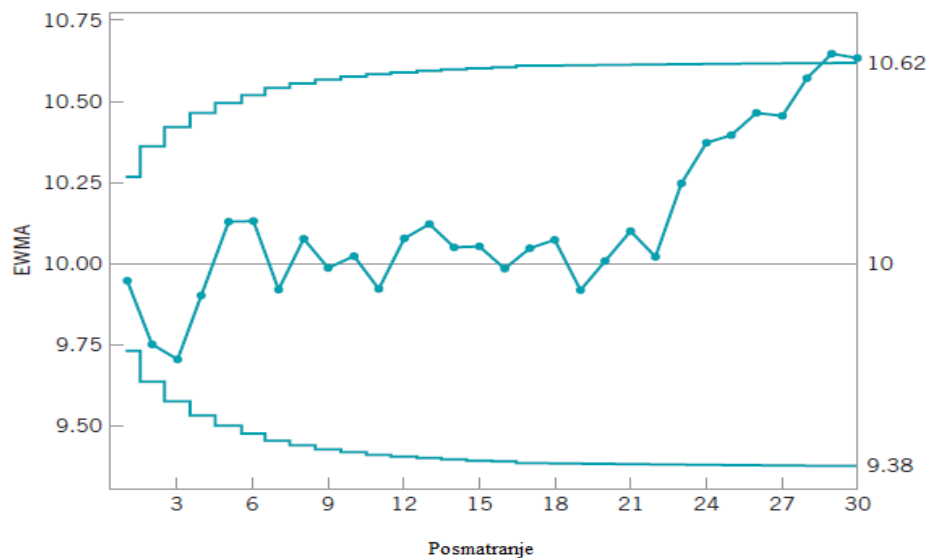
$$DKG = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1-\lambda)^{2i})} \quad (4.3.4)$$

Primetimo da član  $(1 - (1-\lambda)^{2i})$  teži jedinici kad  $i$  raste. To znači da nakon što se EWMA karta primeni za nekoliko perioda, kontrolne granice će se približiti vrednostima stabilnog stanja datih sa

$$GKG = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \quad (4.3.5)$$

$$DKG = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \quad (4.3.6)$$

Bez obzira na to preporučuje se upotreba tačnih kontrolnih granica u jednačinama (4.3.3) i (4.3.4) za male vrednosti  $i$ , jer će se na taj način brže detektovati proces koji je van cilja.



Slika 4.3.1. EWMA kontrolna karta

## 5. Vremenske serije

Pojam vremenske serije  $z_1, z_2, \dots, z_n$  može da se interpretira na više načina. Može da se posmatra kao uređeni niz posmatranja u toku vremena ili kao jedna realizacija stohastičkog procesa.

Ako su sve  $n$ -torke  $(z_{t_1}, z_{t_2}, \dots, z_{t_n})$  sa istom raspodelom tj. ako je

$$F(z_{t_1}, z_{t_2}, \dots, z_{t_n}) = F(z_{t_1+k}, z_{t_2+k}, \dots, z_{t_n+k}) \quad (5.1)$$

za sve moguće izbore  $t_1, \dots, t_n \in T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  kao i za svako  $k \in T$ , onda je  $\{z_t\}$  strogo stacionaran niz.

Za niz  $\{z_t\}$  kažemo da je slabo stacionaran ako važe sledeći uslovi:

- $Ez_t = \mu = \text{const}$ , za svako  $t \in T$
- $E|z_t|^2 < +\infty$ , za svako  $t \in T$
- $\gamma_x(r, s) = \gamma_x(r+t, s+t)$  tj.  $\text{Cov}(x_r, x_s) = \text{Cov}(x_{r+t}, x_{s+t})$ , za svako  $r, s, t \in T$ .

Stacionarni modeli pretpostavljaju da proces ostaje u stanju statističke ravnoteže čije se karakteristike ne menjaju tokom vremena, tj. da variraju oko fiksirane konstantne srednje vrednosti i konstantne varijanse. Međutim, mnogi procesi u industriji nemaju konstantnu srednju vrednost i predstavljaju se nestacionarnim vremenskim serijama. Stohastički model za koji EWMA prognoza dovodi do minimalne srednje kvadratne greške pripada klasi nestacionarnih procesa koji se zovu autoregresioni integrisani procesi pokretnih sredina ili ARIMA modeli.

Definišimo sada dva operatora koja ćemo ovde koristiti. Operator translacije unazad  $B$  definisan je izrazom

$$Bz_t = z_{t-1} \quad (5.2)$$

$$B^m z_t = z_{t-m} \quad (5.3)$$

Još jedan važan operator je diferencni operator unazad  $\nabla$  koji je definisan sa

$$\nabla z_t = z_t - z_{t-1} \quad (5.4)$$

Ovaj izraz može da se napiše i u sledećem obliku

$$\nabla z_t = z_t - z_{t-1} = (1-B)z_t \quad (5.5)$$

Beli šum je niz  $\{a_t\}$  nekorelisanih slučajnih veličina za koji je

- 1)  $Ea_t = 0$ ,
- 2)  $Da_t = \sigma^2$  i
- 3)  $\gamma_k = Cov(a_t, a_{t-k}) = 0$ , za svako  $k \neq 0$ .

Odavde sledi da je proces belog šuma stacionaran čija je autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

respektivno. Važnost procesa belog šuma u analizi vremenskih serija ne proilazi iz njegove pogodnosti za modeliranje vremenske serije, nego zbog toga što on služi za konstruisanje drugih procesa.

Stohastički modeli koje ovde razmatramo zasnivaju se na ideji da je posmatrana vremenska serija  $z_t$  kod koje su uzastopne vrednosti zavisne generisana procesom belog šuma  $a_t$ . Proces belog šuma  $a_t$  transformiše se u proces  $z_t$  pomoću linearnog filtera koji predstavlja težinsku sumu prethodnih slučajnih vrednosti  $a_t$ :

$$\begin{aligned} z_t &= \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots \\ &= \mu + \psi(B)a_t \end{aligned} \quad (5.8)$$

U opštem slučaju  $\mu$  je parametar koji određuje nivo procesa i

$$\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots \quad (5.9)$$

je linearni operator koji transformiše  $a_t$  u  $z_t$  i naziva se funkcija prenosa filtera.

Niz  $\psi_1, \psi_2, \dots$  može biti, teorijski, konačan ili beskonačan. Ako je ovaj niz konačan ili beskonačan i apsolutno sumabilan tj.  $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ , onda je filter stabilan i proces  $z_t$  je stacionaran. U tom slučaju parametar  $\mu$  je srednja vrednost oko koje proces varira. U suprotnom,  $z_t$  nestacionaran i  $\mu$  nema neko posebno značenje.

## 5.1. Nestacionarni modeli

Postoji mnogo načina na koji proces može biti nestacionaran. Međutim, serije koje se javljaju u industriji i koje ovde analiziramo često ispoljavaju posebnu vrstu homogenog nestacionarnog ponašanja koje može da se reprezentuje modifikovanom formom ARMA modela. ARMA model dat je jednačinom

$$\phi(B)\tilde{z}_t = \theta(B)a_t \quad (5.1.1)$$

gde su  $\phi(B)$  i  $\theta(B)$  polinomi od  $B$  stepena  $p$  i  $q$ , respektivno.

ARMA proces je stacionaran ako su koreni jednačine  $\phi(B)=0$  van jediničnog kruga, a nestacionaran ako su unutar jediničnog kruga. Međutim, šta se dešava ako su na jediničnom krugu? Ispostavlja se da su upravo takvi modeli veoma značajni za reprezentaciju homogenih nestacionarnih vremenskih serija. Razmotrimo model

$$\varphi(B)\tilde{z}_t = \theta(B)a_t \quad (5.1.2)$$

gde je  $\varphi(B)$  nestacionarni operator autoregresije takav da je  $d$  korena jednačine  $\varphi(B)=0$  na jediničnom krugu, a da ostali leže van jediničnog kruga. Tada model (5.1.2) možemo izraziti i na sledeći način

$$\varphi(B)\tilde{z}_t = \phi(B)(1-B)^d \tilde{z}_t = \theta(B)a_t \quad (5.1.3)$$

gde je  $\phi(B)$  stacionarni operator autoregresije. Kako je  $\nabla^d \tilde{z}_t = \nabla^d z_t$  za  $d \geq 1$ , gde je  $\nabla = 1 - B$  diferencni operator, onda važi:

$$\phi(B)\nabla^d z_t = \theta(B)a_t \quad (5.1.4)$$

Ekvivalentno, proces je definisan pomoću dve jednačine:

$$\phi(B)w_t = \theta(B)a_t \quad (5.1.5)$$

$$w_t = \nabla^d z_t \quad (5.1.6)$$

Odavde vidimo da nestacionaran proces nakon  $d$  diferenciranja prelazi u stacionarni, invertibilni ARMA proces. Invertovanjem jednačine (5.1.6) za  $d \geq 1$  dobijamo

$$z_t = S^d w_t \quad (5.1.7)$$

gde je  $S$  operator definisan sa

$$\begin{aligned} Sx_t &= \sum_{h=-\infty}^t x_h = (1 + B + B^2 + \dots)x_t \\ &= (1 - B)^{-1}x_t = \nabla^{-1}x_t \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

Odavde sledi da je  $S = (1 - B)^{-1} = \nabla^{-1}$ .

Operator  $S^2$  definiše se na sličan način:

$$\begin{aligned} S^2x_t &= Sx_t + Sx_{t-1} + Sx_{t-2} + \dots \\ &= \sum_{i=-\infty}^t \sum_{h=-\infty}^i x_h = (1 + 2B + 3B^2 + \dots)x_t \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

i tako dalje za  $S^3, S^4, \dots, S^d$ . Na osnovu jednačine (5.1.7) sledi da se proces (5.1.4) može dobiti sumiranjem (integrisanjem) stacionarnog procesa (5.1.5)  $d$  puta. Zbog toga se proces dat jednačinom (5.1.4) naziva autoregresioni integrisani proces pokretnih sredina odnosno ARIMA proces. Model (5.1.4) možemo interpretirati i na sledeći način: proces  $z_t$  je izlaz linearnog filtera (osim ako je  $d = 0$ , jer je tada linearni filter nestabilan) kome je ulaz beli šum  $a_t$ . Drugim rečima, to je model za transformaciju nestacionarnog procesa  $z_t$  u niz nekoreliranih slučajnih veličina  $a_t$ .

Ako je  $\phi(B)$  operator autoregresije reda  $p$ ,  $d$  broj uzastopnih diferenciranja i  $\theta(B)$  operator pokretnih proseka reda  $q$ , onda kažemo da imamo ARIMA model reda  $(p, d, q)$  ili kraće ARIMA  $(p, d, q)$  model.

## 5.2. Uopšteni oblik ARIMA modela

Ponekad postoji potreba da se razmotri prošireni oblik ARIMA modela dodavanjem konstantnog člana  $\theta_0$  koji predstavlja stohastički ili deterministički trend. U tom slučaju model koji koristimo za opisivanje vremenske serije je

$$\varphi(B)z_t = \phi(B)\nabla^d z_t = \theta_0 + \theta(B)a_t \quad (5.2.1)$$

gde je

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p \quad (5.2.2)$$

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q \quad (5.2.3)$$

pri čemu sledi:

1.  $\phi(B)$  je operator autoregresije; pretpostavlja se da je stacionaran tj. koreni jednačine  $\phi(B) = 0$  su van jediničnog kruga.
2.  $\varphi(B) = \phi(B)\nabla^d$  je uopšteni operator autoregresije; to je nestacionaran operator sa  $d$  jediničnih korena jednačine  $\varphi(B) = 0$ .
3.  $\theta(B)$  je operator pokretnih proseka; pretpostavlja se da je invertibilan tj. koreni jednačine  $\theta(B) = 0$  su van jediničnog kruga.

Kada je  $d = 0$ , onda model (5.2.1) predstavlja stacionaran proces. Zahtevi stacionarnosti i invertibilnosti su nezavisni i u opštem slučaju operatori  $\phi(B)$  i  $\theta(B)$  neće biti istog reda.

Specijalni slučaj: IMA(0,1,1) proces

$$\nabla z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} = (1 - \theta_1 B)a_t \quad (5.2.4)$$

gde je  $p = 0$ ,  $d = 1$ ,  $q = 1$ ,  $\phi(B) = 1$  i  $\theta(B) = 1 - \theta_1 B$ .

### 5.3. Eksplicitni oblici ARIMA modela

Razmotrimo sada neke važne oblike uopštenog ARIMA modela. Trenutna vrednost procesa  $z_t$  može da se izrazi na tri načina:

1. U terminima prethodnih vrednosti za  $z$  i trenutne i prethodnih vrednosti za  $a$  direktnom upotrebom diferencne jednačine.
2. U terminima trenutne i prethodnih vrednosti  $a_{t-j}$ .
3. U terminima težinske sume prethodnih vrednosti  $z_{t-j}$  i trenutne vrednosti  $a_t$ .

1. Model izražen u obliku diferencne jednačine:

Ako je

$$\varphi(B) = \phi(B)(1 - B)^d = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_{p+d} B^{p+d} \quad (5.3.1)$$

onda se uopšteni ARIMA model za  $\theta_0 = 0$  može napisati u sledećem obliku

$$z_t = \varphi_1 z_{t-1} + \dots + \varphi_{p+d} z_{t-p-d} - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} + a_t \quad (5.3.2)$$

## 2. Model izražen preko procesa $a$ :

Linearni model može da se napiše kao izlaz  $z_t$  linearnog filtera

$$\begin{aligned} z_t &= a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots \\ &= a_t + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j a_{t-j} \\ &= \psi(B)a_t \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

gde je ulaz beli šum. Ako obe strane gornje jednačine pomnožimo sa  $\varphi(B)$  dobijamo

$$\varphi(B)z_t = \varphi(B)\psi(B)a_t \quad (5.3.4)$$

Kako je

$$\varphi(B)z_t = \theta(B)a_t \quad (5.3.5)$$

sledi da je

$$\varphi(B)\psi(B) = \theta(B) \quad (5.3.6)$$

Težine  $\psi$  dobijamo izjednačavanjem koeficijenata uz  $B$  u sledećoj jednačini:

$$(1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_{p+d} B^{p+d})(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) \quad (5.3.7)$$

Stoga, težine  $\psi_j$  određujemo koristeći rekursivnu formulu

$$\psi_j = \varphi_1 \psi_{j-1} + \varphi_2 \psi_{j-2} + \dots + \varphi_{p+d} \psi_{j-p-d} - \theta_j \quad j > 0 \quad (5.3.8)$$

gde je  $\psi_0 = 1$ ,  $\psi_j = 0$  za  $j < 0$  i  $\theta_j = 0$  za  $j > q$ .

## 3. Inverzni oblik modela:

Model  $z_t = \psi(B)a_t$  možemo napisati u inverznom obliku

$$\psi^{-1}(B)z_t = a_t \quad (5.3.9)$$

ili

$$\pi(B)z_t = \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j\right) z_t = a_t \quad (5.3.10)$$

gde je  $\pi(B) = \psi^{-1}(B)$ . Odavde dobijamo da je

$$z_t = \pi_1 z_{t-1} + \pi_2 z_{t-2} + \dots + a_t \quad (5.3.11)$$

Zbog uslova invertibilnosti težine  $\pi$  moraju da formiraju konvergentnu seriju tj.  $\pi(B)$  mora da konvergira na ili unutar jediničnog kruga. Da bismo dobili težine  $\pi$  za uopšteni ARIMA model zamenimo jednačinu (5.3.10) u

$$\varphi(B)z_t = \theta(B)a_t \quad (5.3.12)$$

Dobijamo da je

$$\varphi(B)z_t = \theta(B)\pi(B)z_t \quad (5.3.13)$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz  $B$  u jednačini

$$\varphi(B) = \theta(B)\pi(B) \quad (5.3.14)$$

dobijamo rekurzivnu formulu za težine  $\pi_j$

$$\pi_j = \theta_1\pi_{j-1} + \theta_2\pi_{j-2} + \dots + \theta_q\pi_{j-q} + \varphi_j \quad j > 0 \quad (5.3.15)$$

gde je  $\pi_0 = -1$ ,  $\pi_j = 0$  za  $j < 0$  i  $\varphi_j = 0$  za  $j > p + d$ .

Za  $d \geq 1$  ako stavimo da je  $B=1$  dobijamo da je

$$\varphi(B) = \phi(B)(1-B)^d = 0 \quad (5.3.16)$$

i  $\theta(1) \neq 0$  jer su koreni jednačine  $\theta(B) = 0$  van jediničnog kruga. Onda iz jednačine (5.3.14) sledi da je  $\pi(1) = 0$ , pa dobijamo da je

$$\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = 1 \quad (5.3.17)$$

Zbog toga, za  $d \geq 1$  proces može da se napiše u sledećem obliku

$$z_t = \bar{z}_{t-1}(\pi) + a_t \quad (5.3.18)$$

gde je

$$\bar{z}_{t-1}(\pi) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j z_{t-j} \quad (5.3.19)$$

težinski prosek prethodnih vrednosti procesa.

## 5.4. IMA(0,1,1) proces

Nestacionarni model kojim se često reprezentuju smetnje u industrijskim procesima je proces integrisanih pokretnih proseka reda (0,1,1) odnosno IMA(0,1,1) proces:

$$\nabla z_t = z_t - z_{t-1} = a_t - \theta a_{t-1} = (1-\theta B)a_t, \quad -1 < \theta < 1 \quad (5.4.1)$$

Ako desnu stranu gornje jednačine napišemo u sledećem obliku

$$1-\theta B = (1-\theta)B + (1-B) = (1-\theta)B + \nabla = \lambda B + \nabla \quad (5.4.2)$$

gde je  $\lambda = 1-\theta$  i  $0 < \lambda < 2$  dobijamo

$$\nabla z_t = \lambda a_{t-1} + \nabla a_t \quad (5.4.3)$$

Posmatrajmo sada model oblika  $\pi(B)z_t = a_t$  ili ekvivalentno

$$z_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j z_{t-j} + a_t = \bar{z}_{t-1}(\pi) + a_t \quad (5.4.4)$$

gde je  $\bar{z}_{t-1}(\pi)$  težinski pokretni prosek prethodnih vrednosti procesa. Koristeći jednačinu (5.3.14), težine  $\pi$  IMA(0,1,1) procesa date su jednačinom

$$(1-\theta B)\pi(B) = 1-B \quad (5.4.5)$$

tj.

$$\begin{aligned} \pi(B) &= \frac{1-B}{1-\theta B} = \frac{1-\theta B - (1-\theta)B}{1-\theta B} = \\ &= 1 - (1-\theta)(B + \theta B^2 + \theta^2 B^3 + \dots) \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

gde je

$$\pi_j = (1-\theta)\theta^{j-1} = \lambda(1-\lambda)^{j-1} \quad j \geq 1 \quad (5.4.7)$$

Sledi da se proces može napisati u obliku

$$z_t = \bar{z}_{t-1}(\lambda) + a_t \quad (5.4.8)$$

Kako težine  $\lambda$ ,  $\lambda(1-\lambda)$ ,  $\lambda(1-\lambda)^2$ , ... eksponencijalno opadaju, onda je

$$\bar{z}_{t-1}(\lambda) = \lambda \sum_{j=1}^{\infty} (1-\lambda)^{j-1} z_{t-j} \quad (5.4.9)$$

eksponencijalni težinski pokretni prosek.

Kako je IMA(0,1,1) proces nestacionaran on ne varira oko fiksirane srednje vrednosti. Međutim, EWMA  $\bar{z}_t(\lambda)$  može da se posmatra kao mera nivoa procesa u trenutku  $t$ . Na osnovu jednačine (5.4.9) dobijamo rekurzivnu formulu za EWMA:

$$\bar{z}_t(\lambda) = \lambda z_t + (1 - \lambda) \bar{z}_{t-1}(\lambda) \quad (5.4.10)$$

## 6. Podešavanje procesa

Posmatrajmo proces u trenutku  $t$ , gde je  $Y_t$  izlazna veličina koju želimo da održimo što bliže ciljanoj vrednosti  $T$ . Kada nema podešavanja procesa smetnja  $N_t$  je definisana kao odstupanje karakteristike kvaliteta od ciljane vrednosti  $T$ , tj. kao pozadinski šum. Pretpostavimo da postoji ulazna promenljiva  $X$  koju možemo da menjamo tako da jedinica promene u  $X$  proizvodi  $g$  jedinica promene u  $Y$  u jednom vremenskom intervalu. Ako je  $X = X_t$  u trenutku  $t$ , onda će u trenutku  $t+1$  odstupanje od cilja biti  $\varepsilon_{t+1} = Y_{t+1} - T$ , a nakon podešavanja

$$\varepsilon_{t+1} = gX_t + N_{t+1} \quad (6.1)$$

Smetnja u jednačini (6.1) obično se reprezentuje odgovarajućim modelom vremenske serije, najčešće ARIMA modelom. Takav model je neophodan jer su izlazne veličine procesa koji nije pod kontrolom obično autokorelisane.

Pretpostavimo sada da u trenutku  $t$  možemo da odredimo prognozu  $\hat{N}_t(1)$  za  $N_{t+1}$  tako da važi

$$N_{t+1} = \hat{N}_t(1) + e_t(1) \quad (6.2)$$

gde je  $e_t(1)$  greška te prognoze. Tada koristeći (6.1) i (6.2) dobijamo

$$\varepsilon_{t+1} = gX_t + \hat{N}_t(1) + e_t(1) \quad (6.3)$$

Ako  $X$  podesimo tako da u trenutku  $t$  bude

$$X_t = -\frac{1}{g} \hat{N}_t(1) \quad (6.4)$$

onda za podešeni proces dobijamo da je

$$\varepsilon_{t+1} = e_t(1) \quad (6.5)$$

Tako će, umesto odstupanja  $N_{t+1}$  koje je mereno kada proces nije podešen, odstupanje od cilja  $\varepsilon_{t+1}$  podešenog procesa biti greška prognoze  $e_t(1)$ .

Ako za određivanje prognoze  $\hat{N}_t(1)$  za  $N_{t+1}$  koristimo merenja jednog ili više ulaznih faktora koji izazivaju smetnju (npr. sobna temperatura) onda imamo primer kontrole unapred. Ukoliko tu prognozu računamo koristeći samo sadašnje i prošle vrednosti izlazne smetnje  $N_t, N_{t-1}, N_{t-2}, \dots$  onda jednačina (6.4) definiše sistem kontrole povratnom spregom.

## 6.1. Kontrola povratnom spregom

Kako za određivanje prognoze  $\hat{N}_t(1)$  koristimo sadašnje i prošle vrednosti izlazne smetnje onda se  $N_{t+1}$  može adekvatno prognozirati pomoću eksponencijalnih težinskih pokretnih proseka (EWMA), gde najskorija merenja imaju najveću težinu. Pretpostavimo onda da je

$$\hat{N}_t(1) = \lambda(N_t + \theta N_{t-1} + \theta^2 N_{t-2} + \dots) \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (6.1.1)$$

gde je  $\theta$  konstanta izravnavanja i  $\lambda = 1 - \theta$ .

Ako jednačinu (6.1.1) napišemo u rekurzivnom obliku onda dobijamo

$$\hat{N}_t(1) = \lambda N_t + (1 - \lambda) \hat{N}_{t-1}(1) \quad (6.1.2)$$

Kako je  $e_{t-1}(1) = N_t - \hat{N}_{t-1}(1)$  odavde sledi da je

$$\hat{N}_t(1) - \hat{N}_{t-1}(1) = \lambda(N_t - \hat{N}_{t-1}(1)) = \lambda e_{t-1}(1) \quad (6.1.3)$$

Razmotrimo situaciju kada se podešavanje neprekidno odvija nakon svakog posmatranja kao što je i najčešći slučaj u procesnoj industriji. Tada koristeći jednačinu (6.4) dobijamo jednačinu za podešavanje koje je izvršeno u trenutku  $t$

$$X_t - X_{t-1} = -\frac{1}{g} (\hat{N}_t(1) - \hat{N}_{t-1}(1)) \quad (6.1.4)$$

Za svaku šemu kontrole povratnom spregom, u kojoj je promenljiva  $X$  nameštena tako da otkloni prognoziranu smetnju, potrebno podešavanje treba da bude

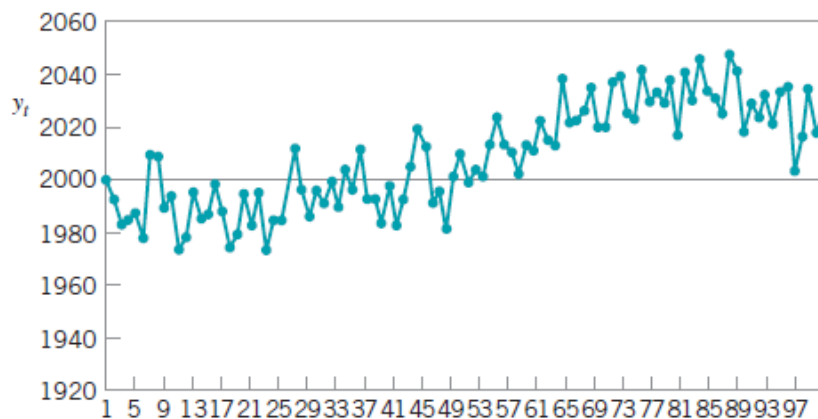
$$X_t - X_{t-1} = -\frac{\lambda}{g} e_{t-1}(1) = -\frac{\lambda}{g} \varepsilon_t \quad (6.1.5)$$

Sumiranjem jednačina (6.1.5) dobijamo ukupno podešavanje u trenutku  $t$ :

$$X_t = k_0 + k_1 \sum_{i=1}^t \varepsilon_i \quad (6.1.6)$$

gde je  $k_0 = X_0$  i  $k_1 = -\lambda/g$ . Dakle, u ovom slučaju procedura podešavanja zavisi od kumulativne sume grešaka podešavanja  $\varepsilon_i$ . Takođe sledi iz prethodnog da je podešavanje ekvivalentno prognoziranju u svakom trenutku  $t$  sledeće vrednosti ukupne nepodešene smetnje  $N_{t+1}$  pomoću eksponencijalnih težinskih proseka njenih prethodnih vrednosti i korišćenju ove prognoze za izvršavanje potrebnog podešavanja.

*Primer 1.* Na slici 6.1.1 prikazano je 100 merenja molekulske mase polimera koja su vršena svaka četiri sata. Cilj je bio da se molekulska masa  $Y$  održi što je bliže moguće vrednosti  $T=2000$ . Uzoračka sredina molekulske mase za ovih 100 posmatranja je 2008, a uzoračko standardno odstupanje 19.4. U ovom procesu postoji odstupanje od ciljane vrednosti i to je verovatno posledica kvaliteta sirovina koje se koriste, ali to odstupanje može da se nadoknadi promenom količine katalizatora  $X$ . Promena količine katalizatora će uticati na promenu molekulske mase u jednom vremenskom periodu i zbog toga je procedura kontrole povratnom spregom pogodna za održavanje molekulske mase blizu ciljane vrednosti.



Slika 6.1.1. Molekulska masa polimera, ciljane vrednosti  $T=2000$  (proces koji nije pod kontrolom)

Pretpostavimo da je  $g=1.2$ , tj. povećanje količine katalizatora za 1 jedinicu prouzrokuje povećanje molekulske mase za 1.2 jedinice. Podešeni proces onda ima sledeći oblik:

$$Y_t - 2000 = N_{t+1} + 1.2X_t \quad (6.1.7)$$

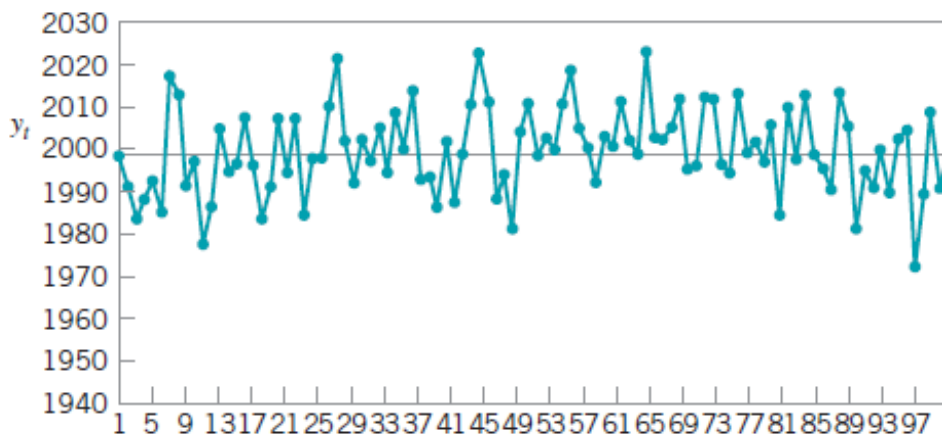
Smetnju  $N_{t+1}$  ćemo prognozirati pomoću EWMA prognoze za  $\lambda = 0.2$ <sup>6</sup>. Ta prognoza za jedan korak unapred je

$$\begin{aligned}\hat{N}_t(1) &= \hat{N}_{t-1}(1) + \lambda e_{t-1}(1) = \hat{N}_{t-1}(1) + 0.2(N_t - \hat{N}_{t-1}(1)) \\ &= 0.2N_t + 0.8\hat{N}_{t-1}(1) = 0.2(Y_t - 2000) + 0.8\hat{N}_{t-1}(1)\end{aligned}\quad (6.1.8)$$

Podešavanje količine katalizatora dato je sledećom jednačinom

$$\begin{aligned}X_t - X_{t-1} &= -\frac{\lambda}{g}(Y_t - 2000) \\ &= -\frac{1}{6}(Y_t - 2000)\end{aligned}\quad (6.1.9)$$

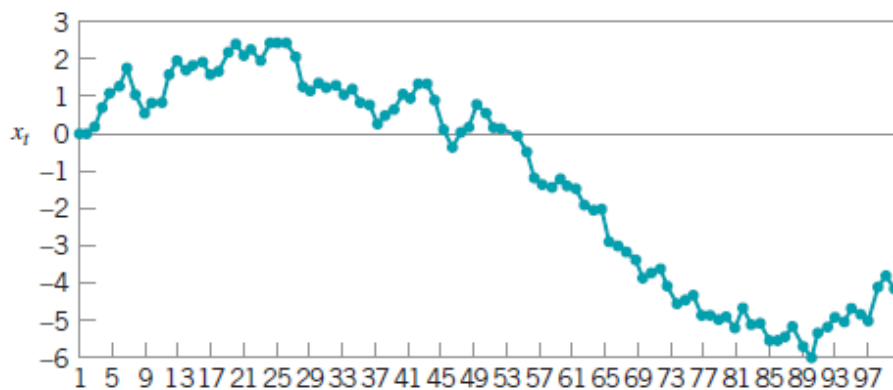
Na slici 6.1.2 prikazane su vrednosti molekulske mase nakon podešavanja količine katalizatora. Uzoračka sredina sada iznosi 2001, a uzoračko standardno odstupanje je 10.35. Na taj način je varijabilnost procesa smanjena skoro za 50%.



Slika 6.1.2. Vrednosti molekulske mase nakon podešavanja

Na slici 6.1.3 prikazane su vrednosti na koje je podešavana količina katalizatora u svakom trenutku da bi se proces održao blizu ciljane vrednosti.

<sup>6</sup> Optimalna vrednost za  $\lambda$  je ona koja minimizira sumu kvadrata grešaka prognoze. U praksi se najčešće koriste vrednosti između 0.2 i 0.4.

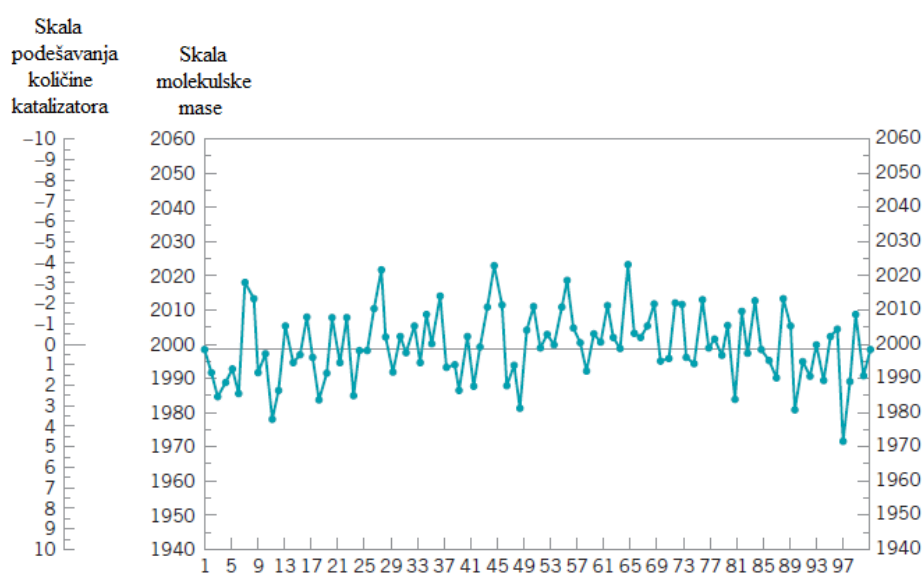


Slika 6.1.3. Vrednosti količine katalizatora

## 6.2. Karte podešavanja povratnom spregom

Šema podešavanja povratnom spregom može da se implementira tako da se podešavanja vrše automatski. To obično uključuje kombinaciju senzora i mernih instrumenata, upotrebu kompjutera i pogona koji vrše podešavanje promenljive  $X$ . Kada se podešavanje povratnom spregom vrši na ovaj način onda je to automatska kontrola procesa.

U mnogim procesima, ovakva podešavanja mogu da se vrše ručno. Osooblje koje vrši kontrolu procesa posmatra trenutno izlazno odstupanje od cilja, računa iznos podešavanja i zatim postavlja  $X_t$  na novu vrednost. Kada se podešavanje vrši na ovakav način onda koristimo kartu ručnog podešavanja povratnom spregom.



Slika 6.2.1. Karta podešavanja molekulske mase

Na slici 6.2.1 prikazana je karta ručnog podešavanja molekulske mase. Primetimo takođe da su na njoj prikazana uzastopna merenja koja bi se desila nakon podešavanja kao i da se pozadinska smetnja ne vidi na ovoj karti. Na njoj je prikazana još jedna vertikalna skala tzv. skala podešavanja. Odstupanja na skali podešavanja su takva da je jedna jedinica podešavanja jednaka šest jedinica molekulske mase.

Ovakve karte podešavanja su veoma lake za korišćenje. Na primer, vrednost molekulske mase  $Y_{13} = 2006$  je 6 jedinica iznad cilja  $T = 2000$ , tj.  $\varepsilon_{13} = 6$  i odgovarajuća vrednost na skali podešavanja je  $-1$ . To znači da količina katalizatora treba da se smanji za jednu jedinicu. Sledeće posmatranje  $Y_{14} = 1997$  je 3 jedinice ispod cilja, tj.  $\varepsilon_{14} = 3$  i odgovarajuća vrednost na skali podešavanja je  $0.5$  što znači da količina katalizatora treba da se poveća za  $0.5$  jedinica.

### 6.3. Modifikacije karte podešavanja povratnom spregom

Šeme kontrole povratnom spregom koje su prethodno opisane zahtevaju da se podešavanje vrši nakon svakog posmatranja. U hemijskoj i procesnoj industriji to i nije veliki problem jer se podešavanja vrše automatski i troškovi tog podešavanja su obično zanemarljivi u odnosu na trošak koji bi nastao da proces nije pod kontrolom. Međutim, problem se javlja kada se moraju uzeti u obzir troškovi kao i sam tip podešavanja. Na primer, u industriji za proizvodnju delova može biti neophodno da se proces proizvodnje zaustavi da bi se izvršilo podešavanje. Zbog toga se javlja potreba za modifikovanjem procedure kontrole sa ciljem da se smanji broj neophodnih podešavanja.

Ovo se može postići na nekoliko načina. Jedan od najjednostavnijih je tzv. karta podešavanja sa granicama gde se podešavanje vrši samo u periodima gde je EWMA prognoza izvan granica datih sa  $\pm L$ . Granične linije se određuju tako da minimiziraju ukupni trošak uzimajući pri tome u obzir i troškove podešavanja i trošak koji bi nastao da nema podešavanja. Njihova svrha nije da otkrije statistički značajno odstupanje od cilja. Radi ilustracije posmatrajmo 50 vrednosti izlazne karakteristike  $Y_t$  hemijskog procesa. Ove vrednosti su izražene kao odstupanja od ciljane vrednosti  $T = 0$ . Suma kvadrata odstupanja od cilja je 21 468. Ulazna promenljiva koju podešavamo je  $X_t$  i neka je  $g = 0.8$ . Tada je

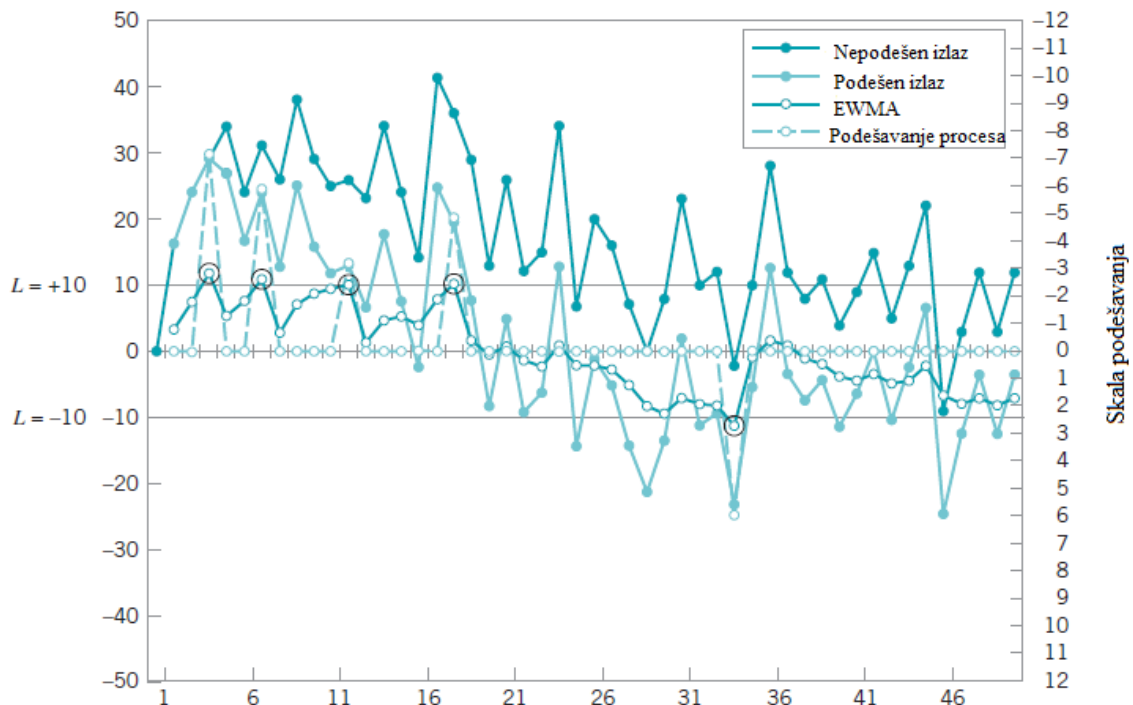
$$Y_t - T = 0.8X_t \quad (6.3.1)$$

Pretpostavimo da je  $L = 10$ . To znači da ćemo podešavati proces samo u slučaju kada EWMA prognoza pređe granice  $L = 10$  ili  $L = -10$ . EWMA prognoza ( $\lambda = 0.2$ ) kreće od nule i prvi period kada pređe granicu  $L = 10$  je period 4 (Slika 6.3.1). Izlazno odstupanje od cilja u periodu 4 je  $+29$  i odgovarajuće podešavanje iznosi

$$X_4 - X_3 = -\frac{0.2}{0.8}(Y_4 - 0) = -7.25 \quad (6.3.2)$$

Odavde sledi da ćemo ulaznu promenljivu  $X_3$  u periodu 3 da promenimo za  $-7.25$  jedinice. Efekat ovog podešavanja će se primetiti u sledećem periodu 5. EWMA će se resetovati na nulu na kraju perioda 4 i procedura prognoziranja će krenuti od početka. Sledeće podešavanje se javlja u periodu 7 i znosi  $-5.938$  jedinice.

Primetimo da je izvršeno samo pet podešavanja za 50 posmatranja. Na slici 6.3.1 prikazane su izlazne promenljive pre i posle podešavanja, odgovarajuća EWMA prognoza i vrednosti podešavanja procesa. Varijabilnost procesa je znatno smanjena, suma kvadrata odstupanja od cilja je 9780 što predstavlja smanjenje od preko 50% .

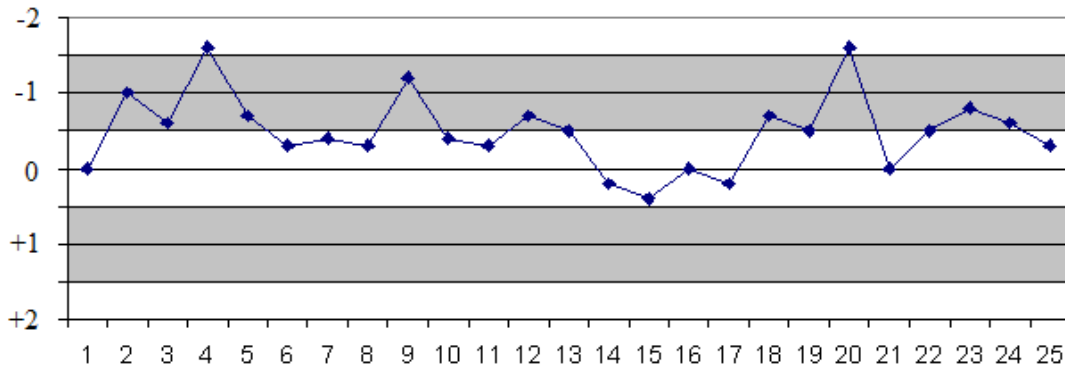


Slika 6.3.1. Karta podešavanja sa granicama. Zaokružene EWMA tačke označavaju tačke gde je izvršeno podešavanje

Karte podešavanja sa granicama su često veoma dobra zamena za karte gde se podešavanje vrši nakon svakog posmatranja. Ovo obično rezultuje malo manjim učinkom kada se uporedi sa šemama “stalnog podešavanja”, ali je to smanjenje obično malo.

Druga modifikacija karte podešavanja koja se sreće u praksi je karta podešavanja sa zaokruživanjem (Slika 6.3.2). Skala podešavanja je podeljena na 4 ili 5 zona iznad i ispod centralne linije i svakoj od ovih zona odgovara podešavanje za npr.  $\pm 1$  jedinicu,  $\pm 2$  jedinice, itd. Vrednosti koje se nađu u centralnoj zoni nije potrebno podešavati. Ovakav tip karte se

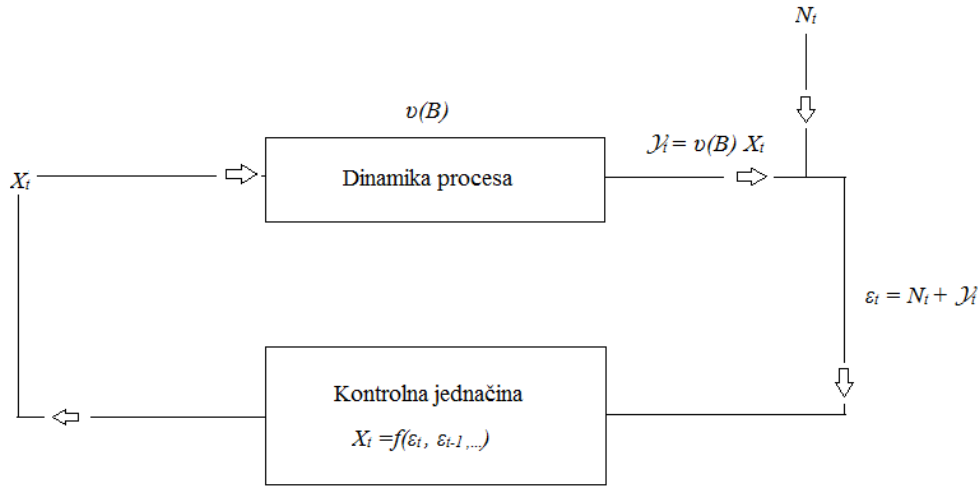
veoma lako primenjuje, jer su vrednosti podešavanja grafički prikazane i nije potrebno vršiti bilo kakvo računanje.



Slika 6.3.2. Karta podešavanja sa zaokruživanjem

## 6.4. Modeliranje sistema povratne sprege

Nešto uopšteniji sistem kontrole povratnom spregom prikazan je na slici 6.4.1. Proces je pogođen smetnjom i odsustvo kompenzatornog delovanja uzrokuje da izlazna veličina odstupa od ciljane vrednosti za iznos  $N_t$ . Prema tome,  $N_t$  je vremenska serija koja pokazuje šta bi se desilo na izlazu procesa kada se ne bi vršila kontrola. U stvari, kompenzatorna promenljiva  $X_t$  (količina katalizatora u primeru 1) može da se podešava i da se na taj način, koliko je to moguće, ukloni smetnja. Promene u  $X$  će proći kroz proces i proizvesti u trenutku  $t$  iznos kompenzacije  $\mathcal{Y}_t$  na izlazu (koja se meri kao odstupanje od cilja). U meri u kojoj ova kompenzacija  $\mathcal{Y}_t$  ne uspe da otkloni smetnju  $N_t$  postojaće greška, ili odstupanje od cilja  $\varepsilon_t = Y_t - T$ , koja je jednaka  $\varepsilon_t = N_t + \mathcal{Y}_t$ . Kontrolor je neko sredstvo (automatsko ili ručno) koje sprovodi kontrolnu jednačinu i na taj način podešava izlaznu veličinu procesa u zavisnosti od sadašnjih i prošlih grešaka.



Slika 6.4.1. Sistem povratne sprege

Uređaj koji se koristi u procesnoj industriji naziva se proporcionalno-integralni-diferencijalni (PID) regulator. Ovakav regulator obično radi automatski i koristi kontinualna merenja i podešavanja. Ako je  $\varepsilon_t$  greška na izlazu u trenutku  $t$ , onda kontrolno dejstvo može zavistiti od greške, njenog integrala ili prvog izvoda greške po vremenu. PID regulator koristi linearnu kombinaciju ova tri načina kontrolnog dejstva i u trenutku  $t$  kontrolna jednačina ima sledeći oblik:

$$X_t = k_0 + k_D \frac{d\varepsilon_t}{dt} + k_P \varepsilon_t + k_I \int \varepsilon_t dt \quad (6.4.1)$$

gde su  $k_D$ ,  $k_P$  i  $k_I$  konstante.

Često su u upotrebi samo jedan ili dva od ova tri načina dejstva:

- ako je  $k_I \neq 0$  ( $k_D = 0$ ,  $k_P = 0$ ), onda imamo integralnu kontrolu
- ako je  $k_I \neq 0$  i  $k_P \neq 0$  ( $k_D = 0$ ), onda imamo proporcionalno-integralnu (PI) kontrolu.

U prethodnom razmatranju dinamika procesa je predstavljena na sledeći način:

$$Y_t = gX_{t-1} = gBX_t \quad (6.4.2)$$

Kontrolna jednačina  $X_t = k_0 + k_I \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$  predstavlja diskretnu analogiju integralne kontrole.

Uopšteno, diskretna analogija jednačine (6.4.1) je

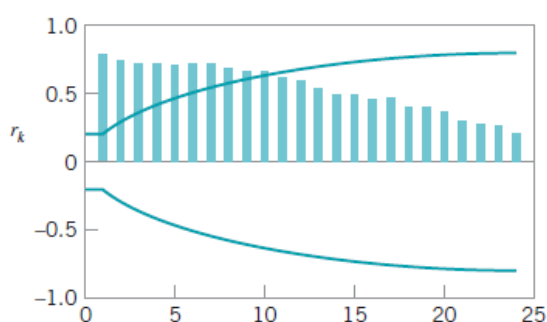
$$X_t = k_0 + k_D \nabla \varepsilon_t + k_P \varepsilon_t + k_I \sum_{i=1}^t \varepsilon_i \quad (6.4.3)$$

ili

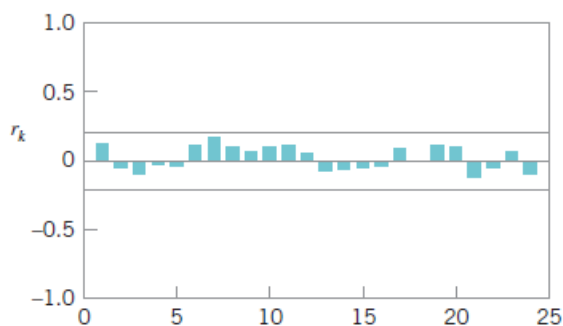
$$x_t = X_t - X_{t-1} = k_D \nabla^2 \varepsilon_t + k_P \nabla \varepsilon_t + k_I \varepsilon_t = c_1 \varepsilon_t + c_2 \varepsilon_{t-1} + c_3 \varepsilon_{t-2} \quad (6.4.4)$$

gde su  $c_1$ ,  $c_2$  i  $c_3$  odgovarajuće konstante. Kontrolne jednačine ovakvog tipa imaju veoma značajnu praktičnu primenu, posebno u hemijskoj i procesnoj industriji.

Na slikama 6.4.2 i 6.4.3 prikazane su autokorelacione funkcije za uzorak iz primera 1 pre i posle podešavanja procesa, respektivno. Očigledno je da je pre podešavanja bila prisutna jaka autokorelacija među posmatranim vrednostima, a da su nakon podešavanja izlazna odstupanja od cilja nekorelisana. Inženjerski regulatori ne mogu uvek da eliminišu autokorelaciju. Na primer, moguće je da dinamika procesa nije dovoljno poznata da bi se implementirao odgovarajući regulator. Primetimo takođe da inženjerski regulatori zapravo prebacuju varijabilnost sa jednog dela procesa (molekulska masa) na drugi (količina katalizatora) i postoje procesi u kojima ovo nije prihvatljiva alternativa.



Slika 6.4.2. Autokorelaciona funkcija uzorka molekulske mase pre podešavanja



Slika 6.4.3. Autokorelaciona funkcija uzorka molekulske mase nakon podešavanja

## 6.5. Modeli za smetnju i dinamiku procesa

Ovde ćemo prikazati neke jednostavne modele za smetnju i dinamiku procesa, jer efikasnost bilo kog sistema podešavanja zavisi od njihove prirode.

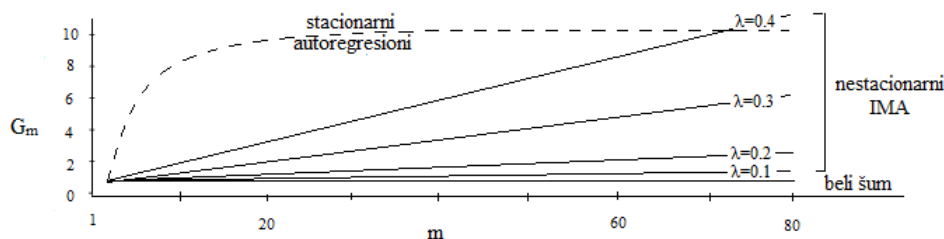
### *Karakterizacija odgovarajućeg modela za smetnju pomoću variograma*

Standardizovani variogram se definiše kao odnos varijansi na sledeći način:

$$G_m = \frac{\text{var}[N_{t+m} - N_t]}{\text{var}[N_{t+1} - N_t]} \equiv \frac{V_m}{V_1} \quad (6.5.1)$$

Za stacionarni proces je  $G_m = (1 - \rho_m)/(1 - \rho_1)$ , gde je  $\rho$  autokorelaciona funkcija. Međutim, variogram se može koristiti i za karakterizaciju nestacionarnih procesa.

U idealnom slučaju kada bismo imali savršeno stabilno stanje, smetnja bi mogla da se modelira pomoću belog šuma i odgovarajući variogram  $G_m$  bi bio nezavisan od  $m$  i jednak 1. Ali u stvarnosti proizvodne mašine se habaju, dolazi do uticaja ljudskog faktora na rad, itd. i to sve utiče na to da proces ponovo odstupa od cilja. Tako za smetnju koja nije pod kontrolom možemo da očekujemo da ima monotono rastući variogram. Kod linearnog stacionarnog modela variogram  $G_m$  će prvobitno da raste sa porastom  $m$ , ali će nakon toga imati asimptotsko ponašanje (Slika 6.5.1).



Slika 6.5.1. Teorijski variogrami za beli šum, autoregresionu i IMA(0,1,1) vremensku seriju

Model kojim možemo da aproksimiramo ponašanje sistema koji nije pod kontrolom i čija se entropija neprekidno povećava je sledeći:

$$N_t = b_t + z_t \quad (6.5.2)$$

gde smo pretpostavili da se smetnja sastoji iz dva dela, prolaznog  $b_t$  i neprolaznog  $z_t$ .

Prolazni deo  $b_t$  zavisi samo od posmatranja u trenutku  $t$  i nezavisan je od posmatranja u bilo kom drugom trenutku. Tipični izvori ovakve smetnje su greške koje se javljaju prilikom merenja ili uzimanja uzorka. Prolazni deo  $b_t$  predstavljamo pomoću belog šuma čija je srednja vrednost 0 i disperzija  $\sigma_b^2$ .

Neprolazni deo  $z_t$  predstavlja novine koje se s vremena na vreme jave u sistemu i koje ostaju u njemu. Ovakve novine mogu da se jave iz više razloga, kao što su habanje, korozija, ljudski faktor, itd. Svaki sistem je podložan takvim uticajima i to neprekidno dovodi do povećanja entropije sistema. Upravo ovakve neprolazne novine stvaraju neželjeni signal koji hoćemo da uklonimo. Model kojim predstavljamo ovaj neprolazni deo ima variogram koji linearno raste sa  $m$ . Specijalni slučaj takvog modela je IMA(0,1,1) model:

$$N_t - N_{t-1} = a_t - \theta a_{t-1} \quad (6.5.3)$$

Kako za IMA model EWMA sa parametrom izravnavanja  $\theta$  obezbeđuje srednjekvadratnu prognozu sa greškom prognoze  $e_{t-1}(1) = a_t$ , onda odgovarajuća diskretna integralna kontrola (6.1.6) sa  $k_t = -\lambda/g$  prouzrokuje srednjekvadratnu kontrolu sa  $\varepsilon_t = a_t$ .

### Dinamika procesa

Kada smo razmatrali šemu integralne kontrole jednačine (6.1.6) pretpostavili smo da će bilo koja promena ulazne promenljive sistema imati puni efekat na izlazu u jednom vremenskom intervalu. Zbog toga smo pretpostavili da je dinamika procesa data jednačinom

$$\mathcal{Y}_t = gBX_{t+} \quad (6.5.4)$$

gde smo sa  $X_{t+}$  označili fiksni nivo unosa  $X$  u vremenskom intervalu od  $t$  do  $t+1$ . Nešto uopštenija pretpostavka je da se sistem može opisati diferencnom jednačinom prvog reda

$$(1 + \xi \nabla) \mathcal{Y}_t = gBX_{t+} \quad (6.5.5)$$

ili ekvivalentno

$$(1 - \delta B) \mathcal{Y}_t = (1 - \delta) gBX_{t+} \quad -1 < \delta < 1 \quad (6.5.6)$$

gde je  $\xi = \frac{\delta}{1 - \delta}$ . U tom slučaju u trenutku  $t+1$  odstupanje od cilja nakon podešavanja je

$$\varepsilon_{t+1} = N_{t+1} + \mathcal{Y}_{t+1} \quad (6.5.7)$$

tako da

$$\varepsilon_{t+1} = \frac{(1 - \delta)g}{1 - \delta B} X_{t+} + \hat{N}_t(1) + e_t(1) \quad (6.5.8)$$

gde je  $\hat{N}_t(1)$  prognoza za  $N_{t+1}$  u trenutku  $t$  sa greškom prognoze  $e_t(1)$ .

Koristeći prethodnu jednačinu dobijamo da je

$$X_{t+} - X_{t-+} = x_t = -\frac{1 - \delta B}{(1 - \delta)g} [\hat{N}_t(1) - \hat{N}_{t-1}(1)] \quad (6.5.9)$$

i odstupanje  $\varepsilon_{t+1}$  od cilja je jednako grešci prognoze  $e_t(1)$ . Tako opet zamenjujemo odstupanje  $N_{t+1}$  sa greškom njegove prognoze. Specijalno, ako je  $\hat{N}_t(1)$  EWMA prognoza sa parametrom izravnavanja  $\theta$ ,  $\lambda = 1 - \theta$  onda koristeći jednačinu (6.1.3) dobijamo

$$x_t = (1 - B) X_{t+} = -\frac{\lambda(1 - \delta B)}{(1 - \delta)g} \varepsilon_t = -\frac{\lambda(1 - \delta) + \lambda \delta \nabla}{(1 - \delta)g} \varepsilon_t \quad (6.5.10)$$

Konačno, ako  $N_t$  može da se reprezentuje IMA(0,1,1) procesom sa parametrom  $\theta$ , onda je  $\varepsilon_t = a_t$  i ovo podešavanje doprinosi srednjekvadratnoj kontroli. Nakon sumiranja jednačina (6.5.10) dobijamo

$$X_t = k_0 + k_p \varepsilon_t + k_I \sum_{i=1}^t \varepsilon_i \quad (6.5.11)$$

u kojoj je

$$k_p = -\frac{\lambda}{g} \xi \quad \text{i} \quad k_I = -\frac{\lambda}{g}. \quad (6.5.12)$$

Kontrolna jednačina (6.5.11) dovodi do diskretne analogije neprekidne PI kontrole koju smo ranije spominjali. Jednačina podešavanja koja odgovara diskretnoj integralnoj kontroli je

$$x_t = c_1 \varepsilon_t, \quad c_1 = k_I \quad (6.5.13)$$

a za PI kontrolu

$$x_t = c_1 \varepsilon_t + c_2 \varepsilon_{t-1}, \quad c_1 = k_I + k_p \quad \text{i} \quad c_2 = -k_p. \quad (6.5.14)$$

Na osnovu prethodne dve jednačine vidimo da podešavanje  $x_t$  linearno zavisi od poslednje, odnosno od poslednje dve greške, respektivno.

## 6.6. Uopštena šema kontrole povratnom spregom

Ovde ćemo da izvedemo kontrolnu šemu za uopštenije modele za smetnju i dinamiku procesa. Pretpostavimo da je serija podešavanja ulazne promenljive  $X_t$  koju menjamo reprezentovana dinamičkom funkcijom prenosa

$$\mathcal{Y}_t = L_1^{-1}(B)L_2(B)B^{f+1}X_{t+} \quad (6.6.1)$$

gde su  $L_1(B)$  i  $L_2(B)$  polinomi od  $B$ . Ova relacija dozvoljava da se javi  $f$  perioda čistog mrtvog vremena tj. kašnjenja pre nego što promena ulazne veličine izazove promenu izlazne veličine. Pretpostavimo još da je smetnja procesa tj. šum  $N_t$  predstavljen linearnim stohastičkim ARIMA modelom koji se definiše na sledeći način

$$N_t = \varphi^{-1}(B)\theta(B)a_t = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i B^i\right) a_t \quad (6.6.2)$$

gde je  $a_t$  beli šum. Onda greška na izlazu  $\varepsilon_{t+f+1} = Y_{t+f+1} - T$  u trenutku  $t + f + 1$  može biti zapisana kao

$$\varepsilon_{t+f+1} = \mathcal{Y}_{t+f+1} + N_{t+f+1} = L_1^{-1}(B)L_2(B)X_{t+} + N_{t+f+1} \quad (6.6.3)$$

Uticaoj smetnje u trenutku  $t + f + 1$  bi mogao da se ukloni ako bismo  $X_{t+}$  postavili da bude  $X_{t+} = -L_1(B)L_2^{-1}(B)N_{t+f+1}$ , ali kako je  $f + 1$  pozitivno to nije moguće. Umesto toga možemo da smetnju  $N_{t+f+1}$  zamenimo njenom optimalnom prognozom  $\hat{N}_t(f + 1)$  u trenutku  $t$  i da na taj način dobijemo kontrolu sa minimalnom srednjekvadratnom greškom. Dobijamo

$$N_{t+f+1} = \hat{N}_t(f + 1) + e_t(f + 1) \quad (6.6.4)$$

gde su  $\hat{N}_t(f + 1)$  prognoza u trenutku  $t$  i  $e_t(f + 1)$  greška te prognoze za  $f + 1$  koraka unapred. Šum  $N_{t+f+1}$  je nepoznat u trenutku  $t$ , ali se njegova srednjekvadratna prognoza može izvesti na osnovu niza posmatranih grešaka  $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots$ . Odatle sledi da će kontrolna jednačina

$$X_{t+} = -L_1(B)L_2^{-1}(B)\hat{N}_t(f + 1) \quad (6.6.5)$$

u trenutku  $t + f + 1$  da proizvede takvu vrednost izlazne promenljive koja će da otkloni prognoziranu vrednost šuma za  $f + 1$  koraka unapred i greška na izlazu će biti greška prognoze tj.  $\varepsilon_{t+f+1} = e_t(f + 1)$ .

Kontrolnu jednačinu možemo napisati koristeći niz grešaka  $\varepsilon_t$  tj.

$$\varepsilon_t = e_{t-f-1}(f + 1) = a_t + \psi_1 a_{t-1} + \dots + \psi_f a_{t-f} = L_4(B)a_t \quad (6.6.6)$$

i

$$\hat{N}_t(f + 1) = \psi_{f+1} a_t + \psi_{f+2} a_{t-1} + \dots = L_3(B)a_t \quad (6.6.7)$$

gde su polinomi  $L_3(B)$  i  $L_4(B)$  određeni modelom za šum  $N_t = \varphi^{-1}(B)\theta(B)a_t = \psi(B)a_t$ .

Iz jednačina (6.6.6) i (6.6.7) sledi da je

$$\hat{N}_t(f + 1) = L_3(B)L_4^{-1}(B)\varepsilon_t \quad (6.6.8)$$

Na osnovu toga dobijamo jednačinu srednjekvadratne kontrole povratnom spregom

$$X_{t+} = -\frac{L_1(B)L_3(B)}{L_2(B)L_4(B)}\varepsilon_t \quad (6.6.9)$$

Odavde sledi da podešavanje  $x_t = X_{t+} - X_{t-1+}$  u trenutku  $t$  iznosi

$$x_t = -\frac{L_1(B)L_3(B)(1-B)}{L_2(B)L_4(B)}\varepsilon_t. \quad (6.6.10)$$

## 6.7. Kontrola unapred

Pretpostavimo da su  $Y_t$ ,  $u_t$ ,  $X_t$  i  $N_t$  odstupanja od referentnih vrednosti koje su takve da ako bi se uslovi  $u=0$ ,  $X=0$  i  $N=0$  neprekidno održavali onda bi proces bio u ravnotežnom stanju i izlazna veličina procesa bi bila jednaka ciljanoj vrednosti tj.  $Y=0$ .

Pretpostavimo da je model funkcije prenosa koji povezuje posmatranu ulaznu smetnju  $u_t$  koju ne možemo da kontrolišemo i izlaznu promenljivu  $Y_t$  dat jednačinom

$$\mathcal{Y}_t = \delta^{-1}(B)\omega(B)B^b u_t \quad (6.7.1)$$

Promene u  $X$  će se desiti u trenucima  $t$ ,  $t-1$ ,  $t-2$ ,... odmah nakon što su posmatranja  $u_t$ ,  $u_{t-1}$ ,  $u_{t-2}$ ,... zabeležena. Vrednost za  $X$  u intervalu između  $t$  i  $t+1$  označavamo sa  $X_{t+}$ . Za ovakav pulsni unos pretpostavljamo da je model funkcije prenosa koji povezuje promenljivu koju menjamo  $X_t$  i izlaznu veličinu  $Y_t$  dat sa

$$\mathcal{Y}_{2t} = L_1^{-1}(B)L_2(B)B^{f+1}X_{t+} \quad (6.7.2)$$

gde su  $L_1(B)$  i  $L_2(B)$  polinomi od  $B$ . Ako ne bi bilo kontrole (tj. ako je  $X_t=0$  fiksirano) onda bi ukupno odstupanje  $\varepsilon_t = Y_t - T$  od cilja  $T=0$  na izlazu procesa bilo

$$\varepsilon_t = \delta^{-1}(B)\omega(B)u_{t-b} + N_t \quad (6.7.3)$$

Očigledno je da je moguće da se nadoknadi efekat merenih delova ukupne smetnje tako što ćemo podešavati  $X_t$ . Sada u trenutku  $t$  imamo

1. ukupni efekat ulazne smetnje  $u$  je

$$\delta^{-1}(B)\omega(B)u_{t-b} \quad (6.7.4)$$

2. ukupni efekat kompenzacije  $X$  je

$$L_1^{-1}(B)L_2(B)X_{t-f-1+} \quad (6.7.5)$$

i pretpostavljamo da je efekat ulaznih uticaja  $u$  i  $X$  na izlaznu veličinu  $Y$  aditivan. Onda će efekat posmatrane ulazne smetnje  $u$  biti otklonjen ako stavimo da je

$$L_1^{-1}(B)L_2(B)X_{t-f-1+} = -\delta^{-1}(B)\omega(B)u_{t-b} \quad (6.7.6)$$

Zbog toga, kontrolno delovanje u trenutku  $t$  treba da je takvo da

$$L_1^{-1}(B)L_2(B)X_{t+} = -\delta^{-1}(B)\omega(B)u_{t-(b-f-1)} \quad (6.7.7)$$

*Slučaj 1:  $b \geq f+1$*

U trenutku  $t$  vrednosti  $u_{t+1}, u_{t+2}, \dots$  su nepoznate. Zato kontrolno dejstvo (6.7.7) može da se realizuje samo ako je  $b-f-1 \geq 0$ . U tom slučaju u trenutku  $t$  promenljivu  $X$  koju menjamo postavljamo na vrednost

$$X_{t+} = -\frac{L_1(B)\omega(B)}{L_2(B)\delta(B)}u_{t-(b-f-1)} \quad (6.7.8)$$

Odnosno, veličina promena u  $X$  koju ćemo izvršiti odmah nakon što je posmatranje  $u_t$  dostupno je sledeće

$$x_t = X_{t+} - X_{t-1+} = -\frac{L_1(B)\omega(B)}{L_2(B)\delta(B)}(u_{t-(b-f-1)} - u_{t-1-(b-f-1)}) \quad (6.7.9)$$

*Slučaj 2:  $b < f+1$*

Može se desiti da je  $f+1 > b$ . To znači da posmatrana ulazna smetnja dođe do izlaza pre nego što kompenzatorno delovanje stupi na snagu. U ovom slučaju kontrolno delovanje dato jednačinom (6.7.8) ne može da se realizuje zato što u trenutku  $t$  relevantna vrednost  $u_{t+(f+1-b)}$  ulazne smetnje još uvek nije dostupna. Ovakve situacije bi trebalo izbegavati npr. tako što ćemo uzeti neku drugu kompenzatornu promenljivu koja brže deluje. Ipak, ponekad takva mogućnost ne postoji.

Predstavimo  $u'_t = \delta^{-1}(B)\omega(B)u_t$  linearnim modelom

$$u'_t = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \psi'_i B^i\right) \alpha_t \quad (6.7.10)$$

gde je  $\alpha_t$  beli šum čija je srednja vrednost nula i disperzija  $\sigma_\alpha^2$ . Tada je

$$u'_{t+f+1-b} = \hat{u}'_t(f+1-b) + e'_t(f+1-b) \quad (6.7.11)$$

Greška prognoze data je sledećim izrazom

$$e'_t(f+1-b) = \alpha_{t+f+1-b} + \psi'_1 \alpha_{t+f-b} + \dots + \psi'_{f-b} \alpha_{t+1} \quad (6.7.12)$$

Sada desnu stranu jednačine (6.7.8) možemo da napišemo u obliku

$$-L_1(B)L_2^{-1}(B)\hat{u}'_t(f+1-b) - L_1(B)L_2^{-1}(B)e'_t(f+1-b) \quad (6.7.13)$$

Greška prognoze  $e'_t(f+1-b)$  je funkcija nekorelisanih slučajnih veličina  $\alpha_{t+h}$  ( $h \geq 1$ ) koje se još uvek nisu desile u trenutku  $t$  i koje su nekorelisane sa bilo kojom promenljivom koja je poznata u trenutku  $t$  (i zbog toga se  $\alpha_{t+h}$  ne može prognozirati). Odatle sledi da se optimalno kontrolno dejstvo u smislu minimizacije srednjekvadratne greške postiže ako  $X$  postavimo tako da je

$$X_{t+} = -\frac{L_1(B)}{L_2(B)}\hat{u}'_t(f+1-b) \quad (6.7.14)$$

odnosno, veličina promene u trenutku  $t$  je

$$x_t = X_{t+} - X_{t-1+} = -\frac{L_1(B)}{L_2(B)}(\hat{u}'_t(f+1-b) - \hat{u}'_{t-1}(f+1-b)) \quad (6.7.15)$$

U odstupanju  $\varepsilon_t$  od cilja javlja se dodatna komponenta (nemerljiva smetnja  $N_t$ ) tj. dobija se da je

$$\varepsilon_t = N_t + e'_{t-f-1}(f+1-b) \quad (6.7.16)$$

Ako je ulazna smetnja data modelom  $\varphi_u(B)u_t = \theta_u(B)\alpha_t$ , onda se model za  $u'_t = \delta^{-1}(B)\omega(B)u_t$  može napisati u sledećem obliku:

$$\varphi'_u(B)u'_t = \theta'_u(B)\alpha_t \quad (6.7.17)$$

gde je  $\varphi'_u(B) = \varphi_u(B)\delta(B)$  i  $\theta'_u(B) = \theta_u(B)\omega(B)$ .

## 6.8. Kontrola unapred sa višestrukim ulaznim smetnjama

Jednačinu kontrole unapred možemo da izvedemo i u slučaju kada posmatramo nekoliko aditivnih ulaznih smetnji  $u_1, u_2, \dots, u_m$ . Pretpostavimo da je efekat svih ulaznih smetnji dat jednačinom

$$\mathcal{Y}_t = \sum_{j=1}^m \delta_j^{-1}(B) \omega_j(B) B^{b_j} u_{j,t} = \sum_{j=1}^m B^{b_j} u'_{j,t} \quad (6.8.1)$$

gde je  $u'_{j,t} = \delta_j^{-1}(B) \omega_j(B) u_{j,t}$  i, kao i ranije, model funkcije prenosa je

$$\mathcal{Y}_{2t} = L_1^{-1}(B) L_2(B) B^{f+1} X_{t+} \quad (6.8.2)$$

Koristeći isti postupak kao u slučaju jedne ulazne smetnje dobijamo traženo kontrolno dejstvo tj. u trenutku  $t$  veličina promene u  $X$  iznosi

$$x_t = -L_1(B) L_2^{-1}(B) \sum_{j=1}^m (u'_{j,t+f+1-b_j} - u'_{j,t+f-b_j}) \quad (6.8.3)$$

$$(u'_{j,t+f+1-b_j} - u'_{j,t+f-b_j}) = \begin{cases} u'_{j,t+f+1-b_j} - u'_{j,t+f-b_j} & f+1-b_j \leq 0 \\ \hat{u}'_{j,t}(f+1-b_j) - \hat{u}'_{j,t-1}(f+1-b_j) & f+1-b_j > 0 \end{cases} \quad (6.8.4)$$

Ako je  $N_t$  nemerljiva smetnja, onda će odstupanje od ciljane izlazne vrednosti biti

$$\varepsilon_t = N_t + \sum_{j=1}^m e'_{j,t-f-1}(f+1-b_j) \quad (6.8.5)$$

gde je  $e'_{j,t-f-1}(f+1-b_j) = 0$  ako je  $f+1-b_j \leq 0$ , a ako je  $f+1-b_j > 0$  onda je to greška prognoze koja odgovara  $j$ -toj ulaznoj veličini  $u_{j,t}$ .

S jedne strane, kontrola unapred nam omogućava da brzo delujemo i da na taj način otklonimo efekte ulaznih smetnji i ako je  $f+1-b_j \leq 0$  da u potpunosti predvidimo takve smetnje, bar u teoriji. S druge strane, da bismo koristili ovakav tip kontrole moramo biti u mogućnosti da merimo smetnje i da dobro poznajemo (ili bar da možemo dobro da ocenimo) vezu između svake ulazne smetnje i izlazne veličine procesa. Ipak, u praksi nikad ne možemo meriti sve smetnje koje utiču na sistem. Smetnje koje ostanu u sistemu tj. na koje nije uticala kontrola unapred označili smo sa  $N_t$  i one naravno mogu da povećaju izlaznu varijansu sistema ili da izazovu da proces odluta od cilja. Da bismo izbegli ovakvu situaciju uvodimo kombinovanu kontrolu.

## 6.9. Kombinovana kontrola

Kombinovana kontrola omogućava da se ulazne smetnje koje možemo da identifikujemo eliminišu kontrolom unapred, a da se smetnja koja je nakon toga ostala u sistemu smanji korišćenjem kontrole povratnom spregom.

Posmatrajmo sistem na koji utiče  $m$  ulaznih smetnji  $u_1, u_2, \dots, u_m$  koje možemo identifikovati. Pretpostavimo kao i do sada da je kombinovani efekat na izlazu procesa svih ulaznih smetnji i kompenzatorne ulazne promenljive  $X_t$  aditivan. Označimo sa  $N'_t$  neidentifikovanu smetnju i pretpostavimo da se uvećani šum  $N_t$  sastoji od  $N'_t$  i dela smetnje koja ne može biti prognozirana u trenutku  $t$ . Koristeći jednačinu (6.8.5) dobijamo

$$N_t = N'_t + \sum_{j=1}^m e'_{j,t-f-1}(f+1-b_j) \quad (6.9.1)$$

gde je  $e'_{j,t-f-1}(f+1-b_j) = 0$  ako je  $f+1-b_j \leq 0$ . Ako pretpostavimo da se  $N_t$  može reprezentovati linearnim stohastičkim procesom, onda se veza između prognoze šuma i greške prognoze može napisati u sledećem obliku

$$\frac{L_3(B)(1-B)}{L_4(B)} \varepsilon_t = \hat{N}_t(f+1) - \hat{N}_{t-1}(f+1) \quad (6.9.2)$$

gde  $\varepsilon_t = e_{t-f-1}(f+1) = N_t - \hat{N}_{t-f-1}(f+1)$ .

Analognim postupkom kao i ranije dolazimo do optimalnog kontrolnog dejstva koje minimizira srednjekvadratnu grešku na izlazu procesa

$$x_t = -\frac{L_1(B)}{L_2(B)} \left\{ \sum_{j=1}^m (u'_{j,t+f+1-b_j} - u'_{j,t+f-b_j}) + \frac{L_3(B)(1-B)}{L_4(B)} \varepsilon_t \right\} \quad (6.9.3)$$

gde je  $(u'_{j,t+f+1-b_j} - u'_{j,t+f-b_j})$  kao u (6.8.4). Prvi član u kontrolnoj jednačini (6.9.3) je kompenzacija kontrolom unapred, a drugi član kontrolom pomoću povratne sprege.

## Zaključak

U ovom radu razmotreni su osnovni principi statističke kontrole procesa kao i sekvencijalni test količnika verodostojnosti koji može biti primenjen u kontroli kvaliteta. Uvedeni su osnovni pojmovi vremenskih serija i prikazani neki modeli kojima se mogu modelirati smetnje i dinamika industrijskih procesa. Nakon toga prikazani su različiti sistemi podešavanja procesa.

Korišćenjem gore navedenih metoda omogućeno je detektovanje i uklanjanje različitih uzroka varijacije koji se javljaju u procesu, što doprinosi stabilnosti procesa a samim tim i poboljšanju kvaliteta.

## Literatura

1. A. Wald, Sequential Tests of Statistical Hypothesis, Columbia University (2011).
2. Aspekti kontrole procesa, neautorizovana skripta.
3. Stevan M. Stojanović, Matematička statistika, Naučna knjiga, Beograd (1980).
4. Douglas C. Montgomery, Introduction to Statistical Quality Control-6<sup>th</sup> ed., John Wiley & Sons, Inc. (2009).
5. Emina Resić, Pregled statističkih i njima saglasnih upravljačkih procedura i tehnika kod analize kvaliteta proizvodnih procesa, Ekonomski fakultet, Sarajevo (2005).
6. George E. P. Box, Gwilym M. Jenkins, et.al., Time Series Analysis : Forecasting and Control-4<sup>th</sup> ed., John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey (2008).
7. Jovan Mališić, Vremenske serije, Matematički fakultet, Beograd (2002).
8. Mohammad M. Altbrahim, Pramod K. Varshney, On Distributed Sequential Hypothesis Testing, Syracuse University (1991).
9. Tirthankar Dasgupta, C. F. Jeff Wu, Robust Parameter Design with Feedback Control, Georgia Institute of Technology, Atlanta, USA.
10. Vremenske serije, neautorizovana skripta.
11. Zlatko J. Kovačić, Analiza vremenskih serija, Ekonomski fakultet, Beograd (1995).
12. [http://en.wikipedia.org/wiki/Control\\_chart](http://en.wikipedia.org/wiki/Control_chart)
13. [https://controls.engin.umich.edu/wiki/index.php/SPC:\\_Basic\\_control\\_charts:\\_theory\\_and\\_construction,\\_sample\\_size,\\_x-bar,\\_r\\_charts,\\_s\\_charts](https://controls.engin.umich.edu/wiki/index.php/SPC:_Basic_control_charts:_theory_and_construction,_sample_size,_x-bar,_r_charts,_s_charts)
14. [http://en.wikipedia.org/wiki/Statistical\\_process\\_control](http://en.wikipedia.org/wiki/Statistical_process_control)
15. [http://en.wikipedia.org/wiki/PID\\_controller](http://en.wikipedia.org/wiki/PID_controller)
16. [http://en.wikipedia.org/wiki/Control\\_theory](http://en.wikipedia.org/wiki/Control_theory)
17. [https://controls.engin.umich.edu/wiki/index.php/Feedback\\_control](https://controls.engin.umich.edu/wiki/index.php/Feedback_control)
18. [http://en.wikipedia.org/wiki/Feed\\_forward\\_%28control%29](http://en.wikipedia.org/wiki/Feed_forward_%28control%29)