

Универзитет у Београду
Математички факултет

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ И ИНТЕГРАЛНИ РАЧУН
РАЗЛОМЉЕНОГ РЕДА

Мастер рад

студент: Петар Чукановић

ментор: проф. др Бошко Јовановић

Београд 2014

Садржај

Предговор.....	I
1 Уводни појмови	1
1.1 Гама функција	1
1.2 Бета функција.....	5
1.3 Митаг-Лефлерове функције.....	7
2 Изводи и интеграл разломљеног реда	9
2.1 Гринвалд-Летниковљеви изводи и интеграл разломљеног реда	9
2.2 Риман-Лиувилеви изводи и интеграл разломљеног реда	21
2.3 Капутови изводи и интеграл разломљеног реда	24
2.4 Примери разломљених извода и интеграла	25
3 Особине разломљених извода и интеграла	29
3.1 Слагање разломљених извода и интеграла	29
3.2 Лајбницово правило за разломљене изводе и интеграле.....	35
3.3 Лапласова трансформација разломљених извода и интеграла	41
4 Примене разломљених извода и интеграла.....	46
4.1 Разломљене диференцијалне једначине.....	46
4.2 Примена разломљеног рачуна у науци	50
Литература	57

Предговор

У математици се често срећемо са појмом извода. Са $\frac{d^n f}{dt^n}$ обележавамо извод реда $n \in \mathbb{N}$ функције $f(t)$. Ако уместо броја n имамо $p \in \mathbb{R}$ тада је реч о разломљеном изводу реда p функције $f(t)$.

Прве кораке у развоју теорије разломљеног рачуна направио је Ојлер 1738. године. Он је закључио да извод $\frac{d^p x^a}{dx^p}$ има смисла чак и када p није природан број. Касније 1820. је први пут израчунат извод $\frac{d^{1/2} x^a}{dx^{1/2}}$. Средином 19. века појављују се прве дефиниције разломљених извода, као и неке формуле разломљеног рачуна. Највећи допринос његовом развоју дали су Ојлер, Риман, Лиувил, Абел, Фурије... До краја 20. века откривене су многе физичке манифестације и различите примене разломљеног рачуна. Модели засновани на разломљеним диференцијалним једначинама се користе у физици, електротехници, биохемији, медицини, финансијама, теорији вероватноће и многим другим наукама.

У овом раду биће приказани неки основни резултати и примене разломљеног рачуна.

Рад се састоји од четири поглавља.

У првом поглављу приказаћемо неке уводне појмове и функције које се користе у разломљеном рачуну.

У другом поглављу представимо дефиниције разломљених извода и интеграла. Детаљно ће бити приказан поступак генерализације класичног извода. Такође ћемо видети да неке дефиниције нису еквивалентне.

У трећем поглављу извешћемо нека правила и теореме за слагање извода, као и неке интегралне трансформације са њима. Доказаћемо Њутн-Лајбницово правило за разломљене изводе које преставља уопштење Њутн-Лајбницовог правила за класичне изводе.

У четвртном поглављу решићемо неке основне разломљене диференцијалне једначине и приказати неке моделе засноване на разломљеним диференцијалним једначинама који се користе у науци.

Велику захвалност дугујем свом ментору проф. др Бошку Јовановићу за пружену помоћ приликом писања овог рада.

1 Уводни појмови

1.1 Гама функција

Гама функција $\Gamma(\alpha)$ се дефинише интегралом

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

Интеграл конвергира ако и само ако је $\alpha > 0$, па имамо да је домен Гама функције $(0, \infty)$.

Наведимо сада неколико особина гама функције које ћемо користити у разломљеном рачуну.

1) За свако $\alpha > 0$ важи

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (1.1)$$

што се лако добија парцијалном интеграцијом

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-t} dt = -t^{\alpha} e^{-t} \Big|_0^{\infty} + \alpha \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \alpha \Gamma(\alpha).$$

Формула (1.1) нам омогућава да израчунавање вредности гама функције за $\alpha > 1$ сведемо на израчунавање вредности $\Gamma(\alpha)$ за $0 < \alpha \leq 1$. Специјално, за $\alpha = n \in \mathbb{N}$ добијамо

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n(n - 1)\Gamma(n - 1) = \dots = n! \Gamma(1) = n! \int_0^{\infty} e^{-t} dt = n!.$$

Дакле на овај начин гама функцију можемо схватити као продужење факторијела са скупа природних бројева на скуп позитивних реалних бројева.

Такође формулом (1.1) можемо дефинисати гама функцију за неке негативне вредности аргумента α . За $-1 < \alpha < 0$ можемо по дефиницији ставити

$\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha + 1)/\alpha$. Настављајући овај поступак, гама функција се дефинише за све реалне бројеве α различите од 0 и од негативних целих бројева.

2) Гама функција је бесконачно диференцијабилна на свом основном домену $(0, \infty)$.

Формалним диференцирањем гама функције добијамо

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} \ln^n t dt, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

Да бисмо оправдали диференцирање у претходној формули потребно је доказати да интеграл са десне стране формуле (1.2) конвергира равномерно. Запишимо

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} \ln^n t dt = \int_0^1 t^{\alpha-1} e^{-t} \ln^n t dt + \int_1^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} \ln^n t dt.$$

За произвољно $\alpha > 0$ изаберимо α_1, α_2 такве да је $0 < \alpha_1 < \alpha < \alpha_2$. За $\alpha \geq \alpha_1$ и $0 < t < 1$ је $|t^{\alpha-1} e^{-t} \ln^n t| < t^{\alpha_1-1} |\ln^n t|$, па како $\int_0^1 t^{\alpha_1-1} |\ln^n t| dt$ конвергира, то $\int_0^1 t^{\alpha-1} e^{-t} \ln^n t dt$ конвергира равномерно за $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$.

За $\alpha \leq \alpha_2$ и $t > 1$ је $|t^{\alpha-1} e^{-t} \ln^n t| < t^{\alpha_2+n-1} e^{-t}$ (јер је $\ln t < t$), а $\int_1^{\infty} t^{\alpha_2+n-1} e^{-t} dt$ конвергира, па $\int_1^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} \ln^n t dt$ конвергира равномерно за $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$.

Дакле $\int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} \ln^n t dt$ конвергира равномерно за $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, па формула (1.2) важи, на сваком коначном затвореном подскупу од $(0, \infty)$.

3) Гама функција $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ је конвексна, као и функција $\ln \Gamma$.

Из формуле (1.2) имамо да је $\Gamma''(\alpha) > 0$ за $\alpha > 0$, па је $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ конвексна. Да бисмо доказали други део тврђења искористићемо да је

$$(\ln \Gamma)'' = \frac{\Gamma'' \Gamma - (\Gamma')^2}{\Gamma^2}.$$

На основу формуле (1.2) и Коши-Шварцове неједнакости за $\alpha > 0$, имамо

$$\begin{aligned}
[\Gamma'(\alpha)]^2 &= \left(\int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} \ln t dt \right)^2 = \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}} \right) \left(t^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}} \ln t \right) dt \right)^2 \\
&< \left(\int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt \right) \left(\int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} \ln^2 t dt \right) = \Gamma(\alpha) \Gamma''(\alpha).
\end{aligned}$$

Дакле, за свако $\alpha > 0$ важи $(\ln \Gamma(\alpha))'' > 0$, тј $\ln \Gamma$ је конвексна.

4) За гама функцију важи следећа Ојлер-Гаусова формула

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)}. \quad (1.3)$$

Докажимо ову формулу прво за $0 < \alpha \leq 1$. Нека је $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Тада је $n-1 < n < n+\alpha \leq n+1$, па како је $\ln \Gamma$ конвексна, добијамо

$$\frac{\ln \Gamma(n) - \ln \Gamma(n-1)}{n - (n-1)} \leq \frac{\ln \Gamma(n+\alpha) - \ln \Gamma(n)}{(n+\alpha) - n} \leq \frac{\ln \Gamma(n+1) - \ln \Gamma(n)}{(n+1) - n},$$

тј. $\ln(n-1) \leq \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\Gamma(n+\alpha)}{(n-1)!} \leq \ln n$. Одатле следи да је

$$(n-1)^\alpha (n-1)! \leq \Gamma(n+\alpha) \leq n^\alpha (n-1)!.$$

Узастопном применом формуле (1.1) имамо

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n-1}{n} \right)^\alpha \frac{n^\alpha (n-1)!}{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)} &= \frac{(n-1)^\alpha (n-1)!}{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)} \leq \Gamma(\alpha) \\
&\leq \frac{n^\alpha (n-1)!}{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)},
\end{aligned}$$

или другачије записано

$$\Gamma(\alpha) \leq \frac{n^\alpha (n-1)!}{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)} \leq \left(\frac{n-1}{n} \right)^\alpha \Gamma(\alpha),$$

одакле следи једнакост (1.3) за $0 < \alpha \leq 1$. За $\alpha > 1$ она се доказује применом једнакости (1.1). (На исти начин се доказује и да формула (1.3) важи за свако реално α различито од нуле и од негативних целих бројева).

5) За гама функцију важи формула допуне

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \quad (1.4)$$

Да бисмо ово доказали докажимо следећу Ојлерову формулу

$$\sin \pi\alpha = \pi\alpha \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (1.5)$$

Нека је a позитиван реалан број који није цео. Развојем функције $\cos at$, $t \in [-\pi, \pi]$ у Фуријеов ред имамо

$$\cos at = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \frac{2a \sin a\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2} \cos nt.$$

Ставимо сада $t = \pi$ у претходни израз и поделимо га са $\frac{\sin a\pi}{\pi}$. Добијамо

$$\pi \operatorname{ctg} a\pi - \frac{1}{a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2 - n^2}.$$

Интегралећи претходни израз по a на сегменту $[0, \alpha]$, $0 < \alpha < 1$ и узимајући у обзир да ред на десној страни равномерно конвергира на том сегменту имамо

$$\ln \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right),$$

односно

$$\sin \pi\alpha = \pi\alpha \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right).$$

Сада на основу формула (1.3) и (1.5) имамо да за $0 < \alpha < 1$ важи

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n^\alpha \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)} \cdot n^{1-\alpha} \frac{(n-1)!}{(1-\alpha)(2-\alpha) \cdots (n-\alpha)} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{\alpha(n-\alpha)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{1}\right) \cdots \left(1 + \frac{\alpha}{n-1}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{1}\right) \cdots \left(1 - \frac{\alpha}{n-1}\right)} \right]$$

$$= \frac{1}{\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha^2}{1^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{\alpha^2}{(n-1)^2}\right)} = \frac{1}{\alpha} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{\alpha^2}{n^2}} = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}.$$

Ако је $m < \alpha < m + 1$, $m \in \mathbb{Z}$, узмимо $\alpha = \beta + m$, где је $0 < \beta < 1$. Сада на основу претходног и (1.1) имамо

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = (-1)^m \Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta) = \frac{(-1)^m \pi}{\sin(\pi\beta)} = \frac{\pi}{\sin(\pi(\beta+m))} = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha},$$

што је и требало доказати.

1.2 Бета функција

Бета функција $B(\alpha, \beta)$ се дефинише интегралом

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt.$$

Интеграл конвергира ако је $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

- 1) Бета функција је симетрична, тј за све $\alpha, \beta > 0$ важи

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha).$$

- 2) Сменом $t = \frac{x}{1+x}$ добија се друга интегрална репрезентација бета функције

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx.$$

- 3) За $\alpha > 1$ и $\beta > 0$ важи

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 1} B(\alpha - 1, \beta) \quad (1.6)$$

Заиста, парцијалном интеграцијом добијамо

$$\begin{aligned} B(\alpha, \beta) &= \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\alpha-1}{\beta} \int_0^1 t^{\alpha-2} (1-t)^{\beta} dt \\ &= \frac{\alpha-1}{\beta} \left(\int_0^1 t^{\alpha-2} (1-t)^{\beta-1} dt - \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt \right) \\ &= \frac{\alpha-1}{\beta} B(\alpha-1, \beta) - \frac{\alpha-1}{\beta} B(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

одакле следи формула (1.6).

4) Између бета и гама функције постоји следећа веза

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}, \alpha > 0, \beta > 0. \quad (1.7)$$

Да бисмо ово доказали претпоставимо прво да је $\alpha > 1, \beta > 1$, и напишимо производ $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$ у облику

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \int_0^{\infty} z^{\beta-1} e^{-z} dz. \quad (1.8)$$

Уводећи смену $z = xy$ у други интеграл добијамо

$$\Gamma(\beta) = x^{\beta} \int_0^{\infty} y^{\beta-1} e^{-xy} dy,$$

па имамо

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} x^{\alpha+\beta-1} y^{\beta-1} e^{-(1+y)x} dy.$$

Функција $f(x, y) = x^{\alpha+\beta-1}y^{\beta-1}e^{-(1+y)x}$ је непрекидна и ненегативна на $[0, \infty) \times [0, \infty)$.

Интеграли

$$\int_0^{\infty} f(x, y) dx = \frac{y^{\beta-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} \Gamma(\alpha + \beta),$$

$$\int_0^{\infty} f(x, y) dy = x^{\alpha-1} e^{-x} \Gamma(\beta),$$

дефинишу непрекидне функције по $y \in [0, \infty)$, односно $x \in [0, \infty)$, а из (1.8) имамо да интеграл $\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} f(x, y) dy$ постоји. Дакле важи

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} f(x, y) dx = \Gamma(\alpha + \beta) \int_0^{\infty} \frac{y^{\beta-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} dy = \Gamma(\alpha + \beta) B(\alpha, \beta),$$

за $\alpha > 1, \beta > 1$. Да формула (1.7) важи и за све $\alpha > 0, \beta > 0$, добија се из формуле (1.1) и формуле (1.6).

1.3 Митаг-Лефлерове функције

Функција $e^t, t \in \mathbb{R}$ се може у облику реда записати као

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Уопштењем претходне формуле добијамо

$$E_{\alpha}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad t \in \mathbb{R}, \alpha > 0 \quad (1.9)$$

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad t \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \beta > 0 \quad (1.10)$$

где су формулама (1.9) и (1.10) редом дефинисане Митаг-Лефлерове функције једног и два параметра.

Из дефиниције (1.10) издвајамо неке специјалне случајеве

$$E_{1,1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t$$

$$E_{1,2}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)!} = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^t - 1}{t}$$

$$E_{2,1}(t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \operatorname{ch}(t)$$

$$E_{2,2}(t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\operatorname{sh}(t)}{t}$$

$$E_{2,1}(-t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} = \cos(t)$$

$$E_{2,2}(-t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sin(t)}{t}.$$

2 Изводи и интеграли разломљеног реда

2.1 Гринвалд-Летниковљеви изводи и интеграли разломљеног реда

Нека је $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција. Први извод ове функције у тачки $t \in (a, b)$ је

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}.$$

Примењујући ову дефиницију на $f'(t)$ добијамо

$$\begin{aligned} f''(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}. \end{aligned}$$

Настављајући даље имамо

$$f'''(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3},$$

и индукцијом

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t-rh).$$

Посматрајмо сада следећи израз

$$f_h^{(p)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh), \quad (2.1)$$

где је p произвољан цео број, а n природан број.

Очигледно да за $p \leq n$ важи

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(p)}(t) = f^{(p)}(t),$$

јер су у том случају биномни коефицијенти после $\binom{p}{p}$ нула.

Нека је сада p негативан цео број. Уведимо ознаку

$$\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \frac{p(p+1) \cdots (p+r-1)}{r!} = (-1)^r \binom{-p}{r}. \quad (2.2)$$

Замењујући p са $-p$ у (2.1) и користећи (2.2) имамо

$$f_h^{(-p)}(t) = h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t - rh), \quad (2.3)$$

где је p позитиван цео број.

Ако је n фиксирано, тада $f_h^{(-p)}(t) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Да бисмо добили вредност различиту од 0, претпоставимо да $n \rightarrow \infty$ кад $h \rightarrow 0$. Можемо узети $h = \frac{t-a}{n}$, и размотрити

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = t-a}} f_h^{(-p)}(t) = {}_a D_t^{-p} f(t).$$

За $p = 1$ из (2.3) имамо

$$f_h^{(-1)}(t) = h \sum_{r=0}^n f(t - rh).$$

Пошто је $t - nh = a$, и $f(t)$ је непрекидна важи

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = t-a}} f_h^{(-1)}(t) = {}_a D_t^{-1} f(t) = \int_0^{t-a} z f(t - z) dz = \int_a^t f(\tau) d\tau.$$

За $p = 2$ из (2.3) имамо

$$f_h^{(-2)}(t) = h^2 \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} 2 \\ r \end{bmatrix} f(t - rh) = h \sum_{r=0}^n (r+1) h f(t - rh).$$

Ако је $y = t + h$, претходни израз постаје

$$f_h^{(-2)}(t) = h \sum_{r=1}^{n+1} r h f(y - rh),$$

па кад $h \rightarrow 0$ имамо да $y \rightarrow t$ и важи

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-2)}(t) = {}_a D_t^{-2} f(t) = \int_0^{t-a} z f(t-z) dz = \int_a^t (t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

За $p = 3$ из (2.3) имамо

$$f_h^{(-3)}(t) = h^3 \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} 3 \\ r \end{bmatrix} f(t - rh) = \frac{h}{1 \cdot 2} \sum_{r=0}^n (r+1)(r+2) h^2 f(t - rh).$$

Опет ако је $y = t + h$, претходни израз постаје

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1 \cdot 2} \sum_{r=1}^{n+1} r(r+1) h^2 f(y - rh),$$

или другачије записано

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1 \cdot 2} \sum_{r=1}^{n+1} (rh)^2 f(y - rh) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \sum_{r=1}^{n+1} r h f(y - rh). \quad (2.4)$$

Кад $h \rightarrow 0$ имамо да $y \rightarrow t$ и важи

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-3)}(t) = {}_a D_t^{-3} f(t) = \frac{1}{2!} \int_0^{t-a} z^2 f(t-z) dz = \frac{1}{2!} \int_a^t (t-\tau)^2 f(\tau) d\tau,$$

јер за други сабирак у (2.4) важи

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \frac{h^2}{1 \cdot 2} \sum_{r=1}^{n+1} rhf(y-rh) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \frac{h}{1 \cdot 2} \int_a^t (t-\tau)f(\tau)d\tau = 0.$$

Претходни случајеви нам сугеришу да би требало да важи формула

$${}_aD_t^{-p}f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.5)$$

Докажимо да је заиста тако индукцијом. Нека формула (2.5) важи за p и докажимо да важи за $p+1$.

Уведимо функцију

$$f_1(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau.$$

Тада имамо

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{-(p+1)}f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{p+1} \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} f_1(t-rh) \\ &\quad - \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} f_1(t-(r+1)h). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Лако се може проверити да важи формула

$$\begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p+1 \\ r-1 \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

где смо узели да важи $\begin{bmatrix} p+1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$.

Сада замењујући (2.7) у прву суму формуле (2.6) и померајући индекс у другој суми добијамо

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^{-(p+1)} f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f_1(t-rh) + \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p+1 \\ r-1 \end{bmatrix} f_1(t-rh) \\
&\quad - \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=1}^{n+1} \begin{bmatrix} p+1 \\ r-1 \end{bmatrix} f_1(t-rh) \\
&= {}_a D_t^{-p} f_1(t) - \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \begin{bmatrix} p+1 \\ n \end{bmatrix} f_1(t-(n+1)h) \\
&= {}_a D_t^{-p} f_1(t) - (t-a)^p \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} p+1 \\ n \end{bmatrix} \frac{1}{n^p} f_1\left(a - \frac{t-a}{n}\right).
\end{aligned}$$

По дефиницији функције $f_1(t)$ имамо да важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_1\left(a - \frac{t-a}{n}\right) = 0,$$

а на основу (2.2) и Ојлер-Гаусове формуле за гама функцију (1.3) важи и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} p+1 \\ n \end{bmatrix} \frac{1}{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p+1)(p+2) \cdots (p+n)}{n^p n!} = \frac{1}{\Gamma(p+1)},$$

па добијамо

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^{-(p+1)} f(t) &= {}_a D_t^{-p} f_1(t) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f_1(\tau) d\tau \\
&= - \frac{(t-\tau)^p f_1(\tau)}{p!} \bigg|_{\tau=a}^{\tau=t} + \frac{1}{p!} \int_a^t (t-\tau)^p f(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{p!} \int_a^t (t-\tau)^p f(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

што је и требало доказати.

Докажимо још да израз (2.5) репрезентује p -тоструки интеграл.

Интегралећи следећу релацију

$$\frac{d}{d\tau_1} \left({}_a D_{\tau_1}^{-p} f(\tau_1) \right) = \frac{1}{(p-2)!} \int_a^{\tau_1} (\tau_1 - \tau)^{p-2} f(\tau) d\tau = {}_a D_{\tau_1}^{-p+1} f(\tau_1)$$

од a до t добијамо

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \int_a^t \left({}_a D_{\tau_1}^{-p+1} f(\tau_1) \right) d\tau_1.$$

Аналогно

$${}_a D_{\tau_1}^{-p+1} f(\tau_1) = \int_a^{\tau_1} \left({}_a D_{\tau_2}^{-p+2} f(\tau_2) \right) d\tau_2 \text{ итд,}$$

па важи

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p} f(t) &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} \left({}_a D_{\tau_2}^{-p+2} f(\tau_2) \right) d\tau_2 \\ &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} d\tau_2 \int_a^{\tau_2} \left({}_a D_{\tau_3}^{-p+3} f(\tau_3) \right) d\tau_3 \\ &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_a^{\tau_{p-1}} f(\tau_p) d\tau_p. \end{aligned}$$

Дакле видимо да су изрази за извод реда p и p -тоструки интеграл непрекидне функције $f(t)$ специјални случајеви формуле

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh), \quad (2.8)$$

која репрезентује извод реда m ако је $p = m$ и m -тоструки интеграл ако је $p = -m$.

Овакав закључак нам даје идеју да генерализујемо претходни израз тако што ћемо допустити да у претходној формули p буде произвољан реалан број.

Размотримо прво случај $p < 0$. Ради рачуна посматрајмо

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t - rh), \quad (2.9)$$

где је сада $p > 0$, а h и n су као и раније повезани релацијом $nh = t - a$. Формула (2.9) представља **Гринвалд-Летниковљеву** дефиницију разломљеног интеграла реда p .

Да бисмо доказали да лимес из дефиниције (2.9) постоји докажимо прво следећу теорему.

Теорема 1 Нека су дати низови β_k и $\alpha_{n,k}$ и нека важи:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 1, \quad (2.10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n,k} = 0, \text{ за свако } k, \quad (2.11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} = A, \quad (2.12)$$

$$\sum_{k=1}^n |\alpha_{n,k}| < K, \text{ за свако } n, \quad (2.13)$$

тада је:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} \beta_k = A. \quad (2.14)$$

Доказ: Услов (2.10) нам омогућава да напишемо

$$\beta_k = 1 - \sigma_k, \text{ где је } \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = 0. \quad (2.15)$$

Из услова (2.11) имамо да за свако фиксирано r

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{r-1} \alpha_{n,k} \beta_k = 0, \quad (2.16)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{r-1} \alpha_{n,k} = 0. \quad (2.17)$$

Користећи редом (2.16), (2.15), (2.12) и (2.17) имамо

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} \beta_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=r}^n \alpha_{n,k} \beta_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=r}^n \alpha_{n,k} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=r}^n \alpha_{n,k} \sigma_k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=r}^n \alpha_{n,k} \sigma_k = A - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=r}^n \alpha_{n,k} \sigma_k. \end{aligned}$$

Сада на основу (2.17) и (2.13) добијамо следећу неједнакост

$$\left| A - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} \beta_k \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=r}^n |\alpha_{n,k} \sigma_k| \leq \sigma^* \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=r}^n |\alpha_{n,k}| = \sigma^* \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=r}^n |\alpha_{n,k}| \leq \sigma^* K,$$

где је $\sigma^* = \max_{k \geq r} |\sigma^k|$.

Из (2.15) следи да за произвољно мало $\varepsilon > 0$ постоји r такво да $\sigma^* < \frac{\varepsilon}{K}$ и важи

$$\left| A - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} \beta_k \right| < \varepsilon,$$

па важи (2.14) а тиме и теорема.

Да бисмо применили теорему на израчунавање лимеса у (2.9) запишимо

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p} f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t - rh) \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \frac{1}{r^{p-1}} \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} h(rh)^{p-1} f(t - rh) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(p)} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \sum_{r=0}^n \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} [p]_r h (rh)^{p-1} f(t-rh) \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^n \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} [p]_r \frac{t-a}{n} \left(r \frac{t-a}{n}\right)^{p-1} f\left(t-r \frac{t-a}{n}\right)
\end{aligned}$$

и узмимо

$$\begin{aligned}
\beta_r &= \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} [p]_r \\
\alpha_{n,r} &= \frac{t-a}{n} \left(r \frac{t-a}{n}\right)^{p-1} f\left(t-r \frac{t-a}{n}\right).
\end{aligned}$$

Користећи Ојлер-Гаусову формулу за гама функцију (1.3) имамо

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \beta_r = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} [p]_r = 1. \quad (2.18)$$

Како је функција $f(t)$ непрекидна у затвореном интервалу $[a, b]$, важи

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^n \alpha_{n,r} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^n \frac{t-a}{n} \left(r \frac{t-a}{n}\right)^{p-1} f\left(t-r \frac{t-a}{n}\right) = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{r=0}^n h (rh)^{p-1} f(t-rh) = \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau.
\end{aligned} \quad (2.19)$$

Узимајући у обзир (2.18) и (2.19) и примењујући теорему 1 имамо

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n [p]_r f(t-rh) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau.$$

Ако је извод $f'(t)$ непрекидан у затвореном интервалу $[a, b]$, тада парцијалном интеграцијом добијамо

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{f(a)(t-a)^p}{\Gamma(p+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p f'(\tau) d\tau,$$

и ако функција $f(t)$ има $m + 1$ непрекидан извод у затвореном интервалу $[a, b]$ тада је

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau,$$

Размотримо сада случај $p > 0$. Наш циљ је исти као пре да израчунамо лимес

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) = \lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(p)}(t), \quad (2.20)$$

где је

$$f_h^{(p)}(t) = h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh).$$

Формула (2.20) представља **Гринвалд-Летниковљево** дефиницију извода реда p .

Да бисмо израчунали лимес (2.20) трансформишимо мало израз за $f_h^{(p)}(t)$.

Користећи особину биномних коефицијената

$$\binom{p}{r} = \binom{p-1}{r} + \binom{p-1}{r-1} \quad (2.21)$$

можемо писати

$$\begin{aligned} f_h^{(p)}(t) &= h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p-1}{r} f(t-rh) + h^{-p} \sum_{r=1}^n (-1)^r \binom{p-1}{r-1} f(t-rh) \\ &= h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p-1}{r} f(t-rh) + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{r+1} \binom{p-1}{r} f(t-(r+1)h) \\ &= (-1)^n \binom{p-1}{n} h^{-p} f(a) + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{p-1}{r} \Delta f(t-rh) \end{aligned} \quad (2.22)$$

где је $\Delta f(t - rh) = f(t - rh) - f(t - (r + 1)h)$, разлика првог реда уназад функције $f(\tau)$, у тачки $\tau = t - rh$.

Примењујући особину (2.21) m пута почевши од (2.22) добијамо

$$\begin{aligned}
 f_h^{(p)}(t) &= (-1)^n \binom{p-1}{n} h^{-p} f(a) + (-1)^{n-1} \binom{p-2}{n-1} h^{-p} \Delta f(a+h) \\
 &\quad + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r \binom{p-2}{r} \Delta^2 f(t-rh) \\
 &= (-1)^n \binom{p-1}{n} h^{-p} f(a) + (-1)^{n-1} \binom{p-2}{n-1} h^{-p} \Delta f(a+h) \\
 &\quad + (-1)^{n-2} \binom{p-3}{n-2} h^{-p} \Delta^2 f(a+2h) \\
 &= \dots \\
 &= \sum_{k=0}^m (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} h^{-p} \Delta^k f(a+kh) \\
 &\quad + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-m-1} (-1)^r \binom{p-m-1}{r} \Delta^{m+1} f(t-rh). \tag{2.23}
 \end{aligned}$$

Сада ћемо израчунати лимес k -ог члана прве суме у (2.23).

$$\begin{aligned}
 &\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} h^{-p} \Delta^k f(a+kh) \\
 &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} (n-k)^{p-k} \left(\frac{n}{n-k}\right)^{p-k} (nh)^{-p+k} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} \\
 &= (t-a)^{-p+k} \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} (n-k)^{p-k} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-k}\right)^{p-k} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} \\
 &= \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)}, \tag{2.24}
 \end{aligned}$$

јер из Ојлер-Гаусове формуле за гама функцију (1.3) следи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} (n-k)^{p-k}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-p+k+1)(-p+k+2) \cdots (-p+n)}{(n-k)^{-p+k} (n-k)!} = \frac{1}{\Gamma(-p+k+1)}$$

а важи и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-k} \right)^{p-k} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} = f^{(k)}(a).$$

Да бисмо израчунали лимес друге суме у (2.23) запишимо је у облику

$$\frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \sum_{r=0}^{n-m-1} (-1)^r \Gamma(-p+m+1) \binom{p-m-1}{r} r^{-m+p}$$

$$\cdot h(rh)^{m-p} \frac{\Delta^{m+1} f(t-rh)}{h^{m+1}}.$$

Применимо теорему 1 за

$$\beta_r = (-1)^r \Gamma(-p+m+1) \binom{p-m-1}{r} r^{-m+p}$$

$$\alpha_{n,r} = h(rh)^{m-p} \frac{\Delta^{m+1} f(t-rh)}{h^{m+1}}, \quad h = \frac{t-a}{n}$$

Користећи Ојлер-Гаусову формулу за гама функцију (1.3) имамо

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \beta_r = \lim_{r \rightarrow \infty} (-1)^r \Gamma(-p+m+1) \binom{p-m-1}{r} r^{-m+p} = 1 \quad (2.25)$$

и додатно ако је $m-p > -1$, тада

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{n-m-1} \alpha_{n,r} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \sum_{r=0}^{n-m-1} h(rh)^{m-p} \frac{\Delta^{m+1} f(t-rh)}{h^{m+1}} =$$

$$= \int_a^t (t - \tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau. \quad (2.26)$$

Користећи релације (2.25) и (2.26) и примењујући теорему добијамо

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{n-m-1} (-1)^r \binom{p-m-1}{r} \Delta^{m+1} f(t-rh) \\ = \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Користећи (2.24) и (2.27) коначно добијамо лимес

$$\begin{aligned} {}_a D_t^p f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Формула (2.28) је добијена под претпоставком да је функција $f(t)$ $m+1$ непрекидно диференцијабилна у затвореном интервалу $[a, b]$ и да је m такав цео број да важи $m > p - 1$. Најмање могуће такво m је одређено неједнакошћу

$$m \leq p < m + 1.$$

2.2 Риман-Лиувилеви изводи и интегрални разломљеног реда

Гринвалд-Летниковљев извод као лимес коначне разлике реда m није погодан за употребу. Желимо да се ослободимо лимеса и сума тако да можемо лакше да манипулишимо са разломљеним изводима.

Нека је $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција и нека је

$$f^{(-n)}(t) = \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_a^{\tau_{n-1}} f(\tau_n) d\tau_n,$$

где $n \in \mathbb{N}$ и $t \in (a, b)$. Већ смо показали да $f^{(-n)}(t)$ другачије можемо записати као

$$f^{(-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad (2.29)$$

Ако је $k \geq 0$ и $n \in \mathbb{N}$ имамо да важи формула

$$f^{(-k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^{-k} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad (2.30)$$

где D^{-k} означава k поновљених интеграција.

Такође ако $k, n \in \mathbb{N}$ и $k \geq n$ имамо да је $(k - n)$ -ти извод функције $f(t)$

$$f^{(k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^k \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (2.31)$$

где D^k означава k диференцирања.

Пређимо сада на реалне бројеве. Нека је $p > 0$. Замењујући у (2.29) добијемо

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.32)$$

Формула (2.32) представља **Риман-Лиувилу** дефиницију разломљеног интеграла реда p , који ћемо обележавати са ${}_a D_t^{-p} f(t)$. Интеграл конвергира пошто је $p > 0$.

Сада желимо да дефинишемо Риман-Лиувилу извод ${}_a D_t^p f(t)$ реда $p > 0$. Због конвергенције интеграла, не можемо ${}_a D_t^p f(t)$ дефинисати као у формули

(2.32). Међутим формула (2.31) за $(k - n)$ -ти извод функције $f(t)$ нам даје могућност да је продужимо на реалне бројеве.

Нека $k \in \mathbb{N}$ и нека је $0 < \alpha \leq 1$ ставимо тада

$${}_a D_t^{k-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (0 < \alpha \leq 1) \quad (2.33)$$

Означавајући $p = k - \alpha$, (2.33) можемо записати као

$${}_a D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau, \quad (k-1 \leq p < k) \quad (2.34)$$

или

$${}_a D_t^p f(t) = \frac{d^k}{dt^k} \left({}_a D_t^{-(k-p)} f(t) \right), \quad (k-1 \leq p < k) \quad (2.35)$$

Израз (2.34) представља **Риман-Лиувилу** дефиницију разломљеног извода реда p .

Докажимо сада једну теорему која нам даје везу између Риман-Лиувилуових и Гринвалд-Летниковљевих разломљених извода.

Теорема 2 Нека је $f(t)$ n пута непрекидно диференцијабилна на интервалу $[a, b]$. Тада за свако p ($0 < p < n$) и $t \in (a, b)$ Риман-Лиувилуов извод ${}_a D_t^p f(t)$ постоји, поклапа се са Гринвалд-Летниковљевим изводом реда p и ако је $0 \leq m - 1 \leq p < m \leq n$ тада важи

$${}_a D_t^p f(t) = {}_a D_t^p f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \quad (2.36)$$

Доказ Из формуле (2.28) видимо да је десна страна формуле (2.36) заправо Гринвалд-Летниковљев извод ${}_a D_t^p f(t)$. Са друге стране десну страну формуле (2.36) можемо записати у облику

$$\frac{d^m}{dt^m} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{m+k-p}}{\Gamma(m+k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(2m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{2m-p-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \right\},$$

а након m парцијалних интеграција претходни израз постаје

$$\frac{d^m}{dt^m} \left\{ \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau) d\tau \right\} = \frac{d^m}{dt^m} \left\{ {}_a D_t^{-(m-p)} f(t) \right\} = {}_a D_t^p f(t),$$

што је и требало и доказати. Из услова тереме јасно је да ${}_a D_t^p f(t)$ постоји.

2.3 Капутови изводи и интеграл разломљеног реда

Нека је $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна. И нека је $p > 0$. Дефинишимо **Капутов** разломљени интеграл ${}_a^C D_t^{-p} f(t)$ у тачки $t \in (a, b)$ на исти начин као Риман-Лиувиллов

$${}_a^C D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (2.37)$$

Као и код Риман-Лиувиллових интеграла и овде имамо проблем са продужењем формуле због конвергенције интеграла у (2.37). Да бисмо решили тај проблем Риман-Лиувиллов извод смо дефинисали

$${}_a D_t^p f(t) = \frac{d^k}{dt^k} \left({}_a D_t^{-(k-p)} f(t) \right), \quad (k-1 \leq p < k)$$

док ћемо код Капутових извода користити следећу дефиницију

$${}_a^C D_t^p f(t) = {}_a^C D_t^{-(k-p)} \left(f^{(k)}(t) \right) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f^{(k)}(\tau) d\tau, \quad (k-1 \leq p < k)$$

где $k \in \mathbb{N}$.

Очигледно ако је f k пута непрекидно диференцијабилна имамо да ${}_a^C D_t^p f(t)$ постоји. Дакле имамо да се Риман-Лиувиллови и Капутови интеграл поклапају, међутим због различитог редоследа интеграције и диференцирања Риман-Лиувиллови и Капутови изводи се не поклапају.

Капутови изводи су се добро показали у решавању различитих проблема у физици. Рад са њима омогућава коришћење физички интерпретабилних почетних услова облика $f(a), f'(a) \dots$ док су код Риман-Лиувиллових они облика ${}_a D_t^{\alpha-1} f(t), \dots$

На пример нека је $a = 0$. Лапласова трансформација Риман-Лиувиловог разломљеног извода је

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} {}_0 D_t^{\alpha} f(t) dt = p^{\alpha} F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k [{}_0 D_t^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0} \quad (n-1 \leq \alpha < n)$$

док је код Капутових извода она

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} {}_0^C D_t^{\alpha} f(t) dt = p^{\alpha} F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0). \quad (n-1 \leq \alpha < n)$$

где $F(p)$ означава Лапласову трансформацију функције $f(t)$.

(видети поглавље 3.4, формуле (3.33) и (3.36))

Такође ради физичке интерпретације корисно је да разломљени извод од константе буде 0, што важи у случају Капутових извода

$${}_0^C D_t^p C = 0,$$

где је $C = \text{const}$, док код Риман-Лиувиллових важи

$${}_0 D_t^p C = \frac{C t^{-p}}{\Gamma(1-p)}.$$

2.4 Примери разломљених извода и интеграла

Израчунајмо разломљене изводе и интеграле неких функција. Користићемо Риман-Лиувиллову дефиницију.

У наредним примерима можемо сматрати да важи $\frac{1}{\Gamma(p)} = 0$, ако је $p = 0$ или ако је p негативан цео број.

1) Нека је $f(t) = C$, где је $C = \text{const}$ и нека је $p > 0$.

Риман-Лиувилов интеграл од константе је

$${}_a D_t^{-p} C = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} C d\tau = C \frac{(t - a)^p}{\Gamma(p + 1)}, \quad (2.38)$$

а на основу њега Риман-Лиувилов извод је

$${}_a D_t^p C = \frac{d^k}{dt^k} ({}_a D_t^{-(k-p)} C) = \frac{d^k}{dt^k} \left(C \frac{(t - a)^{k-p}}{\Gamma(k - p + 1)} \right) = C \frac{(t - a)^{-p}}{\Gamma(1 - p)}, \quad (2.39)$$

где је $(k - 1 \leq p < k), k \in \mathbb{N}$.

2) Нека је $f(t) = (t - a)^q$ где је $q > -1$ и нека је $p > 0$.

Риман-Лиувилов интеграл реда p је

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p} (t - a)^q &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} (\tau - a)^q d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} (t - a)^{p+q-1} \int_a^t \left(1 - \frac{\tau - a}{t - a}\right)^{p-1} \left(\frac{\tau - a}{t - a}\right)^q d\tau. \end{aligned}$$

Сада сменом $u = \frac{\tau - a}{t - a}$ добијамо

$${}_a D_t^{-p} (t - a)^q = \frac{1}{\Gamma(p)} (t - a)^{p+q} \int_0^1 (1 - u)^{p-1} u^q du = \frac{1}{\Gamma(p)} (t - a)^{p+q} B(p, q + 1),$$

а на основу формуле (1.7) имамо

$${}_a D_t^{-p} (t - a)^q = \frac{\Gamma(q + 1)}{\Gamma(q + p + 1)} (t - a)^{p+q}. \quad (2.40)$$

У случају Риман-Лиувиловог извода имамо

$${}_a D_t^p (t - a)^q = \frac{d^k}{dt^k} ({}_a D_t^{-(k-p)} (t - a)^q)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+k-p+1)} (t-a)^{k-p+q} \right) \\
&= \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-p+1)} (t-a)^{q-p},
\end{aligned} \tag{2.41}$$

где је $(k-1 \leq p < k), k \in \mathbb{N}$.

Обједињујући претходне две формуле (2.40) и (2.41) имамо да за $p \in \mathbb{R}$ и $q > -1$.

$${}_a D_t^p (t-a)^q = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-p+1)} (t-a)^{q-p} \tag{2.42}$$

3) Нека је $f(t) = e^t$ и нека је $p > 0$. Ради једноставности нека је $a = 0$.

$${}_0 D_t^{-p} e^t = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-\tau)^{p-1} e^\tau d\tau$$

Сменом $u = t - \tau$ имамо

$${}_0 D_t^{-p} e^t = \frac{e^t}{\Gamma(p)} \int_0^t u^{p-1} e^{-u} du = \frac{e^t}{\Gamma(p)} \gamma(p, t). \tag{2.43}$$

Функција $\gamma(p, t)$ се назива доња некомплетна гама функција. Сменом $u = t(1-s)$ добијамо

$$\begin{aligned}
\gamma(p, t) &= \int_0^t u^{p-1} e^{-u} du = t^p e^{-t} \int_0^1 (1-s)^{p-1} e^{st} ds \\
&= t^p e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int_0^1 (1-s)^{p-1} s^n ds = t^p e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B(n+1, p) \\
&= t^p e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(p)}{\Gamma(n+1+p)} = t^p e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{p(p+1) \cdots (p+n)}
\end{aligned}$$

Враћајући овај израз у (2.43) добијамо

$${}_0 D_t^{-p} e^t = \frac{t^p}{\Gamma(p)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{p(p+1) \cdots (p+n)} = t^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(p+n+1)} = t^p E_{1,p+1}(t).$$

Такође на основу претходне формуле и (2.42) важи

$${}_0D_t^{-p} e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{{}_0D_t^{-p} t^n}{\Gamma(n+1)}. \quad (2.44)$$

Сада на основу (2.42) и (2.44) имамо

$$\begin{aligned} {}_0D_t^p e^t &= \frac{d^k}{dt^k} ({}_0D_t^{-(k-p)} e^t) = \frac{d^k}{dt^k} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{{}_0D_t^{-(k-p)} t^n}{\Gamma(n+1)} \right) \\ &= \frac{d^k}{dt^k} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+k-p}}{\Gamma(n+k-p+1)} \right) = t^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n-p+1)} = t^{-p} E_{1,1-p}(t). \end{aligned}$$

где је $(k-1 \leq p < k), k \in \mathbb{N}$.

3 Особине разломљених извода и интеграла

3.1 Слагање разломљених извода и интеграла

Пошто се најчешће користи Риман-Лиувилова дефиниција разломљених извода и интеграла углавном ћемо доказати за њих својства. Прво ћемо видети како се слажу разломљени интегралаи.

Теорема 3 Нека је $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција и нека $t \in (a, b)$. Ако је $p, q > 0$ тада важи

$${}_aD_t^{-p} \left({}_aD_t^{-q} f(t) \right) = {}_aD_t^{-q} \left({}_aD_t^{-p} f(t) \right) = {}_aD_t^{-p-q} f(t). \quad (3.1)$$

Доказ По дефиницији Риман-Лиувиллових интеграла (2.32) имамо

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{-p} \left({}_aD_t^{-q} f(t) \right) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} {}_aD_\tau^{-q} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} d\tau \int_a^\tau (\tau - \xi)^{q-1} f(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_a^t f(\xi) d\xi \int_\xi^t (t - \tau)^{p-1} (\tau - \xi)^{q-1} d\tau. \end{aligned}$$

Сада сменом $\tau = \xi + x(t - \xi)$ претходни израз постаје

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_a^t (t - \xi)^{p+q-1} f(\xi) d\xi \int_0^1 (1 - x)^{p-1} x^{q-1} dx \\ &= \frac{B(q, p)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_a^t (t - \xi)^{p+q-1} f(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_a^t (t-\xi)^{p+q-1} f(\xi) d\xi = {}_a D_t^{-p-q} f(t),$$

на основу особине (1.7) за бета функцију.

Размотримо сада слагање Риман-Лиувиллових интеграла и извода.

Теорема 4 Нека је као и пре $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција и нека $t \in (a, b)$. Нека је $p, q > 0$, и претпоставимо у случају да је $p > q$ да ${}_a D_t^{p-q} f(t)$ постоји. Тада важи

$${}_a D_t^p \left({}_a D_t^{-q} f(t) \right) = {}_a D_t^{p-q} f(t). \quad (3.2)$$

Доказ Докажимо прво да важи

$${}_a D_t^p \left({}_a D_t^{-p} f(t) \right) = f(t). \quad (3.3)$$

Нека је прво $p = n \in \mathbb{N}$. Тада имамо

$${}_a D_t^n \left({}_a D_t^{-n} f(t) \right) = \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau = \frac{d}{dt} \int_a^t f(\tau) d\tau = f(t).$$

Узимајући сада да је $k-1 \leq p < k$ и на основу (3.1) имамо

$${}_a D_t^{-k} f(t) = {}_a D_t^{-(k-p)} \left({}_a D_t^{-p} f(t) \right).$$

На основу претходног израза добијамо

$${}_a D_t^p \left({}_a D_t^{-p} f(t) \right) = \frac{d^k}{dt^k} \left({}_a D_t^{-(k-p)} \left({}_a D_t^{-p} f(t) \right) \right) = \frac{d^k}{dt^k} \left({}_a D_t^{-k} f(t) \right) = f(t),$$

па имамо да (3.3) важи.

Вратимо се сада на доказ формуле (3.2). Ако је $q \geq p$ на основу (3.1) и (3.3) имамо

$${}_a D_t^p \left({}_a D_t^{-q} f(t) \right) = {}_a D_t^p \left({}_a D_t^{-p} \left({}_a D_t^{-(q-p)} f(t) \right) \right) = {}_a D_t^{-(q-p)} f(t) = {}_a D_t^{p-q} f(t).$$

Нека је сада $p > q$ и нека су $m, n \in \mathbb{N}$ такви да је $m - 1 \leq p < m$ и $n - 1 \leq p - q < n$. Сада на основу Риман-Лиувиллове дефиниције разломљеног извода (2.35) и (3.1) добијамо

$$\begin{aligned} {}_aD_t^p \left({}_aD_t^{-q} f(t) \right) &= \frac{d^m}{dt^m} \left\{ {}_aD_t^{-(m-p)} \left({}_aD_t^{-q} f(t) \right) \right\} = \frac{d^m}{dt^m} \left({}_aD_t^{p-q-m} f(t) \right) \\ &= \frac{d^n}{dt^n} \left({}_aD_t^{p-q-n} f(t) \right) = {}_aD_t^{p-q} f(t). \end{aligned}$$

Овиме смо завршили доказ теореме.

Докажимо сада други случај слагања Риман-Лиувиллових извода и интеграла.

Теорема 5 Нека је као и пре $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција и нека $t \in (a, b)$. Нека је $p, q > 0$, и претпоставимо да је ${}_aD_t^q f(t)$ интеграбилан. Тада важи

$${}_aD_t^{-p} \left({}_aD_t^q f(t) \right) = {}_aD_t^{q-p} f(t) - \sum_{j=1}^k \left[{}_aD_t^{q-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(1+p-j)} \quad (3.4)$$

где је $k - 1 \leq q < k$, $k \in \mathbb{N}$.

Доказ Слично као у претходној теореме докажимо прво да важи

$${}_aD_t^{-p} \left({}_aD_t^p f(t) \right) = f(t) - \sum_{j=1}^k \left[{}_aD_t^{p-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(1+p-j)}. \quad (3.5)$$

Из дефиниције (2.32) имамо

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{-p} \left({}_aD_t^p f(t) \right) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} {}_aD_\tau^p f(\tau) d\tau \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p {}_aD_\tau^p f(\tau) d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

а сада примењујући парцијалну интеграцију и користећи (3.1) добијамо

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p {}_aD_t^p f(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p \frac{d^k}{dt^k} \{ {}_aD_t^{-(k-p)} f(\tau) \} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(p-k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p-k} \{ {}_aD_t^{-(k-p)} f(\tau) \} d\tau \\
&\quad - \sum_{j=1}^k \left[\frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}} {}_aD_t^{-(k-p)} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(p-k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p-k} \{ {}_aD_t^{-(k-p)} f(\tau) \} d\tau \\
&\quad - \sum_{j=1}^k \left[{}_aD_t^{p-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)} \\
&= {}_aD_t^{-(p-k+1)} \left({}_aD_t^{-(k-p)} f(t) \right) \\
&\quad - \sum_{j=1}^k \left[{}_aD_t^{p-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)} \\
&= {}_aD_t^{-1} f(t) - \sum_{j=1}^k \left[{}_aD_t^{p-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)}. \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Комбинујући (3.6) и (3.7) закључујемо да важи (3.5).

Да бисмо доказали формулу (3.4) искористимо прво особину (3.1) ако је $q \leq p$ и особину (3.2) ако је $q \geq p$ а након тога и (3.5) и имамо

$${}_aD_t^{-p} \left({}_aD_t^q f(t) \right) = {}_aD_t^{q-p} \left({}_aD_t^{-q} {}_aD_t^q f(t) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= {}_aD_t^{q-p} \left\{ f(t) - \sum_{j=1}^k [{}_aD_t^{q-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{q-j}}{\Gamma(1+p-j)} \right\} \\
&= {}_aD_t^{q-p} f(t) - \sum_{j=1}^k [{}_aD_t^{q-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(1+p-j)}.
\end{aligned}$$

где смо користили

$${}_aD_t^{q-p} \left\{ \frac{(t-a)^{q-j}}{\Gamma(1+p-j)} \right\} = \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(1+p-j)},$$

што важи на основу (2.42).

Покажимо сада како се слажу изводи целог реда и Риман-Лиувилеви изводи.

Теорема 6 Нека је $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $k+n$ пута непрекидно диференцијабилна функција и нека $t \in (a, b)$. Ако је $k-1 \leq p < k$, тада важи

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}_aD_t^p f(t)) = {}_aD_t^{n+p} f(t) \quad (3.8)$$

Доказ На основу дефиниције Риман-Лиувилевих извода (2.34) имамо

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}_aD_t^p f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^{n+k}}{dt^{n+k}} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau = {}_aD_t^{n+p} f(t) \quad (k-1 \leq p < k)$$

Размотримо сада обрнути редослед операција.

Теорема 7 Нека је $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $k+n$ пута непрекидно диференцијабилна функција и нека $t \in (a, b)$. Ако је $k-1 \leq p < k$, тада важи

$${}_aD_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}_aD_t^{p+n} f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-p-n}}{\Gamma(1+j-p-n)} \quad (3.9)$$

Доказ

$${}_a D_t^{-n} f^{(n)}(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau) d\tau = f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^j}{\Gamma(j+1)} \quad (3.10)$$

Сада користећи (3.2), (3.10) и (2.42) имамо

$$\begin{aligned} {}_a D_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) &= {}_a D_t^{p+n} \left({}_a D_t^{-n} f^{(n)}(t) \right) \\ &= {}_a D_t^{p+n} \left(f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^j}{\Gamma(j+1)} \right) \\ &= {}_a D_t^{p+n} f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-p-n}}{\Gamma(1+j-p-n)} \end{aligned}$$

што је и требало доказати.

На основу претходне две теореме имамо да важи

$$\frac{d^n}{dt^n} \left({}_a D_t^p f(t) \right) = {}_a D_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}_a D_t^{p+n} f(t)$$

ако и само ако

$$f^{(k)}(a) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

Остаје још да видимо како се слажу два Риман-Лиувилова извода.

Теорема 8 Нека је $p, q > 0$ и $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $m+n$ пута непрекидно диференцијабилна функција, где је $(m-1 \leq p < m)$ и $(n-1 \leq q < n)$ и нека $t \in (a, b)$. Тада важи

$${}_a D_t^p \left({}_a D_t^q f(t) \right) = {}_a D_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^n \left[{}_a D_t^{q-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-j}}{\Gamma(1-p-j)}. \quad (3.11)$$

Доказ Користећи дефиницију Риман-Лиувилевих извода (2.34), (3.4) и (3.8) имамо

$${}_a D_t^p \left({}_a D_t^q f(t) \right) = \frac{d^m}{dt^m} \left\{ {}_a D_t^{-(m-p)} \left({}_a D_t^q f(t) \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d^m}{dt^m} \left\{ {}_aD_t^{p+q-m} f(t) - \sum_{j=1}^n [{}_aD_t^{q-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{m-p-j}}{\Gamma(1+m-p-j)} \right\} \\
&= {}_aD_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^n [{}_aD_t^{q-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-j}}{\Gamma(1-p-j)},
\end{aligned}$$

што је и требало доказати.

Замењујући p и q можемо писати

$${}_aD_t^q ({}_aD_t^p f(t)) = {}_aD_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^n [{}_aD_t^{p-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-q-j}}{\Gamma(1-q-j)}. \quad (3.12)$$

Изрази (3.11) и (3.12) нам дају да у општем случају Риман-Лиувилеви изводи ${}_aD_t^p f(t)$ и ${}_aD_t^q f(t)$ не комутирају.

Такође из (3.11) и (3.12) имамо

$${}_aD_t^p ({}_aD_t^q f(t)) = {}_aD_t^q ({}_aD_t^p f(t)) = {}_aD_t^{p+q} f(t)$$

ако и само ако

$$[{}_aD_t^{p-j} f(t)]_{t=a} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

$$[{}_aD_t^{q-j} f(t)]_{t=a} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

3.2 Лајбницово правило за разломљене изводе и интеграле

Познато Лајбницово правило за рачунање n -тог извода производа функција $\varphi(t)$ и $f(t)$, где $n \in \mathbb{N}$ гласи

$$\frac{d^n}{dt^n} (\varphi(t)f(t)) = \sum_{k=0}^n \varphi^{(k)}(t) f^{(n-k)}(t). \quad (3.13)$$

Заменимо сада у десној страни формуле (3.13) n реалним параметром p . Ово значи да ћемо извод $f^{(n-k)}(t)$ заменити Риман-Лиувилевим изводом ${}_aD_t^{p-k}f(t)$. Означимо

$$\Omega_n^p(t) = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \varphi^{(k)}(t) {}_aD_t^{p-k}f(t), \quad (3.14)$$

и израчунајмо суму са десне стране формуле (3.14).

Претпоставимо прво да је $p = q < 0$. Тада имамо да је $p - k = q - k < 0$ за све k , и по дефиницији Риман-Лиувиловог интеграла (2.32) имамо

$${}_aD_t^{q-k}f(t) = \frac{1}{\Gamma(-q+k)} \int_a^t (t-\tau)^{-q+k-1} f(\tau) d\tau,$$

што води до формуле

$$\begin{aligned} \Omega_n^q(t) &= \sum_{k=0}^n \binom{q}{k} \frac{1}{\Gamma(-q+k)} \int_a^t (t-\tau)^{-q+k-1} \varphi^{(k)}(t) f(\tau) d\tau \\ &= \int_a^t \left\{ \sum_{k=0}^n \binom{q}{k} \frac{1}{\Gamma(-q+k)} \varphi^{(k)}(t) (t-\tau)^k \right\} \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{q+1}} d\tau. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Узимајући у обзир формуле (1.1) и (1.4) имамо

$$\begin{aligned} \binom{q}{k} \frac{1}{\Gamma(-q+k)} &= \frac{\Gamma(q+1)}{k! \Gamma(q-k+1)} \cdot \frac{1}{\Gamma(-q+k)} = \frac{\Gamma(q+1)}{k!} \cdot \frac{\sin(k-q)\pi}{\pi} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{\Gamma(q+1)}{k!} \cdot \frac{\sin(q\pi)}{\pi} \end{aligned}$$

и стога (3.15) постаје

$$\Omega_n^q(t) = -\frac{\sin(k-q)\pi}{\pi} \Gamma(q+1) \int_a^t \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \varphi^{(k)}(t) (t-\tau)^k \right\} \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{q+1}} d\tau.$$

На основу Тејлорове формуле

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \varphi^{(k)}(t)(t-\tau)^k &= \varphi(t) + \varphi'(t)(\tau-t) + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(t)}{n!}(\tau-t)^n \\ &= \varphi(\tau) + \frac{1}{n!} \int_{\tau}^t \varphi^{(n+1)}(\xi)(\tau-\xi)^n d\xi, \end{aligned}$$

добиамо

$$\begin{aligned} \Omega_n^q(t) &= -\frac{\sin(k-q)\pi}{\pi} \Gamma(q+1) \int_a^t (t-\tau)^{-q-1} \varphi(t) f(\tau) d\tau \\ &\quad - \frac{\sin(q\pi) \Gamma(q+1)}{\pi \cdot n!} \int_a^t (t-\tau)^{-q-1} f(\tau) d\tau \int_{\tau}^t \varphi^{(n+1)}(\xi)(\tau-\xi)^n d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_a^t (t-\tau)^{-q-1} \varphi(t) f(\tau) d\tau \\ &\quad + \frac{1}{n! \Gamma(-q)} \int_a^t (t-\tau)^{-q-1} f(\tau) d\tau \int_{\tau}^t \varphi^{(n+1)}(\xi)(\tau-\xi)^n d\xi \\ &= {}_a D_t^q(\varphi(t)f(t)) + R_n^q(t), \end{aligned} \tag{3.16}$$

где је

$$R_n^q(t) = \frac{1}{n! \Gamma(-q)} \int_a^t (t-\tau)^{-q-1} f(\tau) d\tau \int_{\tau}^t \varphi^{(n+1)}(\xi)(\tau-\xi)^n d\xi.$$

Размотримо сада случај $p > 0$. Желимо да покажемо да се израчунавање $\Omega_n^p(t)$ може свести на израчунавање $\Omega_n^q(t)$ за одговарајуће $q < 0$.

На основу особине биномних коефицијената

$$\binom{p}{k} = \binom{p-1}{k} + \binom{p-1}{k-1}$$

где је $\binom{p-1}{-1} = 0$ имамо

$$\begin{aligned}\Omega_n^q(t) &= \sum_{k=0}^n \binom{p-1}{k} \varphi^{(k)}(t) {}_aD_t^{p-k} f(t) + \sum_{k=1}^n \binom{p-1}{k-1} \varphi^{(k)}(t) {}_aD_t^{p-k} f(t) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{p-1}{k} \varphi^{(k)}(t) \frac{d}{dt} ({}_aD_t^{p-k-1} f(t)) + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{p-1}{k} \frac{d}{dt} (\varphi^{(k)}(t)) {}_aD_t^{p-k-1} f(t) \\ &= \binom{p-1}{n} \varphi^{(n)}(t) {}_aD_t^{p-n} f(t) + \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{p-1}{k} \varphi^{(k)}(t) {}_aD_t^{p-k-1} f(t).\end{aligned}$$

Ако се израз

$$\frac{d}{dt} \left\{ \binom{p-1}{n} \varphi^{(n)}(t) {}_aD_t^{p-n-1} f(t) \right\}$$

дода и одузме, добијамо

$$\begin{aligned}\Omega_n^p(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{p-1}{k} \varphi^{(k)}(t) {}_aD_t^{p-k-1} f(t) - \binom{p-1}{n} \varphi^{(n+1)}(t) {}_aD_t^{p-n-1} f(t) \\ &= \frac{d}{dt} \Omega_n^{p-1}(t) - \binom{p-1}{n} \varphi^{(n+1)}(t) {}_aD_t^{p-n-1} f(t).\end{aligned}\tag{3.17}$$

На основу (3.17) израчунавање $\Omega_n^p(t)$ се може свести на израчунавање $\Omega_n^{p-1}(t)$. Настављајући поступак можемо свести израчунавање $\Omega_n^p(t)$ ($p > 0$), на израчунавање $\Omega_n^q(t)$ ($q < 0$).

Нека је сада $0 < p < 1$. Тада је $p-1 < 0$ и на основу (3.16) имамо

$$\Omega_n^{p-1}(t) = {}_aD_t^{p-1}(\varphi(t)f(t)) + R_n^{p-1}(t).\tag{3.18}$$

Диференцирајући $R_n^{p-1}(t)$ добијамо

$$\frac{d}{dt} R_n^{p-1}(t) = \frac{-p}{n! \Gamma(-p+1)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} f(\tau) d\tau \int_{\tau}^t \varphi^{(n+1)}(\xi) (\tau-\xi)^n d\xi$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(-1)^n \varphi^{(n+1)}(t)}{n! \Gamma(-p+1)} \int_a^t (t-\tau)^{-p+n} f(\tau) d\tau \\
& = R_n^p(t) + \frac{(-1)^n \Gamma(-p+n+1) \varphi^{(n+1)}(t)}{n! \Gamma(-p+1)} {}_a D_t^{p-n-1} f(t). \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Сада диференцирајући (3.18) и користећи (3.19) добијамо

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \Omega_n^{p-1}(t) &= {}_a D_t^p (\varphi(t)f(t)) + R_n^p(t) + \frac{(-1)^n \Gamma(-p+n+1) \varphi^{(n+1)}(t)}{n! \Gamma(-p+1)} {}_a D_t^{p-n-1} f(t) \\
&= {}_a D_t^p (\varphi(t)f(t)) + R_n^p(t) + \binom{p-1}{n} \varphi^{(n+1)}(t) {}_a D_t^{p-n-1} f(t). \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Замењујући (3.20) у (3.17) имамо да је

$$\Omega_n^p(t) = {}_a D_t^p (\varphi(t)f(t)) + R_n^p(t), \quad (3.21)$$

што је исто као и (3.16).

Математичком индукцијом можемо показати да релација (3.21) важи за све p такве да је $p+1 < n$.

Очигледно да нам релација (3.21) даје правило за разломљено диференцирање производа две функције. Ово је генерализација Лајбницовог правила за целобројне изводе па ћемо је и даље звати Лајбницовим правилом за разломљене изводе.

Лајбницово правило за разломљене изводе гласи:

Ако је $f(t)$ непрекидна на $[a, b]$ и $\varphi(t)$ има $n+1$ - непрекидан извод на $[a, b]$, тада је разломљени извод производа $\varphi(t)f(t)$ дат формулом

$${}_a D_t^p (\varphi(t)f(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \varphi^{(k)}(t) {}_a D_t^{p-k} f(t) - R_n^p(t), \quad (3.22)$$

где је $n \geq p+1$ и

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n! \Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} f(\tau) d\tau \int_{\tau}^t \varphi^{(n+1)}(\xi) (\tau-\xi)^n d\xi. \quad (3.22)$$

Суму у (3.22) можемо сматрати парцијалном сумом реда и $R_n^p(t)$ остатком тог реда.

Сменом променљивих $\xi = \tau + \zeta(t-\tau)$ и $\tau = a + \eta(t-a)$ добијамо следећи израз

$$\begin{aligned} R_n^p(t) &= \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p} f(\tau) d\tau \int_0^1 \varphi^{(n+1)}(\tau + \zeta(t-\tau)) \zeta^n d\zeta \\ &= \frac{(-1)^n (t-a)^{n-p+1}}{n! \Gamma(-p)} \int_0^1 \int_0^1 F_a(t, \zeta, \eta) d\eta d\zeta \end{aligned}$$

$$F_a(t, \zeta, \eta) = f(a + \eta(t-a)) \varphi^{(n+1)}(a + (t-a)(\zeta + \eta - \zeta\eta)),$$

одакле директно следи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^p(t) = 0$$

ако су функције $f(t)$ и $\varphi(t)$ непрекидне са свим својим изводима на $[a, b]$. Под овим условима Лајбницово правило за разломљене изводе гласи

$${}_a D_t^p (\varphi(t) f(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} \varphi^{(k)}(t) {}_a D_t^{p-k} f(t)$$

Да бисмо оправдали све претходно за $R_n^p(t)$ докажимо да је $R_n^p(t)$ коначно за $p > 0$. Функција

$$\frac{f(\tau) \int_{\tau}^t \varphi^{(n+1)}(\xi) (\tau-\xi)^n d\xi}{(t-\tau)^{p+1}} \quad (3.24)$$

даје нам израз $\frac{0}{0}$ за $\tau = t$. Применом Лопиталовог правила имамо

$$\frac{f'(\tau) \int_{\tau}^t \varphi^{(n+1)}(\xi)(\tau - \xi)^n d\xi + n f(\tau) \int_{\tau}^t \varphi^{(n+1)}(\xi)(\tau - \xi)^{n-1} d\xi}{-(p+1)(t-\tau)^p},$$

што опет даје израз $\frac{0}{0}$ за $\tau = t$. Међутим ако је $m < p \leq m+1$ применом Лопиталовог правила $m+2$ пута у имениоцу имамо

$$C(t-\tau)^{p-m-1}, C = \text{const}$$

(што је за $\tau = t$ бесконачно у случају $m < p < m+1$ и једнако C у случају $p = m+1$).

Бројилац се састоји од сабирака облика

$$C f^{(j)}(\tau) \int_{\tau}^t \varphi^{(n+1)}(\xi)(\tau - \xi)^{n-k} d\xi,$$

где је $k, j \leq m+2$, а $C = \text{const}$. Када $\tau \rightarrow t$ имамо да је претходни израз 0, ако је $n > k$, па можемо узети $n \geq m+2$ и функција (3.24) ће бити 0 кад $\tau \rightarrow t$. Ово значи да интеграл у (3.23) постоји чак за $p > -1$.

3.3 Лапласова трансформација разломљених извода и интеграла

Наведимо прво неке основне особине Лапласове трансформације.

Нека $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Функција $F(s)$ где је s комплексна променљива дефинисана са

$$F(s) = L\{f(t); s\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (3.25)$$

је Лапласова трансформација функције $f(t)$. Функција $f(t)$ се назива оригинал. Оригинале ћемо обележавати малим, а њихове Лапласове трансформације великим словима.

Ако је функција $f(t)$ део по део непрекидна на интервалу $[0, A]$, за свако $A > 0$ и експоненцијалног реда α у бесконачности, тј. постоје константе M и T такве да је

$$e^{-\alpha t} |f(t)| \leq M \quad \text{за свако } t > T,$$

тада $F(s)$ постоји за све s за које је $\operatorname{Re} s > \alpha$.

Формула за инверзну Лапласову трансформацију је

$$f(t) = L^{-1}\{F(s); t\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds \quad (3.26)$$

где је c позитиван реалан број такав да је већи од реалних делова свих сингуларитета функције $e^{st} F(s)$. Директно рачунање инверзне Лапласове трансформације није практично.

Лапласова трансформација конволуције функција $f(t)$ и $g(t)$ које су обе једнаке 0 за $t < 0$

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

је производ Лапласових трансформација ових функција

$$L\{f(t) * g(t); s\} = F(s)G(s), \quad (3.27)$$

под условом да обе $F(s)$ и $G(s)$ постоје.

Такође ћемо користити формулу за Лапласову трансформацију извода реда n функције $f(t)$:

$$L\{f^{(n)}(t); s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0), \quad (3.28)$$

која се може добити из дефиниције парцијалном интеграцијом под условом да одговарајући интеграл постоје.

Размотримо сада Лапласову трансформацију Риман-Лиувиллових интеграла.

До сада смо дефинисали Риман-Лиувиллове интеграле и изводе функција на коначним интервалима. Без икаквих проблема можемо их дефинисати и на интервалу $[0, \infty)$, јер на ${}_0D_t^{-p}f(t)$ има утицај само понашање функције $f(t)$ на коначним интервалима.

Нека је $p > 0$ и $g(t) = \frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)}$, $t \geq 0$ тада је

$${}_0D_t^{-p}f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau = g(t) * f(t).$$

Лапласова трансформација функције $g(t)$ је

$$G(s) = L\{g(t); s\} = s^{-p}.$$

Сада на основу формуле (3.27) за конволуцију имамо

$$L\{{}_0D_t^{-p}f(t); s\} = s^{-p} F(s). \quad (3.29)$$

Одредимо сада Лапласову трансформацију Риман-Лиувиловог извода реда p , $n-1 \leq p < n$.

$${}_0D_t^p f(t) = g^{(n)}(t),$$

$$g(t) = {}_0D_t^{-(n-p)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau.$$

На основу формуле (3.28) важи

$$L\{{}_0D_t^p f(t); s\} = s^n G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0). \quad (3.30)$$

Лапласова трансформација од $g(t)$ је на основу формуле (3.29)

$$G(s) = s^{-(n-p)} F(s). \quad (3.31)$$

Из дефиниције Риман-Лиувиловог извода (2.35) имамо

$$g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} \left({}_0D_t^{-(n-p)} f(t) \right) = {}_0D_t^{p-k-1} f(t). \quad (3.32)$$

Сада замењујући (3.31) и (3.32) у (3.30) добијамо

$$L\{ {}_0D_t^p f(t); s \} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [{}_0D_t^{p-k-1} f(t)]_{t=0} \quad (3.33)$$

где је $n - 1 \leq p < n$.

У случају Капутових извода имамо

$${}_0^C D_t^p f(t) = {}_0D_t^{-(n-p)} g(t), \quad g(t) = f^{(n)}(t), \quad (n - 1 \leq p < n)$$

На основу формуле (3.29) за Лапласову трансформацију Риман-Лиувилевог интеграла добијамо

$$L\{ {}_0^C D_t^p f(t); s \} = s^{-(n-p)} G(s), \quad (3.34)$$

где је на основу (3.28)

$$G(s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0). \quad (3.35)$$

Замењујући (3.34) у (3.35) коначно имамо

$$L\{ {}_0^C D_t^p f(t); s \} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{p-k-1} f^{(k)}(0). \quad (3.36)$$

где је $n - 1 \leq p < n$.

Израчунајмо сада Лапласову трансформацију функције

$$t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(\pm at^\alpha),$$

што ћемо користити у следећој глави приликом решавања разломљених диференцијалних једначина.

По дефиницији (1.10) за Митаг-Лефлерове функције имамо

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm at^{\alpha}) dt = L\{t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm at^{\alpha}); s\} \\
& = L\left\{t^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm at^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}; s\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} (\pm a)^k L\left\{\frac{t^{\alpha k + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)}; s\right\} \\
& = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm a)^k}{s^{\alpha k + \beta}} = \frac{s^{\alpha - \beta}}{s^{\alpha} \mp a}. \quad (\operatorname{Re} s > |a|^{1/\alpha})
\end{aligned}$$

Дакле важи

$$L\{t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm at^{\alpha}); s\} = \frac{s^{\alpha - \beta}}{s^{\alpha} \mp a}. \quad (\operatorname{Re} s > |a|^{1/\alpha}) \quad (3.37)$$

4 Примене разломљених извода и интеграла

4.1 Разломљене диференцијалне једначине

Постоје више различитих метода за решавање разломљених диференцијалних једначина. Наведимо и решимо неколико разломљених диференцијалних једначина методом Лапласове трансформације.

ПРИМЕР 1. Нека је дата диференцијална једначина

$${}_0D_t^{1/2}f(t) + af(t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.1)$$

$$[{}_0D_t^{1/2}f(t)]_{t=0} = C. \quad (4.2)$$

На основу формуле (3.33) за Лапласову трансформацију Риман-Лиувилевог извода и на основу (4.1) имамо

$$s^{1/2}F(s) - [{}_0D_t^{1/2}f(t)]_{t=0} + aF(s) = 0.$$

Односно сређивањем и из (4.2)

$$F(s) = \frac{C}{s^{1/2} + a}.$$

Применом инверзне Лапласове трансформације на основу формуле (3.37) добијамо

$$f(t) = Ct^{-\frac{1}{2}}E_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(-a\sqrt{t}).$$

ПРИМЕР 2. Нека је дата диференцијална једначина

$${}_0D_t^Q f(t) + {}_0D_t^q f(t) = h(t), \quad t > 0 \quad (4.3)$$

$$[{}_0D_t^{Q-1}f(t) + {}_0D_t^{q-1}f(t)]_{t=0} = C. \quad (4.4)$$

где је $0 < q < Q < 1$.

Применом Лапласове трансформације на (4.3) и коришћењем формуле (3.33) добијамо

$$(s^Q + s^q)F(s) = C + H(s),$$

односно

$$F(s) = \frac{C + H(s)}{s^Q + s^q} = \frac{(C + H(s))s^{-q}}{s^{Q-q} + 1}.$$

Инверзном Лапласовом трансформацијом и формулом (3.37) добијамо

$$f(t) = CG(t) + \int_0^t G(t - \tau)h(\tau)d\tau,$$

где је

$$G(t) = t^{Q-1}E_{Q-q,Q}(-t^{Q-q}).$$

ПРИМЕР 3. Нека је дата диференцијална једначина

$${}_0D_t^p f(t) + af(t) = h(t), \quad t > 0 \quad (4.5)$$

$$[{}_0D_t^{p-k} f(t)]_{t=0} = b_k. \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (4.6)$$

где је $n - 1 < p < n$.

Опет применом Лапласове трансформације на (4.5) уз коришћење формуле (3.33) важи

$$s^p F(s) - aF(s) = H(s) + \sum_{k=1}^n b_k s^{k-1},$$

одакле је

$$F(s) = \frac{H(s)}{s^p + a} + \sum_{k=1}^n b_k \frac{s^{k-1}}{s^p + a},$$

Инверзном Лапласовом трансформацијом и формулом (3.37) добијамо

$$f(t) = \sum_{k=1}^n b_k t^{p-k} E_{p,p-k+1}(at^p) + \int_0^t (t-\tau)^{p-1} E_{p,p}(a(t-\tau)^p) h(\tau) d\tau.$$

Наведимо још два примера разломљених диференцијалних једначина које ћемо сад решити методом степених редова.

ПРИМЕР 4. Нека је дата диференцијална једначина

$${}_0D_t^p f(t) = g(t), \quad t > 0 \quad (4.7)$$

$$f(0) = 0, \quad (4.8)$$

где је $0 < p < 1$.

Претпоставимо да се $g(t)$ може развити у Тејлоров ред који конвергира за $0 \leq t \leq R$.

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} t^n. \quad (4.9)$$

Сада на основу (2.42)

$${}_aD_t^p t^n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-p+1)} t^{n-p},$$

што нам сугерише да решење једначине потражимо у облику

$$f(t) = t^p \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^{n+p}. \quad (4.10)$$

Замењујући (4.9) и (4.10) у једначину (4.7) имамо

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{\Gamma(n+p+1)}{\Gamma(n+1)} t^n = g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} t^n,$$

па изједначавајући коефицијенте добијамо

$$f_n = \frac{g^{(n)}(0)}{\Gamma(n+p+1)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

одакле је

$$f(t) = t^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{\Gamma(n+p+1)} t^n. \quad (0 \leq t \leq R)$$

ПРИМЕР 5. Нека је дата диференцијална једначина као у примеру 4 само са другачијим почетним условом

$${}_0D_t^p f(t) = g(t), \quad t > 0 \quad (4.11)$$

$$[{}_0D_t^{p-1} f(t)]_{t=0} = C, \quad (4.12)$$

где је $0 < p < 1$ а $C = \text{const.}$

Претпоставимо да се $g(t)$ може развити у Тејлоров ред који конвергира за $0 \leq t \leq R$.

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} t^n. \quad (4.13)$$

Потражимо решење у облику

$$f(t) = t^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^{n+p-1}. \quad (4.14)$$

Замењујући (4.13) и (4.14) у једначину (4.11) и померајући индекс имамо

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} \frac{\Gamma(n+p+1)}{\Gamma(n+1)} t^n = g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} t^n,$$

одакле добијамо

$$f_{n+1} = \frac{g^{(n)}(0)}{\Gamma(n+p+1)}. \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Коефицијент f_0 добијамо из почетног услова

$${}_0D_t^{p-1} f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n {}_0D_t^{p-1} t^{n+p-1} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(n+1)} t^n,$$

за $t = 0$

$$f_0 = \frac{C}{\Gamma(p)}.$$

4.2 Примена разломљеног рачуна у науци

Вискоеластичност

Вискоеластични материјали су материјали који испољавају истовремено особине вискозности и еластичности. Вискозност је мера отпорности флуида при протицању. Еластичност је тежња чврстих материјала да остану у свом облику и величини приликом дејства неке силе.

Веза између нормалног напона и истезања за чврсте материјале дата је Хуковим законом

$$\sigma(t) = E\epsilon(t), \quad (4.15)$$

где је $\sigma(t)$ нормални напон, $\epsilon(t)$ релативна промена дужине, а E моду еластичности тела.

Ова веза за Њутнове флуиде је другачија и може се изразити формулом

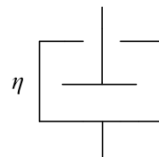
$$\sigma(t) = \eta \frac{d\epsilon}{dt}(t), \quad (4.16)$$

где је η коефицијент вискозности флуида.

Формуле (4.15) и (4.16) су математички модели за идеалне чврсте материјале и идеалне флуиде који не постоје. Материјали у природи се налазе између ова два гранична случаја. Прикажимо претходно графички



слика 1



слика 2

На слици 1 приказан је Хуков еластични елемент док се на слици 2 налази Њутнов вискозни елемент.

Хукови и Њутнови елементи се комбинују ради добијања елемената који имају комбиноване особине. Серијским везивањем Хуковог и Њутновог елемента (слика 3) добијамо Максвелов модел вискоеластичности

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}. \quad (4.17)$$

Из (4.17) имамо

$$\sigma = \text{const} \Rightarrow \frac{d\epsilon}{dt} = \text{const},$$

што значи да ако је нормални напон константан, тада истезање неограничено расте. Ово је у супротности са експериментално добијеним подацима.

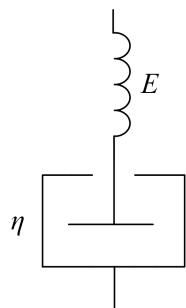
Паралелним везивањем Хуковог еластичног и Њутновог вискозног елемента (слика 4) добијамо Војтов (нем. Фоктов) модел вискоеластичности

$$\sigma = E\epsilon + \eta \frac{d\epsilon}{dt}. \quad (4.18)$$

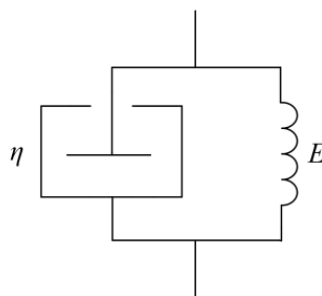
Из (4.18) имамо

$$\epsilon = \text{const} \Rightarrow \sigma = \text{const},$$

што такође није у сагласности са експериментално добијеним подацима.



слика 3



слика 4

Да би се отклонили ови недостаци наставља се поступак везивања елемената.

Серијском везом Војтовог вискоеластичног елемента и Хуковог еластичног елемента (слика 5) добијамо Келвинов модел вискоеластичности

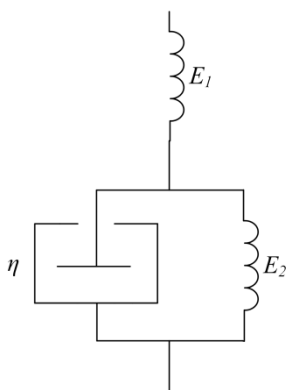
$$\frac{d\sigma}{dt} + \alpha\sigma = E_1 \left(\frac{d\epsilon}{dt} + \beta\epsilon \right), \quad (4.19)$$

док паралелном везом Максвеловог вискоеластичног елемента и Хуковог еластичног елемента (слика 6) добијамо Ценеров модел вискоеластичности

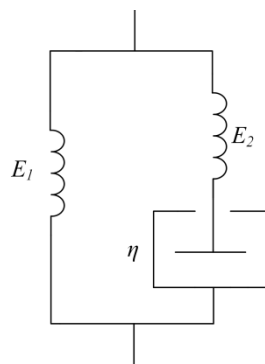
$$\frac{d\sigma}{dt} + \beta\sigma = \alpha\eta \frac{d\epsilon}{dt} + \beta E_1 \epsilon, \quad (4.20)$$

где за оба модела важи

$$\alpha = \frac{E_1 + E_2}{\eta}, \beta = \frac{E_2}{\eta}.$$



слика 5



слика 6

Поступак везивања се може даље наставити да би се добили још бољи резултати.

Из формула (4.15) и (4.16) имамо да је нормални напон пропорционалан нултом изводу релативне промене дужине за чврсте материјале, односно првом изводу за Њутнове флуиде, па је логично претпоставити да је за материјале између ова два идеална стања нормални напон пропорционалан неком изводу реда између нуле и јединице.

$$\sigma(t) = E {}_0D_t^\alpha \epsilon(t). (0 < \alpha < 1) \quad (4.21)$$

Формула (4.21) је Скот Блеров закон вискоеластичности.

Хуков једнопараметарски модел и Скот Блеров двопараметарски модел могу се генерализовати додавањем чланова који садрже разломљене изводе нормалног напона и релативне промене дужине. Овако се добијају тропараметарски Војтов модел

$$\sigma(t) = b_0 \epsilon(t) + b_1 {}_0D_t^\alpha \epsilon(t), \quad (4.22)$$

тропараметарски Максвелов модел

$$\sigma(t) + a_1 {}_0D_t^\alpha \sigma(t) = b_0 \epsilon(t), \quad (4.23)$$

и петопараметарски Ценеров модел

$$\sigma(t) + a_1 {}_0D_t^\alpha \sigma(t) = b_0 \epsilon(t) + b_1 {}_0D_t^\alpha \epsilon(t). \quad (4.24)$$

Вискоеластичност ткива респираторног система

Применимо претходну теорију на моделирање респираторног система човека, узимајући у обзир вискоеластична својства ткива у организму

Вискоеластичност ткива респираторног система је одређена њиховом грађом, и зависи од удела хрскавице као вискозне компоненте и удела меког ткива као еластичне компоненте. Приликом удисања ваздуха ствара се напон који делује на ткива респираторног система и долази до њиховог истезања. Вискоеластични модел респираторног система са целобројним изводима дат је формулом

$$\frac{d\sigma}{dt}(t) = E \frac{d\epsilon}{dt}(t) + \eta \frac{d^2\epsilon}{dt^2}(t) + H\epsilon(t), \quad (4.25)$$

Претходни модел је показао недостатке. Они су отклоњени преласком са целобројних извода на разломљене.

$${}_0D_t^\alpha \sigma(t) = E {}_0D_t^\alpha \epsilon(t) + \eta {}_0D_t^{\alpha+\beta} \epsilon(t) + H \epsilon(t), \quad (4.26)$$

где је $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$. Интеграцијом реда α претходне формуле добијамо

$$\sigma(t) = E \epsilon(t) + \eta {}_0D_t^\beta \epsilon(t) + H {}_0D_t^{-\alpha} \epsilon(t). \quad (4.27)$$

Вискоеластичност зуба

Зуб код човека је највећим делом изграђен од чврстог ткива које се назива дентин. По саставу је сличан костима и садржи 28% органске и 72% неорганске материје. Кроз дентин пролазе каналићи пречника $2 - 5 \mu m$. Приликом притиска на зуб ствара се нормални напон који делује на дентин и долази до његовог сабијања. Дентин има вискоеластична својства која се могу приказати формулом

$$\sigma(t) + a {}_0D_t^\alpha \sigma(t) = E(\epsilon(t) + b {}_0D_t^\alpha \epsilon(t)), \quad (4.28)$$

где је $0 < \alpha < 1$, док су a, b, E константе које се одређују експериментално. Оне зависе од разних фактора а један од њих је температура. Вискоеластични модел дентина се користи за производњу материјала сличних њему, који се користе у стоматологији.

Фракциона дифузиона једначина

Дифузија је процес ширења честица унутар гаса, течности или чврстог тела. Честице се крећу из области са већом концентрацијом ка области са нижом концентрацијом.

У једнодимензионом случају дифузија се моделира једначином

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x, t). \quad (4.29)$$

где је ϕ концентрација по јединици дужине, $\mathcal{D}$ дифузиона константа која зависи од својства материјала, x тачка у којој посматрамо промену концентрације, а t је време. Међутим у неким системима претходно не важи, нпр у порозним материјалима.

Моделирање дифузије у специфичним порозним материјалима је једна од области примене разломљеног рачуна. Да би се описало кретање унутар оваквих материјала користи се следећа једначина са Риман-Лиувилевим разломљеним изводом

$${}_0D_t^{\frac{1}{d}-1}J(t) = LX(t), \quad (4.30)$$

где је $J(t)$ проток кроз порозни материјал, $X(t)$ је покретачка сила, d фрактална димензија материјала, коју можемо сматрати као меру порозности материјала, а L је константа.

Генерализацијом формуле (4.30) могу се добити једначине облика

$${}_0D_t^{\frac{1}{d}}P(r, t) = -A \left(\frac{\partial P(r, t)}{\partial r} + \frac{k}{r} P(r, t) \right), \quad (4.31)$$

$${}_0D_t^{\frac{2}{d_\omega}}P(r, t) = \frac{1}{r^{d_s-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{d_s-1} \frac{\partial P(r, t)}{\partial r} \right). \quad (4.32)$$

где је $P(r, t)$ функција густине случајног лутања честица кроз порозни материјал, k и A су константе, а d, d_ω, d_s зависе од фракталне димензије порозног материјала.

Разломљени модел неурона

Карактеристичан покрет ока који се уочава на почетку и на крају периода ротације главе се назива нистагмус. Ради се о рефлексу који врши фиксацију вида на стационарну тачку током ротације главе. Када започне ротација, очи се прво полако померају у правцу супротном од правца ротације и на тај начин се врши фиксација вида. То је такозвани вестибуло-окуларни рефлекс. Када достигну граничну позицију, очи се брзо пребацују на нову тачку фиксације и опет се полако померају у правцу супротном од правца ротације главе. Ови очни покрети су под

контролом премоторних и моторних неурона. Оба типа неурона обрађују сигнале о позицији ока.

Понашање премоторних неурона у вестибуло-окуларном рефлексу се може у Лапласовом домену приказати једначином

$$\frac{R(s)}{V(s)} = \frac{\tau_1 (s\tau_2 + 1)s^{\alpha_d - \alpha_1}}{s\tau_1 + 1}, \quad (4.33)$$

где је $R(s)$ Лапласова трансформација стопе пражњења неурона $r(t)$, $V(s)$ је Лапласова трансформација угаоне брзине главе $v(t)$, τ_1 и τ_2 су временске константе модела, α_d је ред разломљеног диференцирања на премоторном нивоу, а α_1 је ред разломљене интеграције.

Однос између $v(t)$ и $r(t)$ се може добити применом инверзне Лапласове трансформације на формулу (4.33). Нека је

$$G(s) = R(s)/V(s),$$

где је $G(s)$ Лапласова трансформација од $g(t)$, и претпоставимо да је $\alpha_1 > \alpha_d$. Формулу (4.33) можемо записати у облику

$$G(s) = \frac{\tau_2 s^{\alpha_d - \alpha_1 + 1}}{s + \tau_1^{-1}} + \frac{s^{\alpha_d - \alpha_1}}{s + \tau_1^{-1}},$$

одакле је применом инверзне Лапласове трансформације на основу формуле (3.37)

$$g(t) = \tau_2 t^{\alpha_1 - \alpha_d - 1} E_{1, \alpha_1 - \alpha_d} \left(-\frac{t}{\tau_1} \right) + t^{\alpha_1 - \alpha_d} E_{1, \alpha_1 - \alpha_d + 1} \left(-\frac{t}{\tau_1} \right). \quad (4.34)$$

Из (4.34) на основу формуле (3.27) за Лапласову трансформацију конволуције добијамо

$$r(t) = \int_0^t g(t - \tau) v(\tau) d\tau.$$

Литература

- [1] Аднађевић Д., Каделбург З. *Математичка анализа II*. Математички факултет, 2008
- [2] Chaudhry M. A., Zubair S. M. *On a Class of Incomplete Gamma Functions with Applications*. Chapman and Hall, 2001
- [3] Crompton B. *An Introduction to Fractional Calculus and Fractional Diffusion-Wave Equation*. University of Massachusetts, 2011
- [4] Diethelm K. *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Springer, 2004
- [5] Hilfer R. *Threefold Introduction to Fractional Derivatives*. University Stuttgart, 2011
- [6] Ionescu C. M., Kosinski W., Keyser R. D. *Viscoelasticity and fractal structure in a model of human lungs*. Arch. Mech, 2010
- [7] Miller K. S., Ross B. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Interscience publication, 1993
- [8] Oldham K.B., Spanier J. *The Fractional Calculus*. Mathematics in Science and Engineering, 1974
- [9] Podlubny I. *Fractional Differential Equations*. Mathematics in Science and Engineering, 1998
- [10] Sabatier J., Agrawal O. P. *Advances in Fractional Calculus, Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*. Springer, 2007
- [11] Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications*. Nauka I tehnika, 1987