Математички факултет
Универзитет у Београду

Мастер рад

Визуелизација геометријских садржаја од 5. до 8. разреда базирана на површини фигура и примени Питагорине теореме

Ментор: Професор др Миодраг Матељевић
Кандидат: Анђела Милетић, дипл. мат.

Београд, 2014.

Чланови комисије:

Професор др Миодраг Матељевић, ментор
Професор др Срђан Вукмировић
мр Миљан Кнежевић, асистент

Увод

Образовани систем у нашој земљи још увек почива на традиционалној настави. У већини случајева табла и креда представљају једина наставна средства која понекад нису довољна да би се поједине теме обрадиле на што креативнији начин. Основна школа је стуб даљег образовања и учења, стога је битно ученицима градиво пренети на што разумљивији начин. Један од циљева је да се наставни материјали учине доступним и интересантним, као и да се ученицима пробуди жеља за учењем и истраживањем.

Наредни материјал представља динамички интерпретиран садржај уџбеника који је базиран на површини фигура и примени Питагорине теореме. Програм који је коришћен у како би лепше појаснио и приближио одређене појмове јесте GeoGebra. То је програм за динамичку математику који повезује геометрију, алгебру и анализу. Развили су га Маркус Хохенвартер и међународни тим програмера, за наставу и учење математике у школама.

Ученицима је геометрија често веома апстрактна и представља проблем у разумевању. Зато је потребно што поступније и сликовитије појаснити поступак извођења одређених формула за површину фигура и њихову примену. Свакако, предавач је тај који кординира и без његове живе речи се никако не може, али интерактивни и занимљиви материјали увешће један нови приступ, олакшати и освежити наставу. Допринос бољем разумевању наставних садржаја, развијању ученичке мотивације и истраживачког духа јесте нешто чему сваки наставник тежи, поготово када су у питању основне школе. Ученици су у добу у ком још увек не знају за шта су највише заинтересовани, зато је потребно да предавач, тј.наставник на што бољи и репрезентативнији начин представити градиво. За разлику од неких наука, математика је таква да пружа велики број могућности и слободе у што креативнијем представљању. Уџбеници су један од материјала који то требају бити. Када ученик нешто не разуме или је на часу нешто пропустио, има могућност и да сам покуша да дође до решења уз помоћ доступних средстава, а уџбеник му је прво и најдоступније наставно средство које може да искористи.

Поред визуелних садржаја које ће овај рад садржати на тему површина фигура и примени Питагорине теореме на њих, ту је и сликовити материјал који може заменити уџбеник.

1. Појам површине фигуре

1.1 Историјат

Може се сматрати да је појам површине фигуре стар колико и људска цивилизација. До веома значајних открића дошло је у старом Египту, где су свештеници имали највећу улогу. Они су одређивали већину верских празника: прославу пуног месеца или средине лета, жртвовање животиња посвећених извесним сазвежђима или приношење жртве боговима реке. Такође, по њиховом наређењу грађени су и велики храмови који су им служили и као опсерваторије, као и величанствене пирамиде у које су сахрањивали своје владаре - фараоне.

Да би подигли те величанствене грађевине египатски неимари су морали да знају на који начин треба направити неку врсту нацрта основе, како поравнати ивице камених блокова, подићи их са земље и поставити тачно на одређено место. Током рада градитељи пирамида долазили су до практичних открића у вештини мерења коју данас називамо геометрија.

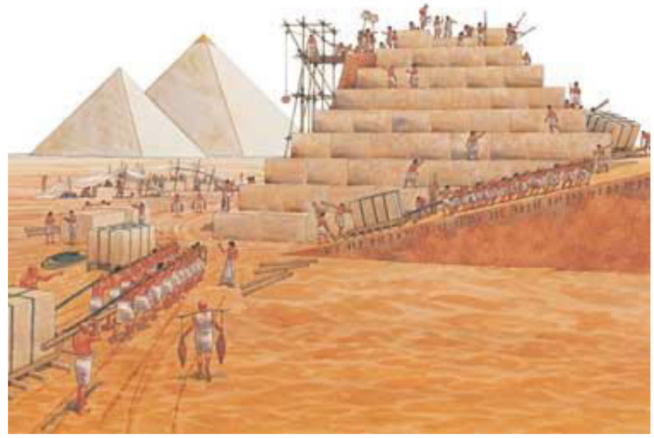
Једноставни цртажи на глини вероватно су били и први нацрти основе, претече данашњих грађевинских планова, који су приказивали како ће изгледати подигнута грађевина. Они који су их правили научили су да цртеж грађевине и сама грађевина могу бити различите величине али истог облика. Све оно што се односило на облик грђевине на цртежу, важило је и за облик саме грађевине.

Пошто је нацрт основе израђен, људи су мотикама равнали земљиште како би зидари могли да почну са радом. У то врме није било ни кола са точковима нити добрих путева. Товари тешког материјала за градњу који се углавном састојао од огромних каменихх блокова тешких и по неколико тона, преношени су лађом низ реку Нил што је ближе могуће месту градње.

Сваки камени блок требало је обрадити. Грумењем кремена одваљиване су велике избочине, а затим металним длетима равнане површине камена. На крају се цео блок камена глачао грубим каменим алатом. Зидарским лењиром или троугаоником проверавало се да ли су сви углови прави.

Тада је постављена огроман основица од камених блокова која је чинила базу пирамиде. На основицу, једнако удаљен од њених ивица, постављен је други ред камених блокова који је био нешто мањи. На исти начин су постављани и остали редови камених

Слика 1. Стари Египат, постављање камених блокова



Слика 2. Стари Египат, градитељи пирамида

блокова тако да су се све четири стране изграђене пирамиде постепено сужавале и састајале при врху. Да би се испитало да ли је пирамида заиста вертикална, ивица сваког каменог блока проверавала се утегом окаченим на конопцу. Уз степенасте ивице пирамиде набацивана је земља како би се направио нагнут пут. Уз њега су, на постољу испод којег су били ваљци, котрљани камени блокови.

Вероватно је најтежи део био да се направи основа пирамиде строго квадратног облика. И најмања грешка при утврђивању угла на свакој ивици пирамиде пореметила би облик грађевине. Мада градитељи пирамида нису оставили никакве записе, можемо нагађати на који начин су утврђивали квадратну основу.

Прво су означили једну праву разапињући конопац између два кочића пободена у земљу. Тада су за сваки кочић привезали конопац једнаке величине, али дужи од половине оне праве коју су означили и нацртали. Држећи ове конопце затегнуте и крећући њихове крајеве у круг, могли су да нацртају делове два правилна круга. Ти делови круга које називамо лукови међусобно су се пресецали у две тачке. Тада је градитељ повукао праву између те две тачке пресека. Утврдио је да она полови прву праву – тј. пресеца је под правим углом, секући је на два једнака дела.

Градитељ је морао занти да означи праве углове на земљи како би основа грађевине била квадратна. Да би проверио да ли су и зидови потпуно вертикални морао је да одреди праве углове и изнад земље. За ту сврху египатски градитељи користили су висак – справу којом се и данас служимо. Ако се висак слободно спусти са врха зида, он са земљом чини прав угао. Ако је зид паралелан са виском, значи да је вертикалан.

Прав угао се најједноставније може нацртати уз помоћ троугаоника. Тако су радили и Египћани. Али, прво су морали да израде један троугаоник. Д би га направили прво су морали да начине правоугли троугао.

Вероватно се никада неће сазнати ко је дошао до тог открића. Можда су то били професионални везивачи чворова чији се задатак састојао у томе да на дугим конопцима везују чворове. Ти конопци са једнаком раздаљином између чворова коришћени су за мерење. На неки начин они су открили да када се извесне дужине конопца учврсте у облику троугла, добија се прав угао насупрот највећој страни. Узимајући за јединицу мере дужину конопца између два чвора, по једној комбинацији правоугли троугао чини конопац чије су стране 3, 4 и 5. По другој, конопац са странама 5, 12 и 13. Сечењем комада дрвета тих дужина и састављањем њихових крајева могли су направити троугаоник.

Мерења од ока, која су могла да послуже њиховим прецима нису била довољно прецизна за ове градитеље великих храмова и пирамида. Због тога је за те величанствене грађевине требало утврдити сталне мере које су имеле увек исте вредности без обзира на то ко врши мерења. У почетку оне су се углавном заснивале на пропорцијама неког људског тела, највероватније краљевог. Те сталне мере биле су бележене на дрвене или металне размернике.

У Египту је главна мера за дужину био лакат, који се често спомиње у Библији. То је дужина подлактице од лакта до врха испруженог средњег прста. Постојале су и мање мере: шака, седми део лакта и прст, четврти део шаке. Те мање мере биле су Египћанима веома важне јер су сматрали да је рачунање са разломцима веома компликовано. Данас нам разломци као што су три петине или девет десетина не представљају проблем, али је Египћанину разломак увек представљао део начега. Било је тешко замислити три седмине лакта али зато три шаке ни у ком случају нису биле проблем.

Те прве мере изгледају на први поглед необично, али су исто тако необичне и оне које се још увек употребљавају у неким земљама. Енглез или Американац још увек каже *седам инча* како не би морао да употреби разломак *седам дванаестина стопе*.

Сваке године у време жетве египатски свештеници убирали су порез за своје услуге од земљорадника који су свој порез плаћали намирницама. Висина пореза зависила је од величине поседа: што је посед био већи, већи је био порез. Због тога су приликом наплате пореза свештеници морали на неки начин да измере површину.

Можда им је, приликом поплочавања пода храма четвртастим плочама први пут пала на памет идеја о мерењу повшине. Да би се поплочао део пода, дуг колико 6 плоча и исто толико широк, потребно је 36 плоча ($6 \cdot 6$). За други део пода, дуг колико 10 плоча и 4 плоче широк потребно је 40 плоча ($10 \cdot 4$). Да би израчунали површину квадрата или правоугаоника, једноставно помноже се његова дужина и ширина. Међутим, нису сва поља имала облик квадрата или правоугаоника. Онај који је убирао порез нашао би се и пред пољем са много старна и углова. Није постојала могућност да се таква поља поделе на квадрате, али су се могла поделити на троуглове. Знајући површину троугла, могла се зирачунати површина сваког поља, под условом да су све његове стране биле праве. Ако се комад платна у облику квадрата пресавије на два једнака троугла, сваки од њих је упола мањи од квадрата. На исти начин, ако се правоугаоно спарче пресавије на два једнака троугла, сваки од њих биће упола мањи од правоугаоника. Могуће је да су таква једноставна решења дала идеју свештеницима да поставе закон који им је био потребан.

Посао око мерења задавао је свештеницима више брига него што можемо и замислити. Обрадиво земљиште у Египту захвата узани појас поред велике реке Нил, а на све стране изван тог плодног појаса простире се пустиња. Сваког лета река је плавила своје обале натапајући приобално земљиште. Када се вода повуче, за собом је остављала танак слој плодног муља. Та годишња поплава омогућавала је египатским земљорадницима да добију одличне усеве, али је истовремено односила ознаке међа на њиховим пољима.

Понекад се проблем састојао у поновном упостављању граница неког поља на основу делимичних података. На пример, ако је облик поља био познат и ако су ознаке са једне стране остале нетакнуте, док су на другим странама биле избрисане, онда би се проблем састојао у означавању само тих других страна. Понекад је било немогуће тачно одредити где су претходне године биле границе, па се проблем састојао у повлачењу потпуно нових граница и то тако да се добије жељени број поља са површинама у сразмери од претходне године.

Тако су свештеници били приморани да сваке године изнова премеравају сваки комад земљишта. Због тога су они били и први професионални геометри за које се зна.
Још од времена Египћана, главни метод рада који су употребљавали геометри у свим временимабио је такозвана триангулација. Када се погледа колико су ти први свештеници – геометри морали знати о облицима и површинама троуглова, може се увидети шта су све стекли математичари каснијих времена из њихових практичних искустава. Од њих је и уследила реч геометрија, коју чине две грчке речи – *γεω* која значи земља или тле и *μετρεω* која значи мерење.

Свакако, геометар се сусретао и са проблемима које није могао да реши једноставним законом за израчунавање површине троугла. На пример, он није био у стању да обележи круг у појас земљишта у облику троугла. Стари Египћани су највероватније цртали круг на тај начин што су вукли затегнути конопац око учвршћеног кочића. Знали су да им је за веллики круг потребан дужи конопац, а за мањи крећи. Другим речима, знали су да површина круга зависи од растојања између његовог центра и његове ивице, или како ми данас кажемо – полупречника круга.
Оно што је фасцинантно, а пронађнено је у Ахмесовој[1] рачуници, је како су рачунали површину круга:
- претпоставимо да круг има пречник од 9 kheta (khet је јединица за дужину ≈ 50 метара),
- узмимо $\frac{1}{9}$ пречника, дакле 1,
- остатак је 8,

[1] Ахмес је рођен је у Египту око 2000 година п.н.е. О његовом животу се врло мало зна, али свакако спада у најраније научнике. Био је матемаичар и творац је најстаријег египатског математичког папируса.

- помножимо 8 са 8,
- добијамо 64 и то је површина.

Ако то запишемо савременим математичким језиком, $P = (\frac{8}{9} \cdot \text{дијаметар})^2$, и упоредимо резултат с егзактном формулом за израчунавање површине круга, $P = r^2\pi$, добили бисмо занимљив резултат: стари Египћани су готово 1000 година пре стварног открића броја π знали његову приближну вредност. Наиме, по њиховим рачунима π би износио приближно 3, 1605 . Ипак тачност од 3.1605 доводи до задивљавања, а пре свега и због тога што су други стари народи мислили да је обим круга трипут већи од његовог пречника.

У многим музејима широм света, налазе се и други рукописи који нам прижају летимичан поглед на математику старог Египта, али велики део нашег знања, заснива се на испитивању древних грађевина које се још увек уздижу на обалама Нила.

Стари Грци који су живели на обалама и острвима Средоземног мора били су склони путовањима и поморској трговини. На тај начин су из других земаља уносили богатства али исто тако и нова сазнања. Пошто су им робови обављали већину свакодневних послова, богати слободни грађани грчких насеља имали су доста времена за расправљање о проблемима свог града и за опширне дискусије.

Пошто су савладали вештину писања по новом алфабету, били су у стању да заувек оставе забелешке о својим расправама. Свака новост коју су путници доносили о ономе што су научили о навигацији изван Средоземног мора била је подстицај за расправе. Људи вични расправама окупљали су око себе ученике који су желели да науче методе својих учитеља.

Један од њих био је Питагора[2]. Пре 500. године пре наше ере основао је савез младих људи којима је пружао своја знања о математици. Припадници савеза морали су предходно да положе заклетву да стечена знања никада неће пренети на некога ко није члан савеза. И поред ове тајности и чињенице да је са таквим учењем мешао магију и религију, Питагора је био пионир у настави математике.

Јавно учење и дискусије довеле су до новох схватања математике. Мада су људи у древна времена знали много корисних правила за израчунавање површине и мерење углова и никада нису покушали да их повежу у низ закључака како би доказали да су ти закони поуздани. Грци склои расправама захтевали су да се сваки закон кроз дебату стави на пробу и да се да одговор на сваку примедбу која се противи том закону.

Много пре Питагоре било је познато да је троугао чије су стране 3, 4 и 5 уствари правоугли троугао, а да је такав и онај чије су стране 5, 12 и 13. Али Питагора је запазио нешто што је заједничко за оба скупа бројева. Ако погледамо квадрате бројева ова два скупа видећемо да је квадрат највећег броја у оба случаја једнак збиру квадрата два мања броја:

[2] Питагора са Самоса (око 570. п. н. е. око 495. п. н. е.) је био антички филозоф и математичар, оснивач питагорејске школе. Најпознатији је по својој теореми о односу хипотенузе c и катета a,b у правоуглом троглу. О њему нешто мало више и у неком од наредних поглавља.

$$3^2 = 9 \qquad 4^2 = 16 \qquad 5^2 = 25$$
$$5^2 = 25 \qquad 12^2 = 144 \qquad 13^2 = 169$$

Ова два начина за добијање правоуглог троугла показују да је квадрат над најдужом страном по својој површини једнак збиру квадрата над две мање стране.

Питагора је успео да постави закон који се односио на све сличне односе. Међутим, много је интересантније то да је Питагора поставио два накнадна питања: прво, да ли је закон увек тачан, и друго, да ли је троугао увек правоугли ако је дужина његових страна у складу са овим законом?

Питагора се није задовољио само бескрајним навођењем примера да би доказао да је одговор на оба питања у сваком појединачном случају потврдан. Како би уверио своје следбенике у исправност закона, грчки учитељ математике, који је исто тако био и учитељ права, морао је да га доказује пожљиво и доследно као да води парницу на суду. Као што судија и поротници желе тачно да знају шта адвокат мисли када говори о насиљу или нехату тако и ученици желе да им се тачно објасни шта учитељ подразумева под појмом фигуре, праве или угла. Он је морао да пружи потпуно задовољавајуће дефиниције. Али наћи прави израз који ће задовољити свакога није ни мало лако. Ту се намеће мноштво питања. На који начин дефинисати праву а да будемо потпуно сигурни у оно што говоримо? Како дефинисати круг довољно јасно да онај ко сумња не каже да је схватио да заправо говоримо о било којој округлој фигури, као што су лопта или овал? Како дефинисати квадрат довољно прецизно да би га издвојили од осталих правоугаоника или других паралелограма?

Током тих расправа постало је јасно да је најбољи начин за дефинисање одређене фигуре (на пример троугао или правилни шестоугао) утврђивање начина на који је можете конструисати помоћу оних средстава која вам стоје на располагању. Ту је опет искрсавао проблем: која су то средства за која ће се свако сложити да их можете употребити? Једина средства која су Грци прихватили били су лењир за повлачење правих линија и шестар за конструисање круга.

Опрезни грци мало су тога прихватили. Као истините прихватили су само оне дефиниције и појмове који су им изгледали очевидно. Све друго трбало је потпуно даоказати. Али учитељ који је на тај начин доказао да је неки закон исправан могао је да га користи за доказивање других и није било потребно да се почне од самог почетка. Сређујући своје доказе тако да један закон води другом, могао је да уштеди много времена и напора које је губио због мучног понављања. По том методу је младе Атињане подучавао велики филозоф Платон[3] у IV веку пре наше ере.

Пре старогрчког доба није постојао неки логички систем закона нити било какве науке о геометрији. Постојала су само међусобно неповезана упутства – за конструисање углова различитих величина, разних облика троуглова, израчунавање површине или обима

[3] Платон (рођен 427. п. н. е. у Атини; умро 347. п. н. е.) је био је утицајан старогрчки филозоф и беседник, Сократов ученик, а Аристотелов учитељ, и оснивач Академије у Атини.

круга, итд. У време Платона све ово је било могуће средити у систематизован и разложан систем закона.

Захваљујући списима Еуклида[4] из Александрије овај велики систем сачувао се до данашњих дана. Око 300 година пре наше ере Еуклид је написао низ уџбеника који су потврдили своју вредност у свим временима. Хиљаду година касније, када је већина грчких списа изгубљена или уништена Еуклидови *Елементи* су преведени на арапски и по њима се учило на исламским универзитетима. Пре 50 година преводи те књиге на модерне језике коришћени су као уџбеници у европским и америчким школама. Па чак и данас, геометрија која се учи у школама углавном је директан наставак Еуклидове геометрије. Његов рад још увек остаје као узор за све оно шта мислимо када говоримо о доказивању неког проблема у математици.

Грци су се бавили проучавањем геометрије више ради забаве а мање због неких практичние користи коју би на тај начин могли стећи. Међутим, открили су да се знање које су стекли показало корисним у многим пословима. Оно се могло користити приликом грађења, за навигацију и астрономију, за планове градова и нацрте музичких инструмената. Као наука о премеравању земљишта она је била од посебног значаја за геометре.

Међу законима који су Грци поставили у време Питагоре налазе се и:

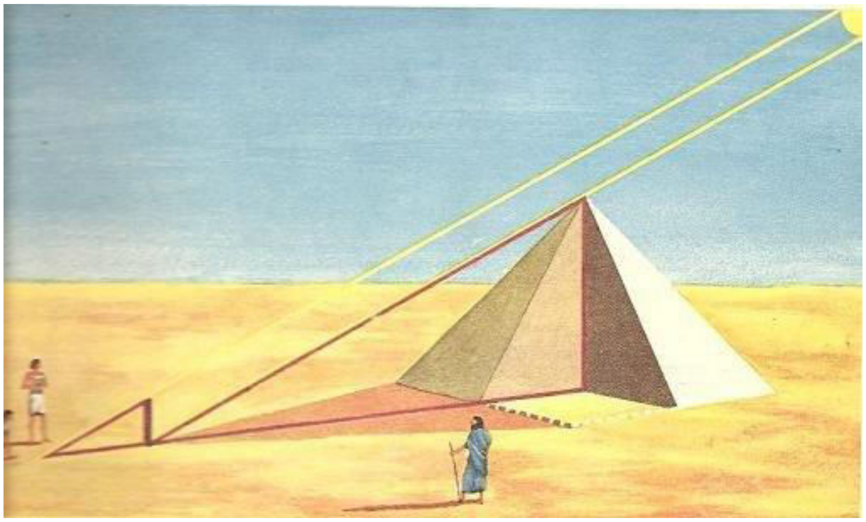
1) Збир унутрашњих углова било ког троугла једнак је збиру два права угла (180°)

2) Насправ једнаких углова код троугла леже једнаке странице.

Из првог закона можемо да изведемо закључак: ако је један угао у троуглу прав (90°),а други упола мањи (45°), онда трећи угао исто тако мора бити једнак половини правог угла (45°). Из другог закона видимо да су стране које леже насупрот угловима од 45° једнаке.

Када Сунчеви зраци падају на Земљу под углом од 45° стуб, његова сенка и Сунчеви зраци образују управо такав троугао. То омогућава геометру да употреби метод којима ће измерити висину стуба без потребе да се на њега пење. Стуб и његова сенка су стране које леже насурат углу од 45°, па су према томе јендаке по дужини. Тако, уместо да мери висину стуба, геометар може једноставно да измери дужину његове сенке.

[4] Еуклид је грчки математичар који је живео и радио у Александрији. Један је од најутицајнијих математичара свих времена. Највеће његово дело су Елементи, уједно и највеће математичко дело старог века.



Слика 3. Мерење висине пирамиде помоћу дужине њене сенке

Када је познат један такав закон о трugловима може се применити на много начина. На пример, може се одредити удаљеност неког брода на мору под условом да плви паралелно са обалом. Једини задатак је наћиједну тачку на обали са које се брод може видети под правим углом и другу, са које се брод у исто време може видети под углом који је једнак половини правог угла. Раздаљина између те две тачке једнака је удањености брода од обале.

Грк Талес[5], заповедник једног трговачког брода, који је једно време био и учитељ младог Питагоре, хвалио се да је он упознао египатске свештенике са таквим начином мерења. Много је вероватније да је било управо обрнуто; можемо, међутим, бити сигурни у то да египатски свештеници ниси могли дати тако добре аргументе за веровање у исправност закона као што су то могли Грци склони логици.

Талесу је вероватно био познат други закон за изарчунавање висине пирамиде помоћу њене сенке. Он је сигурно био познат Египћанима али они нису били у стању да докажу зашто је тај закон, који се сматра основним законом практичне геодезије увек тачан. Код два тругла чији су одговарајући углови једнаки, једнак је и однос дужина било које две одговарајуће стрнице. тако ће се у подне висина штапа односити према дужини своје сенке као што се висина пирамиде односи према дужини своје, с тим да је треба додати и половину ширине основе.

Ако је геометар знао само закон који се примењује на троуглове чија су два угла 45°, није могао измерити висину пирамиде помоћи њене сенке сем у одређене дане у години када је Сунце у подне заузимало одговарајући угао на небу. Када је једном дошао

[5] Талес (рођен 624. п. н. е., умро око 547. п. н. е.) је био грчки математичар, рођен у граду Милету. У свом граду основао је филозофску шкилу, која је у историји позната као Јонска школа. У математици је познат по својој теореми – *Талесовој теореми*.

до закона о сличности труглова могао је да врши мерења на овај начин у било која доба године.

Грци су примењивали математику на много начина за које се може рећи да су били врло савремени. Највећи математичар тога времена, Архимед[6] био је исто тако и проналазач многих механичких справа. Он је направио завојницу која се окретала унутар тесног цилиндра и својим окретањем подизала воду. Коришћена је за наводњавање и вађење воде из бродова.

Један од многих његових доприноса математици је и тај што је дао прецизнију вредност броја π. Видели смо да приближну вредност можемо добити израчунавањем средње вредности обима или површине квадрата од којих је један уписан а други описан око круга. Повећањем броја страница уписане и описане фигуре можемо смањити могућност погрешке. Наш цртеж приказује како се дужина страница смањује ако се уместо квадрата употреби фигура са 12 страница. Архимед је отишао и даље од тога. Он је користио правилне фигуре са 48 страница и на тај начин је могао да одреди вредност која је била у толикој мери тачна да је могла да се употреби у практичне сврхе приликом прављења планова у техници.

Он је такође пронашао начин за израчунавање запремине различитих чврстих тела. Два од њих, лопта и ваљак приказани су на његовом надгробном споменику..

Свет чији је главни град Александрија била пуних 700 година, пружио је подстрек развоју уметности и наука у којима је помоћ математике била неопходна. Поморска трговина допринела је развоју навигације и астрономије, чести војни походи изискивали су боље премеравање земљишта и прављење мапа, док је потреба за ратним оружијем водила подробнијем испитивању фортификација и бољем познавању машина.

[6] Архимед (287. п. н. е. — 212. п. н. е.) је грчки математичар, физичар и астроном, из Сиракузе на Сицилији. Први је израчунао број π, пронашао закон полуге, закон потиска (Архимедов закон).

1.2 Савремена дефиниција

Оно што сматрамо границом неког тела представља једну површ која нам, са експерименталног становишта, изгледа као неко изванредно танко тело: љуска, опна балона, лист хартије,...; али, за математичара, површ има дебљину нула.

Површ која затвара ограничени део простора зове се затворена површ; она дели простор на две области; једну спољашњу и једну унутрашњу област. Поред тога постоје и незатворене, тј. отворене површи. Површ има две стране или лице и налчје. Ако је површ ограничена, њена граница је нека линија. Најпростија површ је раван. Добро орендисана даска, површ мирне воде и сл., дају представу једног дела равни. Линијама, као што су дужи, изломљене линије, троугаоне линије, четвороугаоне линије, и тако даље, придружујемо њихове дужине изражене бројем заједно са изабраном јединицом мере.
Слично, геометријским објектима, као што су троугао, четвороугао, петоугао и тако даље, можемо придруживати њихове површине такође изражене бројем заједно са одговарајућом јединицом мере.

Предуслов сваког мерења, па и мерење површине, јесте избор јединице мере. За јединицу мере површине бира се квадрат. Стандардна јединица површине мере јесте квадратни метар - квадрат странице $1m$. Реч је о квадрату који се у свакодневном говору описује са „метар са метар”. Ознака је m^2.

У складу са десетичним бројним системом, који користимо при мерењу површине користе се и:
- квадратни дециметар (dm^2)- квадрат странице 1 dm
- квадратни центиметар (cm^2) - квадрат странице 1 cm
- квадратни милиметар (mm^2) - квадрат странице 1 mm
- ар (a) - квадрат странице 10 m
- хектар (ha) - квадрат странице 100 m
- квадратни километар (km^2) - квадрат странице 1 km

Природно се издвајају следећа четири једноставна својства површине из којих се могу извести сва остала својства:
1. Површина је увек ненегативан број.
2. Ако је један лик састављен од делова, онда је његова површина једнака збиру површина тих делова.
3. Једнаки ликови имају једнаке површине.
4. Квадрат са страницом дужине 1 има поржину једнаку 1.

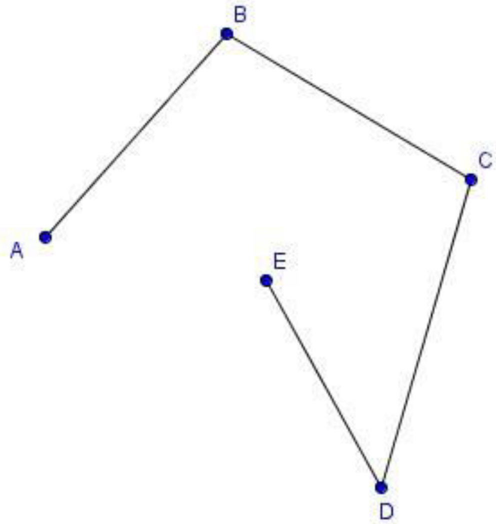
Дефиниција 1. Нека је Pскуп свих полигона у равни, укључујући и празан скуп. Површина на скупу P је пресликавање $p: P \rightarrow R$, које има следећа својства:

1. $p(P) \geq 0$,, за сваки полигон P.
2. Ако је полигон P унија дисјуктних пологона P_1и P_2, тада је $p(P_1 + P_2) = p(P_1) + p(P_2)$
3. Ако су полигони P_1и P_2 подударни ликови, тада је $p(P_1) = p(P_2)$.
4. Ако је К квадрат чија је страница дужине 1, тада је $p(K)$= 1.

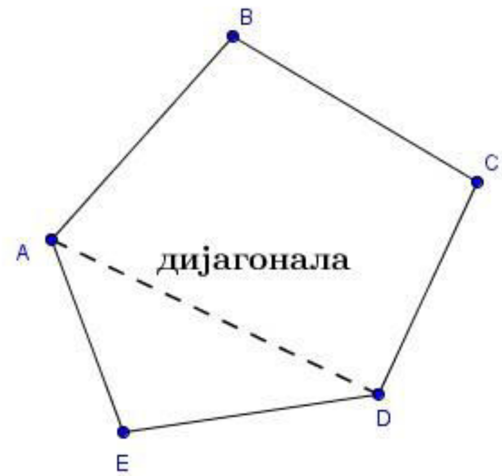
Број . $p(P)$ се назива површина полигона P.

2. Површина многоугла

2.1 Увод



Слика 4. Полигонална линија или изломљена линија



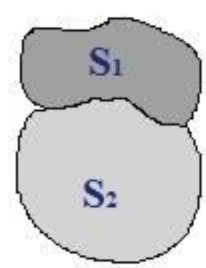
Слика 5. Полигон

Полигонална линија или **изломљена линија** је низ одсечака који су надовезани један на други, нпр. линија $ABCDE$ на слици (Слика 4.). Одсечци се зову **странице**; тачка заједницка двема узастопним страницама зове се **теме**; тачке на слободном крају прве и последње странице зову се **крајеви** полигоналне линије.

Полигон је затворена полигонална линија, нпр. ABCDE на слици (Слика 5.). Полигон има онолико темена колико има страница. Према броју страница, разликујемо **троуглове** (3 странице), **четвороуглове** (4 странице), **петоуглове** (5 страница), **шестоуглове** (6 страница), итд.

Дијагонала је дуж која спаја два несуседна темена. Као што смо видели у првом делу, површином називамо величину дела равни ограниченом затвореном линијом.

Често се у свакодневном говору не прави увек разлика између контуре и унутршње области ограничене контуром; Нпр. тако се говори површина троугла, а мисли се на површину дела равни ограниченог тим троуглом. Ако се две површи S_1 и S_2 граниче а немају зајендичку унутрашњу област (Слика 6.), тада је унија ових двеју повши S_1 и S_2 повш S чија је површина збир површина површи S_1 и S_2 .



Слика 6. Унија две површи

2.2 Површина правоугаоника

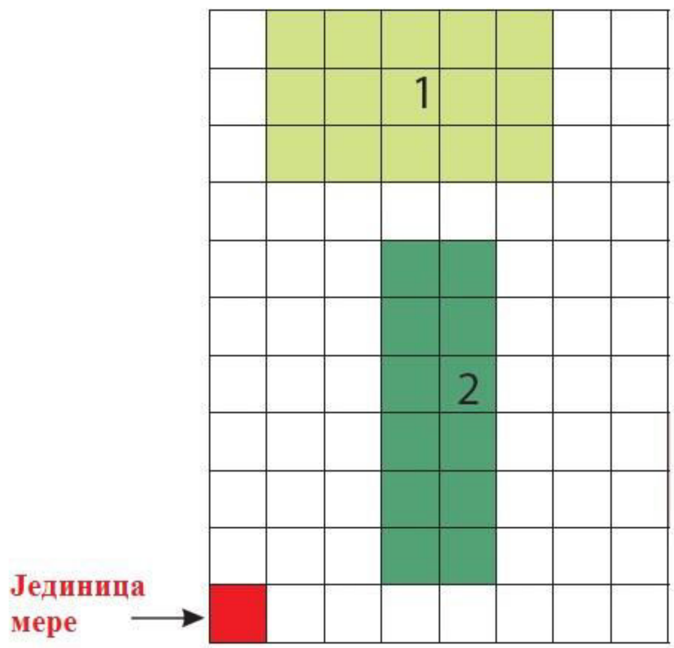
Дефиниција 2. Правоугаоник је четвороугао код кога су унутрашњи углови једнаки 90° и код кога су наспрамне странице једнаке.

Дијагонале правоугаоника се полове и медјусобно су подударне. Правоугаоник чине две странице a и b. Висина правоугаоника такође представља и страницу b.

Површине фигура означених бројевима 1 и 2 на слици једноставно одређујемо применом дефиниције. Наиме, да бисмо одредили површину неке од њих, довољно је одредити тачан број квадрата, подударних датој јединици мере, којима се може прекрити читава фигура уз услов да се квадрати могу додиривати само дуж страница.

Тако, површина фигуре 1 је 15, а површина фигуре 2 је 12 јединица мере.

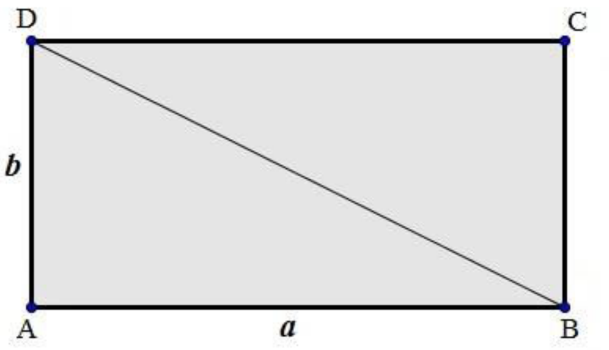
Примећујемо да за израчунавање површине правоугаоника нема потребе да га делимо на квадрате једнице мере.



Слика 7. Јединица мере за површину

Довољно је измерити дужину и ширину у одредјеној јединици мере и помножити добијене бројеве. Тако добијамо површину тог правоугаоника.

Теорема 1. Површина правоугаоника одређује се множењем мерних бројева дужина његових суседних страница.



Површина правоугаоника једнака је:

$$P = a \cdot b$$

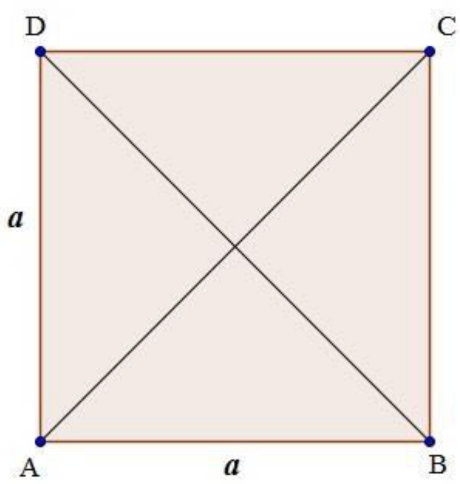
Слика 8. Правоугаоник и његове ознаке

2.3 Површина квадрата

Дефиниција 3. Квадрат је четвороугао са једнаким страницама и једнаким унутрашњим угловима.

Дијагонале квадрата се секу под правим углом и међусобно се полове. Квадрат је посебан случај правоугаоника коме су старнице једнаке. Ако је *a* дужина његове странице имаћемо:

Теорема 2. Површина квадрата странице *a* једнака је $P = a \cdot a = a^2$.



Површина квадрата једнака је:

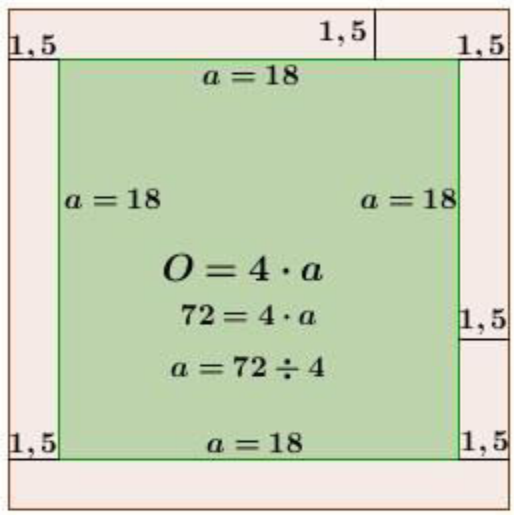
$$P = a \cdot a = a^2$$

Слика 9. Правоугаоник и његове ознаке

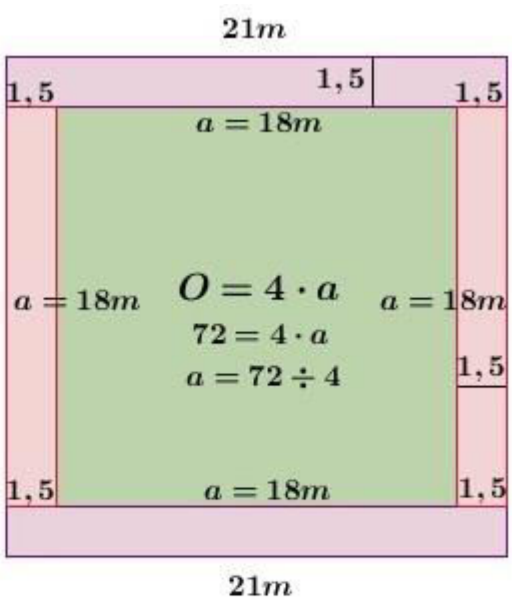
<u>Задатак:</u>

Око травњака облика квадрата обима 72 m изграђена је стаза ширине 1,5 m. Израчунај ширину те стазе.

Решење:



Слика 10. Слика травњака и стазе



Слика 11. Рашење задатка

$$P = 2 \cdot (1{,}5 \cdot 21) + 2 \cdot (1{,}5 \cdot 18)$$

$$P = 2 \cdot 31{,}5 + 2 \cdot 27$$

$$P = 63 + 54$$

$$P = 117cm^2$$

2.4 Површина паралелограма

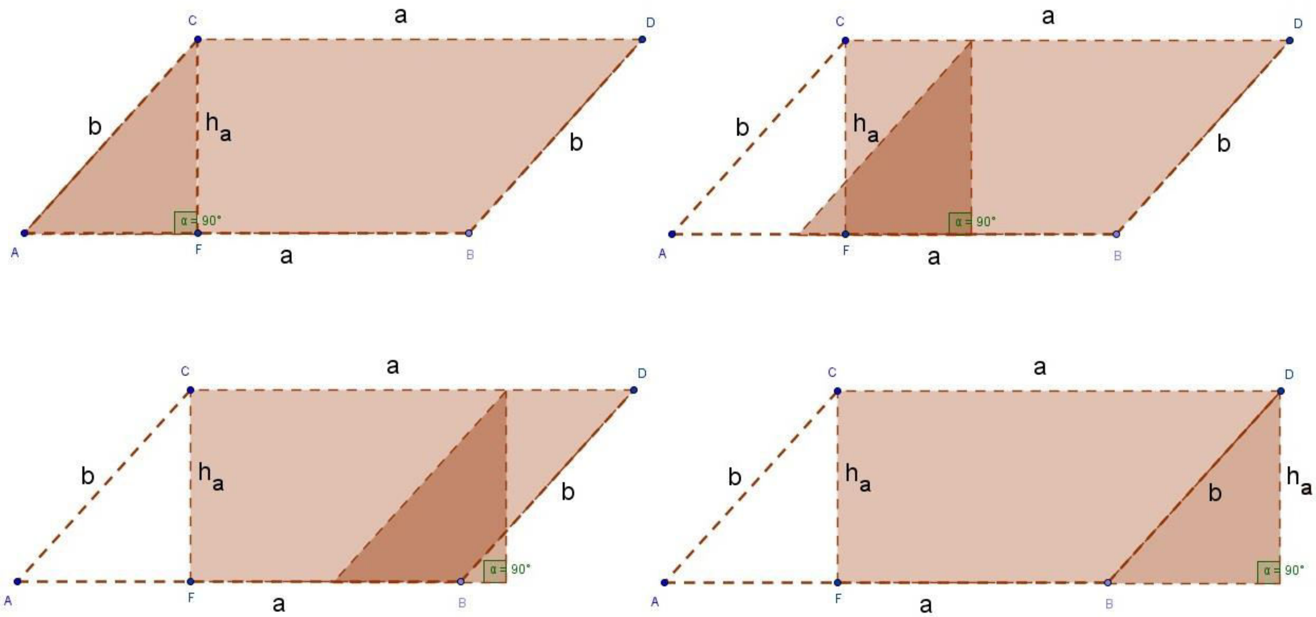
Дефиниција 4. Паралелограмом називамо четвороугао чије су супротне странице паралелне.

Правоугаоник и квадрат се још могу дефинисати као:

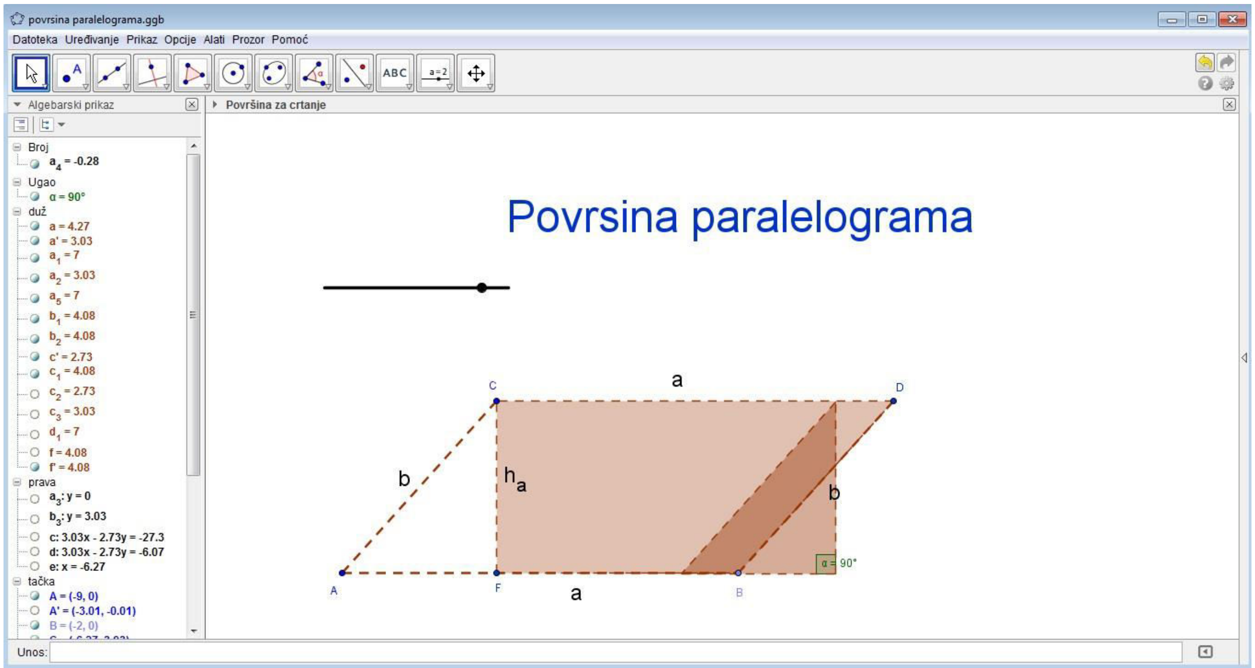
Дефиниција 5. Правоугаоник је паралелограм са једним правим углом.

Дефиниција 6. Квадрат је паралелограм који има један прав угао и две једнаке суседне странице.

Следеће слике нам указују на то да сваки паралелограм можемо тако изрезати да одговарајућим премештањем добијених делова добијемо правоугаоник чија је једна страница једнака страници паралелограма, док је друга страница паралелограма једнака одговарајућој висини паралелограма.

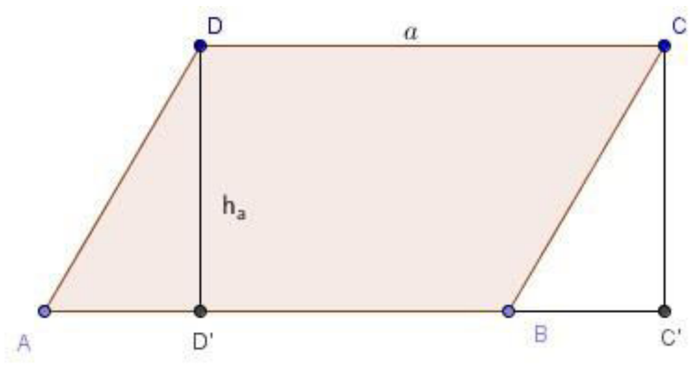


Слика 12. Визуелни приказ настанка формуле за површину паралелограма



Слика 13. Анимација и визуелни приказ настанка формуле за површину паралелограма у програмском пакету GeoGebra

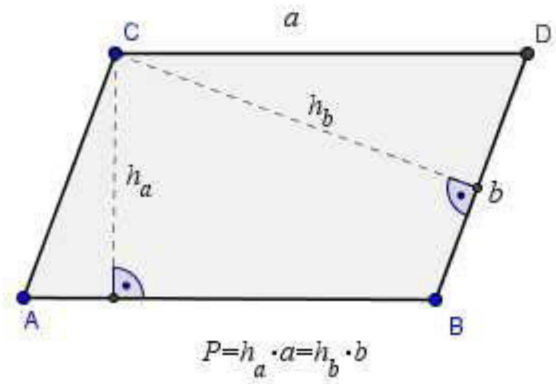
До истог закључка можемо доћи и без резања и премештања. Посматрајмо паралелограм *ABCD*. Нека су *D'* и *C'* подножја висина из темена *D* и *C*. Претпоставимо најпре да подножје једне од ових висина, на пример *D'*, припада дужи *AB*. Тада и из подударности троуглова *AD'D* и *BC'C* следи да паралелограм *ABCD* и правоугаоник *D'C'CD* имају једнаке површине. Како су странице правоугаоника *D'C'CD* једнаке a и h_a, следи да је његова површина, па тиме и површина паралелограма *ABCD*, једнака $a \cdot h_a$. У случају да ниједна од тачака *D'* и *C'* не припада дужи *AB*, из подударности троуглова *AD'D* и *BC'C* следи да паралелограм *ABCD* и правоугаоник *D'C'CD* имају једнаке површине.



Слика 14. Доказ формуле за површину паралелограма

Теорема 3. Површина паралелограма једнака је производу дужина његове странице и одговарајуће висине, односно:

$P = a \cdot h_a = b \cdot h_b$

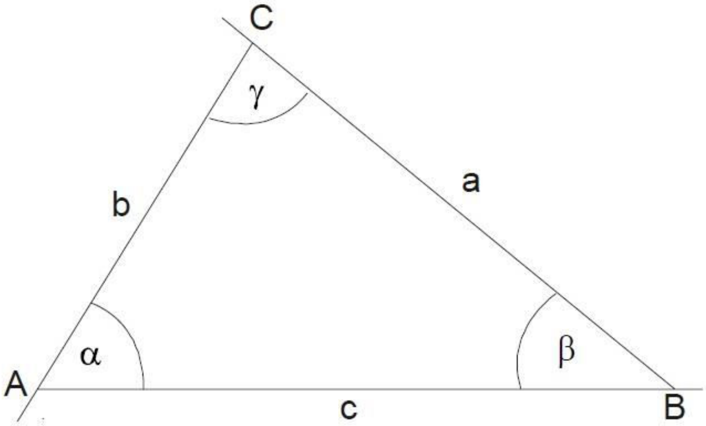


Слика 15. Паралелограм и његова формула за површину

2.5 Површина троугла

Било које две тачке одредђју тачно једну затворену изломљену линију.

Троугаона линија је затворена изломљена линија одређна са три неколинеарне тачке. Троугао је геометријски објекат кога чине троугаона линија и њена унутрашњост. Троугао који одређују неколинеарне тачке A, B и C обележавамо са ΔABC. Тачке A, B и C су **темена** ΔABC. Дужи AB, BC и CA су **странице** ΔABC. **Углови** ΔABC су $\measuredangle CAB$, $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle BCA$.



Слика 16. Троугао и његове основне ознаке

Уобичајено обележавање страница ΔABC је да се:
- страница AB обележава са c (јер се налази наспрам темена C);
- страница BC обележава са a (јер се налази наспрам темена A);
- страница CA обележава са b (јер се налази наспрам темена B).

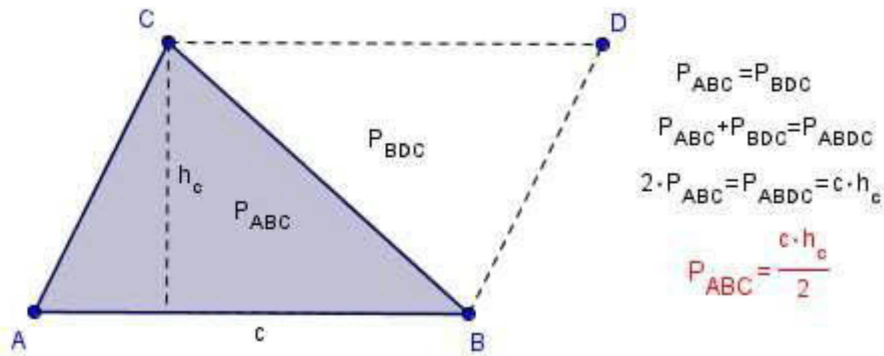
Уобичајено обележавање углова ΔABC је да се:
-∡CAB обележава са α;
- ∡ABC обележава са β;
- ∡BCA обележава са γ.

Посебни случајеви троугла:

1. **Једнакокраки троугао** - троугао са две једнаке странице. Врх тог троугла је заједничко теме једнаких страница, које називамо краци једнакокраког троугла; трећа страница се зове основица.
2. **Једнакостранични троугао** - троугао са три једнаке странице.
3. **Правоугли троугао** - троугао којем је један угао прав.

Допуњавањем троугла до паралелограма наслућујемо начин на који се може израчунавати површина троугла.

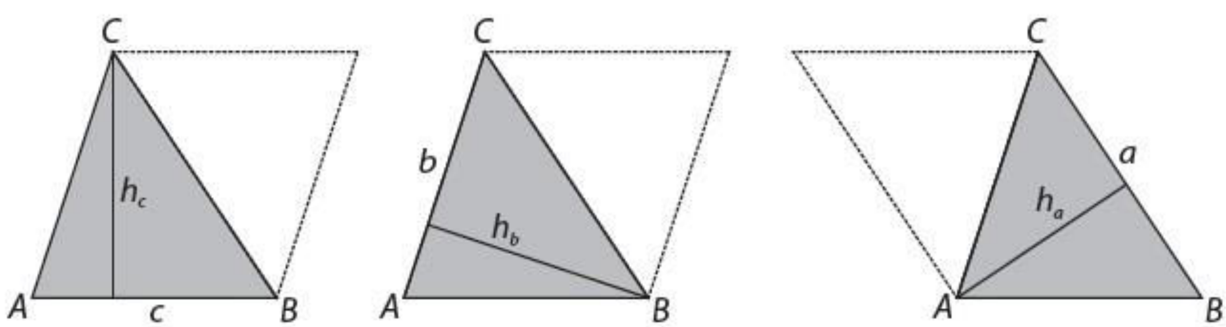
Посматрајмо троугао ΔABC. Ако кроз два темена неког троугла конструишемо праву паралелну страници наспрамној том темену, добићемо паралелограм. Због једнакости углова са паралелним крацима и става УСУ* следи да је $\Delta ABC \cong \Delta BCD$. Дакле, површина троугла ABC једнака је половини површине паралелограма $ABCD$.



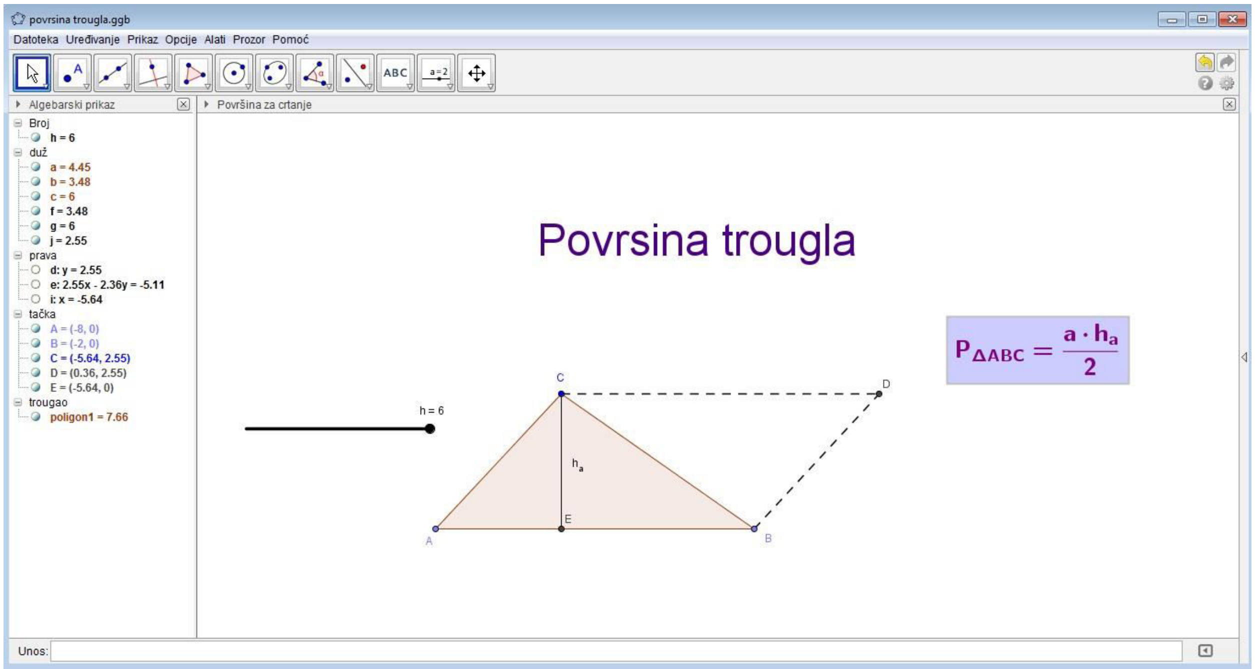
Слика 17. Троугао и доказ формуле за површину троугла

Теорема 4. Површина троугла једнака је половини производа дужине једне његове странице и висине која јој одговара.

$$P = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$



Слика 18. Три случаја у којима је могуће израчунати површину троугла

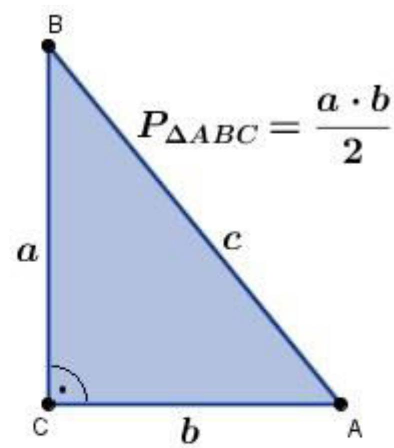


Слика 19. Анимација и визуелни приказ настанка формуле за површину троугла у програмском пакету GeoGebra

Површина правоуглог троугла

Теорема 5. Ако су a и b катете, с хипотенуза и h_c висина на хипотенузу правоуглог троугла ABC, онда је

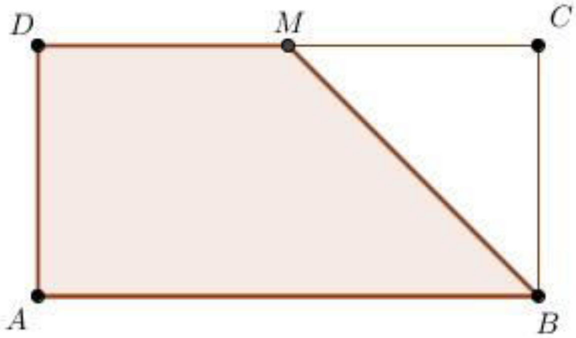
$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b = \frac{1}{2} c \cdot h_c.$$



Слика 20. Правоугли троугао и формула за израчунавање његове површине

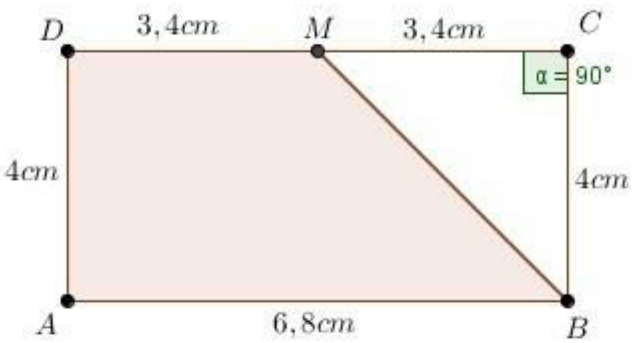
<u>Задатак</u>

Странице правоугаоника са слике су 6,8 cm и 4 cm. Тачка M је средиште странице CD. Израчунај површину осенченог дела правоугаоника.



Слика 21. Слика уз задатак

Решење:



Слика 22. Решење задатка

$$P_{ABMD} = P_{ABCD} - P_{BCM}$$

$$P_{ABMD} = 6{,}8 \cdot 4 + \frac{4 \cdot 3{,}4}{2}$$

$$P_{ABMD} = 27{,}2 + 6{,}8$$

$$P_{ABMD} = 34cm^2$$

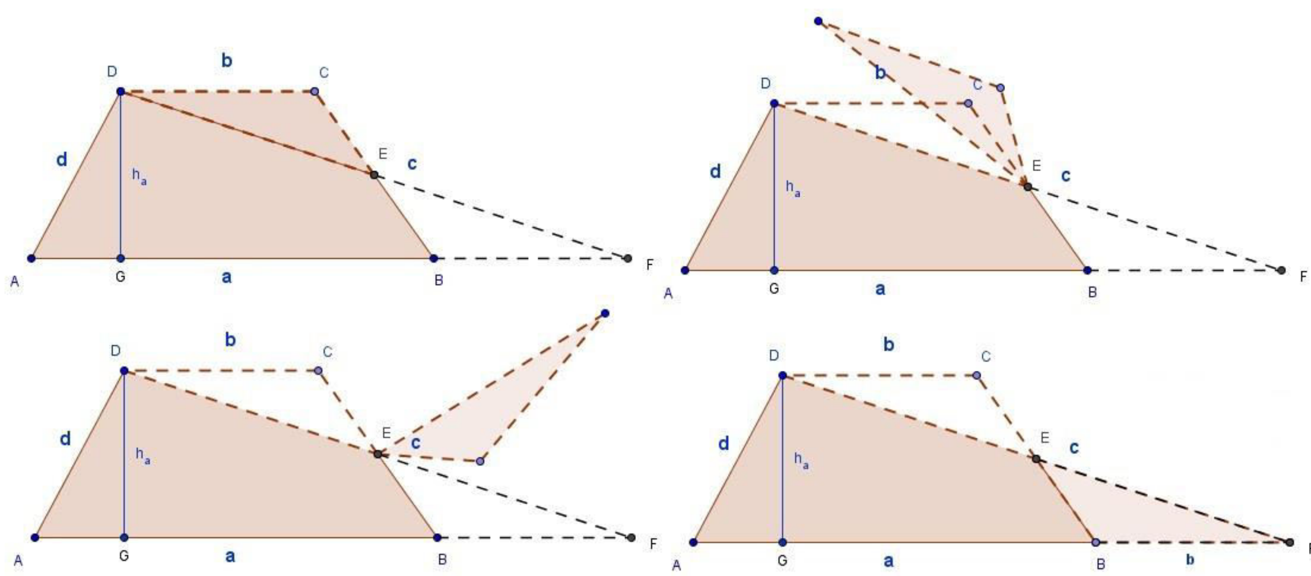
2.6 Површина трапеза

Дефиниција 7. Трапез је четвороугао који има бар један пар паралелних страница.

Паралелне странице трапеза су његове основице, а преостале две странице су краци тог трапеза. Уобичајно је да се основице трапеза $ABCD$ ознаавају са a и b, а краци са c и d.
Трапез чији су краци једнаки назива се једнакокраки трапез.
Трапез је правоугли ако је један његов крак нормалан на основице.
Висина трапеза је дуж цији крајеви припадају правама које садрже основице трапеза и која је нормална на овим правама.

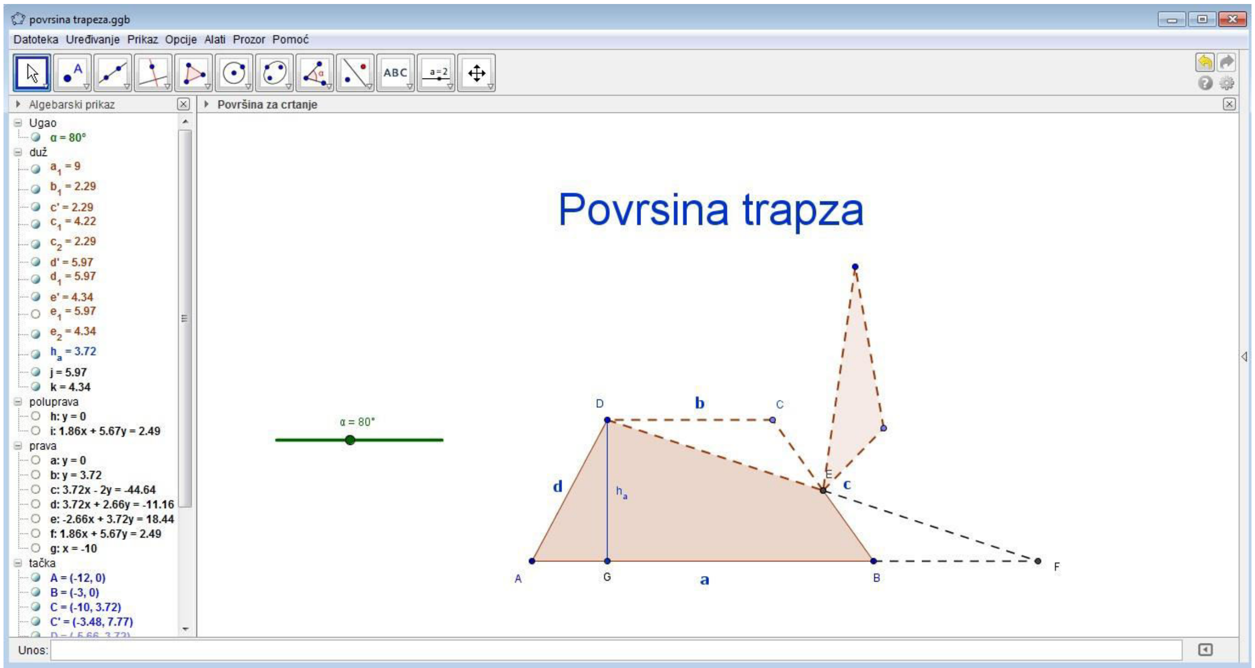
Дефиниција 8. Средња линија трапеза је дуж која спаја средине кракова трапеза. Она је паралелна основицама и једнака њиховој аритметичкој средини.

Нека је $ABCD$ произвољан трапез, чије су основице AB и CD (тј. a и b). Тачка E је средиште дужи BC. Права DE сече продужетак основе AB у тачки F.
Троугао DCE је подударан троуглу BFE, па је зато површина трапеза ABCD једнака површини троугла AFD, $P_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h_a$.



Слика 23. Визуелни приказ настанка формуле за површину трапеза

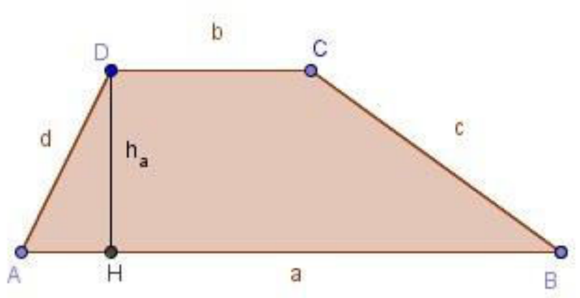
Средња линија трапеза паралелна је основицама и једнака је половини збира основица: $m = \frac{a+b}{2}$, па се површина трапеза може рачунати и на следећи начин: $P = m \cdot h$.



Слика 24. Анимација и визуелни приказ настанка формуле за површину трапеза у програмском пакету GeoGebra

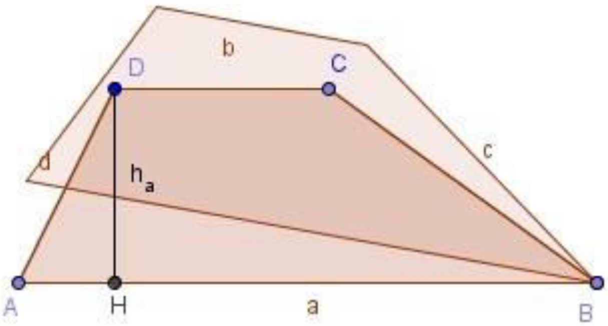
Теорема 6. Површина трапеза једнака је половини производа дужине висине и збира дужина основица. $P_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h_a = m \cdot h$

Други доказ за површину трапеза:



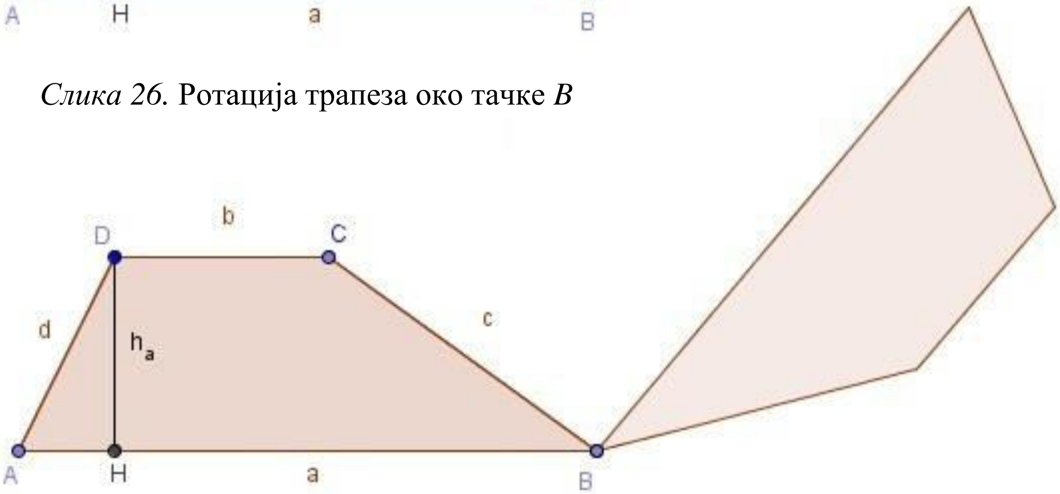
Слика 25. Произвољан трапез *ABCD*

Нека је *ABCD* такође један произвољан трапез, чије су основице *AB* и *CD* (тј. *a* и *b*).



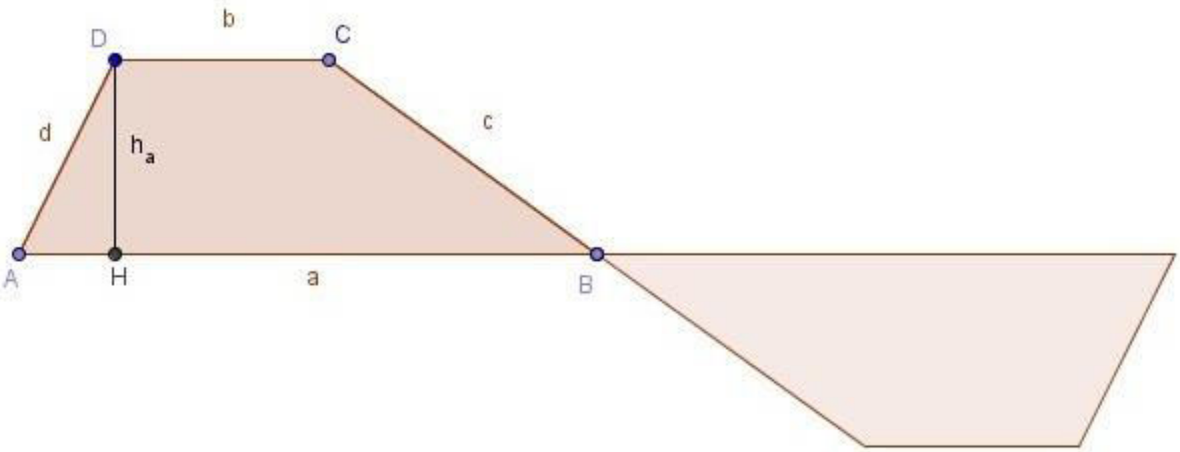
Око тачке *B* трапез ротира за 180°.

Слика 26. Ротација трапеза око тачке *B*



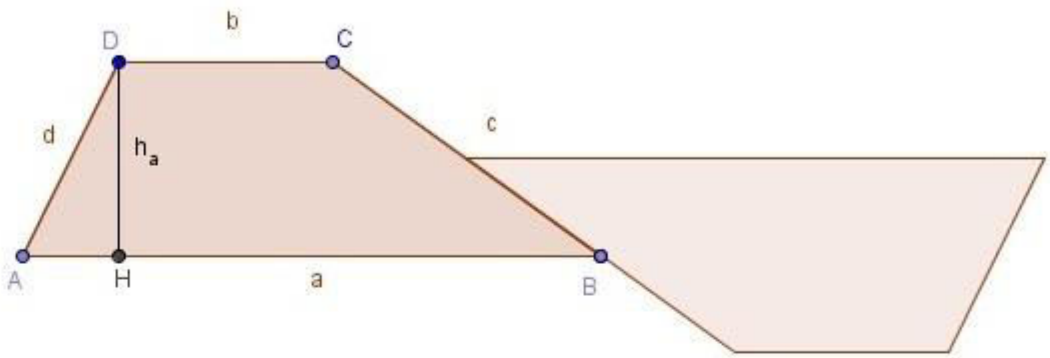
Слика 27. Ротација трапеза око тачке *B*

Настаје још један трапез, који је подударан трапезу *ABCD*.



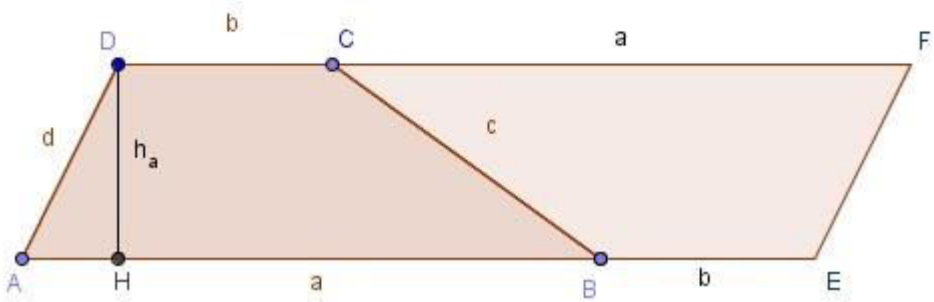
Слика 28. Настанак трапеза који је подударан трапезу *ABCD*

Новонастали трапез, након ротације, транслира се дуж крака BD.



Слика 29. Ротација новонасталог трапеза дуж крака BD

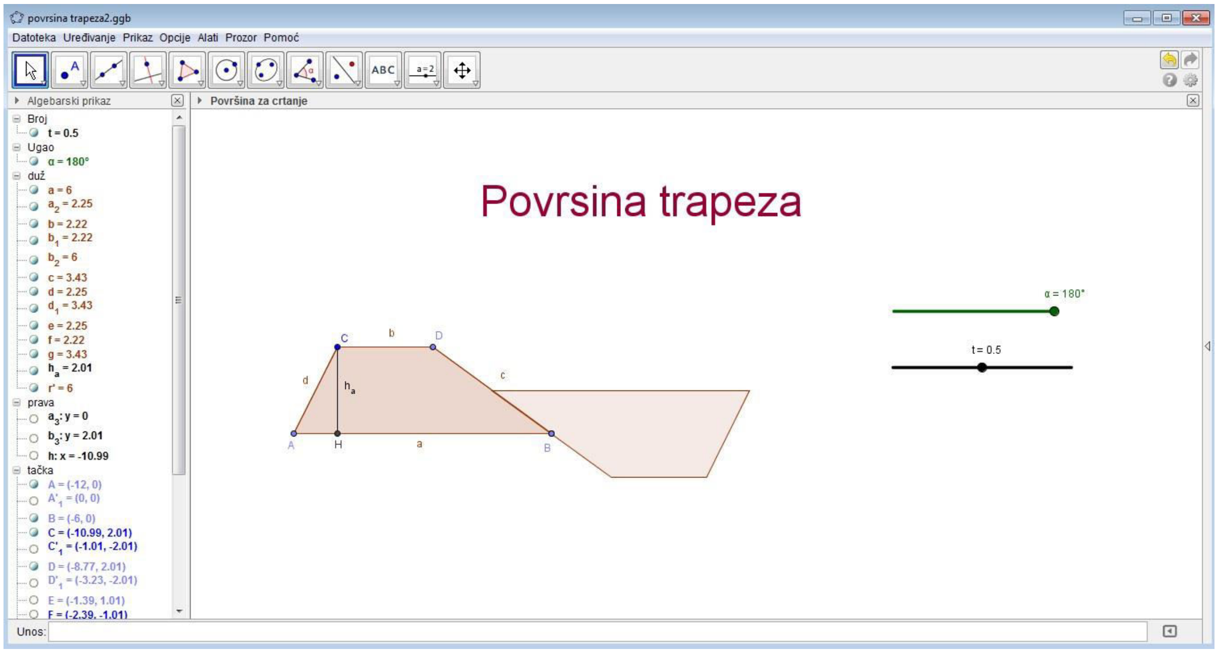
Фигура која је настала представља паралелограм, чија се површина може наћи. Његова једна страница, којој одговара висина h_a, једнака је $a + b$, тако да је површина овог паралелограма *AEFD* једнака: $P_{AEFD} = (a + b) \cdot h_a$.



Слика 30. Паралелограм који настане ротацијом и транслацијом

Да би се добила формула за израчунавање површине трапеза, потребно је још површину паралелограма поделити са два, јер се паралелограм састоји из два подударна трапеза.

$$P = \frac{(a + b) \cdot h_a}{2}$$

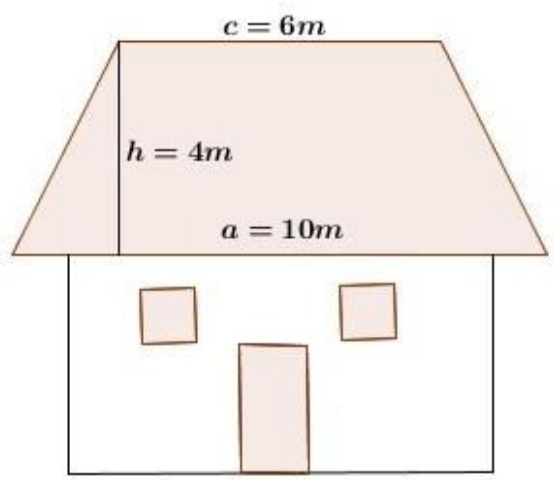


Слика 31. Анимација и визуелни приказ настанка формуле за површину трапеза у програмском пакету GeoGebra (други доказ)

<u>Задатак:</u>

Једна страна крова има облик једнакокраког трапеза основица $10m$ и $6m$ и висине $4m$. Израчунај површину дате стране крова. Колико комада црепа је потребно за покривање дате стране крова, ако један цреп покрива површину од $400cm^2$.

Решење:



$$P = \frac{(a + c) \cdot h}{2}$$

$$P = \frac{(10 + 6) \cdot 4}{2} = 16 \cdot 2 = 32m^2$$

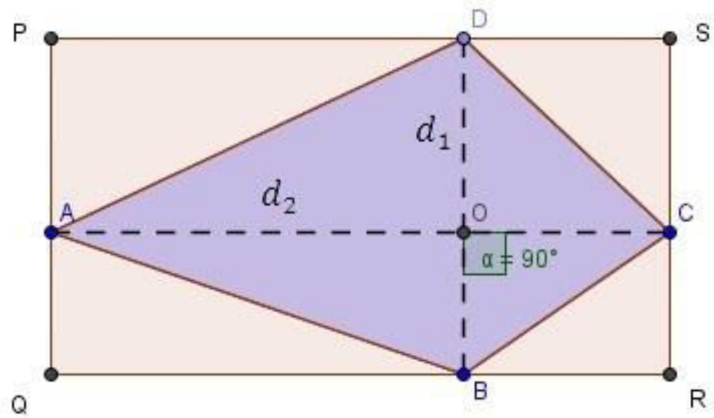
$$n = \frac{P}{P_c} = \frac{32m^2}{400cm^2} = \frac{32 \cdot 10000}{400}$$

$$n = \frac{32 \cdot 100}{4} = 800 \text{ црепова}$$

Слика 32. Решење задатка

2.7 Површина четвороугла са нормалним дијагоналама

Нека је *ABCD* произвољан четвороугао с нормалним дијагоналама *AC* и *BD*.

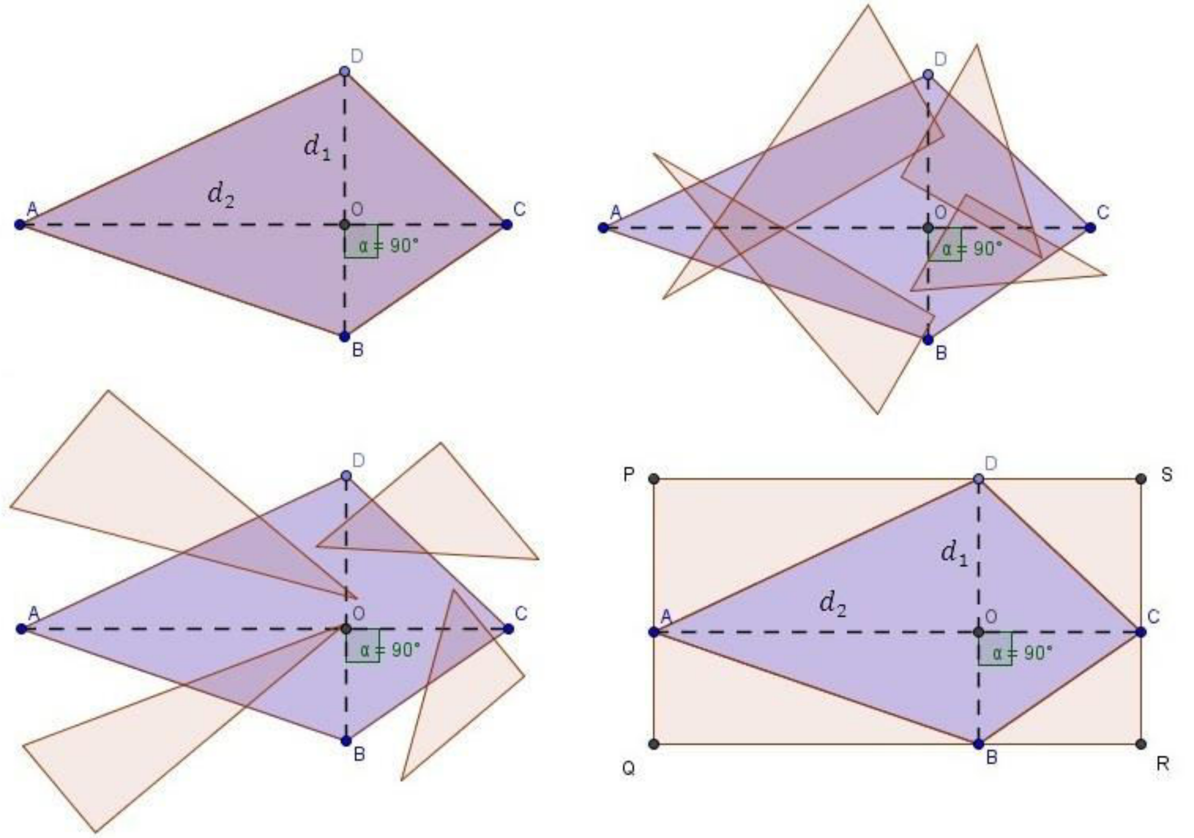


Слика 33. Произвиљан четвороугао са нормалним дијагоналама

Праве које садрже његова темена и паралелне су његовим дијагоналама одређују паралелограм *SPQR.* Како је сваки од паралелограма *AODP*, *QBOA*, *BRCO* i *OCSD,* правоугаоник јер имају један прав угао, угао код темена *O* то је и *QRSP* правоугаоник такође.

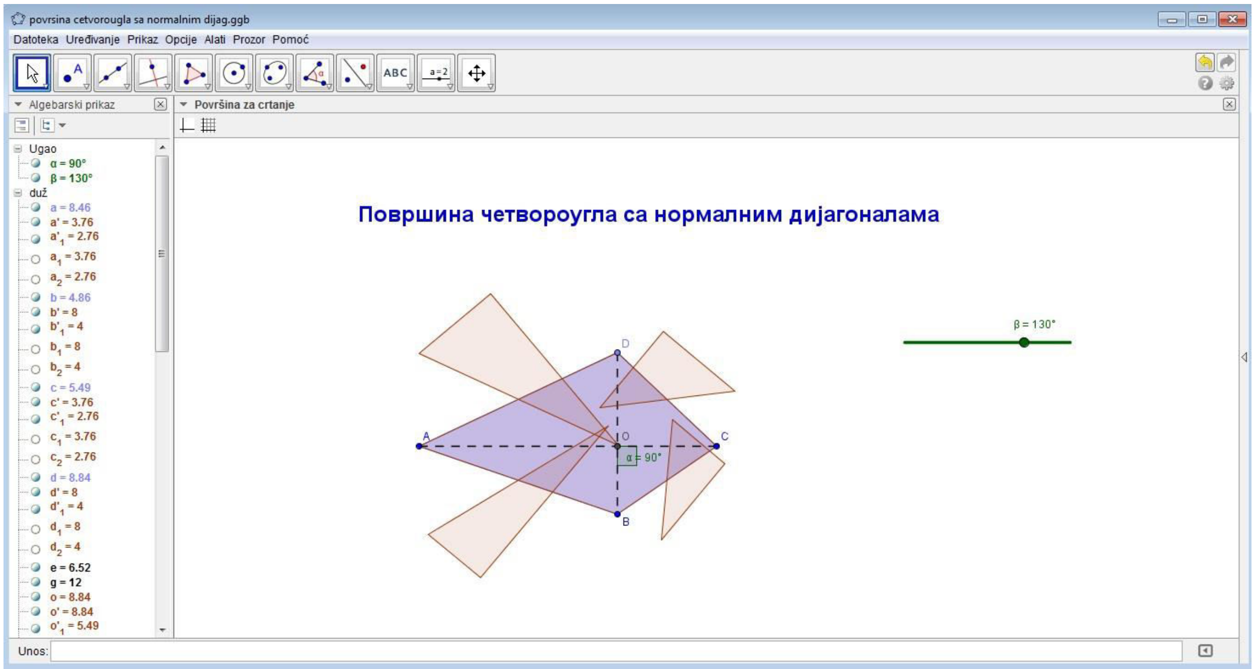
Површина четвороугла *ABCD* једнака је половини површине правоугаоника *QRSP*, коју знамо да израчунамо.

Следећа слика представља визуелизацију овог доказа.



Слика 34. Визуелни приказ настанка формуле за површину четвороугла са нормалним дијагоналама

Теорема 7. Површина четвороугла чије су дијагонале нормалне једнака је половини производа дужина његових дијагонала $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

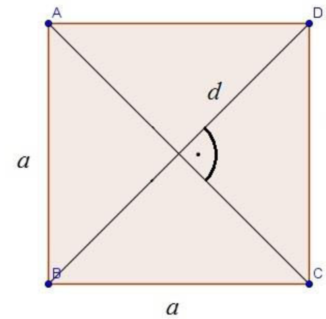


Слика 35. Анимација и визуелни приказ настанка формуле за површину четвороугла са нормалним дијагоналама у програмском пакету GeoGebra

Површина следеће три фигуре такође се може израчунати применом ове формуле.

1. Квадрат. Дијагонале квадрата се такође секу под правим углом, тако да се његова површина може израчунати и на следећи начин:

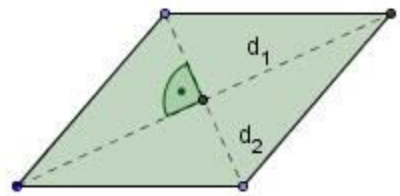
$$P = \frac{d \cdot d}{2} = \frac{d^2}{2}$$



Слика 36. Квадрат (дијагонале му се секу под правим углом)

2. Ромб. Још једна фигура код које се дијагонале секу под правим углом јесте ромб, па се и код њега може применити ова формула:

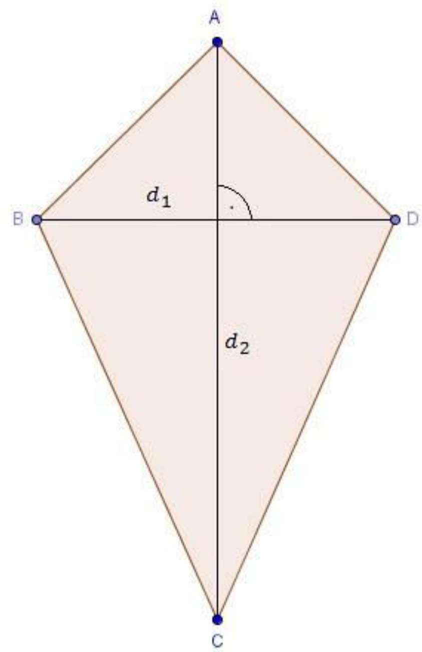
$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$



Слика 37. Ромб (дијагонале му се секу под правим углом)

3. Делтоид. Још једна фигура која има дијагонале које се секу под правим углом, па се ова формула примењује и за израчунавање његове површине:

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

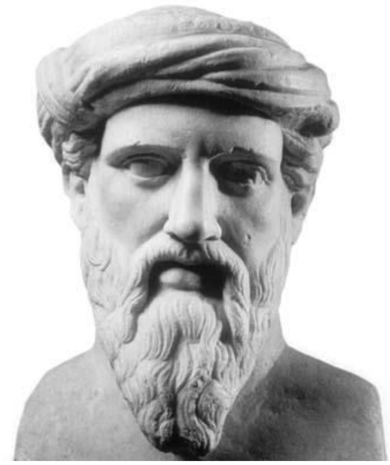


Слика 38. Делтоид (дијагонале му се секу под правим углом

3. Питагорина теорема

3.1 Питагора – живот и учење

Питагора је антички филозоф и математичар, оснивач питагорејске школе. Рођен је 570. године пре нове ере, у Грчкој, на острву Самос. Био је један од хероја који су надвисили живот и имали су знања и умећа која су сматрана културним вредностима. Мало је тога познато о њему али засигурно је да га је већина савременика поштовала и волела због његове интелигенције и учења које је проповедао. У антикој литератури описан је као познати филозоф и учитељ, религиозни и етички реформатор, полубог у очима својих ученика.



Слика 39. Питагора(око 570. п. н. е. око 495. п. н. е)

Друга два филозофа која су Питагору увела у свет математичких идеја били су Талес и његов ученик Анаксимандер. Талес, иако га није подучавао заинтересовао га је за математику и астрономију. Саветовао га је да отпутује у Египат и тамо научи више из ових научних области. Око 535 године пре нове ере Питагора је отпутовао у Египат. Подаци о Питагорином боравку у Египту говоре да је он посетио многе египатске храмове и водио расправе са египатским свештеницима, од којих је научио геометрију.

Године 518. пре нове ере отпутовао је на југ Италије и основао је филозофску и религиозну школу у граду Кротону, такозвану Питагорејску школу. У овом граду он је био на челу морално – религиозног братства које је имало своја правила и неговало строг начин живота. Проповедао је као филозоф и држао лекције из морала различитим друштвеним групама: школској омладини, младим људима, градским женама и одраслима у сенату. Та школа имала је строга правила о начину живота, исхране, одевања, а обухватала је и обавезу проучавања аритметике, геометрије, астрономије и музике. Једно од занимљивијих открића Питагорејаца је да односи међу тоновима имају основу у односима међу бројевима. Открили су да висина тона зависи од дужине жице тј. да музички интервали зависе од одређених математички пропорција.

После Питагорине смрти питагорејци су наставили његово учење и доста урадили на успостављању и ширењу Питагориног култа. Већина сматра да Питагора није писао већ проповедао и да су се његова знања преносила усмено. Нема данас списа за које се може рећи да их је написао Питагора. Али, једна од најпознатијих и најважнијих теорема, без које је геометрија незамислива, приписана је овом великом математичару - Питагорина теорема.

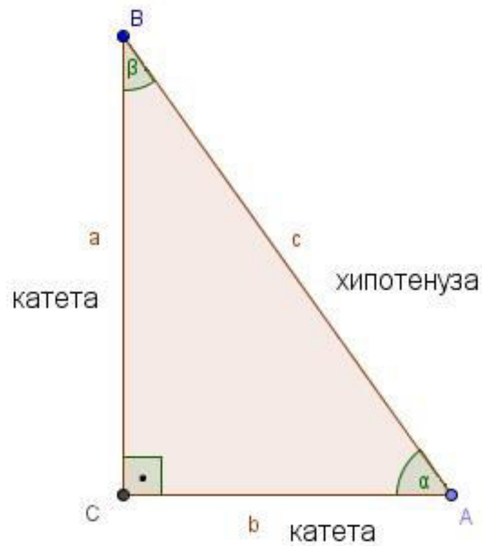
3.2 Питагорина теорема – формулација и докази

Питагорина теорема је теорема која се примењује на правоуглом троуглу, односно говори о вези међу дужинама страница, стога се прво треба упознати са карактеристикама правоуглог троугла.

Најдужа страница правоуглог троугла је страница наспрам правог угла и назива се хипотенуза. Две краће странице наспрам оштрих углова називају се катете. Уобичајна ознака за хипотенузу је c, док се катете означавају са a и b.
За сваки троугао важе одређене неједнакости, па тако и за правоугли троугао:

$$c < a + b$$
$$a < b + c$$
$$b < c + a$$

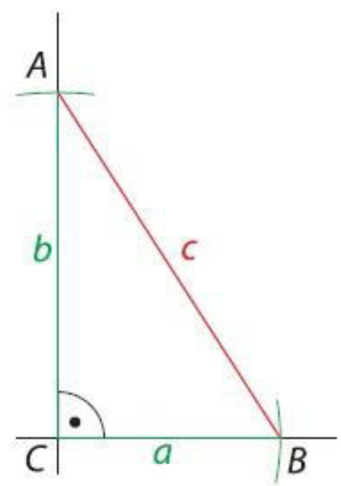
Како је троугао правоугли и има један угао од 90°, мора важити да је збир друга два једнак 90°, тј. да је $\alpha + \beta = 90°$.



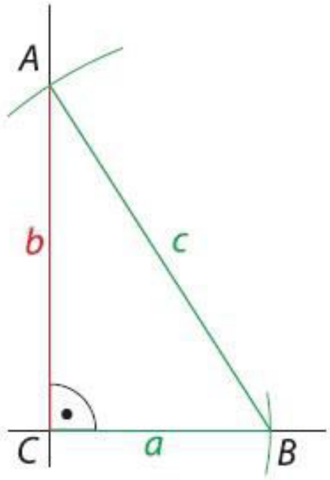
Слика 40. Правоугли троугао и његове основне ознаке

Став подударности СУС каже: Ако два троугла имају једнаке по две странице и њима захваћене углве, онда су ти троуглови подударни.
Према овом ставу подударности, правоугли троугао је одређен својим катетама, односно другим речима, уколико су нам познате катете неког правоуглог троугла, потпуно је одређена и његова хипотенуза.

Став подударности ССУ каже: Ако два троугла имају једнаке по две странице и углове наспрам веће странице, онда су ти троуглови подударни.Према овом ставу подударности, правоугли троугао је одређен хипотенузом и једном својом катетом, дносно другим речима, уколико су нам познате катета и хипотенуза неког правоуглог троугла, потпуно је одређена и његова друга катета.



Слика 41. Правоугли троугао одређен својим катетама



Уколико су нам познате две странице правоуглог троугла, конструкција и директно мерење представљају један од начина да се одреди дужина треће странице тог троугла.

Међутим Питагорина теорема омогућава да се то уради на једноставнији начин. Она говори о вези међу дужинама страница правоуглог троугла. Наиме, ако су a и b дужине катета и c дужина хипотенузе правоуглог троугла, Питагора и његови ученици доказали су да важи једнакост $a^2 + b^2 = c^2$. Другим речима, ако се измере дужине катета неког правоуглог троугла (a и b), затим израчуна збир његових квадрата ($a^2 + b^2$), добија се број који је једнак квадрату дужине хипотенузе (c^2) тог троугла.

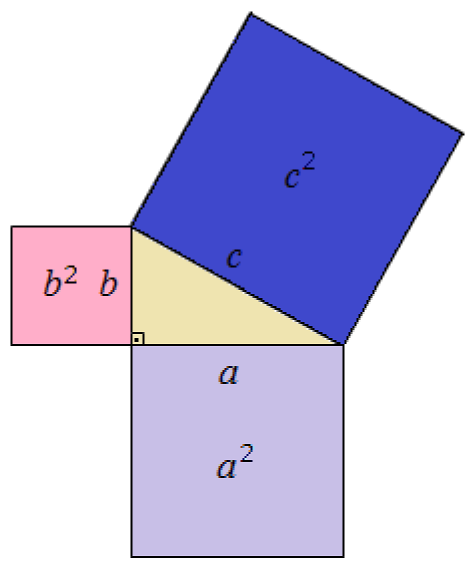
Слика 42. Правоугли троугао одређен катетом и хипотенузом

Доказ ове теореме да важи за сваки правоугли троугао дао је Питагора заједно са својим ученицима, о чему је било више речи и у историјату на почетку.

Питагорина теорема:

Површина квадрата конструисаног над хипотенузом правоуглог троугла једнак је збиру површина квадрата конструисаних над катетама тог троугла.

$$c^2 = a^2 + b^2$$



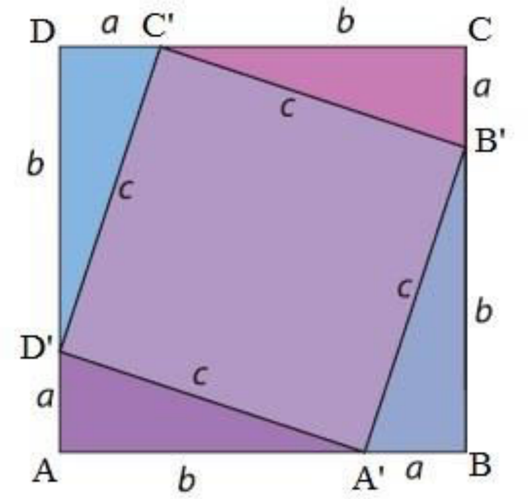
Слика 43. Питагорина теорема

Питагорина теорема се може доказати на разне начине. Први доказ који следи претежно је базиран на визуелном доказивању ове теореме и зато представља чак можда најједноставији доказ када се говори о овој теореми. Како је неопходно показати и научити макар један од пар доказа које ћемо навести, у основној школи би то могао бити баш овај, јер ђаци могу и сами, уз помоћ наставника, закључивати и доћи до идеје.

I доказ:

Посматрајмо квадрат *ABCD*.(Слика 39.) Свака од његових страница *AB, BC, CD* и *AD* подељена је редом тачкама *A', B', C'* и *D'* на дужи чије су дужине a и b. Оваквом поделом страница, кадрат *ABCD* ће се састојати из четири подударна правоугла троугла *AA'D'*, *A'BB'*, *B'CC'* и *C'DD'*, чије су катете a и b, а хипотенуза c, и квадрата *A'B'C'D'* чија је страница дужине c.
Са једне стране, површина квадрата *ABCD* једнака је

$$P_{ABCD} = (a+b)^2,$$



Слика 44. Питагорина теорема (доказ I)

јер је дужина његове странице $a+b$.
Са друге стране, површина квадрата се може израчунати као збир површина ова четири подударна правоугла троугла и површине квадрата *A'B'C'D':*

$$P_{ABCD} = 4 \cdot P_{AA'D'} + P_{A'B'C'D'}$$
$$P_{ABCD} = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + c^2$$

Ове две формуле за површину се могу изједначити

$$(a+b)^2 = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + c^2$$

Сређивањем се добија

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

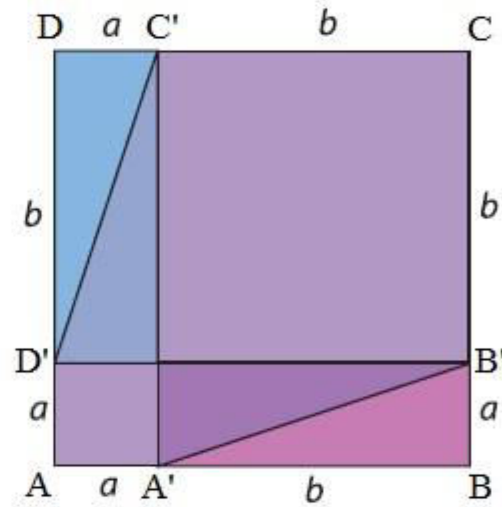
Члан $2ab$ се налази са обе стране ове једнакости, па се они могу скратити, при чему остаје

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

што је требало показати, тј. да је збир квадрата катета једнак квадрату хипотенузе било ког правоуглог троугла.

II доказ:

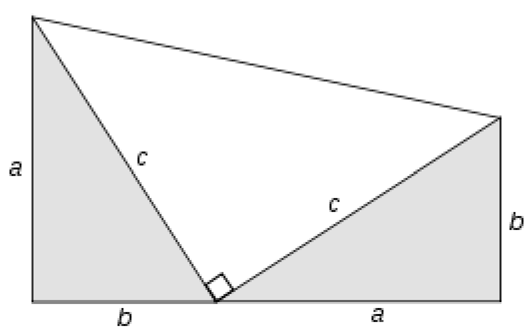
Овај доказ Питагорине теореме је сличан претходном, при чему су четири поменута троугла постављена мало другачије унутар квадрата ABCD, чија је страница једнака $a + b$. (Слика 40.) Површина овог квадрата биће једнака збиру површина квадрата над катетама a и b и површини четири правоугла троугла.
Слично предходном доказу, долази се до једнакости коју казује Питагорина теорема.



Слика 45. Питагорина теорема (доказ II)

III доказ:

Ово је још један посебно значајан геометријски доказ који је открио Џејмс Гарфилд[7] у 19. веку. Идеја доказа је да се на полазни троугао надовеже још један њему подударан, тако да се краћа катета првог и дужа катета другог налазе на једној правој и да полазе из истог темена. Спајањем преостала два темена троуглова која припадају хипотенузама добија правоугли трапез чије су основице дужине a и b, а висина дужине $a + b$. Са једне стране, његова површина се може добити као производ полузбира основица и висине, тј. применом формуле за израчунавање површине трапеза



Слика 46. Питагорина теорема (доказ III)

$$P = \frac{a + b}{2} \cdot (a + b)$$

[7] Џејмс Гарфилд (март 1881.- септембар 1881) је био амерички научник и политичар, познат као 20. предсједник САД-а и други председник који је убијен у атентату.

а са друге стране као збир површина три троугла на које је подељен

$$P = 2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + \frac{c^2}{2}$$

Важиће

$$\frac{a+b}{2} \cdot (a+b) = 2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + \frac{c^2}{2}$$
$$\frac{(a+b)^2}{2} = a \cdot b + \frac{c^2}{2}$$

Ако помножимо обе стране са 2 и квадрирамо леву страну добићемо

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

Члан $2ab$ се налази са обе стране ове једнакости, па се они могу скратити, при чему остаје

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

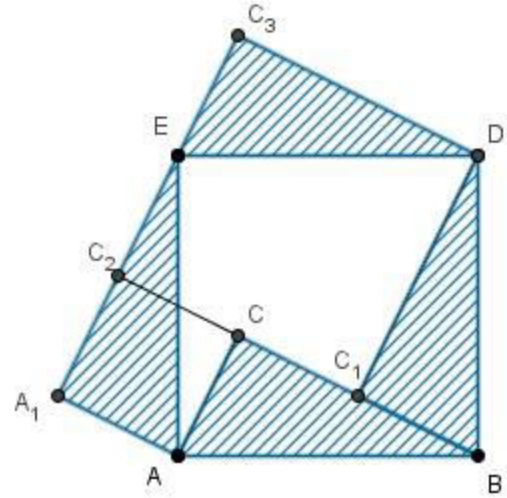
што је требало показати.

IV доказ:

Нека је ABC произвољан правоугли троугао и нека се угао од 90° налази код темена C. Квадрат $ABDE$ конструисан је тако да садржи троугао ABC и његова страница ће представљати хипотенуз троугла ABC.

Ротирањем троугла ABC око темена A за 90° у смеру супротном кретању казаљке на сату, он се пресликава у троугао AEA_1, а продужавањем катете BC до пресека C_2 са катетом A_1E добија се квадрат ACC_2A_1, чија је страница једнака катети AC.

С друге стране, када се из тачке D конструише нормала DC_1 на катету BC, добија се правоугли троугао BDC_1, који је подударан троуглу ABC, јер имају једнаке хипотенузе ($AB = BD$) и оштре углове са теменима у B и D (угао ABC је једнак

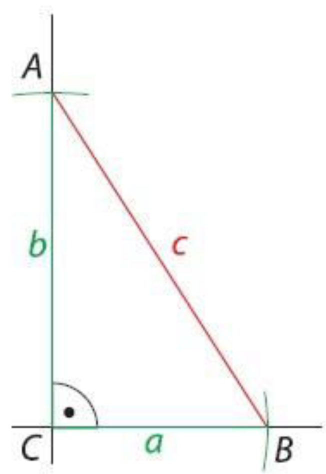


Слика 47. Питагорина теорема (доказ IV)

углу BDC_1) као углови са нормалним крацима. Ако се троугао BDC_1 ротира око темена D за 90° у смеру кретања казаљке на сату, онда ће он доћи у положај EDC_3.
Будући да је $\measuredangle A_1EA + \measuredangle AA_1E = 90°$ (збир оштрих углова у правоуглом троуглу), $\measuredangle A_1EA = \measuredangle DEC$ и $\measuredangle AED = 90°$, то је $\measuredangle A_1EA + \measuredangle AED + DEC_3 = 180°$, што значи да су тачке A_1, C_2 и C_3 колинеарне, па је четвороугао $C_1DC_3C_2$ квадрат, чија је страница једнака катети BC правоуглог троугла ABC. На слици се види да је петоугао $ABDC_3A_1$ унија четири подударна правоугла троугла (ABC, BDC_1, EDC_3, EAA_1) и петоугла ACC_1DE. Међутим, на слици се види и да петоугао ACC_1DE и троуглови ABC и BDC_1 чине квадрат над хипотенузом AB, с једне стране, и да петоугао ACC_1DE и троуглови AEA_1 и EDC_3 чине збир квадрата над катетама AC и BC, с друге стране, па је квадрат над хипотенузом AB правоуглог троугла ABC једнак збиру квадрата над катетама AC и BC.

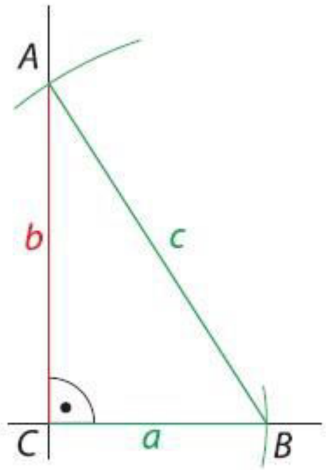
Уколико су познате дужине две странице правоуглог троугла, помоћу Питагорине теореме, једноставо одређујемо дужину треће странице.

Ако су познате дужине катета *a* и *b* правоуглог троугла, онда је $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.



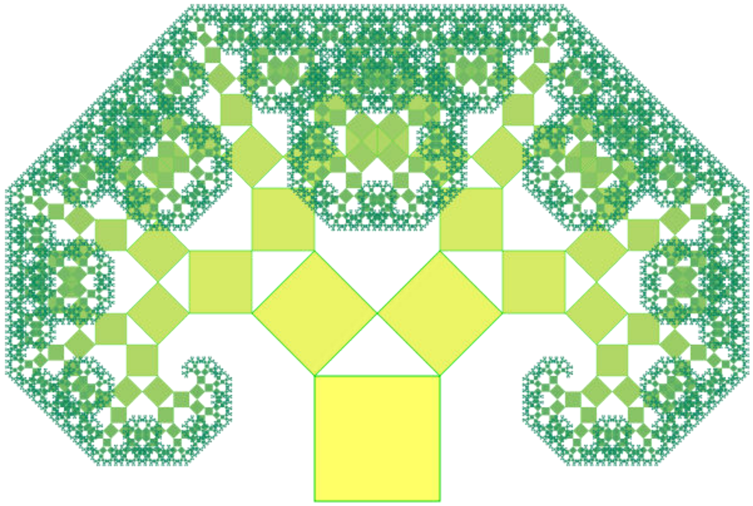
Слика 48. Правоугли троугао ако су познате дужине катета *a* и *b*

Ако су познате дужина једне катете a и хипотенуза c правоуглог троугла, онда је $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.



Слика 49. Правоугли троугао ако су познате дужина катете a и хипотенуза c

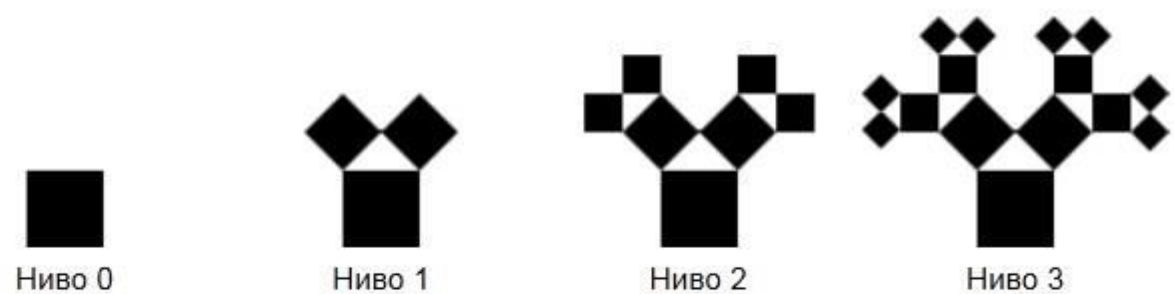
3.3 Питагорино дрво



Слика 50. Питагорино дрво

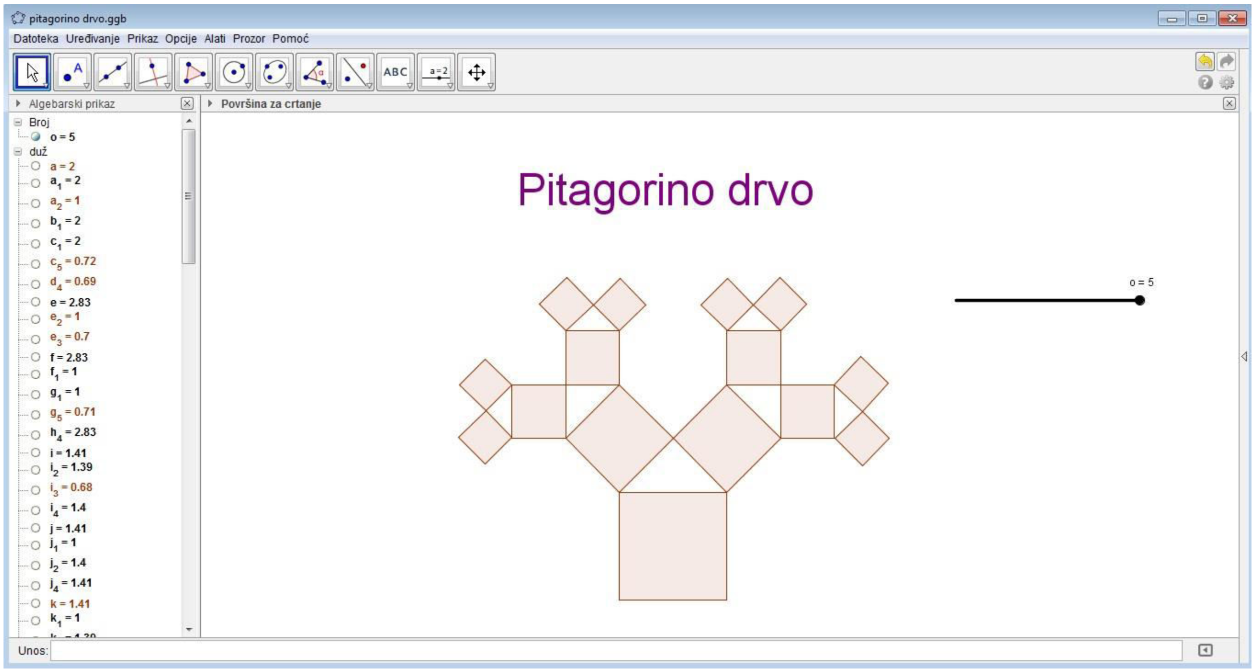
Уз коришћење Питагорине теореме, конструисањем квадрата над катетама и хипотенузом могу се добити разни геометријски облици - фрактали. Фрактал је појам којим се означава геометријски лик који се може поделити на бесконачан број делова, при чему ће сваки од њих бити исти или сличан почетном лику. Питагорино дрво је равански фрактал конструисан помоћу квадрата. Добио је име по Питагори зато што свака тројка суседних квадрата својим заједничким теменима одређује правоугли троугао, у облику који се традиционално користи за приказ Питагорине теореме.

Његова конструкција почиње конструкцијом квадрата, који ће бити квадрат над хипотенузом. Затим се конструишу катете, а над катетама се конструишу нови квадрати. По истом принципу се даље конструишу све мањи и мањи, тако да се добија дрво које се више и више грана.



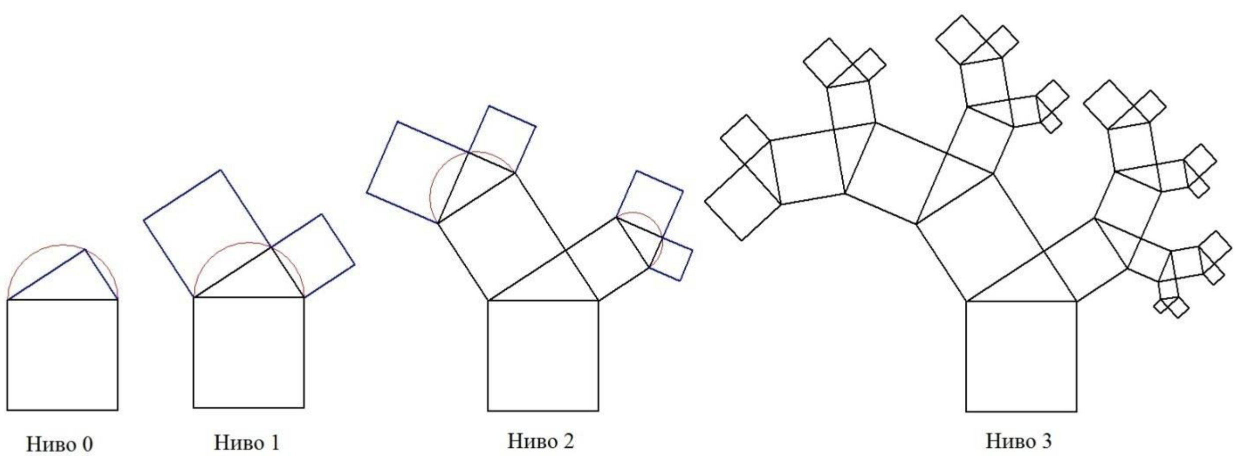
Слика 51. Поступак за конструкцију Питагориног дрвета

Гранање се одвија тако да, ако би се кренуло од квадрата чија је страница 1, цело дрво би могло да стане у правоугаоник величине 6×4.



Слика 52. Анимација и визуелни приказ настанка Питагориног дрвета у програмском пакету GeoGebra

Ако се уместо два иста квадрата, у новом кораку они конструишу тако да је један већи од другог (односно да правоугли троугао одређен теменима три суседна квадрата не буде једнакокраки), резултат ће бити „Питагорино дрво на ветру".

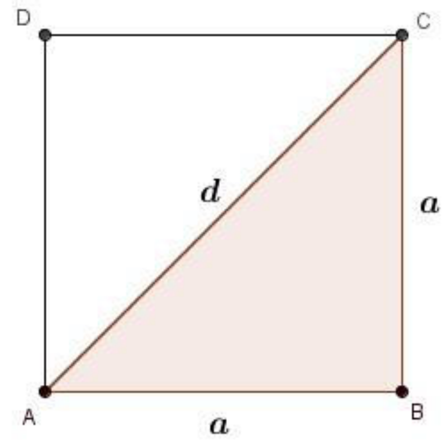


Слика 53. Поступак за конструкцију „Питагориног дрвета на ветру"

Значај Питагорине теореме је превазишао област геометрије, тако да има примену у ширим научним дисциплинама. Њеним правилним формулисањем Питагора је уцртао нову путању развоја геометрије, па и целокупне математике. Ширина примене је омогућена тиме што већину геометријских тела и фигура можемо поделити на правоугле троуглове и тиме олакшати израчунавање обима, површине или неких других елемената . Смернице које је Питагора, заједно са својим следбеницима Питагорејцима дао пре две хиљаде година и даље су актуелне упркос мноштву нових открића током векова. Његова генијалност да види ствари испред свог времена је и даље инспирација научницима да проучавају његову широку заоставштину и да стално уче из ње.

3.4 Примена Питагорине теореме на квадрат

Нека је $ABCD$ квадрат странице a. Троугао ABC је једнакокрако-правоугли ($AB = BC = a, < ABC = 90°$), код ког дијагонала d представља хипотенузу. Према Питагориној теореми важиће:



Слика 54. Квадрат и примена Питагорине теореме на троугао ABC

$$d^2 = a^2 + a^2,$$

па је
$$d^2 = 2a^2.$$

Из последње једнакости следи да је

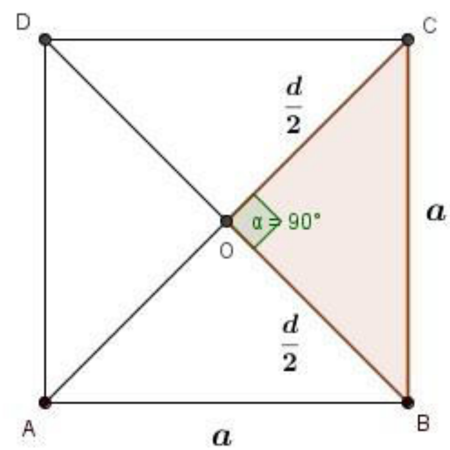
$$d = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2},$$

па је одатле

$d = \sqrt{2} \cdot a$, јер је $a > 0$ (дужина не може бити негативан број).

Теорема 8. Ако је a страница и d дијагонала квадрата, онда је $d = \sqrt{2} \cdot a$.

Како се дијагонале квадрата полове и секу под правим углом, Питагорина теорема се може применити и на троугао *BCO*, при чему је O пресек дијагонала квадрата *ABCD*. Одатле се добија



Слика 55. Квадрат и примена Питагорине теореме на троугао *BCO*

$$a^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

Након даљег сређивања
$$a^2 = \frac{d^2}{4} + \frac{d^2}{4} = \frac{2d^2}{4} = \frac{d^2}{2},$$

добиће се

$a = \sqrt{\frac{d^2}{2}} = \frac{\sqrt{d^2}}{\sqrt{2}} = \frac{d}{\sqrt{2}}$, $d > 0$ (дужина не може бити негативан број).

Рационалисањем $a = \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}$, одакле следи да је

$$a = \frac{d\sqrt{2}}{2}.$$

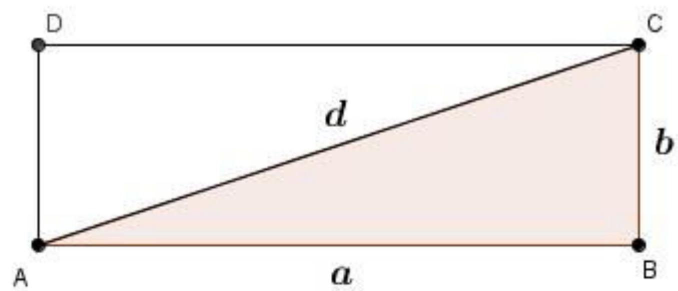
3.5 Примена Питагорине теореме на правоугаоник

Нека су дужине страница правоугаоника $ABCD$ једнаке $AB = CD = a$ и $AD = BC = b$. Дијагонала AC дели правоугаоник на два правоугла троугла ABC и ACD, чија је заједничка хипотенуза дијагонала правоугаоника $AC = d$. Дакле, дијагонала се може израчунати применом Питагорине теореме на било који од ова два троугла:

$$d^2 = a^2 + b^2,$$

односно

$$d^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

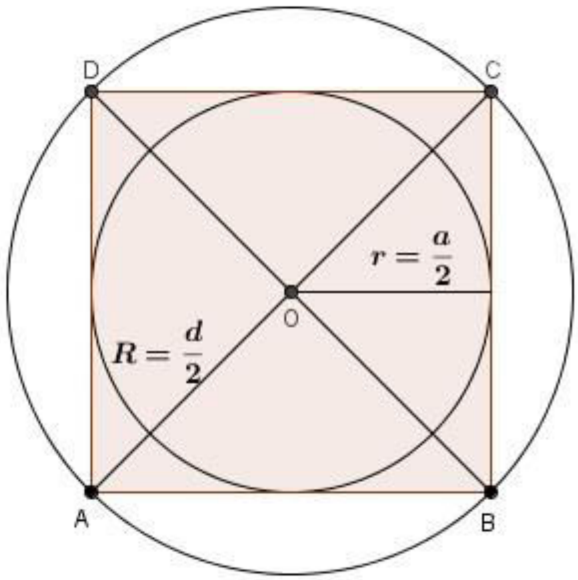


Слика 56. Правоугаоник и примена Питагорине теореме на троугао *ABC*

Задатак:

Одреди полупречнике описане и уписане кружнице квадрата дијегонале $8cm$.

Решење:



$$R=\frac{d}{2}=\frac{8}{2}=4 \qquad r=\frac{a}{2}$$

$$\boxed{R=4cm}$$

$$d^2=a^2+a^2$$

$$d^2=2a^2$$

$$a^2=\frac{d^2}{2} \qquad a=\sqrt{\frac{64}{2}}$$

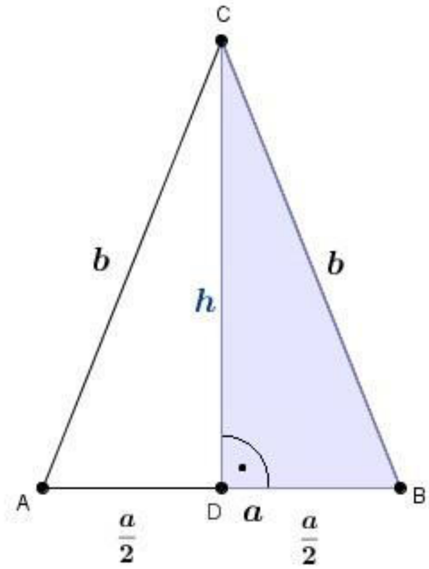
$$a=\sqrt{\frac{d^2}{2}} \qquad a=\frac{8}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$a=\sqrt{\frac{8^2}{2}} \qquad \boxed{a=4\sqrt{2}cm}$$

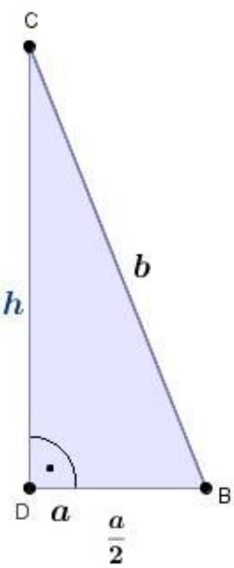
Слика 57. Решење задатка

3.6 Примена Питагорине теореме на једнакокраки троугао

Нека је дужина сновице $AB = a$ и $AC = BC = b$ једнакокраког троугла ABC. Тачка D представља подножје висине из темена C на основицу AB. Како висина увек пада под правим углом, висина $CD = h$ дели троугао ABC на два подударна правоугла троугла ADC и BDC. Ова висина уједно представља и заједничку катету ова два троугла. Друга катета биће $AD = \frac{a}{2}$, односно $BD = \frac{a}{2}$.



Слика 58. Једнакокраки троугао и примена Питагорине теореме на троугао *ABC*



Слика 59. Издвојени троугао на који се примењује Питагорина теорема

Применом Питагорине теореме следи:

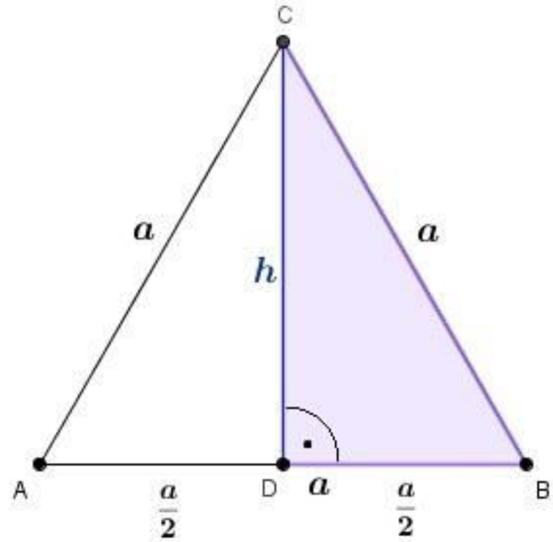
$$b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

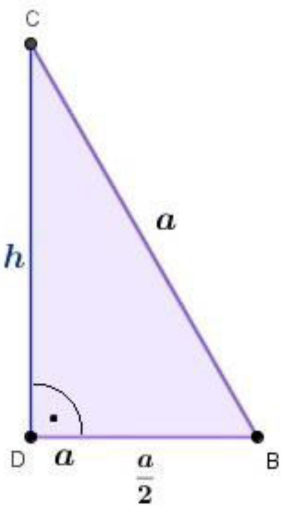
$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

3.7 Примена Питагорине теореме на једнакостранични троугао

Нека је дужина страница $AB = BC = AC = a$ једнакостраничног троугла ABC. Тачка D представља подножје висине из темена C на страницу AB. Како висина увек пада под правим углом, висина $CD = h$ дели троугао ABC на два подударна правоугла троугла ADC и BDC. Ова висина уједно представља и заједничку катету ова два троугла. Друга катета биће $AD = \frac{a}{2}$, односно $BD = \frac{a}{2}$.



Слика 60. Једнакостранични троугао и примена Питагорине теореме на троугао *ABC*



Слика 61. Издвојени троугао на који се примењује Питагорина теорема

Применом Питагорине теореме следи:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

одакле се може добити формула за израчунавање висине једнакостраничног троугла

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{a^2}}{\sqrt{4}}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Теорема 9. Ако је a страница и h висина једнакостраничног троугла, онда је $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ако је позната страница једнаостраничног троугла, онда је висина потпуно одређена, па се и површина овог троугла може директно одредити. Ако је a страница једнакостраничног троугла, тада је

$$P = \frac{1}{2}ah$$

$$P = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Теорема 10. Ако је a страница и P површина једнакостраничног троугла, онда је

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

У једнакостраничном троуглу једна тачка, такозвани центар, представља све четири значајне тачке тог троугла. У центру једнакостраничног троугла секу се и тежишне дужи и висине, и он представља центар и описаног и уписаног круга. Дуж која спаја теме са средиштем наспрамне странице је и тежишна дуж и висина и налази се на симетрали угла у одговарајућем темену и на симетрали одговарајуће странице. Ова дуж је центром троугла подељена на делове чије су дужине у размери 2:1 (тежиште дели тежишну дуж у размери 2:1).

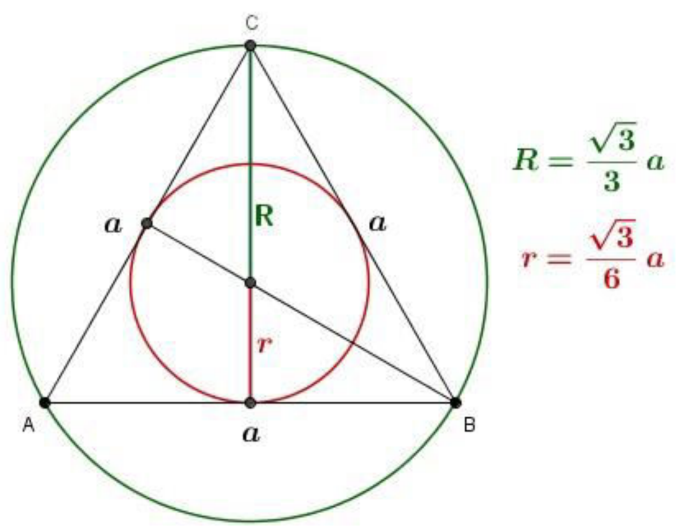
Како је растојање центра једнакостраничног троугла од његовог темена заправо полупречник R описане кружнице, тада ће бити

$$R = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

односно

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Како је растојање центра једнакостраничног троугла од његове странице заправо полупречник r уписане кружнице, тада ће бити



Слика 62.Описана и уписана кружница око једнакостраничног троугла

$$r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

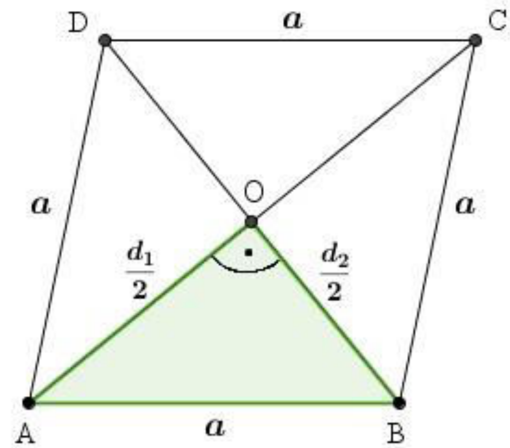
односно

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

3.8 Примена Питагорине теореме на ромб

Дијагонале ромба нису једнаке дужине, али се полове и секу под правим углома. Пресек дијагнала ромба представља центар уписане кружнице.

Нека је дужина странице $AB = BC = CD = AD = a$, дужине дијагонала $AC = d_1$ и $BD = d_2$ и нека је O тачка пресека дијагонала. Половине дијагонала $AO = OC = \frac{d_1}{2}$ и $BO = OD = \frac{d_2}{2}$.



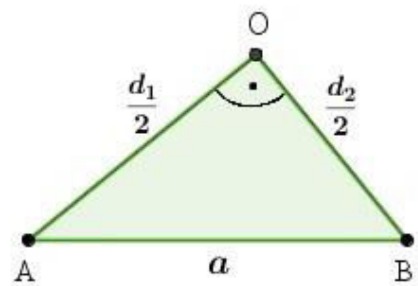
Слика 63. Ромб и примена Питагорине теореме на троугао ABO

Питагорину теорему применићемо на један од четири подударна правоугла троугла:

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2,$$

одакле је

$$a = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}.$$

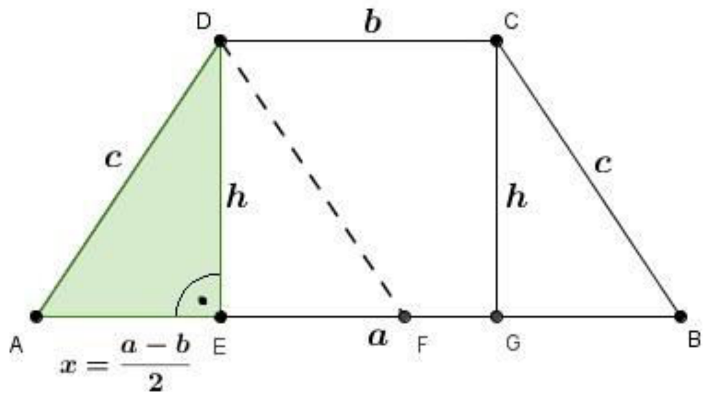


Слика 64. Издвојени троугао на који се примењује Питагорина теорема

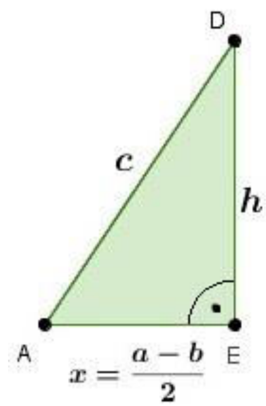
Ова формула представља зависност странице ромба и његових дијагонала.

3.9 Примена Питагорине теореме на једнакокраки трапез

Нека су дужине основица једнакокраког трапеза $ABCD$ једнаке $AB = a$ и $CD = b$, а дужина кракова $BC = AD = c$. Висина из једног темена краће основице са суседним краком и делом дуже основице образује превоугли троугао. Дакле, висина трапеза $DE = h$ је катета правоуглог троугла AED чија је хипотенуза крак c и друга катета $AE = x = \frac{a-b}{2}$. Дужина AE се добија из једнакокраког троугла ADF, који се образује када се конструјише дуж DF, која је паралелна са BC. Одатле је дужина дужи $FB = b$, па ће $AF = a - b$, односно $AE = x = \frac{a-b}{2}$.



Слика 65 Једнакокраки трапез и примена Питагорине теореме на троугао AED



Слика 66. Издвојени троугао на који се примењује Питагорина теорема

Применом Питагорине теореме следи:

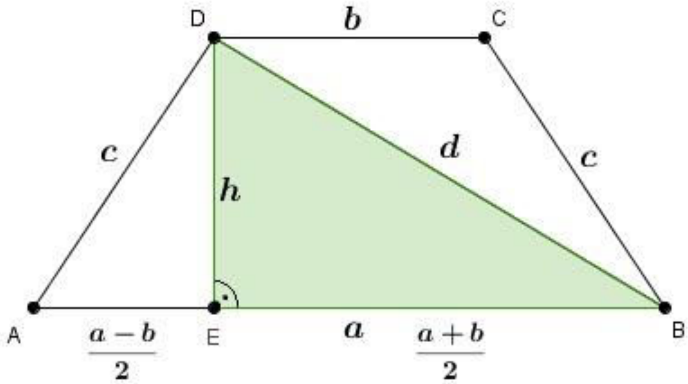
$$c^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + h^2,$$

Одавде се може добити:

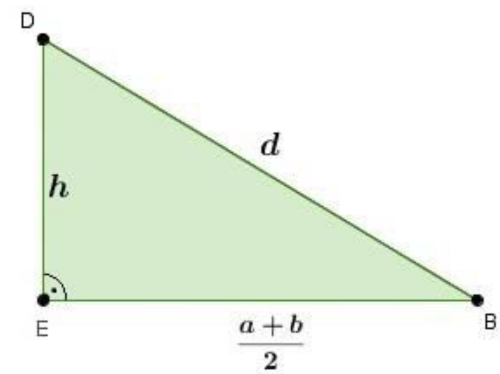
$$h^2 = c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

$$h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}.$$

Питагорина теорема повезује и дијагоналу једнакокраог трапеза са његовим основицама и висином.
Нека је $BD = d$ дијагонала једнакокраког трапеза $ABCD$. Она ће за правоугли троугао EBD представљати хипотенузу, док ће катете бити висина трапеза $DE = h$ и дужина дужи EB. Она се може наћи тако што се од дужине основице $AB = a$, одузме дужина дужи $AE = x = \frac{a-b}{2}$.
Дакле, $EB = a - \frac{a-b}{2} = \frac{2a-(a-b)}{2} = \frac{2a-a+b}{2} = \frac{a+b}{2}$.
(Или на други начин, $EB = b + \frac{a-b}{2} = \frac{2b+(a-b)}{2} = \frac{2b+a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$)



Слика 67. Једнакокраки трапез и примена Питагорине теореме на троугао EBD



Слика 68. Издвојени троугао на који се примењује Питагорина теорема

Применом Питагорине теореме на троугао EBD следи:

$$d^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + h^2,$$

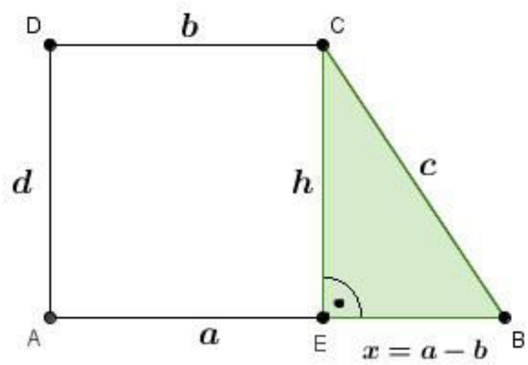
одакле је

$$d = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + h^2}.$$

3.10 Примена Питагорине теореме на правоугли трапез

Нека је $ABCD$ правоугли трапез са правим угловима у теменима A и D, дужинама основица $AB = a$, $CD = b$ $(a > b)$ и дужином крака $BC = c$. Како се на слици може уочити, дужина крака AD једнака је висини трапеза h.

Питагорина теорема може се применити на троугао EBC чија је хипотенуза крак трапеза BC, једна од катета висина трапеза, односно дуж EC и друга катета $EB = x = a - b$.



Слика 69. Једнакостранични троугао и примена Питагорине теореме на троугао ABC

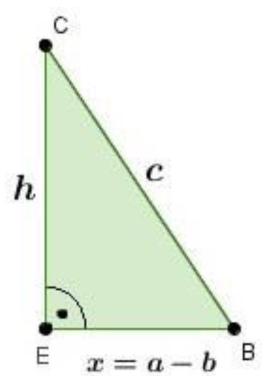
Применом Питагорине теореме следи:

$$c^2 = (a-b)^2 + h^2,$$

одавде се може добити:

$$h^2 = c^2 - (a-b)^2,$$

$$h = \sqrt{c^2 - (a-b)^2}.$$



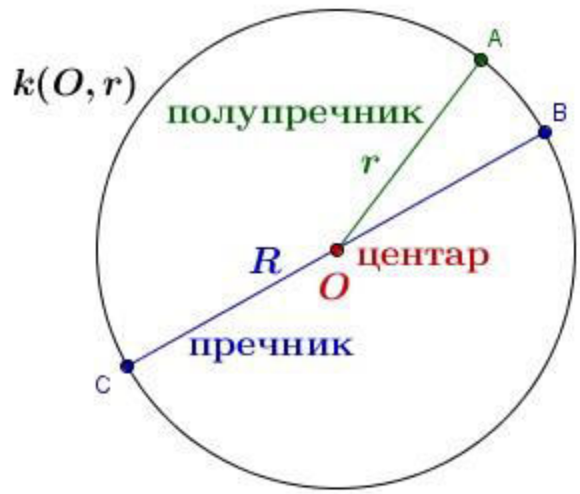
Слика 70. Издвојени троугао на који се примењује Питагорина теорема

4. Површина круга и његових делова

4.1 Круг и његови елементи

Дефиниција 9. Кружна линија или кружница је геометријско место свих тачака равни које су подједнако удаљене од једне непокретне тачке те равни. Поменуту одређену тачки зовемо центар, а дужину дужи чије су крајње тачке центар и нека тачка са кружнице називамо полупречник. Најчешћа ознака за центар је O, а за полупречник r.

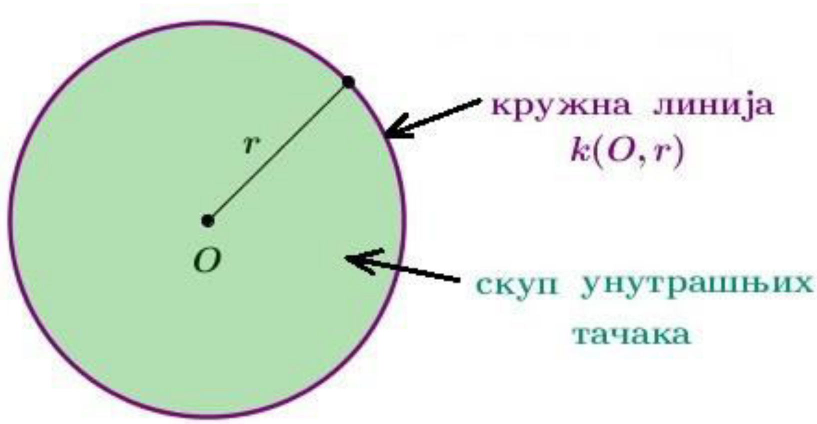
Пречником или дијаметром круга називамо сваку дуж која пролази кроз центар О круга и спаја две тачке на кругу. Најчешћа ознака је R.



Слика 71. Круг и његови елементи

Кружну линију одређену центром O и полупречником r означавамо са $k(O,r)$.

Свака кружна линија одређује два скупа тачака у равни у којој лежи. Један од тих скупова чине тачке које су на растојању већем од r и тај скуп се назива скуп спољашњих тачака кружне линије. Други скуп чине тачке које су на растојању мањем од r, и тај скуп се назива скуп унутрашњих тачака кружне линије. Центар кружне линије је њена унутрашња тачка.



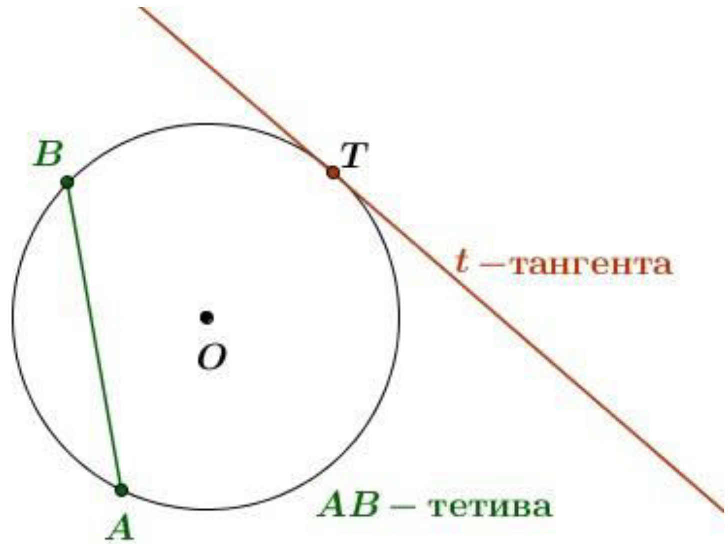
Слика 72. Спољашње и унутрашње тачке кружне линије

Дефиниција 10. Круг је геометријски објекат који чине кружница и њене унутрашње тачке. Круг одређен кружницом $k(O,r)$ обележава се са $K(O,r)$. Тачка O је центар, а r је полупречник круга $K(O,r)$.

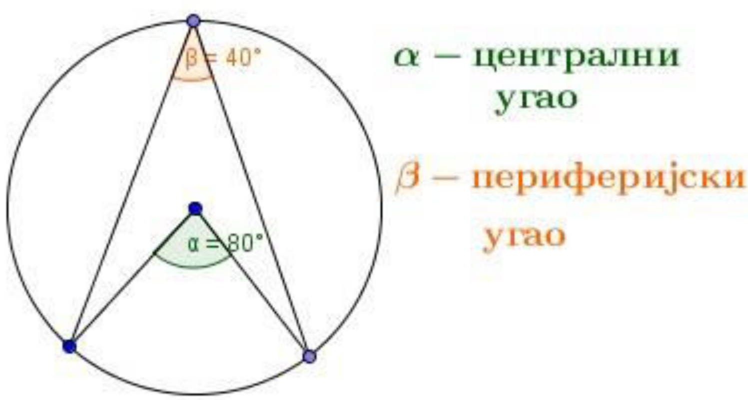
Разне дефиниције и теореме везане за круг:

Дефиниција 11. **Тетива** кружнице је дуж која спаја две тачке A и B на кругу.

Дефиниција 12. **Тангента** кружнице је права која има једну и само једну заједничку тачку са кружницом.



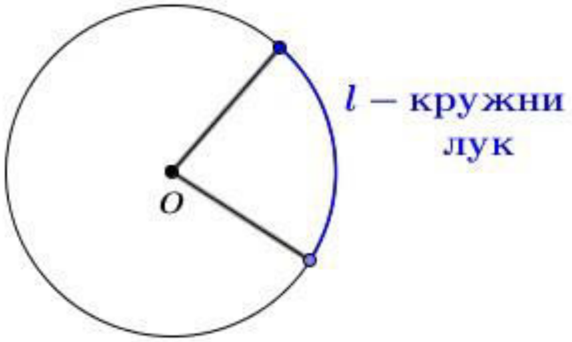
Слика 73. Тангента и тетива круга



Слика 74. Централни и периферијски угао круга

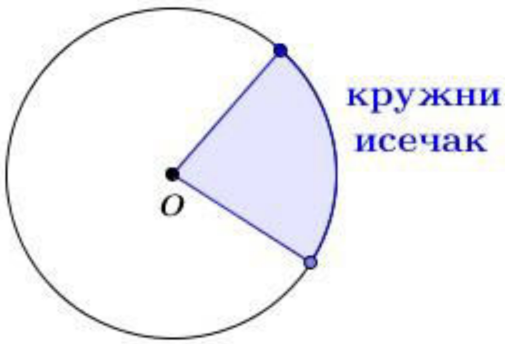
Дефиниција 13. **Централни угао** круга је угао чије се теме налази у центру круга.

Дефиниција 14. **Периферијски угао** круга је угао чији су краци две тетиве истог круга с једним заједничким крајем.



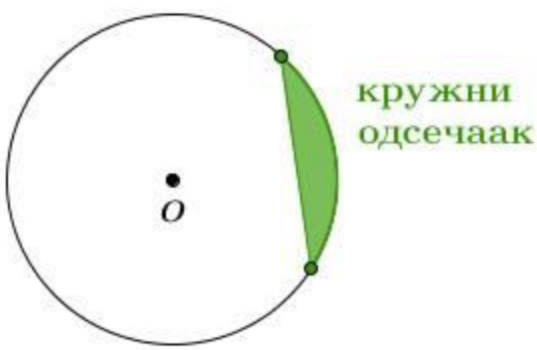
Дефиниција 15. **Кружни лук** је део круга ограничен двема тачкама; ове тачке су крајеви тог лука.

Слика 75. Кружни лук



Дефиниција 16. **Кружни исечак** је део равни ограничен са два полупречника и одговарајућим кружним луком.

Слика 76. Кружни исечак



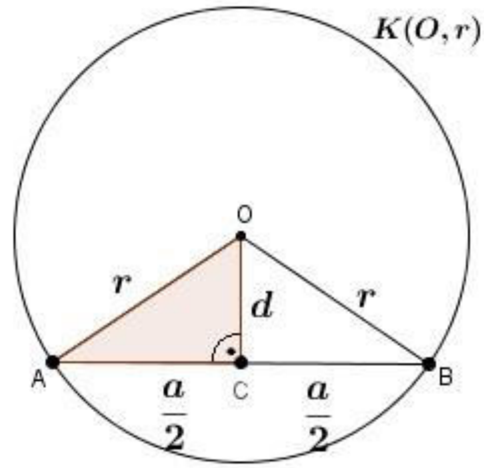
Дефиниција 17. **Кружни одсечак** је део равни ограничен кружним луком и одговарајућом тетивом.

Слика 77. Кружни одсечак

4.2 Примена Питагорине теореме на круг

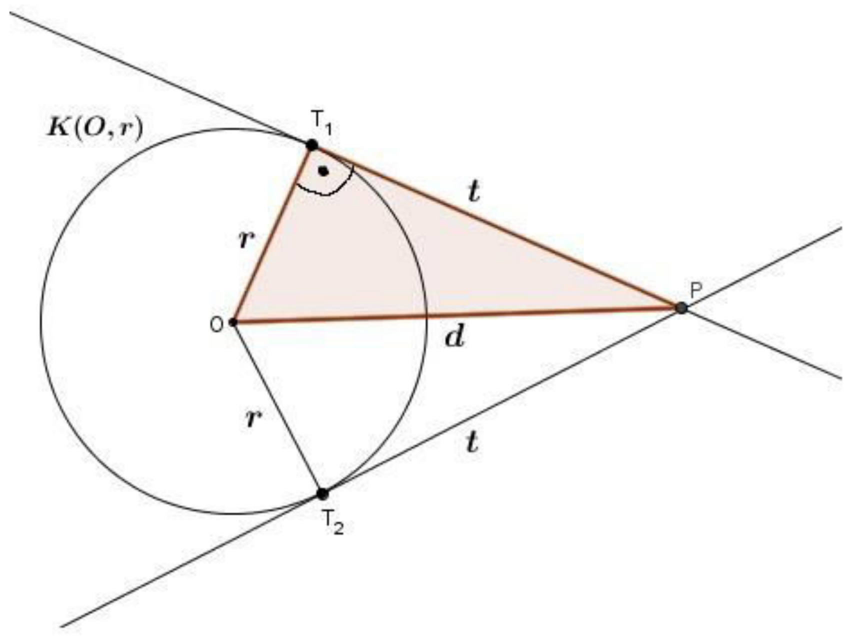
Нека је AB тетива круга $K(O,r)$ дужине a, $OA = OB = r$ полупречници круга и $OC = d$ растојање тетиве од центра круга. Дужина тетиве неког круга зависи од полупречника тог круга и растојања центра од тетиве. Питагорина теорема нам даје везу међу овим дужинама.

$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + d^2.$$



Слика 78. Круг и и примена Питагорине теореме на троугао *ABO*

Теорема 11. Тангетна дуж из неке тачке ван кружнице је дуж која спаја ту тачку са тачком додира тангенте конструисане из те тачке.

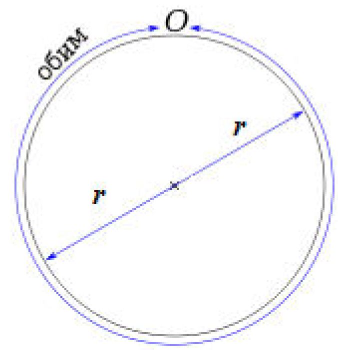


Слика 79. Круг и и примена Питагорине теореме на троугао T_1OP

Применом става подударности ССУ, лако се доказује да су тангентне дужи из исте тачке међусобно једнаке. Дужина тангентне дужи (t) може се одредити ако су познати полуппречник (r) и растојање (d) између центра кружнице и тачке из које је тангентна дуж конструисана. Према Питагориној теореми важи:

$$d^2 = r^2 + t^2.$$

Теорема 12. Обим круга једнак је производу његовог пречника и броја π, тј $O = 2r\pi$.



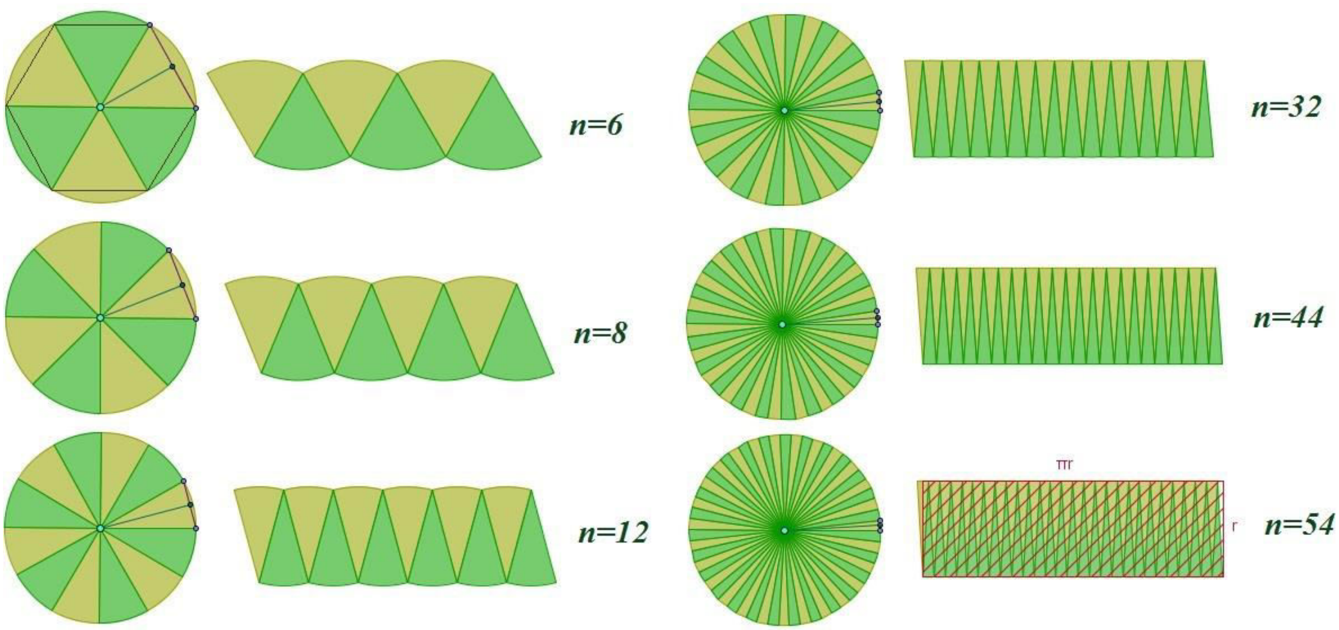
Слика 80. Обим круга

4.3 Површина круга

С повећањем броја страница правилних многоуглова уписаних у неки круг, површине тих многоуглова се све мање међусобно разликују и све су ближе броју који се узима за површину тог круга.

Површину неког правилног многоугла најједноставније је одредити разлагањем на карактеристичне троуглове. Површина правилног n-тоугла је n пута већа од површине његовог карактеристичног троугла.

Сличан поступак биће примењен и за рачунање површине круга. Круг је прво подељен на 6 једнаких делова који су сложени као на слици. Ако се круг даље дели на: 8; 12; 32;... једнаких делова и они сложе као у предходном случају, добиће се фигура која све више личи на правоугаоник чије су странице половина обима круга и његов полупречник.



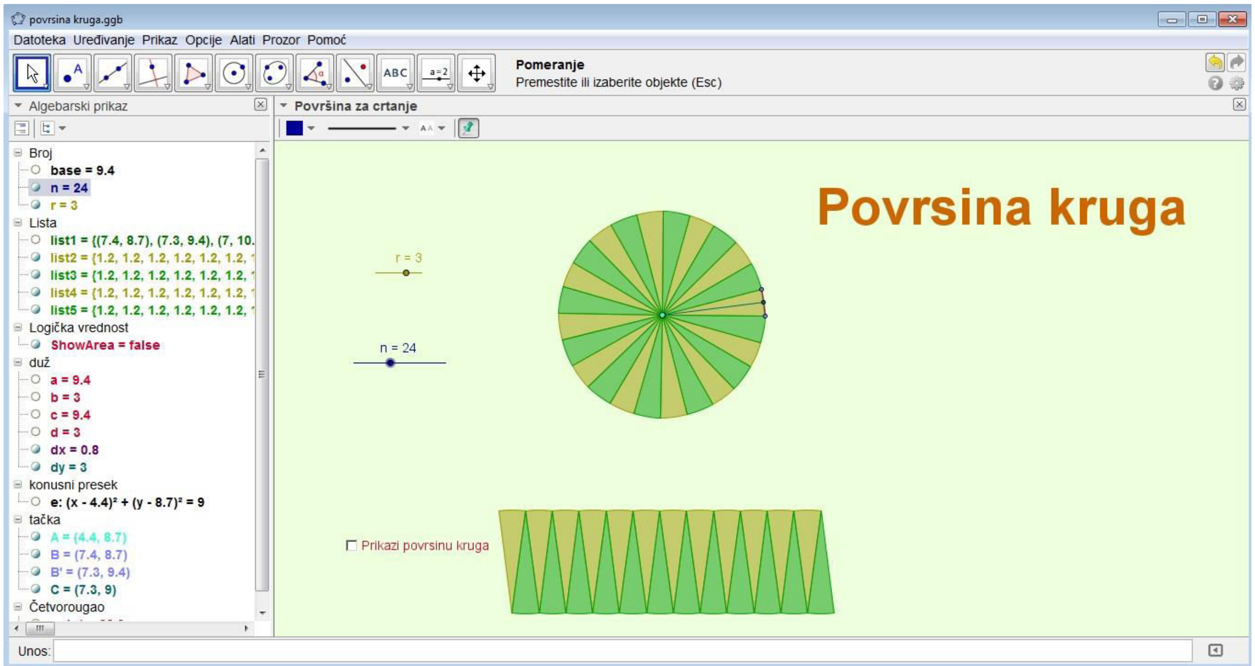
Слика 81. Визуелни приказ настанка формуле за површину круга

Тај поступак омогућава да се површина круга изрази формулом:

$$P = r \cdot \frac{O}{2} \quad O = 2r\pi,$$
$$P = r \cdot \frac{2r\pi}{2} = r \cdot r \cdot \pi,$$
$$P = r^2\pi.$$

Теорема 13. Површина круга једнака је производу квадрата његовог полупречника и броја π.

$$P = r^2\pi$$

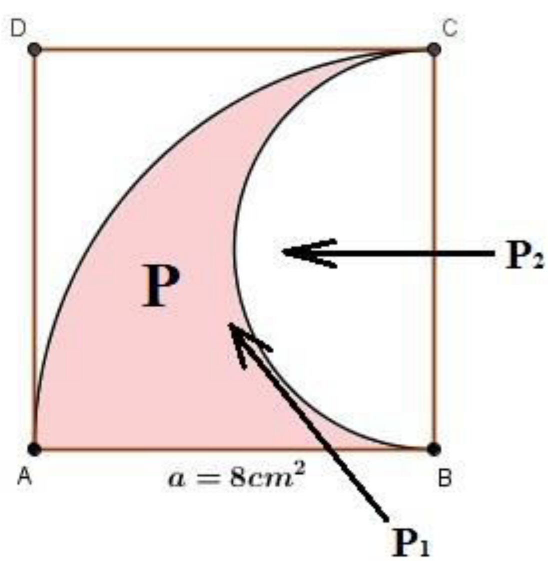


Слика 82. Анимација и визуелни приказ настанка формуле за површину круга у програмском пакету GeoGebra

Задатак:

Израчунај површину осенченог дела фигуре са слике, ако је страница квадрата једнака $8cm^2$.

Решење:



Слика 83. Слика уз задатак

$$P = P_1 - P_2$$

$$P = \frac{1}{4} r_1^2 \pi - \frac{1}{2} r_2^2 \pi \quad r_1 = 8cm, \ r_2 = 4cm$$

$$P = \frac{1}{4} 8^2 \pi - \frac{1}{2} 4^2 \pi$$

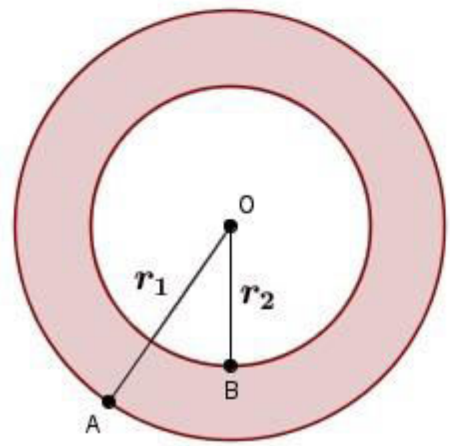
$$P = \frac{1}{4} \cdot 64\pi - \frac{1}{2} \cdot 16\pi$$

$$P = 16\pi - 8\pi$$

$$P = 8\pi cm^2$$

4.4 Површина кружног прстена

Два концентрична круга који припадају истој равни и чији су полупречници r_1 и r_2 ($r_1 = OA, r_2 = OB$, где је $r_1 > r_2$) ограничавају део кружне површи која се назива кружни прстен.
Површина кружног прстена једнака је разлици површина кругова који га образују.



Слика 84. Кружни исечак

Површина круга чији је полупречник r_1: $P_1 = r_1^2\pi$
Површина круга чији је полупречник r_2: $P_2 = r_2^2\pi$
Разлика површина кругова: $P_1 - P_2 = r_1^2\pi - r_2^2\pi$,

Па је површина кружног прстена једнака

$$P_{prstena} = (r_1^2 - r_2^2)\pi.$$

4.5 Површина кружног исечка

Дефиниција 18. Део круга ограничен са два полупречника и одговарајућим кружним луком назива се **кружни исечак**.

Површина кружног исечка зависи од полупречника круга на коме се тај исечак налази и од централног угла који му одговара.

Посматрајмо кружницу полупречника r.
Уочава се да је површина P_1 исечка коме одговара централни угао мере $1°$ 360 пута мања од површине одговарајућег круга. Дакле,

$$P_1 = \frac{r^2\pi}{360}.$$

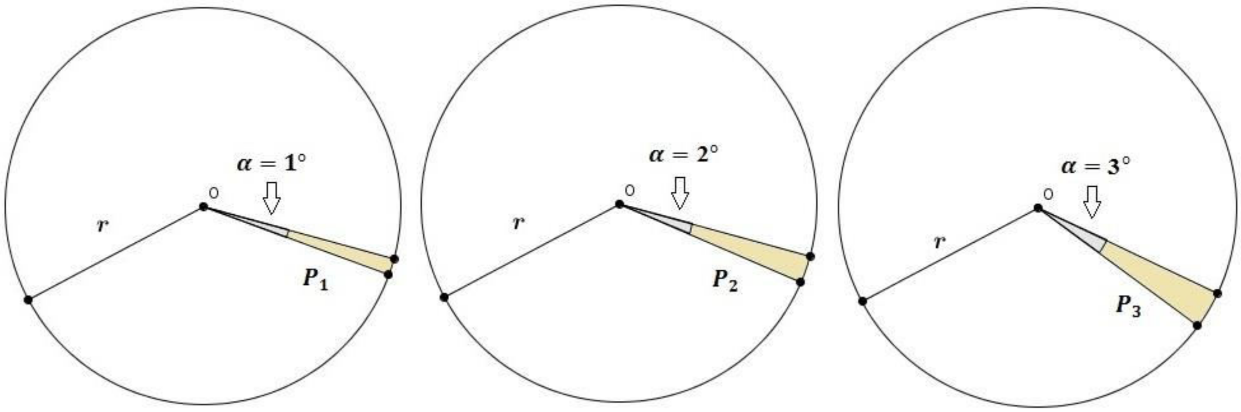
Даље, ако је површина исечка коме одговара централни угао мере 2°, онда је

$$P_2 = \frac{r^2\pi}{360} \cdot 2.$$

Површину P_3 исечка коме одговара централни угао мере 3° одређујемо по формули

$$P_3 = \frac{r^2\pi}{360} \cdot 3,$$

и тако даље.



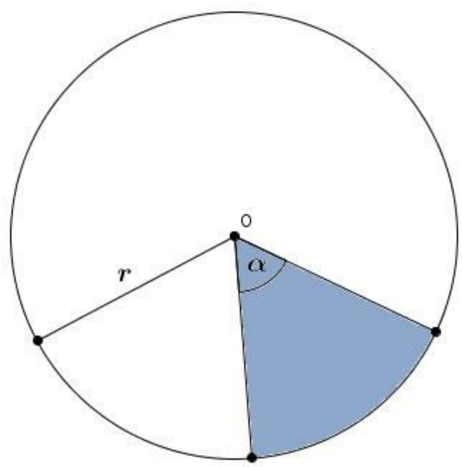
Слика 85. Поступак за долажење до формуле за израчунавање кружног исечка (кружни сиечак за централни угао $\alpha = 1°, \alpha = 2°$ и $\alpha = 3°$)

Уопштено, површина P исечка коме одговара угао мере $x°$ рачуна се по формули

$$P = \frac{r^2\pi}{360} \cdot x.$$

Теорема 14. Површина P кружног исечка полупречника r коме одговара централни угао мере α изражене у степенима је $\frac{r^2\pi}{360} \cdot \alpha$

$$P = \frac{r^2\pi}{360} \cdot \alpha.$$



Слика 86. Кружни исечак

4.6 Површина кружног одсечка

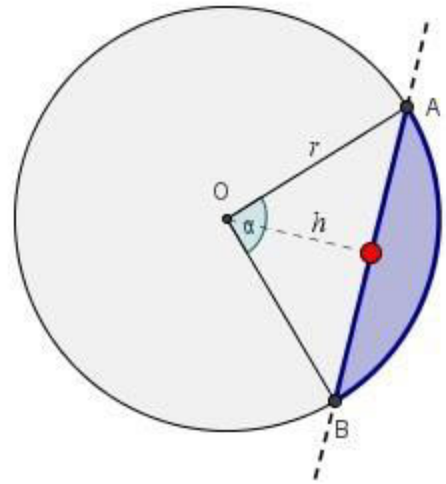
Дефиниција 19. Кружни одсечак је део круга оивичен тетивом и кружним луком који одговара тој тетиви.

Ако је $P_{isecka} = \frac{r^2\pi}{360} \cdot \alpha$ површина кружног исечка, а $P_{OAB} = \frac{|AB| \cdot h}{2}$ површина троугла OAB, тада је површина кружног одсечка $P_{odsecka} = P_{isecka} - P_{OAB}$.

$$P_{isecka} = \frac{r^2\pi}{360} \cdot \alpha,$$

$$P_{OAB} = \frac{|AB| \cdot h}{2},$$

$$P_{odsecka} = P_{isecka} - P_{OAB},$$

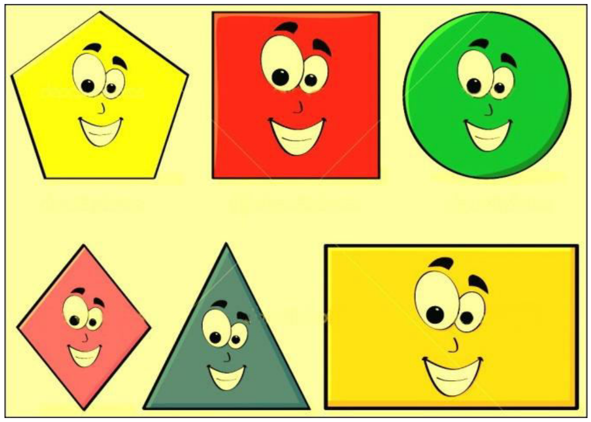


Слика 87. Кружни одсечак

$$P_{odsecka} = \frac{r^2\pi}{360} \cdot \alpha - \frac{|AB| \cdot h}{2}.$$

5. Анкета спроведена у основној школи након приказивања материјала ученицима

5.1 Изглед анкете

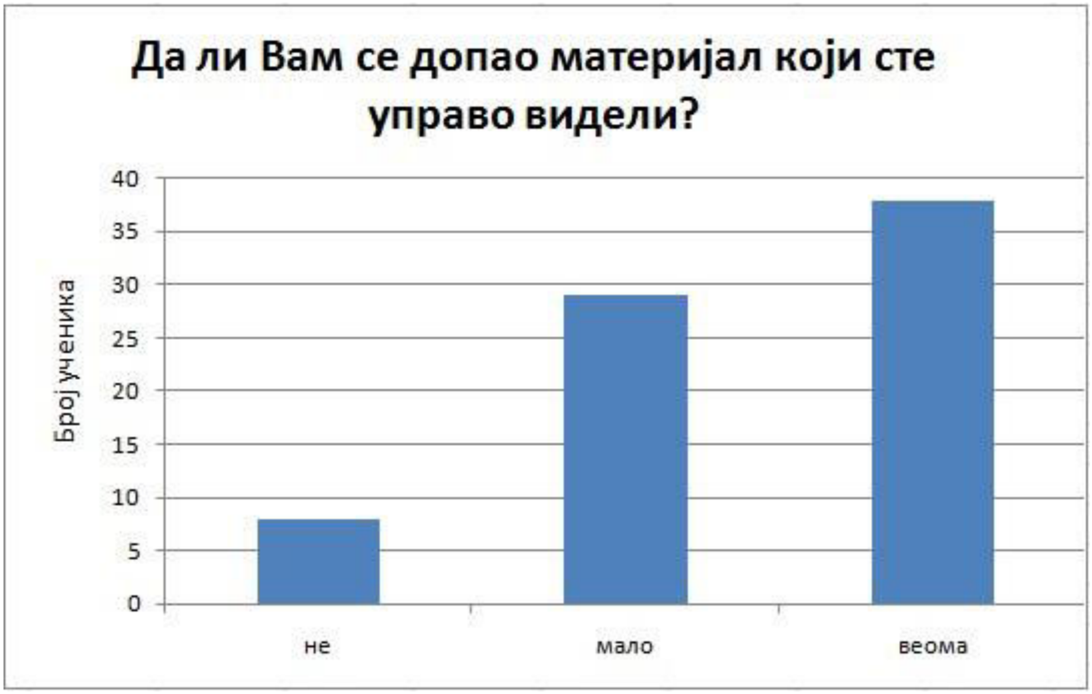


1. Да ли Вам се допао материјал који сте управо видели?
   А) не Б) мало В) веома
2. Колико Вам је помогао да боље разумете градиво?
   А) ни мало Б) мало В) веома
3. Да ли би Вам више оваквог материјала помогло у учењу и свладавању градива?
   А) да Б) не
4. Да ли користите рачунар у настави?
   А) никад Б) ретко В) понекад Г) често Д) стално
5. Ако користите да ли Вам то помаже у учењу?
   А) не Б) мало В) веома
6. Да ли бисте волели да на часовима математике чешће користите овакав материјал?
   А) да Б) не

5.2 Резултати анкете

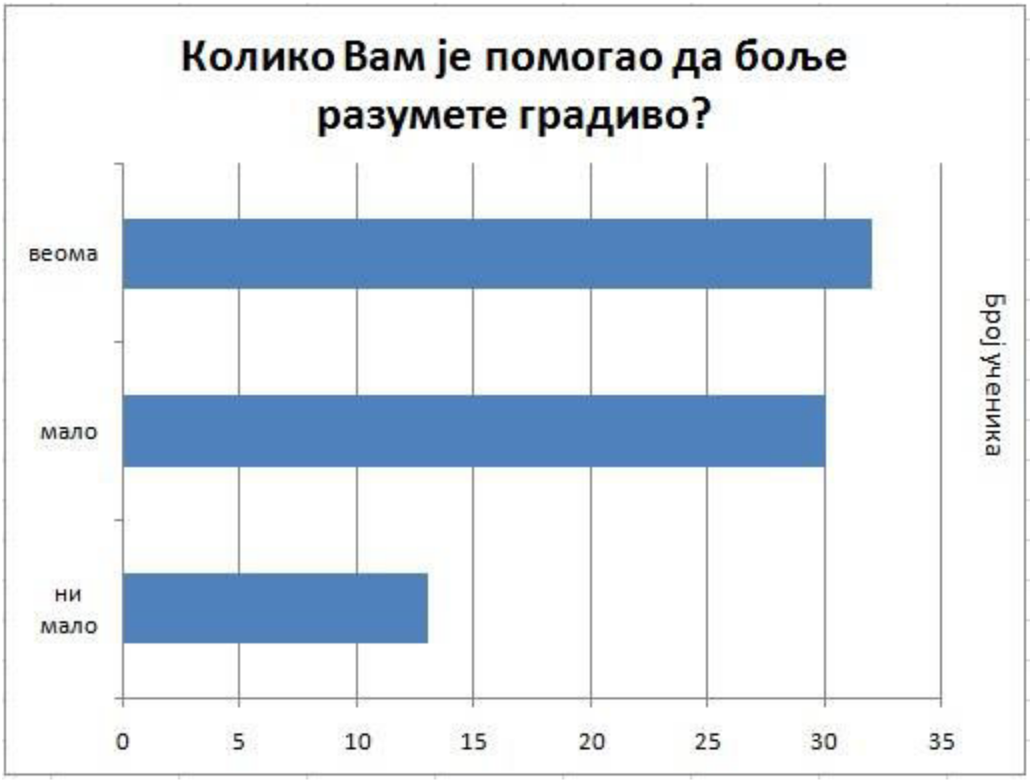
Овај материјал видело 75 ученика основне школе и попунило је приказану анкету. Њени резултати представљени су уз помоћ графка на следећи начин:

На прво питање ученици су одговорили:



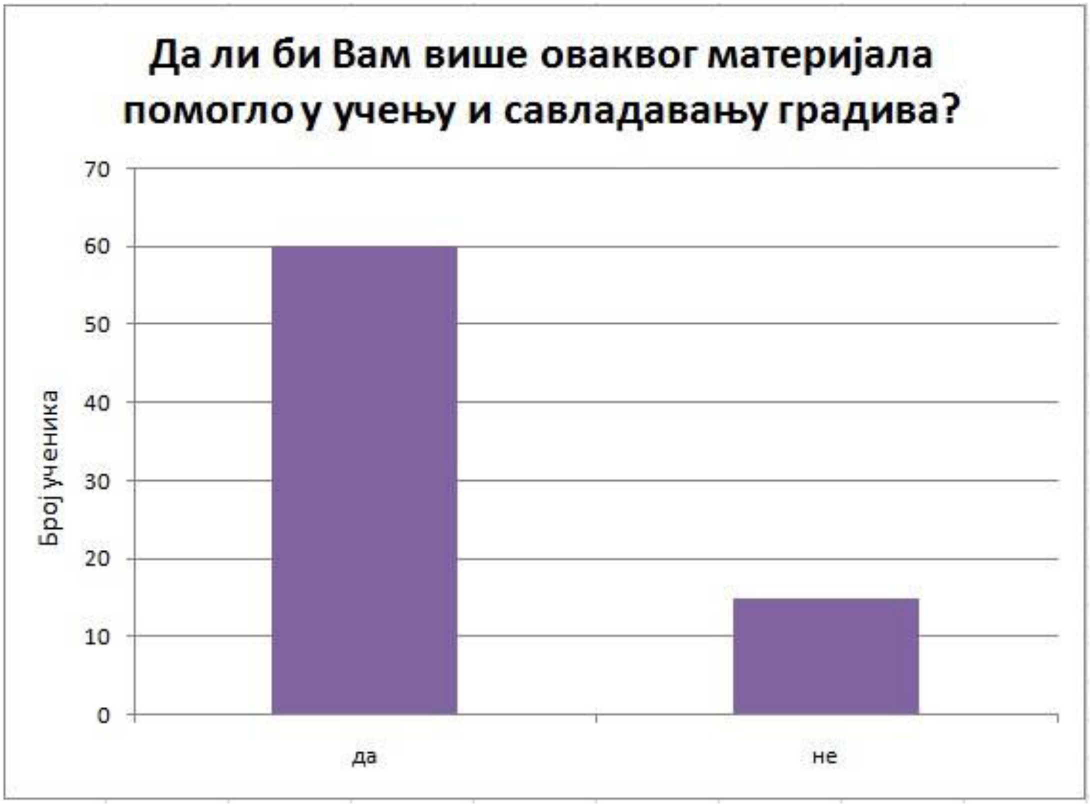
На основу резултата анкете, закључак је да се већини ученика материјал допао, што је до некле било и очекивање, јер су се сви са оваквим материјалом сусрели по преви пут и видели нешто што је другачије од традицијалне наставе и једног часа математике.

На друго питање ученици су одговорили:



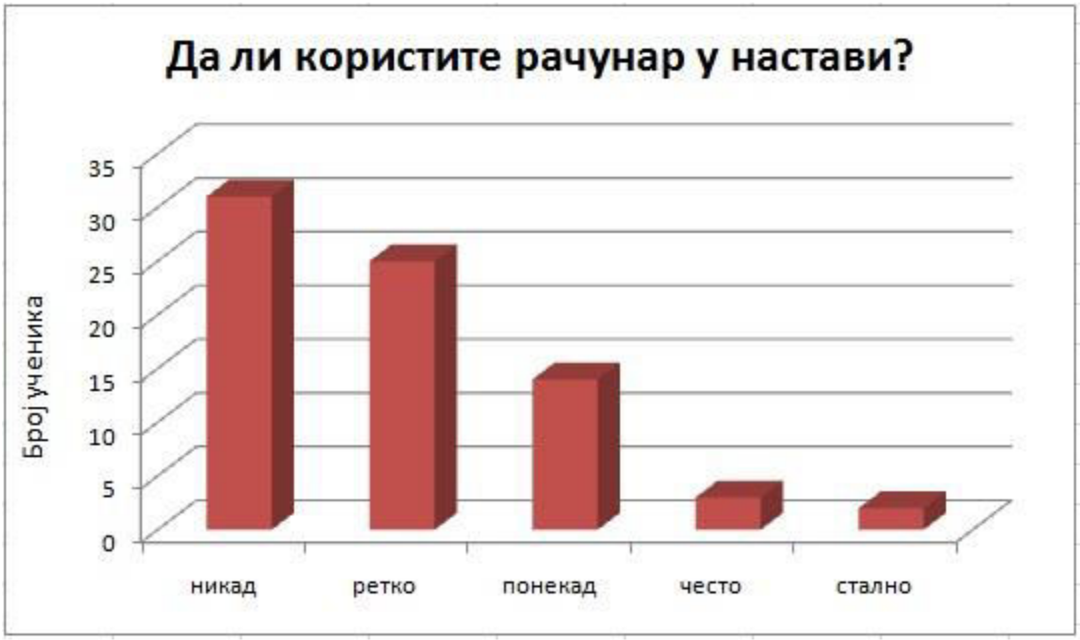
Резултати анкете показују да је грдиво које је било приказано, деловало једноставније и приближније ученицима. Обзиром да су се први пут сусрели са оваквим материјалом, резултати указују на његов позитиван утицај на ученике и разумевање овог дела градива.

На треће питање ученици су одговорили:



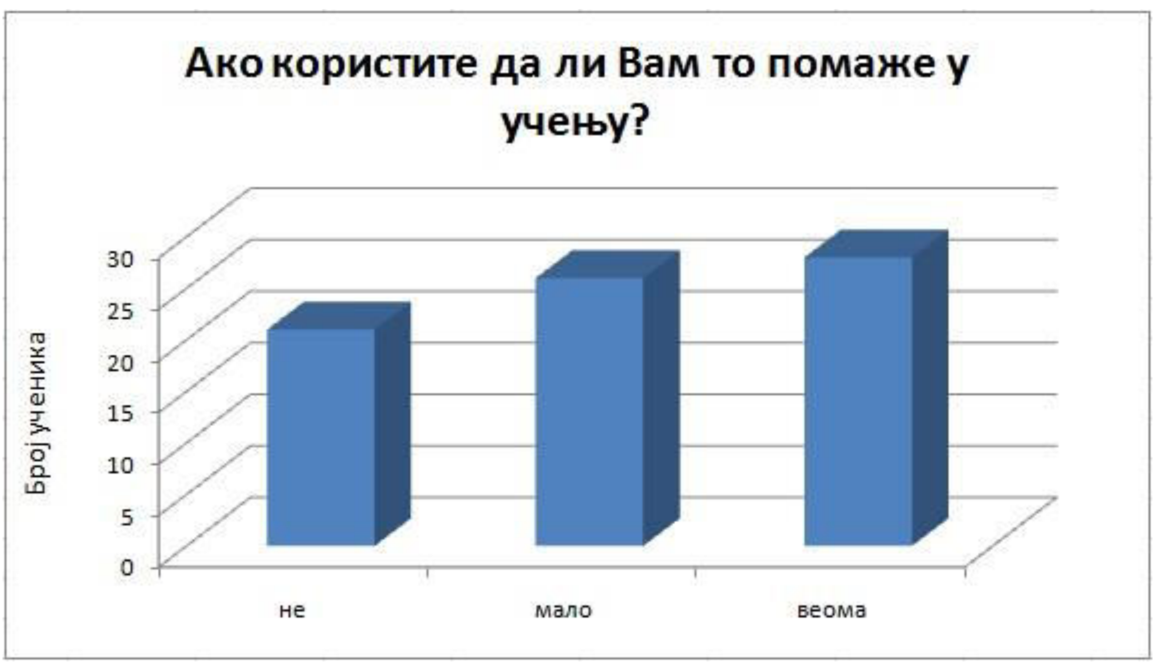
Резултати анкете на ово питање су такође оно што је очекивано. Највише ученика је одговорило да би им више оваквог материјала помогло у савладавању градива. Онда када им за разумевање тежих и апстрактних ствари, као што су цртање неких фигура, графика, разних конструкција, креда и табла нису довољне, свакако најбољи начин за разумевање и боље приказивање таквих објеката јесу неки програми на рачунару, од којих је и Geogebra, са којим су се ученици сусрели.

На четврто питање ученици су одговорили:



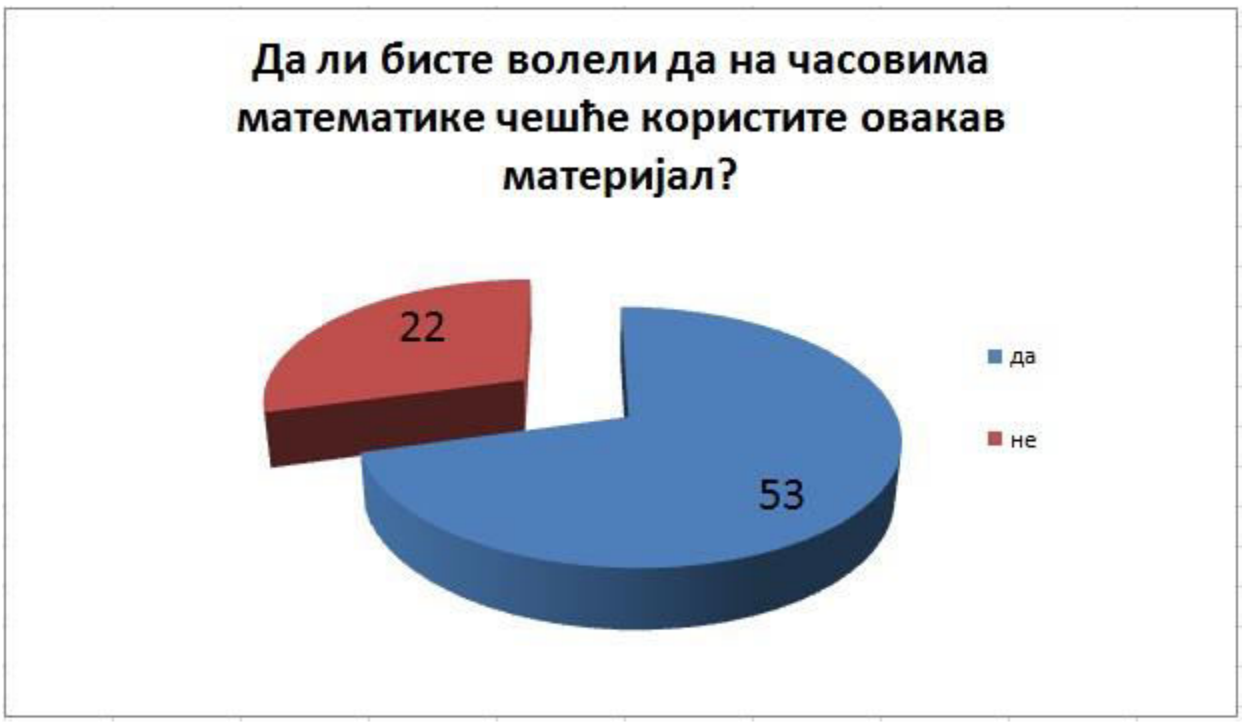
На основу одговора ученика овим графиком се види да је највише њих одговорило да ретко користи рачунар у настави, што је и била претпоставка. На жалост, мали број часова и немања средстава су навећи фактори који утичу на овакав резултат.

На пето питање ученици су одговорили:



Резултати анкете на ово питање су такође оно што је била предпоставка да ће ученици одговорити. Највише њих је одговорило да им рачунар у настави веома помаже. Допринос бољем разумевању наставних садржаја, развијању ученичке мотивације и истраживачког духа јесте нешто чему сваки наставник тежи, сходно томе би требало у настави унети иновације и подстицати ученике на учење, размишљање и истраживачки дух. Овакав материјал је сигурно један од средстава и требало би се што више користити и увести у редовну наставу.

На шесто питање ученици су одговорили:



На ово питање, као што се види, више ученика је одговорило да би волело да чешће користи овакав материјал на часовима. Наравното, то је врло често тешко извести због немања одређених средстава и ограничења времена, али било би добро да се понекад, када је градиво теже и апстрактније, организује макар један час за приказивање тог градива на рачунару уз помоћ одређених програмских пакета, како би ученици боље разумели и видели примену тога што уче, а уједно и користили рачунар у образовне сврхе.

Закључак

На основу утисака ученика и њиховог залагања и интересовања на самом часу када су погледали овај материјал, сматрам да је овакав вид учења добар у ситуацијама када креда и табла нису довољне за илустрацију тежих и апстрактнијих појмова. Коришћење рачунара и сличних материјала у редовној настави показало се као врло корисно, доприноси бољем разумевању наставних садржаја, развијање ученичке мотивације и истраживачког духа. Поједини ученици су толико били заинересовани, да су изразили жељу да и сами науче да користе програмски пакет GeoGebru и направе нешто слично.

За време приказивања првог примера, ученици су били упознати са самим програмом, чему служи и како могу да га преузму са интернета и инсталирају на својим рачунарима. Иако до тада нису били упознати са оваквом врстом програма одмах након првог примера су разумели суштину принципа по коме он функционише. Посебно им је било интересантно како функционише клизач и анимација. Само покретање програма и првог примера, код њих је изазвало интересовање и бројна питања јер је то било њихово прво искуство са оваквим материјалом.

Оваквих часова би требало да буде више, али обзиром да и фонд часова то не дозвољава, једно од најбољих решења би можда било да се и на настави информатике обраде неке теме са часова математике уз помоћ рачунара и одговарајућих програма. Обзиром на позитивне реакције ученика, њихове одговоре на питања из анкете закључак је да им је овакав вид наставе знатно унео освежење и пробудио радозналост у учењу математике.

Литература

[1] Н. Икодиновић, С. Димитријевић, *Математика 6*, уџбеник за шести разред основне школе, издавач: „Klett"

[2] Н. Икодиновић, С. Димитријевић, *Математика 6*, збирка задатака са решењима, издавач: „Klett"

[3] Н. Икодиновић, С. Димитријевић, *Математика 7*, уџбеник за седми разред основне школе, издавач: „Klett"

[4] Н. Икодиновић, С. Димитријевић, *Математика 7*, збирка задатака са решењима, издавач: „Klett"

[5] С. Милић, Б. Јевремовић, М. Игњатовић, *Математика* за *седми разред основне школе,* издавач: Завод за уџбенике и наставна средства, Београд

[6] М. Стојсављевић-Радовановић, Љ. Вуковић, Ј. Ранчић, З. Јончић, *Математика*, уџбеник за шести разред основне школе, издавач: „Креативни центар"

[7] Б. Симић, *Геометрија,* избор чланака и задатака, приручник за љубитеље математике, издавач: Клуб младих математичара „Архимедес"

[8] I.N. Bronstejn, K.A. Semendjajev, G. Musoil, H. Milig, Математички приручник

[9] Lanselot Hogben, Тај дивни, чудесни свет, математика

[10] Математика, опште енциклопедија, 1967. Вук Караџић, Београд

[11] GeoGebra- званично упутство, Markus Hohenwarter и Judith Hohenwarter
www.geogebra.org

[12] PythagoreanTheorem , http://math.about.com

[13] PythagoreanTheorem , http://www.cut-the-knot.org

[14] PythagoreanTheorem , http://mathworld.wolfram.com

[15] The theorem of Pythagoras, http://www.projectmathematics.com

[16] Геометрија, http://www.odrazi-se.org

[17] Површина троугла и четвороугла, Питагорина теорема, http://ucislobodno.com

Садржај