U N I V E R Z I T E T   U   B E O G R A D U

DO 33

DJORDJE DUGOŠIJA

PRILOG TEORIJAMA SEMIINFINITNOG I VIŠEKRITERIJUMSKOG PROGRAMIRANJA

-doktorska disertacija-

Beograd, juna 1986

Mojoj nesrećnoj majci

1. UVOD

Ovaj rad sadrži priloge iz dve aktuelne oblasti matematičkog programiranja, teorije semiinfinitnog programiranja (glave 2-7) i teorije višekriterijumskog programiranja (glave 8-11).

U teoriji semiinfinitnog programiranja razmatraju se problemi optimizacije kod kojih se promenljiva nalazi u konačnodimenzionom Euklidskom prostoru ali je prisutno beskonačno mnogo ograničenja. Takvi se problemi javljaju bilo neposredno pri matematičkom modeliranju raznih pojava-procesa, bilo kao transformisani oblik ili aproksimacija drugih matematičkih zadataka. Na primer, sledeći problem ima matematički model u formi zadatka semiinfinitnog programiranja:

problem kontrolisanja zagadjenja vazduha (Gustafson 1972) Data je oblast S u ravni u kojoj treba da se garantuje odredjeni kvalitet vazduha. Data je funkcija v na S koja zadaje gornju granicu zagadjenja vazduha u datoj tački iz S, koja nije štetna po zdravlje. Date su takodje funkcije u_i, $i=1,\dots,n$ koje pokazuju koliko zagadjivač i doprinosi zagadjenosti vazduha u tački iz S. Pitanje je: koliko puta treba svaki zagadjivač da umanji svoju funkciju zagadjivanja pa da ukupno zagadjenje u svakoj tački iz S ne predje dozvoljenu gornju granicu a da pri tom sve to najmanje košta (poznato je da se smanjenje ostvaruje izmenom proizvodnih planova, ugradnjom dodatnih filtera i drugim postupcima koji donose trošak). Matematički model glasi:

$$(\min)\ f(x_1,\dots,x_n)$$

$$\text{p.o.} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i u_i(s) \leqq v(s), \quad \text{za svako } s \in S$$

gde je sa f označena funkcija troškova .

Kao primer matematičkog zadatka koji se svodi na problem semiinfinitnog programiranja navodimo

problem linearne Čebiševljeve aproksimacije

Date su neprekidne funkcije $f, v_1, \dots, v_n$ na kompaktu $K \subset R^p$. Odrediti konstante $c_1, \dots, c_n$ za koje se dostiže

$$(\min) \ \max_K \| f(x) - \sum_i c_i v_i(x) |$$

Problem je očigledno ekvivalentan sa problemom linearnog semiinfinitnog programiranja

$$(\min) \ y$$

$$\text{p.o.} \quad y + \sum_i c_i v_i(x) \geqslant f(x) \ , \ x \in K$$

$$y - \sum_i c_i v_i(x) \geqslant -f(x) \ , \ x \in K$$

Iako je problem semiinfinitnog programiranja na izgled specijalan,kuriozotetno je da se svaki problem minimizacije svodi na problem linearnog semiinfinitnog programiranja. Zaista,problem $(\min) \ f(x)$,p.o. $x \in X$ ekvivalentan je sa $(\max) \ y$, p.o. $y \leqq f(x)$,za svako $x \in X$.

Semiinfinitno programiranje je novija matematička oblast koja se intezivno razvija .Smatra se da je počela radovima Charnesa,Coopera,Kortaneka (1962),Duffin-a i Karlowitza (1965), Pšeničnog (1969) i drugih ,premda je i ranije bilo radova iz ove problematike(npr.Fritz John 1948).U početku su razradjivani uslovi optimalnosti i dualnosti za linearan i konveksan problem a kasnije i metode za rešavanje (vidi[52],[5]),parametarska optimizacija ([19]) i dr.

Prilozi teoriji semiinfinitnog programiranja rasporedjeni su po glavama na sledeći način:

U drugoj glavi dokazan je baziČan rezultat u teoriji beskonačnih sistema linearnih nejednačina koji predstavlja uopštenje klasičnih teorema Farkasa(t.1.1.)i Haar-a(t.1.2.) Rezultat je saopšten u proleće 1981 na seminaru iz primenjene matematike pri Matematičkom institutu SANU .Slični rezultati su se pojavili i kod drugih autora(vidi [43],[57],[94],[96]). Ovaj se rezultat koristi u kasnijim glavama.

Jedna od glavnih osobenosti problema semiinfinitnog programiranja je postojanje,u mnogim slučajevima,konačnog podprograma ekvivalentnog sa celim programom.U linearnom slučaju to se dogadja akko dopustivi skup ima zatvoren karakteristični konus odnosno ako je tipa F-M (Farkas-Minkowski).Naziv je uvela grupa španskih matematičara ([43],[44],[45]).U glavi 3 razmatrano je pitanje "geometrije" skupova tipa F-M,specijalno pitanje njihove dimenzije.Pokazano je (t.3.11) da vrede iste formule koje su vredele za poliedarske skupove tj.skupove zadane SA konačnim brojem linearnih ograničenja.Rezultat je inače ranije dokazan i za jednu užu klasu tzv. normalno reprezentovanih beskonačnih sistema ([33]).

U glavi 4 daju se primalna i dualna karakterizacija optimalnog rešenja problema linearnog semiinfinitnog programiranja. Dobijeni rezultati su uglavnom poznati.Nova je jedino veza izmedju dve dualne karakterizacije ((2) i (3)) ostvarena pomoću leme 4.4 (tj. ne izlazeći iz duala).

U glavi 5 razmatran je problem konveksnog seniinfinitnog programiranja.Na bazi linearizacija dopustivog skupa dobijena je karakterizacija optimalnosti(t.5.3) koja čini teorijsku osnovu za dalje analize. Pokazano je da su asimptotski uslovi

Kuhn-Tucker-a (t.5.4) dovoljni za optimalnost neke dopustive tačke.Taj je rezultat poznat iz [10] samo je ovde dokaz drukčiji,izveden bez vraćanja u primalni problem.Potom je istraživano pitanje neophodnosti Kuhn-Tucker-ovih uslova.Dokazano je jedno poboljšanje rezultata iz [69] (t.5.6),čija je suština u tome da se Slater-ov uslov(standardna pretpostavka u teoriji) ne mora zahtevati za ona linearna ograničenja koja već obrazuju F-M sistem.

U glavi 6 razmatrano je pitanje dualnosti u konveksnom semiinfinitnom programiranju.Razmatrano je specijalno pitanje hoće li se dualni jaz umanjiti sa proširenjem duala? Pokazano je (t.6.12) da"prebrojivo" proširenje duala ne menja dualni jaz,tj.da su "prebrojivi" i standardni dual uvek ekvivalentni. Dokaz je dug i zahteva čitav niz iskaza u vezi sa afinim minorantama za (konačne i beskonačne)sume konveksnih funkcija. Osnovni rezultati su sadržani u teoremama 6.6,6.7,i korolaru 6.8(koji je uopštenje rezultata iz [99]i[15]. Cela ova glava pisana je prema radu autora "Lagrangian Duals and Affine Minorants" primljenog za štampu u J.O.T.A. Pitanje ekvivalencije (neekvivalencije)drugih duala ,konstruisanih pomoću teorije mere je daleko složenije i ostaje otvoreno,sem u slučaju problema sa linearnim ograničenjima i duala koji koriste regularne mere,za koje je pokazano da su ekvivalentni standardnom dualu (t.6.13).

Glava 7 je posvećena pitanju stabilnosti kvazikonveksnog semiinfinitnog programa u smislu Eremin-Astafiev-a iz [37]. Osnovni rezultati (t.7.8,t.7.9 i t.7.11) daju dovoljne uslove za stabilnost čime se uopštavaju rezultati iz [37] i [19].U ovoj glavi je takodje razmatrana stabilnost po vrednosti programa i dati uslovi pri kojima stabilnost po vrednosti povlači stabilnost programa(t.7.20).Time je uopšten i korigovan jedan rezultat iz [110].

Drugi deo rada je posvećen nekim pitanjima višekriterijumske optimizacije.Ova grana matematičkog programiranja ima korene u ekonomiji gde se pojavljuju problemi u kojima treba minimizirati ne jednu nego više funkcija cilja(kriterijuma).Koliko je ova oblast "mlada" najbolje svedoči podatak da mnoga bazisna pitanja u njoj ,počevši od koncepcije rešenja pa do metoda za njihovo odredjivanje,još uvek nisu u potpunosti rešena.

Teškoće oko koncepcije rešenja su ovde prirodne,jer,najčešće nije moguće jednovremeno minimizirati sve funkcije cilja.Jedna od najprihvatljivijih koncepcija rešenja potiče odavno od ekonomiste Pareta.Traže se argumenti za koje se odgovarajući ishodi ne mogu ni po jednom kriterijumu umanjiti a da pri tom ne poraste vrednost nekog drugog kriterijuma.Takvi se argumenti zovu Pareto rešenja.Postoje naravno i druge koncepcije rešenja. Na primer,ako se od datih kriterijuma formira nov kriterijum koji ih sve zamenjuje i traži minimum po tom kriterijumu,dobija se tzv.kompromisno rešenje.Najčešće je kompromisni kriterijum pozitivna kombinacija početnih kriterijuma a može biti i složeniji.Koji će se kompromisni kriterijum uzeti zavisi od onog ko donosi odluke a i od same pojave koja se modelira kao problem višekriterijumske optimizacije.U nekim slučajevima kriterijumi su poredjani po važnosti,pa je koncepcija rešenja prirodna:prvo se minimizira najvažniji kriterijum,na skupu njegovih optimalnih rešenja sledeći po važnosti kriterijum,itd. Na ovaj način se dobijaju leksikografska rešenja.

U glavi 8 razmatrana je koncepcija rešenja u manje jasnoj situaciji kad su neki kriterijumi uporedivi po važnosti a drugi to nisu. Predložena koncepcija rešenja (Def.8.2) se svodi na Pareto rešenje u slučaju potpune neuporedivosti kriterijuma a na leksikografska rešenja u slučaju potpune uporedivosti kriterijuma. Potom je razmatrano pitanje karakterizacije ovakvih rešenja (t.8.3) i njihove egzistencije (t.8.4). Formulisana su i otvorena pitanja koja se tiču svojstava i izračunavanja skupa svih ovakvih rešenja.

U glavi 9 razmatran je problem definisanja, karakterizacije i svojstava približnih rešenja u višekriterijumskom programiranju. Uveden je pojam ε-slabog Pareto rešenja kao relaksacija pojma ε-Pareto rešenja i pokazano je da ovo rešenje postoji pri dosta blagim pretpostavkama o funkcijama cilja (bez konveksnosti i diferencijabilnosti) kao i da važi generalisani princip Ekelanda (t.9.5), koji se može slobodno interpretirati kao činjenica da u blizini svakog ε-slabog Pareto rešenja, postoji od njega bolje (ne lošije) ε-Pareto rešenje problema sa malo izmenjenim kriterijumima. Potom su razmatrane posledice ovog principa u slučaju problema sa diferencijabilnim funkcijama sa i bez ograničenja (t.9.11, t.9.12, t.9.13). Ova je glava pisana prema autorovom radu " ε-weak Pareto solutions in multicriteria-optimization" saopštenom na GAMM kongresu, Dubrovnik aprila 1985.

U glavi 10 izlaže se jedan način konstruisanja duala za problem konveksnog diferencijabilnog višekriterijumskog programiranja, koji se u skalarnom slučaju svodi na Frank-Wolfe-ov dual. Razmatraju se analogoni slabe, jake i obrnute dualnosti (t.10.3, t.10.4, t.10.7). Primetan je paralelizam ove i teorije u skalarnom slučaju.

U <u>glavi 11</u> razmatra se problem linearnog vektorskog programiranja i zavisnost skupa njegovih Pareto rešenja od "prirodnog" parametra problema tj.od matrice cilja,matrice tehnoloških koeficijenata i desne strane ograničenja.Uvodi se (Def.11.10)pojam stabilnog problema prenoseći definiciju stabilnosti iz glave 7 na višekriterijumski slučaj i daje "konstruktivni" uslov stabilnosti(t.11.11)koji se u skalarnom slučaju poklapa sa rezultatima glave 7.Pokazuje se rezultat (t.11.14) da je skup svih stabilnih programa svuda gust u klasi problema koji zadovoljavaju Slaterov uslov i imaju kompaktan dopustivi skup i izlaže jedan način regularizacije nestabilnog problema sa malim izmenama matrice cilja.

Utvrdjuju se takodje potrebni i dovoljni uslovi pri kojima je skup Pareto rešenja problema linearne vektorske optimizacije kompaktan i neprazan(t.11.6) kao i dovoljni uslovi da se skup Pareto rešenja poklapa sa skupom slabih Pareto rešenja(lema 11.13).Interesantan je takodje rezultat(t.11.5) da se i u vektorskom linearnom programiranju optimalna vrednost,ukoliko postoji,obavezno dostiže u nekoj dopustivoj tački.Naravno,treba najpre adekvatno definisati pojam optimalne vrednosti u vektorskom slučaju(Def.11.4).Ovaj rezultat ukazuje na odredjenu dualnost u vektorskom linearnom programiranju.

Oznake koje u radu koristimo su standardne.Ipak prilažemo spisak nekih oznaka koje u tekstu ne definišemo.

OZNAKA	TUMAČENJE
$\emptyset$	prazan skup
N	skup prirodnih brojeva
Z	skup celih brojeva
$R = E^1$	skup realnih brojeva
$a \in R^n$	a je kolona n realnih brojeva
$\langle a,b \rangle = a^t b$	skalarni proizvod
A^t	transponovana matrica
cone A	konus generisan elementima skupa A tj. skup svih nenegativnih kombinacija elemenata skupa A
cl A	zatvaranje skupa A
int A	unutrašnjost skupa A
ri A	relativna unutrašnjost skupa A
$f:A \to B$	preslikavanje
$a \mapsto f(a)$	a se preslikava u f(a)
$A \geqslant 0$	svi elementi matrice A nenegativni
$A \geq 0$	$A \geqslant 0$ i $A \neq 0$
$A > 0$	svi elementi matrice A pozitivni
$\Rightarrow, \wedge, \vee, \Leftrightarrow, \neg$	implikacija, konjukcija, disjunkcija, ekvivalencija negacija

2. GENERALIZACIJA FARKASEVE I HAAROVE TEOREME

Jedan od kamena temeljaca teorije matematičkog programiranja je klasična Farkaseva lema [40]. Njome se opisuju linearne homogene posledice konačnog sistema linearnih homogenih nejednačina. Postoje brojna uopštenja ove leme. Ona se, kao i sama lema, obično koriste za izvodjenje uslova optimalnosti u raznim problemima matematičkog programiranja. U našoj generalizaciji opisuju se posledice beskonačnog sistema linearnih nejednačina koje izražavaju nenegativnost funkcije oslonca nekog kompaktnog skupa iz R^n. Rezultat se primenjuje u narednim glavama za dobijanje uslova optimalnosti u semi-infinitnom programiranju. Napomenimo da je naš rezultat dobijen nezavisno od mnogih autora koji su dobili slične rezultate (npr. [43], [57], [94], [96]).

Teorema 2.1. Neka je K neprazan kompaktan skup u R^n i $a: T \to R$ preslikavanje iz izvesnog nepraznog skupa T u R pri čemu $t \mapsto a_t$. Tada je nejednakost

$$\max_{k \in K} \langle k,x \rangle \geqslant 0 \tag{1}$$

posledica sistema

$$\langle a_t,x \rangle \geqslant 0 \ ,t \in T \tag{2}$$

ako i samo ako je

$$\operatorname{conv} K \cap \operatorname{cl} \operatorname{cone} \{ a_t : t \in T \} \neq \emptyset \tag{3}$$

Dokaz. Neka $c \in \operatorname{conv} K \cap \operatorname{cl} \operatorname{cone}\{a_t : t \in T\}$. Tada postoji niz (c_n), $c_n \in \operatorname{cone} \{a_t : t \in T\}$ takav da teži c kad $n \to \infty$. Za proizvoljno rešenje x sistema (2) vredi $\langle c_n,x \rangle \geqslant 0, n=1,2,\dots$. Prelaskom na limes dobijamo $\langle c,x \rangle \geqslant 0$,odakle sledi (1).

Pretpostavimo sada da ne važi (3). Tada se kompaktan skup $\operatorname{conv} K$ i konus $\operatorname{cl}\operatorname{cone}\{a_t : t \in T\}$ mogu strogo razdvojiti pomoću izvesne hiperravni tj. postoji $c \in R^n \setminus \{0\}$ i realan broj d takvi da je, za sve $k \in K$ i sve $x \in \operatorname{cone}\{a_t : t \in T\}$

$$\langle c,x\rangle \geq d > \langle c,k\rangle \tag{4}$$

Odavde, za $x=0$, sledi

$$\langle c,k\rangle < d \leq 0 \quad \text{za sve } k \in K$$

odnosno

$$\max_{k \in K} \langle k,c\rangle < 0 \tag{5}$$

S druge strane, iz (4) sledi

$$\langle c,\lambda a_t\rangle \geq d \quad \text{za sve } \lambda \geq 0 \text{ i sve } t \in T$$

te mora biti

$$\langle a_t,c\rangle \geq 0 \quad \text{za sve } t \in T \tag{6}$$

Iz (5) i (6) sledi da (1) nije posledica od (2), kontradikcija. Time je teorema dokazana.

Klasična Farkas-eva lema se dobija ako je T konačan a K jednoelementni skup. Pri tom se zatvaranje konusa u (3) može izostaviti jer je konus generisan nad konačnim skupom zatvoren.

Sledeća teorema predstavlja uopštenje Haar-ove teoreme [47].

<u>Teorema 2.2.</u> Neka je dat moguć sistem

$$\langle a_t,x\rangle \geq b_t \;, \quad t \in T \tag{7}$$

pri čemu je T neprazan indeksni skup. Neka je K neprazan kompaktan skup iz R^n i v realan broj. Tada je nejednakost

$$\sup_{k\in K} \langle k,x\rangle \geqslant v \tag{8}$$

posledica sistema (7) ako i samo ako

$$\operatorname{conv} Kx\{v\} \cap \operatorname{cl}\operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix}a_t\\ b_t\end{pmatrix}_{t\in T}, \begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}\right\} \neq \emptyset .$$

<u>Dokaz.</u> Dokažimo, najpre, sledeću lemu :

<u>Lema 2.3.</u> Nejednakost (8) je posledica sistema (7) ako i samo ako je nejednakost

$$\sup_{k\in K} \langle k,x\rangle \geqslant vy \tag{9}$$

posledica sistema

$$\begin{aligned} \langle a_t,x\rangle &\geqslant b_t y \\ y &\geqslant 0 \end{aligned} \tag{10}$$

<u>Dokaz leme.</u> Neka je (9) posledica sistema (10). Dokažimo da proizvoljno rešenje sistema (7) zadovoljava nejednakost (8). Zaista, $\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}$ je rešenje sistema (10) te važi (8).

Pretpostavimo sada da je nejednakost (8) posledica mogućeg sistema (7) i dokažimo da proizvoljno rešenje $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ sistema (10) zadovoljava nejednakost (9). Ako je $y>0$ onda je x/y rešenje sistema (7) te važi

$$\sup_{k\in K} \langle k,x/y\rangle \geqslant v$$

odakle sledi (9). Pretpostavimo sada da je $y=0$. Označimo sa x_0 proizvoljno rešenje sistema (7). Kako su $\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}x_0\\1\end{pmatrix}$ rešenja sistema (10) čiji je skup svih rešenja konveksan, biće za svako $s \in (0,1)$

$$s\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} + (1-s)\begin{pmatrix}x_0\\1\end{pmatrix}$$

takodje rešenje za (10). Pri tom je $\frac{sx+(1-s)x_o}{1-s}$ rešenje sistema (7) te vredi

$$\sup_{k\in K} < k, \frac{sx+(1-s)x_o}{1-s} > \ \geqslant v$$

Odavde, zbog nejednakosti

$$\sup_{k\in K} < sx+(1-s)x_o, k > \ \leqslant s \sup_{k\in K} < x,k > + (1-s) \sup_{k\in K} < x_o, k >$$

sledi

$$s \sup_{k\in K} < k,x > + (1-s)\sup_{k\in K} < k,x_o > \ \geqslant v(1-s)$$

odakle, prelaskom na limes kad $s \to 1-0$ dobijamo (9). Time je dokaz leme završen.

S obzirom da se sistem (10) može napisati u obliku

$$< \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} > \ \geqslant 0 \quad , \ t \in T$$

$$< \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} > \ \geqslant 0$$

a nejednakost (9) u obliku

$$\sup_{k\in K} < \begin{pmatrix} k \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} > \ \geqslant 0$$

teorema 2.2. sledi neposredno iz leme 2.3. i teoreme 2.1..

U specijalnom slučaju za $K = \{c\}$ teorema 2.2. se svodi na

<u>Korolar 2.4.</u> ([57], [43]) Nejednakost $< c,x > \ \geqslant v$ je posledica mogućeg sistema $< a_t, x > \ \geqslant b_t$, $t \in T$ ako i samo ako

$$\begin{pmatrix} c \\ v \end{pmatrix} \in \text{cl cone}\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \ t \in T, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Pitanje postojanja rešenja beskonačnog sistema linearnih nejednačina rešava

<u>Teorema 2.5.</u> Sistem $< a_t, x > \ \geqslant b_t$, $t \in T$ je moguć ako i samo ako

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{cl cone}\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} : t \in T, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \qquad (11)$$

Dokaz. Navedeni sistem je nemoguć ako i samo ako je $y \geqslant 0$ posledica (mogućeg) sistema $\langle a_t, x \rangle + b_t y \geqslant 0$, $t \in T$ a to će, saglasno korolaru 2.4, važiti ako i samo ako ne važi (11).

3. SISTEMI LINEARNIH NEJEDNAČINA TIPA FARKAS-MINKOWSKI

Neka je

$$X = \left\{x \in R^n : \langle a_t, x\rangle \geqslant b_t \ , \ t \in T\right\} \qquad (1)$$

neprazan skup.

<u>Definicija 3.1.</u> Konus $C = \text{cone}\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}_{t \in T}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ se zove karakteristični konus skupa X (odnosno sistema iz (1)).

<u>Definicija 3.2.</u> Skup X (odnosno sistem (1) linearnih nejednačina) je tipa Farkas-Minkowski ,skraćeno F-M ,ako je karakteristični konus C skupa X zatvoren.

Sisteme linearnih nejednačina tipa F-M uvela je grupa španskih matematičara ([43], [44], [45]) i pokazala njihovu važnu ulogu u teoriji semiinfinitnog programiranja. Iz korolara 2.4.,neposredno se vidi osnovno svojstvo sistema linearnih nejednačina tipa F-M: svaka njegova linearna posledica,posledica je i nekog njegovog konačnog podsistema [43]

<u>Teorema 3.6.</u> Sledeći uslovi su dovoljni da skup X dat sa (1) bude tipa F-M :

(A) Postoji funkcija $p: T \to (0,\infty)$ takva da je skup

$$\left\{ p(t) \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}_{t \in T} \right\} \text{ kompaktan u } R^{n+1} \qquad (2)$$

i postoji $x \in R^n$ takvo da je $\langle a_t, x\rangle > 0$ za sve $t \in T$.

(B) Važi (2) i postoji $x \in R^n$ takvo da je

$$\langle a_t, x\rangle > b_t \quad \text{za sve } t \in T$$

(C) $X \neq \emptyset$ i $\text{cone}\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}_{t \in T} \right\}$ je zatvoren .

<u>Dokaz.</u> Može se naći npr.u [44],korolar 3.2.1,str.23 .

Primetimo da važi (A) $\Rightarrow$ (B) $\Rightarrow$ (C) [ibidem,korolar 3.2.2.]

Cilj ovog odeljka je izvodjenje rezultata u vezi sa dimenzijom skupova tipa F-M. Dobijeni rezultati predstavljaju uopštenja poznatih teorema o dimenziji skupa X predstavljenog sistemom linearnih nejednačina Černikova [27]-u slučaju konačnog i Eckhardt-a[33]-u slučaju beskonačnog sistema. U tu svrhu uvedimo,najpre,neke pojmove.

<u>Definicija 3.3.</u> Konus K (iz R^n) je zaoštren akko $K \cap -K = \{0\}$

<u>Definicija 3.4.</u> Konveksan konus K iz R^n ima bazu B ako je B neprazan konveksan podskup od K koji ne sadrži nulu takav da svaki $x \in K \setminus \{0\}$ ima jedinstvenu reprezentaciju oblika $p\,b$ pri čemu je $b \in B$ i $p > 0$.

<u>Lema 3.7.</u> Neka je K netrivijalan konveksan zatvoren i zaoštren konus u R^n.Tada K ima kompaktnu bazu i postoji $c \in K$ takav da je

$$\langle c,k \rangle > 0 \quad \text{za sve } k \in K \setminus \{0\} . \tag{3}$$

<u>Dokaz.</u> Neka je $S = \{ x \in R^n : \langle x,x \rangle = 1 \}$ i $A = \text{conv}(K \cap S)$. Tada je A neprazan kompakt.Dokažimo da $0 \notin A$. U suprotnom , postojali bi pozitivni brojevi $p_1,\dots,p_m$ sa $p_1+\dots+p_m=1$ i vektori $k_1,\dots,k_m$ iz K sa dužinama jednakim 1,takvi da je

$$p_1k_1+\dots+p_mk_m = 0 .$$

Pri tom je $m > 1$ te vektor

$$k = p_1k_1 = -p_2k_2-\dots-p_mk_m$$

pripada $K \cap (-K)$ i $k \neq 0$, što je kontradikcija. Stoga,

$$0 \notin A .$$

Neka je c projekcija nule na A (tj. tačka skupa A najbliža tački 0).Poznato je (teorema o striktnoj separaciji tačke od konveksnog skupa) da je $\langle c,k \rangle > 0$ za sve $k \in A$,što povlači (3) . Lako se da proveriti da je

$$B = \{k \in K : \langle c,k \rangle = 1\}$$

baza konusa K. Pokažimo još kompaktnost baze B. Dovoljno je pokazati ograničenost skupa B, jer je B zatvoren skup. Pretpostavimo da postoji niz (k_n) $k_n \in B$ takav da $k_n \to \infty$ kad $n \to \infty$. Niz $(k_n / \|k_n\|)$ je ograničen te ima konvergentan podniz. Ne umanjujući opštost, pretpostavimo da ovaj niz konvergira ka k_o. Zbog zatvorenosti konusa K, k_o pripada $K \setminus \{0\}$. Prelaskom na limes, iz relacije

$$\langle c, k_n / \|k_n\| \rangle = 1/\|k_n\|$$

dobijamo tada kontradikciju

$$\langle c, k_o \rangle = 0 \quad .$$

Time je lema dokazana.

Neka je X neprazan skup tipa F-M zadan sa formulom (1). Označimo

$$T^{=} := \{t \in T : \langle a_t, x \rangle = b_t \quad \text{za sve } x \in X\} .$$

Teorema 3.8. Uz navedene pretpostavke sistem

$$\langle a_t, x \rangle > b_t \ , \quad t \in T \setminus T^{=}$$

$$\langle a_t, x \rangle = b_t \ , \quad t \in T^{=}$$

ima rešenja.

Dokaz. Označimo sa U najveći podprostor sadržan u karakterističnom konusu C skupa X a sa V njegovu ortogonalnu dopunu. Pokažimo, najpre, da

$$\binom{a}{b} \in U \quad \text{ako i samo ako} \ \langle a,x \rangle = b \ \text{za sve} \ x \in X \qquad (4).$$

Zaista, ako $\binom{a}{b} \in U$, zbog $U \subset C$ i korolara 2.4., važi $\langle a,x \rangle \geq b$ za sve $x \in X$. Kako i $\binom{-a}{-b} \in U$ važi takodje $\langle -a,x \rangle \geq -b$, dakle $\langle a,x \rangle = b$. Time je "samo ako" deo dokazan.

Pretpostavimo sada da je $\langle a,x\rangle = b$ za sve $x \in X$. Tada su $\langle a,x\rangle \geqslant b$ i $\langle -a,x\rangle \geqslant -b$ posledice sistema (1). Otuda $\binom{a}{b}$ i $\binom{-a}{-b}$ pripadaju $\operatorname{cl} C = C$ te $\binom{a}{b} \in C \cap (-C) = U$. Time je dokazano (4). Neka je $K = C \cap V$. Tada je K konveksan zatvoren i zaoštren konus i C je direktan zbir od U i K. Da je K i netrivijalan sledi iz činjenice da $\binom{0}{-1}$ ne pripada U a pripada konusu C. Ako bi, naime, $\binom{0}{-1}$ pripadalo U onda bi $\binom{0}{1}$ pripadalo C, što je nemoguće, jer je X neprazan skup. Prema lemi 3.7., konus K ima kompaktnu bazu B i postoji $\binom{x_0}{y_0} \in K$ takav da je

$$\langle a,x_0\rangle + by_0 > 0 \quad \text{za sve } \binom{a}{b} \in K \setminus \{0\} \tag{5}$$

Tačka $\binom{0}{-1}$ iz C može se na jednoznačan način napisati kao zbir neke tačke $\binom{a_1}{b_1}$ iz U i neke tačke $\binom{a}{b}$ iz K i pri tom $\binom{a}{b} \neq 0$. Zbog (5) tada važi

$$\langle 0,x_0\rangle - y_0 = \langle a_1,x_0\rangle + b_1y_0 + \langle a,x_0\rangle + by_0 = \langle a,x_0\rangle + by_0 > 0,$$

dakle $y_0 < 0$. Označimo $x_s = x_0/(-y_0)$ i dokažimo da $x_s \in X$. Za proizvoljno $t \in T$, razlažući

$$\binom{a_t}{b_t} = u + v \;, \quad u \in U \;, \quad v \in K \tag{6}$$

i skalarno množeći sa $\binom{x_0}{y_0} \in K$ dobili bi

$$\langle a_t,x_0\rangle + b_ty_0 = \langle v, \binom{x_0}{y_0}\rangle \geqslant 0 \tag{7}$$

odakle sledi, deobom sa $-y_0$, $\langle a_t,x_s\rangle \geqslant b_t$. Stoga $x_s \in X$. Zbog (4), za $t \in T \setminus T^{=}$ biće u razlaganju (6) odgovarajuće v različito od 0 pa će u (7) važiti stroga nejednakost. To znači da je x_s rešenje sistema iz teoreme 3.8.

Sledeća lema pokazuje detalje odnosa zatvorenog konusa generisanog skupom A i njegovog najvećeg podprostora.

Lema 3.9 Neka je C zatvoren konus u R^n generisan skupom A i U najveći podprostor sadržan u C . Tada je U ili trivijalan ili ima bazu sastavljenu od elemenata skupa A.

Dokaz. Kao u dokazu prethodne teoreme važi $C = U \oplus K$ gde je $K = V \cap C$,pri čemu je V ortogonalna dopuna prostora U a K je konveksan zatvoren i zaoštren konus. Uz to postoji $c \in K$ tako da je

$$<c,x> \geqslant 0 \quad \text{za sve} \quad x \in C \tag{7}$$

(u slučaju da je K netrivijalan uzeti c iz (3),inače c=0)

U (7) jednakost vredi ako i samo ako $x \in U$.Pretpostavimo da U nije trivijalan prostor.Tada postoji $u \in U$ oblika $u = p_1 a_1 + \ldots + p_m a_m$ za neke $a_1,\ldots,a_m$ iz A i $p_1,\ldots,p_m > 0$.

Kako je

$$0 = <c,u> = p_1 <a_1,c> + \ldots + p_m <a_m,c> \geqslant 0$$

mora biti $<c,a_1> = \ldots = <c,a_m> = 0$ te $a_1,\ldots,a_m \in U$. Time je pokazano da skup $W = \{a \in A : <c,a> = 0\}$ nije prazan a lako se vidi da je $U = \operatorname{span} W$ .Maksimalan linearno nezavisni podskup od W je onda baza za U.Time je lema dokazana.

Koristeći izvedenu lemu možemo preciznije okarakterisati najveći podprostor U sadržan u karakterističnom konusu C skupa tipa F-M :

Teorema 3.10. $U = \operatorname{span}\left\{ \binom{a_t}{b_t} : t \in T^= \right\}$

Dokaz. Iz (4) sledi $\operatorname{span}\left\{ \binom{a_t}{b_t} : t \in T^= \right\} \subset U$. Prema lemi 3.9. U ima bazu formiranu od elemenata skupa

$\left\{\binom{a_t}{b_t}\ t\in T',\binom{0}{-1}\right\}$. Kako $\binom{0}{-1}\notin U$ i zbog (4) ta je baza sastavljena od elemenata skupa $\left\{\binom{a_t}{b_t}\ t\in T^=\right\}$. Otuda je $U\subset \operatorname{span}\left\{\binom{a_t}{b_t}\ t\in T^=\right\}$. Time je teorema dokazana.

Sledeći rezultat je centralni u ovom odeljku. On pokazuje da skupovi tipa F-M imaju "geometriju" poliedarskih skupova.

Teorema 3.11. Neka je X neprazan skup tipa F-M dat sa (1). Tada je:

(1) najmanja afina mnogostrukost koja sadrži X (tzv. noseća mnogostrukost skupa X) data sa
$$H=\{\ x\in R^n:\ \langle a_t,x\rangle = b_t\ ,\ t\in T^=\}$$

(2) $\dim X=\dim H = n - \operatorname{rang}\{a_t:\ t\in T^=\}$

Dokaz. U dokazu teoreme 3.8. konstatovano je da se karakteristični konus C može prikazati kao direktan zbir prostora $U = C\cap(-C)$ i konusa $K = C\cap V$ koji ima kompaktnu bazu B. Pokažimo da se skup X može predstaviti kao skup rešenja sistema
$$\langle a,x\rangle\geqslant b\ ,\ \binom{a}{b}\in B \tag{8}$$
$$\langle a_t,x\rangle = b_t,\quad t\in T^= \tag{9}$$

Označimo sa Y skup rešenja ovog sistema. Ako $x\in X$ onda, zbog $B\subset C$, vredi (8) a (9) je očevidno. Stoga, $X\subset Y$. Pokažimo obrnutu inkluziju. Neka $x\in Y$. Primetimo da se relacija (9) može, zbog teoreme 3,10., zameniti ekvivalentnom
$$\langle a,x\rangle = b\ ,\ \binom{a}{b}\in U \tag{10}$$
a da iz (8) sledi
$$\langle a,x\rangle\geqslant b\ ,\ \binom{a}{b}\in K \tag{11}$$

Koristeći razlaganje

$$\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u_o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v \\ v_o \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} u \\ u_o \end{pmatrix} \in U , \begin{pmatrix} v \\ v_o \end{pmatrix} \in K$$

za proizvoljno $t \in T$ kao i relacije (10) i (11) dobijamo $\langle a_t, x\rangle - b_t = \langle u, x\rangle - u_o + \langle v, x\rangle - v_o \geq 0$. Dakle, $x \in X$. Stoga $X = Y$. Iz relacije (5) se vidi da rešenje x_s sistema iz teoreme 3.8. zadovoljava nejednakost $\langle a, x_s\rangle > b$, za proizvoljno $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in B$. Kako je B kompaktno postoji pozitivan broj d takav da vredi

$$\langle a, x_s\rangle > b+d \quad \text{za sve} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in B$$

Neka su $x_o, x_1, \ldots, x_k$ vrhovi simpleksa maksimalne dimenzije u skupu H. Tada, za dovoljno male $p_o, p_1, \ldots, p_k > 0$ tačke $x_s + p_i(x_i - x_o)$ $i = 1, \ldots, k$ i x_s obrazuju simpleks u X jer:

(i) za $t \in T^=$ i svako $p_i > 0$ vredi

$$\langle a_t, x_s + p_i(x_i - x_o)\rangle = b_t$$

(ii) za $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in B$

$$\langle a, x_s + p_i(x_i - x_o)\rangle - b > d + p_i \langle a, x_i - x_o\rangle > 0$$

za sve dovoljno male p_i .

Otuda , $\dim H \leq \dim X$. Obrnuta nejednakost je tačna zbog $X \subset H$. Dakle, $\dim X = \dim H = n - \operatorname{rang}\{a_t : t \in T^=\}$. Time je teorema dokazana.

4. USLOVI OPTIMALNOSTI ZA LINEARNO SEMIINFINITNO PROGRAMIRANJE

U ovom odeljku bavimo se problemom karakterizacije optimalnog rešenja problema

$$\begin{array}{ll} (\min) & \langle c,x \rangle \\ \text{p.o.} & \langle a_t,x\rangle \geqslant b_t \ , \ t\in T \end{array} \qquad \text{(LP)}$$

$(T \neq \emptyset \ , \ c\in R^n, \ a:T \to R^n, \ b:T \to R \ ).$

Primalnu karakterizaciju daje sledeća teorema:

<u>Teorema 4.1.</u> Dopustiva tačka x_0 problema (LP) je njegovo optimalno rešenje ako i samo ako sistem

$$\begin{array}{l} \langle c,d \rangle < 0 \\ \langle a_t,d\rangle \geqslant b_t - \langle a_t,x_0\rangle \ , \ t\in T \end{array} \qquad (1)$$

nema rešenje $d\in R^n$.

<u>Dokaz.</u> Ako sistem (1) ima rešenje d ,tačka x_0 ne može biti optimalna,jer je x_0+d dopustiva tačka i $\langle c,x_0+d\rangle<\langle c,x_0\rangle$. Ako je pak x_0 optimalno rešenje problema (LP),onda,za svako $d\in R^n$ takvo da je x_0+d dopustiva tačka za (LP),vredi $\langle c,x_0+d\rangle \geqslant \langle c,x_0\rangle$ .Otuda $\langle c,d\rangle \geqslant 0$ .Dakle (1) je nemoguć.

Dualnu karakterizaciju optimalnosti daje

<u>Teorema 4.2.</u> Dopustiva tačka x_0 problema (LP) je optimalno rešenje ako i samo ako

$$\binom{c}{0} \in \text{cl cone}\left\{ \binom{a_t}{b_t - \langle a_t,x_0\rangle}_{t\in T}, \binom{0}{-1} \right\} \qquad (2)$$

<u>Dokaz.</u> Na osnovu prethodne teoreme,x_0 je optimalno rešenje za (LP) ako i samo ako je nejednakost $\langle c,d\rangle\geqslant 0$ posledica sistema $\langle a_t,d\rangle \geqslant b_t - \langle a_t,x_0\rangle , t\in T$ (kome je d=0 jedno rešenje).

Na osnovu korolara 2.4.,to će biti ako i samo ako važi (2).

Primenjujući korolar 2.4. na činjenicu da je dopustiva tačka x_o,optimalno rešenje problema (LP) ako i samo ako je nejednakost $<c,x>\geq<c,x_o>$ posledica sistema ograničenja u (LP) , nalazimo da je i uslov

$$\binom{c}{<c,x_o>} \in \mathrm{cl}\, C \tag{3}$$

karakterizacija optimalnosti.Pri tom je C karakteristični konus dopustivog skupa u (LP).

Neka je

$$K(x_o)= \mathrm{cone}\left\{ \binom{a_t}{b_t-<a_t,x_o>}_{t\in T} ,\ \binom{0}{-1} \right\}$$

Ako je x_o dopustiva tačka za (LP) i konus $K(x_o)$ zatvoren postoje konačan podskup $T_o\subset T$ i skalari $p_t\geq 0, t\in T_o$ i $s\geq 0$ takvi da je

$$\binom{c}{0} = \sum_{t\in T_o} p_t \binom{a_t}{b_t-<a_t,x_o>} + s\binom{0}{-1}$$

odnosno

$$c = \sum_{t\in T_o} p_t\, a_t \tag{4}$$

$$s = \sum_{t\in T_o} p_t(b_t-<a_t,x_o>) \geq 0$$

Iz poslednje relacije,zbog nepozitivnosti sabiraka,sledi

$$p_t(b_t-<a_t,x_o>) = 0 \ , \ t\in T_o \tag{5}$$

Uslovi (4) i (5) pokazuju da je x_o optimalno rešenje konačnog podprograma:

$$(\min) <c,x>$$

$$\text{p.o.} \quad <a_t,x>\geq b_t \ , t\in T_o$$

Pri tom su $p_t, t\in T_o$ odgovarajući Kuhn-Tucker-ovi množioci.

Na taj način vredi

<u>Teorema 4.3.</u> Ako je konus $K(x_0)$ zatvoren, onda je x_0 optimalno rešenje problema (LP) ako i samo ako je x_0 optimalno rešenje nekog konačnog podprograma od (LP).

<u>Dokaz.</u> Prethodno rasudjivanje dokazuje "samo ako" deo, dok je "ako" deo trivijalan.

<u>Lema 4.4.</u> Neka je K konveksan konus u R^n i A linearni operator iz R^n na R^m. Tada je $A(\mathrm{cl}\,K) = \mathrm{cl}\,A(K)$.

<u>Dokaz.</u> Neka je $y \in A(\mathrm{cl}K)$. Tada postoji $x \in \mathrm{cl}K$, $y = Ax$ i niz (x_n), $x_n \in K$, $x_n \to x$. Pri tom $y_n := Ax_n \in A(K)$ i $y_n \to y$. Dakle, $y \in \mathrm{cl}A(K)$. Otuda, $A(\mathrm{cl}K) \subset \mathrm{cl}A(K)$. Pretpostavimo sada da postoji $y \in \mathrm{cl}A(K)$ koje ne pripada $A(\mathrm{cl}K)$. Kako je linearno preslikavanje A otvoreno skup $A(\mathrm{cl}K)$ je zatvoren konveksan konus od koga se tačka y može strogo razdvojiti. Postoji dakle, $c \in R^n \setminus \{0\}$ i $d \in R$ takvi da je

$$\langle c,y\rangle < d \leq \langle c,x\rangle \qquad \text{za sve } x \quad A(\mathrm{cl}K)$$

Otuda važi

$$\langle c,y\rangle < d \leq \langle c,Ak\rangle \qquad \text{za sve } k \in K$$

Uzimajući niz (k_n), $k_n \in K$ za koji $Ak_n \to y$ i puštajući da $n \to \infty$ dobili bi kontradikciju

$$\langle c,y\rangle < d \leq \langle c,y\rangle .$$

Time je lema dokazana.

Kako je

$$K(x_0) = A(C)$$

pri čemu je A invertibilan linearni operator sa matricom

$$A = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -x_0' & 1 \end{pmatrix}$$

(I je jedinična nxn matrica) sledi da je $K(x_0)$ zatvoren ako i samo ako je zatvoren karakteristični konus C.

5. USLOVI OPTIMALNOSTI ZA KONVEKSNO SEMIINFINITNO PROGRAMIRANJE

Posmatramo problem konveksnog semiinfinitnog programiranja

$$\begin{array}{ll} (\min)\ f(x) & \\ \text{p.o.} \quad x \in X & \end{array} \qquad (CP)$$

čiji je dopustivi skup X oblika

$$X = \{x \in R^n : \ g_t(x) \le 0 \ , \ t \in T\} \qquad (1)$$

(funkcije f i $g_t, t \in T$ su konveksne na R^n)

Definicija 5.1. Linearizacija skupa X je sistem linearnih nejednačina čiji je skup rešenja jednak X.

Svaki neprazan zatvoren konveksan skup u R^n ima bar jednu linearizaciju, jer se može prikazati kao presek svojih nosećih poluprostora. Jasno je takodje da su moguće razne linearizacije konveksnog zatvorenog skupa. Primetimo da je skup X dat sa (1) konveksan i zatvoren.

Lema 5.2. Sistem

$$\langle -b,x \rangle \ge g_t(y) - \langle b,y \rangle \quad y \in R^n, t \in T, \ b \in \partial g_t(y) \qquad (2)$$

je jedna linearizacija dopustivog skupa X.

Dokaz. Za svako $x \in X$ i proizvoljne $y \in R^n, t \in T, \ b \in \partial g_t(y)$ vredi

$$g_t(y) + \langle b, x-y \rangle \le g_t(x) \le 0$$

te je x rešenje sistema (2). Obratno, ako je x rešenje sistema (2), birajući za proizvoljno $t \in T$, $y=x$ i $b \in \partial g_t(y)$ u (2) dobijamo

$$g_t(x) \le 0$$

dakle $x \in X$. Time je dokaz završen.

Analizom prethodnog dokaza, vidi se da je X skup rešenja i podsistema od (2) dobijenog izborom samo jednog $b=b(y,t)$ iz $\partial g_t(y)$ za već izabrane $y \in R^n$ i $t \in T$. Takva linearizacija skupa X je nešto prostija nego (2).

Koristeći linearizaciju (2) moguće je na osnovu rezultata iz odeljka 4, dobiti sledeću karakterizaciju optimalnosti za problem (CP) :

<u>Teorema 5.3.</u> Tačka $x_0 \in X$ je optimalno rešenje problema (CP) ako i samo ako postoji $a \in \partial f(x_0)$ takvo da je

$$\binom{a}{\langle a,x_0\rangle} \in \text{cl cone}\left\{\binom{-b}{g_t(x)-\langle b,x\rangle}_{x \in R^n, t \in T, b \in \partial g_t(x)}, \binom{0}{-1}\right\} \quad (3)$$

<u>Dokaz.</u> Prema teoremi 3.4.3 iz [7] tačka $x_0 \in X$ je optimalno rešenje problema (CP) ako i samo ako funkcija f ima u tački x_0 subgradijent a za koga vredi $\langle a,x-x_0\rangle \geq 0$ za sve $x \in X$. Ekvivalentno tome, nejednakost

$$\langle a,x\rangle \geq \langle a,x_0\rangle$$

je posledica (mogućeg) sistema (2). Tvrdjenje onda sledi iz korolara 2.4.

Uslovi optimalnosti (3) dobijaju drugi oblik ako se na obe strane relacije (3) primeni linearna transformacija sa matricom

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -x_0' & 1 \end{pmatrix} \qquad (\text{ I je jedinična nxn matrica })$$

i iskoristi lema 4.4. :

$$\binom{a}{0} \in \text{cl cone}\left\{\binom{-b}{g_t(x)-\langle b,x-x_0\rangle}_{x \in R^n, t\in T, b\in \partial g_t(x)}, \binom{0}{-1}\right\} \quad (4)$$

Da je (4) ekvivalentno sa (3) vidi se primenom inverzne linearne transformacije na obe strane u (4).

Iako teorema 5.3. daje potpunu karakterizaciju optimalnog rešenja mogućnost njene primene ograničavaju dve poteškoće:

(i) izračunavanje subdiferencijala funkcija g_t, $t \in T$ u proizvoljnoj tački iz R^n ;

(ii) izračunavanje karakterističnog konusa linearizacije (2)

Dok je (i) moguće zadovoljavajuće rešiti bar u nekim specijalnim slučajevima (npr. u slučaju diferencijabilnosti funcija g_t), dotle (2) čini ozbiljne poteškoće (čak i u linearnom slučaju). Stoga je od interesa naći prostije dovoljne, odnosno neophodne, uslove optimalnosti.

Za proizvoljnu dopustivu tačku x problema (CP) definišimo skup indeksa ograničenja aktivnih u x sa

$$T(x) = \{ t \in T : \ g_t(x) = 0 \}$$

<u>Teorema 5.4</u>. Ako je $x_o \in X$ i

$$\partial f(x_o) \cap \text{clcone}\{-\partial g_t(x_o) : t \in T(x_o)\} \neq \emptyset \qquad (5)$$

onda je x_o optimalno rešenje problema (CP).

<u>Dokaz</u>. Neka je $a \in \partial f(x_o)$ takav da

$a \in \text{clcone} (-\partial g_t(x_o) : t \in T(x_o))$. Tada je nejednakost

$\langle a,x\rangle \geqslant 0$ posledica nejednakosti

$$\langle -b,x \rangle \geqslant 0, \ t \in T(x_o), \ b \in \partial g_t(x_o)$$

Otuda,

$$\binom{a}{0} \in \text{clcone} \left\{ \binom{-b}{0} t \in T(x_o), b \in \partial g_t(x_o), \binom{0}{-1} \right\} \qquad (6)$$

Kako je

$$\text{cone} \left\{ \binom{-b}{0} t \in T(x_o), b \in \partial g_t(x_o), \binom{0}{-1} \right\}$$

očigledno deo od

$$\text{cone}\left\{ \binom{g_t(x) - \langle b, x-x_0\rangle}{-b} x \in R^n, t \in T, b \in \partial g_t(x), \binom{0}{-1} \right\}$$

iz (6) sledi (4) a time i da je x_0 optimalno rešenje za (CP).

Teorema 5.4. daje asimptotske dovoljne uslove Kuhn-Tucker- a. Primetimo da je uslov (5) zahvaljujući teoremi 2.1. i činjenici da je $\partial f(x_0)$ neprazan konveksan kompakt (vidi t.23.4 u [91]) ekvivalentan sa:

sistem

$$\max_{a \in \partial f(x_0)} \langle a, x\rangle < 0$$

$$\langle -b, x\rangle \geq 0, \quad t \in T(x_0), b \in \partial g_t(x_0)$$

je nemoguć.

Ako se u (5) izostavi zatvaranje konusa dobija se standardni Kuhn-Tucker-ov (dovoljni) uslov optimalnosti:

$$\partial f(x_0) \cap \text{cone}\,(-\partial g_t(x_0) \,:\, t \in T(x_0)) \neq \emptyset \qquad (7)$$

Prirodno se postavlja pitanje pri kojim uslovima su uslovi (7) odnosno (5) i neophodni za optimalnost neke dopustive tačke problema (CP). Da to nije uvek slučaj pokazuje

<u>Primer</u>. (min) $f(x,y) = \max\{x+2y-1, 2x-5y-2, -2x-y+2\}$

p.o. $x^2 - ty \leq t^2$, $t \in [0,1]$

Dokažimo da je (0,1) optimalno rešenje ovog problema ali da uslov (5) u toj tački nije ispunjen. Dopustivi skup je $X = \{(0,y) : y \geq 0\}$, što se lako vidi uzimajući prvo t=0 , a funkcija $\max\{2y-1, -5y-2, 2-y\}$ dostiže minimum na skupu $y \geq 0$ u tački y=1 .Otuda je (0,1) optimalno rešenje.

Koristeći teoremu Valadiera (vidi npr. [55], str.212) moguće je izračunati

$$\partial f(0,1) = \text{conv}\left\{ \binom{1}{2}, \binom{-2}{-1} \right\}$$

Pored toga $\text{cone}\,(-\partial g_t(0,1) : t \in T(0,1)) = \text{cone}(-\nabla g_0(0,1)) = \{(0,0)\}$

Vidi se da uslov (5) nije ispunjen.

Moguće je takodje proveriti optimalnost tačke (0,1) pomoću teoreme 5.3. Kako je

$$\mathrm{clcone}\left\{ \binom{-b}{g_t(x)-<b,x>}_{x\in R^2,\, t\in[0,1],\, b\in \partial g_t(x)},\ \binom{0}{-1}\right\} =$$

$$= \mathrm{cl\ cone}\left\{\begin{pmatrix}-2x\\ t\\ -x^2-t^2\end{pmatrix}_{x\in R,\, t\in[0,1]},\ \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \mathrm{cl\ cone}\left\{\begin{pmatrix}x\\ t\\ -t^2-x^2/4\end{pmatrix}_{x\in R,\, t\in[0,1]},\ \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z)\ :\ y\geq 0,\ z\leq 0\right\}$$

uslov (3) zadovoljen je za $a = \binom{-1}{0} \in \partial f(0,1)$.

Sledeća teorema iz [69] daje uslove pri kojima je Kuhn-Tucker-ov uslov (7) i neophodan za optimalnost.

<u>Teorema 5.5</u>. Ako je linearizacija (2) dopustivog skupa X tipa F-M , onda optimalno rešenje x_0 problema (CP) zadovoljava uslov (7).

<u>Dokaz</u>. U spomenutom radu dokazano je da pri pretpostavkama u teoremi postoji konačan podprogram od (CP)

$$(\min)\ f(x)$$

$$\text{p.o.}\quad g_t(x)\leq 0\ ,\ t\in T_0\quad ,\ T_0 \text{ konačan deo od } T$$

i nenegativni brojevi p_t, $t\in T_0$ takvi da je $(x_0,(p_t)_{t\in T_0})$ sedlasta tačka Lagrange-ove funkcije pridružene ovom podprogramu, što je ekvivalentno sa (7) .

U istom radu pokazano je takodje da je uslov (7) neophodan za optimalnost pri sledećim pretpostavkama:

(i) T je kompaktan podskup od R^m ;

(ii) funkcija $(x,t)\mapsto g_t(x)$ je neprekidna na $R^n\times T$

(iii) postoji $\bar{x} \in X$ takvo da je $g_t(\bar{x}) < 0$ za sve $t \in T$

(Slater-ov uslov)

Na kraju ovog odeljka pokazaćemo poboljšanje ovog rezultata pokazujući da se Slater-ov uslov ne mora zahtevati za linearna ograničenja koja obrazuju F-M sistem. U tom cilju pretpostavimo da je dopustivi skup X problema (CP) zadan u obliku:

$$g_t(x) \leq 0 \ , \ t \in T$$
$$\langle a_s, x \rangle \geq b_s, \ s \in S$$

pri čemu

(i) T je kompaktan skup

(ii) $(x,t) \mapsto g_t(x)$ je neprekidno na $R^n x T$

(iii) postoji $\bar{x} \in X$ takvo da je $g_t(\bar{x}) < 0$, $t \in T$

(iv) $\text{cone}\left\{ \begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix}_{s \in S} \right\}$ je zatvoren .

Teorema 5.6. Ako je $x_0 \in X$ optimalno rešenje problema (CP) i važe uslovi (i)- (iv) ,tada je

$$\partial f(x_0) \cap \text{cone}\left\{ (-\partial g_t(x_0))_{t \in T(x_0)}, (a_s)_{s \in S(x_0)} \right\} \neq \emptyset \qquad (8)$$

pri čemu je

$$T(x_0) = \{ t \in T: \ g_t(x_0) = 0 \}$$
$$S(x_0) = \{ s \in S: \langle a_s, x_0 \rangle = b_s \}.$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je dopustivi skup X ograničen. Pokažimo da je u tom slučaju linearizacija (2) skupa X tipa F-M. Zaključak odatle sledi na osnovu teoreme 5.5. Uvedimo oznake

$$g(x) = \max\{ g_t(x) \ : \ t \in T \}$$
$$Y = \{ x \in X \ : \ g(x) = 0 \}$$

Lako je videti da je $x \mapsto g(x)$ konveksna neprekidna funkcija na R^n i da je Y kompaktan skup . Neka je Z skup rešenja sistema

$$\begin{aligned} &\langle u,x\rangle \geq \langle u,y\rangle \quad , y\in Y , u\in -\partial g(y) \\ &\langle a_s,x\rangle \geq b_s \quad , s\in S \end{aligned} \tag{9}$$

Dokažimo da je (9) jedna linearizacija skupa X tipa F-M. Za proizvoljno $x\in X$, $y\in Y$, $u\in\partial g(y)$ vredi

$$\langle u,x-y\rangle \leq g(x)-g(y)= g(x) \leq 0$$

i stoga $x\in Z$ .Dakle, $X\subset Z$. Pretpostavimo da postoji $z\in Z\setminus X$ .Tada je $g(z)>0$ .Kako je $g(\bar{x})<0$,postoji $y=(1-p)\bar{x}+pz$ za neko $p\in(0,1)$,takva da je $g(y)=0$. Pri tom važe nejednakosti

$$\langle a_s,y\rangle \geq b_s \quad , s\in S$$

te $y\in Y$. Neka je $u\in\partial g(y)$ proizvoljno izabrano i $h(x)=\langle u,x-y\rangle$. Kako je $h(\bar{x}) \leq g(\bar{x})<0$ i $h(y)=0$ biće

$$h(z)= -\frac{1-p}{p}\,h(\bar{x}) > 0$$

što se protivi pretpostavci da $z\in Z$. Dobijena kontradikcija pokazuje da je $X=Z$.

Pokažimo sada da je (9) tipa F-M.

Neka je

$$A=\left\{ \binom{u}{\langle u,y\rangle}_{y\in Y} \ , u\in -\partial g(y)\right\}$$

Kako su skupovi Y i $\partial g(Y) := \bigcup\{\partial g(y) : y\in Y\}$ kompaktni (vidi t.24.7 u [91]) skup A je očigledno ograničen . Da je i zatvoren sledi iz sledećeg rasudjivanja:

ako je $\binom{u_n}{\langle u_n,y_n\rangle}$ niz u A koji konvergira ka $\binom{u}{c}$, onda

$$u_n\to u \quad \text{i} \quad \langle u_n,y_n\rangle \to c \quad .$$

Pri tom $u \in -\partial g(Y)$ a iz niza (y_n) u Y se može izdvojiti konvergentan podniz (y_{n_k}), $y_{n_k} \to y$, $y \in Y$. Koristeći teoremu o zatvorenosti grafa subdiferencijala ∂g (t.24.4. u [91]) iz $u_{n_k} \in -\partial g(y_{n_k})$ sledi $u \in -\partial g(y)$ a iz $\langle u_{n_k}, y_{n_k} \rangle \to c$ i da je $c = \langle u,y \rangle$. Stoga $\binom{u}{c} \in A$.

Karakteristični konus sistema (9) može se napisati u obliku

$$\text{cone}\,(A \cup B)$$

gde je

$$B = \left\{ \binom{a_s}{b_s}_{s \in S},\ \binom{0}{-1} \right\}$$

Kako je A kompaktan skup a cone B zatvoren (vidi t.3.6.) i sistem

$$\langle a,x \rangle > 0 \quad ,a \in A$$
$$\langle b,x \rangle \geqslant 0 \quad ,b \in B$$

ima rešenje $\binom{\bar{x}}{-1}$, na osnovu teoreme 2.3. iz [44] zaključujemo da je sistem (9) tipa F-M.

S obzirom da je

$$\partial g(y) = \text{conv}\left(\partial g_t(y) : t \in T_1(y) \right)$$

gde je $T_1(y) = \left\{ t \in T : g_t(y) = \max \left\{ g_t(y) : t \in T \right\} \right\}$ (vidi t.3,str.212 u [55]) za $y \in Y$ biće $T_1(y) = T(y)$ i

$$\partial g(y) = \text{conv}\left(\partial g_t(y) : t \in T(y) \right)$$

Otuda je sistem

$$\begin{aligned} &\langle u,x \rangle \geqslant \langle u,y \rangle \ , \ y \in Y, u \in -\partial g_t(y) \ , t \in T(y) \\ &\langle a_s,x \rangle \geqslant b_s \quad , \ s \in S \end{aligned} \qquad (10)$$

ekvivalentan sa (9). Njegov karakteristični konus je jednak karakterističnom konusu sistema (9) (jer je konveksan konus generisan izvesnim skupom jednak konveksnom konusu generisanom nad konveksnim omotačem tog skupa),dakle zatvoren. To znači da je i (10) jedna F-M linearizacija skupa X. Kako je sistem

$$\begin{aligned} &\langle u,x\rangle \geq g_t(y) + \langle u,y\rangle \quad y\in R^n ,t\in T,\ u\in -\partial g_t(y) \\ &\langle a_s,x\rangle \geq b_s \ ,\ s\in S \end{aligned} \qquad (2)$$

dobijen dopisivanjem nekih posledica na sistem (10) ,biće i on F-M linearizacija skupa X,što smo i hteli da dokažemo.

Ukoliko dopustivi skup X nije ograničen umesto problema (CP) posmatramo problem

$$\begin{aligned} &(\min)\quad f(x) \\ &\text{p.o.}\quad x\in X \\ &\qquad\quad \|x-\bar{x}\| \leq r \end{aligned}$$

birajući r tako da dopisano ograničenje (koje je očigledno konveksno) ne bude aktivno u optimalnom rešenju x_0 polaznog problema (CP) a da x_0 bude dopustiva tačka . Pomoćni problem zadovoljava i ostale pretpostavke teoreme (formalno,dopisano ograničenje odgovara nekom indeksu t_∞ za koga se može uzeti da ne pripada skupu $T\cup S$)i ima ograničen dopustivi skup . Primenom izvedenog rezultata na pomoćni problem dokazujemo relaciju (8) i u ovom slučaju. Time je dokaz završen.

6. DUALNOST U KONVEKSNOM SEMIINFINITNOM PROGRAMIRANJU

Neka je T neprazan skup i Λ skup svih preslikavanja λ iz T u $[0,\infty)$ koja imaju konačan nosač

$$\operatorname{supp} \lambda = \{ t \in T: \lambda(t) \neq 0 \}$$

Za problem konveksnog semiinfinitnog programiranja

$$\begin{aligned} &(\inf) \quad f(x) \\ &\text{p.o.} \quad g_t(x) \leq 0 , \ t \in T \qquad\qquad (P) \\ &\qquad\quad x \in C \end{aligned}$$

pri čemu je C konveksan skup u R^n, $f:C \to R$, $g_t:C \to R$ su konveksne funkcije, definiše se Lagrange-ova funkcija $L: C \times \Lambda \to R$ sa

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{t \in T} \lambda(t)\, g_t(x)$$

Kako je

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} L(x,\lambda) = \begin{cases} f(x) & \text{ako } g_t(x) \leq 0 \text{ za sve } t \in T \\ \infty & \text{inače} \end{cases}$$

problem (P) je ekvivalentan problemu nalaženja

$$v(P) = \inf_{x \in C} \sup_{\lambda \in \Lambda} L(x,\lambda)$$

<u>Definicija 6.1</u>. Pod dualnim problemom problema (P) podrazumevamo nalaženje

$$v(D) = \sup_{\lambda \in \Lambda} \inf_{x \in C} L(x,\lambda) \qquad (D)$$

Dopustive tačke duala (D) su funkcije $\lambda \in \Lambda$ za koje je $\inf_{x \in C} L(x,\lambda)$ konačno, a v(D) je optimalna vrednost.

Lako se dokazuje nejednakost

$$v(P) \geq v(D)$$

koja predstavlja iskaz slabe teoreme dualnosti. Razlika $v(P) - v(D)$ se zove jaz dualnosti. Ukoliko je $v(P) = v(D)$ kaže se da važi jaka dualnost. Iz teorije igara je poznato da, u slučaju da je $v(P)$ konačno, jaka dualnost važi ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji ε-sedlasta tačka Lagrange-ove funkcije L tj. postoje $x_\varepsilon \in C$ i $\lambda_\varepsilon \in \Lambda$ takve da važi

$$L(x_\varepsilon, \lambda) - \varepsilon \leq L(x_\varepsilon, \lambda_\varepsilon) \leq L(x, \lambda_\varepsilon) + \varepsilon$$

za sve $\lambda \in \Lambda$ i $x \in C$. Za $\varepsilon = 0$ prethodna nejednakost definiše sedlastu tačku (x_0, λ_0) Lagrange-ove funkcije L. Lako se vidi da sedlastoj tački Lagrange-ove funkcije odgovara par optimalnih rešenja primala i duala i obratno. Takodje važi da dual (D) ima optimalno rešenje λ ako i samo ako je primal (P) ekvivalentan nekom svom konačnom podprogramu (dobijenom izborom onih ograničenja iz (P) koja odgovaraju multiplikatorima $\lambda(t)$ različitim od nule).

Pitanje dovoljnih uslova pri kojima važi jaka dualnost je jedno od osnovnih u teoriji. Navodimo sledeće fundamentalne rezultate:

Teorema 6.2. (Borwein [14]) Ako je

(i) T kompaktan topološki prostor ;

(ii) C zatvoren konveksan neprazan skup u R^n;

(iii) $v(P)$ konačno ;

(iv) funkcije f i $g_t, t \in T$ imaju konveksna odozgo poluneprekidna produženja na R^n sa vrednostima u $R \cup \{\infty\}$ (označena istim slovima) i pri tom su funkcije $t \to g_t(x)$, $x \in R^n$ poluneprekidne odozgo na T;

(v) za svakih $n+1$ tačaka $t_0, t_1, \ldots, t_n$ iz T postoji $x \in C$ takva da je $g_{t_i}(x) < 0$ za $i=0,1,\ldots,n$, (Slater-ov uslov),

tada (D) ima optimalno rešenje i $v(P) = v(D)$.

<u>Teorema 6.3.</u> (Jeroslow [57]) Ako je

(i) C zatvoren konveksan skup u R^n ;

(ii) f i $g_t, t \in T$ su konveksne zatvorene funkcije ;

(iii) (P) dopustiv program sa konačnom optimalnom vrednošću,

tada postoji $d \in R^n$ tako da je

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \sup_{\lambda \in \Lambda} \inf_{x \in C} (f(x) + \varepsilon \langle d,x \rangle + \sum_{t \in T} \lambda(t) g_t(x)) = v(P)$$

Ako je još

(iv) dopustivi skup X problema (P) ograničen

onda (P) ima optimalno rešenje i $v(P) = v(D)$.

Umesto uslova (iv) postoje složeniji uslovi u slučaju da dopustivi skup X nije ograničen (vidi [63] i [17]).

U ovoj glavi centralno mesto je posvećeno ne problemu jake dualnosti, nego pokušaju smanjivanja jaza dualnosti proširenjem definicije dualnog programa. Naime, ako se Λ proširi na skup Λ_0 svih preslikavanja $\lambda : T \to [0, \infty)$ za koje su izrazi

$$\sum_{t \in T} \lambda(t) \; g_t(x)$$

u izvesnom smislu sumabilni na C i na $C \times \Lambda_0$ definiše proširena Lagrange-ova funkcija

$$L_0(x, \lambda) = f(x) + \sum_{t \in T} \lambda(t) \, g_t(x)$$

a pomoću nje uopšteni dual

$$\sup_{\lambda \in \Lambda_0} \inf_{x \in C} L_0(x, \lambda) \qquad (D_0)$$

odmah je vidljivo da je

$$v(P) \geqslant v(D_0) \geqslant v(D) \; .$$

Pitanje je: može li se naći neko proširenje (D_0) tako da je $v(D_0) > v(D)$ u slučaju kada ne važi jaka dualnost ?

U pokušaju odgovora na ovo pitanje prirodno je najpre razmatrati tzv. prebrojivi dual (D_∞) dobijen zamenom skupa Λ sa skupom Λ_∞ svih nenegativnih preslikavanja iz T u $[0,\infty)$ sa najviše prebrojivim nosačem za koje red

$$\sum_{t \in T} \lambda(t) g_t(x)$$

(apsolutno) konvergira na C. To je u ovoj glavi učinjeno , ali je dobijeni rezultat iznenadjujući.Ovakvo produženje nikad ne menja dualni jaz! Sličan rezultat(uz dodatnu pretpostavku da je suma svih multiplikatora konačna)dobili su Tijs i Borwein [99] i Borwein [15] a za linearni slučaj Jeroslow i Karney [58] . Za druge vidove proširenja duala postavljeno pitanje ostaje otvoreno!

Za izvodjenje navedenog rezultata neophodan je niz iskaza u vezi sa afinim minorantama konveksnih funkcija.Pojedini od tih iskaza predstavljaju poboljšanja poznatih teorema i imaju značaj nezavisan od gore postavljenog pitanja.

<u>Lema 6.4</u>. Neka je C neprazan konveksan skup u R^n i $f: C \to R$ $g: C \to R$ redom konveksna i konkavna funkcija za koje važi

$$g(x) \leq f(x) \quad \text{za sve } x \in C.$$

Tada postoji afina fukcija $h(x) = \langle a,x \rangle + b$ ($a \in R^n, b \in R$) takva da je

$$g(x) \leq h(x) \leq f(x) \quad \text{za sve } x \in C.$$

<u>Dokaz</u>. Skupovi

$$A = \{(x,y) \in R^{n+1} : x \in C, f(x) \leq y\}$$

i

$$B = \{(x,y) \in R^{n+1} : x \in C, g(x) > y\}$$

su neprazni konveksni disjunktni sa disjunktnim relativnim unutrašnjostima pa se mogu sopstveno razdvojiti nekom hiperravni, tj. postoji nenula vektor $(c,c_o)\in R^{n+1}$ takav da je

$$\langle c,x\rangle + c_o y \geqslant \langle c,x_1\rangle + c_o y_1 \quad \text{za sve } (x,y)\in A, (x_1,y_1)\in B \tag{1}$$

pri čemu je nejednakost (1) stroga bar u nekim tačkama.

Specijalno za $x=x_1, y=f(x), y_1=g(x)-\delta$, $\delta>0$ proizvoljno odavde sledi

$$c_o(f(x)-g(x)) + c_o\delta \geqslant 0$$

te je $c_o \geqslant 0$. Dokažimo da je $c_o \neq 0$. U suprotnom, bilo bi

$$\langle c,x\rangle \geqslant \langle c,x_1\rangle \quad \text{za sve } x,x_1\in C$$

te bi $\langle c,x\rangle$ bilo konstantno na C i nejednakost (1) ne bi mogla biti stroga. Znači $c_o > 0$. Neka je $a = -c/c_o$. Deleći sa c_o i puštajući da y_1 teži $g(x_1)$ odozdo, iz (1) bi dobili

$$-\langle a,x\rangle + f(x) \geqslant -\langle a,x_1\rangle + g(x_1) \quad \text{za sve } x,x_1\in C$$

te je

$$-\infty < \sup_{x_1\in C}(g(x_1)-\langle a,x_1\rangle) \leq \inf_{x\in C}(f(x)-\langle a,x\rangle) < \infty$$

Stavljajući $b=\inf\limits_{x\in C}(f(x)-\langle a,x\rangle)$ iz poslednje nejednakosti se vidi da $h(x)=\langle a,x\rangle + b$ zadovoljava tvrdjenje leme.

<u>Lema 6.5.</u> Neka je C nepražan konveksan skup u R^p i $(h_n)_{n\in N}$ niz afinih funkcija konačnih na C. Tada postoji podniz (h_{n_k}) tog niza koji konvergira u svakoj tački skupa C.

<u>Dokaz.</u> Neka je S simpleks maksimalne dimenzije sadržan u C čiji su vrhovi $x_o, x_1, \dots, x_m$ (i znači $\dim C = m$). Kako je niz $(h_n(x_o),\dots,h_n(x_m))$ ograničen u R^{m+1} postoji podniz (h_{n_k}) takav da $(h_{n_k}(x))$ konvergira za svako $x\in\{x_o,x_1,\dots,x_m\}$. Kako je svaka tačka iz S konveksna kombinacija tačaka $x_o,\dots,x_m$ a h_n su afine, podniz $(h_{n_k}(x))$ konvergira za svako $x\in S$.

Kako se svaka tačka $x \in C$ može napisati u obliku

$x = ta+(1-t)b$ za neke $t \in R, a \in S, b \in S$ i

$h_n(x) = th_n(a)+(1-t)h_n(b)$ sledi da $(h_{n_k}(x))$ konvergira za svako $x \in C$.

Primenom prethodnih lema dokazujemo sledeći rezultat o afinim minorantama za red konveksnih funkcija, koji predstavlja uopštenje odgovarajućeg rezultata za konačne sume (v. [75]).

<u>Teorema 6.6</u>. Neka je C neprazan konveksan skup u R^p i (f_n) niz konveksnih funkcija $f_n : C \to R$ za koji je funkcija

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

konačna i ograničena odozdo na skupu C realnim brojem v. Tada postoje afine funkcije

$$h_n(x) = \langle a_n, x\rangle + b_n \qquad (a_n \in R^p, b_n \in R,\ n=1,2,\dots)$$

kao i niz celih brojeva

$$0=n_0 < n_1 < n_2 \ \dots$$

takav da je za sve $x \in C$

$$h_n(x) \leq f_n(x) \qquad ,n=1,2,\dots \tag{2}$$

i

$$\sum_{k=0}^{\infty} (h_{n_k+1}(x)+h_{n_k+2}(x)+\dots+h_{n_{k+1}}(x)) \geqslant v \tag{3}$$

pri čemu red u (3) konvergira.

<u>Dokaz.</u> Neposredno je jasno da je funkcija f konveksna na skupu C. Koristeći lemu 6.4., konstruišemo funkcije h_n induktivno :

(i) izaberimo h_1 tako da je za sve $x \in C$

$$v - \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x) \leqslant h_1(x) \leq f_1(x)$$

(ii) ako su $h_1,\dots,h_{n-1}$ već nadjene, izaberimo h_n tako da za sve $x\in C$ vredi

$$v-h_1(x)-\dots-h_{n-1}(x)-\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\leq h_n(x)\leq f_n(x)$$

Kako je tada

$$v-\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\leq h_1(x)+\dots+h_n(x)\leq f_1(x)+\dots+f_n(x), n=1,2,\dots \quad (4)$$

afine funkcije

$$H_n(x)=h_1(x)+\dots+h_n(x)\ , \ n=1,2,\dots$$

su konačne na C. Prema lemi 6.5. postoji podniz (H_{n_k}) koji konvergira na C. Uvodeći $n_o=0$, ta se činjenica može izraziti u formi : red u (3) konvergira na C. Zbog (4), suma tog reda nije manja od v. Time je teorema dokazana.

U slučaju da su $f_k(x)=0$ za sve $k>n$, teorema se svodi na iskaz da se nejednakost

$$f_1(x)+\dots+f_n(x)\geqslant v \qquad \text{za sve } x\in C$$

može profiniti na

$$h_1(x)+\dots+h_n(x)\geqslant v \quad \text{za sve } x\in C$$

za neke afine minorante h_k funkcija $f_k, k=1,\dots,n$, što je rezultat iz [75].

U slučaju da je $C=R^p$, možemo precizirati iskaz teoreme 6.6..

<u>Teorema 6.7.</u> Ako je red

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

konveksnih funkcija $f_k:R^n\to \bar{R}$ konvergentan na R^n i

$$v=\inf_{x\in R^n} f(x) > -\infty$$

tada postoje afine minorante h_k za $f_k, k=1,2,\dots$ takve da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k(x)=v \qquad \text{za sve } x\in R^n$$

Dokaz. Neka je (h_k), $h_k(x)=\langle a_k,x\rangle+b_k$ niz afinih funkcija definisan induktivno kao u dokazu prethodne teoreme. Dokažimo da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 0 \tag{5}$$

i

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = v \tag{6}$$

Neka je $e_1,\dots,e_p$ standardna baza za R^p. Koristeći (4) imamo, za proizvoljno $t>0$,

$$v-\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(te_j) \leq t\sum_{k=1}^{n} a_k e_j + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

tako da je

$$v \leq \varliminf_{n\to\infty}\Big(t\sum_{k=1}^{n} a_k e_j + \sum_{k=1}^{n} b_k\Big) \leq t\varliminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k e_j + \varlimsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k$$

Kako je

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k = \varlimsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} h_k(0) \leq \varlimsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k(0) = f(0)$$

sledi

$$v-f(0) \leq t\varliminf\sum_{k=1}^{n} a_k e_j \qquad \text{za sve } t>0$$

i stoga

$$\varliminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k e_j \geq 0 .$$

Zamenjujući e_j sa $-e_j$ dobili bi

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k e_j = -\varliminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k(-e_j) \leq 0$$

Iz dve poslednje nejednakosti sledi da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_j = 0 \quad \text{za } j=1,2,\dots,p$$

te otuda vredi (5). Puštajući da $n\to\infty$ u (4), dobili bi

$$v \leq \varliminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k \leq \varlimsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k \leq f(x) \quad \text{za sve } x\in C$$

te je

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = v$$

čime je dokazana relacija (6).

Sledeći korolar je uopštenje rezultata iz [13].

<u>Korolar 6.8.</u> Neka je C neprazan konveksan skup u R^p, $f_k: C \to R$, $k=0,1,\dots$, konveksne funkcije i u_k, $k=1,2,\dots$ pozitivni brojevi takvi da je funkcija

$$f(x)= f_o(x)+ \sum_{k=1}^{\infty} u_k f_k(x)$$

konačna na C i

$$v= \inf_{x\in C} f(x) > -\infty \quad .$$

Tada postoje afine minorante $h_k(x)$ za $f_k(x)$, $k=1,2,\dots$ i niz celih brojeva

$$0=n_o < n_1 < \dots$$

takvi da je

$$v \le \inf_{x\in C} \left(f_o(x)+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=n_k+1}^{n_{k+1}} u_m h_m(x)\right)$$

pri čemu red na desnoj strani konvergira na C.

U slučaju da je $C=R^p$ umesto poslednje nejednakosti može se tvrditi da je

$$v \le \inf_{x\in C} (f_o(x)+ \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x)) \quad .$$

<u>Dokaz.</u> Primeniti teoreme 6.6. odnosno 6.7. na konveksne funkcije f_o, $u_k f_k$, $k=1,2,\dots$.

Primetimo da je korolar 6.8. dokazan u [99] i [15] sa dodatnom pretpostavkom da je red $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ konvergentan .

Sledeća lema predstavlja uopštenje Caratheodory-eve teoreme za konuse (v.[95]). Varijanta koja se odnosi na verovatnosne mere, dokazana je u [99] .

Lema 6.9. Neka je m nenegativna regularna Borel-ova mera na R^n, $p_i : R^n \to R$ definisano sa $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ i neka postoji

$$\int_{R^n} x dm(x) \stackrel{def}{=} \left(\int_{R^n} p_1(x) dm(x), \ldots, \int_{R^n} p_n(x) dm(x)\right) \in R^n$$

Tada postoje $x^1, x^2, \ldots, x^k \in R^n$, $k \le n$ i nenegativni brojevi $s_1, s_2, \ldots, s_k$ takvi da je

$$\int_{R^n} x dm(x) = s_1 x^1 + s_2 x^2 + \ldots + s_k x^k \qquad (7)$$

Dokaz. Označimo sa supp m nosač mere m tj.

$$\text{supp } m = \left\{ x \in R^n : \; m(U) > 0 \;\; \text{za svaku otvorenu okolinu U od } x \right\}$$

Lako se vidi da je supp m zatvoren skup, te je m-merljiv. Dokažimo da je

$$m((\text{supp } m)^c) = 0$$

Ako poslednje ne bi važilo, postojao bi kompaktan skup K sadržan u $(\text{supp } m)^c$ i pozitivne m-mere (korišćena je regularnost mere m). Svaka tačka iz K pripadala bi nekom otvorenom skupu m-mere nula. Usled kompaktnosti skupa K, konačno mnogo tih otvorenih skupova pokriva K. No, tada bi K imao m-meru nula, što je nemoguće. Dakle, mora biti $m(\text{supp } m)^c = 0$.

Razlikujemo dva slučaja:

1) supp m = $\emptyset$;

Tada je $\int x dm(x) = 0$ te $k=1, x^1=0, s_1 = 0$ zadovoljava lemu.

2) supp m $\neq \emptyset$;

Dokažimo da je u ovom slučaju

$$\int_{R^n} x dm(x) \in \text{ri cone(supp } m) \qquad (8)$$

U suprotnom, mogla bi se tačka $\int x dm(x)$ sopstveno odvojiti od konveksnog konusa generisanog nad supp m , tj. postojao bi nenula vektor $c \in R^n$ takav da je

$$\langle c, \int x dm(x)\rangle \leq 0 \leq \langle c,x\rangle \quad \text{za sve } x \in \operatorname{supp} m$$

i pri tom bar za neko $x_o \in \operatorname{supp} m$

$$0 < \langle c, x_o\rangle$$

Za neku okolinu U tačke x_o bilo bi tada

$$0 < \frac{1}{2}\langle c,x_o\rangle \leq \langle c,x\rangle \quad , \; x \in U$$

te bi važilo

$$0 \geq \langle c, \int x dm(x)\rangle = \int \langle c,x\rangle dm(x) =$$

$$= \int_{\operatorname{supp} m} \langle c,x\rangle dm + \int_{(\operatorname{supp} m)^c} \langle c,x\rangle dm$$

$$= \int_{\operatorname{supp} m} \langle c,x\rangle dm$$

$$= \int_{U \cap \operatorname{supp} m} \langle c,x\rangle dm + \int_{U^c \cap \operatorname{supp} m} \langle c,x\rangle dm$$

$$\geq \frac{1}{2}\langle c,x_o\rangle \cdot m(U \cap \operatorname{supp} m)$$

$$= \frac{1}{2}\langle c,x_o\rangle \cdot m(U) > 0$$

što je kontradiktorno ! Time je (8) dokazano. Odatle sledi postojanje tačaka $x^1, x^2, \dots, x^k \in \operatorname{supp} m$ i nenegativnih brojeva $s_i, i=1,\dots,k$ za koje vredi (7). Zbog standardne Caratheodory-eve teoreme za konuse može se uzeti da je $k \leq n$.

Specijalan slučaj leme 6.9. je

Korolar 6.10. Konvergentan vektorski red

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \quad (c_k \in R^p, \; k=1,2,\dots)$$

može biti predstavljen kao konačna suma

$$\sum_{k=1}^{m} u_k c_k$$

gde su $u_1, u_2, \dots, u_m$ izvesni nenegativni brojevi i $m \leq p$.

<u>Dokaz.</u> Uzeti $m(x)=\sum_{k=1}^{\infty} I_{c_k}(x)$, gde je $I_c(x)=\begin{cases} 1 & \text{ako } x=c \\ 0 & \text{ako } x\neq c\end{cases}$

Inače korolar 6.10. dokazan je direktno u [58] a može se izvesti i kao posledica teoreme 1 iz [92].

Posledica leme 6.9 je takodje sledeći rezultat formulisan u [15] (bez dokaza):

<u>Lema 6.11.</u> Neka su $h_k(x)$, $k=1,2,\ldots$ afine funkcije za koje red $\sum_{k=1}^{\infty} h_k(x)$ konvergira na konveksnom skupu $C\subset R^p$. Tada postoje nenegativni brojevi $u_1,u_2,\ldots,u_l$, $l\leq p+1$ takvi da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k(x) = \sum_{k=1}^{l} u_k h_k(x) \quad \text{za sve } x\in C .$$

<u>Dokaz.</u> Neka je S simpleks najveće dimenzije sadržan u C sa vrhovima $x_0,x_1,\ldots,x_m$. Prema korolaru 6.10. važi

$$\sum_{k=1}^{\infty} (h_k(x_0),h_k(x_1),\ldots,h_k(x_m)) = \sum_{k=1}^{l} u_k(h_k(x_0),h_k(x_1),\ldots,h_k(x_m))$$

za neke nenegativne brojeve $u_1,u_2,\ldots,u_l$, $l\leq m+1$.

Odavde sledi da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k(x) = \sum_{k=1}^{l} u_k h_k(x)$$

najpre za $x\in\{x_0,x_1,\ldots,x_m\}$ a potom za $x\in S$ i konačno za $x\in C$ (kao u dokazu leme 6.5.).

Izvedene leme omogućuju nam da dokažemo glavni rezultat o odnosu prebrojivog duala (D_∞) i standardnog duala (D) za izvestan konveksan semiinfinitan program (P). Ponovimo da je prebrojivi dual (D_∞) definisan sa

$$(D_\infty) \qquad v(D_\infty) = \sup_{\lambda\in\Lambda_\infty} \inf_{x\in C} L_\infty(x,\lambda)$$

gde je Λ_∞ skup svih preslikavanja iz T u $[0,\infty)$ koja imaju najviše prebrojiv nosač supp λ i za koje je red

$$\sum_{t \in T} \lambda(t) g_t(x)$$

apsolutno konvergentan na C. (Izabrali smo apsolutnu konvergenciju da suma reda ne bi zavisila od redosleda sabiraka, jer ni problem (P) ne zavisi od redosleda ograničenja g_t). Pri tom je L_∞ prebrojiva Lagrange-ova funkcija definisana na $C \times \Lambda_\infty$ sa

$$L_\infty(x, \lambda) = f(x) + \sum_{t \in T} \lambda(t) g_t(x)$$

Dopustive tačke duala (D_∞) su one funkcije $\lambda \in \Lambda_\infty$ za koje je

$$\inf_{x \in C} L_\infty(x, \lambda)$$

konačan.

<u>Teorema 6.12.</u> Uvek važi $v(D_\infty) = v(D)$! Šta više, (D_∞) ima optimalno rešenje ako i samo ako (D) ima optimalno rešenje.

<u>Dokaz.</u> Ako (D_∞) nema dopustivih tačaka ne može ih imati ni (D). Pretpostavimo stoga da (D_∞) ima dopustivih tačaka. Dokažimo da za svaku dopustivu tačku $\lambda \in \Lambda_\infty$ duala (D_∞) postoji dopustiva tačka $u \in \Lambda$ duala (D) takva da je

$$\inf_{x \in C} L_\infty(x, \lambda) \le \inf_{x \in C} L(x, u) \qquad (9)$$

Neka je $\operatorname{supp} \lambda = \{ t_1, t_2, \dots \}$. Kombinujući korolar 6.8. i lemu 6.11. zaključujemo da postoje:

(i) afine minorante $h_k(x)$ za $g_{t_k}(x)$, $k=1,2,\dots$ (na C)

(ii) celi brojevi $0 = n_0 < n_1 < n_2 \; \dots$;

(iii) nenegativni brojevi u_k, $k=1,2,\dots,s$

takvi da je

$$\begin{aligned} \inf_{\lambda \in \Lambda_\infty} L_\infty(x, \lambda) &= \inf_{x \in C} \Big(f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(t_k) g_{t_k}(x) \Big) \\ &\le \inf_{x \in C} \Big(f(x) + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=n_l+1}^{n_{l+1}} \lambda(t_m) h_m(x) \Big) \\ &\le \inf \Big(f(x) + \sum^{s} u_k h_k(x) \Big) \end{aligned}$$

Stavljajući

$$u(t) = \begin{cases} u_k, & t=t_k, k=1,2,\dots,s \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

dobijamo relaciju (9) a iz nje neposredno sledi

$$\inf_{x \in C} L_{\infty}(x,\lambda) \leq v(D) \quad \text{za } \lambda \in \Lambda_{\infty}$$

Otuda je $\quad v(D_{\infty}) \leq v(D) \quad .$

Kako je obrnuta nejednakost takodje tačna, vredi

$$v(D_{\infty}) = v(D) \ .$$

Šta više, ako je λ optimalno rešenje za (D_{∞}), odgovarajuće $u \in \Lambda$ za koje važi (9) je optimalno rešenje za (D), jer važi

$$v(D_{\infty}) \leq \inf_{x \in C} L(x,u) \leq v(D)$$

Takodje, odmah je vidljivo da je svako optimalno rešenje za (D) optimalno i za (D_{∞}). Time je dokaz završen.

Na kraju ove glave vratimo se na postavljeno pitanje odnosa raznih duala konveksnog semiinfinitnog programa (P). Razmotrimo, najpre, jedan generalni način formiranja duala pomoću teorije mere.

Neka je indeksni skup T metrički prostor i $\mathcal{B}$ pripadna Borelova σ-algebra, t.j. najmanja familija podskupova od T koja je zatvorena u odnosu na komplementiranje i prebrojivo mnogo operacija uniranja i koja sadrži sve otvorene podskupove od T. Pod <u>merom</u> na Borelovom prostoru $(T,\mathcal{B})$ podrazumevaćemo funkcije $\mu : \mathcal{B} \to [0,\infty]$ sa svojstvima: (i) $\mu(\emptyset) = 0$; (ii) za svaki niz $A_1, A_2, \dots$ medjusobno disjunktnih elemenata iz $\mathcal{B}$ vredi

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \ .$$

Mera μ na $(T,\mathcal{B})$ je <u>regularna</u> akko za svako $B \in \mathcal{B}$ vredi

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subset B, K \text{ kompakt}\} = \inf\{\mu(U) : B \subset U, U \text{ otvoren}\}$$

Označimo sa $\mathcal{M}$ skup svih mera μ na $(T,\mathcal{B})$ za koje su funkcije $t \mapsto g_t(x)$, $x \in C$ μ-merljive i postoje integrali

$$\int_T g_t(x)d\mu(t) \in R \quad , \; x \in C .$$

Definišimo Lagrangeovu funkciju $L: C\times\mathcal{M} \to R$ sa

$$L(x,\mu) = f(x) + \int_T g_t(x)d\mu(t)$$

Odgovarajući dualni problem problema (P) se definiše sa

$$\begin{array}{ll} & (\sup) \; \inf_{x \in C} L(x,\mu) \\ \text{p.o.} & \mu \in \mathcal{M} \end{array} \qquad (D(\mathcal{M}))$$

Standardni(prebrojivi)dual se dobija odavde ako se skup $\mathcal{M}$ smanji na skup Λ (Λ_∞) mera sa konačnim(prebrojivim) nosačem (jer se tada integrali svode na konačne sume odnosno red). Zbog toga vredi

$$v(D(\mathcal{M})) \geqslant v(D_\infty) = v(D) .$$

Postavlja se pitanje može li ovde ponekad važiti stroga nejednakost ili su sva tri duala uvek ekvivalentna?

Razmotrimo slučaj konveksnog semiinfinitnog programa (P) sa linearnim ograničenjima

$$g_t(x) = \langle a_t, x \rangle - b_t \quad , \; t \in T$$

pretpostavljajući da su funkcije $t \mapsto a_t$, $t \mapsto b_t$ neprekidne na T . Ako dualne promenjive ograničimo na skup regularnih mera $\mathcal{M}_r$ na $(T, \mathcal{B})$ dobijamo dual $(D(\mathcal{M}_r))$. Tada važi

<u>Teorema 6.13.</u> $v(D(\mathcal{M}_r)) = v(D)$.

Dokaz ove teoreme bazira na sledećem uopštenju rezultata Rogosinskog [92] :

<u>Lema 6.14.</u> Neka je $f=(f_1,\dots,f_n)$ neprekidno preslikavanje iz T u R^n i μ regularna mera na $(T,\mathcal{B})$ takva da postoji

$$\int_T f(t)d\mu(t) = \left(\int_T f_1(t)d\mu(t) \; ,\dots, \int_T f_n(t)d\mu(t) \right) \in R^n$$

Tada postoje prirodan broj k, $k \leq n$,tačke $t_1, \dots, t_k$ iz T i nenegativni brojevi $p_1, \dots, p_k$ takvi da je

$$\int_T f(t)d\mu(t) = p_1 f(t_1) + \dots + p_k f(t_k) \; .$$

Dokaz: Ako je $\operatorname{supp}\mu = \emptyset$, onda je za svaki kompakt $K \subset T$, $\mu(K) = 0$, te je $\mu(T) = \sup\{\mu(K) : K \subset T \text{ ,K kompakt}\} = 0$. Stoga je $\int_T f(t)d\mu(t) = 0$ pa $k=1$, $p_1 = 0$, $t_1 \in T$ dokazuje tvrdjenje.

Neka je $\operatorname{supp}\mu \neq \emptyset$. Lako se vidi da je $\operatorname{supp}\mu$ zatvoren skup. Ponavljajući rezonovanje iz leme 6.9 ,može se pokazati da je $\mu(\operatorname{supp}\mu)^c = 0$. Dokažimo da je

$$a := \int_T f(t)d\mu(t) \in \operatorname{ri} \operatorname{cone} f(T \cap \operatorname{supp}\mu) \qquad (10)$$

Ako to ne bi bilo tačno,mogla bi se tačka $a \in R^n$ sopstveno odvojiti od konveksnog konusa generisanog skupom $f(T \cap \operatorname{supp}\mu)$ tj. postojalo bi $c \in R^n \setminus \{0\}$ tako da je

$$\langle c,a\rangle \leq \langle c,y\rangle \quad \text{za svako } y \in \operatorname{cone} f(\operatorname{supp}\mu) \qquad (11)$$

pri čemu postoji bar jedno $y_o \in \operatorname{cone} f(\operatorname{supp}\mu)$ tako da je

$$\langle c,a\rangle < \langle c,y_o\rangle \qquad (12)$$

Stavljajući u (11), najpre $y=0$ a potom $y = p\, f(t)$ za proizvoljne $p>0$ i $t \in \operatorname{supp}\mu$, dobili bi da važi

$$\langle c,a\rangle \leq 0 \leq \langle c,f(t)\rangle \qquad \text{za sve } t \in \operatorname{supp}\mu \qquad (13)$$

Pokažimo da postoji bar jedno $t_o \in \operatorname{supp}\mu$ tako da je

$$0 < \langle c,f(t_o)\rangle \qquad (14)$$

U suprotnom,vredelo bi

$$\langle c,a\rangle = \int_T \langle c,f(t)\rangle d\mu(t) = \int_T 0 \, d\mu(t) = 0$$

a takodje i

$$\langle c,y_o\rangle = 0$$

što protivureči relaciji (12) .

Zbog neprekidnosti funkcije f iz (14) sledi egzistencija okoline U tačke t_o za koju je

$$\langle c,f(t)\rangle \geq 1/2 \langle c,f(t_o)\rangle > 0 \quad , \ t\in U$$

No, tada je

$$\begin{aligned} 0 &\geq \langle c,a\rangle = \int_T \langle c,f(t)\rangle \, d\mu(t) \\ &= \int_{\mathrm{supp}\,\mu} + \int_{(\mathrm{supp}\,\mu)^c} \\ &= \int_{\mathrm{supp}\mu\cap U} + \int_{\mathrm{supp}\mu \cap U^c} \\ &\geq \int_{\mathrm{supp}\mu\cap U} \\ &\geq 1/2 \langle c,f(t_o)\rangle \cdot (\mathrm{supp}\mu \cap U) \\ &= 1/2 \langle c,f(t_o)\rangle \mu(U) \\ &> 0 \end{aligned}$$

kontradikcija ! Time je relacija (10) dokazana. Ostatak dokaza ide kao u lemi 6.9.

<u>Dokaz teoreme 6.13.</u> Dovoljno je dokazati da za svako $x\in C$ i svako $\mu\in\mathcal{M}_r$ postoji $\lambda\in\Lambda$ tako da je $L(x,\mu) = L(x,\lambda)$. Primenjujući lemu 6.14 , nalazimo da je

$$\int_T \binom{a_t}{b_t} d\mu(t) = p_1\binom{a_{t_1}}{b_{t_1}} + \dots + p_{n+1}\binom{a_{t_{n+1}}}{b_{t_{n+1}}}$$

za neke nenegativne $p_1,\dots,p_{n+1}$. Neka je $\lambda\colon T \to [0,\infty)$ definisano sa

$$\lambda(t) = \begin{cases} p_i \ , & \text{za } t=t_i, \ i= 1,\dots,n+1 \\ 0 \ , & \text{inače} \end{cases}$$

Tada je

$$\begin{aligned} L(x,\mu) &= f(x) + \int_T (\langle a_t,x\rangle - b_t)\, d\mu(t) \\ &= f(x) + \langle \int_T a_t \, d\mu(t), \ x\rangle - \int_T b_t \, d\mu(t) \\ &= L(x,\lambda) \ . \end{aligned}$$

7. STABILNOST U SEMIINFINITNOM PROGRAMIRANJU

U ovom odeljku razmatramo problem parametarskog semiinfinitnog programiranja

$$\begin{aligned} &(\inf)\ f(x,\beta) \\ \text{p.o.}\quad &g_t(x,\beta) \leq 0,\ t \in T \end{aligned} \qquad (P,\beta)$$

sa pretpostavkama:

(1) vektor nepoznatih x pripada E^n ;

(2) parametar β pripada izvesnom metričkom prostoru M;

(3) indeksni skup T je kompaktan topološki prostor;

(4) funkcija $(x,\beta) \mapsto f(x,\beta)$ je neprekidna na $E^n \times M$;

(5) funkcija $(x,\beta,t) \mapsto g_t(x,\beta)$ je neprekidna na $E^n \times M \times T$.

Za svako fiksirano $\beta \in M$, (P,β) je očito problem semiinfinitnog programiranja. Označimo sa:

$x(\beta)$ dopustivo rešenje

$X(\beta)$ skup svih dopustivih rešenja

$\hat{f}(\beta)$ optimalnu vrednost

$\hat{x}(\beta)$ optimalno rešenje

$\hat{X}(\beta)$ skup svih optimalnih rešenja

ovog problema. Osnovni problem parametarskog programiranja je ispitivanje funkcija

$$\beta \mapsto \hat{X}(\beta)\ ,\ \beta \mapsto \hat{x}(\beta)\ ,\ \beta \mapsto \hat{f}(\beta)\quad .$$

Ono obuhvata

(i) utvrdjivanje domena ovih funkcija tj. najvećeg skupa parametara za koje odgovarajuća slika postoji (nije prazan skup);

(ii) utvrdjivanje strukture (geometrijsko-topoloških svojstava) domena ovih funkcija ili njihovih restrikcija;

(iii) utvrdjivanje neprekidnosti (poluneprekidnosti, diferencijabilnosti i dr.) ovih funkcija ili njihovih restrikcija;

(iv) efektivno izračunavanje ovih funcija (ako je moguće)

i razna druga pitanja .

Na razmatranje problema parametarske optimizacije navode mnogi problemi iz prakse.Tako npr. nije redak slučaj da pojedini podaci u matematičkom modelu kojim se opisuje neka pojava variraju sa vremenom,koje je u ovim slučajevima prirodni parametar .Tako npr. u ekonomskim problemima cene,troškovi,potrebe, itd. variraju sa vremenom pa se prirodno nameće pitanje kada i kako menjati neki proces proizvodnje da se ostvari maksimalna dobit.

Generalno posmatrano,sa svakim problemom matematičkog programiranja,kao matematičkim modelom za neku drugu pojavu-proces,prirodno se pojavljuje problem parametarske optimizacije, u kojem su parametri sami podaci polaznog problema,koji su obično samo aproksimacija realnih(tačnih) podataka.Pitanje osetljivosti modela (problema) na polazne podatke je od izuzetnog značaja (često puta i važnije od rešavanja samog problema).

I razna teorijska pitanja vode ka problemu parametarskog programiranja.Tako npr. poznata je veza teorije dualnosti i perturbacija "desnih strana" konveksnih(linearnih) problema. (vidi [7] ,[34]). Spomenimo da se problem višekriterijalne optimizacije može svesti na parametarsko programiranje ([68]). Razne druge primene parametarskog programiranja mogu se takodje naći u [68].

Problem parametarskog programiranja (P,β) bi se mogao smatrati potpuno rešenim ako bi se funkcije $\beta \mapsto \hat{f}(\beta)$ i $\beta \mapsto \hat{X}(\beta)$ mogle konstruktivno odrediti. To je moguće samo u specijalnim slučajevima npr. u linearnom programiranju sa realnim parametrom od koga funkcija cilja (i/ili desne strane ograničenja)linearno zavise ([81]). Ukoliko se parametar pojavljuje i u "matrici tehnoloških koeficijenata" , problem parametarskog programiranja je znatno teži pa, i pored velikog broja radova, pravih "konstruktivnih" rezultata je malo (uporedi [28],[37],[110],[19], [6]).

Od mnogobrojnih pitanja parametarske optimizacije u daljem ćemo se baviti samo pitanjem stabilnosti problema (P,β) u smislu Eremin-Astafiev-a [37]. Pokazaćemo da se njihov konstruktivan rezultat iz [37] može proširiti na semiinfinitan kvazikonveksan program sa parametrom.

<u>Definicija 7.1.</u> Problem (P,β) je stabilan u tački $\beta_o \in M$ ako postoji okolina $N(\beta_o)$ tačke β_o takva da:

(i) za sve $\beta \in N(\beta_o)$ skup $\hat{X}(\beta)$ nije prazan;

(ii) za svaki niz tačaka $(\beta_n), \beta_n \in N(\beta_o)$ koji teži β_o, niz proizvoljno izabranih optimalnih rešenja $(\hat{x}(\beta_n))$ je ograničen i ima tačke nagomilavanja u skupu $\hat{X}(\beta_o)$.

S obzirom da se kod drugih autora ([19],[6]) stabilnost opisuje pomoću poluneprekidnosti odozgo(odozdo) preslikavanja $\beta \mapsto \hat{X}(\beta)$ u tački β_o, pokažimo najpre u kakvom je odnosu stabilnost programa (P,β) u tački β_o sa poluneprekidnošću odozgo (po Berge-u) preslikavanja $\beta \mapsto \hat{X}(\beta)$ u β_o.

<u>Definicija 7.2.</u> Preslikavanje $\beta \mapsto F(\beta)$ iz metričkog pros-

tora M u partitivni skup skupa E^n je poluneprekidno odozgo u $\beta_o \in M$ (po Berge-u) ako i samo ako, za svaki otvoren skup G koji sadrži $F(\beta_o)$ postoji okolina $N(\beta_o)$ tačke β_o takva da za sve $\beta \in N(\beta_o)$ vredi $F(\beta) \subset G$.

Teorema 7.3. Ako je problem (P,β) stabilan u $\beta_o \in M$, onda je funkcija $\beta \mapsto \hat{X}(\beta)$ poluneprekidna odozgo u β_o.

Dokaz. Ako tvrdjenje ne važi, postoji otvoren skup G koji sadrži $\hat{X}(\beta_o)$, niz tačaka (β_n) koji teži β_o i niz odgovarajućih optimalnih rešenja $(\hat{x}(\beta_n))$ koji pripada zatvorenom skupu $R^n \setminus G$. Stoga su i tačke nagomilavanja poslednjeg niza u $R^n \setminus G$, te ne mogu biti u $\hat{X}(\beta_o)$. Ovo je u kontradikciji sa pretpostavkom o stabilnosti programa (P,β) u β_o.

Da obratno tvrdjenje ne mora da važi pokazuje

Primer 7.4. Neka je (P,β) :

$$(\inf)\ f(x,\beta)\ ,\ x \in R^n$$

gde je

$$f(x,\beta)=\begin{cases} \beta x\ , & x \leq 0 \\ 0\ , & x \geq 0 \end{cases} \qquad \beta \in R$$

Ovde je

$$\hat{X}(\beta)=\begin{cases} [0,\infty) & \text{ako } \beta < 0 \\ (-\infty,\infty) & \text{ako } \beta = 0 \\ \emptyset & \text{ako } \beta > 0 \end{cases}$$

te je funkcija $\beta \mapsto \hat{X}(\beta)$ poluneprekidna odozgo u svakoj tački $\beta_o < 0$, ali (P,β) nije stabilno u β_o, jer, za proizvoljan niz (β_n) koji teži β_o, možemo izabrati neograničeni niz $\hat{x}(\beta_n) = n$.

Teorema 7.5. Ako je skup $\hat{X}(\beta_o)$ ograničen, skupovi $\hat{X}(\beta)$ neprazni za sve β iz neke okoline tačke β_o i ako je funkcija $\beta \mapsto \hat{X}(\beta)$ poluneprekidna odozgo u tački β_o, onda je (P,β) stabilno u β_o.

Dokaz. Neka $\beta_n \to \beta_o$ i neka je $(\hat{x}(\beta_n))$ niz proizvoljno izabranih optimalnih rešenja. Dokažimo da on ima bar jednu tačku nagomilavanja. U suprotnom, počevši od dovoljno velikog indeksa n, svi članovi ovog niza su van kompaktnog skupa $\hat{X}(\beta_0)$. Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da su svi članovi niza $(\hat{x}(\beta_n))$ van $\hat{X}(\beta_0)$. Kako $(\hat{x}(\beta_n))$ nema tačku nagomilavanja, njegov trag $F=\{\hat{x}(\beta_n) : n\in N\}$ je zatvoren skup. Skup $G=R^n\setminus F$ je otvoren i sadrži $\hat{X}(\beta_0)$. Zbog polunepreki dnosti odozgo u β_0 treba da važi $\hat{X}(\beta_n)\subset G$ za sve dovoljno velike n, što je nemoguće! Dakle, niz $(\hat{x}(\beta_n))$ ima bar jednu tačku nagomilavanja. Kako isti zaključak vredi i za svaki podniz ovog niza, ceo niz je ograničen. Dokažimo da su mu tačke nagomilavanja u $\hat{X}(\beta_0)$. Neka je x_0 proizvoljna tačka nagomilavanja ovog niza. Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da $\hat{x}(\beta_n)\to x_0$. Sa pretpostavkama iz uvoda, lako je dokazati da je $\hat{X}(\beta_0)$ zatvoren skup. Ako x_0 ne pripada $\hat{X}(\beta_0)$, postojali bi otvoreni disjunktni skupovi G_1 i G_2, $G_1\supset\{x_0\}$, $G_2\supset\hat{X}(\beta_0)$, te bi za dovoljno veliko n bilo $\hat{X}(\beta_n)\subset G_2$ i $\hat{x}(\beta_n)\in G_1$, što je kontradiktorno. Otuda $x_0\in\hat{X}(\beta_0)$, čime je dokaz završen.

Za dalje izlaganje nužna je sledeća

Definicija 7.6. Neka je (S_n) niz podskupova od R^m. Tada:

(i) $\overline{\lim}\, S_n=\{x\in R^m$: x je tačka nagomilavanja nekog niza (x_n), $x_n\in S_n, n=1,2,\dots\}$

(ii) $\underline{\lim}\, S_n=\{x\in R^m$: $x=\lim x_n$ za neki niz $(x_n), x_n\in S_n, n=1,2,\dots\}$

(iii) Ako je $\underline{\lim}\, S_n=\overline{\lim}\, S_n=S$ kažemo da S_n u smislu Kuratowskog konvergira ka S i pišemo $S_n\to S$.

(iv) Za zadano preslikavanje $\beta\mapsto S(\beta)$ iz metričkog prostora M u partitivni skup od R^m i zadani skup $S\subset R^m$ definišemo

$S(\beta) \to S$ kad $\beta \to \beta_o$ akko za svaki niz(β_n) koji teži β_o vredi $S(\beta_n) \to S$.

Takodje je neophodna

Definicija 7.7. Funkcija $f: R^n \mapsto R$ je kvazikonveksna na R^n akko

$f(px+(1-p)y) \leq \max\{f(x),f(y)\}$ za sve $x,y \in R^n$ i $p \in (0,1)$

a striktno kvazikonveksna na R^n akko za sve x,y takve da je $f(x) < f(y)$ vredi $f(px+(1-p)y) < f(y)$ za sve $p \in (0,1)$.

Lako je videti da je svaka konveksna funkcija striktno kvazikonveksna, a striktno kvazikonveksna funkcija je kvazikonveksna.

Sledeća teorema daje dovoljne uslove za stabilnost kvazikonveksnog parametarskog semiinfinitnog programa u nekoj tački.

Teorema 7.8. Neka je (P,β) problem parametarskog semiinfinitnog programiranja iz uvoda kod koga su funkcija cilja f i funkcije ograničenja $g_t, t \in T$ kvazikonveksne po x za svako fiksirano β, i pri tom je $\hat{X}(\beta_o)$ neprazan kompakt. Ako $X(\beta) \to X(\beta_o)$ kad $\beta \to \beta_o$, onda je (P,β) stabilno u β_o.

Dokaz. Prema teoremi 7.5. ,dovoljno je dokazati:

(i) $\hat{X}(\beta) \neq \emptyset$ za sve β iz neke okoline tačke β_o;

(ii) preslikavanje $\beta \mapsto \hat{X}(\beta)$ je poluneprekidno odozgo u β_o.

Pretpostavimo da (i) ne važi. Tada postoji niz $(\beta_n), \beta_n \to \beta_o$ za koga je $\hat{X}(\beta_n) = \emptyset$. Neka je $x_o \in \hat{X}(\beta_o)$ i K_r kugla radijusa r sa centrom 0 i koja sadrži skup $\hat{X}(\beta_o)$. Kako $X(\beta_n) \to X(\beta_o)$, postoji niz (x_n), $x_n \in X(\beta_n)$ koji teži x_o.

Dokažimo da postoji pravac $d_n \neq 0$ takav da $x_n + p\, d_n \in X(\beta_n)$ za sve $p \geqslant 0$ i pri tom je

$$f(x_n + p\, d_n, \beta_n) \leq f(x_n, \beta_n)$$

Kako su skupovi $X(\beta_n)$ zatvoreni i $\hat{X}(\beta_n) = \emptyset$ mora $X(\beta_n)$ biti neograničen. Stoga postoji niz (y_m), $y_m \in X(\beta_n)$ takav da $\| y_m \| \to \infty$, $f(y_m, \beta_n) \to -\infty$ kad $m \to \infty$. Neka je d_n tačka nagomilavanja za $(y_m / \| y_m \|)$ .Ne umanjujući opštost, pretpostavimo da je $d_n = \lim_{m \to \infty} (y_m / \| y_m \|)$. Iz konveksnosti skupa $X(\beta_n)$ sledi

$$(1 - \frac{p}{\| y_m \|}) x_n + \frac{p}{\| y_m \|} y_m \in X(\beta_n) \quad \text{za } p \geqslant 0 \text{ i } m \text{ dovoljno veliko}$$

te, kad $m \to \infty$, sledi $x_n + p\, d_n \in X(\beta_n)$. Zbog kvazikonveksnosti je

$$f((1 - \frac{p}{\| y_m \|}) x_n + \frac{p}{\| y_m \|} y_m, \beta_n) \leqslant \max \left\{ f(x_n, \beta_n), f(y_m, \beta_n) \right\} = f(x_n, \beta_n)$$

te kad $m \to \infty$ dobijamo

$$f(x_n + p d_n, \beta_n) \leqslant f(x_n, \beta_n) \tag{1}$$

Birajući p_n tako da $y_n = x_n + p_n d_n \in K_{2r} \setminus K_r$ dobiće se ograničen niz koji ima tačku nagomilavanja y_o u $X(\beta_o) \setminus \hat{X}(\beta_o)$. Ne umanjujući opštost, pretpostavimo da $y_m \to y_o$ kad $m \to \infty$. Iz (1) onda sledi

$$f(y_o, \beta_o) \leqslant f(x_o, \beta_o)$$

što se protivi sa $y_o \notin \tilde{X}(\beta_o)$. Dobijena kontradikcija pokazuje da (i) važi.

Tvrdjenje (ii) je upravo dokazano u teoremi I.3.3. u [28] . S obzirom da je uslov $X(\beta) \to X(\beta_o)$ kad $\beta \to \beta_o$ obično teško proverljiv, korisno je ukazati na neke dovoljne uslove koji ovo garantuju.

<u>Teorema 7.9.</u> Ako je za problem (P, β) parametarskog semiinfinitnog programiranja iz uvoda ispunjeno:

(ii) funkcije $g_t(x,\beta_o)$ su striktno kvazikonveksne po x za svako fiksirano $t \in T$;

(iii) važi Slater-ov uslov za (P,β_o) tj. postoji $x_o \in R^n$ tako da je

$$g_t(x_o,\beta_o) < 0 \quad \text{za sve } t \in T ,$$

onda $X(\beta) \to X(\beta_o)$ kad $\beta \to \beta_o$.

Za dokaz ove teoreme potrebna je

<u>Lema 7.10.</u> Neka je T kompaktan skup, funkcija $(x,t) \to g_t(x)$ neprekidna na $R^n \times T$, striktno kvazikonveksna po x za svako fiksirano t i neka postoji $x_o \in R^n$ takav da je $g_t(x_o) < 0$ za sve $t \in T$. Tada je

$$\text{int}\left\{x:\ g_t(x) \leq 0, t \in T\right\} = \left\{x:\ g_t(x) < 0, t \in T\right\}$$

<u>Dokaz.</u> Neka $\hat{x} \in R^n$ zadovoljava $g_t(\hat{x}) < 0$ za sve $t \in T$. Ako ne postoji okolina $K(\hat{x},r)$ takva da za svako x iz te okoline vredi $g_t(x) < 0$ za sve $t \in T$, onda postoji niz (x_n) i niz (t_n) takvi da je $g_{t_n}(x_n) \geq 0$, $n=1,2,\ldots$ i $x_n \to \hat{x}$. Zbog kompaktnosti skupa T, postoji podniz (t_{n_k}), $t_{n_k} \to t_o \in T$. Tada bi iz

$$g_{t_{n_k}}(x_{n_k}) \geq 0 \ , \ k=1,2,\ldots$$

zbog neprekidnosti funkcije $g_t(x)$, sledilo $g_{t_o}(\hat{x}) \geq 0$, suprotno pretpostavci od koje smo pošli. Otuda

$$\hat{x} \in \text{int}\left\{x:\ g_t(x) \leq 0 \ , t \in T\right\} .$$

Obrnuto, ako $\hat{x}$ zadovoljava poslednju relaciju, postoji okolina $K(\hat{x},r)$ takva da za svako $x \in K(\hat{x},r)$ vredi $g_t(x) < 0$ za sve $t \in T$. Pretpostavimo da postoji $t \in T$ takvo da je $g_t(\hat{x}) = 0$. Neka je x_1 tačka iz $K(\hat{x},r)$ takva da je $\hat{x}$ izmedju x_o (Slater-ove tačke) i x_1. Kako je

$$0 = g_t(\hat{x}) \leq \max\left\{g_t(x_o), g_t(x_1)\right\} \leq 0$$

moralo bi biti $g_t(x_1) = 0$.No,tada bi zbog striktne kvazi-konveksnosti funkcije $g_t(x)$ važilo

$$g_t(\hat{x}) < g_t(x_1)=0$$

što je kontradiktorno pretpostavljenom.Stoga,za sve $t \in T$ vredi $g_t(\hat{x})< 0$,što je i trebalo dokazati.

<u>Dokaz teoreme 7.9.</u> Neka $\beta_n \to \beta_o$. Dokažimo,najpre,da je

$$X(\beta_n)\neq \emptyset \text{ za sve dovoljno velike } n \qquad (2)$$

dokazujući da je x_o Slaterova tačka svih tih skupova,počevši od dovoljno velikog n .U suprotnom,postojao bi podniz (t_{n_k}), $t_{n_k} \in T$ takav da je

$$g_{t_{n_k}}(x_o,\beta_{n_k}) \geqslant 0 \qquad (3)$$

Kako je T kompakt,postoji tačka nagomilavanja t_o niza (t_{n_k}) u T kao i podniz (t_{m_k}) koji joj konvergira.Zbog (3) i zbog neprekidnosti biće

$$g_{t_o}(x_o,\beta_o)\geqslant 0$$

što je suprotno pretpostavci (ii). Time je (2) dokazano.

Dokažimo da je

$$\overline{\lim}\, X(\beta_n) \subset X(\beta_o) \qquad (4)$$

Neka $x\in \overline{\lim}\, X(\beta_n)$ .Tada postoji niz (x_n), $x_n\in X(\beta_n)$,$n=1,2,\ldots$ takav da neki njegov podniz (x_{n_k}) konvergira ka x. Pri tom važi

$$g_t(x_{n_k},\beta_{n_k})\leq 0 \ ,t\in T$$

odakle kad $k \to \infty$ sledi

$$g_t(x,\beta_o)\leq 0 \ ,t\in T$$

čime je (4) dokazano.

Dokažimo sada da je

$$X(\beta_o) \subset \underline{\lim}\, X(\beta_n) \qquad (5)$$

Dovoljno je dokazati

$$\emptyset \neq \text{int } X(\beta_o) \subset \underline{\lim} \, X(\beta_n) \qquad (6)$$

jer je

$$X(\beta_o) = \text{cl int } X(\beta_o) \; .$$

Prema lemi 7.10. ,

$$\text{int } X(\beta_o) = \{x : g_t(x,\beta_o) < 0 \; , t \in T\} \neq \emptyset$$

Neka $\hat{x} \in \text{int } X(\beta_o)$. Tada je $\hat{x}$ Slaterova tačka za problem (P,β_o). Ponavljajući rezonovanje pri dokazu relacije (2) u lemi 7.10. dokazali bi da je $\hat{x}$ Slaterova tačka i za (P,β_n), počevši od dovoljno velikog n. Tada bi konstantan niz (x_n), $x_n = \hat{x}$ počevši od dovoljno velikog n, zadovoljavao $x_n \in X(\beta_n)$ i $x_n \to \hat{x}$, čime bi relacija (6) bila dokazana (prvih konačno mnogo članova ne utiče na konvergenciju).

Iz (4) i (5) sledi $X(\beta_n) \to X(\beta_o)$, što je i trebalo dokazati.

Objedinjujući teoreme 7.8. i 7.10. dobijamo operativni rezultat za stabilnost kvazikonveksnog parametarskog semiinfinitnog programa (P,β):

<u>Teorema 7.11.</u> Problem (P,β) kvazikonveksnog parametarskog semiinfinitnog programiranja s pretpostavkama iz uvoda je stabilan u tački $\beta_o \in M$ ako dodatno vredi:

(i) $\hat{X}(\beta_o)$ je ograničen neprazan skup;

(ii) (P,β_o) zadovoljava Slater-ov uslov i ima funkcije ograničenja striktno kvazikonveksne po x .

Izvedeni rezultat predstavlja dalje uopštenje teoreme 11. iz [19] str. 213 , gde je za ciljnu funkciju pretpostavljena sublinearnost a za parametar β izabrani polazni podaci ograničenja .

Sledeći primeri pokazuju da je svaka od pretpostavki u teoremi 7.11. bitna .

<u>Primer 7.12.</u> Neka je $M= E^1$, $\beta_o= 0$ i

$$(P,\beta) \quad \begin{array}{l} (\inf) \ -\beta x+y \\ \text{p.o.} \ \ t\,\beta^2 x - y \leq 1 \ , t\in[0,1] \\ \qquad\qquad y \geq 0 \end{array}$$

Ovde je

$$\hat{X}(\beta)=\begin{cases} \{(1/\beta^2,0)\} & \text{ako } \beta\neq 0 \\ \{(x,0):\ x\in R\} & \text{ako } \beta=0 \end{cases} .$$

Problem je nestabilan u $\beta_o=0$ jer za $\beta_n=1/n$ niz $\hat{x}(\beta_n) = (n^2,0)$ nije ograničen. Primetimo da je Slater-ov uslov ispunjen npr.za $x_o=(0,1)$ ali da skup $\hat{X}(\beta_o)$ nije ograničen.

<u>Primer 7.13.</u> Neka je $M= C[0,1]\times C[0,1]$, $\beta=(a(t),b(t))\in M$ $\beta_o=(t,t)\in M$ i

$$(P,\beta) \quad \begin{array}{l} (\inf) \ -y \\ \text{p.o.} \ \ x+a(t)y \leq b(t) \ , t\in[0,1] \\ \qquad x+y \leq 2 \\ \qquad x\geq 0 \\ \qquad y\geq 0 \end{array}$$

Problem (P,β) je nestabilan u β_o jer za npr.izabrano $\beta_n=(a_n(t),b_n(t))$

$$a_n(t)=b_n(t)=\begin{cases} t & \text{ako } 1/n \leq t \leq 1 \\ 1/n & \text{ako } 0 \leq t\leq 1/n \end{cases}$$

vredi $\beta_n \to \beta_o$ (tj. $a_n(t) \rightrightarrows t$,$b_n(t)\rightrightarrows t$ na $[0,1]$), $\hat{x}(\beta_n)= (0,1)$,n=1,2,... a njegove tačke nagomilavanja nisu u $\hat{X}(\beta_o)= \{(0,2)\}$.

U ovom primeru nije zadovoljen Slater-ov uslov dok su ostali uslovi zadovoljeni.

<u>Primer 7.14.</u> Neka je $M= E^1$, $\beta_o= 0$ i

$$(P,\beta) \quad \begin{array}{l} (\inf) \ -x \\ \text{p.o.} \ \ g(x)+ \beta^2 \leq 0 \\ \qquad x > 0 \end{array}$$

gde je

$$g(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 1 \\ 0, & 1\le x\le 2 \\ x-2, & x\ge 2 \end{cases}$$

Problem (P,β) je nestabilan u $\beta_0=0$ jer kad $\beta \to \beta_0$, $\hat{x}(\beta) = 1-\beta^2 \to 1$ ali $\hat{X}(\beta_0) = \{2\}$. U ovom primeru je dopustivi skup ograničen, važi Slater-ov uslov (npr. $x_0 = 1/2$) ali ograničenje $g(x)$ nije striktno kvazikonveksno (nego samo kvazikonveksno).

Izvedena teorija obuhvata za primene važan slučaj linearnog parametarskog semiinfinitnog programiranja:

Primer 7.15. Neka je T kompaktan metrički prostor, $M= C(T,R^n)\times C(T)\times E^n$, $\beta=(a(t),b(t),c)\in M$ i

$$(P,\beta)\quad \begin{array}{l} (\inf) \langle c,x\rangle \\ \text{p.o. } \langle a(t),x\rangle \ge b(t),\ t \quad T \\ x\in R^n \end{array}$$

U ovom primeru parametar β čine ulazni podaci standardnog linearnog semiinfinitnog problema. Moguće je razumljivo kao parametar posmatrati samo neke od ulaznih podataka, npr. vektor c ili "desne strane ograničenja" tj. funkciju $b(t)$. Prvi slučaj odgovara izboru $\beta= c\in M=E^n$ a drugi izboru $\beta= b(t)\in M=C(T)$. Iskaz teoreme 7.11. u ovim slučajevima daje rezultate Colgen-a i Schnatz-a (vidi [19] str. 113-116, i 216-218) i Colgena [24].

Sledeći primer ilustruje primenu teoreme 7.11.

Primer 7.16. Neka je $T = [0,1]$, $M= C[0,1]\times E^1$, $\beta=(a(t),b)\in M$ $\beta_0=(t,2)$ i

$$(P,\beta)\quad \begin{array}{l} (\inf)\ x^2+by \\ \text{p.o. } x^2+y^2+a(t)x+2y \le t^2,\ t\in[0,1] \end{array}$$

Tada je (P,β) konveksan program stabilan u β_o jer je dopustivi skup $X(\beta_o)$ neprazan i ograničen (pa je takav i $\hat{X}(\beta_o)$). Osim toga tačka $(0,-1)$ je Slaterova za (P,β_o).

U kontraprimerima 7.12-14. funkcija optimalne vrednosti

$$\beta \mapsto \hat{f}(\beta)$$

imala je prekid u tački β_o. Lako je videti da važi

Teorema 7.17. Stabilnost programa (P,β) u tački β_o povlači neprekidnost optimalne vrednosti programa u istoj tački.

Definicija 7.18. Problem (P,β) parametarskog semiinfinitnog programiranja je stabilan po vrednosti u tački $\beta_o \in M$ ako je funkcija $\beta \mapsto \hat{f}(\beta)$ definisana u nekoj okolini tačke β_o i neprekidna u toj tački.

Sledeći primer pokazuje da je uvedeni pojam slabiji od pojma stabilnosti.

Primer 7.19. Neka je $M=E^1$ i

$$(P,\beta)\qquad \begin{array}{ll} (\inf) & e^x \\ \text{p.o.} & x \le \beta \end{array}$$

Problem (P,β) stabilan je po vrednosti u svakoj tački $\beta_o \in R$ a nije nigde stabilan.

Sledeća teorema ipak pokazuje da su uvedeni pojmovi u nekim slučajevima ekvivalentni.

Teorema 7.20. U slučaju kvazikonveksnog programa (P,β) kod koga je $\hat{X}(\beta)$ neprazno za sve β iz neke okoline tačke β_o iz M i pri tom je $\hat{X}(\beta_o)$ ograničen skup, stabilnost po vrednosti u tački β_o povlači stabilnost programa (P,β) u istoj tački.

Dokaz. Neka $\beta_n \to \beta_o$ i $x_n \in \hat{X}(\beta_n)$, $n=1,2,\dots$. Dokažimo da je niz (x_n) ograničen. U suprotnom, postojao bi podniz tog niza čije norme teže $+\infty$. Ne umanjujući opštost pretpostavimo da $\|x_n\| \to \infty$. Neka je $\hat{x} \in \hat{X}(\beta_o)$ proizvoljna tačka i d_o tačka nagomilavanja niza (d_n), $d_n \doteq (x_n-\hat{x})(\|x_n-\hat{x}\|)^{-1}$. Ne umanjujući opštost možemo pretpostaviti da $d_n \to d_o$. Pokažimo da je

$$\hat{x}+pd_o \in \hat{X}(\beta_o) \text{ za svako } p>0 . \qquad (7)$$

Kako je

$$\hat{x}+pd_n = (1-p_n)\hat{x} + p_n x_n \quad , \quad p_n = p\,(\|x_n-\hat{x}\|)^{-1}$$

i za dovoljno velike n, $p_n \in (0,1)$, iz kvazikonveksnosti ograničenja sledi

$$\begin{aligned} g_t(\hat{x} + pd_n,\beta_n) &\leq \max\{\, g_t(\hat{x},\beta_n) \,,\, g_t(x_n,\beta_n)\} \\ &\leq \max\{\, g_t(\hat{x},\beta_n) \,,\, 0\} \quad (\text{jer } x_n \in X(\beta_n)) \end{aligned}$$

Prelaskom na limes kad $n \to \infty$, zbog neprekidnosti ograničenja i funkcije $(x,y) \mapsto \max\{x,y\}$, dobijamo

$$g_t(\hat{x}+pd_o,\beta_o) \leq \max\{g_t(\hat{x},\beta_o),\, 0\} = 0 \quad , t \in T$$

Time je dokazano da

$$\hat{x} + p\,d_o \in X(\beta_o) \quad \text{za svako } p>0 \qquad (8)$$

Po pretpostavci, za proizvoljno $\varepsilon > 0$ vredi

$$\hat{f}(\beta_n) < \hat{f}(\beta_o) + \varepsilon \quad \text{počevši od dovoljno velikog } n.$$

Stoga, za dovoljno velike n, vredi

$$\begin{aligned} f(\hat{x}+pd_n,\beta_n) &\leq \max\{f(\hat{x},\beta_n), f(x_n,\beta_n)\} \\ &= \max\{f(\hat{x},\beta_n), \hat{f}(\beta_n)\} \\ &\leq \max\{f(\hat{x},\beta_n), \hat{f}(\beta_o)+\varepsilon\} . \end{aligned}$$

Puštajući da $n \to \infty$ dobijamo odavde

$$f(\hat{x}+pd_o,\beta_o) \leq \max\{f(\hat{x},\beta_o), \hat{f}(\beta_o)+\varepsilon\} = \hat{f}(\beta_o) + \varepsilon$$

Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, vredi i

$$f(\hat{x}+pd_o,\beta_o) \leq \hat{f}(\beta_o)$$

što sa (8) daje (7). No, (7) je u kontradikciji sa pretpostavkom o ograničenosti skupa $\hat{X}(\beta_o)$. Dakle, niz (x_n) je ograničen. Neka je x bilo kaja tačka nagomilavanja tog niza i (x_{n_k}) podniz koji joj konvergira. Tada

$$f(x_{n_k},\beta_{n_k})=\hat{f}(\beta_{n_k})\to\hat{f}(\beta_o)$$

a takodje

$$f(x_{n_k},\beta_{n_k})\to f(x,\beta_o)\ .$$

Otuda je

$$f(x,\beta_o)=\hat{f}(\beta_o)\ .$$

Iz $g_t(x_{n_k},\beta_{n_k})\leq 0$ sledi neposredno $g_t(x,\beta_o)\leq 0$ te je x i dopustiva tačka za (P,β_o). Dakle, $x\in\hat{X}(\beta_o)$ i (P,β) je stabilno u β_o.

Napomena. Prethodna teorema formulisana je u [110 ,T.1,str. 73] za slučaj običnog parametarskog nelinearnog programiranja sa konveksnom funkcijom cilja bez pretpostavke o konveksnosti (ili bar kvazikonveksnosti) ograničenja. Da to nije korektno pokazuje

Primer 7.21. Neka je $T=\{1\}$, $M=\{n^{-1}:n\in N\}\cup\{0\}\subset E^1$,

$$(P,\beta)\quad\begin{array}{l}(\min)\ f(x,\beta)\\ \text{p.o.}\ \ g_1(x,\beta)\leq 0\end{array}$$

pri čemu je $f(x,\beta)=0$ za sve $x\in R^n,\beta\in M$ i

$$g_1(x,\beta)=\begin{cases}|x| & \text{za}\ \ \beta=0\\ \big||x-\beta^{-1}|-\beta^{-1}\big| & \text{za}\ \ \beta\in M\setminus\{0\}\end{cases}$$

Ovde je

$$X(\beta)=\hat{X}(\beta)=\begin{cases}\{0\}\ , & \beta=0\\ \{0,2\beta^{-1}\}, & \beta\neq 0\end{cases}$$

pa je problem (P,β) stabilan po vrednosti u $\beta_o=0$ ali ne može biti stabilan u β_o jer za $\beta_n=n^{-1}$, niz $(\hat{x}(\beta_n))=(2n)$ nije ograničen. Primetimo da funkcija g_1 nije kvazikonveksna po x .

8. VIŠEKRITERIJUMSKO PROGRAMIRANJE SA DELIMIČNIM UREDJENJEM KRITERIJUMA PO VAŽNOSTI

Mnogi praktični problemi imaju sledeći matematički oblik: iz na neki način zadanog nepraznog dopustivog skupa X izabrati element "najbolji" za zadanu familiju funkcija cilja $f_i : X \to R$, $i=1,2,\dots,p$ (kriterijuma) koje, pojedinačno gledano, treba što više umanjiti. Kako najčešće, ne postoji tačka u kojoj sve funkcije cilja jednovremeno dostižu minimum (idealni minimum), mora se posebno definisati šta se podrazumeva pod "najboljim" izborom odnosno rešenjem problema vektorske minimizacije

$$\begin{array}{ll} (\min) & f(x)=(f_1(x),\dots,f_p(x)) \\ \text{p.o.} & x \in X \end{array} \qquad \text{(VP)}$$

U slučaju da nikoja dva kriterijuma nisu uporediva po važnosti, prirodno je pod rešenjem problema (VP) podrazumevati skup Pareto rešenja tj. tačaka $\hat{x} \in X$ za koje sistem

$$f_i(x) \leq f_i(\hat{x}), i=1,\dots,p \quad \text{i bar jedna nejednakost je stroga}$$
$$x \in X$$

nema rešenja. (Pojam potiče od italijanskog ekonomiste Pareta). Drugim rečima, $\hat{x}$ je Pareto rešenje problema (VP), ako poboljšanje vrednosti jedne funkcije cilja uvek uzrokuje pogoršanje vrednosti neke druge funkcije cilja.

Drugi u literaturi obradjivan slučaj je, kada su svi kriterijumi poredjani po važnosti tj. postoji najvažniji kriterijum recimo f_{i_1}, zatim sledeći po važnosti f_{i_2}, itd. sve do f_{i_p}. Rešenje problema tzv. leksikografske minimizacije

$$(\text{lex-min})\ (f_{i_1}(x),\dots,f_{i_p}(x))$$
$$\text{p.o. } x\in X$$

dobija se po sledećoj proceduri: najpre se minimizira f_{i_1} na X i sa X_1 označi skup optimalnih rešenja; zatim se minimizira f_{i_2} na X_1 i sa X_2 označi skup dobijenih optimalnih rešenja ; postupak se produžava sve dok se na kraju ne minimizira f_{i_p} na prethodno odredjenom skupu optimalnih rešenja $X_{i_{p-1}}$. Optimalna rešenja dobijena u poslednjem koraku su leksikografski minimumi. Pitanjima leksikografske optimizacije posvećena je monografija [85] .

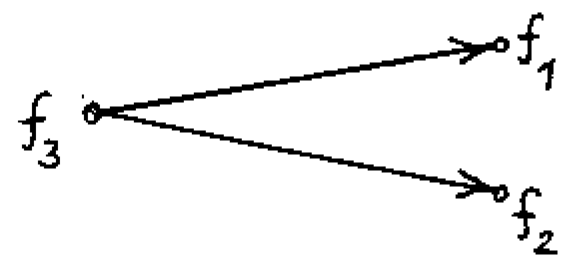
U realnim situacijama moguće je da su neki kriterijumi uporedivi po važnosti a drugi nisu! Na primer, ako X označava skup mogućih izbora načina proizvodnje, f_1 – opisuje kvalitet proizvoda, f_2 – cenu proizvoda , f_3 – zagadjenost okoline pri izabranom procesu proizvodnje, prirodno je pretpostaviti da je kriterijum f_3 važniji od oba kriterijuma f_1 i f_2 od kojih pak, ni jedan nije važniji od drugog .

U ovoj glavi razmotrićemo osnovne elemente teorije ovakvih problema vektorske minimizacije sa kriterijumima delimično uredjenim po važnosti.

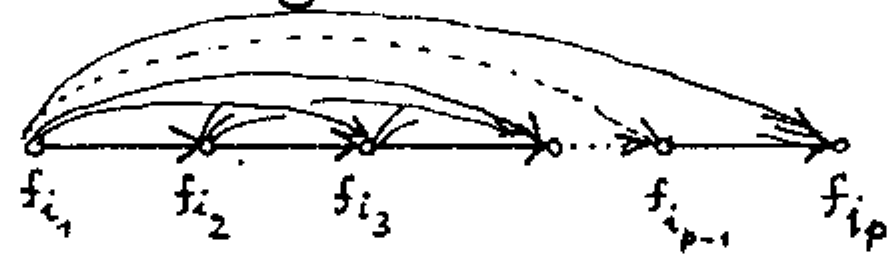
<u>Definicija 8.1.</u> Pod višekriterijumskim programiranjem sa delimičnim uredjenjem kriterijuma po važnosti podrazumevamo par $(VP, \prec)$ sastavljen od problema vektorske minimizacije (VP) i izvesne tranzitivne i antirefleksivne binarne relacije $\prec$ u skupu svih kriterijuma.

Ako je $f_i \prec f_j$ kažemo da je kriterijum f_i važniji od f_j . Ako $\neg(f_i \prec f_j)$ i $\neg(f_j \prec f_i)$, kažemo da su kriterijumi f_i i f_j neuporedivi po važnosti.

Za relaciju $\prec$ kažemo da delimično uredjuje kriterijume po važnosti. Pogodno je ovakve relacije predstavljati grafom (orgrafom) kome su čvorovi kriterijumi a luci povezuju kriterijume u relaciji. Tako navedenom primeru odgovara graf



a problemu leksikografske minimizacije graf



Primetimo takodje da tranzitivna i antirefleksivna relacija $\prec$ ima i svojstvo

$$f_i \prec f_j \Rightarrow \neg(f_j \prec f_i) \quad .$$

Uvedimo oznake

$$T(f) = \{ g : \neg(f \prec g) \} , \ f,g \in \{f_1, \dots, f_p\} .$$

Tada je za svaki kriterijum f, skup T(f) neprazan skup sastavljen od kriterijuma g koji su ili važniji od f ili neuporedivi sa f . Definišimo sada šta je rešenje problema vektorske minimizacije sa kriterijumima delimično uredjenim relacijom $\prec$.

<u>Definicija 8.2.</u> Pod rešenjem problema $(VP, \prec)$ podrazumevamo tačku $\hat{x} \in X$ koja ima svojstvo:

za svako $i \in \{1, \dots, p\}$ i svako $x \in X$ takvo da je

$$f_i(x) < f_i(\hat{x})$$

postoji $f_j \in T(f_i)$ takvo da je

$$f_j(x) > f_j(\hat{x}) \quad .$$

Drugim rečima, poboljšanje vrednosti nekog kriterijuma uvek uzrokuje pogoršanje vrednosti nekog drugog kriterijuma medju onim kriterijumima koji su važniji od ili neuporedivi sa poboljšanim kriterijumom. Primetimo da je pri tom $i \neq j$.

U slučaju da je $\prec = \emptyset$ uvedeni pojam se evidentno poklapa sa pojmom Pareto rešenja problema (VP). Pokažimo da se u slučaju da je $\prec$ lančasto uredjenje svih kriterijuma uvedeni pojam poklapa sa pojmom leksikografskog minimuma pripadnog problema leksikografske minimizacije. Neka je

$$f_{i_1} \prec f_{i_2} \prec \cdots \prec f_{i_p}$$

i $\hat{x} \in X$ rešenje problema (VP, $\prec$). Pretpostavimo da $\hat{x}$ nije rešenje pripadnog problema leksikografske minimizacije. Tada postoji $k \in \{1,2,\dots,p-1\}$ i $x \in X$ takvo da je

$$f_{i_j}(x) = f_{i_j}(\hat{x}), \quad j=1,2,\dots,k \tag{1}$$

i

$$f_{i_{k+1}}(x) < f_{i_{k+1}}(\hat{x}) \tag{2}$$

Kako je $\hat{x}$ rešenje problema (VP, $\prec$) postoji $f_l \in T(f_{i_{k+1}})$ tako da je

$$f_l(x) > f_l(\hat{x}) \tag{3}$$

Zbog $T(f_{i_{k+1}}) = \{f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_k}, f_{i_{k+1}}\}$ relacija (3) je u kontradikciji sa (1) i (2). Time je dokazano da $\hat{x}$ jeste leksikografski minimum pripadnog problema .

Sledeća teorema omogućava karakterizaciju rešenja problema (VP, $\prec$).

<u>Teorema 8.3.</u> Tačka $\hat{x} \in X$ je rešenje problema (VP, $\prec$) ako i samo ako je $\hat{x}$ optimalno rešenje svih problema (P_i), $i=1,2,\dots,p$ gde je

$$(P_i) \qquad \begin{array}{l} (\min)\ f_i(x) \\ \text{p.o.}\ f_j(x) \le f_j(\hat{x}), \quad f_j \in T(f_i) \setminus \{f_i\} \\ \qquad x \in X \end{array}$$

<u>Dokaz.</u> Pretpostavimo da je $\hat{x}$ rešenje problema (VP, $\prec$).

Ako $\hat{x}$ nije optimalno rešenje nekog problema (P_i) postoji $x \in X$ tako da je

$$f_i(x) < f_i(\hat{x}) \qquad (4)$$

$$f_j(x) \leqslant f_j(\hat{x}) \ , \ f_j \in T(f_i) \setminus \{f_i\} \qquad (5)$$

Zbog (4),postoji $f_j \in T(f_i) \setminus \{f_i\}$ takvo da je

$$f_j(x) > f_j(\hat{x})$$

No,to je u kontradikciji sa (5).Stoga je $\hat{x}$ optimalno rešenje za sve (P_i), $i=1,2,\dots,p$.

Obrnuto,pretpostavimo da je $\hat{x} \in X$ optimalno rešenje za sve (P_i), $i=1,2,\dots,p$. Tada su svi sistemi (4)-(5) za $i=1,2,\dots,p$ nemogući na X. Otuda,ako za neko $i \in \{1,2,\dots,p\}$ i neko $x \in X$ vredi $f_i(x) < f_i(\hat{x})$ mora postojati $f_j \in T(f_i)$ tako da je $f_j(x) > f_j(\hat{x})$. Saglasno definiciji 8.2. , $\hat{x}$ je rešenje problema $(VP, \prec)$.

S obzirom na komplikovanost karakterizacije aktuelno je pitanje egzistencije rešenja!

<u>Teorema 8.4.</u> Ako je skup X neprazan kompakt a funkcije cilja $f_1, \dots, f_p$ neprekidne na X , onda problem $(VP, \prec)$ ima bar jedno rešenje.

<u>Dokaz.</u> Dokazaćemo tvrdjenje indukcijom po broju p funkcija cilja.

Za p=2, moguća su dva slučaja:

(i) kriterijumi f_1 i f_2 su neuporedivi ; kako postoji Pareto minimum , on je ujedno i rešenje problema .

(ii) kriterijumi f_1 i f_2 su uporedivi; problem se svodi na traženje leksikografskog minimuma,što postoji .

Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za sve probleme sa p kriterijuma. Neka je $(VP, \prec)$ problem sa p+1 kriterijuma.

Bar jedan od kriterijuma je završni tj. nije važniji ni od jednog drugog kriterijuma. Označimo sa f_z taj kriterijum a sa $(VP_p, \prec)$ problem dobijen izostavljanjem kriterijuma f_z i svih lukova odgovarajućeg grafa kojima je f_z čvor. Po indukcijskoj hipotezi, problem $(VP_p, \prec)$ ima bar jedno rešenje $\bar{x}$. Posmatrajmo problem

$$\begin{aligned} &(\min)\ f_z(x) \\ \text{p.o.}\quad & f_i(x) \leq f_i(\bar{x})\ ,\ i=1,2,\dots,p+1 \qquad (6) \\ & x \in X \end{aligned}$$

kome je $\bar{x}$ jedna dopustiva tačka. Zbog pretpostavki o kompaktnosti skupa X i neprekidnosti funkcija cilja, postoji optimalno rešenje $\hat{x}$ ovog problema. Dokažimo da je $\hat{x}$ rešenje celog problema $(VP, \prec)$. Pretpostavimo suprotno. Prema teoremi 8.3. postoji $i \in \{1,2,\dots,p+1\}$ i $x \in X$ tako da je

$$\begin{aligned} & f_i(x) < f_i(\hat{x}) \\ & f_j(x) \leq f_j(\hat{x})\ ,\ f_j \in T(f_i) \setminus \{f_i\} \end{aligned}$$

Zbog $T(f_z) = \{f_1, \dots, f_{p+1}\}$ i činjenice da je $\hat{x}$ optimalno rešenje problema (6) mora biti $i \neq z$. Kako je

$$f_i(\hat{x}) \leq f_i(\bar{x})\ , i=1,\dots,p+1$$

biće

$$\begin{aligned} & f_i(x) < f_i(\bar{x}) \\ & f_j(x) \leq f_j(\bar{x}),\ f_j \in T(f_i) \setminus \{f_i, f_z\} \end{aligned}$$

odakle zaključujemo da $\bar{x}$ nije rešenje problema $(VP_p, \prec)$, što je suprotno pretpostavci. Time je dokazano da je $\hat{x}$ rešenje problema $(VP, \prec)$ i time je završen dokaz teoreme.

Na kraju ove glave formulišimo nekoliko otvorenih pitanja koja ostaju za budući rad:

A) Kako odrediti bar jedno rešenje problema $(VP, \prec)$?

Jedan iterativni postupak kojim se odredjuje bar jedno rešenje dat je u dokazu teoreme 8.4. Vidljivo je naime da ako umemo da rešimo problem sa manjim brojem kriterijuma možemo rešiti i problem sa većim brojem kriterijuma.

B) Kako odrediti sva rešenja makar u slučaju linearnosti svih kriterijuma?

C) Kakva geometrijska svojstva ima skup svih rešenja?

9. PRIBLIŽNA REŠENJA U VIŠEKRITERIJUMSKOM PROGRAMIRANJU

U ovom poglavlju razvijamo teoriju približnih rešenja za problem vektorske minimizacije

$$\begin{array}{ll}(\min)\ f(x) = (f_1(x),\dots,f_p(x)) & \\ & \qquad (VP) \\ \text{p.o.} \quad x \in X & \end{array}$$

bez uredjenja kriterijuma po važnosti. Kao i obično, X je dopustivi skup izbora a $f_i\colon X \to R$, $i=1,\dots,p$ su funkcije cilja (kriterijumi). Za dva vektora $a=(a_1,\dots,a_p)$ i $b=(b_1,\dots,b_p)$ iz R^p definišemo

$$a \leqq b \iff a_i \leqq b_i \ ,i=1,\dots,p$$

$$a < b \iff a_i < b_i \ ,i=1,\dots,p$$

$$a \leq b \iff (a \leqq b \wedge a \neq b)$$

Inverzne relacije ovih relacija označavamo redom sa $\geqq$, $>$, $\geq$.

Neka je $\varepsilon = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p) \geqq 0$ fiksirani vektor iz R^p.

<u>Definicija 9.1.</u> Za $\bar{x} \in X$ kažemo da je ε-Pareto rešenje problema (VP) akko ne postoji $x \in X$ takav da je

$$f(x) \leq f(\bar{x}) - \varepsilon$$

<u>Definicija 9.2.</u> Za $\bar{x} \in X$ kažemo da je ε-slabo Pareto rešenje problema (VP) akko ne postoji $x \in X$ takav da je

$$f(x) < f(\bar{x}) - \varepsilon \ .$$

Za $\varepsilon = 0$ uvedeni pojmovi se svode na Pareto (slabo Pareto) rešenje problema (VP).

Postoji više razloga za uvodjenje približnih rešenja. Prvo, tačna rešenja mogu da ne postoje, dok približna postoje. Drugo, numerički postupci za odredjivanje tačnih rešenja često završavaju na približnom rešenju sa zadanom greškom ε. Pri tom metode za rešavanje problema (VP) (osim u linearnom slučaju) još uvek nisu dovoljno razvijene. Treći razlog je teorijske prirode.

Pojam ε-Pareto rešenja uveo je Loridan u radu [71]. On se bavio pitanjem egzistencije, karakterizacije i izvesnim svojstvima ovakvih rešenja. U radu ima (otklonjivih) netačnosti (propositions 3.1, 3.2, 4.1) a "tehnika" izvodjenja je "skalarizacija" vektorskog problema i primena poznate teorije za približna rešenja u skalarnom slučaju ([36], [70]).

Ovde razmatramo analogna pitanja za na prirodan način uveden drugi tip približnih rešenja, ε-slabo Pareto rešenja. Osnovni rezultat je uopštenje varijacionog principa Ekelanda ([36], [35], [34]) koje zadržava vektorski karakter, kao i njegove posledice za višekriterijumske probleme sa i bez ograničenja.

Prvi rezultat se odnosi na postojanje ε-slabo Pareto rešenja problema (VP).

<u>Teorema 9.3.</u> Neka je $\varepsilon \geqslant 0$. Ako problem (VP) ima ε-slabo Pareto rešenje, onda je funkcija

$$\hat{f}(x) = \max_i f_i(x)$$

ograničena odozdo na X. U slučaju da je $\varepsilon > 0$ vredi i obrnuto.

<u>Dokaz.</u> Neka je $u \in X$ neki ε-slabi Pareto minimum problema (VP). Pretpostavimo da funkcija $\hat{f}$ nije ograničena odozdo na X. Tada, za svako realno M postoji $x \in X$ takav da je $\hat{f}(x) < M$. Birajući $M = \min_i (f_i(u) - \varepsilon_i)$ dobili bi da je za sve $i=1,\dots,p$

$$f_i(x) \leqq \hat{f}(x) < M \leqq f_i(u) - \varepsilon_i$$

te u ne bi bilo ε-slabo Pareto rešenje. Izvedena kontradikcija dokazuje prvi deo teoreme.

Pretpostavimo sada da je $\varepsilon > 0$ i da je $\hat{f}(x) \geqslant a$ za neko realno a i sve x iz X. Formirajmo niz sistema na X

$$f(x) < a+n\varepsilon \quad ,n=0,1,\dots, \qquad (S_n)$$

Sistem (S_o) je nemoguć a bar jedan medju (S_n), $n=1,2,\dots$ je moguć. Neka je n najmanji prirodan broj za koga je (S_n) moguć i $u \in X$ rešenje za (S_n). Tada je u ε-slabi Pareto minimum problema (VP), jer ne postoji $x \in X$ takvo da je

$$f(x) < f(u) - \varepsilon$$

(takvo x bi bilo rešenje za (S_{n-1})).

Karakterizaciju ε-slabo Pareto rešenja problema (VP) daje

<u>Teorema 9.4.</u> $u \in X$ je ε-slabo Pareto rešenje problema (VP) ako i samo ako je

$$\inf_{x \in X} \max_{i} \, (f_i(x) - f_i(u) + \varepsilon_i) \geqslant 0$$

<u>Dokaz.</u> Sledi neposredno iz definicije 9.2.

Sledeći rezultat je glavni u ovom poglavlju i predstavlja uopštenje varijacionog principa Ekelanda [36] za ε-slabo Pareto rešenja problema (VP).

Pretpostavimo da je dopustivi skup X kompletan metrički prostor sa metrikom d, da su funkcije cilja $f_i: X \to R$, $i=1,\dots,p$ poluneprekidne odozdo i da je funkcija $\hat{f}(x) = \max_i f_i(x)$ ograničena odozdo na X. Tada važi

<u>Teorema 9.5.</u> Neka je $u \in X$ jedno ε-slabo Pareto rešenje problema (VP), $\varepsilon > 0$ i λ proizvoljan pozitivan broj. Tada postoji $v \in X$ takav da je

$$f(v) \leqslant f(u) \qquad (1)$$

$$d(u,v) \leqslant 1/\lambda \qquad (2)$$

$$f(x) \leqslant f(v) - \lambda\varepsilon d(x,v),\ x \in X \quad \Rightarrow \quad x=v \qquad (3)$$

<u>Dokaz.</u> Dovoljno je dokazati teoremu za $\lambda = 1$,

jer se promenom metrike d u metriku λd kompletnost prostora X ne narušava. Definišimo u X niz tačaka (x_n). $n=0,1,2,\dots$ induktivno. Neka $x_0 = u$. Pretpostavimo da je x_n definisano i definišimo x_{n+1}. Označimo sa

$$X_n = \{ x \in X \mid f(x) \leqq f(x_n) - \varepsilon d(x, x_n) \}, \ n=0,1,\dots \qquad (4)$$

i primetimo da su X_n neprazni (sadrže x_n) i zatvoreni (zbog poluneprekidnosti odozdo ciljnih funkcija) skupovi. Ako je x_n optimalno rešenje problema

$$(\min)\hat{f}(x); \ x \in X_n$$

definišemo $x_{n+1} = x_n$. U suprotnom, biramo $x_{n+1} \in X_n$ tako da je

$$\hat{f}(x_{n+1}) - \inf_{x \in X_n} \hat{f}(x) \leqq \tfrac{1}{2}\left(\hat{f}(x_n) - \inf_{x \in X_n} \hat{f}(x)\right) \qquad (5)$$

Ovo je moguće učiniti zahvaljujići ograničenosti odozdo funkcije $\hat{f}$ (prema teoremi 9.3) i njenoj poluneprekidnosti odozdo (jer su takve ciljne funkcije). Dokažimo da je (x_n) Cauchyev niz. Ako se u (5) desna strana za neko n anulira, niz (x_n) je počev od tog n stacionaran, dakle Cauchyev. U suprotnom, zbog $x_{n+1} \in X_n$ važi

$$\hat{f}(x_{n+1}) \leqq \hat{f}(x_n) - \min_i \varepsilon_i \cdot d(x_{n+1}, x_n). \ n=0,1,\dots \qquad (6)$$

te je $(\hat{f}(x_n))$ opadajući niz, uz to ograničen odozdo, dakle konvergira ka nekom realnom broju c. Tada i red

$$\sum \left(\hat{f}(x_n) - \hat{f}(x_{n+1})\right)$$

konvergira, te iz (6) sledi da konvergira i red $\sum d(x_{n+1}, x_n)$. Zbog

$$d(x_{n+p}, x_n) \leqq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p})$$

za dato $\delta > 0$, sve dovoljno velike n i sve prirodne p važi $d(x_{n+p}, x_n) < \delta$, dakle (x_n) je Cauchyev niz. Zbog kompletnosti X postoji $v \in X$ kome (x_n) konvergira. Dokažimo da važi (1). Sabiranjem nejednakosti

$$f_i(x_{n+k}) \leqq f_i(x_{n+k-1}) - \varepsilon_i d(x_{n+k}, x_{n+k-1}), \ k=1,2,\dots,p$$

nalazimo

$$f_i(x_{n+p}) \leq f_i(x_n) - \varepsilon_i(d(x_n,x_{n+1}) + \ldots + d(x_{n+p-1},x_{n+p}))$$

odnosno

$$f_i(x_{n+p}) \leq f_i(x_n) - \varepsilon_i d(x_n,x_{n+p})$$

Kad $p \to \infty$, zbog poluneprekidnosti funkcije f_i, odavde sledi

$$f_i(v) \leq f_i(x_n) - \varepsilon_i d(x_n,v)$$

Kako je ovo tačno za svako $i=1,2,\ldots,m$ biće

$$f(v) \leq f(x_n) - \varepsilon d(x_n,v) \quad ,n=0,1,\ldots \tag{7}$$

Specijalno za $n=0$ dobijamo (1).

Dokažimo da važi (2). Kako je $u \in X$ ε-slabi Pareto minimum za (P), postoji indeks i tako da je

$$f_i(v) \geq f_i(u) - \varepsilon_i \tag{8}$$

Iz (7) i (8) sledi $-\varepsilon_i \leq -\varepsilon_i d(u,v)$ i odatle (2).

Dokažimo da važi (3). U suprotnom, postojalo bi $w \neq v$ tako da je

$$f(w) \leq f(v) - \varepsilon d(w,v) < f(v) \tag{9}$$

Otuda sledi

$$\hat{f}(w) < \hat{f}(v) \tag{10}$$

S druge strane, sabiranjem nejednakosti (7) i (10) zaključili bi da vredi

$$f(w) \leq f(x_n) - \varepsilon d(w,x_n) \quad \text{za } n=0,1,\ldots$$

dakle da $w \in X_n$ za $n=0,1,\ldots$. S obzirom na konstrukciju niza (x_n) bilo bi

$$2\hat{f}(x_{n+1}) - \hat{f}(x_n) \leq \inf \hat{f}(x) \leq \hat{f}(w)$$

odakle bi, puštajući da n teži ∞, dobili

$$c \leq \hat{f}(w) \tag{11}$$

Zbog poluneprekidnosti odozdo funkcije $\hat{f}$ bilo bi takodje

$$\hat{f}(v) \leq \lim \hat{f}(x_n) = c$$

što sa (10) i (11) daje kontradikciju. Time je dokaz završen.

<u>Napomena 9.6.</u> Za $p=1$ iskaz teoreme je upravo Ekelandov varijacioni princip u najopštijoj formi.

Napomena 9.7. Pogodno je izabrati

$$\lambda = (\sum_i \varepsilon_i)^{-1/2} \tag{12}$$

ili

$$\lambda = (\hat{\varepsilon})^{-1/2}, \quad \hat{\varepsilon} := \max_i \varepsilon_i \tag{13}$$

Napomena 9.8. Iz (3) sledi da je $v \in X$ Pareto rešenje problema

$$(\min) \quad f(x) + \lambda \varepsilon d(x,v)$$
$$\text{p.o.} \quad x \in X \quad .$$

Takve tačke se prema radu [71] nazivaju ε-kvazi Pareto rešenja problema (VP), ukoliko je λ birano sa (12). Smisao teoreme 9.5. je onda u tome da se u okolini radijusa $1/\lambda$ proizvoljnog ε-slabo Pareto minimuma (sa $\varepsilon > 0$) može naći, po svim kriterijumima ne lošiji ε-kvazi Pareto minimum.

Zbog (1), jasno je da je v takodje ε-slabi Pareto minimum.

Napomena 9.9. Ako su neke komponente vektora $\varepsilon \geqslant 0$ nule, važi analogon teoreme 9.5. ukoliko se (3) zameni sa

$$f(x) \leqq f(v) - \lambda(\varepsilon + \delta) d(x,v), \; x \in X \Rightarrow x = v \tag{3'}$$

Pri tome je δ proizvoljni nenegativni vektor iz R^p takav da je $\varepsilon + \delta > 0$. Uvek je, npr. moguće naći $\delta \geqq 0$ tako da je

$$\varepsilon + \delta = (\hat{\varepsilon}, \hat{\varepsilon}, \ldots, \hat{\varepsilon}) > 0$$

Napomena 9.10. Iz dokaza teoreme 9.5., vidljivo je da je uslov (1) moguće pojačati sa

$$f(v) \leqq f(u) - \lambda \varepsilon d(u,v) \tag{1'}$$

U daljem ćemo pokazati neke posledice teoreme 9.5.

Razmotrimo, najpre, problem (VP) bez ograničenja, pretpostavljajući da je dopustivi skup X Banachov prostor i da su funkcije cilja $f_i, i=1,\dots,p$ Gâteaux-diferencijabilne na X tj. da za $v \in X$ i $i=1,\dots,p$ postoji neprekidni linearni funkcional $f_i'(v) \in X^*$ takav da ja za svako $u \in X$

$$\lim_{t \to +0} \frac{f_i(v+tu)-f_i(v)}{t} = \langle f_i'(v), u \rangle \ .$$

<u>Teorema 9.11.</u> Neka je $u \in X$ jedan ε-slabi Pareto minimum problema (VP) pri navedenim pretpostavkama. Tada postoji ε-slabi Pareto minimum označen sa v i skalari $\lambda_i \geqslant 0$, $i=1,2,\dots,p$ čija je suma jednaka 1, takvi da je

$$\| \sum_i \lambda_i f_i'(v) \|_{X^*} \leqq \sqrt{\hat{\varepsilon}} \tag{14}$$

i

$$\| u-v \| \leqq \sqrt{\hat{\varepsilon}} \tag{15}$$

<u>Dokaz.</u> Prema teoremi 9.5. postoji $v \in X$ koje zadovoljava (1),(2) i (3') birajući λ sa (13) i $\delta \geqq 0$ tako da je $\varepsilon + \delta = (\hat{\varepsilon},\dots,\hat{\varepsilon})$ saglasno napomeni 9.9. Pri tom je v ε-slabi Pareto minimum problema (VP) i važi (15). Za proizvoljno $w \in X$, $w \neq 0$, zbog (3') iz

$$f_i(v+tw)-f_i(v)+\sqrt{\hat{\varepsilon}}\ t \| w \| \leqq 0 \ , i=1,2,\dots,p$$

sledi $t=0$. Otuda, za sve pozitivne t vredi

$$\max_i \frac{f_i(v+tw)-f_i(v)}{t} > -\sqrt{\hat{\varepsilon}} \| w \| \ .$$

Puštajući da t teži $+0$ dobijamo

$$\max_i \langle f_i'(v), w \rangle \geqslant -\sqrt{\hat{\varepsilon}} \| w \|$$

te je sistem strogih konveksnih nejednačina (po w)

$$\langle f_i'(v), w \rangle + \sqrt{\hat{\varepsilon}} \| w \| < 0 \ , \ i=1,2,\dots,p$$

nemoguć na X. Koristeći poznatu teoriju konveksnih nejednačina (vidi npr. [87]), zaključujemo da postoje multiplikatori $\lambda_i \geqslant 0$ sa sumom jedan,takvi da je

$$\inf_{w \in X} \left(\langle \sum_i \lambda_i f_i'(v), w \rangle + \sqrt{\hat{\varepsilon}} \, \|w\| \right) \geqslant 0$$

Otuda je

$$\inf_{\|w\|=1} \langle \sum_i \lambda_i f_i'(v), w \rangle \geqslant -\sqrt{\hat{\varepsilon}} \quad .$$

Zamenom w sa $-w$ odavde dobijamo

$$\sup_{\|w\|=1} \langle \sum_i \lambda_i f_i'(v), w \rangle \leqq \sqrt{\hat{\varepsilon}}$$

čime je dokazana relacija (14).

Kombinujući teoreme 9.3.i 9.5. moguće je dokazati sledeću teoremu:

<u>Teorema 9.12.</u> Ako je X Banachov prostor,funkcije cilja f_i Gâteaux-diferencijabilne, $\hat{f} := \max_i f_i$ ograničena odozdo, tada,za svaki vektor $\varepsilon > 0$ postoji $v \in X$ koje je ε-slabi Pareto minimum problema (VP) a takodje postoje skalari $\lambda_i \geqslant 0$ sa sumom jedan,takvi da je

$$\| \sum_i \lambda_i f_i'(v) \|_{X^*} \leqq \sqrt{\hat{\varepsilon}}$$

Razmotrimo sada problem višekriterijumskog programiranja sa ograničenjima.Pretpostavimo da su funkcije cilja f_i, $i=1,2,\dots,p$ Fréchet-diferencijabilne na izvesnom Banachovom prostoru V a funkcije ograničenja $g_j: V \to R$,$j=1,2,\dots,m$ neprekidno Frechet-diferencijabilne. Problem koji posmatramo je

$$\begin{array}{lll} & (\min)\ f(x)=(f_1(x),\dots,f_p(x)) & \\ \text{p.o.} & g_j(x)= 0 \ ,j=1,\dots,q & \text{(VP)} \\ & g_j(x) \leqq 0 \ ,j=q+1,\dots,m & \end{array}$$

Pretpostavimo da je dopustivi skup X ovog problema neprazan i regularan tj. da je za svako $x \in X$

$$\{ g_j'(x) \; : \; j \in J(x) \} \quad \text{linearno nezavisan} \tag{16}$$

pri čemu je sa $J(x)$ označen skup indeksa ograničenja aktivnih u tački x tj

$$j \in J(x) \quad \text{akko} \quad g_j(x) = 0$$

Teorema 9.13. Neka je (VP) problem višekriterijumskog programiranja sa ograničenjima kome je dopustivi skup X regularan i funkcija $\hat{f} := \max_i f_i$ ograničena odozdo na X. Tada, za svako $\varepsilon > 0$ postoji $v \in X$ koji je ε-slabi Pareto minimum problema (VP) kao i skalari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sa sumom jedan, skalari $\mu_1, \dots, \mu_q \in R$, $\mu_{q+1}, \dots, \mu_m \geqslant 0$ takvi da je

$$\| \sum_i \lambda_i f_i'(v) + \sum_j \mu_j g_j'(v) \|_{X^*} \leqslant \sqrt{\hat{\varepsilon}} \tag{17}$$

Dokaz. Primetimo da je dopustivi skup X zatvoren neprazan deo Banachovog prostora i, kao takav, kompletan metrički prostor sa indukovanom metrikom. Prema teoremi 9.3. postoji ε-slabi Pareto minimum problema (VP). Koristeći teoremu 9.5. zaključujemo da postoji $v \in X$ koje je ε-slabi Pareto minimum za (VP) takav da važi

$$f(x) \leqq f(v) - \varepsilon(\hat{\varepsilon})^{-1/2} d(x,v) \;, \; x \in X \;\Rightarrow\; x=v \tag{18}$$

Dokažimo da ne postoji $h \in X$ takvo da je

$$< g_j'(v), \, h > \; = 0 \;, \; j=1,\dots,q \tag{19}$$

$$< g_j'(v), \, h > \; \leqq 0 \;, \; j \in \{q+1,\dots,m\} \cap J(v) \tag{20}$$

$$< f_i'(v), h > + \; \varepsilon_i(\hat{\varepsilon})^{-1/2} \| h \| < 0 \;, i=1,2,\dots,p \tag{21}$$

Neka $h \in X$ zadovoljava (19) i (20) i $h \neq 0$. Koristeći teoremu o implicitnoj funkciji zaključujemo da postoji neprekidno diferencijabilna kriva $u : [0,T] \to X$ takva da je $u(0)=v$ i $\dot{u}(0) = h$. Zbog (18), za svako $t \in (0,T)$ je

$$\max_i \; (f_i(u(t)) - f_i(u(0)) + \varepsilon_i(\hat{\varepsilon})^{-1/2} \| u(t) - u(0) \| > 0 \; .$$

Deleći sa t i puštajući da t teži nuli,odavde dobijamo

$$\max_i \left(\langle f_i'(v),h\rangle + \varepsilon_i(\hat{\varepsilon})^{-1/2}\|h\|\right) \geqslant 0$$

Znači h ne zadovoljava (21). Primenjujući teoriju sistema konveksnih nejednačina na (19),(20) i (21), zaključujemo da postoje skalari $\lambda_1,\dots,\lambda_p \geqslant 0$ sa sumom jedan, skalari $\mu_1,\dots,\mu_q \in R$, $\mu_{q+1},\dots,\mu_m \geqslant 0$ (i pri tom je $\mu_j = 0$ za $j \notin J(v)$) takvi da je

$$\inf_{h\in X} \left(\sum_i\langle\lambda_i f_i'(v),h\rangle + \sum_i \lambda_i\varepsilon_i(\hat{\varepsilon})^{-1/2}\|h\| + \sum_j\langle \mu_j g_j'(v),h\rangle \right) \geqslant 0$$

Odavde sledi

$$\inf_{\|h\|=1} \left(\langle \sum_i \lambda_i f_i'(v) + \sum_j \mu_j g_j'(v),h\rangle\right) \geqslant -(\hat{\varepsilon})^{-1/2} \sum_i \lambda_i\varepsilon_i$$

Kako je $\sum_i \lambda_i\varepsilon_i \leqq \hat{\varepsilon}$ i zamenom h sa -h, dobijamo

$$\sup_{\|h\|=1} \langle \sum_i \lambda_i f_i'(v) + \sum_j \mu_j g_j'(v) , h\rangle \leqq (\hat{\varepsilon})^{1/2}$$

odnosno (17).Time je teorema dokazana.

Izvedene teoreme prenose Ekelandov varijacioni princip i njegove posledice na probleme višekriterijumske optimizacije.One pokazuju da su značajna ona približna rešenja koja su i približno stacionarna(odnosno približno kvazi Pareto minimalna) i koja pri vrlo blagim pretpostavkama postoje. Takva bi se s pravom mogla zvati pravilna približna rešenja.

10. DUALNOST U VIŠEKRITERIJUMSKOM PROGRAMIRANJU

Pridruživanje dualnog problema zadanom problemu matematičkog programiranja predstavlja jednu od najplodotvornijih ideja u teoriji skalarnog matematičkog programiranja. Stoga je prirodno očekivati da adekvatne konstrukcije duala budu od značaja i kod problema višekriterijumske optimizacije. U poslednje vreme pojavio se veći broj radova u kojima se razne dualne konstrukcije, poznate u skalarnom slučaju, prenose na probleme višekriterijumske optimizacije. Tako npr. u [80], [86], [98], [103], [72] konstruišu se duali Lagrangeovog tipa (bazirani na pojmu sedlaste tačke za odgovarajuće konstruisanu Lagrangeovu funkciju) a u [112] dual Fenchelovog tipa (baziran na pojmu konjugovane funkcije). Cilj ovog odeljka je konstrukcija duala Wolfeovog tipa za problem konveksnog diferencijabilnog višekriterijumskog programiranja:

$$(P)\qquad \begin{array}{ll} (\min) & (f_1(x),\dots,f_p(x)) \\ \text{p.o.} & g_i(x)\leq 0\ ,i=1,\dots,m \end{array}$$

Pri tom pretpostavljamo da su $f_1,\dots,f_p,g_1,\dots,g_m$ konveksne i diferencijabilne funkcije na R^n.

U cilju uprošćenja zapisa u daljem koristimo sledeće oznake:

$$f(x):=(f_1(x),\dots,f_p(x))$$

$$g(x):=(g_1(x),\dots,g_m(x))$$

$$L_i(x,\lambda):=f_i(x)+\langle\lambda,g(x)\rangle\ ,i=1,\dots,p$$

$$L(x,\lambda):=(L_1(x,\lambda),\dots,L_p(x,\lambda))$$

$$e:=(1,1,\dots,1)$$

$$\nabla f(x):=(\nabla f_1(x),\dots,\nabla f_p(x))$$

$$\nabla g(x):=(\nabla g_1(x),\dots,\nabla g_m(x))$$

$$Y:=\left\{(x,\lambda,\mu)\in R^n x R^m x R^p:\ \lambda\geqq 0,\ \mu>0, \langle\mu,e\rangle=1, \langle\mu,\nabla f(x)\rangle+\langle\lambda,\nabla g(x)\rangle=0\right\}$$

Definicija 10.1. Dual problema (P) u Wolfeovom smislu je problem

$$(D)\qquad \begin{array}{ll} & (\max)\ L(x,\lambda) \\ \text{p.o.} & (x,\lambda,\mu)\in Y \end{array}$$

Primećujemo da se u skalarnom slučaju (kad je p=1) problem (D) svodi na Wolfeov dual (vidi npr.[74]) a promenljiva μ nestaje i iz ograničenja.

Sledeće teoreme su analogoni teoreme slabe dualnosti:

Teorema 10.2. (skalarna slaba dualnost)

Ako je x dopustiva tačka primala a $(\hat{x},\hat{\lambda},\hat{\mu})$ proizvoljna dopustiva tačka duala (D), onda je

$$\langle\hat{\mu},L(\hat{x},\hat{\lambda})\rangle\leqq\langle\hat{\mu},f(x)\rangle \qquad (1)$$

Dokaz. Zbog konveksnosti i diferencijabilnosti funkcija cilja i ograničenja važe nejednakosti

$$f_j(x)\geqslant f_j(\hat{x})+\langle\nabla f_j(\hat{x}),x-\hat{x}\rangle\ ,\quad j=1,\dots,p$$

$$g_i(x)\geqslant g_i(\hat{x})+\langle\nabla g_i(\hat{x}),x-\hat{x}\rangle\ ,\quad i=1,\dots,m$$

te je

$$\begin{aligned}
\langle\hat{\mu},f(x)\rangle &\geqslant \langle\langle\hat{\mu},\nabla f(\hat{x})\rangle\ ,x-\hat{x}\rangle+\langle\hat{\mu},f(\hat{x})\rangle\\
&=\langle-\ \langle\hat{\lambda},\nabla g(\hat{x})\rangle,x-\hat{x}\rangle+\langle\hat{\mu},f(\hat{x})\rangle\\
&=-\langle\ \hat{\lambda},\langle\nabla g(\hat{x}),x-\hat{x}\rangle\rangle+\langle\hat{\mu},f(\hat{x})\rangle\\
&\geqslant-\langle\ \hat{\lambda},\ g(x)-g(\hat{x})\rangle\ +\langle\hat{\mu},f(\hat{x})\rangle\\
&\geqslant\langle\hat{\lambda},g(\hat{x})\rangle+\langle\hat{\mu},f(\hat{x})\rangle\\
&=\langle\hat{\mu},L(\hat{x},\ \hat{\lambda})\rangle
\end{aligned}$$

Teorema 10.3. (vektorska slaba dualnost)

Ako je x dopustiva tačka primala (P) a $(\hat{x},\hat{\lambda},\hat{\mu})$ dopustiva tačka duala (D) i $f(x)\leqq L(\hat{x},\hat{\lambda})$, tada je $f(x)=L(\hat{x},\hat{\lambda})$.

Dokaz. Iz $f(x) \leqq L(\hat{x},\hat{\lambda})$ sledi $<\hat{\mu},f(x)> \leqq <\hat{\mu},L(\hat{x},\hat{\lambda})>$ te, zbog teoreme 10.2, vredi $<\hat{\mu},f(x)> = <\hat{\mu},L(\hat{x},\hat{\lambda})>$. Kako je $\hat{\mu}>0$ odavde sledi da je $f(x)= L(\hat{x},\hat{\lambda})$, što je i trebalo dokazati. Primetimo da pri tom važi $<\hat{\lambda},g(x)> =0$ (vidi dokaz teoreme 10.2.).

Teorema jake dualnosti ima sledeći analogon:

Teorema 10.4. (jaka dualnost)

Pretpostavimo da primal (P) zadovoljava Slaterov uslov

$$(\exists x)\ g(x) < 0$$

Tada, za svako sopstveno Pareto rešenje $\bar{x}$ primala (P), postoje $\bar{\lambda}$ i $\bar{\mu}$ takvi da je $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ Pareto rešenje duala (D) i pri tom je

$$f(\bar{x}) = L(\bar{x}, \bar{\lambda}) .$$

Dokaz. Kako je $\bar{x}$ sopstveno Pareto rešenje primala (P), na osnovu teoreme Geofriona (vidi t.4, str.108 u [86]), postoji $\bar{\mu}>0$ sa $<\bar{\mu},e> = 1$ tako da je $\bar{x}$ minimum funkcije $<\bar{\mu},f(x)>$ na skupu $X = \{ x \in R^n:\ g(x) \leqq 0\}$. Zbog Slaterovog uslova, postoji $\bar{\lambda} \geqq 0$ tako da $\bar{x}$ minimizira funkciju $<\bar{\mu},f(x)> + <\bar{\lambda},g(x)>$ na R^n (na osnovu Kuhn-Tuckerove teoreme) i pri tom vredi

$$<\bar{\mu},\nabla f(\bar{x})> + <\bar{\lambda},\nabla g(\bar{x})> = 0 \qquad (2)$$

$$<\bar{\lambda}, g(\bar{x})> = 0 \qquad (3)$$

Stoga je $(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu})$ dopustiva za (D). Da bi dokazali da je ta tačka Pareto rešenje za (D), pretpostavimo da je (x,λ,μ) proizvoljna dopustiva tačka za (D) takva da je

$$L(x,\lambda) \geqq L(\bar{x},\bar{\lambda}) \qquad (4)$$

Kako je, zbog (3), $L(\bar{x},\bar{\lambda}) = f(\bar{x})$, iz (4) sledi $L(x,\lambda) \geqq f(\bar{x})$, te prema teoremi 10.3, vredi $f(\bar{x})= L(x,\lambda)$.

Otuda je $L(x,\lambda)= L(\bar{x},\bar{\lambda})$, te je $(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu})$ Pareto maksimum za (D). Uz to još važi $f(\bar{x})=L(\bar{x}, \bar{\lambda})$. Time je dokaz završen.

Sledeći primer pokazuje da teorema jake dualnosti ne mora da važi za Pareto rešenja koja nisu sopstvena.

<u>Primer 10.5.</u> U problemu

$$\begin{aligned} &(\min) \quad (x,y) \\ &\text{p.o.} \quad x^2-y \leqq 0 \end{aligned}$$

tačka (0,0) je očigledno Pareto (ali nesopstveno) rešenje. No, ne postoje $\lambda \geqq 0$, $\mu > 0$ takvi da $((o,o),\lambda,\mu)$ bude Pareto rešenje duala (D) koji glasi:

$$\begin{aligned} &(\max) \quad (x+\lambda(x^2-y), y+\lambda(x^2-y)) \\ &\text{p.o.} \quad \mu_1\binom{1}{0}+\mu_2\binom{0}{1}+\lambda\binom{2x}{-1} = \binom{0}{0} \\ &\qquad \mu_1, \mu_2 > 0 \ , \lambda \geqq 0 \end{aligned}$$

Ovde, $x=0$ implicira $\mu_1= -2\lambda x = 0$, $\mu_2=\lambda= 1$.

<u>Primedba 10.6.</u> Slaterov uslov je u prethodnoj teoremi bio potreban da bi se na problem $(\min) < \bar{\mu}, f(x)>$, $x \in X$ mogla primeniti Kuhn-Tuckerova teorija. Umesto njega može se pretpostaviti neki drugi uslov regularnosti koji to omogućava npr. linearnost ograničenja.

Interesantno je pitanje kada se iz Pareto rešenja duala (D) može "odbacivanjem" multiplikatora dobiti (sopstveno) Pareto rešenje za (P). To je pitanje obrnute dualnosti. Sledeća teorema je analogon Mangasarianove striktne obrnute dualnosti (vidi [74] str.117).

<u>Teorema 10.7.</u> (striktna obrnuta dualnost)

Neka je $(\hat{x},\hat{\lambda},\hat{\mu})$ Pareto rešenje duala (D). Pretpostavimo da je funkcija $x \mapsto <\hat{\mu}, L(x,\hat{\lambda})>$ striktno konveksna, da dopustivi skup X primala ima Slaterovu tačku i da problem

$$(\min) \; \langle \hat{\mu}, f(x) \rangle, \quad x \in X$$

ima optimalno rešenje $\bar{x}$ .Ako važi bar jedan od uslova

(i) $(\hat{x},\hat{\lambda})$ je rešenje problema

$$(\max) \langle \hat{\mu}, L(x,\lambda) \rangle$$

$$\text{p.o.} \; \langle \hat{\mu}, \nabla f(x) \rangle + \langle \lambda, \nabla g(x) \rangle = 0$$

$$\lambda \geqq 0$$

(ii) $f(\bar{x}) \geqq L(\hat{x},\hat{\lambda})$

onda je $\hat{x} = \bar{x}$, $\hat{x}$ je sopstveno Pareto rešenje za (P) i

$$f(\hat{x}) = L(\hat{x},\hat{\lambda}) \; .$$

<u>Dokaz.</u> Primetimo da je $\bar{x}$ sopstveno Pareto rešenje za (P) i da zbog važenja Kuhn-Tuckerove teorije postoji $\bar{\lambda} \geqq 0$ tako da je

$$\langle \hat{\mu}, \nabla f(\bar{x}) \rangle + \langle \bar{\lambda}, \nabla g(\bar{x}) \rangle = 0$$

i

$$\langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle = 0$$

Kao u dokazu jake teoreme dualnosti dokazujemo da je $(\bar{x},\bar{\lambda},\hat{\mu})$ Pareto rešenje za (D).Pri tom je $f(\bar{x}) = L(\bar{x},\bar{\lambda})$. U slučaju da važi (i) imali bi nejednakost

$$\langle \hat{\mu}, L(\hat{x},\hat{\lambda}) \rangle \geqslant \langle \hat{\mu}, L(\bar{x},\bar{\lambda}) \rangle = \langle \hat{\mu}, f(\bar{x}) \rangle$$

koja zbog važenja slabe teoreme dualnosti T.10.2 daje

$$\langle \hat{\mu}, L(\hat{x},\hat{\lambda}) \rangle = \langle \hat{\mu}, L(\bar{x},\bar{\lambda}) \rangle \qquad (5)$$

U slučaju da važi (ii) iz činjenice da je $(\hat{x},\hat{\lambda},\hat{\mu})$ Pareto rešenje za (D) i nejednakosti

$$L(\bar{x},\bar{\lambda}) \geqq L(\hat{x},\hat{\lambda})$$

sledi da je

$$L(\bar{x},\bar{\lambda}) = L(\hat{x},\hat{\lambda})$$

Otuda zaključujemo da u oba slučaja važi relacija (5).

Dokažimo sada da je $\bar{x} = \hat{x}$. Pretpostavimo suprotno $\bar{x} \neq \hat{x}$. Kako je $\hat{x}$ stacionarna tačka striktno konveksne funkcije

$<\hat{\mu},L(x,\hat{\lambda})>$ ona je njen jedinstveni minimum. Otuda je

$$<\hat{\mu},L(\bar{x},\hat{\lambda})> \; > \; <\hat{\mu},L(\hat{x},\hat{\lambda})>$$

te je ,prema (5) ,

$$<\hat{\mu},L(\bar{x},\hat{\lambda})> \; > \; <\hat{\mu},L(\bar{x},\bar{\lambda})>$$

ili u razvijenoj formi

$$<\hat{\mu},f(\bar{x})> + <\hat{\lambda},g(\bar{x})> \; > \; <\hat{\mu},f(\bar{x})> + <\bar{\lambda},g(\bar{x})>$$

odakle sledi

$$<\hat{\lambda},g(\bar{x})> \; > 0$$

što je zbog $\hat{\lambda} \geqslant 0$, $\bar{x} \in X$ nemoguće. Dobijena kontradikcija pokazuje da je $\bar{x} = \hat{x}$. Ostatak dokaza je trivijalan.

Na kraju primetimo da je uslov (i) u skalarnom slučaju automatski ispunjen.

11. PARAMETARSKO LINEARNO VEKTORSKO PROGRAMIRANJE

U ovoj glavi problemu linearnog vektorskog programiranja

$$\begin{array}{l}(\min)\ Cx\\ \text{p.o. } Ax \geqslant b\end{array} \qquad (P(\beta))$$

(A,b,C su realne matrice formata redom mxkmmx1,pxk) pridružujemo prirodan parametar $\beta=(A,b,C)\in R^{mk+m+pk}$ i obratno i ispitujemo razna svojstva funkcije

$$\beta \to \hat{X}(\beta)$$

gde je sa $\hat{X}(\beta)$ označen skup Pareto rešenja ovog problema. Razmatraćemo samo parametre β za koje je dopustivi skup $X(\beta)$ problema $(P(\beta))$ neprazan. Skup slabih Pareto rešenja označićemo sa $S(\beta)$, vrste u matrici C sa $c_1,\dots,c_p$ a vrste u matrici A sa $a_1,\dots,a_m$. Najveći skup parametara β za koje je $\hat{X}(\beta)$ neprazan skup zovemo domen funkcije $\hat{X}$ i označavamo dom $\hat{X}$.

Povremeno ćemo za parametar birati samo matricu C (i to će biti posebno istaknuto). Parametarska analiza u slučaju da je parametar reduciran samo na vektor b, može se naći u [78].

<u>Teorema 11.1.</u> Sledeći uslovi su ekvivalentni:

(a) $\beta=(A,b,C)\in \operatorname{dom}\hat{X}$;

(b) postoje vektori $\mu>0$ sa $\mu^t e = 1$ i $\lambda\geqslant 0$ takvi da je $\mu^t C = \lambda^t A$;

(c) $\operatorname{ri}\operatorname{cone}\{c_1,\dots,c_p\}\cap\operatorname{cone}\{a_1,\dots,a_m\}\neq\emptyset$;

(d) sistem $Ad\geqslant 0$, $Cd\leqslant 0$ je nemoguć ;

(e) postoji $\mu>0$ sa $\mu^t e = 1$ tako da funkcija $\mu^t Cx$ dostiže minimum na skupu $X(\beta)$.

<u>Dokaz.</u> (a) $\Leftrightarrow$ (b) .Poznato tvrdjenje ([86] ,t.6,str.161)
(b) $\Leftrightarrow$ (c). (c) je geometrijska interpretacija uslova (b).
(d) $\Leftrightarrow$ (b) na osnovu Tucker-ove teoreme alternative ([74],str.29)
(e) $\Leftrightarrow$ (b) zbog Kuhn-Tucker-ove teoreme .
(a) $\Leftrightarrow$ (e) poznato ([86],t.7,str.112).

Na osnovu izvedene teoreme vidi se da je dom $\hat{X}$ konus , jer iz $\beta \in \mathrm{dom}\,\hat{X}$ sledi $t\beta \in \mathrm{dom}\,\hat{X}$ za sve $t \geq 0$ .Pokažimo na primerima da dom $\hat{X}$ može da ima neugodna svojstva da nije konveksan a ni zatvoren skup,čak ni kad se parametar β redu- cira samo na matricu C. Taj se fenomen u jednokriterijumskom slučaju ne dogadja.

<u>Primer 11.2.</u> Neka su $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ i $b=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ fiksne matrice i $\beta=C$. Za

$$C_1=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

je $\hat{X}(C_1)\neq \emptyset$,$\hat{X}(C_2)\neq \emptyset$ ali je $\hat{X}(2/3\ C_1+ 1/3\ C_2) = \emptyset$. Provera ovoga je laka ako se iskoristi uslov (c). U ovom primeru dom $\hat{X}(C)$ nije konveksan skup.

<u>Primer 11.3.</u> Neka su A i b iste kao u prethodnom primeru ,β=C. Niz matrica $C_n=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1/n\end{pmatrix}$, n=1,2,... pripada dom $\hat{X}$ (npr. $\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\in\hat{X}(\beta_n)$ za sve $n \in N$), $C_n \to C_o$ kad $n \to \infty$, ali

$$C_o=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{ ne pripada skupu dom } \hat{X} .$$

Otuda dom $\hat{X}$ nije zatvoren skup.

Prethodni primeri ukazuju da je parametarska analiza zadatka linearnog vektorskog programiranja znatno složenija nego u jednokriterijumskom slučaju.Pokažimo ipak da se neki kvalitativ- ni iskazi iz teorije linearnog programiranja mogu "preneti" na višekriterijumski slučaj.

Poznata tvrdnja da problem linearnog programiranja koji ima vrednost ima i optimalno rešenje,može se iskazati i u višekriterijumskom slučaju. U tom cilju nužno je najpre definisati šta podrazumevamo pod vrednošću problema linearne vektorske minimizacije.

<u>Definicija 11.4.</u> Tačka $\hat{v} \in R^p$ je vrednost problema(P(B)) akko:

(i) sistem $\begin{matrix} Cx \leq \hat{v} \\ Ax \geqslant b \end{matrix}$ je nemoguć ;

(ii) za svako $\varepsilon \geq 0$ moguć je sistem $\begin{matrix} Cx \leq \hat{v}+\varepsilon \\ Ax \geqslant b \end{matrix}$.

Drugim rečima, $\hat{v} \in R^p$ je vrednost problema (P(B)) akko je $\hat{v}$ Pareto maksimum problema

$$(\max)\ v$$

p.o. sistem (po x) $\begin{matrix} Cx \leq v \\ Ax \geqslant b \end{matrix}$ je nemoguć .

<u>Teorema 11.5.</u> Ako je $\hat{v}$ vrednost problema (P(B)) onda postoji Pareto minimum $\hat{x}$ problema (P(B)) takav da je $C\hat{x} = \hat{v}$.

<u>Dokaz.</u> Primetimo najpre da je sistem (po x)

$$\begin{matrix} Cx \leq v \\ Ax \geqslant b \end{matrix} \tag{1}$$

nemoguć, akko je nemoguć sistem(po (x,y), $y \in R$)

$$\begin{aligned} -Cx + vy &\geq 0 \\ Ax - by &\geqslant 0 \\ y &> 0 \end{aligned}$$

tj. akko je nemoguć sistem

$$\begin{aligned} -Cx + vy &\geqslant 0 \\ Ax - by &\geqslant 0 \\ y &> 0 \\ -e^tCx+e^tvy &> 0 \end{aligned}$$

Na osnovu Motzkinove teoreme alternative ([74],str.28),poslednje će važiti akko je moguć sistem (po $\mu, \lambda, \alpha, \beta$)

$$\begin{aligned} &-(\mu^t+\beta e^t)C + \lambda^t A = 0 \\ &(\mu^t+\beta e^t)v - \lambda^t b+\alpha = 0 \\ &\mu \geqslant 0,\ \lambda \geqslant 0\ ,\ (\alpha,\beta) \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Neka je $\hat{v}$ vrednost problema (P(B)) i ($\hat{\mu},\hat{\lambda},\hat{\alpha},\hat{\beta}$) rešenje sistema (2)(sa $\hat{v}$ umesto v).Dokažimo da je $\hat{\beta}>0$.U suprotnom, $\hat{\beta}=0$ i $\hat{\alpha}>0$.Birajući $\varepsilon \geqslant 0$ dovoljno malo po normi vidimo da je ($\hat{\mu},\hat{\lambda},\hat{\alpha}-\hat{\mu}\varepsilon$, 0) rešenje sistema (2) (sa $\hat{v}+\varepsilon$ umesto v).Stoga je nemoguć sistem (1)(sa $\hat{v}+\varepsilon$ umesto v).Dobijena kontradikcija pokazuje da je $\hat{\beta}>0$. Stavimo $\bar{\mu}=\hat{\mu}+\hat{\beta}e$. Tada je

$$\bar{\mu}>0 \tag{3}$$
$$\bar{\mu}^t\cdot\hat{v} \leqq \hat{\lambda}^t\cdot b \tag{4}$$
$$\bar{\mu}^t\cdot C = \hat{\lambda}^t\cdot A \tag{5}$$

Odavde sledi , za proizvoljno $x \in X(B)$,

$$\bar{\mu}^t\cdot\hat{v} \leqq \hat{\lambda}^t\cdot(Ax) = \bar{\mu}^t\cdot Cx \tag{6}$$

Neka je (ε_n), $\varepsilon_n \geqslant 0$ niz vektora koji teži nuli i (x_n) niz rešenja sistema (1)(sa $\hat{v}+\varepsilon_n$ umesto v) .Kako $x_n \in X(B)$, vredi

$$\bar{\mu}^t\cdot\hat{v} \leqq \bar{\mu}^t\cdot C\,x_n \leqq \bar{\mu}^t(\hat{v}+\varepsilon_n)$$

odakle sledi

$$\bar{\mu}^t\cdot C\,x_n \to \bar{\mu}^t\,\hat{v} \quad \text{kad } n \to \infty \tag{7}$$

Iz (6)i(7) sledi

$$\bar{\mu}^t\cdot\hat{v} = \inf\{\bar{\mu}^t\,C\,x : x \in X\}$$

Na osnovu poznatog rezultata za linearno programiranje,postoji $\hat{x} \in X$ tako da je

$$\bar{\mu}^t\cdot\hat{v} = \bar{\mu}^t\,C\,\hat{x}$$

Odavde,zbog (3) i (6) sledi $\hat{v}=C\,\hat{x}$,što je i trebalo dokazati.

Trivijalno je videti da vredi i obrat teoreme 11.5.,tako da se skup svih vrednosti problema (P(B)),u oznaci $\hat{V}$,poklapa sa $\{Cx : x \in \hat{X}(B)\}$.

Sledeće pitanje koje rešavamo je za koje parametre B je skup $\hat{X}(B)$ neprazan kompakt. Važi

Teorema 11.6. Sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) $\hat{X}(\beta)$ je neprazan kompakt;

(b) za svako $\mu>0$ sa $\mu^t e=1$ skup tačaka minimuma funkcije $\mu^t Cx$ na skupu $X(\beta)$ je neprazan kompakt;

(c) Ako je $\mu>0$, $\mu^t e=1$ i $d\neq 0, Ad\geqq 0$ onda je $\mu^t Cd>0$;

(d) Ako $d\neq 0$ i $Ad\geqslant 0$ onda je $Cd\geqslant 0$

Dokaz. (a) $\Rightarrow$ (b):

Pokažimo ,najpre,da svaka funkcija oblika $\mu^t Cx$,za $\mu>0$ sa $\mu^t e=1$,dostiže minimum na X.U suprotnom,postoji neko μ i niz tačaka $(x_n), x_n\in X$,tako da $\mu^t C\,x_n\to\infty$ kad $n\to\infty$. Koristeći poznat rezultat o dominantnosti skupa svih vrednosti $\hat{V}$ nad skupom $\{Cx:\ x\in X\}$ Bragard-a i Vangeldère-a ([9]), zaključujemo da postoji niz Pareto rešenja $(\hat{x}_n)$ takav da je

$$C\,\hat{x}_n \leqq C\,x_n \quad .$$

Otuda je $\mu^t C\,\hat{x}_n\leqq\mu^t C\,x_n$ te $\mu^t C\,\hat{x}_n\to-\infty$ kad $n\to\infty$. No,to je nemoguće zbog

$$\mu^t C\,\hat{x}_n \geqq \min\{\mu^t C\,x:\mu\geqslant 0, \mu^t e=1,\ x\in\hat{X}\}\in R \quad .$$

Dakle,svaka funkcija $\mu^t Cx$ dostiže minimum na X.Kako su tačke minimuma Pareto rešenja,skup svih takvih tačaka je zatvoren skup sadržan u kompaktu $\hat{X}(\beta)$,dakle kompakt.

(b) $\Rightarrow$ (a):

Na osnovu teoreme Arrow,Barankin,Blackwell-a ([86],str.164) $\hat{X}(\beta)$ se može predstaviti kao unija konačno mnogo skupova $\hat{X}_i$ $i=1,\dots,q$ koji su skupovi tačaka minimuma funkcija $\mu_i^t\,Cx$ na X, za neke $_i>0$ sa $\mu_i^t e=1$,$i=1,\dots,q$.Kako su $\hat{X}_i$ kompakti biće to i $\hat{X}(\beta)$,što je i trebalo dokazati.

(b) $\Leftrightarrow$ (c):

Sledi iz činjenice da linearna funkcija $\mu^t Cx$ ima na X neprazan kompaktan skup tačaka minimuma akko raste u svakom nenula recesivnom smeru d skupa X (a takvi su odredjeni sa $Ad \geqslant 0$, $d \neq 0$), ukoliko takvi postoje.

(c) $\Leftrightarrow$ (d):

Puštajući da μ teži jediničnim vektorima u R^p, iz $\mu^t Cd > 0$ bi zaključili da je $Cd \geqslant 0$. Uzimajući $\mu = e$ dobili bi $Cd \neq 0$, dakle $Cd \geq 0$. Stoga (c) $\Rightarrow$ (d). Obratno je trivijalno.

Lema 11.7. Ako je $\hat{X}(\beta)$ neprazan kompakt i $X(\beta)$ ima Slaterovu tačku, onda $\beta \in \text{int dom } \hat{X}$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno da $\beta \notin \text{int dom } \hat{X}$. Tada postoji niz $\beta_n = (A_n, b_n, C_n)$ koji teži $\beta = (A, b, C)$ (tj. $A_n \to A$, $b_n \to b$, $C_n \to C$) takav da problemi

$$\begin{aligned} &(\min)\ C_n x \\ &\text{p.o.}\quad A_n x \geqslant b_n \end{aligned} \qquad (P_n)$$

nemaju Pareto rešenja. Primetimo da je Slaterova tačka za $X(\beta)$ dopustiva za sve (P_n), počevši od dovoljno velikog indeksa n. Prema teoremi 11.1 (c), postoje (recesivni) smerovi d_n koji zadovoljavaju

$$A_n d_n \geqslant 0 \ , \ C_n d_n \leqslant 0 \ , \ \| d_n \| = 1 \qquad (\ )$$

Neka je d bilo koja tačka nagomolavanja niza (d_n). Iz ( ), prelaskom na limes po odgovarajućem podnizu, sledi

$$A\ d \geqslant 0 \ , \ C\ d \leqq 0 \ , \ \| d \| = 1$$

što se, prema teoremi 11.6. (d), protivi pretpostavci da je $\hat{X}(\beta)$ neprazan kompakt. Time je lema dokazana.

Napomena 11.8. U slučaju da je parametar β samo matrica C, prethodno tvrdjenje važi i bez pretpostavke o postojanju Slaterove tačke u $X(\beta)$.

U jednokriterijumskom slučaju vredi i obratno tvrdjenje, pod uslovom da je $\beta = C$. Sledeći primer pokazuje da to ne važi u slučaju većeg broja kriterijuma.

Primer 11.9. Posmatrajmo problem

$$\begin{aligned} &(\min)\ C\binom{x}{y} \\ &\text{p.o. } x \geqslant 0, y \geqslant 0 \end{aligned} \qquad (P(C))$$

gde je C parametar matrica formata 2x2 sa vrstama c_1, c_2 . Za sve matrice C iz neke okoline matrice $C_o = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ skup Pareto rešenja $\hat{X}(C)$ je neprazan (jer

$$\text{ri cone}\{c_1, c_2\} \cap \text{cone}\{(1\ 0),(0\ 1)\} \neq \emptyset$$

kad je c_1 dovoljno blizu (1 0) i c_2 dovoljno blizu (0 1)) dakle $C_o \in \text{int dom}\,\hat{X}$. No, $\hat{X}(C_o) = \{\binom{0}{y} : y \geqslant 0$ nije kompaktan skup.

Na kraju razmotrimo pitanje stabilnosti problema (P(ß)), prenoseći definiciju stabilnosti iz glave 7 ovog rada na slučaj višekriterijumskog programiranja.

Definicija 11.10. Problem parametarskog linearnog vektorskog programiranja (P(ß)), $ß=(A,b,C)$ je stabilan u tački $ß_o=(A_o,b_o,C_o)$ akko za svaki niz $(ß_n)$, $ß_n=(A_n,b_n,C_n)$ koji teži $ß_o$ kad $n \to \infty$, postoji $n_o \in N$ tako da

(1) za svako $n \geqslant n_o$, $\hat{X}(ß_n) \neq \emptyset$,

(2) svaki niz $(\hat{x}_n)$, $(\hat{x}_n \in \hat{X}(ß_n)$ je ograničen i ima tačke nagomolavanja u $\hat{X}(ß_o)$.

Sledeća teorema daje dovoljne uslove za stabilnost i predstavlja generalizaciju osnovnog rezultata za jednokriterijumsko programiranje (vidi [37] ili glavu 7 u radu).

Teorema 11.11. Problem (P(ß)) je stabilan u tački $ß_o$ ako je ispunjeno:

(1) $X(ß_o)$ ima Slaterovu tačku;

(2) $\hat{X}(ß_o)$ je neprazan kompakt;

(3) $\hat{X}(ß_o) = S(ß_o)$.

<u>Dokaz.</u> Neka $ß_n \to ß_o$ kad $n \to \infty$. Prema lemi 11.7, $ß_o$ pripada int dom $\hat{X}$, te $\hat{X}(ß_n) \neq \emptyset$ za sve dovoljno velike n. Neka je $(\hat{x}_n)$ proizvoljan niz takav da $\hat{x}_n \in \hat{X}(ß_n)$. Tada postoji niz (μ_n), $\mu_n > 0$, $\mu_n^t e = 1$ takav da je $\hat{x}_n$ rešenje problema

$$(\min)\ \mu_n^t C_n x$$
$$\text{p.o.}\quad A_n x \geqslant b_n$$

Dokažimo da je niz $(\hat{x}_n)$ ograničen. U suprotnom, postoji njegov podniz označen ponovo sa $(\hat{x}_n)$, $n \in N_1 \subset N$ takav da $\hat{x}_n \to \infty$ kad $n \in N_1$ i teži ka ∞. Niz $(\mu_n)_{n \in N_1}$ je ograničen te ima podniz $(\mu_n)_{n \in N_2}$ koji konvergira ka nekom $\mu_o \geqslant 0$, sa $\mu_o^t e = 1$. Opšti problem linearnog programiranja koji zavisi od prirodnog parametra (A,b,c)

$$(\min)\ c^t x$$
$$\text{p.o.}\ Ax \geqslant b$$

stabilan je u tački $(A_o, b_o, \mu_o^t C_o)$ jer za te vrednosti problem linearnog programiranja zadovoljava Slaterov uslov i ima neprazan i kompaktan skup optimalnih rešenja. Kako $(A_n, b_n, \mu_n^t C_n) \to (A_o, b_o, \mu_o^t C_o)$ kad $n \to \infty$ i $n \in N_2$, podniz $(\hat{x}_n)_{n \in N_2}$ mora biti ograničen, što je u kontradikciji sa pretpostavkama. Otuda je niz $(\hat{x}_n)$ ograničen.

Rezonujući slično prethodnom, mogli bi dokazati da su tačke nagomilavanja niza $(\hat{x}_n)$ medju optimalnim rešenjima programa

$$(\min)\ \mu_o^t C_o x$$
$$\text{p.o.}\quad A_o x \geqslant b_o$$

te stoga u $S(ß_o) = \hat{X}(ß_o)$. Time je teorema dokazana.

Sledeći primer pokazuje bitnost uslova (3) u teoremi. Inače, taj je uslov u skalarnom programiranju automatski ispunjen.

Primer 11.12. Problem $(P(\beta)), \beta=(A,b,C)$ nije stabilan u tački $\beta_o=(A_o,b_o,C_o)$,

$$A_o=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}, \quad b_o=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad C_o=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$ Zaista, za

$$A_n=\begin{pmatrix}1/n&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}, \quad b_n=\begin{pmatrix}1/n\\0\\0\end{pmatrix}, \quad C_n=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$ imamo $\beta_n=(A_n,b_n,C_n)\to\beta_o$,

$$\hat{x}_n=\begin{pmatrix}1/2\\1/2n\end{pmatrix}\in\hat{X}(\beta_n), \quad \hat{x}_n\to\begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}\notin\hat{X}(\beta_o)=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Lako se vidi da su uslovi (1) i (2) ispunjeni a (3) nije.

Provera uslova (3) može u opštem slučaju da pravi poteškoće. Stoga je od značaja sledeći test za njegovu proveru:

Lema 11.13. Ako linearni program

$$\begin{aligned} &(\max)\ y \\ \text{p.o.}\quad &\mu \geqslant y\cdot e \\ &\mu^t C = \lambda^t A && (8)\\ &\mu \geqslant 0,\ \mu^t e=1 && (9)\\ &\lambda \geqslant 0 && (10)\end{aligned}$$

ima pozitivnu vrednost, onda su $\hat{X}(\beta)$ i $S(\beta)$ jednaki.

Dokaz. Optimalna vrednost ovog programa je jednaka minimalnoj komponenti vektora μ koji sa nekim vektorom λ zadovoljava uslove (8),(9),(10). Njena pozitivnost znači je kod svakog rešenja sistema (8),(9),(10) $\mu>0$. Ako je $\hat{x}\in S(\beta)$, onda postoje μ, λ koji zadovoljavaju (8),(9),(10) i pri tom je $\hat{x}$ rešenje problema $(\min)\ \mu^t Cx$ p.o. $Ax\geqslant b$. Kako je $\mu>0$ iz poslednjeg sledi $\hat{x}\in\hat{X}(\beta)$. Dakle, $S(\beta)\subset\hat{X}(\beta)$. Obrnuta inkluzija je uvek tačna. Znači, $S(\beta)=\hat{X}(\beta)$, što je i trebalo dokazati.

Razmotrimo sada specijalnu klasu problema $(P(\beta))$ koji zadovoljavaju Slaterov uslov i imaju kompaktan dopustivi skup $X(\beta)$. Za njih je odmah vidljivo da je uslov (2) teoreme ispunjen.

Teorema 11.14. Skup stabilnih problema je svuda gust u klasi problema koji zadovoljavaju Slaterov uslov i imaju kompaktan dopustivi skup.

Dokaz. Neka $(P(\beta))$ pripada ovoj klasi problema i nije stabilan u tački $\beta_0=(A_0,b_0,C_0)$. Tada su (1) i (2) u teoremi 11.1 zadovoljeni ali nije i (3). Dokažimo da se može naći tačka $\beta_\varepsilon=(A_0,b_0,C_\varepsilon)$ proizvoljno bliska tački β_0 u kojoj je program $(P(\beta))$ stabilan. Neka su $c_1,\dots,c_p$ vrste u matrici C_0 i ε proizvoljno mali pozitivan broj. Pokažimo da je problem $(P(\beta))$ stabilan u tački (A_0,b_0,C_ε) pri čemu je C_ε matrica sa vrstama $c_i+\varepsilon\sum_{j:j\neq i} c_j$, $i=1,\dots,p$. Dovoljno je proveriti da važi uslov (3) odnosno da linearni program iz leme 11.13 ima pozitivnu optimalnu vrednost. Kako taj program, sa matricama A_0 i C_0, ima vrednost jednaku nuli, bar jedna komponenta vektora $\hat{\mu}$ u njegovom optimalnom rešenju $(\hat{\mu},\hat{\lambda},0)$ jednaka je nuli. Neka je I skup indeksa i takvih da je $\hat{\mu}_i=0$. Ostale komponente su pozitivne pa će za sve dovoljno male $\varepsilon>0$ biti

$$\bar{\mu}_i=\hat{\mu}_i-\varepsilon\sum_i \hat{\mu}_i \sum_{j:j\neq i} c_j > 0 \quad \text{za } i\notin I$$

Označimo sa $\bar{\mu}$ vektor čije su komponente jednake 0 za $i\in I$ a $\bar{\mu}_i$ ako $i\notin I$, $i=1,\dots,p$. Neposredno se proverava da je $(\bar{\mu},\hat{\lambda},\min_{i\notin I}\bar{\mu}_i)$ dopustiva tačka programa iz leme 11.13 (sa matricama A_0 i C_ε) sa pozitivnom vrednošću funkcije cilja. Stoga je odgovarajuća vrednost pozitivna i problem $(P(\beta))$ je stabilan u $(A_0,b_0,C\ )$ za sve dovoljno male $\varepsilon>0$.

Time je teorema dokazana.

U dokazu ove teoreme pokazan je zapravo jedan način "regularizacije" nestabilnog problema,tj.zamena problema sa njemu bliskim stabilnim problemom. Ovo je od značaja pri primeni bilo koje metode (npr.simpleks metode) za izračunavanje skupa Pareto rešenja problema linearne vektorske optimizacije.

L I T E R A T U R A

[1] Akilov G.P.,Kutateladze S.S.: Uporjadočennie vektornie prostranstva,Nauka,Novosibirsk 1978.

[2] Aljančić S.: Uvod u realnu i funcionalnu analizu,Gradjevinska knjiga,Beograd 1968.

[3] Anderson E.J.,Philpott A.B.(eds.):Infinite Programming, Proceedings,Cambridge U.K.1984,Springer-Verlag 1985.

[4] Astafiev N.N.: Lineinie neravenstva i vypuklosti,Nauka, Moskva 1982.

[5] Ašić M.D.,Kovačević-Vujčić V.V.: Two methods for semi-infinite programming , to appear

[6] Bank B.,Guddat J.,Klatte D.,Kummer B.,Tammer K.: Non-linear Parametric Optimization,Akademie-Verlag,Berlin 1982.

[7] Bazaraa M.,Shetty C.M.: Nonlinear Programming,John Wiley and Sons,New York 1979.

[8] Ben-Israel A.,Ben-Tal A.,Zlobec S.: Optimality in Nonlinear Programming:a Feasible Directions Approach,John Wiley and Sons,New York 1981 .

[9] Benson H.,: On a Domination Property for Vector Maximization with Respect to Cones, J.O.T.A 1983,39,1,125-132.

[10] Ben-Tal A.,Kerzner L.,Zlobec S.:Optimality Conditions for Convex Semi-infinite Programming Problems,Naval Research Logistics Quarterly,27,No.3,1980,413-433.

[11] Ben-Tal A.,Rosinger E.,Ben-Israel A.:A Helly-Type Theorem and Semiinfinite Programming, "Constructive Appoaches to Mathematical Models,ed. Coffman C.and Fix G.,Academic Press 1979,127-135.

[12] Berge C.:Topological Spaces,Oliver and Boyd,Edinburgh and London,1963.

[13] Blair Ch.:Covex Optimization and Lagrange Multipliers, Math.Programming 15,1978,87-91.

[14] Borwein J.M.:Direct Theorems in Semi-infinite Convex Programming,Mathematical Programming 21,1981,301-318.

[15] Borwein J.M.:Semiinfinite Programming-How Special is it?, in"Proceedins of the International Symposium on Semi-infinite Programming and Applications,Austin,Tex.Sep.8-10, 1981",Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems No.215,Springer-Verlag,New York 1983,pp.10-36.

[16] Borwein J.M.:Proper Efficient Points for Maximizations with Respect to Cones,Siam J.Control and Optimization, Vol.15,No.1,1977,57-63.

[17] Borwein J.M.:The Limiting Lagrangian as a Consequence of Helly's Theorem,J.O.T.A Vol.33,No.4,1981,497-513.

[18] Borwein J.M.:A Lagrange Multiplier Theorem and a sandwich Theorem for Convex Relations,Math.Scand.48,1981, 189-204 .

[19] Brosowski B.:Parametric Semi-infinite Optimization, Verlag Peter Lang,Frakfurt am Main-Bern,1982.

[20] Brosowski B.:On parametric linear optimization,Lecture Notes in Ekonomics and Mathematical Systems Vol.157, 37-44.

[21] Brosowski B.: On the Continuity of the Optimum Set in Parametric Semi-Infinite Programming,Proc.Second Symposium on Mathematical Programming with Data Perturbations, Washington,to appear

[22] Clark F.H.:Generalized Gradients and Applications,Transactions of the American Mathematical Society,Vol.205, 1975,247-262.

[23] Coffman C.V.,Fix G.T.(eds.):Constructive Approaches to Mathematical Models,Academic Press 1979.

[24] Colgen R.: On Stability in Semi-Infinite Programming, XI International Symposium on Mathematical Programming, Bonn,August 23-27,1982 (saopštenje).

[25] Corley :Duality Theory for Maximization with Respect to Cones,J.of Math.Analysis and Appl.Vol.84,1981,560-568

[26] Craven B.D.:Strong Vector Minimization and Duality, ZAMM 60,1980,1-5.

[27] Černikov S.N.: Lineinie neravenstva,Nauka,Moskva 1968.

[28] Dantzig G.,Folkman J.,Shapiro N.:On the Continuity of the Minimum Set of a Continuous Function,Journal of Mathematical Analysis and Applications 17,1967,519-548.

[29] Dubov Ju.A.:Ustoičivosti optimaljnih po Pareto vektornjih ocenok i ε-ravnomernjie rešenja,Avtomatika i telemehanika No.6,1981,139-145.

[30] Dugošija Dj.,Ašić M.D.:Uniform Convergence and Pareto Optimality,submited to Math.Operationsforsch.Statist.Ser. Optimization 1985.

[31] Dugošija Dj.P.: ε-weak Pareto Solutions in Multiobjective Programming,GAMM Congres 1985,Dubrovnik (saopštenje)

[32] Duffin R.J.,Jeroslow R.G.:Lagrangean Function and Affine Minorants,Math.Programming Study 14,1981,48-60 .

[33] Eckhardt U.:Theorems on the Dimension of Convex Sets, Linear Algebra and its Applications 12,1975,63-76.

[34] Ekeland I.,Temam R.,:Convex Analysis and Varitional Problems,North-Holland Pub.Co.,Amsterdam 1976.

[35] Ekeland Ivar:Nonconvex Minimization Problems,Bulletin of the AMS,Vol.1,No.3,1979,443-474.

[36] Ekeland I.: On the Variational Principle,J.Math.Analysis and Appl. 47,1974,324-353 .

[37] Eremin I.I.,Astafiev N.N.: Vvedenie v teoriju lineinogo i vypuklogo programmirovanija,Nauka,Moskva 1976.

[38] Evans J.P.,Gould F.J.:Stability in nonlinear programming, Operations Research ~~18,~~1970,107-118.

[39] Fan Ky : On Infinite Systems of Linear Inequalities, J.of Math.Analysis and Appl.21,1968,475-478 .

[40] Farkas J.:Theorie der einfachen Ungleichungen,Journal für die reine und angewande Mathematik 124,1902,1-27.

[41] Gal T.:Postoptimal Analysis,Parametric Programming and Related Topics,Mc Graw Hill,New York 1979.

[42] Gal T.,Leberling H.:Relaxation analysis in linear vector valued maximization,Europ.J.Oper.Res.8,No.3, 1981,274-282.

[43] Goberna M.A.,Lopez M.A.,Pastor J.: Farkas-Minkowski systems in semi-infinite programming,Appl.Math.Optim. 7,1981,295-308.

[44] Goberna M.A.,Lopez M.A.: Condition for the closedness of the characteristic cone associated with an infinite linear system, [3] str,16-28 .

[45] Goberna M.A.,Lopez M.A.,Pastor J,Vercher E.: An Approach to Semi-infinite Programming via Consequence Relations, (preprint)

[46] Guddat J.:Parametrische Optimierung und Vektoroptimierung, u [68] str. 54-73 .

[47] Haar A.:Über lineare Ungleichungen ,Acta Math.Szeged.2, 1924-1926,1-14 .

[48] Ha Chung-Wei : On Systems of Convex Inequalities,Journal of Mathematical Analysis and Applications 68,1979,25-34.

[49] Halmos P.: Measure Theory,D.Van Nostrand Company,1954.

[50] Hesteness M.: Optimization Theory ,John Wiley and Sons, New York 1975.

[51] Hettich R.(ed.) :Semi-Infinite Programming,Lecture Notes in Control and Information Sciences 15,Springer 1979.

[52] Hettich R.,Zencke P.:Numerische Methoden der Approximation and semi-infiniten Optimierung,Teubner,Stuttgart 1982.

[53] Holmes R.:A Course on Optimization and Best Approximation, Springer 1979.

[54] Holmes R.:Geometric Functional Analysis and its Applications, Springer 1975 .

[55] Ioffe A.D.,Tihomirov V.M.:Teorija ekstremalnih zadač, Nauka,Moskva 1974.

[56] Jameson G.: Ordered Linear Spaces,Springer 1970.

[57] Jeroslow R.G.: A Limiting Lagrangian for Infinitely Constrained Convex Optimization in R^n, J.O.T.A.Vol.33, No.4,1981,479-495.

[58] Jeroslow R.G.,Karney D.F.: Cluster Sets of Vector Series, Advances in Applied Mathematics 5,1984,470-475.

[59] Kanniappan P.,Sundaram M.A.Sastry: Uniform Convergence of Convex Optimization Problems,Journal of Mathematical Analysis and Applications 96,1983,1-12.

[60] Kantorovoč L.V.,Akilov G.P.: Funkcionaljnii analiz,Nauka Moskva 1977.

[61] Karney D.F.:Duality Gaps in Semi-infinite Linear Programming-An Approximation Problem,Mathematical Programming 20,1981,129-143.

[62] Karney D.F.: Clark's Theorem for Semi-Infinite Convex Programs,Advances in Applied Mathematics 2,1981,7-12.

[63] Karney D.F.: A Duality Theorem for Semi-Infinite Convex Programs and Their Finite Subprograms,Mathematical Programming 27,1983,75-82.

[64] Karney D.F.: In a Semi-infinite Program Only a Countable Subset of the Constraints is Essential,Journal of Approximation Theory Vol.44,No.1,1985,69-72.

[65] Klepikova M.G.: Voprosi ustoičivosti leksikografičeskih zadač optimizacii,Žurnal vyčisliteljnoi matematiki i matematičeskoi fiziki 25,1985,32-44.

[66] Krabs W.: Optimization and Approximation ,John Wiley & Sons,Chichester 1979.

[67] Laurent P.J.: Approximation et Optimisation,Hermann, Paris 1972.

[68] Lommatzsch K.(ed.):Anwendungen der linearen parametrischen Optimierung,Birkhäuser Verlag,Basel und Stuttgart, 1979.

[69] López M.A.,Vercher E.: Optimality Conditions for Nondifferentiable Convex Semi-infinite Programming,Mathematical Programming 27,1983,307-319

[70] Loridan P.: Necessary Conditions for ε-Optimality, Math.Programming Study 19,1982,140-152.

[71] Loridan P.: ε-Solutions in Vector Minimization Problems, J.O.T.A. 43,1984,No.2,265-276.

[72] Luc D.T.:On Duality Theory in Multiobjective Programming, J.O.Z.A.,43,No.4,1984,557-582.

[73] Luenberger D.: Optimization by Vector Space Methods, John Wiley ,New York 1969 .

[74] Mangasarian O.:Nonlinear Programming,Tata Bombay 1969.

[75] Mc Linden L.: Affine Minorants Minimizing the Sum of Convex Functions,J.O.T.A. Vol.24,No.4,1978,569-583.

[76] Minami M.:Weak Pareto-Optimal Necessary Conditions in a Nondifferentiable Multiobjective Program on a Banach Space ,J.O.T.A.,Vol.41,No.3,1983,451-461.

[77] Moiseev N.N.(ed.): Sovremennoe sostojanie teorii issledovanija operacii,Nauka,Moskva 1979.

[78] Naccache P.H.: Stability in Multicriteria Optimization Journal of Mathematical Analysis and Application 68,1979, 441-453.

[79] Németh A.B.:Near to minimality in ordered vector spaces, Mathematica,Tome 23(46),No.2,1981,239-243.

[80] Nogin V.D.: Dvoistvennosti v mnogocelovom programmirovaniu,Zurnal vyčisljiteljnoi matematiki i mat.fiziki, No.1,1977,254-258.

[81] Nožička,Guddat,Hollatz,Bank :Theorie der linearen parametrischen Optimierung 1974 .

[82] Petrić J.,Zlobec S.: Nelinearno programiranje,Naučna knjiga,Beograd 1983.

[83] Perevozčikov A.G.:O polunepreryvnosti paretovskih principov optimaljnosti,Vestn.Mosk.Un-ta,Ser.15,No.3,1983, 48-50 .

[84] Philip Johan,:Algorithmus for the vector maximization problem,Math.Programming 2,1972,207-229.

[85] Podinovskiĭ V.V.,Gavrilov V.M.:Optimizacija po posledovateljno primenjaemim kriterijam,Sovetskoe radio, Moskva 1975.

[86] Podinovskii V.V.,Nogin V.D.:Pareto-optimaljnie rešenja mnogokriterialjnih zadač ,Nauka,Moskva 1982.

[87] Pomerol J.Ch.:Inequality Systems and Minimax Theorems, presented at 2nd International Symposium on Semi-Infinite Programming and Applications,Austin,Tx,1981 .

[88] Popov N.M.:Ob approksimacii množestva Pareto metodom svertok,Vestn.Mosk.Un-ta Ser-15,1982,No.2,35-41.

[89] Pšeničnii B.N.: Neobhodimie uslovija ekstremuma,Nauka, Moskva 1982.

[90] Rhode R.,Weber R.:The range of the efficient frontier in multiple objective linear programming,Mathematical Programming 28,1984,84-95.

[91] Rockafellar T.:Convex Analysis,Princeton 1970.

[92] Rogosinski W.W.:Moments of nonnegative mass,Proc.Roy. Soc.London Series A, 245,1958,1-27.

[93] Schirotzek W.: A Nonhomogeneous Bipolar Theorem and its Application to Nondifferentiable Optimization (preprint)

[94] Shimizu,Aiyoshi,Katayama:Generalized Farkas Theorem and Optimization of Infinitely Constrained Problems, J.O.T.A. Vol.40,No.3,1983,451-462.

[95] Stoer J.,Witzgall Ch.:Convexity and Optimization in Finite Dimensions I ,Springer 1970.

[96] Swartz C.: A General Farkas Lemma,J.O.T.A.,Vol.46,No.2, 1985,237-244.

[97] Tanino T.,Sawaragi Y.:Stability of Nondominated Solutions in Multicriteria Decision-Making ,J.O.T.A. Vol.30,No.2, 1980,229-253

[98] Tanino T.,Sawaragi Y.:Duality Theory in Multiobjective Programming,J.O.T.A.,Vol.27,No.4,1979,509-529.

[99] Tijs S.H.,Borwein J.M.: Some Generalizations of Carathéodory's Theorem via Barycenters ,with Application to Mathematical Programming,Canad.Math.Bull.,Vol.23,No.3, 1980,339-346.

[100] Vujčić V.,Ašić M.,Miličić N.: Matematičko programiranje, Savremena računska tehnika i njena primena ,knjiga 7, Matematički Institut , Beograd 1980 .

[101] Warburton A.R.:Quasiconcave Vector Maximization:Connectedness of the Sets of Pareto-Optimal and Weak Pareto-Optimal Alternatives,J.O.T.A.,Vol.40,No.4,1983,537-557.

[102] Wendell R.E.,Lee D.N.: Efficiency in Multiple Objective Optimization Problems,Math.Programming 12,1977,406-414.

[103] White D.J. : Vector Maximization and Lagrange Multipliers Math.Programming 31,1985,192-205 .

[104] Yu,Zeleny M.: The Set of All Nondominated Solution in the Linear Cases and a Multicriteria Simplex Method, J.of Math.Analysis and Appl.49,1975,430-468.

[105] Zalinescu C.:A Generalization of the Farkas Lemma and Application to Convex Programming,J.of Math.Analysis and Applications 65,1978,651-678.

[106] Zeleny M.:Linear Multiobjective Programming,Springer 1974

[107] Zlobec S.and Ben-Israel A.:Duality in Convex Programming :A Linearization Approach,Math.Operationsforsch.Statist. Ser.Optimization,Vol.10,No.2,1979,171-178.

[108] Zlobec S.:Satisfying a demand without catastrophe in linear and convex programming,SIM-OP-IS 81,Herzeg Novi

[109] Zlobec S.,Craven B.D.:Stabilization and Determination of the Set of Minimal Binding Constraints in Convex Programming,Math.Operationsforsch.Statist.Ser.Optimization, Vol.12,No.2,1981,203-220.

[110] Zlobec S.,Gardner R.,Ben-Israel A.:Regions of Stability for Arbitrarily Perturbed Convex Programs in Mathematical Programming with Data Perturbations I,ed.by A.V.Fiacco Marcel Dekker Inc.New York and Basel 1982.

[111] Zlobec S.: Characterizing an Optimal Input in Perturbed Convex Programming,Mathematical Programming 25,1983, 109-121.

[112] Zowe J.: Fenchelsche Dualitätsaussagen in endlichdimensionalen halbgeordneten Vektorräumen,ZAMM 53,T230-T 232, 1973.

SADRŽAJ

strana

1. UVOD 1-8
2. GENERALIZACIJA FARKAŠEVE I HAAROVE TEOREME 9-13
3. SISTEMI LINEARNIH NEJEDNAČINA TIPA FARKAS - MINKOWSKI.................................... 14- 20
4. USLOVI OPTIMALNOSTI ZA LINEARNO SEMIINFINITNO PROGRAMIRANJE.................................. 21- 23
5. USLOVI OPTIMALNOSTI ZA KONVEKSNO SEMIINFINITNO PROGRAMIRANJE.................................. 24- 32
6. DUALNOST U KONVEKSNOM SEMIINFINITNOM PROGRAMIRANJU..33- 49
7. STABILNOST U SEMIINFINITNOM PROGRAMIRANJU 50- 64
8. VIŠEKRITERIJUMSKO PROGRAMIRANJE SA DELIMIČNIM UREDJENJEM KRITERIJUMA PO VAŽNOSTI 65- 71
9. PRIBLIŽNA REŠENJA U VIŠEKRITERIJUMSKOM PROGRAMIRANJU 72- 81
10. DUALNOST U VIŠEKRITERIJUMSKOM PROGRAMIRANJU 82- 87
11. PARAMETARSKO LINEARNO VEKTORSKO PROGRAMIRANJE..... 88- 98

LITERATURA 99-107

SADRŽAJ.. 108