Математички факултет

Универзитет у Београду

Мастер рад

Оцењивање ученика и примена образовних стандарда у области Алгебра и функције у основном образовању

Студент

Бојана Петрић 1089/2012

Ментор

проф. др Милан Божић

САДРЖАЈ

1. УВОДНЕ НАПОМЕНЕ

У оквиру многих дискусија и разговора о реформи образовања, који су вођени на великом броју семинара у претходним годинама, оцењивање ученика је означено као једна од активности у образовању коју би требало значајно унапредити. Осим ученика и родитеља, који мисле да би постојећа пракса оцењивања морала бити унапређена, такаво мишљење имају и наставници, који стално указују и на професионалне проблеме са којима се суочавају приликом оцењивања ученика.

Уопште у целокупном нашем образовању потребне су многобројне промене. Реформе би се морале много брже спроводити с обзиром на сталне социјалне промене, промењене дужине трајања и циљеве образовања.

Министарство просвете дало је многе прелоге за евалуацију који ће омогућити унапређивање квалитета образовања. До предлога су дошли полазећи од стручних анализа у оквиру оцењивања ученика, сугестија добијених од ученика, наставника и родитеља и искустава других земаља у овој области.

Зато ће овај рад бити покушај да се објасни да оцењивање ученика треба да буде у служби праћења квалитета ученичких знања, вештина и способности и да је најважнија улога оцењивања да праћењем остваривања очекиваних исхода наставе и учења подржи процес успостављања образовних стандарда. Да би стандарди испунили своју главну намену, а то је унапређивање квалитета образовања, потребно је директорима, стручним сарадницима и наставницима пружити подршку за укључивање стандарда у свакодневни наставни рад.

Предмет оцењивања и критеријуми оцењивања нису јасно дефинисани и у пракси постоји мноштво разлика у захтевима за исту оцену, постоје велике разлике у критеријуму оцењивања истог предмета од стране различитих наставника који раде у истој школи. Поред знања, наставници често оцењују и друге ствари (способности ученика, дисциплину, заинтересованост за њихов предмет). Поједини наставници оцене користе као средство за одржавање дисциплине, а понекад и не саопштавају ученицима оцене одмах, него их држе у неизвесности, што је погрешно, јер је важно ученицима дати повратну информацију одмах како би имали што више времена да оцену поправе.

Наставници схватају важност оцењивања, али им је потребно пружити подршку у развоју процеса оцењивања и помоћи да га ставе у функцију напредовања ученика у учењу. Велики помак и велика помоћ остварена је доношењем Правилника о оцењивању и образовних стандарда који ће допринети усаглашавању критеријума оцењивања.

Циљ овог рада јесте да отвори и прокоментарише најважнија питања везана за сам процес оцењивања и примену образовних стандарда приликом оцењивања у настави математике, са посебним освртом на област Алгебра и функције.

2. ФУНКЦИЈЕ ОЦЕЊИВАЊА

Оцењивање је процес који се састоји од више различитих фаза: планирање, праћење тока наставе и учења, бележење података о напредовању ученика, саопштавање повратних информација ученицима и родитељима и вредновање реализоване наставе. Свака од ових фаза има специфичну улогу, али тек све заједно обезбеђују да процес оцењивања омогући да се у континуитету прати и вреднује:

- напредовање ученика у односу на прописане исходе образовања
- квалитет и ефикасност наставе у остваривању исхода образовања

Оцењивање треба користити као средство за подстицање ученика на бољи рад, али и као средство за сагледавање успешности рада самог наставника.

Праћење рада, проверавање и оцењивање постигнућа ученика је саставни део васпитно–образовног рада и спада у веома важна питања наставе. Сама оцена треба да пружи податке о томе шта је ученик постигао, шта још увек није и на чему и како треба даље да ради да би напредовао. Оцењивање заправо значи и праћење индивидуалног напредовања ученика у остваривању наставног плана и програма. Оцењивање треба да има значајне и међусобно повезане функције, и то:

- ИНФОРМАТИВНУ – која се постиже тако што сваки наставник ученику даје „повратну информацију“ о напредовању у учењу и савладавању постављених циљева. Што се конкретно тиче математике, наставник треба ученику да скрене пажњу на грешке које прави приликом решавања задатака и оспособи га да сам може да уочи шта је добро урадио и где греши.
- ИНСТРУКТИВНУ – подразумева давање предлога и упутстава ученику шта је његов следећи корак како би напредовао у учењу.
- МОТИВАЦИОНА – подразумева коментаре и поступке наставника којима подиже заинтересованост и самопоуздање ученика. Информације које наставник даје ученику треба да су пре свега усмерене на добре и јаче стране учениковог рада и његових постигнућа. Препоруке морају бити усаглашене са нивоом знања и способностима ученика.

Све три наведене функције су међусобно повезане. Информативна је претпоставка за инструктивно – развојну, јер се план за „наредни корак“ наставља на постигнућа у „претходном кораку“. Те две функције доприносе остваривању треће – мотивационе функције. Ако су информације фокусиране на постигнућа, а инструкције на напредовање у следећој фази, то је одличан подстицај да ученик подигне своја постигнућа.

Да би ученици постизали боље резултате потребно је да буду заинтересовани за оно што уче. Није редак случај да за градиво које им предајемо постављају питања: „Шта ће мени ово, чему ово служи?“. Најчешће се учи механички, без разумевања, и циљ је само да се добије што боља оцена. Ретки су ученици који умеју да синтетизују научено у неку форму знања. Повећањем ученичких интересовања за математику или уопште наставу дошло би и до повећања ефикасности наставе. Многи су фактори који утичу на квалитет наставе, а неки од њих су и квалитет наставног особља које ради у школи, литература која се користи у настави, али и опремљеност кабинета за извођење наставе.

3. ПОСТУПЦИ ОЦЕЊИВАЊА

Најчешћи облик оцењивања ученика јесте путем усменог и писменог испитивања. Међутим веома је важно увести и нове поступке за праћење и анализу рада ученика. Као извор података о постигнућима ученика и квалитету наставе могу се прикупљати продукти ученичких активности и регистровати резултати домаћих радова.

3.1. ПОСМАТРАЊЕ

Посматрање је веома важно у процесу оцењивања, омогућава наставницима да стекну увид у особине и понашање својих ученика, што им знатно олакшава оцењивање. Посматрање може бити веома корисно у процесу оцењивања и када је у питању исход наставе математике. Посматрајући, наставник може да оцени колико је неки ученик успешан у оријентацији у простору и да ли правилно употребљава одреднице за простор.

Неке од предности посматрања у односу на остале поступке оцењивања јесу то што се применом овог поступка омогућава сарадња са наставницима других предмета, који се такође јављају у улози посматрача рада и понашања ученика. Када посматрање понављамо у истим или сличним ситуацијама, можемо уочити промене у понашању ученика као резултат процеса учења и наставе.

У току обраде новог градива наствник има могућнст да прати способност сналажења у новом градиву оних ученика који су у стању да примене стечено знање у новим садржајима. На овим часовима посебно се истичу ученици који брзо и лако схватају нове садржаје, тако да имамо више информација о њиховим способностима и ставу према предмету. Далеко више података о знању ученика прикупљамо на часовима вежбања, када ученици самостално решавају задатке, па можемо добити податке о степену научености одређеног градива, о томе како повезују поједине делове градива, како закључују и образлажу научено.

Велику помоћ можемо добити посматрањем понашања ученика у току рада у пару или групи, у међусобној комуникацији или комуникацији са наставницима.

На успешност посматрања у знатној мери утиче унапред одређен циљ и предмет посматрања, као и како ће се ти подаци бележити и употребљавати. Приликом регистровања података потребно је јасно одвојити коментаре и процене од чињеница.

3.2. ИСПИТИВАЊЕ

Оцењивање знања и праћење рада и напредовања ученика треба вршити у свим фазама наставе у току читаве школске године. Врло је важно при том користити различите методе и технике, као што су:

- различити облици усменог проверавања који се спроводе различитим методама: разговором, ученичким објашњавањем неких појава, процеса, презентовањем неког појединачног или групног пројекта, излагањем и дискутовањем на задату тему. Најчешће се састоји у томе да ученик одговара на постављена питања наставника, а наставник оцењује према утиску који је при том стекао. Усменим проверавањем наставник сазнаје колико је ученик способан да изрази своје мисли, да ли се изражава прецизно и јасно, колико је разумео градиво и како га зна објаснити. Усмено проверавање има и својих мана: ученик не може да бира стратегију одговарања, тј. одговара на питања редом како му их постављамо, спада у субјективне облике испитивања (јер наставник својим потпитањима може да утиче на одговоре ученика, али и он је тај који процењује квалитет одговора). Што се тиче наставе математике, усмено испитивање је у другом плану у односу на писмено. Углавном је базирано на активност ученика на часу. И приликом усменог одговарања опет се раде задаци, само овога пута пред таблом, где се од ученика захтева да објасни свој поступак долажења до решења. Оцењивање мора бити јавно, ученику се одмах саопштава оцена коју је добио, уз образложење шта је том оценом вредновано, односно, шта је у његовом раду било добро и које недостатке у даљем раду треба исправити. То делује као мотивационо средство и путоказ за даље напредовање ученика.

– контролне вежбе – писани облик проверавања који има за циљ да провери колико су ученици савладали поједине наставне области. Применом писмених провера развија се способност изражавања ученика у писаној форми. Најчешће се планирају по две контролне вежбе у полугодишту, и то после обрађене неке наставне целине. На часовима пре контролне вежбе треба ученицима скренути пажњу на важне појединости, саопштити им колико ће задатака бити на контролној вежби и које области ће бити провераване. Избор задатака мора бити разноврстан, занимљив и усклађен са увежбаваним садржајима. Решавањем математичких задатака ученици проширују и учвршћују своја знања, развијају своје способности, стичу корисна искуства у примени знања, развијају математичко мишљење и интересовање за учење математике. Добро је да се изабрани задаци класификују по нивоима сложености, било да се користи Блумова таксономија са пет нивоа (знање, схватање, примена, анализа, синтеза, евалуација), било да се користе три нивоа која дефинишу стандарди (основни, средњи и напредни). Задатке треба бирати тако да се крећу од задатака препознавања до задатака креативности, тј. од основног до напредног нивоа. Нешто што је корисно и што би ваљало користити на часу после контролне вежбе јесте да свако од ученика анализира свој рад – да запише где је грешио, које су његове јаче стране и шта сматра да треба да учини да би наредни пут био успешнији.

– писмени задаци – обавезно писмено проверавање ученика предвиђено наставним планом и програмом. Што се тиче математике, прописана су четири писмена задатка у току школске године, и то по два у сваком полугодишту. Разликује се од контролних вежби зато што се реализује после две – три наставне области и у нешто већој мери проверава трајност знања. Одабрани задаци треба да одговарају могућностима ученика и да се за сваки задатак најпре одреди јасан циљ. На писменом се најчешће даје 4 или 5 задатака. Много битније од броја задатака јесу захтеви који се постављају у тим задацима. Врло је важно да број задатака и њихова сложеност буду прилагођени могућностима ученика, како би сваки ученик постигао свој максимум. Због услова какве имамо у школи потребно је да у одељењу дајемо бар две групе задатака. Том приликом треба водити рачуна да задаци буду слични, приближно исте тежине, да се разликују само по датим и траженим подацима. Писмени задатак увек садржи и исправак.

Исправак треба организовати тако да се ученицима укаже на грешке, да се анализирају тежи задаци, а не да се све сведе на преписивање задатака са табле. Анализа писменог задатка служи наставнику као информација о томе како су ученици усвојили одређено градиво, па ће на основу тога усмерити свој даљи рад.

– домаћи задаци – имају за циљ да ученици самосталним радом утврде, прошире и учврсте стечена знања. Решавањем домаћих задатака ученици стичу навике упорности и одговорности у раду. Врло је важно дати ученицима упутства за израду домаћег задатка и саопштити им које су последице за неурађен домаћи задатак. Задаци би требало да буду повезани са градивом које је обрађивано на том часу, евентуално могу служити и као припрема за наредни час, али у том случају треба водити рачуна да задаци не буду претешки. Не треба задавати много обимне домаће задатке који ће ученицима одузети превише времена. Домаће задатке треба редовно проверавати и анализирати поједине задатке које ученици нису успели самостално да реше.

Код оцењивања врло је важан и разговор са ученицима о планираним исходима и очекиваним постигнућима, о примени различитих метода које воде ка остваривању дефинисаних циљева и исхода, критеријумима оцењивања, оствареним резултатима, начинима побољшања успеха и квалитета и учења и наставе.

Некад је добро укључити и саме ученике у процес оцењивања. Омогућити им да стекну увид у добре и лоше примере ученичких радова, како би уочили карактеристике доброг постигнућа. Добро је да ученици понекад пишу извештај о раду, описујући поступак и проблеме на које су наилазили док нису дошли до решења. После одређеног периода корисно је ученицима дати пређашње њихове радове како би имали увид где су грешили и колико су напредовали у том периоду.

Примена ових техника оцењивања у многоме зависи и од броја ученика у одељењу. Чињеница је да се број ученика разликује од школе до школе, од разреда до разреда. Чињеница је да на квалитет наставе може утицати и бројност одељења. У Математичкој гимназији у Београду, а и у специјализованим математичким одељењима краљевачке гимназије број ученика је од 15 до 20, самим тим се постиже већа пажња ученика на часу, али и већа посвећеност наставника ученику. Што је веће одељење, наставник има већи проблем да успе да придобије пажњу свих ученика.

4. КАРАКТЕРИСТИКЕ ДОБРОГ ОЦЕЊИВАЊА

4.1. СИСТЕМАТИЧНОСТ

Да би оцењивање било добро морамо бити систематични. Оцењивање подразумева више од провере да ли ученици раде задатак, да ли разумеју своје обавезе и да нису наишли на неке потешкоће. Наставник мора имати јасну свест о захтевима које поставља, мора имати и начин како да одреди где се ученици налазе у односу на вештину или знање које се оцењује. Један од начина за праћење ученичког напретка јесте да се направи јединствена табела и да се сваки учеников рад бодује одређеним бројем поена. Све што је потребно јесу табела и натпис шта је задатак, стандард, вештина или шта је потребно разумети у задатку. Требало би да ученицима ова табела буде позната, а понекад им се може и дати прилика да оцене сами себе уз објашњење како су до одређеног броја поена дошли.

Пример како би табела могла изгледати:

Табела за систематско оцењивање				
1	2	3	4	5
Ученик не може самостално да уради задатак.	Ученик је научио основне појмове и може да уради делове задатка уз велику помоћ наставника.	Ученик може да уради задатак уз помоћ наставника који га својим потпитањима наводи на решење задатка.	Може самостално и доследно да реши задатак.	Ради задатак независно и доследно и проширује или повезује са другим садржајима.

Наставник може и у својој свесци бележити своја запажања о активности ученика у току часа и на основу тога после одређеног времена добити податке о напретку ученика. Ове оцене могу допринети да добијемо информације о ефикасности наставе. Уколико превише ученика не може самостално да реши задатак, наставник се мора запитати зашто је то тако и мора нешто променити.

Нешто што би се још могло применити на часу јесте да се ученицима постави главно питање обрађивано тог часа, а да они одговоре напишу на папиру и да их подигну. Наставници тако могу да виде ко има потешкоћа, али и ко је тачно одговорио. Овим поступком се постиже да сви ученици размишљају, а не само поједини који су активни на сваком часу и стално се јављају. Избегава се да се ученици који дају погрешан одговор осећају нелагодно, док истовремено наставник има увид у то шта ученици нису разумели и за шта је потребно додатно објашњење.

На почетку часа је ученицима добро задати пар основних задатака које ојачавају основне вештине и помажу наставнику да уочи ко има проблема са основним садржајима. То је део учења који често прође неоцењен, а може представљати основу будућих неуспеха ученика. Иако је способност за решавање једноставних задатака важна, она не гарантује да постоји суштинско разумевање.

На основу ових примера види се да постоје различити начини да се обичне активности на часу претворе у систематско формативно оцењивање и веома је важно да се ове стратегије свакодневно примењују у настави јер се тако избегава класично испитивање које је често стресно за ученике, а и прати се рад ученика и њихово напредовање на сваком часу.

4.2. ПРУЖАЊЕ ПОДРШКЕ УЧЕНИЦИМА ДА ИСПРАВЕ СОПСТВЕНЕ ГРЕШКЕ

После одрађене и оцењене контролне вежбе наставници се труде да ученицима укажу на грешке, анализирају их и исправљају. Међутим, ученицима је најбитније да виде оцену коју су добили, а контролне (уколико их наставник не чува ради наставничке евиденције) често баце. Мали број ученика ће пажљиво слушати објашњења како не би правили исте грешке. Ученици који су све добро урадили ће се досађивати, а ученици који су урадили лоше могу бити деморалисани и неће пратити наставникова објашњења. Међутим, свакодневна комуникација између наставника и ученика и повратна информација дата на мање формалан начин има веће шансе да помогне ученицима да размисле о свом начину решавања задатка и да направе неопходне измене. Велики је број могућности да се прокоментарише рад тако да тиме ученици добију информације које су значајније и свеобухватније од саме оцене. Циљ проласка кроз ученички рад, било да је тест, квиз или нешто друго, јесте да ученик размисли о свом раду и да учи из искуства.

Рад у пару може бити користан јер ученици међусобно упоређују добијена решења и поступке које су користили приликом решавања задатака. Ученици се затим договарају који ће поступак приказати остатку одељења и при том дају и додатна објашњења и одговарају на постављена питања.

4.3. ПРУЖАЊЕ ПОДРШКЕ НАСТАВНИЦИМА ДА ПРИЛАГОДЕ НАСТАВУ

Дешава се да после одређене области наставник зада контролну вежбу, а онда остане поражен бројем недовољних оцена. Себи поставља питања: Како то да их ништа нисам научио? Шта сад да предузмем: опет се вратим на исто градиво или да наставим даље, па се мало више задржим на новом градиву?

Тестови могу показати шта ученици знају, а шта не. Континуирано и систематско оцењивање наставнику даје информацију која му је неопходна да би размотрили своје планове уколико им оцене показују да нешто није у реду. Могу више пажње посветити ученицима који имају потешкоћа у раду, али истовремено поставити веће циљеве онима који брже напредују.

Да би се стање побољшало, потребно је користити нека од савремених електронских средстава, чиме ће се повећати заинтересованост ученика, а самим тим и резултати. Ученицима више није интересантно само писање кредом по табли. Потребно је више часова одржати иновативним методама, а не само по два годишње, колико су сви у обавези. Да би наставници били у могућности да побољшају своју организацију часа, способност преношења свог знања на ученике, комуникацију са ученицима потребна су стална усавршавања наставника. Није само давољно завршити факултет, неопходна су и стална допуњавања знања и учествовање на стручним семинарима. Међутим, ту се долази до другог проблема. Док су наставницима у страним земљама плаћени трошкови семинара на којима усавршавају своја знања и методе, прате иновације и модерне токове у образовању, наше школе углавном немају средстава за то, па одлазак на семинар зависи од могућности самог наставника.

4.4. ЈАСНИ КРИТЕРИЈУМИ

Највећи проблем код оцењивања у настави математике свакако је критеријум оцењивања. Прво је веома важан критеријум за избор задатака на основу којих ће ученици бити оцењени. Задаци морају бити разноврсни по садржају, али и по тежини захтева, ни превише лаки, али ни превише тешки. Неопходно је да задовоље сва три образовна нивоа. Вечита дилема наставника је и како бодовати задатке, да ли све подједнаким бројем поена или за сложеније задатке дати више поена. И један и други начин има и предности и недостатака. Уколико све задатке бодујемо исто, изгледа да смо их све изједначили, а у супротном ризикујемо да ученик са два тачно урађена задатка не добија прелазну оцену. Следећи проблем је како бодове превести у оцене. Најчешће сваки наставник има своја правила како оцењује, али тако долазимо до проблема да један исти рад може бити оцењен са две, а понекад и три различите оцене, у зависности од бодовања које је наставник осмислио. У Србији је 1991. године у дидактичком упутству уз наставни програм из математике препоручена оријентациона скала за оцењивање. У Републици Српској је скала за оцењивање идентична са скалом која је код нас тада предложена, али је саставни део Правилника о проверавању и оцењивању, па је према томе обавезујућа за све наставнике.

ОЦЕНА	ДИДАКТИЧКО УПУТСТВО У СРБИЈИ
1	Од 0 до 40 %
2	Од 41 до 55 %
3	Од 56 до 70 %
4	Од 71 до 85 %
5	Од 86 до 100 %

Велику помоћ приликом оцењивања донео је Правилник о оцењивању ученика у основном образовању и васпитању објављен у „Службеном гласнику РС“, бр. 72/09, 52/11 и 55/13 од 5. јула 2013. године. На основу тог Правилника бројчано оцењивање успеха ученика обавља се на основу следећих критеријума:

1) ученик који не остварује минималан напредак у савладавању прописаног програма, не достиже захтеве који су постављени за основни ниво чак ни уз помоћ наставника, оцењује се оценом недовољан (1);
2) ученик који уз своје велико ангажовање и помоћ наставника успева да савлада школски програм и захтеве већег дела основног нивоа постигнућа, уз минималан напредак, може да решава најједноставније и најпростије задатке, али се стално мора подстицати на извршавање захтева добија оцену довољан (2);
3) ученик који успева да савлада школски програм са захтевима основног и већег дела средњег нивоа стандарда постигнућа, да се служи стеченим знањем, али није довољно самосталан у излагању и тумачењу наученог, већ му је за то потребна помоћ наставника, оцењује се оценом добар (3);
4) ученик који остварује значајан напредак у савладавању програма предмета и у потпуности, самостално испуњава захтеве, основног, средњег и делимично напредног нивоа стандарда постигнућа, који уме да повезује ново са раније стеченим знањем, уз висок степен интересовања добија оцену врло добар (4);
5) ученик који остварује веома значајан напредак у савладавању школског програма и у потпуности самостално испуњава захтеве основног, средњег и у већем делу напредног нивоа стандарда постигнућа, уз веома висок степен ангажовања добија оцену одличан (5).

Због различитих тумачења претходних критеријума од велике користи као основа за оцењивање може послужити и Блумова таксономија. Бенџамин Блум (Benjamin Bloom, 1956) осмислио је Таксономију циљева васпитања и образовања у три подручја - когнитивном (нове информације, мисаоне вештине), афективном (осећања, склоности, интересовања, вредности) и психомоторном (физичке и перцептивне активности и вештине). Циљеве и исходе у когнитивном подручју разврстао је у 6 основних категорија: основно знање, схватање, примена, анализа, синтеза и евалуација.

У следећој табели приказани су нивои таксономије описани демонстрираним знањима и вештинама и захтевима задатака на овим нивоима.

Блумова таксономија у когнитивном подручју - основа за оцењивање		
Компетенција	Демонстрирана знања и вештине:	Захтеви којима се проверава оствареност исхода на датом нивоу:
Знање	опажа и именује информације; зна датуме, податке, места; зна главне идеје	дефиниши, наведи, опиши, идентификуј, покажи, означи, изабери, испитај, именуј, ко, када, где, итд.
Схватање	разуме информацију; преводи из једног у други контекст; интерпретира податке, упоређује, разликује; уређује, групише, открива узроке; предвиђа	резимирај, опиши, интерпретирај, повежи, разликуј, процени, дискутуј, прошири

	последице	
Примена	користи информације; користи методе, појмове, теорије у новим ситуацијама; решава проблеме користећи усвојене вештине или сазнања	примени, демонстрирај, израчунај, комплетирај, покажи, реши, испитај, преобликуј/модификуј, повежи, промени, класификуј, експериментиши, истражи
Анализа	одређује структуру; организује делове; препознаје главни смисао; идентификује компоненте	анализирај, издвој, уреди, објасни, класификуј, подели, упореди, изабери
Синтеза	користи старе идеје за стварање нових; генерише из датих података; повезује знања са другим областима; предвиђа закључке / закључује	преобликуј/модификуј, интегриши, замени, направи план, предвиди - шта ако?, укомпонуј, формулиши, припреми, генерализуј/уопшти, поново напиши
Евалуација	упоређује, утврђује сличности и разлике између идеја; процењује вредност теорија и излагања; бира на основу рационалних аргумената; верификује вредност података; препознаје субјективност	процени, одлучи, оцени, провери, тестирај, измери/одмери, предложи, изабери, просуди, објасни, разликуј, закључи, компарирај, резимирај

Поред дефинисања нивоа постигнућа које тестом испитујемо, таксономија нас упућује и како да формулишемо захтеве у задатку. Наведени глаголи представљају и могуће захтеве у задацима - наставник може да формулише задатке помоћу њих (наведи пример ирационалних бројева, примени Питагорину теорему у задатку, објасни поступак решења задатка).

5. ВРСТЕ ОЦЕЊИВАЊА

У новом Правилнику о оцењивању говори се о три врсте оцењивања:

- ДИЈАГНОСТИЧКО ОЦЕЊИВАЊЕ – оцењивање које се спроводи на почетку школске године иницијалним тестирањем. Наставник процењује претходна постигнућа ученика у оквиру одређене области. Резултати иницијалног тестирања се не оцењују и служе за планирање рада наставника и даље праћење напредовања ученика.
- ФОРМАТИВНО ОЦЕЊИВАЊЕ – редовно проверавање постигнућа и праћење владања ученика у току савладавања школског програма. Усредсређено је на обликовање, усмеравање и вођење процеса учења. Подразумева постојање сталне комуникације између наставника и ученика. Има превентивну улогу јер својом благовременошћу спречава појаву неуспеха. Садржи повратну информацију у којој се говори шта је ученик савладао и препоруке за даље напредовање ученика.
- СУМАТИВНО ОЦЕЊИВАЊЕ – вредновање постигнућа ученика на крају програмске целине или за квалификациони период из одређеног предмета. Сумативне оцене сведоче о нивоу школске спреме ученика и селектују кандидате за упис у наредну фазу школовања.

И формативно и сумативно оцењивање треба да се заснивају на исходима који су садржани у школском програму и образовним стандардима.

Ове две врсте оцењивања су тесно повезане јер су сумативне оцене делом исход формативних оцена. Као и код формативних оцена и сумативна оцена може садржати образложење које има исту намену.

Закључна оцена на крају школске године утврђује се на основу свих оцена у току образовно-васпитног рада, уз сагледавање развоја и напредовања ученика и уважавање околности у којима стиче образовање. Оцена се закључује на основу најмање четири оцене. Закључна оцена не може бити мања од аритметичке средине свих оцена.

Образовни стандарди за крај обавезног образовања – стандарди постигнућа ученика значајна су новина у нашем образовању која је објављивањем у „Просветном гласнику РС“ 5. јула 2010. постала обавезујућа за примену. Стандарди су у великој мери допринели и помогли у дефинисању циљева учења и описали како изгледа када их ученик оствари и на тај начин су олакшали и сам процес оцењивања ученика.

6. ОЦЕЊИВАЊЕ ЗАСНОВАНО НА ИСХОДИМА И СТАНДАРДИМА

6.1. ИСХОДИ ОБРАЗОВАЊА

Исходи образовања су дефинисана знања, вештине, ставови и вредности које ученици треба да развију током образовања.

Исходи описују саме ученике: њихова знања, њихово понашање у одређеним ситуацијама и околностима, чему треба да теже, какве ставове да заузму према себи и другима.

Исходи образовања:

- усклађени су са узрастом и развојним карактеристикама ученика
- омогућавају систематско праћење и проверу остварености дефинисаних постигнућа
- њихова конкретна дефинисаност помаже наставнику да обликује и организује образовни процес
- прецизно су и јасно формулисани, чиме је смањена могућност различитог тумачења и приписивања различитих значења истим исходима
- могу бити заједнички за више наставних предмета или специфични за једну образовну област или један наставни предмет
- могу се односити на постигнућа остварена на једном образовном циклусу или имати одлику развојности и дугорочности остваривања

6.2. ОБРАЗОВНИ СТАНДАРДИ

У нашем образовању одавно постоје и јасно су дефинисани исходи образовања. Стандарди постигнућа се постепено граде кроз систематско праћење остваривања образовних исхода. Стандарди описују степен усвојености дефинисаних знања и развијености вештина. Помоћу стандарда се образовни циљеви и задаци преводе на много конкретнији језик који описује постигнућа ученика, стечена знања, вештине и умења.

Стандарди треба да обезбеде да сви ученици добију иста или бар слична знања и једнаке шансе да добију квалитетно образовање. Потребно је омогућити већу праведност у пружању могућности да сви буду вредновани на исти начин, помоћу истог критеријума. На нивоу школе они говоре наставнику који исход учења ученик треба да оствари на крају једног образовног циклуса.

С обзиром на то да образовни стандарди представљају показатељ знања, они служе да се помоћу њих упоређују постигнућа ученика. С друге стране, они такође показују наставнику шта и како треба да ради са ученицима да би они постигли резултате учења описане у стандардима. Имајући у виду шта је то што сви ученици треба да знају, наставник ће на основу тога одлучивати којим програмским садржајима ће посветити више времена, а којим мање. Пошто је образовним стандардима конкретно и јасно описано шта ученици треба да постигну, то ће у многоме помоћи наставницима да изаберу одговарајуће облике рада, методе и средства које ће користити у настави како би омогућили ученицима да достигну стандарде.

Током израде годишњег плана наставног рада потребно је анализирати стандарде на чијем достизању ће се радити у предвиђеном разреду. Иако су образовни стандарди дефиниасани за крај образовног циклуса, иако се поједине области обрађују само у једном разреду, треба пажљиво одредити када је најповољније радити на њиховом достизању. Важно је примењивати стандарде у целокупном образовном циклусу и често им се враћати и у оним разредима у којима није видљива веза између тих стандарда и наставног програма. Ради лакшег рада пожељно је обележити у годишњем и месечном плану рада наставника стандард или више стандарда на које се односе одређени делови наставног програма, то јест одређене теме. Све чешће се и у обрасцима за дневне припреме очекује од наставника да попуни образовни стандард на који се односи одређена наставна јединица.

У документу Образовни стандарди за крај основног образовања за математику јасно и прецизно је дефинисано како се стандарди обележавају. Тиме се постиже да свима буде јасно која ознака се односи на који стандард. Означени су на следећи начин: скраћеница за назив предмета (МА – математика); први број је ознака за ниво (1. – основни ниво, 2. – средњи ниво и 3. – напредни ниво); други број је ознака за област којој стандард припада (1. – Бројеви и операције са њима, 2. – Алгебра и функције, 3. – Геометрија, 4. – Мерење и 5. – Обрада података); трећи број је редни број стандарда у одређеној области на одређеном нивоу. На пример МА.1.5.3. је ознака за стандард из математике који је трећи по реду у области Обрада података на основном нивоу.

У годишњем плану рада наставници могу и на неки други начин да опишу или представе стандарде које ће посебно остваривати у одређеном разреду. У месечном плану, у зависности од специфичности сваког предмета, наставници бележе стандарде којима ће се највише бавити у том месецу.

Што се тиче образовних стандарда за крај основног образовања, они су постављени на три нивоа постигнућа. Нивои описују захтеве различите тежине, од једноставних ка сложеним. Сваки наредни ниво подразумева савладаност претходног нивоа.

<u>Основни ниво</u>

Први ниво представља основни ниво знања, умења и вештина. Подразумева да ученик влада основним појмовима, користи одговарајуће термине и ознаке. Очекује се да ће сви ученици, а најмање њих 80% остварити овај ниво.

<u>Средњи ниво</u>

Овај ниво подразумева да је ученик способан да сам издваја одговарајуће примере и уме да истиче њихова карактеристична својства. Показује шта је то што просечан ученик може да достигне. Очекивања су да ће 50% ученика достићи средњи ниво.

<u>Напредни ниво</u>

Трећи ниво достижу ученици који у потпуности владају појмовима, користе их и примењују у неким сложенијим задацима и једноставнијим доказима. Очекује се да ће 25% ученика постићи овај ниво.

Образовне стандарде за крај обавезног образовања из математике сачинила је група стручњака сачињена од наставника математике основних и средњих школа и Математичке гимназије, професора са факултета, сарадника са Института за психологију и чланова Завода за вредновање квалитета образовања и васпитања. Они су анализирали план и програм у школама, уџбенике који се користе у настави и предмет поделили у пет области. За сваку област најпре је одређено шта је то што ученици треба да знају за најнижи , а шта за највиши ниво. Затим је уследило пробно тестирање чији је циљ био да се провери осмишљени начин дефинисања исказа, да се добију информације о исказима и провери квалитет задатака који су осмишљени за ту сврху.

Након анализе резултата и поправке предлога дефинисана су три нивоа постигнућа и 66 одговарајућих исказа, који представљају образовне стандарде за крај обавезног образовања.
Садржај предмета подељен је у следећих пет области:

1. БРОЈЕВИ И ОПЕРАЦИЈЕ СА ЊИМА

Ова област обухвата садржаје везане за скупове природних, целих и рационалних бројева као и извођење основних операција са њима. Предвиђа превођење децималних бројева у разломке и обрнуто, али и израчунавање једноставнијих и сложенијих бројевних израза. На напредном нивоу подразумева да ће ученици умети да користе бројеве и бројевне изразе у реалним ситуацијама.

2. АЛГЕБРА И ФУНКЦИЈЕ

Подразумева да ученици на основном нивоу умеју да решавају најједноставније линеарне једначине, израчунавају степен задатаг броја и изводе основне операције са степенима. Предвиђа да ученик уме да одреди вредност функције задате таблицом или формулом. Средњи ниво подразумева да је ученик рачунске операције довео до солидног степена увежбаности и уме да осим линеарних једначина решава и системе линеарних једначина са две непознате, затим изводи основне операције са полиномима, а што се тиче функције уме да графички интерпретира својства функција и да везује за та својства појам директне пропорционалности. Да би ученик постигао напредни ниво, потребно је да саставља и решава линеарне једначине и неједначине, зна и примењује формуле за разлику квадрата и квадрат бинома, трансформише алгебарске изразе и своди их на најједноставнији облик.

3. ГЕОМЕТРИЈА

Област која је ученицима стандардно најтежа и из које постижу најлошије резултате. Да би био остварен основни ниво неопходно је да ученици владају основним геометријским појмовима (дуж, полуправа, права, раван), разликују основне врсте многоуглова и геометријских тела. На вишим нивоима потребно је да ученици израчунавају површине и запремине геометријских тела, укључујући примене Питагорине теореме, примењују подударност и сличност троуглова повезујући тако разна својства геометријских објеката.

4. МЕРЕЊЕ

Ова област подразумева познавање јединица за дужину, површину, запремину, масу, време и углове и њихово претварање из мањих јединица у веће и обрнуто. Ова област је веома мало заступљена у програму и уџбеницима који се користе у настави математике. Највише се обрађује у 4. разреду основне школе, док се у вишим разредима основне школе слабо говори о овој теми, па онда није ни чудо што ученици немају потребно знање из ове области. Добро је што је овој области посвећено више пажње у оквиру образовних стандарда јер се доста користи у другим предметима, а и неопходна је за свакодневни живот.

5. ОБРАДА ПОДАТАКА

Знања и вештне из ове области су веома важне за свакодневни живот, па не чуди што је овој области посвећено доста пажње. Основни садржај ове области представља прикупљање података, њихово приказивање табеларно и графички, као и читање и тумачење тих приказа. Поред поменутог ту је и рачун са пропорцијама и процентима.

6.3. ПРИМЕНА СТАНДАРДА У ПРАЋЕЊУ И ВРЕДНОВАЊУ ПОСТИГНУЋА УЧЕНИКА

Образовни стандарди треба пре свега да служе као модел на основу кога ће наставници моћи да прате и вреднују успех својих ученика. Ти подаци касније ће моћи да се користе ради вредновања постигнућа ученика на системском нивоу.

Стандарди осим што усмеравају наставнике за планирање наставе, они представљају смерницу и за оцењивање ученика. Школско оцењивање је веома комплексан процес јер укључује и оцењивање других аспеката рада, контекста у коме се врши оцењивање, мотивацију и лични развој ученика, тако да не може да се сведе само на процену достигнућа стандарда, тако да се може повезати одређени ниво са одређеном оценом.

Нивои описани у стандардима служе наставнику као оријентир ка квалитету постигнућа које треба да остваре сви ученици, а који само неки. Стандарди помажу да се индивидуализује наставни рад, бар на три нивоа, а то значи да се садржаји и захтеви прилагоде ученицима. При том је важно водити рачуна да се не ограничи могући напредак сваког ученика, тако што ћемо му постављати захтеве само са једног нивоа, већ, напротив, мотивишући га да достигне напредни ниво. Нивои су корисни наставнику да добро одмери захтеве за проверу постигнућа ученика, јер га подсећају на то која су суштинска, најбитнија знања, умења и вештине ученика и омогућавају му да постави захтеве тако да сваки ученик може да оствари успех.

Мада је увођењем образовних стандарда много учињено на уједначавању критеријума, ипак постоје још многе дилеме. Око многих задатака и даље постоје потешкоће у који од нивоа их треба сврстати.

Последњих година збирке задатака из математке многих издавача базиране су на образовним стандардима, задаци су подељени на задатке основног, средњег и напредног нивоа.

7. АЛГЕБРА И ФУНКЦИЈЕ У ОСНОВНОМ ОБРАЗОВАЊУ

Један од делова математике који се изучава у основној школи и који спада у једну од пет области на завршном испиту јесте Алгебра и функције. Још у млађим разредима ученици су се сусретали са једначинама и неједначинама, које су у старијим разредима проширене, најпре у скупу целих бројева, затим рационалних и у седмом разреду реалним бројевима. Осим једначина и неједначина у основној школи од области које припадају Алгебри и функцијама изучавају се још: Цели и рационални алгебарски изрази, Зависне величине и њихово графичко представљање у седмом разреду и Линеарне функције и Системи линеарних једначина с две непознате у осмом разреду.

У наставку ће бити више речи о овим темама, о томе како се обрађују уз навођење конкретних примера на различитим нивоима постигнућа.

7.1. ЦЕЛИ И РАЦИОНАЛНИ АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

У наставном програму за седми разред област Цели и рационални алгебарски изрази је најобимнија. Садржај теме распоређен је у три целине: степен, полиноми и дељивост. Најпре се реализују садржаји о степену, затим појам алгебарских израза и полиноми до растављања на чиниоце, а онда дељивост и растављање полинома на чиниоце са применама. Основни циљ ове теме јесте да се на основу познавања својстава степена успешно врше идентичне трансформације полинома.

За реализацију ове наставне теме важно је да:

1. се сам приступ реализацији наставних садржаја о алгебарским рационалним изразима не разликује у већој мери од приступа у претходном наставном програму за седми разред,
2. највећи део садржаја треба реализовати и увежбавати кроз примере који на најбољи начин илуструју појмове степена, монома, полинома, алгебарског израза и др. и операције са њима,
3. се од предвиђених 46 часова, за комбинован рад обрада – увежбавање употреби 19 часова (за 19 наставних јединица), још 19 часова за увежбавање, утврђивање и систематизацију реализованих 19 наставних јединица, а да се 8 часова предвиди за проверавање стеченог знања о рационалним алгебарским изразима.

У наредној табели приказан је начин остваривања плана ове области.

Садржај програма	**Број часова**	**Активности у образовно-васпитном раду**		**Начини и поступци остваривања рада**	**Циљеви и задаци садржаја програма**
		Ученика	**Наставника**		
ЦЕЛИ И РАЦИОНАЛНИ АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ	46(19+27)	уочава именује разликује упоређује открива релације изражава их	-презентује -усмерава ученика -подстиче ученика на увиђање, закључивање, упоређивање	-фронтални -индивидуални -групни -рад у пару	- степен чији је изложилац природан број; операције са степенима; - степен производа, количника и степена - алгебарски изрази, полиноми и операције (мономи, сређени облик, збир, разлика, производ полинома) - операције са полиномима (трансформације збира, разлике и производа полинома у сређени облик полинома) - квадрат бинома и разлика квадрата и примене - растављање полинома на чиниоце

Појам степена ученицима је познат од раније. Сада се појам степена a^n проширује тако да $a \in R$ и $n \in N$. Степен чији је изложилац нула или цео негативан број се не изучава у седмом разреду. Реализација ове теме започиње детаљном изградњом појма степена: упознавање степена чији је изложилац природан број као и операција са таквим степенима, с примерима примене у физици и другим областима. Ова наставна јединица има за циљ да се надовеже на познате ствари истичући општи појам степена.

Појам степена се изводи из познатих дефиниција квадрата, куба уз навођење примера којих треба да буде што више, при чему је посебно важно да ученици једнакост $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} = a^n$ добро усвоје и то у оба смера, тј. израз 3 · 3 · 3 · 3 · 3 записују као 3^5, а x^4 као $x \cdot x \cdot x \cdot x$.
Важно је инсистирати на усменом израчунавању вредности степена у једноставнијим случајевима.

Било би корисно истаћи да у општем случају основа и изложилац не могу заменити места. Довољно је навести неколико примера.

$$3^2 \neq 2^3,\ 5^3 \neq 3^5, \ldots$$

Ученике треба упознати са великом брзином раста степена (чија је основа већа од 1) приликом повећавања изложиоца.

$3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, $3^5 = 243$, $3^6 = 729$, $3^7 = 2187$, $3^8 = 19\,683$ ...

Добра методичка прича о расту степена јесте прича о настанку шаха: индијском краљу, изумитељу шаха и зрнима пшенице.

Према легенди, индијском краљу се толико допала нова игра шах да је творцу ове игре као награду понудио шта год пожели. „Желео бих да ми на прво поље шаховске табле ставите једно зрно пшенице, на друго два, на треће четири, на четврто осам и на свако следеће поље двоструко више зрна пшенице него на претходном пољу“, рекао је скромно изумитељ игре. Краља је зачудила његова „скромност“, али је наредио да му се испуни жеља. Међутим, убрзо је схватио да у читавој Индији нема довољно пшенице да се на овај начин попуне сва поља шаховске табле. Број зрна пшенице који је тражио творац шаха једнак је збиру 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + ... који износи 18 446 744 073 709 551 615 (18 квадрилиона 446 трилиона 744 билиона 73 милијарде 709 милиона 551 хиљада 615), што је много више од пола трилиона тона жита.

Када говоримо о примени степена реч је заправо о запису који се доста употребљава у физици, хемији, биологији, информатици и осталим математичким дисциплинама, због чега је и назван научним. Користи се пре свега када треба записати много мале бројеве (као што су, на пример, полупречник атомског језгра, гравитациона константа, величина бактерије и тако даље) или пак доста велике (разна растојања у свемиру, број молекула у килограму неке супстанце, број бактерија у поквареном млеку и слично).

Пример 1: Авогадров број (Авогадрова константа) представља број молекула у једном молу супстанце и износи $6{,}02214199(47) \cdot 10^{23}$ по молу.

Пример 2: Светлосна година је дужина пута коју светлост пређе за једну годину. Брзина светлости је $3{\cdot}10^8$ m/s, а у години дана има 60 · 60 · 24 · 365 = 31 536 000 секунди. Тражена удаљеност износи $3{\cdot}10^8 \cdot 31\,536\,000 = 94\,608\,000 \cdot 10^8$ m = 9 460 800 000 000 km, па светлосна дужина приближно представља дужину нешто мало мању од девет и по хиљада милијарди километара.

Пример 3: Познато је да се једна меморијска ћелија у рачунару зове бит. Један бајт садржи 8 бита. Један килобајт (кВ) је $2^{10} = 1024$ бајта. Један мегабајт (МВ) има 2^{10}, дакле 1024 килобајта. Један гигабајт (GB) је 2^{10} или 1024 мегабајта, а један терабајт (ТВ) има 2^{10} или 1024 гигабајта.

Дакле, један килобајт има 2^{10}, мегабајт има 2^{20}, гигабајт има 2^{30}, а један терабајт има 2^{40} бајта. Број $2^{40} = 1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot 1024 = 1099511627776$.

Добро је ученицима показати и добре и лоше стране оваквог записивања бројева. Добра страна, због које се запис и користи често, јесте та што нам овакав запис омогућава много бољи увид о колико великом, односно о колико малом броју је реч. Запис нам указује на то колико нула има неки број, па их не морамо бројати. На пример, много је лакше сагледати запис $2{,}5 \cdot 10^{34}$, него уобичајени запис одговарајућег броја (чак и при раздавајању цифара у групе по три)

25 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000

Слично је и са малим бројевима. На пример, упоредите следеће записе једног истог броја:

$2{,}1 \cdot 10^{-21}$ и 0,000 000 000 000 000 000 002 1

Неопходно је истаћи још једну предност научног записа броја. Бројеве записане на овај начин је лакше множити и делити, што је са практичног становишта веома значајно. Добро је познато да када треба множити много велике бројеве или пак оне много мале не може нам помоћи ни калкулатор. Такође, сваки рачунар има своја ограничења када треба да прихвати овакве бројеве. Није лако ни „ручно“ изводити операције са овим бројевима: „мале“ и „велике“ бројеве записане на уобичајен начин тешко можемо и да сагледамо, а још теже да рачунамо са њима.

Пример 4: Колико је 300 000 000 000 000 : 200 000 000 000?

Ако дате бројеве преведемо у научни запис, брзо добијамо решење.

300 000 000 000 000 : 200 000 000 000 = $(3 \cdot 10^{14}) : (2 \cdot 10^{11}) = \frac{3}{2} \cdot 10^3 = 1{,}5 \cdot 1000 = 1500$.

Лоша страна овог записа је његова недовољна прецизност која се пре свега односи на велике бројеве. Међутим, та непрецизност је потпуно у духу ситуације на коју се ти бројеви односе. На пример, када у километрима одређујемо растојање између две планете, нормално је дозволити непрецизност типа „километар мање, више“. Слично је са бројем бактерија у соби и тако даље. Дакле, велике бројеве представљене научним записом треба углавном схватати као приближне описе бројности који су често и довољни за примене (понекад се до тачних вредности не може ни доћи, па су приближне вредности и једине које се користе). Ове напомене су у веома блиској вези са оним што се може чути и у обичном говору, па се можемо осврнути и на то. На пример, када се неко распитује за цену производа, при чему не може ни да претпостави колико она износи, он пита за ред величине те цене. Купац заправо жели да сазна да ли цена износи неколико стотина динара, неколико хиљада динара или неколико десетина хиљада. Дакле, не тражи тачну суму (у динар) већ само њену приближну вредност.

Код множења степена једнаких основа добро је комбиновање обраде и увежбавања, с посебним освртом на степене броја 10, ради корелације са наставом физике и информатике.

Након обрађених операција са степенима неопходно је добро увежбати на примерима. На конкретним примерима треба ученицима показати да, у општем случају, није директно могуће:

- сабирати и одузимати степене једнаких основа, а различитих изложилаца;
- сабирати и одузимати степене једнаких изложилаца, а различитих основа;
- сабирати и одузимати степене различитих основа и различитих изложилаца;

- множити и делити степене различитих основа и различитих изложилаца.

Потешкоће у савладавању садржаја о степену долазе отуда што се не уважава принцип поступности и што се не посвећује више времена приликом увођења одговарајућих појмова. Од тога у многоме зависи како ће бити усвојени садржаји о рационалним алгебарским изразима, посебно садржаји о полиномима.

7.1.1. АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

Алгебарски изрази не представљају нове садржаје за ученике седмог разреда. Са изразима (бројевним и оним са променљивама) ученици се срећу од самог почетка школовања, те је циљ ове наставне јединице да систематизује и допуни постојеће знање. Наставни садржаји везани за алгебарске изразе имају јасно исказан континуитет са наставним програмима математике у претходних шест година. Оно што би ученици требало да су усвојили кад су у питању алгебарски изрази обухвата:
- примере алгебарских израза,
- неиздиференцирану представу о појму алгебарских израза,
- израчунавање вредности сложенијих алгебарских израза и вођење рачуна о приоритету операција,
- појам квадрата реалног броја и
- појам корена реалног броја.

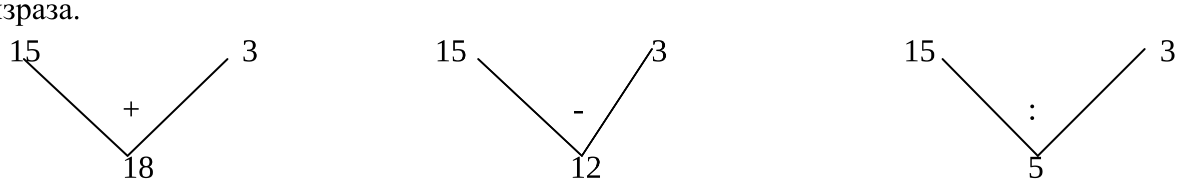
Појам израза који је уведен у скупу рационалних бројева, сада се проширује на скуп реалних бројева и уводи назив алгебарски рационални израз. Поред одређивања бројевне вредности израза, треба указати и увежбати, на једноставнијим задацима, дефинисаност алгебарског рационалног израза.

Методички приступ увођења појма рационалног алгебарског израза своди се на шему:

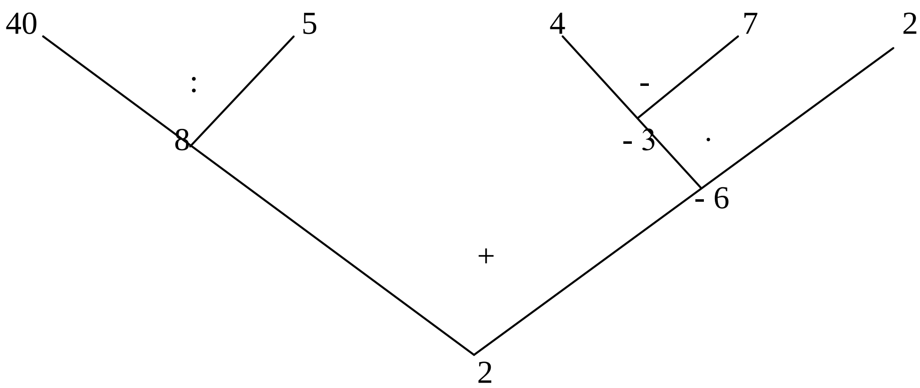
КАРАКТЕРИСТИЧНИ ПРИМЕРИ	→	МЕНТАЛНА СЛИКА	→	ПОЈАМ

Добро је да се уводни примери, када је реч о појму рационалних алгебарских израза, односе на изразе са константама и промењивима, при чему се као нови појам уводи и појам „дрвета“ израза.

Пример 4:



Пример 5: Израз (40 : 5) + (4 – 7) · 2 уз помоћ дрвета можемо приказати:



Дакле, (40 : 5) + (4 – 7) · 2 =

= 8 + (- 3) · 2 =

= 8 + (- 6) =

= 2

Из карактеристичних примера изводе се закључци о томе шта све могу бити рационални алгебарски изрази, на који начин се „граде“ и како се израчунава њихова бројевна вредност. Наравно, не треба пропустити прилику и не подсетити ученике да је „забрањено“ делити нулом. На одговарајућим примерима треба показати шта јесте, а шта није рационални алгебарски израз, тј. објаснити зашто израз $\frac{\mathrm{a}+2}{\sqrt{b}}$ није рационалан, већ ирационалан алгебарски израз. Али, такође, треба показати да израз $\frac{a+b}{\sqrt{3}}$ јесте рационалан алгебарски израз са ирационалним коефицијентом. Неопходно је ученицима нагласити да ирационалне алгебарске изразе треба разликовати од израчунавања вредности рационалног алгебарског израза за ирацоиналне вредности промењљивих.

На пример, израз $\frac{x^2-1}{x^4}$ је рационалан и за x=$\sqrt{2}$ има вредност $\frac{1}{4}$ која је рационалан број.

Израз $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}^4-1}$ је такође рационалан, али за x=$\sqrt{2}$ има вредност $\frac{\sqrt{2}}{3}$ који је ирационалан број.

Ученицима још треба скренути пажњу на дефинисаност израза. Израз $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}^4+5}$ је дефинисан за сваки реалан број x, тако да је увек могуће израчунати његову вредност, док израз $\frac{\mathrm{x}^4+2}{\mathrm{x}}$ није увек дефинисан, јер за x = 0 није могуће израчунати његову вредност.

7.1.2. ПОЛИНОМИ

Посебно место међу изразима имају полиноми и операције са њима. Појам полинома уводимо различитим примерима, при чему је потребно јасно показати шта јесте, а шта није полином и каква је разлика између полинома без промењљивих и полинома са једном, две или више промењљивих. Суштина је да ученици полином прихвате као рационалан алгебарски израз чији је именилац константа различита од нуле.

Пример 1: Рационални алгебарски изрази x, $\frac{1}{2}x$, x^2+x+1, x^3-2x+5 су полиноми једне промењљиве x.

Рационални алгебарски изрази $2x + 3y$, $x^2 - 3y + 7$ су полиноми две променљиве x и y.

Рационални алгебарски изрази $\frac{5}{x}$, $\frac{5a^2-8}{x+2}$, $\frac{c+d}{a-b}$ нису полиноми.

За почетак је добро узимати примере полинома са једном или две променљиве јер би више променљивих додатно отежало прихватање великог броја нових појмова.

Неопходно је увести и појмове монома, коефицијента монома, појам сличних монома, затим бинома и тринома као збирове два, односно три монома који нису слични. Познавање појма сличних монома олакшава увођење операције сабирања монома, а самим тим и сабирања полинома. Појам сличних монома, такође, није лако строго дефинисати на једноставан начин, што је помало чудно, будући да је реч о односу који се веома једноставно описује обичним свакодневним језиком: ако два монома имају исте степене променљивих без обзира на њихов поредак, онда су ти мономи слични. Још је једноставније визуелно препознати сличне мономе, те нема разлога оптерећивати ученике било каквим детаљима у вези са дефиницијом ове релације. Иако смо потпуно свесни да, са математичке тачке гледишта, овакво представљање монома има много мана и недостатака, сматра се да је потпуно задовољавајуће да буде на овом нивоу.

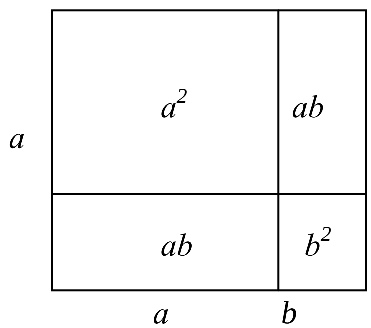
Ради лакшег и бољег савладавања ове области потребна је поступност, од лакшег ка тежим и од једноставнијих ка сложенијим примерима, и стрпљење јер је савладавање операција са полиномима од огромног значаја за опште математичко образовање као и за савладавање наредних садржаја о полиномима. Један од разлога оваквог излагања јесте развијање систематичности приликом решавања задатака који се односе на садржаје остатка ове теме. Поред систематичности, уредност, поступност, па и стрпљење неопходни су приликом решавања поменутих задатака. Добро је познато да су непрегледно и неуредно записивање често узрок грешака. Такође, вештина баратања изразима углавном се стиче искуством, те се у том смислу од ученика очекује велико залагање и стрпљење.

Са циљем да се што боље увежбају множење монома и множење полинома су раздвојене у две наставне јединице. Код множења монома треба применити методски поступак који подразумева решавање много примера уз примену већ познатих законитости (закон комутације, закон асоцијације, правила за множење степена истих основа, степеновање производа и степеновање степена) и систематичног приступа множењу, тј. множења константи константама и променљивих променљивама.

Код множења полинома потребно је осим већ поменутих законитости за реалне бројеве укључити закон дистрибутивности. Потребно је водити рачуна о навођењу примера тако да се крене од множења монома мономом, множења бинома биномом, до множења полинома полиномом. У примерима користити полиноме једне променљиве и степена не већег од два. Претходни поступци представљају увод за поступак множења два полинома, при чему ниједан од њих није моном. Овај поступак, захтевнији од претходних. Ученици га најчешће колоквијално зову „сваки са сваким“ јер је управо та идеја у основи самог поступка. Пожељно је што чешће истицати дистрибутивност као основу поступка како би ученици то прихватили. Иако сам поступак није суштински компликован, доста су честе грешке које ученици праве приликом множења два полинома. Узроци су најчешће неуредност, несистематичност, нестрпљивост, недостак концентрације и слично. Велики број наставника инсистира на јединственом начину спаривања монома једног полинома са мономима другог да би се могућност грешке свела на минимум.

7.1.3. КВАДРАТ БИНОМА

Део који је ученицима посебно тежак су квадрат бинома и разлика квадрата. Квадрат збира и квадрат разлике представљају примену множења полинома на одређивање квадрата бинома, без обзира да ли он представља збир или разлику два монома. Та примена се може илустровати најпре на конкретним примерима: $(x – 2)^2$, $(a + 1)^2$, а потом и уопштити $(x + y)^2$ и $(x – y)^2$ и извести опште правило квадрирања збира, односно разлике. Пожељно је правило квадрирања бинома илустровати и геометријски.



Квадрат чија страница има дужину $a + b$, састоји се од квадрата чија страница има дужину a, два правоугаоника чије странице имају дужину a и b и квадрат чија страница има дужину b.

Тада је површина датог квадрата $(a + b)^2$ једнака збиру површина делова из којих се квадрат састоји, дакле a^2, $2ab$ и b^2, па је очигледно: $(a + b)^2 = a^2+2ab + b^2$.

Овде је можда добро повезати квадрат збира и Питагорину теорему која је изучавана на почетку седмог разреда и заузима значајно место у настави математике. Квадрат збира и квадрат разлике отварају могућности за много лепих и корисних примена Питагорине теореме на проблеме које није било могуће решити без трансформације квадрата бинома.

Не ретко у пракси ћемо видети да ученици израз $(a + b)^2$ изједначе са a^2+b^2, а израз $(a-b)^2$ са изразом a^2-b^2. Наведене грешке се најлакше отклањају упорним увежбавањем израчунавања квадрата бинома, инсистирањем на томе да се члан „двоструки први пута други“ не изоставља, али и једноставним контрапримерима, тј. доказивањем да квадрат збира није једнак збиру квадрата.

На пример: $(4 + 6)^2 = 10^2 = 100$, $4^2 + 6^2 = 16 + 36 = 52$.

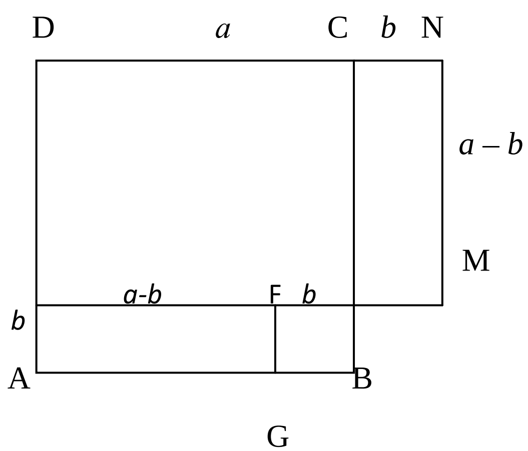
7.1.4. РАЗЛИКА КВАДРАТА

Разлика квадрата представља директну примену множења полинома, при чему се трансформација користи само у једном смеру – смеру трансформације производа збира и разлике два израза у разлику квадрата. Обрнута трансформација ће се посебно изучавати када буде речи о растављању полинома на чиниоце.

Најпре кренути са конкетним примерима, доказ формуле у опшем случају, а затим и геометријска интерпретација формуле. Илустровање треба да је прегледно, јасно и дато са објашњењима сваког корака.

Геометријска илустрација доказа:

1) За илустрацију користити квадрате ABCD и BEFG и правоугаонике AGFR и EMNC.



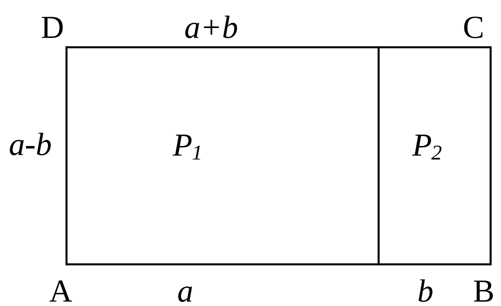
Површина шестоугла AGFECD једнака је разлици површине квадрата странице a и квадрата странице b,односно a^2- b^2.

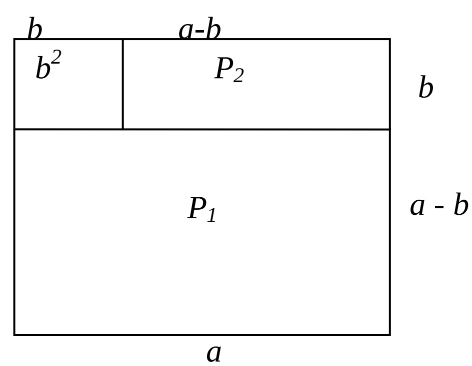
Како је правоугаоник AGFR подударан правоугаонику EMNC, то је на бази допунске једнакости

$$P_{AGFECD} = P_{RMND}$$

односно a^2-b^2=$(a+b)(a-b)$.

2)





Површина правоугаоника ABCD чије странице имају дужину $a+b$, односно a-b састоји се из два правоугаоника, P_1 и P_2. Ако се дати правоугаоник P_2 премести (заротира), добија се нова фигура која представља квадрат чија страница има дужину a из кога је исечен квадрат чија страница има дужину b. Како су површине те две фигуре једнаке, то је $(a+b)(a-b)=a^2 – b^2$.

7.1.5. РАСТАВЉАЊЕ ПОЛИНОМА НА ЧИНИОЦЕ

С обзиром на то да је растављање полинома на чиниоце доста тешко за ученике узраста 13 – 14 година, неопходно је велико стрпљење и поступност у раду, посебно у примени усвојених формула. Ова наставна јединица у извесном смислу резимира и систематизује до сада стечена знања, али и нуди нове погледе на могућности примене. Полазна тачка свакако треба да буде дистрибутивност која се чита слева надесно као једнакост

$$A \cdot B + A \cdot C = A \cdot (B + C),$$

а затим разлика квадрата

$$A^2 - B^2 = (A - B)\,(A + B)$$

и најзад квадрат бинома

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2.$$

Приликом извођења правила треба поћи од производа $(a+b)(a-b)$, $(a+b)(a+b)$, $(a-b)(a-b)$ и трансформисати их у изразе a^2-b^2, $a^2+2ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$, а затим користећи својство симетричности једнакости, извести одговарајуће формуле (правила).

Када је реч о издвајању заједничког чиниоца испред заграде, треба поћи од издвајања константе, преко издвајања промењиве испред заграде, до издвајања монома и полинома, као заједничког фактора.

Нарочито је важно научити ученике да препознају разлику квадрата, односно квадрат збира или квадрат разлике, а потом да их на одговарајући начин трансформишу у производ. Код решавања конкретних задатака, све док се не стекне потребна сигурност, дати полином треба прилагодити облику усвојене формуле, а тек онда га раставити на чиниоце, на пример
$9a^2 - 25b^2 = (3a)^2 - (5b)^2$, $x^2+4x+4=x^2+2\cdot 2x+2^2$.

7.1.6. ПРИМЕНА ПОЛИНОМА

Успешно вршење идентичних трансформација полинома може се постићи само уз добро познавање садржаја о степену, као и својстава рачунских операција, посебно својства дистрибутивности, које се често користи.

Што се тиче једначина, обрађују се непотпуне квадратне једначине, тј. једначине облика $ax^2= b$, $ax^2+bx=0$, као и оне једначине које се после одговарајућих трансформација своде на једну или више линеарних једначина.

Одређен број примера односи се и на доказивање једнакости, тако што се полазећи од познатих једнакости, коришћењем трансформација полинома добијају тражене једнакости.

Слично је и код неједначина и неједнакости, где се, коришћењем идентичних трансформација полинома, од наизглед квадратних неједначина добијају најједноставније линеарне неједначине и полазећи од чињенице да је квадрат сваког реалног броја ненегативан број, добија низ врло интересантних неједнакости. Неједначине облика $ax^2 > b$, $ax^2+bx < 0$ разматрају се као појединачни примери, а систематски приступ решавању неједначина тих облика није предвиђен наставним програмом за седми разред.

Ослањајући се на стечена знања о дељивости у скупу N, релација дељивости и једнакост $a=bq+r$ сада се проширује на скуп целих бројева.

Поред тога, на прикладан начин се уводе правила дељивости збира и производа целих бројева, уз одговарајуће уопштавање и примену симболике. Усвојени садржаји долазе до изражаја у задацима из теорије бројева, а посебно једнакост $a=bq+r$, *NZD* и *NZS*. Треба показати на који начин се трансформације полинома могу искористити за краће и брже израчунавање квадрата природних бројева, множење природних бројева, квадрирање бројева који имају последњу цифру 5 и сл. али и за доказивање дељивости, скраћено сабирање, решавање проблема везаних за примену Питагорине теореме.

7.1.7. ОБРАЗОВНИ СТАНДАРДИ У ОБЛАСТИ ЦЕЛИ И РАЦИОНАЛНИ АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

У табели је наведено потребно знање ученика неопходно за одређену оцену из наведене области.

НАСТАВНА ТЕМА	ОСНОВНИ НИВО	СРЕДЊИ НИВО	НАПРЕДНИ НИВО	
	ДОВОЉАН (2)	ДОБАР (3)	ВРЛО ДОБАР (4)	ОДЛИЧАН (5)
ЦЕЛИ И РАЦИОНАЛНИ АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ	Ученик треба да: - израчуна степен датог броја, зна основне операције са степенима - сабира, одузима и множи мономе	Ученик треба да: - сабира и одузима полиноме, уме да помножи два бинома и да квадрира бином - познаје појам алгебарског израза, посебно рационалног, уз израчунавање бројевне вредности једноставнијих израза	Ученик треба да: - уме да врше операције са мономима и полиномима, -раставља полиноме на чиниоце, - решава једначине, своди сложеније алгебарске изразе на једноставнији облик;	Ученик треба да: - зна и примењује формуле за разлику квадрата и квадрат бинома; - увежбано трансформише алгебарске изразе и своди их на најједноставнији облик - има навику за уредност, поступност у раду, тражење лакшег начина за

				решавање одређених алгебарских израза и њихово свођење на што простији облик;

7.1.8. ПРИМЕРИ ЗАДАТАКА ПО НИВОИМА

Основни ниво

1. Израчунај: а) 5^4; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$.	*Захтева од ученика да уме да израчуна степен датог броја.*
2. Шта је веће: а) 3^5 или 5^3; б) $(-3)^4$ или $(-4)^3$.	*Од ученика се очекује да уме да израчунава степен датог броја и упоређује по величини бројеве.*
3. Израчунај: а) $\frac{2^7 \cdot 2^4}{2^5 \cdot 2^3}$; б) $\frac{3^6 : 3^2}{3^{15} : 3^{12}}$; в) $\frac{5^{10} : 5^8}{7^{16} : 7^{14}}$.	*Очекује се да ученик зна и примењује основне операције са степеном.*
4. Дати су мономи: $A= -3x^2$, $B=6ab$, $C=8xy^2$, $D=-13ab$, $E= 17x^2$, $F=-12xy^2$. Који од датих монома су слични?	*Ученик треба да покаже да је научио сличност монома и да уме да их препознаје у конкретним примерима.*
5. Дати су полиноми: $A=2x$, $B=3x+1$ и $C=4x-2$. Израачунај полиноме AB, AC,BC.	*Очекује се од ученика да је савладао множење полинома.*
6. Квадрирај биноме: а) $x+6$, б) $2a+5$, в) $7x+6y$.	*Очекује се да ученик уме да примени формулу за квадрат бинома.*
7. Растави на чиниоце полиноме: а) $5x+10$, б) $6y^2-12x$, в) $14a^3- 35ab^2$.	*Ученик треба да покаже да уме да раставља најједноставније примере полинома.*
8. Реши једначине: а) $x^2= 36$, б) $2a^2 = 16$, в) $9b^2=36$.	*Ученик треба да покаже да је савладао растављање полинома и решавање најједноставнијих примера једначина.*
9. Одреди решења једначина: а) $x^2+10x = 0$, б) $3y^2 – 12y = 0$.	
10. Израчунај: а) $99^2 – 1^2$; б) $8^2 - 2^2$.	*Ученик уме да примени формулу за разлику квадрата, ради једноставнијег рачунања.*

Средњи ниво

1. Да ли су тачне једнакости: а) $2^2 + 2^3 = 2^5$; б) $3^5 – 3^4 = 3$; в) $4^4 – 4^3 + 4^2 = 4^3$.	*Ученик је рачунске процедуре довео до солидног степена и уме да изводи операције са степенима.*
2. Одреди *x* ако је: а) $3^9 : 3^x = 3^5$; б) $7^7 : 7^x = 49$.	
3. Докажи да је: $(8^3)^2 = (2^3)^6$.	*Зна да израчунава степен степена.*
4. Дати су мономи: $A=7xy$ и $B=-4xy$. Одреди мономе: A+B, A – B, 2A + 3B и – 6A – 7B.	*Ученик треба да покаже да је савладао сабирање и одузимање монома.*
5. Упрости изразе: а) $2y(3y – 4) – y(6y + 5)$, б) $x(y + 6) – y(x – 7)$.	*Очекује се да ученик покаже да је научио да множи полиноме мономом.*
6. Израчунај: а) $(x + 7)^2 – x(x – 8)$, б) $y(4y +3) – (2y – 5)^2$.	*Ученик треба да покаже да се сналази у примени формуле за квадрат бинома и у множењу полинома.*
7. Одреди све реалне бројеве x, такве да је $(2x – 9)(2x + 9) – x(4x – 2) = 5$.	*Ученик треба да покаже да је савладао множење полинома које је неопходно за решавање једначина.*
8. Растави на чиниоце полиноме: а) $y^{12} – 3y^9 + 6y^6 + 18y^3$; б) $x^2 – 25$; в) $4a^2 – 9b^2$.	*Ученик зна да раставља неке једноставније полиноме на чиниоце.*
9. Реши једначине: а) $(x – 3)^2 – 49 = 0$, б) $(5y + 2)^2 = 36$.	*Ученик уме да квадрира бином и да решава једначине.*
10. На најлакши начин израчунај: а) $97^2 – 9$, б) $104^2 – 16$.	*Ученик уме да примени формиле за разлику квадрата.*

Напредни ниво

1. Да ли су једнакости $x^{15}: y^3 = \left(\frac{x}{y}\right)^5$ и $x^6: y^6 = \left(\frac{x}{y}\right)^6$ тачне за све могуће вредности x и y?	*Ученик је постигао висок степен увежбаности извођења операција и коришћења особина степена.*
2. Одреди x ако је: а) $18^9 : 3^x = 6^9$, б) $12^7 : x^7 = 6^7$.	
3. Шта је веће: $(\sqrt{5})^{30}$ или $(\sqrt{125^5})^2$.	*Ученик на високом нивоу користи особине степена и квадратног корена.*

4. Дати су полиноми А = $9x^3 – 8x^2 + 7x – 6$ и В = x^2 - 5x +10. Одреди полиноме који су супротни полиномима А – В и 2В – А.	*Увежбано трансформише полиноме, сабира их и одузима са лакоћом.*
5. Докажи да вредност израза $(a+5)(a+4) – (a+2)(a+7)$ не зависи од броја a.	*Увежбано трансформише изразе и своди их на најједноставнији облик.*
6. Дужине ивице квадра су три узастопна природна броја x – 1, x и x + 1, а дужина ивице коцке је x. Ко има већу површину, а ко запремину?	*Ученик треба да покаже да је савладао множење полинома и примењује формуле за разлику квадрата.*
7. Странице троугла имају дужине $a=2x$, $b= x^2 – 1$ и $c = x^2+1$. Докажи да је дати троугао правоугли.	*Ученик треба да зна и да примењује формуле за квадрат бинома.*
8. Полином $a^3 – a^2b + ab^2 – b^3$ прикажи као производ два полинома.	*Ученик је постигао висок степен увежбаности растављања полинома на чиниоце.*
9. Растави на чиниоце полиноме: а) $x^2+18x+80$, б) $y^2 – 14y + 33$, в) $a^2 – 16ax + 39x^2$.	
10. Збир катета правоуглог троугла је 14 cm, а површина троугла 24 cm^2. Израчунај хипотенузу датог троугла.	*Ученик је оспособљен да користи системе једначина решавајући и сложеније текстуалне задатке.*

У наставку ће бити показани задаци и проценат успешности решавања задатака из ове области на Другом писменом задатку ученика 7. разреда. Задаци су дати у две доста сличне групе, решавали су их ученици четири одељења.

I група	
1. Упрости изразе: а) $\frac{a^7 \cdot (a^4)^3}{a^3 \cdot a^4 : a}$, б) $\left(2\frac{1}{5}\right)^3 : \left(-2\frac{3}{4}\right)^3$.	*Сврха овог задатка јесте да ученици покажу да су научили множење и дељење степена једнаких основа, али и степена различитих основа са истим изложиоцем. Елементарни задатак који илуструје ниво препознавања садржаја.*
2. Напиши сређен облик полинома: а) $(0{,}25m^2 - 0{,}5mn + 0{,}4n^2) – (0{,}25m^2 - 0{,}5mn – 0{,}25n^2)$, б) $3(m - 1)^2 – 5(m+1)(m - 1)$.	*Први пример је једноставан и захтева сабирање сличних монома, док је други пример сложенији (квадрат бинома и разлика квадрата) и илуструје ниво репродукције.*

3. Растави на чиниоце полиноме: 1) $2abx – 4bya + 6abc$, 2) $4k^2 – 4k +1$, 3) $4a^2 – 9b^2$, 4) $a^{n+2}b^m – 2^n b^{m+2}$.	*Циљ је да се покаже увежбаност извлачења заједничког монома испред заграде, али и препозна разлика квадрата и квадрат бинома. Илуструје ниво разумевања.*
4. Реши једначину: $(4x - 3)(2x + 3) – 8x^2 = 9$.	*Четврти и пети задатак илуструју ниво примене. Циљ је да се направи увид у оствареност предвиђених исхода.*
5. Израчунај обим и површину правоуглог троугла ако је дужина катете 24 cm, а хипотенуза је за 16 cm дужа од друге катете.	

II група	
1. Упрости изразе: а) $\frac{(x^3 \cdot x^4)^5}{(x^3)^2 \cdot (x^4)^3}$, б) $2^5 \cdot 3^5 \cdot (\frac{1}{3})^5$	*Сврха овог задатка јесте да ученици покажу да су научили множење и дељење степена једнаких основа, али и степена различитих основа са истим изложиоцем. Елементарни задатак који илуструје ниво препознавања садржаја.*
2. Напиши сређен облик полинома: а) $(9x^2 – 6xy + y^2) – (7x^2- 5xy + 11y^2) + (x^2 – xy + y^2)$, б) $(a - 1)^2 – 4(a+1)^2 - 6(a - 1)(a + 1)$.	*Први пример је једноставан и захтева сабирање сличних монома, док је други пример сложенији (квадрат бинома и разлика квадрата) и илуструје ниво репродукције.*
3. Растави на чиниоце полиноме: 1) $3axy – 15a^2xy^2 + 6ax^2y$, 2) $a^2 – 49y^2$, 3) $x^2 – x + 0{,}25$, 4) $– 36ay – 36a^2 – 9y^2$.	*Циљ је да се покаже увежбаност извлачења заједничког монома испред заграде, али и препозна разлика квадрата и квадрат бинома. Илуструје ниво разумевања.*
4. Реши једначину: $(5y - 1)(y + 2) – 25 – 5y^2 = 0$.	*Четврти и пети задатак илуструју ниво примене. Циљ је да се направи увид у оствареност предвиђених исхода.*
5. Телефонски стуб који је био висок 25m преломљен је услед невремена и врхом додирује земљу на удаљености 5m од подножја. На којој висини је преломљен стуб?	

Успешност решавања задатака није била баш на завидном нивоу. Још једном се показало да ученици тешко савладавају ову област и да она спада у најтеже градиво осмогодишњег школовања. Иако је већи број ученика научио основне формуле и правила, тешко се сналазе у примени истих. Научили су формулу за квадрат бинома, али на писменом уопште није била ретка грешка да је $(a+1)^2$ исто што и a^2+1. Ученици се тешко сналазе да примене формулу, осим уколико им у тексту задатка није наглашено да је треба применити. Још једна честа грешка, иако је на часу више пута скренута пажња и показивани контрапримери, јесте да је $(5y - 1)(y + 2)$ једнако са $5y^2 – 2$.

Пети задатак је најлошије урађен, мада је то и разумљиво с обзиром на то да је осим садашњег градива морала бити примењена и Питагорина теорема. Ипак задатак ученицима није био потпуно непознат јер су слични задаци вежбани на часовима.

У наставку ће бити наведена просечна оцена на овом писменом задатку у сва четири одељења која су га радила и проценти урађених, делимично урађених и неурађених задатака.

Сваки задатак бодован је са 10 поена, а оцењивано је по следећој скали:

од 0 – до 17	недовољан (1)
од 18 – до 27	довољан (2)
од 28 – до 37	добар (3)
од 38 – до 47	врло добар (4)
од 48 – до 50	одличан (5)

Ученици 7_1:

оцена	број ученика		
одличан (5)	2		
врло добар (4)	3		
добар (3)	4		
довољан (2)	5		
недовољан (1)	6	просечна оцена	2,50

задатак	потпуно решен	делимично решен	није решен
1.	50%	35%	15%
2.	30%	40%	30%
3.	25%	60%	15%
4.	25%	20%	55%
5.	10%	15%	75%

Ученици 7_2:

оцена	број ученика		
одличан (5)	4		
врло добар (4)	3		
добар (3)	2		
довољан (2)	10		
недовољан (1)	4	просечна оцена	2,69

задатак	потпуно решен	делимично решен	није решен
1.	56,52%	26,09%	17,39%
2.	30,43%	34,78%	34,78%
3.	39,13%	43,48%	17,39%
4.	26,09%	21,74%	52,17%
5.	21,74%	4,35%	73,91%

Ученици 7_3:

оцена	број ученика		
одличан (5)	6		
врло добар (4)	3		
добар (3)	4		
довољан (2)	8		
недовољан (1)	1	просечна оцена	3,23

задатак	потпуно решен	делимично решен	није решен
1.	68,18%	22,73%	9,09%
2.	45,45%	31,82%	22,73%
3.	45,45%	45,45%	9,09%
4.	31,82%	18,18%	50%
5.	27,27%	27,27%	45,45%

Ученици 7_4:

оцена	број ученика		
одличан (5)	3		
врло добар (4)	4		
добар (3)	8		
довољан (2)	5		
недовољан (1)	2	просечна оцена	3,05

задатак	потпуно решен	делимично решен	није решен
1.	54,54%	31,82%	13,64%
2.	36,36%	40,91%	22,73%
3.	45,45%	45,45%	9,09%
4.	18,18%	36,36%	45,45%
5.	18,18%	18,18%	63,64%

7.2. ЗАВИСНЕ ВЕЛИЧИНЕ И ЊИХОВО ГРАФИЧКО ПРЕДСТАВЉАЊЕ

Ова наставна тема је веома значајна не само за даље математичко образовање већ и за свакодневне потребе савременог човека. Са графичким приказима зависних величина можемо се свакодневно срести у штампи, на телевизији, у стручној литератури било које врсте. У свим научним дисциплинама уочавају се некакве особине описане бројевима и трага се за везама (зависностима) међу њима. Успостављање зависности међу величинама важан је задатак сваке науке. О погодностима које нам нуди графичко представљање зависности не треба много говорити.

Садржај теме и предвиђени број часова за обраду наведен је у наредној табели.

Садржај програма	**Број часова**	**Активности у образовно-васпитном раду**		**Начини и поступци остваривања рада**	**Циљеви и задаци садржаја програма**
		Ученика	**Наставника**		
ЗАВИСНЕ ВЕЛИЧИНЕ И ЊИХОВО ГРАФИЧКО ПРЕДСТАВЉАЊЕ	20(7+13)	уочава закључује разликује открива	-презентује -подстиче ученика на увиђање, закључивање, упоређивање -утиче на развој тачности,прецизности,	-фронтални -индивидуални -групни -рад у пару	правоугли координатни систем у равни пропорција примена у пракси директне и

		релацију	одговорности,уредности код ученика		обрнуте пропорционалност и (пропорционална подела, и друго)

7.2.1. ПРАВОУГЛИ КООРДИНАТНИ СИСТЕМ

Правоугли координатни систем у математику увео је познати француски филозоф, математичар и научник Рене Декарт још средином 17. века, па по њему и носи назив Декартов правоугли координатни систем. Сама идеја оређивања положаја тачке у равни помоћу координата је много старија. У гробници египатског фараона Рамзеса пронађена је скица таквог „координатног система“, која је служила за одређивање времена помоћу положаја звезда.

Основне идеје на којима је заснован правоугли координатни систем углавном су већ познате ученицима. Будући да су се ученици у више наврата, у ранијим разредима, упознавали са бројевном правом, пожељно је подсетити их основних појмова и идеја. Такође, добро би било истаћи да је главни разлог постављања правоуглог координатног система у неку раван жеља да се прецизно одреде положаји (места) на којима се те тачке налазе. Корисно је направити поређење са географским картама.

Најбитније у овој области јесте да сваки ученик научи да прочита координате тачке, као и да представи тачку са задатим координатама у правоуглом координатном систему. Ова лекција је изузетно важна јер се увођењем координатног система геометријске фигуре могу представити односом бројева, алгебарски, па се и разна геометријска тврђења могу доказати алгебарски.

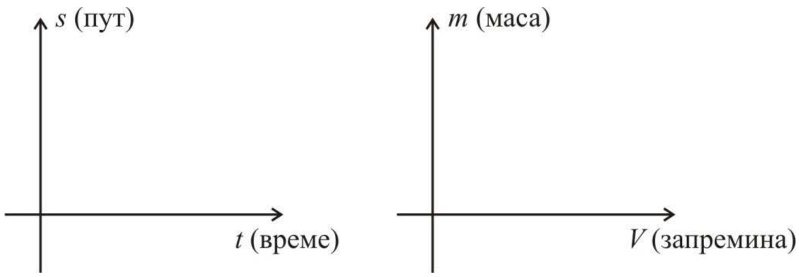
Уколико се променом једне величине (без обзира на то да ли се она смањује или повећава) мења и нека друга величина, конкретно – ако свакој могућој вредности прве величине одговара само једна одговарајућа вредност друге величине, говоримо о зависности друге величине од прве. Реч *функција,* по препоруци за обраду ових садржаја, се не употребљава на овом нивоу, већ тек у осмом разреду. Ова зависност може бити изражена табелом одговарајућих вредности, формулом којом се из задате вредности слободне величине може израчунати одговарајућа вредност зависне величине или паровима одговарајућих вредности чији скуп чини график зависности. У скорије време и у нашој литератури се користе и други дијаграми (стубићи, пите и сл.) за обраду података, што раније није био случај па на разним PISSA и сличним тестовима наши ученици нису умели да се снађу у таквим задацима.

Ученици овог узраста су углавном већ развили интуицију о појму зависности. Један од циљева ове наставне јединице је и јачање стечене интуиције уочавањем правилних промена једне величине у зависности од промена друге, и то на конкретним примерима. Неки од примера појма зависности:

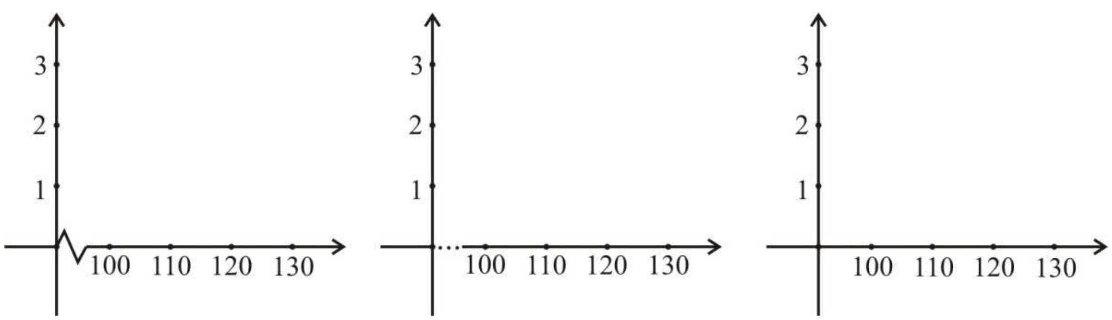
- обим квадрата зависи од дужине странице,
- површина правоугаоника зависи од дужина његових страница,
- дужина ноћи зависи од годишњег доба,

• висина детета се мења у зависности од његовог узраста,
• време потребно да се уради неки посао зависи од броја ангажованих радника,
• време потребно да се стигне из Краљева у Београд зависи од брзине којом се крећемо и тако даље.
Добро би било да и ученици наведу по неколико примера зависности.

Главни циљ наставне јединице јесте графичко приказивање зависности међу величинама. Важно је нагласити да се веома често координатни систем прилагођава сваком конкретном примеру и то у следећем смислу:
• Преименовање оса – свака оса се означава и назива у складу са величином коју представља,



• Нумерација оса – подеоцима на свакој од оса додељују се бројеви који одговарају редовима одговарајућих величина, то јест основним подеоцима се додељују понекад стотине, понекад хиљаде и тако даље. Није редак случај, нарочито у пракси, да се почетни део осе изостави, те да се прикаже део почев од 100, 1 000 и тако даље. За такве случајеве постоје разне графичке „допуне“, али се често могу срести и прикази без икаквог истицања да је почетни део осе одбачен.



Иако у принципу нема велике потребе да се истиче изостављање дела осе јер је то углавном јасно, требало би ученике упознати са овим „приказима“ јер се могу срести и у штампи и у књигама.

Принцип придруживања тачака паровима одговарајућих вредности зависних величина је једноставан. Врло често се само цртање тачака изводи на основу табеле.

7.2.2. РАСТОЈАЊЕ ИЗМЕЂУ ДВЕ ТАЧКЕ У КООРДИНАТНОМ СИСТЕМУ

И ову наставну јединицу добро је почети подсећањем на бројевну праву. Прецизније, подсећањем на то како се одређује растојање две тачке бројевне праве уколико су познате њихове координате. На исти начин се решава проблем одређивања растојања две тачке у равни када су њихове апсцисе, односно ординате једнаке. Такође, важно је ученике подсетити и на следеће једнакости

$$|x - y| = |y - x|, \qquad |x|^2 = x^2, \qquad \sqrt{x}^{\,2} = |x|$$

које важе за све реалне бројеве x и y.

Главни део ове наставне јединице представља формула за одређивање растојања између две тачке у општем случају. Ова формула добија се применом Питагорине теореме. Уколико су дате тачке такве да су њихове и апсцисе и ординате различите, онда тачка чија је апсциса једнака апсциси једне тачке, а ордината једнака ординати друге тачке представља теме правоуглог троугла са хипотенузом коју образују дате тачке. Укратко, ако су дате тачке $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ тако да је $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$, онда је тачка $C\ (x_1, y_2)$ теме правог угла правоуглог троугла над хипотенузом AB. Исто важи и за тачку $C'\ (x_2, y_1)$. Будући да тачка C (као и C') има по једну координату исту и са тачком A и са тачком B, онда се одговарајућа растојања једноставно рачунају:

$$AC = |y_2 - y_1| \text{ и } BC = |x_2 - x_1|$$

(односно, $AC' = |x_2 - x_1|$ и $BC' = |y_2 - y_1|$).

Након одређивања катета овог правоуглог троугла једноставно применом Питагорине теореме одређујемо дужину хипотенузе.

Приликом извођења саме формуле треба истаћи једнакости:

$$|x - y|^2 = (x - y)^2 \text{ и } |x - y| = |y - x|.$$

Важно је нагласити да се (главна) формула може користити и у специјалним случајевима.

Ако су дате тачке $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, при чему је $x_1 = x_2$, онда је

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{0 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|$$

Слично се разматра и случај $y_1 = y_2$.

Посебна пажња се мора посветити примени главне формуле. Примену формуле је могуће описати речима: одреди квадратни корен збира квадрата разлике апсциса и квадрата разлике ордината, при чему се не мора водити рачуна шта се од чега одузима будући да је

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \end{aligned}$$

Ипак, велики број наставника инсистира на једној од побројаних могућности са циљем да код ученика развију извесну врсту уредности при решавању задатака, што је у одређеном смислу и оправдано. Међутим, ученицима треба јасно ставити до знања да је таква врста прецизности пре свега васпитног каректера, а указати им на све могуће случајеве једноставно да би се испоштовали и образовни циљеви наставне јединице.

7.2.3. ДИРЕКТНО И ОБРНУТО ПРОПОРЦИОНАЛНЕ ВЕЛИЧИНЕ

Најједноставнија (функционална) зависност јесте директна пропорционалност. Ученици су се са њом доста пута сретали мада им није директно наглашавано њено име. Зато је на почетку обраде веома важно подсетити их на што је више могуће примера директно пропорционалних величина.

За две величине кажемо да су директно пропорционалне ако су њихове одговарајуће вредности повезане законом $y = kx$ за неку константну вредност $k \neq 0$, која се назива коефицијент пропорционалности. Добро је урадити што више оваквих примера из свакодневног живота, како би ученици што боље усвојили (изражавање вредности неке величине у разним мерним јединицама, изузетак је изражавање температуре у Целзијусовим степенима и фаренхајтима). Да би се у пракси препознала ова зависност, треба проверити да ли за посматране величине важи да када се њихове вредности помноже неким бројем различитим од нуле, опет се добијају одговарајући парови вредности. Одређивање коефицијента пропорционалности доводи до решавања линеарне једначине са једном непознатом, што је већ рађено у претходним разредима.

Две величине су обрнуто пропорционалне ако су њихове одговарајуће вредности повезане формулом $xy = k$ за неку константну вредност $k \neq 0$. Када се ова веза напише у облику $y = к\frac{1}{x}$, види се да је величина y директно пропорционална реципрочној вредности величине x. Због тога и назив обрнуто пропорционалне величине. Овај вид зависности је ученицима далеко сложенији од претходног. Да би им та веза била што јаснија најбоље је користити својство обрнуто пропорционалних величина: када се вредност једне од њих помножи, а њој одговарајућа вредност друге величине подели истим бројем различитим од нуле (нпр. једна помножи, друга подели са три) добијају се опет одговарајући парови вредности ових величина.

Директно и обрнуто пропорционалне величине се обрађују и кроз пропорције.

НАСТАВНА ТЕМА	ОСНОВНИ НИВО	СРЕДЊИ НИВО	НАПРЕДНИ НИВО	
	ДОВОЉАН (2)	ДОБАР (3)	ВРЛО ДОБАР (4)	ОДЛИЧАН (5)
	Ученик треба да: - изражава положај објеката	Ученик треба да: - влада описом координатног	Ученик треба да: - уме да примењује	Ученик треба да: - се

ЗАВИСНЕ ВЕЛИЧИНЕ И ЊИХОВО ГРАФИЧКО ПРЕДСТАВЉАЊЕ	сврставајући их у врсте и колоне; - уме да одреди положај тачке у квадрантима координатног система ако су дате координате и обратно	система (одређује координате тачака, осно или централно симетричних итд) -да добро упозна директну и обрнуту пропорциона-лност	пропорцију у разним тежим текстуалним задацима;	оспособљава за уочавање функционалне зависности међу велечинама у разним областима и да успешно решава практичне задатке;

ПРИМЕРИ ЗАДАТАКА ПО НИВОИМА

Основни ниво

1. Одреди у координатној равни тачке A(2, 3) и B(3, 2). Којем квадранту припадају тачке A и B?	*Ученик треба да уме да представи положај тачке у правоуглом кооординатном систему ако су им задате координате, као и да одреди ком квадранту припадају.*
2. Дата је тачка A(4,5). Из тачке A спуштене су нормале на Ox и Oy. Нека је A' – ортогонална пројекција тачке A на x- осу , A''– ортогонална пројекција тачке A на y- осу. Одреди координате тачака A' и A''.	
3. Дата је зависност $y = 2x$. Попуни табелу: x: 0, 1, 2, 3 y:	*Ученик уме да одреди вредност зависности задате формулом или таблицом.*

x	0	1	2	3
y				

Средњи ниво:

1. Нацртај троугао ABC ако су његова темена: A(1,1), B(5, 3), C(2,5), а затим одреди координате темена $A_1B_1C_1$ који је са датим троуглом симетрично распоређен у односу на: 1) x – осу; 2) y – осу; 3) координатни почетак.	*Ученик уме да одређује тачке симетричне у односу на координатне осе и координатни почетак.*
2. Покажи да су величине x и y директно	

пропорционалне (тј. да је $y = кx$) и одреди коефицијент пропорционалности: 1) $y = x^2 - 6x + 9 - x^2 + 9 - 18$; 2) $y = 6s,\ x = 3s$.	*Ученик треба да покаже да познаје својства директне и обрнуте пропорционалности, као и да уме да их разликује.*
3. За коју вредност коефицијента $к$ ($к \neq 0$) график зависности пролази кроз тачку M(- 4, 8) ако: 1) $y = кx$; 2) $y = \frac{к}{x},\ x \neq 0$.	

Напредни ниво:

1. Тачке O(0,0), A(6,0) и B(0,8) су темена троугла. Нацртај га па му одреди обим и површину.	*Ученици треба да покажу да разумеју повезаности координатног система и површине фигура.*
2. После смањења од 15% цена неког артикла је 2040 динара. Колика је била цена пре снижења?	*Ученици треба да покажу да умеју да поставе пропорцију, разликују директну и обрнуту пропорционалност и баратају са процентима и размером.*
3. Три фирме раде пут од 45,9 km чије су деонице у размери 4:3:2. Колика је дужина сваке деонице?	

7.3. ЛИНЕАРНЕ ФУНКЦИЈЕ

Ова наставна тема је врло битна, пре свега зато што се тада ученици први пут срећу са једним од основних појмова у математици – са појмом функције, тачније са појмом линеарне функције. Такође, ова тема обједињује и повезује знања алгебре и геометрије, односно показује њихову дуалну природу и тако представља увод у аналитичку геометрију.

Ова тема се обрађује средином осмог разреда, уз садржај и број часова који је наведен у следећој табели:

Садржај програма	**Број часова**	**Активности у образовно-васпитном раду**		**Начини и поступци остваривања рада**	**Циљеви и задаци садржаја програма**
		Ученика	**Наставника**		
ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА	12(5 +7)	уочава закључује разликује открива релацију	-презентује -подстиче ученика на увиђање, закључивање, упоређивање -утиче на развој тачности, прецизности, одговорности, уредности код ученика	-фронтални -ндивидуални -групни -рад у пару	- Функција дата једначином y=ax+b; - График линеарне функције; нула функције. - Имплицитни облик задавања линеарне функције. - Цртање и читање графика линеарних функција.

Циљ обраде линеарне функције јесте да ученици уочавају функције, одређују области дефинисаности и област вредности и поступак придруживања елемената и да знају да одређују вредност функције за било који елемент из области вредности, без обзира на то да ли је функција задата табелом, формулом или графички. Најважније је да ученици умеју функцију да представе графички и да знају да јој израчунају вредности за задате реалне вредности x, нулу функције и одређују њен ток. На овом нивоу проучавају се функције чије су области дефинисаности и области вредности подскупови скупа реалних бројева.

Ученици морају знати дефиницију линеарне функције и умети да цртају график функције задате у експлицитном облику $y = kx + n$ или у имплицитном облику $ax + bx + c = 0$, затим, према нацртаном графику одредити одговарајуће парове вредности променљивих (x, y). Сваки ученик треба да уме да саставља и да користи разне табеле и чита графике и дијаграме разних стања, појава.

Циљ ове наставне јединице је да ученици овладају појмом линерне функције, да препознају коефицијент правца и слободан члан при експлицитном задавању линеарне функције, као и да умеју да одреде вредност линеарне функције за дату вредност независно промењљиве, односно да одреде вредност независно промењљиве за дату вредност функције.

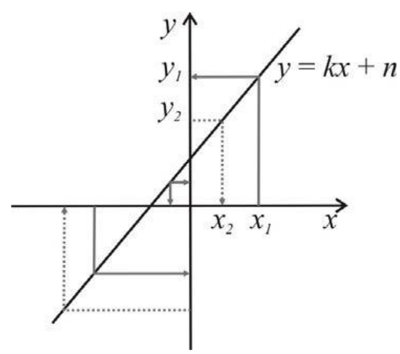
Ученици би још у 5. разреду требало да уочавају и схватају релације и функције на најједноставнијим примерима, да умеју да их приказују на различите начине и правилно користе одговарајуће симболе, односно у 7. разреду да уочавају функционалне зависности у разним областима и да их приказују на различите начине, а нарочито – да потпуније схвате појам функције и њеног графика, да познају графички приказ и практичне примене директне и обрнуте пропорционалности. У 8. разреду треба да прошире и продубе знања о функцијама, упознавањем линеарне функције и њених својстава, тако да могу поуздано да цртају графике и читају разне податке са њих.

При обради наставне јединице *Цртање и читање графика линеарне функције*, потребно је ученицима бар визуелно указати на ову особину линеарних функција:

• линеарна функција је дефинисана за сваки реалан број;

• вредности линеарне функције за два различита броја су различите;

• сваки реалан број је вредност линеарне функције за одговарајућу вредност независно промењиве.



7.3.1. ИМПЛИЦИТНИ ОБЛИК ЗАДАВАЊА ЛИНЕАРНЕ ФУНКЦИЈЕ

Овај облик задавања линеарне функције је веома важан из разлога што ће при графичком приказу система линеарних једначина са две непознате свака од једначина бити протумачена као имплицитно задата линеарна функција.

Наравно, треба нагласити да су облици задавања еквивалентни, без давања предности било ком облику, односно да се један може превести у други.

Специјално, када у имлицитном облику $ax + by + c = 0$ дозволимо да коефицијенти a и b могу бити једнаки нули, али не истовремено, овим обликом су обухваћене све праве у координатном систему, па се у том смислу може рећи да је он општији од експлицитног облика (једнакошћу $y = kx + n$ се не може описати права $x = a$).

7.3.2. ГРАФИК ЛИНЕАРНЕ ФУНКЦИЈЕ $y = kx + n$

Најпре је неопходно дати дефиницију графика линеарне функције, која нам у ствари даје критеријум којим можемо да одредимо да ли нека тачка припада графику дате функције или му не припада. Да бисмо дошли до закључка да је график линеарне функције $y = kx + n$ права, полазимо од тврђења да је график зависности $y = kx$ права. Ово је битан закључак, јер нам омогућава да график цртамо одређујући само две тачке које му припадају. Кроз многе примере ученици би требало и сами да увиде да је график линеарне функције $y = kx + n$ права која се добија транслацијом за n (у смеру y – осе за $n > 0$ или у супротном смеру за $n < 0$) графика функције $y = kx$. Због релативно компликованих графичких приказа било би пожељно да ученици градиво усвајају или директно из уџбеника или уз одговарајућу мултимедијалну подршку. Након ових примера, неопходно је изнети закључке и посебно објаснити везу између паралелности графика линеарних функција и вредности њихових коефицијената правца. Такође, потребно је указати и да график линеарне функције $y = kx + n$ увек сече y – осу, односно да тачка $T(0, n)$ увек припада том графику.

7.3.3. НЕКЕ ОСОБИНЕ ГРАФИКА ЛИНЕАРНЕ ФУНКЦИЈЕ

Осим цртања графика линеарне функције потребно је ученицима указати и на неке од особина функције, пре свега: нулу функције, на монотоност и знак функције.

У примерима на конкретним функцијама је потребно показати како промена независно промењиве утиче на промену зависно промењиве. При том је паметно разматрати три примера, тако да је у једном функција растућа, у другом опадајућа, а у трећем константна. Ови примери би требало да укажу на везу између коефицијента правца дате функције, односно угла који њен график заклапа са позитивним делом x – осе, и монотоности те функције. Потребно је показати и у општем случају како вредност коефицијента правца утиче на монотоност функције, а затим дати и обрт тог тврђења. Од ученика се пре свега очекује да визуелно разликују графике растућих од графика опадајућих функција, као и да на основу вредности коефицијента правца и без цртања могу да одреде да ли је функција растућа или опадајућа.

Осим монотоности треба разматрати и знак линеарне функције. Заправо, ученици се наводе на закључак о томе како знак функције лево, односно десно, од нуле функције зависи од монотоности те функције. Ово је прилика и да се успостави веза између скупа решења линеарних неједначина и графика одговарајуће линеарне функције.

У наредној табели орјентационо је показан ниво знања неопходан за одређену оцену.

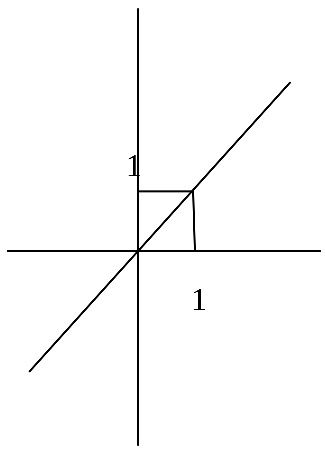
НАСТАВНА ТЕМА	ОСНОВНИ НИВО	СРЕДЊИ НИВО	НАПРЕДНИ НИВО	
	ДОВОЉАН (2)	ДОБАР (3)	ВРЛО ДОБАР (4)	ОДЛИЧАН (5)
ЛИНЕАРНЕ ФУНКЦИЈЕ	Ученик треба да: - усвоји појам линеарне функције, - усвоји појам нуле функције и уме да израчуна нулу функције, - одреди вредност функције дате таблицом или формулом, - наводи особине функције	Ученик треба да: - уочи зависност међу променљивим, зна функцију y=ax и графички интерпретира њена својства; - везује за та својства појам директне пропорционалност и и одређује непознати члан пропорције - може да уочи функционалне зависности у разним областима и да их приказује на различите начине, а нарочито да потпуније схвати појам функције и њеног графика	Ученик треба да: - прошири и продуби знање о функцијама упознавањем линеарне функције и њених својстава, тако да може да црта и чита разне графике	Ученик треба да: - разликује директно и обрнуто пропорционалне величине и то изражава одговарајућим записом; - зна линеарну функцију и графички интерпретира њена својства

Основни ниво:

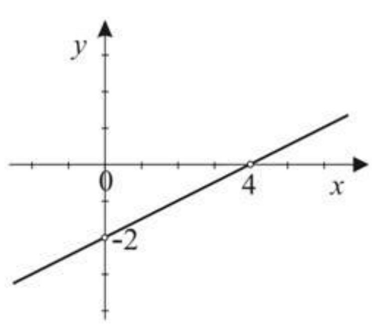
1. Дата је функција $y = \frac{1}{3}x + 2$. Одреди вредност функције за $x = 3$.	*Ученик уме да одреди вредност функције дате формулом.*
2. За које x је вредност функције $y = -x + 4$ једнака нули?	

<table>
<tr>
<td>3. Попуни табелу одговарајућим вредностима.
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>- 2</td><td>4</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>$y = -\frac{1}{2}x + 2$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>Ученик уме да одреди вредност функције дате таблицом.</td>
</tr>
</table>

Средњи ниво:

<table>
<tr>
<td>1. Заокружи слово испред функције која одговара графику:
а) $y = 2x$
б) $y = 3x$
в) $y = x$
г) $y = \frac{1}{2}x$

</td>
<td>Ученик ће умети да уочи зависност међу промењивим.</td>
</tr>
<tr>
<td>2. Без цртања графика, одреди координате пресека графика линеарне функције са y – осом:
а) $y = 3x + 2$; б) $y = -3x + \sqrt{3}$.</td>
<td>Ученик потпуније схвата појам функције и његовог графика.</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Линеарне функције: $3x + y + 5 = 0$, $2x+5y - 4=0$, $y - 4 = 0$ написати у експлицитном облику.</td>
<td>Ученик је савладао оба облика задавања линеарне функције и уме функцију да преводи из једног облика у други.</td>
</tr>
</table>

Напредни ниво:

<table>
<tr>
<td>На слици је дат график линеарне функције.

</td>
<td>Ученик уме да графички интерпретира својства линеарних функција.</td>
</tr>
</table>

Која је то функција?	
2. Одредити параметар m тако да је $x = 3$ нула функције: 1) $y = mx + 5$; 2) $y = (2m - 3)x + 4$.	*Ученик је проширио знања о функцији и њеним својствима.*
3. Одреди k тако да функција: 1) $y = (3к - 6)x + 5$ буде растућа 2) $y = (-2к + 10)x + 2к$ буде опадајућа.	*Ученик треба да покаже да је добро научуио својства функције и да уме да их примењује.*

7.4. СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА СА ДВЕ НЕПОЗНАТЕ

Решавање многих задатака из математике и других научних области, као и из живота, захтева рачунање са више непознатих величина. Понекад увођење више величина није неопходно, али олакшава решавање проблема. Непознате величине најчешће обележавамо са x и y, а везе између њих изражавамо једначинама. На тај начин долазимо до система једначина.

Ова наставна тема се природно надовезује на већ обрађене теме *Линеарне једначине и неједначине* и *Линеарна функција*. Као и у случају једначина и неједначина, и овде се планом и програмом захтева формалан приступ, односно инсистира се на појму еквивалентни системи. Оно што је ново у односу на решавање једначина је присуство геометријске интерпретације, односно графичког приказа сваког од посматраних система једначина.

Садржај програма	**Број часова**	**Активности у образовно-васпитном раду**		**Начини и поступци остваривања рада**	**Циљеви и задаци садржаја програма**
		Ученика	**Наставника**		
СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА СА ДВЕ НЕПОЗНАТЕ	12(6 +6)	уочава закључује разликује открива релацију	-презентује -подстиче ученика на увиђање, закључивање, упоређивање -утиче на развој тачности,прецизности, одговорности, уредности код ученика	-фронтални -ндивидуални -групни -рад у пару	- Појам линеарне једначине с две непознате. - Појам система од две линеарне једначине с две непознате. - Еквивалентност система линеарних

					једначина. - Решавање система методом замене и методом супротних коефицијената; графички приказ решавања. - Разноврсни примери примене система линеарних једначина у решавању проблема из живота, геометрије, физике и др.

Поред самог дефинисања линеарне једначине с две непознате и њеног решења, у оквиру ове наставне јединице кључно је успоставити везу између линеарне једначине с две непознате и одговарајуће праве у координатном систему, односно графика одговарајуће линеарне функције. Већ у оквиру ове лекције треба утрти пут графичком приказу система линеарних једначина. С тим у вези треба нагласити да свака линеарна једначина с две непознате има бесконачно много решења (има онолико решења колико права има тачака).

У 8. разреду решавају се системи са две једначине првог степена, са две непознате:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2,$$

где су $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ реални бројеви, при чему је бар један од бројева a_1, a_2, b_1, b_2 различит од нуле. Овакав систем може имати једно од следећа три решења:

(1) систем једначина нема решење – пресек скупова решења тих једначина је празан скуп (праве које представљају графике тих функција су паралелне праве);

(2) систем једначина има само једно решење (само један уређени пар реалних бројева) – пресек скупова решења једначина које чине систем је једночлан (праве које графички представљају те скупове се секу),

(3) систем једначина има бесконачно много решења – једначине система имају исти скуп решења (праве су идентичне, поклапају се).

За решавање система једначина са две непознате користе се три методе: графичка метода, метода супротних коефицијената и медода замене. Циљ је да ученици савладају решавање система једначина с две непознате на основу еквивалентних трансформација и да решење тумаче графички. Наиме, ученици треба да знају шта су еквивалентни системи, да умеју да решавају простије системе линеарних једначина с две непознате (методом замене и методом супротних коефицијената) и да графички илуструју решење. Ученици треба да примењују стечена знања на решавање проблема.

7.4.1. ПРИМЕНА СИСТЕМА ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА

У овом делу треба представити разноврсне задатке чије решавање се своди на решавање одговарајућих система линеарних једначина. Циљ ове лекције је да ученицима покаже практичну страну математике које често нису свесни, односно да покаже примену стеченог знања.

Наравно потребно је провежбати много задатака који илуструју примену система линеарних једначина. Пожељно је да се при избору задатака чешће бирају они који су и у функцији обнављања градива математике, као и систематизације читавог градива.

НАСТАВНА ТЕМА	ОСНОВНИ НИВО	СРЕДЊИ НИВО	НАПРЕДНИ НИВО	
	ДОВОЉАН (2)	ДОБАР (3)	ВРЛО ДОБАР (4)	ОДЛИЧАН (5)
СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА С ДВЕ НЕПОЗНАТЕ	Ученик треба да: - усвоји појам система линеарне једначине са две непознате, - зна шта је решење система и да наведе методе за решавање система једначина - уме да реши најједноставније системе разним методама	Ученик треба да: - уме да решава систем линеарних једначина на основу еквивалентних трансформација и да решење тумачи графички	Ученик треба да: - преводи текстуалне задатке на систем линеарних једначина са две непознате,	Ученик треба да: - саставља и решава линеарне једначине и неједначине и системе линеарних једначина са две непознате - врши тачна израчунавања, представљања величина и изводи правилне и логички исправне закључке

Основни ниво:

1. Испитати који од уређених парова: (- 1, 6), (3, 2), (4, 1) су решења конјукције једначина: $x + y = 5$, $2x - y = 4$ и $3x + y = 11$.	*Ученик зна шта је решење једначине и уме да провери да ли решење припада задатој једначини.*
2. Реши методом замене систем једначина: $x + 2y = -4$, $3x - 2y = 4$.	*Ученик уме да реши најједноставније системе различитим методама.*
3. Методом супротних коефицијената реши систем једначина: $x + y = 10$, $x - y = 6$.	

Средњи ниво

1. Показати да је систем $x + y = 3$, $x - y = 1$ еквивалентан систему $x = 2$, $y = 1$.	*Ученик уме да решава систем линеарних једначина на основу еквивалентних система.*
2. Милан је 900 динара потрошио на куповину кредита за мобилни телефон, а то је трећина његове уштеђевине. Колика је била Миланова уштеђевина?	*Ученик уме да реши линеарне једначине и системе линеарних једначина са две непознате.*
3. Решити систем методом супротних коефицијената: $4x - 5y = 3$, $3x + 2y = 8$.	

Напредни ниво

1. Мирослав је за три видео игрице и два филма платио 6200 динара. Ако је филм 6 пута јефтинији од игрице, колико кошта игрица, а колико филм?	*Ученик уме да саставља и решава системе једначина са две непознате.*
2. Владин месечни џепарац је 2 000 динара. Четвртину свог џепарца Влада потроши а остатак штеди. Колико најмање месеци Влада мора да штеди да би могао да купи мобилни телефон чија је цена 13 000 динара?	*Ученик уме да користи системе једначина решавајући и сложеније текстуалне задатке.*
3. Реши систем једначина: $$\frac{x+3}{5}+\frac{y-5}{4}=5, \frac{x+5}{2}-\frac{y-8}{3}=3$$	*Ученик уме да решава системе једначина са две непознате различитим методама.*

8. ЗАВРШНИ ИСПИТ НА КРАЈУ ОСНОВНОГ ОБРАЗОВАЊА

Завршни испит који се полаже на крају осмог разреда представља потврду о усвајању темељних знања, умења и компетенција током основног образовања. Завршни испит на крају основне школе је саствни део основног образовања и васпитања тако да га полажу сви ученици. До сада су квалификациони испит полагали само ученици који настављају образовање у четворогодишњој средњој школи. Дакле, свим ученицима се приликом уписа у средњу школу узимају у обзир поени који су добијени на основу успеха у основној школи и поени који су добијени на завршном испиту. Од укупно 100 поена колико ученик може да добије при упису у средњу школу 40 носи завршни испит, а 60 успех ђака током основног школовања.

Завршни испит постепено се мења од познатих задатака ка непознатим, од полагања само два теста из српског језика и математике до финалног завршног испита 2013/2014. године, који ће подразумевати све непознате задатке и три теста - српски језик, математика и заједнички тест из предмета: историја, географија, биологија, физика и хемија. Постепеним прелазом избегавају се изненађења у вези са садржајем и начином испитивања, чиме се смањује непознатост и трауматичност испита. Резултати прелазних решења се детаљно анализирају у циљу њихове евалуације и уношења побољшања. На основу праћења развоја завршног испита од стране Завода за вредновање квалитета образовања и васпитања биће предложен модел за даљи развој завршног испита после 2014. године.

Са завршним испитом кренуло се 2011. године. Имајући у виду да се радило о првој генерацији ученика који су учили по новим програмима, да су стандарди за крај обавезног образовања усвојени 2009. године, да наставни програми нису усклађени са стандардима, да нису сви наставници имали прилику да наставу и оцењивање ускладе са стандардима, прва генерација ученика је за припремање користила збирке задатака. Збирке задатака садржале су задатке којима се проверава оствареност образовних стандарда за крај обавезног образовања. Збирку задатака припремио је Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања. Одређен број задатака из збирки био је коришћен на завршном испиту. Завршни испит је имао 50% потпуно познатих задатака, претходно објављених у збирци задатака, 25% задатака који су делимично измењени (промењени подаци) и 25% непознатих задатака.

Друга генерација ученика такође је полагала завршни испит из два предмета: српског језика, односно матерњег језика и математике (који ће бити анализиран у наставку овог рада). Испит је садржао 25% потпуно познатих задатака, претходно објављених у збирци задатака, 25% делимично познатих задатака насталих делимичном изменом задатака који су већ објављени у збирци задатака и 50% задатака чији садржаји и решења нису садржани у збирци.

Трећа генерација, тј. генерација осмака 2012/2013. такође је полагала два теста, из српског и математике, али тестови завршног испита имали су 25% делимично познатих задатака и 75% потпуно непознатих задатака. Познатих задатака није било. Програм завршног испита за 2013. годину је објављен у септембру школске 2012/2013.године.

Коначни модел завршног испита примењиваће се од школске 2013/2014. године.

Завршни испит ће садржати следећу структуру:

- Испит ће садржати тест из српског језика, односно матерњег језика, математике и комбиновани тест, који ће се састојати од градива из наставних предмета: историја, географија, биологија, физика и хемија. Заступљеност појединачних предмета у комбинованом тесту (број или проценат задатака) биће структуирана према проценту заступљености у наставном плану од петог до осмог разреда.
- Тестови завршног испита садржаће само непознате задатке који неће претходно бити објављени у збиркама.
- Листа стандарда, односно знања и кометенција, који ће се испитивати потпуно непознатим задацима биће објављене у току школске 2012/2013. године
- Прво пробно завршно тестирање из теста комбинованог из предмета: историја, географија, биологија, физика и хемија обављено је у марту 2012. године, када су ученици на које ће се то примењивати били шести разред. Друго пробно тестирање из комбинованог теста спроведено је у првом делу 2013. године

У наставку овог рада биће приказани задаци завршног испита одржаног 19. јуна 2012. године уз анализу резултата основне школе „Свети Сава“ у Краљеву, у којој сам запослена. Резултати завршног испита користе се за побољшање квалитета наставе и учења на нивоу појединачних школа, општине, округа, школске управе и на републичком нивоу.

8.1. ЗАВРШНИ ИСПИТ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 2012. ГОДИНЕ

Завршни испит из математике одржан је 19. јуна 2012. године под организацијом Министарства просвете, науке и технолошког развоја и Завода за вредновање квалитета образовања и васпитања, уз подршку Пројекта „Подршка осигурању квалитета система завршних испита на националном нивоу у основном и средњем образовању“ - ИПА 2008. Тест из математике био је исти за све ученике у целој Србији. Тест је полагало 75 923 ученика.

Пре самог испита одрађена је припрема наставника и школа за реализацију завршног испита, одређени су главни носиоци и учесници у припреми и спровођењу завршног испита. Припремљен је *Приручник за спровођење завршног испита*, а након прве године спровођења испита овај документ је допуњен и унапређен. Свака школа добила је супервизора (наставници основних и средњих школа), који је надгледао целокупно полагање и прегледање тестова, а дежурни наставници и прегледачи су претходно били на обуци. На основу Упутства о праћењу испита, супервизори су имали обавезу да одмах по завршетку испита доставе извештај о реализацији завршног испита Министарству просвете. Њихов извештај садржао је податке о организацији и току испита у школи, о току и резултатима прегледања и оцењивања тестова и о току дешифровања тестова након оцењивања.

Да би се обезбедили једнаки услови полагања за све ученике, да би подаци били што поузданији и валиднији, ученици су полагали у фискултурним салама или неким већим просторијама, како би се омогућило да сви буду на истом месту, да услови буду једнаки за све.

За ученике који су наставу пратили по прилагођеном плану и програму (ученици са сметњама у развоју) урађен је индивидуални тест прилагођен њиховим способностима.

Задацима на тесту проверавана је оствареност образовних стандарда који су дефинисани на три нивоа постигнућа: основном, средњем и напредном нивоу. Овим нивоима описују се захтеви различите тежине, когнитивне комплексности и обима знања, од једноставнијих ка сложенијим.

Од припремљене три комбинације министар просвете је непосредно пре почетка полагања извукао комбинацију број 1. Тест је садржао 20 задатака и израда је трајала 120 минута.

8.2. ЗАДАЦИ СА ЗАВРШНОГ ИСПИТА

1. Повежи сваки децимални број са одговарајућим разломком.

0,2 •	• $\frac{1}{2}$
0,5 •	• $\frac{1}{5}$
2,2 •	• $2\frac{2}{5}$
2,5 •	• $2\frac{1}{5}$
	• $2\frac{1}{2}$

2. Заокружи слово испред израза чија је вредност 0,0011.

а) 0,1 + 0,011

б) 0,11 + 0,001

в) 0,1 . 0,011

г) 0,11 . 0,1

3. Дати су бројеви: $-\frac{11}{10}$ $\quad -5{,}7 \quad 4\frac{5}{10} \quad \frac{1}{11} \quad 0{,}38$

У празна поља упиши неке од понуђених бројева, тако да неједнакости буду тачне.

$-4{,}5 <$ ______ $<$ ______ $< \frac{1}{3} <$ ______ $< 4{,}5$

4. Дати су изрази:

$A = -12 : \left|-\frac{1}{4}\right| + \frac{8}{5}(3 - 3\cdot(1303 - 1297)) \quad B = \frac{22}{38} \cdot (-\frac{4}{11}) \cdot \frac{51}{2} \cdot \frac{19}{17}$

Израчунај вредност израза A и B, а затим израчунај вредност $\frac{|A|}{B}$.

Прикажи поступак.

5. Реши једначину: $-1{,}3 - x = 4{,}3$

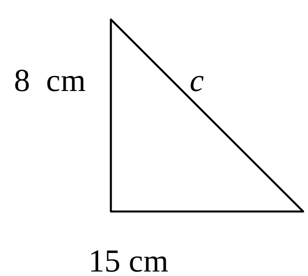
Прикажи поступак.

6. Израчунај вредност израза.

Прикажи поступак.

$-2 \cdot (-2)^2 + 2^3 - (-2)^3 =$

7. Дати су полиноми:
$A = 3x - 3$, $B = 2 + 2x$
Упрости изразе.
Прикажи поступак.
а) $A + B =$ ____
б) $A - B =$ ____
в) $A \cdot B =$ ____
8. Одреди линеарну функцију чији график садржи тачке $A(-3, 1)$ и $B(1, 2)$.
Прикажи поступак.
9. Израчунај дужину хипотенузе правоуглог троугла нацртаног на слици.

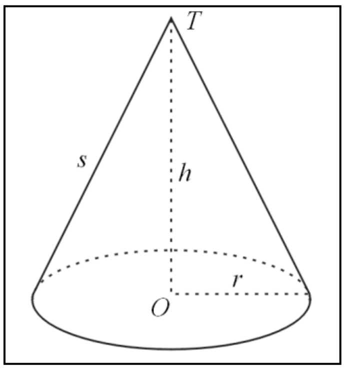


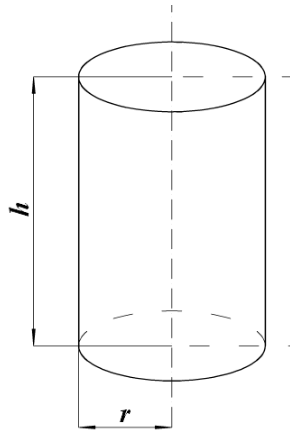
Прикажи поступак.

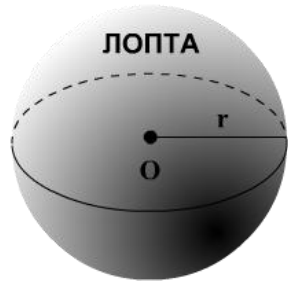
10. Колику запремину има ормар чија је висина 2,2 m, а у основи му је правоугаоник чије су дужине страница 0,5 m и 0,9 m?

Прикажи поступак.

11. Израчунај површине тела приказаних на слици.



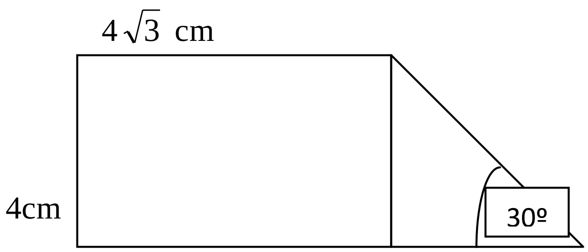




h = 10 cm, r = 8 cm   h = 8 cm, r = 4 cm   r = 5 cm

Које тело има највећу, а које најмању површину?

12. Израчунај обим и површину трапеза приказаног на слици.



Прикажи поступак.

13. Допуни празна места следећим мерним јединицама: cm^2, kg, h, °, *l*, m, тако да реченице буду тачне.

Планинар Арсен је кренуо на освајање Панчићевог врха (висина 2017 ___). Понео је ранац који има масу 12 ___. У ранцу му се налази: застава која је површине 1500 ___, неколико флашица са водом запремине 0,75 ___ и опрема која му помаже да се пење иако је успон већи од 25__. Арсен планира да прву паузу направи после 3 ___ ходања.

14. Упиши број који недостаје тако да добијеш тачну једнакост.

а) 3,2 km = ____________ m

б) 0,2 m = ____________ cm

в) 60 t = ______________ kg

г) 8 недеља = _________ дана

15. Јована купује ЛЦД телевизор, облика правоугаоника, чија је дужина дијагонале 18,7 инча.У продавници је сазнала да 1 инч износи 2,54 cm. Јована је заокруглила обе величине на најближи цео број и израчунала дужину дијагонале у центиметрима. Колику дужину дијагонале је Јована израчунала?

Заокружи слово испред тачног одговора.

а) 36 cm

б) 38 cm

в) 54 cm

г) 57 cm

16. У апотекама „Детелина“ и „Дрен“ пребројане су бочице са алкохолом. Подаци су приказани табелом.

	запремина бочице	број бочица	запремина бочице	број бочица	запремина бочице	број бочица
Апотека „Детелина“	5 dl	4	10 cl	8	50 ml	5
Апотека „Дрен“	4 dl	4	20 cl	6	30 ml	8

Колико **литара** алкохола укупно има у апотекама „Детелина“ и „Дрен“?

Прикажи поступак.

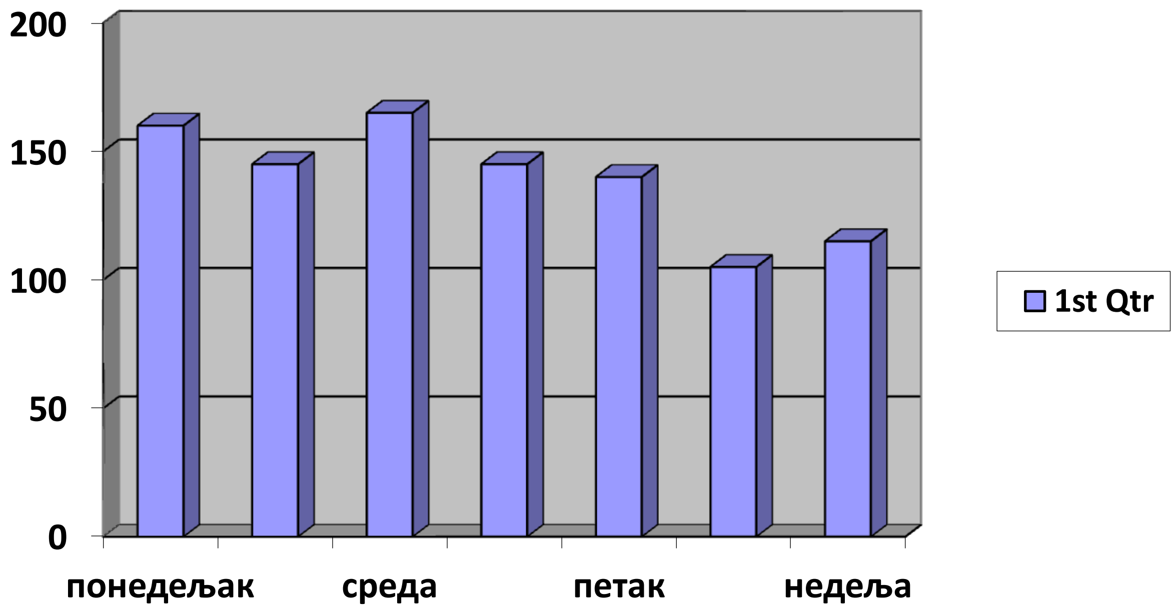
17. Дејана држи врх оловке у координатном почетку (тачка O).

Затим се креће 8 мерних јединица удесно и 6 мерних јединица вертикално нагоре и тако долази у тачку A. Одреди координате тачке A користећи координатни

систем.

Координате тачке A су (___, ___).

18. Дијаграм приказује број продатих векни хлеба у пекари „Добро јутро“ током једне недеље. Подацима са дијаграма попуни празна места тако да реченице буду тачне. Најмање векни продато је у ____________________. У петак је продато ____ векни.



19. Одреди медијану за следеће вредности:

11, 13, 18, 11, 15, 12, 14, 11, 13, 14, 15, 12, 11, 18, 19, 16, 11, 15.

Прикажи поступак.

20. Цена летовања за четворочлану породицу износи 80 000 динара. Ако се уплати до 1. марта, цена летовања се умањује за 10%, а ако се уплати до 1. априла, цена се умањује за 4%. Породица Тишић је уплатила летовање 25. фебруара, а породица Мачкић 15. марта. Колико је динара породица Мачкић више уплатила од породице Тишић?

Прикажи поступак.

8.3. АНАЛИЗА ТЕСТА

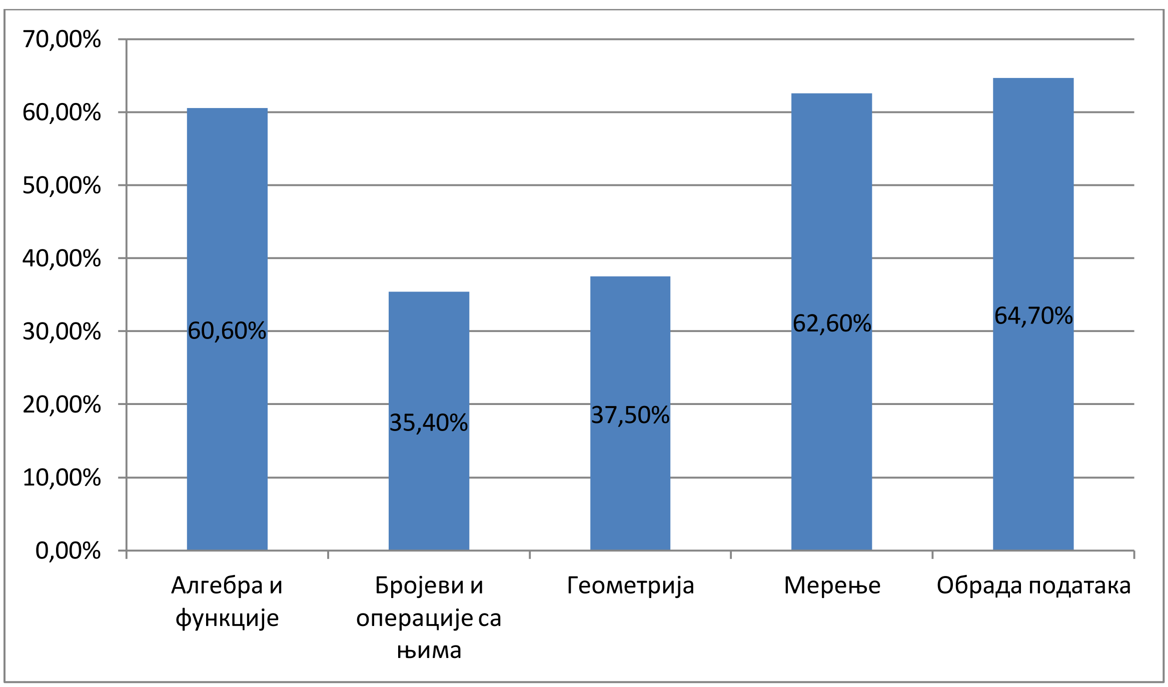
На овом тесту десет задатака припада основном нивоу, по два задатка из сваке од пет области. Основног нивоа били су задаци под бројем: 1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 17 и 18. Шест задатака било је средњег нивоа, и то један из области Бројеви и операције са њима, Алгебра и функције, Геометрија и Мерење, и два задатка из области Обрада података. То су задаци 3, 7, 12, 15, 19 и 20. Четири задатка, и то под бројем 4, 8, 11 и 16 су били напредног нивоа, по један из Бројева и операција са њима, Алгебра и функције, Геометрија и Мерење.

За анализу постигнутих резултата коришћења су истраживања Завода за вредновање квалитета образовања и васпитања.

8.3.1. ПРОСЕЧНО ПОСТИГНУЋЕ УЧЕНИКА НА РЕПУБЛИЧКОМ НИВОУ ПРЕМА ОБЛАСТИМА

Просечна постигнућа ученика на тесту из математике на републичком нивоу уједначена су у областима Алгебра и функције, Мерење и Обрада података и износе од 60–65% тачно решених задатака, а значајно нижа су у областима Бројеви и операције са њима и Геометрија, где се уочава пад успеха за готово половину, иако је у области Бројеви и операције са њима уведен само један непознат задатак, а у области Геометрија захтев је отежан у само једном задатку и уведен је један непознат задатак.

Графички то изгледа овако:



У односу на сложеност захтева у тестовима, резултати показују следеће:

- најмање половину задатака (пет од укупно десет) на тесту из математике, којима се испитује оствареност стандарда на основном нивоу, решава 79% ученика.
- најмање четири задатка (од укупно шест) на тесту из математике којима се испитује оствареност стандарда на средњем нивоу, решава 33% ученика.
- најмање три задатка (од укупно четири) на тесту из математике, којима се испитује оствареност стандарда на напредном нивоу решава 3% ученика.

8.3.2. ПОРЕЂЕЊЕ РЕЗУЛТАТА ДЕЧАКА И ДЕВОЈЧИЦА

На републичком нивоу, утврђено је да су девојчице биле успешније на оба теста у односу на дечаке, при чему је разлика у постигнућу већа на тесту из српског језика (42 бода на стандардизованој скали), него на тесту из математике (18 бодова на стандардизованој скали). У односу на претходну годину, постоји незнатно мања разлика у постигнућима ове две групе ученика на оба теста.

9. ИСТРАЖИВАЊЕ

Истраживање у овом раду односи се на полагање завршног испита ученика основне школе „Свети Сава“ у Краљеву, чиме можемо стећи увид са каквим предзнањем се ученици уписују у средње школе. Анализа грешака које најчешће праве ученици решавајући ове задатке има за циљ да укаже наставницима основних школа шта је то на шта треба да се обрати више пажње како би се грешке свеле на минимум.

Завршни испит у школској 2011/2012. години полагало је 106 ученика, од тога 57 дечака и 49 девојчица, који су били подељени у четири одељења.

9.1. РЕЗУЛТАТИ

У наставку ће бити приказани резултати са завршног испита и представљена успешност урађености задатака на основном, средњем и напредном нивоу, упоређена постигнућа школе са постигнућима округа и републике, постигнућа одељења у школи, али и показане најчешће грешке које су ученици правили приликом решавања ових задатака.

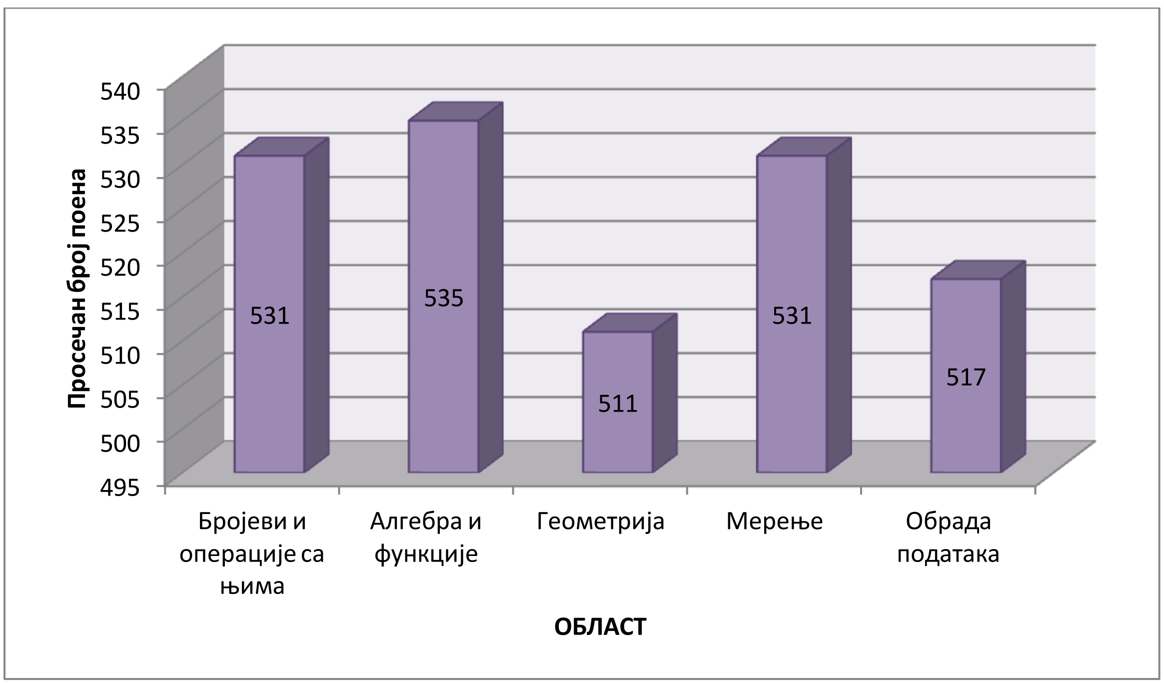
9.1.1. ПРОСЕЧНА ПОСТИГНУЋА УЧЕНИКА ПО ОБЛАСТИМА НА РАЗЛИЧИТИМ НИВОИМА

У овом делу приказано је просечно постигнуће ученика по областима из математике. У табели се налазе подаци о просечном постигнућу девојчица, дечака, школе и Републике. На графиконима су приказана просечна постигнућа по областима на нивоу школе. Резултати ове анализе могу послужити предметним наставницима да у раду са наредним генерацијама ученика више пажње и времена посвете оним областима за које се покаже да их ученици нису довољно добро урадили. Дакле, резултати се могу искористити за планирање рада наставника, било да се ради о редовној или припремној настави за полагање завршног испита.

Резултати на завршном испиту приказују се на стандардизованој скали, тако што се просечном постигнућу на републичком нивоу даје вредност 500. То значи да ученик који на овој скали има 500 поена, остварује резултат који одговара републичком просеку. Стандардна девијација, која представља одступање од просечног постигнућа, има вредност 100, што значи да се у опсегу између 400 и 600 поена налази око две трећине ученика у Србији.

ОБЛАСТ	ПРОСЕЧНО ПОСТИГНУЋЕ			
	Дечаци	Девојчице	Школа	Република
Бројеви и операције са њима	520	543	531	500
Алгебра и функције	514	558	535	500
Геометрија	486	540	511	500
Мерење	530	533	531	500
Обрада података	505	531	517	500

На основу података из табеле можемо видети да су девојчице биле успешније од дечака у свакој од пет области, али и да је школа остварила нешто боље резултате од републичког просека.



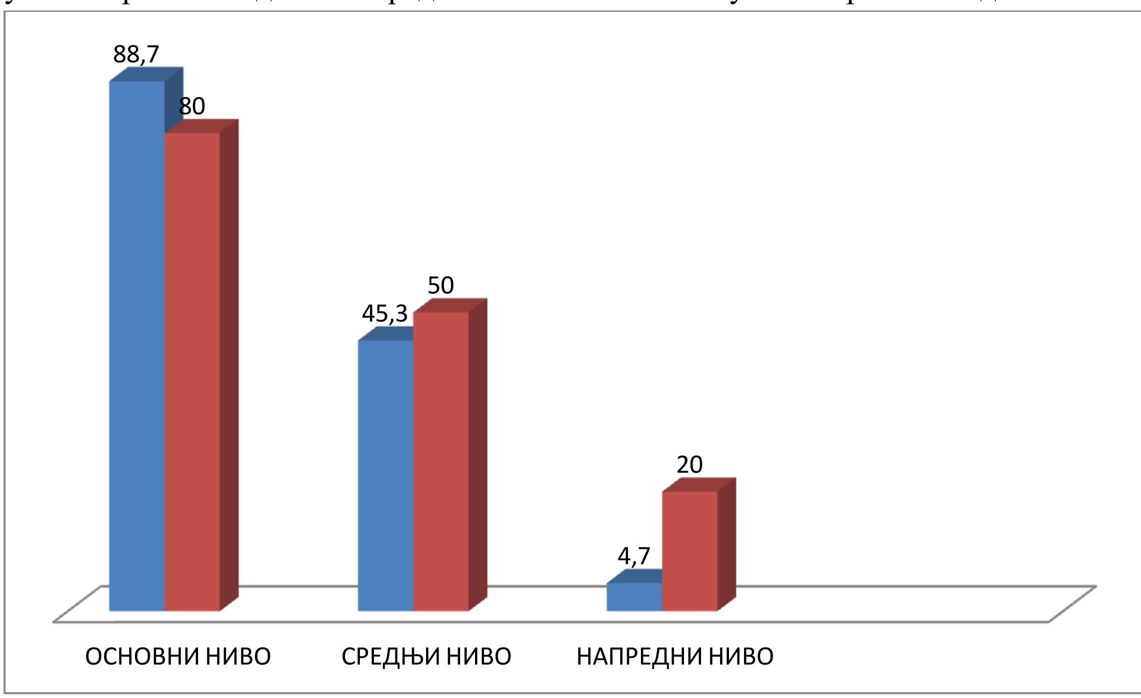
На основу дијаграма закључујемо да је најслабије савладана област Геометрија и јасно је да је то област на коју у даљем раду треба обратити више пажње и посветити јој више времена.

9.1.2. ПРОЦЕНАТ УЧЕНИКА КОЈИ РЕШАВАЈУ ЗАДАТКЕ СА ОСНОВНОГ, СРЕДЊЕГ И НАПРЕДНОГ НИВОА ПОСТИГНУЋА

У овом делу је процентуално приказан број ученика који решавају задатке основног, средњег и напредног нивоа постигнућа. Први стубић указују на остварене нивое постигнућа у школи, а други на очекивани ниво постигнућа. У односу на сваки ниво постигнућа, могу се прочитати подаци о следећем:

- Проценат ученика који освајају најмање 5, а највише 10 поена за задатке са основног нивоа
- Проценат ученика који остварују најмање 4 од могућих 6 поена за задатке са средњег нивоа (ови ученици имају 4, 5 или 6 поена за задатке са средњег нивоа).
- Проценат ученика који остварују најмање 3 од могућа 4 поена за задатке са напредног нивоа (ови ученици имају 3 или 4 поена за задатке са напредног нивоа).

Приликом тумачења добијених података треба имати у виду да очекивани нивои постигнућа подразумевају да најмање 80% ученика решава задатке са основног нивоа, око 50% ученика решава задатке са средњег нивоа и око 20% ученика решава задатке са напредног нивоа.



Са овог дијаграма можемо видели да је у школи, чији резултати су проучавани, премашен једино очекивани основни ниво постигнућа, док су остала два испод очекиваног. Знатно испод очекиваног је напредни ниво. То би требало да буде знак за наставнике који предају у поменутој школи да више пажње посвете тим тежим задацима како би у наредној години овај ниво био унапређен.

9.1.3. ПОРЕЂЕЊЕ ПОСТИГНУЋА ШКОЛЕ СА ПРОСЕЧНИМ ПОСТИГНУЋЕМ ОКРУГА И РЕПУБЛИКЕ

У овом делу приказана су табеларно и графички постигнућа поменуте школе из математике, тако да се могу упоредити са просечним постигнућима на нивоу Рашког округа, коме школа припада и Републике Србије.

У табели се налазе информације о броју ученика, просечном постигнућу (АС – аритметичка средина) и стандардној девијацији (СД), посебно за девојчице и дечаке, али и за све ученике. На основу информација о аритметичкој средини можемо да закључимо какво је просечно постигнуће девојчица у односу на дечаке, школе у целини, затим у односу на округ коме школа припада и у односу на републички просек. Податак о стандардној девијацији у школи указује на степен у којем се ученици у тој школи разликују у погледу постигнућа. На републичком нивоу стандардна девијација износи 100 поена, што значи да су у школама у којима је стандардна девијација већа од 100 разлике између ученика у погледу постигнућа веће него на републичком нивоу, а у школама где је стандардна девијација мања од 100, разлике међу ученицима су мање него на републичком нивоу. Дакле, стандардна девијација указује на то у којој мери образовање у појединим школама утиче да разлике међу ученицима у погледу постигнућа буду мање.

Пол	Дечаци			Девојчице			Сви ученици		
Резултати	Број	АС	СД	Број	АС	СД	Број	АС	СД
Школа	57	512	100	49	549	72	106	529	90
Округ	1012	505	97	955	528	91	1967	516	95
Република	36869	490	99	35228	510	100	72097	500	100

АС – просечан број поена, СД – стандардна девијација

На основу података из табеле можемо закључити да је стандардна девијација дечака у школи 100, што је и национални просек, док је код девојчица 72, што значи да су разлике међу девојчицама знатно мање него на нациналном нивоу. Што се тиче просечних постигнућа, можемо уочити да девојчице и у школи, и у округу и републици постижу боље резултате него дечаци, иако у последњем ПИСА истраживању из 2009. године подаци говоре да су дечаци показали виши ниво математичке писмености од девојчица. Међутим, реч је о два различита облика тестирања, тест на завршном испиту је заснован на образовним стандардима и у потпуности прати план и програм, док ПИСА[1] истраживање не мери степен остварености школског програма, већ функционалну математичку писменост. Девојчице одговорније и редовније уче, па је то један од разлога за постизање бољих резултата.

Последње ТИМС[2] истраживање Института за педагошка истраживања из 2007. године говори да се према просечном постинућу из математике девојчице и дечаци у Србији не разликују, али да постоје разлике у појединим садржајима – девојчице су боље у алгебри и геометрији, као и у примени знања и закључивању.

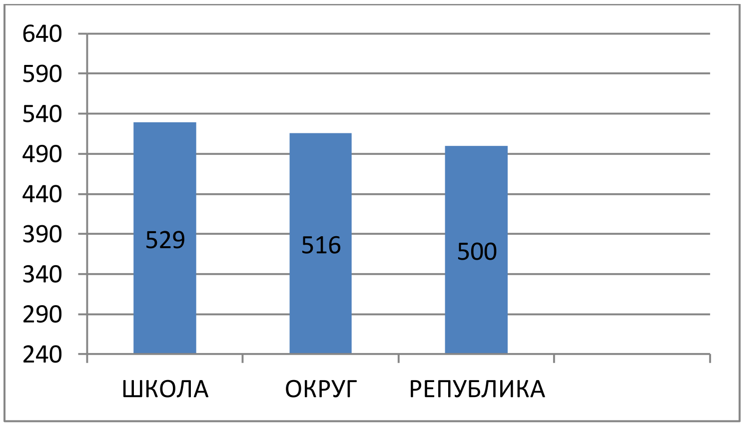
Ако посматрамо математичка такмичења, на којима се решавају сложенији задаци који захтевају већу концентрацију, закључивање и примену стечених знања дечаци су у предности. Они су успешнији у математици, али посебно у физици и у информатици. То није случај само у Србији, већ у целом свету. На математичким олимпијадама готово 90% учесника су дечаци.

Да математика није првенствено мушка дисциплина, како многи сматрају, потврђује и то што се из године у годину повећава број девојака које је изучавају. У Математичкој гимназији у Београду тренутно две трећине ученика чине дечаци, док је на Математичком факултету у последњим годинама број младића и девојака готово изједначен.

На следећем дијаграму може се видети где се налази наша школа у односу на Рашки округ и Србију. Можемо приметити да су остварени бољи резултати и у односу на округ и у односу на републику.

[1] PISA (Programme for International Student Assessment) – у овом тренутку највеће међународно истраживање у области образовања. Реализује се у организацији OECD-а (организација за економску сарадњу и развој) од 1997. године. Тестирање се организују сваке треће године и испитује се писменост у три домена: математика, читање и природне науке. Истраживања се врше на петнестогодишњацима.

[2] Истраживање TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) представља међународно истраживање образовних постигнућа ученика основне школе у области математике и природних наука. Истраживање се реализује сваке четири године у IV и VIII разреду. До сада су реализовани циклуси 1995, 1999. и 2003. године. Србија је први пут учествовала у овом истраживању 2003. године. Код нас је у циклусу 2003. и 2007. истраживање спроведено на узорку ученика VIII разреда.



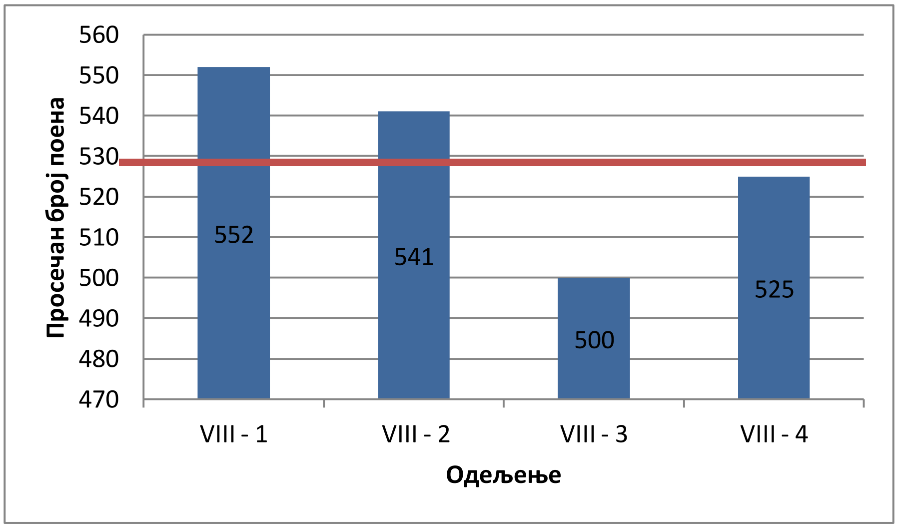
9.1.4. ПОРЕЂЕЊЕ ПОСТИГНУЋА ОДЕЉЕЊА

Даље ће бити приказана постигнућа сва четири одељења, најпре табеларно, а онда и графички. У табели се налазе подаци о броју ученика и просечном постигнућу (АС) , посебно за девојчице и дечаке, а и за све ученике. Ова анализа омогућава међусобно поређење просечних постигнућа одељења (најуспешнија и најмање успешна одељења на завршном испиту), као и поређење постигнућа одељења са просечним постигнућем школе (испод или изнад просека).

Пол	Дечаци		Девојчице		Сви ученици	
Одељење	број	АС	број	АС	број	АС
VIII – 1	13	535	13	568	26	552
VIII – 2	15	536	11	548	26	541
VIII – 3	15	458	11	556	26	500
VIII – 4	14	523	14	526	28	525
Школа	57	512	49	549	106	529

Када се упореде закључне оцене и средња оцена из математике у осмом разреду ових одељења долази се до закључка да су постигнућа прилично очекивана. Једино је дошло до замене одељења VIII – 2 и VIII – 4, јер је VIII – 4 имало бољу просечну оцену, али је показало лошије резултате на тесту.

Графички би то изгледало као на следећој слици.



Линија представља просек на нивоу школе. Види се да су одељења VIII – 1 и VIII – 2 била изнад просека, VIII – 4 нешто ниже, а VIII – 3 далеко испод просека школе.

На основу наведених резултата у проценту решености задатака можемо увидети да су ученици највише проблема имали у решавању задатака напредног нивоа, а што се тиче области онда је то област геометрије. То нам даје јасан сигнал да је то област на коју се, у будућности, мора обратити много више пажње и времена.

Чињеница је да су најбоље урађени задаци основног нивоа, што је и било очекивано. Треба имати у виду да је од укупно 10 задатака основног нивоа 5 било раније познато ученицима, а осталих 5 је са само неким измењеним подацима, тако да се може поставити питање колико би био успешно одрађен и овај ниво да се ученици нису раније срели са овим задацима. На успешност урађености задатака утицало је то што су их ученици провежбали више пута, а неки можда научили и напамет. Приметно је да се ученици много слабије сналазе у задацима које нису вежбали на часу, и то је оно на шта треба у будуће скренути више пажње. Треба их учити да повезују стечена знања са ситуацијама из живота, да повезују знања из различитих предмета.

Што се тиче средњег нивоа, можемо видети да од 6 задатака, од којих су сви били непознати, само два је решило више од половине ученика, што је веома забрињавајуће с обзиром на то какви задаци су у питању.

Треба истаћи да су задаци који се сада дају ученицима много лакши наго што је то био случај ранијих година, када се у сваком задатку тражио поступак долажења до решења и није било задатака са понуђеним одговорима, где само треба заокружити тачан одговор или допунити реченице.

Можемо увидети и да велики број ученика уопште и не рашава задатке са сложенијим захтевима. Ученици се не труде довољно и лако одустају. Треба их усмеравати да више пута прочитају задатак, издвоје дате и тражене податке и свакако покушају да реше задатак, јер на овом тесту нема одузимања поена за погрешно урађен задатак.

10. ЗАКЉУЧАК

О успешности завршног испита још увек је рано говорити јер се примењује од скоро, тако да ћемо прави увид стећи тек кроз неколико година. Примена образовних стандарда ће свакако допринети уједначавању критеријума оцењивања, али и ту смо још далеко од постављеног циља и биће потребно још много рада.

Да би дошло до побољшања резултата наших ученика, потребно је учинити још много. У класичној настави, каква се углавном и реализује у нашим школама, многе су слабости и недостаци који представљају сметњу у испуњавању савремених и васпитних задатака које нам диктира нови темпо живота. Још увек се целокупна настава прилагођава „просечном" ученику, чиме се запостављају потпросечни и натпросечни ученици. Главни извор информација је и даље наставник, док су ученици, углавном, пасивни посматрачи, чиме се запоставља креативност ученика. Темпо рада диктира наставник, мада то не одговара увек и сваком ученику.

Много је начина да се овакав облик наставе унапреди, али није довољно да само дајемо предлоге шта би могло и како би могло, већ се мора прећи са речи на дело. У данашње време педагошко–психолошке службе превише захтева постављају пред нас, али све се то углавном своди на испуњавање разних формулара, образаца, а ретко кад се проверава да ли је нешто од тога испуњено. Наставници се све више претварају у административне раднике, а сопствена професија им је на другом месту.

У настави математике ефикасност би знатно повећало учење путем решавања проблема. Тако се може најуспешније остварити задатак наставе математике, који јесте развијање ученичке способности посматрања, као и критичког, стваралачког и логичког мишљења. Суштина је створити проблемску ситуацију и пустити ученике да до решења долазе самостално. На овај начин се постиже боље схватање, трајност и примењивост стечених знања, али и већа оспособљеност за самосталан рад и учење.

Савремени научно-технички развој утиче на осавремењавање програмских садржаја, па је препоручљиво понекад у настави користити и рачунар, уводити занимљивије часове помоћу презентација које ће осмислити наставници, а понекад и сами ученици. Циљ нове наставе је да ученици активније учествују у раду, да њихова улога у настави постане значајнија и да се тиме више заинтересују за сам предмет. Мора се стално радити на побољшању комуникације између наставника и ученика јер међу њима треба да постоји однос узајамног поштовања и уважавања. Пред наставнике се стално постављају нови задаци и изазови, па и ми, као и ученици, треба стално да учимо, да унапређујемо своја знања и да се усавршавамо. Да би настава била успешнија и продуктивнија, потребна је сарадња свих актера који учествују у наставном процесу – наставника, ученика, стручних сарадника, директора, па и самих родитеља. Најбитнији учесници у настави су свакако ученици и наставу треба прилагодити њиховим интересовањима и потребама и зато је потребна подршка наставницима да би успели да наставу организују на најбољи могући начин. Због тога је неопходно да се организује што више семинара и стручних предавања, да се публикује већи број корисне методичке и ускостручне литературе, која ће усмерити наставнике ка настави која ће донети боље и ефикасније резултате.

Литература:

Хавелка, Н. (2000) *Ученик и наставник у образовном процесу*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд

Хавелка, Н., Хебиб, Е., Бауцал, А. (2003) *Оцењивање за развој ученика: приручник за наставнике,* Министарство просвете и спорта, Београд

Андрић, В. (2011) *Проверавање и оцењивање у настави математике у основној школи*, Нови Сад

Образовни стандарди за крај обавезног образовања за наставни предмет математика, (2010) Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања, Београд

Правилник о оцењивању ученика у основном образовању и васпитању, (2013) Службени гласник РС, бр. 55/2013, Београд

Saginor N. (2008) *Diagnostic classroom observation: moving beyond best practice*, London: Corwin Press

Woolfolk, A., Hughes, M. & Walkup, V. (2008) *Psychology in Education*, London: Pearson Education

Јевремовић, Б., Божић, Р., Ђуковић, Ј. (2009) *Збирка из математике са тестовима и задацима за 7. разред основне школе,* Театар За, Београд

Јевремовић, Б., Вуковић, Љ., Ђуковић, Ј. (2013) *Збирка задатака из математике за 8. разред основне школе,* Школа Плус, Београд

Андрић, В., Дугошија, Ђ., Јоцковић, В., Мићић, В. (2009) *Приручник уз уџбеник из математике за седми разред основне школе,* Завод за уџбенике и наставна средства, Београд

Аднађевић, Д., Милић Д. (2005) *Приручник уз уџбеник из математике за осми разред основне школе,* Завод за уџбенике и наставна средства, Београд

Икодиновић, Н. (2012)*Приручник за наставнике математике у седмом разреду основне школе*, Клет, Београд

Икодиновић, Н., Димитријевић, С., Поповић, Б. (2012) *Приручник за наставнике математике у осмом разреду основне школе*, Клет, Београд

Завршни испит на крај основног образовања и васпитања школске 2011/2012. године, (2012), Министарство просвете и науке, Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања, Београд

Извештај о реализацији и резултатима завршног испита на крају основног образовања и васпитања у школској 2011/2012. години (2012), Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања, Београд