Parcijalna uredjenja izomorfnih podstruktura relacijskih struktura

Doktorska disertacija

Boriša Kuzeljević

Mentor: dr Miloš Kurilić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU
2013.

Sadržaj

Rezime

Cilj ove teze je da se ispitaju lanci u parcijalnim uredjenjima $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}), \subset \rangle$, pri čemu je $\mathbb{P}(\mathbb{X})$ skup domena izomorfnih podstruktura relacijske strukture $\mathbb{X}$. Pošto se svaki lanac u parcijalnom uredjenju može produžiti do maksimalnog lanca, dovoljno je ispitati maksimalne lance u $\mathbb{P}(\mathbb{X})$. Dokazano je da, ako je $\mathbb{X}$ ultrahomogena relacijska struktura koja ima netrivijalne izomorfne podstrukture, onda je svaki maksimalan lanac u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ kompletno linearno uredjenje koje se utapa u $\mathbb{R}$ i ima neizolovan minimum. Ako je $\mathbb{X}$ relacijska struktura, dat je dovoljan uslov da za svako kompletno linearno uredjenje $\mathbb{L}$ koje se utapa u $\mathbb{R}$ i ima neizolovan minimum, postoji maksimalan lanac u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ izomorfan $\mathbb{L}$. Dokazano je i da ako je $\mathbb{X}$ neka od sledećih relacijskih struktura: Rado graf, Hensonov graf, random poset, ultrahomogeni poset $\mathbb{B}_n$ ili ultrahomogeni poset $\mathbb{C}_n$; onda je $\mathbb{L}$ izomorfno maksimalnom lancu u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ ako i samo ako je $\mathbb{L}$ kompletno, utapa se u $\mathbb{R}$ i ima neizolovan minimum. Ako je $\mathbb{X}$ prebrojiv antilanac ili disjunktna unija μ kompletnih grafova sa ν tačaka za $\mu\nu = \omega$, onda je $\mathbb{L}$ izomorfno maksimalnom lancu u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ ako i samo ako je bulovsko, utapa se u $\mathbb{R}$ i ima neizolovan minimum.

Abstract

The purpose of this thesis is to investigate chains in partial orders $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}), \subset \rangle$, where $\mathbb{P}(\mathbb{X})$ is the set of domains of isomorphic substructures of a relational structure $\mathbb{X}$. Since each chain in a partial order can be extended to a maximal one, it is enough to describe maximal chains in $\mathbb{P}(\mathbb{X})$. It is proved that, if $\mathbb{X}$ is an ultrahomogeneous relational structure with non-trivial isomorphic substructures, then each maximal chain in $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ is a complete, $\mathbb{R}$-embeddable linear order with minimum non-isolated. If $\mathbb{X}$ is a relational structure, a condition is given for $\mathbb{X}$, which is sufficient for $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ to embed each complete, $\mathbb{R}$-embeddable linear order with minimum non-isolated as a maximal chain. It is also proved that if $\mathbb{X}$ is one of the following relational structures: Rado graph, Henson graph, random poset, ultrahomogeneous poset $\mathbb{B}_n$ or ultrahomogeneous poset $\mathbb{C}_n$; then $\mathbb{L}$ is isomorphic to a maximal chain in $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ if and only if $\mathbb{L}$ is complete, $\mathbb{R}$-embeddable with minimum non-isolated. If $\mathbb{X}$ is a countable antichain or disjoint union of μ complete graphs with ν points where $\mu\nu = \omega$, then $\mathbb{L}$ is isomorphic to a maximal chain in $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ if and only if $\mathbb{L}$ is Boolean, $\mathbb{R}$-embeddable with minimum non-isolated.

Uvod

Osnova za istraživanje čiji rezultat je ova teza, bila je naredna teorema.

Teorema 1.33 ([16]) Neka je $\mathbb{P}(\mathbb{Q},<) = \{A \subset \mathbb{Q} : A \cong \langle \mathbb{Q},<\rangle\}$. Tada su za svako linearno uredjenje $\mathbb{L}$ sledeći uslovi ekvivalentni:
(a) $\mathbb{L}$ je izomorfno maksimalnom lancu u posetu $\langle \mathbb{P}(\mathbb{Q},<) \cup \{\emptyset\}, \subset\rangle$;
(b) $\mathbb{L}$ se utapa u $\mathbb{R}$, kompletno je i $\min \mathbb{L}$ nema sledbenika;
(c) $\mathbb{L}$ je izomorfno kompaktnom skupu $K \subset \mathbb{R}$ čiji je minimum neizolovan.

Dakle, elementaran problem na osnovnoj matematičkoj strukturi. Takve strukture su po pravilu toliko izučavane da je uvek potrebno pronaći neki novi pristup, ili uočiti neke potpuno nove strukturne osobine objekata koji se proučavaju. Mi smo u ovoj tezi želeli da damo što opštiji okvir za izučavanje fenomena primećenog u teoremi 1.33.

U prvoj glavi dajemo pregled teorije linearnih uredjenja. Definišemo osnovne pojmove i formulišemo tvrdjenja koja će nam koristiti. Uz poznata tvrdjenja dajemo skicu dokaza, jer je sam dokaz ovih tvrdjenja važniji za naš rad nego formulacija. Izmedju ostalog, skiciraćemo Cantorovu tehniku *back-and-forth* da bismo stekli dobru intuiciju za rad sa ultrahomogenim strukturama. Pored davanja okvira u kojima razmišljamo u tezi i navodjenja osnovnih pojmova, u ovoj glavi dokazujemo par tvrdjenja koja će nam biti neophodna za dokaz glavnih teorema. Pokazujemo i kako se koriste kondenzacije da bi se analizirala struktura linearnog uredjenja. Na kraju ove glave dajemo motivaciju za naše istraživanje. Naime, teorema Kuratowskog iz 1921. daje potpunu karakterizaciju maksimalnih lanaca u parcijalnom uredjenju $P(\kappa)$ za proizvoljan kardinal κ. Teorema 1.33, i rezultati dobijeni u ovoj tezi opisuju maksimalne lance podskupova prebrojivog skupa, ali ne bilo kojih podskupova, već samo onih koji čuvaju unapred zadatu strukturu. Metateorija u kojoj radimo je ZFC.

U drugoj glavi precizno definišemo i opisujemo osnovne osobine relacijskih struktura. Predstavljamo uopštenje racionalne linije - ultrahomogene i univerzalne strukture. Pri tome izlažemo elemente Fraïsséove teorije, koja pokazuje jednostavan način za pronalaženje ultrahomogenih univerzalnih struktura ispitivanjem posebnih klasa konačnih struktura - Fraïsséovih klasa. Na kraju opisujemo parcijalna uredjenja i grafove. I klasa svih konačnih strogih parcijalnih uredjenja i klasa svih konačnih grafova su Fraïsséove klase, pa postoje prebrojivi univerzalni ultrahomogeni graf i strogo parcijalno uredjenje - Rado graf i random poset. Detaljno ispitujemo strukturu njihovih izomorfnih kopija i pokazujemo sličnosti i razlike u odnosu na racionalnu liniju. Predstavljamo i Hensonove grafove, koji su još jedna klasa ultrahomogenih grafova, univerzalna za $\mathbb{K}_n$-slobodne prebrojive grafove. Pokazujemo da se njihova struktura ipak bitno razlikuje od strukture racionalne linije, Rado grafa i random poseta. U ovoj glavi, da bi čitalac lakše pratio tekst, na primeru konstrukcije Rado grafa pokazujemo kako koristimo lemu Rasiowa-Sikorski u dokazima glavnih teorema.

U trećoj glavi počinjemo dokaz glavnih teorema, i to tako što izolujemo neke osobine relacijskih struktura neophodne za pronalaženje maksimalnih lanaca u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ (gde je $\mathbb{P}(\mathbb{X}) = \{A \subset \mathbb{X} : A \cong \mathbb{X}\}$), koji odgovaraju kompaktnim podskupovima realne prave. Dokazujemo da za sve ultrahomogene strukture za koje je $\mathbb{P}(\mathbb{X}) \neq \{X\}$ važi da je maksimalan lanac u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ izomorfan nekom kompaktnom podskupu realne prave sa neizolovanim minimumom (teorema 3.4). Ukoliko naša relacijska struktura ispunjava još neke dodatne uslove, pokazujemo da tada i za svaki kompaktan skup $K \subset \mathbb{R}$ kome je minimum neizolovan, možemo konstruisati maksimalan lanac u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ izomorfan K (teoreme 3.9 i 3.11).

U četvrtoj glavi dokazujemo glavnu teoremu za prebrojive ultrahomogene grafove (teorema 4.2). Lachlan i Woodrow klasifikovali su sve prebrojive ultrahomogene grafove, to su Rado graf $\mathbb{G}_{\text{Rado}}$, Hensonovi grafovi $\mathbb{H}_n$ za $n \geq 3$, disjunktne unije kompletnih grafova $\mathbb{G}_{\mu\nu}$ za $\mu\nu = \omega$, kao i njihovi komplementi.

Teorema 4.2 Neka je $\mathbb{G}$ prebrojiv ultrahomogeni graf. Tada važi:

(I) Ako je $\mathbb{G} = \mathbb{G}_{\text{Rado}}$ ili $\mathbb{G} = \mathbb{H}_n$ za neko $n \geq 3$, onda su za svako linearno uredjenje $\mathbb{L}$ sledeći uslovi ekvivalentni.
- (a) $\mathbb{L}$ je izomorfno maksimalnom lancu u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{G}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$;
- (b) $\mathbb{L}$ se utapa u $\mathbb{R}$, kompletno je i $\min \mathbb{L}$ nema sledbenika;
- (c) $\mathbb{L}$ je izomorfno kompaktnom skupu $K \subset \mathbb{R}$ čiji je minimum neizolovan.

(II) Ako je $\mathbb{G} = \mathbb{G}_{\mu\nu}$, za $\mu\nu = \omega$, onda su za svako linearno uredjenje sledeći uslovi ekvivalentni:
- (a) $\mathbb{L}$ je izomorfno maksimalnom lancu u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{G}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$;
- (b) $\mathbb{L}$ se utapa u $\mathbb{R}$, bulovsko je i $\min \mathbb{L}$ nema sledbenika;
- (c) $\mathbb{L}$ je izomorfno kompaktnom nigde gustom skupu $K \subset \mathbb{R}$ čiji je minimum neizolovan.

U slučaju Rado grafa i Hensonovih grafova dajemo novu prezentaciju ovih struktura. Pogodno definišemo parcijalna uredjenja $\mathbb{P}_{\text{Rado}}$ i $\mathbb{P}_{\mathbb{H}_n}$, pa koristeći Lemu Rasiowa-Sikorski, pronalazimo filtere u ovim parcijalnim uredjenjima, koji nam daju strukture $\langle \mathbb{Q}, <, \rho_{\text{Rado}} \rangle$ i $\langle \mathbb{Q}, <, \rho_{\mathbb{H}_n} \rangle$, za koje je $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ racionalna linija, $\langle \mathbb{Q}, \rho_{\text{Rado}} \rangle$ Rado graf, a $\langle \mathbb{Q}, \rho_{\mathbb{H}_n} \rangle$ Hensonov graf za neko $n \geq 3$. Pored toga, ove strukture ispunjavaju ključni uslov da su $(-\infty, x) \cap \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$ izomorfne kopije Rado grafa i Hensonovih grafova, dok $(-\infty, q] \cap \mathbb{Q}$, $q \in \mathbb{Q}$ nisu izomorfne kopije Rado grafa i Hensonovih grafova.

U petoj glavi dokazujemo glavnu teoremu za prebrojiva ultrahomogena parcijalna uredjenja (teorema 5.2). Schmerl je klasifikovao sva prebrojiva ultrahomogena stroga parcijalna uredjenja, to su random poset $\mathbb{D}$, antilanac od n disjunktnih kopija $\mathbb{Q}$ za $1 \leq n \leq \omega$ koji označavamo $\mathbb{B}_n$, prebrojiv antilanac $\mathbb{A}_\omega$ i $\mathbb{C}_n$, unija prebrojivo mnogo antilanaca kardinalnosti n poredjanih u prebrojivo gusto linearno uredjenje bez krajeva za $1 \leq n \leq \omega$.

Teorema 5.2 Neka je $\mathbb{P}$ prebrojivo ultrahomogeno strogo parcijalno uredjenje. Tada važi:

(I) Ako je $\mathbb{P} = \mathbb{D}$ ili je $\mathbb{P} = \mathbb{B}_n$ za neko $1 \leq n \leq \omega$ ili je $\mathbb{P} = \mathbb{C}_n$ za neko $1 \leq n \leq \omega$, onda su za svako linearno uredjenje $\mathbb{L}$ sledeći uslovi ekvivalentni.
  - (a) $\mathbb{L}$ je izomorfno maksimalnom lancu u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{P}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$;
  - (b) $\mathbb{L}$ se utapa u $\mathbb{R}$, kompletno je i $\min \mathbb{L}$ nema sledbenika;
  - (c) $\mathbb{L}$ je izomorfno kompaktnom skupu $K \subset \mathbb{R}$ čiji je minimum neizolovan.

(II) Ako je $\mathbb{P} = \mathbb{A}_\omega$, onda su za svako linearno uredjenje sledeći uslovi ekvivalentni:
  - (a) $\mathbb{L}$ je izomorfno maksimalnom lancu u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{P}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$;
  - (b) $\mathbb{L}$ se utapa u $\mathbb{R}$, bulovsko je i $\min \mathbb{L}$ nema sledbenika;
  - (c) $\mathbb{L}$ je izomorfno kompaktnom nigde gustom skupu $K \subset \mathbb{R}$ čiji je minimum neizolovan.

U dokazu teoreme 5.2, kao i u četvrtoj glavi, konstruisali smo novu prezentaciju random poseta, koja ima iste osobine kao prezentacije Rado grafa i Hensonovih grafova. Dakle, dobili smo prezentaciju $\langle \mathbb{Q}, <, \lhd \rangle$, pri čemu je $<$ ekstenzija parcijalnog uredjenja $\lhd$, a istovremeno i uredjenje racionalne linije, dok je $\langle \mathbb{Q}, \lhd \rangle$ random poset.

Posebno bih se zahvalio svom mentoru, profesoru Milošu Kuriliću, na pomoći u izradi ove doktorske disertacije. Od profesora sam mogao da naučim koliko je važna posvećenost radu i koji je pravi način da se pristupi istraživanju u matematici. Medjutim, istakao bih da su u izradi ove teze ključne bile profesorove ideje, kako u uočavanju fenomena tako i u odabiru tehnika za rad.

Profesorki Mili Mršević takodje dugujem veliku zahvalnost, jer me je usmerila na pravi način onda kada je to bilo najpotrebnije. Zahvalio bih se i članovima komisije, profesorima Stevanu Pilipoviću, Milanu Gruloviću, Žarku Mijajloviću i Borisu Šobotu na pomoći u izradi ove teze. Naravno, za sve greške i nedostatke odgovoran sam samo ja. Od svih članova našeg seminara na Departmanu za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu naučio sam puno i svima se zahvaljujem. Zahvalio bih se i svim kolegama sa Matematičkog instituta SANU, a posebno profesoru Predragu Tanoviću, od koga sam dobio mnogo korisnih saveta. Profesorima Aleksandru Jovanoviću i Aleksandru Peroviću zahvaljujem se jer su me uveli u teoriju skupova i pokazali da je jedna od najlepših matematičkih disciplina.

Takodje, zahvalio bih se svojim roditeljima na podršci tokom svih godina mog školovanja. Bojani se zahvaljujem u ovom pasusu jer je deo porodice, ali slobodno je mogla da se nadje u prethodnom paragrafu jer je pažljivo pročitala prvu verziju teksta i ispravila veliki broj pravopisnih i stilskih grešaka. Na kraju, zahvaljujem se Mariji i Sofiji na strpljenju i motivaciji da privedem tezu kraju.

Ovo istraživanje je finansirao Matematički institut SANU preko projekta MPNTR ON174006.

GLAVA PRVA

O linearnim uredjenjima

U ovoj glavi izlažemo osnovne pojmove teorije linearnih uredjenja, koji će u tezi biti korišćeni. Prvo, zbog kompletnosti teksta, navodimo osnovne definicije teorije skupova.

Prazan skup označavamo sa $\emptyset$ i definišemo ga kao skup koji nema elemenata. Dalje, *neuredjeni par* je skup $\{x, y\}$ čiji su jedini elementi x i y, a *uredjeni par* $\langle x, y\rangle$ je skup $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Formula $X \subset Y$ označava da je skup X *podskup* skupa Y (tj. $X \subset Y \Leftrightarrow \forall x \in X\ x \in Y$), a $\subsetneq$ označava pravi podskup (tj. $X \subsetneq Y \Leftrightarrow X \subset Y \wedge X \neq Y$). Skup svih podskupova skupa X označavamo sa $P(X)$. *Dekartov proizvod* skupova X i Y jeste skup $X \times Y = \{\langle x, y\rangle : x \in X \ \wedge\ y \in Y\}$. *Binarna relacija* ρ na skupu X jeste bilo koji podskup Dekartovog proizvoda $X \times X$. Za binarnu relaciju ρ na skupu X kažemo da je *refleksivna* ako i samo ako $\forall x \in X\ \ \langle x, x\rangle \in \rho$, *simetrična* ako i samo ako $\forall x, y \in X\ \big(\langle x, y\rangle \in \rho \Rightarrow \langle y, x\rangle \in \rho\big)$, *antisimetrična* akko $\forall x, y \in X\ \big(\langle x, y\rangle \in \rho \wedge \langle y, x\rangle \in \rho \Rightarrow x = y\big)$, *tranzitivna* akko $\forall x, y, z \in X\ \big(\langle x, y\rangle \in \rho\ \wedge\ \langle y, z\rangle \in \rho \Rightarrow \langle x, z\rangle \in \rho\big)$. Refleksivna, simetrična i tranzitivna relacija naziva se *relacija ekvivalencije*. Ako je ρ binarna relacija, onda je relacija $\rho^{-1} = \{\langle a, b\rangle : \langle b, a\rangle \in \rho\}$ *inverzna* relaciji ρ. Uredjeni par $\langle P, \leq\rangle$, pri čemu je P skup, a $\leq$ refleksivna, antisimetrična i tranzitivna relacija naziva se *parcijalno uredjenje*. *Preslikavanje* f skupa X u skup Y je podskup proizvoda $X \times Y$ takav da $\forall x \in X\ \exists_1 y \in Y\ \langle x, y\rangle \in f$; pišemo $f : X \to Y$. Za preslikavanje f skupa X u skup Y kažemo da je "1-1" akko $\forall x_1, x_2 \in X\ \big(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\big)$. Za preslikavanje f skupa X u skup Y kažemo da je "na" ako i samo ako $\forall y \in Y\ \exists x \in X\ f(x) = y$, a da je *bijekcija* ako je "1-1" i "na". $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ su oznake za skupove prirodnih, celih, racionalnih i realnih brojeva. *Niz* u skupu X jeste bilo koje preslikavanje $f : \mathbb{N} \to X$, pri čemu $f(i)$ pišemo skraćeno sa f_i za $i \in \mathbb{N}$, a niz označavamo i sa $\langle f_i : i \in \mathbb{N}\rangle$. Kažemo da je skup X *beskonačan* ako postoji bijekcija $f : X \to Y \subsetneq X$, a u suprotnom kažemo da je *konačan*. Beskonačan skup X je *prebrojiv* ako postoji bijekcija $g : \mathbb{N} \to X$, a u suprotnom kažemo da je *neprebrojiv*. Skupovi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ su prebrojivi, dok je dobro poznato da je skup $\mathbb{R}$ neprebrojiv. Za skupove X i Y kažemo da su *iste kardinalnosti*, u oznaci $|X| = |Y|$, akko postoji bijekcija iz X na Y. Formula $|X| \leq |Y|$ označava da postoji "1-1" preslikavanje iz X u Y, a formula $|X| < |Y|$ da je $|X| \leq |Y|$ i $|X| \neq |Y|$.

Sada možemo definisati linearno uredjenje:

Definicija 1.1 *Linearno uredjenje* je uredjeni par $\mathbb{L} = \langle L, < \rangle$, pri čemu je L skup, a $<$ binarna relacija na skupu L takva da za svako $x, y, z \in L$ važi:

(i) $\neg x < x$; (irefleksivnost)

(ii) $x < y \ \wedge \ y < z \Rightarrow x < z$; (tranzitivnost)

(iii) $x = y \ \vee \ x < y \ \vee y < x$. (trihotomija)

Ako je $\mathbb{L} = \langle L, < \rangle$ linearno uredjenje, onda na skupu L definišemo relaciju $\leq$ sa $x \leq y \Leftrightarrow x < y \ \vee \ x = y$, a inverzno uredjenje $\mathbb{L}^* = \langle L, <_* \rangle$ dato je sa $<_* = <^{-1}$.

Definicija 1.2 Neka je $\mathbb{L} = \langle L, < \rangle$ linearno uredjenje. Tada je $X \subset L$ *početni segment* linearnog uredjenja $\mathbb{L}$ ako iz $x \in X$ i $y < x$ sledi $y \in X$. Kažemo da je $Y \subset L$ *završni segment* linearnog uredjenja $\mathbb{L}$ ako iz $y \in Y$ i $y < x$ sledi $x \in Y$. Sa $\mathrm{Init}(\mathbb{L})$ označavamo skup svih početnih segmenata od $\mathbb{L}$, a istu oznaku koristimo i za linearno uredjenje $\langle \mathrm{Init}(\mathbb{L}), \subsetneq \rangle$. Primetimo da $\emptyset, L \in \mathrm{Init}(\mathbb{L})$.

Definicija 1.3 Neka je $\mathbb{L} = \langle L, < \rangle$ linearno uredjenje. Za $x \in L$ kažemo da je:

- *minimum* uredjenja $\mathbb{L}$ akko $\forall y \in L \ x \leq y$, to pišemo $x = \min \mathbb{L}$;
- *maksimum* uredjenja $\mathbb{L}$ akko $\forall y \in L \ y \leq x$, to pišemo $x = \max \mathbb{L}$;
- *sledbenik* elementa $y \in L$ akko $y < x$ i $\neg \exists z \in L \ y < z < x$;
- *prethodnik* elementa $y \in L$ akko $x < y$ i $\neg \exists z \in L \ x < z < y$.

Minimum i maksimum jednim imenom nazivaju se *krajnje tačke* linearnog uredjenja. Intervale u $\mathbb{L}$ definišemo uobičajeno. Za $x, y \in L$ i $x \leq y$ je

- $(x, y)_L = \{z \in L : x < z < y\}$;
- $(x, y]_L = \{z \in L : x < z \leq y\}$;
- $[x, y)_L = \{z \in L : x \leq z < y\}$;
- $[x, y]_L = \{z \in L : x \leq z \leq y\}$;

Ukoliko je interval naveden bez indeksa, recimo (x, y), to će uvek označavati interval u $\mathbb{R}$, tj. $(x, y)_{\mathbb{R}}$.

Definicija 1.4 Ako je $\mathbb{X} = \langle X, <_X \rangle$ linearno uredjenje, onda kažemo da je $\mathbb{Y} = \langle Y, <_Y \rangle$ *poduredjenje* uredjenja $\mathbb{X}$ ako i samo ako je $Y \subset X$ i $<_Y = <_X \cap (Y \times Y)$.

Na primer, uredjenje prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ je poduredjenje uredjenja celih brojeva $\mathbb{Z}$, kao što je $\mathbb{Z}$ poduredjenje od $\mathbb{Q}$. Pri tome, $\{1, 2, 3\}$ je početni segment od $\mathbb{N}$, dok su $(-\infty, 0) \cap \mathbb{Q}$, $(-\infty, 0] \cap \mathbb{Q}$ i $(-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ početni segmenti od $\mathbb{Q}$. Linearno uredjenje $\mathbb{N}$ ima minimum, a nema maksimum, dok $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ nemaju ni minimum ni maksimum.

Definicija 1.5 Linearno uredjen skup $\mathbb{L} = \langle L, < \rangle$ je *dobro uredjen* ako i samo ako svako neprazno poduredjenje $\mathbb{X}$ uredjenja $\mathbb{L}$ ima minimum.

Definicija 1.6 Skup X je *tranzitivan* ako i samo ako $\forall x \in X \ (x \subset X)$. Skup X je *ordinal* ako i samo ako je tranzitivan i dobro uredjen relacijom $\in$. Kažemo da je ordinal α manji od ordinala β ako je $\alpha \in \beta$ i to pišemo $\alpha < \beta$. Ordinal α je *kardinal* ako i samo ako $\forall \beta \in \alpha \ |\beta| < |\alpha|$. Kardinalnost skupa X, u oznaci $|X|$, je jedinstveni kardinal κ, takav da je $\kappa = |\kappa| = |X|$.

Ordinale ćemo označavati sa $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, a kardinale sa $\kappa, \lambda, \theta, \ldots$. Ako je X skup a κ kardinal, označavamo:

- $[X]^\kappa = \{Y \subset X : |Y| = \kappa\}$;
- $[X]^{<\kappa} = \{Y \subset X : |Y| < \kappa\}$;
- $[X]^{\leq\kappa} = \{Y \subset X : |Y| \leq \kappa\}$.

Kofinalnost beskonačnog kardinala κ, u oznaci $\mathrm{cf}(\kappa)$, definišemo kao

$$\mathrm{cf}(\kappa) = \min\left\{\lambda : \exists X \subset \kappa \ (|X| = \lambda \wedge \bigcup X = \kappa)\right\}.$$

Kardinal je *regularan* ako i samo ako je $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$. Najmanji neprebrojiv kardinal je regularan i označavamo ga sa ω_1.

Definicija 1.7 Niz $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ u linearnom uredjenju $\mathbb{L} = \langle L, < \rangle$ je *kofinalan* ako i samo ako $\forall x \in L \, \exists n \in \mathbb{N} \ x \leq x_n$, a *koinicijalan* ako i samo ako $\forall x \in L \, \exists n \in \mathbb{N} \ x_n \leq x$. Kažemo da je $\mathbb{L}$ *prebrojive kofinalnosti* (ili kofinalnosti ω) ako i samo ako postoji niz u $\mathbb{L}$ koji je kofinalan, a da je *prebrojive koinicijalnosti* ako i samo ako postoji niz u $\mathbb{L}$ koji je koinicijalan.

Definicija 1.8 Neka su $\mathbb{X} = \langle X, <_X \rangle$ i $\mathbb{Y} = \langle Y, <_Y \rangle$ linearna uredjenja. Preslikavanje $f : X \to Y$ je *izomorfizam* linearnog uredjenja $\mathbb{X}$ na linearno uredjenje $\mathbb{Y}$ ako i samo ako je f bijekcija i za sve $x_1, x_2 \in X$ važi:

$$x_1 <_X x_2 \Leftrightarrow f(x_1) <_Y f(x_2). \tag{1.1}$$

Izomorfizam linearnog uredjenja $\mathbb{X}$ na samo sebe nazivamo *automorfizmom*, a skup svih automorfizama obeležavamo sa $\mathrm{Aut}(\mathbb{X})$.

Za preslikavanje $f : X \to Y$ kažemo da je *utapanje* ako je f "1-1" preslikavanje i zadovoljava uslov (1.1).

Ukoliko postoji izomorfizam linearnog uredjenja $\mathbb{X}$ na linearno uredjenje $\mathbb{Y}$, kažemo da su $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$ izomorfna linearna uredjenja (ili da imaju isti tip uredjenja) i to beležimo sa $\mathbb{X} \cong \mathbb{Y}$.

Primetimo da su svaka dva konačna linearna uredjenja iste kardinalnosti izomorfna, ali da ne moraju svaka dva prebrojiva linearna uredjenja biti izomorfna. Na primer, $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ nisu izomorfni jer u $\mathbb{N}$ ne postoji element manji od 1, dok u $\mathbb{Z}$ od svakog elementa postoji manji. Iz sličnog razloga ni $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ nisu izomorfna linearna uredjenja: izmedju 1 i 2 ne postoji nijedan element u $\mathbb{Z}$, dok u $\mathbb{Q}$ izmedju svaka dva elementa postoji neki element. Kada su u pitanju uredjajni tipovi $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$, ne postoji bijekcija izmedju ta dva skupa, pa samim tim ne može postojati ni izomorfizam linearnih uredjenja. Medjutim, za razliku od prethodna dva slučaja, poslednje objašnjenje nije izrazivo jezikom teorije linearnih uredjenja, a nas zanima koje su to uredjajne karakteristike koje razlikuju $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$. U sledećem delu detaljnije opisujemo uredjenje racionalnih brojeva.

1.1 PREBROJIVO GUSTO LINEARNO UREDJENJE

Ako je $\mathbb{L} = \langle L, < \rangle$ linearno uredjenje i $X, Y \subset L$, pisaćemo $X < Y$ ako $\forall x \in X \ \forall y \in Y \ x < y$.

Definicija 1.9 Uredjeni par $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ je *rez* u linearnom uredjenju $\mathbb{L} = \langle L, < \rangle$ ako i samo ako je $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = L$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \neq \emptyset$ i $\mathcal{A} < \mathcal{B}$. Rez $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ je *praznina* u $\mathbb{L}$ ako ne postoji ni $\max \mathcal{A}$ ni $\min \mathcal{B}$. Kažemo da je linearno uredjenje $\mathbb{L}$ *Dedekind-kompletno* ako i samo ako ne postoje praznine u $\mathbb{L}$.

Sada možemo videti da je Dedekind-kompletnost karakteristika koja razlikuje $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$. U uredjenju $\mathbb{Q}$ postoje praznine, to su svi rezovi odredjeni iracionalnim brojevima (jedan rez je par $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$, pri čemu je ispunjeno $\mathcal{A} = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$ i $\mathcal{B} = \{q \in \mathbb{Q} : 2 < q^2\}$) dok, po definiciji skupa realnih brojeva, u $\mathbb{R}$ ne postoje praznine. Što se tiče termina *praznina*, u nedostatku uobičajenog termina mi smo ga preuzeli iz knjige Djura Kurepe iz 1951. godine [13]. On u svojoj knjizi koristi i termin *provalija* za isti pojam.

Definicija 1.10 Za linearno uredjenje kažemo da je *kompletno* ako i samo ako je Dedekind-kompletno i ima maksimum i minimum.

Na primer, $\mathbb{R}$ je Dedekind-kompletno, ali nije kompletno, a interval $[0, 1]$ je jedno kompletno linearno uredjenje, baš kao i

$$[-\infty, \infty] = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Primetimo da su i ω i $\mathbb{Z}$ takodje Dedekind-kompletna linearna uredjenja koja nisu kompletna. Dakle, medju elementarnim primerima prebrojivih linearnih uredjenja $\mathbb{Q}$ se izdvaja postojanjem praznina. Medjutim, baš taj nedostatak uredjenju racionalnih brojeva daje bogatu strukturu - najbogatiju medju prebrojivim linearnim uredjenjima. Da bismo detaljnije proučavali strukturu uredjenja racionalnih brojeva, prvo dajemo definiciju gustog linearnog uredjenja.

Definicija 1.11 Kažemo da je linearno uredjenje $\mathbb{L} = \langle L, < \rangle$ *gusto* ako i samo ako za svake dve različite tačke $x, y \in L$ takve da je $x < y$ postoji element $z \in L$ takav da je $x < z < y$.

Dobro je poznato da je $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ prebrojivo gusto linearno uredjenje bez krajeva. S tim u vezi, dajemo sledeću čuvenu Cantorovu teoremu i samo skicu dokaza koji je bio inspiracija za tehniku *back-and-forth*. Detaljan dokaz se može pronaći u [24].

Teorema 1.12 (Cantor) *Neka su $\mathbb{X} = \langle X, <_X \rangle$ i $\mathbb{Y} = \langle Y, <_Y \rangle$ prebrojiva gusta linearna uredjenja bez krajnjih tačaka. Tada je $\mathbb{X} \cong \mathbb{Y}$.*

Skica dokaza: Konstruisaćemo izomorfizam f izmedju $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$ tačku po tačku. Prvi ključni detalj jeste da su $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$ prebrojiva linearna uredjenja, te ih možemo numerisati: $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ i $Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots\}$. Sada definišemo konačan izomorfizam f_1 na sledeći način, $f(x_1) = y_1$, dakle $f_1 : \{x_1\} \to \{y_1\}$. Da bismo definisali f_2, uzmemo tačku sa najmanjim indeksom u Y koja nije u kodomenu f_1, to je y_2. Sada posmatramo u kakvom je položaju y_2 u odnosu na y_1 i nadjemo tačku x_{i_2} sa najmanjim indeksom u X koja je u istom položaju u odnosu na x_1. Definišemo f_2 kao jednoelementnu ekstenziju izomorfizma f_1, koja slika x_{i_2} u y_2. Ovo je drugi ključni detalj, jer je tačku x_{i_2} moguće pronaći zato što je $\mathbb{X}$ linearno uredjenje bez krajnjih tačaka. Opet, f_3 definišemo kao jednoelementnu ekstenziju izomorfizma f_2 i to tako što tačku sa najmanjim indeksom u X koja nije u domenu f_2, recimo x_{i_3}, slika u tačku sa najmanjim indeksom u Y koja je u istom položaju u odnosu na y_1 i y_2, kao i x_{i_3} u odnosu na x_{i_2} i x_1. Ovo je moguće jer je $\mathbb{Y}$ gusto i bez krajnjih tačaka. Ukoliko ovako nastavimo za svako $n \in \mathbb{N}$, traženi izomorfizam će biti $f = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n$. □

Sledeće dve teoreme koje se slično dokazuju predstavljaju one opšte osobine uredjenja $\mathbb{Q}$, koje će imati strukture koje razmatramo u ovoj tezi.

Teorema 1.13 *Svako prebrojivo linearno uredjenje utapa se u* $\mathbb{Q}$.

Skica dokaza: Neka je $\mathbb{X}$ proizvoljno prebrojivo linearno uredjenje. Numerišimo ga $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Tačku x_1 preslikamo u proizvoljnu tačku y_1 iz $\mathbb{Q}$, potom x_2 preslikamo u tačku y_2 iz $\mathbb{Q}$ koja je u istom položaju u odnosu na y_1 kao i x_2 u odnosu na x_1. Dalje nastavljamo po ugledu da dokaz teoreme 1.12. □

Teorema 1.14 *Neka su* $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ *konačna izomorfna poduredjenja* $\mathbb{Q}$, *i neka je* f *izomorfizam koji to svedoči. Tada postoji* $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ *takav da je* $F \upharpoonright X = f$.

Skica dokaza: Neka je $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$ i $Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_k\}$. Sada numerišemo $\mathbb{Q}$ na dva načina, $\mathbb{Q} = \{x_1, \dots, x_k, t_{k+1}, t_{k+2}, \dots\}$, ali i $\mathbb{Q} = \{y_1, \dots, y_k, s_{k+1}, s_{k+2}, \dots\}$, tako da su t-ovi i s-ovi izabrani proizvoljno. Sada je f konačan početak u konstrukciji izomorfizma F a dalje nastavljamo kao u dokazu teoreme 1.12. Primetimo da bi traženi automorfizam bila i deo po deo linearna funkcija koja slika x_i u y_i za $i \leq k$ - ovo je specifičnost uredjenja $\mathbb{Q}$. □

Prebrojivo gusto linearno uredjenje bez krajeva ima još jednu zanimljivu osobinu koja je ključna za naše dokaze, a oslikava bogatstvo strukture racionalne linije.

Lema 1.15 *Neka je* $1 \leq \alpha \leq \omega$ *ordinal. Tada postoji familija skupova* $\{J_n : n \in \alpha\}$, *koja čini particiju* $\mathbb{Q}$, *takvu da su svi članovi particije gusti u* $\mathbb{Q}$, *a da za svaki* $n \in \alpha$ *i za svaki element* $x \in J_n$ *važi* $x - 1, x + 1 \in J_n$.

Dokaz: Pre svega, dobro je poznato da postoji particija $\{J'_n : n \in \omega\}$ skupa $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ takva da je svaki element particije gust u $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ (dokaz se može pronaći u [27], strana 216). Sada definišemo

$$J_n = \{q + m : q \in J'_n \wedge m \in \mathbb{Z}\}.$$

Jasno da je $\{J_n : n \in \omega\}$ željena particija $\mathbb{Q}$ za $\alpha = \omega$. Ako je $1 \leq \alpha < \omega$, onda je tražena particija $\left\{J_0, J_1, \dots, \bigcup_{n \in \omega \setminus (\alpha - 1)} J_n\right\}$. □

Sledeći pojam koji uvodimo je pojam rasejanog linearnog uredjenja (engleski termin je *scattered linear order*). Pošto u literaturi na srpskom jeziku nema odgovarajućeg termina, mi smo se odlučili za naziv rasejano linearno uredjenje u nadi da će najbolje oslikati prirodu pojma.

Definicija 1.16 Kažemo da je linearno uredjenje $\mathbb{L}$ *rasejano* ako i samo ako se $\mathbb{Q}$ ne može utopiti u $\mathbb{L}$.

1.2 NEPREBROJIVA LINEARNA UREDJENJA

Osnovni primer neprebrojivog linearnog uredjenja je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$. Podsetimo se da $\mathbb{R}$ definišemo kao skup svih netrivijalnih početnih segmenata skupa racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ koji nemaju maksimum (trivijalni početni segmenti $\mathbb{Q}$ su $\emptyset$ i $\mathbb{Q}$).

Definicija 1.17 Ako je $\mathbb{X}$ poduredjenje uredjenja $\mathbb{R}$, kažemo da je $\mathbb{X}$ *ograničeno odozdo* ako postoji realan broj M takav da $\forall x \in X \; M < x$, a da je *ograničeno odozgo* ako postoji realan broj M takav da $\forall x \in X \; x < M$. Dalje, kažemo da je $y \in \mathbb{R}$:

- *supremum* $\mathbb{X}$ akko $\forall x \in X \; x \leq y$ i $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists x \in (y - \frac{1}{n}, y] \cap X$;
- *infimum* $\mathbb{X}$ akko $\forall x \in X \; y \leq x$ i $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists x \in [y, y + \frac{1}{n}) \cap X$.

Svako neprazno odozgo ograničeno poduredjenje $\mathbb{R}$ ima supremum, a svako neprazno odozdo ograničeno poduredjenje $\mathbb{R}$ ima infimum.

Na skupu realnih brojeva podrazumevamo uobičajenu topologiju, a ako je $K \subset \mathbb{R}$, sa K' ćemo označavati skup svih tačaka nagomilavanja skupa K.

Definicija 1.18 Neka je $\mathbb{L}$ linearno uredjenje, skup $D \subset L$ je *gust* u $\mathbb{L}$ ako i samo ako za proizvoljne različite tačke $x, y \in L$ takve da je $x < y$ postoji $d \in D$ takav da je $x < d < y$. $\mathbb{L}$ je *separabilno* ako i samo ako postoji prebrojiv skup gust u $\mathbb{L}$.

Lema 1.19 ([24], str. 36.) *Svako gusto poduredjenje $\mathbb{R}$ je separabilno.*

Lema 1.20 *Svako gusto i kompletno linearno uredjenje je neprebrojivo.*

Dokaz: Neka je $\mathbb{L}$ gusto i kompletno linearno uredjenje. Pošto je gusto, $\mathbb{L}$ sadrži kopiju $\mathbb{Q}$. Pošto je kompletno, sadrži i kopiju kompletiranja $\mathbb{Q}$, tj. kopiju intervala $[-\infty, \infty]$ koji je neprebrojiv. Dakle, i $\mathbb{L}$ je neprebrojivo. $\square$

Teorema 1.21 ([24], teorema 2.30.) *Svako separabilno, Dedekind-kompletno linearno uredjenje bez krajnjih tačaka je izomorfno sa $\mathbb{R}$.*

Lema 1.22 *Neka je $\mathbb{R}$ uredjenje skupa realnih brojeva. Tada:*

(a) Svako poduredjenje $\mathbb{R}$ je prebrojive kofinalnosti i koinicijalnosti;

(b) u $\mathbb{R}$ ne postoji neprebrojiva familija po parovima disjunktnih otvorenih intervala;

(c) svako gusto i kompletno linearno uredjenje koje se utapa u $\mathbb{R}$ izomorfno je intervalu $[-\infty, \infty]$;

Dokaz: (a) Neka je $\mathbb{X}$ poduredjenje $\mathbb{R}$. Pokazaćemo da je prebrojive kofinalnosti; koinicijalnost se pokazuje analogno. Ako $\mathbb{X}$ nije ograničeno odozgo, kofinalan niz $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ dat je izborom tačaka $a_n \in \langle n, \infty \rangle \cap X$. Dakle, možemo pretpostaviti da je $\mathbb{X}$ ograničeno odozgo. Tada $\mathbb{X}$ ima supremum y, a kofinalan niz $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ dat je izborom tačaka $a_n \in (y - \frac{1}{n}, y] \cap X$.

(b) Neka je $\{U_i : i \in I\}$ familija po parovima disjunktnih intervala u $\mathbb{R}$. Izaberimo iz svakog U_i po jedan racionalan broj q_i. Tada je preslikavanje $f : I \to \mathbb{Q}$ dato sa $f(i) = q_i$ bijekcija iz I na $f[I] \subset \mathbb{Q}$, pa pošto je $\mathbb{Q}$ prebrojivo i I je prebrojivo.

(c) Neka je $\mathbb{L} = \langle L, < \rangle$ linearno uredjenje iz (c). Tada je uredjenje $\mathbb{L} \setminus \{\min \mathbb{L}, \max \mathbb{L}\}$ Dedekind kompletno i gusto linearno uredjenje koje se utapa u $\mathbb{R}$. Svako gusto linearno uredjenje koje se utapa u $\mathbb{R}$ je separabilno (lema 1.19), pa iz teoreme 1.21 sledi da je $\mathbb{L} \setminus \{\min \mathbb{L}, \max \mathbb{L}\} \cong \mathbb{R}$. Sada je jasno da je $\mathbb{L} \cong [-\infty, \infty]$. □

Glavni deo ovog odeljka je prezentacija odredjenih neprebrojivih linearnih uredjenja. U literaturi postoje izvesna odstupanja u tome ko je prvi dobio slične rezultate. Naime, u [24] je teorema 1.24 pripisana Hausdorffu [7], dok je u [12] ista teorema pripisana Schönfliesu [26]. Na kraju ove sekcije data je modifikacija navedene teoreme koja je važna za dalja razmatranja. Da bismo razumeli tvrdjenje ove teoreme, potrebno je da znamo šta predstavlja suma linearnih uredjenja.

Definicija 1.23 Neka je $\langle I, <_I \rangle$ linearno uredjenje i neka je za svako $i \in I$ dato linearno uredjenje $\mathbb{X}_i = \langle X_i, <_i \rangle$. Neka su skupovi X_i po parovima disjunktni. Definišemo *sumu* linearnih uredjenja, u oznaci $\sum_{i \in I} \mathbb{X}_i$, kao linearno uredjenje na skupu $Y = \bigcup_{i \in I} X_i$, pri čemu je $x <_Y y$ akko je za neko $i \in I$ ispunjeno $x, y \in X_i$ i $x <_i y$ ili je za neke različite $i, j \in I$ ispunjeno $x \in X_i$ i $y \in X_j$ i $i <_I j$.

Teorema 1.24 (Schönflies, Hausdorff) *Svako linearno uredjenje $\mathbb{L}$ je ili rasejano ili suma rasejanih linearnih uredjenja, pri čemu je indeksni skup gusto linearno uredjenje.*

Skica dokaza: Posmatrajmo sledeću relaciju ekvivalencije na L: x je u relaciji sa y ako i samo ako je $[\min\{x, y\}, \max\{x, y\}]_L$ rasejano linearno uredjenje. Ispostavlja se da su sabirci iz tvrdjenja teoreme baš klase ekvivalencije ove relacije. □

Relacije ekvivalencije koje liče na relaciju iz dokaza prethodne teoreme nazivaju se kondenzacije. Više detalja se može naći u [24]. Napominjemo da je klasifikaciju svih rasejanih linearnih uredjenja dao Hausdorff u [7].

Hausdorffov vrlo značajan rezultat se pokazuje iteriranom primenom kondenzacija na proizvoljno linearno uredjenje. U zavisnosti od dužine iteracija koje je potrebno primeniti odredjen je rang linearnog uredjenja, koji ga smešta na njegovo mesto u hijerarhiji rasejanih linearnih uredjenja.

Definicija 1.25 Linearno uredjenje $\mathbb{L}$ je *bulovsko* ako i samo ako je kompletno i ima guste skokove (tj.

$$\forall x, y \in L\,(x < y \Rightarrow \exists s, t \in L\,(x \leq s < t \leq y \;\wedge\; \neg \exists d \in L\; s < d < t)).$$

Lema 1.26 *Ako je $\mathbb{L}$ najviše prebrojivo kompletno linearno uredjenje, onda je $\mathbb{L}$ bulovsko.*

Dokaz: Neka su $x, y \in L$ takvi da je $x < y$. Pretpostavimo da za sve $s, t \in [x, y]_L$ koji zadovoljavaju $s < t$ imamo $(s, t)_L \neq \emptyset$. Tada bi $[x, y]_L$ bilo gusto kompletno linearno uredjenje, što je nemoguće jer je $\mathbb{L}$ prebrojivo (lema 1.20). Dakle, $\mathbb{L}$ ima guste skokove. □

Primer linearnog uredjenja koje nije bulovsko (nije ni Dedekind-kompletno), ali ima guste skokove je $\sum_{q \in \mathbb{Q}} \mathbb{X}_q$, gde su $\mathbb{X}_q$ disjunktne kopije uredjenja $\langle \{0, 1\}, < \rangle$ u kome je $0 < 1$.

Sada dajemo najavljenu prezentaciju klase neprebrojivih linearnih uredjenja koju ćemo koristiti u daljem radu.

Teorema 1.27 ([18]) *Neka je $\mathbb{L}$ neprebrojivo kompletno linearno uredjenje u kom minimum nema sledbenika i koje se utapa u $\mathbb{R}$. Tada je*

$$\mathbb{L} \cong \sum_{x \in [-\infty, \infty]} \mathbb{L}_x,$$

pri čemu važi:

(L1) $\mathbb{L}_x$ *su najviše prebrojiva kompletna linearna uredjenja;*

(L2) skup $M = \{x \in [-\infty, \infty] : |L_x| > 1\}$ *je najviše prebrojiv;*

(L3) $|L_{-\infty}| = 1$ *ili* $\min \mathbb{L}_{-\infty}$ *nema sledbenika u* $\mathbb{L}_{-\infty}$.

Dokaz: Definišimo relaciju kondenzacije $\sim$ na L datu na sledeći način

$$x \sim y \Leftrightarrow |[\min\{x, y\}, \max\{x, y\}]| \leq \aleph_0$$

(drugim rečima, x i y su u relaciji ako i samo ako izmedju njih postoji najviše prebrojivo mnogo elemenata). Jasno je da je $\sim$ relacija ekvivalencije i da ako su X i Y različite klase ekvivalencije, $x \in X$, $y \in Y$ i $x < y$, onda je $X < Y$. Dakle, skup svih klasa ekvivalencije je linearno uredjen, pa ga možemo indeksirati nekim linearnim uredjenjem $\mathbb{I} = \langle I, < \rangle$. U tom slučaju je $\mathbb{L} = \sum_{i \in I} \mathbb{L}_i$, gde su L_i klase ekvivalencije.

Dalje, pošto je $\mathbb{L}$ Dedekind-kompletno, isto važi i za $\mathbb{I}$. Da bismo ovo pokazali, posmatrajmo jedan rez $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ u $\mathbb{I}$. Ukoliko bi on činio prazninu u $\mathbb{I}$, onda bi rez $\langle \bigcup_{i \in \mathcal{A}} L_i, \bigcup_{i \in \mathcal{B}} L_i \rangle$ činio prazninu u $\mathbb{L}$, što je nemoguće jer je $\mathbb{L}$ kompletno. Osim toga, $\mathbb{I}$ ima maksimum, jer $\mathbb{L}$ ima maksimum, i ima minimum, jer $\mathbb{L}$ ima minimum, odakle sledi da je kompletno linearno uredjenje ($\mathbb{L}$ je kompletno ako je Dedekind-kompletno i ima maksimum i minimum).

Pošto se $\mathbb{L}$ utapa u $\mathbb{R}$, jasno je da se i $\mathbb{I}$ utapa u $\mathbb{R}$, ali i da se svi $\mathbb{L}_i$ utapaju u $\mathbb{R}$. Pošto se svi $\mathbb{L}_i$ utapaju u $\mathbb{R}$, iz leme 1.22(a) sledi da su im kofinalnosti i koinicijalnosti prebrojive. Odatle sledi i da je $\mathbb{I}$ gusto linearno uredjenje. Da bismo ovo videli, pretpostavimo da su $x, y \in I$ takvi da ni za jedno $t \in I$ nije $x < t < y$. Posmatrajmo $\mathbb{L}_x$ i $\mathbb{L}_y$. Pošto je kofinalnost $\mathbb{L}_x$ prebrojiva, nadjimo neopadajući kofinalan niz $\langle x_i : i \in \omega \rangle \subset L_x$, a pošto je i koinicijalnost $\mathbb{L}_y$ prebrojiva, nadjimo nerastući koinicijalan niz $\langle y_i : i \in \omega \rangle \subset L_y$. Tada iz činjenice da je $|[x_m, x_{m+1}]| \leq \aleph_0$ i $|[y_{n+1}, y_n]| \leq \aleph_0$ za $m \in \omega$ i $n \in \omega$, sledi da izmedju x_0 i y_0 ima najviše prebrojivo mnogo tačaka, pa bi bilo $x_0 \sim y_0$, što je u kontradikciji sa $L_x \neq L_y$.

Dakle, pokazali smo da je $\mathbb{I}$ kompletno, gusto i da se utapa u $\mathbb{R}$. Odatle, na osnovu leme 1.22(c) sledi $\mathbb{I} \cong [-\infty, \infty]$. Odavde imamo i da su svi $\mathbb{L}_i$ kompletni (jasno je da su Dedekind-kompletni jer bi rez koji čini prazninu u $\mathbb{L}_i$ bio praznina i u $\mathbb{L}$, a imaju maksimum i minimum zato što bi u suprotnom, na primer, rez $\left\langle \bigcup_{i \leq i_0} L_i, \bigcup_{i > i_0} L_i \right\rangle$ bio praznina u $\mathbb{L}$), pa iz $\min \mathbb{L}_i \sim \max \mathbb{L}_i$, imamo i da su svi $\mathbb{L}_i$ prebrojivi. Odatle sledi da je $\mathbb{L}_i$ bulovsko (lema 1.26), pa, pošto se $\mathbb{L}$ utapa u $\mathbb{R}$, iz leme 1.22(b) sledi $|M| \leq \aleph_0$. Tvrdjenje (L3) sledi iz činjenice da minimum $\mathbb{L}$ nema sledbenika. □

1.3 MAKSIMALNI LANCI KOPIJA $\mathbb{Q}$

U ovoj sekciji predstavljamo poznate rezultate koji su motivisali celokupno naše istraživanje. Prvo napomenimo da je Kazimierz Kuratowski prvi ispitivao slične fenomene. Konkretno, on se pitao koji su uredjajni tipovi lanaca podskupova proizvoljnog skupa, tj. koji su uredjani tipovi lanaca u parcijalnom uredjenju $\langle P(X), \subset \rangle$. Pošto znamo da je u svakom parcijalnom uredjenju svaki lanac sadržan u maksimalnom lancu, potpun odgovor bi dao opis maksimalnih lanaca podskupova skupa X. Sledi rezultat Kuratowskog iz 1921. godine i njegovo uopštenje koje je dao Day (Bulova algebra $\mathbb{B}$ je

$< \kappa$-kompletna ako svaki $X \subset B$ kardinalnosti manje od κ ima supremum u $\mathbb{B}$, linearno uredjenje $\mathbb{L}$ je $< \kappa$-kompletno ako i samo ako svaki $Y \subset L$ kardinalnosti manje od κ ima supremum u $\mathbb{L}$).

Teorema 1.28 (Kuratowski [11]) *Linearno uredjenje je izomorfno maksimalnom lancu u $P(\kappa)$ za neki kardinal κ ako i samo ako je izomorfno linearnom uredjenju* $\mathrm{Init}(\mathbb{L})$ *za neko linearno uredjenje $\mathbb{L}$ kardinalnosti κ.*

Teorema 1.29 (Day [3]) *Linearno uredjenje je izomorfno maksimalnom lancu u $< \kappa$-kompletnoj atomičnoj Bulovoj algebri ako i samo ako je $< \kappa$-kompletno, ima maksimum i minimum i ima guste skokove.*

Napomena 1.30 Ograničimo se za trenutak na prebrojiva linearna uredjenja da bismo bolje rastumačili prethodni rezultat: ω je jedno prebrojivo linearno uredjenje, $\mathrm{Init}(\omega)$ ima uredjajni tip $\omega + 1$, pa zaključujemo da u $P(\omega)$ postoji maksimalan lanac tipa $\omega + 1$. Ukoliko želimo primer neprebrojivog lanca, uzmimo prebrojivo uredjenje $\mathbb{Q}$. Svi njegovi početni segmenti su oblika $\emptyset, \mathbb{Q}$, $(-\infty, x)_{\mathbb{Q}}$ za $x \in \mathbb{R}$ i $(-\infty, q]$ za $q \in \mathbb{Q}$. Dakle, u $P(\omega)$ postoji lanac izomorfan sa $\mathbb{R}$, ali lanac $\{\emptyset\} \cup \{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{Q}\} \cong [-\infty, \infty]$ nije maksimalan lanac. Prema rezultatu Daya nije moguće konstruisati maksimalan lanac tipa $[-\infty, \infty]$ u $P(\omega)$ jer on mora imati guste skokove.

Medju narednim rezultatima koji su se pojavili su radovi Monka [23], Monka i McKenzija [22] i Koppelbergove [10]. Izdvajamo sledeći rezultat (intervalna algebra nad linearnim uredjenjem $\mathbb{L}$ koje ima minimum, $\mathrm{Intalg}\mathbb{L}$, je Bulova algebra svih konačnih unija poluotvorenih intervala oblika $[x, y)$, za $x, y \in L \cup \{\infty\}$ i $x \leq y$, pri čemu je ∞ element veći od svih iz L).

Teorema 1.31 ([10]) *Linearno uredjenje je izomorfno maksimalnom lancu u intervalnoj algebri* $\mathrm{Intalg}[0, 1)$ *ako i samo ako je izomorfno gustom σ-kompaktnom podskupu intervala* $[0, 1]$ *koji sadrži* 0 *i* 1.

Poslednji rezultat je posebno interesantan jer daje karakterizaciju maksimalnih lanaca u parcijalnom uredjenju korišćenjem topoloških osobina podskupova realne prave. Prirodno je postaviti pitanje da li je moguće dobiti sličan rezultat i za slučaj $P(\kappa)$. Odmah se vidi da ako je $\kappa > \omega$ neće biti moguće pronaći topološku karakterizaciju na realnoj pravoj, zato što je $\mathbb{R}$ kofinalnosti ω, a nije teško konstruisati maksimalan lanac u $P(\omega_1)$ kofinalnosti ω_1. Jasno je da takvih lanaca nema u $\mathbb{R}$. Dakle, pitanje je bilo da li je moguće preformulisati rezultat Kuratowskog u prebrojivom slučaju tako da dobijemo neku topološku karakterizaciju maksimalnih lanaca u $P(\omega)$. Potvrdan odgovor daje sledeća teorema.

Teorema 1.32 ([15]) *Linearno uredjenje $\mathbb{L}$ je izomorfno maksimalnom lancu u $P(\omega)$ ako i samo ako je izomorfno kompaktnom nigde gustom skupu $K \subset [0,1]$ koji sadrži* 0 *i* 1.

Nakon ove reformulacije teoreme Kuratowskog bilo je prirodno postaviti neka ograničenja na podskupove ω i posmatrati takve lance. Naravno, najprirodnije je zahtevati da svi imaju istu strukturu. U radu [15] Kurilić rešava ovaj problem kada na skupu ω posmatra prirodno linearno uredjenje $\langle \omega, < \rangle$ i uopštenje tog problema (pri tome napominjemo da i u tom slučaju maksimalni lanci moraju imati guste skokove kao u slučaju $P(\omega)$), a za sada se zadržavamo na nama najznačajnijem rezultatu. Šta ako na prebrojivom skupu zadamo strukturu prebrojivog gustog linearnog uredjenja bez krajeva i posmatramo samo podskupove koji čuvaju tu strukturu? Konkretno, ako posmatramo parcijalno uredjenje $\langle \mathbb{P}(\mathbb{Q}), \subset \rangle$ pri čemu je

$$\mathbb{P}(\mathbb{Q}) = \{X \subset \mathbb{Q} : \langle X, <_{\mathbb{Q}} \rangle \cong \langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}} \rangle\}.$$

S tim u vezi, imamo sledeću teoremu.

Teorema 1.33 (Kurilić [16]) *Za svako linearno uredjenje $\mathbb{L}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) $\mathbb{L}$ *je izomorfno maksimalnom lancu u* $\langle \mathbb{P}(\mathbb{Q}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$*;*
(b) $\mathbb{L}$ *se utapa u* $\mathbb{R}$*, kompletno je i minimum nema sledbenika;*
(c) $\mathbb{L}$ *je izomorfno kompaktnom* $K \subset [0,1]$ *tako da je* $0 \in K'$ *i* $1 \in K$.

Ovaj rezultat je značajan iz više razloga.

Prvo, prethodna teorema daje novi uvid u strukturu racionalne linije, a samo po sebi je iznenadjujuće da ni sličan rezultat nije poznat za ovo toliko izučavano linearno uredjenje. Da bi se videlo da ovo pitanje nije trivijalno, primetimo da zapravo teorema 1.33 kaže da postoji maksimalan lanac kopija $\mathbb{Q}$ koji je izomorfan, recimo, Cantorovom skupu bez nule ili intervalu $(0,1]$, ali da isto tako postoje i prebrojivi maksimalni lanci, recimo, izomorfni ω^*. Takodje, kopije $\mathbb{Q}$ se mogu dobijati na najrazličitije načine. Postoje trivijalne kao $(-\infty, 0) \cap \mathbb{Q}$ ili $(0,1) \cap \mathbb{Q}$, ali i netrivijalne, moguće je da kopija $\mathbb{Q}$ bude nigde gusta u $\mathbb{Q}$. Na primer, skup sredina izbačenih otvorenih intervala u izgradnji Cantorovog skupa. Da bismo dali intuiciju za delove teze, dajemo jednu familiju za koju je lako utvrditi da je familija kopija $\mathbb{Q}$:

$$\mathcal{P}_{\mathbb{Q}} = \left\{\mathbb{Q} \setminus \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} F_m : \forall m \in \mathbb{Z}\ F_m \in [[m, m+1) \cap \mathbb{Q}]^{<\omega}\right\}.$$

Drugo, ovaj primer se suštinski razlikuje od lanaca u $P(\omega)$. Dok je tamo svaki maksimalan lanac morao da ima guste skokove, ovde to nije slučaj.

Pogledajmo samo lanac $\mathcal{L} = \{\emptyset\} \cup \{(-\infty, x) \cap \mathbb{Q} : x \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{Q}\} \cong [0,1]$. Prirodan zadatak je utvrditi šta se dešava sa ostalim strukturama, posebno sa onim koje imaju neke zajedničke osobine sa $\mathbb{Q}$. Na primer sa ultrahomogenim strukturama, koje će biti definisane u sledećoj glavi. Sada ćemo samo reći da su u poslednje vreme aktuelne zbog skoro otkrivenih lepih osobina njihovih grupa automorfizama.

Treće, parcijalno uredjenje $\langle \mathbb{P}(\mathbb{Q}), \subset \rangle$ zanimljivo je i za teoriju forsinga, što je pokazano u radu Kurilića i Todorčevića [20]. Naime, u radu [20], oni su pokazali da je forsing sa podskupovima $\mathbb{Q}$ koji nisu rasejani ekvivalentan iteraciji $\mathbb{S} * \pi$ pri čemu je $\mathbb{S}$ Sacksov forsing, a π je σ-zatvoren u modelu koji se dobije prvom iteracijom sa $\mathbb{S}$. U velikom broju prirodnih modela, recimo ako važi CH ili PFA, π je baš ekvivalentan algebri $P(\omega)/\mathrm{Fin}$ u modelu koji se dobije prvom iteracijom sa $\mathbb{S}$. Pošto je $\langle \mathbb{P}(\mathbb{Q}), \subset \rangle$ gusto u parcijalnom uredjenju nerasejanih podskupova $\mathbb{Q}$, navedeno tvrdjenje zapravo opisuje forsing sa $\langle \mathbb{P}(\mathbb{Q}), \subset \rangle$. Zanimljivo je pitanje i kako izgleda forsing kopijama raznih drugih struktura.

U ovoj tezi, mi smo se koncentrisali na ispitivanje fenomena iz teoreme 1.33 za ultrahomogene strukture. Dobili smo neke opšte teoreme, koje daju dovoljne uslove koje treba da zadovoljava struktura da bi imala iste maksimalne lance kopija kao i $\mathbb{Q}$. Ovi rezultati su sistematizovani u trećoj glavi. U četvrtoj i petoj glavi smo pronašli neke primere koji se ponašaju kao $\mathbb{Q}$. Generalno, sve ultrahomogene strukture liče jedna na drugu, ali su sve i toliko različite da je malo teorema u literaturi koje ih tretiraju kao celinu. Uglavnom se istraživanje svodi na ispitivanje svake strukture ponaosob, s tim što za mali broj ultrahomogenih struktura znamo kako zapravo izgledaju. To je poseban problem, a i dalje otvoren pravac istraživanja.

GLAVA DRUGA

O relacijskim strukturama

U ovoj glavi dajemo pregled osnovnih pojmova vezanih za relacijske strukture, koje ćemo koristiti u nastavku, kao i primere nekih relacijskih struktura.

Definicija 2.1 *Relacijski jezik* je indeksirana familija $L = \langle R_i : i \in I \rangle$ relacijskih simbola. Smatramo da je svakom relacijskom simbolu pridružen prirodan broj $\mathrm{ar}(R_i) > 0$. Uredjeni par $\mathbb{X} = \langle X, \langle R_i^X : i \in I \rangle \rangle$ je *struktura relacijskog jezika* $L = \langle R_i : i \in I \rangle$ (ili struktura jezika L) ako i samo ako je X skup, a $R_i^X \subset X^{\mathrm{ar}(R_i)}$ za sve $i \in I$. Tada kažemo da je R_i^X interpretacija relacijskog simbola R_i, a skup X je *domen* relacijske strukture $\mathbb{X}$. Pod kardinalnošću relacijske strukture $\mathbb{X}$ podrazumevamo kardinalnost domena.

Definicija 2.2 Neka su $\mathbb{X} = \langle X, \langle R_i^X : i \in I \rangle \rangle$ i $\mathbb{Y} = \langle Y, \langle R_i^Y, i \in I \rangle \rangle$ relacijske strukture istog jezika. Preslikavanje $f : X \to Y$ je *utapanje* strukture $\mathbb{X}$ u strukturu $\mathbb{Y}$ ako i samo ako je "1-1" i ako je za sve $i \in I$ i sve $\langle x_1, \ldots, x_{\mathrm{ar}(R_i)} \rangle \in X^{\mathrm{ar}(R_i)}$ ispunjeno

$$\langle x_1, \ldots, x_{\mathrm{ar}(R_i)} \rangle \in R_i^X \Leftrightarrow \langle x_1, \ldots, x_{\mathrm{ar}(R_i)} \rangle \in R_i^Y.$$

Utapanje se naziva *izomorfizam* ako je "na". Da su $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$ izomorfne strukture označavamo sa $\mathbb{X} \cong \mathbb{Y}$. Izomorfizam strukture $\mathbb{X}$ na samu sebe naziva se *automorfizam*.

Skup svih utapanja $\mathbb{X}$ u $\mathbb{Y}$ označavamo sa $\mathrm{Emb}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, a skup svih automorfizama strukture $\mathbb{X}$ sa $\mathrm{Aut}(\mathbb{X})$.

U nameri da navedenu karakterizaciju maksimalnih lanaca izomorfnih kopija racionalne linije uopštimo, u tezi ćemo za relacijsku strukturu $\mathbb{X}$ ispitivati parcijalno uredjenje $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$, pri čemu je

$$\mathbb{P}(\mathbb{X}) = \{f[X] : f \in \mathrm{Emb}(\mathbb{X}, \mathbb{X})\}.$$

Što se tiče neophodnih pojmova, ostalo nam je još da definišemo podstrukture.

Definicija 2.3 Neka su $\mathbb{X} = \langle X, \langle R_i^X : i \in I \rangle \rangle$ i $\mathbb{Y} = \langle Y, \langle R_i^Y : i \in I \rangle \rangle$ relacijske strukture istog jezika. Kažemo da je $\mathbb{X}$ *podstruktura* strukture $\mathbb{Y}$, i to pišemo $\mathbb{X} \subset \mathbb{Y}$, ako je $X \subset Y$ i $\forall i \in I \; R_i^X = R_i^Y \cap X^{\operatorname{ar}(R_i)}$.

Ubuduće, kada ne može doći do zabune, identifikujemo R^X i R. Sada vidimo i da je za $\mathbb{X} = \langle X, \{ R_i^X : i \in I \} \rangle$:

$$\mathbb{P}(\mathbb{X}) = \left\{ A \subset X : \left\langle A, \left\langle R_i^X \cap A^{\operatorname{ar}(R_i)} : i \in I \right\rangle \right\rangle \cong \mathbb{X} \right\}.$$

Sve strukture kojima se bavimo u ovoj tezi relacijske su strukture i date su na prebrojivom skupu. Posebno su nam bile zanimljive strukture sa velikim brojem automorfizama.

2.1 ULTRAHOMOGENE STRUKTURE

Da bismo objasnili pojam *veliki broj automorfizama*, osvrnimo se na trenutak na linearna uredjenja. Jasno je da recimo $\langle \omega, < \rangle$ ima samo jedan automorfizam (identičko preslikavanje), dok sa druge strane, $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ i $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ imaju veliki broj automorfizama: ako izaberemo dve tačke $x, y \in \mathbb{Z}$, postoji automorfizam $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{Z})$ takav da je $f(x) = y$, to je $f(z) = z + y - x$, a to preslikavanje svedoči da istu osobinu ima i $\mathbb{Q}$. Medjutim, ukoliko počnemo automorfizam u više od jedne tačke - recimo, dobijemo zadatak da preslikamo 1 u 2 i 2 u 4 i da dalje nastavimo tako da dobijemo automorfizam, onda, ako se nalazimo u strukturi $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$, ovaj zadatak nije rešiv, jer ne postoji tačka koja je izmedju 1 i 2 koja bi morala da se slika u 3. Ovaj primer pokazuje da je struktura $\mathbb{Q}$ ipak bogatija automorfizmima, jer je naš problem lako rešiv u $\mathbb{Q}$ (funkcijom $f(t) = 2t$).

Dakle, videli smo da $\mathbb{Q}$, u odredjenom smislu, ima više automorfizama nego $\mathbb{Z}$, a ispostavlja se i više nego ostala prebrojiva linearna uredjenja (videti teoremu 1.14). Ova osobina se naziva ultrahomogenost i precizno je formulisana u sledećoj definiciji.

Definicija 2.4 Za relacijsku strukturu $\mathbb{X}$ kažemo da je *ultrahomogena* ako i samo ako se svaki izomorfizam f konačnih podstruktura od $\mathbb{X}$ može produžiti do automorfizma strukture $\mathbb{X}$. Izomorfizam konačnih podstruktura nazivamo i *konačan izomorfizam*.

Osim ultrahomogenosti, linearno uredjenje $\mathbb{Q}$ ima još i dobru osobinu da sadrži sva prebrojiva linearna uredjenja (videti teoremu 1.13).

Definicija 2.5 Za relacijsku strukturu $\mathbb{X}$ kažemo da je *univerzalna* za neku klasu struktura $\mathcal{K}$ istog jezika ako i samo ako se svaka struktura iz $\mathcal{K}$ može utopiti u $\mathbb{X}$.

Francuski matematičar Roland Fraïssé je bio prvi koji je sistematično proučavao ultrahomogene univerzalne strukture. On je uspeo da izoluje njihove osobine proučavajući osobine klasa svih njihovih konačnih podstruktura.

2.2 FRAÏSSÉOVE KLASE

Definicija 2.6 Neka je $\mathbb{X}$ relacijska struktura u jeziku L. Tada je $\mathrm{Age}\,\mathbb{X}$ klasa svih konačnih relacijskih struktura koje se mogu utopiti u $\mathbb{X}$.

Ako je $\mathbb{X}$ relacijska struktura, nije teško videti da $\mathrm{Age}\,\mathbb{X}$ ima sledeća svojstva:

(HP) Svojstvo nasledjivanja: ako je $\mathbb{Y}_1 \in \mathrm{Age}\,\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}_2$ relacijska struktura koja se može utopiti u $\mathbb{Y}_1$, onda je $\mathbb{Y}_2 \in \mathrm{Age}\,\mathbb{X}$.

(JEP) Svojstvo zajedničkog utapanja: ako su $\mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2 \in \mathrm{Age}\,\mathbb{X}$, onda postoji $\mathbb{Y}_3 \in \mathrm{Age}\,\mathbb{X}$ takva da se i $\mathbb{Y}_1$ i $\mathbb{Y}_2$ utapaju u $\mathbb{Y}_3$.

Glavna zasluga Fraïsséa je što je primetio da ako je relacijska struktura $\mathbb{X}$ ultrahomogena, onda $\mathrm{Age}\,\mathbb{X}$ zadovoljava i dodatni uslov:

(AP) Svojstvo amalgamacije: ako su $\mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \mathbb{Y}_3 \in \mathrm{Age}\,\mathbb{X}$ i $f : \mathbb{Y}_1 \to \mathbb{Y}_2$, $g : \mathbb{Y}_1 \to \mathbb{Y}_3$ utapanja, onda postoji struktura $\mathbb{Y}_4 \in \mathrm{Age}\,\mathbb{X}$ i utapanja $r : \mathbb{Y}_2 \to \mathbb{Y}_4$ i $s : \mathbb{Y}_3 \to \mathbb{Y}_4$ takva da je $r \circ f = s \circ g$.

Dalje, jasno je da, ako je $\mathbb{X}$ prebrojiva relacijska struktura, onda $\mathrm{Age}\,\mathbb{X}$ sadrži samo prebrojivo mnogo neizomorfnih relacijskih struktura.

Teorema 2.7 ([6]) *Neka je L najviše prebrojiv relacijski jezik, a $\mathcal{K}$ klasa konačnih relacijskih struktura jezika L koja je neprazna, sadrži najviše prebrojivo neizomorfnih struktura i zadovoljava (HP), (JEP) i (AP). Tada postoji jedinstvena, do na izomorfizam, prebrojiva ultrahomogena relacijska struktura $\mathbb{X}$ jezika L takva da je $\mathrm{Age}\,\mathbb{X} = \mathcal{K}$ i da za svaku najviše prebrojivu relacijsku strukturu $\mathbb{Y}$ jezika L, ako je $\mathrm{Age}\,\mathbb{Y} \subset \mathcal{K}$, onda se $\mathbb{Y}$ utapa u $\mathbb{X}$.*

U slučaju da neka klasa $\mathcal{K}$ konačnih struktura u istom jeziku ima osobine (HP), (JEP) i (AP) nazivamo je Fraïsséova klasa, a jedinstvena ultrahomogena struktura $\mathbb{X}$ takva da je $\mathrm{Age}\,\mathbb{X} = \mathcal{K}$ naziva se Fraïsséov limit od $\mathcal{K}$. Najpoznatije Fraïsséove klase su (uključujemo i klase struktura koje nisu relacijske zbog sveobuhvatnosti):

- klasa svih konačnih linearnih uredjenja;

- klasa svih konačnih kompletnih grafova;
- klasa svih konačnih grafova;
- klasa svih konačnih $\mathbb{K}_n$-slobodnih grafova;
- klasa svih konačnih parcijalnih uredjenja;
- klasa svih konačnih metričkih prostora sa racionalnim rastojanjima;
- klasa svih konačnih vektorskih prostora nad konačnim poljem $\mathbb{F}$;
- klasa svih konačnih Bulovih algebri.

Sledeća teorema daje zgodnu karakterizaciju ultrahomogenih relacijskih struktura i dopunu prethodne teoreme koju ćemo koristiti.

Teorema 2.8 ([6, 9]) *Neka je L najviše prebrojiv relacijski jezik. Tada:*

(a) Prebrojiva relacijska struktura $\mathbb{X}$ u jeziku L je ultrahomogena ako i samo ako za svaki konačan izomorfizam φ od $\mathbb{X}$ i svaki element x iz $X \setminus \mathrm{dom}(\varphi)$ postoji konačan izomorfizam ψ od $\mathbb{X}$ koji je ekstenzija φ tako da $x \in \mathrm{dom}(\psi)$.([6] strana 389. ili [9] strana 326.)

(b) Ako su $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$ prebrojive ultrahomogene relacijske strukture jezika L i $\mathrm{Age}\,\mathbb{X} = \mathrm{Age}\,\mathbb{Y}$, onda je $\mathbb{X} \cong \mathbb{Y}$.([6] strana 333. ili [9] strana 326.).

2.3 PARCIJALNA UREDJENJA

U ovoj sekciji posmatramo stroga parcijalna uredjenja. Ona su u bliskoj vezi sa parcijalnim uredjenjima. Naime, svakom parcijalnom uredjenju odgovara jedno strogo parcijalno uredjenje, a sve informacije o parcijalnom uredjenju mogu se dobiti iz odgovarajućeg strogog parcijalnog uredjenja i obratno. Uvodimo ih zato što je ultrahomogena parcijalna uredjenja jednostavnije opisivati jezikom strogih parcijalnih uredjenja.

Definicija 2.9 Relacijska struktura $\mathbb{P} = \langle P, < \rangle$ je *strogo parcijalno uredjenje* ako je $<$ irefleksivna i tranzitivna relacija na skupu P. Tada binarnu relaciju $\leq$ na P definišemo sa: $x \leq y \Leftrightarrow x < y \ \vee \ x = y$ i $\langle P, \leq \rangle$ je odgovarajuće parcijalno uredjenje. Oznaka $\|$ predstavlja relaciju neuporedivosti i ima značenje $x \| y \Leftrightarrow \neg(x \leq y \vee y \leq x)$. Napominjemo da iz irefleksivnosti i tranzitivnosti sledi asimetričnost.

Primetimo da je, prema definiciji 1.1, svako linearno uredjenje istovremeno i strogo parcijalno uredjenje. Osim uredjenja $\mathbb{Q}$ čije smo osnovne osobine već naveli, postoji i poseban predstavnik klase svih prebrojivih strogih parcijalnih uredjenja čije se osobine u velikoj meri poklapaju sa osobinama racionalne linije.

Lema 2.10 ([2]) *Klasa svih konačnih strogih parcijalnih uredjenja ispunjava uslove (HP), (JEP) i (AP), pa je Fraïsséova klasa. Dakle, postoji jedinstveno prebrojivo ultrahomogeno strogo parcijalno uredjenje koje je univerzalno za sva konačna i prebrojiva stroga parcijalna uredjenja.*

Definicija 2.11 Prebrojivo ultrahomogeno strogo parcijalno uredjenje univerzalno za sva konačna i prebrojiva stroga parcijalna uredjenja naziva se *random poset*.

Random poset označavamo sa $\mathbb{D} = \langle D, < \rangle$ i to je standardna oznaka. Mi želimo da imamo karakterizaciju random poseta sa kojom možemo lakše da konstruišemo objekte u random posetu. Najzgodnije bi bilo kada bismo imali definiciju po ugledu na racionalnu liniju. Podsetimo se da je $\mathbb{Q}$ jedinstveno prebrojivo gusto linearno uredjenje bez krajeva. To zapravo znači da svaki konačan podskup skupa $\mathbb{Q}$ može da se produži u $\mathbb{Q}$, u kom god smeru želimo - ili da nadjemo tačku izmedju date dve ili manju od svih ili veću od svih. Sledećom definicijom opisujemo saglasnost uslova za postojanje jednoelementnih ekstenzija konačnih podskupova random poseta.

Definicija 2.12 Neka je $\mathbb{P} = \langle P, < \rangle$ proizvoljno strogo parcijalno uredjenje. $C(\mathbb{P})$ je skup trojki $\langle L, G, U \rangle$ konačnih disjunktnih podskupova skupa P takvih da je ispunjeno:

(C1) $\forall l \in L \, \forall g \in G \; l < g$;
(C2) $\forall u \in U \, \forall l \in L \; \neg u < l$;
(C3) $\forall u \in U \, \forall g \in G \; \neg g < u$.

Definicija 2.13 Neka je $\mathbb{P}$ strogo parcijalno uredjenje i $\langle L, G, U \rangle \in C(\mathbb{P})$. Sa $P_{\langle L,G,U \rangle}$ označavamo skup svih $p \in P \setminus (L \cup G \cup U)$ koji zadovoljavaju:

(S1) $\forall l \in L \; p > l$;
(S2) $\forall g \in G \; p < g$;
(S3) $\forall u \in U \; p \| u$.

Kažemo da je $P_{\langle L,G,U \rangle}$ *orbita* trojke $\langle L, G, U \rangle$.

Sada imamo glavnu lemu.

Lema 2.14 ([2]) *Prebrojivo strogo parcijalno uredjenje $\mathbb{P}$ je izomorfno random posetu ako i samo ako za sve $\langle L, G, U \rangle \in C(\mathbb{P})$ važi $P_{\langle L,G,U \rangle} \neq \emptyset$.*

Sledeće tvrdjenje pokazuje da su orbite trojki $\langle L, G, U \rangle$ u random posetu izomorfne kopije random poseta. Ta činjenica omogućava da se jednostavno konstruišu izomorfne kopije random poseta u raznim odnosima.

Lema 2.15 *Važi $D_{\langle L,G,U\rangle} \in \mathbb{P}(\mathbb{D})$ za svako $\langle L,G,U\rangle \in C(\mathbb{D})$. Specijalno, odatle sledi $|D_{\langle L,G,U\rangle}| = \omega$, a onda i $D \setminus F \in \mathbb{P}(\mathbb{D})$ za svaki $F \in [D]^{<\omega}$.*

Dokaz: Neka je $\langle L,G,U\rangle \in C(\mathbb{D})$. Tada su L, G i U dijsunktni podskupovi od D, i važi

$$\forall l \in L \;\; \forall g \in G \;\; \forall u \in U \;\; (u \not< l < g \not< u), \tag{2.1}$$

i $D_{\langle L,G,U\rangle} \cap (L \cup G \cup U) = \emptyset$. Neka su sada $\langle L_1, G_1, U_1\rangle \in C(D_{\langle L,G,U\rangle})$. Tada su L_1, G_1 i U_1 disjunktni podskupovi od $D_{\langle L,G,U\rangle}$, pa imamo da je $\langle L_1, G_1, U_1\rangle \in C(\mathbb{D})$ što povlači

$$\forall l_1 \in L_1 \;\; \forall g_1 \in G_1 \;\; \forall u_1 \in U_1 \;\; (u_1 \not< l_1 < g_1 \not< u_1). \tag{2.2}$$

Pošto je $L_1 \cup G_1 \cup U_1 \subset D_{\langle L,G,U\rangle}$, iz (S1)-(S3) sledi

$$\forall x \in L_1 \cup G_1 \cup U_1 \;\; \forall l \in L \;\; \forall g \in G \;\; \forall u \in U \;\; (l < x < g \wedge x \not< u \wedge u \not< x). \tag{2.3}$$

Prvo ćemo pokazati da je $\langle L \cup L_1, G \cup G_1, U \cup U_1\rangle \in C(\mathbb{D})$. (C1) Neka su $l' \in L \cup L_1$ i $g' \in G \cup G_1$. Tada $l' < g'$ sledi iz: (2.1), ako $l' \in L$ i $g' \in G$; (2.2), ako $l' \in L_1$ i $g' \in G_1$; (2.3), ako $l' \in L$ i $g' = x \in G_1$ ili $l' = x \in L_1$ i $g' \in G$. (C2) Neka $l' \in L \cup L_1$ i $u' \in U \cup U_1$. Tada $u' \not< l'$ sledi iz: (2.1), ako $l' \in L$ i $u' \in U$; (2.2), ako $l' \in L_1$ i $u' \in U_1$; (2.3), ako $l' \in L$ i $u' = x \in U_1$ (jer $l' < u'$) ili $l' = x \in L_1$ i $u' \in U$. Na isti način bismo pokazali (C3).

Dakle, postoji $x \in D_{\langle L \cup L_1, G \cup G_1, U \cup U_1\rangle}$, što povlači

$$x \in D_{\langle L,G,U\rangle} \cap D_{\langle L_1,G_1,U_1\rangle} = (D_{\langle L,G,U\rangle})_{\langle L_1,G_1,U_1\rangle}.$$

Odavde na osnovu leme 2.14 sledi da je $D_{\langle L,G,U\rangle} \in \mathbb{P}(\mathbb{D})$.

Drugi deo tvrdjenja, $|D_{\langle L,G,U\rangle}| = \omega$, lako sledi iz već pokazanog jer je D prebrojiv. Sada, za svaki uslov $\langle L,G,U\rangle \in C(\mathbb{D} \setminus F)$, važi

$$(D \setminus F)_{\langle L,G,U\rangle} \cap D \setminus F \neq \emptyset$$

jer je F konačan a $D_{\langle L,G,U\rangle}$ prebrojiv. □

Pored svih ovih sličnosti sa $\mathbb{Q}$, i Ramseyevske osobine $\mathbb{D}$ dosta podsećaju na osobine racionalne linije. Napomenimo da za svaku particiju $\mathbb{Q}$ na konačno mnogo delova, bar jedan od elemenata particije sadrži kopiju $\mathbb{Q}$. Isti slučaj je i ovde.

Lema 2.16 *Ako je $D = X \cup Y$ i $X \cap Y = \emptyset$, tada se $\mathbb{D}$ utapa u $\mathbb{X}$ ili $\mathbb{Y}$.*

Dokaz: Iz prethodne teoreme je jasno da tvrdjenje sledi ukoliko je X ili Y konačan. Zato pretpostavimo da su i X i Y prebrojivi. Dalje, pretpostavimo da $\mathbb{X}$ ne sadrži kopiju random poseta. Tada postoji neki

$$\langle L, G, U \rangle \in C(\mathbb{X}) \subset C(\mathbb{D})$$

takav da je $D_{\langle L,G,U \rangle} \subset Y$. Medjutim $D_{\langle L,G,U \rangle} \in \mathbb{P}(\mathbb{D})$ pa se random poset utapa u $\mathbb{Y}$. □

Pre nego što predjemo na osobine parcijalnih uredjenja koje će nam biti neophodne u daljem radu, napomenimo i da ne postoji jednostavna prezentacija Random poseta. U doktorskoj disertaciji Jana Hubičke, pod mentorstvom Jaroslava Nešetrila, dato je nekoliko interesantnih prezentacija random poseta, ali ni jedna nije dovoljno jednostavna da bi sa njom moglo lako da se radi.

Pošto ćemo u našim konstrukcijama ultrahomogenih struktura koristiti razne filtere u specijalno izabranim parcijalnim uredjenjima, dajemo par neophodnih pojmova.

Definicija 2.17 Neka je $\mathbb{P}$ parcijalno uredjenje. Skup $\mathcal{G} \subset P$ je *filter* ako i samo ako je ispunjeno:

(F1) za sve $p, q \in \mathcal{G}$ postoji $r \in \mathcal{G}$ takav da je $r \leq p$ i $r \leq q$;

(F2) ako je $p \in \mathcal{G}$ i $p \leq q$ onda je i $q \in \mathcal{G}$.

Definicija 2.18 Skup $\mathcal{D} \subset P$ je *gust* u parcijalnom uredjenju $\mathbb{P}$ ako i samo ako za svako $p \in \mathbb{P}$ postoji $q \in \mathcal{D}$ takav da je $q \leq p$.

Sledeća lema omogućava sve naše konstrukcije.

Lema 2.19 (Rasiowa-Sikorski) *Neka su $\mathcal{D}_n, n \in \omega$ skupovi gusti u parcijalnom uredjenju $\mathbb{P}$. Tada postoji filter $\mathcal{G}$ u $\mathbb{P}$ takav da je za sve $n \in \omega$ ispunjeno $\mathcal{G} \cap \mathcal{D}_n \neq \emptyset$.*

Skica dokaza: Izaberimo proizvoljan $p_0 \in \mathcal{D}_0$, i za svako $n \in \omega$ izaberimo $p_{n+1} \in \mathcal{D}_{n+1}$ takav da je $p_{n+1} \leq p_n$. Tada je lako pokazati da je

$$\mathcal{G} = \{p \in P : \exists n \in \omega \; p_n \leq p\}$$

jedan filter koji seče sve $\mathcal{D}_n$. □

Definicija 2.20 Skup X u parcijalnom uredjenju $\mathbb{P}$ je *antilanac* ako i samo ako

$$\forall x, y \in X \; (x \neq y \Rightarrow \neg \exists z \in P \; (z \leq x \; \wedge \; z \leq y)).$$

Antilanac X je maksimalan ako ne postoji antilanac Y takav da je $X \subsetneq Y$.

2.4 GRAFOVI

U ovoj sekciji posmatramo grafove.

Definicija 2.21 Relacijska struktura $\mathbb{G} = \langle G, \Gamma \rangle$ je *graf* ako i samo ako je Γ simetrična i irefleksivna relacija na skupu G.

Graf se može definisati i kao par $\langle G, \Gamma \rangle$ gde je $\Gamma \subset [G]^2$. U ovom slučaju Γ nije relacija, ali joj se može pridružiti refleksivna i simetrična relacija ρ_Γ na G gde $x \rho_\Gamma y \Leftrightarrow \{x, y\} \in \Gamma$, za sve $x, y \in G$. Iz praktičnih razloga u tezi koristimo navedenu ekvivalenetnu definiciju. Graf $\langle G, \Gamma \rangle$ je kompletan ako je $\Gamma = [G]^2$, a $\mathbb{G}$ je prazan ako je $\Gamma = \emptyset$. Ako je κ kardinal, onda kompletan graf kardinalnosti κ označavamo sa $\mathbb{K}_\kappa$.

Da pojednostavimo zapis u radu sa grafovima uvodimo sledeću oznaku. Ako je $\mathbb{G} = \langle G, \Gamma \rangle$ graf i H i K njegovi konačni disjunktni podskupovi definišemo

$$G_H^{H \cup K} = \{x \in G : \forall h \in H \; \{x, h\} \in \Gamma \; \wedge \forall k \in K \; \{x, k\} \notin \Gamma\}.$$

Osim toga, pod pojmom podgrafa podrazumevamo ono što se često u literaturi naziva indukovani podgraf. To je i jedini razlog zašto posebno izdvajamo definiciju podgrafa, naime podgraf je prosto podstruktura grafa kao relacijske strukture.

Definicija 2.22 Graf $\langle H, \Delta \rangle$ je *podgraf* grafa $\langle G, \Gamma \rangle$ ako je ispunjeno

$$H \subset G \; \wedge \; \Delta = \Gamma \cap [H]^2.$$

Kao što smo već rekli, posebno će nas zanimati grafovi koji imaju veliki broj automorfizama. Erdös i Rényi su u radu [5] ispitivali pojam simetričnosti grafa. Oni su u svom radu razmatrali konačne i beskonačne grafove. Zadali su prirodnu meru na skupu svih grafova i ispostavilo se da su u toj prirodno izabranoj meri skoro svi konačni grafovi asimetrični, dok su skoro svi prebrojivi grafovi simetrični. Zapravo važi i više. Skoro svi prebrojivi grafovi su u toj meri izomorfni jednom specijalnom grafu koji je nazvan Rado graf (ovaj graf se još naziva i random graf). Mi smo se odlučili da u ovoj tezi koristimo naziv Rado da bismo izbegli poteškoće oko prevoda (doslovni prevod bi bio slučajni graf ali je termin random graf *odomaćen* u toj meri da bi bilo izuzetno neprirodno prevoditi ga), a i da bismo izbegli bilo kakvu sličnost sa konačnim random grafovima kojima se u ovoj tezi ne bavimo. Dobra referenca za Rado graf je rad Camerona [1].

Lema 2.23 ([1]) *Klasa svih konačnih grafova ima svojstva (HP), (JEP) i (AP), pa je Fraïsséova klasa. Dakle, postoji jedinstven prebrojiv ultrahomogen graf koji je univerzalan za klasu svih konačnih i prebrojivih grafova.*

Definicija 2.24 Prebrojiv ultrahomogen graf, univerzalan za sve konačne i prebrojive grafove naziva se *Rado graf,* i obeležava se sa $\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}}$.

Sledeća lema daje *operativnu* definiciju Rado grafa.

Lema 2.25 ([1]) *Prebrojiv graf $\mathbb{G} = \langle G, \Gamma \rangle$ je izomorfan Rado grafu ako i samo ako je za svaka dva disjunktna $H, K \in [G]^{<\omega}$ ispunjeno $G_H^{H \cup K} \neq \emptyset$.*

Kao i za $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$, važe sledeće dve leme. Pri tome prvu treba shvatiti na sledeći način: ako uzmemo bilo koja dva racionalna broja p i q, onda je $(p, q)_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q}$. Upravo je to osobina koju ima i Rado graf, naime ako pogledamo lemu 2.25, ta karakterizacija Rado grafa neodoljivo podseća na karakterizaciju $\mathbb{Q}$ kao prebrojivog gustog linearnog uredjenja bez krajeva.

Lema 2.26 *Neka je $\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}} = \langle G, \Gamma \rangle$ Rado graf. Ako su $H, K \in [G]^{<\omega}$ disjunktni, tada je $G_H^{H \cup K} \in \mathbb{P}(\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}})$.*

Dokaz: Izaberimo proizvoljne disjunktne $H_1, K_1 \in [G_H^{H \cup K}]^{<\omega}$. Primetimo da je tada

$$\left(G_H^{H \cup K}\right)_{H_1}^{H_1 \cup K_1} = G_{H \cup H_1}^{H \cup H_1 \cup K \cup K_1} \neq \emptyset,$$

pa prema lemi 2.25 sledi tvrdjenje teoreme. □

Lema 2.27 *Neka je $\mathbb{G} = \langle G, \Gamma \rangle$ Rado graf. Ako je F konačan podskup skupa G, onda je $G \setminus F \in \mathbb{P}(\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}})$.*

Dokaz: Pretpostavimo da $G \setminus F \notin \mathbb{P}(\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}})$, tj. da za neke disjunktne $H, K \in [G \setminus F]^{<\omega}$ važi $(G \setminus F)_H^{H \cup K} = \emptyset$, tj. $G_H^{H \cup K} \setminus F = \emptyset$. Iz leme 2.26 sledi da je skup $G_H^{H \cup K}$ beskonačan, pa ne može biti sadržan u konačnom skupu F. □

Medjutim, kada su u pitanju Ramseyevska svojstva Rado grafa, postoji razlika u odnosu na $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{D}$. Dok su $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{D}$ nedeljive strukture (relacijska struktura $\mathbb{X}$ je *nedeljiva* ako iz $X = A \cup B$ sledi da se $\mathbb{X}$ utapa u $\mathbb{A}$ ili $\mathbb{B}$), Rado graf je jako nedeljiva struktura (relacijska struktura $\mathbb{X}$ je *jako nedeljiva* ako iz $X = A \cup B$ sledi da je $A \in \mathbb{P}(\mathbb{X})$ ili $B \in \mathbb{P}(\mathbb{X})$).

Lema 2.28 *Neka je $\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}} = \langle G, \Gamma \rangle$ Rado graf. Ako je $G = G_1 \cup G_2$ particija G na dva disjunktna skupa, onda $G_1 \in \mathbb{P}(\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}})$ ili $G_2 \in \mathbb{P}(\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}})$.*

Dokaz: Pretpostavimo da ni G_1 ni G_2 nisu u $\mathbb{P}(\mathbb{G}_{\text{Rado}})$. U tom slučaju oba moraju biti beskonačna, što sledi iz leme 2.27. To znači da postoje disjunktni $H_1, K_1 \in [G_1]^{<\omega}$ i disjunktni $H_2, K_2 \in [G_2]^{<\omega}$ da je $G_{H_1}^{H_1 \cup K_1} \cap G_1 = \emptyset$ i $G_{H_2}^{H_2 \cup K_2} \cap G_2 = \emptyset$. Medjutim, iz leme 2.25 znamo da postoji neko

$$p \in G_{H_1 \cup H_2}^{H_1 \cup H_2 \cup K_1 \cup K_2} \subset G_{H_1}^{H_1 \cup K_1} \cap G_{H_2}^{H_2 \cup K_2}.$$

Pošto je $G = G_1 \cup G_2$, tačka p mora pripadati bar jednom od G_1 ili G_2, što daje kontradikciju. □

Rado graf je kao Fraïsséov limit klase svih konačnih grafova univerzalan za sve konačne i prebrojive grafove. To nije jedina klasa grafova koja ima amalgamaciju. Fiksirajmo prirodan broj $n \geq 3$. Za graf G kažemo da je $\mathbb{K}_n$-slobodan ako ne sadrži kompletan graf $\mathbb{K}_n$ kao podgraf.

Lema 2.29 ([8]) *Klasa svih konačnih $\mathbb{K}_n$-slobodnih grafova ima svojstva (HP), (JEP) i (AP), pa je Fraïsséova klasa. Dakle, postoji jedinstven prebrojiv ultrahomogen graf koji je univerzalan za klasu svih konačnih i prebrojivih $\mathbb{K}_n$-slobodnih grafova.*

Graf iz prethodne leme se označava $\mathbb{H}_n$, a klasa svih $\mathbb{H}_n$, za $n \geq 3$ se naziva klasom Hensonovih grafova. Najbolja referenca je Hensonov rad [8]. Ovakva definicija Hensonovih grafova nije baš zgodna ukoliko želimo da konstruišemo neki objekat u $\mathbb{H}_n$. Iz tog razloga bi bilo lepo da imamo neku karakterizaciju po ugledu na lemu 2.25.

Definicija 2.30 ([8]) Neka je $\mathbb{H} = \langle H, \Delta \rangle$ graf, a $n \geq 3$ prirodan broj. $C_n(\mathbb{H})$ je skup parova $\langle F, F_1 \rangle$ koji zadovoljavaju sledeće uslove:

(G1) $F, F_1 \in [H]^{<\omega}$;

(G2) $F_1 \subset F \subset H$;

(G3) $\mathbb{K}_{n-1}$ se ne utapa u $\mathbb{F}_1$.

Lema 2.31 ([8]) *Neka je $n \geq 3$ prirodan broj. Prebrojiv graf $\mathbb{H} = \langle H, \Delta \rangle$ je izomorfan $\mathbb{H}_n$ ako i samo ako za sve $\langle F, F_1 \rangle \in C_n(\mathbb{H})$ važi $H_{F_1}^F \neq \emptyset$.*

Slično kao i u slučaju Rado grafa važe sledeće dve leme, s tim što ni Hensonovi grafovi nisu jako nedeljive strukture kao Rado graf, već samo nedeljive, lema 2.33, kao i $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{D}$. Lema 2.33 je u slučaju Hensonovih grafova netrivijalna činjenica, dokazana u radu Sauera i El-Zahara.

Lema 2.32 ([8]) *Neka je $n \geq 3$ prirodan broj i $\mathbb{H}_n = \langle H, \Gamma \rangle$ Hensonov graf. Tada je $\left|H_{F_1}^F\right| = \omega$ za sve $\langle F, F_1 \rangle \in C_n(\mathbb{H}_n)$, kao i $H \setminus K \in \mathbb{P}(\mathbb{H}_n)$ za svaki $K \in [H]^{<\omega}$.*

Lema 2.33 ([4]) *Neka je $n \geq 3$ prirodan broj i $\mathbb{H}_n = \langle H, \Gamma \rangle$ Hensonov graf. Tada ako je $H = G_1 \cup G_2$ particija H na dva disjunktna skupa, onda se $\mathbb{H}_n$ utapa u $\mathbb{G}_1$ ili u $\mathbb{G}_2$.*

Sledeća lema pokazuje da iako su Rado graf i Hensonovi grafovi slični, u njihovoj strukturi postoji suštinska razlika.

Lema 2.34 ([8]) *Neka je $n \geq 3$ prirodan broj i neka je w proizvoljna tačka u Hensonovom grafu $\mathbb{H}_n = \langle H, \Gamma \rangle$. Tada $H^{\{w\}}_{\{w\}} \notin \mathbb{P}(\mathbb{H}_n)$.*

Na kraju ove glave, da bismo pomogli čitaocu u praćenju teksta, pokazujemo kako se konstruišu ultrahomogene strukture uz pomoć leme 2.19. U primeru 2.35 koristimo parcijalno uredjenje konačnih funkcija, dok u daljem radu koristimo parcijalna uredjenja konačnih relacijskih struktura. Čitaocu koji je upoznat sa tehnikom forsinga je svakako bliža notacija funkcijama, pa smo je dali u prvom primeru, dok kasnije zbog skraćenja zapisa dajemo notaciju u kojoj su elementi parcijalnog uredjenja strukture.

Primer 2.35 Generička konstrukcija Rado grafa. Posmatrajmo parcijalno uredjenje $\mathbb{P} = \left\langle \mathrm{Fn}([\omega]^2, \{0,1\}), \supset \right\rangle$, pri čemu je $\mathrm{Fn}([\omega]^2, \{0,1\})$ skup svih konačnih parcijalnih funkcija iz $[\omega]^2$ u $\{0,1\}$. Pre svega, primetimo da su skupovi

$$\mathcal{D}_{m,n} = \left\{ p \in \mathrm{Fn}([\omega]^2, \{0,1\}) : \{m,n\} \in \mathrm{dom}(p) \right\}$$

gusti u parcijalnom uredjenju $\mathbb{P}$ za proizvoljan izbor prirodnih brojeva m, n. Zaista ukoliko uzmemo bilo koju funkciju $p \in \mathrm{Fn}([\omega]^2, \{0,1\}) \setminus \mathcal{D}_{m,n}$. Tada je funkcija $p' = p \cup \{\langle \{m,n\}, 0 \rangle\}$ u $\mathrm{Fn}([\omega]^2, \{0,1\})$ i imamo da je $\{m,n\} \in \mathrm{dom}(p')$. Važi i sledeće tvrdjenje.

Stav 2.36 Neka su $K, L \in [\omega]^{<\omega}$ disjunktni i $m_{K,L} = \max(K \cup L) + 1$. Tada je skup

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{K,L} = \quad & \{ p \in \mathrm{Fn}([\omega]^2, \{0,1\}) : \exists x > m_{K,L} \\ & \forall k \in K \ \langle \{k, m\}, 1 \rangle \in p \ \forall l \in L \ \langle \{l, m\}, 0 \rangle \in p \}, \end{aligned}$$

gust u $\mathbb{P}$.

Dokaz: Uzmimo proizvoljnu funkciju p iz $\mathrm{Fn}([\omega]^2, \{0,1\}) \setminus \mathcal{D}_{K,L}$. Skup $\bigcup \mathrm{dom}(p)$ je konačan jer je p konačna funkcija. Dakle, možemo izabrati prirodan broj m iz skupa $(\omega \setminus m_{K,L}) \setminus \bigcup \mathrm{dom}(p)$. Jasno je da je tada $m \neq k$ za sve $k \in K$ i $m \neq l$ za sve $l \in L$. Definišimo

$$p' = p \cup \bigcup \{ \langle \{k, m\}, 1 \rangle : k \in K \} \cup \bigcup \{ \langle \{l, m\}, 0 \rangle : l \in L \}.$$

Jasno je da je $p \in \mathrm{Fn}([\omega]^2, \{0,1\})$ i da je $p' \leq p$. □

Na osnovu leme Rasiowa-Sikorski postoji filter $\mathcal{G}$ koji seče prebrojivu familiju gustih skupova

$$\{\mathcal{D}_{m,n} : m, n \in \omega\} \cup \{\mathcal{D}_{K,L} : K, L \in [\omega]^{<\omega} \ \wedge \ K \cap L = \emptyset\}.$$

Tada je $f = \bigcup_{p \in \mathcal{G}} p$ funkcija koja slika skup neuredjenih parova prirodnih brojeva u $\{0,1\}$ (pošto je $\mathcal{G}$ filter, ne može biti nekompatibilnih parova u f, a pošto $\mathcal{G}$ seče skupove $\mathcal{D}_{m,n}$ domen je ceo $[\omega]^2$), a par $\langle \omega, f^{-1}[\{1\}] \rangle$ je Rado graf (ako uzmemo disjunktne $K, L \in [\omega]^{<\omega}$, postoje $p \in \mathcal{G} \cap \mathcal{D}_{K,L}$ i $x \in \omega \setminus (K \cup L)$ takvi da $\forall k \in K \ p(\{k, x\}) = 1$ i $\forall l \in L \ p(\{l, x\}) = 0$, tj. $\omega_K^{K \cup L} \neq \emptyset$, pa je ispunjen uslov leme 2.25).

GLAVA TREĆA

Konstrukcija maksimalnih lanaca

U ovoj glavi ćemo dati opšti okvir za ispitivanje maksimalnih lanaca u parcijalnim uredjenjima oblika $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$, za neku prebrojivu ultrahomogenu relacijsku strukturu $\mathbb{X}$. Prvo dajemo uslove koje takav lanac mora da ispunjava. Nakon toga, pokazujemo da egzistencija pozitivne familije $\mathcal{P}$ na X takve da je $\mathcal{P} \subset \mathbb{P}(\mathbb{X})$, garantuje postojanje maksimalnog lanca izomorfnog proizvoljno izabranom nigde gustom kompaktnom podskupu realne prave u kome je minimum neizolovan. Na kraju ove glave dajemo dovoljne uslove da bi postojao maksimalan lanac L u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ izomorfan proizvoljnom kompaktnom podskupu realne prave u kome je minimum neizolovan.

3.1 NEOPHODNI USLOVI

U ovoj sekciji opisujemo uslove koje moraju da ispunjavaju maksimalni lanci u parcijalnim uredjenjima $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$, za neku prebrojivu ultrahomogenu relacijsku strukturu $\mathbb{X}$.

Napomena 3.1 Ako je linearno uredjenje $\mathbb{L}$ izomorfno maksimalnom lancu u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}), \subset \rangle$ za prebrojivu strukturu $\mathbb{X}$, onda $\mathbb{L}$ ne može sadržati poduredjenje izomorfno nekom neprebrojivom kardinalu. Pretpostavimo suprotno, da $\langle X_\alpha : \alpha \in \kappa \rangle \subset \mathbb{P}(\mathbb{X})$ i $\langle \langle X_\alpha : \alpha \in \kappa \rangle, \subsetneq \rangle \cong \langle \kappa, \in \rangle$, gde $\kappa > \omega$. Tada bi

$$\{X_{\alpha+1} \setminus X_\alpha : \alpha \in \kappa\}$$

bila familija κ-mnogo disjunktnih nepraznih podskupova X, što bi značilo da je $\mathbb{X}$ neprebrojiva struktura.

Napomena 3.2 Primetimo takodje da ako relacijska struktura zadovoljava uslov $\mathbb{X} \cong \mathbb{X} \setminus \{p\}$, za proizvoljno izabranu tačku $p \in \mathbb{X}$, onda u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}), \subset \rangle$ postoji maksimalan lanac tipa ω^*. Ako je $\mathbb{X} = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, željeni lanac L konstruiše se na sledeći način:

$$X_n = X \setminus \{x_0, \dots, x_{n-1}\}.$$

Nije teško videti da je $L = \langle X_n : n \in \omega \rangle$ maksimalan lanac u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}), \subset \rangle$.

Vratimo se sada za momenat na teoremu 1.33. Kada je u pitanju uslov da mora biti kompletno linearno uredjenje tu je opšti slučaj malo drugačiji od situacije koju smo imali sa $\mathbb{Q}$. Naime, svaka izomorfna kopija racionalne linije je istovremeno i elementarni podmodel gustog prebrojivog linearnog uredjenja bez krajeva. Dakle, u tom slučaju lanci izomorfnih kopija su zapravo elementarni lanci, pa se uslov kompletnosti maksimalnog lanca svodio na dobro poznatu činjenicu da je unija elementarnog lanca elementarni lanac. Da bi se pokazalo da je za neku ultrahomogenu strukturu maksimalan lanac u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ kompletno linearno uredjenje, bilo bi lepo pokazati da je unija lanca izomorfnih kopija ultrahomogene strukture $\mathbb{X}$ izomorfna sa $\mathbb{X}$.

Značajno je posmatrati i treći uslov, da je minimum maksimalnog lanca u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ neizolovan. Jasno je da je ovo tačno uvek kada $\mathbb{X}$ ima netrivijalnu izomorfnu kopiju, tj. postoji $Y \in \mathbb{P}(\mathbb{X}) \setminus \{X\}$, jer u tom slučaju izomorfizam $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ daje $f[\mathbb{Y}] \subsetneq \mathbb{Y}$, pa proizvoljno izabran $Y \in \mathbb{P}(\mathbb{X})$ ne može biti sledbenik $\emptyset$ u $\mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}$. Postavlja se pitanje da li je moguće da prebrojiva ultrahomogena relacijska struktura nema netrivijalnu izomorfnu kopiju? Odgovor je da postoje i takve ultrahomogene strukture. Za takve strukture trivijalno je okarakterisati maksimalne lance izomorfnih kopija, to su jednoelementna linearna uredjenja. Dajemo primer relacijske strukture takve da je $\mathbb{P}(\mathbb{X}) = \{X\}$.

Primer 3.3 ([6], strana 399.) Posmatrajmo na skupu celih brojeva $\mathbb{Z}$ relacije τ_n definisane sa $\langle x, y \rangle \in \tau_n \Leftrightarrow |x - y| = n$. Prebrojiva relacijska struktura $\mathbb{X} = \langle \mathbb{Z}, \{\tau_n : n \in \omega\} \rangle$ je primer strukture za koju su sva utapanja $i : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ automorfizmi. To su refleksije $i(x) = -x$, translacije $i_z(x) = x + z$ i njihove kompozicije.

Za strukture sa osobinama iz primera 3.3 može se reći da nisu tipične ultrahomogene strukture. Sledeća teorema pokazuje da za prebrojivu ultrahomogenu relacijsku strukturu $\mathbb{X}$ koja ima netrivijalne kopije uslove iz teoreme 1.33 zadovoljavaju svi maksimalni lanci u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$.

Teorema 3.4 ([19]) *Neka je $\mathbb{X}$ prebrojiva ultrahomogena relacijska struktura u najviše prebrojivom jeziku takva da je $\mathbb{P}(\mathbb{X}) \neq \{X\}$. Tada je svaki maksimalan lanac $\mathcal{L}$ u parcijalnom uredjenju $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ kompletno linearno uredjenje koje se utapa u $\mathbb{R}$ i* $\min \mathcal{L} (= \emptyset)$ *nema sledbenika.*

Dokaz: Prvo pokazujemo

$$\bigcup \mathcal{A} \in \mathbb{P}(\mathbb{X}), \text{ za svaki lanac } \mathcal{A} \text{ u } \langle \mathbb{P}(\mathbb{X}), \subset \rangle. \tag{3.1}$$

Neka je φ konačan izomorfizam podstrukture $\bigcup \mathcal{A}$ i $x \in \bigcup \mathcal{A} \setminus \mathrm{dom}(\varphi)$. Pošto je $\mathcal{A}$ lanac, postoji $A \in \mathcal{A}$ da je $\mathrm{dom}(\varphi) \cup \mathrm{ran}(\varphi) \cup \{x\} \subset A$. Pošto je $A \cong \mathbb{X}$, na osnovu teoreme 2.8(a) postoji element $y \in A$ takav da je $\psi = \varphi \cup \{\langle x, y\rangle\}$ izomorfizam, pa je onda ψ i konačan izomorfizam $\bigcup \mathcal{A}$. Dakle, na osnovu teoreme 2.8(a) struktura $\bigcup \mathcal{A}$ je ultrahomogena. Pošto je $\mathbb{X} \cong A \subset \bigcup \mathcal{A} \subset X$, važi $\mathrm{Age}\, \mathbb{X} = \mathrm{Age}\, A \subset \mathrm{Age} \bigcup \mathcal{A} \subset \mathrm{Age}\, \mathbb{X}$, što na osnovu teoreme 2.8(b) povlači $\bigcup \mathcal{A} \cong \mathbb{X}$, tj. $\bigcup \mathcal{A} \in \mathbb{P}(\mathbb{X})$.

Numerišimo sada $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Posmatrajmo funkciju $f : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ definisanu sa $f(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \cdot \chi_A(x_n)$ (pri čemu je $\chi_A : X \to \{0,1\}$ karakteristična funkcija skupa $A \subset X$). Pošto je $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} = 1$ imamo $f[\mathcal{L}] \subset (0,1]$. Treba još da pokažemo da je f utapanje. Za $A \subsetneq B$ ispunjeno je $f(B) = f(A) + \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \cdot \chi_{B\setminus A}(x_n) > f(A)$. Obratno, ako je za $A, B \in \mathcal{L}$ ispunjeno $f(A) < f(B)$, treba pokazati da nije $B \subset A$. Ako bismo imali $B \subset A$, onda bi bilo

$$\begin{aligned} f(A) &= \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \cdot \chi_A(x_n) \\ &= \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \cdot \chi_B(x_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \cdot \chi_{A\setminus B}(x_n) \\ &= f(B) + \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \cdot \chi_{A\setminus B}(x_n) \\ &\geq f(B), \end{aligned}$$

što je kontradikcija. Dakle, f je utapanje.

Jasno je da je $\min \mathcal{L} = \emptyset$ i $\max \mathcal{L} = X$. Neka je sada $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B}\rangle$ rez u $\mathcal{L}$. Ako je $\mathcal{A} = \{\emptyset\}$, onda je $\max \mathcal{A} = \emptyset$. Ako je $\mathcal{A} \neq \{\emptyset\}$, onda iz (3.1) imamo $\bigcup \mathcal{A} \in \mathbb{P}(\mathbb{X})$, a pošto $A \subset \bigcup \mathcal{A} \subset B$, za sve $A \in \mathcal{A}$ i $B \in \mathcal{B}$, maksimalnost $\mathcal{L}$ povlači $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{L}$. Dakle, ako je $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{A}$, onda je $\max \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}$. U suprotnom je $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{B}$ i $\min \mathcal{B} = \bigcup \mathcal{A}$. Dakle, $\langle \mathcal{L}, \subset\rangle$ je kompletno.

Pretpostavimo sada da je A sledbenik od $\emptyset$ u $\mathcal{L}$. Pošto je $\mathbb{P}(\mathbb{X}) \neq \{X\}$, postoji $B \in \mathbb{P}(\mathbb{X}) \setminus \{X\}$, pa ako je $f : \mathbb{X} \to \mathbb{A}$ izomorfizam, onda je $f[B] \in \mathbb{P}(\mathbb{X})$, $f[B] \subsetneq A$ i $\mathcal{L} \cup \{f[B]\}$ je lanac u $\mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}$. Kontradikcija sa maksimalnošću $\mathcal{L}$. □

3.2 POZITIVNE FAMILIJE

U ovoj sekciji za prebrojivu ultrahomogenu relacijsku strukturu $\mathbb{X}$ dajemo dovoljne uslove da svako bulovsko linearno uredjenje koje se utapa u $\mathbb{R}$ sa neizolovanim minimumom bude izomorfno nekom maksimalnom lancu u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset\rangle$. Ispostavlja se da je jedan dovoljan uslov egzistencija pozitivne familije $\mathcal{P} \subset \mathbb{P}(\mathbb{X})$.

Definicija 3.5 Familija $\mathcal{P}$ podskupova prebrojivog skupa A naziva se *pozitivna familija* ako i samo ako ispunjava sledeće uslove:

(P1) $\emptyset \notin \mathcal{P}$;
(P2) $\mathcal{P} \ni X \subset Y \subset A \Rightarrow Y \in \mathcal{P}$;
(P3) $X \in \mathcal{P} \wedge F \in \mathrm{Fin} \Rightarrow X \setminus F \in \mathcal{P}$;
(P4) $\exists X \in \mathcal{P}\ |A \setminus X| = A$.

Ukoliko je $\mathcal{P}$ pozitivna familija na ω, zbog (P2) i (P3) $\mathcal{P}$ sadrži Fréchetov filter, ali zbog (P4) Fréchetov filter nije pozitivna familija. Pošto je presek Fréchetovog filtera $\emptyset$, za svaku pozitivnu familiju $\mathcal{P}$ važi $\bigcap \mathcal{P} = \emptyset$. Zbog (P1) i (P3) $\mathcal{P} \subset [\omega]^\omega$ i maksimalna pozitivna familija na ω je skup $[\omega]^\omega$.

Primer 3.6 Identifikujmo ω i $\mathbb{Q}$. Tada je jedna pozitivna familija na $\mathbb{Q}$ i familija svih gustih podskupova od $\mathbb{Q}$, koju označavamo sa $\mathrm{Dense}(\mathbb{Q})$. Svojstva (P1) i (P2) očigledno su ispunjena. Da bismo pokazali (P3), uzmimo bilo koje dve tačke $x, y \in X$ za neki $X \in \mathrm{Dense}(\mathbb{Q})$. Ako je F iz $\mathrm{Fin}(\mathbb{Q})$, pošto je F konačan, postoji $a = \min(x, y)_{\mathbb{Q}} \cap F$. Pa pošto je $X \in \mathrm{Dense}(\mathbb{Q})$, postoji $t \in X$ da je $x < t < a < y$. Ovako izabrano t je i u $X \setminus F$, pa je $X \setminus F \in \mathrm{Dense}(\mathbb{Q})$. Za (P4) posmatrajmo skupove $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Q} + \sqrt{2}$. Njihova unija je prebrojivo gusto linearno uredjenje bez krajeva, pa postoji izomorfizam $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \cup (\mathbb{Q} + \sqrt{2})$, i pri tome su $f^{-1}[\mathbb{Q}] \in \mathrm{Dense}(\mathbb{Q})$ i $f^{-1}[\mathbb{Q} + \sqrt{2}] \in \mathrm{Dense}(\mathbb{Q})$ prebrojivi i disjunktni podskupovi $\mathbb{Q}$.

Primer 3.7 Identifikujmo ponovo ω i $\mathbb{Q}$. Prisetimo se pozitivne familije iz prve glave

$$\mathcal{P}_{\mathbb{Q}} = \left\{\mathbb{Q} \setminus \textstyle\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} F_m : \forall m \in \mathbb{Z}\ F_m \in [[m, m+1) \cap \mathbb{Q}]^{<\omega}\right\}.$$

Nije teško videti da je $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$, pored toga što je familija kopija $\mathbb{Q}$, istovremeno i pozitivna familija na $\mathbb{Q}$. Ova familija će nam predstavljati sredstvo za konstrukciju pozitivnih familja u parcijalnim uredjenjima kopija raznih ultrahomogenih struktura.

Sledeća teorema opisuje maksimalne lance u proizvoljnoj pozitivnoj familiji na ω.

Teorema 3.8 (Kurilić, [15]) *Neka je $\mathcal{P} \subset P(\omega)$ pozitivna familija. Za svako linearno uredjenje $\mathbb{L}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) $\mathbb{L}$ *je izomorfno nekom maksimalnom lancu u* $\langle \mathcal{P} \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$;
(b) $\mathbb{L}$ *se utapa u* $\mathbb{R}$, *bulovsko je i* $\min \mathbb{L}$ *nema sledbenika;*
(c) $\mathbb{L}$ *je izomorfno kompaktnom nigde gustom* $K \subset \mathbb{R}$, *da* $\min K \in K'$.

Veza pozitivnih familija i lanaca izomorfnih kopija data je u sledećoj, najvažnijoj teoremi ovog odeljka.

Teorema 3.9 ([19]) *Neka je $\mathbb{X}$ prebrojiva relacijska struktura. Ako postoji pozitivna familija $\mathcal{P}$ na X takva da je $\mathcal{P} \subset \mathbb{P}(\mathbb{X})$, onda:*

(a) za svako bulovsko linearno uredjenje $\mathbb{L}$ koje se utapa u $\mathbb{R}$ i u kome $\min \mathbb{L}$ *nema sledbenika, postoji maksimalan lanac u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ izomorfan $\mathbb{L}$;*

(b) za svako prebrojivo kompletno linearno uredjenje $\mathbb{L}$ u kome $\min \mathbb{L}$ *nema sledbenika postoji maksimalan lanac u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ izomorfan $\mathbb{L}$.*

Dokaz: (a) Na osnovu teoreme 3.8 postoji maksimalan lanac $\mathcal{L}$ u $\mathcal{P} \cup \{\emptyset\}$ izomorfan $\mathbb{L}$ i koji zadovoljava $\bigcap(\mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}) = \emptyset$. Pretpostavimo da skup $C \in \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}$ svedoči da $\mathcal{L}$ nije maksimalan lanac u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$. Pošto je $C \neq \emptyset$ i $\bigcap \mathcal{P} = \emptyset$ (pošto $\mathcal{P}$ sadrži Fréchetov filter), sledi da postoji $A \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ takav da je $A \subset C$, pa zbog (P2) i $C \in \mathcal{P}$. Dakle, $\mathcal{L} \cup \{C\}$ bi bio lanac u $\mathcal{P} \cup \{\emptyset\}$ koji je ekstenzija $\mathcal{L}$, što je kontradikcija sa maksimalnošću lanca $\mathcal{L}$.

(b) Sledi iz (a) i leme 1.26. □

Sledeća lema je tehnička, ali neophodna za konstrukcije maksimalnih lanaca. Navodimo je u ovoj sekciji jer je povezana sa maksimalnim lancima u $P(\omega)$, koji kao i maksimalni lanci u pozitivnim familijama moraju imati guste skokove.

Lema 3.10 ([16]) *Neka je $\mathbb{C}$ relacijska struktura, $\mathbb{L}$ najviše prebrojivo kompletno linearno uredjenje, $A, B \in \mathbb{P}(\mathbb{C})$, $A \subset B$, $|B \setminus A| = |L| - 1$ i neka je još $[A, B]_{\mathbb{P}(\mathbb{C})} = [A, B]_{P(B)}$. Tada postoji lanac $\mathcal{L}$ u $[A, B]_{\mathbb{P}(\mathbb{C})}$ koji zadovoljava $A, B \in \mathcal{L} \cong \mathbb{L}$ i za koji važi $\bigcup \mathcal{A}, \bigcap \mathcal{B} \in \mathcal{L}$ i $|\bigcap \mathcal{B} \setminus \bigcup \mathcal{A}| \leq 1$ za svaki rez $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ u $\mathcal{L}$.*

Dokaz: Ako je $|B \setminus A|$ konačan, recimo $B = A \cup \{a_1, \dots a_n\}$, onda je $|L| = n + 1$ i $\mathcal{L} = \{A, A \cup \{a_1\}, A \cup \{a_1, a_2\}, \dots, B\}$ je traženi lanac.

Ako je $|B \setminus A| = \omega$, onda je $\mathbb{L}$ prebrojivo linearno uredjenje te se na osnovu teoreme 1.13 utapa u $\mathbb{R}$. Pošto je $\mathbb{L}$ prebrojivo i kompletno, na osnovu leme 1.26 $\mathbb{L}$ je bulovsko, pa na osnovu teoreme 1.32 postoji maksimalan lanac $\mathcal{L}_1$ u $P(B \setminus A)$ izomorfan sa $\mathbb{L}$. Neka je $\mathcal{L} = \{A \cup C : C \in \mathcal{L}_1\}$. Pošto $\emptyset, B \setminus A \in \mathcal{L}_1$, imamo $A, B \in \mathcal{L}$ i da je $f : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}$, dato sa $f(C) = A \cup C$, svedok da je $\langle \mathcal{L}_1, \subsetneq \rangle \cong \langle \mathcal{L}, \subsetneq \rangle$ pa je $\mathcal{L}$ izomorfno $\mathbb{L}$. Za svaki rez $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ u $\mathcal{L}_1$ imamo $\bigcup \mathcal{A} \subset \bigcap \mathcal{B}$ pa na osnovu maksimalnosti $\mathcal{L}_1$, $\bigcup \mathcal{A}, \bigcap \mathcal{B} \in \mathcal{L}_1$ imamo i $|\bigcap \mathcal{B} \setminus \bigcup \mathcal{A}| \leq 1$. Jasno je da je ovo tačno za svaki rez u $\mathcal{L}$. □

3.3 KONSTRUKCIJA MAKSIMALNIH LANACA

Prema teoremi 3.4, za ultrahomogenu strukturu $\mathbb{X}$ svaki maksimalan lanac u $\mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}$ je kompletan, utapa se u $\mathbb{R}$ i $\min \mathcal{L}$ nema sledbenika. U ovoj sekciji dajemo dovoljne uslove da za svako linearno uredjenje sa navedenim osobinama postoji maksimalan lanac u $\mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}$

Teorema 3.11 ([17]) *Neka je $\mathbb{X}$ prebrojiva relacijska struktura.*

(A) Ako postoji particija $\{J_n : n \in \omega\}$ skupa racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ i struktura sa domenom $\mathbb{Q}$ u istom jeziku kao $\mathbb{X}$ takva da je:

(i) J_0 gust u $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$,

(ii) J_n, $n \in \mathbb{N}$, jesu koinicijalni podskupovi od $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$,

(iii) za svako $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ i svako A:

$$J_0 \cap (-\infty, x) \subset A \subset \mathbb{Q} \cap (-\infty, x) \Rightarrow A \cong \mathbb{X},$$

(iv) za svako $q \in J_0$ i svaki C:

$$J_0 \cap (-\infty, q] \subset C \subset \mathbb{Q} \cap (-\infty, q] \Rightarrow C \not\cong \mathbb{X},$$

tada za svako neprebrojivo kompletno linearno uredjenje $\mathbb{L}$ koje se utapa u $\mathbb{R}$, u kome $\min \mathbb{L}$ nema sledbenika i takvo da su svi početni segmenti od $\mathbb{L} \setminus \{\min \mathbb{L}\}$ neprebrojivi, postoji maksimalan lanac u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ izomorfan $\mathbb{L}$.

(B) Ako važi i dodatni uslov da:

(v) za svako prebrojivo kompletno linearno uredjenje $\mathbb{L}$ u kome minimum nema sledbenika postoji maksimalan lanac u parcijalnom uredjenju $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ izomorfan $\mathbb{L}$,

tada za svako kompletno linearno uredjenje $\mathbb{L}$ u kome $\min \mathbb{L}$ nema sledbenika i koje se utapa u $\mathbb{R}$ postoji maksimalan lanac u parcijalnom uredjenju $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ izomorfan $\mathbb{L}$.

Dokaz: U dokazu teoreme ćemo koristiti prezentaciju svih kompletnih linearnih uredjenja koja se utapaju u $\mathbb{R}$ i u kojima minimum nema sledbenika, koju smo pokazali u teoremi 1.27. Dakle, važi $\mathbb{L} \cong \sum_{x \in [-\infty, \infty]} \mathbb{L}_x$, i:

(L1) $\mathbb{L}_x$ su najviše prebrojiva kompletna linearna uredjenja;

(L2) skup $M = \{x \in [-\infty, \infty] : |L_x| > 1\}$ je najviše prebrojiv;

(L3) $|L_{-\infty}| = 1$ ili $\min \mathbb{L}_{-\infty}$ nema sledbenika u $\mathbb{L}_{-\infty}$.

Sada dokazujemo teoremu, prvo deo (A).

(A) Svi su početni segmenti od $\mathbb{L} \setminus \{\min \mathbb{L}\}$ neprebrojivi. Tada je na osnovu teoreme 1.27, $|L_{-\infty}| = 1$, tj. $-\infty \notin M$, i imamo dva podslučaja:

Slučaj I: $\infty \in M$. Iz (L2) sledi da postoji "1-1" preslikavanje $\varphi : M \to \mathbb{N}$. Iz (L1), za $y \in M$ imamo $|L_y| \leq \omega$, a iz (ii) sledi $|J_{\varphi(y)} \cap (-\infty, y)| = \omega$ pa možemo izabrati $I_y \in [J_{\varphi(y)} \cap (-\infty, y)]^{|L_y|-1}$. Definišimo sada skupove A_x, $x \in [-\infty, \infty]$ i A_x^+, $x \in M$, na sledeći način:

$$A_x = \begin{cases} \emptyset, & \text{za } x = -\infty, \\ (J_0 \cap (-\infty, x)) \cup \bigcup_{y \in M \cap (-\infty, x)} I_y, & \text{za } x \in (-\infty, \infty]; \end{cases}$$

$$A_x^+ = A_x \cup I_x, \quad \text{za } x \in M.$$

Pošto je $J_0 \subset A_\infty^+ = J_0 \cup \bigcup_{y \in M} I_y \subset \mathbb{Q}$, iz (iii) sledi $A_\infty \in \mathbb{P}(\mathbb{X})$ pa je dovoljno da konstruišemo maksimalan lanac $\mathcal{L}$ u $\langle \mathbb{P}(A_\infty^+) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$, takav da je $\mathcal{L} \cong \mathbb{L}$.

Stav 3.12 Skupovi A_x, $x \in [-\infty, \infty]$ i A_x^+, $x \in M$ su podskupovi skupa A_∞^+. Dalje, za sve $x, x_1, x_2 \in [-\infty, \infty]$ važi

(a) $A_x \subset (-\infty, x)$;
(b) $A_x^+ \subset (-\infty, x)$, ako je $x \in M$;
(c) $x_1 < x_2 \Rightarrow A_{x_1} \subsetneq A_{x_2}$;
(d) $M \ni x_1 < x_2 \Rightarrow A_{x_1}^+ \subsetneq A_{x_2}$;
(e) $|A_x^+ \setminus A_x| = |L_x| - 1$, ako je $x \in M$;
(f) $A_x \in \mathbb{P}(A_\infty^+)$, za sve $x \in (-\infty, \infty]$.
(g) $A_x^+ \in \mathbb{P}(A_\infty^+)$ i $[A_x, A_x^+]_{\mathbb{P}(A_\infty^+)} = [A_x, A_x^+]_{P(A_x^+)}$, za sve $x \in M$.

Dokaz: Tvrdjenja (c) i (d) su tačna jer je J_0 gust podskup u $\mathbb{Q}$; (a), (b) i (e) slede iz definicija A_x i A_x^+ kao i izbora skupova I_y. Za $x \in (-\infty, \infty]$ imamo $J_0 \cap (-\infty, x) \subset A_x \subset \mathbb{Q} \cap (-\infty, x)$ pa iz (iii), $A_x \cong \mathbb{X} \cong A_\infty^+$ te je i (f) tačno. Ako je $x \in M$, onda je $J_0 \cap (-\infty, x) \subset A_x \subset A_x^+ \subset \mathbb{Q} \cap (-\infty, x)$ pa iz (iii), $A_x \subset A \subset A_x^+$ što povlači $A \cong \mathbb{X} \cong A_\infty^+$ te je i (g) tačno. $\square$

Sada, za $x \in [-\infty, \infty]$ definišemo lance $\mathcal{L}_x$ u $\langle \mathbb{P}(A_\infty^+) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ na sledeći način.

Za $x \notin M$ definišemo $\mathcal{L}_x = \{A_x\}$. Primetimo da je $\mathcal{L}_{-\infty} = \{\emptyset\}$.

Za $x \in M$, iz stava 3.12(g) i leme 3.10 sledi da postoje lanci skupova $\mathcal{L}_x \subset [A_x, A_x^+]_{P(A_x^+)}$ takvi da je $\langle \mathcal{L}_x, \subsetneq \rangle \cong \langle L_x, <_x \rangle$ i da ispunjavaju uslove

$$A_x, A_x^+ \in \mathcal{L}_x \subset [A_x, A_x^+]_{\mathbb{P}(A_\infty^+)}, \tag{3.2}$$

$$\bigcup \mathcal{A}, \bigcap \mathcal{B} \in \mathcal{L}_x \quad \text{i} \quad |\bigcap \mathcal{B} \setminus \bigcup \mathcal{A}| \leq 1, \text{ za svaki rez } \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle \text{ u } \mathcal{L}_x. \tag{3.3}$$

Da bismo skratili notaciju, za $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{P}(A_\infty^+)$ pišemo $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ ako i samo ako je $A \subsetneq B$, za sve $A \in \mathcal{A}$ i $B \in \mathcal{B}$.

Stav 3.13 Neka je $\mathcal{L} = \bigcup_{x\in[-\infty,\infty]} \mathcal{L}_x$. Tada važi:

(a) Ako je $-\infty \leq x_1 < x_2 \leq \infty$, onda $\mathcal{L}_{x_1} \prec \mathcal{L}_{x_2}$ i

$$\bigcup \mathcal{L}_{x_1} \subset A_{x_2} \subset \bigcup \mathcal{L}_{x_2}.$$

(b) $\mathcal{L}$ je lanac u $\langle \mathbb{P}(A^+_\infty) \cup \{\emptyset\}, \subset\rangle$ izomorfan sa $\mathbb{L} = \sum_{x\in[-\infty,\infty]} \mathbb{L}_x$.

(c) $\mathcal{L}$ je maksimalan lanac u $\langle \mathbb{P}(A^+_\infty) \cup \{\emptyset\}, \subset\rangle$.

Dokaz: (a) Neka je $A \in \mathcal{L}_{x_1}$ i $B \in \mathcal{L}_{x_2}$. Ako je $x_1 \in (-\infty,\infty] \setminus M$, onda na osnovu (3.2) i stava 3.12(c) imamo $A = A_{x_1} \subsetneq A_{x_2} \subset B$. Ako je $x_1 \in M$, onda na osnovu (3.2) i stava 3.12(d), $A \subset A^+_{x_1} \subsetneq A_{x_2} \subset B$. Pošto je $A_{x_2} \in \mathcal{L}_{x_2}$, imamo i kompletan dokaz tvrdjenja (a).

(b) Iz dela pod (a) je $\langle [-\infty,\infty], <\rangle \cong \langle \{\mathcal{L}_x : x \in [-\infty,\infty]\}, \prec\rangle$. Pošto je $\mathcal{L}_x \cong \mathbb{L}_x$, za $x \in [-\infty,\infty]$, imamo da je

$$\langle \mathcal{L}, \subsetneq\rangle \cong \textstyle\sum_{x\in[-\infty,\infty]} \langle \mathcal{L}_x, \subsetneq\rangle \cong \sum_{x\in[-\infty,\infty]} \mathbb{L}_x = \mathbb{L}.$$

(c) Pretpostavimo da postoji skup $C \in \mathbb{P}(A^+_\infty) \cup \{\emptyset\}$ koji svedoči da $\mathcal{L}$ nije maksimalan lanac. Skup C odredjuje jedan rez u $\mathbb{L}$ na sledeći način $\mathcal{L} = \mathcal{A} \dot\cup \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$, gde je $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{L} : A \subsetneq C\}$ i $\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{L} : C \subsetneq B\}$. Da bismo videli da je $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B}\rangle$ zaista rez, primetimo da je $\emptyset \in \mathcal{L}_{-\infty}$, a pošto je $\infty \in M$, na osnovu (3.2) zaključujemo $A^+_\infty \in \mathcal{L}_\infty$. Dakle, $\emptyset, A^+_\infty \in \mathcal{L}$, što povlači $\mathcal{A}, \mathcal{B} \neq \emptyset$ pa je $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B}\rangle$ rez u $\langle \mathcal{L}, \subsetneq\rangle$. Iz (3.2) znamo i da je $\{A_x : x \in (-\infty,\infty]\} \subset \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$, pa na osnovu stava 3.12(a), važi

$$\bigcap(\mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}) \subset \textstyle\bigcap_{x\in(-\infty,\infty]} A_x \subset \bigcap_{x\in(-\infty,\infty]} (-\infty, x) = \emptyset,$$

što povlači $\mathcal{A} \neq \{\emptyset\}$. Sada je jasno da je,

$$\bigcup \mathcal{A} \subset C \subset \bigcap \mathcal{B}. \tag{3.4}$$

Slučaj 1: Postoji neki $x_0 \in (-\infty,\infty]$ takav da je $\mathcal{A} \cap \mathcal{L}_{x_0} \neq \emptyset$ i $\mathcal{B} \cap \mathcal{L}_{x_0} \neq \emptyset$. Tada je $|\mathcal{L}_{x_0}| > 1$, pa je $x_0 \in M$ i $\langle \mathcal{A} \cap \mathcal{L}_{x_0}, \mathcal{B} \cap \mathcal{L}_{x_0}\rangle$ je rez u $\mathcal{L}_{x_0}$ koji zadovoljava (3.3). Na osnovu (a) je

$$\mathcal{A} = \textstyle\bigcup_{x<x_0} \mathcal{L}_x \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{L}_{x_0})$$

i odatle $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup(\mathcal{A} \cap \mathcal{L}_{x_0}) \in \mathcal{L}$. Slično, $\bigcap \mathcal{B} = \bigcap(\mathcal{B} \cap \mathcal{L}_{x_0}) \in \mathcal{L}$, pa pošto je $|\bigcap \mathcal{B} \setminus \bigcup \mathcal{A}| \leq 1$, iz (3.4) sledi da i skup C mora biti u $\mathcal{L}$, što je kontradikcija sa izborom C.

Slučaj 2: $\neg$ Slučaj 1. Tada za svako $x \in (-\infty,\infty]$ imamo ili $\mathcal{L}_x \subset \mathcal{A}$ ili $\mathcal{L}_x \subset \mathcal{B}$. Pošto je ispunjeno $\mathcal{L} = \mathcal{A} \dot\cup \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \neq \{\emptyset\}$ i $\mathcal{A}, \mathcal{B} \neq \emptyset$, skupovi

$\mathcal{A}' = \{x \in (-\infty, \infty] : \mathcal{L}_x \subset \mathcal{A}\}$ i $\mathcal{B}' = \{x \in (-\infty, \infty] : \mathcal{L}_x \subset \mathcal{B}\}$ su neprazni i $(-\infty, \infty] = \mathcal{A}' \dot\cup \mathcal{B}'$. Pošto $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$, za $x_1 \in \mathcal{A}'$ i $x_2 \in \mathcal{B}'$ imamo $\mathcal{L}_{x_1} \prec \mathcal{L}_{x_2}$ pa iz (a), $x_1 < x_2$. Dakle $\langle \mathcal{A}', \mathcal{B}' \rangle$ je jedan rez u $(-\infty, \infty]$ pa postoji $x_0 \in (-\infty, \infty]$ takvo da je $x_0 = \max \mathcal{A}'$ ili $x_0 = \min \mathcal{B}'$.

Podslučaj 2.1: $x_0 = \max \mathcal{A}'$. Tada važi da je $x_0 < \infty$, jer je $\mathcal{B} \neq \emptyset$ i $\mathcal{A} = \bigcup_{x \leq x_0} \mathcal{L}_x$, pa iz dela tvrdjenja pod (a) imamo

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{x \leq x_0} \bigcup \mathcal{L}_x = \bigcup_{x < x_0} \bigcup \mathcal{L}_x \cup \bigcup \mathcal{L}_{x_0} = \bigcup \mathcal{L}_{x_0},$$

što zajedno sa (3.2) daje

$$\bigcup \mathcal{A} = \begin{cases} A_{x_0} & \text{ako } x_0 \notin M, \\ A^+_{x_0} & \text{ako } x_0 \in M. \end{cases} \tag{3.5}$$

Pošto $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in (x_0, \infty]} \mathcal{L}_x$, imamo $\bigcap \mathcal{B} = \bigcap_{x \in (x_0, \infty]} \bigcap \mathcal{L}_x$. Iz (3.2) sledi da je $\bigcap \mathcal{L}_x = A_x$, pa imamo

$$\begin{aligned} \bigcap \mathcal{B} = & \left(\bigcap_{x \in (x_0, \infty]} (-\infty, x) \cap J_0 \right) \cup \left(\bigcap_{x \in (x_0, \infty]} \bigcup_{y \in M \cap (-\infty, x)} I_y \right) \\ = & \left((-\infty, x_0] \cap J_0 \right) \cup \bigcup_{y \in M \cap (-\infty, x_0]} I_y \\ = & A_{x_0} \cup \left(\{x_0\} \cap J_0 \right) \cup \bigcup_{y \in M \cap \{x_0\}} I_y, \end{aligned}$$

dakle važi

$$\bigcap \mathcal{B} = \begin{cases} A_{x_0} & \text{ako} \quad x_0 \notin J_0 \quad \wedge \quad x_0 \notin M, \\ A_{x_0} \cup \{x_0\} & \text{ako} \quad x_0 \in J_0 \quad \wedge \quad x_0 \notin M, \\ A^+_{x_0} & \text{ako} \quad x_0 \notin J_0 \quad \wedge \quad x_0 \in M, \\ A^+_{x_0} \cup \{x_0\} & \text{ako} \quad x_0 \in J_0 \quad \wedge \quad x_0 \in M. \end{cases} \tag{3.6}$$

Ako je $x_0 \notin J_0$, onda iz (3.4), (3.5) i (3.6), imamo $\bigcup \mathcal{A} = \bigcap \mathcal{B} = C \in \mathcal{L}$ što je nemoguće zbog izbora skupa C.

Ako je $x_0 \in J_0$ i $x_0 \notin M$, onda je $\bigcup \mathcal{A} = A_{x_0}$ i $\bigcap \mathcal{B} = A_{x_0} \cup \{x_0\}$. Dakle, iz (3.4) i pošto $C \notin \mathcal{L}$, imamo da je $C = \bigcap \mathcal{B} = A_{x_0} \cup \{x_0\}$. Odatle je $J_0 \cap (-\infty, x_0] \subset C$ i na osnovu stava 3.12(a), sledi $C \subset (-\infty, x_0]$. Medjutim, iz (iv) imamo $C \not\cong \mathbb{X} (\cong A^+_\infty)$ što je nemoguće.

Ako je $x_0 \in J$ i $x_0 \in M$, onda je $\bigcup \mathcal{A} = A^+_{x_0}$ i $\bigcap \mathcal{B} = A^+_{x_0} \cup \{x_0\}$. Opet, iz (3.4) i pošto $C \notin \mathcal{L}$, imamo da je $C = \bigcap \mathcal{B} = A^+_{x_0} \cup \{x_0\}$. Dakle, $J_0 \cap (-\infty, x_0] \subset C$ i na osnovu stava 3.12(b), $C \subset (-\infty, x_0]$. Opet, iz (iv) imamo $C \not\cong \mathbb{X} (\cong A^+_\infty)$ što je nemoguće.

Podslučaj 2.2: $x_0 = \min \mathcal{B}'$. Tada na osnovu (3.2), $A_{x_0} \in \mathcal{L}_{x_0} \subset \mathcal{B}$, što zajedno sa delom tvrdjenja pod (a) daje $\bigcap \mathcal{B} = A_{x_0}$. Pošto je $A_x \in \mathcal{L}_x$ za

$x \in (-\infty, \infty]$, i $\mathcal{A} = \bigcup_{x<x_0} \mathcal{L}_x$, imamo

$$\begin{aligned} \bigcup \mathcal{A} = & \bigcup_{x<x_0} \bigcup \mathcal{L}_x \supset \bigcup_{x<x_0} A_x \\ = & \bigcup_{x<x_0} \left((-\infty, x) \cap J_0\right) \cup \bigcup_{x<x_0} \bigcup_{y \in M \cap (-\infty, x)} I_y \\ = & \left((-\infty, x_0) \cap J_0\right) \cup \bigcup_{y \in M \cap (-\infty, x_0)} I_y \\ = & A_{x_0}, \end{aligned}$$

pa je

$$A_{x_0} \subset \bigcup \mathcal{A} \subset \bigcap \mathcal{B} = A_{x_0},$$

odakle sledi $C = A_{x_0} \in \mathcal{L}$, što je nemoguće zbog izbora skupa C. □

Slučaj II: $\infty \notin M$. Tada je $L_\infty = \{\max L\}$ i suma $\mathbb{L} + 1$ pripada slučaju I ($\infty \in M$). Dakle, postoji maksimalan lanac $\mathcal{L}$ u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ i izomorfizam $f : \langle L+1, < \rangle \to \langle \mathcal{L}, \subset \rangle$. U tom slučaju je $A = f(\max L) \in \mathbb{P}(\mathbb{X})$ i $\mathcal{L}' = f[L] \cong L$. Iz maksimalnosti lanca $\mathcal{L}$, sledi da je $\mathcal{L}'$ maksimalan lanac u $\langle \mathbb{P}(A) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle \cong \langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$.

(B) Pošto važi (v), pretpostavićemo da je $\mathbb{L}$ neprebrojivo linearno uredjenje. Ako su svi početni segmenti od $\mathbb{L} \setminus \{\min \mathbb{L}\}$ neprebrojivi, tvrdjenje je dokazano u (A). U suprotnom, na osnovu prezentacije iz teoreme 1.27, imamo da je

$$\mathbb{L} = \sum_{x \in [-\infty, \infty]} \mathbb{L}_x,$$

pri čemu (L1) i (L2) i dalje važe, a umesto (L3) je ispunjen uslov

(L3′) $\mathbb{L}_{-\infty}$ je prebrojivo kompletno linearno uredjenje u kome $\min \mathbb{L}_{-\infty}$ nema sledbenika.

Jasno je $\mathbb{L} = \mathbb{L}_{-\infty} + \mathbb{L}^+$, gde je

$$\mathbb{L}^+ = \sum_{x \in (-\infty, \infty]} \mathbb{L}_x = \sum_{y \in (0, \infty]} \mathbb{L}_{\ln y}$$

(ovde podrazumevamo $\ln \infty = \infty$). Neka su $\mathbb{L}'_y$, $y \in [-\infty, \infty]$, disjunktna linearna uredjenja takva da $\mathbb{L}'_y \cong 1$, za $y \in [-\infty, 0]$, i $\mathbb{L}'_y \cong \mathbb{L}_{\ln y}$, za $y \in (0, \infty]$. Tada je

$$\sum_{y \in [-\infty, \infty]} \mathbb{L}'_y \cong [-\infty, 0] + \mathbb{L}^+,$$

i na osnovu (A) imamo maksimalan lanac $\mathcal{L}$ u $\mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}$ i izomorfizam $f : \langle [-\infty, 0] + \mathbb{L}^+, < \rangle \to \langle \mathcal{L}, \subset \rangle$. Jasno, za $A_0 = f(0)$ i $\mathcal{L}^+ = f[L^+]$ imamo $A_0 \in \mathcal{L}$ i $\mathcal{L}^+ \cong \mathbb{L}^+$.

Na osnovu pretpostavke teoreme i uslova (L3′), $\mathbb{P}(A_0)\cup\{\emptyset\}$ sadrži maksimalan lanac $\mathcal{L}_{-\infty}\cong\mathbb{L}_{-\infty}$. U tom slučaju imamo da je $A_0\in\mathcal{L}_{-\infty}$ i

$$\mathcal{L}_{-\infty}\cup\mathcal{L}^{+}\cong\mathbb{L}_{-\infty}+\mathbb{L}^{+}=\mathbb{L}.$$

Pretpostavimo da skup B iz $\mathbb{P}(\mathbb{X})\cup\{\emptyset\}$ svedoči da $\mathcal{L}_{-\infty}\cup\mathcal{L}^{+}$ nije maksimalan lanac u $\mathbb{P}(\mathbb{X})\cup\{\emptyset\}$. Tada je ili $A_0\subsetneq B$, što je nemoguće jer je $\mathcal{L}$ maksimalan u $\mathbb{P}(\mathbb{X})\cup\{\emptyset\}$, ili $B\subsetneq A_0$, što je nemoguće jer $\mathcal{L}_{-\infty}$ je maksimalan u $\mathbb{P}(A_0)\cup\{\emptyset\}$. $\square$

GLAVA ČETVRTA

Ultrahomogeni grafovi

Klasifikaciju prebrojivih ultrahomogenih grafova dali su Lachlan i Woodrow u [21].

Teorema 4.1 (Lachlan i Woodrow) *Prebrojiv graf $\mathbb{G}$ je ultrahomogen ako i samo ako je izomorfan jednom od sledećih:*

1. $\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}}$, *Rado grafu;*
2. $\mathbb{H}_n$, *ultrahomogenom $\mathbb{K}_n$-slobodnom grafu za $n \geq 3$;*
3. $\mathbb{G}_{\mu\nu}$, *uniji μ disjunktnih kopija $\mathbb{K}_\nu$, za $\mu\nu = \omega$;*
4. *komplementu nekog od grafova pod 1, 2 i 3.*

U ovoj glavi ispitujemo uredjajne tipove maksimalnih lanaca izomorfnih kopija ultrahomogenih grafova. Prvo primetimo da ako je ρ binarna relacija, a $\mathbb{X} = \langle X, \rho \rangle$ relacijska struktura, onda je $\mathrm{Emb}(X, \rho) = \mathrm{Emb}(X, \rho^c)$ (definišemo komplement relacije ρ sa $\rho^c = (X \times X) \setminus \rho$). Odatle imamo da je $\mathbb{P}(\mathbb{X}, \rho) = \mathbb{P}(\mathbb{X}, \rho^c)$ pa je dovoljno okarakterisati maksimalne lance izomorfnih kopija za klase grafova pod 1, 2. i 3. Glavni rezultat ove glave je sledeća teorema.

Teorema 4.2 *Neka je $\mathbb{G}$ prebrojiv ultrahomogeni graf. Tada važi:*

(I) Ako je $\mathbb{G} = \mathbb{G}_{\mathrm{Rado}}$ ili $\mathbb{G} = \mathbb{H}_n$ za neko $n \geq 3$, onda su za svako linearno uredjenje $\mathbb{L}$ sledeći uslovi ekvivalentni.

(a) $\mathbb{L}$ je izomorfno maksimalnom lancu u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{G}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$;

(b) $\mathbb{L}$ se utapa u $\mathbb{R}$, kompletno je i $\min \mathbb{L}$ nema sledbenika;

(c) $\mathbb{L}$ je izomorfno kompaktnom skupu $K \subset \mathbb{R}$ u kome $\min K \in K'$.

(II) Ako je $\mathbb{G} = \mathbb{G}_{\mu\nu}$, za $\mu\nu = \omega$, onda su za svako linearno uredjenje sledeći uslovi ekvivalentni:

(a) $\mathbb{L}$ je izomorfno maksimalnom lancu u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{G}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$;

(b) $\mathbb{L}$ se utapa u $\mathbb{R}$, bulovsko je i $\min \mathbb{L}$ nema sledbenika;

(c) $\mathbb{L}$ je izomorfno kompaktnom nigde gustom skupu $K \subset \mathbb{R}$ u kome je $\min K \in K'$.

Primetimo da su ekvivalencije (b)$\Leftrightarrow$(c) za (I) i (II) date u teoremi 1.33 i u teoremi 3.8. Dakle, dovoljno je pokazati samo ekvivalenciju (a)$\Leftrightarrow$(b).

4.1 RADO GRAF

U ovoj sekciji dokazujemo teoremu 4.2 za Rado graf, $\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}}$. Značaj tog rezultata je u tome što daje novi uvid u strukturu Rado grafa. Pri rešavanju ovog problema potrebno je pronaći zgodnu prezentaciju Rado grafa iz koje bismo pročitali sve osobine koje nas zanimaju. Medjutim, problem pronalaženja prezentacija ultrahomogenih relacijskih struktura koje su pogodne za rad nije jednostavan. Istorijski prvu prezentaciju dao je Richard Rado: na skupu prirodnih brojeva definišemo relaciju $m \rho n$ ako i samo ako je m-ta cifra u binarnom zapisu broja n jedinica ili je n-ta cifra u binarnom zapisu broja m jedinica. Može se pokazati da je ovako zadata relacijska struktura na skupu prirodnih brojeva Rado graf (što mi ovde ne činimo jer ovu prezentaciju nećemo koristiti).

U nastavku dajemo novu konstrukciju Rado grafa pogodnu za konstrukciju maksimalnih lanaca njegovih kopija. Generalno, u strukturama kao što je Rado graf, strukturama u kojima "sve može da se desi", relativno je lako konstruisati željene objekte. Problem u radu sa ovim strukturama nastaje kada želimo nešto zabranimo. U našem slučaju, želimo da zabranimo skokove izmedju kopija u posetu $\langle \mathbb{P}(\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$. Da bismo dobili prezentaciju u kojoj je to moguće, dajemo konstrukciju Rado grafa u kojoj će domen relacijske strukture biti $\mathbb{Q}$, a relacija ρ će biti tako definisana da za svaki realan broj x, važi $(-\infty, x) \cap \mathbb{Q} \cong \mathbb{G}_{\mathrm{Rado}}$, dok ni jedan zatvoreni interval $(-\infty, q] \cap \mathbb{Q}$, $q \in \mathbb{Q}$ neće biti izomorfan sa $\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}}$. Sada počinjemo dokaz glavne teoreme za Rado graf.

Definicija 4.3 (Poset aproksimacija Rado grafa) Neka je $\mathbb{P}_{\mathrm{Rado}}$ skup grafova $p = \langle G_p, \rho_p \rangle$ takvih da je $G_p \in [\mathbb{Q}]^{<\omega}$ i da za sve $a, b \in \mathbb{Q}$ važi

(R1) $\{a, b\} \in \rho_p \wedge \{a+1, b\} \in \rho_p \Rightarrow b > a+1$,

a neka je relacija $\leq$ na $\mathbb{P}_{\mathrm{Rado}}$ data sa

$$p \leq q \Leftrightarrow G_p \supset G_q \ \wedge \ \rho_p \cap [G_q]^2 = \rho_q. \tag{4.1}$$

Teorema 4.4 ([18]) *Za svako linearno uredjenje $\mathbb{L}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) $\mathbb{L}$ je izomorfno maksimalnom lancu u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$;

(b) $\mathbb{L}$ se utapa u $\mathbb{R}$, kompletno je i $\min \mathbb{L}$ *nema sledbenika.*

Dokaz: (a)$\Rightarrow$(b) sledi iz teoreme 3.4.

(b)$\Rightarrow$(a). Koristimo teoremu 3.11. Neka je $\{J_n : n \in \omega\}$ particija skupa $\mathbb{Q}$ iz leme 1.15. Uslovi (i) i (ii) teoreme 3.11 su zadovoljeni. Dalje radimo sa parcijalnim uredjenjem iz definicije 4.3.

Stav 4.5 $\langle \mathbb{P}_{\mathrm{Rado}}, \leq \rangle$ je parcijalno uredjenje.

Dokaz: Jasno je da je relacija $\leq$ refleksivna i antisimetrična. Ako je ispunjeno $p \leq q \leq r$, onda je $G_r \subset G_q \subset G_p$ i

$$\rho_r = \rho_q \cap [G_r]^2 = \rho_p \cap [G_q]^2 \cap [G_r]^2 = \rho_p \cap [G_r]^2,$$

pa je $p \leq r$. Dakle, $\leq$ je tranzitivna relacija. $\Box$

Stav 4.6 Za svaki $q \in \mathbb{Q}$ skup $\mathcal{D}_q = \{p \in \mathbb{P}_{\mathrm{Rado}} : q \in G_p\}$ gust je u parcijalnom uredjenju $\langle \mathbb{P}_{\mathrm{Rado}}, \leq \rangle$.

Dokaz: Ako je $p = \langle G_p, \rho_p \rangle \in \mathbb{P}_{\mathrm{Rado}} \setminus \mathcal{D}_q$, onda je $q \notin G_p$, pa pošto je za sve $x \in G_p$ ispunjeno $\{q, x\} \notin \rho_p$, imamo da je $p_1 = \langle G_p \cup \{q\}, \rho_p \rangle$ graf i da zadovoljava (R1). Dakle, $p_1 \in \mathcal{D}_q$ i $p_1 \leq p$. $\Box$

Za $H, K \in [\mathbb{Q}]^{<\omega}$ označimo $m_{H,K} = \max(H \cup K)$.

Stav 4.7 Za proizvoljne disjunktne $H, K \in [\mathbb{Q}]^{<\omega}$ i svaki $m \in \mathbb{N}$, skup

$$\mathcal{D}_{H,K,m} = \Big\{ p \in \mathbb{P}_{\mathrm{Rado}} : \exists q \in J_0 \cap (m_{H,K}, m_{H,K} + \tfrac{1}{m}) \\ \forall h \in H\ (\{q,h\} \in \rho_p) \wedge \forall k \in K\ (\{q,k\} \notin \rho_p\ )\Big) \Big\}$$

gust je u $\mathbb{P}_{\mathrm{Rado}}$.

Dokaz: Neka je $p \in \mathbb{P}_{\mathrm{Rado}}$. Izaberemo

$$q \in J_0 \cap (m_{H,K}, m_{H,K} + \tfrac{1}{m}) \setminus \bigcup_{a \in G_p} \{a, a-1, a+1\},$$

i definišemo (primetimo da $q > m_{H,K}$ pa $q \notin H \cup K$)

$$p_1 = \langle G_p \cup \{q\}, \rho_p \cup \{\{q,h\} : h \in H\} \rangle. \tag{4.2}$$

Prvo, jasno je da je $G_{p_1} \in [\mathbb{Q}]^{<\omega}$ i da je p_1 graf. Treba još pokazati da je u $\mathbb{P}_{\mathrm{Rado}}$. Da bismo pokazali (R1) pretpostavimo da je za neke $a, b \in \mathbb{Q}$

$$\{a,b\} \in \rho_{p_1}\ \wedge\ \{a+1, b\} \in \rho_{p_1}\ \wedge b \leq a+1. \tag{4.3}$$

Tada, pošto je $p \in \mathbb{P}_{\mathrm{Rado}}$, bar jedan od ova dva para ne pripada ρ_p pa imamo $q \in \{a, a+1, b\}$. Dakle, moguća su tri slučaja.

$q = a$. Tada iz (4.3) imamo $b \neq q$, a iz (4.2), $\{q+1, b\} \in \rho_p$ odakle sledi $q + 1 \in G_p$, što je nemoguće zbog izbora q (q je izabran da bude različit od svih $x - 1$ za $x \in G_p$).

$q = a + 1$. Tada iz (4.3) imamo $b \neq q$, a iz $a \neq q$, zbog (4.2) važi $\{a, b\} \in \rho_p$ što povlači $a \in G_p$, medjutim to je nemoguće zbog izbora q.

$q = b$. Tada iz (4.3) i (4.2) imamo $\{a, q\}, \{a + 1, q\} \in \rho_{p_1} \setminus \rho_p$ što povlači $a, a + 1 \in H$. Pošto $q > m_{H,K}$ imamo $q > a + 1$, tj. $b > a + 1$ što je kontradikcija sa (4.3).

Dakle, $p_1 \in \mathbb{P}_{\text{Rado}}$, a pošto je $H \cup K \subset G_p \subset G_{p_1}$, i iz (4.2) imamo $\{q, h\} \in \rho_{p_1}$, za sve $h \in H$, i $\{q, k\} \notin \rho_{p_1}$, za sve $k \in K$, sledi da je $p_1 \in \mathcal{D}_{H,K,m}$ i $p_1 \leq p$. □

Prema lemi 2.19 postoji filter $\mathcal{G}$ u posetu $\langle \mathbb{P}_{\text{Rado}}, \leq \rangle$ koji seče skupove $\mathcal{D}_q$, $q \in \mathbb{Q}$, i skupove $\mathcal{D}_{H,K,m}$, za disjunktne $H, K \in [\mathbb{Q}]^{<\omega}$ i $m \in \mathbb{N}$.

Stav 4.8 Za filter $\mathcal{G}$ važi:

(a) $\bigcup_{p \in \mathcal{G}} G_p = \mathbb{Q}$;

(b) Ako je $\rho = \bigcup_{p \in \mathcal{G}} \rho_p$, onda je $\langle \mathbb{Q}, \rho \rangle$ graf;

(c) $\rho \cap [G_p]^2 = \rho_p$, za sve $p \in \mathcal{G}$;

(d) Ako je $A \subset \mathbb{Q}$, $\rho_A = \rho \cap [A]^2$, $p \in \mathcal{G}$, i $H \subset A \cap G_p$, tada je

$$\rho_A \cap [H]^2 = \rho_p \cap [H]^2.$$

Dokaz: (a) Za $q \in \mathbb{Q}$ neka je $p_0 \in \mathcal{G} \cap \mathcal{D}_q$. Tada je $q \in G_{p_0} \subset \bigcup_{p \in \mathcal{G}} G_p$ pa je $\mathbb{Q} = \bigcup_{p \in \mathcal{G}} G_p$.

(b) Pošto su elementi ρ samo elementi skupa $[\mathbb{Q}]^2$, par $\langle \mathbb{Q}, \rho \rangle$ je graf.

(c) Inkluzija "$\supset$" je očigledna. Ako je $\{a, b\} \in \rho \cap [G_p]^2$, onda postoji element $p_1 \in \mathcal{G}$ takav da je $\{a, b\} \in \rho_{p_1}$, a pošto je $\mathcal{G}$ filter, postoji element $p_2 \in \mathcal{G}$ takav da je $p_2 \leq p, p_1$. Na osnovu definicije $\leq$ imamo $\rho_{p_1} \subset \rho_{p_2}$, što povlači $\{a, b\} \in \rho_{p_2}$ i $\{a, b\} \in \rho_{p_2} \cap [G_p]^2 = \rho_p$.

(d) Iz (c) sledi da je

$$\begin{aligned} \rho_A \cap [H]^2 = & \ \rho \cap [A]^2 \cap [H]^2 = \rho \cap [H]^2 \\ = & \ \rho \cap [G_p]^2 \cap [H]^2 = \rho_p \cap [H]^2. \end{aligned}$$ □

Sada pokazujemo da su uslovi (iii) i (iv) teoreme 3.11 zadovoljeni.

(iii) Neka je $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ i

$$J_0 \cap (-\infty, x) \subset A \subset \mathbb{Q} \cap (-\infty, x).$$

Dalje pokazujemo da je $\langle A, \rho_A \rangle \cong \mathbb{G}_{\text{Rado}}$. Neka su dati disjunktni skupovi $H, K \in [A]^{<\omega}$. Pošto je $m_{H,K} \in H \cup K \subset A$ imamo $m_{H,K} < x$, pa postoji $m \in \mathbb{N}$ koji zadovoljava $m_{H,K} + \frac{1}{m} < x$. Na osnovu stava 4.7 postoji $p \in \mathcal{G} \cap \mathcal{D}_{H,K,m}$, a na osnovu istog stava postoji

$$q \in J_0 \cap (m_{H,K}, m_{H,K} + \tfrac{1}{m}) \subset J_0 \cap (-\infty, x) \subset A$$

takav da je $\{q,h\} \in \rho_p \subset \rho$, što povlači da je $\{q,h\} \in \rho_A$ za sve $h \in H$, a $\{q,k\} \notin \rho_p$ i da $\{q,k\} \notin \rho_A$ za sve $k \in K$. Dakle, $q \in A_H^{H\cup K}$. Iz leme 2.25 sledi $\langle A, \rho_A\rangle \cong \mathbb{G}_{\text{Rado}}$ pa je uslov (iii) teoreme 3.11 ispunjen

(iv) Neka je $q \in J_0$ i neka je C takav da

$$J_0 \cap (-\infty, q] \subset C \subset \mathbb{Q} \cap (-\infty, q].$$

Sada pokazujemo da $\langle C, \rho_C\rangle \not\cong \mathbb{G}_{\text{Rado}}$. Pošto je $q \in J_0$, iz izbora J_0 (lema 1.15) sledi $q-1 \in J_0$ i $H = \{q-1, q\} \subset C$. Pretpostavimo da je $b \in C_H^H$. Tada $\{q-1,b\}, \{q,b\} \in \rho_C$ i, pošto je $\mathcal{G}$ filter, $\{q-1,b\}, \{q,b\} \in \rho_p$, za neko $p \in \mathcal{G}$. Iz (R1) imamo $b > q$, što je nemoguće jer je $q = \max C$. Dakle, $C_H^H = \emptyset$ i iz leme 2.25 sledi $\langle C, \rho_C\rangle \not\cong \mathbb{G}_{\text{Rado}}$ pa je i uslov (iv) teoreme 3.11 ispunjen.

Stav 4.9 Familija skupova

$$\mathcal{P} = \left\{\mathbb{Q} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} F_n : \forall n \in \mathbb{Z}\ \ F_n \in \Big[[n, n+1) \cap \mathbb{Q}\Big]^{<\omega}\right\}$$

je pozitivna familija na $\mathbb{Q}$ takva da je $\mathcal{P} \subset \mathbb{P}(\mathbb{Q}, \rho)$.

Dokaz: Svojstva (P1)-(P4) su ispunjena. Za $A = \mathbb{Q} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} F_n \in \mathcal{P}$, izaberimo proizvoljne disjunktne $H, K \in [A]^{<\omega}$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{Z}$ da $m_{H,K} \in [n_0, n_0+1) \cap \mathbb{Q}$. Pošto $|F_{n_0}| < \omega$ i $m_{H,K} \in A \subset \mathbb{Q} \setminus F_{n_0}$ postoji $m \in \mathbb{N}$ tako da je $(m_H, m_H + \frac{1}{m}) \cap \mathbb{Q} \subset A$. Na osnovu stava 4.7 postoji $p \in \mathcal{G} \cap \mathcal{D}_{H,K,m}$, i postoji $q \in J_0 \cap (m_{H,K}, m_{H,K} + \frac{1}{m}) \subset A$ tako da je:

- za sve $h \in H$ ispunjeno $\{q,h\} \in \rho_p$ što daje $\{q,h\} \subset A \cap G_p$, a sa stavom 4.8(d) povlači $\{q,h\} \in \rho_A$;

- za sve $k \in K$ ispunjeno $\{q,k\} \notin \rho_p$, odakle iz stava 4.8(c) sledi $\{q,k\} \notin \rho$ pa $\{q,k\} \notin \rho_A$.

Dakle $q \in A_H^{H\cup K}$. Sada po lemi 2.25 imamo

$$\langle A, \rho_A\rangle \cong \mathbb{G}_{\text{Rado}} \cong \langle \mathbb{Q}, \rho\rangle,$$

pa $A \in \mathbb{P}(\mathbb{Q}, \rho)$. Dakle, $\mathcal{P} \subset \mathbb{P}(\mathbb{Q}, \rho)$. $\square$

Implikacija (b) $\Rightarrow$ (a) teoreme 4.4 za prebrojivo $\mathbb{L}$ sledi iz stava 4.9 i teoreme 3.9(b). Dakle, uslov (v) teoreme 3.11 je zadovoljen pa iz (B) teoreme 3.11, sledi implikacija (b) $\Rightarrow$ (a) teoreme 4.4 za neprebrojivo $\mathbb{L}$. $\square$

4.2 HENSONOVI GRAFOVI

U ovom odeljku za proizvoljno $n \geq 3$ dokazujemo teoremu 4.2 za ultrahomogeni $\mathbb{K}_n$-slobodni graf $\mathbb{H}_n$. Potrebno je modifikovati poset aproksimacija Rado grafa da bismo dobili prezentaciju Hensonovih grafova pogodnu za primenu teoreme 3.11.

Definicija 4.10 (Poset aproksimacija Hensonovih grafova) Neka je $n \geq 3$. Označimo sa $\mathbb{P}_{\mathbb{H}_n}$ skup svih $\mathbb{K}_n$-slobodnih grafova $p = \langle G_p, \rho_p \rangle$ takvih da je $G_p \in [\mathbb{Q}]^{<\omega}$ i da za sve $a, b \in \mathbb{Q}$ važi

(H1) $\{a, b\} \in \rho_p \wedge \{a+1, b\} \in \rho_p \Rightarrow b > a+1$,
(H2) $\{a, a-1\} \notin \rho_p$,

a neka je relacija $\leq$ na $\mathbb{P}_{\mathbb{H}_n}$ data sa

$$p \leq q \Leftrightarrow G_p \supset G_q \ \wedge\ \rho_p \cap [G_q]^2 = \rho_q. \tag{4.4}$$

Teorema 4.11 ([17]) *Za svako $n \geq 3$ i svako linearno uredjenje $\mathbb{L}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) $\mathbb{L}$ je izomorfno maksimalnom lancu u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{H}_n) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$;
(b) $\mathbb{L}$ se utapa u $\mathbb{R}$, kompletno je i $\min \mathbb{L}$ nema sledbenika.

Dokaz: (a)$\Rightarrow$(b) sledi iz teoreme 3.4.

(b)$\Rightarrow$(a). Koristimo teoremu 3.11. Neka je $\{J_n : n \in \omega\}$ particija skupa $\mathbb{Q}$ iz leme 1.15. Uslovi (i) i (ii) teoreme 3.11 su zadovoljeni. Dalje radimo sa parcijalnim uredjenjem iz definicije 4.10.

Stav 4.12 $\langle \mathbb{P}_{\mathbb{H}_n}, \leq \rangle$ je parcijalno uredjenje.

Dokaz: Jasno je da je relacija $\leq$ refleksivna i antisimetrična. Ako je ispunjeno $p \leq q \leq r$, onda $G_r \subset G_q \subset G_p$ i

$$\rho_r = \rho_q \cap [G_r]^2 = \rho_p \cap [G_q]^2 \cap [G_r]^2 = \rho_p \cap [G_r]^2,$$

pa je $p \leq r$ te je $\leq$ tranzitivna relacija. □

Stav 4.13 Skupovi $\mathcal{D}_q = \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{H}_n} : q \in G_p\}$, $q \in \mathbb{Q}$, gusti su u $\langle \mathbb{P}_{\mathbb{H}_n}, \leq \rangle$.

Dokaz: Ako je $p = \langle G_p, \rho_p \rangle \in \mathbb{P}_{\mathbb{H}_n} \setminus \mathcal{D}_q$, onda $q \notin G_p$, a pošto $\{q, x\} \notin \rho_p$, za sve $x \in G_p$, imamo da je $p_1 = \langle G_p \cup \{q\}, \rho_p \rangle$ jedan $\mathbb{K}_n$-slobodan graf i da zadovoljava (H1) i (H2). Dakle, $p_1 \in \mathcal{D}_q$ i $p_1 \leq p$. □

Za $F \in [\mathbb{Q}]^{<\omega}$ označimo $m_F = \max F$.

Stav 4.14 Za proizvoljne skupove $K \subset H \in [\mathbb{Q}]^{<\omega}$ i svaki $m \in \mathbb{N}$, skup

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^H_{K,m} = \ & \Big\{ p \in \mathbb{P}_{\mathbb{H}_n} : H \subset G_p \\ & \wedge \Big(\langle H, K\rangle \in C_n(p) \Rightarrow \exists q \in J_0 \cap (m_H, m_H + \tfrac{1}{m}) \\ & \forall k \in K\ (\{q,k\} \in \rho_p) \wedge \forall h \in H \setminus K\ (\{q,h\} \notin \rho_p\ ) \Big) \Big\}\end{aligned}$$

gust je u $\mathbb{P}_{\mathbb{H}_n}$.

Dokaz: Neka je $p_0 \in \mathbb{P}_{\mathbb{H}_n}$. Na osnovu stava 4.13 postoji $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{H}_n}$ takav da je $p \leq p_0$ i $H \subset G_p$.

Ako $\langle H, K\rangle \notin C_n(p)$ onda $p \in \mathcal{D}^H_{K,m}$ i dokaz je gotov.

Ako $\langle H, K\rangle \in C_n(p)$, izaberemo

$$q \in J_0 \cap (m_H, m_H + \tfrac{1}{m}) \setminus \textstyle\bigcup_{a \in G_p} \{a, a-1, a+1\},$$

pa definišemo

$$p_1 = \langle G_p \cup \{q\}, \rho_p \cup \{\{q,k\} : k \in K\}\rangle \tag{4.5}$$

i prvo pokazujemo da je $p_1 \in \mathbb{P}_{\mathbb{H}_n}$. Jasno $G_{p_1} \in [\mathbb{Q}]^{<\omega}$ pa proveravamo da li je p_1 jedan $\mathbb{K}_n$-slobodan graf. Pretpostavimo da postoji $F \in [G_{p_1}]^n$ takav da je $[F]^2 \subset \rho_{p_1}$. Pošto je p jedan $\mathbb{K}_n$-slobodan graf imamo $q \in F$ i postoje različiti $f_1, \dots, f_{n-1} \in G_p \cap F$ takvi da je $\{q, f_i\} \in \rho_{p_1}$, za $i \leq n-1$, što uz (4.5) povlači $\{f_1, \dots, f_{n-1}\} \subset K$. Pošto je $[F]^2 \subset \rho_{p_1}$, imamo $[\{f_1, \dots, f_{n-1}\}]^2 \subset \rho_p$. Medjutim, $\langle H, K\rangle \in C_n(p)$ povlači da je K jedan $\mathbb{K}_{n-1}$-slobodan graf. Kontradikcija.

(H1) Pretpostavimo da je za neke $a, b \in \mathbb{Q}$

$$\{a,b\} \in \rho_{p_1}\ \wedge\ \{a+1, b\} \in \rho_{p_1}\ \wedge b \leq a+1. \tag{4.6}$$

Tada, pošto $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{H}_n}$, bar jedan od ova dva para ne pripada ρ_p pa imamo $q \in \{a, a+1, b\}$. Dakle, moguća su tri slučaja.

$q = a$. Tada iz (4.6) imamo $b \neq q$, a iz (4.5), $\{q+1, b\} \in \rho_p$ odakle sledi $q+1 \in G_p$, što je nemoguće zbog izbora tačke q.

$q = a+1$. Tada iz (4.6) imamo $b \neq q$, a iz $a \neq q$, zbog (4.5) važi $\{a,b\} \in \rho_p$ što povlači $a \in G_p$, pa opet imamo kontradikciju sa izborom q.

$q = b$. Tada iz (4.6) i (4.5) imamo $\{a,q\}, \{a+1, q\} \in \rho_{p_1} \setminus \rho_p$ što povlači $a, a+1 \in K$. Pošto $q > m_H$ i $K \subset H$ važi $q > a+1$, tj. $b > a+1$, što je kontradikcija sa 4.6.

(H2) važi jer je $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{H}_n}$ i $q \notin \bigcup_{a \in G_p} \{a, a-1, a+1\}$.

Dakle, $p_1 \in \mathbb{P}_{\mathbb{H}_n}$. Pošto $H \subset G_p \subset G_{p_1}$, a iz (4.5) imamo $\{q,k\} \in \rho_{p_1}$, za sve $k \in K$, i $\{q,h\} \notin \rho_{p_1}$, za sve $h \in H \setminus K$, sledi da je $p_1 \in \mathcal{D}^H_{K,m}$.

Pošto $G_{p_1} \supset G_p$ i $\rho_{p_1} \cap [G_p]^2 = \rho_p$, imamo $p_1 \leq p \leq p_0$. $\square$

Prema lemi 2.19 postoji filter $\mathcal{G}$ u $\langle \mathbb{P}_{\mathbb{H}_n}, \leq \rangle$ koji seče skupove $\mathcal{D}_q$, $q \in \mathbb{Q}$, i skupove $\mathcal{D}^H_{K,m}$, za $K \subset H \in [\mathbb{Q}]^{<\omega}$ i $m \in \mathbb{N}$.

Stav 4.15 Za filter $\mathcal{G}$ važi:

(a) $\bigcup_{p \in \mathcal{G}} G_p = \mathbb{Q}$;

(b) $\langle \mathbb{Q}, \rho \rangle$ je graf, gde je $\rho = \bigcup_{p \in \mathcal{G}} \rho_p$, takodje $\{a, a-1\} \notin \rho$, za sve $a \in \mathbb{Q}$;

(c) $\rho \cap [G_p]^2 = \rho_p$, za sve $p \in \mathcal{G}$;

(d) Ako je $A \subset \mathbb{Q}$, $\rho_A = \rho \cap [A]^2$, $p \in \mathcal{G}$, i $H \subset A \cap G_p$, tada je $\rho_A \cap [H]^2 = \rho_p \cap [H]^2$. Ako je još i $\langle H, K \rangle \in C_n(A, \rho_A)$, onda je $\langle H, K \rangle \in C_n(p)$,

(e) $\langle \mathbb{Q}, \rho \rangle$ je $\mathbb{K}_n$-slobodan graf.

Dokaz: (a) Za $q \in \mathbb{Q}$ neka je $p_0 \in \mathcal{G} \cap \mathcal{D}_q$. Tada $q \in G_{p_0} \subset \bigcup_{p \in \mathcal{G}} G_p$.

(b) Na osnovu definicije $\mathbb{P}_{\mathbb{H}_n}$ imamo $\{a, a-1\} \notin \rho_p \subset [\mathbb{Q}]^2$, za sve $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{H}_n}$.

(c) Inkluzija "$\supset$" je očigledna. Ako je $\{a, b\} \in \rho \cap [G_p]^2$, onda postoji $p_1 \in \mathcal{G}$ takav da je $\{a, b\} \in \rho_{p_1}$, a pošto je $\mathcal{G}$ filter, postoji $p_2 \in \mathcal{G}$ tako da je $p_2 \leq p, p_1$. Na osnovu definicije $\leq$ imamo $\rho_{p_1} \subset \rho_{p_2}$, što povlači $\{a, b\} \in \rho_{p_2}$ i $\{a, b\} \in \rho_{p_2} \cap [G_p]^2 = \rho_p$.

(d) Iz (c) sledi

$$\begin{aligned} \rho_A \cap [H]^2 = & \; \rho \cap [A]^2 \cap [H]^2 \\ = & \; \rho \cap [H]^2 = \rho \cap [G_p]^2 \cap [H]^2 = \rho_p \cap [H]^2. \end{aligned}$$

Ako je $\langle H, K \rangle \in C_n(A, \rho_A)$, K je onda $\mathbb{K}_{n-1}$-slobodan graf u $\langle A, \rho_A \rangle$, a pošto je $\rho_A \cap [K]^2 = \rho_p \cap [K]^2$, K je $\mathbb{K}_{n-1}$-slobodan graf i u p. Dakle, $\langle H, K \rangle \in C_n(p)$.

(e) Pretpostavimo da je $\langle A, \rho_A \rangle$ kopija $\mathbb{K}_n$ i neka $p_q \in \mathcal{G} \cap \mathcal{D}_q$, za $q \in A$. Pošto je $\mathcal{G}$ filter, postoji $p \in \mathcal{G}$ takav da je $p \leq p_q$, za sve $q \in A$, pa i $A \subset G_p$, što zajedno sa (d) povlači $\rho_A = \rho_p \cap [A]^2$. Medjutim, ovo je nemoguće jer je p jedan $\mathbb{K}_n$-slobodan graf. $\square$

Sada pokazujemo da su uslovi (iii) i (iv) teoreme 3.11 zadovoljeni.

(iii) Neka je $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ i

$$J_0 \cap (-\infty, x) \subset A \subset \mathbb{Q} \cap (-\infty, x).$$

Pokazaćemo da je $\langle A, \rho_A \rangle \cong \mathbb{H}_n$. Na osnovu stava 4.15(b) $\langle A, \rho_A \rangle$ je $\mathbb{K}_n$-slobodan graf. Neka je $\langle H, K \rangle \in C_n(A, \rho_A)$. Pošto $m_H \in H \subset A$ imamo $m_H < x$, pa postoji $m \in \mathbb{N}$ koji zadovoljava $m_H + \frac{1}{m} < x$. Neka je $p \in \mathcal{G} \cap \mathcal{D}^H_{K,m}$. Tada $K \subset H \subset G_p$, i iz stava 4.15(d), sledi da je $\langle H, K \rangle \in C_n(p)$. Dakle, postoji

$$q \in J_0 \cap (m_H, m_H + \frac{1}{m}) \subset J_0 \cap (-\infty, x) \subset A$$

da $\{q, k\} \in \rho_p \subset \rho$, što povlači $\{q, k\} \in \rho_A$, za sve $k \in K$, i da $\{q, h\} \notin \rho_p$, pa $\{q, h\} \notin \rho$, za sve $h \in H$. Dakle, $q \in A^H_K$. Prema lemi 2.31 imamo $\langle A, \rho_A \rangle \cong \mathbb{H}_n$ pa je uslov (iii) teoreme 3.11 ispunjen.

(iv) Neka je $q \in J_0$ i

$$J_0 \cap (-\infty, q] \subset C \subset \mathbb{Q} \cap (-\infty, q].$$

Pokazaćemo da $\langle C, \rho_C \rangle \not\cong \mathbb{H}_n$. Pošto je $q \in J_0$, iz izbora J_0 sledi $q - 1 \in J_0$ i na osnovu pretpostavke, $H = \{q - 1, q\} \subset C$. Sada na osnovu stava 4.15(b) imamo $\{q - 1, q\} \notin \rho$ što povlači da je H jedan $\mathbb{K}_{n-1}$-slobodan graf, pa je $\langle H, H \rangle \in C_n(C, \rho_C)$. Pretpostavimo da je $b \in C^H_H$. Tada je $\{q - 1, b\}, \{q, b\} \in \rho$ i, pošto je $\mathcal{G}$ filter, $\{q - 1, b\}, \{q, b\} \in \rho_p$, za neko $p \in \mathcal{G}$. Sada iz (H1) imamo $b > q$, što je nemoguće jer je $q = \max C$. Dakle, $C^H_H = \emptyset$ i iz leme 2.31 sledi $\langle C, \rho_C \rangle \not\cong \mathbb{H}_n$, pa je i uslov (iv) teoreme 3.11 ispunjen.

Stav 4.16 Familija

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathbb{Q} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} F_n : \forall n \in \mathbb{Z} \;\; F_n \in \Big[[n, n+1) \cap \mathbb{Q} \Big]^{<\omega} \right\}$$

je pozitivna familija koja zadovoljava $\mathcal{P} \subset \mathbb{P}(\mathbb{Q}, \rho)$.

Dokaz: Lako je proveriti (P1)-(P4). Pošto je $\mathbb{Q} \setminus \{q\} \in \mathcal{P}$ za sve $q \in \mathbb{Q}$, imamo $\bigcap \mathcal{P} = \emptyset$. Neka je $A = \mathbb{Q} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} F_n \in \mathcal{P}$, $\langle H, K \rangle \in C_n \langle A, \rho_A \rangle$ i n_0 ceo broj takav da je $m_H = \max H \in [n_0, n_0 + 1) \cap \mathbb{Q}$. Pošto je $|F_{n_0}| < \omega$ i $m_H \in A \subset \mathbb{Q} \setminus F_{n_0}$ postoji $m \in \mathbb{N}$ tako da $(m_H, m_H + \frac{1}{m}) \cap \mathbb{Q} \subset A$. Neka je $p \in \mathcal{G} \cap \mathcal{D}^H_{K,m}$. Tada $H \subset G_p$, i na osnovu stava 4.15(d), $\langle H, K \rangle \in C_n(p)$. Dakle, postoji $q \in J_0 \cap (m_H, m_H + \frac{1}{m}) \subset A$ da je

- za sve $k \in K$ ispunjeno $\{q, k\} \in \rho_p$ što, kako je $\{q, k\} \subset A \cap G_p$, sa stavom 4.15(d) povlači $\{q, k\} \in \rho_A$;

- za sve $h \in H \setminus K$ ispunjeno $\{q, h\} \notin \rho_p$, što sa stavom 4.15(c) daje $\{q, h\} \notin \rho$, pa $\{q, h\} \notin \rho_A$.

Dakle $q \in A^H_K$. Sada premi lemi 2.31 imamo

$$\langle A, \rho_A \rangle \cong \mathbb{H}_n \cong \langle \mathbb{Q}, \rho \rangle,$$

pa $A \in \mathbb{P}(\mathbb{Q}, \rho)$. □

Implikacija (b) $\Rightarrow$ (a) teoreme 4.11 za prebrojivo $\mathbb{L}$ sledi iz stava 4.16 i teoreme 3.9(b). Dakle, uslov (v) teoreme 3.11 je zadovoljen pa iz (B) teoreme 3.11 sledi implikacija (b) $\Rightarrow$ (a) teoreme 4.11 za neprebrojivo $\mathbb{L}$. $\square$

4.3 DISJUNKTNE UNIJE KOMPLETNIH GRAFOVA

U ovoj sekciji dokazujemo teoremu 4.2 u slučaju kada je $\mathbb{G} \cong \mathbb{G}_{\mu\nu}$, za kardinale μ i ν za koje je $\mu\nu = \omega$. Da bismo razumeli dokaz teoreme 4.20, dajemo par pojmova i tvrdjenja iz [14].

Ako su $\mathbb{X}_i = \langle X_i, \rho_i \rangle$, $i \in I$, relacijske strukture, ρ_i binarne relacije i $X_i \cap X_j = \emptyset$ za različite $i, j \in I$, onda relacijsku strukturu

$$\bigcup_{i\in I} \mathbb{X}_i = \left\langle \bigcup_{i\in I} X_i, \bigcup_{i\in I} \rho_i \right\rangle$$

nazivamo *disjunktna unija* struktura $\mathbb{X}_i$. Ako je $\langle X, \rho \rangle$ relacijska struktura sa binarnom relacijom ρ, onda je tranzitivno zatvorenje ρ_{rst} relacije $\rho_{rs} = \Delta_X \cup \rho \cup \rho^{-1}$ (dato sa $x \; \rho_{rst} \; y$ ako i samo ako postoje $n \in \mathbb{N}$ i $z_0 = x, z_1, \ldots, z_n = y$ tako da je $z_i \; \rho_{rs} \; z_{i+1}$ za sve $i < n$) minimalna relacija ekvivalencije na X koja sadrži ρ. Klase ekvivalencije ove relacije nazivaćemo *komponente* relacijske strukture $\langle X, \rho \rangle$, a klasu elementa x ćemo označavati sa $[x]$. Struktura $\langle X, \rho \rangle$ je *povezana* ako relacija ρ_{rst} ima samo jednu klasu. Primetimo da je u slučaju grafova, recimo grafa $\langle G, \Gamma \rangle$, komponenta elementa $x \in G$ skup svih elemenata $y \in G$ takvih da je $\{x, y\} \in \Gamma$.

Teorema 4.17 ([14]) *Neka je $\langle X, \rho \rangle = \left\langle \bigcup_{i\in I} X_i, \bigcup_{i\in I} \rho_i \right\rangle$ disjunktna unija relacijskih struktura, pri čemu su ρ_i binarne relacije za $i \in I$. Tada za sve $i \in I$ i sve $x \in X_i$ imamo:*

(a) $[x] \subset X_i$;

(b) $[x] = X_i$, *ako je $\langle X_i, \rho_i \rangle$ povezana struktura.*

Teorema 4.18 ([14]) *Ako je $\langle X, \rho \rangle$ relacijska struktura i ρ binarna relacija, onda je $\left\langle \bigcup_{x\in X} [x], \bigcup_{x\in X} \rho_{[x]} \right\rangle$ jedinstvena prezentacija strukture $\langle X, \rho \rangle$ kao disjunktne unije povezanih relacijskih struktura.*

Teorema 4.19 ([14]) *Neka je $\mathbb{X}_i = \langle X_i, \rho_i \rangle$ familija disjunktnih povezanih relacijskih struktura, pri čemu su ρ_i binarne relacije, a $\mathbb{X}$ njihova unija. Tada je $C \in \mathbb{P}(\mathbb{X})$ ako i samo ako postoje $f : I \to J$ i utapanja $g_i : \mathbb{X}_i \to \mathbb{X}_{f(i)}$, $i \in I$, tako da je $C = \bigcup_{i\in I} g_i[X_i]$ i*

$$\forall \{i, j\} \in [I]^2 \; \forall x \in X_i \; \forall y \in X_j \; \neg g_i(x) \; \rho_{rs} \; g_j(y).$$

Teorema 4.20 ([17]) *Ako su μ i ν kardinali koji zadovoljavaju $\mu\nu = \omega$, onda su za svako linearno uredjenje $\mathbb{L}$ sledeći uslovi ekvivalentni:*

(a) *$\mathbb{L}$ je izomorfno maksimalnom lancu u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{G}_{\mu\nu}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$;*

(b) *$\mathbb{L}$ se utapa u $\mathbb{R}$, bulovsko je i $\min \mathbb{L}$ nema sledbenika.*

Dokaz: Jasno je da s obzirom na vrednosti μ i ν imamo tri slučaja.

I. $\mathbb{G}_{\omega n} = \bigcup_{i\in\omega} \mathbb{G}_i$, gde je $n \in \mathbb{N}$ i $\mathbb{G}_i = \langle G_i, [G_i]^2 \rangle$, $i \in \omega$, su disjunktne kopije kompletnog grafa $\mathbb{K}_n$. Tada je jasno da je

$$\mathbb{P}\langle \mathbb{G}_{\omega n} \rangle = \{\bigcup_{i\in A} G_i : A \in [\omega]^\omega\},$$

a odatle je

$$\langle \mathbb{P}\langle \mathbb{G}_{\omega n} \rangle \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle \cong \langle [\omega]^\omega \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle.$$

Pošto je $[\omega]^\omega$ pozitivna familija u $P\langle \omega \rangle$ ekvivalencija (a)$\Leftrightarrow$(b) sledi iz teoreme 3.8.

II. $\mathbb{G}_{m\omega} = \bigcup_{i<m} \mathbb{G}_i$, gde je $m \in \mathbb{N}$ i $\mathbb{G}_i = \langle G_i, [G_i]^2 \rangle$, $i < m$, su disjunktne kopije kompletnog grafa $\mathbb{K}_\omega$. Tada, pošto svaka kopija od $\mathbb{G}_{m\omega}$ mora imati m komponenti kardinalnosti ω (teorema 4.19), imamo

$$\mathbb{P}\langle \mathbb{G}_{m\omega} \rangle = \{\bigcup_{i<m} A_i : \forall i < m \; A_i \in [G_i]^\omega\}$$

i lako je videti da je $\mathbb{P}\langle \mathbb{G}_{m\omega} \rangle$ pozitivna familija u $P\langle G_{m\omega} \rangle$, pa ekvivalencija (a)$\Leftrightarrow$(b) opet sledi iz teoreme 3.8.

III. $\mathbb{G}_{\omega\omega} = \bigcup_{i<\omega} \mathbb{G}_i$, gde su $\mathbb{G}_i = \langle G_i, [G_i]^2 \rangle$, $i < \omega$, disjunktne kopije kompletnog grafa $\mathbb{K}_\omega$.

(a) $\Rightarrow$ (b). Ako je $\mathcal{L}$ maksimalan lanac u $\langle \mathbb{P}\langle \mathbb{G}_{\omega\omega} \rangle \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$, tada, na osnovu teoreme 3.4, $\mathcal{L}$ se utapa u $\mathbb{R}$, kompletno je i $\min \mathcal{L}$ nema sledbenika. Dakle, treba još pokazati da $\mathcal{L}$ ima guste skokove. Pošto svaka kopija $\mathbb{G}_{\omega\omega}$ mora imati ω komponenti kardinalnosti ω (teorema 4.19), imamo

$$\mathbb{P}\langle \mathbb{G}_{\omega\omega} \rangle = \{\bigcup_{i\in S} A_i : S \in [\omega]^\omega \wedge \forall i \in S \; A_i \in [G_i]^\omega\} \tag{4.7}$$

Za $A = \bigcup_{i\in S} A_i \in \mathbb{P}\langle \mathbb{G}_{\omega\omega} \rangle$ označimo $S = \operatorname{supp} A$.

Neka su $A, B \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$, gde je $A \subsetneq B$.

Stav 4.21 Postoji $C \in \mathcal{L}$ da je $A \subset C \subset B$ i da je $C \cap G_i \subsetneq B \cap G_i$, za neko $i \in \operatorname{supp} C$.

Dokaz: Pretpostavimo da za sve $C \in \mathcal{L} \cap [A, B]$ važi $C \cap G_i = B \cap G_i$, za sve $i \in \operatorname{supp} C$. Tada, pošto je $A \subsetneq B$, imamo $\operatorname{supp} A \subsetneq \operatorname{supp} B$ i biramo $i \in \operatorname{supp} B \setminus \operatorname{supp} A$. Za skupove $\mathcal{L}^- = \{C \in \mathcal{L} : i \notin \operatorname{supp} C\}$ i $\mathcal{L}^+ = \{C \in \mathcal{L} : i \in \operatorname{supp} C\}$ važi $\mathcal{L} = \mathcal{L}^- \cup \mathcal{L}^+$ i $C_1 \subsetneq C_2$, za sve

$C_1 \in \mathcal{L}^-$ i $C_2 \in \mathcal{L}^+$. Na osnovu teoreme 3.4 važi $C^- = \bigcup \mathcal{L}^- \in \mathbb{P}(G_{\omega\omega})$ i pošto je $\mathcal{L}^- \lhd \mathcal{L}^+$, iz maksimalnosti $\mathcal{L}$ sledi $C^- \in \mathcal{L}$. Važi $i \notin \operatorname{supp} C^-$, što povlači $C^- = \max \mathcal{L}^-$. Neka je $C^+ = C^- \cup (B \cap G_i)$. Na osnovu (4.7) imamo $C^+ \in \mathbb{P}(\mathbb{G}_{\omega\omega})$. Za $C \in \mathcal{L}^+$ imamo $i \in \operatorname{supp} C$, a na osnovu pretpostavke, $C \cap G_i = B \cap G_i$, što povlači $C^+ \subset C$. Sada iz maksimalnosti $\mathcal{L}$, $C^+ \in \mathcal{L}$, i još $C^+ = \min \mathcal{L}^+$. Neka je $a \in B \cap G_i$. Tada je

$$C = C^- \cup (B \cap G_i \setminus \{a\}) \in \mathbb{P}(\mathbb{G}_{\omega\omega})$$

i $C^- \subsetneq C \subsetneq C^+$, što povlači da $\mathcal{L}$ nije maksimalan lanac u $\mathbb{P}(\mathbb{G}_{\omega\omega})$. Kontradikcija. □

Neka su $C_0 \in \mathcal{L}$ i $i_0 \in \operatorname{supp} C_0$ objekti sa osobinama iz stava 4.21. Neka je $a \in (B \setminus C_0) \cap G_{i_0}$, $\mathcal{L}^- = \{C \in \mathcal{L} : a \notin C\}$ i $\mathcal{L}^+ = \{C \in \mathcal{L} : a \in C\}$. Tada imamo $\mathcal{L} = \mathcal{L}^- \cup \mathcal{L}^+$, $C_0 \in \mathcal{L}^-$ i $C_1 \subsetneq C_2$, za sve $C_1 \in \mathcal{L}^-$ i $C_2 \in \mathcal{L}^+$. Na osnovu teoreme 3.4 imamo $C^- = \bigcup \mathcal{L}^- \in \mathbb{P}(\mathbb{G}_{\omega\omega})$, a iz maksimalnosti $\mathcal{L}$, $C^- \in \mathcal{L}$. Pošto $a \notin C^-$ važi $C^- = \max \mathcal{L}^-$, što povlači $C_0 \subset C^-$, pa $i_0 \in \operatorname{supp} C^-$. Dakle, iz (4.7) sledi

$$C^+ = C^- \cup \{a\} \in \mathbb{P}(G_{\omega\omega}).$$

Za $C \in \mathcal{L}^+$ imamo $C^+ \subset C$, pa, zbog maksimalnosti $\mathcal{L}$ važi $C^+ \in \mathcal{L}$, tj. $C^+ = \min \mathcal{L}^+$. Jasno, par $\langle C^-, C^+ \rangle$ je skok u $\mathcal{L}$. Pošto $A \subset C_0$ i $B \in \mathcal{L}^+$ imamo $A \subset C^- \subset C^+ \subset B$. Dakle, $\mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ ima guste skokove, a pošto $\min \mathcal{L}$ nema sledbenika, isto važi i za $\mathcal{L}$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Jasno je da je

$$\mathcal{P}_{\omega\omega} = \{\textstyle\bigcup_{i \in \omega} A_i : \forall i \in \omega \ A_i \in [G_i]^\omega\}$$

pozitivna familija sadržana u $\mathbb{P}(\mathbb{G}_{\omega\omega})$. Sada tvrdjenje sledi iz teoreme 3.9(a). □

GLAVA PETA

Ultrahomogena stroga parcijalna uredjenja

Schmerl je klasifikovao prebrojiva ultrahomogena stroga parcijalna uredjenja u [25]. Dajemo ih u sledećoj teoremi i pridržavamo se notacije iz liste do kraja ove glave.

Teorema 5.1 (Schmerl) *Prebrojivo strogo parcijalno uredjenje $\langle P, <\rangle$ je ultrahomogeno ako i samo ako je izomorfno jednom od sledećih:*

1. $\mathbb{A}_\omega$, *prebrojiv antilanac (tj. prazna relacija na ω);*
2. $\mathbb{B}_n = n \times \mathbb{Q}$, $1 \leq n \leq \omega$ *i* $\langle k, q_1\rangle < \langle m, q_2\rangle \Leftrightarrow (k = m \ \wedge \ q_1 < q_2)$;
3. $\mathbb{C}_n = \mathbb{Q} \times n$, $1 \leq n \leq \omega$ *i* $\langle q_1, k\rangle < \langle q_2, m\rangle \Leftrightarrow (q_1 < q_2)$;
4. $\mathbb{D}$, *random poset.*

U ovoj glavi opisujemo maksimalne lance izomorfnih kopija ultrahomogenih strogih parcijalnih uredjenja. Sledeća teorema daje potpunu klasifikaciju ovih lanaca.

Teorema 5.2 ([19]) *Neka je $\mathbb{P}$ prebrojivo ultrahomogeno strogo parcijalno uredjenje. Tada važi:*

(I) Ako je $\mathbb{P} = \mathbb{D}$ ili je $\mathbb{P} = \mathbb{B}_n$ za neko $1 \leq n \leq \omega$, ili je $\mathbb{P} = \mathbb{C}_n$ za neko $1 \leq n \leq \omega$, onda su za svako linearno uredjenje $\mathbb{L}$ sledeći uslovi ekvivalentni:

- *(a) $\mathbb{L}$ je izomorfno maksimalnom lancu u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{P}) \cup \{\emptyset\}, \subset\rangle$;*
- *(b) $\mathbb{L}$ se utapa u $\mathbb{R}$, kompletno je i $\min \mathbb{L}$ nema sledbenika;*
- *(c) $\mathbb{L}$ je izomorfno kompaktnom skupu $K \subset \mathbb{R}$ u kome $\min K \in K'$.*

(II) Ako je $\mathbb{P} = \mathbb{A}_\omega$, onda su za svako linearno uredjenje sledeći uslovi ekvivalentni:

- *(a) $\mathbb{L}$ je izomorfno maksimalnom lancu u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{P}) \cup \{\emptyset\}, \subset\rangle$;*
- *(b) $\mathbb{L}$ se utapa u $\mathbb{R}$, bulovsko je i $\min \mathbb{L}$ nema sledbenika;*
- *(c) $\mathbb{L}$ je izomorfno kompaktnom nigde gustom skupu $K \subset \mathbb{R}$ u kome je $\min K \in K'$.*

Primetimo da dokaz dela (II) teoreme 5.2 direktno sledi iz teoreme 3.8 jer $\langle \mathbb{P}(\mathbb{A}_\omega), \subset\rangle \cong \langle [\omega]^\omega, \subset\rangle$, tako da ostaje da se dokaže deo (I) teoreme.

Pored toga, ekvivalencije (b)$\Leftrightarrow$(c) za (I) i (II) su već pokazane u teoremi 1.33 i u teoremi 3.8. Dakle, ostalo je da se dokaže ekvivalencija (a)$\Leftrightarrow$(b) u slučaju (I).

5.1 RANDOM POSET

U ovoj sekciji dokazujemo teoremu 5.2 za random poset. I u ovom dokazu ćemo dati novu prezentaciju posmatrane strukture. Slično kao i u slučaju Rado grafa i Hensonovih grafova, na strukturi $\langle \mathbb{Q}, <_\mathbb{Q}\rangle$ definišemo relaciju $\lhd$ takvu da je $\langle \mathbb{Q}, \lhd\rangle$ random poset. Medjutim, u ovom slučaju, ne samo da će otvoreni levi intervali biti kopije random poseta dok zatvoreni levi intervali neće biti kopije random poseta, već će se relacija $\lhd$ slagati sa relacijom $<_\mathbb{Q}$ na $\mathbb{Q}$. Precizno, ovo znači da je za sve $x, y \in \mathbb{Q}$ ispunjeno $x \lhd y \Rightarrow x <_\mathbb{Q} y$.

Dajemo prezentaciju random poseta koja će omogućiti konstrukcije maksimalnih lanaca u $\mathbb{P}(\mathbb{D})$.

Definicija 5.3 (Poset aproksimacija random poseta) Označimo sa $\mathbb{P}_\mathbb{D}$ skup svih parova $p = \langle P_p, \lhd_p\rangle$ takvih da je:

(D1) $P_p \in [\mathbb{Q}]^{<\omega}$,

(D2) $\lhd_p \subset P_p \times P_p$ je strogo parcijalno uredjenje na skupu P_p,

(D3) $<_\mathbb{Q}$ je ekstenzija $\lhd_p$, tj.

$$\forall q_1, q_2 \in P_p \;\; (q_1 \lhd_p q_2 \Rightarrow q_1 <_\mathbb{Q} q_2).$$

Neka je relacija $\leq$ na $\mathbb{P}_\mathbb{D}$ data sa:

$$p \leq q \Leftrightarrow P_p \supset P_q \wedge \lhd_p \cap (P_q \times P_q) = \lhd_q \,. \tag{5.1}$$

Teorema 5.4 ([19]) *Za svako linearno uredjenje $\mathbb{L}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) $\mathbb{L}$ je izomorfno maksimalnom lancu u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{D}) \cup \{\emptyset\}, \subset\rangle$;

(b) $\mathbb{L}$ se utapa u $\mathbb{R}$, kompletno je i $\min \mathbb{L}$ *nema sledbenika.*

Dokaz: (a)$\Rightarrow$(b) sledi iz teoreme 3.4.

(b)$\Rightarrow$(a) U dokazu radimo sa parcijalnim uredjenjem iz definicije 5.3.

Stav 5.5 $\langle \mathbb{P}_\mathbb{D}, \leq\rangle$ je parcijalno uredjenje.

Dokaz: Refleksivnost relacije $\leq$ je očigledna. Ako je $p \leq q \leq p$, onda je $P_p = P_q$, pa i

$$\lhd_p = \lhd_p \cap (P_p \times P_p) = \lhd_p \cap (P_q \times P_q) = \lhd_q$$

pa je $p = q$ i relacija $\leq$ je antisimetrična.

Ako je $p \leq q \leq r$, onda $P_p \supset P_q \supset P_r$, a odatle

$$\lhd_p \cap (P_r \times P_r) = \lhd_p \cap (P_q \times P_q) \cap (P_r \times P_r) = \lhd_q \cap (P_r \times P_r) = \lhd_r.$$

Sada je $p \leq r$ pa je $\leq$ i tranzitivna relacija. $\square$

Stav 5.6 Skupovi $\mathcal{D}_q = \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{D}} : q \in P_p\}$, $q \in \mathbb{Q}$, su gusti u $\mathbb{P}_{\mathbb{D}}$.

Dokaz: Ako je $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{D}} \setminus \mathcal{D}_q$, tj. $q \notin P_p$, onda je $\lhd_p$ irefleksivna i tranzitivna relacija na P_p, a i na skupu $P_p \cup \{q\}$. Takodje, $\lhd_p \subset <_{\mathbb{Q}}$ pa imamo da je $p_1 = \langle P_p \cup \{q\}, \lhd_p\rangle \in \mathbb{P}_{\mathbb{D}}$. Dakle $p_1 \in \mathcal{D}_q$ i $p_1 \leq p$. $\square$

Sada uzmimo particiju $\{J_n : n \in \omega\}$ skupa $\mathbb{Q}$ iz leme 1.15. Dalje, za svaku trojku konačnih skupova $\langle L, G, U\rangle \in ([\mathbb{Q}]^{<\omega})^3 \setminus \{\langle \emptyset, \emptyset, \emptyset\rangle\}$, označimo

$$m_{\langle L,G,U\rangle} = \max_{\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle}(L \cup G \cup U).$$

Stav 5.7 Za sve $\langle L, G, U\rangle \in ([\mathbb{Q}]^{<\omega})^3 \setminus \{\langle \emptyset, \emptyset, \emptyset\rangle\}$ i sve $m \in \mathbb{N}$, skup $\mathcal{D}_{\langle L,G,U\rangle,m}$ je gust u $\mathbb{P}_{\mathbb{D}}$, pri čemu je

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\langle L,G,U\rangle,m} = \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{D}} : L \cup G \cup U \subset P_p \ \wedge\ (&\langle L,G,U\rangle \notin C(p) \vee \\ &(G \neq \emptyset \wedge p_{\langle L,G,U\rangle} \cap J_0 \neq \emptyset) \vee \\ &(G = \emptyset \wedge p_{\langle L,G,U\rangle} \cap (m_{\langle L,G,U\rangle}, m_{\langle L,G,U\rangle} + \tfrac{1}{m}\rangle \cap J_0 \neq \emptyset))\}.\end{aligned}$$

Dokaz: Neka je $p' \in \mathbb{P}_{\mathbb{D}} \setminus \mathcal{D}_{\langle L,G,U\rangle,m}$. na osnovu stava 5.6 postoji $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{D}}$ takav da je $p \leq p'$ i $L \cup G \cup P \subset P_p$. Ako je $\langle L, G, U\rangle \notin C(p)$ onda $p \in \mathcal{D}_{\langle L,G.U\rangle,m}$ i dokaz je gotov. Ako je

$$\langle L, G, U\rangle \in C(p), \tag{5.2}$$

onda nastavljamo dokaz.

Slučaj 1: $G \neq \emptyset$. Definišimo $\max_{\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle} \emptyset = -\infty$. Iz (5.2) i (C1) za p, ako je $L \neq \emptyset$, onda je $\max_{\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle} L \lhd_p \min_{\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle} G$, i iz (D3) sledi $\max_{\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle} L <_{\mathbb{Q}} \min_{\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle} G$. Sada, pošto je J_0 gust skup u $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle$ možemo izabrati

$$q \in \langle \max_{\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle} L, \min_{\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle} G\rangle \cap J_0 \setminus P_p \tag{5.3}$$

i definisati $p_1 = \langle P_p \cup \{q\}, \lhd_{p_1}\rangle$ pri čemu je

$$\lhd_{p_1} = \lhd_p \cup \{\langle x,q\rangle : \exists l \in L \;\; x \unlhd_p l\} \cup \{\langle q,y\rangle : \exists g \in G \;\; g \unlhd_p y\}. \quad (5.4)$$

Prvo pokazujemo da je $p_1 \in \mathbb{P}_{\mathbb{D}}$. Jasno je da p_1 zadovoljava uslov (D1).

(D2) Pošto je $\lhd_p$ irefleksivna relacija, i iz (5.3) sledi $q \notin P_p$, iz (5.4) imamo da je relacija $\lhd_{p_1}$ irefleksivna.

Pretpostavimo da $\lhd_{p_1}$ nije asimetrična. Tada pošto je $\lhd_p$ asimetrična, postoji $t \in P_p$ takav da je $\langle t,q\rangle, \langle q,t\rangle \in \lhd_{p_1}$, a iz (5.4), $g \unlhd_p t \unlhd_p l$, za neko $l \in L$ i $g \in G$, što sa tranzitivnošću $\unlhd_p$ povlači $g \unlhd_p l$. Medjutim, prema (5.2) i (C1) imamo $l \lhd_p g$. Kontradikcija.

Neka je $\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle \in \lhd_{p_1}$. Sada, pošto je relacija $\lhd_{p_1}$ irefleksivna i asimetrična, imamo $a \neq b \neq c \neq a$. Ako je $q \notin \{a,b,c\}$, onda $\langle a,c\rangle \in \lhd_{p_1}$ na osnovu tranzitivnosti $\lhd_p$. Inače imamo tri mogućnosti:

$a = q$. Tada $\langle b,c\rangle \in \lhd_p$ i postoji $g \in G$ takvo da je $g \unlhd_p b$. Dakle $g \lhd_p c$ što uz (5.4), povlači $\langle q,c\rangle \in \lhd_{p_1}$, tj. $\langle a,c\rangle \in \lhd_{p_1}$.

$b = q$. Tada postoje $l \in L$ i $g \in G$ tako da je $a \unlhd_p l$ i $g \unlhd_p c$. Iz (C1) sledi $l \lhd_p g$ i zbog tranzitivnosti $\lhd_p$, $a \lhd_p c$ pa $\langle a,c\rangle \in \lhd_{p_1}$.

$c = q$. Tada je $\langle a,b\rangle \in \lhd_p$ i postoji $l \in L$ takvo da je $b \unlhd_p l$. Dakle, $a \lhd_p l$ što uz (5.4), povlači $\langle a,q\rangle \in \lhd_{p_1}$, tj. $\langle a,c\rangle \in \lhd_{p_1}$.

(D3) Pošto $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{D}}$, imamo $\lhd_p \subset <_{\mathbb{Q}}$. Ako je $\langle x,q\rangle \in \lhd_{p_1}$ i $l \in L$, gde $x \unlhd_p l$, onda pošto $\lhd_p$ zadovoljava (D3), imamo $x \leq_{\mathbb{Q}} l$. Prema (5.3) imamo $l <_{\mathbb{Q}} q$, pa $x <_{\mathbb{Q}} q$. Na sličan način pokazujemo da $\langle q,y\rangle \in \lhd_{p_1}$ povlači $q <_{\mathbb{Q}} y$.

Sada $p_1 \in \mathbb{P}_{\mathbb{D}}$, $P_{p_1} \supset P_p \supset L \cup G \cup U$ i iz (5.4) sledi $\lhd_{p_1} \cap (P_p \times P_p) = \lhd_p$, što povlači da je $p_1 \leq p$ $(\leq p')$. Dakle, p je poduredjenje od p_1, pa prema (5.2) imamo da je $\langle L,G,U\rangle \in C(p_1)$. Pošto $G \neq \emptyset$ i $q \in J_0$, za dokaz da $p_1 \in \mathcal{D}_{\langle L,G,U\rangle,m}$ ostaje da se pokaže $q \in (p_1)_{\langle L,G,U\rangle}$. Iz (5.4) je $l \lhd_{p_1} q \lhd_{p_1} g$, za sve $l \in L$ i $g \in G$, pa su uslovi (S1) i (S2) ispunjeni. Za $u \in U$, $\langle u,q\rangle \in \lhd_{p_1}$ bi dalo $l \in L$ takvo da $u \unlhd_p l$, i pošto je $U \cap L = \emptyset$ imali bismo $u \lhd_p l$, što je nemoguće zbog (5.2) i (C2). Slično, $\langle q,u\rangle \in \lhd_{p_1}$ nije moguće, pa je $q \parallel_{p_1} u$ i (S3) je zadovoljeno.

Slučaj 2: $G = \emptyset$. Opet, pošto je J_0 gust u linearnom uredjenju $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle$ možemo izabrati

$$q \in (m_{\langle L,G,U\rangle}, m_{\langle L,G,U\rangle} + \tfrac{1}{m}) \cap J_0 \setminus P_p \quad (5.5)$$

i definisati $p_1 = \langle P_p \cup \{q\}, \lhd_{p_1}\rangle$, gde je

$$\lhd_{p_1} = \lhd_p \cup \{\langle x,q\rangle : \exists l \in L \;\; x \unlhd_p l\}. \quad (5.6)$$

Prvo pokazujemo da je $p_1 \in \mathbb{P}_{\mathbb{D}}$. Jasno je da p_1 zadovoljava uslov (D1).

(D2) Iz (5.5) imamo $q \notin P_p$, pa je na osnovu (5.6), relacija $\lhd_{p_1}$ irefleksivna.

Neka je $\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle \in \lhd_{p_1}$. Ako je $q \notin \{a,b,c\}$, onda $\langle a,c\rangle \in \lhd_{p_1}$ zbog (5.6) i tranzitivnosti $\lhd_p$. U suprotnom, iz (5.6) imamo $a, b \neq q$ i odatle $c = q$. Dakle, postoji $l \in L$ takav da je $b \trianglelefteq_p l$. Sada $a, b \neq q$, i iz (5.6) sledi $a \lhd_p b$, pa $a \lhd_p l$, što povlači $\langle a,q\rangle \in \lhd_{p_1}$, tj. $\langle a,c\rangle \in \lhd_{p_1}$.

(D3) Pošto $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{D}}$, imamo $\lhd_p \subset <_{\mathbb{Q}}$. Ako je $\langle x,q\rangle \in \lhd_{p_1}$ i $l \in L$, gde $x \trianglelefteq_p l$, tada, kako $\lhd_p$ zadovoljava (D3), imamo $x \leq_{\mathbb{Q}} l$. Iz (5.5) imamo $l \leq_{\mathbb{Q}} m_{\langle L,G,U\rangle} <_{\mathbb{Q}} q$, pa $x <_{\mathbb{Q}} q$.

Sada znamo da je $p_1 \in \mathbb{P}_{\mathbb{D}}$. Kao i u slučaju 1, pokazaćemo da je ispunjeno $L \cup G \cup U \subset P_{p_1}$, $p_1 \leq p$ $(\leq p')$ i $\langle L,G,U\rangle \in C(p_1)$. Iz (5.5) i pošto je $G = \emptyset$, za dokaz da je $p_1 \in \mathcal{D}_{\langle L,G,U\rangle,m}$ ostaje da se pokaže $q \in (p_1)_{\langle L,G,U\rangle}$. (S2) je trivijalno, a iz (5.6), za $l \in L$ imamo $\langle l,q\rangle \in \lhd_{p_1}$ pa važi i (S1). Pretpostavimo da $\neg\, q \parallel_{p_1} u$, za neko $u \in U$. Tada na osnovu (5.5) i (5.6), $\langle u,q\rangle \in \lhd_{p_1}$ pa postoji $l \in L$ koje zadovoljava $u \lhd_p l$, što je nemoguće zbog (5.2) i (C2) za p. Dakle, i (S3) je tačno. □

Na osnovu leme 2.19 postoji filter $\mathcal{G}$ u $\langle \mathbb{P}_{\mathbb{D}}, \leq\rangle$ koji seče sve skupove $\mathcal{D}_q$, $q \in \mathbb{Q}$, i $\mathcal{D}_{\langle L,G,U\rangle,m}$, $\langle L,G,U\rangle \in ([\mathbb{Q}]^{<\omega})^3$, $m \in \mathbb{N}$.

Stav 5.8 Za filter $\mathcal{G}$ važi:

(a) $\bigcup_{p\in\mathcal{G}} P_p = \mathbb{Q}$;

(b) $\lhd = \bigcup_{p\in\mathcal{G}} \lhd_p$ je strogo parcijalno uredjenje na $\mathbb{Q}$;

(c) $\lhd \cap (P_p \times P_p) = \lhd_p$, za sve $p \in \mathcal{G}$;

(d) $<_{\mathbb{Q}}$ je ekstenzija $\lhd$, tj. $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}\ (q_1 \lhd q_2 \Rightarrow q_1 <_{\mathbb{Q}} q_2)$.

Dokaz: (a) Za $q \in \mathbb{Q}$ neka je $p_0 \in \mathcal{G} \cap \mathcal{D}_q$. Tada

$$q \in P_{p_0} \subset \bigcup_{p\in\mathcal{G}} P_p.$$

(b) Relacija $\lhd$ je irefleksivna jer su sve relacije $\lhd_p$ irefleksivne.

Neka je $\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle \in \lhd$, $\langle a,b\rangle \in \lhd_{p_1}$ i $\langle b,c\rangle \in \lhd_{p_2}$, gde $p_1, p_2 \in \mathcal{G}$. Pošto je $\mathcal{G}$ filter, postoji $p \in \mathcal{G}$ takav da je $p \leq p_1, p_2$, što sa (5.1) povlači $\lhd_{p_1}, \lhd_{p_2} \subset \lhd_p$. Sada je $\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle \in \lhd_p$, i na osnovu tranzitivnosti $\lhd_p$ imamo $\langle a.c\rangle \in \lhd_p \subset \lhd$.

(c) Inkluzija "$\supset$" sledi iz (D2) i definicije $\lhd$. Ako je $\langle a,b\rangle \in \lhd \cap (P_p \times P_p)$, tada postoji $p_1 \in \mathcal{G}$ takvo da je $\langle a,b\rangle \in \lhd_{p_1}$ i pošto je $\mathcal{G}$ filter, postoji $p_2 \in \mathcal{G}$ takvo da je $p_2 \leq p, p_1$. Iz (5.1) imamo $\lhd_{p_1} \subset \lhd_{p_2}$, što povlači $\langle a,b\rangle \in \lhd_{p_2}$ i iz (5.1) opet $\langle a,b\rangle \in \lhd_{p_2} \cap (P_p \times P_p) = \lhd_p$.

(d) Ako je $\langle q_1, q_2\rangle \in \lhd$ i $p \in \mathcal{G}$ gde $\langle q_1,q_2\rangle \in \lhd_p$, onda prema (D3), $q_1 <_{\mathbb{Q}} q_2$. □

Stav 5.9 (a) $\langle A, \lhd \rangle$ je random poset, za sve $x \in (-\infty, \infty]$ i svaki skup A koji zadovoljava

$$\langle -\infty, x) \cap J_0 \subset A \subset (-\infty, x\rangle \cap \mathbb{Q}. \tag{5.7}$$

(b) Ako je $J_0 \subset A \subset \mathbb{Q}$ onda je $\langle A, \lhd \rangle$ (specijalno i $\langle \mathbb{Q}, \lhd \rangle$) je random poset.

(c) Ako je $C \subset \mathbb{Q}$ i $\max_{\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}} \rangle} C$ postoji, onda $\langle C, \lhd \rangle$ nije random poset.

Dokaz: (a) Na osnovu tvrdjenja 5.8(b), $\langle A, \lhd \rangle$ je strogo parcijalno uredjenje. Neka je $\langle L, G, U \rangle \in C(A, \lhd)$. Tada je

$$L \cup G \cup U \subset A \ \wedge \ L \cap G = G \cap U = U \cap A = \emptyset, \tag{5.8}$$

$$\forall l \in L \ \forall g \in G \ \forall u \in U \ \ (\langle l, g \rangle \in \lhd \ \wedge \ \langle u, l \rangle \not\in \lhd \ \wedge \ \langle g, u \rangle \not\in \lhd). \tag{5.9}$$

Pokazaćemo da je $\langle A, \lhd \rangle_{\langle L,G,U \rangle} \neq \emptyset$. Za $\langle L, G, U \rangle \neq \langle \emptyset, \emptyset, \emptyset \rangle$ imamo dva slučaja.

Slučaj 1: $G \neq \emptyset$. Neka je $p \in \mathcal{G} \cap \mathcal{D}_{\langle L,G,U \rangle, 1}$. Tada

$$L \cup G \cup U \subset P_p. \tag{5.10}$$

Prvo pokazujemo da je $\langle L, G, U \rangle \in C(p)$. Neka je $l \in L$, $g \in G$ i $u \in U$. Iz (5.9), (5.10) i stava 5.8(c) sledi $\langle l, g \rangle \in \lhd_p$, pa je (C1) tačno. Pošto je $\lhd_p \subset \lhd$, na osnovu (5.9) imamo $\langle u, l \rangle \not\in \lhd_p$ i $\langle g, u \rangle \not\in \lhd_p$, pa su (C2) i (C3) takodje tačni.

Pošto je $p \in \mathcal{D}_{\langle L,G,U \rangle, 1}$ postoji $q \in p_{\langle L,G,U \rangle} \cap J_0$. Dokazujemo da je $q \in \langle A, \lhd \rangle_{\langle L,G,U \rangle}$. Za $g \in G$ imamo $q \lhd_p g$, i prema (D3), $q <_{\mathbb{Q}} g$. Na osnovu (5.7) i (5.8) imamo $g \in G \subset A \subset (-\infty, x)$, pa $q <_{\mathbb{Q}} g <_{\mathbb{R}} x$. Dakle $q \in (-\infty, x) \cap J_0 \subset A$. Neka je $l \in L$, $g \in G$ i $u \in U$. Pošto je $q \in p_{\langle L,G,U \rangle}$ imamo $l \lhd_p q \lhd_p g$ i $\lhd_p \subset \lhd$ što povlači $l \lhd q \lhd g$. Dakle (S1) i (S2) su tačni. Pretpostavimo da je $\neg\, q \parallel_{\langle A, \lhd \rangle} u$. Pošto $q \not\in U$ imamo $q \neq u$ i odatle, $q \lhd u$ ili $u \lhd q$. Medjutim, iz $u, q \in P_p$, na osnovu stava 5.8(c) imali bismo $q \lhd_p u$ ili $u \lhd_p q$, što je nemoguće jer $q \in p_{\langle L,G,U \rangle}$. Dakle, i (S3) je tačno.

Slučaj 2: $G = \emptyset$. Prema (5.7) i (5.8) imamo $L \cup G \cup U \subset (-\infty, x)$, što povlači $m_{\langle L,G,U \rangle} < x$ pa postoji $m \in \mathbb{N}$ takvo da je

$$m_{\langle L,G,U \rangle} + \tfrac{1}{m} < x. \tag{5.11}$$

Neka je $p \in \mathcal{G} \cap \mathcal{D}_{\langle L,G,U \rangle, m}$. Tada (5.10) ponovo važi, pa na isti način kao u slučaju 1 pokazujemo da $\langle L, G, U \rangle \in C(p)$. Sada, pošto je $p \in \mathcal{D}_{\langle L,G,U \rangle, m}$ postoji

$$q \in p_{\langle L,G,U \rangle} \cap (m_{\langle L,G,U \rangle}, m_{\langle L,G,U \rangle} + \tfrac{1}{m}) \cap J_0$$

i iz (5.11), imamo da je $q \in J_0 \cap (-\infty, x)$. Dakle, na osnovu (5.7), $q \in A$, pa onda kao i u slučaju 1 pokazujemo da je $q \in \langle A, \lhd \rangle_{\langle L,G,U\rangle}$.

(b) Sledi iz (a) za $x = \infty$.

(c) Pretpostavimo da je $\max_{\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle} C = q$ i da je $\langle C, \lhd \rangle$ random poset. Tada $C_{\langle \{q\}, \emptyset, \emptyset \rangle} \neq \emptyset$ i zbog (S1), postoji $q_1 \in C$ takvo da je $q \lhd q_1$, što na osnovu stava 5.8(d) povlači $q <_{\mathbb{Q}} q_1$. Kontradikcija sa maksimalnošću q u poretku racionalne linije. □

Za particiju $\mathbb{Q}$ izabranu na početku dokaza očigledno su ispunjeni uslovi (i) i (ii) teoreme 3.11. Uslov (iii) iste teoreme sledi iz stava 5.9(a), dok uslov (iv) sledi iz stava 5.9(c).

Stav 5.10 Familija skupova

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathbb{Q} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} F_n : \forall n \in \mathbb{Z} \ \ F_n \in \Big[[n, n+1) \cap \mathbb{Q} \Big]^{<\omega} \right\}$$

je pozitivna familija koja zadovoljava $\mathcal{P} \subset \mathbb{P}\langle \mathbb{Q}, \lhd \rangle$.

Dokaz: Lako je proveriti (P1)-(P4). Neka je $A = \mathbb{Q} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} F_n \in \mathcal{P}$, neka je $\langle L, G, U \rangle \in C\langle A, \lhd_A \rangle$ i neka je $n_0 \in \mathbb{Z}$ takav da $\max L \in [n_0, n_0 + 1) \cap \mathbb{Q}$. Pošto je $|F_{n_0}| < \omega$ i $m_L \in A \subset \mathbb{Q} \setminus F_{n_0}$ postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$(m_L, \min\{m_L + \tfrac{1}{m}, \min G\}) \cap \mathbb{Q} \subset A.$$

Neka je $p \in \mathcal{G} \cap \mathcal{D}_{\langle L,G,U\rangle, m}$. Tada $L \cup G \cup U \subset G_p$ i jasno je da je $\langle L, G, U \rangle \in C\langle p \rangle$. Dakle, postoji

$$q \in J_0 \cap (m_L, \min\{\min G, m_H + \tfrac{1}{m}\}) \subset A$$

takav da je $q \in A_{\langle L,G,U\rangle}$. Sada je prema lemi 2.14

$$\langle A, \rho_A \rangle \cong \mathbb{D} \cong \langle \mathbb{Q}, \lhd \rangle,$$

pa $A \in \mathbb{P}\langle \mathbb{Q}, \lhd \rangle$. □

Implikacija (b) $\Rightarrow$ (a) teoreme 5.4 za prebrojivo $\mathbb{L}$ sledi iz stava 5.10 i teoreme 3.9(b). Dakle, uslov (v) teoreme 3.11 je zadovoljen, pa iz **(B)** teoreme 3.11 sledi implikacija (b) $\Rightarrow$ (a) teoreme 5.4 za neprebrojivo $\mathbb{L}$. □

5.2 LANCI KOPIJA $\mathbb{B}_n$

U ovoj sekciji dokazujemo teoremu 5.2 za $\mathbb{P} = \mathbb{B}_n$, $1 \leq n \leq \omega$. U ovom dokazu smo se oslanjali na poznatu karakterizaciju maksimalnih lanaca u $\mathbb{P}(\mathbb{Q}, <)$ iz teoreme 1.33. Da bismo dokazali slučaj $n < \omega$ nije teško primetiti da ako uzmemo maksimalan lanac kopija $\mathbb{Q}$ na prvoj koordinati, a na ostalim koordinatama sve vreme stoje početne komponente, tako dobijeni lanac će biti maksimalan lanac u $\mathbb{P}(\mathbb{B}_n)$, a trivijalno izomorfan maksimalnom lancu na prvoj koordinati. U slučaju $n = \omega$ je zgodno zalepiti sve kopije racionalne linije koje čine $\mathbb{B}_\omega$ na $\mathbb{Q}$, i to tako da na taj način dobijena relacijska struktura $\langle \mathbb{Q}, <_\omega \rangle$ zadovoljava uslove (i)-(v) teoreme 3.11, odakle sledi tvrdjenje.

Teorema 5.11 ([19]) *Neka je $n \geq 1$ prirodan broj. Za svako linearno uredjenje $\mathbb{L}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) $\mathbb{L}$ *je izomorfno maksimalnom lancu u* $\langle \mathbb{P}(\mathbb{B}_n) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$*;*
(b) $\mathbb{L}$ *se utapa u* $\mathbb{R}$*, kompletno je i* $\min \mathbb{L}$ *nema sledbenika.*

Dokaz: (a)$\Rightarrow$(b) sledi iz teoreme 3.4.

(b)$\Rightarrow$(a) Podsetimo se da je uredjenje na

$$\mathbb{B}_n = \bigcup_{i<n} \mathbb{Q}_i = \bigcup_{i<n} \{i\} \times \mathbb{Q}$$

dato sa

$$\langle i_1, q_1 \rangle < \langle i_2, q_2 \rangle \Leftrightarrow i_1 = i_2 \ \wedge \ q_1 <_{\mathbb{Q}} q_2.$$

Jasno, $f_i : \langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}} \rangle \to \langle \mathbb{Q}_i, < \rangle$ je izomorfizam, gde je $f_i(q) = \langle i, q \rangle$, za sve $q \in \mathbb{Q}$, pa je

$$\mathbb{P}(\mathbb{Q}_i) = \{\{i\} \times C : C \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})\}.$$

Ako je $f : \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_n$ utapanje, onda je za sve $i < n$ restrikcija $f \upharpoonright \mathbb{Q}_i$ izomorfizam, pa postoji $j_i < n$ da je $f[\mathbb{Q}_i] \subset \mathbb{Q}_{j_i}$ i važi $f[\mathbb{Q}_i] \in \mathbb{P}(\mathbb{Q}_{j_i})$. Jasno je da $i_1 \neq i_2$ povlači $j_{i_1} \neq j_{i_2}$, pa odatle imamo

$$\mathbb{P}(\mathbb{B}_n) = \left\{ \bigcup_{i<n} \{i\} \times C_i : \forall i < n \ \ C_i \in \mathbb{P}(\mathbb{Q}) \right\}. \tag{5.12}$$

Sada na osnovu teoreme 1.33, postoji maksimalan lanac $\mathcal{L}$ u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{Q}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ izomorfan sa $\mathbb{L}$. Za $A \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ neka je

$$A^* = (\{0\} \times A) \cup \bigcup_{0<i<n} \{i\} \times \mathbb{Q}. \tag{5.13}$$

Iz (5.12) imamo

$$\mathcal{L}^* = \{A^* : A \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}\} \cup \{\emptyset\} \subset \mathbb{P}(\mathbb{B}_n) \cup \{\emptyset\},$$

pa je $\langle \mathcal{L}^*, \subset \rangle$ lanac u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{B}_n) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ izomorfan sa $\langle \mathcal{L}, \subset \rangle$ pa i sa $\mathbb{L}$. Pretpostavimo da skup $C = \bigcup_{i<n} \{i\} \times C_i \in \mathbb{P}(\mathbb{B}_n)$ svedoči da $\mathcal{L}^*$ nije maksimalan lanac. Prema (5.12) i (5.13), iz $C \subset \bigcap_{A \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}} A^*$ bi sledilo $\mathbb{P}(\mathbb{Q}) \ni C_0 \subset \bigcap(\mathcal{L} \setminus \{\emptyset\})$, što je nemoguće ($\mathcal{L}$ je maksimalan lanac u $\mathbb{P}(\mathbb{Q}) \cup \{\emptyset\}$ i $C_0 \setminus F \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})$ za sve konačne $F \subset C_0$). Dakle, postoji $A \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ takav da je $A^* \subset C$, a prema (5.13),

$$C = \{0\} \times C_0 \cup \bigcup_{0<i<n} \{i\} \times \mathbb{Q}. \tag{5.14}$$

Pošto je $\mathcal{L}^* \cup \{C\}$ lanac, za sve $A \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ imamo $A^* \subsetneq C \ \vee \ C \subsetneq A^*$ što zajedno sa (5.13) i (5.14) daje $A \subsetneq C_0$ ili $C_0 \subsetneq A$. Kontradikcija sa maksimalnošću $\mathcal{L}$. □

Teorema 5.12 ([19]) *Za svako linearno uredjenje $\mathbb{L}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) $\mathbb{L}$ je izomorfno maksimalnom lancu u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{B}_\omega) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$;

(b) $\mathbb{L}$ se utapa u $\mathbb{R}$, kompletno je i $\min \mathbb{L}$ nema sledbenika.

Dokaz: (a)$\Rightarrow$(b) sledi iz teoreme 3.4.

(b)$\Rightarrow$(a) Prvo označimo $x_0 = \infty$ i izaberimo $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ opadajući niz u $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ koji nije ograničen odozdo. Tada je

$$\mathbb{B}_\omega \cong \langle \mathbb{Q}, <_\omega \rangle = \bigcup_{i \in \omega} \langle (x_{i+1}, x_i) \cap \mathbb{Q}, <_i \rangle,$$

(u daljem tekstu identifikujemo $\mathbb{B}_\omega$ i $\langle \mathbb{Q}, <_\omega \rangle$) pri čemu je

$$q_1 <_\omega q_2 \Leftrightarrow \exists i \in \omega \ \ (q_1, q_2 \in (x_{i+1}, x_i) \ \wedge \ q_1 <_\mathbb{Q} q_2).$$

Tada za skupove $\mathbb{Q}_i = (x_{i+1}, x_i) \cap \mathbb{Q}$, $i \in \omega$, važi $\langle \mathbb{Q}_i, <_i \rangle \cong \langle \mathbb{Q}, <_\mathbb{Q} \rangle$, što povlači $\mathbb{P}(\mathbb{Q}_i, <_i) \cong \mathbb{P}(\mathbb{Q}, <_\mathbb{Q})$. Jasno je da važi

$$\mathbb{P}(\mathbb{B}_\omega) = \{ \bigcup_{i \in S} C_i : S \in [\omega]^\omega \ \wedge \ \forall i \in S \ \ C_i \in \mathbb{P}(\mathbb{Q}_i) \}. \tag{5.15}$$

Neka je $\mathbb{L}$ linearno uredjenje sa datim osobinama. Prvo, neka je $|L| = \omega$. Jasno je da je $\mathrm{Dense}(\mathbb{Q}_i)$, familija gustih podskupova $\mathbb{Q}_i$, podskup $\mathbb{P}(\mathbb{Q}_i)$ i da je na osnovu (5.15) ispunjeno

$$\mathcal{P} = \left\{ \bigcup_{i \in \omega} C_i : \forall i \in \omega \ \ C_i \in \mathrm{Dense}(\mathbb{Q}_i) \right\} \subset \mathbb{P}(\mathbb{B}_\omega).$$

Nije teško primetiti da je $\mathcal{P}$ pozitivna familija, pa na osnovu teoreme 3.9(b), postoji maksimalan lanac $\langle \mathbb{P}(\mathbb{B}_\omega) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ izomorfan $\mathbb{L}$. Koristeći teoremu 3.11 pokazaćemo da tvrdjenje važi i za neprebrojivo $\mathbb{L}$.

Na osnovu prethodnog razmatranja, uslov (v) teoreme 3.11 je ispunjen. Da bismo završili dokaz, dovoljno je pokazati da postoji particija koja zadovoljava i uslove (i)-(iv) teoreme 3.11. Neka je $\{J_n : n \in \omega\}$ particija $\mathbb{Q}$ iz leme 1.15.

Uslovi (i) i (ii) su ispunjeni samim izborom particije. Da bismo pokazali da je uslov (iii) ispunjen, uzmimo $x \in \mathbb{R}$ i skup A tako da je

$$J_0 \cap (-\infty, x) \subset A \subset \mathbb{Q} \cap (-\infty, x). \tag{5.16}$$

Neka je i_0 najmanji $i \in \omega$ tako da $x_{i_0} < x$. Pošto je J_0 gust u $\mathbb{Q}$, imamo $J_0 \cap (x_{i+1}, x_i) \in \mathrm{Dense}(\mathbb{Q}_i) \subset \mathbb{P}(\mathbb{Q}_i)$ za sve $i > i_0$, a

$$J_0 \cap (x_{i_0}, x_{i_0-1}) \in \mathrm{Dense}(\mathbb{Q}_{i_0} \cap (x_{i_0}, x_{i_0-1})) \subset \mathbb{P}(\mathbb{Q}_{i_0}).$$

Prema (5.16), imamo $A \cap (x_{i+1}, x_i) \in \mathrm{Dense}(\mathbb{Q}_i) \subset \mathbb{P}(\mathbb{Q}_i)$ za sve $i > i_0$, kao i $A \cap (x_{i_0}, x_{i_0-1}) \in \mathrm{Dense}(\mathbb{Q}_{i_0} \cap (x_{i_0}, x_{i_0-1})) \subset \mathbb{P}(\mathbb{Q}_{i_0})$, pa pošto iz (5.16) sledi $A \cap (x_i, x_{i-1}) = \emptyset$ za $i < i_0$, skup A ispunjava uslov (5.15) te $A \in \mathbb{P}(\mathbb{B}_\omega)$ i uslov (iii) teoreme 3.11 je ispunjen.

Što se tiče uslova (iv), pretpostavimo da je za neko C i neko $q \in J_0$ koji zadovoljavaju

$$J_0 \cap (-\infty, q] \subset C \subset \mathbb{Q} \cap (-\infty, q]$$

ispunjeno $C \in \mathbb{P}(\mathbb{B}_\omega)$. Tada je jasno da je $q \in C$ i $q = \max C$, pa onda postoji $i_0 \in \omega$ takav da je $q \in (x_{i_0+1}, x_{i_0})$, a u tom slučaju je i $q = \max \mathbb{Q}_{i_0}$ pa $\mathbb{Q}_{i_0} \not\cong \mathbb{Q}$. Dakle, $C \notin \mathbb{P}(\mathbb{B}_\omega)$, kontradikcija. Pošto su ispunjeni uslovi (i)-(v) iz teoreme 3.11, sledi tvrdjenje teoreme 5.12. □

5.3 LANCI KOPIJA $\mathbb{C}_n$

U ovoj sekciji dokazujemo teoremu 5.2 za $\mathbb{P} = \mathbb{C}_n$ i $1 \leq n \leq \omega$. Slučaj $n < \omega$ se lako svodi na karakterizaciju maksimalnih lanaca u $\mathbb{P}(\mathbb{Q}, <)$. Naime, ako izbacimo bilo koju tačku u $\mathbb{C}_n$ vidimo da onda moramo da izbacimo i ceo antilanac u kom se nalazi da bismo dobili izomorfnu podstrukturu. U slučaju $n = \omega$ moramo konstruisati maksimalne lance koji odgovaraju kompletnim linearnim uredjenjima koja se utapaju u $\mathbb{R}$ i u kojima je minimum neizolovan, dok je jednostavno pronaći pozitivnu familiju.

Teorema 5.13 ([19]) *Neka je $n \geq 1$ prirodan broj. Za svako linearno uredjenje $\mathbb{L}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) *$\mathbb{L}$ je izomorfno maksimalnom lancu u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{C}_n) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$;*
(b) *$\mathbb{L}$ se utapa u $\mathbb{R}$, kompletno je i $\min \mathbb{L}$ nema sledbenika.*

Dokaz: (a)⇒(b) sledi iz teoreme 3.4.

(b)⇒(a) Podsetimo se da je uredjenje $<$ na $\mathbb{C}_n = \mathbb{Q} \times n$, dato na sledeći način

$$\langle q_1, i_1 \rangle < \langle q_2, i_2 \rangle \Leftrightarrow q_1 <_{\mathbb{Q}} q_2.$$

Jasno je da je relacija neuporedivosti $a \| b \Leftrightarrow a \not< b \wedge b \not< a$ na $\mathbb{C}_n$, relacija ekvivalencije sa klasama $\{q\} \times n$, $q \in \mathbb{Q}$, kardinalnosti n i odgovarajući količnik, $\mathbb{C}_n / \|$, je izomorfan sa $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}} \rangle$. Pošto svaki element iz $\mathbb{P}(\mathbb{C}_n)$ ima iste klase sledi da je

$$\mathbb{P}(\mathbb{C}_n) = \{A \times n : A \in \mathbb{P}(\mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}})\}.$$

Lako je videti da je preslikavanje

$$f : \mathbb{P}(\mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}) \cup \{\emptyset\} \to \mathbb{P}(\mathbb{C}_n) \cup \{\emptyset\},$$

dato sa $f(A) = A \times n$, izomorfizam uredjenja $\langle \mathbb{P}(\mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ i $\langle \mathbb{P}(\mathbb{C}_n) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$. Dakle, tvrdjenje sledi iz teoreme 1.33. □

Teorema 5.14 ([19]) *Za svako linearno uredjenje $\mathbb{L}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) $\mathbb{L}$ *je izomorfno maksimalnom lancu u* $\langle \mathbb{P}(\mathbb{C}_\omega) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$*;*

(b) $\mathbb{L}$ *se utapa u* $\mathbb{R}$*, kompletno je i* $\min \mathbb{L}$ *nema sledbenika.*

Dokaz: (a)⇒(b) sledi iz teoreme 3.4.

(b)⇒(a) Podsetimo se da je strogo parcijalno uredjenje $<$ na

$$\mathbb{C}_\omega = \mathbb{Q} \times \omega = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\} \times \omega = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \omega_q$$

dato sa $\langle q_1, i_1 \rangle < \langle q_2, i_2 \rangle \Leftrightarrow q_1 <_{\mathbb{Q}} q_2$. Za skup $X \subset \mathbb{C}_\omega$ definišimo $\operatorname{supp} X = \{q \in \mathbb{Q} : X \cap \omega_q \neq \emptyset\}$. Sada su klase relacije neuporedivosti ω_q beskonačne, pa je opet odgovarajući količnik, $\mathbb{C}_\omega / \|$, izomorfan racionalnoj liniji $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}} \rangle$. Pošto isto važi za kopije $\mathbb{C}_\omega$ nije teško proveriti da je

$$\mathbb{P}(\mathbb{C}_\omega) = \{\bigcup_{q \in A} \{q\} \times C_q : A \in \mathbb{P}(\mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}) \wedge \forall q \in A \; C_q \in [\omega]^\omega\}. \quad (5.17)$$

$$X \subset \mathbb{C}_\omega \wedge \text{ postoji } \max \operatorname{supp} X \Rightarrow X \notin \mathbb{P}(\mathbb{C}_\omega). \quad (5.18)$$

Iz (5.17) sledi da je

$$\mathcal{P} = \{\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\} \times C_q : \forall q \in \mathbb{Q} \;\; C_q \in [\omega]^\omega\} \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_\omega),$$

a pošto je $\mathcal{P}$ ujedno i pozitivna familija na ω, za prebrojivo $\mathbb{L}$ tvrdjenje sledi iz teoreme 3.9(b).

Neka je sada $\mathbb{L}$ neprebrojivo linearno uredjenje. Tada, na osnovu teoreme 1.27, možemo zapisati $\mathbb{L}$ u obliku $\mathbb{L} = \sum_{x\in[-\infty,\infty]} \mathbb{L}_x$, pri čemu su uslovi (L1-L3) teoreme 1.27 ispunjeni.

Slučaj I: $-\infty \notin M \ni \infty$. Neka je $\mathbb{Q} = \bigcup_{y\in M} J_y$ particija $\mathbb{Q}$ u $|M|$ disjunktnih gustih skupova, a za $y \in M$ izaberimo $I_y \in [J_y \cap (-\infty, y)]^{|L_y|-1}$. Dalje, označimo $\omega^+ = \omega \setminus \{0\}$, pa definišimo $A_{-\infty} = \emptyset$, i za $x \in (-\infty, \infty]$,

$$A_x = ((-\infty, x)_{\mathbb{Q}} \times \omega^+) \cup \bigcup_{y\in M\cap(-\infty,x)} I_y \times \{0\},$$
$$A_x^+ = A_x \cup (I_x \times \{0\}), \quad \text{za } x \in M.$$

Iz (5.17)sledi da je $A_\infty^+ \cong \mathbb{C}_\omega$, a mi ćemo konstruisati maksimalan lanac $\mathcal{L} \cong \mathbb{L}$ u parcijalnom uredjenju $\langle \mathbb{P}(A_\infty^+) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$. Iz (5.17), sledi da je za sve $x \in (-\infty, \infty]$ i svaki skup $A \subset \mathbb{C}_\omega$ ispunjeno

$$(-\infty, x)_{\mathbb{Q}} \times \omega^+ \subset A \subset (-\infty, x)_{\mathbb{Q}} \times \omega \;\Rightarrow\; A \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_\omega). \qquad (5.19)$$

Stav 5.15 Skupovi A_x, $x \in [-\infty, \infty]$ i A_x^+, $x \in M$ su podskupovi od A_∞^+. Dalje, za $x, x_1, x_2 \in [-\infty, \infty]$ važi:

(a) $A_x \subset (-\infty, x)_{\mathbb{Q}} \times \omega$;
(b) $A_x^+ \subset (-\infty, x)_{\mathbb{Q}} \times \omega$, ako $x \in M$;
(c) $x_1 < x_2 \Rightarrow A_{x_1} \subsetneq A_{x_2}$;
(d) $M \ni x_1 < x_2 \Rightarrow A_{x_1}^+ \subsetneq A_{x_2}$;
(e) $|A_x^+ \setminus A_x| = |L_x| - 1$, ako $x \in M$;
(f) $A_x \in \mathbb{P}(A_\infty^+)$, za sve $x \in (-\infty, \infty]$.
(g) $A_x^+ \in \mathbb{P}(A_\infty^+)$ i $[A_x, A_x^+]_{\mathbb{P}(A_\infty^+)} = [A_x, A_x^+]_{P(A_x^+)}$, za sve $x \in M$.

Dokaz: Tvrdjenja (c) i (d) su tačna jer je $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$; (a), (b) i (e) slede iz definicija skupova A_x i A_x^+ i izbora skupova I_y. Pošto je

$$(-\infty, x)_{\mathbb{Q}} \times \omega^+ \subset A_x \subset A_x^+ \subset (-\infty, x)_{\mathbb{Q}} \times \omega,$$

tvrdjenja (f) i (g) slede iz (5.19). □

Sada, za $x \in [-\infty, \infty]$ izaberimo lance $\mathcal{L}_x \subset \mathbb{P}(A_\infty^+) \cup \{\emptyset\}$ na sledeći način.

Za $x \notin M$ definišemo $\mathcal{L}_x = \{A_x\}$. Specijalno, $\mathcal{L}_{-\infty} = \{\emptyset\}$.

Za $x \in M$, iz stava 5.15 i leme 3.10 postoji skup $\mathcal{L}_x \subset [A_x, A_x^+]_{P(A_x^+)}$ takav da je $\langle \mathcal{L}_x, \subsetneq \rangle \cong \langle L_x, <_x \rangle$ i

$$A_x, A_x^+ \in \mathcal{L}_x \subset [A_x, A_x^+]_{\mathbb{P}(A_\infty^+)}, \qquad (5.20)$$

$$\bigcup \mathcal{A}, \bigcap \mathcal{B} \in \mathcal{L}_x \;\text{ i }\; |\bigcap \mathcal{B} \setminus \bigcup \mathcal{A}| \le 1, \text{ za svaki rez } \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle \text{ u } \mathcal{L}_x. \qquad (5.21)$$

Za $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{P}(A_\infty^+)$ pišemo $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ ako i samo ako $A \subsetneq B$, za sve $A \in \mathcal{A}$ i $B \in \mathcal{B}$.

Stav 5.16 Neka je $\mathcal{L} = \bigcup_{x\in[-\infty,\infty]} \mathcal{L}_x$. Tada

(a) Ako $-\infty \leq x_1 < x_2 \leq \infty$, onda $\mathcal{L}_{x_1} \prec \mathcal{L}_{x_2}$ i

$$\bigcup \mathcal{L}_{x_1} \subset A_{x_2} \subset \bigcup \mathcal{L}_{x_2}.$$

(b) $\mathcal{L}$ je lanac u $\langle \mathbb{P}(A^+_\infty) \cup \{\emptyset\}, \subset\rangle$ izomorfan sa $\mathbb{L} = \sum_{x\in[-\infty,\infty]} \mathbb{L}_x$.

(c) $\mathcal{L}$ je maksimalan lanac u $\langle \mathbb{P}(A^+_\infty) \cup \{\emptyset\}, \subset\rangle$.

Dokaz: Dokazi (a) i (b) su identični dokazima (a) i (b) stava 3.13, ako zamenimo (3.2) i stav 3.12 sa (5.20) i stavom 5.15.

(c) Pretpostavimo da je $C \in \mathbb{P}(A^+_\infty) \cup \{\emptyset\}$ svedok da $\mathcal{L}$ nije maksimalan lanac. Koristeći (5.20) i stav 5.15, na sličan način kao u dokazu stava 3.13(c) za $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{L} : A \subsetneq C\}$ i $\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{L} : C \subsetneq B\}$ pokazujemo da je $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B}\rangle$ rez u $\langle \mathcal{L}, \subsetneq\rangle$, $\mathcal{A} \neq \{\emptyset\}$ i

$$\bigcup \mathcal{A} \subset C \subset \bigcap \mathcal{B}. \tag{5.22}$$

Slučaj 1: $\mathcal{A} \cap \mathcal{L}_{x_0} \neq \emptyset$ i $\mathcal{B} \cap \mathcal{L}_{x_0} \neq \emptyset$, za neko $x_0 \in (-\infty, \infty]$. Tada dobijamo kontradikciju kao u dokazu stava 3.12.

Slučaj 2: $\neg$ Slučaj 1. Tada na isti način kao u dokazu stava 3.12 za skupove $\mathcal{A}' = \{x \in (-\infty,\infty] : \mathcal{L}_x \subset \mathcal{A}\}$ i $\mathcal{B}' = \{x \in (-\infty,\infty] : \mathcal{L}_x \subset \mathcal{B}\}$ pokazujemo da je $\langle \mathcal{A}', \mathcal{B}'\rangle$ rez u $(-\infty,\infty]$. Dakle, postoji $x_0 \in (-\infty,\infty]$ takvo da je $x_0 = \max \mathcal{A}'$ ili $x_0 = \min \mathcal{B}'$.

Podslučaj 2.1: $x_0 = \max \mathcal{A}'$. Tada kao u dokazu stava 3.12 pokazujemo

$$\bigcup \mathcal{A} = \begin{cases} A_{x_0} & \text{ako } x_0 \notin M, \\ A^+_{x_0} & \text{ako } x_0 \in M. \end{cases} \tag{5.23}$$

Pošto $\mathcal{B} = \bigcup_{x\in(x_0,\infty]} \mathcal{L}_x$, imamo da je $\bigcap \mathcal{B} = \bigcap_{x\in(x_0,\infty]} \bigcap \mathcal{L}_x$. Iz (5.20) $\bigcap \mathcal{L}_x = A_x$, pa

$$\begin{aligned}\bigcap \mathcal{B} &= \big(\bigcap_{x\in(x_0,\infty]} (-\infty, x)_{\mathbb{Q}} \times \omega^+\big) \cup \big(\bigcap_{x\in(x_0,\infty]} \bigcup_{y\in M\cap(-\infty,x)} I_y \times \{0\}\big) \\ &= ((-\infty, x_0]_{\mathbb{Q}} \times \omega^+) \cup \bigcup_{y\in M\cap(-\infty,x_0]} I_y \times \{0\} \\ &= A_{x_0} \cup ((\{x_0\} \cap \mathbb{Q}) \times \omega^+) \cup \bigcup_{y\in M\cap\{x_0\}} I_y \times \{0\},\end{aligned}$$

odakle dobijamo

$$\bigcap \mathcal{B} = \begin{cases} A_{x_0} & \text{ako} \quad x_0 \notin \mathbb{Q} \quad \wedge \quad x_0 \notin M, \\ A_{x_0} \cup (\{x_0\} \times \omega^+) & \text{ako} \quad x_0 \in \mathbb{Q} \quad \wedge \quad x_0 \notin M, \\ A^+_{x_0} & \text{ako} \quad x_0 \notin \mathbb{Q} \quad \wedge \quad x_0 \in M, \\ A^+_{x_0} \cup (\{x_0\} \times \omega^+) & \text{ako} \quad x_0 \in \mathbb{Q} \quad \wedge \quad x_0 \in M. \end{cases} \tag{5.24}$$

Ako $x_0 \notin \mathbb{Q}$, tada iz (5.22-5.24), imamo $\bigcup \mathcal{A} = \bigcap \mathcal{B} = C \in \mathcal{L}$. Kontradikcija.

Ako $x_0 \in \mathbb{Q}$ i $x_0 \notin M$, onda $\bigcup \mathcal{A} = A_{x_0}$ i $\bigcap \mathcal{B} = A_{x_0} \cup (\{x_0\} \times \omega^+)$. Sada iz (5.22) i pošto $C \notin \mathcal{L}$ imamo $C = A_{x_0} \cup S$, gde $\emptyset \neq S \subset \{x_0\} \times \omega^+$. Na osnovu stava 5.15(a), $x_0 = \max \operatorname{supp} C$ pa iz (5.18), $C \notin \mathbb{P}(A^+_\infty)$. Kontradikcija.

Ako $x_0 \in \mathbb{Q}$ i $x_0 \in M$, onda $\bigcup \mathcal{A} = A^+_{x_0}$ i $\bigcap \mathcal{B} = A^+_{x_0} \cup (\{x_0\} \times \omega^+)$. Opet, iz (5.22) i pošto je $C \notin \mathcal{L}$ sledi $C = A_{x_0} \cup S$, gde $\emptyset \neq S \subset \{x_0\} \times \omega^+$. Na osnovu stava 5.15(b), $x_0 = \max \operatorname{supp} C$ pa iz (5.18), $C \notin \mathbb{P}(A^+_\infty)$. Kontradikcija.

Podslučaj 2.2: $x_0 = \min \mathcal{B}'$. Tada iz (5.20), $A_{x_0} \in \mathcal{L}_{x_0} \subset \mathcal{B}$ što zbog (a) povlači $\bigcap \mathcal{B} = A_{x_0}$. Pošto $A_x \in \mathcal{L}_x$, za sve $x \in (-\infty, \infty]$ i $\mathcal{A} = \bigcup_{x<x_0} \mathcal{L}_x$ imamo

$$\begin{aligned} \bigcup \mathcal{A} \supset\ & \bigcup_{x<x_0} A_x \\ =\ & \bigcup_{x<x_0} ((-\infty, x)_{\mathbb{Q}} \times \omega^+) \cup \bigcup_{x<x_0} \bigcup_{y \in M \cap (-\infty, x)} I_y \times \{0\} \\ =\ & ((-\infty, x_0)_{\mathbb{Q}} \times \omega^+) \cup \bigcup_{y \in M \cap (-\infty, x_0)} I_y \times \{0\} \\ =\ & A_{x_0}, \end{aligned}$$

pa $A_{x_0} \subset \bigcup \mathcal{A} \subset \bigcap \mathcal{B} = A_{x_0}$, odakle sledi $C = A_{x_0} \in \mathcal{L}$. Kontradikcija. □

Slučaj II: $-\infty \notin M \not\ni \infty$ ili $-\infty \in M$. Dokaz se izvodi na isti način kao u slučaju II stava 3.12. □

Literatura

[1] P. J. Cameron. The random graph. In *The mathematics of Paul Erdös II*, volume 14 of *Algorithms Combin.*, pages 333–351. Springer, Berlin, 1997. ed. R. L. Graham and J. Nešetřil.

[2] P. J. Cameron and D. C. Lockett. Posets, homomorphisms and homogeneity. *Discrete Math.*, 310:604–613, 2010.

[3] G. W. Day. Maximal chains in atomic Boolean algebras. *Fund. Math.*, 67:293–296, 1970.

[4] M. El-Zahar and N. Sauer. The indivisibility of the homogeneous K_n-free graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 47(2):162–170, 1989.

[5] P. Erdös and A. Rényi. Assymetric graphs. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 14:295–315, 1963.

[6] R. Fraissé. *Theory of Relations*, volume 145 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland, 2000.

[7] F. Hausdorf. Grundzüge einer theorie der geordneten mengen. *Math. Ann.*, 65:435–505, 1908.

[8] C. W. Henson. A family of countable homogeneous graphs. *Pacific J. Math.*, 38(1):69–83, 1971.

[9] W. Hodges. *Model Theory*. Cambridge Univ. Press., 1993.

[10] S. Koppelberg. Maximal chains in interval algebras. *Algebra Univers.*, 27(1):32–43, 1990.

[11] K. Kuratowski. Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensembles. *Fund. Math.*, 2:161–171, 1921.

[12] K. Kuratowski and A. Mostowski. *Set theory, with an introduction to the descriptive set theory*. North-Holland, 1976.

[13] Dj. Kurepa. *Teorija Skupova*. Školska knjiga, 1951.

[14] M. Kurilić. From A_1 to D_5: towards a forcing-related classification of relational structures. *J Symbolic Logic*, to appear.

[15] M. S. Kurilić. Maximal chains in positive subfamilies of $P(\omega)$. *Order*,

29(1):119–129, 2012.

[16] M. S. Kurilić. Maximal chains of copies of the rational line. *Order*, 30(3):737–748, 2013.

[17] M. S. Kurilić and B. Kuzeljević. Maximal chains of isomorphic subgraphs of the countable ultrahomogenous graphs. *submitted*, 2013.

[18] M. S. Kurilić and B. Kuzeljević. Maximal chains of isomorphic subgraphs of the rado graph. *Acta Math. Hungar.*, 141:1–10, 2013.

[19] M. S. Kurilić and B. Kuzeljević. Maximal chains of isomorphic suborders of the countable ultrahomogeneous partial orders. *submitted*, 2013.

[20] M. S. Kurilić and S. Todorčević. Forcing by non-scattered sets. *Ann. Pure Appl. Logic*, 163(9):1299–1308, 2012.

[21] A. H. Lachlan and R. E. Woodrow. Countable ultrahomogeneous undirected graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 262:51–94, 1980.

[22] R. McKenzie and J.D. Monk. Chains in Boolean algebras. *Ann. Math. Logic*, 22(2):137–175, 1982.

[23] J.D. Monk. Towers and maximal chains in Boolean algebras. *Algebra Univers.*, 56(3-4):337–347, 2007.

[24] J. G. Rosenstein. *Linear orderings*, volume 98 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, New York, 1982.

[25] J. Schmerl. Countable homogeneous partially ordered sets. *Algebra Univers.*, 9(3):317–321, 1979.

[26] A. Schönflies. *Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen.* Leipzig-Berlin, 1913.

[27] W. Sierpiński. *Cardinal and ordinal numbers*, volume 34 of *Monografie Matematyczne*. PWN - Polish Scientific Publishers, Warsawa, second revised edition, 1965.

Indeks

Biografija

Rodjen sam u Priboju 1985. godine. Odrastao sam u Užicu, gde sam pohadjao osnovnu školu. Nakon toga sam završio Matematičku gimnaziju u Beogradu. Diplomirao sam na smeru Teorijska matematika i primene na Matematičkom fakultetu u Beogradu. Master studije sam takodje završio na Matematičkom fakultetu u Beogradu. Mentor mi je bio prof. dr Aleksandar Jovanović, a naslov master rada *Intervalne algebre*.

Zaposlen sam kao istraživač-saradnik na Matematičkom institutu SANU. Pored toga, radio sam kao saradnik u nastavi na Matematičkom fakultetu u Beogradu, gde sam držao vežbe iz Analize za prvu godinu studija. U Matematičkoj gimnaziji držim nastavu iz Analize sa algebrom. Učesnik sam u realizaciji projekta MPNTR *Teorija skupova, teorija modela i skup-teoretska topologija*.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: doktorska disertacija
VR

Autor: Boriša Kuzeljević
AU

Mentor: prof. dr Miloš Kurilić
MN

Naslov rada: Parcijalna uredjenja izomorfnih podstruktura relacijskih stuktura
NR

Jezik publikacije: srpski jezik
JP

Jezik izvoda: engleski/srpski
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2013.
GO

Izdavač: autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4.
MA

Fizički opis rada: 5/71/27/0/0/0
(poglavlja/strana/literarnih citata/slika/grafika/priloga)
FO

Naučna oblast: matematika
NO

Naučna disciplina: teorija uredjenja
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: linearno uredjenje, relacijska struktura, izomorfna kopija, parcijalno uredjenje
PO

UDK

Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Novi Sad
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Cilj ove teze je da se ispitaju lanci u posetima $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}), \subset \rangle$, pri čemu je $\mathbb{P}(\mathbb{X})$ skup domena izomorfnih podstruktura relacijske strukture $\mathbb{X}$. Pošto se svaki lanac u parcijalnom uredjenju može produžiti do maksimalnog lanca, dovoljno je ispitati maksimalne lance u $\mathbb{P}(\mathbb{X})$. Dokazano je da, ako je $\mathbb{X}$ ultrahomogena relacijska struktura koja ima netrivijalne izomorfne podstrukture, onda je svaki maksimalan lanac u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ kompletno linearno uredjenje koje se utapa u $\mathbb{R}$ i ima neizolovan minimum. Ako je $\mathbb{X}$ relacijska struktura, dat je dovoljan uslov da za svako kompletno linearno uredjenje $\mathbb{L}$ koje se utapa u $\mathbb{R}$ i ima neizolovan minimum, postoji maksimalan lanac u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ izomorfan $\mathbb{L}$. Dokazano je i da ako je $\mathbb{X}$ neka od sledećih relacijskih struktura: Rado graf, Hensonov graf, random poset, ultrahomogeni poset $\mathbb{B}_n$ ili ultrahomogeni poset $\mathbb{C}_n$; onda je $\mathbb{L}$ izomorfno maksimalnom lancu u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ ako i samo ako je $\mathbb{L}$ kompletno, utapa se u $\mathbb{R}$ i ima neizolovan minimum. Ako je $\mathbb{X}$ prebrojiv antilanac ili disjunktna unija μ kompletnih grafova sa ν tačaka za $\mu\nu = \omega$, onda je $\mathbb{L}$ izomorfno maksimalnom lancu u $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ ako i samo ako je bulovsko, utapa se u $\mathbb{R}$ i ima neizolovan minimum.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 21. 09. 2012.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:

Predsednik: akademik dr Stevan Pilipović, redovni profesor,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Mentor: dr Miloš Kurilić, redovni profesor,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Milan Grulović, redovni profesor,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Žarko Mijajlović, redovni profesor,
Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu

Član: dr Boris Šobot, docent,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
KO

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents code: PhD dissertation
CC

Author: Boriša Kuzeljević
AU

Mentor: Professor dr Miloš Kurilić
MN

Title: Partial orders of isomorphic substructures of relational structures
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English/Serbian
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2013
PY

Publisher: Authors reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description:5/71/27/0/0/0
(chapters/pages/citations/pictures/graphs/appendices) PD

Scientific field: mathematics
SF

Scientific discipline: order theory
SD

Subject/Key words: linear order, partial order, relational structure, isomorphic copy
SKW

UC

Holding data: library of the Department of Mathematics and Informatics, Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: The purpose of this thesis is to investigate chains in partial orders $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}), \subset \rangle$, where $\mathbb{P}(\mathbb{X})$ is the set of domains of isomorphic substructures of a relational structure $\mathbb{X}$. Since each chain in a partial order can be extended to a maximal one, it is enough to describe maximal chains in $\mathbb{P}(\mathbb{X})$. It is proved that, if $\mathbb{X}$ is an ultrahomogeneous relational structure with non-trivial isomorphic substructures, then each maximal chain in $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ is a complete, $\mathbb{R}$-embeddable linear order with minimum non-isolated. If $\mathbb{X}$ is a relational structure, a condition is given for $\mathbb{X}$, which is sufficient for $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ to embed each complete, $\mathbb{R}$-embeddable linear order with minimum non-isolated as a maximal chain. It is also proved that if $\mathbb{X}$ is one of the following relational structures: Rado graph, Henson graph, random poset, ultrahomogeneous poset $\mathbb{B}_n$ or ultrahomogeneous poset $\mathbb{C}_n$; then $\mathbb{L}$ is isomorphic to a maximal chain in $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ if and only if $\mathbb{L}$ is complete, $\mathbb{R}$-embeddable with minimum non-isolated. If $\mathbb{X}$ is a countable antichain or disjoint union of μ complete graphs on ν vertices with $\mu\nu = \omega$, then $\mathbb{L}$ is isomorphic to a maximal chain in $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$ if and only if $\mathbb{L}$ is Boolean, $\mathbb{R}$-embeddable with minimum non-isolated.
AB

Accepted by Scientific Board on: 21. 09. 2012.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:

President: academician dr Stevan Pilipović, full professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Mentor: dr Miloš Kurilić, full professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: dr Milan Grulović, full professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: dr Žarko Mijajlović, full professor, Faculty of Mathematics, University of Belgrade

Member: dr Boris Šobot, assistant professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
DB