Универзитет у Београду

Математички факултет

ПРИМЕНА ДИРИХЛЕОВОГ ПРИНЦИПА КРОЗ РАЗЛИЧИТЕ НИВОЕ ОБРАЗОВАЊА

- ДИПЛОМСКИ МАСТЕР РАД -

Ментор:

др Ђорђе Кртинић

Студент:

Бојана Кузовић

1115/2012

Београд, 2014.

Садржај

1. Увод

Задатак и циљ наставе није више у меморисању и репродуковању, већ у суштинском схватању појава и процеса уз активно и свесно учешће ученика. У настави математике треба користити решавање проблемских задатака који допуштају ученику да самостално истражује, развија логичко, стваралачко и апстрактно мишљење као и да изграђује позитивне особине своје личности, као што су: упорност, систематичност, смисао за самосталан рад и решавање проблема. Безобзира да ли се ради о обради, понављању, вежбању или примени знања у пракси, стално треба тежити откривању чињеница, одређених дефиниција и формулација правила, закључивању, расуђивању и тражењу нових идеја у решавању неког математичког проблема.

Како би ученици остварили велике резултате у решавању проблемских задатака, потребно је још од предшколског узраста са децом радити и решавати лакше проблемске ситуације као што су загонетке, ребуси, једноставнији логички задаци („неформална” математика).Када пођу у школу, ученици имају одређено искуство и лакше надовезују нова знања, у овом случају знања о проблемским задацима, новим стратегијама и новим поступцима решавања проблемских математичких задатака („формална” математика).

Пролазећи кроз етапе решавања задатака и долажењем до одговарајуће стратегије ученику је пут до решења задатка загарантован.Уколико наилази на потешкоће, ту је наставник да га усмери, да му олакша (али никако да му уради задатак).

Постоје проблемски задаци које је тешко сврстати у било који одређени део математике, па просто служе као вежба за развијање логичког мишљења.Најчешће се при њиховом решавању мора доказати постојање објеката који имају одређено својство.Да би се доказало да сви објекти уоченог скупа поседују нека својства, потребно је доказати да то својство поседује сваки од тих објеката.Да би се, пак, та тврђења оповргла, довољно је утврдити да бар један од посматраних објеката нема то својство.Каже се да је пронађен контрапример.

У неким случајевима је тешко наћи контрапример – пример који оповргава опште тврђење.Често је лакше доказати да одговарајући пример постоји него га пронаћи.У решавању различитих проблема, нарочито за доказивање постојања објеката који имају неко одређено (тражено) својство, често се веома успешно примењује такозвани Дирихлеов принцип.

У овом раду је представљен Дирихлеов принцип и његова примена у задацима различитих нивоа.Ову идеју је могуће представити чак и деци предшколског узраста.Неоправдано запостављен на редовним часовима математике, овај принцип се углавном користитоком припреме за такмичења.Помоћу Дирихлеовог принципа можемо врло једноставно решити задатке из различитих области математике што је још једна његова предност.

2. Историјат

У математици, Дирихлеов принцип је први формулисао**Јохан Петер Густав Лежен Дирихле**[1]1834.године под именом *Schubfachprinzip* („принцип фиока” или „принцип полица”). Управо из овог разлога обично се назива и „Дирихлеов принцип кутија” или „Дирихлеов принцип фиока”.

Дирихле је у својој књизи „*Vorlesungen über Zahlentheorie*” („Предавања о теорији бројева”, прво издање 1863. године)искористио овај принцип како би доказао тврђење о апроксимацијама ирационалних бројева рационалним и ту теорему је употребио како би показао да постоји бар једно решење у скупу природних бројева Пелове једначине чији ћемо доказ касније навести.

Минковски[2]помиње „чувени Дирихлеов метод” у књизи „*Geometrie der Zahlen*”1905. године.

У Енглеској се користи и назив „*Pigeonhole principle*”, који се појавио у раду „*On the Simultaneous Approximation of Two Real Numbers*”који је**Рафаел Робинсон**[3]представио америчком математичком друштву („*American Mathematical Society*”) новембра 1940. године. Такође се помиње и у раду„*A partition calculus in set theory*”, *Bull. Am. Math. Soc. 62 (Sept. 1956)*чији су аутори **ПолЕрдеш**[4]и**Ричард Радо**[5].

У различитим земљама постоје различите варијанте имена овог тврђења, у Француској „*le principle des tiroirs de Dirichlet*” („Дирихлеов принцип кутија”), у Португалији „*principio da casa dos pombos*” („принцип куће голубова”) , у Италији „*principio dei cassette*” („принцип фиока”) итд.

3. Различите формулације Дирихлеовог принципа

[1]Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859), немачки математичар
[2]Hermann Minkowski (1864 - 1909), немачки математичар и физичар
[3]Raphael Mitchel Robinson (1911 - 1995), амерички математичар
[4]Paul Erdős (1913 - 1996), мађарски математичар
[5]Richard Rado (1906 - 1989), немачки математичар

Дирихлеов принцип се популарно илуструје кроз „проблем зечева и кавеза”, „проблем голубова и кућица” или „проблем предмета и кутија”.

Претпоставимо, рецимо, да је јато голубова долетело у голубарник.У својој оригиналној верзији, Дирихлеов принцип каже да ако има више голубова него кућица у голубарнику, тада ће се бар у једној кућици наћи бар два голуба.Наравно, овај принцип је применљив и на друге објекте, а не само на голубове.

Наведимо најпре неколико формулација најједноставнијег облика Дирихлеовог принципа:

Теорема 3.1.Ако сеmпредмета распореди у n кутија и ако је $m > n$, тада ће у бар једној кутији бити бар два предмета.

Доказ.

Претпоставимо да смо распоредили све предмете у n кутија и да при томе не постоји кутија која садржи бар два предмета.

Тада свака од n кутија садржи или један предмет или је празна, па је укупан број предмета у свим кутијама највише n. То је контрадикција са претпоставком да је укупан број предмета већи од броја кутија.Зато мора да постоји нека кутија са бар два предмета. ■

Користи се и једноставнија верзија претходне теореме:

Теорема 3.2.Ако $n + 1$ предмета распоредимо било како у n празних кутија, онда постоји бар једна кутија која садржи бар 2 предмета.

Формално гледано Теорема 3.1.може се посматрати као преформулација следеће теореме:

Теорема 3.3.Ако су m и n природни бројеви тако да је $m > n$, тада не постоји инјекција из скупа $M = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ у скуп$N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Ако имамо m предмета нумерисаних бројевима 1, 2, ..., m и n кутија нумерисаних бројевима 1, 2, ..., n, тада се смештање предмета у кутије може представити функцијом $f: M \to N$ тако да је $f(i) = j$ ако је објекат i смештен у кутију j. По Теореми 3.3., ако је $m > n$, функција f не може да буде инјекција, па постоје две различите вредности i_1 и i_2 тако да је $f(i_1) = f(i_2) = j$, што значи да кутија j садржи два објекта i_1 и i_2.

Следећа теорема је благо уопштење основне верзије Дирихлеовог принципа.

Теорема 3.4.Нека су n, m и k природни бројеви и нека је $m > kn$. Ако је m предмета распоређено у n кутија, тада постоји бар једна кутија у којој се налази бар $k + 1$ предмет.

Доказ.

Претпоставимо супротно.Нека смо свих m предмета распоредили у n кутија и нека не постоји кутија која садржи $k+1$ предмет.

Тада свака од кутија садржи највише k предмета.Из овога можемо закључити да је укупан број предмета највише kn. Добили смо контрадикцију стога следи да постоји бар једна кутија која садржи $k+1$ предмет.■

Навешћемо још неколико теорема које се лако доказују.

Теорема 3.5.Инјекција из $n-$ точланог скупа у $n-$ точланискуп је бијекција.

Следећа теорема показује да се Дирихлеов принцип може односити и на бесконачне скупове.

Теорема 3.6.(„Бесконачан" Дирихлеов принцип) Ако постоји бесконачни скуп предмета који је распоређен у коначан број кутија, тада постоји бар једна кутија која садржи бесконачан број тих објеката.

Доказ је аналоган претходним, тј.уколико претпоставимо да је у свим кутијама коначан број предмета тада је укупан број предмета у свим кутијама коначан, што је контрадикција са условом задатка.

Теорема 3.7.Не постоји инјекција из скупа веће кардиналности у скуп мање кардиналности.

Као што се може видети из претходних теорема, Дирихлеов принцип је једноставан.Тежина задатака у којима се користи је у томе да се препозна шта су „кутије" а шта „предмети".Понекада је то веома тешко, па се ови задаци често појављују на разним математичким такмичењима и олимпијадама, док се тврђења која користе овај принцип јако често срећу у научним радовима.

Да бисмо доказали неко тврђене или решили задатак помоћу овог принципа морамо следити следећа четири корака.Прво је важно да одредимо шта су „предмети" или „голубови".Затим, постављамо кутије.Желимо ово да урадимо јер уколико су два предмета у истој „кутији" они имају иста својства. Да бисмо употребили Дирихлеов принцип неопходно је имати мање „кутија" него „предмета". Трећи корак је да одредимо правило по коме додељујемо предмете одређеним кутијама.Одређујемо правило тако да када се довољно „предмета" налази у истој „кутији" колекција има својство које ми желимо.Четврто је да применимо овај принцип на нашу поставку и добијемо жељени закључак.

4. Примена Дирихлеовог принципа у основној школи

Без обзира на његову непосредну очигледност, Дирихлеов принцип није баш тако лако примењивати при решавању задатака.За ово је потребна одређена вештина у рашчлањивању услова задатака и класификовању посматраних предмета, тј.потребна је одговарајућа „припрема” задатака пре него што ступи у дејство „принцип кутија”. Задаци који се могу решавати уз помоћ Дирихлеовог принципа, не захтевају нарочита математичка знања, мада се на први поглед чине необичним, па зато и тешким.Већина се заснива на здравом разуму, те је најважније правилно схватити смисао задатака и расуђивати поступно и логички.Управо из ових разлога Дирихлеов принцип се у основној школи први пут помиње на часовима додатне наставе или приликом припреме за такмичења из математике.Навешћемо неколико примера.

Пример 1.а) Може ли се тврдити да у одељењу од 34 ученика сигурно постоје бар два ученика чија презимена почињу истим словомсрпске азбуке?

б) А ако је у одељењу било 29 ученика?

Решење:

Овде „предмете” представљају ученици (има их 34), а „кутије” слова азбуке (има их 30).

а) У „најнеповољнијем” случају, за презимена првих 30 ученика биће „заузето” свих 30 слова, па презимена осталих ученика (има их 4) морају почињати неким од већ „заузетих” слова. Онда ово значи да у одељењу засигурно постоје ученици (бар двојица) чија презимена почињу истим словом.

б) Пошто је број ученика мањи од броја слова, тврђење не важи јер постоји могућност да свако презиме почиње различитим словом.

Пример2.Докажи да се међу 14 природних бројева могу наћи 2 чија је разлика дељива са 13.

Решење:

При дељењу бројем 13 могући су следећи остаци: 0, 1, 2, ..., 12. Дакле, 13 различитих могућности (класа), сваки природан број је у некој од њих.Приметимо да разлика бројева из исте класе мора бити дељива са 13 (нпр. број 1 и број 27 су из класе 1, $27-1=26$ дељив са 13).14 природних бројева смештамо у 13 класа („кутија”), бар 2 морају бити у истој.Њихова разлика дељива је са 13.

Пример3.Таблица5×5 попуни се на произвољан начин бројевима -1, 0, 1. Затим се израчунају збирови у појединим врстама и колонама и у обе дијагонале. Докажи да се у овим збировима морају наћи бар два једнака. (Хрватска, Републичко такмичење, 1982, VII разред; Србија, Републичко такмичење, 1993, VII разред).

Решење:

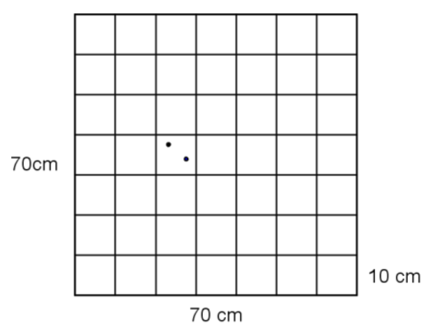
Могуће вредности збирова су: -5 (ако су нпр. у посматраној врсти, колони или дијагонали сви бр. -1), -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5. Дакле, укупно 11 могућности. Број врста, колона и дијагонала је укупно $5+5+2=12$ (12 „предмета" смештамо у 11 „кутија"). Значи, бар два од елемената (дијагонала, врста, колона) имаће исти збир.

Исто питање се може поставити за таблицу $n \times n$.Број врста, колона и дијагонала је $n+n+2=2n+2$. За збир имамо $2n+1$ могућих вредности па по Дирихлеовом принципу следи да тврђење важи.

Пример4.Војник пуца у мету облика квадрата, странице 70cm. Испалио је 50 метака и сваки је погодио мету, али ни у једну тачку није погодио више од једанпут. Доказати да се на тој мети могу наћи две рупе од поготка, са међусобним растојањем мањим од 15cm.

Решење:

Изделимо мету на 49 квадратића, странице 10cm. Погодака је 50, дакле, у бар једном квадратићу су две рупе од метка. Њихово растојање је мање или једнако од дијагонале квадратића$10\sqrt{2}$cm. Како је $d=10\sqrt{2}<15$, те две рупе испуњавају тражени услов.(Слика 1)

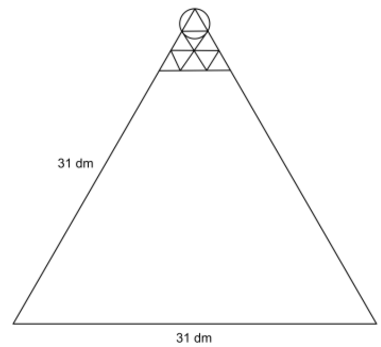


Слика 1

Пример5.Дат је једнакостранични троугао чија је страница 31dm, унутар кога је на произвољан начин распоређено 1989 тачака. Доказати да постоји круг, полупречника 6cm, унутар кога се налазе бар 3 тачке датог скупа. (Србија, Републичко такмичење, 1989, VIII разред).

Решење:

Дати троугао поделимо на једнакостраничне троуглове странице 1dm. Њих има $1+3+5+\ldots+61=961$. Како се у троуглу налази 1989 тачака $(1989=961\cdot 2+67)$, по Дирихлеовом принципу (Теорема 3.4.), постоји најмање 1 мали троугао у коме се налазе бар 3тачке. Како је полупречник круга описаног око малог троугла $\frac{\sqrt{3}}{3}$dm $<1{,}8/3$ dm $=6$ cm, то постоји и круг полупречника 6 cm унутар кога се налазе бар 3 тачке датог скупа. (Слика 2)



Слика 2

Пример6. Раван је обојена плавом и црвеном бојом.Доказати да постоји правоугаоник који припада тој равни и чија су темена исте боје.

Решење:

Треба запазити да за произвољно изабране 3 тачке, бар 2 морају бити исте боје. Ако у равни бирамо 9 паралелних правих, пресечених са 3 паралелне праве a,b,c, које су нормалне на претходних 9, имамо 9 уређених тројки пресека:

$$(A_1, B_1, C_1), \dots, (A_9, B_9, C_9)$$

Будући да сваки члан уређене тројке може бити плав или црвен, укупно је 8 могућности: ППП, ППЦ, ПЦП, ЦПП, ЦЦП, ЦПЦ, ПЦЦ, ЦЦЦ. Дакле, различитих тројки је 8, а ми их имамо 9, па су бар две исте (Дирихлеов принцип, Теорема 3.2.). У те две исте тројке су по две тачке исте боје које су темена траженог правоугаоника.

5. Примена Дирихлеовог принципа у средњој школи

Дирихлеов принцип се у средњим школама углавном први пут помиње на часовима додатне наставе или током припреме за такмичења.Иако су ученици стекли довољно знања и искуства из математике, да би могли успешно да разумеју и примене Дирихлеов принцип у задацима, он се не налази у наставним плановима и програмима као јединица која би се обрађивала на редовим часовима.Примена овог принципа зависи највише од наставника и његове мотивисаности да ученике подстакне на развијање логичког мишљења и закључивања као и његове спремности да унесе новине у наставне садржаје.

Навешћемо неколико примера у којима се Дирихлеов принцип може искористити а решавају се на редовним часовима.

Пример 1.У непровидној врећици се налазе 10 белих, 20 црвених и 30 плавих куглица.Колико најмање куглица треба извући из врећице да бисмо сигурно имали три куглице исте боје?

Решење:

Овде се може искористити Дирихлеов принцип (Теорема 4.). Ако боје представљају „кутије” а куглице су „предмети”, тада је број кутија једнак 3 ($n = 3$), а број предмета је тражени минимални број куглица у задатку ($m = ?$). Из услова Теореме 3.4.знамо да $m > k \cdot n$ (k мора бити једнак 2 јер се захтева да имамо три куглице исте боје, тј. да једна кутија садржи три предмета). Из претходног закључујемо да минималан број куглица које треба да извучемо да бисмо сигурно имали три исте бојеје $3 \cdot 2 + 1 = 7$ ($n = 3, k = 2$).

Пример 2.У просторији је nособа.Доказати да међу њима постоје две особе које имају исти број познаника у тој соби.

Решење:

Особа („предмет”) иде у „кутију” ако има iпознаника. Имамо n особа и n кутија нумерисаних $0, 1, \ldots, n-1$. Али кутије са бројевима 0 и $n-1$ не могу истовремено бити заузете.Дакле, постоји бар једна кутија са више од једним „предметом”.

Наредни примери односиће се на задатке који се раде на часовима додатне наставе као и оне који су били на појединим такмичењима из математике.

Пример 3.Доказати да постоји природан број који почиње цифрама 9876543210, а дељив је са 2011.

Решење:

Уочимо бројеве $x_1 = 9876543210$, $x_2 = 98765432109876543210 \ldots, x_{2012}$ од којих сваки садржи једну,две,$\ldots$, 2012 група цифара 9876543210. При дељењу са 2011 тих 2012 бројева дају остатке $0, 1, \ldots, 2010$. Како је 2012 бројева, а 2011 остатака то међу уоченим бројевима постоје два броја који имају једнаке остатке. Нека су то бројеви $x_i = 2011a + r$ и $x_j = 2011b + r$.

Тада важи$x_i - x_j = 2011a + r - (2011b + r) = 2011(a - b)$.Из овога можемо закључити да 2011 дели број$9876543210 \ldots 0000$ ($i - j$група цифара 9876543210 и све остало нуле).

Пример 4.Посматрајмо низ четвороцифрених бројева који представљају последње четири цифре бројева $3, 3^2, 3^3, 3^4, \ldots$ То је низ $0003, 0009, 0027, 0081, 0243, 0729, 2187, \ldots$. Доказати да је почев од неког члана дати низ периодичан.

Решење:

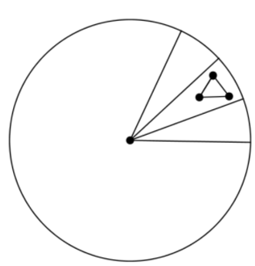
Низ $3, 3^2, 3^3, 3^4, \ldots$ има највише $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 4 = 4000$ четвороцифрених завршетака (за прве три цифре кандидати су свака од 10 цифара, а за последњу цифру само 1, 3, 7 и 9). На основу Дирихлеовог принципа закључујемо да већ у низу 3, 3^2, 3^3, ..., 3^{4000}, 3^{4001}постоји 4001 број, а 4000 четвороцифрених завршетака, што значи да постоје два који имају једнаке четвороцифрене завршетке.

Нека су то $3^a = 10^4 m + r$и $3^b = 10^4 n + r$.Тада је $3^a - 3^b = 10^4(m - n)$ из тога следи$3^{a+p} - 3^{b+p} = 3^p \cdot 10^4(m - n)$, то значи да и бројеви 3^{a+p}и 3^{b+p}за сваки природан број pимају једнаке четвороцифрене завршетке, што доказује да је низ четвороцифрених завршетака степена броја 3почевши од неког члана периодичан.

Пример 5.У кругу површине $16\mathrm{cm}^2$, дате су 33 тачке. Докажи да се од датих тачака могу изабрати три које су темена троугла чија је површина мања од $1\ \mathrm{cm}^2$.

Решење:

Поделимо круг на 16кружних исечака површине $1\ \mathrm{cm}^2$. Тачака је $33 = 16 \times 2 + 1$, па по Дирихлеовом принципу, Теорема 4., бар у једном исечку морају бити 3 тачке. Оне су темена траженог троугла. (Слика 3)



Слика 3

Пример 6.На такмичењу учествовала су 22 ученика из8 школа.Укупно су правилно решили 50 задатака.Сви ученици из исте школе решили су исти број задатака, а ученици из различитих школа решили су различит број задатака.Сваки ученик је правилно решио бар 1 задатак.Колико је ученика правилно решило тачно 1 задатак?

Решење:

Узмимо из сваке школе по једног ученика и претпоставимо да је ученик из 1.школе решио један задатак, из 2. два,..., из 8. осам задатака, јер ако је један ученик решио 9, број решених задатака је бар$9 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 15 \cdot 1 = 51$, што је немогуће.Значи, тих 8 ученика решило је $1 + 2 + \ldots + 8 = 36$ задатака.Остаје још 14 ученика и 14 задатака, што значи да је сваки од осталих ученика решио 1 задатак.Са оним из 1. школе, $14 + 1 = 15$ ученика решило је тачно 1 задатак.

Пример 7.Доказати да скуп од шест различитих једноцифрених бројева садржи два подскупа без заједничких елемената таквих да је збир елемената првог подскупа једнак збиру елемената другог подскупа. (Република Српска, Регионално такмичење средњошколаца, 1999, IV разред).

Решење:

Скуп од 6 елемената има $2^6 - 1 = 63$ непразна подскупа.Од свих шесточланих скупова чији су елементи једноцифрени бројеви скуп $\{4,5,6,7,8,9\}$ има највећи збир елемената.Највећи његов подскуп је он сам. Збир његових елемената је $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39$. Сваки његов други подскуп има елементе чији је збир мањи од 39. Извршимо придруживање непразних подскупова шесточланог скупа (има их 63) збировима елемената тих подскупова (највећи од њих је не већи од 39). То пресликавање није 1-1 зато што домен има 63, а кодомен не више од 39 елемената. Тако се најмање два подскупа сликају у исти број, тј.збир њихових елемената је исти. Ако ти подскупови нису дисјунктни, извадимо им заједнички део, па преостала два подскупа испуњавају услов задатка.

Пример 8.Доказати да се међу сваких 6 ирационалних бројева могу изабрати три броја a, b,cтаква да су бројеви $a + b$, $b + c$, $c + a$ опет ирационални.(Босна и Херцеговина, Федерално првенство ученика средњих школа, 2011, III разред).

Решење:

Лема: Дато је 6 тачака у равни, од којих никоје три нису колинеарне. Ако све сегменте, које граде ове тачке обојимо једном од две боје, онда постоји бар један монохроматски троугао(странице троугла су исте боје).

Доказ леме:

Фиксирамо једну тачку.Ова тачка гради пет сегмената са осталим тачкама.Према Дирихлеовом принципу, постоје бар три сегмента исте боје.Нека су ова три сегмента обојена плавом бојом.Ако било који сегмент који настаје од врхова плавих сегмената обојимо плавом бојом, тада имамо монохроматски троугао.Дакле, сви сегменти који настају овим врховима су црвене боје.У том случају имамо црвени монохроматски троугао.

Придружимо сваком броју тачку у равни, тако да никоје три нису колинеарне.Обојимо сегмент који спаја два ирационална броја плавом бојом, ако је сума та два броја ирационалан број.Ако је сума два таква броја рационалан број, сегмент бојимо црвеном бојом.Према леми, постоји увек бар један монохроматски троугао.Ако је троугао плаве боје, онда је тврдња доказана.Нека је монохроматски троугао црвене боје. Нека су ивице тог троугла $a+b$, $b+c$, $c+a$. Посматрајмо сада израз:

$$(a+b)+(b+c)-(c+a)=2b.$$

Овде следи да је b рационалан број, што је контрадикција са претпоставком задатка.Дакле, $a+b, b+c, c+a$ су ирационални бројеви.

Пример 9.Функција $f(x)=\cos x+\cos(x\sqrt{2})$ није периодична.

Решење:

Претпоставимо да $f(x)$ има период T. Тада важи $\cos(x+T)+\cos\left(x\sqrt{2}+T\sqrt{2}\right)=\cos x+\cos x\sqrt{2}$ за свако x. Знамо да за $x=0$имамо $\cos T+\cos T\sqrt{2}=2$. Из овога следи $T=2k\pi$, $T\sqrt{2}=2n\pi$, тј.$\sqrt{2}=\frac{n}{k}\in\mathbb{Q}$, што је контрадикција јер је $\sqrt{2}$ ирационалан број.

6. Сложенији такмичарски проблеми – Дирихлеов принцип

Многи такмичарски задаци са математичких олимпијада могу се решити помоћу Дирихлеовог принципа.Навешћемо неколико примера који илуструју овакве задатке.

Пример 1.Дато је седам дужи од којих је свака већа од 10cm, а мања од 1m. Доказати да међу датим постоје три дужи од којих се може саставити троугао. (Manhattan, Математичка олимпијада, 2004)

Решење:

Нека су дужине датих дужи $d_1,\ d_2, \dots, d_7$.Без губитка општости можемо претпоставити да су дужи у неопадајућем редоследу.Тада је 10cm $\leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_7 <$100cm. Од најмање три дужи се не може саставити троугао, ако је $d_3 \geq d_1 +\ d_2 \geq 10\ +\ 10\ =\ 20$cm. Слично троугао се не може саставити ни ако је $d_4 \geq d_2 + d_3 \geq 10 + 20 = 30$ cm. Ако се поступак настави добија се $d_5 \geq d_3 + d_4 \geq 20 + 30 = 50$cm, $d_6 \geq d_4 + d_5 \geq 30 + 50 = 80$ cm и коначно ако је $d_7 \geq d_5 + d_6 \geq 50 + 80 = 130$ cm. Како је по претпоставци $d_7 <$100cm добили смо противуречност, што значи да се од датих дужи увек може саставити троугао.

Пример 2.Доказати да од 100 целих бројева можемо изабрати 15таквих да је разлика свака два дељива са 7. (Manhattan, Математичка олимпијада, 2005)

Решење:

Остаци при дељењу са 7 су $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Ови остаци представљају „кутије" у којима су смештени тих 100 бројева.Примећујемо да је $7 \cdot 14 + 2 = 100$. Из Теореме 3.4.закључујемо да се бар у једној „кутији" налази 15 бројева, који имају исти остатак при дељењу са 7. Разлика свака два броја од ових 15 је дељива са 7.

Пример 3.Доказати да из било којег скупа од 100 целих бројева можемо изабрати један број који је дељив са 100, или неколико бројева чија сума је дељива са 100. (Manhattan, Математичка олимпијада, 2003)

Решење:

Посматрајмо скуп бројева $\{x_1, \dots, x_{100}\}$. Посматрајмо 100 подскупова овог скупа $\{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_1, \dots, x_{100}\}$ и за сваки од ових скупова израчунајмо суму.Ако ни једна од ових сума није дељива са 100, тада имамо 100 сума и 99 класа остатака (осим 0).На основу Дирихлеовог принципа постоје две суме које имају исте остатке при дељењу са 100.

Тада важи $x_1 + x_2 + \cdots + x_i \equiv x_1 + x_2 + \cdots + x_j$ (mod 100) $(i < j)$.Следи да је $x_{i+1} + \cdots + x_j \equiv 0$ (mod 100), тако да смо пронашли суму која задовољава услов задатка.

Пример 4.Доказати да ако постоји10 тачака на кругу пречника 5, најмање 2 су на растојању мањем од 2 једна од друге. (Јапан, Математичка олимпијада, 1997)

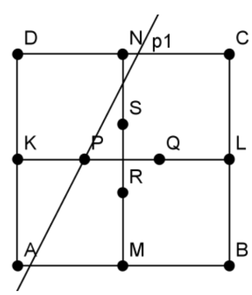
Решење:

Полупречницима можемо поделити круг на девет једнаких делова. Добићемо девет лукова чија је дужина једака $\frac{2 \cdot 2,5 \cdot \pi}{9} < 2$, што је једнако максималном растојању између две тачке на једном луку. Пошто имамо 10 тачака, по Дирихлеовом принципу на једном оддевет лукова налазиће се две тачке чије растојање мора бити мање од 2.

Пример 5.Дат је квадрат и девет различитих правих у његовој равни. Свака од ових правих дели квадрат на 2 трапеза, чије се површине односе као 2 : 3. Докажи да међу датим правама постоје 3 које имају заједничку тачку. (СФРЈ, Савезно такмичење, 1989, VIII разред).

Решење:Нека је $ABCD$ дати квадрат, нека су тачке M, L, N и K средине страница редом AB, BC, CD и DA, а p_1 једна од датих правих. Површина трапеза је $P = m \cdot h$ ($m -$ средња линија трапеза, $h -$ висина трапеза). Површине P_1 и P_2 трапеза одређених правом p_1 дају једнакост $P_1 : P_2 = 2 : 3$, тј. $m_1 \cdot a : m_2 \cdot a = 2 : 3$ (висине ових трапеза једнаке су страници квадрата, а m_1 и m_2 су два дела дужи која спаја средине супротних страница квадрата $m_1 + m_2 = a$). Одавде следи $m_1 : m_2 = 2 : 3$.

Дакле, тражене праве морају проћи кроз тачку P, за коју је $KP : PL = 2 : 3$ или кроз тачку Q за коју је $LQ : QK = 2 : 3$ ($P, Q \in KL$) или кроз тачку R за коју је $MR : RN = 2 : 3$ или кроз тачку S за коју је $NS : SM = 2 : 3$ ($R, S \in MN$). Ако 9 правих пролази кроз 4 тачке, тада најмање 3 морају проћи кроз једну од ових тачака (9 = 4· $2 + 1$, 4 тачке – „кутије”, 9 правих – „предмети”). (Слика 4)



Слика 4

Пример 6.Нека је A подскуп скупа $S = \{1, 2, \ldots, 1\,000\,000\}$ који садржи тачно 101 елемент. Доказати да постоје бројеви $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ из S такви да су скупови

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\} \text{за} j = 1, 2, \ldots, 100$$

по паровима дисјунктни. (Међународна математичка олимпијада, 2003)

Решење:

Нека је $D = \{x - y \mid x, y \in A\}$. Број елемената скупа D није већи од $101 \cdot 100 + 1$. Скупови $A + t_i$ и $A + t_j$ су дисјунктни ако и само ако $t_i - t_j \notin D$. Довољно је још изабрати 100 таквих елемената $t_1, t_2, \dots, t_{100}$.

Нека је t_1 произвољан елемент скупа $S \setminus D$ (такав елемент постоји, пошто је број елемената скупа S већи од броја елемената скупа D). Нека је изабрано k ($k \leq 99$)елемената $t_1, t_2, \dots, t_k$из D, тако да разлика произвољна два од њих не припада скупу D. Елемент t_{k+1} се бира тако да припада скупу S и не припада ниједном од скупова $t_1 + D$, $t_2 + D, \dots, t_k + D$ (ово је могуће, пошто сваки од претходних скупова садржи највише $101 \cdot 100 + 1$ елемената, тј. њихова унија садржи највише $99 \cdot (101 \cdot 100 + 1) = 999999 < 1000000$ елемената).

7. Примена Дирихлеовог принципа у високошколском образовању

Као што се могло видети из претходних примера Дирихлеов принцип може се примењивати приликом решавања задатака из различитих области математике, као што су комбинаторика, геометрија, теорија бројева, алгебра итд.На разним факултетима на којима је математика обавезан предмет Дирихлеов принцип се увелико користи за доказивање различитих тврђења.

Као што смо напоменули Дирихлеов принцип се примењује у многим подручјима математике.Сам Дирихле примењивао га је у при доказивању постојања решења**Пелове**[6] једначине.Да бисмо ово тврђење доказали навешћемо и Дирихлеову теорему о апроксимацији ирационалних бројева рационалним.

Теорема 7.1.(Дирихлеова теорема) Нека је αирационалан иn природан број. Тада постоје $p \in \mathbb{Z}$и $q \in \{1, 2, \dots, n\}$ такви да је $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{(n+1)q}$.

Доказ.

Неједнакост из тврђења је еквивалентна неједнакости $|q\alpha - p| < \frac{1}{n+1}$.

Нека, $\{x\}$означава разломљени део реалног броја x. Међу $n + 2$ бројева $0, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{n\alpha\}, 1$ у интервалу $[0,1]$, бар два се разликују за мање од $\frac{1}{n+1}$. Ако су то бројеви $\{k\alpha\}$ и $\{l\alpha\}$, довољно је поставити $q = |k - l|$, а ако су то $\{k\alpha\}$, 0 или 1, довољно је поставити $q = k$; у оба случаја p је цео број најближи броју $k\alpha$.■

Последица 7.1.Ако је α произвољан реалан број, онда постоји бесконачно много парова природних бројева (p, q) таквих да је $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.

Доказ.

Одмах следи из Дирихлеове теореме. ■

Дефиниција 7.1.Пелова једначина је једначина облика $x^2 - dy^2 = 1,\ x, y \in \mathbb{Z},$ за дато $d \in \mathbb{N}$које није потпуни квадрат.

Поставља се питање зашто је у дефиницији Пелове једначине важан услов да d није потпуни квадрат. Ако јесте, рецимо $d = c^2$, онда се једначина $x^2 - dy^2 = 1$ може факторисати као $(x - cy)(x + cy) = 1$, а овакве једначине умемо тривијално да решимо. Зато у наставку текста подразумевамо да d није квадрат.

Једначину $x^2 - dy^2 = 1$ још увек можемо разложити на чиниоце:

[6]John Pell (1611 - 1685), енглески математичар

$$\left(x+y\sqrt{d}\right)\left(x-y\sqrt{d}\right)=1.$$

Да бисмо искористили овакво разлагање, морамо да радимо са скупом свих бројева облика $x+y\sqrt{d}$, где су $x,y\in\mathbb{Z}$. Овај скуп означавамо са $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ и лако се може доказати да он представља један алгебарски прстен. Важно је да приметимо да збир, разлика и производ два елемента скупа остају у скупу:

$$\left(x+y\sqrt{d}\right)\pm\left(u+v\sqrt{d}\right)=(x\,\pm\,u)+(y\,\pm\,v)\sqrt{d},$$

$$\left(x+y\sqrt{d}\right)\left(u+v\sqrt{d}\right)=(xu+dyv)+(xv+yu)\sqrt{d}.$$

Такође је веома битно да су за дато $z\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ цели бројеви x,y за које је $z=x+y\sqrt{d}$ јединствено одређени. Заиста, из $x+y\sqrt{d}=x_1+y_1\sqrt{d}=z$ и $y\neq y_1$ би следило $\sqrt{d}=\frac{x_1-x}{y-y_1}$, што је немогуће јер је $\sqrt{d}$ ирационално.

Дефиниција 7.2. Конјугат броја $z=x+y\sqrt{d}$ се дефинише као $\bar{z}=x-y\sqrt{d}$, а норма броја z као $N(z)=z\bar{z}=x^2-dy^2\in\mathbb{Z}$.

Теорема 7.2. Норма и конјугат су мултипликативни:

$$N(z_1z_2)=N(z_1)N(z_2) \text{ и } \overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}.$$

Доказ.

Ако је $z_1=x_1+y_1\sqrt{d}$ и $z_2=x_2+y_2\sqrt{d}$, директно из дефиниције следи

$$\begin{aligned}\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}&=\left(x_1-y_1\sqrt{d}\right)\left(x_2-y_2\sqrt{d}\right)=(x_1x_2+dy_1y_2)-(x_1y_2+x_2y_1)\sqrt{d}=\\&=\overline{(x_1x_2+dy_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\sqrt{d}}=\overline{z_1z_2}\end{aligned}$$

Из последње једнакости следи $N(z_1z_2)=z_1z_2\overline{z_1z_2}=z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2}=N(z_1)N(z_2)$. ■

Појам норме нам омогућује да једначину $x^2-dy^2=1$ запишемо у еквивалентном облику

$$N(z)=1,\qquad \text{где је } z=\ x-y\sqrt{d}\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right].$$

Специјално, Пелова једначина је еквивалентна једначини $N(z)=1,\ z\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$. Надаље ћемо често користити ове ознаке.

Како су z и $\bar{z}$ истовремено решења једначине Пеловог типа, убудуће подразумевамо без смањења општости да је $z>0$.

Пелова једначина има тривијално решење $(x, y) = (1, 0)$, које одговара решењу $z = 1$ једначине $N(z) = 1$. Ако знамо и најмање нетривијално решење(α, β)(то овде значи оно позитивно решење код којег је$\alpha + \beta\sqrt{d}$најмање), онда знамо сва решења. То показује и следеће тврђење:

Теорема 7.3.Ако је α најмањи елемент скупа $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ такав да је $\alpha > 1$ и $N(\alpha) = 1$, онда су сви елементи $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ за које је $N(z) = 1$ дати са $z = \pm\alpha^n, n \in \mathbb{Z}$.

Доказ.

Претпоставимо да је $N(z) = 1$ за неко $z > 0$. Постоји тачно један цео број k за који је $\alpha^k \leq z < \alpha^{k+1}$. Тада за број $z' = z\alpha^{-k} = z\bar{\alpha}^k$ важи $1 \leq z' < \alpha$ и $N(z') = N(z)N(\alpha)^{-k} = N(z) = 1$. Из минималности α следи да је $z' = 1$, тј. $z = \alpha^k$. ∎

Последица 7.3.Ако је (α, β) најмање решење Пелове једначине за дато d, онда су сва природна решења $(x, y) = (x_n, y_n)$ те једначине дата са $x_n + y_n\sqrt{d} = (\alpha + \beta\sqrt{d})^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Приметимо да су x и y одређени из $z = x + y\sqrt{d}$ формулама $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$и $= \frac{z-\bar{z}}{2\sqrt{d}}$. Тако су сва решења Пелове једначине дата са $(x, y) = (x_n, y_n)$, где је

$$x_n = \frac{\alpha^n + \bar{\alpha}^n}{2} \quad \text{и} \quad y_n = \frac{\alpha^n - \bar{\alpha}^n}{2}$$

Сада ћемо помоћу Дирихлеове теореме о апроксимацији ирационалних бројева рационалним да докажемо да Пелова једначина увек има нетривијално решење.

Теорема 7.4.Пелова једначина $x^2 - dy^2 = 1$ има бар једно решење у скупу природних бројева.

Доказ.

Тврђење Последица 7.1.примењено на $\alpha = \sqrt{d}$ говори да постоји бесконачно много парова природних бројева (p, q) за које је $\frac{1}{q^2} > \left|\sqrt{d} - \frac{p}{q}\right| = \frac{|p^2 - dq^2|}{q^2\left(\frac{p}{q} + \sqrt{d}\right)}$, што је еквивалентно са $|p^2 - dq^2| < \frac{p}{q} + \sqrt{d}$. Како је $\frac{p}{q} + \sqrt{d} < 2\sqrt{d} + 1$, следи да $|p^2 - dq^2| < 2\sqrt{d} + 1$ важи за бесконачно много парова природних бројева p, q.

Према томе, постоји цео број $n, |n| < 2\sqrt{d} + 1$, такав да једначина $u^2 - dv^2 = n$ има бесконачно много решења (u, v) у скупу $\mathbb{N}$. Међу овим решењима постоје два различита рецимо (u_1, v_1)и (u_2, v_2), који задовољавају $u_1 \equiv u_2$ и $v_1 \equiv v_2 (\mathrm{mod}\ n)$.

Означимо $\omega_1 = u_1 + v_1\sqrt{d}$ и $\omega_2 = u_2 + v_2\sqrt{d}$, и нека је $\omega_1 > \omega_2$. Посматрајмо број $z = \frac{\omega_1}{\omega_2} > 1$.

$$z = \frac{\omega_1 \overline{\omega_2}}{n} = \frac{u_1 u_2 - d\, v_1\, v_2}{n} + \frac{u_2\, v_1 - u_1\, v_2}{n}\sqrt{d}$$

У горњој једнакости коефицијенти $x = \frac{u_1 u_2 - d\, v_1\, v_2}{n}$ и $y = \frac{u_2\, v_1 - u_1\, v_2}{n}$ су цели бројеви, што следи из конгруенција

$$u_1 u_2 - d\, v_1\, v_2 \equiv u_1^2 - d v_1^2 \equiv 0 \text{ и } u_2\, v_1 - u_1\, v_2 \equiv u_1\, v_1 - u_1\, v_1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ n).$$

Закључујемо да је z елемент скупа $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. При том је $|z| = \frac{|\omega_1|}{|\omega_2|} = 1$, па зато z одређује једно решење (x, y) Пелове једначине.■

У наредном одељку показаћемо примену Дирихлеовог принципа у теорији бројева тј.утврдићемо да се сваки прост број облика $4k + 1$ може записати као збир два квадрата. Да бисмо то закључили неопходно нам је следеће тврђење:

Теорема 7.5.За било која два цела броја n и u, постоје цели бројеви x и y различити од нуле тако да важи $-\sqrt{n} \leq x \leq \sqrt{n}, -\sqrt{n} \leq y \leq \sqrt{n}$ и $x - uy$ је дељиво са n.

Доказ.

Нека јеk цео број тако да важи$k \leq \sqrt{n} < k + 1$. Разматраћемо бројеве облика $x - uy$ за које важи да су x и y из скупа $\{0,1,2, \dots, k\}$. За x и yпостоји $k + 1$ могућност, тако да имамо $(k + 1)^2$ могућих бројеваоблика $x - uy$. Пошто важи да је $n < (k + 1)^2$ тада по Дирихлеовом принципу постоје два која дају исти остатак при дељењу са n. Ако су то бројеви $x_1 - uy_1$ и $x_2 - uy_2$, њихова разлика $(x_1 - x_2) - u(y_1 - y_2)$ је дељива са n. Ако узмемо $x = x_1 - x_2$ и $y = y_1 - y_2$, ови бројеви су различити од нуле јер су парови $(x_1,\ y_1)$ и $(x_2,\ y_2)$ различити. Такође, x и y су у жељеним интервалима.■

Да бисмо доказали да можемо сваки прост број облика $4k + 1$ представити као збир два квадрата неопходна нам је следећа теорема.

Теорема 7.6.За сваки прост број p облика $4k + 1$ постоји u такво да је $u^2 + 1$ дељиво са p.

Ову теорему можемо доказати и комбинаторно, рачунајући колико парова бројева a, b из $\{0,1,2, \dots, p - 1\}$ задовољава $ab \equiv -1 \ (\mathrm{mod}\ p)$ и колико парова различитих бројева a, b задовољава $ab \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ p)$, али нећемо наводити тај доказ.

Теорема 7.7.Сваки прост број p облика $4k + 1$ може се записати као збир два квадрата.

Доказ.

Нека је u цео број тако да је $u^2 + 1$ дељиво са p. Користећи Теорему 7.3.знамо да постоје цели бројеви x и y различити од нуле тако да важи $-\sqrt{p} \leq x \leq \sqrt{p}, -\sqrt{p} \leq y \leq \sqrt{p}$ и $x - uy$ је дељиво са p. Услови су еквивалентни са $x^2 \leq p, y^2 \leq p$.Пошто је p прост број, важи да није потпун квадрат, па су неједнакости строге. Пошто је $x \equiv uy$ (mod p), имамо $x^2 \equiv u^2y^2 \equiv -y^2$ (mod p), а из тога следи да је $x^2 + y^2$ дељиво са p. Међутим,

$$0 < x^2 + y^2 < 2p.$$

Одавде имамо да важи $x^2 + y^2 = p$.■

Такође важи да се прост број p облика $4k + 1$ може записати као збир два квадрата на јединствен начин, тј.ова примена Дирихлеовог принципа је пронашла јединствен пар који задовољава овај услов. Овим показујемо да иако техника делује елементарно, даје веома прецизне резултате.

Навешћемо малу Фермаову теорему, јер се при њеном доказивању користи Дирихлеов принцип и његова формулација из теореме 3.5.Такође овим илуструјемо и примену овог принципа у алгебри.

Теорема 7.8.(Мала Фермаова теорема) Ако је p прост и a цео број узајамно прост са p, онда важи $a^{p-1} \equiv 1(\text{mod}\, p)$.

Доказ.

Могући остаци при дељењу са pсу $0, 1, \dots, p - 1$. Посматрајмо низ бројева $a, 2a, 3a, \dots, (p - 1)a$. Остатака при дељењу са pима p, а чланова овог низа има $p - 1$, па из Дирихлеовог принципа важи да постоје два члана тако да је $ai \equiv aj(\text{mod}\, p)$ за неко $0 \leq i < j \leq p - 1$, тада имамо $i \equiv j(\text{mod}\, p)$.

Из овога можемо закључити да су сви чланови низа међусобно различити и различити од нуле, тј., они морају неким редом бити конгруентни са $1, 2, 3, \dots, p - 1$. Множењем свих конгруенција добијамо

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \dots \cdot (p - 1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p - 1)(\text{mod}\, p), \text{ одакле важи}$$

$$a^{p-1}(p - 1)! \equiv (p - 1)!\,(\text{mod}\, p).$$

Како је $(p, (p - 1)!) = 1$, следи $a^{p-1} \equiv 1(\text{mod}\, p)$. ■

У оквиру енумеративне комбинаторике Дирихлеов принцип се користи за увођење **Ремзијевих**[7] бројева.Неформално говорећи, Ремзијева теорија каже да у довољно великом броју објеката, увек постоји правилна структура унапред задане величине.

Основну идеју можемо илустровати једноставним примером, који се често појављивао као задатак на математичким такмичењима.

[7]Frank Plumpton Ramsey (1903 - 1930), британски филозоф, математичар и економиста

Пример 1.Доказати да у групи од шест људи увек вреди бар једна од следећих тврђења:

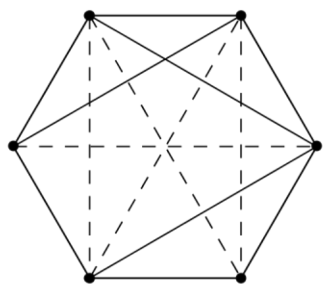
а) Постоје три човека тако да се свака два познају.

б) Постоје три човека тако да се никоја два човека међу њима не познају.

Решење овог тврђења је већ илустровано доказом леме из пете главе у оквиру осмог примера.

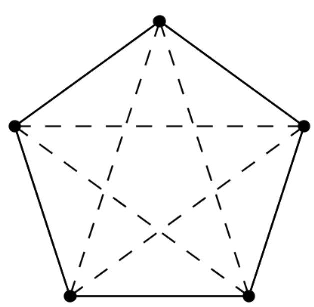
Претходно разматрање се може згодно описати „графички”.Људе представимо као тачке у равни, тако да су сваке три тачке у том скупу неколинеарне.Ако се два човека познају, одговарајуће тачке спојимо са пуном линијом, а ако се не познају са испрекиданом.Тако су сваке две тачке спојене пуном или испрекиданом линијом.

Управо смо показали да се у скупу од шест тачака, у којем су сваке две тачке спојене пуном или испрекиданом линијом, увек може наћи комплетан троугао којем су све ивице или „пуне” или „испрекидане”. (Слика 5)



Слика 5

У групи од пет људи тврђење из претходног примера не мора да вреди: Ако су странице пуне а дијагонале испрекидане, нема комплетног троугла. (Слика 6)



Слика 6

Мотивисани претходним примером можемо поставити питање:

Да ли за произвољне природне бројевеp и q постоји најмањи природан број $R(p,q)$тако да у сваком друштву са бар $R(p,q)$ људи постоји:

а) или њих p, тако да се свака двојица међу њима познају,

б) или њих q између којих се никоја двојица не познају?

И ово питање има исту геометријску интерпретацију као и у претходном примеру. Наиме, питамо се да ли за сваки скуп од бар $R(p,q)$ тачака у равни у којем никоје три тачке нису колинеарне, и у којем су сваке две тачке спојене или пуном или испрекиданом линијом вреди:

а) или постоји p-тоугао у којем су све странице и све дијагонале пуне;

б) или постоји q-тоугао у којем су све дијагонале и странице испрекидане?

На почетку приметимо да за све $p,q \geq 2$ вреди $R(p,2) = p$и $R(2,q) = p$. Пример 1.нам каже да је $R(3,3) = 6$.

За произвољне природне бројеве p и q, у овом тренутку, не знамо да ли број $R(p,q)$ уопште постоји. Можда је могуће n тачака у равни (ма колико n био велики) спојити пуним и испрекиданим линијама тако да не постоји комплетан p-тоугао од пуних линија, нити комплетан q-тоугао од испрекиданих линија?

Теорема 7.9.(Ремзи)Нека су p и q природни бројеви већи од један. Ако постоје бројеви $R(p,q-1)$и $R(p-1,q)$, тада постоји и $R(p,q)$ и вреди:

$$R(p,q) \leq R(p,q-1) + R(p-1,q). \qquad (1)$$

Доказ.

Уочимо скуп од $n = R(p,q-1) + R(p-1,q)$ људи, и у том скупу одаберемо једног човека. Преосталих $n-1$ људи распоредим у две групе:

а) у првој групи су сви они који познају одабраног;

б) другу групу чине људи који не познају одабраног човека.

По Дирихлеовом принципу, или се у првој групи налази бар $R(p-1,q)$ људи, или их у другој групи има бар $R(p,q-1)$.

Ако у првој групи постоји $R(p-1,q)$ људи, на основу дефиниције броја $R(p-1,q)$, вреди бар једно од следећа два тврђења:

а) Међу њима постоји $p-1$ особа тако да се сваке две од њих познају. Када им се дода одабрани човек, који их све познаје, то је тражених p људи између којих се сви познају.

б) Међу тим људима постоји q особа међу којима се никоја два не познају.

На сличан начин показаћемо да неједнакост важи и ако у другој групи постоји $R(p,q-1)$људи.

Из неједнакости (1) се индукцијом по $p+q$ може лако показати да за све p и q постоји најмањи природан број$R(p,q)$. ■

Број$R(p,q)$, чију смо егзистенцију за све p и q управо показали, назива се **Ремзијев број**.

На основу неједнакости (1) можемо закључити да је $R(4,3) \leq R(4,2) + R(3,3) = 10$. Међутим,то није тачна вредност за Ремзијев број $R(4,3)$.

Пример 2.Доказати да је $R(4,3) \leq 9$.

Решење:

Претпоставимо да у групи од девет људи постоји особа *A* која познаје бар шест људи. Како је $R(3,3) = 6$, међу том шесторицом или постоје тројица незнанаца (чиме је доказ завршен), или постоје три међу којима се сви познају. Та тројица познаника, заједно са особом *A* чине тражену четворку познаника.

На сличан начин задатак можемо решити ако постоји особа *B* која не познаје бар четири човекау тој групи.За ту четворицу, због $R(4,2) = 4$ важи или се сва четворица међусобно познају(што је опет крај доказа), или постаје пар који се не познаје.Ако се том пару незнанаца дода *B*, добили смо тројку људи који се не познају.

Једини случај који није обухваћен претходним разматрањем је када свака од девет особа има тачно пет познаника и тачно три незнанца.Међутим, таква група људи не може да постоји. Наиме, ако би то било могуће, број парова познаника(пуних дужи у геометријској интерпретацији) у том друштву је $\frac{9 \cdot 5}{2}$, што није природан број.■

За велике бројеве p и q, разлика између стварне вредности Ремзијевог броја $R(p,q)$ и оне „процењене” применом неједнакости (1) је још и већа.

Оно што је свакако веома занимљиво је да се тачне вредности Ремзијевих бројева и за релативно мале бројеве p и q веома тешко рачунају.На пример, тачне вредности за $R(5,5)$ и $R(6,4)$ су још непознате. Данас је познато да важи

$$43 \leq R(5,5) \leq 49 \text{ и } 35 \leq R(6,4) \leq 41.$$

У досадашњим разматрањима смо посматрали скуп X са r елемената и све двочлане подскупове тог скупа смо делили у две групе (у геометријској интерпретацији смо све дужи бојали са две боје). Елементи скупа X су били људи или тачке у равни, а групе су биле „пуна” и „испрекидана” линија, односно, познаници или незнанци.

Ако је број r довољно велики, на основу теореме 7.5 знамо:

-или постоји p-члани подскуп одX у којем су сви двочлани подскупови обојени једном бојом.

- или постоји q-члани подскуп скупа X којем су сви двочлани подскупови обојени другом бојом.

Ово разматрање се може на природан начин уопштити.Можемо са неколико боја $b_1, b_2, \dots, b_c$ обојити све $k -$ члане подскупове од X. Ако скуп X има довољно велики број елемената, да ли можемо очекивати да увек (за било какво бојење $k -$ чланих подскупова од X) постоји $Y \subseteq X$ жељене величине, којем су сви $k -$ члани подскупови обојени истом бојом? Одговор на то питање даје следећа теорема.

Теорема 7.10.(Уопштени Ремзијеви бројеви)Нека су дати природни бројеви $k, c, a_1, a_2, \dots, a_{c-1}, a_c$. Тада постоји најмањи природан број $R = R(k, c; a_1, \dots, a_c)$ такав да вреди:

Ако се сви $k -$ члани подскупови неког скупа од Rелеменатаобоје са c боја $b_1, b_2, \dots, b_c$ тада постоји $i \in [c]$ и неки $a_i -$члани подскуп посматраног скупа којем су сви $k -$ члани подскупови обојени истом бојом b_i.

Бројеви $R(k, c; a_1, \dots, a_c)$ се називају уопштени Ремзијеви бројеви. У овој терминологији је $R(p, q) = R(2, 2; p, q)$.Даље, можемо приметити да је Дирихлеов принцип само специјалан случај Ремзијеве теорије.

Доказ.

Користимо индукцију по k и по $a_1 + a_2 + \dots + a_c$ На основу индуктивне претпоставке, знамо да постоје бројеви

$$A_i = R(k, c; a_1, \dots, a_{i-1}, a_i - 1, a_{i+1}, \dots, a_c), \text{ за све } i = 1, 2, \dots, c.$$

Такође, по индуктивној претпоставци постоји број

$$R = R(k - 1, c; A_1, \dots, A_c) + 1.$$

Нека је X произвољан скуп саR елемената и $f: \binom{X}{k} \to \{b_1, b_2, \dots, b_c\}$ произвољно бојење свих $k -$ чланих подскупова од X. Одаберимо произвољан $x \in X$ и уочимо скуп $Z = X \setminus \{x\}$.

Нека је g: $\binom{Z}{k-1} \to \{b_1, b_2, \dots, b_c\}$бојење$(k - 1) -$ чланих подскупова од Z дефинисано са $g(S) = f(S \cup \{x\})$.

По индуктивној претпоставци, постоји $i \in [c]$ и $Y \subset T$са A_i елемената чији су сви $(k - 1-$*члани* подскупови обојени бојом bi.

Како A_iима $R(k, c; a_1, \dots, a_{i-1}, a_i - 1, a_{i+1}, \dots, a_c)$ елемената, из дефиниције уопштених Ремзијевих бројева знамо да постоји $j \in [c]$и $Y \subset T$са a_j елемената (осим за $j = i$, када скуп Y има $a_i - 1$ елемената) чији су сви $k -$ члани подскупови обојени са бојом b_j. Ако је $j = i$ и

$|Y| = a_i - 1$,у тај скуп додамо елемент x и добићемо $a_i -$ члани подскуп од X са траженим својством.■

Један од најпознатијих резултата у теорији бројева је и следеће тврђење које је блиско Ремзијевој теорији.

Теорема 7.11. (Ван дер Варден[8]) За све $k, r \in \mathbb{N}$ постоји природан број $W(k,r)$,такав да за свако бојење бројева из $[W(k,r)]$ са r боја постоји једнобојан аритметички низ дужинеk.

Постоји и бесконачна варијанта ван дер Варденове теореме.

Теорема 7.12.Ако је скуп целих бројева подељен на коначно много дисјунктних подскупова, тада се за сваки $n \in \mathbb{N}$ у неком од подскупова налази аритметички низ дужине n.

Навешћемо и један пример који је био наСрпској математичкој олимпијади 2008.године у коме се примењује претходна теорема.

Пример 3.Свака тачка равни је обојена са једном од три боје. Доказати да постоји троугао за који важи:

а) сва 3 темена тог троугла су обојена истом бојом;

б) полупречник описане кружнице тог троугла је 2008;

в) један угао троугла је два или три пута већи од неког од друга два угла.

Решење:

По ван дер Верденовој теореми, постоји k $(= W(4,3))$, тако да при подели скупа $\{1, 2, \dots, k\}$ на три подскупа, у једном од њих постоји аритметичка прогресија дужине 4. Следи да у бојењу темена правилног $2k + 1 -$тоугла уписаног у круг полупречника 2008 са три боје, постоје темена A, B, C, D обојена истом бојом, тако да су централни углови лукова $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}$ једнаки, па је $\triangle ABD$ тражени.

Још једна важна примена Дирихлеовог принципа се односи на низове бројева. Питање на које желимо да одговоримо је: „Ако имамо довољно велики низ различитих бројева $c_1, c_2, \dots c_k$, када у њему постоји растући подниз или опадајући подниз?"Прецизније, ако су дата два позитивна цела броја aиb, да ли постоји k довољно велико тако да било који низ од k различитих бројева садржи или растући подниз од $a + 1$ бројева или опадајући низ од $b + 1$ бројева.

[8]Bartel Leendert van der Waerden (1903 - 1996), холандски математичар

Пошто знамо да постоје Ремзијеви бројеви лако је видети да такво k постоји.То важи јер ако наш низ садржи бар $R(a+1, b+1)$ бројева, ми можемо сваки број представити као тачку у равни.Сваке две тачке повезујемо плавом линијом ако је низ који формирају растући или зеленом уколико образују опадајући низ.Тада, постоји $a+1$ тачка које су повезане само плавим линијама или $b+1$ тачка које су повезане само зеленим линијама.Овај скуп представља подниз који смо тражили.

Ердеш - Секереш[9]теорема даће нам прецизнију процену броја k описаног горе.

Теорема 7.13. (Ердеш - Секереш)Ако је дат било који низ од $ab+1$ различитих бројева, увек постоји растући подниз од бар $a+1$ бројева или опадајући подниз од $b+1$ бројева.

Доказ.

Посматрамо низ $c_1, c_2, \dots c_{ab+1}$ који садржи $ab+1$ различитих бројева. Сваком броју c_j овог низа придружићемо пар (a_j, b_j) позитивних целих бројева, где је a_j дужина најдужег растућег подниза који се завршава са c_j, а b_j је дужина најдужег опадајућег подниза који се завршава са c_j.

За два броја $c_i u c_j$, $i < j$ у низу доказаћемо да њихови парови $(a_i, b_i) u (a_j, b_j)$ не могу бити једнаки. Ако је $c_i < c_j$, можемо c_j додати најдужем растућем поднизу који се завршава са c_i, тада имамо растући подниз дужине $a_i + 1$ који се завршава са c_j. Одавде следи $a_j \geq a_i + 1$. Ако је $c_i > c_j$, тада можемо c_j додати најдужем опадајућем поднизу који се завршава са c_i, тада имамо опадајући подниз дужине $b_i + 1$ који се завршава са c_j. Одавде важи $b_j \geq b_i + 1$.

Ако не постоје поднизови дужине које тражимо, тада за свако $1 \leq j \leq ab+1$ имаћемо $1 \leq a_j \leq a$и $1 \leq b_j \leq b$. Ово ће нам дати бар ab различитих парова.Пошто имамо $ab+1$ парова, по Дирихлеовом принципу бар два морају бити једнака, што је контрадикција. ■

Такође Дирихлеов принцип има важну улогу и у доказу следеће теореме.Из ове теореме видимо да се помоћу овог принципа могу решавати и проблеми из геометрије.

Нека је $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ јединична кружница у равни.

Теорема 7.14.Нека је α неки реалан број такав да $\frac{\alpha}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Даље, нека је $f: S^1 \to S^1$ ротација за угао α и нека је P произвољна тачка на кружници S^1. Тада, за сваку тачку $A \in S^1$ и за сваки $\varepsilon > 0$постоји природан број m такав да је дужина лука $\overline{Af^m(P)}$ мања од ε.

Доказ.

[9] George Szekeres (1911 - 2005), мађарски математичар

За произвољан $\varepsilon > 0$ одаберимо $n \in \mathbb{N}$ такав да је $\frac{2\pi}{n} < \varepsilon$. За тај природан број n поделимо кружницу S^1 на n једнаких делова.

Посматрајмо скуп $Z = \{f^k(P) : k \in \mathbb{N}\}$.Како је $\frac{\alpha}{2\pi}$ ирационалан, све тачке из скупа Z су различите. Зато, по Дирихлеовом принципу, постоје $i, j \in \mathbb{N},\ i \neq j$ такве да су $f^i(P) u f^j(P)$ унутар истог интервала. Другим речима, дужина лука између $f^i(P) u f^j(P)$ је мања од $\frac{2\pi}{n}$.

Нека је $d = |i - j|$. Суседне тачке у низу $P, f^d(P), f^{2d}(P), \ldots$су удаљене мање од $\frac{2\pi}{n} < \varepsilon$. Стога ће у интервалу дужине ε око тачке A сигурно бити нека тачка облика $f^{kd}(P)$.■

Дирихлеов принцип је нашао своју примену и у математичкој анализи иако се то експлицитно не наглашава.Примену уочавамо у доказу следеће теореме.

Теорема 7.15.Ако је метрички простор X компактан, тада:

1) сваки његов бесконачни подскуп има бар једну тачку нагомилавања;

2) сваки бесконачни низ у X има подниз који конвергира у X.

Доказ.

Нека је A произвољан бесконачан подскуп компактног простора X. Претпоставимо, супротно тврђењу 1) теореме, да A нема ниједну тачку нагомилавања. То значи да за сваку тачку $x \in X$ постоји околина $U(x)$ која не садржи ниједну тачку скупа A, осим можда саме тачке x. Из отвореног покривача $\{U(x) | x \in X\}$ компактног простора X издвајамо коначан потпокривач – он је и коначан покривач скупа A, а према конструкцији скупова $U(x)$ може садржати највише коначно много тачака скупа A. Дакле, скуп A је коначан, супротно претпоставци.

Нека је (a_n) бесконачан низ у X. Из тврђења 1) теореме следи да постоји бар једна тачка нагомилавања a овог низа.Из дефиниције тачке нагомилавања следи да постоји подниз овог низа који конвергира ка a.■

Из следеће теореме закључујемо који су услови неопходни за компактност.Навешћемо је без доказа.

Теорема 7.16.Kје компактан скуп у метричком простору X ако и само ако је затворен и тотално ограничен.

Пример 4.На под собе површине 1 постављено је 2 тепиха. Теписи су произвољног облика, а површина сваког је не мања од $\frac{1}{2}$. Доказати да постоји тачка прекривена са оба тепиха.

Решење:

Нека је X под, нека први тепих прекрива скуп A, а други скуп B и нека је $P(Y)$ површина скупа Y. Нека су χ_A и χ_B карактеристичне функције ових скупова. Онда је $\chi_A(x) + \chi_B(x) = 2$ ако и само ако $x \in A \cap B$. Следи, ако је $A \cap B = \emptyset$ и при условима задатка, важи

$$1 < P(A) + P(B) = \int_X \chi_A(x)dx + \int_X \chi_B(x)dx = \int_X \big(\chi_A(x) + \chi_B(x)\big)dx \leq \int_X dx = 1,$$

што је немогуће.

Пример 5. На под собе површине 5 постављено је 9 тепиха. Теписи су произвољног облика, а површина сваког је 1. Доказати да постоје два тепиха који се преклапају на скупу површине не мање од $\frac{1}{9}$.

Решење:

Нека је под X, нека је A_i $(1 \leq i \leq 9)$ област коју прекрива i-ти тепих и $P(Y)$ површина скупа Y. Нека је $B_i = A_i \setminus \left(\bigcup_{j \neq i} A_j\right)$. Ако је $P(A_i \cap A_j) < \frac{1}{9}$ за све $i \neq j$, следи

$$1 = P(B_i) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq 9 \\ j \neq i}} P\big(A_i \cap A_j\big), \qquad i \in \{1, \dots, 9\},$$

притом важи $\sum_i P(B_i) + \sum_{i \neq j} P\big(A_i \cap A_j\big) \leq P(X)$, одакле је, сабирањем

$$9 = \sum_i P(B_i) + 2\sum_{i \neq j} P\big(A_i \cap A_j\big) \leq 5 + \sum_{i \neq j} P\big(A_i \cap A_j\big) \leq 5 + 36 \cdot \frac{1}{9} = 9,$$

што је немогуће, па се бар два тепиха секу по скупу површине не мање од $\frac{1}{9}$.

Претходни примери нас упућују ка једном од могућих уопштења Дирихлеовог принципа, у којем се „класичан Дирихлеов принцип” може видети као дискретна варијанта. Навешћемо само најосновнију варијанту, која је и уопштење четвртог примера.

Теорема 7.17. Нека је (X, μ) мерљив простор и $A, B \in X$ такви да је $\mu(X) = 1$ и $\mu(A) + \mu(B) > 1$. Онда постоји бар једна тачка која припада скупу $A \cap B$.

Најпознатије уопштење овог облика је Борел[10]-Кантелијева[11] теорема. У наставку је дата формулација и доказ овог тврђења, као и једна њена примена.

Ако посматрамо низ скупова $A_1, A_2, \ldots \subseteq X$, тада можемо дефинисати

[10] Félix Édouard Justin Émile Borel (1871 - 1956), француски математичар
[11] Francesco Paolo Cantelli (1875 - 1966), италијански математичар

$$\overline{\lim} A_n = \lim_{N\to\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n$$

Скуп $\overline{\lim} A_n$ је скуп свих тачака које припадају бесконачно много скупова A_n, тј. нека врста „тачке нагомилавања” овог низа скупова.

Теорема 7.18. (Борел-Кантели) Нека је (X, μ) мерљив простор и нека су $A_1, A_2, \ldots \subseteq X$ скупови, такви да важи

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty.$$

Тада

$$\mu(\overline{\lim} A_n) = 0.$$

Доказ.

$$\mu\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right), \qquad \text{засвако} N$$

$$\leq \sum_{n \geq N} \mu(A_n), \qquad \text{субадитивностмере}$$

$$\to 0 \quad \text{када} N \to \infty, \qquad \text{попретпоставци.} \blacksquare$$

Лема 7.1.Нека је (X, μ) простор са мером $\mu(X) < \infty$. Онда је

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \mu(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n).$$

Доказ.

Нека је $B_N = \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n$ за $N \in \mathbb{N}$. Као у претходној леми B_N чини опадајући низ скупова, а како је $\mu(X) < \infty$, следи $\lim_{N\to\infty} \mu(B_N) = \mu(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n)$. Како је $A_N \subseteq B_N$, следи $\mu(A_N) \leq \mu(B_N)$, па је $\overline{\lim}_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n)$. $\blacksquare$

. **Лема 7.2.** Нека је m Лебегова мера на $\mathbb{R}$,Kкомпактан скуп и $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничен низ. Онда је $m(K) < m(\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n + K))$.

Доказ.

Како је m транслаторно инваријантна, важи $m(x_n + K) = m(K)$. Како је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничен, а K компактан, ако је $A_n = x_n + K$, следи да је $m(\bigcup_n A_n) < \infty$, па по претходној леми следи $m(K) = \lim_{n\to\infty} m(K) = \lim_{n\to\infty} m(A_n) \leq m\left(\overline{\lim}_{n\to\infty}(A_n)\right) = m(\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n + K))$. $\blacksquare$

Теорема 7.19. (Лузиноватеорема[12])Нека јеm Лебегова мера,$f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ Лебег мерљива функција и нека је $\mathcal{E} > 0$. Тада постоји Лебег-мерљив скуп $A \subseteq (a,b)$ такав да је $m((a,b)\backslash A) < E$ и f је непрекидна на A.

Теорема 7.20. (Фреше[13]) Нека је $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Лебег мерљива функција за коју је $f(x+y) = f(x) + f(y)$ за све $x, y \in \mathbb{R}$. Тада је $f(x) = \lambda x$ за све $x \in \mathbb{R}$, где је $\lambda = f(1)$.

Доказ.

Прво показујемо да тврђење важи за рационалне бројеве. Нека је $x = y = 0$, тада важи

$$f(0) = 2f(0), \text{ одакле следи да је } f(0) = 0.$$

Ставићемо да је $\lambda = f(1)$. Ако је $f(n) = \lambda n$ имамо:

$$f(n+1) = f(n) + f(1) = \lambda n + \lambda = \lambda(n+1)$$

Из дефиниције λ, имамо $f(n) = \lambda n$за$n = 1$.Индукцијом смо доказали да важи $f(n) = \lambda n$, засвако $n \in \mathbb{N}$. Општије, можемо доказати да за $x \in \mathbb{Q}$ и $n \in \mathbb{N}$ важи $f(nx) = nf(x)$. Јасно је да једнакост важи за $n = 1$. Уколико важи $f(nx) = nf(x)$, тада следи

$$f\big((n+1)x\big) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x).$$

Нека је xпозитиван рационалан број, који ћемо записати као $x = \frac{n}{m}$, $n, m \in \mathbb{N}$. Сада имамо,

$$mf(x) = mf\left(\frac{n}{m}\right) = f(n) = nf(1) = \lambda n$$

Ако ову једнакост поделимо са m добићемо $f(x) = f\left(\frac{n}{m}\right) = \lambda\left(\frac{n}{m}\right) = \lambda x$. Даље важи,

$$0 = f(0) = f\big(x + (-x)\big) = f(x) + f(-x)$$

па према томе важи $f(x) = -f(-x)$. Ако све заједно посматрамо имамо $f(x) = \lambda x$засвако $x \in \mathbb{Q}$.

Да бисмо доказали тврђење довољно је показати да је f непрекидна функција. Заиста, ако је f непрекидна и уколико посматрамо низ рационалних бројева x_n, који конвергира ка $x \in \mathbb{R}$, имали бисмо

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda x_n = \lambda x.$$

[12]Nikolai Nikolaevich Luzin (1883 - 1950), руски математичар
[13]Maurice Fréchet (1878 - 1973), француски математичар

Ако f није непрекидна, постоје $\varepsilon > 0$ и $(x_n)_{n\geq 0}$, тако да $x_n \to x_0$ кад $n \to \infty$ и $|f(x_n) - f(0)| > \varepsilon$за $n \in \mathbb{N}$. По Лузиновој теореми постоји компактан скуп K, тако да је $m(K) > 0$ и f је непрекидна на K. Низ $(x_n)_{n\geq 0}$ је конвергентан, па је и ограничен. По горњој леми је 0< $m(K) \leq m(\overline{\lim}_{n\to\infty}(-x_n + K))$, па је $\overline{\lim}_{n\to\infty}(-x_n + K) \neq 0$. Следи да постоји y и $\left(x_{n_k}\right)_{k\geq 1}$тако да $y + x_{n_k} \in K$ за свако $k \in \mathbb{N}$. Како $x_{n_k} \to x_0$кад $n \to \infty$, следи $y + x_0 \in K$ (K је компактан, па је и затворен), а како је f непрекидна на K, следи

$$\lim_{k\to\infty}\left(f\left(x_{n_k} + y\right) - f(x_0 + y)\right) = 0.$$

Међутим, ово је немогуће, јер је $\left|f\left(x_{n_k} + y\right) - f(x_0 + y)\right| = \left|f\left(x_{n_k}\right) - f(x_0)\right| > \varepsilon$, па следи да је f непрекидна. ■

Закључак

Дирихлеов принцип има за наставу математике два важна својства: једноставност и очигледност. Зато је његова примена могућа веома рано.Иако се најчешће на такмичењима из математике појављују задаци у којима се као један начин решавања намеће примена Дирихлеовог принципа, наставници би требало да освеже своја предавања и да на редовним часовима помену задатке из ове области.Циљ наставе математике је свакако да се ученици што више мисаоно активирају и развијају логичко мишљење и закључивање а то се лако може остварити применом Дирихлеовог принципа у задацима.

У средњој школи где ученици поседују довољно знања из математике требало би поменути нове и једноставније начине решавања појединих комбинаторних и геометријских задатака.Како би ученицима приближили математику неопходно је решавати и задатке из реалног живота у којима се може поменути и Дирихлеов принцип.

Дирихлеов принцип се примењује у различитим областима математике.Иако изгледа једноставно његова примена неопходна је и у високошколском образовању јер у великој мери олакшава доказивање важних математичких тврђења.

Литература

[1]Д. АДНАЂЕВИЋ, З. КАДЕЛБУРГ: *Математичка анализа I*, Математички факултет, Београд 2004

[2] И. АРАНЂЕЛОВИЋ, Ђ. КРТИНИЋ: *Two Extensions of an Steinhaus's Theorem*, Bulletin of IMVI, Vol. 2, No. 1, 2012

[3]A. BYSTROM: *The Pigeonhole Principle*, jul 2010

[4]A. ENGEL: *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag, New York 1998

[5]P. ERDÖS AND R. RADO:*A partition calculus in set theory,* Bull. Amer. Math. Soc. 62, 1956

[6]S. K. JAKOBSEN: *Cauchy's functional equation*, December 21, 2010

[7] D. JOJIĆ: *Elementi enumerativne kombinatorike*, Naša knjiga, Beograd

[8] Ђ. КРТИНИЋ: *Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2011. године*, Материјали за младе математичаре, свеска 52, ДМС 2012

[9]P. G. LEJEUNE DIRICHLET, R. DEDEKIND: *Vorlesungen über Zahlentheorie*, F. Vieweg und sohn, 1863

[10] П. МЛАДЕНОВИЋ, Ђ. КРТИНИЋ: *Међународне и Балканске математичке олимпијаде 1996-2006. године,* Материјали за младе математичаре, свеска 48, ДМС 2007

[11]H. MINKOWSKI: *Geometrie der Zahlen*, Leipzig: Teubner, 1905

[12]R. M. ROBINSON: *On the Simultaneous Approximation of Two Real Numbers*, Bull. Amer. Math. Soc., 1940

[13]D. STEVANOVIĆ, M. ĆIRIĆ, S. SIMIĆ, V. BALTIĆ: *Diskretna matematika-osnove kombinatorike i teorije grafova*, mart 2007

[14] P. SHI: *The Pigeonhole Principle-Simple but immensely powerful*, Department of Mathematics, Duke University, septembar 2009

[15]M. FLANAGAN: *The Pigeonhole Principle,* School of Electrical, Electronic and Communications Engineering, University College Dublin

[16] http://en.wikipedia.org/wiki/Pigeonhole_principle, приступљено 24. 11. 2013.

[17]http://www.jamestanton.com/, приступљено 24. 11. 2013.

[18]http://www.artofproblemsolving.com/Wiki/index.php/Pigeonhole_Principle, приступљено 19. 11. 2013.

[19]http://www.artofproblemsolving.com/Wiki/index.php/Pigeonhole_Principle, приступљено 19. 11. 2013.

[20]http://www.mycity.rs/Matematika/Primena-Dirihleovog-principa-u-resavanju-zadataka-VI-razred.html, приступљено 24. 11. 2013.

[21]. http://srb.imomath.com/dodatne/Pelovajedn_ddj.pdf, приступљено 24. 11. 2013