

Пјотр Матвејевић Огибалов
Татомир Анђелић

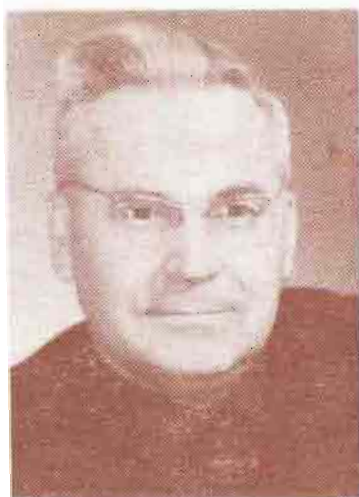
ицс 1.1.6. стални уџбеник

МЕХАНИКА ЉУСКИ И ПЛОЧА

Пјотр Матвејевич Огибалов
Татомир Анђелић

ицс 1.1.6. стални уџбеник

МЕХАНИКА
ЉУСКИ И ПЛОЧА



ПЈОТР МАТВЕЈЕВИЧ ОГИБАЛОВ, професор, доктор физичко — математичких наука, заслужни научни радник СССР-а, декан Механичко-математичког факултета Московског државног универзитета М. В. Ломоносова.

П. М. Огибалов, познати научник теоретичар и даровити експериментатор, има 120 научних публикација међу којима 5 монографија и 5 универзитетских уџбеника; неки његови радови и монографије објављени су на српскохрватском (Југославија), енглеском (САД), јапанском (Јапан) и вијетнамском (Северни Вијетнам) језику. Његова истраживања су посвећена проблемима примењене математике и механике реалних тела и средина, тј. теорије еластичности и пластичности као и високомолекуларних материјала, узимајући у обзир ефекте физичко-хемијских средина и физичке услове: притисак (високи и врло високи), температуру (ниску, високу), радијацију итд. Он је припремио за експериментална истраживања оригиналне мерне уређаје и инсталације. Дао је битан допринос проучавању практичних проблема механике добивши признање инжењерске јавности.

П. М. Огибалов је учествовао у редовима Совјетске армије против фашистичке Немачке, био је учесник ослобођења Београда (20. октобра 1944. год.). Има десет државних похвала и одликован је са петнаест одликовања од владе СССР-а и владе Југославије.

П. М. Огибалов

Т. П. Анђелић

МЕХАНИКА ЛЪУСКИ И ПЛОЧА

1.1.6. стални универзитетски уџбеник

издаје

Издавачко-информативни центар
студената (ИЦС), Београд, Балканска 4/III
телефон 325854
текући рачун ИЦС 60806-603-9282

за издавача

Александар Урдаревић

рецензенти

др Наталија Наерловић — Вељковић
др Стево Комљеновић

уредник

Небојша Узелац

коректор

Душан Медић

опрема

Ненад Чонкић

технички уредник

Милоје Петровић

Решењем Универзитета у Београду бр. 06-1520/1 од 27. септембра 1973. године,
одобрено као стални универзитетски уџбеник.

тираж

1500 примерака

штампа

ШИП »Србија« — Београд, Мије Ковачевића 5
Београд, 1975.

Савремене конструкције различите намене, по правилу, представљају комбинације танкозидних елемената типа љуски и плоча које се налазе под утицајем поља сила, температурних, електромагнетних и других поља. Зато је за праксу важно правилно оценити отпорност и крутост те врсте елемената конструкција, што и представља предмет истраживања предложене књиге.

При писању књиге (за што главна заслуга и одговорност припада првом од аутора) коришћени су материјали курсева који су држани на југословенским универзитетима: Београдском, Нишком, Сарајевском и у Математичком институту у Београду, у времену од 1964—1974 године и раније, а такође познате монографије, научна литература и последње публикације аутора у овој области.

Основном тексту књиге претходи увод, који садржи опште напомене и неке информације из теорије провођења топлоте, које су коришћене у даљем излагању. У првој глави дате су информације из механике континуума, неопходне за теорију љуски. У главама: другој, трећој, четвртој и петој, систематски се излаже савремена механика љуски и плоча; овде се такође анализирају методи испитивања и наводе конкретни примери прорачуна. Главе шеста и седма садрже теорију осцилација и флутера љуски и плоча. Неки динамички проблеми љуски размотрени су у осмој глави. Питања стабилности љуски и плоча, у границама и преко границе еластичности, у линеарној и нелинеарној поставци, изложена су у главама деветој и десетој. У једанаестој глави приказана су посебна питања специјалног прорачуна љуски и плоча.

Ова књига је намењена првенствено студентима смера примењене механике Природно-математичког факултета као уџбеник за курс теорија површинских носача. Међутим аутори сматрају да ће књига бити корисна научним радницима, постдипломцима и студентима техничких факултета, који се интересују за питања носивости и стабилности конструкција. Аутори се захваљују Душану Л. Медићу на великом и савесном труду око припрема за штампу ове књиге.

Увод	9
Глава I. НЕОПХОДНЕ ИНФОРМАЦИЈЕ ИЗ МЕХАНИКЕ КОНТИНУУМА	15
1. Елементи диференцијалне геометрије и тензорске анализе	15
2. Дефиниције и хипотезе у теорији љуски	31
3. Основни појмови о деформацији и напонима. Силе и моменти	33
4. Услови компатибилности	42
5. Диференцијалне једначине равнотеже	45
6. Везе између деформација и напона. Диференцијалне једначине љуски	47
Глава II. ОПШТА ТЕОРИЈА ЉУСКИ	57
1. Варијациона поставка проблема при геометријској нелинеарности	57
2. Тачније једначине кретања изражене моментима и силама	61
3. Једначине кретања изражене померањима за осносиметричну деформацију	68
4. Почетни и гранични услови	72
5. Упрошћавање општих једначина теорије љуски	75
Глава III. БЕЗМОМЕНТНА ТЕОРИЈА ЉУСКИ	81
1. Основне диференцијалне једначине и гранични услови	81
2. Обртне љуске произвољног облика	84
3. Општи метод решавања диференцијалних једначина безмоментне теорије ротационих љуски	87
4. Симетрична деформација ротационих љуски	89
5. Прорачун купола и резервоара	91
Глава IV. ЦИЛИНДАРСКЕ, КОНУСНЕ И СФЕРНЕ ЉУСКЕ	95
1. Диференцијалне једначине цилиндарских љуски у комплексном облику	95
2. Прорачун панела цилиндарске љуске	99
3. Температурни напони у неравномерно загрејаној цилиндарској љуски, ојачаној подужним ребрима	103
4. Конусна љуска	113
5. Сферна љуска	118

Глава V. ТЕОРИЈА ПЛИТКИХ ЉУСКИ И ПЛОЧА	125
1. Плитке љуске	125
2. Равне плоче	129
3. Примери прорачуна плоча при еластичним деформацијама	132
4. Савијање плоче при еласто-пластичним деформацијама	137
5. Носивост плоча	142
Глава VI. ОСЦИЛАЦИЈЕ ЉУСКИ	145
1. Сопствене осцилације. Поставка задатка	145
2. Затворена цилиндарска љуска	148
3. Сферна љуска	155
4. Осцилације плоча изазване топлотним ударом	158
5. Параметарске осцилације. Поставка задатка	162
6. Затворена цилиндарска љуска	166
7. Сферна љуска	171
8. Термопараметарска побуда осциловања мембране	175
9. Термопараметарска резонанција витких љуски у нестационарном температураном пољу	176
Глава VII. ФЛАТЕР ЉУСКИ И ПЛОЧА	185
1. Поставка и опште решење проблема	185
2. Флатер плоче	191
3. Неограничена затворена цилиндарска љуска	204
4. Затворена цилиндарска љуска ограничене дужине	207
5. Утицај аеродинамичког пригушења	211
Глава VIII. НЕКИ ДИНАМИЧКИ ПРОБЛЕМИ ЉУСКИ	215
1. Радијална еластична деформација	215
2. Равна еласто-пластична деформација	218
3. Утицај покретног оптерећења на цилиндар	223
4. О распрострањању еластичних таласа у љуски	227
5. О распрострањању еласто-пластичног таласа оптерећења у љуски	231
Глава IX. СТАБИЛНОСТ ЉУСКИ У ГРАНИЦАМА ЕЛАСТИЧНОСТИ	237
1. Поставка проблема	237
2. Гипка плитка љуска	248
3. Динамичка стабилност плитке љуске	251
4. Динамичка стабилност цилиндарске љуске	257
5. Термостабилност цилиндарске љуске при неравномерној расподели температуре	263
6. Локална термостабилност сферне љуске	267
7. Статистички метод проучавања стабилности љуски	270
Глава X. СТАБИЛНОСТ ЉУСКИ ПРЕКО ГРАНИЦЕ ЕЛАСТИЧНОСТИ	275
1. Поставка проблема	275
2. Затворена цилиндарска љуска	283
3. Приближни метод проучавања стабилности љуски узимањем у обзир физичке и геометријске нелинеарности	287

4. Испитивање посткритичног стања љуски	297
5. Поставка и примери решавања задатака термостабилности љуске у условима пужења	313

Глава XI. СПЕЦИЈАЛНА ПИТАЊА ПРОРАЧУНА ЉУСКИ 323

1. Варијациона поставка проблема еласто-пластичне деформације љуски	323
2. Коначна релација А. А. Иљушина	326
3. Поставка проблема о одређивању носивости љуски	331
4. Одређивање носивости претходно деформисаних љуски	332
5. Љуска са нехомогеним механичким својствима	336
6. Љуска, подвргнута загревању зрачењем	338
7. Љуска, подвргнута неутронском зрачењу	343
8. Течење метала у условима размене топлоте	348

Литература, коришћена и цитирана	359
--	-----

УВОД

У класичној механици деформабилних тела и средина, по правилу се користе представе материјалног континуума. Претпоставља се да су посматрана тела толико велика, да ће њихови мали делови садржати довољно много честица због чега се за те мале области тела могу увести појмови средњих величина густине тела, померања, брзине, убрзања, спољних површинских и запреминских сила, унутрашње енергије и других [1].

Идеализација (схематизација, модел) стварног физичког тела у механици непрекидне средине састоји се у томе, што се све посматране средње величине узимају као реалне. Број и математичка природа уведених средњих величина треба да су такве, да би се могло с довољном тачношћу описати унутрашње стање тела и узајамно дејство између тела.

У класичној механици континуума углавном се посматрају механичка и топлотна узајамна дејства (узајамни утицаји сила и деформације малих запреминских елемената, стварање топлоте у њима и размена топлоте између њих), у савременој се узима у обзир и утицај електромагнетних поља и хемијских реакција, прецизира се карактер деформација и узајамног дејства, а проширују концепције о структури континуума.

Ради представљања стања и процеса у механици континуума користи се тродимензиони еуклидски простор са различитим координатним системима и класично време. Избор координатног система је произвољан и не сме да се одражава на ток физичких појава. Значи да математички објекти, помоћу којих се карактеришу физичке појаве, треба да буду такви да не зависе од посебног избора система координата и физички закони (једначине стања, закони еластичности, пластичности, течења итд.) се изражавају помоћу тих објеката математичким релацијама, које су инваријантне у односу на трансформацију координатног система. Основни математички објекти механике континуума су тензори разних редова: нултог реда-скалари (густина, енергија и сличне), првог реда-вектори (радијус-вектор, флуks топлоте, брзина и т.сл.), другог реда (тензори деформација, унутрашњих напона, и т.сл.). Сви ти тензори сматрају се непрекидним и диференцијабилним довољан број пута по координатама и по времену.

При поставци и решавању проблема механике континуума важно је рационално изабрати зависност између напона и деформација. При томе треба имати опште представе о понашању материјала (средине) и узети у обзир реалне физичке услове, који одговарају области очекиване примене теорије.

Коректне у физичко-математичком смислу поставке проблема, на пример о температурним напонима тела и њихова термостабилност могуће су на основу закона термодинамике и теорије провођења топлоте. Наводимо кратко неопходне информације, које се тичу једначине провођења топлоте и једначина механике континуума које се касније користе.

Могућност квантитативне оцене топлоте, у датом телу као последица провођења топлоте, заснива се на Фуријеовој (Fourier) хипотези (постављеној 1882. г.), према којој елементарна количина топлоте dQ , која пролази кроз елемент изотермне површи dF (површ, која представља геометријско место тачака са једнаком температуром) за интервал времена $d\tau$, је пропорционална температурном градијенту $\frac{\partial T}{\partial n}$:

$$dQ = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} dF d\tau. \quad (1)$$

Овде је λ -кофицијент провођења топлоте. Знак минус на десној страни стоји зато, што у правцу простирања топлоте температура опада, услед чега је температурни градијент $\frac{\partial T}{\partial n}$ негативна величина, а количину топлоте dQ сматрамо позитивном.

Релација (1) назива се основним законом провођења топлоте, или **Фуријеов закон**.

Количина топлоте, пренесена посредством провођења топлоте, по јединици изотермне површине и у јединици времена, назива се специфични топлотни флуks

$$q = \frac{dQ}{dF d\tau} \frac{J}{m^2 h}. \quad (2)$$

Вектор

$$\mathbf{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \mathbf{n} = -\lambda \text{grad } T \quad (3)$$

назван топлотним флуksом, нормалан је на нивоску површ и усмерен је у правцу опадања температуре (\mathbf{n} је јединични вектор нормале на дату површ).

На основу релације (1) коефицијент топлотне проводљивости је

$$\lambda = \frac{dQ}{\frac{\partial T}{\partial n} dF d\tau} \frac{J}{mhK}. \quad (4)$$

Коефицијент топлотне проводљивости λ је једна од физичких карактеристика материјала (супстанција).

Издвојмо у простору, у коме се налази хомогено и изотропно тело, елементарни паралелепипед са ивицама dx , dy и dz , паралелним одговарајућим осама правоуглог Декартовог система координата. Користећи релацију (1), нађимо количину топлоте доведене и одведене кроз његове стране за време $d\tau$:

$$dQ = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dx dy dz d\tau. \quad (5)$$

Сагласно закону очувања енергије количина топлоте dQ , акумулирана у елементарној запремини dV , изазива у њој одговарајуће повишење температуре (загревање тела)

$$dQ = C\gamma dV \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau. \quad (6)$$

Овде је γ -густина у $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; C -специфична топлота у $\frac{\text{J}}{\text{kg K}}$.

Из релација (5) и (6) се добива диференцијална једначина провођења топлоте:

$$C\gamma \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (7)$$

Веома често се у техничким прорачунима уместо зависности $\lambda = \lambda(T)$ и $C = C(T)$ узимају средње вредности тих коефицијената. За константне вредности λ , C и γ једначина (7) се упрошћава и има облик

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \Delta T. \quad (8)$$

Овде је

$$\Delta() = \frac{\partial^2()}{\partial x^2} + \frac{\partial^2()}{\partial y^2} + \frac{\partial^2()}{\partial z^2}$$

Лапласов оператор, а

$$a = \frac{\lambda}{C\gamma} \frac{\text{m}^2}{\text{h}} \quad (9)$$

се назива коефицијент провођења температуре. Физички смисао тог коефицијента састоји се у томе што он представља меру брзине изравнавања температуре у разним тачкама датог температурског поља. Уколико је већа величина a , уколико брже све тачке поља достижу једнаку температуру.

Једначине (7) и (8) односе се на случај нестационарног топлотног режима.

За стационарни топлотни режим $\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$ и једначине (7) и (8) се

могу написати у облику

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (10)$$

или за $\lambda = \text{const}$

$$\Delta T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (11)$$

Као услов, који омогућава решење конкретног проблема, даје се распоред температуре у целом телу у почетном тренутку времена $\tau = 0$

$$T(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z)$$

и контурни (гранични) услови, везани са узајамним дејством посматраног тела и средине која га окружује. Топлотни услови на граници могу бити дати на три начина:

1) гранични услов прве врсте састоји се у томе што је за ма који тренутак времена дат распоред температуре на површи тела, тј.

$$T_w(\tau) = f(\tau);$$

2) гранични услов друге врсте дефинише се датом густином топлотног флукса у свакој тачки површи тела као функција времена, дакле

$$q(\tau) = f(\tau);$$

3) гранични услов треће врсте дефинише се давањем температуре околне средине и закона размене топлоте између површи тела и средине која га окружује. Наиме, у сагласности са Њутновим (Newton) законом специфични топлотни флукс на површи тела сматра се пропорционалним разлици између температуре средине и температуре површи тела

$$q(\tau) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha [T_w(\tau) - T_f],$$

где је T_w -температура површи тела, T_f -температура средине и α -коэффициент преношења топлоте.

Једначине неопходне за решавање граничних задатака, на пример, термоеластичности, термовиско-еластичности итд., су посебни случајеви општих једначина механике континуума [2].

Наиме, за случај малих деформација потпуни систем једначина, на пример, у температурним проблемима [3] састоји се:

од три једначине равнотеже

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = 0, \quad (i=1, 2, 3) \quad (12)$$

где су σ_{ij} -компоненте тензора напона, F_i -компоненте вектора запреминских сила, ρ -запреминска густина (понављање истог индекса, у датом случају j , означава сабирање по њему од 1 до 3);

шест Кошијевих (Cauchy) једначина, које повезују компоненте ϵ_{ij} тензора деформације и компоненте u_1, u_2, u_3 вектора померања

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad (13)$$

шест функционалних веза

$$F_{ij} \{ \sigma_{mn}, \varepsilon_{mn}, T \}_{\tau} = 0, \quad (14)$$

$F_{ij} \{ \}_{\tau}$ је неки оператор по времену τ , T -температура.

Систем једначина (12)–(14) је затворен, ако се проблем решава помоћу померања.

Ако се пак решење тражи помоћу деформација или напона, тада треба додати још шест једначина компатибилности

$$\frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial x_i \partial x_{ij}} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial \varepsilon_{ki}}{\partial x_j} \right) = 0, \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (15)$$

по k не сабирати.

Проблем се решава за одговарајуће граничне услове. Конкретни облик средине дефинише се везама (14). Тако, на пример, у случају термо-еластичности имамо:

$$\sigma_{ij} = \Lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\Lambda + 2\mu) \delta_{ij} \alpha (T - T_0). \quad (16)$$

овде је T -текућа температура, T_0 -температура полазног стања, Λ и μ -Ламе-ови (Lame') коефицијенти, α -коефицијент линеарног ширења.

Ова глава има помоћну намену. Садржи све неопходне информације из механике континуума за теорију љуски. Осим тога у њој се наводе диференцијалне релације које изражавају континуалност средине, услови кретања и равнотеже, а такође успоставља веза између деформација и напона.

§ 1. Елементи диференцијалне геометрије и тензорске анализе

Размотримо могуће интерпретације кретања непрекидне средине у Декартовим ортогоналним координатама. Нека је \mathbf{e}_i ($i=1, 2, 3$) непокретни тродимензиони ортогонални нормирани репер (базис):

$$|\mathbf{e}_i| = 1, \quad \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (1.1)$$

Непрекидна средина креће се и деформише током времена t , заузимајући област V_0 у почетном тренутку времена $t = t_0$ и V — у тренутку t . Нека је

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \equiv x_i \mathbf{e}_i \quad (1.2)$$

радијус-вектор (x_i -ортогоналне Декартове координате) било које физичке тачке M у тренутку $t = t_0$ и нека је

$$\mathbf{X} = X_1 \mathbf{e}_1 + X_2 \mathbf{e}_2 + X_3 \mathbf{e}_3 \equiv X_i \mathbf{e}_i \quad (1.3)$$

радијус-вектор (X_i -ортогоналне Декартове координате) исте физичке тачке M у тренутку времена t .

Кретање непрекидне средине сматра се познатим, ако је за произвољно t позната веза између \mathbf{X} и \mathbf{x} , тј. позната векторска функција

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad (1.4)$$

тј. три скаларне релације:

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad (i=1, 2, 3). \quad (1.4')$$

Релације (1.4) називају се законом кретања тачке \mathbf{x} . Функције $X_i(x_1, x_2, x_3, t)$ су непрекидне и диференцијабилне довољан број пута и кореспонденција између вектора \mathbf{X} и \mathbf{x} за свако t сматра се узајамно једнозначном, тј. Јакобијан за (1.4)

$$\left. \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right| \neq 0.$$

Дакле, (1.4) су решиве по \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t); \quad x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t), \quad \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| \neq 0. \quad (1.5)$$

Тачке области, где је $\left| \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right| = 0$ или $\left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| = 0$, називају се критичним.

Померање \mathbf{u} , брзина \mathbf{v} и убрзање \mathbf{w} тачке M у тренутку t биће

$$\mathbf{u} = \mathbf{X} - \mathbf{x}, \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}, \quad \mathbf{w} = \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial t^2}, \quad (1.6)$$

где $\frac{\partial}{\partial t}$ означава тзв. тотални (потпун) извод по времену а \mathbf{u} , \mathbf{v} и \mathbf{w} су према (1.4) функције \mathbf{x} и t :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t). \quad (1.7)$$

Ипак, користећи инверзне релације (1.5) \mathbf{v} и \mathbf{w} могу се изразити и као функције \mathbf{X} и t . Очеvidно је,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}[\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t] = \mathbf{v}(\mathbf{X}, t). \quad (1.8')$$

Диференцирањем последњег израза $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$, као сложене функције, налазимо

$$\mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}}, \quad (1.8'')$$

где је симболички

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial t},$$

односно

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} = v_i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial X_i},$$

па се одређеније може написати

$$\mathbf{w}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial X_i}. \quad (1.8)$$

(Понављање индекса у једном члану означава сабирање по том индексу од 1 до 3:

$$v_i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial X_i} \equiv \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial X_i}.$$

Уколико су почетне координате физичке тачке M , тј. \mathbf{x} и x_i ($i=1, 2, 3$), утврђене, оне остају за ту физичку тачку константне за произвољно t .

Све друге скаларне (густина, температура, енергија итд.), векторске (флукс топлоте итд.) и тензорске (напони, деформације итд.) величине, које карактеришу стање тела у околини тачке M (понекад се каже-стање честице M) на основу (1.4) и (1.5) могу се изразити у облику функције од \mathbf{x} и t , или \mathbf{X} и t . Томе одговарају два основна метода проучавања кретања непрекидне средине: Лагранжев (Lagrange) и Ојлеров (Euler).

Лагранжева метода. Координате x_1, x_2, x_3 (вектор \mathbf{x}) називају се Лагранжевим координатама тачке тела. То су криволинијске координате, ма да су за $t=t_0$ оне изабране као Декартове. (Касније ћемо одбацити то ограничење). Стварно, породица физичких равни $x_i = \text{const}$ за $t=t_0$, као што се види из (1.4) и јасно из физичких интерпретација, трансформише се у неку породицу површи. Посматрани метод заснива се на коришћењу Лагранжевих координата и састоји се у проучавању кретања честица непрекидне средине и свих неопходних параметара у облику функција \mathbf{x} и t . Уместо радијус-вектора \mathbf{X} најчешће се користи вектор померања честице $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Брзина и убрзање честице изражавају се обрасцима (1.7).

Ако је било која скаларна или векторска функција \mathcal{F} одређена за физичку честицу, тј. позната као функција Лагранжевих координата \mathbf{x} и времена t , тј. $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbf{x}, t)$, тада се брзина њене промене за ту честицу дефинише као

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}. \quad (1.9')$$

Разлика исте те величине за две суседне честице (честице $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ и честице \mathbf{x}) у тренутку t једнака је

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} \equiv \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i} dx_i. \quad (1.9'')$$

С обзиром на то, да у тренутку t Лагранжеве координате постају криволинијске неортогоналне и следећи током времена физичке честице, оне доводе до довољно сложених израза за тензоре напона и деформација, али истовремено с тим дају потпуну (коначну) информацију о понашању параметара везаних са фиксираним честицама. Ниже ћемо у првом реду

проучити теорију напона и малих деформација средине, када Лагранжева метода доводи до веома простих и прегледних резултата.

Ојлерова метода. Размотримо кретање средине у произвољном тренутку времена t у односу на фиксирани Декартов ортогонални систем координата и означимо са \mathbf{X} -радијус-вектор фиксиране тачке тог простора. У различитим тренуцима времена у тачки \mathbf{X} налазиће се различите тачке средине, материја ће „тећи“ у том простору. Уместо тога да, као по Лагранжевој методи следимо за параметрима кретања фиксиране физичке честице, следићемо за тим, — с каквим параметрима различите физичке тачке у разним тренуцима времена пролазе кроз тачку \mathbf{X} простора. На тај начин, можемо образовати поље параметара који нас интересују у непокретном простору \mathbf{X} . Тај простор с конструисаним у њему пољем параметара кретања, у првом реду-пољем вектора брзине физичких честица \mathbf{v} , назива се Ојлеровим. Свака физичка честица током времена „црта“ у њему своју трајекторију, при чему ће једначина те трајекторије имати облик (1.4).

Честица, која се налазила у тренутку t у положају \mathbf{X} , имаће брзину $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$ и зато ће њена координата у тренутку $t+dt$ бити $\mathbf{X}+\mathbf{v} dt$, пошто ће њен бесконачно мали вектор померања за време dt бити $\mathbf{v} dt$. На тај начин, у сваком тренутку времена t за проучавање кретања целе средине за мали интервал dt може се применити Лагранжева метода, ако се \mathbf{X} сматра почетном координатом честице (у тренутку t), а да је $\mathbf{u}'(\mathbf{X}, t)=\mathbf{v} dt$ узет као вектор померања те честице. Одатле произилази поклапање теорије малих деформација по Лагранжевој методи и теорије бесконачно малих деформација, тј. брзина деформација у Ојлеровом простору. Кретање средине у Ојлеровом простору често може бити стационарно, тј. поље параметара кретања (брзина, густина, ...) не зависи од времена. Такви су случајеви стационарног обструјавања тела гасом, течносту, чврстом средином. При томе ће све честице, које пролазе кроз тачку \mathbf{X} , описивати једну исту непромењену трајекторију (названу струјном линијом) и зато ће струја материје образовати поље „замрзнутих“ струјних линија у Ојлеровом простору.

Обе методе проучавања кретања непрекидне средине су потпуно строге и адекватне. Ако смо, по Лагранжевој методи нашли вектор померања физичких честица $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, а тиме и $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)=\mathbf{x}+\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, тада ћемо поље вектора брзине у Ојлеровом простору $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$ наћи горе наведеном методом по обрасцима (1.7) и (1.8') па користећи инверзну функцију облика (1.5) налазимо поље других параметара кретања у функцији од \mathbf{X} и t , тј. добијамо их у Ојлеровом простору.

Ако је, напротив, познато кретање средине у Ојлеровом простору, на пример, познато поље вектора $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$, тада се може, ма да не тако просто, наћи вектор померања физичке честице као функција времена и њене почетне координате \mathbf{x} . Ради тога приметимо, да се у Ојлеровом простору дуж непознате нам трајекторије кретања било које честице, тј. на линији $\mathbf{X}=\mathbf{X}(t)$ за време dt координата честице мења за величину $d\mathbf{X}$, једнаку бесконачно малом померању $\mathbf{v} dt$ и зато је

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{X}, t). \quad (1.10)$$

Како се $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$ претпоставља као познато, то (1.10) представља једну векторску обичну диференцијалну једначину по вектору \mathbf{X} , или три скаларне једначине:

$$\frac{dX_i}{dt} = v_i(X_1, X_2, X_3, t), \quad (i=1, 2, 3). \quad (1.10')$$

Те једначине имају три интеграла, који зависе од три произвољне константе

$$X_i = f_i(C_1, C_2, C_3, t), \quad (i=1, 2, 3)$$

и зато задовољавајући почетне услове

$$t = t_0, \quad X_i = x_i; \quad (1.11)$$

налазимо изразе за константе C_i помоћу x_1, x_2, x_3 , тј. долазимо до решења у облику (1.4). А то значи, да налазимо кретање средине у Лагранжевим координатама. Тешкоће које се при томе појављују везане су за интеграцију система (1.10).

Ако је у Ојлеровом простору дато поље вектора брзине $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$, тада је у сваком тренутку времена t могуће конструисати струјне линије. Струјна линија у тренутку t је „трајекторија вектора брзине“ $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, која пролази кроз било коју тачку \mathbf{X}_0 . Нека је $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\lambda)$ једначина струјне линије у параметарском облику (λ -параметар). По дефиницији

$\frac{d\mathbf{X}}{d\lambda}$ је на струјној линији колинеаран вектору $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$, тј.

једначина струјне линије биће

$$\frac{dX_1}{v_1} = \frac{dX_2}{v_2} = \frac{dX_3}{v_3}, \quad (1.12)$$

при чему је $v_i = v_i(X_1, X_2, X_3, t)$, где је t -константно. Упоредјујући (1.10) и (1.12), видимо да се струјне линије поклапају са трајекторијама честица само у том случају, ако је кретање стационарно (тј. брзине \mathbf{v} у Ојлеровом простору не зависе свуда од t).

Ако је одређено поље скаларне или векторске величине F у Ојлеровом простору, тј. $F = F(\mathbf{X}, t)$, тада парцијални извод $\frac{\partial F(\mathbf{X}, t)}{\partial t}$ (даје брзину

промене F у фиксираној геометријској тачки простора \mathbf{X} . Брзина пак промене F за физичку честицу, која се у тренутку t налази у тачки \mathbf{X} , дефинише се, слично (1.8) субстанцијалним (потпуним) изводом по времену

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F(\mathbf{X}, t)}{\partial t} + \frac{\partial F(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{d\mathbf{X}}{dt},$$

где је опет симболички стављено

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{d\mathbf{X}}{dt} \equiv \frac{\partial F}{\partial X_i} \frac{dX_i}{dt}$$

па кад се $\frac{d\mathbf{X}}{dt}$ одреди из (1.10), може се написати

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F(\mathbf{X}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) \frac{\partial F(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial F}{\partial t} + v_i \frac{\partial F}{\partial X_i}. \quad (1.13)$$

У случају стационарног кретања $\left(\frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} = 0 \right)$, добивамо

$$\frac{dF}{dt} = v_i \frac{\partial F}{\partial X_i}.$$

Задржимо се детаљније на афиној деформацији околине тачке. Посматрајмо две тачке средине M и N са Лагранжевим координатама \mathbf{x} и $\mathbf{x} + \vec{\xi}$, где је $\vec{\xi}$ бесконачно мала величина. Закон кретања тих тачака је:

$$(\mathbf{X})_M = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{X})_N = \mathbf{X}(\mathbf{x} + \vec{\xi}, t). \quad (1.14)$$

Разлика $(\mathbf{X})_N - (\mathbf{X})_M = \vec{\rho}$ даје вектор релативног положаја тачке N у односу на M у тренутку t :

$$\vec{\rho} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \vec{\xi} \equiv \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_j} \xi_j, \quad (j=1, 2, 3) \quad (1.15)$$

при чему матрица

$$\tilde{A} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = (A_{ij}), \quad (1.16)$$

где је

$$A_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}, \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (1.17)$$

(i -број врсте, j -број колоне) одређује афинор и за дату тачку $M(\mathbf{x})$ у тренутку t је константа. Ако је веза (1.14) $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ линеарна, тада ће A имати исту вредност у свим тачкама средине и таква деформација назива се хомогеном. На тај начин, према (1.15), у околини тачке M (тј. за било које N , блиске тачки M , када је ξ бесконачно мало) деформација средине је увек афина, хомогена. Репер \mathbf{e}_i можемо паралелно пренети (без ротације) у тачку M и тада ће (1.15) бити афина трансформација координате ξ суседне тачке N (њен прелаз у тачку N')

$$\vec{\rho} = \tilde{A} \vec{\xi}, \quad \rho_i = A_{ij} \xi_j, \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (1.18)$$

Очевидно је, да афинор \tilde{A} поседује особине

$$\tilde{A}(\vec{\xi} + \vec{\eta}) = \tilde{A} \vec{\xi} + \tilde{A} \vec{\eta}, \quad \tilde{A} k \vec{\xi} = k \tilde{A} \vec{\xi}, \quad k\text{-број} \quad (1.18')$$

Уколико је детерминанта матрице

$$A = |A_{ij}| \quad (1.19)$$

различита од нуле, решавајући систем (1.18) по ξ_i , налазимо инверзну матрицу A_{ij}^{-1}

$$A_{ij}^{-1} = \frac{a_{ij}}{A} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (1.20)$$

(a_{ij} -алгебарски комплемент елемента, i -врсте, j -колоне детерминанте A), при чему ће детерминанта те матрице бити

$$|A_{ij}^{-1}| = \frac{1}{A} = A^{-1}. \quad (1.21)$$

Веа (1.21) произилази из једнакости (1.14), множећи детерминанте $|A_{ij}|$ и $|A_{ij}^{-1}|$. За множење произвољних детерминанти $|a_{ij}|$, $|b_{ij}|$ имамо

$$|a_{ij}| |b_{ij}| = |a_{im} b_{mj}|,$$

где је $a_{im} b_{mj} = c_{ij}$ — елемент детерминанте производа. У нашем случају

$$a_{ij} = A_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}, \quad A_{ij}^{-1} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

и на тај начин

$$A_{im} A_{mj}^{-1} = \frac{\partial X_i}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial X_j} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} = \delta_{ij}$$

и зато

$$|A_{ij}| |A_{ij}^{-1}| = |\delta_{ij}| = 1.$$

Инверзна (1.18) трансформација има облик

$$\xi_i = A_{ij}^{-1} \rho_j, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1.22)$$

Из (1.18) и (1.22) следе све особине афиних трансформација, посебно: 1) честице за $t = 0$ које леже на правој остају на правој и после деформације. На пример, праволинијско влакно, које је паралелно оси x_1 ,

$\vec{\xi} = \xi_1 \mathbf{e}_1$, прелази у праволинијско влакно

$$\vec{\rho} = \tilde{A} \xi_1 \mathbf{e}_1 = \xi_1 \tilde{A} \mathbf{e}_1 = \xi_1 (A_{11} \mathbf{e}_1 + A_{21} \mathbf{e}_2 + A_{31} \mathbf{e}_3) = \xi_1 A_{11} \mathbf{e}_1$$

јер је $A_{11} \mathbf{e}_1$ -константни (при заданом t независан од $\vec{\xi}$) вектор; 2) раван прелази у раван. На пример, раван $\xi_1 = \text{const} = C_1$ прелази у раван, сагласно (1.22): $A_{ij} \rho_j = C_1$, а паралелна $\xi_1 = C_1$; раван $\xi_1 = C_1'$ — у раван $A_{ij}^{-1} \rho_j = C_1'$, паралелну назначеној; 3) паралелност линија и равни се одржава и зато правоугли паралелепипеди прелазе у косоугле паралелепипеди; 4) скуп честица, које се за $t = t_0$ налазе на сфери

$\vec{\xi} = \xi_i \mathbf{e}_i = C^2$ прелази у скуп честица на елипсоиду, сагласно (1.22) чија је једначина $A_{ij}^{-1} A_{ik}^{-1} \rho_j \rho_k = C^2$.

Релативном дилатацијом влакна $\vec{\xi}$ назива се

$$e_\xi = \frac{|\vec{\rho}| - |\vec{\xi}|}{|\vec{\xi}|} = \sqrt{\frac{\rho}{\xi}} - 1. \quad (1.23)$$

Из (1.18) налазимо

$$\overset{\rightarrow}{\rho} = \rho_i \rho_i = A_{ij} A_{ik} \xi_j \xi_k = g_{jk} \xi_j \xi_k, \quad (1.24)$$

где се g_{jk} назива метричким тензором:

$$g_{jk} = A_{ij} A_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_i}{\partial x_k}. \quad (1.25)$$

Одавде се види, да је матрица g_{jk} симетрична по индексима j, k

$$g_{jk} = g_{kj}. \quad (1.26)$$

Означимо са $\vec{\xi}_0 = \frac{\vec{\xi}}{|\vec{\xi}|}$ правац влакна $\vec{\xi}$, тако да ће правци косинуса у

реперу e_1 бити

$$l_j = \vec{\xi}_0 \cdot e_j = \frac{\xi_j}{|\vec{\xi}|}, \quad (j=1, 2, 3) \quad (1.27)$$

Тада из (1.24) налазимо

$$\overset{\rightarrow}{\rho} = (1 + e_\xi)^2 = g_{ij} l_i l_j. \quad (1.28)$$

Одавде за влакно $\vec{\xi} = \xi_1 e_1$ (за $t = 0$ усмереног по e_1 репера) имамо $l_1 = 1, l_2 = l_3 = 0$ и на тај начин $e_\xi = e_1$ налази се из једначине

$$(1 + e_1)^2 = g_{11}. \quad (1.29')$$

Аналогно за $\vec{\xi} = \xi_2 e_2$ и $\vec{\xi} = \xi_3 e_3$ налазимо

$$(1 + e_2)^2 = g_{22}, \quad (1 + e_3)^2 = g_{33}. \quad (1.29'')$$

Дакле, дијагоналне компоненте матрице g_{ij} дефинишу релативне дилатације влакана, која се за $t = t_0$ у тачки $M(\mathbf{x})$ по правцима поклапају са векторима репера e_i .

Размотримо за $t = t_0$ за влакна

$$\vec{\xi} = \xi_i e_i = |\vec{\xi}| l_i e_i, \quad \vec{\xi}_0 = l_i e_i; \quad (1.30)$$

$$\vec{\xi}' = \xi'_i e_i = |\vec{\xi}'| l'_i e_i, \quad \vec{\xi}'_0 = l'_i e_i.$$

Косинус угла θ између њих до деформације износи

$$\cos \theta = \vec{\xi}_0 \cdot \vec{\xi}'_0 = l_i l'_i. \quad (1.31)$$

После деформације, сагласно (1.18) косинус угла ϑ између истих тих влакана, биће једнак

$$\cos \vartheta = \frac{\rho_i}{|\vec{\rho}|} \cdot \frac{\rho'_i}{|\vec{\rho}'|} = \frac{1}{(1 + e_\xi)(1 + e_{\xi'})} A_{ij} A_{ik} l_j l'_k = \frac{g_{jk} l_j l'_k}{(1 + e_\xi)(1 + e_{\xi'})}. \quad (1.32)$$

Одатле се објашњава смисао мешовитих компонената матрице g_{ij} . Нека се за $t = t_0$, $\vec{\xi}$ поклапа с правцем \mathbf{e}_1 , а $\vec{\xi}'$ — са \mathbf{e}_2 ($\vec{\xi} = \xi_1 \mathbf{e}_1$, $\vec{\xi}' = \xi_2 \mathbf{e}_2$, $l_1 = l_2' = 1$, $l_2 = l_3 = l_1' = l_3' = 0$). Из (1.31) имамо (пошто је $\theta_{12} = \frac{\pi}{2}$) $\cos \theta_{12} = 0$ и из (1.32)

$$\cos \vartheta_{12} = \frac{g_{12}}{(1 + e_1)(1 + e_2)} \quad (1,32')$$

то јест g_{12} одређује косинус угла између влакана, који су били ортогонални и поклапали се са осама \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 . Аналоган је смисао g_{23} , g_{13} .

Трансформација (1.18) дефинише смањење физичке запремине. Узмимо косоугли паралелепипед конструисан над векторима $\vec{\xi}'$, $\vec{\xi}''$, $\vec{\xi}'''$; после деформације то ће бити косоугли паралелепипед, конструисан над векторима $\vec{\rho}' = \tilde{A} \vec{\xi}'$, $\vec{\rho}'' = \tilde{A} \vec{\xi}''$, $\vec{\rho}''' = \tilde{A} \vec{\xi}'''$. Однос њихових запремина једнак је детерминанти A :

$$\frac{V}{V_0} = |A_{ij}| = \left| \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right|. \quad (1.33)$$

Квадрирајући тај израз, добивамо

$$\left(\frac{V}{V_0} \right)^2 = |A_{ij}| |A_{ji}| = |g_{ij}| = g, \quad (1.33')$$

где је g -детерминанта матрице g_{ij} .

У целом матрица g_{ij} потпуно дефинише чисту деформацију околине тачке $M(\mathbf{x})$ у тренутку t и сама се дефинише само деформацијом а не преносним кретањем околине M као крутог тела. Афинор пак A_{ij} садржи такође и преносно кретање (ротацију околине M око тачке M) и зато не може бити карактеристика чисте деформације.

Услов да афинор \tilde{A} представља чисто обртање околине M без деформације, тј. да се своди на верзор, биће

$$g_{ij} = A_{ki} A_{kj} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} = 0. \quad (1.34)$$

Косинус угла ϑ_{ξ} обртања произвољног влакна $\vec{\xi}$ при афиној трансформацији (1.18) може се одредити помоћу скаларног производа

$$\vec{\rho} \cdot \vec{\xi} = (1 + e_{\xi}) \vec{\xi}^2 \cos \vartheta_{\xi}, \quad (1.35')$$

који сагласно (1.18) има израз

$$\vec{\rho} \cdot \vec{\xi} = A_{ij} \xi_i \xi_j, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.35)$$

одакле, делећи са ξ^2 и водећи рачуна о (1.27), имамо

$$(1 + e_{\xi}) \cos \vartheta_{\xi} = A_{ij} l_i l_j. \quad (1.35'')$$

Такође ћемо сада детаљно објаснити тензоре 2-ог реда у ортогоналном реперу.

Од самог почетка изабрали смо фиксирани ортонормирани базис \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$) и са њиме везали Декартов систем координата. Посматрајмо у истој тачки други ортонормирани базис \mathbf{e}_i' ($i = 1, 2, 3$) добивен линеарном трансформацијом

$$\mathbf{e}_i' = l_{ik} \mathbf{e}_k, \quad (i, k = 1, 2, 3). \quad (1.36)$$

Како је $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_j' = \delta_{ij}$, то из (1.36) множењем са \mathbf{e}_j , налазимо

$$l_{ik} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j = l_{ik} \delta_{kj} = l_{ij} = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i', \quad (1.37)$$

тј. $l_{ik} = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i'$ — је матрица косинуса углова између праваца репера \mathbf{e} и \mathbf{e}' . Множећи (1.36) са \mathbf{e}_j' и сабирајући по i , добијамо познате њене особине

$$\delta_{ij} = l_{ik} l_{jm} \delta_{km} = l_{ik} l_{jk}. \quad (1.38)$$

Инверзна (1.36) трансформација

$$\mathbf{e}_j = l_{mj} \mathbf{e}_m', \quad (j, m = 1, 2, 3) \quad (1.36')$$

даје аналогно везе

$$\delta_{ij} = l_{ki} l_{jm} \delta_{mk} = l_{ki} l_{kj}. \quad (1.38')$$

Матрица l_{ij} која задовољава услове (1.38), (1.38'), назива се ортогоналном. Из правила множења детерминанти

$$|a_{ij}| |b_{ij}| = |c_{ij}|, \quad c_{ij} = a_{im} b_{mj}$$

сагласно (1.38) следи (користећи замену врсте колонама у једној)

$$|l_{ij}|^2 = |l_{ij}| |l_{ji}| = |\delta_{ij}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (1.38'')$$

па, дакле, $|l_{ij}| = \pm 1$. Знак (+) одговара очувању поредка репера (десни прелаз у десни, леви — у леви), знак (—) — промени (ако је \mathbf{e}_i — десни, то је \mathbf{e}_i' — леви — и обрнуто).

Нека је \mathbf{Z} — било који вектор

$$\mathbf{Z} = Z_k \mathbf{e}_k = Z_k' \mathbf{e}_k', \quad (k = 1, 2, 3). \quad (1.39)$$

Множећи (1.38) са \mathbf{e}_i' , а такође и са \mathbf{e}_i , налазимо формуле директне и инверзне трансформације координата Z_i

$$Z_i' = Z_k \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i' = l_{ik} Z_k; \quad (1.40)$$

$$Z_i = Z_k' \mathbf{e}_k' \cdot \mathbf{e}_i = l_{ki} Z_k'. \quad (1.40')$$

Упоређујући (1.36), (1.40) и (1.36'), (1.40'), видимо поклапање међусобом директних и међусобом инверзних трансформација, при чему у првим случајевима неми индекс k (по коме се врши сабирање) матрице l_{ik} налази на другом, а слободни i -на првом месту, а у другом случају обрнуто.

Уопштавајући трансформацију (1.40) за вектор \mathbf{Z} , уводи се појам тензора 2-ог реда \tilde{Z} са матрицом Z_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) у ортогоналном реперу \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$), као објекта, чије се компоненте при трансформацији репера (1.36) трансформишу по обрасцима

$$Z'_{ij} = l_{ik} l_{jm} Z_{km}, \quad (k, m, i, j = 1, 2, 3) \quad (1.41)$$

при чему су Z_{ij} , Z'_{ij} респективно компоненте у \mathbf{e}_i и у \mathbf{e}'_i ; при томе у (1.41) неми индекси (k, m) заузимају друга места матрице l_{pq} , слободни (i, j) — прва места. Аналогно тензором трећег реда са матрицом Z_{ijk} у истом реперу назива се објект, чије се компоненте трансформишу по обрасцима

$$Z'_{ijk} = l_{ip} l_{jq} l_{kr} Z_{pqr}, \quad (p, q, r, i, j, k = 1, 2, 3) \quad (1.42)$$

итд.

Ако су у једном истом реперу \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$) дата два тензора Z_{ij} и Y_{ij} тада је:

1) Збир S_{ij}

$$S_{ij} = Y_{ij} + Z_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.43)$$

тензор. То је очевидно из линеарности формула (1.41);

2) Производ тензора Y_{ij} са тензором Z_{ij} означимо са S_{ijmn}

$$S_{ijmn} = Y_{ij} Z_{mn} \quad (1.44)$$

(инверзни производ $Z_{ij} Y_{mn} \neq Y_{ij} Z_{mn}$) при чему је S_{ijmn} тензор 4-ог реда. За доказ је довољно унети у $S'_{ijmn} = Y'_{ij} Z'_{mn}$ вредности Y'_{ij} , Z'_{mn} из (1.41);

3) Контракција тензора a_{ijmn} по пару индекса (ма којих), на пример, по j и m је величина, чије су компоненте

$$b_{im} = a_{imnn} = \sum_{n=1}^3 a_{imnn}, \quad (1.45)$$

при чему је b_{im} -тензор 2-ог реда. На пример, контракцијом (1.44) добијамо тензоре $Y_{ii} Z_{mn}$ (разликује се од Z_{mn} скаларним множителом $Y_{ii} = Y_{11} + Y_{22} + Y_{33}$), $Y_{im} Z_{nn}$, $Y_{nj} Z_{mn}$, $Y_{mj} Z_{mn}$. Контракцијом a_{ijmn} по два пара, на пример, a_{mnmn} , добија се скалар. Доказ је аналоган; 4) Очевидно је, да пермутација индекса ма ког тензора a_{ijkl} (тј. ма која промена реда индекса), на пример, величине $b_{jkli} = a_{ijkl}$ чини тензор.

Наведимо и једну друкчију (инверзну) особину тензора 2-ог реда. Ако постоји скалар φ (величина, која се не мења при трансформацији репера (1.36), који представља билинеарну форму по компонентама ма којих двају вектора $\mathbf{Y} = Y_i \mathbf{e}_i$ и $\mathbf{Z} = Z_i \mathbf{e}_i$, тј.

$$2\varphi = b_{km} Y_k Z_m = b'_{ij} Y'_i Z'_j, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.46)$$

при чему се \mathbf{Y} и \mathbf{Z} трансформишу по закону (1.40), тада b_{ij} образује тензор 2-ог реда. Стварно, уносећи изразе Y_k , Z_m преко Y'_i , Z'_j сагласно

(1.40') у (1.46), добијамо идентичност за произвољне Y'_i, Z'_j

$$2\varphi = b'_{ij} Y'_i Z'_j = b_{km} l_{ik} l_{jm} Y'_i Z'_j,$$

одакле

$$b'_{ij} = l_{ik} l_{jm} b_{km},$$

што се поклапа са законом трансформације (1.42). Посебно, ако је φ (скалар) хомогена квадратна форма по компонентама вектора \mathbf{Z}

$$2\varphi = C_{ij} Z_i Z_j, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1.47)$$

тада су C_{ij} -компоненте тензора 2-ог ранга у ортогоналном реперу. Сваком симетричном тензору 2-ог ранга \tilde{Z} ($Z_{ij} = Z_{ji}$) може се координирати централна површ 2-ог реда

$$2\Phi(\vec{\xi}) = Z_{ij} \xi_i \xi_j = \text{const.}, \quad (1.48)$$

где је $\vec{\xi}$ -радијус-вектор тачке на површи, узет у реперу \mathbf{e}_i . То може бити елипсоид или једнокрилни и двокрилни хиперboloид.

Градијент Φ , који даје правац нормале на површ (1.48), једнак је

$$\text{grad } \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_j} \mathbf{e}_j = Z_{ij} \xi_i \mathbf{e}_j. \quad (1.49)$$

Главним правцем тензора \tilde{Z} назива се главни правац његове површи (1.48), тј. такав да је колинеаран градијенту Φ . На тај начин, за главни

правац $\frac{\vec{\xi}}{|\xi|}$ имамо

$$\text{grad } \Phi = z \cdot \vec{\xi} = z \xi_j \mathbf{e}_j = z \xi_i \delta_{ij} \mathbf{e}_j, \quad (1.50')$$

где је z -некакав скалар. Векторска једначина (1.50') даје три скаларне:

$$(Z_{ij} - z \delta_{ij}) \xi_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.51)$$

и како је $|\vec{\xi}| > 0$, то је детерминанта тог система једнака нули

$$|Z_{ij} - z \delta_{ij}| = -z^3 + I_{1z} z^2 - I_{2z} z + I_{3z} = 0, \quad (1.52)$$

где координате, представљају три независне инваријанте тензора \tilde{Z} :

$$I_{z1} = Z_{ij} \delta_{ij} = Z_{ii} = Z_{11} + Z_{22} + Z_{33},$$

$$2I_{z2} = I_{z1}^2 - Z_{ij} Z_{ij}, \quad (1.53)$$

$$I_{z3} = |Z_{ij}|.$$

Као што је познато из аналитичке геометрије, у случају симетричне матрице Z_{ij} једначина (1.52) има три реална корена z_1, z_2, z_3 , које ћемо звати главним координатама (компонентама) тензора Z_{ij} ; по карактеристикама корена (1.48)

$$I_{z1} = z_1 + z_2 + z_3,$$

$$I_{z2} = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1, \quad (1.53')$$

$$I_{z3} = |Z_{ij}| = z_1 z_2 z_3.$$

Три одговарајућа главна правца или главни јединични вектори $\vec{\xi}_0^1, \vec{\xi}_0^2, \vec{\xi}_0^3$ (1, 2, 3 с индексима горе, одговарају редном броју корена z_1, z_2, z_3) налазе се из (1.51):

$$(Z_{ij} - z_r \delta_{ij}) \xi_{0i}^r = 0, \quad (i, j, r = 1, 2, 3) \quad (1.54)$$

(по r се не сабира) и услова нормираности

$$\xi_{0i}^r \xi_{0i}^r = 1, \quad (r = 1, 2, 3) \quad (1.55)$$

(по r се не сабира). Вектори $\vec{\xi}_0^r$ су ортогонални и образују ортогонални репер \mathbf{e}'_i ($\mathbf{e}'_1 = \vec{\xi}_0^1, \mathbf{e}'_2 = \vec{\xi}_0^2, \mathbf{e}'_3 = \vec{\xi}_0^3$), $\mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_j = \delta_{ij}$.

Посматрајмо тензор коначне деформације. Као што се види из (1.24), (1.32), (1.35) величине A_{ij}, g_{ij} су тензори 2-ог реда (сагласно инверзном обележју); дакле, они се трансформишу по обрасцима

$$g'_{ij} = l_{im} l_{jn} g_{mn}, \quad A'_{ij} = l_{im} l_{jn} A_{mn}. \quad (1.56)$$

Из (1.28) и (1.32) следи да g_{ij} у потпуности дефинише деформацију средине и може се назвати тензором деформације, ма да се обично тензором коначне деформације назива тензор $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$, који се добија из g_{ij} на следећи начин. Уводећи $\mathbf{u} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{x}$, $u_i = X_i - x_i$; из (1.25) добивамо

$$g_{jk} = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = \delta_{ij} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}.$$

Стављајући

$$g_{jk} = \delta_{ij} + 2 \epsilon_{jk} \quad (1.57)$$

за тензор коначне деформације добивамо

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \quad \epsilon_{ji} = \epsilon_{ij}, \quad (1.58)$$

Из (1.28) и (1.32) нађимо изразе за релативну дилатацију влакна $\vec{\xi} = |\vec{\xi}| l_i \mathbf{e}_i$ и угао ϑ између тог влакна и влакна $\vec{\xi}' = |\vec{\xi}'| l'_i \mathbf{e}_i$ после деформације

$$\frac{1}{2} [(1 + e_\xi)^2 - 1] = e_\xi \left(1 + \frac{1}{2} e_\xi \right) = \epsilon_{ij} l_i l_j, \quad (1.59)$$

$$(1 + e_\xi) (1 + e_{\xi'}) \cos \vartheta - \cos \theta = 2 \epsilon_{ij} l_i l'_j, \quad (1.60)$$

где је θ почетни ($t = t_0$) угао између $\vec{\xi}$ и $\vec{\xi}'$. Значи, као и за g_{ij} , имамо: дијагонални елементи тензора деформације ϵ_{ij} , тј. $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}$ дефинишу релативну дилатацију координатних влакана ($\xi_1 \mathbf{e}_1, \xi_2 \mathbf{e}_2, \xi_3 \mathbf{e}_3$); мешовите координате $\epsilon_{12}, \epsilon_{23}, \epsilon_{31}$ дефинишу промену угла између ортогоналних (за $t = t_0$) координатних влакана (између $\xi_1 \mathbf{e}_1$ и $\xi'_2 \mathbf{e}_2$ итд.).

Вектор релативног померања краја влакна $\vec{\xi}$ у тренутку t биће једнак

$$\vec{\delta} = \vec{\rho} - \vec{\xi} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial x_j} \xi_j - \vec{\xi} = A \vec{\xi} - \vec{\xi}, \quad \delta_i = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \xi_j - \xi_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \xi_j, \quad (1.61)$$

при чему се

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = A_{ij} - \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

назива тензор релативног померања. Косинус угла обртања влакна $\vec{\xi}$, сагласно (1.35) налазимо из

$$(1 + e_\xi) \cos \vartheta_\xi = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) l_i l_j = 1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} l_i l_j. \quad (1.62)$$

Централна површ деформације, која одговара тензору ϵ_{ij} има једначину

$$2\Phi = \epsilon_{ij} x_i x_j = \text{const.}, \quad (1.63)$$

где је \mathbf{x} вектор, управљен у правцу влакна $\vec{\xi}$; $\frac{\vec{\xi}}{|\vec{\xi}|} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ у произ-

вољној размери. Она може бити елипсоид или једно и двокрилни хиперболоид. Њене главне осе, према (1.57) поклапају се са главним осама површи $g_{ij} x_i x_j = \text{const.}$ (јер је тензор δ_{ij} -сферни) и називају се главним осама деформације. Главне деформације $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ налазе се као корени кубне једначине (1.52)

$$|\epsilon_{ij} - \epsilon \delta_{ij}| = -\epsilon^2 + I_1 \epsilon^2 - I_2 \epsilon + I_3 = 0. \quad (1.64)$$

где су инваријанте тензора деформације

$$\begin{aligned} I_1 &= \epsilon_{ij} \delta_{ij} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3, \\ 2I_2 &= I_1^2 - \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} = 2(\epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_2 \epsilon_3 + \epsilon_3 \epsilon_1), \\ I_3 &= |\epsilon_{ij}| = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Главне деформације ϵ_i ($i = 1, 2, 3$) у односу на дијагоналне елементе поседују екстремалне особине, тј. могу се наћи из услова екстремума e_ξ по l_i ($i = 1, 2, 3$) према (1.59), тј. екстремума $\epsilon_{ij} l_i l_j$ по l_i при услову $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1 = l_i l_j \delta_{ij}$. Стварно означавајући са ϵ Лагранжев мултипликатор и тражећи безусловни екстремум функције $(\epsilon_{ij} - \epsilon \delta_{ij}) l_i l_j$ добивамо хомогене једначине по l_i (које се поклапају са (1.47)) $(\epsilon_{ij} - \epsilon \delta_{ij}) l_j = 0$ и одатле једначину (1.64).

Главни правци деформација образују ортонормирани репер, тј. за $t = t_0$ могу се наћи три ортогонална влакна, који ће у тренутку t бити ортогонална. Обртање главног репера деформације је обртање околине тачке M тела. Уколико у главном реперу недостају смицања, тада су главне релативне дилатације (влакна главног репера) e_1, e_2, e_3 везане са главни координатама тензора деформације $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ релацијама (1.59)

$$(1 + e_i)^2 = 1 + 2\epsilon_i, \quad i = 1, 2, 3). \quad (1.66)$$

Релативна дилатација произвољног влакна не може бити мања од -1 (дужина ρ не сме постати негативна), тј. $e_i > -1$. Главне координате деформације ϵ_i ($i = 1, 2, 3$) не могу бити веће од $-1/2$:

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 < -\frac{1}{2}.$$

Проучимо промену запремина и површина при деформацији. Промена мале запремине у околини тачке M тела за време $t_0 \sim t$ може се одредити преко главних оса ($\Delta V = V - V_0$) за сферу:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V_0} &= \frac{(1+e_1)(1+e_2)(1+e_3)-1}{1} = \sqrt{(1+2\epsilon_1)(1+2\epsilon_2)(1+2\epsilon_3)} - 1 = \\ &= \sqrt{1+2I_1+4I_2+8I_3} - 1. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Знак испред корена узет је (+), јер релативно смањење $\left(\frac{\Delta V}{V_0} < 0\right)$ запремине не може бити мање од -1 . Одатле имамо, узимајући у обзир (1.57)

$$\left(\frac{V}{V_0}\right)^2 = g_1 g_2 g_3 = |g_{ij}| \equiv g. \quad (1.67')$$

Свде су g_1, g_2, g_3 главне координате тензора g_{ij} , g -његова детерминанта, тј. инваријанта трансформације репера. Последњи резултат за произвољну малу запремину у околини тачке M може се добити и непосредно из афине трансформације $\vec{\rho} = \tilde{A} \vec{\xi}$; детерминанта те трансформације $A = |A_{ij}|$ једнака је запремини паралелепипеда, у који се трансформише првобитна коцка, тј. једнака је $\frac{V}{V_0}$. Квадрирајући, добивамо

$$A^2 = \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 = |A_{ij}|^2 = |A_{im} A_{mj}| = |g_{ij}| = g.$$

Влакно $d\mathbf{x}$ прелази у влакно $d\mathbf{x} = A_{ij} dx_j = \tilde{A} d\mathbf{x}$, посебно вектори влакна $\mathbf{e}_1 dx_1, \mathbf{e}_2 dx_2, \mathbf{e}_3 dx_3$ у векторе влакана

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_1} dx_1, \quad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_2} dx_2, \quad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_3} dx_3. \quad (1.68)$$

Ортонормирани репер, образован за $t = t_0$ од физичких влакана трансформише се у неортогонални и ненормирани репер $\mathfrak{E}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_i}$,

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_1}, \quad \mathfrak{E}_2 = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_2}, \quad \mathfrak{E}_3 = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_3}. \quad (1.69)$$

Тај репер \mathfrak{E}_i ($i = 1, 2, 3$) назива се коваријантним, а компоненте произвољног вектора \mathbf{Z} , представљеног у том базису

$$\mathbf{Z} = Z^i \mathfrak{E}_i \quad (1.70)$$

пишу се са горњим индексима и називају се контраваријантним.

Површина правоугаоника $dx_1 dx_2$ за $t = t_0$ представља се вектором, усмереним по нормали, тј. векторским производом $dx_1 \mathbf{e}_1$ и $dx_2 \mathbf{e}_2$

$$d\mathbf{S}_{12}^0 = dx_1 dx_2 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = dx_1 dx_2 \mathbf{e}_3. \quad (1.71)$$

Као што се види, вектори, који образују основне површине $dx_1 dx_2$, $dx_2 dx_3$, $dx_3 dx_1$ образују исти тај репер \mathbf{e}_i ($i=1, 2, 3$). Површина после деформације дефинише се векторским производом вектора-влакана (1.68). На пример $d\mathbf{S}_{12}^0$ биће деформисана у $d\mathbf{S}_{12}$:

$$d\mathbf{S}_{12} = dx_1 dx_2 (\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2) = \sqrt{g} dx_1 dx_2 \mathfrak{A}^3, \quad (1.72)$$

где је $\mathfrak{A}^3 = (\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2)$ — вектор, нормалан на раван вектора $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$. Означимо контраваријантни базис (репер)

$$\frac{1}{\sqrt{g}}(\mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3) = \mathfrak{A}^1, \quad \frac{1}{\sqrt{g}}(\mathfrak{A}_3 \times \mathfrak{A}_1) = \mathfrak{A}^2, \quad \frac{1}{\sqrt{g}}(\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2) = \mathfrak{A}^3 \quad (1.73)$$

тако да $\mathfrak{A}^1, \mathfrak{A}^2, \mathfrak{A}^3$ чине десни систем, ако је $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ десни. Тај базис (\mathfrak{A}^i) је узајаман (конјугован) коваријантном,

$$\mathfrak{A}_n \cdot \mathfrak{A}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{g}} \mathfrak{A}_n \cdot (\mathfrak{A}_\beta \times \mathfrak{A}_\gamma) = \delta_n^\alpha, \quad \delta_n^\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha = n \\ 0, & \alpha \neq n \end{cases} \quad (1.74)$$

где α, β, γ чине цикличну пермутацију бројева 1, 2, 3. Стварно, мешовити производ $\mathfrak{A}_n \cdot (\mathfrak{A}_\beta \times \mathfrak{A}_\gamma)$ једнак је запремини паралелепипеда, конструисаног над векторима $\mathfrak{A}_n, \mathfrak{A}_\beta, \mathfrak{A}_\gamma$, тј. једнак је $\frac{V}{V_0} = \sqrt{g}$ за $n = \alpha$ и једнак нули, ако се n поклапа са β или γ .

Ставимо

$$\mathfrak{A}^i = g^{i,m} \mathfrak{A}_m, \quad (m, i = 1, 2, 3) \quad (1.75)$$

Множећи (1.75) са \mathfrak{A}_j , добијамо

$$g^{im} g_{mj} = \delta_j^i \quad (1.75')$$

тј. g^{im} је симетрични тензор, инверзан g_{mj} . Он се назива контраваријантним метричким тензором, и даје израз за квадрат дужине првобитног влакна $\overset{-2}{\xi}$ преко $\overset{-2}{\rho}$:

$$\overset{-2}{\xi} = g^{ij} \rho_i \rho_j, \quad g^{ij} = A_{mi}^{-1} A_{mj}^{-1} = \frac{\partial x_m}{\partial X_i} \frac{\partial x_m}{\partial X_j},$$

$$g^{-1} = |g^{ij}| = \frac{1}{g} \quad (1.76)$$

при чему, слично $g_{ij} = \delta_{ij} + 2\epsilon_{ij}$, он се може представити помоћу контраваријантног тензора деформације ϵ_{ij}

$$g^{ij} = \delta^{ij} - 2\epsilon^{ij} \quad (1.77)$$

при томе се ϵ_{ij} према (1.75') дефинише преко ϵ_{ij} једначинама

$$g_{mj} \epsilon^{im} \equiv (\delta_{mj} + 2\epsilon_{mj}) \epsilon^{im} = \epsilon_{ij}. \quad (1.77')$$

За деформисане основне површи имамо

$$dS_{12} = \sqrt{g} dx_1 dx_2 \mathfrak{E}^3, \quad dS_{23} = \sqrt{g} dx_2 dx_3 \mathfrak{E}^1, \quad dS_{31} = \sqrt{g} dx_3 dx_1 \mathfrak{E}^2 \quad (1.78)$$

или према (1.75)

$$dS_{12} = \sqrt{g} dx_1 dx_2 g^{3i} \mathfrak{E}_i, \quad dS_{23} = \sqrt{g} dx_2 dx_3 g^{1i} \mathfrak{E}_i, \\ dS_{31} = \sqrt{g} dx_3 dx_1 g^{2i} \mathfrak{E}_i. \quad (1.79)$$

Произвољни вектор \mathbf{Z} напишимо у \mathfrak{E}_i

$$\mathbf{Z} = Z^i \mathfrak{E}_i = Z_i \mathfrak{E}^i \quad (1.80)$$

при чему множећи са \mathfrak{E}_j налазимо изразе за коваријантне координате, а са \mathfrak{E}^j -контраваријантне

$$Z_i = Z^m g_{mi} = \mathbf{Z} \mathfrak{E}_i, \quad Z^i = Z_m g^{mi} = \mathbf{Z} \mathfrak{E}^i, \quad \mathbf{Z}^2 = z^m Z_n \delta_m^n = Z^i Z_i \quad (1.81)$$

Овде се уочава правило спуштања и подизања индекса код координата помоћу g^{ij} и g_{ij} .

2. Дефиниције и хипотезе у теорији љуски

Тело, ограничено двема криволинијским површима, растојање између којих (дебљина h) је мало у поређењу са другим његовим димензијама, назива се љуском.

Површ, која дели дебљину свуда на пола, назива се њеном средњом површи. Претпоставља се, да је свуда, изузев можда неких тачака или линија на њој, средња површ непрекидна са непрекидно променљивом тангентом и кривинама, при чему се све њене геометријске карактеристике мењају веома благо, то јест тако, да се при прелазу од тачке, која се налази на растојању реда дебљине љуске h , оне имају релативну промену реда $\frac{h}{R}$ (R -полупречник кривине) или мању.

Проучаваћемо овде само љуске константне дебљине (ма да је сама теорија исправна и за љуске променљиве дебљине). У зависности од облика средње површи разликују се љуске: цилиндарске, конусне, тј. које имају облик развојних површи, сферне, у облику елипсоида и друге, које имају облик наразвојних површи. Код реалних конструкција најраспрострањеније су љуске, које имају облик развојних површи, а најчешће цилиндарске.

Нека је издвојен елемент средње површи љуске, који има произвољну контуру; у некој његовој тачки m поставимо нормалу n на површ, и ако затим кроз ту нормалу n поставимо сноп равни, тада у пресеку са површи оне дају на различите начине оријентисане равне криве линије — нормалне пресеке.

При ротацији око нормале неке равни S , која садржи нормалу n , образују се нормални пресеци s . Одређујући њихове кривине, може се показати, да за две криве r и t , које леже у узајамно нормалним равнима \tilde{R} и \tilde{T} , кривине имају екстремне вредности у поређењу са другим нор-

малним пресецима. Правци тих кривих r и t , називају се главним правцима у датој тачки површине, а одговарајуће кривине — главним кривинама.

Нека су нађени главни правци у свим тачкама површи, криве на тој површи код којих се тангенте у свакој тачки поклапају са тим правцима, су линије кривина површи.

Као координатне линије α и β изабраћемо линије главних кривина недеформисане површи; оне образују на површи ортогоналну мрежу. За произвољну тачку површи може се наћи Гаусова (Gauss) кривина, која је једнака производу главних кривина:

$$\Gamma = k_\alpha k_\beta = k_x k_y = k_1 k_2. \quad (2.1)$$

Средњом кривином површине у некој тачки назива се величина

$$K = \frac{1}{2} (k_\alpha + k_\beta) = \frac{1}{2} (k_x + k_y) = \frac{1}{2} (k_1 + k_2). \quad (2.2)$$

Љуске се могу класификовати према знаку Гаусове кривине њихове средње површи; тако, на пример, сферна љуска има позитивну и константну Гаусову кривину у свим тачкама, цилиндарска и конусна љуска имају нулту Гаусову кривину, јер је једна од главних кривина једнака нули, итд.

Цилиндарска љуска, чији попречни пресек представља круг, назива се кружном; при чему, ако пресек чини пун круг, она ће бити затворена, и отворена, ако пресек чини део круга.

Плитким љускама усвојено је сматрати љуске произвољне контуре, код којих је стрела H реда величине дебљине и мала у поређењу са другим њеним димензијама.

Решење проблема равнотеже љуски за еластичне, виско-еластичне и еластично-пластичне деформације заснива се на два хипотезама Kirchhoff-Love-a. Прва се састоји у томе, да се скуп материјалних честица, које се налазе на нормали на средњу површ до деформације, налазе се такође на нормали на њену средњу површ после деформације и зато се деформацијско стање љуске дефинише само деформацијским стањем њене средње површи. Друга хипотеза састоји се у томе, што су све компоненте напона, које имају правац нормале на средњу површ, веома мале у поређењу са другима. Обе ове хипотезе су у сагласности једна с другом и означавају, да се сваки танки елементарни слој материјала, паралелан средњој површи љуске, налази у условима раванског напон-већи стања, тачније, напони, који дејствују у његовој равни знатно су већи од осталих.

Осим хипотеза Kirchhoff-Love-a у даљем ћемо при проучавању еласто-пластичних деформација користити претпоставку о нестишљивости материјала љуске. Степен тачности те претпоставке је унапред довољно познат, јер је из теорије еластичних љуски познато, како утиче Пуасонов (Poisson) коефицијент на деформације и напоне. При томе хипотеза о нестишљивости уноси значајна упрошћења у теорију еласто-пластичних деформација љуски.

Ако на љуску дејствује неко релативно мало подељено попречно оптерећење, тада се у љуски, као резултат дејства притисних или истежућих сила, пре свега јављају кола напона, равномерно расподељена по њеној дебљини. И како су притом напони савијања мали у поређењу са осталима, то љуску можемо звати безмоментном. То је битна карактеристика љуске за разлику од равне плоче, која трпи попречно оптерећење при малим угибима првенствено на рачун напона чистог савијања.

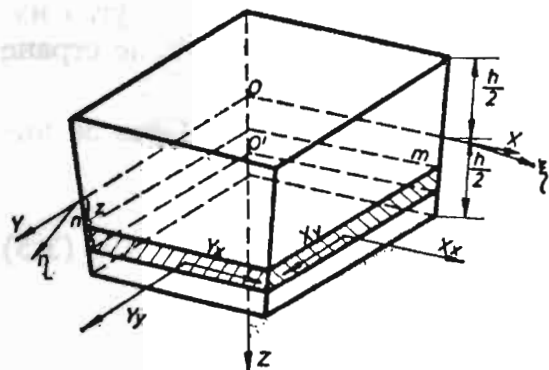
Ако је љуска довољно танка, тада се при повећању оптерећења у њој могу појавити угиби, реда величине дебљине. Тада се напонима у средњој површи прикључују напони савијања упоредиви са њима по величини, напонско стање постаје мешовито или моментно.

Дакле, два различита напонска стања, која постоје при малим оптерећењима у случајевима равне плоче и безмоментне љуске, прелазе за гипке плоче и љуске у јединствено — мешовито напонско стање. Одатле произилази, да диференцијалне једначине теорије гипких плоча и љуски треба да имају заједничку структуру. Што се тиче плитких љуски, за њих је већ за мала оптерећења карактеристично мешовито напонско стање.

§ 3. Основни појмови о деформацији и напонима. Силе и моменти

Изаберимо на средњој површи љуске главни ортогонални систем криволинијских координата ξ, η . У тачки са координатама (ξ, η) средње површи поставимо тангентну раван. Дарбуов (Darboux) покретни триједар (x, y, z) поставимо тако да се координатни почетак $(x = y = z = 0)$ поклапа с тачком (ξ, η) , осе x, y буду усмерене на страну камо расте ξ одн. η , а оса z — ка центру кривине линије ξ . На тај се начин, осе x, y поклапају с главним правцима површи у тачки (ξ, η) .

Елемент средње површи љуске образујмо линијама $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$ и $\xi + d\xi = \text{const}$, $\eta + d\eta = \text{const}$, а елемент саме љуске постављањем кроз назначене линије нормалних пресека (сл. 1).



сл. 1

Означимо померања тачака средње површи дуж линија x, y, z респективно са u, v, w . За почетне кривине линија x и y уведимо ознаке $k_x = k_1$, $k_y = k_2$.

Релативну дилатацију и клизање елемента средње површи као резултат деформације љуске означимо:

$$\epsilon_1 = (e_{xx})_{z=0}, \quad \epsilon_2 = (e_{yy})_{z=0}, \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2} (e_{xy})_{z=0}, \quad (3.1)$$

а промену његових нормалних кривина и торзије, које ћемо даље звати кривљењима љуске услед деформације, означимо респективно:

$$\kappa_1 = \frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_2}, \quad \tau = \frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} = \kappa_{12}. \quad (3.2)$$

Ако су координате вектора померања тачке средње површи у правцима оса x , y , z дате као функције координата (ξ, η) , тада се деформације ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_{12} изражавају помоћу њих познатим обрасцима, који садрже изводе померања не веће од првог реда, а кривине κ_1 , κ_2 , κ_{12} — не веће од другог реда.

Сагласно првој хипотези Kirchoff-Love-а нормални елемент љуске до деформације остаје такође нормалан на средњој површи после деформације, па ће мале деформације слоја, који се налази на растојању z од средње површи, бити:

$$\begin{aligned} \partial_{xx} u &= e_{xx} = \epsilon_1 - z \kappa_1, & \partial_{yy} v &= e_{yy} = \epsilon_2 - z \kappa_2, \\ 2\partial_{xy} u &= e_{xy} = 2(\epsilon_{12} - z \kappa_{12}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

или, изражене помоћу померања:

$$\begin{aligned} \partial_{xx} u &= e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \partial_{yy} v &= e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$2\partial_{xy} u = e_{xy} = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - w \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right).$$

Обрасци (3.3) у потпуности дефинишу правило знака за кривине. На пример, величина κ_1 је позитивна у том случају, кад је влакно паралелно оси x и налази се са стране позитивних вредности z , и као последица кривљења κ_1 скраћују се; торзија $\tau = \kappa_{12}$ је позитивна, ако се угао између влакана, паралелних x и y , кад се она налазе са позитивне стране z , повећава.

При разматрању еласто-пластичних проблема требаће нам израз за интензитет деформације, који ћемо написати у облику

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P_\epsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P_\epsilon - 2z P_{\epsilon\kappa} + z^2 P_\kappa}, \quad (3.5)$$

где су P_ϵ , $P_{\epsilon\kappa}$, P_κ квадратне форме:

$$P_\epsilon = \epsilon_1^2 + \epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_{12}^2; \quad (3.6)$$

$$P_\kappa = \kappa_1^2 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2 + \kappa_{12}^2; \quad (3.7)$$

$$P_{\epsilon\kappa} = \epsilon_1 \kappa_1 + \epsilon_2 \kappa_2 + \frac{1}{2} \epsilon_1 \kappa_2 + \frac{1}{2} \epsilon_2 \kappa_1 + \epsilon_{12} \kappa_{12}. \quad (3.8)$$

Изразе за деформације средње површи при савијању љуске, величине њене дебљине, можемо представити формулама:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - w k_x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (3.9)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - w k_y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2;$$

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (3.10)$$

Положај тачке љуске одређиваћемо Гаусовим координатама α , β средње површи и координатом z , усмереном у правцу спољне нормале. Ламеови коефицијенти за координатни систем (α, β, z) биће једнаки

$$H_1 = A \left(1 + \frac{z}{R_1} \right), \quad H_2 = B \left(1 + \frac{z}{R_2} \right), \quad H_3 = 1. \quad (3.11)$$

За танку љуску може се узети:

$$1 + \frac{z}{R_1} \approx 1, \quad 1 + \frac{z}{R_2} \approx 1,$$

$$H_1 = A, \quad H_2 = B, \quad H_3 = 1. \quad (3.11')$$

Величине A , B , R_1 , R_2 су повезане познатим Гаус-Кодаццијевим (Gauss-Codazzi) релацијама:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{R_2} \right) = \frac{1}{R_1} \frac{\partial B}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{R_1} \right) = \frac{1}{R_2} \frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) = - \frac{AB}{R_1 R_2}.$$

За случај ротационе љуске за координатни систем узимамо: α — дужину лука меридијана s , а β — азимут; тада је [4]

$$A = 1, \quad B = r_0(s), \quad (3.13)$$

где је $r_0(s)$ — растојање од осе обртања до тачке са координатом s . При томе, ако је α — угао између тангенте на меридијан и осе обртања, то је

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\cos \alpha}{r_0}, \quad \frac{\partial r_0}{\partial s} = -\sin \alpha. \quad (3.14)$$

Ако са порастом s величина r_0 опада, то је $\alpha > 0$; при порасту r_0 угао $\alpha < 0$. Приметимо, да из (3.14) следи

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{R_1} \right) = - \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \frac{\sin \alpha}{r_0}. \quad (3.15)$$

Сада ћемо претпоставити, да се при деформацији померања \tilde{u} и \tilde{v} мењају по дебљини љуске по линеарном закону, а померање \tilde{w} се не мења:

$$\tilde{u}(\alpha, \beta, z, t) = u(\alpha, \beta, t) - z\varphi(\alpha, \beta, t),$$

$$\tilde{v}(\alpha, \beta, z, t) = v(\alpha, \beta, t) - z\psi(\alpha, \beta, t), \quad (3.16)$$

$$\tilde{w}(\alpha, \beta, z, t) = w(\alpha, \beta, t).$$

Параметри деформације и обртања биће једнаки:

$$e_{11} = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \tilde{v} + \frac{\tilde{w}}{R_1} \right],$$

$$e_{22} = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \left[\frac{1}{B} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \tilde{u} + \frac{\tilde{w}}{R_2} \right], \quad e_{33} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z};$$

(3.17)

$$e_{12} = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \tilde{u} \right) + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \tilde{v} \right),$$

$$e_{1z} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \alpha} - \frac{\tilde{u}}{R_1} \right), \quad e_{2z} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \beta} - \frac{\tilde{v}}{R_2} \right);$$

$$2\omega_1 = -\frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \beta} - \frac{\tilde{v}}{R_2} \right), \quad 2\omega_2 = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \alpha} - \frac{\tilde{u}}{R_1} \right),$$

$$2\omega_z = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \tilde{u} \right) - \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \tilde{v} \right).$$

За танку љуску, узимајући у обзир (3.16), имаћемо:

$$e_{11} = e_{11}^0 - zk_{11}^0, \quad e_{22} = e_{22}^0 - zk_{22}^0, \quad e_{12} = e_{12}^0 - zk_{12}^0, \quad e_{1z} = e_{1z}^0, \quad e_{2z} = e_{2z}^0, \quad (3.18)$$

где су

$$e_{11}^0 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_1}, \quad e_{22}^0 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_1},$$

$$e_{12}^0 = \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial \beta} u + \frac{\partial B}{\partial \alpha} v \right),$$

$$e_{1z}^0 = \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_1} - \varphi, \quad e_{2z}^0 = \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_2} - \psi, \quad (3.19)$$

$$k_{11}^0 = \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \psi, \quad k_{22}^0 = \frac{1}{B} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varphi,$$

$$k_{12}^0 = \frac{1}{A} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial \beta} \varphi + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \psi \right).$$

За осносиметричне деформације ротационе љуске стање деформације зависиће само од једне координате α , а померање v биће једнако нули; зато је и $e_{12} = e_{2z} = \omega_1 = \omega_2 = 0$.

За осносиметричну деформацију танке љуске добивамо:

$$e_{11}^0 = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_1}, \quad e_{22}^0 = \frac{1}{r_0} (-u \sin \alpha + w \cos \alpha),$$

$$e_{1z}^0 = \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_1} - \varphi, \quad 2\omega_2 = -\varphi - \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{u}{R_1}, \quad (3.20)$$

$$k_{11}^0 = \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \quad k_{22}^0 = -\frac{\varphi}{r_0} \sin \alpha.$$

Компоненте деформације за велика померања изражаваће се следећим обрасцима:

$$\epsilon_{11} = e_{11} + \frac{1}{2} \left[e_{11}^2 + \left(\frac{1}{2} e_{12} + \omega_z \right)^2 + \left(\frac{1}{2} e_{1z} - \omega_2 \right)^2 \right],$$

$$\epsilon_{22} = e_{22} + \frac{1}{2} \left[e_{22}^2 + \left(\frac{1}{2} e_{12} - \omega_z \right)^2 + \left(\frac{1}{2} e_{2z} + \omega_1 \right)^2 \right],$$

$$\epsilon_{12} = e_{12} + e_{11} \left(\frac{1}{2} e_{12} - \omega_z \right) + e_{22} \left(\frac{1}{2} e_{12} + \omega_z \right) + \left(\frac{1}{2} e_{1z} - \omega_2 \right) \left(\frac{1}{2} e_{2z} + \omega_1 \right),$$

$$\epsilon_{1z} = e_{1z} + e_{11} \left(\frac{1}{2} e_{1z} + \omega_2 \right) + e_{zz} \left(\frac{1}{2} e_{1z} + \omega_2 \right) + \left(\frac{1}{2} e_{12} + \omega_z \right) \left(\frac{1}{2} e_{2z} - \omega_1 \right),$$

$$\epsilon_{2z} = e_{2z} + e_{22} \left(\frac{1}{2} e_{2z} - \omega_1 \right) + e_{zz} \left(\frac{1}{2} e_{2z} - \omega_1 \right) + \left(\frac{1}{2} e_{12} - \omega_z \right) \left(\frac{1}{2} e_{1z} + \omega_2 \right),$$

$$\epsilon_{zz} = e_{zz} + \frac{1}{2} \left[e_{zz}^2 + \left(\frac{1}{2} e_{1z} + \omega_2 \right)^2 + \left(\frac{1}{2} e_{2z} - \omega_1 \right)^2 \right]. \quad (3.21)$$

Изрази ϵ_{11} , ϵ_{22} , ϵ_{12} могу се помоћу померања \tilde{u} , \tilde{v} , \tilde{w} написати у облику:

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \tilde{v} + \frac{\tilde{w}}{R_1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \right)^2 \left[\left(\frac{1}{A} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \tilde{v} + \frac{\tilde{w}}{R_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \tilde{u} \right)^2 + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \alpha} - \frac{\tilde{u}}{R_1} \right)^2 \right],$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} &= \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \tilde{u} + \frac{\tilde{w}}{R_2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \right)^2 \left[\left(\frac{1}{B} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \beta} + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \tilde{u} + \frac{\tilde{w}}{R_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \tilde{v} \right)^2 + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \beta} - \frac{\tilde{v}}{R_2} \right)^2 \Big], \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \tilde{u} \right) + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \tilde{v} \right) + \\ &+ \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \left[\left(\frac{1}{A} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \tilde{v} + \frac{\tilde{w}}{R_1} \right) \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \tilde{v} \right) + \right. \\ &\left. + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \tilde{u} \right) \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \tilde{u} + \frac{\tilde{w}}{R_2} \right) + \right. \\ &\left. + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \alpha} - \frac{\tilde{u}}{R_1} \right) \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \beta} - \frac{\tilde{v}}{R_2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ставивши у (3.22) изразе (3.16) за померања, добивамо:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \varepsilon_{11} &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_1} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v \left[1 + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_1} \right) \right] + \\ &+ \frac{w}{R_1} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_1} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left[\left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} u \right)^2 + \frac{1}{A^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \right. \\ &\left. + \frac{u^2}{R_1^2} - 2 \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{u}{R_1} \right] - z \left\{ \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \left[1 + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{w}{R_1} \Big] + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left[\left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} u \right) \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \varphi \right) - \right. \\
& \left. - \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_1} \right) \frac{\varphi}{R_1} \right] + z^2 O_{11}, \\
& \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) \varepsilon_{22} = \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \beta} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_2} \right) \right] + \\
& + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u \left[1 + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_2} \right) \right] + \\
& + \frac{w}{R_2} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_2} \right) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \left[\left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} v \right)^2 + \frac{1}{B^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 + \right. \\
& \left. + \frac{v^2}{R_2^2} - 2 \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \frac{v}{R_2} \right] - z \left\{ \frac{1}{B} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \left[1 + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{w}{R_2} \right) \right] + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varphi \left[1 + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_2} \right) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \left[\left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} v \right) \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \psi \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_2} \right) \frac{\psi}{R_2} \right] \right\} + z^2 O_{22}, \tag{3.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) \varepsilon_{12} = \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} u \right) \left[\left(1 + \frac{z}{R_2} \right) + \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_2} \right) \right] + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} v \right) \left[\left(1 + \frac{z}{R_1} \right) + \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_1} \right) \right] + \left[\frac{1}{AB} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{u}{R_1 B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{v}{R_2 A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{uv}{R_1 R_2} \Big] - z \left\{ \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \varphi \right) \left[\left(1 + \frac{z}{R_2} \right) + \right. \right. \\
& + \left. \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_2} \right] + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \psi \right) \left[\left(1 + \frac{z}{R_1} \right) + \right. \\
& \left. \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_1} \right] + \left[\left(\frac{1}{B} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varphi \right) \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} u \right) + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \psi \right) \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} v \right) \right] - \\
& \left[\left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_1} \right) \frac{\psi}{R_2} + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_2} \right) \frac{\varphi}{R_1} \right] \Big\} + z^2 O_{12}.
\end{aligned}$$

Обрасци за деформације попречног клизања при великим померањима имају облик:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{1z} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \alpha} - \frac{\tilde{u}}{R_1} \right) + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \tilde{v} + \right. \\
& + \left. \frac{\tilde{w}}{R_1} \right) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \tilde{u} \right) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \\
& + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \alpha} - \frac{\tilde{u}}{R_1} \right) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}, \\
\varepsilon_{2z} &= \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \beta} - \frac{\tilde{v}}{R_2} \right) + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \tilde{u} + \right. \\
& + \left. \frac{\tilde{w}}{R_2} \right) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \tilde{v} \right) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \\
& + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \beta} - \frac{\tilde{v}}{R_2} \right) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}. \tag{3.24}
\end{aligned}$$

После уношења у (3.24) образац (3.16), добивамо:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{z}{R_1} \right) \varepsilon_{1z} &= \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_1} - \left[\varphi \left(1 + \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_1} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v \right) + \right. \\
& + \left. \psi \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} u \right) \right] - z \left\{ - \left[\varphi \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \psi \right) + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \psi \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \varphi \right) \Bigg] \Bigg\}, \\
\left(1 + \frac{z}{R_2} \right) \varepsilon_{2z} &= \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_2} - \left[\psi \left(1 + \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R_2} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u \right) + \right. \\
& + \varphi \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} v \right) \Bigg] - z \left\{ - \left[\psi \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varphi \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \varphi \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \psi \right) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Даље ћемо сматрати да су деформације елемента љуске дебљине dz мале у поређењу са 1, па се, дакле, елемент љуске димензија $d\alpha d\beta dz$ само заокрене због деформације, али остаје правоугли паралелепипед, сачувавши своје димензије; ипак с обзиром на (3.16) ти паралелепипеди ће склизнути у односу један на други по дебљини љуске. Такође ћемо сматрати, да је љуска толико танка, да је $\frac{h}{R} \leq 0,01$; а и угибе w ћемо

сматрати малим у поређењу са дебљином љуске. Имајући у виду могућност прелаза материјала љуске иза границе еластичности и његов рад све до јачине материјала, треба сматрати, да деформације ε_{ik} имају ред 0,1 ($\varepsilon_{ik} \leq 0,1$).

Упрошћење, унето у теорију љуски хипотезама Kirchhoff-Lowe-a, састоји се у томе, што се уместо шест компонентних напона могу увести пет компонената сила и три компоненте момента, који дејствују на елемент љуске у целом, при чему ће тих осам величина бити функције само две независне променљиве ξ, η ; за њихово одређивање довољне су једначине равнотеже елемента, ако је само установљена веза између сила, моментата и деформација и кривљења.

Пет компонентних сила одређују се из равнотеже свих напона за две узајамно нормалне стране елемента, чија је дужина лука у средњој површи једнака јединици. Ако је љуска довољно танка, да се однос њене дебљине према карактеристичном полупречнику кривине може занемарити у поређењу с јединицом, добијамо следећих пет израза за силе:

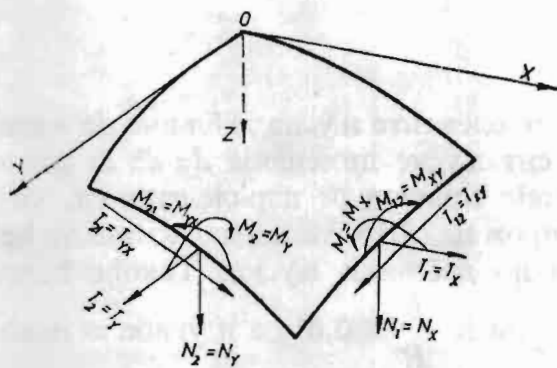
$$\begin{aligned}
T_x = T_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} X_x dz, & T_y = T_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} Y_y dz, & T_{xy} = T_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} X_y dz; \\
N_x = N_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} Z_x dz, & N_y = N_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} Z_y dz.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Пресечне силе N_x, N_y , без обзира на то колико су мали напони, нису једнаке нули, и оне се одређују само из услова равнотеже.

Аналогно се могу написати обрасци за моменте савијања и торзиони момент:

$$M_x = M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} X_x z dz, \quad M_y = M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} Y_y z dz, \quad M_{xy} = M_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} X_y z dz. \quad (3.27)$$

Пошто се напони, који делују на елемент, на тај начин замењени резултујућим силама и моментима, може се и сам елемент љуске (в. сл. 1) заменити елементом средње површи (в. сл. 2). На сл. 2, која представља схему дејствујућих сила на елемент средње површи љуске, види се, да га силе $T_x = T_1$ и $T_x = T_2$ истежу у правцима оса x и y , сила $T_{xy} = T_{12}$



сл. 2

ствара клизање у површи; њихов позитивни смер у правцима оса x и y је исти као и смерови напона X_x , Y_y , X_y . Позитивни смерови пресечних сила $N_x = N_1$, $N_y = N_2$ поклапају се с позитивним смеровима напона Z_x , Z_y . Моменти савијања $M_x = M_1$, $M_y = M_2$ су позитивни, ако теже да произведу испупченост љуске на страну позитивне осе z . Торзиони момент $M_{xy} = M_{12}$ је позитиван ако са позитивне стране осе x тежи да обрће елемент у смеру казаљке часовника.

Ради упрошћења прорачуна уместо сила T_1 , T_2 , T_{12} погодно је увести њихове линеарне комбинације:

$$S_1 = T_1 - \frac{1}{2} T_2 = \int_{-h/2}^{h/2} S_x dz, \quad S_2 = T_2 - \frac{1}{2} T_1 = \int_{-h/2}^{h/2} S_y dz, \quad \frac{2}{3} S_{12} = T_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} S_{xy} z dz, \quad (3.28)$$

а уместо момената M_1 , M_2 , M_{12} — величине:

$$H_1 = M_1 - \frac{1}{2} M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} S_x z dz, \quad H_2 = M_2 - \frac{1}{2} M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} S_y z dz, \quad (3.29)$$

$$\frac{2}{3} H_{12} = M_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} S_{xy} z dz.$$

§ 4. Услови компатибилности

Шест координата тензора деформације ϵ_{ij} или метричког тензора $g_{ij} = \delta_{ij} + 2 \epsilon_{ij}$ у околини произвољне фиксиране физичке тачке M средине могу се по жељи независно мењати током времена, тј. за датих

шест произвољних функција времена $\varepsilon_{ij}(M, t)$, деформација околине M биће афина. Али ако бисмо задали за све тачке средине у било ком тренутку времена t тензор ε_{ij} или g_{ij} као функцију координата, тј. произвољно изабрали поље тензора деформације, тада би се оне показале некомпатибилним, дакле, између суседних делова образовале би се пуко-тине, или би различите физичке запремине заузеле једну исту област простора. Таква могућност је искључена захваљујући особини закона кретања: $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, наиме непрекидно узајамно једнозначној зависности између \mathbf{X} и \mathbf{x} за произвољно t и егзистенцији извода.

Тензор ε_{ij} (или g_{ij}) добија се диференцирањем вектора $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ (или $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$), тј. шест скаларних функција ε_{ij} изражене су преко три u_i . Значи између ε_{ij} треба да постоје везе, чији потуни систем представља услове компатибилности деформација. По карактеру они треба да буду последица независности реда диференцирања вектора \mathbf{X} типа

$$\frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial x_j \partial x_i} \text{ и т. сл.}$$

Представимо изводе вектора базе \mathfrak{A}_i у истој бази, тј. нађимо коефици-јенте Γ_{ij}^k у изразу

$$\frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial x_j} = \Gamma_{ij}^k \mathfrak{A}_k, \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (4.1)$$

Одавде је очевидно, да су Γ_{ij}^k , Кристофелови (Kristoffel) симболи 2-ге врсте (коефицијенти повезаности), симетрични по доњим индексима

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad (4.2)$$

тј. њих има осамнаест. Диференцирајући по x_r изразе $g_{pq} = \mathfrak{A}_p \mathfrak{A}_q$, добивамо

$$\frac{\partial g_{pq}}{\partial x_r} = \mathfrak{A}_q \Gamma_{pr}^k \mathfrak{A}_k + \mathfrak{A}_p \Gamma_{qr}^k \mathfrak{A}_k = g_{kq} \Gamma_{pr}^k + g_{kp} \Gamma_{qr}^k. \quad (4.3')$$

Замењујући овде (p, q, r) са (i, m, j) , затим са (j, m, i) а овде са (i, j, m) добивамо

$$\frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m} = 2 \Gamma_{ij}^k g_{mk} \equiv 2 \Gamma_{m, ij}, \quad (4.3)$$

где су са $\Gamma_{m, ij}$ — означени Кристофелови симболи 1-ве врсте.

Множећи са g^{mn} , добијамо тражене изразе ($g_{mk} g^{kn} = \delta_k^n$):

$$2 \Gamma_{ij}^n = g^{mn} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m} \right) \quad (4.4)$$

или, с обзиром на $g_{ij} = \delta_{ij} + 2 \varepsilon_{ij}$

$$\Gamma_{ij}^n = g^{mn} \left(\frac{\partial \varepsilon_{im}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{jm}}{\partial x_i} - \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_m} \right),$$

$$\Gamma_{m, ij} = \frac{\partial \varepsilon_{im}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{jm}}{\partial x_i} - \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_m}. \quad (4.5)$$

Како су Γ_{ij}^n изражени преко деформација ε_{ij} , остаје да се напишу услови компатибилности за (4.1)

$$-\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_m}{\partial x_p \partial x_q} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_m}{\partial x_q \partial x_p} = -\frac{\partial}{\partial x_q} (\Gamma_{mp}^k \mathfrak{A}_k) + \frac{\partial}{\partial x_p} (\Gamma_{mq}^k \mathfrak{A}_k) = R_{mpq}^k \mathfrak{A}_k = 0, \quad (4.6)$$

где су са R_{mpq}^k означене компоненте Римановог (Riemann) тензора кривине узимањем $\Gamma_{mp}^k \frac{\mathfrak{A}_k}{\partial x_q} = \Gamma_{mp}^r \Gamma_{qr}^k \mathfrak{A}_k$ — према (4.1):

$$R_{mpq}^k = -\frac{\partial \Gamma_{mp}^k}{\partial x_q} - \Gamma_{mp}^r \Gamma_{qr}^k + \frac{\partial \Gamma_{mq}^k}{\partial x_p} + \Gamma_{mq}^r \Gamma_{pr}^k = 0 \quad (4.7)$$

(4.7) следи из (4.6), јер су \mathfrak{A}_k — линеарно независни.

Означимо

$$g_{kl} R_{mpq}^k = R_{lmpq}. \quad (4.8)$$

Из (4.7), множећи са g_{kl} и узимајући у обзир (4.3'), (4.3)

$$g_{kl} \frac{\partial \Gamma_{mq}^k}{\partial x_p} = \frac{\partial}{\partial x_p} \Gamma_{l,mq} - \Gamma_{mq}^k \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_p} = \frac{\partial}{\partial x_p} \Gamma_{l,mq} - \Gamma_{mq}^k (g_{rl} \Gamma_{kp}^r + \\ + g_{rk} \Gamma_{lp}^r) = \frac{\partial}{\partial x_p} \Gamma_{l,mq} - \Gamma_{mq}^k \Gamma_{l,kp} - \Gamma_{mq}^k \Gamma_{k,lp}$$

добивамо

$$R_{lmpq} = \frac{\partial}{\partial x_p} \Gamma_{l,mq} - \Gamma_{mq}^k \Gamma_{l,kp} - \Gamma_{mq}^k \Gamma_{k,lp} + \Gamma_{mq}^r \Gamma_{l,pr} - \\ - \frac{\partial}{\partial x_q} \Gamma_{l,mp} + \Gamma_{mp}^k \Gamma_{l,kq} + \Gamma_{mp}^k \Gamma_{k,lq} - \Gamma_{mp}^r \Gamma_{l,qr} = \\ = \frac{\partial}{\partial x_p} \Gamma_{l,mq} - \frac{\partial}{\partial x_q} \Gamma_{l,mp} - \Gamma_{mq}^r \Gamma_{r,lp} + \Gamma_{mp}^r \Gamma_{r,lq} = 0. \quad (4.9')$$

Уносећи овде вредности $\Gamma_{m,ij}$ из (4.3), а такође

$$\Gamma_{ij}^n = g^{mn} \Gamma_{m,ij} \quad (4.9'')$$

добивамо услове компатибилности деформација у облику:

$$R_{lmpq} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{lq}}{\partial x_m \partial x_p} + \frac{\partial^2 g_{mp}}{\partial x_l \partial x_q} - \frac{\partial^2 g_{lp}}{\partial x_m \partial x_q} - \frac{\partial^2 g_{mq}}{\partial x_l \partial x_p} \right) - \\ - g^{rs} (\Gamma_{s,mq} \Gamma_{r,lp} - \Gamma_{s,mp} \Gamma_{r,lq}) = 0. \quad (4.10)$$

Помоћу тензора коначне деформације ε_{ij} (4.10) се изражава на основу релације

$$g_{ij} = \delta_{ij} + 2 \varepsilon_{ij}.$$

Очевидно је да из (4.10) а такође $g_{ij} = g_{ji}$ и $\Gamma_{m,pq} = \Gamma_{m,qp}$ следе особине тензора кривине

$$R_{lmpr} = -R_{mlpr}; \quad R_{lmpr} = -R_{lmrp}; \quad R_{lmpr} = R_{pqlm}, \quad (4.11)$$

Дакле, имамо само шест независних R_{lmpr} , тј. шест услова компатибилности деформација (4.10), добијених за следећих шест комбинација индекса

$$l, q, m, p = \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 2; & 2 & 2 & 3 & 3; & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1; & 2 & 3 & 1 & 2; & 3 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \quad (4.12)$$

Дакле, у случају (3.9), као и за (3.4) треба да је испуњен услов компатибилности кога ћемо написати у облику:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (4.13)$$

У теорији љуски, користећи се Гаус-Кодацијевим условима (3.12) услове компатибилности можемо написати за деформисану средњу површ у облику који садржи експлицитно све геометријске параметре љуске, а саме:

$$\begin{aligned} & B \frac{\partial \kappa_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} (\kappa_2 - \kappa_1) - A \frac{\partial \tau}{\partial \beta} - 2 \frac{\partial A}{\partial \beta} \tau + \frac{1}{R_2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \omega + \\ & + \frac{1}{R_1} \left[A \frac{\partial \omega}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} \omega - B \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \right] = 0, \\ & A \frac{\partial \kappa_1}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} (\kappa_1 - \kappa_2) - \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} - 2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} \tau + \frac{1}{R_1} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \omega + \\ & + \frac{1}{R_2} \left[B \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \omega - A \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \right] = 0. \quad (4.14) \\ & \frac{\kappa_1}{R_2} + \frac{\kappa_2}{R_1} + \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{A} \left[B \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \frac{A}{2} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} \omega \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{B} \left[A \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \frac{B}{2} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \omega \right] \right\} = 0. \end{aligned}$$

§ 5. Диференцијалне једначине равнотеже

На сл. 1 представљен је елемент љуске, на чијим странама делују силе у средњој површи, а на сл. 2 представљен је елемент средње површи љуске и приказана схема дејствујућих сила; силе савијања — моменти и попречне силе; нормално на елемент дејствује попречно оптерећење интензитета q .

Саставимо једначине равнотеже елемента љуске. Испишимо суму пројекција свих сила на правац тангенте на линију x ; сматра се, с обзиром

на мале углове, да се силе у средњој површи пројектују у стварној величини, па добивамо:

$$\left(X_x + \frac{\partial X}{\partial x} dx\right) h dy - X_x h dy + \left(X_y + \frac{\partial X_y}{\partial y} dy\right) h dx - X_y h dx = 0.$$

Овде не улазе пројекције попречних сила, оне дају чланове који су мале величине вишег реда па се због тога занемарују. После простих трансформација добивамо:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0. \quad (5.1)$$

Аналогно налазимо при пројектовању свих сила на правац y :

$$\frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0. \quad (5.2)$$

Једначина момената свих сила у односу на тангенту на линију y имаће облик

$$\left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx\right) dy - M_x dy + \left(T_x + \frac{\partial T_x}{\partial y} dy\right) dx - T_x dx - q dx dy \frac{dx}{2} - \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx\right) dy dx - \frac{\partial N_x}{\partial y} dy dx \frac{dx}{2} = 0.$$

Одбацујући у њему мале вишег реда, налазимо:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial T_x}{\partial y} - N_x = 0. \quad (5.3)$$

Аналогно налазимо једначину момената у односу на тангенту линије x :

$$\frac{\partial T_y}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - N_y = 0. \quad (5.4)$$

Саставимо сада једначину пројекција свих сила на правац нормале, при чему посматрамо елемент љуске у деформисаном стању. Силе $X_x h$ и $Y_y h$ дају допунске компоненте, које су једнаке

$$X_x h \left(k_x + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) dx dy, \quad Y_y h \left(k_y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) dx dy.$$

Лако је утврдити да ће коначне једначине равнотеже имати облик

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + X_x h \left(k_x + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + Y_y h \left(k_y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + 2 X_y h \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q = 0. \quad (5.5)$$

За љуску с почетним отклоном w_0 од идеалног облика имаћемо аналогну једначину равнотеже:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + X_x h \left[k_x + \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} \right] +$$

$$+ Y_y h \left[k_y + \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} \right] + 2 X_y h \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} + q = 0. \quad (5.6)$$

§ 6. Веза између деформација и напона. Диференцијалне једначине љуски

Размотримо релације које успостављају везу између деформација и напона за општи еласто-пластични деформабилни материјал љуске. Одатле је, по потреби лако прећи на релације еластичности.

Нека је дата љуска дебљине h , која се налази под утицајем неког система равнотежних сила, и које изазивају пластичне деформације. Напон у слоју $o'mn$ (сл. 1), биће:

$$S_x = X_x - \frac{1}{2} Y_y = \frac{\sigma_i}{e_i} (\varepsilon_1 - z \kappa_1), \quad S_y = Y_y - \frac{1}{2} X_x = \frac{\sigma_i}{e_i} (\varepsilon_3 - z \kappa_2),$$

$$S_{xy} = X_y = \frac{2 \sigma_i}{3 e_i} (\varepsilon_{12} - z \kappa_{12}), \quad (6.1)$$

где је

$$\sigma_i = \sqrt{X_x^2 - X_x Y_y + Y_y^2 + 3 X_y^2}$$

интензитет напона; при чему је σ_i одређена функција e_i . Напони X_z , Y_z , Z_z су мали у поређењу са основним.

Из (3.28) и (6.1) сада имамо:

$$S_1 = \varepsilon_1 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{e_i} dz - \kappa_1 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{e_i} z dz,$$

$$S_2 = \varepsilon_2 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{e_i} oz - \kappa_2 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{e_i} z dz, \quad (6.2)$$

$$S_{12} = \varepsilon_{12} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{e_i} dz - \kappa_{12} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{e_i} z dz,$$

а из (3.29) и (6.1) добивамо:

$$H_1 = \varepsilon_1 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{e_i} z dz - \kappa_1 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{e_i} z^2 dz,$$

$$H_2 = \varepsilon_2 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{e_i} z dz - \kappa_2 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{e_i} z^2 dz, \quad (6.3)$$

$$H_{12} = \varepsilon_{12} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{e_i} z dz - \kappa_{12} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{e_i} z^2 dz.$$

У обрасцима (6.2) и (6.3) сусрећу се три типа интеграла, распрострањених по дебљини љуске:

$$I_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{e_i} dz, \quad I_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{e_i} z dz, \quad I_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{e_i} z^2 dz. \quad (6.4)$$

Помоћу њих силе и моменти изражавају се на следећи начин:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} T_2 &= \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \right) I_1 - \left(\kappa_1 + \frac{1}{2} \kappa_2 \right) I_2, \\ \frac{3}{4} T_2 &= \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \right) I_1 - \left(\kappa_2 + \frac{1}{2} \kappa_1 \right) I_2, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\frac{3}{2} T_{12} = \varepsilon_{12} I_1 - \kappa_{12} I_2;$$

$$\frac{3}{4} M_1 = \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \right) I_2 - \left(\kappa_1 + \frac{1}{2} \kappa_2 \right) I_3,$$

$$\frac{3}{4} M_2 = \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \right) I_2 - \left(\kappa_2 + \frac{1}{2} \kappa_1 \right) I_3,$$

$$\frac{3}{2} M_{12} = \varepsilon_{12} I_2 - \kappa_{12} I_3. \quad (6.6)$$

Како је у (6.4) σ_i дата функција од e_i , при чему њен конкретан облик за сваки материјал постаје познат у посебним проблемима, природно је ослободити се интеграције по z и на основу релација (3.5) прећи на интеграцију по e_i . Множећи I_1 са P_ε , I_2 са $(-2 P_{\varepsilon\kappa})$ и I_3 са P_κ и сабирајући резултате, добивамо:

$$I_1 P_\varepsilon - 2 I_2 P_{\varepsilon\kappa} + I_3 P_\kappa = \frac{3}{4} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma \quad (6.7)$$

Диференцирајући (3.5) по z , налазимо:

$$\frac{3}{4} e_i de_i = (z P_\kappa - P_{\varepsilon\kappa}) dz. \quad (6.8)$$

Множећи сада I_1 са $(-P_{\varepsilon\kappa})$, I_2 са P_κ и сабирајући резултате, добивамо:

$$- I_1 P_{\varepsilon\kappa} + I_2 P_\kappa = \frac{3}{4} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i de_i. \quad (6.9)$$

Нађимо израз z^2 помоћу e_i ; за то је неопходно решити квадратну једначину (3.5)

$$z^2 P_x - 2 z P_{\epsilon x} + P_\epsilon = \frac{3}{4} e_i^2,$$

чији су корени, који не противрече услови (6.8)

$$z = \frac{P_{\epsilon x}}{P_x} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{P_x}} \sqrt{e_i^2 - \frac{4}{3} \frac{P_\epsilon P_x - P_{\epsilon x}^2}{P_x}} \text{sign}(z P_x - P_{\epsilon x}), \quad (6.10)$$

при чему је неопходно узимати увек позитивне вредности квадратног корена. Диференцирајући (6.10), добивамо

$$dz = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{P_x}} \frac{e_i de_i \text{sign} de_i}{\sqrt{e_i^2 - \frac{4}{3} \frac{P_\epsilon P_x - \epsilon x^2}{P_x}}}. \quad (6.11)$$

Знак величине $(z P_x - P_{\epsilon x})$ (означаване симболом sign) на основу (6.8), поклапа се са знаком $\frac{de_i}{dz}$, а како је у интервалима који нас интересују

dz увек позитивно при промени z од $-\frac{h}{2}$ до $+\frac{h}{2}$ то интеграцију по de_i треба извести тако, да би de_i такође расло, тј. неопходно је интегралити по $de_i \text{sign} de_i$.

Посматрајмо вредности интензитета деформација у три тачке, које се налазе на оси z :

$$z = -\frac{h}{2}, \quad z = +\frac{h}{2}, \quad z = z_0 \quad (6.12)$$

где је $z_0 = \frac{P_{\epsilon x}}{P_x}$. Означимо их респективно:

$$\begin{aligned} e_{i1} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P_\epsilon + h P_{\epsilon x} + \frac{h^2}{4} P_x} & \left(z = -\frac{h}{2} \right), \\ e_{i2} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P_\epsilon - h P_{\epsilon x} + \frac{h^2}{4} P_x} & \left(z = +\frac{h}{2} \right), \\ e_{i0} &= \frac{2}{\sqrt{3} \sqrt{P_x}} \sqrt{P_\epsilon P_x - P_{\epsilon x}^2} & (z = z_0). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Како се види из (6.8), тачка $z = z_0$ је тачка минимума e_i , јер је $\frac{d^2 e_i}{dz^2} > 0$.

Дакле, увек важе неједнакости

$$e_{i1} \geq e_{i0}, \quad e_{i2} \geq e_{i0}. \quad (6.13')$$

Сматраћемо да су деформације истезања и клизања средње површи $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_{12}$ упоредиве или мале у поређењу са деформацијама савијања

љуске $\pm \frac{h}{2} \kappa_1, \pm \frac{h}{2} \kappa_2, \pm \frac{h}{2} \kappa_{12}$ или да су последње доминирајуће, ако тачка z_0 не иде иза границе дебљине љуске, тј. ако је

$$-\frac{h}{2} \leq z_0 = \frac{P_{\epsilon\kappa}}{P_{\kappa}} \leq +\frac{h}{2}. \quad (6.14)$$

Деформације средње површи називаћемо великим, или доминирајућим, у поређењу са деформацијама савијања, ако се тачка z_0 налази ван дебљине љуске, тј. ако важи једна од неједнакости:

$$z_0 = \frac{P_{\epsilon\kappa}}{P_{\kappa}} > \frac{h}{2}, \quad z_0 = \frac{P_{\epsilon\kappa}}{P_{\kappa}} < -\frac{h}{2}. \quad (6.15)$$

У случају упоредивих деформација истезања и савијања интеграл сваке позитивне величине R по дебљини љуске неопходно је израчунати по обрасцу

$$\int_{-h/2}^{h/2} R dz = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{P_{\kappa}}} \left[\int_{\epsilon_{10}}^{\epsilon_{11}} \frac{R e_i d e_i}{\sqrt{e_i^2 - e_{i0}^2}} + \int_{\epsilon_{10}}^{\epsilon_{12}} \frac{R e_i d e_i}{\sqrt{e_i^2 - e_{i0}^2}} \right]. \quad (6.14')$$

У случају неупоредивих или великих деформација истезања такав интеграл треба рачунати по обрасцу

$$\int R dz = \frac{\sqrt{3} \operatorname{sign}(\epsilon_{12} - \epsilon_{11})}{\sqrt{P_{\kappa}}} \int_{\epsilon_{11}}^{\epsilon_{12}} \frac{R e_i d e_i}{\sqrt{e_i^2 - e_{i0}^2}}. \quad (6.15')$$

Уведимо сада ознаке основних величина у теорији љуски:

$$A = A_0, \quad B = B_0, \quad C = C_0 \quad \left(-\frac{h}{2} \leq z_0 \leq +\frac{h}{2} \right); \quad (6.16)$$

$$A = A_1, \quad B = B_1, \quad C = C_1 \quad \left(|z_0| > \frac{h}{2} \right),$$

где се величине A_0, B_0, C_0 односе за случај доминирајућих деформација савијања и једнаке су:

$$A_0 = - \int_{\epsilon_{10}}^{\epsilon_{11}} \sigma_i d e_i + \int_{\epsilon_{10}}^{\epsilon_{12}} \sigma_i d e_i = \int_{\epsilon_{11}}^{\epsilon_{12}} \sigma_i d e_i, \quad (6.16')$$

$$B_0 = \int_{\epsilon_{10}}^{\epsilon_{11}} \frac{\sigma_i d e_i}{\sqrt{e_i^2 - e_{i0}^2}} + \int_{\epsilon_{10}}^{\epsilon_{12}} \frac{\sigma_i d e_i}{\sqrt{e_i^2 - e_{i0}^2}},$$

$$C_0 = \int_{\epsilon_{10}}^{\epsilon_{11}} \sigma_i \sqrt{e_i^2 - e_{i0}^2} d e_i + \int_{\epsilon_{10}}^{\epsilon_{12}} \sigma_i \sqrt{e_i^2 - e_{i0}^2} d e_i,$$

а A_1, B_1, C_1 се односе за случај доминирајућег истезања средње површи и одређују се по обрасцима:

$$A_1 = A_0 = \int_{e_{11}}^{e_{12}} \sigma_t d e_t, \quad B_1 = \int_{e_{11}}^{e_{12}} \frac{\sigma_t d e_t}{\sqrt{e_t^2 - e_{t0}^2}} \text{sign}(e_{t2} - e_{t1}),$$

$$C_1 = \int_{e_{11}}^{e_{12}} \sigma_t \sqrt{e_t^2 - e_{t0}^2} \text{sign}(e_{t2} - e_{t1}). \quad (6.16'')$$

Интеграле I_1, I_2, I_3 можемо изразити преко основних величина A, B, C , које зависе од основних квадратних форми $P_\varepsilon, P_\chi, P_{\varepsilon\chi}$ према формулама (6.16). Ради тога, приметимо, да се интеграл J_1 на основу (6.4) и (6.14'), (6.15') непосредно изражава помоћу функције B и затим из (6.7) добивамо I_3 преко A, B, C .

Таквим путем налазимо ове обрасце:

$$I_1 = \frac{\sqrt{3}}{2 P_\chi^{1/2}} B, \quad I_2 = \frac{\sqrt{3} P_{\varepsilon\chi}}{2 P_\chi^{3/2}} B + \frac{3}{4 P_\chi} A,$$

$$I_3 = \frac{3 \sqrt{3}}{8 P_\chi^{3/2}} C + \frac{\sqrt{3} P_{\varepsilon\chi}^2}{2 P_\chi^{5/2}} B + \frac{3 P_{\varepsilon\chi}}{2 P_\varepsilon^2} A, \quad (6.17)$$

при чему је величинама A, B, C потребно приписати индекс „0“ и израчунавати их по обрасцима (6.16'), ако доминира деформација савијања, или пак приписати индекс „1“ и израчунавати према (6.16''), ако доминира истезање-притисак средње површи.

Изузетан случај, када образац (6.11) и сви следећи прорачуни губе смисао, представља безмоментно напонско стање, за које су величине e_t , дакле и, σ_t константне по дебелини. У том случају

$$P_\chi = P_{\varepsilon\chi} = 0, \quad e_t = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P_\varepsilon}, \quad (6.18)$$

и интеграле I_1, I_2, I_3 можемо израчунати непосредно. Из образаца (6.4) имамо:

$$I_1 = h \frac{\sigma_t}{e_t}, \quad I_2 = 0, \quad I_3 = \frac{h^3 \sigma_t}{12 e_t}, \quad (6.19)$$

при чему је с обзиром да је једнакост $P_\chi = 0$ могућа само за $\chi_1 = \chi_2 = \chi_{12} = 0$ тада су моменти савијања и торзиони момент једнаки нули: $M_1 = M_2 = M_{12} = 0$, а силе се одређују из простих релација:

$$T_1 - \frac{1}{2} T_2 = S_1 = h \frac{\sigma_t}{e_t} \varepsilon_{11}, \quad T_2 - \frac{1}{2} T_1 = S_2 = h \frac{\sigma_t}{e_t} \varepsilon_{22},$$

$$T_{12} = \frac{2}{3} S_{12} = h \frac{2 \sigma_t}{3 e_t} \varepsilon_{12}. \quad (6.20)$$

Те релације поклапају се са оним које важе за равно напонско стање, при чему је

$$T_1 = h X_x, \quad T_2 = h Y_y, \quad T_{12} = h X_y. \quad (6.21)$$

Релације (6.2), (6.3) или (6.5), (6.6) дају изразе за силе и моменте, који делују на елемент љуске, помоћу три квадратне форме (3.6), (3.7), (3.8) P_ϵ , P_κ , $P_{\epsilon\kappa}$ и шест компонената деформација и кривљења ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_{12} , κ_1 , κ_2 , κ_{12} , дакле, помоћу три компоненте вектора померања тачке средње површи, јер деформације и кривине имају одређене диференцијалне изразе помоћу u , v , w .

Није тешко показати, и обратно, да се све деформације и кривине могу изразити помоћу сила и момената [5].

Постављене релације, које везују деформације и напоне, важе како у случају еласто-пластичних деформација (под претпоставком да се реализује просто или блиско простом оптерећење, тј. такво да су сва напрезања пропорционална једном параметру [6]. Случај општег сложеног оптерећења проучен је у [2, 7, 8], — овде се не разматра), тако и за чисто еластичне деформације.

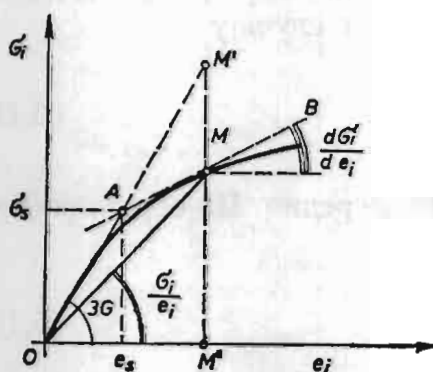
Дакле, величине σ_i и e_i везане су међу собом законима:

$$\sigma_i = \Phi(e_i) = 3G e_i [1 - \omega(e_i)], \quad (6.22)$$

$$e_i = \Phi^{-1}(\sigma_i) = \frac{\sigma_i}{3G} [1 + \varphi(\sigma_i)]. \quad (6.23)$$

Овде је G — модул еластичности клизања. За криву $\sigma_i = \Phi(e_i)$ претпостављаћемо да задовољава неједнакост (сл. 3)

$$3G \geq \frac{\sigma_i}{e_i} \geq \frac{d\sigma_i}{de_i} > 0. \quad (6.24)$$



сл. 3

Функција $\omega(e_i)$ (функција пластичности, коју је први увео А.А. Иљушин) представља однос одсечка MM' према одсечку $M''M'$ (сл. 3). Она је једнака нули, док је деформација еластична и задовољава следећу неједнакост, која произилази из (6.24):

$$1 \geq \omega + e_i \frac{d\omega}{de_i} > \omega \geq 0, \quad \frac{d\omega}{de_i} > 0. \quad (6.25)$$

Наведене особине функција σ_i и ω одговарају подацима експеримента. Функција пластичности ω изражава се преко σ_i сагласно једначини

$$\omega = \frac{3 G e_i - \sigma_i}{3 G e_i} \text{ и њој аналогна функција } \varphi \text{ има израз}$$

$$\varphi = \frac{3 G e_i - \sigma_i}{\sigma_i} = \frac{\omega}{1 - \omega}.$$

Ако означимо са σ_s и e_s тачку, до које деформацију можемо сматрати еластичном (σ_s — граница течења и e_s — деформација течења), за функцију ω имамо:

$$\begin{aligned} \omega &= 0, & e_i &\leq e_s; \\ \omega &= \omega(e_i) > 0, & e_i &\geq e_s. \end{aligned} \quad (6.26)$$

У том случају, ако се крива $\sigma_i = \Phi(e_i)$ може заменити изломљеном линијом $OAMB$, величине σ_s, e_s одговараће тачкама прелома, $\frac{d\sigma_i}{de_i}$ ће бити константа, а за функције ω добијамо

$$\omega = 0, \quad e_i \leq e_s; \quad \omega = \lambda \left(1 - \frac{e_s}{e_i} \right), \quad e_i \geq e_s, \quad (6.27)$$

при чему константа λ (коэффициент очвршћења) означава величину

$$\lambda = 1 - \frac{1}{3 G} \frac{d\sigma_i}{de_i}.$$

Релације (6.23) немају смисла у том случају, ако материјал љуске не поседује очвршћење, тј. важи Мизесов (Mises) услов пластичности:

$$\sigma_i = \sigma_s,$$

или

$$X_x^2 - X_x Y_y + Y_y^2 + 3 X_y^2 = \sigma_s^2. \quad (6.28)$$

Сада ћемо написати релације између деформација и напона у средњој површи за случај чисто еластичних деформација [9]:

$$X_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y), \quad Y_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x), \quad X_y = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma, \quad (6.29)$$

где је E — модул еластичности; ν — Пуасонов коэффициент. Зависност између момената и промена кривина остаје иста, као и за равну плочу [10]:

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), & M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

За попречне силе имамо изразе:

$$N_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w, \quad N_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w. \quad (6.31)$$

Овде је D — цилиндарска крутост:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (6.32)$$

Једначине равнотеже (5.1) и (5.2) аутоматски су задовољене увођењем функције напона обрасцима:

$$X_x = \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y^2}, \quad Y_y = \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x^2}, \quad X_y = -\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x \partial y}, \quad (6.33)$$

где је $\tilde{\Phi}$ — функција напона у средњој површи, или, краће функција напона.

Унесимо (6.30) и (6.31) у једначине равнотеже (5.6); тада долазимо до ове једначине:

$$D \Delta^2 w = X_x h \left(k_x + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + Y_y h \left(k_y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - 2 X_y h \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q, \quad (6.34)$$

где је са $\Delta^2 ()$ означен квадрат Лапласовог оператора, тј.

$$\Delta^2 () = \frac{\partial^4 ()}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 ()}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 ()}{\partial y^4}.$$

Трансформишимо сада услов компатибилности деформација (4.13). Изражавајући деформације ϵ_x , ϵ_y , γ напонима, налазимо:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 X_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Y_y}{\partial x^2} - \nu \left(\frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 X_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Y_y}{\partial x^2} \right) = \\ & = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Уведимо у једначине (6.34) и (6.35) функцију напона $\tilde{\Phi}$ према (6.35). Тада основне једначине теорије гинких плитких љуски постају:

$$\frac{D}{h} \Delta^2 w = L(w, \tilde{\Phi}) + k_x \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{q}{h}; \quad (6.36)$$

$$\frac{1}{E} \Delta^2 \tilde{\Phi} = -\frac{1}{2} L(w, w) - k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (6.37)$$

Једначине (6.36) и (6.37) су применљиве и при проучавању љуски произвољне контуре, ако деформација има карактер локалног губитка стабилности [11].

У посебном случају кружне цилиндарске љуске полупречника R добивамо:

$$\frac{D}{h} \Delta^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{q}{h}; \quad (6.38)$$

$$\frac{1}{E} \Delta^2 \tilde{\Phi} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (6.39)$$

При проучавању само малих угиба љуске нелинеарне чланове у једначинама (6.36) и (6.37) можемо занемарити. Тада добивамо:

$$\frac{D}{h} \Delta^2 w = k_x \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{q}{h}; \quad (6.40)$$

$$\frac{1}{E} \Delta^2 \tilde{\Phi} = -k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (6.41)$$

Узимајући да су кривине k_x и k_y константне и примењујући на (6.40) оператор Δ^2 , налазимо:

$$\frac{D}{h} \Delta^2 \Delta^2 w = k_x \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\Delta^2 \tilde{\Phi}) + k_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\Delta^2 \tilde{\Phi}) + \frac{1}{h} \Delta^2 q.$$

Ако се свуда стави $\Delta^2 \tilde{\Phi}$ по (6.41), тада се може систем (6.40) и (6.41) свести на једну једначину осмог реда по функцији w која решава проблем:

$$\frac{D}{Eh} \Delta^2 \Delta^2 w + k_x^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 k_x k_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + k_y^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{1}{Eh} \Delta^2 q. \quad (6.42)$$

За кружну цилиндарску љуску једначина ће имати облик:

$$\frac{D}{Eh} \Delta^2 \Delta^2 w + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{1}{Eh} \Delta^2 q. \quad (6.43)$$

Проучимо сада онај случај, када треба узети у обзир првобитне силе у средњој површи, константне по величини, што је неопходно, на пример, у проблемима стабилности љуски:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_0}{\partial y^2} = -P_x, \quad \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_0}{\partial x^2} = -P_y, \quad \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x \partial y} = S. \quad (6.44)$$

Тада једначина (6.38) постаје (за $q \equiv 0$):

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \Delta^2 w = & -P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\ & + k_x \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (6.45)$$

С обзиром на (6.41), добивамо једначину која даје решење задатка

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \Delta^2 \Delta^2 w + k_x^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 k_x k_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + k_y^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \\ + \frac{P_x}{E} \Delta^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2 \frac{S}{E} \Delta^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{P_y}{E} \Delta^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.46)$$

За случај кружне цилиндарске љуске:

$$\frac{D}{h} \Delta^2 \Delta^2 w + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P_x \Delta^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) +$$

(6.47)

$$+ 2 S \Delta^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + P_y \Delta^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Узимајући у (6.34) да је $w \equiv 0$, добивамо једначину безмоментне теорије љуски:

$$k_x X_x + k_y Y_y = -\frac{q}{h};$$

напоменимо, да се попречно оптерећење сматра позитивним, ако је усмерено ка центру кривине.

Овде се изводе диференцијалне једначине моментне теорије љуски, разматрају се могућа побољшања и њихова допустива упрошћења. Наводе се почетни и гранични услови, неопходни за поставку контурног проблема.

§ 1. Варијациона поставка проблема кад се узме у обзир геометријска нелинеарност

Узимаћемо у обзир геометријску нелинеарност љуске, која се налази у равнотежи под дејством запреминских \mathbf{F} и површинских \mathbf{P}_n сила. Нека су δu_1^z , δu_2^z , δw^z — бесконачно мале варијације померања. Рад спољашних сила на варијацијама померања биће

$$\delta A = \iiint_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \iint_{\Sigma} \mathbf{P}_n \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Sigma, \quad (1.1)$$

где је $d\Omega = A^* B^* d\alpha \, d\beta \, dz$ — запремински елемент љуске; Σ — укупна површина љуске; α, β — криволинијске ортогоналне координате, средње површи до и после деформације; $\delta \mathbf{u}$ — варијација померања једнака је:

$$\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{v} + z \, \delta \mathbf{n}^*. \quad (1.2)$$

Овде је $\delta \mathbf{v}$ — варијација вектора померања тачака средње површи; $\delta \mathbf{n}^*$ — варијација вектора нормале на средњу површ. Вектор напона \mathbf{P}_n на раван са нормалом \mathbf{n} изражава се помоћу вектора напона $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_z$, који дејствују у равнима, узетим за координатне површи: $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$, и $z = \text{const}$, по познатом обрасцу теорије еластичности:

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_1 \cos(n\alpha) + \mathbf{P}_2 \cos(n\beta) + \mathbf{P}_z \cos(nz).$$

Формирајмо израз за виртуални рад спољашњих сила δA помоћу деформационе енергије љуске. Увршћујући израз \mathbf{P}_n у (1.1), добивамо:

$$\delta A = \iint_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \iint_{\Sigma} \{ \mathbf{P}_1 \cos(n\alpha) + \mathbf{P}_2 \cos(n\beta) + \mathbf{P}_z \cos(nz) \} \delta \mathbf{u} d\Sigma.$$

Одатле, користећи образац за трансформацију површинског интеграла у запремински и узимајући у обзир једначине равнотеже, налазимо:

$$\delta A = \iiint_{\Omega} \{ \mathbf{P}_1 B^*(\delta \mathbf{u}),_1 + \mathbf{P}_2 A^*(\delta \mathbf{u}),_2 + \mathbf{P}_z A^* B^*(\delta \mathbf{u}),_z \} d\alpha d\beta dz, \quad (1.3)$$

где је $(\delta \mathbf{u}),_i = (\delta \mathbf{v}),_i + z \delta \mathbf{n}^* = \delta \mathbf{r},_{i^*} + z \delta \mathbf{n},_{i^*}$, $(\delta \mathbf{u}),_z = \delta \mathbf{n}^*$, при чему „“ доле испред индекса означава диференцирање по α или β једанпут. То и јесте израз принципа могућих померања за љуску, посматрану као тродимензионо тело. Образац (1.3) можемо написати и у следећем виду

$$\delta A = \iint_{\Sigma} \delta W d\Sigma, \quad (d\Sigma = A^* B^* d\alpha d\beta), \quad (1.4)$$

где је

$$\delta W = \sum_{ij} \{ T_{ij}^* \delta \tilde{\epsilon}_{ji} + M_{ij}^* (\delta \kappa_{ij} - \sum_{s=1}^2 k_{is}^* \delta \tilde{\epsilon}_{si}) \}, \quad (1.5)$$

варијација деформационе енергије љуске, по јединици површине средње површи. Ако се искористе простије варијанте релација еластичности — Хуков (Ноок) закон, одбацујући величине реда $k_{is} \epsilon_{ik}$ (k_{is} — кривина координатних линија α и β , на пример, за мале деформације $k_{11}^* \simeq \frac{1}{R_{\alpha\beta}^*}$)

и узме у обзир једнакост $T_{ij}^* = T_{ji}^*$ (при чему је $\delta \tilde{\epsilon}_{ii} = \delta \epsilon_{ii}$, $\delta \tilde{\epsilon}_{12} + \delta \tilde{\epsilon}_{21} = 2 \delta \epsilon_{12}$ тада (1.5) добива облик:

$$\delta W = \sum_{ij} (T_{ij}^* \delta \epsilon_{ij} + M_{ij}^* \delta \kappa_{ij}), \quad (1.6)$$

где се ϵ_{ij} и κ_{ij} изражавају обрасцима:

$$2 \epsilon_{ij} = e_{ij} + e_{ji} + \sum_{s=1}^2 e_{is} e_{js} + \omega_i \omega_j, \quad (i, j = 1, 2); \quad (1.7)$$

$$\kappa_{11} = k_{11} e_{22} - k_{12} e_{21} - \frac{1}{A} \left(E_1 \frac{\partial e_{11}}{\partial \alpha} + E_2 \frac{\partial e_{12}}{\partial \alpha} + E_3 \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha} \right) - \frac{\omega_2}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad (1.8)$$

$$\kappa_{12} = k_{12} e_{11} - k_{11} e_{21} - \frac{1}{A} \left(E_1 \frac{\partial e_{21}}{\partial \alpha} + E_2 \frac{\partial e_{22}}{\partial \alpha} + E_3 \frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha} \right) + \frac{\omega_1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \beta}, \quad (1,2)$$

Параметри e_{ij} , ω_i , E_i , E_3 карактеришу углове обртања координатних вектора $\mathbf{r}, i, \mathbf{n}$ у процесу деформације, на пример, $\mathbf{n}^* = \mathbf{e}_1 E_1 + \mathbf{e}_2 E_2 + \mathbf{n} E_3$, овде $E_i = e_{i1} \omega_1 + e_{i2} \omega_2 - (1 + e_{11} + e_{22}) \omega_i$,

$$E_3 = (1 + e_{11})(1 + e_{22}) - e_{12} e_{21}.$$

Дакле, варијација енергије деформације љуске састоји се из варијација енергија дилатација и клизања (смицања):

$$\delta W_1 = T_{11}^* \delta \varepsilon_{11} + T_{22}^* \delta \varepsilon_{22} + 2 T_{12}^* \delta \varepsilon_{12} \quad (1.9)$$

и варијација енергија савијања и торзије:

$$\delta W_2 = M_{11}^* \delta \kappa_{11} + M_{22}^* \delta \kappa_{22} + 2 M_{12}^* \delta \kappa_{12}. \quad (1.10)$$

Стављајући у (1.6) силе и моменте:

$$T_{11}^* = K (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}), \quad T_{22}^* = K (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}), \quad T_{12}^* = T_{21}^* = K (1 - \nu) \varepsilon_{12}, \\ M_{11}^* = D (\kappa_{11} + \nu \kappa_{22}), \quad M_{22}^* = D (\kappa_{22} + \nu \kappa_{11}), \\ M_{12}^* = M_{21}^* = D (1 - \nu) \kappa_{12},$$

$$\text{(овде је } K = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \text{ — крутост на истезање-притисак и } D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

цилиндарска крутост) и интегришући по компонентама деформације у границама од нултог стања до стања са деформацијама ε_{ik} и κ_{ik} , налазимо израз за специфични рад деформације љуске:

$$\delta W = K [(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2 - 2(1 - \nu)(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}^2)] + D [(\kappa_{11} + \kappa_{22})^2 - 2(1 - \nu)(\kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{12}^2)], \quad (1.11)$$

Где се ε_{ik} и κ_{ik} изражавају помоћу померања u_1, u_2, w по обрасцима (1.7) и (1.8). Образац (1.11) аналоган је обрасцу за деформациону енергију плоче. Примењујући га на танку љуску, ми допуштамо грешку реда $\frac{h}{R}$,

у поређењу са јединицом.

Сада, после низа простих, али довољно тешких трансформација, налазимо израз за варијацију рада свих могућих спољашњих сила, који се може написати овако:

$$\delta A = \iint_{\Sigma} (\mathbf{X} \cdot \delta \mathbf{v} + (\mathbf{L} \times \mathbf{n}^*) \cdot \delta \mathbf{n}^*) d\Sigma + \int_C (\Phi \delta \mathbf{v} + \tilde{G}^* \mathbf{m}^* \delta \mathbf{n}^*) ds + \\ + \tilde{H}^* \mathbf{n}^* \delta \mathbf{v} |_C, \quad (1.12)$$

где је Φ — вектор спољашње контурне силе; \tilde{G}^* и \tilde{H}^* — спољашњи momenti савијања и торзије на контури деформисане љуске.

Површински интеграл у (1.12) представља рад спољашњих сила на бесконачно малим варијацијама углова обртања, пошто је

$$(\mathbf{L} \times \mathbf{n}^*) \delta \mathbf{n}^* = \sum_{i=1}^2 L_i \mathbf{e}_i^* \cdot \delta \mathbf{n}^*, \quad (1.13)$$

где је $\mathbf{e}_i^* \delta \mathbf{n}^*$ — варијација углова обртања.

Линијски интеграл у (1.12) је рад спољашњих сила и момената на варијацијама померања и угла обртања, јер је $\mathbf{m}^* \delta \mathbf{n}^*$ — варијација угла обртања око тангенте на контуру.

Ванинтегрални члан $H^* \mathbf{n}^* \delta \mathbf{v} |_C$ представља рад концентрисаних контурних сила на померањима. Он ишчезава ако су ивице љуске зглавкасто ослоњене или укљештене. Он ишчезава и тада, када контура нема угаоних тачака, а \tilde{H}^* или \mathbf{v} не могу подносити прекиде непрекидности. Ако контура љуске садржи темена, концентрисане силе типа $\tilde{H}^* \mathbf{n}^*$ могу се појавити у теменима у виду реактивних концентрисаних сила. На тај начин, варијациона једначина принципа могућих померања у нелинеарној теорији љуски изражава се релацијом:

$$\delta A = \iint_{\Sigma} \delta W_{AB} d\alpha d\beta, \quad (1.14)$$

где је δW одређено обрасцем (1.5) или (1.6), а δA — обрасцем (1.12). Приметимо, да варијациона једначина облика (1.14) важи и за општу нелинеарну теорију љуски, где се померања и деформације сматрају произвољним.

Варијациону једначину (1.14) можемо протумачити на следећи начин. Нека је \mathcal{E}_1 — потенцијална енергија деформације љуске, $\delta \mathcal{E}_1$ — њена тотална варијација при изотермичком или адијабатском процесу деформације:

$$\mathcal{E}_1 = \iint_{\Sigma} W d\Sigma, \quad \delta \mathcal{E}_1 = \iint_{\Sigma} \delta W d\Sigma.$$

Нека је даље $\delta \mathcal{E}_2 = -\delta A$ варијација потенцијалне енергије оптерећења. Тада се (1.14) може написати у облику:

$$\delta \mathcal{E} = \delta \mathcal{E}_1 + \delta \mathcal{E}_2, \quad (1.15)$$

где је \mathcal{E} — тотална потенцијална енергија система.

Дакле, стање равнотеже љуске разликује се од суседних геометријски могућих стања тиме, што је за сва бесконачно мала могућа померања система из положаја равнотеже прираштај тоталне потенцијалне енергије једнак нули. То и јесте Лагранжев варијациони принцип. Геометријски могућа стања љуске су она, за која варијације померања не нарушавају геометријске везе, које су дате за љуску. Геометријске везе могу бити: геометријски гранични услови, а такође у Лагранжевом варијационом принципу упоредиве величине ε_{ik} и χ_{ik} , које треба да представљају непрекидне деформације, које задовољавају услове непрекидности деформација. Тај услов биће обезбеђен, ако деформације ε_{ik} и χ_{ik} изразимо помоћу померања u_i , w по обрасцима (1.7) и (1.8).

Прираштај радова спољашњих сила и момената δA је тотална варијација само за неке посебне случајеве; на пример, кад се спољне силе могу сматрати независним од деформација и, осим тога, ако су параметри ε_{ik} мали, тј. $\varepsilon_{ik} \sim \varepsilon_p$ (ε_p — релативна дилатација на граници пропорционалности материјала љуске).

Варијациона једначина (1.15) записује се у облику

$$\delta (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) = \delta \mathcal{E} = 0. \quad (1.16)$$

Та једначина важи и за коначне угибе под условом, да су ивице љуске зглавкасто ослоњене или укљештене и, осим тога спољне силе допуштају потенцијал:

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial u_1}, \quad X_2 = \frac{\partial f}{\partial u_2}, \quad X_3 = \frac{\partial f}{\partial w}, \quad (M_i = 0).$$

Дакле, (1.16) се може формулисати овако: од свих могућих померања, сагласних са геометријским везама, које су дате за љуску, стварно важе само оне, за које потенцијална енергија система \mathcal{E} има стационарну вредност, тј. $\delta \mathcal{E} = 0$.

Из варијационе једначине (1.14) произилазе једначине равнотеже и статички гранични услови.

Приметимо, да су раније основне једначине равнотеже љуске биле добивене полазећи од принципа могућих померања.

На варијационом принципу могућих померања заснован је приближни Рицов (Ritz) метод (енергијски метод), чија се суштина састоји у овоме. Варијациона једначина (1.14) садржи у себи једначине равнотеже и статичке граничне услове. Зато, задовољавајући ту варијациону једначину, самим тим ми задовољавамо услове статике унутра и на контури љуске. Последњи ће бити испуњени у процесу решавања проблема утолико тачније, уколико се у ближој апроксимацији решава задатак. При томе геометријски гранични услови су битни, тј. они унапред треба да буду задовољени. Зато, при приближном решавању конкретних проблема помоћу варијационе једначине (1.14), задаваћемо апроксимирујуће функције у облику:

$$u_1 = \sum_{k=1}^n A_k f_k(\alpha, \beta), \quad u_2 = \sum_{k=1}^n B_k \varphi_k(\alpha, \beta), \quad w = \sum_{k=1}^n C_k \psi_k(\alpha, \beta), \quad (1.17)$$

где су A_k, B_k, C_k — константе, које треба одредити, а f_k, φ_k, ψ_k — задате функције, које се бирају тако, да би допуштена померања u_1, u_2, w задовољавала геометријске граничне услове. Стављајући затим (1.17) у (1.14) и упоређујући коефицијенте код варијација $\delta A_k, \delta B_k, \delta C_k$, добивамо систем алгебарских једначина за одређивање тражених констаната A_k, B_k, C_k . У општем случају систем алгебарских једначина ће бити нелинеаран. Он ће бити линеаран само у линеарним проблемима теорије љуски. Дакле, у конкретним случајевима тешкоће се могу састојати у избору апроксимирујућих функција (1.17) и при решавању алгебарских једначина.

§ 2. Тачније једначине кретања изражене моментима и силама

Нека је σ_{ik} — пројекција напона на раван, чија се нормала у недеформисаном стању поклапала с правцем координатне линије i , на правац који се до деформације поклапао са правцем координатне линије k . Уведимо према уобичајеним обрасцима силе и моменте:

$$T_{ik} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ik} dz, \quad M_{ik} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ik} z dz, \quad N_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{iz} dz, \quad (i, k = 1, 2). \quad (2.1)$$

Обрасци, помоћу којих ће се силе, momenti и пресечне силе изражавати компонентама деформације, поклапаће се са познатим обрасцима за љуске са малим угибима и са формулама за плоче великих угиба.

Напишимо сада једначине кретања теорије еластичности у криволинијским координатама по пројекцијама на правце 1, 2, 3 на недеформисаном телу:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 H_3 S_{11}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_3 H_1 S_{21}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_1 H_2 S_{31}) + H_3 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} S_{12} + \\ & + H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} S_{13} - H_3 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} S_{22} - H_2 \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} S_{33} = \rho H_1 H_2 H_3 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}, \\ & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 H_3 S_{12}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_3 H_1 S_{22}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_1 H_2 S_{32}) + H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} S_{23} + \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & + H_3 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} S_{21} - H_1 \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} S_{33} - H_3 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} S_{11} = \rho H_1 H_2 H_3 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t^2}, \\ & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 H_3 S_{13}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_3 H_1 S_{23}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_1 H_2 S_{33}) + H_2 \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} S_{31} + \\ & + H_1 \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} S_{32} - H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} S_{11} - H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} S_{22} = \rho H_1 H_2 H_3 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Овде су уведене следеће ознаке:

$$\begin{aligned} S_{11} &= (1 + e_{11}) \sigma_{11}^* + \left(\frac{1}{2} e_{12} - \omega\right) \sigma_{12}^* + \left(\frac{1}{2} e_{1z} + \omega_2\right) \sigma_{1z}^*, \\ S_{12} &= \left(\frac{1}{2} e_{12} + \omega_z\right) \sigma_{11}^* + (1 + e_{22}) \sigma_{12}^* + \left(\frac{1}{2} e_{2z} - \omega_1\right) \sigma_{1z}^*, \\ S_{13} &= \left(\frac{1}{2} e_{1z} - \omega_2\right) \sigma_{11}^* + \left(\frac{1}{2} e_{2z} - \omega_1\right) \sigma_{12}^* + (1 + e_{zz}) \sigma_{1z}^*, \\ S_{21} &= (1 + e_{11}) \sigma_{21}^* + \left(\frac{1}{2} e_{12} - \omega_z\right) \sigma_{22}^* + \left(\frac{1}{2} e_{1z} + \omega_2\right) \sigma_{2z}^*, \\ S_{22} &= \left(\frac{1}{2} e_{12} + \omega_z\right) \sigma_{21}^* + (1 + e_{22}) \sigma_{22}^* + \left(\frac{1}{2} e_{2z} - \omega_1\right) \sigma_{2z}^*, \\ S_{23} &= \left(\frac{1}{2} e_{1z} - \omega_2\right) \sigma_{21}^* + \left(\frac{1}{2} e_{2z} + \omega_1\right) \sigma_{22}^* + (1 + e_{zz}) \sigma_{2z}^*, \\ S_{31} &= (1 + e_{11}) \sigma_{z1}^* + \left(\frac{1}{2} e_{12} - \omega_z\right) \sigma_{z2}^* + \left(\frac{1}{2} e_{1z} + \omega_2\right) \sigma_{zz}^*, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$S_{32} = \left(\frac{1}{2} e_{12} + \omega_2 \right) \sigma_{z1}^* + (1 + e_{22}) \sigma_{z2}^* + \left(\frac{1}{2} e_{2z} - \omega_1 \right) \sigma_{zz}^*,$$

$$S_{33} = \left(\frac{1}{2} e_{1z} - \omega_2 \right) \sigma_{z1}^* + \left(\frac{1}{2} e_{2z} + \omega_1 \right) \sigma_{z2}^* + (1 + e_{zz}) \sigma_{zz}^*.$$

Величине

$$\sigma_{ij}^* = \frac{S_i^*}{S_i} \frac{\sigma_{ij}}{1 + \varepsilon_j}, \quad \sigma_{ij}^* = \sigma_{ji}^*$$

представљају напоне, који се односе на првобитне димензије елемента, чије се ивице повећавају за E_j , а њихова површина уместо S_i постаје S_i^* при чему је

$$E_j = \sqrt{2 \varepsilon_{ij} + 1} - 1, \quad \frac{S_i^*}{S_i} = \sqrt{(1 + 2 \varepsilon_{ij})(1 + 2 \varepsilon_{kk}) - \varepsilon_{jk}^2}, \quad (2.4)$$

$$(i, j, k = 1, 2, 3).$$

За мале деформације је $1 + e_{ji} \approx 1$, $\sigma_{ij}^* \approx \sigma_{ij}$. Даље ћемо сматрати да су деформације мале и већ у полазним једначинама узимамо $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}$.

Строго говорећи, при диференцирању величина σ_{ij}^* треба имати у виду да је

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial \alpha_r} = \frac{S_i^*}{S_i} \frac{1}{1 + E_j} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \alpha_r} + \sigma_{ij} \left[\frac{1}{\partial \alpha_r} \left(\frac{S_i^*}{S_i} \right) \frac{1}{1 + E_j} - \left(\frac{S_i^*}{S_i} \right) \frac{1}{(1 + E_j)^2} \frac{\partial E_j}{\partial \alpha_r} \right],$$

$$(r = 1, 2, 3).$$

Како је

$$\frac{\partial E_j}{\partial \alpha_r} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \varepsilon_{ij}}} \frac{\partial \varepsilon_{ji}}{\partial \alpha_r},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \left(\frac{S_i^*}{S_i} \right) &= \frac{1}{\sqrt{(1 + 2 \varepsilon_{jj})(1 + 2 \varepsilon_{kk}) - \varepsilon_{jk}^2}} \left[(1 + 2 \varepsilon_{kk}) \frac{\partial \varepsilon_{jj}}{\partial \alpha_r} + \right. \\ &\left. + (1 + 2 \varepsilon_{jj}) \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial \alpha_r} - \varepsilon_{jk} \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial \alpha_r} \right], \end{aligned}$$

то је за мале деформације

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial \alpha_r} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \alpha_r} + \sigma_{ij} \left(\frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial \alpha_r} - \varepsilon_{jk} \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial \alpha_r} \right) \approx \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \alpha_r} + \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial \alpha_r}.$$

У сагласности са усвојеним изразима за померања $\frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial \alpha_r} = 0$, је

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial \alpha_r} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \alpha_r}, \quad \frac{\partial \sigma_{iz}^*}{\partial \alpha_r} = \frac{\partial \sigma_{iz}}{\partial \alpha_r} + \sigma_{iz} \frac{\partial \varepsilon_{jj}}{\partial \alpha_r}, \quad (i, j = 1, 2). \quad (2.5)$$

Узимајући, да је $\sigma_{zz} = 0$ за $-\frac{h}{2} < z < +\frac{h}{2}$, имаћемо такође $\frac{\partial \sigma_{zz}^*}{\partial \alpha_i} = 0$.

Нека се љуска налази под дејством спољашњег и унутрашњег притиска $P_n\left(\frac{h}{2}\right)$ и $P_n\left(-\frac{h}{2}\right)$, а такође спољашњим и унутрашњим смичућим оптерећењима $P_{s1}\left(\frac{h}{2}\right)$, $P_{s2}\left(\frac{h}{2}\right)$ и $P_{s1}\left(-\frac{h}{2}\right)$, $P_{s2}\left(-\frac{h}{2}\right)$. У том случају на површи $z = \pm \frac{h}{2}$ треба да буду задовољени следећи услови:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}\left(\frac{h}{2}\right) &= -P_n\left(\frac{h}{2}\right), & \sigma_{zz}\left(-\frac{h}{2}\right) &= -P_n\left(-\frac{h}{2}\right); \\ \sigma_{z1}\left(\frac{h}{2}\right) &= -P_{s1}\left(\frac{h}{2}\right), & \sigma_{z1}\left(-\frac{h}{2}\right) &= -P_{s1}\left(-\frac{h}{2}\right); \\ \sigma_{z2}\left(\frac{h}{2}\right) &= -P_{s2}\left(\frac{h}{2}\right), & \sigma_{z2}\left(-\frac{h}{2}\right) &= -P_{s2}\left(-\frac{h}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Интегрираћемо најпре једначине кретања по z од $-\frac{h}{2}$ до $\frac{h}{2}$, а затим множећи прве две једначине са z интегрираћемо такође у истим границама; затим занемарујући утицаје момената напона на услове равнотеже сила и утицај момената смичућих сила и момената вишег реда на услове равнотеже момената, после простих трансформација добивамо:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (B T_{11}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[B \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} v \right) T_{12} \right] - \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\varphi B N_1) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A T_{21}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[A \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} v \right) T_{22} \right] - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\varphi A N_2) + \\ & + \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} \left[\left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} u \right) T_{11} + T_{12} - (\psi N_1) \right] - \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} \left[\left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} u \right) T_{21} + T_{22} - (\psi N_2) \right] + \frac{AB}{R_1} \left[\left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u}{R_1} \right) T_{11} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{v}{R_2} \right) T_{12} + N_1 \right] + AB \left\{ \left[P_{s1}\left(\frac{h}{2}\right) + P_{s1}\left(-\frac{h}{2}\right) \right] + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} v \right) \left[P_{s2}\left(\frac{h}{2}\right) + P_{s2}\left(-\frac{h}{2}\right) \right] - \frac{h}{2} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} \psi \right) \left[P_{s2}\left(\frac{h}{2}\right) - P_{s2}\left(-\frac{h}{2}\right) \right] - \varphi \left[-P_n\left(\frac{h}{2}\right) + P_n\left(-\frac{h}{2}\right) \right] \right\} - \\ & - \varphi \Delta = \rho h AB \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (AT_{22}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[A \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} u \right) T_{21} \right] - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\psi AN_2) + \\
& + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (BT_{12}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[B \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} u \right) T_{11} \right] - \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\psi BN_1) + \\
& + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} v \right) T_{22} + T_{21} - (\varphi N_2) \right] - \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} \left[\left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} v \right) T_{12} + T_{11} - (\varphi N_1) \right] + \frac{AB}{R_2} \left[\left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{v}{R_2} \right) T_{22} + \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u}{R_1} \right) T_{21} + N_2 \right] + AB \left\{ \left[P_{s2} \left(\frac{h}{2} \right) + P_{s2} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] + \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} u \right) \left[P_{s1} \left(\frac{h}{2} \right) + P_{s1} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] - \frac{h}{2} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} \varphi \right) \left[P_{s1} \left(\frac{h}{2} \right) - P_{s1} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] - \psi \left[-P_n \left(\frac{h}{2} \right) + \right. \\
& \left. + P_n \left(-\frac{h}{2} \right) \right] \left. \right\} - \psi \Delta = \rho h AB \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{2.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (BN_1) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[B \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u}{R_1} \right) T_{11} \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[B \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{v}{R_2} \right) T_{12} \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (AN_2) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[A \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{v}{R_2} \right) T_{22} \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[A \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{u}{R_1} \right) T_{21} \right] - \frac{AB}{R_1} \left[T_{11} + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} v \right) T_{12} - (\varphi N_1) \right] - \\
& - \frac{AB}{R_2} \left[T_{22} + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} u \right) T_{21} - (\psi N_2) \right] + AB \left\{ \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{u}{R_1} \right) \left[P_{s1} \left(\frac{h}{2} \right) + P_{s1} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] + \frac{h}{2} \frac{\varphi}{R_1} \left[P_{s1} \left(\frac{h}{2} \right) - P_{s1} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] + \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{v}{R_2} \right) \left[P_{s2} \left(\frac{h}{2} \right) + P_{s2} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] + \frac{h}{2} \frac{\psi}{R_2} \left[P_{s2} \left(\frac{h}{2} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - P_{s2} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] + \left[-P_n \left(\frac{h}{2} \right) + P_n \left(-\frac{h}{2} \right) \right] \right\} + \Delta = \rho h AB \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.
\end{aligned}$$

Овде је величина Δ одређена другим сабирком десне стране обрасца (2.5) и једнака је

$$\Delta = BN_1 \frac{\partial \varepsilon_{22}^0}{\partial \alpha_1} + AN_2 \frac{\partial \varepsilon_{11}^0}{\partial \alpha_2}. \tag{2.8}$$

Из једначина (2.7) се види, да се величине φ и ψ које су мале вишег реда могу занемарити; у последњој једначини из (2.7) величина Δ је истог реда, као и, на пример, сабирак $B \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u}{R_1} \right) \frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha_1}$. Сада напишимо једначине момената:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (BM_{11}) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[B \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} v \right) M_{12} \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (AM_{21}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[A \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} v \right) M_{22} \right] + \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} \left[\left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} u \right) M_{11} + M_{12} \right] - \\ & - \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} \left[\left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} u \right) M_{21} + M_{22} \right] + AB \left\{ \frac{1}{R_1} \left[\left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{u}{R_1} \right) M_{11} + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{v}{R_2} \right) M_{12} \right] - N_1 - \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} v \right) N_2 \right\} + \\ & + \frac{h}{2} AB \left\{ \left[P_{s1} \left(\frac{h}{2} \right) - P_{s1} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} v \right) \left[P_{s2} \left(\frac{h}{2} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - P_{s2} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] - \varphi \left[-P_n \left(\frac{h}{2} \right) - P_n \left(-\frac{h}{2} \right) \right] \right\} = -\frac{\rho h^3 AB}{12} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (2.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (AM_{22}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[A \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} u \right) M_{21} \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (BM_{12}) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (BM_{12}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[B \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} u \right) M_{11} \right] + \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} \left[\left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} v \right) M_{22} + M_{21} \right] - \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} \left[\left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} v \right) M_{12} + M_{11} \right] + \\ & + AB \left\{ \frac{1}{R_2} \left[\left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{v}{R_2} \right) M_{22} + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u}{R_1} \right) M_{21} - N_2 - \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} u \right) N_1 \right] + \frac{h}{2} AB \left\{ \left[P_{s2} \left(\frac{h}{2} \right) - P_{s2} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} u \right) \left[P_{s1} \left(\frac{h}{2} \right) - P_{s1} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] - \psi \left[-P_n \left(\frac{h}{2} \right) - P_n \left(-\frac{h}{2} \right) \right] \right\} = \\ & = -\frac{\rho h^3 AB}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

У једначинама момената (2.9) нелинеарни чланови, који садрже померања средње површи, могу се занемарити, а за глатке љуске могу се занемарити и нелинеарни чланови, који садрже углове обртања φ и ψ и

углове нагиба тангената $\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1}$, $\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}$.

За осносиметричну деформацију обртних љуски једначине (2.7) и (2.9) имају облик:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial s} (r_0 T_{11}) - \frac{\partial}{\partial s} (r_0 \varphi N) + T_{22} \sin \alpha + \frac{r_0}{R_1} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_1} \right) T_{11} + N \right] + \\
 & + r_0 \left\{ \left[P_{s1} \left(\frac{h}{2} \right) + P_{s1} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] - \varphi \left[-P_n \left(\frac{h}{2} \right) + P_n \left(-\frac{h}{2} \right) \right] \right\} = r_0 \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
 & \frac{\partial}{\partial s} (r_0 N) + \frac{\partial}{\partial s} \left[r_0 \left(\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_1} \right) T_{11} \right] - r_0 \left\{ \frac{1}{R_1} \left[T_{11} - (\varphi N) \right] + \frac{T_{22}}{R_2} \right\} + \\
 & + r_0 \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_1} \right) \left[P_{s1} \left(\frac{h}{2} \right) + P_{s1} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] + \frac{h}{2} \frac{\varphi}{R_1} \left[P_{s1} \left(\frac{h}{2} \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - P_{s1} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] + \left[P_n \left(-\frac{h}{2} \right) - P_n \left(\frac{h}{2} \right) \right] \right\} = r_0 \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial s} (r_0 M_{11}) + M_{22} \sin \alpha + r_0 \left[\frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_1} \right) M_{11} - N \right] + \\
 & + \frac{r_0 h}{2} \left\{ \left[P_{s1} \left(\frac{h}{2} \right) - P_{s1} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] - \varphi \left[-P_n \left(\frac{h}{2} \right) - P_n \left(-\frac{h}{2} \right) \right] \right\} = \\
 & = -\frac{r_0 \rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.
 \end{aligned}$$

Занемарујући величине реда $\frac{h}{L}$ и вишег у поређењу са јединицом, једначине кретања могу се написати у облику:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial T_{11}}{\partial s} - \frac{T_{11} - T_{22}}{r_0} \sin \alpha - \frac{\partial}{\partial s} (\varphi N) + \frac{1}{r_0} (\varphi N) \sin \alpha + \frac{N}{R_1} + \\
 & + \left[P_{s1} \left(\frac{h}{2} \right) + P_{s1} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] - \varphi \left[-P_n \left(\frac{h}{2} \right) + P_n \left(-\frac{h}{2} \right) \right] = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
 & \frac{\partial N}{\partial s} - \frac{1}{r_1} N \sin \alpha + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial w}{\partial s} T_{11} \right) - \frac{1}{r_0} \left(\frac{\partial w}{\partial s} T_{11} \right) \sin \alpha - \\
 & - \left[\frac{1}{R_1} (T_{11} - \varphi N) + \frac{T_{22}}{R_2} \right] + \frac{\partial w}{\partial s} \left[P_{s1} \left(\frac{h}{2} \right) + P_{s1} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] + \\
 & + \left[-P_n \left(\frac{h}{2} \right) + P_n \left(-\frac{h}{2} \right) \right] = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial s} - \frac{M_{11} - M_{22}}{r_0} \sin \alpha - N + \frac{h}{2} \left[P_{s1} \left(\frac{h}{2} \right) - P_{s1} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] = -\frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

§ 3. Једначине кретања изражене померањима за осносиметричну деформацију

Уведимо скраћење ознака:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \varepsilon_{11}^0 + \frac{1}{2} \varepsilon_{22}^0, & E_{22} &= \varepsilon_{22}^0 + \frac{1}{2} \varepsilon_{11}^0, & K_{11} &= k_{11} + \frac{1}{2} k_{22}, \\ K_{22} &= k_{22} + \frac{1}{2} k_{11}; \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$F_{uw} = \frac{\partial}{\partial s} (\varkappa_1, w) - w_s (\varkappa_1, u), \quad F_{uk} = -\frac{\partial}{\partial s} (\varkappa_1, u) - k_{11}; \quad (3.2)$$

$$\tilde{D}_\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon_{22}^0}{\partial s} = -\frac{1}{r_0} [\sin \alpha (\varepsilon_{11}^0 - \varepsilon_{22}^0) - \cos \alpha (w_s - \varkappa_1, u)]; \quad (3.3)$$

$$\tilde{D}_k = \frac{\partial k_{22}}{\partial s} = -\frac{1}{r_0} [\sin \alpha (k_{11} - k_{22}) + \varkappa_1 \varphi \cos \alpha]; \quad (3.4)$$

$$E_{1z} = w_s - \varkappa_1 u. \quad (3.5)$$

У том случају изводи квадратних форми P_0, P_1, P_2 по координати s дуж меридијана биће једнаки:

$$\frac{\partial P_0}{\partial s} = 2 E_{11} u_{ss} + \left(2 E_{11} E_{1z} + \frac{1}{2} \varepsilon_{1z} \right) w_{ss} + 2 E_{11} F_{uw} + 2 E_{22} \tilde{D}_\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon_{1z} F_{uk},$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial s} = K_{11} u_{ss} + K_{11} E_{1z} w_{ss} + E_{11} \varphi_{ss} + K_{11} F_{uw} + K_{22} \tilde{D}_\varepsilon + E_{22} \tilde{D}_k, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial s} = 2 K_{11} \varphi_{ss} + 2 K_{22} \tilde{D}_k.$$

Зато изводе од интеграла I_k ($k = 1, 2, 3$) по координати s можемо одредити обрасцем

$$\begin{aligned} \frac{d I_k}{d s} &= \left(2 E_{11} I_{k0} + K_{11} I_{k1} \right) u_{ss} + \left[\left(2 E_{11} E_{1z} + \frac{1}{2} \varepsilon_{1z} \right) I_{k0} + K_{11} E_{1z} I_{k1} \right] w_{ss} + \\ &+ E_{11} I_{k1} + 2 K_{11} I_{k2} \varphi_{ss} + 2 I_{k0} E_{11} F_{uw} + E_{22} \tilde{D}_\varepsilon + \frac{1}{4} \varepsilon_{1z} F_{uk} + \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$+ I_{k1} (K_{11} F_{uw} + K_{22} \tilde{D}_\varepsilon + E_{22} \tilde{D}_k) + 2 I_{k2} K_{22} \tilde{D}_k.$$

После уношења израза за моменте, силе, пресечних сила и њихових извода по координати у једначине кретања (2.11) и простих трансформација добивамо систем од три квазилинеарне једначине другог реда по φ, w и u :

$$\begin{aligned} \varphi_{tt} &= a_1 \varphi_{ss} + a_2 w_{ss} + a_3 u_{ss} + L, \\ w_{tt} &= b_1 \varphi_{ss} + b_2 w_{ss} + b_3 u_{ss} + M, \\ u_{tt} &= c_1 \varphi_{ss} + c_2 w_{ss} + c_3 u_{ss} + N. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Приметимо, да је једначина момената линеарна по коефицијентима $a_1, \dots, b_1, \dots, c_1, \dots, L, M, N$, а једначина сила по тим коефицијентима је нелинеарна. Имајући у виду, да је у једначинама кретања преко пројекција на правце меридијана за мале пресечне силе могуће занемарити нелинеарне чланове, целисходно је коефицијенте b_1, b_2, b_3, M и c_1, c_2, c_3, N представити тако да се састоје из два дела:

$$\begin{aligned} b_1 &= b_1^0 + b_1', & b_2 &= b_2^0 + b_2', & b_3 &= b_3^0 + b_3', & M &= M^0 + M'; \\ c_1 &= c_1^0 + c_1', & c_2 &= c_2^0 + c_2', & c_3 &= c_3^0 + c_3', & N &= N^0 + N', \end{aligned} \quad (3.9)$$

где се са зарезом означава сабирак, који карактерише нелинеарне чланове у једначинама сила.

Уведимо ради скраћења писања овакве ознаке:

$$\begin{aligned} \Delta_M &= 2(E_{11} F_{uw} + E_{22} \tilde{D}_\varepsilon + \frac{1}{4} \varepsilon_{1z} F_{uk}) (E_{11} I_{20} - K_{11} J_{30}) + (K_{11} F_{uw} + \\ & K_{22} \tilde{D}_\varepsilon + E_{22} \tilde{D}_k) (E_{11} I_{21} - K_{11} I_{31}) + 2 K_{22} \tilde{D}_k (E_{11} I_{22} - K_{11} I_{32}) + \\ & + I_2 (F_{uw} + \frac{1}{2} \tilde{D}_\varepsilon) - \frac{1}{4} J_3 \tilde{D}_k, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \Delta_N &= \varepsilon_{1z} [2(E_{11} F_{uw} + E_{22} \tilde{D}_\varepsilon + \frac{1}{4} \varepsilon_{1z} F_{uw}) I_{10} + (K_{11} F_{uw} + K_{22} \tilde{D}_\varepsilon + \\ & + E_{22} \tilde{D}_k) I_{12}] + I_1 F_{uk}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_T &= 2(E_{11} F_{uw} + E_{22} \tilde{D}_\varepsilon + \frac{1}{4} \varepsilon_{1z} F_{uk}) (E_{11} I_{10} - K_{11} I_{20}) + (K_{11} F_{uw} + \\ & K_{22} \tilde{D}_\varepsilon + E_{22} \tilde{D}_k) (E_{11} I_{11} - K_{11} I_{21}) + 2 K_{22} \tilde{D}_k (E_{11} I_{12} - \\ & - K_{11} I_{22}) + I_1 (E_{uw} + \frac{1}{2} \tilde{D}_\varepsilon) - \frac{1}{2} I_2 \tilde{D}_k. \end{aligned}$$

Тада за коефицијенте система једначина (3.8) добијамо следеће образце:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{4}{3} [I_3 - E_{11} (E_{11} I_{21} - K_{11} I_{31}) - 2 K_{11} (E_{11} I_{22} - K_{11} K_{32})] \frac{1}{\rho h}, \\ a_2 &= -\frac{4}{3} [I_2 E_{1z} + 2 (E_{11} E_{1z} + \frac{1}{4} \varepsilon_{1z}) (E_{11} I_{20} - K_{11} I_{30}) + \\ & + K_{11} E_{1z} (E_{11} I_{21} - K_{11} I_{31})] \frac{1}{\rho h}, \\ a_3 &= -\frac{4}{3} [I_2 + 2 E_{11} (E_{11} I_{20} - K_{11} I_{30}) + K_{11} (E_{11} I_{21} - K_{11} I_{31})] \frac{1}{\rho h}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$L = \frac{4}{3} \left\{ \frac{1}{r_0} (M_{11} - M_{22}) \sin \alpha + N - \Delta_M - \frac{h}{2} \left[P_s \left(\frac{h}{2} \right) - P_s \left(-\frac{h}{2} \right) \right] \right\} \frac{1}{\rho h},$$

$$\begin{aligned}
 b_1^0 &= \frac{1}{3} \varepsilon_{1z} (E_{11} I_{11} + 2 K_{11} I_{12}) \frac{1}{\rho h}, \\
 b_2^0 &= \frac{1}{3} \left[I_1 + 2 \varepsilon_{1z} (E_{11} E_{1z} + \frac{1}{4} \varepsilon_{1z}) I_{10} + K_{11} E_{1z} I_{11} \right] \frac{1}{\rho h}, \\
 b_3^0 &= \frac{1}{3} \varepsilon_{1z} (2 E_{11} I_{10} + K_{11} I_{11}), \\
 M^0 &= \frac{1}{3} \left\{ -3 \left(\frac{1}{r_0} N \sin \alpha + \varkappa_1 T_{11} + \varkappa_2 T_{22} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left[-P_n \left(\frac{h}{2} \right) + P_n \left(-\frac{h}{2} \right) \right] + \Delta_N \right\};
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
 c_1^0 &= \frac{4}{3} [I_{-2} + E_{11} I_{11} - K_{11} I_{21}] + 2 K_{11} (E_{11} I_{12} - K_{11} I_{22}) \frac{1}{\rho h}, \\
 c_2^0 &= \frac{4}{3} [I_1 E_{1z} + 2 (E_{11} E_{1z} + \frac{1}{4} \varepsilon_{1z}) (E_{11} I_{10} - K_{11} I_{20}) + \\
 &\quad + K_{11} E_{1z} (E_{11} I_{21} - K_{11} I_{31})] \frac{1}{\rho h},
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
 c_3^0 &= \frac{4}{3} [I_1 + 2 E_{11} (E_{11} I_{10} - K_{11} I_{20}) + K_{11} (E_{11} I_{11} - K_{11} I_{21})] \frac{1}{\rho h}, \\
 N^0 &= \left\{ - \left[\frac{1}{r_0} (T_{11} - T_{22}) \sin \alpha - \varkappa_1 N \right] + \left[P_s \left(\frac{h}{2} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + P_s \left(-\frac{h}{2} \right) \right] + \frac{4}{3} \Delta_T \right\} \frac{1}{\rho h},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_1' &= w_s c_1^0, & b_2' &= w_s c_2^0 + \frac{T_{11}}{\rho h}, & b_3' &= w_s c_3^0, \\
 c_1' &= -\varphi b_1^0, & c_2' &= -\varphi b_2^0, & c_3' &= \varphi b_3^0, \\
 M' &= \frac{4}{3} w_s \frac{\Delta_T}{\rho h};
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
 N' &= \left\{ -K_{11} N + \frac{1}{r_0} (\varphi N) \sin \alpha - \varphi \left[-P_n \left(\frac{h}{2} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + P_n \left(-\frac{h}{2} \right) \right] - \frac{1}{3} \varphi \Delta_N \right\} \frac{1}{\rho h}.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

За еластичне деформације интеграли I_k ($k = 1, 2, 3$) су константне величине: $I_1 = Eh$, $I_2 = 0$, $I_3 = \frac{Eh^3}{2}$, и зато су њихови изводи $I_{kj} = 0$ ($j = 0, 1, 2$).

Дакле, прва једначина кретања биће линеарна, остале пак, квазили-
неарне, при чему је

$$\Delta_M^{(e)} = -\frac{\nu}{12} Eh^3 \tilde{D}_k, \quad \Delta_N^{(e)} = Ih F_{uk}, \quad \Delta_T^{(e)} = Eh (F_{uw} + \nu \tilde{D}_\varepsilon) \quad (3.16)$$

Коефицијенти једначина кретања за еластичне деформације биће једнаки:

$$a_1 = \frac{1}{1-\nu^2} \frac{E}{\rho}, \quad a_2 = a_3 = 0, \\ L = \frac{1}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{r_0} (M_{11} - M_{22}) \sin \alpha + N - \frac{\nu}{12} Eh^3 \tilde{D}_k \right]; \quad (3.17)$$

$$b_1^0 = 0, \quad b_2^0 = \frac{1}{\rho}, \quad b_3^0 = 0,$$

$$M^0 = - \left[\frac{1}{r_0} N \sin \alpha + \kappa_1 T_{11} + \kappa_2 T_{22} \right] + \left[-P_n \left(\frac{h}{2} \right) + P_n \left(-\frac{h}{2} \right) + Ih F_{uk}; \quad (3.18)$$

$$N^0 = \left[\frac{1}{r_0} (T_{11} - T_{22}) \sin \alpha - \kappa_1 N \right] + \left[P_s \left(\frac{h}{2} \right) + P_s \left(-\frac{h}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{Eh}{1-\nu^2} (F_{uw} + \nu \tilde{D}_\varepsilon); \quad (3.19)$$

$$c_1' = 0, \quad c_2' = -\varphi \frac{1}{\rho}, \quad c_3' = 0,$$

$$b_1' = 0, \quad b_2' = \frac{T_{11}}{\rho h}, \quad b_3' = \frac{E}{1-\nu^2} w_s, \quad (3.20)$$

$$M' = \frac{E}{1-\nu^2} (F_{uw} + \nu \tilde{D}_\varepsilon) w_s;$$

$$N' = \left\{ -K_{11} N + \frac{1}{r_0} (\varphi N) \sin \alpha - \varphi \left[-P_n \left(\frac{h}{2} \right) + P_n \left(-\frac{h}{2} \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \varphi Ih F_{uk} \right\} \frac{1}{\rho h}, \quad (3.21)$$

При растерећењу по целој дебелини љуске од нестишљивог материјала, једначине кретања имаће облик:

$$\varphi_{tt} = a_1 \varphi_{ss} + L^*, \quad w_{tt} = b_2 w_{ss} + b_3 u_{ss} + M^*, \\ u_{tt} = c_2 w_{ss} + c_3 u_{ss} + N^*, \quad (3.22)$$

где је

$$a_1 = \frac{4}{3} \frac{E}{\rho}, \quad L^* = \tilde{\varphi}_{tt} - a_1 \tilde{\varphi}_{ss} + L_e - \tilde{L}_e; \quad (3.23)$$

$$b_2 = \frac{1}{\rho} + \frac{T_{11}}{\rho h}, \quad b_3 = \frac{4}{3} w_s, \quad M^* = \tilde{w}_{tt} - b_2 \tilde{w}_{ss} - b_3 \tilde{u}_{ss} + M_e - \tilde{M}_e; \quad (3.24)$$

$$c_2 = -\varphi \frac{I}{\rho}, \quad c_3 = \frac{4}{3} \frac{E}{\rho}, \quad N^* = \tilde{u}_{tt} - c_2 \tilde{w}_{ss} - c_3 \tilde{u}_{ss} + N_e - \tilde{N}_e. \quad (3.25)$$

Овде су L_e, M_e, N_e — величине коефицијената за еластичне деформације за $t \leq \tilde{t} + 0$, ознаком (\sim) назначене су вредности одговарајућих функција у тренутку растерећења $t = \tilde{t} - 0$.

§ 4. Почетни и гранични (контурни) услови

Ако су на површи, која ограничава тело, задате спољашње силе f^* чије су пројекције на координатне линије $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, једнаке f_1^*, f_2^*, f_3^* , тада треба да буду испуњени следећи услови на површи:

$$\begin{aligned} S_{11} \cos(nk_1) + S_{21} \cos(nk_2) + S_{31} \cos(nk_3) &= f_1^*, \\ S_{12} \cos(nk_1) + S_{22} \cos(nk_2) + S_{32} \cos(nk_3) &= f_2^*, \\ S_{13} \cos(nk_1) + S_{23} \cos(nk_2) + S_{33} \cos(nk_3) &= f_3^*. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Овде су $(nk_1), (nk_2), (nk_3)$ — углови, које образује нормала на недеформисану површ са правцима $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Ако пак спољашње силе „прате“ деформисану површ тела (на пример притисак течности или гаса) и ако су пројекције спољашњих сила f^* на правце $1', 2', 3'$ оса 1, 2, 3 после деформације једнаке f_1', f_2', f_3' , то ће услови на површи имати облик:

$$\begin{aligned} &[(1 + 2 \varepsilon_{11}) \sigma_{11}^* + \varepsilon_{12} \sigma_{12}^* + \varepsilon_{13} \sigma_{13}^*] \cos(nk_1) + [(1 + 2 \varepsilon_{11}) \sigma_{12}^* + \varepsilon_{12} \sigma_{22}^* + \\ &+ \varepsilon_{13} \sigma_{23}^*] \cos(nk_2) + [(1 + 2 \varepsilon_{11}) \sigma_{13}^* + \varepsilon_{12} \sigma_{23}^* + \varepsilon_{23} \sigma_{33}^*] \cos(nk_3) = \\ &= \frac{S_n^*}{S_n} \left[(1 + e_{11}) f_1^* + \left(\frac{1}{2} e_{12} + \omega_2 \right) f_2^* + \left(\frac{1}{2} e_{13} - \omega_2 \right) f_3^* \right] = f_1', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &[(1 + 2 \varepsilon_{22}) \sigma_{22}^* + \varepsilon_{23} \sigma_{23}^* + \varepsilon_{21} \sigma_{21}^*] \cos(nk_2) + [(1 + 2 \varepsilon_{22}) \sigma_{23}^* + \varepsilon_{23} \sigma_{33}^* + \\ &+ \varepsilon_{21} \sigma_{31}^*] \cos(nk_3) + [(1 + 2 \varepsilon_{22}) \sigma_{21}^* + \varepsilon_{21} \sigma_{11}^* + \varepsilon_{23} \sigma_{31}^*] \cos(nk_1) = \\ &= \frac{S_n^*}{S} \left[(1 + e_{22}) f_2^* + \left(\frac{1}{2} e_{22} + \omega_1 \right) f_3^* + \left(\frac{1}{2} e_{21} - \omega_1 \right) f_1^* \right] = f_2', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &[(1 + 2 \varepsilon_{33}) \sigma_{33}^* + \varepsilon_{31} \sigma_{31}^* + \varepsilon_{32} \sigma_{32}^*] \cos(nk_3) + [(1 + 2 \varepsilon_{33}) \sigma_{31}^* + \varepsilon_{31} \sigma_{11}^* + \\ &+ \varepsilon_{32} \sigma_{12}^*] \cos(nk_1) + [(1 + 2 \varepsilon_{33}) \sigma_{32}^* + \varepsilon_{31} \sigma_{22}^* + \varepsilon_{12} \sigma_{22}^*] \cos(nk_2) = \\ &= \frac{S_n^*}{S_n} \left[(1 + e_{33}) f_3^* + \left(\frac{1}{2} e_{31} + \omega_2 \right) f_1^* + \left(\frac{1}{2} e_{32} - \omega_2 \right) f_2^* \right] = f_3'. \end{aligned}$$

За мале деформације релације (4.2) се упрошћавају и добивају облик:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} \cos(nk_1) + \sigma_{12} \cos(nk_2) + \sigma_{1z} \cos(nk_3) &= f_1', \\ \sigma_{21} \cos(nk_1) + \sigma_{22} \cos(nk_2) + \sigma_{2z} \cos(nk_3) &= f_2', \\ \sigma_{z1} \cos(nk_1) + \sigma_{z2} \cos(nk_2) + \sigma_{zz} \cos(nk_3) &= f_3'.\end{aligned}\tag{4.3}$$

На површи тела такође могу бити задата померања:

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad w = w(t).$$

При решавању динамичких проблема у тачкама граничне површи могу бити дата не само померања, већ и брзине и убрзања.

Размотримо најпре отворену љуску, чија је контура средње површи одређена једначином $F(\alpha_1, \alpha_2) = 0$. Нека на ту контуру дејствују силе \mathbf{K}^* и моменти \mathbf{G}^* .

Разложимо вектор \mathbf{K}^* у правцима α_1, α_2, z :

$$\mathbf{K}^* = K_1^* \mathbf{k}_1 + K_2^* \mathbf{k}_2 + K_3^* \mathbf{k}_3.\tag{4.4}$$

Веза између унутрашњих сила T_{ik} и N_i и компонената K_1^*, K_2^*, K_3^* вектора \mathbf{K}^* може се добити, изводећи интеграцију (4.1) по дебљини, при чему треба имати на уму да је

$$K_1^* = \int_{-h/2}^{h/2} f_1^* dz, \quad K_2^* = \int_{-h/2}^{h/2} f_2^* dz, \quad K_3^* = \int_{-h/2}^{h/2} f_3^* dz;$$

као резултат, за малу деформацију, добивамо ($\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = \beta$):

$$\begin{aligned}\left[T_{11} + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} v \right) T_{12} - \varphi N_1 \right] \cos(nk_1) + \left[T_{21} + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} v \right) T_{22} - \varphi N_2 \right] \cos(nk_2) = K_1^*, \\ \left[T_{22} + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} u \right) T_{21} - \psi N_2 \right] \cos(nk_2) + \\ + \left[T_{12} + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} u \right) T_{11} - \psi N_1 \right] \cos(nk_1) = K_2^*, \\ \left[N_1 + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_1} \right) T_{11} + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_2} \right) T_{12} \right] \cos(nk_1) + \\ + \left[N_2 + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_2} \right) T_{22} + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_1} \right) T_{21} \right] \cos(nk_2) = K_3^*.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Ако је љуска ограничена линијама $\alpha = c_i = \text{const}$ и $\beta = c_j = \text{const}$ $i, j = 1, 2$) на којима дејствују силе $K_{1i}^*, K_{2i}^*, K_{3i}^*, K_{1j}^*, K_{2j}^*, K_{3j}^*$, тада на линијама $\alpha = c_i = \text{const}$ треба да буду испуњени услови:

$$T_{11} + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} v \right) T_{12} - \varphi N_1 = K_{1i}^*,$$

$$T_{12} + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} u \right) T_{11} - \psi N_1 = K_{2i}^*, \quad (4.6)$$

$$N_1 + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_1} \right) T_{11} + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_2} \right) T_{12} = K_{3i}^*,$$

а на линијама $\beta = c_j = \text{const}$ — услови:

$$T_{21} + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} v \right) T_{12} - \varphi N_2 = K_{1j}^*,$$

$$T_{22} + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} u \right) T_{21} - \psi N_2 = K_{2j}^*, \quad (4.6')$$

$$N_2 + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_2} \right) T_{22} + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_1} \right) T_{21} = K_{3j}^*.$$

Овде су K_{1i}^* , K_{2j}^* — нормалне силе; K_{2i}^* , K_{1j}^* — смичуће силе; K_{3i}^* , K_{3j}^* — пресечне силе, које дејствују на контури. За благо нагнуте љуске нелинеарне чланове, који садрже померања средње површи u и v , можемо занемарити.

Ако површинске силе „драте“ у процесу деформације правце нормале и тангенте на контуру и једнаке су респективно K_1' , K_2' , K_3' за мале деформације, из (4.3) добивамо за силе граничне услове у истом облику, као и за мале угибе, тј.

$$T_{11} \cos(nk_1) + T_{12} \cos(nk_2) = K_1',$$

$$T_{22} \cos(nk_2) + T_{21} \cos(nk_1) = K_2', \quad (4.7)$$

$$N_1 \cos(nk_1) + N_2 \cos(nk_2) = K_3'.$$

За моменте при малим деформацијама може да се не прави разлика у пројекцијама вектора момената на деформисану и недеформисану контуру љуске, и зато се гранични услови за моменте пишу у облику,

$$M_{11} \cos(nk_1) + M_{12} \cos(nk_2) = G_1^*,$$

$$M_{22} \cos(nk_2) + M_{21} \cos(nk_1) = G_2^*. \quad (4.8)$$

Ако је љуска ограничена координатним линијама $\alpha = c_i = \text{const}$ и $\beta = c_j = \text{const}$, тада је дуж α —

$$M_{11} = G_{1i}^*, \quad M_{21} = G_{2i}^*, \quad (4.9)$$

а дуж линије β —

$$M_{12} = G_{1j}^*, \quad M_{22} = G_{2j}^*. \quad (4.10)$$

Овде су G_{1i}^* , G_{2j}^* — momenti савијања; G_{2i}^* , G_{1j}^* — торзиони momenti који делују на контури љуске.

Дуж целе контуре љуске или њеног дела уместо сила и момената могу бити задата померања средње површи u , v , угиб w и углови обртања нормале φ и ψ или њихови први или други изводи по времену.

На тај начин, на сваком делу контуре љуске треба да буде дато пет граничних услова; што представља потпуну сагласност са постојањем пет једначина кретања по пет непознатих функција u , v , w , φ , ψ .

Ако љуска представља праволинијску површ (торзу) са затвореном директрисом, при чему је α — координата дуж генератриса, а β — координата по директриси, тада за $\alpha = c_i$ ($i = 1, 2$) треба да буде испуњено десет услова једнозначности померања и њихових извода по β , који ће за обртне љуске, кад је координата ω азимут, имати облик:

$$\begin{aligned} u(\omega) &= u(\omega + 2\pi), & v(\omega) &= v(\omega + 2\pi), & w(\omega) &= w(\omega + 2\pi), \\ \varphi(\omega) &= \varphi(\omega + 2\pi), & \psi(\omega) &= \psi(\omega + 2\pi), \\ u_2'(\omega) &= u_2'(\omega + 2\pi), & v_2'(\omega) &= v_2'(\omega + 2\pi), & w_2'(\omega) &= w_2'(\omega + 2\pi), \\ \varphi_2'(\omega) &= \varphi_2'(\omega + 2\pi), & \psi_2'(\omega) &= \psi_2'(\omega + 2\pi). \end{aligned} \quad (4.11)$$

За динамичке проблеме целисходно је коришћење једнозначности извода померања по времену и координати β .

Осталих десет једначина даће услове учвршћења за $\alpha = c_1$ и $\alpha = c_2$.

Ако је деформација обртне љуске симетрична у односу на раван, која пролази кроз тачке $\omega = 0$ и $\omega = \pi$, тада се може посматрати само део $0 \leq \omega \leq \pi$, и уместо услова периодичности искористити десет услова симетричности: за $\omega = 0$ и $\omega = \pi$:

$$v=0, \quad \psi=0, \quad \frac{\partial w}{\partial \beta}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial \beta}=0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}=0, \quad (4.12)$$

при чему уместо трећег услова, узимајући у обзир други, може се узети услов симетрије $N_2 = 0$. За љуску затворену по обема координатама α и β , треба да буду испуњени услови једнозначности и по α и по β .

§ 5. Упрошћавање општих једначина теорије љуски

Арон (1874. године) је формирајући теорију љуски, засновану на хипотези правих нормала, у обрасцима за промене кривина и торзије занемарио чланове који зависе од померања u , v . Лав (1888 г.) је исправио формуле Арона и дао за промене кривина и торзије релације, које се, по правилу, користе и данас. Х.М. Муштари (1938 г.) је поново увео занемарење Арона и успешно га искористио за решење многих задатака. Он је установио да је такво занемарење допустиво, када су напони од момената упоредиви по величини са напонима од сила (или мањи), тј. важи мешовито напонско стање. При томе се показује да ће напони од момената и сила (и померања средње површи) бити функције које битно расту при сваком диференцирању макар по једној од криволинијских координата. Та чињеница, користи се при упрошћавању образаца

за κ_1 , κ_2 и τ ; истовремено она дозвољава занемарење и пресечних сила N_1 , N_2 , у првим двама једначинама равнотеже (добивених из услова да је главни вектор силе једнак нули), осим тога, претпоставља се да је у њима $T_{21} = T_{12} = S$. Коначно саставимо диференцијалне једначине теорије љуски, искористивши горе поменути систем упрошћавања.

Напишимо обрасце за промене кривина и торзије (3.2), изражене експлицитно помоћу померања, уз узимање у обзир Ароновог занемарења, тј. одбацимо у њима чланове који зависе од померања u , v , као резултат имаћемо:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta}, \\ \kappa_2 &= -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \\ \tau &= -\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Сада релације (5.1) унесимо у једначине равнотеже, добијене из услова једнакости са нулом главног момента. Ипак, претходно, последње напишимо у облику:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial M}{\partial \alpha} + \\ &+ \frac{1}{1+\nu} \left\{ \frac{\nu}{A} \frac{\partial M_1}{\partial \alpha} - \frac{1}{A} \frac{\partial M_2}{\partial \alpha} + \frac{1+\nu}{AB} \left[\frac{\partial B}{\partial \alpha} (M_1 - M_2) + \frac{\partial AH}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} H \right] \right\}, \\ N_2 &= \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial M}{\partial \beta} + \\ &+ \frac{1}{1+\nu} \left\{ \frac{\nu}{B} \frac{\partial M_2}{\partial \beta} - \frac{1}{B} \frac{\partial M_1}{\partial \beta} + \frac{1+\nu}{AB} \left[\frac{\partial A}{\partial \beta} (M_2 - M_1) + \frac{\partial BH}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} H \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где је $M = M_1 + M_2$, $H = \frac{1}{2} (M_{12} + M_{21})$; који, после уношења у њих израза за моменте преко κ_1 , κ_2 , τ , могу бити написани тако:

$$N_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{A} \frac{\partial (\kappa_1 + \kappa_2)}{\partial \alpha} - \frac{1-\nu}{AB} \left[\frac{\partial B}{\partial \alpha} \kappa_2 - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \kappa_1 - \frac{\partial A}{\partial \beta} \tau - \frac{\partial A}{\partial \beta} \tau \right] \right\}, \quad (5.3)$$

$$N_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{B} \frac{\partial (\kappa_1 + \kappa_2)}{\partial \beta} - \frac{1-\nu}{AB} \left[\frac{\partial A}{\partial \beta} \kappa_1 - \frac{\partial A}{\partial \beta} \kappa_2 - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \tau - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \tau \right] \right\},$$

Овде је на основу образаца (5.1)

$$\kappa_1 + \kappa_2 = -\Delta w. \quad (5.4)$$

У везама (5.3) изразе који се налазе у угластим заградама [] можемо упростити, искористивши прва два од услова непрекидности средње површи (4.14).

Дакле, узимајући у обзир да је за $u=v=0$: $\varepsilon_1 = \frac{w}{R_1}$, $\varepsilon_2 = \frac{w}{R_2}$, $\omega = 0$, налазимо изразе у угластим заградама релација (5.3):

$$\left[\frac{\partial B \kappa_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \kappa_1 - \frac{\partial A \tau}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} \tau \right] = \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial B \varepsilon_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varepsilon_1 \right) = \frac{B}{R_1 R_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \quad (5.5)$$

$$\left[\frac{\partial A \kappa_1}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} \kappa_2 - \frac{\partial B \tau}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \tau \right] = \frac{1}{R_2} \left(\frac{\partial A \varepsilon_1}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} \varepsilon_2 \right) = \frac{A}{R_1 R_2} \frac{\partial w}{\partial \beta},$$

после увршћења (5.5) у релације (5.3), последње постају:

$$N_1 = - \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{A} \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial \alpha} + \frac{1-\nu}{R_1 R_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right],$$

$$N_2 = - \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{B} \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial \beta} + \frac{1-\nu}{R_1 R_2} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right]$$

при чему у њима подвучене чланове можемо одбацити, јер је познато, да се функција w при диференцирању знатно повећава, па, дакле, подвучени чланови ће представљати величине мале вишег реда. На тај начин, коначан облик тих веза биће:

$$N_1 \approx - \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{A} \frac{\partial \Delta w}{\partial \alpha}, \quad N_2 \approx - \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{B} \frac{\partial \Delta w}{\partial \beta}. \quad (5.6)$$

Даље, како је већ речено горе, занемарујући пресечне силе N_1 N_2 , у првим двома једначинама равнотеже (једнакост са нулом главног вектора сила) и замењујући у трећој од једначина равнотеже тог система, пресечне силе њиховим изразима, према (5.6), добијамо:

$$\frac{1}{AB} \left[\frac{\partial B T_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial A S}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} S - \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_2 \right] + q_1 = 0,$$

$$\frac{1}{AB} \left[\frac{\partial A T_2}{\partial \beta} + \frac{\partial B S}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} S - \frac{\partial A}{\partial \beta} T_1 \right] + q_2 = 0, \quad (5.7)$$

$$\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \Delta(\Delta w) + \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - q_n = 0.$$

Тај систем једначина даље ћемо звати Муштаријев систем.

Муштаријев систем није у потпуности коректан, он с обзиром на Аронова упрошћења игнорише још и трећи услов непрекидности средње површи (4.14).

В.З. Власов (1944 г.) је трансформисао Муштаријев систем и искористио трећи услов непрекидности средње површи (4.14). На тај начин, он је формирао коректнији систем диференцијалних једначина теорије луски.

Уведимо помоћну функцију Φ , везујући је са силама посредством једнакости, аналогних релацијама (5.1), тј.

$$\begin{aligned} T_1 &= -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{1}{A} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}, \\ T_2 &= -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{1}{B} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}, \\ S &= \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Сада релације (5.8) унесимо у прве две једначине Муштаријевог система (5.7), па као резултат добијамо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial B}{\partial \alpha} T_1 + \frac{\partial A}{\partial \beta} S + \frac{\partial A}{\partial \beta} S - \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_2 \right] &= \frac{1}{R_1 R_2} \frac{1}{A} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}, \\ \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial A}{\partial \beta} T_2 + \frac{\partial B}{\partial \alpha} S + \frac{\partial B}{\partial \alpha} S - \frac{\partial A}{\partial \beta} T_1 \right] &= \frac{1}{R_1 R_2} \frac{1}{B} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Водећи рачуна о брзој промени функције Φ (аналогно функцији w), може се сматрати, да је при уношењу релација (5.8) у прве две једначине из система (5.7), последња за $q_1 = q_2 = 0$, идентички задовољена с тачношћу до величина малих вишег реда. Стварно, при уношењу релација (5.8) у прве две једначине из система (5.7), сви чланови који садрже трећи и други извод функције Φ се поништавају а преостали чланови се могу занемарити, јер представљају ниже изводе и дакле, мале величине.

Увршћење веза (5.8) у трећу једначину система (5.7) доводи до следеће диференцијалне зависности између функција w и Φ :

$$\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \Delta (\Delta w) - D(\Phi) = q_n, \quad (5.10)$$

где је $D()$ — диференцијални оператор облика

$$D() = \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{R_2} \frac{B}{A} \frac{\partial()}{\partial \alpha} \right] + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{R_1} \frac{A}{B} \frac{\partial()}{\partial \beta} \right] \right\}. \quad (5.11)$$

Другу диференцијалну једначину за w и Φ Власов добија на рачун трећег услова непрекидности средње површи (4.14), у који он уместо κ_1, κ_2, τ , уводи њихове изразе по w , а уместо

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{Eh} (T_1 - \nu T_2), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{Eh} (T_2 - \nu T_1), \quad \omega = \frac{2(1+\nu)}{Eh} S,$$

уводи њихове изразе преко функције Φ , при чему су искоришћене и релације (5.8). Као резултат тога добивамо:

$$Eh D(w) + \Delta (\Delta \Phi) + \frac{1+\nu}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{R_1 R_2} \frac{B}{A} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{R_1 R_2} \frac{A}{B} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) \right] = 0. \quad (5.12)$$

У последњем се могу занемарити подвучени чланови, водећи рачуна о порасту функције Φ при диференцирању по криволинијским координатама; сада диференцијална једначина (5.12) добива облик

$$Eh D(w) + \Delta(\Delta \Phi) = 0. \quad (5.13)$$

Диференцијалне једначине (5.10) и (5.13) представљају систем Муштари-Власовљевих једначина, који гласи:

$$\frac{1}{Eh} \Delta(\Delta \Phi) + D(w) = 0, \quad \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Delta(\Delta w) - D(\Phi) = q_n. \quad (5.14)$$

Тај систем диференцијалних једначина може се са успехом искористити за прорачун плитких љуски.

Приметимо, да уопште говорећи, код љуски треба напонско стање сматрати да је мешовитог типа, тј. напони од савијања и од сила су истог реда. Упоредо с тим могу се издвојити два важна посебна случаја: 1) безмоментно напонско стање љуске, — напони савијања у поређењу са напонима од сила су занемарљиво мали;

2) чисто моментно напонско стање љуске, — напони од сила у поређењу са напонима савијања су занемарљиво мали.

Таква класификација има не само методски значај, већ и важан практични, што ће бити делимично показано ниже.

Љуске с обзиром на њихову малу дебљину, слабо су отпорне на савијање; појављују се велики напони и угиби. То (савојно) стање је опасно и технички незгодно, па је природно што се тежи да се оно избегне. Технички је погодно безмоментно стање, јер је у том случају љуска по целој дебљини оптерећена равномерно, а спољње оптерећење се најрационалније преноси на ослонце.

Ипак, у већини случајева безмоментно напонско стање у љускама не може се реализовати, и, зато се мора допустити напонско стање мешовитог типа. Уосталом понекад је могуће напонско стање мешовитог типа локализовати близу крајева љуске (дна резервоара и т.сл.), а даље се свуда одржава безмоментно напонско стање, што је важно у техничком смислу и, осим тога, битно се упрошћава математички прорачун.

С тим у вези приметимо, да је одавде поникао термин „ивични ефект“, тј. удаљавањем од ивице љуске снажно опада поље напона мешовитог типа. Извором ивичног ефекта може бити не само ивица љуске, већ и ма која линија средње површи где се оштро мења кривина или дебљина љуске.

У сагласности са том класификацијом напонских стања у љускама разрађени су поступци упрошћавања диференцијалних једначина теорије љуски и приближне методе њихове интеграције.

Овде се излажу основи безмоментне теорије љуски. На бази те теорије могу се добити решења многих проблема, важних за технику.

§ 1. Основне диференцијалне једначине и гранични услови

У безмоментној теорији љуски, као што следи из назива, занемарују се сви моменти:

$$M_1 = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_1 + \nu \kappa_2), \quad M_2 = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_2 + \nu \kappa_1)^2,$$

$$H = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \tau, \quad (1.1)$$

што је допустиво у случајевима када је или мала крутост на савијање (мембрана), или су мале промене кривина и торзије (безмоментно напонско стање). Назначене две, по суштини различите, класе проблема обједињене су општом теоријом. Стварно, за проблеме мембранског типа, безмоментно стање је једино могуће; истовремено како је за друге проблеме безмоментно стање једно од могућих (крутост на савијање коначна) и за његову егзистенцију неопходно је испуњење низа услова, који зависе од облика љуске, карактера оптерећења и начина учвршћења њених ивица. Чак и дебеле љуске, при испуњењу одговарајућих услова, могу се налазити у безмоментном напонском стању, у том смислу, да су напони савијања за $\frac{h}{R}$ мањи од напона од сила.

Одбацујући моменте у једначинама равнотеже (услов једнакости са нулом вектора главног момента), добивамо:

$$T_{12} = T_{21} = S^*, \quad N_1 = N_2 = 0. \quad (1.2)$$

Одавно је лако видети, проузроковану неопходност занемаривања и пресечних сила N_1, N_2 . Водећи рачуна о тој чињеници у једначинама равнотеже (услов једнакости са нулом главног вектора) долазимо до система:

$$\frac{1}{AB} \left[\frac{\partial B T_1^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial A S^*}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} S^* - \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_2^* \right] + q_1 = 0,$$

$$\frac{1}{AB} \left[\frac{\partial A T_2^*}{\partial \beta} + \frac{\partial B S^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} S^* - \frac{\partial A}{\partial \beta} T_1^* \right] + q_2 = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{T_1^*}{R_1} + \frac{T_2^*}{R_2} - q_n = 0.$$

Скуп (1.2) и (1.3) образује систем диференцијалних једначина безмоментне теорије љуски. Систем диференцијалних једначина (1.3) је статички дефинисан, у односу на бесконачно мали елемент.

Претпоставимо да је систем диференцијалних једначина (1.3) решен, тада се за одређивање померања може искористити систем диференцијалних једначина у облику:

$$\varepsilon_1^* = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_1} = \frac{1}{Eh} (T_1^* - \nu T_2^*),$$

$$\varepsilon_2^* = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_2} = \frac{1}{Eh} (T_2^* - \nu T_1^*), \quad (1.4)$$

$$\omega = \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) = \frac{2(1+\nu)}{Eh} S^*.$$

Овде су десне стране једначина познате из решења система (1.3).

Опште решење система (1.4) представимо овако:

$$u = u^* + u^{**}, \quad v = v^* + v^{**}, \quad w = w^* + w^{**}, \quad (1.5)$$

где је u^*, v^*, w^* — партикуларно решење система (1.4), а u^{**}, v^{**}, w^{**} — опште решење њему одговарајућег хомогеног система диференцијалних једначина:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial u^{**}}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v^{**} + \frac{w^{**}}{R_1} = 0,$$

$$\frac{1}{B} \frac{\partial v^{**}}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u^{**} + \frac{w^{**}}{R_2} = 0, \quad (1.6)$$

$$\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v^{**}}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u^{**}}{A} \right) = 0.$$

Пошто је лако видети да u^{**}, v^{**}, w^{**} чине да дилатације и клизања средње површи љуске ишчезавају, дакле, они могу бити или померања чистог савијања, или померања љуске као крутог тела, тј. љуска им не

даје никакав отпор. На тај начин, при поставци проблема у безмоментној теорији померања чистог савијања треба да су уклоњена, или — ограничена. Одатле произилази питање — какви могу бити гранични услови у безмоментној теорији љуски.

Размотримо питање о граничним условима у безмоментној теорији љуски [12].

Систем диференцијалних једначина (1.3) је другог реда; следи да је и систем диференцијалних једначина (1.4) другог реда. Дакле, у безмоментној теорији за одређивање померања добивају се диференцијалне једначине два пута нижег реда (у поређењу са општом теоријом љуски) што значи да и граничних услова овде треба да буде два пута мање. Ипак, на сваком крају љуске могу бити дата само два гранична услова. На пример, ако је граница координатна линија $\alpha = \text{const}$, то у општој теорији љуски, као што је познато, гранични услови имају облик: T_1 ,

$$T_{12} + \frac{M_{12}}{R_2}, \quad N_1 + \frac{1}{B} \frac{\partial M_{12}}{\partial \beta}, \quad M_1$$

при чему све те величине треба да су познате на граници; у безмоментној теорији је безусловно: $N_1 = N_2 = M_1 = M_2 = M_{12} = M_{21} = 0$ у свим тачкама љуске и, дакле, на њеној граници. У безмоментној теорији, на крају љуске могу „дејствовати“ само T_1 и $T_{12} = S$. Осим тога, као што је познато, у општој теорији љуски гранични услови су по померањима, на пример, на координатној линији $\beta = \text{const}$. (граница љуске поклапа се са координатном линијом): $u, v, w, \vartheta = -\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1}$. У безмоментној пак теорији

користити w и ϑ није могуће; могу се давати само u и v . Још и више приметимо да диференцијалне једначине безмоментне теорије по силама и померањима имају различит ред: 2-ги и 4-ти респективно. Дакле, гранични услови за безмоментну љуску не могу бити у потпуности дати само по силама; половина од њих треба да је обавезно дата преко померања.

Обавезност те врсте има следећи физички смисао: љуска, која се не противи савијању није круто тело, него механизам који допушта померања која одговарају чистом савијању. Одређеним тангенцијалним учвршћењем крајева, љуска се може преобратити у крути систем.

Дакле, преостали гранични услови могу бити дати силама и тада проблем постаје статички одређеним али они могу бити дати и у померањима када ће проблем бити статички неодређен. У посебном случају (у безмоментној теорији) сви гранични услови могу бити дати у померањима, на пример, потпуном укљештењу границе одговара $u = v = 0$ свуда.

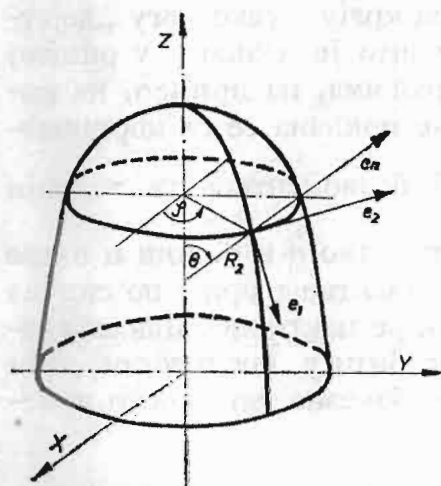
На тај начин, егзистенција безмоментног напонског стања везана је са неопходношћу важења низа услова, који се тичу облика љуске, карактера оптерећења које делује на њу (на пример, не дозвољавају се концентрисане силе нормалне на средњу површ) и начина учвршћења њених ивица.

Треба имати у виду противречност и физичко-математичку некоректност безмоментне теорије љуски. Стварно, услови компатибилности се не испуњавају, решења се не могу подврћи општим граничним условима љуске, на пример, углови обртања и w на њеним крајевима не морају бити ограничени; у вези с тим треба обезбедити одговарајуће ограниче-

ње померања чистог савијања (што није увек могуће); љуска по ивицама не може бити оптерећена ни моментима, ни пресечним силама; силе се овде одређују независно од тога да ли су испуњени или не услови компатибилности средње површи љуске (по правилу показује се да су они нарушени!). Ипак њена вредност, слично теорији потенцијалног струјања идеалне течности у хидромеханици је веома велика и она се широко и са успехом користи при решавању различитих важних техничких проблема, нарочито у комбинацији са моментном теоријом, која се прикључује ради оцене (или узимања у обзир) ивичног ефекта.

§ 2. Обртне љуске произвољног облика

Љуска произвољног облика, чија је средња површ ротациона (обртна) површ биће овде предмет разматрања. Линије главне кривине тога типа љуски биће њени меридијани и паралеле. Зато за главне координате узмемо: угао θ (кога чини нормала на средњу површ са осом љуске) и угао φ , који одређује положај тачке на одговарајућем паралелном кругу (сл. 4).



сл. 4

Нека је R_1 — полупречник кривине меридијана, R_2 једнак дужини одсечка нормале на средњу површ, који се налази између те површи и осе љуске (тј. продужење нормале до пресека са осом ротације љуске). За елемент лука меридијана имаћемо израз облика:

$$dS_1 = R_1 d\theta, \text{ дакле, } A = R_1. \quad (2.1)$$

За елемент лука паралелног круга —

$$dS_2 = R_2 \sin \theta d\varphi, \text{ дакле, } B = R_2 \sin \theta; \quad (2.2)$$

при чему у посматраном случају полупречници кривина зависе само од угла θ . При томе су два од Гаус-Кодацијевих услова (3.12) идентички задовољена а трећи даје релацију:

$$\frac{d}{d\theta} (R_2 \sin \theta) = R_1 \cos \theta. \quad (2.3)$$

Уносећи (2.1), (2.2) у диференцијалне једначине система (1.3) уместо A , B и узимајући у обзир при диференцирању релације (2.3) добијамо диференцијалне једначине равнотеже ротационих љуски произвољног облика у безмоментној теорији:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} \frac{\partial T_1^*}{\partial \theta} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_2} (T_1^* - T_2^*) + \frac{1}{R_2 \sin \theta} \frac{\partial S^*}{\partial \varphi} + q_1 &= 0, \\ \frac{1}{R_1} \frac{\partial S^*}{\partial \theta} + 2 \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_2} S^* + \frac{1}{R_2 \sin \theta} \frac{\partial T_2^*}{\partial \varphi} + q_2 &= 0, \\ \frac{T_1^*}{R_1} + \frac{T_2^*}{R_2} - q_n &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Решавајући трећу једначину из система (2.4) по T_2^* и затим после увршења T_2^* у друге две једначине система (2.4), налазимо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} \frac{\partial T_1^*}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) T_1^* + \frac{1}{R_2 \sin \theta} \frac{\partial S^*}{\partial \varphi} &= q_n \operatorname{ctg} \theta - q_1 \\ \frac{1}{R_1} \frac{\partial S^*}{\partial \theta} + 2 \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_2} S^* - \frac{1}{R_1 \sin \theta} \frac{\partial T_1^*}{\partial \varphi} &= - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial q_n}{\partial \varphi} - q_2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ако уместо непознатих T_1^* и S^* уведемо нове, — обрасцима:

$$U^* = T_1^* R_2 \sin^2 \theta, \quad V^* = S^* R_2^2 \sin^2 \theta \quad (2.6)$$

и узмемо релацију (2.3), тада се систем диференцијалних једначина (2.5) своди на следећи облик:

$$\begin{aligned} \frac{R_2^2 \sin \theta}{R_1} \frac{\partial U^*}{\partial \theta} + \frac{\partial V^*}{\partial \varphi} &= (q_n \cos \theta - q_1 \sin \theta) R_2^3 \sin^2 \theta, \\ \frac{\partial V^*}{\partial \theta} - \frac{R_2}{\sin \theta} \frac{\partial U^*}{\partial \varphi} &= - \left(\frac{\partial q_n}{\partial \varphi} + q_2 \sin \theta \right) R_1 R_2^2 \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Одавде искључивши непознату V^* , долазимо до диференцијалне једначине 2-ог реда, по непознатој U^* :

$$\frac{1}{R_1 R_2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{R_2^2 \sin \theta}{R_1} \frac{\partial U^*}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{R_1 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U^*}{\partial \varphi^2} = F(\theta, \varphi), \quad (2.8)$$

где је

$$\begin{aligned} F(\theta, \varphi) &= \frac{1}{R_1 R_2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [(q_n \cos \theta - q_1 \sin \theta) R_2^3 \sin^2 \theta] + R_2 \left(\frac{\partial^2 q_n}{\partial \varphi^2} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial q_2}{\partial \varphi} \sin \theta \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

На тај начин, одређивање сила код ротационих љуски по безмоментној теорији своди се на решавање диференцијалне једначине 2-ог реда (2.8).

Покажимо, да се и одређивање померања своди на решавање диференцијалне једначине аналогне (2.8). Уствари, за ротационе љуске систем диференцијалних једначина, који одређује померања има облик:

$$\begin{aligned} R_1 \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial \theta} + v = \frac{R_1}{Eh} (T_1^* - \nu T_2^*), \\ R_2 \varepsilon_2 &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \operatorname{ctg} \theta + w = \frac{R_2}{Eh} (T_2^* - \nu T_1^*), \\ R_2 \omega &= \frac{2 R_2 (1 + \nu)}{Eh} S^* = \frac{R_2}{R_1} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \nu \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Одавде искључивши непознато померање w и узимајући у обзир трећу једначину система (2.4), добивамо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \theta} - u \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} &= \frac{R_1^2 + R_2^2 + 2\nu R_1 R_2}{R_1} \frac{T_1^*}{Eh} - \frac{R_2(R_2 + \nu R_1)}{Eh} q_n, \\ \frac{R_2}{R_1} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \nu \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= \frac{2(1 + \nu) R_2}{Eh} S^*. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ако уместо непознатих u и v уведемо нове, — обрасцима:

$$\xi = \frac{u}{\sin \theta}, \quad \zeta = \frac{v}{R_2 \sin \theta} \quad (2.12)$$

и унесемо их у (2.11), тада тај систем постаје:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{R_2}{\sin \theta} - \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} &= \frac{R_1^2 + R_2^2 + 2\nu R_1 R_2}{R_1 \sin \theta} \frac{T_1^*}{Eh} - \frac{R_2(R_2 + \nu R_1)}{Eh \sin \theta} q_n, \\ \frac{R_2^2 \sin \theta}{R_1} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} &= \frac{2(1 + \nu) R_2}{Eh} S^*; \end{aligned} \quad (2.13)$$

одакле, искључимо непознату ξ , и као резултат добивамо диференцијалну једначину 2-ог реда, по непознатој ζ :

$$\frac{1}{R_1 R_2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{R_2^2 \sin \theta}{R_1} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{R_1 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} = f(\theta, \varphi), \quad (2.14)$$

при чему је у њој са $f(\theta, \varphi)$ означено:

$$\begin{aligned} f(\theta, \varphi) &= \frac{1}{R_1 R_2 \sin \theta} \left\{ 2(1 + \nu) \frac{\partial R_2 S^*}{\partial \theta} - \frac{R_1^2 + R_2^2 + 2\nu R_1 R_2}{R_1 \sin \theta} \frac{\partial T_1^*}{\partial \varphi} + \right. \\ &\left. + \frac{R_2(R_2 + \nu R_1)}{\sin \theta} \frac{\partial q_n}{\partial \varphi} \right\} \frac{1}{Eh}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Сада је лако видети, да су диференцијалне једначине (2.8) и (2.14) идентичне. Стварно, означимо са B диференцијалну операцију:

$$B(\quad) = \frac{1}{R_1 R_2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{R_2^2 \sin \theta}{R_1} \frac{\partial(\quad)}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{R_1 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2(\quad)}{\partial \varphi^2} \quad (2.16)$$

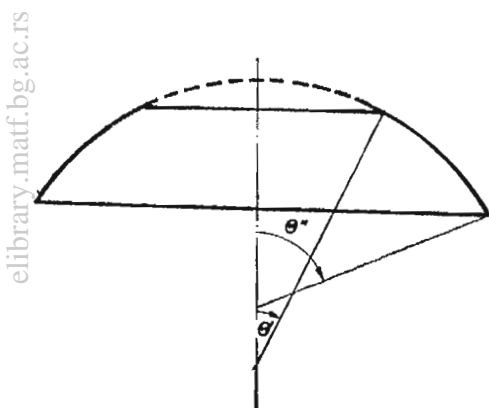
и користећи се оператором B напишемо диференцијалне једначине (2.8) и (2.14) у наредном облику:

$$B(U^*) = F(\theta, \varphi), \quad B(\zeta) = f(\theta, \varphi). \quad (2.17)$$

На тај начин, и одређивање сила, и одређивање померања, у безмоментној теорији ротационих љуски своди се у суштини на решавање једне исте диференцијалне једначине; дакле, ако је добијено решење првог дела задатка, тј. одређене силе, тада су позната и померања.

§ 3. Општи метод решавања диференцијалних једначина безмоментне теорије ротационих љуски

Посматрајмо ротациону љуску, ограничену једним или са два паралелна круга (сл. 5). Компоненте површинског и ивичног (контурног) оптерећења биће периодичне функције угла φ (са периодом 2π), с обзиром на затвореност љуске у односу на координату φ . Представимо их овако:



сл. 5

$$\begin{aligned} q_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} (q_{1k} \cos k\varphi + q'_{1k} \sin k\varphi), \\ q_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} (q_{2k} \cos k\varphi + q'_{2k} \sin k\varphi), \\ q_n &= \sum_{k=0}^{\infty} (q_{nk} \cos k\varphi + q'_{nk} \sin k\varphi), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где су q_{1k}, \dots, q'_{nk} функције само угла θ и одређују се познатим формулама теорије Фуријеових редова. Дакле, у општем случају довољно је размотрити оптерећење облика:

$$q_1 = q_{1k} \cos k\varphi, \quad q_2 = q_{2k} \sin k\varphi, \quad q_n = q_{nk} \cos k\varphi, \quad (3.2)$$

а тада по релацијама (3.1) добивамо решење за ма које подељено оптерећење.

Стварно, уносећи (3.2) у прву диференцијалну једначину из система (2.17), на њеној десној страни; решење диференцијалне једначине до-

бијено таквим путем, тражићемо у облику:

$$U^* = U_k^* \cos k \varphi, \quad (3.3)$$

где су U_k^* функције само угла θ . При томе, после скраћивања са $\cos k \varphi$, за одређивање траженог U^* добивамо обичну диференцијалну једначину 2-ог реда:

$$\frac{1}{R_1 R_2 \sin \theta} \frac{d}{d \theta} \left[\frac{R_2^2 \sin \theta}{R_2} \frac{d U_k^*}{d \theta} \right] - \frac{k^2}{R_1 \sin^2 \theta} U_k^* = F_k(\theta). \quad (3.4)$$

Овде је

$$F_k(\theta) = \frac{1}{R_1 R_2 \sin \theta} \frac{d}{d \theta} [(q_{nk} \cos \theta - q_{1k} \sin \theta) R_2^3 \sin^2 \theta] - k(kq_{nk} - q_{2k} \sin \theta) R_2 \quad (3.5)$$

После интеграције диференцијалне релације (3.5) и затим користећи се релацијама (2.6), (2.7) за U^* , V^* , и диференцијалним једначинама равнотеже у облику (2.4), налазимо:

$$T_1^* = T_{1k}^* \cos k \varphi, \quad T_2^* = T_{2k}^* \cos k \varphi, \quad S^* = S_k^* \sin k \varphi, \quad (3.6)$$

где су T_{1k}^* , T_{2k}^* , S_k^* познате функције угла θ , које садрже две интеграционе константе, које улазе у опште решење диференцијалне једначине (3.4). Интеграционе константе одређују се из одговарајућих граничних услова конкретног проблема.

Путем аналогних операција налази се решење и по померањима, одговарајућих проблема за ротационе љуске по безмоментној теорији. Уствари, уносећи изразе (3.6) и q_n , сагласно (3.2) у десну страну друге диференцијалне једначине из система (2.17), можемо је написати у облику:

$$f(\theta, \varphi) = f_k(\theta) \sin k \varphi, \quad (3.7)$$

где је

$$f_k(\theta) = \frac{1}{E h} \frac{1}{R_1 R_2 \sin \theta} \left\{ 2(1+\nu) \frac{d R_2 S_k^*}{d \theta} + k \frac{R_1^2 + R_2^2 + 2\nu R_1 R_2}{R_1 \sin \theta} T_{1k}^* - k \frac{R_2(R_2 + \nu R_1)}{\sin \theta} q_{nk} \right\}. \quad (3.8)$$

Сада релацију (3.7) унесимо на десну страну друге диференцијалне једначине система (2.17), а затим ћемо решење, на тај начин добивене диференцијалне једначине, тражити у облику:

$$\zeta = \zeta_k(\theta) \sin k \varphi. \quad (3.9)$$

Тада за одређивање $\zeta_k(\theta)$ добијамо обичну диференцијалну једначину 2-ог реда:

$$\frac{1}{R_1 R_2 \sin \theta} \frac{d}{d \theta} \left[\frac{R_2^2 \sin \theta}{R_1} \frac{d \zeta_k}{d \theta} \right] - \frac{k^2}{R_1 \sin^2 \theta} \zeta_k = f_k(\theta), \quad (3.10)$$

она је идентична са диференцијалном једначином (3.4), па се, дакле, њено решење налази познатим поступком. Чим се одреди $\zeta_k(\theta)$, одмах се одређују померања:

$$u = u_k \cos k \varphi, \quad v = v_k \sin k \varphi, \quad w = w_k \cos k \varphi, \quad (3.11)$$

где су u_k, v_k, w_k — познате функције угла θ , које садрже четири интеграционе константе; међу њима две су константе ушле као последица општег решења диференцијалне једначине 2-ог реда (3.4), коју је представљала десна страна у диференцијалној једначини 2-ог реда (3.10); после интеграције последње диференцијалне једначине (3.10), са своје стране појављују се још две константе. Дакле, на свакој ивици треба да буду задата по два гранична услова. Од њих, у крајњој линији два услова треба да су дата по померањима, да би се избегло чисто савијање и померање љуске као крутог тела.

У случају кад је љуска врхом затворена, тада на јединој ивици треба да су дата два гранична услова, од којих један услов треба да је (обавезно!) по померању.

§ 4. Симетрична деформација ротационих љуски

У случају када ивично и површинско оптерећење не зависе од угла φ , тада и деформација неће зависити од угла φ , тј. биће симетрична у односу на осу љуске. То добивамо из (3.1) задржавајући у њој само члан који одговара $k = 0$; тада је:

$$q_1 = q_{10}(\theta), \quad q_2 = q_{20}(\theta), \quad q_n = q_{n0}(\theta). \quad (4.1)$$

У том случају уместо симултаног система диференцијалних једначина (2.7) долазимо до двеју независних обичних диференцијалних једначина:

$$\frac{dU^*}{d\theta} = (q_n \cos \theta - q_1 \sin \theta) R_1 R_2 \sin \theta, \quad (4.2)$$

$$\frac{dV^*}{d\theta} = -q_2 R_1 R_2^2 \sin^2 \theta.$$

Интегралени те диференцијалне једначине, налазимо:

$$U^* = C_1 + \int_{\theta''}^{\theta} (q_n \cos \theta - q_1 \sin \theta) R_1 R_2 \sin \theta d\theta, \quad (4.3)$$

$$V^* = C_2 - \int_{\theta''}^{\theta} q_2 R_1 R_2^2 \sin^2 \theta d\theta.$$

Доња граница интеграције θ'' може бити изабрана произвољно, саобразно погодностима нумеричког прорачуна (у нашем случају, идентификујмо је са једним од рубова љуске).

Знајући помоћне функције U^* , V^* , на основу формуле (3.6) добијамо силе:

$$S^* = \frac{C_2}{R_2^2 \sin^2 \theta} - \frac{1}{R_2^2 \sin^2 \theta} \int_{\theta''}^{\theta} R_1 R_2^2 \sin^2 \theta d\theta, \quad (4.4)$$

$$T_1^* = \frac{C_1}{R_2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{R_2 \sin^2 \theta} \int_{\theta''}^{\theta} (q_n \cos \theta - q_1 \sin \theta) R_1 R_2 \sin \theta d\theta$$

и, аналогно,

$$T_2^* = q_n R_2 - \frac{C_1}{R_1 \sin^2 \theta} - \frac{1}{R_1 \sin^2 \theta} \int_{\theta''}^{\theta} (q_n \cos \theta - q_1 \sin \theta) R_1 R_2 \sin \theta d\theta. \quad (4.5)$$

Из (4.4) и (4.5) се види да оптерећења q_n , q_1 изазивају само нормалне силе T_1^* , T_2^* , а q_2 — само смичуће силе S^* .

Прва формула из (4.4) одговара торзији љуске око њене осе. Ако је, $q_2 = 0$, тада ће се љуска увијати само ивичним силама.

Нека на ивици $\theta = \theta''$ дејствују смичуће силе S'' . Тада први образац из (4.4) за $q_2 = 0$ даје;

$$S^* = \frac{(R_2'' \sin \theta'')^2}{R_2^2 \sin^2 \theta} S'', \quad 2\pi (R_2'' \sin \theta'')^2 S'' = \mathfrak{M}, \quad (4.6)$$

\mathfrak{M} — је момент, који увија љуску око њене осе. Одавде смичуће напоне можемо написати у облику:

$$\sigma_t = \frac{S^*}{h} = \frac{\mathfrak{M}}{2\pi R_2^2 \sin^2 \theta} = \frac{\mathfrak{M}}{2h\Omega}, \quad (4.7)$$

где је Ω — површина оног паралелног круга, на коме се посматра напон.

Размотримо случај, када се љуска деформише симетричним оптерећењем q_1 , q_n , које изазива у њој само нормалне напоне (на пример, прорачун купола и резервоара).

Задајући на крају θ'' силу $T_1^* = T_1''$, налазимо константу C_1 по другој од формула (4.4),

$$C_1 = T_1'' R_2'' \sin^2 \theta''. \quad (4.8)$$

И, дакле, друга формула из (4.4) и (4.5) дају формуле за одређивање нормалних сила:

$$T_1^* = \frac{R_2'' \sin^2 \theta''}{R_2 \sin^2 \theta} T_1'' + \frac{1}{R_2 \sin^2 \theta} \int_{\theta''}^{\theta} (q_n \cos \theta - q_1 \sin \theta) R_1 R_2 \sin \theta d\theta,$$

$$T_2^* = q_n R_2 - \frac{R_2'' \sin^2 \theta''}{R_1 \sin^2 \theta} T_1'' - \frac{1}{R_1 \sin^2 \theta} \int_{\theta''}^{\theta} (q_n \cos \theta - q_1 \sin \theta) R_1 R_2 \sin \theta d\theta; \quad (4.9)$$

оне у потпуности карактеришу напонско стање у симетрично деформисаној ротационој љуски.

Приметимо, да у случају када љуска има само један крај, постајући у врху затвореном $\theta'' = 0$ (дно, купола без отвора), обрасци (4.9) добивају следећи облик:

$$T_1^* = \frac{1}{R_2 \sin^2 \theta} \int_0^{\theta} (q_n \cos \theta - q_1 \sin \theta) R_1 R_2 \sin \theta d\theta, \quad (4.10)$$

$$T_2^* = q_n R_2 - \frac{1}{R_1 \sin^2 \theta} \int_0^{\theta} (q_n \cos \theta - q_1 \sin \theta) R_1 R_2 \sin \theta d\theta.$$

§ 5. Прорачун купола и резервоара

Најпре извршимо прорачун купола. Узмимо као дато оптерећење сопствену тежину љуске:

$$q_1 = q \sin \theta, \quad q_n = -q \cos \theta, \quad (5.1)$$

где је q — тежина куполе по јединици њене површине. Уносећи q_1 , q_n , у релације (4.10), добивамо:

$$T_1 = -\frac{q}{R_2 \sin^2 \theta} \int_0^{\theta} R_1 R_2 \sin \theta d\theta, \quad (5.2)$$

$$T_2^* = -q R_2 \cos \theta + \frac{q}{R_1 \sin^2 \theta} \int_0^{\theta} R_1 R_2 \sin \theta d\theta.$$

Нека су полупречници кривина куполе дати у облику:

$$R_1 = \frac{R_0}{(1 + \gamma \sin^2 \theta)^{3/2}}, \quad R_2 = \frac{R_0}{(1 + \gamma \sin^2 \theta)^{1/2}}. \quad (5.3)$$

Датим полупречницима кривине одговарају површи, које настају ротацијом кривих 2-ог реда око осе симетрије, при чему се овде садржи, — за $\gamma = 0$ — сфера; за $\gamma = 1$ — параболоид; за $\gamma > -1$ — елипсоид; за $\gamma < -1$ — хиперболоид; R_0 — полупречник кривине у врху куполе, тј. за $\theta = 0$. Уносећи изразе (5.3) у везе (5.2) а затим изводећи интеграцију, добивамо силе за одговарајуће куполе.

Сада размотримо прорачун резервоара. Као оптерећење узмимо нормални притисак $q_n = p = \text{const}$. После уврштења p у (4.9) налазимо:

$$T_1^* = T_1'' \frac{R_2'' \sin^2 \theta''}{R_2 \sin^2 \theta} + \frac{p}{R_2 \sin^2 \theta} \int_{\theta''}^{\theta} R_1 R_2 \sin \theta \cos \theta d\theta = T_1'' \frac{R_2'' \sin^2 \theta''}{R_2 \sin^2 \theta} + \frac{p}{R_2 \sin^2 \theta} \int_{\theta''}^{\theta} R_2 \sin \theta d(R_2 \sin \theta) = \frac{p R_2}{2} + \frac{C}{R_2 \sin^2 \theta}, \quad (5.4)$$

$$T_2^* = -\frac{R_2}{R_1} T_1^* + p R_2 = \frac{p R_2}{2} \left(2 - \frac{R_2}{R_1} \right) - \frac{C}{R_1 \sin^2 \theta}.$$

Овде је

$$C = \left(T_1'' - \frac{1}{2} p R_2'' \right) R_2'' \sin^2 \theta''. \quad (5.5)$$

Тако, на пример, ако се као резервоар узме затворена сфера: $R_1 = R_2 = R = \text{const}$, тада обрасци (5.4) дају:

$$T_1^* = T_2^* = \frac{p R}{2} + \frac{C}{R \sin^2 \theta}, \quad (5.6)$$

где треба узети $C = 0$; како је љуска затворена, — у супротном случају решење у тачкама: $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ постаје бесконачно. Дакле, добивамо, за овде посматрани случај, силе у облику:

$$T_1^* = T_2^* = \frac{p R}{2} = \text{const}. \quad (5.7)$$

Дакле, сфера као идеална посуда, чији материјал трпи равномерно истезање (или притисак) је ипак сложена у изради.

У инжењерском смислу велики производни интерес представљају цилиндарски резервоари, посебно, затворени на крајевима са днима истог или различитог облика. У случајевима те врсте потребно је посматрати посебно цилиндар и дно, а затим установљавати могућност њиховог спајања, са очувањем, по могућности, безмоментног стања тих љуски. Примењујући формуле (5.4) на цилиндарски део резервоара, тј. стављајући за њих $R_1 = \infty$, $R_2 = r = \text{const}$, $\theta = \theta'' = \frac{\pi}{2}$, налазимо:

$$T_1^* = T_1'', \quad T_2^* = pr; \quad (5.8)$$

при чему се сила T_1'' одређује из услова равнотеже аксијалне силе, са притиском, који се односи на свако дно резервоара.

Дакле,

$$T_1^* = T_1'' = \frac{\pi r^2}{2 \pi r} = \frac{pr}{2}. \quad (5.9)$$

На тај начин, по безмоментној теорији, цилиндарски део резервоара истезаће се силама:

$$T_1^* = \frac{pr}{2} \text{ — подужним} \tag{5.10}$$

$$T_2^* = pr \text{ — циркуларним}$$

Што се тиче сила које делују на дно, њихове величине и карактер зависе од њиховог геометријског облика. Најчешће су у употреби три врсте дна: сферна, елиптична и витоперна (образују се путем спајања љуски које имају облике торуса и дела сфере).

На крају, приметимо, да сви примери, овде размотрени, представљају проблеме безмоментне теорије, која је била формулисана тако, да се налажење сила може извести независно од одређивања померања (статички одређени задаци). У случају пак статички неодређених проблема, неопходно је тражење и померања, што се, као што је познато, своди на интеграцију диференцијалних једначина идентичних диференцијалним једначинама искоришћеним овде. Зато на таквој врсти проблема нема потребе задржавати се.

У овој глави на основу опште теорије љуски дате су поставке и наведени примери решавања проблема о одређивању деформација и напона, на нормалној и повишеној температури, код љуски различитог геометријског облика.

§ 1. Диференцијалне једначине цилиндарских љуски у комплексном облику

У класи цилиндарских љуски основни проблеми свODE се на крају крајева, на прорачун затворених и незатворених љуски. Најраспрострањеније методе њиховог решавања је примена двоструких и једноструких тригонометријских редова, првенствено последњих.

Ипак гломазност диференцијалних једначина, у општем случају, и, њихов висок ред (осми), значајно повећава математичке тешкоће, па је природна тежња да се упросте како диференцијалне једначине, тако и методе њеног решавања.

Избор система упрошћења, за случај цилиндарских љуски, битно зависи од њихових димензија. Прихваћена је њихова подела на следеће категорије: 1) веома дугачке $l \gg R_{cp}$; 2) дугачке $l > R_{cp}$; 3) средње дужине $l \sim R_{cp}$; 4) кратке $l < R_{cp}$. За љуске 1) и 2) 1936 године В.З. Власов [13] је предложио полубезмоментну теорију; он је у диференцијалним једначинама равнотеже занемарио величине: M_1 , H , N_1 и ϵ_2 , ω , и свео прорачун кружне цилиндарске љуске на решавање диференцијалне једначине:

$$\frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \eta^4} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} + i 2 b^2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi^2} = F_1(\xi, \eta), \quad (1.1)$$

где је $2 b^2$ — константа, а F_1 — дата функција. Као последицу он је распространио своју идеју и на некружне цилиндарске љуске, —

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\rho \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) + i 2 b^2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi^2} = F_2(\xi, \eta), \quad (1.2)$$

где је $\rho(\eta)$ — полупречник кривине попречног пресека љуске, подељен са својом средњом вредношћу.

За дуге љуске показало се могућим формирање још простијих диференцијалних једначина, које су наведене ниже:

$$\frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \eta^4} + i 2 b^2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi^2} = F_1(\xi, \eta); \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\rho \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} \right) + i 2 b^2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi^2} = F_2(\xi, \eta), \quad (1.4)$$

при чему (1.3) представља кружну цилиндарску љуску, а (1.4) — некружну цилиндарску љуску.

Овде је уместо приметити, да се у случају цилиндарских љуски кратке и средње дужине, фактички занемарују смичућа померања у изразима за x_1 , x_2 , τ и N , из чега произилази, да се прорачун, на пример, кружне цилиндарске љуске своди на тражење решења следеће диференцијалне једначине:

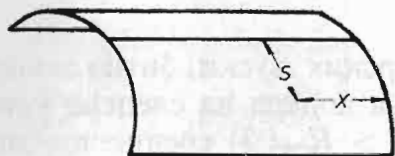
$$\Delta \Delta \Phi + i 2 b^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} = F(\xi, \eta); \quad (1.5)$$

То је Арон-Муштаријев систем упрошћења (види главу III, § 1).

В.В. Новожилов [12] је увео комплексну трансформацију и добио општу диференцијалну једначину за све цилиндарске љуске:

$$\Delta (\rho \Delta \tilde{T}) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} \right) + i 2 b^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \xi^2} = F(\xi, \eta). \quad (1.6)$$

Осим тога он је успео, на основу (1.6), да разради ефективни метод прорачуна циви некружног попречног пресека произвољне дужине.



сл. 6

Размотримо детаљније добијање диференцијалних једначина равнотеже цилиндарских љуски у комплексном облику. Нека се положај тачке средње површи дефинише координатама x и s , тј. растојањем дуж изводнице и дужином лука директрисе (види сл. 6); уведемо бездимензионе координате:

$$\xi = \frac{x}{r_0}, \quad \eta = \frac{s}{r_0}, \quad (1.7)$$

где је r_0 — за љуске карактеристична величина (на пример, $r_0 = \frac{2s_0}{\pi}$,

или $r_0 = R_{\max}$). Ламеови параметри у нашем случају биће:

$$A = B = r_0. \quad (1.8)$$

Диференцијалне једначине равнотеже цилиндарских љуски, по комплексним силама, имаће облик:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{T}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \eta} &= -q_1 r_0, \\ \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{T}_2}{\partial \eta} + \frac{i}{2b^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} &= -q_2 r_0, \\ \tilde{T}_1 - \frac{i}{2b^2} \rho \Delta \tilde{T} &= \rho q_n r_0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где је

$$\rho(\eta) = \frac{r}{r_0}, \quad 4b^4 = 12(1-\nu^2) \frac{r_0^2}{h^2}, \quad \tilde{T} = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2; \quad (1.10)$$

$$\tilde{q}_n = q_n + i \frac{(1+\nu)}{2b^2} \left(\frac{\partial q_1}{\partial \xi} + \frac{\partial q_2}{\partial \eta} \right) \approx q_n,$$

при чему је $\Delta(\) = \frac{\partial^2(\)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2(\)}{\partial \eta^2}$. Што се тиче комплексних сила, то се оне преко момената изражавају следећим обрасцима:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1 &= T_1 - i \frac{2b^2}{r_0} \frac{M_2 - \nu M_1}{1 - \nu^2}, \\ \tilde{T}_2 &= T_2 - i \frac{2b^2}{r_0} \frac{M_1 - \nu M_2}{1 - \nu^2}, \\ \tilde{S} &= S + i \frac{2b^2}{r_0} \frac{H}{1 - \nu}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Искључимо непознату S из диференцијалних једначина равнотеже (1.9), тада добивамо систем двеју диференцијалних једначина у облику

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \xi^2} - \Delta \tilde{T}_2 - \frac{i}{2b^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} \right) = r_0 \left(\frac{\partial q_2}{\partial \eta} - \frac{\partial q_1}{\partial \xi} \right), \quad (1.12)$$

$$\tilde{T}_2 - \frac{i}{2b^2} \rho \Delta \tilde{T} = r_0 \rho \tilde{q}_n.$$

Сада изведимо следећу трансформацију. Другу једначину из система (1.12) напишимо експлицитно по \tilde{T}_2 , а тај израз за \tilde{T}_2 унесимо у прву једначину истог система (1.12), добивамо једну диференцијалну једначину 4-ог реда по помоћној функцији:

$$\Delta [\rho \Delta \tilde{T}] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} \right) + i 2b^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \xi^2} = i 2b^2 r_0 \left[[\Delta (\rho \tilde{q}_n)] + \frac{\partial q_2}{\partial \eta} - \frac{\partial q_1}{\partial \xi} \right]. \quad (1.13)$$

На тај начин, прорачун цилиндарских љуски произвољног облика и дужине своди се на решавање диференцијалне једначине 4-ог реда (1.13). Пошто је из (1.13) нађена помоћна функција \tilde{T} , постаје просто одређивање свих других величина. Стварно, из треће диференцијалне једначине система (1.9) налазимо:

$$\tilde{T}_2 = i \frac{\rho}{2b^2} \Delta \tilde{T} + r_0 \rho \tilde{q}_n. \quad (1.14)$$

Одавде, пошто је познато да је $\tilde{T}_1 = \tilde{T} - \tilde{T}_2$ може се (1.14) написати у облику:

$$\tilde{T}_1 = \tilde{T} - i \frac{\rho}{2b^2} \Delta \tilde{T} - r_0 \rho \tilde{q}_n. \quad (1.15)$$

Даље, уносећи \tilde{T}_2 , у другу диференцијалну једначину из система (1.9), налазимо

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \xi} = -\frac{i}{2b^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} [\rho \Delta \tilde{T}] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} \right\} - r_0 \left[\frac{\partial(\rho q_n)}{\partial \eta} + q_2 \right]. \quad (1.16)$$

Осим тога, на основу прве диференцијалне једначине из система (1.9) и обрасца (1.15), добивамо:

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \eta} = -\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \xi} + i \frac{\rho}{2b^2} \frac{\partial}{\partial \xi} [\Delta \tilde{T}] + r_0 \left(\rho \frac{\partial q_n}{\partial \xi} - q_1 \right). \quad (1.17)$$

Обрасци (1.16) и (1.17) у потпуности дефинишу \tilde{S} помоћу \tilde{T} .

Сада изразимо помоћном функцијом \tilde{T} комплексна померања. За цилиндарске љуске комплексна померања се према познатим обрасцима дефинишу релацијама:

$$\begin{aligned} r_0 \tilde{\epsilon}_1 &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = \frac{r_0}{Eh} (\tilde{T}_1 - \nu \tilde{T}_2), \\ r_0 \tilde{\epsilon}_2 &= \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} + \frac{\tilde{w}}{\rho} = \frac{r_0}{Eh} (\tilde{T}_2 - \nu \tilde{T}_1), \\ r_0 \tilde{w} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} = \frac{2(1+\nu)}{Eh} \tilde{S} \end{aligned} \quad (1.18)$$

и, аналогно, налазимо формуле за промене кривина:

$$\begin{aligned} r_0^2 \tilde{\kappa}_1 &= -\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \xi^2} = i \frac{2b^2}{Eh} (\tilde{T}_2 - T_2^*), \\ r_0^2 \tilde{\kappa}_2 &= r_0 \frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial \eta} = -\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \eta} - \frac{\tilde{v}}{\rho} \right) = i \frac{2b^2}{Eh} (\tilde{T}_1 - T_1^*), \\ r_0^2 \tau &= r_0 \frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial \xi} = -\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} = -i \frac{2b^2}{Eh} (\tilde{S} - S^*). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Овде су T_1^* , T_2^* , S^* — ма која решења безмоментних једначина тј. следећих диференцијалних једначина:

$$\frac{\partial T_1^*}{\partial \xi} + \frac{\partial S^*}{\partial \eta} = -r_0 q_1, \quad \frac{\partial S^*}{\partial \xi} + \frac{\partial T_2^*}{\partial \eta} = -r_0 q_2, \quad T_2^* = r_0 \rho q_n. \quad (1.20)$$

При томе је установљено, да се у случају примене на цилиндарске љуске тај систем може интегралити, ако q_1 , q_2 , q_n , не зависе од ξ ; његова решења ће бити:

$$\begin{aligned} T_1^* &= \frac{\xi^2}{2} r_0 \left[\frac{d^2(q_n \rho)}{d\eta^2} + \frac{dq_2}{d\eta} \right] - r_0 \xi q_1, \\ T_2^* &= r_0 \rho q_n, \\ S^* &= -\xi r_0 \left(\frac{d(q_n \rho)}{d\eta} + q_2 \right), \end{aligned} \quad (1.21)$$

која и треба унети на десне стране диференцијалних једначина система (1.19). Диференцијалне једначине (1.18) и (1.19) скупо одређују померања по датим комплексним силама, или помоћу помоћне функције \tilde{T} .

Пошто је нађено опште решење диференцијалних једначина система (1.18) и (1.19), тј. добивени: \tilde{u} , \tilde{v} , \tilde{w} , одмах се могу одредити реална померања: u , v , w пошто су она једнака реалним деловима \tilde{u} , \tilde{v} , \tilde{w} , респективно. На основу система (1.18) и узимајући у обзир, да се силе изражавају помоћном функцијом \tilde{T} која, са своје стране, задовољава диференцијалну једначину (1.13), и обрасце (1.14), (1.15) и (1.16), могу се добити следећи изрази за изводе комплексних померања:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} &= \frac{r_0}{Eh} \left[\tilde{T} - i \frac{1+\nu}{2b^2} \rho \Delta \tilde{T} \right] - \frac{(1+\nu)r_0}{Eh} \rho \tilde{q}_n, \\ \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \xi^2} &= -\frac{r_0}{Eh} \left\{ \left(1 + i \frac{1+\nu}{2b^2} \right) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} + i \frac{1+\nu}{2b^2} \frac{\partial}{\partial \eta} [\rho \Delta \tilde{T}] \right\} - \\ &\quad - \frac{(1+\nu)r_0^2}{Eh} \frac{\partial(\rho q_n)}{\partial \eta} - \frac{2(1+\nu)r_0^2}{Eh} q_2, \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \xi^2} = \frac{r_0 \rho}{Eh} \left[\Delta \tilde{T} + i \frac{1+\nu}{2b^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{(1+\nu)r_0^2}{Eh} \rho \left(\frac{\partial q_1}{\partial \xi} + \frac{\partial q_2}{\partial \eta} \right).$$

У те везе улази непосредно само помоћна функција \tilde{T} .

§ 2. Прорачун панела цилиндарске љуске

Панел (крива плоча) издвојена је из кружне цилиндарске љуске (сл. 7).

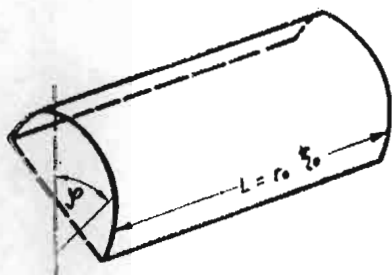
У том случају је $\rho = \frac{r}{r_0} = 1$ и диференцијална једначина (1.13) добива облик:

$$\Delta \Delta \tilde{T} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \varphi^2} + i 2 b^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \xi^2} = i 2 b^2 r_0 \left[\Delta q_n + \frac{\partial q_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial q_1}{\partial \xi} \right], \quad (2.1)$$

где је $\varphi = \eta$ — угао који одговара луку s , рачунат од равни симетрије цилиндарске плоче.

Нека је панел слободно ослоњен по целој контури, дакле, гранични услови ће бити:

$$v = w = T_1 = M_1 = 0, \quad (2.2)$$



сл. 7

за $\xi = 0$, $\xi = \frac{L}{r_0}$; на праволинијским ивицама ($\varphi = \pm \varphi_0$), они су

разнолики, сматраћемо их произвољним. Решење, које задовољава све захтеве проблема, може се формирати, развијањем компонената површинског оптерећења у обичне тригонометријске редове по независној непознатој ξ . Нека ти развоји имају облик:

$$q_1 = \sum_{m=1}^{\infty} q_1^{(m)} \cos \lambda_m \xi, \quad q_2 = \sum_{m=1}^{\infty} q_2^{(m)} \sin \lambda_m \xi, \quad q_n = \sum_{m=1}^{\infty} q_n^{(m)} \sin \lambda_m \xi, \quad (2.3)$$

где је

$$\lambda_m = m \frac{\pi r_0}{L} \quad (2.4)$$

а $q_1^{(m)}$, $q_2^{(m)}$, $q_n^{(m)}$, су функције само угла φ , и могу се дефинисати по општим правилима израчунавања коефицијената Фурије-ових редова. Унесимо изразе оптерећења у облику (2.3) на десну страну диференцијалне једначине (2.1), а затим ћемо решење последње једначине тражити у облику реда:

$$\tilde{T} = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{T}^{(m)} \sin \lambda_m \xi. \quad (2.5)$$

Као резултат назначених операција диференцијална једначина (2.1) распада се на скуп независних диференцијалних једначина по обичним изводима:

$$\Delta_m [\Delta_m \tilde{T}^{(m)}] + \frac{d^2 \tilde{T}^{(m)}}{d\varphi^2} - i 2 b^2 \lambda_m^2 \tilde{T}^{(m)} = i 2 b^2 r_0 \left[\Delta_m q_n^{(m)} + \frac{d q_2^{(m)}}{d\varphi} + \lambda_m q_1^{(m)} \right], \quad (2.6)$$

где је

$$\Delta_m(\quad) = \frac{d^2(\quad)}{d\varphi^2} - \lambda_m^2(\quad). \quad (2.7)$$

Хомогена диференцијална једначина која одговара нехомогеној диференцијалној једначини (2.6), биће

$$\Delta_m [\Delta_m \tilde{T}^{(m)}] + \frac{d^2 \tilde{T}^{(m)}}{d\varphi^2} - i 2 b^2 \lambda_m \tilde{T}^{(m)} = 0. \quad (2.8)$$

При чему, ако је оптерећење могуће представити глатком функцијом угла φ , тада се приближно партикуларно решење може узети у облику:

$$\tilde{T}_{part.}^{(m)} = -\frac{r_0}{\lambda_m^2} \left\{ \Delta_m [q_n^{(m)}] + \frac{dq_2^{(m)}}{d\varphi} + \lambda_m q_1^{(m)} \right\}. \quad (2.9)$$

Та партикуларна решења добивају се, ако се у систему (2.6) одбаце сви чланови, осим последњег, тј. за веома велики множилац $2 b^2 \lambda_m^2$. Приметимо, да се формула (2.9) покакала са решењем, које даје безмоментна теорија љуски (глава III).

На тај начин, као партикуларна решења нехомогених диференцијалних једначина (2.6) могу се узети решења одговарајућих проблема по безмоментној теорији. Дакле, проблем прорачуна цилиндарских панела (криволинијских плоча) може се разматрати као хомогени проблем, стављајући у свим обрасцима $q_1^{(m)} = q_2^{(m)} = q_n^{(m)} = 0$. Добивши такво решење, ми га увек можемо генерализати и за нехомогени проблем.

Дакле, решавајући систем (2.8) ми ћемо под $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{S}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ подразумевати само њихове изразе који одговарају хомогеном проблему. Решење система (2.8) тражимо у облику:

$$\tilde{T}^{(m)} = C e^{\gamma\varphi}, \quad (2.10)$$

где су C и γ — константе. Као резултат увршћења решења (2.10) у систем (2.8) долазимо до биквадратне једначине по непознатој:

$$(\gamma^2 - \lambda_m^2)^2 + \gamma^2 - i 2 b^2 \lambda_m^2 = 0, \quad (2.11)$$

или у облику решеном по γ^2 :

$$\gamma^2 = \lambda_m^2 - \frac{1}{2} \pm \sqrt{i 2 b^2 \lambda_m^2 + \left(\lambda_m^2 - \frac{1}{2} \right)^2}, \quad (2.12)$$

али како је $2b^2 \gg \lambda_m^2$, дакле, последњи члан под кореном у (2.12) може се занемарити. Тада ћемо уместо (2.12) имати:

$$\gamma^2 = \lambda_m^2 - \frac{1}{2} \pm (1+i) b \lambda_m = b \lambda_m [f_m \pm (1+i)], \quad (2.13)$$

где је

$$f_m = \frac{\lambda_m^2 - \frac{1}{2}}{b \lambda_m} \quad (2.14)$$

па, дакле,

$$\gamma_{1,2} = \pm (c_1 + id_1), \quad \gamma_{3,4} = \pm (c_2 - id_2), \quad (2.15)$$

у којима је респективно,

$$c_{1,2} = \sqrt{\frac{b\lambda_m}{2}} \sqrt{\sqrt{(1 \pm f_m)^2 + 1} \pm 1 + f_m}, \quad (2.16)$$

$$d_{1,2} = \sqrt{\frac{b\lambda_m}{2}} \sqrt{\sqrt{(1 \pm f_m)^2 + 1} \mp 1 - f_m}.$$

Сада тражено решење (2.10) добива облик:

$$\tilde{T}^{(m)} = \tilde{C}_1 e^{\gamma_1 \varphi} + \tilde{C}_2 e^{\gamma_2 \varphi} + \tilde{C}_3 e^{\gamma_3 \varphi} + \tilde{C}_4 e^{\gamma_4 \varphi}. \quad (2.17)$$

Овде су $\tilde{C}_{1, 2, 3, 4}$ — комплексне интеграционе константе.

Чим је постала позната помоћна функција $\tilde{T}^{(m)}$ сада не представља тешкоћу формирање израза за све комплексне силе. У суштини, уносећи (2.5), узимањем у обзир (2.17), у релације (1.14), (1.15) и (1.16), и стављајући у њих при том $\rho = 1$, а $q_1 = q_2 = q_n = 0$ имаћемо:

$$\tilde{T}_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{T}_1^{(m)} \sin \lambda_m \xi, \quad \tilde{T}_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{T}_2^{(m)} \sin \lambda_m \xi, \quad \tilde{S} = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{S}^{(m)} \cos \lambda_m \xi. \quad (2.18)$$

Овде су

$$\tilde{T}_1^{(m)} = \sum_{j=1}^4 \tilde{C}_j \left[1 - \frac{i}{2b^2} (\gamma_j^2 - \lambda_m^2) \right] e^{\gamma_j \varphi} \approx \sum_{j=1}^4 \tilde{C}_j e^{\gamma_j \varphi}, \quad (2.19)$$

$$\tilde{T}_2^{(m)} = \frac{i}{2b^2} \sum_{j=1}^4 (\gamma_j^2 - \lambda_m^2) \tilde{C}_j e^{\gamma_j \varphi};$$

$$\tilde{S}^{(m)} = -\lambda_m \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\gamma_j} \tilde{C}_j \left[1 - \frac{i}{2b^2} (\gamma_j^2 - \lambda_m^2) \right] e^{\gamma_j \varphi} \approx -\lambda_m \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\gamma_j} \tilde{C}_j e^{\gamma_j \varphi}. \quad (2.20)$$

Уносећи, пак, те изразе у везе (1.18) и (1.19), добијамо диференцијалне једначине за одређивање комплексних померања; решење последњих тражићемо у облику редова:

$$\tilde{u} = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{u}_m \cos \lambda_m \xi,$$

$$\tilde{v} = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{v}_m \sin \lambda_m \xi, \quad (2.21)$$

$$\tilde{w} = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{w}_m \sin \lambda_m \xi;$$

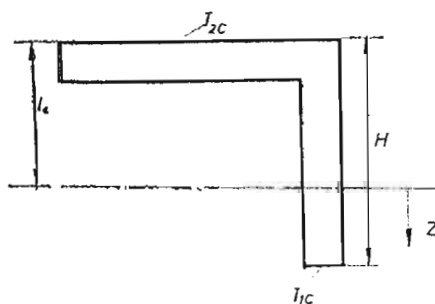
коэффициенти тих редова, с обзиром на релације (1.18), (1.19) и (2.18) потчињаваће се следећим релацијама:

$$\begin{aligned}
 -\lambda_m \tilde{u}_m &= \frac{r_0}{Eh} (\tilde{T}_1^{(m)} - \nu \tilde{T}_2^{(m)}), \\
 \frac{d\tilde{v}_m}{d\varphi} + \tilde{w}_m &= \frac{r_0}{Eh} (\tilde{T}_2^{(m)} - \nu \tilde{T}_1^{(m)}), \\
 \frac{d\tilde{u}_m}{d\varphi} + \lambda_m \tilde{v}_m &= \frac{2(1+\nu)r_0}{Eh} \tilde{S}^{(m)}, \\
 \lambda_m^2 \tilde{w}_m &= i 2 b^2 \frac{r_0}{Eh} \tilde{T}_2^{(m)}, \quad -\frac{d^2 \tilde{w}_m}{d\varphi^2} + \frac{d\tilde{v}_m}{d\varphi} = i 2 b^2 \frac{r_0}{Eh} \tilde{T}_1^{(m)}, \\
 \lambda_m \left(\frac{d\tilde{w}_m}{d\varphi} - \tilde{v}_m \right) &= \frac{i 2 b^2 r_0}{Eh} \tilde{T}_2^{(m)}.
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Даље налазимо \tilde{u} , \tilde{v} , \tilde{w} и по формулама (2.21) израчунавамо комплексна померања, а затим раздвајајући реални део одредимо реална померања, дакле, задатак је решен.

§ 3. Температурни напони у неравномерно загрејаној цилиндарској љусци, ојачаној подужним ребрима

Размотримо проблем одређивања температурних напона у ојачаној цилиндарској љусци, зглавкасто ослоњеној на крајевима. Подужна ребра су распоређена на једнаком растојању један од другог. Температуру



сл. 8

оплате сматраћемо константном $\vartheta = \vartheta_0$ и различитом од температуре подужних ребара. Температура подужних ребара нека се линеарно мења по висини профила и константна је по дужини (сл. 8):

$$\vartheta_c = \vartheta_{2c} - \frac{z + l_c}{H} (\vartheta_{2c} - \vartheta_{1c}), \tag{3.1}$$

где је l_c — растојање од тежишта попречног пресека до горњег руба подужног ребра, H — висина профила подужног ребра, ϑ_{2c} , ϑ_{1c} — температуре подужних ребара на месту контакта са љуском и крајњој тачки подужног ребра од места контакта, респективно. Спољне силе на љуску не делују.

При решавању тога задатка [3], по Власову [13], учинимо претпоставке.

1) Уздужне моменте савијања и торзионе моменте у једначинама равнотеже узимамо да су једнаки нули:

$$M_x = M_{xy} = M_{yx} = 0. \quad (3.2)$$

2) Еластичне деформације дилатације (увијања) у попречном правцу и деформације клизања у средњој површи љуске узимамо да су једнаке нули:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} = 0, \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (3.3)$$

За решење таквог проблема имамо: геометријске релације

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} = 0, \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad (3.4)$$

$$\kappa_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \kappa_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v}{R} \right);$$

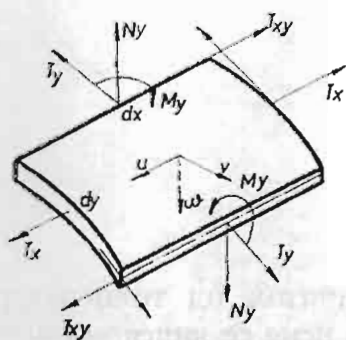
релације, које произилазе из Хуковог закона

$$T_x = Eh (\varepsilon_x - \alpha \vartheta_0), \quad T_{xy} = T_{yx} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \gamma,$$

$$T_y = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) - \frac{Eh}{1-\nu} \alpha \vartheta_0 = 0; \quad (3.5)$$

$$M_x = -\frac{Eh^3 \nu}{12(1-\nu^2)} \kappa_x, \quad M_y = -\frac{Eh^3 \nu}{12(1-\nu^2)} \kappa_y,$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \kappa_{xy};$$



сл. 9

једначину равнотеже елемента (сл. 9):

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} - \frac{N_y}{R} = 0,$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{T_y}{R} = 0, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} - N_y = 0. \quad (3.6)$$

Решавамо проблем помоћу померања. Увидимо потенцијалну функцију померања $\Phi = \Phi(x, y)$, на следећи начин [14]:

$$u = -\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} + \int_0^x \alpha \vartheta_0 dx, \quad v = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3}, \quad w = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} R. \quad (3.7)$$

Тада све релације (3.5), (3.6), (3.7) постају идентичности, осим треће једначине равнотеже, ако се тражене величине сила и деформација изразе функцијом Φ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \alpha \vartheta_0, & \varepsilon_y &= \nu \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \alpha \vartheta_0, & \gamma &= 2(1 + \nu) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^3 \partial y}; \\ \kappa_x &= R \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^2 \partial y^4}, & \kappa_y &= R \frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^6} + \frac{1}{R} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4}, & \kappa_{xy} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(R \frac{\partial^5 \Phi}{\partial y^5} + \frac{1}{R} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} \right); \\ T_x &= -Eh \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2}, & T_{xy} &= T_{yx} = Eh \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^3 \partial y}; \\ T_y &= -Eh \left[\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \frac{h^2}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{R} \left(R \frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^6} + \frac{1}{R} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right) \right]; \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{Eh^3 \nu}{12(1-\nu^2)} \left(R \frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^6} + \frac{1}{R} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right), \\ M_y &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(R \frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^6} + \frac{1}{R} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right), \\ M_{xy} &= M_{yx} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left(R \frac{\partial^5 \Phi}{\partial y^5} + \frac{1}{R} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} \right); \\ N_y &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(R \frac{\partial^7 \Phi}{\partial y^7} + \frac{1}{R} \frac{\partial^5 \Phi}{\partial y^5} \right). \end{aligned}$$

Трећа једначина равнотеже из (3.6) даје основну једначину која решава проблем, која у бездимензионим координатама $\xi = \frac{x}{R}$, $\eta = \frac{y}{R}$ има облик:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + \frac{h^2}{12 R^2 (1-\nu^2)} \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 1 \right)^2 \Phi = 0. \quad (3.9)$$

Решење те диференцијалне једначине тражимо у облику тригонометријског реда:

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\eta) \cos \lambda_n \xi. \quad (3.10)$$

После уношења (3.10) у диференцијалну једначину (3.9) добивамо једначину по F_n , чије се опште решење може написати на следећи начин:

$$F_n(\eta) = \sum_{i=1}^8 C_i y_i, \quad (3.11)$$

где су C_1, \dots, C_8 — константе, y_1, \dots, y_8 — фундаментални систем линеарно независних функција облика:

$$\begin{aligned} y_1 &= \operatorname{ch} p_n \eta \sin q_n \eta, & y_2 &= \operatorname{ch} p_n \eta \cos q_n \eta, & y_3 &= \operatorname{sh} p_n \eta \cos q_n \eta, \\ y_4 &= \operatorname{sh} p_n \eta \sin q_n \eta, & y_5 &= \operatorname{ch} \bar{p}_n \eta \sin \bar{q}_n \eta, & y_6 &= \operatorname{ch} \bar{p}_n \eta \cos \bar{q}_n \eta, \\ y_7 &= \operatorname{sh} \bar{p}_n \eta \cos \bar{q}_n \eta, & y_8 &= \operatorname{sh} \bar{p}_n \eta \sin \bar{q}_n \eta. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Овде су $p_n, \bar{p}_n, q_n, \bar{q}_n$ — реални и имагинарни делови свих осам корена карактеристичне једначине:

$$(k^2 + 1)^2 k^4 + \mu_n = 0, \quad (3.13)$$

где је

$$\mu_n = \frac{R^2 \lambda_n^4 12 (1 - \nu^2)}{h^2}. \quad (3.14)$$

Имамо:

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{2} \sqrt{(A_n - 1) + \sqrt{(A_n - 1)^2 + B_n^2}}, \\ q_n &= \frac{1}{2} \sqrt{-(A_n - 1) + \sqrt{(A_n - 1)^2 + B_n^2}}, \\ \bar{p}_n &= \frac{1}{2} \sqrt{-(A_n + 1) + \sqrt{(A_n + 1)^2 + B_n^2}}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\bar{q}_n = \frac{1}{2} \sqrt{(A_n + 1) + \sqrt{(A_n + 1)^2 + B_n^2}},$$

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 16 \mu_n}}, \quad B_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 16 \mu_n}}.$$

Из симетрије конструкције и граничних услова на местима контакта љуске са подужним ребрима следи, да F_n треба да буде парна функција, тј. коефицијенти $C_1 = C_3 = C_5 = C_7 = 0$, и тада F_n има облик:

$$F_n = C_2 y_2 + C_4 y_4 + C_6 y_6 + C_8 y_8. \quad (3.16)$$

Осим тога из услова симетрије треба да буду испуњене следеће релације по линији контакта љуске са подужним ребрима:

$$v = \left. \begin{aligned} \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \eta^3} \\ \eta = \frac{b}{R} \end{aligned} \right| = 0, \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{R^4} \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \eta^5} \\ \eta = \frac{b}{R} \end{aligned} \right| = 0, \quad (3.17)$$

где је $2b$ — растојање између подужних ребара. Испуњавајући услов (3.17), функција $F_n(\eta)$ добива облик:

$$F_n(\eta) = C_4 x_1 + C_8 x_2, \quad (3.18)$$

где је

$$x_1 = y_4 - \frac{i_{46}}{i_{26}} y_2 + \frac{i_{42}}{i_{26}} \bar{y}_2, \quad x_2 = y_4 - \frac{i_{86}}{i_{26}} y_2 + \frac{i_{82}}{i_{26}} \bar{y}_2; \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} i_{42} &= \tilde{y}_4''' \tilde{y}_2^V - \tilde{y}_2''' \tilde{y}_4^V, & i_{26} &= \tilde{y}_2''' \tilde{y}_6^V - \tilde{y}_6''' \tilde{y}_2^V, \\ i_{82} &= \tilde{y}_8''' \tilde{y}_2^V - \tilde{y}_2''' \tilde{y}_8^V, & i_{46} &= \tilde{y}_4''' \tilde{y}_6^V - \tilde{y}_6''' \tilde{y}_4^V, \\ i_{86} &= \tilde{y}_8''' \tilde{y}_6^V - \tilde{y}_6''' \tilde{y}_8^V; & \tilde{y}_j(\eta) &= y_j \left(\frac{b}{R} \right), \quad (j=2, 4, 6, 8); \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\bar{y}_2 = y_2 (\bar{p}_n \cdot \eta, \bar{q}_n \cdot \eta), \quad \bar{y}_4 = y_4 (\bar{p}_n \cdot \eta, \bar{q}_n \cdot \eta).$$

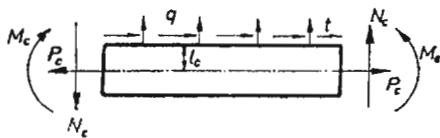
Решење (3.10) сада напишимо овако:

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} (C_4 x_1 + C_8 x_2) \cos \lambda_n \xi. \quad (3.21)$$

Константе C_4, C_8 одредимо из услова садејства оплате са подужним ребрима на местима контакта. Подужно ребро се посматра као греда, која се налази под дејством сила са стране оплате (сл. 10).

Из услова разнотеже елемента dx добивамо

$$\frac{dP_c}{dx} = t, \quad \frac{dN_c}{dx} = q, \quad \frac{dM_c}{dx} = -t l_c + N_c. \quad (3.22)$$



сл. 10

Овде су P_c, N_c, M_c — унутрашње силе и момент у подужном ребру; ознака „с“ указује на припадност подужном ребру. По линији контакта љуске са подужним ребрима испуњене су једнакости:

$$t = 2 T_{yx} \Big|_{\eta = \frac{b}{R}} = 2 \tilde{T}_{yx}, \quad q = 2 N_y \Big|_{\eta = \frac{b}{R}} = 2 \tilde{N}_y, \quad (3.23)$$

где су q, t — попречне и смичуће силе, које дејствују на подужно ребро са стране оплате. Из треће диференцијалне једначине система (3.22), искључујући N_c , добивамо диференцијалну једначину за одређивање M_c , у облику:

$$\frac{d^2 M_c}{dx^2} = 2 \left[-l_c \frac{d\tilde{T}_{xy}}{dx} + \tilde{N}_y \right]. \quad (3.24)$$

Једначина еластичне линије подужног ребра има облик

$$\frac{d^2 w_c}{dx^2} = - \frac{M_c + M_{ct}}{E_c J_c}, \quad (3.25)$$

где је

$$M_{ct} = E_c \int_{F_c} \alpha_c \vartheta_c z dF, \quad (3.26)$$

при чему је F_c — површина подужног ребра, J_c — момент инерције попречног пресека, E_c , α_c — модул еластичности и коефицијент линеарног ширења подужног ребра.

Из диференцијалних једначина (3.24), (3.25), искључујући M_c добијамо диференцијалну једначину за одређивање угиба

$$\frac{d^4 w_c}{d\xi^4} = -\frac{2R^4}{E_c J_c} \left[\tilde{N}_y - \frac{l_c}{R} \frac{d\tilde{T}_{yx}}{d\xi} + \frac{1}{2R^2} \frac{d^2 M_{ct}}{d\xi^2} \right]. \quad (3.27)$$

Представимо температуру љуске и подужног ребра у облику редова по $\cos \lambda_n \xi$:

$$\begin{aligned} \vartheta_{2c}(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_{2n} \cos \lambda_n \xi, \\ \vartheta_{1c}(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_{1n} \cos \lambda_n \xi, \\ \vartheta_0(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_{0n} \cos \lambda_n \xi. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Тада је

$$M_{ct} = -\frac{E_c J_c \alpha_c}{H} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta \vartheta_{cn} \cos \lambda_n \xi, \quad (3.29)$$

где је означено: $\Delta \vartheta_{cn} = \vartheta_{2n} - \vartheta_{1n}$. Интегрирајмо диференцијалну једначину (3.27) и као резултат добивамо:

$$\begin{aligned} w_c &= \frac{2}{E_c J_c} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)R^2} [C_4(\tilde{x}_1^{VII} + \tilde{x}_1^V) + C_8(\tilde{x}_2^{VII} + \tilde{x}_2^V)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l_c \lambda_n^4 Eh}{R} (C_4 \tilde{x}_1' + C_8 \tilde{x}_2') - \frac{\lambda_n^2 R^2 E_c J_c \alpha_c}{2H} \Delta \vartheta_{cn} \right\} \frac{\cos \lambda_n \xi}{\lambda_n^4}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

С обзиром на симетрију и нулте граничне услове све четири константе интеграције једнаке су нули.

Из релације $\int_F \sigma_c dF = P_c$, која важи у било ком попречном пресеку подужног ребра, и релације еластичности

$$\sigma_c = E_c \left[\varepsilon_\alpha - z \frac{\partial^2 w_c}{\partial x^2} - \alpha_c \vartheta_c \right], \quad (3.31)$$

одредимо подужну деформацију подужног ребра:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cx} = & -\frac{2 Eh}{R^3 E_c F_c} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 (C_4 \tilde{x}_1' + C_8 \tilde{x}_2') \cos \lambda_n \xi + \alpha_c \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_{2n} \cos \lambda_n \xi - \\ & -\frac{l_c}{E_c J_c} \frac{2}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)R^2} [C_4(\tilde{x}_1^{\text{VII}} + \tilde{x}_1^{\text{V}}) + C_8(\tilde{x}_2^{\text{VII}} + \tilde{x}_2^{\text{V}})] + \right. \\ & \left. + \frac{l_c \lambda_n^4 Eh}{R} (C_4 \tilde{x}_1' + C_8 \tilde{x}_2') - \frac{\lambda_n^2 R^2 E_c J_c}{2H} \alpha_c \vartheta_{cn} \right\} \frac{\cos \lambda_n \xi}{\lambda_n^2} - \\ & -\frac{l_c \alpha_c}{H} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta \vartheta_{cn} \cos \lambda_n \xi. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Испуњавајући услове једнакости подужних деформација и радијалних угиба на месту контакта оплате са подужним ребрима:

$$\varepsilon_x \Big|_{\eta = \frac{b}{R}} = \varepsilon_{cx} \Big|_{z = -l_c}, \quad w \Big|_{\eta = \frac{b}{R}} = w_c \Big|_{z = -l_c}, \quad (3.33)$$

добивамо две једначине за одређивање константи:

$$C_4 \alpha_1 - C_8 \alpha_2 = \beta_1 R^4, \quad C_4 \alpha_3 + C_8 \alpha_4 = \beta_2 R^4, \quad (3.34)$$

где је

$$\begin{aligned} \alpha_1 = & \gamma_1 \tilde{x}_1' \lambda_n^2 + \gamma_2 \frac{l_c}{R} \frac{1}{\lambda_n^2} (\tilde{x}_1^{\text{VII}} + \tilde{x}_1^{\text{V}}) + \lambda_n^2 \tilde{x}_1^{\text{II}}, \\ \alpha_2 = & \gamma_1 \tilde{x}_2' \lambda_n^2 + \gamma_2 \frac{l_c}{R} \frac{1}{\lambda_n^2} (\tilde{x}_2^{\text{VII}} + \tilde{x}_2^{\text{V}}) + \lambda_n^2 \tilde{x}_2^{\text{II}}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 = & -\gamma_3 \tilde{x}_1' + \gamma_2 (\tilde{x}_1^{\text{VII}} + \tilde{x}_1^{\text{V}}) \frac{1}{\lambda_n^4} - \tilde{x}_1^{\text{IV}}, \\ \alpha_4 = & -\gamma_3 \tilde{x}_2' + \gamma_2 (\tilde{x}_2^{\text{VII}} + \tilde{x}_2^{\text{V}}) \frac{1}{\lambda_n^4} - \tilde{x}_2^{\text{IV}}; \\ \beta_1 = & -\alpha_0 \vartheta_{0n} + \alpha_c \vartheta_{2n}, \quad \beta_2 = \frac{R}{H} \alpha_c \Delta \vartheta_{cn} \frac{1}{\lambda_n^2}; \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\gamma_1 = \frac{2 EhR}{E_c} \left(\frac{1}{F_c} + \frac{l_c^2}{J_c} \right), \quad \gamma_2 = \frac{Eh^3 R}{E_c J_c 6(1-\nu^2)}, \quad \gamma_3 = \frac{2 Eh l_c R^2}{E_c J_c}. \quad (3.37)$$

Из (3.34) имамо:

$$C_4 = \frac{\beta_1 \alpha_4 - \beta_2 \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_3} R^4, \quad C_8 = \frac{\beta_2 \alpha_1 - \beta_1 \alpha_3}{\alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_3} R^4. \quad (3.38)$$

Сада коначне изразе за силе и померања можемо представити у облику:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda_n}{R^3} (C_4 x_1'' + C_8 x_2'') + \alpha \vartheta_{0n} \frac{R}{\lambda_n} \right] \sin \lambda_n \xi,$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{R^3} (C_4 x_1''' + C_8 x_2''') \cos \lambda_n \xi,$$

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{R^3} (C_4 x_1^{IV} + C_8 x_2^{IV}) \cos \lambda_n \xi;$$

$$T_x = \frac{Eh}{R^4} \sum_{n=1}^{\infty} (C_4 x_1'' + C_8 x_2'') \lambda_n \cos \lambda_n \xi, \quad T_Y = -Eh \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\lambda_n^4}{R_4} C_4 x_1 + \right. \\ \left. + C_8 x_2 \right\} + \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^6} [C_4 (x_1^{VI} + x_1^{IV}) + C_8 (x_2^{VI} + x_2^{IV})] \cos \lambda_n \xi, \\ T_{xy} = \frac{Eh}{R^4} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^3 (C_4 x_1' + C_8 x_2') \cdot \sin \lambda_n \xi, \quad (3.39)$$

$$M_x = -\frac{Eh^3 \nu}{12(1-\nu^2)R^5} \sum_{n=1}^{\infty} [C_4 (x_1^{VI} + x_1^{IV}) + C_8 (x_2^{VI} + x_2^{IV})] \cos \lambda_n \xi, \\ M_y = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)R^5} \sum_{n=1}^{\infty} [C_4 (x_1^{VI} + x_1^{IV}) + C_8 (x_2^{VI} + x_2^{IV})] \cos \lambda_n \xi, \\ M_{xy} = -\frac{Eh^3}{12(1+\nu)R^5} \sum_{n=1}^{\infty} [C_4 (x_1^V + x_1''') + C_8 (x_2^V + x_2''')] \lambda_n \sin \lambda_n \xi; \quad (3.40)$$

$$M_c = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{l_c E h}{R^3} \lambda_n^2 (C_4 \tilde{x}_1' + C_8 \tilde{x}_2') + \frac{E h^3}{12(1-\nu^2) \lambda_n^2 R^4} [C_4 (\tilde{x}_1^{VII} + \right. \\ \left. + \tilde{x}_1^V) + C_8 (\tilde{x}_2^{VII} + \tilde{x}_2^V)] \right\} \cos \lambda_n \xi, \\ P_c = -\frac{2 E h}{R^3} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 (C_4 \tilde{x}_1' + C_8 \tilde{x}_2') \cos \lambda_n \xi, \\ N_c = -\frac{2 E h^3}{12(1-\nu^2) R^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} [C_4 (\tilde{x}_1^{VII} + \tilde{x}_1^V) + C_8 (\tilde{x}_2^{VII} + \tilde{x}_2^V)] \sin \lambda_n \xi, \\ N_y = -\frac{E h^3}{12(1-\nu^2) R^6} \sum_{n=1}^{\infty} [C_4 (x_1^{VII} + x_1^V) + C_8 (x_2^{VII} + x_2^V)] \cos \lambda_n \xi. \quad (3.41)$$

Из услова зглавкастог ослањања на ивицама љуске треба да су задовољене релације:

$$w=0, \quad M_x=0 \quad \text{za } x=\pm l=\pm \frac{L}{2},$$

где је L — дужина љуске. Одатле следује, да је $\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi R}{L}$.

Ако се осим раније прихваћених хипотеза $\gamma = 0$, $\varepsilon_y = 0$ искористе претпоставке [14]:

1) компоненте деформација савијања κ_x , κ_y , κ_{xy} дефинишу се само нормалним угибима љуске

$$\kappa_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (3.42)$$

2) у другој једначини равнотеже ставити

$$N_y = 0, \quad (3.43)$$

тада се раније добивено решење упрошћава. У том случају полазни систем диференцијалних једначина добива следећи облик: геометријске релације биће

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} = 0, \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (3.44)$$

$$\kappa_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

релације еластичности

$$T_x = E h (\varepsilon_x - \alpha \vartheta_0), \quad T_{xy} = \frac{E h}{2(1+\nu)} \gamma, \quad (3.45)$$

$$M_x = -\frac{E h^3 \nu}{12(1-\nu^2)} \kappa_x, \quad M_y = -\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \kappa_y, \quad M_{ky} = \frac{E h^3}{12(1+\nu)} \kappa_{xy};$$

једначине равнотеже

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} = 0, \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{T_y}{R} = 0, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} - N_y = 0.$$

Потенцијалну функцију Φ уведимо, као и раније, по формулама (3.8) и изразимо деформације и силе у следећемо виду:

$$\varepsilon_x = -\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \alpha \vartheta_0, \quad \varepsilon_y = \nu \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \alpha \vartheta_0, \quad \gamma = 2(1+\nu) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^3 \partial y}, \quad (3.47)$$

$$\kappa_x = R \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^2 \partial y^4}, \quad \kappa_y = R \frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^6}, \quad \kappa_{xy} = R \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x \partial y^5};$$

$$T_x = -Eh \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2}, \quad T_y = -Eh \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4}, \quad T_{xy} = T_{yx} = Eh \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^3 \partial y},$$

$$M_x = -\frac{Eh^3 \nu^3}{12(1-\nu^2)} R \frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^6}, \quad M_y = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} R \frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^6}, \quad (3.48)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} R \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x \partial y^5}, \quad N_y = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} R \frac{\partial^7 \Phi}{\partial y^7}.$$

При томе су све релације (3.44) – (3.46) идентички задовољене, осим треће једначине равнотеже, која даје једначину за одређивање функције Φ :

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + \frac{h^2}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \eta^8} = 0. \quad (3.49)$$

Решење те диференцијалне једначине тражимо у облику

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} e^{k\eta} \cos \lambda_n \xi, \quad (3.50)$$

где су $k = \pm p_n \pm iq_n$, $\bar{k} = \pm q_n \pm ip_n$ – корени карактеристичне једначине

$$k^8 + \mu_n = 0$$

Опште решење диференцијалне једначине (3.49) може се представити у облику

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} (C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4 + C_5 y_5 + C_6 y_6 + C_7 y_7 + C_8 y_8) \cos \lambda_n \xi. \quad (3.51)$$

Овде је

$$\begin{aligned} y_1 &= \operatorname{ch} p_n \eta \sin q_n \eta, & y_2 &= \operatorname{ch} p_n \eta \cos q_n \eta, \\ y_3 &= \operatorname{sh} p_n \eta \cos q_n \eta, & y_4 &= \operatorname{sh} p_n \eta \sin q_n \eta, \\ y_5 &= \operatorname{ch} q_n \eta \sin p_n \eta, & y_6 &= \operatorname{ch} q_n \eta \cos p_n \eta, \\ y_7 &= \operatorname{sh} q_n \eta \cos p_n \eta, & y_8 &= \operatorname{sh} q_n \eta \sin p_n \eta; \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$p_n = \frac{\sqrt[8]{\mu_n}}{\sqrt[4]{8}} \sqrt{\sqrt{2}+1}, \quad q_n = \frac{\sqrt[8]{\mu_n}}{\sqrt[4]{3}} \sqrt{\sqrt{2}+1}.$$

До истог резултата долазимо, ако у релацијама (3.15) занемаримо јединицу у поређењу са μ_n . С обзиром на симетрију, као и раније, решење се може написати у облику

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} (C_4 x_1 + C_8 x_2) \cos \lambda_n \xi.$$

Константе C_4 , C_8 имају исти облик (3.38). Померања u , v , w и силе T_x , P_c одређују се по обрасцима (3.39), (3.41). Остале силе налазе се из израза облика:

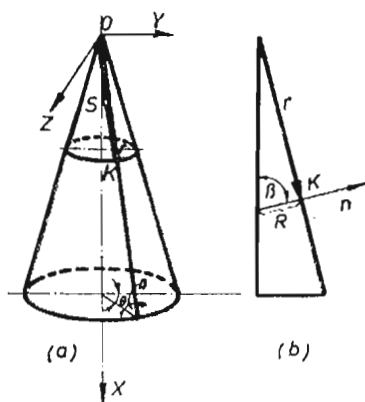
$$\begin{aligned}
T_y &= -\frac{Eh}{R^4} \sum_{n=1}^{\infty} (C_4 x_1 + C_8 x_2) \lambda_n^4 \cos \lambda_n \xi, & T_{xy} &= \frac{Eh}{R^4} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^3 (C_4 x_1' + \\
&+ C_8 x_2') \sin \lambda_n \xi, \\
N_y &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{R^6} \sum_{n=1}^{\infty} (C_4 x_1^{\text{VII}} + C_6 x_2^{\text{VII}}) \cos \lambda_n \xi, \\
M_x &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)R^5} \sum_{n=1}^{\infty} (C_4 X_1^{\text{VI}} + C_8 X_2^{\text{VI}}) \cos \lambda_n \xi, \\
M_{xy} &= -\frac{Eh^3}{12(1+\nu)R^5} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (C_4 X_1^{\text{V}} + C_8 X_2^{\text{V}}) \sin \lambda_n \xi, & (3.53) \\
N_c &= -\frac{Eh^3}{6(1-\nu)R^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} (C_4 \tilde{x}_1^{\text{VII}} + C_8 \tilde{x}_2^{\text{VII}}) \sin \lambda_n \xi, \\
M_c &= \frac{2Eh l_c}{R^3} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^2 (C_4 \tilde{x}_1' + C_8 \tilde{x}_2') \cos \lambda_n \xi + \\
&+ \frac{Eh^3}{6(1-\nu^2)R^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} (C_4 \tilde{x}_1^{\text{VII}} + C_8 \tilde{x}_2^{\text{VII}}) \cos \lambda_n \xi.
\end{aligned}$$

Приметимо још једном, да функције y_i које улазе у x_1 , x_2 имају сада облик (3.52).

§ 4. Конусна љуска

Конусне љуске су чести елементи савремених конструкција. Решење проблема за конусне љуске знатно је теже, него за цилиндарске љуске, јер је структура полазних једначина сложенија.

Извешћемо основне једначине линеарне теорије термоеластичних конусних љуски, користећи резултате за „хладне“ конусне љуске из рада [11].



Поставимо координатни систем тако, како је показано на сл. 11. Координатни почетак нека се поклапа са врхом конуса. Дефинисаћемо положај тачке H средње површи радијус-вектором r , повученим из врха конуса O , и углом θ између аксијалне равни, која пролази кроз посматрану тачку, и неком непокретном равни.

Интензитет вектора r означимо са s , угао нагиба генератрисе према основи са β . Пројекције r на координатне осе су

$$x = s \sin \beta, \quad y = s \cos \beta \cos \theta, \quad z = s \cos \beta \sin \theta. \quad (4.1)$$

Вектор r може се разложити у правцу јединичних вектора i, j, k :

$$r = s(i \sin \beta + j \cos \beta \cos \theta + k \cos \beta \sin \theta). \quad (4.2)$$

Величине s и θ посматрамо као криволинијске координате на средњој површи $\xi = s, \eta = \theta$. Одредимо коефицијенте прве и друге квадратне форме недеформисане средње површи љуске. За средњу површ посматране љуске прва квадратна форма има облик

$$dl^2 = (d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}) = d\mathbf{r}^2 = ds^2 + (s \cos \beta d\theta)^2.$$

Одавде су коефицијенти прве квадратне форме једнаки

$$a_{11} = A^2 = 1, \quad a_{22} = B^2 = s^2 \cos^2 \beta. \quad (4.3)$$

Овде су величине A и B еквивалентне Ламеовим коефицијентима. Из (4.3) они су једнаки:

$$A = 1, \quad B = s \cos \beta. \quad (4.4)$$

Даље, користећи опште геометријске релације теорије љуски, израчунајмо деформације средње површи и параметар промена кривина, узимајући у обзир да су полупречници кривина R_1 и R_2 једнаки (види сл. 11b):

$$R_1 = \infty, \quad R_2 = \frac{s}{\operatorname{tg} \beta}. \quad (4.5)$$

Дилатације и клизања у средњој површи, с обзиром на (4.4) и (4.5), могу се написати у облику:

$$\varepsilon_s = \frac{\partial u}{\partial s}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{s} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{s} - \frac{w \operatorname{tg} \beta}{s}, \quad \gamma = \frac{1}{s} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{s}, \quad (4.6)$$

где је $\varphi = \theta \cos \beta$.

У релацијама (4.6) u, v, w — су померања тачака средње површи респективно у правцу изводнице дуж круга, добивеног при пресеку средње површи са равни, нормалне на осу љуске и унутрашње нормале на површ љуске.

Промене кривина и торзија одређују се обрасцима:

$$\kappa_s = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \quad \kappa_\theta = -\frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{\operatorname{tg} \beta}{s^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s},$$

$$\tau = -\frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{2} \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{s^2} v + \frac{2}{s} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \varphi} - \frac{2}{s^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right). \quad (4.7)$$

Лако је видети да се постижу значајна упрошћења у тим обрасцима ако се занемаре чланови, који зависе од v , у поређењу са члановима, који зависе од w , како је то учинио још Г. Арон [15]. Као резултат уместо (4.7), имаћемо:

$$\begin{aligned} \kappa_s &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, & \kappa_\theta &= -\frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s}, \\ \tau &= -\frac{1}{s} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \varphi} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} = -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

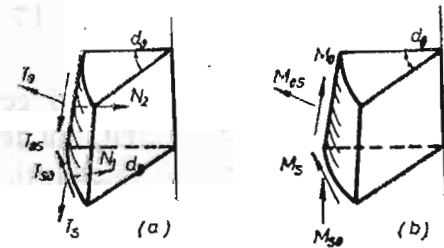
Деформације у неком слоју на растојању z од средње површи изражавају се релацијама:

$$e_s = \varepsilon_s + z \kappa_1, \quad e_\theta = \varepsilon_\theta + z \kappa_2, \quad e_{s\theta} = \gamma + 2z \tau. \quad (4.9)$$

Искључујући из (4.6) u и v , добивамо једначину компатибилности деформација:

$$s \frac{\partial^2 (s \varepsilon_\theta)}{\partial s^2} - s \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial s} + \frac{\partial^2 \varepsilon_s}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 (s \gamma)}{\partial s \partial \varphi} + s \operatorname{tg} \beta \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = 0. \quad (4.10)$$

Нека је љуска неравномерно загрејана по дебљини z и дуж праваца s и θ , тј. $\vartheta = \vartheta(s, \theta, z)$.



сл. 12

Силе и моменти (в. сл. 12) и параметри промена кривина и торзије (4.7) изражавају се следећим везама:

$$\begin{aligned} T_s &= C(s, \theta) [\varepsilon_s + \nu \varepsilon_\theta] - T_\vartheta(s, \theta), & T_\theta &= C(s, \theta) [\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_s] - T_\vartheta(s, \theta), \\ T_{\theta s} &= T_{s\theta} = S = \frac{1}{2} (1 - \nu) C(s, \theta) \gamma; \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} M_s &= D(s, \theta) [\kappa_s + \nu \kappa_\theta] - M_\vartheta(s, \theta), & M_\theta &= D(s, \theta) [\kappa_\theta + \nu \kappa_s] - M_\vartheta(s, \theta), \\ M_{\theta s} &= M_{s\theta} = H = (1 - \nu) D(s, \theta) \tau; \end{aligned} \quad (4.12)$$

где је

$$C(s, \theta) = \frac{1}{(1 - \nu^2)} \int_{-h/2}^{h/2} E(t) dz, \quad D(s, \theta) = \frac{1}{(1 - \nu^2)} \int_{-h/2}^{h/2} E(t) (z - z_0)^2 dz; \quad (4.13)$$

$$T_{\vartheta}(s, \theta) = \frac{1}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} E(t) \alpha(\vartheta) \vartheta(s, \theta, z) dz.$$

$$M_{\vartheta}(s, \theta) = \frac{1}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} E(t) \alpha(\vartheta) \vartheta(s, \theta, z) (z - z_0) dz. \quad (4.14)$$

У обрасцима (4.13) и (4.14) координата z_0 одређује се из једнакости

$$\int_{-h/2}^{h/2} E(s, \theta, z) (z - z_0) dz = 0. \quad (4.15)$$

Једначине равнотеже елемента љуске исеченог пресецима дуж линија кривина имају облик:

$$\frac{\partial(T_s S)}{\partial s} + \frac{\partial S}{\partial \varphi} - T_{\theta} = 0, \quad \frac{\partial(SS)}{\partial s} + \frac{\partial T_{\theta}}{\partial \varphi} + S = 0, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial(N_s S)}{\partial s} + \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \varphi} + T_{\theta} \operatorname{tg} \beta + S(T_s \kappa_s + T_{\theta} \kappa_{\theta} + 2 S \tau) = 0.$$

Састављајући једначине момената тих сила у односу на тангенте линија $\eta = \theta$, $\xi = s$, добивамо:

$$S N_s = \frac{\partial(S M_s)}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial \varphi} - M_{\theta}, \quad S N_{\theta} = \frac{\partial(S H)}{\partial s} + \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \varphi} + H. \quad (4.17)$$

Трећа једначина момената у односу на осу z није задовољена, ако се узму једнакости $T_{\theta s} = T_{s \theta} = S$, $M_{\theta s} = M_{s \theta} = H$. Може се показати, да је грешка која се притом уноси истог реда, као и грешка осталих релација (4.11) и (4.12) теорије љуски.

Прве две једначине (4.16) не узимају у обзир пресечне силе. Као што је показао Х.М. Муштари [16], занемарење пресечних сила еквивалентно је занемарењу јединице у односу на n^2 .

Даље ћемо узимати у обзир промену карактеристика материјала само по дебљини. То значи, да температурно поље по дебљини има већи градијент него у друга два правца. Под тим условима крутости љуске на истезање (притисак) и савијање су константне величине

$$C = \text{const}, \quad D = \text{const}.$$

Једначине (4.16) биће идентички задовољене, ако се уведе функција силе f обрасцима:

$$T_s = \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial f}{\partial s}, \quad T_{\theta} = \frac{\partial^2 f}{\partial s^2},$$

$$S = -\frac{1}{s} \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial \varphi} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial f}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right). \quad (4.18)$$

Приметимо, да се силе T_s , T_{θ} , S изражавају обрасцима (4.18) помоћу функције f на исти начин (с тачношћу до на знак), као кривине κ_s , κ_{θ} ,

τ преко функције угиба w по (4.18). Очевидно је, да кривине треба да задовољавају релације, аналогне једначинама равнотеже (4.16):

$$\frac{\partial(s\kappa_\theta)}{\partial s} - \frac{\partial\tau}{\partial\varphi} - \kappa_s = 0, \quad \frac{\partial(s\tau)}{\partial s} - \frac{\partial\kappa_s}{\partial\varphi} + \tau = 0. \quad (4.19)$$

Те једначине представљају упрошћенију варијанту још два услова компатибилности.

Искористимо релације еластичности (4.12). Ако се узму у обзир релације (4.19), тада притом добивамо

$$N_s = D \frac{\partial(\kappa_s + \kappa_\theta)}{\partial s} - \frac{\partial M_\varphi}{\partial s}, \quad N_\theta = D \frac{1}{s} \frac{\partial(\kappa_s + \kappa_\theta)}{\partial\varphi} - \frac{1}{s} \frac{\partial M_\varphi}{\partial\varphi}. \quad (4.20)$$

С друге стране, по обрасцима (4.8) налазимо:

$$(\kappa_s + \kappa_\theta) = - \left[\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial s} \right) + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{A B^2} \frac{\partial A}{\partial\theta} \frac{\partial w}{\partial\theta} \right], \quad (4.21)$$

где је $A=1$, $B=s \cos \beta$.

Израз (4.21) може се написати у облику:

$$\kappa_s + \kappa_\theta = -\Delta w. \quad (4.22)$$

Овде се под Δ подразумева Лапласов оператор у криволинијским координатама, тј.

$$\Delta () = \frac{1}{A B} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial ()}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial ()}{\partial\theta} \right) \right]. \quad (4.23)$$

За посматрани проблем тај оператор за $A=1$, $B=s \cos \beta$, има облик:

$$\Delta () = \frac{1}{s} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial ()}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial ()}{\partial\varphi} \right) \right]. \quad (4.24)$$

Коначно налазимо следеће изразе за попречне силе:

$$N_s = -D \frac{\partial(\Delta w)}{\partial s} - \frac{\partial M_\varphi}{\partial s}, \quad N_\theta = -D \frac{1}{s} \frac{\partial(\Delta w)}{\partial\varphi} - \frac{1}{s} \frac{\partial M_\varphi}{\partial\varphi}, \quad (4.25)$$

слични изрази важе и у теорији плоча [10].

Унесимо изразе (4.25) у преостале везе (4.16), тада долазимо до диференцијалне једначине облика:

$$D s \Delta^2 w + s \Delta M_\varphi - T_\theta \operatorname{tg} \beta - s(T_s \kappa S + T_\theta \kappa_\theta + 2S \tau) = 0, \quad (4.26)$$

где је

$$\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + \frac{2}{s^2} \frac{\partial^4 w}{\partial s^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{s^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} - \frac{2}{s^3} \frac{\partial^3 w}{\partial s \partial \varphi^2} + \frac{4}{s^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + \frac{2}{s} \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} - \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{s^3} \frac{\partial w}{\partial s}.$$

Послужимо се условом компатибилности деформација (4.10); ако се у њега унесу изрази за деформације према обрасцима:

$$\epsilon_s = \frac{1}{C(1-\nu^2)} (T_s - \nu T_\theta) + \frac{1}{C(1+\nu)} T_\vartheta, \quad (4.27)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{C(1-\nu^2)} (T_\theta + \nu T_s) + \frac{1}{C(1+\nu)} T_\vartheta, \quad \gamma = \frac{2}{C(1-\nu)} S,$$

и T_s, T_θ, S изразе помоћу функције силе по (4.18), а промене кривина помоћу w по (4.8), тада долазимо до следеће диференцијалне једначине:

$$s \Delta^2 f + (1-\nu) \Delta T_\vartheta + C(1-\nu^2) \operatorname{tg} \beta \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = 0. \quad (4.28)$$

На тај начин, диференцијална једначина (4.28) и, сагласно конкретном проблему, гранични услови заједно ће дефинисати гранични проблем термоеластичности за конусну љуску.

§ 5. Сферна љуска

На средњој површи сферне љуске ма која мрежа ортогоналних линија поклапаће се са линијама главних кривина. При томе деформације и промене кривина средње површи имају облик:

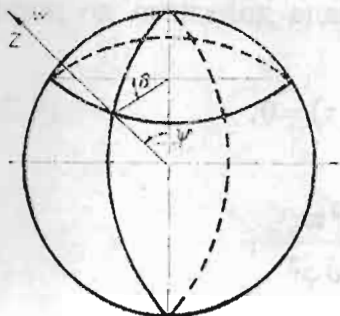
$$\epsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R}, \quad \epsilon_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R},$$

$$\omega = \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right); \quad \kappa_1 = -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) -$$

$$-\frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{w}{R^2}, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{w}{R^2},$$

$$\tau = -\frac{2}{AB} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right). \quad (5.1)$$

Узмимо географске координате: β — ширина, α — дужина (сл. 13).



Тада ће квадрат диференцијала лука бити а, следствено, и Ламеови параметри, једнаки респективно:

$$ds^2 = R^2 d\alpha^2 + R^2 \sin^2 \alpha d\beta^2; \quad A=R, \quad B=R \sin \alpha. \quad (5.2')$$

Означавајући са ψ угао дужине, а са β угао ширине, и, стављајући $\alpha = \psi$, добивамо

$$A=R, \quad B=R \sin \psi. \quad (5.2)$$

Уносећи Ламеове параметре A и B , у Гаусове услове

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) = -ABk^2, \quad (5.3)$$

где је $k = \frac{1}{R}$, констатујемо, да географске координате задовољавају тај услов.

Диференцијалне једначине равнотеже изражене у померањима опште теорије љуски, у датом случају имаће облик:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A} \left[\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - \frac{h^2 k^3}{12} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\Delta + 2) w \right] - (1 - \nu) \frac{1}{B} \frac{\partial \chi}{\partial \beta} + \\ & + (1 - \nu) \left(k^2 u - \frac{k}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{1 - \nu^2}{Eh} q_1 = 0, \\ & \frac{1}{B} \left[\frac{\partial \theta}{\partial \beta} - \frac{h^2 k^3}{12} \frac{\partial}{\partial \beta} (\Delta + 2) w \right] - (1 - \nu) \frac{1}{A} \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} + \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$+ (1 - \nu) \left(k^2 v - \frac{k}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{1 - \nu^2}{Eh} q_2 = 0,$$

$$\left[\frac{k^2 h^2}{12} \Delta - (1 + \nu) \right] k \theta - \frac{k^4 h^2}{12} [(\Delta + 1 - \nu)(\Delta + 2)] w + \frac{1 - \nu^2}{Eh} q_n = 0,$$

где је

$$\Delta (\) = \frac{1}{k^2 AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial (\)}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial (\)}{\partial \beta} \right) \right]; \quad (5.5)$$

$$\theta = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial (Bu)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (Av)}{\partial \beta} \right] + 2kw, \quad \chi = \frac{1}{2AB} \left[\frac{\partial (Bv)}{\partial \alpha} - \frac{\partial (Au)}{\partial \beta} \right]. \quad (5.6)$$

Диференцијалне једначине (5.4) и (5.6) чине потпуни систем од пет једначина по пет тражених функција: u, v, w, θ, χ . Од њих су w, θ, χ у односу на координатне линије инваријантне, а што се тиче u, v , оне имају различите вредности у разним координатним системима. В.З. Власов [13] је образовао диференцијалне једначине у инваријантном облику. Он је диференцирањем и неким линеарним трансформацијама искључио u, v , из диференцијалних једначина (5.4), (5.6), и као резултат добио:

$$\begin{aligned}
& (\Delta + 1 - \nu) \theta - \left[\left(\frac{k^2 h^2}{12} \Delta + 1 - \nu \right) (\Delta + 2) \right] k w = \\
& = \frac{1 - \nu^2}{E h k^2} \frac{1}{A B} \left[\frac{\partial (B q_1)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (A q_2)}{\partial \beta} \right], \\
& \left[\frac{k^2 h^2}{12} \Delta - (1 + \nu) \right] \theta - \frac{k^2 h^2}{12} [(\Delta + 1 - \nu) (\Delta + 2)] k w = - \frac{1 - \nu^2}{E h k} q_n, \\
& (\Delta + 2) \chi = \frac{1 + \nu}{E h k^2} \frac{1}{A B} \left[\frac{\partial (A q_1)}{\partial \beta} - \frac{\partial (B q_2)}{\partial \alpha} \right]. \tag{5.7}
\end{aligned}$$

Диференцијалне једначине система (5.7) су инваријантног облика, оне важе ма у ком систему координата. Од избора координата α , β зависи само Лапласов оператор (5.5).

Прве две диференцијалне једначине из (5.7) образују потпуни систем по две скаларне функције: нормалном померању w и запреминском ширењу θ ; трећа диференцијална једначина из (5.7), независно дефинише скаларну величину, — нормалну ротацију χ — угао обртања елемента средње површи. Искључујући θ из првих двеју диференцијалних једначина (5.7), добијамо потпуни систем од две основне диференцијалне једначине сферне љуске:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{k^2 h^2}{12 (1 - \nu^2)} (\Delta + 1)^2 + 1 \right] (\Delta + 2) w = \frac{1}{E h k^3} \left\{ (1 + \nu) \frac{1}{A B} \left[\frac{\partial (B q_1)}{\partial \alpha} + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\partial (A q_2)}{\partial \beta} \right] + (1 - \nu) k q_n - \Delta \left[\frac{k^2 h^2}{12 A B} \left(\frac{\partial (B q_1)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (A q_2)}{\partial \beta} \right) - k q_n \right] \right\}, \\
& (\Delta + 2) \chi = \frac{1 + \nu}{E h k^2} \frac{1}{A B} \left[\frac{\partial (A q_1)}{\partial \beta} - \frac{\partial (B q_2)}{\partial \alpha} \right]. \tag{5.8}
\end{aligned}$$

То су две независне диференцијалне једначине по двама непознатима w , χ .

На тај начин, моментна теорија сферне љуске представљена је двама независним диференцијалним једначинама (5.8). При чему, пошто се нађу w и χ , одмах се могу одредити све деформације и силе. Стварно, најпре одредимо u , v , — изразимо их преко w , χ . Искључујући из првих двеју диференцијалних једначина система (5.7) $\Delta \theta$ и стављајући

$$1 \pm \frac{h^2}{12 R^2} \approx 1 \text{ добијамо:}$$

$$\theta = - \frac{k^2 h^2}{12 (1 + \nu)} \Delta (\Delta + 2) k w - \frac{(1 - \nu) h}{12 E A B} \left[\frac{\partial (B q_1)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (A q_2)}{\partial \beta} \right] + \frac{1 - \nu}{E h k} q_n. \tag{5.9}$$

Затим из првих двеју диференцијалних једначина система (5.4) налазимо u , v :

$$k^2 u = - \frac{1}{1 - \nu} \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\theta - \frac{k^2 h^2}{12} \Delta w \right) + \frac{k}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial \chi}{\partial \beta} - \frac{1 + \nu}{E h} q_1, \tag{5.10}$$

$$k^2 v = -\frac{1}{1-\nu} \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\theta - \frac{k^2 h^2}{12} \Delta w \right) + \frac{k}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} - \frac{1+\nu}{Eh} q_2.$$

Сада знајући померања u , v , w , можемо наћи свих шест компонената деформација према обрасцима (5.1), а даље наћи силе и моменте по формулама:

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2), \quad T_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1), \quad S = T_{12} = -T_{21} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \omega;$$

$$M_1 = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [\chi_1 + \nu \chi_2 + k(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2)],$$

$$M_2 = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [\chi_2 + \nu \chi_1 + k(\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1)], \quad (5.11)$$

$$M_{12} = M_{21} = \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} (\tau + k\omega).$$

Формуле за одређивање пресечних сила могу се добити из диференцијалних једначина равнотеже. Општи систем диференцијалних једначина равнотеже сферне љуске има облик:

$$\frac{\partial(B T_1)}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_2 + \frac{\partial(A S)}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} S + A B k N_1 + A B q_1 = 0,$$

$$\frac{\partial(A T_2)}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} T_1 + \frac{\partial(B S)}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} S + A B k N_2 + A B q_2 = 0,$$

$$\frac{\partial(B M_{12})}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{12} - \frac{\partial(A M_2)}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 - A B N_2 = 0, \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial(A M_{12})}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{12} - \frac{\partial(B M_1)}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 - A B N_1 = 0,$$

$$-k(T_1 + T_2) + \frac{1}{A B} \left[\frac{\partial(B N_1)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(A N_2)}{\partial \beta} \right] + q_n = 0,$$

који се састоји од пет једначина. При томе из 3-ће и 4-те једначине тога система налазимо:

$$N_1 = \frac{1}{A B} \left[\frac{\partial(A M_{12})}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{12} - \frac{\partial(B M_1)}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 \right], \quad (5.13)$$

$$N_2 = \frac{1}{A B} \left[\frac{\partial(B M_{12})}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{12} - \frac{\partial(A M_2)}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 \right].$$

Дакле све је одређено. Закључујемо, да, при решавању граничног проблема, функције w , χ треба да буду изабране тако, да задовољавају диференцијалне једначине (5.8) и граничне услове.

Опште интеграле диференцијалних једначина система (5.8) представимо у облику:

$$w = w_0 + w_1 + w_2 + w_p, \quad \chi = \chi_0 + \chi_p, \quad (5.14)$$

где су w_p и χ_p — партикуларна решења нехомогених једначина истог система, а функције w_0, w_1, w_2, χ_0 — општа решења хомогених диференцијалних једначина:

$$(\Delta + 2)w_0 = 0, \quad (\Delta + 2)\chi_0 = 0; \quad (5.15)$$

$$(\Delta + \lambda_1)w_1 = 0, \quad (\Delta + \lambda_2)w_2 = 0; \quad (5.16)$$

где је

$$\lambda_1 = 1 + i \frac{2R}{h} \sqrt{3(1-\nu^2)}, \quad \lambda_2 = 1 - i \frac{2R}{h} \sqrt{3(1-\nu^2)}, \quad (5.17)$$

тј. корени карактеристичне једначине

$$(1 - \lambda)^2 + \frac{12(1 - \nu^2)R^2}{h^2} = 0, \quad (5.18)$$

која се добија из хомогене диференцијалне једначине

$$\left[(\Delta + 1)^2 + \frac{12(1 - \nu^2)R^2}{h^2} \right] w = 0, \quad (5.19)$$

ако се решење те једначине тражи у облику

$$\Delta w + \lambda w = 0. \quad (5.20)$$

Диференцијалне једначине (5.15) и (5.16), заједно са обрасцима (5.17), су основне диференцијалне једначине које дају решење проблема сферне љуске, свака од њих је другог реда и у инваријантном облику.

У географским координатама генералисани Лапласов оператор има облик:

$$\Delta () = \frac{1}{\sin \psi} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \frac{\partial ()}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial^2 ()}{\partial \beta^2} \right]. \quad (5.21)$$

Уносећи Лапласов оператор (5.21) у једначине (5.15) и (5.16) добијамо систем диференцијалних једначина у следећем облику:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \psi} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \frac{\partial w_0}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \beta^2} \right] + 2 w_0 &= 0, \\ \frac{1}{\sin \psi} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \frac{\partial w_1}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \beta^2} \right] + \lambda_1 w_1 &= 0, \\ \frac{1}{\sin \psi} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \frac{\partial w_2}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial^2 w_2}{\partial \beta^2} \right] + \lambda_2 w_2 &= 0, \\ \frac{1}{\sin \psi} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \frac{\partial \chi_0}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial \beta^2} \right] + 2 \chi_0 &= 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Обрасци (5.9), (5.10) и (5.1) у географским координатама, за случај хомогеног проблема ($q_1=q_2=q_n=0$) постају:

$$\begin{aligned} \theta &= -\frac{h^2}{12(1+\nu)R^3} \Delta(\Delta+2)w, \\ u &= -\frac{R}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\theta - \frac{h^2}{12R^3} \Delta w \right) + \frac{\partial w}{\partial \psi} + \frac{R}{\sin \psi} \frac{\partial \chi}{\partial \beta}, \\ v &= -\frac{R}{1-\nu} \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\theta - \frac{h^2}{12R^3} \Delta w \right) + \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial w}{\partial \beta} - R \frac{\partial \chi}{\partial \psi}, \\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \psi} + w \right), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial v}{\partial \beta} + u \operatorname{ctg} \psi + w \right), \\ \omega &= \frac{1}{R} \left[\frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \sin \psi \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{v}{\sin \psi} \right) \right], \quad \kappa_1 = -\frac{1}{R^2} \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} \right); \\ \kappa_2 &= -\frac{1}{R^2} \left(w - \frac{1}{\sin^2 \psi} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \operatorname{ctg} \psi \frac{\partial w}{\partial \psi} \right), \\ \tau &= -\frac{1}{R^2 \sin \psi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \psi \partial \beta} - \operatorname{ctg} \psi \frac{\partial w}{\partial \beta} \right). \end{aligned} \quad (5.23)$$

За случај осносиметричних проблема померања, деформације, силе не зависе од угла β па, дакле, парцијалне диференцијалне једначине (5.22) прелазе у обичне диференцијалне једначине облика:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \psi} \frac{d}{d\psi} \left[\sin \psi \frac{dw_0}{d\psi} \right] + 2w_0 &= 0, & \frac{1}{\sin \psi} \frac{d}{d\psi} \left[\sin \psi \frac{dw_1}{d\psi} \right] + \lambda_1 w_1 &= 0, \\ \frac{1}{\sin \psi} \frac{d}{d\psi} \left[\sin \psi \frac{dw_2}{d\psi} \right] + \lambda_2 w_2 &= 0, & \frac{1}{\sin \psi} \frac{d}{d\psi} \left[\sin \psi \frac{d\chi_0}{d\psi} \right] + 2\chi_0 &= 0. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Обрасци (5.23), при томе, распадају се на две следеће групе:

$$\begin{aligned} \theta &= -\frac{h^2}{12(1+\nu)R^3} \frac{d^2}{d\psi^2} \left[\frac{d^2}{d\psi^2} + 2 \right] w, \\ u &= -\frac{R}{1-\nu} \frac{d}{d\psi} \left[\theta - \frac{h^2}{12R^3} \frac{d^2 w}{d\psi^2} \right] + \frac{dw}{d\psi}, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{R} \left(\frac{du}{d\psi} + w \right), \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{R} (u \operatorname{ctg} \psi + w), \quad \kappa_1 = -\frac{1}{R^2} \left(w + \frac{d^2 w}{d\psi^2} \right), \\ \kappa_2 &= -\frac{1}{R^2} \left(w - \operatorname{ctg} \psi \frac{dw}{d\psi} \right); \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$v = -R \frac{\partial \chi}{\partial \psi}, \quad \omega = \frac{\sin \psi}{R} \frac{d}{d\psi} \left(\frac{v}{\sin \psi} \right) = -\sin \psi \frac{d}{d\psi} \left(\frac{1}{\sin \psi} \frac{d\chi}{d\psi} \right). \quad (5.26)$$

Прве три једначине система (5.24), при датим граничним условима дефинишу нормално померање $w = w_0 + w_1 + w_2$ код којих се према (5.25) јављају само дилатације ϵ_1, ϵ_2 и деформације савијања κ_1, κ_2 и њима одговарајуће силе T_1, T_2 и моменти M_1, M_2 . То ће бити у случају осносиметричног оптерећења љуске у горњем полу $\psi = 0$ концентрисаном вертикалном силом или силама и моментима равномерно расподељеним по каквом биле паралелу. Четврта једначина из (5.24) и формуле (5.26) односе се на други осносиметрични проблем, — у љуски се јављају само деформације клизања и њима одговарајуће силе, равномерно расподељене дуж ма ког паралела $\psi = \text{const}$ (не зависе од угла β), — то је случај торзије са два једнака концентрисана момента) (у половима $\psi = 0$ и $\psi = \pi$).

Овде се на основу диференцијалних једначина опште теорије љуски, произвољног облика, образују диференцијалне једначине теорије плитких љуски, а затим, као њихов посебан случај, дају диференцијалне једначине равних плоча. Осим тога наводе се примери прорачуна плоча при еластичним и еластично-пластичним деформацијама, а такође се дефинише носивост плоча.

§ 1. Плитке љуске

Диференцијалне једначине теорије плитких љуски могу се добити из диференцијалних једначина опште теорије љуски при допунској претпоставци о томе, да њихова средња површ поседује метрику еуклидске геометрије; с обзиром на то прихвата се закон конјугованости тангентних сила $T_{12}=T_{21}=S$ и торзионих момената $M_{12}=M_{21}$. Као резултат, полазећи од диференцијалних једначина опште теорије љуски, добивамо, за плитке љуске следећи систем диференцијалних једначина равнотеже:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(BT_1)}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha} T_2 + \frac{\partial(AS)}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta} S + AB q_1 &= 0, \\ \frac{\partial(AT_2)}{\partial\beta} - \frac{\partial A}{\partial\beta} T_1 + \frac{\partial(BS)}{\partial\alpha} + \frac{\partial B}{\partial\alpha} S + AB q_2 &= 0, \\ \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(BN_1)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(AN_2)}{\partial\beta} \right] - \frac{T_1}{R_1} - \frac{T_2}{R_2} + q_n &= 0, \\ \frac{\partial(BM_{12})}{\partial\alpha} + \frac{\partial B}{\partial\alpha} M_{12} - \frac{\partial(AM_2)}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta} M_1 - ABN_2 &= 0, \\ \frac{\partial(AM_{12})}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta} M_{12} - \frac{\partial(BM_1)}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha} M_2 - ABN_1 &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

При чему, прве две диференцијалне једначине система (1.1) имају чисто безмоментни карактер; величине $\frac{N_1}{R_1}$, $\frac{N_2}{R_2}$, које постају од момената, у

тим једначинама су мале у поређењу са осталим члановима и зато се одбацују. Осим тога у (1.1) искоришћен је закон конјугованости тангентних сила и торзионих момената, и хипотеза о еуклидској метрици средње површи плитких љуски, која доводи до тога да се Гаусов услов

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) = -ABk, \quad (1.2)$$

где је $k = k_1 k_2 = \frac{1}{R_1 R_2}$, замењује простијим

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) = 0, \quad (1.3)$$

независно од вредности Гаусове кривине k .

Сада уведемо функцију напона, помоћу релација:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \\ T_2 &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$S = -\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right),$$

и приметимо, да, ако се у прве две једначине система (1.1) стави $q_1 = q_2 = 0$, и у њих унесу релације (1.4) узимањем Гаусовог услова у облику (1.3), биће те једначине идентички задовољене.

Испишимо обрасце за кривине и торзије:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta}, \\ \kappa_2 &= -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \\ \tau &= -\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Упоређујући релације (1.4) и (1.5) закључујемо, да изрази за κ_1 , κ_2 , τ , треба такође да задовољавају прве две једначине система (1.1), које у том случају добивају облик:

$$\frac{\partial(B\kappa_2)}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \kappa_1 - \frac{\partial(A\tau)}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} \tau = 0, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial(A\kappa_1)}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} \kappa_2 - \frac{\partial(B\tau)}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \tau = 0;$$

лако је уочити, да те релације представљају прва два од три услова непрекидности.

Претпостављајући да су функције φ и w познате, можемо према обрасцима

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2), \quad T_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1), \quad S = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \omega; \quad (1.7)$$

$$M_1 = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_1 + \nu \kappa_2), \quad M_2 = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_2 + \nu \kappa_1),$$

$$M_{12} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \tau; \quad (1.8)$$

и једначинама:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_2},$$

$$\omega = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right); \quad (1.9)$$

одредити тангентне силе, моменте, деформације и померања плитких љуски. Што се тиче пресечних сила N_1 , N_2 , оне се налазе из последњих двеју диференцијалних једначина система (1.1),

$$N_1 = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial (A M_{12})}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{12} - \frac{\partial (B M_1)}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 \right],$$

$$N_2 = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial (B M_{12})}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{12} - \frac{\partial (A M_2)}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 \right]. \quad (1.10)$$

Те једначине могу се написати у веома компактном облику. Стварно уносећи у њих изразе M_1 , M_2 , M_{12} , према обрасцу (1.8) и користећи диференцијалну једначину (1.6) имамо:

$$N_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\kappa_1 + \kappa_2), \quad N_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} (\kappa_1 + \kappa_2). \quad (1.11)$$

Ипак, на основу релација (1.5) израз $-(\kappa_1 + \kappa_2)$ се може представити у облику

$$-(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} +$$

$$+ \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} = \Delta w. \quad (1.12)$$

Сада унесимо израз (1.12) у релације (1.11) па ћемо као резултат добити компактне формуле за пресечне силе:

$$N_1 = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\Delta w), \quad N_2 = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} (\Delta w). \quad (1.13)$$

На тај начин, знајући функције φ , w , можемо по обрасцима (1.4), (1.5), (1.8), (1.13) одредити све силе и моменте плитке љуске. Те формуле важе ма у ком координатном систему и односе се на љуске произвољног облика. Што се тиче функција φ и w , оне су засад произвољне. При томе су из система (1.1) идентички задовољене четири следеће диференцијалне једначине: 1–2, 4–5 при коришћењу релација (1.4) и услова да је $q_1 = q_2 = 0$, а осим тога узимају се у обзир и релације (1.5) и (1.8). Дакле, остаје још незадовољена трећа диференцијална једначина система (1.1), која се с обзиром на формуле (1.13) своди на

$$\frac{T_1}{R_1} - \frac{T_2}{R_2} - \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 w + q_n = 0. \quad (1.14)$$

Приметимо такође, да се из система три једначине непрекидности средње површи плитке љуске са везама (1.5) идентички задовољене само прве две, управо (1.6), а остаје незадовољена трећа једначина непрекидности, која (за $k=0$) има облик:

$$\Delta \theta - \frac{1-\nu}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{AR_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{BR_1} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \right] = 0. \quad (1.15)$$

Диференцијалне једначине (1.14) и (1.15) намећу услове за функције φ и w . Ради тога, посебно изразимо θ помоћу φ . По обрасцу (1.7) је

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{1-\nu}{Eh} (T_1 + T_2), \quad (1.16)$$

с друге стране је на основу (1.4):

$$T_1 + T_2 = \Delta \varphi, \quad (1.17)$$

па, дакле,

$$\theta = \frac{1-\nu}{Eh} \Delta \varphi. \quad (1.18)$$

Аналогно, величина $\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2}$ може се изразити помоћу φ ; ако изоста-

вимо неопходна рачунања, налазимо:

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{AR_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{BR_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right) \right] = \Delta_k \varphi. \quad (1.19)$$

Уносећи везе (1.18) и (1.19) у диференцијалне једначине (1.14) и (1.15) после неких простих трансформација, коначно добивамо:

$$\frac{1}{Eh} \Delta^2 \varphi - \Delta_k w = 0, \quad \Delta_k \varphi + \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 w - q_n = 0. \quad (1.20)$$

На тај начин, општи проблем равнотеже плитке љуске своди се на систем двеју узајамно симетрично формираних парцијалних диференцијалних једначина четвртог реда (1.20), по двама скаларним функцијама: φ — функција напона, која према обрасцима (1.4) дефинише силе T_1 , T_2 , S ; друга функција w — функција померања, која са своје стране према

обрасцима (1.5) дефинише деформације κ_1, κ_2, τ па, према томе, сагласно релацијама (1.8) и (1.13) дефинише моменте и пресечне силе $M_1, M_2, M_{12}, N_1, N_2$.

Диференцијалне једначине (1.20) могу се интерпретирати тако да: 1-ва једначина има геометријски смисао и представља услов непрекидности средње површи глатке љуске; 2-га једначина има физички смисао и представља услов равнотеже у правцу нормале на средњу површ глатке љуске; При томе су чланови који садрже двоструке Лапласове оперatore — главни чланови; чланови са оператором мешовитог типа $\Delta_k ()$ — су споредни, они су идентични — што је у сагласности са основним теоремама теорије еластичности (међу којима и с Бетијевом (Betti) теоремом о узајамности), одакле следи двојакост диференцијалних једначина (1.20).

§ 2. Равне плоче

Из система диференцијалних једначина (1.20) за плитке љуске граничним прелазом, лако се добивају диференцијалне једначине за раван проблем теорије еластичности и диференцијална једначина савијања плоче. Уствари, како су обе кривине $k_1=k_2=0$, дакле $\Delta_k ()=0$, тј. споредни чланови у (1.20) нестају, тај систем се тада распада на две независне диференцијалне једначине:

$$\Delta^2 \varphi = 0 \quad (2.1)$$

$$\Delta^2 w = \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} q_n. \quad (2.2)$$

При чему једначина (2.1) представља познату бихармонијску Мексвел-Еријеву (Maxwell-Airy) једначину, за равно напонско стање, равнoг проблема теорије еластичности; за њега важе формуле (1.4), које у Декартовим координатама, за $\alpha=x, \beta=y, A=B=1$ постају:

$$T_1 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad T_2 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad S = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (2.3)$$

и $\Delta ()$ представља Лапласов оператор у Декартовим координатама

$$\Delta () = \frac{\partial^2 ()}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 ()}{\partial y^2} \quad (2.4)$$

па је, према томе,

$$\Delta^2 \varphi = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (2.5)$$

За случај раванских поларних координата: $\alpha=\rho, \beta=\beta$, познато је да је квадрат дужине лука, —

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\beta^2 \quad (2.6)$$

па, Ламеови параметри имају вредности:

$$A=1, \quad B=\rho; \quad (2.7)$$

тада уносењем у обзир систем релација (1.4) добивамо респективно:

$$T_1 = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}, \quad T_2 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2}, \quad S = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho \partial \beta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right), \quad (2.8)$$

при чему је

$$\Delta \varphi = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} \right]. \quad (2.9)$$

Уносећи релацију (2.9) у диференцијалну једначину (2.1), добивамо бихармонијску једначину раванског проблема теорије еластичности у поларним координатама.

Диференцијална једначина (2.2) представља познату Софи Жермен-Лагранжеву (Sophie Saint Germain-Lagrange) једначину за савијање плоча. При томе обрасци (1.5), 1.8 и (1.13) дозвољавају (за $k_1 = k_2 = 0$) да се одреде деформације, моменти, попречне силе помоћу угиба w . Тако на пример, у случају Декартових координата:

релације за промену кривина и торзије су

$$\kappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \tau = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad (2.10)$$

релације за моменте су

$$M_1 = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_2 = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$M_{12} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad (2.11)$$

релације за попречне силе су

$$N_1 = -D \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w), \quad N_2 = -D \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w). \quad (2.12)$$

Што се тиче саме диференцијалне једначине, она сада добива следећи облик —

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q_n}{D}, \quad (2.13)$$

где је

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (2.14)$$

У случају поларних координата, респективно имамо:

$$\kappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}, \quad \kappa_2 = -\left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} \right), \quad \tau = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \beta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right), \quad (2.15)$$

$$M_1 = D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \nu \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) \right],$$

$$M_2 = D \left[\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \right], \quad (2.16)$$

$$M_{12} = -D(1-\nu) \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \beta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right);$$

$$N_1 = D \frac{\partial}{\partial \rho} (\Delta w), \quad N_2 = D \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \beta} (\Delta w) \quad (2.17)$$

и, на крају, налазимо диференцијалну једначину савијања у поларним координатама, ако се узме у обзир да је

$$\Delta w = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right]. \quad (2.18)$$

На тај начин, плоче су, са гледишта опште теорије љуски посебан случај плитких љуски. Приметимо да кривине k_1, k_2 битно утичу на унутрашње силе љуске услед чега се плитка љуска, као и благо искривљена плоча по свом понашању начелно разликују од равне плоче.

Разјаснимо питање које се односи на граничне услове за плоче. Како је већ раније напоменуто код љуски, уопште говорећи, на свакој граници треба да су испуњена по четири услова. Ипак, како се проблем о напонима у плочи распада на два независна проблема (равно напонско стање и савијање), тада се и гранични услови распадају на две независне групе. Због тога се савијање плоче дефинише свега са два услова, на свакој од њених граница. Наведимо неке од граничних услова за плоче:

1) ивица плоче је укљештена — ($y = 0$ — се поклапа са укљешћеном ивицом)

$$w \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0; \quad (2.19)$$

2) ивица плоче слободно ослоњена — ($y=0$ — слободно ослоњена)

$$w \Big|_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{y=0} = 0; \quad (2.20)$$

3) ивица плоче слободна — ($x=0$ — слободна). Уместо, како изгледа

$$\text{услова } M_x \Big|_{x=0} = M_{xy} \Big|_{x=0} = N_x \Big|_{x=0} = 0, \text{ треба да буду задовољени}$$

услови:

$$M_x \Big|_{x=0} = 0 \text{ или што је исто } \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=0} = 0; \quad (2.21)$$

$$\text{и } \left(N_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \Big|_{x=0} = 0 \text{ или што је исто } \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2(1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \Big|_{x=0} = 0.$$

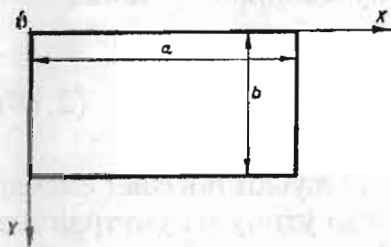
Испишимо граничне услове за плоче са криволинијском контуром, респективно:

$$1) w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0; \quad 2) w = M_n = 0; \quad 3) M_n = N_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial s} = 0.$$

Станин или гранични услови и диференцијална једначина савијања плоче могу се добити из Лагранжевог принципа могућих померања и израза за деформациону енергију савијене плоче. Тим методом они су најпре и изведени (Kirchhoff 1850. године).

§ 3. Примери прорачуна плоча при еластичним деформацијама

Размотримо најпростије примере прорачуна еластичних, праволинијских и правоугаоних плоча. Навођење тих примера служи као илустрација метода решавања проблема савијања плоча.



сл. 14

Најпре изведимо решење за по целој контури слободно ослоњену правоугаону плочу, која се налази под оптерећењем синусоидно распоређеним. Дакле, нека се плоча (сл. 14) налази под оптерећењем, распоређеним по закону:

$$q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (3.1)$$

где је q_0 — интензитет оптерећења у центру плоче.

Диференцијална једначина савијања плоче биће:

$$\Delta^2 w = \frac{q_0}{D} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (3.2)$$

Гранични услови се могу изразити на следећи начин:

$$\text{за } x=0, \quad x=a, \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad (3.3)$$

$$\text{за } y=0, \quad y=b, \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Ти гранични услови биће задовољени, ако решење тражимо у облику:

$$w = C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (3.4)$$

где је C — неодређена константа, која треба да буде изабрана тако, да буде задовољена диференцијална једначина (3.2). Уносећи (3.4) у (3.2), за константу C добивамо следећу релацију

$$\pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 C = \frac{q_0}{D},$$

одакле налазимо C , а затим уносећи је у (3.4) као резултат добијамо решење диференцијалне једначине (3.2) које задовољава граничне услове (3.3):

$$w = \frac{q_0}{D \pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (3.5)$$

а то и јесте једначина савијене плоче. Сада не представља тешкоћу налажење момената и попречних сила, ради чега је неопходно коришћење познатих образаца (види § 2, исте главе), тј. добијамо:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{q_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \nu \frac{1}{b^2} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \\ M_2 &= \frac{q_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left(\frac{1}{b^2} + \nu \frac{1}{a^2} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \\ M_{12} &= \frac{q_0 (1 - \nu)}{\pi ab \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$N_1 = \frac{q_0 \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}}{\pi \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 a}, \quad N_2 = \frac{q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}}{\pi \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 b}.$$

У центру плоче (за $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$) како се то и види из релација (3.5) и (3.6) добијамо

$$w_{\max} = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}; \quad (3.7)$$

и

$$(M_1)_{\max} = \frac{q_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \nu \frac{1}{b^2} \right), \quad (3.8)$$

$$(M_2)_{\max} = \frac{q_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left(\frac{1}{b^2} + \nu \frac{1}{a^2} \right).$$

За случај квадратне плоче ($a=b$) из релација (3.7) и (3.8) следи

$$w_{\max} = \frac{q_0 a^4}{4 \pi^4 D}; \quad (3.9)$$

и

$$(M_1)_{\max} = (M_2)_{\max} = \frac{1+\nu}{4\pi^2} q_0 a^2. \quad (3.10)$$

Максимални угиб и максимални напон савијања биће у центру плоче. Ако је $a > b$, то је $M_2 > M_1$ и, дакле,

$$(\sigma_2)_{\max} = \frac{6(M_2)_{\max}}{h^2} = \frac{6q_0}{\pi^2 h^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \nu \frac{1}{a^2}\right). \quad (3.11)$$

Максимални смичући напон биће на средини дуже стране плоче.

Претпостављајући да је укупна пресечна сила $N_2 = \frac{\partial M_{12}}{\partial x}$ расподељена по дебљини плоче по параболичном закону, налазимо:

$$(\sigma_{12})_{\max} = \frac{3q_0}{2\pi b h \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{2-\nu}{a^2}\right). \quad (3.12)$$

Ако је оптерећење задато у облику:

$$q = q_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (3.13)$$

где су m, n — цели бројеви, тада сличним поступком налазимо:

$$w = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (3.14)$$

и могу дакле, да се одреде и све друге величине.

Сада размотримо решење за слободно ослоњену правоугаону плочу, помоћу двоструких тригонометријских редова. Нека је оптерећење на плочу дато у облику:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (3.15)$$

Коефицијенти a_{mn} , — налазе се по познатом правилу одређивања коефицијената Фуријеових редова, дакле,

$$a_{m'n'} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q \sin \frac{m'\pi x}{a} \sin \frac{n'\pi y}{b} dx dy. \quad (3.16)$$

Према томе, решење коначно има облик:

$$w = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (3.17)$$

При томе, ако је оптерећење које делује на плочу распоређено по њој једнолико, тј. $q=q_0=\text{const}$ тада је на основу (3.16):

$$a_{mn} = \frac{4 q_0}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} dx dy = \frac{16 q_0}{\pi^2 mn}, \quad (3.18)$$

где су m и n — непарни цели бројеви. Уносећи (3.18) у (3.17), налазимо:

$$w = \frac{16 q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}. \quad (3.19)$$

За квадратну плочу (за $a=b$), максимални угиб је

$$w_{\max} = \frac{4 q_0 a^4}{\pi^6 D}. \quad (3.20)$$

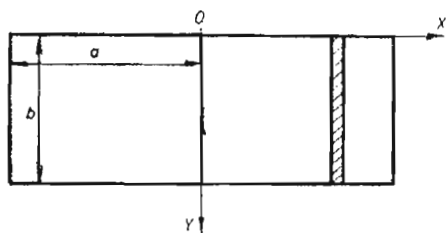
Ако је $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$ тада је максимални угиб

$$w_{\max} = \frac{16 q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{m+n}{2}} \frac{1}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}, \quad (3.21)$$

при чему тај ред брзо конвергира. Знајући w (угибе), није тешко наћи све друге величине, по познатим обрасцима.

На крају наведимо пример решења за слободно ослоњену плочу (правоугаону), помоћу једноструких редова. Представимо решење у облику

$$w = w_1 + w_2. \quad (3.22)$$



сл. 15

Овде је w_1 — решење за неку траку паралелну ужим странама правоугаоника (види сл. 15); при чему се оно узима из отпорности материјала (греда на два ослоња, под једнолико распоређеним оптерећењем $q=\text{const}$.)

$$w_1 = \frac{b^4 q}{24 D} \left(\frac{y}{b} - 2 \frac{y^3}{b^3} + \frac{y^4}{b^4} \right), \quad (3.23)$$

које задовољава нехомогену диференцијалну једначину савијања а за $y=0$, $y=b$ и граничне услове. Остаје да се још прикључи решење хомогене диференцијалне једначине посматраног проблема. Њега тражимо у облику:

$$w_2 = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \sin \frac{n\pi y}{b}; \quad (3.24)$$

чланови тога реда су партикуларна решења бихармонијске једначине:

$$\Delta^2 w = 0, \quad (3.25)$$

ако су $X_n(x)$ — решења диференцијалне једначине

$$X_n^{IV} - \frac{2\pi^2 n^2}{b^2} X_n'' + \frac{\pi^4 n^4}{b^4} X_n = 0. \quad (3.26)$$

Решење последње једначине може се написати у облику:

$$X_n(x) = a_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} + b_n \frac{n\pi x}{b} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} + c_n \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} + d_n \frac{n\pi x}{b} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b}. \quad (3.27)$$

Оно задовољава услове слободног ослањања за $y=0$ и $y=b$.

Интеграционе константе a_n , b_n , c_n , d_n , одређују се тако, да буду задовољени услови на ужим странама.

Ако је и овде слободно ослањање, граничне услове можемо написати у облику:

$$w = \Delta w = 0, \quad (3.28)$$

а затим разложивши w_2 у Фуријеов ред:

$$w_2 = \frac{4qb^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (3.29)$$

налазимо

$$a_n = -2 \frac{2 + \frac{n\pi a}{2b} \operatorname{th} \frac{n\pi a}{2b}}{n^5 \pi^5 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}}, \quad b_n = \frac{2}{n^5 \pi^5 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}}. \quad (3.30)$$

Сматрајући, да је савијена средња површ симетрична у односу на осу y , дакле, у решењу (3.27) неопходно је задржати само парне функције од x , тј. неопходно је ставити:

$$c_n = d_n = 0. \quad (3.31)$$

После израчунавања и неких трансформација, налазимо:

$$w = \frac{4qb^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left(1 - \frac{2 \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} + \alpha \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} - \operatorname{ch} \alpha \frac{n\pi x}{b} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b}}{1 + \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}} \right) \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (3.32)$$

где је $\alpha = \frac{n\pi a}{2b}$.

Угиб у центру правоугаоне плоче (за $x=0$, $y=\frac{b}{2}$) биће:

$$w_{\max} = \frac{qb^4}{D} \left[\frac{5}{384} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} a^n \right]. \quad (3.33)$$

Тај ред врло добро конвергира.

§ 4. Савијање плоче при еласто-пластичним деформацијама

Проучавање еласто-пластичних деформација плоча ослања се осим Кирхофових хипотеза и на претпоставку о томе, да је материјал плоче нестишљив (тј. Пуасонов коефицијент се узима једнак $\nu = \frac{1}{2}$).

Нека на плочу дејствује површински расподељено оптерећење интензитета q . Са порастом q материјал плоче у најнапрегнутијим деловима излази изван границе еластичности, а затим и по целој дебљини плоче. При чему средњу раван плоче пре деформације узимамо да се поклапа са равни координата x , y ; посматрамо генералисано равно напонско стање.

Испишимо формуле за моменте и пресечне силе:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz; \quad (4.1)$$

и

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz. \quad (4.2)$$

Диференцијалне једначине равнотеже елемента плоче:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - N_x = 0, \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - N_y = 0; \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + q = 0. \quad (4.4)$$

Ако се једначине (4.3) напишу у експлицитном облику по N_x , N_y , а затим их унесемо у (4.4), тада добивамо диференцијалну једначину савијања плоче помоћу момената:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0. \quad (4.5)$$

Компоненте напона у еластичном слоју, сагласно Хуковом закону имаће облик:

$$\sigma_x = \frac{2G}{1-\nu} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{2G}{1-\nu} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = 2G \gamma_{xy}; \quad (4.6)$$

при чему ће интензитети смичућих напона и клизања, респективно, бити:

$$\tau_i = \sqrt{\frac{1}{3} (\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2) + \tau_{xy}^2} \quad (4.7)$$

и

$$\gamma_i = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \gamma_{xy}^2}. \quad (4.8)$$

За анализу погодно је увести ознаке:

$$\sin \mu = \frac{\sqrt{3} (1-\nu)}{2 \sqrt{1-\nu + \nu^2}}, \quad \cos \mu = \frac{1+\nu}{2 \sqrt{1-\nu + \nu^2}},$$

тада се интензитет клизања може написати у облику:

$$\bar{\gamma}_i = \sqrt{\frac{\varepsilon_x^2 + 2 \cos 2\mu \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2}{4 \sin^2 \mu} + \gamma_{xy}^2}, \quad (4.9)$$

при чему за $\nu = \frac{1}{2}$, параметар μ — има вредност $\mu = \frac{\pi}{6}$ па, дакле — $\bar{\gamma}_i =$

$= \gamma_i$. Ако се за Пуасонов коефицијент стави $\nu = \frac{1}{2}$, узме Мизесов услов

пластичности, тј. $\tau_i = k = \text{const}$ и претпостави да је

$$\sigma_z = 0, \quad \varepsilon = \frac{1}{3} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = 0, \quad \text{биће}$$

$$\sigma_x = \frac{2k}{\gamma_i} \left(\varepsilon_x + \frac{1}{2} \varepsilon_y \right), \quad \sigma_y = \frac{2k}{\gamma_i} \left(\varepsilon_y + \frac{1}{2} \varepsilon_x \right), \quad \tau_{xy} = \frac{k}{\gamma_i} \gamma_{xy}; \quad (4.10)$$

и

$$\varepsilon_x = z \kappa_1, \quad \varepsilon_y = z \kappa_2, \quad \gamma_{xy} = z \kappa_3, \quad (4.11)$$

где је

$$\kappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_3 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (4.12)$$

при томе треба да буду испуњени услови:

$$\frac{\partial \kappa_3}{\partial x} = \frac{\partial \kappa_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial \kappa_3}{\partial y} = \frac{\partial \kappa_2}{\partial x}. \quad (4.13)$$

Уведимо још параметре:

$$A_0 = \sqrt{\frac{\kappa_1^2 + 2 \cos 2\mu \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2}{4 \sin^2 \mu} + \kappa_3^2} \quad (4.14)$$

и

$$A = \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2}, \quad (A_0, A > 0) \quad (4.15)$$

помоћу којих се могу написати следећи обрасци

$$\bar{\gamma}_i = |z| A_0, \quad \gamma_i = |z| A. \quad (4.16)$$

Сада унесимо обрасце (4.11) у релације (4.6) и као резултат добијамо обрасце за компонентне напоне, изражене помоћу промена кривина:

$$\sigma_x = \frac{2Gz}{1-\nu} (\kappa_1 + \nu \kappa_2), \quad \sigma_y = \frac{2Gz}{1-\nu} (\kappa_2 + \nu \kappa_1), \quad \tau_{xy} = 2Gz \kappa_3, \quad (4.17)$$

а затим унесимо формуле (4.11) у релације (4.10), после чега долазимо до израза за компонентне напоне за пластично стање (узимањем услова пластичности у облику Мизеса), дакле,

$$\sigma_x = \text{sign } z \frac{2k}{A} \left(\kappa_1 + \frac{1}{2} \kappa_2 \right), \quad \sigma_y = \text{sign } z \frac{2k}{A} \left(\kappa_2 + \frac{1}{2} \kappa_1 \right), \quad \tau_{xy} = \text{sign } \frac{k}{A} \kappa_3 \quad (4.18)$$

Овде симбол $\text{sign } z = \frac{z}{\sqrt{z^2}} = \frac{z}{|z|}$ означава, да изразу треба обавезно приписати знак z , тј. узети 1 са знаком z .

Строго говорећи, трећа разликовати три вида напонских стања:

1) еластично, 2) еласто-пластично, 3) пластично.

1) **У еластичном стању:** $\tau_i < k$, $\left(0 \leq |z| \leq \frac{h}{2} \right)$, па према (4.1) и (4.17)

$$M_x = D(\kappa_1 + \nu \kappa_2), \quad M_y = D(\kappa_2 + \nu \kappa_1), \quad M_{xy} = D(1-\nu) \kappa_3, \quad (4.19)$$

где је $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$.

2) **За еласто-пластично стање.** — средњи слој плоче је еластичан, Нека је η — ордината границе између слојева, дакле, $\tau_i < k$, $(0 \leq |z| \leq \eta)$; $\tau_i = k$, $\left(\eta \leq |z| \leq \pm \frac{h}{2} \right)$. Овде је уместо приметити, да

усвојено допуштење о нестишљивости материјала $\left(\nu = \frac{1}{2} \right)$ не омогу-

ћава да се задовољи услов непрекидности компонентних напона на границама $|z| = \eta$. Зато ћемо у даљем захтевати само непрекидност интензитета смичућих напона, тј. τ_i .

Дакле, у еластичном слоју важи Хуков закон: $\tau_i = 2G \gamma_i = 2G |z| A_0$, а на његовим границама, тј. када је $|z| = \eta$, ($\tau_i = k$) интензитет смичућих напона узима константну вредност, — једнаку граници течења материјала, управо $\tau_i = k$. Одавде $A_0 = \frac{k}{2G\eta}$.

Сада у релације (4.1) унесимо обрасце (4.17) и (4.18), узимајући у обзир изразе (4.12), а затим извршимо раздвајање сваког интеграла (који имају границе интеграције $z = \pm \frac{h}{2}$) на два — са границама $z = 0, z = \pm \eta$ и границама $z = \pm \eta, z = \pm \frac{h}{2}$, и тек после тога извршимо интеграцију.

Као резултат, после неких трансформација добијамо:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{4G\eta^3}{3(1-\nu)} (\alpha_1 + \nu \alpha_2) + \frac{2k \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \eta^2 \right]}{A} \left(\alpha_1 + \frac{1}{2} \alpha_2 \right), \\ M_y &= \frac{4G\eta^3}{3(1-\nu)} (\alpha_2 + \nu \alpha_1) + \frac{2k \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \eta^2 \right]}{A} \left(\alpha_2 + \frac{1}{2} \alpha_3 \right), \\ M_{xy} &= \frac{4G\eta^3}{3(1-\nu)} \alpha_3 + \frac{k \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \eta^2 \right]}{A} \alpha_3. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Овде у сваком изразу, први чланови представљају еластични део, а други-пластични.

Ако се материјал плоче сматра нестишљивим свуда, тј. и у еластичном делу ($\nu = \frac{1}{2}$, дакле, $\mu = \frac{\pi}{6}$), то је $\bar{\gamma}_i = \gamma_i$ и $A = A_0$, тада релације (4.20) добијају следећи облик:

$$M_x = B \left(\alpha_1 + \frac{1}{2} \alpha_2 \right), \quad M_y = B \left(\alpha_2 + \frac{1}{2} \alpha_1 \right), \quad M_{xy} = \frac{1}{2} B \alpha_3, \quad (4.21)$$

где је

$$B = 4G\eta \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{1}{3} \eta^2 \right] \quad (4.22)$$

— променљива крутост на савијање.

3) **За пластично стање**, — интензитет смичућег напона је свуда (у области деформације) константан и једнак граници течења материјала плоче, тј. $\tau_i = k$ ($0 \leq |z| \leq \frac{h}{2}$), при $\eta = 0$; угиб непрекидно расте, и, дакле, $w \rightarrow \infty$, а моменти постају:

$$M_x = \frac{h^2}{4} \sigma_x, \quad M_y = \frac{h^2}{4} \sigma_y, \quad M_{xy} = \frac{h^2}{4} \tau_{xy}. \quad (4.23)$$

Што се тиче граничних услова, може се рећи да су они исти као и за еластично савијање. Ипак, треба узимати у обзир, да за $\eta = \frac{h}{2}$ средња равна плоче мора бити непрекидна, и, дакле, имати непрекидно променљиву тангентну равна, па је зато на тим границама:

$$w^{(e)} = w^{(p)}, \quad \frac{\partial w^{(e)}}{\partial x} = \frac{\partial w^{(p)}}{\partial x}, \quad \frac{\partial w^{(e)}}{\partial y} = \frac{\partial w^{(p)}}{\partial y},$$

$$M_x^{(e)} = M_x^{(p)}, \quad M_y^{(e)} = M_y^{(p)}, \quad M_{xy}^{(e)} = M_{xy}^{(p)}, \quad (4.24)$$

$$(M_x^{(e)})^2 - M_x^{(e)} M_y^{(e)} + (M_y^{(e)})^2 + (M_{xy}^{(e)})^2 = \frac{1}{12} (kh^2)^2.$$

У многим случајевима, са великим степеном тачности, може се савијање плоче разматрати при степеној зависности између интензитета напона и деформација, тј.

$$\tau_i = k \gamma_i^\alpha \quad (4.25)$$

Сада уносећи изразе (4.11) и (4.16) у релације (4.10), узимањем у обзир зависности (4.25), добијамо формуле за компонентне напоне:

$$\sigma_x = \text{sign } z \frac{2k|z|^\alpha}{A^{1-\alpha}} \left(x_1 + \frac{1}{2} x_2 \right), \quad \sigma_y = \text{sign } z \frac{2k|z|^\alpha}{A^{1-\alpha}} \left(x_2 + \frac{1}{2} x_1 \right),$$

$$\sigma_{xy} = \text{sign } \frac{k|z|^\alpha}{A^{1-\alpha}} x_3, \quad (4.26)$$

а затим уносећи те обрасце у релације (4.1), налазимо:

$$M_x = \frac{B}{A^{1-\alpha}} \left(x_1 + \frac{1}{2} x_2 \right), \quad M_y = \frac{B}{A^{1-\alpha}} \left(x_2 + \frac{1}{2} x_1 \right), \quad M_{xy} = \frac{B}{2A^{1-\alpha}} x_3. \quad (4.27)$$

Овде је

$$B = \frac{4k \left(\frac{h}{2} \right)^{2+\alpha}}{2+\alpha}. \quad (4.28)$$

И, на крају, уносећи обрасце (4.27) у диференцијалну једначину (4.5), водећи рачуна о релацијама (4.12) и (4.15), добијамо нелинеарну диференцијалну једначину 4-ог реда, коју је први извео А.А. Иљушин [5]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}{A^{1-\alpha}} \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}{A^{1-\alpha}} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}}{A^{1-\alpha}} \right] = \frac{q}{B} \quad (4.29)$$

за $\alpha=1$, одавде се добија позната Софи Жермен-Лагранжева једначина савијања плоче.

Ради одређивања носивости плоча (и љуски) успешно се може искористити кинематички принцип одређивања оптерећења које доводи до слома, који је први формулисао и доказао А.А. Гвоздев [17, 18] и развио А.Р. Ржаницин [19]. Математички строгу поставку и решење тог проблема дао је А.А. Иљушин [5], коју ћемо овде кратко поновити, имајући у виду да ћемо се касније (у глави XI) вратити на њу са детаљнијим разматрањем.

Дакле, најпре ћемо дати нека објашњења која се односе на кинематички принцип одређивања граничног оптерећења, који је поставио А.А. Гвоздев.

Тај принцип састоји се у томе, што ће од свих могућих облика разарања еластично-пластичног система стварни облик разарања бити онај за кога је величина датог спољашњег оптерећења, уравнотеженог на том облику разарања најмања. Обично као могући облици слома проучавају се механизми, у које се преобраћа дати систем при замени у њему неког броја еластичних веза пластичним везама, које су способне на деформацију у одређеном правцу без повећања достигнутог граничног напрезања везе. Дакле, како закључује А.Р. Ржаницин може се поћи од општије схеме разрушења, која у себи садржи све механизме и који представљају кинематички ланац, чије се померање одређује, рецимо, са n параметара. Ставивши да су $n-1$ од тих параметара једнаки нули, добијамо померање за један од механизма, који одговара стању система у тренутку слома.

На тај начин, до оптерећења у тренутку слома, може се доћи, испитујући све механизме, који се добивају из неког општег кинематичког ланца, образованог од задатог система заменом еластичних веза у њему пластичним, изједначавањем са нулом свих параметара померања кинематичког ланца, осим једног. Генерализујући тај приступ, може се уместо изједначавања са нулом $n-1$ параметара померања кинематичког ланца увести $n-1$ релација између тих параметара, оставивши, дакле, само један степен слободе система.

Сада се задржимо на одређивању носивости плоча по Иљушину. Нека је a — карактеристична димензија плоче, q_0 — карактеристична вредност оптерећења q , тј.

$$q = q_0 \bar{q}, \quad \frac{q_0 a^2}{\sigma_s h^2} = k \quad (5.1)$$

и нека је материјал плоче нестишљив и не очвршћава; осим тога нека је деформација која одговара граници еластичности ε_s , — мала у поређењу са укупном ε_i .

Саставимо израз за потенцијалну енергију савијања и рад спољних сила, а затим извршимо варирање рада, под условом, да $\varepsilon_s \rightarrow 0$, $E \rightarrow \infty$, $(E \varepsilon_s) \rightarrow \sigma_s$, и као резултат добијамо следећу варијациону једначину

$$\delta \iint \left(A - \frac{2 \sqrt{3} k}{a^2} \bar{q} w \right) dx dy = 0, \quad (5.2)$$

где је

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_s} = \frac{h}{\sqrt{3} \varepsilon_s} A, \quad A = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2}. \quad (5.3)$$

Варијациона једначина (5.2) по w је хомогена и квазилинеарна.

Истовремено моменти и пресечне силе изражавају се помоћу w и извода те функције у облику хомогених функција нултог степена.

Гранични услови за угиб w и његове изводе биће увек хомогени и квазилинеарни.

На тај начин, варијациона једначина (5.2) може имати решење само за неке одређене вредности параметра, и то минимално од њих и одређује максимално оптерећење или носивост плоче, управо:

$$k = \frac{a^2}{2 \sqrt{3}} \frac{\iint \delta A \, dx \, dy}{\iint \bar{q} \delta w \, dx \, dy}. \quad (5.4)$$

Одавде можемо одредити носивост плоче, ако се нађе такво w , да би k имало минималну вредност, то доводи до решења проблема сличног проблему одређивања критичне силе Риц-Тимошенковом методом. А.А. Иљушин је дао и другу поставку тог задатка, — помоћу коначне релације коју је он извео између момената, тј.

$$M_x^2 - M_x M_y + M_y^2 + 3 M_{xy}^2 = M_s^2. \quad (5.5)$$

У овој глави проучавају се осцилације љуски и плоча. Даје се поставка проблема и њихово решење. Разматрају се сопствене и параметарске осцилације љуски, осцилације плоча изазване топлотним ударом, термопараметарски поремећај осцилација и термопараметарска резонанција гипских љуски у нестационарном температурном пољу.

1. Сопствене осцилације. Поставка проблема

Следећи Лава [20] поставићемо проблем о осцилацијама танке љуске. Познато је, да се једначине равнотеже љуски добивају путем изједначења са нулом главног вектора и момента свих сила, које делују ма на који њен део. Једначине осцилација љуски могу се образовати путем додавања спољашним силама и спреговима, који улазе у једначине равнотеже, израза за силе инерције и њихових момената (дисипативне силе овде ми не разматрамо):

$$-2\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -2\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad -2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

где је ρ — густина материјала љуске.

При састављању једначина одбацујемо све производе величина u , v , w и њихових извода; пошто су силе и моменти — линеарне функције тих величина, упростиће се једначине које се односе на недеформисано стање љуске. Диференцијалне једначине момената напишимо у облику:

$$\frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial (M_{12} B)}{\partial \alpha} - \frac{\partial (M_2 A)}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{21} \right\} + N_2 = 0,$$

$$\frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial (M_{21} A)}{\partial \beta} + \frac{\partial (M_1 B)}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{12} \right\} - N_1 = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{M_{12}}{R_1} + \frac{M_{21}}{R_2} + S_1 + S_2 = 0$$

и три диференцијалне једначине за силе биће:

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial(T_1 B)}{\partial \alpha} - \frac{\partial(S_2 A)}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} S_1 - \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_2 \right\} - \frac{N_1}{R_1} &= 2 \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial(T_2 A)}{\partial \beta} + \frac{\partial(S_1 B)}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} S_2 - \frac{\partial A}{\partial \beta} T_1 \right\} - \frac{N_2}{R_2} &= 2 \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial(N_1 B)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(N_2 A)}{\partial \beta} \right\} + \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} &= 2 \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Диференцијалне једначине (1.2) представљају систем једначина осцилација, при чему су неке од величина које овде улазе везане релацијама (1.1).

Даље те једначине треба трансформисати у систем диференцијалних једначина за одређивање померања u , v , w заменом величина T_1, \dots изразима по u , v , w и њиховим изводима, при томе трећа једначина из (1.1) треба да се претвори у идентичност.

Приметимо, да се овде, као посебан случај, садржи теорија осцилација равних плоча. Стварно, ако се стави $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = 0$ у све једначине (1.1)

и (1.2), тада се те једначине распадају на две групе: једна од њих ће садржавати $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ и силе T , S ; друга — $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ еластичне силе N и моменте M . Даље, у том случају се T , S изражавају преко ϵ_1, \dots , а последње, са своје стране, преко u , v по познатим формулама.

На тај начин, једна од група, на које се распадају једначине (1.1) и (1.2), идентична је са једначинама лонгитудиналних осцилација (деформације се свode на дилатације у равни плоче). Даље, momenti M се изражавају помоћу x, \dots , а ове последње — помоћу w по познатим обрасцима. Компоненте N_1, N_2 изражавају се помоћу момената M по обрасцима:

$$N_1 = \frac{\partial M_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_{21}}{\partial \beta}, \quad N_2 = \frac{\partial M_2}{\partial \beta} - \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha}.$$

Та, (друга група), једначина еквивалентна је једначини попречних осцилација плоче.

При таквом излагању теорије осцилације чине се допустања, слична хипотезама, које се примењују у теорији танких штапова. Прихвата се, да је стање деформације танке љуске (или плоче) која осцилује истог типа, као што је дефинисано при извођењу једначина равнотеже. На пример, у случају равне плоче [10], која трпи попречне осцилације, чини се претпоставка да је унутрашња деформација у малом делу плоче веома блиска оном облику деформације, који би тај део имао остајући у равнотежи при истом степену кривљења средње равни.

Размотримо стање цилиндарског или призматичног елемента равне плоче, уметнутог у одговарајући отвор у њој. Допустимо да се за попречне осцилације такав елемент плоче практично у сваком моменту осциловања налази у истом стању као и у равнотежи. Ако то важи, тада ће компо-

ненте (координате) деформације на том делу при попречним осцилацијама бити једнаке:

$$e_{xx} = -z\kappa_1, \quad e_{yy} = -z\kappa_2, \quad e_{xy} = -2z\tau, \quad e_{zz} = \frac{\nu}{1-\nu} z(\kappa_1 + \kappa_2),$$

а када плоча осцилује у својој равни:

$$e_{xx} = \varepsilon_1, \quad e_{yy} = \varepsilon_2, \quad e_{xy} = \omega, \quad e_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

У оба случаја e_{zz} је такво, да је напон Z_z једнак нули. Јасно је да је наша претпоставка оправдана тада, када је период осциловања плоче велики у поређењу са периодом тих слободних осцилација призматичног елемента плоче, при којима деформације припадају назначеном типу. Стварно, период свих попречних осцилација плоче директно је пропорционалан квадрату линијске димензије површи, која се односи на контуру плоче, и обрнуто је пропорционалан дебљини; период било које врсте уздужних осцилација директно је пропорционалан линијским димензијама плоче и не зависи од дебљине. Период пак, каквих било слободних осцилација призматичног елемента, које прате деформације овде прихваћеног типа, пропорционалан је линијским димензијама тог елемента или приближно дебљини плоче.

У том расуђивању нема ничег специјалног што би се односило само на равне плоче. Одатле закључујемо, да у плочи или љуски која осцилује стање деформације у малом делу нужно треба практично сматрати истим таквим, као када би се плоча налазила у равнотежи, при којој би средња површ имала истезање и савијање, као у било ком моменту при осциловању. Нужно је имати у виду, да та расуђивања, која оправдавају учинену претпоставку губе смисао када фреквенција осциловања расте. Компонентна померања морају да задовољавају једначине (1.2), које се трансформишу, како је назначено. Осим тога, оне морају задовољавати граничне услове. На слободним ивицама парови који изазивају савијање, а такође три линеарне комбинације, састављене од сила и торзионог момента, треба да су једнаке нули.

Приметимо, да изрази за моменте M , силе N садрже множилац $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ или $\frac{2}{3} \frac{E h^3}{1-\nu^2}$, а изрази за силе састоје се од два члана,

од којих је један пропорционалан h , а други h^3 . Сваку од једначина (1.2) поделимо са h ; тада чланови који зависе од ε_1 , ε_2 , ω , неће садржавати h , преостали ће имати множилац h^2 . Даље, допуштамо, да се може добити правилно приближно решење, ако се занемаре чланови, који садрже h^2 . Ако се то учини, тада на слободним ивицама два гранична услова, управо: $M_t = 0$ и $N - \frac{\partial M_{ij}}{\partial s} = 0$, отпадају; систем једначина биће довољно

високог реда, да би се могли задовољити преостали гранични услови. Али сада h испада из једначина и граничних услова, и зато фреквенција неће зависити од дебљине. Дилатација средње површи биће најважнија карактеристика деформације, али, осим тога, неопходно је да се деформација изводи и савијањем.

Осцилације танких љуски, праћене издужењима, аналогне су осцилацијама тога типа код равних плоча. Испитивање љуски са благо нагнутих средњим површима, показује, да отворена љуска може изводити такву врсту осцилација, које су аналогне попречним осцилацијама равних плоча. Фреквенција тих осцилација биће знатно мања, него фреквенција осцилација код којих долази до истезања средње површи. Егзистенција такве врсте осцилација може се установити наредним расуђивањем. Горња граница за фреквенције најнижег тона може се наћи, задајући ма какав подесан облик осцилација, пошто код осцилаторног система фреквенција, добивена за прихваћени тип осцилација, не може бити мања од ниже фреквенције сопствених осцилација. Ако се на пример, узме такав тип осцилација, када линије, повучене на средњој површи, не мењају своје дужине, тада се може израчунати фреквенција помоћу образаца за кинетичку и потенцијалну енергију савијања. Како је кинетичка енергија пропорционална h , а потенцијална енергија пропорционална h^3 , то фреквенција треба да буде пропорционална са h . Фреквенција сличних осцилација, које нису праћене дилатацијама љуски датог облика, неограничено опада истовремено са h насупротив уздужним осцилацијама. Одатле следи, да фреквенција уздужних осцилација не може бити најнижа.

Ипак приметимо, да случај затворене љуске, на пример, сферне, чини изузетак, јер су овде осцилације без дилатација уопште немогуће; управо тако и љуска мале дебљине, која је скоро затворена и има само мали отвор, такође припада том изузетку, ако је само тај отвор довољно мали. Да би се принудила љуска да осцилује тако, да не буде дилатација, неопходно би било поставити силе на њеним крајевима и њеној површи. Ако тих сила нема, тада се померање разликује од онога, које задовољава услове деформације без дилатација. Ипак та разлика за ниске фреквенције осцилација треба да је незнатна, јер би у противном случају практично имали посла са подужним осцилацијама и фреквенција реално не би могла бити толико мала, као што одговара датом случају.

Како се може закључити из облика једначина кретања, дилатација, о којој је реч, на већем делу површи веома је мала; само близу крајева она ће бити таква, да би се задовољили услови на тим границама.

§ 2. Затворена цилиндарска љуска

Нека је a — полупречник љуске; означимо $\alpha = x$, $\beta = \varphi$. Крајеви љуске нека су образовани од два круга, $x = \pm l$. Дилатације и промене кривина дефинишу се величинама:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - w \right), \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi},$$

$$\kappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right), \quad \tau = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + v \right).$$

Померање је периодична функција по φ са периодом 2π . Претпоставља се, да нормалне осцилације љуске имају фреквенцију $\frac{P}{2\pi}$. Зато узимамо

да су u , v , w пропорционални синусима или косинусима лука, заједничког φ , а такође косинусима $pt + \varepsilon$. После тога једначине осцилација прелазе у систем линеарних диференцијалних једначина са константним коефицијентима, које дефинишу u , v , w у зависности од x . Формирајмо те једначине; најпре размотримо ред система. Изрази κ_1 , κ_2 , τ садрже само друге изводе; изрази ε_1 , ε_2 , ω садрже прве изводе. На тај начин, M_1 , M_2 садрже друге изводе, а N_1 — треће. При томе трећа једначина (1.2), дакле, садржи четврте изводе у оним члановима који се изостављају, када се образују једначине осцилација са дилатацијама. Дакле, потпуне једначине биће знатно вишег реда, него једначине осцилација са дилатацијама: прве ће бити осмог реда, а друге — четвртог. Снижење реда при прелазу од потпуног система на једначине осцилација са дилатацијама има фундаментални значај и уопште сасвим не зависи од специјалног цилиндарског облика средње површи.

У сагласности са горе наведеним ставимо:

$$\begin{aligned} u &= U \sin n \varphi \cos (pt + \varepsilon), \\ v &= V \cos n \varphi \cos (pt + \varepsilon), \\ w &= W \sin n \varphi \cos (pt + \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где су U , V , W функције од x . Одатле следи да је

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{dU}{dx} \sin n \varphi \cos (pt + \varepsilon), & \varepsilon_2 &= -\frac{W + nV}{a} \sin n \varphi \cos (pt + \varepsilon), \\ \omega &= \left(\frac{dV}{dx} + n \frac{U}{a} \right) \cos n \varphi \cos (pt + \varepsilon), & \kappa_1 &= \frac{d^2 W}{dx^2} \sin n \varphi \cos (pt + \varepsilon), \\ \kappa_2 &= -\frac{nV + n^2 W}{a^2} \sin n \varphi \cos (pt + \varepsilon), \\ \tau &= \frac{1}{a} \frac{d}{dx} (V + nW) \cos n \varphi \cos (pt + \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.2)$$

и, дакле,

$$M_1 = -D \sin n \varphi \cos (pt + \varepsilon) \left(\frac{d^2 W}{dx^2} - \nu \frac{nV + n^2 W}{a^2} \right),$$

$$M_2 = -D \sin n \varphi \cos (pt + \varepsilon) \left(\nu \frac{d^2 W}{dx^2} - \frac{nV + n^2 W}{a^2} \right),$$

$$M_{12} = D \cos n \varphi \cos (pt + \varepsilon) \frac{1 - \nu}{a} \left(n \frac{dW}{dx} + \frac{dV}{dx} \right) = -M_{21}.$$

Прве две једначине из система (1.1) могу се написати у облику:

$$N_1 = \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial M_{21}}{\partial \varphi}, \quad N_2 = \frac{1}{a} \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_{12}}{\partial x},$$

или, што је исто:

$$N_1 = -D \sin n\varphi \cos(pt + \varepsilon) \left[\frac{d^3 W}{dx^3} - \frac{1}{a^2} \left(n^2 \frac{dW}{dx} + n \frac{dV}{dx} \right) \right],$$

$$N_2 = -D \cos n\varphi \cos(pt + \varepsilon) \left[\frac{n}{a} \frac{d^2 W}{dx^2} - \frac{n^3}{a^3} W + \frac{1-\nu}{a} \frac{d^2 V}{dx^2} - \frac{n^3}{a^3} V \right].$$

Даље имамо:

$$T_1 = D \left[\frac{3}{h^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) + \frac{2-2\nu-3\nu^2}{2(1-\nu)} \frac{x_1}{a} - \frac{2\nu+\nu^2}{2(1-\nu)} \frac{x_2}{a} \right],$$

$$T_2 = D \left[\frac{3}{h^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) - \frac{\nu+2\nu^2}{2(2-\nu)} \frac{x_1}{a} - \frac{2+\nu}{2(1-\nu)} \frac{x_2}{a} \right],$$

$$S_1 = \frac{1}{2} D (1-\nu) \left[\frac{3}{h^2} \omega + \frac{\tau}{a} \right], \quad S_2 = \frac{1}{2} D (1-\nu) \left[-\frac{3}{h^2} \omega + \frac{\tau}{a} \right],$$

где $\varepsilon_1, \dots, x_1, \dots$ имају вредности дате формулама (2.2).

Диференцијалне једначине осцилација добивају облик:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial S_2}{\partial \varphi} + 2\rho h p^2 u = 0, \quad \frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} - \frac{N_2}{a} + 2\rho h p^2 v = 0,$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} + \frac{T_2}{a} + 2\rho h p^2 w = 0,$$

или, уводећи функције U, V, W , добивамо:

$$\frac{3D}{h^3} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{dU}{dx} - \nu \frac{W+nV}{a} \right) - \frac{1-\nu}{2} \frac{n}{a} \left(\frac{dV}{dx} + \frac{nU}{a} \right) \right] + 2\rho p^2 U + \quad (2.3)$$

$$+ \frac{D}{h} \left[\frac{2-2\nu-3\nu^2}{2(1-\nu)a} \frac{d^3 W}{dx^3} + \frac{1+2\nu^2}{2(1-\nu)} \frac{n}{a^3} \frac{d}{dx} (V+nW) \right] = 0;$$

$$\frac{3D}{h^3} \left[\frac{n}{a} \left(\nu \frac{dU}{dx} - \frac{W+nV}{a} \right) + \frac{1-\nu}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dx} + \frac{nU}{a} \right) \right] + 2\rho p^2 V +$$

$$+ \frac{D}{h} \left[-\frac{\nu+2\nu^2}{2(1-\nu)} \frac{n}{a^2} \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{2+\nu}{2(1-\nu)} \frac{n^2}{a^4} (V+nW) \right] + \quad (2.4)$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{1-\nu}{a^2} \frac{d^2}{dx^2} (V+nW) + \frac{n}{a^2} \frac{d^2 W}{dx^2} - \frac{n^2}{a^4} W + \frac{1-\nu}{a^2} \frac{d^2 V}{dx^2} - \frac{n^2}{a^4} V \right] = 0;$$

$$\frac{3D}{h^3} \left[\nu \frac{dU}{dx} - \frac{W+nV}{a^2} \right] + 2\rho p^2 W - \frac{D}{h} \left[\frac{d^4 W}{dx^4} - \frac{2n^2}{a^2} \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{n^4}{a^4} W -$$

$$-(2-\nu) \frac{n}{a^2} \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{n^3}{a^4} V + \frac{\nu+2\nu^2}{2(1-\nu)a^2} \frac{d^2 W}{dx^2} -$$

$$\left. -\frac{2+\nu}{2(1-\nu)} \frac{n}{a^4} (nV+W) \right] = 0. \quad (2.5)$$

Услови на граници за $x = \pm l$ биће:

$$T_1 = 0, \quad S_1 + \frac{M_{12}}{a} = 0, \quad N_1 - \frac{1}{a} \frac{\partial M_{12}}{\partial \varphi} = 0, \quad M_1 = 0,$$

где су све леве стране једнакости — линеарне функције од U, V, W и њихових извода по x .

Систем једначина за одређивање u, v, w у зависности од x представља линеарни систем са константним коефицијентима осмог реда. Тај систем садржи непознату величину p^2 , а такође познате величине h и n , где је n — број таласних дужина, које се односе по дужини кружног обима, изабран произвољно. Допустимо, да су u, v, w осим множиоца, који садрже φ и t , пропорционални величинама $\xi e^{mx}, \eta e^{mx}, \zeta e^{mx}$, где су ξ, η, ζ, m — константе. Константа m биће корен једначине, добивене изједначавањем са нулом детерминанте; то ће бити једначина осмог степена по m или четвртог степена по m^2 и неће садржавати чланове са непарним степенима m . Коефицијенти те једначине зависе од p^2 . Ако m буде задовољавало ту једначину, то се размере $\xi:\eta:\zeta$ дефинишу у зависности од m и p^2 из било којих двеју једначина равнотеже. Не узимајући множиоце, који зависе од φ и t , може се написати:

$$u = \sum_{i=1}^4 (\xi_i e^{m_i x} + \xi_i' e^{-m_i x}), \quad v = \sum_{i=1}^4 (\eta_i e^{m_i x} + \eta_i' e^{-m_i x}),$$

$$w = \sum_{i=1}^4 (\zeta_i e^{m_i x} + \zeta_i' e^{-m_i x}), \quad (2.6)$$

где су ξ_i, ξ_i' — произвољне константе, а η_i, \dots ће бити пропорционални првим двама константама. Гранични услови $x = \pm l$ дају осам алгебарских линеарних хомогених једначина по ξ_i, ξ_i' . Елиминација тих константи доводи до једне једначине за одређивање p^2 ; то ће бити фреквентна једначина.

Размотримо подужне осцилације (лонгитудиналне осцилације). Једначине подужних осцилација добивају се путем одбацивања чланова у једначинама (2.3), (2.4), (2.5), који садрже коефицијент $\frac{D}{h}$. Једначина

за одређивање m^2 постаје квадратна. Услови на $x = \pm l$ своде се на једнакости: $T_1 = 0, S_1 = 0$

или

$$\frac{dU}{dx} - \nu \frac{W+nV}{a} = 0, \quad \frac{dV}{dx} + \frac{n}{a} U = 0.$$

Како h не улази у те једначине, то фреквенција неће зависити од h . Под условом симетричних осцилација, када u, v, w не зависе од φ , имамо:

$$u = U \cos(pt + \varepsilon), \quad v = V \cos(pt + \varepsilon), \quad w = W \cos(pt + \varepsilon);$$

стављајући у једначине осцилација, добивамо:

$$\frac{E}{1-\nu} \left(\frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{\nu}{a} \frac{dW}{dx} \right) + \rho p^2 U = 0, \quad \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{d^2 V}{dx^2} + \rho p^2 V = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\nu}{a} \frac{dU}{dx} - \frac{1}{a^2} W \right) + \rho p^2 W = 0.$$

Гранични услови за $x = \pm l$ биће:

$$\frac{dU}{dx} - \nu \frac{W}{a} = 0, \quad \frac{dV}{dx} = 0 \quad (2.8)$$

Постоје две врсте симетричних осцилација. За прву врсту U и W ишче-
завају, пошто ће померање бити тангентно на нормални пресек цилиндра.
У том случају имамо:

$$V = \eta \cos \frac{n \pi x}{l}, \quad p^2 = \frac{E}{2 \rho (1+\nu)} \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad (2.9)$$

где је n — цео број. За другу врсту осцилација исчезава V , јер се по-
мерање врши у равни, која пролази кроз осу; овде је

$$U = \xi \cos \frac{n \pi x}{l}, \quad W = \zeta \sin \frac{n \pi x}{l}, \quad (2.10)$$

где су ξ , ζ везани међу собом једначинама:

$$\left[p^2 - \frac{E}{\rho(1-\nu^2)} \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \right] \xi - \frac{\nu E}{\rho(1-\nu^2)} \frac{n \pi}{l a} \zeta = 0. \quad (2.21)$$

$$\left[p^2 - \frac{E}{\rho(1-\nu^2)} \frac{1}{a^2} \right] \zeta - \frac{\nu E}{\rho(1-\nu^2)} \frac{n \pi}{l a} \xi = 0.$$

Фреквентна једначина биће

$$p^4 - p^2 \frac{E}{\rho(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \right) + \frac{\pi^2 n^2 E^2}{\rho^2 a^2 l^2 (1-\nu^2)} = 0. \quad (2.12)$$

Ако је дужина цилиндра велика у поређењу са пречником, тј. $\frac{a}{l}$ мало,
тада постоји два типа осцилација: 1) скоро чисто радијалне са фреквенци-

јом $\frac{\left[\frac{E}{\rho(1-\nu^2)} \right]^{1/2}}{2 \pi a}$, 2) скоро чисто подужне са фреквенцијом $\frac{n \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/2}}{2l}$.

Последње су сличне подужним осцилацијама танке греде (лонгитуди-
налне осцилације).

Размотримо сада осцилације без дилатација. Такве осцилације дуж из-
воднице дефинишу се формулама:

$$u=0, \quad v=A_n \cos(p_n t + \varepsilon_n) \cos(n \varphi + \alpha_n),$$

$$w = -n A_n \cos(p_n t + \varepsilon_n) \sin(n \varphi + \alpha_n), \quad (2.13)$$

где је

$$p_n^2 = \frac{D}{2\rho h a^4} \frac{n^2(n^2-1)^2}{n^2+1}. \quad (2.14)$$

Ако су осцилације у три димензије, померање ће имати следећи облик:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{a}{n} B_n \cos(p_n' t + \varepsilon_n') \sin(n\varphi + \beta_n), \quad v = x B_n \cos(p_n' t + \varepsilon_n') \cos(n\varphi + \beta_n), \\ w &= -n x B_n \cos(p_n' t + \varepsilon_n') \sin(n\varphi + \beta_n), \end{aligned} \quad (2.15)$$

где је

$$p_n'^2 = \frac{D}{2\rho h a^4} \frac{n^2(n^2-1)}{n^2+1} \frac{1 + \frac{6(1-\nu)a^2}{(n/l)^2}}{1 + \frac{3a^2}{n^2 l^2 (n^2+1)}}. \quad (2.16)$$

Као што се види, вредности p и p' овде су пропорционалне са h .

У последњем случају, када се уводи претпоставка о могућности осцилација које нису праћене дилатацијама, допушта се нетачност, због које се не задовољавају у потпуности ни једначине кретања ни гранични услови.

При томе се показује, да је ради задовољења диференцијалних једначина, неопходно увести поправку, која садржи мале промене померања, а за задовољење граничних услова поправка за померања треба да је знатнија, него она која је неопходна да би се задовољиле диференцијалне једначине.

Разјаснимо карактер поправки, које је неопходно увести за деформације без дилатација. Егзистенција осцилација, које нису праћене дилатацијама, везана је са чињеницом, да се ред система једначина снижава са осмог (осцилације са дилатацијама) на четврти. У фреквентној једначини (у случају осцилација са дилатацијама) чланови који садрже m^8 и m^6 , имају множилац h^2 , и на тај начин, две вредности m^2 биће велики бројеви реда $\frac{1}{h}$. Да би показали на који се начин помоћу решења, које

зависи од великих вредности m , могу задовољити услови на граници, проучимо Лемов (Lamb) пример ([21]).

Цилиндарска љуска, ограничена са две изводнице и два круга нормалних пресека, подвргава се дејству сила, које дејствују дуж изводница (кругови су слободни од дејства сила); она се извитоперује, прелазећи у ротациону површ, на тај начин, да је померање, тангентно на кругове нормалног пресека v , пропорционално φ . Нађимо то померање.

Имамо: $v = C\varphi$, где је C — константа, померања пак u и w не зависе од φ . Одатле:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{C-w}{a}, \quad \omega = 0, \quad \kappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_2 = \frac{C}{a^2}, \quad \tau = 0.$$

Силе S_1 , S_2 и моменти M_{12} , M_{21} нестaju, а M_1 , M_2 , N_1 , N_2 биће једнаки:

$$M_1 = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{C}{a^2} \right), \quad M_2 = -D \left(\frac{C}{a^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$N_1 = -D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \quad N_2 = 0.$$

Једначине равнотеже добивају облик:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} = 0, \quad -D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{T_2}{a} = 0,$$

а гранични услови за $x = \pm l$ свODE се на једнакости:

$$T_1 = 0, \quad N_1 = 0, \quad M_1 = 0.$$

Да би се задовољиле те једначине и услови, претпостављамо да ће ϵ_1 , ϵ_2 бити величине истог реда, као и h и x_1 , h и x_2 . Ако то важи, тада се силе са довољном апроксимацијом могу изразити као:

$$T_1 = \frac{3D}{h^2} (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2), \quad T_2 = \frac{3D}{h^2} (\epsilon_2 + \nu \epsilon_1).$$

Да би се задовољила једначина $\frac{\partial T_1}{\partial x} = 0$ и услов $T_1 = 0$ за $x = \pm l$, треба ставити: $T_1 = 0$ или $\epsilon_1 = -\nu \epsilon_2$; одакле следи да је

$$T_2 = 3D (1 - \nu^2) \frac{\epsilon_2}{h^2}.$$

Трећа од диференцијалних једначина равнотеже своди се на облик:

$$-\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{3(1 - \nu^2)}{(ah)^2} (C - w) = 0,$$

а гранични услови постају:

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{C}{a^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0, \quad \text{за } x = \pm l.$$

Представљајући $C - w$ у облику збира чланова облика ζe^{mx} уверавамо се да ће m^2 бити величина реда $\frac{1}{h}$, а решење добива облик:

$$w = C + C_1 \operatorname{ch} \left(\frac{qx}{a} \right) \cos \left(\frac{qx}{a} \right) + C_2 \operatorname{sh} \left(\frac{qx}{a} \right) \sin \left(\frac{qx}{a} \right), \quad (2.17)$$

где је

$$q^2 = \frac{a}{2h} \sqrt{3(1 - \nu^2)}$$

$$C_1 = -\nu \frac{C}{q^2} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{ql}{a}\right) \cos\left(\frac{ql}{a}\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{ql}{a}\right) \sin\left(\frac{ql}{a}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{2ql}{a}\right) + \sin\left(\frac{2ql}{a}\right)}$$

$$C_2 = -\nu \frac{C}{q^2} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{ql}{a}\right) \cos\left(\frac{ql}{a}\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{ql}{a}\right) \sin\left(\frac{ql}{a}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{2ql}{a}\right) + \sin\left(\frac{2ql}{a}\right)} \quad (2.18)$$

Решење показује, да су близу крајева величине ε_1 , ε_2 , $h \kappa_1$, $h \kappa_2$ све једног истог реда; на растојањима од крајева која превазилазе величину $(ah)^{1/2}$, ε_1 , ε_2 постају мале у поређењу са величином $h \kappa_2$.

Може се показати, да ће за дати статички проблем потенцијална енергија истезања бити реда величине, једнаке производу $\left(\frac{h}{a}\right)^{1/2}$ и потенцијалне енергије савијања. У случају осцилација може се закључити, да је истезање, које обезбеђује испуњење услова на крајевима, практично ограничено уском траком дуж крајева. Везане са тим промене укупне потенцијалне енергије и периода осцилација су толико мале, да се могу занемарити.

§ 3. Сферна љуска

Математичка страна проучавања осцилација сферне љуске слична је проучавању цилиндарске љуске, и зато нема потребе да се овде изводе аналогни обрасци. Размотримо са квалитативне стране еластичне осцилације сферне љуске.

Нека су осцилације праћене дилатацијама; оне се распадају на две класе, које се добивају одбацивањем радијалне компоненте померања одн. радијалне компоненте ротације. За сваку осцилацију нормалног типа, која припада једној или другој класи, померања се изражавају помоћу сферних функција било ког одређеног целобројног реда. За осцилације прве класе фреквенција $\frac{p}{2\pi}$ је везана са редом сферне функције n релацијом

$$\frac{p^2 a^2 \rho}{G} = (n-1)(n+2), \quad (3.1)$$

где је a — полупречник сфере. За осцилације друге класе аналогна релација биће

$$\frac{p^4 a^4 \rho^2}{G^2} - \frac{p^2 a^2 \rho}{G} \left[(n^2 + n + 4) \frac{1+\nu}{1-\nu} + (n^2 + n - 2) \right] + 4(n^2 + n - 2) \frac{1+\nu}{1-\nu} = 0. \quad (3.2)$$

Ако је $n > 1$, то сваком n одговарају две нормалне осцилације друге класе, и најнижи тон одговара најспоријој од двеју осцилација те класе за $n=2$. Његова фреквенција биће

$$p = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{G}{\rho}} (1,176), \quad (3.3)$$

ако је Пуасонов коефицијент $\nu=0,25$. Фреквенција свих тих осцилација не зависи од дебљине љуске.

У граничном случају равне плоче облици осциловања распадају се на две главне класе: једна од њих одговара деформацијама без дилатација са померањима, нормалним на раван плоче, друга — деформацијама, праћених дилатацијама, када су померања паралелна равни плоче. Овде могу бити подужне осцилације, када су померања паралелна равни плоче; осцилације те класе распадају се на две поткласе: првој припадају оне код којих средња раван не трпи деформације, другој се односе осцилације код којих су померања аналогна тангентним померањима затворене танке сферне љуске. Такође су могуће осцилације друге класе, код којих померање има како нормалну компоненту на раван плоче, тако и компоненту, која лежи у тој равни; ако је плоча танка, тада ће прва компонента бити мала у поређењу са другом. Нормална компонента померања ишчезава на средњој равни, а нормална компонента ротације ишчезава свуда, јер су те осцилације аналогне осцилацијама друге класе затворене танке сферне љуске. Постоји даље још класа осцилација савијања, када померање има и нормалну и тангентну компоненту, при чему је последња мала у поређењу са нормалном у случају танке плоче. Тангентна компонента ишчезава на средњој равни, пошто се може сматрати да деформација не поседује дилатације. При тим осцилацијама линијски елементи, који су у почетку били нормални на средњу раван, током читавог кретања остају праволинијски и нормални на исту раван. Фреквенција осцилација приближно је пропорционална дебљини плоче. Сличне осцилације без дилатација, како је већ раније напоменуто (види § 2, ове главе), у затвореној сферној љуски су немогуће.

Тим крајњим случајевима припада отворена сфера или сферни свод (купола). Ако је отвор мали и љуска скоро затворена, тада њене осцилације припадају осцилацијама затворене љуске. Ако је пак, телесни угао под којим се отвор види из пола, који се налази на делу сфере, који затвара љуску, мали, а полупречник сфере велики, тада се осцилације приближавају истим таквим за равну плочу. У неким међуслучајевима срећу се осцилације, које практично припадају типу осцилација без дилатација или типу осцилација са дилатацијама.

Проучавање осцилација без дилатација танке сферне љуске са граничном контуром у облику круга први је извршио Рејли (Rayleigh) [22]; он је применио енергијски метод. За случај полусфере фреквенција најнижег тона једнака је:

$$p = \left(\frac{h}{a^2}\right) \sqrt{\frac{G}{\rho}} (4,279). \quad (3.4)$$

Кад је угао α , који дефинише величину отвора, близак π , сфера ће бити још затворена и фреквенција најнижег тона тих осцилација постаје

једнака :

$$p = \frac{h^2}{a^2(\pi - \alpha)^2} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (5,657). \quad (3.5)$$

Нека је угао $(\pi - \alpha)$ довољно мали; остављајући h непроменљивим, може се за фреквенцију најнижег тона осцилација без дилатација добити вредност, по вољи већа, него најнижа фреквенција осцилација затворене сферне љуске (осцилације последње биће са дилатацијама). На тај начин, за случај скоро затворене љуске отпада основни аргумент, помоћу кога утврђујемо егзистенцију осцилација, које практично немају дилатације. Када су основне једначине осцилација установљене методом, која је наведена у §2 ове главе, за цилиндарску љуску, узимају се компонентна померања у облику, који садржи два множиоца: први — то је синус или косинус лука, заједничког φ , други представља елементарну хармонијску функцију од t ; после тога једначине се свODE на линеарни систем осмог реда, које служе за одређивање зависности компонента померања од ширине θ . Услови на слободним ивицама изражавају се изједначавањем са нулом за одређене вредности θ неких линеарних израза, који повезују компоненте померања и њихове изводе по θ . Ред система је довољан да би се могли задовољити ти услови. Ако би решење система једначина, које се потчињава ивичним условима било нађено, то би довело до дефинисања типа осцилација и њихових фреквенција.

Осцилације са дилатацијама испитују се методом, која је приказана за проблем цилиндарске љуске. Систем једначина биће у том случају четвртог реда, при чему је нужно задовољити два контурна услова. При неком облику осцилација кретање се састоји од два кретања: у првом одсуствује радијална компонента померања, у другом — радијална компонента ротације. Свако то кретање изражава се помоћу сферне функције, али ред последње уопште неће бити целобројан. Ред сферне функције, која изражава осцилације без радијалног померања, везан је са фреквенцијом релацијом (3.1), у којој је α стављено уместо n ; ред β сферне функције, која изражава померање, када је радијална компонента ротације једнака нули, везан је са фреквенцијом релацијом (3.2), у којој је n замењено са β . Оба броја α и β везана су трансцедентном релацијом, која представља фреквентну једначину. Осцилације се не распадају на класе, као у случају затворене љуске; у мери колико се отворена љуска по облику приближава затвореној, њене осцилације са дилатацијама прелазе у аналогне осцилације за затворену љуску.

Егзистенција осцилација, које су практично блиске осцилацијама без дилатација, очевидно, уско је повезано са том чињеницом, да се допуштењу постојања осцилација са дилатацијама ред система једначина са осмога снижава до четвртог. Као и за случај цилиндарске љуске, може се показати, да се осцилације не могу савршено изводити без дилатација и да је поправка, неопходна да би се задовољили услови на ивицама, много значајнија него она која је нужна да би се задовољиле једначине кретања. Одавде се може закључити да су на слободној ивици дилатације упоредиве по величини са деформацијама савијања и да се практично те дилатације ограничавају само уском траком код ивица.

Ако се замисли постепена промена карактера осцилација, која се јавља са порастом кривине, почев од равне плоче и завршавајући затвореном

сферном љуском, тада класа осцилација, која су практично без дилатација, потпуно ишчезава. Узрок томе нужно би било тражити у брзом расту фреквенција свих осцилација, које припадају тој класи, при знатном смањивању отвора љуске.

§ 4. Осцилације плоча, изазване топлотним ударом

Размотримо зглавкасто по свим ивицама ослођену правоугаону плочу $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, чијој се површи $z = \frac{h}{2}$, почев од тренутка $t=0$, изненада доводи топлота, при чему је количина топлоте, која се доводи за јединицу времена на јединицу површине, једнака константној величини q . Доња површ плоче $z = -\frac{h}{2}$ и крајеви плоче $x = \pm a$, $y = \pm b$ су по претпоставци идеално топлотно изоловани.

Расподела температуре при томе зависи од координате z и времена t , дакле, дефинише се једначином:

$$a_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.1)$$

уз почетни услов

$$T=0 \quad \text{за } t=0 \quad (4.2)$$

и граничне услове:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = q \quad \text{за } z = \frac{h}{2}, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{за } z = -\frac{h}{2}. \quad (4.4)$$

Испитивање динамичког понашања плоче при неравномерној промени температуре њене површи изведено је у раду [23].

Решење једначине (4.1) са условима (4.2) лако се може наћи помоћу Лапласових трансформација и има облик:

$$T = \frac{q h}{\lambda} \left[\frac{\beta t}{\pi^2} + \frac{12 z^2 + 12 h z - h^2}{24 h^2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-n^2 \beta t} \cos \frac{n \pi}{2} \left(\frac{2z}{h} + 1 \right) \right], \quad (4.5)$$

где је $\beta = \frac{a_T \pi^2}{h^2}$. Користећи диференцијалну једначину температурног савијања плоче:

$$\Delta^2 w - \frac{q}{D} + \frac{E \alpha h^2}{D(1-\nu)} \Delta T_M = 0 \quad (4.6)$$

и замењујући у сагласности са Даламберовим принципом интензитет површинских сила силама инерције $-\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, добијамо диференцијалну једначину кретања:

$$\Delta^2 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{E \alpha h^2}{D(1-\nu)} \Delta T_M = 0, \quad (4.7)$$

где је

$$T_M = \frac{1}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} T(z) z dz. \quad (4.8)$$

Решење једначине (4.7) треба да задовољава следеће почетне и граничне услове:

$$w = \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad \text{за } t = 0. \quad (4.9)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{E \alpha h^2}{D(1-\nu)} T_M = 0, \quad \text{за } x = \pm a \quad (4.10)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{E \alpha h^2}{D(1-\nu)} T_M = 0, \quad \text{за } y = \pm b. \quad (4.11)$$

Увршћујући израз (4.5) у једнакост (4.8), добијамо за чисто топлотну деформацију T_M израз

$$T_M = \frac{q \alpha h}{24 \lambda} \left(1 - \frac{96}{\pi^4} \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} e^{-n^2 \beta t} \right). \quad (4.12)$$

Како T_M не зависи од координата x, y , то је

$$\Delta T_M = 0; \quad (4.13)$$

при томе једначина (4.7) добија облик:

$$\Delta^2 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (4.14)$$

Решење w једначине (4.14) представимо у облику збира квазистатичког угиба w_s и динамичког угиба w_d :

$$w = w_s + w_d. \quad (4.15)$$

Квазистатички угиб w_s треба да задовољава једначину

$$\Delta^2 w_s = 0 \quad (4.16)$$

уз граничне услове (4.10), (4.11), у којима треба заменити w са w_s .

Стављајући решење (4.15) у једначину (4.14) и узимајући у обзир (4.16), добијамо једначину за динамички угиб:

$$\Delta^2 w_d + \kappa^2 \frac{\partial^2 w_d}{\partial t^2} = -\kappa^2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2}, \quad \kappa^2 = \frac{\rho h}{D}. \quad (4.17)$$

Како квазистатички део угиба w_s задовољава граничне услове (4.10) и (4.11), то динамички део угиба треба да задовољава почетне услове:

$$w_d = \frac{\partial w_d}{\partial t} = 0, \quad \text{за } t=0 \quad (4.18)$$

и хомогене граничне услове:

$$w_d = 0, \quad \Delta w_d = 0, \quad \text{за } x = \pm a \quad y = \pm b. \quad (4.19)$$

Решење једначине (4.16) узећемо у облику:

$$w_s = -\frac{6}{h} (1 + \nu) (x^2 + y^2) T_M + w_s' + w_s'', \quad (4.20)$$

где су функције w_s' и w_s'' бихармонијске, које подвргавамо следећим граничним условима:

$$w_s' = \frac{\partial^2 w_s'}{\partial x^2} = 0, \quad \text{за } x = \pm a, \quad (4.21)$$

$$w_s' = \frac{6}{h} (1 + \nu) (b^2 + x^2) T_M, \quad \frac{\partial^2 w_s'}{\partial y^2} = 0, \quad \text{за } y = \pm b, \quad (4.22)$$

$$w_s'' = \frac{6}{h} (1 + \nu) (a^2 + y^2) T_M, \quad \frac{\partial^2 w_s''}{\partial x^2} = 0, \quad \text{за } x = \pm a, \quad (4.23)$$

$$w_s'' = 0, \quad \frac{\partial^2 w_s''}{\partial y^2} = 0, \quad \text{за } y = \pm b. \quad (4.24)$$

При тим условима за функције w_s' и w_s'' у потпуности су испуњени гранични услови за функције w_s .

Изразе за бихармонијске функције узимамо у облику:

$$w_s' = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (A_n \operatorname{ch} \alpha_n y + \alpha_n y B_n \operatorname{sh} \alpha_n y) \cos \alpha_n x, \quad (4.25)$$

$$w_s'' = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (C_n \operatorname{ch} \beta_n x + \beta_n x D_n \operatorname{sh} \beta_n x) \cos \beta_n y,$$

где је $\alpha_n = \frac{\pi n}{2a}$, $\beta_n = \frac{\pi n}{2b}$. Израз за w_s' аутоматски задовољава услов (4.21), а израз за w_s'' — услове (4.24).

Ради задовољавања осталих граничних услова развијамо у Фуријеове редове следеће величине, које улазе у граничне услове (4.22) и (4.23):

$$-\frac{6}{h}(1+\nu)(b^2+x^2)T_M = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \alpha_n \cos \alpha_n x, \quad (4.26)$$

$$-\frac{6}{h}(1+\nu)(a^2+y^2)T_M = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \beta_n \cos \beta_n y,$$

где су

$$\alpha_n = -\frac{12(1+\nu)T_M}{\alpha_n a h} \left(a^2 + b^2 - \frac{2}{\alpha_n^2} \right) \sin \frac{n\pi}{2}, \quad (4.27)$$

$$\beta_n = -\frac{12(1+\nu)T_M}{\beta_n b h} \left(a^2 + b^2 - \frac{2}{\beta_n^2} \right) \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Уносећи изразе (4.25) и (4.26) у граничне услове (4.22) и (4.23), налазимо константе:

$$A_n = -\frac{\alpha_n}{\text{ch}^2 \alpha_n b} \left(\text{ch} \alpha_n b + \frac{\alpha_n b}{2} \text{sh} \alpha_n b \right), \quad B_n = \frac{\alpha_n}{2 \text{ch} \alpha_n b}, \quad (4.28)$$

$$C_n = -\frac{\beta_n}{\text{ch}^2 \beta_n a} \left(\text{ch} \beta_n a + \frac{\beta_n a}{2} \text{sh} \beta_n a \right), \quad D_n = -\frac{\beta_n}{2 \text{ch} \beta_n a}.$$

Сада одредимо динамички део угиба. Услови (4.19) су задовољени, ако се динамички део изабере у облику израза:

$$w_d = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} q_{nm}(t) \cos \alpha_n x \cos \beta_m y. \quad (4.29)$$

Представљајући функцију w_s у облику двоструког тригонометријског реда:

$$w_s = \frac{12}{h} T_M \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} K_{nm} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y, \quad (4.30)$$

где је

$$K_{nm} = -\frac{16(1+\nu)(-1)^{\frac{n+m}{2}}}{\pi^2 nm(\alpha_n^2 + \beta_m^2)},$$

и увршћујући редове (4.29) и (4.30) у једначину (4.17), добивамо диференцијалну једначину за одређивање коефицијената q_{nm} :

$$\frac{d^2 q_{nm}}{dt^2} + \omega_{nm}^2 q_{nm} + K_{nm} \frac{12}{h} \frac{\partial^2 T_M}{\partial t^2} = 0, \quad (4.31)$$

где је

$$\omega_{nm} = \frac{\alpha_n^2 + \beta_m^2}{\kappa},$$

са почетним условима:

$$q_{nm}=0, \quad \frac{\partial q_m}{\partial t}=0, \quad \text{за } t=0. \quad (4.32)$$

Примењујући Лапласову трансформацију и узимајући у обзир услове (4.32) и једнакост $T_M(0)=0$,

добивамо алгебарске једначине за слике q_{nm}^* :

$$(s^2 + \omega_{nm}^2) q_{nm}^* + \frac{12}{h} K_{nm} \left[s^2 T_M^* - \frac{d T_M(0)}{dt} \right] = 0.$$

После инверзне трансформације, извршене узимањем у обзир израза (4.12) за T_M и једнакости

$$\frac{d T_M(0)}{dt} = \frac{q \alpha h}{24 \lambda} \cdot \frac{96 \beta}{\pi^4} \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \frac{q \alpha \beta h}{\pi^2 \lambda},$$

добивамо коначни резултат за динамички део решења у облику:

$$w_a = \frac{6 q \alpha \beta}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \sum_{m=1, 3, \dots}^{\infty} \left\{ K_{nm} \left[\frac{1}{\omega_{nm}} \sin \omega_{nm} t - \frac{8 \beta}{\pi^2} \sum_{j=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{j^4 \beta^2 + \omega_{nm}^2} \left(\cos \omega_{nm} t + \frac{\omega_{nm}}{\beta} \cdot \frac{1}{j^2} \sin \omega_{nm} t - e^{-j^2 \beta t} \right) \right] \right\} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y. \quad (4.33)$$

Изводећи прорачуне за размере максималног угиба w_{\max} у центру плоче према највећем квазистатичком угибу $(w_s)_{\max}$, за разне вредности параметра

$$B = \frac{h}{2 a} \sqrt[4]{\frac{D}{\rho h a T^2}}$$

и за размере $\frac{a}{b}$, они показују, да се динамички ефект увећава у оној мери у којој се смањује вредност параметра B , на пример, на рачун умањења дебљине плоче. За $B \rightarrow 0$ размера $\frac{w_{\max}}{(w_s)_{\max}}$ постаје једнака два [24].

§ 5. Параметарске осцилације. Поставка проблема

Са гледишта сопствених осцилација еластични систем, уопште говорећи, дефинише се са два параметра, који карактеришу осцилаторни процес: сопственом фреквенцијом p и декрементом δ (или коефицијентом пада). При томе је осцилаторно тело изоловано од свих утицаја. Такве осцилације настају после спољашњег поремећаја, које дефинише почетни отклон

и почетну брзину, тј. почетне услове, који једнозначно дефинишу даљи процес у еластичном систему.

Принудне осцилације у телу, тј. осцилације под дејством спољашњих сила, дефинишу се не само параметрима еластичног система (p и δ), већ и спољашњим силама; математички то се изражава тиме што у једначину улази члан, који експлицитно зависи од времена. Ипак могућ је спољашњи утицај другог облика, када на тело не дејствује спољашња сила заједно са оним параметрима система (који улазе у коефицијенте једначине) и зависи од времена, или спољашњи утицај мења параметре еластичног система. Појава осцилаторног процеса услед промене параметара назива се параметарском побудом осциловања, а осцилације се називају параметарским.

На тај начин, параметарске осцилације појављују се у еластичном систему услед периодичне промене оних његових својстава, која остају непроменљива при слободним осцилацијама. Дакле, и међу осцилацијама проузрокованим спољашњим периодичним утицајем неопходно је разликовати два облика: принудне осцилације и параметарске осцилације. Принудне осцилације проузроковане су дејством датих спољашњих сила на еластични систем, чије су карактеристике непроменљиве, тј. величине (параметри), које карактеришу та својства су константне. Параметарске осцилације, напротив, настају услед периодичне промене неких параметара самог еластичног система.

Појава пораста током времена интензитета параметарских осцилација еластичног система назива се параметарском резонанцијом. Параметарска резонанција настаје при одређеном односу између фреквенција промене параметра под спољашњим утицајем на тело и фреквенције његових сопствених осцилација; она може наступити сваки пут, кад је размера

$$\zeta = \frac{\text{средња сопствена фреквенција}}{\text{фреквенција промене параметра}}$$

блиска једној од следећих вредности: $1/2, 1, 2, 3, \dots$ Услови појаве параметарске резонанције лакше се испуњавају уколико је јача промена параметра, ако је мањи губитак енергије у еластичном систему (трење или отпор) и уколико је мања вредност ζ . Зато се најчешће узима $\zeta = 1/2$. Битна карактеристика параметарске резонанције је та да се она може појавити при постојању и незнатног почетног одступања еластичног система од стања равнотеже. Практично таква одступања увек су могућа. Наведимо поставку проблема о параметарским осцилацијама љуски. Проучимо понашање љуске под утицајем спољашњег површинског оптерећења:

$$X_0(\alpha, \beta, t), \quad Y_0(\alpha, \beta, t), \quad Z_0(\alpha, \beta, t), \quad (5.1)$$

које се мења током времена по неком периодичком закону.

Нека оптерећење (5.1) изазива у љуски безмоментно напонско стање и нека су у том стању померања тачака средње површи једнака u_0, v_0, w_0 . Прелаз на моментно стање даје померања

$$u = u_0 + \tilde{u}, \quad v = v_0 + \tilde{v}, \quad w = w_0 + \tilde{w}, \quad (5.2)$$

која задовољавају једначине моментне теорије. Координате X, Y, Z — површинског оптерећења састоје се од задатог спољашњег оптерећења (5.1), сила инерције и допунског оптерећења, које се поављује при одступању средње површи од полазног безмоментног стања:

$$X = X_0 + \Delta X - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad Y = Y_0 + \Delta Y - m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad Z = Z_0 + \Delta Z - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (5.3)$$

Овде је m — маса љуске, рачуната по јединици површине средње површи.

Уносећи (5.2) и (5.3) у диференцијалне једначине моментне теорије и узимајући да су непоремећени параметри везани диференцијалним једначинама:

$$L_{11}(u_0) + L_{12}(v_0) + L_{13}(w_0) + \frac{1-v^2}{Eh} \left(X_0 - m \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right) = 0,$$

$$L_{21}(u_0) + L_{22}(v_0) + L_{23}(w_0) + \frac{1-v^2}{Eh} \left(Y_0 - m \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \right) = 0,$$

$$L_{31}(u_0) + L_{32}(v_0) + L_{33}(w_0) + \frac{1-v^2}{Eh} \left(Z_0 - m \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right) = 0,$$

добивамо „једначине по варијацијама“:

$$L_{11}(\tilde{u}) + L_{12}(\tilde{v}) + L_{13}(\tilde{w}) + \frac{1-v^2}{Eh} \left(\Delta X - m \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} \right) = 0,$$

$$L_{21}(\tilde{u}) + L_{22}(\tilde{v}) + L_{23}(\tilde{w}) + \frac{1-v^2}{Eh} \left(\Delta Y - m \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t^2} \right) = 0, \quad (5.4)$$

$$L_{31}(\tilde{u}) + L_{32}(\tilde{v}) + L_{33}(\tilde{w}) + \frac{1-v^2}{Eh} \left(\Delta Z - m \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2} \right) = 0;$$

таласасте цртице изнад $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ даље изостављамо.

Овде су L_{11}, L_{12}, \dots — линеарни диференцијални оператори, који се односе на линије главних кривина; h — дебљина љуске.

Што се тиче одређивања координата оптерећења $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$, оне се могу остварити на следећи начин. Нека се безмоментно стање карактерише нормалним силама $T_1(\alpha, \beta, t)$ и $T_2(\alpha, \beta, t)$, које ћемо сматрати позитивним, ако оне изазивају притисак. Занемарујући силе инерције безмоментног стања, можемо израчунати унутрашње силе из једначина равнотеже елемента љуске за то стање:

$$\frac{\partial(B T_1)}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_2 = ABX_0, \quad \frac{\partial(A T_2)}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} T_1 = ABY_0,$$

$$k_1 T_1 + k_2 T_2 = Z_0, \quad (5.5)$$

где су k_1, k_2 — главне кривине.

Нека су, као и раније, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — релативне подужне деформације. Прва квадратна форма добива облик:

$$ds^2 = A^2 (1 + \varepsilon_1)^2 d\alpha^2 + B^2 (1 + \varepsilon_2)^2 d\beta^2.$$

Сада, ако у диференцијалне једначине (5.5) уместо коефицијената прве квадратне форме A и B унесемо $A(1 + \varepsilon_1)$ одн. $B(1 + \varepsilon_2)$; осим тога, у последњој једначини заменимо k_1 и k_2 са $k_1 + \varkappa_1$ и $k_2 + \varkappa_2$, онда у том случају оне неће бити идентички задовољене, па је, дакле, неопходно уместо X_0, Y_0, Z_0 увести $X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y, Z_0 + \Delta Z$, где су $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ — допунска (додатна) оптерећења. На тај начин, једначине (5.5) треба узети у облику:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} [B(1 + \varepsilon_2) T_1] - T_2 \frac{\partial}{\partial \alpha} [B(1 + \varepsilon_2)] = AB(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(X_0 + \Delta X),$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} [A(1 + \varepsilon_1) T_2] - T_1 \frac{\partial}{\partial \beta} [A(1 + \varepsilon_1)] = AB(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(Y_0 + \Delta Y),$$

$$(k_1 + \varkappa_1) T_1 + (k_2 + \varkappa_2) T_2 = Z_0 + \Delta Z.$$

Узимајући у обзир (5.5) и занемарујући мале величине другог реда (производе типа $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2, \varepsilon_1 \cdot \Delta X$), долазимо до следећих формула:

$$\Delta X = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (\varepsilon_2 B T_1) - T_2 \frac{\partial}{\partial \alpha} (\varepsilon_2 B) \right] - X_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

$$\Delta Y = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} (\varepsilon_1 A T_2) - T_1 \frac{\partial}{\partial \beta} (\varepsilon_1 A) \right] - Y_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad (5.6)$$

$$\Delta Z = T_1 \varkappa_1 + T_2 \varkappa_2.$$

Унесимо у формуле (5.6) уместо $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varkappa_1, \varkappa_2$ изразе:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + k_1 w, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + k_2 w,$$

$$\varkappa_1 = \frac{\partial k_1}{\partial \alpha} \frac{u}{A} + \frac{\partial k_1}{\partial \beta} \frac{v}{B} - k_1^2 w - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta},$$

$$\varkappa_2 = \frac{\partial k_2}{\partial \alpha} \frac{u}{A} + \frac{\partial k_2}{\partial \beta} \frac{v}{B} - k_2^2 w - \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha}.$$

(5.7)

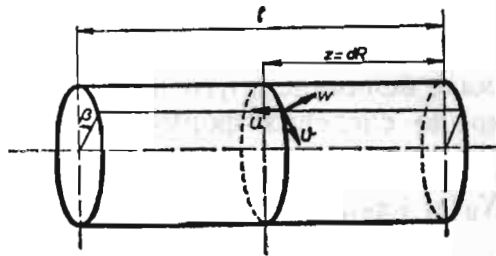
Сада је лако приметити, да су чланови у једначинама (5.4), који садрже $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$, линеарни у односу на унутрашње силе T_1, T_2 , а такође у односу на померања u, v, w и њихове изводе. За случај периодичног спољњег оптерећења силе T_1, T_2 су такође периодичне функције времена; систем диференцијалних једначина (5.4) има у том случају периодичне коефицијенте. Стављајући:

$$\begin{aligned}
 u(\alpha, \beta, t) &= \sum_k u_k(t) \varphi_k(\alpha, \beta), & v(\alpha, \beta, t) &= \sum_k v_k(t) \psi_k(\alpha, \beta), \\
 w(\alpha, \beta, t) &= \sum_k w_k(t) \chi_k(\alpha, \beta),
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

где су функције изабране тако, да би били задовољени одговарајући гранични услови, и увршћујући их у систем диференцијалних једначина (5.4), сводимо проблем на систем обичних диференцијалних једначина са периодичним коефицијентима. Методе решавања таквих система веома се добро проучене.

§ 6. Затворена цилиндарска љуска

Нека је кружна цилиндарска љуска са полупречником средње површи R и дебљином h оптерећена једнолико распоређеним радијалним оптерећењем $q_0 + q_t \cos \theta t$ и притиснута подужном силом $P_0 + P_t \cos \theta t$. Систем координата изаберимо према сл. 16, уводећи бездимензиону ко-



сл. 16

ординату $\alpha = \frac{z}{R}$. Означимо померања: са u — у правцу генератрисе, са v — у циркуларном и са w — у радијалном правцу.

У систем диференцијалних једначина (5.4), у границама прихваћених претпоставки, имајући у виду цилиндарску љуску, треба ставити [25]:

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, & L_{22} &= \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}, \\
 L_{12} = L_{21} &= \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}, & L_{13} = L_{31} &= \nu \frac{\partial}{\partial \alpha}, \\
 L_{23} = L_{32} &= \frac{\partial}{\partial \beta}, & L_{33} &= c^2 \Delta^2.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Овде је

$$\begin{aligned}
 c^2 &= \frac{h^2}{12 R^2}, & \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \\
 \Delta^2 &= \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}.
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Приметимо, да се унутрашње силе, које одговарају полазном безмоментном стању, изражавају у облику:

$$T_1 = \frac{1}{2\pi R} (P_0 + P_t \cos \theta t), \quad T_2 = R(q_0 + q_t \cos \theta t), \quad (6.3)$$

и да је у посматраном случају $A=B=R$, $k_1=0$, $k_2=\frac{1}{R}$ а према обрасцима (5.7):

$$\epsilon_1 = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad \epsilon_2 = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right),$$

$$\kappa_1 = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + w \right),$$

па је лако исписати изразе за координате дејствујућег оптерећења ΔX , ΔY , ΔZ , користећи се обрасцима (5.6):

$$\Delta X = \frac{T_1 - T_2}{R^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right), \quad \Delta Y = -\frac{T_1 - T_2}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta},$$

$$\Delta Z = -\frac{1}{R^2} \left[T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + T_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + w \right) \right]. \quad (6.4)$$

На тај начин, за цилиндарску љуску једначине (5.4), добивају облик:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \nu \frac{\partial w}{\partial \alpha} +$$

$$+ \frac{1-\nu^2}{Eh} \left[\frac{T_1 - T_2}{R^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right) - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] = 0,$$

$$\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial w}{6\beta} -$$

$$- \frac{1-\nu^2}{Eh} \left[\frac{T_1 - T_2}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right] = 0, \quad (6.5)$$

$$\nu \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta} + c^2 \Delta^2 w + \frac{1-\nu^2}{Eh} \left\{ \frac{1}{R^2} \left[T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + T_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + w \right) \right] + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right\} = 0.$$

Решење система диференцијалних једначина (6.5) тражимо у облику:

$$u = U(t) \cos n\alpha \cos k\beta, \quad v = V(t) \sin n\alpha \sin k\beta, \quad w = W(t) \sin n\alpha \cos k\beta, \quad (6.6)$$

где је $n = \frac{i\pi R}{l}$, при чему i и k узимају целе позитивне вредности. Овде i

показује број полуталаса у меридијанском правцу (l — дужина љуске), k даје број полуталаса у циркуларном правцу. Решење у облику (6.6) одговара оном случају, када на крајевима љуске ($z=0$ и $z=l$) ишчезавају како радијална, тако и циркуларна померања ($u \neq 0$).

Лако се уверавамо непосредним уврштавањем, да ће једначине (6.5) бити идентички задовољене, ако се функције $U(t)$, $V(t)$, $W(t)$ одређују из система обичних диференцијалних једначина:

$$\begin{aligned} & \frac{m(1-\nu^2)}{Eh} \frac{d^2 U}{dt^2} + \left(n^2 + \frac{1-\nu}{2} k^2 \right) U - \frac{1+\nu}{2} nkV - \nu nW - \\ & - \frac{1-\nu^2}{Eh} \frac{T_1 - T_2}{R^2} n(kV + W) = 0, \\ & \frac{m(1-\nu^2)}{Eh} \frac{d^2 V}{dt^2} - \frac{1+\nu}{2} nkU + \left(k^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) V + kW + \\ & + \frac{1-\nu^2}{Eh} \frac{T_1 - T_2}{R^2} nkU = 0, \\ & \frac{m(1-\nu^2)}{Eh} \frac{d^2 W}{dt^2} - \nu nU + kV + c^2(n^2 + k^2)^2 W - \\ & - \frac{1-\nu^2}{Eh} \frac{W}{R^2} [T_1 n^2 + T_2(k^2 - 1)] = 0. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Систем једначина (6.7) може се представити у матричном облику

$$m \frac{d^2 \mathbf{f}}{dt^2} + (\tilde{R} - T_1 \tilde{S}_1 - T_2 \tilde{S}_2) \mathbf{f} = 0.$$

где је \mathbf{f} — вектор са компонентама U , V , W ,

$$\tilde{R} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} n^2 + \frac{1-\nu}{2} k^2 & -\frac{1+\nu}{2} nk & -\nu n \\ -\frac{1+\nu}{2} nk & k^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 & k \\ -\nu n & k & c^2(n^2 + k^2)^2 \end{vmatrix},$$

$$\tilde{S}_1 = \frac{1}{R^2} \begin{vmatrix} 0 & nk & n \\ -nk & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n^2 \end{vmatrix}, \quad \tilde{S}_2 = \frac{1}{R^2} \begin{vmatrix} 0 & -nk & n \\ nk & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 - 1 \end{vmatrix}.$$

Фреквенције сопствених осцилација неоптерећене љуске одређују се из једначине

$$|\tilde{R} - p^2 \tilde{E}| = 0,$$

а критични параметри подужног притисног и радијалног оптерећења — из једначина:

$$\left| \tilde{R} - \frac{P}{2\pi R} \tilde{S}_1 \right| = 0, \quad \left| \tilde{R} - qR \tilde{S}_2 \right| = 0.$$

Проблем динамичке стабилности доводи у првој апроксимацији до једначине (деталније о стабилности љуски биће речено у IX и X глави)

$$\left| \tilde{R} - \frac{1}{2\pi R} \left(P_0 \pm \frac{1}{2} P_t \right) \tilde{S}_1 - \left(q_0 \pm \frac{1}{2} q_t \right) R \tilde{S}_2 - \frac{1}{4} \theta^2 \tilde{E} \right| = 0. \quad (6.8)$$

У случају, ако се може занемарити утицај тангентних сила инерције и тангентних компонената дејствујућег оптерећења, тада се проблем о осцилацијама цилиндарске љуске своди на једну једначину. За неплитку цилиндарску љуску она има облик:

$$(\Delta + 1)^2 \Delta^2 \Phi - (1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \Delta \Phi + \frac{1 - \nu}{c^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} - \frac{R^4}{D} Z = 0, \quad (6.9)$$

Овде је $\Delta^2 \Phi = w$.

Користећи (6.9) и последњи од образаца (6.4), добијамо:

$$\begin{aligned} & (\Delta + 1)^2 \Delta^2 \Phi - (1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \Delta \Phi + \frac{1 - \nu^2}{c^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} + \\ & + \frac{m R^4}{D} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta^2 \Phi) + \frac{R^2}{D} \left[T_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + T_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right) \right] \Delta^2 \Phi = 0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Нека је λ — дужина полуталаса у меридијанском (или циркуларном) правцу. Тада ће први члан у једначини (6.10) имати ред $\sim \left(\frac{R}{\lambda} \right)^8$, други члан $\sim \left(\frac{R}{\lambda} \right)^6$, трећи члан $\sim \frac{R^6}{\lambda^4 h^2}$. Ако је дужина полуталаса мала у по-

ређењу са полупречником, тада се други сабирак у (6.10) може занемарити. Изостављајући на основу сличних расуђивања, и друге чланове који су мале величине истог реда, долазимо до једначине

$$\Delta^2 \Delta^2 \Phi + \frac{1 - \nu^2}{c^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} + \frac{R^4}{D} \left(\frac{T_1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{T_2}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Delta^2 \Phi = 0. \quad (6.11)$$

Ова диференцијална једначина у потпуности одговара познатој једначини за веома плитке љуске.

Дакле, враћајући се на општу диференцијалну једначину (6.10) и стављајући у њу

$$\Phi(\alpha, \beta, t) = f(t) \sin n\alpha \cos k\beta,$$

што одговара случају (6.6), долазимо до обичне диференцијалне једначине:

$$\frac{mR^4}{D} \frac{d^2 f}{dt^2} + g(n, k) f - \frac{R^2}{D} [T_1 n^2 + T_2 (k^2 - 1)] f = 0, \quad (6.12)$$

где је

$$g(n, k) = \frac{(n^2 + k^2 + 1)^2 (n^2 + k^2)^2 + (1 - \nu) (n^4 - k^4) n^2 + \frac{1 - \nu^2}{c^2} n^4}{(n^2 + k^2)^2}. \quad (6.13)$$

Уведимо ознаке:

$$p^2 = \frac{Dg(n, k)}{mR^4}, \quad T_{1*} = \frac{Dg(n, k)}{n^2 R^2}, \quad T_{2*} = \frac{Dg(n, k)}{(k^2 - 1) R^2}. \quad (6.14)$$

Једначина (6.12) може се сада написати у облику:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + p^2 \left(1 - \frac{P}{P_*} - \frac{q}{q_*} \right) f = 0, \quad (6.15)$$

где је $P_* = 2\pi RT_{1*}$, $q_* = \frac{T_{2*}}{R}$. Дакле, проблем је сведен на познату

обичну диференцијалну једначину другог реда и може се решити до краја.

Коначно приметимо, да се ти резултати лако уопштавају за случај ортотропне цилиндарске љуске. Заправо, нека су E_1, E_2 и ν_1, ν_2 — модули еластичности и Поасонови коефицијенти у правцима $\beta = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$ респективно; G — модул клизања. Уведимо следеће диференцијалне операторе:

$$\Delta_0 = E_0 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + E_2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad \Delta_1^2 = E_1 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + E_4 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + E_2 \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}, \quad (6.16)$$

$$\Delta_2^2 = E_1 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + E_3 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + E_2 \frac{\partial^4}{\partial \beta^4},$$

где су

$$E_0 = 2G(1 - \nu_1 \nu_2) + E_2 \nu_1,$$

$$E_3 = 4G(1 - \nu_1 \nu_2) + E_1 \nu_2 + E_2 \nu_1, \quad (6.17)$$

$$E_4 = \frac{E_1 E_2}{G} - E_1 \nu_2 - E_2 \nu_1.$$

Диференцијална једначина, аналогна (6.11), за ортотропну љуску добива облик:

$$\Delta_1^2 \Delta_2^2 \Phi + \frac{E_1 E_2 (1 - \nu_1 \nu_2)}{c^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} + \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{c^2 h} \left(T_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + T_2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + m R^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Delta_1^2 \Phi = 0, \quad (6.18)$$

где је Φ — функција, везана са радијалним померањем релацијом (6.9). Даље трансформације, сличне горе назначеним, поново доводе до обичне диференцијалне једначине типа (6.15), чији се коефицијенти одређују без тешкоћа.

§ 7. Сферна љуска

Проучимо осцилације сферне љуске под дејством једнолико распоређеног по површи радијалног оптерећења:

$$Z_0 = -(q_0 + q_t \cos \theta t). \quad (7.1)$$

Означимо са R — полупречник средње површи, са h — дебљину љуске и изаберимо географске координате ψ , β (ψ — угао ширине, β — угао дужине). Померања тачака средње површи означаваћемо са u — у правцу линије $\psi = \text{const}$, са v — у правцу линије $\beta = \text{const}$ и w — радијално померање, позитивно у правцу спољашње нормале.

Познато је [13], да се у случају само радијалног оптерећења систем диференцијалних једначина сферне љуске своди на следећу једначину

$$[c^2(\Delta + 1)^2 + 1] (\Delta + 2) w = \frac{R^2 Z}{Eh} (\Delta - 1 - \nu). \quad (7.2)$$

Овде је Δ — Лапласов оператор на сфери:

$$\Delta(\quad) = \frac{1}{\sin \psi} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \frac{\partial(\quad)}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \psi} \frac{\partial^2(\quad)}{\partial \beta^2} \right], \quad c^2 = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2} \quad (7.3)$$

За безмоментно стање унутрашње силе љуске своде се на притисне силе

$$T_1 = T_2 = \frac{1}{2} R(q_0 + q_t \cos \theta t). \quad (7.4)$$

У случају сферне љуске је:

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{R}, \quad A = R, \quad B = R \sin \psi$$

и обрасци (5.7) добивају облик

$$\kappa_1 = -\frac{1}{R^2} \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} \right), \quad \kappa_2 = -\frac{1}{R^2} \left(w - \frac{1}{\sin^2 \psi} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \text{ctg} \psi \frac{\partial w}{\partial \psi} \right).$$

При чему ће, према (5.6) допунско дејствујуће оптерећење, које се појављује при одступању љуске од безмоментног стања, бити:

$$\Delta Z = \frac{1}{2} R (q_0 + q_t \cos \theta t) (\kappa_1 + \kappa_2),$$

или

$$\Delta Z = -\frac{1}{2R} (q_0 + q_t \cos \theta t) (\Delta + 2) w. \quad (7.5)$$

компоненте ΔX и ΔY су једнаке нули. Осим спољашњег притиска (7.1) и насталог оптерећења (7.5) на љуску дејствују и силе инерције:

$$-m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad -m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (7.6)$$

Одбацујући, у сагласности са прихваћеном апроксимацијом, тангентне компоненте сила инерције, налазимо, да се силе које дејствују на љуску своде на радијално оптерећење

$$Z = -(q_0 + q_t \cos \theta t) - \frac{q}{2R} (q_0 + q_t \cos \theta t) (\Delta + 2) w - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (7.7)$$

Први члан представља равномерни притисак љуске и може се изоставити, ако се под $w(\psi, \beta, t)$ подразумева отклон од непоремећеног безмоментног стања. Тада једначина (7.2) која даје решење проблема има облик:

$$[c^2 (\Delta + 1)^2 + 1] (\Delta + 2) w + \frac{(q_0 + q_t \cos \theta t) R}{2 Eh} (\Delta + 1 - \nu) (\Delta + 2) w + \frac{m R^2}{Eh} (\Delta + 1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (7.8)$$

Тражићемо решење диференцијалне једначине (7.8) у класи функција

$$w(\psi, \beta, t) = f(t) F(\psi, \beta), \quad (7.9)$$

где је $f(t)$ — непозната функција времена; $F(\psi, \beta)$ — решење диференцијалне једначине:

$$\Delta F + \lambda F = 0. \quad (7.10)$$

које задовољава граничне услове за w (тј. услове непрекидности и једнозначности на сфери). Увршћење у (7.8) даје после скраћивања са $F(\psi, \beta)$:

$$[c^2 (\lambda - 1)^2 + 1] (\lambda - 2) f - \frac{(q_0 + q_t \cos \theta t) R}{2 Eh} (\lambda - 1 + \nu) (\lambda - 2) f + \frac{m R^2}{Eh} (\lambda - 1 + \nu) \frac{d^2 f}{dt^2} = 0. \quad (7.11)$$

Ако уведемо ознаке:

$$p^2 = \frac{Eh}{m R^2} \frac{\lambda - 2}{\lambda - 1 + \nu} [c^2 (\lambda - 1)^2 + 1], \quad (7.12)$$

$$q_* = \frac{2 Eh}{R(\lambda - 1 + \nu)} [c^2 (\lambda - 1)^2 + 1]$$

и, унесемо их у (7.11), добивамо:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + p^2 \left(1 - \frac{q_0 + q_t \cos \theta t}{q_*} \right) f = 0. \quad (7.13)$$

Формуле (7.12) дају сопствене учестаности и критичне силе, које зависе од засад непознатог параметра λ . Међутим, једно практично питање може се решити до краја и без одређивања λ . Границе главних области неста-

билности могу се наћи по познатим приближним обрасцима, посебно, доња граница

$$\theta_{*}^2 = 4 p^2 \left(1 - \frac{q_0 + \frac{1}{2} q_t}{q_*} \right). \quad (7.14)$$

За практичне примене од интереса је да се зна обвојница нижих граница области нестабилности. Претпоставимо, да параметар λ може имати ма које реалне позитивне вредности, тј. допустимо, да диференцијална једначина (7.10) има непрекидан спектар сопствених вредности. За ограничене области, каква је сфера, спектар сопствених вредности је дискретан. Али у околини вредности λ које нас интересују спектар једначине (7.10) је ипак довољно „густ“, да грешка, која произилази из учињене претпоставке, не би била велика.

Даље означимо:

$$\theta_{*}^2 = \frac{4 E h}{m R^2} q(\lambda), \quad (7.15)$$

где је

$$q(\lambda) = (\lambda - 2) \left[\frac{c^2 (\lambda - 1)^2 + 1}{\lambda - 1 + \nu} - \frac{\left(q_0 + \frac{1}{2} q_t \right) R}{2 E h} \right]. \quad (7.16)$$

За одређивање обвојнице ставимо $\frac{dq}{d\lambda} = 0$, одакле добивамо једначину за λ . Размотримо случај довољно великих вредности $\lambda \gg 1$. Тада је:

$$q(\lambda) \approx c^2 \lambda^2 + 1 - \frac{\left(q_0 + \frac{1}{2} q_t \right) R}{2 E h} \lambda, \quad (7.17)$$

одакле је корен једначине $\frac{dq}{d\lambda} = 0$:

$$\lambda_* = \frac{\left(q_0 + \frac{1}{2} q_t \right) R}{4 E h c^2} \quad (7.18)$$

и, дакле,

$$\theta_{*}^2 = \frac{4 E h}{m R^2} \left[1 - \frac{\left(q_0 + \frac{1}{2} q_t \right)^2 R^2}{16 E^2 h^2 c^2} \right]. \quad (7.19)$$

Уведимо ознаке:

$$q_{**} = \frac{4 E h c}{R}, \quad p_0^2 = \frac{E h}{m R^2}. \quad (7.20)$$

Образец (7.19) добива облик:

$$\theta_{**}^2 = 4 p_0^2 \left[1 - \frac{\left(q_0 + \frac{1}{2} q_t \right)^2}{q_{**}^2} \right]. \quad (7.21)$$

Конечно, треба имати на уму, да q_{**} представља приближну (у смислу учињених претпоставки) вредност минималног критичног притиска.

Стварно, водећи рачуна да је $c^2 = \frac{h^2}{12 R^2 (1 - \nu^2)}$, добивамо добро познати образац:

$$q_{**} = \frac{2 E h^2}{R^2} \frac{1}{\sqrt{3 (1 - \nu^2)}}. \quad (7.22)$$

На крају, позабавимо се одређивањем параметра λ у општем случају. Једначина (7.10) на сфери:

$$\frac{1}{\sin \psi} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \frac{\partial F}{\partial \psi} \right) \right] + \frac{1}{\sin^2 \psi} \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} + \lambda F = 0, \quad (7.23)$$

доводи, као што је познато, до сферних функција. Решење диференцијалне једначине (7.23) налазимо у облику:

$$F(\psi, \beta) = P(\psi) \frac{\sin k \beta}{\cos k \beta}. \quad (7.24)$$

Услов једнозначности функције $F(\psi, \beta)$ на сфери захтева, да k буде цео број или нула ($k = 0, 1, 2, \dots$). Уношење у (7.23) даје:

$$\frac{1}{\sin \psi} \left[\frac{d}{d\psi} (\sin \psi) \frac{dP}{d\psi} \right] + \left(\lambda - \frac{k^2}{\sin^2 \psi} \right) P = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (7.25)$$

Стављајући $x = \cos \psi$, сводимо једначину (7.25) на облик:

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left(\lambda - \frac{k^2}{1 - x^2} \right) P = 0. \quad (7.26)$$

То је позната једначина за Лежандрове (Legendre) полиноме. Једначина (7.26) има сопствене вредности:

$$\lambda_n = n(n+1), \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.27)$$

Свакој сопственој вредности λ_n одговара $(n+1)$ сопствених функција:

$$P_n^k(x) = (1 - x^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k}{dx^k} P_n(x), \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n), \quad (7.28)$$

где је

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad (7.29)$$

Сада је могуће за једначину (7.23) написати систем његових решења

$$\begin{aligned}
 k=0 & \quad F_0(\psi, \beta) = P_n(\cos \psi), \\
 k=1 & \quad F_{-1}(\psi, \beta) = P_n^{(1)}(\cos \psi) \sin \beta, \\
 & \quad F_1(\psi, \beta) = P_n^{(1)}(\cos \psi) \cos \beta, \\
 & \quad \text{''} \quad \quad \quad \text{''} \\
 & \quad \text{''} \quad \quad \quad \text{''} \\
 k=n & \quad F_{-n}(\psi, \beta) = P_n^{(n)}(\cos \psi) \sin n \beta, \\
 & \quad F_n(\psi, \beta) = P_n^{(n)}(\cos \psi) \cos n \beta.
 \end{aligned} \tag{7.30}$$

Познато је, да Лежандрови полиноми $P_n(x)$ имају у интервалу промене $\psi(0, \pi)$, тачно n нула. Прикључене (аташиране) функције $P_n^{(k)}(x)$ имају дакле $(n-k)$ нула.

Како $\sin k \beta$ и $\cos k \beta$ постају нуле на $2k$ меридијана, а $P_n^{(k)}(x)$ с обзиром на горе речено — на $(n-k)$ ширина, то се цела сфера дели на мрежу у чијим пољима $F(\psi, \beta)$ задржава константан знак. То значи, да број λ дефинише форме осциловања и, посебно, димензије „полуталаса“ у меридијанском и екваториском правцу. Уколико су мање димензије полуталаса, утолико је дакле, већи параметар λ . У том случају разлика између две суседне сопствене вредности постаје мала у поређењу са њиховим величинама, чиме се оправдава претпоставка о непрекидности промене λ .

§ 8. Термопараметарска побуда осциловања мембране

Размотримо правоугаону мембрану, запљускивану са обе стране врелим гасом, у коме се врши пулсација температуре [26]. Једначина попречних осцилација такве мембране може се написати у облику:

$$(N_{0x} + N_{1x} \sin \Omega t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (N_{0y} + N_{1y} \sin \Omega t) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{8.1}$$

где су N_{0x} и N_{0y} — статички истежуће силе по јединици дужине, које дејствују у правцима оса x и y ; $N_{1x} \sin \Omega t$ и $N_{1y} \sin \Omega t$ — динамички додаци статичким силама, проузроковани пулсацијом температуре у плочи: $m = \rho h = \frac{\gamma}{g} h$; Ω — кружна фреквенција пулсације температуре.

Решење диференцијалне једначине (8.1) тражићемо у облику:

$$w = A_{nk}(t) \sin \frac{n \pi x}{a} \sin \frac{k \pi y}{b}, \tag{8.2}$$

где су a и b — стране правоугаоне мембране.

Ставивши израз (8.2) у једначину (8.1), добивамо

$$m \frac{d^2 A_{nk}}{dt^2} + \left[N_{0x} \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + N_{0y} \frac{k^2 \pi^2}{b^2} + \left(N_{1x} \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + N_{1y} \frac{k^2 \pi^2}{b^2} \right) \sin \Omega t \right] A_{nk} = 0. \quad (n, k = 1, 2, \dots) \quad (8.3)$$

Дакле, дошли смо до Матјеове (Mathieu) једначине. Узевши у тој једначини $N_{1y} = N_{1x} = 0$, добијамо једначину, из које се могу наћи сопствене фреквенције попречних осцилација мембране:

$$\omega_{nk} = \sqrt{\frac{1}{m} \left(N_{0x} \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + N_{0y} \frac{k^2 \pi^2}{b^2} \right)}, \quad (n, k = 1, 2, \dots). \quad (8.4)$$

Теорија Матјеове једначине добро је разрађена. Користећи се познатим резултатима, могу се написати следеће границе за области динамичке нестабилности мембране, тј. за области у којима могу бити изазване термопараметарске осцилације: прва област нестабилности —

$$\frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{2} q} \geq \frac{\omega_n}{\theta} \geq \sqrt{1 - \frac{1}{2} q}; \quad (8.5)$$

друга област нестабилности —

$$\sqrt{1 + \frac{5}{24} q^2} \geq \frac{\omega_n}{\theta} \geq \sqrt{1 - \frac{5}{24} q^2}, \quad (8.6)$$

где је

$$q = \frac{N_{1x} \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + N_{1y} \frac{k^2 \pi^2}{b^2}}{N_{0x} \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + N_{0y} \frac{k^2 \pi^2}{b^2}}; \quad (8.7)$$

§ 9. Термопараметарска резонанција витких љуски у нестационарном температурном пољу

Размотримо утицај нестационарног температурног поља на стабилност витких по Карману (Karman) љуски, ако су модул еластичности E и коефицијент топлотног ширења α функције од температуре и разјаснимо услове настанка термопараметарске резонанције [27].

Закон промене температуре узима се да је линеаран по дебелини и периодичан по времену:

$$T = T_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right) \cos \omega t + T_2, \quad (9.1)$$

што приближно одговара периодичности промене температуре током времена на површи танке љуске.

У формули (9.1) означено је: T_2 — температура унутарње површи љуске, T_1 — амплитуда, ω — учестаност осцилација температуре на спољној површи љуске, h — дебљина љуске.

Изабран је следећи координатни систем: оса z усмерена је према унутрашњој нормали на средњу површ љуске, а осе x и y по главним линијама кривина средње површи љуске.

Коефицијент линеарног топлотног ширења α и модул еластичности E линеарно зависе од температуре:

$$E = E_0 - E' T, \quad \alpha = \alpha_0 + \alpha' T, \quad (9.2)$$

где су E_0, α_0 — изотермне вредности тих величина.

За Пуасонов коефицијент ν узима се да је константна величина.

У сагласности са горе наведеним претпоставкама, на основу релација (9.1) и (9.2) систем диференцијалних једначина кретања загрејане љуске има следећи облик:

$$\begin{aligned} & \frac{E_1 E_3 - E_2^2}{(1 - \nu^2) E_1} \Delta^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q = \\ & = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R_x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{1}{R_y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \\ & \frac{1}{E_1} \Delta^2 \Phi = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R_x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R_y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (9.3)$$

где је w — функција угиба, Φ — функција напона, ρ — густина материјала љуске, R_x, R_y — полупречници кривина средње површи.

За E_1, E_2, E_3 прихваћене су следеће ознаке:

$$E_1 = \int_{-h/2}^{h/2} E dz, \quad E_2 = \int_{-h/2}^{h/2} E z dz, \quad E_3 = \int_{-h/2}^{h/2} E z^2 dz. \quad (9.4)$$

Ако се сматра да угиби нису велики, и дозвољавају занемарење геометријски нелинеарних чланова у једначинама (9.3), и ако се не узимају у обзир почетна напрезања у средњој површи љуске, тада се систем диференцијалних једначина (9.3) може свести на једну једначину:

$$\begin{aligned} & \frac{E_1 E_3 - E_2^2}{(1 - \nu^2) E_1} \Delta^2 \Delta^2 w + E_1 \left(\frac{1}{R_x^2} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{2}{R_x R_y} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{R_y^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) + \\ & + \rho h \Delta^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = \Delta^2 q. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Ако се изабере решење диференцијалне једначине (9.5) у облику реда:

$$w = \sum_{k=1}^n f_k(t) w_k(x, y), \quad (9.6)$$

где су $w_k(x, y)$ — облици малих сопствених осцилација љуске, и примени метод Б. Г. Галеркина, тада се задатак своди на проучавање диференцијалне једначине другог реда са променљивим коефицијентима. Према (9.1), (9.2), (9.4) коефицијенти добивене једначине су периодичне функције времена; диференцијална једначина припада Матје-Хиловој (Mattieu-Hill) класи и може се представити у облику

$$\frac{d^2 f_k}{dt^2} + \Omega_k^2 [1 - 2 \mu \varphi(t)] f_k = F_k(t), \quad (k=1, 2, \dots). \quad (9.7)$$

Нехомогеност диференцијалне једначине (9.7) проистиче из нехомогености граничних услова, која је изазвана температурним члановима, чији је утицај идентичан са дејством термопоремећајних сила. На основу опште теорије диференцијалних Матје-Хилових једначина [28], могу се испитати области нестабилности решења задатог проблема, које ће у посматраном случају бити области термопараметарске резонанције.

Сагласно диференцијалној једначини (9.7) проучавање динамичких процеса у загреваним љускама при пулсирајућем температурном пољу мора да се изводи у две етапе: 1) испитивање услова термопараметарске резонанције, 2) испитивање принудних осцилација, изазваних дејством термопоремећајних сила.

Размотримо како се изводи проучавање за кружну цилиндарску љуску полупречника R , слободну од почетних напрезања у средњој површи, под горе наведеним претпоставкама. Као прву апроксимацију решавамо проблем у линеарној поставци. Диференцијална једначина (9.5) добива следећи облик (за $q=0$):

$$\frac{E_1 E_3 - E_2^2}{(1 - \nu^2) E_1} \Delta^2 \Delta^2 w + \frac{E_1}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta^2 w) = 0. \quad (9.8)$$

За граничне услове бирамо зглавкасто ослањање љуске. Граничне услове, ако је љуска слободна у циркуларном правцу, можемо написати у облику

$$w|_{x=0} = 0, \quad N_x|_{x=0} = N_{xy}|_{x=0} = 0; \quad (9.9)$$

$$M_x|_{x=l} \equiv \left[\frac{E_1 E_3 - E_2^2}{(1 - \nu^2) E_1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{1 - \nu} \left(M_T - \frac{E_2}{E_1} N_T \right) \right]_{x=l} = 0, \quad (9.10)$$

где је N_{xy} — редукована сила клизања; N_x — нормална сила; M_x — момент савијања. У изразу (9.8) M_T — температурни момент, N_T — температурно напрезање,

$$M_T = \int_{-h/2}^{h/2} \alpha E T z dz, \quad N_T = \int_{-h/2}^{h/2} \alpha E T dz. \quad (9.11)$$

Нехомогеност граничног услова (9.10), која је последица температурних чланова, отежава добивање решења обичним методом. Уводимо смену

променљивих, која омогућава свођење граничних услова (9.10), који проистичу из начина ослањања љуске, на хомогене:

$$w(x, y, t) = w_1(x, y, t) + \frac{1}{2} v(t) x(x-t). \quad (9.12)$$

У релацији (9.12) функција $v(t)$ има облик:

$$v(t) = (1 + \nu) \left(\frac{E_2 N_T - E_1 M_T}{E_1 E_3 - E_2^2} \right). \quad (9.13)$$

После смене променљивих, према (9.12), диференцијална једначина (9.8) добија облик:

$$\frac{E_1 E_3 - E_2^2}{(1 - \nu^2) E_1} \Delta^2 \Delta^2 w_1 + \frac{E_1}{R^2} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta^2 w_1) = 0. \quad (9.14)$$

Гранични услови, који проистичу из начина ослањања љуске, у новим променљивим су хомогени и могу се изразити на следећи начин:

$$w_1|_{x=0} = 0, \quad M_{x/x=0} \equiv \left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right]_{x=0} = 0. \quad (9.15)$$

Сагласно методу Галеркина решење диференцијалне једначине (9.14) тражимо у облику оваквог реда:

$$w_1(x, y, t) = \sum_{m,n=1,2,\dots}^{\infty} f_{mn}(t) w_{mn}(x, y), \quad (9.16)$$

где је $w_{mn}(x, y)$ — ортогонални систем функција, који задовољава граничне услове (9.15), конструисан на следећи начин:

$$w_{mn}(x, y) = \sin \frac{m \pi x}{l} \sin \frac{n \pi y}{R}. \quad (9.17)$$

Генералисани услов ортогоналности се може, по Галеркину, у нашем случају написати овако:

$$\sum_{mn=1,\dots}^{\infty} \left\{ f_{mn} \int_0^{2\pi R} \int_0^l \left[\frac{E_1 E_3 - E_2^2}{(1 - \nu^2) E_1} \Delta^2 \Delta^2 w_{mn} + \frac{E_1}{R^2} \frac{\partial^4 w_{mn}}{\partial x^4} \right] w_{ik} dx dy + \right. \\ \left. + \rho h \frac{d^2 f_{mn}}{dt^2} \int_0^{2\pi R} \int_0^l \Delta^2 w_{mn} w_{ik} dx dy \right\} = 0, \quad (i, k = 1, 2, \dots). \quad (9.18)$$

Увршћењем релације (9.17) у (9.18) и водећи рачуна о ортогоналности изабраног система функција, добијамо следеће диференцијалне једначине по функцијама f_{mn} :

$$\frac{d^2 f_{mn}}{dt^2} + \frac{1}{\rho h} [a_{mn} + \varphi_{mn}(t)] f_{mn} = 0, \quad (m, n = 1, 2, \dots). \quad (9.19)$$

У посматраном случају проучавање се упрошћава с обзиром на избор функција (9.17), који дозвољава добијање хомогених Маје-Хилових диференцијалних једначина. Коefицијенти једначине (9.19) изражавају се на следећи начин:

$$a_{mn} = (E_0 - E' T_2) \left\{ \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2 + \frac{h}{R^2} \frac{\left(\frac{m\pi}{l} \right)^4}{\left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2} \right\}; \quad (9.20)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{mn}(t) = & -\frac{E' T_1}{2} \left\{ \frac{h}{R^2} \frac{\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2}{\left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2} + \right. \\ & + \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2 \left. \right\} \cos \omega t - \\ & - \frac{(E_0 - E' T_2)^2 h^3}{36(1-\nu^2)} \frac{\left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]}{\left(E_0 - E' T_2 - \frac{E' T_1}{2} \cos \omega t \right)}. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Из услова $E_1 > 0$ проистиче $\frac{1}{2} E' T_1 \cos \omega t < E_0 - E' T_2$, што је узето у обзир у последњем сабирку релације (9.21).

На основу релације (9.21) долазимо до закључка, да је коefицијент $\varphi_{mn}(t)$ парна периодична функција времена, која задовољава Дирихлеове (Dirichlet) услове и може се разложити у Фуријеов ред по косинусима, а једначина (9.19) може се свести на најраспрострањенији облик Маје-Хилових једначина:

$$\frac{d^2 f_{mn}}{dt^2} + \frac{1}{\rho h} \left(\mu_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \cos k \omega t \right) f_{mn} = 0, \quad (9.22)$$

где је

$$\begin{aligned} \mu_0 = & (E_0 - E' T_2) \left\{ \frac{h}{R^2} \frac{\left(\frac{m\pi}{l} \right)^4}{\left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2} + \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2 \left[1 + \frac{8}{3} \frac{(E_0 - E' T_2)}{E' T_1 (z_2 - z_1)} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (9.23)$$

$$\mu_1 = -\frac{E' T_1}{2} \left\{ \frac{h}{R^2} \frac{\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4}{\left[\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2\right]^2} + \right. \\ \left. + \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \left[1 - \frac{E_0 - E' T_2}{(E' T_1)^2} \frac{16}{3} \frac{z_2}{(z_2 - z_1)} \right] \times \left[\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2 \right]^2 \right\}; \\ \mu_k = \frac{2}{9} \frac{(E_0 - E' T_2)^2 h^3}{E' T_1 (1 - \nu^2)} \frac{z_2^k}{z_2 - z_1} \left[\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2 \right]^2; \quad (k=2, 3, \dots).$$

Овде су z_1 и z_2 корени следеће алгебарске једначине:

$$z^2 - \frac{4(E_0 - E' T_2)}{E' T_1} z + 1 = 0; \quad |z_1| > |z_2|. \quad (9.24)$$

За извођење фреквентне једначине за критичне фреквенције, које одговарају термопараметарској резонанцији, користимо се методом, који је предложио М.Д. Стрет (Strett) [29] и развио В.В. Болотин [25], по коме су границе, које раздвајају области реалних (нестабилних) и комплексних корена карактеристичне једначине, две групе вишеструких корена $\rho_1 = \rho_2 = 1$ и $\rho_1 = \rho_2 = -1$, што одговара периодичним решењима са периодима T_0 и $2T_0$. Два решења са једнаком периодом ограничавају област нестабилности, а два решења разних периода-област стабилности. Решење диференцијалне једначине (9.20) са периодом $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$

може се представити у облику следећег Фуријеовог реда:

$$f_{mn}(t) = \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\omega t}{2} + b_k \cos \frac{k\omega t}{2} \right), \quad (9.25)$$

а решење са периодом $2T_0$ у облику

$$f_{mn}(t) = \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\omega t}{2} + b_k \cos \frac{k\omega t}{2} \right) + b_0. \quad (9.26)$$

Увршћујући решење (9.25) у хомогену диференцијалну једначину (9.22) и изједначајући са нулом коефицијенте код синуса и косинуса једнаких периода, сагласно [25], добивамо систем линеарних хомогених алгебарских једначина по коефицијентима a_k и b_k .

Детерминанте, које одговарају тим линеарним хомогеним алгебарским једначинама, су једначине критичних фреквенција.

За непарне области нестабилности једначине критичних фреквенција имају следећи облик:

$$\begin{array}{c}
 -\frac{\omega^2}{4} \rho h + \mu_0 \mp \frac{\mu_1}{2} \quad \frac{\mu_1 \mp \mu_2}{4} \dots \frac{\frac{\mu_{k-1} \mp \mu_{k+1}}{2}}{2} \dots \\
 \frac{\mu_1 \mp \mu_2}{2} \quad -\frac{9}{4} \omega^2 \rho h + \mu_0 \mp \frac{\mu_3}{2} \dots \frac{\frac{\mu_{k-3} \mp \mu_{k+3}}{2}}{2} \dots \\
 \vdots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \dots \\
 \frac{\mu_{k-1} \mp \mu_{k+1}}{2} \quad \frac{\mu_{k-3} \mp \mu_{k+3}}{2} \dots -\frac{k^2 \omega^2}{4} \rho h + \mu_0 \mp \frac{\mu_2}{2} \dots \\
 \vdots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \dots
 \end{array} \quad = 0.$$

(k=1, 3, 5, ...) (9.27)

За парне области нестабилности једначине критичних фреквенција имају следећи облик:

$$\begin{array}{c}
 \left(-\omega^2 \rho h + \mu_0 - \frac{\mu_2}{2} \right) \quad \frac{\mu_1 - \mu_3}{2} \dots \frac{\left(\frac{\mu_{k-2}}{2} - \frac{\mu_{k+2}}{2} \right)}{2} \dots \\
 \frac{\mu_1 - \mu_3}{2} \quad \left(-4 \omega^2 \rho h + \mu_0 - \frac{\mu_4}{2} \right) \dots \frac{\left(\frac{\mu_{k-4}}{2} - \frac{\mu_{k+4}}{2} \right)}{2} \dots \\
 \vdots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \dots \\
 \frac{\left(\frac{\mu_{k-2}}{2} - \frac{\mu_{k+2}}{2} \right)}{2} \quad \frac{\left(\frac{\mu_{k-4}}{2} - \frac{\mu_{k+4}}{2} \right)}{2} \dots \left(-\frac{k^2 \omega^2}{2} \rho h - \mu_0 + \frac{\mu_k}{2} \right) \dots \\
 \vdots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \dots
 \end{array} \quad = 0$$

(9.28)

$$\begin{array}{c}
 \mu_0 \quad \frac{1}{2} \mu_1 \quad \frac{1}{2} \mu_k \quad \dots \\
 \frac{1}{2} \mu_1 \quad \left(-\omega^2 \rho h + \mu_0 + \frac{\mu_2}{2} \right) \dots \frac{\left(\frac{\mu_{k-2}}{2} + \frac{\mu_{k+2}}{2} \right)}{2} \dots \\
 \frac{1}{2} \mu_2 \quad \frac{(\mu_1 + \mu_3)}{2} \dots \frac{\left(\frac{\mu_{k-4}}{2} + \frac{\mu_{k+4}}{2} \right)}{2} \dots \\
 \vdots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \dots \\
 \frac{1}{2} \mu_k \quad \frac{\left(\frac{\mu_{k-2}}{2} + \frac{\mu_{k+2}}{2} \right)}{2} \dots \left(-\frac{k^2 \omega^2}{4} \rho h + \mu_0 + \frac{\mu_k}{2} \right) \dots \\
 \vdots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \dots
 \end{array} \quad = 0$$

(k=2, 4, 6, ...)

Проучавање конвергенције бесконачних детерминанти облика (9.27), (9.28) своди се на [25]. Како је показано у [25], границе области критичних фреквенција погодна је одређивати, узастопним разматрањем детерминанти првог, другог, итд. реда, при чему је најопаснија прва област нестабилности, која се назива главна област динамичке нестабилности. За посматрани проблем из једначине (9.27) добивамо приближно границе прве области нестабилности по формули:

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2}{4 \left\{ 1 \mp \frac{E' T_1}{4 [E_0 - E' T_2]} \left[1 - \frac{2(z_1 + z_2) + z_2(z_1 + z_2)^2}{36(z_2 - z_1)\gamma + 5z_2 - z_1} \right] \right\}}, \quad (9.29)$$

где $\Omega^2 = \frac{\mu_0}{\rho h}$ одговара квадрату фреквенције сопствених осцилација при константној температури љуске током времена; z_1, z_2 — су корени једначине (9.24), при чему је $|z_1| > |z_2|$; коефицијент γ у релацији (9.29) одређује се на следећи начин:

$$\gamma = \frac{(1 - \nu^2) l^4}{(m \pi)^4 \left[1 + \left(\frac{nl}{m \pi R} \right)^2 \right]^4 R^2 h^2}. \quad (9.30)$$

Као закључак, приметимо, да се полазећи од квазистатичке поставке (тј. статичке теорије), не би могли одредити услови под којима љуска слободна од почетних напона губи стабилност под дејством само нестационарног температурног поља. Узимање у обзир зависности модула еластичности и коефицијента линеарног ширења од температуре даје могућност узимања у обзир параметарског утицаја температурног поља у динамичким једначинама термоеластичности.

Глава VII. ФЛАТЕР ЉУСКИ И ПЛОЧА

Овде се даје поставка и решење проблема о флатеру љуски и плоча. Разматрају се конкретни примери прорачуна флатера љуски и плоча, а такође се објашњава утицај аеродинамичког пригушења.

§ 1. Поставка и опште решење проблема

Проучимо за савремену технику важну појаву, названу панелни флатер која се састоји у томе што оплата или други танкозидни елементи конструкција типа плоча и љуски, који се налазе у надзвучној струји течности или гаса, за одређене критичне брзине долазе у осцилаторно кретање са снажно нарастим амплитудама, које могу довести конструкцију до слома.

Теоријско проучавање панелног флатера у коректној поставци, у физичко-математичком смислу постало је могуће формулисањем закона равних пресека у аеродинамици великих надзвучних брзина [30] 1947. године.

Анализирајући кретање танких чврстих тела са великим надзвучним брзинама у различитим срединама, А.А. Иљушин је утврдио следеће опште својство, које је он назвао законом равних пресека: „Ако је вектор било које тачке тела правилног аеродинамичког облика, брзине V и ако попречне брзине других његових тачака нису веће од ϵV , тада при стационарним и нестационарним кретањима тело изазива у околној средини само попречне поремећаје, при чему се притисак у ма којој тачки површи тела, може разликовати од стварног за величину реда не већег од

$$\frac{1 + \epsilon^2}{2 M^2} = \frac{1}{2} \left(\epsilon^2 + \frac{1}{M^2} \right)$$

у поређењу са јединицом“. Тело правилног аеродинамичког облика је тело код кога при кретању у гасној средини нормала на његову површ одступа од равни, нормалне на вектор брзине V , за мали угао ϵ у свим

тачкама површи искључујући сингуларне тачке или линије. Како у надзвучној аеродинамици стање струје у неком попречном пресеку тела зависи само од облика предњег дела тела, сви прорачуни који важе за правилна тела, важе и за друга танка тела са правилним предњим делом, тј. за плоче и љуске разних облика.

У наведеном обрасцу је $M^2 = \frac{V^2}{v_0^2} \gg 1$ Махов број, $e = \frac{\varepsilon V}{v_0}$ Иљушинов

параметар изражен помоћу брзине V кретања тела, нагиба нормале на површ ε и брзине звука у непо ремећеној средини v_0 , тј. брзине звука у гасу у бесконачности; тај параметар има фундаментални значај, јер се у линеаризованим и нелинеаризованим теоријама са вртлозима и ударним таласима притисак на површи тела дефинише само тим параметром и обликом тела.

Дакле, ако се испред тела два суседним паралелним равнима издвоји слој физичких честица средине, нормалан на вектор брзине V тела, то се при израчунавању притиска са назначеним степеном тачности може сматрати, да честице средине врше кретања паралелна равнима, пошто ће равни за њих бити крути непропустљиви зидови.

Закон равних пресека даје нову поставку проблема надзвучне аеродинамике (и методу аеродинамичког моделирања); он је истовремено омогућио свођење проблема прорачуна за стационарна и нестационарна кретања на простији задатак о кретању клипа у цеви константног пресека (теорија важи за $M > 1,5$ и мале углове одступања ε). Клип се креће по датом закону $v = v(t)$, а то је брзина са којом у непокретном стубу његова разрезана површ компримира гас, и за сваку тачку површи једнака је пројекцији вектора апсолутне брзине елемента површи на нормалу на тај елемент.

На тај начин могуће је у коректном облику и за практичне примене подесно теоријско проучавање важних проблема, који се односе на кретање танкозидних конструкција у гасу. Такође је могуће одређивање притисака а тиме и свих аеродинамичких сила, које дејствују на носећу површ при великим надзвучним брзинама, уз постојање ударних таласа и променљиве ентропије гаса. Нарочито је прост прорачун у линеаризованој теорији, тј. кад је за $M^2 \gg 1$ параметар $e < 1$ је ипак мали због угла отклона ε или дебљине профила носеће површи а ентропија гаса константна. У том случају на пример, вишак притиска Δp ма на којој површини површи једнак је притиску у непокретно гасу p_0 , умноженом са изложивоцем политропије κ и са размером нормалне компоненте вектора брзине те површине $v(t)$ према брзини звука у непо ремећеном гасу v_0 :

$$\Delta p = \kappa p_0 \frac{v(t)}{v_0}.$$

1949 године А.А. Иљушин је први указао на идеју о могућности испитивања панелног флатера на основу тих законитости, и он је дао коректну поставку проблема. Дакле, модел носеће површи у облику греде са крутом тетивом, који је разматран у теорији савојно-торзионог флатера (М.В. Кељдиш, Е.П. Гросман, А.И. Некрасов и други), замењен је новим моделом у облику еластичне плоче и љуске.

Прво решење у Иљушиновој поставци проблема о флатеру плоче датира 1950 године и припада А.А. Мовчану, који је увео ефективни појам „параболе стабилности“, који се широко користи, и предложио метод добијања тачних решења за класу проблема о правоуглим плочама, чије су две стране усмерене дуж струје зглавкато ослоњене, а друге две су са произвољним граничним условима [31–34].

Сада изложимо поставку проблема о флатеру љуски [35–36]. Принципијелну схему поставке проблема, не смањујући општост расуђивања, могуће је довољно јасно објаснити на примеру флатера цилиндарске љуске.

Познато је, да у случају када на љуску дејствује оптерећење, које је усмерено у свакој тачки у правцу нормале на површ ($X=Y=0, Z \neq 0$) основна једначина која даје решење плитких цилиндарских љуски, без утицаја тангентних сила инерције, има облик:

$$\Delta^2 \Delta^2 \Phi + \frac{1-\nu^2}{c^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} = \frac{R^4}{D} Z. \quad (1.1)$$

Овде је $c^2 = \frac{h^2}{12 R^2}$ — константа; R — радијус; $D = \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)}$ — цилиндарска крутост; h — дебљина; α, β — бездимензионе координате тачке на цилиндарској површи љуске које представљају: α — изражено у деловима полупречника R растојање по изводници, β — централни угао,

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}$, и на крају $\Phi(\alpha, \beta, t)$ — скаларна функција, дефинисана обрасцима:

$$u = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta^2} - \nu \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha^3}, \quad v = - \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \beta^3} + (2+\nu) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta} \right], \quad w = \Delta^2 \Phi. \quad (1.2)$$

Унутрашње силе дефинишу се помоћу функције Φ обрасцима

$$T_1 = \frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2}, \quad T_2 = \frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4}, \quad M_1 = \frac{D}{R^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \Delta^2 \Phi,$$

$$M_2 = \frac{D}{R^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \Delta^2 \Phi, \quad S = S_1 = -S_2 = -\frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^3 \partial \beta},$$

$$H = M_{12} = -M_{21} = -\frac{D(1-\nu)}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \Delta^2 \Phi,$$

$$N_1 = -\frac{D}{R^3} \frac{\partial}{\partial \alpha} \Delta^3 \Phi, \quad N_2 = -\frac{D}{R^3} \frac{\partial}{\partial \beta} \Delta^3 \Phi. \quad (1.3)$$

Генерализане попречне силе, дефинисане у смислу Кирхофа и неопходне за формулисање граничних услова, израчунавају се обрасцима:

$$N_1^* = -\frac{D}{R^3} \left[\frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} \right] \Delta^2 \Phi, \quad (1.4)$$

$$N_2^* = -\frac{D}{R^3} \left[\frac{\partial^3}{\partial \beta^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta} \right] \Delta^2 \Phi.$$

У систему бездимензионих координата α, β за $X=Y=0$, а $Z \neq 0$ основна једначина цилиндарских љуски средње дужине има облик:

$$\frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \alpha^4} + \frac{c^2}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right]^2 \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \beta^4} = \frac{R^2}{Eh} Z. \quad (1.5)$$

Овде се функција $\Phi_1(\alpha, \beta, t)$ дефинише обрасцима:

$$u = \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \alpha \partial \beta^2}, \quad v = -\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \beta^3}, \quad w = \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \beta^4}. \quad (1.6)$$

Унутрашње силе изражавају се у том случају помоћу функције Φ_1 релацијама:

$$T_1 = \frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2}, \quad T_2 = \frac{Eh}{R} \left[\frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \alpha^4} + \frac{c^2}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^6 \Phi_1}{\partial \beta^6} + \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \alpha^4} \right) \right],$$

$$S = -\frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \alpha^3 \partial \beta}, \quad M_1 = \frac{D\nu}{R^2} \left[\frac{\partial^6 \Phi_1}{\partial \beta^6} + \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \beta^4} \right],$$

$$M_2 = \frac{D}{R^2} \left[\frac{\partial^6 \Phi_1}{\partial \beta^6} + \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \beta^4} \right], \quad H = -\frac{D(1-\nu)}{R^2} \left[\frac{\partial^6 \Phi_1}{\partial \alpha \partial \beta^5} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \alpha \partial \beta^3} \right], \quad N_1 = -\frac{D}{R^3} \left[\frac{\partial^7 \Phi_1}{\partial \alpha \partial \beta^6} + \frac{\partial^5 \Phi_1}{\partial \alpha \partial \beta^4} \right],$$

$$N_2 = -\frac{D}{R^3} \left[\frac{\partial^7 \Phi_1}{\partial \beta^7} + \frac{\partial^5 \Phi_1}{\partial \beta^5} \right]. \quad (1.7)$$

Диференцијалним једначинама (1.1) и (1.5) у сваком посебном случају морају бити придружени на крајевима љуске дати гранични услови.

Нека се љуска креће у струји гаса константном брзином V под дејством аеродинамичких и других сила, које се појављују од оптерећења на конструкцију, и налази се у стању релативне равнотеже, која се назива непоремећеном. Нека су $u^*(\alpha, \beta, t)$, $v^*(\alpha, \beta, t)$, $w^*(\alpha, \beta, t)$, $T_1^*(\alpha, \beta, t)$, ..., $\Phi^*(\alpha, \beta, t)$, $\Phi_1^*(\alpha, \beta, t)$ померања и друге одговарајуће функције у непоремећеном кретању. Тада ће сила Z^* , која улази у једначину (1.1) или (1.5), према [30] бити:

$$Z^* = BV \frac{\partial w^*}{R \partial \alpha} - B_1 \frac{\partial w^*}{\partial t}. \quad (1.8)$$

Овде је $B = \frac{P_0 \kappa}{v_0} = \text{const}$ — коефицијент клаћења и $B_1 = \text{const}$ — коефицијент пригушења, који одражавају својство средине у којој се креће љуска.

Ради веће општости значајно је проучити гранични проблем за вредности V , које се налазе у интервалу $0 \leq V \leq \infty$, што се и претпоставља у даљем.

Узмимо за стања различита од стационарног:

$$u = u^* + \tilde{u}, \quad v = v^* + \tilde{v}, \quad w = w^* + \tilde{w}, \dots, \quad \Phi = \Phi^* + \tilde{\Phi}, \quad \Phi_1 = \Phi_1^* + \tilde{\Phi}_1.$$

Тада је сила

$$Z = Z^* + \tilde{Z},$$

при чему је на основу [30] и Даламберовог (D'Alembert) принципа:

$$\tilde{Z} = BV \frac{\partial \tilde{w}}{R \partial \alpha} - B_1 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} - \rho h \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2}, \quad (1.9)$$

где је $\rho h \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2}$ — сила инерције, ρ — густина материјала љуске; па ће једначине (1.1) и (1.5) а такође и одговарајући гранични услови постати линеарни и хомогени.

Једначина (1.1) узимањем у обзир (1.2) добија облик:

$$c_*^2 \Delta^4 \Phi + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} + \frac{R^2 \rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta^2 \Phi) - \frac{BVR}{Eh} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\Delta^2 \Phi) + \frac{B_1 R^2}{Eh} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta^2 \Phi) = 0. \quad (1.10)$$

Са своје стране једначина (1.5) уз (1.6) добија облик:

$$\frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \alpha^4} + c_*^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right)^2 \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \beta^4} + \frac{R^2 \rho}{E} \frac{\partial^6 \Phi_1}{\partial t^2 \partial \beta^4} - \frac{BVR}{Eh} \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta^4} + \frac{B_1 R^2}{Eh} \frac{\partial^5 \Phi_1}{\partial t \partial \beta^4} = 0. \quad (1.11)$$

Одавде је лако добити једначину, која одређује флатер плоче.

У једначинама (1.10) и (1.11) уведена је нова бездимензиона величина:

$$c_*^2 = \frac{c^2}{1 - \nu^2} = \frac{h^2}{12 R^2 (1 - \nu^2)}. \quad (1.12)$$

Релације (1.10) и (1.11) представљају диференцијалне једначине малих осцилација цилиндарских љуски. Заједно са одговарајућим граничним условима оне образују полазни гранични проблем о флатеру љуске. Тај задатак има решење

$$\Phi(\alpha, \beta, t) \equiv 0. \quad (1.13)$$

Проблем о флатеру састоји се у разјашњењу услова, под којима непоремећено кретање, које одговара тривијалном решењу (1.13), постаје стабилно у том смислу, да за дате мале поремећаје кретања у ма ком тренутку времена $t \geq t_0$ буду гарантовани довољно мали почетни поремећаји, који су дати у почетном тренутку времена t_0 .

Проучимо класу решења облика:

$$\Phi(\alpha, \beta, t) = \psi(\alpha, \beta) e^{\omega t}, \quad (1.14)$$

где је $\omega = p + iq$ — константан комплексан број (комплексна учестаност) а $\psi(\alpha, \beta) = \psi_1(\alpha, \beta) + i\psi_2(\alpha, \beta)$ непрекидна, заједно са својих осам извода, комплексна функција реалних величина α, β . Очеvidно је, да ће у класи решења (1.14) довољан знак нестабилности бити услов $Re \omega > 0$.

Договоримо се да критичним брзинама називамо оне вредности брзине V , које раздвајају области стабилног и нестабилног стања љуске.

Питање о односу између стабилности у класи (1.14) и стабилности у односу на ширу класу решења једначина (1.10) и (1.11) овде се не разматра.

После уношења у једначину (1.10) израза (1.14) уместо Φ_1 и скраћивања са множиоцем $e^{\omega t}$ добијамо за функцију $\psi(\alpha, \beta)$ једначину:

$$c_*^2 \Delta^4 \psi + \frac{\partial^4 \psi}{\partial \alpha^4} - \lambda \Delta^2 \psi - \frac{BVR}{Eh} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\Delta^2 \psi) = 0. \quad (1.15)$$

Овде је узето $B = B_1$ и уведена ознака:

$$-\lambda = \rho \frac{R^2 \omega^2}{E} + \frac{BR^2 \omega}{Eh}. \quad (1.16)$$

Прикључујући свуда граничне услове задате на крајевима љуске, добијамо гранични проблем, чије решење даје сопствене вредности λ и сопствене функције $\psi(\alpha, \beta)$. Из релације (1.16) лако је наћи за свако λ две вредности комплексне учестаности ω :

$$\omega_{1,2} = -\frac{B}{2\rho h} \pm \left[\left(\frac{B}{2\rho h} \right)^2 - \frac{E\lambda}{\rho R^2} \right]^{1/2}. \quad (1.17)$$

При испитивању на стабилност у класи (1.14) критичне ће бити оне вредности, брзине кроз које се у граничном задатку појављује решење облика (1.14) са позитивним реалним делом комплексне учестаности ω . Један од корена (1.17) обавезно има негативан реални део, јер је сума корена

$$\omega_1 + \omega_2 = -\frac{B}{2\rho h} \quad (1.18)$$

негативна.

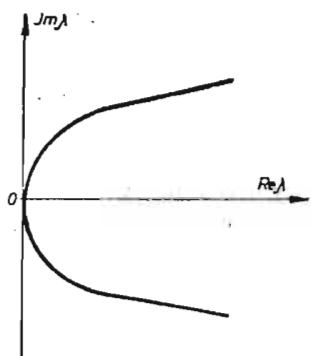
Нека за неко λ један од корена буде чисто имагинаран број: $Re \omega = p = 0$, $\omega = iq$. Тада из (1.16) налазимо:

$$Re \lambda = \lambda_1 = \rho \frac{R^2}{E} q^2, \quad Im \lambda = \lambda_2 = -\frac{BR^2}{Eh} q. \quad (1.19)$$

Једначине (1.19) у комплексној равни λ_1, λ_2 представљају тачке квадратне параболе (сл. 17):

$$\lambda_1 = \rho \frac{E h^2}{B^2 R^2} \lambda_2^2, \quad (1.20)$$

која се назива парабола стабилности [31]. Област, са унутрашње стране параболе стабилности, одговара сопственим вредностима, за које оба корена (1.17) имају негативан реални део, а област, која лежи ван параболе, одговара сопственим вредностима, за које је реални део једног од корена (1.17) позитиван.

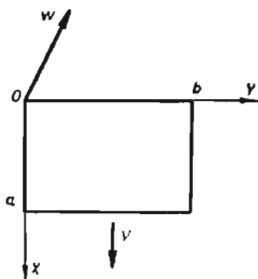


сл. 17

На тај начин, проблем одређивања критичне брзине у класи (1.14) своди се на проучавање положаја сопствених вредности λ граничног проблема (1.10) или (1.11) према параболи стабилности (1.20).

§ 2. Флатер плоче

Нека се танко тело аеродинамичког облика креће у мирном гасу праволинијски и равномерно са великом надзвучном брзином V . На површи тела посматрајмо део његове оплате — правоугли панел, који је у непо ремећеном стању раван и који се креће паралелно двема својим ивицама без угла отклона у односу на гас [32]. У равни тог непо ремећеног кретања панела уведемо правоугли систем координата x, y , који се креће заједно са телом праволинијски и једнолико брзином V дуж осе x . Ивице панела у произвољном тренутку времена t поклапају се са одсечцима правих $x=0, x=a, y=0, y=b$.



сл. 18

Под утицајем ма каквих узрока непо ремећено кретање панела у својој равни може бити нарушено, и панел ће изводити поремећено кретање са угибом $w(x, y, t)$, чија се позитивна вредност дефинише осом w на сл. 18. Сматрајући панел танким и изотропним искористимо ради проуча-

вања његових малих угиба $w(x, y, t)$ диференцијалну једначину савијања плоча [10]:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q + N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

где је m — маса, рачуната на јединицу површине панела; q — попречно оптерећење, а силе N_1, N_2 , које се јављају као резултат загревања или из било ког другог узрока, претпоставља се да су константне за цео панел и не мењају се са променом угиба $w(x, y, t)$.

Угиб w изазива допунски притисак Δp на горњој површи панела са стране гаса, у коме се тело креће, и допунски притисак $\Delta p'$ на доњој површи са стране средине, који налаже на панел изнутра тела.

$$\Delta p = - \frac{\rho_0 x}{v_0} \left(V \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial t} \right), \quad \Delta p' = - \left(k_1 w + k_2 \frac{\partial w}{\partial t} \right).$$

Овде је ρ_0 — притисак; v_0 — брзина звука у гасу у бесконачности; k_1 и k_2 — ненегативни бројеви, који карактеришу својства средине (k_1 — коефицијент еластичне основе, k_2 — коефицијент пригушења). Попречно оптерећење q је резултат датих притисака: $q = \Delta p' - \Delta p$.

У даљем уместо x, y, w примењују се величине: $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{w}{a}$, за које су сачуване ознаке x, y, w .

При учињеним претпоставкама за ослободени панел по целој контури добијају се следеће диференцијалне једначине поремећеног кретања:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{a^2}{b^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{a^4}{b^4} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{a^2 N_1}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{a^4 N_2}{b^2 D} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{a^3 \rho_0 x V}{D v_0} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{a^4}{D} \left[m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\frac{\rho_0 x}{v_0} + k_2 \right) \frac{\partial w}{\partial t} + k_1 w \right] = 0$$

$$w(0, y, t) = \frac{\partial^2 w(0, y, t)}{\partial x^2} = w(1, y, t) = \frac{\partial^2 w(1, y, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (2.1)$$

$$w(x, 0, t) = \frac{\partial^2 w(x, 0, t)}{\partial y^2} = w(x, 1, t) = \frac{\partial^2 w(x, 1, t)}{\partial y^2} = 0.$$

За добијање довољних карактеристика нестабилности непоремећеног кретања размотримо класу решења:

$$w(x, y, t) = X(x) \sin n \pi y e^{\omega t}, \quad (n=1, 2, \dots), \quad (2.2)$$

где је $\omega = p + iq$ — комплексан број; $X(x) = |X(x)| e^{i\psi(x)}$ — комплексна функција реалне величине x . Стављајући (2.2) у (2.1) и уводећи ознаке:

$$n_1 = \frac{a^2 N_1}{\pi^2 D}, \quad n_2 = \frac{a^2 N_2}{\pi^2 D}, \quad k = \frac{n^2 a^2}{b^2} + \frac{n_1}{2}, \quad A = \frac{a^3 p_0 x V}{D v_0},$$

$$B = \frac{p_0 x}{v_0} + k_2, \quad \lambda = - \frac{a^4}{D} (m \omega^2 + B \omega), \quad (2.3)$$

$$d = \pi^4 \left[\frac{n_1^2}{4} + \frac{n^2 a^2}{b^2} (n_1 - n_2) \right] - \frac{a^4 k_1}{D}, \quad \lambda^0 = \lambda + d,$$

налазимо, да је функција (2.2) решење полазног проблема (2.1) тада и само тада, када је $X(x)$ сопствена функција граничног проблема:

$$X^{IV} - 2k \pi^2 X'' + k^2 \pi^4 X - AX' = (\lambda + d)X = \lambda^0 X,$$

$$X(0) = X''(0) = X(1) = X''(1) = 0, \quad (2.4)$$

а комплексна учестаност ω се одређује формулом:

$$\omega = -\frac{B}{2m} \pm \frac{1}{m} \sqrt{\frac{B^2}{4} - \frac{Dm\lambda}{a^4}}. \quad (2.5)$$

Приметимо, да комплексном решењу (2.2) одговарају реална сопствена кретања панела са угибима:

$$w(x, y, t) = |X(x)| \sin n \pi y e^{pt} \frac{\cos}{\sin} [\psi(x) + qt]. \quad (2.2')$$

Само решење (2.2) називаћемо у даљем тексту комплексним сопственим кретањем.

Величину A у диференцијалној једначини (2.4) зваћемо редукованом брзином непоремећег кретања панела, λ и λ^0 — су сопствене вредности. Комплексне учестаности (2.5) означимо ω и ω' тако да буде испуњено $Re \omega' \leq Re \omega$. Фреквенција ω' има негативан реални део за произвољно λ , а за фреквенцију ω важи $Re \omega < 0$, $Re \omega = 0$ или $Re \omega > 0$ у зависности од тога да ли се λ налази унутра или ван параболе (сл. 17):

$$Re \lambda = \frac{Dm}{a^4 B^2} (Im \lambda)^2. \quad (2.6)$$

На тај начин, сопственој вредности λ граничног проблема (2.4) одговарају два комплексна сопствена кретања $w'(x, y, t)$ и $w(x, y, t)$, од којих прво нестаје током времена, а друго гасећи се има непромењену амплитуду или се неограничено повећава у зависности од тога, да ли се λ налази унутра, на или ван параболе стабилности.

За свако $k = \frac{a^2 n^2}{b^2} + \frac{n_1}{2}$, ($n=1, 2, \dots$) диференцијалне једначине (2.4)

дефинишу свој гранични проблем. Проучавајући скуп сопствених вредности свих таквих граничних проблема, означимо степеном нестабилности непоремећеног кретања панела број s сопствених вредности λ које су распоређене ван параболе стабилности. Очевидно је, да неједнакост $s > 0$ означава, да постоје сопствена кретања панела, код којих ампли-

туда расте током времена неограничено; једнакост $s=0$ означава одсуство сопствених кретања панела са растућом амплитудом. Ипак овде се не тврди да је за $s=0$ непоремећено кретање стабилно. Ако се осим сопствених кретања (2.2) разматрају „придružена (адјунгована) кретања“ облика:

$$[X_1(x) + t X(x)] \sin n \pi y e^{\omega t}, [X_2(x) + t X_1(x) + \frac{1}{2} t^2 X(x)] \sin n \pi y e^{\omega t}, \dots,$$

која се могу појавити за вишеструке λ^0 , може се десити да и за $s=0$ постоје допуштена поремећена кретања (то је могуће тада, када се заједничко λ налази на параболи стабилности).

Проучимо сопствене вредности граничног проблема. Карактеристична једначина:

$$F(k, A, \lambda^0) = 0, \quad (2.7)$$

која повезује величине k, A са сопственим вредностима λ^0 , може се изразити преко променљивих α, β . При томе се прелаз на параметре α, β може реализовати овако: нека су $z_i(k, A, \lambda^0)$ — корени карактеристичне једначине. У почетку ћемо за основне параметре узети било која два корена, на пример z_1, z_2 , затим од параметара z_1, z_2 трансформацијом $z_1 = \alpha + i \beta, z_2 = \alpha - i \beta$ прелазимо на параметре α, β а преко њих изражавамо остале корене и све карактеристичне величине граничног проблема. Дакле, једначина (2.7) може се свести на облик:

$$F(\alpha, \beta, k) \equiv \frac{\alpha^2 (\operatorname{ch} 2 \alpha - \operatorname{sh} \sqrt{\beta^2 - 2 \alpha^2 + 2 k \pi^2} \cos \beta)}{(\beta^2 - 3 \alpha^2 + k \pi^2)^2 + 4 \alpha^2 \beta^2} + \quad (2.8)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{[(\beta^2 - \alpha^2 + k \pi^2)^2 + 2 \alpha^2 (\alpha^2 - k \pi^2)] \operatorname{sh} \sqrt{\beta^2 - 2 \alpha^2 + 2 k \pi^2} \sin \beta}{[(\beta^2 - 3 \alpha^2 + k \pi^2)^2 + 4 \alpha^2 \beta^2] \sqrt{\beta^2 - 2 \alpha^2 + 2 k \pi^2} \beta} = 0;$$

$$A = 4 \alpha (\beta^2 - \alpha^2 + k \pi^2); \quad (2.9)$$

$$\lambda^0 = k^2 \pi^4 + (\alpha^2 + \beta^2) (\beta^2 - 3 \alpha^2 + 2 k \pi^2), \quad (2.10)$$

Карактеристични систем двеју једначина (2.8), (2.9), у коме се k, A сматрају датим, а α, β су тражене величине, поседује особину да сваком његовом решењу

$$\alpha = \alpha(k, A), \quad \beta = \beta(k, A) \quad (2.11)$$

одговара по обрасцу (2.10) сопствена вредност:

$$\lambda^0 = \lambda^0(k, A), \quad (2.12)$$

тј. решење једначине (2.7); свакој сопственој вредности (2.12) одговара неколико решења (2.11) карактеристичног система. За фиксирано k и променљиво A решења (2.11), (2.12) можемо третирати као криве, које ћемо назвати гранама. Користећи аналитичка својства једначина (2.7) — (2.12), може се показати да су гране (2.11), (2.12) непрекидне и „неуништивне“, посматрајући их како у реалној тако и у комплексној области.

Елементарна анализа карактеристичног система показује, да су за $A=0$ све сопствене вредности λ^0 дате обрасцима:

$$\lambda^0 = \pi^4 (r^2 + k)^2, \quad (r=1, 2, \dots), \quad (2.13)$$

при чему свака сопствена вредност (2.13) даје почетак неке гране (2.12). Одатле и из својства неуништивости следи егзистенција скупа непрекидних грана:

$$\lambda^0 = \lambda^0_r(k, A), \quad (r=1, 2, \dots), \quad (2.14)$$

које ћемо нумерисати тако, да грана (2.14) са бројем r пролази за $A=0$ кроз тачку (2.13) са истим бројем r .

Докажимо, да при произвољном фиксираним k и $A \neq 0$ свака реална сопствена вредност $\lambda^0(k, A)$ је строго већа од најмање сопствене вредности $\lambda^0(k, 0)$, која постоји за $A=0$. Множећи једначину (2.4) са $\tilde{X}(x)$ и интегралећи парцијално уз коришћење граничних услова, лако добијамо релацију

$$\lambda^0(K, A) = \frac{k^2 \pi^4 I_0 + 2 k \pi^2 I_1 + I_2 - A I_3}{I_0}$$

$$\left(I_0 = \int_0^1 dx X \tilde{X}, \quad I_1 = \int_0^1 dx \frac{dX}{dx} \frac{d\tilde{X}}{dx}, \right.$$

$$\left. I_2 = \int_0^1 dx \frac{d^2 X}{dx^2} \frac{d^2 \tilde{X}}{dx^2}, \quad I_3 = \int_0^1 dx \frac{dX}{dx} \tilde{X} \right),$$

која везује сопствену вредност $\lambda^0(k, A)$ са одговарајућом функцијом $X(x)$. Одатле је

$$\operatorname{Re} \lambda^0(k, A) = \frac{k^2 \pi^4 I_0 + 2 k \pi^2 I_1 + I_2}{I_0}, \quad |\operatorname{Im} \lambda^0(k, A)| = \frac{|A I_3|}{I_0}.$$

У класи функција $X(x)$, непрекидних заједно са изводима до четвртог реда и које задовољавају граничне услове (2.4), минимум $\operatorname{Re} \lambda^0(k, A)$ једнак је минимуму по r $[\min_r \pi^4 (r^2 + k)^2]$ и постиже се за решење $X(x) = \sin r\pi x$ граничног проблема (2.4) при $A=0$; за свако решење при $A \neq 0$ строго је испуњена неједнакост

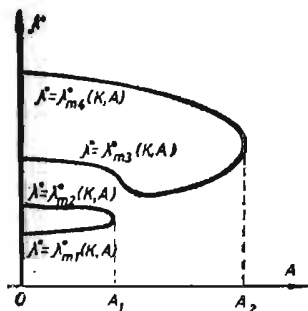
$$\operatorname{Re} \lambda^0(k, A) > \min_r \pi^4 (r^2 + k)^2 = \min_r \lambda^0_r(k, 0) \quad (2.15)$$

Одатле следује оно што је требало доказати.

Посматрање реалне равни α, β и линија, дефинисаних на њој једначинама (2.8) — (2.10), омогућава без извођења било каквих приближних прорачуна да се установи следеће.

За произвољну фиксирану вредност A и за довољно велике r све тачке гране $\lambda^0 = \lambda^0_r(k, A)$ су реалне и позитивне, при чему се са порастом r оне асимптотски приближавају оним сопственим вредностима (2.13), које се добијају за $A=0$.

Постоји у реалној равни A , λ^0 пребројив скуп једна од друге изолованих овала l_{rk} коначног растојања (на сл. 19 показани су делови тих овала у било којим двама тачкама (2.13). За неке негативне вредности $k \leq -2,5$ било која од овала може се концентрисати у тачку, која лежи на оси



сл. 19

$A=0$ (на пример, доња овала за $k = -2,5; -6,5; -12,5$; друга овала за $k = -8,5; -14,5; \dots$). За $r^2 > -0,5k$ на свакој од овала l_{rk} налази се тачка

$$\lambda_{r,01}(k) = \pi^4 \left[(r^2 + k)^2 + \frac{1}{3} (5r^2 + k)^2 \right], \quad A_r'(k) = \frac{8\pi^3}{3\sqrt{3}} (5r^2 + k) \sqrt{2r^2 + k}, \quad (2.16)$$

која одговара решењу $\alpha = \pi \sqrt{\frac{2r^2 + k}{3}}$, $\beta = 2r\pi$, карактеристичног система.

Докажимо егзистенцију комплексних сопствених вредности λ^0 у посматраном граничном проблему.

Нека је $A_r = A_r(k)$ горња грана оних вредности A , за које овала l_{rk} има реалне пресеке са правима $A = \text{const}$. Посматрајмо било коју од тих овала и нека су у некој околини вредности $A = A_1$ за $A < A_1$, делови овала образовани двама гранама:

$$\lambda^0 = \lambda^0_{r1}(k, A), \quad \lambda^0 = \lambda^0_{r2}(k, A). \quad (2.17)$$

За $A = A_1$ гране (2.17) секу се у тачки (A_1, λ^0_1) . У њеној околини једначину (2.7) представимо у облику:

$$F(k, A, \lambda^0) \equiv [(\lambda^0 - \lambda^0_1)^2 - 2\varphi_1(k, A)(\lambda^0 - \lambda^0_1) + \varphi_2(k, A)] \Phi(k, A, \lambda^0) = 0,$$

где се аналитичка функција $\Phi(k, A, \lambda^0)$ не анулира у посматраној околини, а аналитичке функције $\varphi_1(k, A)$, $\varphi_2(k, A)$ се анулирају за вредности $A = A_1$. Одатле се за гране (2.17) добивају изрази:

$$\lambda^0 = \varphi_1(k, A) \pm \sqrt{\varphi_1^2(k, A) - \varphi_2^2(k, A)} + \lambda^0_1, \quad (2.18)$$

који доказују егзистенцију грана (2.17) у некој околини вредности $A = A_1$ а такође и за $A > A_1$. С обзиром на дефиницију бројева $A_r = A_r(k)$ у околини вредности $A = A_1$ за $A > A_1$ гране (2.17) не могу бити реалне, дакле, оне су комплексне.

У тим случајевима када се овала концентрише у тачку ($A_r=0$), комплексне сопствене вредности λ^0 постоје при ма колико малом $A \neq 0$. На пример, за $k=-8,5$, када се друга овала концентрише у тачку, гране $\lambda^0=\lambda^0 r_3(k, A)$, $\lambda^0=\lambda^0 r_4(k, A)$ су комплексне при ма колико малом $A \neq 0$. Тај пример показује, између осталог, да при монотонном порасту A комплексне могу бити, али не обавезно, оне гране, које дају најмање реалне сопствене вредности.

Узимајући у обзир неједнакост $A_r(k) \geq A_r'(k)$, може се показати, да су за дато $k > -2$ и за произвољно A из интервала

$$0 \leq A \leq \frac{B \pi^3}{3 \sqrt{3}} (5+k) \sqrt{2+k} \quad (2.19)$$

све сопствене вредности $\lambda^0_r(k, A)$, $r=1, 2, \dots$ реалне.

Реални делови грана, које образују овале l_{1k}, l_{2k}, \dots , а такође комплексни делови истих могу се конструисати по тачкама, чије налажење методом узастопних апроксимација не представља начелну тешкоћу. За низ вредности k из интервала $-16 \leq k \leq 16$ такви прорачуни су спроведени, и за обраду резултата искоришћено је представљање у облику (2.18). При томе се за све посматране k показало могућим изабрати такве вредности констаната $a_1=a_1(k)$, $b_1=b_1(k)$, да израз

$$\lambda^0 = a_1 \left(\frac{A^2}{A_1^2} - 1 \right) \pm b_1 \sqrt{1 - \frac{A^2}{A_1^2}} + \lambda_1^0, \quad (2.20)$$

добивен из (2.18), за

$$\varphi_1 = a_1 \left(\frac{A^2}{A_1^2} - 1 \right), \quad \varphi_2 = \varphi_1^2 + b_1 \left(\frac{A^2}{A_1^2} - 1 \right),$$

са довољном тачношћу за практичне прорачуне апроксимира гране (2.17), које образују доњу овалу l_{1k} , једнолико на целом интервалу $0 \leq A \leq A_1$ а такође у неком интервалу $A_1 < A \leq A_1^*$, где се A_1^* утврђује условима тачности.

Број b_1 који улази у (2.20) и комбинација $(\lambda^0_1 - a_1)$ налазе се непосредно:

$$b_1 = \frac{1}{2} [\lambda_{r_2}^0(k, 0) - \lambda_{r_1}^0(k, 0)], \quad \lambda_1^0 - a_1 = \frac{1}{2} [\lambda_{r_2}^0(k, 0) + \lambda_{r_1}^0(k, 0)], \quad (2.21)$$

јер су познате ординате $\lambda^0 r_1(k, 0)$, $\lambda^0 r_2(k, 0)$ тачака пресека овале l_{1k} са правом $A=0$. Израз (2.20) постаје одређен, ако је осим (2.21) познат пар бројева A_1, λ_1^0 (координате најдесније тачке овале) или A_1, a_1 .

За $k=-4$ вредности бројева a_1, A_1 са довољном тачношћу за практичне прорачуне дате су обрасцима:

$$a_1 = \frac{5 \pi^4}{54} (5 + 2k)^2, \quad (2.22)$$

$$A_1^2 = \frac{8 \pi^6}{243} \frac{(5 + 2k)^2}{10 - k} [9 \sqrt{8161 + 1640k + 40k^2} + 679 - 20k - 20k^2].$$

У сваком конкретном проблему параметар k узима узастопно вредности

$$k = \frac{n^2 a^2}{b^2 + \frac{n_1}{2}}, \quad n=1, 2, \dots \text{ Фиксирајући } n, \text{ ми фиксирамо } k, \text{ а такође оне}$$

гране $\lambda^0 = \lambda_{rn^0}(k, A)$, $r=1, 2, \dots$, које постоје за то k . У даљем тексту ћемо гране, које одговарају фиксираним броју n , означавати $\lambda^0 = \lambda_{rn^0}(A)$.

Сопственим вредностима λ^0_{rn} према обрасцу (2.3) одговарају сопствене вредности:

$$\lambda_{rn}(A) = \lambda_{rn^0}(A) - \pi^4 \left[\frac{n_1^2}{4} + \frac{n^2 a^2}{b^2} [n_1 - n_2] \right] + \frac{a^4 k_1}{D}, \quad (r, n=1, 2, \dots) \quad (2.23)$$

Степен нестабилности непоремећеног кретања панела једнак је броју сопствених вредности (2.23), распоређених на комплексној равни иза границе параболе стабилности (2.6). Свакој таквој сопственој вредности распоређеној иза границе параболе стабилности, одговара поремећено кретање панела: негативном λ — дивергентно кретање (избочавање), комплексном λ — флатерно кретање.

За фиксиране вредности параметара, који се појављују у задатку, иза границе параболе стабилности може се налазити само коначан број сопствених вредности (2.23). Стварно, с обзиром на информације добивене о асимптотском понашању сопствених вредности $\lambda_{rn^0}(A)$, сви $\lambda_{rn}(A)$ са довољно великим бројевима r или n су реални, при чему $\lambda_{rn}(A) \rightarrow \lambda_{rn^0}(A)$, ако макар један од бројева r или n тежи бесконачности. Из (2.23) помоћу (2.13) добива се:

$$\lambda_{rn}(0) = \pi^4 \left[\left(r^2 + \frac{n^2 a^2}{b^2} \right)^2 + r^2 n_1 + \frac{n^2 a^2}{b^2} n_2 \right] + \frac{a^4 k_1}{D}. \quad (r, n=1, 2, \dots)$$

Одавде је очевидно, да су за довољно велике r или n сопствене вредности $\lambda_{rn}(0)$ и вредности које теже њима $\lambda_{rn}(A)$ позитивне и распоређене у параболу стабилности. Одговарајућа сопствена кретања панела су осцилације са опадајућом амплитудом.

Докажимо, да при прихваћеној поставци проблема флатер панела егзистира. Ради доказа посматрајмо скуп параметара:

$$n_1, \quad n_2, \quad \frac{a}{b}, \quad \frac{a^4 k_1}{D}, \quad A, \quad (2.24)$$

који једнозначно дефинишу скуп сопствених вредности (2.23). Нека је тај скуп такав, да међу сопственим вредностима постоје комплексна (како је уведено раније, увек постоји такво A , за које гранични проблем (2.4) има комплексне сопствене вредности). Не мењајући параметре (2.23) на комплексној равни λ , повећајмо параметар:

$$\frac{mD}{a^4 B^2} = \frac{mD}{a^4 \left(\frac{p_0 x}{v_0} + k_2 \right)^2}. \quad (2.25)$$

То се постиже, например увећањем масе m или смањењем коефицијента пригушења $k_2(\sim B_1)$ средине, која дејствује на панел изнутра. Са увећањем параметра (2.25) гране параболе стабилности (2.6) приближавају се реалној оси, при чему је јасно, да ће се било која фиксирана комплексна сопствена вредност при довољним увећањем параметра (2.25) наћи иза границе параболе стабилности и одговарајуће сопствено кретање биће флатерним. На тај начин, ма какве биле силе N_1, N_2 притискујуће или истежуће, флатер панела је могућ.

Та расуђивања дају корисне информације о утицају масе m и пригушења $k_2(\sim B_1)$; отежавање панела и смањење пригушења увећавају опасност флатера, олакшање панела и повећање пригушења не могу уништити његова дивергентна сопствена кретања, а такође ни она флатерна која одговарају сопственим вредностима λ са непозитивним реалним деловима.

Размотримо утицај коефицијента еластичне основе $k_1(\sim B)$ и сила N_1, N_2 . Како се види из формуле (2.23), увећање k_1 (при непроменљивости других параметара) помера у комплексној равни све сопствене вредности $\lambda_{rn}(A)$ удесно. При томе степен нестабилности, ако се и мења, то само на страну умањења. Довољним увећањем k_1 може се учинити да степен нестабилности буде једнак нули, уклонивши опасност свих дивергентних и флатерних кретања. Такав пак ефекат изазива увећање силе N_2 . То је лако извести из формуле (2.23), ако се има на уму да $\lambda^0_{rn}(A)$ не зависе од N_2 . Напротив, умањење N_2 изазива померање свих сопствених вредности $\lambda_{rn}(A)$ улево, што увећава опасност појаве отклоних сопствених кретања панела. Велика истежућа сила N_1 чини степен нестабилности једнаким нули. Стварно ма какве да су фиксиране вредности осталих параметара, увећањем N_1 може се изазвати такво увећање параметра k , да све сопствене вредности $\lambda_{rn}(A)$ буду реалне и блиске ка $\lambda_{rn}(0)$, које су при довољно великим k све позитивне.

Докажимо, да ако за $A=0$ притисна сила не прелази критичну силу избочавања, тада за исте те притисне силе за произвољне $A \neq 0$ дивергентна сопствена кретања нису могућа. Доказ лако добивамо из неједнакости:

$$\operatorname{Re} \lambda_{rn}(A) > \min_r \lambda_{rn}(0), \quad (2.26)$$

која се јавља као последица (2.15). У суштини, из тога, да за $A=0$ притисне силе не прелазе критичне, следи $\lambda_{rn}(0) \geq 0, r, n=1, 2, \dots$ Али се тада из (2.26) добива $\operatorname{Re} \lambda_{rn}(A) > 0, r, n=1, 2, \dots$ што представља довољан услов одсуства дивергентних кретања. Приметимо, да код таквих панела одступајућа сопствена кретања у лету могу бити само кретања флатерног типа. Она се не могу открити статичким испитивањима, јер би при статичким испитивањима требало ставити $\lambda(A)=0$ што је погрешно, јер противречи неједнакости $\operatorname{Re} \lambda(A) > 0$.

Неједнакост (2.26) омогућава такође да се образложи постојање таквих случајева, кад је притиснути панел наткритичним силама, несумњиво нестабилан за $A=0$ ($s > 0$ за $A=0$), нема ни дивергентних, ни флатерних кретања при лету неком брзином $A \neq 0$ ($s=0$ за $A \neq 0$). Таква могућност случаја „ојачања“ непоремећеног кретања са порастом брзине полета биће илустрована примером.

Искористимо сада обрасце (2.16) за добијање неких оцена, као и информација, које се односе на облике сопствених кретања. Према (2.16)

вредности редуковане брзине:

$$A_{rn}' = \frac{8\pi^3}{3\sqrt{3}} \left(5r^2 + \frac{n^2 a^2}{b^2} + \frac{n_1}{2} \right) \sqrt{2r^2 + \frac{n^2 a^2}{b^2} + \frac{n_1}{2}}, \quad (2.27)$$

одговара упоредо с бесконачним скупом других, тачно решење карактеристичне једначине:

$$\lambda_{rn}' = \pi^2 \left[\left(r^2 + \frac{n^2 a^2}{b^2} + \frac{n_1}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(5r^2 + \frac{n^2 a^2}{b^2} + \frac{n_1}{2} \right)^2 \right] - d. \quad (2.28)$$

Није тешко наћи одговарајућу сопствену функцију:

$$X_{rn}'(x) = \sin m\pi x \sin(m\pi x + \chi) \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{2r^2 + \frac{n^2 a^2}{b^2} + \frac{n_1}{2}} x\right),$$

$$\chi = \arctg \left\{ 3^{1/2} \left[2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{n^2 a^2}{b^2} + \frac{n_1}{2} \right) \right]^{-1/2} \right\}. \quad (2.29)$$

Може се показати, да за $r=1$ и $k = \frac{n^2 a^2}{b^2} + \frac{n_1}{2} \geq -1$ обрасци (2.27)–(2.29)

дају, имајући за дате n и $A=A'_{1n}$ најмање реалне сопствене вредности λ'_{1n} , и одговарајућу сопствену функцију $X'_{1n}(x)$. Упоредимо изразе λ'_{1n} , X'_{1n} са изразима:

$$\lambda_{1n}(0) = \pi^4 \left(1 + \frac{n^2 a^2}{b^2} + \frac{n_1}{2} \right)^2 - d, \quad X_{1n}(x) = \sin \pi x,$$

које за $k \geq -1$ дају најмање реалне сопствене вредности $\lambda_{1n}(0)$ и одговарајућу сопствену функцију $X_{1n}(x)$ за $A=0$.

Приметимо, прво, чињеницу увећања λ'_{1n} у поређењу са $\lambda'_{1n}(0)$ и друго, да истовремено за $A=0$ сопствена функција $X_{1n}(x)$ нема нула у унутрашњим тачкама интервала $0 < x < 1$, док се за $A=A'_{1n}$ сопствена функција $X'_{1n}(x)$ стално анулира у унутрашњој тачки истог интервала. Дакле, у легу сопствена кретања панела, која одговарају најмањим сопственим вредностима, још пре него та кретања постану флатерна, могу се знатно разликовати како обликом тако и фреквенцијом од оних која постоје при нултој брзини непоређеног кретања. То је веома важно напоменути у примени приближних метода на проблеме флатера. У вези са применом приближних метода корисно је такође напоменути, да се при постојању довољне притисне силе са монотоним рашћењем A комплексне сопствене вредности и флатер не могу појавити први пут код оних грана $\lambda = \lambda_{rn}(A)$, које за $A=0$ дају најмање сопствене вредности.

Ако редукована брзина непоремећеног кретања не прелази A'_{1n} , тада, како то произилази из смисла неједнакости (2.19), за оне n , које задовољавају неједнакост:

$$\frac{n^2 a^2}{b^2} + \frac{n_1}{2} > -2$$

све сопствене вредности $\lambda_{rn}(A)$, $r=1, 2, \dots$ су реалне и флатер одговарајућих сопствених кретања је немогућ. Одатле, узимајући у обзир (2.3), добијамо формулу „дофлатерне“ брзине:

$$V_n' = \frac{v_0 D}{\rho_0 \kappa a^3} \frac{8 \pi^3}{3 \sqrt{3}} \left(5 + \frac{n^2 a^2}{b^2} + \frac{a^2 N_1}{2 \pi^2 D} \right) \sqrt{2 + \frac{n^2 a^2}{b^2} + \frac{a^2 N_1}{2 \pi^2 D}} \quad (2.30)$$

У низу случајева образац (2.30) омогућава да се одреди део области са нултим степеном нестабилности. На пример, ако је $N_2 \geq 0$ (дивергентна сопствена кретања панела у том случају одсуствују) за произвољну брзину V из интервала $0 \leq V \leq V_1'$, где се V_1' налази из (2.30) за $n=1$, флатерна сопствена кретања су немогућа и степен нестабилности непоремећеног кретања једнак је нули.

Образац (2.30) дозвољава да се учини корисна упозорујућа напомена о методу прорачуна панела, јако истегнутих у смеру непоремећеног кретања. Донекле одступајући од прихваћене поставке проблема, претпоставимо овде само, да се правоугаони панел, слободан од сила у својој равни, обструјава гасом са две стране. Тада примењујући (2.30) са множиоцем 0,5 испред десне стране, налазимо, да ма колико била велика дужина панела a у правцу непоремећеног кретања, његова критична брзина флатера увек ће бити већа од:

$$V_1' = \frac{\pi^3}{9 \sqrt{3}} \frac{v_0 E}{\rho_0 \kappa (1 - v^2)} \left(\frac{h}{b} \right)^3 \quad (2.31)$$

С друге стране, ако се у полазном проблему панел сматра унапред бесконачне дужине и не поставе на бесконачно удаљеном крају панела никакви услови, осим услова произвољно малих почетних поремећаја, тада се за њега може доказати егзистенција флатерних кретања, када брзина прелази величину:

$$V = \pi \sqrt{\frac{E}{3(1-v^2)\rho}} \left(\frac{h}{b} \right), \quad \left(\rho = \frac{m}{h} \right) \quad (2.32)$$

Вредност (2.32) може бити мања од вредности (2.31), што сведочи о неприменљивости обрасца (2.32) за ограничене панеле. Наведени пример показује, да резултати, добијени путем разматрања теоријски бесконачних панела у правцу непоремећеног кретања, цилиндара итд. ретко су применљиви на случај коначних димензија, чак и када су те димензије довољно велике.

Све до сада објашњене карактеристике понашања панела у струји добивене су путем квалитативног проучавања тачног карактеристичног система (2.8), (2.9). У даљим извођењима, која се односе на гране $\lambda = \lambda_{r,n}(A)$, $\lambda = \lambda_{r,1}(A)$, које за свако фиксирано n дају најмање сопствене вредности, биће искоришћено представљање тих грана приближним обрасцем (2.20), из кога се добива:

$$\lambda = a_1 \left(\frac{A^2}{A_1^2} - 1 \right) \pm \mu \sqrt{a_1 \left(1 - \frac{A^2}{A_1^2} \right)} + \lambda_1, \quad \left(\mu^2 = \frac{b_1^2}{a_1^2}, \lambda_1 = \lambda_{10} - d \right) \quad (2.33)$$

За произвољно A из интервала $0 \leq A \leq A_1$ сопствене вредности (2.33) су реалне. У томе интервалу критичне вредности A су оне кроз које при пролазу једна од сопствених вредности (2.33) мења знак. Те вредности A , називају се критичним брзинама дивергенције, анулирају десну страну (2.33) и лако се одређују обрасцем:

$$A_{div}^2 = A_1^2 \left[1 - \frac{(\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4\lambda_1})^2}{4a_1} \right].$$

Одатле

$$V_{div} = \frac{v_0 A_1 D}{p_0 \kappa a^3} \sqrt{1 - \frac{(\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4\lambda_1})^2}{4a_1}}. \quad (2.34)$$

За $A > A_1$ образац (2.33) даје конјуговано-комплексне вредности

$$\lambda = a_1 \left(\frac{A^2}{A_1^2} - 1 \right) \pm i \mu \sqrt{a_1 \left(\frac{A^2}{A_1^2} - 1 \right) + \lambda_1}, \quad (2.35)$$

распоређене на комплексној равни дуж параболе другог степена:

$$Re \lambda = \frac{1}{\mu^2} (Im \lambda)^2 + \lambda_1. \quad (2.36)$$

У интервалу $A_1 < A < A_1^*$, где израз (2.35) са довољном тачношћу апроксимира одсечке грана $\lambda = \lambda_{r_1 n}(A)$, $\lambda = \lambda_{r_2 n}(A)$, критична вредност A је та при пролазу кроз коју сопствене вредности (2.35) пресецају параболу стабилности (2.6). Та вредност, названа критичном брзином флатера, налази се из услова пресека параболa — (2.6) и (2.36):

$$A_{fl}^2 = A_1^2 \left[1 + \frac{\lambda_1}{a_1(R-1)} \right], \quad \left(R = \frac{\mu^2 m D}{a^4 B^2} \right).$$

Одавде

$$V_{fl} = \frac{v_0 A_1 D}{p_0 \kappa a^3} \sqrt{1 + \frac{\frac{\lambda_1}{a_1}}{\frac{\mu^2 m D}{a^4 B^2} - 1}}. \quad (2.37)$$

Сваком $n=1, 2, \dots$ одговара одређена вредност величина A_1, a_1, λ_1, μ које зависе само од аргумента $k = \frac{n^2 a^2}{b^2} + \frac{n_1}{2}$ и дакле, одређена вредност критичне брзине флатера (2.37), наравно, ако је вредност (2.37) реална. Наведимо примере, који дају неке представе о величинама критичних брзина. У свим примерима прихваћене су следеће вредности константи:

$$v=0,3; \quad \kappa=1,4; \quad k_1=0; \quad E=2,1 \cdot 10^{10} \frac{\text{kp}}{\text{mm}^2}; \quad p_0=103 \cdot 10^2 \frac{\text{kp}}{\text{mm}^2};$$

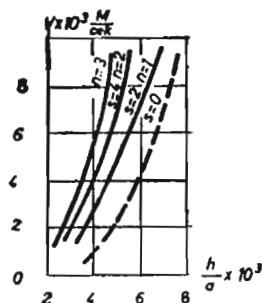
$$B = \frac{2 p_0 \kappa}{v_0}, \quad \frac{m}{h} = 7,8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}; \quad v_0 = 340 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

Пример 1. Квадратни панел ($a=b$), слободан од сила у својој равни ($N_1=N_2=0$). Резултати прорачуна представљени су графички непрекидним линијама (сл. 20), које приказују за $n=1, 2, 3$, зависност критичних брзина флатера (2.37) у m/sec од величине односа $\frac{h}{a}$; тачкаста линија

даје вредности дофлатерне брзине V_1' , нађене по обрасцу (2.30). У областима, ограниченим непрекидним кривим, назначен је степен нестабилности S . За панеле дебљине $h=5 \cdot 10^{-3}a$ имамо, на пример,

$$S(0 \leq V \leq 2900) = 0, \quad S(2900 < V \leq 6300) = 2, \quad S(6300 < V \leq 13300) = 4.$$

Пример 2. Квадратни панел ($a=b$) дебљине $h=5 \cdot 10^{-3}a$ притиснут силама $N_1 = -\frac{4\pi^2 D}{a^2}$, $N_2 = -\frac{\pi^2 D}{a^2}$ за $V=0$ такав панел је несумњиво нестабилан, избочавајући се при најмањем почетном поремећају. Избочавање постаје немогуће при достигнутој критичној брзини дивергенције



сл. 20.

$V_{div} = 600$ m/sec, нађене из (2.34) за $n=1$. Образац (2.37) даје за $n=1, 2, 3$ критичне брзине флатера: 1100, 4000, 10500. Степен нестабилности даје се релацијама:

$$S(0 \leq V \leq 600) = 1, \quad S(600 < V \leq 1100) = 0,$$

$$S(1100 < V \leq 4000) = 2, \quad S(4000 < V < 10500) = 4.$$

Поредећи са случајем панела, слободног од сила у својој равни, видимо да су притисне силе учиниле могућим појаву дивергентног сопственог кретања, већ су и значајно снизиле критичне брзине флатера.

Проучени пример значајан је по томе, што се у њему нестабилно стање мирног панела, притиснутог наткритичним силама, јавља као стабилно за исте силе при лету надзвучном брзином (из интервала $600 < V < 1100$).

На крају напоменимо, да се изложени метод проучавања правоуглог панела ослоњеног по целој контури преноси без промене на оне случајеве, када су две стране панела, паралелне брзине непоремећеног кретања, ослоњене, а друге две су произвољно учвршћене или слободне. Приметимо такође, да се на облик (2.2') могу свести не само решења посматраног неспрегнутог проблема, већ и решења одговарајућих спрегнутих проблема. У последњем случају, по правилу, биће испуњен услов $\psi(x) = \text{const}$ и решење (2.2') имаће карактер стојећих таласа (при флатеру $\psi(x) \neq \text{const}$). Анализу конкретног облика функција $|X(x)|$, $\psi(x)$

и карактера одговарајућих таласа (2.2') при флатеру дао је А.А. Мовчан. Он је запазио јаку неравномерност у распореду угиба по дужини панела, раст концентрације максималних угиба на задњим ивицама панела са растом брзине лета; да је за панеле од практичног значаја, брзина таласа, који се крећу низ струју (управо за њих је могућ случај $p > 0$), мала у поређењу са брзином звука у гасу, што је у сагласности са хипотезама овде примењене аеродинамичке клипне теорије.

§ 3. Неограничена затворена цилиндарска љуска

Решење основне диференцијалне једначине малих осцилација (1.15) за посматрани случај дат је у раду [37], при чему се оно и овде узима у облику:

$$\psi(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{kn} e^{i(\beta n + k\alpha)}, \quad (3.1)$$

где је C_{kn} — неки константни број; n , k — означавају број полуталаса респективно у меридијанском правцу и у правцу изводнице љуске.

Уврстивши (3.1) у диференцијалну једначину (1.15), добивамо карактеристичну једначину, из које за λ добивамо следеће изразе:

$$\lambda_1 = C_{\star}^2 (k^2 + n^2)^2 + \frac{k^4}{(k^2 + n^2)^2}, \quad \lambda_2 = -\frac{VBR}{Eh} k. \quad (3.2)$$

У комплексној равни λ_1 , λ_2 једначине (3.2) представљају тачке параболе осмог степена:

$$\lambda_1 = C_{\star}^2 \left[\frac{E^2 h^2}{B^2 R^2 V^2} \lambda_2^2 + n^2 \right]^2 + \frac{E^4 h^4 \lambda_2^4}{B^4 R^4 V^4} \left[\frac{E^2 h^2}{B^2 R^2 V^2} \lambda_2^2 + n^2 \right]^{-2}. \quad (3.3)$$

За одређивање критичне брзине струје испитујемо узајамни положај параболе (3.3) са параболом стабилности (1.20) у случају $n=0$ и $n \neq 0$. За $n=0$ (тј. за случај, када контура попречног пресека љуске у процесу деформације остаје круг) једначине (3.2) добивају облик:

$$\lambda_1 = C_{\star}^2 k^4 + 1, \quad \lambda_2 = -\frac{BRV}{Eh} k. \quad (3.4)$$

За тачке пресека парабол (3.4) са параболом стабилности важе једнакости:

$$\rho \frac{R^2 q^2}{E} = C_{\star}^2 k^4 + 1, \quad \frac{BR^2}{Eh} q = \frac{BRV}{Eh} k. \quad (3.5)$$

Искључивши из прве једнакости (3.5) параметар q , добивамо једну једначину за одређивање тачака узајамног пресека двеју посматраних парабол:

$$k^4 - \rho \frac{V^2}{EC_{\star}^2} k^2 + \frac{1}{C_{\star}^2} = 0, \quad (3.6)$$

чија ће решења бити:

$$k_{1,2,3,4} = \pm \left\{ \frac{\rho V^2}{2 E C_*^2} \pm \left[\left(\frac{\rho V^2}{2 E C_*^2} \right)^2 - \frac{1}{C_*^2} \right]^{1/2} \right\}^{1/2}. \quad (3.7)$$

Из (3.7) следи да се за

$$V_* > \left(\frac{2 E C_*}{\rho} \right)^{1/2} \quad (3.8)$$

парабола (3.4), пресеца са параболом стабилности у четири тачке, и излази иза границе области стабилности. Одатле следи, да при брзини струје, већој од $\left(\frac{2 E C_*}{\rho} \right)^{1/2}$ кретање љуске може бити нестабилно.

За проучавање узајамног пресека параболе стабилности са параболом (3.4), у општем случају, за $n \neq 0$ добивамо једначину:

$$\begin{aligned} k^8 + k^6 \left(4 n^2 - \rho \frac{V^2}{E C_*^2} \right) + k^4 \left(6 n^4 + \frac{1}{C_*^2} - 2 \rho \frac{n^2 V^2}{E C_*^2} + \right. \\ \left. + k^2 \left(4 n^6 - \rho \frac{n^4 V^2}{E C_*^2} \right) + n^8 = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

чије ће решење дати осам корена:

$$k_i = \pm 2n^2 \{ [-a \pm (a^2 - 4b + 8n^4)^{1/2}] \pm [(-a \pm [a^2 - 4b + 8n^4]^{1/2})^2 - 16n^4]^{-1/2} \}, \\ (i = 1, 2, \dots, 8) \quad (3.10)$$

где је

$$a = 4 n^2 - \rho \frac{V^2}{E C_*^2}, \quad b = 2 n^2 a + \frac{1}{C_*^2} - 2 n^4. \quad (3.11)$$

Слично томе како је горе учињено за случај $n=0$, може се и овде показати, да се неопходан и довољан услов, при коме парабола (3.3), сече параболу стабилности и излази ван границе области стабилности, своди на одређивање услова настајања комплексних корена (3.10).

Анализирајући израз (3.10), могу се поставити следећа два битно различита неопходна и довољна услова да би парабола (3.3), секући се са параболом стабилности, изашла ван границе области стабилности:

$$a^2 - 4b + 8n^4 = \rho^2 \frac{V^4}{E^2 C_*^4} - \frac{4}{C_*^2} \geq 0, \quad (3.12)$$

$$-a \pm (a^2 - 4b + 8n^4)^{1/2} < 4n^2.$$

За (3.12) треба да је испуњена неједнакост:

$$a = 4 n^2 - \rho \frac{V^2}{E C_*^2} > 0. \quad (3.13)$$

Неједнакости (3.12) и (3.13) омогућавају да се одреде критичне брзине:

$$V_* \geq \left(\frac{2EC_*}{\rho} \right)^{1/2}, \quad n > \frac{1}{2} C_*^{-1/2} = n_*; \quad (3.14)$$

$$V_* \geq \frac{1}{2n} \left[\frac{E}{\rho} [16n^4 C_*^2 + 1] \right]^{1/2}. \quad (3.15)$$

Образац критичне брзине (3.14) идентички се поклапа са критичном брзином струје, нађеном за затворену цилиндарску љуску за $n=0$, и, као што се види из неједнакости (3.13), она се може користити за све вредности $n > n_*$, што за класу танких љуски одговара броју полуталаса $n > 30 \div 50$, тј. тако великом броју полуталаса код којих се облик попречног пресека мало разликује од круга.

Минимум брзине (3.15) јесте за $n = \frac{1}{2} C_*^{-1/2}$ и тачно се поклапа са критичном брзином, нађеном горе за $n=0$.

На тај начин, извршена анализа показује, да се флатер затворене цилиндарске љуске неограничене дужине, која се налази у надзвучној струји, може појавити за брзину струје $V > \left(\frac{2EC_*}{\rho} \right)^{1/2}$ кад облик попречног пресека остаје круг.

Користећи се обрасцима (1.17) и (3.2), могу се добити две вредности фреквенција, које битно зависе од брзине струје:

$$\omega_{1,2} = -\frac{B}{2\rho h} \pm \left\{ \left(\frac{B}{2\rho h} \right)^2 - \frac{E}{\rho R^2} \left[C_*^2 (k^2 + n^2)^2 + \frac{k^4}{(k^2 + n^2)^2} + \frac{BVk}{\rho h} i \right] \right\}^{1/2}. \quad (3.16)$$

Решење диференцијалне једначине малих осцилација плитких љуски (1.15), узето у облику:

$$\Phi(\alpha, \beta, t) = e^{i(n\beta + k\alpha)} e^{p+iq}, \quad (3.17)$$

означава да се дуж изводнице љуске распростиру таласи, са брзином:

$$v_b = -\frac{q}{k}. \quad (3.18)$$

Раздвајајући реални део комплексне учестаности (3.16) од имагинарног дела, налазимо:

$$v_b = \pm \left\{ \frac{1}{2k^2} \left[\pm \left\{ \left[\left(\frac{B}{2\rho h} \right)^2 - \frac{E}{\rho R^2} C_*^2 (k^2 + n^2)^2 + \frac{k^4}{(k^2 + n^2)^2} \right]^2 + \frac{B^2 V^2 k^2}{\rho^2 h^2 k^2} \right\}^{1/2} - \left[\frac{B^2}{4\rho^2 h^2} - \frac{E}{\rho R^2} \left(C_*^2 (k^2 + n^2)^2 + \frac{k^4}{(k^2 + n^2)^2} \right) \right] \right\}^{1/2}. \quad (3.19)$$

Користећи образац (3.19), одредимо брзину распрострања таласа за $V=0$:

$$v_b = \pm \left\{ \frac{E}{\rho R^2} \left[C_*^2 \frac{(k^2 + n^2)^2}{k^2} + \frac{k^2}{(k^2 + n^2)^2} + \frac{B^2}{4 \rho^2 h^2 k^2} \right] \right\}^{1/2}.$$

Минимална брзина распрострања прогресивног таласа је при

$$n^2 = k \left[\left(\frac{1}{C_*} \right)^{1/2} - k \right]. \quad (3.20)$$

и једнака је

$$(v_b)_{\min} = \left[\frac{2 E C_*^2}{\rho R^2} - \frac{B^2}{4 \rho^2 h^2 k^2} \right]^{1/2}. \quad (3.21)$$

Изостављајући сва међуизвођења, наведимо образац критичне брзине струје за неограничену затворену цилиндарску љуску, нађен из разматрања диференцијалне једначине малих осцилација цилиндарских љуски средње дужине (1.11):

$$V_* \geq \left[\frac{2 E C_*^2}{\rho} \left(2 - \frac{1}{n^2} \right) \right]^{1/2}. \quad (3.22)$$

Обрасцем (3.22) можемо се користити за све $n \geq 2$. Из (3.22) следи, да се за $n = \infty$ критична брзина неограничене затворене цилиндарске љуске средње дужине поклапа са брзином неограничене затворене цилиндарске љуске, нађеном полазећи од теорије плитких љуски.

§ 4. Затворена цилиндарска љуска ограничене дужине

Уведимо нову променљиву ξ , везану са α обрасцем

$$\alpha = \frac{l}{R} \xi, \quad (4.1)$$

где је l — дужина цилиндарске љуске. Тада се једначина која даје решење малих осцилација (1.11) може написати у облику:

$$\frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \xi^4} + C_*^2 \frac{l^4}{R^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right)^2 \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \xi^4} + \rho \frac{l^4}{ER^2} \frac{\partial^6 \Phi_1}{\partial t^2 \partial \beta^4} - \frac{Bl^3}{EhR^2} \left[V \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi \partial \beta^4} - l \frac{\partial^5 \Phi}{\partial t \partial \beta^4} \right] = 0. \quad (4.2)$$

Једначини (4.2) у сваком посебном случају треба да су придодати гранични услови на ивицама $\xi=0$ и $\xi=1$.

Одређујући по обрасцима (1.6), (1.7) померања и унутрашње силе љуске преко Φ_1 , гранични услови за граничне проблеме могу се представити у следећем облику:

а) љуска зглавкасто ослоњена на ивицама $\xi=0$ и $\xi=1$ —

$$w = \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \beta^4} = 0, \quad M_1 = \frac{D\nu}{R} \left[\frac{\partial^6 \Phi_1}{\partial \beta^6} + \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \beta^4} \right] = 0, \quad (4.3)$$

(за $\xi=0$ и $\xi=1$);

б) љуска укљештена на ивицама $\xi=0$ и $\xi=1$ —

$$w = \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \beta^4} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{R}{l} \frac{\partial^5 \Phi_1}{\partial \xi \partial \beta^4} = 0, \quad (4.4)$$

(при $\xi=0$ и $\xi=1$);

в) љуска зглавкасто ослоњена на ивици $\xi=1$ и круто укљештена на $\xi=0$ —

$$w = \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \beta^4} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{R}{l} \frac{\partial^5 \Phi_1}{\partial \xi \partial \beta^4} = 0; \quad (\text{за } \xi=0) \quad (4.5)$$

$$w = \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \beta^4} = 0, \quad M_1 = \frac{D\nu}{R} \left[\frac{\partial^6 \Phi_1}{\partial \beta^6} + \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \beta^4} \right] = 0; \quad (\text{за } \xi=1)$$

г) љуска укљештена на ивици $\xi=0$ и слободна на ивици $\xi=1$ —

$$w = \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \beta^4} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{R}{l} \frac{\partial^5 \Phi_1}{\partial \xi \partial \beta^4} = 0; \quad (\text{за } \xi=0) \quad (4.6)$$

$$T_1 = \frac{EhR}{l^2} \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \xi^2 \partial \beta^2} = 0, \quad S = \frac{EhR^2}{l^3} \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \xi^3 \partial \beta} = 0; \quad (\text{за } \xi=1)$$

(из друге групе релација види се, да се гранични услови на слободном крају задовољавају делимично):

д) љуска зглавкасто ослоњена на ивици $\xi=0$ и слободна на ивици $\xi=1$ —

$$w = \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \beta^4} = 0, \quad M_1 = \frac{D\nu}{R} \left[\frac{\partial^6 \Phi_1}{\partial \beta^6} + \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \beta^4} \right] = 0; \quad (\text{за } \xi=0) \quad (4.7)$$

$$T_1 = \frac{EhR}{l^2} \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \xi^2 \partial \beta^2} = 0, \quad S = \frac{EhR^2}{l^3} \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \xi^3 \partial \beta} = 0. \quad (\text{за } \xi=1)$$

У класи решења:

$$\Phi, (\alpha, \beta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{kn} X_k(\xi) e^{\omega t} \cos n\beta, \quad (4.8)$$

једначина (4.2) се после низа једноставних трансформација може написати у облику:

$$\frac{d^4 X_k}{d\xi^4} - An^4 \frac{dX_k}{d\xi} + C_1^2 (n^2 - 1)^2 n^4 - \lambda n^4 = 0, \quad (4.9)$$

где је

$$-\lambda = \frac{l^4}{ER^2} \left[\rho \omega^2 + \frac{B}{h} \omega \right], \quad A = \frac{B l^3}{E h R^2} V,$$

$$C_1^2 = C_* \frac{l^4}{R^4} = \frac{h^2 l^4}{12 R^6 (1 - \nu^2)}. \quad (4.10)$$

Једначина параболе стабилности имаће облик:

$$\lambda_1 = \rho \frac{h^2 E R^2}{B^2 l^4} \lambda_2^2, \quad \left(\lambda_1 = \frac{l^4}{E R^2} \rho q^2, \quad \lambda_2 = -\frac{B l^4}{E h R^2} q \right). \quad (4.11)$$

За фиксиране C_1 , n , A , λ решење једначине (4.9), у случају кад су корени карактеристичне једначине различити, има облик:

$$X_k(\xi) = C_1 e^{-k_1 \xi} + C_2 e^{-k_2 \xi} + C_3 e^{-k_3 \xi} + C_4 e^{-k_4 \xi}. \quad (4.12)$$

Даљи проблем састоји се у одређивању нетривијалних решења C_i ради чега је довољно потцинити решење (4.12) граничним условима и захтевати анулирање одговарајуће детерминанте $\Delta(k_i)$. Изостављајући питање о облику детерминанте $\Delta(k_i)$ за различите могуће комбинације вишеструких корена, уведемо у разматрање функцију

$$F(k_i) = \frac{\Delta(k_i)}{\delta(k_i)}, \quad (4.13)$$

где је

$$\delta(k_i) = (k_1 - k_2)(k_1 - k_3)(k_1 - k_4)(k_2 - k_3)(k_2 - k_4)(k_3 - k_4).$$

Из израза $\delta(k_i)$ следи, да ће све нуле функције $\Delta(k_i)$ бити нуле $\delta(k_i)$, а $F(k_i)$ ће бити аналитичка функција у целој области промене променљивих. Решење једначине (4.9) у најопштијем случају везано је са великим математичким тешкоћама. Применимо овде метод проучавања сопствених вредности, којима смо се користили у претходним параграфима ове главе.

Карактеристика тог метода, као што је познато, састоји се у томе, што се уместо решења једначине (4.9) параметри проблема A , λ и два тражена корена, на пример, k_3 , k_4 , изражавају помоћу друга два корена k_1 , k_2 једначине:

$$A = -\frac{1}{n^4} \left[[k^3 + k^2 k_1 + k k_1^2 + k_1^3], \quad \lambda = C_1^2 (n^2 - 1)^2 - \frac{k_1 k_2 k_3 k_4}{n^4}, \right.$$

$$k_{3,4} = -\frac{k_1 + k_2}{2} \pm \left[k_1 k_2 - \frac{3}{4} (k_1 + k_2)^2 \right]^{1/2}, \quad (4.14)$$

и уместо налажења сопствених вредности једначине (4.9) посматра се систем од две једначине, које образују карактеристични систем:

$$A + \frac{4 \eta}{n^4} (\eta^2 - \gamma^2) = 0, \quad F(\eta, \gamma) = \frac{\Delta(\eta, \gamma)}{\delta(\eta, \gamma)} = 0, \quad (4.15)$$

где су η и γ — величине, безане са коренима једначине

$$k_1 = \eta + i\gamma, \quad k_2 = \eta - i\gamma, \quad (4.16)$$

при томе је

$$\delta(\eta, \gamma) = 16 i \gamma [\gamma^2 - 2 \eta^2]^{1/2} [(\gamma^2 - 3 \eta^2) + 4 \eta^2 \gamma^2]. \quad (4.17)$$

Лева страна сваке од једначина (4.15) претставља аналитичку функцију променљивих η и γ , и задатак се састоји у томе да се нађе такво решење

$$\eta_i = \eta_i(n, A), \quad \gamma_i = \gamma_i(n, A) \quad (4.18)$$

система које дозвољава да се, користећи се обрасцима

$$A = -\frac{4 \eta}{\gamma^4} (\eta^2 - \gamma^2), \quad k_{3,4} = -\eta \pm [\gamma^2 - 2\eta^2]^{1/2},$$

$$\lambda = C_1^2 (n^2 - 1)^2 + \frac{\eta^2 + \gamma^2}{\eta^4} (\gamma^2 - 3 \eta^2), \quad (4.19)$$

за сваки гранични проблем израчунају сопствене вредности λ и установе оне вредности A , за које су сопствене вредности комплексне.

Решење карактеристичног система је најпростије добити графички, ако се нацртају на једном цртежу у правоуглом систему координата η , γ графици кривих, дефинисаних једначинама (4.15). При томе се графици кривих, који одговарају првој једначини система (хиперболе), уцртавају за различите вредности $A = \text{const}$. Даљи проблем своди се на утврђивање оних вредности A_{*i} , за које се тачке прве и друге реалне гране (4.18) поклапају и не сме се чинити никакав закључак о сопственим вредностима посматраних граничних проблема.

Изједначујући $A = A_{*i}$, према (4.10), налазимо брзину струје при којој још важи стабилност непоремећеног кретања, али изнад које кретање може постати нестабилно. Дакле, за сваки посебан гранични проблем неопходно је пре свега саставити израз друге једначине карактеристичног система $\Delta(\eta, \gamma) = 0$.

Саставимо карактеристични систем $\Delta(\eta, \gamma)$ за случај зглавкасто ослоњене луске. За одређивање различитих од нуле C_i ($i=1, 2, 3, 4$)

подвргнимо израз (4.12) за $X_k(\xi)$ граничним условима (4.3) и изједначимо са нулом детерминанту добивеног система:

$$\Delta(k_1, k_2, k_3, k_4) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 & k_4^2 \\ e^{-k_1} & e^{-k_2} & e^{-k_3} & e^{-k_4} \\ k_1^2 e^{-k_1} & k_2^2 e^{-k_2} & k_3^2 e^{-k_3} & k_4^2 e^{-k_4} \end{vmatrix} = 0.$$

Развијајући детерминанту и вршећи у њој замену k_i помоћу η и γ по обрасцу (1.16), добивамо:

$$\Delta(\eta, \gamma) = \{-2 \eta^2 \gamma [\gamma^2 - 2 \eta^2]^{1/2} \text{ch } 2 \eta + 2 \eta^2 \gamma [\gamma^2 - 2 \eta^2]^{1/2} \cos \gamma \text{ch } [\gamma^2 - 2 \eta^2]^{1/2} - (3 \eta^4 - \gamma^2 - 2 \eta^2 \gamma^2) \sin \gamma \text{sh } [\gamma^2 - 2 \eta^2]^{1/2}\} 16 i = 0, \quad (4.20)$$

изрази $\Delta(\eta, \gamma)$ за различите контурне проблеме добивају се **аналогним** путем;

љуска укљештена на ивицама $\xi=0$ и $\xi=1$:

$$\Delta(\eta, \gamma) = \{ \gamma [\gamma^2 - 2\eta^2]^{1/2} [\cos \gamma \operatorname{ch} (\gamma^2 - 2\eta^2)^{1/2} - \operatorname{ch} 2\eta] + 3\eta^2 \sin \gamma \operatorname{sh} [\gamma^2 - 2\eta^2]^{1/2} \} \quad 8i=0; \quad (4.21)$$

љуска укљештена на ивици $\xi=0$ и зглавкasto ослоњена на $\xi=1$ ивици

$$\Delta(\eta, \gamma) = \{ 2\eta \gamma [\gamma^2 - 2\eta^2]^{1/2} \operatorname{sh} 2\eta + (\gamma^2 - 3\eta^2) [\gamma^2 - 2\eta^2]^{1/2} \sin \gamma \operatorname{ch} [\gamma^2 - 2\eta^2]^{1/2} - \gamma(\gamma^2 + \eta^2) \cos \gamma \operatorname{sh} [\gamma^2 - 2\eta^2]^{1/2} \} \quad 8i=0; \quad (4.22)$$

љуска укљештена на ивици $\xi=0$ и слободна на ивици $\xi=1$

$$\Delta(\eta, \gamma) = \{ 8\gamma(\eta^2 + \gamma^2)^2 [\gamma^2 - 2\eta^2]^{1/2} \operatorname{ch} 2\gamma + 4\gamma(26\eta^4 + 2\gamma^4 - 4\eta^2\gamma^2) [\gamma^2 - 2\eta^2]^{1/2} \cos \gamma \operatorname{ch} [\gamma^2 - 2\eta^2]^{1/2} + 8\eta(2\eta^2\gamma^2 - \gamma^4 + 3\eta^4) \sin \gamma \operatorname{sh} [\gamma^2 - 2\eta^2]^{1/2} - 16\eta\gamma(\gamma^4 - \eta^4) \cos \gamma \operatorname{sh} [\gamma^2 - 2\eta^2]^{1/2} - 16\eta(4\eta^2\gamma^2 - 3\eta^4 - \gamma^4) [\gamma^2 - 2\eta^2]^{1/2} \sin \gamma \operatorname{ch} [\gamma^2 - 2\eta^2]^{1/2} - 32\eta^2\gamma^2(\gamma^2 - \eta^2) [\gamma^2 - 2\eta^2]^{1/2} e^{-2\eta} \} \quad i=0; \quad (4.23)$$

љуска зглавкasto ослоњена на ивици $\xi=0$ и слободна на ивици $\xi=1$

$$\Delta(\eta, \gamma) = \{ -2\eta\gamma(\gamma^2 + \eta^2) [\gamma^2 - 2\eta^2]^{1/2} \operatorname{ch} 2\gamma + \eta\gamma [\gamma^2 - 2\eta^2]^{1/2} [(\gamma^2 - \eta^2)^2 + (\gamma^2 - 3\eta^2)^2] e^{-2\eta} + 8\eta^3\gamma [\gamma^2 - 2\eta^2]^{1/2} (\gamma^2 - \eta^2) \cos \gamma \operatorname{ch} [\gamma^2 - 2\eta^2]^{1/2} + 4\eta(3\eta^2\gamma^4 - \gamma^6 + 3\eta^6 - 5\eta^4\gamma^2) \sin \gamma \operatorname{sh} [\gamma^2 - 2\eta^2]^{1/2} + \gamma[5\eta^2\gamma^4 - \gamma^6 - 19\eta^4\gamma^2 + 23\eta^6] \cos \gamma \operatorname{sh} [\gamma^2 - 2\eta^2]^{1/2} + [\gamma^2 - 2\eta^2]^{1/2} (\gamma^6 + 11\eta^4\gamma^2 - \eta^2\gamma^4 - 3\eta^6) \sin \gamma \operatorname{ch} [\gamma^2 - 2\eta^2]^{1/2} \} \quad i=0. \quad (4.24)$$

Приметимо, да за $\eta=0$ једначине $\Delta(\eta, \gamma)=0$ дегенеришу у карактеристичне једначине гредних фундаменталних функција за одговарајуће граничне услове.

§ 5. Утицај аеродинамичког пригушења

У неким примерима прорачуна флатера панела у надзвучној струји, коришћењем образаца клипне теорије

$$\Delta p = \frac{\rho_0 \kappa}{v_0} \left(V \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial t} \right),$$

аеродинамичко пригушење $-\frac{\rho_0 \kappa}{v_0} \frac{\partial w}{\partial t}$ показује слаб утицај на величину критичне брзине флатера V_{fl} . То је послужило као повод за опредељење у корист квазистационарне теорије, која не узима у обзир аеродинамичко пригушење. Међутим, занемарење аеродинамичког пригу-

шења не дозвољава у потпуности да се проучи утицај еластичне основе и сила, које дејствују у равни панела, на величину критичне брзине и може довести до суштинских грешака при њеном одређивању.

Покажимо на примеру проблема о осносиметричном флатеру кружне цилиндарске љуске, да чак при одсуству еластичне основе и тангентних сила занемарење аеродинамичког пригушења може да буде узрок нетачних резултата [34].

Нека се кружна цилиндарска љуска креће у гасу са надзвучном брзином дуж осе x , усмерене по оси цилиндра (непоремећено кретање), и врши допунска мала осносиметрична кретања (поремећена кретања). Примењујући Иљушинов закон равних пресека, у његовој линеарној формулацији, и једначину која даје решење проблема кружних цилиндарских љуски, лако је добити за бездимензионо нормално померање $w(x, t)$ тачака љуске једначину:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\nu \frac{a^2}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{a^4}{R^4} \left[12(1-\nu^2) \frac{R^2}{h^2} + 1 \right] w - \frac{a^3 p_0 x V}{D v_0} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{a^4}{D} \left[k_1 w + \left(k_2 + \frac{p_0 x}{v_0} \right) \frac{\partial w}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] = 0. \quad (5.1)$$

Овде је R — радијус цилиндра; x — бездимензиона координата, која се односи на дужину a цилиндра. Размотримо сопствена кретања — поремећена кретања облика:

$$w(x, t) = X(x)e^{\omega t}. \quad (5.2)$$

Увршћујући (5.2) у (5.1) и уводећи ознаке:

$$k = -\frac{\nu a^2}{\pi^2 R^2}, \quad A = \frac{a^3 p_0 x V}{D v_0}, \quad B = k_2 + \frac{p_0 x}{v_0}, \quad \lambda^0 = \lambda + d, \\ \lambda = -\frac{a^4}{D} (B \omega + m \omega^2), \quad d = -\frac{a^4 k_1}{D} - (1 - \nu^2) \frac{a^4}{R^4} \left(12 \frac{R^2}{h^2} + 1 \right), \quad (5.3)$$

долазимо за случај слободног ослањања (укљештења) по ивицама цилиндра до контурног проблема:

$$X^{IV} - 2k\pi^2 X'' + k^2\pi^4 X - AX' = \lambda^0 X,$$

$$X(0) = X''(0) = X(1) = X''(1) = 0, \quad (X(0) = X'(0) = X(1) = X'(1) = 0). \quad (5.4)$$

Упоређење једначина (5.1) — (5.4) (са одговарајућим једначинама (2.1) — (2.4) исте главе показује, да је посматрани проблем о флатеру цилиндра еквивалентан равном проблему о флатеру равног панела бесконачног распона, чији се параметри и услови учвршћења поклапају са таквима код цилиндра (осим наравно радијуса), а кривина цилиндра компензира се допунским фиктивним напрезањем, које притиска панел у својој равни, и допунском фиктивном еластичном основом. Као што је и требало очекивати, за $\frac{a}{R} = 0$ су оба проблема идентична (цилиндар бесконачног радијуса и панел бесконачног распона) и не захтева се увођење било

каких допунских фиктивних фактора. Ако је $\frac{a}{R} \neq 0$, образац (5.3),

који дефинише величину k , даје за $v \neq 0$ негативну вредност, која се објашњава као фиктивна притисна сила; у једначини (5.3), која дефинише величину d , појављује се допунски члан, који се тумачи као допунско еластично ослањање. Смањењем радијуса R оба фиктивна фактора се појачавају, што се формално изражава смањењем (у алгебарском смислу) величина k и d .

Као код проблема о флатеру равних панела, за $B > 0$ треба разликовати две карактеристичне вредности бездимензионе брзине A .

Прва вредност $A_1(k)$ одговара резонанцији (поклапање фреквенција двају различитих за $A < A_1(k)$ сопствених кретања (5.2); две сопствене вредности λ^0 које се поклапају за $A = A_1(k)$ граничног проблема (5.4) постају за $A > A_1(k)$ конјуговано-комплексне; одговарајућа реална сопствена кретања престају да имају облик стојећих таласа и добивају облик прогресивних таласа на љусци: амплитуда тих таласа опада све док се комплексне сопствене вредности $\lambda^0 = Re\lambda^0 + i Im\lambda^0$ налазе на комплексној равни λ^0 у параболу другог степена

$$Re\lambda^0 = d + \frac{1}{r} (Im\lambda^0)^2, \quad \left(r = \frac{a^4 B}{mD} \right) \quad (5.5)$$

Друга вредност A_{fl} одговара изласку комплексних сопствених вредности λ^0 на параболу (5.5); амплитуда одговарајућих прогресивних таласа престаје да опада; она почиње да расте (наступа флатер), када се при $A > A_{fl}$ комплексне сопствене вредности λ_0 налазе иза границе параболе (5.5).

Одређивање брзине $A_1(k)$ обично се састоји у доказу да су за $A < A_1(k)$ све сопствене вредности λ^0 реалне, али за $A > A_1(k)$ постоје комплексне. Одређивање критичне брзине флатера A_{fl} је знатно сложеније, јер је неопходно ефективно налажење комплексних сопствених вредности λ^0 што представља веома тежак посао.

За $B = 0$, тј. при одсуству пригушења, обе гране параболе (5.5) сливају се у реалну полуосу, услед чега се брзине $A_1(k)$ и A_{fl} поклапају. Томе знатно простијем случају (у поређењу са случајем $B > 0$) обично се долази у вези са коришћењем прорачуна флатера квазистационарних аеродинамичких теорија, које не узимају у обзир аеродинамичко пригушење [38].

У даљем се претпоставља, да је $k_1 = k_2 = 0$, тј. пригушење B је у целости аеродинамичко, а величина d је у потпуности узрокована кривином цилиндра.

Очевидно, грешка у оцени критичне брзине флатера A_{fl} , проузрокована при занемаривању пригушења B , састоји се у замени вредности A_{fl} мањом вредношћу $A_1(k)$, која од B уопште не зависи. У посматраном проблему та грешка може бити већа из следећих узрока. Како је већ речено, смањењем полупречника цилиндра R параметри k и d смањују се истовремено. Смањење k у интервалу $-2,5 \leq k \leq 0$ ($-5 \leq k \leq 0$ за ук-

($A_1(0)=636$ за укљештене ивице) до нуле. С друге стране, смањење d помера у комплексној равни λ^0 врх параболе (5.5) улево; њене гране на десној полуравни, где су распоређене све сопствене вредности λ^0 , удаљују се од реалне осе, што је праћено повећањем најмање критичне брзине флатера A_{fl} . Дакле, избором радијуса R може се снизити брзина $A_1(k)$ до нуле, истовремено повећавши критичну брзину флатера A_{fl} . У тим условима замена A_{fl} са $A_1(k)$ је недопустива. Исто се може рећи и о брзинама V_{fl} и V_1 добивених по обрасцу:

$$V = \frac{v_0}{p_0 \kappa} \frac{D}{a^3} A = \frac{v_0}{p_0 \kappa} \frac{E}{12(1-v^2)} \left(\frac{h}{a}\right)^3 A. \quad (5.6)$$

У овој глави проучавају се само типични примери динамичких проблема теорије љуски, што је важно у методском смислу. Уосталом овде су представљени проблеми који имају и самостални — примењени интерес.

§ 1. Радијална еластична деформација

Ако се цилиндар средње дебљине налази под дејством једноликог притиска по дужини $p(t)$, који се мења по датом закону, и фронт притиска се креће дуж осе x датом брзином, проблем тачног прорачуна и еластичних напона и деформација је веома сложен у рачунском смислу и није се успело доћи до простих образаца, из којих би се добиле јасне представе о динамичким ефектима [6, 36]. У најпростијем случају раванског проблема радијални и тангентни напони изражавају се помоћу деформација

$$\varepsilon_r = \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{w}{r} \text{ по обрасцима:}$$

$$\sigma_r = 3K \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \nu' \frac{w}{r} \right), \quad \sigma_\theta = 3K \left(\frac{w}{r} + \nu' \frac{\partial w}{\partial r} \right), \quad (1.1)$$

где је K — модул запреминске деформације; $\nu' = \frac{\nu}{1-\nu}$, при чему је овде ν — Пуасонов коефицијент. Динамичка једначина за радијално кретање:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

на основу (1.1), своди се на облик:

$$c^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (1.2)$$

Овде је ρ — густина материјала; c — брзина простирања запреминских таласа

$$c = \sqrt{\frac{3K}{\rho}}. \quad (1.3)$$

Опште решење проблема за почетне услове:

$$t=0: \quad w=w_0(r), \quad \frac{\partial w}{\partial t}=\dot{w}_0(r) \quad (1.3')$$

и граничне услове

$$r=a, \quad \sigma_r=-p(t); \quad r=b, \quad \sigma_r=0; \quad (1.3'')$$

добија се познатом методом — сменом

$$w=f(r) e^{i\kappa ct}.$$

При томе диференцијална једначина (1.2) добија облик:

$$f'' + \frac{1}{r} f' + \left(\kappa^2 - \frac{1}{r^2} \right) f = 0,$$

коју задовољавају функције

$$w = [A J_1(\kappa r) + B N_1(\kappa r)] e^{i\kappa ct}, \quad (1.4)$$

где су $J_1(\kappa r)$ и $N_1(\kappa r)$ — Беселове (Bessel) и Нојманове (Neumann) функције.

Сопствене вредности параметра κ_n (фреквенције слободних радијалних осцилација цилиндра $s\kappa_n$ (налазе се, према (1.4) и (1.1), из услова (1.3') и (1.3''), у којима се узима $p=0$: хомогени систем по A и B своди се на фреквентну једначину, која има облик

$$D(\kappa a) = D(\kappa b), \quad (1.5)$$

где је означено (за $\nu=0,25$)

$$D(\kappa a) = \frac{3\kappa a N_0(\kappa a) - 2N_1(\kappa a)}{3\kappa a J_0(\kappa a) - 2J_1(\kappa a)}. \quad (1.6)$$

Овде су J_0, J_1 — Беселове функције, а N_0, N_1 — Нојманове функције. За сваки корен κ_n једначине (1.5) однос констаната A и B постаје потпуно одређен, и образац (1.4) даје израз n -те сопствене функције

$$w_n = -D_n J_1(\kappa_n r) + N_1(\kappa_n r). \quad (1.4')$$

Представљајући сада $w_0(r)$, у облику редова по сопственим функцијама, из почетних услова (1.3') налазимо вредности A'_n, A''_n , тј. добивамо решење проблема слободних осцилација при задатим почетним условима. За решење проблема принудних осцилација цилиндра под дејством притиска $p(t)$ заменимо $p(t)$ запреминском радијалном силом q , која дејствује у танком прстену $a < r \leq r + \delta$, пошто гранични услови постају хомогени (тј. $\sigma_r=0$ за $r=a$ и $r=b$) а једначина (1.2) — нехомогена:

$$c^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} w \right) + \frac{q}{\rho} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (1.7)$$

Изаберимо $q(r, t)$ тако, да за $\delta \rightarrow 0$ буде

$$\int_a^{a+\delta} q \, dr = p(t). \quad (1.8)$$

Разлажући q у ред по сопственим функцијама $f_n(x_n r)$:

$$q = p(t) \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n(x_n r), \quad (1.8')$$

решење једначине (1.7) се може представити у облику

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) f_n(x_n r), \quad (1.9)$$

при чему за функције $\varphi_n(t)$ из (1.7) добивамо систем диференцијалних једначина:

$$\varphi_n'' + c^2 \varphi_n x_n^2 = \frac{\alpha_n}{\rho} p(t),$$

од којих свака има партикуларно решење

$$\varphi_n = \frac{\alpha_n}{\rho c \varphi_n} \int_0^t p(\tilde{\tau}) \sin [c x_n (t - \tilde{\tau})] d\tilde{\tau}. \quad (1.10)$$

Пошто за $t=0$ израз (1.10) даје $\varphi_n=0$ и $\dot{\varphi}_n=0$, то (1.9) за вредности φ_n (1.10) формално представља решење проблема о дејству притиска $p(t)$ на првобитно недеформисани цилиндар.

Ред, који улази у израз (1.8'), представља развитак прекидне функције $\Delta(r)$:

$$\Delta(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n, \quad (1.11)$$

која се може написати у облику:

$$\Delta(r) = \begin{cases} \frac{1}{\delta}, & a < r < a + \delta \\ 0, & a + \delta < r. \end{cases} \quad (1.12)$$

При томе ће функција q (1.8') задовољавати услов (1.8), ако крајњи резултат има смисла за $\delta \rightarrow 0$.

Узимајући у обзир ортогоналност функција f_n ,

$$\int_a^b r f_n f_m \, dr = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ c_n^2, & m = n, \end{cases} \quad (1.13)$$

множећи са $r f_m dr$ обе стране (1.11) и интегришући од a до b добивамо:

$$\alpha_n = \frac{a}{c_n^2} f_n(x_n a), \quad c_n^2 = \int_a^b f_n^2 r dr. \quad (1.14)$$

Значи, опште решење потпуно је одређено обрасцем (1.9), који се може написати у облику:

$$w = \frac{a}{\rho c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x_n a)}{x_n c_n^2} f_n(x_n r) \int_0^t p(\tilde{\tau}) \sin [c x_n (t - \tilde{\tau})] d\tilde{\tau}. \quad (1.15)$$

Тај израз је сложен за анализу и захтева гломазне бројне прорачуне. У простијем случају, кад у тренутку $t=0$ делује константан притисак $p = \text{const}$, образац (1.15) добива облик (узимајући у обзир $\rho c^2 = 3K$):

$$w = \frac{p a}{3K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n^2 x_n^2} f_n(x_n a) f_n(x_n r) [1 - \cos(c x_n t)]. \quad (1.16)$$

Коефицијент динамичности, који показује однос померања (и напона) при динамичком прорачуну цилиндра (узимањем у обзир сила инерције) према њиховим вредностима при статичком прорачуну, јако зависи од закона дејства притиска $p(t)$ и може не само да не узме вредност 2, већ и бити битно мањи од јединице у случају краткотрајног дејства. Цилиндри могу издржавати, остајући еластични, притиске, који више пута превазилазе максималне допуштене статичке, ако је време дејства притиска мање од времена двоструког пролажења звучног таласа $2 \frac{b-a}{c}$ по деб-

љини зида, што је битно за веома дебеле цилиндри. Тај ефект, дакле, у првом реду односи се на велике еластичне масе са цилиндарским шупљинама и зато се овде не разматра.

§ 2. Раванска еласто-пластична деформација

Динамички проблем за цилиндар у случају равних еласто-пластичних деформација нешто се упрошћава, јер се цилиндар може посматрати као механички систем са једним степеном слободе [6, 36].

Нека се за $t=0$ цилиндар радијуса a, b налази у миру, а за $t>0$ дејствују унутрашњи $p_a(t)$ и спољашњи $p_b(t)$ притисак, тако да се почетна координата произвољне честице r_0 мења до величине $r(r_0, t)$, а унутрашњи радијус a постаје једнак $R(t)$. Нека је $v = \frac{dR}{dt}$ брзина ширења отвора.

Услов нестишљивости материјала:

$$r^2 - R^2 = r_0^2 - a^2, \quad R_b^2 - R^2 = b^2 - a^2, \quad (2.1)$$

омогућава за мале и коначне деформације да се напишу изрази клизања

(смицања) γ брзине $v_r = \frac{dr}{dt}$ и убрзања $\frac{dv_r}{dt}$:

$$\gamma = \frac{r}{r_0} \frac{\partial r}{\partial r_0} = \frac{R^2 - a^2}{r \sqrt{r^2 - R^2 + a^2}}, \quad v_r = \frac{R}{r} v,$$

$$\frac{dv_r}{dt} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (R v) - \frac{R^2 v^2}{r^3}. \quad (2.2)$$

Динамичка једначина у случају коначних деформација пише се у облику:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \rho \left[\frac{d}{dt} (R v) - \frac{R^2 v^2}{r^2} \right] + \frac{2 \tau(\gamma)}{r},$$

где је $\tau = F(\gamma)$ функција укрућења материјала, која се на основу (2.2) изражава помоћу R и r .

Интегралети ту једначину по r од унутрашње ($r=R$) до спољашње ($R_b=r$) површи и узимајући у обзир граничне услове, добијамо:

$$\frac{d v}{d t} R \ln \frac{R_b}{R} + \frac{v^2}{2} \left(\ln \frac{R_b^2}{R^2} + \frac{R^2}{R_b^2} - 1 \right) + \frac{2}{\rho} \int_R^{R_b} \frac{\tau}{r} d r = \frac{p}{\rho}, \quad (2.3)$$

где је $p = p_a - p_b$ — разлика притисака, која одређује кретање.

Најпре размотримо мале еластичне деформације. У том случају, стављајући $w(t) = R(t) - a$ и одбацујући у (2.2) мале реда $\frac{w}{a}$ у односу на једначину, добивамо ($R_b = b$, $R_a = a$):

$$\gamma = \frac{2 a w}{r^2}, \quad \tau = G \gamma.$$

У једначини (2.3) осим тога упрошћења неопходно је још одбацити мале реда v^2 у односу на $\frac{p}{\rho}$ и $\frac{\tau}{\rho}$, после чега, означавајући брзину таласа клизања c_1 и параметар κ по обрасцима:

$$c_1 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad \kappa = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{2(b^2 - a^2)}{a \ln \frac{b}{a}}}, \quad (2.4)$$

добивамо једначину у облику:

$$\frac{d^2 w}{d t^2} + c_1^2 \kappa^2 w = \frac{p(t)}{\rho a \ln \frac{b}{a}}, \quad (2.5)$$

чије ће решење, аналогно (1.10), бити:

$$w = \frac{1}{c_1 \kappa \rho a \ln \frac{b}{a}} \int_0^t p(\tilde{\tau}) \sin [c_1 \kappa (t - \tilde{\tau})] d \tilde{\tau}. \quad (2.6)$$

Динамички коефицијент k_d са одређеним степеном сигурности може се одредити на основу решења (2.6).

Нека $p(t)$ има при неком $t=t_m$ максимум p_m ; статички прорачун на дејство притиска p_m даје вредности максималног смичућег напона:

$$\tau_m = \frac{1}{1-\alpha^2} p_m.$$

Динамички прорачун даје за $r=a$:

$$\tau = 2 G \frac{w}{a},$$

при чему се w одређује према (2.6). Значи, динамички коефицијент k_d се дефинише као највећа апсолутна вредност у току времена размере $\frac{\tau}{\tau_m}$, тј.

$$k_d = \max \left| \frac{c_1 \kappa}{p_m} \int_0^t p(\tilde{\tau}) \sin [c_1 \kappa (t - \tilde{\tau})] d\tilde{\tau} \right|. \quad (2.7)$$

За тренутну појаву константног притиска:

$$p(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ p = \text{const}, & t > 0 \end{cases}$$

из (2.7) добивамо:

$$k_d = \max \left| \int_0^t \sin (t - \tilde{\tau}) d\tilde{\tau} \right| = 2.$$

У случају константног притиска, који дејствује одређени интервал времена t_1 :

$$p(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \quad t > t_1 \\ p, & 0 < t < t_1, \end{cases}$$

динамички коефицијент ће бити једнак највећем од израза:

$$k_d' = \max \left| \int_0^t \sin (t - \tilde{\tau}) d\tilde{\tau} \right| = \max (1 - \cos t), \quad t < t_1;$$

$$k_d'' = \max \left| \int_0^{t_1} \sin (t - \tilde{\tau}) d\tilde{\tau} \right| = \max |\cos (t - t_1) - \cos t|, \quad t > t_1,$$

где је $t = c_1 \kappa \tilde{\tau}$.

Сада размотримо еласто-пластичне мале деформације. При једностраном динамичком процесу (истезање или притисак) зависност $\tau = F(\gamma)$

дозвољава да се изрази интеграл, који улази у (2.3), преко w . Представљајући $F(\gamma)$ у облику $\tau = G\gamma[1 - \omega(\gamma)]$, добивамо:

$$2 \int_a^b \frac{\tau dr}{r} = \int_{\gamma_b}^{\gamma_a} \frac{\tau}{\gamma} d\gamma = 2G(1 - \alpha^2) \frac{w}{a} - 2G \int_{\gamma_b}^{\gamma_a} \omega(\gamma) d\gamma.$$

Стављајући

$$\gamma_a = \frac{2w}{a}, \quad \gamma_b = \frac{2w}{a} \alpha^2, \quad S = \frac{2c_1^2}{\rho a \ln \frac{1}{\alpha}}, \quad (2.8)$$

трансформишимо динамичку једначину (2.3) на облик:

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + (c_1 \kappa)^2 w - S \int_{\gamma_b}^{\gamma_a} \omega(\gamma) d\gamma = \frac{p(t)}{\rho a \ln \frac{1}{\alpha}}. \quad (2.9)$$

Та квазилинеарна диференцијална једначина има мали параметар, јер је функција $\omega < 1$. Значи, решење се може наћи по методи малог параметра, за који се може узети S . Овде се разматра монотono решење w , које расте или опада током времена. Зато, по Иљушиновој методи еластичних решења, у првој апроксимацији треба узети решење еластичног проблема (2.6). Друга апроксимација такође се добива по формули (2.6), ако се у њој $p(t)$ замени са

$$p(t) + 2c_1^2 \int_{\gamma_{b1}}^{\gamma_{a1}} \omega(\gamma) d\gamma,$$

где је

$$\gamma_{b1} = \gamma_{a1} \alpha^2$$

и

$$\gamma_{a1} = \frac{2}{c_1 \kappa \rho a^2 \ln \frac{1}{\alpha}} \int_0^t p(\tilde{\tau}) \sin [(c_1 \kappa)(t - \tilde{\tau})] d\tilde{\tau}. \quad (2.10)$$

На тај начин, у другој апроксимацији добивамо:

$$w = \frac{1}{c_1 \kappa \rho a \ln \frac{1}{\alpha}} \int_0^t \left[p(\tilde{\tau}) + 2c_1 \int_{\gamma_{b1}(\tilde{\tau})}^{\gamma_{a1}(\tilde{\tau})} \omega(\gamma) d\gamma \right] \sin [(c_1 \kappa)(t - \tilde{\tau})] d\tilde{\tau}. \quad (2.11)$$

Проучимо велике пластичне деформације. Ако притисак $p(t) = p_a - p_b$ зависи само од запремине шуљбине цилиндра, тј. $p = p(R)$ тада једначина (2.3) има интеграл енергије, при чему је она линеарна по $\frac{v^2}{2}$:

$$R \ln \frac{R_b}{R} \frac{d}{dR} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \left(\ln \frac{R_b^2}{R^2} + \frac{R^2}{R_b^2} - 1 \right) \frac{v^2}{2} = \frac{p(R)}{\rho} - \frac{2}{\rho} \int_R^{R_b} \frac{\tau dr}{r}. \quad (2.12)$$

Занемарујући еластичне деформације и укрућење материјала, тј. стављајући $\tau = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} = \tau_s$ напишимо интеграл једначине (2.12) из услова очувања енергије. Унутрашњи притисак p_s , неопходан за савлађивање пластичног отпора материјала, у том случају биће једнак:

$$p_s = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \ln \frac{R_b^2}{R^2}. \quad (2.13)$$

Значи, део активног притиска $p(R)$ који ће увећавати кинетичку енергију цилиндра, биће једнак $p(R) - p_s(R)$. Одговарајући рад ће бити:

$$A = 2\pi \int_a^R \left[p(R) - \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \ln \frac{R_b^2}{R^2} \right] R dR. \quad (2.14)$$

Кинетичка енергија цилиндра може се на основу (2.2) написати овако:

$$T = \pi\rho \int_R^{R_b} v_r^2 r dr = \pi\rho R^2 v^2 \ln \frac{R_b}{R}. \quad (2.15)$$

Из закона очувања енергије имамо:

$$T = T_0 + A, \quad (2.16)$$

где је T_0 почетна кинетичка енергија цилиндра:

$$T_0 = \pi\rho a^2 v_0^2 \ln \frac{b}{a}. \quad (2.17)$$

Брзина ширења унутрашње површи цилиндра из (2.16) налази се у облику функције радијуса R :

$$v = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{T_0 + A}{\pi\rho \ln \frac{R_b}{R}}}. \quad (2.18)$$

Ако $T_0 = 0$ ($v_0 = 0$) и притисак p опада са ширењем шупљине, тако да почињући од неког R израз у угластој загради под интегралом (2.14) постаје негативан, брзина v имаће максимум v_m . Означавајући са R_m (R_{mb}) радијус, при коме се достиже максимална брзина, везу између v_m и R_m добивамо из једначине (2.12), у којој треба ставити

$$\frac{d}{dR} \left(\frac{v^2}{2} \right) = 0. \quad (2.19)$$

Полупречник R_m налази се из једначине:

$$\frac{d}{dR} \left\{ \frac{1}{\ln \frac{R_b}{R}} \int_a^R \left[p(R) - \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \ln \frac{R_b^2}{R^2} \right] R dR \right\} = 0. \quad (2.20)$$

Размотримо посебан случај притиска шупљине цилиндра на рачун почетне кинетичке енергије T_0 . Стављајући у (2.14) $p=0$, налазимо:

$$A = \frac{\pi \sigma_s}{\sqrt{3}} \left[R^2 \ln \frac{R_b^2}{R^2} - a^2 \ln \frac{b^2}{a^2} + (b^2 - a^2) \ln \frac{R_b^2}{b^2} \right]. \quad (2.21)$$

Кретање сагласно (2.16) обуставља се за R , одређено из услова $T_0 + A = 0$. Нађимо најмању кинетичку енергију T_{kr} при којој ће шупљина ишчезнути. Прелазећи на границу $R \rightarrow 0$, добивамо:

$$T_{kr} = \frac{\pi \sigma_s}{\sqrt{3}} \left[a^2 \ln \frac{b^2}{a^2} + (b^2 - a^2) \ln \frac{b^2}{a^2} \right] \quad (2.22)$$

и одговарајућа почетна брзина налази се из једначине

$$\frac{\rho (v_0^2)_{kr}}{2} = \frac{T_{kr}}{\pi a^2 \ln \frac{b^2}{a^2}}. \quad (2.23)$$

За $T_0 > T_{kr}$ шупљина ће се затварати са брзином, која за $R \rightarrow 0$ тежи бесконачности:

$$\frac{\rho v^2}{2} \sim \frac{T_0 - T_{kr}}{\pi R^2 \ln \left(\frac{b^2 - a^2}{R^2} \right)}. \quad (2.24)$$

§ 3. Утицај покретног оптерећења на цилиндар

Оцену динамичког коефицијента при покретном оптерећењу можемо дати на основу теорије осцилација цилиндарске љуске [6, 36].

Наведимо једначину радијалних осцилација цилиндарских љуски:

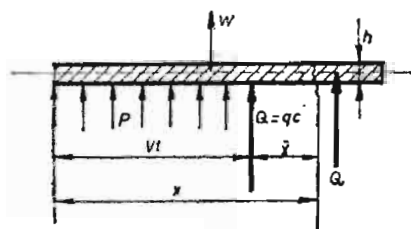
$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(\frac{2 \nu D}{R^2} - \frac{P}{2 \pi R} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{12(1 - \nu^2) D}{h^2 R^2} w = p - \frac{\nu P}{2 \pi R^2} \quad (3.1)$$

Овде је h — дебљина зида, R — полупречник, $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$ цилиндарска крутост, P — константна аксијална истежућа сила, p — унутрашњи притисак.

Размотримо принудне осцилације цилиндра под дејством константног притиска p и циркуларног притиска $Q = qc$, који се креће константном

брзином v дуж цилиндра удесно, при чему ћемо сматрати, да је притисак десно од Q једнак нули (сл. 21).

Од интереса је стационарно решење, непроменљиво у правцу оса, које се крећу истовремено са оптерећењем. Нека се координатни почетак



сл. 21

налази у тачки дејства циркуларног притиска Q . Размотримо, дакле, решење једначине (3.1), које зависи од разлике:

$$\xi = x - vt, \quad (3.2)$$

тада је

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -v \frac{d}{d\xi},$$

и зато (3.1) добива облик:

$$Dw^{IV} + \left(\rho h v^2 + \frac{2 \nu D}{R^2} - \frac{P}{2 \pi R} \right) w'' + \frac{12 (1 - \nu^2) D}{h^2 R^2} w = p - \frac{\nu P}{2 \pi R^2} \quad (3.3)$$

при чему цртица означава извод по ξ . Из поређења првог и последњег сабирка са десне стране (3.3) види се да ће карактеристична димензија области промене деформације бити реда:

$$l = \frac{\sqrt{Rh}}{\sqrt[3]{3(1-\nu^2)}}, \quad (3.4)$$

и зато по реду величина једначина (3.3) има облик

$$D \frac{w}{l^4} + \left(\rho h v^2 + \frac{2 \nu D}{R^2} - \frac{P}{2 \pi R} \right) \frac{w}{l^2} + D \frac{w}{l^4} \approx p.$$

Размера другог сабирка према првом и трећем одређује се величинама:

$$\frac{\rho h v^2 \frac{w}{l^4}}{D \frac{w}{l^4}}; \quad \frac{\frac{2 \nu D}{R^2} \frac{w}{l^2}}{D \frac{w}{l^4}}; \quad \frac{\frac{P}{2 \pi R} \frac{w}{l^2}}{D \frac{w}{l^4}}.$$

За веома велике брзине v прва размера може бити велика и зато се не сме занемарити. Друга размера једнака је:

$$2 \nu \frac{l^2}{R^2} = \frac{2 \nu}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{h}{R},$$

тј. одговарајуће чланове у (3.3) можемо занемарити са грешком која није већа од $\frac{h}{R}$ у поређењу са јединицом. Трећа размера једнака је

$$\frac{Pl^2}{2\pi RD} = \frac{P}{2\pi Rh} \frac{l^2 h 12}{Eh^3} (1-\nu^2) = 4 \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{R}{h} \frac{(\sigma_3)_{sr}}{E},$$

где је $(\sigma_3)_{sr} = \frac{P}{2\pi Rh}$ — средњи напон истезања од аксијалне силе P ; наведена размера је веома мала величина, и одговарајуће сабирке у заградама (3.3) можемо занемарити.

Дакле, динамичка једначина (3.3) има следећи приближни облик:

$$l^4 \frac{d^4 w}{d\xi^4} + \rho \frac{hv^2 l^2}{D} \frac{d^2 w}{d\xi^2} + 4w = \frac{l^2}{D} \left(p - \frac{\nu P}{2\pi R^2} \right). \quad (3.5)$$

Уведимо нове ознаке, које упрошћавају формулацију проблема: без-димензиону координату

$$\zeta = \frac{\xi}{l} = \zeta \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rh}}, \quad (3.6)$$

статички угиб љуске по безмоментној теорији:

$$w_{st} = \frac{1}{4} \frac{l^4}{D} \left(p - \frac{\nu P}{2\pi R^2} \right) \quad (3.7)$$

и параметар динамичности:

$$\chi = \frac{\rho h v^2 l^2}{4D} = \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{R}{h} \left(\frac{v}{c} \right)^2, \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (3.8)$$

где је c — брзина простирања звука у материјалу. Из (3.5) добивамо:

$$\frac{d^4 w}{d\zeta^4} + 4\chi \frac{d^2 w}{d\zeta^2} + 4w = 4w_{st}. \quad (3.9)$$

Пошто је w_{st} — функција, која има прекид у једној тачки $x=0$, то разбијајући област на интервале $x<0$ и $x>0$, добивамо за $x<0$, $w=w_{st}$. Опште решење у облику $e^{k\zeta}$ доводи до карактеристичне једначине

$$k^4 + 4\chi k^2 + 4 = 0,$$

која има корене:

$$k_{1,2} = s_1 \pm is, \quad k_{3,4} = -s_1 \pm is, \\ s_1 = \sqrt{1-\chi}, \quad s = \sqrt{1+\chi}. \quad (3.10)$$

Угиб w за леви део цилиндра ($x<0$) је облика:

$$w = w_{st} + e^{s_1 \zeta} (A_1 \cos s \zeta + B_1 \sin s \zeta), \quad (3.11)$$

а за десни ($x > 0$) —

$$w = w_n + e^{-s_1 \zeta} (A_2 \cos s \zeta + B_2 \sin s \zeta), \quad (3.12)$$

при чему су A, B — произвољне константе и

$$w_\Omega - w_n = \frac{pR^2}{Eh} = \tilde{p}. \quad (3.13)$$

Услови спрегнутости решења у пресеку $x=0$ захтевају непрекидност угиба, угла нагиба изводнице, момента савијања и пресечне силе $N = \frac{dM}{dx}$ која у пресеку $x=0$ треба да има прекид за величину Q . Означавајући:

$$\tilde{q} = \frac{Ql^3}{D} = 4 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \frac{qcR}{Eh} \sqrt{\frac{R}{h}} \quad (3.14)$$

и задовољавајући услове спрегнутости, налазимо константе у (3.11) и (3.12):

$$A_1 = -\frac{1}{2} \tilde{p} + \frac{1}{8s_1} \tilde{q}, \quad B_1 = -\frac{1}{2} \tilde{p} \frac{\chi}{\sqrt{1-\chi^2}} - \frac{1}{8s} \tilde{q}, \quad (3.15)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \tilde{p} + \frac{1}{8s_1} \tilde{q}, \quad B_2 = -\frac{1}{2} \tilde{p} \frac{\chi}{\sqrt{1-\chi^2}} + \frac{1}{8s} \tilde{q}.$$

Из (3.11), (3.12) и (3.13) види се да $\chi=1$ дефинише критичну брзину кретања оптерећења, при којој је могућ снажан утицај динамичког оптерећења. За $\chi=1$ из (3.8) добивамо:

$$v_{kr} = \frac{c}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} = 4 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{h}{R}} \frac{m}{sec} \quad (3.16)$$

(податак је дат за $E=2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\nu=\frac{1}{3}$, $\rho g=7,8$).

За $\chi < 1$ на рачун динамичког оптерећења угиб w ће бити већи него при његовом статичком дејству ($\chi=0$), и зато се може дефинисати коефицијент динамичности као однос максималног угиба w_{\max} за $\chi > 0$ према максималном угибу за $\chi=0$:

$$k_d = \frac{(w_{\max})_{\chi > 0}}{(w_{\max})_{\chi = 0}}, \quad (3.17)$$

при чему се w_{\max} одређује за леви део цилиндра, тј. по обрасцу (3.11).

Тачка $\zeta_{\max} < 0$, у којој је угиб највећи, одређује се из услова $\frac{dw}{d\zeta} = 0$; што даје:

$$\text{tg}(s\zeta_{\max}) = \frac{\sqrt{1+\chi}}{\sqrt{1-\chi} - \frac{\tilde{q}}{2\tilde{p}}}. \quad (3.18)$$

Размотримо први пример, када се циркуларни притисак Q простира са брзином v , тако да је $\hat{p}=0$, $\hat{q}\neq 0$. Максимални динамички угиб ће бити:

$$w_{\max} = A_1 = \frac{\tilde{q}}{8\sqrt{1-\chi}},$$

и зато је динамички коефицијент једнак $k_d = \frac{1}{\sqrt{1-\chi}}$.

Размотримо други пример, кад аксијална сила и циркуларно оптерећење недостају ($P=Q=0$, $\tilde{q}=0$) и дејствује само унутрашњи притисак. Највећи угиб добија се у тачки $\zeta_{\max} < 0$, за коју је:

$$\operatorname{tg}(s\zeta_{\max}) = \sqrt{\frac{1+\chi}{1-\chi}},$$

па, ако се уведе

$$\frac{\pi}{2} \leq \Delta = \operatorname{arc\,tg} \left(-\sqrt{\frac{1+\chi}{1-\chi}} \right) \leq \frac{3\pi}{4} = \Delta_0,$$

тада за максимални угиб добивамо израз:

$$w_{\max} = \frac{\tilde{p}}{2\sqrt{2}} \left[2\sqrt{2} + e^{-\Delta} \left(\sqrt{1-\chi} + \frac{\chi}{1-\chi} \sqrt{1+\chi} \right) \right], \quad (3.19)$$

па је коефицијент динамичности

$$k_d = \frac{2\sqrt{2} + e^{-\Delta} \left(\sqrt{1-\chi} + \frac{\chi}{1-\chi} \sqrt{1+\chi} \right)}{2\sqrt{2} + e^{-\Delta_0}}. \quad (3.20)$$

Коефицијент динамичности циркуларног притиска је знатно већи од коефицијента динамичности унутрашњег притиска. На пример за $\chi=0,45$ имамо $k_{d\tilde{q}}=1,35$; $k_{d\tilde{p}}=1,035$ за љуске са размером $\frac{h}{R} \approx 0,2$ што одговара брзини кретања оптерећења $v \approx 1200$ m/sec.

§ 4. О распрострањању еластичних таласа у љуски

Велики значај представљају проучавања распрострањања поремећаја у танкозидним конструкцијама у вези са проблемом њихове носивости и крутости. Размотримо распрострањање еластичних таласа у љускама.

Најпре испишимо систем диференцијалних једначина за осносиметричне осцилације кружне цилиндарске љуске дебљине $2h$ и полупречника средње површи r_0 , које ће затим бити искоришћене за изучавање еластичних таласа у љуски.

Полазећи од општих једначина теорије еластичности без било каквих хипотеза о карактеру деформисања, ослањајући се на алгоритам Н.А.

Киљчевског [39], елиминацијом свих функција померања из матричних оператора, осим једне или неколико, И.Т. Селезов је формирао генерализоване диференцијалне једначине (с тачношћу до члана реда ξ^3) осцилација [40]:

$$\begin{aligned} & \left\{ [\xi a_0 + \xi^3 a_1] - \xi^3 a_2 \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + [\xi + \xi^3 a_3] \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} + \xi^3 a_4 \frac{\partial^4}{\partial x^{*4}} - \right. \\ & \left. - \xi^3 a_5 \frac{\partial^4}{\partial t^{*2} \partial x^{*2}} + \xi^3 a_6 \frac{\partial^4}{\partial t^{*4}} \right\} w_0^* + \left\{ [\xi a_7 + \xi^3 a_8] \frac{\partial}{\partial x^*} + \xi^3 a_9 \frac{\partial^3}{\partial x^{*3}} + \right. \\ & \left. + \xi^3 a_{10} \frac{\partial^3}{\partial t^{*2} \partial x^*} \right\} u_0^* = \left\{ [2 + \xi^2 d_1] - \xi^2 d_2 \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \xi^2 d_3 \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} \right\} \frac{q_1^* - q_2^*}{2} + \\ & + \left\{ [\xi + \xi^3 d_4] \frac{\partial}{\partial x^*} + \xi^3 d_5 \frac{\partial^3}{\partial x^{*3}} + \xi^3 d_6 \frac{\partial^3}{\partial t^{*2} \partial x^*} \right\} \frac{p_1^* + p_2^*}{2} + \\ & + \left\{ [\xi d_7 + \xi^3 d_8] - \xi^3 d_9 \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \xi^3 d_{10} \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} \right\} \frac{q_1^* + q_2^*}{2}; \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ [-\xi b_0 + \xi^3 b_1] \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + [\xi + \xi^3 b_2] \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} + \xi^3 b_3 \frac{\partial^4}{\partial x^{*4}} - \xi^3 b_4 \frac{\partial^4}{\partial t^{*2} \partial x^{*2}} + \right. \\ & \left. + \xi^3 b_5 \frac{\partial^4}{\partial t^{*4}} \right\} u_0^* + \left\{ [-\xi b_6 - \xi^3 b_7] \frac{\partial}{\partial x^*} - \xi^3 b_8 \frac{\partial^3}{\partial x^{*3}} - \right. \\ & \left. - \xi^3 b_9 \frac{\partial^3}{\partial t^{*2} \partial x^*} \right\} w_0^* = \left\{ [2 + \xi^2 l_1] - \xi^2 l_2 \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \xi^2 l_3 \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} \right\} \frac{p_1^* - p_2^*}{2} + \\ & + \left\{ [\xi l_4 + \xi^3 l_5] \frac{\partial}{\partial x^*} - \xi^3 l_6 \frac{\partial^3}{\partial x^{*3}} + \xi^3 l_7 \frac{\partial^3}{\partial t^{*2} \partial x^*} \right\} \frac{q_1^* + q_2^*}{2} + \\ & + \left\{ [\xi + \xi^3 l_8] - \xi^3 l_9 \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \xi^3 l_{10} \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} \right\} \frac{p_1^* + p_2^*}{2}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где је x^* — променљива, рачуната дуж осе љуске; w_0^* и u_0^* — радијално и аксијално померање; $q_{1,2}^*$ — радијална оптерећење на унутрашњој и спољашњој површи љуске; $p_{1,2}^*$ — аксијално оптерећење на истим површима; a_j и b_j — константе, које зависе од Пуасоновог броја $\frac{1}{\nu}$.

Овде су усвојени следећи бездимензиони параметри:

$$\begin{aligned} w_0^* &= \frac{w_0}{r_0}, & u_0^* &= \frac{u_0}{r_0}, & x^* &= \frac{x}{r_0}, & t^* &= \frac{c_s}{r_0} t, \\ q^* &= \frac{q}{\rho c_s^2}, & p^* &= \frac{p}{\rho c_s^2}, & \xi &= \frac{2h}{r_0}, & c_s^2 &= \frac{m}{\rho}. \end{aligned}$$

При чему, како доказује аутор [40], установљени метод доводи до очувања свих чланова малих одређеног реда и постојања свих могућих парцијалних извода, и зато се границе применљивости једначина одређују редом изостављених чланова. Ипак тај метод захтева строго математичко образложење.

Проучимо бесконачну цилиндарску љуску, на коју на растојању $x^* = 0$ дејствује концентрисани осносиметрични импулс $Q\sigma(t^*)$, где је $\sigma(t^*)$ — Хевисајдова функција. Проблем ћемо решавати, искључујући нападну тачку концентрисаног импулса. Тада долазимо до диференцијалних једначина облика:

$$\begin{aligned} & \left\{ [(-b_0 a_0 + b_6 a_7) + \xi^2 (-b_0 a_1 + b_1 a_0 + b_6 a_8 + b_7 a_7)] \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \right. \\ & + [a_0 + \xi^2 (a_1 + b_2 a_0)] \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} + \xi^2 [a_2 b_0 + b_3 a_0 + b_8 a_7 + b_6 a_9] \frac{\partial^4}{\partial x^{*4}} + \\ & + [-b_0 + \xi^2 (-b_0 a_3 - a_2 - b_4 a_0 + b_1 + b_9 a_7 + b_6 a_{10})] \frac{\partial^4}{\partial t^{*2} \partial x^{*2}} + \\ & + [1 + \xi^2 (a_3 + b_5 a_0 + b_2)] \frac{\partial^4}{\partial t^{*4}} - \xi^2 b_0 a_4 \frac{\partial^6}{\partial x^{*6}} + \xi^2 [b_0 a_5 + a_4 + \\ & \left. b_3] \frac{\partial^6}{\partial t^{*2} \partial x^{*4}} - \xi^2 [b_0 a_6 + a_5 + b_4] \frac{\partial^6}{\partial t^{*4} \partial x^{*2}} + \xi^2 [a_6 + b_5] \frac{\partial^6}{\partial t^{*6}} \right\} w_0^* = 0; \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ [-b_0 + \xi^2 b_1] \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + [1 + \xi^2 b_2] \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} + \xi^2 b_3 \frac{\partial^4}{\partial x^{*4}} - \xi^2 b_4 \frac{\partial^4}{\partial t^{*2} \partial x^{*2}} + \right. \\ & \left. + \xi^2 b_5 \frac{\partial^4}{\partial t^{*4}} \right\} u_0^* + \left\{ [-b_6 - \xi^2 b_7] \frac{\partial}{\partial x^*} - \right. \\ & \left. - \xi^2 b_8 \frac{\partial^3}{\partial x^{*3}} - \xi^2 b_9 \frac{\partial^3}{\partial t^{*2} \partial x^*} \right\} w_0^* = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Те једначине добивене су из (4.1) и (4.2), при чему су чланови вишег реда од ξ^3 одбачени.

Узимамо, да су у тачкама дејства концентрисаног импулса испуњени услови спрегнутости, који произилазе из општих услова непрекидности померања и деформација:

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \right|_{+0} = 0, \\ & \left. \frac{\partial^3 w_0^*}{\partial x^{*3}} \right|_{+0} - \left. \frac{\partial^3 w_0^*}{\partial x^{*3}} \right|_{-0} = -\frac{1}{\xi^2} \chi \frac{q_1^* - q_2^*}{2}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$u_0^* |_{+0} = u_0^* |_{-0} = 0.$$

Три услова су задовољена у бесконачности. Овде је $\chi = \frac{24(2\Lambda + 3\mu)}{\Lambda + 2\mu}$, где су Λ и μ — Ламеове константе. У тренутку $t^* = 0$, ако се узму нулти почетни услови, испуњени су и такви почетни услови, који произилазе из тачне поставке проблема:

$$w_0^* = \frac{\partial w_0^*}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial t^{*2}} = \frac{\partial^3 w_0^*}{\partial t^{*3}} = 0, \quad (4.6)$$

$$u_0^* = \frac{\partial u_0^*}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial t^{*2}} = \frac{\partial^3 u_0^*}{\partial t^{*3}} = 0.$$

Решење једначина (4.3) и (4.4) у простору Лапласових трансформација, које задовољава услове спрегнутости (4.5), услове у бесконачности и почетне услове (4.6), има облик:

$$\frac{2\xi^2}{\chi Q} W_0(x^*, p) = \sum_{k=1,2} \frac{A_k \exp(-n_k |x^*|)}{P_k^n [(n_1^2 - n_3^2) A_1 + (n_3^2 - n_2^2) A_2]} - \frac{(A_1 + A_2) \exp(-n_3 |x^*|)}{p n_3 [(n_1^2 - n_3^2) A_1 + (n_3^2 - n_2^2) A_2]}, \quad (4.7)$$

$$\frac{2\xi^2}{\chi Q} U_0(x^*, p) = - \sum_{k=1,2} \frac{l_k A_k \exp(-n_k |x^*|)}{p g_k [(n_1^2 - n_3^2) A_1 + (n_3^2 - n_2^2) A_2]} + \frac{l_3 (A_1 + A_2) \exp(-n_3 |x^*|)}{p g_3 [(n_1^2 - n_3^2) A_1 + (n_3^2 - n_2^2) A_2]}, \quad (4.8)$$

где су n_k ($k=1, 2, 3$) — корени карактеристичне једначине $Re n_k > 0$,

$$W_0(x^*, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt^*} w_0^*(x^*, t^*) dt^*,$$

$$U_0(x^*, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt^*} u_0^*(x^*, t^*) dt^*$$

Лапласове трансформације; $A_1 = g_1(l_2 g_3 - l_3 g_2)$, A_2 се добија из A_1 цикличном пермутацијом индекса:

$$l_i = \xi^2 b_8 n_i^2 + [(b_6 + \xi^2 b_7) + \xi^2 b_9 p^2],$$

$$g_i = \xi^2 b_3 n_i^4 - [(b_0 - \xi^2 b_1) + \xi^2 b_4 p^2] n_i^2 + [(1 + \xi^2 b_2) p^2 + \xi^2 b_5 p^4].$$

По теорему инверзије [41] добијамо решење проблема у облику контурних интеграла:

$$\frac{2\xi^2}{\chi Q} w_0^*(x^*, t^*) = \sum_{k=1,2} \frac{1}{2\pi j} \int_{L_k} \frac{A_k \exp(pt^* - n_k |x^*|)}{p n_k [(n_1^2 - n_3^2) A_1 + (n_3^2 - n_2^2) A_2]} dp -$$

$$-\frac{1}{2\pi j} \int_{L_3} \frac{(A_1 + A_2) \exp(pt^* - n_3 |x^*|)}{pn_3 [(n_1^2 - n_3^2) A_1 + (n_3^2 - n_2^2) A_2]} dp; \quad (4.9)$$

$$\frac{2\xi^2}{\chi Q} u_0^*(x^*, t^*) = - \sum_{k=1,2} \frac{1}{2\pi j} \int_{L_k} \frac{l_k A_k \exp(pt^* - n_k |x^*|)}{pg_k [(n_1^2 - n_3^2) A_1 + (n_3^2 - n_2^2) A_2]} dp +$$

$$+ \frac{1}{2\pi j} \int_{L_3} \frac{l_3 (A_1 + A_2) \exp(pt^* - n_3 |x^*|)}{pg_3 [(n_1^2 - n_3^2) A_1 + (n_3^2 - n_2^2) A_2]} dp. \quad (4.10)$$

§ 5. О распрострању еласто-пластичног таласа оптерећења у љуски

У последње време постали су познати покушаји да се развије динамичка теорија љуски при еласто-пластичном деформисању, која узима у обзир могућност великих угиба, што је важно за прорачун конструкција и грађевинских објеката. Размотримо методом карактеристика утицај покретног аксијално-симетричног оптерећења на слободне цилиндарске и конусне љуске [42].

Нека на цилиндарску слободну (неучвршћену) љуску дужине L у тренутку $t=0$ почиње да делује спољашњи притисак, симетричан у односу на осу ротације и који се простира по површи љуске неком брзином v , која може бити мања или већа од брзине простирања еластичних таласа истезања и савијања у љуски $k_{10} = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$. Нека је такође ши-

рина оптерећења $l \leq \infty$ тј. оптерећење или нестаје у тренутку $t_l = \frac{l}{v}$ са љуске, или остаје на њој.

За $v < k_{10}$ деформације у љуски простираће се са брзином k_1 , а за $v > k_{10}$ деформисаће се љуска иза фронта оптерећења, тј. деформације ће се простирати брзином v . Дакле, за $v < k_{10}$ треба решавати други мешовити проблем, а за $v > k_{10}$ — трећи мешовити проблем.

Приметимо, да се реална љуска на крајевима обично учвршћује довољно снажним ребрима, која спречавају крајње пресеке љуске да се обрћу и померају у радијалном правцу, тј.

$$\varphi = 0, \quad \text{за} \quad x=0, \quad x=L; \quad (5.1)$$

$$w = 0, \quad \text{за} \quad x=0, \quad x=L. \quad (5.2)$$

У аксијалном правцу крајеви љуске могу имати круту (непокретну) везу

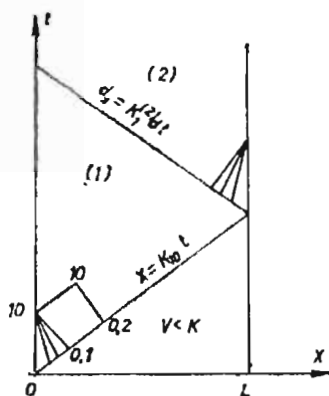
$$u = 0 \quad (5.3)$$

или клизећу (покретну) везу

$$T_{xx} = 0. \quad (5.4)$$

Кратко изведимо ток решавања проблема за различите брзине кретања оптерећења. У случају дозвучне брзине кретања оптерећења су $v < k_{10}$

(сл. 22). На линији $x = k_{10}t$ имамо нулте услове: $\varphi = w = u = 0$, $\varphi_x = \varphi_t = w_x = w_t = u_x = u_t = 0$. Дошавши до супротног краја луске $x = L$ еластични талас $x = k_{10}t$ се одбија од краја.

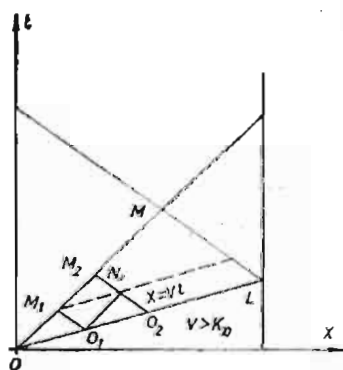


сл. 22

Одбијени талас полази у обратном правцу по карактеристици $dx = -k_1^{(2)} dt$ раздвајајући област прогресивног таласа (1) од области одбијеног таласа (сл. 22); почетна брзина одбијеног таласа биће једнака k_{10} .

Решавајући други мешовити проблем, одредимо најпре решење у области (1), ограниченој правим $x = k_{10}t$, $x = 0$ и карактеристиком $dx = k_1^{(2)} dt$, укључујући границе те области; сличним поступком одређује се и област (2), ограничена правом $x = L$, карактеристиком $dx = -k_1^{(2)} dt$, на којој ће функције u , w , φ и њихови први изводи бити непрекидни, и карактеристиком $dx = -k_1^{(3)} dt$, која полази од пресечне тачке карактеристике $dx = -k_1^{(2)} dt$ са правом $x = 0$.

У случају надзвучне брзине кретања оптерећења су $v > k_{10}$ (сл. 23). Овде је решење у области, ограниченој карактеристикама прве породице



сл. 23

$dx = \pm k_1 dt$ које полазе из тачке $O(0, 0)$, линија OM ; и тачке $L\left(L, \frac{L}{v}\right)$, линија LM ; и не зависи од граничних услова на крајевима луске, а да би се оно нашло, треба решити Кошијев (Cauchy) проблем по подацима на одсечку праве $x = vt$ $\left(0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq \frac{L}{v}\right)$ у троуглу, ограниченом том правом и карактеристикама OM и LM (види сл. 23).

Из анализе једначина кретања цилиндарске љуске види се, да се при оптерећењу константног интензитета решење Кошијевог проблема дуж правих, паралелних фронту кретања оптерећења $x=vt$, неће мењати. Та констатација значајна је ради умањења тешкоћа прорачуна при решавању Кошијевог проблема, јер је потребно одредити само тачке, које се налазе на карактеристици OM .

За почетак интеграције узмимо на правој $x=vt$ тачку O_1 , довољно блиску тачки O . Сада, решавајући Кошијев проблем по подацима на одсечку OO_1 , одредимо тачку M_1 на карактеристици OM_1 позитивно усмерене прве породице. У тачки N_1 , која лежи на пресеку карактеристике прве породице позитивног смера, која полази из тачке O_1 , са одсечком M_1N_1 праве, паралелне линији $x=vt$, решење ће бити исто, као и у тачки M_1 . Зато је следећу тачку M_2 на карактеристици могуће одредити или општом методом, решавајући Гурсаов (Goursat) проблем по датим вредностима на карактеристикама M_1O_1 и O_1N_1 , или пак, користећи се константношћу решења дуж одсечка M_1N_1 , решити Кошијев проблем по подацима на одсечку M_1N_1 . У оба случаја основне полазне тачке i и j биће једнаке; помоћне тачке, које леже на карактеристикама друге и треће породице, биће различите. Тачка i биће претходно тражена тачка m . Као тачка l при решавању Гурсаовог проблема послужиће стара тачка j . Нова тачка j одређује се из једначина.

$$x_j - x_l = k_{ijl}(t_j - t_l), \quad x_j - x_i = v(t_j - t_i),$$

по обрасцима:

$$t_j = \frac{vt_i - k_{jl}t_l + x_l - x_i}{v - k_{ijl}}, \quad x_j = x_l + v(t_j - t_l). \quad (5.5)$$

Остале величине, које карактеришу стање љуске: померања, деформације и брзине у тачки j — биће исте као и у тачки i .

При одређивању тачке m из решења Кошијевог проблема координате тачке j за дати интервал $\Delta x = x_j - x_i$ одређују се по обрасцима:

$$x_j = x_i + \Delta x, \quad t_j = t_i + \frac{\Delta x}{v}. \quad (5.6)$$

Дуж карактеристике LM решење се одређује на исти начин, као и на карактеристици OM , при чему ће решење на карактеристици LM бити једнако решењу на карактеристици OM , али са померањем током времена за $t_L = \frac{L}{v}$, тј. за произвољну функцију f имаћемо:

$$f_{LM}(t) = f_{OM}\left(t - \frac{L}{v}\right).$$

У посебном случају тренутног дејства равномерног притиска по целој дужини љуске решење у углу између карактеристика OM и LM и осом x у сваком датом тренутку времена $t = t^*$ биће једнако у свим тачкама одсечка праве $t = t^*$ између карактеристика OM и LM .

Проучимо задатак истог типа за конусну љуску. Ако на слободну конусну љуску дејствује спољашње оптерећење, тада се појављује компонента

резултанте спољашњих сила, усмерена по оси симетрије конуса, што доводи до кретања центра масе конуса. Ипак док не буде деформисана цела љуска, тј. док поремећаји не дођу до краја $x=L$, она неће почети да се креће као апсолутно круто тело, и центар масе ће бити непокретан.

Кад поремећаји дођу до краја љуске $x=L$, она ће почети да се помера у правцу осе љуске као апсолутно круто тело, имајући, наравно, истовремено и померања услед деформације. Дакле, да бисмо имали могућност примене једначина на љуску у њеном кретању у односу на центар масе, неопходно је зауставити центар масе љуске, ради чега је потребно да на центар инерције дејствује Даламберова сила инерције, једнака аксијалној (у посматраном случају — хоризонталној) компоненти резултанте спољашњег оптерећења. Даламберова сила дејствоваће на сваки елемент масе љуске. Зато ће убрзање центра масе (преоптерећеност) бити једнако

$$q = \frac{P_x}{M}, \quad (5.7)$$

где је P_x — хоризонтална компонента резултанте спољашњих оптерећења; M — маса, на пример, целе конструкције. На љуску (посебно) долазиће део Даламберове силе, једнак

$$P^* = q M. \quad (5.8)$$

Овде је M^* — маса љуске. Ако са љуском нису везане никакве концентрисане масе, које се налазе унутра, тада се интензитет тог оптерећења може написати у облику:

$$p^* = \frac{P^*}{S}, \quad (5.9)$$

где је S — површина љуске. Приметимо, ако буде на цилиндарску љуску осим спољњег притиска дејствовало и тангентно оптерећење, то ће карактер кретања љуске бити сличан описаном кретању конусне љуске. Уведимо уместо s променљиву $x=s-s_0$ (s_0 — растојање од врха по изводници до пресека са радијусом r_0); тада ће за нову променљиву гранични услови за $x=0$ и $x=L$ за конусну љуску имати исти облик као и код цилиндарске љуске.

При решавању Кошијевог проблема за одређивање решења на карактеристици OM (сл. 23) у случају константног оптерећења не можемо одредити све величине на тој карактеристици, не знајући њихове вредности у целом троуглу OML , јер решење дуж правих, паралелних линији $x=vt$ неће бити непроменљиво, јер ће коефицијенти у једначинама кретања сада зависити од s ($r_0=s \sin \beta$).

Ипак за конусну љуску мале конусности (малог отвора) радијус попречног пресека r_0 мало ће се мењати по дужини, и зато, без велике грешке, ради простијег прорачуна када дужина љуске није јако велика, ту промену можемо занемарити.

Може се сматрати, да се у уским тракама ширине $\Delta x'$, уз карактеристике OM и LM , решење дуж одсецака, паралелних правој $x=s-s=vt$ неће мењати чак ни при великој конусности.

На тај начин, у случају конусне љуске, по којој се креће равномерно оптерећење са брзином $v > k_{10}$, решење на карактеристикама OM и LM може се наћи са великим степеном тачности, не одређујући га у целом троуглу OML ; при чему ће се за разлику од цилиндарске љуске, у самом троуглу OML решење дуж правих, паралелних OL мењати утолико више, уколико је угао конусности већи и уколико је дужа сама љуска. Приметимо такође, да се за малу конусност љуске, када на њу дејствује само спољашњи притисак, овај може заменити без велике грешке (битно се упрошћава прорачун) оптерећењем нормалним на осу конуса (не уводећи Даламберове силе).



Овде се даје поставка проблема о еластичној стабилности љуски и плоча. Проучава се статичка и динамичка стабилност, при нормалној и повишеној температури. Посматра се локална термостабилност љуске. Разјашњавају се могућности и ефективност коришћења статистичких метода при проучавању стабилности љуски.

§ 1. Поставка проблема

Нека на љуску дејствује оптерећење, које расте пропорционално неком параметру λ ; услови учвршћења љуске су такви, да за неко λ , на пример, $\lambda=1$, важи безмоментно напонско стање.

У процесу оптерећивања могуће су промене облика равнотеже љуске. За вредности λ , које су мање од неког λ_0 , постоји јединствени безмоментни облик равнотеже љуске, коме одговара минимум енергије система „љуска — спољашње силе“. Даље, постоји оптерећење, коме одговара број $\lambda_1 \geq \lambda_0$, такав да за $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$ упоредо са безмоментним обликом равнотеже љуске постоји и моментни, али безмоментни облик имаће нижи ниво енергије, него било који моментни.

Даље може се наћи број $\lambda_2 \geq \lambda_1$, такав, да за $\lambda_1 \leq \lambda < \lambda_2$ безмоментни облик равнотеже љуске има релативни минимум енергије. Може постојати у крајњој линији и један моментни облик равнотеже, коме одговара нижи степен енергије. На крају, за $\lambda > \lambda_2$ безмоментни облик равнотеже љуске престаје да буде тачка минимума енергије. У овим расуђивањима реализовано је распрострањено гледиште о стабилности танкозидних елемената, на пример бифуркација, али ипак аутори сматрају могућим и друге поступке.

Таква смена облика равнотеже установљена је као резултат решења једначина нелинеарне теорије љуски.

При извођењу таквих једначина нелинеарне теорије стабилности љуски претпоставља се, да кри вине дуж оса Ox и Oy имају константне вред-

ности, што важи за површи другог реда:

$$F = \frac{1}{2} ax^2 + \frac{1}{2} by^2 + cxy + dx + ey + l = 0.$$

Дакле, разматрана нелинеарна теорија применљива је на љуске, чија се средња површ може изразити једначином другог реда.

Усмеримо осу Oz у правцу нормале на средњу површ на страну центра кривине, координатни почетак изаберимо у тачки средње површи у једном углу правоугле контуре панела љуске. Осе Ox и Oy нека се поклапају с правцима линија главних кривина љуске. Означимо дебљину љуске са h , њене димензије дуж оса Ox и Oy — са a и b .

Нека је $k_1 = \text{const}$ — кривина љуске, која има константну вредност дуж осе Ox ; $k_2 = \text{const}$ — кривина, која остаје константна дуж осе Oy . Са u , v , w означена су померања тачака средње површи респективно дуж оса Ox , Oy , Oz . Померање w карактерисаће угибе љуске, чије позитивне вредности одговарају њиховом смеру ка центру кривине. Угиби w нису мали у поређењу са дебљином h .

Нека су даље e_{xx}^0 и e_{yy}^0 — линеарне релативне деформације у средњој површи дуж оса Ox и Oy ; e_{xy}^0 — релативна деформација клизања;

$\frac{dx}{dx} = \kappa_x$, $\frac{dy}{dy} = \kappa_y$ — промене кривина деформисане љуске дуж оса Ox и

Oy ; κ_{xy} — торзија средње површи.

За компонентне деформације средње површи, промене кривине љуске и померања њеног средњег слоја добивају се следеће приближне релације:

$$\begin{aligned} e_{xx}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - k_1 w, \\ e_{yy}^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - k_2 w, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$e_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y};$$

$$\kappa_x = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (1.2)$$

Одредимо деформације e_{xx} , e_{yy} , e_{xy} за слој удаљен од средњег за z . Сагласно хипотези праволинијске нормале може се узети да је за тачке тог слоја

$$v = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y}. \quad (1.3)$$

Како је дебљина љуске h мала у поређењу са полупречником кривине то се може сматрати овде и у даљем, да је угиб средњег слоја w_0 једнак угибу ма ког другог слоја љуске.

Како се угиби w сматрају битним, то су $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$ и $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$ мале величине

истог реда као и $\frac{\partial u_0}{\partial x}$ и $\frac{\partial v_0}{\partial y}$ то се (1.3) може написати у облику:

$$e_{yy} = e_{yy}^0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

и по аналогији:

$$e_{xx} = e_{xx}^0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad e_{xy} = e_{xy}^0 - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (1.4)$$

где су величине e_{xx}^0 , e_{yy}^0 , e_{xy}^0 одређене обрасцима (1.1). При томе с обзиром на хипотезу праволинијске нормале је $e_{yz} = e_{xz} = 0$. Сагласно Хуковом закону, деформације и напони везани су међусобом зависностима:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)], & e_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}, \\ e_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)], & e_{yz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz}, \\ e_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)], & e_{zx} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{zx}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где су σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} — компонентни напони. Из тих једнакости следи:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (e_{xx} + \nu e_{yy}), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (e_{yy} + \nu e_{xx}), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} e_{xy}. \quad (1.6)$$

Уносећи свуда вредности e_{xx} , ... из (1.4), имамо:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[e_{xx}^0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \left(e_{yy}^0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] = \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} (e_{xx}^0 + \nu e_{yy}^0) - \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^0 - \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= \sigma_y^0 - \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^0 - \frac{Ez}{1-\nu^2} (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где су:

$$\begin{aligned}\sigma_x^0 &= \frac{E}{1-\nu^2} (e_{xx}^0 + \nu e_{yy}^0), & \sigma_y^0 &= \frac{E}{1-\nu^2} (e_{yy}^0 + \nu e_{xx}^0), \\ \tau_{xy}^0 &= \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1-\nu}{2} e_{xy}^0\end{aligned}\quad (1.8)$$

— компонентни напони у средњем слоју.

Исецимо равнина паралелним координатним равнина, елемент љуске. Силе, које дејствују на јединицу ширине пресека елемента, биће:

$$\begin{aligned}T_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, & T_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, & S_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz, & S_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} dz, \\ N_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx} dz, & N_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy} dz, & M_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, & M_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \\ H_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz, & H_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z dz.\end{aligned}\quad (1.9)$$

Те силе сматрају се позитивним, ако се њихови правци поклапају са позитивним смеровима спољашњих нормала на страну $+Ox$ и $+Oy$. На основу познате релације из теорије еластичности $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

може се сматрати да је

$$S_1 = S_2 = S, \quad H_1 = H_2 = H. \quad (1.10)$$

Унесимо у (1.9) вредности σ_x , σ_y , τ_{xy} из (1.7). Добивамо за M_1 :

$$\begin{aligned}M_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = \int_{-h/2}^{h/2} z \left[\sigma_x^0 - \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] dz = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x^0 z dz - \\ &- \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},\end{aligned}$$

где је D — цилиндарска крутост. Аналогно налазимо M_2 и H . Дакле:

$$\begin{aligned}M_1 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), & M_2 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ H &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (1.11)$$

Стављајући сада у израз (1.9) за T_1, \dots, N_1, N_2 вредности $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}$ из (1.7), и узимајући у обзир (1.8) и (1.1), имамо:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = \int_{-h/2}^{h/2} \left[\sigma_x^0 - \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] dz = \\
 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{E}{1-\nu^2} (e_{xx}^0 + \nu e_{yy}^0) - \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] dz = \frac{E}{1-\nu^2} [e_{xx}^0 + \\
 &+ \nu e_{yy}^0] \left(\frac{h}{2} + \frac{h}{2} \right) - \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{4} \right) = \\
 &= \frac{Eh}{1-\nu} (e_{xx}^0 + \nu e_{yy}^0).
 \end{aligned}$$

Уносећи свуда вредности e_{xx}^0 и e_{yy}^0 из (1.1), добивамо:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (e_{xx}^0 + \nu e_{yy}^0) = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - k_1 w + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} + \right. \\
 &+ \left. \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \nu k_2 w \right] = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \right. \\
 &\left. k_1 w - \nu k_2 w \right].
 \end{aligned}$$

Аналогно налазимо T_2 и $S = S_1 = S_2$.

На тај начин, добивају се обрасци:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - k_1 w - \nu k_2 w \right], \\
 T_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial v_0}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - k_2 w - \nu k_1 w \right], \\
 S &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right), \tag{1.12}
 \end{aligned}$$

које дају везу између тангентних сила, које делују у средњем слоју и његових померања. Пресечне силе биће одређене касније.

Искључујући из једнакости (1.12) непозната померања средњег слоја u_0 и v_0 , могу се изразити силе T_1 , T_2 , S помоћу w .

Претходно приметимо, да се из (1.12) могу добити следеће релације:

$$\begin{aligned}
 T_1 - \nu T_2 &= Eh \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - k_1 w \right], \\
 T_2 - \nu T_1 &= Eh \left[\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - k_2 w \right], \\
 S &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right). \tag{1.13}
 \end{aligned}$$

Користећи те једнакости, саставимо једначину:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (T_1 - \nu T_2) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (T_2 - \nu T_1) - 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = Eh \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - k_1 w \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - k_2 w \right] - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right\} = Eh \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - \right. \\ \left. - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\}. \end{aligned}$$

Али, према правилима диференцирања биће:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \\ &= \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}. \end{aligned}$$

Уносећи те изразе у претходну једначину, добивамо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (T_1 - \nu T_2) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (T_2 - \nu T_1) - 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = \\ = Eh \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Једначина (1.14) даје тражену везу између сила, које дејствују у средњој површи љуске и њеним угибом w .

Уводећи функцију напона φ обрасцима:

$$T_1 = h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad T_2 = h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad S = -h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad (1.15)$$

једначина (1.14), после уношења вредности (1.15), добива облик:

$$\frac{1}{E} \Delta^2 \varphi + k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0, \quad (1.16)$$

где је

$$\Delta^2 \varphi = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}. \quad (1.17)$$

Сада пређимо на формирање једначина равнотеже.

Нека на љуску дејствују оптерећења: попречно $q=q(x, y)$, које је нормално на средњу површ; притисне или истежуће силе $hp(x)$ и $hr(y)$, које делују нормално на ивице љуске; и смичуће силе $h\tau$, које делују дуж ивица.

Издвојмо из љуске са два пара узајамно нормалних равни, паралелних до деформације љуске равнима xOz и yOz , елемент $hdx dy$.

При савијању средњег слоја силе, које дејствују на стране тог елемента, обрћу се у простору. Пројектујући их на покретне координатне осе и одбацујући мале величине вишег реда, добивамо:

$$\begin{aligned} & \left(T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial x} dx \right) dy - T_1 dy + \left(S_2 + \frac{\partial S_2}{\partial y} dy \right) dx - S_2 dx - N_1 dy \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx - \\ & - \left(N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} dx \right) dy \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx = 0, \\ & - T_2 dx + \left(T_2 + \frac{\partial T_2}{\partial y} dy \right) dx + \left(S_1 + \frac{\partial S_1}{\partial x} dx \right) dy - S_1 dy - \\ & - \left(N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial y} dy \right) dx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy - N_2 dx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy = 0, \\ & \left(T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial x} dx + T_1 \right) dy \left(\frac{dx}{2 R_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) + \\ & + \left(T_2 + \frac{\partial T_2}{\partial y} dy + T_2 \right) dx \left(\frac{dy}{2 R_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \right) + \\ & + \left(S_2 + \frac{\partial S_2}{\partial y} dy + S_2 \right) dx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy + \left(N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} dx - N_1 \right) dy + \\ & + \left(N_2 - \frac{\partial N_2}{\partial y} dy - N_2 \right) dx + q(x, y) dx dy = 0. \end{aligned}$$

Изводећи у првим двама једначинама скраћивања и одбацујући чланове који су мале величине трећег реда, имамо:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial y} = N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial T_2}{\partial y} + \frac{\partial S_1}{\partial x} = N_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (1.18)$$

Трећа једначина после ослобађања заграда биће:

$$\begin{aligned} & 2 T_1 \frac{dx}{2 R_1} dy + 2 T_1 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + \frac{\partial T_1}{\partial x} dx dy \frac{dx}{2 R_1} + \\ & + \frac{\partial T_1}{\partial x} dx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + 2 T_2 \frac{dy}{2 R_2} dx + 2 T_2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial T_2}{\partial y} dy \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy + 2 S_1 dy \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial S_1}{\partial x} dx dy \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx + \\
& + \frac{\partial S_1}{\partial x} dx dy \frac{dx}{2 R_1} + 2 S_2 dx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy + \frac{\partial S_2}{\partial y} dx dy \frac{dy}{2 R_2} + \\
& + \frac{\partial S_2}{\partial y} dx dy \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy + \frac{\partial N_1}{\partial x} dx dy + \frac{\partial N_2}{\partial y} dx dy + q dx dy = 0. \quad (1.19)
\end{aligned}$$

Узимајући у обзир везе (1.10) и одбацујући мале величине трећег реда, после скраћивања добијамо:

$$\begin{aligned}
& T_1 \frac{1}{R_1} + T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_2 \frac{1}{R_2} + T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + S_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\
& + S_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + q = 0,
\end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} = -q - \frac{T_1}{R_1} - \frac{T_2}{R_2} - T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (1.20)$$

Састављајући једначину момената тих сила у односу на осу Ox имамо:

$$\begin{aligned}
& \left(M_1 + \frac{\partial M_1}{\partial x} dx \right) dy - M_1 dy - H_2 dx + \left(H_2 + \frac{\partial H_2}{\partial y} dy \right) dx - \\
& - \left(N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} dx + N_2 \right) dy \frac{1}{2} dx = 0, \quad (1.21)
\end{aligned}$$

што после упрошћавања и узимања у обзир (1.11) даје

$$N_1 = \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w). \quad (1.22)$$

Аналогно добијамо:

$$N_2 = \frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w).$$

Релације (1.22) изражавају једнакост са нулом главног момента свих сила, које дејствују на посматрани елемент љуске. Помоћу једнакости (1.22) могу се искључити из (1.21) пресечне силе N_1 и N_2 . Ради тога унесимо у (1.21) N_1 и N_2 из (1.22). Имамо:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + T_1 \left(k_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \\
& + T_2 \left(k_2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2 S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q = 0. \quad (1.23)
\end{aligned}$$

Једначине (1.18) и (1.23) дају тражени скуп основних једначина равнотеже. Десне стране једначина (1.18) могу се узети да су једнаке нули, јер су величине $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ реда $\frac{w}{b^2}$, а $N_1 \sim \frac{h^3 w}{b^3}$, $N_2 \sim \frac{h^3 w}{a^3}$, то десне стране једначина (1.18) имају ред $\frac{h^3 w^2}{b^5}$, $\frac{h^3 w^2}{a^5}$ док ће $\frac{\partial T_1}{\partial x}$, $\frac{\partial S}{\partial y}$ и друге имати ред $\frac{hw^2}{b^3}$, $\frac{hw^2}{a^3}$.

Уводећи по формулама (1.15) функцију напона, лако је видети, да ће једначине (1.18) бити идентички задовољене. Узимајући изразе (1.11), за моменте, после увођења функције напона, једначина (1.23) може се написати у облику:

$$-D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - 2D(1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \left(k_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \left(k_2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} h \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q = 0.$$

или

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + h \left(k_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + q = 0,$$

што се скраћено може написати овако:

$$D \Delta^2 w - h \left(k_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) - h \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - q = 0, \quad (1.24)$$

где је Δ^2 — Лапласов бихармонијски оператор.

Једначина (1.24) представља другу основну једначину теорије гипких плитких љуски.

Треба напоменути, да се при извођењу основних једначина (1.16) и (1.24) претпостављало да су се координатне осе Ox и Oy поклапале са главним кривинама. У општијем случају, када тог поклапања нема, једначине (1.16) и (1.24) садржаваће сабирак:

$$k_{12} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

где је $F = F(x, y)$ — једначина средње површи љуске; тај члан узима у обзир утицај кривине торзије на деформацију и напонско стање љуске.

Стављајући у (1.16) и (1.24) почетне кривине $k_1=0$ и $k_2=0$, добијамо једначине за плоче великог угиба:

$$\Delta^2 \varphi = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right],$$

$$D \Delta^2 w - q = h \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right].$$

Проблем савијања и стабилности плоча и љуски, како се види из претходног, своди се на интеграцију система компатибилних нелинеарних парцијалних диференцијалних једначина четвртог реда:

$$\frac{1}{E} \Delta^2 \varphi + k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0,$$

$$D \Delta^2 w - h \left(k_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + k_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) - h \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - q = 0. \quad (1.25)$$

Веза сила, које дејствују у средњем слоју, и померања одређује се обрасцима (1.12):

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - k_1 w - \nu k_2 w \right],$$

$$T_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial v_0}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - k_2 w - \nu k_1 w \right], \quad (1.26)$$

$$S = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

За случај сферне љуске ($k_1=k_2=k$) једначине (1.25) добијају облик:

$$\frac{1}{E} \Delta^2 \varphi + k \Delta w + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0,$$

$$D \Delta^2 w - hk \Delta \varphi - h \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - q = 0.$$

За цилиндарску љуску (на пример, $k_1=0$, $k_2 \neq 0$) једначине ће бити:

$$\frac{1}{E} \Delta^2 \varphi + k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0,$$

$$D \Delta^2 w - hk_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - h \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - q = 0.$$

Ако су знаци кривина k_1 и k_2 различити, на пример, $k_1 > 0$, $k_2 < 0$ тада се те једначине могу искористити као основне једначине теорије гнских љуски негативне Гаусове кривине.

Изостављајући у једначинама (1.25) нелинеарне чланове, добивамо основне једначине теорије љуски малог угиба:

$$\frac{1}{E} \Delta^2 \varphi + k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

$$D \Delta^2 w - h \left(k_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) - q = 0,$$

на које се своди линеарна теорија љуски.

Сва горе наведена расуђивања остају на снази и при поставци проблема термостабилности љуски и плоча, ако се реализује бифуркационо гледиште. Разјаснимо то на примеру плоче, простоте ради.

Проблем термостабилности равнoг облика равнотеже хомогене плоче од изотропног или анизотропног материјала састоји се у следећем: дата је плоча одређеног облика, која је неравномерно загрејана по дебљини и у њеној средњој равни, осим тога делују у средњој равни спољашње силе; плоча може изгубити стабилност у зонама дејства напона притиска, изазваних неравномерним распоредом температуре и спољашњим силама или било каквим крутим везама.

Претпоставља се да укупни напони допуштају могућност њиховог представљања у облику напона, чији распоред и величина на рубу остаје непромењена, и напона, задатих с тачношћу до множиоца γ . За $\gamma = 0$ плоча се налази у стабилној равнотежи, при увећању γ може наступити тренутак, када се јединствени облик равнотеже нарушава. Треба одредити такве вредности $\gamma_1, \gamma_2, \dots$, за које наступа рачвање облика равнотеже, тј. постаје могућа егзистенција два и више облика равнотеже.

Најмања вредност γ , при којем основни равн облик равнотеже престаје да буде јединствен и стабилан, назива се критичном, а оптерећење од сила и топлотна оптерећења, која одговарају тој вредности, називају се критичним.

За праксу често је важно знати најмању вредност критичне температуре и оптерећења и онај облик равнотеже плоче, који је могућ истовремено са основним у тренутку губитка стабилности. С обзиром на то, по правилу, ограничавамо се на приближно решење.

Критичне вредности сила и температуре могу се добити, допустивши, да плоча има неку почетну кривину или попречно оптерећење. Вредности сила у средњој равни и температуре, при којима угиб тежи бесконачности су критичне вредности. Критичне вредности сила и температуре могу се добити и овако: допустивши, да се плоча лако извитоперила под дејством сила и температурних напона, треба одредити величину сила и температуре, неопходних да би се задржала плоча у таквом облику.

При проучавању витоперења произвољно загрејаних плоча (и љуски) може се применити такође енергијски метод, који је заснован на општим теоремама механике континуума.

У таквом чисто механичком третирању термичког избочавања прорачун критичних температура, критичних спољашњих сила своди се на израчунавање температурних напона уз узимање у обзир дејства спољашњих сила. Затим се проучава стабилност могућих облика равнотеже под дејством заданих напона на основу познатих критеријума стабилности, широко разрађених за нормалне топлотне услове.

Што се тиче граничних услова, они треба да буду узети у обичној форми (као и при нормалној температури), тј. при решавању проблема стабилности у граничним условима температурни чланови треба да се одбаце, јер су они узети у обзир при одређивању напонског и деформацијског стања у моменту губитка стабилности.

§ 2. Гипка плитка љуска

Гипким се називају љуске, код којих је угиб упоредив са њиховом дебелином. Ради тога узима се у обзир геометријска нелинеарност, изражавајући деформације помоћу померања у средњој површи зависностима (1.1), тј. у реду за компонентне деформације задржавају се мале величине другог реда у односу на угибе $w(x, y)$. Проблем се може свести на систем две нелинеарне једначине (1.25), које ћемо овде исписати:

$$\Phi \equiv \frac{1}{E} \Delta^2 \varphi + k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} W \equiv & D \Delta^2 w - h \left(k_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + k_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) - \\ & - h \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - q = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

при одговарајућим граничним условима.

Проучавање проблема савијања и стабилности љуски у светлости нелинеарне теорије даје могућност да се предвиди понашање љуске после губитка стабилности и да се установи не само горња граница области нестабилности, која одговара критичним напонима, добивеним по линеарној теорији, већ и њена доња граница.

Наведимо неке информације општег карактера о решавању проблема тога типа. Нека на љуску, произвољног ослањања на крутој делимично глаткој контури, дејствује произвољно попречно оптерећење $q(x, y)$ и нормално на ивице напони притиска или истезања, чије ће компоненте дуж оса Oy и Ox бити $p(x)$ и $r(y)$. Треба одредити зависност између спољашњих сила које дејствују на љуску и њених угиба, не сматрајући последње да су мали. За решење тога задатка неопходно је проинтегралити једначине (2.1) и (2.2). С обзиром на то да тачних метода интеграције тих једначина још нема, тражићемо њихова приближна решења у облику редова:

$$\varphi = \sum_m \sum_n A_{mn} [U_m(x) V_n(y) - \theta(x) - \lambda(y)],$$

$$w = \sum_m \sum_n f_{mn} X(x) Y(y),$$

где су A_{mn} и f_{mn} непознате константе, а функције $U_m(x)$, $V_n(y)$, $X(x)$, $Y(y)$ узимају се унапред тако да би задовољавале све статичке и геометријске контурне услове.

Примењујући метод Бубнова-Галеркина, унесимо те изразе за φ и w у једначине (2.1) и (2.2), затим, множећи у сагласности са њиховим физичким смислом прву са варијацијом функције φ , а другу са варијацијом функције w и узимајући у обзир независност варијација параметара δA_{mn} међу собом и варијација параметара δf_{mn} међу собом, интегралимо добивене изразе по области, ограниченој контуром љуске. Из добивеног система нелинеарних алгебарских једначина налазимо непознате параметре A_{mn} и f_{mn} .

По физичком смислу једначине компатибилности деформација (2.1) и равнотеже (2.2) морају допустити по једно решење и представљају услове екстремума неког функционала $Q(w, \varphi)$. Претпоставимо да такав функционал егзистира. Неопходни услови екстремума функционала $Q(w, \varphi)$ по w и φ :

$$\delta_w Q(w, \varphi) = 0, \quad \delta_\varphi Q(w, \varphi) = 0,$$

треба да се поклапају са једначинама (2.1) и (2.2), тј.

$$\delta_\varphi Q(w, \varphi) = \Phi(w, \varphi), \quad \delta_w Q(w, \varphi) = W(w, \varphi).$$

Варирајући те једнакости, добијамо:

$$\delta_w [\delta_\varphi Q(w, \varphi)] = \delta_w \Phi(w, \varphi), \quad \delta_\varphi [\delta_w Q(w, \varphi)] = \delta_\varphi W(w, \varphi).$$

Одузимајући једну једнакост од друге, добијамо неопходан услов да једначине $\Phi = 0$ и $W = 0$ представљају услове екстремума функционала Q :

$$\delta_w \Phi(w, \varphi) = \delta_\varphi W(w, \varphi).$$

Лако се уверити, да је за једначине (2.1) и (2.2) та једнакост испуњена.

Уствари, Ојлерова једначина даје за прву од њих:

$$\begin{aligned} \delta_w \Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_{xx}} \right) + \\ &+ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_{xy}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_{yy}} \right) + \dots = \\ &= E \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] = 2 E \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}. \end{aligned}$$

Аналогно добијамо:

$$\begin{aligned} \delta_\varphi W &= \frac{h}{D} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] = 2 \frac{h}{D} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}. \end{aligned}$$

Дакле, та једнакост је задовољена с тачношћу до константног множиоца.

Множећи (2.1) са $\frac{h}{ED}$, добивамо тачно испуњење услова применљивости

Бубнов-Галеркинове методе на решавање нелинеарних задатака еластичних љуски.

Размотримо решење проблема у првој апроксимацији. Сматраћемо да су функције $U(x)$, ..., $Y(y)$ изабране тако, да су сви гранични услови задовољени. Решење напишимо у облику:

$$\varphi = A[U(x) V(y) - \theta(x) - \lambda(y)], \quad (2.3)$$

$$w = f X(x) Y(y), \quad (2.4)$$

где се функције $\theta(x)$ и $\lambda(y)$ узимају тако да буде

$$\theta''(x) = \frac{1}{A} p(x), \quad \lambda''(y) = \frac{1}{A} r(y). \quad (2.5)$$

Састављајући Бубнов-Галеркинове једначине:

$$\iint_{(G)} \Phi(U, V, X, Y, A, f, p, r) UV dx dy = 0,$$

$$\iint_{(G)} W(U, V, X, Y, A, f, p, r, q) XY dx dy = 0,$$

где је (G) — област, ограничена контуром љуске, и интегралећи, добијамо:

$$\frac{A}{E} I_1 - \frac{A}{E} I_2 + f I_3 + f^2 I_4 = 0, \quad (2.6)$$

$$-Ah I_5 + Ah I_6 + Df I_7 - Afh I_8 + Afh I_9 - I_{10} = 0. \quad (2.7)$$

Овде су I_i — константне величине, које зависе од димензија љуске, њених кривина, спољашњих сила и граничних услова и одређују се овим обрасцима:

$$I_1 = \iint_{(G)} (U^{IV} V + 2 U^{II} V^{II} + UV^{IV}) UV dx dy,$$

$$I_2 = \iint_{(G)} [\theta^{IV} + \lambda^{IV}] UV dx dy,$$

$$I_3 = \iint_{(G)} (k_2 X^{II} Y + k_1 XY^{II}) UV dx dy,$$

$$I_4 = \iint_{(G)} (X^{II} Y XY^{II} - X I^2 Y I^2) UV dx dy,$$

$$I_5 = \iint_{(G)} (k_2 U^{II} V + k_1 UV^{II}) XY dx dy, \quad (2.8)$$

$$I_6 = \iint_{(G)} (k_2 \theta_{II} + k_1 \lambda_{II}) XY dx dy,$$

$$I_7 = \iint_{(G)} (X^{IV} Y + 2 X^{II} Y^{II} + XY^{IV}) XY dx dy,$$

$$I_8 = \iint_{(G)} (UV^{II} X^{II} Y + U^{II} VXY^{II} - 2 U^I V^I X^I Y^I) XY dx dy,$$

$$I_9 = \iint_{(G)} (\lambda^{II} X^{II} Y + \theta^{II} XY^{II}) XY dx dy,$$

$$I_{10} = \iint_{(G)} q(x, y) XY dx dy.$$

Израчунавајући те интеграле за овај или онај облик ослањања ивица и датих оптерећења и уносећи их затим у једначине (2.6) и (2.7), добивамо решење постављеног проблема. Одредимо из (2.6) величину

$$A = - \frac{EfI_3 + Ef^2I_4}{I_1 - I_2} \quad (2.9)$$

и уносећи је у (2.7), добивамо

$$I_{10} = DfI_7 - \frac{EhfI_3 + Ehf^2I_4}{I_1 - I_2} (I_6 - I_5 - fI_8 + fI_9). \quad (2.10)$$

Једнакост (2.10) даје тражену везу између оптерећења и угиба у центру љуске. У даљем ћемо звати једнакост (2.10) општим решењем у првој апроксимацији нелинеарног проблема савијања плитких љуски при произвољном ослањању њених ивица на делимично глаткој контури и при произвољним оптерећењима, датих на њеним ивицама а која дејствују нормално на њену средњу површ.

За случај равне плоче једначина (2.10) добива облик:

$$I_{10} = DfI_7 - \frac{I_4(I_9 - I_8)}{I_1 - I_2} Ehf^3, \quad (2.11)$$

која даје решење за притиснуто-савијену плочу коначне крутости.

§ 3. Динамичка стабилност плитке љуске

Велики интерес за технику представља проблем динамичке стабилности танкозидних елемената конструкције у целом. Посебно је важно познавање карактера и величине оптерећења, при којима померања тачака материјалног система (тела) почињу неограничено да расту током времена, што може довести најпре до нарушавања датих услова рада, а затим и до слома.

Посматрајмо еластичну цилиндарску љуску полупречника R , која се ослања на правоуглу контуру са странама a и b . Претпоставља се, да су угиби љуске упоредиви са њеном дебелином, али довољно мали у поређењу са другим димензијама љуске. Претпоставља се такође, да су сопствене учестаности тангентних осцилација довољно велике у поређењу са учестаношћу спољашњег дејства. То доводи до могућности занемаривања тангентних сила инерције.

Узимањем у обзир наведених претпоставки деформација љуске описује се системом нелинеарних једначина:

$$D \Delta^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - q,$$

$$\frac{1}{Eh} \Delta^2 \varphi = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (3.1)$$

За љуске, које врше осцилације, нормално оптерећење израчунава се као збир сила инерције, пригушења и спољашњег оптерећења:

$$q(x, y, t) = -\rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\rho_0 h \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + q_0(x, y, t), \quad (3.2)$$

где је ρ_0 — густина материјала љуске; ε — карактеристика пригушења, $q_0(x, y, t)$ — спољашње оптерећење.

Претпоставимо, да је посматрана љуска ослоњена по контури, а на крајевима оптерећена аксијалним периодичним силама $p = p_0 + p_t \cos \theta t$, једнолико распоређеним по изводници средње површи. Ставимо такође, да су нормалне силе, које дејствују на подужним ивицама $y=0$, $y=b$ „просечно“ једнаке нули. Граничне услове можемо написати у облику:

$$w(0, y) = w(a, y) = w(x, 0) = w(x, b) = 0,$$

$$\frac{1}{b} \int_0^b \frac{\partial^2 \varphi(0, y)}{\partial y^2} dy = -(p_0 + p_t \cos \theta t), \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{a} \int_0^a \frac{\partial^2 \varphi(x, 0)}{\partial x^2} dx = 0.$$

Тражићемо решење у облику реда:

$$w(x, y, t) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \xi_{ij}(t) \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}, \quad (3.4)$$

где су $\xi_{ij}(t)$ — непознате функције времена. Пошто ћемо проучавати резонантне појаве, везане с главним обликом осциловања, то ћемо у реду узети само први члан:

$$w(x, y, t) = \xi(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (3.5)$$

Уврстаивши тај израз у другу једначину система (3.1), његово решење можемо написати у облику:

$$\varphi(x, y, t) = \frac{Eh}{32} \xi^2(t) \left[m^2 \cos \frac{2\pi x}{a} + \frac{1}{m^2} \cos \frac{2\pi y}{b} \right] + \frac{Eh}{\pi^2 R} \frac{a^2 \xi(t)}{(1+m^2)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{2} p_y^0 x^2 + \frac{1}{2} p_x^0 y^2 - p_{xy}^0 xy, \quad (3.6)$$

где је $m = \frac{a}{b}$.

Параметри p_x^0 и p_y^0 одређују се из граничних услова, а параметар p_{xy}^0 , који карактерише смичуће силе на ивицама, узима се да је једнак нули. Постављајући израз за дагу функцију и (3.5) у прву једначину система (3.1), методом Бубнова-Галеркина добивамо обичну диференцијалну једначину са периодичним коефицијентима по $\xi(t)$:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + 2\xi \frac{d\xi}{dt} + \omega^2 \xi - \xi \frac{\partial^2}{\partial t^2} (p_0 + p_t \cos \theta t) - \xi^2 \frac{Eh}{3Rb^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{8}{(1+m^2)^2} \right] + \xi^3 \frac{Eh}{16} \frac{\pi^4}{a^4} (1+m^4) = 0. \quad (3.7)$$

Овде је ω — сопствена учестаност попречних осцилација, дефинисаних обрасцем

$$\omega^2 = \frac{\pi T^4}{a^4} \frac{D}{\rho h} F(m, k), \quad (3.8)$$

где је са $F(m, k)$ означена геометријска карактеристика посматране љуске:

$$F(m, k) = (1+m^2)^2 + \frac{12(1-\nu)k^2}{\pi^4(1+m^2)^2}; \quad k = \frac{a^4}{Rh}. \quad (3.9)$$

Сведимо једначину (3.7) на други облик. Ради тога уведемо вредности критичног параметра p_* за статичко оптерећење љуске подужним подељеним силама:

$$p_* = \frac{\pi^2 D}{a^2} F(m, k), \quad (3.10)$$

коефицијент поремећаја

$$\mu = \frac{p_t}{2(p_* - p_0)} \quad (3.11)$$

и сопствену учестаност уз оптерећење љуске константном компонентом подужне силе:

$$\Omega^2 = \omega^2 \left(1 - \frac{p_0}{p_*} \right). \quad (3.12)$$

Ако се пређе на бездимензиону амплитуду $\xi(t) = \frac{\xi(t)}{h}$, а са α и β означе коефицијенти, који карактеришу геометријску нелинеарност

$$\alpha = \frac{3}{4} \frac{1 - \nu^2}{F(m, k)} (1 + m^4), \quad (3.13)$$

$$\beta = \frac{16(1 - \nu^2) km^2}{\pi^4 F(m, k)} \left[\frac{1}{2} + \frac{8}{(1 + m^2)^2} \right],$$

то се једначина (3.7) може написати у облику

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + 2 \xi \frac{d \xi}{dt} + \Omega^2 [\xi - 2 \mu \xi \cos \theta t + \bar{\alpha} \xi^3 - \bar{\beta} \xi^2] = 0, \quad (3.14)$$

где је

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{1 - p_0}, \quad \bar{\beta} = \frac{\beta}{1 - p_0}. \quad (3.15)$$

Овде и у даљем црта над $\xi(t)$ је изостављена. Једначина (3.14) разликује се од аналогне једначине за плоче постојањем квадратног члана, који карактерише несиметрични карактер нелинеарности, својствен љускама. Њу треба посматрати као прву апроксимацију за описивање параметарски побуђених осцилација у љускама.

Даља тачност могућа је при разматрању већег броја чланова апроксимирујућег реда, што доводи до система једначина истог типа као и [43]. Како је познато [25], области нестабилности нултог решења (3.14) леже близу учестаности:

$$\theta = \frac{2 \Omega}{k} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3.16)$$

Најопаснија је прва (главна) област нестабилности, чије се границе без учешћа пригушења одређују по приближној формули:

$$\frac{\theta}{\Omega} = 2 \sqrt{1 \mp \mu}. \quad (3.17)$$

Тражићемо периодично решење једначине (3.14) у околини главне области нестабилности, занемарујући пригушење. Ако се у својству прве апроксимације ограничимо на проучавање решења облика:

$$\xi(t) = b_1 \cos \frac{\theta t}{2}, \quad (3.18)$$

за гране, која се граничи са доњом границом области нестабилности, и са

$$\xi(t) = a_1 \sin \frac{\theta t}{2}, \quad (3.19)$$

за другу грану, тада за амплитуде стационарних осцилација добивамо формуле:

$$b_1^2 = \frac{4}{3} \bar{\alpha} \sqrt{\frac{n^2}{4} - 1 - \mu}, \quad (3.20)$$

$$a_1^2 = \alpha \sqrt{\frac{n^2}{4} - 1 + \mu}, \quad (3.21)$$

где је $n = \frac{\theta}{\Omega}$. Ти обрасци поклапају се са одговарајућим обрасцима за

плоче. Међутим природно је очекивати квалитативну разлику понашања љуски при параметарским осцилацијама. По свему судећи, за љуске је недовољно ограничити се на хармонијско приближење (3.18) и (3.19). У тој апроксимацији квадратни члан у једначини (3.14), који одражава специфичност нелинеарности љуске, не узима се у обзир.

Из сложених разматрања, произилази, да другу апроксимацију треба тражити у облику:

$$\xi(t) = b_0 + b_1 \cos \frac{\theta t}{2} + b_2 \cos \theta t, \quad (3.22)$$

за грану, која се рачуна од доње границе главне нестабилности, и у облику

$$\xi(t) = a_0 + a_1 \sin \frac{\theta t}{2} + a_2 \cos \theta t, \quad (3.23)$$

за другу грану. Чланови, који садрже $\cos \theta t$, додати су ради тога, да би се узело у обзир одступање решења од чисто хармонијских прве апроксимације. Укључење у решење слободног члана је разумљиво. Стварно, ако се стави $\cos \theta t$ у нелинеарни део (3.14), тада ће као резултат увршења постојати константни члан, који има исти ред, као и коефицијент при $\cos \theta t$. Ставимо решење (3.22) у једначину (3.14) и изједначимо са нулом коефицијенте уз слободан члан $\cos \frac{\theta t}{2}$ и $\cos \theta t$. Добивени при

томе систем нелинеарних алгебарских једначина јако је гломазан за проучавање и овде се не наводи. Тај систем може се знатно упростити, ако се узме у обзир, да је одлучујући у решењу (3.22) члан, који садржи $\cos \frac{\theta t}{2}$. Полазећи од тога, сматраћемо да је $b_1 \gg b_0$, $b_1 \gg b_2$, што даје

могућност да се занемаре степени већи од првог и производи величина b_0 и b_2 . Тада се систем алгебарских једначина може написати у облику:

$$b_0 - \mu b_2 + \frac{3}{2} \bar{\alpha} b_1^2 \left(b_0 + \frac{b_2}{2} \right) - \frac{1}{2} \bar{\beta} b_1^2 = 0,$$

$$b_2 - 2 \mu b_0 - n^2 b_2 + \frac{3}{2} \bar{\alpha} b_1^2 (b_0 + b_2) - \frac{1}{2} \bar{\beta} b_1^2 = 0, \quad (3.24)$$

$$1 - \frac{n^2}{4} - \mu + \frac{3}{4} \bar{\alpha} b_1^2 - \bar{\beta} (2 b_0 + b_2) = 0.$$

Искључујући из тог система једначина параметре b_0 и b_2 , добијамо следећу једначину за b_1 :

$$\begin{aligned} & \frac{27}{32} \bar{\alpha}^3 b_1^6 + \left(\frac{27}{8} \bar{\alpha}^2 + \frac{9}{8} \bar{\alpha}^2 \mu - \frac{3}{4} \bar{\alpha}^2 \bar{\beta}^2 - \frac{45}{32} \bar{\alpha}^2 n^2 \right) b_1^4 + \left[\frac{15}{4} \bar{\alpha} - \frac{9}{2} \bar{\alpha} \mu^2 - \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} \bar{\beta}^2 - 2 \bar{\beta}^2 \mu + n^2 \left(\frac{3}{4} \bar{\alpha} \mu + \bar{\beta}^2 - 3 \bar{\alpha} \right) + \frac{3}{8} \bar{\alpha} n^4 \right] b_1^2 + \frac{n^4}{4} \\ & - n^2 \left(\frac{5}{4} - \frac{\mu^2}{2} - \mu \right) + 1 - \mu - 2 \mu^2 + 2 \mu^3 = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

За решење (3.23) систем алгебарских једначина има облик:

$$\begin{aligned} a_0 - \mu a_2 + \frac{3}{2} \bar{\alpha} a_1^2 \left(a_0 - \frac{1}{2} a_2 \right) - \frac{1}{2} \bar{\beta} a_1^2 &= 0, \\ a_2 - 2 \mu a_0 - n^2 a_2 + \frac{3}{2} \alpha a_1^2 (a_2 - a_0) + \frac{1}{2} \bar{\beta} a_1^2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$1 + \mu - \frac{n^2}{4} + \frac{3}{4} \bar{\alpha} a_1^2 - \bar{\beta} (2 a_0 - a_2) = 0.$$

За амплитуду a_1 аналогно добијамо:

$$\begin{aligned} & \frac{27}{32} \bar{\alpha}^3 a_1^6 + \left(\frac{27}{8} \bar{\alpha}^2 - \frac{9}{8} \bar{\alpha}^2 \mu - \frac{3}{4} \bar{\alpha} \bar{\beta}^2 - \frac{45}{32} \bar{\alpha}^2 n^2 \right) a_1^4 + \left[\frac{15}{4} \bar{\alpha} - \frac{9}{2} \bar{\alpha} \mu^2 - \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} \bar{\beta}^2 + 2 \bar{\beta}^2 \mu + n^2 \left(-\frac{3}{4} \bar{\alpha} \mu + \bar{\beta}^2 - 3 \bar{\alpha} \right) + \frac{3}{8} \bar{\alpha} n^4 \right] a_1^2 + \frac{n^4}{4} \\ & - n^2 \left(\frac{5}{4} - \frac{\mu^2}{2} + \mu \right) + 1 + \mu - 2 \mu^2 - 2 \mu^3 = 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Као што се и могло очекивати, коефицијент уз квадратни члан ушао је у једначину за амплитуде (3.25) и (3.27).

Даљу тачност могуће је реализовати, представљајући решење за одговарајуће гране у облику:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= b_0 + \sum_{i=1, 3, \dots}^{\infty} b_i \cos \frac{i \theta t}{2} + \sum_{k=2, 4, \dots}^{\infty} b_k \cos \frac{k \theta t}{2}, \\ \xi(t) &= a_0 + \sum_{i=1, 3, \dots}^{\infty} a_i \sin \frac{i \theta t}{2} + \sum_{k=2, 4, \dots}^{\infty} a_k \cos \frac{k \theta t}{2}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Добивени при томе системи нелинеарних алгебарских једначина могу се решити приближним методама.

Приметимо, да се при решавању једначине (3.14) методом малог параметра прва апроксимација поклапа са обрасцима (3.20) и (3.21) за b_1^2 и a_1^2 .

ипак конструкција узастопних апроксимација веома је тешка, јер је у својству једначине поремећаја неопходно проучавати једначину типа Љапунова.

Једначине (3.25) и (3.27) лако се решавају по n , ако тражену амплитуду при томе сматрамо параметром.

Стабилност добијених решења испитује се познатим методама. Решење, које узима почетак на доњој граници области нестабилности, је стабилно, ако је $\frac{db_1}{dn} > 0$, и нестабилно, ако је $\frac{db_1}{dn} < 0$. Друго решење, које је у случају плоча у целости нестабилно, биће стабилно, ако је $\frac{da_1}{dn} < 0$.

Допустимо, да се учестаност спољашњег оптерећења постепено увећава, пролазећи кроз област нестабилности. Тада ћемо на доњој граници области нестабилности опазити „крути“ поремећај стационарних осцилација. При обрнутој промени учестаности на горњој граници области нестабилности имаћемо „меки“ поремећај.

§ 4. Динамичка стабилност цилиндарске љуске

Нека је танкозидни кружни цилиндар полупречника r , константне дебљине h , дужине l зглавкасто ослоњен по ивицама тако да један од зглобова има слободу померања дуж осе, и нека је на омотачу, који има слободу померања у тренутку $t=0$, изненадно дато оптерећење $T=\text{const}$, које затим остаје непромењено. Изненадно дејство подужног оптерећења изазива радијалне осцилације цилиндра, при чему, ако је оптерећење T мање од неке одређене вредности, те осцилације биће без пораста амплитуде око положаја равнотеже, и обрнуто, ако је оптерећење T веће од те вредности, тада амплитуда угиба расте са временом па, према томе, цилиндарска љуска губи стабилност.

Проблем се састоји у томе, да се одреди то оптерећење (критично), почев од кога настаје неограничени пораст амплитуде угиба.

Размотримо аксијално-симетрични губитак стабилности [44]; једначина кретања елемента цилиндарске љуске има облик:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{T_\theta}{r} - T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} - N_x = 0. \quad (4.1)$$

Овде је $T=\text{const}$ — спољашње оптерећење, рачунато по јединици дужине; T_x , T_θ — респективно унутрашње истежуће силе у аксијалном и циркуларном правцу, рачунате по јединици дужине; N_x — пресечна сила у аксијалном правцу, на јединицу дужине.

Користећи познате зависности [13] и уносећи их у (4.1), добивамо једначине кретања у померањима:

$$\frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial w}{r} \right) = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$-\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(-\frac{w}{r} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) - T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (4.2)$$

где су u, w — аксијално и радијално померање.

Претпостављамо, да је подужно (аксијално) померање мало у поређењу са попречним ($u \ll w$) па се, дакле, силе инерције у подужном правцу могу занемарити. Како $\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rightarrow 0$, то из (4.2) добивамо једначину кретања по угибу у радијалном правцу:

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{Eh}{r^2} w + T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (4.3)$$

Решење једначина (4.3), које задовољава граничне услове, тражимо у облику:

$$w = q(t) \sin \frac{m \pi x}{l}. \quad (4.4)$$

Овде је $q(t)$ — амплитуда угиба; m — број полуталаса дуж изводнице. Стављајући (4.4) у (4.3), за одређивање функције $q(t)$ имаћемо обичну диференцијалну једначину другог реда

$$\ddot{q}(t) - \alpha q(t) = 0, \quad (4.5)$$

при чему је

$$\alpha = \frac{1}{\rho h} \left[T \frac{m^2 \pi^2}{l^2} - \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{m^4 \pi^4}{l^4} - \frac{Eh}{r^2} \right]. \quad (4.5')$$

Решење једначине (4.5) биће периодично, ако је $\alpha < 0$, или аперодично, ако је $\alpha > 0$. У последњем случају, амплитуда угиба ће расти са временом па, према томе, настаје губитак стабилности љуске. Из услова $\alpha = 0$ одређује се величина критичне динамичке силе:

$$T_{kr}^d = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{m^2 \pi^2}{l^2} + \frac{Eh}{r^2} \frac{l^2}{m^2 \pi^2}. \quad (4.6)$$

Установљено је, да при подужном удару силом $T = \text{const}$ цилиндарска љуска губи стабилност, кад активна сила достигне вредност $T_{kr} = T_{kr}^{st}$, при чему из скупа могућих оносиметричних облика губитка стабилности љуска ће се искривљавати са образовањем m^* полуталаса, тј. ближи цео број k

$$m = \frac{l}{\pi} \sqrt[4]{\frac{12(1-\nu^2)}{h^2 r^2}}, \quad (4.7)$$

коме одговарају најмање вредности T_{kr}^d . Тај облик губитка стабилности је претежан.

Ако било који спољашњи узрок побуђује љуску на кривљење не по том претежном облику, то ће критичне вредности динамичког оптерећења T_{kr}^d бити веће од критичног статичког оптерећења T_{kr}^{st} , при чему мо-

губност регулисања броја полуталаса одговара могућностима увећања динамичког оптерећења, коју може издржати цилиндарска љуска без губитка стабилности. Један од узрока, који принуђују љуску да се искриви са унапред датим бројем полуталаса, могу да буду почетна кривљења љуске мале амплитуде.

Лако је добити израз за критичну силу за случај, када на љуску дејствује сила $T = T_1 t$, пропорционална времену, при чему ће се он тачно поклапати са (4.6).

Стварно, за функције $q(t)$ важи једначина типа Беселове (Bessel) једначине

$$\ddot{q}(z) + \frac{A^3}{B^2} q(z) z = 0. \quad (4.8)$$

Овде је

$$A = \frac{1}{\rho h} \left[\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{m^4 \pi^4}{l^4} + \frac{Eh}{r^2} \right], \quad B = \frac{1}{\rho h} T_1 \frac{m^2 \pi^2}{l^2}, \quad z = 1 - \frac{B}{A} t. \quad (4.9)$$

Решење једначине (4.8) може се написати у облику:

$$q(z) = C_1 z^{1/2} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \frac{A^{3/2}}{B} z^{3/2} \right) + C_2 z^{1/2} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \frac{A^{3/2}}{B} z^{3/2} \right), \quad (4.10)$$

за $z > 0$, тј. у почетном интервалу времена, и

$$q(\tilde{z}) = \tilde{C}_1 \tilde{z}^{1/2} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \frac{A^{3/2}}{B} \tilde{z}^{3/2} \right) + \tilde{C}_2 \tilde{z}^{1/2} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \frac{A^{3/2}}{B} \tilde{z}^{3/2} \right), \quad (4.11)$$

где $\tilde{z} = \frac{B}{A} t - 1$ расте са временом. Из својства Беселових функција,

произилази, да љуска у почетном тренутку времена за $z > 0$ осцилује око положаја равнотеже, а за $z < 0$ губи стабилност, тј. угиб расте са временом. Из услова $z = 0$ одређује се критични тренутак времена t_{kr} , па дакле, и критична сила

$$T_{kr}^d = T_1 t_{kr} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{m^2 \pi^2}{l^2} + \frac{Eh}{r^2} \frac{l^2}{m^2 \pi^2},$$

слично као и у случају, кад је $T = \text{const}$.

На крају, размотримо случај, кад цилиндарска љуска има почетно кривљење:

$$w_0 = k \sin \frac{m \pi x}{l}, \quad (4.12)$$

где је k — почетна амплитуда; m — почетни број полуталаса. Нека је на крају љуске тренутно додата константна сила $T = \text{const}$. Једначина кретања (4.3) у том случају добива облик:

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^4 (w - w_0)}{\partial x^4} + \frac{Eh}{r^2} (w - w_0) + T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (4.13)$$

$$w_1 = q(t) \sin \frac{m \pi x}{l}. \quad (4.14)$$

Тада је према (4.12) и (4.14),

$$w = w_0 + w_1 = [k + q(t)] \sin \frac{m \pi x}{l}. \quad (4.15)$$

За функције $q(t)$ после уношења (4.15) у (4.13) и простих трансформација добивамо:

$$\ddot{q}(t) - \alpha q(t) = \frac{k}{\rho h} T \frac{m^2 \pi^2}{l^2}. \quad (4.16)$$

Овде α има исту вредност, као и у (4.5').

Расуђивања слична онима на почетку, доводе до закључка, да на величину критичне динамичке силе почетни угиб не утиче, ако се почетна количина полуталаса m поклапа са вредношћу m^* , при коме се добивају вредности T_{kr}^{st} . Ако је пак $m \neq m^*$, то је вредност $T_{kr}^d > T_{kr}^{st}$, јер овде као да додајемо допунске везе, и љуска ће бити стабилнија.

Дакле, задавањем малог угиба може се љуска учинити стабилнијом.

Приметимо такође, да ако је $T = T_1 t$, то изводећи расуђивања аналогна онима од раније, добивамо такође једначину Беселовог типа:

$$\ddot{q} + \frac{A^3}{B^2} q(z) z = \frac{A^3}{B^2} k, \quad (4.17)$$

где z има претходну вредност. Решење за $z > 0$ има облик:

$$q(z) = C_1 z^{1/2} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \frac{A^{3/2}}{B} z^{3/2} \right) + C_2 z^{1/2} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \frac{A^{3/2}}{B} z^{3/2} \right) + \frac{A^3}{B^2} \frac{k}{w} \left[z^{1/2} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \frac{A^{3/2}}{B} z^{3/2} \right) \int_0^z S^{1/2} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \frac{A^{3/2}}{B} S^{3/2} \right) dS - z^{1/2} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \frac{A^{3/2}}{B} z^{3/2} \right) \int_0^z S^{1/2} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \frac{A^{3/2}}{B} S^{3/2} \right) dS \right], \quad (4.18)$$

где је w — детерминанта Вронског; $w = f_1 f_2' - f_2 f_1'$, f_1 и f_2 партикуларни интегрални једначине (4.17).

Константе C_1 и C_2 одређујемо из почетних услова: за $t=0$, $q(0)=k$, $\dot{q}(0)=0$:

$$C_1 = -\frac{1}{w} \left(\frac{A^{3/2}}{B} R_1 J_{2/3} + R_2 J_{-1/3} \right), \quad (4.19)$$

$$C_2 = -\frac{1}{w} \left(-R_2 J_{1/3} + \frac{A^{3/2}}{B} R_1 J_{-2/3} \right).$$

Овде је

$$\begin{aligned}
 R_1 = & -\frac{k}{w} \frac{A^3}{B^2} \left[J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \frac{A^{3/2}}{B} \right) \int_0^1 S^{1/2} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \frac{A^{3/2}}{B} S^{3/2} \right) dS - \right. \\
 & \left. - J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \frac{A^{3/2}}{B} \right) \int_0^1 S^{1/2} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \frac{A^{3/2}}{B} S^{3/2} \right) dS \right] + k, \\
 R_2 = & \frac{k}{w} \frac{A^{9/2}}{B^3} \left[J_{2/3} \left(\frac{2}{3} \frac{A^{3/2}}{B} \right) \int_0^1 S^{1/2} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \frac{A^{3/2}}{B} S^{3/2} \right) dS + \right. \\
 & \left. + J_{-2/3} \left(\frac{2}{3} \frac{A^{3/2}}{B} \right) \int_0^1 S^{1/2} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \frac{A^{3/2}}{B} S^{3/2} \right) dS \right]. \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

Са порастом времена t аргумент z постаје негативан. Уводећи променљиву $\tilde{z} = \frac{B}{A} t - 1$, добивамо једначину Беселовог типа:

$$\ddot{q}(\tilde{z}) - \frac{A^3}{B^2} q(\tilde{z}) \tilde{z} = \frac{A^3}{B^2} k. \quad (4.21)$$

Решење те једначине изражава се помоћу модификованих Беселових функција

$$\begin{aligned}
 q(\tilde{z}) = & \tilde{C}_1 \tilde{z}^{1/2} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \frac{A^{3/2}}{B} \tilde{z}^{3/2} \right) + \tilde{C}_2 \tilde{z}^{1/2} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \frac{A^{3/2}}{B} \tilde{z}^{3/2} \right) + \\
 & + \frac{A^3}{B^2} \frac{k}{w} \left[\tilde{z}^{1/2} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \frac{A^{3/2}}{B} \tilde{z}^{3/2} \right) \int_0^{\tilde{z}} S^{1/2} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \frac{A^{3/2}}{B} S^{3/2} \right) dS - \right. \\
 & \left. - \tilde{z}^{1/2} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \frac{A^{3/2}}{B} \tilde{z}^{3/2} \right) \int_0^{\tilde{z}} S^{1/2} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \frac{A^{3/2}}{B} S^{3/2} \right) dS \right]. \quad (4.22)
 \end{aligned}$$

Константе \tilde{C}_1 и \tilde{C}_2 одређујемо из услова, да за $t=0$ и $\tilde{z}=0$ брзине честица и угиби треба да се поклапају. Тада добивамо, да је

$$C_1 = -\tilde{C}_1, \quad C_2 = \tilde{C}_2. \quad (4.23)$$

На тај начин, амплитуда угиба у потпуности је одређена. Тај тренутак времена, када амплитуда угиба љуске прелази од осцилаторних кретања ка порасту, називамо критичним моментом, а оптерећење које му одговара, — критичним:

$$T_{kr} = T_1 t_{kr}. \quad (4.24)$$

Треба напоменути, да добијена решења важе само за мале угибе $\frac{h}{r} \geq w$.

Анализа решења дозвољава да се закључи:

- 1) што је већа брзина оптерећивања, то је мања амплитуда угиба;
- 2) што је већа брзина оптерећивања и мањи почетни угиб, то је већи коефицијент преоптерећења $\frac{T_{kr}^d}{T_{kr}^{st}}$;
- 3) минимално оптерећење, које издржава љуска, добива се за једну исту количину полуталаса при ма којој брзини оптерећивања.

Може се навести и други пут формирања једначина кретања танких љуски и решења проблема о динамичкој стабилности цилиндра, полазећи од принципа Хамилтон-Остроградског:

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0, \quad \delta L = \delta T + \delta A + \delta E - \delta W. \quad (4.25)$$

Овде је и даље: δT — варијација кинетичке енергије љуске; δA — варијација рада спољних сила и момената, који дејствују на љуску; δW — варијација рада деформације љуске; δE — варијација рада сила, које зависе од брзине и које изазивају амортизовано кретање, u_1, u_2, w — пројекције на правце јединичних вектора; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{m}$ — вектори померања од оптерећења, које доводи средњу површ σ^0 у површ σ' , $\mathbf{e}_i^*, \mathbf{m}_i^*, \dots$ — вредности $\mathbf{e}_i, \mathbf{m}_i, \dots$ у новом деформисаном стању; $e_{ix}, \omega_i, E_i, E_3$ — углови обртања координатних вектора $\mathbf{r}, \mathbf{l}, \mathbf{m}$, у процесу деформације;

$i = \frac{d(\quad)}{d\alpha_i}$ — парцијални изводи. Вектори брзине и убрзања тачака средње површи у случају малих деформација могу се изразити у облику:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^2 \left[\mathbf{e}_i^* \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + e_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + w_i \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - \mathbf{m}^* w_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right] + \mathbf{m}^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad i \neq j \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^2 \left[\mathbf{e}_i^* \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + e_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t} + w_i \frac{\partial w}{\partial t} \right) - \mathbf{m}^* w_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \right] + \mathbf{m}^* \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Трансформишући δA и δW , добивамо:

$$\int_{t_0}^{t_1} \iint_{(\sigma)} \left\{ \sum_{i=1}^2 [(F_i + Y_i) \delta u_i - (M_i + Z_i) \delta w_i] + (F_3 + Y_3) \delta w \right\} d\alpha_1 d\alpha_2 dt + \quad (4.27)$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{(G)} \left\{ \sum_{i=1}^2 R_i \delta u_i + R_3 \delta w - (\bar{G} - G) \delta w_i \right\} dS dt = 0,$$

где је

$$F_1 = (A_2 T_{11}^*),_{,1} + (A_1 T_{21}^*),_{,2} + T_{12}^* A_{1,2} - T_{22}^* A_{2,1} + \\ + A_1 A_2 (N_2^* K_{11}^* + N_2^* K_{12}^* + X_1^*)_{1,2}$$

$$Y_1 = A_1 A_2 \varepsilon h \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + e_{12} \frac{\partial u_2}{\partial t} + w_1 \frac{\partial w}{\partial t} \right) - \\ - A_1 A_2 \rho h \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + e_{12} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + w_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right),$$

$$F_3 = (A_2 N_1^*),_{,1} + (A_1 N_2^*),_{,2} - A_1 A_2 (T_{11}^* K_{11}^* + T_{22}^* K_{22}^* + K_{12}^* T_{12}^* + \\ + K_{12}^* T_{21}^* - X_3),$$

$$Y_3 = A_1 A_2 \varepsilon h \left(\frac{\partial w}{\partial t} - w_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} - w_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} \right) - \quad (4.28)$$

$$- A_1 A_2 \rho h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + w_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - w_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right),$$

$$M_i = (A_2 M_{11}^*),_{,1} + (A_1 M_{21}^*),_{,2} + M_{22}^* A_{1,2} - M_{22}^* A_{2,1} + A_1 A_2 (L^* - N_1^*),$$

$$Z_i = A_1 A_2 \frac{h^3}{12} \left(\rho \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial w_i}{\partial t} \right), \quad R_i = \Phi_s^i + \Phi_s^3 u_i - \sum_{k=1}^2 T_{ik}^* n_k,$$

$$R_3 = \Phi_3^3 - N + \frac{dH}{ds} - \sum_{i,k=1}^2 T_{ik} w_i n_k;$$

ε — експериментални коефицијент.

Релација (4.27) представља једначину методе Бубнова-Галеркина, која дозвољава приближну интеграцију динамичких једначина кретања љуски:

$$F_i + Y_i = 0; \quad F_3 + Y_3 = 0; \quad M_i + Z_i = 0 \quad (4.29)$$

и статичких граничних услова:

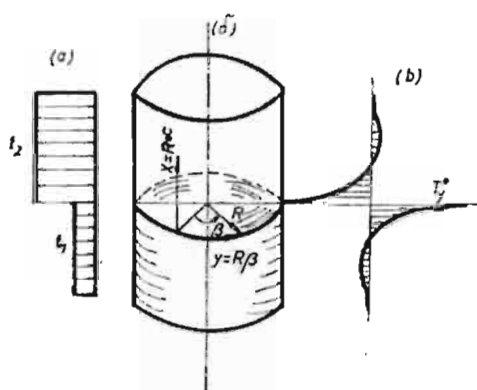
$$R_i = 0, \quad R_3 = 0, \quad \bar{g} = g.$$

§ 5. Термостабилност цилиндарске љуске при неравномерној расподели температуре

При равномерном загревању цилиндарске љуске, делимично напуњене течносту (сл. 24), празан њен део загреваће се брже, него део, који је у непосредном контакту са течносту. Као последица пада температуре $T = T_2 - T_1$ по дужини система долази до појаве нормалних циркуларних

сила N_y^0 . У загрејанијој области те силе су притисне и за одређени пад температуре T_{kr} оне могу довести до избочавања љуске.

Наведимо овде решење тог проблема, према раду [3], на основу интегралних Фуријеових трансформација.



сл. 24

Сматраћемо, да је температура по дебљини зида константна, а по дужини се мења скоковито (сл. 24а). За физичке константе материјала претпостављамо да не зависе од температуре. У том случају из прорачуна основног (докритичног) напонског стања је:

$$N_y^0 = \frac{1}{2} E h \alpha_T T_{kr} g(\alpha), \quad (5.1)$$

где је

$$g(\alpha) = e^{-\lambda \alpha} \cos \lambda \alpha, \quad \text{за } \alpha \geq 0;$$

$$g(\alpha) = -e^{+\lambda \alpha} \cos \lambda \alpha, \quad \text{за } \alpha \leq 0;$$

$$\lambda^4 = 3(1 - \nu^2) \frac{R^2}{h^2};$$

E — модул еластичности материјала; α_T — коефицијент линеарног ширења; R, h — полупречник и дебљина љуске; ν — Пуасонов коефицијент; $\alpha = \frac{x}{R}$ — бездимензиона координата дуж изводница цилиндра. (Позитивним се сматрају притисне силе).

Како температурна напрезања брзо опадају при удаљавању од места скока температуре, то посматрану љуску можемо сматрати бесконачно дугом. Избочавање система треба очекивати такође у ограниченој области — у области дејства притисних сила N_y^0 .

Ако се занемари кривљење изводница љуске до избочавања тада једначине стабилности имају облик:

$$\frac{1}{Eh} \Delta^2 \varphi + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad (5.2)$$

$$\frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \Delta^2 w - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

где је φ — функција напона, која дефинише мембранска напрезања обрасцима:

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad S = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

Ставимо

$$w = \sum_{n=2}^{\infty} w_n \cos n\beta, \quad \varphi = \sum_{n=2}^{\infty} \varphi_n \cos n\beta, \quad (5.3)$$

где су w_n и φ_n непознате функције координате x . Прелазећи на бездимензиону координату α , из (5.2), добивамо:

$$\left(\frac{d^2}{d\alpha^2} - n^2\right)^2 \varphi_n + ERh \frac{d^2 w_n}{d\alpha^2} = 0, \quad (5.4)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\alpha^2} - n^2\right)^2 w_n - \frac{4\lambda^4}{EBh} \frac{d^2 \varphi_n}{d\alpha^2} - 2\lambda^4 n^2 \alpha_T T_{kr} g(\alpha) w_n = 0.$$

Интеграција система (5.4) је веома тешка, зато се за одређивање критичног периода температуре примењује на систем Фуријеова трансформација:

$$F(s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) e^{is\alpha} d\alpha. \quad (5.5)$$

Имајући у виду граничне услове задатка:

$$w_n, \quad \frac{dw_n}{d\alpha}, \dots, \quad \varphi_n, \quad \frac{d\varphi_n}{d\alpha}, \dots \rightarrow 0 \quad \text{за } \alpha \rightarrow \pm \infty,$$

из (5.4) добивамо:

$$(s^2 + n^2)^2 \Phi(s) - ERhs^2 W(s) = 0,$$

$$(s^2 + n^2)^2 W(s) + \frac{4\lambda^4 s^2}{ERh} \Phi(s) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda^4 n^2 \alpha_T T_{kr} \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) w_n e^{is\alpha} d\alpha = 0, \quad (5.6)$$

где су $W(s)$, $\Phi(s)$, Фуријеови трансформати непознатих функција w_n и φ_n .

Искључујући $\Phi(s)$ из система једначина (5.6), имаћемо:

$$[(s^2 + n^2)^4 + 4\lambda^4 s^4] W(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda^4 n^2 (s^2 + n^2)^2 \alpha_T T_{kr} \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) w_n e^{is\alpha} d\alpha. \quad (5.7)$$

Према теорему о конволуцији трансформата и Ојлеровом обрасцу за комплексне бројеве биће

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) w_n e^{is\alpha} d\alpha = \sqrt{\frac{2}{\pi}} i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(s-\xi)^3}{4\lambda^4 + (s-\xi)^4} W(\xi) d\xi. \quad (5.8)$$

Увршћујући (5.8) у (5.7) и уводећи ознаку

$$\frac{\sqrt{(s^2+n^2)^4+4\lambda^4 s^4}}{s^2+n^2} W(s) = V(s)$$

добивамо

$$V(s) = T_{kr} \int_{-\infty}^{\infty} K(s, \xi) V(\xi) d\xi, \quad (5.9)$$

где је

$$K(s, \xi) = \frac{2}{\pi} i \lambda^4 n^2 \alpha_T \frac{s^2+n^2}{\sqrt{(s^2+n^2)^4+4\lambda^4 s^4}} \frac{\xi^2+n^2}{\sqrt{(\xi^2+n^2)^4+4\lambda^4 \xi^4}} \frac{(s-\xi)^3}{4\lambda^4+(s-\xi)^4}. \quad (5.10)$$

На тај начин, полазни систем диференцијалних једначина свео се на Фредхолмову (Fredholm) интегралну једначину (5.9) другог реда са симетричним језгром, где као параметар фигурише критични пад температуре T_{kr} .

Сагласно теорији симетричних интегралних једначина најмања вредност T_{kr} може се одредити (с доње стране) обрасцем:

$$T_{kr} = \frac{1}{\sqrt{A_2}}, \quad (5.11)$$

где је други траг језгра

$$A_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |K(s, \xi)|^2 ds d\xi. \quad (5.12)$$

Увршћујући уместо $K(s, \xi)$ његову вредност (5.10), имамо:

$$T_{kr} = \frac{K_T}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{\eta}{\alpha_T R}, \quad (5.13)$$

где је

$$K_T =$$

π

$$= 2 \mu^2 \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z^2+1)^2}{(z^2+1)^4+4\mu^4 z^4} \frac{(\eta^2+1)^2}{(\eta^2+1)^4+4\mu^4 \eta^4} \frac{(z-\eta)^6}{[4\mu^4+(z-\eta)^4]^2} dz d\eta; \quad (5.14)$$

$$\mu = \frac{\lambda}{n}, \quad z = \frac{s}{n}; \quad \eta = \frac{\xi}{n}.$$

Минимизација коефицијента K_T по n изведена је помоћу електронског рачунара; као резултат добивено је $K_T=5,48$ за $\mu=1,0$.

§ 6. Локална термостабилност сферне љуске

Проучимо проблем еластичне стабилности сферне љуске полупречника R и дебљине зида h под дејством температурних напрезања, која потичу од промене температуре T (скоком) по екватору сфере. Од свих напона основног стања (докритичног) преовлађујући ће бити циркуларни напон σ_y . У полусфери загрејаној до температуре T , ти напони су притисни. За карактеристике материјала претпоставља се да не зависе од температуре.

Проблем о температурним напрезањима у сферној љуски при неравномерном распореду температуре дуж меридијана је решен; послужимо се резултатима решења у делу одређивања циркуларних напона:

$$\sigma_y = 0,5 E \alpha_T T f(\alpha), \quad (6.1)$$

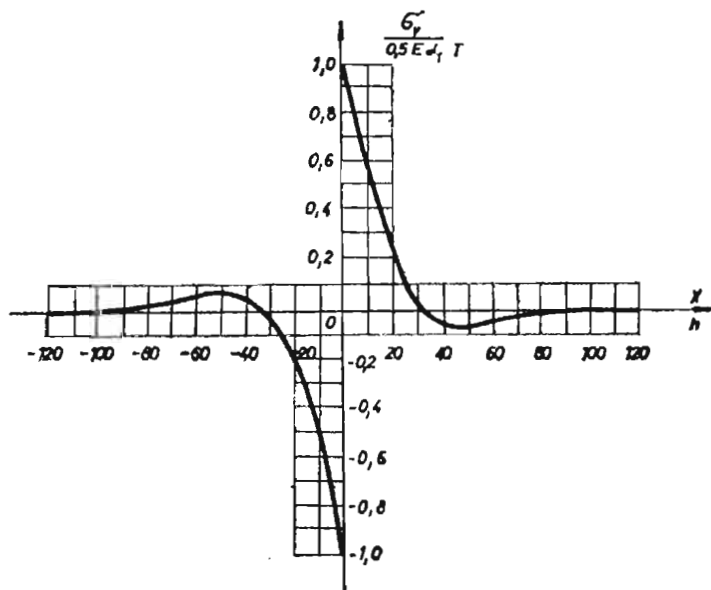
где је

$$f(\alpha) = e^{-\lambda\alpha} \cos \lambda\alpha, \quad \text{за } \alpha > 0; \quad f(\alpha) = -e^{+\lambda\alpha} \cos \lambda\alpha, \quad \text{за } \alpha < 0;$$

$$\lambda = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R}{h}},$$

при чему величине које овде улазе E , α_T , ν , $\alpha = \frac{h}{R}$ — имају исте вредности, као и у претходном (§ 5).

Карактер распореда напона дуж меридијана показан је на сл. 25 за случај $\sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{h}{R}} = \frac{1}{20}$. Из обрасца (6.1) и сл. 25 види се да температурна напрезања брзо опадају при удаљавању од места скока температуре. Одатле следи, да избочавање љуске треба очекивати у ограниченој области — у области дејства притисних напона.



сл. 25

За одређивање критичне температуре T_{kr} при избочавању искористимо једначину стабилности плитких љуски. Занемарујући кривљење облика

средње површи љуске до избочавања и узимајући у обзир само циркуларна напоне једначина локалне стабилности сферне љуске има облик:

$$\frac{D}{h} \Delta^3 w + \frac{E}{R^2} \Delta w + \Delta \left(\sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Овде је D — цилиндарска крутост; w — допунски радијални угиб при избочавању љуске:

$$\Delta^3 w = \Delta \Delta \Delta w, \quad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Ту једначину могуће је написати и у следећем облику:

$$\Delta^3 w + 4\lambda^4 \Delta w + 4\lambda^4 \frac{1}{E} \Delta \left(\sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) = 0. \quad (6.2)$$

У једначини (6.2) реализован је прелаз на бездимензионе координате

$$\alpha = \frac{x}{R}, \quad \beta = \frac{y}{R}.$$

Унапред прогнозирати облик очекиваног избочавања у правцу координате x је тешко. Зато представимо угиб w у тренутку губитка стабилности у облику:

$$w = \sum_{n=2}^{\infty} w_n(\alpha) \cos n\beta, \quad (6.3)$$

где је n — број таласа у циркуларном правцу, $w_n(\alpha)$ — непозната функција, која задовољава услове

$$w_n \rightarrow 0, \quad \text{за } \alpha \rightarrow \pm \infty; \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial w_n}{\partial \alpha} \dots \rightarrow 0, \quad \text{за } \alpha \rightarrow \pm \infty. \quad (6.4)$$

Такво представљање функције w је могуће благодарећи брзом опадању допунског радијалног угиба и његових извода при избочавању љуске.

Функција w егзистира и дефинисана је у интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right)$.

Продужење w на интервал $(-\infty, +\infty)$ диктирано је захтевима методе примењене у даљим излагањима.

Уврстимо изразе (6.1) и (6.3) у једначину (6.2), тад добивамо једначину по амплитудама угиба w_n :

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{d^2}{d\alpha^2} - n^2 \right)^3 + 4\lambda^4 \left(\frac{d^2}{d\alpha^2} - n^2 \right) \right] w_n(\alpha) = \\ & = 2\lambda^4 n^2 \alpha_T T_{kr} \left(\frac{d^2}{d\alpha^2} - n^2 \right) [f(\alpha) w_n(\alpha)]. \end{aligned} \quad (6.5)$$

У даљем ради краткоће писања изостављаћемо индекс n у функцији w_n . Искористимо, даље, Фурије-ову трансформацију:

$$W(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w(\alpha) e^{is\alpha} d\alpha. \quad (6.6)$$

Овде је са $W(s)$ означен Фуријеов трансформат функције $w(\alpha)$. Примењујући Фуријеову трансформацију на једначину (6.5) и узимајући у обзир услове (6.4), добивамо:

$$[(s^2 + n^2)^2 + 4\lambda^4] W(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda^4 n^2 \alpha_T T_{kr} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) w(\alpha) e^{is\alpha} d\alpha. \quad (6.7)$$

Интеграл, који се налази на десној страни (6.7), представља Фуријеов трансформат производа функција $f(\alpha)$ и $w(\alpha)$.

У сагласности са теоремом о конволуцији трансформата налазимо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) w(\alpha) e^{is\alpha} d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} W(p) F(s-p) dp,$$

где је $F(s-p)$ — Фуријеов трансформат функције $f(\alpha)$:

$$F(s-p) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) e^{i(s-p)\alpha} d\alpha. \quad (6.8)$$

Увршћујући израз за функцију $f(\alpha)$ из (6.1) у (6.8) и узимајући у обзир да је $f(\alpha)$ непарна функција, добивамо,

$$F(s-p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} i \frac{(s-p)^3}{(s-p)^4 + 4\lambda^4}. \quad (6.9)$$

Узимањем релација (6.8), (6.9) и увођењем ознака:

$$\sqrt{(s^2 + n^2)^2 + 4\lambda^4} W(s) = V(s),$$

једначина (6.7) добива облик:

$$V(s) = T_{kr} \int_{-\infty}^{\infty} K(s, p) V(p) dp, \quad (6.10)$$

где је

$$K(s, p) = \frac{2}{\pi} \lambda^4 n^2 \alpha_T t \frac{1}{\sqrt{(s^2 + n^2)^2 + 4\lambda^4}} \times \frac{1}{\sqrt{(p^2 + n^2)^2 + 4\lambda^4}} \frac{(s-p)^3}{(s-p)^4 + 4\lambda^4}. \quad (6.11)$$

На тај начин, проблем се свео на решавање хомогене Фредхолмове интегралне једначине (6.10) другог реда са симетричним језгром, при чему критичну температуру T_{kr} можемо сматрати као независни параметар. Та једначина има нетривијално решење за неке сопствене вредности параметра T_{kr} . Најмању од њих (са доње стране) можемо приближно одредити по формули:

$$\frac{1}{T_{kr}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |K(s, p)|^2 ds dp. \quad (6.12)$$

Трансформишимо сад интеграл на десној страни израза (6.12). Уведимо смену:

$$s = nz, \quad p = n\eta, \quad \lambda = n\mu,$$

тада из (6.12) добивамо за одређивање критичне температуре образац облика:

$$T_{kr} = \frac{K_T}{\sqrt{3(1-v^2)}} \frac{h}{\alpha_T R}, \quad (6.13)$$

где је

$$K_T = \frac{\pi}{2\mu^2 \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z-\eta)^6}{[(z^2+1)^2+4\mu^4][(\eta^2+1)^2+4\mu^4][(z-\eta)^4+\mu^4]^2} dz d\eta}}. \quad (6.14)$$

Нумеричком интеграцијом добивено је да коефицијент K_T има најмању вредност $K_T = 10,4$ за $\mu = 0,914$. При томе се број таласа у циркуларном правцу при губитку стабилности израчунава обрасцем.:

$$n = \frac{\lambda}{\mu} = 1,093 \sqrt[4]{3(1-v^2)} \sqrt{\frac{R}{h}}. \quad (6.15)$$

Као пример одредимо критичну температуру за сферну љуску од дуралу-минијума са $\frac{h}{R} = 10^{-3}$ за $v = 0,3$. Из обрасца (6.13) добивамо $T_{kr} = 250^\circ \text{C}$.

Из тога примера се види, да танке љуске са $\frac{h}{R} \approx 10^{-3}$ могу губити стабилност од температурних напрезања, ако се температура оштро (скоковито) мења на екватору сфере.

§ 7. Статистички метод проучавања стабилности љуски

Проблем стабилности љуске — одређивање њеног равнотежног облика везан је са решавањем једначина нелинеарне теорије љуски, како је више пута горе наведено. У зависности од вредности параметра λ оптерећења могућ је овај или онај облик равнотеже. Ипак, чак и кад би било могуће

точно решење нелинеарне теорије љуски, тада се и у том случају проблем не може сматрати проученим до краја, јер остаје нејасан степен реалности сваког од могућих облика равнотеже љуске за $\lambda_0 < \lambda < \lambda_2$.

Ради избора најреалнијег облика равнотеже љуске треба унети у разматрање неке допунске информације. Тако се у раду [45] сматра рационалним узети за меру реалности овај или онај облик равнотеже љуске по вероватноћи остајања љуске у том облику.

Уношење теорије вероватноће на проучавање љуски дозвољава да се крене напред у решењу питања: о одређивању допустивих оптерећења на љуску при проучавању стабилности узимањем у обзир услова њене експлоатације и грешака у изради; о утврђивању највећих дозвољених одступања у испуњењу основних параметара љуске.

Проучимо сад овде приближни приступ формирању статистичке теорије стабилности љуске, који је предложио И.И. Ворович [45].

Разделимо све факторе, који одређују случајни карактер савијања љуске на три групе: 1) расејање (дисперзију) еластичних и геометријских својстава љуске; 2) расејање (дисперзију) параметара, који карактеришу метод ослањања љуске; 3) расејање (дисперзију) спољних оптерећења, који делују на љуску.

Даље, ма да се у назначеним групама могу налазити и функционални параметри, као на пример отклон у облику средње површи љуске итд. узимамо да се скуп фактора првих двеју група може описати коначним бројем параметара a_1, \dots, a_m . С обзиром на то природно је сматрати, да су вероватна својства првих двеју група дата, ако је дат закон $\varphi(a_1, \dots, a_m)$ распореда (дистрибуције) параметара a_1, \dots, a_m . Претпоставимо сада, да су параметри a_1, \dots, a_m фиксирани, и напишимо једначине кретања љуске под дејством оптерећења $\mathbf{F}(P, t)$ узимајући у обзир дисипацију енергије при кретању љуске. Имамо:

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial w}{\partial t} + D \Delta^2 w = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) + Z(P, t), \quad (7.1)$$

$$\Delta^2 \varphi = 2 E h \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]. \quad (7.2)$$

У тим једначинама ρ — је запреминска густина љуске, рачуната по јединици површине средње површи љуске; расејање (дисперзија) енергије код љуске узима се у обзир чланом $2\gamma \frac{\partial w}{\partial t}$. Ради упрошћења у једначинама

(7.1) и (7.2) смо занемарили инерцију подужних кретања љуске и сматрамо, да $\mathbf{F}(P, t)$ има само једну компоненту $Z(P, t)$. Од свих тих претпоставки могуће је одрећи се али су сложенија даља извођења.

$$\frac{\varphi}{r} = r(s), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = q(s), \quad (7.3)$$

где су $r(s)$, $q(s)$ — неке функције лука контуре s .

Тражићемо приближно решење проблема у следећем облику:

$$w = \sum_{k=1}^n q_k(t) f_k(p). \quad (7.4)$$

Овде је $f_k(p)$ — базису простор у енергије савијања љуске. За одређивање $q_k(t)$ искористимо метод Бубнова-Галеркина, претпостављајући, да су f_k ортонормиране у L_B . При томе добивамо следећи систем:

$$\ddot{q}_k + \frac{2\gamma}{\rho} \dot{q}_k = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial q_k} + \frac{1}{\rho} Z_k(t), \quad (7.5)$$

$$(k=1, \dots, n), \quad (Z_k = \int_{\Omega} Z(p, t) f_k(p) dp).$$

Овде је v — потенцијална енергија деформације љуске, изражена помоћу q_k .

Систем (7.5) можемо посматрати као једначине кретања неке тачке у n — димензионом простору коефицијената q_1, \dots, q_n . Та се тачка креће у пољу сила са потенцијалом $\rho^{-1} v$ и под дејством случајних сила $\rho^{-1} Z_k(t)$. Даље ћемо сматрати, да је

$$Z(p, t) = Z^{(1)}(p, t) - Z^{(2)}(p, t) + Z^{(3)}(p, t), \quad (7.6)$$

$$(Z^{(1)}(p, t) = MOZ(p, t)).$$

Овде је $Z^{(2)}(p, t)$ — флукуациони члан, који изазива убрзања тачке типа убрзања Брауновског кретања; $Z^{(3)}(p, t)$ — непрекидни случајни процес.

Узмимо даље, да се са довољним степеном тачности може ставити:

$$Z^{(3)}(p, t) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{n_1} a_{kl} f_k(p) \psi_l(t). \quad (7.7)$$

Овде је $\psi_l(t)$ — нека фиксирана функција времена. Сматраћемо непрекидни случајни процес датим, ако је познат закон распореда $\theta(a_{kl})$ параметара a_{kl} . У сагласности са (7.6) имамо:

$$Z_k(t) = Z_k^{(1)}(t) + Z_k^{(2)} + \sum_{l=1}^{n_1} a_{kl} \psi_l(t). \quad (7.8)$$

Проблем се сада састоји у томе, да се нађе закон распореда q_1, \dots, q_n у току времена.

Ради његовог решења сматраћемо, да су групе параметара a_1, \dots, a_m и a_{kl} и случајни процес $Z^{(2)}(p, t)$ статистички независни. Претпоставимо даље, да су параметри a_1, \dots, a_m, a_{kl} узели било које фиксиране вредности, и нађимо закон распореда q_1, \dots, q_n под том претпоставком. Ако се стави,

да $Z^{(2)}$ има δ — корелирани на средњој површи бели шум током времена, тада се за тренутке времена $t \gg \frac{\rho}{\gamma}$ тражени закон распореда може наћи из једначине Смолуховског:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial q_i} - Z_i^{(1)}(t) - \sum_{i=1}^{n_i} a_{ki} \psi_i \right) f \right] \frac{1}{2\gamma} + \frac{\delta \rho^2}{4\gamma^2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_i^2}. \quad (7.9)$$

У једначини (7.9) параметар δ карактерише расејање импулса, који дејствују на љуску, при чему уколико је δ мање, утолико је мање расејање импулса, који дејствују на љуску. Параметар карактерише услове, под којима се налази љуска, и одређује се експериментом.

Уколико је f — неки закон расподеле, тада једначини (7.9) треба додати следеће услове, који важе за $t > 0$:

$$1) f \geq 0; \quad 2) \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int f dq_1 \dots dq_n = 1; \quad 3) f \rightarrow 0 \text{ за } q_1^2 + \dots + q_n^2 \rightarrow \infty. \quad (7.10)$$

Осим тога је $f(q_1, \dots, q_n, 0) = f^*(q_1, \dots, q_n)$, где је f^* — закон расподеле q_1, \dots, q_n у почетном тренутку.

Претпоставимо да смо успели наћи f из (7.9), (7.10). Очеvidно је да ће f зависити и од параметара a_1, \dots, a_m, a_{ki} ; при чему ће безусловни закон расподеле f^0 за посматране услове бити:

$$f^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int f(q_1, \dots, q_n, t, a_n, a_{ki}) \varphi(a_k) \theta(a_{ki}) da_k da_{ki}. \quad (7.11)$$

Размотримо неке важне случајеве, када је реализација горе изложеног плана могућа до краја и када се могу добити формуле за прорачун.

Нека $Z^{(3)} \equiv 0$, $Z^{(1)}$ од времена не зависи. У том случају расподела $f(q_1, \dots, q_n)$, која се успоставља за $t \rightarrow \infty$, одређује се из једначине:

$$\frac{\delta \rho^2}{2\gamma} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_i^2} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial q_i} - Z_i^{(1)} \right) f \right] = 0. \quad (7.12)$$

Иако је проверити да функција

$$I = \exp \left[\left(-v + \sum_{k=1}^n q_k Z_k^{(1)} \right) \frac{2\gamma}{\delta \rho^2} \right], \quad (7.13)$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \exp \left[\left(-v + \sum_{k=1}^n q_k Z_k^{(1)} \right) \frac{2\gamma}{\delta \rho^2} \right] dq_1 \dots dq_n$$

задовољава све услове (7.10) и једначину (7.9). Расподела (7.13) представља Гибзову (Gibbs) расподелу (дистрибуцију).

Безусловни закон расподеле у сагласности са (7.13) одређен је обрасцем

$$f^0(q_1, \dots, q_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int f(q_1, \dots, q_n, a_1, \dots, a_n, a_{kl}) \varphi(a_k) \theta(a_{kl}) da_k da_{kl}. \quad (7.14)$$

Величину f^0 можемо узети за меру реалности овог или оног облика равнотеже љуске.

Образац (7.14) даје довољно потпуно решење.

Услов δ — корелативности процеса $Z^{(2)}$, усвојен у [45], омогућио је да се добије затворено решење у облику (7.13), (7.14). Ако се одступи од тог услова, тада закон расподеле f из (7.9), (7.10) треба одређивати нумерички.

Наведимо битне карактеристике предложеног метода статистичке анализе равнотеже љуске.

1. Прорачун по обрасцу (7.14) не захтева претходно решење проблема о равнотежи љуске, анализу броја облика равнотеже; замену реалних зависности између угиба и спољних сила једнозначним функцијама итд. Захтева се само познавање израза за потенцијалну енергију система у генералисаним координатама.

2. Одређивање закона расподеле по обрасцу (7.14) своди се на извођење квадратура. Пошто су подинтегрални изрази у обрасцу (7.14) — довољно глатке функције, то се те квадратуре без ма каквих компликација могу узети нумерички, чак, ако се за увећање тачности решења проблема прибегава коришћењу великог броја параметара q_1, \dots, q_n . При томе, природно, не постављају се никаква специјална питања, везана са коришћењем машина за прорачун по обрасцу (7.14).

3. Образац (7.1) начелно узима у обзир све основне факторе, који дефинишу случајни карактер савијања љуске, међу њима и такве, као што су случајне силе, које се мењају током времена веома брзо, и силе са периодом промене, упоредивим са периодом осцилација саме љуске итд. При томе он пружа могућност да се прати процес промене вероватноће током времена. Истина, при томе се захтева претходно решење одговарајућег граничног проблема за једначину (7.9). Једначина (7.9) припада броју оних за чије се решење нумеричке методе веома добро прилагођене.

Глава X. СТАБИЛНОСТ ЉУСКИ ИЗА ГРАНИЦЕ ЕЛАСТИЧНОСТИ

У овој глави излаже се проблем о стабилности љуски (при нормалној и повишеној температури) узимањем у обзир физичке и геометријске нелинеарности. Проучавају се конкретни примери стабилности љуски. Овде се разјашњава могућност проучавања послекритичног стања љуски.

§ 1. Поставка проблема

Појава нестабилности, како је то било показано у претходној глави (види главу IX), карактерише се тиме, што су за неке вредности спољашњих сила поред датог (безмоментног) стања равнотеже љуске могућа и друга стања њене равнотеже.

Прикажимо поставку проблема о стабилности љуске у случају када се материјал налази у еласто-пластичном стању. У том циљу размотримо датом стању бесконачно блиско деформабилно стање љуске, које је одрађено дилатацијама $e_{xx} + \delta e_{xx}$, $e_{yy} + \delta e_{yy}$ и клизањем $e_{xy} + \delta e_{xy}$ у слоју који се налази на растојању z од средње површи; варијацијама деформација δe_{xx} , δe_{yy} , δe_{xy} , одговарају варијације напона δX_x , δY_y , δX_y , које се могу израчунати на основу закона пластичности. Уколико се у датом случају ради о стварним варијацијама деформација, а не о виртуалним, као у варијационим једначини равнотеже, неопходно је разликовати два могућа случаја: случај оптерећивања и случај растерећења, јер су обрасци које везују напонско и деформацијско стање при томе различити.

Област оптерећивања карактерише се тиме, што у њој на рачун варијација δe_{xx} , ..., δX_x интензитет деформација и напона расте; у области пак растерећења те величине опадају. Површ која сече дебљину љуске и која дели области оптерећивања и растерећивања, одређује се, дакле, из услова једнакости са нулом варијација интензитета деформација или интензитета напона. С обзиром на то да је варијација рада унутрашњих сила по јединичној запремини љуске једнака:

$$\sigma_i \delta e_i = X_x \delta e_{xx} + Y_y \delta e_{yy} + X_y \delta e_{xy}, \quad (1.1)$$

тј. пропорционална δe_i , то ће једначина уочене површи бити

$$X_x \delta e_{xx} + Y_y \delta e_{yy} + X_y \delta e_{xy} = 0. \quad (1.2)$$

Она се може добити непосредно варирањем обрасца:

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{e_{xx}^2 + e_{xx}e_{yy} + e_{yy}^2 + \frac{1}{4} e_{xy}^2} \quad (1.3)$$

и простих трансформација, према

$$\begin{aligned} S_x &= X_x - \frac{1}{2} Y_y = \frac{\sigma_i}{e_i} e_{xx}, \\ S_y &= Y_y - \frac{1}{2} X_x = \frac{\sigma_i}{e_i} e_{yy}, \\ S_{xy} &= X_y = \frac{\sigma_i}{3 e_i} e_{xy}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

и

$$\sigma_i = \sqrt{X_x^2 - X_x Y_y + Y_y^2 + 3 X_y^2}. \quad (1.5)$$

У области оптерећивања варијације напона могу се наћи диференцирањем образаца (1.4), јер оне важе како за основно, тако и за блиско стање љуске:

$$\begin{aligned} \delta S_x &\equiv \delta X_x - \frac{1}{2} \delta Y_y = \frac{\sigma_i}{e_i} \delta e_{xx} + e_{xx} \frac{d}{de_i} \left(\frac{\sigma_i}{e_i} \right) \delta e_i, \\ \delta S_y &\equiv \delta Y_y - \frac{1}{2} \delta X_x = \frac{\sigma_i}{e_i} \delta e_{yy} + e_{yy} \frac{d}{de_i} \left(\frac{\sigma_i}{e_i} \right) \delta e_i, \\ \delta S_{xy} &\equiv \delta X_y = \frac{\sigma_i}{3 e_i} \delta e_{xy} + \frac{1}{3} e_{xy} \frac{d}{de_i} \left(\frac{\sigma_i}{e_i} \right) \delta e_i, \end{aligned} \quad (1.6)$$

при чему су σ_i и e_i везани дијаграмом истезања, $\sigma_i = \Phi(e_i)$ пошто је

$$\frac{d}{de_i} \left(\frac{\sigma_i}{e_i} \right) = -\frac{1}{e_i} \left(\frac{\sigma_i}{e_i} - \frac{d\sigma_i}{de_i} \right) \leq 0. \quad (1.7)$$

У области растерећења варијације напона и деформација потчињавају се Хуковом закону, и веза између њих налази се из (1.6), ако се стави $\sigma_i = E e_i$:

$$\delta S_x = E \delta e_{xx}, \quad \delta S_y = E \delta e_{yy}, \quad \delta S_{xy} = \frac{1}{3} E \delta e_{xy}. \quad (1.8)$$

Као и у општој теорији љуски, полазимо од основне хипотезе Кирхоф-Лава о нормалном елементу а затим ћемо сматрати, да се варијације деформација слоја љуске који се налази на растојању z од њеног средњег слоја изражавају линеарним зависностима по варијацијама деформација средње површи и по њеним кривина:

$$\delta e_{xx} = \varepsilon_1 - z\kappa_1, \quad \delta e_{yy} = \varepsilon_2 - z\kappa_2, \quad \delta e_{xy} = 2(\varepsilon_3 - z\kappa_3), \quad (1.9)$$

при чему су овде са $\varepsilon_1, \varepsilon_2, 2\varepsilon_3$ означене бесконачно мале варијације деформација средње површи, а $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 = \tau$ бесконачно мале варијације њених кривина и торзије.

Ради погоднијих израчунавања уведемо ознаке бездимензионих величина; цртом над величином напона означимо размеру тог напона према интензитету напона σ_i :

$$\frac{X_x}{\sigma_i} = \bar{X}_x, \quad \frac{Y_y}{\sigma_i} = \bar{Y}_y, \quad \frac{X_y}{\sigma_i} = \bar{X}_y, \quad \frac{S_x}{\sigma_i} = \bar{S}_x, \quad \frac{S_y}{\sigma_i} = \bar{S}_y. \quad (1.10)$$

Те величине су познате; уместо кривљења $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ и ординате z уведемо бездимензионе величине:

$$\frac{h}{2} \kappa_1 = \bar{\kappa}_1, \quad \frac{h}{2} \kappa_2 = \bar{\kappa}_2, \quad \frac{h}{2} \kappa_3 = \bar{\kappa}_3, \quad \frac{2z}{h} = \bar{z}. \quad (1.11)$$

Образац (1.1) се сада може написати у облику

$$\delta e_i = \varepsilon - z\kappa = \varepsilon - \bar{z}\bar{\kappa}, \quad (1.12)$$

где је

$$\varepsilon = \bar{X}_x \varepsilon_1 + \bar{Y}_y \varepsilon_2 + 2\bar{X}_y \varepsilon_3, \quad \kappa = X_x \kappa_1 + Y_y \kappa_2 + 2X_y \kappa_3, \quad \bar{\kappa} = \frac{h}{2} \kappa. \quad (1.13)$$

Ако сада са z_0 означимо ординату површи, која дели области оптерећења и растерећења, тада на основу (1.2) и (1.12) добивамо:

$$z_0 = \frac{\varepsilon}{\kappa}, \quad \bar{z}_0 = \frac{\varepsilon}{\bar{\kappa}}. \quad (1.14)$$

Ради одређености претпостављаћемо, да се област оптерећења граничи са спољашњом површи љуске $z = +\frac{h}{2}$; у том случају за $z > z_0$ важе формуле (1.6), при чему се, сагласно усвојеним ознакама бездимензионих величина, оне могу написати у облику:

$$\begin{aligned} \delta S_x &= \left(\frac{\sigma_i}{e_i} - \frac{d\sigma_i}{de_i} \right) \bar{S}_x \bar{\kappa} (\bar{z} - \bar{z}_0) + \frac{\sigma_i}{e_i} (\varepsilon_1 - \bar{\kappa}_1 \bar{z}), \\ \delta S_y &= \left(\frac{\sigma_i}{e_i} - \frac{d\sigma_i}{de_i} \right) \bar{S}_y \bar{\kappa} (\bar{z} - \bar{z}_0) + \frac{\sigma_i}{e_i} (\varepsilon_2 - \bar{\kappa}_2 \bar{z}), \\ \delta X_y &= \left(\frac{\sigma_i}{e_i} - \frac{d\sigma_i}{de_i} \right) \bar{X}_y \bar{\kappa} (\bar{z} - \bar{z}_0) + \frac{2\sigma_i}{3e_i} (\varepsilon_3 - \bar{\kappa}_3 \bar{z}). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Обрасце (1.8), који важе у области растерећења $z < z_0$, написаћемо сад овако:

$$\delta S_x = E(\varepsilon_1 - \bar{\kappa}_1 \bar{z}), \quad \delta S_y = E(\varepsilon_2 - \bar{\kappa}_2 \bar{z}), \quad \delta X_y = \frac{2}{3} E(\varepsilon_3 - \bar{\kappa}_3 \bar{z}). \quad (1.16)$$

Како видимо упоређивањем образаца (1.15) и (1.16), на граници области оптерећења и растерећења ($z=z_0$) варијације напона, уопште говорећи нису непрекидне функције z . Бесконечно мали скокови тих функција пропорционални су разлици $E - \frac{\sigma_i}{e_i}$, тј. они ишчезавају, ако је материјал љуске само мало прешао границу еластичности у односу на величине интензитета деформације e_i (при томе је очевидно, да $\frac{d\sigma_i}{de_i}$ може бити

произвољно мало). Прекид напона ишчезава такође тада, када је варијација напонског стања проста, тј. ако су варијације напона пропорционалне стварним напонима; у том случају на граници области оптерећења и растерећења они постају нуле истовремено са варијацијом интензитета напона $\delta\sigma_i$ (или интензитета деформација δe_i), јер ће бити пропорционални $\delta\sigma_i$.

На тај начин, начелно говорећи, прекид величине δX_x на граници $z=z_0$ важиће у оним случајевима, када је губитак стабилности љуске последица сложеног оптерећења елемента материјала, тј. прекидност или непрекидност напона може се установити после решења проблема о стабилности љуске. Одатле је јасно, да је степен тачности решења проблема стабилности љуски, подразумевајући под тачношћу степен сагласности математичког решења са експерименталним подацима, потпуно довољан, ако су величине скокова варијације напона на граници $z=z_0$ мале у поређењу са варијацијама напона на површи љуске ($z = \pm \frac{h}{2}$); у противном случају неопходна је експериментална провера решења. Тешкоћа на коју ми овде наилазимо је неизбежна не само у оквирима теорије малих еласто-пластичних деформација, већ и с гледишта било које друге теорије пластичности. Приметимо, да је скоковита промена варијација напона при пролазу кроз границу $z=z_0$ неизбежна последица непрекидности деформација, њихових интензитета и интензитета напона с обзиром на то, да је прелаз материјала из пластичног стања у еластично при неизмењеним интензитетима напона везан са прерасподелом напона.

Обрасци (1.15), (1.16) показују, да се варијације напона појављају као линеарне функције ординате z , при чему, за разлику од случаја еластичног губитка стабилности, оне зависе не само од деформација и механичких карактеристика материјала љуске, већ и од дејствујућих напона пред губитак стабилности, а, тиме и од сила. У томе се састоји специфична карактеристика појаве губитка стабилности љуске иза границе еластичности.

Да би се написале диференцијалне једначине стабилности, неопходно је наћи изразе за варијације сила и момената, који дејствују на елемент љуске, пошто они произилазе из једначина равнотеже елемента.

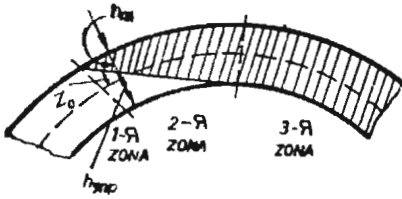
По дефиницији сила и момената имамо:

$$\delta T_1 - \frac{1}{2} \delta T_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \delta S_x dz, \quad \delta T_2 - \frac{1}{2} \delta T_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \delta S_y dz,$$

$$\delta S = \int_{-h/2}^{h/2} \delta X_y dz, \quad \delta M_1 - \frac{1}{2} \delta M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \delta S_x z dz, \quad (1.17)$$

$$\delta M_2 - \frac{1}{2} \delta M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \delta S_y z dz, \quad \delta H = \int_{-h/2}^{h/2} \delta X_y z dz.$$

За израчунавање тих интеграла пре свега неопходно је поделити љуску на следеће три зоне: у првој зони (сл. 26) претпоставља се еластично стање љуске (тј. узима се да, ако је до губитка стабилности у некој зони љуске



сл. 26

стање еластично, тада ће при бесконачно малим варијацијама оно, уопште узев, остати еластично), и зато према (1.16), (1.17) за ту зону имамо:

$$\frac{1}{Eh} \left(\delta T_1 - \frac{1}{2} \delta T_2 \right) = \varepsilon_1, \quad \frac{1}{Eh} \left(\delta T_2 - \frac{1}{2} \delta T_1 \right) = \varepsilon_2, \quad \frac{1}{Eh} \delta S = \frac{2}{3} \varepsilon_3;$$

$$\frac{4}{3D} \left(\delta M_1 - \frac{1}{2} \delta M_2 \right) = -\kappa_1, \quad \frac{4}{3D} \left(\delta M_2 - \frac{1}{2} \delta M_1 \right) = -\kappa_2,$$

$$\frac{4}{3D} \delta H = -\frac{2}{3} \kappa_3. \quad (1.18)$$

Овде је са D , као и раније, означена цилиндарска крутост:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (1.19)$$

Друга зона карактерише се тиме, што је до губитка стабилности материјал љуске у њој деформисан пластично, а после губитка стабилности део дебљине прелази у еластично стање, тј. у тој зони постоји и област активне пластичне деформације (оптерећење), и област растерећења. Сваки од интеграла (1.17) у тој зони треба да се раздвоји на два дела: од $z = -\frac{h}{2}$

до $z = z_0$ и од $z = z_0$ до $z = +\frac{h}{2}$, при чему први треба рачунати према обрасцима (1.16), а други према (1.15); на пример:

$$\delta T_1 - \frac{1}{2} \delta T_2 = \frac{Eh}{2} \int_{-1}^{\bar{z}_0} (\varepsilon_1 - \bar{\kappa}_1 \bar{z}) d\bar{z} +$$

$$+ \frac{h}{2} \left(\frac{\sigma_t}{e_t} - \frac{d\sigma_t}{de_t} \right) \bar{S}_x \bar{z} \int_{\bar{z}_0}^1 (\bar{z} - \bar{z}_0) d\bar{z} + \frac{h}{2} \frac{\sigma_t}{e_t} \int_{\bar{z}_0}^1 (\varepsilon_1 - \bar{\kappa}_1 \bar{z}) d\bar{z}.$$

На тај начин, при прорачуну ми се сусрећемо са простијим интегралима облика:

$$\int d\bar{z} = \bar{z}, \quad \int \bar{z} d\bar{z} = \frac{1}{2} \bar{z}^2, \quad \int \bar{z}^2 d\bar{z} = \frac{1}{3} \bar{z}^3.$$

Искористимо прихваћене ознаке познатих величина:

$$\omega = 1 - \frac{1}{E} \frac{\sigma_i}{e_i}, \quad \lambda = 1 - \frac{1}{E} \frac{d\sigma_i}{de_i}. \quad (1.20)$$

Тада, израчунавајући прву групу интеграла (1.17), добијамо изразе за варијације сила:

$$\begin{aligned} \frac{4}{Eh} \left(\delta T_1 - \frac{1}{2} \delta T_2 \right) &= 2(2 - \omega + \omega \bar{z}_0) \varepsilon_1 + \\ &+ \omega (1 - \bar{z}_0^2) \bar{\kappa}_1 + (\lambda - \omega) \bar{S}_x (1 - \bar{z}_0)^2 \bar{\kappa}, \\ \frac{4}{Eh} \left(\delta T_2 - \frac{1}{2} \delta T_1 \right) &= 2(2 - \omega + \omega \bar{z}_0) \varepsilon_2 + \\ &+ \omega (1 - \bar{z}_0^2) \bar{\kappa}_2 + (\lambda - \omega) \bar{S}_y (1 - \bar{z}_0)^2 \bar{\kappa}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\frac{12}{Eh} \delta S = 4(2 - \omega + \omega \bar{z}_0) \varepsilon_3 + 2\omega (1 - \bar{z}_0^2) \bar{\kappa}_3 + 3(\lambda - \omega) \bar{X}_y (1 - \bar{z}_0)^2 \bar{\kappa}.$$

После израчунавања друге групе интеграла налазимо обрасце за варијације момената:

$$\begin{aligned} \frac{16}{3D} \left(\delta M_2 - \frac{1}{2} \delta M_2 \right) &= -2(2 - \omega + \omega \bar{z}_0^3) \bar{\kappa}_1 + \\ &+ (\lambda - \omega) (1 - \bar{z}_0)^2 (2 + \bar{z}_0) \bar{S}_x \bar{\kappa} - \frac{6\omega}{h} (1 - \bar{z}_0^2) \varepsilon_1, \\ \frac{16}{3D} \left(\delta M_2 - \frac{1}{2} \delta M_1 \right) &= -2(2 - \omega + \omega \bar{z}_0^3) \bar{\kappa}_2 + \\ &+ (\lambda - \omega) (1 - \bar{z}_0)^2 (2 + \bar{z}_0) \bar{S}_y \bar{\kappa} - \frac{6\omega}{h} (1 - \bar{z}_0^2) \varepsilon_2, \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{16}{3D} \delta H &= -4(2 - \omega + \omega \bar{z}_0^3) \bar{\kappa}_3 + 3(\lambda - \omega) (1 - \bar{z}_0)^2 (2 + \bar{z}_0) \bar{X}_y \bar{\kappa} - \\ &- \frac{12\omega}{h} (1 - \bar{z}_0^2) \varepsilon_3. \end{aligned}$$

У трећој зони љуске, која је пластична до губитка стабилности деформација љуске остаје пластична и после губитка стабилности, тј. област

растерећења одсуствује. Зато се изрази за варијације сила и момената добивају из (1.17) на основу образаца (1.15):

$$\frac{1}{Eh} \left(\delta T_1 - \frac{1}{2} \delta T_2 \right) = (1 - \omega) \varepsilon_1 - (\lambda - \omega) \bar{S}_x \varepsilon,$$

$$\frac{1}{Eh} \left(\delta T_2 - \frac{1}{2} \delta T_1 \right) = (1 - \omega) \varepsilon_2 - (\lambda - \omega) \bar{S}_y \varepsilon, \quad (1.23)$$

$$\frac{1}{Eh} \delta S = \frac{2}{3} (1 - \omega) \varepsilon_3 - (\lambda - \omega) \bar{X}_y \varepsilon;$$

$$\frac{4}{3D} \left(\delta M_1 - \frac{1}{2} \delta M_2 \right) = -(1 - \omega) \kappa_1 + (\lambda - \omega) \bar{S}_x \kappa,$$

$$\frac{4}{3D} \left(\delta M_2 - \frac{1}{2} \delta M_1 \right) = -(1 - \omega) \kappa_2 + (\lambda - \omega) \bar{S}_y \kappa, \quad (1.24)$$

$$\frac{4}{3D} \delta H = -\frac{2}{3} (1 - \omega) \kappa_3 + (\lambda - \omega) \bar{X}_y \kappa.$$

Обрасци (1.18), (1.23), (1.24) за прву и трећу зону успостављају линеарне хомогене зависности између варијација сила и момената, с једне стране, деформација средње површи и њених кривљења — с друге. Ипак у зони еласто-пластичних деформација (другој) те зависности нису линеарне, али остају хомогене. То се види из образаца (1.21), (1.22), у које улази величина \bar{z}_0 , која представља рационалну функцију нултог степена по ε_n и κ_n :

$$\bar{z}_0 = \frac{\bar{X}_x \varepsilon_1 + \bar{Y}_y \varepsilon_2 + 2 \bar{X}_y \varepsilon_3}{\bar{X}_x \kappa_1 + \bar{Y}_y \kappa_2 + 2 \bar{X}_y \kappa_3}. \quad (1.14')$$

Веома је битно, да се из овог израза за \bar{z}_0 могу искључити деформације ε_n , изразивши их помоћу варијација сила δT_1 , δT_2 , δS . Множећи прву једначину групе (1.21) са \bar{X}_x , другу са \bar{Y}_y и трећу са \bar{X}_y и сабирајући их, видимо, да деформације ε_n улазе у добијене једначине само у облику неких комбинација ε ; али како је из (1.14) $\varepsilon = \bar{z}_0 \kappa$, то елиминишући ту величину, добивамо:

$$\lambda(1 - \bar{z}_0)^2 + 4\bar{z}_0 - 4 \frac{\bar{S}_x \delta T_1 + \bar{S}_y \delta T_2 + 3 \bar{X}_y \delta S}{E h \kappa} = 0. \quad (1.25)$$

Означићемо сад са φ бездимензиону величину, која улази у ту једначину и која зависи од варијације сила и кривина:

$$\varphi = \frac{\lambda}{1 - \lambda} \frac{\bar{S}_x \delta T_1 + \bar{S}_y \delta T_2 + 3 \bar{X}_y \delta S}{E h \kappa}. \quad (1.26)$$

Решавајући квадратну једначину (1.25), налазимо:

$$\zeta = \frac{1 - \sqrt{(1 - \lambda)(1 + \varphi)}}{\lambda}, \quad (1.27)$$

при чему је ζ размера деољине пластичног слоја љуске према укупној дебелини (сл. 26);

$$\zeta = \frac{1 - \bar{z}_0}{2} = \frac{h_{pl}}{h}, \quad \bar{z}_0 = 1 - 2\zeta. \quad (1.28)$$

На тај начин, у формулама (1.21), (1.22) под \bar{z}_0 се може подразумевати било израз за ту величину (1.14') помоћу деформација, било њен израз помоћу варијација сила и кривљења (1.28).

Изрази за силе и моменте у зони еласто-пластичних деформација љуске се нешто упрошћавају, ако је пред губитком стабилности пластична деформација мала у поређењу са еластичном. Одбацујући у (1.21), (1.22) мале реда ω у поређењу са јединицом и замењујући \bar{z}_0 по формули (1.28), добивамо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Eh} \left(\delta T_1 - \frac{1}{2} \delta T_2 \right) &= \varepsilon_1 + \frac{\lambda h}{2} \bar{S}_x \kappa \zeta^2, \\ \frac{1}{Eh} \left(\delta T_2 - \frac{1}{2} \delta T_1 \right) &= \varepsilon_2 + \frac{\lambda h}{2} \bar{S}_y \kappa \zeta^2 \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\frac{1}{Eh} \delta S = \frac{2}{3} \varepsilon_3 + \frac{\lambda h}{2} \bar{X}_y \kappa \zeta^2;$$

$$\frac{4}{3D} \left(\delta M_1 - \frac{1}{2} \delta M_2 \right) = -\kappa_1 + \lambda \bar{S}_x \zeta^2 (3 - 2\zeta) \kappa,$$

$$\frac{4}{3D} \left(\delta M_2 - \frac{1}{2} \delta M_1 \right) = -\kappa_2 + \lambda \bar{S}_y \zeta^2 (3 - 2\zeta) \kappa, \quad (1.30)$$

$$\frac{4}{3D} \delta H = -\frac{2}{3} \kappa_3 + \lambda \bar{X}_y \zeta^2 (3 - 2\zeta) \kappa.$$

До начелног упрошћења основних релација (1.21), (1.22) долази у оним случајевима, када се из било којих разлога величина ζ , тј. релативна дебелина пластичног слоја у другој зони, може сматрати као позната функција координата тачке на површи. Стварно, при томе наведене релације, као и релације (1.23), (1.24), постају линеарне и хомогене по факторима сила деформација и кривљења, и зато ће проблем о стабилности љуски иза границе еластичности у математичком смислу бити мало сложенији од одговарајућег еластичног проблема.

Овде нећемо исписивати диференцијалне једначине равнотеже елемента љуске произвољног облика, јер се оне ничим не разликују од једначина, добивених у теорији еластичне стабилности љуски, и ограничићемо се само на неке примедбе. У општем случају то је систем од пет диференцијалних једначина првог реда по силама δT_1 , δT_2 , δS , моментима δM_1 , δM_2 , δH и пресечним силама δN_1 , δN_2 ; прве три једначине добивају се из услова равнотеже пројекција сила δT_1 , δT_2 , δS , δN_1 , δN_2 на правце оса x , y , z основног триједра; последње две једначине су једначине равнотеже момената сила у односу на осе x , y . С обзиром на то да се компоненте деформација ε_1 , ε_2 , ε_3 и кривљења κ_1 , κ_2 , κ_3 изражавају

по познатим обрасцима помоћу три компоненте померања тачке средње површи $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$, изведени су горњи обрасци (1.18), (1.21), (1.22), (1.23) и (1.24) који омогућавају да се величине δT_1 , δT_2 , δS и δM_1 , δM_2 , δH изразе помоћу u , v , w , и зато ће пет једначина равнотеже садржати пет непознатих функција: δN_1 , δN_2 , u , v , w . Њима је нужно присајединити граничне услове, од којих се статички гранични услови свode на то да су варијације спољашњих сила на граници љуске једнаке нули, пошто губитак стабилности љуске треба да се догађа без промене спољашњих сила. Друга поставка проблема стабилности свodi се на то, да се на основу релација типа (1.21), (1.22) и израза ε_n , κ_n , помоћу u , v , w састављају диференцијалне једначине компатибилности деформација, изражене помоћу компонентних сила δT_1 , δT_2 , δS , δM_1 , δM_2 , δH ; тим једначинама прикључује се пет једначина равнотеже и гранични услови. На крају, трећа поставка проблема свodi се на примену варијационе једначине равнотеже или теореме о минимуму енергије.

§ 2. Затворена цилиндарска љуска

Размотримо цилиндарски облик губитка стабилности цилиндарске љуске, притиснутом спољашњим притиском q и аксијалном силом P . Изаберимо следећи координатни систем: осу x усмеримо по изводници цилиндра, а осу y — по радијусу. С обзиром на то да су спољашње силе константне по оси x и да је љуска кружна цилиндарска, напони у њој свуда су константни и једнаки:

$$X = -\frac{P}{2\pi Rh}, \quad Y = -q\frac{R}{h}, \quad X_y = 0. \quad (2.1)$$

Проблем стабилности такве љуске може се тачно решити: угиб w је функција само угла θ , и зато је

$$\kappa_1 = \kappa_3 = 0, \quad \kappa_2 = \frac{1}{R^2} \left(\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w \right).$$

Осим тога из једначина равнотеже варијација сила, које дејствују на елемент дуж осе x , и услова непроменљивости напонског стања по оси x следи:

$$\delta T_1 = \delta S = 0.$$

У суштини, с обзиром на то да се претпоставља да је љуска у правцу x довољно дуга, њени попречни пресеци остају равни увек, и зато нема клизања ε_3 ; из треће једначине групе (1.21) имамо $\delta S = 0$. Дакле, једначина равнотеже сила у правцу осе x има облик:

$$\frac{d(\delta T_1)}{dx} = 0, \quad \delta T_1 = 0.$$

Даљи рачуни су прости. Ипак они се знатно упрошћавају у једном специјалном случају када је сила P једнака

$$P = \pi R^2 q, \quad (2.2)$$

тј. кад на дна љуске делује исти једнолики притисак, као и на бочну површ. У том случају:

$$2 X_x = Y_y, \quad S_x = X_x - \frac{1}{2} Y_y = 0, \quad (2.3)$$

тј. деформација пред губитак стабилности је равна, а затим она остаје равна и после губитка стабилности; дакле, дилатација ϵ_1 биће једнака нули ($\epsilon_1 = 0$). Из прве једначине групе (1.21) при томе имамо:

$$\delta T_2 = 0,$$

а из друге можемо наћи деформацију ϵ_2 , која нам ипак у даљем излагању неће требати. Једначине (1.22) трансформишу се на облик:

$$\begin{aligned} \frac{\delta M_1}{D} &= -(1-\psi) \left(x_1 + \frac{1}{2} x_2 \right) + \frac{3}{4} (1-\psi-k) \bar{X}_x x, \\ \frac{\delta M_2}{D} &= -(1-\psi) \left(x_2 + \frac{1}{2} x_1 \right) + \frac{3}{4} (1-\psi-k) \bar{Y}_y x, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\frac{\delta H}{D} = -\frac{1}{2} (1-\psi) x_3 + \frac{3}{4} (1-\psi-k) \bar{X}_y x,$$

где је означено:

$$k = \frac{4(1-\lambda)}{[1 + \sqrt{1-\lambda}]^2} = \frac{4 \frac{d\sigma_i}{de_i}}{\left(\sqrt{E} + \sqrt{\frac{d\sigma_i}{de_i}} \right)^2}, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{\omega}{2} \left[1 - \bar{z}_0^3 + \frac{3}{4} \frac{\omega(1-\bar{z}_0^2)^2}{2-\omega+\omega\bar{z}_0} \right] = \\ &= \omega \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{k} \right) \left[\left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{k} \right)^2 + \frac{3}{4} \frac{k}{1 - \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{k} \right) \omega} \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Једначине (2.4) дају следеће изразе за тангентни момент савијања:

$$\delta M_2 = -D \left[1 - \psi - \frac{3}{4} (1-\psi-k) \bar{Y}_y^2 \right] x_2, \quad (2.7)$$

или, пошто је за услов (2.3)

$$\sigma_t^2 = \frac{3}{4} \bar{Y}_y^2, \quad \bar{Y}_y = -\frac{2}{\sqrt{3}},$$

то је

$$\delta M_2 = -k D x_2. \quad (2.8)$$

Интересантно је напоменути, да се од свих могућих вредности \bar{Y}_y под условом (2.3) добива најмања крутост љуске. Ако активно оптерећење на љуску не задовољава услов (2.3), онда се израз за момент δM_2 , де-

финисан обрасцем (2.7), може узети као приближан. Осим тога, из услова равнотеже унутрашњег момента δM_2 и момента спољашњег притиска q у ма ком пресеку θ имамо:

$$\delta M_2 = gRw + c = c - h\sigma_l \bar{Y}_y w. \quad (2.9)$$

Упоредијујући тај израз са (2.7), добивамо диференцијалну једначину:

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + \left\{ 1 + \frac{-\bar{Y}_y \sigma_l R^2 h}{D \left[1 - \psi - \frac{3}{4} (1 - \psi - k) \bar{Y}_y^2 \right]} \right\} w = c',$$

где су c и c' — међусобом везане произвољне константе. Најмања вредност израза, који се налази у витичастој загради који одговара промени θ периодичној по w , биће $\frac{\pi^2}{4}$. На тај начин, користећи израз за гipкост

i и узимајући као карактеристичну вредност димензије l дужину кружног обима $2\pi R (l = 2\pi R)$, добивамо критичну вредност

$$i = \pi \sqrt{\frac{3 E}{\sigma_l} \frac{4(1-\psi) - 3(1-\psi-k) \bar{Y}_y^2}{-\bar{Y}_y}}. \quad (2.10)$$

Специјално, при услову (2.3) биће

$$i = \pi \sqrt{\frac{6 \sqrt{3} E k}{\sigma_l}}. \quad (2.11)$$

Ако недостаје аксијална сила ($X_x = 0$, $Y_y = -\sigma_l$) имамо:

$$i = \pi \sqrt{\frac{3 E}{\sigma_l} (1 - \psi + 3k)}. \quad (2.12)$$

Сада размотримо аксијално-симетрични облик губитка стабилности цилиндарске љуске, притиснуте аксијалном силом P и бочним притиском q . Напони пред губитак стабилности изражавају се обрасцима (2.1). Из услова симетрије и једначина равнотеже у правцу осе x следи:

$$\delta S = \delta T_1 = 0, \quad \epsilon_3 = \kappa_3 = 0.$$

Тачно решење постављеног задатка добивамо за случај, кад је аксијални напон притиска два пута већи од тангентног:

$$X_x = 2Y_y, \quad P = 4\pi R^2 q. \quad (2.13)$$

У том случају је $S_y = 0$, и зато из обрасца (1.26) имамо $\varphi = 0$, тј. релативна дебљина пластичног слоја ζ је константна; обрасци (1.27), (1.28) и (1.25) дају:

$$\bar{\epsilon}_0 = 1 - 2\zeta = -1 + \sqrt{k}. \quad (2.14)$$

Из (1.21) налазимо δT_2 и $\epsilon_1 + \frac{1}{2} \epsilon_2$:

$$\frac{4 \delta T_2}{Eh} = 2(2 - \omega + \omega \bar{z}_0) \varepsilon_2 + \frac{\omega h}{2} (1 - \bar{z}_0^2) \kappa_2 + \frac{(\lambda - \omega) h}{2} \bar{S}_y (1 - \bar{z}_0)^2 \kappa,$$

$$- 2(2 - \omega + \omega \bar{z}_0) \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \right) = \frac{h}{2} \left[\omega (1 - \bar{z}_0^2) \left(\kappa_1 + \frac{1}{2} \kappa_2 \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4} (\lambda - \omega) \bar{X}_x (1 - \bar{z}_0)^2 \kappa. \right. \quad (2.15)$$

Ти обрасци се нешто упрошћавају за $\bar{S}_y = 0$; за $\bar{z}_0 = -1 + \sqrt{k}$ можемо их сматрати као приближне и за произвољне вредности \bar{S}_y . Из првих једначина групе (1.22) имамо израз за момент савијања: δM_1 :

$$\frac{4 \delta M_1}{D} = -2(2 - \omega + \omega \bar{z}_0^3) \left(\kappa_1 + \frac{1}{2} \kappa_2 \right) +$$

$$+ \frac{3}{4} (\lambda - \omega) (1 - \bar{z}_0)^2 (2 + \bar{z}_0) \bar{X}_x \kappa - \frac{6\omega}{h} (1 - \bar{z}_0^2) \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \right). \quad (2.16)$$

Означимо са $w(x)$ угиб љуске; тада ће кривљења κ_1 , κ_2 и тангентна деформација ε_2 имати изразе:

$$\kappa_1 = \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad \kappa_2 = \frac{w}{R^2}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{w}{R},$$

$$\kappa = \bar{X}_x \kappa_1 + \bar{Y}_y \kappa_2 = \bar{X}_x \left(\kappa_1 + \frac{1}{2} \kappa_2 \right) + \bar{S}_y \kappa_2. \quad (2.17)$$

Искључујући $\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2$ из (2.16), налазимо следеће изразе δM_1 и δT_2 помоћу w :

$$\frac{\delta M_1}{D} = -(1 - \psi - \chi \bar{X}_x^2) \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{w}{2R^2} \right) + \chi \bar{X}_x \bar{S}_y \frac{w}{R^2},$$

$$\frac{\delta T_2}{Eh} = - \left(1 - \omega + \frac{1}{2} \omega \sqrt{k} \right) \frac{w}{R} + \frac{\omega h}{8} \sqrt{k} (2 - \sqrt{k}) \frac{w}{R^2} +$$

$$+ \frac{h}{8} (\lambda - \omega) (2 - \sqrt{k})^2 \bar{S}_y \left(\bar{X}_x \frac{d^2 w}{dx^2} + \bar{Y}_y \frac{w}{R^2} \right), \quad (2.18)$$

при чему је функција ψ изражена помоћу (2.6), а χ има вредност:

$$\chi = \frac{3}{16} (\lambda - \omega) (2 - \sqrt{k})^2 \left[1 + \sqrt{k} + \frac{3k\omega}{4 \left(1 - \omega + \frac{1}{2} \omega \sqrt{k} \right)} \right]. \quad (2.19)$$

Формуле (2.18) знатно се упрошћавају под условом (2.13), када је:

$$\bar{S}_y = 0, \quad \bar{Y}_y = \frac{1}{2}, \quad \bar{X}_x = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\delta M_1 = -kD \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{w}{2R^2} \right), \quad (2.20)$$

$$\delta T_2 = -Eh \left(1 - \omega + \frac{1}{2} \omega \sqrt{k} \right) \frac{w}{R}.$$

За решење проблема стабилности остаје да се напишу диференцијална једначина равнотеже:

$$\frac{d^2(\delta M_1)}{dx^2} + T_1 \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{\delta T_2}{R} = 0. \quad (2.21)$$

Она се лако интегрира како у општем случају, када се δM_1 и δT_2 дефинишу обрасцима (2.18), тако и посебно у случају када је $\bar{S}_y = 0$. Уносећи свуда (2.20), добивамо:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{2 \sigma_i i^2}{k E R^2 \sqrt{3}} \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{\left(1 - \omega + \frac{1}{2} \omega \sqrt{k}\right) i^2}{R^4 k} w = 0, \quad (2.22)$$

где је са i означена гибкост (при томе су одбачени чланови реда $\frac{h}{R}$ у поређењу са јединицом): $i = \frac{3R}{h}$.

Ако је дужина љуске велика у поређењу са радијусом и крајеви слободно ослоњени, то се угиб w може узети у облику $w = C \sin \alpha x$, при томе се најмања вредност критичне силе добија из услова:

$$i = \frac{E}{\sigma_i} \sqrt{3 k \left(1 - \omega + \frac{1}{2} \omega \sqrt{k}\right)}. \quad (2.23)$$

Проучавање других случајева стабилности засновано је на примени било једначине (2.22), било (2.21) за вредности δM_1 , δM_2 према (2.18); оно је потпуно аналогно испитивању одговарајућих еластичних задатака, јер је диференцијална једначина (2.21) линеарна и садржи само парне изводе од w .

§ 3. Приближни метод проучавања стабилности љуски узимањем у обзир физичке и геометријске нелинеарности

Проучавање стабилности љуски „у целом“ узима у обзир само геометријску нелинеарност, што значи, како смо навели горе, задржавање квадратних чланова у редовима за изразе деформација помоћу померања, на пример:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - k_1 w.$$

При томе се независно од величина оптерећења увек претпостављало, да материјал у процесу деформисања остаје еластичан, тј. веза између напона и деформација је линеарна.

Ипак у зависности од геометрије љуске и карактеристика њеног материјала за неке вредности оптерећења могу се појавити деформације, које се не могу описати линеарним зависностима $\sigma \sim \epsilon$, и тада је неопходно за

прорачун узимати у обзир другу (уопште говорећи, нелинеарну) релацију између σ и ϵ , водећи рачуна о промени физичких својстава материјала у процесу оптерећивања. Ту нелинеарну везу између σ и ϵ узимамо у обзир увођењем у прорачун Прантловог (Prandtl) дијаграма или дијаграма са линеарним очвршћењем.

Од интереса је са гледишта неопходности добивања потпуније представе о понашању љуски, узимање у обзир оба вида нелинеарности — геометријске и физичке у теорији прорачуна на одговарајућим стадијумима напонског стања и деформисања. Сложеност проблема је очевидна већ и стога, што је од трснутка појаве пластичних деформација неопходно узимати у обзир различите законе оптерећења и растерећења. То доводи до веома гломазних рачуна.

Проблем се донекле упрошћава, ако се гради теорија на хипотези о нелинеарно-еластичном материјалу, претпостављајући поклапање закона оптерећења и растерећења.

При таквој поставци проблема еласто-пластична својства материјала се не разматрају. Ипак резултати решења могу се применити на широку класу материјала (на пример, легуре, челик у зони очвршћења у случају активне деформације, многе пластичне масе итд.).

Наводимо резултате проучавања И.А. Лукаша [46], који узима за прорачун плитких љуски хипотезе Кирхоф-Лава, а за материјал се претпоставља да је нелинеарно-еластичан, при томе се сматра да се поклапају закони

$$\sigma = \sigma(\epsilon) \text{ и } \sigma_i = \sigma_i(\epsilon_i), \quad (3.1)$$

што важи за нестишљив материјал ($\nu=0,5$). Зависност (3.1) може се написати у довољно општем облику:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n A_i \epsilon_i^{k_i}, \quad (3.1')$$

где су A_i и k_i — неке константе. При разматрању посебних случајева те зависности:

$$\sigma = A \epsilon^k \quad (3.2)$$

овде се A и k — одређују експерименталним путем из посматрања дијаграма истезања (притиска);

$$\sigma = c \epsilon^m (1 - \alpha \epsilon) \quad (3.3)$$

а константе c , m и α могу се наћи по условном дијаграму истезања.

Геометријска нелинеарност узима се у обзир на уобичајени начин, задржавањем квадратних чланова у изразима за деформације помоћу померања средње површи:

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - k_1 w, \quad e_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - k_2 w, \quad (3.4)$$

$$e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

На основу хипотезе Кирхоф-Лава о нормалном елементу деформације луске на растојању z од средње површи биће:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= e_x + z \kappa_x, & \left(\kappa_x &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ \varepsilon_y &= e_y + z \kappa_y, & \left(\kappa_y &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_{xy} = e_{xy} + 2 z \kappa_{xy}, \quad \left(\kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right).$$

Уносећи (3.4) и (3.5) у израз за интензитет деформације (за $\nu=0,5$):

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1}{4} \varepsilon_{xy}^2}, \quad (3.6)$$

добивамо:

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{b_1 + b_2' z + b_3' z^2}, \quad (3.7)$$

где је

$$\begin{aligned} b_1 &= e_x^2 + e_y^2 + e_x e_y + \frac{1}{4} e_{xy}^2, \\ b_2' &= 2 e_x \kappa_x + 2 e_y \kappa_y + e_x \kappa_y + e_y \kappa_x + e_{xy} \kappa_{xy} \\ b_3' &= \kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_x \kappa_y + \kappa_{xy}^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Уводећи бездимензиону променљиву

$$t = \frac{2z}{h}, \quad (-1 \leq t \leq +1) \quad (3.9)$$

имамо:

$$\varepsilon_x = e_x + \kappa_1 t, \quad \varepsilon_y = e_y + \kappa_2 t, \quad \varepsilon_{xy} = \kappa_{12} t, \quad (3.10)$$

где су

$$\kappa_1 = \kappa_x \frac{h}{2}, \quad \kappa_2 = \kappa_y \frac{h}{2}, \quad \kappa_{12} = \kappa_{xy} h. \quad (3.11)$$

Даље је

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{b_1 + b_2 t + b_3 t^2}, \quad (3.12)$$

где су

$$b_1 = e_x^2 + e_y^2 + e_x e_y + \frac{1}{4} e_{xy}^2,$$

$$b_2 = 2 e_x \kappa_1 + 2 e_y \kappa_2 + e_x \kappa_2 + e_y \kappa_1 + \frac{1}{2} e_{xy} \kappa_{12}, \quad (3.13)$$

$$b_3 = \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_1 \kappa_2 + \frac{1}{4} \kappa_{12}^2.$$

Енергија деформације нелинеарно-еластичног и еласто-пластичног тела одређена је обрасцем

$$V = \int \int \int \left[\int_0^{\epsilon_i} \sigma_i de_i + \frac{k \theta^2}{2} \right] dx dy dz, \quad (3.14)$$

где је

$$k = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad \theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z.$$

За нестишљиви материјал запреминска деформација $\theta=0$ и (3.14) се може написати у облику:

$$V = \int \int \int \left[\int_0^{\epsilon_i} \sigma_i de_i \right] dx dy dz, \quad (3.15)$$

или узимањем у обзир $\sigma_i = f(e_i)$ —

$$V = \int \int \int \left[\int_0^{\epsilon_i} f(e_i) de_i \right] dx dy dz. \quad (3.16)$$

Рад спољашњих сила W одређује се обрасцем

$$W = \int \int (q_x u + q_y v + q_z w) dx dy \quad (3.17)$$

(q_x, q_y, q_z — координате оптерећења у правцима x, y, z).

Изједначујући варијацију спољашњег рада са варијацијом рада унутрашњих сила, добивамо релацију:

$$\delta W = \delta V, \quad (3.18)$$

која повезује међу собом четири функције.

1. Функцију F_0 средње површи љуске за почетно оптерећење (та функција улази у (3.18) са кривинама плитке љуске):

$$k_x = \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2}, \quad k_y = \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2}, \quad k_{xy} = \frac{\partial^2 F_0}{\partial x \partial y},$$

које улазе у (3.4) и (3.6);

2. Функцију F_θ средње површи љуске за оптерећење q . У једначину (3.18) та функција улази са померањима u, v, w ;

3. Функцију оптерећења $q(x, y, z)$;

4. Функцију $\sigma(e_t)$, која описује физичка својства материјала.

Нека су дати функција $\sigma_t = \sigma(e_t)$, облик љуске до оптерећења $F_0 = F_0(x, y)$ и функција оптерећења $q(x, y)$. Треба одредити облик површи љуске после оптерећења. Проучимо приближно решење тог проблема, претпостављајући степену зависност напона од деформације. Ставивши (3.2) у (3.15), добивамо:

$$V = \frac{A}{k+1} \int \int \int e_t^{k+1} dx dy dz. \quad (3.19)$$

Овде је троструки интеграл распрострањен на целу запремину љуске.

За $k=1$ и $A=\sigma_s$ добивамо енергију деформације линеарно-еластичног тела:

$$V = \frac{E}{2} \int \int \int e_t^2 dx dy dz. \quad (3.20)$$

За $k=0$, $A=\sigma_s$ имаћемо енергију деформације круто-пластичног тела:

$$V = \sigma_s \int \int \int e_t dx dy dz. \quad (3.21)$$

Унесимо у (3.19) вредности интензитета деформација из (3.12) и узимајући у обзир (3.9), добивамо израз за енергију деформације:

$$V = \frac{2^k A h}{(k+1) 3^{\frac{k+1}{2}}} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \int_{-1}^{+1} (b_1 + b_2 t + b_3 t^2)^{\frac{k+1}{2}} dx dy dt. \quad (3.22)$$

Уводећи ознаку:

$$e^2 = b_1 + b_2 t + b_3 t^2, \quad (3.23)$$

енергију деформације можемо написати у облику:

$$V = \frac{2^k A h}{(k+1) 3^{\frac{k+1}{2}}} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \int_{-1}^{+1} e^{k+1} dx dy dt, \quad (3.24)$$

Интеграција по t може се извести по Симпсоновој формули:

$$\int_{-1}^{+1} e^{k+1} dt = \frac{1}{3} (e_b^{k+1} + e_H^{k+1} + 4 e_0^{k+1}), \quad (3.25)$$

где се вредности:

$$e_b = \sqrt{b_1 + b_2 + b_3}, \quad e_0 = \sqrt{b}, \quad e_H = \sqrt{b_1 - b_2 + b_3} \quad (3.26)$$

добивају из (3.23) после увршћења у њу респективно:

$$t = +1, \quad t = 0, \quad t = -1.$$

Коначно за енергију деформације добијамо

$$V = \frac{2^k}{3^{\frac{k+3}{2}}} \frac{A h}{k+1} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} (e_b^{k+1} + e_H^{k+1} + 4 e_0^{k+1}) dx dy. \quad (3.27)$$

Овде се двоструки интеграл узима по целој површини S љуске. Извођењем интеграције, добијамо:

$$I = \iint_S F dy dx = \frac{8}{3} F_0 + \frac{1}{3} (F_1 + F_2 + F_3 + F_4), \quad (3.27')$$

где су F_t — вредности подинтегралне функције у теменима квадрата са страницом 2. За квадратну љуску са страницом $2a$, која се налази под дејством једнолико расподељеног оптерећења са симетричним граничним условима, добијамо:

$$I = \frac{a^2}{3} (8 F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4). \quad (3.28)$$

Ако је на пример,

$$F = \cos \frac{\pi y}{2a} \cos \frac{\pi x}{2a},$$

биће

$$I = \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} \cos \frac{\pi y}{2a} \cos \frac{\pi x}{2a} dy dx = \frac{16 a^2}{\pi^2} \quad (3.29)$$

тачна вредност интеграла. По обрасцу (3.28) добијамо:

$$F_0 = \frac{1}{2}; \quad F_1 = F_2 = F_4 = 0; \quad F_3 = 1; \quad I = \frac{a^2}{3} \left(8 \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{5}{8} a^2,$$

што у поређењу са (3.29) даје грешку од 3%. Узимајући (3.27), изразу за енергију може се дати облик:

$$V = \frac{2^k}{(k+1) 3^{\frac{k+5}{2}}} A a b h (8 F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4). \quad (3.30)$$

Овде је

$$F_i = e_b^{k+1} + e_H^{k+1} + 4 e_0^{k+1}, \quad i=0, 1, 2, 3, 4, \quad (3.31)$$

а величине e_b , e_H , e_0 одређују се обрасцима (3.26). Ако делује само једно попречно оптерећење, то ће рад спољашњих сила бити једнак

$$W = \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} q w dx dy. \quad (3.32)$$

Тотална енергија система је

$$U = U(u, v, w) = V - W. \quad (3.33)$$

Представимо померања у облику редова:

$$u = \sum c_i \bar{u}_i, \quad v = \sum c_i' \bar{v}_i, \quad w = \sum W_i \bar{w}_i, \quad (3.34)$$

где су \bar{u}_i , \bar{v}_i и \bar{w}_i — дате функције померања, које задовољавају граничне услове, а c_i , c_i' и W_i — тражени коефицијенти. Уносећи (3.34) у (3.33) и постазљајући услове екстремума енергије U :

$$\frac{\partial U}{\partial c_i} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial c_i'} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial W_i} = 0, \quad (3.35)$$

добивамо систем алгебарских једначина за одређивање коефицијената c_i , c_i' и W_i . Тај систем нелинеарних једначина са разломљеним изложницима може се решити приближним или графичким методама. После одређивања коефицијената c_i , c_i' и W_i није тешко из релација (3.5) и (3.4) наћи функције померања и деформација.

При решавању тога задатка веома је важно на погодан начин изабрати функције \bar{u}_i , \bar{v}_i и \bar{w}_i тако да оне задовољавају кинематичке граничне услове и што је могуће боље описују деформисану површ љуске. Подесно је представити функције \bar{u}_i , \bar{v}_i , \bar{w}_i у облику производа двеју функција, од којих свака зависи од једне координате [47].

$$\bar{u}_i = \bar{u}_i(x) \bar{u}_i(y); \quad \bar{v}_i = \bar{v}_i(x) \bar{v}_i(y); \quad \bar{w}_i = \bar{w}_i(x) \bar{w}_i(y). \quad (3.36)$$

У својству последњих могу се изабрати, на пример, фундаменталне функције греде, које одговарају граничним условима. Изложена метода је доста тешка за прорачун љуски узимањем у обзир физичке и геометријске нелинеарности.

Посматрајмо љуску са покретним ивицама. У том случају може се конструисати приближно решење, примењујући упрошћену формулу за интензитете деформација:

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} (\epsilon_x + \epsilon_y). \quad (3.37)$$

Уносећи свде вредности деформација из (3.5), добивамо:

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} (e_x + z \kappa_x + e_y + z \kappa_y) = \frac{2}{\sqrt{3}} (e + z \kappa). \quad (3.38)$$

Овде је

$$e = e_x + e_y, \quad \kappa = \kappa_x + \kappa_y. \quad (3.39)$$

Уносећи (3.38) у (3.19), добивамо следећи израз за рад унутрашњих сила:

$$V = \frac{A 2^{k+1}}{(k+1) 3^{\frac{k+1}{2}}} \int \int \int_{-h/2}^{+h/2} (e + z \kappa)^{k+1} dx dy dz, \quad (3.40)$$

или после интеграције по z :

$$V = \frac{2^{k+1}}{(k+1)(k+2) 3^{\frac{k+1}{2}}} \int \int \frac{\left(e + \kappa \frac{h}{2}\right)^{k+2} - \left(e - \kappa \frac{h}{2}\right)^{k+2}}{\kappa} dx dy, \quad (3.41)$$

где је интеграција распрострањена по целој површини ослоног плана љуске. Нађимо зависност између оптерећења и угиба. Ограничавајући се у (3.27) једном нултом тачком, добивамо:

$$V = \frac{2^{k+4}}{(k+1)(k+2) 3^{\frac{k+1}{2}}} \frac{\left(e_0 + \kappa_0 \frac{h}{2}\right)^{k+2} - \left(e_0 - \kappa_0 \frac{h}{2}\right)^{k+2}}{\kappa_0}. \quad (3.42)$$

Овде су e_0 и κ_0 — вредности величина (3.29) у тачки $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$.

Даље, узимајући у обзир (3.4), имаћемо:

$$e_0 = (c + c_1) a_0 - (k_x + k_y) W_0 \bar{w}_0 + \frac{W_0^2}{2} e, \quad (3.43)$$

где су a_0, b_0, W_0 и e — непознати коефицијенти. При томе је узето да је

$$u = c\bar{u}, \quad v = c_1\bar{v}, \quad w = W_0\bar{w}. \quad (3.44)$$

Даље допустимо, да је веза између коефицијената c, c_1 и W_0 иста као и у еластичној теорији. Стаavimo:

$$c = W_0 k_x a_1 - \frac{W_0^2}{2} a_2, \quad c_1 = W_0 k_y b_1 - \frac{W_0^2}{2} b_2, \quad (3.45)$$

где су a_1, a_2, b_1, b_2 — коефицијенти који подлежу одређивању. Из (3.45) имамо:

$$c + c_1 = W_0 (k_x a_1 + k_y b_1) - \frac{W_0^2}{2} (a_2 + b_2). \quad (3.46)$$

Уносећи (3.46) у (3.44), добивамо:

$$e_0 = W_0 (k_x + k_y) S + \frac{W_0^2}{2} m. \quad (3.47)$$

$$S = \frac{a_0(k_x a_1 + k_y b_1)}{k_x + k_y} - W_0, \quad m = b_0 - (a_2 + b_2) a_0; \quad (3.48)$$

имајући на уму (3.17) и (3.29) за рад спољашњих сила и узимајући у обзир наведене зависности, добијамо следећи израз за тоталну енергију система:

$$U = \frac{2^{k+4} A a b}{(k+1)(k+2) 3^{\frac{k+3}{2}}} \frac{\left(e_0 + \kappa_0 \frac{h}{2}\right)^{k+2} - \left(e_0 - \kappa_0 \frac{h}{2}\right)^{k+2}}{\kappa_0} - q W_0 \frac{16 a b}{\pi^2}. \quad (3.49)$$

Узевши сад извод по W_0 , добијамо везу између оптерећења и угиба, која после увршења вредности (3.44) и (3.47) добија следећи облик (образац је написан за цилиндарску љуску квадратног пресека за $k_y = 0$, $a = b$):

$$q = \frac{2^k \pi^2 A}{(k+1)(k+2) 3^{\frac{k+3}{2}}} \frac{B^{k+1} [c W_0 (k+2) - B] - \bar{B}^{k+1} [\bar{c} W_0 (k+2) - \bar{B}]}{W_0^2 c_0}. \quad (3.50)$$

где је

$$B = W_0 k_x s + \frac{W_0^2}{2} m + \frac{h}{2} c_0 W_0, \quad \bar{B} = W_0 k_x s + \frac{W_0^2}{2} m - \frac{h}{2} c_0 W_0, \quad (3.51)$$

$$c = W_0 b_0 - W_0 k_x + \frac{h}{2} c_0, \quad \bar{c} = W_0 b_0 - W_0 k_x - \frac{h}{2} c_0.$$

Величине s , m , b , c и W_0 , су као и раније непознате и треба их одредити.

Уведимо бездимензионе параметре:

$$p = \frac{q(2a)^4}{E h^4}, \quad \frac{W_0}{h} = \xi, \quad \frac{f_0}{h} = \xi_0, \quad k_x = \frac{1}{R} \approx \frac{2f_0}{a^2} = \frac{2\xi_0 h}{a^2}. \quad (3.52)$$

У тим формулама f_0 — почетни отклон, а a — половина стране осног квадратног пресека љуске. Узмимо у сагласности с њиховим димензијама

$$m = \frac{\bar{m}}{a^2}, \quad b_0 = \frac{b_0}{a^2}, \quad c_0 = \frac{\bar{c}_0}{a^2}. \quad (3.53)$$

Ставивши (3.53) и (3.52) у (3.50), добијамо:

$$B = \frac{h^2}{a^2} \left[2s \xi_0 + \frac{\bar{m}}{2} \xi + \frac{\bar{c}_0}{2} \right] \xi = \frac{h^2}{a^2} b^* \xi, \quad (3.54)$$

$$\bar{B} = \frac{h^2}{a^2} \left[2s \xi_0 + \frac{\bar{m}}{2} \xi - \frac{\bar{c}_0}{2} \right] \xi = \frac{h^2}{a^2} \bar{b}^* \xi,$$

$$c = \frac{h}{a^2} \left[b_0 \xi - 2 W_0 \xi_0 + \frac{c_0}{2} \right] = \frac{h}{a^2} c^*,$$

$$\bar{c} = \frac{h}{a^2} \left[\bar{b}_0 \xi - 2 W_0 \xi_0 - \frac{\bar{c}_0}{2} \right] = \frac{h}{a^2} \bar{c}^*.$$

После увршћења (3.52) и (3.54) у (3.50) имаћемо:

$$p = D_k \{ (b^*)^{k+1} [c^*(k+2) - b^*] - (\bar{b}^*)^{k+1} [\bar{c}^*(k+2) - \bar{b}^*] \} \xi^k, \quad (3.55)$$

где је

$$b^* = 2 s \xi_0 + \frac{\bar{m}}{2} \xi + \frac{\bar{c}_0}{2}, \quad \bar{b}^* = 2 s \xi_0 + \frac{\bar{m}}{2} \xi - \frac{\bar{c}_0}{2}, \quad (3.56)$$

$$c^* = \bar{b}_0 \xi - 2 W_0 \xi_0 + \frac{\bar{c}_0}{2}, \quad \bar{c}^* = \bar{b}_0 \xi - 2 W_0 \xi_0 - \frac{\bar{c}_0}{2},$$

$$D_k = \frac{A}{E} \frac{\pi^2 2^{k+4}}{(k+1)(k+2) \bar{c}_0 3^{\frac{k+3}{2}}} \left(\frac{a}{h} \right)^{2(1-k)}. \quad (3.57)$$

Образац (3.55) изражава општу зависност између бездимензионог оптерећења p и угиба ξ с тачношћу до засад непознатих коефицијената \bar{m} , b_0 , s , W_0 , c_0 . Те коефицијенте можемо одредити из следећа два услова. 1. За $k=0$, $A=\sigma_s$ и $\xi_0=0$ образац (3.55) треба да даје решење за крутопластичну плочу:

$$q = \frac{\pi^4 + \sigma_s W_0 h}{16 \sqrt{3} a^2}. \quad (3.58)$$

2. За $k=0$ и $A=E$ образац (3.55) треба да даје решење за еластичну луску:

$$p = \alpha_1 \xi^3 + \alpha_2 \xi^2 \xi_0 + \alpha_3 \xi \xi_0^2 + \alpha_4 \xi. \quad (3.59)$$

Састављајући из (3.55) те услове (1) и (2) и изједначујући одговарајуће коефицијенте, добивамо систем од пет једначина за одређивање пет непознатих коефицијената. Решавајући тај систем, налазимо следеће вредности коефицијената \bar{m} , \bar{b}_0 , s , W_0 , \bar{c}_0 .

$$\bar{b}_0 = \frac{3 \pi^2}{16}, \quad \bar{m} = \frac{3 \alpha_1}{\pi^4}, \quad s = \frac{3 \alpha_2}{8 \pi^4} \beta_{1,2}, \quad (3.60)$$

$$W_0 = -\frac{3 \pi^2}{16} \frac{\alpha_3}{\alpha_2 \beta_{1,2}}, \quad \bar{c}_0 = \frac{3 \sqrt{3}}{2 \sqrt{2}} \frac{\sqrt{\alpha_4}}{\pi}.$$

У тим обрасцима биће

$$\beta_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 \alpha_1 \alpha_3}{\alpha_2^2}}. \quad (3.61)$$

Пошто коефицијент $\rho_{1,2}$ има две вредности, то не и зависности (3.55) бити такође две. Од њих се за прорачун узима она, која при једнаким угибима даје најмању вредност оптерећења. На тај начин, проблем је приближно решен.

§ 4. Испитивање посткритичног стања љуски

У последње време успешно се развијају приближне методе проучавања послекритичног стања љуски, ослањајући се на теорију савијања површи. Нама се чини најинтересантнији, са гледишта математичке елегантности и практичне примене резултат А.В. Погорелова [48, 49, 50] који овде и приказујемо.

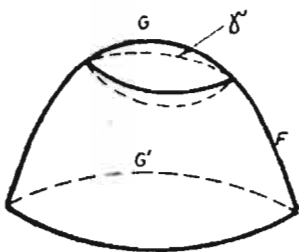
Нека се на површи може конструисати координатна мрежа u, v таква, да вектор-функција $\mathbf{r}(u, v)$, која дефинише површ у тим координатама буде регуларна (у крајњој линији два пута диференцијалбилна) функција. Површи, код којих су линијски елементи, тј. диференцијалне квадратне форме

$$ds^2 = dr^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

једнаке, називају се изометричним. То значи, да су дужине одговарајућих кривих, повучених између одговарајућих тачака обе површи, једнаке.

Површ F биће једнозначно дефинисана, ако је међу површима дате класе свака површ, изометрична са F , једнака F .

При деформацији површи њен линијски елемент ds_t^2 у општем случају се мења и функција је параметра t , ипак постоје деформације, код којих нема промена линијског елемента, дакле, дужине кривих на површи. Такве деформације називају се савијањима површи. Површ се назива несавојном у датој класи (на пример, класа конвексних површи), ако је свако савијања не изводи из те класе и своди се на кретање површи као чврстог тела. Ако су крајеви површи укљештени или зглавкасто ослоњени, тада важи несавојност и једнозначна неодређеност површи F . Лако се доказује [50], да се изометрична трансформација регуларне,



сл. 27

учвршћене по крају површи у класи делимично-регуларних површи своди на огледалско избочавање, тј. на огледање њеног произвољног сегмента у равни, кога она одсеца (сл. 27).

бо мења, тј. деформација њеног линијског елемента је мала

$$\varepsilon(t) = \frac{ds_t - ds}{ds} \rightarrow 0 \quad \text{за} \quad t \rightarrow 0.$$

У том случају површ F деформише се у њој блиску површ F_t . Ако се F састоји из унутрашње испупчене области G_1 , испупчене области G_2 , која се граничи са рубом, и неком прстенастом траком G_{12} , која раздваја области G_1 и G_2 , на удаљењу $\delta(t)$ од околине области G_1 , тада је површ F_t блиска било површи F , било површи, добијеној огледалским избочавањем од F .

Ослањајући се на те закључке геометрије може се посматрати апроксимација еластичног испупчења љуске за послекритичне деформације помоћу огледалског испупчења. При томе се претпоставља, да је љуска конвексна, са учвршћеним ивицама, њена дебљина се полако мења или је константна, а средња површ довољно регуларна.

Послекритична деформација љуске дефинише се као таква, код које се облик љуске знатно разликује од првобитног.

Нека се конвексна љуска дебљине h налази под дејством неког оптерећења q , узимајући неки облик еластичне равнотеже F_q . Повећање оптерећења доводи до избочавања, таквог да се средња површ може представити (то се реално и запажа) из три горе поменуте области: G_1 , G_2 и G_{12} . Смањиваћемо дебљину љуске h , а истовремено и оптерећење q тако да би се ред посматране деформације очувао. Како крутост љуске на савијање опада брже, него крутост на истезање, то ће напони у средњој површи, а, дакле, и њене деформације при томе опадати. Прелазећи на лимес ($h \rightarrow 0$), треба да закључимо, да се еластично испупчење строго конвексне љуске F_q своди на огледалско, при чему уколико је



сл. 28

дебљина љуске мања, утолико је боља апроксимација огледалског испупчења еластичном (сл. 28). Таква апроксимација еластичног испупчења за послекритичне деформације омогућава да се проблем одређивања еластичног стања љуске линсаризује ван околине ивице огледалског испупчења, док је унутра задатак искључиво нелинеаран.

Формирајмо енергију деформације за поменуте области љуске G_1 , G_{12} . Област G_1 је онај део љуске еластичног испупчења, у коме се облик деформисане површи добро апроксимира огледалским испупчењем. У тој области је угиб знатан, нормална кривина мења свој знак, а средња површ је строго конвексна по претпоставци. Како је већ назначено, област G_2 се граничи рубом површи, добро се апроксимира првобитним

облашћом G_2 није велик. Зато се енергија савијања у области G_2 може занемарити у поређењу са енергијом савијања у области G_1 . На тај начин, енергија еластичне деформације, везана је са савијањем љуске унутар области испупчења, концентрисана је у областима G_1 и G_{12} .

Како се при огледалском испупчавању љуске нормална кривина мења од вредности $(+k)$ до $(-k)$, тј. за $2k$ (по главним правцима кривина се мења за $2k_1$ и $2k_2$), то се енергија љуске која одговара таквом савијању, израчунава по обрасцу:

$$U_{G_1} = \frac{Eh^3}{6(1-\nu^2)} \int \int_{G_1} [(k_1 + k_2)^2 - 2(1-\nu)k_1k_2] dG_1.$$

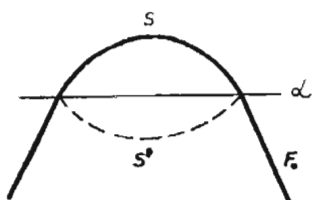
За довољно малу дебљину љуске област G_1 тежи области G . У том случају индекс „1“ може се изоставити, и израз за енергију се може написати у облику:

$$U_G = \frac{Eh^3}{6(1-\nu^2)} \int \int_G k_\nu dG, \quad (4.1)$$

где је

$$k_\nu = (k_1 + k_2)^2 + 2(1-\nu)k_1k_2. \quad (4.2)$$

Област G_{12} — је прстенаста област, која укључује границу испупчења. Површина те области је мала у поређењу са површином области G_1 , али ће енергија деформације бити знатна због великог савијања љуске и истезања (притиска) средње површи. Нека је γ — пресек равни α (сл. 29) са средњом површи љуске. Ослабимо зглобно дуж γ љуску F^* и



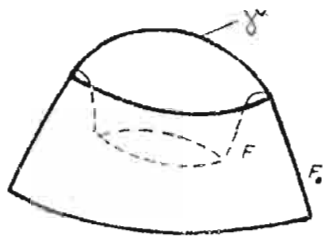
сл. 29

нека на сваки део љуске делује подељени момент M , који исправља ребро љуске F^* . У околини γ еластична стања љуске F^* и F биће еквивалентна, пошто су у тој околини еластичне деформације изазване углавном исправљањем ребра γ .

Дакле, деформације љуске F^* дуж γ одређују се конструкцијом ребра и битно зависе само од кривина ребра и угла, кога образују дуж ребра тангентне равни.

На тај начин, да би нашли енергију еластичне деформације на граници области испупчавања за довољно малу дебљину љуске, можемо узети ма коју другу љуску са истим геометријским параметрима границе огле-

далског избочавања. Узмимо конусну љуску (сл. 30) F_0 . Енергија еластичне деформације испупченог облика F љуске у близини линије γ састоји се од енергије истезања (притиска) средње површи дуж мериди-



сл. 30

јана и паралела и енергије савијања дуж меридијана (за љуске мале дебљине енергија савијања паралела може се занемарити).

Нека је p^* — произвољна тачка огледалског избочавања љуске F_0 . Облик F^* узмимо као полазни приближни облик облику F . Кореспондентна тачка p облика F добија се при радијалном померању p^* за u и аксијалном померању за v . Одатле ће једначина меридијана љуске F у цилиндарским координатама r и z бити:

$$r = \rho + s \cos \alpha + u, \quad z = s \sin \alpha + v,$$

где је ρ — радијус круга; γ — ребро љуске F^* ; s — растојање по изводници, рачунато од γ , а α — угао који чине изводнице са равни круга γ .

Уведимо:

$$\xi = \cos \alpha, \quad \eta = \sin \alpha, \quad r_0 = \rho + s \cos \alpha.$$

Деформација љуске дуж паралела биће

$$\epsilon_2 = \frac{2\pi(r_0 + u) - 2\pi r_0}{2\pi r_0} = \frac{u}{r_0}.$$

Деформација ϵ_1 дуж меридијана биће

$$\epsilon_1 = \frac{ds_1 - ds}{ds}.$$

У области еластичних деформација је $\frac{ds_1}{ds} \approx 1$ и, дакле,

$$\epsilon_1 = \frac{ds_1^2 - ds^2}{2ds^2},$$

а како је

$$ds_1^2 = dr^2 + dz^2,$$

биће

$$\epsilon_1 = \xi u' + u v' + \frac{1}{2}(u'^2 + v'^2).$$

Енергија истезања (притиска) средње површи љуске за послекритичне деформације ван мале околине зоне јаког савијања границе избочавања једнака је енергији еластичне деформације љуске за докритичне деформације, изазване истим спољашњим оптерећењем. Рачуната по јединици површине површи она се као што је познато израчунава по обрасцу

$$U' = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + 2\nu\epsilon_1\epsilon_2)$$

или

$$U' = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} [(\epsilon_1 + \nu\epsilon_2)^2 + (1-\nu^2)\epsilon_2^2]. \quad (4.3)$$

Енергија савијања дуж меридијана, рачуната по јединици површине, биће:

$$U'' = \frac{Eh^3 \kappa^2}{24(1-\nu^2)}, \quad (4.4)$$

где је κ — промена кривине меридијана, изазвана деформацијом. Пошто

је $\frac{ds_1}{ds} \approx 1$, то се за κ може узети израз

$$\kappa = v''(\xi + u') - u''(\eta + v').$$

На тај начин, енергија еластичне деформације спољашње полуобласти границе области избочавања љуске F биће:

$$U = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{\epsilon^*} \left\{ \frac{h^2}{12} [v''(\xi + u') - u''(\eta + v')]^2 + \left(\xi u' + \eta v' + \nu \frac{u}{r_0} + \frac{u'^2 + v'^2}{2} \right)^2 + (1-\nu^2) \frac{u^2}{r_0^2} \right\} r_0 ds d\vartheta, \quad (4.5')$$

где је ϵ^* — ширина полуобласти, у којој је претежно концентрисана енергија еластичне деформације, везана са исправљањем ребра љуске F^* . С обзиром да је ϵ^* мало, израз за U мало ће се променити, ако свуда заменимо $r_0(s)$ са ρ — радијусом круга који ограничава област избочавања. Релативна грешка при томе биће ишчезавајуће мала за $h \rightarrow 0$. Очевидно, може се узети да су једнаке енергије унутрашње и спољашње полуоколинне границе γ области избочавања. Тада се у (4.5') може заменити свуда r_0 са ρ , па добивамо израз за енергију еластичне деформације у граници области избочавања:

$$U = \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\epsilon^*} \left\{ \frac{h^2}{12} [v''(\xi + u') - u''(\eta + v')]^2 + \left[\xi u' + \eta v' + \nu \frac{u}{\rho} + \frac{u'^2 + v'^2}{2} \right]^2 + (1-\nu^2) \frac{u^2}{\rho^2} \right\} \rho ds d\vartheta. \quad (4.5)$$

Из услова минимума тога функционала у класи функција u и v може се одредити облик еластичне деформације љуске у околини γ . Разјаснимо услове, којима се подчињавају u и v . По дефиницији границе области избочавања γ су за $s=0$, $u=0$. Даље, за $s=0$, $z'=\eta+v'=0$, тј. $v'=-\eta$. При удаљавању од границе области избочавања u и v теже нули, пошто је енергија исправљања ребра концентрисана близу назначене границе. За испитивање на минимум функционала U погодно је уместо u , v' и s увести нове променљиве:

$$\bar{u} = \frac{v u}{\varepsilon \rho \eta^2}, \quad \bar{v} = \frac{v'}{\eta}, \quad \bar{s} = \frac{v s}{\varepsilon \rho}, \quad \varepsilon^4 = \frac{v^4 h^2}{12(1-v^2)\rho^2 \eta^2}. \quad (4.6)$$

Унесимо (4.6) у (4.5) и ради једноставности изоставимо црту над u , v , s . Тада (4.5) добива облик:

$$U = \frac{2 \pi E}{12^{3/4} (1-v^2)^{3/4}} h^{5/2} \cdot \eta^{5/2} \cdot \rho^{1/2} \cdot I, \quad (4.7)$$

где је

$$I = \int_0^{\bar{s}^*} \left\{ [v'' (\xi + \eta^2 u') - \eta^2 u'' (1+v)]^2 + \frac{v^2}{1-v^2} \left(u + \frac{\xi u' + v + \frac{1}{2} (\eta^2 u'^2 + v^2)}{\varepsilon} \right)^2 + u^2 \right\} ds.$$

На тај начин, проблем одређивања еластичних деформација љуске у близини области избочавања своди се на налажење функција u , v које реализују минимум функционала I .

Даље ћемо се бавити случајем малих α (α — угао нагиба изводница конуса према равни, која је нормална на његову осу). Ради дефиниције проблема о минимуму I одредимо такође његов лимес за $h \rightarrow 0$. То даје функционалу I овај облик:

$$I_0 = \int_0^\infty \left\{ [v_0'' (\xi + \eta^2 u_0') - \eta^2 u_0'' (1+v_0')]^2 + \frac{v^2 A^2}{1-v^2} + u_0^2 \right\} ds,$$

где су u_0 , v_0 — први чланови развоја u и v у ред по степенима параметра ε . У A улазе други чланови развоја u_1 , v_1 . Њима можемо располагати тако да A може бити произвољно мало. Тада ће гранични израз за I бити:

$$I_0 = \int_0^\infty \{ [v_0'' (\xi + \eta^2 u_0') - \eta^2 u_0'' (1+v_0')]^2 + u_0^2 \} ds.$$

За $\alpha \rightarrow 0$ (дакле, $\eta \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow 1$) функционал добива облик:

$$I_0 = \int_0^\infty (v'^2 + u^2) ds. \quad (4.8)$$

Проблем одређивања главних чланова у редовима $u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots$, $v = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots$ састоји се у одређивању минимума функционала (4.8) за нехолономну везу:

$$u' + v + \frac{1}{2} v^2 = 0, \quad (4.9)$$

у класи функција, које задовољавају граничне услове:

$$u(0) = 0, \quad v(0) = 1, \quad u(\infty) = 0, \quad v(\infty) = 0.$$

Индекс „нула“ код функција u , v ради једноставности је изостављен.

Задржимо се на решавању проблема о минимуму I_0 , што омогућава да се добије експлицитан израз за енергију деформације испупчене љуске у зависности од параметара, који дефинишу огледалско избочавање. Саставимо Лагранжеву функцију Φ за тај проблем:

$$\Phi = v'^2 + u^2 + \lambda(s) \left(u' + v + \frac{1}{2} v^2 \right).$$

Ојлер-Лагранжеве једначине биће:

$$\lambda(1+v) - 2v'' = 0, \quad 2u - \lambda' = 0.$$

На тај начин, одређивање функција u , v , које одређују минимум функционала I_0 , своди се на решавање система једначина:

$$2u - \lambda' = 0, \quad \lambda(1+v) - 2v'' = 0, \quad u' + v + \frac{1}{2} v^2 = 0, \quad (4.10)$$

при условима:

$$u(0) = 0, \quad v(0) = 1; \quad u(\infty) = 0, \quad v(\infty) = 0.$$

Интегралeћи последњу једначину из (4.10), добивамо:

$$u = \int_s^\infty \left(v + \frac{v^2}{2} \right) ds. \quad (4.11)$$

Из друге једначине (4.10) следи, да је $\lambda(\infty) = 0$, јер $v(\infty) = 0$ па, дакле, $v''(\infty) = 0$.

Унесимо (4.11) у прву једначину (4.10). Интеграција даје:

$$\lambda = -2 \int_s^\infty \int_{s_1}^\infty \left(v + \frac{v^2}{2} \right) ds_1 ds. \quad (4.12)$$

За функцију v из друге једначине (4.10) добивамо интегродиференцијалну једначину:

$$v'' + (1+v) \int_s^\infty \int_{s_1}^\infty \left(v + \frac{v^2}{2} \right) ds_1 ds = 0,$$

чије решење се може тражити у облику:

$$v = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_{11} x^2 + 2\alpha_{12} xy + \alpha_{22} y^2 + \dots,$$

где је $x = e^{\omega_1 s}$, $y = e^{\omega_2 s}$ а ω_1, ω_2 — неки комплексни бројеви са негативним реалним делом. Одредивши u и v , који реализују минимум функционала I_0 , налазимо да је $\min I_0 \approx 1, 2$; $v'(0) = 1$, $\max(u) = 0, 5$. Конвергенција I ка I_0 кад h и α независно теже нули важиће, ако $\bar{\varepsilon}^* \rightarrow \infty$ у интегралу I . За ту границу имамо:

$$\bar{\varepsilon}^* = \frac{v\varepsilon^*}{\rho\varepsilon}, \quad \varepsilon^4 = \frac{v^4 h^4}{12(1-v^2)\rho^2 \alpha^2}. \quad (4.13)$$

Узмимо $\varepsilon^* = \tilde{\varepsilon}^* \rho$, где је $\tilde{\varepsilon}^*$ — релативна ширина зоне локалног савијања на граници избочавања. Да би $\bar{\varepsilon}^* = v \frac{\varepsilon^*}{\varepsilon}$ било довољно велико, потребно

је да ε буде довољно мало, тј. да буде довољно мало $\frac{h}{\alpha\rho}$. Дакле, фор-

мулом (4.7) можемо се користити за прорачун енергије, ако је $\frac{h}{\rho\alpha} \ll 1$.

Из (4.7) следи, да је енергија еластичне деформације по јединици дужине границе избочавања конусне љуске једнака:

$$\bar{U} = cEh^{5/2} \alpha^{5/2} \rho^{-1/2}, \quad c = \frac{I_0}{12^{3/4}(1-v^2)^{3/4}} \approx 0,12. \quad (4.14)$$

Како је напред речено, у случају ма које конвексне љуске енергија еластичне деформације израчунава се по истом обрасцу, али α и ρ имају своје вредности: α — је угао, под којим раван, која дефинише огледалско избочавање, сече површ љуске, а ρ — је радијус кривине криве γ , тог пресека. Енергија еластичне деформације дуж целе границе γ избочавања дефинише се обрасцем:

$$U_\gamma = \int_\gamma \bar{U} ds. \quad (4.15)$$

У случају малих области избочавања при малом α по Менијеовој (Meusnier) теорему имамо

$$\frac{\alpha}{\rho} \simeq \frac{1}{R},$$

где је $\frac{1}{R}$ — нормална кривина површи љуске у правцу границе избочавања. Одатле се добива да је

$$\bar{U} = cE \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2} \rho^2, \quad (4.16)$$

а услов применљивости $\left(\frac{h}{\rho\alpha}\right) \ll 1$ напишимо у облику:

$$\left(\frac{Rh}{\rho^2}\right) \ll 1.$$

На тај начин, за све три области G_1, G_2, G_{12} , енергија еластичне деформације конвексне љуске са избочавањем је нађена и дефинише се обрасцем:

$$U = U_0 + U_G + U_\gamma. \quad (4.17)$$

Енергија U_0 налази се решењем проблема о еластичном стању љуске у линеарној апроксимацији. Енергија U_G одређује се обрасцем:

$$U_G = \frac{Eh^3}{6(1-\nu^2)} \int_G \int_G k_\nu dG. \quad k_\nu = (k_1 + k_2)^2 - 2(1-\nu)k_1k_2.$$

Овде је област интеграције област огледалског избочавања.

Енергија U_γ израчунава се према

$$U_\gamma = \int_\gamma \bar{U} ds;$$

$$\left(\bar{U} = cE \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2} \rho^2, \quad c = \frac{I_0}{12^{3/4}(1-\nu^2)^{3/4}}\right),$$

где је $\frac{1}{R}$ — нормална кривина љуске у правцу линије γ , границе огле-

далског избочавања; ρ — полупречник кривине криве γ . Интеграција се врши по граници γ огледалског избочавања. За $\nu=0,3$ и $I_0=1,2$ константа $c=0,12$.

Раније је било напоменуто, да су ван околине границе избочавања напони у љуски блиски онима који се појављују при докритичној деформацији за исто спољашње оптерећење. На довољном удаљењу од границе области избочавања а њеној унутрашњости постоје напони од савијања, одређени обликом огледалског избочавања, који се могу израчунати на следећи начин: огледалско избочавање доводи до појаве напона истезања-притиска на површи љуске који су једнаки:

$$\sigma_1 = \pm \frac{Eh}{1-\nu^2} (k_1 + \nu k_2), \quad \sigma_2 = \pm \frac{Eh}{1-\nu^2} (k_2 + \nu k_1). \quad (4.18)$$

На граници избочавања савијање се врши у равни, нормалној на границу.

А.В. Погорелов [50] тврди, да је промена нормалне кривине љуске толико велика да се почетна кривина може занемарити. При томе се препоставља, да се може сматрати да су настали напони од таквог савијања исти као и у случају конусне љуске при њеној деформацији са избоча-

вањем размотреним раније. Напони савијања конусне љуске у равни меридијана у близини границе избочавања одређују се обрасцем:

$$\sigma = \pm \frac{Eh\kappa}{2(1-\nu^2)}; \quad (\kappa = v''(\xi + u') - u''(\eta + v')). \quad (4.19)$$

Прелазећи на променљиве \bar{u} , \bar{v} , \bar{s} (4.6) и изостављајући црту над њима, добивамо за κ израз:

$$\kappa = \frac{\alpha\nu}{\rho\varepsilon} [v''(\xi + \eta^2 u') - \eta^2 u''(1 + v)], \quad (4.20)$$

који за $h \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow 0$ прелази у

$$\kappa = \frac{\alpha\nu}{\rho\varepsilon} v', \quad (4.21)$$

где је v' — функција која реализује минимум функционала I_0 .

Уносећи (4.13) у (4.21), а ову у (4.19), добивамо:

$$\sigma = \pm \frac{12^{1/4} E}{2(1-\nu^2)^{3/4}} \rho^{-1/2} h^{1/2} \alpha^{3/2} v'. \quad (4.22)$$

Израз за напоне преко нормалне кривине $\frac{1}{R}$ љуске у правцу границе

избочавања $\left(\frac{1}{R} \simeq \frac{\alpha}{\rho}\right)$ добија облик:

$$\sigma = \pm c' E \frac{\rho}{R} \left(\frac{h}{R}\right)^{1/2}, \quad c' = \frac{12^{1/4} v'}{2(1-\nu^2)^{3/4}}. \quad (4.23)$$

Максимални напони савијања у околини границе избочавања одговара максималној вредности извода $v'(s)$, која се постиже за $s=0$. То се види из тога, што је за $s=0$, $v''=0$, а такође и из друге једначине система (4.10). За $s=0$, $v'=1$. Зато је $c'=1$ (за $\nu=0,3$).

На граници избочавања љуске локално савијање праћено је појавом напона истезања (притиска) средње површи љуске у равнима, нормалним на границу избочавања. При малој дебљини ти напони могу се сматрати истим као и у случају конусне љуске, за коју су они једнаки:

$$\sigma = \pm E \varepsilon_2 = \pm E \frac{u^*}{\rho}; \quad (4.24)$$

или, у променљивим које реализују минимум I_0 :

$$\sigma = \pm c'' E h^{1/2} \rho^{1/2} \alpha^{3/2}, \quad c'' = \frac{u}{12^{1/4} (1-\nu^2)^{1/4}}. \quad (4.25)$$

Максимални напон σ одговараће максимуму вредности $u(s) \simeq 0,5$. За $\nu=0,3$, $c''=0,25$. Изражавајући напоне помоћу нормалне кривине

$\frac{1}{R}$, добивамо:

$$\sigma = c'' E \frac{\rho}{R} \left(\frac{h}{R}\right)^{1/2}. \quad (4.26)$$

У случају малих еластичних избочавања љуски изрази за енергије еластичне деформације могу се упростити. Познато је да се облик регуларне строго конвексне површи у малој околини тачке P добро апроксимира елиптичним параболоидом. Узевши тангентну раван површи у тачки P за раван xu , а главне правце на површи у тој тачки за правце координатних оса, једначина додирног параболоида може се написати у облику:

$$z = \frac{1}{2} (k_1 x^2 + k_2 y^2).$$

Дакле, при малој висини избочавања δ област огледалског избочавања са центром P може се дати једначином:

$$\delta = \frac{1}{2} (k_1 x^2 + k_2 y^2), \quad (4.27)$$

која представља елипсу са полуосама:

$$a = \sqrt{\frac{2\delta}{k_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{2\delta}{k_2}}. \quad (4.28)$$

Површина избочавања љуске биће:

$$S_G = \frac{2\pi\delta}{\sqrt{k_1 k_2}}. \quad (4.29)$$

Кривина границе избочавања (стављајући $x = a \cos t$, $y = b \sin t$) може се изразити у облику:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}. \quad (4.30)$$

Нормална кривина површи љуске у правцу границе избочавања је:

$$\frac{1}{R} = \frac{2\delta}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}. \quad (4.31)$$

У случају мале области избочавања главне кривине k_1 и k_2 мало се мењају у области интеграције и њих можемо сматрати једнаким вредностима у центру избочавања. Тада (4.1) добија облик:

$$U_G = \frac{Eh^3}{6(1-\nu^2)} K_\nu S_G. \quad (4.32)$$

Уносећи свуда вредност S_G — површине области избочавања из (4.29), добијамо:

$$U_G = \frac{2\pi\delta Eh^3 K_\nu}{6(1-\nu^2)\sqrt{k_1 k_2}}. \quad (4.32')$$

За енергију еластичне деформације, везану за локално савијање на граници избочавања

$$U_\gamma = \int_\gamma \bar{U} ds, \quad \left[\bar{U} = cE \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \rho^2 \right], \quad (4.15')$$

налазимо, узимајући у обзир (4.29) и (4.30):

$$U_{\gamma} = \pi c E \frac{(2 h \delta)^{5/2}}{a^2 b^2} (a^2 + b^2), \quad (4.15'')$$

или, водећи рачуна о (4.28):

$$U_{\gamma} = \pi c E (2 \delta)^{3/2} h^{5/2} (k_1 + k_2), \quad (4.33)$$

што се може изразити помоћу средње кривине $K = \frac{1}{2} (k_1 + k_2)$ љуске

у центру избочавања овако:

$$U_{\gamma} = 2 \pi c E (2 \delta)^{3/2} h^{5/2} K. \quad (c \approx 0,12). \quad (4.34)$$

Тим образцем се можемо користити при услову да је

$$\frac{h}{2 \delta} \left(\frac{k_1}{k_2} \right) \ll 1, \quad (k_1 > k_2). \quad (4.35)$$

Образац (4.23) за напон у случају мале области избочавања, после уношења у њу вредности $\frac{1}{\rho}$ и $\frac{1}{R}$ из (4.30) и (4.31), добива облик:

$$\sigma = \pm \frac{c' E (2 \delta)^{3/2} h^{1/2}}{ab}, \quad (4.36)$$

или, узимајући у обзир (4.28),

$$\sigma = \pm c' E (2 \delta)^{1/2} h^{1/2} \sqrt{k_1 k_2}. \quad (4.37)$$

Приметимо, да су напони дуж границе избочавања константни.

За напоне истезања (притиска) средње површи, изазваних локалним савијањем, био је конструисан образац (4.25), који у случају мале области избочавања добива облик:

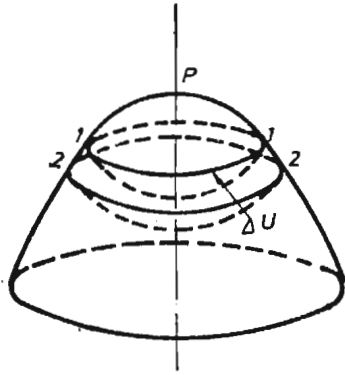
$$\sigma = \pm c'' E (2 \delta)^{1/2} h^{1/2} \sqrt{k_1 k_2}. \quad (4.38)$$

Сада размотримо стабилност еластичне равнотеже конвексне љуске са избочавањем, јер за то све неопходно већ имамо; нека је оптерећење у области малог избочавања константно. Услов равнотеже еластичног стања љуске може се написати као једнакост рада dA спољашњих сила и промене енергије еластичне деформације:

$$dA = dU_{\gamma} + dU_G. \quad (4.39)$$

За одређивање параметара еластичне деформације љуске (центра и висине избочавања) нађимо елементарни рад dA у зависности од њих. Рад dA , произведен спољашњим оптерећењем q при прелазу од избочавања 1—1 (сл. 31) ка бесконачно блиском избочавању 2—2, једнак је $q dV$, где је dV — промена запремине, изазвана избочавањем. Дакле, dA је диференцијал функције $A = qV$, где је V — двострука запремина сегмен-

та, кога одсеца раван, која дефинише огледалско избочавање љуске. Нађимо запремину тог сегмента. Имамо:



сл. 31

$$\frac{V}{2} = \int_0^{\delta} S(z) dz,$$

где је $S(z)$ — површина пресека, паралелног основи сегмента на растојању z од врха. Како је облик пресека близак елипси са полуосама

$$a(z) = \sqrt{\frac{2z}{k_1}}, \quad b(z) = \sqrt{\frac{2z}{k_2}},$$

то је

$$S(z) = \frac{2\pi z}{\sqrt{k_1 k_2}}.$$

Одатле

$$\frac{V}{2} = \int_0^{\delta} \frac{2\pi z}{\sqrt{k_1 k_2}} dz = \frac{\pi \delta^2}{\sqrt{k_1 k_2}}, \quad (4.40)$$

па дакле,

$$A = \frac{2\pi \delta^2}{\sqrt{k_1 k_2}}. \quad (4.41)$$

Нека буде положај центра избочавања познат. Тада се висина избочавања одређује из релације:

$$\frac{d}{d\delta} (A - U_\gamma - U_G) = 0. \quad (4.42)$$

Уведимо параметар оптерећења

$$\xi = \frac{q}{Eh^2 k_1 k_2} \quad (4.43)$$

и параметар висине избочавања

$$\eta = \sqrt{\frac{2\delta}{h}}. \quad (4.44)$$

Тада формуле (4.41), (4.34), (4.31) за A , U_γ и U_G , а такође (4.42) прелазе у следеће:

$$A = \frac{\pi}{2} E \xi \eta^4 h^4 \sqrt{k_1 k_2}, \quad (4.45)$$

$$U_\gamma = 2 \pi c E \eta^3 h^4 \frac{1}{2} (k_1 + k_2), \quad (4.46)$$

$$U_G = \frac{\pi E \eta^2 h^4 K_\nu}{6 (1 - \nu^2) \sqrt{k_1 k_2}}, \quad (4.47)$$

$$\frac{d}{d\eta} (A - U_\gamma - U_G) = 0; \quad (4.48)$$

на основу којих је лако формирати једначину равнотеже, која одређује висину избочавања:

$$\xi \eta^2 - 3 c \eta \bar{K} - \frac{\bar{K}_\nu}{6 (1 - \nu^2)} = 0, \quad (4.49)$$

где је

$$\bar{K} = \frac{K}{\sqrt{\Gamma}}, \quad \bar{K}_\nu = \frac{K_\nu}{\sqrt{\Gamma}} = 4 \bar{K}^2 - 2 (1 - \nu), \quad \left(\Gamma = k_1 k_2, \quad K = \frac{1}{2} (k_1 + k_2) \right).$$

Одредивши η , нађимо висину избочавања $\delta = \frac{1}{2} h \eta^2$, а затим по обрасцу

(4.28) — димензије области избочавања:

$$a = \sqrt{\frac{2 \delta}{k_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{2 \delta}{k_2}}. \quad (4.28)$$

Положај центра избочавања P може се одредити из следећих расуђивања. „Висина“ избочавања η , одређена из (4.49), биће функција P . Стварном избочавању одговара такав положај P при коме ће енергија еластичне деформације $U_\gamma + U_G$ бити максимална. Уносећи η из (4.49) у израз за енергију еластичне деформације $U_\gamma + U_G$ посматрану као функцију од P , налазимо положај центра избочавања из услова максимума тога израза. Исти резултат може се добити из услова максимума израза:

$$A = \frac{\pi}{2} E \xi \eta^4 h^4 \sqrt{k_1 k_2}, \quad (4.50)$$

у који је неопходно унети η , одређено из једначине (4.49). У случају да на љуску дејствује концентрисана сила F , чију нападну тачку можемо сматрати центром избочавања P , елементарни рад је $dA = 2F d\delta$, где

је δ — висина сегмента огледалског избочавања. Стављајући $\delta = \frac{1}{2} h \eta^2$

и $F = \frac{\pi}{2} E \xi h^3 \sqrt{k_1 k_2}$, добивамо:

$$A = \pi E \xi \eta^2 h^4 \sqrt{k_1 k_2}. \quad (4.51)$$

Из услова (4.42) пак, узимајући (4.46) и (4.47), добивамо једначину, коју задовољава параметар η , који дефинише висину избочавања

$$\xi - 3 c \eta \bar{K} - \frac{\bar{K}_v}{6(1-\nu^2)} = 0, \quad (4.52)$$

одакле је

$$\eta = \frac{1}{3 c \bar{K}} \left(\xi - \frac{\bar{K}_v}{6(1-\nu^2)} \right). \quad (4.53)$$

Ако на љуску дејствује произвољно оптерећење q , концентрисано у области избочавања (на граници избочавања је $q=0$), тада је његово дејство еквивалентно резултанти концентрисаног оптерећењу F . У том случају η се одређује обрасцем (4.53).

Под дејством оптерећења на љуску, које зависи од облика површи, за дати положај центра избочавања P активно оптерећење биће позната функција $q(P, \delta)$ висине избочавања δ . Дакле, може се наћи рад спољашњих сила $A(P, \delta)$, а затим висина $\delta(P)$ из услова равнотеже (4.42). Положај центра избочавања одређује се из услова максимума $A[P, \delta(P)]$ као функције P .

У случају дејства оптерећења ударом (удар у тачки P) може се претпоставити, да енергија удара T прелази у целости у енергију еластичне деформације, везане са избочавањем ($U_\gamma + U_G$), пошто појава избочавања снижава крутост љуске као еластичног система. Висину избочавања одређујемо из једнакости:

$$T = U_\gamma + U_G.$$

На пример, у случају избочавања сферне љуске радијуса R и дебљине h под дејством концентрисане силе F имамо:

$$\zeta = \frac{FR}{\pi E h^3}, \quad \bar{K}_v = 2(1+\nu), \quad \eta = \frac{1}{3c} \left(\frac{FR}{\pi E h^3} - \frac{1}{3(1-\nu)} \right), \quad \delta = \frac{h}{2} \eta^2.$$

Сматраћемо стање еластичне равнотеже стабилним, ако је

$$d^2(A - U_\gamma - U_G) < 0, \quad (4.54)$$

а нестабилним, ако је

$$d^2(A - U_\gamma - U_G) > 0. \quad (4.55)$$

Нека на љуску дејствује континуално оптерећење q , такво, да се A , U_γ и U_G одређују обрасцима (4.45)–(4.47).

Имамо:

$$\frac{d}{d\delta} (A - U_\gamma - U_G) = \frac{d}{d\eta} (A - U_\gamma - U_G) \frac{d\eta}{d\delta} = 0,$$

одакле је

$$\frac{d^2}{d\delta^2} (A - U_\gamma - U_G) = \frac{d^2}{d\eta^2} (A - U_\gamma - U_G) \left(\frac{d\eta}{d\delta} \right)^2. \quad (4.56)$$

На тај начин, питање о стабилности равнотеже решава се у зависности од знака израза:

$$\frac{d^2}{d\eta^2} (A - U_\gamma - U_G) = \pi E h^4 \left(6 \xi \eta^2 - 12 c \eta \bar{K} - \frac{1}{3} \frac{\bar{K}_v}{1 - \nu^2} \right). \quad (4.57)$$

Узимајући у обзир услов равнотеже љуске (4.48), добивамо:

$$\frac{d^2}{d\eta^2} (A - U_\gamma - U_G) = \pi E h^4 \sqrt{\Gamma} \left(6 c \eta \bar{K} + \frac{2 \bar{K}_v}{3(1 - \nu^2)} \right),$$

одакле се види, да је

$$\frac{d^2}{d\delta^2} (A - U_\gamma - U_G) > 0.$$

Дакле, сва стања еластичне равнотеже конвексне љуске са избочавањем под дејством непрекидног оптерећења су нестабилна.

Нестабилност еластичног стања љуске при избочавању је узрок „луцкетања“ љуске, тј. скоковитог избочавања без увећања спољашњег оптерећења.

Под дејством концентрисане силе F

$$\frac{d^2}{d\eta^2} (A - U_\gamma - U_G) = \pi E h^4 \sqrt{k_1 k_2} \left(2 \xi - 12 c \eta \bar{K} - \frac{\bar{K}_v}{3(1 - \nu)} \right), \quad (4.58)$$

или, узимајући у обзир услов равнотеже (4.52), добивамо:

$$\frac{d^2}{d\eta^2} (A - U_\gamma - U_G) = -6 \pi c E h^4 \bar{K} \sqrt{k_2 k_2} < 0,$$

тј. еластична стања равнотеже љуске са избочавањем под дејством концентрисане силе су стабилна.

Горње критично оптерећење у оквирима копструисане теорије немогуће је одредити, јер се оно односи на област деформације са знатним избочавањем. Ипак може се рећи нешто о томе, како утиче принудно избочавање, на пример почетни угиб, на величину горњег критичног оптерећења. Нека висина избочавања љуске, на коју дејствује оптерећење q буде δ . Образац (4.49) даје везу $q(\delta)$ у променљивим ξ, η . Како су еластична стања равнотеже под дејством континуалног оптерећења нестабилна, то за $q < q(\delta)$ избочавање ишчезава, а за $q > q(\delta)$ — обрнуто,

расте и долази до губитка локалне стабилности љуске. На тај начин, при избочавању љуске за висину δ горње критично оптерећење се снижава у крајњој линији до вредности $q(\delta)$. Дакле, у литератури познат појам доњег критичног оптерећења за непрекидно оптерећење љуске, као доње гране оптерећења q , која одговарају стабилним стањима равнотеже са избочавањем; са гледишта овде изложене теорије такав појам доњег критичног оптерећења нема смисла, пошто су сва еластична стања љуске са избочавањем нестабилна.

Ако се у изразу за енергију еластичне деформације занемари енергија савијања љуске по области избочавања, то се теорија еластичног стања конвексних љуски при избочавању битно упрошћава. Истовремено такво допуштење је могуће на тој основи што енергија савијања љуске по области избочавања има споредни значај у поређењу са енергијом избочавања.

Узмимо ради једноставности сферну љуску. Имаћемо

$$U_G = \frac{2 \pi \delta E h^3}{6(1-\nu)R}, \quad U_\gamma = 2 \pi c E (2\delta)^{3/2} h^{5/2} \frac{1}{R}. \quad (4.59)$$

Уводећи у те обрасце уместо δ радијус ρ круга избочавања, добивамо:

$$U_G = \frac{\pi E \rho^2 h^3}{6(1-\nu)R^2}, \quad U_\gamma = 2 \pi c E \rho^3 \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2}. \quad (4.60)$$

Одатле је

$$\frac{U_G}{U_\gamma} = \frac{1}{12(1-\nu)c} \sqrt{\frac{Rh}{\rho^2}} \approx \sqrt{\frac{Rh}{\rho^2}}. \quad (4.61)$$

Образац за U_γ изведен је под предпоставком, да је $\frac{Rh}{\rho^2} \ll 1$. Дакле,

теорија се односи на такве деформације са избочавањем код којих је $U_G \ll U_\gamma$. Зато је допустиво занемарење члана U_G у изразу за енергију еластичне деформације, сматрајући да је просто једнака енергији локалног савијања U_γ на граници избочавања. Квалитативно такав исти резултат добива се и за произвољну конвексну љуску.

§ 5. Поставка и примери решавања задатка термостабилности љуске у условима пужења

Размотримо цилиндарски панел са почетним угибом. Проучимо карактер раста угиба љуске од тренутка дејства оптерећења до тренутка губитка стабилности [51]. За критично време губитка стабилности узећемо време, које одговара оштрој промени брзине раста угиба. При исписивању једначина кретања љуске искористимо нелинеарне геометријске релације теорије плитких љуски. Што се тиче физичких релација претпостављамо да важе линеарне зависности између прираштаја координата тензора брзине деформација и одговарајућих прираштаја координата девијатора напона [52, 53, 54].

Нека једначина стања у условима пужења има облик:

$$\dot{p}_i = g(\sigma_i, p_i) \sigma_i. \quad (5.1)$$

Међу координатама тензора брзина деформација пужења \dot{p}_{ij} и координатама девијатора напона σ_{ij}^* важе релације теорије течења:

$$\begin{aligned} \dot{p}_{ij} &= \frac{3}{2} g(\sigma_i, p_i) \sigma_{ij}^*, \\ p_{ij} &= \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2G} \sigma_{ij}^*, \quad \dot{p}_i^2 = \frac{2}{3} \dot{p}_{ij} \dot{p}_{ij}, \\ \sigma_i^2 &= \frac{3}{2} \sigma_{ij}^* \sigma_{ij}^*, \quad p_i = \int_0^i \dot{p}_i dt, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где је ε_{ij} — тензор деформације, p_{ij} — тензор деформације пужења, G — модул клизања, $\nu=0,5$ — материјал се сматра нестишљивим.

Разматраћемо љуске са почетним угибом при безмоментном напрезању.

Ако почетни угиб недостаје, тада таква оптерећења не изазивају савијање љуске, и деформација пужења у сваком тренутку времена, дефинише се напонским стањем, које се не мења током времена. То стање љуске називаћемо основним. Као резултат присуства почетних угиба у току времена врши се прерасподела напона у средњој површи и по дебљини љуске, тј. настаје одступање деформација и напона од основног стања.

Ако се претпостави, да се до губитка стабилности реално стање мало разликује од основног, тада ће за величине, које карактеришу то одступање важити следеће релације:

$$\begin{aligned} \delta p_i &= a \delta p_i + g(b+1) \delta \sigma_i, \\ \delta \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2G} \delta \sigma_{ij}^* &= \frac{3}{2} g \delta \sigma_{ij}^* + \frac{3}{2} \alpha_{ij}^* (a \delta p_i + gb \delta \sigma_i). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Овде је

$$a = \sigma_i \frac{\partial g}{\partial p_i}, \quad b = \frac{\sigma_i \partial g}{g \partial \sigma_i}, \quad \alpha_{ij}^* = \frac{\sigma_{ij}^*}{\sigma_i}. \quad (5.4)$$

Прелазећи у једначинама (5.3) и (5.4) помоћу (5.1) на променљиву p_i , а затим интегралећи их узимањем у обзир почетни услов:

$$\delta p_{ij} = 0 \quad \text{за } p_i = p_i^*, \quad (5.5)$$

добивамо за $\delta \sigma_{ij}^*$ за $t > 0$ израз:

$$\begin{aligned} \delta \sigma_{ij}^* &= \frac{2}{3} E e^{\xi^* - \xi} \delta \varepsilon_{ij}^* + \frac{2}{3} E e^{-\xi} \int_{p^*}^p e^{\xi} \frac{\partial}{\partial p} \delta \varepsilon_{ij} dp - \\ &- \alpha_{ij}^* E e^{-\xi} \int_{p^*}^p \left[\frac{a}{\sigma_i} \int_{p^*}^p \frac{1+b}{g} \delta \sigma_i dp + b \delta \sigma_i \right] \frac{dp}{\sigma_i}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где је

$$\xi = \frac{E p_i}{\sigma_i}, \quad \xi^* = \frac{E p_i^*}{\sigma_i}, \quad p = p_i;$$

$$\delta \varepsilon_{ij} = \delta \varepsilon_{ij}^* \quad \text{за } p = p^*; \quad w = w^* \quad \text{за } p = p^*.$$

За одређивање деформација љуске при кретању узимањем у обзир почетних померања искористимо изразе:

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{11} &= u_x - u_x^0 - z (w_{xx} - w_{xx}^0) + \frac{1}{2} w_x^2 - \frac{1}{2} w_x^{0^2}, \\ \delta \varepsilon_{22} &= v_y - v_y^0 - z (w_{yy} - w_{yy}^0) + \frac{1}{2} w_y^2 - \frac{1}{2} w_y^{0^2}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\delta \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} (u_y + v_x - u_y^0 - v_x^0) - z (w_{xy} - w_{xy}^0) + \frac{1}{2} w_x w_y - \frac{1}{2} w_x^0 w_y^0.$$

Овде су x, y — Гаусове координате средње површи љуске; оса z усмерена је ка центру кривине; u^0, v^0, w^0 — почетна померања; R — радијус љуске.

Запишимо изразе за моменте у љуски и изразе допунских сила у средњој површи љуске, везаних са њеним кривљењима при кретању:

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_{-h}^h (2 \delta \sigma_{11}^* + \delta \sigma_{22}^*) z dz, & M_2 &= \int_{-h}^h (2 \delta \sigma_{22}^* + \delta \sigma_{11}^*) z dz, \\ H &= \int_{-h}^h \delta \sigma_{12}^* z dz; \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{-h}^h (2 \delta \sigma_{11}^* + \delta \sigma_{22}^*) dz, & T_2 &= \int_{-h}^h (2 \delta \sigma_{22}^* + \delta \sigma_{11}^*) dz, \\ T_{12} &= \int_{-h}^h \delta \sigma_{12}^* dz. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Уводећи изразе за напоне (5.6) и деформације (5.7) у формули (5.8) и (5.9), добивамо:

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{D}{2} e^{\xi^* - \xi} [2 (w_{xx}^* - w_{xx}^0) + w_{yy}^* - w_{yy}^0] - \\ &- e^{-\xi} \int_{p^*}^p e^{\xi} \left[\frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial p} (2 w_{xx} + w_{yy}) + \alpha_{11} E S (M_i) \right] dp, \end{aligned}$$

$$M_2 = -\frac{D}{2} e^{\xi^* - \xi} [2(w_{yy}^* - w_{yy}^0) + w_{xx}^* - w_{xx}^0] -$$

$$- e^{-\xi} \int_{p^*}^p e^{\xi} \left[\frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial p} (2 w_{yy} + w_{xx}) + \alpha_{22} ES (M_i) \right] dp,$$

$$H = -D e^{\xi^* - \xi} (w_{xy}^* - w_{xy}^0) - e^{-\xi} \int_{p^*}^p e^{\xi} \left[D \frac{\partial w_{xy}}{\partial p} + \alpha_{12} ES (M_i) \right] dp; \quad (5.10)$$

и

$$T_1 = \frac{2}{3} B e^{\xi^* - \xi} \left[w_x^{*2} - w_x^{02} + \frac{1}{2} (w_y^{*2} - w_y^{02}) - v_y - v_y^0 \right] +$$

$$+ \frac{2}{3} B e^{-\xi} \int_{p^*}^p e^{\xi} \left[\frac{\partial}{\partial p} \left(w_x^2 + \frac{1}{2} w_y^2 - \frac{w}{R} + 2 u_x + v_y \right) - \frac{3}{4h} \alpha_{11} S (T_i) \right] dp, \quad (5.11)$$

$$T_2 = \frac{2}{3} B e^{\xi^* - \xi} \left[w_y^{*2} - w_y^{02} + \frac{1}{2} (w_x^{*2} - w_x^{02}) + 2 (v_x^* - v_x^0) -$$

$$- 2 \frac{w^* - w^0}{R} + u_x^* - u_x^0 \right] + \frac{2}{3} B e^{-\xi} \int_{p^*}^p e^{\xi} \left[\frac{\partial}{\partial p} \left(w_y^2 + \frac{1}{2} w_x^2 - \frac{2w}{R} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 v_y + u_x \right) - \frac{3}{4h} \alpha_{22} S (T_i) \right] dp,$$

$$T_{12} = \frac{1}{3} B e^{\xi^* - \xi} \left[\frac{w_x^* w_y^*}{2} - \frac{w_x^0 w_y^0}{2} + \frac{1}{2} (u_y^* + v_x^* - u_y^0 - v_x^0) \right] +$$

$$+ \frac{1}{3} B e^{-\xi} \int_{p^*}^p e^{\xi} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p} (w_x + w_y + u_y + v_x) - \frac{3}{2h} \alpha_{12} S (T_i) \right] dp,$$

где је

$$D = \frac{8 E h^3}{9}, \quad B = 2 E h, \quad \alpha_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i}, \quad S (M_i) = \frac{a}{\sigma_i^2} \int_{p^*}^p \frac{1+b}{g} M_i dp + \frac{b}{\sigma_i} M_i,$$

$$M_i = \left(\alpha_{11} - \frac{1}{2} \alpha_{22} \right) M_1 + \left(\alpha_{22} - \frac{1}{2} \alpha_{11} \right) M_2 + 3 \alpha_{12} H, \quad (5.12)$$

$$T_i = \left(\alpha_{11} - \frac{1}{2} \alpha_{22} \right) T_1 + \left(\alpha_{22} - \frac{1}{2} \alpha_{11} \right) T_2 + 3 \alpha_{12} T_{12}.$$

Саставимо једначине кретања елемента љуске без инерционих чланова:

$$T_{1x} + T_{12y} = 0, \quad T_{2y} + T_{12x} = 0; \quad (15.13)$$

$$M_{1xx} + M_{2yy} + 2H_{xy} + \frac{T_2}{R} + (T_1^0 + T_1)w_{xx} + (T_2^0 + T_2)w_{yy} + 2(T_{12}^0 + T_{12})w_{xy} = 0. \quad (5.14)$$

Овде су T_1^0 , T_2^0 , T_{12}^0 — силе у почетном тренутку времена. Ознаке x , y код T , M , H означавају извод по тој координати.

Уведимо функцију напона Φ , стављајући

$$T_1 = \Phi_{yy}, \quad T_2 = \Phi_{xx}, \quad T_{12} = -\Phi_{xy}. \quad (5.15)$$

Примењујући операторе:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad -3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

респективно у првој, другој и трећој једначини (5.11) и сабирајући их, добивамо једначину за одређивање функције Φ :

$$\Delta^2 \Phi + E e^{-\xi} \int_{p^*}^p e^{\xi} S(\Lambda_1^2 \Phi) dp = B e^{\xi} [w_{xy}^{*2} - w_{xx}^* w_{yy}^* - w_{xy}^{02} + w_{xx}^0 w_{yy}^0 - \frac{w_{xx}^* - w_{xx}^0}{R}] + B e^{-\xi} \int_{p^*}^p e^{\xi} \frac{\partial}{\partial p} \left(w_{xy}^2 - w_{xx} w_{yy} - \frac{w_{xx}}{R} \right) dp; \quad (5.16)$$

$$\Lambda_1 = \alpha_{11} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + \alpha_{22} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - 3 \alpha_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}.$$

Једначина (5.14) с обзиром на изразе (5.10) и (5.15) даје:

$$-D e^{\xi} \Delta^2 (w^* - w^0) + \frac{1}{R} \Phi_{xx} + T_1^0 w_{xx} + T_2^0 w_{yy} + 2 T_{12}^0 w_{xy} + \Phi_{yy} w_{xx} + \Phi_{xx} w_{yy} - 2 \Phi_{xy} w_{xy} - e^{-\xi} \int_{p^*}^p e^{\xi} D \Delta^2 \frac{\partial w}{\partial p} dp - \quad (5.17)$$

$$-e^{-\xi} E \int_{p^*}^p e^{\xi} S(\Delta M_i) dp = 0,$$

при чему је овде

$$\Delta = \alpha_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \alpha_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \alpha_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Искључујући из једначине (5.17) ΔM_i и интегралећи парцијално интеграле у једначинама (5.16) и (5.17), који садрже изводе тражених функ-

ција по променљивој p , добивамо систем једначина за одређивање $w(x, y, p)$ и $\Phi(x, y, p)$:

$$e^{\xi} K(w, \Phi) + E e^{-\xi} \int_{p^*}^p e^{\xi} S(K+T) dp = 0;$$

$$\Delta^2 \Phi + \Lambda_1^2 L_1 \Phi = B (1 - L_2) \left(w_{xy}^2 + w_{xx} w_{yy} - \frac{w_{xx}}{R} \right) -$$

$$- B e^{\xi} \star^{-\xi} \left(w_{xy}^0 - w_{xx}^0 w_{yy}^0 - \frac{w_{xx}^0}{R} \right), \quad (5.18)$$

где је

$$K(w, \Phi) = D \Delta^2 w - D e^{\xi} \star^{-\xi} \Delta^2 w^0 - 2 h \sigma_t \Delta w - L(w, \Phi) -$$

$$- e^{-\xi} \int_{p^*}^p e^{\xi} \frac{ED}{\sigma_t} \Delta^2 w dp;$$

$$T(w) = -\frac{3D}{4} [\Lambda^2 w - e^{\xi} \star^{-\xi} \Delta w^0] - e^{-\xi} \int_{p^*}^p \frac{E}{\sigma_t} e^{\xi} \Lambda^2 w dp; \quad (5.19)$$

$$L(w) = w_{xx} \Phi_{yy} + w_{yy} \Phi_{xx} - 2 w_{xy} \Phi_{xy} + \frac{1}{R} \Phi_{xx};$$

$$L_1 \Phi = E e^{-\xi} \int_{p^*}^p e^{\xi} S(\Phi) dp;$$

$$L_2(w) = \frac{E}{\sigma_t} e^{-\xi} \int_{p^*}^p e^{\xi} w dp.$$

Размотримо цилиндарски панел правоуглог облика у пресеку, зглавкасто ослоњен по свим ивицама и оптерећен притисним силама $2h\sigma_t$ дуж изводница. Координатни почетак поставимо у врху панела.

Једначину стања при пужању узмимо у облику,

$$p_t = A \sigma_t^n e^{-\alpha p_t}, \quad (5.20)$$

где су A , n , α — карактеристике материјала панела.

Решивши прву једначину система (5.18) по $K(w, \Phi)$, добивамо

$$K(w, \Phi) = -\frac{bE}{\sigma_t} \int_{p^*}^p T dp + \frac{\alpha + \beta b}{\sigma_t} E \int_{p^*}^p e^{-\beta dx} \int_{p^*}^p T e^{\beta t} dt, \quad (5.21)$$

где је

$$\beta = \frac{(1+b)E + \alpha \sigma_t}{\sigma_t} E.$$

Као резултат систем једначина (5.18) с обзиром на (5.19) добија облик:

$$\begin{aligned}
 & D \Delta^2 w - 2h \sigma_t \Delta w - L(w, \Phi) - D e^{\xi^* - \xi} \Delta^2 w^0 - e^{-\xi} \int_{p^*}^p e^{\xi} D \Delta^2 w dp + \\
 & + \frac{3D}{4} \left[1 - e^{-\xi} + \frac{(1+b)E}{\alpha \sigma_t + E(1+b)} \left(1 - e^{-\left(1+b + \frac{\alpha \sigma_t}{E}\right) \xi} \right) \right] + \\
 & + \frac{bE}{\sigma_t} \int_0^p T dp - \frac{\alpha + \beta b}{\sigma_t} E \int_0^p e^{-\beta x} dx \int_0^x T e^{\beta t} dt = 0, \tag{5.22}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta^2 \Phi + \Lambda_1^2 L_1 \Phi = & B(1 - L_2) \left(w_{xy}^2 - w_{xx} w_{yy} - \frac{w_{xx}}{R} \right) - \\
 & - B e^{-\xi} \left(w_{xy}^{0^2} - w_{xx}^0 w_{yy}^0 - \frac{w_{xx}^0}{R} \right),
 \end{aligned}$$

$$p^* = 0.$$

Решење система једначина (5.22) налазимо у облику:

$$\begin{aligned}
 w = & f(p) \sin mx \sin ny, \\
 \Phi = & \varphi_1 \cos 2mx + \varphi_2 \cos 2ny + \varphi_3 \sin mx \sin ny, \tag{5.23}
 \end{aligned}$$

где је $m = \frac{\pi}{a_1}$, $n = \frac{\pi}{b_1}$. Овде су a_1, b_1 — димензије панела. При томе стављамо да је почетни угиб облика:

$$w^0 = f_0 \sin mx \sin ny. \tag{5.24}$$

Друга једначина система (5.22) биће задовољена, ако се коефицијенти $\varphi_k(p)$ нађу из једначина:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(p) = & \frac{Bn^2}{32m^2} [f^2(p) - L_2(f^2) - e^{-\xi} f_0^2] - \frac{1}{4} L_1(\varphi_1), \\
 \varphi_2(p) = & \frac{Bm^2}{32n^2} [f^2(p) - L_2(f^2) - e^{-\xi} f_0^2] - L_1(\varphi_2), \tag{5.25} \\
 \varphi_3(p) = & \frac{Bm^2}{R(m^2 + n^2)^2} [f(p) - L_2(f) - e^{-\xi} f_0] - L_1(\varphi_3).
 \end{aligned}$$

Примењујући на прву једначину система (5.22) метод Бубнов-Галеркина, добијамо:

$$\frac{\pi^4}{4} \left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} \right) z^3 - \left(\frac{128K}{3 \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right)^2} + \frac{8K\lambda^2}{3} \right) z^2 + \left[\frac{4\pi^4}{9} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right)^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{4K^2}{\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)^2} - 4\pi^2\delta - e^{-\xi} \left(\frac{\pi^4}{4} \left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} \right) z_0^2 - \frac{128K}{3 \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right)^2} z_0 \right) + r_1 \right] Z + \\
& + \left[\frac{8k\lambda^2}{3} z_0^2 - \frac{4k^2}{\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)^2} z_0 - \frac{4\pi^4}{9} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right)^2 z_0 \right] e^{-\xi} - \\
& - \frac{\pi^4}{3\lambda^2} \gamma(\tau) z_0 + r_2 = 0.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Овде су уведене ознаке:

$$\gamma(\tau) = 1 - e^{-\frac{\tau}{\sigma}} + \frac{1+b}{1+b+\frac{\alpha\sigma}{E}} \left(1 - e^{-\left(1+b+\frac{\alpha\sigma}{E}\right)\frac{\tau}{\sigma}} \right),$$

$$\begin{aligned}
r_1 = & -\frac{\pi^4}{4} \left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} \right) L_2(z^2) - \pi^4 \left[\frac{1}{4} L_1(\varphi_1^*) + L_1(\varphi_2^*) + \right. \\
& \left. + \frac{128K}{3 \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right)^2} L_2(z) + \frac{16\pi^2}{3} \left(\frac{2\lambda^2-1}{\lambda^2+1} \right)^2 L_2(\varphi_3^*) \right],
\end{aligned} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned}
r_2 = & \frac{8K\lambda}{3} L_2(z^2) + \frac{8K}{3} L_1(\varphi_1^*) - \frac{4K^2}{\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)^2} L_2(z) - \\
& - \frac{\pi^2 K}{8} \left(\frac{2\lambda^2-1}{\lambda^2+1} \right)^2 L_1(\varphi_3^*) - \frac{4\pi^4}{9} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right)^2 L_2(z) - \frac{\pi^4 b}{3\lambda^2} L_2(z),
\end{aligned}$$

$$z = \frac{f(p)}{2h}, \quad z_0 = \frac{f^0}{2h}, \quad \lambda = \frac{a_1}{b_1}, \quad K = \frac{b_1^2}{2hR}, \quad \sigma = \frac{\sigma_1 b^2}{4h^2 E},$$

$$\varphi_k^* = \frac{\varphi_k}{Eh^3}, \quad \tau = \frac{pb^2}{4h^2}.$$

Систем једначина (5.25) по бездимензионим параметрима има облик:

$$\varphi_1^*(\tau) = \frac{\lambda^2}{4} [z^2 - L_2(z^2) - e^{-\frac{\tau}{\sigma}} z_0^2] - \frac{1}{4} L_1(\varphi_1^*),$$

$$\varphi_2^*(\tau) = \frac{1}{4\lambda^2} [z^2 - L_2(z^2) - e^{-\frac{\tau}{\sigma}} z_0^2] - L_1(\varphi_2^*), \tag{5.28}$$

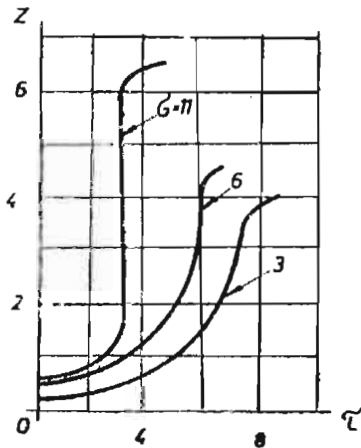
$$\varphi_3^*(\tau) = \frac{8K}{\pi \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right)^2} (Z - L_2(z) - e^{-\frac{\tau}{\sigma}} z_0) - \frac{1}{4} \left(\frac{2\lambda^2-1}{\lambda^2-1} \right)^2 L_1(\varphi_3^*).$$

На тај начин, добивамо систем од четири нелинеарне интегралне једначине (5.26), (5.28) за одређивање функција Z , $\varphi_1^*(\tau)$, $\varphi_2^*(\tau)$, $\varphi_3^*(\tau)$.

За прорачун је изабран квадратни цилиндарски панел са следећим подацима:

$$\bar{z}_0 = \frac{f}{2h} = 0,3; \quad K = 34,2.$$

Из једначина (5.26), (5.28) се прорачунава зависност z од τ (сл. 32) за различите вредности бездимензионог напона. Из прорачуна се види,



сл. 32

да за $\sigma > \sigma_H$ ($\sigma_H = 6,6$ доњи критични напон) и неку вредност τ постоје два решења за z , што карактерише прелаз од једног стања равнотеже на друго („губитак локалне стабилности“).

При решавању еластичног нелинеарног задатка је јасно, да за сваки напон $\sigma > \sigma_H$ егзистира таква вредност почетног угиба, код које настаје прелаз од једног облика равнотеже на други.

Упоређивање резултата прорачуна, извршених овде, са решењем еластичног проблема показује, да се у процесу пужења ка моменту слома нагомилава угиб, чија је величина иста као и величина угиба при еластичном губитку стабилности, који настаје под истим нивоом активног оптерећења, али са другим почетним угибом.

У овој, закључној глави, разматрају се нека изабрана питања прорачуна љуски, узимањем у обзир ових или оних ефеката њиховог узајамног дејства са физичком средином. Проучава се проблем о носивости љуски и објашњава се ефект механичког очвршћавања њиховог материјала. Осим тога овде се такође, на примеру проблема о течењу метала, у условима размене топлоте, показује како могу бити постављени и решени такви проблеми, код којих се узима ефект утицаја параметара процеса, на пример, — притисак, температура, брзина трајања процеса итд.

§ 1. Варијациона поставка проблема еласто-пластичне деформације љуски

Напони, који се појављују у телу при активној еласто-пластичној деформацији, имају потенцијал, који представља рад унутрашњих сила. У случају нестишљивог материјала рад унутрашњих сила, који долази на јединицу запремине, једнак је:

$$W = \int_0^{\epsilon_i} \sigma_i d\epsilon_i.$$

Природно је очекивати, да силе T и моменти M , који настају у љускама, такође имају потенцијал, који представља рад унутрашњих сила, који долази на јединицу површине средње површи:

$$U = \int_{-h/2}^{h/2} W dz.$$

Варијација функције U , која одговара варијацијама деформација $\delta\epsilon_1$, $\delta\epsilon_2$, $\delta\epsilon_{12}$ и кривина $\delta\kappa_1$, $\delta\kappa_2$, $\delta\kappa_{12}$, мора бити једнака раду сила T_1 , T_2 , T_{12} и момената M_1 , M_2 , M_{12} на варијацијама деформација и кривљења:

$$\delta U = T_1 \delta \epsilon_1 + T_2 \delta \epsilon_2 + 2T_{12} \delta \epsilon_{12} - M_1 \delta \kappa_1 - M_2 \delta \kappa_2 - 2M_{12} \delta \kappa_{12}. \quad (1.1)$$

Одредивши варијацију δU по обрасцу:

$$\delta U = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i \delta e_i dz, \quad (1.2)$$

где је

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P_\varepsilon - 2z P_{\varepsilon\kappa} + z^2 P_\kappa} \quad (1.3)$$

$$P_\varepsilon = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_{12}^2,$$

$$P_\kappa = \kappa_1^2 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2 + \kappa_{12}^2, \quad (1.4)$$

$$P_{\varepsilon\kappa} = \varepsilon_1 \kappa_1 + \varepsilon_2 \kappa_2 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \kappa_2 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \kappa_1 + \varepsilon_{12} \kappa_{12},$$

имамо могућност изражавања сила и момената помоћу деформација и кривљења:

$$T_1 = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_1}, \quad T_2 = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_2}, \quad T_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{12}}; \quad (1.5)$$

$$M_1 = -\frac{\partial U}{\partial \kappa_1}, \quad M_2 = -\frac{\partial U}{\partial \kappa_2}, \quad M_{12} = -\frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial \kappa_{12}}.$$

Сада размотримо могућност поставке проблема без једначина равнотеже елемента у облику варијационе једначине равнотеже љуске. Ради тога је неопходно саставити варијацију рада унутрашњих сила целе љуске:

$$\delta V = \iint \delta U d\Sigma, \quad (1.6)$$

где је интеграл распрострањен по целој средњој површи Σ , а δU има израз (1.1), или

$$\delta U = \frac{2}{3} \delta P_\varepsilon I_1 - \frac{4}{3} \delta P_{\varepsilon\kappa} I_2 + \frac{2}{3} \delta P_\kappa I_3. \quad (1.7)$$

Овде је:

$$I_1 = \frac{\sqrt{3}}{2 P_\kappa^{1/2}} B, \quad I_2 = \frac{\sqrt{3} P_{\varepsilon\kappa}}{2 P_\kappa^{3/2}} B + \frac{3}{4 P_\kappa} A, \quad (1.8)$$

$$I_3 = \frac{3 \sqrt{3}}{8 P_\kappa^{3/2}} C + \frac{\sqrt{3} P_{\varepsilon\kappa}^2}{2 P_\kappa^{5/2}} B + \frac{3 P_{\varepsilon\kappa}}{2 P_\kappa^2} A.$$

При чему ако преовлађује деформација савијања

$$\left(-\frac{h}{2} \leq z_0 = \frac{P_{\varepsilon\kappa}}{P_\kappa} \leq +\frac{h}{2} \right),$$

онда ћемо величинама A, B, C приписати индекс „0“ и израчунаваћемо их по обрасцима:

$$A_0 = - \int_{e_{i0}}^{e_{i1}} \sigma_i de_i + \int_{e_{i0}}^{e_{i2}} \sigma_i de_i = \int_{e_{i1}}^{e_{i2}} \sigma_i de_i,$$

$$B_0 = \int_{e_{i0}}^{e_{i1}} \frac{\sigma_i de_i}{\sqrt{e_i^2 - e_{i0}^2}} + \int_{e_{i0}}^{e_{i2}} \frac{\sigma_i de_i}{\sqrt{e_i^2 - e_{i0}^2}}, \quad (1.9)$$

$$C_0 = \int_{e_{i0}}^{e_{i1}} \sigma_i \sqrt{e_i^2 - e_{i0}^2} de_i + \int_{e_{i0}}^{e_{i2}} \sigma_i \sqrt{e_i^2 - e_{i0}^2} de_i,$$

ако пак преовлађује истезање – притисак средње површи $\left(|z_0| > \frac{h}{2} \right)$,

тада ћемо величинама A, B, C приписати индекс „1“ и израчунавати их по обрасцима:

$$A_1 = A_0 = \int_{e_{i1}}^{e_{i2}} \sigma_i de_i, \quad B_1 = \int_{e_{i1}}^{e_{i2}} \frac{\sigma_i de_i}{\sqrt{e_i^2 - e_{i0}^2}} \text{sign}(e_{i2} - e_{i1}),$$

$$C_1 = \int_{e_{i1}}^{e_{i2}} \sigma_i \sqrt{e_i^2 - e_{i0}^2} de_i \text{sign}(e_{i2} - e_{i1}). \quad (1.10)$$

Приметимо, да је тачка $z = z_0$ тачка минимума e_i , пошто је $\frac{d^2 e_i}{dz^2} > 0$,

дакле, увек важе неједнакости:

$$e_{i1} \geq e_{i0}, \quad e_{i2} \geq e_{i0}, \quad (1.11)$$

при чему је

$$e_{i1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P_\epsilon + h P_{\epsilon\chi} + \frac{h^2}{4} P_\chi}, \quad \left(z = -\frac{h}{2} \right);$$

$$e_{i2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P_\epsilon - h P_{\epsilon\chi} + \frac{h^2}{4} P_\chi}, \quad \left(z = +\frac{h}{2} \right); \quad (1.12)$$

$$e_{i0} = \frac{2}{\sqrt{3} \sqrt{P_\chi}} \sqrt{P_\epsilon P_\chi - P_{\epsilon\chi}^2}, \quad \left(z = z_0 = \frac{P_{\epsilon\chi}}{P_\chi} \right).$$

Ти обрасци дају вредности интензитета деформација у три тачке, које се налазе на оси z .

Затим је неопходно саставити израз за рад површинских сила на варијацијама померања δu , δv , δw и израз за рад ивичних генералисаних сила на њима одговарајућим варијацијама генералисаних померања, састав-

љених од δu , δv , δw и њихових извода по координатама, означавајући тај израз са $\delta' A$, добивамо варијациону једначину равнотеже:

$$\delta V = \delta A,$$

чије се решење може наћи, на пример, Рицовом методом.

§ 2. Коначна релација А. А. Иљушина

Покажимо, да између сила и момената егзистира коначна (не диференцијална) релација, коју је нашао А.А. Иљшин [55].

Ако је интензитет деформација e_i произвољног слоја љуске довољно велики у поређењу са границом течења e_s , тј.

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P_\varepsilon - 2z P_{\varepsilon\chi} + z^2 P_\chi} = e_i \gg e_s, \quad (2.1)$$

и њен материјал не поседује очвршћење, тада се закон $\sigma_i = \Phi(e_i)$ поклапа са Мизесовим условом пластичности:

$$\sigma_i = \sigma_s = \text{const}, \quad (2.2)$$

или приближно може бити замењен Сен Венан-Кулоновим (Saint Venant-Coulomb) условом пластичности

$$\tau_m = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} = \text{const}. \quad (2.3)$$

У том случају егзистира коначна релација између сила и момената. Стварно, из образаца (1.9) и (1.10), износећи испред знака интеграла константу σ_s , можемо израчунати вредности функција A , B C . Тако, у случају преовлађујућих деформација савијања обрасци (1.9) добивају облик:

$$A_0 = \sigma_s (e_{i2} - e_{i1}), \quad B_0 = \sigma_s \ln \frac{(e_{i1} + \sqrt{e_{i1}^2 - e_{i0}^2})(e_{i2} + \sqrt{e_{i2}^2 - e_{i0}^2})}{e_{i0}^2}, \quad (2.4)$$

$$C_0 = \frac{\sigma_s}{2} (e_{i1} \sqrt{e_{i1}^2 - e_{i0}^2} + e_{i2} \sqrt{e_{i2}^2 - e_{i0}^2}) - \frac{1}{2} e_{i0}^2 B_0, \quad (2.5)$$

а у случају преовлађујућих дилатација средње површи из образаца (1.10) налазимо:

$$A_1 = \sigma_s (e_{i2} - e_{i1}), \quad B_1 = \sigma_s \left| \ln \frac{e_{i2} + \sqrt{e_{i2}^2 - e_{i0}^2}}{e_{i1} + \sqrt{e_{i1}^2 - e_{i0}^2}} \right|. \quad (2.6)$$

У оба случаја се величине e_{i1} , e_{i2} , e_{i0} изражавају обрасцима (1.12). Посматрајући последње као једначине по три квадратне форме P_ε , $P_{\varepsilon\chi}$, P_χ , написаћемо их у облику:

$$P_{\varepsilon} + h P_{\varepsilon x} + \frac{h^2}{4} P_x = \frac{3}{4} e_{i1}^2,$$

$$P_{\varepsilon} - h P_{\varepsilon x} + \frac{h^2}{4} P_x = \frac{3}{4} e_{i2}^2,$$

$$P_{\varepsilon} P_x - P_{\varepsilon x}^2 = \frac{3}{4} e_{i0}^2 P_x.$$

Решење тих једначина по квадратним формама доводи до ових резултата:

$$h P_{\varepsilon x} = \frac{3}{8} (e_{i1}^2 - e_{i2}^2), \quad P_{\varepsilon} = \frac{3}{8} (e_{i1}^2 - e_{i2}^2) - \frac{h^2}{4} P_x,$$

$$\frac{h^2}{4} P_x = \frac{3}{16} (\sqrt{e_{i1}^2 - e_{i0}^2} \pm \sqrt{e_{i2}^2 - e_{i0}^2}). \quad (2.7)$$

Да би се одредио знак у последњој формули, неопходно је узети у обзир доминантну деформацију. Тако, на пример, у случају доминантне деформације савијања имамо:

$$-2 \frac{h^2}{4} P_x \leq h P_{\varepsilon x} \leq 2 \frac{h^2}{4} P_x.$$

Лако је проверити, да ће та неједнакост важити, ако се у формули (2.7) за P_x у заградама узме знак (+). Слично се убеђујемо у то да у случају када доминирају деформације истезања-притиска средње површи, важи једна од неједнакости:

$$z_0 = \frac{P_{\varepsilon x}}{P_x} > \frac{h}{2}, \quad z_0 = \frac{P_{\varepsilon x}}{P_x} < -\frac{h}{2}.$$

Она ће бити испуњена, ако се за P_x у заградама (2.7) узме знак (-). Дакле, даље у свим обрасцима, који имају два знака, горњи знак ће се односити на случај доминантног савијања љуске, а доњи у случају доминантног истезања-притиска.

Уведимо два основна параметра λ и μ на следећи начин:

$$\lambda = \frac{e_{i2}}{e_{i1}}, \quad \mu = \frac{e_{i0}}{e_{i1}}. \quad (2.8)$$

Ти параметри задовољавају услове

$$0 \leq \lambda \leq \mu \leq 1, \quad (2.9)$$

пошто је e_{i0} — минимална вредност интензитета деформације у датој тачки љуске. Тада се обрасци (2.7) могу написати у облику:

$$P_{\varepsilon x} = \frac{3 e_{i1}^2}{8 h} \Delta \Delta_1, \quad P_{\varepsilon} = \frac{3 e_{i1}^2}{16} (4 \mu^2 + \Delta^2), \quad P_x = \frac{3 e_{i1}^2}{4 h^2} \Delta_1^2, \quad (2.10)$$

где Δ_1 и Δ означавају следеће функције:

$$\Delta_1 = \left| \sqrt{1 - \mu^2} \pm \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} \right|, \quad \Delta = \frac{1 - \lambda^2}{\Delta_1}. \quad (2.11)$$

Облик обрасца (2.10) за P_ε постаје потпуно јасан, ако се узме у обзир идентичност,

$$4\mu^2 + \Delta^2 = 1 + \lambda^2 + 2\mu^2 \pm 2\sqrt{(1-\mu^2)(\lambda^2-\mu^2)}.$$

Користећи ознаке λ , μ и установљеним правилом примене двозначних формула, могу се сада написати изрази за функције A , B , C у облику:

$$\begin{aligned} A &= \sigma_s e_{i1} \varphi(\lambda, \mu), & B &= \sigma_s \psi(\lambda, \mu), \\ C &= \frac{1}{2} \sigma_s e_{i1}^2 [\chi(\lambda, \mu) - \mu^2 \psi(\lambda, \mu)], \end{aligned} \quad (2.12)$$

при чему се функције φ , ψ и χ дефинишу овако:

$$\varphi = \lambda - 1, \quad \psi = \left| \ln \frac{1 + \sqrt{1-\mu^2}}{\mu} \pm \ln \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2-\mu^2}}{\mu} \right|, \quad (2.13)$$

$$\chi = \left| \sqrt{1-\mu^2} \pm \sqrt{\lambda^2-\mu^2} \right|.$$

Из образаца (2.10) и (2.12) сада се може видети, да су квадратне форме P_s , P_H , P_{sH} функције само параметара λ , μ и не зависе од величине e_{i1} :

$$\begin{aligned} P_s &= I_1^2 P_\varepsilon - 2 I_1 I_2 P_{\varepsilon\kappa} + I_2^2 P_\kappa, \\ P_H &= I_2^2 P_\varepsilon - 2 I_2 I_3 P_{\varepsilon\kappa} + I_3^2 P_\kappa, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$P_{sH} = I_1 I_2 P_\varepsilon - (I_1 I_3 + I_2^2) P_{\varepsilon\kappa} + I_2 I_3 P_\kappa.$$

Приметимо, да релације (2.14) представљају три алгебарске једначине из којих се форме P_ε , P_κ , $P_{\varepsilon\kappa}$ могу изразити помоћу P_s , P_H , P_{sH} :

$$P_\varepsilon = f_1(P_s, P_H, P_{sH}), \quad P_\kappa = f_2(P_s, P_H, P_{sH}), \quad P_{\varepsilon\kappa} = f_3(P_s, P_H, P_{sH}). \quad (2.15)$$

Уствари, у првој једнакости (2.14) сабирци имају заједнички множилац $\sigma_s^2 h^2$, али не зависе од e_i , пошто је I_1^2 обрнуто пропорционално e_{i1}^2 , а P_ε директно пропорционално e_{i1}^2 . Аналогно се убеђујемо, да у другој једнакости (2.14) сабирци имају заједнички множилац $\sigma_s^2 h^4$, а e_{i1} у њима се скраћује, а у трећој једнакости (2.14) сабирци не зависе од e_{i1} и имају заједнички множилац $\sigma_s^2 h^3$.

У вези са тим природно је увести ознаке за карактеристичне вредности сила T_1 , T_2 , T_{12} и момената M_1 , M_2 , M_{12} :

$$T_s = \sigma_s h, \quad M_s = \frac{\sigma_s h^2}{4}. \quad (2.16)$$

Величине T_s и M_s респективно у проблемима о безмоментним деформацијама љуски и у проблемима о чисто моментним деформацијама играју исту улогу, као граница течења σ_s у проблему равног напонског стања. Зато је целисходно увести ознаке за бездимензионе силе и моменте:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{T_1}{T_s}, & t_2 &= \frac{T_2}{T_s}, & t_{12} &= \frac{T_{12}}{T_s}; \\ m_1 &= \frac{M_1}{M_s}, & m_2 &= \frac{M_2}{M_s}, & m_{12} &= \frac{M_{12}}{M_s}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

а уместо квадратних форми:

$$P_s = \frac{3}{4} (T_1^2 - T_1 T_2 + T_2^2 + 3 T_{12}^2),$$

$$P_H = \frac{3}{4} (M_1^2 - M_1 M_2 + M_2^2 + 3 M_{12}^2), \quad (2.18)$$

$$P_{sH} = \frac{3}{4} \left(T_1 M_1 + T_2 M_2 - \frac{1}{2} T_1 M_2 - \frac{1}{2} T_2 M_1 + 3 T_{12} M_{12} \right);$$

посматрати квадратне форме од бездимензионих сила и момената:

$$Q_t = t_1^2 - t_1 t_2 + t_2^2 + 3 t_{12}^2, \quad Q_m = m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2 + 3 m_{12}^2, \quad (2.19)$$

$$Q_{tm} = t_1 m_1 - \frac{1}{2} t_1 m_2 - \frac{1}{2} t_2 m_1 + t_2 m_2 + 3 t_{12} m_{12}.$$

Последње су везане са P_s , P_H , P_{sH} (2.18) очевидним релацијама:

$$Q_t = \frac{4 P_s}{3 T_s^2}, \quad Q_m = \frac{4 P_H}{3 M_s^2}, \quad Q_{tm} = \frac{4 P_{sH}}{3 T_s M_s}. \quad (2.20)$$

Изводећи трансформације десних страна једначина (2.14), тј. дизања на квадрат полинома и множења, а затим скупљајући коефицијенте уз φ^2 , ψ^2 , $\varphi\psi$, $\chi\psi$, $\varphi\chi$, χ^2 , добивамо следеће једначине:

$$Q_t = \frac{1}{\Delta_1^2} (\mu^2 \psi^2 + \varphi^2), \quad Q_{tm} = \frac{2}{\Delta_1^3} (\mu^2 \Delta \psi^2 + \Delta \varphi^2 + \mu \varphi \psi + \varphi \chi),$$

$$Q_m = \frac{4}{\Delta_1^4} [\mu^2 (\mu^2 + \Delta^2) \psi^2 + (4 \mu^2 + \Delta^2) \varphi^2 + 2 \mu^2 \Delta \varphi \psi - 2 \mu^2 \psi \chi + 2 \Delta \varphi \chi + \chi^2]. \quad (2.21)$$

Пошто су десне стране једначина (2.21), према (2.11) и (2.13), функције само два параметара λ и μ , то у тродимензионом простору са променљивим Q_t , Q_m , Q_{tm} оне представљају површ:

$$F(Q_t, Q_m, Q_{tm}) = 0, \quad (2.22)$$

а (2.21) је параметарска једначина те површи. Добијена на тај начин веза између квадратних форми (2.19) назива се коначном релацијом између сила и момената, који дејствују у љуски. Тај резултат добијен је на основу Мизесове хипотезе $\sigma_i = \sigma_s$ и зато представља генерализовани Мизесов услов; приметимо такође, да ће коначна релација имати исти такав облик и према Сен Венан-Кулоновој теорији течења.

Наведимо три посебна случаја коначне релације.

1. Безмоментно напонско стање важи за $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_{12} = 0$, при томе је и $P_{\epsilon\kappa} = 0$. Коначну релацију добивамо из (2.21), ако ставимо да су деформације влакана по дебљини љуске једнаке:

$$e_{i1} = e_{i2} = e_{i0}, \quad \lambda = \mu = 1.$$

У обрасцима (2.11) и (2.13) може се узети доњи знак и затим одредити неодређености у обрасцима (2.21). Тада налазимо Мизесов услов:

$$Q_m = Q_{tm} = 0, \quad Q_t = 1,$$

или у развијеном облику:

$$T_1^2 - T_1 T_2 + T_2^2 + 3T_{12}^2 = T_s^2. \quad (2.23)$$

2. Чисто моментно напонско стање важи код одсуства дилатација средње површи. Квадратна форма $P_\varepsilon = 0$, па зато $P_{\varepsilon\chi} = 0$. Како следи из обрасца (1.3), интензитет деформација e_i је парна функција z , па према (1.12) имамо:

$$e_{i1} = e_{i2}, \quad e_{i0} = 0, \quad \lambda = 1, \quad \mu = 0.$$

У обрасцима (2.11), (2.13) треба узети доњи знак, јер је $z_0 = \frac{P_{\varepsilon\chi}}{P_\chi} = 0$,

на тај начин добивамо:

$$\Delta_1 = 2, \quad \Delta = 0, \quad \varphi = 0, \quad \psi = 2 \ln 2, \quad \chi = 2.$$

Коначна релација (2.21) добива овај облик:

$$Q_t = Q_{tm} = 0, \quad Q_m = 1,$$

или

$$M_1^2 - M_1 M_2 + M_2^2 + 3M_{12}^2 = M_s^2. \quad (2.24)$$

3. Простије сложено напонско стање љуске за $P_\chi = 0$, $P_\varepsilon = 0$ имамо, ако је билинеарна форма ($P_{\varepsilon\chi} = 0$) једнака нули:

$$P_{\varepsilon\chi} = \kappa_1 \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \right) + \kappa_2 \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \right) + \kappa_{12} \varepsilon_{12} = 0. \quad (2.25)$$

Оно може постојати, на пример, у случајевима:

$$a) \quad \kappa_{12} = \kappa_2 = 0, \quad \kappa_1 \neq 0, \quad \varepsilon_1 = -\frac{1}{2} \varepsilon_2;$$

$$b) \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_1 \neq 0, \quad \kappa_1 = -\frac{1}{2} \kappa_2$$

и многим другим.

Из (2.7) при томе имамо: $e_{i1} = e_{i2} > e_{i0}$, $\lambda = 1$, $\mu < 1$, тј. уз присуство доминантне деформације савијања. Налазимо:

$$\Delta = \varphi = 0, \quad \Delta_1 = \chi = 2\sqrt{1-\mu^2}, \quad \psi = 2 \ln \frac{1 + \sqrt{1-\mu^2}}{\mu},$$

и после простих трансформација коначна релација добива облик:

$$Q_t = \frac{\mu^2}{1-\mu^2} \ln \frac{1 + \sqrt{1-\mu^2}}{\mu}, \quad Q_{tm} = 0, \quad (2.26)$$

$$Q_m = \left(\frac{\mu}{1-\mu^2} \ln \frac{1 + \sqrt{1-\mu^2}}{\mu} - \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \right)^2.$$

Она даје пресечну линију површи (2.22) са равни $Q_{tm}=0$. Пошто су Q_t , Q_m искључиво позитивни, цела површ се налази између равни $Q_t=0$ и $Q_m=0$, а линија (2.26) — између позитивних смерова оса Q_t , Q_m , тј. у првом квадранту равни $Q_{tm}=0$. Тачка $Q_m=0$, $Q_t=1$ која одговара безмоментном стању љуске, добива се из (2.26) за $\mu=1$, а тачка $Q_t=0$, $Q_m=1$, која одговара чисто моментном стању љуске, добива се за $\mu=0$. Последње је очевидно, јер је $\mu \ln \mu = 0$ за $\mu=0$.

§ 3. Поставка проблема о одређивању носивости љуски

Имајући коначну релацију А.А. Иљушина, може се дати општа поставка проблема одређивања носивости љуски.

У ствари, ако се претпостави, да су силе и моменти или квадратне форме Q_t , Q_m , Q_{tm} дати и задовољавају коначну релацију (2.22), тада помоћу њих било које две једначине (2.22) омогућавају да се нађу параметри:

$$\lambda = \frac{e_{i2}}{e_{i1}}, \quad \mu = \frac{e_{i0}}{e_{i1}},$$

а затим, према (2.10) и (2.8), да се нађу I_1 , I_2 , I_3 . При томе величина e_{i1} остаје неодређена, и ми добијамо:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{e_{i1}} F_1(Q_t, Q_m, Q_{tm}), & I_2 &= \frac{1}{e_{i1}} F_2(Q_t, Q_m, Q_{tm}), \\ I_3 &= \frac{1}{e_{i1}} F_3(Q_t, Q_m, Q_{tm}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где ће F_n бити потпуно дефинисане функције сила и момената.

Ако се те вредности интеграла I_1 , I_2 , I_3 унесу у обрасце за силе и моменте, то ће једна од на тај начин добивених шест једначина бити последица осталих пет, јер силе T и моменти M задовољавају коначну релацију (2.22). Решавајући тих шест једначина по шест деформација и кривина, ми добијамо, имајући на уму (2.7) релације:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= e_{i1} \frac{S_1 F_3 - H_1 F_2}{\Delta'}, & \kappa_1 &= e_{i1} \frac{S_1 F_2 - H_1 F_1}{\Delta'}; \\ \varepsilon_2 &= e_{i1} \frac{S_2 F_3 - H_2 F_2}{\Delta'}, & \kappa_2 &= e_{i1} \frac{S_2 F_2 - H_2 F_1}{\Delta'}; \\ \varepsilon_{12} &= e_{i1} \frac{S_{12} F_3 - H_{12} F_2}{\Delta'}, & \kappa_{12} &= e_{i1} \frac{S_{12} F_2 - H_{12} F_1}{\Delta'}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где је

$$\Delta' = F_1 F_3 - F_2^2, \quad S_1 = T_1 - \frac{1}{2} T_2, \quad S_2 = T_2 - \frac{1}{2} T_1, \quad S_{12} = \frac{3}{2} T_{12}$$

$$H_1 = M_1 - \frac{1}{2} M_2, \quad H_2 = M_2 - \frac{1}{2} M_1, \quad H_{12} = \frac{1}{2} M_{12};$$

при чему у (3.2), ако e_{i1} има вредност (1.12), једна од једначина је последица осталих пет; у то се лако уверити, ако се из (3.2) саставе одговарајуће квадратне форме.

Пошто се шест координата деформације и кривљења изражавају помоћу диференцијалних операција по криволинијским координатама помоћу три координате вектора померања w тачке средње површи, оне треба да задовољавају једначине компатибилности деформација. У општем случају једначине компатибилности могу се изразити само помоћу сила T и момената M , али у случају (3.2) они ће садржавати још једну функцију координата e_{i1} . На тај начин, диференцијалних једначина равнотеже и услова компатибилности деформација биће недовољно за одређивање сила T_1, T_2, T_{12} , момената M_1, M_2, M_{12} и непознате функције e_{i1} . Једначина која недостаје биће коначна релација (2.21) између сила и момената. С обзиром на то, да је та релација недиференцијална и из ње следи да су силе и моменти чак и њихове квадратне форме Q_t, Q_m, Q_{tm} ограничени по величини, јасно је да је за произвољни систем спољашњих сила равнотежа љуске немогућа.

Носивост љуске назива се она гранична вредност спољашњих сила, при којој унутрашње силе T и моменти M задовољавају коначну релацију (2.21), једначине равнотеже, услове компатибилности деформација и граничне услове. Тада се питање носивости љуске решава релативно просто. Оно се још више упрошћава, ако силе и моменти могу да се изразе спољашњим силама и моментима само помоћу једначина равнотеже, што важи, на пример, у бездимензионој теорији љуски: у таквом случају коначна релација (2.21) дефинише носивост.

Услови компатибилности деформација чине проблем одређивања носивости веома сложеним и зато важан значај имају приближне методе. Енергијски метод решења састоји се у следећем: задаје се на погодан начин деформисана површ љуске и, састављајући изразе за варијације рада унутрашњих сила и рад спољних сила на варијацијама померања изводи њихово изједначавање. Приближна гранична вредност спољашњих сила добива се, ако се стави да је очвршћење материјала једнако нули, а деформације се неограничено увећавају, или, што је исто, одржавајући константним границу течења $\sigma_s = 3 G e_s$, G тежи ка бесконачности, а e_s — ка нули.

§ 4. Одређивање носивости претходно деформисане љуске

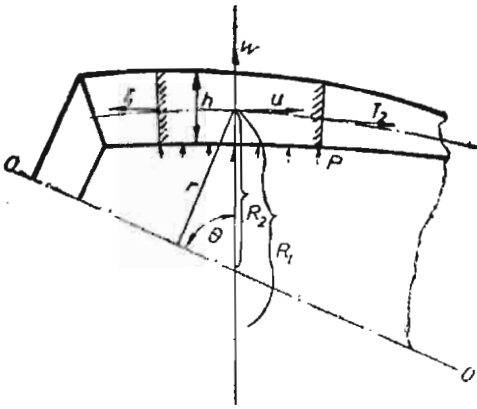
Размотримо носивост и ојачање љуски. Ојачањем називамо процес повећања носивости љуске дајући јој претходну пластичну деформацију релативно велике величине.

Спољаашње силе, које дејствују на љуску, представимо у виду унутрашњег притиска и резултујуће силе P , која истеже љуску у правцу осе OO (сл. 33); сила P је пројекција на осу спољашњих сила, које дејствују на део љуске, који се налази здесна или слева од пресека. Како је напонско стање љуске безмоментно, меридијанска истежућа сила T_1 и тангентна T_2 везане су са одговарајућим напонима σ_1, σ_2 простим обрасцима:

$$T_1 = \sigma_1 h, \quad T_2 = \sigma_2 h.$$

Једначине равнотеже судова су познате и имају облик:

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = p, \quad 2\pi r T_1 \sin \theta = P, \quad (4.1)$$



сл. 33

а напони σ_1 , σ_2 дефинишу се обрасцима:

$$\sigma_1 = \frac{rp}{h} s_1, \quad \sigma_2 = \frac{rp}{h} s_2, \quad (4.2)$$

$$s_1 = \frac{p R_2}{2\pi r^3 p}, \quad s_2 = \frac{R_2}{r} - \frac{R_2}{R_1} s_1.$$

Интензитет напона одређује се обрасцем:

$$\sigma_t = |p| \frac{r}{h} \sqrt{s_1^2 - s_1 s_2 + s_2^2}. \quad (4.3)$$

На тај начин, у случају малих деформација љуске за потпуно одређивање напонског стања довољна је само једна једначина статике.

Ако материјал љуске не поседује очвршћење, тада из Мизесовог услова $\sigma_t = \sigma_s$ налазимо гранично оптерећење, које издржава љуска, тј. носивост љуске:

$$|p| \sqrt{s_1^2 - s_1 s_2 + s_2^2} = \frac{h}{r} \sigma_s. \quad (4.4)$$

Ако је активно оптерећење у пресеку мање од граничног, тј. лева страна једначине (4.4) је мања од десне, то је деформација љуске у том пресеку еластична; у противном случају равнотежа сила је немогућа.

За љуске, чији материјал поседује очвршћење и карактерише се дијаграмом $\sigma_t = \Phi(e_t)$ (или $\sigma_t = Ee_t(1 - \omega)$, $Ee_t = \sigma_t(1 + \varphi)$), тако што је дијаграмом $\sigma_t \sim e_t$ дефинисана функција $\varphi(\sigma_t)$ — помоћу датих сила p , P или напона σ_1 , σ_2 лако је наћи меридијанску и тангентну компонентну деформацију средње површи:

$$\varepsilon_1 = \frac{e_t}{\sigma_t} \left(\sigma_1 - \frac{1}{2} \sigma_2 \right), \quad \varepsilon_2 = \frac{e_t}{\sigma_t} \left(\sigma_2 - \frac{1}{2} \sigma_1 \right), \quad (4.5)$$

или, према (4.2):

$$\epsilon_1 = \frac{(1+\varphi)r\rho}{Eh} \left(s_1 - \frac{1}{2}s_2 \right), \quad \epsilon_2 = \frac{(1+\varphi)r\rho}{Eh} \left(s_2 - \frac{1}{2}s_1 \right). \quad (4.6)$$

Координате вектора померања тачке посматраног пресека у правцима спољашње нормале и изводнице на страну пораста угла θ означимо респективно са w и u (сл. 33). Тада обрасци, које изражавају деформације помоћу померања добивају облик:

$$\epsilon_1 = \frac{w}{R_1} + \frac{du}{R_1 d\theta}, \quad \epsilon_2 = \frac{w \sin \theta + u \cos \theta}{r}. \quad (4.7)$$

Померање u сматраћемо да је једнако нули у пресеку, где је $\theta = \frac{\pi}{2}$,

тј. тамо где је изводница љуске паралелна њеној оси. У таквом случају, интегралећи диференцијалну једначину по померању u , која се добива из (4.7) елиминацијом w , налазимо:

$$u = \sin \theta \int_{\pi/2}^{\theta} \frac{\epsilon_1 R_1 - \epsilon_2 R_2}{\sin \theta} d\theta, \quad w = \epsilon_2 R_2 - u \operatorname{ctg} \theta.$$

Уносећи свуда вредности ϵ_1 , ϵ_2 , добивамо коначне изразе за померања:

$$u = \frac{\sin \theta}{E} \int_{\pi/2}^{\theta} \frac{\rho r (1+\varphi)}{h \sin \theta} \left[s_1 \left(R_1 + \frac{1}{2} R_2 \right) - s_2 \left(R_2 + \frac{1}{2} R_1 \right) \right] d\theta, \quad (4.8)$$

$$w = \frac{\rho r (1+\varphi)}{Eh} \left(s_2 - \frac{1}{2} s_1 \right) R_2 - u \operatorname{ctg} \theta.$$

Овде се претпоставља да је функција φ изражена помоћу интензитета напона σ_i , која се са своје стране дефинише познатим величинама обрасцем (4.3). Пошто се еластична померања (у случају, ако је $\sigma_i < \sigma_s$) добивају по обрасцима (4.8), у које је нужно ставити $\varphi=0$, то је јасно, да се преостала померања \tilde{u} , \tilde{w} , која остају после уклањања оптерећења, добивају такође из образаца (4.8), ако се у њима уместо $(1+\varphi)$ задржи само величина φ .

За љуске, чији материјал поседује линеарно очвршћење, функција $\varphi(\sigma_i)$ има израз:

$$\varphi=0, \quad \sigma_i \leq \sigma_s;$$

$$\varphi = \frac{\lambda}{1-\lambda} \left(1 - \frac{\sigma_s}{\sigma_i} \right), \quad \sigma_i > \sigma_s; \quad \lambda = 1 - \frac{1}{E} \frac{d\sigma_i}{de_i}. \quad (4.9)$$

Ако се искористи тај израз за φ и, замењујући у њему σ_i по обрасцу (4.3), уврсти у (4.8), могу се добити у експлицитном облику укупне и преостале деформације љуски. Ипак интеграл, који улази у (4.8), може се израчунати само после задавања облика и димензија љуске, а такође и оптерећења.

Ако материјал љуске поседује знатно очвршћење, тако да, на пример, стваран отпор при слому узорка буде два пута већи од границе течења, тада се путем ојачања може знатно повећати отпорност љуске.

У случају сферне љуске, чији је почетни радијус R_0 и дебљина зида h_0 , а коначне димензије респективно R и h , имамо:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_t = \frac{R}{2h} p,$$

при чему је p — коначна вредност унутрашњег притиска. Деформације ε_1 , ε_2 су једнаке и одређују се обрасцем:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{R - R_0}{R_0} = \rho - 1, \quad \rho = \frac{R}{R_0}. \quad (4.10)$$

Из обрасца (4.5) имамо:

$$\rho - 1 = \frac{1 + \varphi}{E} \left(\sigma_1 - \frac{1}{2} \sigma_2 \right) = \frac{1 + \varphi}{2E} \sigma_t. \quad (4.11)$$

Из услова непроменљивости масе љуске је

$$4\pi R^2 h = 4\pi R_0^2 h_0, \quad (4.12)$$

и зато израз за интензитет напона σ_t можемо трансформисати на облик:

$$\sigma_t = \frac{p R_0}{2 h_0} \rho^3. \quad (4.13)$$

Пошто је карактеристика очвршћења материјала $\varphi(\sigma_t)$ позната, то једначина (4.11) дефинише притисак p , који је способна да издржи јако деформисана сферна љуска. Искористимо закон линеарног очвршћења (4.9) и одредимо тај притисак:

$$p = \lambda \frac{1 + m(\rho - 1)}{\rho^3} p_s, \quad (4.14)$$

где је p_s — притисак, при којем почиње течење узорка, и m — параметар, који зависи од дилатације $e_s = \frac{\sigma_s}{E}$ и од λ :

$$p_s = \frac{2 h_0}{R_0} \sigma_s, \quad m = \frac{2(1 - \lambda)}{\lambda e_s}. \quad (4.15)$$

Одредивши максимум p по ρ , налазимо да ће одговарајућа вредност деформације

$$\rho_m = \frac{R_m}{R_0}$$

бити:

$$\rho_m = \frac{3}{2} \frac{m-1}{m},$$

а максимални отпор очврсле љуске једнак:

$$p_m = \frac{4 m^3}{27 (m-1)^2} p_s. \quad (4.16)$$

Даље ојачање је нецелисходно зато што је праћено стањивањем зида, које слаби љуску јаче, него што је она ојачана. Приметимо, да максимална отпорност, која се добива обрасцем (4.16), за металне љуске није увек достижна, пошто се деформација ρ_m може показати већом од оне, при којој се врши слом. Али образац (4.14) показује, да ојачање, чак и незнатно, веома много повећава отпорност. На пример, за челик, који има $\lambda=0,98$, $e_s=2 \cdot 10^{-3}$, имамо $m \cong 20$; ширење сферне љуске само за 5% ($\rho=1,05$) даје $p=1,7p_s$ тј. повећава њену границу еластичности за 70%.

У случају цилиндарске љуске, која се деформише једнолико унутрашњим притиском, пошто је $\sigma_1 = \frac{1}{2} \sigma_2$, одговарајући обрасци имају облик:

$$p = \lambda \frac{1+m(\rho-1)}{\rho^2} p_s, \quad p_m = \frac{h_0}{\sqrt{3} R_0} \sigma_s, \quad m = \frac{2(1-\lambda)}{\sqrt{3} \lambda e_s}, \quad (4.17)$$

при чему се најпогодније ојачање одређује обрасцима:

$$\rho_m = 2 \frac{m-1}{m}, \quad p_m = \lambda \frac{m^2}{4(m-1)} p_s. \quad (4.18)$$

§ 5. Љуска са нехомогеним механичким својствима

Нехомогеност механичких својстава по дебљини зида љуске може се појавити из разних узрока и може се вештачки наметати у циљу повећања отпорности. На пример, при повећаној температури граница течења σ_s , коефицијент растерећења λ , модули еластичности G и K могу бити променљиви због знатног градијента температуре; у случају дејства млаза неутрона такође се појављују нехомогена механичка својства; специјалном термообработом, која доводи до променљиве расподеле чврстоће, могу се у низу случајева повећати експлоатациона својства љуски.

Овде размотримо само питање о величини највећег унутрашњег притиска p_s у цилиндру са променљивим пољем температуре по радијусу и променљивом границом течења материјала у зависности од температуре $\tau_s(\vartheta)$, при чему се притисак p_s одређује тако, да за произвољно r деформација цилиндра остаје још еластична и само на једном кругу $r=r_s$ (или на неколико истовремено) достиже се граница течења $\tau_m^* = \tau_s$. Како је познато из експеримената модули еластичности знатно слабије зависе од температуре, него граница течења, њих можемо сматрати константним

за онај дијапазон температуре, који је карактеристичан за цилиндар.

Нека је ϑ — карактеристична константна температура, која се узима произвољно. Уведимо ознаке:

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= \frac{1-\nu}{E \alpha_1 \vartheta_0} p, & \tilde{\tau}_s &= \frac{1-\nu}{E \alpha_1 \vartheta_0} \tau_s; \\ T &= \frac{1}{\vartheta_0} \vartheta(\zeta, t), & \tilde{\tau} &= \frac{1-\nu}{E \alpha_1 \vartheta_0} \tau_m; & \left(\zeta = \frac{r}{b}\right); \end{aligned} \quad (5.1)$$

овде је: p — унутрашњи притисак; ν — Пуасонов коефицијент; α_1 — коефицијент температурног линеарног ширења; b — спољашњи радијус цилиндра; a — унутрашњи радијус, $\alpha = \frac{a}{b}$. На основу решења [56]

имамо следећи израз за $\tilde{\tau}$:

$$\tilde{\tau} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} \frac{1}{\zeta^2} \left(\tilde{p} + \int_{\alpha}^{\zeta} T \zeta d\zeta \right) + \frac{1}{\zeta^2} \int_{\alpha}^{\zeta} T \zeta d\zeta - \frac{1}{2} T. \quad (5.2)$$

Граница течења $\tilde{\tau}_s$ (5.1) је позната функција температуре $T(\zeta, t)$, која се са своје стране сматра познатом функцијом радијуса $\left(\zeta = \frac{r}{b}\right)$ и времена t .

Према услову задатка за $r=r_s$, $\zeta=\zeta_s = \frac{r_s}{b}$ постиже се једнакост величина $\tilde{\tau}$ (5.2) и $\tilde{\tau}_s(T)$: $\zeta=\zeta_s$, $\tilde{\tau}_s(T) - \tilde{\tau} = 0$, при чему у околини $\zeta=\zeta_s$, тј. за $\zeta \geq \zeta_s$ и $\zeta \leq \zeta_s$, мора бити $\tilde{\tau}_s(T) - \tilde{\tau} > 0$. Значи, потпуни систем услова за $\zeta=\zeta_s$ има облик:

$$\tilde{\tau}_s(T) - \tilde{\tau} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} [\tilde{\tau}_s(T) - \tilde{\tau}] = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} [\tilde{\tau}_s(T) - \tilde{\tau}] > 0, \quad (5.3)$$

а систем две једначине, које дефинишу непознати круг $\zeta=\zeta_s$ и тражени највећи притисак $\tilde{p} = \tilde{p}_s$, биће:

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} \left(\tilde{p} + \int_{\alpha}^{\zeta} T \zeta d\zeta \right) + \int_{\alpha}^{\zeta} T \zeta d\zeta - \zeta^2 \left(\tilde{\tau}_s + \frac{1}{2} T \right) = 0,$$

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} \left(\tilde{p} + \int_{\alpha}^{\zeta} T \zeta d\zeta \right) + \int_{\alpha}^{\zeta} T \zeta d\zeta - \frac{1}{2} \zeta^2 T + \frac{1}{2} \zeta^3 \left(\frac{d \tilde{\tau}_s}{d T} + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial T}{\partial \zeta} = 0.$$

Одавде, одузимајући од друге релације прву, налазимо (за $\zeta=\zeta_s$):

$$\left(\frac{d \tilde{\tau}_s}{d T} + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial T}{\partial \zeta} + \frac{2}{\zeta} \tilde{\tau}_s = 0, \quad (5.4)$$

$$\tilde{p}_s = \frac{1-\alpha^2}{\alpha^2} \left[\zeta^2 \left(\tilde{\tau}_s + \frac{1}{\zeta} T \right) - \int_{\alpha}^{\zeta} T \zeta d\zeta \right] - \int_{\alpha}^{\zeta} T \zeta d\zeta. \quad (5.5)$$

Једначина (5.4) дефинише радијус $r_s(\zeta_s)$; притисак p_s дефинише се једначином (5.5).

Наведено решење губи смисао, ако у области $1 > \zeta > \alpha$ не егзистира минимум $\tilde{\tau}_s - \tilde{\tau}$ и ако се та разлика монотонно мења по пресеку. Тада њену најмању вредност треба изједначити са нулом, одакле ће се наћи вредност силе \tilde{p}_s . На пример, ако та разлика расте од унутрашње ка спољашњој површи, то се \tilde{p}_s налази за $\zeta = \alpha$ из услова $\tilde{\tau}_{s\alpha} - \tilde{\tau}_{\zeta=\alpha} = 0$:

$$\tilde{p}_s = (1 - \alpha^2) \left(\tilde{p}_{s\alpha} - \frac{1}{2} T_\alpha \right) - \int_\alpha^1 T \zeta d\zeta. \quad (5.6)$$

Ако је температурно поље цилиндра радијално и стационарно, тада ће распоред температуре бити:

$$T = T_b + \frac{T_a - T_b}{\ln \alpha} \ln \zeta. \quad (5.7)$$

Образац (5.4) за ζ_s добива облик:

$$\frac{d\tilde{\tau}_s}{dT} + \frac{2\tilde{\tau}_s \ln \alpha}{T_a - T_b} + \frac{1}{2} = 0; \quad (\zeta = \zeta_s). \quad (5.8)$$

Одавде се ζ_s налази из дијаграма зависности τ_s од T за дато T по ζ (5.7), после чега се \tilde{p}_s налази по (5.5).

Образац (5.6) добива облик:

$$\tilde{p}_s = (1 - \alpha^2) \tilde{\tau}_{s\alpha} + \frac{1}{2} (T_a - T_b) \frac{1 - \alpha^2 + \ln \alpha^2}{\ln \alpha^2}. \quad (5.9)$$

§ 6. Љуска, подвргнута загревању зрачењем

Претходно наведимо неке информације о поставци проблема о деформацији плоча и љуски, подвргнутих изненадном загревању зрачењем [57]. Решење тих проблема захтева проучавање једначина провођења топлоте и једначина термоеластичности. Узимајући у обзир, да се при састављању једначина термоеластичности у теорији плоча и љуски користи хипотеза Кирхоф-Лава о очувању нормалног елемента, оправдано је увођење сличне хипотезе и у једначине провођења топлоте. Нека се температура T , рачуната од неког константног нивоа, дефинише изразом:

$$T = T_0(x_1, x_2) + x_3 \Theta(x_1, x_2), \quad (6.1)$$

где су x_1, x_2 — криволинијске координате средње површи; x_3 — координата, рачуната по нормали на средњу површ. Да би извели једначине за средњу температуру T_0 и температурни градијент Θ , искористимо варијациони принцип $\delta I = 0$ за функционал:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} \int_V \left[c \rho \left(T^* \frac{\partial T}{\partial t} - T \frac{\partial T^*}{\partial t} \right) + \lambda \nabla_i T \nabla^i T^* - q(T - T^*) \right] dV + \int_S k(T T^* - T_H T - T_H T^*) dS \right\} dt. \quad (6.2)$$

Овде је c — специфична топлота; ρ — густина материјала; λ — коефицијент топлотне проводљивости; q — густина извора топлоте, једнака количини топлоте, која се добива по јединици запремине за јединицу времена; k — коефицијент одвајања топлоте површи љуске; T_H — температура околне средине; V — запремина љуске; S — њена површ t_0 и t — два произвољно изабрана тренутка времена; ∇_t и ∇^t — симболи коваријантног и контраваријантног диференцирања. Са T^* означена је температура процеса, који се одвија у правцу, супротном посматраном процесу. Лако се уверити, да се варијациона једначина Остроградског-Ојлера и природни гранични услови за функционал (6.2) поклапају са једначином провођења топлоте и условом конвективног одвајања топлоте на површи S .

Уносећи израз (6.1) у (6.2), заменимо интеграцију по запремини V интеграцијом по средњој површи, а интеграцију по површи S — интеграцијом по спољној и унутрашњој површи љуске, а такође по њеним основама. При томе ћемо сматрати, да је дебљина љуске веома мала у поређењу са радијусима кривине средње површи. Једначина Остроградског-Ојлера за трансформацију функционала добива облик:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_0}{\partial t} - \chi \Delta T_0 + \frac{1}{c \rho h} [(k_+ + k_-) T_0 + (k_+ - k_-) h \Theta] = \\ = \frac{1}{c \rho h} (Q + k_+ T_+ + k_- T_-), \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \chi \Delta \Theta + \frac{12 \chi}{h^2} \Theta + \frac{6}{c \rho h^2} \left[(k_+ - k_-) T_0 + \frac{1}{2} (k_+ - k_-) h \Theta \right] = \\ = \frac{6}{c \rho h^2} \left(\frac{2 Q z_0}{h} + k_+ T_+ - k_- T_- \right), \end{aligned} \quad (6.4)$$

где је $\Delta = \Delta_t \Delta^t$ — Лапласов оператор; $\chi = \frac{\lambda}{c \rho}$ — коефицијент прово-

ђења топлоте; T_+ и T_- — температура средине са спољашње и унутрашње стране љуске; K_+ и K_- — одговарајући коефицијенти одвајања топлоте; Q — густина топлотних извора рачуната по јединици површине средње површи; z_0 — координата „тежишта“ извора. Природни гранични услови своде се на услове размене топлоте на основама:

$$\lambda \nabla^t T_0 n_i + k_\gamma (T_0 - T_\gamma) = 0, \quad (6.5)$$

$$\lambda \Delta_t \Theta n_i + k_\gamma (\Theta - \Theta_\gamma) = 0. \quad (6.6)$$

Овде је n_i — вектор нормале на основну површ; k_γ — коефицијент одвајања топлоте за ту површ.

Проучимо следећи пример. Нека се неограничена плоча константне дебљине h , која се налази у миру за $t < 0$, подвргава у тренутку $t = 0$, дејству топлотног зрачења, чији интензитет даље опада током времена.

Претпоставља се да је поље зрачења осносиметрично. Између површи плоче и средине нека се реализују услови конвективне размене топлоте са коефицијентом размене топлоте k , температура средине је $T_+ = T_- = 0$. Једначине (6.3) и (6.4) добивају облик:

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} - \chi \Delta T_0 + \frac{2k T_0}{c \rho h} = \frac{Q}{c \rho h}, \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} - \chi \Delta \Theta + \left(\frac{12\chi}{h^2} + \frac{6k}{c \rho h} \right) \Theta = \frac{12 Q z_0}{c \rho h^3}. \quad (6.8)$$

Једначине (6.7) и (6.8) треба да буду разматране симултано са једначинама термоеластичности. Једначина равнoг осносиметричног проблема, написана по померањима, има облик:

$$\Delta u - \frac{u}{r^2} + \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha(1+\nu) \frac{\partial T_0}{\partial r}, \quad (6.9)$$

где је u — радијално померање; α — коефицијент температурног ширења; ν и E — Пуасонов коефицијент и модул еластичности. Истовремено једначина савијања биће:

$$\Delta^2 w - \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \alpha(1+\nu) \Delta \Theta, \quad (6.10)$$

где је w — нормални угиб; D — цилиндарска крутост. Једначине (6.7)–(6.10) интеграле се за почетне услове:

$$T_0(r,0) = \Theta(r,0) = u(r,0) = \frac{\partial u(r,0)}{\partial t} = w(r,0) = \frac{\partial w(r,0)}{\partial t} = 0$$

и за граничне услове, који захтевају ограниченост свих функција за $r=0$ и одговарајућег опадања свих функција при r , које тежи бесконачности. При томе, наравно, и густини извора $Q(r, t)$ треба да су наметнута одговарајућа ограничења.

Решење једначина (6.7)–(6.10) тражимо помоћу Ханкелове (Hankel) трансформације. Поље температуре одређује се обрасцима:

$$T_0(r,t) = \int_0^{\infty} T_0^*(p,t) J_0(pr) p dp, \quad (6.11)$$

$$\Theta(r,t) = \int_0^{\infty} \Theta_0^*(p,t) J_0(pr) p dp,$$

где је

$$T_0^*(p, t) = \frac{1}{c \rho h} \int_0^t \exp [-(\chi p^2 + a_0)(t - \tau)] Q^*(p, \tau) d \tau,$$

$$\Theta_0^*(p, t) = \frac{12 z_0}{c \rho h^3} \int_0^t \exp [-(\chi p^2 + a)(t - \tau)] Q^*(p, \tau) d \tau, \quad (6.12)$$

$$Q^*(p, t) = \int_0^\infty Q(p, t) J_0(pr) r dr.$$

При томе су

$$a_0 = \frac{2k}{c \rho h}, \quad a = \frac{12\chi}{h^2} + \frac{6k}{c \rho h}.$$

За поље померања аналогно добивамо:

$$u(r, t) = \int_0^\infty u^*(p, t) J_1(pr) p dp,$$

$$w(r, t) = \int_0^\infty w^*(p, t) J_0(pr) p dp, \quad (6.13)$$

где је

$$u^*(p, t) = a g_0^2 (1 + \nu) \int_0^t \sin [g_0 p (t - \tau)] T_0^*(p, \tau) d \tau, \quad (6.14)$$

$$w^*(p, t) = a g^2 (1 + \nu) \int_0^t \sin [g p^2 (t - \tau)] \Theta_0^*(p, \tau) d \tau.$$

Овде је

$$g_0^2 = \frac{E}{\rho (1 - \nu^2)}, \quad g^2 = \frac{D}{\rho h}.$$

Параметри c , k , χ , z_0 , ρ , E , ν и α су по претпоставци константни.

Проучимо случај, када је промена густине извора по радијусу подвргнута Гаусовом закону, а њихов интензитет се мења током времена по експоненцијалном закону:

$$Q(r, t) = Q_0 \exp \left[- \left(\frac{r^2}{4 r_0^2} + s t \right) \right], \quad t \geq 0. \quad (6.15)$$

Овде су Q_0 , r_0 и s — константе. Увршћење у обрасце (6.12) даје:

$$T_0^*(p, t) = \frac{2 Q_0 r_0^2 \exp (-p^2 r_0^2)}{c \rho h} \times \frac{\exp (-s t) - \exp [-(\chi p^2 + a_0) t]}{\chi p^2 + a_0 - s},$$

$$Q_0^*(p, t) = \frac{24 Q_0 z_0 r_0^2 \exp(-p^2 r_0^2)}{c \rho h^3} \times \frac{\exp(-st) - \exp[-(\chi p^2 + a) t]}{\chi p^2 + a - s}.$$

За функције $u^*(p, t)$ и $w^*(p, t)$, применом образаца (6.14), добивамо:

$$u^*(p, t) = \frac{2 Q_0 \alpha (1 + \nu) g_0^2 r_0^2 p \exp(-p^2 r_0^2)}{c \rho h (\chi p^2 + a_0 - s)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\exp(-st) - \cos g_0 p t + \frac{s}{g_0 p} \sin g_0 p t}{g_0^2 p^2 + s^2} - \frac{\exp[-(\chi p^2 + a_0) t] - \cos g_0 p t + \frac{\chi p^2 + a_0}{g_0 p} \sin g_0 p t}{g_0^2 p^2 + (\chi p^2 + a_0)^2} \right\}; \quad (6.16)$$

$$w^*(p, t) = \frac{24 Q_0 z_0 \alpha (1 + \nu) g^2 r_0^2 p^2 \exp(-p^2 r_0^2)}{c \rho h^3 (\chi p^2 + a - s)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\exp(-st) - \cos g p^2 t + \frac{s}{g p^2} \sin g p^2 t}{g^2 p^2 + s^2} - \frac{\exp[-(\chi p^2 + a) t] - \cos g p^2 t + \frac{\chi p^2 + a}{g p^2} \sin g p^2 t}{g^2 p^4 + (\chi p^2 + a^2)^2} \right\}. \quad (6.17)$$

Инверзија Ханкелове трансформације у датом случају не може се извести у коначном облику, па интеграле

$$u(p, t) = \int_0^\infty u^*(p, t) J_1(pr) p dp, \quad w(p, t) = \int_0^\infty w^*(p, t) J_0(pr) p dp$$

треба одређивати нумерички.

Од интереса је разјашњење услова, под којима је могуће занемарење утицаја инерционих сила, посматрајући процес као квазистационаран. Квазистационарна решења за $t > 0$ дата су обрасцима:

$$u_0^*(p, t) =$$

$$= \frac{2 Q_0 \alpha (1 + \nu)}{c \rho h} \times \frac{r_0^2 \exp(-p^2 r_0^2)}{p} \times \frac{\exp(-st) - \exp[-(\chi p^2 + a_0) t]}{\chi p^2 + a_0 - s}; \quad (6.18)$$

$$w_0^*(p, t) =$$

$$= \frac{2 Q_0 z_0 \alpha (1 + \nu)}{c \rho h^3} \times \frac{r_0^2 \exp(-p^2 r_0^2)}{p^2} \times \frac{\exp(-st) - \exp[-(\chi p^2 + a)t]}{\chi p^2 + a - s} \quad (6.19)$$

Како је утврђено у раду [57], прорачуни показују, да се подужна померања могу наћи са довољном тачношћу по обрасцу (6.18), ако су задовољени услови:

$$sr_0 \ll g_0, \quad \frac{\chi}{r_0^2} + a \ll g_0, \quad (6.20)$$

тј. топлотни процеси се одвијају довољно споро у поређењу са брзином простирања еластичних таласа.

За налажење нормалних померања квазистационарна апроксимација је сасвим непогодна. Стварно, интеграл

$$w_0(r, t) = \int_0^\infty w_0^*(p, t) J_0(pr) p dp$$

са функцијом $w_0^*(p, t)$, дефинисаном према (6.19), не егзистира. Исто-времено решење узимањем у обзир инерционих чланова омогућава да се израчуна коначни максимум температурног угиба. Овде је битно да се претпостави да је плоча неограничено велика. Ако плоча има коначне димензије, тада квазистационарна апроксимација постаје погодна за релативно споре топлотне процесе.

§ 7. Љуска, подвргнута неутронском зрачењу

Најпре изнесимо неколико информација, које се односе на поставку проблема. Познато је да је радијационо зрачење чврстих тела праћено многобројним ефектима, чији се утицај у чврстом телу манифестује запреминском деформацијом, променом еластичних а нарочито пластичних карактеристика материјала.

Неутрон, који поседује довољну кинетичку енергију, пролазећи кроз кристалну решетку, образује на свом путу примарне, секундарне итд. атоме узмака. Избијени из кристалне решетке атоми остављају упражњена места и на крају крајева заустављају се у међучворовима, што доводи до образовања у решетки парних Френкелових дефеката „међу-атомна празнина — ваканција“. Атом се може избити из чвора, када добије неку граничну енергију E_a ; ако атом добива енергију мању од E_a , та се енергија расејава на принудне осцилације решетке (загревање) без образовања померања у њој.

Интеракција неутрона са језгром осим еластичног расејања може бити праћено захватом неутрона и цепањем (фисијом) језгра. При сваком распаду ослобађа се енергија и образују се нови хемијски елементи.

Проучимо најпре хомогено изотропно тело, које заузима полупростор $z \geq 0$. Ако на граници $z=0$ паралелну оси z падају неутрони са једнаком средњом енергијом и интензивношћу $I_0 \frac{\text{neutron}}{\text{cm}^2 \text{ sek}}$, тада се из простих

разматрања може наћи интензитет флукса неутрона, који стижу до равни $z=\text{const}$: Смањење флукса dI у слоју dz пропорционалан је $I(z)$ и dz ; тада је

$$I(z) = I_0 e^{-\mu z} \frac{\text{neutron}}{\text{cm}^2 \text{ sek}} \quad (7.1)$$

Величина μ назива се макроскопским ефективним пресеком. За било који хемијски елемент

$$\mu = \sigma n_0 = \sigma \frac{A_0 \rho}{A} \quad (7.2)$$

димензије је $\frac{1}{\text{cm}}$, при чему је σ — ефективни пресек, по једном језгру;

ρ — густина; A — атомска тежина; A_0 — Авогадров број; n_0 — број језгара у 1 cm^3 .

Ако I_0 не зависи од времена, тада у тренутку t кроз пресек z пролази флукс

$$t I(z) = I_0 t e^{-\mu z} \quad (7.3)$$

У грубој апроксимацији може се сматрати, да је промена запремине тела, тј. запреминско ширење θ , директно пропорционално флуксу $tI(z)$ и дакле,

$$\theta = B I_0 t e^{-\mu z} \quad (7.4)$$

где је B — експериментална константа.

Величина $I_0 t$ даје сумарну струју неутрона на 1 cm^2 површи тела. У реакторима I_0 достиже ред величине $10^{13} - 10^{14} \frac{\text{neutrons}}{\text{cm}^2 \text{ sek}}$, а $nvt = I_0 t$

достиже вредност $10^{19} - 20^{23} \frac{\text{neutrons}}{\text{cm}^2}$, при чему θ достиже вредност реда 0,1. Дакле, у зависности од енергије неутрона и озраченог материјала величине B може бити реда $10^{23} - 10^{21} \frac{\text{cm}^2}{\text{neutron}}$. На тај начин, за

оцену промене запремине имамо:

$$\theta = B n v t e^{-\mu z} \quad (7.5)$$

Зависност модула еластичности, граница течења и отпорности и целог дијаграма истезања од nvt различитих енергија проучена је експериментално после озрачавања узорака у нуклеарним реакторима.

Како показују многобројни експерименти, при озрачавању материјала, по правилу, модул еластичности се слабо мења (расте за 1,5—5% у

односу на неозрачени материјал); што се тиче граница носивости и течења, оне су веома осетљиве у односу на зрачења а нарочито граница течења.

За масивна тела са равном границом број неутрона који пролазе на дубини z испод те границе за време t изражава се помоћу струје nvt на равној граници обрасцем:

$$(nvt)_z = nvt e^{-\mu z}, \quad (7.6)$$

и зато ће граница течења σ_s и модул клизања G бити променљиви по дубини.

Уведимо хипотезу, да се својства, која се појављују на дубини z , поклапају са својствима при хомогеном радијационом зрачењу снагом [6, 58]. Тада дијаграми за G и σ_s по nvt , аналитички написани у облику:

$$G = G(nvt), \quad \sigma_s = \sigma_s(nvt),$$

дају криве промене G и σ_s по дубини z при датом $nvt = N$ на површи:

$$G = G(N e^{-\mu z}), \quad \sigma_s = \sigma_s(N e^{-\mu z}).$$

Ако се подвргну зрачењу снаге $nvt = N$ тела са равним границама (плоснима), пуни цилиндар или сфера, при чему је промена запремине незнатна, тада се расподела напона и деформација у њима може наћи по обрасцима еласто-пластичних деформација нехомогеног тела (види § 5, исте главе).

Образац (7.6) претпоставља да је расејање неутрона dN_z у слоју dz пропорционално N_z и дебљини слоја dz , $dN_z = -\mu N_z dz$. При радијалној струји са унутрашње површи, на пример, за цилиндар, ту релацију треба заменити са $d(rN_r) = -\mu r N_r dz$, а за сферу при радијалној струји изнутра — са $d(r^2 N_r) = -\mu r^2 N_r dz$.

На тај начин, у случају пуног цилиндра биће:

$$N_r = N \frac{a}{r} e^{-\mu (r-a)}, \quad (7.7)$$

а у случају сфере:

$$N_r = \frac{a^2}{r^2} e^{-\mu (r-a)}, \quad (7.8)$$

где је N — струја nvt на јединицу површине унутрашње површи цилиндра или сфере ($r=a$). Дакле за цилиндар је:

$$G = G \left[N \frac{a}{r} e^{-\mu (r-a)} \right], \quad \sigma_s = \sigma_s \left[N \frac{a}{r} e^{-\mu (r-a)} \right]; \quad (7.9)$$

а за сферу:

$$G = G \left[N \frac{a^2}{r^2} e^{-\mu (r-a)} \right], \quad \sigma_s = \sigma_s \left[N \frac{a^2}{r^2} e^{-\mu (r-a)} \right]. \quad (7.10)$$

Ако се узме у обзир горе речено, треба сматрати да се еластична својства метала при зрачењу мењају слабо док се, напротив, знатно мења граница носивости и граница течења, тада се за прорачун напона и деформација различите врсте љуски, подвргнутих зрачењу са унутрашње или спољње површи, може применити обична теорија еластичних љуски. Карактеристика ће се састојати у одређивању оптерећења, при којима се први пут појављују пластичне деформације, тј. у критеријуму чврстоће.

Сада поставимо проблем радијационог зрачења љуски и укажимо на пут његовог решења. Нека је x, y, z — покретни Дарбуов триједар на средњој површи љуске, при чему осе x, y усмеримо у правцима линија главних кривина α, β и z — нормала; $\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma=2\epsilon_{12}$ — деформације средње површи; $\kappa_1, \kappa_2, \tau=\kappa_{12}$ — промене кривина и торзије због дејства спољних оптерећења на љуску. Тада ће резултујуће силе и моменти бити везане са величинама ϵ и κ познатим линеарним релацијама, при чему ће интензитет деформације e_i на растојању z од средње површи у произвољној њеној тачки бити:

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P_\epsilon - 2z P_{\epsilon\kappa} + z^2 P_\kappa}, \quad (7.11)$$

интензитет напона:

$$\sigma_i = 3Ge_i, \quad (7.12)$$

при чему су $P_\epsilon, P_\kappa, P_{\epsilon\kappa}$ — познате квадратне форме за параметре ϵ, κ . Нека је струја неутрона текла нормално на једну од површи љуске (на пример, унутрашњу), при чему је сумарна струја $N = nvt$ позната као функција координата средње површи (на пример, константна по целој површи). Ради одређености ставимо, да је струја N управљена са стране унутрашње површи $z = +\frac{h}{2}$, где је h — дебелина љуске. Тада ће у слоју $z = \text{const}$ струја N_z према (7.6) бити:

$$N_z = Ne^{-\mu\left(\frac{h}{2}-z\right)}. \quad (7.13)$$

Граница течења σ_s , је позната функција од N_z , $\sigma_s = \sigma_s(N_z)$ је, дакле, позната функција од z и криволинијских координата љуске.

Како се и $\sigma_i = 3Ge_i$ у резултату еластичног прорачуна јавља као позната функција координата, можемо образовати разлику:

$$T = \sigma_s(N_z) - 3Ge_i = \sigma_z \left[Ne^{-\mu\left(\frac{h}{2}-z\right)} \right] - 2\sqrt{3}G \sqrt{P_\epsilon - 2z P_{\epsilon\kappa} + z^2 P_\kappa}. \quad (7.14)$$

Словом p означимо параметар, који карактерише оптерећење на љуску (на пример, притисак на површ), при чему ће као последица линеарности проблема величине ϵ и κ бити пропорционалне p , а форма P — пропорционална квадрату p . Ставимо

$$P_\epsilon = p^2 \tilde{P}_\epsilon, \quad P_\kappa = p^2 \tilde{P}_\kappa, \quad P_{\epsilon\kappa} = p^2 \tilde{P}_{\epsilon\kappa}, \quad (7.15)$$

тако да P не зависи од p и оне су познате функције криволинијских

координата. Тада се функција T може написати у облику:

$$T = \sigma_s \left[N e^{-\mu \left(\frac{h}{2} - z \right)} \right] - 2 \sqrt{3} G p \sqrt{\tilde{P}_\varepsilon - 2 z \tilde{P}_{\varepsilon x} + z^2 \tilde{P}_x} \quad (7.16)$$

и представља линеарну функцију од p и познату функцију координата

α, β, z :

$$T = T(\alpha, \beta, z, p).$$

Поставимо проблем: наћи ону вредност оптерећења p_* , при коме у љуски у некој тачки $M^*(z=z_*, \alpha=\alpha_*, \beta=\beta_*)$ најпре настаје течење, тј. $\sigma_i = \sigma_s$.

Како обично σ_i код еластичних љуски достиже максимум за $z = \pm \frac{h}{2}$

изгледа, да и течење најпре почиње негде на спољној или унутрашњој површи. Али, с друге стране, радијационо очвршћење биће највеће управо на једној од тих површи, и зато појава почетка течења на површи зрачења постаје мање вероватна.

У општем случају, ако се тачка M^* налази у телу љуске (тј. $|z| < \frac{h}{2}$, и α_*, β_* се не налазе на граници љуске), услови који дефинишу p_* и тачку M^* , морају имати облик:

$$T = \frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{\partial T}{\partial \beta} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0. \quad (7.17)$$

Проблем се јако упрошћава, ако је струја N константна на површи, тј. $\frac{\partial N}{\partial \alpha} = \frac{\partial N}{\partial \beta} = 0$. Стварно, у том случају услови $\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{\partial T}{\partial \beta} = 0$ се поклапају

са условом $\frac{\partial e_i}{\partial \alpha} = \frac{\partial e_i}{\partial \beta} = 0$, тј. са обичним условом налажења тачке максималних напона у теорији љуски, па значи, α_*, β_* постају познате на основу обичних метода њиховог налажења.

После тога остаје само да се нађе координата слоја $z=z_*$, где и почиње течење. Зато из (7.13) налазимо z помоћу N_z :

$$z = \frac{h}{2} + \frac{1}{\mu} \ln \frac{N_z}{N}. \quad (7.18)$$

Сада, сматрајући у (7.16) z замењено тим изразом, услов $T = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$

пишемо у облику $\left(\frac{dz}{dN_z} = \frac{1}{\mu N_z} \right)$, најпре, једначину за z_* :

$$z = z_*, \quad \varphi(N_z) = \psi(N_z), \quad (7.19)$$

где је

$$\varphi(N_z) = \frac{N_z}{\sigma_s(N_z)} \frac{d\sigma_s(N_z)}{dN_z}, \quad \psi(N_z) = \frac{1}{\mu} \frac{-\tilde{P}_{\epsilon x} + z \tilde{P}_x}{\tilde{P}_\epsilon - 2z \tilde{P}_{\epsilon x} + z^2 \tilde{P}_x}, \quad (7.20)$$

при чему z има вредност (7.18), и, затим, израз за p_* :

$$p_* = \frac{\sigma_s(N_{z*})}{2 \sqrt{3} G \sqrt{\tilde{P}_\epsilon - 2z_* \tilde{P}_{\epsilon x} + z_*^2 \tilde{P}_x}}. \quad (7.21)$$

Ако тачка M^* лежи на површи $\left(z = \pm \frac{h}{2}\right)$, проблем се решава једном једначином $T=0$.

Једначина (7.19) решава се графички. Пресечна тачка графика $\varphi(N)$ и $\psi(N)$ даје N_* и $\varphi(N_*)$. После тога налазимо $\sigma_s(N_*)$ и z_* из једначине (7.18), а затим из (7.21) одређујемо p_* , при којем почиње деформација љуске.

Може се десити да криве φ и ψ имају неколико пресечних тачака N_*' , N_*'' , ..., свакој од њих одговара њено p_*' , p_*'' , ...

Сада се питање о томе где ће се најпре појавити пластичне деформације, решава одређивањем најмање од горе нађених вредности p_* .

У обрасце прорачуна чврстоће тела под дејством радијационог зрачења улазиће димензиона физичка константа $[\mu] = \frac{1}{\text{cm}}$, и зато су геометријски и механички слична тела од једнаког материјала савршено неједнаке чврстоће.

§ 8. Течење метала у условима размене топлоте

Замислимо слој метала, који има облик дугачке танке траке; њена дужина L много превазилази ширину $2l$, а са своје стране ширина $2l$ много је већа од дебљине $2h$. Слој, будући, у тренутку времена $t=0$, загрејан до температуре ϑ_0 , у тренутку $t=0$ долази у додир са две равне паралелне плоче, које, приближујући се константном брзином ϑ дуж осе z , спречавају слој да се разлива у смеру осе y ; плоче су у тренутку $t=0$ имале нижу температуру, него ϑ_0 , температуру, коју можемо сматрати, без губитка општости у расуђивањима да је једнака нули.

Сматраћемо, да је граница течења метала слоја функција температуре $\sigma_s = \sigma_s(\vartheta)$ (8.1)

и да је та зависност у посматраном размаку температуре битна; тада је јасно, да се услед снажне размене топлоте у деловима слоја, који се непосредно граниче са плочама, може температура толико снизити, да метал у њима престаје да тече, образују се такозвани слојеви очвршћења, који ће се кретати као целина са плочама, а течење ће бити у средњем делу слоја. Одредити границу очвршћења-основна је тешкоћа проблема.

Једначине кретања у слоју, сматрајући притисне напоне позитивним; написаћемо у облику:

$$\frac{\partial S_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial S_{zy}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma}{\partial z}, \quad \frac{\partial S_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma}{\partial y}. \quad (8.2)$$

узимајући да девијатор S_{ij} зависи само од z и t ; из прве једначине (8.2) добивамо:

$$\sigma = -S_{zz}(z, t) + f_1(y, t),$$

одакле

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y} = f(y, t);$$

ставивши то у другу једначину (8.2), налазимо:

$$S_{zy} = -f(y, t)z + C. \quad (8.3)$$

За $z=0$ услед симетрије $S_{zy}=0$, а на граници области течења, тј. за $z=\eta(y, t)$, смичући напон S_{zy} треба да буде једнак граници течења метала слоја на клизање за ту температуру, која постоји у тачкама границе очвршћења:

$$S_{zy} = \tau_s \Big|_{z=\eta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_s \Big|_{z=\eta} = \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}}, \quad (8.4)$$

коначно из (8.3) добивамо:

$$S_{zy} = \frac{\sigma_\eta z}{\sqrt{3} \eta(y, t)}; \quad (8.5)$$

узимајући сада, да је $\sigma_z = S_{zz} + \sigma$, из друге једначине (8.2) налазимо:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial y} = \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3} \eta(y, t)}. \quad (8.6)$$

Као што се види, резултат (8.5) не саглашава се у потпуности са хипотезом о томе, да је $S_{zy} = S_{zy}(z, t)$; ред величине нетачности лако је наћи из релације $\left(\frac{\partial S_{zy}}{\partial y}\right) : \left(\frac{\partial S_{zy}}{\partial z}\right) \approx \frac{h}{l}$, ако се узме у обзир, да је однос $\frac{h}{l}$ мали

према услову задатка; дакле, тачност (8.5) је допустива.

Учинимо неке процене. Очеvidно је, да се зависност границе слоја очвршћења од y дефинише еластичним померањима у плочама; сматрајући засад да она нису велика у поређењу са η , извршимо оцену, заменивши $\eta(y, t)$ средњом вредношћу $\bar{\eta}(t)$. Из (8.6) тада следује:

$$\sigma_z = -\frac{\sigma_\eta y}{\sqrt{3} \bar{\eta}} + f_2(z, t), \quad (8.7)$$

а из израза $\sigma_y = S_{yy} + \sigma$ налазимо $\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}\eta}$, одакле

$$\sigma_y = -\frac{\sigma_\eta y}{\sqrt{3}\eta} + f_3(z, t).$$

Из граничног услова $\sigma_y = 0$ за $y = l$ следи $f_3 = \frac{\sigma_\eta l}{\sqrt{3}\eta}$ и коначно

$$\sigma_y = \frac{\sigma_\eta (l-y)}{\sqrt{3}\eta}. \quad (8.8)$$

Из услова пластичности за $y = l$ добивамо:

$$f_2(z, t) - \frac{\sigma_\eta l}{\sqrt{3}\eta} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_s(\vartheta)}{\eta} (\eta^2 - z^2)^{1/2},$$

одакле се види, да ће средња вредност разлике $f_2 - \frac{\sigma_\eta l}{\sqrt{3}\eta}$ по дебљини

слоја бити величина реда средње вредности $\hat{\sigma}_s(v)$ и са довољном тачношћу може се узети да је једнака σ_η ; ставивши то у (8.7), налазимо:

$$\sigma_z = \sigma_\eta + \frac{\sigma_\eta (l-y)}{\sqrt{3}\eta}. \quad (8.9)$$

Резултат (8.8), (8.9) тачно одговара хипотезама, усвојеним у теорији течења танког слоја по површи; то нам даје основу да сматрамо да (8.6) важи и у случају течења метала у произвољној области са границом Γ , $y_0 = \varphi(x_0)$. Означивши притисак са стране слоја на плоче σ_z са p , добијамо за њега једначину

$$(\text{grad } p)^2 = \frac{\sigma_\eta^2}{3\eta^2(x, y, t)} \quad (8.10)$$

и гранични услов:

$$p = \sigma_\eta \text{ на } \Gamma. \quad (8.11)$$

Ако се учини природна претпоставка о томе, да се дебљина слоја очвршћавања дефинише само условима размене топлоте између слоја и плоча, то се може сматрати да је

$$n_1(x, y, t) = \eta(t) + w(x, y, t), \quad (8.12)$$

где је $w(x, y, t)$ — нормално померање граничних тачака претстављено помоћу Гринове (Green) функције:

$$w = \iint k(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (8.13)$$

За систем (8.10), (8.11), (8.13) проблем се може формулисати [59] овако: стварно решење постаје могуће, ако се напишу услови за одређивање температуре у слоју и граници очвршћавања.

Уведимо неколико претпоставки. Пошто је додирна површ много већа од бочне површи слоја, основни млаз топлоте биће усмерен по нормали на површ $z=h$, зато расподелу температуре у слоју и плочама можемо сматрати једнодимензионом. Даље, при формулисању задатка провођења топлоте може се сматрати да су плоче продужене по оси z до бесконачности, јер ће струја топлоте кроз бочну површ плоча у окружујућу средину бити мала у поређењу са струјом кроз додирну површ са слојем. Коначно, граничне услове на додирној површи посматрајмо за недеформисану површ $z=h_0-vt$.

Уведимо ознаке: ϑ — температура у слоју, T — температура у плочама, $a, a_1, \lambda, \lambda_1$ — коефицијенти провођења температуре и топлоте у слоју и плочама респективно, v_z — брзина честица у слоју дуж осе z ; па имамо:

$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq \eta + w, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + v_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z} &= a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}; \\ \eta + w \leq z \leq h, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - V \frac{\partial \vartheta}{\partial z} &= a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}; \\ h \leq z \leq \infty, \quad \frac{\partial T}{\partial t} - V \frac{\partial T}{\partial z} &= a_1^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}; \end{aligned} \quad (8.14)$$

овом систему треба прикључити почетне и граничне услове:

$$\begin{aligned} t=0, \quad \vartheta &= \vartheta_0, \quad T=0; \\ z=0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} &= 0; \\ z=h, \quad \vartheta &= T, \quad \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial z}; \end{aligned} \quad (8.15)$$

услов једнакости температуре и струје на граници $z=\eta+w$ даље није битан, пошто како показују процене, са довољно тачности температура се у целој области $0 \leq z \leq h$ може одредити из друге једначине (8.14). Услов за налажење границе очвршћавања формулишимо по А.А. Иљушину, — граница области очвршћавања налази се из услова, да је спољашње напрезање

$$Q = \iint_S p(x, y) dx dy \quad (8.16)$$

потребно у сваком датом тренутку за одвијање процеса, минимално.

Увођењем нових функција

$$v = (\vartheta_0 - \vartheta) \exp\left(\frac{v_z}{2a^2} + \frac{V^2 t}{4a^2}\right), \quad (8.17)$$

$$\theta = T \exp\left(\frac{v_z}{2a_1^2} + \frac{V^2 t}{4a_1^2}\right); \quad (8.18)$$

систем (8.14), (8.15) своди се на следећи:

$$0 \leq z \leq h_0 - Vt, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2};$$

$$h_0 - Vt \leq z \leq \infty, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2};$$

$$t=0, \quad v=0, \quad \theta=0;$$

$$z=0, \quad \frac{V}{2a^2} v - \frac{\partial v}{\partial z} = 0;$$

$$z=h_0 - Vt, \quad \vartheta_0 - \frac{V}{A} \exp\left(\frac{V^2 t}{4a^2}\right) = \frac{\theta}{A_1} \exp\left(\frac{V^2 t}{4a_1^2}\right);$$

$$\frac{\lambda A_1}{\lambda_1 A} \left(\frac{Vv}{2a^2} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \exp\left(\frac{V^2 t}{4a^2}\right) = \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{V\theta}{2a_1} \right) \exp\left(\frac{V^2 t}{4a_1^2}\right), \quad (8.19)$$

где је $A_1 = \exp\left(\frac{Vh_0}{2a_1^2}\right)$, $A = \exp\left(\frac{Vh_0}{2a^2}\right)$. Решење једначина (8.19), које

задовољава почетне услове, узмимо у облику топлотних потенцијала [60]:

$$v(z, t) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu_1(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}\right] d\tau +$$

$$+ \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu_2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{(z-h(\tau))^2}{4a^2(t-\tau)}\right] d\tau;$$

$$\theta(z, t) = \frac{a_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu_3(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{(z-h(\tau))^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right] d\tau; \quad (8.20)$$

ставивши то у граничне услове, долазимо до система интегралних једначина за одређивање функција μ_1 , μ_2 , μ_3 :

$$\mu_1(\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{h_0 - Vt}{(t-\tau)^{3/2}} \mu_2(\tau) \exp\left[-\frac{(h_0 - V\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] d\tau -$$

$$- \frac{V}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu_1(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau;$$

$$\begin{aligned} & \mu_2(\tau) - \frac{\lambda_1 A}{\lambda A_1} \mu_3(\tau) \exp \left[\frac{V^2 t}{4} \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a^2} \right) \right] = \\ & = \frac{1}{2 a \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{h_0 - V \tau}{(t - \tau)^{3/2}} \mu_1(\tau) \exp \left[-\frac{(h_0 - V t)^2}{4 a^2 (t - \tau)} \right] d\tau; \\ & \vartheta_0 = \left\{ \frac{a}{A \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu_1(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} \exp \left[-\frac{(h_0 - V t)^2}{4 a^2 (t - \tau)} \right] d\tau + \right. \end{aligned} \tag{8.21}$$

$$\begin{aligned} & \left. + \frac{a}{A \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu_2(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} \exp \left[-\frac{V^2 (t - \tau)}{4 a^2} \right] d\tau \right\} \exp \left(\frac{V^2 t}{4 a^2} \right) = \\ & = \left\{ \frac{a_1}{A_1 \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu_3(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} \exp \left[\frac{V^2 (t - \tau)}{4 a_1^2} \right] d\tau \right\} \exp \left(\frac{V^2 t}{4 a_1^2} \right). \end{aligned}$$

Означивши

$$\mu_3(t) \exp \left(\frac{V^2 t}{4 a_1^2} \right) = \bar{\mu}_3(t), \quad \mu_2(t) \exp \left(\frac{V^2 t}{4 a^2} \right) = \bar{\mu}_2(t), \quad \frac{a A_1}{a_1 A} = \kappa, \quad \frac{A \lambda_1}{A_1 \lambda} = \nu$$

написаћемо последње две једначине написаног система у облику

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\bar{\mu}_3(\tau) - \kappa \bar{\mu}_2(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau &= \frac{\vartheta_0 A_1 \sqrt{\pi}}{a_1} - \kappa \exp \left(\frac{V^2 t}{4 a^2} \right) \int_0^t \frac{\mu_1(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} \exp \left[-\frac{(h_0 - V t)^2}{4 a^2 (t - \tau)} \right] d\tau \\ &\equiv \frac{\vartheta_0 A_1 \sqrt{\pi}}{a_1} - \kappa f(t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_2(t) - \kappa_1 \bar{\mu}_3(t) &= \frac{1}{2 a \sqrt{2}} \exp \left(\frac{V^2 t}{4 a^2} \right) \int_0^t \frac{h_0 - V \tau}{(t - \tau)^{3/2}} \mu_1(\tau) \exp \left[-\frac{(h_0 - V t)^2}{4 a^2 (t - \tau)} \right] d\tau \\ &\equiv \frac{1}{2 a \sqrt{\pi}} f_1(t). \end{aligned}$$

Проучавајући прву од тих једначина као Абелову (Abel) једначину по функцији $\bar{\mu}_3 - \kappa \bar{\mu}_2$, може се њено решење написати у облику:

$$\bar{\mu}_3(t) - \kappa \bar{\mu}_2(t) = \frac{\vartheta_0 A_1}{a \sqrt{\pi t}} - \frac{\kappa}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau) d\tau}{\sqrt{t - \tau}} = \frac{\vartheta_0 A_1}{a \sqrt{\pi t}} - \frac{\kappa}{\pi} \int_0^t \frac{f'(\tau) d\tau}{\sqrt{t - \tau}};$$

$$\bar{\mu}_2(t) = \frac{\gamma}{\gamma-1} f_1(t) + \frac{A \vartheta_0}{a(\gamma-1) \sqrt{\pi t}} - \frac{1}{\pi(\gamma-1)} \int_0^t \frac{f'(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad (8.22)$$

$$\bar{\mu}_3(t) = \frac{f_1(t)}{\kappa_1(\gamma-1)} + \frac{A_1 \gamma \vartheta_0}{a_1(\gamma-1) \sqrt{\pi t}} - \frac{1}{\kappa_1(\gamma-1) \pi} \int_0^t \frac{f'(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}},$$

где је $\gamma = \frac{a_1 \lambda}{a \lambda_1}$. Заједно са првом једначином из (8.21) једначине (8.22)

чине систем интегралних једначина за одређивање μ_1, μ_2, μ_3 много сложенијег облика, него што је нормални облик Волтериних (Volterra) једначина. Лако је видети, ипак, да конвергенција методе апроксимације за тај систем може да се докаже, аналогно ономе како се то чини за систем Волтериних једначина. Као прву апроксимацију природно је да се изабере асимптотско представљање функција μ_1, μ_2, μ_3 за $t \rightarrow 0$; што одговара томе, да се посматра мали степен деформације $\frac{Vt}{h_0}$ слоја.

Развивши (8.21) у ред по параметру $\frac{Vt}{h_0}$ и задржавши у развоју само главне чланове, добивамо:

$$\mu_1(t) = \frac{h_0}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu_2(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{h_0^2}{4a^2(t-\tau)}\right] d\tau;$$

$$\mu_2(t) - \kappa_1 \mu_3(t) = \frac{h_0}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu_1(t)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{h_0^2}{4a^2(t-\tau)}\right] d\tau;$$

$$\vartheta_0 - \frac{a_1}{A_1\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu_3(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \frac{a}{A\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu_1(t)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{h_0^2}{4a^2(t-\tau)}\right] d\tau +$$

$$+ \frac{a}{A\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu_2(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}};$$

по Лапласовој трансформацији тај систем има решење:

$$\mu_1(\rho) = \frac{A \vartheta_0}{a(1+\gamma)} \frac{\sqrt{\rho}}{\rho} \frac{e^{-\alpha\sqrt{\rho}}}{1+\beta e^{-2\alpha\sqrt{\rho}}},$$

$$\mu_2(\rho) = \frac{A \vartheta_0}{a(1+\gamma)} \frac{\sqrt{\rho}}{\rho} \frac{1}{1+\beta e^{-2\alpha\sqrt{\rho}}}, \quad (8.23)$$

$$\mu_3(\rho) = \frac{1}{\kappa_1} [\mu_2(\rho) - \mu_1(\rho) e^{-\alpha\sqrt{\rho}}],$$

где је $\alpha = \frac{h_0}{a}$, $\beta = (1-\gamma):(1+\gamma)$, при чему $|\beta| < 1$ за произвољно позитивно γ . Ако се изведе аналогно развијање у (8.20), налазимо:

$$v(\rho, z) = \frac{a}{\sqrt{\rho}} \mu_1(\rho) e^{-\frac{z}{a} \sqrt{\rho}} + \frac{a}{\sqrt{\rho}} \mu_2(\rho) e^{-\frac{h_0-z}{a} \sqrt{\rho}};$$

ставивши овде μ_1 и μ_2 из претходног система, развивши их у ред по β и изводећи инверзну трансформацију, добивамо:

$$v(z, t) = A \vartheta_0 - \frac{A \vartheta_0}{1+\gamma} \sum_{n=1, 3, \dots} \beta^{\frac{n-1}{2}} [\Phi(\zeta_n) + \Phi(\zeta_{-n})],$$

где је

$$\Phi(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\zeta} e^{-\zeta^2} d\zeta, \quad \zeta_n = \frac{nh_0 + z}{2a\sqrt{t}}, \quad \zeta_{-n} = \frac{nh_0 - z}{2a\sqrt{t}},$$

по обрасцу (8.17) нађимо сада асимптотско представљање за $t \rightarrow 0$ температуре у слоју:

$$\frac{\vartheta(z, t)}{\vartheta_0} = 1 - \exp\left[\frac{V}{2a^2} \left(h_0 - z - \frac{Vt}{2}\right)\right] - \frac{1}{1+\gamma} \exp\left[\frac{V}{2a^2} \left(h_0 - z - \frac{Vt}{2}\right)\right] \sum_{n=1, 3, \dots} \beta^{\frac{n-1}{2}} [\Phi(\zeta_n) + \Phi(\zeta_{-n})].$$

Вратимо се једначини (8.10) и проучимо проблем под условом, да дебелина слоја мора бити константна на крају процеса течења; струјне линије биће праве и притисак ће се одредити из

$$p = \sigma_n + \frac{\sigma_n}{\sqrt{3} \eta(t)} s, \tag{8.24}$$

где је s — дужина струјне линије од граничне тачке до посматране тачке — функција само тих тачака; израз (8.16) за спољашњу силу имаће сада облик:

$$Q = \sigma_n \Omega + \frac{\sigma_n}{\sqrt{3} \eta(t)} \omega(x_0, y_0),$$

где је Ω — површина области течења, а функција ω дефинише се само изгледом области S ; други члан у том изразу, како се види из (8.24)

у односу на први је реда $\frac{L}{h_0}$ у поређењу са јединицом; дакле, са тачношћу истог реда услов очвршћења свешће се на услов минимума раз-

мере $\frac{\sigma_\eta}{\eta(t)}$, а како температура не зависи од η он се своди на следеће:

$$\left(\frac{d\sigma_s}{dz} - \frac{\sigma_s}{z}\right)_{z=\eta} = 0. \quad (8.25)$$

Узмимо да се у посматраном интервалу температуре (ϑ_1, ϑ_2) σ_s мења линеарно од σ_1 до σ_2 ; тада је:

$$\sigma_s(\vartheta) = C_1 - C_1 \vartheta = \frac{\sigma_1 \vartheta_2 - \sigma_2 \vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\vartheta_2 - \vartheta_1} \vartheta;$$

ако се то унесе у (8.25) и искористи развој

$$\Phi(\zeta) \approx 1 - \frac{e^{-\zeta^2}}{\sqrt{\pi} \zeta} \quad (8.26)$$

за велике ζ налазимо, да, у почетном тренутку времена дебелина слоја очвршћења, расте по закону:

$$\frac{h_0 - Vt - \eta(t)}{h_0} = \frac{2a\sqrt{t}}{h_0} \left[\ln \left(\frac{C_2 \vartheta_0}{C_1 - C_2 \vartheta_0} \times \frac{h_0}{2a\sqrt{t}} \times \frac{2}{(1+\gamma)\sqrt{\pi}} \right) \right]^{1/2}.$$

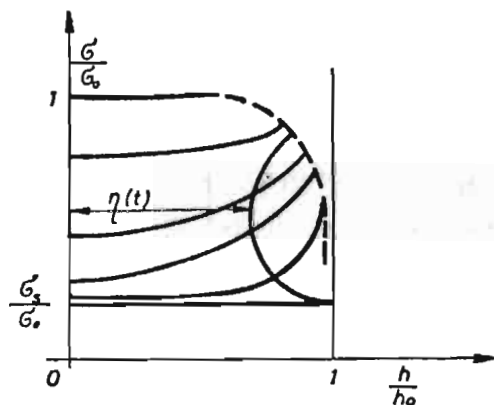
Пођимо за квалитативном сликом промене дебелине слоја очвршћења.

За произвољно $t > 0$ је $\frac{\partial \vartheta}{\partial z} < 0$; осим тачке $z=0$, где је с обзиром на

симетрију $\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0$; пошто је $\frac{d\sigma_s}{d\vartheta} < 0$, то је за $t > 0$, $\frac{\partial \sigma_s}{\partial z} = \frac{d\sigma_s}{d\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} > 0$,

са искључењем тачке $z=0$ где је $\frac{\partial \sigma_s}{\partial z} = 0$. Из тих информација и физич-

ког смисла проблема следи да криве линије промене σ_s по дебелини слоја имају облик, приказан на сл. 34; по ординатној оси нанета је вредност границе течења, која се односи на вредност за $\vartheta = \vartheta_0$, по апсцисној



сл. 34

оси — нанета је дебелина $\frac{h}{h_0}$, више постављена крива одговара каснијем тренутку времена.

Услов очвршћавања геометријски означава тачку на свакој од кривих сл. 34, у којој је размера ординате према апсциси минимална; таква ће бити тачка, у којој тангента на криву пролази кроз координатни почетак. Ако се споје такве тачке, добиве се очигледна представа о карактеру промене $\eta(t)$. Из геометријског представљања следи унапред неупадљива чињеница; уколико се обавља интензивнија размена топлоте и брже изравнавање температуре у слоју, почевши од неког тренутка криве $\sigma_s \sim z$ постају благо нагнуте и код њих неће бити тангената које пролазе кроз координатни почетак; дакле, почињући од тог тренутка, дебљина слоја очвршћења постаје једнака нули и течење ће бити у целом слоју.

Кратко, ограничивши се квалитативним посматрањем, задржимо се на питању температуре и температурних напона у плочама. Развијмо другу

од једначина (8.20) у ред по параметру $\frac{Vt}{h_0}$, оставивши у развоју главни

члан, применимо Лапласове трансформације, ставивши ту (8.23), пређимо на оригинале и узимањем у обзир (8.18) коначно добивамо израз за температуре у плочама у почетном тренутку времена:

$$T(z, t) = \frac{\gamma \vartheta_0}{1 + \gamma} \exp \left[-\frac{V(z - h_0)}{2 a_1^2} - \frac{V^2 t}{4 a_1^2} \right] \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^n \{ \Phi [\zeta_0 + (n+1) \tau] - \Phi [\zeta_0 + n \tau] \},$$

где је стављено $\zeta_0 = \frac{z - h_0}{2 a_1 \sqrt{t}}$, $\tau = \frac{h_0}{a \sqrt{t}}$; за температуре на граници

додирне области одавде налазимо:

$$\varphi(t) \equiv T(h_0, t) = \frac{\gamma \vartheta_0}{1 + \gamma} e^{-\frac{V^2 t}{4 a_1^2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^n \{ \Phi [(n+1) \tau] - \Phi (n \tau) \}; \quad (8.27)$$

за мале β из тог израза може се наћи, с обзиром на (8.26), асимптотска репрезентација за $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) \approx \frac{\gamma \vartheta_0}{1 + \gamma} \left(1 - \frac{e^{-\tau^2}}{\sqrt{\pi t}} \right).$$

Напонско стање у плочама биће квалитативно онако, како је то описано у [3]. У почетним тренуцима времена, док је степен деформације слоја мали, дакле, мали је и притисак, у танком слоју материјала плоча који се граничи са додирним површима (називаћемо га топлотним слојем), температура се повећава до величине реда $0,5 \vartheta_0$, што у реалним процесима обраде метала чини $300^\circ - 500^\circ \text{C}$. Топлотни слој, ако не би био везан са другим слојевима метала, при тој температури добио би хомогену деформацију истезања реда 1% ; услед везе са основном масом метала он се пластично деформише приближно за 1% . Даља слика процеса развија се на следећи начин; с једне стране, температура у топлотном слоју се снижава, при томе њено снижење на 100°C у потпуности уништава еластични део укупне деформације; с друге стране, расте притисак и чини основно напонско стање у плочама, које ради једноставности расуђивања

можемо сматрати еластичним. По завршетку процеса температуре у плочама се изједначава, и у топлотном слоју, ако он не би био везан са другим слојевима метала, при смањену температуре за $200-400^{\circ}\text{C}$ настала би равномерна деформација притиска реда $0,5-1,0\%$; али како суседни слојеви метала не дају такву могућност, у њему настаје пластична деформација истезања реда $0,5-1,0\%$.

На тај начин материјал топлотног слоја за време процеса у крајњој линији два пута излази ван границе еластичности, па је јасно, да при раду у периодичном режиму контактне површи плоча могу брзо изићи из употребе због распрскавања услед замора. Продужење рока употребе плоча могуће је претходном температурном обрадом (што се практикује у технологији), ипак је то могуће до одређених граница, јер се може снизити укупна чврстоћа; очевидна је такође улога подмазивања, које умањује размену топлоте.

Детаљније на свим тим питањима ми се овде не задржавамо, јер би нас то извело из оквира садржаја ове књиге.

LITERATURA, KORIŠĆENA I CITIRANA

1. А. А. Ильюшин. Механика сплошной среды (учебное пособие), Изд. МГУ, вып. 1—5, 1965—1966
2. А. А. Ильюшин. Пластичность (Основы общей математической теории), Изд. АН СССР, 1963
3. П. М. Огибалов, В. Ф. Грибанов. Термоустойчивость пластин и оболочек, Изд. МГУ, 1968
4. P. Naghdi. On the theory of thin shells. Quarter ly of Applied Mathematics, 1957, 14, № 4
5. А. А. Ильюшин. Пластичность, Гостехиздат, М, 1948
6. А. А. Ильюшин, П. М. Огибалов. У пруго-пластические деформации полых цилиндров, Изд. МГУ, 1960 (переведена на японский язык. Изд. Токио, 1966)
7. П. М. Огибалов, Ю. В. Суворова. Механика армированных пластиков, Изд МГУ, 1965
8. Т. Pejović. Matematička analiza. Izdavačko preduzeće „Naučna knjiga“, Beograd, 1969—I, 1967—II; Izdavačko preduzeće „Građevinska knjiga“, Beograd, 1967—III, 1965—IV, 1970—V.
Diferencijalne jednačine. Izdavačko preduzeće „Naučna knjiga“, Beograd, 1968
9. Т. Р. Анделић. Diferencijalne jednačine kretanja neholonomnog sistema u inkompresibilnoj tečnosti. Beograd, 1946.
Über die Bewegung starrer Körper mit nichtholonomen Bindungen in einer inkompressiblen Flüssigkeit. Zeitschrift für ang. Math. und Mech. Bd 35. 1955.
Т. Р. Анделић. Sur l'application de la méthode de Pfaff dans la dynamique des fluides. Publ. de l'Inst. math. II. 1948.
Т. Р. Анделић. Tenzorski račun, Beograd, 1970
10. П. М. Огибалов. Изгиб, устойчивость и колебания пластинок, Изд. МГУ 1958
11. А. С. Вольмир. Гибкие пластинки и оболочки, Гостехиздат, М, 1956
12. В. В. Новожилов. Теория тонких оболочек, Судпромгиз, Л, 1951
13. В. З. Власов. Общая теория оболочек, Гостехиздат, М, 1949
14. А. Л. Гольденвейзер. Теория упругих тонких оболочек, Гостехиздат, М, 1953
15. Н. Aron Das Gleichgewicht und die Bewegung einer unendlich dünnen beliebig-dekrünnnten elastischen schall. J. für ang. math., 1874, Bd. 78.
16. Х. М. Муштари, К. Э. Галимов. Нелинейная теория тонких оболочек. Таткнигиздат, Казань, 1957
17. А. А. Гвоздев. Определение величины разрушающей нагрузки для статически неопределимых систем, претерпевающих пластические деформации. „Труды конференции по пластическим деформациям“. Изд. АН СССР, 1938

18. А. А. Гвоздев. Расчет несущей способности конструкции по методу предельного равновесия, Стойиздат, М, 1949
19. А. Р. Ржаницын. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов, Гостройиздат, М, 1954
20. А. Ляв. Математическая теория упругости, ОНТИ, М, 1935
21. Н. Lamb. Proc. Math. Soc., London, 1891, 21
22. Rayleigh. Proc. Math. Soc., London, 1881, 13
23. Г. Паркус. Неустановившиеся температурные напряжения, Физматгиз, М, 1963
24. В. А. Boley, A. D. Barber. Dynamic response of beams and plates to rapid heating. J. Appl. Mech., 1957, v. 24
25. В. В. Болотин. Динамическая устойчивость упругих систем, Гостехиздат, М, 1956
26. Н. И. Безухов, В. Л. Бажанов, И. И. Гольденблат, Н. А. Николаенко, А. М. Синюков. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких параметров. Изд. Машиностроение, М, 1965
27. Г. А. Кильчинская. О термопараметрическом резонансе гибких оболочек в нестационарном температурном поле. Сб-к „Тепловые напряжения в элементах конструкций“, вып. 3, Изд. АН УССР, Киев, 1963
28. Н. В. Мак-Лахман. Теория и приложение функций Матье, ИЛ, М, 1958
29. М. Д. Стретт функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике ДНТВУ, Харьков, 1935
30. А. А. Ильюшин. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей, ПММ, 1956, т. XX, вып. 6
31. А. А. Мовчан. О колебаниях пластинки, движущейся в газе, ПММ, 1956, т. XX, вып. 2
32. А. А. Мовчан. Об устойчивости панели, движущейся в газе, ПММ, 1957, т. XXI, вып. 2
33. А. А. Мовчан. Поведение комплексных собственных значений в задаче о флаттере панели, Инж. сб. АН СССР, 1960, т. XXVII
34. А. А. Мовчан. О влиянии аэродинамического демпфирования на сверхзвуковой флаттер обшивки. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1960, № 1
35. П. М. Огибалов. К постановке задачи о флаттере оболочек и панелей. Вестник Московского Университета, Механика, 1961, № 5
36. П. М. Огибалов. Вопросы динамики и устойчивости оболочек, Изд. МГУ, 1963
37. Р. Д. Степанов. О флаттере цилиндрических оболочек и панелей, движущихся в потоке газа, ПММ, 1957, т. XXI, вып. 5
38. D. I. Johns. Some Panel-Flutter Studies Using Piston Theory. J. Aeronaut. Sci., 1958. v. 25, № 11
39. Н. А. Кильчевский. Основні рівняння рівноваги пружних оболонок деякі методи і х нтегрировання. Зб. „Праць матем. инср“. АН УССР, Киев, 1940, № 4, 5
40. И. Т. Селезов. Досліження поперечных коливань пластини. Прикл. мех. 1960, т. VI, вып. 3
41. А. И. Лурье. Операционное исчисление. Гостехиздат, М, 1950
42. М. П. Галин. Распространение упруго-пластических волн и сдвига при осесимметричных деформациях оболочек вращения. Инж. Сб. АН СССР, 1961, т. XXXI
43. Т. Р. Anđelić. Osnovi mehanike neprekidnih sredina, Beograd, 1950
44. Т. Р. Anđelić. Equations fondamentales d'elasticite par la méthode de Pfaff. Publ. de l'Inst. math. III. 1950
45. А. И. Блохина. Динамическая устойчивость цилиндрической оболочки. Инж. сб. АН СССР, 1961, т. XXXI
46. И. И. Ворович. Статистический метод в теории устойчивости оболочек, ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 5
47. И. А. Лукаш. Расчет пологих оболочек и плит с учетом физической и геометрической нелинейности, „Труды ЦНИСК Акад. Стр-ва и архит-ры СССР“, 1961, вып. 7
48. П. М. Огибалов, М. А. Колтунов. Оболочки и пластины, Изд. МГУ, 1969
49. А. В. Погорелов К теории выпуклых упругих оболочек в закритической стадии, Изд. ХГВ, Харьков, 1960
50. А. В. Погорелов. Цилиндрические оболочки при закритических деформациях, 1. Осевое сжатие. Изд. ХГВ, Харьков, 1961

51. А. В. Погорелов. Цилиндрические оболочки при закритических деформациях, 11. Внешнее давление. Изд. ХГВ, Харьков, 1969
52. Л. И. Куршин, Ю. В. Липовцев. Устойчивость круговой цилиндрической панели в условиях ползучести, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций“, Изд. „Науково думка“, Киев, 1964, вып. 4
53. Т. Р. Anđelić. Sur la forme tensorielle des équations de Beltrami-Michell. Actes du IX Cong. intern. de mécanique appliquée. V. Bruxelles, 1956.
Izvođenje Beltrami-Michell-ovih jednačina u tenzorskom obliku iz Saint-Venant-ovih uslova kompatibilnosti. Zbornik radova Mat. inst. Srpske akademije nauka i umetnosti. knj. 6. 1957.
54. Т. Р. Anđelić. Tensorkalkül nebst Anwendungen (Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs, Teil III. Springer Verlag, Berlin 1968)
Tenzorski račun (univerzitetski udžbenik), I izd. Beograd 1952; II izd. Beograd, 1967
55. Т. Р. Anđelić. A Survey of Tensor Calculus. International centre for mechanical sciences, Udine, 1970.
Uloga tenzorskih metoda u tehnici.
55. А. А. Ильюшин. Конечное соотношение между силами и моментами и связях с деформациями в теории оболочек, ПММ, 1945, т. IX
56. П. М. Огибалов. Деформация трубы под действием внутреннего давления и переменной температуры. Инж. сб., АН СССР, 1954, т. XX
57. В. В. Болотин. Динамические задачи термоупругости для пластин и оболочек при наличии излучения. «Труды конференции по теории пластин и оболочек», Казань, 1961
58. А.А. Ильюшин, П.М. Огибалов. О прочности оболочек, толстостенного цилиндра и полого шара, подвергнутых облучению. Инж. сб. АН СССР, 1960, т. XXVII
59. П. М. Огибалов, И. А. Кийко. Очерки по механике высоких параметров. Изд. МГУ, 1966
60. И. А. Кийко. Течение металла в условиях теплообмена. «Механика твердых тела», АН СССР, 1966, № 5.

- Аеродинамичко пригушење 211
Брзине критичне 190
Варијација вектора нормале 57
„ вектора померања 57
„ енергије деформације 58
висина избочавања 307
Деформација послекритична 298
„ пужења 314
„ раванска еласто-пластична 218
„ радијална еластична 215
„ симетрична 89
деформације без дилатација 156
„ главне 28
„ са дилатацијама 156
дефекти Френкелови 343
дилатација релативна 21
динамички проблеми љуски 215
Енергија деформације 290
ефективни пресек 344
Закон Њутнов 12
„ равних пресека 185
„ Фуријеов 10
Ивични ефект 79
избочавање огледалско 297
Једначина Абелова 353
„ бихармонијска 129
„ варијациона 60
„ динамичка 215
„ Матјеова 178
„ Матје-Хилова 178
„ провођења топлоте 10
„ Софи Жермен-Лагранжева 130
„ Фредхолмова интегрална 266
једначине Бубнов-Галеркинове 250
„ Волтерине 354
„ Гаус-Кодацијеве 35
„ компатибилности 13
„ Кошијеве 12
„ кретања за оносиметричну де-
формацију 68
„ равнотеже 12

- Коэффициент динамичности 227
 „ Ламеов 13
 „ линеарног ширења 13
 „ провођења температуре 11
 „ топлотне проводљивости 10
 „ количина топлоте 10
 кривина Гаусова 32
 „ средња 32
 крутост на истезање-притисак 59
 „ цилиндарска 54
 купола 156
 Љуска 31
 „ гипка плитка 248
 „ затворена цилиндарска 148
 љуска затворена цилиндарска неограниче-
 на 148
 „ конусна 32
 „ сферна 32
 „ цилиндарска 32
 љуске конусне 31
 „ обртне 84
 „ плитке 32
 „ сферне 94
 „ цилиндарске 31
 Метода Лангранжева 17
 „ Рицова 61
 „ статистичка 270
 механика континуума 15
 Напонско стање љуске, безмоментно 79
 „ , моментно 79
 носивост љуски 331
 „ плоча 142
 Оператор Лапласов 11
 „ Лапласов бихармонијски 145
 оптерећење критично 313
 осцилације љуски 145
 „ параметарске 162
 „ плоча 158
 „ подужне (лонгитудиналне) 151
 „ принудне 163
 „ сопствене 145
 „ сферне љуске 155
 „ Панел цилиндарске љуске 98
 парабола стабилности 187
 параметар висине избочавања 309
 плоче равне 129
 побуда термопараметарска осциловања 175
 површи изотермичне 297
 површина избочавања 307
 полиноми Лежандрови 174
 поље нестационарно 18
 поље стационарно 18
 правци деформација, главни 28
 принцип кинематички 142
 „ Лагранжев варијациони 60
 проблем Кошијев 232
 Рад виртуални 58
 „ специфични деформације љуски 59
 „ спољних сила 290
 расподела (дистрибуција) Гибзова 273
 режим топлотни нестационарни и стационар-
 ни 11
 резонанција термопараметарска 176
 релација коначна А. А. Иљушина 326

репер коваријантни	28
„ контраваријантни	30
„ ортонормирани	28
Савијање плоче	137
симболи Кристофелови 1-ве и 2-ге врсте	43
систем једначина Арон-Муштаријев	95
„ Муштари-Власовљевих	79
„ Муштаријев	77
систем координата Гаусових	
„ Декартових	11
„ Лагранжевих	17
стабилност динамичка	251
„ еластичне равнотеже	305
„ љуски	237
стање еластичне равнотеже	312
„ еластично	139
„ еластично-пластично	139
„ пластично	140
степен нестабилности	193
Тензор другог реда	25
„ коначне деформације	27
„ кривине Риманов	44
теорија љуски, безмоментна	81
термостабилност сферне љуске	267
„ цилиндарске љуске	263
течење метала	348
топлота специфична	11
трансформација Фуријеова	265
Услов гранични	12
„ пластичности, Мизесов	53
„ пластичности, Сен Венан-Кулонов	326
услови почетни и гранични	72
Флатер љуски и плоча	185
флукс топлотни	10
функција напона	54
„ пластичности	52
функције Беселове	216
„ Нојманове	216
Хипотеза Кирхоф-Лава	32
„ Фуријеова	10
Центар избочавања	307



Др ТАТОМИР П. АНЂЕЛИЋ, професор Природно-математичког факултета Универзитета у Београду, редовни члан Српске академије наука и Међународне астронаутичке академије у Паризу.

Т. П. Анђелић је студирао математику, физику и астрономију и формирао се као теоретичар у механици. Има више од 70 публикација међу којима 9 универзитетских уџбеника. Бави се проблемима рационалне механике, риманске геометрије, нумеричких метода у математици као и историјским и филозофским проблемима механике. Врло је активан у научним друштвима а посебно у области ширења научних знања. Т. П. Анђелић је био декан Природно-математичког факултета, а сад је директор Математичког института СРС. Одликован је Орденом рада са црвеном заставом и Орденом заслуга за народ са златном звездом.

ДВ

ЛА

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade

elibrary.maf.f.bg.ac.rs



Izdavačko-informativni
centar
studentata
11000 beograd
balkanska 4/3