

Građevinski fakultet
Univerziteta u Beogradu

Nelinearna analiza konstrukcija sa kablovima

Doktorska disertacija

Mr. Špiro Gopčević

Beograd, 2007

Rezime

Nelinearna analiza konstrukcija sa kablovima

U radu je prikazana nelinearna analiza konstrukcija sa kablovima. Formulisan je odgovarajući matematički model problema. Pretpostavljeno je da je materijal konstrukcije izotropan i linearno-elastičan. Primenom korigovane *Lagrange*-ove formulacije i nelinearnog polja pomeranja poprečnog preseka, izvedene su linearizovane inkrementalne jednačine ravnoteže elementa. Na osnovu analitičkog rešenja za lančanicu, a za različite početne pretpostavke, izvedeni su konačni elementi za plitku i duboku lančanicu. Ovi konačni elementi su korišćeni za aproksimaciju kablova u konstrukcijama. Kao što sledi iz samog naziva, kablovi u konstrukcijama sa kablovima obično su povezani sa drugim tipovima elemenata, te je osim modeliranja kablova, urađeno i modeliranje tankozidnih i grednih nosača. Izvedeni konačni elementi za gredne nosače, takođe, mogu da se upotrebljavaju za aproksimaciju kablova u konstrukcijama sa kablovima. U slučaju nelinearne statičke analize usvojen je inkrementalno-iterativni postupak za rešavanje sistema nelinearnih jednačina, u varijanti *Newton-Raphson*-ovog i/ili modifikovanog *Newton-Raphson*-ovog postupka. U slučaju nelinearne dinamičke analize usvojena je direktna numerička integracija, u varijanti *Newmark*-ovog postupka, u kombinaciji sa inkrementalno-iterativnom analizom u vremenskim koracima. Urađena je objektno orijentisana analiza matematičkog modela i dobijen je objektno-orijentisani model podataka zasnovan na objektno orijentisanoj paradigmi. Na osnovu matematičkog modela i objektno-orijentisanog modela podataka, urađen je računarski program u jeziku C++. Dobijeni program omogućava linearnu i nelinearnu analizu konstrukcija sa kablovima, usled dejstva statičkog i dinamičkog opterećenja. Tačnost računarskog programa proverena je kroz test primere dostupne u literaturi.

Ključne reči: kabl, lančanica, nelinearna analiza, metod konačnih elemenata

Abstract

Nonlinear analysis of cable supported structures

The nonlinear analysis of cable supported structures is considered. The corresponding mathematical model of the problem is formulated. It is supposed that material of the structure is isotropic and linearly elastic. Linearized incremental equations of equilibrium of finite elements are derived, by applying the updated Lagrange formulation and nonlinear field of cross sectional displacements. Based on the analytical catenary solutions, for various starting suppositions, the corresponding catenary finite elements for the so-called flat and deep catenaries, were derived. Obtained catenary finite elements are used in representation of cables in considered cable supported structures. As the name implies, cables in cable supported structures are also combined with the other types of elements, usually of the line-like structure. Therefore, besides consideration of cables, modeling of thinwalled beams and beam-columns was analyzed too. Derived beam finite elements

could also be used in approximation of cables. In the case of nonlinear static analysis, the solution of nonlinear equations is performed by the incremental - iterative procedure in the form of the Newton Raphson and/or modified Newton Raphson method. In the case of nonlinear dynamic analysis, direct numerical integration by the Newmark method is combined with incremental-iterative procedure in each time step. Object oriented analysis of mathematical model was done and the corresponding data model based on object oriented paradigm was obtained. According to mathematical model and object oriented data model, computer software using C++ language was developed. The computer software enables linear and nonlinear analysis of cable supported structures due to static and/or dynamic load. Accuracy of the computer code was checked out by testing corresponding examples given in the literature.

Key words: cable, catenary, nonlinear analysis, finite element method

Predgovor

Model je pojednostavljeni prikaz stvarnosti. Dobar model je onaj koji uključuje one elemente posmatranog problema koji su bitni, a izostavlja one koji nisu bitni za dati problem. Jedan isti problem može se predstaviti različitim modelima. Izbor modela ima ključni uticaj na to kako se problem rešava i kako se oblikuje rešenje. U savremenom projektovanju i proračunu konstrukcija zahteva se analiza na što realnijim računskim modelima.

Predmet ove disertacije je nelinearna analiza konstrukcija sa kablovima. Rad se satoji iz dvanaest poglavlja i tri priloga.

U prvom uvodnom poglavlju dato je stanje u oblasti istraživanja kablovskih konstrukcija i konačnih elemenata za kablove, kao i cilj i svrha istraživanja.

U drugom poglavlju izvedene su osnovne jednačine ravnoteže elementa i data je inkrementalna formulacija osnovnih jednačina ravnoteže elementa korigovanom *Lagrange*-ovom formulacijom.

U trećem poglavlju definisana je lančanica kao nosač. Dato je analitičko rešenje za neelastičnu i elastičnu lančanicu. Kod analitičkog rešenja, pretpostavlja se da je lančanica u ravni i da je opterećenje koje deluje na lančanicu jednakoraspodeljeno opterećenje u ravni lančanice. Na osnovu analitičkog rešenja, definisana su dva konačna elementa za hiperboličko rešenje i jedan konačni element za paraboličko rešenje lančanice. Da bi računске vrednosti dobijene razvijenim programom mogle da se prekontrolišu, izložena su rešenja koja se zasnivaju na približnoj teoriji lančanice. Izvedene su jednačine promene stanja lančanice. Data su rešenja kada je lančanica opterećena jednakopodeljenim opterećenjem i koncentrisanom silom. Razmotren je i uticaj krutosti na savijanje lančanice na uticaje u lančanici.

U četvrtom poglavlju razmatran je tankozidni nosač otvorenog i zatvorenog poprečnog preseka. Definisani su vektori pomeranja, vektori deformacija, konstitutivne matrice kao i vektori i matrice *Cauchy*-jevih napona, vektori čvornih pomeranja i vektori čvornih sila. Zatim su izvedene tangentne matrice krutosti, vektori ekvivalentnog čvornog opterećenja i vektori internih čvornih sila tankozidnog nosača sa otvorenim i zatvorenim poprečnim presekom.

U petom poglavlju razmatran je gredni nosač. Gredni nosač aproksimiran je sa pravim i krivolinijskim konačnim elementima. U slučaju krivolinijskog konačnog elementa uvode se unutrašnji čvorovi u elementu. Za sve ove elemente definisani su vektori pomeranja, vektori deformacija, konstitutivne matrice kao i vektori i matrice *Cauchy*-jevih napona, vektori čvornih pomeranja i vektori čvornih sila. Zatim su izvedene tangentne matrice krutosti i vektori ekvivalentnog čvornog opterećenja i vektori internih čvornih sila grede. Takođe je razmatran prosti štap. Prosti štap je aproksimiran sa krivolinijskim konačnim elementom i pravim elementom sa ekvivalentnim modulom elastičnosti.

U šestom poglavlju dati su postupci redukcije modela fleksibilnih sistema i matrice transformacije konačnog elementa iz globalnog u lokalni koordinatni sistema i na sistemnu liniju elementa.

U sedmom poglavlju dat je način formiranja matrice masa i matrice prigušenja sistema, a zatim postupak formiranja jednačine ravnoteže sistema.

U osmom poglavlju opisane su numeričke metode za: rešavanje linearnog sistema jednačina, nelinearnog sistema jednačina, problem svojstvenih vrednosti i numeričku integraciju.

U devetom poglavlju dato je objašnjenje objektno orijentisanog programiranja i modeliranja. Dat je kratak prikaz osnova objektno orijentisanog modeliranja na jeziku **UML** (*Unified modeling language*). Korišćenjem jezika **UML**, dat je strukturni model problema razmatranog u radu, u vidu dijagrama klasa.

U desetom poglavlju dat je opis programa **ELAN** (**EL**astična **AN**aliza) i sadržaj ulaznih datoteka u program. Program je testiran. Rezultati testiranja programa su upoređeni sa poznatim teorijskim i numeričkim vrednostima.

U jedanaestom poglavlju izvedeni su zaključci rada i date su preporuke za dalji razvoj.

U prilogu A date su vrednosti submatrica matrica krutosti dobijene rešavanjem integrala u poglavlju 4.6 i 5.1.3.

U prilogu B dat je način izračunavanja *Jacobi*-ana sistema.

U prilogu C dato je kratko objašnjenje izoparametarskih elemenata i veza između lokalnih i globalnih koordinata elementa.

Želim ovom prilikom da se zahvalim mentoru ove doktorske teze prof.dr.Stanku Brčiću, na pomoći, podršci, konsultacijama i sugestijama koje mi je pružio u toku rada.

Sadržaj

1	Uvod	21
1.1	Kablovske konstrukcije	23
1.2	Stanje istraživanja konačnih elemenata za kablove	25
1.2.1	Elementi zasnovani na polinomima kao interpolacionim funkcijama	25
1.2.2	Elementi zasnovani na analitičkim izrazima za lančanicu	27
1.3	Cilj i svrha istraživanja	29
2	Jednačine ravnoteže konačnog elementa	31
2.1	Osnovne jednačine ravnoteže	33
2.2	Inkrementalna formulacija osnovnih jednačina ravnoteže	34
2.2.1	Formulacija rešenja metodom konačnih elemenata	37
3	Lančanica kao konačni element	41
3.1	Teorija lančanice - analitičko rešenje	43
3.1.1	Osnovne pretpostavke i relacije	43
3.1.2	Neelastična lančanica opterećena gravitacionim opterećenjem	45
3.1.3	Elastična lančanica opterećena gravitacionim opterećenjem	53
3.1.4	Jednačina elastične lančanice opterećene gravitacionim opterećenjem u parametarskom obliku	54
3.2	Konačni elementi na bazi analitičkih rešenja	57
3.2.1	Elastični hiperbolički elemenat - tip 1	57
3.2.2	Elastični hiperbolički elemenat - tip 2	60
3.2.3	Elastični plitki parabolički elemenat	64
3.3	Upoređenje rešenja	65
3.4	Jednačina promene stanja za plitku lančanicu	68
3.5	Uticaji u plitkoj lančanici usled poprečnog opterećenja	70
3.5.1	Dodatno jednakopodeljeno opterećenje duž celog raspona	70
3.5.2	Sopstvena težina - rešenje za elastičnu paraboličku lančanicu	73
3.5.3	Koncentrisana sila - rešenje za elastičnu paraboličku lančanicu	74
3.6	Linearna teorija slobodnih harmonijskih vibracija	78
3.6.1	Slobodne harmonijske vibracije u ravni	78
3.6.2	Slobodne harmonijske vibracije van ravni	83
3.7	Uticaj krutosti na savijanje	84

4	Tankozidna greda kao konačni element	87
4.1	Tankozidna greda otvorenog poprečnog preseka	89
4.1.1	Osnovne pretpostavke	89
4.1.2	Kinematičke veličine i vektor pomeranja	89
4.1.3	Vektori deformacije	91
4.1.4	Konstitutivna matrica	92
4.1.5	Matrica i vektor <i>Cauchy</i> -jevih napona	92
4.2	Tankozidna greda zatvorenog poprečnog preseka	93
4.2.1	Osnovne pretpostavke	93
4.2.2	Kinematičke veličine i vektor pomeranja	93
4.2.3	Vektori deformacije	94
4.2.4	Konstitutivna matrica	95
4.2.5	Matrica i vektor <i>Cauchy</i> -jevih napona	96
4.3	Presečne sile	97
4.4	Vektor generalisanih pomeranja i sila	102
4.5	Sile unutar jednog konačnog elementa	104
4.6	Matrice krutosti	104
4.7	Vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja	106
4.8	Vektor internih čvornih sila	107
4.9	Matrice interpolacionih funkcija	108
5	Greda kao konačni elemenat	111
5.1	Greda sa dva čvora	113
5.1.1	Vektor generalisanih pomeranja i vektor generalisanih sila	113
5.1.2	Sile unutar jednog konačnog elementa	115
5.1.3	Matrice krutosti	115
5.1.4	Vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja	116
5.1.5	Vektor internih čvornih sila elementa	117
5.1.6	Matrice interpolacionih funkcije	118
5.2	Greda sa unutrašnjim čvorovima	119
5.2.1	Kinematičke veličine i vektor pomeranja	119
5.2.2	Vektori deformacije	120
5.2.3	Konstitutivna matrica	121
5.2.4	Matrica i vektor <i>Cauchy</i> -jevih napona	122
5.2.5	Vektor generalisanih pomeranja i vektor generalisanih sila	122
5.2.6	Matrice krutosti	124
5.2.7	Vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja	127
5.2.8	Vektor internih čvornih sila	128
5.2.9	Matrica interpolacionih funkcija	128
5.3	Prosti štap sa unutrašnjim čvorovima	130
5.3.1	Osnovne pretpostavke	130
5.3.2	Kinematičke veličine i vektor pomeranja	130
5.3.3	Vektori deformacija	131
5.3.4	Konstitutivna matrica	132
5.3.5	Matrica i vektor <i>Cauchy</i> -jevih napona	132
5.3.6	Vektor generalisanih pomeranja i vektor generalisanih sila	133

5.3.7	Matrice krutosti	134
5.3.8	Vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja	135
5.3.9	Vektor internih čvornih sila	135
5.3.10	Matrica interpolacionih funkcija	135
5.4	Prosti štap sa ekvivalentim modulom elastičnosti	137
6	Postupci transformacije matrica i vektora	139
6.1	Matrice transformacije	141
6.1.1	Uvod	141
6.1.2	Matrica rotacije iz globalnog u lokalni koordinatni sistem	142
6.1.3	Matrica transformacije na sistemnu tačku preseka	145
6.2	Redukcija modela fleksibilnih sistema	149
6.2.1	Uvod	149
6.2.2	<i>Guyan</i> -ov metod redukcije	149
6.2.3	Redukcija matrice krutosti i vektora čvornog opterećenja elementa	151
7	Jednačine ravnoteže sistema	153
7.1	Matrica masa sistema	155
7.2	Matrica prigušenja sistema	155
7.3	Postupak određivanja matrica i vektora sistema	158
7.4	Opterećenje konstrukcije	161
7.4.1	Stalno opterećenje	161
7.4.2	Korisno opterećenje	161
8	Numeričke metode	165
8.1	Rešavanje linearnog sistema algebarskih jednačina	167
8.1.1	LU dekompozicija	167
8.1.2	<i>Singular Value</i> dekompozicija	168
8.2	Postupci za rešavanje nelinearnih jednačina ravnoteže	170
8.2.1	Statička nelinearna analiza	170
8.2.2	Metode kontrole sile	173
8.2.3	<i>Newmark</i> -ov postupak vremenske integracije	175
8.2.4	Kriterijumi konvergencije	177
8.3	Problem svojstvenih vrednosti	178
8.4	<i>Gauss</i> -ove kvadrature formule	180
9	Objektno orijentisana analiza i dizajn sistema	183
9.1	Uvod	185
9.2	Osnovni pojmovi	185
9.2.1	Objektno orijentisano programiranje	185
9.2.2	Objektno orijentisano modeliranje i implementacija	187
9.2.3	Osnove objektno orijentisanog modeliranja na jeziku UML	188
9.2.4	Osnovni elementi jezika UML	188
9.2.5	Dijagram klasa	190
9.3	Objektno orijentisana analiza	193
9.3.1	Zahtevi koje program mora da zadovolji	193

9.3.2	Dijagrami klasa	193
9.4	Primeri	208
9.4.1	Uvođenje novog konačnog elementa	208
9.4.2	Uvođenje numeričkog metoda za rešavanje nelinearnog sistema jednačina	216
10	Implementacija modela u jeziku C++	219
10.1	Uvod	221
10.2	Osnovne karakteristike programa	221
10.3	Opis ulaznih datoteka programa	223
10.3.1	Konfiguraciona datoteka	223
10.3.2	Glavna datoteka sa podacima	225
10.3.3	Definisanje vremenske funkcije sile i akcelelograma	237
10.4	Primeri	238
10.4.1	Plitki kabl opterećen koncentrisanom silom u sredini raspona	238
10.4.2	Plitki kabl opterećen koncentrisanom silom na $0.4l_x$	240
10.4.3	Zategnuta žica opterećena sopstvenom težinom i koncentrisanom silom	242
10.4.4	Zategnuta žica pod dejstvom promenljivog jednakoraspodeljenog opterećenja	251
10.4.5	Kablovska mreža	254
10.4.6	Toranj sa kosim kablovima	260
10.4.7	Kružne frekvencije slobodnih vibracija nagnutog kabla	266
10.4.8	Kružne frekvencije slobodnih vibracija tornja sa kosim kablovima	269
10.4.9	Tankozidni roštiljni nosač	274
10.4.10	Most sa kosim kablovima	279
11	Zaključci i preporuke	285
A	Računske vrednosti submatrica matrica krutosti	289
B	<i>Jacobi</i>-an sistema	295
C	Izoparametarski elementi	297

Oznake i simboli

Oznaka	Značenje
A	Površina poprečnog preseka elementa
$\mathbf{A}$	Matrica operator koja uspostavlja vezu između vektora pomeranja proizvoljne tačke poprečnog preseka i vektor generalisanih pomeranja čvorova elementa
$\mathbf{B}_L$	Linearna matrica transformacije - matrica transformacije između pomeranja i deformacija
$\mathbf{B}_{NL}$	Nelinearna matrica transformacije - matrica izvoda interpolacionih funkcija
mC	m -ta ravnotežna konfiguracija
$\mathbf{C}$	Matrica prigušenja sistema
$\mathbf{D}$	Konstitutivna matrica
$D(y_D, z_D)$	Centar smicanja poprečnog preseka tankozidnog nosača čije su koordinate y_D, z_D
$\mathbf{e}$	Linearni deo <i>Cauchy</i> -jevog tenzora deformacije
E	<i>Young</i> -ov moduo elastičnosti
$\mathbf{f}_{int}$	Vektor internih čvornih sila
F_x	Aksijalna sila
F_y, F_z	Smičuće sile
G	Moduo klizanja
$\mathbf{h}$	Vektor zapreminskih sila
H	Horizontalna komponenta sile u lančanicu
I_{xx}	<i>Saint-Venant</i> -ova torziona konstanta poprečnog preseka
I_{yy}, I_{zz}	Momenti inercije u odnosu na glavne centralne ose y i z poprečnog preseka
$I_{\omega\omega}$	Sektorski momenat inercije tankozidnog nosača otvorenog poprečnog preseka u odnosu na centar smicanja
$I_{\hat{\omega}\hat{\omega}}$	Sektorski momenat inercije tankozidnog nosača zatvorenog poprečnog preseka u odnosu na centar smicanja
$\mathbf{K}_L$	Linearna matrica krutosti
$\mathbf{K}_{NL}$	Nelinearna matrica krutosti
$\mathbf{K}_T$	Tangentna matrica krutosti
l_x	Horizontalni razmak oslonaca lančanice
l_z	Vertikalna denivelacija oslonaca lančanice
L_0	Dužina nerastegljive lančanice
L	Dužina rastegljive lančanice
L	Dužina grednog elementa
L_c	Dužina tetive lančanice
$\mathbf{L}$	Matrica operator koja uspostavlja vezu između vektora pomeranja proizvoljne tačke poprečnog preseka i vektora parametara pomeranja
nastavak na sledećoj strani ...	

... nastavak sa prethodne strane	
Oznaka	Značenje
$\mathbf{L}_L$	Linearna matrica operator između vektora gradijenata pomeranja i vektora pomeranja proizvoljne tačke poprečnog preseka
$\mathbf{L}_{NL}$	Nelinearna matrica operator između linearnog dela <i>Cauchy</i> -jevog tenzora deformacije i vektora pomeranja proizvoljne tačke poprečnog preseka
$\mathbf{N}$	Matrica interpolacionih funkcija oblika
N_i	i -ta interpolaciona funkcija
$\mathbf{N}_u$	Matrica interpolacionih funkcija oblika za pomeranje u
$\mathbf{N}_v$	Matrica interpolacionih funkcija oblika za pomeranje v
$\mathbf{N}_w$	Matrica interpolacionih funkcija oblika za pomeranje w
$\mathbf{N}_{\varphi x}$	Matrica interpolacionih funkcija oblika za obrtanje φx
$\mathbf{N}_{\varphi y}$	Matrica interpolacionih funkcija oblika za obrtanje φy
$\mathbf{N}_{\varphi z}$	Matrica interpolacionih funkcija oblika pomeranja φz
$oxyz$	Lokalni koordinatni sistem elementa
$OXYZ$	Globalni koordinatni sistem
$\mathbf{p}$	Vektor površinskih sila
p	Dodatno jednakopodeljeno opterećenje po jedinici luka lančanice
p_1	Dodatno jednakopodeljeno opterećenje po jedinici dužine horizontalne projekcije lančanice
$\mathbf{q}$	Vektor generalisanih pomeranja čvorova elementa
$\mathbf{q}_i$	Vektor generalisanih pomeranja i -tog čvora elementa
$\dot{\mathbf{q}}$	Vektor generalisanih brzina čvorova elementa
$\ddot{\mathbf{q}}$	Vektor generalisanih ubrzanja čvorova elementa
q	Jednakopodeljeno opterećenje sopstvenom težinom duž luka lančanice
q_1	Jednakopodeljeno opterećenje sopstvenom težinom duž horizontalne projekcije lančanice
$\mathbf{r}$	Vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja
δR_s	Virtelni rad spoljašnjih sila
δR_u	Virtelni rad unutrašnjih sila
T	Sila zatezanja u lančanici
T_1, T_1	Sila zatezanja u oslonačkim čvorovima lančanice
$\mathbf{T}_T$	Matrica transformacije elementa iz globalnog u lokalni koordinatni sistem
$\mathbf{T}_M$	Matrica transformacije uticaja sa teživšne linije na sistemnu liniju preseka
T_{SV}	<i>Saint-Venant</i> -ov moment torzije
T_{ω}	Torzijski momenat vitoperenja
T_{σ}	Čisto torzijsko izvijanje
${}^m\bar{\mathbf{T}}$	Matrica transformacije u korigovanom <i>Lagrange</i> -ovom postupku
$\mathbf{u}$	Vektor parametara pomeranja koji određuju deformaciju poprečnog preseka elementa u lokalnom koordinatnom sistemu
$\mathbf{u}_*$	Vektor pomeranja proizvoljne tačke poprečnog preseka
$\mathbf{u}_{*d}$	Vektor gradijenata pomeranja
nastavak na sledećoj strani ...	

... nastavak sa prethodne strane	
Oznaka	Značenje
u, v, w	Komponente vektora parametara pomeranja u pravcu x, y i z ose
u_*, v_*, w_*	Komponente vektora pomeranja proizvoljne tačke poprečnog preseka u pravcu x, y i z ose
U, V, W	Komponente vektora parametara pomeranja u pravcu X, Y i Z ose
V	Zapremina
$\mathbf{x}$	Vektor položaja proizvoljne tačke poprečnog preseka u koordinatnom sistemu $Oxyz$
x	Uzdužna težišna osa elementa
$\mathbf{X}$	Vektor položaja proizvoljne tačke poprečnog preseka u koordinatnom sistemu $OXYZ$
y, z	Glavne centralne osi poprečnog preseka
β	Ugao između ose x i tetive kabla
σ	Matrica <i>Cauchy</i> -jevih napona
$\hat{\sigma}$	Vektor <i>Cauchy</i> -jevih napona
ρ	Gustina tela
η	Nelinearni deo <i>Cauchy</i> -jevog tenzora deformacije
ω	Normirana sektorska koordinata tankozidnog nosača otvorenog poprečnog preseka
$\hat{\omega}$	Normirana sektorska koordinata tankozidnog nosača zatvorenog poprečnog preseka
ϑ	Veličina deplanacije tankozidnog nosača zatvorenog poprečnog preseka

Slike

1.1	Kablovske konstrukcije: a) Most sa kosim kablovima b) Kabl kod dalekovoda c) Komunikacijski toranj sa kosim zategama d) Rešetka sa kosim zategama e) Energetski vod za napajanje lokomotive strujom f) Obešeni most	23
1.2	Različite konfiguracije nerastegljivog kabla dužine L_0 , a za različite horizontalne raspone: $x = 2, 4, 6, 8, 10, 11.9, 11.99, 11.999m$ i $z = -5m$ [39]	25
1.3	Upoređenje krutosti rastegljivog kabla i pravog grednog elementa sa istim karakteristikama [39]	26
2.1	Element u početnoj 0C , tekućoj mC i narednoj ${}^{m+1}C$ konfiguraciji	34
3.1	Oblik lančаницe u zavisnosti od opterećenja	43
3.2	Segment nerastegljive lančаницe	45
3.3	Lančаницa u koordinatnom sistemu oxz	47
3.4	Segment elastične lančаницe	55
3.5	Lančаницa u ravni $x - z$	57
3.6	Tri moguća rešenja za lančаницu [39]	62
3.7	Konfiguracija elementa za tri različita rešenja: a) $H = H_1$, b) $H = H_2$, c) $H = H_3$ citeTibert	63
3.8	Različiti konačni elementi za kablove: deformisana konfiguracija [12]	66
3.9	Različiti konačni elementi za kablove: dijagram horizontalna sila - horizontalno pomeranje [12]	67
3.10	Lančаницa opterećena jednakopodeljenim opterećenjem	70
3.11	Lančаницa opterećena koncentrisanom silom	75
3.12	Slobodne oscilacije lančаницe	78
4.1	Osnovne kinematičke veličine tankozidnog nosača	90
4.2	Komponente napona u poprečnom preseku tankozidnog nosača	97
4.3	Wagner-ov efekat	98
4.4	Prava tankozidna greda otvorenog ili zatvorenog poprečnog preseka	102
4.5	Komponente generalisanih pomeranja u čvoru tankozidne grede	103
4.6	Komponente generalisanih sila u čvoru tankozidne grede	104
5.1	Prava greda	113
5.2	Generalisana pomeranja u čvoru grede	114
5.3	Generalisane sile u čvoru grede	115
5.4	Osnovne kinematičke veličine u čvoru grede koja ima unutrašnje čvorove	119

5.5	Greda sa unutrašnjim čvorovima	123
5.6	Prosti štap sa unutrašnjim čvorovima	130
5.7	Generalisana pomeranja u čvoru štapa	133
5.8	Generalisane sile u čvoru štapa	134
5.9	Prost štap sa ekvivalentnim modulom elastičnosti	137
6.1	Osa x grede nije paralelna sa Y osom globalnog koordinatnog sistema	142
6.2	Osa x grede paralelna sa Y osom globalnog koordinatnog sistema	144
6.3	Položaj lokalnog i globalnog koordinatnog sistema za konačne elemente zasnovane na lančanicima	146
6.4	Položaj centra smicanja (D) i težišta preseka (o) u odnosu na sistemnu liniju (M)	147
7.1	Razlaganje vektora dinamičkog pomeranja oslonaca	163
7.2	Pomeranje objekta pri zemljotresu	164
7.3	Primer vremenskog toka ubrzanja tla u jednom pravcu (akcelelogram zemljotresa <i>El Centro</i>)	164
8.1	Kriva opterećenje - pomeranje ($r - q$)	170
8.2	Kontrolni putevi	172
9.1	Oznaka za klasu	189
9.2	Oznaka za relaciju zavisnosti	189
9.3	Oznaka za relaciju asocijacije	190
9.4	Oznaka za relaciju generalizacije	190
9.5	Oznaka za relaciju realizacije	190
9.6	Asocijacija između dve klase	191
9.7	Multiplikativnost	191
9.8	Upravlјivost	191
9.9	Agregacija	192
9.10	Kompozicija	192
9.11	Nasleđivanje	192
9.12	Dijagram subklasa klase CComponent	194
9.13	Dijagram klasa Model	195
9.14	Dijagram klasa za opis modela sastavljenog od konačnih elemenata	196
9.15	Dijagram klasa za formiranje čvora	197
9.16	Dijagram klasa za formiranje modela konačnih elemenata	198
9.17	Dijagram klasa konačnih elemenata	199
9.18	Dijagram klasa za definisanje opterećenja	200
9.19	Dijagram klasa za dinamičku i statičku analizu	202
9.20	Dijagram klasa za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina	203
9.21	Dijagram klasa za rešavanje problema svojstvenih vrednosti	204
9.22	Dijagram klasa za mapiranje	205
9.23	Dijagram klasa za transformaciju elementa	206
9.24	Dijagram klasa za redukciju matrica i vektora elementa	206
9.25	Dijagram klasa za opis funkcija	207

10.1	Dijagram klasa za ulazno-izlazne datoteke	224
10.2	Kabl na koga deluje koncentrisana sila u sredini raspona	238
10.3	Prednapregnuti kabl na koga deluje koncentrisana sila	240
10.4	Dijagram vertikalnog pomeranja tačke A	241
10.5	Prednapregnuti kabl na koga deluje sopstvena težina i koncentrisana sila	243
10.6	Funkcija vremenske promene sile $f(t)$	243
10.7	Akcelelogram	244
10.8	Vertikalni ugib tačke A usled statičkog i dinamičkog opterećenja	245
10.9	Ugib tačke A usled dejstva seizmičke sile	245
10.10	Prednapregnuti kabl opterećen jednakopodeljenim opterećenjem	251
10.11	Promena vertikalnog ugiba tačke A	252
10.12	Kablovska mreža opterećena koncentrisanim opterećenjem u čvorovima	254
10.13	Vertikalno pomeranje čvora 1	255
10.14	Toranj sa kablovima opterećen koncentrisanom silom	260
10.15	Horizontalno pomeranja vrha tornja usled horizontalne sile	265
10.16	Vertikalni ugib tačke A usled statičkog i dinamičkog opterećenja	266
10.17	Nagnuti kabl	269
10.18	Prva tri moda vibracija tornja	273
10.19	Tankozidni roštiljni nosač	274
10.20	Presečne sile roštiljnog nosača otvorenog poprečnog preseka	277
10.21	Presečne sile roštiljnog nosača zatvorenog poprečnog preseka	278
10.22	Most sa kosim kablovima	279

Tabele

8.1	Vrste ravnoteže konstrukcije	171
8.2	Koeficijenti numeričke integracije i argumenti funkcija u <i>Gauss</i> -ovim kvadraturnim formulama kada je $-1 \leq \xi \leq 1$	181
8.3	Koeficijenti numeričke integracije i argumenti funkcija u <i>Gauss</i> -ovim kvadraturnim formulama kada je $0 \leq \xi \leq 1$	181
10.1	Karakteristike kablova	238
10.2	Pomeranje tačke A usled koncentrisane sile	239
10.3	Pomeranje tačke A usled koncentrisane sile	239
10.4	Pomeranje tačke A usled koncentrisane sile	241
10.5	Pomeranje čvora A usled koncentrisane sile i stalnog jednakopodeljenog opterećenja	244
10.6	Kružne frekvencije slobodnih vibracija kabla u ravni [<i>rad/sec</i>]	249
10.7	Kružne frekvencije slobodnih vibracija kabla van ravni [<i>rad/sec</i>]	250
10.8	Pomeranje tačke u sredini raspona usled opterećenja <i>p</i>	252
10.9	Kružne frekvencije slobodnih vibracija kabla u ravni [<i>rad/sec</i>]	252
10.10	Kružne frekvencije slobodnih vibracija kabla van ravni [<i>rad/sec</i>]	253
10.11	Pomeranje čvora 1 usled stalnog opterećenja	255
10.12	Maksimalno pomeranje vrha tornja u horizontalnom smeru kada su kablovi zamenjeni sa 4 konačna elementa	263
10.13	Vrednosti maksimalnih sila u kablovima kada su kablovi zamenjeni sa 4 konačna elementa	264
10.14	Maksimalno pomeranje vrha tornja u horizontalnom smeru kada su kablovi zamenjeni sa jednim konačnim elementom	264
10.15	Vrednosti maksimalnih sila u kablovima kada su kablovi zamenjeni sa jednim konačnim elementom	264
10.16	Karakteristike kablova	266
10.17	Kružne frekvencije u ravni kabla 1 za različite tipove konačnih elemenata [<i>rad/sec</i>]	267
10.18	Kružne frekvencije u ravni kabla 2 za različite tipove konačnih elemenata [<i>rad/sec</i>]	267
10.19	Kružne frekvencije u ravni kabla 3 za različite tipove konačnih elemenata [<i>rad/sec</i>]	268
10.20	Kružne frekvencije van ravni kabla [<i>rad/sec</i>]	268
10.21	Kružne frekvencije tornja sa kablovima [<i>rad/sec</i>]	272

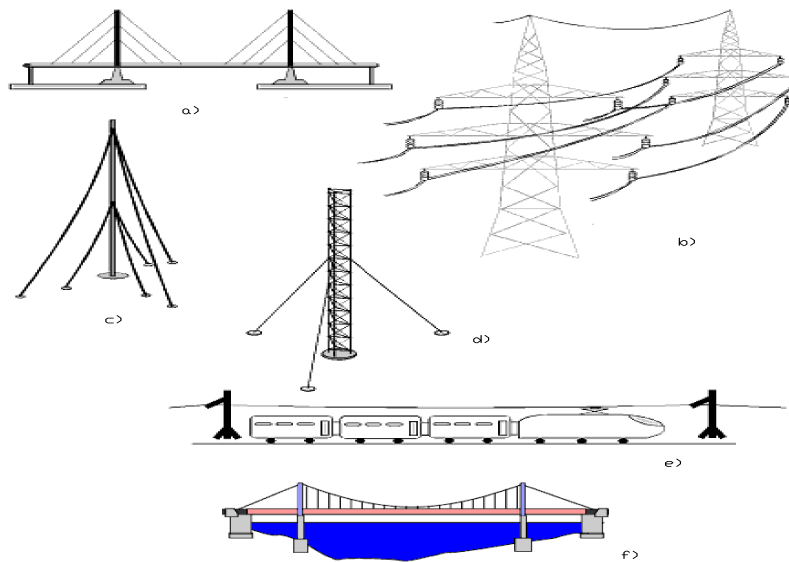
10.22	Pomeranje čvora tankozidnog nosača otvorenog poprečnog preseka	276
10.23	Pomeranje čvora tankozidnog nosača zatvorenog poprečnog preseka	276
10.24	Oblik mosta sa kosim kablovima usled stalnog opterećenja	280
10.25	Sile u elementima mosta sa kosim kablovima usled stalnog opterećenja . . .	280
10.26	Sile u kablovima mosta	284
A.1	Submatrice matrice krutosti tankozidne grede otvorenog i zatvorenog poprečnog preseka i grede	290
A.2	Submatrice matrice krutosti tankozidne grede otvorenog poprečnog preseka i grede	292
A.3	Submatrice matrice krutosti tankozidne grede otvorenog i zatvorenog poprečnog preseka	294

Glava 1

Uvod

1.1 Kablovske konstrukcije

Kablovi, kao konstruktivni elementi, upotrebljavaju se u mnogim oblastima inženjerstva i predstavljaju vitalni noseći deo raznih konstrukcija kao što su: mostovi velikih raspona sa kablovima - viseći mostovi i mostovi sa kosim kablovima, krovnih konstrukcija sa kablovskim mrežama, komunikacijskih tornjeva sa kosim zategama, konstrukcija za eksploataciju nafte u morima sa kablovima za sidrenje, vodovi za prenos električne energije itd (slika 1.1). Kablovi su obično napravljeni od posebno legiranih čelika koji



Slika 1.1: Kablovske konstrukcije: a) Most sa kosim kablovima b) Kabl kod dalekovoda c) Komunikacijski toranj sa kosim zategama d) Rešetka sa kosim zategama e) Energetski vod za napajanje lokomotive strujom f) Obešeni most

imaju povoljne mehaničke karakteristike, pre svega visoku čvrstoću na zatezanje. Takve konstrukcije su obično veoma ekonomične.

Konstrukcije sa kablovima spadaju u konstrukcije sa nelinearnim ponašanjem. Nelinearnost, kod konstrukcija sa kablovima, je posledica:

1. Nelinearnog ponašanja kabla - aksijalna krutost kabla je nelinearna funkcija pomeranja krajeva kabla. Deo ovoga pomeranja posledica je deformacije materijala, a drugi deo je posledica efekta ugiba kabla. Kada aksijalna sila u kablju raste, ugib se smanjuje i pomeranje krajeva je uglavnom posledica deformacije materijala. Prema tome, očigledno je da aksijalna krutost kabla postaje veća kako se normalna sila povećava.
2. Nelinearnog ponašanja elementa izloženog savijanju - kod konstrukcija izloženih malim deformacijama, aksijalna krutost i krutost na savijanje elementa izloženog savijanju, smatraju se nezavisnim. Kada deformacije nisu više male, postoji interakcija između aksijalnih deformacija i deformacija savijanja u elementu, usled

kombinovanog efekta aksijalnih sila i momenata savijanja. Dodatni moment savijanja koji se pojavljuje usled bočnog izvijanja elementa i koji je u vezi sa aksijalnom silom uvećava ili umanjuje originalni moment savijanja u elementu. Rezultat interakcije aksijalnih sila i deformacija savijanja je ta da se efektivna krutost na savijanje elementa uvećava kako aksijalna sila raste ili smanjuje kako se aksijalna sila smanjuje. Na sličan način, prisustvo momenata savijanja će uticati na aksijalnu krutost elementa, kroz očigledno skraćenje elementa prouzrokovanog deformacijama savijanja. U najvećem broju konvencionalnih konstrukcija, ova interakcija se zanemaruje. U konstrukcijama izloženim velikim deformacijama, kao što su mostovi sa kosim kablovima, ova interakcija može da bude značajna i treba da bude razmotrena u bilo kojoj nelinearnoj analizi.

3. Promena geometrije konstrukcije usled velikih pomeranja - u linearnoj analizi konstrukcija pretpostavlja se da je pomeranje čvorova konstrukcije usled opterećenja neznatno u odnosu na originalne koordinate čvorova. Promena geometrije konstrukcije se ignoriše i krutost nedeformisane i deformisane konstrukcije pretpostavlja se da je ista. Kod kablovskih konstrukcija, pomeranja čvorova pod opterećenjem mogu da budu značajna i saglasno tome geometrija konstrukcije može da se promeni značajno. U tom slučaju, krutost deformisane konstrukcije razlikuje se od početne krutosti konstrukcije u nedeformisanom položaju i to mora da bude uzeto u obzir.

Kao rezultat svega ovoga, vidi se da je analiza konstrukcija sa kablovima veoma komplikovana.

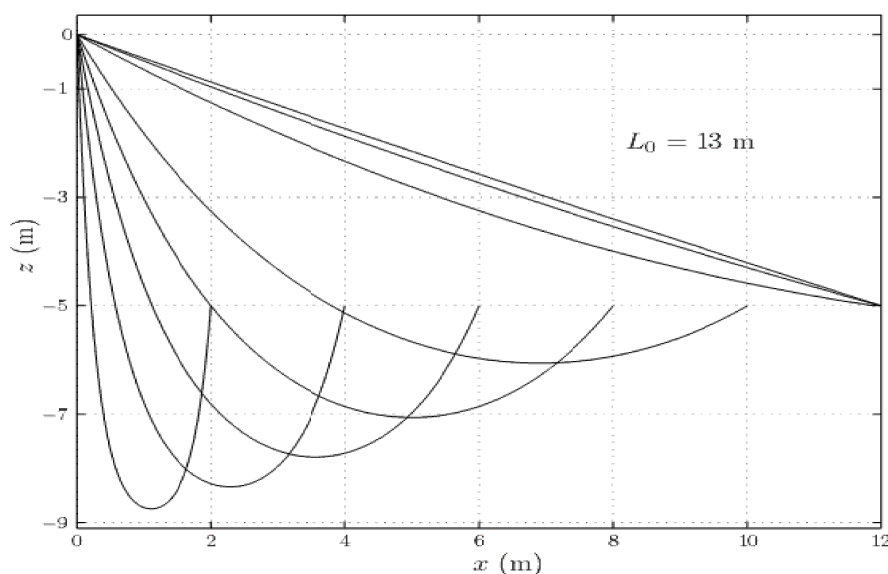
Analiza konstrukcija, primenom analitičkih rešenja, je moguća samo za pojedinačne izolovane kablove.

Kod složenih konstrukcija, sa većim brojem kablova i drugih tipova elemenata (slika 1.1), upotrebljavaju se numerička rešenja zasnovana na primeni metode konačnih elemenata. Nelinearni metod konačnih elemenata je najpopularniji način u istraživanju nelinearnog ponašanja konstrukcija sa kablovima. Ima nekoliko formulacija nelinearne metode konačnih elemenata [90]: totalna *Lagrange*-ova formulacija, korigovana *Lagrange*-ova formulacija, korotaciona formulacija. Svaka od ovih formulacija uključuje velika pomeranja, velike rotacije i male deformacije.

1.2 Stanje istraživanja konačnih elemenata za kablove

U analizi konstrukcija svi elementi strukture kao što su: ploče, grede, kablovi itd. treba da budu predstavljeni odgovarajućim konačnim elementima. Ovi konačni elementi su tako formulisani da što bolje opišu ponašanje stvarne konstrukcije. U komercijalnim softverima, definisani su mnogobrojni konačni elementi za gredne nosače. Na drugoj strani, konačni elementi za kablove su veoma retki. U svim tim softverima, za modelovanje kabla, upotrebljava se prav gredni elemenat. Za veoma zategnute kablove, prav gredni elemenat dobro aproksimira kabl.

Nelinearnost kabla, koja je pre geometrijska nego materijalna, proističe iz veoma male krutosti na savijanje kabla (slika 1.2). Ako je kabl izložen sili pritiska on će se saviti i izgubiti krutost. Promena krutosti zavisi od relacije između fizičkih osobina kabla (slika 1.3). Niska krutost na savijanje otežava modelovanje kabla. U ovom odeljku neće biti dat



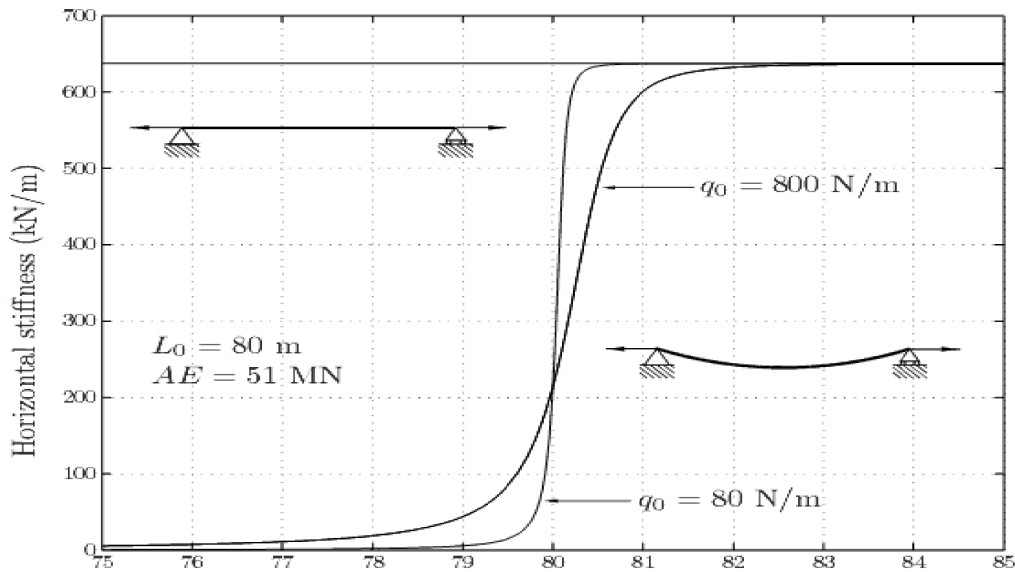
Slika 1.2: Različite konfiguracije nerastegljivog kabla dužine L_0 , a za različite horizontalne raspone: $x = 2, 4, 6, 8, 10, 11.9, 11.99, 11.999m$ i $z = -5m$ [39]

istorijski pregled svih elemenata koji se upotrebljavaju za modelovanje kablova. Umesto toga, biće prikazane različite formulacije konačnih elemenata koje se upotrebljavaju za modelovanje kablova. Postoje generalno dva prilaza u razvoju konačnih elemenata za kablove. Prvi prilaz je upotreba polinoma u opisu oblika i polja pomeranja. Drugi prilaz je upotreba analitičkih izraza za lančanicu koji u matematičkom smislu tačno opisuju kabl pod različitim uslovima opterećenja.

1.2.1 Elementi zasnovani na polinomima kao interpolacionim funkcijama

U ovoj grupi postoje četiri tipa elemenata koji se mogu naći u literaturi:

1. Prosti štap sa dva čvora [9, 62].



Slika 1.3: Upoređenje krutosti rastegljivog kabla i pravog grednog elementa sa istim karakteristikama [39]

2. Prosti štap sa unutrašnjim čvorovima [25, 62, 35].
3. Greda sa dva čvora [9, 62, 71].
4. Greda sa unutrašnjim čvorovima.

Prednosti elemenata zasnovanih na polinomima kao interpolacionim funkcijama su:

1. Formulacija polinomima je univerzalna.
2. Ako se primeni krivolinijski elemenat, može da bude uhvaćeno pomeranje kabla van ravni.
3. Može da se dobije konzistentna matrica masa.

Mane su:

1. Ako se jedan kabl modelira sa više elemenata bez rotacionih stepeni slobode pomeranja (prosti štap, prosti štap sa unutrašnjih čvorovima), može da se javi diskontinuitet u nagibu između dva prosta štapa u čvoru gde ne deluje koncentrisano opterećenje. Sistem se tada ponaša kao mehanizam i može da prouzrokuje numeričke probleme vezane za konvergenciju [39].
2. Da bi se modelovao labav kabl tj. kabl sa velikim odnosom ugib-raspon, mora da bude upotrebljeno puno konačnih elemenata.

Prosti štap sa dva čvora

Prosti štap je najčešće upotrebljavani elemenat u modeliranju kablova. Ovaj elemenat poseduje samo aksijalnu krutost. Pošto poseduje samo aksijalnu krutost, podesan je za modeliranje visoko napregnutih kablova kao što su kablovi u kablovskim mrežama i rešetkama. Labavi kablovi, kod kojih je odnos strele prema dužini tetive kabla veliki, moraju da se zamene velikim brojem prostih štapova. Nepogodnost ovoga je pojava diskontinuiteta u nagibu u čvoru gde ne deluje koncentrisano opterećenje. Ovaj diskontinuitet je posledica pretpostavki koje su uvedene u definisanju ovoga elementa i može da proizvede probleme sa konvergencijom.

U modelovanju kablova često se upotrebljava prosti štap sa ekvivalentnim modulom elastičnosti. Prosti štap sa ekvivalentnim modulom elastičnosti uključuje efekte geometrije kabla (ugib kabla) preko ekvivalentnog modula elastičnosti. Ekvivalentna krutost je funkcija sile u kablu, sopstvene težine kabla i dužine kabla.

Prosti štap sa unutrašnjim čvorovima

Krivolinijski prosti štap sa unutrašnjim čvorovima, uključuje efekte geometrije kabla, uvođenjem internih čvorova elementa.

Najčešće se upotrebljavaju prosti štapovi sa tri ili četiri čvora. Kod njih se upotrebljavaju parabolične ili kubne interpolacione funkcije respektivno. Tangentna matrica krutosti i vektor ekvivalentnih čvornih sila dobijaju se upotrebom izoparametarske formulacije konačnog elementa. Pošto se pri tome dobijaju složeni izrazi, za njihovo rešavanje koriste se metode numeričke integracije. Ovi krivolinijski elementi daju tačne rezultate za kablove sa malim ugibima. U čvoru, na spoju dva elementa, postoji samo kontinuitet pomeranja.

Greda sa dva čvora i greda sa unutrašnjim čvorovima

Da bi se dobio kontinuitet u nagibu na spoju dva elementa, u čvorovima moraju da budu dodati rotacioni stepeni slobode pomeranja čvorova. Ovi elementi mogu da budu upotrebljeni za plitke parabolične kablove. Za modelovanje kablova sa velikim krivinama mora da bude upotrebljen veći broj konačnih elemenata. Ovi elementi obezbeđuju kontinuitet nagiba u čvorovima na spoju dva elementa.

Pri proračun kablova kod kojih je poznata krutost na savijanje, upotrebom grednih elemenata dobijaju se bolji rezultati u odnosu na rezultate dobijene sa prostim štapovima. Fleksibilni kablovi, pri proračunu, moraju da se dele na veliki broj grednih elemenata sa veoma malom krutošću na savijanje. Pošto je kod grednog elementa nepoznata i obrtanje čvora, broj stepeni slobode pomeranja u odnosu na prosti štap je veći.

1.2.2 Elementi zasnovani na analitičkim izrazima za lančanicu

Druga grupa elemenata je zasnovana na analitičkim izrazima za lančanicu. U literaturi mogu da se nađu tri tipa elemenata:

1. Parabolički elemenat - često se upotrebljava u analizi kablovskih konstrukcija. Odnos strele-raspon elementa je manji od 0.125. Raspodeljeno opterećenje je konstantno duž horizontale projekcije raspona kabla [39].

2. Elemenat kao elastična lančanica - raspodeljeno opterećenje je konstantno duž srednje linije nerastegljivog kabla. Ovaj elemenat daje tačno rešenje za potpuno savitljiv kabl opterećen samo sopstvenom težinom [10, 39, 44, 70].
3. Elemenat kao pridružena lančanica (eng. *associate catenary*) - raspodeljeno opterećenje je konstantno duž srednje linije istegnutog kabla. Opterećenje ovoga tipa je sneg. Pod dejstvom snega kabl se isteže i povećava se dužina na koju sneg može da padne. Totalno opterećenje zavisi od pomeranja. Opterećenje je nekonzervativno i tangentna matrica krutosti je nesimetrična [39].

Glavna prednost ovih elemenata je što kod statičke analize jedan kabl može da se predstavi samo sa jednim elementom ovoga tipa i da se dobiju rezultati visoke tačnosti. U slučaju dinamičke analize, svaki kabl treba modelovati sa više elemenata. Zahvaljujući tome što su ovi elementi izvedeni na osnovu tačnog analitičkog rešenja, ne pojavljuje se diskontinuitet nagiba u čvoru na spoju dva elementa. Ovi elementi imaju i neke nedostatke:

1. Ekvivalentne čvorne sile i tangentna matrica krutosti nalaze se u iteracijama.
2. Upotreba trigonometrijskih funkcija u formulaciji elemenata dovodi do nedefinisanih stanja izraza za pojedine uglove ili slučajeve opterećenja.
3. Nije moguća upotreba konsistentnih matrica masa.

Analitička rešenja za lančanicu, u svojoj osnovnoj formi, se ne upotrebljavaju, osim za pojedinačne izolovane kablove.

1.3 Cilj i svrha istraživanja

Metod konačnih elemenata je numerička procedura koja se upotrebljava u inženjerskim analizama za proračun odgovora sistema. Ovo je najpopularnije oruđe mehanike kontinuuma koje inženjeri upotrebljavaju pri analizi problema. Uzrok popularnosti metode konačnih elemenata, u odnosu na druge metode analize, leži u činjenici da je formulacija metode konačnih elemenata naročito pogodna za programiranje.

Inženjeri praktičari analizu konstrukcija, metodom konačnih elemenata, danas rade upotrebom nekog od programskih paketa zasnovanih na metodi konačnih elemenata. Tipični programski paket sastoji se od nekoliko hiljada linija proceduralnog koda pisanog u FORTRAN-u. Kod je tako dizajniran da analitičari nemaju mogućnost da eksperimentišu sa svojim ličnim konačnim elementima i algoritmima za analizu.

Mogućnost modifikovanja i proširivanja softvera, zasnovanog na konačnim elementima, je osnova da bi taj softver ostao u toku sa razvojem tehnologije konačnih elemenata.

Ciljevi istraživanja su:

1. Matematičko modeliranje nelinearnog ponašanja konstrukcija sa kablovima, usled dejstva statičkog i dinamičkog opterećenja, zasnovano na metodi konačnih elemenata i numeričkim algoritmima. Posebna pažnja će se obratiti modeliranju kablova.
2. Dizajniranje softvera, zasnovano na objektno orijentisanoj paradigmi, koje će omogućiti laku proširivost softvera novim konačnim elementima i numeričkim metodama za proračun.
3. Implementacija objektno orijentisanog modela u računarski program, koji će omogućiti nelinearnu analizu konstrukcija sa kablovima.

Glava 2

Jednačine ravnoteže konačnog elementa

2.1 Osnovne jednačine ravnoteže

Osnovne jednačine ravnoteže konačnog elementa mogu se izvesti polazeći od principa virtuelnih pomeranja i opštih nelinearnih jednačina mehanike kontinuuma. Polje pomeranja u konačnom elementu može da se aproksimira sa

$$\mathbf{u}_* = \mathbf{A}\mathbf{q} \quad (2.1)$$

gde je $\mathbf{u}_*$ vektor pomeranja proizvoljne tačke poprečnog preseka, $\mathbf{A}$ matrica operator, a $\mathbf{q}$ vektor generalisanih pomeranja u čvorovima elementa. Kada je poznato $\mathbf{q}$ može da se odredi polje deformacija elementa

$$\varepsilon = \mathbf{L}_L \mathbf{u}_* + \varepsilon_{NL}(\mathbf{u}_*) = \mathbf{B}_L \mathbf{q} + \varepsilon_{NL}(\mathbf{q}) \quad (2.2)$$

gde je $\mathbf{B}_L$ linearna matrica transformacije, $\mathbf{L}_L$ linearna matrica operator, a ε_{NL} nelinearni deo deformacije. Ako se za vektor virtuelnih pomeranja usvoji vektor $\delta\mathbf{q}$, tada izraz (2.2) može da se napiše kao

$$d\varepsilon = (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}) \delta\mathbf{q} = \mathbf{B} \delta\mathbf{q} \quad (2.3)$$

gde je $\mathbf{B}_{NL}$ nelinearna matrica transformacije. Tada, na osnovu principa virtuelnog rada

$$\delta R_s = \delta R_u \quad (2.4)$$

gde je δR_s virtuelni rad spoljašnjih sila a δR_u virtuelni rad unutrašnjih sila, sledi

$$\mathbf{r}^T \delta\mathbf{q} = \int_V \sigma^T d\varepsilon dV = \int_V \sigma^T \mathbf{B} dV \delta\mathbf{q} \quad (2.5)$$

U izrazu (2.5) $\mathbf{r}$ je vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja, a σ matrica *Cauchy*-jevih napona. Pošto je vektor virtuelnih pomeranja različit od nule $\delta\mathbf{q} \neq 0$, iz izraza (2.5) sledi

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{r} \quad (2.6)$$

gde su

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \sigma dV \quad (2.7)$$

$$\mathbf{r} = \int_V \rho \mathbf{A}^T \mathbf{h} dV - \int_S (\mathbf{A}^S)^T \mathbf{p} dS \quad (2.8)$$

matrica krutosti sistema i vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja elementa respektivno. Jednačina data izrazom (2.6) je nelinearna, pošto je matrica krutosti elementa $\mathbf{K}$ nelinearna (u opštem slučaju zavisi od pomeranja i napona).

Jednačina (2.6) može da se napiše u obliku

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \mathbf{r} - \mathbf{K}\mathbf{q} \quad (2.9)$$

ili skraćeno

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \mathbf{r} - \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{q}) \quad (2.10)$$

U (2.10) $\mathbf{f}_{int}$ je vektor internih čvornih sila. Ako je spoljašnje opterećenje nezavisno od pomeranja, iz (2.10) sledi

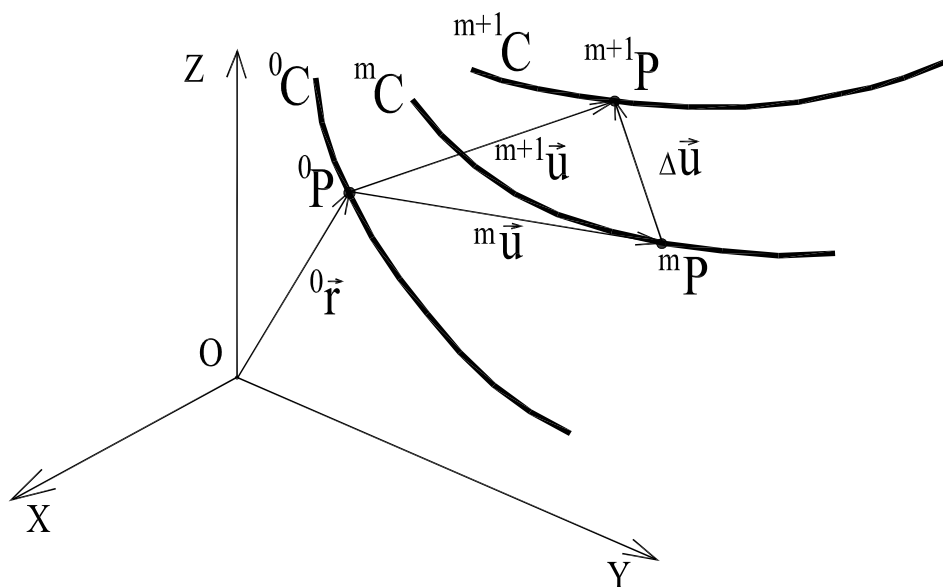
$$\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{f}_{int}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{K}_T \quad (2.11)$$

gde je $\mathbf{K}_T$ tangenta matrica krutosti. Ona ima veliki značaj u nelinearnoj analizi konstrukcija.

2.2 Inkrementalna formulacija osnovnih jednačina ravnoteže - korigovana *Lagrange*-ova formulacija

Ako se umesto generalisanih pomeranja, za osnovne parametre u čvorovima, usvoje priraštaji pomeranja dobija se inkrementalna formulacija osnovnih jednačina. Za razliku od jednačina ravnoteže sa parametrima pomeranja kao nepoznatim veličinama, koje su nelinearne, inkrementalne jednačine ravnoteže su linearne i u njima su nepoznati inkrementi pomeranja.

Posmatra se proizvoljno telo u toku deformacije. Sa 0C je označena početna, sa mC tekuća, a sa ${}^{m+1}C$ naredna konfiguracija tela (slika 2.1). $OXYZ$ predstavlja globalni koordinatni sistem. U korigovanoj *Lagrange*-ovoj formulaciji referentna konfiguracija je tekuća konfiguracija mC . Ravnoteža sila, formulisana primenom principa virtuelnih pomeranja, za ${}^{m+1}C$ konfiguraciju glasi



Slika 2.1: Element u početnoj 0C , tekućoj mC i narednoj ${}^{m+1}C$ konfiguraciji

$${}^{m+1}\delta R_u = {}^{m+1}\delta R_s \quad (2.12)$$

U (2.12) ${}^{m+1}\delta R_u$ je virtuelni rad unutrašnjih (rad stvarnih napona na virtuelnim deformacijama), a ${}^{m+1}\delta R_s$ viruelni rad spoljašnjih sila (rad zapreminskih i površinskih sila na virtuelnim pomeranjima) za ${}^{m+1}C$ konfiguraciju.

Pošto se za referentnu konfiguraciju usvaja tekuća konfiguracija tela mC , rad unutrašnjih sila za ${}^{m+1}C$ konfiguraciju može da se izrazi kao

$${}^{m+1}\delta R_u = \int_{{}^mV} {}^{m+1}\mathbf{S}^T \delta {}^{m+1}\boldsymbol{\varepsilon} {}^m dV \quad (2.13)$$

gde je ${}^{m+1}\mathbf{S}$ *Piola Kirchhoff*-ov tenzor napona druge vrste u konfiguraciji ${}^{m+1}C$, ali meren u konfiguraciji mC , a ${}^{m+1}\boldsymbol{\varepsilon}$ *Green Lagrange*-ov tenzor deformacije u konfiguraciji ${}^{m+1}C$, ali meren u konfiguraciji mC .

Kada se pretpostavi da su sve veličine za konfiguraciju mC poznate, tada se odgovarajuće veličine u ${}^{m+1}C$ konfiguraciji mogu odrediti korišćenjem sledeće inkrementalne dekompozicije

$${}^{m+1}\mathbf{S} = {}^m\mathbf{S} + \Delta\mathbf{S} = {}^m\boldsymbol{\sigma} + \Delta\mathbf{S} \quad (2.14)$$

$${}^{m+1}\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.15)$$

$${}^{m+1}\mathbf{u} = {}^m\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u} \quad (2.16)$$

gde su $\Delta\mathbf{S}$ i $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ inkrementi *Piola Kirchhoff*-ov tenzor napona druge vrste i *Green Lagrange*-ovog tenzora deformacije koji se odnose na tekuću konfiguraciju mC , ${}^m\boldsymbol{\sigma}$ *Cauchy*-jev tenzor napona u konfiguraciji mC , a $\Delta\mathbf{u}$ inkrement pomeranja.

Inkrement *Piola Kirchhoff*-ov tenzora napona druge vrste $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ može se razložiti i tada se piše kao

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta\mathbf{e} + \Delta\boldsymbol{\eta} \quad (2.17)$$

gde su $\Delta\mathbf{e}$ i $\Delta\boldsymbol{\eta}$ linearni i nelinearni tenzor inkrementalnih deformacija, koji se odnose na tekuću konfiguraciju mC . Vrednosti komponenti za $\Delta\mathbf{e}$ i $\Delta\boldsymbol{\eta}$ su

$$\Delta e_{ij} = \frac{1}{2}({}^m\Delta u_{i,j} + {}^m\Delta u_{j,i}) \quad (2.18)$$

$$\Delta \eta_{ij} = \frac{1}{2} {}^m\Delta u_{k,im} \Delta u_{k,j} \quad (2.19)$$

Izraz za ravnotežu sila (2.12) sada dobija oblik

$$\int_{{}^mV} ({}^m\boldsymbol{\sigma}^T + \Delta\mathbf{S}^T) \delta \Delta\boldsymbol{\varepsilon} {}^m dV = {}^{m+1}\delta R_s \quad (2.20)$$

odnosno

$$\int_{{}^mV} \Delta\mathbf{S}^T \delta \Delta\boldsymbol{\varepsilon} {}^m dV + \int_{{}^mV} {}^m\boldsymbol{\sigma}^T \delta \Delta\boldsymbol{\eta} {}^m dV = {}^{m+1}\delta R_s - \int_{{}^mV} {}^m\boldsymbol{\sigma}^T \delta \Delta\mathbf{e} {}^m dV \quad (2.21)$$

Veza izmedju inkrementalnog tenzora napona i deformacije je data u obliku

$$\Delta\mathbf{S} = {}^m\mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.22)$$

gde je ${}_m\mathbf{D}$ konstitutivni tenzor. Pošto se nalazimo u domenu elastičnosti tj. materijal elementa se ponaša u skladu sa linearnim *Hooke*-ovim zakonom, konstitutivni tenzori su konstantni, tako da je

$${}_m\mathbf{D} = {}_0\mathbf{D} = \mathbf{D} \quad (m=0,1,2,\dots) \quad (2.23)$$

Ako se u (2.21) uvrsti (2.22) i vodeći računa o (2.23) dobija se

$$\int_{{}_mV} (\mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\varepsilon})^T \delta\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^m dV + \int_{{}_mV} {}^m\sigma^T \delta\Delta\boldsymbol{\eta}^m dV = {}^{m+1}R_s - \int_{{}_mV} {}^m\sigma^T \delta\Delta\mathbf{e}^m dV \quad (2.24)$$

Iz izraza (2.24) se vidi da inkrementalne deformacije neposredno zavisne od inkrementalnih pomeranja. Inkrementalna pomeranja su nepoznata i izraz (2.24) je nelinearan. Linearizacija izraza (2.24) je moguća, ako se uvedu pretpostavke

$$\Delta\mathbf{S} = \mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \approx \mathbf{D}\Delta\mathbf{e} \quad (2.25)$$

$$\delta\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \approx \delta\Delta\mathbf{e} \quad (2.26)$$

Linearizacijom izraza (2.24), dobija se linearizovana jednačina ravnoteže u korigovanoj *Lagrange*-ovoj formulaciji koja glasi

$$\int_{{}_mV} \delta\Delta\mathbf{e}^T \mathbf{D}\Delta\mathbf{e}^m dV + \int_{{}_mV} {}^m\sigma^T \delta\Delta\boldsymbol{\eta}^m dV = \delta R_s - \int_{{}_mV} {}^m\sigma^T \delta\Delta\mathbf{e}^m dV \quad (2.27)$$

Linearna jednačina korigovane *Lagrange*-ove inkrementalne formulacije predstavlja polaznu osnovu za primenu metode konačnih elemenata u analizi geometrijski nelinearnih problema.

Ako se pretpostavi da veličine i pravci površinskih i zapreminskih sila ne zavise od deformacije tela i da je gustina tela ρ nepromenljiva tokom deformacije, dobija se da je virtuelni rad spoljašnjih sila jednak

$${}^{m+1}R_s = \int_V \delta \left({}^{m+1}\mathbf{u} \right)^T \rho_0^{m+1} \mathbf{h}^m dV - \int_{{}_0S} \delta \left({}^{m+1}\mathbf{u}^S \right)^T {}_0^{m+1} \mathbf{p}^m dS \quad (2.28)$$

gde je ${}_0^{m+1}\mathbf{h}$ vektor zapreminskih sila, ${}_0^{m+1}\mathbf{p}$ vektor površinskih sila i ${}^{m+1}\mathbf{u}^S$ pomeranje na konturi u konfiguraciji ${}^{m+1}C$ u odnosu na 0C . Obzirom da je

$$\delta({}^{m+1}\mathbf{u}) = \delta({}^m\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) = \delta\Delta\mathbf{u} \quad (2.29)$$

izraz (2.28) glasi

$${}^{m+1}R_s = \int_V \delta\Delta\mathbf{u}^T \rho_0^{m+1} \mathbf{h}^m dV - \int_{{}_mS} \delta\Delta\mathbf{u}^T {}_0^{m+1} \mathbf{p}^m dS \quad (2.30)$$

2.2.1 Formulacija rešenja metodom konačnih elemenata

Jednačina ravnoteže (2.27) je linearna po inkrementalnim pomeranjima. Za rešavanje jednačine (2.27) primeniće se metod konačnih elemenata. Vektor pomeranja $\mathbf{u}_*$, proizvoljne tačke u poprečnom preseku konačnog elementa u pravu osa lokalnog koordinatnog sistema elementa, može da se aproksimira sa

$$\mathbf{u}_*(^m\mathbf{x}) = \mathbf{A}(^m\mathbf{x})^m\mathbf{q} \quad (2.31)$$

ili u skraćenom obliku

$$^m\mathbf{u} = ^m\mathbf{A}^m\mathbf{q} \quad (2.32)$$

U (2.31) i (2.32) $^m\mathbf{x}$ je vektor položaja proizvoljne tačke poprečnog preseka elementa, $^m\mathbf{A}$ matrica operator, $^m\mathbf{q}$ vektor generalisanih pomeranja čvorova elementa u konfiguraciji mC u lokalnom koordinatnom sistemu elementa.

Vektor inkrementalnog pomeranja iz trenutne u narednu konfiguraciju dat je sa

$$\Delta\mathbf{u} = ^m\mathbf{A}\Delta\mathbf{q} \quad (2.33)$$

pri čemu prefiks Δ u izrazu (2.33) označava inkrementalnu veličinu.

Linearni deo inkrementalnog tenzora deformacije može da se presdavi u obliku

$$\Delta\mathbf{e} = \mathbf{L}_L\Delta\mathbf{u}_* = \mathbf{L}_L^m\mathbf{A}\Delta\mathbf{q} = {}^m\mathbf{B}_L\Delta\mathbf{q} \quad (2.34)$$

gde je $\mathbf{L}_L$ linearna matrica operator, a ${}^m\mathbf{B}_L$ linearna matrica transformacije u konfiguraciji mC . Zamenom izraza (2.34) u podintegralni izraz u prvome integralu sa leve strane jednačine (2.27) dobija se

$$\int_{^mV} \delta\Delta\mathbf{e}^T\mathbf{D}\Delta\mathbf{e}^m dV = \delta\Delta\mathbf{q}^T({}^m\mathbf{K}_L\Delta\mathbf{q}) \quad (2.35)$$

gde je

$${}^m\mathbf{K}_L = \int_{^mV} {}^m\mathbf{B}_L^T\mathbf{D}^m\mathbf{B}_L^m dV \quad (2.36)$$

linearna matrica krutosti elementa.

Imajući u vidu izraz (2.19), dobija se da je

$${}^m\sigma\delta\Delta\eta_{ij} = {}^m\sigma_{ij}\delta\Delta\eta_{ij} = {}^m\sigma_{ij}\frac{1}{2}\delta(\Delta u_i\Delta u_j) = \frac{1}{2}({}^m\sigma_{ij}\delta\Delta u_i\Delta u_j + {}^m\sigma_{ji}\delta\Delta u_j\Delta u_i) \quad (2.37)$$

i posle sređivanja

$${}^m\sigma\delta\Delta\eta = \delta\Delta u_i {}^m\sigma_{ij}\Delta u_j = \delta\Delta\mathbf{u}_{*,d}^T {}^m\sigma\Delta\mathbf{u}_{*,d} \quad (2.38)$$

U (2.38) $\mathbf{u}_{*,d}$ je vektor gradijenata pomeranja. U izrazu (2.27) drugi podintegralni izraz sa leve strane, vodeći računa o izrazu (2.38), sada može da se napiše

$$\int_{^mV} {}^m\sigma^T\delta\Delta\eta^m dV = \int_{^mV} \delta\Delta\mathbf{u}_{*,d}^T {}^m\sigma\Delta\mathbf{u}_{*,d}^m dV = \delta\Delta\mathbf{q}^T({}^m\mathbf{K}_{NL}\Delta\mathbf{q}) \quad (2.39)$$

gde je

$$\Delta \mathbf{u}_{*d} = \mathbf{L}_{NL} {}^m \mathbf{A} \Delta \mathbf{q} = {}^m \mathbf{B}_{NL} \Delta \mathbf{q} \quad (2.40)$$

$${}^m \mathbf{K}_{NL} = \int_{{}^m V} {}^m \mathbf{B}_{NL}^T {}^m \sigma {}^m \mathbf{B}_{NL} {}^m dV \quad (2.41)$$

U (2.40) $\mathbf{L}_{NL}$ je nelinearna matrica operatora. U (2.40) i (2.41) ${}^m \mathbf{B}_{NL}$ je nelinearna matrica transformacije (sadrži izvode interpolacionih funkcija), ${}^m \mathbf{K}_{NL}$ geometrijska matrica krutosti elementa i ${}^m \sigma$ matrica *Cauchy*-jevih napona u konfiguraciji ${}^m C$.

Drugi podintegralni izraz sa desne strane izraza (2.27) iznosi

$$\int_{{}^m V} {}^m \sigma^T \delta \Delta \mathbf{e} {}^m dV = \delta \Delta \mathbf{q}^T {}^m \mathbf{f}_{\text{int}} \quad (2.42)$$

gde je

$${}^m \mathbf{f}_{\text{int}} = \int_{{}^m V} {}^m \mathbf{B}_L^T {}^m \hat{\sigma} {}^m dV \quad (2.43)$$

U (2.42) ${}^m \mathbf{f}_{\text{int}}$ je vektor internih čvornih sila koje su ekvivalentne naponima u elementu, a ${}^m \hat{\sigma}$ je vektor *Cauchy*-evih napona.

Virtuelni rad spoljašnjih sila (2.28) sada može da se napiše u obliku

$${}^{m+1} R_s = \int_V \rho \delta \Delta \mathbf{q}^T {}^m \mathbf{A}^T {}_0^{m+1} \mathbf{h} {}^m dV - \int_{{}^m S} \delta (\Delta \mathbf{q}^S)^T ({}^m \mathbf{A}^S)^T {}_0^{m+1} \mathbf{p} {}^m dS \quad (2.44)$$

ili skraćeno

$${}^{m+1} R_s = \delta \Delta \mathbf{q}^T {}^{m+1} \mathbf{r} \quad (2.45)$$

$${}^{m+1} \mathbf{r} = \int_V \rho {}^m \mathbf{A}^T {}_0^{m+1} \mathbf{h} {}^m dV - \int_{{}^m S} ({}^m \mathbf{A}^S)^T {}_0^{m+1} \mathbf{p} {}^m dS \quad (2.46)$$

gde je ${}^{m+1} \mathbf{r}$ vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja koje odgovara elementu u ${}^{m+1} C$ tj.

Jednačina ravnoteže (2.27), vodeći računa o izrazima (2.35), (2.39), (2.42), (2.45) može da se piše kao

$${}^m \mathbf{K}_T \Delta \mathbf{q} = {}^{m+1} \mathbf{r} - {}^m \mathbf{f}_{\text{int}} \quad (2.47)$$

gde je

$${}^m \mathbf{K}_T = {}^m \mathbf{K}_L + {}^m \mathbf{K}_{NL} \quad (2.48)$$

Matrica ${}^m \mathbf{K}_T$ predstavlja tangentnu matricu krutosti elementa.

U dinamičkoj analizi, u zapreminskim silama uključene su i inercijalne sile i sile prigušenja, te inkrementalna jednačina ravnoteže za jedan elemenat glasi

$${}^m \mathbf{K}_T \Delta \mathbf{q} = {}^{m+1} \mathbf{r}^* - {}^m \mathbf{f}_{\text{int}} \quad (2.49)$$

$${}^{m+1}\mathbf{r}^* = {}^{m+1}\mathbf{r} - \mathbf{M}^{m+1}\ddot{\mathbf{q}} - {}^m\mathbf{C}^{m+1}\dot{\mathbf{q}} \quad (2.50)$$

${}^{m+1}\mathbf{r}^*$ predstavlja vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja za dinamičku analizu, $\mathbf{M}$ označava matricu masa u 0C , ${}^m\mathbf{C}$ matricu prigušenja u mC , a ${}^{m+1}\dot{\mathbf{q}}$ vektor generalisanih brzina i ${}^{m+1}\ddot{\mathbf{q}}$ vektor generalisanih ubrzanja čvorova elementa u ${}^{m+1}C$.

Pošto se u radu obrađuju samo linijski elementi, u nastavku teksta će se pretpostaviti da je površina poprečnog preseka elementa konstantna tokom deformacije, odakle sledi da je površina omotača elementa linearno proporcionalna sa dužinom elementa.

Glava 3

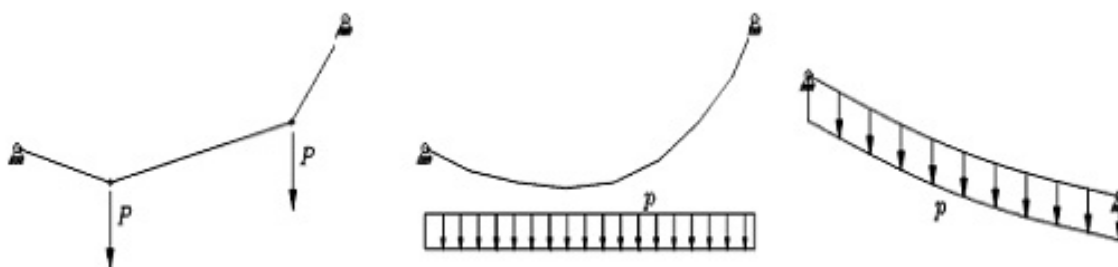
Lančanica kao konačni element

3.1 Teorija lančanice - analitičko rešenje

3.1.1 Osnovne pretpostavke i relacije

U klasičnoj analizi, lančanica se posmatra kao idealno savitljiva i idealno elastična materijalna linija. Veoma često se lančanica tretira i kao nerastegljiva materijalna linija, a ne kao idealno elastična.

Ako je lančanica fiksirana na krajevima, oblik lančanice zavisi od opterećenja koje deluje na njoj: za konscentrisane sile lančanica je poligonalna, a za raspodeljene sile lančanica je kontinualna linija (slika 3.1).



Slika 3.1: Oblik lančanice u zavisnosti od opterećenja

Zbog pretpostavke o idealnoj savitljivosti lančanice, sledi da je jedina unutrašnja sila u lančanici normalna sila, koja uvek ima pravac tangente na liniju koja predstavlja oblik lančanice, tj. na luk lančanice, a smer sile u lančanici je takav da odgovara zatezanju. Znači, sila u lančanici je data u obliku:

$$\vec{T}(s) = T(s) \cdot \vec{\tau} \quad (3.1)$$

gde je s koordinata duž luka lančanice, a $\vec{\tau}$ jedinični vektor tangente na luk linije (tj. ose) lančanice. Ako na lančanicu deluje neko proizvoljno raspodeljeno opterećenje $\vec{p}(s)$, onda je diferencijalna jednačina ravnoteže luka lančanice u vektorskom obliku data sa:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{p}(s) = 0 \quad (3.2)$$

Za razliku od uslova ravnoteže kod krutog tela, koji imaju oblik konačnih vektorskih jednačina, kod lančanice čak i kada se tretira kao nerastegljiva, odn. kao "kruta", jednačina ravnoteže je diferencijalna, a ne konačna. To je zbog toga što je oblik lančanice inicijalno nepoznat, tj. što oblik lančanice zavisi od opterećenja koje deluje na lančanicu, pa se uslovi ravnoteže postavljaju samo na diferencijano malom luku lančanice. U tom smislu je lančanica statički neodređena.

Može da se pokaže da ako na lančanicu deluje raspodeljeno opterećenje stalnog pravca, $\vec{p}(s) = p(s) \cdot \vec{e}$, gde je $\vec{e} = \text{const}$, onda važe sledeći zaključci:

- Lančanica opterećena raspodeljenim opterećenjem stalnog pravca predstavlja ravnu krivu liniju (pravac opterećenja i pravac tangente na luk lančanice pripadaju istoj ravni):

$$\vec{e} \times \vec{\tau} = \text{const} \quad (3.3)$$

- Za lančanicu opterećenu raspodeljenim opterećenjem stalnog pravca, projekcija unutrašnje sile u lančanici na pravac koji je upravan na pravac opterećenja, a u ravni lančanice, je konstantna:

$$\vec{T} \cdot \vec{h} = H = \text{const} \quad (3.4)$$

gde je $\vec{h}$ jedinični vektor u ravni lančanice, koji je upravan na pravac raspodeljenog opterećenja.

To znači da ako je lančanica opterećena samo gravitacionim opterećenjem (sopstvenom težinom i eventualno nekim korisnim vertikalnim opterećenjem), onda je lančanica neka kriva linija koja pripada samo vertikalnoj ravni, a pri tome je projekcija sile zatezanja u lančanici, na horizontalan pravac u vertikalnoj ravni, u svim tačkama ose lančanice konstantna. Znači, horizontalna projekcija sile u gravitaciono opterećenoj lančanici je svuda ista.

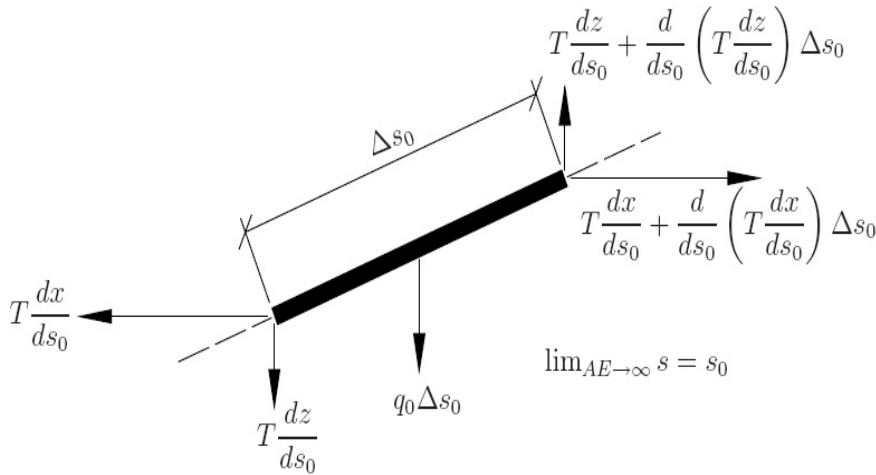
3.1.2 Neelastična lančanica opterećena gravitacionim opterećenjem

Da bi se izvele jednačine nerastegljive lančanice moraju da se uvedu neke pretpostavke o osobinama lančanice. Pretpostavlja se da je lančanica idealno fleksibilna ($EI \equiv 0$), nerastegljiva ($AE \rightarrow \infty$), nema torzionu krutost i može da primi samo sile zatezanja (slika 3.2). Sila zateznja ima pravac tangente u svakoj tački lančanice. Imajući u vidu izraz (3.1), ako se diferencijalna jednačina ravnoteže (3.2) projektuje na ose dekar-tovog pravouglog sistema xyz , onda se dobijaju sledeće skalarne jednačine ravnoteže:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds_0} \left(T \cdot \frac{dx}{ds_0} \right) + p_x &= 0 \\ \frac{d}{ds_0} \left(T \cdot \frac{dy}{ds_0} \right) + p_y &= 0 \\ \frac{d}{ds_0} \left(T \cdot \frac{dz}{ds_0} \right) + p_z &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

gde su p_x, p_y i p_z projekcije opterećenja na ose x, y, z , a s_0 je dužina luka nerastegljive lančanice.

Neka je vertikalna ravan u kojoj se nalazi lančanica označena sa $x - z$, pri čemu je z osa vertikalna, sa smerom na gore, onda su komponente opterećenja koje deluje na lančanicu:



Slika 3.2: Segment nerastegljive lančanice

$$p_x = 0, \quad p_y = 0, \quad p_z = -q(s_0) \quad (3.6)$$

Diferencijalne jednačine ravnoteže u skalarnom obliku su date sa:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds_0} \left(T \cdot \frac{dx}{ds_0} \right) &= 0 \\ \frac{d}{ds_0} \left(T \cdot \frac{dy}{ds_0} \right) &= 0 \\ \frac{d}{ds_0} \left(T \cdot \frac{dz}{ds_0} \right) - q(s_0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Iz prve jednačine od jednačina (3.7) sledi da je horizontalna komponenta sile u lančanici svuda ista i jednaka je

$$T \cdot \frac{dx}{ds_0} = H = \text{const} \quad (3.8)$$

Iz druge jednačine od jednačina (3.7) sledi da lančanica pripada samo $x - z$ ravni

$$T \frac{dy}{ds_0} = \text{const} = 0 \quad (3.9)$$

tj $y = \text{const}$. Treća jednačina od jednačina (3.7), vodeći računa da je

$$T \frac{dz}{ds_0} = T \frac{dz}{dx} \frac{dx}{ds_0} = T \frac{dz}{dx} \frac{H}{T} = H \frac{dz}{dx} \quad (3.10)$$

transformiše se u

$$\frac{d}{ds_0} \left(H \frac{dz}{dx} \right) - q(s_0) = 0 \quad (3.11)$$

odnosno, zbog $H = \text{const}$ u

$$H \frac{d}{ds_0} \left(\frac{dz}{dx} \right) - q(s_0) = 0 \quad (3.12)$$

koja posle sređivanja daje

$$H \frac{dz'}{ds_0} = q(s_0) \quad (3.13)$$

Jednačina (3.13) predstavlja diferencijalnu jednačinu ravnoteže lančanice.

Za dalja razmatranja usvojiće se dispozicija lančanice kao na slici 3.3. Usvaja se da je lančanica na svojim krajevima vezana za nepokretne oslonce. Početak koordinatnog sistema oxz usvojen je u osloncu na levom kraju lančanice. Pri tome je horizontalan razmak između oslonaca, dakle raspon lančanice, označen sa l_x , dok je vertikalna denivelacija oslonaca označena sa l_z . Posmatrana lančanica opterećena je jednakopodeljenim opterećenjem sopstvenom težinom q duž luka ili jednakopodeljenim opterećenjem sopstvenom težinom q_1 duž horizontalne projekcije lančanice.

Hiperboličko rešenje

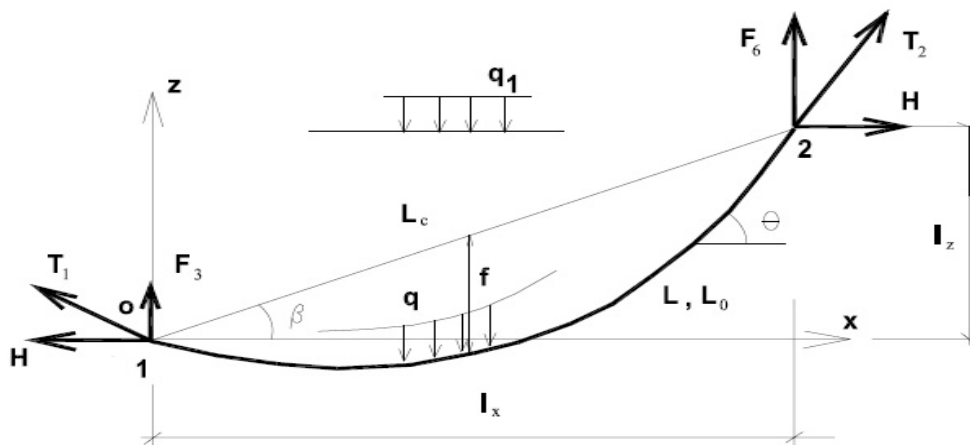
Pretpostaviće se da je $q(s_0) = q = \text{const}$. Ako levu i desnu stranu jednačine (3.13) podelimo sa dx , preuredimo i uzmemo da je

$$\frac{ds_0}{dx} = \sqrt{1 + z'^2} \quad (3.14)$$

jednačina (3.13) se transformiše u oblik

$$Hz'' = q\sqrt{1 + z'^2} \quad (3.15)$$

Jednačina (3.15) predstavlja diferencijalnu jednačinu ravnoteže lančanice. Funkcija $z = z(x)$ u diferencijalnoj jednačini ravnoteže (3.15) predstavlja jednačinu luka lančanice (nepoznati oblik lančanice).

Slika 3.3: Lančanica u koordinatnom sistemu oxz

Diferencijalna jednačina ravnoteže (3.15) ima opšti integral u obliku

$$\begin{aligned} z' &= \sinh\left(\frac{qx}{H} + C_1\right) \\ z &= \frac{H}{q} \cdot \cosh\left(\frac{qx}{H} + C_1\right) - C_2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Imajući u vidu sliku 3.3, granični uslovi su dati sa

$$\begin{aligned} x &= 0 : & z(0) &= 0 \\ x &= l_x : & z(l) &= l_z \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ako se uvedu oznake

$$\lambda = \frac{q \cdot l_x}{2H} \quad (3.18)$$

$$\Phi = \arcsinh\left(\frac{\lambda \cdot l_z}{l_x \cdot \sinh \lambda}\right) - \lambda = \Theta - \lambda \quad (3.19)$$

onda integracione konstante mogu da se dobiju u obliku

$$\begin{aligned} C_1 &= \Phi \\ C_2 &= \frac{H}{q} \cdot \cosh(\Phi) \end{aligned} \quad (3.20)$$

tako da je konačno rešenje dato sa

$$z' = \sinh\left(\frac{qx}{H} + \Phi\right) = \sinh\left(2\lambda \frac{x}{l_x} + \Phi\right) \quad (3.21)$$

$$z = \frac{H}{q} \left[\cosh\left(\frac{qx}{H} + \Phi\right) - \cosh \Phi \right] = \frac{H}{q} \left[\cosh\left(2\lambda \frac{x}{l_x} + \Phi\right) - \cosh \Phi \right] \quad (3.22)$$

Rešenje $z = z(x)$ predstavlja jednačinu hiperbole. Ukupna dužina luka nerastegljive hiperboličke lančanice može da se izračuna iz izraza

$$L_0 = \int_{s_0} ds_0 = \int_0^{l_x} \frac{ds_0}{dx} \cdot dx = \int_0^{l_x} \sqrt{1 + z'^2} \cdot dx \quad (3.23)$$

Prema dobijenom rešenju (3.21) i vodeći računa o izrazima za transformaciju hiperboličkih funkcija dobija se da je

$$1 + z'^2 = \cosh^2\left(\frac{qx}{H} + \Phi\right) \quad (3.24)$$

te se dobija ukupna dužina luka nerastegljive lančanice u obliku

$$L_0 = \frac{2H}{q} \cdot \sinh(\lambda) \cdot \cosh(\Phi + \lambda) \quad (3.25)$$

Sile duž luka za hiperboličko rešenje mogu se izraziti na sledeći način

$$\begin{bmatrix} H(x) \\ V(x) \\ T(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ H z'(x) \\ \sqrt{H^2 + V^2(x)} \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} 1 \\ z'(x) \\ \sqrt{1 + z'^2(x)} \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} 1 \\ \sinh\left(2\lambda \frac{x}{l_x} + \Phi\right) \\ \cosh\left(2\lambda \frac{x}{l_x} + \Phi\right) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Vertikalne komponente reakcija u osloncima su

$$V(0) = F_3 = -H z'(0) = -H \sinh \Phi \quad (3.27)$$

$$V(l_x) = F_6 = H z'(l_x) = H \sinh(2\lambda + \Phi) \quad (3.28)$$

Ako se koriste izrazi

$$\cosh \Theta = \frac{qL_0}{2H \sinh \lambda} \quad (3.29)$$

$$\sinh \Theta = \frac{ql_z}{2H \sinh \lambda} \quad (3.30)$$

$$\cosh(2\lambda + \Phi) = \frac{l_z q}{2H \sinh \lambda} \quad (3.31)$$

$$\sinh(\lambda + \Phi) = \frac{l_z q}{2H \sinh \lambda} \quad (3.32)$$

vrednosti za F_3 i F_6 , posle sređivanja i transformacija, izražene preko ukupne dužine luka lančanice glase

$$F_3 = -\frac{q}{2}(l_z \coth \lambda - L_0) \quad (3.33)$$

$$F_6 = \frac{q}{2}(l_z \coth \lambda + L_0) \quad (3.34)$$

Sile zatezanja na krajevima lančanice su

$$T(0) = T_1 = H \cosh \Phi \quad (3.35)$$

$$T(l_x) = T_2 = H \cosh(2\lambda + \Phi) \quad (3.36)$$

Koristeći izraze za transformaciju hiperboličkih funkcija i izraze (3.19), (3.29) i (3.30) izrazi za sile T_1 i T_2 izraženi preko dužine luka lančanice L_0 glase

$$T_1 = \frac{q}{2}(L_0 \coth \lambda - l_z) \quad (3.37)$$

$$T_2 = \frac{q}{2} (L_0 \coth \lambda + l_z) \quad (3.38)$$

Koristeći izraze (3.33), (3.34), (3.37) i (3.38) mogu da se izvedu sledeće jednakosti

$$F_3 + F_6 = qL_0 \quad (3.39)$$

$$F_6 - F_3 = ql_z \coth \lambda \quad (3.40)$$

$$T_1 + T_2 = qL_0 \coth \lambda \quad (3.41)$$

$$T_2 - T_1 = ql_z \quad (3.42)$$

Iz jednačine (3.41) dobija se

$$\coth \lambda = \frac{T_1 + T_2}{qL_0} \quad (3.43)$$

a zatim

$$\lambda = \coth^{-1} \frac{T_1 + T_2}{qL_0} = \frac{1}{2} \ln \frac{T_1 + T_2 + qL_0}{T_1 + T_2 - qL_0} \quad (3.44)$$

gde je $\ln$ prirodni logaritam sa osnovom $e = 2.17....$ Izjednačavajući (3.18) i (3.44) dobija se

$$l_x = \frac{H}{q} \ln \frac{T_1 + T_2 + qL_0}{T_1 + T_2 - qL_0} \quad (3.45)$$

Kombinujući izraze (3.39) i (3.42) dobija se

$$l_z = \frac{T_2 - T_1}{F_3 + F_6} L_0 \quad (3.46)$$

ili samo iz (3.42)

$$l_z = \frac{T_2 - T_1}{q} \quad (3.47)$$

Iz izraza (3.22), ako stavimo $x = l_x$, dobija se

$$z(l_x) = l_z = \frac{H}{q} (\cosh(2\lambda + \Phi) - \cosh \Phi) \quad (3.48)$$

odnosno posle preuređenja

$$l_z = 2 \frac{H}{q} \sinh(\lambda + \Phi) \sinh \lambda \quad (3.49)$$

Kada izraze (3.25) i (3.49) kvadriramo i oduzmemo, dobija se

$$L_0^2 - l_z^2 = \frac{4H^2}{q^2} \sinh^2 \lambda = l_x^2 \frac{\sinh^2 \lambda}{\lambda^2} \quad (3.50)$$

a posle preuređenja, dobija se da je kvadrat dužine luka nerastegljive lančanice

$$L_0^2 = l_z^2 + l_x^2 \frac{\sinh^2 \lambda}{\lambda^2} \quad (3.51)$$

Paraboličko rešenje

Opterećenje, koje je izraženo kao raspodeljeno po projekciji luka lančanice, vezano je sa opterećenjem koje je raspodeljeno po dužini projekcije luka lančanice preko relacije

$$q_1(x) = q(s_0) \frac{ds_0}{dx} = q(s_0) \frac{1}{\frac{dx}{ds_0}} \quad (3.52)$$

odnosno u obliku

$$q_1(x) = q(s_0) \frac{1}{\cos \theta(s_0)} = q(s_0) \sec \theta(s_0) \quad (3.53)$$

Ako se pretpostavi da je $q_1(x) = q_1 = \text{const}$, diferencijalna jednačina ravnoteže može da se napiše u obliku

$$Hz'' = q_1 \quad (3.54)$$

Opšti integral diferencijalne jednačine (3.54) je dat sa

$$\begin{aligned} z' &= \frac{q_1}{H} \cdot x + C_1 \\ z &= \frac{q_1}{2H} \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2 \end{aligned} \quad (3.55)$$

Integracione konstante se određuju iz graničnih uslova (3.17), tako da se dobija konačno rešenje diferencijalne jednačine (3.54) u obliku

$$z'(x) = \bar{\lambda} \left(2 \frac{x}{l_x} - 1 \right) + \frac{l_z}{l_x} \quad (3.56)$$

$$z(x) = \bar{\lambda} l_x \left(\left(\frac{x}{l_x} \right)^2 - \frac{x}{l_x} \right) + l_z \frac{x}{l_x} \quad (3.57)$$

$$\bar{\lambda} = \lambda \sec \theta = \frac{q_1 l_x}{2H} \quad (3.58)$$

Funkcija $z = z(x)$ predstavlja jednačinu parabole. Dužina luka nerastegljive parabolične lančanice data je kao

$$L_0 = \int_0^L ds_0 = \int_0^{l_x} \sqrt{1 + z'^2} dx = \int_0^{l_x} \sqrt{1 + \left(\frac{q_1}{H} x + C_1 \right)^2} dx \quad (3.59)$$

Posle integraljenja i sređivanja imamo [45]

$$L_0 = \frac{H}{2q_1} \left(-K_1 \sqrt{1 + K_1^2} - \sinh^{-1} K_1 + K_2 \sqrt{1 + K_2^2} + \sinh^{-1} K_2 \right) \quad (3.60)$$

gde je

$$K_1 = \frac{l_z}{l_x} - \frac{q_1 l_x}{2H} = \frac{l_z}{l_x} - \bar{\lambda} \quad (3.61)$$

$$K_2 = \frac{l_z}{l_x} + \frac{q_1 l_x}{2H} = \frac{l_z}{l_x} + \bar{\lambda} \quad (3.62)$$

Sile duž paraboličke lančanice mogu da se izraze na sledeći način

$$\begin{bmatrix} H(x) \\ V(x) \\ T(x) \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} 1 \\ z' \\ \sqrt{1+z'^2} \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{\lambda} \left(2 \frac{l_z}{l_x} - 1 \right) + \frac{l_z}{l_x} \\ \sqrt{1+2G(x)} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

U izrazu (3.63) izraz za $G(x)$, dobijen zamenom izraza (3.56) u izrazu (3.63-3) i posle sređivanja, glasi

$$G(x) = Dx^2 + Ex + F \quad (3.64)$$

$$D = \frac{1}{2} \left(\frac{q_1}{H} \right)^2 = \frac{2\bar{\lambda}^2}{l_x^2} \quad (3.65)$$

$$E = \frac{q_1}{H} \frac{l_z}{l_x} - \frac{1}{2} \left(\frac{q_1}{H} \right)^2 l_x = 2\bar{\lambda} \frac{l_z}{l_x^2} - \frac{2\bar{\lambda}^2}{l_x} = 2\frac{\bar{\lambda}}{l_x} K_1 \quad (3.66)$$

$$F = \frac{1}{8} \left(\frac{q_1}{H} \right)^2 l_x^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{q_1}{H} \right) l_z + \frac{1}{2} \left(\frac{l_z}{l_x} \right)^2 = \frac{1}{2} \bar{\lambda}^2 - \bar{\lambda} \frac{l_z}{l_x} + \frac{1}{2} \left(\frac{l_z}{l_x} \right)^2 = \frac{1}{2} K_1^2 \quad (3.67)$$

Vertikalne komponente reakcije u osloncima prema (3.63-2) su

$$V(0) = -Hz'(0) = F_3 = -H \frac{l_z}{l_x} + \frac{1}{2} q_1 l_x = -H \tan \theta_1 \quad (3.68)$$

$$V(l_x) = Hz'(l_x) = F_6 = H \frac{l_z}{l_x} + \frac{1}{2} q_1 l_x = H \tan \theta_2 \quad (3.69)$$

Iz (3.61), (3.62), (3.68) i (3.69) vidi se da je $K_1 = \tan \theta_1$ i $K_2 = \tan \theta_2$ te dužina L_0 , data sa (3.60), može da se napiše i u obliku

$$L_0 = \frac{H}{2q_0} \left(\begin{array}{l} -\tan \theta_1 \sqrt{1+\tan^2 \theta_1} - \sinh^{-1}(\tan \theta_1) + \\ + \tan \theta_2 \sqrt{1+\tan^2 \theta_2} + \sinh^{-1}(\tan \theta_2) \end{array} \right) \quad (3.70)$$

Jednačina (3.70), vodeći računa o (3.68), (3.69) i izrazima za transformaciju hiperboličkih funkcija, posle sređivanja glasi

$$L_0 = \frac{1}{2q_1 H} \left[F_6 T_2 + F_3 T_1 + H^2 \ln \frac{F_6 + T_2}{T_1 - F_3} \right] \quad (3.71)$$

Pošto je

$$G(0) = \frac{1}{2} \tan^2 \theta_1 \quad (3.72)$$

$$G(l_x) = \frac{1}{2} \tan^2 \theta_2 \quad (3.73)$$

na osnovu (3.63-3), sile zatezanja u oslonačkim čvorovima lančanice su

$$T(0) = T_1 = H \sqrt{1+\tan^2 \theta_1} = H \sec \theta_1 \quad (3.74)$$

$$T(l_x) = T_2 = H\sqrt{1 + \tan^2 \theta_2} = H \sec \theta_2 \quad (3.75)$$

Koristeći izraze (3.68), (3.69) dobija se

$$F_3 + F_6 = q_1 l_x \quad (3.76)$$

Strela lančanice, tj. vertikalni ugib u sredini raspona lančanice, meren od tetive lančanice, dat je sa

$$f = z \left(\frac{l_x}{2} \right) - \frac{l_z}{2} = \frac{q_1 l_x^2}{8H} \quad (3.77)$$

Ako odnos strele f i dužine horizontalne projekcije lančanice l_x ima vrednost datu izrazom

$$\frac{f}{l_x} = \frac{q_1 l_x}{8H} \leq \frac{1}{8} \quad (3.78)$$

onda se može reći da imamo plitku paraboličnu lančanicu. Kod plitke lančanice važi i odnos

$$\bar{\lambda} = \frac{q_1 l_x}{2H} \leq 0.5 \quad (3.79)$$

Kod plitke lančanice, veličina z' je dovoljno mala te može da se usvoji aproksimacija

$$\sqrt{1 + z'^2} \approx 1 + \frac{1}{2} z'^2 \quad (3.80)$$

Dužina luka nerastegljive plitke parabolične lančanice glasi

$$L_0 = \int_0^{l_x} \left(1 + \frac{1}{2} z'^2 \right) dx \quad (3.81)$$

a posle integraljenja i sređivanja dobija se

$$L_0 \cong l_x \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{q_1 l_x}{2H} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{l_z}{l_x} \right)^2 \right] \quad (3.82)$$

Analogno, kao što su izvedene jednačine (3.63) za sile duž paraboličke lančanice, sile duž plitke parabolične lančanice mogu se izraziti na sledeći način

$$\begin{bmatrix} H(x) \\ V(x) \\ T(x) \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} 1 \\ z' \\ 1 + \frac{1}{2} z'^2 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{\lambda} \left(2 \frac{x}{l_x} - 1 \right) + \frac{l_z}{l_x} \\ 1 + G(x) \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

Vrednosti sila F_3 i F_6 su iste kao i kod paraboličke lančanice, dok su vrednosti sila T_1 i T_2

$$T(0) = T_1 = H(1 + G(0)) = H \left(1 + \frac{1}{2} \tan^2 \theta_1 \right) = \frac{H}{2} (1 + \sec^2 \theta_1) \quad (3.84)$$

$$T(l_x) = T_2 = H(1 + G(l_x)) = H \left(1 + \frac{1}{2} \tan^2 \theta_2 \right) = \frac{H}{2} (1 + \sec^2 \theta_2) \quad (3.85)$$

Na osnovu izraza (3.84) i (3.85) dobija se

$$T_2 - T_1 = q_1 l_z \quad (3.86)$$

Jednačine izvedene u ovom delu koriste se za definisanje konačnog elementa datog u delu 3.2.1.

3.1.3 Elastična lančanica opterećena gravitacionim opterećenjem

Kod elastične lančanice dolazi do promene dužine lančanice usled opterećenja. Ukupna dužina lančanice tada je

$$\Delta L = L_0 + \Delta L_E \quad (3.87)$$

gde je

$$\Delta L_E = \frac{1}{EA} \int_0^{L_0} T ds_0 = \frac{1}{EA} \int_0^{l_x} T(x) \frac{ds_0}{dx} dx \quad (3.88)$$

elastično izduženje lančanice.

Rastegljiva hiperbolička lančanica

Ako se u izrazu (3.88) $T(x)$ zameni sa izrazom (3.26-3) i $\frac{ds_0}{dx}$ sa izrazom (3.24), dobija se

$$\Delta L_E = \frac{H}{EA} \int_0^{l_x} (1 + z'^2) dx = \frac{H}{EA} \int_0^{l_x} \cosh^2(2\lambda + \Phi) dx \quad (3.89)$$

Rešenje integrala (3.89) je dato u obliku

$$\Delta L_E = \frac{1}{2} \frac{H l_x}{EA} + \frac{1}{4} \frac{H^2}{qEA} [\sinh(4\lambda + 2\Phi) - \sinh 2\Phi] \quad (3.90)$$

Vodeći računa o izrazima za transformaciju hiperboličkih funkcija, posle transformacije (3.90), dobija se

$$\Delta L_E = \frac{H}{EA} \frac{L_0^2}{l_x} \left[\lambda \coth \lambda - \frac{1}{2} \left(\frac{l_x}{L_0} \right)^2 \left(\frac{\sinh 2\lambda}{2\lambda} - 1 \right) \right] \quad (3.91)$$

Ako se u (3.91) hiperboličke funkcije razviju u red i izraz se sredi, dobija se

$$\Delta L_E = \frac{H}{EA} \frac{L_0^2}{l_x} \left[1 + \frac{\lambda^2}{3} \left(1 - \left(\frac{l_x}{L_0} \right)^2 \right) - \frac{\lambda^4}{45} \left(1 + 3 \left(\frac{l_x}{L_0} \right)^2 \right) + \dots \right] \quad (3.92)$$

Ako se u (3.92) zanemare svi članovi osim prvog člana dobija se približno rešenje za promenu dužine lančanice usled elastičnog izduženja

$$\Delta L_E \approx \frac{H}{EA} \frac{L_0^2}{l_x} \quad (3.93)$$

Koordinate drugog čvora elastične hiperboličke lančanice, vodeći računa o (3.45) i (3.47), glase

$$l_x = \frac{H}{q_1} \ln \frac{T_1 + T_2 + qL_0}{T_1 + T_2 - qL_0} + \frac{HL_0}{EA} \quad (3.94)$$

$$l_z = \frac{T_2 - T_1}{q} + \left(\frac{F_3 + F_6}{2} \right) \frac{L_0}{EA} \quad (3.95)$$

Rategljiva parabolična lančanica

Ako se u izrazu (3.88) uzme da je $T(x)$ jednako izrazu (3.63-3) i $\frac{ds_0}{dx}$ je dato izrazom (3.24) dobija se

$$\Delta L_E = \frac{H}{EA} \int_0^{l_x} (1 + z'^2) dx = \frac{H}{EA} \int_0^{l_x} (1 + 2G(x)) dx \quad (3.96)$$

Integraljenjem (3.96) i sređivanjem dobija se rešenje u obliku

$$\Delta L_E = \frac{Hl_x}{EA} \left[1 + \frac{\bar{\lambda}^2}{3} + \left(\frac{l_z}{l_x} \right)^2 \right] \quad (3.97)$$

Koordinate drugog čvora elastične paraboličke lančаницe, vodeći računa o (3.76) i (3.86), glase

$$l_x = \frac{F_3 + F_6}{q_1} + \frac{HL_0}{EA} \quad (3.98)$$

$$l_z = \frac{T_2 - T_1}{q_1} + \left(\frac{F_3 + F_6}{2} \right) \frac{L_0}{EA} \quad (3.99)$$

Vodeći računa o (3.71), ΔL_E može da se izračuna i na drugi način kao

$$\Delta L_E = \frac{HL_0}{EA} = \frac{1}{2EAq_1} \left[F_6T_2 + F_3T_1 + H^2 \ln \frac{F_6 + T_2}{T_1 - F_3} \right] \quad (3.100)$$

3.1.4 Jednačina elastične lančаницe opterećene gravitacionim opterećenjem u parametarskom obliku

Stvarni kabl ima konačnu aksijalnu krutost. Diferencijalne jednačine ravnoteže rastegljive lančаницe zadovoljavaju *Hooke*-ov zakon. Jednačine ravnoteže dela kabla u horizontalnom i vertikalnom pravcu su (slika 3.4)

$$T \frac{dx}{ds} = H \quad (3.101)$$

$$T \frac{dz}{ds} = qs_0 - F_3 \quad (3.102)$$

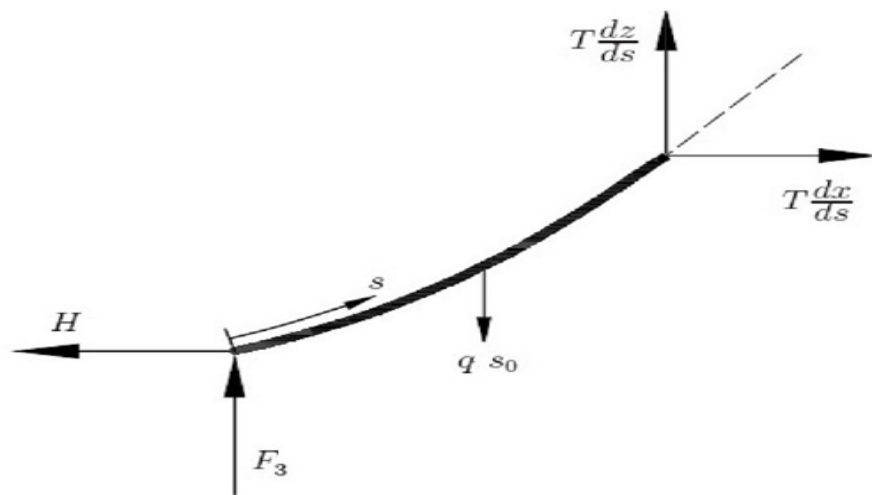
gde je s_0 dužina luka nerastegljivog kabla. Takođe, geometrijsko ograničenje

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1 \quad (3.103)$$

mora da bude zadovoljeno. Pošto materijal lančаницe zadovoljava *Hook*-ov zakon, dobija se

$$T = AE \left(\frac{ds}{ds_0} - 1 \right) \quad (3.104)$$

gde je A površina poprečnog preseka nepoterećenog profila.



Slika 3.4: Segment elastične lančanice

Ako se jednačine (3.101) i (3.102) kvadriraju i zamene u jednačini (3.103), dobija se silu u bilo kojoj tački s_0 kabla kao

$$T(s_0) = \left(H^2 + (q s_0 - F_3)^2 \right)^{1/2} \quad (3.105)$$

Vodeći računa da je

$$\frac{dx}{ds_0} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{ds_0} \quad (3.106)$$

$$\frac{dz}{ds_0} = \frac{dz}{ds} \frac{ds}{ds_0} \quad (3.107)$$

tada je

$$x(s_0) = \int_0^{s_0} \frac{dx}{ds} \frac{ds}{ds_0} ds_0 \quad (3.108)$$

$$z(s_0) = \int_0^{s_0} \frac{dz}{ds} \frac{ds}{ds_0} ds_0 \quad (3.109)$$

Vrednosti za dx/ds , dz/ds i ds/ds_0 mogu da se dobiju transformacijom jednačina (3.101), (3.102) i (3.104) respektivno i iznose

$$\frac{dx}{ds} = \frac{H}{T} = \frac{H}{\sqrt{(H^2 + (q_0 s_0 - F_3')^2)}} \quad (3.110)$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{q s_0 - F_3'}{T} = \frac{q s_0 - F_3'}{\sqrt{(H^2 + (q s_0 - F_3')^2)}} \quad (3.111)$$

$$\frac{ds}{ds_0} = \frac{T}{AE} + 1 = \frac{\sqrt{(H^2 + (qs_0 - F_3')^2)}}{AE} + 1 \quad (3.112)$$

Zamenom (3.110), (3.111), (3.112) u (3.108) i (3.109) parametarske jednačine lančаницe glase

$$x(s_0) = \frac{Hs_0}{AE} + \frac{H}{q} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{qs_0 - F_3}{H} \right) - \sinh^{-1} \left(-\frac{F_3}{H} \right) \right] \quad (3.113)$$

$$z(s_0) = \frac{F_3 s_0}{AE} \left(\frac{qs_0}{2F_3} - 1 \right) + \frac{H}{q_0} \left[\left(1 + \left(\frac{qs_0 - F_3}{H} \right)^2 \right)^{1/2} - \left(1 + \left(\frac{F_3}{H} \right)^2 \right)^{1/2} \right] \quad (3.114)$$

Ako se u jednačini za $x(s_0)$ i $z(s_0)$, stavi da je $s_0 = L_0$ dobiće se koordinate čvora 2 lančаницe (videti sliku 3.3)

$$x(L_0) = l_x = \frac{HL_0}{AE} + \frac{H}{q} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{qL_0 - F_3}{H} \right) - \sinh^{-1} \left(-\frac{F_3}{H} \right) \right] \quad (3.115)$$

$$z(L_0) = l_z = \frac{F_3 L_0}{AE} \left(\frac{qL_0}{2F_3} - 1 \right) + \frac{H}{q} \left[\left(1 + \left(\frac{qL_0 - F_3}{H} \right)^2 \right)^{1/2} - \left(1 + \left(\frac{F_3}{H} \right)^2 \right)^{1/2} \right] \quad (3.116)$$

Jednačina (3.115) je transcendentna, a jednačina (3.116) je algebarska. Ako je poznato q , dužina nerastegljive lančаницe L_0 i koordinate čvora 2, iz jednačina (3.115) i (3.116), iterativnim postupkom mogu da se dobiju sile u kablu H i F_3 .

Jednačine (3.115) i (3.116) mogu da se prikažu i na drugi način. Vodeći računa o vezi hiperboličkih i logaritamskih funkcija kao i o izrazima (3.39) - (3.42) dobijaju se parametarske jednačine u obliku

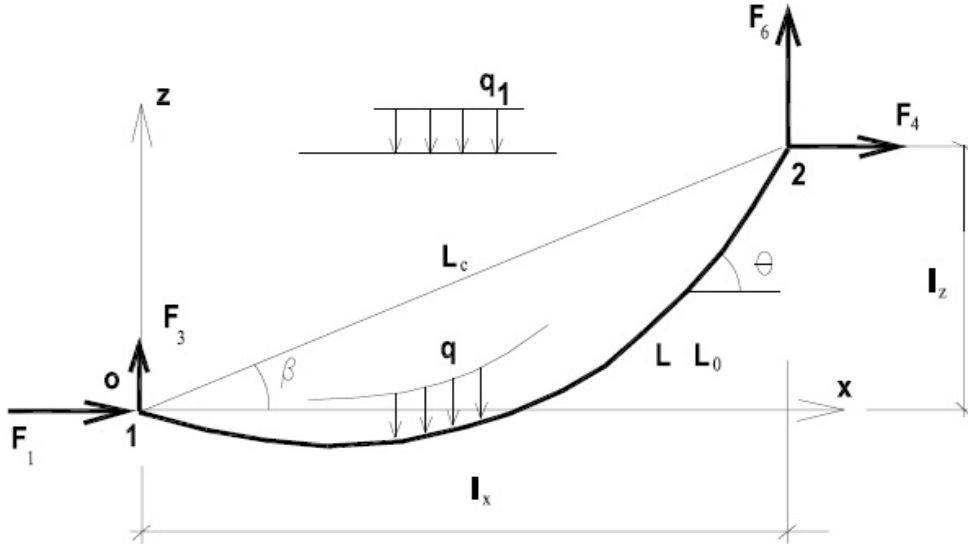
$$l_x = \frac{H}{q} \ln \frac{F_6 + T_2}{T_1 - F_3} + \frac{HL_0}{EA} \quad (3.117)$$

$$l_z = \frac{T_2 - T_1}{q} + \frac{1}{2AEq} (T_2^2 - T_1^2) \quad (3.118)$$

Izrazi (3.117) i (3.118) se koriste za izvođenje matrice krutosti konačnog elementa u poglavlju 3.2.1.

3.2 Konačni elementi na bazi analitičkih rešenja

Na slici 3.5 date su oznake koje su korišćene kod izvedenih konačnih elemenata na bazi analitičkih izraza. Konačni elementi leže u ravni oxz . Jednakopodeljeno opterećenje q leži u ravni kabla i u pravcu je ose z .



Slika 3.5: Lančanica u ravni $x - z$

3.2.1 Elastični hiperbolički elemenat - tip 1

Elastični hiperbolički elemenat - tip 1 može da se upotrebljava za lančanicu sa bilo kojim odnosom strela-raspon. Ovim elementom, sa veoma visokom tačnošću, može da se analizira i labava i nategnuta lančanica. U literaturi se mogu naći rešenja za prostornu lančanicu [82, 83] i lančanicu u ravni [71, 44]. U radu će biti prikazano rešenje za lančanicu u ravni, prema izrazima datim u delu 3.1.

Posmatra se elastična lančanica koja leži u vertikalnoj ravni oxz i opterećena jednakopodeljenim opterećenjem q duž ose elementa (slika 3.5). Koristiće se izrazi (3.18), (3.33), (3.39), (3.51), (3.117), (3.118) izvedeni u delu 3.1.2 i 3.1.3, a dati za hiperboličko rešenje lančanice, u modifikovanom obliku

$$L = l_z^2 + l_x^2 \frac{\sinh^2 \lambda}{\lambda^2} \quad (3.119)$$

$$\lambda = \frac{q |l_x|}{2 |F_1|} \quad (3.120)$$

$$F_3 = \frac{q}{2} \left[-l_z \frac{\cosh \lambda}{\sinh \lambda} + L \right] \quad (3.121)$$

$$F_6 = qL_0 - F_3 \quad (3.122)$$

$$l_x = -F_1 \left(\frac{L_0}{AE} + \frac{1}{q} \ln \frac{F_6 + T_2}{T_1 - F_3} \right) \quad (3.123)$$

$$l_z = \frac{1}{2AEq} (T_2^2 - T_1^2) + \frac{T_2 - T_1}{q} \quad (3.124)$$

Koristiće se i sledeći izrazi

$$F_4 = -F_1 \quad (3.125)$$

$$T_1 = \sqrt{F_1^2 + F_3^2} \quad (3.126)$$

$$T_2 = \sqrt{F_4^2 + F_6^2} \quad (3.127)$$

Ako se izrazi (3.122), (3.125), (3.126) i (3.127) zamene u izrazima (3.123) i (3.124), vidi se da su (3.123) i (3.124) funkcije sila F_1 i F_3

$$l_x = l_x(F_1, F_3) \quad (3.128)$$

$$l_z = l_z(F_1, F_3) \quad (3.129)$$

Diferenciranjem izraza (3.123) i (3.124) dobija se

$$\begin{bmatrix} dl_x \\ dl_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial l_x}{\partial F_1} & \frac{\partial l_x}{\partial F_3} \\ \frac{\partial l_z}{\partial F_1} & \frac{\partial l_z}{\partial F_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dF_1 \\ dF_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dF_1 \\ dF_3 \end{bmatrix} = \mathbf{f} \begin{bmatrix} dF_1 \\ dF_3 \end{bmatrix} \quad (3.130)$$

U izrazu (3.130) $\mathbf{f}$ je matrica fleksibilnosti čiji su koeficijenti

$$f_1 = \left[\frac{l_x}{F_1} + \frac{1}{q} \left(\frac{F_6}{T_2} + \frac{F_3}{T_1} \right) \right] \quad (3.131)$$

$$f_2 = f_3 = \left[\frac{F_1}{q} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \right] \quad (3.132)$$

$$f_4 = - \left[\frac{L_0}{AE} + \frac{1}{q} \left(\frac{F_6}{T_2} + \frac{F_3}{T_1} \right) \right] \quad (3.133)$$

Matrica krutosti je inverzna matrici fleksibilnosti $\mathbf{f}$ i jednaka je

$$\mathbf{k} = \mathbf{f}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{f}} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \quad (3.134)$$

gde je

$$k_1 = f_4 \quad (3.135)$$

$$k_2 = k_3 = -f_2 \quad (3.136)$$

$$k_4 = f_1 \quad (3.137)$$

$$\det \mathbf{f} = f_1 f_4 - f_2^2 \quad (3.138)$$

Tangentna matrica krutosti lančanice iznosi

$$\mathbf{K}_T = \begin{bmatrix} -\mathbf{k} & \mathbf{k} \\ \mathbf{k} & -\mathbf{k} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{f}} \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 & k_1 & k_2 \\ & -k_4 & k_2 & k_4 \\ & & -k_1 & -k_2 \\ sym & & & -k_4 \end{bmatrix} \quad (3.139)$$

i predstavlja vezu između vektora inkrementalnih internih čvornih sila $\Delta \mathbf{r}$ i vektora inkrementalnih čvornih pomeranja $\Delta \mathbf{q}$. Ova veza je data jednačinom

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{q} = \Delta \mathbf{r} \quad (3.140)$$

gde je

$$\Delta \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \Delta F_1 \\ \Delta F_3 \\ \Delta F_4 \\ \Delta F_6 \end{bmatrix} \quad (3.141)$$

i vektor inkrementalnih čvornih pomeranja

$$\Delta \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta w_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta w_2 \end{bmatrix} \quad (3.142)$$

Da bi se našla tangentna matricu krutosti $\mathbf{K}_T$ moraju prvo da se odrede vrednosti sila F_1 F_3 . Te sile su usvojene kao redundantne sile i određuju se, u odnosu na datu poziciju krajnjih čvorova lančanice, upotrebom iterativne procedure. Ta procedura zahteva početne vrednosti redundantnih sila. Početna vrednost sile F_1^0 može da se odredi iz izraza (3.120) kada se umesto H stavi F_1^0

$$F_1^0 = -\frac{ql_x}{2\lambda^0} \quad (3.143)$$

U izrazu (3.143) vrednost promenjive λ^0 određuje se iz izraza (3.119), kada se zameni dužina L rastegljivog elementa sa dužinom L_0 nerastegljivog elementa i zadrži prvi izraz u razvoju funkcije $\sinh^2 \lambda / \lambda^2$ u red. Izraz za λ^0 glasi

$$\lambda^0 = \sqrt{6 \left(\frac{L_0^2 - l_z^2}{l_x^2} - 1 \right)} \quad (3.144)$$

U slučaju da je $L_0 < l_x$ usvaja se vrednost $\lambda^0 = 0.2$, što odgovara plitkoj lančanici. U slučaju da je kabl vertikaln tj. $l_x = 0$ izraz $\lambda^0 \rightarrow \infty$ te se usvaja dovoljno velika vrednost za $\lambda^0 = 10^6$ [69].

Početna vrednost sile F_3^0 dobija se iz izraza (3.121) zamenom L sa L_0 i glasi

$$F_3^0 = \frac{q}{2} \left[-l_z \frac{\cosh \lambda}{\sinh \lambda} + L_0 \right] \quad (3.145)$$

Sada može da se odredi nova projekcija kabla koja odgovara silama F_1 i F_3 , vodeći računa o izrazima (3.122), (3.125), (3.126), (3.127), direktno iz jednačina (3.123) i (3.124) kao i vektor korekcije

$$\Delta \mathbf{l} = \begin{bmatrix} \Delta l_x \\ \Delta l_z \end{bmatrix} \quad (3.146)$$

Čvorne sile mogu da se koriguju upotrebom vektora korekcije $\Delta \mathbf{l}$

$$\begin{bmatrix} \Delta F_1 \\ \Delta F_3 \end{bmatrix} = \mathbf{k} \begin{bmatrix} \Delta l_x \\ \Delta l_y \end{bmatrix} = \mathbf{k} \Delta \mathbf{l} \quad (3.147)$$

$$\begin{bmatrix} F_1^{i+1} \\ F_3^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^i \\ F_3^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta F_1 \\ \Delta F_3 \end{bmatrix} \quad (3.148)$$

Iterativna procedura veoma brzo konvergira. Iterativni proces se nastavlja sve dok ne bude

$$\|\Delta \mathbf{l}\| < \varepsilon \quad (3.149)$$

gde je ε neka unapred zadata vrednost. Da bi se odredila dužina nerastegljivog kabla L_0 , kada je data početna sila zatezanja F_1^0 , prvo se iz jednačine (3.119) odredi L , a zatim se L_0 određuje iz izraza

$$L_0 = L \left(1 - \frac{|F_1^0| L}{AE l_x} \right) \quad (3.150)$$

Ovo je približno rešenje jer se pretpostavlja da je sila zatezanja duž kabla konstantna i jednaka $F_1^0 L / l_x$. Vrednost data sa (3.150) je veoma tačna.

3.2.2 Elastični hiperbolički elemenat - tip 2

Elastični hiperbolički elemenat - tip 2, kao i element izveden u delu 3.2.1, može da se upotrebljava za lančanicu sa bilo kojim odnosom strela-raspon. Ovim elementom, sa veoma visokom tačnošću, može da se analizira kako vrlo labava tako i nategnuta lančanica. Prvu formulaciju, koja je zasnovana na metodi fleksibilnoti dao je *O'Brien*. Drugu formulaciju, koja se predstavlja ovde, dao je *Ahmadi-Kashani* i primenjena je u radu [39].

Posmatra se elastična lančanica koja leži u vertikalnoj ravni oxz . Lančanica je opterećena jednakopodeljenim opterećenjem q duž čitavog raspona (slika 3.5). Tangentna matrica krutosti, u lokalnom koordinatnom sistemu elementa, glasi

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k} & -\mathbf{k} \\ -\mathbf{k} & \mathbf{k} \end{bmatrix} \quad (3.151)$$

gde je

$$\mathbf{k} = \alpha_2 \begin{bmatrix} \frac{qL_0}{AE} + (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) & 0 & \cos \theta_1 - \cos \theta_2 \\ 0 & \frac{H}{\alpha_2 l_x} & 0 \\ \cos \theta_1 - \cos \theta_2 & 0 & \frac{qL_0}{AE} + (\sin \theta_2 + \sin \theta_1) \end{bmatrix} \quad (3.152)$$

i

$$\mu = \frac{q}{2} \left[\frac{l_x}{H} - \frac{L_0}{AE} \right] \quad (3.153)$$

$$\alpha_2 = \frac{q}{4 \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \left[\mu \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right] + \frac{q^2 L_0 l_x}{AEH}} \quad (3.154)$$

$$\tan \theta_1 = \sinh \left[\cosh^{-1} \left(\frac{qL_0}{2H \sinh \mu} \right) - \mu \right] \quad (3.155)$$

$$\tan \theta_2 = \sinh \left[\cosh^{-1} \left(\frac{qL_0}{2H \sinh \mu} \right) + \mu \right] \quad (3.156)$$

Izraz za tangentnu matricu krutosti (3.151) primenjiv je samo, ako je čvor 2 na višem ili istom nivou kao čvor 1. Ovo ne predstavlja veću poteškoću pri implementaciji. Treba samo promeniti redove i kolone tangentne matrice krutosti i vektora ekvivalentnih čvornih sila.

Posebnu pažnju treba obratiti slučaju kada je intezitet opterećenja q blizak 0. Submatrica (3.152) tangentne matrice krutosti (3.151) glasi

$$\lim_{q \rightarrow 0} \mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} \cos^2 \theta_1 + \frac{T}{L} & 0 & \frac{AE}{L} \sin \theta_1 \cos \theta_1 \\ 0 & \frac{T}{L} & \frac{AE}{L} \sin^2 \theta_1 + \frac{T}{L} \\ \frac{AE}{L} \sin \theta_1 \cos \theta_1 & \frac{AE}{L} \sin^2 \theta_1 + \frac{T}{L} & \end{bmatrix} \quad (3.157)$$

gde je relacija između L_0 i L za pravi elastični elemenat

$$L = L_0 \left(1 + \frac{T}{AE} \right) \quad (3.158)$$

Submatrica (3.152) tangentne matrice krutosti (3.151) može da se upotrebljava za analizu lančanice sa malom težinom, ako se lančanicu zada mala vrednost za q . To se radi da bi se izbegla numerička nestabilnost.

Vektor čvornih sila iznosi

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\tan \theta_1 \\ 1 \\ 0 \\ \tan \theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.159)$$

Vektor čvornih sila i tangentna matrica krutosti su funkcije jedne varijable, horizontalne sile H . Za datu geometrijsku konfiguraciju, H nalazimo iz sledeće nelinearne jednačine

$$F(H) = \frac{4H^2}{q^2} \sinh^2 \mu + \frac{l_z}{\left[1 + \left(\frac{qL_0}{2AE} \right) \coth \mu \right]^2} - L_0^2 \equiv 0 \quad (3.160)$$

Jednačina (3.160) se rešava *Newton-Raphson*-ovim algoritmom za nelinearnu jednačinu sa jednom varijablom. Pri tome je potreban prvi izvod jednačine (3.160), koji glasi

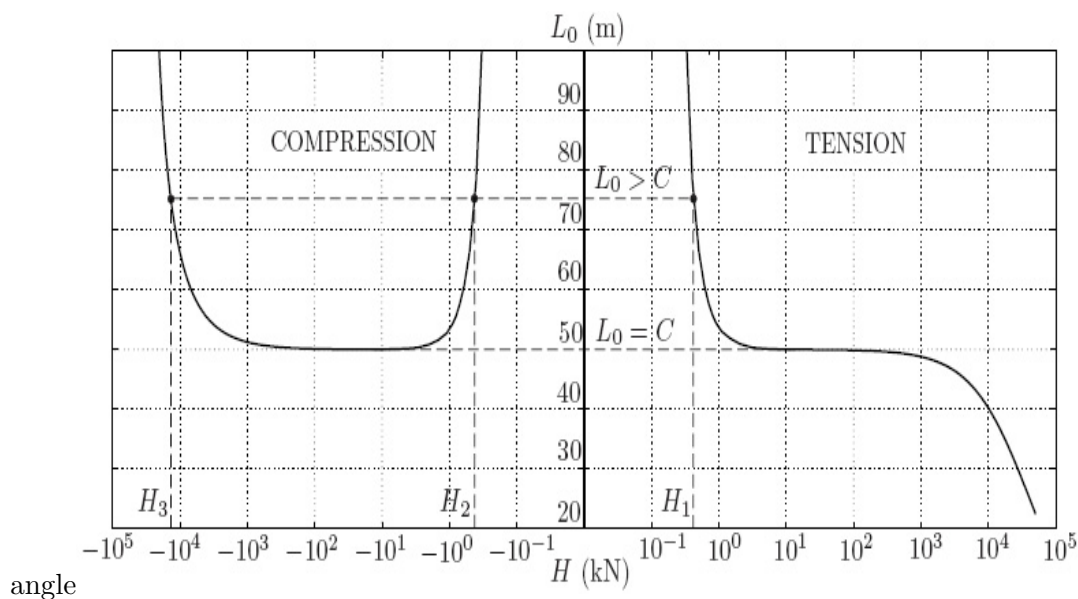
$$\frac{dF}{dH} = \frac{8H}{q^2} \sinh^2 \mu - \frac{2l_x}{q} \sinh 2\mu - \frac{l_x L_0}{2AE \left[1 + \left(\frac{qL_0}{2AE} \right) \coth m\mu \right]^3} \left(\frac{l_z q}{H \sinh \mu} \right)^2 \quad (3.161)$$

Za slučaj nerastegljive lančаницe, kada $AE \rightarrow \infty$, jednačina (3.160) se pojednostavljuje i svodi se na jednačinu (3.51).

Konvergencija rešenja

Da bi se dobio vektor čvornih sila i tangentna matrica krutosti, mora da se reši jednačina (3.160). Ona može da se reši klasičnom *Newton – Raphson*-vom metodom. Zbog prirode ove iterativne tehnike, ne može da se garantuje konvergencija dok se ne modifikuje originalni algoritam [39].

Relacija između horizontalne sile H i dužine L_0 data je izrazom (3.160) kao i grafički na slici 3.6. Sa slike 3.6 može da se vidi da za elemenat kod koga je $L_0 < L_C$ imamo jedinstvenu relaciju između H i L_0 . Za labav elemenat kod koga je $L_0 > L_C$ postoje tri vrednosti za H , od kojih svaka predstavlja neko ravnotežno stanje. Ove tri vrednosti označene su H_1 , H_2 i H_3 . Samo vrednost $H = H_1$ odgovara korektnom rešenju. Za ostale dve vrednosti imamo da je $H < 0$ i elemenat je pritisnut (slika 3.7). *Ahmadi-Kashani* je

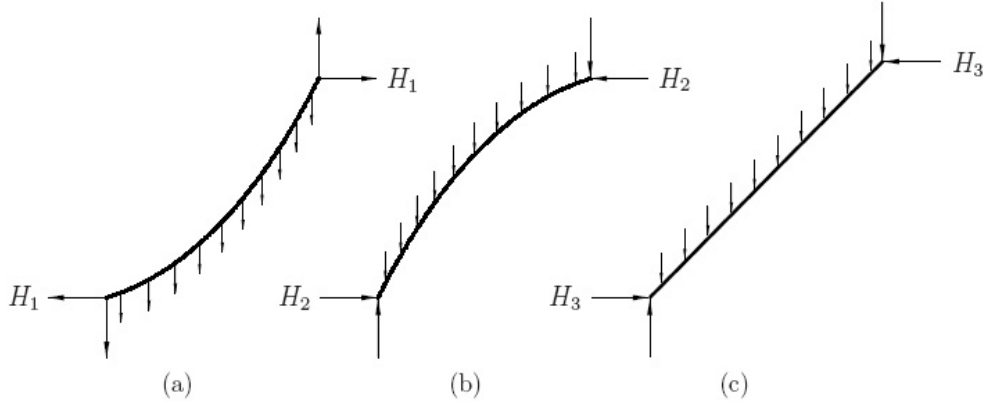


Slika 3.6: Tri moguća rešenja za lančanicu [39]

predložio sledeću modifikaciju *Newton-Raphson*-ovog algoritma da bi se izbegla neželjena rešenja. Vrednost sile H u $i + 1$ iteraciji je

$$H^{i+1} = H^i - F(H^i) / \left(\frac{dF}{dH} \right)_i \quad H^i < 0$$

$$H^{i+1} = H^i / 2 \quad H^i > 0$$



Slika 3.7: Konfiguracija elementa za tri različita rešenja: a) $H = H_1$, b) $H = H_2$, c) $H = H_3$

Broj iteracija zavisi od početne vrednosti za H . *Ahmadi-Kashani* predlaže sledeće vrednosti početne sile, u zavisnosti da li je kabl labav ili zategnut,

1. Slučaj kada je $L_0 > L_c$.

Ako se zanemari elastičnost, dužina lančаницe data je izrazom (3.51). Bezdimenzionalni geometrijski prametar δ definisan je kao

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{L_0^2 - l_z^2}{l_x^2}\right)} \quad (3.162)$$

U zavisnosti od vrednosti ovoga parametra sledeći izrazi daju dobru početnu vrednost za silu H

$$\begin{aligned} \lambda &\approx \sqrt{\left(\sqrt{(120\delta - 20)} - 10\right)} & 1 < \delta \leq 3.67 \\ \lambda &\approx 2.337 + 1.095 \ln \delta - 0.00473 (7.909 - \ln \delta)^{2.46} & 3.67 < \delta < 450000 \end{aligned}$$

Kada se odredi λ , H se određuje iz jednačine (3.18).

2. Slučaj kada je $L_0 \leq L_c$.

U ovom slučaju elastičnost lančаницe ne može da se zanemari. Očekivana početna vrednost za silu u lančаницi T određuje se iz jednačine

$$\begin{aligned} T &\approx \sqrt[3]{b_2} + \frac{a_2}{3} & \sqrt[3]{b_2} > a_2 \\ T &\approx \frac{b_2}{2a_2^2} + a_2 & \sqrt[3]{b_2} \leq a_2 \end{aligned}$$

gde je

$$a_2 = AE \left(1 - \frac{L_0}{L_C}\right) \quad (3.163)$$

i

$$b_2 = AE \frac{qL_0}{24} \cos^2 \beta \quad (3.164)$$

Vrednost H sada može da se odredi kao

$$H = \frac{Tl_x}{L_C} \quad (3.165)$$

3.2.3 Elastični plitki parabolični elemenat

Rešenje kada je odnos ugib - raspon lančanice mali, koje će biti predstavljeno ovde, dao je *Ahmadi-Kashani* i primenjeno je u radu [39].

Za ovaj tip elementa, kao što je rečeno u delu 3.1.2, opterećenje q_1 je raspodeljeno duž horizontalne projekcije lančanice (slika 3.5). Tangentna matrica krutosti, u lokalnom koordinatnom sistemu elementa, iznosi

$$\mathbf{k} = \alpha_1 \begin{bmatrix} k_1 & & k_2 \\ & \frac{H}{\alpha_1 l_x} & \\ k_2 & & k_3 \end{bmatrix} \quad (3.166)$$

U (3.166) izrazi imaju vrednosti

$$k_1 = \frac{L_0}{L_c} \cos^2 \beta + \left(\frac{L_c - L_0}{L_c} \right) \sin^2 \beta + \frac{q_1^2 l_x^2}{8T^2} \cos^2 \beta \sin^2 \beta \quad (3.167)$$

$$k_2 = \left(\frac{2L_0}{L_c} - 1 - \frac{q_1^2 l_x^2}{8T^2} \cos^2 \beta \right) \sin \beta \cos \beta \quad (3.168)$$

$$k_3 = \frac{L_0}{L_c} \sin^2 \beta \cos^2 \beta + \left(\frac{L_c - L_0}{L_c} \right) \cos^2 \beta + \frac{q_1^2 l_x^2}{8T^2} \cos^4 \beta \quad (3.169)$$

$$\alpha_1 = \frac{AE}{L_c \left(1 + \frac{q_1^2 l_x^2}{12T^3} AE \cos^2 \beta \right)} \quad (3.170)$$

gde je T oznaka za silu u kablju. Tangentna matrica krutosti u lokalnom koordinatnom sistemu elementa oxz iznosi

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k} & -\mathbf{k} \\ -\mathbf{k} & \mathbf{k} \end{bmatrix} \quad (3.171)$$

Tangentna matrica krutosti je funkcija nepoznate sile u kablju T . Ova sila može da se nađe iz sledeće kubne jednačine [39]

$$f(T) = \frac{1}{AE} T^3 - \left(\frac{L_c - L_0}{L_c} \right) T^2 + \left(\frac{q_1^2 l_x^2}{12AE} \cos^4 \beta \right) T - \frac{q_1^2 l_x^2}{24} \cos^2 \beta \equiv 0 \quad (3.172)$$

Ako se u jednačini (3.172) zanemari doprinos trećeg člana [39], jednačina (3.172) glasi

$$f(T) = \frac{1}{AE} T^3 - \left(\frac{L_c - L_0}{L_c} \right) T^2 - \frac{q_1^2 l_x^2}{24} \cos^2 \beta \equiv 0 \quad (3.173)$$

Na osnovu *Descartes*-ovog pravila o znaku, jednačina (3.173) ima samo jedan pozitivan koren. Jednačina (3.173) može da se reši primenom *Newton-Raphson*-ove metode ili metodom za rešavanje kubne jednačine.

Kada je poznato T , da bi se našla vrednost za H u (3.166), polazi se od izraza za osrednjenu vrednost sile T za plitku paraboličnu lančanicu

$$T = \frac{1}{L_0} \int_{s_0}^{l_x} T(s) ds = \frac{H}{L_0} \int_0^{l_x} (1 + z'^2) dx \quad (3.174)$$

Vodeći računa o (3.63-3), izraz (3.174) posle integraljenja i sređivanja, glasi

$$T = \frac{H}{L_0} \int_0^{l_x} (1 + 2G(x)) dx = \frac{Hl_x}{L_0} \left[1 + \frac{\bar{\lambda}^2}{3} + \left(\frac{l_z}{l_x} \right)^2 \right] \quad (3.175)$$

Iz izraza (3.175) se dobija

$$H^2 - \frac{TL_0l_x}{l_x^2 + l_z^2} H + \frac{1}{12} \frac{q_1^2 l_x^4}{l_x^2 + l_z^2} = 0 \quad (3.176)$$

i predstavlja kvadratnu jednačinu po H . Rešavanjem kvadratne jednačine (3.176) dobija se vrednost sile H .

Vektor čvornih sila za paraboličnu lančanicu, vodeći računa o (3.63) i (3.83), glasi

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_3 \\ F_4 \\ 0 \\ F_6 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\left(\frac{l_z}{l_x} - \frac{q_1 l_x}{2H} \right) \\ 1 \\ 0 \\ \left(\frac{l_z}{l_x} + \frac{q_1 l_x}{2H} \right) \end{bmatrix} \quad (3.177)$$

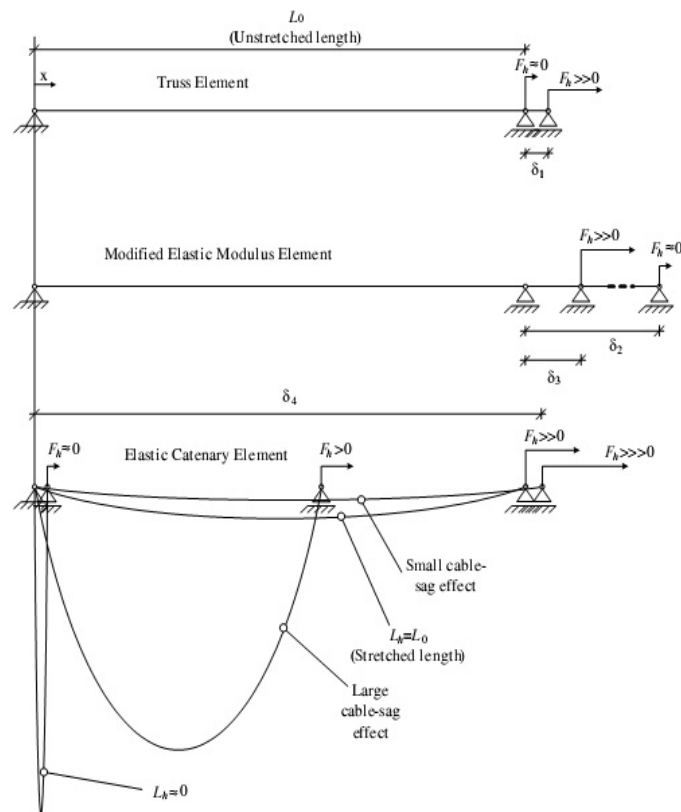
3.3 Upoređenje rešenja za različite formulacije konačnih elemenata za kabl

Pretpostaviće se da je δ pomeranje desnog čvora horizontalnog kabla. Inicijalna horizontalna projekcija kabla je takva da je inicijalna horizontalna komponenta sile $H = |F_1| = F_h = 0$.

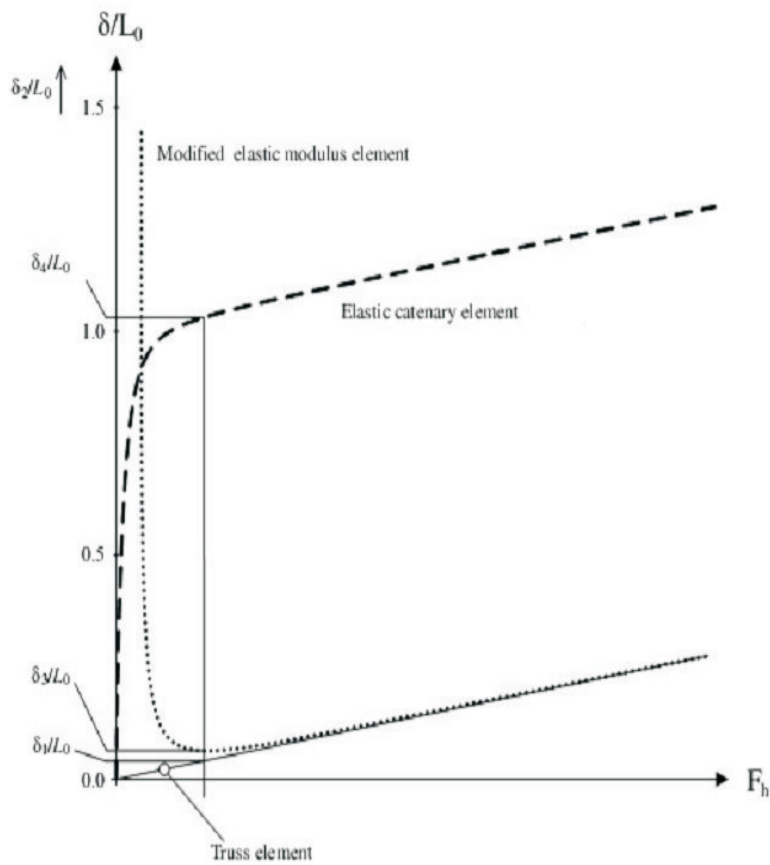
Za prosti štap sa ekvivalentnim modulum elastičnosti oznakama T i ${}^0L_{ch}$ iz dela 5.4, odgovaraju respektivno oznake F_h i L_0 na slici 3.8. Pošto je štap sa ekvivalentnim modulum elastičnosti horizontalan dobija se da je ${}^0L_{ch} = {}^0L_c$.

Na slici 3.8 prikazani su deformisani položaji kabla za primenjene različite tipove konačnih elemenata. Sa slike 3.8 se vidi da se ponašanje prostog štapa (engl. *Truss Element* - videti deo 5.1) i prostog štapa sa ekvivalentnim modulum elastičnosti (engl. *Modified Elastic Modulus Element* - videti deo 5.4) ne slaže sa ponašanjem elastične lančаницe (engl. *Elastic Catenary Element* - videti deo 3.2.1, 3.2.2 i 3.2.3).

Horizontalno pomeranje δ , sa uvećanjem sile H od nule, za prosti štap, prosti štap sa ekvivalentnim modulum elastičnosti i elastičnu lančanicu je prikazano na slici 3.9.



Slika 3.8: Različiti konačni elementi za kablove: deformisana konfiguracija [12]



Slika 3.9: Različiti konačni elementi za kablove: dijagram horizontalna sila - horizontalno pomeranje [12]

3.4 Jednačina promene stanja za plitku lančanicu

Kao što može da se vidi u delu 3.1, tačna analiza jednostavnih problema kod lančanice, može da bude ograničenje jer je komplikovana. Pojednostavljenje analize može da se napravi u situacijama kada je strela lančanice mala. Ovo je veoma čest slučaj u inženjerskoj praksi. Približna teorija daje direktne, konzistentne metode za nalaženje statičkog odgovora na primenjeno opterećenje sa velikom tačnošću.

Pojednostavljeni izrazi, u odnosu na tačnu analizu, koristiće se za kontrolu rešenja u primerima u delu 10.3.3, koja se dobijaju kao izlaz iz razvijenog programa zasnovanog na konačnim elementima na bazi tačne analize.

Za neko dato jednakopodeljeno opterećenje sopstvenom težinom $\bar{q}$ lančanica zauzima položaj u vertikalnoj ravni koji je određen ili sa hiperboličkim (3.22) ili sa parabolikim (3.57) rešenjem. Kod parabolikog rešenja uzima se da je $\bar{q} = q_1 = \text{const}$ jednakopodeljeno opterećenje sopstvenom težinom po jedinici dužine horizontalne projekcije, a kod hiperboličkog rešenja uzima se da je $\bar{q} = q = \text{const}$ jednakopodeljeno opterećenje sopstvenom težinom po jedinici dužine luka lančanice. Dužina elementa luka lančanice je data sa

$$ds^2 = dx^2 + dz^2 \quad (3.178)$$

Usled nekog dodatnog jednakopodeljenog opterećenja $\bar{p}$ lančanica se pomera iz prvobitne ravnotežne konfiguracije, koja odgovara uticaju datog jednakopodeljeno opterećenja $\bar{q}$, u neku novu ravnotežnu konfiguraciju. Ako se komponente pomeranja tačaka ose luka u pravcima osa x i z , merene iz prvobitne do nove ravnotežne konfiguracije, obeleže redom sa u i w , onda je dužina elementa luka lančanice u novoj ravnotežnoj konfiguraciji data sa

$$ds'^2 = (dx + du)^2 + (dz + dw)^2 \quad (3.179)$$

Ako imamo plitaku lančanicu, tj $\frac{f}{l_x} \leq 0.125$, dilatacija ε elementa lančanice, uzimajući u obzir i male veličine drugog reda, data je sa

$$\varepsilon = \frac{ds' - ds}{ds} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{du}{ds} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{dw}{ds} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dw}{ds}\right)^2 \quad (3.180)$$

U slučaju zanemarivanja malih veličina drugog reda, poslednji član izraza (3.180) može da se zanemari. Ako se sa τ obeleži priraštaj sile zatezanja T lančanice, koji se javlja usled dodatnog opterećenja $\bar{p}$, onda je horizontalna komponenta tog priraštaja sile zatezanja lančanice data sa

$$h = \tau \frac{dx}{ds} = \tau \cdot \cos \theta \approx \tau \cdot \cos \beta \quad (3.181)$$

gde je β ugao koji tetiva lančanice zaklapa sa x osom i $\tan \beta = \frac{l_z}{l_x}$.

Ako se sa E obeleži modul elastičnosti lančanice, a sa A površina poprečnog preseka, onda Hook-ov zakon može da se piše u obliku

$$\varepsilon = \frac{\tau}{AE} \quad (3.182)$$

pri čemu se ovde ne posmatraju dilatacije usled temperature. Unoseći relacije (3.180) i (3.181) u (3.182), dobija se posle množenja sa $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2$

$$\frac{h \cdot \left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{AE} = \frac{du}{dx} + \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \quad (3.183)$$

Jednačina (3.183) je jednačina promene stanja lančaniće u diferencijalnom obliku. Ako se jednačina (3.183) integriše po x duž raspona lančaniće, dobija se nelinearna jednačina promene stanja u integralnom obliku

$$\frac{hL_e}{AE} = u(l_x) - u(0) + \int_0^{l_x} z'w' \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot \int_0^{l_x} (w')^2 \cdot dx \quad (3.184)$$

U (3.184) L_e je oznaka za virtuelnu dužinu lančaniće

$$L_e = \int_0^{l_x} \left(\frac{ds}{dx}\right)^3 \cdot dx \quad (3.185)$$

Prema izrazu (3.185), posle integraljenja i sređivanja, virtuelna dužina lančaniće za parabolično rešenje je

$$L_e \cong l_x \left\{ 1 + 8 \left(\frac{f}{l_x}\right)^2 + \frac{96}{5} \left(\frac{f}{l_x}\right)^4 + \frac{3}{2} \left[1 + 8 \left(\frac{f}{l_x}\right)^2 + \frac{1}{4} \tan^2 \beta \right] \tan^2 \beta \right\} \quad (3.186)$$

a za hiperbolično rešenje je

$$L_e = \frac{H}{q} \left\{ 2 \cosh(\lambda + \Phi) \sinh \lambda + \frac{1}{3} [\sinh^3(2\lambda + \Phi) - \sinh^3 \Phi] \right\} \quad (3.187)$$

Ako radi kratkoće pisanja uvedemo oznake

$$\begin{aligned} u(0) &= u_0 \\ u(l_x) &= u_l \\ w(0) &= w_0 \\ w(l_x) &= w_l \\ z'(0) &= z'_0 \\ z'(l_x) &= z'_l \end{aligned} \quad (3.188)$$

U na prvi integral sa desne strane u izrazu (3.184) primeni se parcijalna integracija, izraz (3.184) se svodi na

$$\frac{hL_e}{AE} = \Omega - \int_0^{l_x} z''w dx + \frac{1}{2} \int_0^{l_x} (w')^2 dx \quad (3.189)$$

U izrazu (3.189) je

$$\Omega = u_l - u_0 + z'_l w_l - z'_0 w_0 \quad (3.190)$$

i zavisi od pomeranja oslonaca. Ukoliko su oslonci lančaniće 1 i 2 nepomerljivi, onda je $u(0) = u(l_x) = w(0) = w(l_x) = 0$, pa je $\Omega = 0$.

Ako se zanemari uticaj malih veličina drugog reda u (3.189), linearizovana jednačina promene stanja lančaniće (3.189) ima oblik

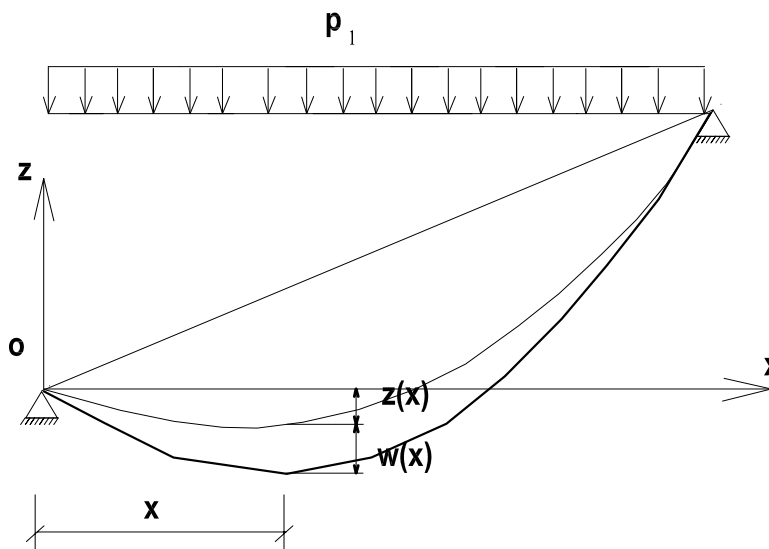
$$\frac{hL_e}{AE} = \Omega - \int_0^{l_x} z''w dx \quad (3.191)$$

3.5 Uticaji u plitkoj lančanici usled dodatnog poprečnog opterećenja

Za izvođenje izraza za uticaje u plitkoj lančanici, usled dodatnog poprečnog opterećenja, korišćena je literatura [56, 57].

3.5.1 Dodatno jednakopodeljeno opterećenje duž celog raspona

Neka je $\Omega = 0$ i neka je lančanica opterećena dodatnim poprečnim opterećenjem $\bar{p}$. Kod paraboličnog rešenja $\bar{p} = p_1 = \text{const}$ je jednakopodeljeno opterećenje po jedinici dužine horizontalne projekcije (slika 3.10), a kod hiperboličkog rešenja $\bar{p} = p = \text{const}$ je jednakopodeljeno opterećenje po jedinici dužine luka lančanice. Usled ovog dodatnog opterećenja, lančanica zauzima novi ravnotežni položaj definisan sa dodatnim pomeranjem u vertikalnom pravcu $w(x)$, koje se meri od položaja prvobitne ravnotežne konfiguracije $z(x)$. Ovom dodatnom opterećenju $\bar{p}$ odgovara i promena sile zatezanja lančanice, tako da je horizontalna komponenta sile zatezanja, koja odgovara novoj ravnotežnoj konfiguraciji, data sa



Slika 3.10: Lančanica opterećena jednakopodeljenim opterećenjem

$$H_1 = H + h = H(1 + \alpha) \quad (3.192)$$

gde je sa h obeležena horizontalna komponenta dodatne sile zatezanja lančanice, dok je H_1 horizontalna komponenta ukupne sile zatezanja i $\alpha = h/H$. Diferencijalna jednačina ravnoteže lančanice u pravcu z usled istovremenog dejstva opterećenja $\bar{q}$ i $\bar{p}$ data je sa

$$(H + h) \cdot (z'' + w'') - (\bar{q} + \bar{p})z(x) = 0 \quad (3.193)$$

gde je za paraboličko rešenje $z(x) = 1$, a za hiperboličko

$$z(x) = \cosh \left(2\lambda \frac{x}{l_x} + \Phi \right) \quad (3.194)$$

Imajući u vidu diferencijalnu jednačinu ravnoteže za slučaj uticaja samo opterećenja $\bar{q}$

$$z'' = \frac{\bar{q}}{H} z(x) \quad (3.195)$$

jednačina (3.193) dobija oblik

$$(H + h) \cdot w'' = (-\alpha \bar{q} + \bar{p}) z(x) \quad (3.196)$$

ili posle sređivanja

$$w'' = -\frac{\bar{q}}{H(1+\alpha)} \left(\alpha - \frac{\bar{p}}{\bar{q}} \right) z(x) = A_{pN} z(x) \quad (3.197)$$

Problem može da se linearizuje tako što će da se zanemari član hw'' kao mala veličina u jednačini (3.196) i jednačina (3.197) sada glasi

$$w'' = -\frac{\bar{q}}{H} \left(\alpha - \frac{\bar{p}}{\bar{q}} \right) z(x) = A_{pL} z(x) \quad (3.198)$$

Rešavanjem jednačine (3.197) i unoseći rešenje u jednačinu promene stanja (3.189), odnosno rešavanjem jednačine (3.198) i unoseći rešenje u jednačinu promene stanja (3.191) i posle određenih transformacija dobija se jednačina po α . Nalaženjem α može da se nađe H_1 prema jednačini (3.192). Ukupan novi položaj lančanice određen je u obliku zbira ugiba $z(x)$ usled $\bar{q}$ (gde su obuhvaćeni svi inicijalni efekti i izduženje usled elastičnosti kabla) i ugiba $w(x)$ usled $\bar{p}$ i iznosi

$$z_1(x) = z(x) + w(x) \quad (3.199)$$

Jednačina (3.197) odnosno jednačina (3.198) rešavaju se za homeogene granične uslove

$$w(0) = w(l_x) = 0 \quad (3.200)$$

Elastična parabolická lančanica

Opšte rešenje diferencijalne jednačine (3.197) i (3.198) dato je u obliku

$$w = \frac{1}{2} A_p x^2 + C_1 x + C_2 \quad (3.201)$$

gde su C_1 i C_2 integracione konstante, a $A_p = A_{pN}$ za nelinearno ili $A_p = A_{pL}$ za linearizovano rešenje. Integracione konstante u rešenju (3.201) nalazimo iz graničnih uslova (3.200), te je konačno rešenje jednačine (3.197) i (3.198) dato kao

$$w(x) = \frac{1}{2} A_p \cdot (x^2 - x l_x) \quad (3.202)$$

Integrali u jednačini promene stanja (3.189) i (3.191) glase

$$\int_0^{l_x} w(x) \cdot dx = -\frac{1}{12} A_p \cdot l_x^3, \quad (3.203)$$

$$\int_0^{l_x} (w'(x))^2 dx = \frac{1}{12} A_p^2 l_x^3 \quad (3.204)$$

Jednačina promene stanja (3.189) za nelinearno rešenje može da se napiše u obliku

$$\frac{hL_e}{AE} = \frac{q_1}{12H} A_{qN} l_x^3 + \frac{1}{24} A_{qN}^2 l_x^3 \quad (3.205)$$

Sa $\bar{\lambda}_*$ će se označiti bezdimenzionalni parametar lančaniće, koji karakteriše mehaničko ponašanje lančaniće i obuhvata efekte inicijalne geometrije i elastičnosti lančaniće i dat je izrazom

$$\bar{\lambda}_* = \frac{q_1^2 l_x^3 AE}{H^3 L_e} = \left(\frac{q_1 l_x}{H} \right)^2 \frac{l_x}{\left(\frac{H L_e}{AE} \right)} \quad (3.206)$$

ili izrazom datim preko strele lančaniće

$$\bar{\lambda}_* = \left(\frac{8f}{l_x} \right)^3 \frac{AE}{q_1 L_e} \quad (3.207)$$

Jednačina (3.205), vodeći računa o izrazu za $\bar{\lambda}_*$, se transformiše u bezdimenzionalni oblik

$$\alpha^3 + \left(2 + \frac{\bar{\lambda}_*}{24} \right) \alpha^2 + \left(1 + \frac{\bar{\lambda}_*}{12} \right) \alpha = \frac{\bar{\lambda}_*}{24} \left(\left(\frac{p_1}{q_1} \right)^2 + 2 \frac{p_1}{q_1} \right) \quad (3.208)$$

Linearizovana jednačina promene stanja (3.191) može da se napiše u obliku

$$\frac{hL_e}{AE} = \frac{q_1}{12H} A_{pL} l_x^3 \quad (3.209)$$

ili u bezdimenzionalnom obliku

$$\left(1 + \frac{\bar{\lambda}_*}{12} \right) \alpha = \frac{\bar{\lambda}_*}{12} \frac{p_1}{q_1} \quad (3.210)$$

Jednačina (3.208) je kubna, a jednačina (3.210) je linearna jednačina po bezdimenzionalnoj (tj. relativnoj) promeni horizontalne komponente sile zatezanja u zavisnosti od relativnog dodatnog opterećenja $\frac{p_1}{q_1}$, kao i od bezdimenzionalnog parametra lančaniće $\bar{\lambda}_*$. Granična vrednost bezdimenzionalnog dodatnog zatezanja kabla je data sa

$$\lim_{\lambda_* \rightarrow \infty} \alpha = \frac{p}{q} \quad (3.211)$$

Ako je bezdimenzionalni parametar $\bar{\lambda}_*$ lančaniće [56]:

- $\bar{\lambda}_* \gg 1$ - odnos f/l_x je mali i $AE \rightarrow \infty$. To predstavlja slučaj nerastegljive lančaniće. Ovo pokriva najveći broj visećih konstrukcija sa kablovima kod kojih je $f/l_x \leq 1/8$.
- $\bar{\lambda}_* \ll 1$ - tada $\alpha \rightarrow 0$ i kabl može da se ponaša kao zategnuta žica ($\frac{q_1 l_x}{H}$ malo) ili je veoma elastičan (E je malo). Moguća su tri slučaja:
 - Kada je $\frac{q_1 l_x}{H}$ malo i E veliko, imamo slučaj da se lančanica ponaša kao zategnuta žica ($z \equiv 0$ ili što je isto $\frac{f}{l_x} \rightarrow 0$ i $\Delta f_* \rightarrow 0$)
 - Kada je $\frac{q_1 l_x}{H}$ malo i E malo tada je Δf konačno

- Kada je $\frac{q_1 l_x}{H}$ je reda jedinice i E malo tada $\Delta f \rightarrow \infty$.

U slučaju da se lančanica ponaša kao zategnuta žica jednačina (3.197) se svodi na

$$w'' = \frac{p_1}{H(1+\alpha)} = A_{p1N} \quad (3.212)$$

Rešenje jednačine (3.212) dato je sa (3.202) ako se stavi da je $A_p = A_{p1N}$. Nelinearna jednačina promene stanja lančanice (3.189) može da se redukuje na jednačinu

$$\frac{hL_e}{EA} = \frac{1}{2} A_{p1N} \int_0^{l_x} w dx \quad (3.213)$$

Zamenom rešenja jednačine (3.212) u jednačinu promene stanja (3.213) i posle integracije i sređivanja dobija se

$$\alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha = \frac{\bar{\lambda}_*}{24} \left(\frac{p_1}{q_1} \right)^2 \quad (3.214)$$

Kod zategnute žice može da se uzme da je $L_e = l_x$. Tačno rešenje kubne jednačine (3.214) dato je sa [56]

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{B}} \left(\sqrt[3]{B} - \frac{1}{3} \right)^2 \quad (3.215)$$

gde je

$$B = -\frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{3}\right)^3} \quad (3.216)$$

Vrednosti s i r iznose

$$r = -\frac{1}{3}, s = -\frac{2}{27} - \frac{\bar{\lambda}_*}{24} \left(\frac{p_1}{q_1} \right)^2 \quad (3.217)$$

3.5.2 Sopstvena težina - rešenje za elastičnu paraboličku lančanicu

U slučaju rastegljive lančanice, kada lančanica visi između dva oslonca, dolazi do njenog izduženja usled dejstva sopstvene težine. Strelna lančanice se uvećava i horizontalna komponenta sile zatezanja se umanjuje u odnosu na horizontalnu komponentu sile zatezanja kod nerastegljive lančanice na $(H-h)$.

Diferencijalna jednačina ravnoteže lančanice u pravcu z ose u rastegnutoj stanju je data sa

$$(H-h) \cdot (z'' + w'') - \bar{q}z(x) = 0 \quad (3.218)$$

Imajući u vidu diferencijalnu jednačinu (3.195), jednačina (3.218) dobija oblik

$$(H-h) \cdot w'' = \alpha \bar{q}z(x) \quad (3.219)$$

a posle sređivanja

$$w'' = \frac{\alpha \bar{q}}{H(1-\alpha)} z(x) = A_{qN} z(x) \quad (3.220)$$

U slučaju elastične parabolične lančaniće, u izrazu (3.220), može da se uzme da je $z(x) = 1$ i $\bar{q} = q_1$. Rešenje diferencijalne jednačine (3.220), uz granične uslove (3.200), glasi

$$w(x) = \frac{1}{2} A_{qN} \cdot (x^2 - x l_x) \quad (3.221)$$

gde je

$$A_{qN} = \frac{\alpha q_1}{H(1 - \alpha)} \quad (3.222)$$

Jednačina promene stanja (3.189) za nelinearno rešenje, uz uslov da se oslonci ne pomeraju i vodeći računa o izrazu (3.195), može da se napiše u obliku

$$\frac{(H - h)L_e}{AE} = \frac{q_1}{H} \int_0^{l_x} w dx + \frac{1}{2} \int_0^{l_x} (w')^2 dx \quad (3.223)$$

Vrednosti integrala u jednačini promene stanja (3.223), vodeći računa o (3.221), su

$$\int_0^l w(x) \cdot dx = -\frac{1}{12} A_q \cdot l_x^3, \quad (3.224)$$

$$\int_0^{l_x} (w'(x))^2 dx = \frac{1}{12} A_q^2 l_x^3 \quad (3.225)$$

Jednačina promene stanja (3.223) za nelinearno rešenje može da se napiše

$$\frac{(H - h)L_e}{AE} = \frac{q_1}{12H} A_{qN} l_x^3 + \frac{1}{24} A_{qN}^2 l_x^3 \quad (3.226)$$

ili u bezdimenzionalnom obliku

$$\alpha^3 - \left(3 + \frac{\bar{\lambda}_*}{24}\right) \alpha^2 + \left(3 + \frac{\bar{\lambda}_*}{12}\right) \alpha = 1 \quad (3.227)$$

3.5.3 Koncentrisana sila - rešenje za elastičnu paraboličku lančanicu

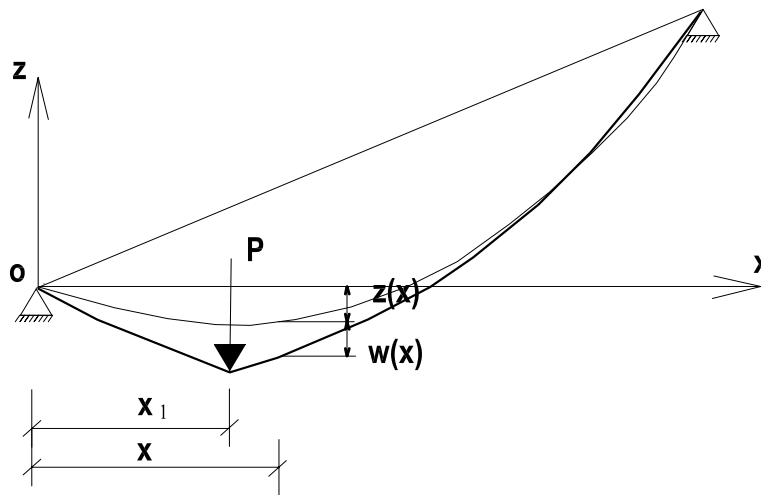
Pretpostaviće se da je oblik slobodno obešene lančaniće parabola data jednačinom (3.57). Jednačina (3.57) obuhvata inicijalne efekte i efekte elastičnosti lančaniće. Pretpostaviće se da na lančanicu deluje koncentrisana sila P na rastojanju x_1 od levog oslonca (slika 3.11). Diferencijalne jednačine ravnoteže u pravcu ose z u poprečnom preseku glase:

$$1. \quad 0 \leq x \leq x_1$$

$$(H + h)(z' + w') = P \left(\frac{x_1}{l_x} - 1 \right) + \frac{q_1 l_x}{2} \left(\frac{2x}{l_x} - 1 \right) \quad (3.228)$$

Desna strana jednačine je analogna transferzalnoj sili u slobodno oslonjenoj gredi usled sopstvene težine i koncentrisane sile. Razvojem izraza (3.228) i eliminisanjem članova koji zavise od q_1 dobija se

$$(H + h)w' = P \left(\frac{x_1}{l_x} - 1 \right) - h z' \quad (3.229)$$



Slika 3.11: Lančanica opterećena koncentrisanom silom

$$2. \quad x_1 \leq x \leq 1$$

$$(H + h)w' = P \frac{x_1}{l_x} - h z' \quad (3.230)$$

Integraljenjem jednačina (3.229) i (3.230), uz zadovoljenje graničnih uslova (3.200), dobija se

$$1. \quad 0 \leq x \leq x_1$$

$$w = -\frac{Pl_x}{H(1+\alpha)} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\alpha}{P_*} \left(\left(\frac{x}{l_x} \right)^2 - \frac{x}{l_x} \right) - \left(\frac{x_1}{l_x} - 1 \right) \frac{x}{l_x} \right\} \quad (3.231)$$

$$2. \quad x_1 \leq x \leq 1$$

$$w = -\frac{Pl_x}{H(1+\alpha)} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\alpha}{P_*} \left(\left(\frac{x}{l_x} \right)^2 - \frac{x}{l_x} \right) - \left(\frac{x}{l_x} - 1 \right) \frac{x_1}{l_x} \right\} \quad (3.232)$$

gde je

$$P_* = \frac{P}{q_1 l_x} \quad (3.233)$$

Da bi se našla vrednost parametra α , koristi se nelinearna jednačina promene stanja (3.189). Pretpostavlja se da se oslonci ne pomeraju i da je $z'' = q_1/H$.

Ispod koncentrisanog opterećenja, u drugom integralu w' jednačine (3.189), postoji diskontinuitet te za nalaženje tog integrala mora da se primeni parcijalna integracija

$$\int_0^{l_x} (w')^2 dx = - \left\{ w' w \Big|_{x_1^-}^{x_1^+} + (w'')^2 \int_0^{x_1} w dx + (w'')^2 \int_{x_1}^{l_x} w dx \right\} \quad (3.234)$$

Izraz (3.234) može da se zameni u jednačinu (3.189). Posle zamene (3.231) i (3.232) u jednačini (3.189) i integraljenja, dobija se bezdimenzionalna kubna jednačina

$$\alpha^3 + \left(2 + \frac{\bar{\lambda}_*}{24}\right) \alpha^2 + \left(1 + \frac{\bar{\lambda}_*}{12}\right) \alpha = -\frac{\bar{\lambda}_*}{2} \left(\left(\frac{x_1}{l_x}\right)^2 - \frac{x_1}{l_x} \right) P_* (1 + P_*) \quad (3.235)$$

Da bi se problem linearizovao, potrebno je zanemariti sve članove višeg reda koji se pojavljuju u diferencijalnim jednačinama ravnoteže. Ovo zahteva da se izraz hw' u jednačinama (3.229) i (3.230) ukloni. Kao rezultat toga dobija se

$$1. \quad 0 \leq x \leq x_1$$

$$w = -\frac{Pl_x}{H} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\alpha}{P_*} \left(\left(\frac{x}{l_x}\right)^2 - \frac{x}{l_x} \right) - \left(\frac{x_1}{l_x} - 1 \right) \frac{x}{l_x} \right\} \quad (3.236)$$

$$2. \quad x_1 \leq x \leq 1$$

$$w = -\frac{Pl_x}{H} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\alpha}{P_*} \left(\left(\frac{x}{l_x}\right)^2 - \frac{x}{l_x} \right) - \left(\frac{x}{l_x} - 1 \right) \frac{x_1}{l_x} \right\} \quad (3.237)$$

Ako se izrazi (3.236) i (3.237) zamene u linearizovanoj jednačini promene stanja lančaniće (3.191), posle integraljenja i sređivanja, dobija se bezdimenzionalni izraz

$$\alpha = -\frac{1}{\left(1 + \frac{12}{\bar{\lambda}_*}\right)} 6P_* \left(\left(\frac{x}{l_x}\right)^2 - \frac{x}{l_x} \right) \quad (3.238)$$

Linearizovano rešenje će biti tačno samo za male vrednosti P_* . Ako je $\bar{\lambda}_*$ veliko, P_* ne bi trebalo da bude veće od 10^{-1} da bi se dobilo rešenje u granicama tačnosti od 10%. Ako je $\bar{\lambda}_*$ malo, dozvoljene su veće vrednosti za P_* [56].

U slučaju kada je lančanica zategnuta žica, drugi izrazi sa desne strane jednačina (3.229) i (3.230) se uklanjaju jer je $z \equiv 0$, te izrazi za vertikalno pomeranje lančaniće glase

$$1. \quad 0 \leq x \leq x_1$$

$$w = -\frac{Pl_x}{H(1 + \alpha)} \left(\frac{x_1}{l_x} - 1 \right) \frac{x}{l_x} \quad (3.239)$$

$$2. \quad x_1 \leq x \leq 1$$

$$w = -\frac{Pl_x}{H(1 + \alpha)} \left(\frac{x}{l_x} - 1 \right) \frac{x_1}{l_x} \quad (3.240)$$

Nelinearna jednačina promene stanja lančaniće (3.189) postaje

$$\frac{hL_e}{EA} = \frac{1}{2} \int_0^{l_x} (w')^2 dx \quad (3.241)$$

3.5. UTICAJI U PLITKOJ LANČANICI USLED POPREČNOG OPTEREĆENJA 77

Pošto je $w'' = 0$, jednačina parcijalne integracije (3.234) se pojednostavljuje, i nelinearna jednačina promene stanja (3.241) postaje

$$\frac{hL_e}{EA} = \frac{1}{2} w \frac{dw}{dx} \Big|_{x_1^-}^{x_1^+} \quad (3.242)$$

Posle zamene izraza (3.239) i (3.240) u (3.242), diferenciranja i sređivanja dobija se

$$\alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha = -\frac{\bar{\lambda}_*}{2} \left(\left(\frac{x_1}{l_x} \right)^2 - \frac{x_1}{l_x} \right) P_*^2 \quad (3.243)$$

Tačno rešenje jednačine (3.243) dato je jednačinom (3.215). Vrednosti r i s u jednačini (3.215) uzimaju se da su jednake

$$r = -\frac{1}{3}, s = -\frac{2}{27} + \frac{\bar{\lambda}_*}{2} \left(\left(\frac{x_1}{l_x} \right)^2 - \frac{x_1}{l_x} \right) P_*^2 \quad (3.244)$$

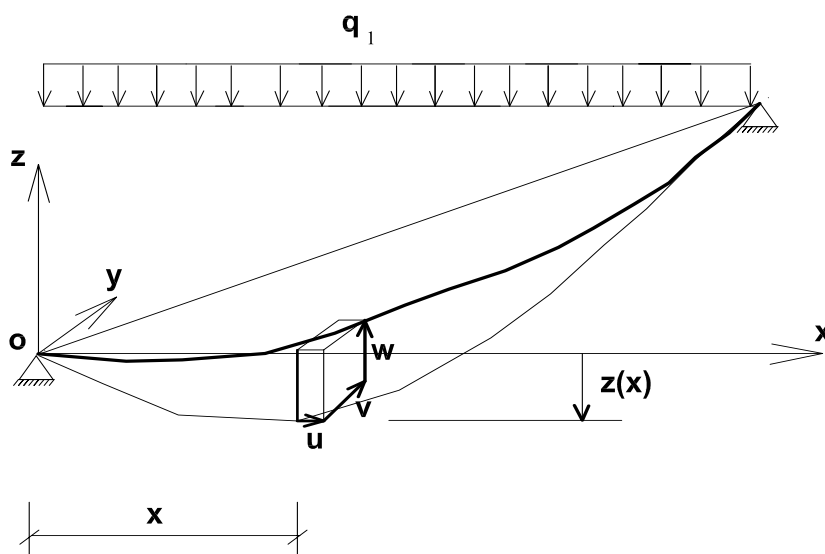
3.6 Linearna teorija slobodnih harmonijskih vibracija plitke lančaniće

Posmatra se lančanica koja je opterećena samo sopstvenom težinom ravnomerno raspoređenom po horizontalnoj projekciji ose luka lančaniće tj. posmatra se parabolička aproksimacija. Lančanica vrši slobodne vibracije oko svoje ravnotežne konfiguracije, pri čemu ravnotežna konfiguracija odgovara opterećenju sopstvenom težinom lančaniće $q_1(x) = q_1 = \text{const}$, odnosno, određena je rešenjem $z = z(x)$ datim sa (3.57).

Slobodne vibracije lančaniće, oko prethodne ravnotežne konfiguracije, opisane su sa dominantnim pomeranjima u pravcu ose y i z (slika 3.12). Funkcijom $v = v(x, t)$ predstavljeno je pomeranje lančaniće u pravcu ose y , a funkcijom $w = w(x, t)$ pomeranje lančaniće u pravcu ose z u odnosu na prethodni ravnotežni položaj. Vrednost pomeranja $u = u(x, t)$, u pravcu ose x , zanemaruje se kao mala veličina u odnosu na ostala dva pomeranja. Položaj lančaniće u trenutku vremena t , tokom njenog slobodnog oscilovanja, određen je sa

$$y_1(x, t) = v(x, t) \quad (3.245)$$

$$z_1(x, t) = z(x) - w(x, t) \quad (3.246)$$



Slika 3.12: Slobodne oscilacije lančaniće

3.6.1 Slobodne harmonijske vibracije u ravni

Smatra se da je tokom vibracija lančaniće u ravni dominantno samo pomeranje u pravcu vertikalne ose, dok se komponentalna pomeranja u pravcu horizontalne ose x

zanemaruju. Usled delovanja i inercijalnih sila koje mogu da se posmatraju i kao dodatno opterećenje u odnosu na sopstvenu težinu lančaniće, horizontalna komponenta sile zatezanja lančaniće je data sa

$$H_1(t) = H - h(t) \quad (3.247)$$

gde je $H = \text{const}$ horizontalna sila usled stalnog opterećenja, tj. usled sopstvene težine, dok je $h(t)$ priraštaj horizontalne sile u lančanići usled delovanja inercijalnih sila. Imajući u vidu pretpostavku da se posmatraju samo vertikalne inercijalne sile, što znači da je i dalje opterećenje lančaniće konstantnog (vertikalnog) pravca, onda je horizontalna komponenta sile zatezanja lančaniće i dalje konstantna po prostornoj koordinati x , ali se menja tokom vremena t .

Koristeći D'alambertov princip, diferencijalna jednačina kretanja lančaniće, odn. diferencijalna jednačina "ravnoteže" aktivnih i inercijalnih sila, glasi

$$H_1 \cdot z_1'' - q_1 + m\ddot{v} = 0 \quad (3.248)$$

gde je sa tačkom obeležen izvod po vremenu, dok je m masa lančaniće po jedinici dužine ose kabla

$$m = \frac{q}{g}, \quad g = 9.81 \frac{m}{s^2} \quad (3.249)$$

Unoseći u jednačinu (3.248) izraze (3.246) i (3.247), dobija se

$$(H - h) \cdot (z - w)'' - q_1 + m\ddot{w} = 0 \quad (3.250)$$

Imajući u vidu diferencijalnu jednačinu ravnoteže lančaniće $Hw'' - q = 0$, kao i uz zanemarivanje proizvoda hw'' kao relativno malih priraštaja, dobija se diferencijalna jednačina slobodnih vibracija lančaniće u obliku

$$m\ddot{w} - Hw'' - \frac{q_1}{H} \cdot h = 0 \quad (3.251)$$

Jednačina (3.251), zajedno sa linearizovanom jednačinom promene stanja lančaniće (3.191)

$$\frac{hL_e}{AE} = -\frac{q_1}{H} \cdot \int_0^{l_x} w(x, t) \cdot dx \quad (3.252)$$

definiše problem slobodnih vibracija lančaniće u svojoj ravni.

Kako se posmatraju slobodne vibracije koje su harmonijske po vremenu, to je:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \bar{w}(x) \cdot e^{i\omega t} \\ h(t) &= \bar{h} \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.253)$$

gde je i imaginarna jedinica: $i = \sqrt{-1}$, dok je ω kružna frekvencija slobodnih vibracija. Unoseći (3.253) u jednačine (3.251) i (3.252), dobija se sistem od dve jednačine kojim je definisan problem slobodnih vibracija u ravni lančaniće

$$\begin{aligned} m\omega^2 \cdot \bar{w} + H \cdot \bar{w}'' &= -\frac{q_1}{H} \cdot \bar{h} \\ \frac{\bar{h}L_e}{AE} &= -\frac{q_1}{H} \cdot \int_0^{l_x} \bar{w}(x) \cdot dx \end{aligned} \quad (3.254)$$

Nesimetrične slobodne vibracije

Nesimetrične slobodne vibracije u ravni lančanice su takve vibracije kod kojih je funkcija $w(x, t)$, kojom se prikazuju amplitude oscilovanja lančanice oko ravnotežne konfiguracije, data kao nesimetrična funkcija duž raspona lančanice. Imajući to u vidu, funkcija $w(x, t)$ mora da zadovoljava uslov

$$\int_0^{l_x} w(x, t) \cdot dx = 0 \quad (3.255)$$

pa se onda, prema jednačini promene stanja (3.252) dobija da je

$$h(t) = 0 \quad (3.256)$$

Imajući to u vidu, diferencijalna jednačina slobodnih harmonijskih vibracija (3.254,1) je, za slučaj nesimetričnih vibracija, data kao homogena diferencijalna jednačina

$$m\omega^2 \cdot \bar{w} + H \cdot \bar{w}'' = 0 \quad (3.257)$$

Opšte rešenje diferencijalne jednačine (3.257) je dato sa

$$\bar{w}(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx) \quad (3.258)$$

gde je

$$k = \omega \sqrt{\frac{m}{H}} \quad (3.259)$$

dok su C_1 i C_2 integracione konstante koje se određuju iz graničnih uslova

$$\bar{w}(0) = 0, \quad \bar{w}\left(\frac{l_x}{2}\right) = 0 \quad (3.260)$$

Drugi granični uslov (3.260) je posledica pretpostavke o nesimetričnom obliku slobodnih vibracija, a pri tome, naravno, važi i uslov na drugom kraju lančanice: $\bar{w}(l_x) = 0$. Unošenjem opšteg rešenja (3.258) u granične uslove (3.260), dobija se da je

$$C_2 = 0, \quad C_1 \cdot \sin\left(\frac{kl_x}{2}\right) = 0 \quad (3.261)$$

odakle je frekventna jednačina data u obliku

$$\sin\left(\frac{kl_x}{2}\right) = 0 \quad (3.262)$$

Rešenje frekventne jednačine (3.262) je

$$\frac{kl_x}{2} = n \cdot \pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.263)$$

tako da se, prema relaciji (3.259), dobijaju kružne frekvencije slobodnih nesimetričnih vibracija u obliku

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{l_x} \cdot \sqrt{\frac{H}{m}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.264)$$

Odgovarajući svojstveni oblici slobodnih nesimetričnih vibracija su dati sa

$$\bar{w}_n = C_n \cdot \sin\left(\frac{2\pi nx}{l_x}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.265)$$

Simetrične slobodne vibracije

Simetrične slobodne vibracije lančaniće u svoj ravni su date sa jednačinama (3.254). Opšte rešenje prve od jednačina (3.254) je dato sa

$$\bar{w}(x) = \bar{w}_h(x) + \bar{w}_p(x) \quad (3.266)$$

gde je $\bar{w}_h(x)$ opšte rešenje homogene jednačine, koje je dato sa (3.258), dok je $\bar{w}_p(x)$ neko partikularno rešenje nehomogene jednačine

$$m\omega^2 \cdot \bar{w} + H \cdot \bar{w}'' = -\frac{q_1}{H} \cdot \bar{h} \quad (3.267)$$

Vidi se da je partikularan integral jednačine (3.267) dat sa

$$\bar{w}_p(x) = -\frac{q_1 \bar{h}}{m\omega^2 H} \quad (3.268)$$

Sa ovim je opšti integral diferencijalne jednačine (3.254,1) dat sa

$$\bar{w} = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx) - \frac{q_1 \bar{h}}{m\omega^2 H} \quad (3.269)$$

Integracione konstante u rešenju (3.254) se određuju iz graničnih uslova

$$\bar{w}(0) = 0 \quad \bar{w}(l) = 0 \quad (3.270)$$

odakle se dobija:

$$C_1 = \frac{q_1 \bar{h}}{m\omega^2 H} \quad C_2 = \frac{q_1 \bar{h}}{m\omega^2 H} \cdot \frac{(1 - \cos kl_x)}{\sin kl_x} \quad (3.271)$$

Sa ovim, rešenje (3.269) postaje

$$\bar{w}(x) = \frac{q_1 \bar{h}}{m\omega^2 H} \cdot \frac{(1 - \cos kl_x)}{\sin kl_x} \cdot \sin kx + \frac{q_1 \bar{h}}{m\omega^2 H} \cdot \cos kx - \frac{q_1 \bar{h}}{m\omega^2 H} \quad (3.272)$$

Dobijeno rešenje (3.272) se unosi u integral na desnoj strani jednačine (3.254,2) i integracijom se dobija

$$\int_0^{l_x} \bar{w}(x) \cdot dx = -\frac{q_1 \bar{h}}{m\omega^2 H k} \cdot \frac{(1 - \cos kl_x)^2}{\sin kl_x} + \frac{q_1 \bar{h}}{m\omega^2 H k} \cdot \sin kl - \frac{q_1 \bar{h}}{m\omega^2 H} \cdot l_x \quad (3.273)$$

Unošenjem integrala (3.273) u jednačinu promene stanja (3.254,2), dobija se, posle skraćivanja sa $\bar{h}$:

$$\frac{L_e}{AE l_x^3} + \frac{q_1^2}{m\omega^2 H^2 k} \cdot \frac{(1 - \cos kl_x)^2}{\sin kl_x} + \frac{q_1^2}{m\omega^2 H^2 k} \cdot \sin kl_x - \frac{q_1^2}{m\omega^2 H^2} \cdot l_x = 0 \quad (3.274)$$

Kako je prema izrazu (3.259)

$$k\omega^2 = k^3 \cdot \frac{H}{m} \quad (3.275)$$

to se jednačina (3.274) transformiše u oblik:

$$\frac{L_e}{AE l_x^3} + \frac{q_1^2}{H^3 (kl_x)^3} \cdot \left[\frac{(1 - \cos kl_x)^2}{\sin kl_x} + \sin kl_x - kl_x \right] = 0 \quad (3.276)$$

Uz oznaku

$$\bar{\omega} = kl_x = \omega l_x \cdot \sqrt{\frac{m}{H}} \quad (3.277)$$

i vodeći računa o izrazu za parametar lančanice (3.206), jednačina (3.276) može da se transformiše u oblik

$$\frac{L_e}{AE l_x^3} \cdot \left\{ 1 + \frac{\bar{\lambda}_*}{\bar{\omega}^3} \cdot \left[\frac{2(1 - \cos \bar{\omega})}{\sin \bar{\omega}} - \bar{\omega} \right] \right\} = 0 \quad (3.278)$$

Posle daljeg transformisanja dobija se jednačina

$$\tan\left(\frac{\bar{\omega}}{2}\right) = \left(\frac{\bar{\omega}}{2}\right) - \frac{4}{\bar{\lambda}_*} \cdot \left(\frac{\bar{\omega}}{2}\right)^3 \quad (3.279)$$

Jednačina (3.279) predstavlja frekventnu jednačinu slobodnih simetričnih vibracija u ravni lančanice. Ako je parametar lančanice veoma veliki, frekventna jednačina (3.279) se svodi na

$$\tan\left(\frac{\bar{\omega}}{2}\right) = \left(\frac{\bar{\omega}}{2}\right) \quad (3.280)$$

Koreni frekventne jednačine (3.280), kada je $\bar{\lambda}_*$ veliki, dati su sa

$$\bar{\omega}_n = (2n + 1)\pi \cdot \left[1 - \frac{1}{(2n + 1)^2 \pi^2} \right] \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.281)$$

Sa druge strane, kada je parametar lančanice $\bar{\lambda}_*$ relativno veoma mali, što znači da se lančanica približava zategnutoj žici, frekventna jednačina (3.279) postaje

$$\tan\left(\frac{\bar{\omega}}{2}\right) \rightarrow \infty \quad (3.282)$$

Rešenje frekventne jednačine (3.282) je dato sa

$$\bar{\omega}_n = (2n - 1)\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.283)$$

odnosno sa $\bar{\omega} = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$

Imajući u vidu oznaku (3.277), kružne frekvencije slobodnih simetričnih vibracija u ravni lančanice su date sa

$$\omega_n = \frac{\bar{\omega}_n}{l_x} \cdot \sqrt{\frac{H}{m}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.284)$$

Odgovarajući svojstveni oblici su dati sa (3.272)

$$\bar{w}_n(x) = -\frac{q_1 \bar{h}_n}{m \omega_n^2 H} \cdot \left[1 - \frac{1 - \cos \bar{\omega}_n}{\sin \bar{\omega}_n} \cdot \sin k_n x - \cos k_n x \right] \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.285)$$

gde su uneti odgovarajući koreni $\bar{\omega}_n$ frekventne jednačine (3.279) ili (3.282), dok je $\bar{h}_n$ proizvoljna konstanta koja ima dimenziju sile.

Imajući u vidu vrednosti kružnih frekvencija nesimetričnih slobodnih vibracija, date sa (3.264), kao i vrednosti kružnih frekvencija simetričnih vibracija, datih sa (3.283), dakle za male vrednosti parametra lančanice $\bar{\lambda}_*$, odn. za zategnutu žicu, sve kružne frekvencije slobodnih vibracija lančanice mogu da se prikažu u obliku

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{H}{m}}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (3.286)$$

Pri tome neparne vrednosti broja n odgovaraju simetričnim svojstvenim oblicima, a parne vrednosti broja n odgovaraju nesimetričnim oblicima.

3.6.2 Slobodne harmonijske vibracije van ravni

Diferencijalna jednačina slobodnih harmonijskih vibracija lančаницe van ravni glasi [57]

$$m\ddot{v} - Hv'' = 0 \quad (3.287)$$

Kako se posmatraju slobodne vibracije koje su harmonijske po vremenu, to je

$$v(x, t) = \bar{v}(x) \cdot e^{i\omega t} \quad (3.288)$$

Unoseći (3.288) u jednačinu (3.287), dobija se jednačina kojom je definisan problem slobodnih vibracija van ravni lančаницe

$$m\omega^2 \cdot \bar{v} + H \cdot \bar{v}'' = 0 \quad (3.289)$$

Opšte rešenje diferencijalne jednačine (3.289) je

$$\bar{v}(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx) \quad (3.290)$$

gde je

$$k = \omega \sqrt{\frac{m}{H}} \quad (3.291)$$

U izrazu (3.290) C_1 i C_2 su integracione konstante koje se određuju iz graničnih uslova

$$\bar{v}(0) = 0, \quad \bar{v}\left(\frac{l_x}{2}\right) = 0 \quad (3.292)$$

Unošenjem opšteg rešenja (3.290) u granične uslove (3.292), dobija se da je

$$C_2 = 0, \quad C_1 \cdot \sin(kl_x) = 0 \quad (3.293)$$

odakle se dobija frekventna jednačina u obliku

$$\sin(kl_x) = 0 \quad (3.294)$$

Rešenje frekventne jednačine (3.294) je

$$kl_x = n \cdot \pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.295)$$

tako da se, prema relaciji (3.291), dobijaju kružne frekvencije slobodnih vibracija van ravni u obliku

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l_x} \cdot \sqrt{\frac{H}{m}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.296)$$

Odgovarajući svojstveni oblici slobodnih nesimetričnih vibracija van ravni su dati sa

$$\bar{v}_n = C_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n x}{l_x}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.297)$$

Frekvencija prve slobodne vibracije van ravni lančаницe je najniža od svih frekvencija za plitku lančanicu [57].

3.7 Uticaj krutosti na savijanje kod plitke paraboličke lančanice

Jedna od važnih pretpostavki koja se usvaja je da elastična lančanica nema krutosti na savijanje. Realna lančanica, kao što je na primer kod visećih mostova, može da ima veliku vrednost krutosti na savijanje.

Kada se u proračun uzima krutost lančanice na savijanje, uslov ravnoteže transfer-zalnih sila u poprečnom preseku lančanice usled sopstvene težine i aksijalnog zatezanja je

$$Hz' - EI_{zz}z''' = q_1x - \frac{q_1l_x}{2} \quad (3.298)$$

Jednačina (3.298) daje tačno rešenje kada je z' svugde malo duž lančanice tj. kada imamo plitku lančanicu. Opšte rešenje jednačine (3.298) je

$$z(x) = \frac{q_1l_x^2}{2H} \left(\left(\frac{x}{l_x} \right)^2 - \frac{x}{l_x} \right) + A \sinh(\gamma x) + B \cosh(\gamma x) + C \quad (3.299)$$

gde su A, B, C konstante integracije i

$$\gamma^2 = \frac{H}{EI_{zz}} \quad (3.300)$$

U zavisnosti od graničnih uslova imamo sledeća rešenja:

- Nagib kabla nad osloncima je 0

$$z'(0) = z'(l_x) = 0 \quad (3.301)$$

i oslonci su na istoj visini

$$z(0) = z(l_x) = 0 \quad (3.302)$$

Rešenje jednačine (3.299) je

$$z(x) = \frac{q_1l_x^2}{2H} \left\{ \left(\left(\frac{x}{l_x} \right)^2 - \frac{x}{l_x} \right) + \frac{\sinh(\gamma x)}{\gamma l_x} - \frac{\coth(\frac{\gamma l_x}{2})}{\gamma l_x} (\cosh(\gamma x) - 1) \right\} \quad (3.303)$$

Kada je $x = \frac{l_x}{2}$ i $z = -f$ iz jednačine (3.303) dobija se da je ugib u sredini raspona

$$f = \frac{q_1l_x^2}{8H} \left(1 - \frac{\tanh(\frac{\gamma l_x}{4})}{\frac{\gamma l_x}{4}} \right) < \frac{q_1l_x^2}{8H} \quad (3.304)$$

Veličina bezdimenzionalnog parametra γl_x određuje uticaj koju krutost na savijanje ima na odgovor lančanice. Kada je γl_x veoma malo (tada je EI_{zz} veoma veliko) i razvojem dela izraza (3.304) u zagradi u red dobija se

$$\left(1 - \frac{\tanh(\frac{\gamma l_x}{4})}{\frac{\gamma l_x}{4}} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{\gamma l_x}{4} \right)^2 + O \quad (3.305)$$

U izrazu (3.305) O obuhvata članove višeg reda. Zamenom (3.305) u (3.304) dobija se

$$f \rightarrow \frac{q_1 l_x^4}{384 EI} \quad (3.306)$$

Ovo predstavlja ugib obostarno uklještene grede usled jednakopodeljenog opterećenja duž čitavog raspona. Kada je γl_x veoma veliko (tada je EI_{zz} veoma malo) tada je

$$\left(1 - \frac{\tanh\left(\frac{\gamma l_x}{4}\right)}{\frac{\gamma l_x}{4}}\right) \rightarrow 1 \quad (3.307)$$

Izraz (3.304) sada glasi

$$f \rightarrow \frac{q_1 l_x^2}{8H} \quad (3.308)$$

Ovaj rezultat se slaže sa rezultatom koji je dobijen za paraboličku lančanicu bez krutosti na savijanje.

- Momenti savijanja na krajevima lančanice su jednaki 0

$$z''(0) = z''(l_x) = 0 \quad (3.309)$$

i oslonci su na istoj visini

$$z(0) = z(l_x) = 0 \quad (3.310)$$

Rešenje jednačine (3.299) je

$$z(x) = \frac{q_1 l_x^2}{2H} \left\{ \left(\left(\frac{x}{l_x} \right)^2 - \frac{x}{l_x} \right) + \frac{2}{(\gamma l_x)^2} \left(1 + \tanh\left(\frac{\gamma l_x}{2}\right) \sinh(\gamma l_x) - \cosh(\gamma x) \right) \right\} \quad (3.311)$$

Kada je $x = \frac{l_x}{2}$ i $z = -f$ iz jednačine (3.311) se dobija da je ugib na sredini raspona

$$f = \frac{q_1 l_x^2}{8H} \left(1 - \frac{8}{(\gamma l_x)^2} \left(1 - \operatorname{sech}\left(\frac{\gamma l_x}{2}\right) \right) \right) < \frac{q_1 l_x^2}{8H} \quad (3.312)$$

Kada je γl_x veoma malo (tada je EI_{zz} veoma veliko) i

$$\left(1 - \frac{8}{(\gamma l_x)^2} \left(1 - \operatorname{sech}\left(\frac{\gamma l_x}{2}\right) \right) \right) = \frac{5}{12} \left(\frac{\gamma l_x}{2} \right)^2 + O \quad (3.313)$$

Tada se dobija da je

$$f \rightarrow \frac{5}{384} \frac{q_1 l_x^4}{EI} \quad (3.314)$$

Ovo predstavlja ugib slobodno oslonjene grede usled jednakopodeljenog opterećenja duž čitavog raspona. Kada je γl_x veoma veliko (tada je EI_{zz} veoma malo) i tada je

$$\left(1 - \frac{8}{(\gamma l_x)^2} \left(1 - \operatorname{sech}\left(\frac{\gamma l_x}{2}\right)\right)\right) \rightarrow 1 \quad (3.315)$$

Sada imamo da je

$$f \rightarrow \frac{q_1 l_x^2}{8H} \quad (3.316)$$

Ovo je rezultat se slaže sa rezultatom koji je dobijen za paraboličnu lančanicu bez krutosti na savijanje.

U većini konstrukcija sa kablovima parametar γl_x je vrlo veliki tj. $\gamma l_x > 1000$. Efekat krutosti na savijanje tada je zanemarljiv.

Glava 4

Tankozidna greda kao konačni element

4.1 Tankozidna greda otvorenog poprečnog preseka

4.1.1 Osnovne pretpostavke

Pored uobičajenih pretpostavki linearne teorije elastičnosti, za tankozidnu gredu otvorenog poprečnog preseka, uvode se pretpostavke:

1. Presek je apsolutno krut u svojoj ravni.
2. Klizanje u srednjoj površi se zanemaruje.
3. Linijski elemenat upravan na srednju površ i posle deformacije ostaje prav i upravan na srednju površ ne menjajući dužinu.

Pretpostavka 1 utiče na određivanje pomeranja u_* i v_* proizvoljne tačke S u ravni poprečnog preseka, kao krute celine. Pretpostavke 2 i 3 utiču na određivanje vrednosti pomeranja w_* proizvoljne tačke S upravno na ravan poprečnog preseka (slika 4.1).

4.1.2 Kinematičke veličine i vektor pomeranja

Polazeći od pretpostavki iz dela 4.1.1 vektor inkrementalnog pomeranja $\Delta \mathbf{u}_*$, proizvoljne tačke $S(y, z)$ poprečnog preseka, može se opisati sa četiri parametra: tri pomeranja $u_0(x)$, $v_D(x)$, $w_D(x)$ i jednim obrtanjem $\varphi(x)$ poprečnog preseka [3]

$$\begin{bmatrix} \Delta u_*(\mathbf{x}) \\ \Delta v_*(\mathbf{x}) \\ \Delta w_*(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -y \frac{d}{dx} & -z \frac{d}{dx} & -\omega(s) \frac{\partial}{\partial x} \\ & 1 & & -(z - z_D) \\ & & 1 & (y - y_D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_0(x) \\ \Delta v_D(x) \\ \Delta w_D(x) \\ \Delta \varphi(x) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

U izrazu (4.1) $v_D(x)$ i $w_D(x)$ su pomeranja centra smicanja $D(y_D, z_D)$, a ω je normirana sektorska koordinata tankozidne grede otvorenog poprečnog preseka (videti deo 4.3). Izraz (4.1) može da se napiše u sažetom obliku kao

$$\Delta \mathbf{u}_*(\mathbf{x}) = \mathbf{L}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{u}(x) \quad (4.2)$$

U izrazu (4.2) imamo da je

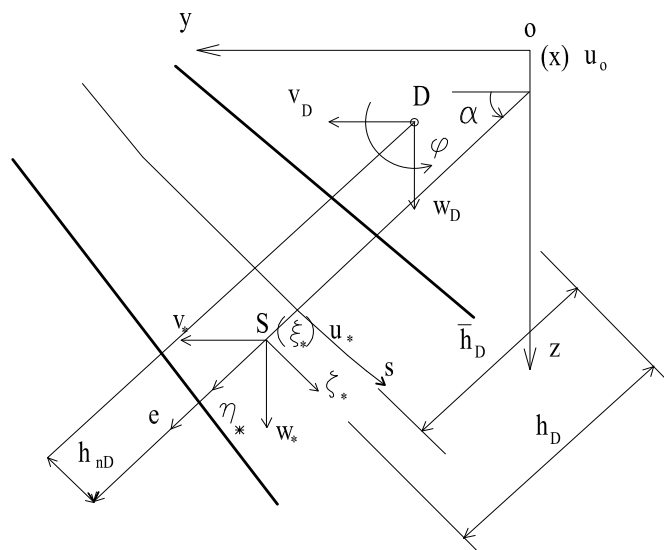
$$\Delta \mathbf{u}_*^T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \Delta u_*(\mathbf{x}) & \Delta v_*(\mathbf{x}) & \Delta w_*(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\Delta \mathbf{u}^T(x) = \begin{bmatrix} \Delta u_0(x) & \Delta v_D(x) & \Delta w_D(x) & \varphi(x) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & -y \frac{d}{dx} & -z \frac{d}{dx} & -\omega(s) \frac{\partial}{\partial x} \\ & 1 & & -(z - z_D) \\ & & 1 & (y - y_D) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

gde je $\Delta \mathbf{u}$ vektor inkrementalnih pomeranja koji određuje deformaciju poprečnog preseka, $\mathbf{L}$ je matrica operator, a $\mathbf{x}$ vektor položaja proizvoljne tačke poprečnog preseka.



Slika 4.1: Osnovne kinematičke veličine tankozidnog nosača

Vektor inkrementalnih pomeranja $\Delta \mathbf{u}$ može da se prikaže u zavisnosti od vektora inkrementalnih generalisanih pomeranja čvorova elementa $\Delta \mathbf{q}$ (videti deo 4.4) i iznosi

$$\begin{bmatrix} \Delta u_0 \\ \Delta v_D \\ \Delta w_D \\ \Delta \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_u(x) & & & \\ & \mathbf{N}_v(x) & & \\ & & \mathbf{N}_w(x) & \\ & & & \mathbf{N}_\varphi(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q}_u \\ \Delta \mathbf{q}_v \\ \Delta \mathbf{q}_w \\ \Delta \mathbf{q}_\varphi \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

ili u sažetom obliku

$$\Delta \mathbf{u}(x) = \mathbf{N}(x) \Delta \mathbf{q} \quad (4.8)$$

U izrazu (4.7) $\mathbf{N}_u(x)$, $\mathbf{N}_v(x)$, $\mathbf{N}_w(x)$ i $\mathbf{N}_\varphi(x)$ su matrice kolona interpolacionih funkcija (videti deo 4.9). Ako se sada izraz (4.8) uvrsti u izraz (4.2) dobija se

$$\Delta \mathbf{u}_*(\mathbf{x}) = \mathbf{L}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{u}(x) = \mathbf{L}(\mathbf{x}) \mathbf{N}(x) \Delta \mathbf{q} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{q} \quad (4.9)$$

gde je $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ matrica operator i iznosi

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_u & -y\mathbf{N}'_v & -z\mathbf{N}'_w & -g(s, \mathbf{N}_\varphi) \\ & \mathbf{N}_v & & -(z - z_D)\mathbf{N}_\varphi \\ & & \mathbf{N}_w & (y - y_D)\mathbf{N}_\varphi \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$g(s, \mathbf{N}_\varphi) = \omega(s) \mathbf{N}'_\varphi \quad (4.11)$$

Oznaka (') u izrazu (4.10) i (4.11) označava izvod po x koordinati. Usvojeni redosled parametara pomeranja pogodan je za dalje izvođenje. Na kraju će se obaviti transformacija da bi se dobio uobičajeni redosled pisanja osnovnih nepoznatih, pogodniji pri prelasku sa lokalnih na globalne koordinate.

4.1.3 Vektori deformacije

Linearni deo inkrementalnog vektora deformacije (2.34) glasi

$$\Delta \mathbf{e} = \mathbf{L}_L \Delta \mathbf{u}_* = \mathbf{L}_L \mathbf{A} \Delta \mathbf{q} = \mathbf{B}_L \Delta \mathbf{q} \quad (4.12)$$

gde je

$$\Delta \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \Delta e_x \\ 2\Delta e_{xy} \\ 2\Delta e_{xz} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{L}_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & & \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \\ \frac{\partial}{\partial z} & & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{B}_L = \mathbf{L}_L \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}'_u & -y\mathbf{N}''_v & -z\mathbf{N}''_w & -g'(s, \mathbf{N}_\varphi) \\ & -(\frac{\partial g(s, \mathbf{N}_\varphi)}{\partial y} + (z - z_D)\mathbf{N}'_\varphi) & & \\ & -(\frac{\partial g(s, \mathbf{N}_\varphi)}{\partial z} - (y - y_D)\mathbf{N}'_\varphi) & & \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

U izrazu (4.15) $\mathbf{A}$ je dato sa (4.10), g sa (4.11). Nelinearni deo inkrementalnog vektora deformacije dat izrazom (2.19) u razvijenom obliku glasi

$$\Delta \eta = \begin{bmatrix} \Delta \eta_{xx} \\ 2\Delta \eta_{xy} \\ 2\Delta \eta_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \{ (\Delta u_{*,x})^2 + (\Delta v_{*,x})^2 + (\Delta w_{*,x})^2 \} \\ (\Delta u_{*,x} \Delta u_{*,y} + \Delta w_{*,x} \Delta w_{*,y}) \\ (\Delta u_{*,x} \Delta u_{*,z} + \Delta v_{*,x} \Delta v_{*,z}) \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Vodeći računa o (4.16), u izrazu (2.40) datom kao

$$\Delta \mathbf{u}_{*,d} = \mathbf{L}_{NL} \Delta \mathbf{u}_* = \mathbf{L}_{NL} \mathbf{A} \Delta \mathbf{q} = \mathbf{B}_{NL} \Delta \mathbf{q} \quad (4.17)$$

sada imamo da je

$$\Delta \mathbf{u}_{*,d} = \begin{bmatrix} \Delta u_{*,x} \\ \Delta v_{*,x} \\ \Delta w_{*,x} \\ \Delta u_{*,y} \\ \Delta w_{*,y} \\ \Delta u_{*,z} \\ \Delta v_{*,z} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$\mathbf{L}_{NL} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & & \\ & \frac{\partial}{\partial x} & \\ & & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & & \\ & \frac{\partial}{\partial y} & \\ \frac{\partial}{\partial z} & & \\ & \frac{\partial}{\partial z} & \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$\mathbf{B}_{NL} = \mathbf{L}_{NL} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}'_u & -y\mathbf{N}''_v & -z\mathbf{N}''_w & -g'(s, \mathbf{N}'_\varphi) \\ & \mathbf{N}'_v & & -(z - z_D)\mathbf{N}'_\varphi \\ & & \mathbf{N}'_w & (y - y_D)\mathbf{N}'_\varphi \\ & -\mathbf{N}'_v & & -\frac{\partial g(s, \mathbf{N}'_\varphi)}{\partial y} \\ & & & \mathbf{N}'_\varphi \\ & & -\mathbf{N}'_w & \\ & & & -\mathbf{N}'_\varphi \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

4.1.4 Konstitutivna matrica

Konstitutivna matrica za tankozidnu gredu otvorenog poprečnog preseka glasi

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} E & & \\ & G & \\ & & G \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

gde je E Young-ov moduo elastičnosti, a G je moduo klizanja.

4.1.5 Matrica i vektor *Cauchy*-jevih napona

Izraz (2.37) se može napisati u razvijenom obliku kao

$$\sigma_{ij} \delta \Delta \eta_{ij} = \sigma_{xx} \delta \Delta \eta_{xx} + \sigma_{xy} \delta \Delta \eta_{xy} + \sigma_{xz} \delta \Delta \eta_{xz} = \delta \Delta \mathbf{u}_{*,d}^T \boldsymbol{\sigma} \Delta \mathbf{u}_{*,d}^T \quad (4.22)$$

gde je $i, j = x, y, z$. Umesto oznaka σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{xz} dalje u tekstu koristiće se respektivno oznake σ_x , τ_{xy} i τ_{xz} . Koristeći izraz (4.22) i vodeći računa o (4.16) i (4.17) dobija se da je matrica *Cauchy*-jevih napona jednaka

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & & & \tau_{xy} & & \tau_{xz} \\ & \sigma_x & & & & \tau_{xz} \\ & & \sigma_x & & \tau_{xy} & \\ \tau_{xy} & & & \tau_{xy} & & \\ & & \tau_{xy} & & & \\ \tau_{xz} & & & & & \tau_{xz} \\ & \tau_{xz} & & & & \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Vektor *Cauchy*-jevih napona je jednak

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

4.2 Tankozidna greda zatvorenog poprečnog preseka

4.2.1 Osnovne pretpostavke

Pored uobičajenih pretpostavki linearne teorije elastičnosti, za tankozidnu gredu zatvorenog poprečnog preseka, uvode se pretpostavke:

1. Presek je apsolutno krut u svojoj ravni.
2. Klizanje u srednjoj površi koje potiče od savijanja zanemaruje se.
3. Oblik deplanacije poprečnog preseka kvalitativno je isti kao i kod *Saint – Venan*-ove torzije zatvorenog preseka.
4. Vrednost normalnog napona konstantna je duž normale na srednju liniju i jednaka je vrednosti normalnog napona na srednjoj liniji poprečnog preseka.
5. Smičući naponi ravnomerno u raspoređeni po debljini zida.

Obzirom na pretpostavke 4 i 5 dovoljno je naponske i deformacijske veličine posmatrati u odnosu na srednju liniju poprečnog preseka. Veličine zadate u odnosu na srednju liniju poprečnog preseka grede označene su nadvučenom crtom.

4.2.2 Kinematičke veličine i vektor pomeranja

Pomeranje $\Delta \bar{u}$ proizvoljne tačke na srednjoj liniji poprečnog preseka (slika 4.1) u pravcima x, e, s može da se opiše sa pet parametara: tri pomeranja $u_0(x), v_D(x)$ i $w_D(x)$, obrtanjem $\varphi(x)$ i deplanacijom $\vartheta(x)$ [3]

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{u} \\ \Delta \bar{\eta} \\ \Delta \bar{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\bar{y} \frac{d}{dx} & -\bar{z} \frac{d}{dx} & -\hat{\omega}(s) \\ & \cos \alpha & \sin \alpha & h_{nD} \\ & -\sin \alpha & \cos \alpha & \bar{h}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_0(x) \\ \Delta v_D(x) \\ \Delta w_D(x) \\ \Delta \varphi(x) \\ \Delta \vartheta(x) \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

U izrazu (4.25) $\hat{\omega}(s)$ je normirana sektorska koordinata tankozidne grede zatvorenog poprečnog preseka (videti deo 4.3) i

$$h_{nD} = (y - y_D) \sin \alpha - (z - z_D) \cos \alpha \quad (4.26)$$

$$\bar{h}_D = (\bar{y} - y_D) \cos \alpha + (\bar{z} - z_D) \sin \alpha \quad (4.27)$$

Deplanacija ϑ zatvorenog poprečnog preseka može da se izrazi kao funkcija od φ [3]

$$\vartheta = \frac{\rho - 1}{\hat{k}^2} \varphi''' + \varphi' \quad (4.28)$$

gde je

$$\hat{k}^2 = \frac{GI_{xx}}{E\rho I_{\hat{\omega}\hat{\omega}}} \quad (4.29)$$

$$\rho = \frac{I_{hh}}{I_{hh} - I_{xx}} \quad (4.30)$$

$$I_{hh} = \int_A \bar{h}_D^2 dA \quad (4.31)$$

U izrazu (4.29) I_{xx} je *Saint-Venant*-ova torziona konstanta, a $I_{\hat{\omega}\hat{\omega}}$ sektorski momenat inercije. Izraz (4.25) vodeći računa o (4.28) glasi

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{u} \\ \Delta \bar{\eta} \\ \Delta \bar{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\bar{y} \frac{d}{dx} & -\bar{z} \frac{d}{dx} & -\hat{\omega}(s) \left(\frac{d}{dx} + \frac{\rho-1}{\hat{k}^2} \frac{d^3}{dx^3} \right) \\ & \cos \alpha & \sin \alpha & h_{nD} \\ & -\sin \alpha & \cos \alpha & \bar{h}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_0(x) \\ \Delta v_D(x) \\ \Delta w_D(x) \\ \Delta \varphi(x) \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

ili sažeto

$$\Delta \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{L} \Delta \mathbf{u} \quad (4.33)$$

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}^T = \begin{bmatrix} \Delta \bar{u} & \Delta \bar{\eta} & \Delta \bar{\zeta} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -\bar{y} \frac{d}{dx} & -\bar{z} \frac{d}{dx} & -\hat{\omega}(s) \left(\frac{d}{dx} + \frac{\rho-1}{\hat{k}^2} \frac{d^3}{dx^3} \right) \\ & \cos \alpha & \sin \alpha & h_{nD} \\ & -\sin \alpha & \cos \alpha & \bar{h}_D \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Ako se umesto $\Delta \mathbf{u}$ u (4.33) unese (4.7) odnosno (4.8) dobija se

$$\Delta \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{q} \quad (4.36)$$

gde je

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_u & -\bar{y} \mathbf{N}'_v & -\bar{z} \mathbf{N}'_w & -g(s, \mathbf{N}_\varphi) \\ & \mathbf{N}_v \cos \alpha & \mathbf{N}_w \sin \alpha & h_{nD} \mathbf{N}_\varphi \\ & -\mathbf{N}_v \sin \alpha & \mathbf{N}_w \cos \alpha & \bar{h}_D \mathbf{N}_\varphi \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$g(s, \mathbf{N}_\varphi) = \hat{\omega}(s) \left(\mathbf{N}'_\varphi + \frac{\rho-1}{\hat{k}^2} \mathbf{N}'''_\varphi \right) \quad (4.38)$$

4.2.3 Vektori deformacije

Linearni deo inkrementalnog vektora deformacije prema izrazu (2.34) je

$$\Delta \mathbf{e} = \mathbf{L}_L \Delta \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{L}_L \mathbf{N} \Delta \mathbf{q} = \mathbf{B}_L \Delta \mathbf{q} \quad (4.39)$$

gde je

$$\Delta \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_x \\ 2e_{xs} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

$$\mathbf{L}_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial s} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$\mathbf{B}_L = \mathbf{L}_L \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}'_u & -\bar{y}\mathbf{N}''_v & -\bar{z}\mathbf{N}''_w & -g'(s, \mathbf{N}_\varphi) \\ \bar{h}_D \mathbf{N}'_\varphi - \frac{\partial g(s, \mathbf{N}_\varphi)}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

U izrazu (4.42) $\mathbf{A}$ je dato sa (4.37). Nelinearni deo inkrementalnog vektora deformacije dat izrazom (2.19) u razvijenom obliku glasi

$$\begin{bmatrix} \Delta\eta_{xx} \\ \Delta\eta_{xs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \{ (\Delta u_{,x})^2 + (\Delta \bar{\eta}_{,x})^2 + (\Delta \bar{\zeta}_{,x})^2 \} \\ \frac{1}{2} (\Delta u_{,x} \Delta u_{,s} + \Delta \bar{\eta}_{,x} \Delta \bar{\eta}_{,s}) \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Vodeći računa o (4.43), u izrazu (2.40) datom kao

$$\Delta \mathbf{u}_{*,d} = \mathbf{L}_{NL} \Delta \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{L}_{NL} \mathbf{A} \Delta \mathbf{q} = \mathbf{B}_{NL} \Delta \mathbf{q} \quad (4.44)$$

sada imamo da je

$$\Delta \mathbf{u}_{*,d} = \begin{bmatrix} \Delta u_{,x} \\ \Delta \bar{\eta}_{,x} \\ \Delta \bar{\zeta}_{,x} \\ \Delta u_{,s} \\ \Delta \bar{\eta}_{,s} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

$$\mathbf{L}_{NL} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & & \\ & \frac{\partial}{\partial x} & \\ \frac{\partial}{\partial s} & & \frac{\partial}{\partial x} \\ & \frac{\partial}{\partial s} & \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

$$\mathbf{B}_{NL} = \mathbf{L}_{NL} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}'_u & -y\mathbf{N}''_v & -z\mathbf{N}''_w & -g'(s, \mathbf{N}_\varphi) \\ \mathbf{N}'_v \cos \alpha & \mathbf{N}'_w \sin \alpha & h_{nD} \mathbf{N}'_\varphi & \\ -\mathbf{N}'_v \sin \alpha & \mathbf{N}'_w \cos \alpha & h_D \mathbf{N}'_\varphi & \\ \mathbf{N}'_v \sin \alpha & -\mathbf{N}'_w \cos \alpha & -\frac{\partial g(s, \mathbf{N}_\varphi)}{\partial s} & \frac{\partial h_{nD}}{\partial s} \mathbf{N}'_\varphi \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

U izrazu (4.47) $\mathbf{A}$ je dato sa (4.37).

4.2.4 Konstitutivna matrica

Konstitutivna matrica deformacije za tankozidnu gredu sa zatvorenim poprečnim presekom iznosi

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} E & \\ & G \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

4.2.5 Matrica i vektor *Cauchy*-jevih napona

Izraz (2.37) se može napisati u razvijenom obliku kao

$$\sigma_{ij}\delta\Delta\eta_{ij} = \sigma_{xx}\delta\Delta\eta_{xx} + \sigma_{xs}\delta\Delta\eta_{xs} = \delta\Delta\mathbf{u}_{*,d}^T\sigma\Delta\mathbf{u}_{*,d}^T \quad (4.49)$$

gde je $i, j = x, s$. Umesto oznaka σ_{xx} , σ_{xs} dalje u tekstu koristiće se respektivno oznake σ_x i τ_{xs} . Koristeći izraz (4.49) i vodeći računa o (4.43) i (4.44) dobija se da je matrica *Cauchy*-jevih napona

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & & & \tau_{xs} & & \\ & \sigma_x & & & & \\ & & \sigma_x & & & \\ \tau_{xs} & & & & & \\ & \tau_{xs} & & & & \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Vektor *Cauchy*-jevih napona je jednak

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xs} \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

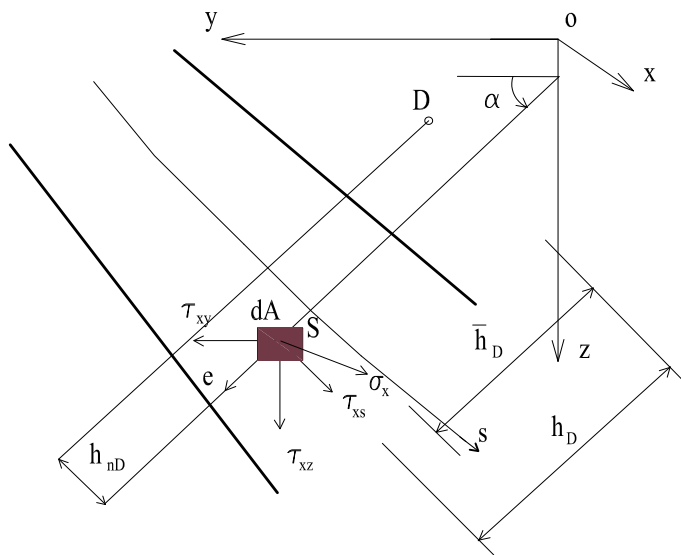
4.3 Presečne sile

Kod opšteg slučaja opterećenja tankozidne grede rezultanta presečnih sila može se rastaviti na sedam komponenti. Aksijalna sila F_x i momenti savijanja M_y i M_z definisani su u odnosu na težište poprečnog preseka. Smičuće sile F_y i F_z i torzijski moment M_x su definisani u odnosu na centar smicanja (slika 4.6).

U izrazima koji slede kod:

1. Tankozidne grede otvorenog poprečnog preseka, tildu ($\sim$) i obrnuti polukrug treba izostaviti.
2. Tankozidne grede zatvorenog poprečnog preseka, umesto tilde treba staviti gornju nadvučenu crtu ($\bar{}$), a umesto obrnutog polukruga šesirić.

Komponente rezultante presečnih sila, vodeći računa o oznakama na slici 4.2, definišu se na sledeći način:



Slika 4.2: Komponente napona u poprečnom preseku tankozidnog nosača

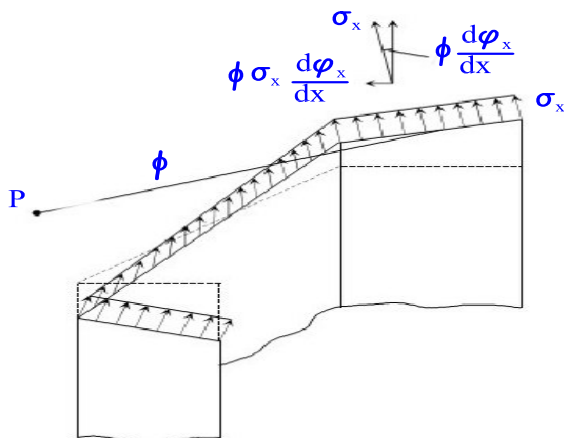
1. Aksijalna sila

$$F_x = N = \int_A \sigma_x dA \quad (4.52)$$

2. Smičuće sile

$$F_y = - \int_A \tau_{xs} \sin \alpha dA = \int_A \tau_{xy} dA \quad (4.53)$$

$$F_z = \int_A \tau_{xs} \cos \alpha dA = \int_A \tau_{xz} dA \quad (4.54)$$

Slika 4.3: *Wagner*-ov efekat

3. Torzioni momenat

$$M_x = T_{SV} + T_{\omega} (+T_{\sigma}) = T_D (+T_{\sigma}) \quad (4.55)$$

gde je T_{SV} *Saint-Venant*-ov moment torzije, T_{ω} torzijski momenat vitoperenja i T_{σ} čisto torzijsko izvijanje. Imamo da je

$$T_D = T_{SV} + T_{\omega} \quad (4.56)$$

$$T_D = \int_A [\tau_{xz}(\tilde{y} - y_D) - \tau_{xy}(\tilde{z} - z_D)] dA \quad (4.57)$$

ili

$$T_D = \int_A \tau_{xs} \tilde{h}_D dA \quad (4.58)$$

odnosno

$$T_D = \int_A (\tau_{xz} \tilde{y} - \tau_{xy} \tilde{z}) dA - F_z y_D + F_y z_D = T_{SV} + T_{\omega} \quad (4.59)$$

Čisto torzijsko izvijanje T_{σ} javlja se kao dopunski torzijski momenat uzrokovan normalnim naprezanjem zbog vitoperenja poprečnog preseka (slika 4.3) i predstavlja sekundarni efekat. Ovaj efekat je poznat kao *Wagner*-ov efekat [40]. Kod nosača punog poprečnog preseka ovaj efekat se, u pravilu, zanemaruje.

Vrednost sekundarnog torzijskog momenta je

$$T_{\sigma} = \int_A \phi \sigma_x \phi \frac{d\phi}{dx} dA = \int_A \sigma_x \phi^2 dA \frac{d\phi}{dx} = \bar{K} \frac{d\phi}{dx} \quad (4.60)$$

pri čemu je ϕ udaljenost tačke na konturi poprečnog preseka od centra smicanja, dok je $\bar{K}$ *Wagner*-ov koeficijent i iznosi

$$\bar{K} = \int_A \sigma_x \phi^2 dA = \int_A \sigma_x [(\tilde{y} - y_D)^2 + (\tilde{z} - z_D)^2] dA \quad (4.61)$$

ili

$$\bar{K} = \int_A \sigma_x (\tilde{h}_D^2 + \tilde{h}_{nD}^2) dA \quad (4.62)$$

4. Momenti savijanja

$$M_y = \int_A \sigma_x \tilde{z} dA \quad (4.63)$$

$$M_z = - \int_A \sigma_x \tilde{y} dA \quad (4.64)$$

5. Bimoment

$$M_{\omega} = \int_A \sigma_x \tilde{\omega} dA \quad (4.65)$$

Izrazi za presečne sile napisaće se u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} F_x \\ M_z \\ M_y \\ M_{\omega} \end{bmatrix} = E \int_A \begin{bmatrix} 1 \\ -\tilde{y} \\ \tilde{z} \\ \tilde{\omega} \end{bmatrix} e_x dA \quad (4.66)$$

U izrazu (4.66) e_x će se izraziti preko generalisanih pomeranja čvorova elementa (videti deo 4.4) i interpolacionih funkcija (videti deo 4.9)

$$\begin{bmatrix} F_x \\ M_z \\ M_y \\ M_{\omega} \end{bmatrix} = E \int_A \begin{bmatrix} 1 \\ -\tilde{y} \\ \tilde{z} \\ \tilde{\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}'_u & -\tilde{y}\mathbf{N}''_v & -\tilde{z}\mathbf{N}''_w & -\tilde{\omega}f' \end{bmatrix} dA \mathbf{q} \quad (4.67)$$

gde je za tankozidni nosač otvorenog poprečnog preseka $f' = \mathbf{N}''_{\varphi}$, a za nosač zatvorenog poprečnog preseka $f' = \rho \mathbf{N}''_{\varphi}$. Integraljenjem izraza (4.67) dobija se

$$\begin{bmatrix} F_x \\ M_z \\ M_y \\ M_{\omega} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} A & -S_y & -S_z & -S_{\omega} \\ -S_y & I_{yy} & I_{zy} & I_{y\omega} \\ S_z & -I_{zy} & -I_{zz} & -I_{z\omega} \\ S_{\omega} & -I_{y\omega} & -I_{z\omega} & -I_{\omega\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}'_u & \mathbf{N}''_v & \mathbf{N}''_w & f' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_u \\ \mathbf{q}_v \\ \mathbf{q}_w \\ \mathbf{q}_{\varphi} \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

ili u kompaktnom obliku

$$\begin{bmatrix} F_x \\ M_z \\ M_y \\ M_{\omega} \end{bmatrix} = E\mathbf{G}\widehat{\mathbf{N}}\mathbf{q} \quad (4.69)$$

U izrazu (4.68) je

$$S_y = \int_A \tilde{y} dA \quad (4.70)$$

$$S_z = \int_A \tilde{z} dA \quad (4.71)$$

$$S_{\omega} = \int_A \tilde{\omega} dA \quad (4.72)$$

$$I_{yy} = \int_A \tilde{y}^2 dA \quad (4.73)$$

$$I_{zz} = \int_A \tilde{z}^2 dA \quad (4.74)$$

$$I_{\omega\omega} = \int_A \tilde{\omega}^2 dA \quad (4.75)$$

$$I_{x\omega} = \int_A \tilde{x}\tilde{\omega} dA \quad (4.76)$$

$$I_{y\omega} = \int_A \tilde{y}\tilde{\omega} dA \quad (4.77)$$

Pošto je pretpostavljeno da su y i z glavne centralne ose inercije poprečnog preseka, tada je

$$S_y = S_z = I_{xy} = 0 \quad (4.78)$$

Pošto je pretpostavljeno da je $\tilde{\omega}$ normirana sektorska koordinata, a tačka $D(x_D, y_D)$ je centar smicanja, tada je

$$S_{\omega} = I_{x\omega} = I_{y\omega} = 0 \quad (4.79)$$

Tada je vrednost matrice $\mathbf{G}$ u izrazu (4.69)

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} A & & & \\ & I_{yy} & & \\ & & -I_{zz} & \\ & & & -I_{\omega\omega} \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

Normalno naprezanje u elementu iznosi

$$\sigma_x = E e_x = E \begin{bmatrix} 1 & -\tilde{y} & -\tilde{z} & -\tilde{\omega} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{N}} \mathbf{q} \quad (4.81)$$

Vodeći računa o (4.69), izraz (4.81) glasi

$$\sigma_x = E \begin{bmatrix} 1 & -\tilde{y} & -\tilde{z} & -\tilde{\omega} \end{bmatrix} \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} F_x \\ M_z \\ M_y \\ M_{\tilde{\omega}} \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

Izraz (4.82), vodeći računa o (4.80) glasi

$$\sigma_x = \frac{F_x}{A} - \tilde{y} \frac{M_z}{I_{yy}} + \tilde{z} \frac{M_y}{I_{zz}} + \tilde{\omega} \frac{M_{\tilde{\omega}}}{I_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}}} \quad (4.83)$$

Zamenom izraza (4.83) u izraz (4.61) ili (4.62) Wagner-ov koeficijent ima vrednost

$$\bar{K} = \int_A \phi^2 \begin{bmatrix} 1 & -\tilde{y} & -\tilde{z} & -\tilde{\omega} \end{bmatrix} dA \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} F_x \\ M_z \\ M_y \\ M_{\tilde{\omega}} \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

ili skraćeno

$$\bar{K} = \beta^T \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} F_x \\ M_z \\ M_y \\ M_{\tilde{\omega}} \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

gde je

$$\beta^T = \int_A \phi^2 \begin{bmatrix} 1 & -\tilde{y} & -\tilde{z} & -\tilde{\omega} \end{bmatrix} dA \quad (4.86)$$

Posle integraljenja izraza (4.86) imamo

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{yy} + I_{zz} + A(y_D^2 + z_D^2) \\ -[\int_A \tilde{y}(\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2) dA - 2y_D I_{yy}] \\ -[\int_A \tilde{z}(\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2) dA - 2z_D I_{zz}] \\ -\int_A \tilde{\omega}(\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2) dA \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

Izraz (4.85) može da se predstavi i u obliku

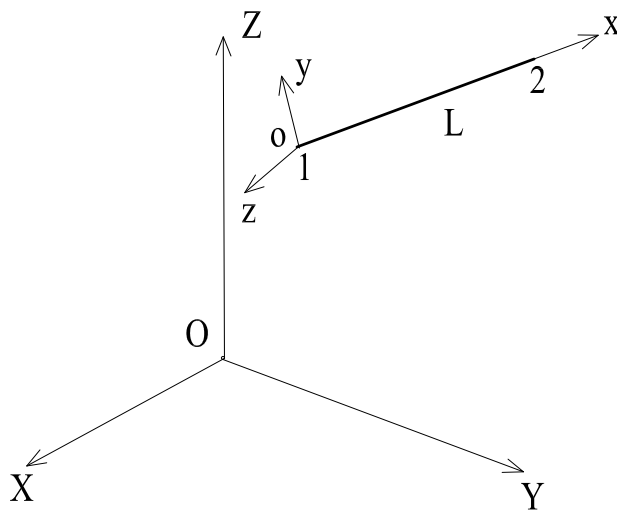
$$\bar{K} = \alpha^T \begin{bmatrix} F_x \\ M_z \\ M_y \\ M_{\tilde{\omega}} \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

gde je

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_1}{A} \\ \frac{\beta_2}{I_{yy}} \\ -\frac{\beta_3}{I_{zz}} \\ -\frac{\beta_4}{I_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}}} \end{bmatrix} = \beta^T \mathbf{G}^{-1} \quad (4.89)$$

4.4 Vektor generalisanih pomeranja i vektor generalisanih sila

Razmatra se prava tankozidna greda otvorenog ili zatvorenog poprečnog preseka. U čvoru 1 je postavljen lokalni koordinatni sistem $oxyz$ desne orijentacije. Osa x poklapa sa osom grede, a ose y i z sa pravcima glavnih centralnih osa inercije poprečnog preseka (slika 4.4). Na slici 4.5 su prikazani pozitivni smerovi generalisanih pomeranja u čvoru tankozidne grede. Vektor generalisanih pomeranja elementa obeležiće se sa



Slika 4.4: Prava tankozidna greda otvorenog ili zatvorenog poprečnog preseka

$$\mathbf{q}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_u^T & \mathbf{q}_v^T & \mathbf{q}_w^T & \mathbf{q}_\varphi^T \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

gde su

$$\mathbf{q}_u^T = \begin{bmatrix} u_{01} & u_{02} \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

$$\mathbf{q}_v^T = \begin{bmatrix} v_{D1} & \varphi_{z1} & v_{D2} & \varphi_{z2} \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

$$\mathbf{q}_w^T = \begin{bmatrix} w_{D1} & \varphi_{y1} & w_{D2} & \varphi_{y2} \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

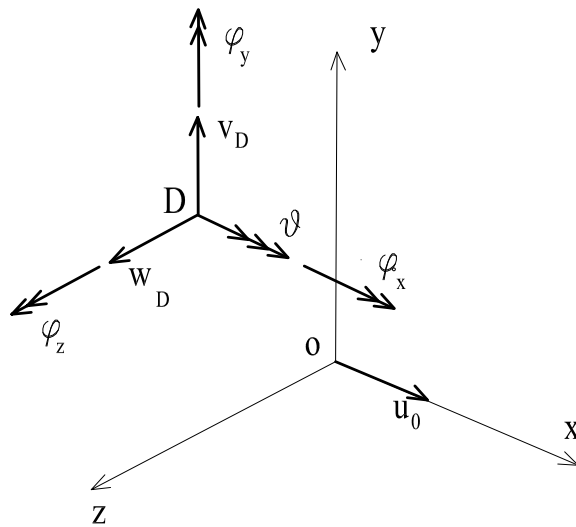
$$\mathbf{q}_\varphi^T = \begin{bmatrix} \varphi_{x1} & \vartheta_1 & \varphi_{x2} & \vartheta_2 \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

Vektor generalisanih pomeranja elementa u obliku pogodnijem za transformaciju iz lokalnog u globalni koordinatni sistem je

$$\mathbf{q}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T & \mathbf{q}_2^T \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

gde je

$$\mathbf{q}_i^T = \begin{bmatrix} u_{0i} & v_{Di} & w_{Di} & \varphi_{xi} & \varphi_{yi} & \varphi_{zi} & \vartheta_i \end{bmatrix}, i = 1, 2 \quad (4.96)$$



Slika 4.5: Komponente generalisanih pomeranja u čvoru tankozidne grede

Na slici 4.6 su prikazani pozitivni smerovi generalisanih sila u čvoru tankozidne grede. Vektor generalisanih sila grede je

$$\Delta \mathbf{f}^T = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{f}_u^T & \Delta \mathbf{f}_v^T & \Delta \mathbf{f}_w^T & \Delta \mathbf{f}_\varphi^T \end{bmatrix} \quad (4.97)$$

gde su

$$\mathbf{f}_u^T = \begin{bmatrix} F_{x1} & F_{x2} \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

$$\mathbf{f}_v^T = \begin{bmatrix} F_{y1} & M_{z1} & F_{y2} & M_{z2} \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

$$\mathbf{f}_w^T = \begin{bmatrix} F_{z1} & M_{y1} & F_{z2} & M_{y2} \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

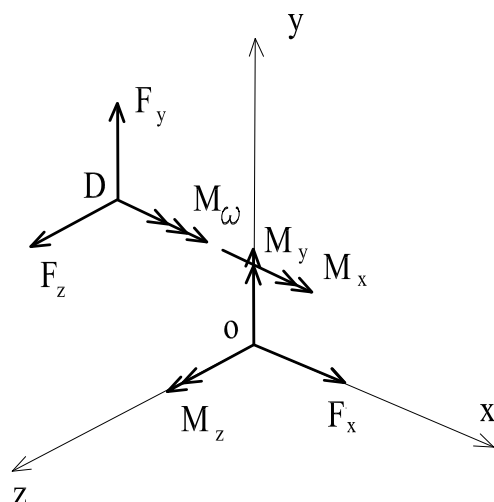
$$\mathbf{f}_\varphi^T = \begin{bmatrix} M_{x1} & M_\omega & M_{x2} & M_\omega \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

Vektor generalisanih sila elementa u obliku pogodnijem za transformaciju iz lokalnog u globalni koordinatni sistem je

$$\mathbf{f}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^T & \mathbf{f}_2^T \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

gde je

$$\mathbf{f}_i^T = \begin{bmatrix} F_{xi} & F_{yi} & F_{zi} & M_{xi} & M_{yi} & M_{zi} & M_{\omega i} \end{bmatrix}, i = 1, 2 \quad (4.103)$$



Slika 4.6: Komponente generalisanih sila u čvoru tankozidne grede

4.5 Sile unutar jednog konačnog elementa

Vodeći računa o izrazima za presečne sile, sile unutar jednog konačnog elementa, izražene preko vrednosti sila u čvorovima elementa iznose [40]

$$\begin{bmatrix} F_{xe} \\ F_{ye} \\ F_{ze} \\ M_{xe} \\ M_{ye} \\ M_{ze} \\ M_{\omega e} \\ \bar{K}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x2} \\ -\frac{k_z}{L} \\ \frac{k_y}{L} \\ M_{x2} \\ -M_{y1} + x \frac{k_y}{L} \\ -M_{z1} + x \frac{k_z}{L} \\ M_{\omega 2} \\ \alpha_{11} + x \frac{\alpha_{12}}{L} \end{bmatrix} \quad (4.104)$$

$$k_y = M_{y1} + M_{y2} \quad (4.105)$$

$$k_z = M_{z1} + M_{z2} \quad (4.106)$$

$$\alpha_{11} = \alpha_1 F_{x2} - \alpha_2 M_{z1} - \alpha_3 M_{y1} + \alpha_4 M_{\omega 2} \quad (4.107)$$

$$\alpha_{12} = \alpha_2 k_z + \alpha_3 k_y \quad (4.108)$$

4.6 Matrice krutosti

Linearna matrica krutosti određuje se prema izrazu (2.36) uz vođenje računa o (4.15), (4.21), (4.42) i (4.48). Posle integracije i sređivanja dobija se linearna matrica krutosti za

tankozidnu gredu sa otvorenim i zatvorenim poprečnim presekom

$$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} EF\mathbf{K}_1 & & & \\ & EI_{yy}\mathbf{K}_{25} & & \\ & & EI_{zz}\mathbf{K}_{26} & \\ & & & \mathbf{K}_{27}(\psi, \tilde{\omega}) \end{bmatrix} \quad (4.109)$$

$$\mathbf{K}_{27}(\psi, \tilde{\omega}) = \psi EI_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}} \left[\psi \mathbf{K}_{22} + \tilde{k}^2(\psi, \tilde{\omega}) \mathbf{K}_{19} + \mu(\psi, \tilde{\omega}) \mathbf{K}_{24} \right] \quad (4.110)$$

$$\tilde{k}^2(\psi, \tilde{\omega}) = \frac{GI_{xx}}{E\psi I_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}}} \quad (4.111)$$

$$\mu(\psi, \tilde{\omega}) = \frac{\psi - 1}{\tilde{k}^2(\psi, \tilde{\omega})} \quad (4.112)$$

gde su promenjive $\psi = 1, \rho$ (ρ je dato izrazom (4.30)), a $\tilde{\omega} = \omega, \hat{\omega}$ (videti deo 4.3). Prve vrednosti promenljivih ψ i ρ odgovaraju tankozidnoj gredi sa otvorenim poprečnim presekom, a druge tankozidnoj gredi sa zatvorenim poprečnim presekom.

Izraz (4.110) za tankozidnu gredu sa otvorenim poprečnim presekom glasi

$$\mathbf{K}_{27}(1, \omega) = EI_{\omega\omega} (\mathbf{K}_{22} + k^2 \mathbf{K}_{19}) \quad (4.113)$$

$$k^2 = \frac{GI_{xx}}{EI_{\omega\omega}} \quad (4.114)$$

a za tankozidnu gredu sa zatvorenim poprečnim presekom

$$\mathbf{K}_{27}(\rho, \hat{\omega}) = \rho EI_{\hat{\omega}\hat{\omega}} \left(\rho \mathbf{K}_{22} + \hat{k}^2 \mathbf{K}_{19} + \frac{\rho - 1}{\hat{k}^2} \mathbf{K}_{24} \right) \quad (4.115)$$

$$\hat{k}^2 = \frac{GI_{xx}}{E\rho I_{\hat{\omega}\hat{\omega}}} \quad (4.116)$$

Nelinearna matrica krutosti određuje se prema izrazu (2.41) uz vođenje računa o izrazima (4.20), (4.23), (4.47) i (4.50) kao i o izrazima za sile u elementu (videti deo 4.5). Posle integraljenja i sređivanja, nelinearna matrica krutosti za tankozidnu gredu otvorenog i zatvorenog poprečnog preseka svodi se na izraz

$$\mathbf{K}_{NL} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{NL,uu} & \mathbf{K}_{NL,uv} & \mathbf{K}_{NL,uw} & \mathbf{K}_{NL,u\varphi} \\ & \mathbf{K}_{NL,vv} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{NL,v\varphi} \\ & & \mathbf{K}_{NL,ww} & \mathbf{K}_{NL,w\varphi} \\ & sym & & \mathbf{K}_{NL,\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (4.117)$$

gde je

$$\mathbf{K}_{NL,uu} = F_{x2} \mathbf{K}_1 \quad (4.118)$$

$$\mathbf{K}_{NL,uv} = -M_{z1} \mathbf{K}_2 + \frac{k_z}{L} (\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4) \mathbf{K}_{NL,uv} = -M_{z1} \mathbf{K}_2 + \frac{k_z}{L} (\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4) \quad (4.119)$$

$$\mathbf{K}_{NL,ww} = M_{y1}\mathbf{K}_5 - \frac{k_y}{L}(\mathbf{K}_6 + \mathbf{K}_7) \quad (4.120)$$

$$\mathbf{K}_{NL,w\varphi} = -\psi M_{\omega 2}\mathbf{K}_{23} \quad (4.121)$$

$$\mathbf{K}_{NL,vv} = F_{x2}\mathbf{K}_8 \quad (4.122)$$

$$\mathbf{K}_{NL,v\varphi} = \psi(M_{z1}\mathbf{K}_{15} - \frac{k_z}{L}\mathbf{K}_{16}) + (M_{y1} + z_DF_{x2})\mathbf{K}_9 - \frac{k_y}{L}(\mathbf{K}_{10} + \mathbf{K}_{11}) \quad (4.123)$$

$$\mathbf{K}_{NL,ww} = F_{x2}\mathbf{K}_{12} \quad (4.124)$$

$$\mathbf{K}_{NL,w\varphi} = -\psi(M_{y1}\mathbf{K}_{17} - \frac{k_y}{L}\mathbf{K}_{18}) + (M_{z1} - y_DF_{x2})\mathbf{K}_{20} - \frac{k_z}{L}(\mathbf{K}_{13} + \mathbf{K}_{14}) \quad (4.125)$$

$$\mathbf{K}_{NL,\varphi\varphi} = \psi F_{x2}\mathbf{K}_{22} + \alpha_{11}\mathbf{K}_{19} + \frac{\alpha_{12}}{L}\mathbf{K}_{21} \quad (4.126)$$

Matrice $\mathbf{K}_L$ i $\mathbf{K}_{NL}$ zavise od usvojenih interpolacionih funkcija (videti deo 4.9) i usvojenog vektora generalisanih pomeranja u čvorovima (videti deo 4.4).

Vrednosti submatrica matrica $\mathbf{K}_L$ i $\mathbf{K}_{NL}$, kada su interpolacione funkcije polinomi, date su u prilogu A.

Za tankozidnu gredu otvorenog i zatvorenog poprečnog preseka, kada su interpolacione funkcije date u obliku hiperboličkih funkcija, vrednosti integrala u submatricama matrice krutosti (osim submatrice $\mathbf{K}_{27}$ koja je data u prilogu A) $\mathbf{K}_{NL,u\varphi}$, $\mathbf{K}_{NL,v\varphi}$, $\mathbf{K}_{NL,w\varphi}$ i $\mathbf{K}_{NL,\varphi\varphi}$ računaju se numeričkim putem (videti deo 8.4).

4.7 Vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja

Vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja $\mathbf{r}$ za raspodeljeno linijskog opterećenje jednak je

$$\mathbf{r} = - \int_L \mathbf{A}^T \mathbf{p} dx \quad (4.127)$$

Komponente vektora $\mathbf{r}$ su

$$\mathbf{r}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u^T & \mathbf{r}_v^T & \mathbf{r}_w^T & \mathbf{r}_\varphi^T \end{bmatrix} \quad (4.128)$$

$$\mathbf{r}_u^T = \begin{bmatrix} F_{x1} & F_{x2} \end{bmatrix} \quad (4.129)$$

$$\mathbf{r}_v^T = \begin{bmatrix} F_{y1} & M_{z1} & F_{y2} & M_{z2} \end{bmatrix} \quad (4.130)$$

$$\mathbf{r}_w^T = \begin{bmatrix} F_{z1} & M_{y1} & F_{z2} & M_{y2} \end{bmatrix} \quad (4.131)$$

$$\mathbf{r}_\varphi^T = \begin{bmatrix} M_{x1} & M_{\omega 1} & M_{x2} & M_{\omega 2} \end{bmatrix} \quad (4.132)$$

U izrazu (4.127) $\mathbf{A}$ je definisano matricom (4.10) za otvorene, a matricom (4.37) za zatvorene poprečne preseke. Ako se uzme da su komponente vektora linijskog opterećenja

$$\mathbf{p}^T = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix} \quad (4.133)$$

date duž x ose i u pravcima x, y i z ose, integral (4.127), vodeći računa o interpolacionim funkcijama (videti deo 4.9) svodi se na

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_w \\ \mathbf{r}_\varphi \end{bmatrix} = - \int_L \begin{bmatrix} p_x \mathbf{N}_u^T \\ p_y \mathbf{N}_v^T \\ p_z \mathbf{N}_w^T \\ 0 \end{bmatrix} dx = L \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T p_x \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{L}{12} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{12} \end{bmatrix}^T p_y \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{L}{12} & \frac{1}{2} & \frac{L}{12} \end{bmatrix}^T p_z \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.134)$$

Komponente vektora ekvivalentnog čvornog opterećenja, u obliku pogodnijem za transformaciju iz lokalnog u globalni sistem, date su u obliku

$$\mathbf{r}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T & \mathbf{r}_2^T \end{bmatrix} \quad (4.135)$$

gde je

$$\mathbf{r}_i^T = \begin{bmatrix} F_{x1} & F_{y1} & F_{z1} & M_{x1} & M_{y1} & M_{z1} & M_{\omega_1} \end{bmatrix}, i = 1, 2 \quad (4.136)$$

4.8 Vektor internih čvornih sila

Vektor internih čvornih sila računa se prema izrazu (2.43). Vodeći računa o izrazima (4.15) i (4.24) za tankozidnu gredu otvorenog poprečnog preseka kao i o izrazima (4.42) i (4.51) za tankozidnu gredu zatvorenog poprečnog preseka, vektor internih čvornih sila je

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_v \\ \mathbf{f}_w \\ \mathbf{f}_\varphi \end{bmatrix} = \int_V \begin{bmatrix} \sigma_x \mathbf{N}_u'^T \\ -\tilde{y} \sigma_x \mathbf{N}_v''^T \\ -\tilde{z} \sigma_x \mathbf{N}_w''^T \\ -\sigma g'(s, \mathbf{N}_\varphi^T) + \mathbf{G} \end{bmatrix} dV \quad (4.137)$$

gde je za tankozidnu gredu sa otvorenim poprečnim presekom

$$\mathbf{G} = - \left[\frac{\partial g(s, \mathbf{N}_\varphi^T)}{\partial y} - (\tilde{z} - z_D) \mathbf{N}_\varphi'^T \right] \tau_{xy} - \left[\frac{\partial g(s, \mathbf{N}_\varphi^T)}{\partial z} - (\tilde{y} - y_D) \mathbf{N}_\varphi'^T \right] \tau_{xz} \quad (4.138)$$

a za tankozidnu gredu sa zatvorenim poprečnim presekom

$$\mathbf{G} = [h_D \mathbf{N}_\varphi'^T - \frac{\partial g(s, \mathbf{N}_\varphi^T)}{\partial s}] \tau_{xs} \quad (4.139)$$

Integraljenjem izraza (4.137) i vodeći računa o izrazima za presečni sile (videti deo 4.3), izrazima za sile unutar jednog konačnog elementa (videti deo 4.5) i interpolacionim funkcijama (poglavlje 4.9), posle sređivanja dobija se izraz za vektor internih čvornih sila za tankozidnu gredu sa otvorenim i zatvorenim poprečnim presekom

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \int_L \begin{bmatrix} F_{xe} \mathbf{N}_u'^T \\ M_{ze} \mathbf{N}_v''^T \\ -M_{ye} \mathbf{N}_w''^T \\ -\psi M_{\omega_e} \mathbf{N}_\varphi''^T \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T F_{x2} \\ \begin{bmatrix} \frac{k_z}{L} & M_{z1} & -\frac{k_z}{L} & M_{z2} \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} -\frac{k_y}{L} & -M_{y1} & \frac{k_y}{L} & M_{y2} \end{bmatrix}^T \\ -M_{\omega_2} \mathbf{B}^T \end{bmatrix} \quad (4.140)$$

U izrazu (4.140) vektor $\mathbf{B}$ može da ima sledeće vrednosti:

1. Ako su, kod tankozidne grede sa otvorenim poprečnim presekom, interpolacione funkcije date u obliku polinoma

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.141)$$

2. Ako su, kod tankozidne grede sa otvorenim i zatvorenim poprečnim presekom, interpolacione funkcije date u obliku hiperboličkih funkcija

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\check{\Delta}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2(\cosh \check{\lambda} - 1) - \psi \check{\lambda} \sinh \check{\lambda} \\ 0 \\ -2(\cosh \check{\lambda} - 1) + \psi \check{\lambda} \sinh \check{\lambda} \end{bmatrix} \quad (4.142)$$

$$\begin{aligned} \check{\Delta} &= 2(1 - \operatorname{ch} \check{\lambda}) + \psi \check{\lambda} \operatorname{sh} \check{\lambda} \\ \check{\lambda} &= \check{k} L \end{aligned} \quad (4.143)$$

Promenljiva $\psi = 1, \rho$ (ρ je dato izrazom (4.30)). Prva vrednost promenjive ψ odgovara tankozidnoj gredi otvorenog poprečnog preseka, a druga tankozidnoj gredi zatvorenog poprečnog preseka.

4.9 Matrice interpolacionih funkcija

Za tankozidnu greda otvorenog i zatvorenog poprečnog preseka usvojene su interpolacione funkcije u obliku *Hermite*-ovih polinoma i u obliku hiperboličkih funkcija. Imamo da su matrice interpolacionih funkcija jednake

$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad (4.144)$$

$$\mathbf{N}_v^T = \begin{bmatrix} 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ L\left(\left(\frac{x}{L}\right) - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3\right) \\ 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ -L\left(\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right) \end{bmatrix} \quad (4.145)$$

$$\mathbf{N}_w^T = \begin{bmatrix} 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ -L\left(\left(\frac{x}{L}\right) - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3\right) \\ 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ L\left(\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right) \end{bmatrix} \quad (4.146)$$

Matrice interpolacionih funkcija za obrtanje φ , tankozidne grede, usvajaju se u sledećem obliku:

1. Kod tankozidne grede otvorenog poprečnog preseka, interpolacione funkcije su date u obliku polinoma

$$\mathbf{N}_\varphi = \mathbf{N}_v \quad (4.147)$$

2. Kod tankozidne grede otvorenog i zatvorenog poprečnog preseka, interpolacione funkcije su date u obliku hiperboličkih funkcija [3]

$$\mathbf{N}_\varphi^T = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \psi \bar{\lambda} \sinh \bar{\lambda} - \cosh \bar{\lambda} - \psi \sinh \bar{\lambda} \bar{k} x + \\ + \sinh \bar{\lambda} \sinh \bar{k} x + (1 - \cosh \bar{\lambda}) \cosh \bar{k} x \end{pmatrix} \\ \frac{1}{\psi \bar{k}} \begin{pmatrix} \psi \bar{\lambda} \cosh \bar{\lambda} - \sinh \bar{\lambda} + (\psi - \psi \cosh \bar{\lambda}) \cosh \bar{k} x + \\ + (1 + \psi \bar{\lambda} \sinh \bar{\lambda} - \cosh \bar{\lambda}) \sinh \bar{k} x + \\ + (\sinh \bar{\lambda} - \psi \bar{\lambda} \cosh \bar{\lambda}) \cosh \bar{k} x \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 - \cosh \bar{\lambda} + \psi \sinh \bar{\lambda} \bar{k} x - \\ - \sinh \bar{\lambda} \sinh \bar{k} x - (1 - \cosh \bar{\lambda}) \cosh \bar{k} x \end{pmatrix} \\ \frac{1}{\psi \bar{k}} \begin{pmatrix} \sinh \bar{\lambda} - \psi \bar{\lambda} + (\psi - \psi \cosh \bar{\lambda}) \bar{k} x - \\ - (1 - \cosh \bar{\lambda}) \sinh \bar{k} x + (\psi \bar{\lambda} - \sinh \bar{\lambda}) \cosh \bar{k} x \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.148)$$

U izrazu (4.148) $\bar{k}$ je određeno izrazom (4.111).

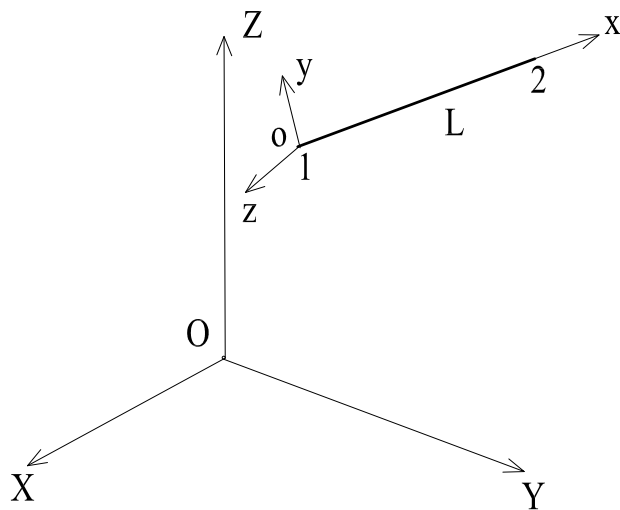
Glava 5

Greda kao konačni elemenat

5.1 Greda sa dva čvora

5.1.1 Vektor generalisanih pomeranja i vektor generalisanih sila

Razmatra se prava greda u koordinatnom sistemu xyz desne orijentacije. Osa x poklapa sa osom grede, a ose y i z poklapaju se sa pravcima glavnih centralnih osa inercije poprečnog preseka (slika 5.1). Na slici 5.2 su prikazani pozitivni smerovi generalisanih pomeranja u čvoru grede. Vektor generalisanih pomeranja u čvorovima grede obeležen je



Slika 5.1: Prava greda

$$\mathbf{q}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_u^T & \mathbf{q}_v^T & \mathbf{q}_w^T & \mathbf{q}_\varphi^T \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

gde su

$$\mathbf{q}_u^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

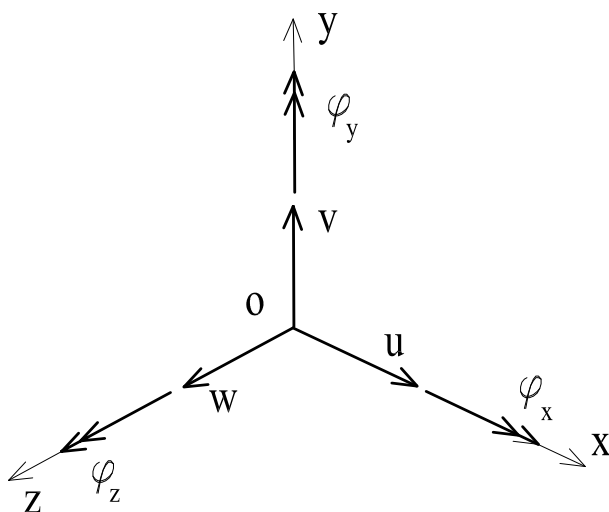
$$\mathbf{q}_v^T = \begin{bmatrix} v_1 & \varphi_{z1} & v_2 & \varphi_{z2} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{q}_w^T = \begin{bmatrix} w_1 & \varphi_{y1} & w_2 & \varphi_{y2} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$\mathbf{q}_\varphi^T = \begin{bmatrix} \varphi_{x1} & \varphi_{x2} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Vektor generalisanih pomeranja u čvorovima u obliku pogodnijem za transformaciju iz lokalnog u globalni koordinatni sistem glasi

$$\mathbf{q}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T & \mathbf{q}_2^T \end{bmatrix} \quad (5.6)$$



Slika 5.2: Generalisana pomeranja u čvoru grede

gde je

$$\mathbf{q}_i^T = \begin{bmatrix} u_i & v_i & w_i & \varphi_{xi} & \varphi_{yi} & \varphi_{zi} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2 \quad (5.7)$$

Na slici 5.3 su prikazani pozitivni smerovi generalisanih sila u čvoru grede. Vektor generalisanih sila u čvorovima grede obeležen je sa

$$\mathbf{f}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u^T & \mathbf{f}_v^T & \mathbf{f}_w^T & \mathbf{f}_\varphi^T \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

gde su

$$\mathbf{f}_u^T = \begin{bmatrix} F_{x1} & F_{x2} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$\mathbf{f}_v^T = \begin{bmatrix} F_{y1} & M_{z1} & F_{y2} & M_{z2} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{f}_w^T = \begin{bmatrix} F_{z1} & M_{y1} & F_{z2} & M_{y2} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

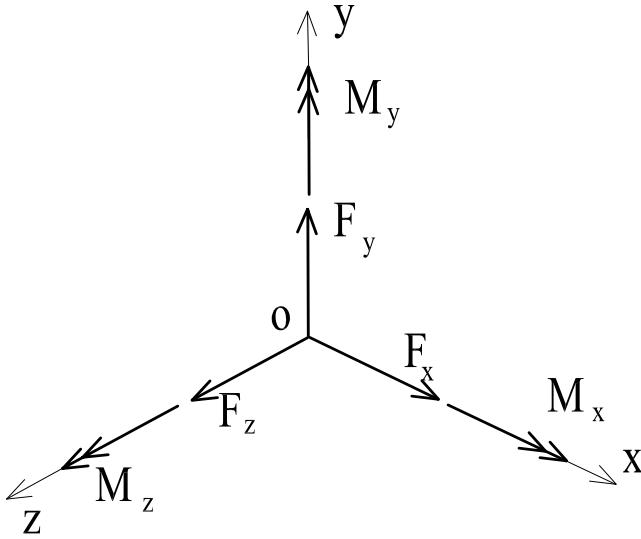
$$\mathbf{f}_\varphi^T = \begin{bmatrix} M_{x1} & M_{x2} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Vektor generalisanih sila u čvorovima u obliku pogodnijem za transformaciju iz lokalnog u globalni koordinatni sistem glasi

$$\mathbf{f}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^T & \mathbf{f}_2^T \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

gde je

$$\mathbf{f}_i^T = \begin{bmatrix} F_{xi} & F_{yi} & F_{zi} & M_{xi} & M_{yi} & M_{zi} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2 \quad (5.14)$$



Slika 5.3: Generalisane sile u čvoru grede

5.1.2 Sile unutar jednog konačnog elementa

Vodeći računa o izrazima izvedenim u delu 4.5 za tankozidnu gredu, mogu da se dobiti izrazi za gredu, ako se stavi da su $M_{\omega e} = 0$ i $\bar{K} = 0$ i iznose

$$\begin{bmatrix} F_{xe} \\ F_{ye} \\ F_{ze} \\ M_{xe} \\ M_{ye} \\ M_{ze} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x2} \\ -\frac{k_z}{L} \\ \frac{k_y}{L} \\ M_{x2} \\ -M_{y1} + x \frac{k_y}{L} \\ -M_{z1} + x \frac{k_z}{L} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

5.1.3 Matrice krutosti

Iz matrice krutosti tankozidne grede date izrazom (4.109) može da se dobije matrica krutosti grede, ako se koriguje izraz (4.110). Izraz (4.110) može da se napiše u obliku

$$\mathbf{K}_{27}(\psi, \tilde{\omega}) = \psi^2 EI_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}} \mathbf{K}_{22} + GI_{xx} \mathbf{K}_{19} + \psi EI_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}} \mu(\psi, \tilde{\omega}) \mathbf{K}_{24} \quad (5.16)$$

Pošto je $\psi = 0$ i veličine vezane za sektorske koordinate su jednake nuli, tada je (5.16)

$$\mathbf{K}_{27} = GI_{xx} \mathbf{K}_{19} \quad (5.17)$$

Linearna matrica krutosti grede je

$$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} EF\mathbf{K}_1 & & & \\ & EI_{yy}\mathbf{K}_{25} & & \\ & & EI_{zz}\mathbf{K}_{26} & \\ & & & \mathbf{K}_{27} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Nelinearnu matricu krutosti grede dobijamo iz nelinearne matrice krutosti tankozidnog nosača (4.117), vodeći računa da je za gredu $\psi = 0$, $y_D = 0$ i $z_D = 0$. Nelinearna matrica krutosti grede je

$$\mathbf{K}_{NL} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{NL,uu} & \mathbf{K}_{NL,uv} & \mathbf{K}_{NL,uw} & \\ & \mathbf{K}_{NL,vv} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{NL,v\varphi} \\ & & \mathbf{K}_{NL,ww} & \mathbf{K}_{NL,w\varphi} \\ & sym & & \mathbf{K}_{NL,\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Submatrice matrice 5.19, saglasno sa submatricama tankozidnog nosača (vidi deo 4.6), glase

$$\mathbf{K}_{NL,uu} = F_{x2}\mathbf{K}_1 \quad (5.20)$$

$$\mathbf{K}_{NL,uv} = -M_{z1}\mathbf{K}_2 + \frac{k_z}{L}(\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4) \quad (5.21)$$

$$\mathbf{K}_{NL,uw} = M_{y1}\mathbf{K}_5 - \frac{k_y}{L}(\mathbf{K}_6 - \mathbf{K}_7) \quad (5.22)$$

$$\mathbf{K}_{NL,vv} = F_{x2}\mathbf{K}_8 \quad (5.23)$$

$$\mathbf{K}_{NL,v\varphi} = M_{y1}\mathbf{K}_9 - \frac{k_y}{L}(\mathbf{K}_{10} + \mathbf{K}_{11}) \quad (5.24)$$

$$\mathbf{K}_{NL,ww} = F_{x2}\mathbf{K}_{12} \quad (5.25)$$

$$\mathbf{K}_{NL,w\varphi} = M_{z1}\mathbf{K}_{20} - \frac{k_z}{L}(\mathbf{K}_{13} + \mathbf{K}_{14}) \quad (5.26)$$

$$\mathbf{K}_{NL,\varphi\varphi} = \alpha_{11}\mathbf{K}_{19} + \frac{\alpha_{12}}{L}\mathbf{K}_{21} \quad (5.27)$$

Matrice $\mathbf{K}_L$ i $\mathbf{K}_{NL}$ zavise od usvojenih interpolacionih funkcija (videti deo 5.1.6) i usvojenog vektora generalisanih pomeranja u čvorovima (videti deo 5.1.1). Vrednosti submatrica matrica $\mathbf{K}_L$ i $\mathbf{K}_{NL}$ date su u prilogu A.

5.1.4 Vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja

Vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja $\mathbf{r}$ jednak je

$$\mathbf{r}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u^T & \mathbf{r}_v^T & \mathbf{r}_w^T & \mathbf{r}_\varphi^T \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

gde je

$$\mathbf{r}_u^T = \begin{bmatrix} F_{x1} & F_{x2} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

$$\mathbf{r}_v^T = \begin{bmatrix} F_{y1} & M_{z1} & F_{y2} & M_{z2} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

$$\mathbf{r}_w^T = \begin{bmatrix} F_{z1} & M_{y1} & F_{z2} & M_{y2} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

$$\mathbf{r}_\varphi^T = \begin{bmatrix} M_{x1} & M_{x2} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Ako se u izraz (4.10) stavi da je $y_D = 0$, $z_D = 0$ i $\omega(s) = 0$ dobija se matrica operator za gredu

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_u & -y\mathbf{N}'_v & -z\mathbf{N}'_w & \\ & \mathbf{N}_v & & -z\mathbf{N}'_\varphi \\ & & \mathbf{N}_w & y\mathbf{N}'_\varphi \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

Komponente vektora linijskog opterećenja su

$$\mathbf{p}^T = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

i date su duž x ose i u pravcima x, y i z osa.

Integral (4.127), vodeći računa o interpolacionim funkcijama (videti deo 5.1.6), svodi se na

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_w \\ \mathbf{r}_\varphi \end{bmatrix} = - \int_L \begin{bmatrix} p_x \mathbf{N}_u^T \\ p_y \mathbf{N}_v^T \\ p_z \mathbf{N}_w^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} dx = L \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T p_x \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{L}{12} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{12} \end{bmatrix}^T p_y \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{L}{12} & \frac{1}{2} & \frac{L}{12} \end{bmatrix}^T p_z \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Komponente vektora $\mathbf{r}$ u obliku pogodnijem za transformaciju iz lokalnog u globalni koordinatni sistem su

$$\mathbf{r}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T & \mathbf{r}_2^T \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

gde je

$$\mathbf{r}_i^T = \begin{bmatrix} F_{x1} & F_{y1} & F_{z1} & M_{x1} & M_{y1} & M_{z1} \end{bmatrix}, i = 1, 2 \quad (5.37)$$

5.1.5 Vektor internih čvornih sila elementa

Da bi se dobio vektor internih čvornih sila, prema izrazu (2.43), potrebna je matrica $\mathbf{B}_L$. Matrica $\mathbf{B}_L$ može da se dobije iz izraza (4.15) za tankozidnu gredu. Pošto je $y_D = 0$, $z_D = 0$ i $\omega(s) = 0$ matrica $\mathbf{B}_L$ glasi

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{N}'_u & -y\mathbf{N}''_v & -z\mathbf{N}''_w & \\ & & & -z\mathbf{N}'_\varphi \\ & & & y\mathbf{N}'_\varphi \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Zamenom izraza (4.24) i (5.38) u izrazu (2.43) dobija se

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\text{int}u} \\ \mathbf{f}_{\text{int}v} \\ \mathbf{f}_{\text{int}w} \\ \mathbf{f}_{\text{int}\varphi} \end{bmatrix} = \int_V \begin{bmatrix} \sigma_x \mathbf{N}'_u{}^T \\ -y\sigma_x \mathbf{N}''_v{}^T \\ -z\sigma_x \mathbf{N}''_w{}^T \\ -[y\tau_{xz} - z\tau_{xy}] \mathbf{N}'_\varphi{}^T \end{bmatrix} dV = \int_L \begin{bmatrix} F_{xe} \mathbf{N}'_u{}^T \\ M_{ze} \mathbf{N}''_v{}^T \\ -M_{ye} \mathbf{N}''_w{}^T \\ M_{xe} \mathbf{N}'_\varphi{}^T \end{bmatrix} dx \quad (5.39)$$

Integraljenjem (5.39) i posle sređivanja, vodeći računa o izrazima za presečne sile (videti deo 4.3), izrazima za sile unutar konačnog elementa (videti deo 5.1.2) i interpolacionim funkcijama (videti do 5.1.6), dobija se

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T F_{x2} \\ \begin{bmatrix} \frac{k_z}{L} & M_{z1} & -\frac{k_z}{L} & M_{z2} \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} -\frac{k_y}{L} & -M_{y1} & \frac{k_y}{L} & M_{y2} \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T M_{x2} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

5.1.6 Matrice interpolacionih funkcije

Interpolacione funkcije su date u obliku *Hermite*-ovih polinoma u bezdimenzionalnim koordinatama gde je $0 \leq \xi \leq 1$ i glase

$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} 1 - \xi & \xi \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

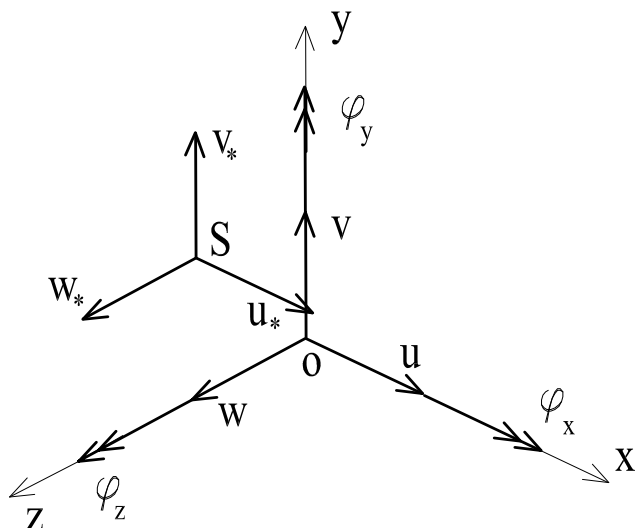
$$\mathbf{N}_v = \begin{bmatrix} 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) & 3\xi^2 - 2\xi^3 & -L(\xi^2 - \xi^3) \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

$$\mathbf{N}_w = \begin{bmatrix} 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & -L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) & 3\xi^2 - 2\xi^3 & L(\xi^2 - \xi^3) \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

$$\mathbf{N}_\varphi = \begin{bmatrix} 1 - \xi & \xi \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

gde je

$$\xi = \frac{x}{L} \quad (5.45)$$



Slika 5.4: Osnovne kinematičke veličine u čvoru grede koja ima unutrašnje čvorove

5.2 Greda sa unutrašnjim čvorovima

5.2.1 Kinematičke veličine i vektor pomeranja

Vektor inkrementalnog pomeranja $\Delta \mathbf{u}_*$ tačke $S(y, z)$ poprečnog preseka može da se opiše sa šest parametra: tri pomeranja $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ i tri obrtanja $\varphi(x)$, $\varphi(y)$, $\varphi(z)$ preseka (slika 5.4)

$$\begin{bmatrix} \Delta u_* \\ \Delta v_* \\ \Delta w_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & z & -y \\ & 1 & & -z & \\ & & 1 & y & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \\ \Delta \varphi_x \\ \Delta \varphi_y \\ \Delta \varphi_z \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

ili u sažetom obliku

$$\Delta \mathbf{u}_* = \mathbf{L} \Delta \mathbf{u} \quad (5.47)$$

gde je

$$\Delta \mathbf{u}_* = \begin{bmatrix} \Delta u_* \\ \Delta v_* \\ \Delta w_* \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

$$\Delta \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \\ \Delta \varphi_x \\ \Delta \varphi_y \\ \Delta \varphi_z \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & & & z & -y \\ & 1 & & -z & \\ & & 1 & y & \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

Vektor parametara pomeranja $\Delta \mathbf{u}$ može da se izrazi u funkciji generalisanih pomeranja čvorova $\mathbf{q}$ (videti deo 5.2.5) i interpolacionih funkcija na sledeći način

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \Delta \mathbf{q} \quad (5.51)$$

gde je

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_u & & & & \\ & \mathbf{N}_v & & & \\ & & \mathbf{N}_w & & \\ & & & \mathbf{N}_{\varphi_x} & \\ & & & & \mathbf{N}_{\varphi_y} \\ & & & & & \mathbf{N}_{\varphi_z} \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

U izrazu (5.52) $\mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v, \mathbf{N}_w, \mathbf{N}_{\varphi_x}, \mathbf{N}_{\varphi_y}, \mathbf{N}_{\varphi_z}$ su matrice interpolacionih funkcija (videti deo 5.2.9). Izraz (5.47) sada glasi

$$\Delta \mathbf{u}_* = \mathbf{A} \Delta \mathbf{q} \quad (5.53)$$

gde je

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_u & & & z \mathbf{N}_{\varphi_y} & -y \mathbf{N}_{\varphi_z} \\ & \mathbf{N}_v & & -z \mathbf{N}_{\varphi_x} & \\ & & \mathbf{N}_w & y \mathbf{N}_{\varphi_x} & \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

5.2.2 Vektori deformacije

Linearni deo inkrementalnog vektora deformacije (2.34) glasi

$$\Delta \mathbf{e} = \mathbf{L}_L \Delta \mathbf{u}_* = \mathbf{L}_L \mathbf{A} \Delta \mathbf{q} = \mathbf{B}_L \Delta \mathbf{q} \quad (5.55)$$

gde je

$$\Delta \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \Delta e_x \\ 2\Delta e_{xy} \\ 2\Delta e_{xz} \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

$$\mathbf{L}_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & & \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \\ \frac{\partial}{\partial z} & & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

$$\mathbf{B}_L = \mathbf{L}_L \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}'_u & & & z \mathbf{N}'_{\varphi_y} & -y \mathbf{N}'_{\varphi_z} \\ & \mathbf{N}'_v & & -z \mathbf{N}'_{\varphi_x} & -\mathbf{N}_{\varphi_z} \\ & & \mathbf{N}'_w & y \mathbf{N}'_{\varphi_x} & \mathbf{N}_{\varphi_y} \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

U izrazu (5.58) $\mathbf{A}$ je dato sa (5.54). Nelinearni deo inkrementalnog vektora deformacije dat izrazom (2.19) u razvijenom obliku glasi

$$\Delta\eta = \begin{bmatrix} \Delta\eta_{xx} \\ 2\Delta\eta_{xy} \\ 2\Delta\eta_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \{(\Delta u_{*,x})^2 + (\Delta v_{*,x})^2 + (\Delta w_{*,x})^2\} \\ (\Delta u_{*,x}\Delta u_{*,y} + \Delta w_{*,x}\Delta w_{*,y}) \\ (\Delta u_{*,x}\Delta u_{*,z} + \Delta v_{*,x}\Delta v_{*,z}) \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

Vodeći računa o (5.59), u izrazu (2.40) datom kao

$$\Delta\mathbf{u}_{*,d} = \mathbf{L}_{NL}\Delta\mathbf{u}_* = \mathbf{L}_{NL}\mathbf{A}\Delta\mathbf{q} = \mathbf{B}_{NL}\Delta\mathbf{q} \quad (5.60)$$

sada imamo da je

$$\Delta\mathbf{u}_{*,d} = \begin{bmatrix} \Delta u_{*,x} \\ \Delta v_{*,x} \\ \Delta w_{*,x} \\ \Delta u_{*,y} \\ \Delta w_{*,y} \\ \Delta u_{*,z} \\ \Delta v_{*,z} \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

$$\mathbf{L}_{NL} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & & & & & & \\ & \frac{\partial}{\partial x} & & & & & \\ & & \frac{\partial}{\partial x} & & & & \\ \frac{\partial}{\partial y} & & & & & & \\ & & & \frac{\partial}{\partial y} & & & \\ \frac{\partial}{\partial z} & & & & \frac{\partial}{\partial y} & & \\ & & & & & \frac{\partial}{\partial z} & \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

$$\mathbf{B}_{NL} = \mathbf{L}_{NL}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}'_u & & & & z\mathbf{N}'_{\varphi_y} & -y\mathbf{N}'_{\varphi_z} \\ & \mathbf{N}'_v & & -z\mathbf{N}'_{\varphi_x} & & \\ & & \mathbf{N}'_w & y\mathbf{N}'_{\varphi_x} & & \\ & & & \mathbf{N}_{\varphi_x} & & -\mathbf{N}_{\varphi_z} \\ & & & & \mathbf{N}_{\varphi_y} & \\ & & & -\mathbf{N}_{\varphi_x} & & \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

5.2.3 Konstitutivna matrica

Konstitutivna matrica za tankozidni nosač otvorenog poprečnog preseka iznosi

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} E & & \\ & G & \\ & & G \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

gde je E Young-ov moduo elastičnosti, a G je moduo klizanja.

5.2.4 Matrica i vektor *Cauchy*-jevih napona

Izraz (2.37) se može napisati u razvijenom obliku kao

$$\sigma_{ij}\delta\Delta\eta_{ij} = \sigma_{xx}\delta\Delta\eta_{xx} + \sigma_{xy}\delta\Delta\eta_{xy} + \sigma_{xz}\delta\Delta\eta_{xz} = \delta\Delta\mathbf{u}_{*,d}^T \sigma \Delta\mathbf{u}_{*,d}^T \quad (5.65)$$

gde je $i, j = x, y, z$. Umesto oznaka σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{xz} dalje u tekstu koristiće se respektivno oznake σ_x , τ_{xy} i τ_{xz} . Koristeći izraz (5.65) i vodeći računa o (5.59) i (5.60) dobija se da je matrica *Cauchy*-jevih napona jednaka

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & & & \tau_{xy} & & \tau_{xz} \\ & \sigma_x & & & & \tau_{xz} \\ & & \sigma_x & & \tau_{xy} & \\ \tau_{xy} & & & \tau_{xy} & & \\ & & & & \tau_{xz} & \\ \tau_{xz} & & & & & \tau_{xz} \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

Vektor *Cauchy*-jevih napona je jednak

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

5.2.5 Vektor generalisanih pomeranja i vektor generalisanih sila

Greda osim dva spoljašnja čvora može da ima više unutrašnjih čvorova, tako da je ukupan broj čvorova grede k (slika 5.5). U čvoru 1 postavljen je lokalni koordinatni sistem $oxyz$ desne orijentacije. Ose y i z poklapaju se sa pravcima glavnih centralnih osa inercije poprečnog preseka. Pretpostavlja se da je broj generalisanih pomeranja u svim čvorovima isti (slika 5.2), a takođe i broj generalisanih sila (slika 5.3). Vektor generalisanih pomeranja u čvorovima grede je

$$\mathbf{q}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_u^T & \mathbf{q}_v^T & \mathbf{q}_w^T & \mathbf{q}_{\varphi_x}^T & \mathbf{q}_{\varphi_y}^T & \mathbf{q}_{\varphi_z}^T \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

gde su

$$\mathbf{q}_u^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_i & \dots & u_k \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

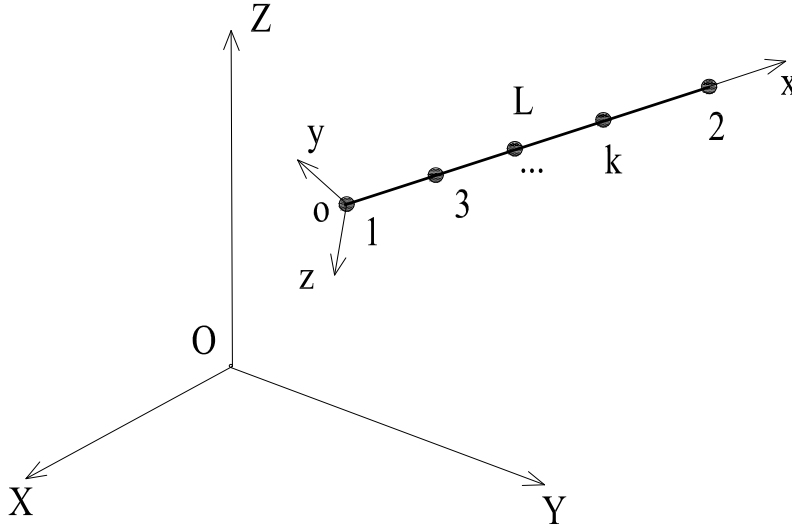
$$\mathbf{q}_v^T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_i & \dots & v_k \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

$$\mathbf{q}_w^T = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_i & \dots & w_k \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

$$\mathbf{q}_{\varphi_x}^T = \begin{bmatrix} \varphi_{x1} & \varphi_{x2} & \varphi_{x3} & \dots & \varphi_{xi} & \dots & \varphi_{xk} \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

$$\mathbf{q}_{\varphi_y}^T = \begin{bmatrix} \varphi_{y1} & \varphi_{y2} & \varphi_{y3} & \dots & \varphi_{yi} & \dots & \varphi_{yk} \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

$$\mathbf{q}_{\varphi_z}^T = \begin{bmatrix} \varphi_{z1} & \varphi_{z2} & \varphi_{z3} & \dots & \varphi_{zi} & \dots & \varphi_{zk} \end{bmatrix} \quad (5.74)$$



Slika 5.5: Greda sa unutrašnjim čvorovima

gde je $i = 1, 2, \dots, k$. Vektor generalisanih pomeranja u čvorovima grede u obliku pogodnijem za transformaciju iz lokalnog u globalni koordinatni sistem glasi

$$\mathbf{q}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T & \mathbf{q}_2^T & \mathbf{q}_3^T & \dots & \mathbf{q}_i^T & \dots & \mathbf{q}_k^T \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

gde je

$$\mathbf{q}_i^T = \begin{bmatrix} u_i & v_i & w_i & \varphi_{xi} & \varphi_{yi} & \varphi_{zi} \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

Vektor generalisanih sila u čvorovima grede je

$$\mathbf{f}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u^T & \mathbf{f}_v^T & \mathbf{f}_w^T & \mathbf{f}_{\varphi_x}^T & \mathbf{f}_{\varphi_y}^T & \mathbf{f}_{\varphi_z}^T \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

gde su

$$\mathbf{f}_u^T = \begin{bmatrix} F_{x1} & F_{x2} & F_{x3} & \dots & F_{xi} & \dots & F_{xk} \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

$$\mathbf{f}_v^T = \begin{bmatrix} F_{y1} & F_{y2} & F_{y3} & \dots & F_{yi} & \dots & F_{yk} \end{bmatrix} \quad (5.79)$$

$$\mathbf{f}_w^T = \begin{bmatrix} F_{z1} & F_{z2} & F_{z3} & \dots & F_{zi} & \dots & F_{zk} \end{bmatrix} \quad (5.80)$$

$$\mathbf{f}_{\varphi_x}^T = \begin{bmatrix} M_{x1} & M_{x2} & M_{x3} & \dots & M_{xi} & \dots & M_{xk} \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

$$\mathbf{f}_{\varphi_y}^T = \begin{bmatrix} M_{y1} & M_{y2} & M_{y3} & \dots & M_{yi} & \dots & M_{yk} \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

$$\mathbf{f}_{\varphi_z}^T = \begin{bmatrix} M_{z1} & M_{z2} & M_{z3} & \dots & M_{zi} & \dots & M_{zk} \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

Vektor generalisanih sila u čvorovima štapa u obliku pogodnijem za transformaciju iz lokalnog u globalni koordinatni sistem glasi

$$\mathbf{f}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^T & \mathbf{f}_2^T & \mathbf{f}_3^T & \dots & \mathbf{f}_i^T & \dots & \mathbf{f}_k^T \end{bmatrix} \quad (5.84)$$

gde je

$$\mathbf{f}_i^T = \begin{bmatrix} F_{xi} & F_{yi} & F_{zi} & M_{xi} & M_{yi} & M_{zi} \end{bmatrix} \quad (5.85)$$

5.2.6 Matrice krutosti

Linearna matrica krutosti određuje se prema izrazu (2.36), vodeći računa o (5.58) i (5.64), i iznosi

$$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{L,uu} & & & & & & \\ & \mathbf{K}_{L,vv} & & & & & \\ & & \mathbf{K}_{L,ww} & & & & \\ & & & \mathbf{K}_{L,\varphi_x\varphi_x} & & & \\ & & & & \mathbf{K}_{L,\varphi_y\varphi_y} & & \\ & & & & & \mathbf{K}_{L,\varphi_z\varphi_z} & \\ & & & & & & \mathbf{K}_{L,v\varphi_z} \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

gde je

$$\mathbf{K}_{L,uu} = AE\mathbf{K}_1 \quad (5.87)$$

$$\mathbf{K}_{L,vv} = AG\mathbf{K}_2 \quad (5.88)$$

$$\mathbf{K}_{L,ww} = AG\mathbf{K}_3 \quad (5.89)$$

$$\mathbf{K}_{L,\varphi_x\varphi_x} = AG(I_{yy} + I_{zz})\mathbf{K}_4 \quad (5.90)$$

$$\mathbf{K}_{L,\varphi_y\varphi_y} = EI_{zz}\mathbf{K}_5 + AG\mathbf{K}_6 \quad (5.91)$$

$$\mathbf{K}_{L,\varphi_z\varphi_z} = EI_{yy}\mathbf{K}_7 + AG\mathbf{K}_8 \quad (5.92)$$

$$\mathbf{K}_{L,v\varphi_z} = -AG\mathbf{K}_{10} \quad (5.93)$$

$$\mathbf{K}_{L,w\varphi_y} = AG\mathbf{K}_9 \quad (5.94)$$

$$\mathbf{K}_1 = \int_L \mathbf{N}_u'^T \mathbf{N}_u' dx \quad (5.95)$$

$$\mathbf{K}_2 = \int_L \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_v' dx \quad (5.96)$$

$$\mathbf{K}_3 = \int_L \mathbf{N}_w'^T \mathbf{N}_w' dx \quad (5.97)$$

$$\mathbf{K}_4 = \int_{mL} \mathbf{N}'_{\varphi_x}{}^T \mathbf{N}'_{\varphi_x} dx \quad (5.98)$$

$$\mathbf{K}_5 = \int_L \mathbf{N}'_{\varphi_y}{}^T \mathbf{N}'_{\varphi_y} dx \quad (5.99)$$

$$\mathbf{K}_6 = \int_L \mathbf{N}_{\varphi_y}^T \mathbf{N}_{\varphi_y} dx \quad (5.100)$$

$$\mathbf{K}_7 = \int_L \mathbf{N}'_{\varphi_z}{}^T \mathbf{N}'_{\varphi_z} dx \quad (5.101)$$

$$\mathbf{K}_8 = \int_L \mathbf{N}_{\varphi_z}^T \mathbf{N}_{\varphi_z} dx \quad (5.102)$$

$$\mathbf{K}_9 = \int_L \mathbf{N}'_w{}^T \mathbf{N}_{\varphi_y} dx \quad (5.103)$$

$$\mathbf{K}_{10} = \int_L \mathbf{N}'_v{}^T \mathbf{N}_{\varphi_z} dx \quad (5.104)$$

Da bi se izbegao fenomen *shear locking*-a i da bi se popravilo rešenje za konačni elemenat, primenjuje se selektivna integracija sa dve tačke za izraze matrice krutosti koji se odnose na smicanje transferzalnim silama ($\mathbf{K}_6$, $\mathbf{K}_8$), dok se za ostale članove primenjuje tačna integracija [52]. Ako se usvoje interpolacione funkcije prema delu (5.2.9), vrednosti ovih matrica su:

$$\mathbf{K}_6 = \mathbf{K}_8 = \frac{L}{9} \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 1 \\ -0.5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (5.105)$$

Nelinearna matrica krutosti određuje se prema izrazu (2.41) uz vođenje računa o izrazima (5.63), i (5.66), kao i o izrazima za sile u elementu (videti deo 4.5). Posle sređivanja, nelinearna matrica krutosti za gredni elemenat iznosi

$$\mathbf{K}_{NL} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{NL,uu} & & & & \mathbf{K}_{NL,u\varphi_y} & \mathbf{K}_{NL,u\varphi_z} \\ & \mathbf{K}_{NL,vv} & & & & \\ & & \mathbf{K}_{NL,ww} & & & \\ & & & \mathbf{K}_{NL,v\varphi_x} & & \\ & & & \mathbf{K}_{NL,w\varphi_x} & & \\ & & & \mathbf{K}_{NL,\varphi_x\varphi_x} & & \\ & & sym & & \mathbf{K}_{NL,\varphi_y\varphi_y} & \mathbf{K}_{NL,\varphi_y\varphi_z} \\ & & & & & \mathbf{K}_{NL,\varphi_z\varphi_z} \end{bmatrix} \quad (5.106)$$

gde je

$$\mathbf{K}_{NL,uu} = F_{x2} \mathbf{K}_1 \quad (5.107)$$

$$\mathbf{K}_{NL,vv} = F_{x2}\mathbf{K}_2 \quad (5.108)$$

$$\mathbf{K}_{NL,ww} = F_{x2}\mathbf{K}_3 \quad (5.109)$$

$$\mathbf{K}_{NL,\varphi_x\varphi_x} = \frac{(I_{yy} + I_{zz})}{A} F_{x2}\mathbf{K}_4 \quad (5.110)$$

$$\mathbf{K}_{L,\varphi_y\varphi_y} = \frac{I_{zz}}{A} F_{x2}\mathbf{K}_5 \quad (5.111)$$

$$\mathbf{K}_{NL,\varphi_z\varphi_z} = \frac{I_{yy}}{A} F_{x2}\mathbf{K}_7 \quad (5.112)$$

$$\mathbf{K}_{NL,u\varphi_y} = \frac{k_y}{L}(\mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{13}) - M_{y1}\mathbf{K}_{12} \quad (5.113)$$

$$\mathbf{K}_{NL,u\varphi_z} = \frac{k_z}{L}(\mathbf{K}_{14} + \mathbf{K}_{16}) - M_{z1}\mathbf{K}_{15} \quad (5.114)$$

$$\mathbf{K}_{NL,v\varphi_x} = \frac{k_y}{L}(\mathbf{K}_{17} + \mathbf{K}_{19}) - M_{y1}\mathbf{K}_{18} \quad (5.115)$$

$$\mathbf{K}_{NL,w\varphi_x} = -\frac{k_z}{L}(\mathbf{K}_{20} + \mathbf{K}_{22}) + M_{z1}\mathbf{K}_{21} \quad (5.116)$$

$$\mathbf{K}_{NL,\varphi_y\varphi_z} = -M_{x2}(\mathbf{K}_{23} - \mathbf{K}_{24}) \quad (5.117)$$

$$\mathbf{K}_{11} = \int_L \mathbf{N}_u'^T \mathbf{N}_{\varphi_y} dx \quad (5.118)$$

$$\mathbf{K}_{12} = \int_L \mathbf{N}_u'^T \mathbf{N}_{\varphi_y}' dx \quad (5.119)$$

$$\mathbf{K}_{13} = \int_L x \mathbf{N}_u'^T \mathbf{N}_{\varphi_y}' dx \quad (5.120)$$

$$\mathbf{K}_{14} = \int_L \mathbf{N}_u'^T \mathbf{N}_{\varphi_z} dx \quad (5.121)$$

$$\mathbf{K}_{15} = \int_L \mathbf{N}_u'^T \mathbf{N}_{\varphi_z}' dx \quad (5.122)$$

$$\mathbf{K}_{16} = \int_L x \mathbf{N}_u'^T \mathbf{N}_{\varphi_z}' dx \quad (5.123)$$

$$\mathbf{K}_{17} = \int_L \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_{\varphi_x} dx \quad (5.124)$$

$$\mathbf{K}_{18} = \int_L \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}'_{\varphi_x} dx \quad (5.125)$$

$$\mathbf{K}_{19} = \int_L x \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}'_{\varphi_x} dx \quad (5.126)$$

$$\mathbf{K}_{20} = \int_L \mathbf{N}_w'^T \mathbf{N}'_{\varphi_x} dx \quad (5.127)$$

$$\mathbf{K}_{21} = \int_L \mathbf{N}_w'^T \mathbf{N}'_{\varphi_x} dx \quad (5.128)$$

$$\mathbf{K}_{22} = \int_L x \mathbf{N}_w'^T \mathbf{N}'_{\varphi_x} dx \quad (5.129)$$

$$\mathbf{K}_{23} = \int_L \mathbf{N}_{\varphi_y}^T \mathbf{N}'_{\varphi_z} dx \quad (5.130)$$

$$\mathbf{K}_{24} = \int_L \mathbf{N}_{\varphi_y}'^T \mathbf{N}_{\varphi_z} dx \quad (5.131)$$

Vrednosti integrala kod submatrica matrica krutosti računaju se numeričkim putem (videti deo 8.4).

5.2.7 Vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja

Vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja $\mathbf{r}$ jednak je

$$\mathbf{r}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u^T & \mathbf{r}_v^T & \mathbf{r}_w^T & \mathbf{r}_{\varphi_x}^T & \mathbf{r}_{\varphi_y}^T & \mathbf{r}_{\varphi_z}^T \end{bmatrix} \quad (5.132)$$

gde je

$$\mathbf{r}_u^T = \begin{bmatrix} \dots & F_{xi} & \dots \end{bmatrix} \quad (5.133)$$

$$\mathbf{r}_v^T = \begin{bmatrix} \dots & F_{yi} & M_{zi} & \dots \end{bmatrix} \quad (5.134)$$

$$\mathbf{r}_w^T = \begin{bmatrix} \dots & F_{zi} & M_{yi} & \dots \end{bmatrix} \quad (5.135)$$

$$\mathbf{r}_{\varphi}^T = \begin{bmatrix} \dots & M_{xi} & \dots \end{bmatrix} \quad (5.136)$$

gde je $i = 1, 2, 3, \dots, k$, a k je broj čvorova.

Komponente vektora linijskog opterećenja $\mathbf{p}$ u izrazu (4.127) su

$$\mathbf{p}^T = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix} \quad (5.137)$$

i date su duž x ose i u pravcima x, y i z osa.

Integral (4.127), vodeći računa o interpolacionim funkcijama (videti deo 5.2.9) i (5.54) svodi se na

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_w \\ \mathbf{r}_{\varphi_x} \\ \mathbf{r}_{\varphi_y} \\ \mathbf{r}_{\varphi_z} \end{bmatrix} = - \int_L \begin{bmatrix} p_x \mathbf{N}_u^T \\ p_y \mathbf{N}_v^T \\ p_z \mathbf{N}_w^T \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} dx \quad (5.138)$$

Komponente vektora $\mathbf{r}$ nalazimo postupkom numeričke integracije (poglavljju 8.4).

Komponente vektora $\mathbf{r}$ u obliku pogodnijem za transformaciju iz lokalnog u globalni koordinatni sistem su date

$$\mathbf{r}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T & \mathbf{r}_2^T & \mathbf{r}_3^T & \dots & \mathbf{r}_i^T & \dots & \mathbf{r}_k^T \end{bmatrix} \quad (5.139)$$

gde je

$$\mathbf{r}_i^T = \begin{bmatrix} F_{x1} & F_{y1} & F_{z1} & M_{x1} & M_{y1} & M_{z1} \end{bmatrix}, i = 1, 2, 3, \dots, k \quad (5.140)$$

5.2.8 Vektor internih čvornih sila

Vektor internih čvornih sila nalazi se iz izraza (2.43). Vodeći računa o izrazima (5.58) i (5.67) i silama unutar jednog konačnog elementa (videti do 4.5), vektor internih čvornih sila iznosi

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \begin{bmatrix} F_{x2} \int_L \mathbf{N}_u'^T dx \\ -\frac{k_z}{L} \int_L \mathbf{N}_v'^T dx \\ \frac{k_y}{L} \int_L \mathbf{N}_w'^T dx \\ 2M_{x2} \int_L \mathbf{N}_{\varphi_x}'^T dx \\ -M_{y1} \int_L \mathbf{N}_{\varphi_y}'^T dx + \frac{k_y}{L} \left(\int_L x \mathbf{N}_{\varphi_y}'^T dx + \int_L \mathbf{N}_{\varphi_y}^T dx \right) \\ -M_{z1} \int_L \mathbf{N}_{\varphi_z}'^T dx + \frac{k_z}{L} \left(\int_L x \mathbf{N}_{\varphi_z}'^T dx + \int_L \mathbf{N}_{\varphi_z}^T dx \right) \end{bmatrix} \quad (5.141)$$

Vrednosti komponenti u izrazu (5.141) nalaze se postupkom numeričke integracije (poglavljju 8.4).

5.2.9 Matrica interpolacionih funkcija

Posmatraće se elemenat sa tri čvora. Kao interpolacione funkcije usvajaju se *Lagrange*-ovi polinomi drugog reda gde je koordinata $0 \leq x \leq L$. Da bi se polinomi izrazili preko bezdimenzionalne koordinate $-1 \leq \xi \leq 1$ koristi se relacija

$$x = \frac{L}{2} (1 + \xi) \quad (5.142)$$

Za krivolinijski elemenat sa tri čvora, interpolacione funkcije glase

$$N_1 = \frac{1}{2} (\xi^2 - \xi) \quad (5.143)$$

$$N_2 = \frac{\xi}{2} (1 + \xi) \quad (5.144)$$

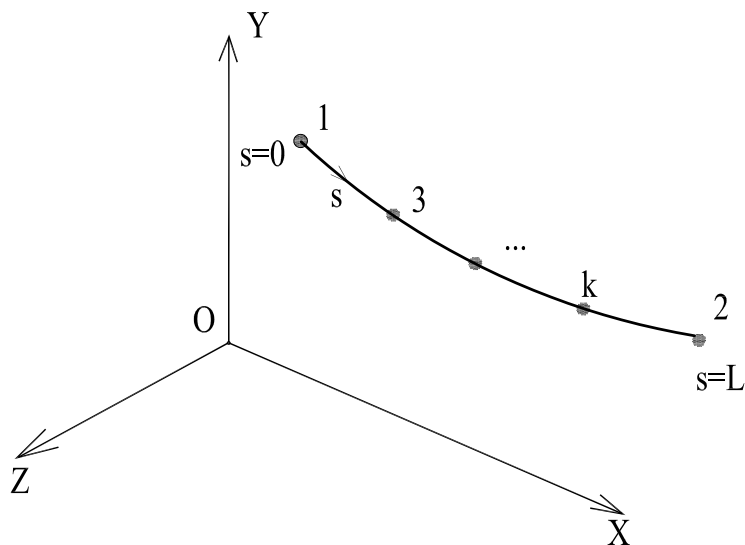
$$N_3 = \frac{\xi}{2} (1 + \xi) \quad (5.145)$$

Matrica kolona interpolacionih funkcija glasi

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \quad (5.146)$$

gde je

$$i = u, v, w, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z \quad (5.147)$$



Slika 5.6: Prosti štap sa unutrašnjim čvorovima

5.3 Prosti štap sa unutrašnjim čvorovima

5.3.1 Osnovne pretpostavke

Prosti štap sa unutrašnjim čvorovima može da se upotrebi za modelovanje kablova, ako su zadovoljene sledeće pretpostavke:

1. Materijal od koga je element napravljen je idealno elastičan, homogen i izotropan, u skladu sa *Hooke*-ovim zakonom.
2. Elemenat je idealno fleksibilan i odgovarajuće presečne sile su sile zatezanja koje imaju pravac tangente na luk elementa.
3. Normalni naponi su konstantni u poprečnom preseku, a površina poprečnog preseka ostaje konstantna tokom deformacije elementa.
4. Pomeranja elementa mogu da budu velika, ali su deformacije male.

5.3.2 Kinematičke veličine i vektor pomeranja

Dat je prosti štap sa većim brojem unutrašnjih čvorova u globalnom koordinatnom sistemu (slika 5.6). Neka je

$${}^m\mathbf{X}^T(s) = \begin{bmatrix} {}^mX(s) & {}^mY(s) & {}^mZ(s) \end{bmatrix} \quad (5.148)$$

vektor položaja proizvoljne tačke na osi štapa u konfiguraciji mC u globalnom koordinatnom sistemu, a s lučna koordinata grede. Inkrementalno pomeranje proizvoljne tačke na osi grede $\Delta\mathbf{U}$ u globalnom koordinatnom sistemu iznosi

$$\Delta\mathbf{U} = {}^{m+1}\mathbf{X} - {}^m\mathbf{X} \quad (5.149)$$

$$\Delta \mathbf{U}^T(s) = \begin{bmatrix} \Delta U(s) & \Delta V(s) & \Delta W(s) \end{bmatrix} \quad (5.150)$$

gde su ΔU , ΔV , ΔW inkrementalna pomeranja u odnosu na globalni koordinatni sistem. Ovo inkrementalno pomeranje može da bude izraženo preko $\Delta \mathbf{q}$ (videti deo 5.3.6) kao

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{N} \Delta \mathbf{q} \quad (5.151)$$

gde je $\mathbf{N}$ matrica interpolacionih funkcija (videti deo 5.3.10).

5.3.3 Vektori deformacija

Linearni deo inkrementalnog vektora deformacije u pravcu ose elementa (slika 5.6) iznosi

$$\Delta \mathbf{e} = [\Delta e_s] \quad (5.152)$$

gde je

$$\Delta e_s = \frac{d^m \mathbf{X}^T}{m ds} \frac{d(\Delta \mathbf{U})}{m ds} \quad (5.153)$$

Pošto je usvojena izoparametarska formulacija konačnih elemenata, vodeći računa o izrazima u dodatku C, izraz (5.152) sada može da se prikaže kao

$$\Delta e_s = \left(\frac{d^m \mathbf{N}}{m ds} {}^m \mathbf{a} \right)^T \left(\frac{d^m \mathbf{N}}{m ds} \right) \Delta \mathbf{q} = \frac{1}{|{}^m \mathbf{J}|^2} {}^m \mathbf{a}^T \mathbf{N}_{,\xi}^T \mathbf{N}_{,\xi} \Delta \mathbf{q} = {}^m \mathbf{B}_L \Delta \mathbf{q} \quad (5.154)$$

U izrazu (5.154)

$${}^m \mathbf{B}_L = \frac{1}{|{}^m \mathbf{J}|^2} {}^m \mathbf{a}^T \mathbf{N}_{,\xi}^T \mathbf{N}_{,\xi} \quad (5.155)$$

je linearna matrica transformacije i

$${}^m \mathbf{s}(\xi) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \dots & N_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^m s_1 \\ {}^m s_2 \\ \vdots \\ {}^m s_k \end{bmatrix} \quad (5.156)$$

$${}^m \mathbf{J} = {}^m \mathbf{J}(\xi) = \frac{{}^m \partial s(\xi)}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & \dots & N_{k,\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^m s_1 \\ {}^m s_2 \\ \vdots \\ {}^m s_k \end{bmatrix} \quad (5.157)$$

Nelinearni deo inkrementalnog vektora deformacija iznosi

$$\Delta \eta = [\Delta \eta_{ss}] \quad (5.158)$$

gde je

$$\Delta \eta_{ss} = \frac{1}{2} \frac{d(\Delta \mathbf{U}^T)}{m ds} \frac{d(\Delta \mathbf{U})}{m ds} \quad (5.159)$$

Na osnovu izoparametarske formulacije elementa i imajući u vidu izraze u dodatku C, izraz (5.159) glasi

$$\Delta\eta_{ss} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{N}}{ds} \Delta\mathbf{q} \right)^T \left(\frac{d\mathbf{N}}{ds} \Delta\mathbf{q} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{|{}^m\mathbf{J}|} \mathbf{N}_{,\xi} \Delta\mathbf{q} \right)^T \left(\frac{1}{|{}^m\mathbf{J}|} \mathbf{N}_{,\xi} \Delta\mathbf{q} \right) \quad (5.160)$$

Izraz (5.160) posle sređivanja iznosi

$$\Delta\eta_{ss} = \frac{1}{2} \Delta\mathbf{q}^T {}^m\mathbf{B}_{NL}^T {}^m\mathbf{B}_{NL} \Delta\mathbf{q} \quad (5.161)$$

gde je

$${}^m\mathbf{B}_{NL} = \frac{1}{|{}^m\mathbf{J}|} \mathbf{N}_{,\xi} \quad (5.162)$$

nelinearna matrica transformacije.

5.3.4 Konstitutivna matrica

Konstitutivna matrica jednaka je

$$\mathbf{D} = [E] \quad (5.163)$$

5.3.5 Matrica i vektor *Cauchy*-jevih napona

Matrica *Cauchy*-jevih napona jednaka je

$${}^m\sigma = \begin{bmatrix} {}^m\sigma_s & & \\ & {}^m\sigma_s & \\ & & {}^m\sigma_s \end{bmatrix} \quad (5.164)$$

a vektor *Cauchy*-jevih napona jednak je

$${}^m\hat{\sigma} = [{}^m\sigma_s] \quad (5.165)$$

Normalni naponi u prostom štapu

Za prost štap koji je opterećen raspodeljenim opterećenjem normalna sila u elementu je kontinualno promenljiva. Ako je usvojena pretpostavka da je sila zatezanja u jednom konačnom elementu konstantna, onda se osrednjena vrednost normalnog napona može da prikaže kao

$${}^m\sigma_s = \frac{1}{mL} \int_{mL} \sigma_s ds = \frac{1}{mL} \int_{\xi} \sigma_s |{}^m\mathbf{J}| d\xi \quad (5.166)$$

Imajući u vidu inkrementalan pristup analizi, od interesa je da se odredi inkrement normalnog napona usled prelaska elementa iz poznate trenutne konfiguracije mC u nepoznatu narednu konfiguraciju ${}^{m+1}C$. To je inkrementalni normalni napon

$$\Delta\sigma_s = E\Delta e_s \quad (5.167)$$

gde je uzet u obzir samo linearni deo inkrementalne dilatacije. Kako je inkrementalna dilatacija data sa Δe_s , to je osrednjeni inkrementalni normalni napon jednak

$$\Delta \sigma_s = \frac{E}{2} \int_{m_L} \Delta e_s dx \quad (5.168)$$

Imajući u vidu izraz (5.154), izraz (5.168) postaje

$$\Delta \sigma_s = \frac{E}{2} \int_{\xi} \Delta e_s |^m \mathbf{J}| d\xi = \frac{E}{2} \int_{\xi} {}^m \mathbf{B}_L |^m \mathbf{J}| d\xi \Delta \mathbf{q} \quad (5.169)$$

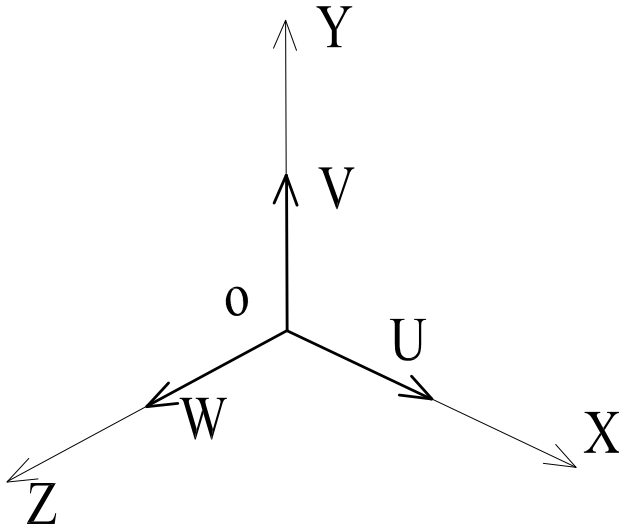
Relacijom je dat samo inkrement normalnog napona u štapu. Ukupna normalni napon se dobija u obliku

$${}^m \sigma_s = {}^{m-1} \sigma_s + \Delta \sigma_s \quad (5.170)$$

Za $m = 1$, imamo ${}^0 \sigma_s = \sigma_0$ gde je σ_0 početni napon zatezanja.

5.3.6 Vektor generalisanih pomeranja i vektor generalisanih sila

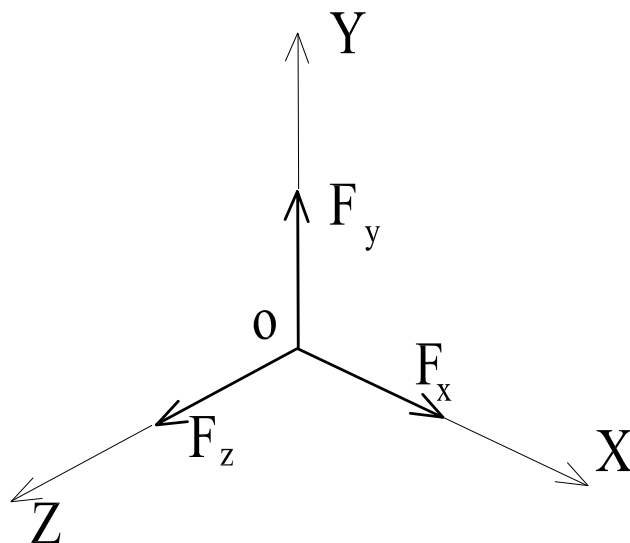
Štap osim dva spoljašnja čvora može da ima više unutrašnjih čvorova, tako da je ukupan broj čvorova štapa k (slika 5.6). Štap je zadat u globalnom koordinatnom sistemu $OXYZ$ desne orijentacije. Lučna koordinata s štapa poklapa se sa težišnom linijom poprečnog preseka. Pretpostavlja se da je broj generalisanih pomeranja u svim čvorovima isti (slika 5.7), a takođe i broj generalisanih sila (slika 5.8). Vektor generalisanih pome-



Slika 5.7: Generalisana pomeranja u čvoru štapa

ranja u čvorovima štapa obeležiće se sa

$$\mathbf{q}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T & \dots & \mathbf{q}_j^T & \dots & \mathbf{q}_k^T \end{bmatrix}, j = 1, 2, \dots, k \quad (5.171)$$



Slika 5.8: Generalisane sile u čvoru štapa

gde je

$$\mathbf{q}_j^T = \begin{bmatrix} U_j & V_j & W_j \end{bmatrix} \quad (5.172)$$

Vektor generalisanih sila u čvorovima glasi

$$\mathbf{f}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^T & \dots & \mathbf{f}_j^T & \dots & \mathbf{f}_k^T \end{bmatrix}, j = 1, 2, \dots, k \quad (5.173)$$

gde je

$$\mathbf{f}_j^T = \begin{bmatrix} F_{xj} & F_{yj} & F_{zj} \end{bmatrix} \quad (5.174)$$

5.3.7 Matrice krutosti

Linearna matrica krutosti dobija se iz izraza (2.36), vodeći računa o izrazu (5.155) i svodi se na sumu

$${}^m\mathbf{K}_L = EA \int_{\xi} {}^m\mathbf{B}_L^T(\xi) {}^m\mathbf{B}_L(\xi) |{}^m\mathbf{J}(\xi)| d\xi = EA \sum_{i=1}^{nip} \left({}^m\mathbf{B}_L^T(\xi_i) {}^m\mathbf{B}_L(\xi_i) |{}^m\mathbf{J}(\xi_i)| \right) w_i \quad (5.175)$$

gde je nip broj integracionih tačaka, a w_i su koeficijenti numeričke integracije.

Nelinearna matrica krutosti dobija se iz izraza (2.41), a vodeći računa o izrazima (5.162) i (5.164) i svodi se na sumu

$${}^m\mathbf{K}_{NL} = A \int_{\xi} {}^m\mathbf{B}_{NL}^T \sigma_m {}^m\mathbf{B}_{NL} |{}^m\mathbf{J}| d\xi = {}^mT \sum_{i=1}^{nip} \left({}^m\mathbf{B}_{NL}^T(\xi_i) {}^m\mathbf{B}_{NL}(\xi_i) |{}^m\mathbf{J}(\xi_i)| \right) w_i \quad (5.176)$$

gde je

$${}^mT = A {}^m\sigma_s \quad (5.177)$$

Određivanje matrica krutosti radi se postupkom numeričke integracije, koji je dat u delu 8.4.

5.3.8 Vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja

Vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja je

$${}^{m+1}\mathbf{r} = \int_{\xi} \mathbf{N}_0^{Tm+1} \mathbf{p} |{}^m\mathbf{J}| d\xi = \sum_{i=1}^{nip} \left(\mathbf{N}^T(\xi_i)_0^{m+1} \mathbf{p}(\xi_i) |{}^m\mathbf{J}(\xi_i)| \right) w_i \quad (5.178)$$

Komponente vektora $\mathbf{r}$ u globalnom koordinatom sistemu su date kao

$${}^{m+1}\mathbf{r}^T = \begin{bmatrix} {}^{m+1}\mathbf{r}_1^T & \dots & {}^{m+1}\mathbf{r}_j^T & \dots & {}^{m+1}\mathbf{r}_k^T \end{bmatrix} \quad (5.179)$$

gde je

$${}^{m+1}\mathbf{r}_j^T = \begin{bmatrix} {}^{m+1}F_{xj} & {}^{m+1}F_{yj} & {}^{m+1}F_{zj} \end{bmatrix} \quad (5.180)$$

Komponente vektora $\mathbf{p}$ date su duž srednje linije poprečnog preseka i u pravcima osa globalnog koordinatnog sistema i iznose

$$\mathbf{p}^T = \begin{bmatrix} p_X & p_Y & p_Z \end{bmatrix} \quad (5.181)$$

Određivanje komponenti vektora $\mathbf{r}$ radi se postupkom numeričke integracije koji je dat u delu 8.4.

5.3.9 Vektor internih čvornih sila

Vektor internih čvornih sila računamo prema izrazu (2.43). Vodeći računa o izrazima (5.155) i (5.165) imamo

$${}^m\mathbf{f}_{\text{int}} = A \int_{\xi} {}^m\mathbf{B}_L^T \hat{\sigma} |{}^m\mathbf{J}| d\xi = {}^mT \sum_{i=1}^{nip} \left({}^m\mathbf{B}_L^T(\xi_i) |{}^m\mathbf{J}(\xi_i)| \right) w_i \quad (5.182)$$

Određivanje vektora internih čvornih sila radi se postupkom numeričke integracije koji je dat u poglavlju 8.4.

5.3.10 Matrica interpolacionih funkcija

Matrica interpolacionih funkcija glasi

$$\mathbf{N}(\xi) = \begin{bmatrix} N_1(\xi) & \dots & N_j(\xi) & \dots & N_k(\xi) \\ & N_1(\xi) & \dots & N_j(\xi) & \dots & N_k(\xi) \\ & & N_1(\xi) & \dots & N_j(\xi) & \dots & N_k(\xi) \end{bmatrix} \quad (5.183)$$

gde su $N_j(\xi)$ interpolacione funkcije za generalisana pomeranja u čvoru j elementa.

Kao interpolacione funkcije usvajaju se *Lagrange*-ovi polinomi drugog reda kod kojih je $-1 \leq \xi \leq 1$.

Interpolacione funkcije za elemenat sa tri čvora su:

$$N_1 = \frac{1}{2} (\xi^2 - \xi) \quad (5.184)$$

$$N_2 = \frac{\xi}{2} (1 + \xi) \quad (5.185)$$

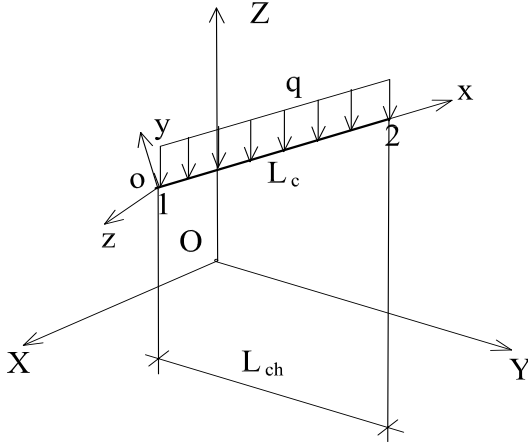
$$N_3 = \frac{\xi}{2} (1 + \xi) \quad (5.186)$$

Izraz za *Jacobian* matricu glasi

$${}^m\mathbf{J} = N_{2,\xi} {}^m l + N_{3,\xi} {}^m s_3 \quad (5.187)$$

5.4 Prosti štap sa ekvivalentnim modulom elastičnosti

Prosti štap, sa ekvivalentnim modulom elastičnosti, upotrebljava se za modelovanje kablova. Preko ekvivalentnog modula elastičnosti, u proračun se uvodi efekat ugiba kabla. Na taj način aksijalna krutost pravolinijskog elementa postaje ekvivalentna aksijalnoj krutosti aktuelnog krivog kabla (slika 5.9). Ekvivalentni moduo elastičnosti prvi je uveo *Ernst*. Pri proračunu krutosti štapa, umesto *Young*-ovog modula elastičnosti, koristi se



Slika 5.9: Prost štap sa ekvivalentnim modulom elastičnosti

ekvivalentni moduo elastičnosti [12, 14, 9]

$$E_{eq} = \frac{E}{1 + \frac{(q^0 L_{ch})^2}{12T^3} AE} \quad (5.188)$$

- q - Sopstvena težina po jedinici dužine štapa u pravcu Z ose globalnog koordinatnog sistema
- ${}^0L_{ch}$ - Dužina horizontalne projekcije nedeformisanog štapa na ravan XOY
- E - *Young*-ov moduo elastičnosti
- A - Površina poprečnog preseka štapa
- T - Sila zatezanja u štapu

Kada je sila zatezanja u štapu T mala [12]

$$E_{eq} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{E}{1 + \frac{(q^0 L_{ch})^2}{12T^3} AE} = 0 \quad (5.189)$$

a njemu odgovarajuće izduženje štapa je

$$\Delta L = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{T^0 L_c}{E_{eq} A} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{T^0 L_c}{EA} \left[1 + \frac{(q^0 L_{ch})^2}{12T^3} AE \right] = \infty \quad (5.190)$$

gde je 0L_c dužina nedeformisanog štapa. Kada je sila zatezanja u štapu T velika

$$E_{eq} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E}{1 + \frac{(q^0 L_{ch})^2}{12T^3} AE} = E \quad (5.191)$$

a njemu odgovarajuće izduženje štapa je

$$\Delta L = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T^0 L_c}{E_{eq} A} = \infty \quad (5.192)$$

Najmanja vrednost sile zatezanja u štapu da bi važila jednačina (5.188) nalazi se iz

$$\frac{d\Delta L}{dT} = \frac{d}{dT} \left[\frac{T^0 L_c}{EA} \left(1 + \frac{(q^0 L_{ch})^2}{12T^3} AE \right) \right] = 0 \quad (5.193)$$

i iznosi

$$T = \sqrt[3]{\frac{(q^0 L_{ch})^2}{6} EA} \quad (5.194)$$

Vrednosti (5.194) odgovara ekvivalentni moduo elastičnosti

$$E_{eq} = \frac{2}{3} E \quad (5.195)$$

Submatrica linearne matrice krutosti u lokalnom koordinatnom sistemu iznosi

$$\mathbf{k}_L = \frac{AE_{eq}}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.196)$$

Submatrica nelinearne matrice krutosti u lokalnom koordinatnom sistemu iznosi

$$\mathbf{k}_{NL} = \frac{T}{L} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (5.197)$$

Linearna matrica krutosti u lokalnom koordinatnom sistemu je

$$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_L & -\mathbf{k}_L \\ -\mathbf{k}_L & \mathbf{k}_L \end{bmatrix} \quad (5.198)$$

Nelinearna matrica krutosti u lokalnom koordinatnom sistemu je

$$\mathbf{K}_{NL} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{NL} & -\mathbf{k}_{NL} \\ -\mathbf{k}_{NL} & \mathbf{k}_{NL} \end{bmatrix} \quad (5.199)$$

Tangentna matrica krutosti sada glasi

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NL} \quad (5.200)$$

Za kablove gde je $L_c > L_0$, sila zatezanja u kablu je data je izrazom

$$T = AE \frac{L_c - L_0}{L_c} \quad (5.201)$$

Za kablove kod kojih je $L_c \leq L_0$ izraz (5.201) daje nulu ili silu pritiska.

Glava 6

Postupci transformacije matrica i vektora

6.1 Matrice transformacije

6.1.1 Uvod

Ako je

1. Element dat u lokalnom koordinatnom sistemu
2. Sistemna linija poprečnog preseka elementa se ne poklapa sa težišnom linijom

matrica transformacije $\mathbf{T}$ elementa je proizvod dve matrice

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_T \mathbf{T}_M \quad (6.1)$$

gde je $\mathbf{T}_T$ matrica transformacije iz globalnog koordinatnog sistema u lokalni koordinatni sistem, a $\mathbf{T}_M$ matrica transformacije uticaja sa težišne linije na sistemnu liniju preseka.

U opštem slučaju, matrica transformacije $\mathbf{T}_T$ elementa sa n spoljašnjih čvorova je oblika

$$\mathbf{T}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{c,1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{T}_{c,i} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \mathbf{T}_{c,n} \end{bmatrix}, i = 1, \dots, n \quad (6.2)$$

gde je $\mathbf{T}_{c,i}$ je matrica transformacije u i -tom čvoru elementa. Imamo da je

1. Za gredni nosač

$$\mathbf{T}_{c,i} = \begin{bmatrix} \Lambda & \\ & \Lambda \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

2. Za tankozidni nosač

$$\mathbf{T}_{c,i} = \begin{bmatrix} \Lambda & & \\ & \Lambda & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

3. Za prosti štap

$$\mathbf{T}_{c,i} = [\Lambda] \quad (6.5)$$

4. Za konačne elemente izvedene iz analitičkih izraza za lančanicu

$$\mathbf{T}_{c,i} = [\Lambda] \quad (6.6)$$

U gornjim izrazima Λ označava matricu rotacije. Vrednost matrice rotacije je data u delu [6.1.2.](#)

6.1.2 Matrica rotacije iz globalnog u lokalni koordinatni sistem

Za štap u lokalnom koordinatnom sistemu xyz orijentacija ose štapa u globalnom koordinatnom sistemu $OXYZ$ određena je kosinusima pravaca

$$\lambda = \cos(X, x) = \frac{X_2 - X_1}{L} \quad (6.7)$$

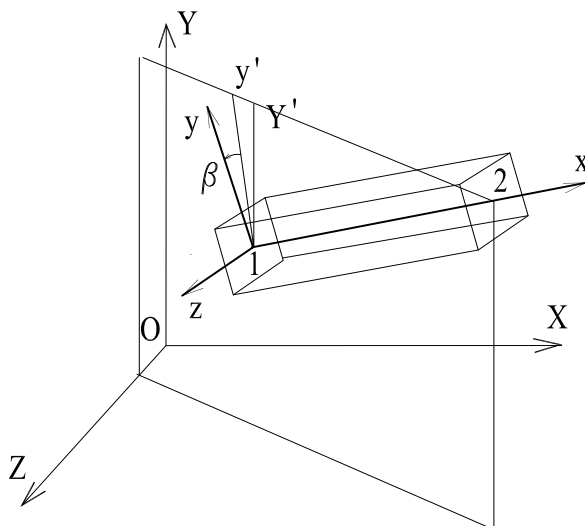
$$\mu = \cos(Y, x) = \frac{Y_2 - Y_1}{L} \quad (6.8)$$

$$\nu = \cos(Z, x) = \frac{Z_2 - Z_1}{L} \quad (6.9)$$

$$L = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2} \quad (6.10)$$

X_i, Y_i i Z_i , $i = 1, 2$ su koordinate čvorova 1 i 2 elementa u globalnom koordinatnom sistemu. 2.

Da se postigne potpuna orijentacija lokalnih koordinatnih osa u globalnom koordinatnom sistemu, potrebno je poznavati i ugao β . Kosinusi pravaca određuju samo položaj ose grede, a β položaj glavnih osa inercije poprečnog preska u ravni upravno na osu x (slika 6.1).



Slika 6.1: Osa x grede nije paralelna sa Y osom globalnog koordinatnog sistema

Da bi se definisala matrica rotacije Λ globalnog koordinatnog sistema u lokalni koordinatni sistem u prostoru, koristiće se sukcesivne ravne rotacije. Redosled ravnih rotacija nije jednoznačan i znatno utiče na proračun elemenata rotacije i ugla β . Razlikuju se sledeći tipovi rotacija [67]:

1. Rotacija Y - Z - X

$$\Lambda_Y = \Lambda_{\beta Y} \Lambda_\gamma \Lambda_\alpha \quad (6.11)$$

gde je

$$\mathbf{\Lambda}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

$$\mathbf{\Lambda}_\gamma = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

$$\mathbf{\Lambda}_{\beta_Y} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \cos \beta_Y & \sin \beta_Y & \\ -\sin \beta_Y & \cos \beta_Y & \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

i

$$\sin \alpha = \frac{\nu}{\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}} \quad (6.15)$$

$$\cos \alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}} \quad (6.16)$$

$$\sin \gamma = \mu \quad (6.17)$$

$$\cos \gamma = \sqrt{\lambda^2 + \nu^2} \quad (6.18)$$

2. Rotacija Z-Y-X

$$\mathbf{\Lambda}_Z = \mathbf{\Lambda}_{\beta_Z} \mathbf{\Lambda}_\varsigma \mathbf{\Lambda}_\theta \quad (6.19)$$

gde je

$$\mathbf{\Lambda}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & \\ -\sin \theta & \cos \theta & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

$$\mathbf{\Lambda}_\varsigma = \begin{bmatrix} \cos \varsigma & \sin \varsigma & \\ & 1 & \\ -\sin \varsigma & \cos \varsigma & \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

$$\mathbf{\Lambda}_{\beta_Z} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \cos \beta_Z & \sin \beta_Z & \\ -\sin \beta_Z & \cos \beta_Z & \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

gde je

$$\sin \theta = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \quad (6.23)$$

$$\cos \theta = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \quad (6.24)$$

$$\sin \varsigma = \nu \quad (6.25)$$

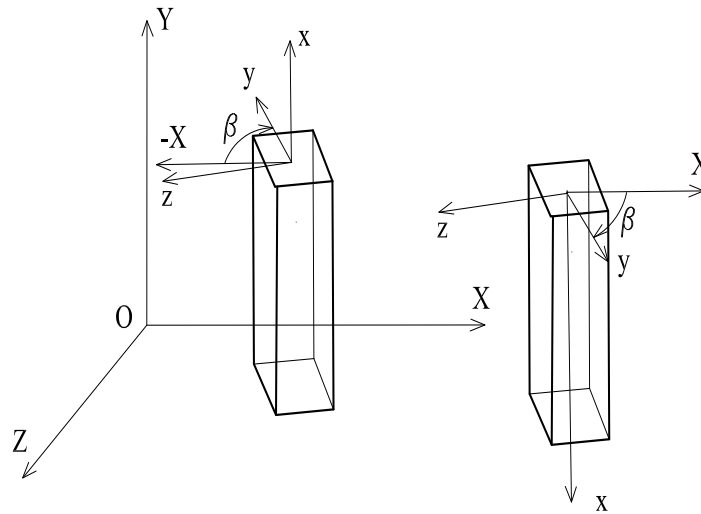
$$\cos \varsigma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \quad (6.26)$$

Uglovi rotacije β_Y i β_Z oko ose x nisu uvek isti. Zbog toga je potrebno znati koji je od ta dva ugla onaj koji je potreban za izračunavanje elemenata matrice rotacije.

Ako je osa x elementa paralelna sa osom Y globalnog koordinatnog sistema, tada je $\lambda = \nu = 0$ (slika 6.2). Mogu da se uoče dva slučaja:

1. Ako je osa x istog smera kao osa Y , β je ugao između ose $-X$ i ose y .
2. Ako je osa x usmerena u suprotnom smeru od ose Y , β je ugao između ose $+X$ i ose y .

U tim slučajevima se upotrebljava rotacija Z - Y - X . Ugao β je jednak uglu β_Z .



Slika 6.2: Osa x grede paralelna sa Y osom globalnog koordinatnog sistema

Ako je osa elementa x paralelna sa osom Z globalnog koordinatnog sistema, tada je $\lambda = \mu = 0$. U tom slučaju upotrebljava se rotacija Y - Z - X . Ugao β je jednak uglu β_Y .

Usled dejstva opterećenja dolazi pomeranja čvorova elementa i promene ugla β . Nove vrednosti kosinusa pravca lako mogu da se izračunaju iz novih vrednosti koordinata

čvorova. Promena vrednosti ugla β u oznaci $\Delta\beta$ može se uzeti da je jednaka srednjoj vrednosti uglova obrtanja krajnjih poprečnih preseka i jednaka je

$$\Delta\beta = \frac{1}{2}(\varphi_{x1} + \varphi_{x2}) \quad (6.27)$$

Ako sa Λ^d označimo matricu koja je jednaka

1. Kod Y-Z-X rotacije

$$\Lambda^d = \Lambda_\gamma \Lambda_\alpha \quad (6.28)$$

2. Kod Z-Y-X rotacije

$$\Lambda^d = \Lambda_\varsigma \Lambda_\theta \quad (6.29)$$

tada je

$$\Delta\beta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Lambda_{11}^d & \Lambda_{12}^d & \Lambda_{13}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{X1} + \varphi_{X2} \\ \varphi_{Y1} + \varphi_{Y2} \\ \varphi_{Z1} + \varphi_{Z2} \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

gde su φ_{Xi} , φ_{Yi} , φ_{Zi} , $i = 1, 2$ obrtanja krajeva elementa data u odnosu na ose globalnog koordinatnog sistema. Sada je položaj glavnih osa inercije poprečnog preseka u ravni upravnoj na osu x jednak $\beta + \Delta\beta$.

Matrica Λ za kablovske elemente data u delovima 3.2.3, 3.2.1, 3.2.2 data je sa

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & & \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & & \\ & & 1 & \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

gde je ϑ ugao koji lokalna osa x zaklapa sa globalnom osom X (slika 6.3).

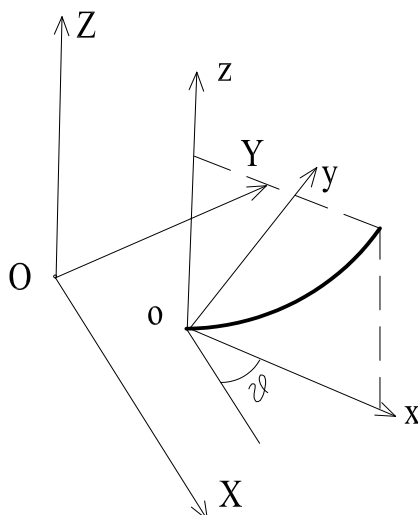
6.1.3 Matrica transformacije na sistemnu tačku preseka

U opštem slučaju, težišna tačka o preseka ne mora da se poklapa sa sistemnom tačkom M . Zbog toga je potrebno vektor pomeranja $\mathbf{q}$ transformisati u vektor $\mathbf{q}_M$

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}_M \mathbf{q}_M \quad (6.32)$$

Neka je $o(y_o, z_o)$ težište, $D(y_o + y_D, z_o + z_D)$ centar smicanja poprečnog preseka u odnosu na koordinatni sistem My_Mz_M paralelan centralnim osama inercije (slika 6.4). Pomeranje $\mathbf{q}_i$ čvora i dato je izrazom

$$\begin{bmatrix} u_{0i} \\ v_{Di} \\ w_{Di} \\ \varphi_{xi} \\ \varphi_{yi} \\ \varphi_{zi} \\ \vartheta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & -z_{oD} & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & y_{oD} & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Mi} \\ v_{Mi} \\ w_{Mi} \\ \varphi_{xMi} \\ \varphi_{yMi} \\ \varphi_{zMi} \\ \vartheta_{Mi} \end{bmatrix} \quad (6.33)$$



Slika 6.3: Položaj lokalnog i globalnog koordinatnog sistema za konačne elemente zasnovane na lančanicu

gde je

$$\begin{aligned} z_{oD} &= z_o + z_D \\ y_{oD} &= y_o + y_D \end{aligned} \quad (6.34)$$

Izraz (6.33) u skraćenom obliku glasi

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{E} \mathbf{q}_{Mi} \quad (6.35)$$

gde je $\mathbf{E}$ matrica transformacije. Kod tankozidnog i grednog nosača, vodeći računa o

$$\varphi_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (6.36)$$

$$\varphi_y = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (6.37)$$

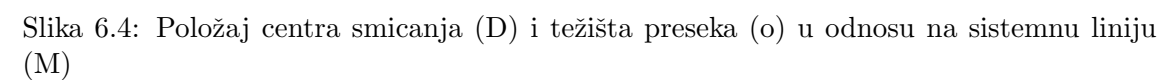
iz (6.33) dobija se

$$\begin{bmatrix} u_{0i} \\ v_{Di} \\ w_{Di} \\ \varphi_{xi} \\ -\frac{\partial w_{Di}}{\partial x} \\ \frac{\partial v_{Di}}{\partial x} \\ \theta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_C & -y_C \\ -z_{oD} & y_{oD} \\ y_{oD} \frac{\partial}{\partial x} & z_{oD} \frac{\partial}{\partial x} \\ 1 & \\ & 1 & z_{oD} \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{0Mi} \\ v_{Mi} \\ w_{Mi} \\ \varphi_{xMi} \\ \varphi_{yMi} \\ \varphi_{zMi} \\ \theta_{Mi} \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

Pošto za tankozidni elemenat i gredu sa dva čvora, usvojena linearna promena ugla obrtanja φ_x između krajnjih čvorova, dobija se da je

$$\frac{\partial \varphi_{xM}}{\partial x} = \frac{1}{L} (\varphi_{xM2} - \varphi_{xM1}) \quad (6.39)$$

Matrica transformacije na sistemnu liniju preseka glasi:



- ## 1. Tankozidna greda

[illegible]

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

$$\mathbf{T}_M = \begin{bmatrix} 1 & & & z_o & -y_o & & & & \\ & 1 & & -z_o D & & & & & \\ & & 1 & y_o D & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & \frac{y_o D}{L} & 1 & & -\frac{y_o D}{L} & & \\ & & & \frac{z_o D}{L} & & 1 & -\frac{z_o D}{L} & & \\ & & & & & & 1 & z_o & -y_o \\ & & & & & & & 1 & -z_o D \\ & & & & & & & & 1 & y_o D \\ & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & \frac{y_o D}{L} & 1 \\ & & & & & & & & & \frac{z_o D}{L} & -\frac{z_o D}{L} & 1 \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

[illegible]

4. Za proste štapove i elemente izvedene iz analitičkih izraza za lančanicu $\mathbf{T}_M = \mathbf{I}$ gde je $\mathbf{I}$ jedinična matrica.

6.2 Redukcija modela fleksibilnih sistema

6.2.1 Uvod

Redukcija sistema je postupak smanjenja broja stepeni slobode pomeranja sistema, kod sistema koji imaju veliki broj stepeni slobode pomeranja.

Kod dinamičkog proračuna sistema, da bi se ubrzao proračun frekvencija i modova oscilovanja, postupak redukcije sistema se zasniva na pretpostavci da sve svojstvene forme vibracija nisu neophodne za analizu dinamičkog ponašanja sistema. Dinamičke osobine i ponašanje inženjerskih konstrukcija obično se mogu dovoljno tačno opisati pomoću nekoliko prvih najnižih svojstvenih vrednosti i odgovarajućih formi vibracija. Stepene slobode konstrukcije podeljeni su u dva skupa. Primarni skup obično sadrži one stepene slobode pomeranja koji sadrže opterećenje ili one koji bi mogli da opišu konfiguraciju deformisane konstrukcije. Sekundarni skup sadrži sve ostale stepene slobode pomeranja sistema.

Redukcija generalisanih pomeranja konačnog elementa radi se da bi se oslobodili generalisanih pomeranja u unutrašnjim čvorovima elementa. Generalisana pomeranja unutrašnjih čvorova, koji predstavljaju sekundarni skup, nalazimo preko generalisanih pomeranja spoljašnjih čvorova, koji predstavljaju primarni skup. Elementi primarnog skupa generalisanih pomeranja elementa su elementi primarnog ili sekundarnog skupa generalisanih pomeranja sistema.

Ima više načina za redukciju broja nepoznatih stepeni slobode pomeranja sistema. Jedan od najstarijih i najpopularnijih je *Guyan*-ov metod statičke redukcije. On je tačan samo za najnižu frekvenciju [17].

Kod poboljšanog metoda redukcije sistema (*IRS - Improved Reduced System*) dodaje se ekstra član na statički metod koji donekle nadoknađuje inercijalne sile. Dodati član omogućava da modalni vektori koji su nam interesantni u kompletnom modelu budu tačnije predstavljeni, ali u osnovi je zasnovan na metodu statičke redukcije [17].

Component Mode Synthesis (*CMS*) kombinuje statičku redukciju sa ograničenim brojem najnižih modova na takav način da redukovani model može da predstavi i statičko i dinamičko ponašanje sistema na zadovoljavajući način [17].

U radu će se prikazati *Guyan*-ov metod statičke redukcije kao i još jedan metod statičke redukcije koji daje iste rezultate kao i *Guyan*-ov metod, a dat je u knjizi [3].

6.2.2 *Guyan*-ov metod redukcije

Najjednostavniji metod redukcije je statička redukcija koju je uveo *Guyan* [17]. Neka je $\mathbf{M}$ matrica masa, $\mathbf{K}$ matrica krutosti, $\mathbf{q}$ vektor generalisanih pomeranja i $\mathbf{r}$ vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja. Neka su podeljeni u submatrice i subvektore koji odgovaraju primarnim generalisanim pomeranjima, koja će se zadržati, i sekundarnim generalisanim pomeranjima, koja će se eliminisati, tokom redukcije. Sa indeksom 1 označen je skup primarnih generalisanih pomeranja, a sa 2 skup sekundarnih generalisanih pomeranja. Diferencijalne jednačine kretanja, bez prigušenja, glase

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

Druga jednačina iz (6.43) daje

$$\mathbf{M}_{12}\ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{M}_{22}\ddot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{K}_{21}\mathbf{q}_1 + \mathbf{K}_{22}\mathbf{q}_2 = \mathbf{r}_2 \quad (6.44)$$

$$\mathbf{q}_2 = -\mathbf{K}_{22}^{-1}(-\mathbf{r}_2 + \mathbf{M}_{21}\ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{M}_{22}\ddot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{K}_{21}\mathbf{q}_1) \quad (6.45)$$

Zanemarenjem inercijalnih sila i uz pretpostavku da unutrašnji čvorovi nisu opterećeni jednačina (6.45) glasi

$$\mathbf{q}_2 = -\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21}\mathbf{q}_1 \quad (6.46)$$

Vektor statičke transformacije $\mathbf{T}_K$, između kompletnog vektora generalisanih pomeranja $\mathbf{q}$ i primarnog vektora generalisanih pomeranja $\mathbf{q}_1$, kada se eliminišu sekundarna pomeranja, glasi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21} \end{bmatrix} \mathbf{q}_1 = \mathbf{T}_K \mathbf{q}_1 \quad (6.47)$$

Ako se (6.47) zameni u (6.43) i (6.43) se pomnoži sa leve strane sa $\mathbf{T}_K^T$ redukovana matrica masa $\mathbf{M}_R$, redukovana matrica krutosti $\mathbf{K}_R$ i redukovani vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja $\mathbf{r}_R$ su dati kao

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{T}_K^T \mathbf{M} \mathbf{T}_K \quad (6.48)$$

$$\mathbf{K}_R = \mathbf{T}_K^T \mathbf{K} \mathbf{T}_K \quad (6.49)$$

$$\mathbf{r}_R = \mathbf{T}_K^T \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 \quad (6.50)$$

Diferencijalna jednačina kretanja bez prigušenja sada glasi

$$\mathbf{M}_R \ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{K}_R \mathbf{q}_1 = \mathbf{r}_R \quad (6.51)$$

6.2.3 Redukcija matrice krutosti i vektora čvornog opterećenja elementa

Ako su neke veze na krajevima elementa ukinute, potrebno je obaviti transformaciju matrice krutosti i vektora čvornog opterećenja. Komponente vektora ukupnih generalisanih sila na krajevima elementa $\mathbf{R}$ mogu da se napišu u obliku

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{Q} \quad (6.52)$$

gde je $\mathbf{K}$ matrica krutosti elementa, $\mathbf{q}$ vektor generalisanih pomeranja krajeva elementa i $\mathbf{Q}$ vektor čvornog opterećenja elementa.

Pretpostaviće se da je n -ta komponenta R_n vektora $\mathbf{R}$ jednaka nuli

$$R_n = \sum_{k=1}^m k_{nk}q_k - Q_n = 0 \quad (6.53)$$

gde je m broj generalisanih pomeranja elementa. n -ta komponenta vektora generalisanih pomeranja $\mathbf{q}$ je tada

$$q_n = -\frac{1}{k_{nn}} \left(\sum_{k=1(k \neq n)}^m k_{nk}q_k - Q_n \right) \quad (6.54)$$

i -ta komponenta R_i u jednačini (6.52) može da se izrazi kao

$$R_i = \sum_{k=1}^m k_{ik}q_k - Q_i = \sum_{k=1(k \neq n)}^m k_{ik}q_k + k_{in}q_n - Q_i, i = 1, 2, \dots, m \quad (6.55)$$

Kada se (6.54) uvrsti u (6.55), dobija se

$$R_i = \sum_{k=1(k \neq n)}^m k_{ik}q_k - Q_i - \frac{k_{in}}{k_{nn}} \left(\sum_{k=1(k \neq n)}^m k_{nk}q_k - Q_n \right) \quad (6.56)$$

odnosno

$$R_i = \sum_{k=1(k \neq n)}^m k_{ik}^r q_k - Q_i^r \quad (6.57)$$

gde je

$$k_{ik}^r = k_{ik} - k_{in} \frac{k_{nk}}{k_{nn}}, i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, n-1, n+1, \dots, m \quad (6.58)$$

$$R_i^r = R_i - R_n \frac{k_{in}}{k_{nn}}, i = 1, 2, \dots, m \quad (6.59)$$

Oznaka r u gornjem indeksu označava da se radi o redukovanoj veličini. Obzirom da je za $k = n$

$$k_{in}^r = k_{in} - k_{in} \frac{k_{nn}}{k_{nn}} = 0, i = 1, 2, \dots, m \quad (6.60)$$

u jednačini (6.57) može da se uključi i član sa indeksom $k = n$, pa se dobija

$$R_i^r = \sum_{k=1}^m k_{ik}^r q_k - Q_i^r, i = 1, 2, \dots, m \quad (6.61)$$

gde je

$$k_{ik}^r = k_{ik} - k_{in} \frac{k_{nk}}{k_{nn}}, i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, m \quad (6.62)$$

Red redukovane matrice krutosti ostaje $m \times m$, s tim što su elementi n -te vrste i n -te kolone jednaki 0.

Postupak redukcije treba ponoviti onoliko puta koliki je broj oslobođenih veza na krajevima elementa, pri čemu u svakom sledećem ciklusu polazimo od redukovane matrice krutosti i redukovanoj vektora čvornih sila iz predhodnog ciklusa.

Izraz za vektor ukupnih generalisanih čvornih sila glasi

$$\mathbf{R}^r = \mathbf{K}^r \mathbf{q} - \mathbf{Q}^r \quad (6.63)$$

gde je $\mathbf{K}^r$ redukovana matrica krutosti, a $\mathbf{Q}^r$ redukovani vektor čvornog opterećenja, kojim su obuhvaćena sva oslobađanja na krajevima elementa.

Glava 7

Jednačine ravnoteže sistema

7.1 Matrica masa sistema

Kod dinamičkog modela sistema bitno je izvršiti raspored masa i odrediti matricu masa sistema. Matrica masa sistema može se dobiti na dva načina.

Prvi način je da se prvo odredi matrica masa pojedinih elemenata u lokalnom koordinatnom sistemu. U tom smislu postoje dva prilaza: zamena raspodeljenih masa direktno koncentrisanim masama i zamena raspodeljenih masa ekvivalentnim masama. U prvom i drugom slučaju, broj jednačina kretanja elementa može, a ne mora da bude isti. Kada su poznate matrice masa pojedinih elemenata, može se zatim dobiti matrica masa sistema.

Drugi način je direktno određivanje matrice masa sistema. Mase se direktno koncentrišu u odabranim čvorovima i u pravcima odabranih generalisanih pomeranja čvorova u globalnom koordinatnom sistemu. Ova matrica masa je dijagonalna

$$\mathbf{M} = \text{diag}(m_j) \quad (7.1)$$

gde je m_j masa u pravcu generalisanog pomeranja j u globalnom koordinatnom sistemu. Neki elementi dijagonale mogu da budu jednaki nuli.

Moguć je i treći način određivanja matrice masa sistema kao kombinacije prethodno navedenih postupaka.

Pošto je uvedena pretpostavka da je masa tela nepromenljiva tokom deformacije, tada je matrica masa sistema nepromenljiva tokom vremena tj. ${}^0\mathbf{M} = {}^m\mathbf{M} = \mathbf{M}$.

7.2 Matrica prigušenja sistema

Dok su masa i krutost svojstvene karakteristike sistema, prigušenje ne može tako da se kvalifikuje. Sile prigušenja mogu da zavise od sistema koji vibrira, kao i od elemenata van njega. Formulisanje izraza za sile prigušenja predstavlja komplikovan problem i još zahteva intenzivno istraživanje.

U nekim proračunima prigušenje se zanemaruje pretpostavljajući da su vrednosti otpora prigušenja male ili da nisu značajne za neki mali vremenski interval za koji se posmatra ponašanje sistema. Kod prinudnih oscilacija, kada frekvencija prinudnog opterećenja nije bliska rezonantnoj frekvenciji, uticaj prigušenja se takodje može da zanemari. Sa inženjerske strane gledišta uvođenje prigušenja u proračun nema opravdanja, jer kružne frekvencije i drugi rezultati dinamičkog proračuna se procentualno relativno malo razlikuju za prigušen i neprigušen sistem. Međutim, odgovor sistema razmatran preko amplituda uticaja se suštinski menja. Ako se zahteva tačnija dinamička analiza potrebno je u jednačine kretanja uvesti i sile prigušenja.

Najjednostavnije je pretpostaviti viskozni otpor, odnosno otpor proporcionalan brzini kretanja. Taj tip prigušenja obično prevladava kod oscilacija u elastičnom području i jednostavno ga je matematički modelirati. Model viskoznog prigušenja često se koristi za modeliranje drugih vrsta prigušenja. Kako su za nove nepoznate proračuna usvojena generalisana pomeranja čvorova linijskog sistema, sile prigušenja su proporcionalne vektoru brzine čvorova.

Kod linearne analize najčešće se koristi matrica prigušenja proporcionalna matrici masa i matrici krutosti sistema ili nekoj njihovoj linearnoj kombinaciji. Ovo omogućava da se jednačine kretanja za neki linearni prigušeni sistem, primenom normalnih koordinata, mogu da razdvoje.

Matrica unutrašnjeg viskoznog prigušenja $\mathbf{C}$ se uvodi da modelira utrošak energije izazvan nekonstruktivnim elementima posmatranog sistema i njegove okoline. Matrica prigušenja sistema $\mathbf{C}$ određuje se direktno za celi sistem na osnovu ukupne disipativne energije sistema u toku delovanja opterećenja.

Za svaki korak vremena nelinearni dinamički problem se, približno, može tretirati kao linearan. Matrica prigušenja kod nelinearne analize može da se prikaze na sličan način kao i kod linearne analize. Kod nelinearne analize matrica krutosti sistema je promenljiva u toku vremena, te matrica $\mathbf{C}$ nije konstantna. Matrica $\mathbf{C}$ se, kod linearne analize, prikazuje kao linearna kombinacija matrice masa i linearne matrice krutosti sistema, a kod nelinearne analize za matricu krutosti može da se uzme isto kao i kod linearne analize ili da se uzme tangentna matrica krutosti sistema. Ako se uzme da je $\bar{\mathbf{K}}$ linearna ili tangentna matrica krutosti sistema, dobija se

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \bar{\mathbf{K}} \quad (7.2)$$

Izraz (7.2) za matricu prigušenja zasniva se na pretpostavci da je totalno prigušenje sistema jednako zbiru prigušenja koje odgovara pojedinim svojstvenim formama vibracija sistema.

Procenu parametara prigušenja moguće je odrediti primenom principa modalne analize. Po metodi modalne superpozicije, važi jednačina proporcionalnosti

$$\Phi_i^T \mathbf{C} \Phi_i = 2\omega_i \xi_i \delta_{ij} \quad (7.3)$$

gde je ξ_i koeficijent relativnog prigušenja i -tog moda, a δ_{ij} Kronecker-ov simbol. Ako su vektori Φ_i ortonormirani tada je

$$\Phi_i^T \mathbf{C} \Phi_i = \Phi_i^T (\alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}) \Phi_i = \alpha + \beta \omega_i^2 \quad (7.4)$$

te iz jednačine (7.3) i (7.4) se dobija

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_i} + \beta \omega_i \right) \quad (7.5)$$

Koeficijenti relativnog prigušenja ξ_i , za pojedine modove vibracija, određuju se eksperimentalnim putem ili se usvajaju.

Ako su ω_i i ω_j dve proizvoljne kružne frekvencije za dva bilo koja međusobno nezavisna tona vibracija, a ξ_i i ξ_j odgovarajući koeficijenti relativnog prigušenja, tada iz dve jednačine sa dve nepoznate po parametrima α i β prema (7.5) dobija se

$$\alpha = \frac{2\omega_i \omega_j (\omega_j \xi_i - \omega_i \xi_j)}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \quad (7.6)$$

$$\beta = \frac{2(\omega_j \xi_j - \omega_i \xi_i)}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \quad (7.7)$$

U praktičnim proračunima obično se usvaja da su dva prigušenja jednaka $\xi_1 = \xi_n = \xi$ te je

$$\alpha = \frac{2\xi \omega_1 \omega_n}{\omega_n + \omega_1} \quad (7.8)$$

$$\beta = \frac{2\xi}{\omega_n + \omega_1} \quad (7.9)$$

Tada je prigušenje j -tog tona oscilovanja

$$\xi_j = \xi \frac{\omega_j + \frac{\omega_1}{\omega_j} \omega_n}{\omega_1 + \omega_n} \quad (7.10)$$

7.3 Direktni postupak određivanja matrica i vektora sistema

Matrice i vektori sistema mogu se dobiti sabiranjem matrica odnosno vektora za pojedine elemente, ako se ovi predhodno prikažu prema oznakama čvorova u globalnom sistemu koordinata. Postupak formiranja jednačina ravnoteže sistema, za dinamičko opterećenje, je sledeći:

1. Za svaki konačni elemenat se koriste odgovarajuće transformacije:
 - (a) Uradi se, ako je potrebno tj. ako ima ukinutih stepeni slobode pomeranja, redukcija matrica i vektora konačnog elementa (videti deo 6.2.3)
 - (b) Ako konačni elemenat ima unutrašnje čvorove, uradi se redukcija matrica i vektora prema delu 6.2. Za primarna pomeranja biraju se pomeranja u spoljašnjim, a za sekundarna pomeranja pomeranja u unutrašnjim čvorovima konačnog elementa. Matrice i vektori se preurede tako da se grupišu članovi u pravcu generalisanih pomeranja u spoljašnjim čvorovima $\bar{\mathbf{q}}_1$, a zatim u pravcu generalisanih pomeranja u unutrašnjim čvorovima $\bar{\mathbf{q}}_2$. Redukovane matrice i vektori za jedan konačni elemenat glase

$$\mathbf{M}_R^e = \mathbf{T}_K^{eT} \mathbf{M}^e \mathbf{T}_K^e \quad (7.11)$$

$$\mathbf{K}_{T,R}^e = \mathbf{T}_K^{eT} \mathbf{K}_T^e \mathbf{T}_K^e \quad (7.12)$$

$$\mathbf{f}_R^e = \mathbf{f}_1^e \quad (7.13)$$

$$\mathbf{r}_R^e = \mathbf{r}_1^e \quad (7.14)$$

gde je

$$\mathbf{K}_T^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{T,11}^e & \mathbf{K}_{T,12}^e \\ \mathbf{K}_{T,21}^e & \mathbf{K}_{T,22}^e \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

$$\bar{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_1 \\ \bar{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_K^e \bar{\mathbf{q}}_1 \quad (7.16)$$

$$\mathbf{T}_K^e = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -(\mathbf{K}_{T,22}^e)^{-1} \mathbf{K}_{T,21}^e \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

Indeks e označava da se radi o elementu.

- (c) Transformacija matrica i vektora, iz lokalnog u globalni koordinatni sistem, pomoću matrice transformacije elementa, vodeći računa o izrazima u delu 6.1

$$\mathbf{M}_{R,g}^e = \mathbf{T}^T \mathbf{M}_R^e \mathbf{T} \quad (7.18)$$

$$\mathbf{K}_{T,R,g}^e = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{T,R}^e \mathbf{T} \quad (7.19)$$

$$\mathbf{f}_{1,g}^e = \mathbf{T}^T \mathbf{f}_1^e \quad (7.20)$$

$$\mathbf{r}_{1,g}^e = \mathbf{T}^T \mathbf{r}_1^e \quad (7.21)$$

gde indeks g označava da je matrica, odnosno vektor dat u globalnom koordinatnom sistemu.

2. Koristeći se neposrednom korespodencijom između oznaka čvorova u lokalnom i globalnom sistemu, vrši se unošenje transformisanih matrica i vektora elementa u odgovarajuće pozicije matrica odnosno vektora sistema. Pri tome se dobijaju matrice i vektori sistema:

- (a) Matrica masa $\mathbf{M}$
- (b) Tangentna matrica krutosti $\mathbf{K}_T$
- (c) Vektor internih čvornih sila $\mathbf{f}$
- (d) Vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja $\mathbf{r}$

Ove matrice se preurede tako da se prvo grupišu članovi u pravcima nepoznatih $\mathbf{q}_1$, a zatim poznatih generalisanih pomeranja $\mathbf{q}_2$ sistema i dobija se

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

$$\mathbf{K}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{T,11} & \mathbf{K}_{T,12} \\ \mathbf{K}_{T,21} & \mathbf{K}_{T,22} \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\text{int},1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

3. Posmatraće se delovi preuređenih matrica i vektora sistema uz nepoznata pomeranja $\mathbf{q}_1$. Ako je

- (a) U submatrici masa $\mathbf{M}_{11}$ neki od elemenata na glavnoj dijagonali jednak nuli
- (b) Količnik dijagonalnih članova u submatrici krutosti $\mathbf{K}_{T,11}$ i submatrici masa $\mathbf{M}_{T,11}$ je veći od neke unapred zadate vrednosti ϵ

$$\frac{K_{ii}}{M_{ii}} > \epsilon \quad (7.27)$$

to znači da su inercijalne sile usled te mase male i mogu se zanemariti. Komponentne generalisanih pomeranja u vektoru $\mathbf{q}_1$ za koje ne postoje inercijalne sile smatraju se sekundarnim, dok se ostala pomeranja smatraju primarnim. Matrice $\mathbf{M}_{11}$ i $\mathbf{K}_{T,11}$ kao i vektore $\mathbf{f}_{\text{int},1}$ i $\mathbf{r}_1$ će se preurediti tako što će se prvo grupisati članovi za

primarna $\mathbf{q}_{1,1}$, a zatim članovi za sekundarna $\mathbf{q}_{1,2}$ pomeranja. Primenom metoda redukcije (videti deo 6.2), matrice i vektori se redukuju i imamo

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{T}_K^T \mathbf{M}_{11} \mathbf{T}_K \quad (7.28)$$

$$\mathbf{K}_R = \mathbf{T}_K^T \mathbf{K}_{T,11} \mathbf{T}_K \quad (7.29)$$

$$\mathbf{f}_R = \mathbf{T}_K^T \mathbf{f}_{\text{int},1} \quad (7.30)$$

$$\mathbf{r}_R = \mathbf{T}_K^T \mathbf{r}_1 \quad (7.31)$$

gde je

$$\mathbf{K}_{T,11} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{T,11}^{11} & \mathbf{K}_{T,11}^{12} \\ \mathbf{K}_{T,11}^{21} & \mathbf{K}_{T,11}^{22} \end{bmatrix} \quad (7.32)$$

$$\mathbf{q}_{1,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{1,1} \\ \mathbf{q}_{1,2} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_K \mathbf{q}_{1,1} \quad (7.33)$$

$$\mathbf{T}_K = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -(\mathbf{K}_{T,11}^{22})^{-1} \mathbf{K}_{T,11}^{21} \end{bmatrix} \quad (7.34)$$

4. Formira se matrica prigušenja sistema

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M}_R + \beta \mathbf{K}_R \quad (7.35)$$

Inkrementalna jednačina ravnoteže sistema, izvedena korigovanim *Lagrange*-ovim postupkom, za slučaju nelinearne dinamičke analize glasi

$${}^m_m \mathbf{K}_R \Delta \mathbf{q}_{1,1} = {}^{m+1}_m \mathbf{r}_R - {}^m_m \mathbf{f}_R - {}^m_m \mathbf{C} \Delta \dot{\mathbf{q}}_{1,1} - \mathbf{M}_R \Delta \ddot{\mathbf{q}}_{1,1} \quad (7.36)$$

a za slučaj nelinearne statičke analize glasi

$${}^m_m \mathbf{K}_T \Delta \mathbf{q} = {}^{m+1}_m \mathbf{r} - {}^m_m \mathbf{f} \quad (7.37)$$

Jednačina ravnoteže za linearnu dinamičku analizu glasi

$$\mathbf{M}_R \ddot{\mathbf{q}}_{1,1} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}_{1,1} + \mathbf{K}_R \mathbf{q}_{1,1} = \mathbf{r}_R \quad (7.38)$$

7.4 Opterećenje konstrukcije

Totalno opterećenje konstrukcije sa kablovima sastoji se iz dve grupe opterećenja: stalnog opterećenja (sopstvena težina) i korisnog opterećenja (dodatno statičko opterećenje, dinamičko opterećenje).

Stalno opterećenje predstavlja najveći deo deo totalnog opterećenja konstrukcije. Pošto je konstrukcija kompletirana i pre dejstva korisnog opterećenja, usled stalnog opterećenja, konstrukcija je pretrpela velike deformacije i u elementima konstrukcije postoje inicijalni naponi. Ove činjenice moraju da se uzmu u obzir pre daljeg razmatranja. Geometrijska nelinearna analiza, usled korisnog opterećenja, treba da startuje od nelinearne ravnotežne konfiguracije usled stalnog opterećenja.

Zbog nelinearnosti mehaničkog ponašanja sistema sa kablovima, zadato opterećenje se nanosi na sistem postupno, t.j. u vidu usvojenog broja inkremenata. Kao što ni u dinamičkoj analizi, u numeričkoj integraciji diferencijalnih jednačina kretanja, nije neophodno da vremenski intervali Δt budu međusobno jednaki, tako ni ovde nije neophodno da se ukupno posmatrano opterećenje podeli na međusobno jednake delove. Međutim, praktičnije je da se usvoji odgovarajući broj međusobno jednakih inkremenata opterećenja. Da li da taj broj inkremenata treba da bude 50-100 ili manji, odn. možda i veći, zavisi od stepena nelinearnosti problema. U principu, što je ponašanje sistema više nelinearno, to su potrebni sitniji koraci.

Nelinearna analiza, znači, mora da uključi dva koraka: u prvom koraku razmatraju se efekti stalnog opterećenja, a u drugom koraku razmatraju se efekti korisnog opterećenja na deformisanoj konfiguraciji.

7.4.1 Stalno opterećenje

U opštem slučaju, položaj konstrukcije usled stalnog opterećenja može da se odredi:

1. Linearnom analizom - nanošenjem opterećenja na konstrukciju i metodama linearne analize nađe se ravnotežna konfiguracija konstrukcije.
2. Nelinearnom analizom - nanošenjem opterećenja na konstrukciju i metodama nelinearne analize nađe se ravnotežna konfiguracija konstrukcije.

Ako konstrukcija sadrži kablove, položaj konstrukcije i konfiguracija kablova može da se odredi:

1. Nelinearnom analizom - nanošenjem opterećenja na konstrukciju i metodama nelinearne analize nađe se ravnotežna konfiguracija konstrukcije. Da bi se pojednostavio unos podataka, polazi se od prave linije kabla i za vreme analize konfiguracija kabla pod stalnim opterećenjem biće određena posle nekoliko iteracija.
2. Analitičkim putem - za zadato opterećenje na kablu, za svaki kabl pojedinačno, se pomoću analitičkih izraza utvrdi položaj merodavnih tačaka kabla.

7.4.2 Korisno opterećenje

Ravnotežna konfiguracija, usled stalnog opterećenja, je 0C konfiguracija za analizu uticaja usled korisnog opterećenja. Kao korisno opterećenje može da se javi dodatno

statičko opterećenje ili dinamičko opterećenje. U daljem tekstu će da bude razmotreno dinamičko opterećenje.

Pretpostavlja se da je sistem pobuđen proizvoljnim dinamičkim silama datim u obliku determinističkih funkcija sila, tj poznatim funkcijama. One mogu biti periodične ili neperiodične. Mogu biti izražene analitički ili su iscertane na osnovu podataka.

U opštem slučaju, u diferencijalnoj jednačini kretanja u generalisanim kordinatama, svako opterećenje može da bude pobuđeno drugom vremenskom funkcijom. Ako je spoljašnje opterećenje konstrukcije pobuđeno istom vremenskom funkcijom, to može da se prikaže kao

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{f}(s)g(t) \quad (7.39)$$

U jednačini $\mathbf{f}(s)$ predstavlja vektor koji prikazuje prostorni raspored sila koji je nezavistan od vremena, dok je $g(t)$ funkcija vremenske promene opterećenja.

Drugi čest slučaj dinamičkog opterećenja je seizmičko opterećenje. Ono može da bude dato preko vektora generalisanog dinamičkog pomeranja oslonaca $\mathbf{a}(t)$. Ovaj vektor sastoji se od vektora dinamičkog pomeranja oslonaca $\mathbf{a}_d(t)$ i vektora dinamičkog obrtanja oslonaca $\mathbf{a}_\varphi(t)$ za koji se pretpostavlja da je jednak nula vektoru

$$\mathbf{a}^T(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_d^T(t) & \mathbf{a}_\varphi^T(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_d^T(t) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7.40)$$

$$\mathbf{a}_\varphi^T(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (7.41)$$

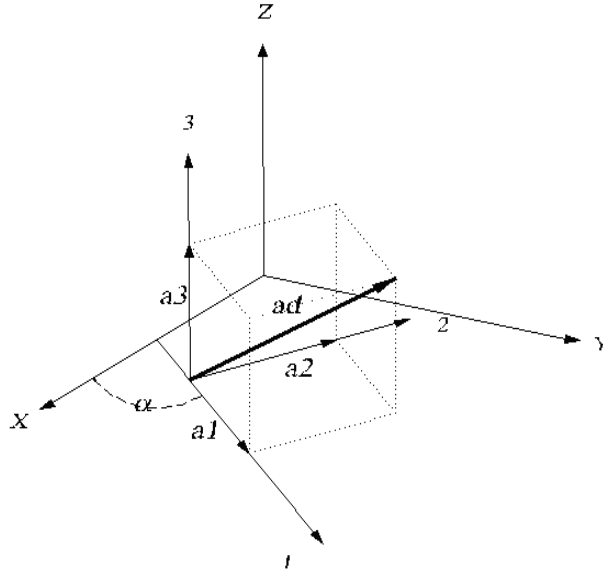
Vektor dinamičkog pomeranja oslonaca $\mathbf{a}_d(t)$ (slika 7.1) ima proizvoljan pravac u prostoru. Vrh vektora $\mathbf{a}_d(t)$ jedne tačke na površini zemlje za vreme zemljotresa opisuje proizvoljnu krivu u prostoru. Vektor $\mathbf{a}_d(t)$ može da se razloži u koordinatnom sistemu 123 na tri komponente, te vektor generalisanog dinamičkog pomeranja oslonaca iznosi

$$\mathbf{a}_d^T(t) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \quad (7.42)$$

Pri seizmičkom opterećenju, ukupno pomeranje objekta sastoji se od pomeranja objekta kao krutog tela $\mathbf{q}_k(t)$ i relativnog pomeranja $\mathbf{q}_r(t)$ (slika 7.2). Pomeranje objekta kao krutog tela $\mathbf{q}_k(t)$ jednako je vektoru generalisanog dinamičkog pomeranja oslonaca. Neka osa 1 koordinatnog sistema 123 u kojem je dat vektor dinamičkog pomeranja oslonaca zaklapa ugao α sa globalno osom X objekta, a osa 3 je u pravcu ose Z (slika 7.1). Kako se trenutno razmatra objekat kao kruto telo, svi čvorovi objekta ($j = 1, 2, \dots, N$) usled seizmičkog pomeranja oslonaca imaju ista pomeranja. Ako se pretpostavi da je broj generalisanih pomeranja čvora šest, pomeranje čvora j objekta u pravcu osa globalnog koordinatnog sistema iznosi

$$\mathbf{q}_{kj}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} & \\ & \mathbf{\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_d \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_j \mathbf{a}(t) \quad (7.43)$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & \\ \sin \alpha & \cos \alpha & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (7.44)$$



Slika 7.1: Razlaganje vektora dinamičkog pomeranja oslonaca

gde je $\mathbf{\Gamma}$ vektor transformacije dinamičkog pomeranja oslonaca iz koordinatnog sistema 123 u koordinatni sistem XYZ. Vektor pomeranja svih čvorova sistema, kao krutog tela, iznosi

$$\mathbf{q}_k(t) = \mathbf{B}\mathbf{a}(t) \quad (7.45)$$

gde je

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^T & \dots & \mathbf{B}_j^T & \dots & \mathbf{B}_N^T \end{bmatrix} \quad (7.46)$$

Pomeranje $\mathbf{q}_k$ u konstrukciji izaziva inercijalne sile. Ako se pretpostavi da je vektor spoljašnjeg čvornog opterećenja $\mathbf{P}(t) = 0$, tada inkrementalna jednačina dinamičke ravnoteže glasi

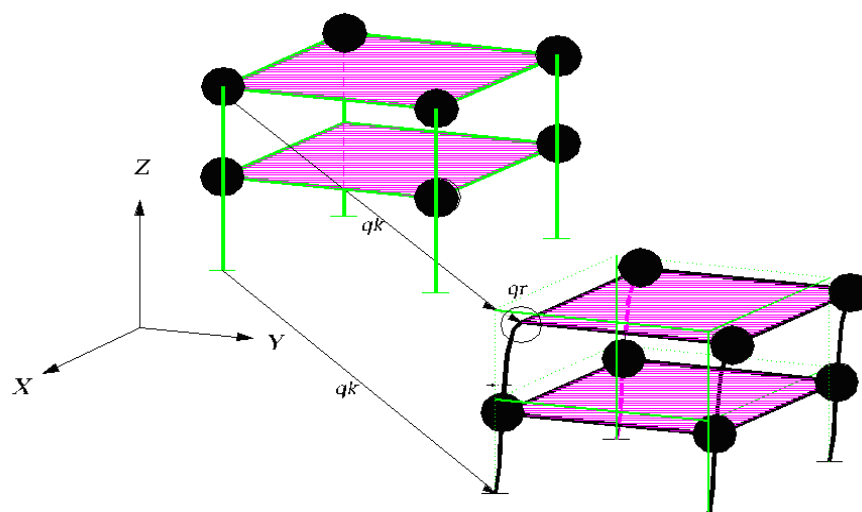
$${}^m_m \mathbf{K}_T \Delta \mathbf{q}_r = -(\mathbf{M}^{m+1} \ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{M}^{m+1} \ddot{\mathbf{q}}_k) - {}^m_m \mathbf{C}^{m+1} \dot{\mathbf{q}}_r - {}^m_m \mathbf{f}_{\text{int}} \quad (7.47)$$

$${}^{m+1} \ddot{\mathbf{q}}_k = \mathbf{B}^{m+1} \ddot{\mathbf{a}}(t) \quad (7.48)$$

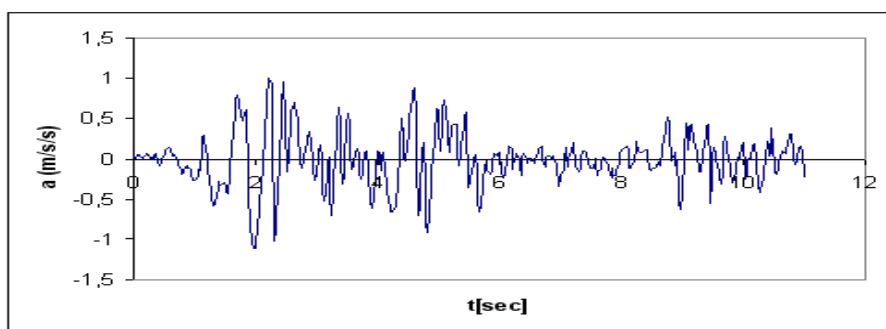
i posle sređivanja

$${}^m_m \mathbf{K}_T \Delta \mathbf{q}_r = -\mathbf{M} \mathbf{B}^{m+1} \ddot{\mathbf{a}}(t) - \mathbf{M}^{m+1} \ddot{\mathbf{q}}_r - {}^m_m \mathbf{C}^{m+1} \dot{\mathbf{q}}_r - {}^m_m \mathbf{f}_{\text{int}} \quad (7.49)$$

Vektor $\ddot{\mathbf{a}}(t)$ uvodi se u proračun kao niz diskretnih vrednosti snimljenog akceleroograma. Akcelelogram može imati jednu, dve ili tri komponente. Uzimaju se akcelelogrami nekoliko zemljotresa koji bi mogli da se jave na lokaciji objekta (slika 7.3). Za svaki akcelelogram proračunavaju se seizmičke veličine, pa se od njih za proveru konstrukcije ili dimenzionisanje uzimaju najnepovoljnije vrednosti.



Slika 7.2: Pomeranje objekta pri zemljotresu



Slika 7.3: Primer vremenskog toka ubrzanja tla u jednom pravcu (akcelelogram zemljotresa *El Centro*)

Glava 8

Numeričke metode

8.1 Direktni postupci za rešavanje linearnog sistema algebarskih jednačina

Rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina je veoma bitna oblast svih inženjerskih disciplina. U rešavanju sistema linearnih algebarskih jednačina

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (8.1)$$

postoje načelno dva pristupa: direktni i iterativni postupci kao i njihove kombinacije u vidu mešovitih postupaka.

U jednačini (8.1) $\mathbf{A}$ je kvadratna matrica koeficijenata reda n , $\mathbf{x}$ je traženi vektor sa n nepoznatih elemenata, a $\mathbf{b}$ je vektor slobodnih članova.

Osnovna karakteristika direktnih postupaka je da se posle konačnog broja algoritamskih koraka dolazi do rešenja. Ukoliko bi sve računске operacije bile tačno izvedene, onda bi dobijeni rezultati bili, teorijski, apsolutno tačni. Kako se u procesu računanja neminovno zaokružuju dobijeni međurezultati, odn. kako postoji definisana numerička tačnost u prikavanju brojeva, to je i krajnji rezultat sa izvesnom numeričkom greškom. Zbog toga je značajno da se postupak obavlja sa što manje računskih operacija. Kao direktni postupci, najpoznatiji su postupak *Gauss*-ove eliminacije, postupak *Gauss-Jordan*-ove eliminacije, postupci dekompozicije: **LU** dekompozicija, *Singular Value* dekompozicija.

Kod iterativnih postupaka, za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina se, teoretski, tek posle beskonačno mnogo iterativnih koraka dolazi do tačnog rešenja. Praktično, potreban je konačan broj koraka da se dođe do rešenja sa zahtevanom tačnošću.

Koji će direktni postupak za rešavanje linearnih algebarskih jednačina sistema da se upotrebi zavisi od prirode matrice $\mathbf{A}$. Od svih mogućih direktnih metoda izabrane su sledeće:

1. **LU** dekompozicija

- (a) Ako je matrica $\mathbf{A}$ simetrična, regularna (nije singularna) i pozitivno definitna koristi se metod *Cholesky*-ja
- (b) Ako je matrica $\mathbf{A}$ opšteg oblika i regularna koristi se metod *CROUT*-a

2. *Singular Value* dekompozicija (skraćeno **SVD**) - koristi se u slučaju ako je matrica $\mathbf{A}$ singularna ili slabo uslovljena (numerički približno singularna). U tom slučaju struktura je nestabilna. Uzrok nestabilnosti može da bude usled:

- (a) Neadekvatnih uslova oslanjanja
- (b) Pojave internih mehanizama
- (c) Pojave negativne ili nula vrednosti krutosti
- (d) Ekstremno velike krutosti
- (e) Geometrijske nelinearnosti

8.1.1 **LU** dekompozicija

Početnu matricu $\mathbf{A}$ dekomponujemo na dve matrice

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} \quad (8.2)$$

gde je $\mathbf{L}$ donja, a $\mathbf{U}$ gornja trougaona matrica. Obe matrice su istog reda kao i matrica $\mathbf{A}$. $\mathbf{LU}$ dekompozicija je uvek moguća kada je matrica $\mathbf{A}$ nesingularna. Dekompozicija nije jednoznačno određena. Uz transformaciju (8.2) jednačina (8.1) postaje

$$\mathbf{LU}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (8.3)$$

što može da se shvati kao dva skupa jednačina

$$\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad (8.4)$$

$$\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (8.5)$$

koji se sukcesivno rešavaju. Jednačina (8.4) se rešava zamenom unapred, jer je $\mathbf{L}$ donja trougaona matrica. Sa dobijenim rešenjem za $\mathbf{y}$, jednačina (8.5) se rešava zamenom unazad jer je $\mathbf{U}$ gornja trougaona matrica.

Ako je matrica $\mathbf{A}$ regularna, matrice $\mathbf{L}$ i $\mathbf{U}$ određuju se pomoću *Crout*-ovog algoritma.

Ako je matrica $\mathbf{A}$ regularna, pozitivno definitna i simetrična, matrice $\mathbf{L}$ i $\mathbf{U}$ određuju se algoritmom čiji je autor *Cholesky*. U ovoj varijanti se usvaja da je

$$\mathbf{L} = \mathbf{U}^T \quad (8.6)$$

to jest da su gornja i donja trougaona matrica međusobno transponovane i da su dijagonalni elementi međusobno isti.

Za *Crout*-ov i *Cholesky*-jev postupak dekompozicije, koji su ugrađeni u klase za rešavanje linearnog sistema jednačina (videti 9.3.2), kod je preuzet iz [87].

8.1.2 Singular Value dekompozicija

Ova tehnika (skraćeno **SVD**) je veoma korisna kada imamo slučaj da je matrica $\mathbf{A}$ singularna ili numerički veoma bliska singularnoj (slabo uslovljena). U slučajevima kada *Gauss*-ova eliminacija i $\mathbf{LU}$ dekompozicija ne mogu da daju zadovoljavajuće rezultate, tehnika poznata kao *Singular Value* dekompozicija će dijagnostikovati u čemu je problem. U pojedinim slučajevima, ova tehnika, neće samo da dijagnostikuje problem, ona će ga takođe rešiti, u smislu davanja iskoristivog numeričkog rešenja [87].

Ovo je metoda kojom može da se reši veliki broj linearnih problema najmanjih kvadrata (engl. *Linear Least Squares Problems*). Osim toga, ovaj postupak može da da odgovor na pitanje da li je matrica $\mathbf{A}$ singularna ili slabo uslovljena.

Bilo koja matrica $\mathbf{A}$ reda $m \times n$ i $m \geq n$ može da se dekomponuje na tri matrice $\mathbf{U}$, $\mathbf{W}$ i $\mathbf{V}$ čiji proizvod daje polaznu matricu

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^T \quad (8.7)$$

gde je

1. $\mathbf{U}$ - je reda $m \times n$. Kolone matrice su svojstveni vektori matrice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$.
2. $\mathbf{W}$ - je reda $n \times n$. To je dijagonalna matrica. Vrednosti elemenata na dijagonali su singularne vrednosti matrice $\mathbf{A}$ i one su kvadratni koreni svojstvenih vrednosti i matrice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ i matrice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$. Svojstveni vektori matrice $\mathbf{U}$ i svojstveni vektori matrice $\mathbf{V}$ dele iste svojstvene vrednosti za koje važi da je $w_1 \geq w_2, \dots, w_n \geq 0$.

3. $\mathbf{V}$ - je reda $n \times n$. Redovi od $\mathbf{V}^T$ (kolone od $\mathbf{V}$) su svojstveni vektori od $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$.

Svaka od matrica $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$ je ortogonalna u smislu da su njihove kolone ortonormalne. Važe sledeće relacije

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^T \mathbf{U} &= \mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I} \\ \mathbf{V} \mathbf{V}^T &= \mathbf{I}\end{aligned}\quad (8.8)$$

U opštem slučaju, ova metoda se upotrebljava i za matrice kod kojih je $m < n$. U tom slučaju singularne vrednosti za w_j gde je $j = m + 1, \dots, n$ su nule, i odgovarajuće kolone od $\mathbf{U}$ su takođe nule.

Za naše primene $\mathbf{A}$ je kvadratna matrica, reda $n \times n$. Tada su $\mathbf{U}$, $\mathbf{W}$ i $\mathbf{V}$ takođe kvadratne matrice istog reda.

Inverzna matrica matrice $\mathbf{A}$ može da se nađem na sledeći način. Pošto su matrice $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$ ortogonalne njihove inverzne matrice su jednake transponovanim. Matrica $\mathbf{W}$ je dijagonalna. Inverzna matrica $\mathbf{W}'$ matrice $\mathbf{W}$ je dijagonalna i vrednosti elemenata su jednake recipročnim vrednostima elemenata w_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Inverzna matrica matrice $\mathbf{A}$ je jednaka

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V} [\text{diag}(w'_j)] \mathbf{U}^T \quad (8.9)$$

Može da se desi da neki od w_j budu jednaki nuli ili numerički približno jednak nuli, tako da je recipročna vrednost od w_j dominantna. Ako više od jedne vrednosti w_j imaju ovaj problem, tada se kaže da je matrica više singularna. Ovaj metod može da da odgovor na ovu situaciju.

Mera uslovljenosti je definisana odnosom najveće vrednosti (po magnitudi) $\max(w_j)$ prema najmanjoj $\min(w_j)$. Matrica je singularna, ako je mera uslovljenosti jednaka beskonačnoj vrednosti. Matrica je slabo uslovljena, ako je mera uslovljenosti veoma veliki broj. Taj broj se definiše kao recipročna vrednost praga singularnosti ε . Vrednost za ε nije univerzalna i sa vrednošću mora da se eksperimentiše u zavisnosti od konkretne aplikacije. Ako se, u zavisnosti od preciznosti hardvera, usvoji da je za jednostruku preciznost $\varepsilon_1 = 10^{-6}$, a za dvostruku $\varepsilon_1 = 10^{-12}$, tada može da se uzme da je $\varepsilon = \max(w_j) * \varepsilon_1$.

U slučaju da je u (8.1) matrica $\mathbf{A}$ slabo uslovljena ili singularna, $\mathbf{LU}$ dekompozicija ili *Gauss*-ov postupak mogu da daju formalno rešenje sistema jednačina. Kada se dobijeni vektor rezultata $\mathbf{x}$ pomnoži sa $\mathbf{A}$, može da da veoma lošu aproksimaciju vektora $\mathbf{b}$. U tom slučaju upotrebljava se *Singular value* dekompozicija. Prilikom rešavanja sistema (8.1), za elemente matrice $\mathbf{W}'$ uzimaju se sledeće vrednosti

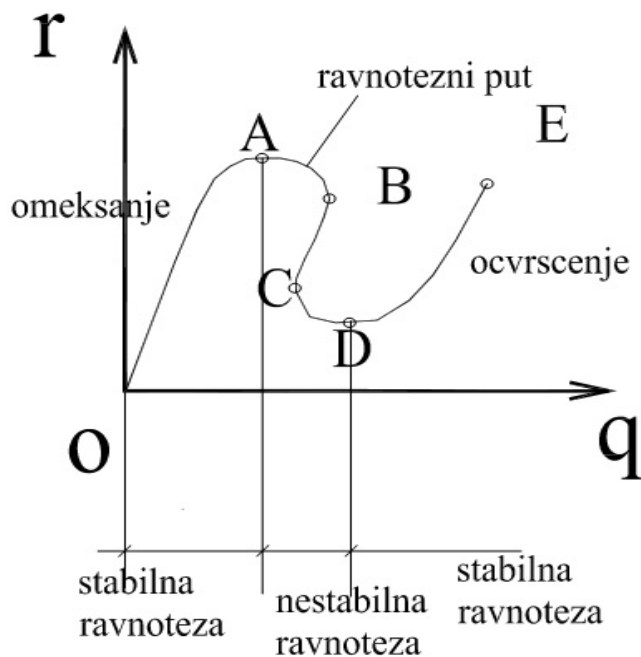
$$w'_j = \begin{cases} \frac{1}{w_j}, & (w_j \geq \varepsilon) \\ 0, & (w_j < \varepsilon) \end{cases} \quad (8.10)$$

Ovo omogućava da se dobije rešenje sa najmanjom dužinom $\|\mathbf{x}\|$. Rešenje je jednako

$$\mathbf{x} = \mathbf{V} [\text{diag}(w'_j)] \mathbf{U}^T \mathbf{b} \quad (8.11)$$

U slučaju da se ne uzme da su elementi matrice $\mathbf{W}'$ dati sa (8.10), ova rutina daje, za slabo uslovljen sistem, isto rešenje kao i bilo koja druga direktna metoda.

Kod za *Singular Value* dekompoziciju, koji je ugrađen u klasu za rešavanje linearnog sistema jednačina (videti 9.3.2), preuzet je iz [87].

Slika 8.1: Kriva opterećenje - pomeranje ($r - q$)

8.2 Postupci za rešavanje nelinearnih jednačina ravnoteže

8.2.1 Statička nelinearna analiza

Nelinearna jednačina ravnoteže za statičku analizu glasi

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{q} = \Delta \mathbf{r} \quad (8.12)$$

gde je

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NL} \quad (8.13)$$

$\mathbf{K}_T$ je tangentna, $\mathbf{K}_L$ elastična i $\mathbf{K}_{NL}$ geometrijska matrica krutosti. Rešenjem izraza (8.12), uz odgovarajuće granične uslove, dobija se vektor $\Delta \mathbf{q}$ koji predstavlja odgovor (eng. *response*) konstrukcije na inkrementalnu promenu $\Delta \mathbf{r}$ vanjskog opterećenja konstrukcije.

Za svako generalisano pomeranje, moguće je nacrtati tzv. krivu opterećenje – pomeranje ($r - q$), čiji je opšti oblik prikazan na slici 8.1. Sa slike 8.1 se vidi da ravnoteža konstrukcije može biti stabilna ili nestabilna. Konstrukcija može da se nalazi u području omekšanja ili području očvršćenja te da konstrukcija, što se tiče vanjskog opterećenja, može biti u području opterećenja (deo OA i DE) ili u području rasterećenja (deo AD).

Tangentna matrica krutosti konstrukcije je realna i simetrična matrica. Svojsvene vrednosti $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$, gde je n broj nepoznatih generalisanih pomeranja, takve tangentne matrice krutosti su realni brojevi. U tabeli 8.1 su prikazani kriterijumi ravnoteže konstrukcije u zavisnosti od prirode tangentne matrice krutosti. Sva ova svojstva su popraćena pojavom kritičnih tačaka (neregularne tačke) - tačke odgovora u kojima tangentna matrica krutosti postaje singularna. One se mogu podeliti u dve skupine:

K_T	λ_i	Vrsta ravnoteže
Pozitivno definitna	svi > 0	stabilna
Semi definitna	svi ≥ 0	neutralna
Nedefinitna	bar neki < 0	nestabilna

Tabela 8.1: Vrste ravnoteže konstrukcije

1. Granične tačke (engl. *limit points*)(A i D) - tangenta na krivu odgovora je horizontalna. U njoj dolazi do skoka sa jednog ravnotežnog položaja na drugi ili do potpunog kolapsa konstrukcije (slika 8.1). Karakteristika graničnih tačaka je da nakon njih ravnotežna deformacijska forma konstrukcije prelazi is stabilnog u nestabilno područje ili obrnuto.
2. Tačke račvanja (engl. *bifurcation points*) - javljaju se dve ili više grana u dijagramu odgovora, sa različitim tangentama koje, u opštem slučaju nisu horizontalne. Osnovna karakteristika tačke račvanja je da u njoj dolazi do naglog skoka sa jednog ravnotežnog puta (grane) na drugi ravnotežni put (granu).

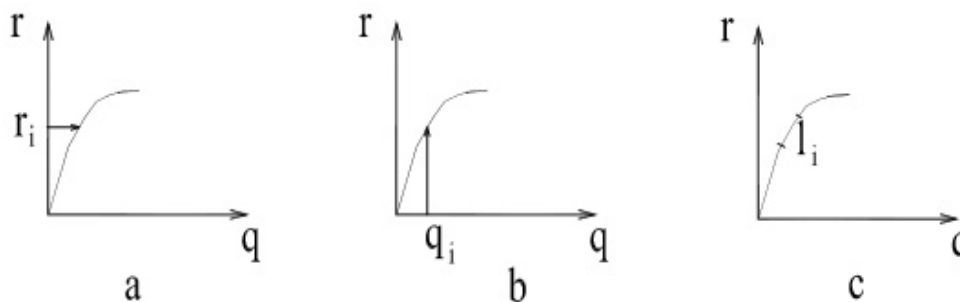
Ono što je zajedničko svim tim tačkama je to da one predstavljaju određene numeričke poteškoće pri rešavanju izraza 8.12, jer se u blizini tih tačaka numerički algoritam može ponašati nestabilno.

Nasuprot linearnom problemu, kod nelinearnog problema nije moguće implementirati samo jednu strategiju koja će generalno da važi za sve probleme. Vrlo često, određeni problem zahteva da se pokušaju različite procedure dok se ne dođe do korektnog rešenja.

Uspešna procedura, za rešavanje nelinearnih problema, mora da uključi sledeće:

1. Kontrolnu tehniku koja je u mogućnosti da kontroliše napredak proračuna duž ravnotežnog puta sistema. Ove tehnike mogu da se klasifikuju u:
 - (a) Kontrola sile - u ovoj tehnici kontrolni parametar je opterećenje. Konstantnom opterećenju, kako je specificirano odgovarajućom vremenskom krivom, u ravnotežnom stanju na ravnotežnom putu odgovara neka deformacija (slika 8.2a).
 - (b) Kontrola pomeranja - u ovoj tehnici kontrolni parametar je generalisano pomeranje neke tačke. Kako je specificirano odgovarajućom vremenskom krivom, konstantnom generalisanom pomeranju neke tačke u ravnotežnom stanju na ravnotežnom putu odgovara neka sila (slika 8.2b).
 - (c) Kontrola dužine luka - u ovoj tehnici, kontrolni parametar je dužina luka ravnotežne krive. Šablon primenjenog opterećenja se proporcionalno uvećava da se postigne ravnoteža za određenu dužinu luka ravnotežnog puta. Dužina luka se automatski računa i nije potrebna vremenskom kriva (slika 8.2c).

Kontrola sila i pomeranja nije uspešna u blizini povratnih tačaka (engl. *turning points*), koje su poznate kao tačke proloma (engl. *snap-through*)(tačke A i D na slici 8.1- kod ovih tačaka jednoj vrednosti opterećenja pripadaju dve ili više vrednosti pomeranja) kod kontrole sila i povratne tačke (engl. *snap-back*) (tačke B i C na slici 8.1 - za ove tačke karakteristično je da jednoj vrednosti pomeranja odgovaraju dve ili više vrednosti opterećenja) kod kontrole pomeranja.



Slika 8.2: Kontrolni putevi

2. Iterativni metod kojim se rešava sistem simultanih nelinearnih jednačina upravljajući ravnotežnim stanjem duž ravnotežnog puta.

Metode za određivanje rešenja nelinearnih problema mogu da se klasifikuju u metode kontrole sile - klasične metode (*Newton Raphson*-ova, modifikovana *Newton Raphson*-ova metoda i dr.) i metode sa promenljivim nivoom opterećenja u toku iterativnog procesa (metoda fiktivnih opruga, metoda kontrole pomeranja, metoda konstantnog sfernog ili tangentnog luka, metoda konstantnog inkrementa spoljasnog rada i dr).

Iterativne metode se najčešće kombinuju sa inkrementalnim postupcima. Rešenje nekog nelinearnog problema korišćenjem bilo kog od ovih postupaka svodi se na određivanje niza rešenja odgovarajućih linearnih problema.

Klasičnim inkrementalno iterativnim metodama, u opštem slučaju, nije moguće dobiti rešenje u neposrednoj blizini kritičnih tačaka, bez obzira na veličinu inkrementa i broj iteracija. U područjima izrazitih nelinearnosti ove metode dovode do divergencije rešenja.

Za praćenje ponašanja konstrukcije u okolini graničnih tačaka koriste se metode sa promenljivim nivoom opterećenja u toku iterativnog procesa.

3. Kriterijum završetka kojim se zaustavlja proces rešavanja jednačina. Na kraju svake iteracije, mora da se proveriti konvergencija rešenja. Veoma labava tolerancija dovešće do netačnih rezultata, dok veoma stroga tolerancija može da dovede do nepotrebnog produženja vremena rada kompjutera.

U radu će biti prikazane dve metode kontrole sile: *Newton Raphson*-ova i modifikovana *Newton Raphson*-ova metoda.

8.2.2 Metode kontrole sile

Kod primene metode kontrole sile, opterećenje se nanosi na konstrukciju u inkrementalnim koracima upotrebom vremenske krive ($r - t$). Vremenska kriva propisuje kako se opterećenje menja u pojedinim koracima. Kod nelinearne statičke analize, vreme predstavlja pseudovariablu koja označava intezitet primenjenog opterećenja u odgovarajućem koraku proračuna. Kod dinamičke nelinearne analize i kod nelinearne statičke analize sa vremenski zavisnim osobinama materijala, vreme predstavlja realno vreme koje je u vezi sa primenjenim opterećenjem.

Osnova metode kontrole sila sastoji se u sledećem [40]:

1. Podela ukupnog opterećenja na niz parcijalnih opterećenja ili inkremenata. U opštem slučaju inkrementi opterećenja mogu biti različitih veličina. U okviru svakog inkrementa vrši se linearizacija problema. Rešenje posmatranog nelinearnog problema se dobija kao zbir niza linearnih rešenja.
2. Za svaki inkrement opterećenja vrši se korekcija sistema. Ovo uključuje korekcija geometrije svakog konačnog elementa (engl. *updating of geometry*) i korekciju tangentne matrice krutosti u skladu sa silama u elementu.
3. U svakom inkrementu, jednačine ravnoteže pre nego što se krene dalje, moraju da budu zadovoljene. U prvoj fazi - prediktor fazi (engl. *predictor phase*) nalaze se pomeranja za dati inkrement opterećenja, a u drugoj fazi - fazi provere ravnoteže (engl. *equilibrium checking phase*) računaju se interne sile i upoređuju se sa primenjenim opterećenjem. Ukoliko je ravnoteža uspostavljena, odnosno ukoliko je razlika unutar dopuštenih odstupanja, prelazi se u novi inkrement, a ako je razlika veća od dopuštene u trećoj fazi - korektor fazi (engl. *corrector phase*) kao dodatno opterećenje primenjuju se rezidualne sile i proces se ponavlja sve dok se ne postigne tražena tačnost tj. dok rezidualne sile i pomeranje čvorova ne postanu dovoljno mali.

Korektor se faza, nadalje, može podeliti na dve podfaze i to: korekcija geometrije svakog konačnog elementa i određivanje vektora čvornih sila svakog konačnog elementa, te njegova transformacija u globalni koordinatni sistem. Druga podfaza u literaturi, ponekad, se definiše kao zasebna faza i naziva se faza korekcije sile (engl. *force recovery*). Vektor čvornih sila konačnog elementa potrebno transformisati u globalni koordinatni sistem. Matrica transformacije u korigovanom *Lagrange*-ovom postupku ${}^m\mathbf{T}$ mora da se zameni matricom ${}^{m+1}\mathbf{T}$, jer komponente tog vektora deluju na pravcu osi konačnog elementa u konfiguraciji ${}^{m+1}C$.

Kod primene čiste inkrementalne šeme, treća faza se preskače, te se direktno ide u novi inkrement, a što ima za posledicu da tako dobivena rešenja mogu biti vrlo nepouzdana.

Istraživanja su pokazala da tačnost rešenja najviše zavisi od korektor faze, dok prediktor faza najviše utiče na brzinu konvergencije.

Matematički, nelinearna statička analiza ne garantuje uvek jedinstveno rešenje. Ako nelinearna statička analiza prouzrokuje teškoće, umesto nje može da se upotrebi dinamička analiza sa veoma sporim prirastom opterećenja.

Jednačine ravnoteže elementa izvedene korigovanim *Lagrange*-ovim postupkom su inkrementalne jednačine ravnoteže. Jednačine ravnoteže koje nisu inkrementalne mogu da se prevedu u inkrementalne.

Newton Raphson-ova metoda

Ako se diskretizacija nelinearnog konstruktivnog problema izvršena metodom konačnih elemenata dolazi se do sistema

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \mathbf{f}(\mathbf{q}) - \mathbf{r} = 0 \quad (8.14)$$

gde je $\mathbf{r}$ vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja, $\mathbf{f}$ vektor internih čvornih sila i $\mathbf{q}$ vektor nepoznatih pomeranja čvorova sistema. Jednačina (8.14) će se napisati za konfiguraciju ${}^{m+1}C$

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = {}^{m+1}\mathbf{f}(\mathbf{q}) - {}^{m+1}\mathbf{r} = 0 \quad (8.15)$$

Pretpostaviće se da je u iterativnom postupku određeno rešenje ${}^{m+1}\mathbf{q}^{(i-1)}$, tj. aproksimacija vektora $\mathbf{q}$ u iteraciji $i-1$. Ako se funkcija $\mathbf{R}(\mathbf{q})$ razvije u *Taylor*-ov red u okolini ${}^{m+1}\mathbf{q}^{(i-1)}$ dobija se

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \mathbf{R} \left[{}^{m+1}\mathbf{q}^{(i-1)} \right] + \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}} \right]_{m+1\mathbf{q}^{(i-1)}} \left[\mathbf{q} - {}^{m+1}\mathbf{q}^{(i-1)} \right] \quad (8.16)$$

Pošto je spoljašnje opterećenje nezavisno od pomeranja iz (8.14) sledi

$$\left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}} \right]_{m+1\mathbf{q}^{(i-1)}} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \right]_{m+1\mathbf{q}^{(i-1)}} = {}^{m+1}\mathbf{K}_T^{(i-1)} \quad (8.17)$$

Unošenje izraza (8.17) u (8.16) i korišćenjem (8.14) dolazi se do iterativne jednačine

$${}^{m+1}\mathbf{K}_T^{(i-1)} \Delta \mathbf{q}^{(i)} = {}^{m+1}\mathbf{r} - {}^{m+1}\mathbf{f}^{(i-1)} \quad (8.18)$$

U jednačini (8.18) je

$$\Delta \mathbf{q}^{(i)} = \left[\mathbf{q} - {}^{m+1}\mathbf{q}^{(i-1)} \right] \quad (8.19)$$

korekcija priraštaja pomeranja u iteraciji i . Kada je iz (8.18) određena veličina $\Delta \mathbf{q}^{(i)}$, tada je moguće na osnovu (8.19) odrediti aproksimativnu vrednost vektora $\mathbf{q}$ u iteraciji i

$${}^{m+1}\mathbf{q}^{(i)} = {}^{m+1}\mathbf{q}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{q}^{(i)} \quad (8.20)$$

Relacijama (8.18) i (8.20) izražen je *Newton-Raphson*-ov iterativni postupak za rešavanje nelinearne jednačine (8.14). U slučaju statičke nelinearne analize početni uslovi su jednaki

$${}^{m+1}\mathbf{q}^{(0)} = {}^m\mathbf{q} \quad (8.21)$$

$${}^{m+1}\mathbf{f}_{int}^{(0)} = {}^m\mathbf{f}_{int} \quad (8.22)$$

Kod dinamičke analize, osim vektora ekvivalentnog čvornog opterećenja, postoje još sile prigušenja i inercijalne sile i uslov ravnoteže je

$${}^{m+1}\mathbf{K}_T^{(i-1)} \Delta \mathbf{q}^{(i)} = {}^{m+1}\mathbf{r} - {}^{m+1}\mathbf{f}^{(i-1)} - \mathbf{M}^{m+1} \ddot{\mathbf{q}}^{(i)} - {}^{m+1}\mathbf{C}^{(i-1)} {}^{m+1}\dot{\mathbf{q}}^{(i)} \quad (8.23)$$

Jednačina (8.23) zavisi od brzine i ubrzanja, te su dodatni početni uslovi

$${}^{m+1}\ddot{\mathbf{q}}^{(1)} = {}^{m+1}\ddot{\mathbf{q}} \quad (8.24)$$

$${}^{m+1}\dot{\mathbf{q}}^{(1)} = {}^{m+1}\dot{\mathbf{q}} \quad (8.25)$$

Kod *Newton Raphson*-ovog postupka tangentna matrica krutosti $\mathbf{K}_T$ računa se u svakoj iteraciji u okviru jednog inkrementa. Matrica prigušenja $\mathbf{C}$ može da se izračuna na početku iterativnog postupka ili da se računa uvek kada se računa tangentna matrica krutosti.

Modifikovana *Newton Raphson*-ova metoda

Kod modifikovanog *Newton Raphson*-ovog iterativnog postupka umesto jednačina (8.18) i (8.23) važe jednačine

$${}^m\mathbf{K}_T\Delta\mathbf{q}^{(i)} = {}^{m+1}\mathbf{r} - {}^{m+1}\mathbf{f}^{(i-1)} \quad (8.26)$$

$${}^m\mathbf{K}_T\Delta\mathbf{q}^{(i)} = {}^{m+1}\mathbf{r} - {}^{m+1}\mathbf{f}^{(i-1)} - \mathbf{M}{}^{m+1}\ddot{\mathbf{q}}^{(i)} - {}^m\mathbf{C}{}^{m+1}\dot{\mathbf{q}}^{(i)} \quad (8.27)$$

Matrica krutosti računa se na početku svakog inkrementa, a matrica prigušenja na početku inkrementalnog postupka ili uvek kada se računa tangentna matrica krutosti. Za $i = 1$ jednačine (8.26) ili (8.27) odgovaraju respektivno jednačinama ravnoteže (7.36) i (7.37) u korigovanom *Lagrange*-ovom postupku.

Određivanje aproksimacija za ${}^{m+1}\ddot{\mathbf{q}}^i$ i ${}^{m+1}\dot{\mathbf{q}}^i$ zavisi od usvojenog postupka vremenske integracije (*Wilson*-ov θ postupak, *Newmark*-ov postupak, Postupak harmonijskog ubrzanja). U delu 8.2.3 je prikazan *Newmark*-ov postupak vremenske integracije.

8.2.3 *Newmark*-ov postupak vremenske integracije

Polazi se od sledećih pretpostavki

$${}^{m+1}\dot{\mathbf{q}} = {}^m\dot{\mathbf{q}} + \Delta t[(1 - \delta){}^m\ddot{\mathbf{q}} + \delta{}^{m+1}\ddot{\mathbf{q}}] \quad (8.28)$$

$${}^{m+1}\mathbf{q} = {}^m\mathbf{q} + {}^m\dot{\mathbf{q}}\Delta t + \Delta t^2[(\frac{1}{2} - \alpha){}^m\ddot{\mathbf{q}} + \alpha{}^{m+1}\ddot{\mathbf{q}}] \quad (8.29)$$

gde su α i δ parametri koji se određuju tako da se obezbedi numerička tačnost i stabilnost rešenja. Šema integracije koja obezbeđuje безусловnu stabilnost dobija se za

$$\begin{aligned} \delta &\geq \frac{1}{2} \\ \alpha &\geq \frac{1}{6}(2\delta + 1)^2 \end{aligned} \quad (8.30)$$

Najbolja tačnost postupka postiže se za $\alpha = 1/4$ i $\delta = 1/2$. Rešavanjem jednačine (8.29) po ${}^{m+1}\ddot{\mathbf{q}}$, a zatim uvrštavanjem tog rešenja u (8.28) dobijaju se sledeći izrazi

$${}^{m+1}\ddot{\mathbf{q}} = a_0({}^{m+1}\mathbf{q} - {}^m\mathbf{q}) - a_2{}^m\dot{\mathbf{q}} - a_3{}^m\ddot{\mathbf{q}} \quad (8.31)$$

$${}^{m+1}\dot{\mathbf{q}} = a_1({}^{m+1}\mathbf{q} - {}^m\mathbf{q}) - a_4{}^m\dot{\mathbf{q}} - a_5{}^m\ddot{\mathbf{q}} \quad (8.32)$$

U izrazima (8.31) i (8.32) vrednosti koeficijenata su

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \quad (8.33)$$

$$a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \quad (8.34)$$

$$a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t} \quad (8.35)$$

$$a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1 \quad (8.36)$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1 \quad (8.37)$$

$$a_5 = \frac{\Delta t}{\alpha} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \quad (8.38)$$

Ako se izrazi (8.31) i (8.32) napišu za i -tu ravnotežnu iteraciju i uzme se u obzir (8.19) sledi

$${}^{m+1}\ddot{\mathbf{q}}^{(i)} = a_0 \Delta \mathbf{q}^i - \mathbf{Q}_1 \quad (8.39)$$

$${}^{m+1}\dot{\mathbf{q}}^{(i)} = a_1 \Delta \mathbf{q}^{(i)} - \mathbf{Q}_2 \quad (8.40)$$

$$\mathbf{Q}_1 = -a_0 ({}^{m+1}\mathbf{q}^{(i-1)} - {}^m\mathbf{q}) + a_2 {}^m\dot{\mathbf{q}} + a_3 {}^m\ddot{\mathbf{q}} \quad (8.41)$$

$$\mathbf{Q}_2 = -a_1 ({}^{m+1}\mathbf{q}^{(i-1)} - {}^m\mathbf{q}) + a_4 {}^m\dot{\mathbf{q}} + a_5 {}^m\ddot{\mathbf{q}} \quad (8.42)$$

Smenom (8.39) i (8.40) u jednačinu ravnoteže, kod na primer modifikovanog *Newton-Raphson*-ovog postupka (8.27), dobija se

$${}^m\mathbf{K}^* \Delta \mathbf{q}^{(i)} = {}^{m+1}\mathbf{P}_*^{(i-1)} \quad (8.43)$$

gde su

$${}^m\mathbf{K}^* = {}^m\mathbf{K}_T + a_0 \mathbf{M} + a_1 {}^m\mathbf{C} \quad (8.44)$$

$${}^{m+1}\mathbf{P}_*^{i-1} = {}^{m+1}\mathbf{P} - \frac{{}^{m+1}}{m+1}\mathbf{F}^{i-1} + \mathbf{M}\mathbf{Q}_1 + {}^m\mathbf{C}\mathbf{Q}_2 \quad (8.45)$$

Kada se iz jednačine (8.43) odredi ${}^{m+1}\mathbf{q}$ tada je

$${}^{m+1}\ddot{\mathbf{q}}^{(i)} = a_0 \left({}^{m+1}\mathbf{q}^{(i)} - {}^m\mathbf{q} \right) - a_2 {}^m\dot{\mathbf{q}} - a_3 {}^m\ddot{\mathbf{q}} \quad (8.46)$$

$${}^{m+1}\dot{\mathbf{q}}^{(i)} = {}^m\dot{\mathbf{q}} + a_6 {}^m\ddot{\mathbf{q}} + a_7 {}^{m+1}\ddot{\mathbf{q}}^{(i)} \quad (8.47)$$

gde su

$$a_6 = \Delta t (1 - \delta) \quad (8.48)$$

$$a_7 = \delta \Delta t \quad (8.49)$$

8.2.4 Kriterijumi konvergencije

Kod nelinearne dinamičke analize usvaju se kriterijumi konvergencije po:

1. Pomeranjima

$$\frac{\|\Delta \mathbf{q}^{(i)}\|_2}{\|{}^{m+1}\mathbf{q}^{(i)}\|_2} \leq \varepsilon_u \quad (8.50)$$

2. Neuravnoteženim silama

$$\frac{\|{}^{m+1}\mathbf{P} - {}^{m+1}\mathbf{f}_{\text{int}}^{(i)} - \mathbf{M}^{m+1}\ddot{\mathbf{q}}^{(i)} - {}^m\mathbf{C}^{m+1}\dot{\mathbf{q}}^{(i)}\|_2}{\|{}^{m+1}\mathbf{P} - {}^m\mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{M}^m\ddot{\mathbf{q}} - {}^m\mathbf{C}^m\dot{\mathbf{q}}\|_2} \leq \varepsilon_P \quad (8.51)$$

3. Inkrementalnoj unutrašnjoj sili

$$\frac{\Delta \mathbf{q}^{(i)T} ({}^{m+1}\mathbf{P} - {}^{m+1}\mathbf{f}_{\text{int}}^{(i)} - \mathbf{M}^{m+1}\ddot{\mathbf{q}}^{(i)} - {}^m\mathbf{C}^{m+1}\dot{\mathbf{q}}^{(i)})}{\Delta \mathbf{q}^{(1)T} ({}^{m+1}\mathbf{P} - {}^m\mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{M}^m\ddot{\mathbf{q}} - {}^m\mathbf{C}^m\dot{\mathbf{q}})} \leq \varepsilon_E \quad (8.52)$$

gde su ε_u , ε_P , ε_E dozvoljene tolerancije pomeranja, neuravnoteženih sila i inkrementalne unutrašnje energije. U izrazima (8.51) i (8.52) su uključeni i efekti inercijalnih sila i sila prigušenja.

Kod nelinearne statičke analize uslovi konvergencije svode se samo na kriterijum po pomeranjima.

Kod metoda kontrole sile, u slučaju da konvergencija nije postignuta u zadatom broju iteracija, a proces nije divergentan, iterativni postupak se automatski ponavlja sa upola manjim inkrementom opterećenja.

8.3 Problem svojstvenih vrednosti

Neka su date dve kvadratne matrice: matrica masa $\mathbf{M}$ i matrica krutosti $\mathbf{K}$. Neka je data diferencijalna jednačina kretanja slobodnih neprigušenih oscilacija sistema

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (8.53)$$

Potrebno je naći rešenje gde se sve generalisane koordinate menjaju sinhrono i sinfazno. To je takvo rešenje u kome sve generalisane koordinate imaju istu vremensku zavisnost i opšta konfiguracija kretanja se ne menja sa vremenom izuzev po amplitudi.

Traži se rešenje jednačine kretanja (8.53) u obliku

$$\mathbf{q}(t) = \bar{\mathbf{q}} \cos(\omega t - \varphi) \quad (8.54)$$

gde je $\bar{\mathbf{q}}$ konstantan vektor reda n . Zamenom (8.54) u (8.53) dobija se

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (8.55)$$

Jednačina (8.55) predstavlja u matematičkom smislu, problem svojstvenih vrednosti para matrica $\mathbf{K}$ i $\mathbf{M}$ (generalisani problem). Ovaj sistem jednačina ima rešenje osim trivijalnog samo, ako je determinanta ovoga sistema jednaka 0

$$\det[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] = 0 \quad (8.56)$$

Razvijanjem determinante (8.56) dobija se polinom stepena n po parametru ω^2 . Polinom p se zove karakteristični polinom problema

$$p(\omega^2) = \det[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \quad (8.57)$$

Koreni polinoma p , dobijeni iz karakteristične jednačine $p(\omega^2) = 0$, predstavljaju svojstvene vrednosti problema. Kvadratni koreni ovih vrednosti su svojstvene kružne frekvencije sistema. Ako su matrice $\mathbf{K}$ i $\mathbf{M}$ realne i simetrične, svi koreni po ω^2 su realni. Ako su matrice $\mathbf{K}$ i $\mathbf{M}$ realne, simetrične i pozitivno definitne svi koreni po ω^2 su međusobno različiti, realni i pozitivni. Ako je matrica $\mathbf{K}$ singularna, jedna od svojstvenih vrednosti po $\omega^2 = 0$, a ako je $\mathbf{M}$ singularna matrica, onda je $\omega^2 \rightarrow \infty$.

Svakoј svojstvenoj frekvenciji ω_i odgovara svojstveni (karakteristični, modalni) vektor Φ_i . Modalni vektori mogu da se grupišu u kvadratnu matricu reda n , tako što predstavljaju kolone matrice

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \cdots & \Phi_n \end{bmatrix} \quad (8.58)$$

Modalni vektori su ortogonalni na matricu masa. Ako su još i ortonormirani tada važi

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} \quad \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Omega \quad (8.59)$$

gde je

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (8.60)$$

Generalisani problem definisan jednačinom (8.55) može se pogodnim transformacijama svesti na standardni problem. Matrica masa $\mathbf{M}$ izraziće se kao

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \quad (8.61)$$

gde je $\mathbf{L}$ donja trougaona matrica, a $\mathbf{L}^T$ transponovana matrica matrice $\mathbf{L}$. Izraz (8.61) će se zameniti u (8.55) i dobija se

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{L}\mathbf{L}^T) \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (8.62)$$

Jednačina (8.62) će se pomnožiti sa leve strane sa $\mathbf{L}^{-1}$, a sa desne sa $\mathbf{L}^{-T}$ i posle sređivanja dobija se

$$(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{I}) \mathbf{Y} = \mathbf{0} \quad (8.63)$$

gde je

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{L}^{-T} \quad (8.64)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{L}^T \bar{\mathbf{q}} \quad (8.65)$$

Determinanta sistema (8.63) data je sa

$$\det [\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{I}] = 0 \quad (8.66)$$

Karakteristični polinom je

$$p(\omega^2) = \det [\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{I}] \quad (8.67)$$

Imajući u vidu činjenicu da se rešavanje problema svojstvenih vrednosti svodi na nalaženje nula karakterističnog polinoma $p(\omega^2) = 0$, reda n , kao i da ne postoji eksplicitni postupak nalaženja nula karakterističnog polinoma reda većeg od 4, rešavanje ovakvog problema mora da bude po prirodi stvari iterativnog karaktera. Od mogućih metoda, u radu su implementirane metode transformacije (zasnivaju se na relacijama ortogonalnosti i ortonormiranosti kao i na stavu o svojstvenim vrednostima matrica dobijenih tkz. sličnim transformacijama) [75]: *Jacobi*-ev postupak za rešavanje standardnog problema, *Lancsoz*-ov postupak za standardni i generalisani problem, *Housholder*-ov postupak za standardni problem. Kod za transformacije, koji je ugrađen u klase za rešavanje problema svojstvenih vrednosti (videti deo 9.3.2), preuzet je iz [87].

8.4 Gauss-ove kvadrature formule

Numerička integracija je procedura aproksimacije integrala sumiranjem. Za jednodimenzionalni problem vrednost integrala je jednaka

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{nip} w_j f(x_j) \quad (8.68)$$

gde su $f(x_j)$ koeficijenti funkcije f za vrednosti koordinata x_j , a w_j koeficijenti numeričke integracije i nip broj tačaka integracije.

Za primenu *Gauss*-ovog postupka, ako integral nije dat na kanonskom intervalu $0 \leq \xi \leq 1$ ili $0 \leq \xi \leq 1$, potrebno ga je transformisati sa intervala $[a, b]$ na kanonski interval tj.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\xi} f(\xi)d\xi \quad (8.69)$$

Način transformacije je dat u poglavlju C. Vrednost integrala (8.69) je jednaka

$$\int_{\xi} f(\xi)d\xi \approx \sum_{j=1}^{nip} w_j f(\xi_j) \quad (8.70)$$

Kod *Gauss*-ovog postupka, diskretne tačke ne usvajaju se unapred na jednakom rastojanju, već se njihov položaj određuje tako da se dobije najviša tačnost integracije sa minimalnim brojem tačaka integracije nip . U *Gauss*-ovim kvadraturama tačke integracije su simetrično razmeštene u odnosu na centar intervala. Centralna tačka je uključena u integraciju kada je broj nip neparan, ali krajnje tačke intervala nisu nikada uključene. Podaci za *Gauss*-ove kvadrature obično su tabulirani za $-1 \leq \xi \leq 1$ (tabela 8.2) ili za $0 \leq \xi \leq 1$ (tabela 8.3).

Tabela 8.2: Koeficijenti numeričke integracije i argumenti funkcija u *Gauss*-ovim kvadraturnim formulama kada je $-1 \leq \xi \leq 1$

nip	w_j	ξ_j
2	$c_1 = 1.000000000$	$\xi_1 = -0.577350269$
	$c_2 = 1.000000000$	$\xi_2 = 0.577350269$
3	$c_1 = 0.555555556$	$\xi_1 = -0.774596669$
	$c_2 = 0.888888889$	$\xi_2 = 0.000000000$
	$c_3 = 0.555555556$	$\xi_3 = 0.774596669$
4	$c_1 = 0.347854845$	$\xi_1 = -0.861136312$
	$c_2 = 0.652145155$	$\xi_2 = -0.339981044$
	$c_3 = 0.652145155$	$\xi_3 = 0.339981044$
	$c_4 = 0.347854845$	$\xi_4 = 0.861136312$
5	$c_1 = 0.236926885$	$\xi_1 = -0.906179846$
	$c_2 = 0.478628670$	$\xi_2 = -0.538469310$
	$c_3 = 0.568888889$	$\xi_3 = 0.000000000$
	$c_4 = 0.478628670$	$\xi_4 = 0.538469310$
	$c_5 = 0.236926885$	$\xi_5 = 0.906179846$
6	$c_1 = 0.171324492$	$\xi_1 = -0.932469514$
	$c_2 = 0.360761573$	$\xi_2 = -0.661209386$
	$c_3 = 0.467913935$	$\xi_3 = -0.238619186$
	$c_4 = 0.467913935$	$\xi_4 = 0.238619186$
	$c_5 = 0.360761573$	$\xi_5 = 0.661209386$
	$c_6 = 0.171324492$	$\xi_6 = 0.932469514$

Tabela 8.3: Koeficijenti numeričke integracije i argumenti funkcija u *Gauss*-ovim kvadraturnim formulama kada je $0 \leq \xi \leq 1$

nip	w_j	ξ_j
2	$c_1 = 0.500000000$	$\xi_1 = 0.211324865$
	$c_2 = 0.500000000$	$\xi_2 = 0.788675135$
3	$c_1 = 0.277777777$	$\xi_1 = 0.112701665$
	$c_2 = 0.444444444$	$\xi_2 = 0.500000000$
	$c_3 = 0.277777777$	$\xi_3 = 0.887298335$
4	$c_1 = 0.173927423$	$\xi_1 = 0.069431844$
	$c_2 = 0.326072577$	$\xi_2 = 0.330009478$
	$c_3 = 0.326072577$	$\xi_3 = 0.669990522$
	$c_4 = 0.173927423$	$\xi_4 = 0.938568156$
5	$c_1 = 0.118463443$	$\xi_1 = 0.046910077$
	$c_2 = 0.239314335$	$\xi_2 = 0.023076534$
	$c_3 = 0.284444444$	$\xi_3 = 0.500000000$
	$c_4 = 0.239314335$	$\xi_4 = 0.769234655$
	$c_5 = 0.118463443$	$\xi_5 = 0.953089923$

Glava 9

Objektno orijentisana analiza i dizajn sistema

9.1 Uvod

Softver ima za cilj da modeluje realni svet. Kod softvera postoji nekoliko pristupa modelu. Dva najčešća načina su iz perspektive algoritama i iz objektno orijentisane perspektive.

Tradicionalni pogled na razvoj softvera ima algoritamsku perspektivu. Kod tog pristupa, osnovni gradivni blokovi softvera - moduli - su procedure ili funkcije (sistem modelujemo postupkom koji se sastoji iz koraka. Razmišljamo kako se i kada nešto radi). Ovaj pogled usmerava nas na pitanja redosleda odvijanja aktivnosti i razlaganja većih algoritama u manje. Kako se menjaju projektni zahtevi i kako sistem raste, sistem stvoren u algoritamskom fokusu sve se teže održava.

Savremeni pristup razvoja softvera ima objektno orijentisanu perspektivu. U ovom pristupu glavni gradivni delovi softverskog sistema su objekti. Objekat je bilo koji fizički objekat ili koncept predstavljen kao apstrakcija podataka iz rečnika prostora problema ili prostora rešenja. Svaki objekat ima svoj identitet (može mu se dati ime ili ga razlikovati na neki drugi način), stanje (u opštem slučaju pridružuju mu se neki podaci) i ponašanje (može se izvršiti akcije nad objektom, a on može izvršiti akcije nad drugim objektom).

Objektno orijentisan pristup razvoju softvera se dokazao u projektovanju sistema za razne vrste problema uključujući sve nivoe veličine i kompleksnosti. Najmoderniji programski jezici, operativni sistemi i alati su objektno orijentisani.

Kod objektno orijentisanog pristupa treba razlikovati objektno orijentisano modeliranje i objektno orijentisano programiranje. Objektno orijentisano modeliranje (engl. *Object Oriented Modeling* - OOM) je širi pojam koji predstavlja način razmišljanja o problemu i kreiranje apstraktnog modela problema. Objektno orijentisano programiranje (engl. *Object Oriented Programming* - OOP) predstavlja tehniku realizacije ovoga modela, a objektno orijentisani jezici poseduju koncepte koji omogućavaju lako uobličavanje objektnog modela u računarski program. Kod OOM-a koncepti OOP-a i dalje važe, ali se koriste na nižem nivou apstrakcije, prilikom same implementacije objektno orijentisanog modela.

9.2 Osnovni pojmovi

9.2.1 Objektno orijentisano programiranje

Objektno orijentisano programiranje smišljeno je pre tridesetak godina kao odgovor na tzv. softversku krizu. Softverska kriza je fenomen koji je nastao kada su mogućnosti računara naglo porasle, a time su porasli i zahtevi za kompleksnim softverom. Pokazalo se da organizacija velikih softverskih projekata nije više dovoljno dobra da bi bila u stanju da izađe na kraj sa velikim zahtevima korisnika. Projektovanje, izrada i održavanje softvera postali su preskupi, preglomazni poslovi koji su davali sve manje rezultate u odnosu na rad koji se u njih ulagao. Greške u softveru su postajale sve ozbiljnije i teže za uočavanje i otklanjanje.

Može se izdvojiti nekoliko problema u realizaciji softvera koji su doveli do softverske krize [22]:

1. Tradicionalno programiranje podrazumeva projektovanje softvera po modulima. Moduli često imaju prejake interakcije. Programski kod jednog modula više puta se

oslanja na internu realizaciju drugog modula. Programer koji realizuje jedan modul može nenamerno da zanemari neku činjenicu na koju se oslonio programer koji je realizovao drugi modul, a koja nema nikakvog značaja na rad modula u kome se nalazi. Greška može nastupiti tek kada se moduli sklope u celinu.

2. Često se događa da programer shvati da je već mnogo puta realizovao neku strukturu podataka ili algoritam koji mu ponovo treba ali ga ne može ponovo upotrebiti bez značajnih izmena. Znači, tradicionalno programirane ne obezbeđuje lak način ponovne upotrebe softvera.
3. Tradicionalno programiranje ne obezbeđuje programe koji su jasno struktuirani, čitljivi i laki za modifikovanje. Jedna ispravljena greška u programu može da generiše niz novih. Tradicionalno programiranje ne obezbeđuje mehanizme koji mogu da lokalizuju realizaciju nekog dela programa i tako spreče da se izmene u nekom delu softvera odraze na ostatak sistema.

Kako se menjaju projektni zahtevi i kako sistem raste, sistem stvoren na tradicionalan način sve se teže održava.

Objektno orijentisano programiranje daje odgovore na nabrojane probleme. Ono nudi mehanizme koji:

1. Automatski kontrolišu interakcije između delova softvera
2. Omogućavaju višekratnu upotrebu već napisanih delova softvera (engl. *Software Reuse*)
3. Omogućavaju da se lokalizuje realizacija nekog dela programa i tako spreči da se izmene u nekom delu softvera odraze na ostatak sistema

Objektno orijentisano programiranje je novi pristup realizaciji softvera kao modela realnog sveta. To je poseban način razmišljanja pri projektovanju programa. OOP daje kao rešenje sledeće važne koncepte:

1. Apstarktni tipovi podataka (eng. *Abstract Data Type*) omogućavaju korisniku da se u programu definišu korisnički tipovi predstavljeni internom strukturom podataka (atributi, osobine) i operacija koje se mogu vršiti. Apstrakcijom se smatra skup objekata iz problema koji imaju neka zajednička svojstva, bitna sa stanovišta njihovog okruženja. Apstarkcija se modeluje klasom (tip). U koliko se pravi razlika između tipa i klase objekta, najpogodnije je tretirati klasu kao implementaciju tipa.
2. Enkapsulacija (engl. *Encapsulation; Information Hiding*) - skrivanje detalja realizacije neke klase. Realizacija neke klase može da bude skrivena od ostatka sistema.
3. Korisnicima se definiše samo šta se sa klasom može raditi, a način kako se to radi skriva se od korisnika.
4. Nasleđivanje (eng. *Inheritance*) je relacija između dve klase podataka: ako je klasa B jedna vrsta klase A, klasa B će imati sve osobine klase A, ali će imati još neke. Za klasu B se kaže da je naslednik klase A, tj da je izvedena iz klase A. Klasa A se tada naziva osnovna klasa.

5. Polimorfizam (eng. *Polymorphism*) je svojstvo koje obezbeđuje izvršenje neke operacije svojstvene izvedenoj klasi, i ako se pri tome objektu pristupa kao pripadniku osnove klase.

Objektno orijentisano programiranje je metoda implementacije računarskog programa a gde su programi organizovani i vidu komunicirajućih skupova objekata, pri čemu svaki objekat predstavlja jednu pojavu neke klase, sa hijerarhijskom organizacijom i mogućnošću nasleđivanja osobina. U takvim programima klasa obično ima statičke osobine, dok objekti imaju dinamičke osobine, sa dinamičkim vezanim vremenom i polimorfizmom.

9.2.2 Objektno orijentisano modeliranje i implementacija

Povećanjem složenosti aplikacija, razvoj softvera samo primenom tehnika OOP-a na nekom klasičnom, tekstualnom objektno orijentisanom programskom jeziku pokazao se kao nedovoljno efikasan. Metodolozi su započeli da eksperimentišu sa alternativnim pristupima analizi i projektovanju. Zbog toga su formirane metode za OOM. Te metode podrazumevaju:

1. Razvoj modela softvera na višem nivou apstrakcije, korišćenjem apstraktnijih koncepata od onih koje nudi OOP.
2. Specifikaciju modela pomoću vizuelnih, grafičkih notacija.
3. Transformaciju tako visoko apstraktnih, vizuelnih modela u implementacione forme. Implementaciona forma je tipično programski kod na nekom klasičnom, tekstualnom objektno orijentisanom programskom jeziku koji se dobija iz objektno orijentisanog modela softvera.

Pojavio se veliki broj objektno orijentisanih metoda (preko 50). Međutim ni jedna od njih nije zadovoljavala sve potrebe korisnika. Od svih metoda istakle su se tri metode: *Object Oriented Analysis and Design* (OOA/D, autor *Booch*), *Object Modeling Technique* (OMT, autor je *Rumbaugh*) i *Object Oriented Software Engineering* (OOSE, autor je *Jacobson*). Iz ove tri metode nastala je jedinstvena metoda za OOM koja se naziva UML (engl. *The Unified Modeling Language* - Objedinjeni jezik za modeliranje).

Rezultat modeliranja je da se dobije model. Model obezbeđuje šematski prikaz sistema. Svaki sistem može se opisati sa različitih aspekata korišćenjem različitih modela. Model može biti strukturni, naglašavajući organizaciju sistema ili dinamički naglašavajući ponašanje sistema.

U radu je posebna pažnja posvećena onim delovima UML jezika koji opisuju strukturni model sistema preko dijagrama klasa.

Tokom faze implementacije model se preslikava u ciljni implementacioni jezik, a to je ovde C++. Pošto se bavimo samo strukturnim modelom, koji je dat kao dijagram klasa, on će se preslikati u deklaracije klasa, atributa i metoda u C++-u.

Dobro dizajniran sistem omogućava programerima da nezavisno jedan od drugoga razvijaju i testiraju novi kod, odr zavaju i ispravljaju postojeći kod, i da mogu da uvedu novi kod u postojeći program. Loše dizajniran sistem to ne omogućava.

9.2.3 Osnove objektno orijentisanog modeliranja na jeziku UML

UML je standardni vizuelni jezik za OOM dominantno, ali ne isključivo, složenih softverskih sistema. On omogućava [48]:

1. Vizuelizaciju: UML je vizuelni, grafički jezik.
2. Specifikaciju: pomoću UML jezika formiraju se precizni, nedvosmisleni i potpuni modeli.
3. Konstrukciju: UML nije vizuelni programski jezik, ali njegovi modeli se mogu neposredno povezati sa raznim programskim jezicima. To znači da je moguće preslikavanje iz UML modela u programski jezik, u tabele relacionih baza.
4. Dokumentovanje: pomoću UML jezika mogu se dokumentovati zahtevi, arhitektura, projekat, izvorni kod itd.

9.2.4 Osnovni elementi jezika UML

Osnovni gradivni elementi jezika UML su [48]:

1. Opšta sredstva - stvari (engl. *Things*)
2. Relacije (engl. *Relationship*)
3. Dijagrami (engl. *Diagrams*)

Stvari su osnovni objektno orijentisani elementi za izgradnju u UML-u. Relacije spajaju opšta sredstva. Dijagrami grupišu zanimljive skupove opštih sredstva. Elementi za izgradnju UML-a ne mogu se spajati na proizvoljan način. Kao i svaki jezik, UML poseduje brojna pravila koja određuju kako treba da izgleda dobro formiran model.

Ovde će se ukratko dati opis onih elemenata jezika UML koji će se kasnije koristiti u radu.

Opšta sredstva

Postoji četiri vrste opštih sredstva. To su:

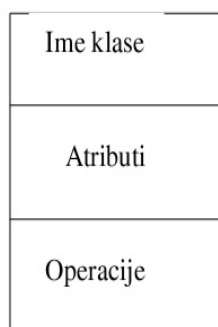
1. Strukturna opšta sredstva. To su imenice modela. One čine rečnik sistema koji modelujemo. To su statički delovi modela i predstavljaju elemente koji su ili konceptualni ili fizički. Postoji više opštih strukturnih sredstva, a jedno od njih je klasa.
2. Opšta sredstva za opis ponašanja. To su dinamički delovi UML modela. Oni su glagoli UML modela, koji predstavljaju ponašanje sistema.
3. Grupišuća opšta sredstva. To su organizacioni delovi UML modela. To su kutije na koje model može da bude razložen.
4. Anotaciona opšta sredstva. To su delovi sa objašnjenjima u UML modelu. To su komentari koji mogu da se primene za opis, rasvetljavanje i davanje primedbi o bilo kom elementu modela. Postoji jedno osnovno opšte sredstvo koje se zove napomena (engl. *Note*).

Klasa

Klasa (engl. *Class*) je najvažnije strukturno opšte sredstvo svakog objektno orijentisanog sistema. Klasa je opis skupa objekata koji dele iste atribute, operacije, relacije i semantiku. Svaka klasa mora da ima ime da bi se razlikovala od drugih. Atribut je imenovana osobina klase, koji opisuje vrednost koje konkretni primerci osobine mogu da sadre. Klasa može i ne mora da ima atribute.

Metoda je implementacija nekog servisa kojeg može zahtevati od bilo kog objekta klase da bi se uticalo na ponašanje.

Klasa se grafički prikazuje posebnim pravougaonim simbolom u kome mogu postojati odeljci za ime klase, atribute i metode (slika 9.1)



Slika 9.1: Oznaka za klasu

Relacije

Postoje četiri vrste relacija u UML-u:

1. Zavisnost (eng. *Dependency*). To je semantička relacija između dva opšta sredstva za koje važi da promena jednog (nezavisnog) opšteg sredstva može da utiče na drugo (zavisno) opšte sredstvo. Zavisnost se prikazuje isprekidanom linijom sa otvorenom strelicom na vrhu, koja polazi od stvari koja je zavisna i ide ka stvari od koje ova zavisi (slika 9.2).



Slika 9.2: Oznaka za relaciju zavisnosti

2. Asocijacija (engl. *Association*) To je strukturna relacija koja opisuje skup veza, gde je veza spoj između objekata. Asocijacija se grafički predstavlja punom linijom, koja može biti usmerena, ponekad sa oznakom, a često sa drugim detaljima kao što su mogući broj i imena učesnika u asocijaciji (slika 9.3).



Slika 9.3: Oznaka za relaciju asocijacije

3. Generalizacija (engl. *Generalisation*). To je relacija generalizacije/ specijalizacije kod koje objekte generalizovanog elementa (roditelja) mogu zameniti objekti specijalizovanog elementa (potomka). Potomak nasleđuje strukturu i ponašanje roditelja. Relacija se označava punom linijom sa praznom strelicom ka roditelju (slika 9.4).



Slika 9.4: Oznaka za relaciju generalizacije

4. Realizacija (engl. *Realization*). To je semantička veza u kojoj je jedan element ugovor koji drugi element ispunjava (slika 9.5).



Slika 9.5: Oznaka za relaciju realizacije

Dijagrami

Dijagram je grafička prezentacija skupa elemenata koji predstavlja jedan pogled na jedan deo modela. Dijagram se crta da bi se sistem vizuelizovao iz različitih perspektiva tako da je dijagram projekcija sistema. Pošto se ni jedan kompleksan sistem ne može u celini sagledati iz samo jedne perspektive, u UML-u je definisano više tipova dijagrama. Možemo da ih podelimo na:

1. Strukturne dijagrame - prikazuju statičke delove sistema. UML definiše pet strukturnih dijagrama. Jedan od strukturnih dijagrama koji je od interesa je dijagram klasa.
2. Dijagrame za opis ponašanja - opisuju dinamičke aspekte sistema. UML definiše četiri dijagrama za opis ponašanja.

Koji će sve dijagrami biti izabrani za modeliranje zavisi od sistema koji se modelira: da li je to jednostavna aplikacija koja se izvršava na jednom računaru, da li se radi o sistemu klijent/server ili je to kompleksan distribuirani sistem.

9.2.5 Dijagram klasa

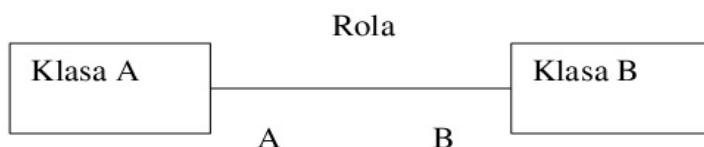
Dijagram klasa je strukturni dijagram i služi za modeliranje statičkog prikaza sistema. Ovi dijagrami sadrže: klase, pakete, relacije: asocijacije, zavisnosti, nasleđivanja.

Mogu da sadrže još neka druga opšta sredstva. Svi ovi elementi opisani su u predhodnim poglavljima.

Ovde će se dati nešto više detalja o relaciji asocijacije i nasleđivanja.

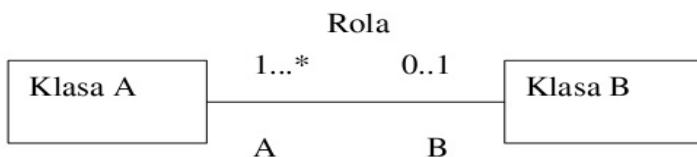
Asocijacija je relacija između klasa. Objekti kao instance tih klasa vezani su instancama te asocijacije. Instanca asocijacije zove se veza (engl. *Link*). Asocijacija najčešće služi da se preko veze objekata razmenjuju poruke. Asocijacijom se mogu povezati dve klase. Tada je to binarna asocijacija. Moguće su i asocijacije koje povezuju tri ili više klasa.

Kada klasa učestvuje u asocijaciji, ona igra specifičnu ulogu (engl. *Role*). Uloga se navodi jedinstvenim nazivom (eng. *Role*) ili parom uloga koje se pišu uz kraj asocijacije, prema klasi koja igra tu ulogu (A, B) (slika 9.6).



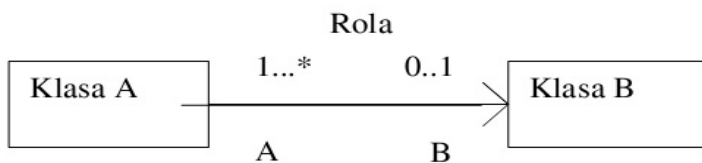
Slika 9.6: Asocijacija između dve klase

Posebno obeležije asocijacije je kardinalnost - multiplikativnost (engl. *Multiplicity*). Ona govori koliko objekata jedne klase učestvuje u datoj asocijaciji sa objektima druge klase. Specificira se navođenjem donje granice (minimalna vrednost, npr. 0), dve tačke (..) i gornje granice (maksimalna vrednost, npr. *, gde zvezda u tom slučaju označava nepoznat pozitivan ceo broj (slika 9.7)). Drugo važno obeležije asocijacije je upravljivost



Slika 9.7: Multiplikativnost

(engl. *Navigability*). Ona govori da se polazeći od objekta sa jedne strane veze može doći do objekta sa druge strane veze date asocijacije. Upravljenost u jednom smeru označava se otvorenom strelicom na odgovarajućem drugom kraju asocijacije (slika 9.8).



Slika 9.8: Upravljenost

Agregacija (engl. *Aggregation*) je posebna vrsta asocijacije koja predstavlja relaciju celina-deo. Objekti klase koja predstavlja celinu sadrže objekte koji predstavljaju delove. Agregacija se označava tako što se na liniji asocijacije stavi rombić na strani celine (slika 9.9).



Slika 9.9: Agregacija

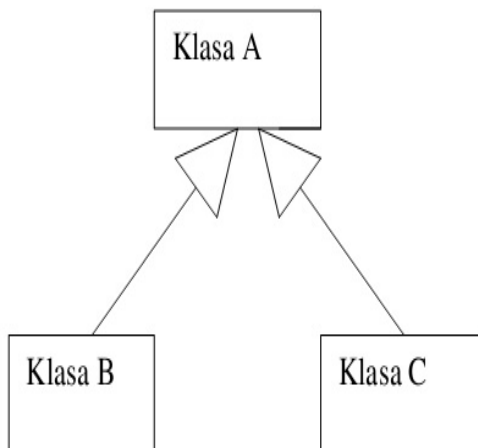
Kompozicija (engl. *Composition*) je posebna vrsta čvršće agregacije. Ona unosi posebnu semantiku u relaciji celine i dela. Kod nje je strogo definisano pitanje vlasništva objekta dela i njegovog životnog veka. Kompozicija se prikazuje kao i agregacija, samo sa ispunjenim romбом (slika 9.10).



Slika 9.10: Kompozicija

Relacija generalizacije je relacija između opšte stvari (osnovna klasa) i posebne stvari (izvedena klasa). Generalizacijom (ili nasleđivanjem) izvedene klase nasleđuju sve atribute i metode osnovne klase, a mogu (ali ne moraju) dodati i nove metode i atribute. Izvedena klasa može promeniti metodu iz osnovne klase, navođenjem svoje definicije metode kao metode iz osnovne klase (polimorfizam).

Klasa može imati jednu (engl. *Single Inheritance*) (slika 9.11) ili više osnovnih klasa (višestruko nasleđivanje, engl. *Multiple Inheritance*)



Slika 9.11: Nasleđivanje

9.3 Objektno orijentisana analiza

9.3.1 Zahtevi koje program mora da zadovolji

Program treba da omogući elastičnu linearnu i nelinearnu analizu konstrukcija sa kablovima opterećenih statičkim i dinamičkim opterećenjem.

Interakcija korisnika sa programom je u formi ulazne tekstualne datoteke koja sadrži podatke za proračun i izlazne tekstualne datoteke koja sadrži rezultate proračuna.

Korisnik, preko ulazne datoteke, u program unosi podatke o osobinama konstrukcije, opterećenju, metodama koje će da se koriste u proračunu. Program te podatke upotrebljava da izračuna uticaje (pomeranja i presečne sile) u konstrukciji i daje ih u obliku izlazne datoteke.

Od programa se zahteva da, na osnovu ulaznih podataka, može da odredi tip analize koju će da primeni. Na osnovu analize ulaznih podataka, program se usmerava da uradi sledeće tipove analize:

1. Linearna analiza

- (a) Statička analiza - može da bude jednokoračna ili višekoračna (kod jednokoračne opterećenje na konstrukciji se zadaje u jednom koraku. Kod višekoračne analize opterećenje se zadaje preko vremenske krive gde vreme predstavlja pseudovarijablu).
- (b) Dinamička analiza usled dinamičke poremećajne sile ili zemljotresa.

2. Nelinearne analiza

- (a) Statička analiza.
- (b) Dinamička analiza usled dinamičke poremećajne sile ili zemljotresa - treba da postoji mogućnost da se utiče na proračun matrice prigušenja sistema tako da bude konstantna tokom proračuna ili da joj se vrednost menja uvek kada se proračunava tangentna matrica krutosti sistema.

3. Proračun svojstvenih vrednosti slobodnih vibracija sistema.

Izlazne vrednosti analize za navedeno pod tačkom 1 i 2 su presečne sile na krajevima elemenata i pomeranja čvorova sistema. Izlazne vrednosti analize navedene pod tačkom 3 su svojstvene vrednosti i svojstveni vektori.

9.3.2 Dijagrami klasa

Glavni posao kod objektno orijentisane analize je izrada jednog ili više dijagrama klasa na kojima se uočavaju odnosi između klasa, njihovi atributi i metode.

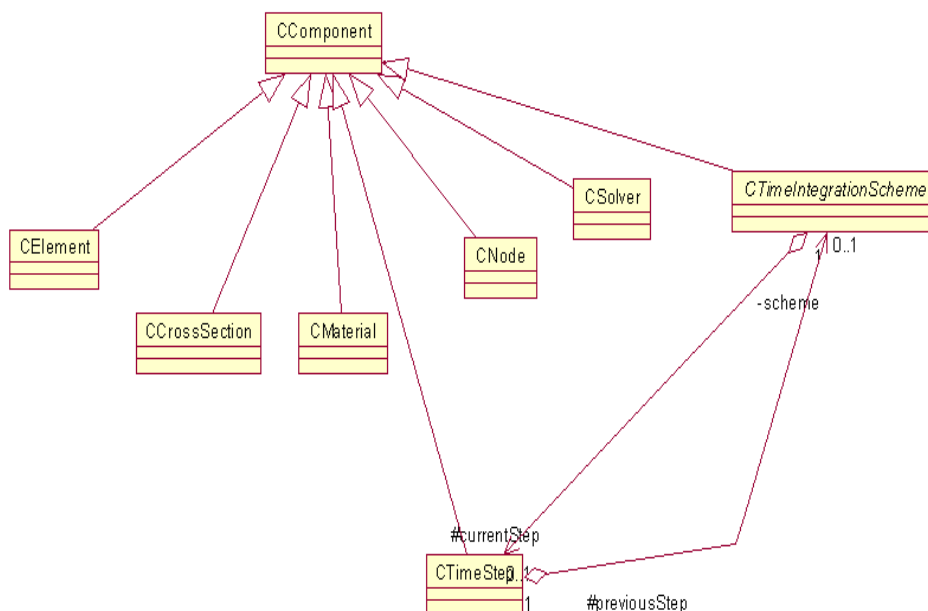
U sledećim poglavljima dati su karakteristični dijagrami klasa bez navedenja atributa i metoda.

Klase koje će biti predstavljene mogu da se grupišu u sledeće kategorije:

- 1. Klase za formiranje modela - klase koje se upotrebljavaju da kreiraju model za dati problem.

2. Klase za opis modela - klase koje se upotrebljavaju da opišu model.
3. Analitičke klase - klase koje služe za analizu modela i formiranje jednačina i vektora sistema.
4. Numeričke klase - klase koje podržavaju numeričke operacije u procesu rešavanja jednačina.
5. Ostale klase - klase koje ne mogu da se svrstaju ni u jednu grupu gornjih klasa.

Jedan deo klasa grupisanih u gornje četiri kategorije su subklase klase **CComponent** koja sadrži metode i podatke koji su zajednički za sve njene subklase (slika 9.12). Zajednički podatak za sve ove subklase je identifikacion broj. Ovaj podatak omogućava da se svaki kreirani objekat ovih klasa jednoznačno identifikuje.

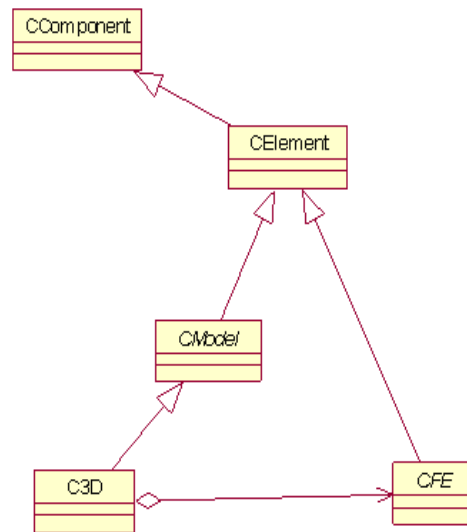


Slika 9.12: Dijagram subklasa klase **CComponent**

Klase za formiranje modela

Klasa **CModel** je osnovna klasa koja opisuje model konstrukcije (slika 9.13). Klasa **CModel** je subklasa klase **CElement**. Klasa **CElement** je klasa iz koje su izvedene klase **CModel** i **CFE** koja opisuje konačne elemente. Klasa **CElement** sadrži metode i podatke koji su zajednički jednoj i drugoj izvedenoj klasi.

Način na koji objekat **CModel** formira model zavisi od subklasa **CModel** klase. Klasa **C3D** je subklasa klase **CModel** i ona formira trodimenzionalni model konstrukcije sastavljene od konačnih elemenata .

Slika 9.13: Dijagram klasa **Model**

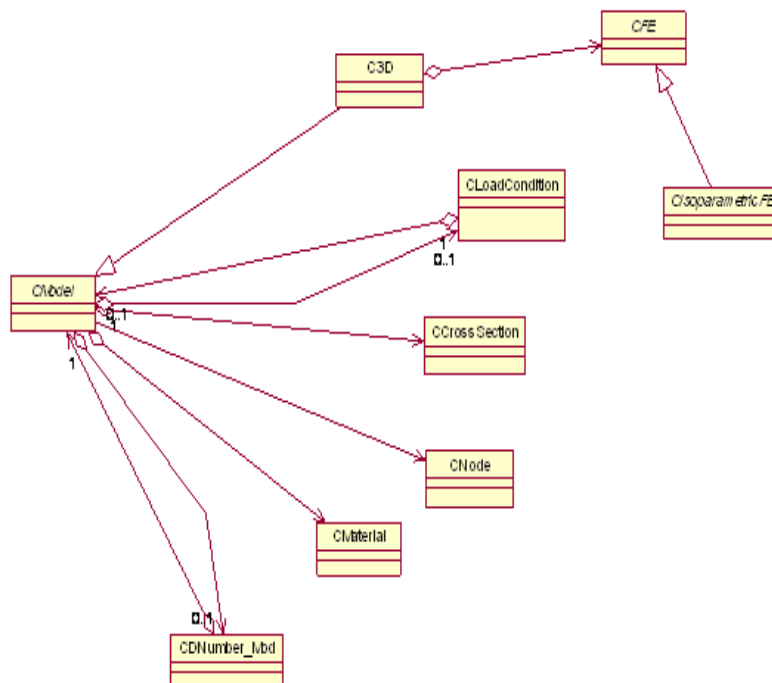
Klasa **CModel** predstavlja skladište za sledeće komponente: čvorove (klasa **CNode**), konačne elemente (klasa **CFE**), opterećenja (klasa **CLoadCondition**), materijale (klasa **CMaterial**) i karakteristike poprečnih preseka (klasa **CMaterial**) (slika 9.14). Osim ovih komponenti, ova klasa sadrži klasu za mapiranje između generalisanih pomeranja čvorova sistema i brojeva jednačina u sistemu jednačina (klasa **CDNumber_Mod**). Jedna od glavnih odgovornosti klase **CModel** je formiranje matrice krutosti i matrice masa modela.

Klase za opis modela

Klase za opis čvora

Klasa **CNode** opisuje čvor modela (slika 9.15). Svaki čvor modela ima svoj identifikacioni broj, nasleđen od klase **CComponent**, i koordinate X, Y, Z koje su nasleđene od klase **CPoint**. Klasa **CNode** je kontejner za podatke o:

1. Koncentrisanoj masi u pravcima generalisanih pomeranja - definisanoj klasom **CLumped-Mass**.
2. Prigušenju u pravcima generalisanih pomeranja - definisano klasom **CBCDDamper**.
3. Elastičnoj opruzi u pravcima generalisanih pomeranja - definisanoj klasom **CBCD-Spring**.
4. Ograničenju pomeranja čvora u pravcima generalisanih pomeranja - definisano klasom **CBCDRestraint**.



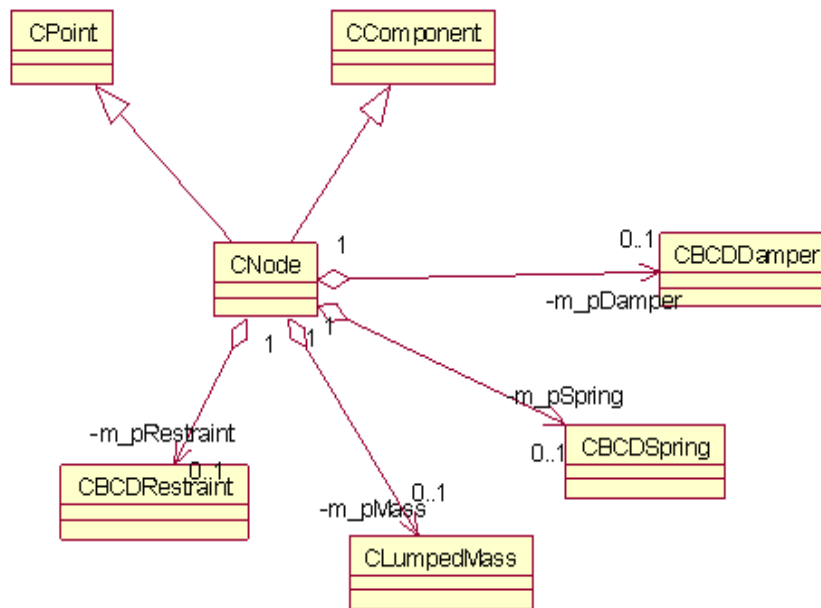
Slika 9.14: Dijagram klasa za opis modela sastavljenog od konačnih elemenata

Klase za opis konačnog elementa

Klasa **CFE** je osnovna klasa za konačne elemente iz koje su izvedeni svi konačni elementi. Klasa **CFE** je odgovorna za podatke o matrici krutosti, matrici masa, rezidualnom vektoru sila usled tekućeg napona i opterećenja elementa (slika 9.16). Klasa **CFE** je kontejner za podatke o:

1. Polukrutoj vezi u spoljašnjim čvorovima elementa koja je data preko krutosti opruga u pravcima generalisanih pomeranja [77]- definisana klasom **CFECSpring**.
2. Otpuštanju veza u pravcima generalisanih pomeranja u spoljašnjim čvorovima elementa - definisano klasom **CFERelease**.
3. Ekscentricitetu veze u spoljašnjim čvorovima elementa [77] - definisan klasom **CFE-CEeccentricity**.
4. Inicijalnoj vrednosti sila u elementu - definisanoj klasom **CBCFInternal**.

Klasa **CFE** ima metode koji obezbeđuju podatke o tome koja su primarna i sekundarna generalisana pomeranja čvorova elementa, a koje sadrži klasa **CDNumber_FE**. Ovo je bitno kod elemenata sa unutrašnjim čvorovima. Ovaj podatak omogućava eliminaciju sekundarnih pomeranja (pomeranja u unutrašnjim čvorovima) iz jednačina ravnoteže i smanjenje broja nepoznatih koje se računaju.



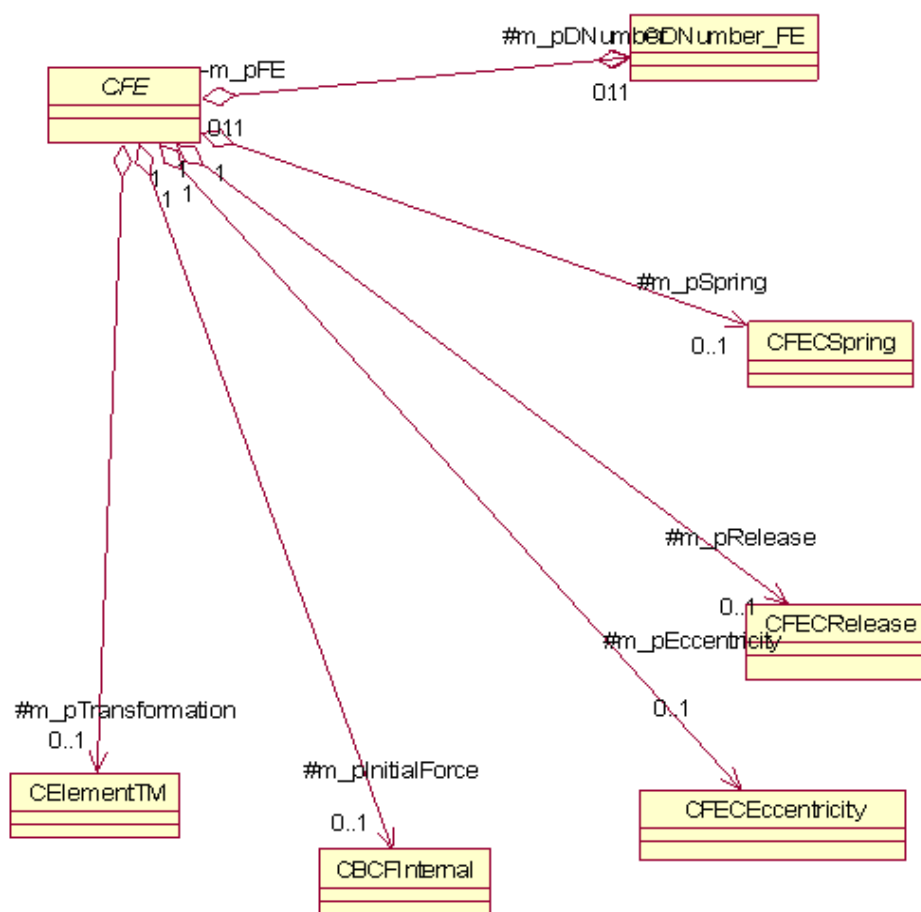
Slika 9.15: Dijagram klasa za formiranje čvora

Klasa **CElementTM** ima metode koje daju matrice transformacije elementa: matricu transformacije na sistemnu liniju preseka i matricu transformacije iz globalnog u lokalni koordinatni sistem.

Osim navedenih podataka, klasi **CFE** je pridružen i podatak o **CMaterial** i **CCross-Section** objektu koji su definisani u objektu **CModel** (slika 9.14). Izoparametarski element ima podatke i o *Gauss*-ovim tačkama koje su opisane **GaussPoint** klasom (videti poglavlje 8.4).

Iz klase **CFE** izvedene su sledeće klase za konačne elemente (slika 9.17):

1. **CBarEq** - prosti štap sa ekvivalentni modulom elastičnosti (videti poglavlje 5.4).
2. **CBar2N** - prosti štap (videti poglavlje 5.3).
3. **CBar3N** - prosti štap sa jednim unutrašnjim čvorom (videti poglavlje 5.3).
4. **CBeam2N** - greda (videti poglavlje 5.1).
5. **CBeam3N** - greda sa jednim unutrašnjim čvorom (videti poglavlje 5.2).
6. **CCatenary01** - konačni elemenat kao elastična hiperbolička lančanica (videti poglavlje 3.2.1).
7. **CCatenary02** - konačni elemenat kao elastična parabolička lančanica (videti poglavlje 3.2.2).
8. **CCatenary03** - konačni elemenat kao elastična hiperbolička lančanica (videti poglavlje 3.2.3).



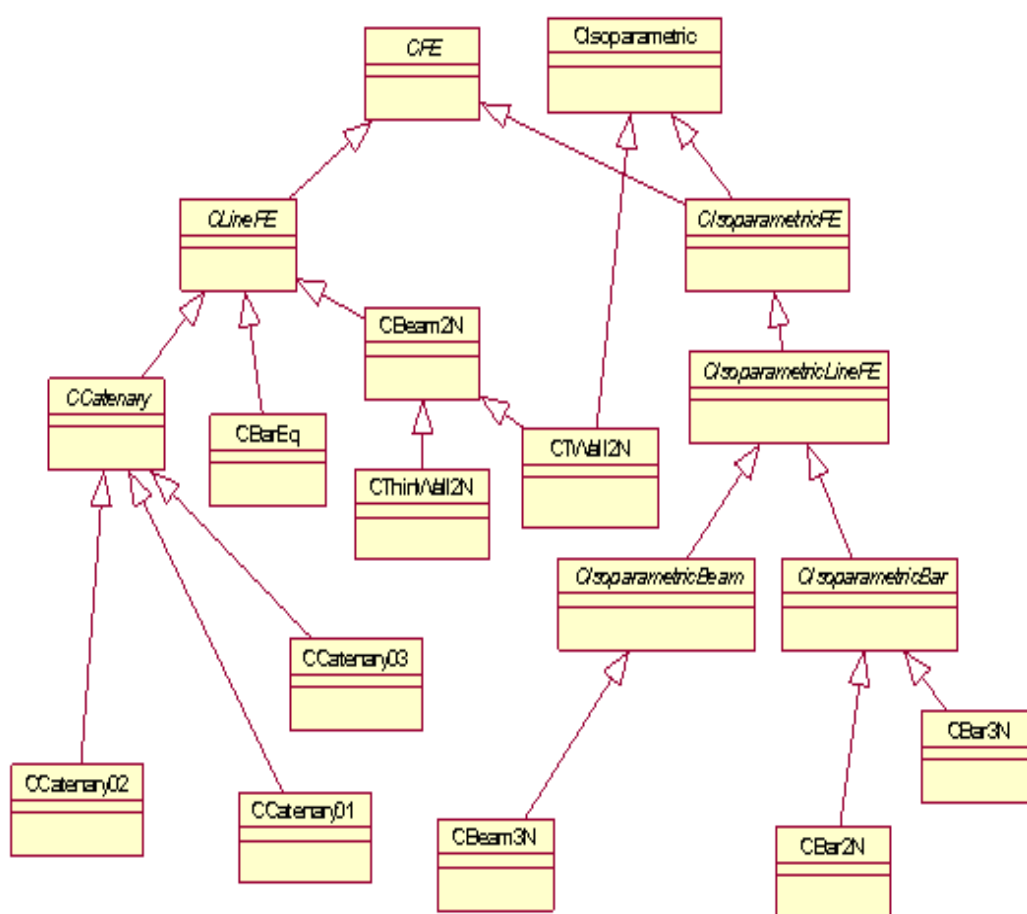
Slika 9.16: Dijagram klasa za formiranje modela konačnih elemenata

9. **CThinWall2N** - tankozidna greda otvorenog poprečnog preseka. Interpolacione funkcije, kod matrice interpolacionih funkcija, su polinomi (videti poglavlja 4 i 4.9).
10. **CTWall2N** - tankozidna greda otvorenog i zatvorenog poprečnog preseka. Interpolacione funkcije za matricu kolona $\mathbf{N}_\varphi$ su date kao hiperboličke funkcije (videti poglavlja 4 i 4.9).

Klase za opis opterećenja

Opterećenje modela može da bude dato kao (slika 9.18):

1. Čvorno opterećenje - opterećenje deluju u čvoru i opisano je klasom **CLNode**.
2. Opterećenje elementa - opterećenje deluju na elementu i opisano je klasom **CLElement**.



Slika 9.17: Dijagram klasa konačnih elemenata

Klase za opterećenje su izvedene iz klase **CLoad** koja sadrži zajedničke metode i atribute klase **CLNode** i **CLElement**.

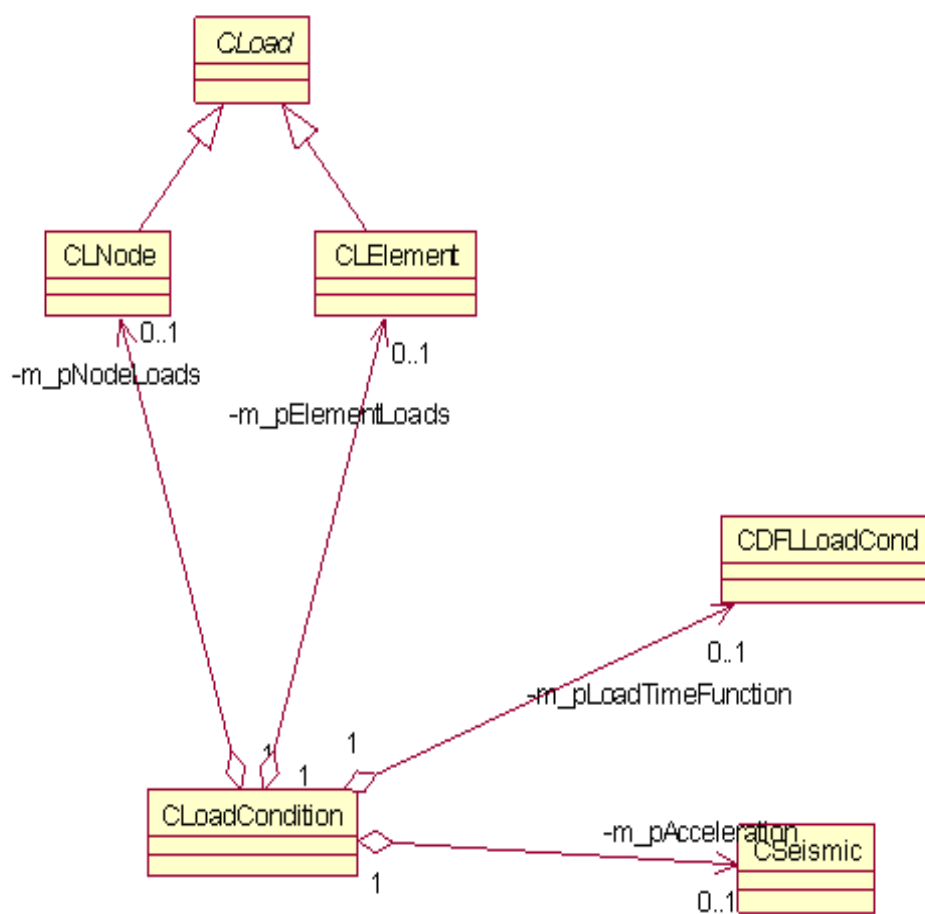
Svaki **CLNode** objekat ima informaciju o **CNode** objektu. Ovo daje mogućnost da svako čvrno opterećenje bude pridruženo čvoru kojem pripada.

Svaki **CLElement** objekat ima informaciju o **CFE** objektu. Ovo daje mogućnost da svako opterećenje elementa bude pridruženo elementu kojem pripada.

Svako opterećenje (čvrno ili na elementu) može da pripada nekom nezavisnom slučaju opterećenja. Svaki nezavisni slučaj opterećenja se pri proračunu analizira zasebno.

Klasa **CLoadCondition**, osim podataka o opterećenju čvorova i elemenata, sadrži u slučaju (videti poglavlje 7.4):

1. Dinamičkog opterećenja - podatke o vremenskoj funkciji sile i vezi vremenske funkcije sile i nezavisnog slučaja opterećenja (klasa **CDFLLoadCond**).
2. Opterećenja konstrukcije ubrzanjem tla - podatke o ubrzanju tla u jednom, dva ili tri pravca i definiše pravac u kojem ta ubrzanja deluju (klasa **CSeismic**).



Slika 9.18: Dijagram klasa za definisanje opterećenja

Analitičke klase

Analitičke klase služe za analizu modela i formiranje i rešavanje jednačina modela. Postoje tri tipa problema koji se mogu naći u inženjerskoj analizi: statički problem, dinamički problem i problem svojstvenih vrednosti. Svaki od ovih problema može da bude linearan ili nelinearan. Razlika između ova tri tipa problema je u matricama jednačina sistema. Za svaki od ovih problema postoje različiti načini rešavanja.

Klasa **CDomain** je klasa koja u sebi agregira podatke potrebne za analizu sistema. Ona sadrži podatke o:

1. Modelu - klasa **CModel** opisuje model i sadrži podatke o opterećenju koje je opisano klasom **CLoadCondition**.
2. Tipu analize - klasa **CSystem** sadrži podatke o tome da li će dato opterećenje da se posmatra kao dinamičko ili statičko i da li će da se radi linearna ili nelinearna analiza.

3. Metodu rešavanja jednačina - odgovorna klasa je **CSolver**. Izvedene klase iz ove klase su:

- (a) Za linearnu analizu - klasa **CLinearSolver**. Rešavanje jednačina linearne analize posmatra se kao specijalan slučaj metoda datih kod nelinearne analize.
- (b) Za nelinearnu analizu (videti poglavlje 8.2)- klasa **CNonlinearSolver**. Jedna od izvedenih klase iz ove klase je **CNewtonRaphson** - opisuje način rešavanja nelinearnog problema *Newton Raphson*-ovom metodom (videti poglavlje 8.2.2). Konvergencija rešenja kod nelinearnih metoda se utvrđuje metodama datim u klasi **CTerminationScheme** (videti poglavlje 8.2.4).

4. Šemi vremenske integracije - superklasa za ove metode je klasa **CTimeIntegrationScheme**. Subklasa ove klase je klasa **CNewmark** (videti poglavlje 8.2.3). Podatak o šemi vremenske integracije je bitan za linearnu i nelinearnu dinamičku analizu.

Za izbor metode za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina odgovorna je klasa **CLinearSolutionMethodChoice**.

Numeričke klase

Za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina razvijene su klase: **Crout**, **Cholesky** i **CSVD** (videti poglavlje 8.1). One pripadaju direktnim metodama za rešavanje sistema jednačina (slika 9.20). Klasa **CLinearSolutionMethodChoice** je kontejner klasa za metode koje služe za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina. Ona sadrži metod u kojem se, na osnovu analize matrice koeficijenata, odabira metod rešavanja sistema jednačina. Ako je matrica koeficijenata:

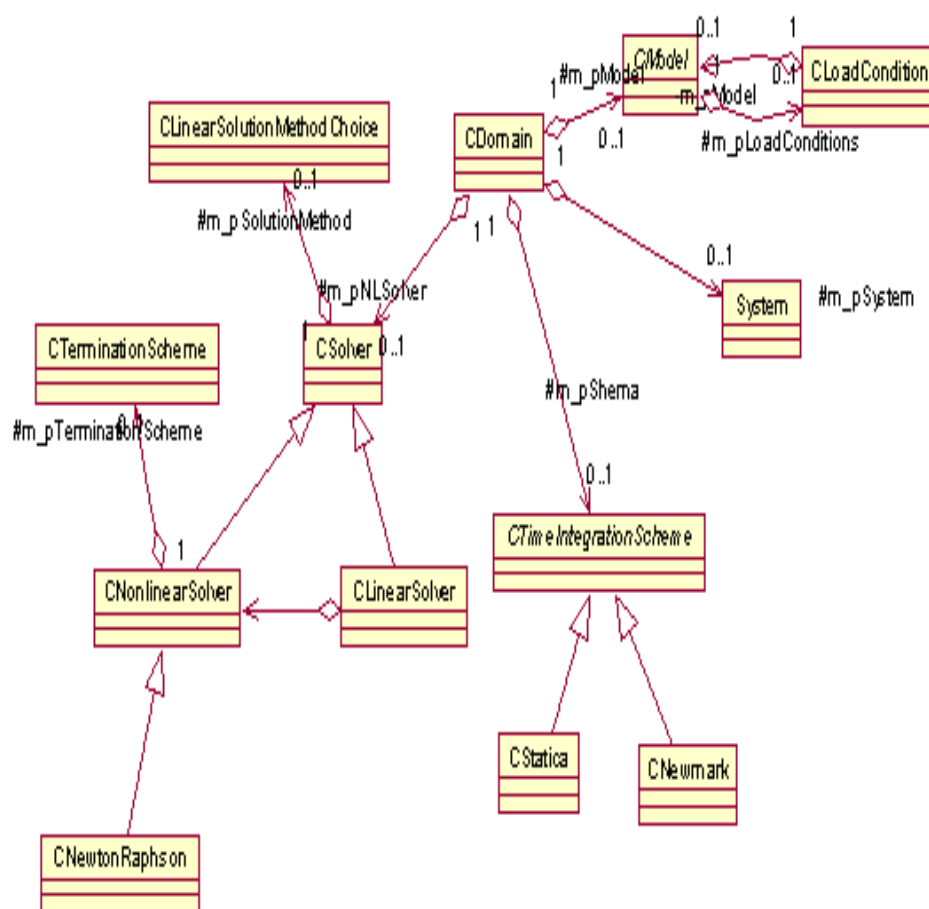
- 1. Generalnog tipa, pozitivno definitna ili nedefinitna - koristi se metoda klase **Crout**.
- 2. Simetrična i pozitivno definitna - koristi se metoda klase **Cholesky**.
- 3. Semidefinitna - koriste se metoda klase **CSVD**.

Za rešavanje problema svojstvenih vrednosti razvijene su klase: **Jacobi**, **Lancsoz**, **TQLI** i **CEigenV_A** (slika 9.21) (videti poglavlje 8.3). Klasa **CEigenvalueSolutionMethodChoice** je klasa kontejner za klase problema svojstvenih vrednosti. Na osnovu zadatih parametara, bira se klasa sa odgovarajućim metodom proračuna.

Ostale klase

Klasa **CDNumber** je superklasa klasa za mapiranje (slika 9.22). Subklase klase **CDNumber** su:

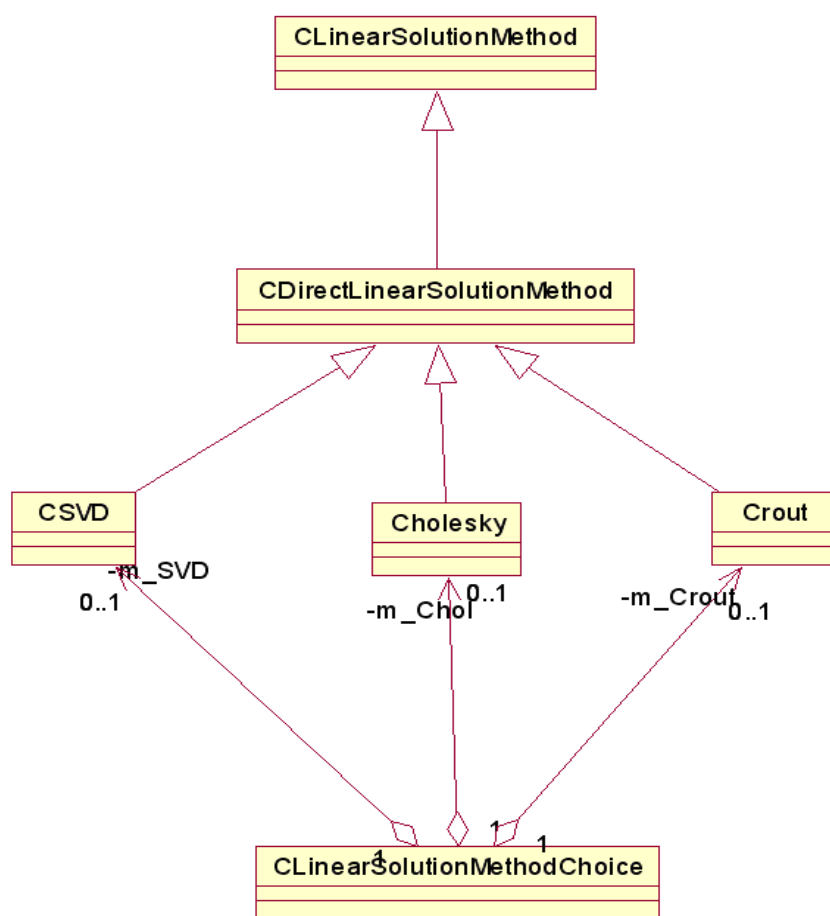
- 1. **CDNumber_FE** - klasa za mapiranje primarnih i sekundarnih pomeranja konačnog elementa i za mapiranje između primarnih generalisanih pomeranja čvorova elementa i brojeva jednačina u sistemu jednačina.
- 2. **CDNumber_MOD** - klasa za mapiranje između generalisanih pomeranja čvorova sistema i brojeva jednačina u sistemu jednačina za dinamičku i statičku analizu.



Slika 9.19: Dijagram klasa za dinamičku i statičku analizu

Klasa **CNodeTM** je superklasa klasa koje sadrže metode za transformaciju veličina u generalisanom smislu, iz globalnog koordinatnog sistema u lokalni koordinatni sistem i na sistemnu liniju poprečnog preseka u jednom čvoru (slika 9.23) (videti poglavlje 6.1). Iz ove klase izvedena je klasa **CNodeTM_Line** koja sadrži metode za transformaciju veličina u jednom čvoru linijskih elemenata. Iz klase **CNodeTM_Line** izvedene su sledeće klase transformacije veličina u jednom čvoru:

1. **CNodeTM_Catenary** - za elemente izvedene iz analitičkih izraza za lančanicu.
2. **CNodeTM_TW** - za tankozidnu gredu.
3. **CNodeTM_Bar**- za prosti štap.
4. **CNodeTM_Line_G** - za gredu kod koje se lokalni globalni sistem poklapa sa globalnim koordinatnim sistemom.

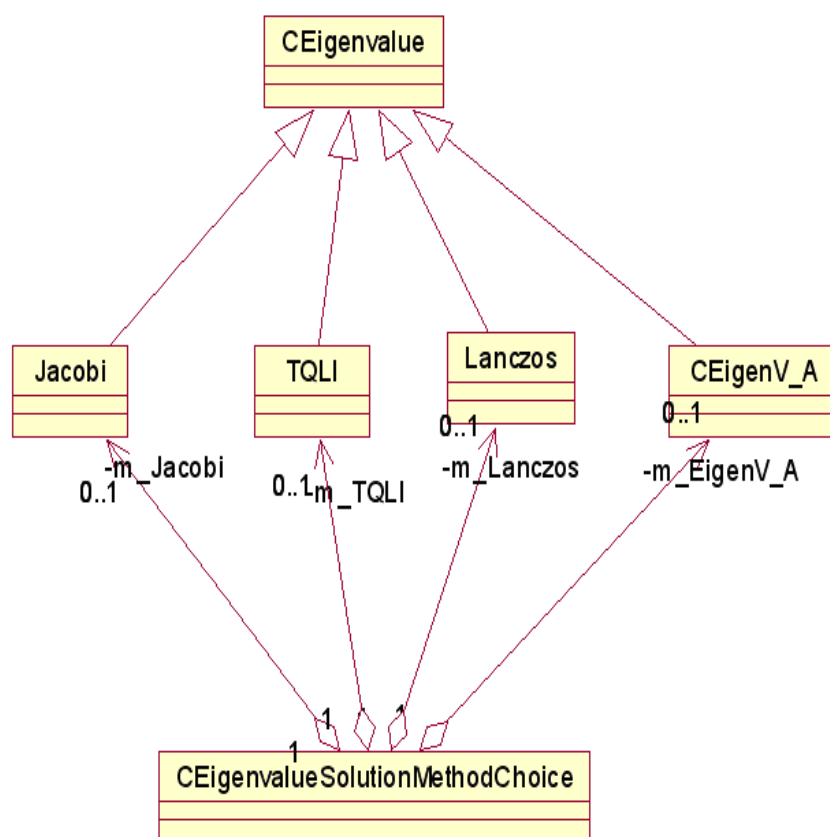


Slika 9.20: Dijagram klasa za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina

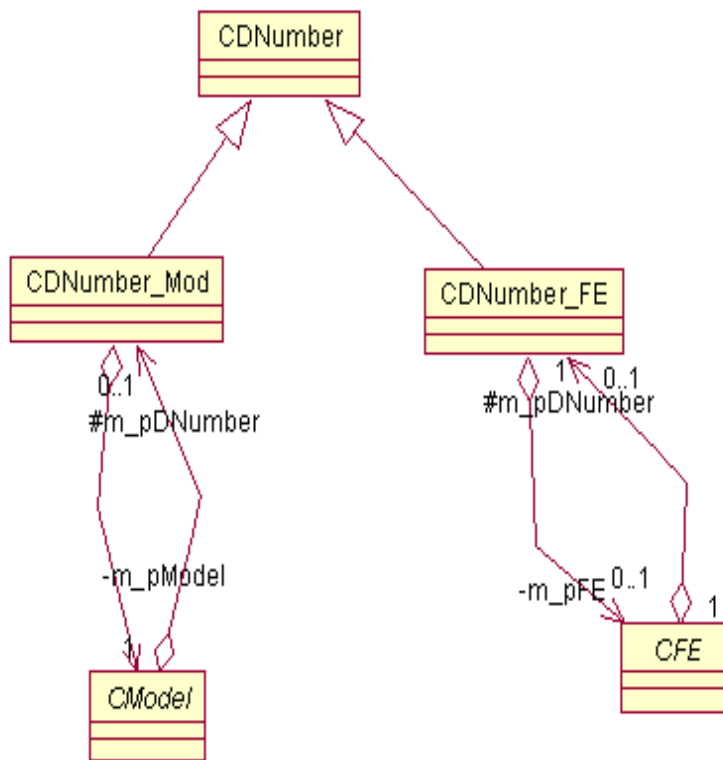
Klasa **CElementTM** je klasa koja sadrži metode za transformaciju elementa iz lokalnog u globalni koordinatni sistem (videti poglavlje 6.1).

Klasa **CReduction** je osnovna klasa za klase koje sadrže metode za redukciju matrica i vektora elemenata i sistema. Izvedena klase **CGuyan** (videti poglavlje 6.2.2) i **CStaticReductionA** (videti poglavlje 6.2.3) su klase koje sadrže metode za statičku redukciju (slika 9.24).

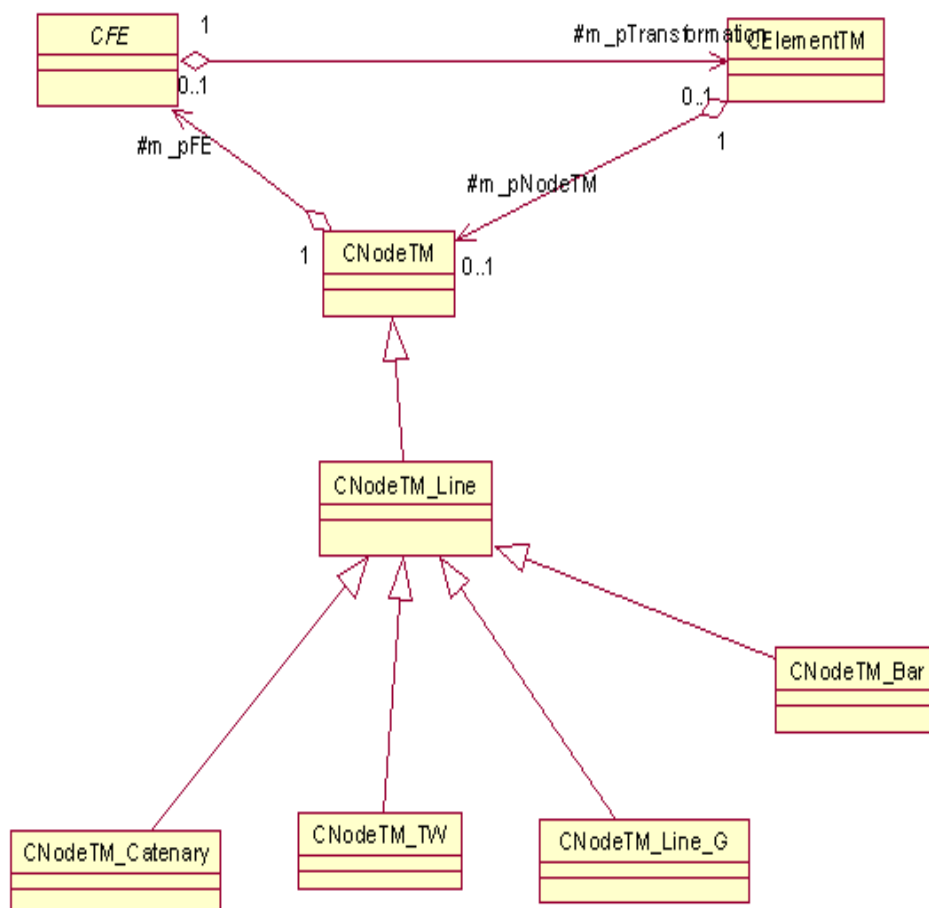
Klasa **CDiscretFnct** služi za opis diskretne funkcije date preko skupa diskretnih vrednosti u tačkama opisanih klasom **CPoint** (slika 9.25). Lista diskretnih funkcija opisana je klasom **CDiscretFnctList**. Veza liste diskretnih funkcija i generalisanih pomeranja modela opisana je klasom **CDFLGeneralDsp**, a veza nezavisnih uslova opterećenja i liste diskretnih funkcija opisana je klasom **CDFLLoadCond**.



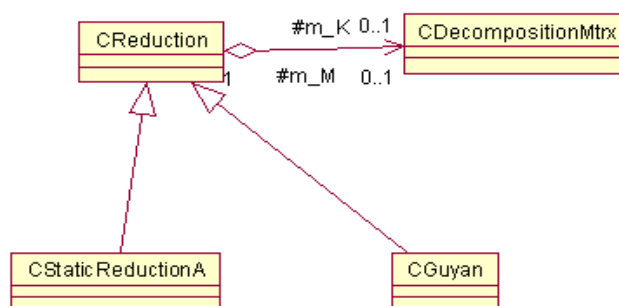
Slika 9.21: Dijagram klasa za rešavanje problema svojstvenih vrednosti



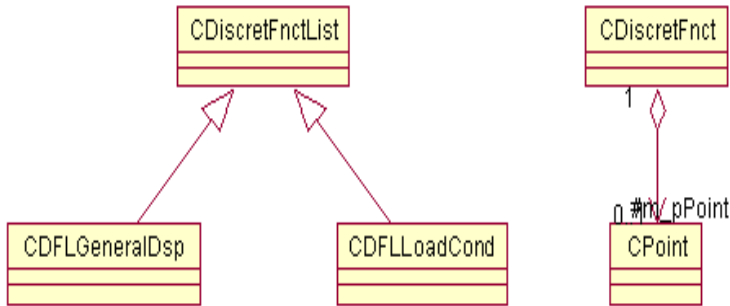
Slika 9.22: Dijagram klasa za mapiranje



Slika 9.23: Dijagram klasa za transformaciju elementa



Slika 9.24: Dijagram klasa za redukciju matrica i vektora elementa



Slika 9.25: Dijagram klasa za opis funkcija

9.4 Primeri

9.4.1 Uvođenje novog konačnog elementa

Kada se u model uvodi novi konačni elemenat, potrebno je u programu intervenisati na nekoliko mesta. Pretpostaviće se da je novi konačni elemenat **CCatenary03**. Uporedo sa razvojem klase **CCatenary03** (videti deo 9.3.2) treba uraditi sledeće:

1. Odrediti ime promenjive koja će da identifikuje elemenat u ulaznom fajlu (videti deo 10.3.2) i programu. U ovom slučaju ime promenjive je *CATENARY03*. U fajlu zaglavlja *TypeFE.h* klase **CTypeFE** registrovaće se novi konačni elemenat.

```
class CTypeFE {
public:

    CTypeFE(const CTypeFE& b) { v=b;}

    CTypeFE() {}
    CTypeFE(int i) : v(i) {}
    CTypeFE(float f) : v(int(f)) {}
    CTypeFE(double d) : v(int(d)) {}
    CTypeFE(void* p) : v(int(p)) {}

    // Conversion.
    operator int() const { return v; }

    // Negation.
    CTypeFE operator!() const { return !v; }

    friend ostream& operator<<(ostream& s, CTypeFE b);
    friend istream& operator>>(istream& s, CTypeFE& b);
    bool operator==(const CTypeFE& rhs);
    bool operator!=(const CTypeFE& rhs);

private:
    char v;

};
//Promenjiva za novi konacni elemenat
const CTypeFE CATENARY03 =19;
const CTypeFE BEAM3N =16;
//Promenjiva za novi konacni elemenat
const int iCATENARY03 =19;
const int iBEAM3N =16;
#endif
```



U klasi **CTypeFE** treba izmeniti dve funkcije dodajući po red koda za novi elemenat.

```
ostream& operator<<(ostream& s, CTypeFE b) {
    if (b==CATENARY03) s<<"CATENARY03";
    if (b==NO_FE_TYPE) s<<"NO_FE_TYPE";
    if (b==BEAM3N) s<<"BEAM3N";
    return s;
}

istream& operator>>(istream& s, CTypeFE& b) {
    const size_t bufsize = 1 + sizeof("NO_FE_TYPE_");
    char inbuf[bufsize];
    s.width(int(bufsize));
    s >> inbuf;

    if (strcmp(inbuf, "BEAM3N") == 0) b=BEAM3N;
    else if (strcmp(inbuf, "CATENARY03") == 0)
b=CATENARY03;
    return s;
}
```

2. U konstruktoru klase modela sistema, to je u ovom slučaju klasa **C3D**, dodaje se konstruktor za konačni elemenat **CCatenary03** koji će da napravi u modelu sistema novi objekat tipa **CCatenary03**.

```
C3D::C3D(CDomain* pDomain, CTypeModel tTypeModel, ifstream& in):
CModel(pDomain, tTypeModel, in)
{
    Initialise();

    Allocate(this->NumberOfElements());

    for (int i=0; i<this->NumberOfElements(); i++){
        CTypeFE tTypeFE;

        in>>tTypeFE;

        switch(tTypeFE)
        {
```

```

// Konstruktor za novi konacni elemenat
case(iCATENARY03):{
    m_ppFE[i] = new CCatenary03(this->getDomain(), iCATENARY03, in);
    break;
}
case(iBEAM3N):{
    m_ppFE[i] = new CBeam3N(this->getDomain(), iBEAM3N, in);
    break;
}
default:{
    TextComment("Error: Element_type_doesn_t_exist");
    ::exit(1);
    break;
}
}
}

m_pDNumber=new CDNumber_Mod(this);
}

```

3. U klasi **CElementTM** koja daje metode za transformaciju elementa (videti deo **9.3.2**) dodati red.

```

//Konstruktor klase koja daje metod transformacije elemeta
CElementTM::CElementTM(CFE* pFE){

    CTypeFE tElement=pFE->EType();

    switch(tElement){
        case (iBEAM3N):
            m_pNodeTM = new CNodeTM_Line(pFE);
            break;
        case (iCATENARY03):
            //Odreduje se konstruktor klase koja sadrzi
            //metode transformacije cvora konacnog elemenata
            m_pNodeTM = new CNodeTM_Catenary(pFE);
            break;
        default:
            TextComment("Error: _Nije_definisan_tip
            _stapa_u_CElementTM(CFE*_pFE)"<<endl);
            break;
    }
}

```

```

    }
}

```

4. U sledecim funkcijama treba dodati podatke o novom konačnom elementu:

```

//Funkcija cija je povratna vrednost broj
//spoljasnjih cvorova elementa
int FENumberOfOutNode(const CTypeFE & nType)
{
    switch (nType) {
        case iCATENARY03:
            return 2;
            break;
        case iBEAM3N:
            return 2;
            break;
        default:
            return -1;
            break;
    }
}

```

```

//Funkcija cija je povratna vrednost broj
//unutrasnjih cvorova elementa
int FENumberOfInNode(const CTypeFE & nType)
{
    switch (nType) {
        case iCATENARY03:
            return 0;
            break;
        case iBEAM3N:
            return 1;
            break;
        default:
            return -1;
            break;
    }
}

```

```

//Funkcija cija je povratna vrednost broj
//mogucih otpustanja
//krajeva elementa

```

```

int FERelease(const CTypeFE & nType)
{
    switch (nType) {
    case iCATENARY03:
        return 0;
        break;
    case iBEAM3N:
        return 6;
        break;
    default :
        return -1;
        break;
    }
}

//Funkcija cija je povratna vrednost broj
//cvorova elementa u kojima moze da bude
//zadat ekscentricitet veze
int FEEccentricity(const CTypeFE & nType)
{
    switch (nType) {
    case iCATENARY03:
        return 0;
        break;
    case iBEAM3N:
        return 0;
        break;
    default :
        return -1;
        break;
    }
}

//Funcija cija je povratna vrednost broj rotacionih opruga u
//u jednom cvoru elementa
int FENumberRotSpring(const CTypeFE & nType)
{
    switch (nType) {

    case iCATENARY03:
        return 0;
        break;
    case iBEAM3N:
        return 0;

```

```

        break;
    default:
        return -1;
        break;
    }
}

//Funkcija cija je povratna vrednost broj
//stepeni slobode pomeranja u jednom
//spoljasmjem cvoru konacnog elementa
int FENumberDOFOutNode(const CTypeFE & nType) {

switch(nType) {

    case iCATENARY03:
        return 3;
        break;
        case iBEAM3N:
            return 6;
            break;
            default:
                return -1;
                break;
        }
}

//Funkcija cija je povratna vrednost broj
//stepeni slobode pomeranja u jednom
//unutrasnjem cvoru konacnog elementa
int FENumberDOFInNode(const CTypeFE & nType) {

    switch(nType) {
    case iCATENARY03:
        return 0;
        break;
    case iBEAM3N:
        return 6;
        break;
    case iBEAM4N:
        return 6;
        break;
    default:
        return -1;
        break;
    }
}

```

```

    }
}

//Funkcija cija je povratna vrednost
//vektor koji sadrzi oznake
//svakog generalisanog pomeranja u
//spoljasmjem cvoru elementa
Vector<int> FEDOFOutNode(const CTypeFE& nType){

    Vector<int> DOF (:: FENumberDOFOutNode(nType) ,0);

    switch (nType) {
    case (iBEAM3N):
        DOF.val(0)=1; // Pomeranje u pravcu ose x
        DOF.val(1)=2; // Pomeranje u pravcu ose y
        DOF.val(2)=3; // Pomeranje u pravcu ose z
        DOF.val(3)=4; // Obrtanje oko ose x
        DOF.val(4)=5; // Obrtanje oko ose y
        DOF.val(5)=6; // Obrtanje oko ose z
        break;
    case iCATENARY03:{
        DOF.val(0)=1; // Pomeranje u pravcu ose x
        DOF.val(1)=2; // Pomeranje u pravcu ose y
        DOF.val(2)=3; // Pomeranje u pravcu ose z
        break;}
    default:
        //return -1;
        break;

    }
return DOF;
}

//Funkcija cija je povratna vrednost vektor koji sadrzi oznake
//svakog generalisanog pomeranja u unutrasnjem cvoru elementa
Vector<int> FEDOFInNode(const CTypeFE& nType){

    int n=0;

    if (!:: FENumberDOFInNode(nType))
        n>::FENumberDOFInNode(nType);

    else
        //Ako nema unutrasnjih stepeni slobode pomeranja
        n=99;

```

```

        Vector<int> DOF(n,0);

    switch (nType) {

        case (iBEAM3N):
            DOF.val(0)=1;
            DOF.val(1)=2;
            DOF.val(2)=3;
            DOF.val(3)=4;
            DOF.val(4)=5;
            DOF.val(5)=6;
            break;}
    default:
        //      return -1;
        break;

    }
    return DOF;
}
//Funkcija cija je povratna vrednost broj komponenti
//Kosijevega vektora elementa
int FECauchyStressVectorRang(const CTypeFE& nType){

    int answer=0;

    switch (nType) {

        default:{
            answer=-1;
            break;

        }

    }
    return answer;

}

//Funkcija cija je povratna vrednost broj
//Gauss-ovig tacaka elementa
int FENumberOfGaussPoints(const CTypeFE& nType){

    int answer=0;

```

```
switch (nType) {  
  
    default:{  
        answer=-1;  
  
        break;  
    }  
}  
return answer;  
}
```

9.4.2 Uvođenje numeričkog metoda za rešavanje nelinearnog sistema jednačina

Kada se u model uvodi novi nelinearni metod, potrebo je u programu intervenisati samo na dva mesta. Pretpostaviće se da je novi metod razvijen u klasi **CnewtonRaphson** (videti deo 9.3.2). Treba uraditi sledeće:

1. Odrediti ime promenjive koja će da identifikuje elemenat u ulaznom fajlu (videti deo 10.3.2) i programu. U ovom slučaju ime promenjive je *NEWTONRAPHSON*. U fajlu zaglavlja *TypeFE.h* klase **CTypeFE** registrovaće se novi konačni elemenat.

```
class CTypeNLSolver  
{  
  
public:  
    CTypeNLSolver(const CTypeNLSolver& b) { v=b;}  
  
    CTypeNLSolver() {}  
    CTypeNLSolver(int i) : v(i) {}  
    CTypeNLSolver(float f) : v(int(f)) {}  
    CTypeNLSolver(double d) : v(int(d)) {}  
    CTypeNLSolver(void* p) : v(int(p)) {}  
  
    // Conversion.  
    operator int() const { return v; }  
  
    // Negation.  
    CTypeNLSolver operator!() const { return !v; }  
  
    friend ostream& operator<<(ostream& s, CTypeNLSolver b);  
    friend istream& operator>>(istream& s, CTypeNLSolver& b);  
    bool operator==(const CTypeNLSolver& rhs);
```

```

    bool operator !=(const CTypeNLSolver& rhs);

private:
    char v;

};

const CTypeNLSolver NEWTONRAPHSON    = 1;
const CTypeNLSolver MODNEWTONRAPHSON = 2;

const int iNEWTONRAPHSON    = 1;
const int iMODNEWTONRAPHSON = 2;
#endif

```

U klasi **CTypeNLSolver** treba izmeniti dve funkcije dodajući po red koda za novi elemenat.

```

ostream& operator<<(ostream& s, CTypeNLSolver b) {
    if (b==NEWTONRAPHSON)      s<<"NEWTONRAPHSON";
    return s;
}

istream& operator>>(istream& s, CTypeNLSolver& b) {
    const size_t bufsize = 1 + sizeof(".....");
    char inbuf[bufsize];
    s.width(int(bufsize));
    s >> inbuf;

    if (strcmp(inbuf, "NEWTONRAPHSON") == 0) b=NEWTONRAPHSON;
    else s.clear(ios::failbit);    // Indicate extraction failed

    return s;
}

```

2. U metodu klase **CDomain**, koja čita tip nelinearne metode iz ulaznog fajla dodaje se konstruktor za novi tip objekta.

```

void CDomain::readNLSolver(ifstream& in){

```

```
        CTypeNLSolver tNLSolver;  
        in >> tNLSolver;  
        switch(tNLSolver){  
        case(iNEWTONRAPHSON):{  
            m_pNLSolver=new CNewtonRaphson(this , in );  
                break;  
            }  
        default:{  
                break;  
            }  
        }  
    }
```

Glava 10

Implementacija modela u objektno orijentisanom jeziku C++

10.1 Uvod

Objektno orijentisani jezici poseduju koncepte koji omogućavaju lako uobličavanje objektnog modela u računarski program. Pet najboljih objektno orijentisanih jezika sa kojima je realizovan veliki broj sistema u praksi su

1. Smalltalk
2. Objektni paskal
3. C++
4. CLOS (engl. *Common Lisp Object Sistem*)
5. Ada
6. Java

Jezik C++ je danas svakako najpopularniji objektno orijentisani jezik opšte namene. Pogodan je kako za sistemsko tako i za aplikativno programiranje svih namena. Jezik C++ je sredstvo za primenu objektno orijentisanih koncepata.

Jezik C++ nije čisto objektno orijentisani jezik. On je naslednik jezika C, pa je zadržao i koncepte tradicionalnog programiranja.

Jezik C++ nudi još jedan koncept koji ne spada u grupu osnovnih objektno orijentisanih koncepata. To je koncept preklapanja operatora (engl. *operator overloading*). Da bi tipovi koje je definisao programer bili sasvim ravnopravni sa ugrađenim tipovima i za njih se mogu definisati značenja operatora koji postoje u jeziku.

Tokom faze implementacije model je preslikan u ciljni implementacioni jezik, a to je ovde C++. Pošto se samo bavimo strukturnim modelom datim preko dijagrama klasa, on će se preslikati u model podataka tj. u deklaracije klasa, atributa i operacija u C++-u. Deklaracije dobijenih klasa su date na pratećem CD-u u fajlovima sa ekstenzijom h.

10.2 Osnovne karakteristike programa

Program je namenjen elastičnoj linearnoj i nelinearnoj analizi konstrukcija sa kablovima koje su opterećene statičkim i dinamičkim opterećenjem.

Interakcija korisnika sa programom je u formi ulazne tekstualne datoteke koja sadrži podatke za proračun i izlazne tekstualne datoteke koja sadrži rezultate proračuna.

Korisnik, preko ulazne datoteke, u program unosi podatke o osobinama konstrukcije, opterećenju, metodama koje će da se koriste u proračunu. Program te podatke upotrebljava da izračuna uticaje (pomeranja i presečne sile) u konstrukciji i daje ih u obliku izlazne datoteke.

Konstrukcija se opisuje preko sledećih podataka:

1. Čvorovi konstrukcije - položaj u prostoru je zadat preko vrednosti koordinata čvorova u globalnom *Deskartes*-ovom koordinatnom sistemu. U čvorovima konstrukcije mogu da budu zadate koncentrisane mase, čvorna prigušenja, elastični oslonci i ograničenja pomeranja u pravcima generalisanih pomeranja. Špoljašnje prigušenje u čvorovima i elastični oslonci uzimaju se u obzir samo kod linearne analize.

2. Materijal konstrukcije - posmatra se linearno elastičan materijal. Karakteristike materijala su zadate preko *Young*-ovog modula elastičnosti i modula klizanja i/ili *Poisson*-ovog koeficijenta.
3. Poprečni preseki - definisani su geometrijskim karakteristikama. U poprečnom preseku, u slučaju da sistemna linija elementa ne prolazi kroz težište poprečnog preseka, definisan je položaj tačke kroz koju prolazi sistemna linija. Kod tankozidnih nosača definiše se i centar smicanja.
4. Konačni elementi - konstrukcija je opisana linijskim konačnim elementima: tankozidnim elementom, grednim elementima i lančanicom (paraboličkom i hiperboličkom). Konačni elementi imaju po dva spoljašnja čvora preko kojih se povezuju sa ostalim konačnim elementima konstrukcije. Konačni element opisan je sledećim podacima:
 - (a) Krutošću polukrute veze [77] - tretira se kao linearna. Uzima se u obzir kod linearne analize konstrukcije. Može da se zada za tankozidni gredni elemenat i pravi gredni elemenat sa dva čvora.
 - (b) Ekscentričnošću veze u čvorovima [77] - uzima se u obzir kod tankozidnog grednog elemenata i grednog elemenata sa dva čvora.
 - (c) Otpuštanjima krajeva elementa u pravcima generalisanih pomeranja.
 - (d) Početnim vrednostima unutrašnjih sila. Ove sile se uzimaju u obzir kod nelinearne analize. Umesto početne sile zatezanja, kod elemenata izvedenih iz analitičkih izraza za lančanicu, može se definisati dužina elementa u neopterećenom stanju.

Opterećenje konstrukcije može da bude zadato kao:

1. Čvorno opterećenje - komponente opterećenja su date u odnosu na ose globalnog koordinatnog sistema.
2. Opterećenje elementa - komponente opterećenja su date u odnosu na ose lokalnog koordinatnog sistema elementa.

Konstrukcija može da ima više nezavisnih opterećenja. Ova opterećenja se računaju nezavisno jedna od drugih i rezultati proračuna se upisuju u odvojene fajlove.

Dinamički uticaj se zadaje preko:

1. Vremenske funkcije sile - vrednosti vremenske funkcije sile zadaju se na rastojanjima koja ne moraju da budu ista. Svako nezavisno opterećenje može da ima svoju vremensku funkciju sile. Sva zadata opterećenja u okviru nezavisnog opterećenja množe se istom vremenskom funkcijom sile.
2. Akcelelograma - dat je kao niz diskretnih vrednosti snimljenog ubrzanja tla. Može imati jednu, dve ili tri komponente.

Za konstrukciju se usvaja globalni tip prigušenja. Za zadati koeficijent relativnog prigušenja, za prvi ton, računaju se koeficijenti α i β , a zatim se računa matrica prigušenja

sistema za koju se pretpostavlja da je proporcionalna matrici masa i matrici krutosti sistema.

Pri proračunu matrice prigušenja, kod nelinearne analize, u račun se uzima tangentna matrica krutosti. Može se zadati da se matrica prigušenja računa na početku nelinearnog postupka ili uvek kada se preračunava tangentna matrica krutosti.

Jednačine ravnoteže sistema rešavaju se kod:

1. Nelinearne statičke analize - *Newton-Raphson*-ovom i modifikovanom *Newton-Raphson*-ovom iterativnom metodom.
2. Linearne dinamičke analize - *Newmark*-ovim postupakom vremenske integracije.
3. Nelinearne dinamičke analize - *Newton-Raphson*-ovom i modifikovanom *Newton-Raphson*-ovom iterativnom metodom u kombinaciji sa *Newmark*-ovim postupakom vremenske integracije.

10.3 Opis ulaznih datoteka programa

Ulazni podaci programa dati su u sledećim datotekama (slika 10.1):

1. Konfiguraciona datoteka - sadrži opšte podatke o sistemu kao što su tip analize, tip opterećenja konstrukcije.
2. Glavna datoteka - sadrži opis konstrukcije, opterećenja, metoda za proračun kod nelinearne analize.
3. Datoteka sa vrednostima vremenske funkcije sile i akcelelograma.

Ime datoteke je dato u obliku *ImeDatoteke.ext*. Ekstenzija za glavnu datoteku je obavezna i jednaka je *ext=\$\$\$*. Kod ostalih datoteka ekstenzija je opcionalna i proizvoljna. Postojanje konfiguracione datoteke i glavne datoteke je obavezno.

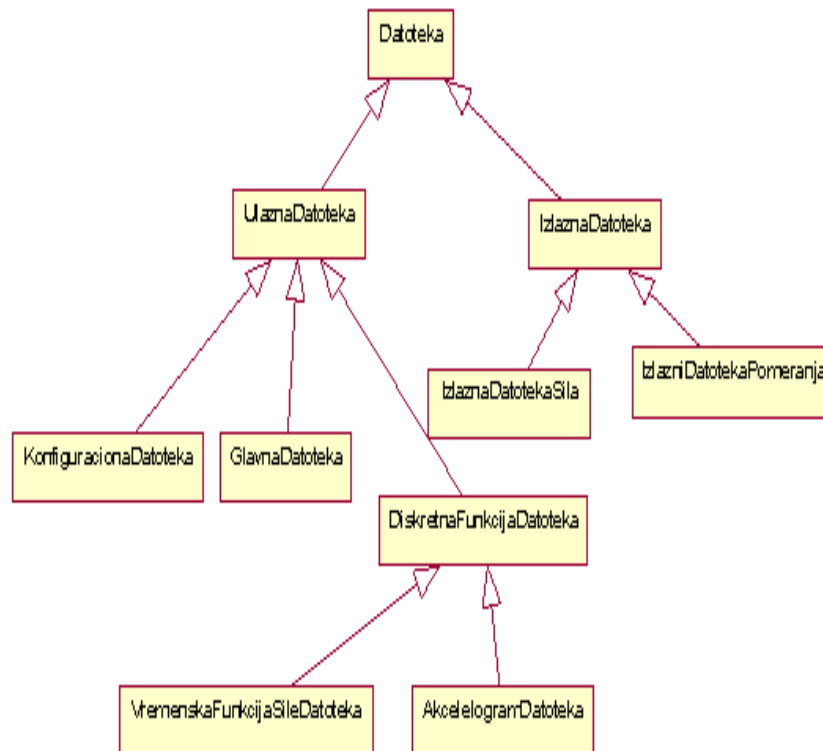
10.3.1 Konfiguraciona datoteka

Ime konfiguracione datoteke je u obliku *ImeFajlaKonf.ext*. Ekstenzija *ext* je opcionalna i može da ima proizvoljnu vrednost. Linija sa podacima ima oblik:

<i>anl</i>	ξ	<i>lt</i>	<i>chl</i>	<i>chd</i>	<i>che</i>
------------	-------	-----------	------------	------------	------------

<i>anl</i>	(1)	Tip analize.			
ξ		Koeficijent relativnog prigušenja konstrukcije.			
<i>lt</i>	(2)	Opterećenje konstrukcije.			
<i>chl</i>	(3)	Indikator promene dužine štapa.			
<i>chd</i>	(4)	Indikator promene matrice prigušenja sistema.			
<i>che</i>	(5)	Indikator promene sopstvenih vrednosti sistema.			
<i>SVD</i>		Vrednost praga singularnosti. (Navedena vrednost za sada nije u upotrebi.)			

1. Vrednost promenljive može da bude:
LINEAR_ANALYSE Linearna analiza
NONLINEAR_ANALYSE Nelinearna analiza



Slika 10.1: Dijagram klasa za ulazno-izlazne datoteke

2. Opterećenje konstrukcije:

<i>STATIC LOAD</i> <i>MULTISTATIC LOAD</i> <i>TIMEH</i> <i>ACCELERATION</i> <i>MODAL</i>	Konstrukcija je opterećena statičkim opterećenjem. Konstrukcija opterećena statičkim opterećenjem koje se nanosi u više koraka. Konstrukcija je opterećena dinamičkim opterećenjem. Promena inteziteta opterećenja zadata je preko vremenske funkcije sile. Konstrukcija je opterećena dinamičkim opterećenjem. Promena inteziteta opterećenja data je preko akcelelograma. Proračun svojstvenih vrednosti slobodnih vibracija sistema.
--	---
3. Ako je vrednost promenjive 0, uzima se da je dužina elementa u svim fazama proračuna jednaka dužini elementa u nedeformisanom, a ako je 1 u deformisanom stanju.
4. Ako je vrednost promenjive 0, matrica prigušenja sistema računa se samo na početku inkrementalno iterativnog postupka. Ako je vrednost promenjive 1 matrica prigušenja se računa uvek kada se računa i tangentna matrica krutosti sistema.
5. Ako je vrednost promenjive 0, svojstvene vrednosti se računaju samo na početku inkrementalno iterativnog postupka. Ako je vrednost promenjive 1, svojstvene vred-

nosti se računaju uvek kada se računa i tangentna matrica krutosti sistema.

10.3.2 Glavna datoteka sa podacima

Ime glavne datoteke je u obliku *ImeFajlaGlavnog.****. Ekstenzija *.**** je obavezna.

Opšti podaci o nosaču

Linija sa podacima ima oblik:

<i>cf</i>	<i>mod</i>	<i>id</i>	<i>numj</i>	<i>numm</i>	<i>nums</i>	<i>nume</i>
-----------	------------	-----------	-------------	-------------	-------------	-------------

<i>cf</i>		Ime konfiguracione datoteke.				
<i>mod</i>	(1)	Tip modela konstrukcije.				
<i>id</i>	(2)	Šifra konstrukcije.				
<i>numj</i>		Broj čvorova konstrukcije				
<i>numm</i>		Broj različitih materijala konstrukcije.				
<i>nums</i>		Broj poprečnih preseka sa različitim karakteristikama.				
<i>nume</i>		Broj konačnih elemenata.				

1. Vrednost promenjive je *M3D*.
2. Identifikacioni broj nosača. To je proizvoljna celobrojna vrednost.

Čvorovi

Ovaj deo datoteke sadrži podatke o čvorovima konstrukcije. U glavnom fajlu mora da bude onoliko linija sa podacima o čvorovima koliko ih je definisano promenjivom *numj*. Linija sa podacima za jedan čvor ima oblik:

<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>	<i>id</i>	R	M
----------	----------	----------	-----------	----------	----------

<i>X, Y, Z</i>		Koordinate čvora u globalnom koordinatnom sistemu.			
<i>id</i>	(1)	Identifikacioni broj čvora.			
R	(2)	Otpuštanje pomeranja u pravcima generalisanih pomeranja.			
M	(3)	Angažovane mase u pravcima generalisanih pomeranja.			
S	(4)	Krutosti elastičnih opruga u pravcima generalisanih pomeranja.			
C	(5)	Prigušenja u pravcima generalisanih pomeranja.			

1. Identifikacioni broj čvora. Ide od 1 pa naviše redom, bez preskakanja brojeva.
2. Struktura promenjive je sledeća:
 $\mathbf{R} = r_i, i = X, Y, Z, \varphi_X, \varphi_Y, \varphi_Z, \varphi_v$.
Ako je:

$r_i = 1$ Generalisano pomeranje čvora ne postoji.

$r_i = 0$ Generalisano pomeranje čvora postoji.

Ako su svi $r_i = 0$ tada možemo da stavimo da je $\mathbf{R} = *$.

3. Struktura promenjive je sledeća:

$\mathbf{M} = m_i, i = X, Y, Z, \varphi_X, \varphi_Y, \varphi_Z, \varphi_v$.

Vrednosti za $m_i \geq 0$. Ako su svi $m_i = 0$ tada može da se stavi da je $\mathbf{M} = *$. Mase se uzimaju u proračun samo gde je $r_i = 0$.

4. Struktura promenjive je sledeća:

$\mathbf{S} = s_i, i = X, Y, Z, \varphi_X, \varphi_Y, \varphi_Z, \varphi_v$.

Vrednost $s_i \geq 0$. Ako su svi $s_i = 0$ tada može da se stavi da je $\mathbf{S} = *$. Opruge se uzimaju u proračun samo gde je $r_i = 0$.

5. Struktura promenjive je sledeća:

$\mathbf{C} = c_i, i = X, Y, Z, \varphi_X, \varphi_Y, \varphi_Z, \varphi_v$.

Vrednost $c_i \geq 0$. Ako su svi $c_i = 0$ tada može da se stavi da je $\mathbf{C} = *$. Prigušenja se uzimaju u proračun samo tamo gde je $r_i = 0$.

Materijali

Ovaj deo datoteke sadrži podatke o karakteristikama materijala elemenata. U ulaznoj datoteci mora da bude onoliko linija sa podacima o materijalu koliko ih je definisano promenljivom *numm*. Linija sa podacima za jedan materijal ima oblik:

<i>mid</i>	<i>E</i>	<i>G</i>	ρ	ν	α
------------	----------	----------	--------	-------	----------

mid (1) Identifikacioni broj materijala.

E *Young*-ov modul elastičnosti.

G (2) Modulo klizanja.

ρ Gustina materijala.

ν *Poisson*-ov koeficijent.

α (3) Koeficijent termičkog širenja materijala.

1. Vrednost identifikacionog broja materijala ide od 1 pa naviše redom, bez preskakanja brojeva.
2. Ako je vrednost za $\nu > 0$, vrednost koja se ovde navodi zanemaruje se i G se računa prema izrazu

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (10.1)$$

3. Za sada nije u upotrebi.

Poprečni preseći

Ovaj deo datoteke sadrži podatke o geometrijskim karakteristikama poprečnog preseka. U glavnoj datoteci mora da bude onoliko linija sa podacima o poprečnim preseccima koliko ih je definisano promenljivom *nums*. Linija sa podacima za jedan poprečni presek ima oblik:

<i>sid</i>	<i>A</i>	<i>I_{xx}</i>	<i>I_{yy}</i>	<i>I_{zz}</i>	<i>A_y</i>	<i>A_z</i>	<i>t_h</i>
<i>I_{ωω}</i>	ψ						
β_1	β_2	β_3	β_4				
<i>x_P</i>	<i>y_P</i>	<i>z_P</i>					
<i>x_S</i>	<i>y_S</i>	<i>z_S</i>					
<i>w</i>							

<i>sid</i>	(1)	Identifikacioni broj poprečnog preseka.
<i>A</i>		Površina poprečnog preseka.
<i>I_{xx}</i>		Moment inercije poprečnog preseka oko ose <i>x</i> .
<i>I_{yy}</i>		Moment inercije poprečnog preseka oko ose <i>y</i> .
<i>I_{zz}</i>		Moment inercije poprečnog preseka oko ose <i>z</i> .
<i>A_y</i>		Površina smicanja poprečnog preseka u pravu ose <i>y</i> .
<i>A_z</i>		Površina smicanja poprečnog preseka u pravu ose <i>z</i> .
<i>t_h</i>	(2)	Debljina površinskog elementa. Za sada nije u upotrebi.
<i>I_{ωω}</i>	(3)	Sektorski moment inercije poprečnog preseka.
ψ	(4)	Koeficijent poprečnog preseka.
$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$	(5)	Koeficijenti poprečnog preseka.
<i>x_D, y_D, z_D</i>	(6)	Koordinate centra smicanja poprečnog preseka.
<i>x_M, y_M, z_M</i>	(7)	Koordinate tačke kroz koju prolazi sistemna linija poprečnog preseka.
<i>w</i>	(8)	Sopstvena težina nosaca po jedinici dužine u neopterećenom stanju.

1. Numerička vrednost koja ide od 1 pa naviše redom, bez preskakanja brojeva.
2. Koeficijent za sada nije u upotrebi. Može da sadrži bilo koju numeričku vrednost.
3. Osobina poprečnog preseka tankozidnog nosača. Kod ostalih nosača vrednost je jednaka 0.
4. Koeficijent može da ima sledeće vrednosti (videti delove 4.6 i 5.1.3):
 - (a) $\psi = 0$ za poprečni presek grednog nosača.
 - (b) $\psi = 1$ za takozidni nosač otvorenog poprečnog preseka.
 - (c) $\psi = \rho$ za tankozidni nosač zatvorenog poprečnog preseka vrednost je data izrazom (4.30).
5. Vrednost koeficijenta data je izrazom (4.87).
6. Osobina poprečnog preseka tankozidnog nosača (videti deo 6.1.3). Vrednosti su date u odnosu na glavne centralne ose poprečnog preseka. Pošto je oblik poprečnog

preseka duž štapa konstantan, vrednost x_D može da bude proizvoljna numerička vrednost i ignoriše se. Kod ostalih nosača bilo šta da se ovde navede ne uzima se u proračun.

7. Vrednosti su date u odnosu na glavne centralne ose poprečnog preseka (videti deo 6.1.3). Pošto je oblik poprečnog preseka duž ose štapa konstantan, vrednost x_M može da bude proizvoljna vrednost i ignoriše se.
8. Kod prostog štapa sa ekvivalentnim modulom elastičnosti, koristi se za proračun ekvivalentnog modula elastičnosti. Kod elemenata izvedenih iz analitičkih izraza za lančanicu, koristi se za proračun tangentne matrice krutosti elementa.

Opterećenje konstrukcije

nlc

nlc Broj nezavisnih uslova opterećenja koji deluju na konstrukciju.

Opterećenje konstrukcije može da bude zadato kao: opterećenje u čvorovima konstrukcije i opterećenje na elementima konstrukcije. Komponente opterećenja čvorova konstrukcije zadaju se u odnosu na ose globalnog koordinatnog sistema. Komponente opterećenja elemenata konstrukcije zadaju se u odnosu na ose lokalnog koordinatnog sistema elementa.

1. Opterećenje čvorova

Ovaj deo datoteke opisuje opterećenje čvorova. Ako ovoga opterećenja nema umesto celog bloka koji opisuje opterećenje čvorova stavlja se znak *. Ako opterećenje čvorova sistema postoji, blok sa podacima o opterećenju čvorova ima sledeću strukturu:

<i>total</i>		
F	D_k	D_i
f^{id}	f^n	
d_k^{id}	d_k^n	
d_i^{id}	d_i^n	
f		
u_k		
u_i		

total $f^{id} + d_k^{id} + d_i^{id}$

- F** (a) Matrica koja povezuje identifikacione brojeve opterećenih čvorova sa identifikacionim brojevima čvornih sila za pojedine nezavisne uslove opterećenja.
- D_k** (b) Matrica koja povezuje identifikacione brojeve čvorova koji se pomeraju sa identifikacionim brojevima poznatih pomeranja za pojedine nezavisne uslove opterećenja.
- D_I** (c) Matrica koja povezuje identifikacione brojeve čvorova koji imaju inicijalna pomeranja sa identifikacionim brojevima inicijalnih pomeranja za pojedine nezavisne uslove opterećenja.

- f^{id} Broj čvorova u kojima su zadati nezavisni uslovi po čvornim silama (broj redova u matrici $\mathbf{F}$)
 f^n Broj redova sa različitim vrednostima koncentrisanih sila u čvoru (broj redova u vektoru $\mathbf{f}$)
 d_k^{id} Broj čvorova u kojima su zadati nezavisni uslovi po pomeranjima (broj redova u matrici $\mathbf{D}_k$)
 d_k^n Broj redova sa različitim poznatim generalisanim pomeranjima čvorova kod statičke analize (broj redova u matrici $\mathbf{u}_k$)
 d_i^{id} Broj čvorova u kojima su zadati nezavisni uslovi po inicijalnim pomeranjima i brzinama za dinamičku analizu (broj redova u matrici $\mathbf{D}_i$)
 d_i^n Broj redova sa različitim inicijalnim generalisanim pomeranjima i brzinama masa u čvorovima za dinamičku analizu. (broj redova u vektoru $\mathbf{u}_i$)
 $\mathbf{f}$ (d) Vektor čvornog opterećenja.
 $\mathbf{u}_k$ (e) Vektor poznatih generalisanih pomeranja.
 $\mathbf{u}_i$ (f) Vektor inicijalnih generalisanih pomeranja i brzina masa u čvorovima.

$$(a) \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \vdots \\ idc_i & \dots & nf_j^z & \dots & nf_{nlc}^z \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (10.2)$$

gde je idc_i broj čvora, a nf_j^z redni broj sile $\mathbf{f}_j$ u vektoru $\mathbf{f}$ za za z -ti nezavisni uslov opterećenja.

$$(b) \quad \mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} \vdots \\ idc_i & \dots & nu_{k,j}^z & \dots & nu_{k,nlc}^z \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (10.3)$$

gde je idc_i broj čvora, a $nu_{k,j}^z$ redni broj pomeranja $u_{k,j}$ u vektoru $\mathbf{u}_k$ za z -ti nezavisni uslov opterećenja.

$$(c) \quad \mathbf{D}_I = \begin{bmatrix} \vdots \\ idc_i & \dots & nu_{i,j}^z & \dots & nu_{i,nlc}^z \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (10.4)$$

gde je idc_i broj čvora, a $nu_{i,j}$ redni broj inicijalnog pomeranja $\mathbf{u}_{i,j}$ u vektoru $\mathbf{u}_i$ za z -ti nezavisni uslov opterećenja.

$$(d) \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{f}_j^T \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ F_{X,j} & F_{Y,j} & F_{Z,j} & M_{X,j} & M_{Y,j} & M_{Z,j} & M_{\omega,j} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (10.5)$$

Komponente vektora $\mathbf{f}_j$ su vrednosti generalisanih sila u čvoru u pravcima osa globalnog koordinatnog sistema.

$$(e) \quad \mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{u}_{k,j}^T \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ U_j^k & V_j^k & W_j^k & \varphi_{X,j}^k & \varphi_{Y,j}^k & \varphi_{Z,j}^k & \varphi_{\omega,j}^k \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (10.6)$$

Komponente vektora $\mathbf{u}_{k,j}$ su generalisana pomeranja u pravcu osa globalnog koordinatnog sistema.

$$(f) \quad \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{u}_{i,j}^T \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ U_j^i & V_j^i & W_j^i & \varphi_{X,j}^i & \varphi_{Y,j}^i & \varphi_{Z,j}^i & \varphi_{\omega,j}^i \\ \dot{U}_j^i & \dot{V}_j^i & \dot{W}_j^i & \dot{\varphi}_{X,j}^i & \dot{\varphi}_{Y,j}^i & \dot{\varphi}_{Z,j}^i & \dot{\varphi}_{\omega,j}^i \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (10.7)$$

Komponente vektora $\mathbf{u}_{i,j}$ su generalisana pomeranja i brzine u pravcu osa globalnog koordinatnog sistema.

2. Opterećenje elemenata

Ovaj deo datoteke opisuje opterećenja elemenata konstrukcije. Ako nema ovoga opterećenja umesto ovoga bloka stavljamo znak *. Ako opterećenje elemenata postoji blok sa podacima ima sledeću strukturu:

$$\begin{array}{cc} f^{ide} & \\ \mathbf{F}_e & \\ f^{ide} & f^{ne} \\ \mathbf{f}_e & \end{array}$$

- f^{ide} Broj čvorova u kojima su zadati nezavisni uslovi opterećenja (broj redova u matrici $\mathbf{F}_e$)
- $\mathbf{F}_e$ (a) Matrica koja povezuje identifikacione brojeve elemenata sa identifikacionim brojevima opterećenja elementa za pojedine nezavisne uslove opterećenja.
- f^{ne} Broj linija sa različitim opterećenjima elemenata (broj redova u vektoru $\mathbf{f}_e$).
- $\mathbf{f}_e$ (b) Vektor koji opisuje opterećenje elemenata.

$$(a) \quad \mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} \vdots & & & & \\ ide_i & \dots & nf_{e,j}^z & \dots & nf_{e,nlc}^z \\ \vdots & & & & \end{bmatrix} \quad (10.8)$$

gde je ide_i broj elementa, a $nf_{e,j}^z$ redni broj opterećenja $\mathbf{f}_{e,j}$ elementa iz vektora $\mathbf{f}_e$ za z -ti nezavisni uslov opterećenja.

$$(b) \quad \mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{f}_{e,j}^T \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} typeID_j & \mathbf{p}_j^T & \mathbf{p}_{p,j}^T & dir \end{bmatrix} \quad (10.9)$$

gde je

$$\mathbf{p}_j^T = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{j,1}^T & \dots & \mathbf{p}_{j,k}^T & \dots & \mathbf{p}_{j,n}^T \end{bmatrix} \quad (10.10)$$

$$\mathbf{p}_{j,k}^T = \begin{bmatrix} p_{x,j}^k & p_{y,j}^k & p_{z,j}^k & m_{x,j}^k & m_{y,j}^k & m_{z,j}^k & m_{v,j}^k \end{bmatrix} \quad (10.11)$$

$$\mathbf{p}_{p,j}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{p,j,1}^T & \dots & \mathbf{p}_{p,j,k}^T & \dots & \mathbf{p}_{p,j,n}^T \end{bmatrix} \quad (10.12)$$

$$\mathbf{p}_{p,j,k}^T = \begin{bmatrix} x_{p,j}^k & y_{p,j}^k & z_{p,j}^k \end{bmatrix} \quad (10.13)$$

Broj n označava broj tačaka na elementu u kojima su date komponente opterećenja.

$typeID_j$ je oznaka tipa j -tog opterećenja $\mathbf{f}_{e,j}$. Ovo opterećenje je opisano vektorom opterećenja $\mathbf{p}_j$, vektorom položaja opterećenja $\mathbf{p}_{p,j}$ i parametrom pravca opterećenja dir . k -ta komponenta vektora opterećenja je vektor $\mathbf{p}_{j,k}$ čije su komponente sile u pravcima osa lokalnog koordinatnog sistema. Komponente k -tog vektor položaja $\mathbf{p}_{p,j,k}$ su koordinate napadne tačke vektora $\mathbf{p}_{j,k}$ u lokalnom koordinatnom sistemu.

dir je parametar koji može da ima dve vrednosti: ako ima vrednost 0 znači da se komponente vektora $\mathbf{f}_{e,j}$ date u pravcima osa globalnog koordinatnog sistema duž ose elementa, a ako ima vrednost 1 komponente vektora $\mathbf{f}_{e,j}$ su date u pravcima osa lokalnog koordinatnog sistema elementa duž ose elementa.

$typeID_j$ može da ima vrednost:

- i. *LINE0L* - jednakopodeljeno opterećenje duž celog raspona elementa.

Za ovaj tip opterećenja vrednost promenljive $n = 1$. Za sada, mogu da se zadaju sledeće komponente opterećenja (koje su različite od nule):

$$\mathbf{p}_j^T = \begin{bmatrix} p_{x,j} & p_{y,j} & p_{z,j} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.14)$$

Ostale komponente ako se zadaju, zanemaruju se. Za koordinate napadne tačke opterećenja vrednosti koje se unesu zanemaruju se jer isti intezitet opterećenja važi na celom elementu. Kod kablovskih elemenata, izvedenih na osnovu analitičkih izraza, zadaju se sledeće komponente opterećenja (koje mogu da budu različite od nule)

$$\mathbf{p}_j^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & p_{z,j} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.15)$$

Definicija funkcije vremenske promene sile

Ovaj deo datoteke opisuje funkciju vremenske promene sile. Ako ova sila ne postoji umesto ovoga bloka stavljamo znak *.

Linija sa ulaznim podacima može da ima dva oblika:

$$1. \quad \boxed{f_1 \quad nf1 \quad \mathbf{DF}_1 \quad \dots \quad \mathbf{DF}_{nf1} \quad \mathbf{F}^n}$$

Ovaj način se upotrebljava kada je funkcija vremenske promene sile definisana u glavnoj datoteci.

$$2. \quad \boxed{f_1 \quad nf1 \quad imefajla_1 \quad \dots \quad imefajla_{nf1} \quad \mathbf{F}^n}$$

Ovaj način se upotrebljava kada je funkcija vremenske promene sile definisana u eksternoj datoteci.

- f_1 (1) Indikator koji ukazuje na mesto definisanja funkcije vremenske promene sile.
 $nf1$ Broj vremenskih funkcija sile.
 $imefajla_i$ (2) Ime datoteke sa podacima za i -tu vremensku funkciju sile ($i = 1, \dots, nf1$).
 $\mathbf{DF}_i$ (3) Podaci koji opisuju i -tu vremensku funkciju sile. ($i = 1, \dots, nf1$).
 $\mathbf{F}^n$ (4) Povezuje identifikacioni broj vremenske funkcije sile sa nezavisnim uslovom opterećenja.

1. Ako je $f_1 = 1$ vrednosti vremenskih funkcija sile su dati u zasebnim datotekama. Ako je $f_1 = 0$ vrednosti vremenskih funkcija sile date su u glavnoj datoteci.
2. Funkcija koja je definisana prva dobija redni broj 1, pa naviše. Način kako se opisuje sila videti u delu 10.3.3.
3. Način kako se opisuje sila videti u delu 10.3.3.
4. $\mathbf{F}^n = f_1^n \dots f_z^n \dots f_{nlc}^n$, $z = 1, \dots, nlc$. f_z^n odgovara rednom broju vremenske funkcije sile za z -ti nezavisni uslov opterećenja. Ako nezavisni uslov opterećenja nije povezan ni sa jednom funkcijom na njegovom mestu unosi se vrednost 0.

Opterećenje zemljotresom

Ovaj deo datoteke sadrži podatke akcelelograma. Ako ovih podataka nema umesto ovoga bloka stavlja se znak *.

Linija sa ulaznim podacima može da ima dva oblika:

$$1. \quad \boxed{a_1 \quad na1 \quad \mathbf{DA}_1 \quad [\mathbf{DA}_2 \quad \mathbf{DA}_3] \quad \alpha}$$

Ovaj način se upotrebljava kada je akcelelogram definisan u glavnom fajlu.

$$2. \quad \boxed{a_1 \quad na1 \quad imefajla_1 \quad [imefajla_2 \quad imefajla_3] \quad \alpha}$$

Ovaj način se upotrebljava kada je akcelelogram definisan u eksternom fajlu.

- a_1 (1) Indikator koji ukazuje na mesto definisanja akcelelograma.
 $na1$ Broj definisanih akcelelograma. Maksimalna vrednost je 3.
 $imefajla_i$ (2) Ime datoteke koja sadrži podatke za i -ti akcelelogram ($i = 1, \dots, 3$).
 $\mathbf{DA}_i$ (3) Podaci koji opisuju i -ti akcelelogram u glavnom fajlu ($i = 1, \dots, 3$).
 α Ugao koji osa 1 akcelelograma zaklapa sa X osom globalnog koordinatnog sistema.

1. Ako je $a_1 = 1$ akcelelogrami su dati u zasebnim datotekama. Ako je $a_1 = 0$ akcelelogrami su dati u glavnoj datoteci.
2. Akcelelogram koji je definisan prvi dobija redni broj 1, pa naviše redom. Prvi definisani akcelelogram je u pravcu ose 1, drugi u pravcu ose 2, a treći u pravcu ose 3. Akcelelogram u pravcu ose 1 je obavezan, a druga dva su opcionalna. Moguće

su samo sledeće kombinacije navođenja akcelelograma: samo prvi ili prvi i drugi ili prvi, drugi i treći. Način unošenja podataka videti u delu 10.3.3.

3. Sve što je rečeno pod 2 važi i ovde.

Elementi

Linijski elementi

Ovaj deo datoteke sadrži podatke o karakteristikama elemenata. U ulaznoj datoteci mora da bude onoliko linija sa podacima koliko ih je definisano promenljivom *nume*. Linija sa podacima za jedan konačni elemenat glasi:

<i>fet</i>	<i>ide</i>	<i>n1</i>	<i>n2</i>	<i>idm</i>	<i>ids</i>
R	β	E	I_f		
[<i>L_u</i>	<i>maxIter</i>	<i>eps</i>]			

<i>fet</i>	(1)	Tip elementa.
<i>ide</i>	(2)	Identifikacioni broj elementa.
<i>n1</i>	(3)	Identifikacioni broj prvog čvora elementa.
<i>n2</i>	(4)	Identifikacioni broj drugog čvora elementa.
<i>idm</i>	(5)	Šifra materijala elementa.
<i>ids</i>	(6)	Šifra poprečnog preseka elementa.
R	(7)	Otpuštanje krajeva elementa.
β		Ugao između lokalne ose z štapa i X ose globalnog koordinatnog sistema.
S	(8)	Krutost polukrute veze u spoljašnjim čvorovima elementa.
e	(9)	Ekscentričnost veze u spoljašnjim čvorovima elementa.
<i>C</i>	(10)	Nije trenutno u upotrebi.
I_f	(11)	Početne interne sile u elementu.
C	(12)	Koordinate unutrašnjih čvorova elementa u globalnom koordinatnom sistemu.
<i>L_u</i>	(13)	Dužina neopterećene lančanice.
<i>maxIter</i>	(14)	Maksimalni broj iteracija za određivanje sile u lančanici.
<i>eps</i>	(15)	Tolerancija pri određivanju sile u lančanici.

1. Vrednosti promenjive:

<i>THINWALL2N</i>	za tankozidnu gredu otvorenog poprečnog preseka. Interpolacione funkcije za matricu kolona $\mathbf{N}_\varphi$ su date kao polinomi.
<i>TWALL2N</i>	za tankozidnu gredu otvorenog i zatvorenog poprečnog preseka. Interpolacione funkcije za matricu kolona $\mathbf{N}_\varphi$ su date kao hiperboličke funkcije.
<i>BEAM2N</i>	za gredu sa dva čvora.
<i>BEAM3N</i>	za gredu sa tri čvora.
<i>BAR2N</i>	za prosti štap sa dva čvora.
<i>BAR3N</i>	za prosti štap sa tri čvora.
<i>BAREQ</i>	za prosti štap sa ekvivalentnim modulom elastičnosti.
<i>CATENARY01</i>	za elastičnu hiperboličku lančanicu - Tip 1.
<i>CATENARY02</i>	za elastičnu paraboličku lančanicu.
<i>CATENARY03</i>	za elastičnu hiperboličku lančanicu - Tip 2.

- Numerička vrednost koja ide od 1 pa naviše redom, bez preskakanja brojeva.
- Identifikacioni broj prvog čvora elementa koji može da ima vrednost $n1 = 1, \dots, numn$.
- Identifikacioni broj drugog čvora elementa koji može da ima vrednost $n2 = 1, \dots, numn$.
- Identifikacioni broj materijala koji može da ima vrednost $idm = 1, \dots, numm$.
- Identifikacioni broj poprečnog preseka koji može da ima vrednost $ids = 1, \dots, nums$.
- Struktura promenjive je sledeća:

$$\mathbf{R} = r_i, i = M_{y1}, M_{y2}, M_{z1}, M_{z2}, N, M_t, M_\omega$$

Brojevi 1 i 2 u indeksu označavaju prvi, odnosno drugi kraj elementa. Oznake x, y, z osnačavaju lokalne ose elementa. Ako je $r_i = 1$ odgovarajuća sila na kraju elementa ne postoji. Ako je $r_i = 0$ odgovarajuća sila na kraju elementa postoji. Ako su svi $r_i = 0$ tada možemo da stavimo da je $\mathbf{R} = *$.

- Struktura promenjive je sledeća:

$$\mathbf{S} = s_i, i = y1, y2, z1, z2$$

$\mathbf{S} = *$ što znači da elemenat nema polukrutu vezu.

Ako su navedene vrednosti krutosti veze, vrednosti za otpuštanje krajeva štapa se zanemaruju.

Oznaka 1 i 2 u indeksu označava prvi i drugi čvor elementa. Podaci navedeni u ovom bloku se zanemaruju kod nelinearne analize.

- Struktura promenjive je sledeća:

$$\mathbf{e} = e1 \ e2 \ z$$

$\mathbf{e} = *$ elemenat nema ekscentričnu vezu.

Oznaka 1 i 2 u indeksu označava prvi i drugi čvor elementa. $0 \leq z \leq 1$ predstavlja

faktor redukcije krute zone. Podaci navedeni u ovom bloku se zanemaruju kod nelinearne analize.

10. $C = *$

11. Vrednosti internih sila u elementu:

$$\mathbf{I}_f = F_{x2} \ M_{x2} \ M_{y1} \ M_{y2} \ M_{z1} \ M_{z2} \ M_{\omega}$$

Ako nema početnih vrednosti internih sila tada je $\mathbf{I}_f = *$.

12. $\mathbf{C} = *$

13. Važi samo za konačni elemenat tipa lančаницe. Kod ostalih elemenata ostaviti prazno mesto.

14. Važi samo za konačni elemenat tipa lančаницe. Upotrebljava se za određivanje sila u elementu. Kod ostalih elemenata ostaviti prazno mesto.

15. Važi samo za konačni elemenat tipa lančаницe. Upotrebljava se za određivanje sila u elementu. Kod ostalih elemenata ostaviti prazno mesto.

Šema integracije

Ovaj deo datoteke sadrži podatke o šemi integracije. Obavezan kod dinamičke analize. Kod statičke analize umesto ovoga bloka može da se stavi *. Linija sa podacima ima sledeći oblik:

<i>scheme</i>	<i>shid</i>	θ	δ	α
---------------	-------------	----------	----------	----------

scheme (1) Tip šeme vremenske integracije.

shid Identifikacioni broj šeme ide od 1 naviše redom.

θ (2) Koeficijent

δ (3) Koeficijent

α (4) Koeficijent

1. Vrednost promenljive je *NEWMARK*.

2. Zavisi od usvojene šeme.

3. Zavisi od usvojene šeme.

4. Zavisi od usvojene šeme.

Vremenski korak integracije

Ovaj deo datoteke opisuje vremenski korak integracije. Obavezan je kod nelinearne analize i višekoračne statičke analize. U slučaju da nije potreban može da se stavi *. Podaci za vremenski korak integracije mogu da se zadaju na dva načina:

1.

ts	Δt	p
------	------------	-----

Ovaj način se koristi pri automatskom generisanju dužine koraka integracije. Δt je korak integracije, a p je vremenski interval integracije koji se deli na korake integracije Δt . U ovom slučaju vrednost promenjive $ts = 0$

2.

ts	$imeFajla$
------	------------

Ovaj način nam omogućava definisanje dužine svakog vremenskog koraka integracije. Ovo se radi u zasebnoj datoteci čije je ime *imeFajla*. U ovom slučaju vrednost promenjive $ts = 1$. Struktura podataka u datoteci *imeFajla* je sledeća:

$numts$	
1	Δt
$\dots$	$\dots$
j	Δt
$\dots$	$\dots$

$numts$ je broj vremenskih koraka integracije, a j je redni broj vremenskog korak integracije koji ide od 1 pa naviše $j = 1, \dots, numts$.

Metod za rešavanje nelinearnih jednačina

Ovaj deo datoteke sadrži podatke o metodi za rešavanje nelinearnog sistema jednačina. Obavezan je kod nelinearne analize. U slučaju da nije potreban umesto ovoga bloka može da se stavi *. Linija sa podacima ima sledeći oblik:

$solver$	$solId$	$maxIter$	ϵ_D	ϵ_P	Td	Tp	Te	NM
----------	---------	-----------	--------------	--------------	------	------	------	------

$solver$	(1)	Tip metode.						
$solId$	(2)	Identifikacioni broj solvera.						
$maxIter$		Maksimalan broj iteracija u okviru jednog inkrementa.						
ϵ_Q		Dozvoljena tolerancija po pomeranjima.						
ϵ_P		Dozvoljena tolerancija po neuravnoteženim silama.						
Td	(3)	Indikator za kriterijum konvergencije po pomeranjima.						
Tp	(3)	Indikator za kriterijum konvergencije po neuravnoteženim silama.						
Te	(3)	Indikator za kriterijum konvergencije po unutrašnjoj energiji.						
NM	(4)	Određuje tip <i>Newton Raphson</i> -ovog solvera.						

1. Vrednost za metodu je *NEWTONRAPHSON*.
2. Vrednost identifikatora je proizvoljan celi broj.
3. Ako je vrednost indikatora 1 znači da se taj kriterijum konvergencije upotrebljava u iterativno-inkrementalnom postupku.
4. Ako je $NM = 1$ koristi se *Newton Raphson*-ov postupak. Ako je $NM = 2$ koristi se modifikovani *Newton Raphson*-ov postupak.

10.3.3 Definisanje vremenske funkcije sile i akcelelograma

Vremenska funkcija sile i akcelelogram definišu se pomoću niza tačaka u dvodimenzionalnom prostoru. Apscisa x tačke predstavlja vreme, a ordinata y tačke intezitet sile ili intezitet ubrzanja. Vremensku funkciju sile i akcelelogram definišemo na sledeći način:

np	
mx	my
$\dots$	$\dots$
x_j	y_j
$\dots$	$\dots$

np	Ukupan broj tačaka.
mx	Multiplikator u pravcu ose x .
my	Multiplikator u pravcu ose y .
x_j	Apscisa tačke j , gde je $j = 1, \dots, np$.
y_j	Ordinata tačke j , gde je $j = 1, \dots, np$.

Pri navođenju tačaka treba voditi računa da je $x_1 \leq \dots \leq x_{np}$.

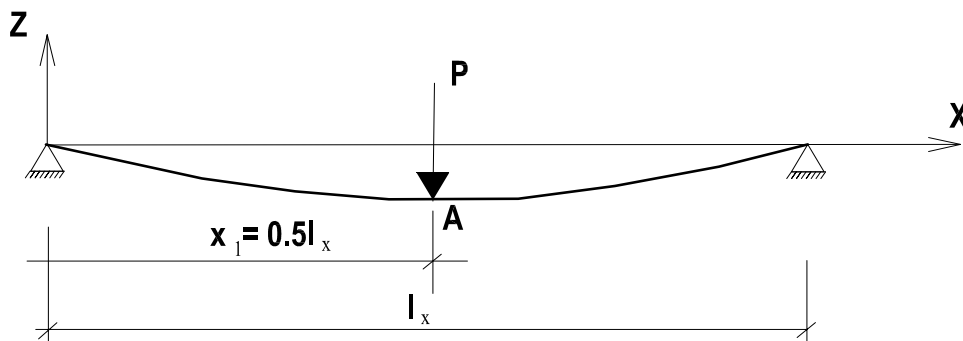
10.4 Primeri

10.4.1 Plitki kabl opterećen koncentrisanom silom u sredini raspona

Posmatraće se dva kabla, čije su karakteristike date u tabeli 10.1. Na tako deformisanom kabl, počinje da deluje koncentrisana sila P u sredini raspona. Vrednost koncentrisane sile kod kabla 1 je $P = 890\text{kN}$, a kod kabla 2 je $P = 17.8\text{kN}$ (slika 10.2). Potrebno je naći vertikalno pomeranje w_A tačke A na sredini raspona kabla.

Osobina	Kabl 1	Kabl 2
$A[\text{m}^2]$	0.161	5.06×10^{-4}
$E[\text{kN/m}^2]$	1.8×10^8	1.04×10^8
$l_x[\text{m}]$	915	91.5
f/l_x	1:12	1:50
$q[\text{kN/m}']$	4.4	0.0388

Tabela 10.1: Karakteristike kablova



Slika 10.2: Kabl na koga deluje koncentrisana sila u sredini raspona

Na osnovu podataka u tabeli 10.1, može da se nađe parametar kabla $\bar{\lambda}_*$ prema (10.1), koji karakteriše mehaničko ponašanje kabla.

Vrednost parametara kabla 1 je $\bar{\lambda}_* = 2019$, $x_1/l_x = 0.5$ i $P_* = 0.221$. Za te vrednosti parametara, rešenje jednačine promene stanja u bezdimenzionalnom obliku za nelinearno rešenje (3.235) iznosi $\alpha = 0.343$. Računski ugib tačke A prema nelinearnoj teoriji je $w_A = -5.6$ m. Ako se α uporedi sa vrednošću dobijenom iz jednačine promene stanja u bezdimenzionalnom obliku za linearno rešenje (3.238), koja daje $\alpha = 0.34$, vidi se da

Element	Pomeranje tačke A [m]
[Računski]	-5.6
<i>Catenary01</i>	-5.81
<i>Catenary02</i>	-6.2
<i>Catenary03</i>	-5.85

Tabela 10.2: Pomeranje tačke A usled koncentrisane sile

Element	Pomeranje tačke A [m]
[Računski]	-1.73
<i>Catenary01</i>	-1.76
<i>Catenary02</i>	-1.76
<i>Catenary03</i>	-1.76

Tabela 10.3: Pomeranje tačke A usled koncentrisane sile

se ova vrednost ne razlikuje od vrednosti dobijene prema nelinearnoj teoriji. Ugib prema linearnoj teoriji iznosi $w_A = -7.44$ m. Relacija između dodatne sile u kablju je linearna, ali relacija između dodatnog ugiba i primenjenog opterećenja je nelinearna.

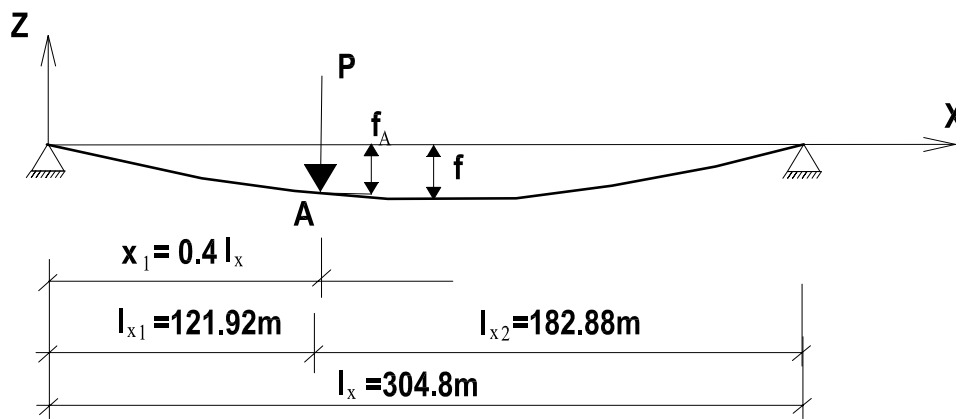
Vrednost parametara kabla 2 je $\bar{\lambda}_* = 60.2$, $x_1/l_x = 0.5$ i $P_* = 5.0$. Za te vrednosti parametara rešenje jednačine promene stanja u bezdimenzionalnom obliku za nelinearno rešenje (3.235) iznosi $\alpha = 4.65$. Računski ugib tačke A prema nelinearnoj teoriji je $w_A = -1.73$ m. Ako se primeni linearna teorija, rešavanjem jednačine promene stanja u bezdimenzionalnom obliku za linearno rešenje (3.238), dobija se da je $\alpha = 6.25$ i odgovarajući ugib prema linearnoj teoriji iznosi $w_A = -6.91$ m. Ako se α uporedi za nelinearno i linearno rešenje, vidi se da se ove vrednosti razlikuju. Takođe, ako se uporedi ugib w_A za nelinearno i linearno rešenje, vidi se da se ove vrednosti razlikuju. Relacija između dodatne sile u kablju je nelinearna, ali i relacija između dodatnog ugiba i primenjenog opterećenja je nelinearna. Ako se pretpostavi da se kabl ponaša kao zategnuta žica, rešavanjem jednačine promene stanja u bezdimenzionalnom obliku (3.243), dobija se da je $\alpha = 5.1$, a odgovarajući ugib je $w_A = -3.0$ m. Ove vrednosti nalaze se između nelinearnog i linearnog rešenja.

Da bi se primenio program, jedan i drugi kabl će se aproksimirati sa po dva konačna elementa koja su međusobno povezana u tački A. Za konačne elemente upotrebiće se elementi zasnovani na analitičkim izrazima za lančanicu. Pomeranja tačke A, za različite tipove konačnih elemenata, prikazana su u tabeli 10.2 za kabl 1 i u tabeli 10.3 za kabl 2. Kao računski ugibi, kojom se porede vrednosti dobijene programom, uzimaju se vrednosti ugiba dobijene prema nelinearnoj teoriji. Iz tabela 10.2 i 10.3 se vidi da se vrednosti ugiba dobijene programom dobro slažu sa računskom vrednosti dobijenoj prema nelinearnoj teoriji.

10.4.2 Plitki kabl opterećen koncentrisanom silom na $0.4l_x$

Usled sopstvene težine g kabl je dobio ugib f u sredini raspona. Na tako deformisanom kabl počinje da deluje koncentrisana sila P na udaljenosti od $0.4l_x$ od levog oslonca (slika 10.3). Početni ugib kabla, na mestu dejstva koncentrisane sile, je f_A . Potrebno je naći vertikalno pomeranje w_A tačke A. Poznato je:

1. $A=0.000548 \text{ m}^2$
2. $E=130000000 \text{ kN/m}^2$
3. $g=0.046 \text{ kN/m}$
4. $P=35.6 \text{ kN}$
5. $f = 30.5 \text{ m}$ i $f_A = 29.276 \text{ m}$ ($f/l_x = 1 : 10$)



Slika 10.3: Prednapregnuti kabl na koga deluje koncentrisana sila

Na osnovu ulaznih podataka dobija se da je vrednost parametara kabla $\bar{\lambda}_* = 2423$, $x_1/l_x = 0.4$ i $P_* = 2.537$. Za te vrednosti parametara, rešenje jednačine promene stanja u bezdimenzionalnom obliku za nelinearno rešenje (3.235) iznosi $\alpha = 4.08$. Računski ugib tačke A za nelinearno rešenje iznosi $w_A = -5.74 \text{ m}$.

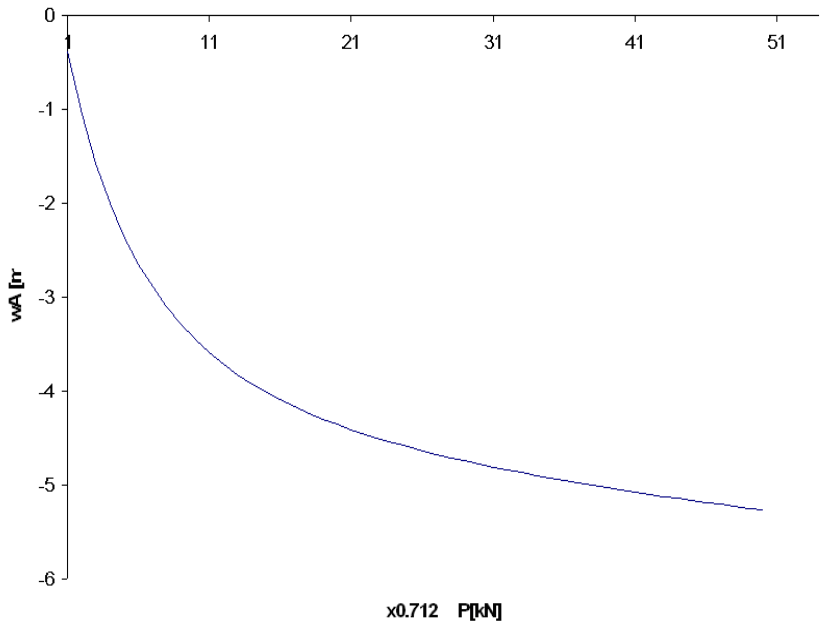
Da bi se primenio program, kabl se aproksimira sa dva konačna elementa zasnovana na analitičkim izrazima. Zajednička tačka konačnih elemenata poklapa se sa napadnom tačkom sile P . Na osnovu poznatog g i f mogu da se izračunaju početne dužine delova kablova i one iznose $L_{01}=125.847 \text{ m}$ i $L_{02}=186.855 \text{ m}$.

Element	Pomeranje tačke A [m]	
	u_A	w_A
[Liter [44]]	-0.859	-5.62
[Računski]		-5.74
<i>Catenary01</i>	-0.833	-5.32
<i>Catenary02</i>	-0.833	-5.32
<i>Catenary03</i>	-0.850	-5.44

Tabela 10.4: Pomeranje tačke A usled koncentrisane sile

Pomeranje tačke A , za različite tipove konačnih elemenata, prikazano je u tabeli 10.4. Vidi se da se rezultati dobijeni programom, pri aproksimaciji kabla različitim tipovima končnih elemenata, dobro slažu sa računskim vrednostima za nelinearno rešenje i vrednostima datim u literaturi [44].

Pomeranje tačke A , usled linearne promene spoljašnjeg opterećenja $P = 0.712 \times n$ kN , $n = 1, 2, \dots, 50$, kada su kao konačni elementi upotrebljeni elementi tipa *Catenary01*, dato je na slici 10.4.



Slika 10.4: Dijagram vertikalnog pomeranja tačke A

10.4.3 Zategnuta žica opterećena sopstvenom težinom i koncentrisanom silom

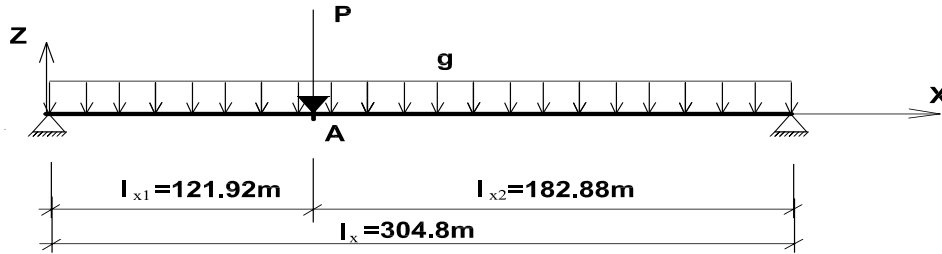
Kabl je predhodno napregnut, tako što je dužina kabla L_0 u neopterećenom stanju rastegnuta na dužinu l_x . Na tako napregnutom kabl, razmotriće se četiri slučaja opterećenja:

1. Počinje da deluje sopstvena težina g i koncentrisana sila P (slika 10.5). Traži se pomeranje tačke A .
2. Počinje da deluje sopstvena težina i kabl se ulegne. Na taj ravnotežni položaj počinje da deluje jednakoraspodeljeno opterećenje p : u prvom slučaju deluje kao statičko opterećenje, a u drugom slučaju p se ponaša se kao dinamičko opterećenje $p(t) = pf(t)$. Funkcija vremenske promene sile $f(t)$ data je na slici 10.6. Traži se pomeranje tačke A .
3. Na ravnotežni položaj iz tačke 2 počinje da deluje seizmička sila u vertikalnom pravcu data akcelelogramom na slici 10.7. Traži se pomeranje tačke A .
4. Naći kružne frekvencije slobodnih vibracija kabla kada deluje samo sopstvena težina kabla.

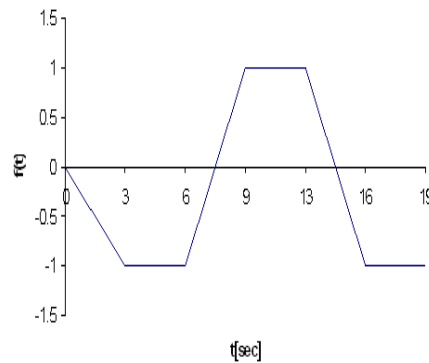
Poznate veličine su:

1. $A=0.000548 \text{ m}^2$
 2. $E=130000000 \text{ kN/m}^2$
 3. $L_0 = 301.752 \text{ m}$ ($L_{01} = 120.7 \text{ m}$ i $L_{02} = 181.05 \text{ m}$)
 4. $g=0.046 \text{ kN/m}$
 5. $P = 35.4 \text{ kN}$
 6. $p=0.046 \text{ kN/m}$
1. Na osnovu ulaznih podataka dobija se da su vrednosti parametara kabla $\bar{\lambda}_* = 0.0339$, $x_1/l_x = 0.4$ i $P_* = 2.5391$. Za date vrednosti parametra rešenje jednačine promene stanja u bezdimenzionalnom obliku za nelinearni rešenje (3.235) je $\alpha = 0.076$ i računski ugib tačke A usled dejstva sile P jednak je $w_A = -4.06 \text{ m}$. Kod primene linearne teorije ugib iznosi $w_A = -4.36 \text{ m}$.

Da bi se primenio program, kabl se aproksimira sa 10 konačnih elemenata zasnovanih na polinomima kao interpolacionim funkcijama ili sa dva konačna elementa zasnovana na analitičkim izrazima za lančanicu. Pomeranje tačke A , za različite tipove primenjenih konačnih elemenata, prikazano je u tabeli 10.5. Iz tabele se vidi da se rezultati dobijeni programom, pri primeni različitih tipova končnih elemenata, dobro slažu.



Slika 10.5: Prednapregnuti kabl na koga deluje sopstvena težina i koncentrisana sila



Slika 10.6: Funkcija vremenske promene sile $f(t)$

2. Kabl se aproksimira sa 10 konačnih elemenata tipa *Catenary03*. Na slici 10.8 može da se vidi vertikalni ugib tačke A kabla kada jednakopodeljeno opterećenje deluje kao statičko i kao dinamičko sa prigušenjem $\xi = 0$ i $\xi = 0.2$. Vidi se da za dinamičko opterećenje, rešenje teži statičkom rešenju.
3. Kabl je aproksimiran sa 10 elemenata tipa *Catenary03*. Posmatra se odgovor kabla kada je prigušenje $\xi = 0$ i $\xi = 0.15$. Na slici 10.9 je dato verikalno pomeranje tačke A usled seizmičke sile.

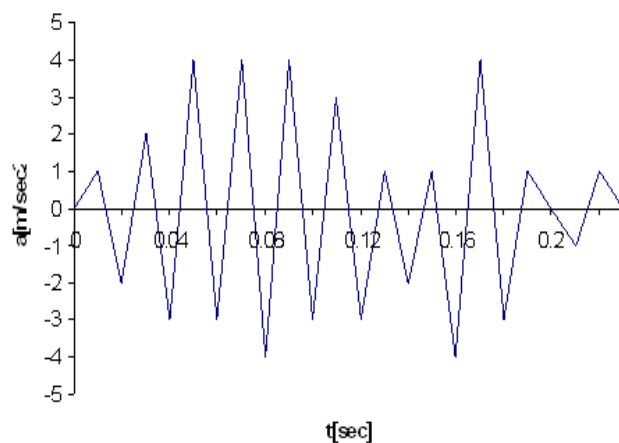
Datoteke sa ulaznim podacima za program **ELAN**, za dinamičko opterećenje dato preko akcelelograma, su:

- (a) Konfiguraciona datoteka *config.cfg* (objašnjenja videti u delu 10.3.1)

```

NONLINEAR_ANALYSE
0.15
ACCELELOGRAM
1 0 0

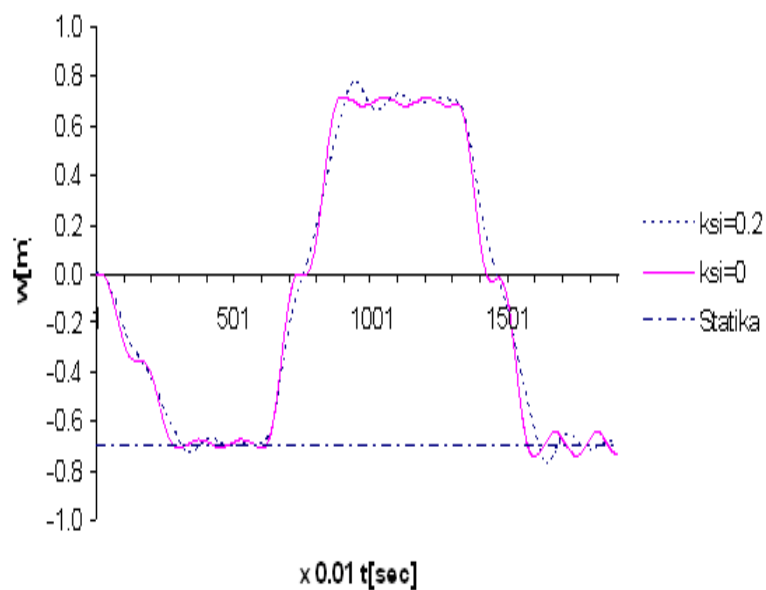
```



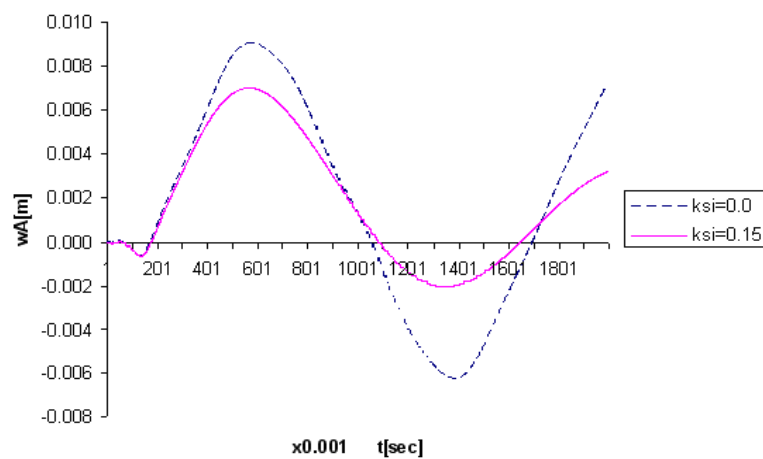
Slika 10.7: Akcelelogram

Element	Pomeranje tačke A [m]	
	u_A	w_A
[Liter [44]]	-0.0223	-4.126
[Računski]		-4.06
<i>Catenary01</i>	-0.0232	-4.117
<i>Catenary02</i>	-0.0237	-4.210
<i>Catenary03</i>	-0.0232	-4.163
<i>Beam2N</i>	-0.0240	-4.126
<i>Beam3N</i>	-0.0230	-4.123

Tabela 10.5: Pomeranje čvora A usled koncentrisane sile i stalnog jednakopodeljenog opterećenja



Slika 10.8: Vertikalni ugib tačke A usled statičkog i dinamičkog opterećenja



Slika 10.9: Ugib tačke A usled dejstva seizmičke sile

1.0e-10

- (b) Glavna datoteka sa podacima *f211c.\$\$\$* (objašnjenja videti u delu [10.3.2](#))

%Sve redove koji pocinju sa oznakom procenat, pri pustanju programa
%treba brisati

%Opsti podaci o nosacu
config.cfg
M3D 1000 11 0 1 4 10

%Podaci o cvorovima
121.9196 0 -0.704 1
0 1 0 1 1 1 1
0.0014 0 0.14 0 0 0 0

*

*

0 0 0 2
1 1 1 1 1 1 1

*

*

*

30.4793 0 -0.264 3
0 1 0 1 1 1 1
0.0014 0 0.14 0 0 0 0

*

*

60.9591 0 -0.4693 4
0 1 0 1 1 1 1
0.0014 0 0.14 0 0 0 0

*

*

91.4392 0 -0.616 5
0 1 0 1 1 1 1
0.0014 0 0.14 0 0 0 0

*

*

152.4 0 -0.73335 6
0 1 0 1 1 1 1
0.0014 0 0.14 0 0 0 0

*

*

182.8804 0 -0.704 7
0 1 0 1 1 1 1
0.0014 0 0.14 0 0 0 0

*

*

```
213.3608 0 -0.616 8
0 1 0 1 1 1 1
0.0014 0 0.14 0 0 0 0
*
*
243.8409 0 -0.4693 9
0 1 0 1 1 1 1
0.0014 0 0.14 0 0 0 0
*
*
274.3207 0 -0.264 10
0 1 0 1 1 1 1
0.0014 0 0.14 0 0 0 0
*
*
304.8 0 0 11
1 1 1 1 1 1 1
*
*
*

%Podaci o materijalima
1 130000000 12000000 0 0 0

%Podaci o poprecnom presecima
1 0.000548 0 1e-7 1e-7 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0.046

%Opterecenje konstrukcije
0

%Opterecenje cvorova
*

%Opterecenje stapova
*

%Definicija funkcije vremenske promene sile
*

%Opterecenje zemljotresom
1 3 accX.acc accY.acc acc.acc 0
0 0 0 0 0 0 0

%Opis elemenata
CATENARY03 1 2 3 1 1 * 0 * * * 721.285 0 0 0 0 0 0 * 0 50 0.001
CATENARY03 2 3 4 1 1 * 0 * * * 721.285 0 0 0 0 0 0 * 0 50 0.001
```

```
CATENARY03 3 4 5 1 1 * 0 * * * 721.285 0 0 0 0 0 0 * 0 50 0.001
CATENARY03 4 5 1 1 1 * 0 * * * 721.285 0 0 0 0 0 0 * 0 50 0.001
CATENARY03 5 1 6 1 1 * 0 * * * 721.285 0 0 0 0 0 0 * 0 50 0.001
CATENARY03 6 6 7 1 1 * 0 * * * 721.285 0 0 0 0 0 0 * 0 50 0.001
CATENARY03 7 7 8 1 1 * 0 * * * 721.285 0 0 0 0 0 0 * 0 50 0.001
CATENARY03 8 8 9 1 1 * 0 * * * 721.285 0 0 0 0 0 0 * 0 50 0.001
CATENARY03 9 9 10 1 1 * 0 * * * 721.285 0 0 0 0 0 0 * 0 50 0.001
CATENARY03 10 10 11 1 1 * 0 * * * 721.285 0 0 0 0 0 0 * 0 50 0.001
```

```
%Shema integracije
```

```
NEWMARK 1 1 0.5 0.25
```

```
%Vremenski korak integracije
```

```
0 0.001 2
```

```
%Numericki metod za resavanje jednacina
```

```
NEWTONRAPHSON 1 20 0.03 0.004 0 1 1 2
```

- (c) Akcelelogram u pravcu 1 dat u datoteci *accX.Acc* (videti deo 10.3.3)

```
2
1 1
0 0
1 0
```

- (d)

- (e) Akcelelogram u pravcu 2 dat u daoteci *accY.Acc*

```
2
1 1
0 0
1 0
```

- (f) Akcelelogram u pravcu 3 dat u daoteci *acc.Acc* i prikazan na slici 10.7

```
25
1 1
0 0
0.01 1
0.02 -2
0.03 2
0.04 -3
0.05 4
0.06 -3
0.07 4
0.08 -4
0.09 4
0.10 -3
0.11 3
```

ω_i	[Računski] $\bar{\lambda}_* \ll 1$	[Računski] $\bar{\lambda}_* \gg 1$	<i>Beam2N</i>	<i>Catenary01</i>	<i>Catenary02</i>	<i>Catenary03</i>
1	4.06	3.65	3.96	4.06	4.04	4.06
2	8.12	8.12	7.91	8.03	8.00	8.03
3	12.17	12.03	11.78	11.80	17.74	11.80
4	16.23	16.23	15.49	15.27	15.20	15.27
5	20.3	20.02	18.9	18.37	18.28	18.37

Tabela 10.6: Kružne frekvencije slobodnih vibracija kabla u ravni [*rad/sec*]

0.12 -3
0.13 1
0.14 -2
0.15 1
0.16 -4
0.17 4
0.18 -3
0.19 1
0.20 0
0.21 -1
0.22 1
0.23 0
1 0

4. Da bi se izračunale kružne frekvencije slobodnih vibracija kabla u ravni programom, kabl se aproksimira sa 10 konačnih elemenata.

Računske vrednosti su dobijene prema izrazima iz dela 3.6. Računske vrednosti kružnih frekvencija za simetrične slobodne vibracije sračunate su na dva načina. Kod prvog načina, kružne frekvencije za simetrične slobodne vibracije sračunate su pod pretpostavkom da je $\bar{\lambda}_* \ll 1$. Kod drugog načina, kružne frekvencije za simetrične slobodne vibracije sračunate su pod pretpostavkom da je $\bar{\lambda}_* \gg 1$. Vrednosti kružnih frekvencija za simetrične slobodne vibracije treba da se nalaze se između ova dva granična slučaja.

Kružne frekvencije slobodnih vibracija u ravni, za različite tipove primenjenih konačnih elemenata, prikazane su u tabeli 10.6. Vidi se da se rezultati dobijeni programom, pri primeni različitih tipova končnih elemenata, dobro slažu sa računskim vrednostima. Kružne frekvencije slobodnih vibracija van ravni, za različite tipove primenjenih konačnih elemenata, prikazane su u tabeli 10.7. Računske vrednosti su dobijene prema izrazima iz dela 3.6. Vidi se da se rezultati dobijeni programom, pri primeni različitih tipova končnih elemenata, dobro slažu sa računskim vrednostima.

ω_i	[Računski]	<i>Catenary01</i>	<i>Catenary02</i>	<i>Catenary03</i>
1	4.06	4.06	4.04	4.06
2	8.12	8.03	8.00	8.03
3	12.17	11.80	17.74	11.80
4	16.23	15.27	15.20	15.27
5	20.3	18.37	18.28	18.37

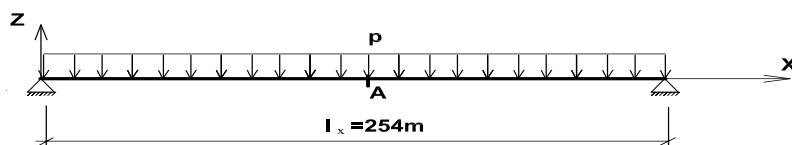
Tabela 10.7: Kružne frekvencije slobodnih vibracija kabla van ravni [rad/sec]

10.4.4 Zategnuta žica pod dejstvom promenljivog jednakoraspodeljenog opterećenja

Kabl je predhodno napregnut tako što je dužina kabla L_0 , u neopterećenom stanju, rastegnuta na dužinu l_x . Na kabl je zatim nanoseno jednakoraspodeljeno optereće p u više koraka (slika 10.10). Potrebno je odrediti vertikalno pomeranje tačke A na sredini raspona za različite vrednosti p i kružne frekvencije slobodnih vibracija kabla.

Poznato je:

1. $A=0.000041935 \text{ m}^2$
2. $E=138000000 \text{ kN/m}^2$
3. $L_0=253.74625 \text{ m}$ čemu odgovara sila $^0H=5.787 \text{ kN}$
4. $p=0.035 \times n \text{ kN/m}$ gde je $n = 1, 3, 5, 7, 9$
5. $g=0.000001 \text{ kN/m}$ - pretpostavljena je mala vrednost sopstvene težine da bi mogla da se nađe početna vrednost krutosti kada se koriste konačni elementi zasnovani na analitičkim izrazima



Slika 10.10: Prednapregnuti kabl opterećen jednakopodeljenim opterećenjem

Vrednost parametra kabla je $\bar{\lambda}_* = 1.926 \times 10^{-8}$. Pošto je $\bar{\lambda}_* \ll 1$, kabl je zategnuta žica. Vrednost za α računa se prema izrazu (3.214). Računski ugib tačke A , za različite vrednosti opterećenja p , računa se prema izrazu (3.202) i vodeći računa o izrazu (3.212).

Za primenu programa, kabl se aproksimira sa 10 konačnih elemenata zasnovanih na polinomima kao interpolacionim funkcijama ili sa dva konačna elementa zasnovana na analitičkim izrazima.

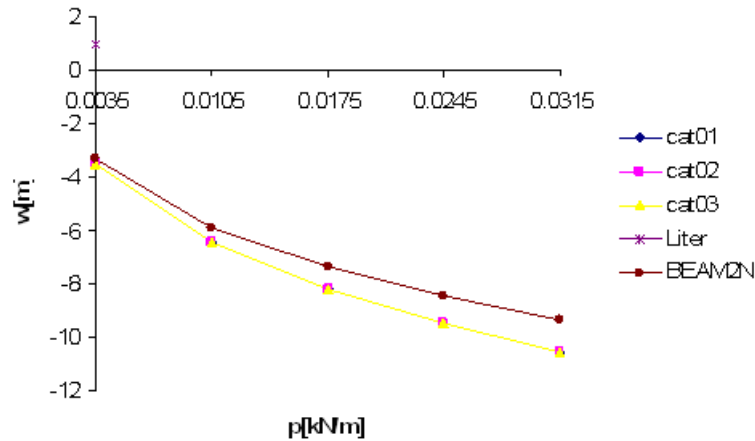
Pomeranje središnje tačke, usled stalnog opterećenja koje se menja i usled različitih tipova primenjenih konačnih elemenata, prikazano je u tabeli 10.8.

Kao grafička ilustracija na slici 10.11 prikazana je promena ugiba središnje tačke kabla usled promenljivog opterećenja p . Kabl je aproksimiran konačnim elementom tipa *Catenary01*.

Da bi se našle kružne frekvencije slobodnih vibracija, kabl se aproksimira sa 10 konačnih elemenata. Kružne frekvencije slobodnih vibracija u ravni, za različite tipove primenjenih konačnih elemenata, prikazane su u tabeli 10.9. Računske vrednosti dobijene

n	Pomeranje u sredini raspona [m]					
	<i>Catenaru01</i>	<i>Catenary02</i>	<i>Catenary03</i>	<i>Beam2N</i>	[Lit[44]]	[Računski]
1	-3.473	-3.473	-3.470	-3.327	-3.343	-3.340
3	-6.461	-6.461	-6.461	-5.911	-5.948	-5.948
5	-8.201	-8.201	-8.201	-7.376	-7.437	-7.430
7	-9.489	-9.489	-9.489	-8.454	-8.535	-8.536
9	-10.534	-10.534	-10.534	-9.326	-9.427	-9.420

Tabela 10.8: Pomeranje tačke u sredini raspona usled opterećenja p



Slika 10.11: Promena vertikalnog ugiba tačke A

su prema izrazima za kružne frekvencije slobodnih vibracija zategnute žice, iz dela 3.6. Vidi se da se rezultati dobijeni programom, pri primeni različitih tipova konačnih elemenata, dobro slažu sa računskim vrednostima.

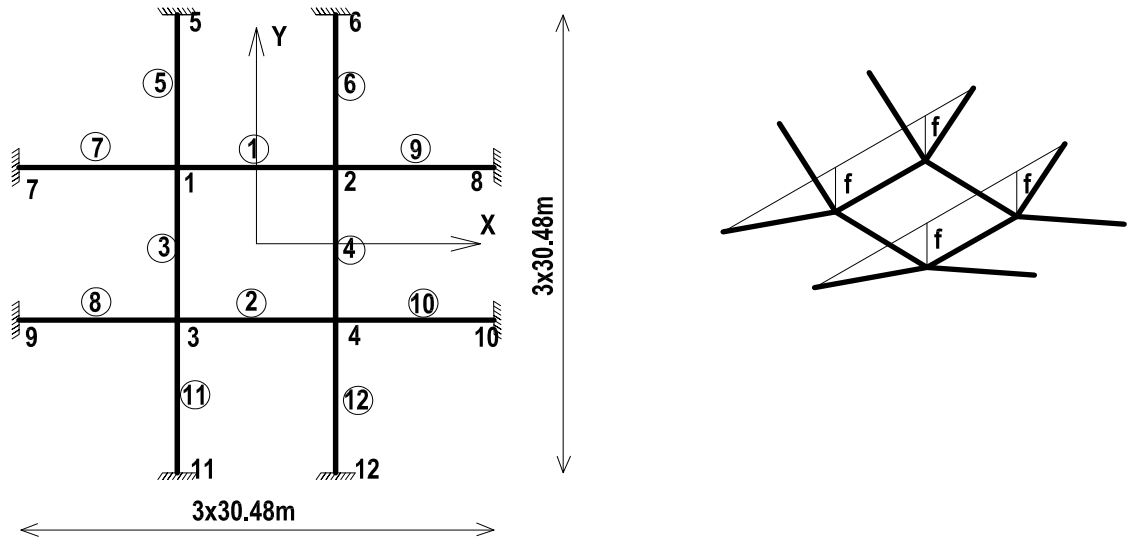
ω_i	[Računski]	<i>Beam2N</i>	<i>Catenary01</i>	<i>Catenary02</i>	<i>Catenary03</i>
1	0.33	0.35	0.33	0.33	0.33
2	0.66	0.70	0.65	0.65	0.65
3	0.99	1.05	0.95	0.95	0.95
4	13.22	13.76	12.31	12.31	12.31
5	16.53	16.79	14.81	14.81	14.81

Tabela 10.9: Kružne frekvencije slobodnih vibracija kabla u ravni [rad/sec]

Kružne frekvencije slobodnih vibracija van ravni, za različite tipove primenjenih konačnih elemenata, prikazane su u tabeli 10.10. Računske vrednosti su dobijene primenom izraza iz dela 3.6. Rezultati programa, pri primeni različitih tipova konačnih elemenata, dobro slažu sa računskim vrednostima.

ω_i	[Računski]	<i>Catenary01</i>	<i>Catenary02</i>	<i>Catenary03</i>
1	0.33	0.33	0.33	0.33
2	0.66	0.65	0.65	0.65
3	0.99	0.95	0.95	0.95
4	13.22	12.31	12.31	12.31
5	16.53	14.81	14.81	14.81

Tabela 10.10: Kružne frekvencije slobodnih vibracija kabla van ravni [rad/sec]



Slika 10.12: Kablovska mreža opterećena koncentrisanim opterećenjem u čvorovima

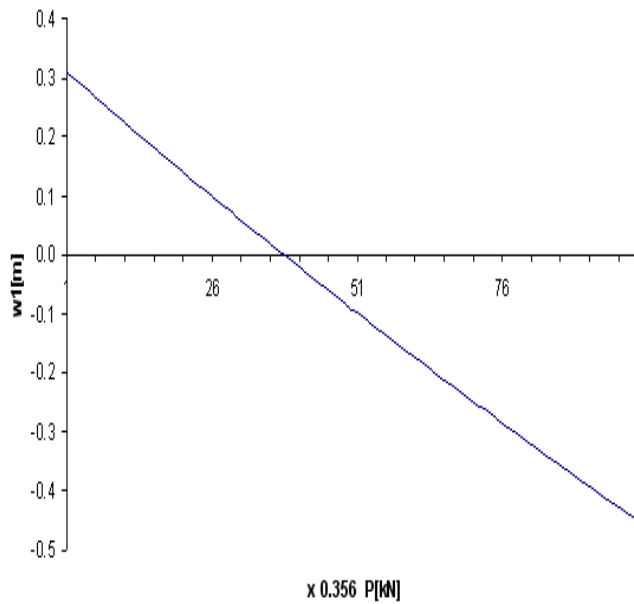
10.4.5 Kablovska mreža

Inicijalni položaj kablovske prednapregnute mreže, sa oznakama čvorova i kablova, dat je na slici 10.12. Na takvom inicijalnom položaju počinju da deluju koncentrisane sile F_{zi} u čvorovima $i = 1, 2, 3, 4$ (slika 10.12). Traži se pomeranje čvora 1. Poznato je:

1. Za sve kablove je $A = 0.00014645m^2$
2. Za sve kablove je $E = 82.8 \times 10^6 kN/m^2$
3. Dužina kablova za neopterećenu konstrukciju je:
 - (a) $L_0 = 30.42 m$ za kablove 1 do 4 čemu odgovara sila ${}^0T = 24.29 kN$
 - (b) $L_0 = 31.76 m$ za kablove 5 do 12 čemu odgovara sila ${}^0T = 23.70 kN$
4. $F_{zi} = -35.728 kN$ u čvorovima $i = 1, 2, 3, 4$
5. $f = -9.144m$
6. $g = 0.000001 kN/m$ - pretpostavljena je mala vrednost sopstvene težine da bi se mogla da nađe aksijalna krutost kabla kada se koriste konačni elementi zasnovani na analitičkim izrazima

Element	Pomeranje čvora 1 [m]		
	u_1	v_1	w_1
[Liter [44]]	-0.0402	0.0396	-0.4460
[SAP2000]	-0.0404	0.0404	-0.4484
<i>Catenary01</i>	-0.0413	0.0413	-0.453
<i>Catenary02</i>	-0.0414	0.0414	-0.455
<i>Catenary03</i>	-0.0411	0.0411	-0.452
<i>Beam2N</i>	-0.0404	0.0404	-0.444

Tabela 10.11: Pomeranje čvora 1 usled stalnog opterećenja



Slika 10.13: Vertikalno pomeranje čvora 1

Rezultati proračuna su dati u tabeli 10.11. Rezultati programa, pri primeni različitih tipova konačnih elemenata, dobro slažu sa računskim vrednostima dobijenim programom SAP2000 i sa vrednostima datim u literaturi [44].

Na slici 10.13 data je promena vertikalnog pomeranja čvora 1 kada se vrednosti koncentrisanih sila u čvorovima menjaju linearno od 0 do maksimalne vrednosti. Mreža je predstavljena elementima tipa *Catenary02*.

Ulazne datoteke za proračun su:

1. Konfiguraciona datoteka *config.cfg* (objašnjenja videti u delu 10.3.1)

```

NONLINEAR_ANALYSE
0
STATIC_LOAD
1 0 0

```

1.0e-10

2. Glavna datoteka sa podacima *f40c.\$\$\$* (objašnjenja videti u delu [10.3.2](#))

```
%Sve redove koji pocinju sa oznakom procenat, pri pustanju programa
%treba brisati
```

```
%Opsti podaci o nosacu
config.cfg
M3D 1000 12 0 1 1 12
```

```
%Podaci o cvorovima
-15.24 15.24 -9.144 1
0 0 0 1 1 1 1
*
*
*
15.24 15.24 -9.144 2
0 0 0 1 1 1 1
*
*
*
-15.24 -15.24 -9.144 3
0 0 0 1 1 1 1
0 0 4.53 0 0 0 0
*
*
15.24 -15.24 -9.144 4
0 0 0 1 1 1 1
0 0 4.53 0 0 0 0
*
*
-15.24 45.72 0 5
1 1 1 1 1 1 1
0 0 4.53 0 0 0 0
*
*
15.24 45.72 0 6
1 1 1 1 1 1 1
0 0 4.53 0 0 0 0
*
*
-45.72 15.24 0 7
1 1 1 1 1 1 1
0 0 4.53 0 0 0 0
*
```

```
*
45.72  15.24  0   8
1  1  1  1  1  1  1
0  0  4.53  0  0  0  0
*
*
-45.72 -15.24  0   9
1  1  1  1  1  1  1
0  0  4.53  0  0  0  0
*
*
45.72 -15.24  0  10
1  1  1  1  1  1  1
0  0  4.53  0  0  0  0
*
*
-15.24 -45.72   0  11
1  1  1  1  1  1  1
0  0  2.265  0  0  0  0
*
*
15.24 -45.72   0  12
1  1  1  1  1  1  1
0  0  4.53  0  0  0  0
*
*

%Podaci o materijalima
1 82800000 12000000 0 0 0

%Podaci o poprecnim presecima
1 0.00014645  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0.00001

%Opterecenje konstrukcije
%Broj nezavisnih uslova opterecenja
1

%Opterecenje cvorova
4
1  1
2  1
3  1
4  1

4 1
0 0
```

```

0 0

0      0  -35.6 0 0 0 0

%Opterecenje stapova
*

%Definicija funkcije vremenske promene sile
1 1 TimeH1.txt

1

%Opterecenje zemljotresom
*

%Opis elemenata
CATENARY02 1   1 2   1 3 * 0 * * *   24.29 0 0 0 0 0 0 * 0 50 0.001
CATENARY02 2   3 4   1 3 * 0 * * *   24.29 0 0 0 0 0 0 * 0 50 0.001
CATENARY02 3   3 1   1 3 * 0 * * *   24.29 0 0 0 0 0 0 * 0 50 0.001
CATENARY02 4   4 2   1 3 * 0 * * *   24.29 0 0 0 0 0 0 * 0 50 0.001
CATENARY02 5   1 5   1 3 * 0 * * *   23.7  0 0 0 0 0 0 * 0 50 0.001
CATENARY02 6   2 6   1 3 * 0 * * *   23.7  0 0 0 0 0 0 * 0 50 0.001
CATENARY02 7   1 7   1 3 * 0 * * *   23.7  0 0 0 0 0 0 * 0 50 0.001
CATENARY02 8   3 9   1 3 * 0 * * *   23.7  0 0 0 0 0 0 * 0 50 0.001
CATENARY02 9   2 8   1 3 * 0 * * *   23.7  0 0 0 0 0 0 * 0 50 0.001
CATENARY02 10  4 10  1 3 * 0 * * *   23.7  0 0 0 0 0 0 * 0 50 0.001
CATENARY02 11  3 11  1 3 * 0 * * *   23.7  0 0 0 0 0 0 * 0 50 0.001
CATENARY02 12  4 12  1 3 * 0 * * *   23.7  0 0 0 0 0 0 * 0 50 0.001

%Shema integracije
NEWMARK 1   1   0.5   0.25

%Vremenski korak integracije
1 timesteps.txt

%Numericki metod za resavanje jednacina
NEWTONRAPHSON 1 20  0.03 0.004 0 1 1  2

```

3. Datoteka *TimeH1.txt* sa opisom funkcije vremenske promene sile (videti deo [10.3.3](#))

```

2
1 1
0      0
1      1

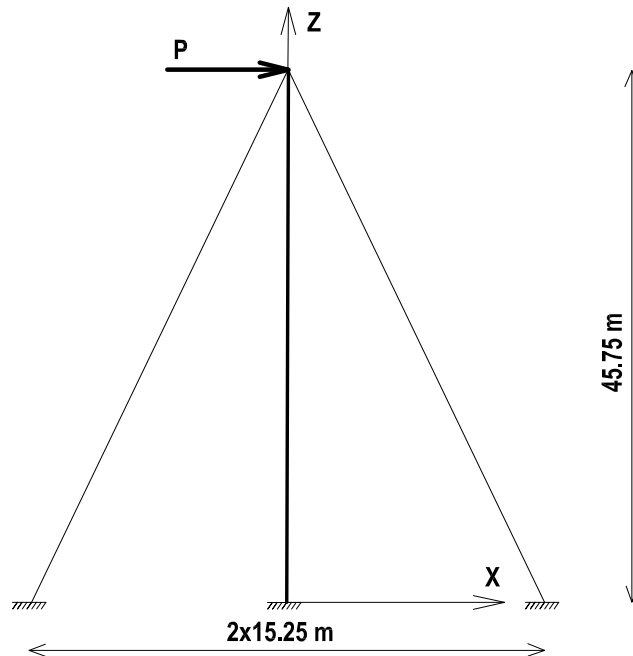
```

4. Datoteka *timesteps.txt* sa vremenskim koracima integracije

6
0 0.0
1 0.2
2 0.2
3 0.2
4 0.2
5 0.2

10.4.6 Toranj sa kosim kablovima

Kablovi kod tornja sa kosim kablovima prednapregnuti su silom zatezanja 0T . Na vrhu tornja deluje horizontalna koncentrisana sila P (slika 10.14). Poznate su vrednosti:



Slika 10.14: Toranj sa kablovima opterećen koncentrisanom silom

1. Toranj:

- (a) $A=0.1 \text{ m}^2$
- (b) $E=200100000 \text{ kN/m}^2$
- (c) $I_X=0.003642 \text{ m}^4$ i $I_Y=0.0001672 \text{ m}^4$ (X i Y su globalne ose)

2. Kablovi:

- (a) $A=0.001226 \text{ m}^2$
- (b) $E=151800000 \text{ kN/m}^2$
- (c) Sopstvena težina kabla $g=0.081 \text{ kN/m}$ data je po srednjoj liniji kabla u odnosu na globalni koordinatni sistem
- (d) ${}^0T = 44.46 \text{ kN}$

3. $P=222.3 \text{ kN}$

Potrebno je odrediti pomeranje vrha tornja u pravcu dejstva horizontalne sile kao i sile zatezanja u kablovima.

Toranj se aproksimira sa 4 konačna elementa zasnovana na polinomima kao interpolacionim funkcijama. Kabl se aproksimira sa 4 konačna elemenata zasnovana na polinomima kao interpolacionim funkcijama ili sa jednim konačnim elementom zasnovanim na analitičkim izrazima.

Potrebno je prvo odrediti inicijalnu konfiguraciju kablova usled početne sile zatezanja 0T i sopstvene težine kablova g . Inicijalna konfiguracija određuje se tako se pretpostavi da su kablovi između dve oslonačke tačke pravi, pa se usled opterećenja g , u nekoliko iteracija, odredi njihov stvarni položaj u prostoru.

Na tako dobijenoj konfiguraciji, nanosi se opterećenje P u 100 koraka. Ulazne datoteke za proračun su:

1. Konfiguraciona datoteka *config.cfg* (objašnjenja videti u delu 10.3.1)

```
NONLINEAR_ANALYSE
0
STATIC_LOAD
1 0 0
1.0e-10
```

2. Glavna datoteka sa podacima *f50ic.**** (objašnjenja videti u delu 10.3.2)

```
%Sve redove koji pocinju sa oznakom procenat, pri pustanju programa
%treba brisati

%Opsti podaci o nosacu
config.cfg
M3D 1000 7 0 2 2 6

%Podaci o cvorovima
0 0 45.75 1
0 1 0 1 0 1 1
100 0 0 0 0 0 0
*
*
0 0 34.3125 2
0 1 0 1 0 1 1
*
*
*
0 0 22.875 3
0 1 0 1 0 1 1
*
*
*
0 0 11.4375 4
0 1 0 1 0 1 1
*
```

```
*
*
-15.25 0 0 5
1 1 1 1 0 1 1
*
*
*
0 0 0 6
1 1 1 1 1 1 1
*
*
*
15.25 0 0 7
1 1 1 1 0 1 1
*
*
*

%Podaci o materijalima
1 151800000 12000000 0 0 0
2 200100000 12000000 0 0 0

%Podaci o poprecnim presecima
1 0.001226 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0.081
2 0.096768 0 0.003642 0.003642 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

%Opterecenje konstrukcije

%Broj nezavisnih uslova opterecenja
1

%Opterecenje cvorova
1
1 1

1 1
0 0
0 0

222.3 0 -0.0 0 0 0 0

%Opterecenje stapova
*
```

```
%Definicija funkcije vremenske promene sile
1 1 TimeH1.txt
1

%Opterecenje zemljotresom
*

%Opis elemenata
CATENARY03 1 5 1 1 1 * 0 * * * 14.8 0 0 0 0 0 0 * 0 30 0.001
CATENARY03 1 1 7 1 1 * 0 * * * 14.8 0 0 0 0 0 0 * 0 30 0.001
BEAM2N 3 1 2 2 2 0 0 0 0 0 0 0 * * * -93 0 0 0 0 0 0 *
BEAM2N 4 2 3 2 2 0 0 0 0 0 0 0 * * * -93 0 0 0 0 0 0 *
BEAM2N 5 3 4 2 2 0 0 0 0 0 0 0 * * * -93 0 0 0 0 0 0 *
BEAM2N 6 4 6 2 2 0 0 0 0 0 0 0 * * * -93 0 0 0 0 0 0 *

%Shema integracije
NEWMARK 1 1 0.5 0.25

%Vremenski korak integracije
0 0.01 1

%Numericki metod za resavanje jednacina
NEWTONRAPHSON 1 20 0.003 0.004 0 1 1 2
```

3. Definicija funkcije vremenske promene sile *TimeH1.txt* (videti deo 10.3.3)

```
2
1 1
0 0
1 1
```

Dobijene vrednosti pomeranja vrha tornja, kada se svaki kabl aproksimiran sa četiri konačna elementa, date su u tabeli 10.12, a sile u kabl 1 T_1 i kabl 2 T_2 date su u tabeli 10.13.

Element	Hor. pomeranje vrha [m]	
	Rad	[Liter [62]]
<i>Catenart01</i>	0.526	0.526
<i>Catenary02</i>	0.528	
<i>Catenary03</i>	0.525	
<i>Beam2N</i>	0.520	

Tabela 10.12: Maksimalno pomeranje vrha tornja u horizontalnom smeru kada su kablovi zamenjeni sa 4 konačna elementa

Element	Sile u kablju [kN]		
	T_1	T_2	[Liter [62]]
<i>Catenary01</i>	667	6	$T_1 = 678$ $T_2 = 1.05$
<i>Catenary02</i>	670	0	
<i>Catenary03</i>	673	1.3	
<i>Beam2N</i>	672	-1.3	

Tabela 10.13: Vrednosti maksimalnih sila u kablovima kada su kablovi zamenjeni sa 4 konačna elementa

Vrednosti pomeranja vrha tornja, kada se svaki kabl aproksimira sa po jednim konačnim elementom, date su u tabeli 10.14. Vrednosti sila T_1 i T_2 , respektivno u kablovima 1 i 2, date su u tabeli 10.15. Dobijene vrednosti pomeranja i sila, kada se aproksimacija radi sa konačnim elementom *Beam2N*, znatno odstupaju od vrednosti dobijenih za konačne elemente dobijene iz analitičkih izraza za lančanicu.

Element	Hor. pomeranje vrha [m]	
	Rad	[Liter [62]]
<i>Catenart01</i>	0.526	0.526
<i>Catenary02</i>	0.570	
<i>Catenary03</i>	0.528	
<i>Beam2N</i>	0.280	

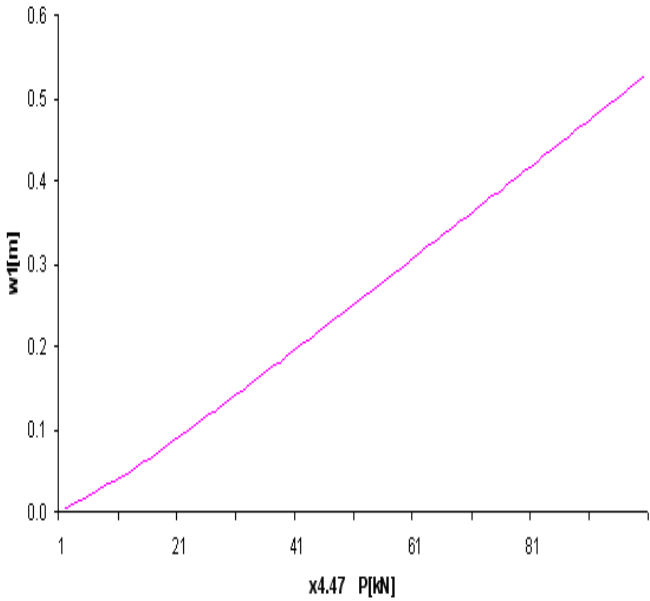
Tabela 10.14: Maksimalno pomeranje vrha tornja u horizontalnom smeru kada su kablovi zamenjeni sa jednim konačnim elementom

Vrednosti pomeranja vrha tornja i sila u kablovima, pri aproksimaciji kablova sa jednim ili četiri konačna elementa izvedena iz analitičkih izraza za lančanicu, dobro se slažu.

Kao grafička ilustracija, na slici 10.15, je prikazano horizontalno pomeranje vrha tornja, usled linearne promene sile P od 0 do maksimalne vrednosti, za slučaj kada su kablovi aproksimirani sa po jednim konačnim elementom tipa *Catenary01*.

Element	Sile u kablju [kN]		
	T_1	T_2	[Liter [62]]
<i>Catenary01</i>	671	3.3	$T_1 = 678$ $T_2 = 1.05$
<i>Catenary02</i>	658	0	
<i>Catenary03</i>	674	3.5	
<i>Beam2N</i>	388	-294	

Tabela 10.15: Vrednosti maksimalnih sila u kablovima kada su kablovi zamenjeni sa jednim konačnim elementom



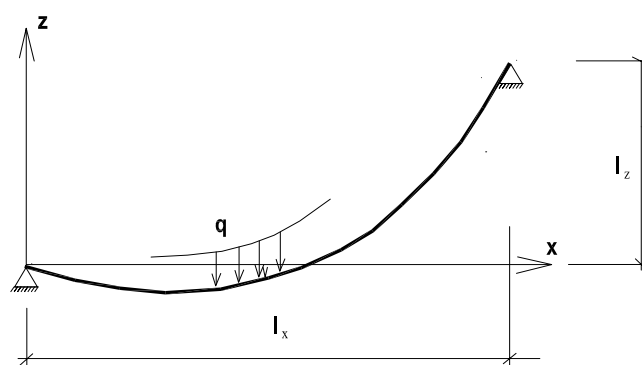
Slika 10.15: Horizontalno pomeranja vrha tornja usled horizontalne sile

10.4.7 Kružne frekvencije slobodnih vibracija nagnutog kabla

U ovome primeru za tri kabla (slika 10.16), čije su karakteristike date u tabeli 10.16, potrebno je odrediti kružne frekvencije [25].

Osobina	Kabl 1	Kabl 2	Kabl 3
$A[m^2]$	9.024×10^{-5}	2.000×10^{-4}	9.024×10^{-5}
$E[kN/m^2]$	1.65×10^8	1.50×10^8	1.65×10^8
$T[kN]$	30.00	30.00	18.15
$q[kN/m']$	0.00795	0.02548	0.00795

Tabela 10.16: Karakteristike kablova



Slika 10.16: Vertikalni ugib tačke A usled statičkog i dinamičkog opterećenja

Horizontalno rastojanje oslonačkih čvorova, kod svih kablova datih u tabeli 10.16, je $l_x = 21.0m$, a vertikalno $l_z = 36.0$.

Na osnovu podataka iz tabele 10.16, parametar kabla $\bar{\lambda}_*$ za prvi, drugi i treći kabl su respektivno: 0.474, 9,6 i 2.14.

Da bi se primenio program, kablovi su modelirani sa po 16 konačnih elemenata.

Rezultati, za prve četiri kružne frekvencije slobodnih vibracija kablova u ravni, su dati u tabelama 10.17 - 10.19. Računske vrednosti su dobijene prema izrazima iz dela 3.6. Računske vrednosti kružnih frekvencija za simetrične slobodne vibracije sračunate su na dva načina. Kod prvog načina, kružne frekvencije za simetrične slobodne vibracije sračunate su pod pretpostavkom da je $\bar{\lambda}_* \ll 1$. Kod drugog načina, kružne frekvencije za simetrične slobodne vibracije sračunate su pod pretpostavkom da je $\bar{\lambda}_* \gg 1$. Vrednosti kružnih frekvencija za simetrične slobodne vibracije, za tri kabla data u ovome primeru, trebalo bi da se nalaze između ova dva granična slučaja.

Iz tabela 10.17-10.19 se vidi da se rezultati, kružnih frekvencija u ravni kabla, dobijeni programom i računске vrednosti dobro slažu.

Pošto se kružne frekvencije u ravni kabla, za različite primenjene tipove konačnih elemenata, dobro slažu, vrednosti za kružne frekvencije van ravni kabla, biće date samo za jedan tip konačnog elementa. Rezultati, za prve četiri kružne frekvencije van ravni,

ω_i	[Računski] $\bar{\lambda}_* \ll 1$	[Računski] $\bar{\lambda}_* \gg 1$	<i>Catenary01</i>	<i>Catenary02</i>	<i>Catenary03</i>
1	14.60	13.11	14.52	14.51	14.55
2	29.20	29.20	28.89	28.86	28.92
3	43.80	43.30	43.04	43.01	43.01
4	58.40	58.40	56.62	56.57	56.68

Tabela 10.17: Kružne frekvencije u ravni kabla 1 za različite tipove konačnih elemenata [rad/sec]

ω_i	[Računski] $\bar{\lambda}_* \ll 1$	[Računski] $\bar{\lambda}_* \gg 1$	<i>Catenary01</i>	<i>Catenary02</i>	<i>Catenary03</i>
1	8.23	7.42	8.22	8.21	8.22
2	16.46	16.46	16.34	16.34	16.35
3	24.69	24.50	24.35	24.34	24.37
4	32.92	32.92	32.03	32.00	32.06

Tabela 10.18: Kružne frekvencije u ravni kabla 2 za različite tipove konačnih elemenata [rad/sec]

dati su u tabeli 10.20. Pri tome se, razmatraju rezultati samo za konačni elemenat tipa *Catenary03*.

Može se videti da se kružne frekvencije dobijene programom, u svim slučajevima, veoma dobro slažu sa analitičkim rešenjima.

ω_i	[Računski] $\bar{\lambda}_* \ll 1$	[Računski] $\bar{\lambda}_* \gg 1$	<i>Catenary01</i>	<i>Catenary02</i>	<i>Catenary03</i>
1	11.38	10.22	11.30	11.29	11.30
2	22.76	22.76	22.47	22.46	22.48
3	34.14	33.75	33.48	33.46	33.50
4	45.52	45.52	44.10	44.00	44.06

Tabela 10.19: Kružne frekvencije u ravni kabla 3 za različite tipove konačnih elemenata $[rad/sec]$

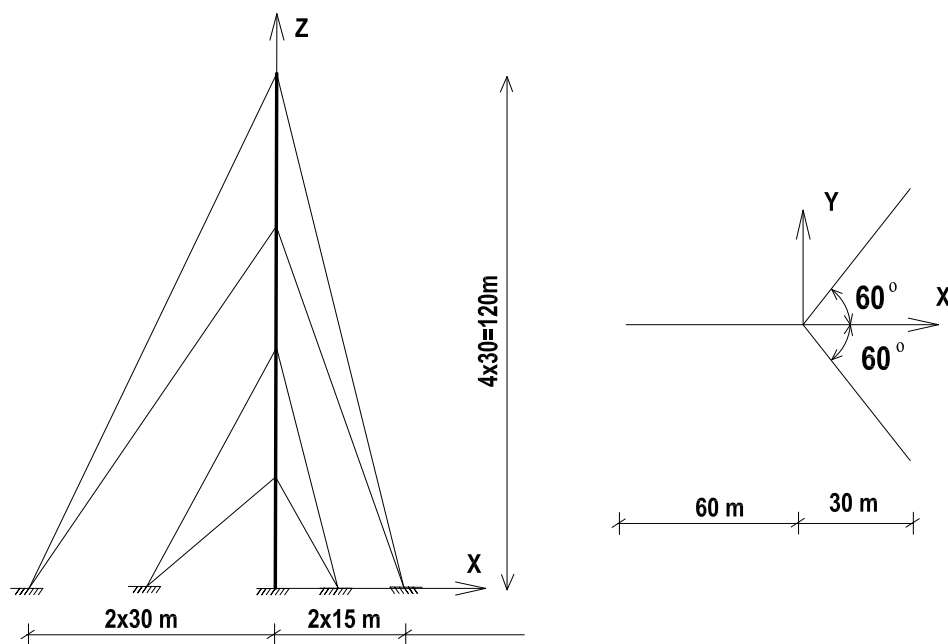
ω_i	Kabl 1	Kabl 2	Kabl 3
1	14.55	8.22	11.30
2	28.92	16.35	22.49
3	43.01	24.37	33.51
4	56.68	32.06	44.08

Tabela 10.20: Kružne frekvencije van ravni kabla $[rad/sec]$

10.4.8 Kružne frekvencije slobodnih vibracija tornja sa kosim kablovima

Toranj je pridržan sa 4 grupe kosih kablova. Svaka grupa sastoji se od po tri kabla radijalno raspoređena. Dispozicija tornja data je na slici 10.17. Potrebno je odrediti prve tri kružne frekvencije slobodnih vibracija tornja i modove oscilovanja. Primer je uzet prema [25].

Karakteristike kablova su date u tabeli 10.17 u trećoj koloni, a karakteristike tornja su sledeće: $A = 1.8 \times 10^{-3} \text{m}^2$, $E = 2.1 \times 10^8 \text{kN/m}^2$, $I_{yy} = I_{zz} = 1.5 \times 10^{-3} \text{m}^4$ i $q = 0.616 \text{kN/m}^2$.



Slika 10.17: Nagnuti kabl

U proračunu, kablovi su zamenjeni sa po jednim konačnim elementom tipa *Beam2N* ili sa jednim konačnim elementom na bazi analitičkih rešenja za lančanicu. Toranj se aproksimira sa 4 konačna elemenata tipa *Beam2N*. Datoteke sa ulaznim podacima za program **ELAN** su:

1. Konfiguraciona datoteka *config.cfg* (objašnjenja videti u delu 10.3.1)

```
NONLINEAR_ANALYSE
0
MODAL
1 0 0
1.0e-10
```

2. Glavna datoteka sa podacima *f11-121cg.**** (objašnjenja videti u delu 10.3.2)

%Sve redove koji pocinju sa oznakom procenat, pri pustanju programa

```

%treba brisati

%Opsti podaci o nosacu
config.cfg
M3D 1000 11 0 2 4 16

%Podaci o cvorovima
0 0 120 1
0 1 1 1 1 1 1
0.924 0 0 0 0 0 0
*
*
0 0 90 2
0 1 1 1 1 1 1
0.924 0 0 0 0 0 0
*
*
0 0 60 3
0 1 1 1 1 1 1
0.924 0 0 0 0 0 0
*
*
0 0 30 4
0 1 1 1 1 1 1
0.924 0 0 0 0 0 0
*
*
0 0 0 5
1 1 1 1 1 1 1
*
*
-60 0 0 6
1 1 1 1 1 1 1
*
*
-30 0 0 7
1 1 1 1 1 1 1
*
*
15 25.98 0 8
1 1 1 1 1 1 1
*
*

```

```
*
30   51.96   0   9
1   1 1 1 1 1 1
*
*
*
15   -25.98   0  10
1   1 1 1 1 1 1
*
*
*
30   -51.96   0  11
1   1 1 1 1 1 1
*
*
*

%Podaci o materijalima
1 150000000   0 0 0 0
2 210000000   84000000 0 0 0

%Podaci o poprecnom preseccima
1 0.5   0 1.0   1.0   0 0 0   0 0   0 0 0 0 0 0 0 0 0
2 0.0018 0.000001 0.0015 0.0015 0 0 0   0 0   0 0 0 0 0 0 0
3 0.0002 0 0 0   0 0 0   0 0   0 0 0 0 0 0 0 0.02548
4 0   0 0 0   0 0 0   0 0   0 0 0 0 0 0 0 0

%Opterecenje konstrukcije
%Broj nezavisnih uslova opterecenja
0

%Opterecenje cvorova
*

%Opterecenje stapova
*

%Definicija funkcije vremenske promene sile
*

%Opterecenje zemljotresom
*

%Opis elemenata
BEAM2N   1   2   1   2   2   0 0 0 0 0 0   0   * * *   0 0 0 0 0 0 0 *
BEAM2N   2   3   2   2   2   0 0 0 0 0 0   0   * * *   0 0 0 0 0 0 0 *
```

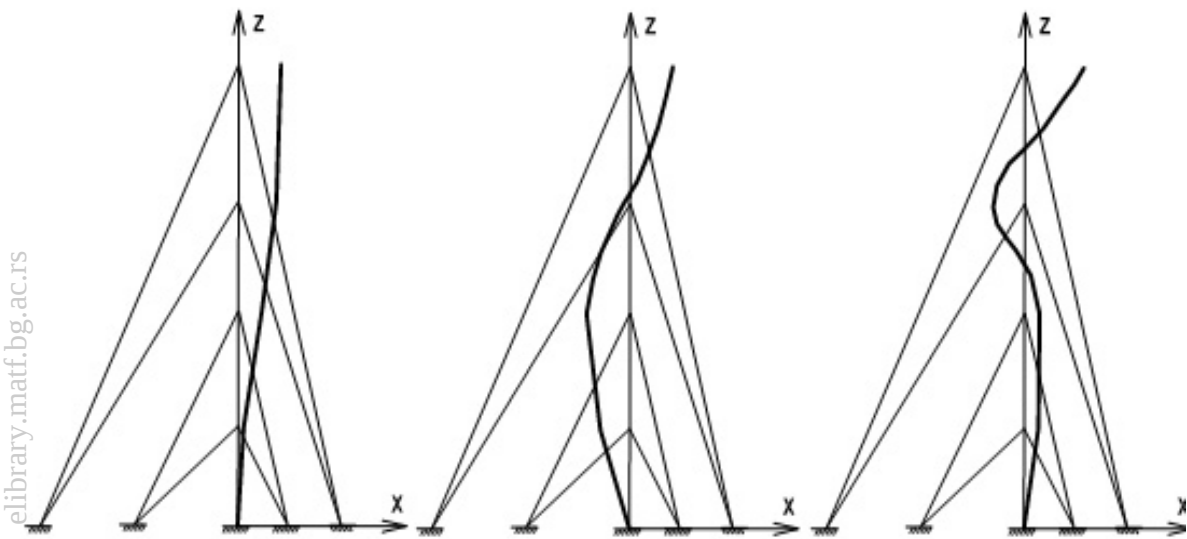
```
%Shema integracije
*

%Vremenski korak integracije
*

%Numericki metod za resavanje jednačina
*
```

ω_i	[SAP2000]	[Liter [25]]	<i>Beam2N</i>	<i>Catenary01</i>	<i>Catenary02</i>	<i>Catenary03</i>
1	9.36	14.60	9.39	9.05	9.06	9.08
2	14.40	18.48	14.40	14.29	14.30	14.30
3	18.60	28.56	18.60	18.40	18.40	18.40

Tabela 10.21: Kružne frekvencije tornja sa kablovima $[rad/sec]$

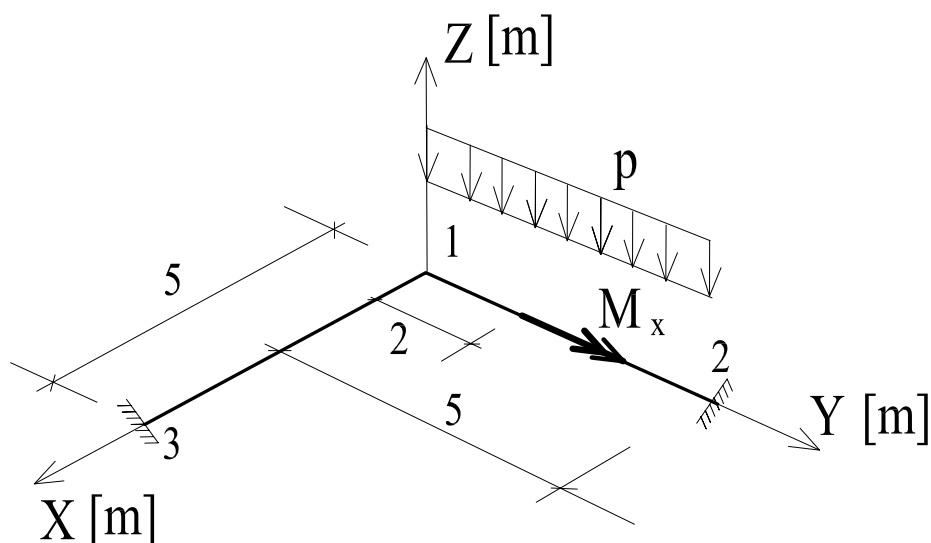


Slika 10.18: Prva tri moda vibracija tornja

10.4.9 Tankozidni roštiljni nosač

Posmatraju se dva slučaja roštiljnog tankozidnog nosača opterećenog statičkim opterećenjem. U prvom slučaju posmatra se tankozidni nosač otvorenog poprečnog preseka i jednakopodeljeno opterećenje na elementu. U drugom slučaju posmatra se tankozidni nosač zatvorenog poprečnog preseka i opterećenje koncentrisanim momentom na elementu.

Na slici 10.19 je data dispozicija roštiljnog nosača sa oznakama čvorova i opterećenja za prvi (jednakopodeljeno opterećenje $p = 24kN/m$) i drugi (koncentrisani momenat $M_x = 100kNm$) slučaj.



Slika 10.19: Tankozidni roštiljni nosač

Za prvi slučaj, geometrijske karakteristike grede otvorenog poprečnog preseka su:

1. $k = 0.8$
2. $I_{\omega\omega}/I_{zz} = 0.5$

Datoteke, sa ulaznim podacima za program **ELAN**, su:

1. Konfiguraciona datoteka *config.cfg* (objašnjenja videti u delu 10.3.1)

```

LINEAR_ANALYSE
0
STATIC_LOAD
1 0 0
1.0e-10

```

2. Glavna datoteka sa podacima *f21-2.**** (objašnjenja videti u delu 10.3.2)

```
%Sve redove koji pocinju sa oznakom procenat, pri pustanju programa  
%treba brisati
```

```
%Opsti podaci o nosacu  
config.cfg  
M3D 1000 3 0 1 1 2
```

```
%Podaci o cvorovima
```

```
0 0 0 1  
1 1 0 0 0 1 0  
*  
*  
*  
5 0 0 2  
1 1 1 1 1 1 1  
*  
*  
*  
0 -5 0 3  
1 1 1 1 1 1 1  
*  
*  
*
```

```
%Podaci o materijalima
```

```
1 1 0.4 0 0 0
```

```
%Podaci o poprecnom preseku
```

```
1 0 0.8 1 1 0 0 0 0.5 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

```
%Opterecenje konstrukcije
```

```
%Broj nezavisnih uslova opterecenja
```

```
1
```

```
%Opterecenje cvorova
```

```
*
```

```
%Opterecenje stapova
```

```
1
```

```
1 1
```

```
1 1
```

```
LINEOL 0 0 -24 0 0 0 0 0 0 0 0
```

```
%Definicija funkcije vremenske promene sile
```

```
*
```

```

%Opterecenje zemljotresom
*

%Opis elemenata
TWALL2N  1 1 2  1 1  0 0 1 1 0 0 0    0  * * *  0 0 0 0 0 0 0  *
TWALL2N  2 1 3  1 1  0 0 1 1 0 0 0  180  * * *  0 0 0 0 0 0 0  *

%Shema integracije
*

%Vremenski korak integracije
*

%Numericki metod za resavanje jednačina
*
```

Vrednosti dobijenih pomeranja čvora 1, u globalnom koordinatnom sistemu, upoređene su sa vrednostima iz literature [3] i rezultati su dati u tabeli 10.22. Presečne sile, dobijene

Pomeranje	[Liter.[3]]	<i>TWALL2N</i>	<i>THINWALL2N</i>
U_Z	-698.8389	-698.8326	-697.3522
φ_X	126.2968	126.2945	125.7601
φ_Y	-182.7743	-182.7716	-182.1216
ϑ	7.2531	7.2529	-6.9839

Tabela 10.22: Pomeranje čvora tankozidnog nosača otvorenog poprečnog preseka

programom, su date na slici 10.20.

Za drugi slučaj, geometrijske karakteristike grede zatvorenog poprečnog preseka su:

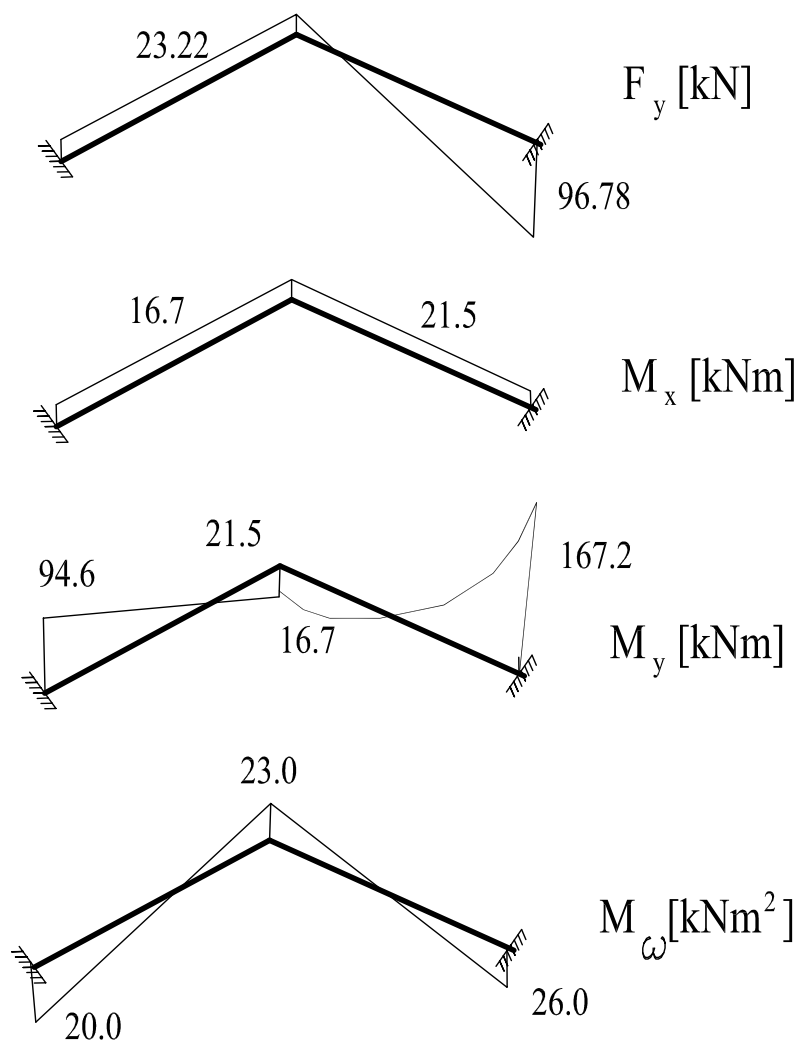
1. $\hat{k} = 0.4$
2. $\rho I_{\omega\omega}/I_{zz} = 2.0$
3. $\rho = 4.0$

Vrednosti dobijenih pomeranja čvora 1, u globalnom koordinatnom sistemu, upoređene su sa vrednostima iz literature [3] i rezultati su dati u tabeli 10.23. Presečne sile, dobijene

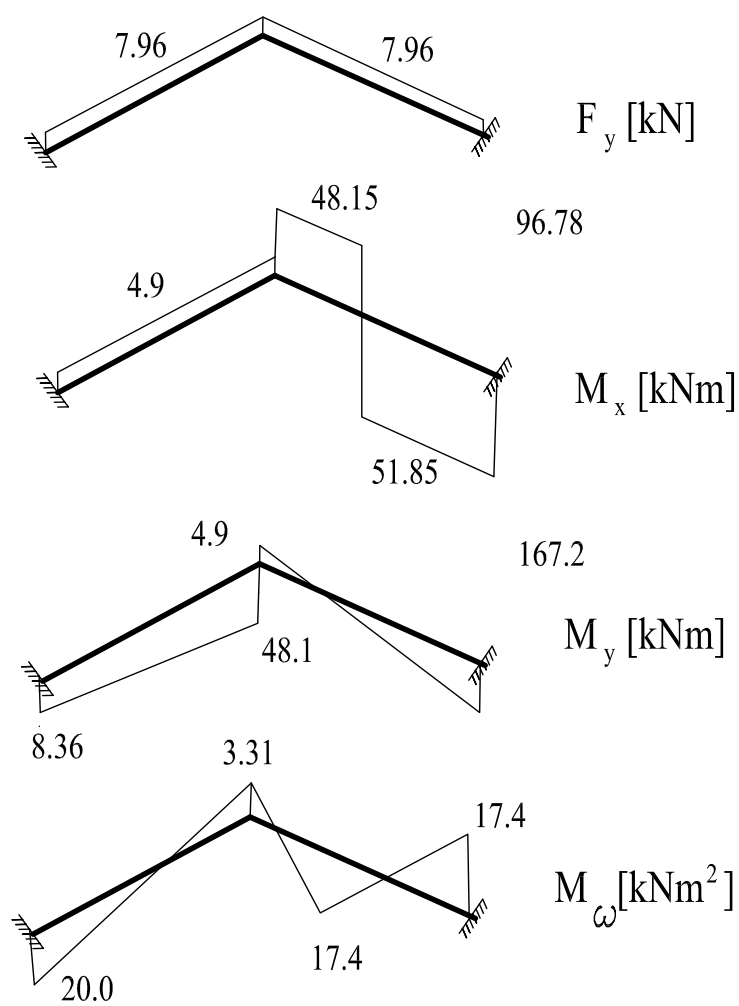
Pomeranje	[Liter.[3]]	<i>TWALL2N</i>
U_Z	270.2785	270.3356
φ_X	-72.9557	-74.9712
φ_Y	141.2671	141.2973
ϑ	27.1892	27.1866

Tabela 10.23: Pomeranje čvora tankozidnog nosača zatvorenog poprečnog preseka

programom, su date na slici 10.21.



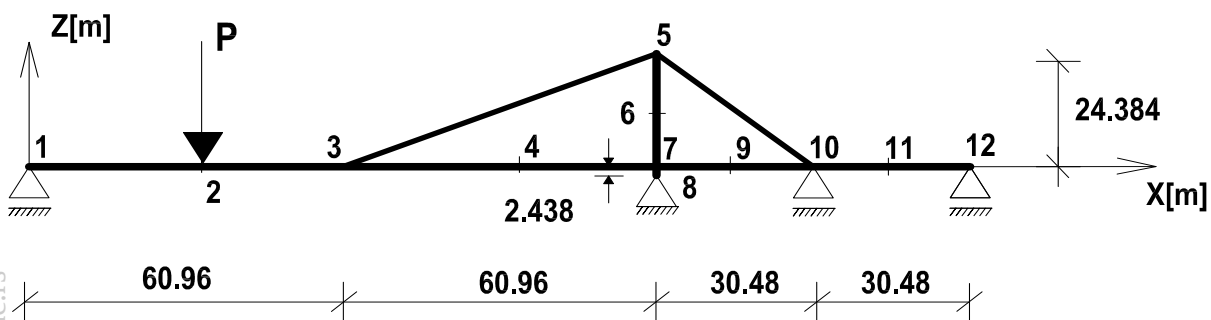
Slika 10.20: Presečne sile roštiljnog nosača otvorenog poprečnog preseka



Slika 10.21: Presečne sile roštiljnog nosača zatvorenog poprečnog preseka

10.4.10 Most sa kosim kablovima

Dispozicija mosta, sa oznakama čvorova, je data na slici 10.22. Usled stalnog opterećenja, most zauzima položaj u prostoru koji je dat koordinatama čvorova navedenim u tabeli 10.24, a odgovarajuće presečne sile su date u tabeli 10.25. Na tako zadatoj konfiguraciji, kao inicijalnoj konfiguraciji, počinje da deluje koncentrisana vertikalna sila P u čvoru 2. Potrebno je odrediti sile u kablovima. Poznate veličine:



Slika 10.22: Most sa kosim kablovima

1. $E=191521028 \text{ kN/m}^2$
2. $P=40000 \text{ kN}$
3. Greda:
 - (a) $A=0.743224 \text{ m}^2$
 - (b) $I_Y=0.3883939 \text{ m}^4$
 - (c) $g=234.436 \text{ kN/m}$
4. Pilon:
 - (a) Gornji deo: $A=0.278709 \text{ m}^2 \quad I_Y=0.172619 \text{ m}^4$
 - (b) Donji deo: $A=0.92903 \text{ m}^2 \quad I_Y=1.726195 \text{ m}^4$

Čvor br.	Koordinate čvorova [m]	
	X	Z
1	-0.006	0.000
2	30.474	-0.265
3	60.954	-0.0061
4	91.434	-0.122
5	121.911	24.384
6	121.896	12.191
7	121.911	0.000
8	121.920	-2.438
9	137.151	0.090
10	152.400	0.000
11	167.631	-0.021
12	182.871	0.000

Tabela 10.24: Oblik mosta sa kosim kablovima usled stalnog opterećenja

Element br	Aksijalna sila T [kN]	Momenti savijanja [kNm]	
		M_{Y1}	M_{Y2}
3-5	44692.6		
5-10	53772.4		
1-2	17.3	0.0	-60434.2
2-3	44.1	60434.2	96921.6
3-4	-41478.1	-96921.6	-38770.6
4-7	-41483.0	38770.6	53212.7
7-9	-41991.0	-41659.8	2341.5
9-10	-41991.0	-2341.5	16578.9
10-11	3.4	-16578.9	-18935.2
11-12	1.8	18935.2	0.0
6-5	-50192.0	-6757.7	0.0
7-6	-50192.0	-12024.7	6756.5
8-7	-61013.0	0.0	471.8

Tabela 10.25: Sile u elementima mosta sa kosim kablovima usled stalnog opterećenja

5. Kablovi:

- (a) $A=0.10219 \text{ m}^2$
- (b) $g=4.3957 \text{ kN/m}$

Svaki kabl je zamenjen sa po jednim konačnim elementom. Greda i pilon su predstavljeni sa po jednim *Beam2N* elementom između svaka dva čvora. Datoteke sa ulaznim podacima za program **ELAN** su:

1. Konfiguraciona datoteka *config.cfg* (objašnjenja videti u delu 10.3.1)

```
NONLINEAR_ANALYSE
0
STATIC_LOAD
1 0 0
1.0e-10
```

2. Glavna datoteka sa podacima *f7cksi.\$\$\$* (objašnjenja videti u delu 10.3.2)

```
%Sve redove koji pocinju sa oznakom procenat, pri pustanju programa
%treba brisati

%Opsti podaci o nosacu
config.cfg
M3D 1000 12 0 2 5 13

%Podaci o cvorovima
-0.006 0 0 1
0 1 1 1 0 1 1
*
*
*
30.474 0 -0.1265 2
0 1 0 1 0 1 1
*
*
*
60.954 0 -0.0061 3
0 1 0 1 0 1 1
0 0 4.53 0 0 0 0
*
*
*
91.434 0 -0.122 4
0 1 0 1 0 1 1
0 0 4.53 0 0 0 0
*
*
```

```
121.911 0 24.384 5
0 1 0 1 0 1 1
0 0 4.53 0 0 0 0
*
*
121.896 0 12.191 6
0 1 0 1 0 1 1
0 0 4.53 0 0 0 0
*
*
121.911 0 0 7
0 1 0 1 0 1 1
0 0 4.53 0 0 0 0
*
*
121.920 0 -2.438 8
1 1 1 1 0 1 1
0 0 4.53 0 0 0 0
*
*
137.151 0 0.09 9
0 1 0 1 0 1 1
0 0 4.53 0 0 0 0
*
*
152.400 0 0 10
0 1 0 1 0 1 1
0 0 4.53 0 0 0 0
*
*
167.631 0 -0.021 11
0 1 0 1 0 1 1
0 0 2.265 0 0 0 0
*
*
182.871 0 0 12
0 1 1 1 0 1 1
0 0 4.53 0 0 0 0
*
*

%Podaci o materijalima
1 191521028 12000000 0 0 0
2 191521028 12000000 0 0 0

%Podaci o poprecnom preseccima
```

```
1  0.743224  0  0.3883939  0.3883939 0 0 0  0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
2  0.278709  0  0.172619  0.172619  0 0 0  0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
3  0.92903   0  1.726195   1.726195  0 0 0  0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
4  0.10219   0  0          0          0 0 0  0 0  0 0 0 0 0 0 0  0 0 0  4.08
5  0.10219   0  0          0          0 0 0  0 0  0 0 0 0 0 0 0  0 0 0  3.433
```

```
%Opterecenje konstrukcije
```

```
1
```

```
%Opterecenje cvorova
```

```
1
```

```
2  1
```

```
1  2
```

```
0  0
```

```
0  0
```

```
0  0  -30000 0 0 0 0
```

```
%Opterecenje stapova
```

```
*
```

```
%Definicija funkcije vremenske promene sile
```

```
1 1 TimeH_1.txt
```

```
%Opterecenje zemljotresom
```

```
*
```

```
%Opis elemenata
```

```
CATENARY03 1 3 5 1 4 * 0 * * * 0 0 0 0 0 0 0 * 0 30 0.001
```

```
CATENARY03 2 5 10 1 5 * 0 * * * 0 0 0 0 0 0 0 * 0 30 0.001
```

```
BEAM2N 3 1 2 1 1 * 0 * * * 0 0 0 0 0 0 0 *
```

```
BEAM2N 4 2 3 1 1 * 0 * * * 0 0 0 0 0 0 0 *
```

```
BEAM2N 5 3 4 1 1 * 0 * * * 0 0 0 0 0 0 0 *
```

```
BEAM2N 6 4 7 1 1 * 0 * * * 0 0 0 0 0 0 0 *
```

```
BEAM2N 7 7 9 1 1 * 0 * * * 0 0 0 0 0 0 0 *
```

```
BEAM2N 8 9 10 1 1 * 0 * * * 0 0 0 0 0 0 0 *
```

```
BEAM2N 9 10 11 1 1 * 0 * * * 0 0 0 0 0 0 0 *
```

```
BEAM2N 10 11 12 1 1 * 0 * * * 0 0 0 0 0 0 0 *
```

```
BEAM2N 11 6 5 1 2 * 0 * * * 0 0 0 0 0 0 0 *
```

```
BEAM2N 12 7 6 1 2 * 0 * * * 0 0 0 0 0 0 0 *
```

```
BEAM2N 13 8 7 1 3 * 0 * * * 0 0 0 0 0 0 0 *
```

```
%Shema integracije
```

```
NEWMARK 1 1 0.5 0.25
```

```
%Vremenski korak integracije  
0 0.01 1  
  
%Numericki metod za resavanje jednacina  
NEWTONRAPHSON 1 20 0.03 0.004 0 1 1 2
```

Rezultati proračuna, pri primeni različitih tipova konačnih elementima za kablove, su dati u tabeli 10.26. Sila u levom kablju ima oznaku T_1 , a u desnom kablju T_2 . Dobijeni

Element	Sila u kablju [kN]	
	T_1	T_2
<i>Catenart01</i>	76586	89817
<i>Catenary02</i>	76545	89754
<i>Catenary03</i>	76618	89836
<i>Beam2N</i>	75910	88648
<i>Beam3N</i>	79991	91641
<i>BarEQ</i>	75959	88698

Tabela 10.26: Sile u kablovima mosta

rezultati proračuna dobro se međusobno slažu.

Glava 11

Zaključci i preporuke

Osnovni zadatak istraživanja je bio da se na osnovu matematičkoj modela konstrukcije sa kablovima i objektno orijentisanog modela podataka, uradi računarski program koji će omogućiti nelinearnu analizu konstrukcija sa kablovima usled statičkog i dinamičkog opterećenja.

Kablovi, kao konstruktivni elementi, upotrebljavaju se u mnogim oblastima inženjerstva i predstavljaju vitalni noseći deo raznih konstrukcija sa kablovima. Osim kablova, kao nosećih elemenata, pojavljuju se i drugi tipovi nosećih elemenata kao što su tankozidne grede i grede.

Konstrukcije sa kablovima spadaju u konstrukcije sa nelinearnim ponašanjem. Nelinearnost, kod konstrukcija sa kablovima, je posledica: nelinearnog ponašanja kabla, nelinearnog ponašanja grednih elementa izloženih savijanju i promene geometrije konstrukcije usled velikih pomeranja.

U analizi konstrukcija svi elementi strukture, kao što su ploče, grede, kablovi itd. treba da budu predstavljeni odgovarajućim konačnim elementima. Ovi konačni elementi su tako formulisani da što bolje opisu ponašanje stvarne konstrukcije. U komercijalnim softverima, definisani su mnogobrojni konačni elementi za gredne nosače. Na drugoj strani, konačni elementi za kablove su veoma retki.

U radu je urađeno sledeće:

1. Izvedene su linearizovane inkrementalne jednačine ravnoteže primenom korigovane *Lagrange*-ove formulacije. Inkrementalne jednačine ravnoteže predstavljaju polaznu osnovu za primenu metode konačnih elemenata u analizi geometrijski nelinearnih problema. Dobijene jednačine ravnoteže, po svom obliku, odgovaraju inkrementalnim jednačinama ravnoteže u *Newton-Raphson*-ovom numeričkom postupku.
2. Izvedene su tangentne matrice krutosti, vektori ekvivalentnog čvornog opterećenja i vektori internih čvornih sila za: duboku i plitku elastičnu lančanicu, tankozidnu gredu i gredu kao konačne elemente. Izrazi za tangentnu matrice krutosti, konačnih elementa za duboku i plitku elastičnu lančanicu, obuhvataju nelinearno ponašanje kabla i funkcije su horizontalnih sila i određuju se u iteracijama. Nelinearno ponašanje grednih elementa, izloženih savijanju, obuhvaćeno je geometrijskom matricom krutosti.
3. Izvedene su jednačine ravnoteže za linearnu i nelinearnu analizu konstrukcija za dejstvo statičkog i dinamičkog opterećenja.
4. Za rešavanje jednačina ravnoteže kod nelinearne analize, prikazana je klasična inkrementalno iterativna metoda - *Newton-Raphson*-ova metoda. Ovom metodom nije moguće dobiti rešenje u neposrednoj blizini kritičnih tačaka.
5. Objektno orijentisanom analizom, realnog sistema, dobijen je model podataka. Klase u modelu podatka, grupisane su prema nameni u: klase za opis modela, klase za formiranje modela, analitičke klase, numeričke klase i ostale klase (klase koje ne mogu da se svrstaju ni u jednu predhodno navedenu grupu).
6. Napisan je program koji omogućava linearnu i nelinearnu analizu konstrukcija sa kablovima usled dejstva statičkog i dinamičkog opterećenja.

7. Verifikacija programa urađena je upoređivanjem izlaznih rezultata programa sa poznatim numeričkim rešenjima ili rešenjima datim u radovima i literaturi, i vidi se dobro slaganje brojnih vrednosti.

Rezultati istraživanja, ponuđenim numeričkim modelom za nelinearnu analizu konstrukcija sa kablovima, omogućavaju dobro opisivanje nelinearnog ponašanja ovih konstrukcija.

Tehničkoj praksi je dat alat koji omogućava kompletnu analizu konstrukcija sa kablovima. Istraživačima je data mogućnost proširivanja programa i eksperimentisanje sa njihovim ličnim konačnim elementima i algoritmima za analizu.

Preporuke za dalji razvoj:

1. Kod konačnih elemenata, izvedenih na bazi analitičkih izraza za lančanicu, uvesti mogućnost da opterećenje bude proizvoljnog pravca u prostoru, a ne samo u ravni lančanice [84].
2. Razvoj klasa, za nelinearnu numeričku analizu, koje će omogućiti praćenje ponašanja konstrukcije u blizini graničnih tačaka.
3. Uvesti nove metode za redukciju modela fleksibilnih sistema - u radu je uvedena *Guyan*-ova metoda za statičku redukciju. Ona je tačna samo za najnižu frekvenciju. Potrebno bi bilo uvesti metode koje na bolji način opisuju statičko i dinamičko ponašanje sistema [17].
4. Razvoj korisničkog interfejsa - ulazni parametri i rezultati proračuna, u ovoj verziji programa, dobijaju se u tekstualnim datotekama. Razvojem korisničkog interfejsa bilo bi omogućeno lakše i efikasnije korišćenje programa.

Dodatak A

Računske vrednosti submatrica matrica krutosti

U dodatku su data rešenja za submatrice matrica krutosti (videti deo [4.6](#) i [5.1.3](#)):

1. Interpolacione funkcije su date u obliku polinoma prema izrazima u delu [4.9](#) i [5.1.6](#) (tabele [A.1](#) i [A.2](#)).
2. Matrica $\mathbf{K}_{27}$ za tankozidni nosač otvorenog i zatvorenog poprečnog preseka kada su interpolacione funkcije date u obliku hiperboličkih funkcija [\[3\]](#) (tabela [A.3](#)).

Tabela A.1: Submatrice matrice krutosti tankozidne grede otvorenog i zatvorenog poprečnog preseka i grede

Matrica	Integral	Tankozidna greda otvorenog i zatvorenog poprečnog preseka i grede
$\mathbf{K}_1$	$\int_L \mathbf{N}_u'^T \mathbf{N}_u' dx$	$\frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
$\mathbf{K}_2$	$\int_L \mathbf{N}_u'^T \mathbf{N}_v'' dx$	$\frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\mathbf{K}_3$	$\int_L x \mathbf{N}_u'^T \mathbf{N}_v'' dx$	$\frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -L \\ 1 & 0 & -1 & L \end{bmatrix}$
$\mathbf{K}_4$	$\int_L \mathbf{N}_u'^T \mathbf{N}_v' dx$	$\frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
$\mathbf{K}_5$	$\int_L \mathbf{N}_u'^T \mathbf{N}_w'' dx$	$\frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
$\mathbf{K}_6$	$\int_L x \mathbf{N}_u'^T \mathbf{N}_w'' dx$	$\frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & L \\ 1 & 0 & -1 & -L \end{bmatrix}$
$\mathbf{K}_7$	$\int_L \mathbf{N}_u'^T \mathbf{N}_w' dx$	$\frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
$\mathbf{K}_8$	$\int_L \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_v' dx$	$\frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ & & 36 & -3L \\ sym & & & 4L^2 \end{bmatrix}$

Matrica	Integral	Tankozidna greda otvorenog i zatvorenog poprečnog preseka i greda
$\mathbf{K}_{12}$	$\int_L \mathbf{N}_w'^T \mathbf{N}_w' dx$	$\frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 36 & -3L & -36 & -3L \\ & 4L^2 & 3L & -L^2 \\ & & 36 & 3L \\ sym & & & 4L^2 \end{bmatrix}$
$\mathbf{K}_{25}$	$\int_0^L \mathbf{N}_v''^T \mathbf{N}_v'' dx$	$\frac{2}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & 3L & -6 & 3L \\ & 2L^2 & -3L & L^2 \\ & & 6 & -3L \\ sym & & & 2L^2 \end{bmatrix}$
$\mathbf{K}_{26}$	$\int_L \mathbf{N}_w''^T \mathbf{N}_w'' dx$	$\frac{2}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & -3L & -6 & -3L \\ & 2L^2 & 3L & L^2 \\ & & 6 & 3L \\ sym & & & 2L^2 \end{bmatrix}$

Tabela A.2: Submatrice matrice krutosti tankozidne grede otvorenog poprečnog preseka i grede

Matrica	Integral	Tankozidna greda otvorenog poprečnog preseka	Greda
$\mathbf{K}_9$	$\int_L \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_\varphi' dx$	$\frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ & & 36 & -3L \\ sym & & & 4L^2 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\mathbf{K}_{10}$	$\int_L x \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_\varphi' dx$	$\frac{1}{30} \begin{bmatrix} 18 & 3L & -18 & 0 \\ & L^2 & -3L & -0.5L^2 \\ & & 18 & 0 \\ sym & & & 3L^2 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ L & -L \\ -6 & 6 \\ -L & L \end{bmatrix}$
$\mathbf{K}_{11}$	$\int_L \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_\varphi dx$	$\frac{1}{30} \begin{bmatrix} -15 & -3L & -15 & 3L \\ & 0 & -3L & 0.5L^2 \\ & & 15 & -3L \\ sym & & & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{12} \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ L & -L \\ 6 & 6 \\ -L & L \end{bmatrix}$
$\mathbf{K}_{13}$	$\int_L x \mathbf{N}_w'^T \mathbf{N}_\varphi' dx$	$\frac{1}{30} \begin{bmatrix} 18 & 3L & -18 & 0 \\ & -L^2 & 3L & 0.5L^2 \\ & & 18 & 0 \\ sym & & & -3L^2 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -L & L \\ -6 & 6 \\ L & -L \end{bmatrix}$
$\mathbf{K}_{14}$	$\int_L \mathbf{N}_w'^T \mathbf{N}_\varphi dx$	$\frac{1}{30} \begin{bmatrix} -15 & -3L & -15 & 3L \\ & 0 & 3L & -0.5L^2 \\ & & 15 & -3L \\ sym & & & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{12} \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ -L & L \\ 6 & 6 \\ L & -L \end{bmatrix}$
$\mathbf{K}_{15}$	$\int_L \mathbf{N}_v''^T \mathbf{N}_\varphi'' dx$	$\frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ sym & & & 4L^2 \end{bmatrix}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{K}_{16}$	$\int_L x \mathbf{N}_v''^T \mathbf{N}_\varphi'' dx$	$\frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} 6 & 2L & -6 & 4L \\ & L & -2 & L \\ & & 6 & -4L \\ sym & & & 3L \end{bmatrix}$	$\mathbf{0}$

Matrica	Integral	Tankozidna greda	Greda
$\mathbf{K}_{17}$	$\int_L \mathbf{N}_w''^T \mathbf{N}_\varphi'' dx$	$\frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ -4L^2 & 6L & -2L^2 & \\ & 12 & -6L & \\ sym & & -4L^2 & \end{bmatrix}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{K}_{18}$	$\int_L x \mathbf{N}_w''^T \mathbf{N}_\varphi'' dx$	$\frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} 12 & 4L & -12 & 8L \\ -2L & 4 & -2L & \\ & 12 & -8L & \\ sym & & -6L & \end{bmatrix}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{K}_{19}$	$\int_L \mathbf{N}_\varphi'^T \mathbf{N}_\varphi' dx$	$\mathbf{K}_8$	$\frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
$\mathbf{K}_{20}$	$\int_L \mathbf{N}_w'^T \mathbf{N}_\varphi' dx$	$\frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ -4L^2 & 3L & L^2 & \\ & 36 & -3L & \\ sym & & -4L^2 & \end{bmatrix}$	$\frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\mathbf{K}_{21}$	$\int_L x \mathbf{N}_\varphi'^T \mathbf{N}_\varphi' dx$	$\mathbf{K}_{10}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
$\mathbf{K}_{22}$	$\int_L \mathbf{N}_\varphi'''^T \mathbf{N}_\varphi''' dx$	$\mathbf{K}_{15}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{K}_{23}$	$\int_L \mathbf{N}_u'^T \mathbf{N}_\varphi'' dx$	$\mathbf{K}_2$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{K}_{24}$	$\int_L \mathbf{N}_\varphi''''^T \mathbf{N}_\varphi'''' dx$	$\frac{1}{L^5} \begin{bmatrix} 144 & 72L & -144 & 72L \\ & 36L^2 & -72L & 36L^2 \\ & & 144 & -72L \\ sym & & & 36L^2 \end{bmatrix}$	$\mathbf{0}$

Tabela A.3: Submatrice matrice krutosti tankozidne grede otvorenog i zatvorenog poprečnog preseka

Matrica	Tankozidna greda otvorenog i zatvorenog poprečnog preseka
$\mathbf{K}_{27}$	$\frac{E\psi I_{\omega\omega}}{\Delta} \begin{bmatrix} \psi \tilde{k}^3 \operatorname{sh} \tilde{\lambda} & \tilde{k}^2 (\operatorname{ch} \tilde{\lambda} - 1) & -\psi \tilde{k}^3 \operatorname{sh} \tilde{\lambda} & \tilde{k}^2 (\operatorname{sh} \tilde{\lambda} - 1) \\ \frac{\tilde{k}}{\psi} (\psi \tilde{\lambda} \operatorname{ch} \tilde{\lambda} - \operatorname{sh} \tilde{\lambda}) & -\tilde{k}^2 (\operatorname{ch} \tilde{\lambda} - 1) & -\frac{\tilde{k}}{\psi} (\psi \tilde{\lambda} - \operatorname{sh} \tilde{\lambda}) & -\frac{\tilde{k}}{\psi} (\psi \tilde{\lambda} \operatorname{ch} \tilde{\lambda} - \operatorname{sh} \tilde{\lambda}) \\ \psi \tilde{k}^3 \operatorname{sh} \tilde{\lambda} & & -\tilde{k}^2 (\operatorname{ch} \tilde{\lambda} - 1) & \\ \operatorname{sym.} & & & \frac{\tilde{k}}{\psi} (\psi \tilde{\lambda} \operatorname{ch} \tilde{\lambda} - \operatorname{sh} \tilde{\lambda}) \end{bmatrix}$

Dodatak B

Jacobi-an sistema

Sistem funkcija

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(x_1, \dots, x_n) \\ y_2 &= y_2(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= y_m(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

može da bude napisan u matičnom obliku kao

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}) \quad (\text{B.2})$$

gde je

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Ako je $m = 1$ tada je $\mathbf{y}$ skalar u oznaci y . Ako je $n = 1$ tada je $\mathbf{x}$ je skalar u oznaci x .

Izvod vektora u odnosu na skalar

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x} & \frac{\partial y_2}{\partial x} & \frac{\partial y_m}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Izvod skalara u odnosu na vektor

$$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Izvod vektora po vektoru je matrica

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(y_1, \dots, y_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

koja se naziva funkcionalna ili *Jacobi*-eva matrica.

Ako je dat sistem $\mathbf{J}$ kvadratnog formata, tada je determinanta tog sistema jednaka

$$|\mathbf{J}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} \\ & & & \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} & & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Determinanta $|\mathbf{J}|$ se naziva *Jacobi*-eva determinanta ili *Jacobi*-an sistema.

Dodatak C

Izoparametarski elementi

Ako se za aproksimaciju geometrije elementa usvoje isti čvorovi i iste interpolacione funkcije kao i za aproksimaciju polja osnovnih nepoznatih u elementu, takvi elementi nazivaju se izoparametarskim elementima.

Kod izoparametarskih elemenata pojavljuje se operacija transformacije lokalnih u globalne koordinate.

Određjivanje izvoda funkcije u sistemu *Deskartes*-ovih koordinata, pošto su interpolacione funkcije date u sistemu prirodnih koordinata, radi se na sledeći način.

Polazeći od poznate veze za izvod neke funkcije $N_i(\mathbf{x}(\mathbf{t}))$ u dva sistema koordinata: lokalnih $\mathbf{t}$ i globalnih $\mathbf{x}$, dobija se da je izvod funkcije N_i ($i = 1, 2, \dots, k$ i k je broj čvorova elementa) jednak

$$\frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{t}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{t}} \frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{x}} \quad (\text{C.1})$$

gde je

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} x(\mathbf{t}) \\ y(\mathbf{t}) \\ z(\mathbf{t}) \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Izraz (C.1) može da se napiše u razvijenom obliku kao

$$\begin{bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \\ N_{i,\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \\ N_{i,z} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \\ N_{i,z} \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

gde je $\mathbf{J}$ *Jacobi*-an matrica. x , y i z mogu da se izraze preko interpolacionih funkcija $N_i(\mathbf{t})$ i vrednosti interpolacionih funkcija u čvorovima elementa $N_i(a_x^i, a_y^i, a_z^i)$

$$x = \sum_i^k N_i(\mathbf{t}) a_x^i = \mathbf{N}(\mathbf{t}) \mathbf{a}_x \quad (\text{C.5})$$

$$y = \sum_i^k N_i(\mathbf{t}) a_y^i = \mathbf{N}(\mathbf{t}) \mathbf{a}_y \quad (\text{C.6})$$

$$z = \sum_i^k N_i(\mathbf{t}) a_z^i = \mathbf{N}(\mathbf{t}) \mathbf{a}_z \quad (\text{C.7})$$

gde je

$$\mathbf{a}_x^T = \begin{bmatrix} a_x^1 & a_x^2 & \cdots & a_x^k \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

$$\mathbf{a}_y^T = \begin{bmatrix} a_y^1 & a_y^2 & \cdots & a_y^k \end{bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

$$\mathbf{a}_z^T = \begin{bmatrix} a_z^1 & a_z^2 & \cdots & a_z^k \end{bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} N_1(\mathbf{t}) & \cdots & N_i(\mathbf{t}) & \cdots & N_k(\mathbf{t}) \end{bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

Sada imamo da je *Jacobi*-an matrica

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,\xi} \mathbf{a}_x & \mathbf{N}_{,\xi} \mathbf{a}_y & \mathbf{N}_{,\xi} \mathbf{a}_z \\ \mathbf{N}_{,\eta} \mathbf{a}_x & \mathbf{N}_{,\eta} \mathbf{a}_y & \mathbf{N}_{,\eta} \mathbf{a}_z \\ \mathbf{N}_{,\zeta} \mathbf{a}_x & \mathbf{N}_{,\zeta} \mathbf{a}_y & \mathbf{N}_{,\zeta} \mathbf{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,\xi} \\ \mathbf{N}_{,\eta} \\ \mathbf{N}_{,\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \end{bmatrix} \quad (\text{C.12})$$

ili u skraćenom obliku

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,\xi} \\ \mathbf{N}_{,\eta} \\ \mathbf{N}_{,\zeta} \end{bmatrix} \mathbf{a}^T \quad (\text{C.13})$$

gde je

$$\mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \end{bmatrix} \quad (\text{C.14})$$

Vodeći računa o (C.4), izvod funkcije N_i u sistemu globalnih koordinata je

$$\frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{t}} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{t}} \quad (\text{C.15})$$

Integracija po zapremini krivolinijskog elementa u sistemu globalnih koordinata, prevodi se pomoću determinante *Jacobi*-an matrice $|\mathbf{J}|$ na integraciju u sistemu lokalnih koordinata na sledeći način

1. Jednodimenzionalni problem

$$dV = A(\xi) \frac{dx}{d\xi} d\xi = A(\xi) |\mathbf{J}(\xi)| d\xi \quad (\text{C.16})$$

gde je $A(\xi)$ površina poprečnog preseka. Integral ima oblik

$$I = \int_V f(x) dV = \int_{\xi} A(\xi) f(\xi) |\mathbf{J}(\xi)| d\xi = \int_{\xi} \bar{f}(\xi) d\xi \quad (\text{C.17})$$

2. Dvodimenzionalni problem

$$dV = h(\xi, \eta) |\mathbf{J}(\xi, \eta)| d\xi d\eta \quad (\text{C.18})$$

gde je $h(\xi, \eta)$ visina elementa. Integral ima oblik

$$I = \int_V f(x, y) dV = \int_{\xi} \int_{\eta} h(\xi, \eta) f(\xi, \eta) |\mathbf{J}(\xi, \eta)| d\xi d\eta = \int_{\xi} \int_{\eta} \bar{f}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (\text{C.19})$$

3. Trodimenzionalni element

$$dV = |\mathbf{J}(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta \quad (\text{C.20})$$

Integral ima oblik

$$\begin{aligned} \int_V f(x, y, z) dV &= \int_{\xi} \int_{\eta} \int_{\zeta} f(\xi, \eta, \zeta) |\mathbf{J}(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta \\ &= \int_{\xi} \int_{\eta} \int_{\zeta} \bar{f}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Pretpostavlja se da imamo linijski elementat. Ako je funkcija $N_i(x)$ zadata u *Deskartes*-ovim koordinatama, ona može da se transformišu u funkciju $N_i(\xi)$ u prirodnim koordinatama. Veza promenljive x i ξ je data sa

$$x = \frac{1}{2} (\xi L + (a + b)) \quad (\text{C.22})$$

U izrazu (C.22) L dužina elementa, a a i b donja odnosno gornja granica integraljenja po promenljivoj x . Veza između jediničnih $0 \leq \bar{\xi} \leq 1$ i prirodnih koordinata $-1 \leq \xi \leq 1$ data je izrazom

$$\bar{\xi} = \frac{1}{2} (1 + \xi) \quad (\text{C.23})$$

Bibliografija

- [1] McCallen D.B. Astaneh-Asl A. Computational simulation of the nonlinear response of suspension bridges. Technical report, Lawrence Livermore national Laboratory, Livermore, CA, 94559, USA.
- [2] Prokić A. *Tankozidni nosači otvorenog-zatvorenog poprečnog preseka*. PhD thesis, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, 1990.
- [3] Prokić A. *Matrična analiza konstrukcija*. Građevinski fakultet u Subotici, Časopis izgradnja u Beogradu, 1999.
- [4] Wilson E.L. Habibullah A. *SAP80 - Structural Analysis Programs*. University of California, Berkeley, 1984.
- [5] Ahmadi-Kashani K. Bell A.J. The representation of cables subjected to general loading. *International Journal of Space Structures*, 2:29–44, 1986/87.
- [6] Ahmadi-Kashani K. Bell A.J. The analysis of cables in space subjected to uniformly distributed load. *Engineering Structures*, 10(3), 1988.
- [7] Abdel-Ghaffar A.M. Dynamic analysis of suspension bridge structures - a report on research conducted under grants from the national science foundation, eer. Technical report, Pasadena, California, 1976.
- [8] Aja A.M. Sub-modelling techniques for static analysis. Software First South European Technology Conference, Jun 7-09 2000.
- [9] Nazmy A.S. Abdel-Ghaffar A.M. Three-dimensional nonlinear static analysis of cable-stayed bridges. *Computers & Structures*, 34(2):257–271, 1990.
- [10] Peyrot A.H. ASCE M. Goulois A.M. Analysis of flexible transmission lines. *Journal of The Structural Division*, 104(5), 5 1978.
- [11] Kwan A.S.K. A new approach to geometric nonlinearity of cable structures. *Computers & Structures*, 67:243–252, 1998.
- [12] Freire A.M.S. Negrão J.H.O. Lopes A.V. Geometrical nonlinearities on the static analysis of highly flexible steel cable-stayed bridges. *Computers & Structures*, 84:2128–2140, 2006.
- [13] Dunica Š. Kolundžija B. *Nelinearna analiza konstrukcija*. Građevinska knjiga, Beograd, 1986.

- [14] Hajdin N. Stipanić B. Sekundarni uticaji usled savijanja u kosim kablovima sa paralelnim žicama. Jugoslovensko društvo za mehaniku, 16. Jugoslovenski Kongres teorijske i primenjene mehanike, Maj 28- Jun 07 1984.
- [15] Kollbrunner C.F. Hajdin N. Stipanić B. Contribution to the analysis of cable stayed bridges. Technical report, Institute for Engineering Research Foundation Kollbrunner/Rodio, Verlage Schulthess AG, Zurich, 1980.
- [16] Kolundžija B. *Prilog teoriji drugog reda prostornih linijskih sistema sastavljenih od rešetkastih, punih i tankozidnih elemenata*. PhD thesis, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, 1979.
- [17] Myklebust L. Skalleurd B. Model reduction method for flexible structure. www.ime.auc.dk/nscm15, October 18-19 2002. 15th Nordic Seminar on Computational Mechanics.
- [18] Alemdar B.N. An object-oriented computational framework for nonlinear analysis of structures. 6th International Congress on Advances in Civil Engineering, October 6-8 2004.
- [19] Wang S. Fu C.C. Static and stability analysis of long-span cable-stayed steel bridges.
- [20] Wang P.H. Yang C.G. Parametric study on cablestayed bridges. *Computers & Structures*, 60(2):243–260, 1996.
- [21] Computer and Structures, Inc, Berkeley, California, USA. *CSI Analysis Reference Manual*, September 2004.
- [22] Milićev D. *Objektno orijentisano programiranje na jeziku C++*. Mikro knjiga, Beograd, 1995.
- [23] Milićev D. *Objektno orijentisano modelovanje na jeziku UML*. Mikro knjiga, Beograd, 2001.
- [24] Roos D. *Finite Element Nonlinear Analysis of Cable Structures*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1982.
- [25] Desai Y.M. Popplewell N. Shah A.H. Buragonain D.N. Geometric nonlinear static analysis of cable supported stuctures. *Computers & Structures*, 29(6):1001–1009, 1988.
- [26] Marta L.F. Parente E. An object-oriented framework for finite element programming. Fifth World Congress on Computational Mechanics, July 7-12 2002.
- [27] Robert E.R. Elastic flexural torsional buckling analysis using finite element method and object oriented tehnology with c++, master thesis, 2004.
- [28] Aboul-Ella F. New iterative analysis of cable-stayed structures. *Computers & Structures*, 40(3):549–554, 1991.
- [29] Radunović D.P. Samardžić A.B. Marić F.M. *Numeričke metode*. Akademska misao, Beograd, 2005.

- [30] Bruce W.R.F. Ricardo O.F. Siegrid F.S. Object oriented finite element analysis. *Computers & Structures*, 34(3):355–374, 1990.
- [31] McKenna F.T. *Object-Oriented Finite Element Programming: Framework for Analysis, Algorithms and Parallel Computing*. PhD thesis, University of California, Berkely, USA, 1997.
- [32] Bowden G. Stretched wire mechanics. Technical report, Stanford Linear Accelerator Center, Stanford, CA, US.
- [33] Jing Q. Mukherjee T. Fedder G. Large deflection beam model for schematic based behavioral simulation in nodas. Technical report, Department of Electrical and Computer Engineering and The Robotics Institute, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, 2002.
- [34] Militano G. Computer aided free vibration analysis of guyed towers, master thesis, 2000.
- [35] Ni Y.Q. Ko J.M. Zheng G. Dynamic analysis of large-diameter sagged cables taking into account flexural rigidity. *Journal of Sound and Vibration*, 257(2):301–319, 2002.
- [36] Rottner Th. Schweizerhof K. Lenhardt I. Alefeld G. On applications of parallel solution techniques for highly nonlinear problems involving static and dynamic buckling. *Computer & Structures*, 80:1523–1536, 2002.
- [37] Sekulović G. *Matrična analiza konstrukcija*. Građevinska knjiga, Beograd, 1991.
- [38] Sekulović G. *Teorija konstrukcija - savremeni problemi nelinearne analize*. Građevinska knjiga, Beograd, 1992.
- [39] Tibert G. *Numerical Analyses of Cable Roof Structures*. PhD thesis, Royal Institute of Technology, Department of Structural Engineering, Stockholm, 1999.
- [40] Turkalj G. *Nelinearna analiza stabilnosti tankostijenih grednih struktura*. PhD thesis, Tehnički fakultet, Sveučilište u Rijeci, 2000.
- [41] Stefanou G.D. Dynamic response analysis of nonlinear structures using step-by-step integration techniques. *Journal of Engineering Mechanics*, 57(6):1063–1070, 1995.
- [42] Eisenloffel K. Adeli H. Interactive microcomputer-aided analysis of tensile network structures. *Computers & Structures*, 50(5):665–675, 1994.
- [43] Takahashi Y. Igarashi A. Iemura H. Application of object oriented approach to earthquake engineering. *Journal of Civil Engineering Information Processing System, JSCE*, 6, 1997.
- [44] Jayaraman H.B. A curved element for the analysis of cable structure. *Computers & Structures*, 14(3-4):325–333, 1981.
- [45] Kožar I. *Modeliranje konstrukcija - Skripta*. Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Rijeka, 1979.

- [46] Secretariat: ANSI ISO/IEC JTC 1. International standard 14882:1998 - programming language c++. Technical report, <http://www.kuzbass.ru:8086/docs/isocpp/>, 1998.
- [47] Kmet S. Tomko M. Brda J. Time-dependent analysis and simulation-based reliability assessment of suspended cables with rheological properties. *Advanced in Engineering Software*, 2006.
- [48] Booch G. Rumbaugh J. Jacobson I. *UML vodič za korisnike*. CET, Beograd, 2000.
- [49] Friswell M.I. Garvey S.D. Penny J.E.T. Using linear model reduction to investigate the dynamic of structures with local non-linearities. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 9(3):317–328, 1995.
- [50] Henghold W.M. Russell J.J. Equilibrium and natural frequencies of cable structures (a nonlinear finite element approach). *Computers & Structures*, 6:267–271, 1976.
- [51] Ahmadi-Kashani K. Representation of cables in space subjected to uniformly distributed loads. *International Journal of Space Structures*, 3(4):221–230, 1988.
- [52] Saadeé K. *Finite Element Modeling of Shear in Thin Walled beams with a Single Warping Function*. PhD thesis, Universite Libre de Bruxelles, Faculté des Sciences Appliquées Services des Milieux Continus & Genic Civil, 0000.
- [53] Bathe K.J. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1982.
- [54] Caicedo J.M. Turan G. Dyke S.J. Bergman L.A. Comparison of modeling techniques for dynamic analysis of a cable-stayed bridges.
- [55] Aničić D. Fajfar P. Petrović B. Szavits-Nossan A. Tomažević M. *Zemljotresno inženjstvo*. DIP Građevinska knjiga, Beograd, 1990.
- [56] Irvine M. Studies in the statics and dynamics of simple cable systems. a report on research conducted under a grant the national science foundation, eerl 76-01. Technical report, Pasadena, California, USA, 1974.
- [57] Irvine M. *Cable Structures*. Dover Publications, Inc., New York, 1981.
- [58] Millar M.A. Barghian M. Snap-trough behavior of cable in flexible structures. *Computers & Structures*, 77(4):361–369, 2000.
- [59] Oliveira P.A. Hecke M.B. Machado R.D. Schneider M. Non-linear analysis of all dielectric self-supporting long span optical cables. Third Join Conference of Italian Group of Computational Mechanics and Ibero-Latin American Association of Computational Methods in Engineering.
- [60] Sekulović M. *Metod konačnih elemenata*. IRO Građevinska knjiga, Beograd, 1984.
- [61] Friswell M.I. The convergence of the iterated irs method. *Journal of Sound and Vibration*, 211(1):123–132, 1998.

- [62] Ekhandet S.G. Madugula M.K.S. Geometric non-linear analysis of three-dimensional guyed towers. *Computer & Structures*, 29(5):801–806, 1988.
- [63] Đurić O. Hajdin N. Dinamička analiza mosta 23 oktobar u novom sadu. Jugoslovensko društvo građevinskih konstruktera, VI Kongres, Septembar 26-29 1978.
- [64] Đurić O. Hajdin N. Dinamička analiza mosta 23 oktobar u novom sadu. *Computers & Structures*, 29(6):1001–1009, 1988.
- [65] Ćorić B. Ranković S. Salatić R. *Dinamika konstrukcija*. Univerzitet u Beogradu, Beograd, 1998.
- [66] Andreu A. Gil L. Roca P. A new deformable catenary element for the analysis of cable net structure. *Computers & Structures*, 84:1882–1890, 2006.
- [67] Jovanović P. *Statika konstrukcija u matičnom obliku*. Univerzitet u Beogradu, Arhitektonski fakultet, Beograd, 1981.
- [68] Oliveira P.A. Análise estática não-linear de cabos suspensos utilizando o método dos elementos finitos, master thesis, 2002.
- [69] Karoumi R. Modeling of cabl-stayed bridges for analysis of traffic induced vibrations. Technical report, Department of Structural Engineering, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden.
- [70] Karoumi R. Modeling of cable-stayed bridges for analysis of traffic induced vibrations. *Computers & Structures*, 71(3):397–412, 1999.
- [71] Karoumi R. Some modeling aspect in the nonlinear finite element analysis of cable supported bridges. *Computers & Structures*, 71(3):397–412, 1999.
- [72] Sauoma R. *Matrix Structural Analysis with an Introduction to Finite Elements*. Departement of Civil Environmentals and Architectural Engineering, University of Colorado, Boulde, 1999.
- [73] Hensley G.M. Plaut R.H. Three dimensional analysis of the seismic response of guyed masts. *Engineering Structures*, 2006.
- [74] Varum H. Cardoso R.J.S. Finite element simulation of cable behaviour *versus* analytical equations. Technical report, Department of Civil Engineering, Univeristy of Aveiro, Aveiro, Portugal.
- [75] Brčić S. *Dinamika diskretnih sistema*. Studentski kulturni centar, Beograd, 1998.
- [76] Desai Y.M. Punde S. Simple model for dynamic analysis of cable supported structures. *Engineering Structures*, 23:271–279, 2001.
- [77] Gopčević Š. Dinamička analiza skeletnih zgrada sa polukrutim vezama, master thesis, 2002.
- [78] Ali S.A. Dynamic response of sagged cables. *Computers & Structures*, 23(1):51–57, 1986.

- [79] Graham Seed. *An Introduction to Object-Oriented programming in C++*. Springer-Verlag, London, Great Britain, 1996.
- [80] Forde B.W.R. Foschi R.O. Stierner S.F. Object-oriented finite element analysis. *Computers & Structures*, 34(3):335–374, 1990.
- [81] Kim H.K. Lee M.J. Chang S.P. Analysis of target configurations under dead loads for cable-supported bridges. *Computers & Structures*, 79:2681–2692, 2001.
- [82] Kim H.K. Lee M.J. Chang S.P. Non-linear shape-finding analysis of self-anchored suspension bridge. *Computers & Structures*, 24:1547–1559, 2002.
- [83] Kim H.K. Lee M.J. Chang S.P. Determination of hanger installation procedure for a self-anchored suspension bridge. *Computers & Structures*, 28:959–976, 2006.
- [84] O'Brien T. General solution of suspended cable problem. *Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, February 1967.
- [85] Hajdin N. Michaltsos G.T. Konstantakopoulos T.G. About the equivalent modulus of elasticity of cables of cable stayed bridges. *Architectures and Civil Engineering*, 1(5):569–575, 1998.
- [86] Starossek V. Dynamic stiffness matrix of sagging cable. *Journal of Engineering Mechanics*, 117(12):2815–2829, 1991.
- [87] Press W. Teukolsky S. Vetterling W. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1988-1992.
- [88] Matt Weisfeld. *Objektno orijentisani način razmišljanja*. CET Computer Equipment and Trade, Beograd, Srbija, 2003.
- [89] Cofer W.F. Structural analysis for electric power transmission structures.
- [90] Ren W.X. Ultimate behavior of long-span cable-stayed bridges.
- [91] Ren W.X. Ultimate behavior of long span cable stayed bridges. *Journal of Bridges engineering*, 4(1):30–37, 1999.

Biografija

Špiro Gopčević je rođen 1960 godine u Kotoru. Gimnaziju, prirodno-matematički smer, je završio 1979 godine u Beogradu. 1986 godine diplomirao je na Građevinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu na konstruktivnom smeru, odseku za metalne konstrukcije.

Magistrirao je 2002 godine na Građevinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu.

Od 1986 do 1996 radio je u Institutu Kirilo Saviću Beogradu u Sektoru za građevinske poslove i inženjering na mestu glavnog vodećeg istraživača, a na poslovima ispitivanja konstrukcija. U tom periodu učestvovao je u ispitivanju više od tri stotine građevinskih objekata. Od 1996 do danas zaposlen je u Železnicama Srbije u Beogradu u Sektoru za informacione sisteme i informatičke tehnologije. Danas radi na mestu glavnog koordinatora za projekte u oblasti infrastrukture.

Kontakt e-mail: sgopcevic@yahoo.com, spiro.gopcevic@ptt.yu .