U N I V E R Z I T E T   U   B E O G R A D U
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET

Dimitrije D. Hajduković

EKSTENZIJA BANACH-OVIH INVARIJANTNIH FUNKCIONALA S PRIMENOM NA SUMIRANJE VEKTORSKIH NIZOVA I FUNKCIJA

BEOGRAD, 1974

U N I V E R Z I T E T U B E O G R A D U
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Dimitrije D. Hajduković

EKSTENZIJA BANACH-OVIH INVARIJANTNIH FUNKCIONALA S PRIMENOM NA SUMIRANJE VEKTORSKIH NIZOVA I FUNKCIJA

EXTENSION OF BANACH INVARIANT FUNCTIONALS WITH APPLICATION TO SUMMABILITY OF VECTOR SEQUENCES AND FUNCTIONS

Doktorska disertacija

B E O G R A D, 1974.

U toku izrade ove disertacije svesrdno su mi pomagali svojim primedbama i sugestijama prof.dr.S.Aljančić (u svojstvu mentora), doc.dr.D.Adamović i prof.dr.Dj.Kurepa na čemu sam im duboko zahvalan.

S A D R Ž A J

U V O D

0.1 Prvi rezultati o generalizaciji konvergencije i granice dobijeni su ubrzo posle otkrića granice na prelazu iz XVIII veka u XIX vek. U drugoj polovini XIX veka, a naročito na prelazu iz XIX u XX vek razvile su se nove discipline moderne matematike (teorija skupova, topologija, funkcionalna analiza itd), a takav razvoj matematike doneo je, pored ostalog, proširenje konvergencije i granice (uključujući i dotadašnje generalizacije tih pojmova) s brojnih područja na ma kakve skupove koji poseduju neku strukturu na kojoj se može zasnovati konvergencija i granica (konvergencija na osnovu uredjenja, konvergencija po meri itd) te na metričke i uopšte topološke prostore. Došlo je do snažnog uzajamnog prožimanja realne i funkcionalne analize, a metode i aparat funkcionalne analize pokazali su se kao podesni i efikasni pri rešavanju mnogih problema realne analize i specijalno mnogih problema iz oblasti zbirljivosti. Kao ilustracija za to mogu poslužiti neki značajni rezultati S. Banach-a i G.G. Lorentz-a kao i rezultati koji su dobijeni u ovom radu, a koji su generalizacija Banach-ovih i Lorentz-ovih rezultata.

0.2 U [4] Banach je dokazao sledeću posledicu poznatog Hahn-Banach-ovog stava.

POSLEDICA (0.1) Neka je G realan vektorski prostor i neka je $x \longmapsto q(x)$ pozitivno homogen i poluaditivan funkcional na G. Tada postoji na G linearan funkcional $x \longmapsto F(x)$ takav da je, za sve $x \in G$,

$$F(x) \leq q(x). \qquad (0.1)$$

Ako je još $x \longmapsto q(x)$, $x \in G$ polunorma, tada je, za sve $x \in G$,

$$|F(x)| \leq q(x). \qquad (0.2)$$

Banach je u [4] *posmatrao realan vektorski prostor G svih realnih ograničenih funkcija* $t \longmapsto f(t)$, $t \geq 0$, *a funkcional q definisao je na G sa*

$$q(f)=\inf\{\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t+a_i);\ n\in N,\ (a_i)\in S\},\ f\in G \qquad (0.3)$$

gde je N skup prirodnih brojeva, a S skup svih nenegativnih nizova. Pomoću ovog funkcionala i posledice(0.1) dobio je rezultate, koji se mogu iskazati u obliku sledeća dva stava.

STAV(0.1) *Neka je G realan vektorski prostor svih realnih ograničenih funkcija* $t \longmapsto f(t)$, $t \geq 0$. *Tada postoji familija* $\mathcal{B}$ *(svih) funkcionala definisanih na G i takvih da, za svake dve funkcije* $f,g\in G$, *svaka dva skalara* $a,b\in R$ *i sve* $B\in\mathcal{B}$, *imamo*

1^o $B(af+bg) = aB(f)+bB(g)$,

2^o $f(t) \geq 0,\ t\geq 0 \implies B(f)\geq 0$,

3^o $f_a(t) = f(t+a),\ a>0 \implies B(f_a) = B(f)$,

4^o $f(t) = 1, t\geq 0 \implies B(f) = 1$.

Familija $\mathcal{B}$ *funkcionala* $f\longmapsto B(f)$, $f\in G$, *koji su definisani tako da zadovoljavaju uslove* 1^o - 4^o *naziva se familijom Banach-ovih generalisanih granica, a poznata je još i kao familija Banach-ovih invarijantnih funkcionala zbog osobine* 3^o *tih funkcionala.*

Iz osobina 1^o - 3^o *se lako dobija da je, za sve* $B\in\mathcal{B}$ *i za sve* $f\in G$,

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\,f(t) \leq B(f) \leq \overline{\lim_{t\to\infty}}\,f(t), \qquad (0.4)$$

a iz 1^o *i posledice(0.1) sledi da je, za sve* $f\in G$ *i sve* $B\in\mathcal{B}$,

$$q^*(f) \leq B(f) \leq q(f), \qquad (0.5)$$

gde je q definisan sa (o.3) i gde je .

$$q^*(f)=-q(-f)=\sup\{\underline{\lim}_{t\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(t+a_i);n\in N,(a_i)\in S\},f\in G. \qquad (0.6)$$

Funkcionalu q, definisanom sa (0.3), na prostoru $l^{+\infty}$ realnih ograničenih nizova odgovara funkcional q definisan sa

$$q((x_i))=\inf\{\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{k_i+l};n\in N,(k_i)\in I\},(x_k)\in l^{+\infty}, \qquad (0.7)$$

gde I označava skup svih nizova prirodnih brojeva oblika $k_1,k_2, \dots , k_n$, $n = 1,2, \dots$.

STAV(0.2) Neka je $l^{+\infty}$ realan vektorski prostor svih realnih ograničenih nizova. Tada postoji familija $\mathcal{B}$ (svih) funkcionala definisanih na $l^{+\infty}$ i takvih da je, za svaka dva niza $(x_k),(y_k)\in l^{+\infty}$, svaka dva skalara $a,b\in R$ i sve $B\in\mathcal{B}$,

1^0 $B((ax_k+by_k)) = aB((x_k))+bB((y_k))$,

2^0 $x_k \geqq 0 \Longrightarrow B((x_k)) \geqq 0$,

3^0 $B((x_{k+1})) = B((x_k))$,

4^0 $x_k \geqq 1 \Longrightarrow B((x_k)) = 1$.

Iz 1^0 - 3^0 sledi da je, za sve $(x_k)\in l^{+\infty}$ i sve $B\in\mathcal{B}$,

$$\underline{\lim}_{k\to\infty}x_k \leqq B((x_k)) \leqq \overline{\lim}_{k\to\infty}x_k, \qquad (0.8)$$

a iz uslova 1^0 iz stava(0.2) i posledice(0.1) sledi da je, za sve $(x_k)\in l^{+\infty}$ i sve $B\in\mathcal{B}$,

$$q^*((x_k)) \leqq B((x_k)) \leqq q((x)), \qquad (0.9)$$

gde je q definisan sa (0.7), a q^* se dobije pomoću q analogno kao u (0.6).

Vrednost funkcionala $B\in\mathcal{B}$ u tački $f\in G$ odnosno $(x_k)\in l^{+\infty}$ zove se B-granica funkcije f osnosno niza (x_i) i označava se još sa $\operatorname{Lim}_{t\to\infty} f(t)$ odnosno $\operatorname{Lim}_{k\to\infty} x_k$.

U [22] Lorentz definiše niz $(x_k)\in l^{+\infty}$ kao skoro konvergentan, a s kao njegovu skoro granicu, ako je, za sve $B\in\mathcal{B}$,

$$B((x_k)) = s.$$

Dokazao je da niz $(x_k) \in l^{+\infty}$ skoro konvergira ka s (pri $k \to \infty$) ako i samo je

$$\lim_{p \to \infty} \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} x_{n+k} = s \qquad (0.10)$$

uniformno po $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Neka je $A = (a_{nk})$ beskonačna matrica. Lorentz u [22] definiše niz $(x_k) \in l^{+\infty}$ kao F_A-zbirljiv ka s (pri $k \to \infty$), ako konvergiraju redovi

$$\eta_{n,p}((x_k)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_{k+p}$$

i ako je

$$\lim_{n \to \infty} \eta_{n,p}((x_k)) = s$$

uniformno po $p \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

U [14] Elin je Lorentz-ove rezultate proširio na funkcije neprekidnog argumenta, koje su L-merljive i ograničene s.s. na $[0, +\infty[$.

0.3. U ovom radu mi razmatramo, pre svega, proširenje Banach-ovih rezultata o egzistenciji generalisanih B-granica realnih nizova i funkcija te Lorentz-ovih i Elinovih rezultata o skoro konvergenciji realnih nizova i funkcija na nizove i funkcije s vrednostima u proizvoljnom Banach-ovom prostoru. Sem toga, u radu se daju neke primene skoro konvergencije na matrično sumiranje i razmatraju još neki problemi, koji se odnose na skoro konvergenciju i F_A-zbirljivost.

Rad je, bez uvoda, podeljen na tri glave, a svaka glava na dva odeljka.

U prvoj glavi se sa F označava realan vektorski prostor ograničenih funkcija $t \mapsto f(t)$, $t \geq 0$ s vrednostima u proizvoljnom realnom Banach-ovom prostoru X, a sa m vektorski prostor ograničenih nizova tačaka iz X.

U prvom odeljku prve glave definiše se funkcional $f \mapsto p(f)$ na E sa

$$p(f)=\inf\{\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{n}\|\sum_{i=1}^{n} f(t+a_i)\| \; ; \; n\in N,\; (a_i)\in S\}\;,\; f\in E$$

i dokazuju leme(1.1.-2.) koje se odnose na funkcional p. Zatim se uz pomoć tih lema, posledice(0.1) i funkcionala p dokazuje (stav(1.1))da egzistira i ima bar moć kontinuma familija $\mathcal{L}$ (svih) funkcionala definisanih na E i takvih da je, za svake dve funkcije $f,g \in E$, svaka dva $a,b \in R$ i sve $L\in \mathcal{L}$,

$$L(af+bg) = aL(f)+bL(g),$$

$$f_a(t) = f(t+a),\; a > 0 \implies L(f_a) = L(f),$$

$$|L(f)| \leq p(f).$$

Pri tome je, za svako $f\in E$,

$$((\forall\, L\in \mathcal{L})L(f) = 0) \iff p(f) = 0.$$

Analogan rezultat je dobijen za nizove iz m (stav(1.2)). Sledi razmatranje odnosa izmedju familija $\mathcal{B}$ i $\mathcal{L}$. Dokazuje se da $B\in\mathcal{B} \implies B\in\mathcal{L}$ i da $\exists\, L\in\mathcal{L}.\!\cdot.\, L\notin\mathcal{B}$, tj. da je $\mathcal{B}\subset\mathcal{L}$ (stavovi(1.3-4)).

Drugi odeljak prve glave je posvećen generalisanim B-granicama vektorskih funkcija i nizova iz E odnosno m. Ovde X označava proizvoljan realan Banach-ov prostor, $u:X\to X$ neprekidno linearno preslikavanje, u^{**} drugo konjugovano preslikavanje preslikavanja u, a X^{**} drugi konjugovani prostor prostora X.

U ovom odeljku dokazujemo (stav(1.5)) da egzistira familija $\mathcal{M}$ (svih) operatora definisanih na E s vrednostima u X^{**} i takvih da, ukoliko se element $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=s \in X$ identifikuje sa odgovarajućim elementom iz X^{**}, imamo, za svaki par $f,g \in E$, svaki par $a,b \in R$ i svaki operator $f\mapsto \mathop{LIM}\limits_{t\to\infty} f(t)$ iz $\mathcal{M}$,

$$\mathop{LIM}_{t\to\infty} (af(t)+bg(t)) = a\mathop{LIM}_{t\to\infty} f(t)+b\mathop{LIM}_{t\to\infty} g(t),$$

$$\underset{t\to\infty}{LIM}\, f(t+a) = \underset{t\to\infty}{LIM}\, f(t),\ a > 0,$$

$$\exists(\lim_{t\to\infty} f(t)) \in X \implies \underset{t\to\infty}{LIM}\, f(t) = \lim_{t\to\infty} f(t),$$

$$X = R \implies \underset{t\to\infty}{LIM}\, f(t) = \underset{t\to\infty}{Lim}\, f(t),$$

$$\underset{t\to\infty}{LIM}\, u(f(t)) = u^{**}(\underset{t\to\infty}{LIM}\, f(t)).$$

Iz prva tri uslova se vidi da svaki od operatora $f \mapsto \underset{t\to\infty}{LIM}\, f(t)$ iz $\mathcal{M}$ predstavlja generalizaciju konvergencije, a iz prva četiri uslova sledi da svaki takav operator predstavlja proširenje Banach-ovih granica $f \mapsto \underset{t\to\infty}{Lim}\, f(t)$ sa prostora G svih realnih ograničenih funkcija $t \mapsto f(t)$, $t \geq 0$ na prostor E svih ograničenih funkcija $t \mapsto f(t)$, $t \geq 0$ s vrednostima u proizvoljnom Banach-ovom prostoru X.
Zbog toga ćemo operatore $f \mapsto \underset{t\to\infty}{LIM}\, f(t)$ iz $\mathcal{M}$, takodje, zvati Banach-ovim generalisanim granicama, a vrednost takvog operatora u tački $f \in E$ Banach-ovom generalisanom granicom vektorske funkcije $f \in E$.
U nastavku drugog odeljka prve glave dobijen je odgovarajući rezultat za vektorske nizove (stav(1.6)).
Druga glava je posvećana skoro konvergenciji u Banach-ovom prostoru.
U prvom odeljku druge glave razmatra se primena funkcionala iz $\mathcal{L}$ na sumiranje vektorskih nizova iz m.
Prvo se defniše (definicija(2.1)) niz $(x_k) \in m$ kao skoro konvergentan ka $s \in X$, a s kao njegova skoro granica (pri $k \to \infty$), ako je, za sve $L \in \mathcal{L}$,

$$L((x_k - s)) = 0.$$

Zatim se ustanovljavaju potrebni i dovoljni uslovi da niz bude skoro konvergentan.
Prema stavu(2.1) niz $(x_k) \in m$ skoro konvergira ka $s \in X$, ako i samo ako je

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} x_{n+k} = s$$

uniformno po $n \in \{0,1,2, \ldots\}$.
Prema stavu(2.2) (x_k) skoro konvergira ka $s \in X$ ako i samo ako je, bar za jedan delimični niz (k_i),

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} x_{n+k_i} = s$$

uniformno po $n \in \{0,1,2, \ldots\}$.
Kao posledica ova dva stava se dobija da (x_k) skoro konvergira ka $s \in X$ ako i samo ako je

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\sum_{i=lp+1}^{(l+1)p} x_{n+k_i} = s$$

uniformno po $n, l \in \{0,1,2, \ldots\}$.
U drugom odeljku druge glave definišemo skalarno L-merljivu i suštinski ograničenu funkciju na $[0,+\infty[$ s vrednostima u refleksivnom Banach-ovom prostoru X kao skoro konvergentnu, a $s \in X$ kao njenu skoro granicu (definicija(2.2)),ako je

$$\inf\{\overline{\lim_{t\to\infty}}\| \frac{1}{m(A)}\int_A f(u+t)du-s\|\} = 0.$$

Ovde je infimum uzet preko svih L-merljivih i ograničenih skupova pozitivne mere, a integral je definisan skalarno. Dokazana su dva stava, od kojih svaki sadrži potreban i dovoljan uslov da funkcija f bude skoro konvergentna u smislu gornje definicije. Tako, prema stavu(2.3), funkcija $t \mapsto f(t)$, $t \geq 0$ skoro konvergira (pri $t\to\infty$) ka $s \in X$ ako i samo ako je

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)dt = s$$

uniformno po $a \in [0,+\infty[$.
Treća glava je posvećena primeni skoro konvergencije na matrično sumiranje te još nekim problemima u vezi sa skoro konvergencijom i F_A-zbirljivošću.

U prvom odeljku treće glave se definiše matrica $A = (a_{nk})$ kao F-konzervativna, ako, za proizvoljan realan konvergentan niz (x_k), konvergiraju redovi

$$\eta_{n,m}((x_k))=\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_{k+m}, \eta_{n,0}((x_k))=\eta_n((x_k)), n,m = 0,1, \dots ,$$

ako konvergira niz $(\eta_n((x_k)))$ i ako je

$$\lim_{n\to\infty} \eta_{n,m}((x_k)) = \lim_{n\to\infty} \eta_n((x_k))$$

uniformno po $m \in \{0,1,2, \dots\}$.
Ako je još

$$\lim_{n\to\infty} \eta_{n,m}((x_k)) = \lim_{k\to\infty} x_k$$

uniformno po $m \in \{0,1,2,\dots\}$, tada kažemo da je matrica $A = (_{nk})$ F-regularna(definicija(3.1)).
Sledi dokaz stava(3.1) prema kojem će $A = (a_{nk})$ biti F-konzervativna ako i samo ako ona zadovoljava sledeća tri uslova:

$$\sup\{\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| ; n=0,1,\dots\}= \|A\| < +\infty,$$

$$\forall k(=0,1,2,\dots) \text{ je } \lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0,$$

postoji i konačan je $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = a.$

Tada, ako $x_k \to s$ $(k\to\infty)$, imamo

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_{k+m} = as$$

uniformno po $m \in \{0,1,2,\dots\}$.
Odavde (stav(3.2)), za $a = 1$, dobijamo da će matrica $A = (a_{nk})$ biti F-regularna ako i samo ako je ta matrica regularna.
Zatim dokazujemo stav(3.3), kojim se uspostavlja veza izmedju F_A-zbirljivosti F-konzervativnom matricom $A=(a_{nk})$ i skoro konvergencije.

Naime, ako je $A = (a_{nk})$ F-konzervativna matrica, za koju je $a \neq 0$ i ako je $F_A\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} x_k = s$, tada niz (x_k) skoro konvergira ka $\frac{1}{a}s$ (pri $k\to\infty$).
Za $a = 1$ ovaj stav se svodi na Lorentz-ov Theorem 2 iz [22].
Drugi odeljak treće glave posvećen je primeni skoro konvergencije u teoriji matričnog sumiranja.
Prvo definišemo matricu

$$a^f_{nk} = \frac{1}{n^2}\int_k^{k+n} f(t)dt \ (1 \leq k \leq n), \ = 0 (n < k), n,k = 1,2,\ldots,$$

generisanu L-merljivom i suštinski ograničenom funkcijom f na intervalu $[0,+\infty[$, a zatim dokazujemo (stav(3.5)) da je matrica $A^f = (a^f_{nk})$ F-konzervativna ako je funkcija f skoro konvergentna. Specijalno, ako f skoro konvergira ka 1, tada je $A^f = (a^f_{nk})$ F-regularna, a time i regularna matrica.
Na kraju definišemo matricu

$$a^x_{nk} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} x_{k+i} (1 \leq k \leq n), \ = 0 (n < k), n,k=1,2,\ldots,$$

generisanu nizom $x = (x_k) \in l^{+\infty}$.
Iz prethodnog stava sledi da će $A^x = (a^x_{nk})$ biti F-konzervativna, ako je niz $x = (x_k)$ skoro konvergentan. Specijalno, ako (x_k) skoro konvergira ka 1, tada je $A^x = (a^x_{nk})$ F-regularna (regularna) matrica.
Svi rezultati dobijeni u prvoj, drugoj i trećoj glavi (ukupno 16 stavova, dve leme i tri definicije) su novi i originalni. Čini se, ipak, da se po važnosti izdvajaju dokazi egzistencije kolekcije $\mathscr{L}$ funkcionala iz stavova(1.1-2) i kolekcije $\mathscr{M}$ generalisanih B-granica iz stavova(1.5-6), zatim primena funkcionala iz $\mathscr{L}$ na sumiranje vektorskih nizova (definicija(2.1) i stavovi(2.1-2)).
Stavovi(3.1-2) imaju principijelno značenje i predstavljaju za F_A-zbirljivost ono, što Kojim-Schur-ov i Toeplitz-ov stav znače za obično matrično sumiranje.
Na kraju, čini se interesantnom i realizacija F-konzervativne i regularne matrice pomoću skoro konvergentne funkcije (niza) (stavovi(3.5-6), jer je tako dobijena

veoma bogata kolekcija F-konzervativnih i specijalno regularnih matrica, kojoj pripadaju i neke dobro poznate matrice.

Na kraju, primetimo da je ostao izvestan broj otvorenih problema, koji su u vezi s rezultatima dobijenim u ovom radu.

G L A V A 1

EKSTENZIJA GENERALISANIH B-GRANICA

1.1 FUNKCIONALI TIPA GENERALISANIH B-GRANICA

Neka E označava realan vektorski prostor (sa uobičajenim operacijama) ograničenih funkcija na intervalu $[0,+\infty[$ s vrednostima u fiksnom, inače proizvoljnom, realnom Banach-ovom prostoru X.
Označimo, još, sa S skup svih nenegativnih nizova, a sa N skup prirodnih brojeva i stavimo

$$p(f)=\inf\{\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{n}\|\sum_{i=1}^{n} f(t+a_i)\|;\ n\in N,\ (a_i)\in S\},\ f\in E. \quad (1.1)$$

Zbog ograničenosti funkcija iz E na intervalu $[0,+\infty[$, za proizvoljno $f\in E$, postoji konstanta $C = C_f$, takva da je $\|f(t)\| \leq C$, $t\in[0,+\infty[$.
Prema tome, za sve $t\in[0,+\infty[$, za sve $(a_i)\in S$ i za sve $n\in N$, je

$$\frac{1}{n}\|\sum_{i=1}^{n} f(t+a_i)\| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|f(t+a_i)\| \leq C.$$

Time je, za sve $(a_i)\in S$ i za sve $n\in N$,

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{n}\|\sum_{i=1}^{n} f(t+a_i)\| \leq C$$

i, specijalno,

$$p(f)=\inf\{\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{n}\|\sum_{i=1}^{n} f(t+a_i)\|;\ n\in N,\ (a_i)\in S\}\leq C.$$

Kako je $f\in E$ proizvoljno, odavde sledi da funkcional $f\mapsto p(f)$, $f\in E$, koji je definisan sa (1.1), prima konačnu vrednost u svakoj tački $f\in E$.
Namera nam je da, uz pomoć posledice (0,1) i funkcionala (1.1), dokažemo stav o egzistenciji klase

linearnih invarijantnih (u odnosu na translaciju duž poluose $t \geq 0$) funkcionala definisanih na prostoru E. Ali, da ne bi prekidali dokaz tog stava, prethodno ćemo dokazati dve leme, koje se odnose na funkcional (1.1), a koje ćemo koristiti pri dokazu stava.

LEMA(1.1) Neka su $t \mapsto f(t)$ i $t \mapsto g(t)$ dve proizvoljne ograničene funkcije na intervalu $[0,+\infty[$ s vrednostima u realnom Banach-ovom prostoru X i neka je još $\lim_{t\to\infty} g(t)=0 \in X$. Tada za funkcional $h \mapsto p(h)$, definisan sa (1.1), vredi

$$p(f+g) = p(f). \tag{1.2}$$

DOKAZ. Iz $g(t) \to 0 \in X$ $(t \to +\infty)$ sledi, da, za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji dovoljno velik realan broj t_0 takav da je $\|f(t)\| < \varepsilon$, $t \geq t_0$. Odavde, za sve $t \geq t_0$, sve $(a_i) \in S$ i sve $n \in N$, imamo

$$\frac{1}{n}\Big\|\sum_{i=1}^{n}[f(t+a_i)+g(t+a_i)]\Big\| \leq \frac{1}{n}\Big\|\sum_{i=1}^{n} f(t+a_i)\Big\| + \frac{1}{n}\Big\|\sum_{i=1}^{n} g(t+a_i)\Big\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\Big\|\sum_{i=1}^{n} f(t+a_i)\Big\| + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|g(t+a_i)\| <$$

$$< \frac{1}{n}\Big\|\sum_{i=1}^{n} f(t+a_i)\Big\| + \varepsilon.$$

Odavde, za sve $(a_i) \in S$ i sve $n \in N$, imamo redom

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{n}\Big\|\sum_{i=1}^{n}[f(t+a_i)+g(t+a_i)]\Big\| \leq \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{n}\Big\|\sum_{i=1}^{n} f(t+a_i)\Big\| + \varepsilon,$$

$$\inf\{\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{n}\Big\|\sum_{i=1}^{n}[f(t+a_i)+g(t+a_i)]\Big\| \ ;\ n \in N,\ (a_i) \in S\} \leq$$

$$\leq \inf\{\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{n}\Big\|\sum_{i=1}^{n} f(t+a_i)\Big\| \ ;\ n \in N,\ (a_i) \in S\} + \varepsilon.$$

Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, odavde, prema (1.1) imamo

$$p(f+g) \leq p(f). \tag{1.3}$$

Odavde je

$$p(f) = ((f+g)+(-g)) \leq p(f+g)$$

pa, prema (1.3), konačno imamo

$$p(f+g) = p(f),$$

vredi jednakost (1.2). Time je lema (1.1) dokazana.

Neka je, sada, $t \mapsto f(t)$ ograničena funkcija na intervalu $[0, +\infty[$ s vrednostima u realnom Banach-ovom prostoru X i neka je, još, $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = s \in X$. Tada možemo pisati

$$f(t) = a(t) + b(t), \qquad (1.4)$$

gde je $a(t) = s$, $t \in [0, +\infty[$ i $\lim\limits_{t\to\infty} b(t) = 0 \in X$. Sem toga, prema (1.1), očigledno, je

$$p(a) = \|s\|.$$

Odavde, prema (1.4) i lemi (1.1), vredi

LEMA(1.2). *Ako za neku ograničenu funkciju $t \mapsto f(t)$ na intervalu $[0, +\infty[$ s vrednostima u proizvoljnom realnom Banach-ovom prostoru X, postoji $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = s \in X$ i, ako je funkcional $h \mapsto p(h)$ definisan sa (1.1), tada je*

$$p(f) = \|s\|. \qquad (1.5)$$

STAV(1.1) *Neka je E realan vektorski prostor (sa uobičajenim operacijama) ograničenih funkcija na intervalu $[0, +\infty[$ s vrednostima u proizvoljnom realnom Banach-ovom prostoru X. Neka je $h \mapsto p(h)$ funkcional definisan na E relacijom (1.1). Tada egzistira i ima bar moć kontinuma kolekcija $\mathcal{L}$ (svih) funkcionala, definisanih na E i takvih da, za svake dve funkcije $f, g \in E$, svaka dva $a, b \in R$ i svako $L \in \mathcal{L}$,*

1) $L(af+bg) = aL(f) + bL(g)$,

2) $f_r(t) = f(t+r),\ r>0 \Longrightarrow L(f_r) = L(f)$,

3) $|L(f)| \leq p(f)$,
Pri tome je, za svako $f \in E$,

4) $((\forall L \in X)\ L(f) = 0) \Longleftrightarrow p(f) = 0$.

DOKAZ. Prvo ćemo dokazati da je funkcional $f \mapsto p(f)$, $f \in E$, definisan sa (1.1), polunorma na E.

Zaista, za svako $a \in R$ i za svako $x \in X$, je $\|ax\| = |a|\cdot\|x\|$. Za svaku realnu ograničenu funkciju $t \mapsto h(t)$, $t \in [0,+\infty[$ i za svako $a \geq 0$ je $\overline{\lim_{t\to\infty}}\, ah(t) = a\cdot\overline{\lim_{t\to\infty}}\, h(t)$. Takodje, ako je A proizvoljan ograničen skup realnih brojeva, tada, za svako $a \geq 0$, vredi $\inf(aA) = a\cdot\inf A$. Odavde, prema (1.1), imamo

$$p(af) = |a|\cdot p(f),\quad a \in R,\ f \in E\ . \qquad (1.6)$$

Neka su, sada, $f,g \in E$ proizvoljne funkcije. Tada, prema (1.1), za proizvoljno $\varepsilon>0$, postoje brojevi $m,n \in N$ i nizovi (a_i), $(b_j) \in S$, takvi da je

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, \frac{1}{m}\Big\|\sum_{i=1}^{m} f(t+a_i)\Big\| < p(f) + \varepsilon\ ,$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, \frac{1}{n}\Big\|\sum_{j=1}^{n} g(t+b_j)\Big\| < p(g) + \varepsilon\ .$$

Sledi da postoje dovoljno veliki brojevi t' i t'', takvi da je, za izabrane $n,m \in N$ i $(a_i),(b_j) \in S$,

$$\frac{1}{m}\Big\|\sum_{i=1}^{m} f(t+a_i)\Big\| < p(f) + \varepsilon\ ,\quad t \geq t'$$

i

$$\frac{1}{n}\Big\|\sum_{j=1}^{n} g(t+b_j)\Big\| < p(g) + \varepsilon, \quad t \geq t''.$$

Stavimo $r_{ij} = a_i + b_j$, $i = 1,2,\ldots, m$, $j=1,2,\ldots n$,
pa, za sve $t \geq \max\{t', t''\}$, imamo

$$\frac{1}{mn}\Big\|\sum_{i,j=1}^{m,n}(f(t+r_{ij})+g(t+r_{ij}))\Big\| = \Big\|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f(t+a_i+b_j)\Big) +$$

$$+ \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} g(t+a_i+b_j)\Big)\Big\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}\Big\|\sum_{i=1}^{m} f(t+a_i+b_j)\Big\|\Big) +$$

$$+ \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{1}{n}\Big\|\sum_{j=1}^{n} g(t+a_i+b_j)\Big\|\Big) <$$

$$< p(f)+\varepsilon + p(g)+\varepsilon = p(f)+p(g)+2\varepsilon.$$

Članove niza (r_{ij}), $i=1,2,\ldots, m$; $j=1,2,\ldots,n$ možemo numerisati tako da se dobije niz (s_k), $k=1,2,\ldots, l$, $l=mn$
pa, za sve $t \geq \max\{t', t''\}$, imamo

$$\frac{1}{l}\Big\|\sum_{k=1}^{l}(f(t+s_k)+g(t+s_k))\Big\| < p(f) + p(g) + 2\varepsilon .$$

Odavde je, za zadane l i (s_k),

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\ \frac{1}{l}\Big\|\sum_{k=1}^{l}(f(t+s_k)+g(t+s_k))\Big\| \leq p(f)+p(g)+2\varepsilon .$$

Tim pre je onda

$$\inf\Big\{\overline{\lim_{t\to\infty}}\ \frac{1}{n}\Big\|\sum_{i=1}^{n}(f(t+a_i)+g(t+a_i))\Big\|\ ;\ n\in N,\ (a_i)\in S\Big\}\leq$$

$$\leq p(f)+p(g)+2\varepsilon .$$

Kako su $f,\ g\in E$ i $\varepsilon>0$ proizvoljni, odavde, prema (1.1), imamo

$$p(f+g)\leq p(f)+p(g),\quad f,g\in E. \qquad (1.7)$$

Prema (1.6) i (1.7), funkcional $h\mapsto p(h)$, $h\in E$, definisan relacijom (1.1), je polunorma na E. Prema posledici (0,1) (videti i Hahn-Banach-ov stav u [13], str. 84) postoji linearan funkcional $f\mapsto L(f)$ na E, za koji, još, vredi nejednakost

$$|L(f)|\leq p(f),\qquad f\in E. \qquad (1.8)$$

Postoji, dakle, funkcional $f\mapsto L(f)$ na prostoru E, koji zadovoljava uslove 1) i 3) iz stava (1.1). Pokazaćemo, sada, da taj funkcional zadovoljava i uslov 2) iz stava(1.1), tj. da

$$f_r(t)=f(t+r),\ r>0\Longrightarrow L(f_r)=L(f). \qquad (1.9)$$

Zaista, za proizvoljne $r>0$ i $f\in E$, stavimo $g_r=f_r-f$ i $s_i=(i-1)r$, $i=1,2,\dots$. Tada, zbog ograničenosti funkcije $t\mapsto f(t)$ na intervalu $[0, +\infty[$, imamo, za sve $t \geqslant 0$ i za sve $n \in N$,

$$\frac{1}{n}\|\sum_{i=1}^{n} g_r(t+s_i)\| = \frac{1}{n}\|\sum_{i=1}^{n} (f_r(t+s_i)-f(t+s_i))\| =$$

$$= \frac{1}{n}\| (f(t+r)-f(t)) + \dots + (f(t+nr)-f(t+(n-1)r))\| =$$

$$= \frac{1}{n}\| f(t+nr)-f(t)\| \leq \frac{1}{n} (\| f(t+nr)\| + \| f(t)\|) \leq$$

$$\leq \frac{2}{n} \cdot \sup_{0\leq t<\infty} \| f(t)\| .$$

Odavde sledi da, za proizvoljno $\varepsilon>0$, postoji dovoljno velik prirodan broj $n = n(\varepsilon)$, takav da je za sve $t \in [0, +\infty[$

$$\frac{1}{n}\|\sum_{i=1}^{n} g_r(t+s_i)\| < \varepsilon$$

pa je

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{n}\|\sum_{i=1}^{n} g_r(t+s_i)\| \leq \varepsilon .$$

Tim pre je, onda,

$$\inf\{ \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{n}\|\sum_{i=1}^{n} g_r(t+a_i)\| ;\ n\in N,\ (a_i)\in S\} \leq \varepsilon .$$

Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, prema (1.1), odavde imamo $p(g_r) = 0$, $r > 0$.
Odavde i iz (1.8), zbog linearnosti funkcionala $h\mapsto L(h)$ na E, imamo

$L(g_r)=L(f_r-f)=L(f_r)-L(f)=0$, tj. $L(f_r)=L(f), r>0$.

Dakle, funkcional $h\mapsto L(h)$, $h\in E$ zadovoljava i (1.9), odnosno uslov 2) iz stava (1.1).
Time je dokazana egzistencija funkcionala $h\mapsto L(h)$ na prostoru E, koji zadovoljava uslove 1) - 3) iz stava (1.1).
Ostaje da dokažemo da taj funkcional nije jedinstven, tačnije, da postoji beskonačna kolekcija takvih funkcionala na E i da za te funkcionale vredi uslov 4) iz stava (1.1). Radi toga označimo sa E_0 vektorski podprostor (prostora E) funkcija $t\mapsto f(t)$, $t\in [0, +\infty[$, za koje je
$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0\in X$.
Tada, prema (1.8) i lemi 2, imamo

$$p(f) = L(f) = 0, \quad f\in E_0. \qquad (1.10)$$

Izaberimo, sada, funkciju $g\in E\setminus E_0$, za koju je

$$p(g) > 0 . \qquad (1.11)$$

Takva funkcija sigurno postoji, jer već za funkciju $h\in E$, za koju je $\lim_{t\to\infty} h(t) = x$ ($x\neq 0$; $x, 0\in X$), prema lemi 2, imamo

$$p(h) = \|x\| > 0.$$

Primetimo da se, prema (1.10) i lemi (1.1), segment

$$\sup_{f\in E_0} \{-p(-g-f)-L(f)\} \leq L(g) \leq \inf_{f\in E_0} \{p(g+f)-L(f)\} \quad (1.12)$$

svodi na

$$-p(g) \leq L(g) \leq p(g) \qquad (1.13)$$

i da se, prema (1.11), segment (1.13), a time i segment (1.12) ne svodi na tačku.
Odavde na osnovu dokaza Hahn-Banach-ovog (13 , str. 84), funkcional $f\mapsto L(f)$, $f\in E_0$ možemo produžiti sa E_0 na prostor elemenata oblika

$$f + ag, \quad f\in E_0, \ a\in R \qquad (1.14)$$

na više načina uzimajući za vrednost $L(g)$ funkcionala $h\mapsto L(h)$ u tački g (za koju vredi uslov (1.11)) različite vrednosti iz segmenta (1.12).
Drugim rečima, kad god za neku funkciju $g\in E\setminus E_0$ vredi uslov (1.11), tada postoji beskonačno mnogo produženja funkcionala $f\mapsto L(f)$ sa E_0 na prostor elemenata oblika (1.14).
Svako takvo produženje zadovoljava uslove 1) i 3) iz stava (1.1) na osnovu Hahn-Banach-ovog stava, a da svako takvo produženje zadovoljava i uslov 2) iz stava (1.1), može se lako dokazati postupajući kao pri dokazu relacije (1.9).

Odavde i iz Hahn-Banach-ovog stava, koji ovde nećemo u celini navoditi, sledi: prvo, da se funkcional $f\mapsto L(f)$, $f\in E_0$ može produžiti sa E_0 na čitav prostor E; drugo, da to produženje nije jedinstveno, tačnije, da postoji beskonačno mnogo takvih

produženja; treće, da svako od tih produženja zadovoljava uslove 1) - 3) iz stava (1.1). Pokazaćemo, sada, da ti funkcionali zadovoljavaju i uslov 4) iz stava(1.1).
Zaista, ako kolekciju funkcionala $f\mapsto L(f), f\in E$, čiju smo egzistenciju dokazali i koji zadovoljavaju uslove 1) - 3) iz stava(1.1), označimo sa $\mathcal{L}$, tada, prema uslovu 3) iz stava(1.1), iz $p(f) = 0$, $f\in E$, sledi $L(f) = 0$, $\forall\ L\in\mathcal{L}$.
Da za proizvoljno $f\in E$, iz $L(f) = 0$, $\forall\ L\in\mathcal{L}$ sledi $p(f) = 0$, zaključujemo na osnovu dokaza, koji smo napred dali. Naime, ako bi za neko $f\in E$ bilo $p(f)>0$, tada bi, kao što je napred dokazano, postojali funkcionali $h\mapsto L'(h)$ i $h\mapsto L''(h)$, $h\in E$, takvi da je $L'(f)\neq L''(f)$. To je, medjutim, u kontradikciji s pretpostavkom da je $L(f) = 0$, $\forall\ L\in\mathcal{L}$.
Time smo dokazali egzistenciju klase $\mathcal{L}$ funkcionala $f\mapsto L(f)$ na prostoru E, koji zadovoljavaju uslove 1) - 4) iz stava(1.1), čime je taj stav u celini dokazan.
Označimo, sada, sa m realan vektorski prostor (sa uobičajenim operacijama) ograničenih nizova tačaka proizvoljnog realnog Banach-ovog prostora X, a sa I skup svih delimičnih nizova niza prirodnih brojeva (uključujući i sam niz prirodnih brojeva). Definišimo na m funkcional $(x_i)\mapsto p((x_i))$ sa

$$p((x_i)) = \inf\{\varlimsup_{l\to\infty}\frac{1}{n}\|\sum_{k=1}^{n} x_{i_k+l}\| \ ;\ n\in N,\ (i_k)\in I\},(x_i)\in m.\quad (1.15)$$

Tada se, postupajući analogno dokazu stava(1.1), može dokazati

STAV(1.2) Neka je m realan vektorski prostor (sa uobičajenim operacijama) ograničenih nizova tačaka proizvoljnog realnog Banach-ovog prostora i neka je funkcional $(x_i)\mapsto p((x_i))$ definisan na m relacijom(1.15). Tada egzistira i ima bar moć kontinuma kolekcija $\mathcal{L}$ (svih) funkcionala definisanih na m i takvih da je, za svaka dva niza $(x_i),(y_i)\in m$, svaka dva skalara $a,b\in R$ i svako $L\in\mathcal{L}$,

1) $L((ax_i + by_i)) = aL((x_i)) + bL((y_i))$,

2) $L((x_{i+1})) = L((x_i))$,

3) $|L((x_i))| \leq p((x_i))$,

Pri tome je, za svako $(x_i)\in m$,

4) $((\forall\, L\in\mathcal{L})\ L((x_i)) = 0) \Longleftrightarrow p((x_i)) = 0$.

Na prostorima G, odnosno $l^{+\infty}$ iz stavova (0.1-2) definisani su i Banach-ove generalisane granice $B\in\mathcal{B}$ i funkcionali $L\in\mathcal{L}$ iz stavova(1.1.-2) pa se postavlja pitanje odnosa izmedju jedne i druge kolekcije funkcionala. Na taj problem odnose se sledeća dva stava.

STAV(1.3) Neka je G realan vektorski prostor (sa uobičajenim operacijama) realnih ograničenih funkcija na intervalu $[0, +\infty[$. Neka $\mathcal{B}$ označava kolekciju Banach-ovih generalisanih granica, definisanih na G, a $\mathcal{L}$ kolekciju funkcionala iz stava(1.1) definisanih na G. Tada

1) $B\in\mathcal{B} \Longrightarrow B\in\mathcal{L}$,

2) Postoji tačka $f \in G$ takva da je $B(f) = \text{const}$ $(B \in \mathcal{B})$ i postoje funkcionali $L' \in \mathcal{X}$ i $L'' \in \mathcal{X}$ takvi da je $L'(f) \neq L''(f)$.

Drugim rečima, prema uslovu 1) iz ovog stava, svaki Banach-ov invarijantni funkcional, definisan na prostoru E realnih ograničenih funkcija na intervalu $[0, +\infty[$, istovremeno je jedan funkcional iz stava (1.1.), definisan na tom prostoru. Prema uslovima 1) - 2) iz ovog stava kolekcija $\mathcal{X}$ funkcionala iz stava (1.1.) šira je od kolekcije $\mathcal{B}$ generalisanih B-granica.

Dokaz stava (1.3). Prema stavu (0,1) funkcionali $B \in \mathcal{B}$ zadovoljavaju uslove 1) - 2) iz stava (1.1). Treba, znači, da dokažemo da oni zadovoljavaju i uslov 3) iz stava (1.1) pa će tvrdjenje pod 1) iz stava (1.3) biti dokazano.

Zaista, neka je f proizvoljna tačka iz prostora G. Tada u (1.1) mesto norme treba da stoji apsolutna vrednost i očigledno vredi

$$q(f) \leq p(f), \qquad (1.16)$$

gde je $f \longmapsto q(f)$ definisan sa (0,3).

Iz (1.16) imamo takodje

$$q(-f) \leq p(-f) = p(f)$$

pa je dalje

$$q^*(f) = -q(-f) \geq -p(f), \qquad (1.17)$$

gde je još $f \longmapsto q^*(f)$ definisan sa (0,6).

Kako je $f \in G$ proizvoljno, to prema (0.5), iz (1.16) i (1.17) sledi

$$|B(f)| \leq p(f), \; f \in G, \; B \in \mathcal{B}, \qquad (1.18)$$

tj. generalisane B-granice $B \in \mathcal{B}$ zadovoljavaju i uslov 3) iz stava (1.1). Time je tvrdjenje pod 1) u stavu (1.3) dokazano.

Prostoru G svakako pripada realna ograničena funkcija $t \mapsto f(t)$ na intervalu $[0,+\infty[$, za koju je još $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = s \; (\neq 0)$. Za tu funkciju, prema (0.4), imamo $B(f) = s$, $B \in \mathcal{B}$. Istovremeno za tu funkciju, prema lemi(1.2), je $p(f) = |s| > 0$, gde je funkcional $f \mapsto p(f)$ definisan sa(1.1)pa, prema dokazu uslova 4) iz stava(1.1), postoje funkcionali $L' \in \mathcal{X}$ i $L'' \in \mathcal{X}$ takvi da je $L'(f) \neq L''(f)$. Ovim je dokazano i tvrdjenje pod 2) u stavu(1.3), čime je taj stav u celini dokazan. Slično se dokazuje

STAV(1.4) Neka je $l^{+\infty}$ realan vektorski prostor realnih ograničenih nizova. Označimo sa $\mathcal{B}$ kolekciju generalisanih Banach-ovih granica definisanih na $l^{+\infty}$, a sa $\mathcal{X}$ kolekciju funkcionala iz stava(1.2) definisanih na $l^{+\infty}$.

Tada

1) $B \in \mathcal{B} \Longrightarrow B \in \mathcal{X}$,

2) Postoji tačka $(x_i) \in l^{+\infty}$ takva da je $B((x_i)) = \text{const.}$ $(B \in \mathcal{B})$ i postoje funkcionali $L' \in \mathcal{X}$ i $L'' \in \mathcal{X}$ takvi da je $L'((x_i)) \neq L''((x_i))$.

Dakle, kao i u slučaju prostora $\mathcal{G}$ *realnih ograničenih funkcija na intervalu* $[0,+\infty[$, *kolekcija* $\mathcal{L}$ *funkcionala iz stava (1.2), definisanih na prostoru* $l^{+\infty}$, *sadrži kolekciju* $\mathcal{B}$ *generalisanih Banach-ovih granica, definisanih na* $l^{+\infty}$, *kao pravu podklasu.*

1.2 GENERALISANE BANACH-OVE GRANICE VEKTORSKIH NIZOVA I FUNKCIJA

Označimo sa X^*, odnosno X^{**} prvi, odnosno drugi konjugovani prostor proizvoljnog realnog Banach-ovog prostora X. Neka E, i dalje, označava realan vektorski prostor ograničenih funkcija na poluosi $[0,+\infty[$ s vrednostima u X. Tada je, za proizvoljne $x^* \in X^*$ i $f \in E$, realna funkcija $(x^*, f) = x^* \circ f$ ograničena na poluosi $[0,+\infty[$ pa, za svaku Banach-ovu generalisanu granicu $B \in \mathcal{B}$ iz stava (0,1), postoji generalisana granica $B((x^*,f))$ funkcije (x^*,f).

Pretpostavimo, sada, da je $B \in \mathcal{B}$ fiksan, inače proizvoljan funkcional i za proizvoljno $f \in E$ stavimo

$$(L(f),x^*) = B((x^*,f)), x^* \in X^*. \tag{1.19}$$

Tada, zbog linearnosti funkcionala $B \in \mathcal{B}$, za svaka dva funkcionala $x^*, y^* \in X^*$ i za svaka dva skalara $a,b \in R$, prema (1.19), imamo

$$(L(f),ax^*+by^*) = B((ax^*+by^*,f)) = aB((x^*,f))+bB((y^*,f))$$

$$= a(L(f),x^*) + b(L(f),y^*),$$

tj.

$$(L(f),ax^*+by^*)=a(L(f),x^*)+b(L(f),y^*), a,b \in R,\ x^*,y^* \in X^*. \tag{1.20}$$

Ako je $t \longmapsto h(t)$, $t \in [0,+\infty[$ realna ograničena funkcija, tada je, očigledno,

$$p(h) \leq \sup\{|h(t)| \ ;\ t \ [0,+\infty[\},$$

gde je funkcional $h \longmapsto p(h)$ definisan sa (1.1).

Stavimo $C_f = C = \sup\{\|f(t)\|;\ t\in[0,+\infty[\}$ pa, prema (1.18) i (1.19), imamo

$$|(L(f),\ x^*)| = |B((x^*,f))| \leq p((x^*,f)) \leq$$

$$= \sup\{|x^*(f(t))|;\ t\in[0,+\infty[\} \leq$$

$$= \sup\{\|x^*\|\|f(t)\|;\ t\in[0,+\infty[\} =$$

$$= \|x^*\|\cdot\sup\{\|f(t)\|;\ t\in[0,+\infty[\} =$$

$$= C\|x^*\|,\ x^*\in X^*.$$

Postoji, dakle, konstanta $C_f = C$ takva da je

$$|(L(f),\ x^*)| \leq C\|x^*\|,\ x^*\in X^*. \tag{1.21}$$

Prema (1,20) i (1.21) $L(f)$ je neprekidan linearan funkcional na prostoru X^*, tj. element prostora X^{**} i, kako je $f\in E$ proizvoljno, imamo

$$L(f)\in X^{**},\quad f\in E. \tag{1.22}$$

Razume se, funkcional $L(f)$ zavisi od Banach-ovog invarijantnog funkcionala $B\in\mathcal{B}$, kojim je generisan prema (1.19) pa bi bilo korektno pisati $L^B(f)$ umesto $L(f)$. Ipak, budući da je funkcional $B\in\mathcal{B}$ fiksan, mi tu zavisnost nećemo posebno isticati i radi jednostavnosti umesto $L^B(f)$ i dalje ćemo pisati $L(f)$.

Ali, funkcional $L(f)$ zavisi od f i kada f prolazi E dobijamo podskup

$$\{ L(f); \quad f \in E \}$$

u X^{**}.

Drugim rečima $f \longmapsto L(f)$ je jedan operator definisan na E s vrednostima u X^{**}, tj.

$$L : E \longrightarrow X^{**}.$$

Pokazaćemo da je taj operator linearan. Zaista, prema (1.19), za svake dve funkcije $f, g \in E$ i za svaka dva skalara $a, b \in R$, imamo

$$\begin{aligned}(L(af+bg), x^*) &= B((x^*, af+bg)) = \\ &= B((x^*, af)) + B((x^*, bg)) = \\ &= aB((x^*, f)) + bB((x^*, g)) = \\ &= a(L(f), x^*) + b(L(g), x^*) = \\ &= (aL(f), x^*) + (bL(g), x^*) = \\ &= (aL(f) + bL(g), x^*), \quad x^* \in X^*,\end{aligned}$$

tj.

$$L(af+bg) = aL(f) + bL(g), a, b \in R, \quad f, g \in E. \tag{1.23}$$

Stavimo, i ovaj put, $f_a(t) = f(t+a)$, $a > 0$ pa, prema (1.19) i uslovu 3^o iz stava (0.1), imamo

$$(L(f_a),x^*) = B((x^*,f_a)) = B((x^*,f)) =$$

$$= (L(f),x^*),\ x^*\in X^*,$$

tj.

$$f_a(t) = f(t+a), a>0 \implies L(f_a) = L(f). \qquad (1.24)$$

Odavde i iz (1.23) sledi da operator $L\colon E\to X^{**}$ zadovoljava uslove 1^o i 3^o iz stava (0.1), tj. poseduje bitne osobine (linearnost i invarijantnost u odnosu na translaciju duž poluose $t \geq 0$) Banach-ovih generalisanih granica $B\in\mathcal{B}$ iz stava (0.1). Preostale osobine Banach-ovih granica iz stava (0.1) nemaju smisla u slučaju operatora $L\colon E\to X^{**}$, jer u prostorima X i X^{**} ne mora postojati uredjenje o kojem se radi u uslovu 2^o iz stava (0.1) niti jedinični element o kojem je reč u uslovu 4^o iz stava (0.1) .

Ali, zato, ako postoji

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = s\in X,$$

tada prema (1.19) i (0.4), zbog neprekidnosti x^* na X, imamo

$$(L(f),x^*) = B((x^*,f)) = \lim_{t\to\infty} x^*(f(t)) = x^*(\lim_{t\to\infty} f(t)) =$$

$$= x^*(s) = (s,x^*),\ x^*\in X^*,$$

gde se element $s\in X$ u izrazu (s,x^*), $x^*\in X^*$

pojavljuje u ulozi elementa iz X^{**}.
Odavde (videti razmatranja u [?], str. 240-241), ukoliko se element $\lim_{t\to\infty} f(t) = s \in X$ identifikuje sa odgovarajućim elementom iz X^{**}, imamo

$$L(f) = \lim_{t\to\infty} f(t) \qquad (1.25)$$

kad god limes na desnoj strani postoji u X, tj. uz pomenutu identifikaciju vrednost operatora $L: E \to X^{**}$ u tački $f \in E$ jednaka je granici funkcije f (pri $t\to\infty$) kad god ta granica postoji u X.
Označimo, sada, sa Y proizvoljan realan Banach-ov prostor, a sa $u : X \to Y$ neprekidno linearno preslikavanje. Neka je, još, u^* konjugovano, a u^{**} drugo konjugovano preslikavanje preslikavanju u.
Tada je

$$L(u\circ f) = u^{**}(L(f)). \qquad (1.26)$$

Zaista, za proizvoljno $z^* \in Y^*$, je

$$(z^*, u\circ f) = (u^*(z^*), f).$$

Odavde, prema (1.19), imamo

$$(L(u\circ f), z^*) = B((z^*, u\circ f)) = B((u^*(z^*), f)) =$$

$$= (L(f), u^*(z^*)) = (u^{**}(L(f)), z^*), z^* \in Y^*,$$

tj.

$$L(u\circ f) = u^{**}(L(f)).$$

U slučaju, kada mesto proizvoljnog Banach-ovog prostora X, uzmemo realnu pravu R, tj. kada je funkcija $t \quad f(t)$, $t \in [0,+\infty[$ realna i ograničena, tada, prema (1.19), očigledno vredi

$(L(f),x^*) = B((x^*,f)) = x^*(B(f)) = (B(f),x^*), x^* \in R^*$,
gde se element $B(f) \in R$ u izrazu $(B(f), x^*)$ pojavljuje kao element prostora $R^{**} = R$.
Dakle,

$$X = R \Longrightarrow L(f) = B(f),\ f \in E. \qquad (1.27)$$

Odavde sledi da se operator $L\colon E \to X^{**}$ svodi na Banach-ov invarijantni funkcional $B\colon E \to R^{**} = R$ kad god su tačke prostora E realne ograničene funkcije na poluosi $t \geq 0$, a Banach je za taj svoj funkcional $f \to B(f)$, $f \in E$ upotrebio oznaku $\operatorname{Lim}_{t\to\infty} f(t)$ kako bi naglasio da je reč o generalizaciji granice realne funkcije $t \mapsto f(t)$, $t \geq 0$ (pri $t \to +\infty$).
Isti razlog postoji i kad se radi o označavanju operatora $L\colon E \to X^{**}$. S druge strane, razlika izmedju operatora $L\colon E \to X^{**}$ i Banach-ovog funkcionala $B\colon E \to R^*=R$ je evidentna.
Da bismo tu razliku naglasili mi ćemo operator $f \to L(f)$, $f \in E$ s vrednostima u X^{**} označavati sa $\operatorname{LIM}_{t\to\infty} f(t)$.
Sada rezultate, koje smo dobili možemo formulisati u vidu sledećeg stava.

STAV(1.5). Neka su X i Y proizvoljni realni Banach-ovi prostori i neka je $u\colon X \to Y$ neprekidno linearno preslikavanje. Neka je dalje E realan vektorski prostor ograničenih funkcija na poluosi $t \geq 0$ s vrednostima u X. Tada postoji kolekcija $\mathcal{M}$ operatora $\operatorname{LIM}_{t\to\infty} h(t)$, definisanih na E s vrednostima u X^{**} (odnosno u Y^{**}) takvih da, ukoliko se element $\lim_{t\to\infty} f(t) = s \in X$ identifikuje sa odgovarajućim elementom u X^{**}, za svake dve funkcije $f, g \in E$, svaka dva $a,b \in R$ i sve operatore $f \longrightarrow \operatorname{LIM}_{t\to\infty} f(t)$ iz $\mathcal{M}$, imamo

1) $\underset{t\to\infty}{LIM}(af(t)+bg(t)) = a\underset{t\to\infty}{LIM}f(t)+b\underset{t\to\infty}{LIM}g(t)$,

2) $\underset{t\to\infty}{LIM}f_a(t)a) = \underset{t\to\infty}{LIM}\, f(t),\ a>0$,

3) $\exists(\lim_{t\to\infty} f(t))\in X \Longrightarrow \underset{t\to\infty}{LIM}\, f(t) = \lim_{t\to\infty} f(t)$,

4) $\underset{t\to\infty}{LIM}\, u(f(t)) = u^{**}(\underset{t\to\infty}{LIM}\, f(t))$,

5) $X = R \Longrightarrow \underset{t\to\infty}{LIM}f(t) = \underset{t\to\infty}{Lim}\, f(t)$.

Operator $\underset{t\to\infty}{LIM}\, f(t),\ f\in E$ ćemo zvati Banach-ov invarijantni operator, a njegovu vrednost $\underset{t\to\infty}{LIM}f(t)$ u tački $f\in E$ ćemo zvati Banach-ovom generalisanom granicom funkcije f.

Po analogiji s dokazom stava (1.5) može se dokazati

STAV (1.6). Neka su X i Y proizvoljni realni Banach-ovi prostori i neka je u i $X\to Y$ neprekidno linearno preslikavanje. Neka je, još, m realan vektorski prostor ograničenih nizova tačaka prostora X. Tada postoji kolekcija $\mathcal{B}$ operatora $\underset{i\to\infty}{LIM}x_i$, definisanih na m s vrednostima u X^{**} (odnosno u Y^{**}) takvih da, za svaka dva niza (x_i), $(y_i)\in m$ i za svaka dva skalara $a,b\in R$, vredi

1) $\underset{i\to\infty}{LIM}(ax_i+by_i) = a\underset{i\to\infty}{LIM}x_i + b\underset{i\to\infty}{LIM}y_i$,

2) $\underset{i\to\infty}{LIM}x_{i+1} = \underset{i\to\infty}{LIM}x_i$,

3) $\exists (\lim\limits_{i\to\infty} x_i) \in X \Longrightarrow \mathop{LIM}\limits_{i\to\infty} x_i = \lim\limits_{i\to\infty} x_i$,

4) $\mathop{LIM}\limits_{i\to\infty} u(x_i) = u^{**}(\mathop{LIM}\limits_{i\to\infty} x_i)$,

5) $X = R \Longrightarrow \mathop{LIM}\limits_{i\to\infty} x_i = \mathop{Lim}\limits_{i\to\infty} x_i$.

G L A V A 2

SKORO KONVERGENCIJA U BANACH-OVOM PROSTORU

Prema nejednakostima (0.4) sve generalisane granice konvergentnog niza jednake su granici tog niza. Medjutim, u [22] G.G. Lorentz je dokazao da su i generalisane granice divergentnog niza $(x_i) = (1, 0, 1, 0, \dots)$ *medjusobno jednake, tačnije, da je za ovaj niz*

$$B((x_i)) = \frac{1}{2}, \quad B \in \mathcal{B}.$$

Postoji, dakle, i divergentan niz, koji ima sve generalisane granice medjusobno jednake. Otuda sledeća Lorentz-ova definicija skoro konvergencije.

DEFINICIJA (2.A). Realan ograničen niz (x_i) *skoro konvergira (pri* $i \to \infty$*) ka s i s je njegova skoro granica ili F-granica, ako su sve generalisane B-granice tog niza jednake s, tj. ako je* $B((x_i)) = s$, $B \in \mathcal{B}$.
Simbolički pišemo $\underset{i \to \infty}{F\text{-}\lim}\, x_i = s$.
Zbog linearnosti funkcionala $B \in \mathcal{B}$, *ovu definiciju možemo iskazati u sledećem obliku.*

DEFINICIJA (2.B). Realan ograničen niz (x_i) *skoro konvergira (pri* $i \to \infty$*) ka s i s je njegova skoro granica ili F - granica, ako su sve generalisane B-granice niza* $(x_i - s)$ *jednake nuli, tj. ako za sve* $B \in \mathcal{B}$ *imamo* $B((x_i - s)) = 0$.
Danas postoje različite, medjusobno ekvivalentne, definicije konvergencije i granice niza. Medjutim, najčešće se definišu konvergencija i granica niza tako da se, prvo, definiše nula-niz, a zatim se za niz (x_i) *kaže da konvergira (pri* $i \to \infty$*) ka s, ako je niz* $(x_i - s)$ *nula-niz.*
Ako bismo postupili slično prilikom definisanja skoro konvergencije i skoro granice, tada bi definicija (2.B) bila izvorna, a definicija (2.A) se dobije iz nje.
Pitanje, koja od definicija (2.A.-B) je izvorna, a

koja iz prethodne izvedena je formalno kada se skoro konvergencija realnog niza definiše pomoću funkcionala $B \in \mathcal{B}$, *definisanih, isključivo na prostoru* $l^{+\infty}$, *realnih ograničenih nizova. Medjutim, kao što ćemo uskoro videti, definicija (2.B.) se može doslovno primeniti kada se mesto funkcionala* $B \in \mathcal{B}$ *upotrebe funkcionali* $L \in \mathcal{L}$ *iz stava(1.2.). Samo, u tom slučaju nema razloga da se ograničavamo na realne nizove. Naime, moguće je definiciju (2.B), zasnovanu na funkcionalima* $L \in \mathcal{L}$, *primeniti na nizove tačaka proizvoljnog Banach-ovog prostora. To, medjutim, nije slučaj s definicijom (2.A).*
Zbog toga, pitanje, koju od definicija (2.A.-B.) uzeti kao izvornu, ima suštinske značenje.

2.1. SKORO KONVERGENTNI NIZOVI TAČAKA BANACH-OVOG PROSTORA

Neka je (x_i) *konvergentan niz tačaka proizvoljnog realnog Banach-ovog prostora X, čija je granica tačka* $s \in X$. *Tada niz* $(x_i - s)$ *konvergira (pri* $i \to \infty$*) ka* $0 \in X$ *pa je, prema stavu (1.2) i lemi (1.2),*

$$L((x_i - s)) = 0, \quad \forall\, L \in \mathcal{L}.$$

Neka je, sada, $(x_i) = (0, s, 0, s, \ldots)$ $(s, 0 \in X;\ s \neq 0)$.
Tada je

$$L((x_i - \frac{1}{2} s)) = 0, \quad L \in \mathcal{L}.$$

Zaista, ako je $x_i = 0$, *tada je* $x_{i+1} = s$ *pa je, prema uslovima 1) - 2) iz stava (1.2), za svako* $L \in \mathcal{L}$,

$$2\,L((x_i)) = L((x_i)) + L((x_{i+1})) = L((x_i) + (x_{i+1})) =$$

$$= L((x_i + x_{i+1})) = L\,((s)).$$

Odavde, zbog linearnosti funkcionala $L \in \mathcal{L}$, imamo

$$L((x_i)) = \frac{1}{2} L((s)) = L((\frac{1}{2} s)), \text{ tj.}$$

$$L((x_i - \frac{1}{2} s)) = 0, \quad L \in \mathcal{L}.$$

Postoji, dakle, i divergentni niz (x_i) tačaka Banach-ovog prostora X, kome odgovara tačka $x \in X$, tako da je

$$L((x_i - x)) = 0, \quad L \in \mathcal{L}.$$

U tom smislu imamo istu logičku situaciju kao kad se radi o realnim nizovima i njihovim generalisanim granicama.

DEFINICA (2.1.). Ograničeni niz (x_i) tačaka proizvoljnog realnog Banach-ovog prostora skoro konvergira (pri $i \to \infty$) ka tački s tog prostora i s je njegova skoro granica ili F-granica (pišemo $F\text{-}\lim_{i \to \infty} x_i = s$), ako je

$$L((x_i - s)) = 0, \quad L \in \mathcal{L}. \tag{2.1}$$

Pretpostavimo, sada, da su s' i s'' skoro granica niza (x_i) u smislu definicije (2.1). Tada, prema (2.1), imamo

$$L((x_i - s')) = L((x_i - s'')) = 0, \quad L \in \mathcal{L}$$

pa je i

$$L((s' - s'')) = L((s' - x_i) + (x_i - s'')) =$$

$$= L((x_i - s'')) - L((x_i - s')) = 0, \quad L \in \mathcal{L}.$$

Odavde, prema uslovu 4) iz stava (1.2) i lemi (1.2), dobijamo

$$0 = p((s' - s'')) = \| s' - s'' \| , \quad tj. \; s' = s''.$$

Time je dokazana jedinstvenost skoro granice iz definicije (2.1).

Primetimo, sada, da iz (2.1) i iz uslova 4) iz stava (1.2) neposredno sledi da niz (x_i) tačaka Banach-ovog prostora X skoro konvergira (pri $i \to \infty$) ka tački s tog prostora, ako i samo, ako je

$$p((x_i - s)) = \inf\left\{\overline{\lim_{k\to\infty}} \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_{i_j+k} - s \right\| ; \; n \in N, (i_j) \in [\,]\right\} = 0. \quad (2.2)$$

STAV (2.1). Potreban i dovoljan uslov da ograničeni niz (x_i) tačaka proizvoljnog realnog Banach-ovog prostora X skoro konvergira (pri $i \to \infty$) ka tački s tog prostora je

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} x_{n+i} = s \quad (2.3)$$

uniformno po $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

DOKAZ. Uslov (2.3) je potreban. Zaista, ako je tačka $s \in X$ skoro granica niza (x_i), tada, prema (2.2), za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoje prirodni brojevi $q, i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_q$, takvi da je

$$\overline{\lim_{q\to\infty}} \left\| \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{q} x_{i_j+k} - s \right\| < \varepsilon .$$

Sledi, dalje, da postoji dovoljno velik prirodan broj k_o, takav da je, za sve $k \geq k_o$,

$$\left\| \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{q} x_{i_j+k} - s \right\| = \left\| \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{q} x_{i_j+k_o+k-k_o} - s \right\| < \varepsilon .$$

Označimo ponovo $i_j + k_0$ *sa* i_j, *a* $k-k_0$ *sa* k *pa iz poslednje nejednakosti imamo, za sve* $k \in \{0, 1, \ldots\}$,

$$\left\|\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q} x_{i_j+k} - s\right\| < \varepsilon$$

Odavde, sumiranjem leve i desne strane po k, *dobijamo da je, za sve* $n \in \{0, 1, \ldots\}$ *i za sve* $p \in \{1, 2, \ldots\}$,

$$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left\|\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q} x_{i_j+n+k} - s\right\| < \varepsilon ,$$

a tim pre je, onda, za sve $n \in \{0, 1, \ldots\}$ *i za sve* $p \in \{1, 2, \ldots\}$,

$$\left\|\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q} x_{i_j+n+k} - s\right\| = \left\|\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} x_{i_j+n+k} - s\right\| < \varepsilon. \quad (2.4)$$

Primetimo da je za izabrano q, *za sve* i_j $(j = 1, 2, \ldots, q)$, *za sve* $n \in \{0, 1, \ldots\}$, *i za sve* $p \in \{1, 2, \ldots\}$,

$$\sum_{k=1}^{p} x_{i_j+n+k} = \sum_{k=1}^{p} x_{n+k} + \sum_{k=p+1}^{p+i_j} x_{n+k} - \sum_{k=1}^{i_j} x_{n+k} =$$

$$= \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 - \sum\nolimits_3 . \qquad (2.5)$$

Sem toga, očigledno je

$$\left\|\sum\nolimits_2\right\| \leq i_q \cdot \sup_{1 \leq k < +\infty}\|x_k\|, \left\|\sum\nolimits_3\right\| \leq i_q \cdot \sup_{1 \leq k < +\infty}\|x_k\| .$$

Kako je q *fiksno, odavde i iz* (2.5) *sledi da je, za sve* $n \in \{0, 1, \ldots\}$ *i za sve* $p \in \{1, 2, \ldots\}$,

$$\sum_{k=1}^{p} x_{i_j+n+k} = \sum_{k=1}^{p} x_{n+k} + O(1), \qquad (2.6)$$

gde $O(1)$ *označava veličinu uniformno ograničenu po* $n \in \{0,1,2,\ldots\}$ *i* $p \in \{1,2,\ldots\}$.
Iz (2.4) i (2.6) dobijamo da je, za sve $n \in \{0,1,\ldots\}$ *i za sve* $p \in \{1,2,\ldots\}$,

$$\left\|\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} x_{n+k} + \frac{1}{p}\,O(1) - s\right\| < \varepsilon .$$

Odavde je, za sve $n \in \{0,1,\ldots\}$ *i za sve* $p \in \{1,2,\ldots\}$,

$$\left|\left\|\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} x_{n+k} - s\right\| - \frac{1}{p}\|O(1)\|\right| < \varepsilon .$$

Time je, za sve $n \in \{0,1,\ldots\}$ *i za sve* $p \in \{1,2,\ldots\}$,

$$\left\|\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} x_{n+k} - s\right\| < \frac{1}{p}\|O(1)\| + \varepsilon .$$

Postoji, dakle, dovoljno velik prirodan broj p_o *takav da je, za sve* $p \geq p_o$,

$$\frac{1}{p}\|O(1)\| < \varepsilon .$$

Prema tome, postoji dovoljno velik prirodan broj p_o, *koji ne zavisi od* $n \in \{0,1,\ldots\}$, *takav da je, za sve* $p \geq p_o$ *i za sve* $n \in \{0,1,\ldots\}$,

$$\left\|\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} x_{n+k} - s\right\| < \frac{1}{p}\|O(1)\| + \varepsilon < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon .$$

Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, odavde imamo

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} x_{n+k} = s$$

uniformno po $n \in \{0,1, \ldots\}$, tj. uslov (2.3) je potreban.

b) Uslov (2.3) je dovoljan. Ako je uslov (2.3) zadovoljen, tada, za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji prirodan broj p_0 takav da je, za sve $n \in \{0,1,\ldots\}$ i za sve $p \geq p_0$,

$$\left\|\sum_{i=1}^{p} x_{n+i} - s\right\| < \varepsilon .$$

Odavde je, za sve $p \geq p_0$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\|\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_{n+i} - s\right\| \leq \varepsilon .$$

Tim pre je, onda,

$$\inf\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\|\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} x_{n+i_j} - s\right\| ;\ p \in N,\ (i_j) \in I\right\} \leq \varepsilon$$

Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, odavde sledi relacija (2.2), što znači da je uslov (2.3) dovoljan. Time je stav (2.1) u celini dokazan.

Iz stava (2.1) sledi da su uslovi (2.1) i (2.3) ekvivalentni u smislu da vredi uslov (2.1), ako i samo ako vredi uslov (2.3). Takodje, uslov (2.3) se, u slučaju realnog niza, svodi na uslov (0.10). Odavde sledi da je niz $(x_k) \in l^{+\infty}$ skoro konvergentan u smislu definicije (2.1.) ako i samo ako je taj niz skoro konvergentan u smislu Lorentz-ove definicije (videti definiciju (2.A)).

STAV (2.2) Niz (x_k) tačaka proizvoljnog realnog Banach-ovog prostora X skoro konvergira (kada $k \to \infty$) ka tački $s \in X$, ako i samo ako, bar za jedan delimični niz (k_i) prirodnih brojeva (uključujući i sam niz prirodnih brojeva), vredi

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_{n+k_i} = s \tag{2.7}$$

uniformno po $n \in \{0,1, \ldots\}$.

DOKAZ. a) Uslov (2.7) je dovoljan. Zaista, ako je (k_i) jedan od delimičnih nizova, za koji vredi uslov (2.7), tada, za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji dovoljno velik prirodan broj p, takav da je, za sve $n \in \{0,1, \ldots\}$,

$$\left\|\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_{n+k_i} - s\right\| < \varepsilon .$$

Za ovo p je

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\|\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_{n+k_i} - s\right\| \leq \varepsilon .$$

Tim je i

$$\inf\left\{ \overline{\lim_{n\to\infty}} \left\|\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_{n+k_i} - s\right\| ; p\in N, (k_i)\in \right\} \leq \varepsilon.$$

Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, odavde sledi

$$\inf\{ \overline{\lim_{n\to\infty}} \| \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} x_{n+k_i} - s \| ; p \in N, (k_i) \in I\} = 0,$$

tj. vredi relacija (2.2) pa je uslov (2.7) dovoljan.

b) Uslov (2.7) je potreban. Zaista, na osnovu stava (2.1) uslov (2.7) je ostvaren nizom $k_i = i (=1,2,..)$ Ali, sledeći primer pokazuje da postoji niz tačaka Banach-ovog prostora, za koji uslov (2.7) vredi i kad je (k_i) pravi delimični niz niza prirodnih brojeva. Neka je $(x_k) = (0, s, 0, s, \ldots)$ $(0, s \in X$, $0 \neq s)$. Tada se lako dokazuje da je

$$\frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} x_{n+3i} = \begin{cases} \frac{1}{2} s, & p \text{ parno}, \\ \frac{1}{p} \cdot \frac{p+1}{2} s, & ; p, n \text{ neparni}, \\ \frac{1}{p} \cdot \frac{p-1}{2} s, & p \text{ neparno}, \\ & n \text{ parno}. \end{cases}$$

Odavde, očigledno, sledi

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} x_{k+3i} = \frac{1}{2} s$$

uniformno za $n \in \{0, 1, \ldots\}$.

Vidimo, dakle, da, u slučaju niza $(x_k) = (0, s, 0, s, \ldots)$, uslov (2.7) vredi za $k_i = 3i$ $(i = 1, 2, ..)$, *tj. kada je (k_i) pravi delimični niz niza prirodnih brojeva, što opravdava ovakvu formulaciju stava(2.2).*

POSLEDICA(2.1) Niz (x_k) tačaka proizvoljnog realnog Banach-ovog prostora X skoro konvergira (kada $k \to \infty$) ka tački $s \in X$ ako i samo ako, bar za jedan delimičan niz (k_i) niza prirodnih brojeva (uključujući i niz prirodnih brojeva), vredi

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \sum_{i=lp+1}^{(l+1)p} x_{n+k_i} = s \qquad (28)$$

uniformno po $l,n \in \{0,1,2,...\}$.
Zaista, za $l=0$, relacija (2.8) se svodi na relaciju (2.7) pa je uslov (2.9) dovoljan na osnovu stava (2.2). Takodje, uslov (2.7) neposredno povlači uslov (2.9) napisan u obliku

$$\lim_{p} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} x_{n+lp+k_i} = s$$

uniformno po $l,n \in \{0,1,2,...\}$, čime je posledica (2.1) dokazana.

2.2 SKORO KONVERGENCIJA FUNKCIJA S VREDNOSTIMA U REFLEKSIVNOM BANACH-OVOM PROSTORU

U ovom odeljku razmatramo skoro konvergenciju funkcija definisanih s.s. na intervalu $[0, +\infty[$ s vrednostima u proizvoljnom realnom Banach-ovom prostoru. Formalizam kojim se služimo pri ovim razmatranjima sadrži, pored ostalog, i integral vektorske funkcije, čije vrednosti su tačke Banach-ovog prostora.
Predmet naših razmatranja je skoro konvergencija vektorskih funkcija, a izbor vrste integrala takve funkcije, kojim se služimo pri tim razmatranjima, je manje važan. Ipak, čini se da je skalarni integral vektorske funkcije ([7] , str. 95; [8] str. 10 ; [13] , str. 764) za ovu priliku najprikladniji. Ovaj izbor, opet, nameće ograničenje

da se razmatranja ograniče na funkcije s vrednostima u refleksivnom Banach-ovog prostoru, jer je skalarni integral (u daljem tekstu integral) funkcije s vrednostima u refleksivnom Banach-ovom prostoru X, takodje, tačka prostora X ([13] , str.776). Označimo ovaj put sa E realan vektorski prostor skalarno L-merljivih funkcija na intervalu $[0, +\infty[$ s vrednostima u realnom refleksivnom Banach-ovom prostoru X ([13], str. 764 , [8], str. 10), koje su još ograničene s.s. na intervalu $[0, +\infty[$. Neka je m Lebesqu-ova mera na R i neka je $\mathcal{A}$ kolekcija svih ograničenih skupova na $[0, +\infty[$ pozitivne mere.

Po analogiji sa funkcionalom (1.1) mi definišemo na E funkcional $f \mapsto p(f)$ sa

$$p(f) = \inf\{\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{m(A)} \| \int_{A+t} f(u)\, du \| ; A \in \mathcal{A}\}, \; f \in E. \quad (2.10)$$

Primetimo još jednom da je relacija (2.2) ekvivalentna relaciji (2.1) (u smislu da vredi jedna, ako i samo ako vredi druga) i prema tome, relaciju (2.2) možemo uzeti za definiciju skoro konvergencije niza (x_i).

Imajući na umu tu činjenicu mi uz pomoć funkcionala (2.10) definišemo skoro konvergenciju funkcije $f \in E$.

DEFINICIJA (2.2) Neka je $t \mapsto f(t)$, $t \in [0, +\infty[$ skalarno L-merljiva i ograničena s.s. na intervalu $[0, +\infty[$ funkcija s vrednostima u realnom refleksivnom Banach-ovom prostoru X. Kažemo da ta funkcija skoro konvergira (pri $t \to +\infty$) ka tački

$s \in X$ i da je s njena skoro granica ili F-granica (pišemo $F\text{-}\lim_{t\to\infty} f(t)=s$), ako je

$$p(f-s) = \inf\{\overline{\lim_{t\to\infty}} \| \frac{1}{m(A)} \int_{A+t} f(u)du - s\| \; ; \; A\in\mathcal{A}\} = 0. \quad (2.11)$$

STAV (2.3). Neka je funkcija $t\mapsto f(t)$, $t\in[0,+\infty[$ skalarno m-merljiva i ograničena s.s. na $[0, +\infty[$ s vrednostima u realnom refleksivnom Banach-ovom prostoru X. Potreban i dovoljan uslov da ta funkcija skoro konvergira (kada $t\to+\infty$) ka $s\in X$ je

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t)\, dt = s \qquad (2.12)$$

uniformno za $a\in[0, +\infty[$.

DOKAZ. a) Uslov (2.12) je potreban. Ako je $s\in X$ skoro granica funkcije $t\mapsto f(t)$, $t\in[0, +\infty[$, tada, prema (2.11), za proizvoljno $\varepsilon>0$, postoji skup $A\in\mathcal{A}$, takav da je

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \| \frac{1}{m(A)} \int_{A+t} f(u)\, du - s\| < \varepsilon.$$

Postoji, dalje, dovoljno velik broj a_0, takav da je, za sve $t\geq a_0$ i za izabrani skup A,

$$\| \frac{1}{m(A)} \int_{A+t} f(u)\, du - s\| = \| \frac{1}{m(A)} \int_{A+a_0} f(u+t-a_0)\, du - s\| < \varepsilon.$$

Ovde smo upotrebili oznaku $A+a_0$ za skup, koji *nastaje translacijom skupa A za a_0 duž intervala* $[0, +\infty[$.

Ako, radi jednostavnosti, ponovo označimo skup $A+a_0$ sa A i broj $t - a_0$ sa t, imamo, dalje, za sve $t \geq 0$,

$$\left\| \frac{1}{m(A)} \int_A f(u+t)\, du - c \right\| < \varepsilon .$$

Odavde, za sve $a \in [0, +\infty[$ i za sve $T > 0$, imamo

$$\frac{1}{T} \int_a^{a+T} \left\| \frac{1}{m(A)} \int_A f(u+t)\, du - c \right\| dt < \varepsilon .$$

Tim pre je, onda, za sve $a \in [0, +\infty[$ i za sve $T > 0$,

$$\left\| \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{m(A)} \int_a^{a+T} \int_A f(u+t)\, du\, dt - c \right\| < \varepsilon . \qquad (2.13)$$

Skup A je, po pretpostavci, ograničen i L-merljiv pa je, za proizvoljno $a \in [0, +\infty[$ i $T > 0$, ograničen i merljiv i skup $\{(u, t);\ u \in A,\ a \in [t, a+T]\}$, na kraju je funkcija $(u,t) \mapsto f(u+t)$, kao funkcija dveju promenljivih, očigledno, skalarno L-merljiva. Odavde sledi ([8] , str. 13, predloženije 4) da je u (2.13) dozvoljena promena redosleda integracije, pa, za sve $a \geq 0$ i za sve $T > 0$, imamo

$$\int_a^{a+T} \int_A f(u+t)\, du\, dt = \int_A \int_a^{a+T} f(u+t)\, dt\, du = \int_A \int_{a+u}^{a+u+T} f(t)\, dt\, du =$$

$$= \int_A \Big(\int_a^{a+T} f(t)dt + \int_{a+T}^{a+T+u} f(t)dt - \int_a^{a+u} f(t)dt \Big) du . \qquad (2.14)$$

Skup A je fiksan i ograničen, a funkcija $t \mapsto f(t)$ je ograničena s.s. na $[0,+\infty[$ i vrede, očigledno, nejednakosti

$$\Big\| \int_{a+T}^{a+T+u} f(t)dt \Big\| \leq \sup_{0 \leq t < +\infty} \operatorname{ess} \| f(t) \| \cdot \sup_{u \in A} u,$$

$$\Big\| \int_a^{a+u} f(t)dt \Big\| \leq \sup_{0 \leq t < +\infty} \operatorname{ess} \| f(t) \| \cdot \sup_{u \in A} u .$$

Odavde, prema (2.14), imamo, za sve $a \in [0,+\infty[$ i za sve $T > 0$,

$$\int_a^{a+T} \int_A f(u+t)du\, dt = m(A) \cdot \int_a^{a+T} f(t)dt + O(1),$$

gde $O(1)$ označava veličinu, uniformno ograničenu po oba parametra $a \in [0,+\infty[$ i $u \in A$.

Prema (2.14) odavde, za sve $a \in [0,+\infty[$ i za sve $T > 0$, imamo

$$\Big\| \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t)dt + \frac{1}{T} O(1) - s \Big\| < \varepsilon .$$

Tim pre je, onda, za sve $a \in [0,+\infty[$ i za sve $T > 0$,

$$\Big| \Big\| \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t)dt - s \Big\| - \frac{1}{T} \| O(1) \| \Big| < \varepsilon$$

i odavde

$$\left\|\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)dt - c\right\| < \frac{1}{T}\,\|O(1)\| + \varepsilon .$$

Zbog uniformne ograničenosti veličine $O(1)$ pri $T\in[0,+\infty[$, postoji dovoljno velik broj T_0 takav da je $\frac{1}{T}\|O(1)\| < \varepsilon$, $T > T_0$, pa konačno imamo, za sve $a\in[0,+\infty[$ i za sve $T \geq T_0$,

$$\left\|\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)dt - c\right\| < \frac{1}{T}\|O(1)\| + \varepsilon < 2\varepsilon ,$$

pri čemu izbor T_0 ne zavisi od $a\in[0, +\infty[$.
Odavde imamo

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)dt = c$$

uniformno za $a\in[0, +\infty[$, tj. vredi uslov (2.12).

b) Uslov (2.12) je dovoljan. Zaista, ako je uslov (2.12) zadovoljen, tada, za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji dovoljno velik broj T, takav da je, za sve $a\in[0, +\infty[$,

$$\left\|\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)dt - c\right\| < \varepsilon .$$

Stavimo $[0,T] = A$ pa, za sve $a\in[0, +\infty[$, imamo

$$\left\| \frac{1}{m(A)} \int_{A+a} f(t)dt - s \right\| < \varepsilon .$$

Sledi, dalje, da je

$$\overline{\lim_{a\to\infty}} \left\| \frac{1}{m(A)} \int_{A+a} f(t)dt - s \right\| \leq \varepsilon .$$

Tim pre je, onda,

$$p(f-s) = \inf\left\{ \overline{\lim_{a\to\infty}} \left\| \frac{1}{m(A)} \int_{A+a} f(t)dt - s \right\| ; A \in \mathcal{A} \right\} \leq \varepsilon .$$

Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, konačno je

$$p(f-s) = \inf\left\{ \overline{\lim_{a\to\infty}} \left\| \frac{1}{m(A)} \int_{A+a} f(t)dt - s \right\| ; A \in \mathcal{A} \right\} = 0,$$

tj. vredi relacija (2.2). Time smo dokazali da je uslov (2.12) dovoljan, čime je stav (2.4) u celini dokazan.

STAV(2.4) Neka je funkcija $t \mapsto f(t)$, $t \in [0, +\infty[$ skalarno L - merljiva i ograničena s.s. na $[0, +\infty[$ s vrednostima u realnom refleksivnom Banach-ovom prostoru X.

Potreban i dovoljan uslov da ta funkcija skoro konvergira (pri $t \to +\infty$) ka $s \in X$ je

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{lT}^{(l+1)T} f(t+a)dt = s \qquad (2.15)$$

uniformno po oba parametra $a \in [0, +\infty[$ i $l \in \{0,1,\ldots\}$.

DOKAZ. Za $l = 0$, uslov(2.15) se svodi na uslov

(2.12) pa je uslov (2.15) dovoljan na osnovu stava (2.4).

Pretpostavimo sada da je $\underset{t\to\infty}{F\text{-}lim}\, f(t) = s \in X$. Tada, prema stavu(2.4), vredi uslov(2.12) pa, za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji dovoljno velik broj T_0, koji ne zavisi od $a \in [0, +\infty[$, takav da je, za sve $T \geq T_0$ i za sve $a \in [0, +\infty[$,

$$\left\| \frac{1}{T} \int_0^T f(t+a)dt - s \right\| < \varepsilon .$$

Time je, za sve $T \geq T_0$, za sve $a \in [0, +\infty[$ i za sve $l \in \{0, 1, \ldots\}$,

$$\left\| \frac{1}{T} \int_{lT}^{(l+1)T} f(t+a)dt - s \right\| < \varepsilon ,$$

pri čemu izbor T_0 ne zavisi od $a \in [0, +\infty[$ i $l \in \{0, 1, \ldots\}$. Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, odavde imamo

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{lT}^{(l+1)T} f(t+a)dt = s$$

uniformno po oba parametra $a \in [0, +\infty[$ i $l \in \{0,1,\ldots\}$, tj. vredi uslov (2.15).

Time je stav(2.5) dokazan.

Kao posledica stava(2.3) veoma lako se dobija jedinstvenost skoro granice iz definicije(2.2).

G L A V A 3

PRIMENA SKORO KONVERGENCIJE U TEORIJI MATRIČNOG SUMIRANJA

Neka je $A=(a_{nk})$ beskonačna matrica. U [22] Lorentz definiše niz $x=(x_k)$ kao F_A-zbirljiv ka s (pri $k\to\infty$), ako je

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_{k+m}=s$$

uniformno po $m\in\{0,1,\dots\}$.
Za $m=0$, F_A - zbirljivost se svodi na obično matrično sumiranje. To znači da iz F_A - zbirljivosti niza $x=(x_k)$ ka s sledi A-zbirljivost tog niza ka s.
Obratno, očigledno, ne mora da vredi; iz A-zbirljivosti niza ne sledi uvek njegova F_A-zbirljivost. Obično matrično sumiranje dobro je proučeno i tu imamo i neke rezultate, koji imaju principijelno značenje. Poznatim Kojim-Schur-ovim stavom ([9] , Theorem (4.4,I)) je rešeno pitanje konzervativnosti matrice $A=(a_{nk})$, odnosno dati su potrebni i dovoljni uslovi, koje matrica $A=(a_{nk})$ mora zadovoljavati pa da svaki konvergentan niz bude A-zbirljiv. Specijalan slučaj Kojim-Schur-ovog stava je Silverman-Toeplitz-ov stav ([9] , Theorem (4.4,II)), kojim su dati potrebni i dovoljni uslovi da matrica $A=(a_{nk})$ bude regularna ili, što je isto, da svaki konvergentan niz bude A-zbirljiv ka svojoj granici. U ovoj glavi mi definišemo pojam F-konzervativne i, specijalno, F-regularne matrice $A=(a_{nk})$, a zatim dokazujemo stavove (3.1.-2.), koji za F_A - zbirljivost znače ono što Kojim-Schur-ov, odnosno Silverman-Toplitz-ov stav znače za obično matrično sumiranje.

Slede, zatim, dva stava o odnosu F_A - zbirljivosti

i skoro konvergencije.
Na kraju definišemo jednu klasu matrica pomoću L-merljivih i suštinski ograničenih funkcija na $[0, +\infty[$, *a zatim dokazujemo dva stava, prema kojima svaka skoro konvergentna funkcija (niz) generiše jednu F-konzervativnu matricu.*
Da bi smo razmatranja što više uprostili ograničili smo se na realne nizove i funkcije.
Sa c *označavamo normirani prostor konvergentnih nizova, u kome je norma definisana sa* $\|x\| = \sup_k |x_k|$.
Sa F^* *označavamo vektorski prostor skoro konvergentnih nizova, a sa* Z^+ *skup nenegativnih celih brojeva.*

3.1. F-KONZERVATIVNA I F-REGULARNA MATRICA

DEFINICIJA (3.1.) Neka je $A=(a_{nk})$ *beskonačna matrica i neka, za proizvoljno* $x=(x_k) \in c$, *konvergiraju redovi*

$$\eta_{n,m}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_{k+m}, \quad \eta_{n,o}(x) = \eta_n(x), n,m=0,1,\ldots \quad (3.1)$$

Kažemo da je matrica $A=(a_{nk})$ *F-konzervativna, ako* $(\eta_{n,m}(x)) \in c$, $m = 0,1,\ldots$, *i, ako je*

$$\lim_{n\to\infty} \eta_{n,m}(x) = \lim_{n\to\infty} \eta_n(x) \quad (3.2).$$

uniformno po $m \in \{0,1,\ldots\}$.
Ako je još

$$\lim_{n\to\infty} \eta_{n,m}(x) = \lim_{k\to\infty} x_k$$

uniformno po $m \in \{0,1,\ldots\}$, *tada kažemo da je ma-*

trica $A=(a_{nk})$ F-regularna.

STAV(3.1) Matrica $A=(a_{nk})$ je F-konzervativna ako i samo ako ona zadovoljava uslove

1) $\sup\{\sum_{k=0}^{\infty}|a_{nk}|;\ n\in Z^{+}\}=\|A\|<+\infty$,

2) $\forall\, k\ (=0,1,\dots)$ je $\lim_{n\to\infty} a_{nk}=0$,

3) postoji i konačan je $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}=a$.

Tada, ako $x_k\to c\,(k\to\infty)$, vredi

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}x_{k+m}=ac \tag{3.3}$$

uniformno po $m\in\{0,1,2,\dots\}$.

DOKAZ. a) Uslovi 1) - 3) su potrebni. Zaista, F-konzervativna matrica je konzervativna i, prema tome, zadovoljava uslove 1) i 3) ([9], Theorem(4.1,I)). Da bismo dokazali da F-konzervativna matrica zadovoljava i uslov 2), stavimo $(x_j)=e_k=(0,\dots 0,\underset{k}{1},0,\dots)$ pa, prema (3.1) i (3.2), imamo

$$\lim_{n\to\infty}a_{nk}=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_{nj}x_j=\lim_{n\to\infty}\eta_{n,0}(e_k)=\lim_{n\to\infty}\eta_{n,k+1}(e_k)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_{nj}x_{j+k+1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_{nj}\cdot 0=0.$$

Odavde je $\lim_{n\to\infty}a_{nk}=0$, $k=0,1,\dots$, tj. matrica $A=(a_{nk})$ zadovoljava i uslov 2).

b) Uslovi 1) - 3) su dovoljni. Zaista, ako $x_k \to s \neq 0$ $(k \to \infty)$, tada, za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji prirodan broj P, takav da je, za sve $k \geq P$ i za sve $m \in \{0,1,\ldots\}$,

$$|x_{k+m} - s| < \frac{\varepsilon}{3\|A\|} . \qquad (3.4)$$

Prema uslovu 2) postoji prirodan broj N_1, takav da je, za sve $n \geq N_1$ i za gore odabrano P,

$$\sum_{k=0}^{P} |a_{nk}| < \frac{\varepsilon}{6\|x\|} . \qquad (3.5)$$

Takodje, prema uslovu 3), postoji prirodan broj N_2, takav da je, za sve $n \geq N_2$,

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} - a\right| < \frac{\varepsilon}{3|s|} . \qquad (3.6)$$

Stavimo li $N = \max\{P, N_1, N_2\}$, tada N ne zavisi od $m \in \{0,1,\ldots\}$, a prema (3.4), (3.5) i (3.6) imamo, za sve $n \geq N$ i za sve $m \in \{0,1,\ldots\}$,

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_{k+m} - as\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}(x_{k+m}-s) + s\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}-a\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{P} a_{nk}(x_{k+m}-s) + \sum_{k=P+1}^{\infty} a_{nk}(x_{k+m}-s) +\right.$$

$$\left. + s\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} - a\right)\right| \leq$$

$$\leq \Big|\sum_{k=0}^{P} a_{nk}(x_{k+m}-s)\Big| + \Big|\sum_{k=P+1}^{\infty} a_{nk}(x_{k+m}-s)\Big|$$

$$+ \Big| s\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}-a\Big)\Big| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{P} |a_{nk}|\,|x_{k+m}-s| + \sum_{k=P+1}^{\infty} |a_{nk}|\,|x_{k+m}-s|$$

$$+ |s|\,\Big|\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}-a\Big| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{P} |a_{nk}|\,(|x_{k+m}|+|s|) + \sum_{k=P+1}^{\infty} |a_{nk}|\,|x_{k+m}-s|$$

$$+ |s|\,\Big|\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} - a\Big| <$$

$$< 2\,\|x\|\cdot\sum_{k=0}^{P} |a_{nk}| + \frac{\varepsilon}{3\|A\|}\cdot\sum_{k=P+1}^{\infty} |a_{nk}|$$

$$+ |s|\,\frac{\varepsilon}{3|s|} <$$

$$< 2\,\|x\|\,\frac{\varepsilon}{6\|x\|} + \frac{\varepsilon}{3\|A\|}\cdot\|A\| + |s|\,\frac{\varepsilon}{3|s|} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,. \tag{3.7}$$

Neka, sada, $x_k - s = o(k\to\infty)$. *Tada vrede nejednakosti (3.4) i (3.5). Stavimo, ovaj put,* $N=\max\{P,N_1\}$

pa, za sve $n \geq N$ i za sve $m \in \{0,1,\ldots\}$, imamo

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\, x_{k+m}\right| = \left|\sum_{k=0}^{P} a_{nk}x_{k+m} + \sum_{k=P+1}^{\infty} a_{nk}x_{k+m}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{P} |a_{nk}|\,|x_{k+m}| + \sum_{k=P+1}^{\infty} |a_{nk}|\,|x_{k+m}| \leq$$

$$< \|x\| \sum_{k=0}^{P} |a_{nk}| + \frac{\varepsilon}{3\|A\|} \cdot \sum_{k=P+1}^{\infty} |a_{nk}| =$$

$$< \|x\| \frac{\varepsilon}{6\|x\|} + \frac{\varepsilon}{3\|A\|} \cdot \|A\| =$$

$$= \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{2} \qquad (3.8)$$

Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, a izbor N u (3.7) i (3.8) ne zavisi od $m \in \{0,1,\ldots\}$, konačno, iz (3.7) i (3.8) imamo

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_{k+m} = as$$

uniformno po $m \in \{0,1,\ldots\}$, tj. vredi relacija (3.3). Time smo dokazali da su uslovi 1) - 3) dovoljni, čime je stav (3.1) u celini dokazan.
Za $a=1$, stav (3.1) se svodi na

STAV(3.2) Matrica $A=(a_{nk})$ je F-regularna, ako i samo ako ona zadovoljava uslove:

1) $\sup\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| \; ; \; n \in Z^+ \right\} = \|A\| < +\infty$,

2) $\forall\, k(=0,1,\dots)$ je $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$,

3) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = 1$

Dakle, matrica $A=(a_{nk})$ je F-regularna ako i samo ako je ona regularna ([9], Theorem(4.4,II); [32], str. 57:58).
Ovo je veoma važan rezultat, iz kojeg sledi da su A-zbirljivost i F_A-zbirljivost (dva bitno različita oblika matričnog sumiranja, definisana matricom $A=(a_{nk})$), istovremeno regularni ili nisu regularni, već prema tome da li je matrica $A=(a_{nk})$ regularna ili nije regularna.

STAV(3.3) Neka je $A=(a_{nk})$ F-konzervativna matrica za koju je još

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = a \neq 0.$$

Ako je niz $x=(x_k)$ F_A-zbirljiv ka s(kada $k\to\infty$), tada je taj niz F-zbirljiv (skoro konvergentan) ka $\frac{1}{a}\cdot s$ (kada $k\to\infty$).

DOKAZ. Stavimo $x^{(m)}=(x_{k+m})$, $x^{(0)}=x=(x_k)$. Tada je $\|x^{(m)}\| \leq \|x\|$, $m\ (=0,1,\dots)$.

Niz $x=(x_k)$ je ograničen pa, prema uslovu 1) iz stava(3.1), konvergiraju redovi

$$y^{(n)} = \sum_{k=o}^{\infty} a_{nk}\, x^{(k)}, \qquad n = 0,1,\dots ,$$

gde je m-ta koordinata niza $y^{(n)} \in l^{+\infty}$ upravo $\eta_{n,m}(x)$ iz (3.1). Sem toga, niz $x=(x_k)$ je F_Λ-sbirljiv ka s (pri $k\to\infty$) pa, za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji dovoljno velik prirodan broj N, takav da je, za sve $n \geq N$ i za sve $m \in \{0,1,\dots\}$,

$$\eta_{n,m}(x) = s + s_{n,m}, \ |s_{n,m}| < \varepsilon . \qquad (3.15)$$

Stavimo $s_{(n)} = (s_{n,m})$, $n = 0,1,\dots$ pa, prema (3.1) i (3.15), imamo, za svako $n \geq N$,

$$y^{(n)} = \sum_{k=o}^{\infty} a_{nk}\, x^{(k)} = s\cdot e + s_{(n)}, \ \| s_{(n)} \| \leq \varepsilon, e=(1,1,1,\dots). \ (3.16)$$

Prema uslovu 3^o iz stava (0.2) je $B(x^{(k)}) = B(x)$, $\forall\, k(=0,1,\dots)$, $\forall\, B\in\mathcal{B}$ pa, zbog neprekidnosti funkcionala $B\in\mathcal{B}$ na normiranom prostoru $l^{+\infty}$, iz (3.16) sledi, za sve $n \geq N$ i za sve $B \in \mathcal{B}$,

$$\sum_{k=o}^{\infty} a_{nk} B(x) = s + B(s_{(n)}), \ |B(s_{(n)})| \leq \varepsilon . \quad (3.17)$$

Stavimo

$$b = \left(\sum_{k=o}^{\infty} a_{nk}\right), \ \sigma_{(n)} = (B(s_{(n)})),$$

pa imamo, dalje, za sve $n \geq N$ i za sve $B\in\mathcal{B}$,

$$b\cdot B(x) = s\cdot e + \sigma_{(n)}, \qquad \|\sigma_{(n)}\| \leq \varepsilon$$

Odavde, za svaku generalisanu granicu $B\in\mathcal{B}$ i za sve $n \geq N$, imamo

$$B(x)\cdot B(b)=s+B(c_{(n)}),\ \|B(c_{(n)})\|\leq\varepsilon.$$

Kako je $\varepsilon>0$ proizvoljno, odavde imamo, za sve $B\in\mathcal{B}$,

$$B(x)B(b)=s.$$

Odavde, prema uslovu 3) iz stava (3.1), imamo, za sve $B\in\mathcal{B}$,

$$B(x)\cdot a=s \quad ili \quad B(x)=\frac{1}{a}s.$$

Prema definiciji (2.A) sledi da niz $x=(x_k)$ skoro konvergira (pri $k\to\infty$) ka $\frac{1}{a}s$, čime je stav (3.3) dokazan. Za $a=1$, ovaj stav se svodi na

STAV(3.4) Za F-regularnu (regularnu) matricu $A=(a_{nk})$ iz F_A-zbirljivosti niza $x=(x_k)$ ka s (pri $k\to\infty$) sledi F-zbirljivost tog niza ka s (pri $k\to\infty$).

U stvari, ovo je Lorentz-ov Theorem 2 iz [22].

3.2 MATRICE GENERISANE SKORO KONVERGENTNIH FUNKCIJAMA

Neka je, sada $t\to f(t)$ L-merljiva i suštinski ograničena funkcija na intervalu $[0,+\infty[$.

Stavimo

$$a^f_{nk}=\frac{1}{n^2}\int_k^{k+n}f(t)dt\ (1\leq k\leq n), =0\ (n<k), n,k=1,2,\ldots,\quad(3.20)$$

Definisali smo trougaonu beskonačnu matricu $A^f=(a^f_{nk})$, generisanu funkcijom $t\mapsto f(t)$, $t\in[0,+\infty[$ na koju vredi

STAV(3.5) Ako je funkcija $t\to f(t)$ $t\in[0,+\infty[$

skoro konvergentna, tada je matrica $A^f=(a^f_{nk})$, generisana tom funkcijom i definisana relacijom (3.20), F-konzervativna. Ako je, još, $F\text{-}\lim_{t\to\infty} f(t)=1$, tada je matrica $A^f=(a^f_{nk})$ F-regularna (regularna).

DOKAZ. Dokaz ovog stava se svodi na proveru uslova 1) - 3) iz stava (3.1).
Zaista, ako je $t \mapsto f(t)$, $t \in [0, +\infty[$ skoro konvergentna funkcija, tada je, po definiciji, ta funkcija ograničena s.s. na intervalu $[0, +\infty[$ i, kako je, prema (3.20),

$$\|A^f\| = \sup\left\{ \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{n^2} \int_k^{k+n} f(t)dt \right| ; n \in N\right\} \leq$$

$$\leq \sup\left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} \int_k^{k+n} |f(t)| \, dt ; n \in N\right\} \leq$$

$$\leq \sup\left\{ \operatorname*{supess}_{0\leq t<+\infty} |f(t)| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} \int_k^{k+n} dt; n \in N\right\} =$$

$$= \sup\left\{ \operatorname*{supess}_{0\leq t<+\infty} |f(t)| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} ; n \in N\right\} =$$

$$= \operatorname*{supess}_{0\leq t<+\infty} |f(t)| < +\infty,$$

sledi da matrica $A^f = (a^f_{nk})$ zadovoljava uslov 1) iz stava (3.1).
Funkcija $t \mapsto f(t)$, $t \in [0, +\infty[$ je skoro konvergentna, a prema (3.20) je $a^f_{nk} = 0$ $(n < k)$ i za $1 \leq k \leq n$

$$\lim_{n\to\infty} a^f_{nk} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \int_k^{k+n} f(t)dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \int_k^{k+n} f(t)dt\right) = 0 \cdot F\text{-}\lim_{t\to\infty} f(t) = 0 .$$

Dakle, imamo

$$\lim_{n\to\infty} a^f_{nk} = 0, \quad k = 1,2,\dots , \text{ tj.}$$

matrica $A^f=(a^f_{nk})$ zadovoljava uslov 2) iz stava(3.1). Prema stavu(2.4), za proizvoljno $\varepsilon>0$, postoji dovoljno velik prirodan broj N, takav da je, za sve $n \geq N$ i za sve $k(=1,2,\dots)$,

$$\frac{1}{n} \int_k^{k+n} f(t)dt = s+s_{nk}, \quad |s_{n,k}|<\varepsilon, \quad s=F\text{-}\lim_{t\to\infty} f(t) .$$

Odavde, prema (3.20), imamo, za sve $n \geq N$,

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a^f_{nk} - s\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \int_k^{k+n} f(t)dt\right) - s\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} (s+s_{n,k}) - s\right| =$$

$$= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} s_{n,k}\right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |s_{n,k}| <$$

$$< \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon = \varepsilon .$$

Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, odavde sledi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{f} = s,$$

tj. matrica $A^f = (a_{nk}^f)$ zadovoljava i uslov 3) iz stava (3.1). Na osnovu stava(3.1) zaključujemo da je matrica $A^f=(a_{nk}^f)$ F - regularna.
Specijalno, ako je $F\text{-}\lim_{t\to\infty} f(t)=1$, tada matrica $A^f=(a_{nk}^f)$ zadovoljava uslove 1) - 3) iz stava(3.2) pa je ona, na osnovu tog stava, F-regularna(regularna). Time je stav(3.5) dokazan.
Na sličan način se dokazuje

STAV(3.6) Ako je niz $x=(x_k)$ skoro konvergentan, tada je matrica

$$a_{nk}^{x} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} x_{k+i} (1 \leq k \leq n), =0(n< k), n,k=1,2,\ldots,$$

F-konzervativna. Ako je, još, $F\text{-}\lim_{k\to\infty} x_k=1$, tada je $A^x=(a_{nk}^x)$ F-regularna (regularna).
Prema stavu(3.5) svaka skoro konvergentna funkcija generiše jednu F-konzervativnu, a time i konzervativnu matricu.
Specijalno, svaka skoro konvergentna funkcija $t\mapsto f(t)$, $t\in [0,+\infty[$, za koju je $F\text{-}\lim_{t\to\infty} f(t) = 1$, generiše jednu F-regularnu (regularnu) matricu.
Klasa svih F-konzervativnih matrica i, specijalno, klasa svih matrica definisanih relacijom (3.20), je uža od klase svih konzervativnih matrica. Ili, što je isto, ne može se svaka konzervativna matrica dobiti pomoću skoro konvergentne funkcije prema (3.20).

Pokazaćemo da se ni svaka trougaona regularna (a time ni F-regularna) matrica ne može dobiti pomoću skoro konvergentne funkcije prema (3.20).

Zaista, neka je $t \mapsto f(t)$, $t \in [0, +\infty[$ skoro konvergentna funkcija, za koju je, još, $\underset{t\to\infty}{F\text{-}\lim} f(t)=1$.

Tada, prema (3.20), imamo, za sve $n,k=1,2,\ldots$,

$$(n+1)^2 a_{n+1,k} = \int_k^{k+n+1} f(t)dt = \int_k^{k+k} f(t)dt + \int_{2k}^{2k+(n+1-k)} f(t)dt =$$

$$= k^2 a_{kk} + (n+1-k)^2 a_{n+1-k,2k}, \quad 1 \le k \le \frac{n+1}{3} ,$$

tj. imamo

$$(n+1)^2 a_{n+1,k} = k^2 a_{k,k} + (n+1-k)^2 a_{n+1-k,2k}, \quad 1 \le k \le \frac{n+1}{3}, \quad (3.22)$$

za sve $n,k=1,2,\ldots$.

Specijalno, za $k=1$, odavde imamo

$$(n+1)^2 a_{n+1,1} = a_{11} + n^2 a_{n,2}, \quad n = 2,3,\ldots . \qquad (3.23).$$

Lako je uočiti da ne mora svaka regularna matrica zadovoljavati uslov (3.22) i, specijalno, uslov (3.23).
Time je tvrdjenje dokazano.

I N D E X

L I T E R A T U R A

[1] Agnew R.P.; Morse A.P.: Extensions of linear functionals, with application to limits, integrals, measures and densities, Ann. Math. 39 (1938) 20-30.

[2] S. Aljančić: Uvod u realnu i funkcionalnu analizu. Izdanje Gradjevinska knjiga Beograd 1968, 245-246.

[3] G. Bachman And L. Narici: Functional analysis, Academic Press, New York, and London 1966.

[4] S. Banach: Operations Lineaires, Monografie Mathematyczne I, Warszawa (1932), 28-29.

[5] A.S. Besicovitch: Almost periodic functions, Dover publications, INC (1954), 46-51.

[6] Bosnaquet L., Chow H.C.: Some remarks on convergence and summability. J. London math. Soc. 32, 73-82 (1957).

[7] N. Burbaki: Integrirovanie (meri, integrirovanie mer) Izdavateljstvo "Nauka" Moskva 1967.

[8] N. Burbaki: Integrirovanie (vektornoe integrirovanie, mera Hara, svertka i predstavljenija) Izdavateljstvo "Nauka" Moskva 1970.

[9] R.G. Cooke: Infinite matrices and sequences spaces, Macmilan and CO London (1950) 89-91.

[10] Cooke R.G.; Barnett A.M.: The "right" value for the generalized limit of a bounded divergent sequence. J. London Math. Soc. 23, 211-221 (1948).

[11] Copping J.: K-matrices which sum no bounded divergent sequence. J.London Math. Soc. 30, 123-127 (1955).

[12] Joseph B.Deeds: Summability of vector sequences. Studia Mathematica, T. XXX (1968), 361-372.

[13] R.Edvards: Funcionaljnij analiz (Teorija i priloženija), Izdavateljstvo "Mir" Moskva 1969, 84-85. 223-224

[14] M.V. Elin: O počti-shodjaščihsja funkcijah, Izvjestija viših učebnih zavedenii (Matematika) No 6 (37) 1963, 49-57.

[15] C. Goffman and G.Pedrick: First course in functional analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965.

[16] Hill I.D.; Sledd W.T.: Summability - (Z,p) and sequences of periodic type. Canadian J.of Math. 16, 741-754 (1964).

[17] Jerison M.: A set of generalized limits of bounded sequences. Canadian Journal of Math. 19 (1957), 145-161.

[18] L.V. Kantorovich and G.P. Akilov: Functional analysis in normed spaces, Macmillan, New York 1964, 205-206.

[19] King I.P.: Almost summable sequences, Proc.Amer. Math. Soc. 17, 1219-1225 (1966).

[20] L.D. Kudrjavcev: Matematičeskij analiz II, Izdavateljstvo, "Viššaja škola" Moskva 1970, 260-262.

[21] Levitan B.M.: Almost periodic functions, Moscow (1953).

[22] G.G. Lorentz: A contribution to the theory of divergent sequences, Acta mathematica 80 (1948), 167-190.

[23] Mazur S: On the generalized limit of bounded sequences. Collog. Math. 2, 173-175 (1952).

[24] Petersen G.M.: Almost convergence and the Buck-Polland property. Proc. Amer. Math. Soc. 11, 469-477 (1960).

[25] A.L. Peressini: Banach limits in vector latices. Studia mathematica, T. XXXV. (1970).

[26] Piranian G.: Convergence fields of rowfinite and rowinfinite Teeplitz transformations. Proc. Amer. Math. Soc. 1, 397-401 (1950).

[27] Schaefer P.: Almost convergent and almost summable sequences. Proc. Amer. Math. Soc. 20, 51-54 (1969).

[28] Tsuchikura T.: On some divergence problems. Tohoku Math. J. (2) 2, 30-39 (1950).

[29] Wilansky A.: Summability matrices coincident with regular matrices. Banach space methods. Proc. Int. Congr. Math., (1950), 424.

[30] Wilansky A.: Zeller K.: Summation of bounded divergent sequences, topological methods. Trans. Amer. math. Soc. 78, 501-509 (1955).

[31] Wintner A.: On arithmetical summation process. Amer. J. Math. 79, 559-574 (1957).

[32] K. Zeler, W. Beckmann: Theorie der Limitierungsverfahren, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg New York 1970, 57-58.