УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

Свом одличном асистенту,
драгој Катици, са успоменом
10.9.1972. проф.

Д. РАШКОВИЋ

МЕХАНИКА
III
ДИНАМИКА

ЧЕТВРТО ИЗДАЊЕ

Научна књига

БЕОГРАД, 1972.

УНИВЕРЗИТЕТСКИ УЏБЕНИЦИ

Актом Комисије за уџбенике Универзитета у Београду бр. 3473 од 12. јула 1955 године, достављено да се штампа као сталан уџбеник за студенте Машинског факултета Универзитета у Београду

За издавача *Драгослав Јоковић*, уредник *Гордана Николић*,
технички уредник *Михаило Јозић*

Штампа: „Нови дани“, Београд — Рузвелтова 10

ПРЕДГОВОР ПРВОМ ИЗДАЊУ

Овај уџбеник садржи предавања из динамике које држим студентима IV семестра Машинског отсека Техничког факултета према новом наставном плану а трећа је књига целог курса механике који се предаје у II *(Статика)*, III *(Кинематика)* и IV семестру *(Динамика)*.

Градиво *Динамике* подељено је у три дела: *Динамику материјалне тачке Динамику система материјалних тачака* и *Динамику крутог тела* те обухвата све динамичке проблеме са ужом разрадом *Малих осцилација материјалне тачке*, с обзиром да студенти слушају у V семестру засебан курс из теорије осцилација, и широм разрадом *Општих принципа механике* (чл. 14) и *Обртања крутог тела око непомичне тачке* (чл. 20), али ипак у обиму доступном математичкој спреми слушалаца.

И овај је део, као и цео курс механике, углавном обрађен у векторском рачуну. Теориска разлагања увек су пропраћена и решеним задацима, који су рађени са студентима на вежбањима или су били испитни. У првом делу (Статика) дато је 145, у другом (Кинематика) 85 а у овом (Динамика) 180, укупно, дакле, 310 задатака, који су тако комбиновани, са једне стране, да слушаоци примене стечено математичко знање а са друге, да их могу користити и у практичном машинству.

Уз цео курс механике дати су као додатак *Основи векторског рачунања: Векторска алгебра* (уз Статику), *Векторска анализа, Примена вектора у диференцијалној геометрији* и *Теорија поља* (уз Кинематику) и *Основи теорије потенцијала* (уз Динамику) све изложено у обиму потребном при проучавању механике. Уз овај део као додатак дати су још: *Моменти инерције* и *Механика сличности*.

Професор Техничког факултета инж. Д. Витас и д-р К. Вороњец прочитали су књигу у рукопису и учинили ми врло корисне примедбе те им се овом приликом најсрдачније захваљујем.

Нухић Фадил, Ђокић Милан и Лагунџија Ахмет, студенти технике, брижљиво су и овога пута уредили цртеже на чему сам им много захвалан.

С обзиром на тежак слог са једне стране и на недовољна техничка средства са друге стране, приликом штампања целог курса механике морале су се савладати многе тешкоће техничке природе.

Колеги инж. Д. Лазаревићу, коректору ове књиге, и овога пута захваљујем на заузимању да књига буде добро опремљена.

12 јула 1948 године
Београд. *Д. Р.*

ПРЕДГОВОР ДРУГОМ ИЗДАЊУ

У другом издању *Динамике*, треће књиге целог курса механике, основне црте остале су исте као и у првом издању, али су извршене допуне појединих чланова, неки су изостављени а додати су нови. Већа је пажња посвећена Лагранжевим једначинама друге врсте и чигреном дејству. Број задатака је смањен, али су додати нови типични задаци ради бољег схватања основних принципа механике.

Додатак је допуњен и *Основама варијационог рачуна*, с обзиром да исти налази све већу примену у многим техничким проблемима.

У првом издању било је техничких недостатака у погледу слога и клишеа, али су захваљујући „Научној књизи“ исти углавном отклоњени.

1 јула 1956 год.
Београд *Д. Р.*

ПРЕДГОВОР ЧЕТВРТОМ ИЗДАЊУ

Ово издање уџбеника *Механика* III — *Динамика* — исто је као и предходно издање, само су исправљене запажене штампарске грешке, отклоњени извесни технички недостаци и градиво допуњено проблемом сателита и ракета. Унет је нов члан **11.3** (коваријатне и контраваријантне једначине кретања).

Ради смањења трошкова штампања уџбеника нису се могле изменити мерне јединице појединих величина у духу Закона о мерним јединицама (Службени лист СФРЈ бр. 45/61), па при читању треба заменити: kg са kp; t са Mp; kgm са kpm; kgcm са kpcm; tm са Mpm, итд.

9. јануара 1972. године

Београд *Д. Р.*

САДРЖАЈ

II ДЕО

ДИНАМИКА СИСТЕМА МАТЕРИЈАЛНИХ ТАЧАКА

III ДЕО

ДИНАМИКА КРУТОГ ТЕЛА

ЛИТЕРАТУРА

Apell — Traité de Mécanique rationnelle. T. II. Paris, 1931
Арновљевић И. — Основи теориске механике, I и III део. Београд, 1947
Aufenrieth — Ensslin — Technische Mechanik. Berlin, 1922
Билимовић А. — Рационална механика I. Београд, 1939 и 1950
Билимовић А. — Рационална механика II. Београд, 1951
Born M. — Die Relativitätstheorie Einsteins. Berlin, 1922
Bouligand G. — Leçons de Géométrie vectorielle. Paris, 1936
Brill A. — Vorlesungen über algemeine Mechanik. München, 1928
Брусић М. — Балистика. Београд, 1927
Бухгольц Н. — Основной курс Теоретической механики I, II. Москва, 1945
Бухгольц — Воронков — Минаков — Сборник задач по Теоретической механике. Москва, 1949
Coe C. J. — Theoretical mechanics a vectorial treatment. New York, 1938
Dobrovolný B. — Tehnická Mechanika. Praha, 1946
Фармаковски В. — *Витас Д.* — Локомотиве. Београд, 1941
Finger J. — Elemente der Reinen Mechanik. Wien, 1886
Galilei G. — Discorsi e dimostrazioni matematiche. Leiden, 1638
Geary A — Lowry H. — Hayden H. — Advanced mathematics for technical students. I. London, 1947
Goursat E. — Cours d'analyse mathématique. III. Paris, 1942
Gray A. and J. — Treatise on Dynamics. London, 1911
Хайкин С. — Механика. Москва, 1947
Handbuch der Physik. Band III. Berlin, 1928
Hartog J.P. den — Mechanical vibrations. New York, 1934 and 1947
Hort W. — Technische Schwingungslehre. Berlin, 1922
Кашанин Р. — Виша математика I и II. Београд, 1949—1950
Kommerell V. und K. — Theorie der Raumkurven und krummen Flächen. Berlin, 1931
Kowalewski G. — Grosse Mathematiker. Berlin, 1939
М. Лаврентьев — Л. Люстерник — Основы вариационного исчисления. I. Москва, 1935
Lagally M. — Vektor-rechnung. Leipzig, 1934
Lamb H. — Dinamics. Cambridge, 1929
Lamb H. — Higher Mechanics. Cambridge, 1929
Marcolongo R. — Theoretische Mechanik - II Dynamik (bearb. von Timerding). Leipzig, 1912
Menge E. — Mechanik-Aufgaben III. Leipzig, 1938
Мещерский И. В. — Сборник задач по теоретической Механике. 21 изд. Москва, 1955
Мешћерски И — Збирка задатака из Теориске Механике (Превод М. Вречка) 2 изд, Београд, 1947
Миланковић М. — Небеска механика. Београд, 1935

Müller W. — Die Fahrdynamik der Verkehrsmittel. Berlin, 1940
Некрасов И. А. — Курс Теоретической Механики, II — Динамика. Москва, 1946
Обрадовић Н. — Основи науке о струјању. Београд, 1937
Ossgood W. L. — Mechanics. New York, 1937
Pöschl Th. — Lehrbuch der Technischen Mechanik. Berlin, 1930, 1949
Prandtl L. — Strömungslehre. Braunschweig, 1942
Prescott J. — Mechanics of particles and rigid bodies. London, 1923
Riemann — *Webers* — Differentialgleichungen der Physik, Braunschweig, 1297
Rosser — *Newton* — *Gross* — Mathematical theory of rocket flight. New York, 1947
Routh E. J. — Die Dynamik der Systeme starrer Körper. I und II. Leipzig, 1898
Serret — *Scheffers* — Lehrbuch der Differ. und Integralrechnung. Leipzig, 1924
Sommerfeld A. — Mechanik. Leipzig. 1943
Суслов К. J. — Теоретическая Механика. Москва, 1946
Суслов К. J. — Теория потенциала и гидродинамика. Том I. Теория потенциала Киев, 1940
Timoshenko S. — *Young D.* — Advanced Dynamics. New York, 1948
Timoshenko S. — Engineering mechanics. New York, 1951
Webster A. G. — The dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies. Leipzig, 1925
Webster A. G. — Partial differential equations of Mathematical physics. Leipzig, 1927
Whittaker E. T. — A treatise on the Analitical dynamics. Cambrigde, 1937
Wittenbauer — *Pöschl.* — Aufgaben aus der Technischen Mechanik I und III. Berlin, 1929, 1921
Wolf K. — Lehrbuch der Tech. Mechanik starrer Systeme. Wien, 1947
Zech — *Cranz* — Aufgabensammlung zur Theoretischen Mehanik. Stuttgart. 1920
Зернов Д. С. — Прикладная механика. Ленинград, 1925
Ценов И. — Аналитична механика. София, 1923
Жардецки В. — Основи теориске физике. Београд, 1941

УВОД

Задатак динамике. — Све до *Галилеја (Galileo Galilei,* 1564—1642 год.) дефиниција силе, као и њена примена, била је чисто *сшашичка.* 1583 год. приликом испитивања закона слободног пада, хоризонталног и косог хица, Галилеј је у делу *„Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze"*, увео појам **убрзања** и довео у везу са силом, тј. проучавао је кретања тела под утицајем силâ. Због тога се он и сматра оснивачем **динамике.** Његова проучавања допунио је сјајни холандски научник *Хајгенс (Christian Huygens,* 1629—1695 год.) законима кретања математичког клатна и увођењем центрифугалне силе *(„Horologium oscilatorium"*, 1638 год.). Маја 1687 год. појавило се знаменито дело енглеског научника *Исака Њушна (Isaac Newton,* 1643—1727 год.) *„Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" („Машемашички йринциџи йриродне филозофије"* или краће *„Принциџије").* Његовом појавом динамика је добила јак ослонац у своме даљем развитку. Своја излагања *Њушн* је поткрепио чисто математичким доказима и створио је нов математички апарат „диференцијални и интегрални рачун" (тзв. „инфинитезимални рачун") који је назвао *„шеорија флуксија."* 10 децембра 1672 год. упутио је *Колинсу (Collins),* члану Краљевског друштва (ранг Академије наука), свој рад о методама тангенти који Колинс није објавио. Истовремено је и немачки научник *Лајбниц (Gottfried Wilhelm Leibniz,* 1646—1716 год.) радио на овом математичком пољу, те је било велике научне полемике око приоритета ове теорије, али је комисија Краљевског друштва објавила 1713 год. књигу *„Преписка Колинса и других о новој анализи"*, којом се утврђује Њутнов приоритет према Лајбницу.[1]

Прву систематску примену анализе у динамици увео је *Ојлер (Leonhard Euler,* 1707—1783 год.) у делу *„Mechanica sive motus scientia"* (1736 год.) а продубио је француски научник *Даламбер (Jean Le Rond d'Alembert,* 1717—1783 год.) делом *„Traité de Dynamique"*, (1743 год.) да-

---

[1] Види *Вавилов С. И.: Исак Њушн.* Издање Академије наука СССР. Москва 1945 год.

јући општу методу за постављање динамичких једначина и њихова решења. Он је први сјединио статику и динамику. На крају, француски научник *Лагранж* (*Joseph Louis Lagrange*, 1736—1813) у делу *„Mécanique Analytique“* (1788 год.) увео је чисто аналитичку методу у механици. Целокупну статику базирао је на тзв. *„Принципу могућих (виртуалних) померања“* и сјединивши овај са Даламберовим принципом поставио је основни принцип механике *„Лагранж-Даламберов принцип“* из кога се могу извести сви закони механике.

Даљи развој ове механике, основане на Њутновим принципима, тзв. *класичне механике*, ишао је својим током све до пред крај прошлог века до открића померања перихела путање планете Меркур и извесних физичких појава које се нису могле објаснити помоћу класичне механике. Тада се појавила *Ајнштајнова* (*Albert Einstein*, 1879) *Теорија релативитета* којом је модифициран Њутнов закон о општој (универзалној) гравитацији.

Међутим, наш курс обухвата само класичну механику:

Задатак је динамике да испитује кретања материјалних тела под утицајем сила. Док су *геометрија* и *кинематика* испитивале кретања геометриских облика не водећи рачуна о њиховој материјалности, прва чак ни о времену, *динамика води рачуна и о материјалности тела и о времену у коме се кретање врши.* Сви задаци *динамике* могу се поделити у две класе: *прва класа обухвата проблеме одређивања сила које производе дата кретања*, *друга*, пак, *обухвата проблеме одређивања кретања када су познате силе, или системи сила, које производе кретања.* Специјалан случај кретања је *мировање*, када је брзина једнака нули, те испитујемо равнотежу тела под утицајем сила̂. То су, као што знамо, проблеми *статике*, па се она може сматрати саставним делом *динамике.*

Њутнови закони (принципи). — У *статици* смо *силу* узели за *основни елемент* као *узрок* који може да промени стање кретања или мировање тела. У *кинематици* смо као основне појмове увели *просторне геометриске односе* (облик и запремину) и *време.* У *динамику*, пак, уводимо један сасвим нов основни појам — *масу.* Као што са просторним облицима и временом упоређујемо бројеве (скаларе) који карактеришу облик тела или време, можемо и са сваким материјалним телом упоредити број који одговара материјалности тела. Тај број који зависи од материјалности тела назива се *маса.* Он је увек позитиван број. Да бисмо могли масе упоређивати мора се изабрати једна маса за *основну јединицу.* Све остале масе могу се тада упоредити са њом. За јединицу масе узима се *грам масе* (за разлику од *грама тежине* ова се основна јединица обележава са gr*). Он је хиљадити део масе једног одређеног предмета који се чува у *Међународном*

Galileo Galilei (1564 — 1642)

Слика узета из дела „Discorsi e dimostrazioni“ (латински текст) 1699

заводу за мере и тежине у Севру код *Париза.* Маса тог предмета (тзв. *„еталон-килограма“*) врло је блиска маси кубног десиметра воде на $+4^{0}$ C.

На тај су начин у *механику* уведени основни појмови који карактеришу: *просторне облике, материјалност тела* и *време* у коме се дешавају промене тела, тј. постоје основне јединице[1]: *дужине, времена* и *масе* (cm, sec и gr*). Све су остале јединице изведене из ових. Према томе и сила није више основни појам већ се *дефинише* помоћу *Њутнових закона* или *аксиома* (тзв. **закона о кретању — „Axiomata sive leges motus“**) изложених у његовим *„Принципијама“* (у Уводу) којих има три и које гласе:

I закон: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

Свако тело остаје у стању мировања, или равномерног (једноликог) и праволиниског кретања док под дејством сила не буде принуђено да то своје стање промени.

Овај први закон назива се и *принцип инерције.* Он је само један део дефиниције силе и показује *могућност постојања силе.* Сила увек постоји када тело мења своје стање кретања. Год. 1610 Галилеј је формулисао законе слободног пада до којих је дошао посматрањем, експериментом и размишљањем. При томе је запазио да ће тело на које не дејствује никаква сила остати у сталном мировању или ће се, ако се већ креће, кретати непрестано истом брзином. Разлог због кога тело не мења своје стање кретања назвао је *инерцијом.* Да бисмо савладали инерцију тела и покренули га из стања мировања, или му пак променили брзину ако се креће, морамо употребити силу. *Инерција се,* дакле, *може схватити као отпор промени стања кретања који потиче од материјалности тела,* јер уколико је маса тела већа мора се употребити и већа сила да би се променило стање кретања.

Како положај тачке и њене путање одређујемо у односу на један координатни систем то и приказ принципа инерције зависи од тог система. Системи у којима важи принцип инерције зову се *инерцијални координатни системи* или *Галилејеви триједри.* То су сви координатни системи који се крећу *транслаторно, праволиниски* и *једнолико.* Такав је напр. *триједар везан за површину наше Земље* коме су две осе у хоризонталној равни а трећа наперена ка зениту. Тај систем изводи три кретања: обртно око Земљине осе, обртно заједно са Земљом у кружењу око Сунца и транслаторно заједно са целим нашим планетским системом. Због великог удаљења звезда некретница друга се два кретања могу сматрати праволиниским а и кружни лук који опише

---

[1] *Апсолутни* (физикални) *систем мера* (CG*S систем).

Земља у току свог дневног обртања може се сматрати правом линијом за бесконачно мали временски размак у коме посматрамо кретање. Међутим, код посматрања извесних кретања, као напр., пада из врло велике висине, морамо узети у обзир и Земљино обртање, те према томе први координатни систем није више инерцијалан за ова кретања, већ узимамо други координатни систем коме је координатни почетак у Земљином средишту а осе наперене у правцу трију звезда некретница. Можемо сматрати да се овај систем креће транслаторно, праволиниски и једнолико. Пошто на овај систем утиче годишње Земљино кретање то се у *астрономији*, при проучавању кретања небеских тела (*небеска механика*), узима нови инерцијални систем у средишту нашег планетског система које је врло близу средишта Сунца (*Коперников* триједар).

Галилеј је такође при својим опитима запазио да једна сила одређеног интензитета, правца и смера даје једном истом телу увек исто убрзање. На основу тога је Њутн поставио свој други закон кретања.

II закон: Mutationem motus proportionalem esse vi motrici[1] impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Промена кретања пропорционална је сили која дејствује на тело и врши се у правцу силе.

Под *„променом кретања“* (*mutationem motus*) Њутн подразумева *производ масе и убрзања, ma*. На тај начин може се сила претставити производом масе и убрзања које добива та маса услед дејства силе и, у садашњем векторском обележавању, пише се у облику

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}} \qquad (1)$$

Према томе је, по *Кирхофу* (*Robert Kirchoff*, 1824—1887), маса коефицијент пропорционалности између кинематичког елемента — *убрзања* — и динамичког (кинетичког) — *силе*.

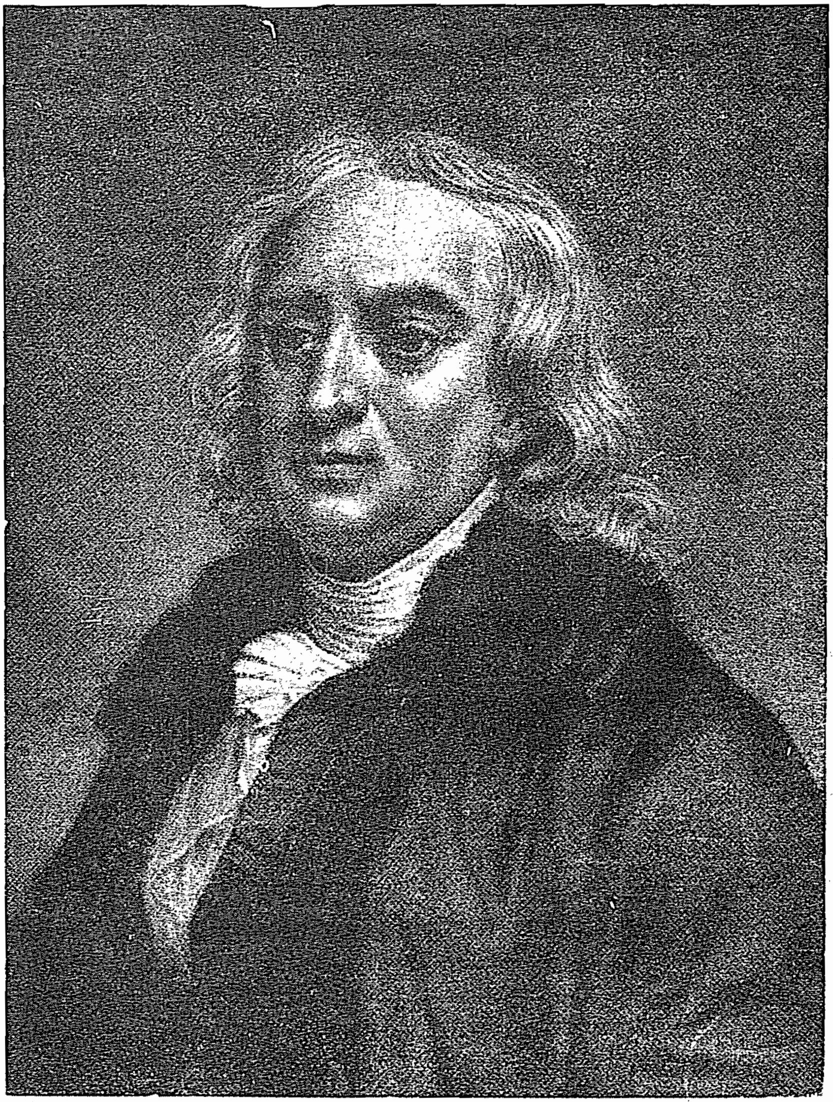
Ако на тело не дејствују спољашњи утицаји — силе — онда из горње једначине, пошто је маса увек позитиван број, мора бити убрзање једнако нули, $\vec{a} = 0$, односно, брзина је константна, $\vec{v} = \text{const.}$, па се тело креће константном брзином и праволиниски. У овом закону садржан је и принцип инерције.

Спољашњи утицаји који мењају стање кретања тела долазе од других тела. Кад једна сила дејствује на две материјалне тачке маса m_1 и m_2 даће им и различита убрзања према једначини

$$F = m_1 a_1 = m_2 a_2$$

---

[1] *Vis motrix* је *активна сила* (Newton, Principia, I, def. 8).



Isaac Newton (1643 — 1727)

па следи овај однос између маса

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} \qquad (1')$$

тј.: *Масе двају тела обрнуто су сразмерне убрзањима тела* (*Ernst Mach*, 1838—1916 године). Према овоме можемо и масе упоређивати. *Две су масе једнаке ако међусобно дају иста убрзања.*

Две *различите силе* F_1 и F_2 саопштавају једнаким масама различита убрзања a_1 и a_2 која, према једначини (1), стоје у односу

$$a_1 : a_2 = F_1 : F_2 \qquad (1'')$$

те су *сразмерна силама.*

Ако две *различите масе* добију од различитих сила иста убрзања, онда, према (1), добивамо однос

$$F_1 : F_2 = m_1 : m_2 \qquad (1''')$$

који показује да су *силе сразмерне масама.*

Пошто је сила дефинисана производом масе (скалара) и убрзања (вектора), то је она *вектор* чији се смер поклапа са смером убрзања. Знајући масу тела и убрзање које она добије услед дејства силе, можемо упоређивати и силе. За *јединицу силе* узима се сила која на јединицу масе (gr*) дејствује убрзањем 1 cm sec^{-2}. Ова се сила зове *дин* (dyn). Већа јединица је *Megadyn* (10^6 dyn); то је сила која маси 1 kg* даје убрзање 10 msec^{-2}. У практичном апсолутном систему мера MT*S *(метар — тона маса — секунд)* јединица силе је *стен (sthène)* који износи 10^8 dyn-а или 10^2 Megadyn-а. Стен је сила која маси од 1 тоне даје убрзање 1 msec^{-2}.

У електротехници, а према одлуци Међународне електротехничке комисије (*Commission Electrotechnique Internationale*, скраћено CEI) усвојен је тзв. *Ђорђијев (Giorgi) апсолутни практични систем мера* са основним јединицама: *метром, килограмом масе* и *секундом* (MK*S систем). Јединица силе у овом систему је *њутн* (N) који износи 10^5 dyn-а и претставља силу која маси од 1 kg* даје убрзање 1 m/sec^2.

Пошто је сила вектор то је, као што знамо из статике, одређена са три податка: *интензитетом (величином), правцем и смером.* За силе не важе, сем у специјалним случајевима, закони сабирања бројева, те је Њутн у *Додатку* уз други закон *(Corollarium)* дао и начин сабирања сила:

Corpus viribus conjuctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere quo latera separatis.

Под дејством удружених сила тело ће описивати дијагоналу паралелограма у истом времену у коме би дејством појединих сила описивало стране.

Ово је познати закон о *паралелограму сила*, односно *закон сабирања вектора*. Као што смо у статици навели, овај закон паралелограма поникао је из искуства, те се с правом може сматрати *аксиомом*.

Из дефиниције односа маса (II закон) следи

$$m_1 \vec{a}_1 = m_2 \vec{a}_2$$

односно према дефиницији силе $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, тј. сила којом маса m_1 дејствује на масу m_2 једнака је по интензитету и правцу сили којом маса m_2 дејствује на масу m_1 само је супротног смера. Ову чињеницу из искуства Њутн је изразио у трећем закону.

III закон: Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

Дејству (акцији) увек је једнако противдејство (реакција) или, дејства двају тела једног на друго увек су једнака и супротно су наперена.

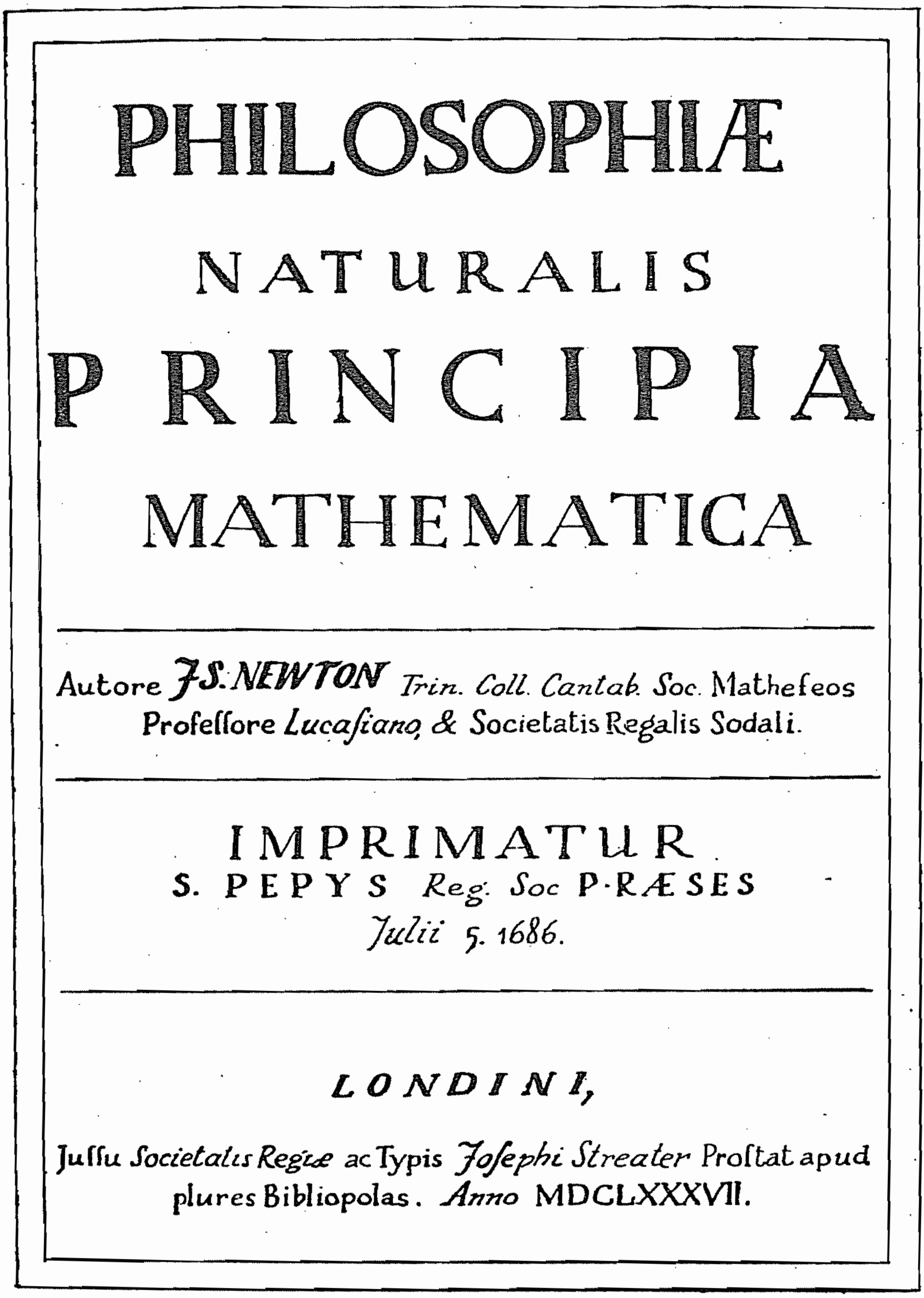
Овај закон допуњује први закон (*принцип инерције*) који показује могућност постојања силе. Да би сила постојала мора се показати тело (*извор силе*) на које дејствује сила истог интензитета и правца али супротног смера. Према овоме могу се силе класифицирати у две врсте: за *силе прве врсте* у стању смо увек да покажемо *извор* силе а за друге врсте не. *Само силе прве врсте припадају класичној механици.*

Сва три Њутнова закона служе, дакле, *да се њима тачно дефинише сила. Први закон — закон инерције показује могућност постојања силе, други закон показује могућност мерења — упоређивања — сила и са додатком показује како се може оперисати силама. Трећи, пак, закон показује извор силе без кога она не може да постоји.*

Трећи Њутнов закон доводи до појма *тежине тела*. Привлачна сила између Земље и свих тела око ње зове се *сила* (*Земљине*) *теже*. Правац те силе је вертикалан. Она даје свим телима, без обзира на њихову масу, стално убрзање које се зове *убрзање* (*Земљине*) *теже*. Под тежином тела подразумева се, према II закону, производ масе тела и убрзања теже g, тј. $G = m\,g$.

Како Земља нема облик кугле већ сфероида (геоида) то сила теже није константна, па је на половима већа него на екватору. *Због тога се тежина тела мења али му је маса непроменљива.* И убрзање је, дакле, променљиво. На половима, према огледима, износи $g = 983{,}15$ cm sec^{-2}, на екватору $g = 978{,}07$ cm sec^{-2}, а на географској ширини 45^0 је $g = 980{,}62$ cm sec^{-2} Ако је ψ географска ширина места онда је промена убрзања g са том ширином дата емпиричким изразом (за надморску висину):

$$g_\psi = 9{,}832\,[1-(1/189{,}3)\cos^2\psi]\ \mathrm{m\,sec}^{-2}.$$



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

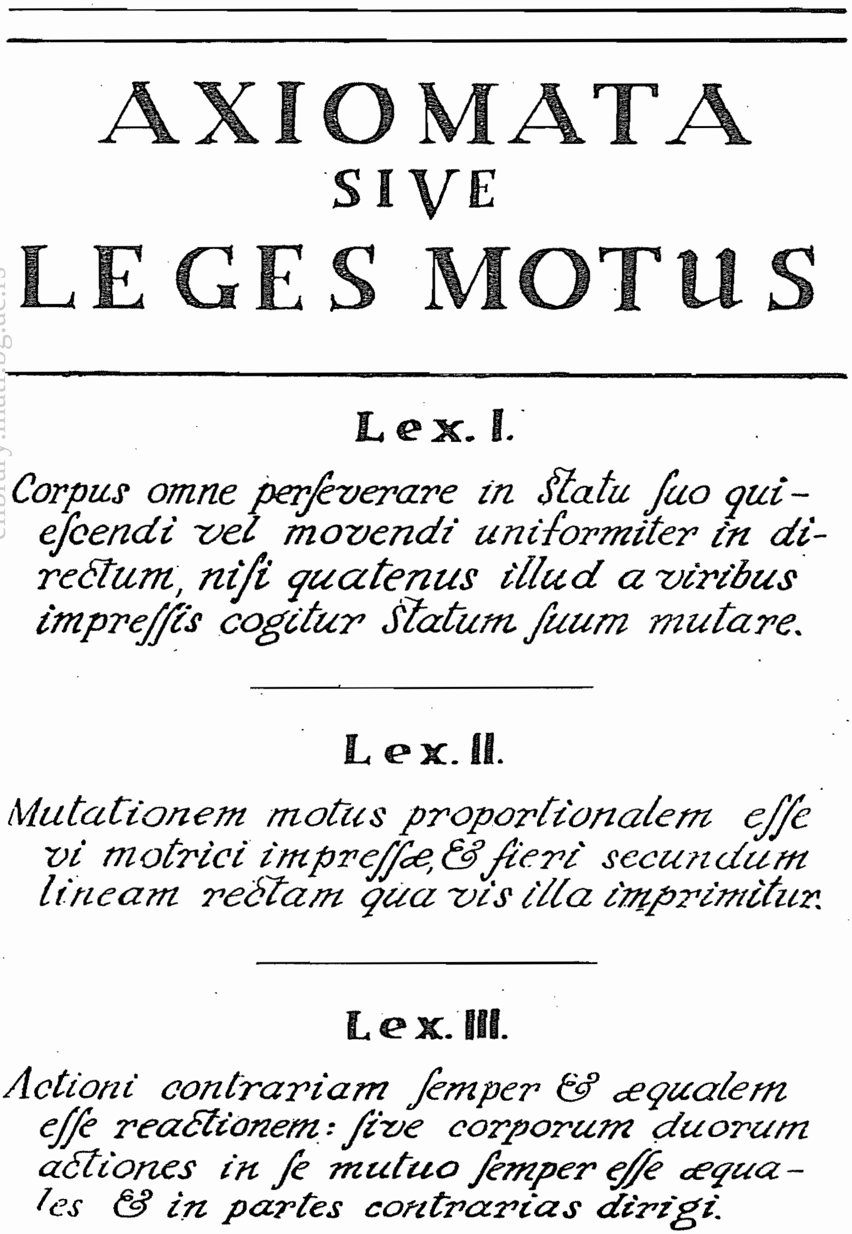
Autore *JS. NEWTON* *Trin. Coll. Cantab.* Soc. Matheſeos
Profeſſore *Lucaſiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR
S. PEPYS *Reg. Soc* P·RÆSES
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Juſſu *Societatis Regiæ* ac Typis *Joſephi Streater* Proſtat apud
plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Насловна страна Њутнових »Принципија«
Цртеж према оригиналу израдио Милосав Драгојевић студ. технике



AXIOMATA
SIVE
LEGES MOTUS

Lex. I.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus illud a viribus impreſſis cogitur ſtatum ſuum mutare.

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem eſſe vi motrici impreſſæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Lex. III.

Actioni contrariam ſemper & æqualem eſſe reactionem: ſive corporum duorum actiones in ſe mutuo ſemper eſſe æquales & in partes contrarias dirigi.

Њутнови закони кретања

(Lex III у оригиналу налази се на следећој страни али је из техничких разлога стављен на један клише)

Цртеж према оригиналу израдио Милосав Драгојевић студ. технике

Јединица за мерење тежине јесте *грам* (gr). То је сила која једном граму масе даје убрзање теже. Између њега и dyn-а, за географске ширине око 45°, постоји овај однос

$$1\ \mathrm{gr} = 981\ \mathrm{gr}^{*}\ \mathrm{cm\ sec}^{-2} = 981\ \mathrm{dyn}.$$

Знајући ову релацију могу се извести и следећи односи:

$$1\ \mathrm{kg} = 0{,}981\ \mathrm{Megadyn},\quad 1\ \mathrm{dyn} = 1{,}02\ \mathrm{mgr},\quad 1\ \mathrm{Megadyn} = 1{,}02\ \mathrm{kg}.$$

Како је тежина $G = mg$, то маса (m) зависи од положаја тела на Земљи и може да служи као карактеристика његове материјалности у томе одређеном положају. Због тога се ова маса назива и *тежинском* или *гравитационом масом*. Међутим, ако на тело тежине G дејствује сила F, она му саопштава убрзање a, па према (1‴) добивамо однос $a : g = F : G$. Сада маса (m) јесте *инертна маса* и служи као мера инертности тела. Многобројним опитима је утврђено да су ове две величине једнаке (*принцип еквиваленције Ајнштајнове Опште теорије релативитета*).

На основу горњег видимо да се мерење маса своди на мерење тежина дотичних тела.

Инертна маса је константна величина само у случају ако су брзине кретања мале у поређењу са брзином светлости. Међутим, ако су и брзине велике онда закон пропорционалности између силе и убрзања више не важи, пошто се тада убрзања „смањују". Останемо ли и даље при томе да основна динамичка једначина (1) важи, онда из ње следи да се при $F = const.$ маса „повећава".

Како су остварене брзине крутих тела мале у поређењу са брзином светлости то се у класичној (Галилеј-Њутновој) *механици задржава да је маса константна величина.*

Све величине у механици су *изведене* из *основних величина* (дужине, времена и масе) извесним *рачунским операцијама*. Образац који показује на који је начин добивена изведена величина из основних, назива се *димензиони образац* (*Fourier*, 1768—1830). Такви су димензиони обрасци

$$\dim v = [\mathrm{LT}^{-1}],\quad \dim a = [\mathrm{LT}^{-2}],\quad \dim F = [\mathrm{MLT}^{-2}].$$

Ако су J_l, J_m, J_t *јединице основних величина* онда се резултати мерења неких величина изражавају са

$$l = \lambda J_l,\quad m = \mu J_m,\quad t = \tau J_t,$$

где су λ, μ и τ неименовани бројеви. Нека је механичка величина дефинисана обрасцем

$$N = l^p m^q t^r,$$

онда је њена бројна вредност

$$N = (\lambda^p \mu^q \tau^r)(J_l^p J_m^q J_t^r) = n J_N,$$

где је n неименовани број који показује колико се пута јединица J_N садржи у величини N. Узмемо ли уместо јединица J_i нове јединице J_i' добићемо да су

$$n' = \lambda'^p \mu'^q \tau'^r,\qquad N = n' J'_N$$

те постоји однос

$$n : n' = J'_N : J_N.$$

Напр., у CG*S систему су основне јединице cm gr*sec па је јединица силе dyn. Међутим, у систему MK*S су основне јединице m kg*sec па је $n : n' = 10^5$ што значи да је јединица $J_{F'}$ већа 10^5 пута од јединице J_F (1 њутн је 10^5 dyna).

Подела динамике. — У геометрији су познати *геометриски облици: тачка, линија, раван* и *тело*. У кинематици смо проучавали кретања таквих геометриских облика не водећи рачуна о њиховој материјалности. У динамици се, као правој науци о кретању, мора водити рачуна и о материјалности тела, уводећи масу као меру њихове материјалности, не упуштајући се у саму структуру материје. Према распореду маса материјална тела се јављају као: *материјална тачка*, *материјална линија* (или краће *штап*), *материјална раван* (или краће *танка плоча*) и *материјално тело* (краће *тело*).

Код транслаторног кретања тела све његове тачке имају исте брзине, па ће се кретање познавати ако се познаје кретање само једне његове тачке — *тежишта тела*. Можемо сматрати да је у овом случају сва маса тела концентрисана у тежишту, те је оно *материјална тачка*. *Материјална тачка је*, дакле, *заступник транслаторног кретања тела*.

Линеарно распоређене масе образују *штап* (*прав* или *крив*). Код штапа су попречне димензије мале у поређењу са дужином. *Равански* распоред маса образује *танку плочу* (краће *плочу*). Код ње је дебљина мала према двема другим димензијама.

Просторни распоред маса образује *систем маса* или *материјални систем*. Распоред маса може бити двојак: *дискретан* и *континуалан*. У првом су случају масе система на коначним растојањима и образују *систем материјалних тачака*. У другом случају масе образују *тело*. Збир свих „елементарних маса" даје *масу тела*. Код система материјалних тачака поједине масе мењају своје релативне положаје једне у односу на друге. Када су растојања појединих тачака тела непромењљива под утицајем сила тело се назива *круто*; у противном је *чврсто* или *деформабилно*. Класична механика проучава кретања крутих тела, док у природи постоје само *чврста тела*.

Према распореду маса динамику делимо у три дела: *динамику материјалне тачке, динамику система материјалних тачака* и *динамику крутог тела*. Уз динамику обично иде још и додатак *геометрија маса* која изучава просторне односе система скалара, тј. тачака којима одговарају скалари — масе. Она испитује линеарне и квадратне моменте маса *(моменте инерције)* за тачку, осу или раван. Део који се односи на одређивање средишта система скалара — маса (тежишта) — дат је у статици, а део који испитује квадратне моменте површине равних фигура *(моменте инерције равних површина)* припада *отпорности материјала*.[1]

---

[1] Д. Рашковић — Отпорност материјала. Београд, 1955. Додатак.

I ДЕО

ДИНАМИКА МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ

1. — ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ И ЊИХОВИ ИНТЕГРАЛИ

Када се круто тело креће транслаторно можемо га заменити кретањем једне његове тачке у којој сматрамо да је сажета целокупна маса тела. Ова тачка назива се *материјална тачка*. Према томе се проблем транслаторног кретања крутог тела, под утицајем силе $\vec{F}$ (или система сила који се своди на *главни вектор* — *резултанту* — са нападном тачком у тежишту) своди на кретање материјалне тачке. Ова тачка је одређена својим положајем у простору, тј. својим координатама у односу на један стални изабрани координатни систем, и својом масом. Да бисмо могли проучити кретање материјалне тачке, што је задатак динамике материјалне тачке, морамо *успоставити везу* између силе која дејствује на материјалну тачку и *убрзања* које тачка добије од ње. Како смо у кинематици тачке убрзања разлагали у компоненте дуж координатних оса разних координатних система, то морамо дати, за исте координатне системе, и компоненте силе која дејствује на материјалну тачку.

1.1 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ

а) **Диференцијална једначина кретања у векторском облику.** — Ако је положај материјалне тачке масе m одређен вектором положаја $\vec{r}$ у односу на једну сталну тачку у простору O, онда је, на основу другог Њутновог закона, сила која дејствује на материјалну тачку дата изразом

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}} \qquad (1)$$

где је m маса — скалар — коефицијент сразмере силе и убрзања $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$.

Ова једначина назива се *диференцијална једначина кретања материјалне тачке изражена у векторском облику.* Како сила, у општем случају, може да зависи од положаја материјалне тачке, њене брзине и времена, то је

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) \tag{1'}$$

па је том зависношћу успостављена веза између геометриско-кинематичких величина и параметра t (времена) са динамичком величином — силом.

Ова векторска једначина је *основна једначина динамике* и њој, као што знамо, одговарају за просторни координатни систем *три*, а за координатни систем у равни *две* скаларне диференцијалне једначине.

b) **Диференцијалне једначине кретања за Декартове координате.** — Из векторске једначине (1), с обзиром на (1'), добићемо три скаларне диференцијалне једначине за Декартове правоугле координате облика:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= X(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; x, y, z; t) = (\vec{F}, \vec{\mathrm{i}}), \\ m\ddot{y} &= Y(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; x, y, z; t) = (\vec{F}, \vec{\mathrm{j}}), \\ m\ddot{z} &= Z(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; x, y, z; t) = (\vec{F}, \vec{\mathrm{k}}), \end{aligned} \tag{2}$$

где су X, Y, Z координате силе $\vec{F}$, а $\vec{\mathrm{i}}$, $\vec{\mathrm{j}}$, $\vec{\mathrm{k}}$ ортови тих оса.

Ове једначине претстављају *систем диференцијалних једначина кретања материјалне тачке у Декартовом координатном систему.*

c) **Диференцијалне једначине кретања за цилиндричке координате.** — Кад убрзање материјалне тачке разложимо у три ортогонална правца: *радијалан, циркуларан* и *аксијалан* (*Кин.,* **чл. 4.3** *c*), биће и систем диференцијалних једначина у цилиндричком координатном систему:

$$\begin{aligned} & m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = m(\ddot{x}\cos\varphi + \ddot{y}\sin\varphi) = (\vec{F}, \vec{\mathrm{r}}_0) = F_r, \\ & \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = m(\ddot{y}\cos\varphi - \ddot{x}\sin\varphi) = (\vec{F}, \vec{\mathrm{c}}_0) = F_c, \\ & m\ddot{z} = (\vec{F}, \vec{\mathrm{k}}) = F_z, \end{aligned} \tag{3}$$

где су F_r, F_c, F_k *радијална, циркуларна* и *аксијална* координата силе $\vec{F}$, а $\vec{\mathrm{r}}_0$, $\vec{\mathrm{c}}_0$ и $\vec{\mathrm{k}}$ ортови координатних оса.

d) **Диференцијалне једначине кретања за сферне координате.** — Систем диференцијалних једначина кретања у сферном координатном систему (према *Кин.* **чл. 4.3** *d* — образац 78) биће:

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\psi}^2 - \rho\dot{\varphi}^2\cos^2\psi) = (\vec{F}, \vec{\rho}_0) = F_\rho,$$

$$m\left(\frac{1}{\rho}\frac{d(\rho^2\dot{\psi})}{dt} - \rho\dot{\varphi}^2\cos\psi\sin\psi\right) = (\vec{F}, \vec{\nu}_0) = F_\nu, \tag{4}$$

$$m\left(\frac{1}{\rho\cos\psi}\frac{d(\rho^2\dot{\varphi}\cos^2\psi)}{dt}\right) = (\vec{F}, \vec{c}_0) = F_c,$$

где су F_ρ, F_ν, F_c *радијална*, *меридионална* и *циркуларна* координата силе $\vec{F}$, а $\vec{\rho}_0$, $\vec{\nu}_0$ и $\vec{c}_0$ ортови оса.

e) **Природне диференцијалне једначине кретања.** — За природни координатни систем можемо такође написати систем диференцијалних једначина према природним координатама убрзања (*Кин.*, **чл. 4.3** *e* — образац 81):

$$m\frac{dv}{dt} = (\vec{F}, \vec{T}) = F_T; \qquad m\frac{v^2}{R} = (\vec{F}, \vec{N}) = F_N; \qquad 0 = F_B. \tag{5}$$

Овде су F_T; F_N и F_B *природне* (*Ојлерове*) *координате силе* $\vec{F}$.

Прва компонента — *тангенцијална сила* — утиче на промену величине брзине. Ако је она једнака нули ($F_T = 0$) и убрзање a_T је једнако нули, па је брзина константна, те је *кретање једнолико* ($v = const.$). Ако је друга компонента — *нормална* (*центрипетална*) *сила* — једнака нули ($\vec{F}_N = 0$), полупречник прве кривине (флексије) једнак је нули па је кретање *праволиниско*.

f) **Диференцијалне једначине кретања за генералисане координате.** — С обзиром на пројекције убрзања на осе ортогоналног генералисаног координатног система (*Кин.*, **чл. 4,3** *g*, обр. 91), добивамо и пројекције силе на те осе

$$\frac{m}{A_i}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial\left({}^1/_2\, v^2\right)}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial\left({}^1/_2\, v^2\right)}{\partial q_i}\right] = F_{q_i} = (\vec{F}, \vec{T}_i). \tag{6}$$

Овде су F_{q_i} координате силе, A_i Ламеови коефицијенти, v^2 квадрат брзине. Помоћу ових образаца (6) можемо извести и обрасце (2, 3, 4) за наведене координатне системе који су ортогонални.

1.2 ИНТЕГРАЛИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА КРЕТАЊА

За познавање кретања потребно је познавати *почетно кинематичко стање тачке*, тј. *почетни положај*, у тренутку t_0 од кога посматрамо кретање, и *почетну брзину*. Сем тога познајемо силу која дејствује на материјалну тачку у сваком тренутку. Проблем динамике материјалне тачке састоји се у томе да се из датих података: *почетног положаја, почетне брзине* и *дате силе*, напише *коначна једначина кретања материјалне тачке*. Овај се проблем решава *интеграљењем* диференцијалне једначине кретања изражене у векторском облику

$$m\ddot{\vec r} = \vec F(\vec r, \vec v, t) \tag{7}$$

или одговарајућег *система скаларних диференцијалних једначина* чији облик, као што смо видели у претходном члану, зависи од избора координатног система.

Пошто је диференцијална једначина другог реда то ће *две квадратуре* увести и *две* произвољне векторске константе којима у општем случају одговарају *шест скаларних интеграционих константи*. Ове ћемо константе одредити из **почетних услова кретања,** тј. *да у почетном тренутку материјална тачка има одређени положај и одређену брзину.* Када у систему једначина произвољне константе сменимо њиховим одређеним вредностима добићемо *коначне једначине кретања материјалне тачке у векторском или скаларном облику.* Тако би напр. биле коначне једначине кретања материјалне тачке изражене у Декартовом координатном систему:

$$\begin{aligned} x &= f_1(t, t_0;\ x_0, y_0, z_0;\ \dot x_0, \dot y_0, \dot z_0)\,, \quad z = f_3(t, t_0;\ x_0, y_0, z_0;\ \dot x_0, \dot y_0, \dot z_0)\,. \\ y &= f_2(t, t_0;\ x_0, y_0, z_0;\ \dot x_0, \dot y_0, \dot z_0)\,, \end{aligned} \tag{7'}$$

Ако је, пак, позната коначна једначина кретања у облику $\vec r = \vec r(t)$ а тражи се сила која производи то кретање, онда ћемо је одредити према II Њутновом закону ако нађемо израз за убрзање

$$\vec F = m\ddot{\vec r}(t)\,. \tag{8}$$

Пошто између вектора положаја, брзине и времена постоје везе

$$\vec r = \vec r(t)\,; \qquad \vec v = \dot{\vec r}(t)\,,$$

десна страна једначине (8) може се изразити у облику $\vec F = \vec F(\vec r, \vec v, t)$ који се поклапа са изразом (1'), *јер сила у општем случају може да зависи од положаја и брзине материјалне тачке као и од времена.*

Често се израз за силу може добити у разним облицима; од свих њих треба изабрати, према III Њутноњом закону, онај *који показује и извор силе.*

2. — ПРАВОЛИНИСКО КРЕТАЊЕ МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ

2.1 ОПШТИ ПРОБЛЕМ

Као што смо у кинематици тачке (**чл. 2.4**) видели, коначна једначина кретања материјалне тачке по правој L оријентисаној ортом $\vec{u}$ (сл. 1), дата је векторском једначином

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + s(t)\,\vec{u}, \qquad (9)$$

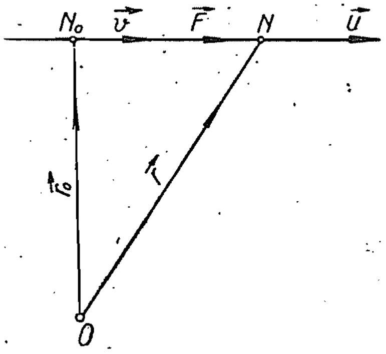
где су $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$ вектори положаја тачака N_0 и N, а s *пређени пут* тачке N у односу на компаративну тачку N_0. Брзина и убрзање покретне тачке биће

$$\vec{v} = s'(t)\,\vec{u}, \quad \vec{a} = s''(t)\,\vec{u}, \qquad (10)$$

па је према II Њутновом закону сила

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,s''(t)\,\vec{u}. \qquad (11)$$

Како је, пак, почетна брзина дата изразом $\vec{v}_0 = s_0'\,\vec{u}$, то је сила $\vec{F}$, која дејствује на материјалну тачку, колинеарна са вектором почетне брзине ако његов интензитет није једнак нули. *Правац силе $\vec{F}$, као и правац почетне брзине $\vec{v}_0$, поклапа се са правцем путање.*



Сл. 1. — Праволиниско кретање материјалне тачке

Кад на материјалну тачку масе m дејствује сила $\vec{F} = m\lambda\,\vec{u}$, где је λ произвољан скалар а $\vec{u}$ орт сталног правца који се поклапа са правцем почетне брзине $\vec{v}_0$, и ако $v_0 \neq 0$, тада је кретање *праволиниско* по правој оријентисаној тим ортом $\vec{u}$. Усвојимо у тачки N_0 координатни почетак Декартовог правоуглог координатног система $Oxyz$ и Ox осу изаберимо тако да пада у правац орта $\vec{u}$ а у смеру почетне брзине, тј. смеру дејства силе, онда су диференцијалне једначине кретања материјалне тачке

$$m\ddot{x} = X = ma\,, \quad m y = Y = 0\,, \quad m z = Z = 0\,.$$

Интегралећи два пута две последње диференцијалне једначине а за почетне услове ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$, $\dot{y} = \dot{z} = 0$), добићемо

$$y = C_1 = 0\,, \quad \dot{z} = C_2 = 0 \quad \text{и} \quad y = C_3 = 0\,, \quad z = C_4 = 0\,.$$

Једначине $y = 0$, $z = 0$ показују да је *кретање праволиниско по Ox оси*, па основна динамичка једначина гласи

$$\boxed{m\ddot{x} = X} \tag{12}$$

Двоструким интеграљењем ове диференцијалне једначине, када је позната природа силе, добићемо закон пута у коначном облику $x = f(t)$. Уопште узев, сила је *променљива* и зависи од пређеног пута, брзине покретне тачке и времена t, тј. диференцијална једначина добива облик

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$$

па је њена квадратура у затвореном облику отежана или немогућна нарочито ако сила зависи од свих независно променљивих величина.

Интегралећи горњу једначину добићемо општи интеграл $x = x(t, C_1, C_2)$, где су C_1 и C_2 интеграционе константе. Како је $\dot{x} = \dot{x}(t, C_1, C_2)$ то из ове две једначине можемо добити *два прва интеграла*

$$f_1(t, x, \dot{x}) = C_1\,, \qquad f_2(t, x, \dot{x}) = C_2\,.$$

Ради одређивања закона датог кретања морамо знати *почетне услове кретања*, па су интеграционе константе

$$C_1 = f_1(0, x_0, \dot{x}_0)\,, \qquad C_2 = f_2(0, x_0, \dot{x}_0)\,;$$

ако су: за $t_0 = 0$, $x = x_0$ и $\dot{x} = \dot{x}_0$.

2. 2 СИЛА ЈЕ КОНСТАНТНА. ХИЦИ

Кад је код праволиниског кретања по правој x сила *константна*, онда је и убрзање покретне тачке константно

$$\ddot{x} = a = const. \tag{13}$$

Двоструким интеграљењем ове диференцијалне једначине другог реда добићемо:

$$\dot{x} = at + C_1\,, \qquad x = {}^1/_2\, at^2 + C_1 t + C_2\,.$$

Интеграционе константе одредићемо из почетних услова кретања, напр. за $t = t_0$ нека је $\dot{x} = \dot{x}_0$ и $x = x_0$, тада су: $C_1 = \dot{x}_0 - at_0$, $C_2 = x_0 - \dot{x}_0 t_0 + {}^1/_2 a t_0^2$, те су решења једначине (13):

$$\boxed{\dot{x} = \dot{x}_0 + a(t - t_0); \qquad x = x_0 + \dot{x}_0 (t - t_0) + {}^1/_2 a (t - t_0)^2} \tag{14}$$

Кретање материјалне тачке је *неравномерно* и то *једнакоубрзано* или *успорено*, као што смо видели у *кинематици тачке* (чл. 5 — дијаграми кретања, сл. 34 и 35).

Праволиниско кретање слободне тешке материјалне тачке под утицајем силе теже, коју сматрамо (за мале висине) константне јачине и сталног правца, претставља проблем *хица*. Посматрајмо кретање *у безваздушном простору*: онда на њ утиче само сила теже. Кретање је могућно само у вертикалном правцу (правцу дејства теже) а с обзиром на вредност и смер почетне брзине разликоваћемо три врсте овог кретања: *вертикални хитац наниже* (смер почетне брзине поклапа се са смером убрзања), *вертикални хитац навише* (смер почетне брзине супротан је смеру убрзања) и *слободан пад* (специјалан случај вертикалног хица наниже са почетном брзином једнаком нули).

Узмимо вертикалну праву за z осу са почетком O у почетном положају тачке и оријентисану у првом и трећем случају *наниже* а у другом случају *навише*, кретања су *једнакоубрзана* односно *једнакоуспорена* са убрзањем (успорењем) једнаким убрзању теже ($g = 9{,}81$ msec^{-2}). Једначине ових кретања добићемо из (14) стављајући да је $a = \pm g$, и за сва три случаја прегледно су дате у таблици (15).

Почетно време	Закони кретања	Вертикални хитац		Слободан пад
		наниже	навише	
$t_0 \neq 0$	$v = \dot{z}$ $s = z$	$v_0 + g(t - t_0)$ $v_0(t - t_0) + {}^1/_2 g (t - t_0)^2$	$v_0 - g(t - t_0)$ $v_0(t - t_0) - {}^1/_2 g (t - t_0)^2$	$g(t - t_0)$ ${}^1/_2 g (t - t_0)^2$
$t_0 = 0$	$v = \dot{z}$ $s = z$	$v_0 + gt$ $v_0 t + {}^1/_2 gt^2$	$v_0 - gt$ $v_0 t - {}^1/_2 gt^2$	gt ${}^1/_2 gt^2$
Квадрат брзине v^2		$v_0^2 + 2gz$	$v_0^2 - 2gz$	$2gz$

(15)

Код *вертикалног хица навише* време пењања *тешке тачке*, тј. време до момента када ће постићи брзину једнаку нули ($v = 0$), износи:

$$t_H = v_0/g \tag{16}$$

Том времену одговара *највећи пређени пут — висина пењања* — овако

$$H = v_0^2/2g . \tag{17}$$

Када је тешка тачка достигне биће $v = 0$ и настаће слободан пад. Из (16), с обзиром на (17), излази да је *време падања са висине H једнако времену пењања на ту висину а крајња брзина падања једнака је почетној брзини пењања.* Кинематички дијаграми истоветни су са дијаграмима једнакоубрзаног и једнакоуспореног кретања (*Кин.*, **чл. 5** — сл. 34 и 35).

Примери. — 1) Са које висине треба слободно да падне тешко тело да би му крајња брзина била 100 km/h? Колико је времена падало тело?

$$[v = 27{,}78 \text{ m sec}^{-1}, \quad h = z = v^2/2\,\mathrm{g} = 39{,}33 \text{ m}, \; t \approx 3 \text{ sec}] .$$

2) Камен пада без почетне брзине у бунар. Звук од удара у дно бунара чује се после 5 sec од тренутка падања камена.

Одредити дубину бунара занемарујући отпор ваздуха.

Решење.

$$h = {}^1\!/_2\, gt^2 = v\,(5 - t) = 333\,(5 - t)\,;$$

$$t^2 + kt - 5\,k = 0, \text{ где је } k = 2\,v/g = 67{,}9$$

па је $h = 103{,}4$ m.

3) Тешко тело избачено је вертикално увис почетном брзином 100 m/sec. После 3 sec са истог места и истом почетном брзином бачено је вертикално увис друго тело. Одредити висину пењања првог тела и висину на којој ће се сударити оба тела. После кога ће се времена, од бацања другог тела, сударити?

Колико је времена прво тело слободно падало до тренутка судара?

Решење. $H = v_0^2/2\,g = 510$ m, $t = v_0/g = 10{,}2$ sec.

Прво тело је слободно падало t_1 sec па је $t + t_1 = t_2 + 3 = 2\,t_1 + t_2$ тј. $t_1 = 1{,}5$ sec $t_2 = 8{,}7$ sec.

Висина пењања другог тела је $h = v_0\,t_2 - {}^1\!/_2\, g t_2^2 = 499$ m.

2.3 СИЛА ЗАВИСИ САМО ОД ВРЕМЕНА

Зависи ли сила само од времена, $X = X(t)$, онда и убрзање зависи од времена, па је диференцијална једначина кретања

$$\ddot{x} = f(t) . \tag{18}$$

Она раздваја променљиве, јер је $d\dot{x} = f(t)\,dt$, па је први интеграл $\dot{x} = \int f(t)\,dt + C_1$. При почетним условима за $t = t_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, константа је $C = \dot{x}_0 - [\varphi(t)]_{t_0}$, где је $\varphi(t)$ резултат интеграљења, па је први партикуларни интеграл

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt = \dot{x}_0 + [\varphi(t)]_{t_0}^{t} . \tag{19}$$

Поновним интеграљењем добивамо

$$x = \int_{t_0}^{t} [\dot{x}_0 + \varphi(t)]\, dt + C_2 .$$

Ако је за $t = t_0$ и $x = x_0$ онда је други партикуларни интеграл – закон кретања

$$x = x_0 + x_0 (t - t_0) + [\psi(t)]_{t_0}^{t} . \tag{20}$$

Например, за $\ddot{x} = -\pi^2 \sin(^1/_2 \pi t)$ и почетне услове: $t = 0$, $x_0 = 0$ и $x_0 = 2\pi$, закон кретања је $x = 4 \sin(^1/_2 \pi t)$.

2.4 СИЛА ЗАВИСИ САМО ОД РАСТОЈАЊА

Када сила која дејствује на покретну тачку N зависи само од растојања те тачке од компаративне тачке O (центра), $X = m\ddot{x} = mf(x)$, диференцијална једначина кретања је

$$\ddot{x} = f(x) . \tag{21}$$

Да бисмо интегрирали ову диференцијалну једначину другог реда помножимо је идентитетом $2\dot{x}dt \equiv 2\,dx$ те ћемо је, због односа $\ddot{x}dt = d\dot{x}$, добити у облику $2\dot{x}d\dot{x} = 2f(x)\,dx$ диференцијалне једначине која раздваја променљиве. Њен први интеграл је:

$$\dot{x}^2 = 2 \int f(x)\, dx + C_1 . \tag{22}$$

Интеграциону константу C_1 одредићемо из почетног услова, да је за $x = x_0$ и $\dot{x} = \dot{x}_0$, па се први интеграл може написати у облику

$$\dot{x}^2 = \dot{x}_0^2 + 2 \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx = \varphi(x) . \tag{23}$$

Други интеграл је облика

$$\int \frac{dx}{\pm\sqrt{\varphi(x)}} = \int dt + C_2 ,$$

где се знак пред кореном узима према знаку почетне брзине. После одређивања произвољне константе можемо га написати у облику

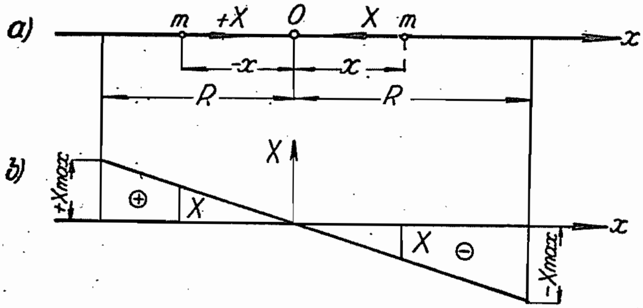
$$t - t_0 = \int \frac{dx}{\pm\sqrt{\varphi(x)}} = \psi(x) ,$$

где је $\psi(x)$ резултат интеграљења. Инверзијом овог интеграла може се коначна једначина кретања написати у облику

$$\boxed{x = \theta(t - t_0)} \tag{24}$$

Сила, дакле, зависи од положаја тачке на путањи. Ако је усмерена стално ка непокретном центру онда се зове *привлачна (атрактивна)*; у противном је *одбојна (репулзивна)*. Њена зависност од положаја тачке може да буде различита, али ћемо проучити само три најосновнија, али најважнија, случаја када је сила сразмерна првом степену растојања, и обрнуто сразмерна квадрату растојања од непокретног центра.

2.4.1 ХАРМОНИСКА ОСЦИЛАЦИЈА



Сл. 2. — Хармониска осцилација

Нека на материјалну тачку масе m дејствује *привлачна* сила из непокретног центра O сразмерна растојању тачке од тог центра и узмимо центар за координатни почетак, онда је координата силе

$$X = m\ddot{x} = -cx,$$

где је c коефицијент сразмере.[1] Пошто је за позитивне вредности x сила $X < 0$, а за негативне вредности x сила $X > 0$, то је она усмерена увек ка центру O (*центру осцилације*). Она је, дакле, увек *привлачна* (*атрактивна*) сила (сл. 2).

Диференцијална једначина кретања је

$$\boxed{\ddot{x} = -\omega^2 x} \qquad (25)$$

где је $\omega^2 = c/m$.

Као и код проучавања општег проблема (**2.4**) интеграљење ове диференцијалне једначине извршићемо множењем идентитетом $2\dot{x}\,dt \equiv 2\,dx$, па је први интеграл облика

$$\dot{x}^2 = -\omega^2 x^2 + C_1.$$

Интеграциону константу одредићемо из услова да је за $x = R$ брзина једнака нули ($\dot{x} = 0$), па је $C_1 = \omega^2 R^2$, и за $\omega > 0$ биће

$$\dot{x} = \pm\,\omega\sqrt{R^2 - x^2}.$$

---

[1] Димензије [FL^{-1}], јединице kg/cm, и претставља величину силе (kg) на растојању $x = 1$ cm. Код опруга се назива *крутост опруге*.

Знак + одговара кретању *надесно* а знак – кретању *налево*, па ће други интеграл, за први случај, бити

$$\int \frac{d\lambda}{\sqrt{R^2-x^2}} = \int \omega\, dt + C_2$$

Нека је константа $C_2 = \varphi_0$, биће $\omega t + \varphi_0 = \arcsin\,(x/R)$, односно

$$\boxed{x = R \sin(\omega t + \varphi_0)} \tag{26}$$

Ова једначина једнака је једначини хармониског кретања (Кин. 2,5), где је R *амплитуда*, ω *кружна фреквенција*, а φ_0 *фазна константа*. На основу изнетог можемо рећи ово: *Материјална тачка врши хармониску осцилацију у правој под утицајем привлачне силе која пролази кроз центар осцилације, а по интензитету је сразмерна растојању тачке од тог центра*

Дијаграм силе у зависности од пређеног пута показан је на сл. 2*b*.

Фазну константу одредићемо из услова да је за $t = t_0$ и $x = x_0$ па је $\varphi_0 = \arcsin\,(x_0/R) \mp \omega t_0$.

Како је *sinus* периодичка функција периода $2\pi/\omega$ то је *период осцилације*

$$\boxed{T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/c}} \tag{27}$$

тј. *независан од амплитуде, те је изохрон.*

За специјалне почетне услове: за $t_0 = 0$ и $x_0 = 0$ биће $\varphi_0 = 0$, па једначина хармониске осцилације има најпростији облик

$$\boxed{x = R \sin \omega t} \tag{28}$$

Диференцијална једначина кретања (25) може се написати и у облику *хомогене диференцијалне једначине са константним коефицијентима* $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. Њена је карактеристична једначина $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ са коренима $\lambda = \pm \omega i$, где је $i = \sqrt{-1}$, па је општи интеграл облика

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

A и B су интеграционе константе. Њих ћемо одредити из почетних услова кретања да је за $t = 0$, $x = \dot{x}_0$ и $\dot{x} = \dot{x}_0$, у облику $A = x_0$, $B = \dot{x}_0/k$, па је закон кретања:

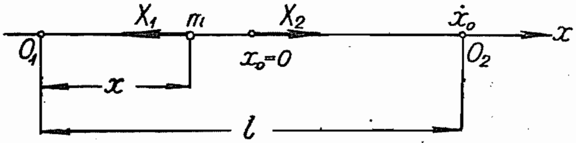
$$\boxed{x = x_0 \cos \omega t + (\dot{x}_0/\omega) \sin \omega t} \tag{27'}$$

Ако уведемо нове величине R и φ_0 једначинама $x_0 = R \sin \varphi_0$, $\dot{x}_0/\omega = R \cos \varphi_0$, горњи израз можемо свести на облик

$$x = R \sin (\omega t + \varphi_0)$$

који смо добили и по првој методи интеграљења.

Примери. — 4) Два стална центра O_1 и O_2, на растојању l (сл. 3), привлаче материјалну тачку масе m, која је у стању мировања била на половини растојања $\overline{O_1 O_2}$. Одредити коефицијенте c_1 и c_2 ако је највећа амплитуда у тачки O_2.



Сл. 3. — Привлачење тачке од два центра

Решење. — Диференцијална једначина кретања је

$$\ddot{x} = - c_1 x + c_2 (l - x).$$

Помножимо је идентитетом $2 \dot{x} \, dt \equiv 2 dx$ биће први интеграл

$$\dot{x}^2 = - c_1 x^2 + c_2 x (2 l - x) + C.$$

Из почетних услова кретања $x = {}^1/_2 \, l$; $\dot{x}_0 = 0$; $x = l$; $\dot{x} = 0$ биће константа $C = {}^1/_4 \, l^2 (c_1 - 3 c_2)$, па је $3 c_1 = c_2$.

5) Непомични центар привлачи две једнаке материјалне тачке силом $m\ddot{x} = - c x^{-n}$ Прва тачка почиње кретање из положаја $x_1 = \infty$ а друга из положаја $x_2 = l$, без почетних брзина. Одредити експонент n под условом да прва тачка у положају $x_1 = l$ и друга у положају $x_2 = {}^1/_4 l$ имају исте брзине. — *(Walton)*

Решење. — Диференцијална једначина кретања је иста за обе материјалне тачке $m\ddot{x} = - c x^{-n}$ па је $\ddot{x} = - \omega^2 x^{-n}$. Множењем идентитетом $2 \dot{x} \, dt \equiv 2 dx$ и интеграљењем добивамо $\dot{x}^2 = [2 (n-1)^{-1} \omega^2 x^{1-n}] + C_1$. За почетне услове кретања добивамо брзине покретних тачака

$$\dot{x}_1^2 = 2 (n - 1)^{-1} \omega^2 x^{1-n}, \qquad \dot{x}_2^2 = 2 (n - 1)^{-1} \omega^2 [x^{1-n} - l^{1-n}].$$

Изједначујући ове брзине за $x_1 = l$ и $x_2 = {}^1/_4 l$ добивамо да је експонент $n = {}^3/_2$.

6) Одредити кретање тешке тачке коју привлачи центар O силом сразмерном астојању r. Привлачна је сила на јединици растојања $k^2 m$ dyn-а. У почетном положају тачка је била на Oy оси $(y_0 = b)$ и није имала почетну брзину.

Решење. — Узмимо Oz осу са смером наниже; онда су диференцијалне једначине кретања $\ddot{y} = - k^2 y$, $\ddot{z} = - k^2 z + g$.

За дате почетне услове њихови су интеграли

$$y = b \cos kt, \quad z = (g/k^2) \, [1 - \cos kt],$$

ер је *партикуларни интеграл нехомогене једначине* g/k^2.

Елиминисањем времена t биће линија путање $z = (g/k^2) \, [1 - (y/b)]$, тј. *права линија* у вертикалној равни.

2.4.2 ОДБИЈАЊЕ ТАЧКЕ ОД НЕПОКРЕТНОГ ЦЕНТРА СИЛОМ СРАЗМЕРНОМ РАСТОЈАЊУ

Ако је сила *одбојна* (*рейулзивна*) онда је $X = m\ddot{x} = c\,x$, и диференцијална једначина кретања има облик

$$\boxed{\ddot{x} = k^2 x} \tag{29}$$

где је k^2 коефицијент сразмере. Диференцијална је једначина кретања облика *хомогене једначине са константним коефицијентима*, карактеристичне једначине $\lambda^2 - k^2 = 0$, са коренима $\lambda = \pm k$, па је општи интеграл облика

$$x = A\,e^{kt} + B\,e^{-kt}, \tag{30}$$

где су A и B интеграционе константе. Њих ћемо одредити из почетних услова кретања да је за $t = 0$, $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ решавањем система једначина $x_0 = A + B$, $\dot{x}_0 = k\,(A - B)$, у облику

$$A = {}^1/_2\,[x_0 + (\dot{x}_0/k)]\,, \qquad B = {}^1/_2[x_0 - (\dot{x}_0/k)].$$

Уносећи ове вредности у општи интеграл добићемо

$$x = {}^1/_2\{[x_0 + (\dot{x}_0/k)]\,e^{kt} + [x_0 - (\dot{x}_0/k)]\,e^{-kt}\}, \tag{31}$$

или уводећи хиперболичке функције

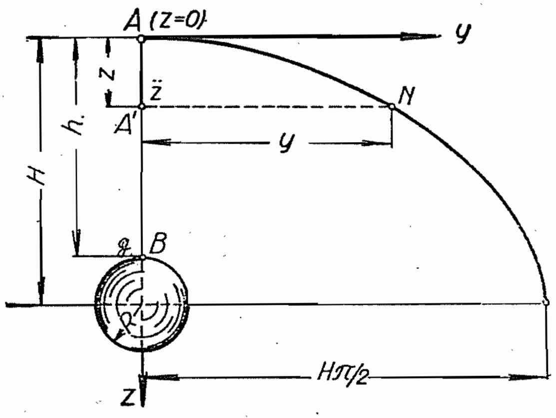
$$\boxed{x = x_0\ \mathrm{Ch}\,kt + (\dot{x}_0/k)\,\mathrm{Sh}\,kt} \tag{32}$$

Из овог израза можемо закључити ово: ако је почетни положај тачке у центру одбијања ($x_0 = 0$) и почетна брзина једнака нули ($\dot{x} = 0$), биће и $x = 0$, тј. *тачка остаје у трајном миру у центру силе*; ако, пак, почетна брзина није једнака нули ($\dot{x}_0 \neq 0$) онда се тачка креће по закону пута $x = (\dot{x}_0/k)\,\mathrm{Sh}\,kt$, *удаљујући се од центра одбијања O у бесконачност*.

За $x_0 > 0$ и $\dot{x}_0 = 0$ или $\dot{x}_0 > 0$, тачка ће се *удаљавати од центра одбијања*, а за $\dot{x}_0 < 0$ *приближаваће се центру*. Закони пута за ове случајеве могу се извести из једначине (32).

2.4.3 СЛОБОДАН ПАД ИЗ ВЕЛИКЕ ВИСИНЕ

Слободан пад из велике висине јесте проблем праволиниског кретања слободне *тешке материјалне тачке* масе m, у безваздушном простору под утицајем Њутнове силе, тј. *привлачне силе обрнуто сразмерне квадрату растојања.* Нека се материјална тачка масе m налази на великој висини h изнад Земље (сл. 4), онда ће према Њутновом *општем закону о гравитацији* (чл. 5.4), привлачна сила Земље бити знатно мања при положају тачке у A неголи у положају B (на површини Земље). Убрзање опада са удаљењем тачке од површине Земље те је зависност дата изразом



Сл. 4. — Слободан пад из велике висине

$$g/\ddot{z} = (H - z)^2/R^2, \tag{33}$$

где су: R полупречник Земље, H висина тачке изнад средишта Земље, g убрзање теже за тачку на површини Земље, а $\ddot{z}$ убрзање теже за тачку (A') на удаљењу $H - z$ од средишта Земље.

Убрзања теже, дакле, *обрнуто су сразмерна квадратима растојања материјалне тачке од средишта Земље*, па диференцијална једначина кретања тешке тачке добива облик

$$\ddot{z} = \frac{g R^2}{(H - z)^2} = f(z). \tag{34}$$

Када је помножимо идентитетом $2\, dz \equiv 2\, \dot{z}\, dt$ биће први интеграл

$$\dot{z}^2 = 2 R^2 g \int \frac{dz}{(H - z)^2} + C,$$

који решавамо сменом $(H - z) = u$, па је $\dot{z}^2 = [2 R^2 g/(H - z)] + C$.

Интеграциону константу одредићемо из услова да је за $z = 0$ $\dot{z}_0 = 0$, па је $C = -2 R^2 g/H$ и интеграл добива облик

$$\dot{z}^2 = \frac{2 R^2 g}{H} \frac{z}{(H - z)} \tag{35}$$

Брзину тачке у положају B (на површини Земље) добићемо кад у горњи израз ставимо $z = h = H - R$ па је

$$\dot{z}_B = \sqrt{2gh}\ \sqrt{R/H}\tag{36}$$

Ради краткоће уведимо ознаку $k = \sqrt{2gR^2/H}$ онда је други интеграл облика

$$kt = \int \frac{(H-z)}{\sqrt{z(H-z)}}\,dz + C_1,$$

где је C_1 интеграциона константа. Уведени нову смену $z = H\cos^2\varphi$ интеграл се своди на облик

$$kt = -2H\int \sin^2\varphi\,d\varphi + C_1.$$

па интеграљењем биће

$$\boxed{kt = \sqrt{z(H-z)} - H\arccos\sqrt{\frac{z}{H}} + C_1}\tag{37}$$

Интеграциона константа је $C_1 = {}^1/_2 H\pi$.

Десна страна ове једначине претставља ординату *циклоиде* коју описује круг пречника $H = R + h$, па је

$$t = y/k = (y/R)\sqrt{H/2g}.$$

Време потребно да материјална тачка пређе пут $\overline{AA'}$ сразмерно је ординати циклоиде ($\overline{NA'} = y$).

2.5 СИЛА ЗАВИСИ САМО ОД БРЗИНЕ

Ако сила која дејствује на материјалну тачку масе m зависи само од брзине, онда се та зависност може написати једначином $X = m\ddot{x} = mf(\dot{x})$, па је диференцијална једначина кретања

$$\boxed{\ddot{x} = f(\dot{x})}\tag{38}$$

Она се може свести на тип диференцијалне једначине која раздваја промењљиве

$$\frac{d\dot{x}}{f(\dot{x})} = dt$$

те је први интеграл облика

$$t + C_1 = \int \frac{d\dot{x}}{f(\dot{x})} = \varphi(\dot{x}).$$

Инверзијом добићемо зависност брзине од времена

$$\dot{x} = \psi(t + C_1)$$

па је други интеграл облика

$$x = \int \psi(t + C_1)\,dt + C_2, \tag{39}$$

где су C_1 и C_2 интеграционе константе које ћемо добити из датих почетних услова.

Којипут је лакше интегралити диференцијалну једначину (38) по методи изнетој у **чл. 2.4** множећи је идентитетом $\dot{x}\,dt \equiv dx$; само, у овом случају морамо употребити *две инверзије* и *две квадратуре*.

2.5.1 АМОРТИЗОВАНО КРЕТАЊЕ

Као пример кретања које се врши под утицајем силе која зависи само од брзине проучимо *амортизовано* или тзв. *пригушено кретање*. Интензитет силе сразмеран је првом степену брзине али сила дејствује у супротном смеру од смера брзине па је ова сила *отпорна*

$$X = m\ddot{x} = -b\dot{x} = -m\delta\dot{x},$$

где је $\delta = b/m$ коефицијент сразмерности — *коефицијент пригушивања (амортизације)*.

Диференцијална једначина кретања обично је

$$\boxed{\ddot{x} = -\delta\dot{x}} \tag{40}$$

Напишимо је у облику диференцијалне једначине која раздваја променљиве

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -\delta\,dt$$

онда је први интеграл облика

$$\ln\dot{x} = -\delta t + C_1.$$

Интеграциону константу одредимо из услова да је за $t = 0$ тачка имала почетну брзину $\dot{x}_0$, у облику $C_1 = \ln\dot{x}_0$, па је први интеграл $\ln\dot{x} - \ln\dot{x}_0 = -\delta t$, и може се написати и у овом облику

$$\boxed{\dot{x} = \dot{x}_0\,e^{-\delta t}} \tag{41}$$

Поновним интеграљењем добићемо

$$x = -(\dot{x}_0/\delta)\,e^{-\delta t} + C_2.$$

Ако је у тренутку $t=0$ и $x=0$ онда је интеграциона константа $C_2=(\dot{x}_0/\delta)$ па је закон кретања дат једначином

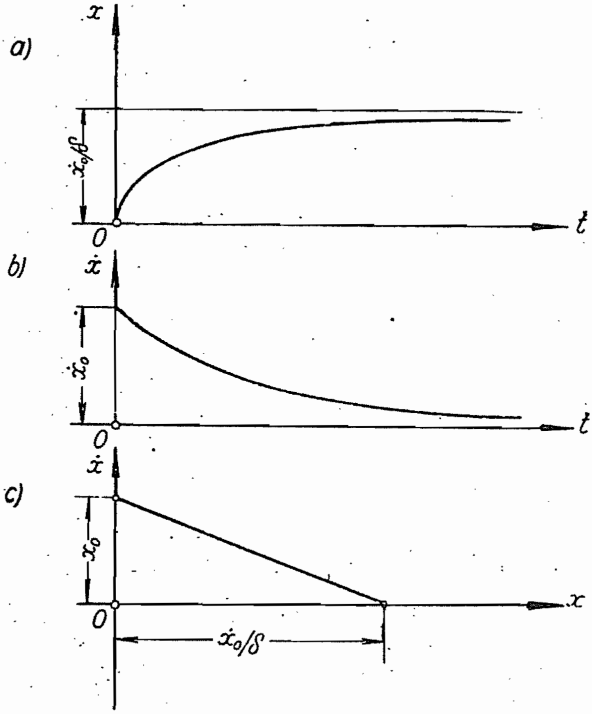
$$\boxed{x=(\dot{x}_0/\delta)\,(1-e^{-\delta t})} \tag{42}$$

Кинематички дијаграми овог кретања дати су на **сл. 5.**

Елиминисањем времена t из једначина (41) и (42) добићемо дијаграм брзине и пута

$$\boxed{\dot{x}=\dot{x}_0-\delta x} \tag{43}$$

За $t=\infty$ биће $\dot{x}=0$, па је апсцисна оса асимптота дијаграма $(\dot{x}, t)$, због $x=\dot{x}_0/\delta$, та је права асимптота и дијаграма (x, t).



Сл. 5. — Кинематички дијаграми амортизованог кретања

Пример. — 7) Вучна сила локомотиве зависи од брзине. Та је зависност линеарног облика $F=k-\delta v$, где су k и δ константе.

Одредити коначну једначину праволиниског кретања ако су почетни услови: за $t=0$ су $F=F_0$, $\dot{x}=\dot{x}_0$ а пут $x_0=0$.

Решење. — Диференцијална једначина кретања је $\ddot{x}-(k-\delta\dot{x})/M$ где је M маса локомотиве. Први је интеграл ове диференцијалне једначине

$$t=-\frac{M}{\delta}\ln(k-\delta\dot{x})+C_1=\frac{M}{\delta}\ln\frac{k-\delta\dot{x}_0}{k-\delta\dot{x}}$$

па је закон промене вучне силе дат изразом $F=F_0\,e^{-\delta t/M}$

Из првог интеграла инверзијом добићемо зависност

$$\dot{x}=\frac{k}{\delta}-\frac{k-\delta\dot{x}_0}{\delta}e^{-\delta t/M}.$$

па је, због почетних услова, други интеграл облика

$$x=\frac{k}{\delta}t-\frac{k-\delta\dot{x}_0}{\delta_2}M\,(1-e^{-\delta t/M})=f(t).$$

2.6 СИЛА ЗАВИСИ ОД ВИШЕ ВЕЛИЧИНА. ПРАВОЛИНИСКО КРЕТАЊЕ ПОД УТИЦАЈЕМ СИСТЕМА СИЛА

Видели смо да сила у општем случају зависи од времена, растојања покретне тачке и њене брзине, или пак да је константна, тј. она је дата као векторска функција облика

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t).$$

Досада смо проучавали најобичније случајеве када она зависи само од једне величине. Међутим, чести су технички проблеми у којима сила зависи од више величина или пак на материјалну тачку дејствује више сила које зависе од различитих величина. У овом су случају диференцијалне једначине кретања сложеније, те за неке постоје решења у коначном облику а за неке не.

2.6.1 СЛОБОДАН ПАД У ВАЗДУШНОМ ПРОСТОРУ

Слободан пад у ваздуху разликује се од слободног пада у безваздушном простору јер поред силе теже, mg, која је *активна* сила, дејствује и отпор ваздуха као *отпорна (пасивна) сила* која се супротставља дејству активне силе. Теориско одређивање величине отпорне силе и закона по коме се мења врло је сложен проблем, па се ова зависност одређује експерименталним путем. Доказано је да отпор ваздуха зависи од *брзине, густине средине* (медијума), у којој се кретање врши, и од *облика* самог *тела*. Прве експерименте за одређивање закона отпора вршио је *Њутн* и поставио два закона.

1⁰ *Када је брзина тела мала (*до 1 m.sec^{-1}) *отпор је дат у облику линеарне зависности од брзине*

$$F_w = c\,L\,v\,,$$

где су: c константа, L дужина тела и v брзина тела.

2⁰ *За веће брзине* (*али мање од брзине звука*) *отпор је дат у облику квадратне зависности од брзине*

$$F_w = c\,\rho\,A\,v^2,$$

где су: c константа, ρ *густина, A површина највећег попречног пресека* покретног тела у правцу нормалном на правац кретања, v брзина.

У балистици је *Шиаћи (Siacci)* дао закон отпора ваздуха у облику $F_w = c f(z) F(v)$, где су: *c балистички коефицијент, f(z) функција зависности густине ваздуха од висине*, а *F(v) Шиаћиева функција.*[1]

Балистички коефицијент је $c = l\,d^2.\ 10^3/G$, где су: l коефицијент облика зрна (код артиљериских зрна близак јединици), d пречник зрна у m *(калибар)*, G тежина зрна у kg

---

[1] Wentzel. — Innere Balistik. 1939 год.

Претпоставимо да је отпор ваздуха сразмеран квадрату брзине, онда на материјалну тачку дејствују две силе: *активна* сила теже, mg, са смером наниже, и *пасивна* сила отпор ваздуха, $F_w = c\rho A v^2$, са смером навише.

Кретање се врши, дакле, под утицајем силе $Z = mg - c\rho \cdot A\, v^2$ па је диференцијална једначина слободног пада у ваздуху, $v = \dot z$,

$$\ddot z = g[1 - (\dot z/k)^2], \tag{44}$$

где је константа $1/k^2 = c\rho A/mg$. Ова константа има и кинематичко значење. Кретање је због утицаја отпорне силе *успорено* те ће наступити један тренутак када ће отпорна сила бити једнака активној, тј. биће $\ddot z = 0$, $mg = c\rho A\, v^2$ односно $v_{max} = k$. Од тога тренутка наступа једнолико кретање брзином $v_{max} = k$ и отпор се ваздуха неће више повећавати. У овоме је баш и *разлика између слободног пада у безваздушном простору и у ваздуху. Код првог се брзина непрестано повећава са временом, код другог само до граничне вредности k, откада наступа једнолико кретање том постигнутом брзином.*

Диференцијална једначина (44) може се написати у облику диференцијалне једначине која раздваја променљиве

$$\frac{k^2}{g}\,\frac{d\dot z}{(k^2 - \dot z^2)} = \frac{k}{2g}\left[\frac{d\dot z}{k + \dot z} + \frac{d\dot z}{k - \dot z}\right] = dt.$$

па је њен први интеграл облика

$$\frac{1}{2u}\ln\frac{k + \dot z}{k - \dot z} = t + C_1,$$

где је $u = g/k$ нова константа. За почетне услове $t = 0$, $\dot z_0 = 0$ биће и $C_1 = 0$ па је први интеграл облика

$$\frac{1}{2u}\ln\frac{k + \dot z}{k - \dot z} = t$$

односно

$$\boxed{\dot z = k\,\frac{e^{2ut} - 1}{e^{2ut} + 1} = k\,\mathrm{Th}\,(ut)} \tag{45}$$

Из (45) видимо да брзина v постаје k после бесконачно великог временског размака, па стварно кретање *неће никада бити једнолико.* Брзина се, дакле, стално повећава и тежи ка k.

Поновним интеграљењем добићемо

$$z = k\int\frac{e^{ut} - e^{-ut}}{e^{ut} + e^{-ut}}\,dt = \frac{k}{u}\ln(e^{ut} + e^{-ut}) + C_2.$$

Из почетних услова слободног пада (за $t = 0$ и $z = 0$) биће интеграциона константа $C_2 = -(k/u)$ (ln 2), па је други интеграл, односно закон пута

$$\boxed{z = \frac{k}{u} \ln \frac{e^{ut} + e^{-ut}}{2} = \frac{k}{u} \ln \mathrm{Ch}\,(ut)} \tag{46}$$

Напишимо једначине (45) и (46) у облику

$$\mathrm{Th}\,(ut) = \dot{z}/k, \quad \mathrm{Ch}\,(ut) = e^{zu/k}$$

па из њих елиминишемо време t, помоћу једначина

$$\left(\frac{\dot{z}}{k}\right)^2 = \mathrm{Th}^2\,(ut) = 1 - \frac{1}{\mathrm{Ch}^2\,(ut)} = 1 - \frac{1}{e^{2\,zu/k}},$$

биће

$$e^{2zu/k} = k^2/(k^2 - \dot{z}^2),$$

те је зависност пута од брзине, за $u = g/k$, дата изразом

$$z = \frac{k^2}{2\,g} \ln \frac{k^2}{k^2 - \dot{z}^2}\,. \tag{46'}$$

Из изложеног јасно се уочава разлика између слободног пада у безваздушном простору и у ваздуху када је отпор ваздуха сразмеран квадрату брзине. Оба су кретања праволиниска али су закони кретања различити као што показује доња таблица.

Закон	Слободан пад	
	у безваздушном простору	у ваздуху при $F_w = C\,v^2$
$a = \ddot{z} = f_1\,(t)$	$\ddot{z} = g = const$	$\ddot{z} = g\,[1 - (\dot{z}^2/k^2)]$
$v = \dot{z} = f_2\,(t)$	$\dot{z} = g\,t$	$\dot{z} = k\,\mathrm{Th}\,(g\,t/k)$
v_{max}	бесконачно	k
$s = z = f_3\,(t)$	$z = {}^1/_2\,g\,t^2$	$z = \frac{k^2}{g} \ln \mathrm{Ch}\,(gt/k)$
$z = f_4\,(\dot{z})$	$\dot{z} = \dot{z}^2/2\,g$	$z = \frac{k^2}{2g} \ln \frac{k^2}{k^2 - \dot{z}^2}$

(46″)

Ако две кугле, истих запремина али различитих специфичних тежина, падају слободно у истој отпорној средини, њихове *граничне брзине* (при услову $\ddot{z} = 0$) одређујемо из услова да је сила тежине једнака отпору средине, па постоји однос:

$$v_1 : v_2 = \sqrt{\gamma_1} : \sqrt{\gamma_2}.$$

Граничне брзине кугли стоје у односу квадратних корена њихових специфичних тежина *(Мариотов закон).*

Вертикални хитац навише. — Слично предњем поступамо и у случају *вертикалног хица навише у ваздушном простору.* Оријентишући осу Oz *наниже* диференцијална једначина кретања је

$$\ddot{z} = g + \delta^2 \dot{z}^2 , \tag{44'}$$

и множењем са $2\dot{z}\,dt \equiv 2\,dz$ своди се на диференцијалну једначину која раздваја променљиве. Први интеграл је

$$\ln(g + \delta^2 \dot{z}^2) = 2\,\delta^2 z + C_1 ,$$

где је $\delta^2 = c\rho A/m$. Интеграциону константу одређујемо из почетног услова да је за $z = 0$ и $\dot{z}_0 = v_0$ па је $C_1 = \ln(g + \delta^2 v_0^2)$, те је

$$(g + \delta^2 \dot{z}^2) / (g + \delta^2 v_0^2) = e^{2\delta^2 z} . \tag{45'}$$

Тачка се тренутно зауставља на висини $z = H$ када брзина буде једнака нули $(\dot{z} = 0)$, па је

$$g/(g + \delta^2 v_0^2) = e^{2\delta^2 H} .$$

После тренутног заустављања наступа *слободни пад* са те висине (H), па је диференцијална једначина кретања

$$\ddot{z} = g - \delta^2 \dot{z}^2 \tag{44''}$$

чији је интеграл

$$\ln(g - \delta^2 \dot{z}^2) = -2\delta^2 z + C_2 .$$

Како је при $\dot{z} = 0$ и $z = H$ то је интеграциона константа $C_2 = 2\delta^2 H + \ln g$, па је

$$(g - \delta^2 \dot{z}^2)/g = e^{2\delta^2 (H-Z)} . \tag{45''}$$

При удару о земљу тачка ће имати брзину (v) коју одређујемо из горње једначине стављајући $z = 0$, узимајући у обзир везу између H и v_0, па је

$$v = v_0 / \sqrt{1 + (\delta^2 v_0^2/g)} . \tag{45'''}$$

Пример. — **8)** Тело тежине 2 kg бачено је вертикално увис почетном брзином 20 m/sec. Отпор ваздуха је изражен законом $bv = 0{,}04\, v$ и мерен је у килограмима. После колико ће секунди тело достићи свој највиши положај? Колика је висина пењања? $g = 9{,}8$ m sec^{-2}.

Решење. — Диференцијална једначина кретања за случај да је оса Oz усмерена навише биће:

$$\ddot{z} + \delta \dot{z} = -g ,$$

где је $\delta = b/m = 0{,}196$ sec^{-1}, тј. $1/\delta = 5{,}1$ sec. Ову диференцијалну једначину можемо интегралити раздвајањем променљивих, пошто је $\ddot{z} = d\dot{z}/dt$. За услове $t = 0$, $v = v_0 = \dot{z}_0$, иће:

$$t = -\int (g + \delta \dot{z})^{-1} d\dot{z} + C = \delta^{-1} \ln[(g + \delta \dot{z}_0)/(g + \delta \dot{z})] .$$

У највишем је положају $z=0$ па је време лета до тренутног заустављања

$$T=\delta^{-1}\ln[1+(\delta\dot{z}_0/g)]=5{,}1\ \ln\ 1{,}4=1{,}7\ \text{sec},$$

јер је $\ln\ 1{,}4=(\log 1{,}4)/0{,}434=0{,}146/0{,}434$.

Да бисмо могли одредити висину пењања горњу ћемо једначину интегралити по методи нехомогених диференцијалних једначина са константним коефицијентима. *Интеграл се састоји из збира општег интеграла хомогене и партикуларног интеграла нехомогене* диф. једначине. Корени су карактеристичне једначине $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-\delta$ а партикуларни интеграл је облика $-gt/\delta$ па је општи интеграл

$$z=A+B\,e^{-\delta t}-(gt/\delta).$$

Интеграционе константе одредићемо из почетних услова да је за $t=0$, $z=0$ и $z_0=v_0=20\ \text{m sec}^{-1}$, па су $A+B=0$ и $B=-[v_0+(g/\delta)]/\delta$. Време пењања одредићемо из услова $z=v=0$ те је

$$T=\delta^{-1}\ln[1+(\delta z_0/g)].$$

Ако ову вредност унесемо у интеграл диф. једначине добићемо висину пењања

$$H=B(e^{-\delta T}-1)-(g\,T/\delta)=-357\,({}^{e-0,333}-1)-85.$$

Како је $e^{-0,333}=0{,}71$, то је $H=18{,}5\ \text{m}$. За $F_w=0$ биће $H=v_0^2/2g=20{,}4\ \text{m}$.

2.6.2 АМОРТИЗОВАНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ

На основу принципа о одржању енергије (**чл. 4.5**) хармониска осцилација, коју изводи материјална тачка масе m под утицајем привлачне силе сразмерне растојању, трајала би бесконачно дуго са истом амплитудом и истим периодом. Али у природи овакве осцилације не постоје, пошто се појављују отпори који постепено умањују амплитуде (*гуше их*) док кретање после извесног коначног времена потпуно не престане. Овакве се осцилације зову *амортизоване* (*пригушене*).

Отпор може бити произвољан али је обично сразмеран брзини, и то првом степену брзине јер су брзине мале. Отпорна је сила супротног смера од смера брзине тј. $F_w=-b\dot{x}=-2m\delta\dot{x}$, где је 2δ *коефицијент пригушивања* (*амортизације*).

Диференцијална једначина кретања је

$$\ddot{x}=-\omega^2x-2\delta\dot{x}, \tag{47}$$

где први члан на десној страни долази услед силе која зависи од растојања (*привлачне силе*) а други услед отпора. Ова се једначина може написати у облику

$$\boxed{\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega^2x=0} \tag{47'}$$

хомогене диференцијалне једначине са константним коефицијентима. Њена је карактеристична једначина

$$\lambda^2 + 2\,\delta\,\lambda + \omega^2 = 0, \text{ са кореним } \lambda_{1,2} = -\,\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}\,,$$

па је општи интеграл

$$\boxed{x = A\,e^{\lambda_1 t} + B\,e^{\lambda_2 t}} \tag{48}$$

где су A и B интеграционе константе.

Врста осцилације зависи од односа коефицијената δ и ω и разликујемо три случаја.

1° **Слаба амортизација** ($\delta < \omega$). – Корени карактеристичне једначине су коњуговано комплексни, јер је израз под кореном имагинаран. Ставимо ли $\delta^2 - \omega^2 = -\,p^2$ онда су:

$$\lambda_1 = -\,\delta + pi, \qquad \lambda_2 = -\,\delta - pi, \qquad i = \sqrt{-1}\,,$$

па се интеграл диференцијалне једначине може да напише у облику

$$x = e^{-\delta t}(A_1 \cos pt + B_1 \sin pt). \tag{49}$$

Уведемо ли две нове константе R и φ једначинама $A_1 = R \sin \varphi_0$, $B_1 = R \cos \varphi_0$, интеграл се може написати у облику закона хармониског осциловања са променљивом амплитудом:

$$\boxed{x = R\,e^{-\delta t} \sin (pt + \varphi_0)} \tag{49'}$$

За $t = -\,\varphi_0/p$ биће $\sin (pt + \varphi_0)$ први пут једнак нули а затим после сваког полупериода

$$\frac{T_a}{2} = \frac{\pi}{p} = \frac{\pi}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}} \tag{50}$$

и у међувремену добиће екстремне вредности ± 1. Дакле, x варира између вредности $\pm R\,e^{-\delta t}$. Између двеју узастопних амплитуда, које се разликују за полупериод $^1/_2\ T_a$, постоји сталан однос, јер је

за $t = 0$ $\qquad x_0 = R \sin \varphi_0$

за $t = T_a/2 = \pi/p$ $\qquad x_1 = -\,R\,e^{-\pi\delta/p} \sin \varphi_0\,,$

за $t = T_a = 2\pi/p$ $\qquad x_2 = R\,e^{-2\pi\delta/p} \sin \varphi_0\,,$

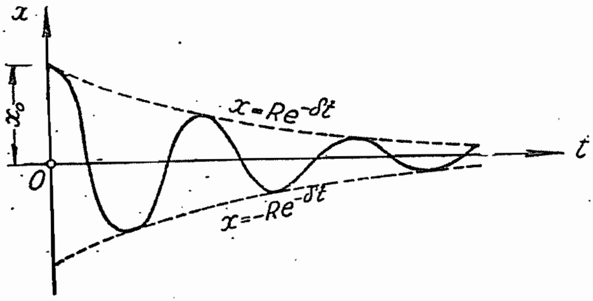
па је

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = e^{-\delta\pi/p} = e^{-\delta\, T_a/2}.$$

Фактор $e^{-\delta t}$ зове се *факшор аморшизације (ūригушивања); логаришамски декременш* је

$$\mathfrak{D} = \ln|x_n| - \ln|x_{n+1}| = \delta\pi/p = {}^1/_2\,\delta T_a. \tag{50'}$$

Период је *изохрон,* па је кретање *ūериодично.* Ако период ове осцилације (T_a) упоредимо са периодом хармониске осцилације (T) видимо да је због $p < \omega$ овај период *дужи. Период аморшизоване осцилације је дужи од ūериода хармониске осцилације исше кружне фреквенције.*



Сл. 6. — Дијаграм пута и времена слабе амортизоване осцилације

Дијаграм пута и времена ове осцилације приказан је на сл. 6.

2⁰ Јака амортизација ($\delta > \omega$). — У овом су случају оба корена карактеристичне једначине *реална* $\lambda_{1,2} = -\delta \pm q$, где је $q^2 = \delta^2 - \omega^2$. Општи интеграл је

$$x = e^{-\delta t}\,[A\,e^{qt} + B\cdot e^{-qt}]. \tag{51}$$

За $t \to \infty$ и $x \to 0$, кретање је *айериодично.* Тачка асимптотски тежи ка положају $x = 0$.

Уводећи хиперболичке функције

$$e^{qt} = \operatorname{Ch} qt + \operatorname{Sh} qt, \quad e^{-qt} = \operatorname{Ch} qt - \operatorname{Sh} qt,$$

општи интеграл (51) може се написати у облику

$$x = e^{-\delta t}\,[C_1 \operatorname{Ch} qt + C_2 \operatorname{Sh} qt], \tag{51'}$$

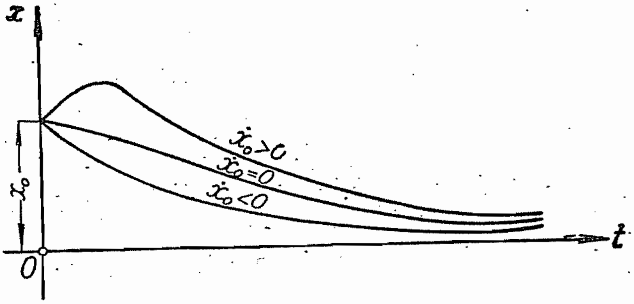
где су $C_1 = A + B$ и $C_2 = A - B$ нове интеграционе константе.

Ако су почетни услови кретања: за $t = 0$, $x = x_0$ и $\dot{x}_0 = 0$ онда су интеграционе константе $C_1 = x_0$ и $C_2 = \delta\, x_0/q$, па је закон кретања

$$x = x_0\, e^{-\delta t}\,[\operatorname{Ch} qt + (\delta/q) \operatorname{Sh} qt], \tag{51'}$$

те је *крешање айериодично.*

Облик дијаграма пута и времена зависи од величине и смера почетне брзине и за односе $x_0 \gtreqless 0$ дати су дијаграми на сл. 7,



Сл. 7. — Дијаграм пута и времена јаке амортизоване осцилације

3⁰ **Прелавни случај** ($\delta=\omega$). — У овом су случају оба корена карактеристичне једначине једнака па је интеграл облика

$$x=(A+B\,t)\,e^{-\delta t}\,. \qquad (52)$$

Кретање је такође *апериодично.*

Напр., ако је $m=1$, $c=25$, $b=6$ а почетни услови кретања: за $t=0$ је $x_0=8$ и $\dot{x}_0=0$, онда је диф. једначина кретања $\ddot{x}+6\,\dot{x}+25\,x=0$. С обзиром на (49) и почетне услове кретања, биће закон кретања

$$x=e^{-3t}\,(8\cos 4\,t+6\sin 4\,t).$$

Према (50) је $T_a={}^1/_2\,\pi$ па је логаритамски декремент $\mathfrak{D}={}^3/_4\,\pi$.

2.6.3 ПРИНУДНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ

Кад на материјалну тачку масе m дејствује сем силе која зависи од растојања још и сила која зависи од времена, кретање се зове *принудна осцилација.* Сила облика $m\,f\,(t)$ зове се *принудна* или *пертурбациона (поремећајна)* сила.

Диференцијална једначина кретања биће

$$\ddot{x}+\omega^2\,x=f\,(t). \qquad (53)$$

Претпоставимо да је функција $f\,(t)$ *периодична,* онда је можемо помоћу *Фуријеовог* (*Fourier,* 1768 — 1830 год.) реда разложити у збир елементарних тригонометриских функција $\sin\Omega\,t$ и $\cos\Omega\,t$, и утицај сваког члана посебице испитати, па затим по принципу суперпозиције сва дејства сабрати.

Зависи ли принудна сила само од једног члана облика $\sin\,\Omega\,t$ или $\cos\,\Omega\,t$ осцилација се зове *проста принудна осцилација.* Она може бити без отпорне силе или са њом.

a) **Проста принудна осцилација без отпорне силе.** — У овом случају на материјалну тачку дејствује поред силе која зависи од растојања (*привлачна сила*), још и *пертурбациона сила* која зависи само од једног члана облика тригонометриске функције $\sin \Omega t$ или $\cos \Omega t$. Диференцијална је једначина кретања облика

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = h \cos \Omega t} \tag{54}$$

тј. *нехомогена диференцијална једначина са константним коефицијентима*, где је h коефицијент сразмере принудне силе, $h = F_0/m$; F_0 је њена аплитуда, а Ω кружна фреквенција промене поремећајне силе.

Општи интеграл ове диференцијалне једначине, како показује теорија нехомогених диф. једначина са конст. коефицијентима, састоји се из *збира општег интеграла хомогене и партикуларног интеграла нехомогене диф. једначине.* Општи је интеграл хомогене диф. једначине, према чл. **2.4.1**, облика

$$x_h = A \cos \omega t + B \sin \omega t = R \sin (\omega t + \varphi_0) .$$

Партикуларни интеграл нехомогене једначине потражићемо у облику

$$x_p = C \cos \Omega t + D \sin \Omega t .$$

Ако овај израз два пута диференцирамо, и те изводе унесемо у диференцијалну једначину (54), методом неодређених коефицијената одредићемо константе у облику

$$C = h/(\omega^2 - \Omega^2), \qquad D = 0$$

па је општи интеграл нехомогене диференцијалне једначине

$$\boxed{x = x_h + x_p = R \sin (\omega t + \varphi_0) + \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \cos \Omega t} \tag{55}$$

Кретање се врши као резултат *сабирања* (*интерференције*) двеју хармониских осцилација. Осцилација која одговара хомогеној диференцијалној једначини назива се *слободна* или *сопствена осцилација*, друга је *принудна.* Периоди осцилација су: сопствене $T_s = 2\pi/\omega$ и принудне $T_p = 2\pi/\Omega$. Ниједна не зависи од интеграционих константи, тј. од почетних услова кретања. Период принудне осцилације једнак је периоду промене поремећајне силе, $T_p = T_F$.

Принудна осцилација је, дакле, проста хармониска осцилација са кружном фреквенцијом периодичке силе и сталном амплитудом C.

Једначина (55) може се написати у облику само једне осцилације али су у томе случају амплитуда N и почетна фаза θ функције времена. Уведимо смену $\Omega = \omega + \alpha$ онда је

$$x = (R \cos \varphi_0 - C \sin \alpha t) \sin \omega t + (C \cos \alpha t - R \sin \varphi_0) \cos \omega t.$$

Кад израз у првој загради означимо са $N\cos\theta$ а у другој са $N\sin\theta$, онда добивамо закон кретања

$$\boxed{x = N(\sin\omega t + \theta)} \tag{56}$$

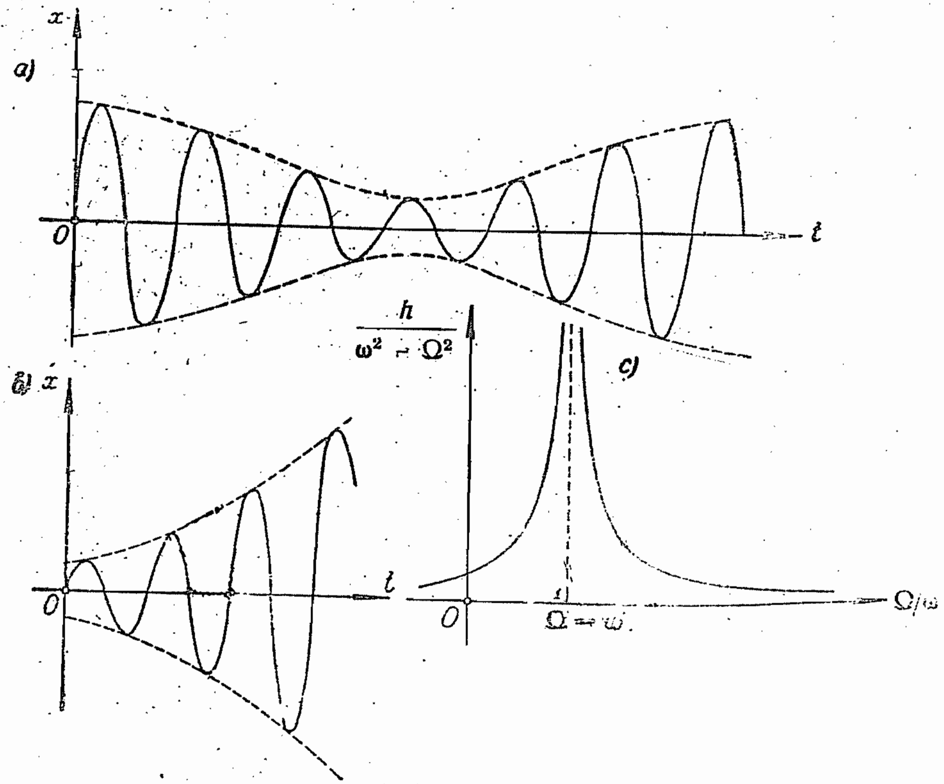
Амплитуда N одређена је изразом

$$N^2 = R^2 + C^2 - 2RC\sin(\alpha t + \varphi_0)$$

а фазна константа релацијом $\operatorname{tg}\theta = \sin\theta/\cos\theta$, те обе зависе од времена Амплитуда се стално мења, период те промене је период функције $\sin(\alpha t + \varphi_0)$

$$\boxed{T_d = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{\Omega - \omega} = \frac{T_s\,T_p}{T_s - T_p}} \tag{57}$$

и назива се *период подрхтавања* (*пулзације*). Дијаграм кретања представљен је на сл. 8 *a*.



Сл. 8. — *a*) Подрхтавање, *b*) резонанса, *c*) зависност амплитуде принудне осцилације од односа Ω/ω

Ако оба периодичка фактора, сопствене и принудне осцилације, имају исте вредности, тј. ако су им једнаке кружне фреквенције ($\omega = \Omega$), онда је период подрхтавања бесконачно велики. Ова појава се зове **резонанса;** тада је амплитуда принудне осцилације (C) бесконачно велика, што значи да и *најмања сила може да произведе велике осцилације.*

У случају резонансе је $\omega = \Omega$, па је Ωi корен првог реда карактеристичне једначине. Због тога морамо партикуларни интеграл нехомогене једначине (54) потражити у облику

$$x_p = t(C\cos\omega t + D\sin\omega t).$$

Ако овај интеграл диференцирамо двапута и унесемо у једначину (54), добивамо константе $C = 0$ и $D = h/2\omega$ па је партикуларни интеграл — *режим принудног кретања*:

$$x_p = \frac{h}{2\omega} t \sin\omega t.$$

Сл. 8 b приказује дијаграм пута и времена за случај резонансе, а сл. 8 c промену амплитуде у зависности од односа $\nu/k = \Omega/\omega$.

У техничкој пракси мора се водити рачуна при димензионисању објеката да не наступи случај резонансе, јер може доћи до пренапрезања и кидања материјала.

Напр., ако је $m = 2$, $c = 8$ и поремећајна сила $F_t = 4\cos t$ онда су: $\omega^2 = 4$, $h = 2$ и $\Omega = 1$ па је $C = {}^2/_3$. Ако су почетни услови кретања за $t = 0$, $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$ онда су константе $A = -{}^2/_3$ и $B = 0$, па је закон кретања

$$x = {}^2/_3 [\cos t - \cos 2t].$$

b) **Проста принудна осцилација са отпорном силом.** — Кад на материјалну тачку масе m дејствује поред привлачне силе, која је сразмерна растојању, и отпорне силе, сразмерне брзини, још и принудна сила, диференцијална једначина просте принудне осцилације са отпорном силом има облик

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = h\cos\Omega t, \tag{58}$$

тј. нехомогене диференцијалне једначине са константним коефицијентима. Као што смо раније видели општи интеграл ове једначине састоји се из збира општег интеграла хомогене диференцијалне једначине (чл. 2.6.2)

$$x_h = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} \tag{58'}$$

и партикуларног интеграла нехомогене кога ћемо узети у облику збира простих тригонометриских функција

$$x_p = C\cos\Omega t + D\sin\Omega t, \tag{59}$$

где су C и D произвољне константе. Диференцирајмо двапута овај партикуларни интеграл и унесимо у једначину (58) добићемо

$$[C(\omega^2 - \Omega^2) + 2D\delta\Omega - h]\cos\Omega t + [D(\omega^2 - \Omega^2) - 2C\delta\Omega]\sin\Omega t = 0.$$

Пошто ова једначина важи за сваки тренутак, то да би била задовољена, морају изрази у заградама бити једнаки нули, тј.

$$C(\omega^2-\Omega^2)+2D\delta\Omega=h,\quad -2C\delta\Omega+D(\omega^2-\Omega^2)=0.$$

Из овог система једначина одредићемо непознате константе C и D у облику

$$C=\frac{h(\omega^2-\Omega^2)}{(\omega^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2},\qquad D=\frac{2h\delta\Omega}{(\omega^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2}. \tag{60}$$

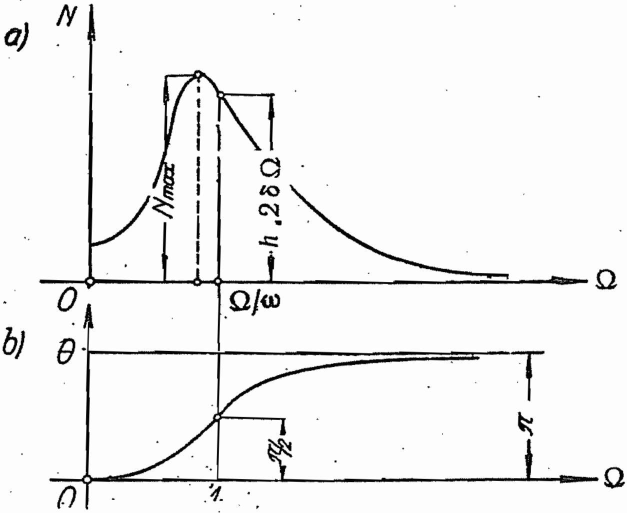
Уносећи ове вредности у партикуларни интеграл (59) добио би се компликован израз, али га, помоћу нових константи N и θ које су дате релацијама $C=N\cos\theta$, $D=N\sin\theta$, можемо написати у облику $x_p=N\cos(\Omega t-\theta)$ просте хармониске осцилације амплитуде N и фазне константе θ, које су одређене вредностима

$$N=\sqrt{C^2+D^2}=\frac{h}{\sqrt{(\omega^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2}};\quad \operatorname{tg}\theta=\frac{D}{C}=\frac{2\delta\Omega}{\omega^2-\Omega^2}. \tag{61}$$

Општи интеграл једначине (58) може се, дакле, написати у облику

$$\boxed{x=A\,e^{\lambda_1 t}+Be^{\lambda_2 t}+N\cos(\Omega t-\theta)} \tag{62}$$

Кретање се састоји из двеју осцилација: *опадајуће* (или апериодичког кретања што зависи од корена карактеристичне једначине, чл. 2.6.2) и *просте хармониске осцилације* кружне фреквенције Ω принудне силе и сталне амплитуде N. Како и амортизована осцилација и апериодичко кретање имају опадајући карактер то ће после извесног времена надвладати принудна осцилација и кретање ће бити хармониска осцилација са периодом принудне силе. Само ће осцилације материјалне тачке заостајати у фази иза осцилација принудне силе за θ/Ω секунди.



Сл. 9. — Зависност амплитуде и почетне фазе од кружне фреквенције поремећајне силе

Напр., за $\ddot{x} + 6\dot{x} + 25x = 4\cos t$, биће: $C = {}^8/_{51}$, $D = {}^2/_{51}$, па је

$$x = e^{-3t}\,[A_1 \cos 4t + B_1 \sin 4t] + {}^2/_{51}\,[4\cos t + \sin t].$$

Према (61) су:

$$N = {}^2/_{51}\sqrt{17};\quad \mathrm{tg}\,\theta = {}^1/_4\,.$$

За сталне вредности $k = \omega$, δ и h зависност амплитуде N и фазне константе θ принудне осцилације од фреквенције периодичке силе $(\Omega = \nu)$ дата је дијаграмима на сл. 9. Амплитуда ће бити максимална када је именилац израза (61) *minimum*, тј. за $\Omega^2 = \omega^2 - 2\delta^2$, и износи

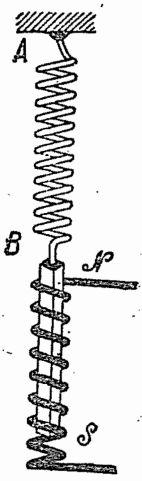
$$N_{max} = h/2\,\delta\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\,. \tag{63}$$

У случају *резонансе*, тј. када је $\Omega = \omega$, биће, из (61), $\theta = {}^1/_2\,\pi$ а амплитуда има вредност $N = h/2\,\delta\,\Omega$. Када изумру амортизоване осцилације кретање се може приказати једначином

$$x_p = (h/2\,\delta\,\omega)\sin\omega t.$$

Како је закон принудне силе $h\cos\Omega t$, то пертурбациона сила има највећу вредност када тачка пролази кроз равнотежни положај $(x = 0)$.

У свима досадашњим случајевима сила је зависила само линеарно од растојања материјалне тачке и њене брзине па се ове осцилације зову *линеарне* и то *слободне* или *принудне*, према томе да ли је дејствовала и пертурбациона сила. Оне пак осцилације код којих зависности нису линеарне називају се *нелинеарне*. Решења њихових диф. једначина много су компликованија и обично се добијају помоћу метода приближног интеграљења (напр. метода апроксимација). Њихово проучавање спада у *теорију осцилација*.[1]



Сл. 10

Пример. — 9) О крај спиралне опруге која се под утицајем терета од 20 gr продужи за 1 cm обешен је магнетни штап тежине 100 gr око кога је обавијен соленоид кроз који тече струја чији се интензитет мења по закону $I = 20 \sin 8\pi t$ (сл. 10). Струја почиње да дејствује у моменту $t = 0$ када се магнет увлачи у соленоид, а дотада је магнет мирно висио о опрузи. Сила која ремети кретање је $F = 16\pi I$ dyn-a. Одредити принудну осцилацију магнета.

Решење. — Диференцијална је једначина кретања магнета

$$\ddot{z} + \omega^2 z = h \sin 8\pi t$$

где је

$$\omega^2 = c/m = 20\,g/100 = 196\,\mathrm{sec}^{-2}.$$

Фреквенција принудне осцилације је $\Omega = 8\pi$; $\Omega^2 = 633$.

Принудна осцилација магнета, пошто је $A = B = 0$, јесте

$$z = [h/(\omega^2 - \Omega^2)] \sin 8\pi t = -\,0{,}023 \sin 8\pi t\,(\mathrm{cm}),$$

јер је $h = 16\,\pi I_{max}/m = 3{,}20\,\pi\,(\mathrm{cm/sec^2})$, а $\omega^2 - \Omega^2 = -\,437$.

---

[1] J. P. Den Hartog — Mechanical vibrations. New York and London, 1947 godine. Д. Рашковић — Теорија осцилација.

3. — КРИВОЛИНИСКО КРЕТАЊЕ МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ

3.1 ОПШТИ ПРОБЛЕМ

Као што смо видели, сила у општем случају може да зависи од више независно променљивих величина $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ па и њене координате такође зависе од тих елемената. Напр., диференцијалне једначине кретања за Декартове координате могу се написати у облику

$$\ddot{x} = f_1(x, y, z;\ \dot{x}, \dot{y}, \dot{z};\ t),\quad \ddot{y} = f_2(x, y, z;\ \dot{x}, \dot{y}, \dot{z};\ t),\quad \ddot{z} = f_3(x, y, z;\ \dot{x}, \dot{y}, \dot{z};\ t),$$

и претстављају *систем симултаних диференцијалних једначина другог реда*. У специјалном случају, када десне стране ових једначина садрже само оне координате и брзине које одговарају убрзању, тј. када се систем једначина може написати у облику

$$\ddot{x} = f_1(x, \dot{x}, t),\qquad \ddot{y} = f_2(y, \dot{y}, t),\qquad \ddot{z} = f_3(z, \dot{z}, t)$$

тада се интеграљење система диференцијалних једначина може извршити посебно за сваку једначину те ће интеграли бити облика

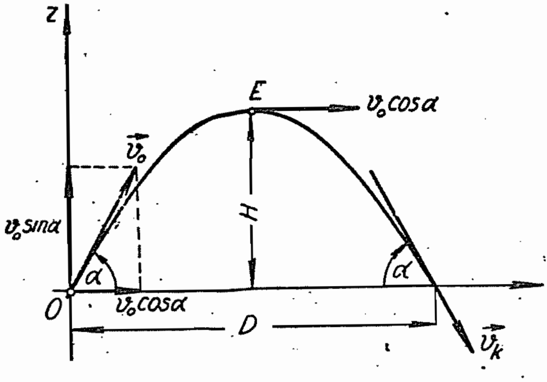
$$x = \varphi_1(t, C_1, C_4),\quad y = \varphi_2(t, C_2, C_5),\quad z = \varphi_3(t, C_3, C_6).$$

Коначне једначине кретања добићемо када из почетних услова кретања одредимо интеграционе константе. На исти начин добићемо и коначне једначине кретања за остале координантне системе.

3.2 КОС ХИТАЦ У БЕЗВАЗДУШНОМ ПРОСТОРУ

Проблем косог хица у безваздушном простору је проблем кретања тешке материјалне тачке, тежине $G = mg$, када почетна брзина $\vec{v}_0$ чини са хоризонталом Oy произвољни угао α који се зове *елевациони угао*. Кретање је, дакле, сложено из двају кретања: *једноликог*, услед почетне брзине $\vec{v}_0$, и *једнакоуспореног*, услед дејства теже, те је путања *крива линија* у вертикалној Oyz равни (сл. 11); O је координатни почетак Декартовог координатног система — почетни положај покретне тачке.

Диференцијалне једначине кретања биће



Сл. 11.—Кос хитац у безваздушном простору

$$\boxed{\ddot{y} = 0\,; \quad \ddot{z} = -g} \tag{64}$$

а њихови су први интеграли $\dot{y} = C_1$, $\dot{z} = -gt + C_2$.

Интеграционе константе одредићемо из услова да су у почетном тренутку $t=0$ пројекције почетне брзине $y_0 = v_0 \cos\alpha$, $z_0 = v_0 \sin\alpha$, те су интеграционе константе $C_1 = y_0$, $C_2 = z_0$, и први интеграли:

$$\dot{y} = v_0 \cos\alpha, \qquad \dot{z} = v_0 \sin\alpha - gt. \tag{65}$$

Поновним интеграљењем добићемо

$$y = v_0\, t \cos\alpha + C_3, \quad z = v_0\, t \sin\alpha - {}^1/_2\, g t^2 + C_4;$$

произвољне константе одредићемо из почетних услова да је за $t = 0$ и $y = z = 0$ те су $C_3 = C_4 = 0$, па су *коначне једначине кретања*

$$\boxed{y = v_0\, t \cos\alpha; \quad z = v_0\, t \sin\alpha - {}^1{}_2\, g t^2} \tag{66}$$

Ако из овог система једначина елиминишемо параметар t добићемо *линију путање*

$$\boxed{z = y \operatorname{tg}\alpha - {}^1/_2 \frac{g y^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}} \tag{67}$$

она претставља *параболу* са осом симетрије паралелном Oz оси.

Квадрат брзине одређујемо из једначине (65):

$$v^2 = \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v_0^2 + 2\,g[{}^1/_2 g t^2 - (v_0 \sin\alpha)\,t]. \tag{68}$$

Из обрасца (66) видимо да је израз у средњој загради (68) једнак $-z$, па је квадрат брзине

$$\boxed{v^2 = v_0^2 - 2\,gz} \tag{68}$$

Прва једначина (66) показује да је кретање пројекције тачке на Oy осу *једнолико*, док се из друге види да је кретање пројекције тачке на осу Oz *једнакоуспорено* све до тренутка када је брзина $\dot{z} = 0$, те је

$$t_E = (v_0 \sin\alpha)\,/\,g\,; \tag{69}$$

затим настаје *једнакоубрзано кретање (хоризонтални хитац)*. Тачка E у којој настаје промена кретања *теме* је параболе, са координатама

$$y_E = (v_0^2/2\,g)\sin 2\,\alpha = {}^1/_2\,D\,; \quad z_E = (v_0^2/2\,g)\sin^2\alpha = H\,; \tag{70}$$

где су: D *домет*, који може да добаци материјална тачка бачена под елевационим углом α према хоризонту, а H *висина пењања*.

Ове ће вредности бити максималне и то: *домет за* $\alpha = 45^0$ а *висина пењања за* $\alpha = 90^0$ *(вертикални хитац навише)*:

$$D_{max} = v_0^2/g\,; \tag{71}$$

$$H_{max} = v_0^2/2\,g = {}^1/_2\,D_{max}\,. \tag{72}$$

Како је $\sin 2\alpha_1 = \sin(\pi - 2\,\alpha_1) = \sin 2\,\alpha_2$ то је $\alpha_2 = {}^1/_2\,\pi - \alpha_1$, па се исти домет може постићи истом почетном брзином (v_0) а са два различита елевациона угла α_1 и α_2 који морају бити *комплементарни*.[1]

Дакле, домети ће бити једнаки било да вектор почетне брзине $(\vec{v_0})$ гради са осом Oy или са осом Oz угао α_1. Један елевациони угао је *већи* а други је *мањи* од 45^0, те постоји и овај однос: $\alpha_1 = 45^0 - \gamma$, $\alpha_2 = 45^0 + \gamma$, где је γ допуна тих елевационих углова до 45^0.

Напр. ако је $\alpha_1 = 30^0$ онда је $\alpha_2 = 60^0$, те је $\gamma = 15^0$.

У *балистици* је интересантан проблем одредити елевациони угао под којим треба избацити пројектил одређеном почетном брзином да би погодио одређену тачку простора N (η, ζ).

Како је $1/\cos^2\alpha = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha$ једначина (67) постаје

$$\mathrm{tg}^2\alpha - 2\,p\,\mathrm{tg}\,\alpha + q = 0, \tag{73}$$

где су:

$$p = v_0^2/g\eta; \qquad q = 1 + (2\,v_0^2\zeta/g\eta^2).$$

Квадратна једначина (73) има два корена, $\mathrm{tg}\,\alpha = p \pm \sqrt{p^2 - q}$, чије вредности зависе од поткорене количине.

За $p^2 - q > 0$ једначина има *два реална корена* те се дата тачка може погодити са два елевациона угла α_1 и α_2,

$p^2 - q = 0$ једначина има само *један реални корен*, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$,

$p^2 - q < 0$ једначина *нема реалних решења*.

---

[1] Према томе се и врши класификација артиљериских оруђа на: *топове* (са положеном путањом), *хаубице* (са путањом средње кривине) и *мерзере* (са убацном путањом).

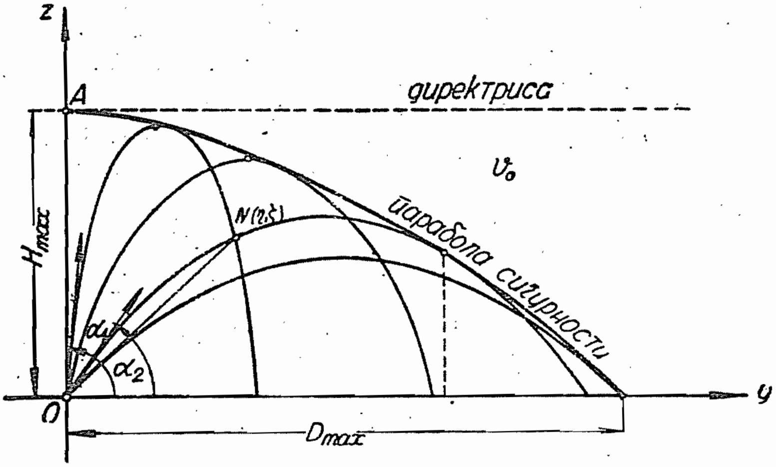
Услов $p^2 - q = 0$ одваја област реалних од области имагинарних корена једначине (73), па се може написати у облику

$$(v_0^2/g\eta)^2 = 1 + (2v_0^2\zeta/g\eta^2),$$

односно

$$\eta^2 = 2\frac{v_0^2}{g}\left(\frac{v_0^2}{2g} - \zeta\right) = 4H_{max}(H_{max} - \zeta). \tag{74}$$

Сматрајући η и ζ текућим координатама, ова једначина претставља криву линију — параболу — која се зове *парабола сигурности*. Она је симетрична према $O\zeta$ оси са теменом у тачки A (сл. 12), на удаљењу H_{max} од координатног почетка. Парабола сигурности је граница области тачака вертикалне равни кроз које може да прође путања пројектила избаченог *одређеном почетном брзином а са разним елевационим угловима.* Кроз сваку тачку, у делу *равни гађања* омеђеном параболом сигурности, могу проћи по две путање са два елевациона угла α_1 и α_2 који су корени једначине (73). Свака тачка на самој параболи сигурности може се погодити само под једним одређеним углом а тачке изван параболе сигурности не могу се погодити датом почетном брзином.



Сл. 12. — Парабола сигурности

Када се из једначина (70) елиминише параметар α добива се да је геометриско место темена свих парабола косог хица, при истој почетној брзини v_0, *елипса* полуоса H_{max} и $^1/_2\, H_{max}$ са средиштем на оси Oz (сл. 12).

Једначина (74) може се сматрати фамилијом парабола — линија путања пројектила избаченог *истом почетном брзином а под разним елевационим угловима* — који зависе од параметра α. *Обвојницу (анвелопу)* ових путања добићемо кад из система једначина

$$f(y, z, \lambda) = z - \lambda y + \frac{gy^2}{2v_0^2}(1+\lambda^2) = 0; \qquad \frac{\partial f}{\partial \lambda} = -y + \frac{g\lambda y^2}{v_0^2} = 0,$$

где је $\lambda = \operatorname{tg}\alpha$, елиминишемо параметар λ, у облику

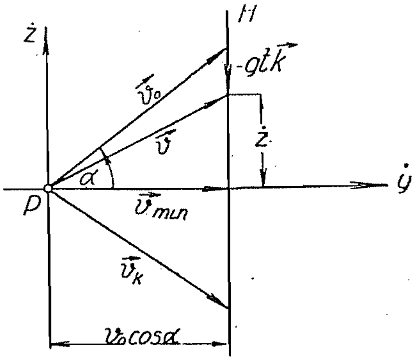
$$y^2 = 2\frac{v_0^2}{g}\left(\frac{v_0^2}{2g} - z\right).$$

Ова се једначина поклапа са једначином параболе **сигурности** Дакле, *парабола сигурности је обвојница свих линија путања материјалне тачке избачене истом почетном брзином а под свима могућним елевационим угловима.*

Како је $\dot{y} = v_0 \cos\alpha = const.$ то је *ходограф* косог хица *вертикална права линија* (сл. 13), једначине:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 - gt\vec{k}, \text{ односно } \dot{z} = \dot{y}\operatorname{tg}\alpha - gt \qquad (75)$$

са полом (P) на растојању $v_0 \cos\alpha$ од ње.



Сл. 13. — Ходограф косог хица

Хоризонтални хитац у безваздушном простору. — Специјалан случај косог хица је *хоризонтални хитац*; тада је $\alpha = 0$. Оријентишемо ли осу *Oz наниже*, тада су коначне једначине кретања

$$y = v_0 t; \quad z = {}^1/_2\, gt^2,$$

па је путања *парабола*

$$y^2 = 2\,(v_0^2/g)\, z.$$

Како су $\dot{y} = v_0$, $z = gt$ то је интензитет брзине

$$v = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}.$$

Вектор брзине гради са осом Oy угао α који је одређен са $\operatorname{tg}\alpha = gt/v_0$.

Ако је *H висина падања* (напр., висина са које се пушта бомба) онда је *домет*

$$D = (v_0/g)\sqrt{2\,Hg};$$

време падања је

$$t_k = \sqrt{2\,H/g}.$$

Брзина удара у земљу износи

$$v_k = \sqrt{v_0^2 + 2\,Hg},$$

а упадни угао је одређен са $\operatorname{tg}\alpha_k = \sqrt{2\,Hg/v_0^2}$.

Ходограф брзине је права паралелна оси Pz на удаљењу за v_0 од ње.

Примери. — **10)** 1^0) Тешка материјална тачка бачена је вертикално увис (у безваздушном простору) и падне на земљу после 11 sec.

Одредити почетну брзину којом је тачка бачена.

2^0) Материјална тачка избачена је почетном брзином добивеном из претходног става, под елевационим углом 60^0.

a) Одредити висину пењања и домет тачке.

b) За које време достигне тачка ту висину и тај домет?

c) Којом ће брзином погодити циљ?

Решење. —

1^0) $v_0 = gt = 5{,}5\ g \approx 54\ \mathrm{m\ sec}^{-1}$.

2^0) *a*) $H = (v_0^2/2\,g)\sin^2\alpha = 111\ \mathrm{m}$; $D = 258\ \mathrm{m}$.

b) $t_E = 4{,}77\ \mathrm{sec}$; $T = 2\,t_E = 9{,}54\ \mathrm{sec}$. *c*) $v_k = v_0 = 54\ \mathrm{m\ sec}^{-1}$.

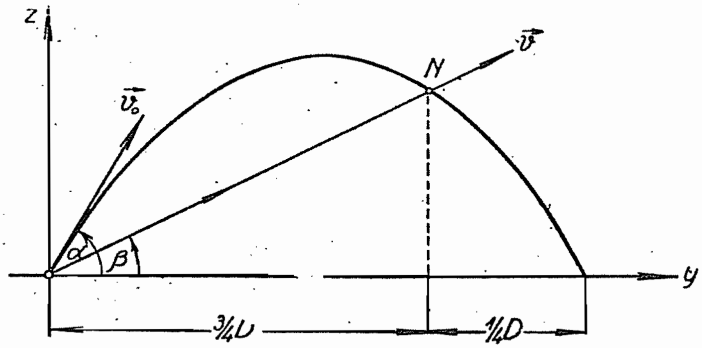
11) Из топа је испаљена граната почетном брзином $800\ \mathrm{m\ sec}^{-1}$ и достигла је домет 9 km.

a) Под којим је елевационим углом избачена?

b) Израчунати укупно време лета и висину пењања.

Решење. — *a*) $\sin 2\,\alpha = Dg/v_0^2$; $\alpha \approx 4^0$. *b*) $T = (2\,v_0 \sin\alpha)/g = 11{,}4\ \mathrm{sec}$; $H = 158\ \mathrm{m}$.

12) Тешка материјална тачка избачена је у безваздушном простору под елевационим углом α и пролази кроз тачку N до које се може доћи једноликим праволиниским кретањем, истом почетном брзином, за t sec. Одредити време лета материјалне тачке од O до N (сл. 14). — (*Walton*)



Сл. 14

Решење. — Из услова $y = v_0\ T \cos\alpha = v_0\, t \cos\beta$ добивамо $T = t\ \cos\beta/\cos\alpha$.

13) Материјална тачка избачена је почетном брзином $400\ \mathrm{m\ sec}^{-1}$ под елевационим углом 60^0. Друга тачка креће се из истог почетног положаја праволиниски и једнолико и сусреће се са првом у тачки N, ($^3/_4\ D$). Колика је брзина ове друге тачке (сл. 14)?

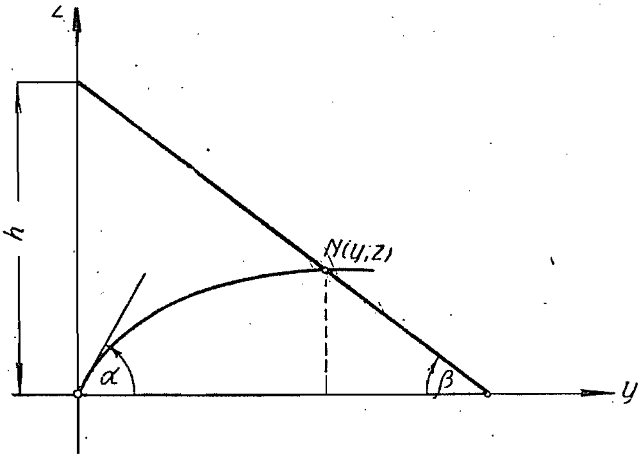
Решење. — Домет је $D = 14{,}1\ \mathrm{km}$; $y_N = 10{,}6\ \mathrm{km}$; $z_N = 4{,}7\ \mathrm{km}$; $\overline{ON} = 11{,}6\ \mathrm{km}$; $^3/_4\, D = v_0\, t \cos\alpha$, $t = 53\ \mathrm{sec}$, $v_2 = \overline{ON}/t = 218\ \mathrm{m\ sec}^{-1}$.

14) Под којим елевационим углом треба, у безваздушном простору, избацити материјалну тачку да би праву L погодила у најкраћем времену (сл. 15)?

Решење. — Једначина праве је $z = h - y \operatorname{tg} \beta$.

Ако у ову једначину ставимо уместо y и z вредности (66) биће

$$h - v_0 t \cos \alpha \operatorname{tg} \beta = v_0 t \sin \alpha - {}^1/_2 g t^2, \text{ тј.}, t = f(\alpha).$$

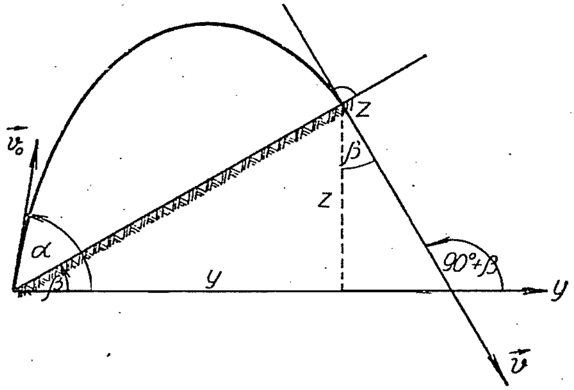


Сл. 15

Из услова екстремума $dt / d\alpha = 0$ следи $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 1$, односно $\alpha + \beta = 90^0$.

15) Под којим елевационим углом треба избацити пројектил да би пао управно на косу раван, која чини угао β са хоризонтом а управна је на раван путање пројектила (сл. 16)? Опште решење. Специјално решење за $\beta = 15^0$.

Решење. — У тачки удара (Z) координате су стрме равни и путање једнаке, па је $z = y \operatorname{tg} \beta$.



Сл. 16

Тангента на путању у томе месту управна је на стрму раван и чини са хоризонталом угао $90 + \beta$, па је

$$z' = \dot{z} / \dot{y} = - \operatorname{ctg} \beta .$$

Из једначина косог хица следи

$$y = v_0 t \cos \alpha; \quad z = v_0 t \sin \alpha - {}^1/_2 g t^2.$$

Ако из система једначина

$$z = v_0 t \sin \alpha - {}^1/_2 g t^2 = v_0 t \cos \alpha \operatorname{tg} \beta,$$

$$v_0 \sin \alpha - g t = - v_0 \cos \alpha \operatorname{ctg} \beta,$$

елиминишемо параметар t добићемо тражени угао

$$\operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \beta + \operatorname{ctg} \beta = 2 (1 + \sin^2 \beta) / \sin 2 \beta .$$

За дате податке је: $\operatorname{tg} \alpha \approx 4{,}27$ и $\alpha \approx 76^0 \, 50'$.

3.3 КОС ХИТАЦ У ВАЗДУШНОМ ПРОСТОРУ

Проблем косог хица у ваздушном простору много је сложенији од истог проблема у безваздушном простору пошто отпор ваздуха, као што смо навели у **чл. 2.6**, зависи од много величина. Овај се проблем детаљно проучава у *балистици (науци о гађању)* и зове се *прави балистички проблем.* За отпор ваздуха можемо само рећи да углавном зависи од брзине и супротног је смера од ње, тј. он пада у правац тангенте на путању а супротног је смера од вектора брзине, па се може претставити једначином $F_w = mgf(v)$.

На материјалну тачку (пројектил) избачену почетном брзином $\vec{v}_0$ дејствују, дакле, *сила теже* и *отпор ваздуха*. Диференцијалне једначине кретања за природни координатни систем биће

$$\frac{dv}{dt} = -g[\sin\alpha + f(v)], \qquad \frac{v^2}{R} = g\cos\alpha,$$

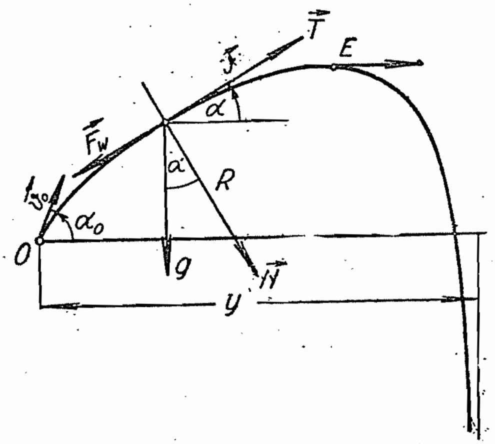
где је α угао кога чини тангента на путању са Oy осом. Како је кривина $K = 1/R = -d\alpha/ds = -d\alpha/v\,dt$, то друга једначина постаје

$$v\frac{d\alpha}{dt} = -g\cos\alpha.$$

Ако из ове и прве једначине елиминишемо време t добићемо *основну диференцијалну једначину балистичког проблема у облику*

$$\frac{dv}{v} = \frac{d\alpha}{\cos\alpha}[\sin\alpha + f(v)]. \tag{76}$$

Интеграљење ове диференцијалне једначине немогуће је у коначном облику сем за случај када је закон отпора ваздуха дат у извесном облику функције брзине[1]. Због тога постоје многе *приближне нумеричке* и *графичке методе* за интеграљење ове диференцијалне једначине (тзв. *таблице гађања* које су добивене из опита). Интегрална крива зове се *балистичка крива*, која углавном има следеће особине: *несиметрична је*; *теме путање није на половини хоризонталног домета већ је ближе упадној тачки*; *узлазни је крак дужи од силазног а кривина му је већа од кривине узлазног крака*. Домет је много мањи[2] него код хица у безваздушном простору а и ординате су краће тако да је *балистичка крива увек испод параболе косог хица*. Упадни је угао већи од елевационог (сл. 17).



Сл. 17. — Балистичка крива

---

[1] $f(v) = cv$, $f(v) = av + bv^2$ (*Newton*, *Euler*); $f(v) = c\,v^n$ (*J. Bernoulli*); $f(v) = a + b\,v^n$ (*d'Alembert*).

[2] 1918 год. Немци су тукли Париз великим топовима (калибар 210 mm, $G_z = 120$ kg, $v_0 = 1600$ m/sec, $\alpha = 55^0$, дужина цеви 36 m, $G_c = 142$ тоне). Теориски домет и висина пењања били су: $D = 245$ km, $H = 87,5$ km а стварна $D' = 120$ km, $H' = 40$ km (М. Брусић, — Балистика, Београд 1927).

У најпростијем случају када се за отпор ваздуха узме линеарна функција брзине, диференцијалне су једначине кретања

$$\ddot{y} + k\dot{y} = 0, \quad \ddot{z} + k\dot{z} + g = 0.$$

Ово су линеарне диференцијалне једначине са константним коефицијентима па су њихови општи интеграли

$$y = C_1 + C_2 e^{-kt}; \quad z = C_3 + C_4 e^{-kt} - (gt/k), \tag{77}$$

пошто је партикуларни интеграл нехомогене једначине $-(gt/k)$. Интеграционе константе одредићемо из почетних услова да је за $t = 0$ и $y = z = 0$ а пројекције почетне брзине $\dot{y}_0 = v_0 \cos\alpha_0$, $\dot{z}_0 = v_0 \sin\alpha_0$, па су

$$C_1 = -C_2 = \frac{v_0 \cos\alpha_0}{k}, \quad C_3 = -C_4 = \frac{g}{k^2} + \frac{v_0 \sin\alpha_0}{k}.$$

Ако ове вредности унесемо у једначине (77) и из њих елиминишемо t, добићемо линију путање

$$z = y \operatorname{tg}\alpha_0 + \frac{gy}{k\,v_0 \cos\alpha_0} + \frac{g}{k^2} \ln\left(1 - \frac{ky}{v_0 \cos\alpha_0}\right). \tag{78}$$

За $t = \infty$ балистичка се крива асимптотски приближава правој $y = v_0 \cos\alpha_0/k$ и тачка има брзину $-g/k$.

Пример. — 16) Тело тежине G бачено је почетном брзином v_0 под елевационим углом α_0. Одредити највећу висину пењања тела ако је отпор ваздуха сразмеран првом степену брзине $F_w = kG\,v$.

Решење. — Диференцијалне једначине кретања јесу

$$\ddot{y} = -gk\,\dot{y}, \quad \ddot{z} = -g\,(1 + k\dot{z}), \text{ односно}$$

$$(d\dot{y})/\dot{y} = -gk\,dt, \quad dz/(1 + k\dot{z}) = -g\,dt.$$

Интегралећи другу једначину биће

$$\ln(1 + k\dot{z}) = (-gt + C_1)\,k.$$

За $t = 0$ биће $\dot{z}_0 = v_0 \sin\alpha_0$, па је константа $C_1 = 1\,\mathrm{n}\,(1 + kv_0 \sin\alpha_0)/k$ те се брзина може претставити изразом

$$k\dot{z} = (1 + k\,v_0 \sin\alpha_0)\,e^{-kgt} - 1.$$

Поновном квадратуром добићемо за услове $t = 0$, $z = 0$

$$k^2 g\,z = (1 + kv_0 \sin\alpha_0)(1 - e^{-kgt}) - kg\,t.$$

Висина пењања[1] биће $H = z_{max}$ за $\dot{z} = 0$. Из овог услова следи

$$kg\,t = \ln(1 + kv_0 \sin\alpha_0),$$

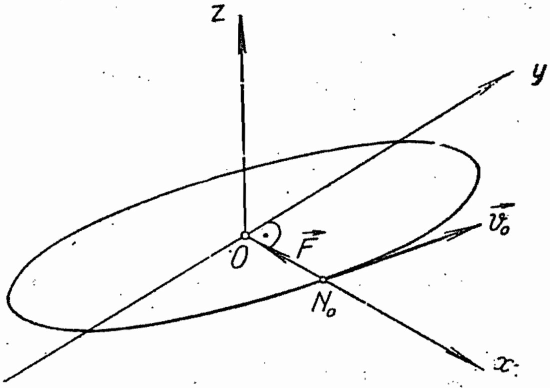
па је

$$k^2 g\,H_{max} = kv_0 \sin\alpha_0 - 1\,\mathrm{n}\,(1 + kv_0 \sin\alpha_0).$$

---

[1] За случај да је отпор у dyn-има видети Мешчерски: Збирка задатака из механике, Бгд., 1947 (зад. 469).

3.4 ПРИВЛАЧЕЊЕ ТАЧКЕ ОД НЕПОКРЕТНОГ ЦЕНТРА СИЛОМ СРАЗМЕРНОМ РАСТОЈАЊУ



Сл. 18. — Кретање под утицајем привлачне силе

Нека на материјалну тачку масе m дејствује привлачна сила сразмерна првом степену растојања од центра O (сл. 18). Ако је $\vec r$ вектор положаја покретне тачке онда је диференцијална једначина кретања:

$$\boxed{m\ddot{\vec r} = -c\vec r} \qquad (79)$$

где је c коефицијент пропорционалности, димензије $[c] = [F/L]$.

Овој једначини одговара систем скаларних диференцијалних једначина

$$\ddot x = -\omega^2 x; \quad \ddot y = -\omega^2 y; \quad \ddot z = -\omega^2 z, \qquad (79')$$

где је $\omega^2 = c/m$.

Пошто је ово систем линеарних хомогених једначина са константним коефицијентима, чије десне стране зависе само од оне координате која одговара убрзању, могу се појединачно интегралити, па су интеграли облика (27'):

$$x = x_0 \cos\omega t + (\dot x_0/\omega)\sin\omega t,$$

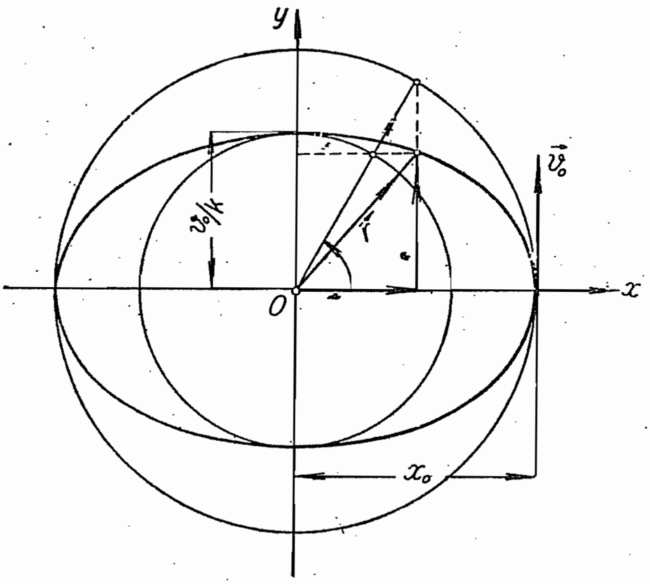
$$y = y_0 \cos\omega t + (\dot y_0/\omega)\sin\omega t,$$

$$z = z_0 \cos\omega t + (\dot z_0/\omega)\sin\omega t.$$

Изаберемо ли почетне услове кретања такве да је у тренутку $t=0$ тачка била на Ox оси, а да почетна брзина лежи у равни Oxy, онда горње једначине постају

$$x = x_0 \cos\omega t + (\dot x_0/\omega)\sin\omega t,$$

$$y = (\dot y_0/\omega)\sin\omega t, \quad z = 0.$$



Сл. 19. — Елиптичка хармониска осцилација

Елиминишемо ли из ових једначина време t добићемо линију путање у облику

$$(1/x_0^2)\,[x-(\dot{x}_0/\dot{y}_0)\,y]^2+(\omega/\dot{y}_0)^2\,y^2=1. \qquad (81)$$

Линија путање је *равна крива* у равни Oxy а како је карактеристични бином мањи од нуле то је *елипса*. Кретање је *елиптичка хармониска осцилација* (сл. 19), периода $T=2\,\pi/\omega$.

Напр., ако је $\vec{F}=-9\,m\vec{r}$ и $|\vec{r}_0|=x_0=4\,\text{m}$ а $v_0=6\,\text{m/sec}$ и са осом Ox гради угао $\alpha_0=45^0$, онда је једначина путање

$$x^2-2\,xy+9\,y^2-16=0.$$

Период је $T={}^2/_3\,\pi$.

Када, пак, поред горњих услова изаберемо осу Oy тако да је паралелна почетној брзини, тада је и $x_0=0$, па је линија путање *елипса*, једначине у канонском виду

$$\frac{x^2}{x_0^2}+\frac{y^2}{(v_0/\omega)^2}=1, \qquad (81')$$

односно у параметарском облику:

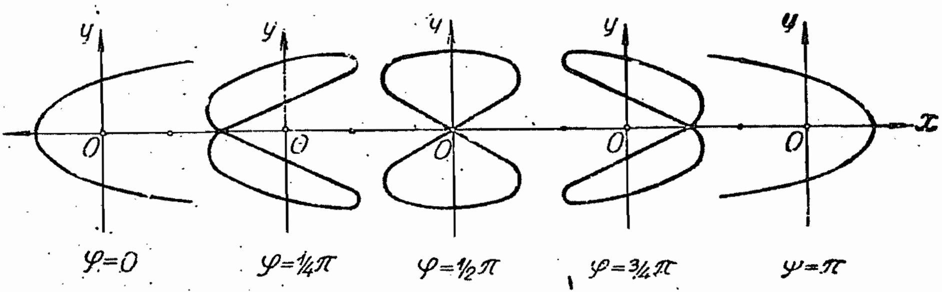
$$x=x_0\cos\omega t,\quad y=(\dot{y}_0/\omega)\sin\omega t.$$

Елиптичка хармониска осцилација је резултат *слагања* двеју *хармониских ортогоналних осцилација,* истих кружних фреквенција (и периода) али различитих амплитуда. Осцилације се разликују у фази за 90^0.

У овом случају периоди ортогоналних осцилација једнаки су, па су осцилације *синхроне*; у противном су *асинхроне*. Ако су периоди *коменсурабилни* кретање је осцилаторно, у противном апериодичко.

Пример. — 17) Одредити линију путање материјалне тачке чије је кретање дато системом једначина:

$$x=b\cos(2\,\omega t-\varphi),\qquad y=c\cos\omega t,\quad \text{за}\quad \varphi=0;\ {}^1/_4\pi;\ {}^1/_2\pi;\ {}^3/_4\pi;\ \pi.$$



Сл. 20. — Лисажуове фигуре

Решење. — Из прве једначине је

$$x=b\cos2\,\omega t\cos\varphi+b\sin2\,\omega t\sin\varphi.$$

Елиминисањем t из ње и друге једначине добивамо линију путање

$$x = b\,[2\,(y^2/c^2) - 1]\cos\varphi + 2\,(by/c)\sqrt{1-(y/c)^2}\sin\varphi .$$

За дате вредности φ добићемо познате *Лисажуове* (*Jules Lissajous*, 1822—1880 год.) фигуре (сл. 20), које су од велике важности у *акустици* (случај октаве).

3.5 ОДБИЈАЊЕ ТАЧКЕ ОД НЕПОКРЕТНОГ ЦЕНТРА СИЛОМ СРАЗМЕРНОМ РАСТОЈАЊУ

У случају одбијања материјалне тачке од непокретног центра услед силе сразмерне првом степену растојања, диференцијална једначина кретања у векторском облику биће:

$$\ddot{\vec{r}} = k^2 \vec{r}, \tag{82}$$

и њој одговарају три скаларне једначине

$$\ddot{x} = k^2 x, \quad \ddot{y} = k^2 y, \quad \ddot{z} = k^2 z, \tag{82'}$$

чији су интеграли, према чл. **2.4.2**, облика

$$\begin{gathered} x = x_0 \operatorname{Ch} kt + (\dot{x}_0/k)\operatorname{Sh} kt, \qquad y = y_0 \operatorname{Ch} kt + (\dot{y}_0/k)\operatorname{Sh} kt, \\ z = z_0 \operatorname{Ch} kt + (\dot{z}_0/k)\operatorname{Sh} kt. \end{gathered} \tag{83}$$

Изаберимо почетне услове као и у случају привлачења, биће $y_0 = z_0 = 0$ и $\dot{z}_0 = 0$, па су параметарске једначине путање

$$x = x_0 \operatorname{Ch} kt + (\dot{x}_0/k)\operatorname{Sh} kt, \qquad y = (\dot{y}_0/k)\operatorname{Sh} kt, \quad z = 0. \tag{84}$$

Елиминисањем времена t из ових једначина, пошто је $\operatorname{Ch}^2 kt - \operatorname{Sh}^2 kt = 1$, добићемо линију путање у облику

$$(1/x_0^2)\,[x - (\dot{x}_0/\dot{y}_0)\,y]^2 - (k/\dot{y}_0)^2\,y^2 = 1, \tag{84'}$$

тј. *хиперболу* у равни Oxy.

Када је брзина v_0 паралелна оси Oy, тада су $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = v_0$ па је линија путање *хипербола* једначине

$$\frac{x^2}{x_0^2} - \frac{y^2}{(v_0/k)^2} = 1. \tag{84''}$$

4. — ОПШТИ ЗАКОНИ ДИНАМИКЕ

4.1 ЗАКОН О КОЛИЧИНИ КРЕТАЊА

Производ масе материјалне тачке и вектора брзине назива се *количина кретања*[1] *(налет) покретне тачке*

$$\boxed{\vec{K} = m\,\vec{v}} \tag{85}$$

Она је вектор колинеаран са вектором брзине само му је интензитет повећан m пута, пошто је маса позитиван скалар.

Извод овог вектора по времену

$$\dot{\vec{K}} = \frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a}\ ;\ m = const,$$

једнак је *промени кретања* (по Њутну *„mutatio motus"*). Како је маса константна то је извод једнак сили која дејствује на материјалну тачку.

$$\boxed{\dot{\vec{K}} = \vec{F}} \tag{86}$$

Ова векторска једначина претставља *закон о количини кретања* који се може овако исказати:

Извод количине кретања по времену једнак је сили која дејствује на материјалну тачку.

Диференцијал количине кретања биће

$$d\vec{K} = \vec{F}\,dt = d\vec{\mathrm{I}}, \tag{87}$$

где је вектор $\vec{\mathrm{I}}$ *импулс силе.*[2] За коначан временски размак импулс је

$$\vec{\mathrm{I}} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\,dt = \int_{t_0}^{t} d\vec{K} = \vec{K} - \vec{K}_0, \tag{88}$$

---

[1] По Њутну *„quantitas motus"* (Principia, liber I, def. 2). Идеја се налази и код Декарта (R. Descartes, 1596 — 1650).

[2] По *Belanger*-у (1790—1874).

тј.: *Прираштај количине кретања за коначан временски размак једнак је импулсу силе која дејствује на материјалну тачку у том времену.*

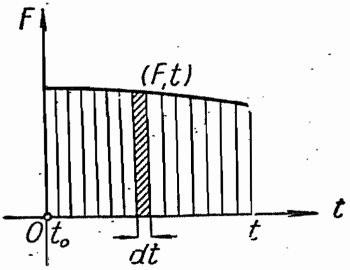
Кад горње векторске једначине развијемо добићемо координате количине кретања и импулса за Декартов правоугли координатни систем:

$$K_x = m\dot{x}, \qquad K_y = m\dot{y}, \qquad K_z = m\dot{z};$$

$$\mathbf{I}_x = \int_{t_0}^{t} X\,dt, \qquad \mathbf{I}_y = \int_{t_0}^{t} Y\,dt, \qquad \mathbf{I}_z = \int_{t_0}^{t} Z\,dt. \tag{89}$$

Димензије количине кретања и импулса су исте

$$\dim K = [K] = [\mathrm{M\,L\,T^{-1}}], \quad \dim \mathbf{I} = [\mathbf{I}] = [\mathrm{M\,L\,T^{-2}\cdot T}] = [\mathrm{M\,L\,T^{-1}}]$$



Сл. 21. — Дијаграм (F, t)

и обично се мере јединицом gr* cm $\sec^{-1}$ или kg sec.

Када сила зависи од времена $\vec{F} = \vec{F}(t)$ површина омеђена овом кривом и двема ординатама претставља *тотални импулс* односно *укупну промену количине кретања* у датом временском размаку (сл. 21).

Пошто је импулс силе векторски интеграл (88) то се његов правац, у општем случају, не поклапа са правцем силе; само у случају константне силе $\vec{F} = const.$ биће импулс колинеаран са силом

$$\vec{\mathbf{I}} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\,dt = \vec{F}(t - t_0).$$

Када је $F = 0$, тада из (86) следи да је количина кретања константни вектор

$$\vec{K} = m\vec{v} = \vec{c} \tag{86'}$$

те је и $v = const.$ Кретање се врши *по инерцији*. У овоме случају имамо *један векторски* односно *три скаларна интеграла*

$$m\dot{x} = c_1, \quad m\dot{y} = c_2, \quad m\dot{z} = c_3 \tag{86''}$$

диференцијалних једначина кретања материјалне тачке (чл. 1.2).

При $X = 0$ је $m\dot{x} = c_1$ те постоји само *један интеграл* из кога следи да је и $\dot{x} = const$, па је кретање у правцу осе Ox *једнолико*.

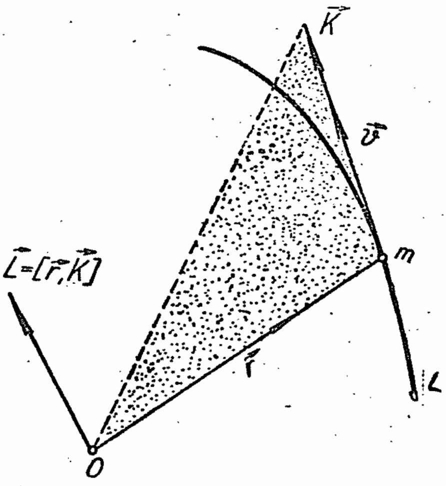
Ако је *сила паралелна једној оси*, напр. Oz оси, онда су $X = Y = 0$, $Z \neq 0$, па имамо *два интеграла кретања*, $\dot{x} = a$, $\dot{y} = b$ из којих добивамо однос $a\,dy - b\,dx = 0$, те је $ay - bx = c$. Ово је једначина равни паралелне оси Oz. Када је, дакле, *сила паралелна оси, тада се тачка креће у равни паралелној тој оси.*

Буде ли $Y = Z = 0$ тада су интеграли $\dot{y} = b$, $\dot{z} = c$. Када је и почетна брзина колинеарна са осом Ox, тада су $b = c = 0$ па су $y = y_0$ и $z = z_0$. Ако се тачка у почетку кретања налазила на оси Ox онда су $y_0 = z_0 = 0$, па је кретање праволиниско по оси Ox. Дакле, *да би се тачка кретала праволиниски треба да су и сила и почетна брзина колинеарне са путањом* (чл. 2.1).

4.2 ЗАКОН О МОМЕНТУ КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА (ЗАМАХУ)

Под *моментом количине кретања — кинетичким моментом* или *замахом* (*кинетически момент, momént cinetique, linear momentum, Drall)* — подразумева се момент вектора количине кретања материјалне тачке за једну сталну тачку — пол. Нека је пол координатни почетак O онда је положај материјалне тачке масе m одређен вектором положаја $\vec{r}$ (сл. 22) па је момент количине кретања векторски производ вектора положаја материјалне тачке и вектора $\vec{K}$:

$$\boxed{\vec{L}_O = [\vec{r}, \vec{K}]} \qquad (90)$$



Сл. 22. — Момент количине кретања (замах)

Пошто је момент количине кретања (замах) векторски производ двају вектора то је и он *вектор* потпуно одређен према правилу векторског производа.

Први извод овог вектора по времену биће

$$\dot{\vec{L}}_O = \frac{d}{dt}[\vec{r}, \vec{K}] = [\dot{\vec{r}}, \vec{K}] + [\vec{r}, \dot{\vec{K}}].$$

Како је $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ то су вектори $\dot{\vec{r}}$ и $\vec{K}$ колинеарни па је први израз на десној страни једнак нули, а с обзиром на једначину (86), биће

$$\boxed{\dot{\vec{L}}_O = [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M}_O^{\vec{F}}} \qquad (91)$$

пошто је векторски производ вектора положаја и вектора силе момент силе за дати пол. Ова векторска једначина изражава *закон о моменту количине кретања (замаху)* за непокретни пол:

Извод по времену момента количине кретања (замаха) за непокретни пол једнак је моменту силе, која дејствује на материјалну тачку за исти пол као моментну тачку.

Пошто је и извод замаха вектор, можемо га разложити у три компоненте:

$$\dot{\vec{L}}_O = \frac{d}{dt}[\vec{r}, m\,\vec{v}] = \dot{L}_x\vec{i} + \dot{L}_y\vec{j} + \dot{L}_z\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

па су Декартове координате овог вектора:

$$\begin{aligned} \frac{dL_x}{dt} &= \frac{d}{dt}[m(y\dot{z} - z\dot{y})] = \dot{L}_x = yZ - zY = M_x, \\ \frac{dL_y}{dt} &= \frac{d}{dt}[m(z\dot{x} - x\dot{z})] = \dot{L}_y = zX - xZ = M_y, \\ \frac{dL_z}{dt} &= \frac{d}{dt}[m(x\dot{y} - y\dot{x})] = \dot{L}_z = xY - yX = M_z. \end{aligned} \tag{92}$$

Пројекција замаха на осу јесте *замах за осу* те можемо рећи: *Пројекција извода замаха материјалне тачке на сталну осу једнака је моменту силе за ту осу.* Док је замах за тачку *вектор* дотле је за осу, као и момент силе за осу, *скалар*.

Димензија је замаха

$$\dim L = [L] = [rK] = [ML^2T^{-1}],$$

а обично се мери са gr* cm^2 sec^{-1} или kgm sec.

Овом закону се може дати и кинематичка аналогија. Брзина покретне тачке је извод вектора положаја, $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, и пада у правац тангенте ходографа тога вектора (путање). Према томе и извод кинетичког момента (замаха) по времену је брзина крајње тачке овог вектора која се креће по његовом ходографу. Ова брзина ($\dot{\vec{L}}$) једнака је по величини, правцу и смеру моменту силе која дејствује на материјалну тачку а за моментну тачку за коју узимамо и кинетички момент. Ово је израз *Резалове теореме* (*Résal*) која је од велике важности у динамици крутог тела (чл. 20.2).

Секторску брзину $\vec{S} = {}^1/_2\,[\vec{r}, \vec{v}]$ можемо довести у везу са замахом, те је

$$\boxed{\vec{L}_O = [\vec{r}, \vec{K}] = m\,[\vec{r}, \vec{v}] = 2\,m\,\vec{S}} \tag{93}$$

па је извод замаха по времену

$$\boxed{\dot{\vec{L}}_O = 2\,m\,\dot{\vec{S}} = \vec{M}_O^{\vec{F}}} \tag{94}$$

Секторско убрзање ($\dot{S}$) *помножено двоструком масом једнако је моменту силе за исти пол за који се узима и секторска брзина.*

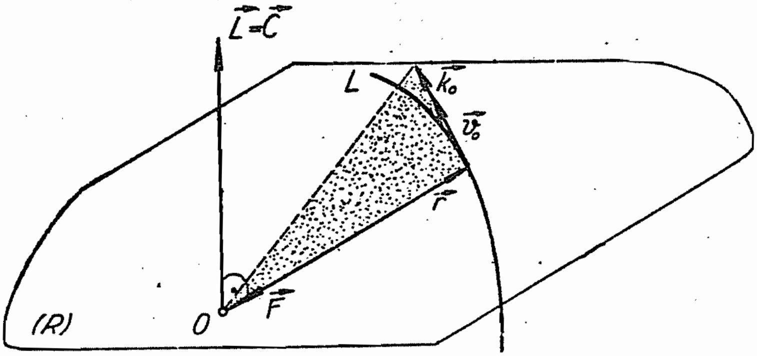
Овај се закон назива *закон површине* с обзиром да секторска брзина претставља промену површине у јединици времена.

Ако су моменти силе за Декартове координатне осе, у полу O, једнаки нули $M_x = M_y = M_z = 0$, онда је и сам момент силе за пол O једнак нули, па из једначине (91) следи

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{C} = const.} \tag{95}$$

Када је момент силе, која дејствује на материјалну тачку, за неку моментну тачку једнак нули, тада је и замах за ту тачку константан.

Замах је векторски производ вектора $\vec{r}$ и $\vec{K}$ па је управан на раван коју образују ти вектори; у случају да је замах константан раван је *стална*; она је раван путање која је, дакле, *равна крива линија* јер почетна брзина мора да лежи у тој равни. Ова стална раван у којој се креће материјална тачка назива се по *Лапласу* (*Pierre Simon Laplace*, 1749—1827 год., творац *Небеске механике*) *инваријабилна раван* (сл. 23).



Сл. 23. — Инваријабилна раван

Када израз (95) помножимо скаларно вектором $\vec{r}$ биће

$$(\vec{r}, \vec{C}) = (\vec{r}, [\vec{r}, \vec{K}]) = 0\,,$$

па су вектори $\vec{L} = \vec{C}$ и $\vec{r}$ *ортогонални.* Тај услов претставља векторску једначину инваријабилне равни; њена скаларна једначина је

$$x C_1 + y C_2 + z C_3 = 0\,, \tag{95'}$$

где су C_1 C_2 и C_3 *скаларни интеграли момента количине кретања.* Они износе:

$$C_1 = m(y\dot{z} - z\dot{y})\,, \quad C_2 = m(z\dot{x} - x\dot{z})\,, \quad C_3 = m(x\dot{y} - y\dot{x})\,. \tag{95''}$$

Када сила која дејствује на материјалну тачку *стално пролази кроз непомичну тачку O*, коју ћемо узети за координатни почетак, тада је момент силе за ту тачку увек једнак нули, па је први интеграл једначине (91), тзв. *интеграл замаха*, константан, тј. *замах је константан* и путања тачке је равна крива у равни управној на замах која пролази кроз пол *O*. У овом је случају, према (93), и секторска брзина константна, па се овај интеграл назива и *интеграл површине*[1].

Када је *сила паралелна само једној оси* тада је њен момент за ту осу једнак нули (*Статика*, **чл. 24**), па је замах за ту осу константан. Према томе, број скаларних интеграла момента количине кретања може бити: *ниједан, један* или *три*. У првом је случају замах *променљив*, у другом је случају *сила паралелна оси*, тј. лежи у равни која пролази кроз материјалну тачку и ту осу, у трећем је случају *замах константан.*

Према томе *не могу бити два интеграла момента количине кретања*. Ово можемо и доказати. Нека су напр. $M_x = 0$ и $M_y = 0$ онда је, према (91),

$$[\vec{r}, \vec{F}] = M_z \vec{k} = \dot{L}_z \vec{k}\,.$$

Помножимо ли овај израз векторски ортом $\vec{k}$ и развијемо га, биће

$$[\vec{k}, [\vec{r}, \vec{F}]] = \vec{r}\,(\vec{k}, \vec{F}) - \vec{F}\,(\vec{k}, \vec{r}) = Z\vec{r} - z\vec{F} = 0,$$

па мора бити

$$Z\vec{r} \quad z\vec{F} = 0\,.$$

Помножимо ли ову једначину векторски са $\vec{r}$ долазимо до услова да је $M_z = 0$ или $z = 0$. Дакле, постоје три скаларна интеграла, односно да је инваријабилна раван *Oxy* раван.

---

[1] Овај закон су једновремено открили 1746 год. *Euler* и *Daniel Bernoulli.*

Између интеграла количине кретања и интеграла момента количине кретања постоји *једна веза*, јер је

$$(\vec{K}, \vec{L}) = (\vec{K}, [\vec{r}, \vec{K}]) = 0. \tag{96}$$

Дакле, ако је $\vec{F}=0$ биће $\vec{K}=\vec{c}$. Ако је испуњен услов (95) онда је $\vec{L}=\vec{C}$. Овим векторским интегралима одговарају *шест скаларних интеграла* између којих постоји, према (96), *веза*

$$(\vec{c}, \vec{C}) = c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3 = 0. \tag{96'}$$

Према томе у случају да постоје свих шест скаларних интеграла између њих постоји једна веза (96′) те нам за познавање кретања (чл. 1.2), недостаје још један интеграл. Њега ћемо добити из једног новог закона — закона о живој сили (чл. 4.3).

4.3 ЗАКОН О ЖИВОЈ СИЛИ (КИНЕТИЧКОЈ ЕНЕРГИЈИ). РАД СИЛЕ

Помножимо ли диференцијалну једначину кретања материјалне тачке $m\vec{a} = \vec{F}$ скаларно вектором $\vec{v}\,dt = d\vec{s}$, где је v брзина а $d\vec{s}$ елементарно померање, добићемо

$$(m\vec{a}, \vec{v}\,dt) = (\vec{F}, d\vec{s}). \tag{97}$$

Скаларни производ силе и елементарног померања $d\vec{s}$ назива се *елементарни рад силе* на том померању и обележава се са

$$\boxed{d\mathbf{A} = (\vec{F}, d\vec{s})} \tag{98}$$

Према дефиницији скаларног производа рад је *скаларна величина* и за коначно померање може се написати у облику скаларног производа

$$\mathbf{A} = (\vec{F}, \vec{s}) = F s \cos(\vec{F}, \vec{s}),$$

па може бити *позитиван, негативан и једнак нули*. Када је сила управна на вектор померања, онда је $(\vec{F}, \vec{s}) = 0$ те је рад једнак нули. Највећа вредност рада постиже се при колинеарности силе и померања

$$\mathbf{A}_{max} = F s.$$

Елементарни рад, као скаларни производ, може се написати у аналитичком облику као збир производа хомологних Декартових координата

$$\boxed{d\mathbf{A} = (\vec{F}, d\vec{s}) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz} \tag{98'}$$

где су X, Y, Z координате силе, а dx, dy, dz координате вектóра померања $d\vec{s} = d\vec{r}$.

Леву страну једначине (97) можемо написати у облику

$$(m\vec{a}, \vec{v}\,dt) = (m\dot{\vec{v}}, \vec{v}dt) = (m\vec{v}, d\vec{v}) = d\,(^1/_2\,mv^2), \tag{99}$$

јер је

$$d\,(v^2) = d\,(\vec{v}, \vec{v}) = 2\,(\vec{v}, d\vec{v}).$$

Израз у загради на десној страни једначине (99) назива се по *Лајбницу (Leibniz) жива сила*[1] материјалне тачке *(vis viva)* или по *Кориолису кинетичка енергија* и обележава се са

$$\boxed{E_k = {}^1/_2\,mv^2} \tag{100}$$

па је *скаларна величина.*

С обзиром на једначине (98) и (99) може се написати

$$\boxed{dE_k = d\,\mathbf{A}} \tag{101}$$

Ова једначина изражава *закон о живој сили (кинетичкој енергији)* за материјалну тачку:

Диференцијал живе силе (кинетичке енергије) материјалне тачке једнак је елементарном раду силе која дејствује на материјалну тачку на одговарајућем померању.

За Декартов координатни систем овај се закон може написати у облику

$$d\,[^1/_2\,m\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)] = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz\,. \tag{102}$$

За коначно кретање, у временском размаку $t - t_0$, биће прираштај живе силе

$$E_k - E_{k_0} = \int_{t_0}^{t} dE_k = \int_{N_1}^{N_2} (\vec{F}, d\vec{s}) = \int_{L} (\vec{F}, d\vec{r})\,;$$

тј.

$$\boxed{E_k - E_{k_0} = \mathbf{A}} \tag{103}$$

Ова једначина изражава закон о живој сили за материјалну тачку у интегралном облику:

Прираштај живе силе материјалне тачке на одређеном путу једнак је тоталном раду силе на истом путу.

---

[1] По Лајбницу је „*vis viva*“ mv^2 (*Acta erud.*, 1695 год.)

И жива сила и рад имају исте димензије $\dim E_k = [E_k] = [\mathbf{A}] = [M L^2 T^{-2}]$. За јединицу рада у CG*S систему мера узима се erg[1]. То је рад који изврши сила од 1 dyna на померању од 1 cm у правцу силе. Већа је јединица *џаул* (*joule*)[2] и износи 10^7 erga. Рад силе теже од 1 kg на померању од 1 m зове се 1 *килограмметар* (kgm) и износи

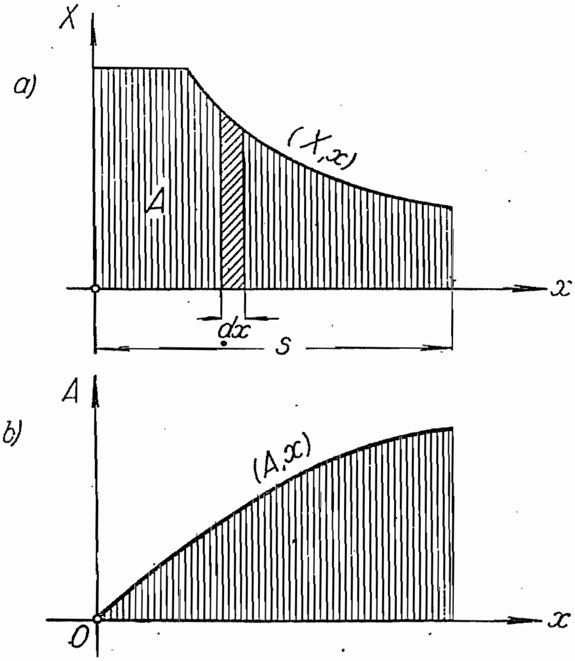
$$1\ \text{kgm} = 10^5\ \text{grcm} = 9{,}81 .\ 10^7\ \text{erga} = 9{,}81\ \text{joule} = 9{,}81\ \text{J} .$$

Обрнуто биће

$$1\ \text{J} = 1\ \text{Nm} = 0{,}102\ \text{kgm} ,$$

и претставља рад силе 1 N (њутн) на померању од 1 m у правцу силе.

За случај праволиниског кретања по Ox оси када сила зависи само од растојања, површина омеђена кривом $X = f(x)$ и двема ординатама претставља тотални рад силе на померању. Графичко интеграљење овог дијаграма примењује се код *мотора* (напр., *индикаторски дијаграм* код парне машине, сл. 24). Графичким интеграљењем дијаграма (X, x) добићемо дијаграм *рада и пута* $(\mathbf{A}, x)$.



Сл. 24. — Дијаграми (X, x) и $(\mathbf{A}, x)$

У **чл. 4.1** видели смо да је прираштај количине кретања био једнак импулсу силе (88):

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{\mathbf{I}} .$$

Помножимо ли овај израз прво скаларно брзином $\vec{v}$ а затим почетном брзином $\vec{v}_0$ и саберемо, добићемо

$$E_k - E_{k_0} = \mathbf{A} = {}^1/_2 \left[(\vec{\mathbf{I}}, \vec{v}_0) + (\vec{\mathbf{I}}, \vec{v})\right] = \left(\vec{\mathbf{I}}, \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}}{2}\right) . \tag{104}$$

---

[1] Од грчке речи εργως (рад).

[2] По *Џаулу* (*James Prescott Joule*, 1818—1889 год.).

Ову теорему о коначном прираштају живе силе извео је лорд *Келвин* (*William Thomson, lord Kelvin*, 1824—1907 год.) и гласи:

Прираштај живе силе (тотални рад) једнак је скаларном производу импулса силе и полузбира почетне и крајње брзине за дати временски размак.

4.4 СНАГА (ЕФЕКТ РАДА)

Извод рада по времену назива се *снага* (*ефект рада*)

$$P = \frac{d\,\mathbf{A}}{dt} \tag{105}$$

и претставља брзину извршења рада. Како је елементарни рад скаларни производ силе и елементарног померања (98), то се снага може написати у облику скаларног производа силе која дејствује на материјалну тачку, и брзине тачке[1]

$$P = (\vec{F}, \vec{v}). \tag{106}$$

Из закона о живој сили (101), следи и овај однос

$$\boxed{P = \frac{d\,\mathbf{A}}{dt} = \frac{d\,E_k}{dt} = (\vec{F}, \vec{v})} \tag{107}$$

Снага (ефект рада) једнака је изводу живе силе по времену.

Пошто је рад скаларна величина то је и снага скалар, па је њена димензија $[P] = [M\,L^2\,T^{-3}]$. Основна јединица је у CG*S систему erg/sec, тј. рад од једног erga у јединици времена — секунду. Већа је јединица joule/sec и назива се *ват* (Watt)[2]

$$1\ \text{Watt} = 1\ \text{joule/sec} = 10^7\ \text{erg/sec}.$$

Већа је јединица *киловат* ($1\ \text{kW} = 10^3\ \text{W} = 10^{10}\ \text{erg/sec}$).

Практична техничка јединица је *коњска снага*[3] ознаке KS или HP („horse power") и износи

$$1\ \text{KS} = 75\ \text{kgm/sec} = 735{,}75\ \text{W} \approx 0{,}736\ \text{kW}.$$

---

[1] Њутн је под „*actio agentis*" подразумевао снагу а не рад силе (*Principia*, lib. I, страна 25, изд. 1687 год.).

[2] По *Вату* (*James Watt*, 1737—1819 год.).

[3] Јединица снаге коњска снага нема интернационалну ознаку. У Енглеској и Америци употребљава се ознака HP (horse-power), у СССР лс (лошадиная сила), у Француској ch (cheval-vapeur), у Италији cv (cavallo di vapore), у Немачкој PS (Pferdstärke). Данас се тежи да се јединица коњска снага потпуно замени киловатом.

Енглеска коњска снага (HP) не слаже се са европском већ износи ≈ 756 W.

Између киловата и коњске снаге постоји овај однос

$$1\,\mathrm{KS} = 0{,}736\,\mathrm{kW};\ 1\,\mathrm{kW} = 1{,}359\,\mathrm{KS}.$$

Из једначине (107) биће

$$\mathbf{A} = \int P\,dt. \tag{107'}$$

У електротехници се уместо јединице рада џаула (J), а према горњем обрасцу, употребљава и јединица *ваш секунда* (Wsec). Међутим, према одлуци Међународне комисије **(CEI)** усвојен је само џаул (J). Још су се одржале и ове јединице: *ватчас* (Wh), *хектоватчас* (hWh) и *киловатчас* (kWh).

4.5 ЗАКОН О ОДРЖАВАЊУ МЕХАНИЧКЕ ЕНЕРГИЈЕ

Када сила *зависи само од растојања тачке од једне сталне тачке — центра* — тада се та зависност, као што смо видели, може написати у векторском облику

$$\vec{F} = \vec{F}\,(\vec{r}), \tag{108}$$

где је $\vec{r}$ вектор положаја тачке. Свакој тачки простора, дакле, одговара по једна сила — један вектор. Овакав простор, или његов део, зове се *векторско поље*, у конкретном случају, *поље силе* (*Кин.*, Додатак III). Ако је сила $\vec{F}$ *градијент скаларне* функције U која зависи од положаја тачке, тј. зависи од координата те тачке, напр. за Декартов правоугли систем $U = U\,(x, y, z)$, онда се, према правилу векторске анализе, може написати

$$\vec{F} = \operatorname{grad} U = \nabla U, \tag{109}$$

где је ∇ *Хамилтонов оператор (nabla)*. Када овај векторски израз развијемо биће

$$X\vec{\mathrm{i}} + Y\vec{\mathrm{j}} + Z\vec{\mathrm{k}} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{\mathrm{i}} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{\mathrm{j}} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{\mathrm{k}},$$

па су координате силе $\vec{F}$ једнаке парцијалним изводима скаларне функције U по дотичним координатама:

$$\boxed{X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}} \tag{109'}$$

Функција $U = U(x, y, z)$, чији је градијент једнак сили $\vec{F}$, назива се *функција силе*. Функција супротног знака од те функције назива се *потенцијална функција*[1], *потенцијална енергија* или *потенцијал*[2]

$$\Pi = -U = E_p , \tag{110}$$

па су Декартове координате силе:

$$X = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} .$$

Када сила која дејствује на материјалну тачку има функцију силе, тада се закон о живој сили изражава једначином

$$E_k - E_{k_0} = \int d\,\mathbf{A} = \int_{N_0}^{N} (\vec{F}, d\vec{s}) = \int (\operatorname{grad} U, d\vec{s}) =$$

$$= \int \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) = \int dU = U - U_0 = \mathbf{A} , \tag{111}$$

где је dU *тотални диференцијал* функције силе.

Уводећи интеграциону константу $h = E_{k_0} - U_0$ горњи *интеграл живе силе* постаје

$$\boxed{E_k = U + h} \tag{112}$$

Сменом функције силе U потенцијалном фукцијом, биће

$$\boxed{E_k + \Pi = E_k + E_p = h = const.} \tag{113}$$

те је *збир кинетичке и потенцијалне енергије константан*. Ово је израз *закона о одржавању (конзервацији) механичке енергије:*

Када се кретање материјалне тачке врши под утицајем силе која има функцију силе збир кинетичке и потенцијалне енергије је константан.

Збир ових енергија назива се *тотална механичка енергија* па се овај закон може написати у облику

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 = const. \tag{114}$$

те гласи: *Када се кретање материјалне тачке врши под утицајем силе, која има функцију силе, тотална механичка енергија је константна.*

Например, код хармониског осциловања овај закон важи. Према (26) кинетичка енергија је $E_k = {}^1/_2\, m R^2 \omega^2 \cos^2 \varphi$, где је $\varphi = \omega t + \varphi_0$. Како је сила $X = -cx$ то је потенцијална енергија $E_p = -\mathbf{A} = \int c\,x\,dx = {}^1/_2\, cx^2 = {}^1/_2 m\omega^2 R^2 \sin^2 \varphi$. Њихов збир

---

[1] По *Лагранжу (Oeuvres, 1773 год.)*.

[2] По *Грину (1828 год.)*.

износи $E = {}^1/_2\, c R^2 = const.$ За $\varphi = {}^1/_2 \pi$ је $E_k = 0$ а $E_p = E_{p\,max}$; у равнотежном положају ($\varphi = 0$) је обратно. Енергије се, дакле, мењају између ових екстремних вредности, али њихов збир остаје константан.

У случају да на материјалну тачку дејствују и силе које немају функције силе, закон о одржавању тоталне механичке енергије не важи те ће наступити *деградација механичке енергије.* Међутим, како је закон о одржавању енергије општи (универзални) закон природе, то ће наступити само *претварање* једног дела механичке енергије у друге облике (напр., топлотну, електричну, звучну, итд.).

Помоћу ова три динамичка закона: *закона о количини кретања, закона о моменту количине кретања* и *закона о живој сили* (*кинетичкој енергији*) можемо да одредимо свих *шест скаларних* интеграла (86″, 96″ и 112) диференцијалних једначина кретања материјалне тачке (**чл. 1.2**).

4.6 КОНЗЕРВАТИВНЕ СИЛЕ

Кретање материјалне тачке под условом да за време тог кретања важи закон о одржавању механичке енергије назива се *конзервативно* а силе које производе оваква кретања називају се *конзервативне силе.*

Конзервативна сила има функцију силе, па се може написати у облику $\vec{F} = \operatorname{grad} U$ и њене су Декартове координате, као што смо видели у претходном члану, једнаке парцијалним изводима функције силе по датим координатама

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Пошто и координате силе $\vec{F}$ зависе од координата положаја материјалне тачке то диференцирањем горњих израза добивамо

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}; \qquad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}; \qquad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}; \qquad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}; \qquad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}.$$

Како је $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}, \ldots,$ морају бити испуњени следећи услови за конзервативну силу

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0. \tag{115}$$

Они су познати као *услови о егзистенцији тоталног диференцијала скаларне функције.*[1] У векторском облику могу се изразити помоћу ротора

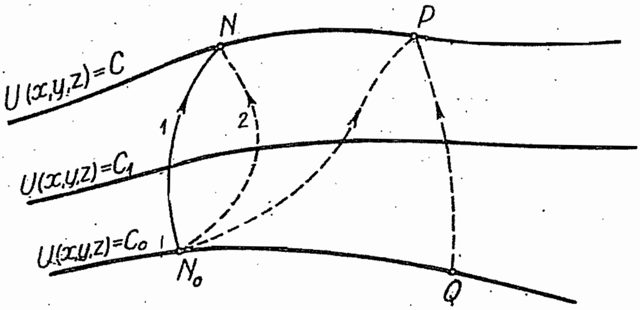
$$\operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} U = [\nabla, \nabla U] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0. \qquad (115')$$

Напр., ако су пројекције силе на координатне осе функције само одговарајућих координата $X = X(x)$, $Y = Y(y)$ и $Z = Z(z)$, онда су услови (115) испуњени, па је сила конзервативна.

Још је једна врло важна особина конзервативних сила коју многи писци узимају за дефиницију истих. Конзервативну силу

$$\vec{F} = \operatorname{grad} U = -\operatorname{grad} \Pi$$

можемо довести у везу са скаларним пољем функције силе $U(x, y, z)$. Из особина градијента (*Кин.*, Додатак III) излази да сила $\vec{F}$ пада у правац градијента тј. у правац *нормале на еквискаларну површину у дотичној тачки, да је наперена у страну пораста скалара* (опадања потенцијала) *и да је по интензитету једнака интензитету градијента односно изводу скалара U у правцу нормале на еквискаларну површину*



Сл. 25. — Рад конзервативне силе не зависи од облика путање

$$F = |\operatorname{grad} U| = \frac{dU}{\overrightarrow{dn}}.$$

Пројекција силе на правац тангенте биће

$$F_T = (\vec{F}, \vec{T}) = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} = \frac{(\operatorname{grad} U, \vec{dr})}{dr}$$

---

[1] Т. Пејовић, 'Диференцијални и интегрални рачун, VI, стр. 472 (4. свеска) — Београд, 1931.

те је извод скалара U у правцу орта $\vec{T}$ (*Кин.*, обр. 310),

$$\frac{dU}{d\vec{r}} = F_T.$$

Уопште је пројекција конзервативне силе на произвољни правац q једнака

$$F_q = \frac{\partial U}{\partial q}. \qquad (110')$$

Рад конзервативне силе дуж путање $N_0 N$ (сл. 25), где су тачке N_0 и N на различитим еквискаларним површинама, биће према (111) једнак приращтају функције силе

$$A = \int_{N_0}^{N} (\vec{F}, d\vec{s}) = \int dU = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0) = U - U_0 = \Pi_0 - \Pi, \qquad (111')$$

па тотални рад конзервативне силе не зависи од облика путање која спаја две тачке простора већ само од њихових положаја. То значи да су радови по путевима $N_0\ 1\ N$ и $N_0\ 2\ N$ једнаки, а исто су такс једнаки и са радовима по путевима $N_0 P$ и QP, јер се рад конзервативне силе не мења када се тачка помера по својој еквискаларној површини. Рад је једнак нули када почетна и крајња тачка леже на истој еквискаларној површини, или када је путања *затворена крива.*

Како се рад изражава криволиниским интегралом то у случају затворене криве линије биће

$$A = \Gamma = \oint_{L} (\vec{F}, d\vec{r}) = \iint_{(S)} (d\vec{A}, \mathrm{rot}\, \vec{F}), \qquad (116)$$

и назива се *циркулација вектора* $\vec{F}$ *по контури* (L).

Ако је сила конзервативна онда је *циркулација једнака нули* (под условом да функција силе $U = U(x, y, z)$, нема сингуларних тачака у унутрашњости контуре).

Класа конзервативних сила је најважнија класа у теориској механици. Сила теже, сила сразмерна растојању и Њутнова гравитациона сила (која је обрнуто сразмерна квадрату растојања) конзервативне су те ћемо њихову конзервативност и доказати.

а) Сила теже конзервативна је. — Силу теже можемо приближно сматрати константном по правцу, смеру и интензитету, $G = mg$. Усвојимо ли Декартов координатни систем са Oz осом усмереном *навише* тада су координате силе $X = Y = 0$, $Z = -mg$ па је услов конзервативности испуњен, $\mathrm{rot}\, \vec{G} = 0$.

Функцију силе можемо добити из релације $\partial U / \partial z = Z = -mg$,

па је

$$\boxed{U = -mgz + h} \tag{117}$$

где је h константа. Кад тешка тачка *падне* са висине z_1 на висину z_2 она изврши механички рад

$$A = U_2 - U_1 = -mgz_2 + mgz_1 = mg(z_1 - z_2) = GH.$$

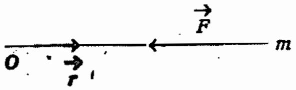
Ако је $-z_1 > -z_2$ тачка је *пала* и рад је *позитиван*, тежа је *извршила* рад, у обрнутом случају ако је $-z_1 < -z_2$ тачка се *попела*, тежа је *утрошила* рад.

Из (117), с обзиром на (111), следи да су еквискаларне (односно еквипотенцијалне) површине *хоризонталне паралелне равни*. Смер силе теже је супротан од смера нормале ових површина а у правцу промене скалара (в. Увод).

b) *Сила сразмерна растојању конзервативна је.* — Сила сразмерна растојању материјалне тачке од непокретног центра (сл. 26) може се написати у облику

$$\vec{F} = \pm k^2 m \vec{r} = \pm c \vec{r},$$

где је $c = k^2 m$ коефицијент сразмере. Знак + припада *репулзивној* (*одбојној*) а знак – *атрактивној* (*привлачној*) сили; $\vec{r}$ је вектор положаја материјалне тачке у односу на центар привлачења (одбијања).



Сл. 26 — Привлачна сила

Како су $X = \pm cx$, $Y = \pm cy$, $Z = \pm cz$ то је $\mathrm{rot}\,\vec{F} = 0$. Према (110') је $dU/dr = F_r = \pm cr$, па интеграљењем добивамо функцију силе

$$\boxed{U = \pm {}^1/_2 cr^2 + h} \tag{118}$$

У овоме случају еквипотенцијалне површине су концентричне сфере са средиштем у центру привлачења (одбијања).

Код хармониског осциловања је $U = -{}^1/_2 cx^2$, па је сила $X = -cx$.

c) *Њутнова гравитациона сила конзервативна је.* — Ова је сила (чл. 5.4) обрнуто сразмерна квадрату растојања од непомичног центра привлачења, те се може написати у облику

$$F = -\lambda m / r^2 = -\lambda m / (x^2 + y^2 + z^2).$$

Орт $\vec{r}_0$ вектора положаја $\vec{r}$ гради са координатним осама углове α, β, γ, па су координате силе: $X = F\cos\alpha = Fx/r = -\lambda mx/r^3$, $Y = -\lambda my/r^3$

$Z=-\lambda mz/r^3$, те је услов (115′) задовољен. Према (110′) је $dU/dr = F_r = -\lambda m/r^2$, па интеграљењем добивамо функцију силе

$$\boxed{U=\frac{\lambda m}{r}+h} \tag{119}$$

d) Сила која произвољно зависи од растојања конзервативна је. — Сила која зависи од растојања може се написати у облику:

$$\vec{F}=\pm f(r)\cdot\vec{r}_0,$$

где функција $f(r)$ *претставља закон дејства силе.* У овом случају су пројекције силе:

$$X=\pm f(r)\frac{x}{r}, \qquad Y=\pm f(r)\frac{y}{r}, \qquad Z=\pm f(r)\frac{z}{r},$$

где је $r^2=x^2+y^2+z^2$. Услови (115) су испуњени па је сила конзервативна.

Елементарни рад износи

$$d\mathbf{A}=(\vec{F},\vec{dr})=\pm f(r)\,dr$$

те је функција силе

$$\boxed{U=\int f(r)\,dr+h} \tag{120}$$

На тај смо начин доказали да су све *ове силе конзервативне па су кретања материјалне тачке под утицајем ових сила конзервативна, што значи да за њих важи закон о одржавању механичке енергије.*

То значи такође да су слободан пад, вертикални хитац навише и наниже у безваздушном простору такође конзервативна кретања, јер се врше под утицајем силе теже, па за њих важи закон о одржавању механичке енергије.

a) **Слободан пад.** — Из једначина слободног пада (15) квадрат је брзине $\dot z^2=2gz$ па је кинетичка енергија $E_k={}^1/_2 m\dot z^2=mgz=Gz$. Означимо са $\zeta=H-z$ растојање тачке од земље, онда је

$${}^1/_2 m\dot z^2=mg(H-\zeta), \quad {}^1/_2 m\dot z^2+G\zeta=GH=const.$$

Израз $G\zeta$ зависи од положаја тачке изнад земље, те претставља потенцијалну енергију — рад потребан да би се тачка издигла на ту висину.

b) **Вертикалан хитац.** — При хицу *наниже* је $\dot z^2=\dot z_0^2+2gz=\dot z_0^2+2g(H-\zeta)$, те је

$${}^1/_2 m\dot z^2+G\zeta={}^1/_2 m\dot z_0^2+GH=const.$$

При хицу *навише* треба узети $H=0$; тада се добива опет да је тотална механичка енергија константна.

Када су познате координате силе $\vec{F}$ као функције положаја, тј. координата покретне тачке, можемо интеграљењем одредити функцију силе U и потенцијалну функцију П. Пођимо од једначине $\partial U/\partial x = X(x, y, z)$, биће

$$U = \int X\,dx + \varphi(y, z) = f(x, y, z) + \varphi(y, z), \tag{121}$$

где је $\varphi(y, z)$ *произвољна функција* која зависи од y и z. Због услова конзервативности лако се доказује да иста не зависи од x. Да бисмо одредили ову непознату функцију диференцирајмо израз (121) по y, с обзиром на (109′), биће

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Y = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

па је

$$\varphi = \int \left(Y - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dy = f_1(y, z) + \theta(z),$$

где је $\theta(z)$ *произвољна функција* која зависи само од z. Да бисмо је одредили, диференцирајмо опет израз (121) по z, с обзиром на (109′) и претходну једначину, биће

$$\frac{\partial U}{\partial z} = Z = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{d\theta}{dz},$$

па је непозната функција

$$\theta(z) = \int \left(Z - \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f_1}{\partial z}\right) dz + C,$$

где је C *произвољна интеграциона константа*. Пошто смо одредили произвољне функције $\varphi(y, z)$ и $\theta(z)$ — функција силе има коначан облик

$$\boxed{U = \int X\,dx + \int \left(Y - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dy + \int \left(Z - \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f_1}{\partial z}\right) dz + C} \tag{121}$$

Примери. — 18) Одредити функцију силе $\vec{F}$ чије су координате

$$X = 2cx, \quad Y = Z = c(2y + 2z),$$

где је коефицијент пропорционалности $c = 1$ kg/cm.

Решење. — Испитаћемо прво услов конзервативности силе

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x & 2y + 2z & 2y + 2z \end{vmatrix} = 0.$$

Пошто је сила конзервативна то функција силе U има тотални диференцијал.

$$(\partial U/\partial x) = X = 2\,x, \text{ па је } U = x^2 + \varphi\,(y, z),$$

$$(\partial U/\partial y) = Y = 2\,y + 2\,z = (\partial\varphi/\partial y), \quad \varphi = y^2 + 2\,yz + \theta\,(z).$$

Уносећи ову вредност у израз за функцију силе биће

$$U = x^2 + y^2 + 2\,yz + \theta\,(z),$$

па је

$$(\partial U/\partial z) = Z = 2\,y + 2\,z = 2\,y + (d\,\theta/dz),$$

те је произвољна функција $\theta\,(z) = z^2 + C$, где је C интеграциона константа. Функција силе имаће, дакле, облик

$$U = x^2 + y^2 + z^2 + 2\,yz + C.$$

Еквискаларне површине су *параболоиди.*

19) Координате силе $\vec{F}$ која дејствује у равни Oxy јесу:

$$\lambda = c\,(1 + ny^2)/(1 + xy)^2, \quad Y = c\,(1 + nx^2)/(1 + xy)^2, \quad c = 1 \text{ kg cm}^2.$$

Одредити вредност скалара n тако, да би сила F била конзервативна. За тај случај ıредити функцију силе.

Решење. — Из услова конзервативности добива се $2\,n + 2 = 0$, тј. $n = -1$. Координате силе су:

$$X = c\,(1 - y^2)/(1 + xy)^2, \quad Y = c\,(1 - x^2)/(1 + xy)^2, \quad U = [c\,(x + y)/(1 + xy)] + C.$$

20) Тачка се креће у равни Oxy под утицајем одбојне силе обрнуто сразмерне растојању. Одредити функцију силе.

Решење. — Сила је дата изразом $F = km/r$, па је $dU/dr = km/r$, тј.

$$U = \int (km/r)\,dr = km \ln r + C.$$

Пројекције су силе на координатне осе $X = kmx/r^2$, $Y = kmy/r^2$.

21) Помоћу интеграла живе силе одредити путању косог хица у безваздушном простору.

Решење. — Из обрасца (112) следи

$$^1/_2\,mv^2 = {}^1/_2\,m\,(\dot{y}^2 + \dot{z}^2) = -\,mgz + h.$$

Константу h одредићемо из услова да је за $t = 0$, $z = 0$ па је $h = {}^1/_2\,mv_0{}^2$ и диференцијална једначина гласи

$$\dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v_0{}^2 - 2\,gz.$$

Како је $\dot{y} = v_0 \cos\alpha$, то је $y = v_0\,t \cos\alpha$. Због тога је

$$\dot{z}^2 = v_0{}^2 \sin^2\alpha - 2\,gz.$$

Ову једначину можемо написати у облику диф. једначине која раздваја промењливе ако је претходно помножимо са $-\,g$

$$-\,g\,(v_0{}^2 \sin^2\alpha - 2\,gz)^{-1/2}\,dz = -\,gdt$$

па је интеграл облика

$$\sqrt{v_0{}^2 \sin^2\alpha - 2\,gz} = C - gt = v_0 \sin\alpha - gt,$$

пошто интеграциону константу одредимо из услова за $t = 0$ и $z = 0$. Из ове једначине лако добивамо познати образац (66):

$$z = v_0\,t \sin\alpha - {}^1/_2\,g\,t^2.$$

22) Израчунати рад силе чије су координате

$$X = c\, z^2 - y^2)/(x+z)^2;\ \ Y = 2\,cy/(x+z),\ \ Z = c\,(x^3 - y^2)/(x+z)^2$$

по кривој (L):

$$x = \cos\varphi,\ \ y = \sin\varphi,\ \ z = 2,\ \ \text{при}\ \ 0 \leq \varphi \leq {}^1\!/_2\,\pi.$$

Решење. — Сила је конзервативна. За одређивање функције силе најзгодније је поћи од релације $(\partial U/\partial y) = Y$ па је

$$U = [cy^2/(x+z)] + \varphi\,(x, z).$$

Добивамо да је

$$\varphi\,(x, z) = [-\,cz^2/(x+z)] + \theta\,(z), \quad \text{где је} \quad \theta\,(z) = cz + C.$$

Функција силе је

$$U = [c\,(y^2 + xz)\,/\,(x+z)] + C.$$

Како је за $\varphi = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ z = 2$ биће $U_0 = {}^2\!/_3\,c$. За $\varphi = {}^1\!/_2\,\pi$ је $U_1 = {}^1\!/_2\,c$, па је рад

$$\mathbf{A} = U_1 - U_0 = -\,{}^1\!/_6\,c.$$

Исти резултат добивамо помоћу криволиниског интеграла

$$\mathbf{A} = c\int_0^{{}^1\!/_2\pi} [-\,4\sin\varphi + \sin^3\varphi + \sin 2\varphi\,(2 + \cos\varphi)]\,(2+\cos\varphi)^{-2}\,d\varphi = -\,{}^1\!/_6\,c.$$

23) Израчунати рад силе чије су Декартове координате

$$X = -\,cy^3;\ \ Y = cx^3$$

по кругу полупречника R.

Решење. — Сила није конзервативна, па ћемо рад израчунати помоћу криволиниског интеграла

$$\mathbf{A} = \oint (X\,dx + Y\,dy) = c\,R^4 \int_0^{2\pi} (\sin^4\varphi + \cos^4\varphi)\,d\varphi = {}^3\!/_2\,c\,R^4\,\pi,$$

или применом Гриновог обрасца (Дод. II),

$$\mathbf{A} = \iint_{(A)} [(\partial Y/\partial x) - (\partial X/\partial y)]\,dx\,dy = 3\,c \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3\,dr\,d\varphi = {}^3\!/_2\,c\,R^4\,\pi.$$

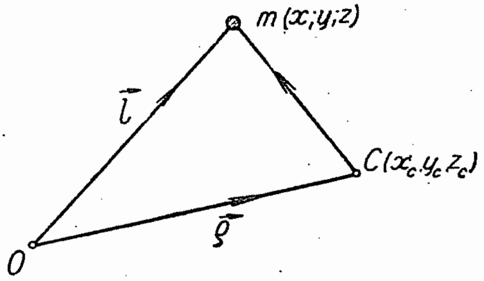
5. ЦЕНТРАЛНА КРЕТАЊА

5.1 ЦЕНТРАЛНЕ СИЛЕ

Под *централном силом* подразумева се сила која дејствује на материјалну тачку а увек пролази кроз одређену сталну тачку простора — *центар силе*. Треба уочити разлику између *централне* и *центрипеталне* силе. Прва пролази кроз одређену сталну тачку — центар, а друга пролази кроз *центар (средиште) кривине путање*. Код кружног кретања центрипетална сила пролази увек кроз средиште те линије и усмерена је ка њему. Код равномерног кружног кретања је $v = const.$ па је тангенцијална компонента $\vec{F}_T = 0$ и кретање се врши само под утицајем *центрипеталне (нормалне)* силе

$$F_N = mv^2/R = m\,R\,\omega^2.$$

Ово је извео *Хајгенс* у делу *„Horologium oscilatorium"* (*Париз*, 1673). Њој супротна сила назива се *центрифугална*.



Сл. 27. — Централна сила

Положај материјалне тачке одређује се вектором положаја $\vec{r}$ у односу на центар, те централна сила може бити двојака: *привлачна (атрактивна)* и *одбојна (репулзивна)*. Код прве је смер дејства супротан од смера вектора положаја, код друге је исти. Од свих централних сила најважније су оне чији *интензитет зависи само од растојања*. Оне се могу написати у облику

$$\vec{F} = \pm f(r)\cdot\vec{r}_0 = \pm f(r)\frac{\vec{r}}{r}. \tag{122}$$

Функција $f(r)$ зове се *закон дејства централне силе*, $\vec{r}_0$ је орт вектора положаја.

Кад центар силе није у координатном почетку већ је одређен вектором положаја $\vec{\rho}$ (сл. 27), онда из троугла ΔOCm следи

$$\vec{r} = \vec{l} - \vec{\rho},$$

па је централна сила дата изразом

$$\vec{F} = \pm f(r) \frac{\vec{l} - \vec{\rho}}{r}. \tag{123}$$

Њене су Декартове координате

$$X = \pm f(r) \frac{x - x_c}{r}, \quad Y = \pm f(r) \frac{y - y_c}{r}, \quad Z = \pm f(r) \frac{z - z_c}{r}.$$

Централна сила која зависи од растојања конзервативна је, како смо доказали у чл. 4.6, а функција силе има облик

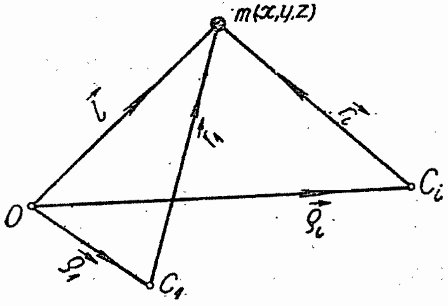
$$U = \int f(r)\, dr + C.$$

Ако на материјалну тачку дејствује више централних сила у центрима $C_1, C_2, C_3 \ldots, C_n$ (сл. 28), онда је резултујућа централна сила

$$\vec{F}_r = \sum_{i=1}^{i=n} f(r_i) \frac{\vec{l} - \vec{\rho}_i}{r_i}.$$

У том случају функција силе има облик

$$U = \sum_{i=1}^{i=n} \int f(r_i)\, dr_i. \tag{123}$$

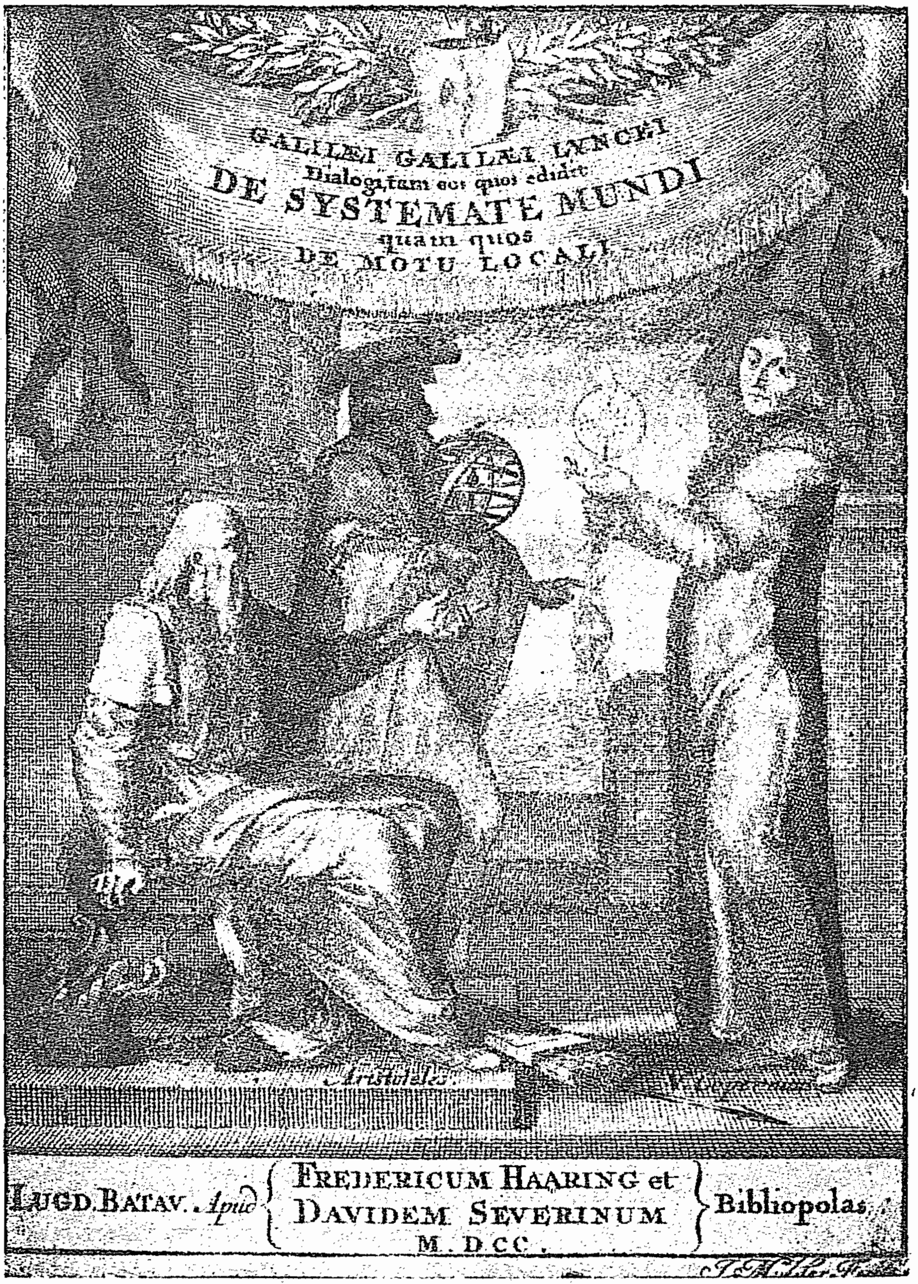


Сл. 28. — Систем централних сила

Када се кретање материјалне тачке врши под утицајем само једне централне силе са центром C онда је момент ове силе за тај центар једнак нули, па је *замах константан* и путања је *равна крива линија* у равни управној на замах. Због (93) константна је и секторска брзина

$$2\,S = r^2 \dot{\varphi} = r^2 \dot{\varphi}_0 = C = const. \tag{124}$$

Помоћу ње можемо одредити путању материјалне тачке у поларном систему.



Геоцентричари и хелиоцентричари

(„Discorsi e dimostrazioni")

Ако почетна брзина ($\vec{v}_0$) чини са потегом $\vec{r}_0$ угао θ_0 онда је двострука секторска брзина

$$2\,S = \left|[\vec{r}, \vec{v}]\right| = \left|[\vec{r}_0, \vec{v}_0]\right| = r_0\,v_0 \sin\theta_0 = C.$$

Како је $S = dA/dt$ то ће бити

$$A = {}^1/_2\,C\,t + A_0,$$

па је површина коју превлачи вектор положаја покретне тачке сразмерна времену кретања (t).

Поред *интеграла површине* можемо применити и *интеграл живе силе* у облику

$$m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = 2\,U + 2\,h. \tag{125}$$

Како је $U = U(r)$ то елеминисањем времена t из ових једначина добивамо линију путање материјалне тачке у облику $r = r(\varphi)$.

Када је брзина колинеарна са централном силом кретање је *праволиниско*, јер је момент силе за тачку O једнак нули. Путања је у равни. Узмемо ли ту раван за Oxy раван онда је према (92)

$$x\dot{y} - y\dot{x} = c = 0,$$

јер и брзина пролази кроз центар O. Интеграљењем добивамо

$$\ln x = \ln y + \ln k,$$

односно $y = kx$, те путања пролази кроз координатни почетак **(чл. 2.4.1; 2.4.2).**

Примери. — 24) Материјалну тачку масе m привлачи n непокретних центара силама које су сразмерне повим степенима растојања. Материјална тачка и центри леже у равни Oxy.

Одредити путању материјалне тачке за почетне услове кретања; за $t = 0$ јесу: $x = x_0$, $y = y_0$, $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = v_0$.

Решење. — Пошто су силе привлачне закон дејства сваке централне силе јесте $-c_i(\vec{l} - \vec{\rho}_i)$.

Овој векторској једначини одговарају две скаларне, облика

$$m\ddot{x} = -\Sigma c_i(x - x_i), \qquad m\ddot{y} = -\Sigma c_i(y - y_i)$$

односно

$$\ddot{x} + \omega^2 x = a, \qquad \ddot{y} + \omega^2 y = b,$$

где су

$$\omega^2 = ({}^1/m)\,\Sigma c_i; \quad a = ({}^1/m)\,\Sigma c_i x_i, \quad b = ({}^1/m)\,\Sigma c_i y_i.$$

Општи интеграли су

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t + (a/\omega^2); \quad y = C\cos\omega t + D\sin\omega t + (b/\omega^2)$$

За дате услове интеграционе константе биће

$$A = x_0 - (a/\omega^2); \quad B = 0; \quad C = y_0 - (b/\omega^2); \quad D = v_0/\omega.$$

Ако ове вредности унесемо у горње једначине и елеминишемо време t добићемо линију путање — елипсу

$$(x - p^{2} + [A(y - q) + C(x - p)]^2 - A^2 = 0,$$

где су

$$p = a/\omega^2, \; q = b/\omega^2.$$

25) Материјална тачка масе m креће се под дејством двеју централних сила из центара $O\,(0;\ 0)$ и $A\,(a;\ 0)$ тако да је прва сила одбојна а друга привлачна. Интензитет сила је сразмеран растојањима и на јединици растојања је c.

Одредити величину почетне брзине, управљене ка центру O, којом треба да се крене материјална тачка из положаја $N_0\ (0,\ b)$ да би прошла кроз тачку N која полови дуж $\overline{OA}$. Одредити такође и путању тачке.

Решење. — Диференцијалне једначине кретања су:

$$m\ddot{x} = cx - c\,(x - a) = ca, \quad m\ddot{y} = cy - cy = 0.$$

За дате почетне услове интеграли су облика

$$x = {}^1/_2\, kt^2, \quad y = b - v_0\, t, \quad k = ca/m.$$

Како путања мора да прође кроз тачку $N\,({}^1/_2\, a;\ 0)$ то мора бити почетна брзина $v_0 = b\sqrt{c/m}$.

Елиминишући параметар t из горњих једначина добићемо линију путање *параболу*

$$x = {}^1/_2\,[a\,(b - y)^2/b^2].$$

5.2 КЕПЛЕРОВИ ЗАКОНИ О КРЕТАЊУ ПЛАНЕТА

Историски развој до Кеплера. — Кретања небеских тела одувек су интересовала научнике свих времена. Свештеници старе *Месопотамије (Вавилоније)* били су први који су посматрали небо, тумачећи небеске појаве у *астролошке сврхе*. Они су били врачи који су својим претсказивањима играли велику улогу у историском развитку тог доба. Па и поред тога њима припада заслуга што су први систематски посматрали небо и оставили богату збирку података који су доцније корисно послужили. Они су први опазили да се седам небеских тела крећу и поделили су годину на дванаест месеци а дан на дванаест двочасова. „Они су већ 2000 год. пре наше ере били начисто да су зорњача и вечерњача једна те иста звезда што су Грци увидели тек 15 векова доцније".[1]

И стари *Египћани* бавили су се астрономијом доводећи у везу поплаве Нила са излазима звезде *Сириуса (Sota)*.

У VI в. пре наше ере пренета су астрономска знања и у Грчку. Најбољи познавалац неба био је *Талес Милећанин* (630—540). Због тачног претсказивања помрачења Сунца 585 год. признат је као „светски мудрац". Грци су пошли корак унапред па су код њих усвојене две школе о систему света. *Питагорејци (по Питагори*, 580—500) усвојили су *геоцентрични систем* са непокретном Земљом у средишту васионе, а *Александријци хелиоцентрични систем* чији је творац *Аристарх са Самоса* (310—240). Он је први применио геометриски метод премеравања небеског простора.

Александриској школи припада и *Еуклид*, творац *геометрије*, и Сиракужанин *Архимед* (287—212), као и *Ератостен*, управник славне александриске библиотеке, и *Аполон Пергејски* (260—170), чувен по својим, Аполонијевим, теоремама о конусним пресецима и „теоријом епицикла" — која се може сматрати основом принципа релативности кретања.

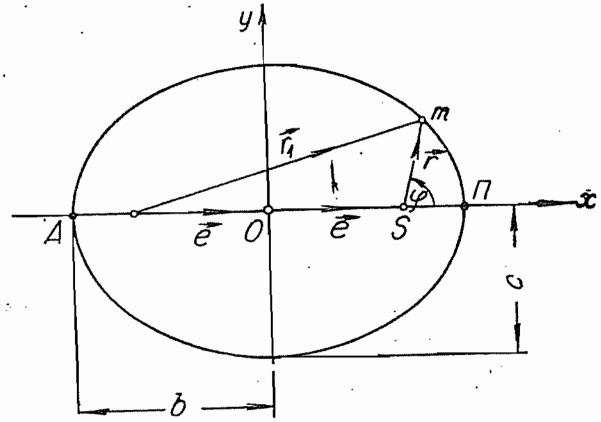
И *Хипарх из Никеје* (око 120 год.), творац *тригонометрије*, припада овој школи али је био геоцентричар, а исто тако и *Клаудије Птоломеј* (87—165) писац дела „*Велики зборник Астрономије*". Птоломеј се за доказ својих геоцентричних погледа ослањао и на *Аристотела* (384—322 год.), грчког мудраца, питагорејца — геоцентричара, који је геоцентрични систем научно доказивао појавом теже. Ту се уствари родила идеја о принципу инерције који је тек доцније открио *Галилеј*.

---

[1] М. Миланковић, Небеска механика, Београд, 1935.

Мрачни Средњи век гурнуо је науку уназад. О свету је створена сасвим другчија слика али је Нови век са препородом уметности донео и препород науке. *Никола Коперник* (1473—1543), пољски астроном реформатор, усвојио је хелиоцентрични систем. *(„De revolutionibus orbium coelistium“).* Његову славу замало није помрачио *Тихо Брахе* (1546—1601), највећи посматрач неба, прави *Хипарх* Старог века — геоцентричар и врач. Опет је почела борба геоцентричара и хелиоцентричара коју је Средњи век само умртвио. *Галилео Галилеј* био је хелиоцентричар (*„Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo Tolemaico e Copernicano“* — 1632).

Кеплер (Johan Kepler, 1571—1630 год.), био је наследник *Тихо Брахеа* у звању дворског астронома и математичара у Прагу. На основу многобројних података о посматрању неба, које му је, после 20 година посматрања кретања Марса, оставио претходник, Кеплер, убеђени хелиоцентричар, наставио је испитивање кретања Земље и Марса. У делу *„Astronomia nova de motibus stellae Martis“*, 1609, поставио је прва своја два закона о кретању планета, а у делу *„Harmonices mundi,“* 1619, и трећи закон.



Сл. 29. — Елиптичка путања планете

Кеплерови закони о кретању планета гласе:

1⁰ *Планете описују око Сунца елиптичке путање; у заједничкој жижи тих елипса налази се Сунце.*

2⁰ *Вектор положаја планете у односу на Сунце превлачи у једнаким деловима времена једнаке површине.*

3⁰ *Квадрати времена обилажења појединих планета око Сунца сразмерни су кубовима великих полуоса елиптичких путања планета.*

Ове законе можемо математички изразити овако. Нека је дата елиптичка путања планете (сл. 29), у чијој је жижи Сунце. $\overline{OS}$ је *линеарна ексцентричност*

$$e = \sqrt{b^2 - c^2}$$

а однос

$$\varepsilon = e/b = (\sqrt{b^2 - c^2})/b$$

назива се *бројна (нумеричка) ексцентричност.* Теме елипсе ближе Сунцу назива се *перихел (П)* а оно супротно је *апхел (А).*

Векторска једначина елипсе за пол биће

$$\vec{r}_1 = 2\vec{e} + \vec{r},$$

где је $\vec{r}$ вектор положаја планете у односу на S. Степенујмо ову једначину и биће

$$r^2{}_1 = 4\,e^2 + r^2 + 4\,(\vec{e},\vec{r}) = (2\,b - r)^2\,,$$

јер је из особина елипсе $r + r_1 = 2\,b$. Како је $(\vec{e},\vec{r}) = e\;r\;\cos\varphi$, где је поларни угао φ *права аномалија*, из горње једначине следи

$$r = (b^2 - e^2)/(b + e\cos\varphi).$$

Користећи се изразима за ексцентричности и параметар елипсе $p = c^2/b = (b^2 - e^2)/b$ биће поларна једначина путање

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}} \qquad (126)$$

Други Кеплеров закон тврди да је при овом кретању *секторска брзина константна*, па је за поларне координате у равни

$$\boxed{2\,S = r^2\,\dot{\varphi} = r^2\frac{d\varphi}{dt} = C = const.} \qquad (127)$$

Ако са T означимо време обилажења планете око Сунца, секторска брзина је

$$S = A/T = \pi\,bc/T = {}^1/_2\,C.$$

Константу C можемо изразити помоћу параметра елипсе

$$C^2 = 4\pi^2\,pb^3/T^2 = 4\,\pi^2\,pk,$$

где је k израз трећег Кеплеровог закона

$$\boxed{k = b^3/T^2} \qquad (128)$$

Број k важи за све планете.

5.3 БИНЕОВ ОБРАЗАЦ

По Хајгенсовој теореми, материјална тачка која се креће по кружној линији константном брзином подлежи само *нормалном (центрипеталном) убрзању*, $a_N = v^2/R$, које је увек усмерено ка средишту круга. Из ове теореме три енглеска научника *Врен* (*Christopher Wren*, 1692—1723), *Хук* (*Robert Hooke*, 1635—1703) и *Халеј* (*Edmond Halley*, 1656—1742 год.), независно један од другог, извели су овај закључак:

када се претпостави, због мале нумеричке ексцентричности планетских путања, да се планете крећу по кружним линијама, нормално је убрзање

$$a_N = v^2/R = R\omega^2 = R(2\pi/T)^2 ,$$

где је T време једног обилажења. С обзиром на III Кеплеров закон може се исто овако изразити

$$a_N = 4\pi^2 k / R^2 .$$

Планеше подлежу нормалном убрзању, усмереном ка Сунцу, а по иншензишешу обрнушо сразмерном квадрашу полупречника кружне пушање.

Француски математичар и астроном *Бине* (*Jacques Philippe Marie Binet*, 1786—1856 год.) на други је начин изразио ово убрзање.

Како је према другом Кеплеровом закону секторска брзина константна, $r^2 \dot{\varphi} = 2S = C$, то су изводи вектора положаја по времену

$$\dot{r} = -C\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) = -Cu' ; \quad \ddot{r} = -\frac{C^2}{r^2}\frac{d}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{C^2}{r^2}u'' ,$$

где је $u = 1/r$, па је *радијално убрзање* (*Кин.*, **чл. 4.3**, обр. 68′)

$$\boxed{a_r = -\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right] = -C^2u^2[u'' + u]} \qquad (129)$$

Према томе је централна сила

$$\boxed{\pm F = m a_r = -mC^2u^2[u'' + u]} \qquad (130)$$

знак — односи се на *привлачну* а знак + на *одбојну силу.*

Због константне секторске брзине *циркуларно убрзање* (*Кин.*, **чл. 4.3,** обр. 66) *једнако је нули,* $a_c = 0$, *па планеше заисша подлежу само радијалном убрзању.*

Бинеов образац (130) омогућава да одредимо закон дејсшва ценшралне силе ако је йознаша шрајекшорија йокрешне шачке, $r = r(\varphi)$, и обратно (129), *да одредимо шрајекшорију йокрешне шачке у йоларним координашама ако је йознаш закон дејсшва ценшралне силе.* Овај се образац (129), дакле, може схватити као диференцијална једначина кретања у равни изражена у поларним координатама у случају константне секторске брзине, пошто већ постоји интеграл површине.

Ако са p означимо растојање центра привлачења (пола O, Кин., сл. 27) од тангенте на путањи у покретној тачки N, с обзиром на (93)

$$2S = C = rv\sin\theta = vp = h = const.,$$

и (101)

$$d(^1/_2\, mv^2) = {}^1/_2\, m\, C^2\, d(p^{-2}) = (\vec{F},\ \vec{dr}) = \pm F\, dr\,,$$

израз (130) за централну силу може се написати и у овом облику

$$\pm F_r = m\, a_r = \frac{C^2}{2}\,\frac{d}{dr}(p^{-2})\,. \tag{130'}$$

Због тога се и радијално убрзање (129) може изразити помоћу растојања p:

$$a_r = \frac{C^2}{2}\,\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{p^2}\right) \tag{129'}$$

Из ових кинематичких релација, поред везе $\operatorname{tg}\theta = r/r'$, где је $r' = dr/d\varphi$, постоји за криву линију чија је једначина изражена у поларним координатама и овај однос

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{p^2}\right) = -2\,u^2\,(u'' + u),$$

где је $u'' = d^2 u/d\varphi^2$.

Пример. — 26) Материјална тачка масе m описује под утицајем централне силе лемнискату. У почетном је тренутку $r = r_0$ а почетна брзина $v = v_0$ гради са потегом угао α. Одредити привлачну силу. *(Walton)*

Решење. — Једначина лемнискате је

$$r^2 = c^2 \cos 2\varphi\,; \qquad u^2 = 1/c^2 \cos 2\varphi,$$

па су

$$u' = (c^2/r^3)\sin 2\varphi\,, \qquad u'' = (3\,c^4 - r^4)/r^5$$

те су, због $C = 2\,\dot{S} = r_0\, v_0 \sin\alpha$,

$$a_r = -3\,C^2 c^4/r^7, \qquad F = -3\,m\,C^2 c^4/r^7 = -k/r^7$$

Сила је, дакле, обрнуто сразмерна *седмом степену растојања*.

5.4 ЊУТНОВ ЗАКОН О ОПШТОЈ ГРАВИТАЦИЈИ

Из Кеплерових закона *Њутн* је извео далекосежније закључке и извео их у својим *Принципијама*. Према првом Кеплеровом закону путања планете је *елипса* и њена поларна једначина може се написати у облику

$$u = 1/r = (1/p)(1 + \varepsilon\cos\varphi)\,.$$

Двоструким диференцирањем биће:

$$u' = -(\varepsilon/p)\sin\varphi, \qquad u'' = -(\varepsilon/p)\cos\varphi\,,$$

па је, према Бинеовом обрасцу (129) радијално убрзање

$$a_r = -C^2 u^2 (u'' + u)\,.$$

Оно је, дакле, *обрнуто сразмерно квадрату растојању планете од центра привлачења — Сунца, и усмерено је ка Сунцу:*

$$\boxed{\vec{a}_r = -\frac{C^2}{pr^2}\vec{r}_0 = -\frac{\lambda}{r^2}\vec{r}_0} \qquad (130)$$

где је

$$\lambda = C^2/p = 4\,\pi^2\,k \qquad (131)$$

константа која важи за све планете Сунчевог система.

Закон Врена, дакле, *важи и за стварне елиптичке путање планета.*

Њутн се није на томе зауставио. Пошао је даље и генијалном интуицијом схватио да се дејство теже распростире у свемир, па и до Месеца. Тачка на површини Земље подлежи убрзању g (*Галилеј*). Ако са H означимо растојање средишта Месеца од средишта Земље онда је убрзање на том отстојању услед привлачног дејства Земље

$$a : g = R^2 : H^2, \qquad (132)$$

тј. *убрзања теже су обрнуто сразмерна квадратима растојања.* Важи ли исти закон за кретање Месеца око Земље, као и за кретање планета око Сунца, онда ће убрзање бити

$$a = -\,\lambda/H^2 = -\,4\,\pi^2\,H/T_L{}^2\,,$$

где је T_L време обилажења Месеца око Земље, и износи $a = 0{,}27\ \mathrm{cm/sec^2}$.

Из овога је Њутн израчунао убрзање теже

$$g = a\,H^2/R^2 = -\,4\,\pi^2\,H^3/R^2\,T_L{}^2 = 975\ \mathrm{cmsec^{-2}}\,.$$

На основу података добивених мерењем ($H = 60{,}4\,R$; $R \approx 6357$ km, $T_L = 27^d\ 7^h\ 43^{min}\ 48^{sec}$), овај је резултат приближан вредности $g = 978\ \mathrm{cmsec^{-2}}$ на екватору, са грешком $3{,}5\,^0/_{00}$.

После овако сјајних резултата Њутн је пошао и даље и закључио да материјално тело има *различиту тежину* на разним растојањима од Земље. Због тога је увео појам *масе,* која је непроменљива и карактеристика је материјалности тела. Из овога је *извео* у „Законима кретања“ *појам силе.*

Из свог трећег закона кретања Њутн је одредио силу којом Сунце привлачи планете

$$\vec{F}_1 = -\,(\lambda m/r^2)\,\vec{r}_0\,,$$

где је m маса планете а $\vec{r}_0$ орт тог правца. По томе закону дејства и противдејства и маса планете m привлачи масу Сунца M_S истом таквом силом само супротног смера. Она је једнака производу масе M_S и убрзања Сунца $\vec{a}_S$, односно $F_2 = M_S a_S = \lambda_S M_S/r^2$, где је λ_S *константа која важи за Сунце.*

Како је $|F_1| = |F_2| = F$ то следи однос $\lambda/\lambda_S = M_S/m$, па је привлачна сила између Сунца и планета

$$\vec{F} = -f \frac{M_S m}{r^2} \vec{r}_0 , \tag{133}$$

где је уведена нова константа $f = \lambda/M_S = 4\pi k/M_S$.

Како је константа λ имала исту вредност за све планете то ће и константа f имати исту вредност за цео Сунчани систем. Према Њутновом закону о општој (универзалној) гравитацији она важи за свака два делића материје; дакле, важи за целу васиону.

Овај закон гласи:

Свако материјално тело у васиони привлачи друго силом која пада у спојну праву тих тела, интензитета сразмерног производу маса тела а обрнуто сразмерног квадрату растојања.

Тај се закон може изразити векторском једначином

$$\boxed{\vec{F} = -f \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_0} \tag{134}$$

где је f *универзална гравитациона константа* (по *Гаусу*). Њена је вредност одређена експериментално (по *Кевендишу — Cavendish*, 1798 год.), и износи $f = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ gr^{*-1} cm^3 sec^{-2}. Она је уствари привлачна сила двеју маса од 1 gr^* на растојању 1 cm изражена у дyn-има.

Њутнов закон о гравитацији унео је много полета у научна доказивања истина о кретању небеских тела. О његовој важности најлепше се изражава проф. Миланковић: *„Тако се Њутнов закон, највеличанственији што га је икад смртни човек могао да докучи, показао као општи закон природе коме се покорава цела васиона“*

За Њутнову силу доказали смо да је конзервативна. У случају да се маса m налази под утицајем само једне силе функција силе је облика

$$U = f(m m_1/r_1) , \tag{135}$$

а за случај дејства више централних сила биће

$$U = f m \sum_{i=1}^{i=n} (m_i/r_i) . \tag{136}$$

Ставимо ли да је маса $m_1 = 1$ онда се израз

$$\Pi = -fm/r \tag{137}$$

назива *Њутнов потенцијал* масе m (в. Додатак II).

Помоћу закона о универзалној гравитацији може се одредити *средња густина Земље*. Сматрамо ли Земљу лоптом, тада је њена маса $M_T = {}^4/_3\, \rho R^3 \pi$, где је ρ *средња густина (специфична маса)*. Ако је m маса тела на површини Земље онда је гравитациона сила једнака тежини $G = mg = f M_T m/R^2 = {}^4/_3 f \rho \pi m R$ па је средња густина $\rho = {}^3/_4\, g/f\pi R = 5{,}52$ gr* cm^{-3}.

Средња је густина, дакле, 5,5 *пута већа од густине воде*. Из овога следи да је маса Земље

$$M_T = 6{,}1 \cdot 10^{27} \text{ gr*}.$$

Помоћу овог закона можемо одредити и масу Сунца. Гравитациону константу можемо написати у облику $f = g R^2/M_T$, где је R полупречник Земље ($\approx 637.10^6$ cm). а M_T маса Земље. Сила којом Сунце привлачи Земљу јесте

$$F = f M_S M_T/r^2 = \lambda M_T/r^2 = 4\pi^2 k M_T/r$$

где су: r растојање Земље од Сунца а $k = b^3/T^2$; b је већа полуоса Земљине путање ($b = 149.10^{11}$ cm) а T време обилажења око Сунца ($T = 365{,}25$).

Маса Сунца износи

$$M_S = 4\pi^2 k/f = 4\pi^2 M_T b^3/gR^2 T^2 = {}^{16}/_3\, \pi^3 \rho R b^3/g T^2.$$

Уносећи дате вредности биће $M_S = 198{,}5.10^{31}$ gr*, те је око 335000 пута већа од масе Земље.

5.5 КРЕТАЊЕ МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ ПОД УТИЦАЈЕМ ЊУТНОВЕ СИЛЕ

У **чл. 5.3** извели смо да се, према Кеплеровим законима, планете крећу под утицајем Њутнове силе, која је централна и конзервативна, а чији је интензитет обрнуто сразмеран квадрату растојања. Сада ћемо решити *обрнути задатак*: одредити линију путање материјалне тачке када се креће под утицајем Њутнове силе.

Унесемо ли у Бинеов образац (129) да је $a_r = -\lambda/r^2 = -\lambda u^2$, добићемо нехомогену диференцијалну једначину

$$u'' + u = \lambda/C^2. \tag{138}$$

Како је партикуларни интеграл облика λ/C^2 то је општи интеграл ове једначине

$$u = A\cos\varphi + B\sin\varphi + (\lambda/C^2). \tag{139}$$

Константе A и B напишимо у облику

$$A = (\varepsilon\lambda/C^2)\cos\varphi_0; \quad B = (\varepsilon\lambda/C^2)\sin\varphi_0$$

па је

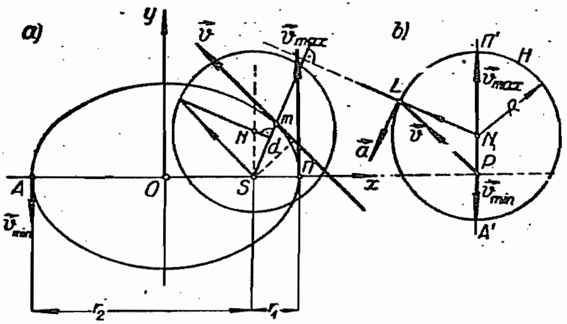
$$u = \lambda\,[1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)]/C^2. \tag{140}$$

Ако поларну осу узмемо за један сталан правац, $\varphi_0 = 0$, и уведемо параметар, $p = C^2/\lambda$, биће једначина путање:

$$r = p/(1 + \varepsilon\cos\varphi)\,. \tag{141}$$

конусни пресек. За $\varepsilon < 1$ путања је *елипса*, за $\varepsilon = 1$ *парабола*, за $\varepsilon > 1$ *хипербола* и за $\varepsilon = 0$ *кружна линија*.

Обрнутим поступком можемо доказати да је централна сила у случају кретања по конусном пресеку само Њутнова гравитациона сила. У случају кружног кретања је $u = 1/r = 1/R$, па је, према (129), $a_r = -C^2/R^3$. Како је $C = Rv = R^2\omega$ то је $a_r = -R\omega^2$, тј. једнако центрипеталном убрзању.



Сл. 30. Ходограф брзине планетске путање

Примери. — **27)** Материјална тачка масе $m = 20$ gr, опише под утицајем Њутнове привлачне силе у току 50 sec пуну елипсу, полуоса 10 cm и 8 cm (сл. 39). Одредити екстремне вредности силе и брзине тачке. Какав облик има ходограф брзине?

Решење. — Како је $A = 80$ cm² то је $2S = C = 2A/T = {}^{16}/_{5}\,\pi$. Елементи путање су:

$$e^2 = b^2 - c^2 = 36, \quad \varepsilon = {}^{1}/_{10}\,e = {}^{3}/_{5},$$
$$p = {}^{32}/_{5}; \quad \lambda = {}^{8}/_{5}\,\pi^2.$$

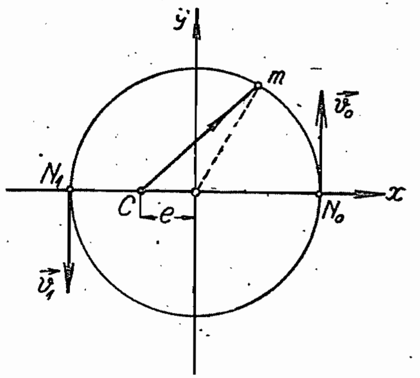
Екстремне вредности силе и брзине су:

у *перихелу*: $r_1 = b - e = 4\,\text{cm}\,, \quad F_{max} = -\,2\,\pi^2\,\text{dyn-a}\,,$

у *апхелу*: $r_2 = b + e = 16\,\text{cm}\,, \quad F_{min} = -\,{}^{1}/_{8}\,\pi^2\,\text{dyn-a}\,.$

Како је $v^2 = C^2(u'^2 + u^2)$, с обзиром на (126), биће $v^2 = (C^2/p^2)(1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\cos\varphi)$. Ходограф брзине је *круг* полупречника C/p, са полом у P (сл. 30), и средиштем у N, $\overline{PN} = \varepsilon\,C/p$. Права NL управна на потег Sm сече круг у тачки L, па је $\overrightarrow{PL} = \vec{v}$, те се може лако конструисати тангента на путању. Екстремне вредности су у перихелу (v_{max}) и апхелу (v_{min}) и износе $(C/p)(1 \pm \varepsilon)$, па су $v_{max} = {}^{4}/_{5}\,\pi$ cm/sec, $v_{min} = {}^{1}/_{5}$ cm sec.

28) Материјална тачка описује кружну линију полупречника R, под утицајем привлачне силе из центра C (сл. 31) У почетном положају тачка је имала почетну брзину v_0. Одредити брзину покретне тачке на произвољном месту путање и у тачки N_1. Израчунати рад силе $F = -\,cr$ на путу $N_0 N_1$.



Сл. 31. — Кружно кретање са ексцентричним центром привлачења

Решење. — По косинусној теореми је $R^2 = r^2 + e^2 - 2re\cos\varphi$, где је $\varphi = \sphericalangle N_0 C m$. Како је $u = 1/r$ то је $u' = -\,r'/r^2$, где је $r' = dr/d\varphi = -\,re\sin\varphi/(r - e\cos\varphi)$. Због $R^2 - e^2 = r(r - e\cos\varphi) - re\cos\varphi$, биће $r(r - e\cos\varphi) = R^2 - e^2 + re\cos\varphi = {}^{1}/_{2}(R^2 + r^2 - e^2)$, па је $u' = e\sin\varphi/r(r - e\cos\varphi)$.

Квадрат брзине је

$$v^2 = C^2(u'^2 + u^2) = 4\,C^2 R^2/(r^2 - e^2 + R^2)^2\,.$$

За $e = {}^1/_2 R$ је $C = r_0 v_0 = {}^3/_2 R v_0$, те је $v_1 = -3\,v_0$. Како је $U_0 = -\,{}^1/_2\,c\,(R+e)^2$ а $U_1 = -\,{}^1/_2\,(R-e)^2$ то је рад $\mathrm{A} = U_1 - U_0 = 2\,Rce$.

Исту вредност добивамо и помоћу интеграла

$$\mathrm{A} = \int (\vec{F}\,d\vec{s}) = c\,R \int r \sin(\psi - \varphi)\,d\psi = c\,Re \int\limits_0^\pi \sin\psi\,d\psi = 2\,Rce\,,$$

где су:

$$\psi = \sphericalangle N_0 Om, \quad ds = R\,d\psi, \quad r\sin\varphi = R\sin\psi, \quad r\cos\varphi = e + R\cos\psi\,.$$

29) Материјална тачка креће се око непомичног центра под дејством привлачне силе која зависи само од растојања. Одредити ту силу као и путању материјалне тачке ако је брзина дата изразом $v = k/r$, где је k константа. — *(Riccati)*

Решење. — Уведимо смену $u = 1/r$ биће $v = k\,u$, па из квадрата брзине добивамо диференцијалну једначину кретања ($v < 0$):

$$C^2(u'^2 + u^3) = k^2 u^2, \quad u'^2 = (c^2 - 1)\,u^2, \quad u' = -\,\lambda\,u, \quad \lambda = \sqrt{c^2 - 1}\,; \quad c = k/C\,.$$

Интеграл је облика

$$\ln u = -\,\lambda\varphi + C_1 = -\,\lambda\varphi + \ln u_0 + \lambda\,\varphi_0\,,$$

тј.

$$u/u_0 = e^{-\lambda\,(\varphi - \varphi_0)}\,, \quad \text{односно} \quad r = r_0\,e^{\lambda\,(\varphi - \varphi_0)}\,.$$

Линија је путање *логаритамска спирала.*

Из Бинеовог обрасца биће убрзање

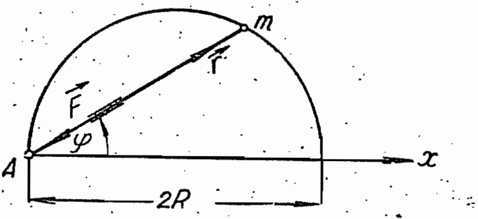
$$a_r = -\,C^2 u^3 (\lambda^2 + 1) = -\,k^2/r^3\,, \quad \text{па је} \quad F = -\,m\,a_r = -\,m\,k^2/r^3\,.$$

Привлачна је сила обрнуто сразмерна *трећем степену* растојања тачке од привлачног центра.

Ово можемо доказати помоћу обрасца (129′), јер је $\operatorname{tg}\theta = r/r' = 1/\lambda$, па је $p = r\sin\theta = r\,(1 + \lambda^2)$ те је

$$F_r = -\,C^2(1 + \lambda)\,m/r^3 = -\,k^2\,m/r^3\,.$$

30) Материјална тачка описује под утицајем привлачне силе у тачки A полукружну линију. Секторска брзина је константна. Одредити брзину и убрзање покретне тачке (сл. 32). — (*Newton, Principia*)



Сл. 32. — Путања под утицајем централне силе обрнуто сразмерне петом степену растојања

Решење. — Поларна једначина круга је $r = 2\,R\cos\varphi$, па су:

$$u = 1/r = 1/2\,R\cos\varphi; \quad u' = \sin\varphi/2\,R\cos^2\varphi\,;$$

$$u'' = (1 + \sin^2\varphi)/2\,R\cos^3\varphi\,,$$

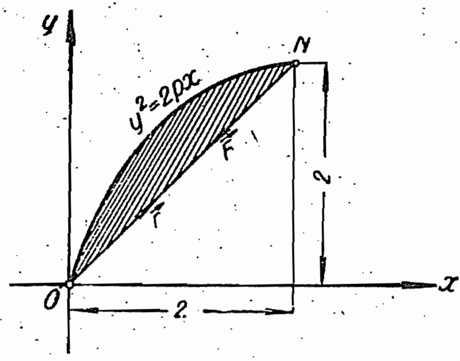
те је

$$v = 2\,CR/r^2, \quad a_r = -\,8\,C^2 R^2/r^5, \quad 2\,S = C\,.$$

Привлачна сила је, дакле, обрнуто сразмерна *петом степену растојања* тачке од центра привлачења.

Ову зависност можемо такође доказати и помоћу обрасца (129'), јер је $p = r\cos\varphi = r^2/2R$, па је

$$F_r = m\,a_r = \frac{C^2 m}{2}\,\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{p^2}\right) = \frac{-8\,C^2 R^2 m}{r^5}.$$



Сл. 33. — Кретање по параболи

31) 1⁰) Материјална тачка описује параболу $y^2 = 2px$ (сл. 33), под утицајем привлачне силе са центром у темену параболе, а са константном секторском брзином.

Одредити убрзање покретне тачке.

Решење. — Поларна једначина параболе са полом у темену јесте

$$r = 2p\cos\varphi/\sin^2\varphi$$

па су

$$u = 1/r = \sin^2\varphi/2p\cos\varphi,$$

$$u' = (2\sin\varphi\cos^2\varphi + \sin^3\varphi)/2p\cos^2\varphi = \sin\varphi\,(1+\cos^2\varphi)/2p\cos^2\varphi,$$

$$u'' = [2 - \sin^2\varphi\cos^3\varphi]/2p\cos^3\varphi, \quad \text{па је} \quad a_r = C^2\sin^4\varphi/4p^3\cos^5\varphi.$$

2⁰) Одредити брзину и убрзање покретне тачке у положају N ако је потег ON превукао површину ONO за $^2/_3$ sec а $p=1$ (сл. 33). Мере у метрима.

Решење. — Према претходном задатку биће

$$u = \sin^2\varphi/2\cos\varphi\,; \quad A = {}^2/_3\,; \quad S = 1\,\text{m}^2/\text{sec}\,; \quad C = 2\,; \quad a_r = \sqrt{2}\,\text{m/sec}^2.$$

$$u' = \sin\varphi\,(1+\cos^2\varphi)/2\cos^2\varphi\,; \quad v = \sqrt{5}\,\text{m/sec}.$$

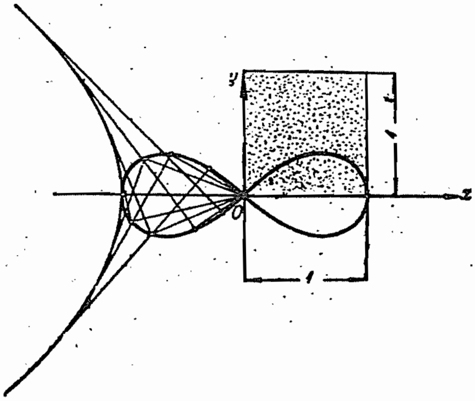
32) Под утицајем привлачне силе тачка се креће по лемнискати $r^2 = \cos 2\varphi$ (сл. 34) секторском брзином $S = 5\,\text{dm}^2\,\text{sec}^{-1}$.

Одредити брзину кретања и време потребно да тачка пређе целу путању, ако је r дато у метрима.

Решење. — Из једначине лемнискате следи

$u^2 = 1/\cos 2\varphi\,;\ u'^2 = \sin^2 2\varphi/\cos^3 2\varphi,\ \ v = C/r^3.$

Површина је лемнискате $A = c^2 = 1\,\text{m}^2$, па је време обилажења $T = A/S = 20$ sec.



Сл. 34. — Кретање по лемнискати

33) Одредити кретање тачке масе 1 gr* под утицајем привлачне силе обрнуто сразмерне трећем степену растојања ако је та сила на растојању 1 cm јачине 1 dyn. У почетном је положају $r_0 = 2$ cm а почетна брзина 0,5 cm/sec и са потегом чини угао 45⁰.

Решење. — Из Бинеовог обрасца је

$$k/r^3 = C^2 u^2 (u'' + u)\,. \quad S = {}^1/_4\sqrt{2}\,; \quad C^2 = {}^1/_2, \quad k = 1\,; \quad u'' - u = 0,$$

$$u = Ae^{\varphi} + Be^{-\varphi}; \quad r_0 = 2\,; \quad \dot r_0 = {}^1/_4\sqrt{2}\,; \quad A = 0\,; \quad B = {}^1/_2.$$

Линија путање је $r = 2\,e^{\varphi}$ (*логаритамска спирала*).

Закон промене потега са временом биће

$$dr = 2\,e^{\varphi} d\varphi = r\,d\varphi\,,$$

па је

$$\dot{r} = r\dot{\varphi} = C/r\,, \quad \text{тј.} \quad r\,dr = C\,dt\,, \quad \text{те је} \quad r^2 = 2\,Ct + C_1\,.$$

За $t = 0$ је $r_0 = 2$ па је $C_1 = 4$ и закон кретања $r^2 = 4 + t\sqrt{2}$.

34) *Пројектил** (*ракета*) испаљен је са површине Земље (N_0) под елевационим углом α_0 према хоризонту, почетном брзином v_0, у безваздушни простор. Који услов мора бити испуњен да би се пројектил вратио на Земљу? Одредити висину пењања, домет и укупно време лета пројектила. Шта су космичке брзине?

Решење. — Тачка N_0 одређена је према $+Oz$-оси углом β_0 а према поларној $(-Oz)$ оси углом $\varphi_0=\pi-\beta_0$. Како је $C=2\,S=r_0\;v_{c0}=Rv_0\,\cos\alpha_0$, то је $p=C^2/k=C^2/R^2g$. Почетни услови кретања су: $u_0=1/R$; $v_{r0}=(-C\;u')_0=v_0\,\sin\alpha_0$; $v_{c0}=(Cu)_0=v_0\,\cos\alpha_0$, па из (1.1) следи $\varepsilon\cos\varphi_0=(p-R)/R$; $\varepsilon\sin\varphi_0=(p\,\mathrm{tg}\,\alpha_0/R)$ односно

$$\varepsilon^2=\left(1-\frac{p}{R}\right)^2+\left(\frac{p\,\mathrm{tg}\,\alpha_0}{R}\right)^2=1+\frac{p}{R^2\,g}\,(v_0^2-2\,Rg); \quad \mathrm{tg}\,\beta_0=\frac{p\,\mathrm{tg}\,\alpha_0}{R-p}\,;\; R=R_T.$$

Да би се пројектил вратио на Земљу мора путања бити *елипса*. Како је тада $\varepsilon<0$, то мора бити почетна брзина $v_0<\sqrt{2\,Rg}=11{,}2$ km/sec.

Висина пењања, домет и време лета су:

$$r_{max}=p/(1+\varepsilon)=R+H; \quad D=\widehat{N_0\overline{N}_0}=2\,R\,\beta_0=2\,R\;\mathrm{arc\,tg}\,[p\,\mathrm{tg}\,\alpha_0/(R-p)];$$

$$T=\int\limits_{-\beta_0}^{\beta} r^2\,C^{-1}\,\mathrm{d}\,\varphi=\frac{(v_0\,\cos\alpha_0)^3}{Rg^2\,(1+\varepsilon)}\left[\frac{k^2-1}{1+(kx)^2}\,x+\frac{k^2-1}{k^3}\;\mathrm{arc\,tg}\;kx\right]_{-\beta_0}^{\beta_0};$$

$$x=\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\,; \quad k^2=(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon).$$

За *сателит* мора бити $\alpha_0=0$ и $v_{c0}=v_0$; $p=v_0^2/g$, те је $\beta_0=0$ или $\beta_0=\pi$, па је

$$\varepsilon^2=1+[v_0^2\,(v_0^2-2\,Rg)/R^2\,g^2].$$

Космичке су брзине: *кружна (орбитна)*, $\varepsilon=0$; $v_0=v_k=\sqrt{Rg}=7{,}91$ km/sec; *прва космичка брзина (елиптичка)* $\varepsilon<0$; $\sqrt{Rg}<v_e<\sqrt{2\,Rg}$, то јест $7{,}91<v_e<11{,}2$ km/sec; *друга космичка брзина (параболичка) или брзина ослобађања од теже*, $\varepsilon=1$; $v_p=\sqrt{2Rg}=$ $=11{,}2$ km/sec; *хиперболичка*, $\varepsilon>0$, $v_h>\sqrt{2\,Rg}$, и *брзина међупланетског ослобађања* $v_m>16{,}7$ km/sec.

Први вештачки сателит избачен је 4. X. 1957. год. у СССР.

---

* D. Rašković, Zbirka zadataka iz Mehanike II.

6. ПРИНУДНА КРЕТАЊА

6.1. ПОЈАМ ВЕЗЕ

Материјална тачка назива се *слободном* када има произвољан положај у простору. Ако је принуђена да се креће само у одређеном делу простора она *није слободна*, па је њено кретање *ограничено* само у томе делу простора.

Ограничење кретања назива се *веза*. Она може бити изведена помоћу материјалних тела (тела, површина и линија) која сачињавају *механизам везе*. Математички се веза може изразити било *једначином* било *неједначином*. Везе изражене на први начин називају се *задржавајућим* или *двостраним везама*, јер координате покретне тачке уједно задовољавају и једначину везе, па је тачка стално принуђена да буде на вези. У другом случају су везе *незадржавајуће* или *једностране*, јер тачка може везу и да напусти. Када је тачка на оваквој вези онда се каже да веза „*дејствује*".

Када је материјална тачка принуђена да се креће само у једном делу простора, тада је та област одељена од области неприступачне покретној тачки неком површином, чија је једначина за Декартове координате

$$f(x,\ y,\ z,\ t) = 0, \tag{142}$$

што значи да веза у току времена мења и свој облик и свој положај. Таква се веза назива *покретна* (*реономна* или *нестационарна*); у противном је *стална* (*склерономна* или *стационарна*).

Ако је покретна тачка принуђена да се стално креће по некој површини, онда њене координате идентички задовољавају једначину површине. Веза је, дакле, задржавајућа, покретна или стална, па је једначина везе

$$f(x, y, z, t) = 0; \quad f(x, y, z) = 0.$$

Буде ли тачка принуђена да се стално креће по *линији* морају, с обзиром на то да ли је веза стална или покретна, да буду задовољене једначине

$$f_1(x, y, z, t) = 0, \quad f_2(x, y, z, t) = 0;$$

или

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0.$$

Ако се материјална тачка може да креће по површини и унутрашњости лопте, полупречника R, са средиштем у координатном почетку, онда је веза дата неједначином

$$R^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geqslant 0.$$

Међутим, креће ли се по површини лопте и изван ње онда је веза дата изразом

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \geqslant 0.$$

У првом је случају простор изван лопте био простор неприступачан материјалној тачки, у другом случају је тај простор унутрашњост саме лопте.

Слободна материјална тачка у простору има *три степена* слободе кретања. Принудно кретање смањује број степени слободе кретања, и то *површина смањује један степен* слободе кретања а *линија два степена слободе кретања. Принудно кретање тачке по површини има*, дакле, *два степена слободе кретања* Као што смо видели у Кинематици и Статици под бројем степени слободе кретања треба разумети број могућности кретања, који је изражен релацијом $s = 3 - k$, где је k број веза (једначина и неједначина).

Напр., када су везе дате неједначинама

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \cos^2 \alpha \geqslant 0, \qquad R^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geqslant 0$$

значи да се тачка може да креће између концентричних сфера полупречника R и $R \cos \alpha$, или по унутрашњој површини веће, односно по спољашњој површини мање сфере.

Везе дате изразима

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, \qquad z - R \cos \alpha > 0$$

показују да се тачка може да креће по спољашњој површини лоптине калоте висине $R(1 - \cos \alpha)$.

Пошто се везе изводе помоћу *маса* то су оне извор нових сила које се супротстављају кретању. Ове се силе називају *силе везе — отпори* или *реакције везе*. По трећем Њутновом закону отпори веза дејствују на материјалну тачку, извори су ових сила у самим масама везе, а материјалне тачке дејствују на везе силама (*притисцима*) чији су извори у самој покретној маси.

Диференцијална једначина кретања са везом отпора $\vec{F}_w$ у векторском облику јесте

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_w} \qquad (143)$$

где је $\vec{F}$ активна сила. Овој векторској једначини одговарају, за Декартов координатни систем, три скаларне једначине облика

$$m\ddot{x} = X + X_w; \quad m\ddot{y} = Y + Y'_w; \quad m\ddot{z} = Z + Z_w.$$

Оваква кретања са везама називају се *принудна* или кретања у *прописаној путањи.*

6.2 УСЛОВ ЗА БРЗИНУ ПРИНУДНОГ КРЕТАЊА ТАЧКЕ

Нека је материјална тачка принуђена да се креће по површини

$$f(x, y, z, t) = 0. \tag{142'}$$

Ова је веза *задржавајућа* (*двострана*) и *промењива*, јер је изражена једначином и зависи експлицитно од *времена*. Пошто су координате тачке функције времена t биће први извод

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Овај се израз може написати помоћу градијента скаларне функције (242') у облику

$$\boxed{(\vec{v}, \operatorname{grad} f) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0} \tag{144}$$

Одавде је

$$v \cos(\vec{v}, \vec{n}) = (\vec{v}, \vec{n}) = v_n = -(\partial f / \partial t) / |\operatorname{grad} f|,$$

где је $\vec{n}$ орт нормале површине (колинеаран са правцем градијента) а

$$|\operatorname{grad} f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

интензитет градијента скаларне функције (142').

Из горњег можемо извести овај закључак:

У случају покретне двостране везе ограничењу подлежи само пројекција брзине на правац градијента односно нормале површине. Она друга пројекција, у равни управној на градијент (тангенцијалној равни), не подлежи никаквом ограничењу.

Када је веза *стална*, тада је $f(x, y, z) = 0$, па услов (144) постаје

$$\boxed{(\vec{v}, \operatorname{grad} f) = 0} \tag{144'}$$

Како овај скаларни производ показује услов ортогоналности векторâ, то *брзина покретне тачке, за случај ове везе, мора увек да лежи у тангенцијалној равни.*

Сличним поступком извели бисмо и услов за брзину у случају незадржавајуће (једностране) везе. Ако је таква веза стална онда мора бити $v \cos(\vec{v}, \vec{n}) \geqslant 0$ који пока-

зује да брзина може да буде у тангенцијалној равни или да је усмерена у област простора приступачног покретној тачки. При оваквим везама треба водити рачуна о томе да при $f > 0$ веза *не дејствује* па ограничења стварно и нема; оно настаје тек онда када веза дејствује, тј. када је $f = 0$.

Када је тачка принуђена да се креће по линији која је дата као пресек двеју површина, тада су потребна два услова за брзину; наиме, биће:

а) за покретну линију

$$(\vec{v},\ \mathrm{grad}\, f_1) + \frac{\partial f_1}{\partial t} = 0; \qquad (\vec{v},\ \mathrm{grad}\, f_2) + \frac{\partial f_2}{\partial t} = 0; \tag{144''}$$

b) за непокретну линију

$$(\vec{v}, \mathrm{grad}\, f_1) = 0; \qquad (\vec{v}, \mathrm{grad}\, f_2) = 0.$$

У овом другом случају брзина мора бити управна на ортове нормала једне и друге површине, те *мора имати правац тангенте на путању.*

6.3 УСЛОВ ЗА УБРЗАЊЕ ПРИНУДНОГ КРЕТАЊА ТАЧКЕ

Диференцирамо ли по времену још једном израз (144) добићемо услов

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial x}\ddot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\ddot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\ddot{z} + D_2{}^t(f) = 0, \tag{145}$$

где је

$$\begin{aligned} D_2{}^t(f) = {} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dot{x}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\dot{y}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\dot{z}^2 + \\ & + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\dot{x}\dot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\dot{x}\dot{z} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\dot{y}\dot{z}\right) + \\ & + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial t}\dot{x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial t}\dot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial t}\dot{z}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{145'}$$

Уводећи градијент горњи се израз може написати у облику

$$\boxed{(\vec{a}, \mathrm{grad}\, f) + D^t{}_2(f) = 0} \tag{146}$$

Одавде је

$$a\cos(\vec{a}, \vec{\mathrm{n}}) = (\vec{a}, \vec{\mathrm{n}}) = a_n = -[D^t{}_2(f)]\,/\,|\mathrm{grad}\, f|$$

те закључујемо:

У случају променљиве двостране (задржавајуће) везе ограничењу подлежи пројекције убрзања на правац градијента, тј. на правац нормале површине. Пројекција у тангенцијалној равни не подлежи никаквом ограничењу.

За случај сталне задржавајуће везе остаје у важности претходно ограничење само је израз $D^t_2(f)$ другог облика, пошто се у њему не јављају изводи по времену; он је квадратна функција пројекција брзина и обележава се са $D_2(f)$, тј. *претставља квадратну форму у односу на брзине* $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

Брзина која задовољава услов (144) назива се *могућна брзина* за дату везу, исто тако и убрзање које задовољава услов (146) назива се *могућно убрзање.*

6.4 ВРСТЕ ВЕЗА

Прву класификацију веза извршили смо према томе да ли су изражене *једначинама* (*задржавајуће*) или *неједначинама* (*незадржавајуће*). Друга се класификација врши према времену. Ако везе зависе експлицитно од времена оне се називају *променљиве* или *реономне*, у противном су *сталне* или *склерономне*. Неки писци друге називају *стационарним* а прве *нестационарним* везама.[1]

Сем тога класификација врши се *према отпору везе.* Нека на материјалну тачку m дејствује сила $\vec{F}$, онда је диференцијална једначина кретања ове *слободне тачке:*

$$m\vec{a} = \vec{F}. \tag{147}$$

Када се тачка креће по површини $f(x, y, z, t) = 0$ а убрзање идентички задовољава услов (146), тада и сила мора да задовољава услов

$$(\vec{F}, \operatorname{grad} f) + m D^t_2(f) \equiv 0. \tag{148}$$

Убрзање мора задовољавати услов $d^2f/dt^2 = 0$. Интеграљењем ове диференцијалне једначине добићемо општи интеграл у облику $f = At + B$, где су A и B интеграционе константе. Ако су оне једнаке нули биће и $f = 0$, тј. једначина површине везе је партикуларни интеграл диференцијалне једначине (147). Материјалну тачку можемо сматрати слободном. Закон кретања се одређује интеграљењем једначине (147) за коју знамо једно партикуларно решење.

Ако убрзање није могућно, оно не задовољава услов (146), па диференцијална једначина кретања добива облик

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_w. \tag{143}$$

За одређивање отпора везе постоји само један услов (148) који добива облик

$$\boxed{(\vec{F}, \operatorname{grad} f) + (\vec{F}_w, \operatorname{grad} f) + m D^t_2(f) = 0} \tag{149}$$

---

[1] По *Болцману* (*Boltzmann.* 1844—1906); σκληρος (*непроменљив*), νόμος (*закон*), ρέω (*тећи*).

Одавде је

$$\vec{F}_w \cos(\vec{F}_w, \vec{n}) = F_{wn} = -[(\vec{F}, \operatorname{grad} f) + m D^t_2(f)]/|\operatorname{grad} f|. \tag{150}$$

Из овога закључујемо да веза $f(x, y, z, t) = 0$ омогућава одређивање само компоненте отпора везе у *правцу градијента, тј. нормале површине. Друга компонента у равни управној на градијент* — тангенцијалној равни — *остаје потпуно произвољна.*

Према отпору везе се деле у две групе:

1⁰ **идеалне везе,** *код којих целокупни отпор* $\vec{F}_w$ *пада у правац градијента (нормале) површине,*

2⁰ **неидеалне везе,** *које поред прве компоненте имају и компоненту управну на градијент.* Овакве везе стварно и долазе у пракси, такве су напр. *везе са трењем* (храпаве површине и линије).

7. ПРИНУДНО КРЕТАЊЕ МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ ПО ГЛАТКОЈ ПОВРШИНИ

7.1 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА

1. Диференцијалне једначине са множиоцем везе. — Векторска једначина кретања материјалне тачке по *глаткој непокретној површини*, $f(x, y, z) = 0$, може се написати у облику

$$m\vec{a} = \vec{F} + \lambda \operatorname{grad} f, \tag{151}$$

где је λ *множилац везе*. Он показује да отпор идеалне везе пада у правац градијента, тј. нормале површине.

Када је $\lambda > 0$ нормални отпор везе је колинеаран са градијентом у смеру пораста функције f рачунајући је од положаја $f = 0$; када је $\lambda < 0$ тада је смер нормалног отпора супротан од смера градијента, те је у смеру опадања функције f.

Векторској једначини (151) одговарају три скаларне једначине за Декартове координате:

$$m\ddot{x} = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}; \quad m\ddot{y} = Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}; \quad m\ddot{z} = Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}, \tag{151'}$$

које се називају *Лагранжеве једначине прве врсте* или *диференцијалне једначине са множиоцем везе.*

Множиоца везе одређујемо из услова за убрзање (146):

$$\lambda = -\,[(\vec{F}, \operatorname{grad} f) + m D_2(f)]/|\operatorname{grad} f|^2. \tag{152}$$

Када у диференцијалне једначине (151') унесемо вредност множиоца (152) можемо их интегралити. Пошто се у векторској једначини (151) појављују четири непознате (x, y, z, λ) то између шест интеграционих константи постоје две везе, те *остају само четири независне константе.*

Интеграли

$$x = x(t, C_i), \quad y = y(t, C_i), \quad z = z(t, C_i), \quad i = 1, 2, \ldots, 6$$

задовољавају решења $f = 0$ и $f = At + B$, где су A и B одређене константе. Како координате x, y, z морају идентички задовољити једначину везе, то између константи A и B и интеграционих константи C_i постоје везе облика:

$$A = A(C_i), \quad B = B(C_i), \quad i = 1, \ldots, 6.$$

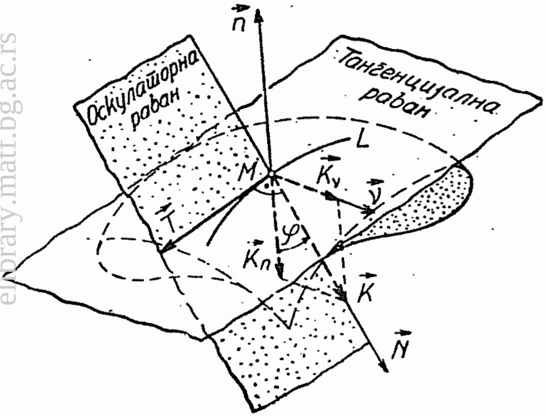
Између интеграционих константи, дакле, постоје две везе, тј. четири константе су међусобно независне. Због тога су потребна *четири независна почетна податка*, напр. x_0, y_0, $\dot{x}_0$ и $\dot{y}_0$. Координата z_0 одређује се из услова (144), а $\dot{z}_0$ из услова (144') за вредност $t = t_0$.

2. Природне једначине кретања. — Нека се тачка креће по непокретној глаткој површини. У тачки *m* уочимо природни триједар за површину $\vec{T}, \vec{\nu}, \vec{n}$ (*Кин.*, **чл. 1.6**, сл. 8), који је ортогонални десне диспозиције. Убрзање покретне тачке лежи у оскулаторној равни и може се изразити помоћу природних координата

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N},$$

где је R полупречник прве кривине (флексије) путање. Пошто се нормала површине ($\vec{n}$) у општем случају *не поклапа* са главном нормалом путање ($\vec{N}$), можемо нормално убрзање разложити на две компоненте у правцу нормале површине и у правцу орта $\vec{\nu}$ управног на орт тангенте (сл. 35), због односа $\vec{K}_N = \vec{K}_n + \vec{K}_\nu$, биће

$$\frac{v^2}{R}\vec{N} = \frac{v^2}{R_n}\vec{n} + \frac{v^2}{R_\nu}\vec{\nu}. \tag{153}$$



Сл. 35. — Природни триједар за површину

Овде су: R_n полупречник кривине нормалног пресека (*нормалне кривине*) а R_ν полупречник *геодезиске кривине*. Раван TmN је оскулаторна раван путање у датој тачки, а раван Tmn нормална на тангенцијалну раван, па је *Meusnier*-овом теоремом дата веза између полупречника кривине путање и полупречника кривине нормалног пресека[1]

$$R = \pm R_n \cos(\vec{N}, \vec{n}) = \pm R_n \cos\varphi.$$

Ако и силу која дејствује на материјалну тачку разложимо на те компоненте, диференцијална једначина кретања (151) добива облик:

$$m\left(\frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R_n}\vec{n} + \frac{v^2}{R_\nu}\vec{\nu}\right) = \vec{F}_T + \vec{F}_n + \vec{F}_\nu + \lambda\,|\operatorname{grad} f|\,\vec{n},$$

где је $\lambda\,|\operatorname{grad} f| = F_{wn}$ *алгебарска вредност нормалног отпора површине.*

---

[1] Такође постоји и однос $R = \pm R_\nu \cos(\vec{N}, \vec{\nu}) = \pm R_\nu \sin\varphi$.

Изједначујући у горњој једначини вредности уз одговарајуће ортове, биће:

$$
\begin{aligned}
&m\frac{dv}{dt} = F_T = (\vec{F}, \vec{T}),\\
&m\frac{v^2}{R_n} = F_n + \lambda\,|\operatorname{grad}\, f| = (\vec{F}, \vec{n}) + F_{wn} = m\frac{v^2}{R}\cos\varphi, \qquad (154)\\
&m\frac{v^2}{R_\nu} = F_\nu = (\vec{F}, \vec{\nu}) = m\frac{v^2}{R}\sin\varphi.
\end{aligned}
$$

Ово су *природне диференцијалне једначине кретања тачке по глаткој површини.* Прва и трећа једначина, заједно са једначином површине, служе за одређивање положаја покретне тачке на површини, а друга, пак, за одређивање нормалног отпора површине који је колинеаран са њеном нормалом.

3. Кретање по инерцији. — Када на материјалну тачку која се креће по глаткој непокретној површини *не дејствује активна сила,* природне једначине (154) постају

$$m\frac{dv}{dt} = 0; \qquad m\frac{v^2}{R_n} = F_{wn}; \qquad m\frac{v^2}{R_\nu} = 0. \qquad (155)$$

Из прве једначине следи да је $v = v_0 = const.$, тј. тачка се креће по површини константном брзином — *једнолико,* по *инерцији.* Из треће једначине је $1/R_\nu = K_\nu = 0$ те је геодезиска кривина линије путање једнака нули. Криве линије које имају особину *да им је геодезиска кривина једнака нули називају се геодезиске линије.*[1] Оне имају још једну особину да се у свакој тачки *главна нормала криве поклапа са нормалом површине,* односно, *да нормала површине лежи у оскулаторној равни криве* (напр., главни кругови на сфери, али упоредници не).

Из друге једначине можемо одредити отпор површине. Он лежи у оскулаторној равни путање, па се главна нормала поклапа са нормалом површине. Његов је интензитет

$$F_{wn} = m\,v_0^2/R\,,$$

јер је полупречник кривине путање једнак полупречнику нормалне кривине.

Диференцијалне једначине кретања са множиоцем везе имају у овом случају облик:

$$m\ddot{x} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x}; \qquad m\ddot{y} = \lambda\frac{\partial f}{\partial y}; \qquad m\ddot{z} = \lambda\frac{\partial f}{\partial z}. \qquad (155')$$

---

[1] Кинематика, Додатак II

Пример. — 35) Одредити отпор површине када се материјална тачка креће по *цилиндру*, полупречника основе R, без дејства спољашњих сила.

Решење. — Пошто је кретање по инерцији то је геодезиска линија *завојница*. Главна нормала путање поклапа се у свакој тачки са нормалом површине. Нека тангента повучена на завојницу чини угао α са хоризонталном равни, онда је једначина путање у цилиндричком координатном систему

$$r = R; \quad z - z_0 = R(\varphi - \varphi_0)\operatorname{tg}\alpha .$$

Главни полупречници кривине завојнице су $R_1 = R$; $R_2 = \infty$, па је, према *Ојлеровој* теореми[1], полупречник кривине нормалног пресека $R_n = R/\cos^2\alpha$, те је отпор $F_{wn} = (mv_0^2\cos^2\alpha)/R$.

7.2 ИНТЕГРАЛ ЕНЕРГИЈЕ ЗА КРЕТАЊЕ ТАЧКЕ ПО ГЛАТКОЈ ПОВРШИНИ

Закон о живој сили за случај кретања материјалне тачке по глаткој површини дат је изразом

$$dE_k = (\vec{F}, d\vec{s}) + \lambda(\operatorname{grad} f, d\vec{s}) \tag{156}$$

где је $d\vec{s}$ елементарно померање тачке.

Из једначине везе — површине $f(x, y, z, t) = 0$, следи услов

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt = (\operatorname{grad} f, d\vec{s}) + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0,$$

па се израз (156) може написати у облику

$$dE_k = (\vec{F}\,d\vec{s}) - \lambda\frac{\partial f}{\partial t}dt. \tag{156'}$$

Енергија биће *тотални диференцијал* ако је и десна страна ове једначине тотални диференцијал, а то ће бити само у случају када су испуњени ови услови:

1^0 ако је $\dfrac{\partial f}{\partial t} = 0$, тј. када је *површина непокретна*, $f(x, y, z) = 0$;

2^0 ако је $(\vec{F}, d\vec{s})$ тотални диференцијал, тј. *када је активна сила конзервативна, тј. има функцију силе.*

Интеграл енергије је

$$E_k = U + h,$$

где је h интеграциона константа. Кретање је, дакле, *конзервативно.*

---

[1] $\dfrac{1}{R_n} = \dfrac{1}{R_1}\cos^2\varphi + \dfrac{1}{R_2}\sin^2\varphi.$

Пошто је у овом случају $f(x, y, z) = 0$, или $z = z(x, y)$, то је

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = pdx + qdy,$$

где су p и q *Монжове* (*Monge*) ознаке.

Елементарни рад биће

$$d\mathbf{A} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = (X + pZ)\,dx + (Y + qZ)\,dy.$$

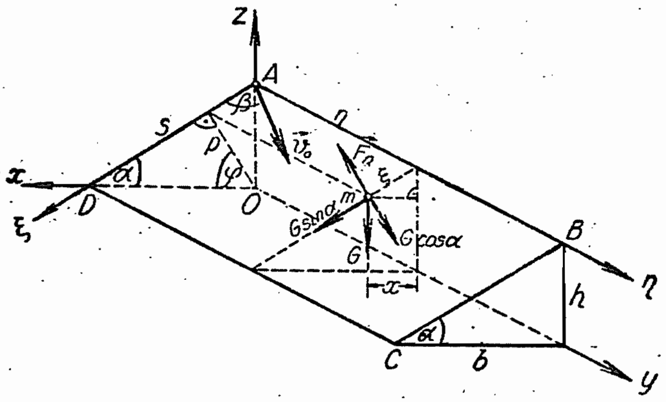
Да би рад био тотални диференцијал мора бити испуњен *само један услов*

$$\frac{\partial}{\partial y}(X + pZ) = \frac{\partial}{\partial x}(Y + qZ).$$

За слободну тачку морала су бити испуњена сва *три услова* (115).

7.3 КРЕТАЊЕ ТЕШКЕ ТАЧКЕ ПО НЕПОКРЕТНОЈ ГЛАТКОЈ СТРМОЈ РАВНИ

Нека се материјална тачка креће по *непокретној глаткој стрмој равни ABCD* (сл. 36) само под утицајем сопствене тежине, $G = mg$. Пошто је површина *непокретна* а сила *конзервативна*, за одређивање кретања можемо применити све три методе:



Сл. 36. — Кретање тачке по глаткој стрмој равни

1⁰ Методу множиоца везе (*Лагранж*), 2⁰ *Ојлерову* методу природних диференцијалних једначина и 3⁰ Методу интеграла енергије (*Лајбниц*).

1⁰ Усвојимо ли Декартов координатни систем $Oxyz$, једначина равни биће

$$f(x, y, z) = x \cos \varphi + z \sin \varphi - p = 0, \tag{157}$$

где је p нормала спуштена из координатног почетка на стрму раван а φ угао који чини та нормала са Ox осом.

Диференцијалне једначине кретања са множиоцем везе биће:

$$m\ddot{x} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda\cos\varphi; \quad m\ddot{y} = \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = 0; \quad m\ddot{z} = -mg + \lambda\sin\varphi. \tag{158}$$

Диференцирањем једначине везе (157) добива се услов

$$\ddot{x}\cos\varphi + \dot{z}\sin\varphi = 0.$$

Ставимо ли у њега вредности (158) биће

$$\lambda\cos^2\varphi + \lambda\sin^2\varphi - mg\sin\varphi = 0$$

те је множилац везе

$$\lambda = mg\sin\varphi = mg\cos\alpha; \tag{159}$$

α је *угао нагиба стрме равни.*

Пошто познајемо множиоца везе можемо лако одредити нормални отпор површине

$$F_{wn} = F_n = \lambda\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

односно

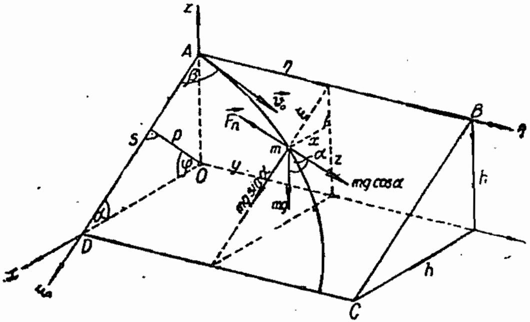
$$\boxed{F_{wn} = \lambda = mg\cos\alpha} \tag{160}$$

Он је *управан на стрму раван са смером њене позитивне нормале.*

Да бисмо одредили кретање тачке по стрмој равни усвојимо нови координатни систем $A\xi\eta$ (сл. 37). Формуле трансформације координата су:

$$x = \xi\cos\alpha; \quad y = \eta,$$

па с обзиром на (158) и (159), диференцијалне једначине кретања, постају



Сл. 37. — Путања тешке тачке на глаткој стрмој равни је парабола

$$\ddot{x} = \ddot{\xi}\cos\alpha = g\cos\alpha\cos\varphi; \qquad \ddot{y} = \ddot{\eta} = 0,$$

односно

$$\ddot{\xi} = g\cos\varphi = g\sin\alpha; \qquad \ddot{\eta} = 0.$$

Решења ових једначина биће

$$\dot{\xi} = gt \sin \alpha + C_1, \qquad \dot{\eta} = C_3,$$

$$\xi = {}^1/_2\, gt^2 \sin \alpha + C_1 t + C_2, \qquad \eta = C_3 t + C_4 .$$

Интеграционе константе одредићемо из почетних услова. Ако су за $t = 0$ почетни положај (A) и почетна брзина $\xi_0 = \eta_0 = 0$; $\dot{\xi}_0 = v_0 \cos \beta$; $\dot{\eta}_0 = v_0 \sin \beta$, где је β угао који чини почетна брзина у почетном положају A са $A\xi$ осом, константе су $C_1 = v_0 \cos \beta$, $C_3 = v_0 \sin \beta$, $C_2 = C_4 = 0$.

Према томе су параметарске једначине путање

$$\xi = v_0 t \cos \beta + {}^1/_2\, gt^2 \sin \alpha; \qquad \eta = v_0 t \sin \beta. \tag{161}$$

Линија путање је

$$\boxed{\xi = \eta \operatorname{ctg} \beta + {}^1/_2 \frac{g \sin \alpha}{v_0{}^2 \sin^2 \beta} \eta^2} \tag{161'}$$

Парабола.

Прва једначина (161) показује да је кретање *низ раван једнакоубрзано*, док је у правцу $A\eta$ осе *једнолико*.

Убрзање је једнако

$$\boxed{a = \ddot{\xi} = g \sin \alpha} \tag{162}$$

и мање је него код слободног пада. Сила која производи ово кретање јесте пројекција тежине на $A\xi$ осу

$$G_\xi = mg \sin \alpha. \tag{163}$$

Када је почетна брзина једнака нули ($v_0 = 0$) кретање, је *праволиниско* низ стрму раван по $A\xi$ оси по закону

$$\xi = {}^1/_2\, gt^2 \sin \alpha; \; \eta = 0. \tag{164}$$

Ако је брзина константна са смером $A\xi$ осе, онда је угао $\beta = 0$, па је кретање такође праволиниско са законом пута

$$\xi = v_0 t + {}^1/_2\, gt^2 \sin \alpha.$$

Из једначине (162) можемо добити и овај однос

$$\ddot{\xi}/g = \sin \alpha = h/s. \tag{165}$$

Убрзања при слободном паду и при кретању по глаткој стрмој равни тешке тачке без почетне брзине обрнуто су сразмерна пређеним путевима.

За случај $v_0 = 0$ (*слободан пад низ раван*) може се из једначина (164) добити квадрат брзине

$$v^2 = \dot{\xi}^2 = 2g\xi\sin\alpha = 2g(h-z) = 2gh', \tag{166}$$

тј. иста вредност као и код слободног пада (25). Овај израз показује да брзина тешке тачке на глаткој стрмој равни не зависи ни од пређеног пута нити пак од нагиба стрме равни, већ само од висине спуштања (h).

Галилеј је поставио још један важан однос који постоји између времена слободног пада (t') и времена спуштања низ стрму раван (t) при паду за исту висину h и при $v_0 = 0$:

$$v^2 = (gt')^2 = v^2 = (gt\sin\alpha)^2 = 2gh = 2gs\sin\alpha, \quad \text{тј.} \quad t':t = h:s,$$

што значи да су времена *кретања по разним стрмим равнима сразмерна пређеним путевима.*

Према томе је *Галилеј* и могао експерименталним путем да проучи слободан пад по стрмој равни, јер је на њој кретање *много спорије* за исту висину падања h. Експерименте је извео ча стрмој равни димензија: $s = 14$ m; $h = 1{,}17$ m; $\sin\alpha = {}^1/_{12}$, $\alpha = 4^0\,47'$ па је $t = 12\,t'$.

Кретање је 12 пута спорије него код слободног пада за исту висину падања h.

Ако је почетна брзина различита од нуле са смером негативне $A\xi$ осе ($\beta = \pi$) кретање је *праволиниско — једнакоуспорено* — са законом пута

$$\xi = -v_0 t + {}^1/_2\, gt^2 \sin\alpha \tag{167}$$

све до тренутка

$$t_1 = v_0/g\sin\alpha$$

када буде $v = 0$; тада се тачка зауставља и настаје убрзано кретање низ раван.

Пређен пут *уз раван* одређен је једначином

$$\xi = -v_0^2/2g\sin\alpha. \tag{167'}$$

2⁰ Природне једначине, за овај случај кретања, биле би:

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= G\sin\alpha = mg\sin\alpha, \\ mv^2/R &= -G\cos\alpha + F_{wn} = 0, \end{aligned} \tag{168}$$

пошто је $R = R_n = \infty$. Из ових једначина можемо одредити интензитет отпора површине (идеалне везе):

$$F_{wn} = mg\cos\alpha.$$

Ова је вредност потпуно иста са (160).

3⁰ Пошто је сила теже конзервативна а раван непокретна, можемо применити и трећу методу, па је, према (168), интеграл енергије:

$$2\,E_k = 2\,(U + h) = mv^2 - 2\,(mgz + h) = R\,(F_{wn} - G\cos\alpha),$$

те је, због $R = \infty$, нормални отпор $F_{wn} = G\cos\alpha$.

На овај смо начин код проблема кретања тешке тачке по непокретној стрмој равни применили све три методе за одређивање непознатог отпора идеалне везе — глатке равни — и добили смо исте резултате. У овом проблему је и прва метода помоћу множиоца везе довела до брзог резултата, али се при тежим проблемима обично примењују друге две методе: природних диференцијалних једначина и интеграла енергије.

Коначна једначина линије путање (161′) зависи само од почетне брзине и стрмине равни а не зависи од p, тј. од растојања равни од координатног почетка, па се *карактер кретања неће променити ако се стрма раван транслаторно креће.*

Примери. — 36) Тешка тачка клизи по глаткој стрмој равни дужине l, без почетне брзине и падне у тачку C (сл. 38). Одредити однос b/l ако је почетни положај тачке у A, а $\alpha = {}^1/_2\,\beta$. Опште решење. Специјално за податке: $l = 3$ m; $\alpha = 30^0$.

За које ће време тачка из положаја A пасти у положај C?

Решење. — У тачки B брзина је

$$v_B = \sqrt{2\,gl\sin\alpha.}$$

Из проблема косог хица следи

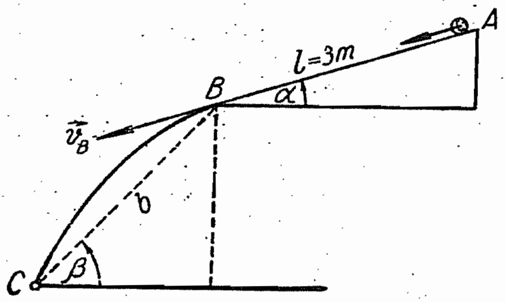
$$v_B\,t\cos\alpha = b\cos\beta,$$

$$v_B\,t\sin\alpha + {}^1/_2\,gt^2 = b\sin\beta,$$

па елиминисањем времена t биће:

$$b/l = 2\sin 2\,\alpha\sin(\beta - \alpha)/\cos^3\beta;$$

$$b = 6\sqrt{3}\,\mathrm{m}; \quad t = t' + t'' = 4\sqrt{3/g}\,\mathrm{sec.}$$



Сл. 38. — Кретање тачке по глаткој стрмој равни и кос хитац

37) Стрма глатка раван дата је једначином $4\,x + 3\,z - 12 = 0$. Из тачке A (0, 0, 4 m) бачена је материјална тачка почетном брзином $v_0 = 2$ m/sec под углом 30⁰ према $A\xi$ оси, са смером низ раван (сл. 37). Одредити положај тачке у којој ће покретна тачка напустити раван.

Решење. — Како су $\sin\alpha = {}^4/_5$, $\cos\alpha = {}^3/_5$, то је

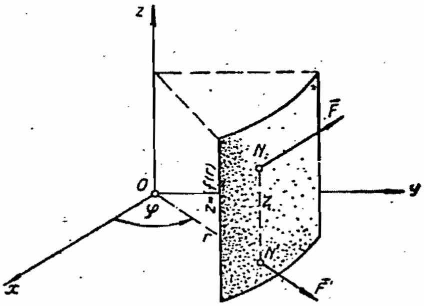
$$\eta^2 + 0{,}44\,\eta - 1{,}27 = 0, \quad \text{па је} \quad \xi = 5\,\mathrm{m} \quad \text{и} \quad \eta = 0{,}93\,\mathrm{m}.$$

7.4 КРЕТАЊЕ МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ ПО ГЛАТКОЈ ОБРТНОЈ ПОВРШИНИ

Материјална тачка масе m креће се по непокретној обртној површини која је постала обртањем криве (сл. 39)

$$z = f(r) \tag{169}$$

око Oz осе, где је $r=(x^2+y^2)^{1/2}$, растојање покретне тачке од осе. Једначине кретања могу се написати помоћу закона о енергији и закона о замаху.



Сл. 39. — Кретање тачке по обртној површини

Усвојимо цилиндрички координатни систем онда су брзине

$$v_r=\dot r;\; v_c=r\dot\varphi;\; v_z=\dot z=f'(r)\cdot\dot r,$$

па је квадрат брзине

$$v^2=\{1+[f'(r)]^2\}\,\dot r^2+r^2\,\dot\varphi^2. \qquad (170)$$

Пошто радијална брзина сече Oz осу а аксијална је паралелна оси то су моменти ових вектора за ту осу једнаки нули (*Ст.* **чл. 24**) па је према закону о замаху за Oz осу (*закон површине*):

$$L_z=\frac{d}{dt}\,(m r^2\,\dot\varphi)=M_z^F=x\,Y-y\,X, \qquad (171)$$

пошто и отпор површине такође сече осу.

Ако сила, која производи ово кретање, лежи увек у вертикалној равни која пролази кроз Oz осу, онда из услова (171) увиђамо да се њена пројекција на Oxy раван поклапа са потегом r, па је момент те пројекције за координатни почетак једнак нули, тј. $M_z=0$. Тада је извод по времену замаха за Oz осу једнак нули, па важи интеграл момента количине кретања — замаха, тј. *интеграл површине*:

$$2\,m\,S_z=const.$$

Дакле, *када се материјална тачка креће по обртној површини а сила која дејствује на њу налази се увек у равни меридијана, тада за то кретање важи интеграл замаха (интеграл површине) у равни управној на обртну осу.*

Диференцијалне једначине кретања су

$$d\,\{{}^1\!/_2\,m\,\{1+[f'(r)]^2\}\,\dot r^2+r^2\,\dot\varphi^2\}=X dx+Y dy+Z dz,$$

$$\frac{d}{dt}\,(mr^2\dot\varphi)=x\,Y-y\,X.$$

Ове услове за примену интеграла површине можемо добити и на други начин. Нека се тачка креће по непокретној површини $f(x,y,z)=0$, онда је $m\vec a=\vec F+$ $+\lambda\,\mathrm{grad}\,f$, па је према закону о замаху

$$\dot{\overline{[\vec r, m\,\vec v]}}=[\vec r,\ \vec F]+\lambda\,[\vec r,\ \mathrm{grad}\,f].$$

Да бисмо применили интеграл површине, напр. за Oz осу, морају бити једнаки нули моменти за ту осу и силе $\vec{F}$ и отпора λ grad f:

$$xY - yX = 0; \quad x(\partial f/\partial y) - y(\partial f/\partial x) = 0.$$

Друга једначина претставља линеарну парцијалну диф. једначину[1] којој одговара систем обичних диф. једначина

$$x\,dx = -y\,dy; \quad dz = 0$$

чији су интеграли

$$x^2 + y^2 = C_1; \quad z = C_2,$$

односно $f(x^2 + y^2, z) = 0$ Ово значи да је површина *обртна*, са осом Oz. Први услов показује да сила мора да дејствује у равни меридијана.

За случај кретања тешке тачке, $F = G = mg$, интеграл површине важи, па се исто врши константном секторском брзином у хоризонталној равни. Једначине су:

$$v^2 = 2gz + h = 2gf(r) + h.$$

где су h и C константе.

За случај кретања *по инерцији*, $F = 0$, такође важи интеграл површине. Тачка се креће по геодезиској линији чију једначину можемо одредити интеграљењем система диференцијалних једначина

$$\left\{1 + [f'(r)]^2\right\}\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = v_0^2; \quad r^2\dot{\varphi} = C,$$

у облику

$$\varphi = \int \frac{1}{r}\sqrt{\frac{1 + [f'(r)]^2}{(r/p)^2 - 1}}\,dr + C_1; \tag{171'}$$

овде су $p = C/v_0$ и C_1 константе.

Ако се тачка креће по геодезиској линији а брзина гради са меридијаном угао θ, онда је можемо разложити на две компоненте: $v \cos\theta$ у правцу меридијана, и $v \sin\theta$, у правцу упоредника. Пошто прва компонента сече осу Oz то је њен момент једнак нули. Према (171) је

$$d(mvr\sin\theta)/dt = 0, \quad \text{тj.} \quad r\sin\theta = const. \tag{171''}$$

јер је, због кретања по инерцији, $v = const.$

Овај израз претставља *Клерову* (*Alexis Claude Clairaut*, 1713—1765 год.) *теорему*. Из ње закључујемо да при смањењу r угао θ расте, па се геодезиска линија удаљава од меридијана. Ова линија на цилиндру је *завојница*. Како је код ње $r = const.$ то је и $\theta = const.$, па завојница сече све изводнице под истим углом *(нагиб завојнице је константан)*.

Пример. — **38)** Материјална тачка масе m креће се под дејством одбојне силе, са центром у O, по глаткој површини кружног конуса угла отвора 90° (сл. 40). Одбојна је сила сразмерна растојању тачке од центра O. Почетни је положај тачке N_0 ($\rho_0 = 2$ cm) а почетна брзина $v_0 = 2$ cm/sec паралелна основи конуса и пада у правац упоредника. Одредити кретање тачке и отпор површине.

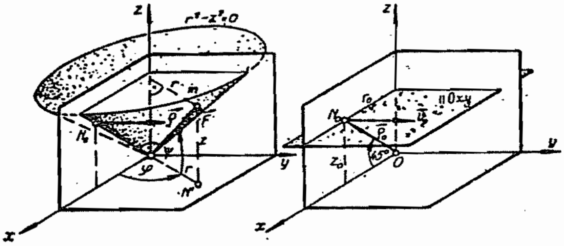
---

[1] Н. Салтиков — Парцијалне диференцијалне једначине I реда. — Београд 1947.

Решење. — Једначина конусне површине је $x^2 + y^3 - z^2 = 0$.
Уведемо ли сферне координате, због тога што је $\psi = 45^0$, једначине (4) постају:

$$\ddot{\rho} - {}^1/_2\rho\dot{\varphi} = \rho; \quad d({}^1/_2\rho^2\dot{\varphi})/dt = 0; \quad - {}^1/_2 m \rho \dot{\varphi}^2 = F_{wn} = F_w.$$

Кретање ћемо одредити из првих двеју једначина а отпор површине из треће. Из друге једначине видимо да важи интеграл површине јер је површина обртна и сила лежи у равни меридијана, па је $\rho^2\dot{\varphi} = 2\,C$.



Сл. 40. — Кретање тачке по конусу

Унесемо ли ову вредност у прву једначину биће

$$\ddot{\rho} = (16/\rho^3) + \rho, \quad \text{тј.} \quad 2\dot{\rho}\,d\dot{\rho} = 2\,[(16/\rho^3) + \rho]\,d\rho, \quad \text{па је први интеграл}$$

$$\dot{\rho}^2 = -(16/\rho^3) + \rho^2, \quad \text{јер је} \quad C_1 = 0. \quad \text{Даље, сменом} \quad 4u = \rho^2, \quad \text{биће}$$

$$\rho\,(\rho^2 - 16)^{-1/2}\,d\rho = {}^1/_2\,(u^2 - 1)^{-1/2}\,du = dt, \qquad \ln\left({}^1/_4\rho^2 + {}^1/_4\sqrt{\rho^4 - 16}\right) = 2t, \quad \text{јер је} \quad C_2 = 0.$$

Интеграл је

$$\rho^2 + \sqrt{\rho^4 - 16} = 4\,e^{2t} \quad \text{или} \quad \rho^2 = 4\,\mathrm{Ch}\,2t = 2r^2, \quad r^2 = 2\,\mathrm{Ch}\,2t.$$

Због ${}^1/_2\rho^2\dot{\varphi} = r^2\dot{\varphi} = C$ биће $\dot{\varphi} = \sqrt{2}/\mathrm{Ch}\,2t$ и $d\varphi = \sqrt{2}\,(w^2 + 1)^{-1}\,dw$, где је $w = e^{2t}$.

Интеграљењем биће

$$\varphi = \sqrt{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,e^{2t} + C_3.$$

За $t = 0$ је $\varphi_0 = 0$, $C_3 = -{}^1/_4\pi\sqrt{2}$, па је

$$\mathrm{tg}\,({}^1/_2\sqrt{2}\,\varphi + {}^1/_4\pi) = e^{2t}.$$

Нормални отпор износи $F_{wn} = 16\,F/\rho^4$ dyn-a.

7.5 СФЕРНО КЛАТНО

Проблем сферног клатна јесте проблем кретања тешке тачке по непокретној сфери. Оно се назива и *просторним клатном*.

Полупречник сфере је l (*дужина клатна*). Положај материјалне тачке можемо одредити помоћу цилиндричких координата r, φ, z, те је једначина сфере (сл. 41)

$$r^2 + z^2 = l^2. \tag{172}$$

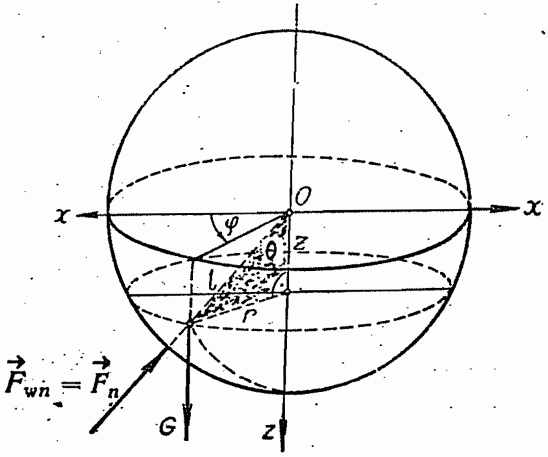
Пошто је површина *непокретна* а активна сила *конзервативна*, постоји интеграл енергије, па је квадрат брзине

$$v^2 = 2\,gz + h = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2. \tag{173}$$

Како је површина *обртна* а сила дејствује у равни меридијана постоји и *интеграл површине* за Oz осу, па је секторска брзина за ту осу констачтна, тј.

$$r^2\dot{\varphi} = C. \tag{174}$$

Ове три једначине (172), (173) и (174) одређују положај тачке на сфери. Из последње једначине, а пошто је $C = const.$ а r^2 увек позитивно, може се закључити да се угао φ *мења увек у истом смислу*, тј. *тачка се обрће око Oz осе увек у истом смеру.*



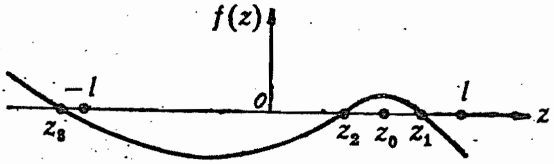
Сл. 41. — Сферно клатно

Из једначине веза диференцирањем добивамо $\dot{r} = -z\dot{z}/r$ а из једначине (174) је $\dot{\varphi} = C/r^2$. Ако ове вредности унесемо у интеграл (173), добићемо, помоћу (174), зависност

$$l^2\dot{z}^2 = \\ = (2gz + h)(l^2 - z^2) - C^2 = f(z), \tag{175}$$

где смо, краткоће ради, десну страну означили са $f(z)$. Пошто је лева страна ове једначине *позитивна*, то и функција $f(z)$ *мора бити позитивна*. Она има три реална корена (сл. 42*a*) које одређујемо помоћу схеме:

z	∞	$-l$	z_0	$+l$	$+\infty$
$f(z)$	$+\infty$	$-C^2$	$f(z_0)$	$-C^2$	$-\infty$
		$-$	$+$	$-$	
		z_3	z_2	z_1	



Сл. 42*a*. — Реални корени функције $f(z)$

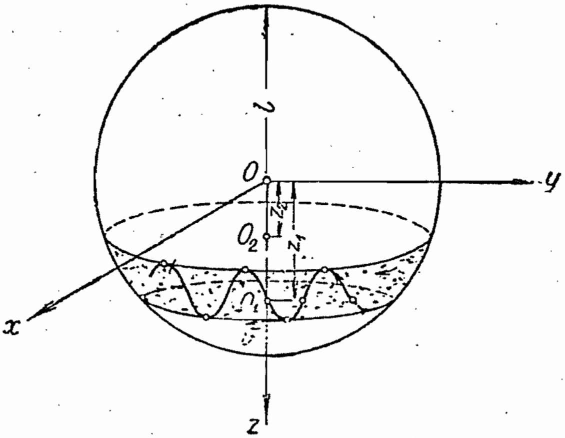
где је z_0 координата почетног положаја тачке. Пошто $f(z)$ мора бити позитивно то се променљива z мора налазити у размаку $z_2 < z_0 < z_1$, *те се тачка креће у сферном појасу висине* $z_1 - z_2$ (сл. 42*b*).

Трећи корен z_3 је негативан и мањи од $-l$, те нема физичког значења.

Из једначине (175) следи

$$dt = \frac{l\,dz}{\pm\sqrt{f(z)}}. \tag{176}$$

Знак пред кореном изабраћемо према знаку *почетне брзине.* Ако се тачка из почетног положаја креће *навише* треба узети знак $-$, јер z опада, а са њиме и dz, до доласка тачке на круг $z = z_2$. У том положају је $f(z_2) = 0$, јер је z_2 корен једначине, па је, према (175), брзина једнака нули, $\dot{z} = 0$; ту путања има хоризонталну тангенту. Затим ће се тачка кретати *наниже*, z ће расти те треба узети знак $+$ све до тренутка њеног доласка на доњи паралелни круг када ће путања опет имати хоризонталну тангенту. Тачка ће се спустити од горњег до доњег круга за исто време за које се и попела, што се лако уочава из једначине (176).



Сл. 42*b*. — Тешка тачка креће се у сферном појасу

Да бисмо интегралили диференцијалну једначину (176), напишимо функцију $f(z)$ у облику производа корених чинилаца

$$f(z) = -2g(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) =$$

$$= 2g(z_1 - z)(z - z_2)(z - z_3)$$

и претпоставимо да је почетни положај тачке био на доњем кругу, тада је

$$\frac{\sqrt{2g}}{l}\,t = -\int_{z_1}^{z} \frac{dz}{\sqrt{(z_1 - z)\;(z - z_2)\;(z - z_3)}}\,.$$

Увођењем нове променљиве $z_1 - z = (z_1 - z_2)u^2$, због $dz = -2(z_1 - z_2)u\,du$, $z - z_2 = (z_1 - z_2)(1 - u^2)$, $(z - z_3) = (z_1 - z_3)(1 - k^2u^2)$, горња једначина своди се на нормални елиптички интеграл прве врсте

$$\lambda t = \int_{0}^{u} \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)\;(1 - k^2u^2)}}\,. \tag{177}$$

Овде су: k модул, u амплитуда и

$$k^2 = (z_1 - z_2)/(z_1 - z_3), \qquad \lambda = (2l)^{-1}\sqrt{2g(z_1 - z_3)}.$$

Према теорији елиптичких функција[1] може се u изразити помоћу t и помоћу таблица[2] тих функција за сваку вредност t израчунати одговарајућа вредност u, а тиме и z. Знајући вредност z може се израчунати r, па и угао φ.

На тај начин су одређене координате тачке у функцији времена, тј. може се одредити положај покретне тачке у сваком тренутку.

Отпор површине одредићемо из друге природне једначине (154)

$$\frac{mv^2}{R_n} = \frac{mv^2}{-l} = mg\cos\theta - F_{wn} = \frac{mgz}{l} - F_{wn} = \frac{-m}{l}(2gz + h),$$

где је θ угао између конца и Oz осе. Према томе је нормални отпор

$$F_{wn} = F_n = m(3gz + h)/l, \tag{178}$$

и усмерен је ка средишту сфере O.

До истих резултата долазимо и применом Лагранжевих једначина прве врсте (151'). Како је једначина везе $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$, то су $\operatorname{grad} f = 2(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$; $|\operatorname{grad} f| = 2l$, па су

$$m\ddot{x} = 2\lambda x; \quad m\ddot{y} = 2\lambda y; \quad m\ddot{z} = mg + 2\lambda z.$$

Множећи ове једначине редом са $\dot{x}$, $\dot{y}$ и $\dot{z}$, и сабирањем, с обзиром на једначину везе, добивамо интеграл живе силе

$$\tfrac{1}{2} m \frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = mg\frac{dz}{dt} + \lambda \frac{d}{dt}(x^2 + y^2 + z^2), \text{ тј. } v^2 = 2gz + h.$$

Множећч прву једначину са y а другу са x, и одузимањем, добивамо и интеграл површине

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0; \quad x\dot{y} - y\dot{x} = C = 2S_z = r^2\dot{\varphi}.$$

Из једначина (152), с обзиром на интеграл живе силе, биће множилац везе

$$\lambda = -m(gz + v^2)/2l^2 = -m(3gz + h)/2l^2$$

и отпор површине

$$\vec{F}_{wn} = \vec{F}_n = \lambda \operatorname{grad} f = [-m(3gz + h)/l]\,\vec{n}.$$

---

[1] М. Петровић, Елиптичке функције, Београд, 1936 год.

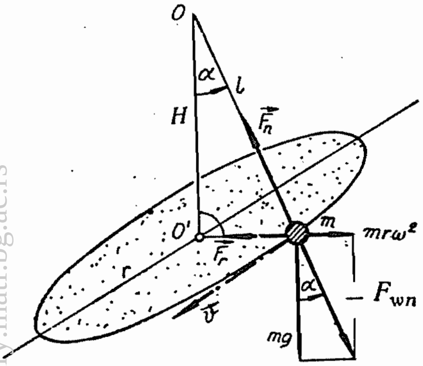
[2] B. O. Peirce, „A Short Table of Integrals“, E. Jahnke und F. Emde — „Funktionentafeln“, H. Hancock — „Elliptic Integrals“.

7.6 КОНУСНО КЛАТНО

Када је тешка тачка принуђена да се креће *једнолико* по хоризонталном кругу на непокретној сферној површини, тада врши кретање *конусног клатна*[1]. Њен сферни полупречник, дужина конца l, за време кретања описује конусну површину са врхом у тачки O (сл. 43). Кретање се врши само под утицајем тежине G коју можемо разложити на две компоненте: у правцу конца и полупречника хоризонталног круга. Прва компонента поништава се са отпором површине, па је, дакле,

$$F_{wn} = F_n = mg / \cos\alpha = mg\, l/H ;$$

друга компонента је центрипетална сила која производи ово једнолико кретање по хоризонталном кругу. Из троугла $\triangle OO'm$ следи $F_r = mv^2/r = F_n \sin\alpha = (v^2 F_n \cos\alpha)/gr$.



Сл. 43. — Конусно клатно

Из ових двеју једначина одредићемо квадрат брзине покретне тачке

$$v^2 = gr\,\mathrm{tg}\,a = gr^2 / H,$$

те је брзина константна.

Ако је угаона брзина ω, период кружења и број обрта износе

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{H/g},$$

$$n = (30/\pi)\sqrt{g/H}.$$

Конусно клатно може се сматрати специјалним случајем сферног клатна када функција $f(z)$ има *два једнака корена*, $z_1 = z_2 = z_0 = H$. Овај корен мора бити и *корен првог извода функције* $f'(z) = 0$, па ће бити:

$$(2gz + h)z - g(l^2 - z^2) = 0.$$

Уводећи квадрат брзине, а како је $l^2 - z^2 = r^2$ и $z = H$, биће

$$v^2 = gr^2/H.$$

Исту вредност смо добили и разлагањем сила („*статичком методом*“).

---

[1] Конусно се клатно назива и *центрифугалним* и има примене код *регулатора парних машина*.

8. ПРИНУДНО КРЕТАЊЕ МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ ПО ГЛАТКОЈ ЛИНИЈИ

8.1 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА

1. Диференцијалне једначине са множиоцем везе. — Векторска једначина кретања материјалне тачке по глаткој линији, одређеном једначинама

$$f_1(x, y, z, t) = 0, \quad f_2(x, y, z, t) = 0, \tag{179}$$

може се написати у облику

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F} + \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \lambda_3 \operatorname{grad} f_2} \tag{180}$$

где су λ_1 и λ_2 *множиоци везе*. Њој одговара, за Декартове координате, систем диференцијалних једначина:

$$\begin{gathered} m\ddot{x} = X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}; \quad m\ddot{y} = Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}. \\ m\ddot{z} = Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}. \end{gathered} \tag{181}$$

Овом систему додајмо још две једначине из услова за убрзање

$$(\vec{a}, \operatorname{grad} f_1) + D_2(f_1) = 0, \quad (\vec{a}, \operatorname{grad} f_2) + D_2(f_2) = 0 \tag{181'}$$

и имаћемо *пет једначина са пет непознатих* (x, y, z, λ_1 и λ_2) те можемо написати коначне једначине кретања, тј. *одредити кретање.*

Отпор везе одредићемо из једначине

$$\boxed{\vec{F}_{wn} = \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \operatorname{grad} f_2} \tag{182}$$

Он је у *нормалној равни криве,* пошто оба градијента леже у њој.

2. Природне једначине кретања. — За одређивање кретања обично се уместо једначина са множиоцима веза, које решавају општији проблем, узимају природне једначине за природни триједар $(\vec{\mathrm{T}}, \vec{\mathrm{N}}, \vec{\mathrm{B}})$. Векторској једначини

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_w$$

одговара, за овај триједар, систем скаларних једначина

$$\boxed{\begin{gathered} m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2} = (\vec{F}, \vec{\mathrm{T}}) = F_T; \qquad m\frac{v^2}{R} = (\vec{F}, \vec{\mathrm{N}}) + (\vec{F}_w, \vec{\mathrm{N}}) = F_N + F_{wN}, \\ 0 = (\vec{F}, \vec{\mathrm{B}}) + (\vec{F}_w, \vec{\mathrm{B}}) = F_B + F_{wB} \end{gathered}} \tag{183}$$

s је дужина лука криве а R полупречник кривине. Ове се једначине називају *природне једначине кретања материјалне тачке по глаткој кривој линији.* Из прве једначине можемо интеграљењем одредити закон пута $s = f(t)$, а из друге две компоненте отпора у правцу главне нормале и бинормале, а тиме и тотални отпор

$$F_w = \sqrt{F_{wN}^2 + F_{wB}^2}\,. \tag{182'}$$

Он је, дакле, *у нормалној равни криве линије.*

Понекад се за одређивање отпора користе и једначине са множиоцима везе.

8.2 ИНТЕГРАЛ ЖИВЕ СИЛЕ (ЕНЕРГИЈЕ)

Закон о живој сили за случај кретања материјалне тачке по глаткој линији изражава се једначином

$$dE_k = (\vec{F}, \vec{ds}) + (\vec{F}_w, \vec{ds})$$

где је $\vec{ds}$ *елементарно померање.* Према претходном члану овај се израз може написати у облику

$$dE_k = (\vec{F}, \vec{ds}) + \lambda_1 (\operatorname{grad} f_1, \vec{ds}) + \lambda_2 (\operatorname{grad} f_2, \vec{ds}).$$

Из једначина веза (179) биће скаларни производи

$$(\operatorname{grad} f_1, \vec{ds}) = -\frac{\partial f_1}{\partial t}dt; \qquad (\operatorname{grad} f_2, \vec{ds}) = -\frac{\partial f_2}{\partial t}dt,$$

па је

$$dE_k = (\vec{F}, \vec{ds}) - \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial t}dt - \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial t}dt.$$

Енергија биће тотални диференцијал када су испуњени ови услови

1^0 ако су $\frac{\partial f_1}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial f_2}{\partial t} = 0,$

тј. *када је крива линија нейокрейна*, и

2^0 ако је $(\vec{F}, \vec{ds}) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$

тотални диференцијал, тј. *када је сила* $\vec{F}$ *конзервайивна и има функцију силе.*

Интеграл живе силе је

$$E_k = U + h. \tag{184}$$

Крейање је конзервайивно.

У овоме случају једначине везе су $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$, или $y = y(x)$ и $z = z(x)$.

Елементарни рад биће

$$d\,\mathbf{A} = (X + Yy' + Zz')\,dx.$$

Зависи ли сила само од йоложаја йачке на йуйањи, тада су њене координате функције координате x, па је функција силе

$$U = \int \{X(x) + [Y(x)]\,y' + [Z(x)]\,z'\}\,dx = \int \Phi(x)\,dx,$$

Примери. — **39)** Материјална тачка креће се по ланчаници $y = {}^1/_2\,(e^x + e^{-x})$ удаљујући се од Ox осе, под утицајем силе $Y = kmy$ где је константа $k = 1$ sec^{-2}.

У тренутку $t = 0$ тачка је била у положају $y_0 = 1$ m и имала почетну брзину $\dot{x}_0 = 1$ m/sec (сл. 44).

Решење. — 1^0 Из једначина (181)

$$f(x, y) = \mathrm{Ch}\,x - y = 0; \quad m\ddot{x} = \lambda\,\mathrm{Sh}\,x,$$

$$m\ddot{y} = kmy - \lambda; \quad \dot{y} = \dot{x}y',$$

$$\ddot{y} = \dot{x}^2 y'' + \ddot{x}y',$$

добивамо

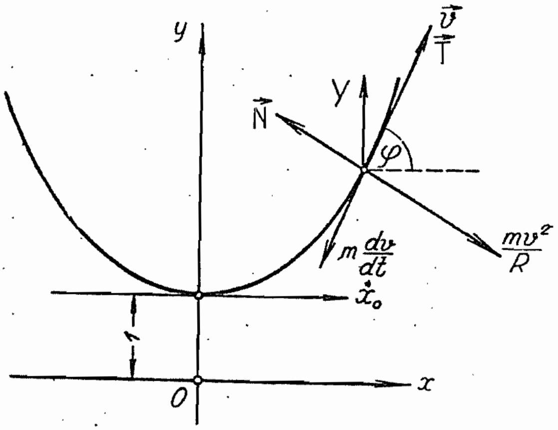
$$\lambda = -m\,(\dot{x}^2 - k)/y,$$

тј.

$$\ddot{x} = -(\dot{x}^2 - k)\,\mathrm{Th}\,x.$$

Интеграл ове једначине је

$$\ln(\dot{x}^2 - k) = -2\ln\mathrm{Ch}\,x + \ln C = \ln(C/\mathrm{Ch}^2 x).$$



Сл. 44. — Кретање тачке по ланчаници

Због $k = 1$ је $C = 0$, па је $\dot{x} = 1$, те је закон кретања $x = t$. Пошто је $\lambda = 0$ то је нормални отпор везе $F_{wN} = 0$.

2^0 Једначине (183) постају:

$$m\dot{v} = kmy\sin\varphi; \quad mv^2/R = kmy\cos\varphi + F_{wN}.$$

Како је $ds = vdt = \sqrt{1+y'^2}\, dx = y\,dx$, прва једначина постаје $v\,dv = ky\,dy$, па је $\frac{1}{2}v^2 + C = \frac{1}{2}k\,y^2$. Како је $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2 + (y'\dot{x})^2 = \dot{x}^2 y^2$, то је $C = 0$, па је $v = \sqrt{k}y$. Полупречник кривине ланчанице је $R = y^2$, те из друге једначине следи да је отпор $F_{wN} = 0$.

3^0 Из (184) добивамо квадрат брзине $v^2 = ky^2 + c = ky^2$, јер је $c = 0$. Због $ds = vdt = ydt = ydx$ је $dx = dt$, па је закон кретања $x = t$.

Све три методе доводе до истог резултата.

40) Из темена глатке параболичке цеви једначине $y^2 = 2pz$ [(сл. 45) бачена је почетном брзином v_0 куглица тежине G.

Доказати да је на сваком месту путање производ из притиска путање и полупречника њене кривине константан.

Решење. — Природна једначина кретања за изабрани координатни систем биће:

$$(mv^2/R) \pm F_N = G\cos\varphi.$$

Производ је

$$F_N\,R = G\,[R\cos\varphi - (v^2/g)]\,.$$

Из једначине параболе следи:

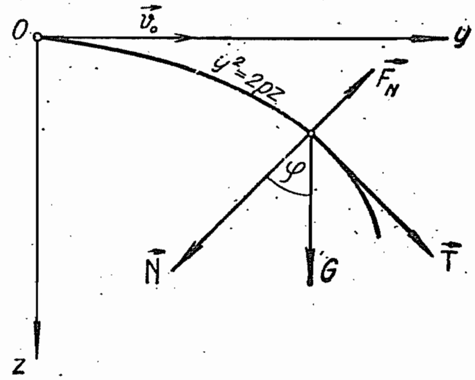
$$y' = p/y;\ y'' = -y'^2/y = p^2/y^3,$$

па је

$$R\cos\varphi = y'\,(1 + y'^2)/y'' =$$

$$= (p^2 + y^2)\,/\,p = 2\,z + p\,.$$

Како је $v^2 = v_0^2 + 2\,gz$ то је производ $F_N\,R = G\,[p - (v_0^2/g)] = const.$



Сл. 45. — Принудно кретање тешке тачке по параболичкој цеви

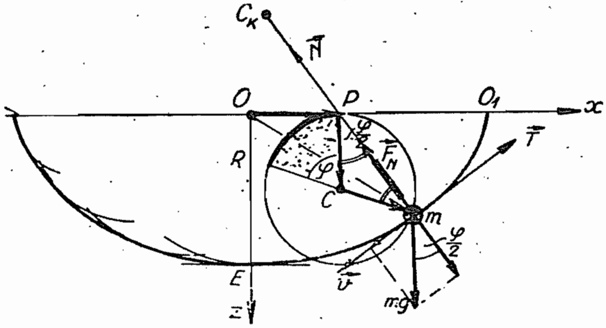
8.3 ЦИКЛОИДНО КЛАТНО

Тешка тачка принуђена да се креће по циклоиди у вертикалној равни претставља циклоидно клатно[1]. Нека је права Ox *основа циклоиде* и усвојимо координатни систем Oxz (сл. 46), онда је положај материјалне тачке масе m, одређен вектором.

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{Cm} =$$

$$= R(\varphi + \sin\varphi)\,\vec{i} +$$

$$+ R\,(1 + \cos\varphi)\,\vec{k} \quad (185)$$



Сл. 46. — Циклоидно клатно

---

[1] Назива се и *Хајгенсово клатно* (Huygens — „*Horologium oscillatorium*" Paris, 1763 год).

па су параметарске једначине циклоиде:

$$x = R(\varphi + \sin\varphi),$$
$$z = R(1 + \cos\varphi). \tag{185'}$$

Прва природна једначина (183) постаје

$$mv = m\ddot{s} = mg\cos(\vec{k}, \vec{T}) = -\,mg\sin{}^1/_2\,\varphi\,,$$

јер је тангента на циклоиду управна на праву Pm.

Елемент лука циклоиде је

$$ds = \sqrt{1 + z'^2}\,dx = 2R\cos{}^1/_2\,\varphi \cdot d\varphi$$

па је лук

$$s = 4R\sin{}^1/_2\,\varphi\,.$$

Горње односе можемо извести и кинематичким путем. Како је P тренутни пол то је брзина покретне тачке $v = \overline{Pm} \cdot \omega = \overline{Pm} \cdot \dot{\varphi} = 2R\dot{\varphi}\cos{}^1/_2\varphi$, јер је троугао PCm равнокрак. Како је елемент лука $ds = v\,dt$ биће $ds = 2R\cos{}^1/_2\varphi \cdot d\varphi$, па интеграљењем добивамо $s = 4R\sin({}^1/_2\varphi)$.

Ако у прву природну једначину ставимо за $\sin{}^1/_2\,\varphi$ горњу вредност, добићемо диференцијалну једначину кретања материјалне тачке у облику

$$\boxed{\ddot{s} + (g/4R)\,s = \ddot{s} + \omega^2 s = 0} \tag{186}$$

Општи интеграл ове једначине јесте

$$\boxed{s = A\cos\omega t + B\sin\omega t = c\sin(\omega t + \varphi_0)} \tag{186'}$$

где је c амплитуда а φ_0 фазна разлика. Из ове једначине увиђамо да се лук мења по закону хармониске осцилације, кружном фреквенцијом $\omega = \sqrt{g/4R}$.

Период осцилације је

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi\sqrt{\frac{R}{g}}} \tag{187}$$

Вредност амплитуде c можемо одредити помоћу брзине клатна у темену циклоиде (E), тј. у најнижем положају. У тренутку t_E тачка пролази кроз тај положај ($s = 0$), па мора бити испуњен услов $\omega t_E +$ $+ \varphi_0 = 0$.

Како је брзина: $\dot{s} = v = c\omega\cos(\omega t_E + \varphi_0)$ то је за горњи услов $v_E = c\omega$, па је амплитуда дата изразом

$$c = v_E/\omega = 2\,v_E\,\sqrt{R/g}\,. \tag{186''}$$

Циклоидно клатно има извесне важне особине.

1⁰ *Изохроност.* — Пошто период осцилације не зависи од почетних услова кретања, већ само од полупречника круга који производи циклоиду и од убрзања теже, то је кретање *изохроно*[1].

2⁰ *Таутохроност.* — Ако више материјалних тачака, које се налазе на разним положајима на циклоиди, пустимо да се *без почетне брзине* крећу ка темену циклоиде (E) оне ће све *за исто време стићи у тај положај.* Нека је произвољна тачка била у положају s_i и имала брзину $\dot{s}_i = 0$, онда је за $t = 0$ пређени пут $s_i = c\sin\varphi$ и брзина $s_i = - c\omega\cos\varphi = 0$, тј. $\varphi = {}^1\!/_2\pi$, $s_i = c$, те је $s = s_i\cos\omega t$. За $s = 0$ биће време падања

$$t_1 = \pi/2\omega = \pi\sqrt{R/g} = const.$$

и не зависи од пређеног пута. Ова особина назива се *таутохроност кретања клатна.*

3⁰ *Брахистохроност.* — Нека тешка тачка пређе без почетне брзине у вертикалној равни из положаја N_1 у положај N_2 по некој кривој линији. *Линија која има особину да је време преласка од једног до другог положаја најмање, назива се брахистохрона*[2]. Њен облик зависи од поља силе за које се тражи. За тешку тачку, тј. за поље теже, *Бернули* (Johan Bernoulli, 1667—1748 god.) је доказао да је брахистохрона *циклоида.*

Интеграл енергије за овај случај кретања, са координатним почетком у тачки O, биће

$$v^2 = 2gz = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{dx^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{(1+z'^2)\,dx^2}{dt^2},$$

па је

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^b \sqrt{\frac{1+z'^2}{z}}\,dx\,.$$

Проблем брахистохроне своди се на одређивање функције $z = f(x)$ под условом да време прелаза буде најмање, тј. да горњи *одређени интеграл има екстремну вредност.* Ови проблеми припадају *Варијационом рачуну.*[3]

---

[1] εισοζ *(једнак)*, χρόνος *(време)*.

[2] βραχιστοζ *(најкраћи)*.

[3] Додатак III.

Функција $z = z(x)$ треба, према правилима тог рачуна, да задовољи познату *Ојлерову диференцијалну једначину*

$$[d(\partial f/\partial z')/dx] - (\partial f/\partial z) = 0,$$

где смо, краткоће ради, са f обележили подинтегралну функцију $\sqrt{(1+z'^2)/z}$.

Пошто функција f не зависи непосредно од промењиве x, помножимо горњу једначину са dx, биће први интеграл

$$(\partial f/\partial z')\,z' - f = C.$$

Како је

$$(\partial f/\partial z') = z'\,[z(1+z'^2)]^{-1/2}$$

горња једначина постаје

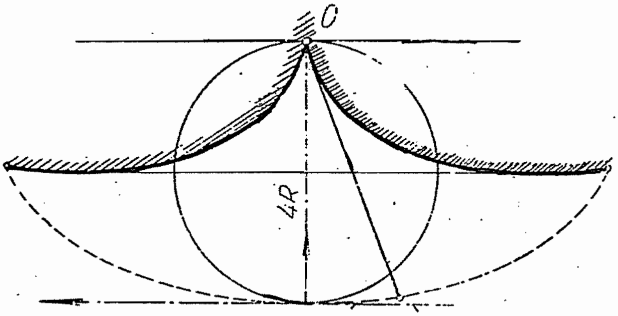
$$[z'^2/\sqrt{z(1+z'^2)}] - \sqrt{(1+z'^2)/z} = -1/\sqrt{z(1+z'^2)} = C,$$

или $z(1+z'^2) = k = const.$, па је $z = k/(1+z'^2)$. Уведимо нову смену $z' = \mathrm{tg}\,\theta$ онда је $z = k/(1+\mathrm{tg}^2\theta) = k\cos^2\theta = {}^1/_2\,k(1+\cos 2\theta)$, па је $z' = -k\theta'\sin 2\theta = \mathrm{tg}\,\theta$, тј. $dx = -2k\cos^2\theta\,d\theta$.

Интеграљењем биће $x = -{}^1/_2\,k(2\theta + \sin 2\theta) + C_1$. Како крива пролази кроз координатни почетак биће $C_1 = 0$. Сменама $R = {}^1/_2\,k$; $2\theta = 2\pi - \varphi$, једначине се своде на (185').

Примена варијационог рачуна у теориској механици је велика нарочито код објашњења *„општих принципа механике"* (II део, чл. 14).

Циклоидно клатно можемо практично извести користећи се познатом особином да је еволвента циклоиде опет циклоида која је транслаторно померена у нови координатни почетак (сл. 47). Ако у тачки O узмемо два лука вертикалне циклоиде и обесимо материјалну тачку о конац дужине $4R$, онда она врши кретање циклоидног клатна.



Сл. 47. — Извођење циклоидног клатна

Отпор везе – глатке линије, наћи ћемо из друге природне једначине

$$F_{wN} = (mv^2/R_k) + mg\cos{}^1/_2\,\varphi.$$

Како је код циклоиде полупречник кривине једнак двострукој нормалној дужи $R_k = 2\overline{Hm} = 4R\cos{}^1/_2\,\varphi$, а с обзиром да је $v^2 = 2gz$, биће отпор

$$F_{wN} = mg\,[(z/2R) + \cos^2{}^1/_2\,\varphi]/\cos{}^1/_2\,\varphi. \qquad (188)$$

Пример. — 41) Одредити у вертикалној равни криву линију која има особину да је време пада тешке тачке, без почетне брзине, једнако паду по тетиви — стрмој равни — за исту висину. (*Bonati, „Nuova curva isocrona“*, Venezia, 1781 god.).

Решење. — Квадрат брзине је $v^2 = 2gh = 2gr \sin\varphi = \dot{s}^2$, па је $dt = ds / \sqrt{2gr\sin\varphi}$.

За стрму раван је $r = {}^1/_2 gt^2 \sin\varphi$, тј. $t^2 = 2r/g \sin\varphi$, па је

$$dt = \sqrt{(\sin\varphi)/2gr} \cdot [(dr \sin\varphi - r\cos\varphi\, d\varphi)/\sin^2\varphi].$$

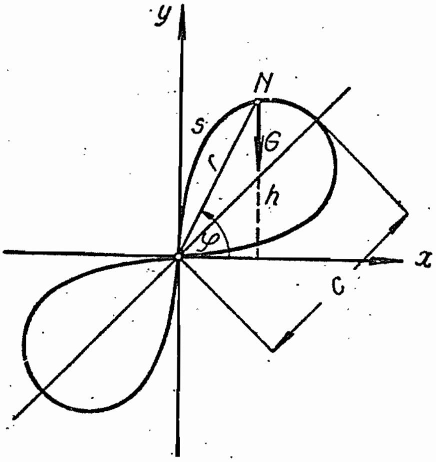
Изједначујући ове вредности биће

$$\sin\varphi\, ds = \sin\varphi\, dr - r\cos\varphi\, d\varphi = \sin\varphi\sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$$

тј.

$$r^{-1} dr = \operatorname{ctg} 2\varphi\, d\varphi,$$

па је $\ln(r/c) = {}^1/_2 \ln \sin 2\varphi$.



Сл. 48. — Бонатијев проблем

Путања је *лемниската* (сл. 48), једначине $r^2 = c^2 \sin 2\varphi$.

8.4 МАТЕМАТИЧКО КРУЖНО КЛАТНО

Тешка тачка принуђена да се креће по непокретној кружној линији у вертикалној равни претставља математичко (кружно) клатно. Полупречник кружне линије је дужина клатна l а положај покретне тачке у односу на равнотежни положај OA одређен је углом φ (сл. 49).

Пошто је путања непокретна а сила конзервативна, применићемо поред природних једначина кретања и интеграл енергије.

Природне једначине кретања (183) биће:

$$m\frac{dv}{dt} = m\ddot{s} = -mg\sin\varphi; \quad m\frac{v^2}{l} = -mg\cos\varphi + F_N. \tag{189}$$

Како је лук $s = l\varphi$, то је $\ddot{s} = l\ddot{\varphi}$, па прва диференцијална једначина постаје

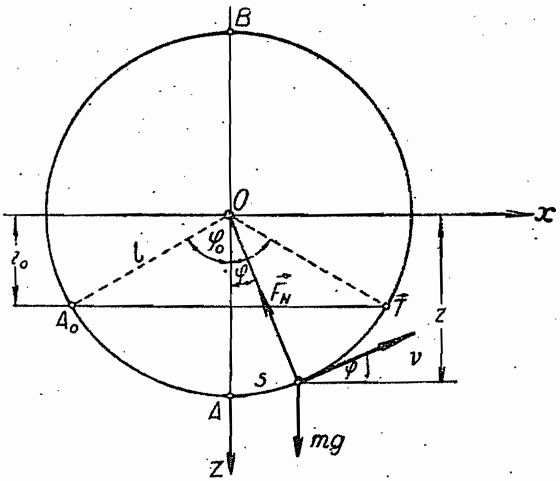
$$\boxed{l\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi} \tag{190}$$

Множењем са $d\varphi$, а како је $\ddot{\varphi}d\varphi \equiv \dot{\varphi}d\dot{\varphi}$ и $\dot{s} = v = l\dot{\varphi}$ први интеграл добивамо у облику:

$${}^1/_2\, l\dot{\varphi}^2 = g\cos\varphi + C = {}^1/_2 (v^2/l). \tag{191}$$

Интеграциону константу C одредићемо из услова да је за $\varphi = \varphi_0$ брзина $v = v_0$, па је

$$C = (v_0^2/2\,l) - g\cos\varphi_0 \,.$$



Сл. 49. — Математичко (кружно) клатно

Квадрат брзине износи:

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2gl\,(\cos\varphi - \cos\varphi_0)} \tag{192}$$

Из једначине (192) следи да је

$$\dot\varphi^2 = \dot\varphi_0^2 + (2\,g/l)\,(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$$

па интеграљењем добивамо

$$t = \frac{l}{v_0}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 + (2\,gl/v_0^2)\,(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}}\,. \tag{192'}$$

Ради лакше дискусије посматрајмо кретање тачке од тренутка када је у најнижем положају A (сл. 49), тј. у тренутку $t=0$ је $\varphi_0=0$, па је, због $1 - \cos\varphi = 2\sin^2 {}^1/_2\,\varphi$, време кретања одређено интегралом

$$t = \frac{l}{v_0}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - (4\,gl/v_0^2)\sin^2 {}^1/_2\,\varphi}} \tag{193}$$

Према томе, да ли је $4\,gl/v_0^2 \lesseqgtr 1$, разликујемо три врсте кретања математичког клатна:

1° *Прогресивно кретање.* — Када је $v_0^2 > 4\,gl$, тада је израз под кореном у једначини (193) *стално позитиван*, па угао φ *непрекидно расте.* Како је из (192) квадрат брзине

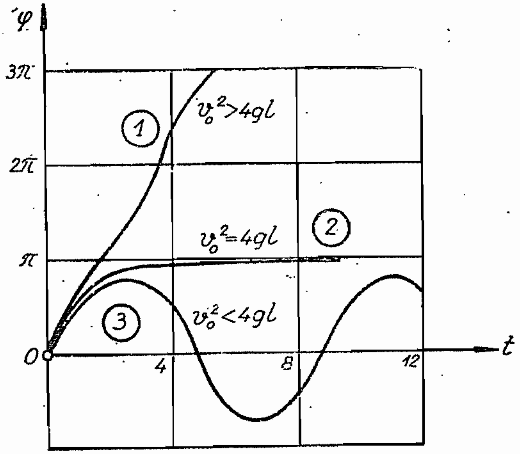
$$v^2 = v_0^2 - 4\,gl\sin^2({}^1/_2\,\varphi)\,, \tag{192''}$$

то је $v > v_0$, те нема ниједног угла φ за који би брзина v била једнака нули. Кретање је, дакле *прогресивно* (сл. 50 — *крива* **1**).

2⁰ *Асимптотско кретање.* — Ако је $v_0^2 = 4gl$ онда је

$$t = \frac{l}{v_0}\int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2 {}^1/_2\,\varphi}} = \frac{l}{v_0}\int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos {}^1/_2\,\varphi} = \frac{l}{v_0} \ln \operatorname{tg} \left[{}^1/_4 (\varphi + \pi)\right].$$

За $\varphi = \pi$ биће $t = \infty$ и $v = 0$. Тачка се, дакле, *асимптотски креће* највишем положају B, не могући га достићи у коначном времену (сл. 50 — *крива* **2**).



Сл. 50. — Три врсте кретања математичког клатна

3⁰ *Осцилаторно кретање.* — Када је $v_0^2 < 4gl$, тада ће поткорена количина у изразу (193) бити позитивна само у случају ако се угао φ налази у размаку $\pm\alpha$, где је $\sin^2 {}^1/_2\,\alpha = v_0^2/4gl$. Угао φ расте до вредности $+\alpha$, затим опада до нуле и опет расте до вредности $-\alpha$. Кретање је, дакле, осцилаторно (сл. 50 — *крива* **3**). У крајњим положајима $\varphi = \pm\alpha$, брзина је $v = 0$.

Из једначине (192), пошто су $l\cos\varphi = z$, $l\cos\varphi_0 = z_0$, добивамо

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2g(z - z_0) = v_0^2 + 2gh} \tag{194}$$

где је h висинска разлика почетног и крајњег положаја тачке. Екстремне вредности брзине биће у тачкама A и B и износе:

$$\begin{aligned} v_A &= v_{max} = \sqrt{v_0^2 + 2g(l - z_0)}, \\ v_B &= v_{min} = \sqrt{v_0^2 - 2g(l - z_0)}. \end{aligned} \tag{195}$$

Нормални отпор пада у правац полупречника а одредићемо га из друге природне једначине

$$F_N = \frac{mv^2}{l} + mg\cos\varphi.$$

Унесемо ли у овај израз вредност за квадрат брзине (194), биће

$$F_N = \frac{m}{l}\left[v_0^2 + gl(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0)\right] = \frac{m}{l}\left[v_0^2 + g(3z - 2z_0)\right]. \tag{196}$$

Екстремне су вредности отпора у тачкама A и B и износе,

$$\begin{aligned} F_A &= F_{max} = \frac{m}{l}\left[v_0^2 + g(3\,l - 2\,z_0)\right], \\ F_B &= F_{min} = \frac{m}{l}\left[v_0^2 - g(3\,l + 2\,z_0)\right]. \end{aligned} \tag{196'}$$

Пошто су услови из чл. **8.2** испуњени то можемо применити и интеграл енергије. Како су $E_k = {}^1/_2\, mv^2 = {}^1/_2\, ml^2 \dot{\varphi}^2$ и $U = mgz$ то је, према (184):

$${}^1/_2\, mv^2 = mgz + h.$$

Константу h одредићемо из услова да је за $\varphi = \varphi_0$ и $v = v_0$ па је $h = {}^1/_2\, mv_0^2 - mgz_0$, те за квадрат брзине добивамо опет израз (194).

Услов прогресивног кретања клатна $v_0^2 > 4\,gl$ може се написати и у овом облику ${}^1/_2\, v_0^2 > 2\,gl$, па видимо да је кинетичка енергија у почетном положају A већа од потенцијалне енергије у највишем положају B.

8.4.1 ОСЦИЛАТОРНО КРЕТАЊЕ МАТЕМАТИЧКОГ КЛАТНА

За осцилаторно кретање математичког клатна ($v_0 = 0$), биће диференцијална једначина кретања (191)

$$l\dot{\varphi}^2 = 2g(\cos\varphi - \cos\varphi_0); \tag{197}$$

сменама

$$\cos\varphi = 1 - 2\sin^2 {}^1/_2\,\varphi, \quad \cos\varphi_0 = 1 - 2\sin^2 {}^1/_2\,\varphi_0$$

може се написати у облику

$$l\dot{\varphi}^2 = l\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 4\,g\,(\sin^2 {}^1/_2\,\varphi_0 - \sin^2 {}^1/_2\,\varphi),$$

па је

$$t\sqrt{\frac{g}{l}} = \int\limits_0^\varphi \frac{d\,({}^1/_2\,\varphi)}{\sqrt{\sin^2 {}^1/_2\,\varphi_0 - \sin^2 {}^1/_2\,\varphi}} \tag{198}$$

Време рачунамо од тренутка када је тачка била у *најнижем положају* (A); знак + пред кореном одговара пролазу тачке са позитивном брзином кроз тај положај.

Новим сменама

$$\sin {}^1/_2\,\varphi = u \sin {}^1/_2\,\varphi_0; \quad k^2 = \sin^2 {}^1/_2\,\varphi_0, \quad 0 < k < 1$$

где је u нова променљива а k константа, интеграл (198) своди се на *нормални елиптички интеграл* (*Legendre-ов елиптички интеграл* I врсте)[1]

$$t\sqrt{\frac{g}{l}}=\int\limits_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}=F(k,u)\,. \tag{199}$$

Период осцилације може се, како показује теорија елиптичких функција,[2] израчунати из стварног периода нормалне елиптичке функције sn u развијањем подинтегралне функције у ред (*Ојлерово решење*, 1736 год.) у облику:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2k^4+\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2k^6+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\right)^2k^{2n}+\ldots\right]. \tag{200}$$

Кретање математичког клатна није изохроно, јер *период зависи од модула* k, тј. од почетног положаја тачке (φ_0).

Период осцилације можемо одредити и на овај начин: време t израчунато по обрасцу (199) у границама од $\varphi=0$ до $\varphi=\varphi_0$ претставља $^1/_4$ периода осцилације, па је

$$T=\sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}. \tag{200'}$$

Одређени интеграл десне стране горње једначине, сменом $u=\sin\theta$, своди се на *потпуни елиптички интеграл прве врсте*[3]

$$F(k,{}^1/_2\pi)=\int\limits_0^{^1/_2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \tag{200''}$$

модула k и амплитуде $\theta={}^1/_2\pi$. Како је $0<k<1$, развијемо ли подинтегралну функцију у биномни ред

$$[1-k^2\sin^2\theta]^{-^1/_2}=1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\theta+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}k^4\sin^4\theta+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}k^6\sin^6\theta+\ldots,$$

онда се израчунавање интеграла (200'') своди на интеграле облика:

$$J_{2n}=\int\limits_0^{^1/_2\pi}\sin^{2n}\theta\,d\theta=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n-2)\,2n}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

---

[1] A. Legendre (1752—1883), „Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes“, Париз, 1826 год.

[2] М. Петровић, Елиптичке функције, Београд, 1937 год.

[3] Р. Кашанин, Виша Математика I. 3 издање, чл. 151.

Извршимо ли интеграљење, с обзиром на (200′), добићемо за период математичког клатна израз (200).

За *мале осцилације*, узимајући да је $\sin\varphi \approx \varphi$, диференцијална једначина (190) постаје

$$\boxed{l\ddot{\varphi} \approx -g\varphi} \tag{201}$$

па се сменом $\omega^2 = g/l$ своди на

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$$

хомогену диференцијалну једначину хармониског осциловања, кружне фреквенције ω.

Општи интеграл је

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \varepsilon).$$

Нове константе φ_0 и ε одређујемо из почетних услова кретања за $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$, па је $\varepsilon = 0$. Једначина постаје

$$\varphi = \varphi_0 \cos\omega t = \varphi_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\, t \tag{201′}$$

где је φ_0 амплитуда.

Период осцилације је

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} \tag{202}$$

Он је *независан од почетних услова кретања*, па је *изохрон*.[1]

Овај смо резултат могли добити непосредно из једначине (200) задржавајући се само на првом члану реда. Желимо ли већу тачност зауставимо се на другом члану реда. Стављајући

$$k = \sin {}^1\!/_2\, \varphi_0 \approx {}^1\!/_2\, \varphi_0\,, \quad \text{тј.} \quad k^2 \approx {}^1\!/_4\, \varphi_0^{\,2}\,,$$

период износи

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,[1 + {}^1\!/_{16}\, \varphi_0^{\,2}]\,.$$

У овом случају период већ *није изохрон*.

Квадрат брзине биће

$$v^2 = 2gl(\cos\varphi - \cos\varphi_0) = 2gh\,. \tag{203}$$

---

[1] Галилеју је било познато да је период клатна сталне дужине константан и да је дужина клатна сразмерна квадрату периода осциловања. Хајгенс је 1763 год. извео овај образац у делу *„Horologium oscillatorium“*.

Клатно има највећу брзину при пролазу тачке кроз најнижи положај ($\varphi = 0$) и износи

$$v_A = v_{max} = \sqrt{2\,gl\,(1 - \cos\varphi_0)} = 2\,\sqrt{gl}\,\sin {}^1/_2\,\varphi_0\,. \tag{203'}$$

Из једначине (196) одредићемо нормални отпор

$$\boxed{F_N = mg\,(3\cos\varphi\; - \;2\cos\varphi_0) = mg\,(3\,z - 2\,z_0)/l} \tag{204}$$

Највећи је отпор у најнижем положају (A) а најмањи у почетном положају (A_0)

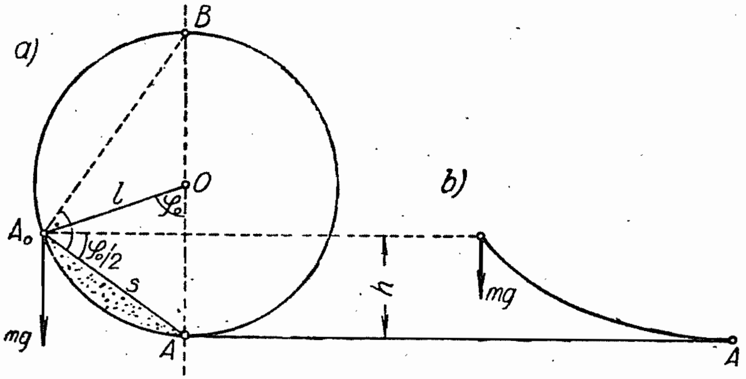
$$\boxed{\begin{aligned} F_A &= F_{max} = mg\,(3 - 2\cos\varphi_0) = mg\,(3\,l - 2\,z_0)/l \\ F_{A_0} &= F_{min} = mg\cos\varphi_0 = mg\,z_0/l \end{aligned}} \tag{204'}$$

За $\varphi_0 = {}^1/_2\,\pi$, тј. за $z_0 = 0$, највећи је отпор у тачки A и износи $F_A = 3\,mg$, тј. *три пута је већи од статичког отпора у томе положају.*

Нормални отпор биће једнак нули при услову

$$\cos\varphi = {}^2/_3\cos\varphi_0\,.$$

При даљем повећању угла φ отпор ће бити негативан и *конац клатна мора бити замењен штапом.* У противном ће материјална тачка почети да се креће по параболи као потпуно слободна.



Сл. 51. — Упоређивање времена кретања тешке тачке за исту висину падања

Математичко клатно чији *полупериод траје један секунд* назива се *секундно клатно*

$$T_s = {}^1/_2\,T = \pi\,\sqrt{l_s/g} = 1\ \text{sec},$$

па је његова дужина, за средње географске ширине ($g = 9{,}81\ \text{m/sec}^2$),

$$l_s = g/\pi \approx 0{,}994\ \text{m}\,.$$

Пошто дужина клатна зависи од убрзања теже, а ово од положаја места на Земљиној површини, то се секундно клатно употребљава за експериментално одређивање тог убрзања, па је

$$g \approx 4\,\pi^2\, l_s/T^2\,,$$

где је T период осцилације.

Интересантно је упоредити време пада тешке материјалне тачке за исту висину спуштања по стрмој равни, вертикалном кругу и циклоиди (сл. 51).

Убрзање при спуштању *низ стрму раван* $A_0 A$ (сл. 51*a*) износи

$$a_s = g \sin {}^1\!/_2\, \varphi_0\,,$$

па је време кретања

$$t_s = \sqrt{2\,s^2/gh,}\cdot$$

јер је $s = {}^1\!/_2\, g t_s^2 \sin {}^1\!/_2\, \varphi_0 = g h t_s^2/2\,s$.

Због тога што је троугао $\triangle\, A A_0 B$ правоугли следи релација $s^2 = 2\,lh$, па је време клизања $t_s = 2\sqrt{l/g}$.

Време пада по *луку круга* (математичко клатно) једнако је четвртини периода

$$t_k = {}^1\!/_2\, \pi \sqrt{l/g}\,.$$

Упоредимо ли ова времена падања, видимо да је

$$t_k = {}^1\!/_4\, \pi\, t_s < t_s\,.$$

Међутим, пошто се кретање врши под утицајем теже у вертикалној равни, време прелаза за висину h биће најмање по брахистохроној, тј. вертикалној циклоди (сл. 51*b*).

$$t_c < t_k < t_s\,.$$

Примери. — **42)** О конац дужине $^1\!/_2$ m обешен је терет 1 kg. Терет је отклоњен од вертикале за угао 60^0 и дата му је према доле у вертикалној равни почетна брзина величине 2,1 m/sec² управно на конац. Одредити:

a) Силу у концу када терет пролази кроз најнижу тачку путање.

b) До које ће се висине изнад најнижег положаја подићи терет.

c) Колика треба да је почетна брзина да би терет прешао и највишу тачку путање.

Решење. — *a*) Из једначине (192) квадрат брзине је $v^2 = 9{,}32\ \text{m}^2/\text{sec}^2$, па је нормални отпор у најнижем положају A (сл. 49):

$$F_{N_{max}} = [1 + (v^2/gl)] = 2{,}9\ \text{kg}\,.$$

b) Висина подизања је $h = v^2/2\,g = 47{,}5$ cm.

c) Из услова $mv^2/l > mg$, тј. $v^2 > gl$, одређујемо услове за почетну брзину

$$v_0^2 > v^2 - 2\,gl\,(-1 - {}^1\!/_2) > 4\,gl\,, \quad \text{односно} \quad v_0 > 2\sqrt{gl} = 4{,}43\ \text{m/sec}\,,$$

43) *a*) Са које висине треба пустити вагонет тежине $G = 100$ kg да би без почетне брзине прешао цео обим круга полупречника R не одвајајући се од њега (сл. 52)?

b) Израчунати отпор у тачки C ($\varphi = 120^0$) ако је висина спуштања за 20% већа од прорачунате.

Решење. — *a*) Из услова $mv^2/R > G$ следи

$$v^2 = 2g(h - 2R) > gR\,,$$

па је

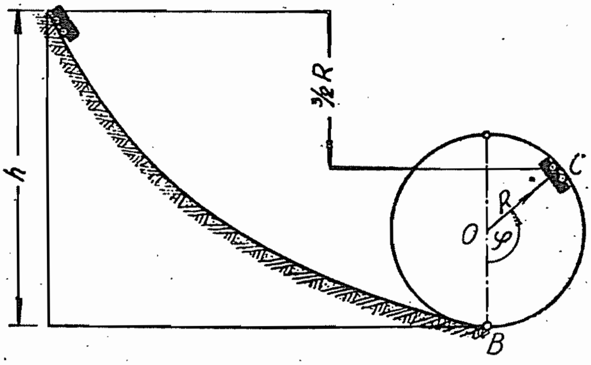
$$h \geqslant 2{,}5\,R\,.$$

b) Како је $H = 1{,}2\,h = 3\,R$ то је квадрат брзине

$$v^2 = 2g\,[H - R\,(1 - \cos\varphi)]\,,$$

па је притисак

$$F_N = (mv^2/R) + G\cos\varphi = G\,[(2\,H/R) - 2 + 3\cos\varphi] = 250\ \text{kg}.$$



Сл. 52. — Прогресивно кретање

44) Одредити период малих осцилација тешке тачке око равнотежног положаја на вертикалној параболи $x^2 = 2\,pz$ (*Параболичко клатно*), ако је почетни положај одређен координатама (a, b).

Да ли је период осцилације изохрон?

Решење. — Из једначине параболе следи:

$$z = x^2/2\,p\,,\quad \text{тј.}\quad b = a^2/2\,p\,;\quad z' = x/p\,,$$

а из квадрата брзине биће

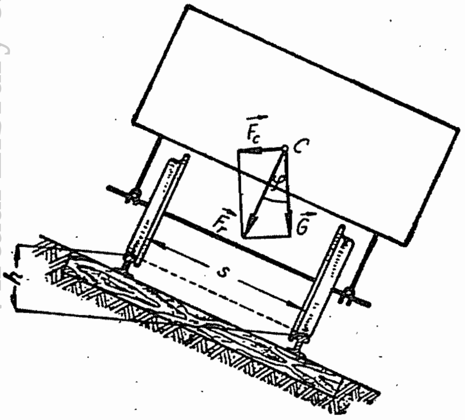
$$v = \sqrt{2g\,(b - z)} = \sqrt{g\,(a^2 - x^2)\,/\,p} = \dot{s}\,.$$

Како је

$$ds/dx = \sqrt{1 + z'^2} = \sqrt{1 + (x/p)^2} \approx 1 + {}^1\!/_2\,(x/p)^2$$

то је

$$dt = \sqrt{p/g}\,[1 + {}^1\!/_2\,(x/p)^2]\,(a^2 - x^2)^{-1/2}\,dx\,.$$



Сл. 53. — Надвишење спољашње шине у кривини

Интеграљењем добићемо четвртину периода осцилације

$$ {}^1\!/_4\,T = \sqrt{p/g}\left[\int_0^a (a^2 - x^2)^{-1/2}\,dx + (a^2/2\,p^2)\int_0^{1/2\,\pi} \sin^2 u\,du\right],$$

где је $\sin u = x/a$, тј.

$$ {}^1\!/_4\,T \approx {}^1\!/_2\,\pi\,\sqrt{p/g}\,[1 + (a^2/4\,p^2)]\,.$$

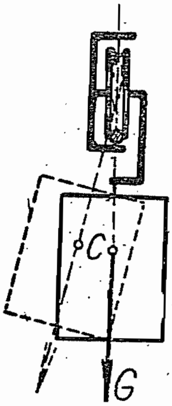
Пошто период *зависи* од почетног положаја (a) то *није изохрон ни за мале осцилације*.

45) За колико треба издићи спољашњу шину железничког строја у кривини?

Решење. — Услед принудног кретања воза у кривини по хоризонталном кругу, полупречника R, резултанта тежине G и центрифугалне силе Gv^2/Rg, није управна на праг, па би спољашња шина била *више оптерећена* од унутрашње. Да би се ово отклонило спољашња се шина издиже за висину

$$h = s \sin\varphi \approx s\,\mathrm{tg}\,\varphi = F_c/G = sv^2/Rg = cv^2.$$

Прелаз од h на $h = 0$ изводи се *благо (прелазном кривином у облику кубне параболе).*



Сл. 54. — Жичана железница

46) Жичана железница носи терет 3,2 t. Одредити центрифугалну силу у кривини, полупречника 50 m, ако је брзина кретања 40 km/h. Колики је укупни притисак на шину и угао нагиба осе (сл. 54)?

Решење. — Како је $v = 11{,}1$ m/sec биће $F_c = Gv^2/Rg = 801$ kg, па је $\mathrm{tg}\,\varphi = F_c/G = 0{,}248$ и $\varphi = 13^0\,55'$, те је

$$F_N = \sqrt{F_c^2 + G^2} = 3{,}3\,\mathrm{t}.$$

9. КРЕТАЊЕ МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ У СЛУЧАЈУ ВЕЗЕ СА ТРЕЊЕМ

9. 1. ВРСТА ТРЕЊА

При принудном кретању материјалне тачке по идеалним везама (глатким површинама и глатким линијама), тотални отпор везе пада у правац *нормале површине* или је у *нормалној равни криве линије*. Ако су везе неидеалне онда је тотални отпор *кос* и може се разложити на две компоненте: *нормални отпор*, у правцу градијента, и *тангенцијални отпор*, у равни управној на градијент.

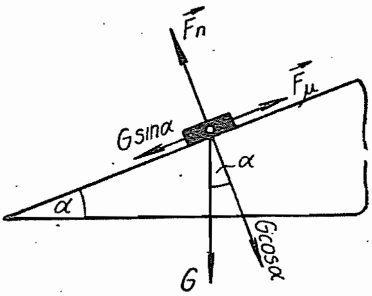
Услови за убрзање покретне тачке **(чл. 8)** омогућавају нам да одредимо само нормални отпор везе, док тангенцијални отпор *остаје произвољан*. За њега се, уопште узев, не могу поставити математички закони, који би нам омогућавали његово одређивање. У практичној механици долазе проблеми кретања по *храпавим површинама* или *храпавим линијама*. Ове неидеалне везе називају се *везе са трењем*. Да би се могла одредити и тангенцијална компонента отпора везе, морају се за случај веза са трењем увести извесни накнадни закони — *закони о трењу*.

У Статици (V део — *Трење*, **чл. 37.1** и **37.2**) изнели смо основне врсте трења и том приликом нагласили да је трење врло сложена *хидро* и *аеро-механичка појава*, која се каткада искоришћује као корисна а у више случајева је штетна, па се утицај трења *отстрањује* или *умањује подмазивањем*. При томе смо изнели *Кулонове законе о трењу при клизању* по којима трење не зависи од брзине већ само од *притиска тела на подлогу* и од *врсте материјала* као и *степена храпавости додирних површина*. Доцнији опити показали су да *Кулон-Моренови закони* не важе при кретању, јер тада отпор зависи и од брзине. Према томе се и разликују *два коефицијента трења при клизању* (или *коефицијента отпора против клизања*)[1]: *статички* и *кинетички*. Код котрљања се овај коефицијент јавља у сасвим другом облику, а исто тако и код обртања рукаваца вратила у лежиштима.

---

[1] Б. Фармаковски — Д. Витас, Локомотиве, Београд, 1941.

а) **Отпор трења при клизању.** — Ако се тешка тачка (mg) налази на глаткој стрмој равни, која чини угао α са хоризонтом, онда ће под утицајем силе $mg\sin\alpha$ клизити *једнакоубрзано низ раван* **(чл. 8).** Међутим, ако се тешка тачка налази на храпавој стрмој равни, она може по њој да клизи или је у миру, што зависи од нагиба стрме равни. Претпоставимо да не клизи иако на њу дејствује сила $mg\sin\alpha$. Значи да се овој сили супротставља известан отпор који спречава клизање. Тај отпор потиче од особине површине стрме равни, тј. од њене храпавости, и назива се *отпор трења при клизању* или *отпор против клизања*[1]. Пошто сила тежи да покрене тачку низ раван то овај отпор дејствује *супротно брзини*, а како је тачка у миру, то су ове две силе у равнотежи, па морају бити испуњени услови:



Сл. 55. — Отпор трења при клизању

$$F_\mu - mg\sin\alpha = 0;\quad F_n - mg\cos\alpha = 0$$

из којих следи однос

$$F_\mu = F_n \operatorname{tg}\alpha .$$

Када се нагиб стрме равни постепено повећава, тачка и даље остаје у миру све док нагиб не постигне извесну вредност ρ_0; тада настаје клизање. Овај угао назива се *угао трења* и то *угао статичког трења* (ρ_0). Тангенс овог угла је неименован број

$$\operatorname{tg}\rho_0 = F_{\mu_0}/F_n = \mu_0$$

и назива се *коефицијент трења при клизању* (или *коефицијент отпора против клизања)*. Као однос двеју величина истих димензија он је *неименован број.*

Пређе ли нагиб стрме равни вредност угла статичког трења (ρ_0) наступиће убрзано клизање низ стрму храпаву раван. Међутим, смањивањем угла нагиба стрме равни, за време самог кретања, смањиваће се и убрзање покретне тачке и за извесну вредност ρ биће једнако нули, па ће тачка даље клизити по стрмој равни *константном брзином по инерцији.* Овај угао нагиба стрме равни је *угао кинетичког трења*, а његов тангенс *коефицијент кинетичког трења*

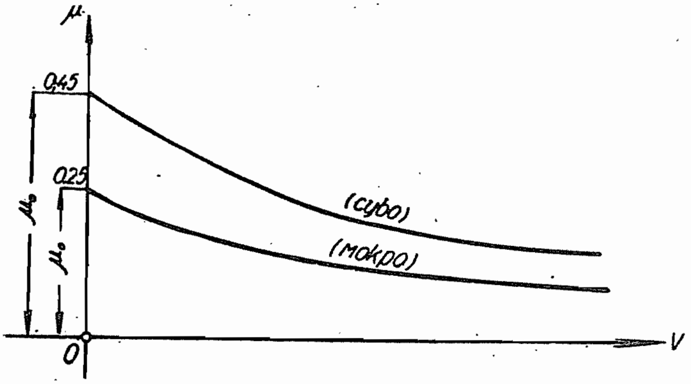
$$\boxed{\mu = \operatorname{tg}\rho} \qquad (206)$$

---

[1] Д. Витас, Машински елементи, Београд, 1947, стр. 129.

Опити су показали да је овај коефицијенат мањи од коефицијента статичког трења[1] μ_0 и да зависи од брзине, $\mu = f(v)$, *ūе да оūада када брзина расūе.*

Зависност овог коефицијента од брзине, за случај кретања локомотива, *Кирхмајер (Quirchmeyer)* је дао у облику $\mu = \mu_0 - cv^2$, а проф. Фармаковски обрасцем $\mu = \mu_0 - 0{,}002\,v$, где је μ_0 коефицијент при поласку ($v = 0$).



Сл. 56. — Боше — Вихертов дијаграм

Међутим, *Франке* (J. Franke) даје ову емпириску зависност $\mu = ce^{-cv}$, где је c карактеристика материјала, а Боше и Вихерт (H. Bochet, Wichert) дају овај образац $\mu = \mu_0\,(1 + 0{,}0112\ V)/(1 + 0{,}06\ V)$, где је брзина V изражена у km/h. Та зависност приказана је на сл. 56. Коефицијент износи: за суве површине $\mu_0 = 0{,}45$ и за оквашене површине $\mu_0 = 0{,}25$.

b) **Отпор трења у рукавцима вратила. Круг трења.** — Хоризонтално вратило обрће се око своје геометриске осе, а ослања се помоћу *рукаваца на лежишūа* која примају оптерећења. Док је вратило у миру, терет који долази на један рукавац (*ūриūисак на ослонац*) пролази кроз средиште попречног пресека (сл. 57), и поништава се са отпором ослонца. При обртању вратила на сваком елементу обима влада отпор (*нормални оūūор*). Он пролази кроз средиште попречног пресека, под условом да се рукавац и лежиште додирују по целом обиму. Закон расподеле ових отпора није познат. Сем ових нормалних отпора површине појављује се и отпор трења који се супротставља обртању вратила и дејствује тангенцијално на обим рукавца. Момент овог отпора трења за осу обртања износи

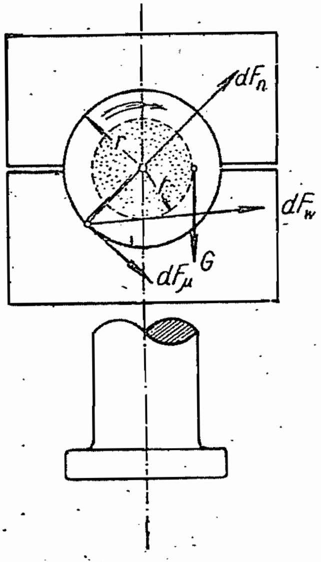
$$M_\mu = \int r\, dF_\mu = \mu_0\, r \int dF_n\,,$$

где је r полупречник рукавца.

---

[1] *Wichert* је вршио опите са брзином локомотиве $V = 90$ km/h. Сличне опите вршио је у Енглеској *Galton.*

Оптерећење рукавца, при обртању, дејствује *ексцентрично* а укупни нормални отпор, како опити показују, сразмеран је том оптерећењу, $F_n = cG$, где је $c > 1$, па *момент трења рукавца*[1] постаје



Сл. 57. — Круг трења

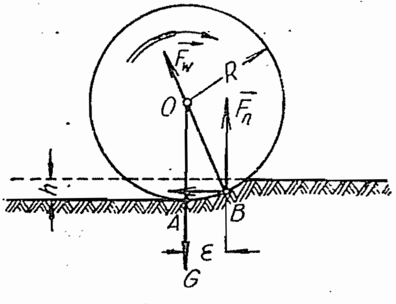
$$\boxed{M_\mu = c\,\mu_0\, r\, G = \mu_1\, r\, G = r'\, G} \qquad (207)$$

где је $\mu_1 = c\,\mu_0$ *коефицијент трења рукавца*. Он је такође неименован број. Дужина $r' = \mu_1 r$ је *полупречник круга трења*, тј. *ексцентричност оптерећења рукавца при обртању*.

Укупни отпор при обртању рукавца у лежишту састоји се из две компоненте: *нормалног отпора*, чија расподела по елементу додира није позната али резултанта његова пролази кроз средиште попречног пресека, и *тангенцијалног отпора*, отпора трења рукавца, $d\vec{F}_w = d\vec{F}_n + d\vec{F}_\mu$. Овај тотални отпор *додирује круг трења. Круг трења је*, дакле, *обвојница тоталних елементарних отпора при обртању рукавца вратила у лежишту*.

Отпор трења при обртању рукавца у његовом лежишту у суштини се не разликује од отпора трења при клизању. У оба су случаја коефицијенти трења μ и μ_1 *неименовани бројеви*. Разлика је само у томе што је код првог случаја могуће одредити нормални отпор, а код овог другог је непозната расподела елементарних нормалних отпора.

c) Отпор при котрљању. — У Статици смо уочили и другу врсту отпора, тзв. *отпор при котрљању*. Овај се отпор разликује у суштини од отпора прве врсте. Када се цилиндрички ваљак налази на храпавој хоризонталној равни у миру, он ће остати и даље у миру ако подлози дамо мали нагиб, или, пак, ако на њега дејствујемо ексцентричном силом. То нам показује да постоји известан отпор који се противи котрљању. Због тога се овај отпор назива *отпор при котрљању* или *отпор против котрљања*[2]. При извесној вредности нагиба подлоге, наступиће котрљање



Сл. 58. — Отпор против котрљања

---

[1] Th. Pöschl, Lehrbuch der Technischen Mechanik. Berlin, 1930.

[2] Rollreibungszahl.

ваљка, па ће се тачка додира померити у смеру кретања за величину ε која се назива *коефицијент котрљања* или *коефицијент отпора против котрљања*[1] и *има димензију дужине.* Његову вредност одредићемо из услова за равнотежу, једнакости момената свих сила за обртну осу

$$F_\mu R = F_n \varepsilon = G\cdot\varepsilon = M_\varepsilon\,,$$

па је

$$\varepsilon = F_\mu R/G\,. \tag{208}$$

Отпор против котрљања (F_μ) сразмеран је моменту трења, а обрнуто је сразмеран полупречнику ваљка R

$$F_\mu = (\varepsilon/R)\,G = \mu_2\,G = M_\varepsilon\,/\,R\,.$$

Коефицијент $\mu_2 = \varepsilon/R$ је неименовани број. Котрљање наступа када је испуњен услов $\mu_2 = \varepsilon/R < \mu_0$.

d) **Отпор точкова код возила.** — Код колских точкова појављују се два отпора и то: *отпор при котрљању*

$$F\mu = (\varepsilon/R)\,G = \mu_2\,G,$$

и *отпор трења у рукавцима* осовине

$$F'\mu = (r'/R)\,G = \mu_1\,G,$$

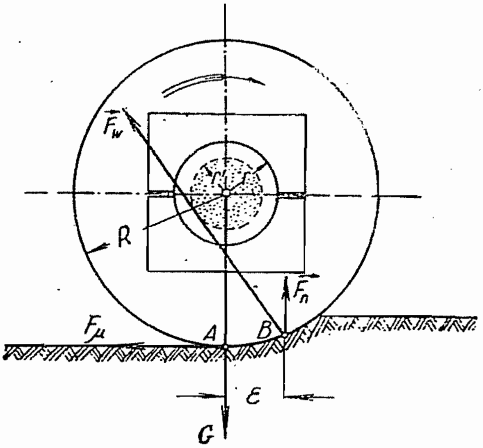
па је *укупни отпор*

$$F'_{\mu k} = G\,(r' + \varepsilon)\,/\,R = \mu_k\,G\,,$$

где је

$$\mu_k = (r' + \varepsilon)\,/\,R = (\mu_1\,r + \varepsilon)\,/\,R \tag{209}$$

коефицијент отпора точка. Отпор точка је, дакле, *као и код клизања, сразмеран нормалном притиску точка на подлогу.*



Сл. 59. — Отпор точка возила

9.2 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊЕ ТАЧКЕ ПО ХРАПАВОЈ ПОВРШИНИ

Када је тачка принуђена да се креће по храпавој површини, тада на њу дејствују активна сила $\vec F$ и отпор $\vec F_w$ који има две компоненте: једну у правцу нормалне површине (*нормални отпор*) и другу у тангенцијалној равни (*отпор трења*).

Диференцијална једначина кретања у векторском облику биће

$$m\vec a = \vec F + \lambda \operatorname{grad} f - \mu\,|\,\lambda \operatorname{grad} f\,|\,\frac{\vec v}{v}\,. \tag{210}$$

---

[1] В. Фармаковски, Локомотиве. Београд, 1941, стр. 80.

Уведемо ли, краткоће ради, ознаку

$$k = (\lambda / v) \,|\, \mathrm{grad}\, f \,|$$

та једначина постаје

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F} + \lambda\, \mathrm{grad}\, f - k\mu \vec{v}} \qquad (210')$$

Овој векторској једначини одговарају, у општем случају, три скаларне једначине. За Декартов правоугли координатни систем оне имају облик

$$m\ddot{x} = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} - k\mu \dot{x}; \qquad m\ddot{y} = Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} - k\mu y,$$
$$m\ddot{z} = 7 + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} - k\mu \dot{z}. \qquad (211)$$

За природни триједар биће:

$$m\frac{dv}{dt} = F\cos(\vec{F}, \vec{\mathrm{T}}) \mp \mu F_{wn}, \qquad m\frac{v^2}{R_v} = F\cos(\vec{F}, \vec{v}),$$
$$m\frac{v^2}{R_n} = F\cos(\vec{F}, \vec{\mathrm{n}}) + \vec{F}_{wn}, \qquad (212)$$

где су R_v и R_n *полупречници геодезиске* и *нормалне кривине*. Ако се смер брзине покретне тачке поклапа са смером орта тангенте, у првој једначини треба узети знак —, у супротном случају знак +, јер је сила трења супротног смера од смера брзине.

Буде ли при овом кретању активна сила једнака нули, $F=0$, кретање се врши по инерцији. Тада природне једначине (212) постају

$$mv = -\mu F_{wn}, \qquad mv^2/R_v = 0, \qquad mv^2/R_n = F_{wn}. \qquad (213)$$

Ако из прве и треће једначине елиминишемо нормални отпор F_{wn} добивамо једначину $dv/dt = -\mu v^2/R_n$,

Пошто је $K_v=0$, кретање се врши по геодезиској кривој линији, као и у случају кретања по глаткој површини. Полупречник кривине нормалног пресека можемо сматрати функцијом лука геодезиске криве, па је $ds=vdt$. Елиминисањем времена кретања t из претходне једначине добивамо диференцијалну једначину кретања

$$v^{-1}\, dv = -\mu\, R_n^{-1}\, ds. \qquad (213')$$

Њен је интеграл, за почетне услове: $t=0$, $s=s_0$, $v=v_0$, облика

$$v = v_0\, e^{-\mu \int (ds/R_n)} = \varphi(s). \qquad (214)$$

Пошто и брзина зависи од пређеног пута то је $dt = ds/\varphi(s)$, па је

$$t - t_0 = \int_{s_0}^{s} ds/\varphi(s) = \theta(s), \quad \text{тј.} \quad s = s(t).$$

Пример. — 47) На тачку која се креће по храпавој сфери полупречника R, не дејствује активна сила. Одредити линију путање и закон кретања, ако је у тренутку $t = 0$ и пут био $s_0 = 0$.

Решење. — Кретање је по *инерцији.* Геодезиска крива на сфери је главни круг, јер се полупречник криве у свакој тачки поклапа са нормалом површине.

Из обрасца (214) биће:

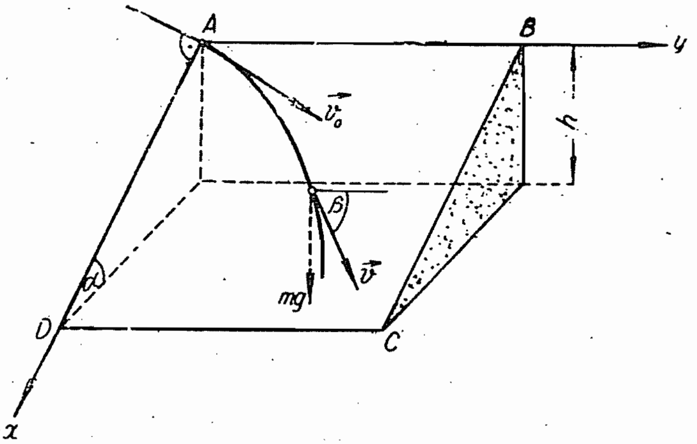
$$v = v_0 e^{-\mu s/R}, \quad \text{па је} \quad t = v_0^{-1} \int_0^s e^{\mu s/R} ds = (R/\mu v_0)(e^{\mu s/R} - 1).$$

Инверзијом добићемо закон пута у облику

$$s = (R/\mu) \ln [(\mu v_0/R)\, t + 1].$$

9.3 КРЕТАЊЕ ТЕШКЕ ТАЧКЕ ПО ХРАПАВОЈ СТРМОЈ РАВНИ

а) **Општи проблем.** — Стрма храпава раван *ABCD* чини са хоризонталном равни угао α (сл. 60). Координатни систем $Axyz$ узмимо



Сл. 60. — Кретање тешке тачке по храпавој стрмој равни

тако да је једначина равни $f(x, y, z) = z = 0$. Диференцијалне једначине кретања тешке тачке биће:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg \sin\alpha - \mu\lambda\,(\dot{x}/v)\,, \\ m\ddot{y} &= -\,\mu\lambda\,(\dot{y}/v)\,, \\ m\ddot{z} &= -\,mg\cos\alpha + \lambda = 0\,, \end{aligned} \tag{215}$$

јер је $\ddot{z} = 0$ а $|\text{grad}\, f| = 1$.

Из треће једначине добивамо множиоца везе

$$\lambda = mg\cos\alpha$$

те је исти као и у случају кретања по глаткој стрмој равни (чл. 7.3).

Према томе је нормални отпор површине

$$F_{wn} = mg\cos\alpha \tag{216}$$

увек позитиван и пада у правац Az осе.

Унесемо ли вредност за λ у прве две једначине (215) оне постају

$$\ddot{x} = b\,[1 - c\,(\dot{x}/v)]\,, \qquad \ddot{y} = -bc\dot{y}/v\,;$$

овде су: $b = g\sin\alpha$; $c = \mu\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\rho/\operatorname{tg}\alpha$; ρ угао трења.

Нека брзина чини са Ay осом промењљиви угао β; онда су компонентне брзине

$$x = v\sin\beta; \qquad \dot{y} = v\cos\beta$$

и компонентна убрзања

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \dot{v}\sin\beta + v\dot{\beta}\cos\beta = b\,(1 - c\sin\beta)\,, \\ \ddot{y} &= \dot{v}\cos\beta - v\dot{\beta}\sin\beta = -bc\cos\beta\,. \end{aligned} \tag{217}$$

Из овог система једначина добивамо

$$v = -\,b\,(c - \sin\beta); \quad v\,\beta = b\cos\beta, \tag{217'}$$

одакле, дељењем, следи

$$\frac{dv}{v} = \left(\operatorname{tg}\beta - \frac{c}{\cos\beta}\right)d\beta.$$

Новом сменом

$$u = \operatorname{tg}\left({}^1\!/_4\,\pi - {}^1\!/_2\,\beta\right),$$

пошто су

$$\operatorname{tg}\beta = (1 - u^2)/2u; \quad \cos\beta = 2u/(1 + u^2); \quad d\beta = -\,2\,du/(1 + u^2)$$

горњи интеграл постаје[1]

$$\ln(v/C) = \int \frac{u^2 - 1}{u(1 + u^2)}\,du + c\int\frac{du}{u} = -\ln u +$$

$$+ \ln(1 + u^2) + c\ln u = \ln\left[\frac{u^c}{u}(1 + u^2)\right] = \ln\left[u^{c-1} + u^{c+1}\right]$$

---

[1] $(u^2 - 1)/u\,(1 + u^2) = -\,(1/u) + [2\,u/(1 + u^2)]$.

па је

$$v = C\,[u^{c-1} + u^{c+1}]; \tag{218}$$

C је произвољна интеграциона константа.

Параметарске једначине путање одредићемо из односа

$$dx = v \sin\beta\, dt = -\,k\,(u^{2c-3} - u^{2c+1})\,du,$$

$$dy = v \cos\beta\, dt = -\,2k\,(u^{2c-2} + u^{2c})\,du,$$

јер је из (217′)

$$dt = \frac{v d\beta}{b\cos\beta} = -\,\frac{C}{b}\,(u^{c-2} + u^{c})\,du$$

а

$$\sin\beta = (1-u^2)/(1+u^2) \ \text{ и } \ k = C^2/b,$$

у облику

$$\begin{aligned} x &= -\,k\left(\frac{u^{2c-2}}{2c-2} - \frac{u^{2c+2}}{2c+2}\right) + C_1, \\ y &= -\,2k\left(\frac{u^{2c-1}}{2c-1} + \frac{u^{2c+1}}{2c+1}\right) + C_2, \end{aligned} \tag{219}$$

где су C_1 и C_2 интеграционе константе.

За случај глатке стрме равни ($\mu = 0$), биће $c = 0$, па елиминисањем параметра u добивамо да је путања *парабола*, као што смо извели у **чл. 7.3** (обр. 161′).

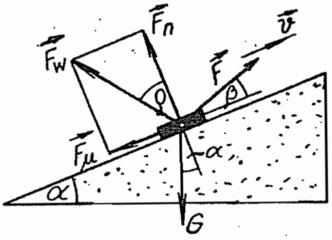
Ако је $c > 1$, тј. ако је $\rho > \alpha$, тачка се зауставља при услову $v = 0$ за $u = 0$, у положају $x = C_1$; $y = C_2$.

b) **Кретање тешке тачке уз и низ храпаву стрму раван.** — Материјална тачка, масе m, креће се под утицајем своје тежине и активне силе $\vec{F}$ по храпавој стрмој равни која са хоризонтом чини угао α.

Ако се кретање врши *уз раван* активна је сила *вучна*, у противном, за кретање *низ раван*, она мора дејствовати *кочно*, да би кретање било *једнолико*.

1°. Кретање тешке тачке уз храпаву стрму раван. — Да би се тешка тачка кретала уз раван мора на њу дејствовати активна

сила $\vec{F}$. **Нека њена нападна линија чини са правцем кретања угао** β **(сл. 61). Природне једначине кретања биће:**



Сл. 61. — Кретање тешке тачке уз храпаву стрму раван

$$m\dot{v} = F\cos\beta - (F_\mu + G\sin\alpha),$$
$$0 = F\sin\beta - G\cos\alpha + F_n, \tag{220}$$

пошто је

$$R_n = \infty \text{ и } F_{wn} = F_n.$$

Отпор трења је

$$F_\mu = \mu F_n = F_n \operatorname{tg} \rho.$$

Из друге једначине нормални отпор равни је

$$F_{wn} = F_n = G\cos\alpha - F\sin\beta. \tag{221}$$

Да би се тачка *кретала убрзано уз раван* мора бити испуњен услов

$$F\cos\beta > F_\mu + G\sin\alpha.$$

С обзиром на (221) прва једначина кретања постаје

$$ma = F\cos\beta - G\sin\alpha - \mu(G\cos\alpha - F\sin\beta),$$

или, уводећи угао трења,

$$ma = [F\cos(\rho - \beta) - G\sin(\alpha + \rho)]/\cos\rho.$$

Потребна *вучна сила за убрзано кретање уз раван* јесте

$$F = [G\sin(\alpha + \rho) + ma\cos\rho]/\cos(\rho - \beta); \tag{222}$$

за случај *једноликог кретања уз раван*, због $a = 0$, биће потребна вучна сила

$$F = G\sin(\alpha + \rho)/\cos(\rho - \beta). \tag{222'}$$

Како су у овом изразу α и ρ константе, сила зависи само од угла β, па ће бити *најмања* када је $\rho - \beta = 0$, тј. $\beta = \rho$, и износи

$$F_{min} = G\sin(\alpha + \rho).$$

Ако активна *сила дејствује уз раван*, $\beta = 0$, њен интензитет, за случај једноликог кретања, мора бити

$$F_v = [G\sin(\alpha + \rho)]/\cos\rho.$$

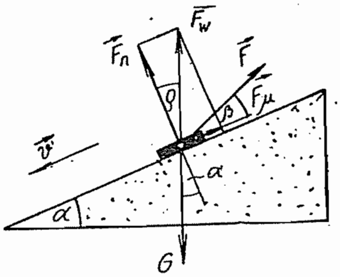
За хоризонталну вучну силу је потребно

$$F_n = G\operatorname{tg}(\alpha + \rho).$$

2⁰. Кретање тешке тачке низ храпаву стрму раван. — При једноликом кретању тешке тачке низ храпаву стрму раван, разликоваћемо три случаја која зависе од односа нагиба (α) и храпавости равни (угла трења ρ).

1. *Случај* $\alpha > \rho$. — Нагиб стрме равни је велики у односу на њену храпавост, те би се материјална тачка под утицајем своје тежине кретала *убрзано* низ раван. Да би се остварило *једнолико кретање* мора активна сила дејствовати *кочно*, тј. мора имати једну компоненту супротну смеру кретања (сл. 62). Нека њена нападна линија чини угао β са стрмом равни онда су једначине кретања:

$$\begin{aligned} G\sin\alpha - F\cos\beta - F_\mu &= 0, \\ G\cos\alpha - F\sin\beta - F_n &= 0. \end{aligned} \qquad 223)$$



Сл. 62. — Једнолико кретање тешке тачке низ храпаву раван (случај $\alpha > \rho$)

Како је сила трења $F_\mu = \mu F_n$ биће кочна сила

$$F = [G\sin(\alpha - \rho)]/\cos(\beta + \rho) \qquad (224)$$

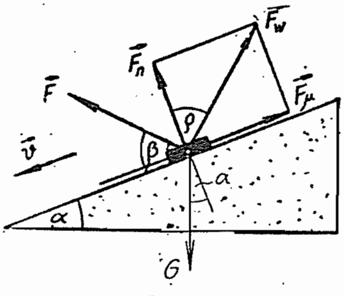
Минимална је сила кочења

$$F_{min} = G\sin(\alpha - \rho).$$

Ако сила дејствује уз раван ($\beta = 0$), или је хоризонтална, онда је њен интензитет

$$F_v = [G\sin(\alpha - \rho)]/\cos\rho, \quad F_h = G\,\mathrm{tg}\,(\alpha - \rho).$$

2. *Случај* $\alpha < \rho$. — Нагиб стрме равни је мали а њена храпавост велика. Под утицајем тежине материјална тачка би остала у миру, те активна сила мора дејствовати *вучно* да би кретање низ раван било једнолико (сл. 63).



Сл. 63. — Једнолико кретање тешке тачке низ храпаву раван (случај $\alpha < \rho$)

Једначине кретања јесу:

$$\begin{aligned} G\sin\alpha + F\cos\beta - F_\mu &= 0, \\ G\cos\alpha - F\sin\beta - F_n &= 0, \end{aligned} \qquad (225)$$

па је *вучна сила*

$$F = [G\sin(\rho - \alpha)]/\cos(\rho + \beta). \qquad (226)$$

Минимална вучна сила, за $\rho = -\beta$, јесте

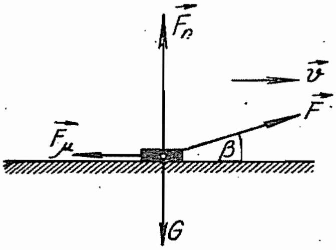
$$F_{min} = G\sin(\rho - \alpha).$$

Ако сила дејствује *низ раван*, или је *хоризонтална*, њен интензитет је

$$F_v = [G\sin(\rho - \alpha)]/\cos\rho; \qquad F_h = G\,\mathrm{tg}\,(\rho - \alpha).$$

3. *Случај* $\alpha=\rho$. — У овом се случају тотални отпор и тежина држе у равнотежи. Вучна сила је $F=0$, па се тачка креће једнолико константном брзином.

с) Кретање тешке тачке по хоризонталној храпавој равни. Све изведене једначине о кретању тешке тачке по храпавој стрмој равни важе и у случају кретања по храпавој хоризонталној равни (сл. 64), ако се у њих стави вредност $\alpha=0$.



Сл. 64. — Кретање тешке тачке по хоризонталној храпавој равни

За *убрзано кретање* биће:

$$ma = F\cos\beta - F_\mu ,$$
$$F\sin\beta + F_n - G = 0, \qquad (227)$$

па је вучна сила

$$F = [G\sin\rho + ma\cos\rho]/\cos(\rho-\beta). \qquad (228)$$

Најмања вучна сила биће за $\beta=\rho$ и износи

$$F_{min} = G\sin\rho + ma\cos\rho .$$

Ако је сила хоризонтална, $\beta=0$, њен је интензитет

$$F_h = \mu G + ma .$$

За случај једноликог кретања, $a=0$, вучна сила је

$$F = [G\sin\rho]/\cos(\rho-\beta), \qquad F_{min} = G\sin\rho . \qquad (229)$$

Тада је интензитет хоризонталне силе

$$F_h = \mu G .$$

У техничкој пракси, пошто је нагиб стрме равни мали, сви се обрасци упрошћавају узимајући да је

$$\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha; \qquad \cos\alpha \approx 1 .$$

Код друмова и железница нагиб стрмине мери се у % или $^0/_{00}$ и износи за друмове до 6%, а за железнице до $25\,^0/_{00}$.

Примери. — 48) Тешка тачка креће се уз храпаву стрму раван нагиба α. Почетна брзина је v_0. Сем отпора трења на њу утиче и отпор ваздуха сразмеран квадрату брзине mkv^2, где је k константа. После кога ће се времена тачка зауставити?

Колики је пут прешла за то време?

Решење. — Пошто не дејствује вучна сила (F) то је, према обрасцу (220), убрзање покретне тачке

$$a = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) - kv^2 = -(c + kv^2),$$

где смо са c означили први члан десне стране који је константан, па је

$$dt = -dv/(c+kv^2).$$

Интеграљењем добићемо

$$t = [\operatorname{arctg} v_0 \sqrt{k/c} - \operatorname{arctg} v \sqrt{k/c}]/\sqrt{ck}.$$

За $v = 0$ је

$$T = [\operatorname{arctg}(v_0 \sqrt{k/c})]/\sqrt{ck}.$$

Из једначине $vdv = ads$ биће

$$ds = -vdv/(c+kv^2), \text{ па је } s = (1/2k) \ln [(c + kv_0^2)/(c + kv^2)].$$

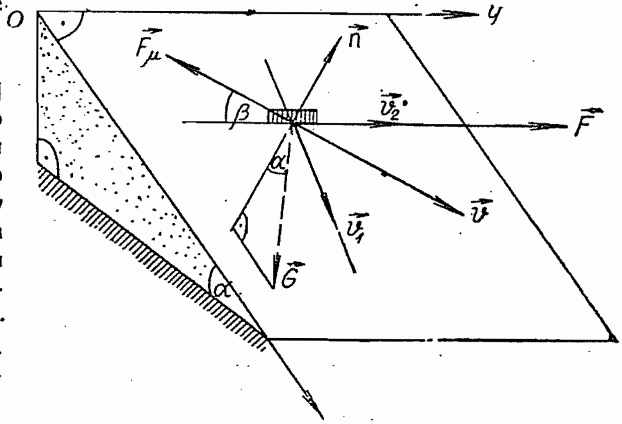
Пређени пут (за $v=0$) је

$$L = (1/2k) \ln [1 + (k/c)\, v_0^2].$$

49) По храпавој стрмој равни нагиба $^1/_{30}$, креће се тело тежине 300 gr. У хоризонталном правцу вучено је константно концем који је паралелан оси Oy (сл. 65). Од извесног тренутка кретање тела је праволинско и једнолико, са хоризонталном компонентом брзине $v_2 = 12$ m/sec.

Одредити компоненту брзине низ раван као и силу у концу ако је $\mu = 0{,}1$.

Решење. — Из услова једноликог кретања



Сл. 65

$$m\ddot{x} = G \sin\alpha - F_\mu \sin\beta = 0; \qquad m\ddot{y} = F - F_\mu \cos\beta = 0$$

пошто је

$$F_\mu = \mu\, G \cos\alpha$$

добивамо

$$\mu \sin\beta \approx \operatorname{tg}\alpha \approx {}^1/_{30}, \text{ тј. } \sin\beta = {}^1/_3,$$

где је β угао који чини брзина са y осом. Како је

$$\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = {}^1/_{30}, \qquad \cos\beta = {}^2/_3 \sqrt{2},$$

то је сила у концу

$$F \approx \mu\, G \cos\alpha \cos\beta = 20\sqrt{2} = 28{,}3 \text{ gr}.$$

Брзина је

$$v_1 = \dot{x} = \dot{y} \operatorname{tg}\beta = 0{,}35\, \dot{y} = 4{,}24 \text{ cm/sec}.$$

9.4 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ ПО ХРАПАВОЈ КРИВОЈ ЛИНИЈИ

Када се тачка креће по *непокретној храпавој кривој линији* чије су једначине

$$f_1(x, y, z) = 0, \qquad f_2(x, y, z) = 0,$$

тада је диференцијална једначина кретања у векторском облику, ако се задржи исти закон трења као и код проблема кретања по храпавој површини:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \operatorname{grad} f_2 - \mu F_{wn} \frac{\vec{v}}{v}, \tag{230}$$

где је

$$\vec{F}_{wn} = \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \operatorname{grad} f_2 \tag{231}$$

нормални отпор у нормалној равни $(\vec{N}\ \vec{B})$.

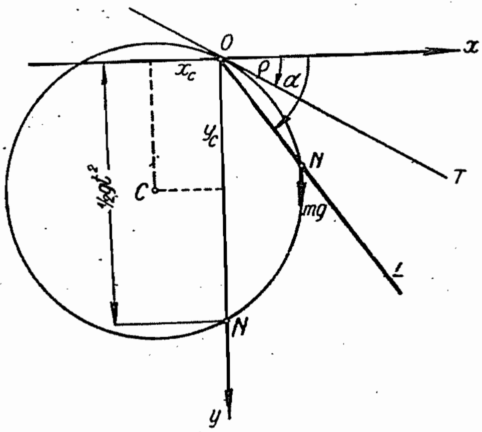
Овој векторској једначини одговарају три скаларне. За *Декартов правоугли координатни систем* биће

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} - \mu F_{wn} \frac{\dot{x}}{v}, \\ m\ddot{y} &= Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} - \mu F_{wn} \frac{\dot{y}}{v}, \\ m\ddot{z} &= Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} - \mu F_{wn} \frac{\dot{z}}{v}, \end{aligned} \tag{232}$$

а за *природни триједар за линију* јесу:

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= F \cos(\vec{F}, \vec{T}) + \mu |\vec{F}_{wn}|, \\ m \frac{v^2}{R_k} &= F \cos(\vec{F}, \vec{N}) + F_{wn} \cos(\vec{F}_{wn}, \vec{N}), \\ 0 &= F \cos(\vec{F}, \vec{B}) + F_{wn} \cos(\vec{F}_{wn}, \vec{B}), \end{aligned} \tag{233}$$

где је R_k полупречник прве кривине (флексије) путање.



Сл. 66

Примери. — 50) Материјална тачка бачена је почетном брзином v_0, у правцу тангенте, по унутрашњој страни храпаве кружне линије полупречника R. Ако на тачку дејствује само сила трења, одредити брзину коју ће имати у крајњем положају, као и време потребно да тачка пређе цео обим кружне путање.

Решење. — На удаљењу s од почетног положаја тачка има брзину v, па је притисак тачке на путању $F_n = mv^2/R$.

Диференцијална једначина кретања је

$$\dot{v} = v\,dv/ds = -\mu v^2/R$$

и њен интеграл

$$v = v_0 e^{-\mu s/R}.$$

За $s = 2R\pi$ постаје

$$V = v_0 e^{-2\mu\pi}$$

Како је

$$v = ds/dt \quad \text{биће} \quad v_0 dt = e^{\mu s/R} ds$$

те је

$$v_0 t = R(e^{\mu s/R} - 1)/\mu.$$

За $s = 2R\pi$ добивамо време:

$$T = (R/\mu v_0)(e^{2\mu\pi} - 1) = (R/\mu)(V^{-1} - v_0^{-1}).$$

51) Из тачке O (сл. 66), клизи без почетне брзине тешка тачка по храпавој правој L чији је коефицијент трења познат, $\mu = \operatorname{tg} \rho$. Одредити геометриско место тачака N у које ће тешка тачка стићи за исто време ако се угао α мења.

Решење. — Из једначине

$$\ddot{s} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

биће закон пута

$$s = {}^1\!/_2\, gt^2 (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\,.$$

Координате тачке N јесу

$$x = s\cos\alpha\,; \quad y = s\sin\alpha,$$

па је

$$s^2 = x^2 + y^2 = {}^1\!/_2\, gt^2 (y - \mu x)\,.$$

Геометриско место тачака N је *кружна линија* полупречника

$$R = gt^2 / 4\cos\rho,$$

са координатама средишта

$$x_c = -\,{}^1\!/_4\, gt^2 \operatorname{tg}\rho\,; \qquad y_c = {}^1\!/_4\, gt^2\,.$$

Путања је само део QN кружне линије.

10. РЕЛАТИВНО КРЕТАЊЕ МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ

10.1 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ РЕЛАТИВНОГ КРЕТАЊА МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ

У кинематици релативног кретања (чл. 12) одредили смо брзине и убрзања покретне тачке у односу на два координатна система: *непокретни* (*апсолутни*) $Oxyz$ и *покретни* (*релативни*) $A\xi\eta\zeta$ круто везан са супортом. Тада смо видели да је *апсолутна брзина* векторски збир *релативне* и *преносне брзине*. Прва је брзина у односу на релативни триједар, а друга је брзина оне тачке носача (супорта) која се у томе тренутку поклапа са покретном тачком. *Апсолутно убрзање* имало је три компоненте: *релативно*, *преносно* и *Кориолисово* (*допунско*) *убрзање*. Прво убрзање је у односу на покретни триједар, друго је убрзање носача (супорта), тј. оне тачке супорта која се у томе тренутку поклапа са покретном тачком, а треће убрзање долази услед самог обртања.

Диференцијална једначина кретања материјалне тачке у односу на апсолутни систем $Oxyz$ гласи

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

Овде је $\vec{a}$ апсолутно убрзање а $\vec{F}$ активна сила која дејствује на материјалну тачку. У случају принудног кретања она је резултанта активне силе и отпора везе.

У случају релативног кретања апсолутно убрзање је много сложеније и износи

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_p + \vec{a}_C = \overset{**}{\vec{\rho}} + \ddot{\vec{r}}_A + [\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]] + 2[\vec{\omega}, \vec{v}_r], \tag{234}$$

па је и динамички проблем сложенији. Проблем динамике релативног кретања материјалне тачке састоји се у томе да се помоћу познатог *почетног положаја* материјалне тачке и њене *почетне релативне брзине*, познатог *закона кретања носача* (супорта) и познатих *сила које деј-*

ствују на тачку одреди њено *релативно кретање.* Према томе је *основна динамичка једначина релативног кретања материјалне тачке:*

$$\boxed{m\vec{a}_r = m\vec{a} - m\vec{a}_p - m\vec{a}_C} \qquad (234')$$

или

$$\boxed{m\vec{a}_r = m\vec{a} - m\{\ddot{\vec{r}}_A + [\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}] + [\vec{\omega}.[\vec{\omega}, \vec{\rho}]]\} - 2\,m\,[\vec{\omega}; \vec{v}_r]} \qquad (234'')$$

У овим обрасцима су *преносна угаона брзина* ($\omega = \omega_p$) и *преносно угаоно убрзање* ($\dot{\omega} = \dot{\omega}_p$) претпостављени позитивним, тј. да је убрзано обртање супорта у директном смеру (супротном од смера кретања сатне казаљке).

Активна сила $\vec{F}$ и силе везе јесу *стварне силе,* јер за њих можемо показати *изворе* из којих дејствују. Међутим, за силе $-(m\vec{a}_p) = -\vec{F}_p$ и $-(m\vec{a}_C) = -\vec{F}_C$ не можемо показати изворе. Оне су, дакле, *фиктивне силе* и називају се: *преносна сила инерције (водећа сила)* и *Кориолисова сила инерције.*[1] Оне су обе усмерене у супротном смеру од одговарајућих убрзања $\vec{a}_p$ и $\vec{a}_C$.

Због ових сила инерције постоји битна разлика између *динамике апсолутног и релативног кретања.* У првом случају јављају се *само стварне силе,* у другом пак, и *фиктивне силе* — силе инерције. Према томе, може се основна динамичка једначина (234′) написати у овом облику

$$\boxed{m\vec{a}_r = \vec{F} + (-\vec{F}_p) + (-\vec{F}_C) = \vec{F} + \vec{F}_\Phi} \qquad (235)$$

Производ масе и релативног убрзања једнак је векторском збиру стварне и укупне фиктивне силе. У случају принудног релативног кретања у сили $\vec{F}$ урачунат је и отпор везе.

Врши ли покретни систем (супорт) *једнолико транслаторно кретање,* онда су, према (234), преносно и Кориолисово убрзање једнаки нули, па је и укупна фиктивна сила једнака нули. Тада је динамичка једначина релативног кретања

$$\boxed{m\vec{a}_r = \vec{F}}$$

тј. *иста је као и у случају апсолутног кретања.* Релативни координатни системи у којима за кретање важи предња једначина, јесу *инерциски*

---

[1] Чл. 14.2.

системи. Када је и $\vec{F}=0$ тачка ће се кретати по *инерцији*, праволиниски и једнолико, или ће пак, у изузетном случају, бити у миру.

Векторској једначини (235) одговарају, за случај да су оба триједра правоугла десне диспозиције, три *скаларне динамичке једначине релативног кретања:*

$$\left.\begin{aligned}
m\ddot{\xi} &= F_\xi - m\,[(a_A)_\xi + \dot{\omega}_\eta\zeta - \dot{\omega}_\zeta\eta + \\
&\qquad + (\vec{\omega},\vec{\rho})\,\omega_\xi - \omega^2\xi] - 2\,m\,(\omega_\eta\dot{\zeta} - \omega_\zeta\dot{\eta}), \\
m\ddot{\eta} &= F_\eta - m\,[(a_A)_\eta + \dot{\omega}_\zeta\xi - \dot{\omega}_\xi\zeta + \\
&\qquad + (\vec{\omega},\vec{\rho})\,\omega_\eta - \omega^2\eta] - 2\,m\,(\omega_\zeta\dot{\xi} - \omega_\xi\dot{\zeta}); \\
m\ddot{\zeta} &= F_\zeta - m\,[(a_A)_\zeta + \dot{\omega}_\xi\eta - \dot{\omega}_\eta\xi + \\
&\qquad + (\vec{\omega},\vec{\rho})\,\omega_\zeta - \omega^2\zeta] - 2\,m\,(\omega_\xi\dot{\eta} - \omega_\eta\dot{\xi}),
\end{aligned}\right\} \qquad (235')$$

где су

$$(a_A)_\xi = \ddot{x}_A\,\alpha_1 + \ddot{y}_A\,\beta_1 + \ddot{z}_A\,\gamma_1; \quad (a_A)_\eta = \ddot{x}_A\,\alpha_2 + \ddot{y}_A\,\beta_2 + \ddot{z}_A\,\gamma_2,$$

$$(u_A)_\zeta = \ddot{x}_A\,\alpha_3 + \ddot{y}_A\,\beta_3 + \ddot{z}_A\,\gamma_3.$$

Овде су α_i, β_i, γ_i косинуси смерова које граде осе триједра $A\xi\eta\zeta$ са осама непокретног триједра $Oxyz$.

При *принудном кретању по површини* једначине $f(\xi,\eta,\zeta,t)=0$, динамичка једначина релативног кретања је

$$\boxed{m\vec{a}_r = \vec{F} + (-\vec{F}_p) + (-\vec{F}_C) + \lambda\,\mathrm{grad}\,f} \qquad (235'')$$

где је λ *множилац везе.*

Скаларним једначинама (235') треба додати још изразе $\lambda(\partial f/\partial\xi)$, $\lambda(\partial f/\partial\eta)$, $\lambda(\partial f/\partial\zeta)$.

У случају *принудног кретања по линији* једначине $f_1(\xi,\eta,\zeta,t)=0$, $f_2(\xi,\eta,\zeta,t)=0$, динамичка једначина је

$$\boxed{m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_\Phi + \lambda_1\,\mathrm{grad}\,f_1 + \lambda_2\,\mathrm{grad}\,f_2} \qquad (235''')$$

Интеграљење диференцијалне једначине релативног кретања врши се на исти начин као и у случају апсолутног кретања.

Када се материјална тачка налази у *равнотежи* у односу на релативни триједар $A\xi\eta\zeta$, тада су $\vec{v}_r=0$, $\vec{a}_r=0$, па је и $\vec{a}_C=0$. Према (235) услов за *релативну равнотежу* гласи

$$\boxed{\vec{F} + (-m\vec{a}_p) = 0} \tag{236}$$

10.2 ИНТЕГРАЛ ЖИВЕ СИЛЕ (ЕНЕРГИЈЕ)

Претпоставимо да іе *преносно кретање стационарно*, тј. да се покретни триједар креће *транслаторно и једнолико* ($v_A = const$; $a_A = 0$) и да се *једнолико обрће* константном угаоном брзином ($\dot{\omega}=0$), тада је преносно убрзање

$$\vec{a}_p = [\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{\rho}]]$$

једнако *нормалном (центрипеталном — аксипеталном)* убрзању. Преносна сила инерције

$$-(m\vec{a}_p) = -m[\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{\rho}]] = \vec{F}_j,$$

има супротан смер од центрипеталног убрзања и назива се *центрифугална (аксифугална) сила*. Према томе, *основна динамичка једначина релативног кретања са стационарним преносним кретањем* има облик

$$\boxed{m\vec{a}_r = \vec{F} - m[\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{\rho}]] - 2m[\vec{\omega},\vec{v}_r]} \tag{237}$$

Помножимо ову векторску једначину скаларно са релативним померањем $d\vec{\sigma} = \vec{v}_r\,dt$, онда трећи члан на десној страни отпада као мешовити производ трију вектора, $(\vec{v}_r,[\vec{\omega},\vec{v}_r]) = 0$. (*Стат.*, Додатак, обр. 315.) Израз на левој страни постаје $m(d\vec{v}_r,\vec{v}_r) = d(^1/_2 m v_r^2)$. Други члан на десној страни може се написати у облику[1]

$$-m(\vec{v}_r\,dt,[\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{\rho}]]) = -m([\vec{\omega},\vec{\rho}],[d\vec{\rho},\vec{\omega}]) =$$

$$= m([\vec{\omega},\vec{\rho}],d[\vec{\omega},\vec{\rho}]) = d(^1/_2 m[\vec{\omega},\vec{\rho}]^2).$$

На тај начин добивамо израз закона о живој сили овог кретања:

$$\boxed{d\{^1/_2 m(v_r^2 - [\vec{\omega},\vec{\rho}]^2)\} = (\vec{F},d\vec{\sigma})} \tag{237'}$$

---

[1] Скаларни производ двају векторских производа може се овако изразити:

$$([\vec{a},\vec{b}],[\vec{c},\vec{d}]) = (\vec{e},[\vec{c},\vec{d}]) = (\vec{c},[\vec{d},\vec{e}]) = (\vec{c},[\vec{d},[\vec{a},\vec{b}]]) = (\vec{a},\vec{c})(\vec{b},\vec{d}) - (\vec{a},\vec{d})(\vec{b},\vec{c}).$$

Има ли активна сила функцију силе $U(\xi, \eta, \zeta)$, онда је $\vec{F} = \operatorname{grad} U$, па је

$$(\vec{F}, d\vec{\sigma}) = (\vec{F}, \vec{v}_r\, dt) = (\operatorname{grad} U, d\vec{\rho}) = dU$$

и једначина (237′) постаје

$$\boxed{{}^1/_2\, m\, (v_r^2 - [\vec{\omega}, \vec{\rho}]^2) = U + h} \tag{237''}$$

где је h интеграциона константа. Ово је *интеграл живе силе (кинетичке енергије)* за *случај релативног кретања са стационарним преносним кретањем.*

За случај *релативног кретања у равни* образац (237″) може се написати у облику

$$\boxed{{}^1/_2\, m\, v_r^2 = U + {}^1/_2\, m\, \omega^2 (\xi^2 + \eta^2) + h} \tag{237'''}$$

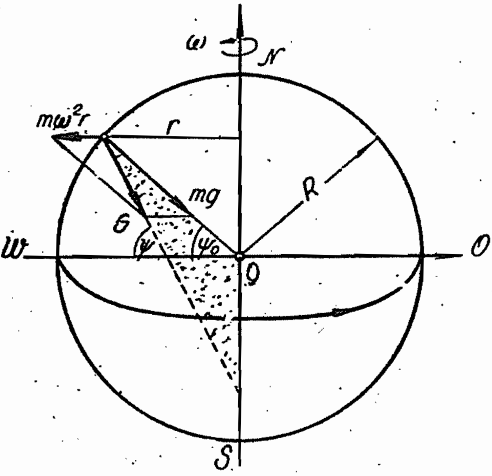
пошто је $\omega_\xi = \omega_\eta = 0$ а $\omega_\zeta = \omega$. Овај се интеграл назива *Јакобијев интеграл.*[1]

10.3 РЕЛАТИВНО КРЕТАЊЕ ТЕШКЕ ТАЧКЕ У ОДНОСУ НА ЗЕМЉУ

Под *апсолутном тежином* тела подразумевамо тежину коју би тело имало када би Земља била непокретна. У томе је случају убрзање теже g, па је тежина mg. Али се Земља обрће око своје осе константном угаоном брзином

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi/86164 =$$
$$= 729 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{sec}^{-1},$$

те је T време једног обрта. Претпоставимо ли да је њена оса непокретна и да је њено транслаторно кретање једнолико и праволиниско, те не утиче на релативно кретање тешке тачке, онда на материјалну тачку поред њене апсолутне тежине дејствује и центрифугална сила $m\omega^2 r$, где је r растојање тачке од Земљине осе (сл. 67). Услед ове силе смањиће се притисак тешке тачке на подлогу, тј. *умањиће се њена релативна*



Сл. 67. — Апсолутна и релативна тежина тела

---

[1] *Ch. G. Jacobi* (1804—1851).

тежина. Ту ћемо силу наћи као резултанту апсолутне тежине и центрифугалне силе

$$\vec{G} = m\vec{g} + m\omega^2\vec{r} = m\vec{g}_\psi .$$

Њен интензитет одредићемо по косинусној теореми

$$G^2 = (mg)^2 + (m\,\omega^2 r)^2 - 2\,m^2\,\omega^2\,gr\cos\psi = (mg_\psi)^2 ,$$

где је ψ географска ширина тачке а g_ψ убрзање теже за ту ширину. Из ове једначине добивамо образац

$$\boxed{g_\psi = \sqrt{g^2 + \omega^4 R^2 \cos^2\psi - 2\,g\omega^2 R\cos^2\psi}} \qquad (238)$$

R је полупречник Земље. Пошто је $R\omega^2 \approx 0{,}034$ m/sec² (за $R \approx 64\cdot 10^5$ m), можемо занемарити други члан горње једначине као малу величину, да је

$$g_\psi \approx g\sqrt{1 - 2\,(0{,}034/g)\cos^2\psi} \approx g[1 - 0{,}034\cos^2\psi\,]. \qquad (238')$$

На полу је $g_p \approx g = 9{,}832$ m/sec² а на екватору $g_e \approx 9{,}798$ m/sec². Ова се вредност не слаже са вредностима добивеним експериментима ($g_e = 9{,}7807$), јер Земља није лопта, већ *геоид* (спљоштена је на половима) и њена маса није хомогена.[1]

Уместо горе-изведеног *Клеровог обрасца*, примењује се емпирички образац за одређивање убрзања теже

$$g_\psi \approx 9{,}779886 + 0{,}052210\sin^2\psi - 0{,}000003\,h. \qquad (238'')$$

У њему је показана зависност тог убрзања од географске ширине и надморске висине (h), како је назначено и у *Уводу*.

Правац релативне теже не пролази кроз средиште Земље већ сече Земљину осу испод средишта, ако је тачка на северној хемисфери. Тај правац показује правац *вертикале*, усмерене надоле, датог места и он чини са екватором угао ψ који је *географска ширина места*. Раван управна на овај правац у тој тачки на Земљи јесте *раван хоризонта* дотичног места.

Релативна тежина тела на екватору била би једнака нули када би био испуњен услов

$$R\,\omega^2/g_e = 0{,}034/9{,}798 \approx 1/289 = 1/17^2,$$

тј. када би се Земља обртала 17 пута брже.

Правац вертикале места *(Правац виска)* чини мали угао са правцем Земљиног полупречника у томе месту чији је тангенс приближно једнак

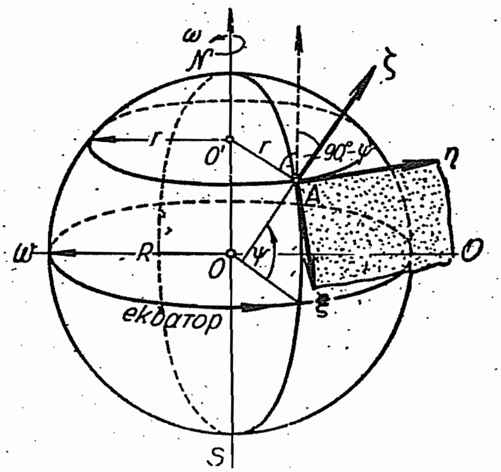
$$\mathrm{tg}\,\delta \approx (R\omega^2\cos\psi)/g \approx \cos\psi/290{,}4$$

и зависи само од географске ширине места. За наше ширине (око 45°), он износи свега око 6′ те се због тога, у техничкој пракси, о њему и не води рачуна.

---

[1] Са датим подацима уочавамо да је тежина истог тела на *Полу* свега за 5‰ већа него на *екватору*.

Да бисмо испитали релативно кретање тешке тачке на Земљи узмимо да се почетак апсолутног триједра налази у Сунцу, а релативни да је круто везан са Земљом у почетном положају покретне тачке A (сл. 68). Осе овог покретног триједра оријентишемо тако да $A\zeta$ оса пада у *правац вертикале* места, $A\eta$ по *тангенти упоредника према истоку* а $A\xi$ по *тангенти меридијана према југу*, тада је овај триједар ортогоналан десне диспозиције. Раван $A\xi\eta$ је раван *хоризонта*.



Сл. 68. — Триједар за тачку на Земљи

Диференцијална једначина релативног кретања (237), водећи рачуна да је $\dot{\omega} = 0$ и занемарујући дупли векторски производ, пошто је угаона брзина мала величина, биће

$$\vec{a}_r = \vec{g}_\psi - 2\,[\vec{\omega}, \vec{v}_r]. \qquad (239)$$

Први интеграл ове једначине је

$$\vec{v}_r = \vec{g}_\psi\, t - 2\,[\vec{\omega}, \vec{\rho}] + \vec{C}_1,$$

где је $\vec{C}_1$ константни вектор — интеграциона константа. Ако је тачка у почетном тренутку ($t = 0$) била у A, $\rho_0 = 0$, биће $\vec{C}_1 = \vec{v}_{r0}$, тј. *једнак почетној релативној брзини*. На тај начин први интеграл постаје

$$\vec{v}_r = \vec{v}_{r0} + \vec{g}_\psi\, t - 2\,[\vec{\omega}, \vec{\rho}].$$

Унесимо ову вредност у диференцијалну једначину (239) и занемаримо опет чланове са ω^2, као мале величине, добићемо

$$\vec{a}_r \approx \vec{g}_\psi - 2\,[\vec{\omega}, \vec{v}_{r0}] - 2\,t\,[\vec{\omega}, \vec{g}_\psi].$$

Двоструким интеграљењем ове једначине добивамо *коначну векторску једначину кретања:*

$$\boxed{\vec{\rho} \approx \vec{v}_{r0}\, t + {}^1/_2\,\{\vec{g}_\psi - 2\,[\vec{\omega}, \vec{v}_{r0}]\}\, t^2 - {}^1/_3\,[\vec{\omega}, \vec{g}_\psi]\, t^3} \qquad (240)$$

Скаларне једначине, с обзиром на пројекције вектора,

	ξ	η	ζ
$\vec{\omega}$	$-\omega\cos\psi$	0	$\omega\sin\psi$
$\vec{g}_\psi$	0	0	$-g_\psi$
$\vec{v}_{r0}$	$\dot{\xi}_0$	$\dot{\eta}_0$	$\dot{\zeta}_0$

јесу:

$$\xi = \dot{\xi}_0 t + \dot{\eta}_0 \omega t^2 \sin\psi,$$

$$\eta = \dot{\eta}_0 t - \omega(\dot{\zeta}_0 \cos\psi + \dot{\xi}_0 \sin\psi) t^2 + {}^1/_3\, \omega g_\psi t^3 \cos\psi, \tag{240'}$$

$$\zeta = \dot{\zeta}_0 t - {}^1/_2 (g_\psi - 2\dot{\eta}_0 \omega \cos\psi) t^2.$$

Из треће једначине (240′) видимо да је пројекција релативног убрзања на правац вертикале

$$a_{r\zeta} = -(g_\psi - 2\dot{\eta}_0 \omega \cos\psi)$$

Она не зависи од почетних услова кретања. *Путања је*, дакле, *просторна крива линија.*

Проучићемо неколико случајева кретања тешке тачке водећи рачуна о обртању Земље.

a) *Слободан пад тешке тачке.* — У чл. 22 извели смо законе слободног пада тешке тачке под претпоставком да је Земља непокретна или да се креће праволиниски транслаторно и једнолико. Путања је била права линија која уствари претставља *апсолутну путању.* Међутим, узевши у обзир и Земљино обртање, релативна путања неће више бити права линија. Ако тешка тачка пада у *безваздушном простору* са висине h, пошто је почетна релативна брзина једнака нули, једначине кретања (240′) постају:

$$\xi = 0; \quad \eta = {}^1/_3\, \omega g_\psi t^3 \cos\psi; \quad \zeta = h - {}^1/_2 g_\psi t^2.$$

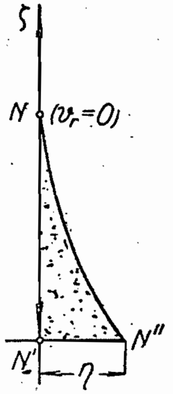
Елиминисањем времена t из ових једначина добивамо линију путање

$$\xi = 0; \quad (\zeta - h)^3 + k^2 \eta^2 = 0,$$

где је

$$k^2 = {}^9/_8 (g_\psi / \omega^2 \cos^2\psi).$$

Путања је *крива линија трећег реда* у равни $A\eta\zeta$ управној на меридијан. Пошто је координата η за све време кретања, изузев почетног положаја, позитивна, тачка скреће *према истоку.* Њутн је први указао да мора бити скретања материјалне тачке ка истоку а *Тадини (Tadini)* је 1795 год. експериментално то и доказао.



Сл. 69. — При слободном паду тешка тачка скреће ка истоку.

b) *Вертикални хитац навише.* — Избаци ли се тешка тачка вертикално навише, почетном брзином $v_0 = \dot{\zeta}_0$, онда једначине кретања (240′) постају:

$$\xi = 0; \quad \eta = (-v_0 + {}^1/_3 g_\psi t)\, t^2 \omega \cos\psi; \quad \zeta = v_0 t - {}^1/_2 g_\psi t^2.$$

Кретање је такође у равни управној на меридијан. Тачка ће се пети све до тренутка $t_H = v_0/g_\psi$ и попеће се на висину $H = v_0^2/2\,g_\psi$, тј. исту висину као и да нема обртања Земље (17). Унесемо ли вредност за t_H у другу једначину биће

$$\eta_H = -\,{}^2/_3\,(v_0^3\,\omega\cos\psi)/g^2_\psi.$$

Пошто је ова вредност негативна тачка је *скренула ка западу*. Тачка ће пасти на хоризонт ($\zeta = 0$), после времена $t_P = 2\,v_0/g_\psi$, па је

$$\eta_P = 2\,\eta_H = -\,{}^4/_3\,(v_0^3\,\omega\cos\psi)/g^2_\psi,$$

тј. она је отступила *ка западу*.

c) *Кос хитац*. — Ако је тешка тачка избачена у равни $A\eta\zeta$ управној на меридијан, почетном брзином v_0 и под елевационим углом α према оси $A\eta$ онда су пројекције почетне брзине $\dot{\xi}_0 = 0$, $\dot{\eta}_0 = v_0\cos\alpha$, $\dot{\zeta}_0 = v_0\sin\alpha$ па једначине кретања (240′) постају:

$$\xi = v_0\,t^2\,\omega\cos\alpha\sin\psi,$$

$$\eta = v_0\,t\cos\alpha - v_0\,t^2\,\omega\sin\alpha\cos\psi + {}^1/_3\,g_\psi\,t^3\,\omega\cos\psi;$$

$$\zeta = v_0\,t\sin\alpha - {}^1/_2(g_\psi - 2\,v_0\,\omega\cos\alpha\cos\psi)\,t^2,$$

Укупно време лета тачке до поновног падања на хоризонт ($\zeta = 0$) одредићемо и треће једначине

$$T_r = 2\,v_0\sin\alpha\,/\,(g_\psi - 2\,v_0\,\omega\cos\alpha\cos\psi) \approx T_a\,[1 + (2\,v_0\,\omega/g_\psi)\cos\alpha\cos\psi]\,,$$

где је $T_a = (2\,v_0\sin\alpha)/g_\psi$ време лета кад није узето у обзир обртање Земље. Из друге једначине одредићемо домет хица

$$D_r \approx v_0\,T_a\cos\alpha\,[1 + (2\,v_0\,\omega/g_\psi)\cos\alpha\cos\psi] - T_a^2\,\omega\cos\psi\,(v_0\sin\alpha - {}^1/_3\,T_a\,g_\psi)\,.$$

Међутим, домет за случај непокретне Земље (70) јесте $D_a = v_0\,T_a\cos\alpha$, па је разлика домета

$$\Delta D = D_a - D_r \approx {}^4/_3\,v_0^3\,\omega\,[(1 - 4\cos^2\alpha)\sin\alpha\cos\psi]/g^2_\psi\,.$$

Она показује како се мења даљина домета узимајући у обзир и обртање Земље.

10.4 ФУКОВО КЛАТНО

Проблем *Фуковог клатна* (*Léon Foucault*, 1819—1868 год.) јесте проблем одређивања релативног кретања тешке материјалне тачке на сфери полупречника l *(дужина клатна)*, која је везана за земљу. У овом испитивању ограничићемо се на испитивање *малих осцилација клатна* око најнижег положаја на сфери.

У средишту сфере A усвојимо правоугли координатни систем $A\xi\eta\zeta$ (сл. 70*a*), какав смо узели у претходном члану (сл. 68); тада је једначина површине

$$f = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - l^2 = r^2 + \zeta^2 - l^2 = 0\,, \tag{241}$$

где су r, φ, ζ цилиндричке координате.

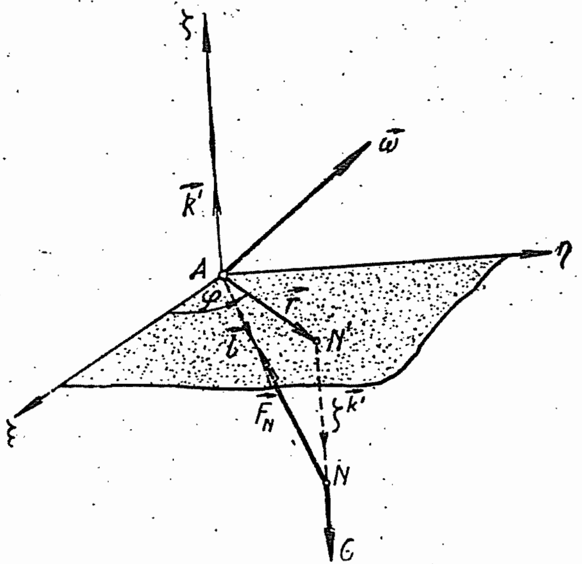
На материјалну тачку дејствују: *Тежина*, као активна сила, силе инерције, преносна и Кориолисова, и *отпор везе* $\vec{F}_N$ који пада у правац конца AN са смером ка координатном почетку A. За кретање материјалне тачке можемо применити закон о замаху за $A\zeta$ осу. Пошто отпор везе и преносна сила инерције секу осу, а тежина је паралелна оси, то је према обрасцу (194) извод замаха

$$\dot{L}_\zeta = m\,[d\,(r^2\,\varphi)/dt] = M_\zeta = \tag{242}$$
$$= ([\vec{l}, [-2\,m\,\vec{\omega}, \vec{v}_r]], \vec{k}')$$

једнак моменту Кориолисове силе инерције за ту осу. Развијајући дупли векторски производ овај се израз може написати у облику

$$M_\zeta = 2\,m\,\dot{\zeta}\,(\vec{l}, \vec{\omega}),$$

пошто је $\vec{l} \perp \vec{v}_r$, дакле $(\vec{l}, \vec{v}_r) = 0$, и $(\vec{v}_r, \vec{k}') = \dot{\zeta}$.



Сл. 70*а*. — Фуково клатно

Из једначине везе следи

$$\zeta = -\,(l^2 - r^2)^{1/2} = -\,l\sqrt{1 - (r/l)^2} \approx -\,l + (r^2/2\,l)$$

па је

$$\dot{\zeta} \approx (r\,\dot{r}/l). \tag{243}$$

Вектор положаја покретне тачке одређен је са

$$\vec{l} = r\,\vec{r}_0 + \zeta\,\vec{k}'. \tag{244}$$

Множећи изразе (243) и (244), а занемарујући мале величине другог реда биће $\dot{\zeta}\,\vec{l} = -\,r\,\dot{r}\,\vec{k}'$, па је момент

$$M_\zeta = -\,2\,m\,r\,\dot{r}\,(\vec{\omega}, \vec{k}') = -\,2\,m\,\omega\,r\,\dot{r}\sin\psi,$$

и једначина (242) постаје

$$d\,(r^2\,\dot{\varphi})/dt = -\,2\,\omega\,r\,\dot{r}\sin\psi.$$

Њен је први интеграл

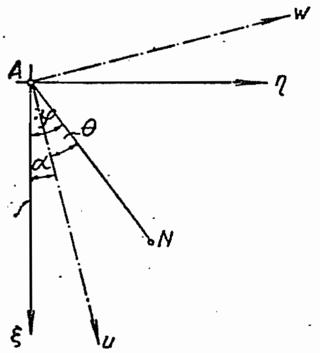
$$r^2\,\dot{\varphi} = -\,r^2\,\omega\sin\psi + C, \tag{245}$$

где је C интеграциона константа.

Како сила има функцију силе $U = - mg\zeta$, то је, према (237''), квадрат брзине (занемарујући $\dot{\zeta}$ и изразе са ω^2 као мале величине)

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = - (g/l)\, r^2 + (2\, h'/m)\,, \tag{246}$$

где је h' константа.



Сл. 70*b*. — Пројекција тачке врши елиптичку хармониску осцилацију

Испитајмо кретање пројекције N' покретне тачке на раван хоризонта узимајући покретни координатни систем Auw који се, према (245), равномерно обрће око $A\zeta$ осе угаоном брзином $\omega \sin \psi$ у индиректном смеру (сл. 70*b*). Тада је

$$\alpha = \sphericalangle \xi A u = - \omega t \sin \omega + c\,,$$

где је c константа, па је угао

$$\varphi = \theta - \omega t \sin \psi + c$$

и његов извод $\dot{\varphi} = \dot{\theta} - \omega \sin \psi$.

Уносећи ову вредност у једначине (245) и (246) биће

$$r^2 \dot{\theta} = C\,, \quad \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = - k^2 r^2 + 2\, H\,,$$

где су

$$k^2 = (g_{\psi}/l) + \omega^2 \sin^2 \psi\,, \quad H = C \omega \sin \psi + (h/m)\,.$$

Тачка N' креће се у хоризонталној покретној равни *константном секторском брзином* и радијалним убрзањем сразмерним квадрату растојања од центра привлачења. *Кретање је*, дакле, по *конусном пресеку* и претставља *елиптичку хармониску осцилацију* (чл. 3. 4).

Ако је почетна брзина тачке у односу на Земљу једнака нули, тада су $\dot{\varphi}_0 = 0$, $\dot{r}_0 = 0$, па су константе $C = r_0^2 \omega \sin \psi$, $2\, H = k^2 r_0^2 + r_0^2 \omega^2 \sin \psi$.

Кад елиминишемо θ из једначина (245) и (246) добићемо

$$r^2 \dot{r}^2 = k^2 (r_0^2 - r^2) \left\{ r^2 - [(r_0 \omega / k) \sin \psi]^2 \right\}.$$

Путања је *елипса*, полуоса r_0 и $r_0 (\omega \sin \psi)/k$.

Кретање тачке N' на покретној хоризонталној равни резултат је елиптичког кретања и обртања оса елипсе *са истока на запад* (преко југа), тј. у смеру кретања сатне казаљке за угао α, брзином $\omega \sin \psi$. *Први експеримент извео је Фуко* у *Париском Пантеону* 1851 год., и *тиме доказао обртање Земље*. Клатно је било дужине 67 m а на крају је имало терет 30 kg. За $\psi = 45^0$ биће $\alpha = 10^0 38'$ за средњи сунчани дан.

Примери. — 52) По колосеку који је положен дуж неког упоредника на Земљи, креће се локомотива једнолико брзином 72 km/h *са запада на исток*. Одредити величину Кориолисовог убрзања и величину бочног притиска на шине ако је тежина локомотиве 100 t; $g = 9{,}80$ m/sec^2.

Решење. — Пошто се Земља обрће *са запада на исток*, а и кретање локомотиве је у истом смеру, то је Кориолисово убрзање

$$\vec{a}_C = 2\, [\vec{\omega}, \vec{v}_r]\,,$$

па је

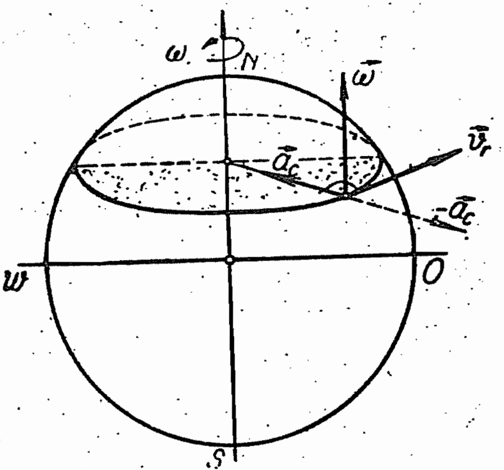
$$a_C = 2\,\omega\, v_r = 2\cdot 729\cdot 10^{-7}\cdot 2\cdot 10^{3} = 0{,}291\ \mathrm{cm/sec^2}$$

са смером ка Земљиној оси (сл. 71), пошто та три вектора образују десни триједар. *Његов је смер наперен увек у ону страну куда тежи завршна тачка вектора релативне брзине под утицајем угаоне брзине.*

Притисак локомотиве је супротног смера од Кориолисовог убрзања, тј. *у смеру Кориолисове силе инерције*, па је већем притиску изложена *десна шина* (гледано у правцу кретања локомотиве)

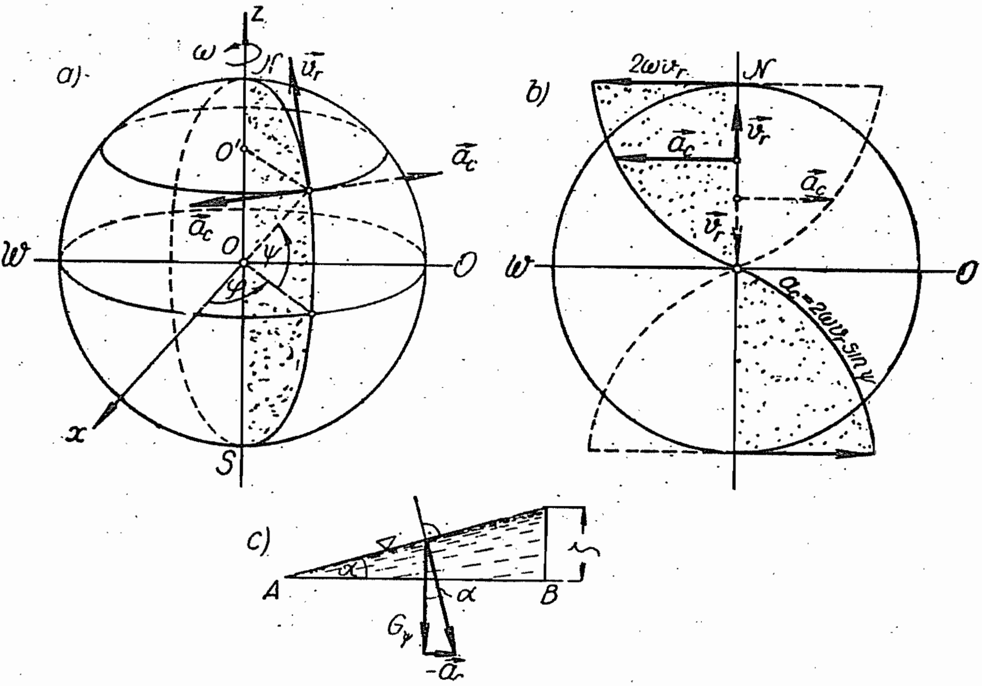
$$F_w = -ma_C = -Ga_C/g_\psi \approx 30\,\mathrm{kg}.$$

Овај резултат непосредно следи из (235″), јер су $F=0$, $F_p=0$ и $a_r=0$ те је $\vec{F}_{wn} = \lambda\,\mathrm{grad}\, f = m\vec{a}_C$. *Притисак је супротан отпору везе.*



Сл. 71. — Притисак на путању је супротног смера од Кориолисовог убрзања

53) Река ширине 500 m тече *са југа на север* по меридијану брзином 5 km/h. Одредити Кориолисово убрзање водене честице која се налази на 60° северне географске ширине. Нацртати дијаграм промене Кориолисовог убрзања са променом географске ширине. На којој је обали реке ниво воде виши и за колико?



Сл. 72. — Примена Беровог закона·

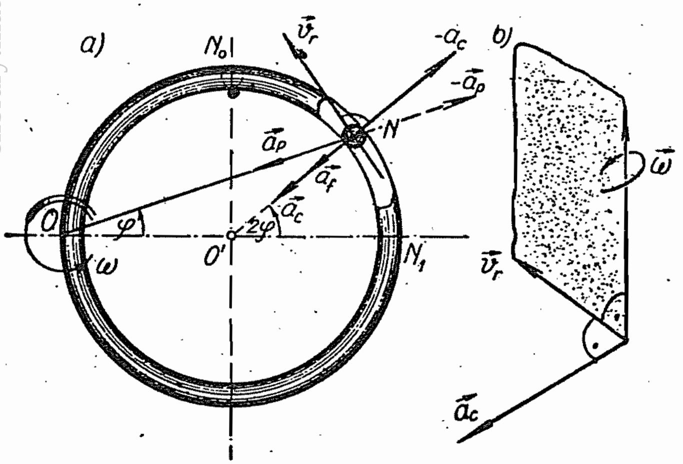
Решење. — Релативна брзина пада у правац тангенте на меридијан, па Кориолисово убрзање $\vec{a}_C = 2\,[\vec{\omega}, \vec{v}_r]$ пада у правац тангенте на упоредник са смером *ка западу* (сл. 72*a*), јер вектори $\vec{\omega}$ и $\vec{v}_r$ леже у равни меридијана.

Његов је интензитет $a_C = 2\,\omega\, v_r \sin\psi = 1{,}75 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m/sec^2}$, где је ψ географска ширина. Та је зависност приказана на сл. 72 *b*.

Ниво воде мора бити управан на правац резултујућег убрзања чије су компоненте убрзање теже и супротно Кориолисово убрзање (сл. 72*c*). Према томе је ниво воде на источној обали (или на *десној обали у смеру тока*) виши за $\zeta = \overline{AB}\,(a_C/g_\psi) = 0{,}875\,\mathrm{cm}$.

Притиску је изложена више *десна обала.*

За случај да река тече са севера на југ (на северној хемисфери), Кориолисово убрзање има смер ка истоку, па је опет *десна страна* (у смеру тока) *реке изложена притиску.* На јужној је хемисфери супротан случај. Ово је познат закон руског академика *Бера. Обале изложене притиску воде стрмије су*; супротне су блаже. (Упоредити обале Дунава који на делу од Београда до Ђердапа тече приближно по упореднику.)



Сл. 73. — Принудно релативно кретање материјалне тачке

54) У хоризонталној равни обрће се око тачке O танка кружна цев полупречника R (сл. 73). У њој се налази глатка куглица која је у положају N_0 била у миру. Одредити релативну и апсолутну брзину куглице на произвољном месту њене путање, као и притисак исте на цев у положају N_1. Тежину куглице занемарити. *(Walton)*

Решење. — Положај тачке је одређен потегом $r = \overline{ON} = 2\,R\cos\varphi$, па су убрзања: преносно $a_p = r\,\omega^2$ и Кориолисово $a_C = 2\,v_r\,\omega$.

Из једначина (235″) је $\vec{a}_r = \vec{a} - \vec{a}_p - \vec{a}_C + \vec{a}_f$, где је $\vec{a}_f = \vec{F}_{wn}/m$, па добивамо

$$a_{rT} = dv_r/dt = -\,r\,\omega^2\sin\varphi\,,$$

$$a_{rN} = v_r^2/R = a_f - a_C - a_p\cos\varphi\,.$$

Како је

$$v_r\,dv_r = a_{rT}\,ds = -\,(r\,\omega^2\sin\varphi)\,Rd\,(2\,\varphi)$$

то интеграљењем добивамо

$$v_r = R\,\omega\,\sqrt{2\cos 2\varphi}\,. \quad \text{За} \quad \varphi = 0 \quad \text{је} \quad v_{r1} = R\,\omega\,\sqrt{2}\,.$$

Преносна брзина је $v_p = 2\,R\,\omega$, па је апсолутна брзина једнака збиру брзина $v_1 = R\,\omega\,(2 + \sqrt{2})$.

Отпор везе је

$$F_N = ma_f = 2mR\omega^2\left(3\cos^2\varphi - 1 + \sqrt{2\cos^2\varphi}\right)$$

За $\varphi = 0$ он износи $F_{N(\varphi=0)} = 2mR\omega^2(2+\sqrt{2})$.

Притисак је једнак отпору само је супротног смера.

55) Тачка (O), о коју је обешено математичко клатно (сл. 49), креће се осцилаторно у хоризонталном правцу према закону $\xi = c\sin\Omega t$. Одредити закон малих осцилација клатна ако је у почетном тренутку ($t = 0$) било у стању мировања.

Решење. — У тачки вешања (O) усвојимо покретни координатни систем који врши транслаторно кретање у правцу осе $O\xi$ преносним убрзањем $\ddot{\xi} = a_p = -c\Omega^2\sin\Omega t = -\Omega^2\xi$. Тада је природна диференцијална једначина за покретни триједар а за правац тангенте $a_{rT} = a_T - a_{pT}$, односно $l\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi + c\Omega^2\sin\Omega t\cos\varphi$. За мале осцилације је $\sin\varphi \approx \varphi$; $\cos\varphi \approx 1$, па горња једначина постаје

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = h\sin\Omega t.$$

Овде су: $\omega^2 = g/l$, $h = c\Omega^2/l$. Њен општи интеграл је

$$\varphi = A\cos\omega t + B\sin\omega t + [h/(\omega^2-\Omega^2)]\sin\Omega t.$$

Из почетних услова је $A=0$. Како је тада и $x=0$ можемо одредити и B. Хоризонтално померање тачке m износи

$$\xi = l\varphi + c\sin\Omega t = Bl\sin\omega t + [c\Omega^2/(\omega^2-\Omega^2)]\sin\Omega t + c\sin\Omega t,$$

односно

$$\xi = Bl\sin\omega t + [c\omega^2/(\omega^2-\Omega^2)]\sin\Omega t, \quad \text{па је} \quad B = -c\omega\Omega/l\,(\omega^3-\Omega^2)$$

Осциловање клатна врши се према закону:

$$\varphi = [c\Omega^2/l\,(\omega^2-\Omega^2)]\,[\sin\Omega t - (\omega/\Omega)\sin\omega t].$$

56) У вертикалној равни, која се обрће константном угаоном брзином ω око вертикалне осе, из тачке A бачена је у хоризонталном правцу тешка тачка почетном брзином $v_0 = \dot{y}_0$. Одредити: 1^0 релативну путању тачке у покретној равни, 2^0 пројекцију њене апсолутне путање на хоризонталницу, 3^0 релативну и апсолутну брзину на произвољном месту путање, и 4^0 отпор равни.

Решење. — 1^0 Како је $\omega_z = \omega$ и $\omega = 0$, усвајајући покретни координатни систем у почетном положају A са непокретном осом Az напереном *наниже* и $A\eta$ осом у правцу почетне брзине v_0, то су, према (235′), компонентна релативна убрзања, пошто је апсолутно убрзање g, одређена једначинама

$$\ddot{\zeta} = \ddot{z} = g; \quad \ddot{\eta} = \omega^2\eta; \quad \ddot{\xi} = 0.$$

Из ових једначина, множећи другу идентитетом $\dot{\eta} \equiv d\eta/dt$ добивамо релативне брзине

$$\dot{\zeta} = \dot{z} = gt; \quad \dot{\eta}^2 = \eta^2\omega^2 + v_0^2.$$

Како је

$$dt = (v_0^2 + \eta^2\omega^2)^{-1/2}\,d\eta$$

то су

$$\zeta = {}^1/_2\, g t^2; \quad \omega t = \ln\left[\eta + \sqrt{\eta^2 + v_0^2/\omega^2}\right] + C$$

односно

$$v_0\, e^{\omega t} = \eta\omega + \sqrt{v_0^2 + \eta^2\omega^2}\,.$$

Једначина релативне путање тачке је

$$v_0\, e^{\sqrt{2\zeta/g}} = \omega\eta + \sqrt{v_0^2 + \eta^2\omega^2}.$$

2° Пројекција апсолутне путање на хоризонталницу, због $\varphi = \omega t$, $\eta = r$, биће

$$v_0\, e^{\varphi} = \omega r + \sqrt{v_0^2 + r^2\omega^2}.$$

3° Како је квадрат релативне брзине

$$v_r^2 = v_0^2 + g^2 t^2 + \eta^2\omega^2,$$

а преносна брзина је $v_p = \eta\omega$, то је квадрат апсолутне брзине

$$v^2 = v_r^2 + v_p^2 = v_0^2 + g^2 t^2 + 2\,\eta^2\omega^2.$$

4° Отпор везе — покретне равни, због $a_C = 2\,\dot{\eta}\omega$, биће

$$F_w = F_\xi = m a_C = 2\,m\,\omega\,\dot{\eta} = 2\,m\,\omega\cdot\sqrt{v_0^2 + \eta^2\omega^2}\,.$$

11. ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА У ГЕНЕРАЛИСАНОМ КООРДИНАТНОМ СИСТЕМУ

11.1 ЛАГРАНЖЕВЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА

Помоћу обрасца (6) могли смо написати диференцијалне једначине кретања материјалне тачке за генералисане координате. Како је $^1/_2\, mv^2$ кинетичка енергија покретне тачке, то ове једначине постају

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = A_i (\vec{F}, \vec{\mathrm{T}}_i), \quad i = 1, 2, 3. \tag{247}$$

Величина

$$\boxed{Q_i = A_i (\vec{F}, \vec{\mathrm{T}}_i) = A_i F \cos (\vec{F}_i, \vec{\mathrm{T}}_i) = \left(\vec{F}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right)} \tag{248}$$

назива се *генералисана сила* или *сила редукована на генералисану координату* q_i. Она има димензију стварне силе само у томе случају када је *Ламеов коефицијент* A_i апстрактни број; у противном њена димензија зависи од карактера координате q_i. Уводећи генералисану силу (248) у једначину (247) једначине кретања постају

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = Q_i} \quad i = 1, 2, 3 \tag{249}$$

и називају се *диференцијалне једначине кретања материјалне тачке у генералисаним координатама* или *Лагранжеве једначине друге врсте за материјалну тачку*.

Пошто на левој страни ових једначина фигурише кинетичка енергија која је скаларна величина, то су ове једначине *скаларне* и играју велику улогу у теориској (рационалној) механици и теорији осцилација. Сви досадашњи проблеми, које смо извели другим методама, могу се лако решити помоћу ових једначина. *Једина је незгода ових једначина што се помоћу њих, а за случај принудног кретања тачке, не* *може одредити отпор везе. За одређивање отпора треба користити Лагранжеве једначине прве врсте* (чл. 7.1), или *природне једначине кретања* (чл. 7.1; 8.1).

За примену Лагранжевих једначина потребно је претходно изразити кинетичку енергију помоћу генералисаних координата. Ако се положај покретне тачке одређује генералисаним координатама

$$\vec{r} = \vec{r}\,(q_1,\ q_2,\ q_3)\,,$$

онда је према изнетом у *Кинематици* (чл. 4.3 g), померање

$$d\vec{r} = d\vec{s} = \sum_{i=1}^{i=3} A_i\, dq_i\, \vec{\mathrm{T}}_i\,.$$

Елементарни рад силе је

$$d\,\mathbf{A} = (\vec{F}, d\vec{s}) = (\vec{F}, \Sigma A_i\, dq_i\, \vec{\mathrm{T}}_i)$$

односно, према (248),

$$\boxed{d\,\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{i=3} A_i\, dq_i\, (\vec{F}, \vec{\mathrm{T}}_i) = \sum_{i=1}^{i=3} Q_i\, dq_i} \tag{250}$$

Производ генералисане силе Q_i и елементарног померања dq_i, на коме се мења само координата q_i, има димензију рада $[ML^2\,T^{-2}]$ па се помоћу њега може увек одредити генералисана сила. Из тога закључујемо да генералисана сила има димензију силе када је генералисана координата дужина; ако је генералисана координата угао, онда генералисана сила има димензију момента силе.

Из закона о живој сили (чл. 4.3), следи да је $dE_k = d\,\mathbf{A}$, тј. диференцијал живе силе једнак је елементарном раду

$$d\,[{}^1/_2\, mv^2] = d\,\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{i=3} Q_i\, dq_i\,, \qquad i = 1,\ 2,\ 3 \tag{250'}$$

а квадрат брзине одређујемо помоћу *метричке форме* (*Кин.*, чл. 4.3 g).

Када је сила која дејствује *на* материјалну тачку *конзервативна*, тада постоји функција силе, па је $\vec{F} = \mathrm{grad}\, U = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{1}{A_i} \frac{\partial U}{\partial q_i}\, \vec{\mathrm{T}}_i$. У томе случају генералисана сила (248), постаје:

$$\boxed{Q_i = A_i\, (\mathrm{grad}\, U, \vec{\mathrm{T}}_i) = \left(\mathrm{grad}\, U, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial U}{\partial q_i}} \tag{251}$$

па Лагранжеве једначине гласе

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial E_k}{\partial q_i}=\frac{\partial U}{\partial q_i}} \quad i=1,\ 2,\ 3, \tag{252}$$

или

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial E_k}{\partial q_i}+\frac{\partial E_p}{\partial q_i}=0} \quad i=1,\ 2,\ 3 \tag{252'}$$

Пошто функција силе не зависи од генералисаних брзина већ само од положаја тачке (тј. од њених генералисаних координата), то је

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial\,(E_k+U)}{\partial \dot{q}_i}$$

па једначина (252) добива облик

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\,(E_k+U)}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial\,(E_k+U)}{\partial q_i}=0. \tag{252''}$$

Збир кинетичке енергије и функције силе назива се *кинетички потенцијал*[1] или *Лагранжева функција* и обележава се са

$$\boxed{\mathbf{L}=E_k+U} \tag{253}$$

па се Лагранжева једначина може написати у новом облику

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_i}=0} \quad (i=1, 2, 3)\,. \tag{253'}$$

Ако је функција силе једнозначна то је $-U=\Pi$, где је $\Pi=E_p$ потенцијална енергија, па кинетички потенцијал претставља разлику кинетичке и потенцијалне енергије

$$\boxed{\mathbf{L}=E_k-E_p=E_k-\Pi} \tag{253''}$$

Лагранжева функција претставља вишак кинетичке енергије над потенцијалном. Она је, као и кинетичка енергија, *квадратна функција генералисаних брзина.*

У случају *слободног кретања* материјалне тачке поставићемо три Лагранжеве једначине кретања за дотичне генералисане координате.

---

[1] По *Хелмхолцу* (H. Helmholtz, 1824—1894).

У случају *принудног кретања* материјалне тачке по *глаткој покретној површини* $f(x, y, z, t) = 0$ увешћемо генералисане координате q_1 и q_2 које играју улогу Гаусових параметара тачке на површини (*Кин.*, Дод. II, чл. 6). Вектор положаја покретне тачке одређен је једначином $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, t)$, те су и његове Декартове координате функције координата q_i и времена t. Сменимо ли у једначини површине Декартове координате генералисаним, мора једначина површине бити идентички задовољена, те следе услови:

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} = \left(\operatorname{grad} f, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right) = 0; \qquad \frac{\partial f}{\partial q_2} = \left(\operatorname{grad} f, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\right) = 0, \quad i = 1,2.$$

Ако основну једначину кретања тачке по глаткој површини (151) помножимо скаларно елементарним померањем $(\partial \vec{r}/\partial q_i)$ биће

$$m\left(\dot{\vec{v}}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) = \left(\vec{F}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) + \lambda\left(\operatorname{grad} f, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right); \quad i = 1,\ 2.$$

С обзиром на горњи услов ова једначина постаје

$$m\left(\dot{\vec{v}}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) = \left(\vec{F}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) = Q_i .$$

Лева страна ове једначине, јер је брзина покретне тачке

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t},$$

једнака је левој страни Лагранжеве једначине (249), а десна генералисаној сили за координату q_i. Према томе у случају принудног кретања тачке по глаткој површини морамо написати систем од две Лагранжеве једначине

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = Q_i, \qquad i = 1, 2.$$

Ово су *Лагранжеве једначине кретања тачке по површини.* За њихову примену потребно је знати кинетичку енергију и силе Q_i.

У случају покретне површине $f(x, y, z, t) = 0$, с обзиром на брзину $(\vec{v})$, кинетичка енергија биће:

$$\boxed{E_k = {}^1\!/_2\, m\left[A_1^2 \dot{q}_1^2 + A_2^2 \dot{q}_2^2 + 2B\dot{q}_1\dot{q}_2 + 2C_1\dot{q}_1 + 2C_2\dot{q}_2 + D\right]} \qquad (254)$$

где су коефицијенти:

$$A_i^2 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2 \qquad i = 1, 2$$

$$B = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\right) = \frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial q_2},$$

$$C_i = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right) = \frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial t}, \qquad i = 1, 2$$

$$D = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2.$$

Генералисане силе одређујемо из елементарног рада на произвољном померању:

$$(\vec{F}, \vec{ds}) = Q_1 \, dq_1 + Q_2 \, dq_2 .$$

У случају *непокретне површине* биће коефицијенти $C_i = 0$ и $D = 0$, па је кинетичка енергија

$$\boxed{E_k = {}^1\!/_2 \, m \, [A_1^2 \dot{q}_1^2 + A_2^2 \dot{q}_2^2 + 2 B \dot{q}_1 \dot{q}_2]} \qquad (254')$$

квадратна форма генералисаних брзина.

У овоме случају *генералисани импулси* $(\partial E_k / \partial \dot{q}_i)$ јесу *линеарне форме* генералисаних брзина $\dot{q}_i$, па су њихови изводи по времену $[d(\partial E_k / \partial \dot{q}_i)/dt]$ линеарне форме генералисаних убрзања $(\ddot{q}_i)$ те се Лагранжеве једначине могу решити по тим убрзањима и интегралити. Систем ових двеју диф. једначина другог реда уводи четири интеграционе константе које одређујемо из почетних услова кретања.

Помоћу Лагранжевих једначина можемо одредити карактер кретања покретне тачке, али се за одређивање отпора везе морају применити једначине (151) или (154).

Ако је површина непокретна $f(x, y, z) = 0$, онда је *кинетичка енергија квадратна форма генералисаних брзина* (254′), па је

$$dE_k = Q_1 \, dq_1 + Q_2 \, dq_2 .$$

Буду ли силе конзервативне, тј. задовољавају ли услов (115′), биће $dE_k = dU$ па постоји интеграл живе силе

$$E_k = U + h$$

како смо извели и у чл. 7.2.

У случају кретања тачке по *глаткој линији* написаћемо само једну једначину

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial E_k}{\partial q} = Q.$$

Она се назива *Лагранжева једначина кретања тачке по глаткој линији.*

Како је у случају *покретне линије* брзина покретне тачке

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma}\dot{q} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$$

то је кинетичка енергија

$$E_k = {}^1/_2 m\,[A^2\dot{q}^2 + 2C\dot{q} + D] \tag{255}$$

где су коефицијенти

$$A^2 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2,$$

$$C = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right) = \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial q}\frac{\partial z}{\partial t},$$

$$D = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2.$$

У случају непокретне линије биће $C = 0$ и $D = 0$, па је кинетичка енергија

$$\boxed{E_k = {}^1/_2 m A^2 \dot{q}^2} \tag{255'}$$

Отпор везе можемо одредити из једначина (181) или (183).

Циклична координата. — Када нека генералисана координата q_c задовољава ове услове:

1⁰ *да кинетичка енергија не зависи од те координате,*

2⁰ *да је генералисана сила која одговара тој координати једнака нули,* она се назива *циклична координата.*[1]

Према горњим условима биће:

$$\frac{\partial E_k}{\partial q_c} = 0, \quad Q_c = 0.$$

---

[1] По *Хелмхолцу.*

Joseph Louis Lagrange (1736 — 1813)

„Les méthodes que je présente ici n'exigent pas des constructions ou raisonnements
de la nature géometriques ou mécanique, mais seulement les operations algébriques:
Celui qui aime l'Analyse verra avec plaisir que la Mécanique est sa branche,
et sera reconnaissant que j'ai élargi son domaine".

Mécanique Analytique, 1788

па Лагранжева једначина (249) постаје:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_c} = 0$$

из које следи да је *генералисани импулс за ту координату константан*

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_c} = p_r = const. \qquad (249')$$

Слично генералисаној сили, и генералисани импулс може да претставља или *количину кретања* или *моменат количине кретања* (замах). Например, за Декартов систем генералисани импулс претставља увек количину кретања, $p_x = m\dot{x} = K_x$. За поларно-цилиндрички систем импулс $p_r = m\dot{r} = K_r$ претставља пројекцију количине кретања на радијалан правац, док импулс $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = L_z$ претставља пројекцију замаха на Oz осу. За сферни координатни систем биће $p_\rho = m\dot{\rho}$; $p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi}\cos^2\psi$; $p_\psi = m\rho^2\dot{\psi}$. Први претставља количину кретања у радијалном правцу а друга два компонентне замахе.

Према једначини (253) следи да је за цикличку координату извод кинетичког потенцијала по тој генералисаној брзини константан

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{q}_c} = c = const. \qquad (253')$$

Ако се помоћу интеграла (249') или (253') *искључи циклична брзина* ($\dot{q}_c$) *из Лагранжевих једначина* (249 или 253), *онда се број тих једначина умањује за јединицу.* У случају више цикличких координата можемо број Лагранжевих једначина кретања за толики број умањити.

Треба добро уочити да се елиминисање цикличког интеграла врши у Лагранжевим једначинама а не у изразу за кинетичку енергију, јер би се тада мењао израз за енергију, па би нова једначина била погрешна.

Помоћу Лагранжевих једначина одредимо дифер. једначине кретања слободне тачке у Декартовим правоуглим и поларно-цилиндричким координатама.

а) Генералисане су координате $x, y, z,$ па је $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Кинетичка енергија је *хомогена квадратна форма генералисаних брзина*

$$E_k = {}^1/_2\, m\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \qquad (a)$$

па су генералисани импулси количине кретања, $K_x = m\dot{x} = \partial E_k \,/\, \partial \dot{x}, \ldots$.

Како су Ламеови коефицијенти $A_i = 1$ и $\partial \vec{r} / \partial x = \vec{i}$, то су генералисане силе пројекције X, Y, Z. Лагранжеве једначине (249) јесу:

$$m\ddot{x} = X;\; m\ddot{y} = Y;\; m\ddot{z} = Z.$$

б) Генералисане координате су $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$ а Ламеови коефицијенти $A_1 = 1$, $A_2 = r$, $A_3 = 1$. Кинетичка енергија биће

$$E_k = {}^1/_2\, m(\dot r^2 + r^2 \dot\varphi^2 + \dot z^2) \qquad (б)$$

те *зависи од генералисаних брзина и координата.*

Генералисани су импулси: количине кретања односно замах

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot r} = m\dot r = K_r\,; \quad \frac{\partial E_k}{\partial \dot\varphi} = mr^2\dot\varphi = L_z\,; \quad \frac{\partial E_k}{\partial \dot z} = m\dot z = K_z\,.$$

Генералисане силе су:

$$Q_1 = A_1 F_r = F_r\,, \quad Q_2 = A_2 F_c = F_c r\,, \quad Q_3 = A_3 Z = Z\,.$$

Радијална и аксијална сила јесу пројекције силе, а циркуларна момент силе $\vec F$ за Oz-осу.

Диференцијалне једначине кретања јесу:

$$m\ddot r - mr\dot\varphi^2 = F_r\,; \quad m\frac{d}{dt}(r^2\dot\varphi) = Q_\varphi = F_c r\,; \quad m\ddot z = Z\,.$$

У случају привлачне силе $\vec F = F\vec r_0 = -c\vec r$ у равни, координата φ је *цикличка*, јер енергија не зависи од ње а сила је $Q_\varphi = Q_c = 0$, па постоји циклички интеграл — *интеграл површине*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial\dot\varphi} = 0\,; \quad mr^2\dot\varphi = 2S_z = C = const\,.$$

Диференцијална једначина кретања је $m(\ddot r - r\dot\varphi^2) = -er$.

Помоћу Лагранжевих једначина изведимо диф. једначину кретања *математичког клатна* (сл. 49). Кретање је принудно, а генералисана координата је φ, те су кинетичка енергија и функције силе:

$$E_k = {}^1/_2\, ml^2\dot\varphi^2\,; \quad U = mgz = mgl\cos\varphi\,.$$

Генералисана сила је момент теже за тачку O

$$Q_\varphi = \partial U/\partial\varphi = -mgl\sin\varphi\,,$$

па је диференцијална једначина кретања

$$ml^2\ddot\varphi = -mgl\sin\varphi \approx -mgl\,\varphi\,.$$

У случају *циклоидног клатна* (сл. 46), генералисана координата је лук $s = 4R\sin{}^1/_2\,\varphi$, па су кинетичка енергија и функција силе:

$$E_k = {}^1/_2\, m\dot s^2\,; \quad U = mgz = mgR(1+\cos\varphi) = 2mgR[1-(s/4R)^2]\,,$$

па је диф. једначина кретања $m\ddot s = -(mg/4R)s$.

У случају *принудног кретања* тешке тачке по глаткој конусној површини, угла отвора 2α (сл. 74*a*), једначина везе је $z = r \operatorname{ctg} \alpha$, па је $\dot{z} = \dot{r} \operatorname{ctg} \alpha$. Кинетичка енергија и функција силе су

$$E_k = {}^1/_2 m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = {}^1/_2 m [(\dot{r}^2/\sin^2 \alpha) + r^2 \dot{\varphi}^2],$$

$$U = - mgz = - mgr \operatorname{ctg} \alpha,$$

па помоћу Лагранжевих једначина добивамо диф. једначине:

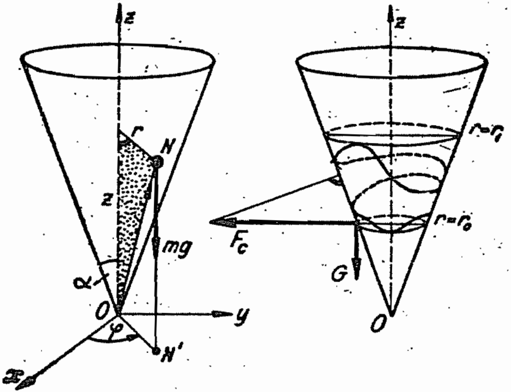
$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha = - {}^1/_2 g \sin 2\alpha; \quad d(r^2 \dot{\varphi})/dt = 0; \quad r^2 \dot{\varphi} = 2S_z = C.$$

Из друге једначине видимо да постоји један циклички интеграл — површине за раван управну на Oz осу, јер је површина обртна а сила дејствује у равни меридијана (гл. VII). Уносећи овај интеграл у прву једначину добивамо само једну диференцијалну једначину

$$\ddot{r} - (C^2 \sin^2 \alpha) r^{-3} = - {}^1/_2 g \sin 2\alpha.$$

Како она раздваја променљиве, то је можемо лако интегралити, па је

$$r^3 \dot{r}^2 = - C^2 \sin^2 \alpha -$$
$$- g r^3 \sin 2\alpha + C_1 r^2 = f(r).$$



Сл. 74. — Принудно кретање тешке тачке по глатком конусу

За почетне услове: за $t = 0$, $r = r_0$; $\dot{r}_0 = 0$, $v_c = v_0$, због цикличког интеграла $2S_z = C = r^2 \dot{\varphi} = r_0 v_0$, биће константа $C_1 = pr_0 + q$, где су $p = g \sin 2\alpha$; $q = v_0^2 \sin^2 \alpha$. Због леве стране функција $f(r)$ је увек позитивна

$$f(r) = - pr^3 + (pr_0 + q) r^2 - qr_0^2 > 0.$$

Њени су корени: r_0; $r_1 = (q/2p)[1 + \sqrt{1 + (4pr_0/q)}]$; $r_2 < 0$. Трећи корен нема *физикалног значења*, па се тачка креће у *појасу између хоризонталних кругова* r_0 и r_1. Из услова пројекција центрифугалне силе и тежине на изводницу конуса $(v_0^2 \sin \alpha / r_0) \gtreqless g \cos \alpha$, односно $v_0^2 \gtreqless g r_0 / \operatorname{tg} \alpha$ биће $r_1 \gtreqless r_0$ (сл. 74*b*).

Како је сила конзервативна могли смо место Лагранжеве једначине користити и интеграл енергије.

Да би се тачка кретала по једном хоризонталном кругу (*конусно клатно*) функција $f(r)$ мора имати два једнака корена. Тај корен мора бити и корен њене изводне једначине. Из услова $f'(r) = - 3pr^2 + + 2(pr_0 + q) r = 0$ следи услов $pr_0 = 2q$, односно $v_0 = \sqrt{gr_0/\operatorname{tg} \alpha}$.

Пример. — 57) Материјалну тачку која лежи на непокретној сфери, полупречника 1, привлачи сила из северног пола (N) чија је функција силе $U = -cm \operatorname{ctg} \theta$, где је θ поларно растојање (*азимут*). Одредити кретање материјалне тачке.

Решење. — Положај тачке одређен је сферним координатама ρ, φ, θ (сл. 75). Кинетичка енергија је

$$E_k = {}^1/_2\, m\, (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \rho^2 \dot{\theta}^2),$$

па су Лагранжеве једначине кретања, због $\rho = 1$,

$$\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 = 0, \qquad d(\dot{\varphi} \sin^2 \theta)/dt = 0,$$

$$\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta = c/\sin^2\theta .$$

Новим сменама

$$r = \operatorname{tg} \theta, \; dt/\cos^2\theta = d\tau ,$$

због

$\dot{r} = \dot{\theta}/\cos^2 \theta$,

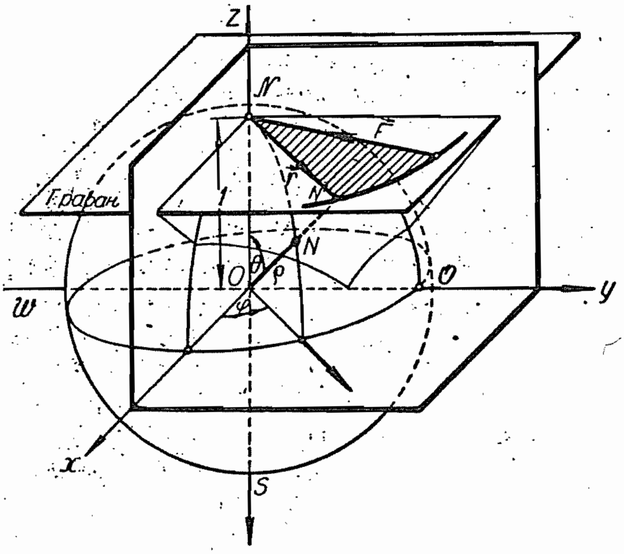
$\varphi = (1/\cos^2\theta)(d\varphi/d\tau)$,

$dr/d\tau = 0,\; d^2 r/d\tau^2 = \ddot{\theta} \cos^2 \theta$

биће једначине

$(d^2 r/d\tau^2) - r\,(d\varphi/d\tau)^2 = cr^{-2}$,

$r^2\,(d\varphi/dt) = C.$



Сл. 75. — Централно кретање тачке по сферном конусном пресеку

Како је r растојање пројекције покретне тачке добивене пројицирањем из координатног почетка на тангенцијалну раван у полу (N), то ове две једначине одређују законе кретања те пројекције (N'). Прва једначина показује да је њено *радијално убрзање константно*, а друга да јој је и *секторска брзина константна*. Кретање је, дакле, под утицајем централне силе из центра (N), интензитета обрнуто сразмерног квадрату растојања а по конусном пресеку са жижом у (N). Путања је *сферни конусни пресек* (*Appell*, 1891).

11.2 КРЕТАЊЕ ТЕШКЕ ТАЧКЕ У ВЕРТИКАЛНОЈ РАВНИ КОЈА СЕ ОБРЋЕ ОКО НЕПОМИЧНЕ ОСЕ

a) **Општи проблем.** — Лагранжеве једначине обе врсте примени́ћемо на одређивање кретања тешке тачке у вертикалној равни (П) која се обрће око осе Oz константном угаоном брзином (сл. 76*a*).

Положај равни одређен је углом $\varphi = \omega t$ који чини раван са профилницом Ozx. Кретање је тачке *принудно* по површини равни — чија је једначина за изабрани координатни систем $Oxyz$ у почетном положају материјалне тачке

$$f(x, y, z, t) = x \sin \varphi - y \cos \varphi = 0. \qquad (a)$$

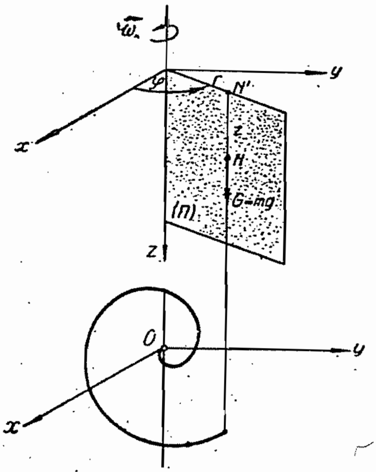
Лагранжеве једначине прве врсте (чл. **7.1**) јесу:

$$m\ddot{x} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \sin \varphi,$$

$$m\dot{y} = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = - \lambda \cos \varphi\, ,$$

$$m\ddot{z} = mg + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = mg\, ,$$

пошто су $X = 0;\ Y = 0;\ Z = mg$.



Сл. 76*а*. — Кретање тешке тачке у покретној равни

Ако двапута диференцирамо једначину везе (a) биће

$$\frac{df}{dt} = \dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi + (x \cos \varphi + y \sin \varphi)\, \omega = 0,$$

$$\frac{d^2 f}{d t^2} = \ddot{x} \sin \varphi - \ddot{y} \cos \varphi + 2\, (\dot{x} \cos \varphi + y \sin \varphi)\, \omega -$$

$$- (x \sin \varphi - y \cos \varphi)\, \omega^2 = 0$$

па је множилац везе

$$\lambda = - 2\, m \omega\, (\dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi) = - 2\, m \omega \dot{r} = - 2\, m \omega\, v_r\, .$$

Он је сразмеран радијалној брзини, јер је, због $r^2 = x^2 + y^2$, та брзина $\dot{r} = v_r = \dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi$.

Како је, према чл. **6.2**, $|\operatorname{grad} f| = 1$, то је отпор површине — покретне равни $F_{wn} = \lambda$ и управан је на раван.

Да бисмо одредили кретање тешке тачке у самој покретној равни, усвојимо поларно-цилиндричке координате r и z за генералисане координате, онда је кинетичка енергија

$$E_k = {}^1/_2\, m\, (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)\, ,$$

где је $\dot{\varphi} = \omega$.

С обзиром на обр. 252 **(чл. 11.1)**, Лагранжеве једначине друге врсте за кретање тешке тачке по овој покретној равни јесу:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial E_k}{\partial r} = Q_r; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial E_k}{\partial z} = Q_z.$$

Како је функција силе $U = mgz$, то су генералисане силе $Q_r = \partial U/\partial r = 0$, $Q_z = \partial U/\partial z = mg$. Лагранжеве једначине дају систем диференцијалних једначина

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0; \quad \ddot{z} = g,$$

чији су општи интеграли

$$r = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}; \quad z = {}^1/_2 gt^2 + C_3 t + C_4.$$

Интеграционе константе одредићемо из почетних услова да је у почетном тренутку тачка била у координатном почетку (за $t = 0$ је $r_0 = 0$) и имала почетну радијалну брзину ($\dot{r}_0 = v_0$). Оне износе $C_3 = C_4 = 0$, $C_1 = -C_2 = v_0/2\omega$. Коначне једначине кретања јесу

$$r = (v_0/\omega)\,\mathrm{Ch}\,\omega t = (v_0/\omega)\,\mathrm{Ch}\,\varphi, \quad z = {}^1/_2 gt^2. \tag{b}$$

Елиминишемо ли време из ових једначина добићемо линију путање

$$r = (v_0/\omega)\,\mathrm{Ch}\,k\sqrt{z}, \quad \text{где је} \quad k = \omega\sqrt{2/g}.$$

Прва једначина (*b*) показује да је пројекција путање на раван *Oxy* *спирала*, чија је једначина приказана у поларним координатима (r, φ).

Овај се проблем може решити и помоћу теорема релативног кретања из једначине $\ddot{r} - r\omega^2 = 0$ (*Кин.*, зад. **73** или *Дин.*, чл. **10**).

b) **Тејлорово математичко клатно.** — Осциловање математичког клатна у покретној равни (П) која се обрће око непомичне осе *Oz* костантном угаоном брзином, претставља Taylor-ово клатно (сл. 76 *b*).

Како су:

$$\vec{\rho} = \vec{i}'\, l \sin\theta - \vec{k}'\, l \cos\theta; \quad \omega = \omega_p = \dot{\varphi}; \quad \vec{v}_r = l\dot{\theta}\,\vec{T}; \quad \vec{v}_p = [\vec{\omega}_p\,\vec{\rho}] = \vec{j}'\, l\,\omega \sin\theta$$

то су кинетичка енергија и функција силе:

$$E_k = {}^1/_2\, m\,(\vec{v}_r + \vec{v}_p)^2 = {}^1/_2\, ml^2\,[\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta], \quad U = -mg\zeta = mgl\cos\theta.$$

Координата φ је цикличка, па из Лагранжевих једначина добивамо једначину кретања и циклички интеграл

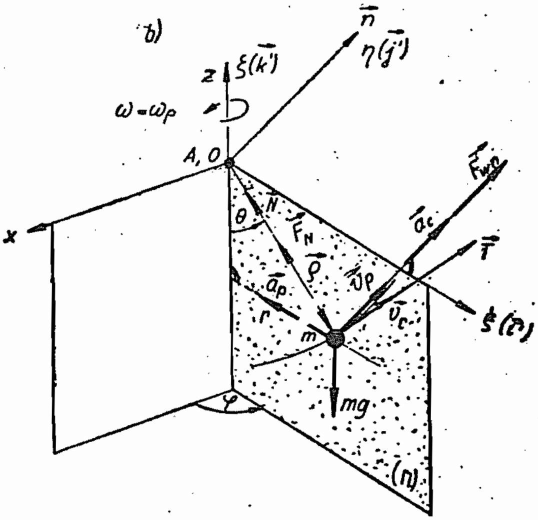
$$\ddot{\theta} = \omega^2 \sin\theta\cos\theta - (g/l)\sin\theta; \quad l^2\dot{\varphi}\sin^2\theta = r^2\dot{\varphi} = 2\,S_z = C.$$

Множењем прве једначине са $2\dot{\theta}\,dt \equiv 2\,d\theta$ и интеграљењем добивамо

$$\dot{\theta}^2 = \omega^2 \sin^2 \theta + 2\,(g/l) \cos\theta + C_1 \,.$$

Како су почетни услови: за $t=0,\ \theta=\theta_0,\ v_{r0}=0$, тј. $\theta=0$, биће

$$v_r{}^2 = l^2\,\omega^2\,(\sin^2\theta - \sin^2\theta_0) + 2\,gl\,(\cos\theta - \cos\theta_0)\,.$$



Сл. 76 *b*. — Тејлорово клатно

Динамичка једначина релативног кретања (235) је:

$$m\vec{a}_r = m\vec{a} + (-m\vec{a}_p) + (-m\vec{a}_C) +$$
$$+ \lambda \,\mathrm{grad}\, f + \vec{F}_N \,.$$

Због

$$\vec{a} = -\,g\,\vec{k}'\,,$$

$$\vec{a}_p = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]] = -\,(\omega^2\,l \sin\theta)\,\vec{i}'\,;$$

$$\vec{a}_C = 2\,[\vec{\omega}, \vec{v}_r] = (2\,\omega\,v_r\cos\theta)\,\vec{j}'\,,$$

$$|\,\mathrm{grad}\, f\,| = 1$$

множењем горње једначине скаларно ортовима $\vec{n}$ и $\vec{N}$ добивамо:

a) *отпор површине*

$$F_{wn} = \lambda = m\,(\vec{a}_C, \vec{n}) = 2\,mv_r\,\omega\cos\theta\,,$$

b) *силу у концу*

$$m\,(\vec{a}_r, \vec{N}) = -\,g\,(\vec{k}', \vec{N}) - m\,(\vec{a}_p, \vec{N}) + F_N = mv_r{}^2/l\,,$$

$$F_N = m\,[l\,\omega^2\,(2\sin^2\theta - \sin^2\theta_0) + g\,(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)]\,.$$

Пошто је преносно кретање *стационарно*, можемо применити и интеграл енергије (237″), па је:

$$v_r{}^2 - [\vec{\omega}\,\vec{\rho}]^2 = -\,2\,g\zeta + h\,, \quad h = 2\,g\zeta_0 - [\vec{\omega}\,\vec{\rho}_0]^2 = -\,2\,gl\cos\theta_0 - \omega^2\,l^2\sin^2\theta_0\,,$$

те је

$$v_r{}^2 = [\vec{\omega}\,\vec{\rho}]^2 - [\vec{\omega}\,\vec{\rho}_0]^2 - 2\,g\,(\zeta - \zeta_0)\,.$$

11.3 КОВАРИЈАНТНЕ И КОНТРАВАРИЈАНТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА

У Кинематици (III Додатак, **члан 3.6**) дати су изрази (124) и (127) за коваријантне и контраваријантне координате вектора убрзања $\vec{a}$. Како је коваријантна координата $a_i = (\vec{a}, \vec{e}_i)$, то се множењем масом m добија

$$ma_i = m\,(\vec{a}, \vec{e}_i) = (m\vec{a}, \vec{e}_i) = (\vec{F}, \vec{e}_i) = A_i\,(\vec{F}, \vec{T}_i) = Q_i,$$

где је Q_i ***коваријантна генералисана сила***, та су ***коваријантне једначине кретања материјалне тачке***

$$ma_i = m\left\{\sum_{k=1}^{3} g_{ik}\,\ddot{q}_k + \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\begin{bmatrix} r\ s \\ i \end{bmatrix}\dot{q}_r\,\dot{q}_s\right\} = Q_i. \qquad (249')$$

Одмах се да уочити да су ове једначине исте као и Лагранжеве једначине друге врсте за материјалну тачку (248), па су Лагранжеве једначине коваријантне једначине кретања.

Контраваријантна координата вектора убрзања је $a^i = \sum\limits_k g^{ik}\,a_k$, па се множењем масом m добија

$$ma^i = \sum_k mg^{ik}\,a_k = \sum_k g^{ik}\,Q_k = Q^i$$

где је Q^i ***контраваријантна генералисана сила***, та су ***контраваријантне једначине кретања материјалне тачке***

$$ma^i = m\left[\ddot{q}_i + \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\begin{Bmatrix} r\ s \\ i \end{Bmatrix}\dot{q}_r\,\dot{q}_s\right] = Q^i. \qquad (249'')$$

Једначине (249') могу се извести непосредно из Лагранжевих једначина (249) јер су:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_i\sum_k mg_{ik}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_k; \qquad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} = \sum_k mg_{ik}\,q_k;$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial q_i} = \frac{m}{2}\sum_r\sum_s \frac{\partial g_{rs}}{\partial q_i}\,\dot{q}_r\,\dot{q}_s;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} = m\left\{\sum_k g_{ik}\,\ddot{q}_k + \frac{1}{2}\sum_r\sum_s\left[\frac{\partial g_{ir}}{\partial q_s}\,\dot{q}_s\,\dot{q}_r + \frac{\partial g_{is}}{\partial q_r}\,\dot{q}_r\,\dot{q}_s\right]\right\}$$

па је

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = m\left\{\sum_k g_{ik}\,\ddot{q}_k + \sum_r\sum_s\begin{bmatrix} r\ s \\ i \end{bmatrix}\dot{q}_r\,\dot{q}_s\right\} = Q_i.$$

II ДЕО

ДИНАМИКА СИСТЕМА МАТЕРИЈАЛНИХ ТАЧАКА

12. ОПШТИ ЗАКОНИ КРЕТАЊА СИСТЕМА МАТЕРИЈАЛНИХ ТАЧАКА

12.1 УНУТРАШЊЕ И СПОЉАШЊЕ СИЛЕ

Скуп материјалних тачака у коме кретање сваке тачке зависи од положаја и кретања осталих тачака тога скупа, чини *систем материјалних тачака*. Овакав систем се често назива и *дати систем.* Сва материјална тела или тачке које се налазе у околини датог система, а које не узимамо у разматрање, називамо *спољашњим телима (масама).*

Ако свака материјална тачка датог система може имати за време кретања *произвољни положај и произвољну брзину*, систем се назива *слободан*, у противном *није слободан,* јер му је кретање *ограничено.*

Силе које дејствују на слободни систем делимо у две групе: *унутрашње* и *спољашње.*

Силе које дејствују између маса појединих материјалних тачака система називамо *унутрашњим силама.* На основу трећег Њутновог закона (дејства и противдејства) материјална тачка масе m_i дејствује на материјалну тачку масе m_k силом $\vec{F}_{ik}$ која пада у правац спојне праве маса са смером ка маси m_i (сл. 77); међутим, маса m_k дејствује силом $\vec{F}_{ki}$ на масу m_i. Ове су две силе по интензитету једнаке, истог су правца али супротног смера, те се њихово узајамно дејство поништава

Сл. 77. — Унутрашње силе система

$$\vec{F}_{ik} + \vec{F}_{ki} = 0. \tag{256}$$

Како се унутрашње силе увек јављају у парном броју, њихова се дејства поништавају, па је геометриски збир свих унутрашњих сила система једнак нули

$$\boxed{\vec{F}_{ru} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_{ui} = 0} \tag{256'}$$

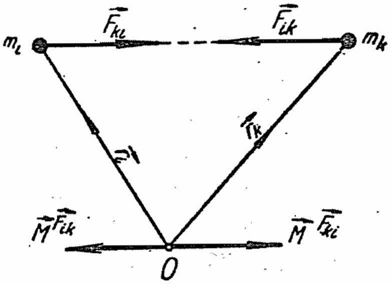
Дакле, *векторски збир свих унутрашњих сила (главни вектор унутрашњих сила) система материјалних тачака увек је једнак нули, било да материјалне тачке мирују или да се крећу.*

Пошто је резултанта унутрашњих сила једнака нули, то су и збирови пројекција свих унутрашњих сила на осе правоуглог координатног система једнаки нули

$$\sum_{i=1}^{i=n} X_{ui} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{i=n} Y_{ui} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{i=n} Z_{ui} = 0.$$

Нека се масе m_i и m_k одређене векторима положаја $\vec{r}_i$ и $\vec{r}_k$ у односу на непокретну тачку O (сл. 78), онда су моменти унутрашњих сила за моментну тачку по интензитету једнаки, истог правца — нормале на раван $O\,m_i\,m_k$ — али су супротног смера, па је

$$\vec{M}_O^{\vec{F}_{ik}} + \vec{M}_O^{\vec{F}_{kl}} = 0. \tag{257}$$



Сл. 78. — Момент унутрашњих сила

Векторски збир момената свих унутарњих сила система (главни момент унутрашњих) сила за произвољну моментну тачку (O) једнак је нули, па било да се тачке крећу или мирују:

$$\boxed{\vec{\mathfrak{M}}_O^{\vec{F}_{ui}} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{M}_O^{\vec{F}_{ui}} = \sum_{i=1}^{i=n} [\vec{r}_i, \vec{F}_{ui}] = 0} \tag{257'}$$

Пошто је главни момент унутрашњих сила једнак нули, то су и његове пројекције на три управне осе у тачки O једнаке нули.

Силе које дејствују на масе које припадају систему, а из других маса које не припадају систему, називамо *спољашњим силама.*

Ограничења која смањују слободу кретања појединих тачака система називају се *везама.* Оне се остварују помоћу материјалних тела (*механизама везе*) која су извори нових сила — *отпора или реакција веза.* Ове силе дејствују на одговарајуће масе система (чл. 12.8) и убрајају се такође у спољашње силе. Због тога се спољашње силе често деле на *дате* (задане) *силе* и на *отпоре веза.*

12.2 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА СИСТЕМА

Нека на материјалну тачку m_i дејствују спољашње силе, чија је резултанта $\vec{F}_i^{(r)}$; и унутрашње силе, чија је резултанта $\vec{F}_{ui}^{(r)}$, онда је диференцијална једначина кретања масе m_i изражена у векторском облику

$$\vec{F}_i^{(r)} + \vec{F}_{ui}^{(r)} = m_i \vec{a}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i \tag{258}$$

За све тачке система диференцијална једначина кретања у векторском облику је

$$\sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i^{(r)} + \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_{ui}^{(r)} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \vec{a}_i$$

односно због (256')

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \vec{a}_i = \vec{F}_r} \tag{259}$$

где је $\vec{a}_i$ убрзање масе m_i а $\vec{F}_r$ *главни вектор* спољашњих сила. Помножимо ли једначине (258) векторски вектором $\vec{r}_i$, а пошто је момент резултанте система сила које нападају једну тачку једнак збиру момената компоненти, биће:

$$\vec{M}_O^{\vec{F}_i} + \vec{M}_O^{\vec{F}_{ui}} = [\vec{r}_i, m_i \vec{a}_i]$$

За цео систем, према (257), *главни момент спољашњих сила* је

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} \vec{M}^{\vec{F}_i} = \sum_{i=1}^{i=n} [\vec{r}_i, m_i \vec{a}_i] = \vec{\mathfrak{M}}_O} \tag{260}$$

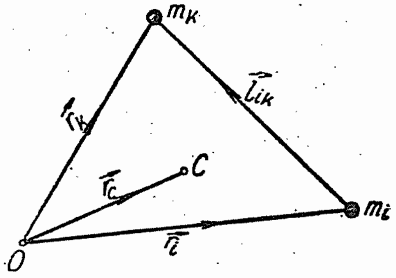
Ове две векторске једначине јесу *основне динамичке једначине кретања система* материјалних тачака. Њима, као што знамо, одговарају *по три* скаларне једначине за Декартов правоугли координатни систем у полу O, облика

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{i=n} X_i = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \ddot{x}_i; \qquad \sum_{i=1}^{i=n} M_{xi} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (y_i \ddot{z}_i - z_i \ddot{y}_i),\\
&\sum_{i=1}^{i=n} Y_i = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \ddot{y}_i; \qquad \sum_{i=1}^{i=n} M_{yi} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (z_i \ddot{x}_i - x_i \ddot{z}_i),\\
&\sum_{i=1}^{i=n} Z_i = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \ddot{z}_i; \qquad \sum_{i=1}^{i=n} M_{zi} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (x_i \ddot{y}_i - y_i \ddot{x}_i).
\end{aligned} \tag{260'}$$

Свакој материјалној тачки одговара, дакле, по *шест диференцијалних једначина другог реда.*

12.3 СРЕДИШТЕ МАСА МАТЕРИЈАЛНОГ СИСТЕМА

Положај материјалне тачке m_i одређује се вектором положаја $\vec{r_i}$ у односу на непокретну тачку O (*непокретни пол*) и релативним вектором положаја — $\vec{l_{ik}}$ у односу на неку другу масу m_k тога система (сл. 79). Друга маса m_k одређује се апсолутним вектором положаја $\vec{r_k}$ у односу на пол O и релативним вектором положаја $\vec{l_{ik}}$ у односу на прву масу m_i. Због тога из троугла $\Delta O m_i m_k$ следи овај векторски однос



Сл. 79. — Средиште маса

$$\vec{r_k} = \vec{r_i} + \vec{l_{ik}}\,. \qquad (261)$$

Производ вектора положаја и одговарајуће масе $(m_i \vec{r_i})$ назива се *поларни линеарни момент масе m_i за непокретни пол O.* Пошто је он производ скалара (m_i) и вектора $(\vec{r_i})$ то је вектор, колинеаран са првим вектором и истог смера али m_i пута већег интензитета, јер је маса позитивни скалар.

Збир ових вектора подељен *укупном масом система*

$$M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \sum_{i=1}^{i=n} m_i$$

одређује у простору једну тачку (C) која се назива *средиште система материјалних тачака (средиште маса или центар инерције).* Вектор положаја ове тачке (C) у односу на исти непомични пол (O) одређује се обрасцем

$$\boxed{\vec{r_C} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \vec{r_i}} \qquad (262)$$

Усвојимо ли у полу O Декартов координатни систем $Oxyz$, координате средишта маса одређују се једначинама

$$x_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i\,; \quad y_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i\,; \quad z_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i\,. \qquad (262')$$

Израз $M\vec{r}_C$ претставља линеарни момент, за исти пол, целокупне масе система концентрисане у средишту. Према томе, *средиште можемо сматрати оном тачком система у којој је сажета целокупна маса.* Производи $m_i x_i$, $m_i y_i$, $m_i z_i$ претстављају моменте масе m_i за координатне равни (Oyz, односно Ozx, Oxy). Исто тако производ $M x_C$, односно остала два, претставља момент целокупне масе, сажете у средишту, за координатну раван Oyz, односно за Ozx, Oxy. Производ масе и растојања од сталне равни назива се и *планарним моментом* масе за ту раван.

Горњу једначину можемо изразити овако: *Моменат целокупне масе система, сажете у његовом средишту, једнак је векторском збиру момената свих маса за исти пол O,* односно, *планарни моменат масе система, сажете у његовом средишту, једнак је алгебарском збиру планарних момената свих маса за исту сталну раван.*

У статици у простору (**чл. 29**), одредили смо средиште система везаних паралелних сила. Ако све масе система претставимо паралелним векторима, везаним у њиховим средиштима, сразмерним по интензитету масама, онда се појам средишта маса изједначује са појмом средишта система паралелних везаних вектора $c\,m_i\,\vec{u}$, где је c коефицијент сразмере а $\vec{u}$ орт векторâ. Ако је $c = g = 9{,}81\ \mathrm{msec}^{-2}$ а $\vec{u} = \vec{k}$, онда се средиште маса поклапа са *тежиштем* (*Статика*, V део, чл. 31).

Према томе положај средишта маса, скаларâ, можемо графичким путем одредити на исти начин као што смо одређивали положај тежишта.

Ако уместо пола O узмемо други пол O' (сл. 80) онда једначина (262) постаје

$$M\vec{r'}_C = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \vec{r_i}'.$$

Из троугла $OO'm_i$ следи релација

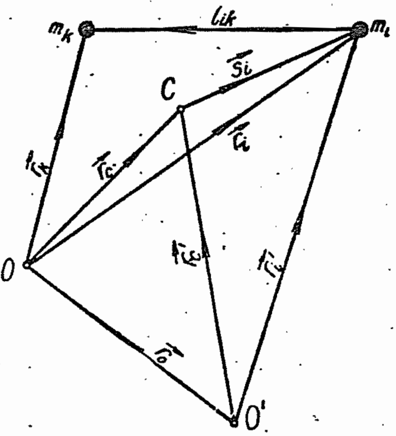
$$\vec{r'}_i = \vec{r}_0 + \vec{r}_i, \quad \text{где је} \quad \overrightarrow{O'O} = \vec{r}_0 = const.$$

Уносећи у горњу једначину вредност за $\vec{r}_i$ биће

$$M\vec{r'}_C = M\vec{r}_0 + M\vec{r}_C.$$

односно

$$\vec{r}_C{}' = \vec{r}_0 + \vec{r}_C,$$



Сл. 80. — Средиште система не зависи од избора пола

што значи да *положај средишта система не зависи од избора пола O.*

Када је пол у средишту маса, онда је свака маса одређена у односу на средиште вектором положаја $\vec{s}_i$, па је $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{s}_i$. Како се вектор $\vec{r}_C$ може извући испред знака збира, биће

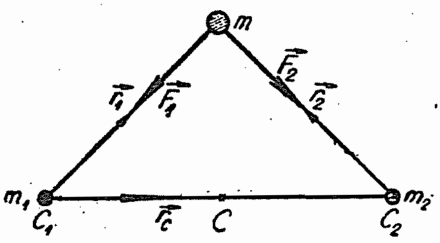
$$M\,\vec{r}_e = M\,\vec{r}_C + \sum_{i=1}^{i=n} m_i\,\vec{s}_i$$

па је

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} m_i\,\vec{s}_i = 0} \tag{263}$$

Дакле, *линеарни поларни момент маса система у односу на само средиште једнак је нули.*

Када су релативна растојања маса система непроменљива ($l_{ik} = const.$), материјални систем је *крут*, те средиште система не мења при кретању свој релативни положај у односу на масе; у противном је *променљив*, па средиште при кретању *мења* свој апсолутни положај у односу на пол O и релативни у односу на масе.



Сл. 81. — Равнотежни положај масе m услед привлачних сила

Пример. — 58) Масу m привлаче два центра C_1 и C_2 силама сразмерним масама и првим степенима растојања (сл. 81). Одредити положај у коме ће се маса налазити у равнотежи.

Решење. — На масу m дејствује резултујућа сила

$$\vec{F} = -\,k^2\,(m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2)\,,$$

где је k^2 коефицијент сразмере. У случају равнотеже биће $\vec{F} = 0$ па је $m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2 = 0$, тј. тачка ће бити у равнотежи у *средишту маса*, чији је положај одређен у односу на масу m_1 вектором

$$\vec{r}_C = m_2 \cdot \overrightarrow{C_1\,C_2}\,/\,(m_1 + m_2)\,.$$

12.4 ЗАКОН О КОЛИЧИНИ КРЕТАЊА

Ако се материјалне тачке система налазе у кретању, онда се вектори положаја маса $\vec{r}_i$ и вектор положаја средишта мењају са временом па су функције параметра t, тј. $\vec{r}_i = f_i\,(t)$; $\vec{r}_C = f\,(t)$. Када једначину (262) диференцирамо по времену добивамо

$$M\,\dot{\vec{r}}_C = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\,\dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\,\vec{v}_i = M\,\vec{v}_C\,;$$

овде смо са $\vec{v}_i$ означили брзину сваке материјалне тачке а са $\vec{v}_C$ брзину средишта маса. Израз $m_i \vec{v}_i$ дефинисали смо количином кретања материјалне тачке, па је збир вектора количина кретања

$$\boxed{\vec{K}_C = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{K}_i = \mathrm{M}\,\vec{v}_C} \tag{264}$$

Овај вектор назива се *количина кретања система материјалних тачака.*

Количина кретања система материјалних тачака једнака је векторском збиру количина кретања свих *маса система,* односно, *једнака је количини кретања средишта система у коме сматрамо да је сажета целокупна маса система.*

Овој векторској једначини одговарају за Декартов правоугли координатни систем три једначине:

$$K_{Cx} = \mathrm{M}\,v_{Cx} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\,\dot{x}_i; \qquad K_{Cy} = \mathrm{M}\,v_{Cy} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\,\dot{y}_i,$$

$$K_{Cz} = \mathrm{M}v_{Cz} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\,\dot{z}_i.$$

Брзине тачака мењају се, у општем случају, у току времена, па можемо једначину (264) диференцирати по времену. Тада добивамо

$$d\vec{K}_C/dt = \dot{\vec{K}}_C = \sum \dot{\vec{K}}_i = \sum m_i\,\dot{\vec{v}}_i = \sum m_i\,\vec{a}_i$$

односно

$$\boxed{\dot{\vec{K}}_C = \mathrm{M}\,\dot{\vec{v}}_C = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i = \vec{F}_r} \tag{265}$$

Ова векторска једначина претставља *закон о количини кретања система: Извод по времену количине кретања материјалног система једнак је векторском збиру свих спољашњих сила које дејствују на поједине масе система,* односно, *главном вектору система спољашњих сила.*

У спољашње силе убрајамо и отпоре веза ако извесне тачке система врше принудна кретања.

Означимо ли са $\vec{a}_C = \dot{\vec{v}}_C$ *убрзање средишта маса,* горња једначина постаје

$$\boxed{\mathrm{M}\,\vec{a}_C = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i = \vec{F}_r} \tag{266}$$

и изражава Њутнов закон о кретању средишта маса материјалног система: *Средиште система материјалних тачака креће се као једна материјална тачка масе* M, *сажете у средишту, под утицајем резултанте спољашњих сила које дејствују на поједине тачке система.*

Овој векторској једначини одговарају три скаларне једначине облика

$$M\ddot{x}_C = \sum_{i=1}^{i=n} X_i, \qquad M\ddot{y}_C = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i, \qquad M\ddot{z}_C = \sum_{i=1}^{i=n} Z_i, \tag{266'}$$

где су X_i, Y_i, Z_i координате спољашње силе.

Из ових једначина увиђамо да унутрашње силе немају утицаја на промену количине кретања система, тј. на кретање средишта.

Пошто можемо сматрати да се материјални систем креће као једна материјална тачка масе M, *концентрисане у средишту система маса, то се све динамичке једначине које смо извели у динамици материјалне тачке могу применити и на проблеме кретања система материјалних тачака.*

Ако на систем не дејствују спољашње силе, или ако су оне такве да је увек збир активних сила и сила веза једнак нули, биће

$$\dot{\vec{K}}_C = 0,$$

па је први интеграл

$$\boxed{\vec{K}_C = \vec{C} = const.} \tag{267}$$

Овај интеграл је *векторски интеграл количине кретања система.* Њему одговарају три скаларна интеграла облика

$$K_{Cx} = C_x = const., \quad K_{Cy} = C_y = const., \quad K_{Cz} = C_z = const.$$

Како је $M\vec{v}_C = \vec{K}_C$ то је брзина средишта

$$\vec{v}_C = \vec{c} = const.,$$

па се овај закон, по *Њутну*, назива *закон о одржавању количине кретања* или *закон о одржавању кретања средишта маса,* пошто се средиште креће *праволиниски и једнолико* , јер поновним интеграљењем добивамо једначину линије путање

$$\vec{r}_C = \vec{v}_C t + \vec{b}$$

која је, заиста, *права линија.*

Из овога можемо извести овај закључак: *Када на материјални систем не дејствују спољашње силе, или ако је њихов векторски збир* *једнак нули, средиште се система маса креће једнолико и праволиниски, тј. по инерцији.*

Примери. — 59) Граната тежине 20 kg избачена је из топа почетном брзином $v_0 = 500$ m sec^{-1}. Тежина је топа 1 t. За колико ће се померити топ уназад после хоризонталног пуцња ако је коефицијент трења $\mu = 0{,}9$?

Решење. — Нека је M маса топа а m маса гранате, онда, по претпоставци да нема трења, важи закон о одржању количине кретања

$$\mathrm{M}\ v + m\ v_0 = 0,$$

па је брзина кретања топа уназад $v = -m\ v_0/\mathrm{M}$. Отпор трења умањује ову брзину. Ако топ сматрамо материјалном тачком онда је по закону о живој сили $\mu\ \mathrm{M}\ g\ x = {}^1/_2\,\mathrm{M}\ v^2$, где је x пређени пут уназад. С обзиром на горе добивену вредност биће

$$x = {}^1/_2\,(m/\mathrm{M})^2\,(v_0^2/\mu\,g) = 5{,}7\ \mathrm{m}.$$

За умањивање *„Трзања цеви“* употребљавају се кочнице: опружне, хидрауличне и гасне.

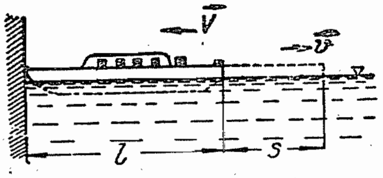
60) Човек који је седео на крми мирног и непривезаног чамца устане и пређе на кљун. Занемарујући отпор воде, наћи: *a*) померање чамца, *b*) брзину кретања чамца (сл. 82).

Решење. — Нека су масе: m чамца, M човека, и брзине v и V, онда по закону о одржању количина кретања, пошто на систем не дејствују спољашње силе, биће

$$m\ v - \mathrm{M}\ (V - v) = 0, \quad \text{односно}$$

$$v = \mathrm{M}\ V/(\mathrm{M} + m).$$

Човек ће за то време прећи пут l а чамац s, па је померање чамца $s = \mathrm{M}\ l/(\mathrm{M} + m)$.



Сл. 82

61) Вода улази у непокретни канал брзином $v_0 = 2$ m/sec а излази из њега брзином $v_1 = 4$ m/sec. Ове брзине чине са хоризонтом углове $\alpha_0 = 90^0$, $\alpha_1 = 30^0$. Површина улазног пресека канала је $A_0 = 200$ cm². Одредити хоризонталну компоненту силе којом вода утиче на зид канала (т. зв. *реакцију воде*).

Решење. — Како је прираштај количине кретања једнак елементарном импулсу $dK = F\,dt$ то је за бесконачно мали временски размак хоризонтална пројекција импулса у хоризонталном правцу

$$X\,dt = m\,(v_1 \cos\alpha_1 - v_0 \cos\alpha_0).$$

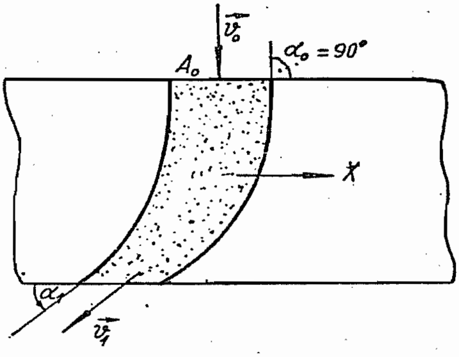
Маса воде која се налази у запремини канала једнака је

$$m = \int \rho\,(\vec{A}_0, \vec{v}_0)\,dt,$$

ρ је густина ($\rho = \gamma/g$).

За дате податке је

$$X = \rho\,A_0\,v_0\,v_1 \cos\alpha_1 = 14{,}1\ \mathrm{kg}.$$



Сл. 83. — Реакција протока воде

12.5 ЗАКОН О МОМЕНТУ КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА (ЗАМАХУ)

Момент количине кретања (замах) материјалне тачке m_i за пол O дат је изразом (**чл. 4.2**)

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \vec{K}_i] = [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] ;$$

за цео систем биће замах

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{i=n} [\vec{r}_i, \; m_i \; \vec{v}_i] = \sum_{i=1}^{i=n} [\vec{r}_i, \vec{K}_i]. \tag{268}$$

Овој векторској једначини одговарају три скаларне — облика

$$L_x = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i); \qquad L_y = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i),$$

$$L_z = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i).$$

Како замах зависи од времена, његов је први извод по времену

$$\dot{\vec{L}}_O = \sum_{i=1}^{i=n} [\dot{\vec{r}}_i, \vec{K}_i] + \sum_{i=1}^{i=n} [\vec{r}_i, m_i \; \vec{a}_i] = \sum_{i=1}^{i=n} [\vec{r}_i, \vec{F}_i] = \vec{\mathfrak{M}}_O, \tag{269}$$

јер је, због колинеарности вектора $\dot{\vec{r}}_i$ и $\vec{K}_i$, први члан једнак нули.

Ова једначина изражава закон о замаху система:

Извод по времену замаха система материјалних тачака за непокретни пол једнак је главном моменту свих спољашњих сила система а за исти пол као моментну тачку.

Овој векторској једначини одговарају три скаларне:

$$\dot{L}_x = \Sigma m_i(y_i \ddot{z}_i - z_i \ddot{y}_i) = \mathfrak{M}_x; \quad \dot{L}_y = \Sigma m_i (z_i \ddot{x}_i - x_i \ddot{z}_i) = \mathfrak{M}_y,$$

$$\dot{L}_z = \Sigma m_i (x_i \ddot{y}_i - y_i \ddot{x}_i) = \mathfrak{M}_z.$$

С обзиром на секторску брзину (**чл. 4.2**), замах се може претставити и овим обрасцем

$$\boxed{\vec{L}_O = 2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i \vec{S}_i} \tag{270}$$

Тада образац (269) постаје

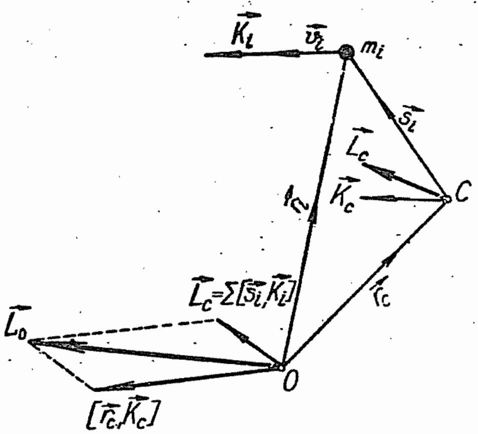
$$\boxed{\dot{\vec{L}}_O = 2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i \dot{\vec{S}}_i = \vec{\mathfrak{M}}_O} \tag{270'}$$

и претставља закон површина: *Извод по времену замаха система за непокретни пол једнак је векторском збиру производа двоструких маса са њиховим секторским убрзањима.*

Из статике је познато да се главни момент просторног система сила мења када се промени моментна (редукциона) тачка-пол. То значи да ће се променити и замах система. Буде ли пол *покретан*, замах ће се такође променити. Узмимо средиште система за покретни пол, онда је положај масе одређен у односу на непокретни пол O (сл. 84), вектором $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{s}_i$, па је замах система за непокретни пол O:

$$\vec{L}_O = \Sigma[\vec{r}_C, \vec{K}_i] + \Sigma[\vec{s}_i, \vec{K}_i].$$

Други члан претставља замах за средиште система, а $\vec{r}_C$ се може ставити испред знака збира, те следи



Сл. 84. — Замах система за средиште

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{L}_C + [\vec{r}_C, \vec{K}_C] = \vec{L}_C + \vec{L}_O^{(\vec{K}_C)}} \qquad (271)$$

Замах материјалног система за непокретни пол једнак је векторском збиру замаха система за средиште и замаха количине кретања система за исти пол.

Диференцирамо ли овај израз по времену, добивамо израз за закон о замаху:

$$\dot{\vec{L}}_O = \dot{\vec{L}}_C + [\dot{\vec{r}}_C, \vec{K}_C] + [\vec{r}_C, \dot{\vec{K}}_C].$$

Како су вектори $\dot{\vec{r}}_C$ и $\vec{K}_C$ колинеарни, то је други члан на десној страни горње једначине једнак нули. Трећи члан може се написати, према (265), у облику $[\vec{r}_C, \vec{F}_r]$, па је

$$\dot{\vec{L}}_O = \dot{\vec{L}}_C + [\vec{r}_C, \vec{F}_r] = \vec{\mathfrak{M}}_O.$$

Одавде следи да је

$$\dot{\vec{L}}_C = \vec{\mathfrak{M}}_O - [\vec{r}_C, \vec{F}_r] = \vec{\mathfrak{M}}_O - \vec{M}_O^{\vec{F}_r(C)} \qquad (271')$$

јер је $[\vec{r}_C, \vec{F}_r]$ момент главног вектора са нападном тачком у средишту за тачку O као моментну тачку.

Извод по времену замаха система за средиште система као пол једнак је векторској разлици главног момента система спољашњих сила за непокретни пол и момента главног вектора (резултанте) тих сила, са нападном тачком у средишту система а за непокретни пол као моментну тачку.

Из ове релације можемо извести и овај став:

$$\dot{\vec{L}}_C = \sum_{i=1}^{i=n} [\vec{r}_i, \vec{F}_i] - \sum_{i=1}^{i=n} [\vec{r}_C, \vec{F}_i] = \sum_{i=1}^{i=n} [\vec{r}_i - \vec{r}_C, \vec{F}_i]$$

односно због односа $\vec{s}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_C$ биће

$$\boxed{\dot{\vec{L}}_C = \sum_{i=1}^{i=n} [\vec{s}_i, \vec{F}_i] = \vec{\mathfrak{M}}_C} \qquad (272)$$

Закон о замаху, дакле, *важи и за средиште маса.*

Када на систем материјалних тачака *не дејствују спољашње силе*, или су пак такве да је њихов главни момент једнак нули $\mathfrak{M}_O = 0$, онда је замах система за пол O константан

$$\vec{L}_O = \vec{C} = const. \qquad (273)$$

У овом је случају замах константан за сваки пол и не зависи од времена. Овај се закон назива *закон о одржавању замаха (кинетичког момента).*

Израз (273) претставља први интеграл замаха у векторском облику. Њему одговарају три скаларна прва интеграла

$$L_x = C_x = const.; \; L_y = C_y = const.; \; L_z = C_z = const. \qquad (273')$$

који се називају *интеграли замаха (кинетичног момента).*

Пошто је замах константан то ће према обрасцу (270) и збир производа маса и одговарајућих секторских брзина бити константан

$$2\sum_{i=1}^{i=n} m_i \vec{S}_i = \vec{C} = const.$$

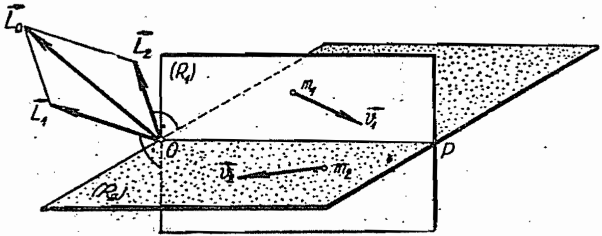
Овај интеграл замаха претставља *закон о одржању површина.*

Вектор $\vec{C}$ одређује сталну раван у простору управну на замах, која се, по Лапласу, назива *инваријабилном (непроменљивом) равни.* Пошто је секторска брзина претстављена векторским производом $\vec{S} = {}^1/_2 [\vec{r}, \vec{v}]$, то је највећа за тачке које леже у инваријабилној равни па се ова раван назива и *раван највеће секторске брзине (површине).*

Кад се материјални систем састоји само од *двеју маса*, *Јакоби (Charles Gustave Jacobi*, 1804—1851 год.) је извео теорему помоћу које се геометриски може одредити Лапласова раван. Нека су $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ брзине маса m_1 и m_2. Ако кроз координатни почетак O и сваку брзину поставимо равни (R_1) и (R_2), пошто не дејствују спољашње силе, то су кинетички моменти $\vec{L}_1$ и $\vec{L}_2$ управни на одговарајуће равни (сл. 85). Њихов векторски збир, замах система

$$\vec{L}_O = \vec{L}_1 + \vec{L}_2,$$

претстављен је дијагоналом паралелограма. Равни (R_1) и (R_2) управне су на равни паралелограма момената, па је на њој управна и пресечна права тих равни (OP). Кроз ту праву пролази и Лапласова инваријабилна раван која је управна на замах $\vec{L}_O$.



Сл. 85. — Јакобијева теорема

Слично моменту динаме и замах за средиште има *најмању вредност*. Он ће бити једнак за све тачке простора у ова три случаја која непосредно следе из једначине (271):

1° *ако је средиште маса у непокретном полу* ($\vec{r}_C = 0$),

2° *ако је средиште маса непокретно* ($\vec{v}_C = 0$),

3° *ако је брзина средишта колинеарна са вектором* $\vec{r}_C$.

У свим овим случајевима отпада допунски члан једначине (271), па је $\vec{L}_O = \vec{L}_C$.

12.6 ЗАКОН О ЖИВОЈ СИЛИ (КИНЕТИЧКОЈ ЕНЕРГИЈИ)

Када диференцијалну једначину кретања материјалне тачке

$$m_i \vec{a}_i = \Sigma \vec{F}_i + \Sigma \vec{F}_{ui}$$

помножимо скаларно вектором $\vec{v}_i \, dt = d\vec{s}_i$, где је $d\vec{s}_i$ *елементарно* померање, добићемо, према (чл. 4.3)

$$\Sigma (\vec{F}_i, d\vec{s}_i) + \Sigma (\vec{F}_{ui}, d\vec{s}_i) = m_i (\vec{a}_i, \vec{v}_i \, dt) = d\,(^1/_2 \, m_i \, v_i^2)$$

односно

$$d\,\mathbf{A}_{si} + d\mathbf{A}_{ui} = d\,(^1/_2 \, m_i \, v_i^2) = dE_{ki};$$

овде је $d\,\mathbf{A}_{si}$ елементарни рад спољашњих сила, $d\,\mathbf{A}_{ui}$ унутрашњих сила а E_{ki} кинетичка енергија материјалне тачке.

Уопште узев, механички рад није тотални диференцијал и биће то само у оном случају када су и спољашње и унутрашње силе *конзервативне*.

За цео систем биће

$$\sum_{i=1}^{i=n} d\,\mathbf{A}_{si} + \sum_{i=1}^{i=n} d\,\mathbf{A}_{ui} = \sum_{i=1}^{i=n} d\,(^1/_2\, m_i\, v_i^2) = \sum_{i=1}^{i=n} d\,E_{ki}$$

односно

$$\boxed{d\,\mathbf{A}_s + d\,\mathbf{A}_u = d\,E_k} \tag{274}$$

где су $\mathbf{A}_s$ и $\mathbf{A}_u$ радови спољашњих и унутрашњих сила, а E_k кинетичка енергија (жива сила) система

$$\boxed{E_k = \sum_{i=1}^{i=n} {}^1/_2\, m_i\, v_i^2} \tag{274'}$$

Ово је израз закона о живој сили у диференцијалном облику који гласи: *Диференцијал кинетичке енергије система материјалних тачака једнак је збиру елементарних радова свих спољашњих и унутрашњих сила.*

У спољашње силе, као што смо раније навели, убрајамо и силе везе ако је кретање материјалног система, или извесних његових тачака принудно.

Ако израз (274) интегралимо у временском размаку $t - t_0$ биће

$$\boxed{\int_{t_0}^{t} d\,\mathbf{A}_s + \int_{t_0}^{t} d\,\mathbf{A}_u = E_k - E_{k0}} \tag{275}$$

Овај израз претставља закон о живој сили у интегралном облику: *Прираштај живе силе (кинетичке енергије) система материјалних тачака једнак је збиру механичких радова свих спољашњих и унутрашњих сила које оне врше у том временском размаку. Кад су унутрашње силе конзервативне* те имају функцију силе (односно потенцијал), тада је

$$\int_{t_0}^{t} d\,\mathbf{A}_u = U - U_0 = \Pi_0 - \Pi\,,$$

па закон о живој сили гласи:

$$\int_{t_0}^{t} d\,\mathbf{A}_s = (E_k + E_p) - (E_k - E_p)_0 = \mathbf{E} - \mathbf{E}_0\,.$$

Прираштај механичке енергије система материјалних тачака једнак је збиру механичких радова свих спољашњих сила, које у датом временском размаку дејствују на поједине материјалне тачке система.

Када су *унутрашње силе конзервативне* и *ако на систем не дејствују спољашње силе,* тада је

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_0 = const.$$

У овом случају, дакле, *важи закон о одржавању механичке енергије.* Она је стална и независна од времена.

Постоје ли између материјалних тачака везаног система и неидеалне везе, онда унутрашње силе *нису конзервативне,* јер силе везе немају функцију сила те закон о одржавању механичке енергије више не важи.

Међутим, општи закон о одржавању енергије, као универзални закон природе, важи, и механичка енергија претвара се тада у друге облике енергије.

Ако би и *спољашње и унутрашње силе биле конзервативне,* онда би закон о одржавању механичке енергије важио, јер је

$$(E_{ks} + E_{ps} + E_{pu}) = (E_{ks} + E_{ps} + E_{pu})_0$$

тј.

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_0 = const.;$$

овде је E_{ps} потенцијална енергија спољашњих сила.

Материјални системи за које важи закон о одржавању механичке енергије јесу *конзервативни;* у противном су *неконзервативни.*

12.7 РЕЛАТИВНО КРЕТАЊЕ СИСТЕМА У ОДНОСУ НА СРЕДИШТЕ

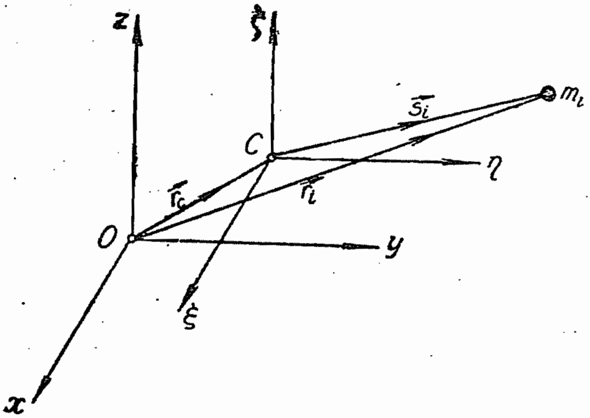
Узмимо средиште система материјалних тачака за почетак новог координатног система $C\xi\eta\zeta$ (сл. 86), који се транслаторно креће у односу на апсолутни триједар $Oxyz$. Положај сваке материјалне тачке одређен је у односу на средиште релативним вектором положаја $\vec{s}_i$, па из троугла ΔOCm_i следи однос

$$\vec{s}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_C \,. \tag{276}$$

Диференцирајмо овај израз два пута по времену и у њега унесимо вредности из (258) и (266) биће релативно убрзање масе m_i

$$\ddot{\vec{s}}_i = \frac{\vec{F}_{ui}{}^{(r)}}{m_i} + \left[\frac{\vec{F}_{si}{}^{(r)}}{m_i} - \frac{\vec{F}_r}{\mathrm{M}}\right]. \tag{277}$$

На релативно убрзање материјалне тачке имају утицаја и спољашње и унутрашње силе система.



Сл. 86. — Релативно кретање маса у односу на средиште

Када су све спољашње силе паралелне и по интензитетима сразмерне масама, $\vec{F}_i = km_i \vec{u}$, израз у загради једначине (277) једнак је нули, па је $m_i \vec{s}_i = \vec{F}_{ui}^{(r)}$. У томе случају на *релативно убрзање утичу само унутрашње силе.*

Диференцирањем израза (276) добивамо апсолутну брзину $\vec{v}_i = \vec{v}_C + \dot{\vec{s}}_i$, па је кинетичка енергија система

$$E_k = \sum {}^1/_2\, m_i\, v_i^2 = \sum {}^1/_2\, \{m_i\, v_C^2 + m_i\, \dot{s}_i^2 + 2\, m_i\, (\vec{v}_C,\, \vec{s}_i)\}.$$

Према (264) је $\Sigma m_i \dot{\vec{s}}_i = \mathrm{M}\, \vec{v}_{Cr} = 0$, јер је релативна брзина средишта у односу на само средиште једнака нули. Због тога кинетичка енергија има облик

$$\boxed{E_k = {}^1/_2\, \mathrm{M}\, v_C^2 + {}^1/_2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i\, v_{ri}^2 = E_C + E_{ur}} \qquad (278)$$

Она се састоји из два дела: први је *кинетичка енергија средишта* у коме сматрамо да је сажета целокупна маса система, други је *релативна кинетичка енергија* у односу на средиште. Ово је израз *Кенигове теореме (Samuel König*, 1712—1757) и гласи:

Кинетичка енергија система материјалних тачака за апсолутно кретање једнака је збиру кинетичке енергије његовог средишта (**спољашње кинетичке енергије**) *и релативне кинетичке енергије у односу на средиште* (**унутрашње кинетичке енергије**).

Свако кретање система материјалних тачака може се кинематички схватити да се састоји из транслаторног кретања средишта система и релативног кретања појединих материјалних тачака у односу на средиште које у томе тренутку сматрамо непомичним[1].

---

[1] *Шалова* теорема, *Кин.* чл. **12.**

Из Кенигове теореме увиђамо и са динамичке стране ову поделу кретања. Кинетичка енергија система материјалних тачака за апсолутно кретање састоји се из два дела: *кинетичке енергије средишта*, у коме сматрамо да је сажета целокупна маса, и *релативне кинетичке енергије*, тј. кинетичке енергије система у релативном кретању у односу на средиште *(центар инерције)* као тренутно непокретну тачку.

12.8 КЛАСИФИКАЦИЈА СИСТЕМА МАТЕРИЈАЛНИХ ТАЧАКА

У динамици материјалне тачке видели смо да свака слободна тачка има три степена слободе кретања. Према томе, систем од n материјалних тачака имаће $3n$ степени слободе кретања. Међутим, може се десити да су извесне материјалне тачке принуђене да се крећу по линијама или површинама. Ова ограничења слободе кретања назвали смо *везама*. Везе смањују број степена слободе кретања, а изражавају се *једначинама (задржавајуће* или *двостране везе)* или *неједначинама (незадржавајуће* или *једностране везе)*. Веза у облику површине смањује један степен слободе кретања, а веза у облику линије два степена. Према томе, ако је p тачака принуђено да се креће по површинама а q тачака по линијама, систем има $3n - p - 2q$ степена слободе кретања.

Положај сваке масе одређен је њеним координатама — бројевима. Координате морају испуњавати услов да су међусобно *независне*, што значи да се бесконачно малом променом једне координате, док су остале непромењене, систем враћа у положај који везе допуштају. Према томе, могао би се број степена слободе кретања и овако дефинисати: *Под бројем степена слободе кретања система материјалних тачака подразумева се број независних могућности да се систем из једног положаја помери у бесконачно блиски који везе дозвољавају.*

Према врстама веза и условима које морају испуњавати системи се деле на *холономне* и *нехолономне*. Ако је веза зависна само од координата и времена, напр.

$$f(x_i, y_i, z_i, t) \lesseqgtr = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

она је *холономна*[1] *(коначна)*, па се систем са таквим везама назива *холономан*. Ако веза зависи од координата, извода тих координата по времену и времена, напр.

$$\varphi(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i\ \dot{y}_i\ \dot{z}_i, t) \lesseqgtr 0$$

она је *нехолономна (диференцијална)*, па се систем са таквим везама назива *нехолономан*[2].

---

[1] ὅλος (потпуни); νόμος (закон).

[2] По терминологији *Херца (H. Hertz*, 1857—1894, *„Die Prinzipien der Mechanik")*.

Прве везе налажу извесна ограничења само координатама тачака система, па се називају *коначним* или *геометриским*. Друге налажу ограничења како координатама тако и брзинама, па се називају *кинематичким* или *диференцијалним* везама.

Ако везе не зависе експлицитно од времена називају се *сталне (склерономне* или *стационарне)*, у противном су *покретне* (*реономне* или *нестационарне*).

У техничкој механици највише се јављају *холономно-склерономни системи*, тј. системи чије су везе изражене са

$$f(x_i\,,\ y_i\,,\ z_i) \gtreqless 0$$

па било да су *двостране* (*задржавајуће*) или *једностране* (*незадржавајуће*).

У већини практичних проблема диференцијалне везе зависе *линеарно од брзина* па имају облик

$$\sum_{i=1}^{i=n} (A_i \dot{x}_i + B_i \dot{y}_i + C_i \dot{z}_i) + D = 0,$$

где су A_i, B_i, C_i и D функције координата x_i, y_i, z_i и времена t у случају реономних веза или само координата у случају склерономних веза.

Помножимо ли горњу везу са dt добивамо

$$\sum_i (A_i\, dx_i + B_i\, dy_i + C_i\, dz_i) + D\, dt = 0.$$

Она претставља *линеарну форму* у односу на диференцијале координата и времена. Ако постоји неки *множилац* μ који је функција од координата и времена, или само од координата, тако да су

$$\mu A_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\,; \quad \mu B_i = \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\,; \quad \mu C_i = \frac{\partial \Phi}{\partial z_i}\,; \quad \mu D = \frac{\partial \Phi}{\partial t}\,,$$

где је Φ нека функција од координата и времена, онда су горњи изрази тотални диференцијали, па везе после интеграљења постају коначне, те ограничењу подлежу само координате. Овакве диференцијалне везе називају се *интеграбилне* и припадају класи холономних веза. У случају да нема множиоца μ, везе *нису интеграбилне* и припадају класи нехолономних веза.

Нека је холономни систем од n материјалних тачака ограничених са k коначних веза облика

$$f_j(x_i\,, y_i\,, z_i\,, t) = 0\,, \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, k \end{matrix} \tag{279}$$

где се индекс i односи на материјалну тачку а j на коначну везу, онда има $3n - k$ степена слободе кретања. Слично услову за брзину покретне тачке (чл. 6.2), добићемо услове:

$$\frac{d f_j}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \dot{z}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0.$$

Брзине које задовољавају ове услове зову се *могуће брзине* датог система материјалних тачака.

Поновним диференцирањем добивамо услове за убрзања

$$\frac{d^2 f_j}{dt^2} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \ddot{x}_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \ddot{y}_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \ddot{z}_i + D_2(f_j) = 0.$$

Убрзања која задовољавају ове услове називају се *могућна убрзања*.

У случају *нехолономног система* са k коначних и r линеарних диференцијалних неинтеграбилних веза услови за брзине и убрзања биће:

а) $$\frac{d f_j}{dt} = 0; \quad j = 1, 2, \ldots, k; \quad \varphi_l = \sum_{i=1}^{i=n} A_{li} \dot{x}_i + B_{li} \dot{y}_i + C_{li} \dot{z}_i + D_l = 0$$

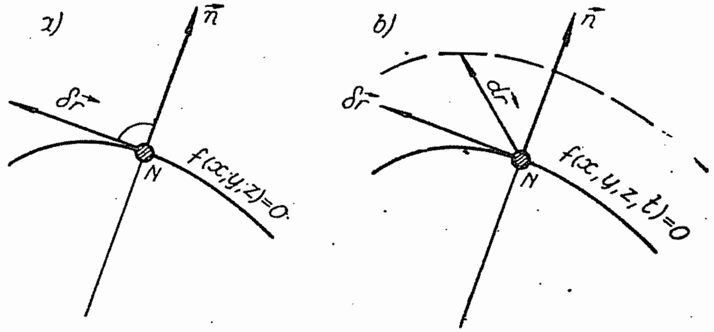
$$l = 1, 2, \ldots, r;$$

б) $$\frac{d^2 f_j}{dt^2} = 0; \quad \frac{d \varphi_l}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} A_{li} \ddot{x}_i + B_{li} \ddot{y}_i + C_{li} \ddot{z}_i + D_2(\varphi_l) = 0,$$

где су $D_2(f_j)$ и $D_2(\varphi_l)$ квадратне функције у односу на пројекције брзина тачака (чл. 6.3). Ове ће функције бити хомогене квадратне функције (квадратне форме) у случају:

1⁰ *ако су коначне везе склерономне* ($\partial f / \partial t = 0$),
2⁰ *ако су диференцијалне везе склерономне* ($\partial \varphi / \partial t = 0$), и
3⁰ *ако су диференцијалне везе хомогене* ($D_l = 0$).

Свако померање материјалне тачке које у једном тренутку везе дозвољавају назива се *могућно померање* или *виртуално померање*. Ова померања обележавамо са $\delta \vec{r}$ за разлику од стварних померања $d\vec{r}$.



Сл. 87. — Виртуално и стварно померање

Ако је веза склерономна $f(x, y, z) = 0$, а тачка добије виртуално померање $\delta \vec{r}$ (сл. 87 *а*), онда координате покретне тачке морају идентачно задовољавати једначину везе

$$f\,(x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z)\equiv 0\,.$$

Развијемо ли ову функцију у *Тејлоров ред и задржимо се само на малим величинама првог реда*, биће:

$$f\,(x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z)=f\,(x,y,z)+\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z\equiv 0\,,$$

па, с обзиром на једначине веза, добивамо услов:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z\right)=(\text{grad}\ f,\ \delta\vec{r})=0\,. \qquad (280)$$

Добије ли тачка *стварно померање* $d\vec{r}$, тада мора бити $f\,(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)=0$, па истим поступком као и у претходном случају добивамо услов

$$(\text{grad}\ f,\ d\vec{r})=0\,. \qquad (280')$$

Из ових услова закључујемо да је *стварно померање такође једно од могућих (виртуалних)*.

Међутим у случају *реономне везе* $f\,(x,y,z,t)=0$, биће $f\,(x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z,\ t)=0$, па развијањем у Тејлоров ред добивамо услов

$$(\text{grad}\ f,\ \delta\vec{r})=0\,. \qquad (281)$$

Он показује да *реономност везе не утиче на варијације координата, јер и време не варира*. У случају стварног померања $d\vec{r}$ (сл. 87 *b*), мора бити $f\,(x+dx,\ y+dy,\ z+dz,\ t+dt)=0$. Развијањем у Тејлоров ред

$$f\,(x+dx,\ y+dy,\ z+dz,\ t+dt)=f\,(x,y,z,t)+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{df}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial t}dt$$

добивамо услов

$$(\text{grad}\ f,\ d\vec{r})+\frac{\partial f}{\partial t}dt=0\,; \qquad (281')$$

из њега видимо да стварно померање није уједно и виртуално померање које везе допуштају, те пројекције вектора $d\vec{r}$ подлежу друкчијим ограничењима него ли пројекције виртуалног померања $\delta\vec{r}$.

Из горњег излагања можемо извести овај закључак: *између виртуалних (могућих) померања које везе допуштају и стварних поме-*

рања која изазивају силе, постоји битна разлика у случају када су везе реономне (тј. када експлицитно зависе од времена).

У случају материјалног система са n материјалних тачака добићемо ове услове.

$$\begin{aligned}
&\sum_i \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0, \qquad j = 1,2,\dots,k \\
&\sum_i (A_{il}\,\delta x_i + B_{il}\,\delta y_i + C_{il}\,\delta z_i) = 0, \qquad\qquad l = 1,2,\dots,r \\
&\sum_i \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i}dy_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i}dz_i\right) + \frac{\partial f_j}{\partial t}dt = 0, \\
&\sum_i (A_{il}\,dx_i + B_{il}\,dy_i + C_{il}\,dz_i + D_l\,dt) = 0.
\end{aligned} \tag{282}$$

Дакле, *у случају да су коначне везе склерономне* ($\partial f_j/\partial t = 0$) *и линеарне везе хомогене* ($D_l = 0$) *не постоји разлика између стварних и виртуалних померања.*

13. ПРОБЛЕМИ КРЕТАЊА СИСТЕМА МАТЕРИЈАЛНИХ ТАЧАКА

13.1 ПРОБЛЕМ *n* ТЕЛА

За одређивање кретања материјалног система који се састоји из *n* материјалних тачака стоје нам на расположењу три закона: 1° *закон о количини кретања,* 2° *закон о моменту количине кретања (замаху)* и 3° *закон о живој сили (кинетичкој енергији).* Они се изражавају помоћу две векторске и једне скаларне једначине:

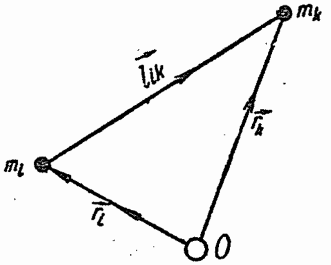
$$\boxed{\begin{gathered}\dot{\vec{K}}_C = M\vec{a}_C = \sum_{i=1}^{i=n}\vec{F}_i = \vec{F}_r; \quad \dot{\vec{L}}_O = \vec{\mathfrak{M}}_O \\ \sum_{i=1}^{i=n} d\,\mathbf{A}_s + \sum_{i=1}^{i=n} d\,\mathbf{A}_u = \sum_{i=1}^{i=n} d\,E_k\end{gathered}} \tag{283}$$

односно са *седам скаларних једначина*

$$\begin{gathered}M\,\ddot{x}_C = X_r; \quad M\,\ddot{y}_C = Y_r; \quad M\,\ddot{z}_C = Z_r, \\ \dot{L}_x = \mathfrak{M}_x; \quad \dot{L}_y = \mathfrak{M}_y; \quad \dot{L}_z = \mathfrak{M}_z, \\ \sum_{i=1}^{i=n} d\,\mathbf{A}_s + \sum_{i=1}^{i=n} d\,\mathbf{A}_u = \sum_{i=1}^{i=n} d\,E_k,\end{gathered} \tag{283'}$$

које се називају *опште (универзалне) диференцијалне једначине кретања система материјалних тачака.*

Наш *планетски систем* изложен је само дејству унутрашњих — Њутнових гравитационих — сила. Одредимо ли положаје маса m_i и m_k векторима положаја $\vec{r}_i$ и $\vec{r}_k$ у односу на непомични пол (O) и релативним вектором положаја $\vec{l}_{ik}$ (сл. 88), тада се привлачна сила маса може претставити



Сл. 88. — Гравитационе силе између маса планетског система

векторском једначином

$$\vec{F}_{ik} = \pm f \frac{m_i m_k}{l_{ik}^3}(\vec{r}_k - \vec{r}_i),$$

јер је $\vec{r}_k = \vec{r}_i + \vec{l}_{ik}$; f је гравитациона константа.

Диференцијална једначина масе m_i изражена у векторском облику јесте

$$m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_{ui} = \sum f \frac{m_i m_k}{l^3_{ik}}(\vec{r}_k - \vec{r}_i), \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ i \neq k \end{matrix} \tag{284}$$

Њој одговарају три скаларне једначине за Декартов координатни систем у непомичној тачки O (чл. 12. 2).

Пошто се материјални систем састоји из n материјалних тачака то ће бити и n векторских једначина (284), односно, $3\,n$ *скаларних диференцијалних једначина другог реда*. Како свака диференцијална једначина другог реда уводи и *две интеграционе константе*, ових ће бити укупно $6\,n$. Њих морамо одредити из почетних услова кретања којих мора бити такође $6\,n$. Познато је из теорије диференцијалних једначина да се њихов систем може заменити једном једначином вишег реда. Можемо, дакле, систем од $3\,n$ диференцијалних једначина другог реда заменити *једном јединой* диференцијалном једначином реда $6\,n$.

С обзиром на извесне специјалне услове кретања планетског система може се проблем донекле упростити. Пошто на планетски систем *не дејствују спољашње силе а унутрашње су конзервативне*, то једначине (283) постају

$$\dot{\vec{K}}_C = \mathrm{M}\,\vec{a}_C = 0; \quad \dot{\vec{L}}_O = 0; \quad \sum_{i=1}^{i=n} d\ \mathbf{A}_u = \sum_{i=1}^{i=n} d\ E_k.$$

Оне дозвољавају два векторска и један скаларни интеграл

$$\vec{v}_C = \vec{C}_1 \text{ или } \vec{r}_C = \vec{C}_1\,t + \vec{C}_2; \quad \vec{L}_O = \vec{C}_3; \quad E_k + E_p = \mathbf{E} = const, \tag{285}$$

где су $\vec{C}_i$ константни вектори — интеграционе константе.

Систем интеграла (285) уводи десет интеграционих константи, па се ред диференцијалне једначине може да снизи од $6\,n$ на $(6\,n—10)$.

Из система једначина (285) закључује се да се *средиште планетског система креће праволиниски и једнолико*. Путања средишта одређена је векторском једначином

$$\vec{r}_C = \vec{C}_1\,t + \vec{C}_2 = (\vec{r}_C)_0 + \vec{v}_C\,t, \tag{285'}$$

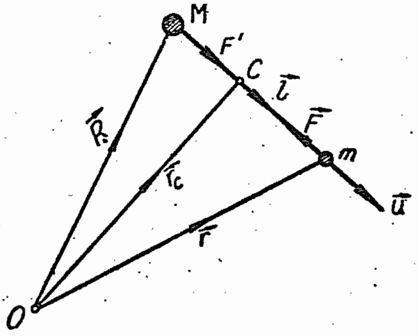
јер је $\vec{C}_2 = (\vec{r}_C)_0$ вектор положаја средишта система у почетном тренутку $t = 0$.

Астроном *Хершел*[1] (Frédéric Guillaume Herchel, 1738—1822) одредио је да се средиште нашег планетског система, које је врло блиско средишту Сунца, креће праволиниски брзином 20 km/sec од тачке *антиапекса* на небеској сфери ка тачки која се назива *апекс*[2].

Како је и замах система константан, то планетски систем има инваријабилну раван у којој се креће, а која се, према Лапласу, назива *инваријабилном равни планетског система*.

14.2 ПРОБЛЕМ ДВАЈУ ТЕЛА

У случају да се материјални систем састоји само из двеју маса M и m, проблем се може решити у *коначном облику*, јер се своди на диференцијалну једначину другог реда (12 – 10 = 2).



Сл. 89. — Проблем двају тела

Одредимо положаје маса M и m векторима положаја $\vec R$ и $\vec r$ у односу на пол O (сл. 89) и релативним вектором положаја $\vec l$, онда из троугла $\Delta\, O\, M\, m$ следи однос

$$\vec r = \vec R + \vec l.$$

Како између маса дејствују само гравитационе силе

$$\vec F = \mp f\,(M m / l^2)\ \vec u\,,$$

векторске диференцијалне једначине кретања маса јесу облика

$$m\,\ddot{\vec r} = -f\,\frac{M\,m}{l^3}\,\vec l;\quad M\ddot{\vec R} = f\,\frac{M\,m}{l^3}\,\vec l. \tag{286}$$

Њихов збир даје једну релацију

$$M\ddot{\vec R} + m\,\ddot{\vec r} = 0. \tag{287}$$

Ако је вектор положаја средишта $\vec r_C$, онда је, према чл. 12,

$$(M + m)\,\vec r_C = M\vec R + m\,\vec r.$$

Двоструким диференцирањем, с обзиром на (287), добивамо интеграле

$$\ddot{\vec r}_C = 0;\quad \vec v_C = \vec C_1;\quad \vec r_C = \vec C_1\,t + \vec C_2.$$

Из њих закључујемо да се *средиште ових маса креће праволиниски и једнолико*.

---

[1] Открио планету Уран, његове сателите и сателите Сатурна.

[2] М. Миланковић, Небеска механика. Београд, 1935, стр. 73.

Поделимо ли прву једначину (286) масом m а другу масом M и одузмемо биће

$$\ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{R}} = -f\frac{M+m}{l^3}\vec{l} = \ddot{\vec{l}}, \tag{287'}$$

па је диференцијална једначина релативног кретања масе m према маси M

$$m\ddot{\vec{l}} = -f\frac{(M+m)\,m}{l^3}\vec{l}. \tag{289}$$

Маса m креће се, дакле, *према Њутновом закону око масе* $(M+m)$ *сажете у маси* M *коју сматрамо тренутно непокретном.*

Помножимо ли једначину (287′) векторски релативним вектором положаја $\vec{l}$ добићемо

$$[\vec{l}, \ddot{\vec{l}}] = \frac{d}{dt}[\vec{l}, \dot{\vec{l}}] = \frac{d}{dt}[\vec{l}, \vec{v}_r] = 0.$$

Одавде следи да постоји један векторски интеграл

$$[\vec{l}, \vec{v}_r] = \vec{C} = 2\vec{S} \tag{290}$$

једнак двострукој секторској брзини. *Маса m креће се,* дакле, *око те масе константном секторском брзином.*

Применимо ли ова разматрања на случај кретања планете око Сунца масе M_S, под претпоставком да је маса планете мала у односу на масу Сунца ($m \ll M_S$) добићемо познате *Кеплерове законе о кретању планета* **(чл. 5.2).**

Прва два интеграла (288) одређују кретање средишта масе Сунца и масе планете, а трећи (290), у вези са (289), и релативно кретање планете према Сунцу. Те једначине показују да се планета креће око Сунца као да је оно тренутно непомично и да има масу $M_S + m$. Кретање је у директном смеру (обрнуто смеру кретања сатне казаљке) константном секторском брзином и у равни која пролази кроз Сунце, а управна је на секторску брзину (Лапласова инваријабилна раван).

Уводећи константу $\lambda' = f(M_S + m)$, може се релативно убрзање планете (289) написати у облику

$$\ddot{\vec{l}} = -(\lambda' m/l^3)\vec{l}.$$

Константа λ' нема исту вредност за све планете. Према томе, *трећи Кеплеров закон има ограничену вредност.*

Према обрасцима (128) и (131) биће

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\lambda'_1}{\lambda'_2} = \frac{M_s + m_1}{M_s + m_2} = \frac{1 + (m_1/M_s)}{1 + (m_2/M_s)}.$$

Овај однос биће једнак јединици само у случају када је маса планете *врло мала* у поређењу са масом Сунца ($m \ll M_S$).

14. ОПШТИ ПРИНЦИПИ МЕХАНИКЕ

14.1 КЛАСИФИКАЦИЈА ПРИНЦИПА

Досада смо извели извесне законе динамике: *закон о количини кретања, закон о моменту количине кретања* (замаха) и *закон о живој сили.* Ови закони, или теореме, давали су зависности промене брзине материјалне тачке, или система тачака, у зависности од спољашњих (активних) сила и од сила веза. Из ових закона извели смо интеграле једначина кретања али ниједан није у себи садржавао све законе кретања.

Међутим, *општи принципи* или *општа начела* механике јесу *услови* из којих се могу извести једначине кретања, и обрнуто, они су последице тих једначина. Они показују особине кретања материјалне тачке, или система тачака, а потпуно су еквивалентни једначинама кретања.

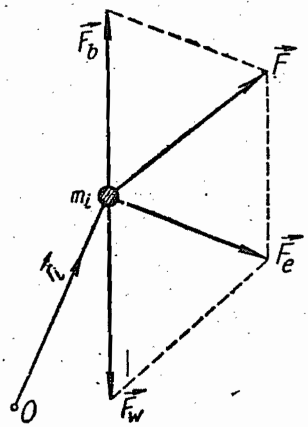
Општи принципи механике деле се у две групе: *диференцијалне* и *интегралне*. Први омогућују да се из њих изведу диференцијалне једначине кретања, други карактеришу и путање тачака. Међутим, први су општији и примењују се на холономне и нехолономне системе, други се примењују само на холономне системе.

У диференцијалне принципе спадају: *Даламберов принцип, Лагранжев принцип виртуалних померања* и *Гаусов принцип најмањег отступања,* а у интегралне: *Хамилтонов принцип, Лагранж-Мопертијев принцип (Moreau de Maupertuis,* 1698 – 1759 год.). Поред ових главних принципа, постоје и други као напр. *Jacobi*-ев, *Helmholtz*-ов, *Hertz*-ов, *Pfaff*-ов, итд.

У даљим излагањима изнећемо детаљније прва два принципа, која имају велике примене у техници, а остале у оном обиму који је потребан ради проучавања разних проблема теорије еластичности и хидромеханике.

14.2 ДАЛАМБЕРОВ ПРИНЦИП

Када на материјалну тачку масе m дејствује активна сила $\vec{F}$, она ће, ако је слободна, добити убрзање $\vec{a}=\vec{F}/m$. Интеграљењем ове диференцијалне једначине, за дате почетне услове кретања (почетни положај и почетну брзину), одредићемо карактер кретања.



Сл. 90. — Нападна, ефективна и изгубљена сила

Ако маса m припада материјалном систему, на њу, сем *нападне – активне – силе*[1], дејствују и *унутрашње силе* $\vec{F}_u$ и *силе везе*.[2] Означимо са $\vec{F}_w$ резултанту ових унутрашњих сила и сила везе, онда се материјална тачка креће под утицајем силе

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_w = \vec{F}_e \qquad (291)$$

која је *ефективна сила*[3] (сл. 90). Ако са $\vec{F}_b$ означимо компоненту активне силе $\vec{F}$ која поништава дејство резултанте унутрашњих сила и сила везе $\vec{F}_w$, тзв. *изгубљену силу*,[4] онда је активна сила

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_b = \vec{F}_e - \vec{F}_w.$$

Кретање се, дакле, *врши само под утицајем ефективне силе* $\vec{F}_e$.

За систем материјалних тачака биће:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i - \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_{ei} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_{bi} = 0} \qquad (292)$$

јер се унутрашње силе и силе везе, које увек долазе у парном броју, *поништавају*. Збир момената ових сила за пол O биће

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} [\vec{r}_i, \vec{F}_i - \vec{F}_{ei}] = \sum_{i=1}^{i=n} [\vec{r}_i, \vec{F}_{bi}] = 0} \qquad (293)$$

Ово је векторски израз Даламберовог принципа који гласи:

Кад у неком систему материјалних тачака нападне силе разложимо на ефективне и изгубљене, онда су ове последње у равнотежи. Овај је принцип Даламбер формулисао у делу „*Traité de Dynamique*", 1743 год.[5]

---

[1] Les forces donées.

[2] Les forces de liaison.

[3] La force motrice.

[4] La force perdue.

[5] Даламбер, при формулисању свог принципа, не говори о силама него о промени количине кретања у кратком временском размаку.

Год. 1740 Ојлер је у *„Коментарима петроградске Академије наука“* поставио принцип који се битно не разликује од Даламберовог Векторски тај принцип изражен је са:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_{ei} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_{wi};$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} [\vec{r}_i, \vec{F}_{ei}] = \sum_{i=1}^{i=n} [\vec{r}_i, \vec{F}_i] + \sum_{i=1}^{i=n} [\vec{r}_i, \vec{F}_{wi}].$$

Како су изгубљене силе у равнотежи, $\Sigma \vec{F}_b = 0$, то горње једначине постају

$$\sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_e = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i; \quad \sum_{i=1}^{i=n} [\vec{r}_i, \vec{F}_{ei}] = \sum_{i=1}^{i=n} [\vec{r}_i, \vec{F}_i]. \tag{293'}$$

Главни вектори система ефективних и активних сила једнаки су али су супротно усмерени. Исто су такође и главни моменти ових сила, за исту моментну тачку, супротни вектори, па Ојлеров принцип гласи:

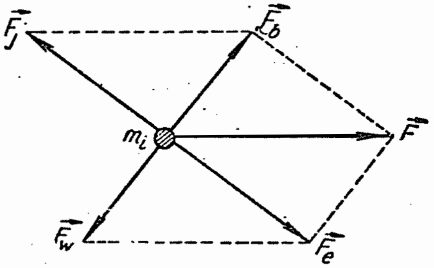
За систем материјалних шачака систем ефективних сила еквивалентан је систему нападних (активних) сила.

Даламберов принцип обично се примењује у трећем облику уводећи појам *силе инерције*. Разлагањем активне силе (резултанте нападних сила које дејствују на тачку) на ефективну и изгубљену, прва је једнака геометриском збиру активне силе и силе везе, $\vec{F}_e = \vec{F} + \vec{F}_w$. Уведемо ли негативну ефективну силу $(-\vec{F}_e)$, једнаку производу масе и убрзања са негативним знаком (сл. 91), тзв. *силу инерције*, $\vec{F}_j = (-m\vec{a})$, биће

$$\vec{F}_e + \vec{F}_j = \vec{F}_e + (-m\vec{a}) = 0$$

или

$$\boxed{\vec{F} + \vec{F}_w + \vec{F}_j = 0} \tag{294}$$



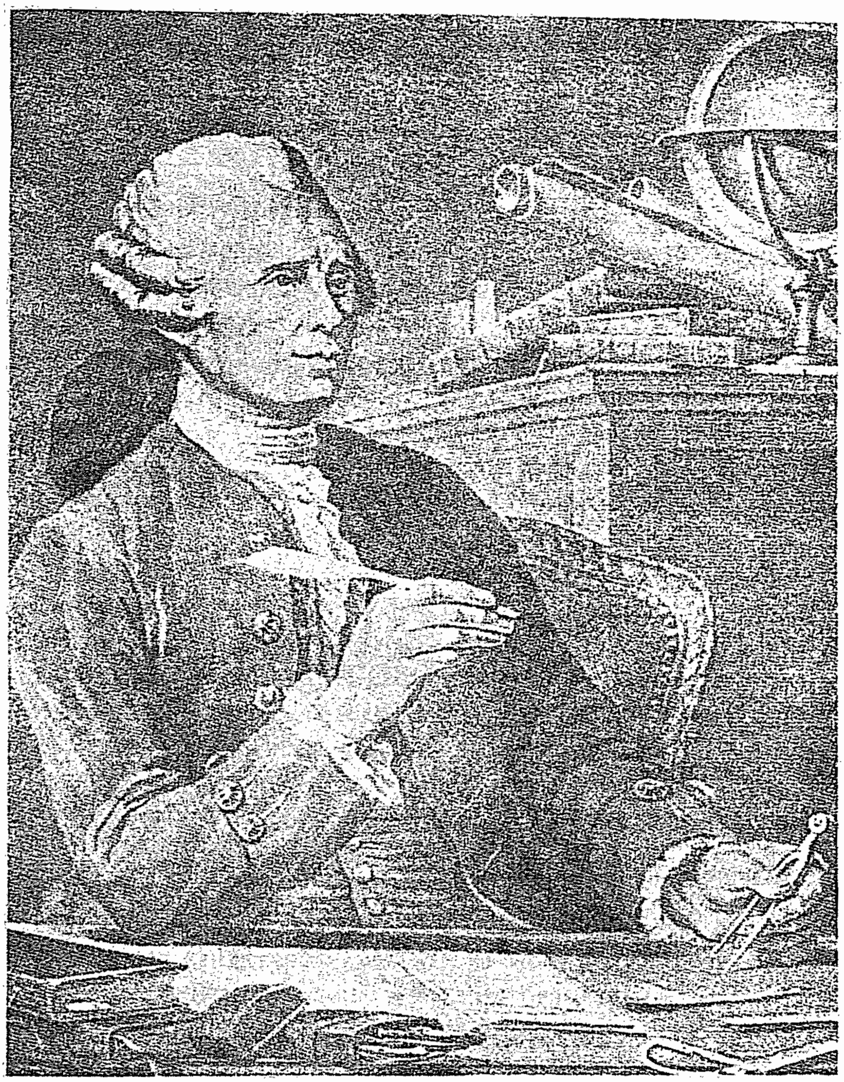
Сл. 91. — Сила инерције $\vec{F}_j$

Ово је израз Даламберовог принципа за материјалну тачку: *За време кретања материјалне тачке сила инерције стоји „у равнотежи“ са свима силама које дејствују на материјалну тачку.*

Векторски производ овог векторског збира вектором $\vec{r}$ биће такође једнак нули

$$\boxed{[\vec{r}, \vec{F}_i] + [\vec{r}, \vec{F}_w] + [\vec{r}, \vec{F}_j] = 0} \tag{294'}$$

Овај образац претставља израз истог принципа израженог само у облику моментног правила.



Jean le Rond d' Alembert (1717 — 1783)

С обзиром да је $\Sigma \vec{F}_w = 0$, за материјални систем биће

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_{ji} = 0; \sum_{i=1}^{i=n} [\vec{r}_i, \vec{F}_i] + \sum_{i=1}^{i=n} [\vec{r}_i, \vec{F}_{ji}] = 0} \qquad (294'')$$

и Даламберов принцип гласи:

У систему материјалних тачака који је у кретању, нападне силе и силе инерције образују систем сила који је „у равнотежи“.

Док су активне силе *реалне*, јер за њих можемо, према Њутновим аксиомама, увек показати изворе из којих дејствују, дотле је сила инерције *фиктивна сила*, пошто се за њу не може показати такав извор (чл. 10).

Она се испољава делимично као притисак на везу, а делимично као отпор телу које дејствује активном силом на покретно тело дајући му убрзање.

Улога Даламберовог принципа је велика, јер он гућава да се динамички проблеми решавају чисто статичком методом испитујући „равнотежу активних сила, сила везе и сила инерције“ при кретању. Наравно, ова је равнотежа „фиктивног“ карактера, јер треба уочити да се *динамички проблеми суштински разликују од статичких проблема*, те се никаквим методама не могу свести на ове друге. Ово само показује да се и динамички проблеми могу решавати дајући динамичким једначинама облик статичких једначина, тј. истим математичким апаратом.

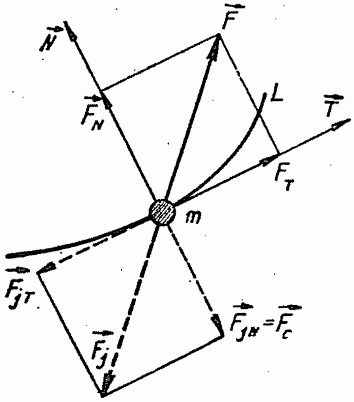
Како је $\vec{F}_j = -\vec{F}_e = -m\vec{a}$, то се сила инерције може одредити тј. измерити. Међутим, из (291) следи да је $\vec{F}_b = \vec{F} + \vec{F}_j$. Овај је векторски збир „формалног карактера“, јер се не могу сабрати две силе које дејствују на различитим телима у једну резултанту. Активна сила дејствује на покретно тело, међутим, сила инерције дејствује на тело које саопштава активну силу покретном телу у случају слободног кретања; код принудног она се разлаже у две компоненте (у правцу активне силе и правцу отпора везе).

С обзиром на два статичка услова равнотеже сила и Даламберов принцип изражава се на два начина: да је векторски збир сила једнак нули, односно, да је момент тих сила за исти пол једнак нули (обр. 294).

Диференцијална једначина кретања слободне тачке је $m\vec{a} = \vec{F}$, па се, према Даламберовом принципу, може написати у облику $\vec{F} + (-m\vec{a}) = \vec{F} + \vec{F}_j = 0$, те је $\vec{F}_j$ супротна сила активној сили.

Напр., *хармониско кретање* (**чл. 2.4.1**) врши се под утицајем силе еластичности опруге, $F_e = -cx$, која је увек усмерена ка центру привлачења (равнотежном положају, O). Кретање је успорено са успорењем $-\ddot{x}$, усмереним ка центру привлачења (O), па је сила инерције $(-m\ddot{x})$ са смером осе $+Ox$, када је $x > 0$. Према Даламберовом принципу биће: $-cx\,\vec{\mathrm{i}} + (-m\ddot{x})\,\vec{\mathrm{i}} = 0$, тј. $m\ddot{x} = -cx$, или $m\ddot{x} + cx = 0$, како смо и раније добили (25).

Код *криволиниског кретања* (сл. 92), активну силу разлажемо на тангенцијалну и нормалну, па и силу инерције у *супротну тангенцијалну* $(-m\dot{v})$ и *супротну нормалну* — *центрифугалну* $(-m\,v^2/R_k)$. Прва је колинеарна са брзином али јој смер зависи од тангенцијалног убрзања. Како је нормално убрзање увек усмерено ка конкавној страни путање, то је *центрифугална сила увек усмерена упоље* (ка конвексној страни путање). Код једноликог кружног кретања ($\dot{\omega} = 0$) је $a_T = 0$, па је резултујућа сила инерције само центрифугална сила која је за време кретања у „равнотежи“ са нормалном (центрипеталном) силом.



Сл. 92. — Природне координате силе инерције

Напр., кретање математичког клатна је успорено (чл. 3.4) под утицајем активне силе (mg) и силе везе (F_N). Пројектовањем једначине $-mg\,\vec{\mathrm{k}} + F_N\,\vec{\mathrm{N}} + (-m\,a_T\,\vec{\mathrm{T}} - m\,a_N\,\vec{\mathrm{N}}) = 0$ на правац тангенте и нормале добивамо систем једначина:

$$-mg\sin\varphi - m\,l\,\ddot{\varphi} = 0; \qquad -mg\cos\varphi + F_N - m\,l\,\dot{\varphi}^2 = 0.$$

При кретању од равнотежног положаја A (сл. 48*a*), супротна тангенцијална сила је у смеру кретања; у обрнутом случају је у супротном смеру од кретања. Међутим, центрифугална сила је увек усмерена *упоље*.

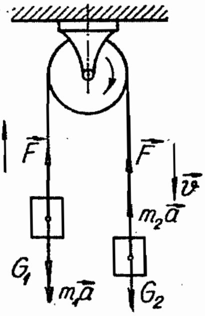
За случај кретања тешке тачке низ стрму глатку раван (**чл. 7.3**) активна је сила $G = mg$ а сила везе F_{wn}. Ефективна је сила $mg\sin\alpha$ са смером низ раван, па је сила инерције $(-m\ddot{\xi})$ са смером уз раван. При кретању морају ове три силе: активна (mg), отпор $(\vec{F}_{wn})$ и сила инерције $(-m\ddot{\xi})$, бити „у равнотежи“, тј. морају образовати затворен *троугао сила*. Из овог статичког услова равнотеже, по закону пројекција, следе једначине

$$mg\sin\alpha - m\ddot{\xi} = 0; \quad F_{wn} - mg\cos\alpha = 0$$

одакле добивамо једначину кретања и отпор површине

$$\ddot{\xi} = g\sin\alpha; \quad F_{wn} = mg\cos\alpha\,,$$

како смо и раније извели (једн. 162 и 160).



Сл. 93. — *Atwood*-ова машина

Примери. — **62)** Преко сталног котура полупречника R, пребачено је нерастегљиво уже о чијем су крајевима обешени терети G_1 и G_2, $G_1 < G_2$. Одредити убрзање терета и силу у ужету (сл. 93, *Атвудова машина* — *George Atwood*, 1745—1807 год.).

Решење. — Због нерастегљивог ужета убрзања терета једнака су, а иста је и сила у оба дела ужета. Ако су масе терета m_1 и m_2 биће једначине кретања

$$\text{I)}\quad F-G_1-m_1 a=0,$$
$$\text{II)}\quad F-G_2+m_2 a=0$$

из којих добивамо убрзање и силу у ужету

$$a=g\,(G_2-G_1)/(G_1+G_2);\quad F=2\,G_1\,G_2/(G_1+G_2).$$

Отпор зглоба је

$$F_n=2\,F.$$

63) *О потенцијални сложени котур* обешени су терети G_1 и G_2 односа $G_2>{}^1/_2\,G_1$ (сл. 94). Занемарујући масе котурова и трење одредити убрзања терета и силу у ужету.

Опште решење; специјално за дате податке:

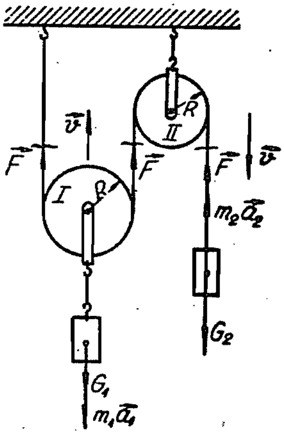
$$G_1=1{,}25\quad G_2=10\ \text{kg}.$$

Решење. — За дати услов терет G_1 кретаће се *навише* а терет G_2 *наниже*. Сила у ужету је иста па су једначине кретања

$$\text{I)}\quad F+F-G_1-m_1\,a_1=0,$$
$$\text{II)}\quad F-G_2+m_2\,a_2=0.$$

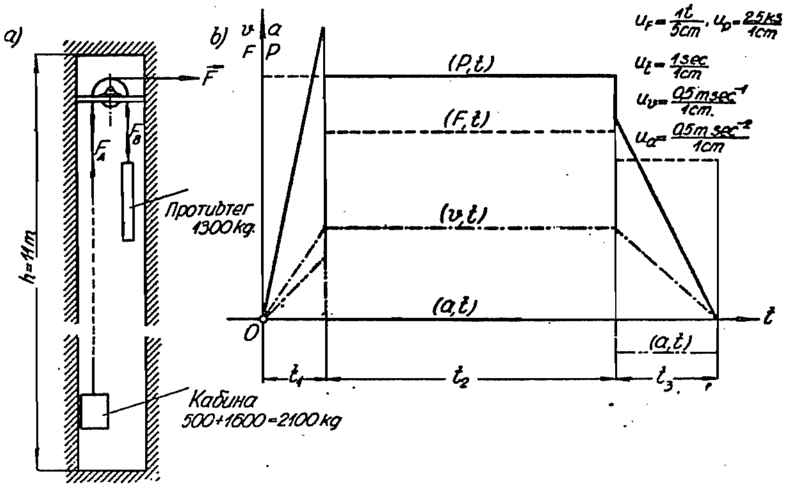
Пошто померања терета стоје у односу $s_2=2\,s_1$ то у истом односу стоје и убрзања $a_2=2\,a_1$ па је убрзање терета G_1 и сила у ужету:

$$a_1=g\,(2\,G_2-G_1)/(G_1+4\,G_2)=1{,}4\ \text{m/sec}^2,$$
$$F={}^1/_2\,G_1\,[1+(a_1/g)]=5{,}7\ \text{kg},$$
$$a_2=2\,a_1=2{,}8\ \text{m/sec}^2.$$



Сл. 94. — Потенцијални сложени котур

64) Електрична дизалица (сл. 95), чија је кабина тешка 500 kg, носи терет 1600 kg. Противтег је 1300 kg. Висина дизања је 11 m.



Сл. 95. — Електрична дизалица (лифт)

При подизању кретање је убрзано за 1,5 sec, када се постигне брзина 1,2 m/sec а тада је кретање једнолико том брзином. При заустављању је кретање успорено са успорењем једнаким половини убрзања при поласку. Одредити величину сила у ужету за сва три кретања занемарујући тежину ужета.

Израчунати снагу електричног мотора за време овог кретања и нацртати кинематичке дијаграме кретања и дијаграм (*P*, *t*).

Решење. — a) Стање мировања: $F_A = 500 + 1600 = 2100$ kg,

$$F_B = 500 + 800 = 1300 \text{ kg}.$$

Убрзано подизање. — Време убрзаног подизања је 1,5 sec па је убрзање

$$a_1 = v/t_1 = 1{,}2/1{,}5 = 0{,}8 \text{ m/sec}^2.$$

Висина подизања је

$$s_1 = {}^1/_2\, a_1 t_1^2 = 0{,}9 \text{ m}.$$

Према Даламберовом принципу су силе:

$$F_A' - F_A - m_A a_1 = 0; \quad F_A' = 2271 \text{ kg}; \quad m_A = F_A/g,$$

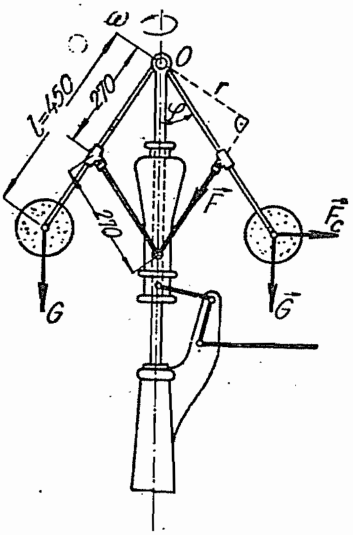
$$F_B' - F_B + m_B a_1 = 0; \quad F_B' = 1194 \text{ kg}; \quad m_B = F_B/g.$$

Вучна сила на добошу мотора износи:

$$F = F_A' - F_B' = 1077 \text{ kg},$$

па је снага мотора $P_1 = F\, v/75 \doteq 17{,}2$ KS.

b) Успорено подизање. — Успорење је $a_3 = {}^1/_2\, a_1 = 0{,}4$ m/sec².



Сл. 96. — Ватов центрифугални регулатор

Време

$$t_3 = v/a_3 = 3 \text{ sec},$$

па је висина дизања

$$s_3 = {}^1/_2\, a_3 t_3^2 = 1{,}8 \text{ m}.$$

Силе у ужетима су

$$F_A''' \quad F_A + m_A\, a_3 = 0; \quad F_A''' = 2014 \text{ kg},$$

$$F_B''' - F_B - m_B\, a_3 = 0; \quad F_B''' = 1353 \text{ kg}.$$

Вучна је сила $F = 661$ kg; снага мотора $P_3 \doteq 10{,}6$ KS.

c) *Једнолико подизање.* — Висина дизања

$$s_2 = s - s_1 - s_3 = 8{,}3 \text{ m}.$$

Време подизања

$$t_2 = s_2/v = 7 \text{ sec}; \quad a_2 = 0.$$

Вучна сила

$$F = 2100 - 1300 = 800 \text{ kg}$$

па је снага

$$P_2 = 12{,}8 \text{ KS}.$$

Дијаграми су приказани на сл. 95 *b*.

65) *Ватов регулатор* приказан је на сл. 96. Тежина је кугле 8 kg, а **спојнице („муфа") 23 kg.** Ако полуге граде са вертикалом угао $\varphi = 35^0$, **израчунати:**

a) Силе у полугама *F* при подизању спојнице,

b) Центрифугалну силу сваке кугле, и

c) Број обрта регулатора.

Решење. — *a*) $2F\cos\varphi = G_1$; $F = 14{,}02$ kg.

b) Узимајући моментну тачку у O добивамо $Gl\sin\varphi - F_c l\cos\varphi + Fr = 0$, где је $r = 270\ \sin 2\varphi = 254$ mm,

Из ове једначине следи да је $F_c = 15{,}2$ kg.

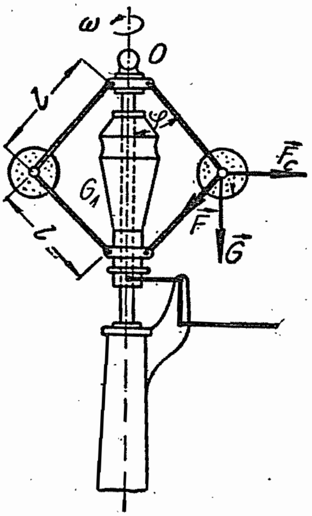
c) Како је $F_c = ml\,\omega^2\sin\varphi$, то је $\omega = 8{,}03\ \mathrm{sec}^{-1}$, па је $n \approx 77$ обрта/min.

66) Код *Портеровог* центрифугалног регулатора полуге су истих дужина а у зглобовима су намештене кугле тежине G (сл. 97). Одредити угао нагиба полуга према вертикали ако се регулатор обрће константном угаоном брзином, узимајући у обзир само тежине кугли и спојнице G_1.

Решење. — Из троугла сила добивамо силу $F = G_1/2\cos\varphi$, а из моментне једначине за тачку O:

$$F_c\,l\cos\varphi - Gl\sin\varphi - 2\,G_1\,l\cos\varphi\ \mathrm{tg}\,\varphi = 0.$$

Како је центрифугална сила $F_c = (Gl\,\omega^2\sin\varphi)/g$ то је $\cos\varphi = g\,(G + G_1)/Gl\,\omega^2$.



Сл. 97. — Портеров центрифугални регулатор

14.3 ЛАГРАНЖЕВ ПРИНЦИП ВИРТУАЛНИХ ПОМЕРАЊА

Када се слободна или везана материјална тачка налази у *равнотежи*, тада је испуњен услов

$$\vec{F}_i + \sum_i \vec{F}_{ui} = 0. \tag{295}$$

У *равнотежном положају* тачка је у миру, па је њена брзина једнака нули. Услов за брзину тачке биће

$$(\vec{v}_i,\ \mathrm{grad}\ f_i) + \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0, \quad \text{тј.,} \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0$$

што значи да веза мора бити *склерономна, па је за тај случај свако стварно померање једновремено и могућно.*

Помножимо ли једначину (295) скаларно виртуалним померањем $\delta\vec{s}_i = \delta\vec{r}_i$ биће

$$(\vec{F}_i, \delta\vec{s}_i) + \sum_i (\vec{F}_{ui}, \delta\vec{s}_i) = 0,$$

односно

$$\delta\mathbf{A}_i + \sum_i \delta\mathbf{A}_{ui} = 0,$$

где су $\delta\mathbf{A}_i$ и $\delta\mathbf{A}_{ui}$ *виртуални радови* на виртуалним померањима материјалне тачке m_i.

Када се **материјална тачка налази** *у равнотежи на глаткој непокретној површини — двостраној вези*, тада мора бити задовољен услов $\vec{F} + \vec{F}_{wn} = 0$. Према томе је

$$(\vec{F} + \vec{F}_{wn}, \delta \vec{r}) = (\vec{F}, \delta \vec{r}) + (\vec{F}_{wn}, \delta \vec{r}) = (\vec{F}, \delta \vec{r}) = 0,$$

јер је виртуално померање управно на правац градијента (сл. 87*a*), па је рад *нормалног отпора једнак нули.*

Међутим, ако је веза *идеална* а *једнострана*, онда виртуално померање гради са нормалом везе угао који је мањи или једнак правом углу. Пошто тачка може да напусти везу на ону страну у коју је управљен нормални отпор везе, то је рад $(\vec{F}_{wn}, \delta \vec{r}) \geq 0$ те мора бити $(\vec{F}, \delta \vec{r}) \leq 0$.

Из овог закључујемо да је *рад нормалног отпора* везе или *једнак нули* (случај идеалних двостраних веза), или је *већи од нуле* (случај идеалних једностраних веза).

За материјални систем који се састоји из n материјалних тачака биће укупан рад:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \delta \mathbf{A}_i + \sum_{i=1}^{i=n} (\sum_{i} \delta \mathbf{A}_{ui}) = 0.$$

Када су везе једностране (незадржавајуће) тада је

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} \delta \mathbf{A}_i + \sum_{i=1}^{i=n} (\sum_{i} \delta \mathbf{A}_{ui}) \leq 0} \tag{296}$$

Ово је израз *Лангранжевог принципа могућних (виртуалних) померања* или *виртуалног рада*. Он гласи:

У случају равнотеже система материјалних тачака збир радова свих спољашњих и унутрашњих сила, за виртуална померања које везе допуштају, не може бити позитиван. За случај задржавајућих веза овај је збир једнак нули.

За круто тело збир радова једнак је нули, те се Лагранжев принцип изражава неједначином

$$\sum_{i=1}^{i=n} \delta \mathbf{A}_i = \sum_{i=1}^{i=n} (\vec{F}_i, \delta \vec{s}_i) \leq 0 \tag{297}$$

и гласи:

Код крутог тела, које је у равнотежи, збир радова активних сила на виртуалним померањима не може бити позитиван. Збир радова унутрашњих сила једнак је нули.

У развијеном облику за Декартов правоугли координатни систем овај се закон може написати у облику:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} (X_i \, \delta x_i + Y_i \, \delta y_i + Z_i \, \delta z_i) \leq 0}$$

где су δx_i, δy_i, δz_i компонентна виртуална померања.

Лагранжев принцип могућних померања *основни* је *принцип статике* и игра огромну улогу при решавању статичких задатака. *У њему су сажети сви закони статике,* па се због тога број степена слободе кретања може овако изразити: *број степена слободе кретања једнак је броју потребних услова за равнотежу.* У ове услове долазе услови за спречавање транслације и услови за спречавање обртања (ротације).

У техничкој пракси су најважније активне силе *тежине.* Тада је Лангранжев принцип приказан изразом

$$\sum_{i=1}^{i=n} \delta \mathbf{A}_i = \sum_{i=1}^{i=n} G_i \, \delta z_i = 0,$$

пошто силе дејствују у вертикалном правцу. Како је тежиште система одређено једначинама

$$x_C = 0; \; y_C = 0; \; z_C = \frac{1}{G} \sum_{i=1}^{i=n} G_i \cdot z_i; \quad G = \sum_{i=1}^{i=n} G_i$$

то прве варијације ових координата доводе до услова

$$\boxed{\delta z_C = 0; \; \sum_{i=1}^{i=n} G_i \, \delta z_i = 0} \tag{298}$$

Ово је израз *Торичелијевог (Evangelista Torricelli,* 1608—1647) *принципа:*

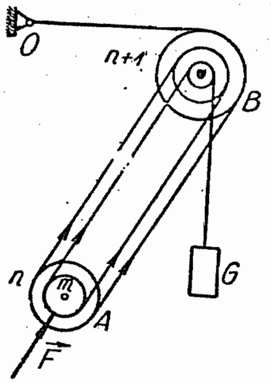
Материјални систем у равнотежи је под утицајем тежина ако се не мења висина његовог тежишта (средишта) за ма које виртуално померање које везе допуштају.

Када би се тежиште *спустило,* рад би сила био *позитиван* и не би се могла остварити равнотежа; напротив, када би се оно *попело* рад би био негативан те би систем остао у равнотежном положају, *„јер се тешка тела остављена сама себи увек спуштају а никад се не пењу“*, како је навео Торичели.

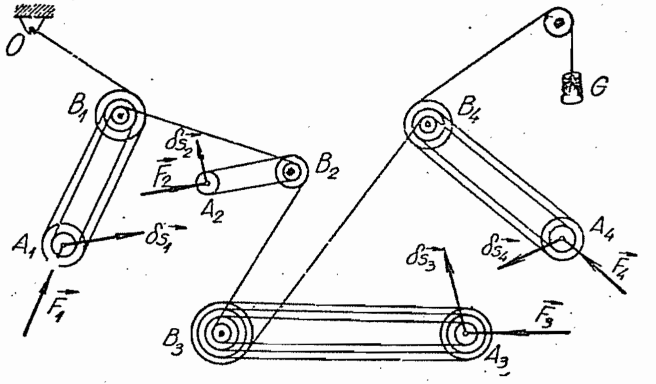
Много је опита извршено да се принцип виртуалних померања

утврди и експерименталним путем. Најинтересантнија су два доказа: *Лагранжев* и *Амперов*. Ми ћемо показати Лагранжев доказ.[1]

Лагранж је успео да докаже да се сила која дејствује на неко тело може заменити *силом у концу* који носи известан терет. Нека материјалну тачку (A) масе m напада сила $\vec{F}$ (сл. 98). У њој (A) сместимо бесконачно мали *покретни котур* а у тачки B, у правцу дејства силе $\vec{F}$, бесконачно мали *непокретни котур*. Котур A има n плоча, а котур B, $n+1$ плочу. Гибак и нерастегљив конац, који је једним крајем причвршћен у непомичној тачки O, пребацимо преко прве плоче непомичног котура B и обавијемо га преко прве плоче помичног котура A, а затим преко друге плоче котура B, итд... На слободном крају конца који је пребачен преко $n+1$ плоче непокретног котура B обесимо терет G. Услед овог терета јавиће се силе у концу које су једнаке терету G. Због бесконачно малих размера котурова, а под претпоставком да у њима нема трења,



Сл. 98. — Замена дејства силе дејством терета



Сл. 99. — Лагранжев доказ принципа виртуалних померања

---

[1] Прва наговештавања принципа виртуалних померања (рада) налазе се код *Аристотела* (384—322 п. н. е., *„Mechanica problemata“*) и *Архимеда* (287—212 п. н. е., *„Di planorum aequilibris“*). У XIII веку *Јорданус Неморариус* је учинио известан напредак у формулисању овог принципа али се сматра да је први *Стевин* (S. Stevinus. 1548—1620, *„Hypomnemata mathematica“*) применио овај принцип ради доказа *„закона о полузи“*. *Галилеј* је допунио радове Стевина доказујући закон о полузи помоћу стрме равни дајући **златном правилу механике** друго формулисање: *„Што се добије на сили губи се на брзини“*, 1593 год. И он и *Паскал* (B. Pascal, 1623—1662) примењивали су овај принцип ради испитивања равнотеже течности у спојним судовима (*Паскалов хидростатички парадокс*).

Сви ови радови су се односили махом на испитивање услова за равнотежу *простих машина (алата)* те се односе на *терет* и *силу* која одржава равнотежу терету. Међутим, Галилејев ученик *Торичели* проширио је принцип и на систем терета.

Год. 1717 *Бернули* (Johannes Bernoulli, 1667—1784) је формулисао принцип за произвољни систем сила у случају двостраних веза, али без доказа. 1788 год. *Лагранж* у делу *„Mécanique analytique“* (Ip. sec. 1) извео је физички доказ овог принципа и узео га за основни принцип механике из кога је извео све теореме статике и динамике. 1789 год. *Фурије* је први формулисао принцип и за случај једностраних веза, што су разрадили *Поасон* и *Ампер*.

све силе у концима можемо сматрати *паралелним*, па котур A напада резултанта ових сила ($2nG$) смера од A ка B. *Према томе, активна сила* $\vec{F}$, *која дејствује на масу* m, *замењена је дејством терета* G *и системом котурова*, тј. биће $F = 2n G$.

Применимо овај поступак на систем од четири масе: m_1, m_2, m_3, m_4 које се налазе у тачкама A_1, A_2, A_3, A_4 (сл. 99). Нека их нападају силе $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, које сматрамо *самерљивим (комензурабилним)* тако да постоје релације $F_1 = k_1 F, \ldots, F_i = k_i F$, где су k_i цели бројеви а F њихов заједнички садржалац.

У правцу дејства сила $\vec{F}_i$ поставимо у тачкама B_i *непокретне котурове* а у тачкама A_i *покретне*. *Непокретни* котурови имају по $k_i + 1$ плочу, а *покретни* по k_i плоча. Према томе, котур A_i има k_i плоча а котур B_i има $k_i + 1$.

Све котурове обавијмо нерастегљивим ужетом и један крај вежимо за непомичну тачку O а на другом обесимо терет G.

Према раније изнетом силе у концима износе по G. На овај је начин дејство силе F_i на масу m_i замењено дејством терета G и системом котурова.

Да би систем материјалних тачака био у равнотежи потребно је и довољно да се терет G *не креће наниже* или *да је у миру*. Добије ли материјална тачка m_i виртуално померање $\delta \vec{s}_i$, тада ће се дужина конца променити за $\delta s_i \cos(\vec{F}_i, \delta \vec{s}_i)$, *скратити или издужити*, што зависи од угла између вектора $\vec{F}_i$ и $\delta \vec{s}_i$ Ту промену можемо изразити и овим обрасцем: $\Delta l_i = (\vec{F}_i, \delta \vec{s}_i)/F_i$. Укупна промена дужине ужета износи

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{i=n} 2k_i (\vec{F}_i; \delta \vec{s}_i)/F_i.$$

Да би била омогућена равнотежа система мора укупно издужење ужета бити једнако нули или негативно (скраћење), *јер ће се само тада терет подићи или ће остати у стању мировања.*

Како је свака сила $F_i = 2k_i G$ то горњи образац постаје

$$\sum_{i=1}^{i=n} (\vec{F}_i, \delta \vec{s}_i) = 0,$$

јер индукцијом закључујемо да ће тај услов важити и за систем од n материјалних тачака.

У случају крутог тела овај рад је једнак нули. Сличним поступком може се то и доказати. Нека на плочу (сл. 100) дејствују четири терета пребачена преко врло танких котурова. Помоћу плана сила можемо утврдити да су терети у равнотежи (сл. 100 b).

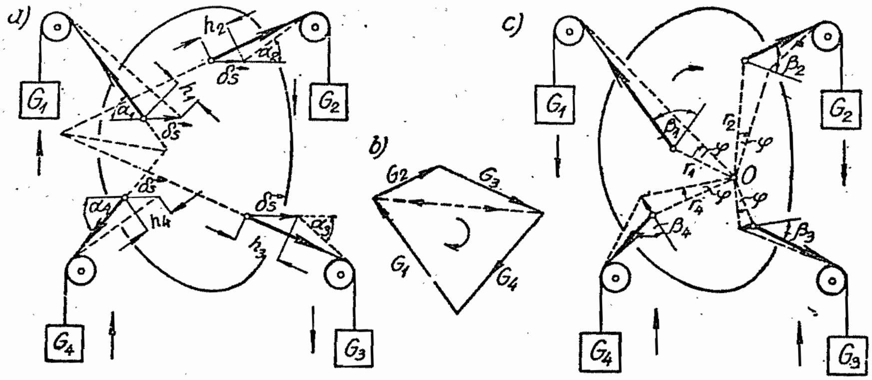
Замислимо да се плоча *транслаторно померила удесно* за $\delta \vec{s}$, тада ће се терети G_1 и G_4 *подићи* за висине h_1, односно h_4, док ће се терети G_2 и G_3 *спустити* за h_2, односно h_3. При овом померању терети ће вршити радове. Укупан рад износи

$$\delta \mathrm{A} = -G_1 h_1 + G_2 h_2 + G_3 h_3 - G_4 h_4.$$

Како је померање $h_i = \delta s \cos \alpha_i$, то је $G_i h_i = \delta s \cdot G_i \cos \alpha_i = X_i \, \delta s$, где је X_i хоризонтална пројекција силе у ужету, горњи израз се своди на

$$\delta \mathrm{A} = \delta s (-X_1 + X_2 + X_3 - X_4) = \delta s \sum X_i.$$

Када је плоча у равнотежи онда је збир $\Sigma X_i = 0$, па је и збир радова на виртуалним померањима које везе допуштају једнак нули, што је требало и доказати.



Сл. 100. — Услови за равнотежу плоче

На исти начин доказаћемо горњи услов и за случај обртања. Замислимо да се плоча заокренула за угао $\varphi = \delta\varphi$ (сл. 100*c*). Тада су померања нападних тачака терета $h_i \approx r_i \, \delta\varphi$, па силе врше рад

$$\delta \mathbf{A} = \sum G_i \, h_i = \sum G_i \, r_i \, \delta\varphi = \delta\varphi \sum G_i \, r_i = \delta\varphi \sum M_O .$$

Како је услов за равнотежу да је збир момената терета за тачку O у равни плоче једнак нули, то је и збир радова једнак нули, што је требало и доказати

Примери. — **67)** *a) Угаона полуга.* — На крајње тачке A и B правоугаоне разнокраке полуге AOB дејствују силе F_1 и F_2 (сл. 101). Заокрене ли се полуга око тачке O за угао $\delta\varphi$ помериће се њене крајње тачке за $\delta s_A = l_1 \delta\varphi$, $\delta s_B = l_2 \, \delta\varphi$, те ће силе извршити рад

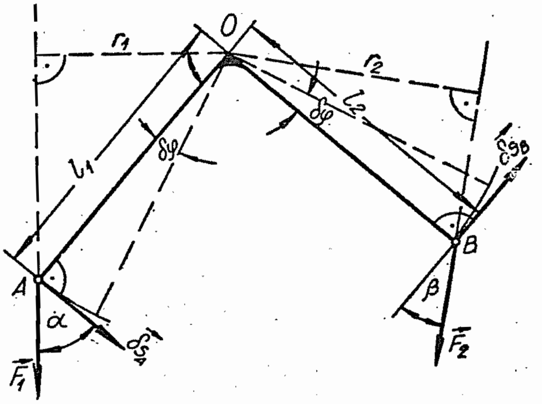
$$\delta \mathbf{A} = (F_1 \, l_1 \cos\alpha - F_2 \, l_2 \cos\beta) \, \delta\varphi .$$

Из услова $\delta \mathbf{A} = 0$ а како $\delta\varphi \neq 0$ мора бити

$$F_1 l_1 \cos\alpha = F_2 \, l_2 \cos\beta \text{ или}$$

$$F_1 \, r_1 = F_2 \, r_2 .$$

Дакле, *у положају равнотеже морају моменти сила F_i у односу на обртну тачку O бити једнаких интензитета али супротних смерова.*



Сл. 101. — Угаона полуга

b) Разнокрака правоугаона полуга. — Када је полуга AOB права, биће:

$\delta \mathbf{A} = F_1 \, \delta h_1 - F_2 \, \delta h_2$. Како су $\delta h_1 = l_1 \, \delta\varphi$, $\delta h_2 = = l_2 \, \delta\varphi$,

то из услова $\delta \mathbf{A} = 0$, пошто је $\delta\varphi \neq 0$, следи однос између терета

$$F_1 : F_2 = \delta h_2 : \delta h_1 .$$

Ово је познато *„златно правило механике“: „Што се добије на сили изгуби се на пређеном путу“*.

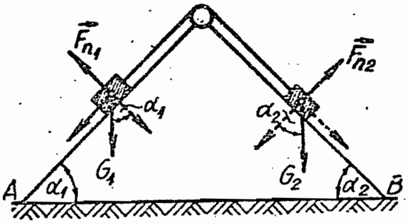
68) *Стрма раван.* — Терети G_1 и G_2 везани нерастегљивим ужетом, пребаченим преко малог котура; налазе се на глатким стрмим равнима нагибних углова α_1 и α_2 (сл. 102). Одредимо однос терета у равнотежном положају. Равни дозвољавају виртуална померања колинеарна са равнима. Из услова

$$\delta A = G_1 \delta s_1 \sin \alpha_1 - G_2 \delta s_2 \sin \alpha_2 = 0,$$

због тога што је $\delta s_1 = \delta s_2$, следи однос

$$G_1/G_2 = \sin \alpha_2 / \sin \alpha_1,$$

јер отпори F_{ni} не врше радове, пошто су управни на померања.



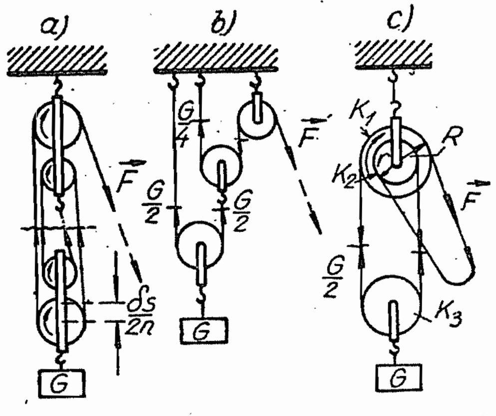
Сл. 102. — Стрме равни

69) *Котураче.* — *a) Продуктни (обични) котур* (сл. 103 *a*) састоји се из n непокретних и n покретних котурова насађених на виљушкама. Уже, дакле, обавија $2n$ котурова. Помери ли се сила F за δs, терет G подићи ће се за висину $\delta h = \delta s/2n$, па је $\delta A = F\delta s - (G\delta s/2n)$. Због тога мора постојати однос $G = 2n F$.

b) Потенцијални (Архимедов) котур (сл. 103 *b*) састоји се из једног непокретног и n покретних котурова; сваки претходни котур везан је ужетом са наредним котуром, а уже последњег покретног котура пребачено је и преко непокретног котура. Буде ли $n = 2$, онда на куку другог покретног котура дејствује терет $^1/_2 G$. Добије ли сила F померање δs овај терет ће добити померање $\delta h = {}^1/_2 \delta s$, па је $\delta A = F\delta s - {}^1/_2 G . {}^1/_2 \delta s$. Из услова $\delta A = 0$ следи да је $G = 4F = 2^2 F$. Поступно добили бисмо овај однос

$$G = 2^n F.$$

c) Вестонов (диференцијални) котур (сл. 103 *c*) састоји се из једног покретног и два непокретна котура са назубљеним ободима. О котур K_3 обешен је терет G а уже обавија сва три котура. Окрене ли се котур K_1 за угао $\delta\varphi$ окренуће се и котур K_2 за исти угао, сила F добиће померање $\delta s = R\,\delta\varphi$ а терет G померање $^1/_2 \delta s$. Према томе је $\delta A = (F R + {}^1/_2 G r - {}^1/_2 G R)\,\delta\varphi = 0$, односно $F = G(R - r)/2R$. Уколико је разлика $R - r$ мања утолико је и потребна мања сила F да би држала равнотежу терету



Сл. 103. — Сложени котурови (котураче): *a*) продуктни, *b*) потенцијални, *c*) диференцијални

70) Хомогена греда тежине G, дужине $2l$, ослања се на две глатке стрме равни које се сучељавају у тачки O а са хоризонталом граде углове α и β (сл. 104). Одредити угао θ који греда чини са хоризонталом у равнотежном положају и отпоре равни. Специјално решење за $\alpha + \beta = 90^0$:

Решење. — Како су углови $\sphericalangle OAB = \alpha + \theta$, $\sphericalangle OBA = \beta - \theta$ то из троугла ΔAOB добивамо однос

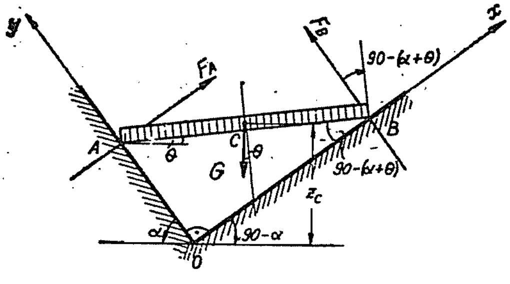
$$\overline{OA} = 2l \sin(\beta - \theta) \sin^{-1}(\alpha + \beta),$$

па је координата тежишта греде

$$z_C = \overline{OA}\ \sin\alpha + l\sin\theta = 2l\sin\alpha\sin^{-1}(\alpha+\beta)\sin(\beta-\theta) + l\sin\theta .$$

Према Торичелијевој теореми (298) биће

$$\delta z_C = [-2l\sin\alpha\sin^{-1}(\alpha+\beta)\cos(\beta-\theta) + l\cos\theta]\,\delta\theta .$$



Сл. 104

Због $\delta\theta \neq 0$ мора бити испуњен услов

$$\operatorname{tg}\theta = [\sin(\beta-\alpha)]/2\sin\alpha\sin\beta .$$

За $\beta = 90^0 - \alpha$ биће $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{ctg} 2\alpha$.

Замислимо да се греда заокренула око тачке A за мали угао $\delta\theta$, онда ће се померити нападне тачке силе G и отпора F_B и извршиће укупни рад

$$\delta\mathbf{A} = [F_B \cdot 2l\cos(\beta-\theta)]\,\delta\theta - $$
$$- (G\cos\theta)\ \ l\,\delta\theta .$$

Због $\delta\theta \neq 0$ биће, с обзиром на горе добивени однос, нормални отпор равни

$$F_B = {}^1\!/_2\, G\cos\theta\cos^{-1}(\beta-\theta) = {}^1\!/_2\, G\sin\alpha\sin^{-1}(\alpha+\beta).$$

За $\alpha + \beta = 90^0$ износи $F_B = G\sin\alpha$, док је $F_A = G\cos\alpha$.

71) Хомогени призматични штап AD тежине G, дужине $2l$, ослања се крајем A на глатку полукуглу полупречника r а у тачки B належе на њен обод (сл. 105). Одредити угао α који гради штап са хоризонталним пречником OB у равнотежном положају и отпоре ослонаца; $r = \sqrt{3}$ m; $2l = 4$ m.

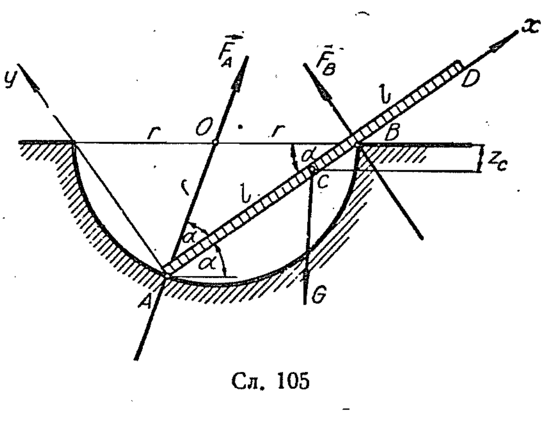
Решење. — Како је

$$z_C = r\sin 2\alpha - l\sin\alpha$$

биће $\delta z_C = (2r\cos 2\alpha - l\cos\alpha)\,\delta\alpha$. Како је $\delta\alpha \neq 0$ добивамо услов

$2\cos^2\alpha - b\cos\alpha - 1 = 0$, где је

$b = l/2r = {}^1\!/_3\sqrt{3}$. Могућно решење је $\cos\alpha = {}^1\!/_2\sqrt{3}$, тј. $\alpha = 30^0$.



Сл. 105

Замислимо ли да се штап заокренуо око тачке A за угао $\delta\alpha$ биће збир радова

$$\delta\mathbf{A} = (F_B \cdot 2r\cdot\cos\alpha - Gl\cos\alpha)\,\delta\alpha = 0,\ \text{тј.}\ F_B = Gb = {}^1\!/_2\, Gl/r .$$

Обрнуто, замислимо ли да се заокренуо око тачке B за угао $\delta\alpha$ биће

$$[(F_A\sin\alpha)\cdot 2r\cos\alpha - G\cos\alpha\,(2r\cos\alpha - l)]\,\delta\alpha = 0,\ \text{па је}$$

$$F_A = G(\cos\alpha - b)/\sin\alpha = {}^1\!/_3\, G\sqrt{3}.$$

72) У непокретној полукугли полупречника R (сл. 106) налазе се две кугле једнаких полупречника али различитих тежина. Одредити угао θ у равнотежном положају кугли, њихов узајамни притисак и отпоре.

Решење. — Како су координате тежишта кугли

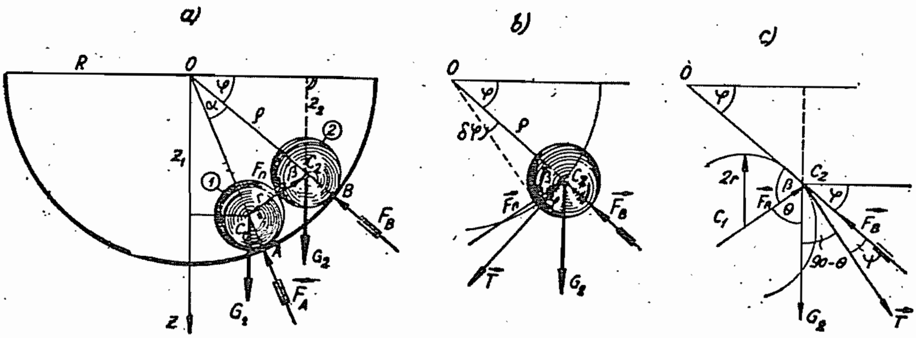
$$z_1 = \rho \sin (\alpha + \varphi); \quad z_2 = \rho \sin \varphi,$$

мора бити испуњен услов (298)

$$\delta z_C = \delta (G_1 z_1 + G_2 z_2)/G = 0, \quad \delta \varphi \neq 0.$$

Из њега добивамо однос

$$\mathrm{tg}\, \varphi = (G_2 + G_1 \cos \alpha)/G_1 \sin \alpha.$$



Сл. 106

Замислимо ли да смо куглу (2) заокренули око тачке O за угао $\delta\varphi$ (сл. 106 *b*), можемо одредити узајамни притисак кугли из услова $(G_2 \cos \varphi - F_n \sin \beta) \rho \, \delta \varphi = 0$ и износи $F_n = G_2 \cos \varphi / \cos {}^1/_2 \alpha$, јер је $\beta = 90^0 - {}^1/_2 \alpha$.

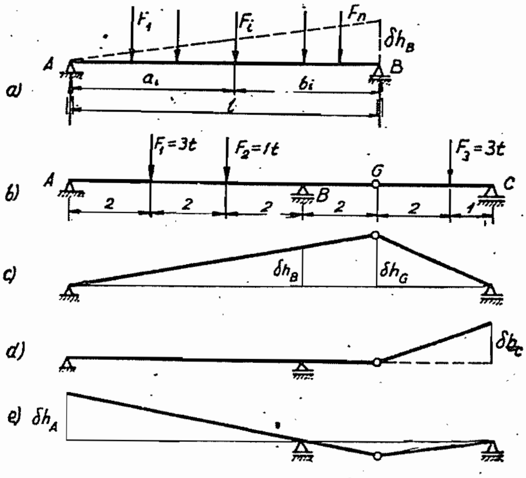
Замислимо ли да смо исту куглу заокренули око тачке C_1 за угао $\delta\beta$ биће

$$(G_2 \sin \theta - F_B \sin \psi) \cdot 2r \, \delta\beta = 0, \text{ па је } F_B = G_2 \sin (\varphi + {}^1/_2 \alpha) \cos {}^1/_2 \alpha,$$

јер су услови: $\theta = 90^0 - (\beta - \varphi) = \varphi + {}^1/_2 \alpha$, $\psi = {}^1/_2 \alpha$.

Примена Лагранжевог принципа у теорији пуних и решеткастих равних носача. — Принцип виртуалних померања, као основни принцип статике, примењује се често у графостатици и отпорности материјала.

а). Пуни носачи. — Проста греда AB распона l (сл. 107 *a*) оптерећена је системом вертикалних концентрисаних терета F_i на растојањима a_i и b_i од ослонаца A и B (*Статика*, сл. 128). Замислимо да смо отстранили ослонац B и отпору F_B дали виртуално померање δh_B



Сл. 107. – *a*) Проста греда, *b*) Герберов носач

навише, онда ће отпор извршити рад $F_B \delta h_B$. Услед овог померања померају се и нападне тачке свих терета те исти врше радове $-F_i \delta h_i$. Они су негативни, јер смо претпоставили да су терети усмерени надоле. Како је греда *круша*, између виртуалних померања постоје односи $\delta h_i : \delta h_B = a_i : l$, па је према Лагранжевом принципу

$$\delta A = F_B \delta h_B - \sum F_i \delta h_i = 0, \text{ тј. } F_B = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{i=n} F_i a_i .$$

Збир на десној страни ове једначине је алгебарски. Добије ли се да је исти позитиван значи да је смер отпора F_B правилно претпостављен (навише); у противном смер треба мењати.

На исти начин одредили бисмо и отпор $F_A = \Sigma F_i (b_i/l)$.

Например, у случају греде ABC распона $\overline{AB} = l$ са препустом $\overline{BC} = c$ а сила F дејствује на слободном крају препуста, имали бисмо

$$F_B \delta h_B - F \delta h_C = 0, \text{ тј, } F_B = F(\delta h_C/\delta h_B) = F[1 + (c/l)].$$

Обрнуто, за отпор A добивамо:

$$F_A \delta h_A + F \delta h_C = 0, \text{ тј. } F_A = - F(\delta h_C/\delta h_A) = - F(c/l).$$

Исти поступак примењујемо и код *Герберовог носача* (сл. 107 *b*). Замислимо да смо отстранили ослонац B (сл. 107 *c*), с обзиром да је греда *круша* те се обрће („ломи") у зглобу (G), биће:

$$F_B = \Sigma F_i (\delta h_i/\delta h_B) = {}^1/_3 F_1 + {}^2/_3 F_2 + {}^4/_9 F_3 = 3 \text{ t},$$

јер постоје односи:

$$\delta h_1 : \delta h_B = 2:6; \ \delta h_2 : \delta h_B = 4:6; \ \delta h_B : \delta h_G = 6:8, \ \delta h_3 : \delta h_B = 4:9.$$

Замислимо ли да смо отстранили ослонац C (сл. 108 *d*) тада део ABG греде остаје хоризонталан, па је

$$F_C \delta h_C - F_3 \delta h_3 = 0, \text{ тј. } F_C = 2 \text{ t}.$$

Истим поступком добивамо и отпор ослонца A:

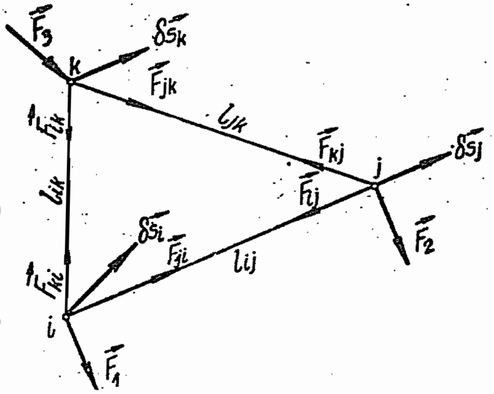
$$F_A \delta h_A - F_1 \delta h_1 - F_2 \delta h_2 + F_3 \delta h_3 = 0; \ F_A = 2 \text{ t},$$

јер постоје односи: $\delta h_1 : \delta h_A = 4:6$; $\delta h_2 : \delta h_A = 2:6$; $\delta h_3 : \delta h_G = 1:3$; $\delta h_G : \delta h_A = 2:6$, $\delta h_3 : \delta h_A = 1:9$.

b) Решешкасши носачи. — Замислимо да смо из решеткастог носача, код кога је задовољен услов $s = 2n - 3$ између броја чворова (n) и броја штапова (s), исекли три оближња чвора (i, j, k) која нападају резултујуће спољашње (F_i) и унутрашње силе у самим штаповима (F_{ui}). Да би решетка била у равнотежи, према „принципу солидификације" мора бити и сваки чвор у равнотежи. Једначина за равнотежу чвора (*i*) биће

$$\vec{F}_i + \sum_{l=1}^{s'} F_{ui} = 0; \quad i = 1,2,\ldots,n$$

s' је број штапова који се стичу у томе чвору (сл. 107 *f*).



Сл. 107 *f*) — Решеткасти носач

Ако сваки чвор добије виртуално померање $\delta\vec{s}_i$ онда је принцип изражен једначином

$$(\vec{F}_i, \delta\vec{s}_i) + \sum_{1}^{s'} (\vec{F}_{ul}, \delta\vec{l}_l) = 0 \quad (300)$$

где је $\delta\vec{l}_l$ могућна варијација штапа. Например, штап $(i-k)$ добива померања услед сила $\vec{F}_{ik}$ и $\vec{F}_{ki}$, ге је

$$(\vec{F}_{ik}, \delta\vec{s}_k) + (\vec{F}_{ki}, \delta\vec{s}_i) = (\vec{F}_{ik}, \delta\vec{l}_{ik}).$$

При испитивању равнотеже чвора унутрашње силе сматрамо спољашњим; при посматрању равнотеже целог носача оне се јављају као унутрашње силе, па ће Лагранжев принцип за цео носач бити

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} (\vec{F}_i, \delta\vec{s}_i) - \sum_{l=1}^{l=n} (\vec{F}_{ul}, \delta\vec{l}_l) = 0} \quad (300')$$

Ово је *основна једначина за равнотежу решеткастог носача.* Она показује да је у случају *равнотеже решеткастог носача збир механичких радова спољашњих сила, при сваком виртуалном померању чворова, једнак збиру радова свих унутрашњих сила.* Под спољашњим силама подразумевамо, као што смо видели у статици, и *отпоре ослонаца.*

Ако код неког носача услов $s = 2n - 3$ није задовољен, значи да је *статички неодређен* у погледу броја штапова, те се силе у штаповима не могу одредити статичким методама (*Статика*, чл. 18). Због тога замислимо да смо *отстранили прекобројни штап* у случају решеткастог носача са односом $s = 2n - 3 + 1 = 2n - 2$, јер је једанпут статички неодређен, и одредимо по познатим методама унутрашње силе у штаповима овог „статички одређеног носача“ $(\overset{(s)}{F}_{ui})$.

Затим претпоставимо да у отстрањеном штапу дејствују унутрашње силе + 1 t, *тако да је штап оптерећен на затезање*. Услед ове силе одредићемо силе у свим штаповима носача. Оне износе $C \overset{(1)}{F}_{ui}$, где је C произвољан коефицијент сразмере — *неименован број*. Укупне унутрашње силе у штаповима решетке износе

$$\boxed{\vec{F}_{ui} = \overset{(s)}{\vec{F}}_{ui} + C \overset{(1)}{\vec{F}}_{ui}} \qquad (301)$$

док је у прекобројном штапу

$$F_{u(p)} = C\,.\,1 = C\,.$$

Према Хуковом закону ове ће силе изазвати издужења или скраћења штапова

$$\Delta l_i = \frac{F_{ui}\;l_i}{E_i\;A_i} = c_i\;(\overset{(s)}{F}_{ui} + C \overset{(1)}{F}_{ui}),$$

где су: E_i модул еластичности, A_i површина попречног пресека штапа, l_i дужина штапа, а $c_i = l_i / E_i\;A_i = l_i / \mathfrak{A}_i$.

Да бисмо одредили непознати коефицијент C применимо принцип виртуалног рада:

$$\sum_{i=1}^{i=n} C\;\overset{(1)}{F}_{ui}\,.\,\Delta l_i = C \sum_{i=1}^{i=n} \left[\overset{(1)}{F}_{ui}\;c_i\;(\overset{(s)}{F}_{ui} + C\;\overset{(1)}{F}_{ui})\right] = 0\,.$$

Пошто је $C \neq 0$, мора бити израз у загради једнак нули, те следи

$$\boxed{C = -\frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} c_i\;\overset{(s)}{F}_{ui}\;\overset{(1)}{F}_{ui}}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} c_i\left[\overset{(1)}{F}_{ui}\right]^2}} \qquad (301')$$

Знајући коефицијент C можемо, према (301), одредити силе у свима штаповима. Ако је носач k пута статички неодређен, треба отстранити k штапова и одредити коефицијенте.

Рачун се спроводи најлакше табеларно.[1]

Пример. — 73) Носач (сл. 108 *a*) оптерећен је силом F. Одредити силе штаповима ако су истих попречних пресека и од истог материјала (EI_x = const).

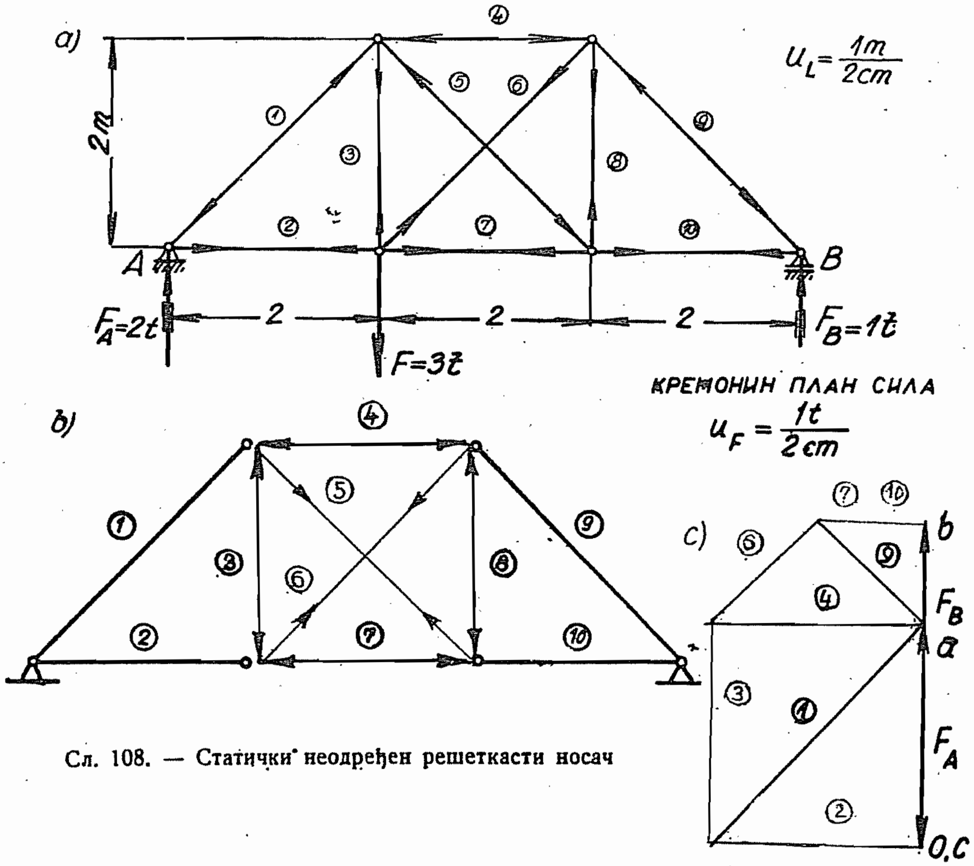
---

[1] Отпорност материјала, чл. 10.9.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Редни број штапа i	Дужина штапа l_i	$c_i = \frac{l_i}{EA_i} = \frac{l_i}{k}$	Сила у штапу од сп. сила ст. одређеног носача $\overset{(s)}{F}_{ui}$	Сила у штапу услед силе од 1 t у штапу (5) $\overset{(1)}{F}_{ui}$	$[5]^2$	$c_i \overset{(s)}{F}_{ui} \overset{(1)}{F}_{ui} = [3] \cdot [4] \quad [5]$	$c_i [\overset{(1)}{F}_{ui}]^2 = [3] \quad [6]$	Сила у штапу $F_{ui} = \overset{(s)}{F}_{ui} + C\overset{(1)}{F}_{ui} = [4] + C\,[5]$
—	m	m/t	t	t	t^2	tm	tm	t
1	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}/k$	$-2\sqrt{2}$	0	0	0	0	$-2{,}82$
2	2	$2/k$	2	0	0	0	0	$2{,}00$
3	2	$2/k$	2	$-\sqrt{2}/2$	$^1/_2$	$-2\sqrt{2}/k$	$1/k$	$2{,}19$
4	2	$2/k$	-2	$-\sqrt{2}/2$	$^1/_2$	$2\sqrt{2}/k$	$1/k$	$-1{,}81$
5	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}/k$	0	1	1	0	$2\sqrt{2}/k$	$-0{,}26$
6	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}/k$	$\sqrt{2}$	1	1	$4/k$	$2\sqrt{2}/k$	$1{,}22$
7	2	$2/k$	1	$-\sqrt{2}/2$	$^1/_2$	$-\sqrt{2}/k$	$1/k$	$1{,}19$
8	2	$2/k$	0	$-\sqrt{2}/2$	$^1/_2$	0	$1/k$	$0{,}19$
9	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}/k$	$-\sqrt{2}$	0	0	0	0	$-1{,}41$
10	2	$2/k$	1	0	0	0	0	1
Σ						$\frac{4-\sqrt{2}}{k}$	$\frac{4(1+\sqrt{2})}{k}$	

$$C = -\frac{[7]}{[8]} = -\frac{4-\sqrt{2}}{4(1+\sqrt{2})} \approx -0{,}263$$

Решење. — Носач има 6 чворова и 10 штапова, па је $s = 2n - 3 + 1 = 10$, те је једанпут статички неодређен. Отпори ослонаца износе $F_A = 2\,\text{t}$, $F_B = 1\text{t}$. За прекобројни штап узмимо штап (5) и одредимо силе у штаповима (сл. 108 *b*) таквог статички одређеног носача (сл. 108)[1]. Кремонин план сила за случај да је штап (5) оптерећен силама +1 приказан је на сл. 108 *c*. Даљи рачун, према (301′), спроведен је табеларно.[1]



Сл. 108. — Статички неодређен решеткасти носач

Лагранж-Даламберов општи принцип механике. — Применимо ли принцип виртуалних померања на Даламберов принцип добићемо векторску једначину

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n}(\vec{F}_i + \vec{F}_j, \delta\vec{r}) = \sum_{i=1}^{i=n}(\vec{F} - m\vec{a}, \delta\vec{r}) \leq 0} \qquad (299)$$

---

[1] На страни 213.

Иста се у скаларном облику може написати изразом

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left[(X-m\ddot{x})\,\delta x+(Y-m\ddot{y})\,\delta y+(Z-m\ddot{z})\,\delta z\right]\leq 0, \qquad (299')$$

где се знак једнакости односи на двостране (задржавајуће) а знак неједнакости на једностране (незадржавајуће) везе.

Овај принцип гласи: *Збир радова активних сила и сила инерције система материјалних тачака на свим виртуалним померањима не може бити позитиван. У случају задржавајућих веза он је једнак нули.*

Овај, тзв. *Лагранж-Даламберов принцип, основни је принцип механике.* Да бисмо оправдали назив општег принципа показаћемо како се из њега могу извести сви закони кретања које смо раније проучили (чл. 4). Због тога, ради краткоће, применимо овај принцип на само једну материјалну тачку што потпуно не утиче на општост принципа.

1⁰ *Закони о кретању.* — Лагранж-Даламберов принцип за материјалну тачку, а за случај задржавајућих веза, може се написати у облику

$$(\vec{F}-m\ddot{\vec{r}},\,\delta\vec{s})=0.$$

Пошто померање $\delta\vec{s}\neq 0$ мора први члан бити једнак нули. Он претставља векторску диференцијалну једначину кретања слободне тачке.

2⁰ *Закон о количини кретања.* — Принцип (299) може се изразити и у овом облику $(\vec{F}-m\dot{\vec{v}},\,\delta\vec{s})=0$. Како $\delta\vec{s}\neq 0$ биће $\vec{F}-m\dot{\vec{v}}=0$ или $\dot{\vec{K}}=\vec{F}=m\vec{a}$.

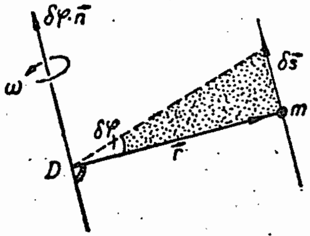
3⁰ *Закон о моменту количине кретања (замаху).* — Нека се материјална тачка окрене за угао $\delta\varphi$ око непомичног пола O (сл. 109) онда је могућно померање, према Ојлеровој једначини (*Кин.*, обр. 111),
$\delta\vec{s}=[-\delta\vec{\varphi},\vec{r}]=[\vec{r},\delta\vec{\varphi}];\ \vec{v}\,\delta t=\delta\vec{s}$ а $\vec{\omega}=\delta\vec{\varphi}/\delta t$ тј. $(\vec{F}-m\vec{a},[-\delta\vec{\varphi},\vec{r}])=0.$

Овај израз претставља мешовити производ трију вектора па се цикличком пермутацијом може написати у овом облику

$$(\delta\vec{\varphi},[\vec{r},\vec{F}]-m[\vec{r},\vec{a}])=0.$$

Пошто је обртање произвољно $\delta\varphi\neq 0$, то мора бити задовољен услов

$$[\vec{r},m\vec{a}]=[\vec{r},\vec{F}]=[\vec{r},m\dot{\vec{v}}]=[\vec{r},\dot{\vec{K}}];\ \dot{\vec{L}}_O=[\vec{r},\vec{F}]=\vec{M}_O^{\vec{F}},$$



Сл. 109. — Виртуално померање при ротацији

што показује да је извод замаха по времену једнак моменту активне силе за исти пол

4⁰ *Закон о живој сили.* — За стварно померање $d\vec{s}$ биће

$$(\vec{F} - m\vec{a}, d\vec{s}) = 0, \qquad \text{тј.} \qquad (\vec{F}, d\vec{s}) = (m\vec{a}, d\vec{s}) = dA = dE_k,$$

и исказује закон о живој сили у диференцијалном облику (чл. 4.3).

На овај смо начин из Даламберовог принципа сједињеног са Лагранжевим принципом виртуалних померања извели све раније изведене законе кретања слободне материјалне тачке (чл. 4). Тиме увиђамо да су у овом *принципу заиста сажети сви закони кретања слободне материјалне тачке, па су једначине кретања изведене из принципа, као што смо принцип извели из једначина кретања.*

У случају *принудног кретања* са једном задржавајућом идеалном везом могућно померање мора задовољити услов $(\operatorname{grad} f, \delta\vec{s}) = 0$. Овај услов задовољава виртуално померање $\delta\vec{s} = [\operatorname{grad} f, \delta\vec{l}]$, где је $\delta\vec{l}$ произвољан вектор, пошто је у томе случају мешовити производ трију вектора једнак нули, $(\nabla f, [\nabla f, \delta\vec{l}]) \equiv 0$.

Израз (29Э) сада постаје $(\vec{F} - m\vec{a}, [\operatorname{grad} f, \delta\vec{l}]) = 0$ а може се, слично ранијем, написати у облику $(\delta\vec{l}, [\vec{F} - m\vec{a}, \operatorname{grad} f]) = 0$.

Пошто је $\delta\vec{l}$ произвољан вектор то мора бити испуњен услов колинеарности вектора

$$[\vec{F} - m\vec{a}, \operatorname{grad} f] = 0,$$

те мора постојати веза

$$\vec{F} - m\vec{a} = -\lambda \operatorname{grad} f,$$

где је λ произвољни скалар. Ту једначину можемо написати у облику

$$m\vec{a} = \vec{F} + \lambda \operatorname{grad} f.$$

Ово је позната диференцијална једначина принудног кретања материјалне тачке изражена у векторском облику (чл. 7.1).

5⁰ *Лагранжеве једначине за систем материјалних тачака.* — Слично Лагранжевим једначинама прве и друге врсте за једну материјалну тачку можемо извести те једначине и за систем материјалних тачака служећи се овим истим принципом механике.

а) Лагранжеве једначине прве врсте. — Нека је систем материјалних тачака *холономан* са k *коначних веза*, онда има $s = 3n - k$ *степена слободе кретања*. Према (299') морају варијације померања бити међусобно независне, па добивамо $3n$ једначина. Међутим, због веза ове варијације нису независне, јер мора бити задовољено k услова (282) за те варијације. Према томе је и број независних варијација $3n - k = s$. Ако из услова веза (282) одредимо k зависних варијација помоћу $3n - k$ независних и ставимо их у једначине (299') онда ће оне садржавати само $s = 3n - k$ независних варијација. Како су ове варијације међусобно независне то морају коефицијенти уз њих бити једнаки нули па добивамо $3n - k$ једначина. Оне заједно са k услова веза чине систем од $3n$ једначина потребних за одређивање координата тачака у зависности од времена t.

Како је одређивање k зависних варијација помоћу $3n - k$ независних тежак посао, то је Лагранж увео *методу множиоца*. Ако k једначина веза (282) помножимо множиоцима λ_j $(j = 1, \ldots, k)$ и саберемо са једначинама (299') добићемо:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i - m_i \ddot{x}_i + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)\delta x_i + \left(Y_i - m_i \ddot{y}_i + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i}\right)\delta y_i + \right.$$

$$\left. + \left(Z_i - m_i \ddot{z}_i + \sum_{=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i}\right)\delta z_i\right] = 0 .$$

Множиоце λ_j морамо тако изабрати да коефицијенти уз k зависних варијација буду једнаки нули. Према принципу (299') морају коефицијенти уз осталих $s = 3n - k$ варијација такође бити једнаки нули, те добивамо $3n$ једначина облика:

$$m_i \ddot{x}_i = X_i + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}; \quad m_i \ddot{y}_i = Y_i + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i};$$

$$m_i \ddot{z}_i = Z_i + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i}.$$

Оне заједно са k једначина веза дају систем од $3n + k$ једначина, потребних за одређивање $3n$ координата тачака и k множиоца веза.

Проблем одређивања кретања помоћу ових једначина много је компликованији, јер треба решити систем од $3n + k$ једначина, односно, у случају нехолономног система, систем $3n + k + r$ једначина. Због тога се ове једначине *користе само за одређивање отпора идеалних веза када је већ познато кретање тачака система*. Пројекције отпора веза за i-ту тачку система биће:

$$X_{wi} = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \qquad Y_{wi} = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i}, \qquad Z_{wi} = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i}.$$

Ако је *систем нехолономан* онда ће пројекције изгледати овако

$$X_{wi} = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^{r}\mu_l A_{il},$$

где су λ_j множиоци холономних, а μ_l нехолономних веза.

b) Лагранжеве једначине друге врсте. — Нека је опет дат *холономни систем* са *k коначних веза* и степеном слободе $s = 3n - k$. Ако положај сваке тачке система одредимо помоћу s *генералисаних међу-*

собно независних координата q_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, s$) биће:

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, \ldots, q_s; t), \quad \delta \vec{r}_i = \sum_{\nu=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu} \delta q_\nu,$$

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_r = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu} \dot{q}_\nu.$$

Како $\dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu}$ зависе само од генералисаних координата q_ν, то брзине тачака линеарно зависе од генералисаних брзина $\dot{q}_\nu$.

Једначина (299) имаће сада облик

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i, \delta \vec{r}_i) - \sum_{i=1}^{n} (m_i \dot{\vec{v}}_i, \delta \vec{r}_i) = 0.$$

Први члан претставља збир радова активних сила на померањима $\delta \vec{r}_i$ и може се изразити помоћу генералисаних сила (250), па је

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i, \delta \vec{r}_i) = \sum_{\nu=1}^{s} Q_\nu \delta q_\nu.$$

Други збир може се написати овако:

$$\sum_{i=1}^{n} (m_i \dot{\vec{v}}_i, \delta \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(m_i, \dot{\vec{v}}_i, \sum_{\nu=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu} \delta q_\nu \right) = \sum_{\nu=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{v}}_i, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu} \right) \delta q_\nu.$$

Како је (*Кин.* чл. **4.3.** g, обр. 91)

$$\left(m_i \dot{\vec{v}}_i, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\nu} \left(\frac{m_i v_i^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_\nu} \left(\frac{m_i v_i^2}{2} \right),$$

увођењем кинетичке енергије система

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} {}^1\!/_2\, m_i v_i^2,$$

добивамо

$$\sum_{i=1}^{n} (m_i \dot{\vec{v}}_i, \delta \vec{r}_i) = \sum_{\nu=1}^{s} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial E_k}{\partial q_\nu} \right) \delta q_\nu.$$

Уносећи овај израз у основну једначину механике (299) биће

$$\sum_{\nu=1}^{s} \left(Q_\nu - \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_\nu} + \frac{\partial E_k}{\partial q_\nu} \right) \delta q_\nu = 0.$$

Због тога што су варијације произвољне, морају изрази у загради бити једнаки нули па добивамо систем једначина

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial E_k}{\partial q_\nu} = Q_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, s)$$

потребних за одређивање s независних координата. Ово су *Лагранжеве једначине друге врсте,* другог су реда, има их s са s непознатих генералисаних координата. Према томе је *њихов број једнак броју степена слободе кретања система.*

За формирање ових једначина потребно је претходно одредити s независних координата, генералисане силе Q_ν и кинетичку енергију система.

Генералисане силе одређују се из једначина рада као коефицијенти уз генералисане варијације

$$\sum_{1}^{n}(\vec{F}_i, \delta \vec{r}_i) = \sum_{1}^{s} Q_\nu \delta q_\nu .$$

Кинетичку енергију одређујемо помоћу квадрата брзине

$$\vec{v}_i = \sum_{\nu=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu}\dot{q}_\nu + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

у облику:

$$E_k = {}^1/_2 \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\rho=1}^{s} A_{\nu\rho}\dot{q}_\nu \dot{q}_\rho + \sum_{\nu=1}^{s} B_\nu \dot{q}_\nu + {}^1/_2 C_\nu ;$$

$A_{\nu\rho}$, B_ν и C_ν су функције генералисаних координата q_ν и времена t:

$$A_{\nu\rho} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\rho}\right), \quad B_\nu = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right),$$

$$C_\nu = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2 .$$

Ако су везе *склерономне* онда је $\vec{r} = \vec{r}\,(q_1, \ldots, q_\nu)$ и не зависи експлицитно од времена t па су коефицијенти B_ν и C_ν једнаки нули. У томе је случају кинетичка енергија *квадратна форма генералисаних брзина* $\dot{q}_\nu$ па се може написати у облику:

$$E_k = {}^1/_2 \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\rho=1}^{s} A_{\nu\rho}\dot{q}_\nu \dot{q}_\rho .$$

Помоћу Лагранж-Даламберовог принципа можемо извести једначину кретања математичког клатна. За изабрани координатни систем (сл. 48), биће:

$$x = l \sin \varphi, \; y = 0, \; z = l \cos \varphi, \quad X = Y = 0, \; Z = m g,$$

па су други изводи координата по времену

$$\ddot{x} = l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi), \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -l(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi).$$

Могућне варијације јесу $\delta x = l\cos\varphi\,\delta\varphi$, $\delta y = 0$, $\delta z = -l\sin\varphi\,\delta\varphi$.

Унесемо ли ове вредности у једначину (299), с обзиром да је веза задржавајућа, биће

$$-m\ddot{x}\,\delta x + (mg - m\ddot{z})\,\delta z = 0$$

односно

$$[(g - \ddot{z})\sin\varphi + \ddot{x}\cos\varphi]\;\delta\varphi = 0.$$

Како је варијација $\delta\varphi$ произвољна то, да би горња једнакост била задовољена, мора израз у средњој загради бити једнак нули

$$(g - \ddot{z})\sin\varphi + \ddot{x}\cos\varphi = 0.$$

Стављајући у овај израз вредности за $\ddot{x}$ и $\ddot{z}$, после скраћивања, добивамо једначину кретања математичког клатна

$$l\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi$$

коју смо извели у чл. 8.4 (једн. 190).

14.4 УСЛОВИ ЗА РАВНОТЕЖУ. СТАБИЛНОСТ ПОЛОЖАЈА РАВНОТЕЖЕ

Услове за равнотежу система материјалних тачака можемо одредити помоћу Лагранжевог принципа виртуалних померања.

а) Услови за равнотежу слободне материјалне тачке. — Као први услов трајног мировања материјалне тачке јесте да у томе положају равнотеже она нема почетну брзину, тј. $v_0 = 0$. Како је на тај начин и убрзање, за све време мировања, једнако нули, то је *векторски услов* за равнотежу, као што смо видели у статици,

$$\boxed{\Sigma\vec{F}_i = \vec{F}_r = 0} \tag{302}$$

тј. *да резултанта свих активних сила, које дејствују на тачку, мора бити једнака нули.* Овој векторској једначини, као што знамо, одговарају три скаларне једначине, тзв. *аналитички услови за равнотежу слободне материјалне тачке.*

Овај услов добивамо и из Лагранжевог принципа

$$\sum_{i=1}^{i=n}(\vec{F}_i, \delta\vec{r}_i) = 0$$

пошто је могућно померање $\delta\vec{r}_i$ за слободну тачку *произвољно* те мора бити испуњен услов $\vec{F}_r = 0$.

Тачка ће бити у равнотежи ако је, при сваком могућном померању, збир механичких радова активних сила једнак нули.

Кад сила $\vec{F}$ има *функцију силе*, тј. ако је $\vec{F} = \text{grad}\, U$, тада је услов за равнотежу слободне материјалне тачке у *пољу дејства конзервативне силе*

$$\vec{F} = \text{grad}\, U = 0$$

односно

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0} \tag{302'}$$

Ови услови показују да *функција силе* у томе положају има *екстремум*. На тај начин можемо исказати ову *важну теорему:*

У пољу конзервативне силе материјална тачка може бити у равнотежи само на оним местима поља у којима је функција силе у екстремуму.

Например, у случају хармониског кретања је $U = -{}^1/_2\, cx^2$, па је $\partial U/\partial x = -cx = 0$ за $x = 0$. Како је $\partial^2 U/\partial x^2 = -c < 0$ то је функција силе у равнотежном положају $x = 0$ у *максимуму*. Напротив, потенцијална енергија је $E_p = {}^1/_2\, cx^2$, па је $\partial E_p/\partial x = cx = 0$ за $x = 0$ и $\partial^2 E_p/\partial x^2 = c > 0$, те је ова енергија у равнотежном положају у *минимуму*

б) Услови за равнотежу везане материјалне тачке. — Услове равнотеже везане материјалне тачке испитаћемо за случај идеалних веза и веза са трењем било да је веза у облику површине или линије.

1^0 *Случај идеалних веза.* — Да би материјална тачка која се налази на *глаткој површини* била у равнотежи, мора бити испуњен услов $\vec{v} = 0$. Из услова за могућну брзину

$$(\vec{v}, \text{grad}\, f) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \text{je} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

па мора бити и $f(x, y, z) = 0$, тј. веза мора бити *непокретна.*

Једначина кретања у овом случају јесте

$$\vec{F} + \vec{F}_{wn} = \vec{F} + \lambda\, \text{grad}\, f = 0.$$

Ако силу разложимо на компоненте у правцу нормале површине $\vec{F}_n$, и у тангенцијалној равни $\vec{F}_T$ онда се горња једначина може написати у облику

$$\vec{F}_n + \lambda\; \text{grad}\; f = 0, \quad \vec{F}_T = 0.$$

Прва сила стоји у равнотежи са отпором површине, па је једини услов за равнотежу да је компонента $\vec{F}_T = 0$, тј. *активна сила* $\vec{F}$ *мора бити колинеарна са нормалом површине, односно са* grad f.

Тај услов колинеарности изражава се векторском релацијом

$$\boxed{[\vec{F},\ \text{grad}\ f] = 0} \tag{303}$$

У случају равнотеже материјалне тачке на глаткој површини мора резултанта активних сила да пада у правац нормале површине.

Овом векторском услову одговарају два скаларна облика

$$X:\frac{\partial f}{\partial x} = Y:\frac{\partial f}{\partial y} = Z:\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Исти услов можемо извести и из Лагранжевог принципа. Пошто померање $\delta\vec{s} = \delta\vec{r}$ *није потпуно произвољно*, већ је управно на grad f, може се претставити векторским производом $\delta\vec{s} = [\text{grad}\ f,\ \delta\vec{l}]$, где је $\delta\vec{l}$ произвољно померање. У овом је случају

$$(\vec{F},\ \delta\vec{s}) = (\vec{F},\ [\text{grad}\ f,\ \delta\vec{l}]) = (\delta\vec{l}\ [\vec{F},\ \text{grad}\ f]) = 0.$$

Пошто је померање $\delta\vec{l}$ потпуно произвољно мора бити испуњен услов (302).

Ако је положај тачке на површини одређен генералисаним координатама q_1 и q_2 услов за равнотежу биће

$$(\vec{F},\ \delta\vec{s}) = \left(\vec{F},\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_2}\delta q_2\right) = Q_1\ \delta q_1 + Q_2\ \delta q_2 = 0, \tag{303'}$$

тј. *морају генералисане силе бити једнаке нули,* $Q_1 = 0,\ Q_2 = 0$.

У случају незадржавајуће везе $f\ (x, y, z) \geqslant 0$ услов (303) остаје исти само сила $\vec{F}_n$ мора тако дејствовати да притискује тачку ка површини.

Ако сила има *функцију силе* услов за равнотежу постаје

$$[\text{grad}\ U, \text{grad}\ f] = 0 \tag{304}$$

што значи да површина — веза, $f\ (x, y, z) = 0$, и еквискаларна површина $U = const.$ имају, у тачки равнотежног положаја, *заједничку тангенцијалну* раван, јер су им нормале колинеарне.

Ако је површина $f\ (x, y, z) = 0$ еквискаларна површина, материјална тачка може бити у равнотежи у свакој тачки на тој површини. Овакве површине називају се *астатичке*.

У овом је случају $(\vec{F},\ d\vec{s}) = 0$, те је померање управно на сили која пада у правац градијента, па је диференцијална једначина астатичке површине

$$(\vec{F}, \vec{ds}) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

Напр., хоризонтална раван је астатичка површина за тешку тачку; сфера је таква површина за централну силу.

Пример. — 74) Одредити равнотежне положаје тешке тачке на непокретној глаткој сфери.

Решење. — Из (303) следе аналитички услови за равнотежу $\partial f / \partial x = 2x = 0$; $\partial f / \partial y = 2y = 0$; $- m g + 2\lambda z = 0$, јер је $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$, $X = Y = 0$, $Z = - m g$. Равнотежни положај је одређен са $x = y = 0$, $z = \pm R$. Дакле, на сфери тешка тачка има два равнотежна положаја, на крајевима вертикалног положаја.

У случају да се тачка налази на *глаткој кривој линији* за равнотежу је потребно да крива буде непокретна. Векторски услов за равнотежу је

$$\vec{F} + \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \operatorname{grad} f_2 = 0.$$

Ако ову једначину помножимо скаларно ортом тангенте криве биће

$$\boxed{(\vec{F}, \vec{T}) = 0} \qquad (305)$$

пошто је градијент управан на тангенту. Овај услов показује да и сила мора бити управна на тангенту, тј. *мора лежати у нормалној равни криве.* Њен интензитет и правац потпуно су произвољни.

Овај услов у скаларном облику изражава се једначином

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

За случај да је крива претстављена једначинама $y = f_1(x)$, $z = f_2(x)$ овај услов постаје $X + Y y' + Z z' = 0$, где су изводи одређени једначинама везе.

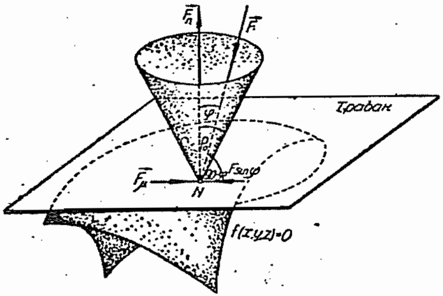
У случају *конзервативне силе*, $\vec{F} = \operatorname{grad} U$, било би:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} y' + \frac{\partial U}{\partial z} z' = 0,$$

те крива мора додиривати еквискаларну површину $U = const.$ Ако крива припада тој површини, равнотежа је могућна у свакој тачки криве. Оваква крива је *астатичка крива.*

2⁰ *Случај веза са трењем.* — У *Статици* (**чл. 33.1**) проучавали смо услове за равнотежу тела на *храпавој површини*, $f(x, y, z) = 0$ и нашли да интензитет компоненте активне силе у тангенцијалној равни површине мора бити мањи или бар једнак сили трења. Помоћу *конуса трења* тај се услов изражавао тиме што је активна сила морала бити или у конусу трења или, пак, дејствовати дуж његове изводнице, увек са смером ка површини а са нападном тачком у материјалној тачки. Дакле, ти услови претстављени једначинама биће

$$F \sin \varphi \leq \mu_0 \ F_n, \ \operatorname{tg} \varphi \leq \operatorname{tg} \rho_0, \ \varphi \leq \rho_0$$



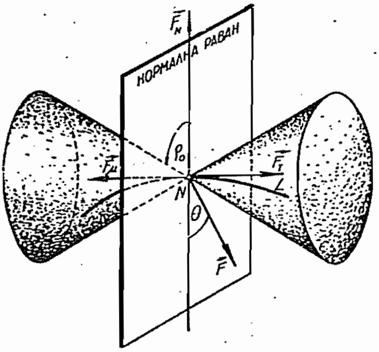
Сл. 110. — Конус трења за храпаву површину

где је ρ_0 угао трења који одговара коефицијенту статичког трења μ_0.

За испитивање равнотеже тачке на *храпавој кривој* закон о трењу остаје исти само што је отпор $\vec{F}_w$ сада у нормалној равни криве. Ако активну силу разложимо на компоненте у правцу тангенте путање и у нормалној равни онда су услови за равнотежу:

$$F \cos \theta - F_{wn} = 0, \ F_T = F \sin \theta \leq \mu_0 \ F_{wn}; \theta \leq \rho_0 .$$

Геометриско место правих које граде угао трења ρ_0 са нормалном равни на криву јесте конус који се назива *конус трења за криву линију*. Помоћу њега можемо услов за равнотежу тачке на храпавој кривој овако изразити: *ако се активна сила налази изван или на самом конусу трења за линију са смером ка линији, тачка ће остати у равнотежи* (сл. 111). Падне ли сила *у конус трења* наступиће кретање тачке у правцу тангенте путање.



Сл. 111. — Конус трења за храпаву линију

с) Дирихлеова теорема. — Слободан систем од n материјалних тачака има у простору $3n$ степена слободе кретања. Међутим, ако је холономан са k двостраних (задржавајућих) коначних склерономних веза

$$f_j (x_i, y_i, z_i) = 0, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, k \end{matrix}$$

онда има само $3n - k$ *степена слободе кретања*. Тренутни положај система можемо одредити скаларним величинама q_ν. Ако су оне *међусобно независне*, тј. ако се једној координати да виртуално померање, које везе дозвољавају, а све остале остају непромењене, па систем заузме могућни положај, онда је *број степена слободе кретања једнак броју тих међусобних независних скаларних величина*. Оне се зову *генералисане координате* (чл. 11). Њих, дакле, треба да има $s = 3n - k$.

Претпоставимо да се координате материјалне тачке могу изразити као функције времена (t) и s *међусобно независних и слободних параметара* q_ν, тада су варијације координата претстављене изразима:

$$\begin{aligned}
\delta x_i &= \frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial x}{\partial q_s}\delta q_s = \sum_{\nu=1}^{s}\frac{\partial x}{\partial q_\nu}\delta q_\nu, \\
\delta y_i &= \frac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial q_s}\delta q_s = \sum_{\nu=1}^{s}\frac{\partial y}{\partial q_\nu}\delta q_\nu, \\
\delta z_i &= \frac{\partial z}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial q_s}\delta q_s = \sum_{\nu=1}^{s}\frac{\partial z}{\partial q_\nu}\delta q_\nu.
\end{aligned} \tag{306}$$

Принцип виртуалних померања за систем материјалних тачака може се изразити једначином:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(X_i\delta x + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) = Q_1\delta q_1 +$$

$$+ Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_\nu\delta q_\nu + \ldots = \sum_{\nu=1}^{\nu=s} Q_\nu\delta q_\nu.$$

Генералисане силе, према чл. 11, дате су изразом

$$Q_\nu = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\vec{F}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu}\right) = \sum_{i=1}^{i=n}\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} + Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_\nu} + Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_\nu}\right), \quad \begin{matrix}(i = 1, 2, 3 \ldots n)\\ (\nu = 1, 2, 3 \ldots s)\end{matrix}$$

Да би систем материјалних тачака био у равнотежи морају генералисане силе бити једнаке нули

$$\boxed{Q_1 = 0, \ldots, \quad Q_\nu = 0 \ldots, \quad Q_s = 0} \tag{307}$$

Ако оне имају функцију сила $U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, тј. за случај *поља конзервативних сила,* биће:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \ldots, \frac{\partial U}{\partial q_\nu} = 0, \ldots, \frac{\partial U}{\partial q_n} = 0 \tag{307'}$$

па мора бити, у положајима равнотеже, функција сила у екстремуму. Лагранж је први указао али је *Дирихле* (*Lejeune Dirichlet*, 1805—1859 год.) доказао теорему.

Када у положају равнотеже система материјалних тачака, на који дејствују конзервативне силе, функција силе има максимум (потенцијална функција минимум), равнотежа је стабилна.

Дакле, услови за равнотежу изражавају се једначинама

$$\boxed{\begin{matrix} Q_\nu = \partial U/\partial q = \partial E_p/\partial q = 0, \\ \partial^2 U/\partial^2 q < 0, \quad \partial^2 E_p/\partial q^2 > 0 \end{matrix}} \tag{308}$$

Напр., услов за стабилну равнотежу штапа (сл. 108) одредићемо према (308). Како је тежина конзервативна сила то је функција силе $U = mg\,z_C = mg\,(r\sin 2\alpha - l\sin\alpha)$, јер је Oz оса усмерена наниже. Из услова $\partial U/\partial\alpha$ добивамо услов за равнотежу, тј. вредности $\cos\alpha = {}^1/_2\sqrt{3}$ и $\cos\alpha = -{}^1/_3\sqrt{3}$. Како је $\partial^2 U/\partial\alpha^2 = l\sin\alpha - 4r\sin 2\alpha$, то је за прву вредност $\partial^2 U/\delta\alpha^2 < 0$, па је положај равнотеже *стабилан*. За другу вредност корена квадратне једначине положај равнотеже је нестабилан.

Генералисане координате q_ν можемо тако изабрати да су у положају равнотеже једнаке нули, $q_\nu = 0$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots, s)$. У томе почетном положају нека су U_0 функција силе а E_{ko} кинетичка енергија, онда је

$$E_{ko} = U_0 + h,$$

где је $h = const.$

Дамо ли тачкама материјалног система, који се налази у равнотежном положају, бесконачно мале брзине, почеће да се крећу. Тада ће наступити два случаја: *или систем остаје бесконачно близак равнотежном положају, или се удаљава од равнотежног положаја.*

У првом случају положај равнотеже је *стабилан*, у другом *лабилан*. Под утицајем саопштених брзина, после извесног времена, кинетичка енергија биће

$$E_k = U + h,$$

па је

$$E_k = E_{ko} - (U_0 - U).$$

Како у положају стабилне равнотеже функција силе има *maximum* то је разлика $U_0 - U > 0$. Означимо са ε произвољну малу позитивну величину. Ако једна координата q_ν прими граничне вредности $\pm\varepsilon$, а остале остану у томе размаку, за разлику $U_0 - U$ добићемо низ вредности P_i. Претпоставимо да је P *најмања вредност* онда је увек $U_0 - U > P$. Ако су почетне брзине тачака биле тако мале да је $E_{ko} < P$ то из једначине (308) следи да је кинетичка енергија негативна а то не може бити, јер је она увек позитивна величина. Ово значи да ниједна координата не може достићи граничну вредност $\pm\varepsilon$, тј. морају све остати у размаку $[-\varepsilon, +\varepsilon]$. Материјални се систем налази у *стабилној равнотежи.* Он може да осцилује око равнотежног положаја, али се не може далеко удаљити од њега.[1]

Пример. — **74)** Уже ABC привезано је у тачки A а пребачено преко котура C. О тачку B обешен је терет G_1 а о крај ужета терет G_2. Одредити карактер равнотежног положаја терета.

(Walton)

---

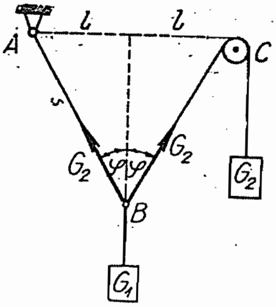
[1] У *теорији осцилација* при испитивању малих кретања тачака система око положаја равнотеже, као и у акустици, уводи се *функција расипања* која зависи од генералисаних координата и брзина (Lord Rayleigh — Theory of Sound). Ако је ова функција једнака нули тотална енергија остаје константна, а ако је позитивна онда настаје губитак (расипање) енергије.

Решење. — Функција силе је $U = A = G_1 h - G_2 \cdot 2s$, где су $h = l/\mathrm{tg}\,\varphi$, $s = l/\sin\varphi$.

Из услова $\partial U/\partial\varphi = (-G_1 l + 2G_2 l \cos\varphi)/\sin^2\varphi = 0$ следи однос $G_1 = 2G_2\cos\varphi$. Како је

$$\partial^2 U/\partial\varphi^2 = 2l\,[G_1\cos\varphi - G_2(1+\cos^2\varphi)]/\sin^3\varphi =$$
$$= -2G_2 l/\sin\varphi < 0$$

положај равнотеже је *стабилан*.



Сл, 112

d) Стабилност стационарног кретања.

— Кинетичка енергија централног кретања је

$$E_k = {}^1/_2\, m\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2).$$

Она не зависи од координате φ, која је цикличка координата, јер је и $Q_\varphi = 0$. Значи да постоји интеграл замаха, па је $2S = C$.

У случају *стационарног кретања* нециклична брзина је радијална брзина $\dot{r} = 0$. Тада кинетичка енергија не зависи нити од цикличке координате нити од нецикличке брзине, већ само од нецикличке координате, те има карактер „потенцијалне енергије".

Раут (Edward John Routh, 1831—1907) у делу „*Rigid dynamics*" показао је да се критеријум за стабилност оваквог кретања може одредити помоћу екстремума „*модифициране енергије*".

Ако модифицирана енергија задовољава услове

$$\boxed{E^* = E_k^{(s)} + E_p,\ \ \partial E^*/\partial q_n = 0,\ \ \partial^2 E/\partial q_n^2 > 0} \qquad (309)$$

тј. да је у минимуму, кретање је *стабилно*. Овде q_n значи нецикличку координату.

Пример. — 75) Испитати стабилност кретања под утицајем привлачне силе $F = -cr^n$.

Решење. — Како је $E_p = -U = cr^{n+1}/(n+1)$ то је модифицирана енергија

$$E^* = {}^1/_2\, m\,(C/r)^2 + c\,(n+1)^{-1}\, r^{n+1}.$$

Услови (309) доводе до

$$\partial E^*/\partial r = -mC^2 r^{-3} + cr^n = 0, \quad cr^{n+3} = mC^2,$$

$$\partial^2 E^*/\partial r^2 = 3mC^2 r^{-4} + ncr^{n-1} = c(n+3)\,r^{n+1} > 0,$$

па је за $n > -3$ кретање *стабилно* (напр., кретање под утицајем Њутнове силе).

14.5 ГАУСОВ ПРИНЦИП НАЈМАЊЕГ ОТСТУПАЊА (ПРИНУДЕ)

Гаусов принцип *најмањег отступања* или *најмање принуде*[1] („*Prinzip der kleinsten Zwanges*") може се извести из Даламберовог принципа, који је изведен из основних

---

[1] У овом принципу *изгубљена сила* и *реципрочна маса* играју исте улоге као *грешка* и *тежина грешке* у теорији грешака. Упоредити и са Гаусовом *методом најмањих квадрата*.

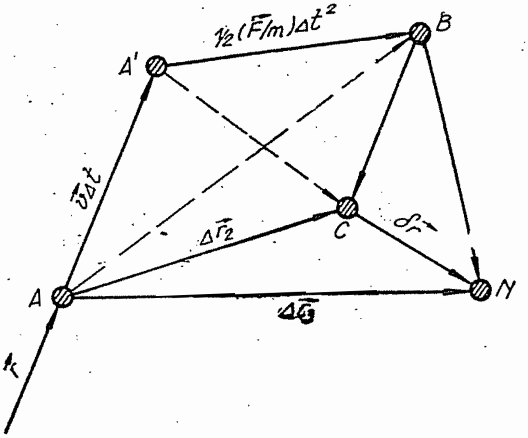
једначина кретања. Према томе се могу помоћу Гаусовог принципа извести и основне једначине кретања, те га, због тога, с правом сматрамо основним принципом механике.

Креће ли се тачка убрзано онда у неком тренутку (t) има и брзину и убрзање у одређеном положају (A). После времена t она би прешла у положај A' када на њу не би дејствовале спољашње силе, али услед њиховог дејства она стварно стиже у положај B (сл 113). Положај тачке B можемо одредити векторски у односу на сталну тачку (O):

$$\vec{r}_1(t+\Delta t) \approx \vec{r} + \vec{v}\,\Delta t + {}^1/_2(\vec{F}\,m)(\Delta t)^2.$$

Вектор $\overrightarrow{A'B}$ претставља *скретање — девијацију* (*Кин.*, чл. 12.3) док је $\vec{F}/m$ убрзање од силе $\vec{F}$.

У случају *принудног кретања* услед дејства силе $\vec{F}$ и силе везе $\vec{F}_w$ тачка ће стићи у положај C одређен у односу на пол O вектором



Сл. 113. — Девијација

$$\vec{r}_2(t+\Delta t) \approx \vec{r} + \vec{v}\,\Delta t + {}^1/_2 m^{-1}(\vec{F} + \vec{F}_w)(\Delta t)^2.$$

Вектор $\overrightarrow{A'C}$ претставља девијацију услед дејства силе везе.

Пређе ли тачка услед неког виртуалног померања које веза допушта, а за исти временски размак, у положај N тада постоји, из троугла $\Delta\, BCN$, релација $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$, па је

$$\overline{BN}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CN}^2 + 2(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CN}).$$

Како је вектор $\overrightarrow{BC}$ одређен са

$$\overrightarrow{BC} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = {}^1/_2\,\vec{F}_w\, m^{-1}(\Delta t)^2 = {}^1/_2(\ddot{\vec{r}} - \vec{F}\,m^{-1})(\Delta t)^2$$

а с обзиром да је $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_w$ добива се

$$\overline{BN}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CN}^2 + (\ddot{\vec{r}} - m^{-1}\vec{F}, \overrightarrow{CN})(\Delta t)^2.$$

Помножимо овај израз масом m_i и саберимо за све тачке система добићемо

$$\Sigma\, m_i\, \overline{BN}^2 = \Sigma\, m_i\, \overline{BC}^2 + \Sigma\, m_i\, \overline{CN}^2 + \Sigma\,(m_i\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i, \overrightarrow{CN})(\Delta t)^2.$$

Пошто вектор $\overrightarrow{CN}$ претставља померање $\delta\vec{r}$ то је последњи израз, према Даламберовом принципу, једнак нули или већи од нуле (за незадржввајуће везе) па је

$$\Sigma\, m_i\, \overline{BN}^2 > \Sigma\, m_i\, \overline{BC}^2.$$

Израз $\Sigma\, m_i\, \overline{BN}^2$ назива се *отступање — принуда* — другог положаја материјалног система од првог („*Zwang*"). Ова неједнакост претставља Гаусов принцип који гласи:

Систем се креће принудно тако да је у свакој тренутку отступање система при стварном кретању најмање од свих отступања при могућним кретањима које везе допуштају.

Отступање $\Sigma m_i \overline{BC}^2$ има вредност

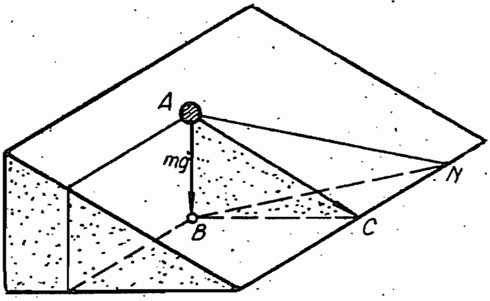
$$\boxed{Z_w = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \overline{BC}^2 = \frac{(\Delta t)^4}{4} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i)^2} \tag{310}$$

Овај израз за стварно кретање има *најмању* вредност.

Пошто величина $^1/_4 (\Delta t)^4$ не игра улогу у проучавању отступања-принуде, то Гаус под отступањем подразумева - само збир на десној страни једначине (310). Услов да је прва варијација отступања једнака нули доводи до једначине

$$\delta Z_w = 0 \text{ тј. } \Sigma (\vec{F}_i - m \ddot{\vec{r}}_i) \delta \ddot{\vec{r}}_i = 0. \tag{310'}$$

Како у овоме случају *варирају само убрзања*, мора израз у загради (310′) бити једнак нули; он претставља једначину кретања.



Сл. 114. — Гаусов принцип принуде

Гаусов принцип можемо лако приказати на проблему кретања тешке тачке по глаткој стрмој равни (без почетне брзине). При слободном кретању тачка би прешла пут $\overline{AB}$ (сл. 114). Међутим, услед везе тачка ће стићи у положај C, па је $\overline{BC}$ отступање стварног кретања од слободног. Ако је $\overline{AN}$ могућно кретање низ раван онда је отступање $\overline{BN}$ веће од отступања $\overline{AC}$. Према томе је заиста отступање за стварно кретање *најмање*.

14.6 ИНТЕГРАЛНИ ПРИНЦИПИ

Од интегралних принципа проучићемо два: *Хамилтонов* и *Лагранж-Мопертијев принцип најмањег дејства*. Први се користи у многим проблемима теориске физике и квантне механике, други у теорији еластичности и осцилација *(метода деформационог рада)*.

Оба су принципа варијационог карактера.

14.6. ХАМИЛТОНОВ ПРИНЦИП

Нека на материјалне тачке једног *холономног система* дејствују *конзервативне силе*. Како оне имају функцију силе то је $Q_\nu = \partial U / \partial q_\nu$ па Лагранжеве диференцијалне једначине друге врсте имају облик

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (E_k + U)}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial (E_k + U)}{\partial q_\nu} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial q_\nu} = 0, \tag{311}$$

где је $\mathbf{L} = E_k + U = E_k - E_p$ кинетички потенцијал.

Интеграл

$$\boxed{\mathbf{W} = \int_{t_1}^{t_2} (E_k + U)\ dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{L}\ dt} \tag{312}$$

назива се *дејство (actio) у Хамилтоновом смислу*[1] или *главна Хамилтонова функција*[2]. Подинтегрална функција претставља кинетички потенцијал, тј. вишак кинетичке енергије над потенцијалном при самом кретању.

У тренутку t_1 покретна тачка била је у положају N_1 и имала је брзину v_1. Под утицајем силе она ће у временском размаку $t_2 - t_1$ прећи у положај N_2. Путања тачке (N) којом она *стварно прелази* из првог положаја у други у том временском размаку назива се *директни пут материјалне тачке.* У случају материјалног система директни пут је скуп путања свих материјалних тачака којима оне прелазе из првог положаја система у други.

Положај материјалног система одређује се генералисаним координатама q_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, s$, где је s број степена слободе кретања система), па су коначне једначине кретања $q_\nu = q_\nu\ (t)$. Ове координате и брзине морају на стварном путу задовољити једначине (311).

Постоји ли још једна путања којом тачка може прећи из првог положаја у други у истом временском размаку $t_2 - t_1$; под условом да везе буду задовољене ако је кретање принудно, такав се пут назива *заобилазни* или *суседни.* Овај се пут не разликује од стварног у погледу времена кретања *(синхрон је),* нити у погледу почетног и крајњег положаја и услова које належу везе, али се разликује путањом. Како се за стварни пут узимају генералисане координате q_ν, за заобилазни ће се узети координате $\overline{q}_\nu = q + \varepsilon\,\eta\ (t)$, где је ε произвољно мали број а $\eta\ (t)$ произвољна функција (*Дод.* III, обр. 407). Прва варијација биће $\delta\, q = \overline{q} - q = \varepsilon\,\eta(t)$ и претставља промену q услед промене саме функције не мењајући независно променљиву (t). Због тога ће се на овим путевима разликовати и дејства (312) те се може одредити и прва (проста) варијација

$$\delta\,\mathbf{W} = \int_{t_1}^{t_2} (\delta\, E_k + \delta\, U)\ dt. \tag{313}$$

---

[1] *Дејство* има димензију [M L^2 T^{-1}] и мери се у gr* . cm² sec⁻¹ (или erg sec) односно gr cm sec (или kgm sec). Напр., *Планков (Max Planck) квант дејства* износи $h = 6{,}624 \cdot 10^{-27}$ erg sec.

[2] Phil. Trans. 1834, page 307; 1835, p. 95.

Кинетичка енергија зависи и од генералисаних брзина и од координата; међутим, функција силе зависи само од координата (и времена, али исто не варира у овом случају), па су прве варијације

$$\delta E_k = \sum_{\nu=1}^{s}\left(\frac{\partial E_k}{\partial q_\nu}\,\delta q_\nu + \frac{\partial E_k}{\partial \dot q_\nu}\,\delta \dot q_\nu\right), \qquad \delta U = \sum_{\nu=1}^{s}\frac{\partial U}{\partial q_\nu}\,\delta q_\nu . \qquad (313')$$

Како је прва варијација *изохрона* то диференцирање и варирање имају комутативни карактер, па је $\delta \dot q = \delta\,(dq/dt) = d\,(\delta q)/dt$. Због тога што почетни (N_1) и крајњи положај (N_2) не варирају, а заобилазни пут мора проћи кроз те тачке, морају бити варијације у тим положајима једнаке нули, тј. $[\delta q_\nu]_{t_1} = [\delta q_\nu]_{t_2} = 0$.

Парцијалним интеграљењем други део прве варијације кинетичке енергије, сменама $\partial E_k/\partial q_\nu = u$, $d\,\delta q_\nu = dw$, сводимо на облик

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial E_k}{\partial \dot q_\nu}\,\partial \dot q_\nu\, dt = \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial E_k}{\partial q_\nu}\,d\,\delta q_\nu = \left[\frac{\partial E_k}{\partial \dot q_\nu}\,\delta q_\nu\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_3}\frac{d}{dt}\,\frac{\partial E_k}{\partial \dot q_\nu}\,\delta q_\nu\, dt .$$

Уносећи ове вредности у прву варијацију дејства (313) добивамо

$$\delta \mathbf{W} = -\int_{t_1}^{t_2}\sum_{\nu=1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\,\frac{\partial E_k}{\partial \dot q_\nu} - \frac{\partial E_k}{\partial q_\nu} - \frac{\partial U}{\partial q_\nu}\right)\delta q_\nu\, dt .$$

Пошто на директном путу морају бити задовољене Лагранжеве једначине (249) мора прва варијација дејства бити једнака нули

$$\boxed{\delta \mathbf{W} = 0} \qquad (313'')$$

Ово је израз Хамилтоновог принципа који гласи:

Дејство у Хамилтоновом смислу има за директни пут холономног конзервативног система екстремну вредност у поређењу са вредностима дејства на заобилазним путевима.

Помоћу Лагранжевих једначина извели смо Хамилтонов принцип; обратно, можемо помоћу овога принципа (313″) извести те једначине, па због тога стварно и претставља општи принцип механике.

Например, у случају слободног праволиниског кретања тачке биће $E_k = {}^1/_2\; m\,\dot x^2$, $E_p = \Pi\,(x)$. Како је $x = x + \delta x$, то је $\dot{\bar x} = \dot x + d\,(\delta x)/dt = \dot x + \delta\,\dot x$, па је $\dot{\bar x}^2 \approx \dot x^2 + 2\,\dot x\;\delta\,\dot x$ када се занемаре мале величине другог реда. Исто тако биће $\Pi\,(x) \approx \Pi\,(x) + \delta x \cdot \Pi'\,(x)$, па је прва варијација дејства

$$\delta \mathbf{W} = \int [m\dot{x}\,\delta\dot{x} - \delta x\; \Pi'(x)]\; dt\,.$$

Парцијалним интеграљењем први интеграл постаје

$$m\int \dot{x}\,\delta\dot{x}\;dt = m\int \dot{x}\;d\,\delta x = m[\dot{x}\;\delta x] - \int \delta x\cdot[d\;(m\dot{x})/dt]$$

па је

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{d}{dt}\,(m\dot{x}) + \Pi'(x)\right]\delta x\;\delta t = 0\,.$$

Како $\delta x \neq 0$ то подинтегрална функција мора бити једнака нули у сваком тренутку времена, тј.

$$m\ddot{x} + \Pi'(x) = 0\,, \quad \text{или} \quad m\ddot{x} - \dot{X} = 0\,,$$

јер је $X = -\partial\Pi/\partial x$. Ово је диференцијална једначина праволиниског кретања тачке под утицајем силе која има функцију силе.

Са гледишта варијационог рачуна Лагранжеве једначине јесу фамилије кривих линија функционала дејства W. Она од њих за коју функционала W има екстремну вредност јесте његова *екстремала*. Она претставља *директни пут*.

Како у изразу за дејство W учествују енергије то се овај принцип може применити и на електричне и на топлотне појаве.

Например, у случају хармониског осциловања су $E_k = {}^1\!/_2 m\dot{x}^2$, $U = -{}^1\!/_2 c x^3$, па је дејство

$$\mathbf{W} = {}^1\!/_2\int (m\dot{x}^2 - c x^2)\,dt = \int f(x,\;\dot{x})\;dt\,.$$

Према Ојлеровој једначини (Дод. III, обр. 471) мора бити

$$[d\,(\partial f/\partial\dot{x})/dt] - (\partial f/\partial x) = [d\,(m\dot{x})/dt] + cx = m\ddot{x} + cx = 0\,.$$

Ово је позната једначина хармониског осциловања.

У случају *принудног кретања* материјалне тачке по глаткој површини без дејства спољашњих сила (дакле, по инерцији) кинетичка енергија је $E_k = {}^1\!/_2 mv^2$ и $U = C$, па је дејство $\mathbf{W} = \int[{}^1\!/_2 mv^2 + C]\,dt$. Прва варијација дејства је $\delta\,\mathbf{W} = 0$, тј. $\delta\,(v^2) = 0$, па је брзина у екстремуму (минимум) те је и $s = vt$ у екстремуму (минимум), што значи да је путања *геодезиска крива на той површини*.

14.6.2 ЛАГРАНЖЕВ ПРИНЦИП НАЈМАЊЕГ ДЕЈСТВА

1744 год. француски научник *Мопертиј*[1] *(Pierre Louis Moreau de Mopertuis,* 1693—1759) први је формулисао принцип најмањег дејства:

---

[1] Mém. de l'acad., p. 417.

„Износ дејства које се употреби при променама у природи увек је најмањи“, али га није доказао. *Ојлер*[1] је уочио важност овог принципа и применио га за случај централног кретања појединих материјалних тачака. *Лагранж*[2] је принцип проширио на систем материјалних тачака, па се због тога овај принцип и назива *Лагранж — Мопертијев принцип најмањег дејства* (*„Principe de la moindre action“*).

Принцип најмањег дејства је сличан Хамилтоновом принципу али се од њега разликује у овоме:

1⁰ *дејство у смислу Лагранжа разликује се од дејства у смислу Хамилтона,*

2⁰ *у случају кретања по овом принципу сматра се да се оно врши са истом тоталном енергијом док се код Хамилтоновог принципа врши у истом временском размаку.*

При кретању *холономног конзервативног система* постоји интеграл живе силе $E_k = U + h$, где је h константа, па је $E_k + U = 2\,E_k - h$ те је

$$\mathbf{W} = \int_{t_1}^{t_2} (2\,E_k - h)\,dt = 2\int_{t_1}^{t_2} E_k\,dt - h\,(t_2 - t_1).$$

Први интеграл назива се *дејство у Лагранжевом смислу* или *карактеристична функција:*

$$\boxed{\mathbf{W}_L = 2\int_{t_1}^{t_2} E_k\;dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i\,v_i^2\,dt} \qquad (314)$$

Како је $h = const.$ а и *време варира*, то је *тотална варијација* дејства у Лагранжевом смислу једнака нули

$$\boxed{\Delta\,\mathbf{W}_L = 0} \qquad (314')$$

и она изражава *Лагранжев принцип најмањег дејства* за директни пут који гласи: *Дејство у Лагранжевом смислу има за директни пут холономног конзервативног система минимум у сравњењу са дејством на обллижњим путевима* (кинематички дозвољеним) *којима може систем да пређе из једног положаја у други са истом тоталном енергијом* ($h = const.$).

---

[1] „Methodus inveniendi lineas curvas“, 1744.

[2] Oeuvres 1, 1760 год., page 365.

Слично Хамилтоновом принципу можемо принцип најмањег дејства извести из Лагранжевих једначина, и обратно, помоћу њега извести Лагранжеве једначине кретања. Показаћемо како се из овога принципа изводе Лагранжеве једначине.

Ако је $t_1 = 0$ онда је дејство по Лагранжу $\mathbf{W}_L = \mathbf{W} + h\Delta t$, па је тотална варијација дејства $\Delta \mathbf{W}_L = \Delta \mathbf{W} + (\mathbf{L} + h)\Delta t = \delta \mathbf{W} + (\dot{\mathbf{W}} + h)\Delta t$. Како је, према (311), $\dot{\mathbf{W}} = \mathbf{L}$ то је $\Delta \mathbf{W}_L = \delta \mathbf{W} + (\mathbf{L} + h)\Delta t$.

Према Хамилтоновом принципу је

$$\delta \mathbf{W} = \int_0^t \sum_\nu \left(\frac{\partial E_k}{\partial q_\nu} + \frac{\partial U}{\partial q_\nu}\right) \delta q_\nu \, dt + \int_0^t \sum_\nu \frac{\partial E_k}{\partial \dot q_\nu} \delta \dot q_\nu \, dt.$$

Други интеграл на десној страни горње једначине може се трансформисати на облик

$$\int \sum_\nu \frac{\partial E_k}{\partial \dot q_\nu} \partial q_\nu \, dt = \left[\sum_\nu \frac{\partial E_k}{\partial \dot q_\nu} \delta q_\nu\right]_0^t - \int \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot q_\nu}\right) \delta q_\nu \, dt$$

па је варијација

$$\delta \mathbf{W} = \int \sum_\nu \left[-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot q_\nu}\right) + \frac{\partial E_k}{\partial q_\nu} + \frac{\partial U}{\partial q_\nu}\right] \delta q_\nu \, dt + \left[\sum \frac{\partial E_k}{\partial \dot q_\nu} \delta q_\nu\right]_0^t.$$

Како је $[\delta q_\nu]_0 = 0$, $[\delta q_\nu]_t \neq 0$, јер систем прелази из положаја N_0 у N_1 различитим путевима за различите временске размаке, морамо увести тоталну варијацију $\Delta q_i = \delta q_i + \dot q_i \, \Delta t$, па је

$$\left[\sum_\nu \frac{\partial E_k}{\partial \dot q_\nu} \delta q_\nu\right]_0^t = \left[\sum_\nu \frac{\partial E_k}{\partial \dot q_\nu} \Delta q_\nu\right]_0^t - \left[\sum_\nu \frac{\partial E_k}{\partial \dot q_\nu} \dot q_\nu \Delta t\right]_0^t.$$

Како је $[\Delta q_\nu]_0 = 0$ и $[\Delta q_\nu]_t = 0$ то је први члан на десној страни горњег израза једнак нули. Пошто је кинетичка енергија квадратна функција генералисаних брзина $\dot q_\nu$ то ће, према Ојлеровој теореми за хомогене функције, бити $2E_k = \sum \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot q_\nu}\right) \dot q_\nu$, па је други члан $-2E_k \Delta t$. Уносећи ову вредност у једначину за дејство $\mathbf{W}_L$ биће:

$$\Delta \mathbf{W}_L = \int \sum_\nu \left[-\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot q_\nu} + \frac{\partial E_k}{\partial q_\nu} + \frac{\partial U}{\partial q_\nu}\right] \delta q_\nu \, dt + [\mathbf{L} + h - 2E_k]\Delta t = 0.$$

Како је $\mathbf{L} = E_k + U$ то је други израз горње једначине једнак нули па за произвољну варијацију δq_ν мора израз у првој загради бити једнак нули

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot q_\nu} - \frac{\partial E_k}{\partial q_\nu} = \frac{\partial U}{\partial q_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, s.$$

Он претставља Лагранжеве једначине кретања холономног конзервативног система.

Дејство у Лагранжевом смислу може се схватити и као рад вектора количина кретања материјалних тачака система на томе путу, јер је

$$2\,E_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\,v_i^2 \quad \text{па је} \quad 2\int E_k\,dt = \int_{N_0}^{N} \sum_{i=1}^{i=n} m_i\,v_i\,d\,s_i\,.$$

Ово је *Мопертијев облик* пошто је он под дејством подразумевао интеграл $\int v\,ds$.

Како је за конзервативни систем $2\,E_k = 2\,(U+h)$ и $2\,E_k = \sum m_i\,v_i^2 = \sum m_i \left(\frac{ds_i}{dt}\right)^2$ то изједначењем добивамо $dt = [\sum m_i\,ds_i^2/(2\,U+h)]^{1/2}$. Према томе је дејство

$$\mathbf{W}_L = \int 2\,E_k\,dt = \sqrt{2\,(U+h)}\;\sqrt{\sum m_i\,ds_i^2}\,.$$

Пошто је време елиминисано то овај израз има *геометриски карактер (Јакобијев облик принципа)*. У случају кретања тачке по инерцији је $U = C = const.$ па је дејство

$$\mathbf{W}_L = C_i \int \sum_{i} m_i\,ds_i^2.$$

Задатак се своди на одређивање геодезиске криве дотичног простора.

14.6.3 КАНОНИЧКЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА

Из Хамилтоновог принципа могу се извести специјалне једначине кретања које се називају *каноничким* и играју важну улогу у рационалној механици и математичкој физици (статичкој и квантној физици).

Генералисани импулс је претстављен обрасцем (249′). Помоћу њега прва варијација кинетичке енергије (313′) може се написати у облику

$$\delta\,E_k = \sum_{\nu=1}^{s} \left(\frac{\partial\,E_k}{\partial\,\dot{q}_\nu}\,\delta\,q_\nu + p_\nu\,\delta\,\dot{q}_\nu \right).$$

Уведимо нову функцију, која се назива *Хамилтонова функција*, облика

$$\mathbf{H} = -\,(E_k + U) + \sum_{\nu=1}^{s} p_\nu\,\dot{q}_\nu = -\,\mathbf{L} + \sum_{\nu=1}^{s} p_\nu\,\dot{q}_\nu \tag{315}$$

она зависи од генералисаних координата, брзина и импулса. Њена прва варијација је

$$\delta\,\mathbf{H} = -\,\delta\,E_k - \delta\,U + \sum_{\nu} \dot{q}_\nu\,\delta\,p_\nu + \sum_{\nu} p_\nu\,\delta\,\dot{q}_\nu\,,$$

а с обзиром на варијације кинетичке енергије и функције силе (313′), може се изразити и овако

$$\delta\,\mathbf{H}=\sum_{\nu}\dot{q}_{\nu}\,\delta p_{\nu}-\sum_{\nu}\left(\frac{\partial E_k}{\partial q_{\nu}}+\frac{\partial U}{\partial q_{\nu}}\right)\delta q_{\nu}.$$

Генералисани импулс зависи од генералисаних брзина, па се брзине могу изразити и помоћу импулса, тако да функција $\mathbf{H}$ зависи онда од координата и импулса. Њена прва варијација тада постаје

$$\delta\,\mathbf{H}=\sum_{s}\left(\frac{\partial\,\mathbf{H}}{\partial q_{\nu}}\,\delta q_{\nu}+\frac{\partial\,\mathbf{H}}{\partial p_{\nu}}\,\delta p_{\nu}\right).$$

Упоређујући ове две варијације добива се однос

$$\sum_{\nu}\left(\frac{\partial\,\mathbf{H}}{\partial q_{\nu}}+\frac{\partial E_k}{\partial q_{\nu}}+\frac{\partial U}{\partial q_{\nu}}\right)\delta q_{\nu}=\sum_{\nu}\left(\dot{q}_{\nu}-\frac{\partial\,\mathbf{H}}{\partial p_{\nu}}\right)\delta p_{\nu}.$$

Како су варијације $\delta q_{\nu}\neq 0$, $\delta p_{\nu}\neq 0$, морају изрази у заградама бити једнаки нули:

$$\frac{\partial\,\mathbf{H}}{\partial q_{\nu}}+\frac{\partial E_k}{\partial q_{\nu}}+\frac{\partial U}{\partial q_{\nu}}=0,\qquad \dot{q}_{\nu}-\frac{\partial\,\mathbf{H}}{\partial p_{\nu}}=0.$$

С обзиром на Лагранжеве једначине и генералисани импулс (249′) горње се једначине своде на *канонички облик*

$$\boxed{\frac{d q_{\nu}}{dt}=\frac{\partial\,\mathbf{H}}{\partial p_{\nu}},\qquad \frac{d p_{\nu}}{dt}=-\frac{\partial\,\mathbf{H}}{\partial q_{\nu}}}\tag{316}$$

Ове каноничке једначине односе се на кретање материјалног холономног система са конзервативним силама. За случај слободног кретања материјалне тачке имаћемо два система од по три овакве једначине.

Лагранжеве једначине (253) претстављају систем од s диф. једначина *другог реда* у односу на генералисане координате. Међутим, Хамилтонове једначине (316) претстављају систем од $2s$ диф. једначина *првог реда* помоћу којих можемо одредити генералисане координате (q_{ν}) и генералисане импулсе (p_{ν}) у функцији од времена t. Док Лагранжеве једначине зависе од *Лагранжевих променљивих* q_{ν} и $\dot{q}_{\nu}$ дотле Хамилтонове зависе од *каноничких променљивих* q_{ν} и p_{ν} и времена t.

Каноничке једначине могу се применити и на конзервативне и неконзервативне системе. Ако је систем холономно-склерономни онда Хамилтонова функција има простији вид, јер је кинетичка енергија квадратна форма генералисаних брзина те је према Ојлеровој теореми о хомогеним функцијама $2E_k=\Sigma p_{\nu}\dot{q}_{\nu}$ па је Хамилтонова функција

$$\mathbf{H}=\Sigma p_{\nu}\dot{q}_{\nu}-E_k-U=2E_k-E_k-U=E_k+E_p=\mathbf{E}.$$

Она претставља *тоталну механичку енергију.*

Ако постоје цикличке координате онда се, слично као и код Лагранжевих једначина, могу добити *циклички интеграли.* Напр., када је $\mathbf{H} = \mathbf{H}\,(q_\nu, p_\nu)$ биће тотални диференцијал

$$d\mathbf{H} = \sum_\nu \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_\nu} d\,q_\nu + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_\nu} d\,p_\nu \right)$$

па, с обзиром на једначине (316′), следи

$$\frac{d\,\mathbf{H}}{dt} = \sum_\nu \left(-\dot{p}_\nu \dot{q}_\nu + \dot{q}_\nu \dot{p}_\nu \right) = 0,$$

те је $\mathbf{H} = \mathbf{E} = const.$, тј. важи интеграл живе силе.

Напр., за случај слободног пада биће

$$E_k = {}^1\!/_2\, m\, \dot{z}^2; \quad U = -\,m\, g\, z,$$

где је z генералисана координата. Генералисани импулс је $K = m\,\dot{z}$, па је Хамилтонова функција

$$\mathbf{H} = K\,\dot{z} - E_k - U = {}^1\!/_2\,(K^2/m) + m\,g\,z$$

те су каноничке једначине

$$\dot{z} = K/m; \quad \dot{K} = -\,m\,g.$$

Из друге (која претставља закон о количини кретања) је

$$K = -\,m\,g\,t + C$$

па је из прве закон кретања

$$z = -\,{}^1\!/_2\, g\, t^2 + C_1\, t + C_2$$

како смо и раније извели (чл. 2.2).

У случају математичког клатна (сл. 49), биће: $E_k = {}^1\!/_2\, m\, l^2 \dot{\varphi}^2$, $U = mgz = mgl \cos\varphi$, па је $p_\varphi = m l^2 \dot{\varphi}$ и функција $\mathbf{H} = [p_\varphi / 2m\, l^2] - mgl \cos\varphi$. Каноничке једначине постају $\dot{\varphi} = (p_\varphi / ml^2)$, $\dot{p}_\varphi = -\,mgl \sin\varphi$. Диференцирањем прве, с обзиром на другу, диф. једначина је $\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0$.

Код сферног клатна је $E_k = {}^1\!/_2\, m\, l^2 (\dot{\theta}^2 + \varphi^2 \sin^2\theta)$ док је $U = m\,g\,l \cos\theta$, па је Хамилтонова функција

$$\mathbf{H} = (1/2\, ml^2)\, [(p_\varphi / \sin\theta)^2 + p_\theta{}^2] - mgl \cos\theta$$

и каноничке једначине

$$\varphi = p\varphi / ml^2 \sin^2\theta, \quad \theta = p_\theta\, / ml^2$$

$$\dot{p}_\varphi = 0; \; p_\theta = [(p_\varphi{}^2 / ml^2) \cos\theta \sin^{-3}\theta] - mgl \sin\theta.$$

III ДЕО

ДИНАМИКА КРУТОГ ТЕЛА

15. ЗАДАТАК ДИНАМИКЕ КРУТОГ ТЕЛА

Под *крутим* телом подразумевамо континуални материјални систем код кога је извесна коначна запремина непрекидно испуњена масом. $dM/dV = \rho$ назива се *специфична маса (густина) тела*. Њена је димензија $[ML^{-3}]$ па се мери са $\mathrm{kg\,m^{-4}\,sec^2}$. Како између масе и тежине постоји однос $G = Mg$, а између тежине и запремине $G = \gamma V$, где је γ *специфична тежина*, то се за специфичну масу[1] даје и овај однос

$$\rho = \frac{\gamma}{g}\,(\mathrm{kg\,m^{-4}\,sec^2})\,.$$

Ако је у свакој тачки запремине коју обухвата контура тела, *специфична маса константна*, круто тело је *хомогено*; ако је зависна од положаја материјалних честица, тј. ако је функција положаја, $\rho = f(x, y, z)$, тело је *нехомогено (хетерогено)*.

Пошто је тело круто, материјалне тачке, односно елементарне масе dm, налазе се увек на сталним међусобним растојањима па је и положај средишта маса *сталан* у односу на саме масе. Код хомогеног тела непромењиве конфигурације средиште маса уједно је и тежиште тела.

Основни проблем динамике крутог тела је да се одреде односи који постоје између кретања тела и силâ које га нападају. Тај проблем јавља се у два вида:

1⁰ *познато је кретање крутог тела а треба одредити силе које производе кретање*, и

2⁰ *познате су силе које дејствују на тело а треба одредити кретање које оне производе.*

Ова два вида проблема динамике крутог тела називају се *кинетичким проблемом*. Али, ако је круто тело ограничено у своме кретању, проблем се усложава, јер треба одредити и отпоре веза које спутавају кретање. Овакав се проблем назива *кинетостатичким*.

---

[1] Напр., за челик је $\rho = 0{,}08\ \mathrm{kg\,dm^{-4}\,sec^2}$.

На кретање крутог тела имају, дакле, утицаја *нападне силе, силе веза* и *распоред маса* тела, тј. његов облик. Тај утицај се појављује у облику *моменаша маса другог реда* (*моменаша инерције шела* — Додатак I).

Круто тело у простору, као што смо у *Кинемашици* видели, има *шесш сшейена слободе крешања*. Ако је, пак тело неслободно број му се степена слободе кретања умањује. Положај крутог тела одређујемо на начин који је изложен у *Кинемашици крушог шела*.

За решавање проблема кретања крутог тела стоје нам на расположењу исти закони које смо упознали код проблема кретања материјалне тачке односно система материјалних тачака: *закон о количини крешања, закон о моменшу количине крешања (замаху)* и *закон о живој сили (кинешичкој енергији)*. Да бисмо могли одредити интеграционе константе интеграла диференцијалних једначина кретања треба да знамо *йочешни положај шела* и *йочешно кинемашичко сшање. Почешни йоложај* одређен је са *шесш йодашака* (напр., три координате одређене тачке тела — центра инерције — и три Ојлерова угла) а *йочешно кинемашичко сшање* такође је одређено са *шесш йодашака* (шест почетних брзина, које се могу изразити помоћу почетних вредности извода по времену шест напред наведених координата). Дакле, у почетном тренутку $t=t_0$ имамо свега 12 података — 12 бројева: по три пројекције вектора $\vec{r}_C$ и $\vec{v}_C$, три Ојлерова угла (φ, ψ, θ) и три извода по времену ових углова ($\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$.

16. ТРАНСЛАТОРНО КРЕТАЊЕ КРУТОГ ТЕЛА

Као први проблем динамике крутог тела испитајмо какве морају бити силе да би се тело под њиховим утицајем кретало *шранслашорно*. При транслаторном кретању слободног крутог тела све његове тачке имају иста убрзања, па ће према Даламберовом принципу силе инерције, — $\vec{a}\,dm$, бити међусобно паралелне и истог смера. Према Статици средиште ових везаних паралелних сила одређено је условима да су главни момент и виријал система у односу на један пол једнаки моменту и виријалу резултанте система са нападном тачком у средишту а у односу на исти пол, тј.

$$[\vec{r}_C, \vec{F}_r] = \Sigma\,[\vec{r}_i, \vec{F}_i], \quad (\vec{r}_C, \vec{F}_r) = \Sigma\,(\vec{r}_i, \vec{F}_i), \quad \vec{F}_r = \vec{u}\,\Sigma F_i .$$

Множењем прве једначине векторски ортом $\vec{u}$ нападних линија паралелних сила, с обзиром на другу једначину и особину да је виријал система за средиште једнак нули, добива се образац

$$\vec{r}_C = \frac{1}{F_r}\sum_{i=1}^{i=n} F_i\,\vec{r}_i .$$

Ставимо ли уместо сила вредност $F_i = a\,dm$ и $F_r = M a$, јер све тачке тела при транслацији имају исто убрзање добивамо векторску једначину

$$\overset{\rightarrow\bullet}{r}_C = \frac{1}{M}\iiint_{(V)} \vec{r}\,dm. \qquad (317)$$

Њој одговарају, за Декартове координате, три скаларне једначине

$$x_C = \frac{1}{M}\int\int\int x\,dm, \quad y_C = \frac{1}{M}\int\int\int y\,dm, \quad z_C = \frac{1}{M}\int\int\int z\,dm. \qquad (317')$$

Ове једначине показују да резултанта сила инерције дејствује у средишту маса. Како по Даламберовом принципу за време кретања морају активне силе бити „у равнотежи" са силама инерције, то значи да и резултанта активних сила напада круто тело у његовом тежишту. Из тога можемо извести овај закључак:

Слободно круто тело креће се транслаторно када се систем активних сила, које га нападају, редукује на резултанту у његовом тежишту.

Пошто се систем активних сила редукује само на једну једину силу (*Статика*, **чл. 25.2**), то је *главни моменат система једнак нули* ($\vec{\mathfrak{M}} = 0$) и тело се под утицајем система сила креће транслаторно као материјална тачка у којој је сажета целокупна маса тела и на коју дејствује сила $\vec{F}_r$. *На овај је начин проблем динамике транслаторног кретања крутог тела сведен на проблем кретања материјалне тачке.* Због тога смо и материјалну тачку дефинисали заступником транслаторног кретања крутог тела, јер може имати и коначну величину.

Пошто је кретање транслаторно све тачке тела имају исту брзину, па су релативне брзине тачака према средишту једнаке нули те је кинетичка енергија дата изразом

$$\boxed{E_k = {}^1/_2 M v^2.} \qquad (317'')$$

17. ОБРТАЊЕ КРУТОГ ТЕЛА ОКО НЕПОМИЧНЕ ОСЕ

17.1 ДИНАМИЧКЕ ЈЕДНАЧИНЕ ОБРТАЊА

Ако се круто тело обрће око непомичне осе онда има, као што смо у *Кинематици* видели (чл. 8), само *један степен слободе кретања*. За одређивање кретања потребна нам је само једна једина динамичка једначина. Претпоставимо да је координатна оса Az непомична оса око које се обрће круто тело. Просторни систем сила редукује се, уопште узев, на главни вектор $\vec{F}_r$ и главни момент $\vec{\mathfrak{M}}$. Пошто се тело обрће око Az осе онда се обртање врши само под утицајем главног момента спољашњих сила за ту осу, тј. под утицајем компоненте $\mathfrak{M}_z$, док су $\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_y = 0$ и $\vec{F}_r = 0$.

На основу закона о моменту количине кретања (замаху) поставићемо динамичку једначину обртања у облику

$$\boxed{\dot{L}_z = \mathfrak{M}_z} \qquad (318)$$

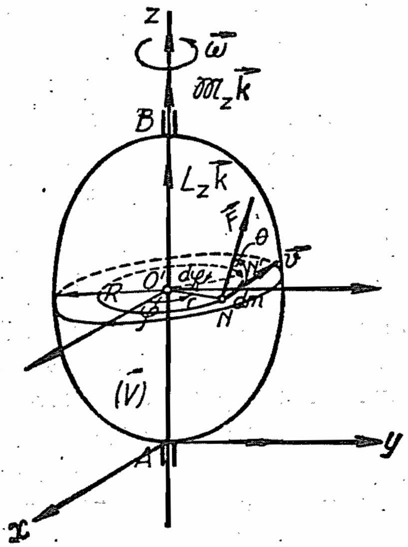
При овом обртању све тачке крутог тела описују *кружне путање,* па се положај тачке N крутог тела може одредити само једним податком, напр., углом φ (сл. 115). Брзина је ове тачке

$$v = r\dot{\varphi} = r\,\omega_z,$$

где је ω_z скаларна угаона брзина. Ако је r отстојање елементарне масе dm тачке N од осе обртања, онда је кинетички момент ове елементарне масе $v\,r\,dm = r^2\,\omega_z\,dm$ а замах целог тела биће:

$$\boxed{L_z = \omega_z \int\!\!\int_V\!\!\int r^2\,dm = J_z\,\omega_z} \qquad (319)$$

јер интеграл узет по целокупној запремини претставља *момент инерције тела* за Az осу. Он је, дакле, *аксијални момент инерције* (в. *Додатак* I).



Сл. 115. — Обртање крутог тела око непомичне осе AB

Замах крутог тела, које се обрће око непомичне осе, једнак је производу аксијалног момента инерције тела за ту осу и угаоне брзине обртања око те осе.

Пошто је момент инерције одређен производом квадрата растојања од осе и масе а угаона брзина има димензију $[T^{-1}]$ то је димензија замаха $[M L^2 T^{-1}]$, и обично се мери у gr* cm sec^{-1} односно kg m sec или gr cm.sec.

Уводећи израз за замах у једначину (318) добићемо

$$\boxed{J_z \frac{d\,\omega_z}{dt} = J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = J_z\,\dot{\omega}_z = \mathfrak{M}_z = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i\,Y_i - y_i\,X_i)} \qquad (320)$$

Ова диференцијална једначина другог реда претставља *основну динамичку једначину обртања крутог тела око непомичне осе* (Az). Из ње увиђамо *да је производ момента инерције тела за ту осу и угаоног убрзања тела око те осе једнак главном моменту спољашњих сила за исту осу.*

Кинетичка енергија елементарне масе dm, у тачки N, на растојању r од осе Az, биће

$$dE_k' = {}^1/_2 v^2 dm = {}^1/_2 r^2 \omega^2_z dm,$$

а целог тела износи

$$\boxed{E_k' = {}^1/_2 \omega^2_z \iiint\limits_V r^2 dm = {}^1/_2 J_z \omega^2_z} \qquad (321)$$

Кинетичка енергија крутог тела које се обрће око непомичне осе једнака је половини производа момента инерције тела за ту осу и квадрата угаоне брзине обртања око осе.

Димензија кинетичке енергије биће $[M L^2 T^{-2}]$ па се мери у $gr^* cm^2 sec^{-2}$ односно kg m или kg cm.

Њу можемо довести у везу са замахом применом једначине (319) па је

$$\boxed{E_k' = {}^1/_2 J_z \omega^2_z = {}^1/_2 L_z \omega_z} \qquad (322)$$

Двострука кинетичка енергија једнака је производу замаха тела за осу обртања и угаоне брзине обртања око те осе.

Ако елементарну масу dm, у тачки N, напада спољашња сила $\vec{F}_i$, која са равни путање те тачке чини угао θ, онда ће се при обртању за елементарни угао $d\varphi$ тачка N преместити у положај N' па ће сила $\vec{F}_i$ на томе померању извршити рад

$$d\mathrm{A} = (\vec{F}_i, d\vec{s}) = F_i r \, d\varphi \cos\theta = M_z^{F_i} d\varphi,$$

где је $M_z^{F_i} = F_i r \cos\theta$ момент силе F_i за осу Az. Дакле, *елементарни рад при обртању крутог тела око непомичне осе једнак је производу момента силе за осу и елементарног угла обртања.*

Укупни рад ове силе при обртању за коначни угао φ дат је изразом

$$\mathrm{A}_i = \int_0^{\varphi} M_z^{F_i} d\varphi .$$

Ако круто тело напада систем сила онда је укупни рад

$$\boxed{\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{A}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \int_0^{\varphi} M_z^{F_i}\, d\varphi = \int_0^{\varphi} \mathfrak{M}_z\, d\varphi} \tag{323}$$

јер је $d\varphi$ исто за све тачке тела.

Кад једначину (320) помножимо са $d\varphi$, а како је $\omega_z = d\varphi/dt$, биће $J_z\, \omega_z\, d\omega_z = \mathfrak{M}_z\, d\varphi$, па интеграљењем добивамо

$$\frac{1}{2} J_z\, (\omega^2_z - \omega^2_{z0}) = \int_0^{\varphi} \mathfrak{M}_z\, d\varphi = \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{A}_i$$

односно

$$\boxed{E_k - E_{ko} = \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{A}_i = \mathbf{A}} \tag{324}$$

Прираштај кинетичке енергије при обртању крутог тела једнак је збиру радова свих спољашњих сила.

Из једначине (322) биће елементарна кинетичка енергија

$$d\, E_k = J_z\, \omega_z\, d\, \omega_z = \mathfrak{M}_z\, d\varphi\,.$$

Ако постоји таква функција угла φ да је главни момент за осу Az једнак изводу те функције по углу

$$\mathfrak{M}_z = \frac{d\, U(\varphi)}{d\varphi}\text{, онда је } d\, E_k = d\, U$$

па интеграљењем добивамо

$$E_k = U + h, \tag{325}$$

где је h константа. Овај интеграл назива се *интеграл живе силе*; функција U (φ) је *функција сила* које дејствују на тело. Ако уведемо *потенцијалну функцију* — $U(\varphi)$, онда горњи интеграл постаје

$$\boxed{E_k + E_p = h = const. = \mathbf{E}} \tag{326}$$

У овом случају, дакле, важи закон о одржавању *механичке енергије*. Како је снага (ефект) дата изразом

$$P = \frac{d\,\mathbf{A}}{dt} = \mathfrak{M}_z\, \omega_z \quad \text{(kgm/sec)}$$

то је изражена у коњским снагама

$$P = {}^1/_{80{.}75}\, \pi\, n\, \mathfrak{M}_z.$$

Из овог обрасца можемо израчунати снагу у KS ако је обртни момент $\mathfrak{M}_z$ дат у kgm

$$\boxed{P = \frac{\pi n}{30\cdot 75}\,\mathfrak{M}_z = 0{,}0014\,\mathfrak{M}_z\, n} \quad (\mathrm{KS}). \qquad (327)$$

или момент ако је дата снага

$$\boxed{\mathfrak{M}_z = \frac{30\cdot 75}{\pi}\,\frac{P}{n} = 716{,}20\,\frac{P}{n}} \quad (\mathrm{kgm}). \qquad (327')$$

Када је снага дата у *киловатима,* тада је обртни момент

$$\boxed{\mathfrak{M}_z = 973{,}10\,\frac{P_{(\mathrm{kW})}}{n}} \quad (\mathrm{kgm}). \qquad (327'')$$

Као што у динамици материјалне тачке сила може да зависи од разних величина (чл. **2.1**) тако исто и главни момент може да зависи од више величина: времена, угла φ, угаоне брзине, па основна динамичка једначина обртања крутог тела око непомичне осе постаје

$$J_z\,\ddot{\varphi} = \mathfrak{M}_z\,(t, \varphi, \dot{\varphi}).$$

За разне случајеве зависности, слично динамици материјалне тачке, можемо интегралити ову једначину уз *дате почетне услове.*

Из изложених теорема можемо уочити аналогију између кретања материјалне тачке, или транслаторног кретања крутог тела, са обртањем крутог тела око непомичне осе. Пут, брзину, убрзање, масу и силу код првог кретања заменићемо: углом φ, угаоном брзином ω_z, угаоним убрзањем $\dot{\omega}_z$, моментом инерције J_z и главним моментом система сила за осу око које се тело обрће $\mathfrak{M}_z$. Та је аналогија потпуна и доња таблица показује главне елементе оба кретања

ЗНАЧЕЊЕ	КРЕТАЊЕ МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ	ОБРТАЊЕ КРУТОГ ТЕЛА ОКО НЕПОМ. ОСЕ *Az*
Пут	s	φ
Брзина	$v = ds/dt = \dot{s}$	$\omega_z = d\varphi/dt = \dot{\varphi}$
Убрзање	$a = dv/dt = \ddot{s}$	$\dot{\omega}_z = d\omega/dt = \ddot{\varphi}$
Диф једнач. кретања	$m a = m \ddot{s} = F$	$J_z \dot{\omega}_z = J_z \ddot{\varphi} = \mathfrak{M}_z$
Количина кретања	$K = m v$	замах $L_z = J_z \omega_z$
Кинетичка енергија	$E_k = {}^1/_2 m v^2$	$E_k = {}^1/_2 J_z \omega^2_z$
Елементарни рад	$d\mathrm{A} = F ds$	$d\mathrm{A} = \mathfrak{M}_z d\varphi$
Снага (ефект)	$P = F v$	$P = \mathfrak{M}_z \omega_z$

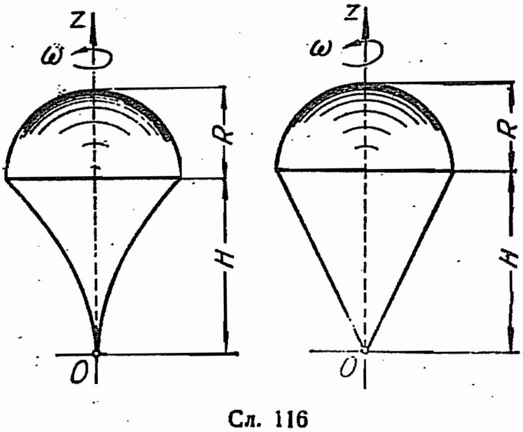
Основну динамичку једначину обртања крутог тела око непомичне осе можемо извести из Лагранж-Даламберовог општег принципа (чл. 14.3). За круто тело овај се принцип изражава једначином

$$(\Sigma \vec{F} - \int m \vec{a}, \delta \vec{r}) = 0,$$

где је $\delta \vec{r}$ виртуално померање. Да бисмо одредили ово померање уочимо да је брзина обртања дата Ојлеровом једначином (*Кин.*, обр. 111)

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}] = \delta \vec{r}/\delta t = \delta \varphi [\vec{k}, \vec{r}]/\delta t,$$

па је $\delta \vec{r} = [\vec{k}, \vec{r}] \delta \varphi$. Како $\delta \varphi \neq 0$ мора бити



Сл. 116

$$\Sigma(\vec{F} [\vec{k}, \vec{r}]) = \Sigma(\vec{k} [\vec{r}, \vec{F}]) =$$

$$= \mathfrak{M}_z = \int (\vec{a} [\vec{k}, \vec{r}]) \, dm =$$

$$= \int (\vec{k} [\vec{r}, \; - r \omega^2_z \vec{r}_o +$$

$$+ r \dot{\omega}_z \vec{c}_o]) \, dm =$$

$$= \dot{\omega}_z \iiint r^2 dm = J_z \dot{\omega}_z \, .$$

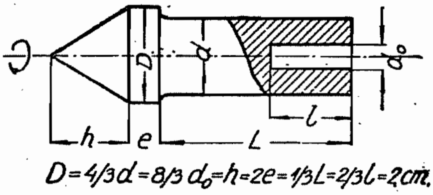
Примери. — 76) У коме односу стоје кинетичке енергије тела приказаних на сл. 116 ако су једнаких полупречника и висине а обрћу се истим бројем обртаја око осе *Oz*? $\gamma_1 = \gamma_2$; $z^2 = H^2 y/R$.

Решење. — Кинетичке енергије стоје у истом односу као и моменти инерције тела за осу обртања:

$$E_k/E'_k = J_z/J'_z = ({}^7/_{15}\,\rho\,R^5\,\pi)/\rho\,R^4\,({}^1/_{18}\,H + {}^4/_{15}\,R\,\pi) = {}^{21}/_{17}.$$

77) Одредити замах крутог тела датог облика (сл. 117) које се обрће око своје геометриске осе са 120 обрта у минуту. Мере у cm. $\gamma = 7{,}8$ kg/dm³.

Решење. — Како су $J_z = {}^1/_{32}\,\rho\,\pi\,[{}^1/_5\,D^4\,h + D^4\,e + d^4\,L - d_0{}^4\,l] \approx {}^{1,63}/_{32}\,\rho\,D^5\,\pi$; $\omega = 4\,\pi$; то је замах $L_z \approx 0{,}204\,\rho\cdot D^5\,\pi^2 \approx 0{,}513$ gr cm sec.

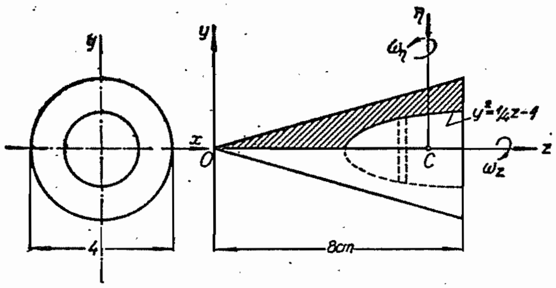


Сл. 117

78) За дато тело (сл. 118) од ливеног гвожђа, $\gamma = 7{,}2$ kg/dm³, одредити:

a) Директном методом интеграљења момент инерције за Oz осу.

b) У коме односу стоје кинетичке енергије за случај обртања око геометриске и вертикалне тежишне осе ако је $n_z = 2\,n_\eta$?



Сл. 118

Решење. — *a*) Момент за осу Oz износи:

$$J_z = \rho\ \ /_{512}\,\pi \int_0^8 z^4\,d\,z - {}^1/_2\pi \int_4^8 ({}^1/_4 z - 1)^2\,d\,z \approx {}^{182}/_{15}\,\rho\,\pi \approx$$

$$\approx 12{,}13 \cdot 73 \cdot 10^{-4}\,\pi\,\text{grcmsec}^2,$$

јер је $\rho = 73 \cdot 10^{-4}$ gr cm^{-4} sec².

b) Тежишта тела налазе се на оси Oz:

$z_1 = 3\ R$, $z_2 = {}^{10}/_3\ R$, $z_C = {}^{88}/_{18}\,R \approx 6$ cm (грешка мања од 3%), јер је $V_2 = {}^3/_{16}\,V_1$.

Како је

$$J_\eta = \rho\,\{{}^3/_{20}\cdot{}^1/_3\,R^2\,\pi\cdot 4\,R\,(4\,R^2 + R^2) - {}^1/_4\,R^3\,\pi\,[{}^1/_6\,R^2\,({}^4/_3 + {}^1/_4) + {}^1/_9\,R^2]\} = 29\,\rho\,\pi,\quad \text{то је}$$

$$E_k'/E_k = J_\eta/4\ J_z \approx {}^{29}/_{49}.$$

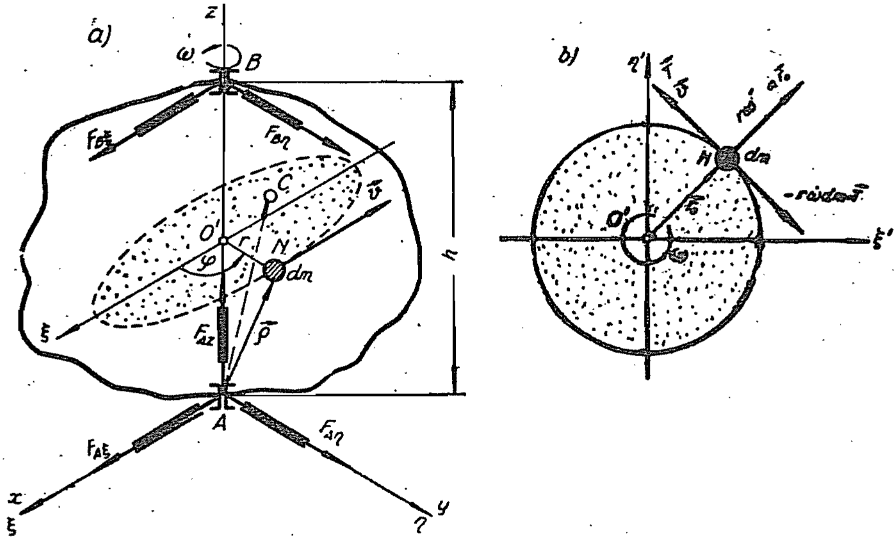
17.2 КИНЕТИЧКИ ПРИТИСЦИ

При обртању крутог тела око непомичне осе морају две тачке његовог основног троугла да леже на самој оси. Те су две тачке непокретне и у њима се ослања тело у *лежиштима*. Сем тога непокретне су и све тачке крутог тела које леже на тој оси.

У *Статици у простору* (чл. 30) испитивали смо услове који морају бити задовољени да би такво тело било у равнотежи и према једначини (241) констатовали да *главни момент за обртну осу система сила који напада круто тело мора бити једнак нули.* Овде, пак, у *Динамици* видели смо да тај момент изазива обртање тела око осе. Тај услов дао нам је динамичку једначину кретања. Осталих пет услова за равнотежу показали су нам да можемо одредити компоненте отпора ослонаца у x и y правцу, док су компоненте у z правцу, у правцу осе обртања, остали неодређени па се због тога узима горње лежиште *покретно (цилиндрично)* како би компонента Z_B отпора била једнака нули. Доње лежиште узима се *непокретно (сферни зглавак)*.

Овакве отпоре ослонаца који долазе само услед дејства спољашњих сила одредили смо из статичких услова за равнотежу крутог тела па их називамо *статичким отпорима ослонаца*. Негативне вредности ових отпора јесу *статички притисци* на лежишта A и B.

Ако се круто тело обрће око непомичне осе, напр. осе AB (сл. 119), онда ће се отпори ослонаца стално мењати. Да одредимо ове отпоре ослонаца применимо Даламберов принцип посматрајући „равнотежу" тела под утицајем спољашњих сила, отпора ослонаца (сила веза) и сила инерције. Усвојимо у лежишту A покретни координатни систем $A\xi\eta z$ (сл. 119*a*) круто везан са телом тако да се $A\xi\eta$ раван поклапа са Axy равни. Положај елементарне масе dm одредимо поларноцилиндричким координатама r, φ, z које се не мењају у односу на покретни триједар. Тачка N при обртању тела око осе AB описује кружну линију полупречника r те има компонентна убрзања: *нормално* — $r\,\omega^2$ и *тангенцијално* $r\,\omega$, где смо, краткоће ради, ставили $\omega_z = \omega$. Елементарне силе инерције су *центрифугална*, $-r\,\omega^2\,dm$ са смером $\overrightarrow{O'N}$, и *супротна тангенцијална*, $-r\,\omega\,dm$, са смером супротним од угаоног убрзања (сл. 119*b*).



Сл. 119. — Кинетички притисци

Означимо са $\vec{\rho} = \vec{AN}$ вектор положаја елементарне масе dm; онда су, према Ојлеровој једначини, брзина и убрзање те тачке:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{\rho}], \quad \vec{a} = [\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]].$$

Сила инерције те масе биће $d\vec{F}_j = (-\vec{a}\, dm)$.

Главни вектор сила инерције целог тела биће:

$$\boxed{\vec{F}_{rj} = -\int_V ([\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]])\, dm} \tag{328}$$

Како су $M\vec{\rho}_C = \int_V \vec{\rho}\, dm$ и $M\vec{v}_C = \int_V \vec{v}\, dm$ то добивамо:

$$\boxed{\vec{F}_{rj} = -M\{[\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}_C] + \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{\rho}_C) - \omega^2 \vec{\rho}_C\}} \tag{329}$$

Главни момент сила инерције биће:

$$\vec{\mathfrak{M}}_{Aj} = \Sigma[\vec{\rho}, d\vec{F}_j] = -\int_V [\vec{\rho}, [\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}] + [\vec{\omega}, \vec{v}]]\, dm.$$

Како су дупли векторски производи:

$$[\vec{\rho}, [\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}]] = \rho^2 \dot{\vec{\omega}} - (\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho})\, \vec{\rho}, \quad [\vec{\rho}, [\vec{\omega}, \vec{v}]] = -(\vec{\rho}, \vec{\omega})\, \vec{v},$$

јер је $\vec{\omega}(\vec{\rho}, \vec{v}) = \vec{\omega}(\vec{\rho}, [\vec{\rho}, \vec{\omega}]] = 0$ то главни момент можемо написати у облику:

$$\boxed{\vec{\mathfrak{M}}_{Aj} = \dot{\vec{\omega}} \int_V \rho^2\, dm + \int_V (\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho})\, \vec{\rho}\, dm + \int_V (\vec{\rho}, \vec{\omega})\, \vec{v}\, dm} \tag{329'}$$

С обзиром да је вектор положаја тачке $N\ \vec{\rho}\ (\xi,\ \eta,\ z)$ а обртање је око осе Az то су

$$(\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}) = \omega z, \quad (\vec{\omega}, \vec{\rho}) = \omega z, \quad \vec{v} = -\eta\omega\, \vec{i}' + \omega\xi\, \vec{j}'.$$

Пројекције главног вектора (329) и главног момента сила инерције (229′) на координатне осе покретног триједра износе

Осе	$\vec{i}'$	$\vec{j}'$	$\vec{k}$
F_{rj}	$M(\omega^2\xi_C + \dot{\omega}\eta_C)$	$M(\omega^2\eta_C - \dot{\omega}\xi_C)$	0
$\mathfrak{M}_{Aj}$	$\dot{\omega}J_{\xi z} - \omega^2 J_{\eta z}$	$\dot{\omega}J_{\eta z} + \omega^2 J_{\xi z}$	$-\dot{\omega}J_z$

(329″)

где су $J_{\xi z}$ и $J_{\eta z}$ *центрифугални моменти* тела.

Означимо са F_A^k и F_B^k *отпоре ослонаца* A и B услед обртања тела — тзв. *кинетичке отпоре ослонаца* — онда из статичких једначина за равнотежу силе инерције и ових отпора добивамо *шест једначина*:

$$F^k_{A\xi} + F^k_{B\xi} + M(\omega^2\xi_C + \dot{\omega}\eta_C) = 0, \qquad \mathfrak{M}_{\xi j} - F^k_{B\eta}h = 0,$$

$$F^k_{A\eta} + F^k_{B\eta} + M(\omega^2\eta_C - \dot{\omega}\xi_C) = 0, \qquad \mathfrak{M}_{nj} + F^k_{B\xi}h = 0,$$

$$F^k_{Az} + F^k_{Bz} = 0, \qquad \mathfrak{M}_{zj} = -J_z\dot{\omega}$$

па су *кинетички отпори ослонаца:*

$$\boxed{\begin{aligned}
F^k_{A\xi} &= -M(\omega^2\xi_C + \dot{\omega}\eta_C) + \frac{1}{h}(J_{\eta z}\dot{\omega} + J_{\xi z}\omega^2),\\
F^k_{A\eta} &= -M(\omega^2\eta_C - \dot{\omega}\xi_C) - \frac{1}{h}(J_{\xi z}\dot{\omega} - J_{\eta z}\omega^2),\\
F^k_{B\xi} &= -\frac{1}{h}(J_{\eta z}\dot{\omega} + J_{\xi z}\omega^2), \qquad F^k_{Az} = 0,\\
F^k_{B\eta} &= \frac{1}{h}(J_{\xi z}\dot{\omega} - J_{\eta z}\omega^2), \qquad F^k_{Bz} = 0
\end{aligned}} \tag{330}$$

где је $\overline{AB} = h$, $\omega = \omega_z$, $\dot{\omega} = \dot{\omega}_z$.

Компонентни кинетички отпори F^k_{Az} и F^k_{Bz} *једнаки су нули*, јер силе инерције дејствују у равнима управним на осу Az.

Овим отпорима треба додати и *статичке отпоре ослонаца* услед *спољашњих сила* које дејствују на тело. Ови су отпори:

$$\overset{s}{F}_{A\xi} = \frac{\mathfrak{M}_\eta}{h} - \Sigma F_\xi, \qquad \overset{s}{F}_{B\xi} = -\frac{\mathfrak{M}_\eta}{h}$$

$$\overset{s}{F}_{A\eta} = -\frac{\mathfrak{M}_\xi}{h} - \Sigma F_\eta, \quad \overset{s}{F}_{B\eta} = \frac{\mathfrak{M}_\xi}{h},$$

$$\overset{s}{F}_{Az} = -\Sigma F_z, \qquad \overset{s}{F}_{Bz} = 0.$$

Укупни отпори ослонаца — лежишта — износе:

$$\boxed{\begin{aligned}
F_{A\xi} &= \left[\frac{1}{h}\mathfrak{M}_\eta - \sum_{i=1}^{i=n} F_{\xi i}\right] + \omega^2\left[\frac{1}{h}J_{\xi z} - \mathrm{M}\,\xi_C\right] + \\
&\quad + \dot{\omega}\left[\frac{1}{h}J_{\eta z} - \mathrm{M}\,\eta_C\right], \\
F_{A\eta} &= -\left[\frac{1}{h}\mathfrak{M}_\xi + \sum_{i=1}^{i=n} F_{\eta i}\right] + \omega^2\left[\frac{1}{h}J_{\eta z} - \mathrm{M}\,\eta_C\right] - \\
&\quad - \dot{\omega}\left[\frac{1}{h}J_{\xi z} - \mathrm{M}\,\xi_C\right], \\
F_{Az} &= -\sum_{i=1}^{i=n} F_{zi}, \qquad F_{Bz} = 0, \\
F_{B\xi} &= -\frac{1}{h}\mathfrak{M}_\eta - \frac{\omega^2}{h}J_{\xi z} - \frac{\dot{\omega}}{h}J_{\eta z}, \\
F_{B\eta} &= \frac{1}{h}\mathfrak{M}_\xi - \frac{\omega^2}{h}J_{\eta^z} + \frac{\dot{\omega}}{h}J_{\xi z}.
\end{aligned}} \tag{330'}$$

Први чланови код ових отпора долазе услед статичког дејства сила, тј. они претстављају *статичке отпоре ослонаца,* **а други долазе услед обртања и претстављају** *кинетичке отпоре ослонаца.* **Негативне вредности ових кинетичких отпора јесу** *кинетички притисци.*

Обрасци (330) и (330′) изведени су под претпоставком да су компонентни отпори *усмерени у позитивним смеровима координатних оса.* **Даље је претпостављено, да је момент силе позитиван у смеру обртања супротном од смера кретања сатне казаљке. Такође је претпостављено, да су** *угаона брзина и угаоно убрзање позитивни* **(убрзано обртање у директном смеру — смеру супротном од смера кретања сатне казаљке).**

Када је обртање једнолико или једнакоубрзано, односно једнакоуспорено, кинетички отпори су константне вредности, у противном се мењају са временом (t). При једноликом обртању је $\dot{\omega} = 0$ па ће се изрази (330) упростити.

Помоћу формула трансформација координата можемо одредити и компонентне отпоре за непокретни координатни систем; треба само координате ξ и η заменити координатама x и y (зад. 80).

Обрасци (330) изведени су за случај обртања око Az осе. Цикличком пермутацијом индекса z могу се лако извести и једначине за случај обртања око неке друге осе правоуглог триједра $Axyz$, или $A\xi\eta\zeta$.

У пракси је чест случај обртања *танке хомогене плочице.* Како је тада $J_{\eta z}=0$ и $\eta_C=0$, обрасци (330) постају

$$\boxed{\begin{aligned} F^k_{A\xi} &= -\left(M\,\xi_C - \frac{1}{h}J_{\xi z}\right)\omega^2, & F^k_{B\xi} &= -\frac{1}{h}J_{\xi z}\,\omega^2, \\ F^k_{A\eta} &= \left(M\,\xi_C - \frac{1}{h}J_{\xi z}\right)\dot{\omega}, & F^k_{B\eta} &= \frac{1}{h}J_{\xi z}\,\dot{\omega} \end{aligned}} \qquad (330'')$$

Када је *оса обртања Az главна оса инерције тела,* тада су *кинетички притисци које осовина врши на горње лежиште једнаки нули,* јер су центрифугални моменти за ту осу једнаки нули $(J_{\eta z}=J_{\xi z}=0)$.

Притиске прима само доње лежиште и они, према (330), износе:

$$\boxed{F^k_{A\xi} = -M\,[\omega^2\xi_C+\dot{\omega}\,\eta_C],\quad F^k_{A\eta} = -M\,[\omega^2\eta_C-\dot{\omega}\,\xi_C]} \qquad (331)$$

Оса је подупрта само у једној тачки и задржава свој правац у простору и у телу те се назива *перманентна (стална) оса.*

Ако је и *тежиште тела на обртној оси* $(\xi_C=\eta_C=0)$, онда и *доње лежиште A не трпи кинетичке притиске.* Оба ослонца примају само статичке притиске. У овоме случају кажемо да је тело *динамички уравнотежено.* Оваква оса је *слободна оса.*

Например, хомогена кружна плочица, са тежиштем на Az оси, је динамички уравнотежено тело, јер су сви кинетички отпори једнаки нули $(\xi_C=0,\ J_{\xi z}=0)$.

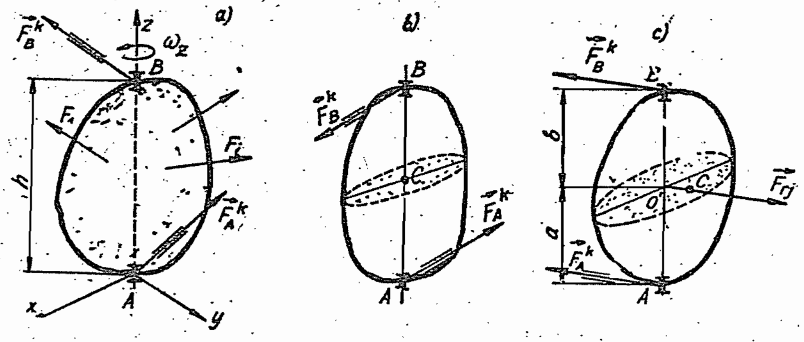
Хомогена полукружна плочица са хоризонталним пречником (управним на осу Az) и тежиштем на оси Az је такође уравнотежено тело, јер су, према (330'') отпори једнаки нули $(\xi_C=0,\ J_{\xi z}=0)$.

Када тело *није динамички уравнотежено* тада могу наступити три случаја:

1⁰) У *општем случају* кинетички отпори су *косе силе* које се своде на силу и спрег и уравнотежавају *главни вектор* и *главни момент сила инерције* (сл. 120 *a*).

2⁰) Ако је тежиште тела (C) на оси AB онда су $\xi_C=0$ и $\eta_C=0$, па су, према (330), отпори $F^k_{A\xi}=-F^k_{B\xi}$ и $-F^k_{A\eta}=F^k_{B\eta}$ те кинетички отпори образују спрег момента $F^k_A h$ (сл. 120 *b*).

3⁰) Када тежиште тела није на оси обртања али тело има *раван симетрије* управну на осу, онда и тежиште тела лежи у тој равни. Оса AB је *главна оса* за тачку O', продор осе кроз ту раван, па су центрифугални моменти $J_{\xi' z} = J_{\eta' z} = 0$. Због тога су моменти сила инерције за осе $O'\xi'$ и $O'\eta'$ једнаки нули, па се кинетички отпори своде на две паралелне силе које морају задовољити услов $F_A^k a = F_B^k b$; где су $\overline{AO'} = a$ и $\overline{BO'} = b$. Ове се силе уравнотежавају са главним вектором сила инерције који тада дејствује у тежишту тела (сл. 120 *c*).



Сл. 120. — Карактеристични случајеви динамички неуравнотеженог тела

Трећи случај задовољава хомогена полукружна плочица чији се пречник поклапа са Az осом. Тада су

$$F_A^k = [M\,\xi_C - (J_{\xi z}/h)]\sqrt{\omega^4 + \dot{\omega}^2}, \qquad F_B^k = (J_{\xi z}/h)\sqrt{\omega^4 + \dot{\omega}^2}, \qquad \xi_C = 4R/3\pi.$$

Како је једначина полукруга $\xi^2 = 2R\,z - z^2 = [\varphi(z)]$ то је центрифугални момент

$$J_{\xi z} = \rho'' \iint \xi z \, d\xi \, dz = M\,R\,\xi_C, \quad \text{јер је маса } M = \rho''\, {}^1\!/_2\, R^2 \pi.$$

Ову вредност лакше добивамо по *Штајнеровој теореми*

$$J_{\xi z} = J_{\xi' z'} + \xi_C\, z_C\, M = M R\, \xi_C.$$

Главни вектор сила инерције дејствује у тежишту и износи

$$F_{rc} = \omega^2 \int \xi \, dm = \omega^2 M\,\xi_C, \quad F_{rTj} = \dot{\omega}\, R^{-1} \iint \xi\, z\, dm = \dot{\omega}\, M\,\xi_C, \quad F_{rj} = M \xi_C \sqrt{\omega^4 + \dot{\omega}^2},$$

па су, због $a = b = R$, кинетички отпори

$$F_A^k = F_B^k = {}^1\!/_2 M \xi_C \sqrt{\omega^4 + \dot{\omega}^2}.$$

Ако, пак, на круто тело не дејствују спољашње силе или су у равнотежи и ако је тежиште тела на самој оси па је она и главна оса инерције, онда оса не врши никакве ни статичке ни кинетичке притиске на лежишта. У овоме је случају динамичка једначина обртања $J\dot{\omega} = 0$, те је $\omega = const.$; *тело се обрће око осе константном угаоном брзином.* Обртање је, дакле, по *инерцији.* Овакве осе називају се *потпуно слободне осе.*

Дакле, да би једна оса била *потпуно слободна* треба да су испуњени ови услови:

1⁰ *да на тело не дејствују спољашње силе,*
2⁰ *да се тежиште тела налази на самој оси,* и
3⁰ *да је оса главна оса инерције.*

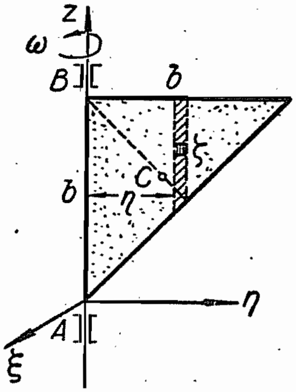
Под потпуно слободном осом подразумевамо ону непомичну осу, око које се обрће круто тело по инерцији (без дејства спољашњих сила) константном угаоном брзином. Она стално задржава свој правац у простору.

Пошто слободна оса пролази кроз тежиште тела а главна је оса инерције, то је уједно и *главна централна оса инерције*, те свако круто тело има *три слободне осе (три главне осе инерције)*. Када је централни елипсоид инерције *обртни*, или пак *сфера у динамичком смислу* (в. Додатак I), онда тело има много више слободних оса.

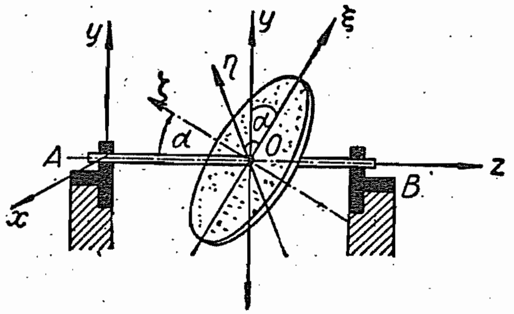
Вратила, и осовине машина, подупрта су у лежиштима и изложена су статичким и кинетичким притисцима. Статички притисак има сталан интензитет и правац али се кинетички мења па тотални притисак варира у интервалу $F_{st} \pm F_{kin}$. Ако се период ове промене притиска $(2\pi/\omega)$ изједначи са периодом сопствене еластичне осцилације осовине наступиће *резонанса* и довешће до њеног лома. Због тога се *изравнањем маса* постиже да осовина буде слободна или пак да су кинетички притисци врло мали.

Примери. — **79)** Танка плочица, облика равнокракоправоуглог троугла (сл. 121) обрће се константном угаоном брзином око вертикалне катете (AB).

Одредити кинетичке притиске на лежишта A и B.



Сл. 121



Сл. 122

Решење. — Због односа $\zeta : b = (b - \eta) : b$ биће

$$J_{\xi\eta} = J_{\xi z} = 0 \quad \text{и} \quad J_{\eta z} = {}^1/_4 M\, b^2; \; M = {}^1/_2 \rho''\, b^2.$$

Како су: $\xi_C = 0$, $\eta_C = {}^1/_3\, b$, $z_C = {}^2/_3\, b$, $\mathfrak{M}_\eta = \mathfrak{M}_\zeta = 0$, $\mathfrak{M}_\xi = -{}^1/_3\, G\, b$ укупни компонентни отпори износе:

$$F_{A\eta} = {}^1/_{12}\, \mathrm{M}\, (4g - 3\omega^2 b),\ F_{Az} = -G;\ F_{B\eta} = -{}^1/_{12}\, \mathrm{M}\, (4g + \omega^2 b).$$

80) Кружна плоча полупречника R (сл. 122), обрће се константном угаоном брзином вко осе AB која са нормалом плоче гради угао α.

Одредити притиске у лежиштима.

Вредности: $G = 20$ kg, $R = 20$ cm, $n = 12000$ o/min, $a = b = {}^1/_2\, l = 50$ cm.

Решење. — Пошто су $x_C = y_C = 0$, $z = \overline{AO} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{AB} = l$, $\dot{\omega} = 0$, $\Sigma X = \Sigma Z = 0$, $\Sigma Y = -G$, $\mathfrak{M}_x = -G\, a$, $\mathfrak{M}_y = \mathfrak{M}_z = 0$, то једначине (330') за непокретни систем $Axyz$ постају:

$$X_A = (\omega^2/l)\, J_{xz},\ Y_A = G\,[1 + (a/l)] + (\omega^2/l)\, J_{yz},$$

$$Z_A = Z_B = 0,\ X_B = -(\omega^2/l)\, J_{xz},\ Y_B = -G\,(a/l) - (\omega^2/l)\, J_{yz}.$$

Из формула трансформација координата:

$$y = \xi \cos\alpha + \zeta \sin\alpha;\ z = \xi \sin\alpha - \zeta \cos\alpha,$$

пошто су $O\xi$ и $O\eta$ главне осе инерције диска, добивамо да је

$$J_{yz} = \int\limits_V yz\, dm = \sin\alpha \cos\alpha \int\limits_V (\xi^2 - \zeta^2)\, dm = \sin\alpha \cos\alpha\, [J_{\Pi\xi} - J_{\Pi\zeta}].$$

С обзиром на везу између планарних и аксијалних момената инерције (Додатак I, обр. 423) добивамо да је

$$J_{yz} = {}^1/_2\, (J_\zeta - J_\xi)\, \sin 2\alpha,\ J_{xz} = 0.$$

Према томе су отпори ослонаца:

$$Y_A = G\,[1 + (a/l)] + (\mathrm{M}\, R^2 \omega^2/8l)\, \sin 2\alpha,$$

$$Y_B = -G\,(a/l) - (\mathrm{M}\, R^2 \omega^2/8l)\, \sin 2\alpha,$$

јер је $J_\zeta = 2\, J_\xi = {}^1/_2\, \mathrm{M}\, R^2$.

За дате податке је $\sin 2\alpha \approx 2\alpha \approx {}^1/_{80}\, \pi$, па су отпори $Y_A = 30 + 1\,120 = 1\,150$ kg $Y_B = -10 - 1120 = -1\,130$ kg.

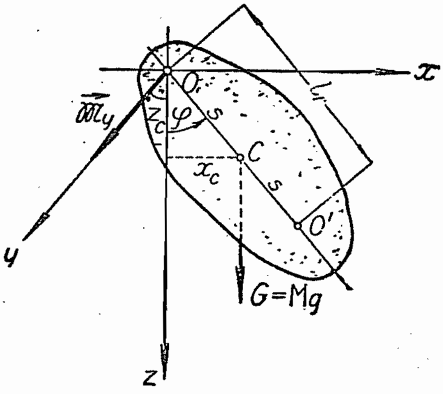
17.3 ФИЗИЧКО КЛАТНО

Тешко тело које *осцилује* око неке осе под утицајем сопствене тежине претставља *физичко клатно*. Нека је та оса хоризонтална оса Oy (сл. 123). Координатни систем $Oxyz$ изаберимо тако да *тежиште* тела (C) буде у вертикалној равни Ozx на растојању s од тачке O —

тачке вешања клатна. Изведе ли се клатно из равнотежног положаја Oz за угао φ_0 (елонгација) и пусти, оно ће под утицајем своје тежине осциловати око осе. Пошто на тело при томе кретању дејствује само његова тежина усмерена наниже то су моменти те силе за координатне осе наведеног триједра

$$\mathfrak{M}_x = 0,\ \mathfrak{M}_y = -\,M\,g\,s\sin\varphi,\ \mathfrak{M}_z = 0,$$

јер су координате тежишта $x_C = s\sin\varphi$, $z_C = s\cos\varphi$, $y_C = 0$.



Сл. 123- — Физичко клатно

Према **чл. 17.1** диференцијална једначина кретања физичког клатна биће

$$\boxed{J_y\,\ddot{\varphi} = -\,M\,g\,s\sin\varphi} \tag{332}$$

Ову једначину можемо написати и у овом облику

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g\,s}{i^2_y}\sin\varphi,$$

где је $i_y = \sqrt{J_y/M}$ *полупречник инерције* тела за Oy осу.

За *математичко клатно*, дужине l, извели смо диференцијалну једначину кретања (**чл. 8.4**) у облику

$$l\,\ddot{\varphi} = -\,g\sin\varphi.$$

Упоредимо ли ове две диференцијалне једначине видимо да су истог облика, па се сменом

$$\boxed{l_r = i^2{}_y/s = J_y/M\,s} \tag{333}$$

добива диференцијална једначина кретања физичког клатна у новом облику

$$\boxed{l_r\,\ddot{\varphi} = -\,g\sin\varphi} \tag{334}$$

На овај смо начин проблем физичког клатна свели на проблем кретања математичког клатна нове дужине l_r која се назива *редукована дужина физичког клатна.*

Christian Huygens (1629 — 1695)

Једначину (334) можемо извести и помоћу Лагранжеве једначине. Елонгација φ је генералисана координата. Како су кинетичка енергија и функција силе $E_k = {}^1/_2 J_y \dot{\varphi}^2$, $U = Mgz = Mgs \sin\varphi$, то је генералисана сила $Q_\varphi = -Mgs\sin\varphi = \mathfrak{M}_y$, па је диференцијална једначина кретања

$$J_y \ddot{\varphi} = -Mgs \sin\varphi .$$

Према обрасцу (192) биће квадрат брзине

$$\boxed{v^2 = v^2_0 + 2\, g\, l_r (\cos\varphi - \cos\varphi_0)} \tag{334'}$$

Овде су: $v = l_r \dot{\varphi}$ а $v_0 = l_r \dot{\varphi}_0$.

Например, да бисмо одредили коју почетну угаону брзину треба дати физичком клатну облика штапа дужине l да би из вертикалног равнотежног положаја (Oz) прешло у хоризонтални положај (Ox), треба у (334′) ставити $\varphi_0 = 0$, $\varphi = {}^1/_2\pi$, па добивамо $\dot{\varphi}_0 = \sqrt{2g/l_r} = \sqrt{3g/l}$, јер је редукована дужина $l_r = {}^2/_3\, l$.

Период осцилације можемо претставити, као и код математичког клатна (200), у облику реда

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_y}{Mgs}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \sin^6 \frac{\varphi_0}{2} + \ldots\right] \tag{335}$$

где је φ_0 амплитуда.

За *мале елонгације* можемо се зауставити само на првом члану реда па је период осцилације физичког клатна дат изразом

$$\boxed{T \approx 2\pi \sqrt{\frac{J_y}{Mgs}} \approx 2\pi \sqrt{\frac{i^2_y}{gs}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}}} \tag{335'}$$

и пошто не зависи од почетних услова кретања то је *изохрон*.

Из (335′) следи да периоди малих осцилација два једнака клатна за различите осе осциловања стоје у истом односу као одговарајуће редуковане дужине

$$T_1 : T_2 = l_{r1} : l_{r2} . \tag{335''}$$

Например, периоди осцилација клатна у облику танке кружне плочице полупречника R када осцилује око тангенте у тачки вешања (O) и око осе кроз ту тачку а управну на раван плочице, стоје у односу

$$T_1/T_2 = \sqrt{J_1/J_2} = \sqrt{{}^5/_4\, MR^2/{}^3/_2\, MR^2} = \sqrt{5/6} .$$

У случају малих осцилација клатна можемо ставити да је $\sin\varphi \approx \varphi$, па диференцијална једначина кретања постаје

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mgs}{J_y}\varphi = \ddot{\varphi} + \frac{gs}{i^2_y}\varphi = 0$$

тј. *хомогена диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима.* Тада се угао φ мења по *закону хармониске осцилације,* $\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$, где је $\omega^2 = g/l_r$.

Помоћу редуковане дужине физичког клатна *Хајгенс* је поставио једну важну теорему. Како се по Штајнеровом ставу (Додатак I) момент инерције крутог тела за Oy осу састоји из сопственог момента инерције за паралелну тежишну осу (c) и момента инерције положаја

$$J_y = J_c + M s^2$$

то и између полупречника инерције постоји овај однос

$$i^2{}_y = i^2{}_c + s^2$$

па је редукована дужина клатна

$$l_r = i^2{}_y/s = s\,[1 + (i_c/s)^2].$$

Она је увек *дужа од растојања тежишта* (C) од тачке вешања (O) тј. $l_r > s$.

Из предње једначине следи однос

$$\boxed{i^2{}_c = s\,(l_r - s) = \overline{OC} \cdot \overline{O'C} = s\,s'} \qquad (336)$$

Полупречник инерције за тежишну осу паралелну оси око које осцилује физичко клатно средња је геометриска пропорционала за отсечке $\overline{OC}$ *и* $\overline{O'C}$. Тачку O' која се налази на правој OC удаљена од тачке вешања O за редуковану дужину, Хајгенс је назвао *центром осциловања.* Оса која пролази кроз овај центар а паралелна је оси Oy назива се *оса осцилације.*

Према (336) положај Хамилтоновог центра лако се одређује *графички* конструкцијом средње геометриске пропорционале.

Ако уместо осе Oy узмемо осу $O'y$ за осу осцилације онда је редукована дужина клатна

$$l'_r = J_y'/\,M\,s' = i'_y{}^2/s'$$

па помоћу Штајнеровог става добивамо

$$l'_r = (i^2{}_c + s'^2)/s' = s' + (i^2{}_c/s').$$

Користећи се релацијом (336) биће

$$\boxed{l'_r = s + s' = l_r} \qquad (337)$$

тј. *редукована дужина клатна остаје иста за обе осе.*

Ову је теорему доказао *Хајгенс* у делу *„Horologium oscilatorium"* 1673 год. и она гласи:

Тачка вешања и центар осциловања могу узајамно измењати своје улоге, али ће период осцилације остати исти. Растојање ових тачака једнако је редукованој дужини физичког клатна.

Например, када танка хомогена правоугаона плочица (површине $A = bh$) осцилује око основице (b), онда су

$$J_y = \rho'' \cdot {}^1/_3\, bh^3 = {}^1/_3\, \mathrm{M}\, h^2, \quad s = {}^1/_2\, h, \quad l_r = {}^2/_3\, h.$$

Како је $J_c = {}^1/_{12}\, \mathrm{M}\, h^2$ то је $s' = l_c^2/s = {}^1/_6\, h$.

Осцилује ли плочица око осе $O'y'$ биће момент инерције

$$J_y' = {}^1/_{12}\, \mathrm{M}\, h^2 + \mathrm{M}\,(s')^2 = {}^1/_9\, \mathrm{M}\, h^2, \text{ па је } l_r' = J_y'/s' = l_r.$$

Уз горњу теорему Хајгенс је додао и ову: *Креће ли се тешко тело само под утицајем своје тежине без почетне брзине, његово тежиште не може се попети више од висине коју је имало у почетку кретања.*

Доказ непосредно следи из закона $\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$. За $t = 0$ је $\varphi = \varphi_0$, за $t = T/2 = \pi/\omega$ биће $\varphi = -\varphi_0$ и за $t = T$ опет је $\varphi = \varphi_0$.

Хајгенсов центар осцилације има још једну важну особину. *Када се њему дода материјална тачка произвољне тежине период осцилације се не мења.*

У овом случају, за мале осцилације, једначина (332) постаје

$$J^*_y \ddot{\varphi} = -(\mathrm{M}\, s + m\, l_r)\, g \varphi,$$

па је, због $J^*_y = J_y + m\, l^2_r$ и обрасца (333), период осцилације

$$T^* = 2\pi \sqrt{\frac{l_r (\mathrm{M}\, s + m\, l_r)}{g (\mathrm{M}\, s + m\, l_r)}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}} = T.$$

Например, период се не мења када се у тачку A на обиму танке кружне плочице, на вертикалном пречнику, дода маса m а плочица осцилује око осе управне на њу и пролази кроз тачку O истог пречника, где је $\overline{OC} = {}^1/_2\, R$. Тада је $l_r = {}^3/_2\, R$, па је тачка A Хајгенсов центар.

Нека је клатно облика хомогеног штапа, онда му је маса $\mathrm{M} = \rho' l$, где је ρ' линиска густина. Сваки делић штапа изложен је дејству сила инерције — центрифугалне и супротне тангенцијалне. Како је закон кретања $\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$ биће $\dot{\varphi} = -\varphi_0 \omega \sin \omega t$, $\ddot{\varphi} = -\varphi_0 \omega^2 \cos \omega t$, па су резултујуће силе инерције:

$$F_c = \rho' \varphi_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t \int_0^l u\, du = \mathrm{M}\, s \varphi_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t,$$

$$F_{jT} = \rho' \varphi_0 \omega^2 \cos \omega t \int_0^l u\, du = \mathrm{M}\, s \varphi_0 \omega^2 \cos \omega t.$$

Центрифугалне силе су колинеарне са осом штапа, па је и укупна сила такође колинеарна са њом. Супротне тангенцијалне силе су управне на штап и образују систем паралелних сила. Нападну тачку резултанте ових сила можемо одредити према Вариньоновој теореми узимајући моментну тачку у O. Тада је

$$F_{jT}\,p = \rho' \varphi_0 \omega^2 \cos \omega t \int_0^l u^2\, du = {}^2/_3 M s\, l \varphi_0 \omega^2 \cos \omega t.$$

С обзиром на претходну вредност добивамо да је $p = {}^2/_3\, l = l_r$. *Нападна тачка главног вектора сила инерције физичког клатна облика штапа поклапа се са Хајгенсовим центром,* јер се у ту тачку може померити и центрифугална сила.

Пошто период осцилације зависи од редуковане дужине клатна то ће бити *најмањи* када је та *дужина најмања*. Међутим, редукована дужина зависи од момента инерције и од положаја тежишта тела па ћемо из односа

$$l_r = s + (i^2_c/s),$$

односно квадратне једначине

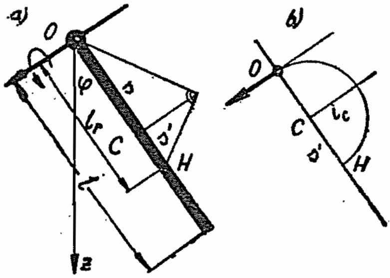
$$s^2 - l_r s + i^2_c = 0,$$

одредити вредност s изразом

$$s = {}^1/_2\, l_r \pm {}^1/_2 \sqrt{l^2_r - 4\, i^2_c}\,.$$

Она је реална када је испуњен услов $l_r \geq 2\, i_c$ а најмања је вредност за однос $l_r = 2\, i_c$, тада је и $s = i_c$. За ову је вредност период осцилације најмањи

$$T_{min} \approx 2\,\pi \sqrt{2\, i_c/g}.$$



Сл. 124. — Физичко клатно у облику штапа

Например, када физичко клатно има облик хомогеног штапа (сл. 124), онда су: $l_y^2 = {}^1/_3\, l^2$, $i_c^2 = {}^1/_{12}\, l^2$; $s = {}^1/_2\, l$, $l_r = {}^2/_3\, l$; $s' = {}^1/_6\, l$, $T/T_{min} = \sqrt{{}^2/_3 \sqrt{3}} \approx 1{,}153$.

Може се показати да се период осцилације клатна које се састоји из штапа и на њему насађеног диска, на произвољној дужини (a) од тачке вешања, *неће променити* ако се диск обрће константном угаоном брзином око осе која се поклапа са осом штапа.

Физичко клатно има велике примене у физици. Помоћу *Катеровог*[1] (captain *Kater*) *реверзионог клатна* одређује се експерименталним путем

---

[1] 1818 год. извео опит у Лондону.

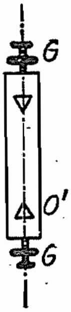
убрзање теже. Из периода осциловања (једначина 335′) следи да је убрзање теже

$$\boxed{g = 4\pi^2 J_y / M s T^2} \tag{338}$$

Катерово клатно има две призме из ахата око којих може осциловати. Помоћу придодатих терета G и G' (сл. 125) подешавају се осцилације око обеју оса тако да периоди буду потпуно исти. Пошто се редукована дужина може тачно измерити то је убрзање теже

$$g = 4\,\pi^2\, l_r / T^2.$$

Како је подешавање терета G и G' доста заметно (или подешавање покретне призме у O') то је *Цојнер (Zeuner)* предложио своје *„Цојнерово клатно“* са три непомичне призме утврђене на тежишној оси клатна. Пошто се редуковане дужине могу измерити а такође и периоди то се могу поставити три једначине за три редуковане дужине у којима се појављују само непознате i^2_c и s, које се могу тачно израчунати.

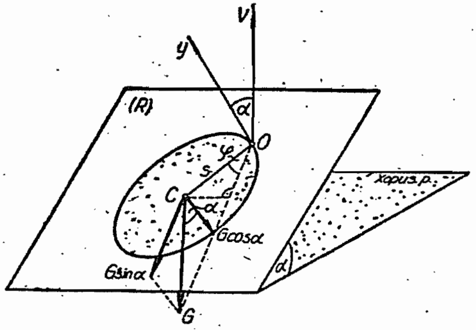


Сл. 125. — Катерово клатно за одређивање убрзања теже

Раније се клатно примењивало и код *часовника са шеталицом*. Редукована дужина *секундног клатна* ($T_s = 2$ sec) износи $l_r = g/\pi^2$.

За случај шеталице у облику штапа је $l_r = {}^2/_3\, l$, па је дужина $l = 3\,g/2\,\pi^2 = 1{,}491$ m за географске ширине од 45°.

Косо клатно. — Када оса Oy није хоризонтална и са хоризонтом гради угао различит од 90° клатно се назива *косо*. Нека оса Oy гради са вертикалном осом Ov угао α (сл. 126), онда ће се променити момент силе G за осу Oy. Оријентишимо осе Ov и Oy ортовима $\vec{k}$ и $\vec{k}'$ тако да је триједар ортова $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ортогоналан.



Сл. 126. — Косо клатно

Орт $\vec{k}'$ косе осе Oy (сл. 126) постао је обртањем орта $\vec{k}$ осе Ov у директном смеру око осе Ox $(\vec{i})$ за угао α, па је

$$\vec{k}' = \vec{k}\cos\alpha + [\vec{i}, \vec{k}]\sin\alpha = \vec{k}\cos\alpha - \vec{j}\sin\alpha;$$

те је момент тежине за косу осу Oy:

$$(\vec{\mathfrak{M}}_O, \vec{k}') = (\vec{k}'\,[\vec{s}, \vec{G}]) = -(\vec{j}\,[\vec{s}, \vec{G}])\sin\alpha = -\mathfrak{M}_h \sin\alpha = -M g s \sin\alpha \sin\varphi,$$

па је диференцијална једначина

$$J_y \ddot{\varphi} = -G s \sin\alpha \sin\varphi \approx G s \varphi \sin\alpha$$

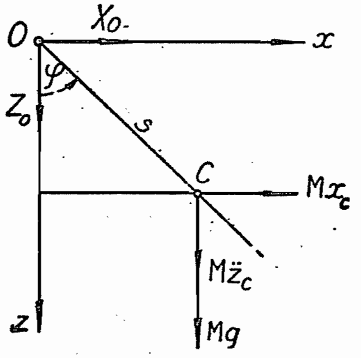
и период осцилације

$$\boxed{T \approx 2\pi \sqrt{\frac{J_y}{M g s \sin\alpha}}} \qquad (339)$$

Из овога закључујемо да све једначине о клатну важе и за косо клатно само треба убрзање g заменити са $g \sin\alpha$.

При $\alpha = 0$ период осцилације је *највећи*. Ово клатно се назива *хоризонтално* и примењује се код *сеизмографа*.

Отпор зглоба вешања клатна. — При клаћењу клатна у равни Oxz јављају се и статички и кинетички притисци на зглоб O, те исти има обе компоненте отпора (сл. 127). Замислимо ли круто тело слободним, морамо додати сили G и компонентне отпоре X_O и Z_O. Координате тежишта (C) су:



Сл. 127 — Отпор зглоба клатна

$$x_C = s \sin\varphi, \quad z_C = s \cos\varphi.$$

Како је оса Oy главна оса инерције то можемо применити обрасце (331):

$$X_O^k = -M(\dot{\varphi}^2 x_C - \ddot{\varphi} z_C),$$
$$Z_O^k = -M(\dot{\varphi}^2 z_C + \ddot{\varphi} x_C),$$

јер је Oz оса усмерена *наниже*. Користећи обрасце (334) и (334′) добићемо компонентне отпоре зглоба

$$\boxed{\begin{aligned} X_O^k &= M g \frac{s}{l_r} [2 \cos\varphi_0 - 3 \cos\varphi] \sin\varphi \\ Z_O^k &= M g \frac{s}{l_r} [(1 - 3 \cos^2\varphi + 2 \cos\varphi_0 \cos\varphi)] \end{aligned}} \qquad (340)$$

До ових образаца долазимо лакше користећи трећи случај динамички неуравнотеженог тела. Пошто је оса Oy главна оса инерције то главни вектор сила инерције дејствује у самом тежишту (C), па из једначина за равнотежу добивамо:

$$X_O^k + M s \dot{\varphi}^2 \sin\varphi - M s \ddot{\varphi} \cos\varphi = 0, \quad Z_O^k + M s \dot{\varphi}^2 \cos\varphi + M s \ddot{\varphi} \sin\varphi = 0.$$

Тотални кинетички отпор износи

$$F_O^k = \sqrt{F_c^2 + F_{jT}^2} = \frac{G\,s}{l_r}\sqrt{4(\cos\,\varphi - \cos\,\varphi_0)^2 + \sin^2\,\varphi}.$$

Његове су екстремне вредности

$$\begin{aligned} &\text{за}\quad \varphi = 0;\quad F_{O\,max}^k = F_c = \mathrm{M}\,s\,\dot{\varphi}^2 = \frac{2\,\mathrm{M}\,g\,s}{l_r}(1 - \cos\,\varphi_0) = \\ &\qquad\qquad = \frac{4\,G\,s}{l_r}\,\sin^2\,\frac{\varphi_0}{2}, \end{aligned} \tag{340'}$$

$$\text{за}\quad \varphi = \varphi_0;\quad F_{O\,min}^k = F_{jT} = \mathrm{M}\,s\,\ddot{\varphi} = \frac{\mathrm{M}\,g\,s}{l_r}\sin\,\varphi_0 = \frac{G\,s}{l_r}\sin\,\varphi_0.$$

Например, код клатна облика штапа је однос $s/l_r = {}^3/_4$ па су

$$F_{O\,max}^k = G\,\sin^2\,({}^1/_2\,\varphi_0),\quad F_{O\,min}^k = {}^3/_4\,G\,\sin\,\varphi_0.$$

Кинетостатички проблеми су често повезани са проблемом клатна иако се не ради о осциловању. Например, хомогени штап тежине G, дужине l, зглобно је везан у тачки O и обрће се око вертикалне осе кроз ту тачку константном угаоном брзином ω. Одредимо колики угао α мора градити штап са том осом да би се одржала одређена угаона брзина. Сила инерције је само центрифугална сила. С обзиром да је оса $O\eta$ главна оса инерције, центрифугална сила дејствује у тежишту и износи

$$F_c = \rho'\,\omega^2\,\sin\,\alpha \int u\,du = {}^1/_2\,\mathrm{M}\,l\,\omega^2\,\sin\,\alpha.$$

Из услова $\mathfrak{M}_{jO} = F_c\,p = \rho'\,\omega^2\,\sin\,\alpha \int u^2\,du = {}^1/_3\,\mathrm{M}\,l^2\,\omega^2\,\sin\,\alpha\,\cos\,\alpha$ налазимо да јој је нападна тачка у *Хајгенсовом центру* штапа у односу на тачку вешања O ($p = {}^2/_3\,l\,\cos\,\varphi$).

Из услова $\Sigma M_O = G\,s\,\sin\,\alpha - F_c\,p = 0$ следи услов $\cos\,\alpha = 3g/2l\,\omega^2$.

Кинетички отпор је $F_{O\xi}^k = -F_c$ а статички $Z_O = -G$.

Према обрасцу (329′) биће $\mathfrak{M}_{\eta j} = \omega^2\,J_{\xi z} = \mathfrak{M}_{Oj} = F_c\,p$ то можемо и без рачунања одредити центрифугални момент штапа $J_{\xi z} = F_c\,p/\omega^2 = {}^1/_6\,\mathrm{M}\,l^2\,\sin\,2\alpha$. Исту вредност добивамо и помоћу интеграла

$$J_{\xi z} = \rho'\,\sin\,\alpha\,\cos\,\alpha \int u^2 du = {}^1/_6\,\mathrm{M}\,l^2\,\sin\,2\alpha.$$

Примери. — **81)** Одредити период малих осцилација тела приказаног на сл. 128 ако је $\psi = d/D = r/R = {}^1/_2$.

Решење. — Масе шупљег и пуног ваљка стоје у односу $m/\mathrm{M} = \psi^2$, па су

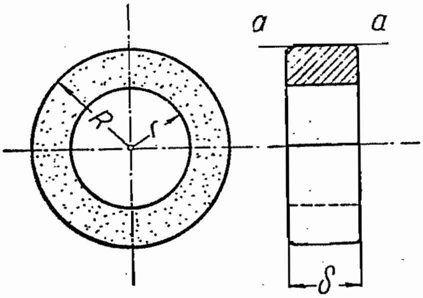
$$J_z = {}^1/_2\,(\mathrm{M}\,R^2 - m\,r^2) = {}^1/_2\,(1 - \psi^4)\,\mathrm{M}\,R^2,$$

$$J_a = J_z + (1 - \psi^2)\,\mathrm{M}\,R^2 = {}^1/_2\,(1 - \psi^2)\,(3 + \psi^2)\,\mathrm{M}\,R^2 = {}^{39}/_{32}\,\mathrm{M}\,R^2.$$

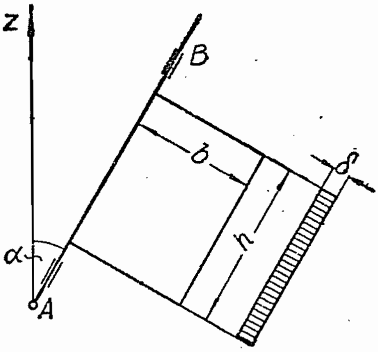
Период износи

$$T = \pi\sqrt{13\,R/2\,g}.$$

82) Танка хомогена плочица (сл. 129) осцилује око осе AB, која са вертикалом гради угао α. Одредити период малих осцилација плочице.



Сл. 128



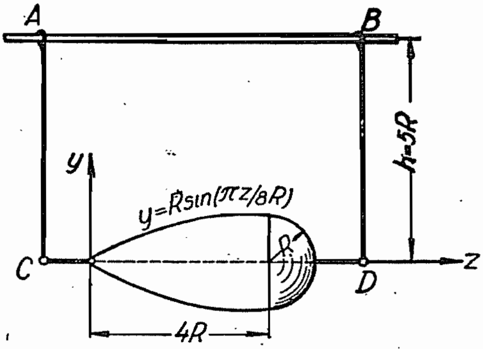
Сл. 129

Решење. — Како је $J_{AB} = {}^1/_3 \mathrm{M} b^2$, то је, према (339), период

$$T = 2\pi \sqrt{2b/3g \sin \alpha}.$$

17.4 ЕКСПЕРИМЕНТАЛНО ОДРЕЂИВАЊЕ МОМЕНАТА ИНЕРЦИЈЕ ТЕЛА

Израчунавање момената инерције тела чисто математичким путем доста је компликовано ако је облик тела неправилан. У таквим случајевима одређујемо моменте инерције експерименталним путем. За то одређивање постоји више метода: помоћу физичког клатна, бифиларног вешања и принципа живе силе.



Сл. 130. — Одређивање момента инерције тела методом физичког клатна

1° Одређивање момента инерције помоћу физичког клатна. — Да бисмо одредили момент инерције тела за тежишну осу обесимо га за паралелну осу на растојању $s = h$ и одредимо период осцилације T или, пак, број осцилација ($n T = 1$ sec). По принципу физичког клатна биће момент инерције за Oy осу (сл. 130):

$$\boxed{J_y = {}^1/_4 \mathrm{M} g s (T/\pi)^2 = {}^1/_4 \mathrm{M} g s (1/\pi n)^2} \qquad (341)$$

Момент инерције за паралелну осу одредићемо по Штајнеровој теореми:

$$J_c = J_y - \mathrm{M}\, s^2.$$

Мерење растојања тежишта s можемо избећи ако пустимо да тело осцилује око двеју оса на растојању l. Нека су периоди T_1 и T_2 онда из система једначина

$$J_1 = \mathrm{M}\,(s_1{}^2 + i^2{}_c) = {}^1/_4\, \mathrm{M}\, g\, s_1\, (T_1/\pi)^2, \qquad l = s_1 \pm s_2,$$
$$J_2 = \mathrm{M}\,(s_2{}^2 + i^2{}_c) = {}^1/_4\, \mathrm{M}\, g\, s_2\, (T_2/\pi)^2,$$

можемо одредити три непознате величине: $i^2{}_c$, s_1 и s_2 а тиме и момент инерције тела за тежишну осу паралелну датим осама осциловања.

Да се не би одређивало растојање s примењује се и овај поступак. Да бисмо одредили момент инерције тела за неку осу Oy узмимо још једно тело масе M', правилног геометриског облика чији момент инерције можемо лако одредити, и поставимо га на осу осциловања тако да му је тежиште на самој оси. Ако је s отстојање тежишта првог тела од тачке O онда је s' отстојање тежишта оба тела од те тачке. Његову величину одредићемо обрасцем

$$s' = \mathrm{M}\, s/(\mathrm{M} + \mathrm{M}').$$

Ако је период осцилације овако сложеног тела T_s онда је момент инерције

$$J + J' = {}^1/_4 (\mathrm{M} + \mathrm{M}')\, s' g\, T^2{}_s / \pi^2 = {}^1/_4\, \mathrm{M}\, s\, g\, T^2{}_s / \pi^2.$$

Поделимо овај израз моментом инерције $J = \mathrm{M}\, g\, s\, T^2/4\,\pi^2$ добићемо $1 + (J'/J) = (T_s/T)^2$ па је момент инерције тела масе M:

$$\boxed{J = J'\, T^2/(T^2{}_s - T^2)} \tag{342}$$

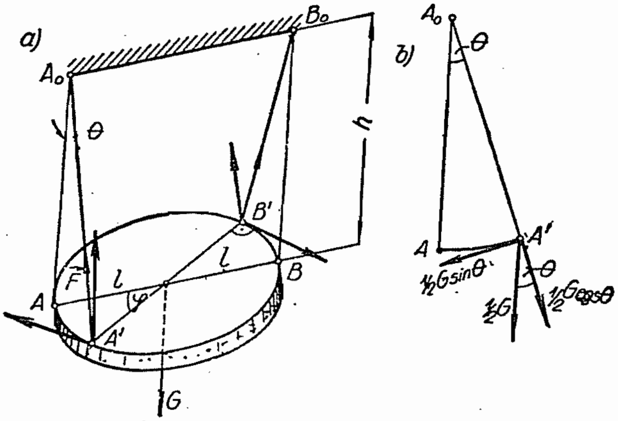
Например, за тело приказано на сл. 130 биће

$$J_z = {}^1/_2\, \rho\, R^4 \pi \int_0^{4R} \sin^4 (\pi z/8R)\; dz + {}^4/_{15}\; \rho\, R^5 \pi \approx \rho\, R^5 \pi; \;\; T \approx 2\pi \sqrt{5{,}1 R/g}\,.$$

2⁰ Одређивање момента инерције помоћу бифиларног вешања. — Да бисмо одредили момент инерције тела AB за вертикалну осу Oz која пролази кроз његово тежиште (сл. 131) обесимо крајеве A и B хоризонталне осе помоћу ужета исте висине h за тачке A_0 и B_0. Ако тело изведемо из равнотежног положаја AB у положај $A'\, B'$ за мали угао φ, онда ће конци заклапати са вертикалом углове θ. Сила затезања у концу је ${}^1/_2\, G \cos\theta$.

Како су углови φ и θ мали, можемо узети да је $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$ па тачке A' и B' нападају вертикалне силе ${}^1/_2\, G$ и хоризонталне ${}^1/_2\, G\theta$

Како је $\overset{\frown}{AA'} = \overset{\frown}{BB'} \approx h\,\theta \approx l\,\varphi$, где је $\overline{AB} = 2\,l$, то је момент $M_z = G\,l\,\theta = G\,l^2\,\varphi/h$ па је динамичка једначина



Сл. 131. — Одређивање момента инерције тела помоћу бифиларног вешања

$$J_z\,\ddot{\varphi} = -\,G\,l^2\,\varphi/h$$

односно

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\,\varphi = 0,$$

где је $\omega^2 = G\,l^2/J_z\,h$. Ово је једначина хармониске осцилације, па је период осцилације

$$T = 2\,\pi/\omega = 2\,\pi\,\sqrt{J_z\,h/G\,l^2}.$$

Момент инерције тела за вертикалну осу $C\,z$ је

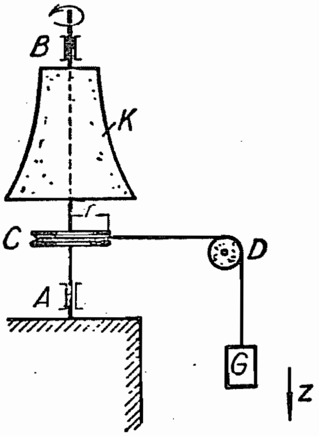
$$\boxed{J_z = {}^1/_4\,T^2\,l^2\,G/\pi^2\,h = {}^1/_4\,G\,l^2/\pi^2\,n^2\,h} \tag{343}$$

где је n број целих осцилација ($T\,n = 1$ sec).

Овај се образац неће променити ако се уместо бифиларног вешања примени *трифиларно* или *мултифиларно* вешање.

3⁰ Одређивање момента инерције тела по принципу живе силе. — Да бисмо одредили момент инерције тела K око осе AB која се поклапа са његовом геометриском осом послужићемо се апаратом приказаним схематично на сл. 132.

Тело K може да се обрће са осом AB. На оси се налази котур C преко кога је пребачено уже које помоћу другог котура D носи терет G. Занемарујући моменте инерције котурова C и D као и утицај трења и узимајући почетне услове кретања такве да је за $t = 0$ била висина падања терета $z = 0$, онда по закону о живој сили следи



Сл. 132. — Одређивање момента инерције по принципу живе силе

$${}^1/_2\,J\,\omega^2 + {}^1/_2\,m\,\dot{z}^2 = m\,g\,z\,.$$

Како је угаона брзина $\omega = d\varphi/dt$ а $dz = r\, d\varphi$ то је $\dot{z} = r\,\omega$, где је r полупречник котура C. Уводећи ове вредности у горњу једначину биће

$$\dot{z} = c\,\sqrt{z},$$

где је

$$c = \sqrt{2\, m\, g\, r^2/(J + m r^2)}.$$

Интеграљењем горње једначине добићемо

$$z = {}^1/_4\; c^2\, t^2 = {}^1/_2\; m\, g\, r^2\; t^2/(J + m\, r^2).$$

Ако се терет G за T sec спустио за висину h биће

$$h = {}^1/_2\; m\, g\, r^2\;\; T^2/(J + m\, r^2)$$

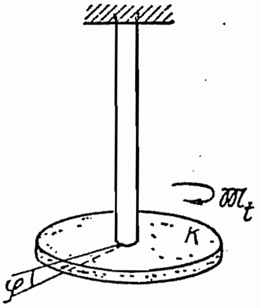
одакле израчунавамо момент инерције тела K за осу AB

$$\boxed{J = {}^1/_2\; m\, r^2\; (g\, T^2 - 2\;h)/h} \qquad (344)$$

17.5 ТОРЗИСКЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ

Поред линеарних осцилација (**чл. 2**) постоје и *торзиске осцилације*. Нека је округли штап AB уклештен на горњем крају (сл. 133), а на доњем носи диск (K). Ако на диск дејствује спрег у његовој равни ($\mathfrak{M}_t$), штап ће бити изложен увијању. Отстранимо ли дејство спрега наступиће *торзиске осцилације*. Проблем ових осцилација своди се на проблем обртања крутог тела око непомичне осе па је динамичка једначина ових осцилација:

$$\boxed{J_z\, \ddot{\varphi} = -\,\mathfrak{M}_t} \qquad (345)$$



Сл. 133. — Торзиске осцилације

Из *Отпорности материјала*[1] познато је да између момената увијања и угла увијања постоји овај однос:

$$\mathfrak{M}_t = \frac{\mathbf{G}\, I_0}{l}\,\varphi = \frac{\mathfrak{T}}{l}\,\varphi = c\,\varphi;\quad \varphi = \theta;$$

$\mathbf{G}\, I_0 = \mathfrak{T}$ је *крутост при торзији*, димензије [FL²], **G** *модул клизања* а c *торзиска крутост вратила* (штапа), димензије момента силе, јединице kgcm. Ова крутост претставља момент увијања који изазива угао увијања једнак једном радијану ($\varphi = \theta$).

---

[1] *Отпорност материјала*, **чл. 5.1**

Диференцијална једначина осцилације је

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \quad \omega^2 = c/J_z.$$

Ова је једначина истоветна са једначином хармониске осцилације па је период

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J_z l}{\mathfrak{T}}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_z}{c}}} \qquad (346)$$

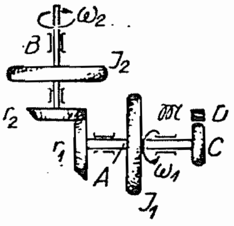
За *експериментално одређивање момента инерције* тела за вертикалну осу можемо се користити торзиским осцилацијама. Наместо диска стави се тело (K) и штап се увије за мали угао φ, пусти да осцилује и одреди период осцилације T_1. Да би се одредила константа c наместо тела (K) стави се диск, полупречника r и тежине G и одреди се период T_2. Према (346) они износе:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{J_z/c}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{{}^1/_2 \, M r^2/c.}$$

Упоређивањем константе c добива се момент инерције

$$J_z = {}^1/_2 \, G r^2 (T_1/T_2)/g.$$

Пример. — 83) Две замајне масе, момената инерције J_1 и J_2 насађене су на вратилима A и B (сл. 134) која се обрћу угаоним брзинама ω_1 и ω_2. Кретање се преноси преко пара коничних зупчаника. На крају вратила A налази се котур за кочење. При кочењу појављује се момент $- \mathfrak{M}_t$. Колики ће бити угао увијања вратила A?



Сл. 134.

Решење. — Углови увијања вратила стоје у истом односу као угаоне брзине обртања

$$\ddot{\varphi}_1 : \ddot{\varphi}_2 = \omega_1 : \omega_2 = r_2 : r_1$$

па је према Даламберовом принципу

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + J_2 \ddot{\varphi}_2 = - \mathfrak{M}_t$$

одакле следи

$$\ddot{\varphi}_1 = - \mathfrak{M}_t/[J_1 + J_2 (r_1/r_2)].$$

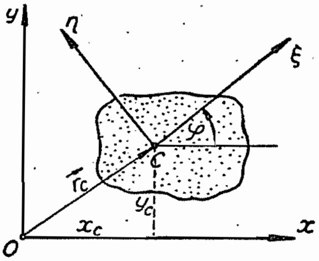
18. РАВНО КРЕТАЊЕ КРУТОГ ТЕЛА

18.1 ДИНАМИЧКЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Кинематички су услови равног кретања крутог тела били (*Кин.* чл. 9) да су брзине свих његових тачака паралелне једној сталној равни. Том приликом проучили смо како се равно кретање крутог тела своди на *комплано кретање плоче* (његовог пресека). Да би тело изводило равно кретање морају бити испуњени и динамички услови: 1⁰ *маса тела мора бити симетрично распоређена у односу на ту раван* и 2⁰ *силе морају тако дејствовати да им је резултанта у тој равни,* тј и силе морају бити симетрично распоређене према тој равни. Просторни систем сила своди се, дакле, на главни вектор ($\vec{F_r}$) у тој равни и главни момент управан на раван ($\mathfrak{M}$).

Први динамички услов показује да је раван, *раван симетрије*, па је свака оса управна на ову раван *главна оса инерције* за продорну тачку осе кроз раван (Додатак I).

Како комплано кретање плоче има *три степена слободе кретања* то нам, за одређивање кретања, треба и *три динамичке једначине.* Положај плоче у сталној равни Oxy одређивали смо са три податка: координатама координатног почетка A покретног триједра $A\,\xi\,\eta$ (*Кин.* чл. 9.3) у односу на непокретни систем Oxy и углом φ, који оса $A\,\xi$ чини са Ox осом. Овде ћемо положај плоче одредити тако да тачку A ставимо у тежиште плоче (C) те ћемо имати три податка: *координате тежишта плоче* x_C, y_C и *угао* φ (сл. 135).



Сл. 135. — Равно кретање плоче

Динамичке једначине кретања плоче поставићемо на основу теореме о кретању средишта система материјалних тачака (тежишта) и теореме о замаху:

$$\boxed{\begin{aligned} M\,\ddot{x}_C &= X_r \\ M\,\ddot{y}_C &= Y_r \\ J_c\,\ddot{\varphi} &= \pm\,\mathfrak{M}_c \end{aligned}} \qquad (347)$$

где су X_r, Y_r пројекције резултанте спољашњих сила, $\mathfrak{M}_c$ главни момент тих сила за тежишну осу управну на раван плоче, а J_c момент инерције плоче за ту осу.

Ове три диференцијалне једначине другог реда уводе при интеграљењу шест скаларних интеграционих константи, које ћемо одредити из *почетних услова кретања* — вредности трију почетних координата и вредности трију њихових извода по времену, те доводе до коначних једначина кретања

$$x_C = f_1(t), \quad y_C = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t).$$

Ове динамичке једначине кретања важе и за слободно и принудно кретање плоче. У овом другом случају у активне силе урачунавамо и *отпоре ослонаца — веза.* Ако је једна тачка плоче принуђена да се стално креће по одређеној кривој линији плоча има само *два степена слободе кретања.* Две прве једначине (347) одређују кретање, а трећа служи за одређивање отпора линије. Ако су, пак, две тачке плоче принуђене да се крећу по одређеним линијама онда плоча има само *један степен слободе кретања,* па је за одређивање кретања довољна само једна једначина; друге две служе за одређивање двају непознатих отпора линија. Кретање плоче која има само један степен слободе кретања најважније је у машинству за проучавање динамике механизама.

18.2 ЗАКОН О ЖИВОЈ СИЛИ И О ЗАМАХУ

Према Кениговој теореми **(чл. 12.7)** кинетичка енергија материјалне равне фигуре (плоче) састоји се из два дела: *кинетичке енергије тежишта* (спољашње кинетичке енергије) и *релативне кинетичке енергије* (унутрашње кинетичке енергије) кретања плоче према тежишту. Како се плоча креће транслаторно, и обрће се око осе (c) која пролази кроз тежиште управне на раван Oxy, то се њена кинетичка енергија састоји из кинетичке енергије транслације и кинетичке енергије обртања.

Положај елементарне масе dm одређен је вектором $\vec{r} = \vec{r}_C + \vec{\rho}$, где је $\vec{r}_C$ вектор положаја средишта C у односу на O, а $\vec{\rho}$ релативни вектор положаја. Према томе је брзина те тачке $\vec{v} = \vec{v}_C + [\vec{\omega}, \vec{\rho}]$, па је кинетичка енергија плоче:

$$E_k = {}^1/_2 \iint\limits_{(A)} v^2\, dm = {}^1/_2 \mathrm{M}\, v_C{}^2 + {}^1/_2 \iint\limits_{(A)} \omega^2 \, [\vec{\mathrm{k}}, \vec{\rho}]^2\, dm + \iint\limits_{(A)} (\vec{v}_C, [\vec{\omega}, \vec{\rho}])\, dm.$$

Први члан на десној страни претставља спољашњу кинетичку енергију, а други енергију обртања. Како је $\iint \vec{\rho}\, dm = 0$, то је трећи члан једнак нули, па је укупна енергија равног кретања

$$\boxed{E_k = {}^1/_2 \mathrm{M}\, v_C^2 + {}^1/_2 J_c \omega^2 = {}^1/_2 \mathrm{M}\,(\dot{x}^2_C + \dot{y}_C^2) + {}^1/_2 J_c \omega^2} \tag{348}$$

Например, ако се један кружни ваљак полупречника R креће транслаторно у правцу своје осе брзином v и обрће се око те осе угаоном брзином ω, онда је његова кинетичка енергија

$$E_k = {}^1/_2 \mathrm{M}\, v^2 + {}^1/_2 J\, \omega^2 = {}^3/_4 \mathrm{M}\, v^2 = {}^3/_4 \mathrm{M}\, R^2 \omega^2 .$$

Диференцирамо ли израз (348) по времену

$$d\,E_k/dt = \mathrm{M}\,(\dot{x}_C\, \ddot{x}_C + \dot{y}_C\, \ddot{y}_C) + J_c\, \omega\, \dot{\omega}$$

с обзиром на (347) и $\dot{\varphi} = \omega$, добивамо

$$d\,E_k = X_r\, d\,x_C + Y_r\, d\,y_c + \mathfrak{M}_c\, d\,\varphi\,.$$

Прираштај кинетичке енергије једнак је раду спољашњих сила (односно, раду главног вектора и главног момента).

Ако постоји таква функција $U\,(x_C,\ y_C,\ \varphi)$ да су $X_r = \partial\, U/\partial x_C$, $Y_r = \partial\, U/\partial\, y_C$, $\mathfrak{M}_c = \partial\, U/\partial\, \varphi$, прираштај енергије је $d\,E_k = d\,U$, те постоји интеграл енергије $E_k = U + h$, где је h константа. Функција U је *функција силе*. У томе случају, дакле, постоји интеграл

$$E_k - U = E_k + E_p = h = \mathrm{E} = \mathrm{const}. \tag{348'}$$

који показује да важи закон о одржавању енергије. Тада можемо једну од једначина (347) заменити горњим интегралом.

Например, хомогени штап дужине $2\,l_r$ масе М, ослања се крајем A на глатки хоризонтални под. Штап је нагнут према поду под углом α и из стања мировања пуштен без почетне брзине да пада. Како је $X_r = 0$, то је, према (347), $\ddot{x}_C = 0$, па је и $\dot{x}_C = 0$, јер је штап био у почетку у стању мировања, *те се тежиште штапа С креће по вертикалној правн.* Пошто је сила G конзервативна, можемо искористити интеграл енергије, па је

$$E_k = {}^1/_2 \mathrm{M}\, \dot{y}_C^2 + {}^1/_2 J_c\, \omega^2 = {}^1/_2 \mathrm{M}\, l^2\, ({}^1/_3 + \cos^2\varphi)\, \dot{\varphi}^2 = U + h =$$
$$= -\,\mathrm{M}\, g\, l \sin\,\varphi + h = \mathrm{M}\, g\, l\, (\sin\,\alpha - \sin\,\varphi)$$

јер су

$$y_C = l\, \sin\, \varphi,\ \ E_{ko} = 0\,.$$

Квадрат угаоне брзине износи

$$\dot{\varphi}^2 = \omega^2 = 2\,(g/l)\ (\sin\,\alpha - \sin\,\varphi)/({}^1/_3 + \cos^2\,\varphi)\,.$$

За $\alpha = 90^0$ при паду на под је $\omega^2 = {}^3/_2\ (g/l)$.

Из друге једначине (347), у вези са претходним резултатом, одредили бисмо отпор пода:

$$\mathrm{M}\, \ddot{y}_C = \mathrm{M}\, l\, (\ddot{\varphi}\ \cos\,\varphi - \dot{\varphi}^2\, \sin\,\varphi) = -\,G + F_A\,.$$

Израз (348) за кинетичку енергију равног кретања може се, због односа $J_c = \mathrm{M}\, i_c^2$, написати у облику

$$\boxed{E_k = {}^1/_2\, \mathrm{M}\, [1 + i_c^2\, (\omega/v_C)^2]\, v_C^2 = {}^1/_2\, \mathrm{M}^*\, v_C^2} \tag{348''}$$

где је M* *редукована маса* на средиште плоче. На тај се начин равно кретање своди на *кретање материјалне тачке редуковане масе* M*.

Напр., за случај *котрљања ваљка по глаткој хоризонталној* равни је $v_C = R\,\omega$, $i_c^2 = {}^1/_2\, R^2$, па је $\mathrm{M}^* = {}^3/_2\, \mathrm{M}$. Редукована маса је 50% већа од масе ваљка. Кинетичка енергија износи $E_k = {}^3/_4\, \mathrm{M}\, v_C^2$. Ову вредност добивамо и по обрасцу (348).

У случају *танког обруча* је $i_c = R$, па је $\mathrm{M}^* = 2\,\mathrm{M}$, те је кинетичка енергија $E_k = \mathrm{M}\, v_C^2$.

Прави точак се састоји из *венца* (масе M_v) и *ребара* (жбица, масе M_r). Како је $J_c = \mathrm{M}_v R^2 + {}^1/_3\, \mathrm{M}_r R^2 \approx {}^{10}/_9\, \mathrm{M}_v R^2$, јер је у пракси обично $\mathrm{M}_r = {}^1/_3\, \mathrm{M}_v$, то је $i_c^2 = {}^5/_6\, R^2$, па је $\mathrm{M}^* = {}^{22}/_9\, \mathrm{M}_v$. Кинетичка енергија износи $E_k = 1{,}22\, \mathrm{M}_v\, v_C^2$.

Према *Шаловој теореми* (*Кин.*, **чл. 9.3**) равно кретање се своди на обртање око тренутног пола, па се израз за кинетичку енергију (348) може да напише у облику

$$\boxed{E_k = {}^1/_2\, (\mathrm{M} \cdot \overline{CP}^2 + J_c)\, \omega_p^2 = {}^1/_2\, J_p\, \omega_p^2} \tag{349}$$

где је J_p момент инерције плоче за осу кроз пол P, $\overline{CP}$ растојање тежишта плоче од тренутног пола, а $\omega_p = \Omega$ угаона брзина обртања око пола.

Напр., за случај котрљања ваљка по глаткој хоризонталној равни тренутни је пол (P) у месту додира, па је $\overline{CP} = R$, $\omega_p = \omega$, $J_p = {}^3/_2\, \mathrm{M}\, R^2$, те је $E_k = {}^3/_4\, \mathrm{M}\, R^2 \omega^2$, тј. иста вредност коју смо добили и према Кениговој теореми (348).

Према закону о замаху за пол O биће:

$$\vec{L}_O = \vec{L}_C + [\vec{r}_C,\ \mathrm{M}\, \vec{v}_C],$$

па је пројекција замаха на осу Oz:

$$L_z = \mathrm{M}\, [x_C\, \dot{y}_C - y_C\, \dot{x}_C] + J_z\, \dot{\varphi},$$

те је, према (269):

$$\frac{d}{dt}[\mathrm{M}\, (x_C\, \dot{y}_C - y_C\, \dot{x}_C)] = \mathfrak{M}_z = \sum_{i=1}^{n} (x_i\, Y_i - y_i\, X_i). \tag{349'}$$

Ова једначина може да замени једну од динамичких једначина кретања (347).

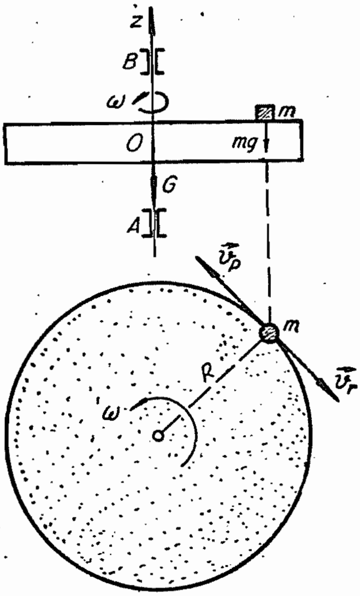
Тако, напр., ако се по ободу хоризонталне кружне платформе масе M, полупречника R, која може да се обрће око вертикалне осе Oz (сл. 136), креће човек, масе m, релативном брзином v_r у односу на платформу, онда можемо помоћу овог закона одредити брзину платформе (v_p). Пошто је сила mg паралелна оси Oz а сила Mg сече осу то је $\mathfrak{M}_z = 0$ па је $L_z = const.$ и једнак нули, јер је систем у почетку кретања био у стању мировања. Због тога је

$$L_z = J_z \omega + m (v_r + R \omega) R = 0$$

те је угаона брзина обртања платформе:

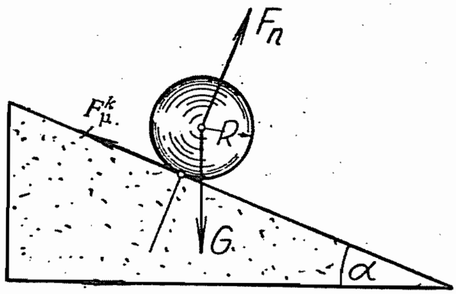
$$\omega = \omega_p = - m v_r R/(J_z + m R^2).$$

Дакле, платформа се обрће у *супротном смеру* од смера кретања човека.



Сл. 136. — Одређивање брзине платформе

У случају *принудног кретања* треба узети у обзир и отпоре везе. Када се ваљак *котрља низ глатку стрму раван* (сл. 137 *a*), онда су динамичке једначине кретања:



Сл. 137 *a*. — Котрљање кугле низ стрму раван

$$M \ddot{x}_C = M g \sin \alpha,$$
$$M \ddot{y}_C = - Mg \cos \alpha + F_n,$$
$$J_c \ddot{\varphi} = 0. \tag{350}$$

Овде је x оса узета низ раван, а y оса управно на њу.

Како је $y_C = R$, биће $\ddot{y}_C = 0$, па је нормални отпор $F_n = Mg \cos \alpha$. Из треће једначине следи $\omega = const.$, па је $v_C = \dot{x}_C = R \omega$ и $a_C = \ddot{x}_C = g \sin \alpha$. Ово је случај клизања низ раван.

Када се точак котрља без клизања по *храпавом хоризонталном колосеку*, поред отпора површине треба узети у обзир отпор трења и отпор против котрљања који се јавља у виду спрега, момента $\mathfrak{M}_\mu^k = \varepsilon G$. По закону о живој сили биће:

$$^1/_2 M v_C^2 + {}^1/_2 J_c \omega^2 = F s - \mathfrak{M}_\mu^k \varphi = [F - \varepsilon (G/R)] s,$$

где је F вучна сила а ε коефицијент отпора против котрљања. Кретање наступа када је $F > \varepsilon G/R$.

При *котрљању низ стрму храпаву раван* (сл. 137 *a*) динамичке једначине кретања су:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= Mg \sin\alpha - F_\mu^k = MR\ddot{\varphi}, \\ M\ddot{y}_C &= -Mg\cos\alpha + F_n = 0, \\ -J_c\ddot{\varphi} &= -F_\mu^k R;\ \omega(\curvearrowright), \end{aligned} \tag{351}$$

јер су $y_C = R$; $v_C = R\omega$; $a_C = \ddot{x}_C = R\ddot{\varphi}$.

Из прве и треће једначине добивамо отпор против котрљања:

$$F_\mu^k = \frac{1}{1 + (R/i_c)^2} G \sin\alpha = k\, G \sin\alpha; \tag{351'}$$

он је сразмеран ефективној сили.

Да би *котрљање било без клизања* мора бити испуњен услов да је отпор против котрљања мањи или једнак отпору против клизања (трења):

$$F_\mu^k \leq F_\mu = \mu F_n = \mu G \cos\alpha,$$

односно, мора бити нагиб стрме равни

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha \leq \mu/k, \quad k = \frac{1}{1 + (R/i_c)^2}} \tag{352}$$

С обзиром на једначине (351) и (351') котрљање се може свести на клизање низ храпаву раван убрзањем

$$\ddot{x}_C = g \sin\alpha - kg\sin\alpha = (1-k)\, g \sin\alpha.$$

За карактеристичне случајеве резултати су дати у доњој таблици.

ТЕЛО	i_c^2	$(R/i_c)^2$	k	$\operatorname{tg}\alpha \leq \mu/k$	$\ddot{x}_C$
Ваљак	$^1/_2\ R^2$	2	1/3	$3\ \mu$	$^2/_3\ g \sin\alpha$
Лопта (кугла)	$^2/_5\ R^2$	$^5/_2$	2/7	$^7/_2\ \mu$	$^5/_7\ g \sin\alpha$
Обруч	R^2	1	1/2	$2\ \mu$	$^1/_2\ g \sin\alpha$

У случају котрљања кугле низ олук нагиба β (сл. 137 *b*), једначине (351) постају:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= Mg\sin\alpha - 2F_\mu^k = M\ddot{\varphi}\cdot\overline{CK}, \\ M\ddot{y}_C &= -Mg\cos\alpha + 2F_{wn}\cos\gamma, \\ J_c\ddot{\varphi} &= 2F_\mu^k \cdot \overline{CK}. \end{aligned}$$

Како су:

$$\overline{CK} = R \cos \gamma = R \sin {}^1/_2 \ \beta, \ F_{wn} = (G \cos \alpha)/2 \cos \gamma,$$

биће

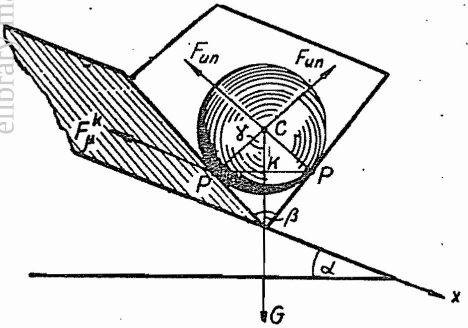
$$F_\mu^k = {}^1/_2 \, k G \sin \alpha, \ k = (\sin {}^1/_2 \beta)/[1 + (R/i_c)^2 \sin^2 {}^1/_2 \ \beta], \ F_\mu^k \leq \mu \cdot F_{wn}$$

па је

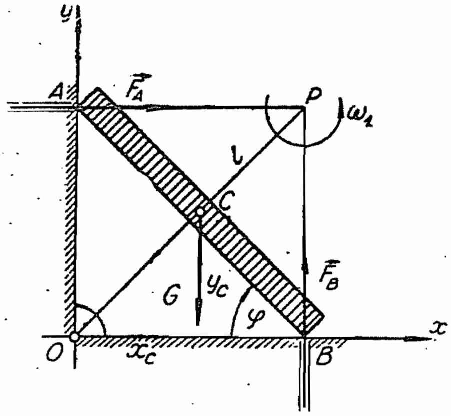
$$\mathrm{tg}\, \alpha \leq \mu/k = \mu \ [(R/i_c)^2 \sin {}^1/_2 \beta + (1/\sin {}^1/_2 \beta)].$$

Примери. — **84)** Хомогени штап AB, дужине $2l$, клизи под утицајем сопствене тежине G једним крајем по глатком зиду OA а другим по глатком поду OB (сл. 138),

a) Одредити угаону брзину и убрзање штапа као и притиске у тачкама ослањања у зависности од угла φ ако је у почетку клизања био φ_0.



Сл. 137 *b*. — Котрљање кугле низ олук



Сл. 138.

b) При којој ће се вредности угла φ штап одвојити од зида?

Решење. — Тренутни пол је P па је $\overline{CP} = l$. Како је $J_c = {}^1/_{12} \mathrm{M} \ (2l)^2 = {}^1/_3 \mathrm{M} \, l^2$ то је, према (348′), $E_k = {}^2/_3 \mathrm{M} \, l^2 \omega^2$. Како рад врши само тежина G и износи $\mathrm{M} gl (\sin \varphi_0 - \sin \varphi)$ то је угаона брзина

$$\omega^2 = (3g/2l) [\sin \varphi_0 - \sin \varphi]$$

и угаоно убрзање

$$\dot{\omega} = -(3g/4l) \cos \varphi$$

Отпоре веза одређујемо из првих двеју једначина (347):

$$\mathrm{M} \ddot{x}_C = F_A, \quad \mathrm{M} \ddot{y}_C = F_B - G.$$

Како су

$$x_C = l \cos \varphi, \ y_C = l \sin \varphi,$$

то су:

$$\ddot{x}_C = - l (\omega^2 \cos \varphi + \omega \sin \varphi), \ \ddot{y}_C = - l (\omega^2 \sin \varphi - \dot{\omega} \cos \varphi).$$

Уносећи ове изразе у горње једначине добивамо отпоре:

$$F_A = {}^3/_4 G [\cos \varphi (3 \sin \varphi - 2 \sin \varphi_0)],$$

$$F_B = {}^1/_4 G (1 - 6 \sin \varphi_0 \sin \varphi + 9 \sin^2 \varphi).$$

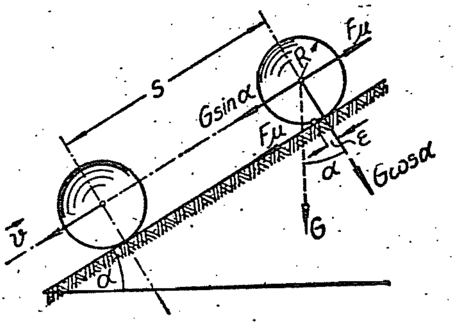
Убрзање можемо добити и помоћу треће једначине (347) узимајући моментну тачку у тренутном полу P. Како је

$$J_p' = J_c + M l^2 = {}^4/_3\, M\, l^2$$

то је

$$J_p\, \ddot{\varphi} = - M g l \cos\varphi,$$

јер угаона брзина обртања око тренутног пола $\Omega = \omega_1 = \omega$, пошто је $v_A = 2\, l\, \Omega\, \cos\, \varphi = \dot{y}_A = 2\, l\, \omega\, \cos\, \varphi$.



Сл. 139

b) Штап ће се одвојити од зида када буде $F_A = 0$, тј. при $\sin\, \varphi = {}^2/_3\, \sin\, \varphi_0$. Тада је $F_B = {}^1/_4\, G$.

85) Челична кугла пречника 10 cm, котрља се под утицајем сопствене тежине низ стрму храпаву раван ($\alpha = 15^0$) без почетне брзине 10 метара (сл. 139).

Одредити брзину средишта кугле ако је $\varepsilon = 0{,}1$ cm.

Решење. — Како је

$$F_\mu\, R = \varepsilon\, G\, \cos\, \alpha$$

биће

$$G\, (\sin\, \alpha - \varepsilon\, R^{-1}\, \cos\, \alpha)\; s = {}^1/_2\, (M\, v^2 + J\, \omega^2) = {}^7/_{10}\, G\, v^2/g,$$

јер је $v = R\, \omega$, па је

$$s\, (\sin\, \alpha - \varepsilon\, R^{-1}\, \cos\, \alpha) = {}^7/_{10}\;\, v^2/g.$$

За дате податке је $v = 5{,}80$ m sec^{-1}.

86) По глаткој стрмој равни спуштају се два једнака хомогена шупља ваљка, односа пречника $\psi = d/D = {}^1/_2$. Први ваљак клизи низ раван, а други се котрља без клизања. У коме односу стоје висине спуштања тежишта ваљака за исти временски размак ако једновремено почињу кретање из истог положаја а без почетне брзине?

Решење. — Како масе пуног и шупљег ваљка стоје у односу $M/m = \psi^{-2}$ то је $i_c^2 = {}^1/_2\, R^2\, (1 + \psi^2) = {}^5/_8\, R^2$, па је $k = {}^5/_{13}$. Висине спуштања стоје у односу:

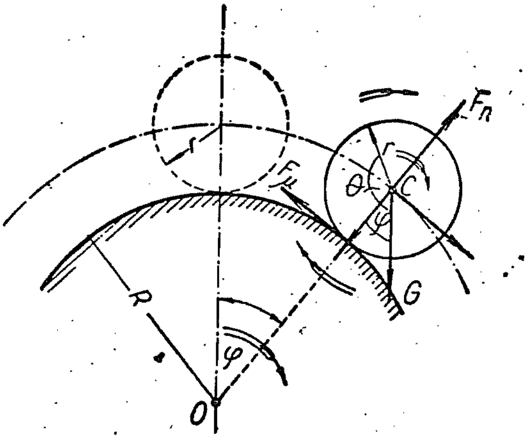
$$h^{(1)} : h^{(2)} = (g\, \sin\, \alpha) : (g\, \sin\, \alpha)\, (1 - k) = {}^{13}/_8.$$

87) По потпуно храпавој непомичној кугли, полупречника R (сл. 140) котрља се друга кугла полупречника r која је у почетном положају била врло близу највишој тачки прве кугле ($\varphi \approx 0$). Одредити узајамни притисак кугли и силу трења између њих као функцију угла φ. При којој ће вредности овог угла покретна кугла напустити непокретну? (*Routh*).

Решење.— Ако је M маса покретне кугле а G њена тежина, онда су тангенцијално и нормално убрзање њеног средишта

$$(R + r)\, \ddot{\varphi}^2 = (G\, \sin\, \varphi - F\mu)/M,$$

$$(R + r)\, \dot{\varphi}^2 = (G\, \cos\, \varphi - F_n)/M,$$



Сл. 140. — *Routh*-ов проблем

па је $J\dot{\theta} = F_\mu r$, $J = {}^2/_5 M r^2$, где је θ угао обртања покретне кугле.

Како је $r(\theta - \varphi) = R\varphi$, то је $r\ddot{\theta} = (R + r)\ddot{\varphi}$, односно $F_\mu = J\theta/r = {}^2/_5 M(R + r)\ddot{\varphi}$,

па је диференцијална једначина кретања кугле

$$\ddot{\varphi} = (5G \sin\varphi)/7M(R - r).$$

Интеграљењем ове једначине за почетне услове, за $\varphi = 0$ је $\varphi = 0$, добивамо први интеграл

$$\varphi^2 = {}^{10}/_7 G(1 - \cos\varphi)/M(R + r),$$

па су нормални отпор и сила трења

$$F_n = {}^1/_7 G(17 \cos\varphi - 10), \quad F_\mu = {}^2/_7 G \sin\varphi.$$

Покретна кугла ће напустити подлогу на месту на коме је $F_n = 0$, тј. за вредност угла $\varphi_1 = \arc\cos({}^{10}/_{17})$, $\varphi_1 = 53^0\,58'$ (који, дакле, не зависи од димензија кугли!).

Да би било *чисто котрљање* кугле потребно је да буде испуњен услов

$$F_\mu \leq F_n, \text{ тј. } \mu \geq 2 \sin\varphi/(17 \cos\varphi - 10).$$

За $\varphi = \varphi_1$ биће $\mu = \infty$ што значи да клизање настапа и пре достигнућа угла φ_1.

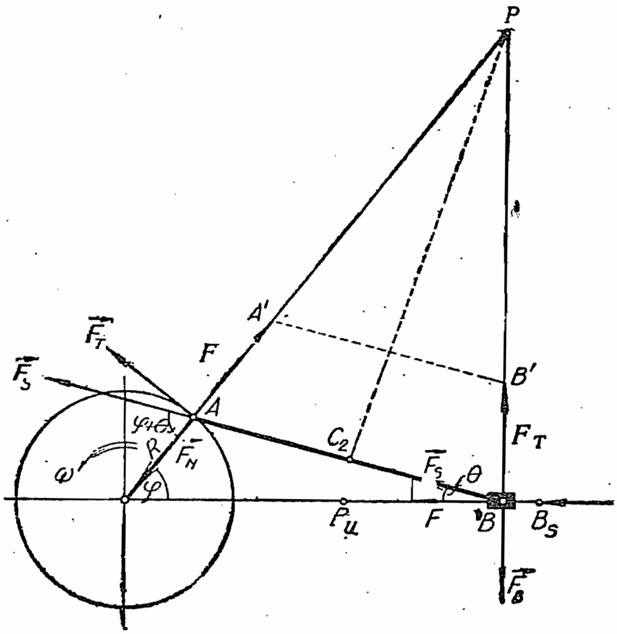
Напр., ако је $\mu = 0{,}4$ онда клизање почиње при углу

$$17 \cos\varphi_k - 10 = \quad \cos\varphi_k, \text{ тј. } \varphi_k = 39^0\,16'.$$

19. ОСНОВИ ДИНАМИКЕ КЛИПНОГ МЕХАНИЗМА

19.1 ОДРЕЂИВАЊЕ СИЛА У ДЕЛОВИМА МЕХАНИЗМА

У појединим деловима клипног механизма дејствују силе. Оне су двојаке природе: *статичке* и *динамичке*. Прве се одређују сматрајући да механизам мирује, а друге у току самог кретања. У спољашње силе убрајамо: погонску силу, тежу, отпорне силе, итд. У кинематичким паровима јављају се отпори и силе трења. Када се посматра целокупни механизам онда су ове силе унутрашње, у противном, при испитивању појединих делова механизма, оне се јављају као спољашње силе.



Сл. 141. — Силе у деловима клипног механизма

Силу F притиска паре разложићемо на две компоненте: у правцу спојне (моторне) полуге F_s и на нормални притисак на укрсну главу F_B (сл. 141)

$$F_s = F / \cos \theta, \quad F_B = F \ \mathrm{tg}\ \theta = F_s \sin \theta . \tag{353}$$

Силу у спојној полузи можемо у тачки A криваје даље разложити на две компоненте: *тангенцијалну* и *радијалну*

$$F_T = F \sin (\varphi + \theta)/\cos \theta, \quad F_r = F_N = F \cos (\varphi + \theta)/ \cos \theta . \tag{353'}$$

Сила F једнака[1] је pA, где је p *натиритисак* паре у цилиндру, мерен у atm, а A површина клипа. Њу можемо одредити помоћу индикаторског дијаграма. Силе F_B и F_N оптерећују укрсну главу односно кривају па *једино тангенцијална компонента изазива обртање криваје*.

Ако се под утицајем силе F укрсна глава помери за dx, криваја ће се обрнути за угао $d\varphi$, па је рад тангенцијалне силе једнак раду силе F, тј биће

$$F_T = F\, dx/R\, d\varphi = F\, v_B/v_A.$$

Како је при $\omega = \text{const.}$ и брзина криваје константна, то тангенцијална сила зависи само од силе F и брзине укрсне главе (v_B). Пошто се ове две величине стално мењају, мењаће се и тангенцијална сила. Сила F се мења јер довод паре у цилиндар није сталан већ само на дужини 25—30% хода клипа *(иериод адмисије)* пошто онда наступа ширење паре (*иериод експанзије*, сл. 24). Промена брзине укрсне главе дата је у *Кинематици* обрасцем (179). Због сталног мењања тангенцијалне силе мењаће се и обртни момент. Поред тангенцијалне силе дејствоваће и тангенцијални отпор F_{wT}, па је динамичка једначина обртања у једном делу хода $J\ddot{\varphi} = +(F_T - F_{wT})R$ а у другом $J\ddot{\varphi} = -(F_T - F_{wT})R$. У првом је случају момент позитиван те повећава угаону брзину, у другом је, пак, негативан, те је смањује.

Да би се промене угаоне брзине отстраниле или умањиле употребљава се **замајац**. У периоду кретања, када је тангенцијална сила већа од отпора, замајац акумулира вишак кинетичке енергије да би га, у следећем периоду, када је тангенцијална сила мања од отпора, повратио. *Он*, дакле, *игра улогу акумулатора кинетичке енергије и тиме уравнотежава обртање.*

Како поједини делови механизма имају различита кретања то ће се утицај инерције јављати или у виду *главног вектора* или *главног момента*. При транслацији елемента биће само главни вектор $\vec{F}_{rj} = -M\vec{a}_C$, где је $M = G/g \approx 0{,}102\, G\, \text{kg}\, \text{m}^{-1}\, \text{sec}^2$ маса, а a_C убрзање тежишта. При обртању штапа око осе која пролази кроз његово тежиште, силе инерције редукују се на спрег $\mathfrak{M}_{jc} = -J_c\dot{\omega}$. У општем случају оне се редукују на главни вектор $\vec{F}_{rj}$ и главни момент $\vec{\mathfrak{M}}_{jc}$. При обртању криваје око тачке O, односно око осе која пролази кроз ту тачку а управна је на раван механизма, главни вектор сила инерције је $\vec{F}_{rj} = -Ms(\dot{\omega}\vec{T} + \omega^2\vec{N})$, док је $\mathfrak{M}_{jo} = -\dot{\omega}J_o$, где је J_o момент инерције штапа за осу кроз тачку O. Главни вектор дејствује у тежишту, па се може

---

[1] Под идеалним претпоставкама да нема никаквих губитака.

са главним моментом сложити *само у једну силу*, једнаку главном вектору са нападном тачком у Хајгенсовом центру штапа замишљеног као физичко клатно које осцилује око осе (*o*).

19.2 ДИНАМИЧКА ЈЕДНАЧИНА КРЕТАЊА КЛИПНОГ МЕХАНИЗМА

Клипни механизам има само *један степен слободе кретања*. Кретање ће бити одређено само једном једначином. Ту ћемо једначину добити ако успемо да кинетичку енергију целокупног система изразимо као функцију једног јединог параметра, угла φ, који криваја чини у сваком тренутку са правцем пута укрсне главе. Како је клипни механизам сложен из кинематичких елемената који изводе различита кретања, то можемо овако поделити покретне масе: 1^0 *криваја, главна осовина машине и замајац*, укупне масе M_1; изводе *обртно* кретање, 2^0 *спојна полуга*, масе M_2, изводи *транслаторно кретање* и *обртање око свога тежишта* C, и 3^e *укрсна глава, клипњача и клип*, укупне масе M_3, изводе *праволиниско осцилаторно* кретање.

Кинетичке енергије ових маса биће:

1^0 *обртних*

$$E_{k1} = {}^1/_2 J_1 \omega^2,$$

2^0 *спојне полуге*

$$E_{k2} = {}^1/_2 M_2 (\dot{x}^2_2 + \dot{y}^2_2) + {}^1/_2 J_2 \Omega^2,$$

где су x_2 и y_2 координате тежишта спојне полуге, а $\Omega = \dot{\theta}$ угаона брзина обртања спојне полуге око њеног тежишта. Координате тежишта C могу се изразити помоћу R, l, φ, θ, а с обзиром на однос $R \sin \varphi = l \sin \theta$ и полупречник инерције, кинетичка енергија може се написати у облику

$$E_{k2} = {}^1/_2 \ \omega^2 \ J_2 \ (\varphi),$$

где је $J_2 \ (\varphi)$ та зависност, димензије момента инерције,

3^e *осцилаторних*

$$E_{k3} = {}^1/_2 \ M_3 \ v^2{}_B = {}^1/_2 \omega^2 J_3 \ (\varphi),$$

јер је v_B функција угла φ.

На тај начин укупна кинетичка енергија механизма биће

$$E_k = {}^1/_2 \ [J_1 + J_2 \ (\varphi) + J_3 \ (\varphi)] \ \omega^2.$$

Како је потенцијална енергија

$$E_p = \Pi = R \int (F_{wT} - F_T) \ d\varphi$$

функција променљиве φ, јер су тангенцијална сила и тангенцијални отпор зависни од φ, то је тотална енергија

$$\boxed{{}^1/_2\,[J_1 + J\,(\varphi)]\;\omega^2 + \Pi\,(\varphi) = \mathrm{E} = \mathrm{const.}} \tag{354}$$

где смо са $J\,(\varphi)$, краткоће ради, обележили збир $J_2\,(\varphi) + J_3\,(\varphi)$. Ова једначина претставља *основну динамичку једначину клипног механизма.* Из ње можемо добити закон кретања механизма, пошто је

$$\omega = \varphi = \sqrt{2\,[\mathrm{E} - \Pi\,(\varphi)]/[J_1 + J\,(\varphi)]}, \tag{354'}$$

у облику

$$\varphi = f\,(t)$$

У изразу (354) имамо две константе: Е, коју можемо одредити опажањем времена обртања криваје за један обрт, и J_1, који садржи и момент инерције замајца, који треба тек израчунати. *Због тога се овај закон кретања односи на већ конструисану машину*, па је само од теориског значаја. Практично се одређује кретање механизма графичким методама.[1]

19.3 РЕДУКЦИЈА МАСА И СИЛА. ИЗРАВНАЊЕ МАСА

Како клипни механизам има свега *један степен слободе* кретања то ћемо његово кретање моћи претставити кретањем једне његове тачке у којој је концентрисана таква маса да даје кинетичку енергију исто толику као и све масе система укупно. Та тачка назива се *редукциона тачка* а маса је *редукована маса* М*, па се овај поступак назива *редукција маса на дату тачку.* Узмимо за редукциону тачку крајњу тачку криваје — рукавац (A), онда мора бити испуњен услов

$$E_k = {}^1/_2\;\mathrm{M}^*\;R^2\;\omega^2 = {}^1/_2\;[J_1 + J\,(\varphi)]\;\omega^2$$

те је редукована маса

$$\boxed{\mathrm{M}^* = [J_1 + J\,(\varphi)]/R^2} \tag{355}$$

Она је променљива величина и зависи од угла φ.

На тачку (A) — рукавац криваје — морамо редуковати све масе механизма.

1⁰ *Обртне масе.* — У овоме случају мора бити

$$E_{k1} = {}^1/_2\,J_1\,\omega^2 = {}^1/_2\,\mathrm{M}_1^*\,v_A^2,\ \text{тј.}\ \mathrm{M}_1^* = J_1/R^2.$$

Момент инерције криваје мора бити једнак моменту инерције редуко-

---

[1] F. Wittenbauer - Graphische Dynamik, 1923. Th. Pöschl - Lehrbuch der T. Mechanik, III Aufl., Berlin, 1949.

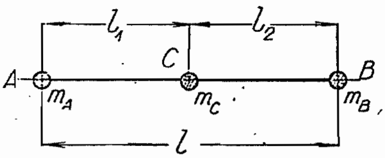
ване масе за осу обртања (o). Полупречник криваје уједно је и полупречник инерције масе M^*_1.

2⁰ *Маса спојне полуге.* — Да бисмо једну плочу масе M редуковали на n материјалних тачака, маса̂ m_i, морају бити испуњени *статички* и *динамички услови*. Први услови захтевају да маса плоче остане непромењена а такође и њено тежиште (средиште). Да би главни момент сила инерције остао непромењен мора момент инерције система редукованих маса у односу на тежишну осу бити једнак моменту инерције плоче за ту осу. Ови статички и динамички услови изражавају се једначинама:

$$\boxed{\Sigma m_i = M\,, \ \Sigma m_i x_i = 0,\ \Sigma m_i y_i = 0,\ \Sigma m_i (x_i^2 + y_i^2) = J_c} \tag{356}$$

Овде су m_i редуковане масе а x_i, y_i координате тачака у односу на координатни систем Cxy у тежишту. За сваку редуковану масу морамо имати три непознате (m_i, x_i, y_i), укупно $3n$. С обзиром на горње услове (356) потребно је $p = 3n - 4$ независних параметара да би систем имао решења.

Например, за $n = 1$ нема решења, јер је $p = -1$, за $n = 2$ је $p = 2$ те морамо унапред одредити два податка (напр., x_1 и y_1), за $n = 3$ је $p = 5$, а за $n = 4$ је $p = 8$ (тада морамо знати положаје редукционих тачака).



Сл. 142. — Редукција масе спојне полуге

Обично се маса спојне полуге редукује на *три масе*. Како је $n = 3$ то је $p = 5$. Изаберемо ли тачке A, B и C (сл. 142) онда имамо један податак више, па морају тачке *лежати на једној правој*. Услови (356) тада постају

$$m_A + m_B + m_C = M_2,\ m_A l_1 = m_B l_2,$$
$$m_A l_1^2 + m_B l_2^2 = J_c,$$
$$m_A = J_c/l\, l_1;\ m_B = J_c/l\, l_2;\ m_C = M_2 - (J_c/l_1\, l_2)\,.$$

Ове три масе треба редуковати на тачку A. Те редуковане масе износе:

a) $m^*_A = m_A$, пошто се налази у тачки A,

b) $^1/_2\ m_C\ v^2_C = {}^1/_2\ m^*_C\ v^2_A$, одакле је редукована маса
$m^*_C = m_C\ (v_C/v_A)^2 = m_C\ (\overline{CP}\,/\,\overline{AP})^2$,

c) $^1/_2\ m_B\ v^2_B = {}^1/_2\ m^*_B\ v^2_A$, одакле је
$m^*_B = m_B\ (v_B\,/\,v_A)^2 = m_B\ (\overline{BP}\,/\,\overline{AP})^2$

па је укупна редукована маса спојне полуге на тачку A

$$M^*_2 = m_A + m_C\ (\overline{CP}\,/\,\overline{AP})^2 + m_B\ (\overline{BP}\,/\,\overline{AP})^2\,. \tag{357}$$

3^e *Осцилаторне масе.* — Масу M_3 осцилаторних делова узимамо у тачки B па је, према претходном, редукована маса на тачку A,

$$M^*_3 = M_3\ (\overline{BP} / \overline{AP})^2.$$

Укупна редукована маса клипног механизма на тачку A криваје биће

$$M^* = M^*_1 + M^*_2 + M^*_3 \tag{358}$$

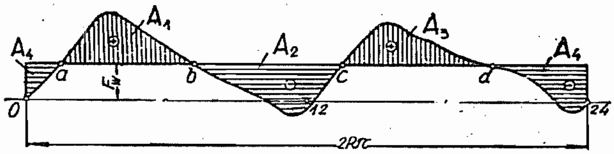
У масу M^* није урачуната маса замајца. Како се растојања тачака A и B од тренутног пола (P) мењају и зависе од угла φ, то и *целокупна редукована маса механизма на тачку A зависи од тог угла.*

Поред редукције маса мора се извршити и *редукција сила* које дејствују на механизам и то на исту редукциону тачку. Услов редукције је *да ће редуковане силе дају исти механички рад као и стварне силе.*

Између сила F_T и F постоји однос (353) који се може написати у облику

$$F_T = F v_B / v_A = F \cdot \overline{BP} / \overline{AP}$$

Из овога следи, да тангенцијалну силу можемо одредити и графички. Када у тачки A пренесемо силу F, у извесној размери, $\overline{AB'} = F$ (сл. 141), тада права $A'B'$, паралелна спојној полузи, отсеца на прави BP отсечак $\overline{BB'} = F_T$ (у истој размери цртања).



Сл. 143. — Дијаграм тангенцијалне силе

Поступимо ли овако за све положаје укрсне главе (напр., за 24 положаја тачке A криваје) можемо нацртати *дијаграм тангенцијалне силе* у зависности од пута укрсне главе. Интегрална крива овог дијаграма јесте *дијаграм рада и пута* (сл. 143). Ако у дијаграм тангенцијалне силе унесемо и тангенцијални отпор, видимо да је на делу ab тангенцијална сила већа од отпора, а на делу bc мања. На првом делу тангенцијална сила *убрзава* масе, а на другом *успорава*. Површине A_1 и A_3 претстављају рад нагомилан у замајцу а A_2 и A_4 рад који одаје замајац.

Обично се у пракси маса спојне полуге дели тако да $^1/_3\ M_2$ долази на тачку A, а $^2/_3\ M_2$ на укрсну главу B. Може се узети (сл. 141) да су пројекције брзина $\dot{x}_A = v_B$, $\dot{y}_A = l'\Omega \approx l\,\Omega$, $\dot{x}_2 = v_B$, $\dot{y}_2 \approx {}^1/_2\, \dot{v}_A$. Како је $J_c = {}^1/_{12} M_2 l^2$, биће енергија

$$E_{k2} = {}^1/_2\, M_2 v_2^2 + {}^1/_2\, J_c \Omega^2 = {}^1/_2\, M_2 [v_B^2 + {}^1/_3\, \dot{y}_A^2] =$$

$$= {}^1/_2 [{}^1/_3\, M_2 v_A^2 + {}^2/_3\, M_2 v_B^2].$$

Редуковане масе механизма на рукавац криваје (A) и на укрсну главу (B) износе:

$$M^*_A = M_1 + {}^1/_3\, M_2, \quad M^*_B = M_3 + {}^2/_3\, M_2.$$

Редуковане масе на рукавац криваје (M^*_A) и укрсну главу (M^*_B) *изравнавају се* због сила инерције. Прва маса се лако изравнава стављањем масе M^*_A противположено рукавцу криваје (A), јер су онда центрифугалне силе ($F_c = M^*_A R\,\omega^2$) једнаке супротносмерне силе. Сила инерције осцилаторних маса износи

$$F_j = F'_j + F''_j = -M^*_B a_B = -M^*_B R\,\omega^2 (\cos\,\varphi \pm \lambda\,\cos\,2\varphi).$$

где су F'_j *силе маса првог*, а F_j'' *маса другог реда. У* пракси се изравнавају само силе маса првог реда. Противположено рукавцу криваје дода се маса M^*_B, те центрифугална сила има две компоненте:

$M^*_B R\,\omega^2\,\cos\,\varphi$ која уравнотежава силе маса првог реда, и $M^*_B R\,\omega^2\,\sin\,\varphi$. Ова компонента остаје неуравнотежена, али се јавља у виду притиска на осовину.

Поред овог уравнотежења користе се и *компаунд машине* (машине са више цилиндара).

19.4 ЗАМАЈАЦ

Као што смо видели, замајац (сл. 144) игра улогу акумулатора кинетичке енергије механизма. У току једног обрта он два пута прима вишак енергије а два пута и одаје, како би брзина обртања била уједначена. Ако са A_z означимо вишак рада тангенцијалне силе онда мора бити

$$A_z = {}^1/_2\, M^*_z(v^2_{max} - v^2_{min})$$

овде су v_{max} и v_{min} екстремне вредности брзине тежишта венца замајца.

Уведемо ли средњу брзину замајца

$$v = {}^1/_2\,(v_{max} + v_{min})$$

и *степен неравномерности* машине

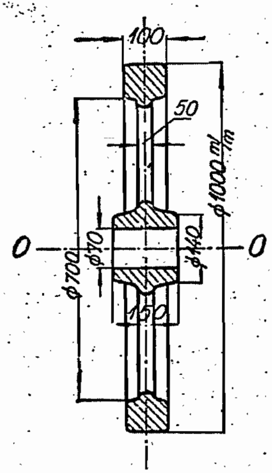
$$\varepsilon = (v_{max} - v_{min})/v$$

онда је

$$A_z = M^*_z\, v^2\, \varepsilon,$$

где је M^*_z маса замајца редукована на тежиште пресека његовог венца.

Из ове једначине увиђамо да равномерније ради машина са *замајцем веће масе* и *већим брзинама обртања*, јер је у тим случајевима стенен неравномерности рада машине мањи.



Сл. 144. — Замајац

Како је $v = R_z\,\omega$ горња једначина се може написати у новом облику

$$A_z = M^*_z\, R^2_z\, \omega^2\, \varepsilon = J_z\, \omega^2\, \varepsilon,$$

па из ње можемо одредити момент инерције замајца, јер је степен неравномерности одређен за сваку врсту машине и креће се од ${}^1/_{10}$ до ${}^1/_{300}$ а површину A_z дијаграма (F_T, x) можемо лако одредити.

Одредба замајца врши се и помоћу *замајног момента*[1]

$$M^{*}_{z} (\tfrac{1}{2} D_i)^2 = J_z$$

односно

$$\boxed{G_z D_i^2 = 4\,g\,J_z = 3600\,A_z/n^2\,\varepsilon} \tag{359}$$

где је D_i пречник инерције масе замајца, G_z тежина целог замајца a n број обртаја. У тежину замајца G_z спадају тежине венца G_v, ручица G_r и главе G_g.

Например, за податке на сл. 144 биће:

$$\gamma_m = 7{,}2\ \mathrm{kg/dm^3},\ G_z = 433{,}5\ \mathrm{kg},\ M = 44{,}28\ \mathrm{kg\ sec^2\ m};$$

$$J_z = 6{,}346\ \mathrm{kgm\ sec^2},\ D_i = 0{,}76\ \mathrm{m};\ M^* = 0{,}57\ M;\ G_z D_i^2 \approx 260\ \mathrm{kgm^2}.$$

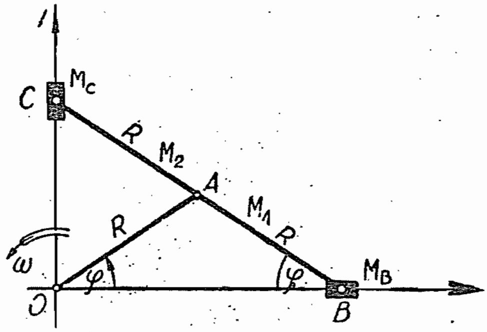
Примери. — 87) Сложен механизам елипсографа састоји се из двају клизача B и C, тежина G_1, криваје OA, тежине G_2, и спојне полуге (леђира) BC, тежине $2\,G_2$. При томе је $\overline{OA} = \overline{BA} = \overline{AC} = R$ (сл. 145).

1^0 Узимајући клизач B за пол написати једначину кретања леђира BC ако се криваја обрће константном угаоном брзином ω око осе кроз тачку O.

2^0 Одредити положај тежишта механизма, сматрајући клизаче материјалним тачкама а леђир хомогеним штапом, као и његову путању.

3^e Одредити интензитет и правац вектора количине кретања механизма.

4^0 Израчунати кинетичку енергију механизма.



Сл. 145. — Механизам елипсографа

5^0 Одредити угаоно убрзање криваје под дејством обртног момента $\mathfrak{M}_0$.

Решење. — 1^0 Једначина равног кретања леђира BC за пол B биће

$$x_0 = 2\,R\,\cos\varphi,\ y_0 = 0,\ \varphi = \omega\,t.$$

2^0 Укупна тежина механизма је $G = 2\,G_1 + 3\,G_2$ па су координате тежишта:

a) $G\,x_S = 2\,G_1\,R\,\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\,G_2\,R\,\cos\varphi + 2\,G_2\,R\,\cos\varphi$,

односно

$$G\,x_S = \tfrac{1}{2}\,R\,(4\,G_1 + 5\,G_2)\,\cos\varphi;$$

b) на исти начин добићемо и другу координату

$$G\,y_S = \tfrac{1}{2}\,R\,(4\,G_1 + 5\,G_2)\,\sin\varphi.$$

Елиминишући из ових једначина угао $\varphi = \omega t$, биће једначина путање тежишта кружна линија полупречника

$$R_S = \tfrac{1}{2}\,R\,(4\,G_1 + 5\,G_2)/(2\,G_1 + 3\,G_2).$$

3^e Количина кретања механизма једнака је, према (чл. 12.4), количини кретања тежишта

$$K = M\,v_S = \tfrac{1}{2}\,R\,\omega\,(4\,G_1 + 5\,G_2)\,g.$$

---

[1] А. Стевовић, Парне машине, Београд, 1953.

Пошто је брзина $R\,\omega$ управна на криваjу то је и вектор количине кретања колинеаран са том брзином, тј. управан на криваjу, и лежи у равни механизма.

4⁰ Кинетичка енергија механизма је

$$E_k = {}^1/_2\, J_0\, \omega^2.$$

Момент инерције механизма за осу кроз пол O, управну на раван кретања, износи

$$J_0 = J_0{}^B + J_0{}^C + J_0{}^{OA} + J_0{}^{BC} = M_1\,(2\,R\,\cos\,\varphi)^2 + M_1\,(2\,R\,\sin\,\varphi)^2 + {}^1/_3\,M_2\,R^2 +$$

$$+ [{}^1/_{12}\cdot 2\,M_2\cdot 2\,R^2 + 2\,M_2\,R^2] = (4\,G_1 + 3\,G_2)\,R^2/g$$

па је

$$E_k = {}^1/_2 (4\,G_1 + 3\,G_2)\,R^2\,\omega^2/g.$$

5⁰ Угаоно убрзање, услед момента $\mathfrak{M}_0$, према обрасцу (320), биће

$$\dot\omega = \mathfrak{M}_0/J_0 = \mathfrak{M}_0\,g/R^2\,(4\,G_1' + 3\,G_2).$$

88) Сложен клипни механизам састоји се из криваје OA, спојне полуге BC и двеју укрсних глава B и C (сл. 145). Редуковати масе механизма на тачку A ако је $\overline{OA} = \overline{BA} = \overline{AC} = R$. У коме односу морају стајати масе па да редукована маса не зависи од угла φ криваје?

Решење. — Пошто је $\lambda = 1$ то су путеви укрсних глава

$$x_B = 2\,R\,(1 - \cos\,\varphi),\ y_C = 2\,R\,(1 - \sin\,\varphi)$$

па су њихове брзине (*Кин.*, **чл. 9.10**)

$$v_B = 2\,R\,\omega\,\sin\,\varphi;\ v_C = -2\,R\,\omega\,\cos\,\varphi;\ v_A = R\,\omega.$$

Редукцију маса на тачку A извршићемо под условом да кинетичка енергија остане непромењена, тј. да су испуњени услови

$$M_B\,v_B{}^2 = M^*{}_B\,v_A{}^2,\quad M_C\,v_C{}^2 = M^*{}_C\,v_A{}^2,$$

па су редуковане масе укрсних глава

$$M^*{}_B = 4\,M_B\,\sin^2\,\varphi,\ M^*{}_C = 4\,M_C\,\cos^2\,\varphi.$$

Према обрасцу (356) масу спојне полуге AB разложићемо на три масе

$$m_A = {}^1/_6\,M_1,\ m_B = {}^1/_6\,M_1;\ m_{C_1} = {}^2/_3\,M_1,$$

па су редуковане масе

$$m^*{}_A = m_A = {}^1/_6\,M_1,\ m^*{}_B = m_B(v_B/v_A)^2 = {}^2/_3\,M_1\,\sin^2\,\varphi,$$

$$m^*{}_{C_1} = m_{C_1}\,(\overline{C_1P}\,/\,\overline{AP})^2 = {}^1/_6\,M_1 + {}^4/_3\,M_1\,\sin^2\,\varphi,$$

пошто су координате тачака $C_1\,({}^3/_4\,2\,R\,\cos\,\varphi;\ {}^1/_4\,2\,R\,\sin\,\varphi)$, $P\,(2\,R\,\cos\,\varphi;\ 2\,R\,\sin\,\varphi)$ па је

$$\overline{C_1P} = {}^1/_2\,R\sqrt{1 + 8\,\sin^2\,\varphi};\ \overline{AP} = R;\ \omega = \omega_1 = \Omega.$$

Редукована маса спојне полуге AB на тачку A, дакле, биће

$$M^*{}_1 = m^*{}_A + m^*{}_B + m^*{}_{C_1} = M_1\,({}^1/_3 + 2\,\sin^2\,\varphi).$$

На потпуно исти начин редуковаћемо и масу спојне полуге AC на тачку A $M^*{}_2 = M_2\,({}^1/_3 + 2\,\cos^2\,\varphi)$ па је укупна редукована маса механизма на тачку A криваје

$$M^* = {}^1/_3\,(M_1 + M_2) + (4\,M_B + 2\,M_1)\,\sin^2\,\varphi + (4\,M_C + 2\,M_2)\,\cos^2\,\varphi.$$

Да би редукована маса била независна од угла криваје мора бити испуњен услов

$$4\,M_B + 2\,M_1 = 4\,M_C + 2\,M_2,$$

тј. мора бити

$$M^* = 2\,(M_B + M_C) + {}^4/_3\,(M_1 + M_2).$$

19.5 ИЗРАЧУНАВАЊЕ СНАГЕ МАШИНА

Помоћу обрасца за кинетичку енергију и обртни момент (321) и (327′) можемо одредити снагу машине.

1° Термичке машине. — Нека је d пречник клипа мерен у cm, његов ход $s = 2\,R$, мерен у m, n број обртаја у минуту, p_m средњи притисак у цилиндру (мерен у kg/cm²), N број цилиндара, онда је снага машине једнака раду силе притиска у секунду.

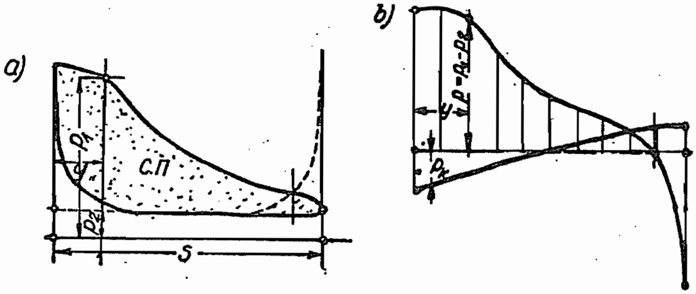
а) Парна машина. — Код *парне машине дуплог дејства* са једним цилиндром биће средња сила парног притиска у секунду:

$$F_m = {}^1/_4\,d^2\,\pi\,p_m\,,$$

па је рад у једном минуту $A = F_m\,s\,2\,n$, те је снага машине у коњским снагама

$$P_i = \frac{{}^1/_4\,d^2\,\pi\,p_m\cdot 2\,s\,n}{60\cdot 75} = \frac{{}^1/_4\,d^2\,\pi\,p_m\,s\,n}{2250}\ \text{(KS)}. \tag{360}$$

Притисак p_m назива се *средњи индикаторски притисак*, јер се стварни притисак стално мења у току једног хода. Његову вредност одређујемо помоћу индикаторског дијаграма (сл. 146) и износи $p_m = (A_1 - A_2)/s$, јер индикаторски дијаграм претставља рад притиска паре на cm² површине клипа при једном ходу.



Сл. 146. — Индикаторски дијаграм дуплодејствујуће машине

Стварно на клип дејствују два парна притиска p_1 и p_2 (*„са стране поклопца“* и *„са стране криваје“*) па је натпритисак $p = p_1 - p_2$. Овом натпритиску треба додати и притисак од сила инерције, осцилаторних маса (p_k) који износи

$$p_k = (M_B/A)\,R\,\omega^2\,[\cos\varphi \pm \lambda\,\cos 2\,\varphi]\,.$$

Дијаграми притисака приказани су на сл. 146 *b*.

Средњи обртни моменат једнак је количнику снаге и угаоне брзине па је

$$\mathfrak{M} = \frac{30\cdot 75}{\pi}\,\frac{P_i}{n} = 716{,}20\,\frac{P_i}{n}\,\text{(kgm)}. \tag{361}$$

b) Мотори са унутрашњим сагоревањем. — За **четворотактни** мотор са N цилиндара биће снага машине

$$P_i = \frac{{}^1/_4\,d^2\,\pi\,p_m\,s\,n}{60\cdot 75}\cdot\frac{2}{l}\,N,\quad \text{тј.}\ P_i = \frac{{}^1/_4\,d^2\,\pi\,p_m\,s\,n}{9000}\,N\ \text{(KS)}, \tag{362}$$

где је i — *број ходова* (тактова); у овом случају $i = 4$.

Код *двотактног мотора* је $i = 2$, па је снага за $N = 1$

$$P_i = \frac{{}^1/_4\, d^2 \pi\, p_m\, s\, n}{4\,500}\ (\mathrm{KS}). \qquad (362')$$

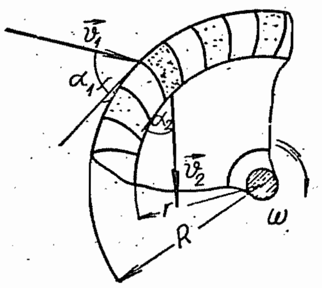
2⁰ **Хидрауличке машине.** — *a*) *Јачина водног млаза.* — Када водни млаз протока Q (m³/sec), пада са висине H (m) он одаје снагу:

$$P = \gamma\, QH/75 = 1000\, QH/75\ (\mathrm{KS})\,. \qquad (363)$$

b) *Клипна пумпа.* — Да би клипна пумпа простог дејства избацила воду на висину H (m), при n обртаја/min потребна јој је снага

$$P_i = GH\, n/4500 \quad (\mathrm{KS}), \qquad (364)$$

где је G тежина воде (kg) која се избаци при једном ходу.



Сл. 147. — Турбинско коло

c) *Водна турбина.* — Гради ли улазна брзина воде у турбинско коло угао α_1 са тангентом, а излазна угао α_2, онда је, на основу закона о замаху,

$$\mathfrak{M} = \dot{L} = (G/g)\,(R\, v_1 \cos \alpha_1 - r\, v_2 \cos \alpha_2).$$

Ова једначина је *Ојлерова једначина турбинског кола* (сл. 147).

Снага машине износи

$$P_i = \frac{G\,\pi\, n}{2250\, g}\,(R\, v_1 \cos \alpha_1 - r\, v_2 \cos \alpha_2), \qquad (365)$$

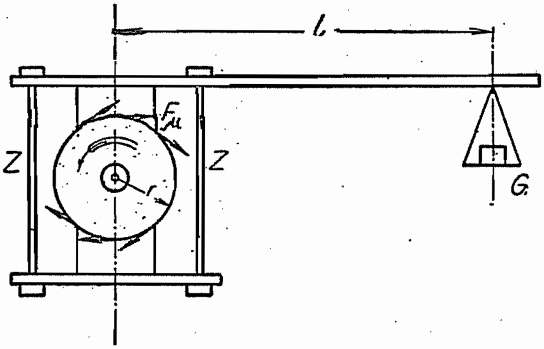
где је G проток (kg/sec), n број обртаја/min.

Досада смо прорачунавали снагу коју добивамо помоћу теориских образаца на основу индикаторског дијаграма. Оваква се снага назива *индикаторска*. Због отпора који се супротстављају раду машине она се неће моћи сва искористити у облику кинетичке енергије, јер се један део енергије претвара у друге видове. Снага коју стварно искоришћујемо назива се *ефективна снага* (P_e). Између ње и индикаторске постоји овај однос

$$P_e = \eta\, P_i \qquad (366)$$

где је η *степен искоришћења (корисности)*. За разне машине креће се од 0,60 до 0,98.

Експерименталним путем одређује се снага машина *кочењем* помоћу *Пронијеве* (*Gaspard Prony*, 1755—1839) *кочнице*.



Сл. 148. — Пронијева кочница

На вратило машине чија се снага одређује насади се котур за кочење са папучама, који носи полугу са теретом G (сл. 148). Услед притиска појављује се сила трења. Ако се завртњи (Z) тако притегну да полуга остане хоризонтална онда из услова за равнотежу следи

$$\mathrm{M} = F_\mu\, r = G\, l,$$

па је, према (327), снага машине

$$P = 0{,}0014\ G\, l\, n\,.$$

20. ОБРТАЊЕ КРУТОГ ТЕЛА ОКО НЕПОМИЧНЕ ТАЧКЕ

20.1 ОДНОСИ ИЗМЕЂУ КИНЕТИЧКЕ ЕНЕРГИЈЕ И ЗАМАХА

У *Кинематици* (чл. 10) проучили смо проблем обртања крутог тела око непомичне тачке и утврдили да кретање има *три степена слободе.* За познавање кретања била су потребна три податка. За њих смо узимали Ојлерове углове: *угао прецесије* (ψ), *угао ротације* (φ) и *угао нутације* (θ). Проблем обртања крутог тела око непомичне тачке своди се на проблем обртања тела око осе која пролази кроз ту непомичну тачку (O). Ако у њој усвојимо покретни координатни систем $O\xi\eta\zeta$, круто везан са телом, онда су пројекције угаоне брзине на покретне осе дате *Ојлеровим кинематичким једначинама*:

$$\omega_\xi = \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi, \quad \omega_\eta = \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi,$$

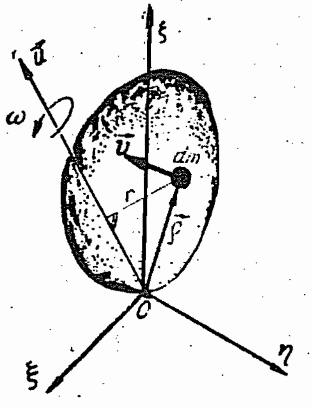
$$\omega_\zeta = \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi, \tag{367}$$

па је квадрат угаоне брзине

$$\omega^2 = \omega^2_\xi + \omega^2_\eta + \omega^2_\zeta = \dot\psi^2 + \dot\varphi^2 + \dot\theta^2 + 2\dot\psi\dot\varphi\cos\theta. \tag{367'}$$

Нека је Ou тренутна оса оријентисана ортом $\vec{u}$ и нека гради углове α, β, γ са координатним осама покретног триједра $O\xi\eta\zeta$, онда је положај елементарне масе dm одређен вектором положаја $\vec{\rho}$ у односу на непомичну тачку O, па је њена брзина (сл. 149)

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{\rho}].$$



Сл. 149. — Обртање крутог тела око непомичне тачке

Кинетичка енергија крутог тела биће

$$E_k = {}^1/_2 \int\!\!\int\!\!\int v^2\,dm = {}^1/_2 \int\!\!\int\!\!\int [\vec{\omega}, \vec{\rho}]^2\,dm =$$

$$= {}^1/_2\,\omega^2 \int\!\!\int\!\!\int r^2\,dm$$

односно

$$\boxed{E_k = {}^1/_2 \cdot J_u\, \omega^2} \tag{368}$$

где је r растојање елементарне масе dm од тренутне осе $(\vec{u})$ а J_u *момент инерције тела за ту осу*. Њега можемо изразити помоћу момената инерције и центрифугалних момената за покретне координатне осе (*Додатак* I. 4) у облику

$$J_u = J_\xi\, \alpha^2 + J_\eta\, \beta^2 + J_\zeta\, \gamma^2 - 2\, J_{\xi\eta}\, \alpha\beta - 2\, J_{\eta\zeta}\, \beta\, \gamma - 2 J_{\zeta\xi}\, \gamma\, \alpha, \tag{368'}$$

где смо, краткоће ради, са α, β, γ означили *косинусе углова.*

Како вектор угаоне брзине пада у правац тренутне осе то постоје и ови односи $\omega_\xi = \omega\alpha$, $\omega_\eta = \omega\beta$, $\omega_\zeta = \omega\gamma$ па је двострука кинетичка енергија

$$\begin{aligned} 2\, E_k = \omega^2\, J_u = J_\xi\, \omega^2{}_\xi + J_\eta\, \omega^2{}_\eta + J_\zeta\, \omega^2{}_\zeta - 2\, J_{\xi\eta}\, \omega_\xi\, \omega_\eta - \\ - 2\, J_{\eta\zeta}\, \omega_\eta\, \omega_\zeta - 2\, J_{\zeta\xi}\, \omega_\zeta\, \omega_\xi = \Phi\, (\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta). \end{aligned} \tag{368''}$$

Она је, дакле, *хомогена квадратна функција* (форма) *пројекција угаоних брзина на осе покретног триједра.*

Када су координатне осе *главне осе инерције* тада су центрифугални моменти једнаки нули, па је

$$\boxed{2\, E_k = J_1\, \omega_1{}^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3\, \omega_3{}^2 = \Phi\, (\omega_1, \omega_2, \omega_3)} \tag{369}$$

Ако је $E_k = const.$, онда је једначина (368') слична једначини елипсоида инерције (*Додатак* I. 5), па вектори свих угаоних брзина образују у простору површину другог реда — елипсоид са средиштем у непомичној тачки. Овај елипсоид назива се *елипсоид угаоних брзина.*

Када су координатне осе *главне осе инерције*, кинетичку енергију можемо изразити помоћу Ојлерових углова у овом облику

$$\begin{aligned} 2\, E_k = J_\xi\, (\dot\psi \sin\varphi \sin\theta + \dot\theta \cos\varphi)^2 + J_\eta\, (\dot\psi \cos\varphi\ \sin\theta - \dot\theta \sin\varphi)^2 + \\ + J_\zeta\, (\dot\psi \cos\theta + \varphi)^2. \end{aligned} \tag{369'}$$

Ако би, пак, оса $O\zeta$ била оса динамичке симетрије тела, онда је у томе случају $J_\xi = J_\eta$, па је

$$2\, E_k = J_\xi\, (\dot\psi^2 \sin^2\theta + \dot\theta^2) + J_\zeta\, (\dot\psi \cos\theta + \dot\varphi)^2, \tag{369''}$$

где су $J_\xi = J_\eta = J_1 = J_2$ а $J_\zeta = J_3$ главни моменти инерције.

Замах тела за пол у координатном почетку (O) — непомичној тачки, јесте

$$\boxed{\vec{L}_O = \iiint [\vec{\rho}, \vec{v}]\, dm = \iiint [\vec{\rho}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]]\, dm} \tag{370}$$

односно после развијања дуплог векторског производа

$$\vec{L}_O = \vec{\omega} \iiint \rho^2\, dm - \iiint \vec{\rho}\, (\vec{\omega}, \vec{\rho})\, dm$$

или

$$\vec{L}_O = J_O\, \vec{\omega} - \iiint (\omega_\xi\, \xi + \omega_\eta\, \eta + \omega_\zeta\, \zeta)\, \vec{\rho}\, dm,$$

где је J_O *поларни момент инерције за пол O* — непомичну тачку крутог тела. Како је $2 J_O = J_\xi + J_\eta + J_\zeta$, то су пројекције замаха на координатне осе

$$\boxed{\begin{aligned} L_\xi &= J_\xi\, \omega_\xi - J_{\xi\eta}\, \omega_\eta - J_{\xi\zeta}\, \omega_\zeta, \\ L_\eta &= - J_{\xi\eta}\, \omega_\xi + J_\eta\, \omega_\eta - J_{\eta\zeta}\, \omega_\zeta, \\ L_\xi &= - J_{\xi\zeta}\, \omega_\xi - J_{\eta\zeta}\, \omega_\eta + J_\zeta\, \omega_\zeta \end{aligned}} \tag{370'}$$

Из ових једначина закључујемо да су *пројекције замаха на покретне осе линеарне функције пројекција угаоне брзине на исте осе.*

У случају да су координатне осе *главне осе инерције*, компонентни замаси за те осе јесу:

$$\boxed{L_1 = J_1\, \omega_1, \quad L_2 = J_2\, \omega_2, \quad L_3 = J_3\, \omega_3} \tag{370''}$$

Ако једначину (370) помножимо скаларно вектором угаоне брзине биће

$$(\vec{\omega}, \vec{L}_O) = \omega^2 \iiint \rho^2\, dm - \iiint (\vec{\omega}, \vec{\rho})^2\, dm.$$

Применом Лагранжевог идентитета $(\vec{\omega}, \vec{\rho})^2 + [\vec{\omega}, \vec{\rho}]^2 = \omega^2 \rho^2$ добива се

$$(\vec{\omega}, \vec{L}_O) = \iiint \{\omega^2 \rho^2 - (\vec{\omega}, \vec{\rho})^2\}\, dm = \iiint [\vec{\omega}, \vec{\rho}]^2\, dm,$$

па је, с обзиром на образац (368), скаларни производ

$$\boxed{(\vec{\omega}, \vec{L}_O) = J_u\, \omega^2 = \omega\, L_u = 2\, E_k} \tag{371}$$

Скаларни производ угаоне брзине и замаха једнак је двострукој кинетичкој енергији, тј. *инваријантан је.*[1]

Одавде следи и ова релација

$$\boxed{L_u = L_O \cos(\vec{L}, \vec{u}) = J_u \omega = 2E_k/\omega} \qquad (372)$$

тј.: *замах крутог тела за тренутну осу једнак је производу интензитета угаоне брзине и момента инерције тела за ту осу.*

За главне осе инерције добићемо релације (370″).

Из ове релације следи и овај став: *вектор кинетичког момента (замаха) није, уопште узев, колинеаран са вектором угаоне брзине.* Они ће бити колинеарни само у два случаја.

1⁰ *Ако је елипсоид инерције сфера у динамичком смислу*, тј. ако су

$$J_1 = J_2 = J_3 = J\,,$$

јер су косинуси смерова које ови вектори чине са главним осама једнаки, напр., $\cos\alpha = \omega_1/\omega = J\omega_1/J\omega$, пошто је

$$L = [J^2(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)]^{1/2} = J\omega\,,$$

односно

$$\cos\theta = (\vec{\omega}, \vec{L})/L\omega = J\omega/L = 1, \quad \theta = 0^0.$$

2⁰ *Ако је тренутна оса главна оса инерције*, тј. ако је $J_2 = J_3 \neq J_1$ и $\omega_2 = \omega_3 = 0$, онда се тело обрће око главне осе инерције (1).

Угао између ова два вектора *не може* бити *прав* нити *већи од правог*, јер би у том случају кинетичка енергија била једнака нули или мања од нуле (негативна). *Како је кинетичка енергија позитивна величина то ова два вектора, вектор угаоне брзине и вектор кинетичког момента (замаха)*, чине увек **оштар угао**, јер је $(\vec{\omega}, \vec{L}_O) = 2E_k > 0$.

Упоређујући једначину (368) са (372) видимо да између замаха за координатне осе и кинетичке енергије, с обзиром на једначину (368′), постоје ови односи (370′):

$$\begin{aligned} L_\xi &= \frac{\partial E_k}{\partial \omega_\xi} = J_\xi \omega_\xi - J_{\xi\eta}\omega_\eta - J_{\xi\zeta}\omega_\zeta\,, \\ L_\eta &= \frac{\partial E_k}{\partial \omega_\eta} = -J_{\xi\eta}\omega_\xi + J_\eta \omega_\eta - J_{\eta\zeta}\omega_\zeta\,, \qquad (370') \\ L_\zeta &= \frac{\partial E_k}{\partial \omega_\zeta} = -J_{\xi\zeta}\omega_\xi - J_{\eta\zeta}\omega_\eta + J_\zeta \omega_\zeta\,. \end{aligned}$$

---

[1] Ову теорему је извео *Resal.*

Ови изрази лако се добивају из векторске једначине

$$\vec{L}_O = \operatorname{grad}_\omega E_k = \frac{\partial E_k}{\partial \omega_\xi}\vec{i}' + \frac{\partial E_k}{\partial \omega_\eta}\vec{j}' + \frac{\partial E_k}{\partial \omega_\zeta}\vec{k}'. \tag{370″}$$

Индекс ω показује да су промењиве по којима се врши операција градијента пројекције вектора угаоне брзине.

Ако су ξ, η, ζ *главне осе инерције*, онда из (369) добивамо:

$$L_1 = \frac{\partial E_k}{\partial \omega_1} = J_1\,\omega_1, \quad L_2 = \frac{\partial E_k}{\partial \omega_2} = J_2\,\omega_2, \quad L_3 = \frac{\partial E_k}{\partial \omega_3} = J_3\,\omega_3,$$

како смо и раније извели (370″).

20.2 ОЈЛЕРОВЕ ДИНАМИЧКЕ ЈЕДНАЧИНЕ

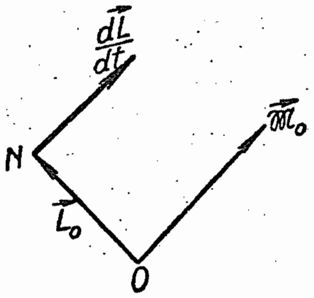
Положај крутог тела које се обрће око непомичне тачке одређен је Ојлеровим угловима. Његове кинематичке једначине (367) постављају везу између пројекција угаоне брзине на осе покретног координатног система и ових углова, односно првих извода ових углова по времену. Да бисмо одредили кретање крутог тела треба успоставити везу између пројекција угаоне брзине и спољашњих сила које дејствују на тело. Те зависности дате су *Ојлеровим динамичким једначинама.*[1]

Између замаха и спољашњих сила постоји однос

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathfrak{M}}_O. \tag{373}$$

Извод по времену замаха за пол O једнак је главном моменту спољашњих сила за исти пол као моментну тачку.

Ако би момент спољашњих сила био једнак нули, тј. ако на тело не дејствују спољашње силе *(обртање по инерцији)*, онда је *замах константан*. У сваком другом случају замах се мења са временом. Означимо са $\vec{L}_O$ вектор положаја завршне тачке N вектора замаха (сл. 150); онда извод овог вектора положаја по времену претставља њену апсолутну брзину (по *Resal*-у), па се извод замаха састоји из *релативног* и *преносног дела извода* те се може написати у облику



Сл. 150. — Резалова теорема

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\vec{L}}_O + [\vec{\omega}, \vec{L}_O] = \vec{\mathfrak{M}}_O} \tag{374}$$

---

[1] *Euler* — *„Mémoires de l'Académie de Berlin“*, 1758.

Ова једначина претставља *Ојлерову динамичку једначину у векторском облику* Њој одговарају *три* скаларне једначине за координатне осе покретног триједра $O\xi\eta\zeta$:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot L_\xi + \omega_\eta L_\zeta - \omega_\zeta L_\eta &= \mathfrak{M}_\xi \\ \dot L_\eta + \omega_\zeta L_\xi - \omega_\xi L_\zeta &= \mathfrak{M}_\eta \\ \dot L_\zeta + \omega_\xi L_\eta - \omega_\eta L_\xi &= \mathfrak{M}_\zeta \end{aligned}} \tag{374'}$$

Пројекције замаха на координатне осе одређене су једначинама (370′).

Када су координатне осе *главне осе инерције*, Ојлерове динамичке једначине биће простије и, према (370″), гласе:

$$\boxed{\begin{aligned} J_1 \dot\omega_1 - (J_2 - J_3)\,\omega_2\,\omega_3 &= \mathfrak{M}_1 \\ J_2 \dot\omega_2 - (J_3 - J_1)\,\omega_3\,\omega_1 &= \mathfrak{M}_2 \\ J_3 \dot\omega_3 - (J_1 - J_2)\,\omega_1\,\omega_2 &= \mathfrak{M}_3 \end{aligned}} \tag{375}$$

Овде су J_1, J_2, J_3 *главни моменти инерције*, ω_1, ω_2, ω_3 пројекције *вектора угаоне брзине на главне осе* а моменти $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ *главни моменти* свих спољашњих сила за те осе.

Обртање крутог тела око непомичне тачке окарактерисано је векторима *угаоне брзине* ($\vec\omega$) и *замаха* ($\vec L_O$). Они имају заједничку тачку (O) и образују *динамички торзер* (слично торзеру просторног система сила). Раван овог торзера игра важну улогу у издвајању специјалних случајева обртања из општег проблема, па се назива *карактеристичном равни*.

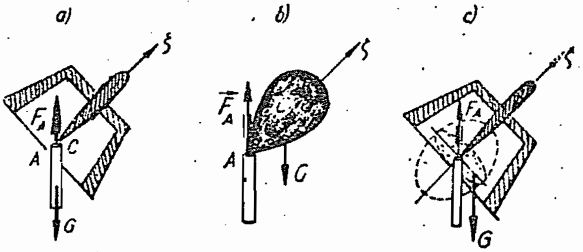
Узмемо ли у тачки O покретни координатни систем *главних оса инерције тела за ту тачку* ($O\xi\eta\zeta$), онда је једначина ове равни

$$\boxed{\begin{aligned} (\vec\rho\,[\vec L_O, \vec\omega]) = (J_2 - J_3)\,\omega_2\,\omega_3\,\xi + (J_3 - J_1)\,\omega_3\,\omega_1\,\eta\, + \\ + (J_1 - J_2)\,\omega_1\,\omega_2\,\zeta = 0 \end{aligned}} \tag{375'}$$

Ојлерове динамичке једначине (374′) у вези са његовим кинематичким једначинама (367) чине систем од *шест* диференцијалних једначина првог реда у односу на промењиве ψ, φ, θ, ω_ξ, ω_η, ω_ζ. Њиховим интеграљењем можемо одредити Ојлерове углове и компонентне угаоне брзине као функције времена (t). Интеграционе константе одредићемо из *почетних услова кретања.*

За случај да елипсоид инерције има *три различите главне осе инерције и за произвољне почетне услове*, решење ових једначина *ни до данас није познато.* Постоје *три класична решења* за специјалне случајеве: *Ојлерово, Лагранжево* и *Соње Ковалевски.*

1⁰ **Ојлерово решење.** — 1758 год. *Ојлер* је извео динамичке једначине и дао њихова решења за случај да на тело *не дејствују* спољашње силе или дејствују тако да им резултанта (главни вектор) пролази кроз непомичну тачку крутог тела. Такав је напр. случај тешког тела чије је тежиште непомично (сл. 151 a). У овоме је случају и главни момент $\mathfrak{M} = 0$ те је кретање *по инерцији.* Скоро сто година после Ојлера, *Поансо* је (1851 год.) дао и геометриски доказ Ојлеровог решења па се због тога ово решење често назива *Ојлер-Поансово решење.*



Сл. 151. — Класична решења проблема обртања крутог тела око непомичне тачке

2⁰ **Лагранжево решење.** — Основна је претпоставка код овог решења да је *елипсоид инерције* за непомичну тачку *обртни.* Тело је *тешко* а тежиште тела налази се на геометриској оси обртног елипсоида — *фигурној оси* (сл. 151 b). Ако је оса $O\zeta$ та оса, онда је $J_1 = J_2$ а тежиште тела налази се на тој оси на удаљењу s од непомичне тачке O.

3⁰ **Решење Соње Ковалевски.**[1] – Основна је претпоставка овог решење да је *елипсоид инерције обртни* са условом $J_1 = J_2 = 2 J_3$. Тело је *тешко* а тежиште се налази у екваторијалној равни елипсоида инерције (сл. 151 c).

Хасон (M. Ed. Husson) је 1906 год. доказао да се у општем случају обртања крутог тела око непомичне тачке, изузев трију наведених *класичних решења*, не може добити трећи алгебарски интеграл различит од интеграла живе силе и замаха[2]

За специјалне почетне услове кретања постоје, изузев наведених решења, још и нека специјална решења (напр., *Hess-a*, *Чаплыгин*-а, и др.).

У даљим излагањима изложићемо само два прва решења, јер Лагранжево решење има и практичких техничких примена (**чл. 20.5**).

---

[1] *Acta mathematica, tome* XII, 1888. Сада се у СССР оживљава метода Соње Ковалевски ради добивања специјалних случајева овог кретања. При овомe се користи карактеристична раван (375').

[2] „*Recherche des intégrales algébriques dans le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe.*" Toulouse, 1906.

20.3 ОЈЛЕРОВО РЕШЕЊЕ

Пошто у овом случају не дејствују спољашње силе или им резултанта напада непомичну тачку (*сферни зглавак*) кретање се врши по *инерцији*. Ојлерове динамичке и кинематичке једначине су облика

$$\left.\begin{aligned} J_1\dot\omega_1 - (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3 = 0, \\ J_2\dot\omega_2 - (J_3 - J_1)\omega_3\omega_1 = 0, \quad J_3\dot\omega_3 - (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (376\,a)$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_\xi = \dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi = \omega_1, \\ \omega_\eta = \dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi = \omega_2, \quad \omega_\zeta = \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi = \omega_3. \end{aligned}\right\} \quad (376\,b)$$

и чине систем од шест диференцијалних једначина првог реда у односу на променљиве ω_1, ω_2, ω_3, ψ, φ, θ. Динамичке се једначине могу интегралити *независно* од кинематичких. За њих постоје два интеграла: *интеграл живе силе* и *интеграл замаха*. Пошто спољашње силе не дејствују то је њихов рад једнак нули, па је $d\,E_k = 0$, тј.

$$\text{(I)} \qquad \boxed{2\,E_k = J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2 = const. = h} \qquad (377)$$

Пошто је $\vec{\mathfrak{M}} = 0$ то је, према једначини (373), први извод замаха по времену једнак нули, те *је замах констант*

$$\vec{L}_O = const. = \vec{C}$$

односно

$$\text{(II)} \qquad \boxed{J_1^2\omega_1^2 + J_2^2\omega_2^2 + J_3^2\omega_3^2 = const. = L^2{}_O = H^2} \qquad (378)$$

Прва два интеграла (377) и (378) можемо добити из Ојлерових динамичких једначина (376 *a*), ако у првом случају помножимо прву са ω_1, другу са ω_2, трећу ω_3, а у другом случају прву са $J_1\omega_1$, другу са $J_2\omega_2$, трећу са $J_3\omega_3$, саберемо их и интегралимо.

Како је $E_k = const.$ то је и

$$(\vec\omega, \vec{L}_O) = 2\,E_k = const. \qquad (379)$$

што значи *да је пројекција угаоне брзине на правац замаха констаншна.*

Да бисмо интегралили кинематичке једначине треба да познајемо компонентне угаоне брзине. Разликоваћемо три случаја према томе какав је елипсоид инерције.

1° *Елипсоид инерције је сфера.* — У овоме је случају $J_1 = J_2 = J_3 = J$, па из интеграла живе силе (377) и интеграла замаха (378) увиђамо да је и угаона брзина *констаншна*, $\omega = const.$ Сем тога су вектори $\vec\omega$ и $\vec{L}_O$ *колинеарни*, па се тело обрће око *непомичне осе*. Ојлерове динамичке једначине (376 *a*) постају

$$\dot{\omega}_1 = 0, \quad \dot{\omega}_2 = 0, \quad \dot{\omega}_3 = 0.$$

Интеграли су

$$\omega_1 = const., \ \omega_2 = const., \ \omega_3 = const., \qquad (380)$$

па су и *компонентне угаоне брзине такође константне.*

2° *Елипсоид инерције је обртни елипсоид.* — Претпоставимо да је $J_1 = J_2 \neq J_3$ онда из треће динамичке једначине (376 *a*) следи

$$\text{(III)} \qquad \omega_3 = const. = c.$$

На овај начин за одређивање компонентних угаоних брзина стоје на располсжењу *три интеграла:*

$$\boxed{J_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + J_3 c^2 = h, \ J_1^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + J_3^2 c^2 = H^2; \ \omega_3 = c,}$$

из којих следи да је $\omega_1^2 + \omega_2^2 = const.$, *па је и угаона брзина константна*, $\omega = const.$

Између ортова покретних оса и орта чворне осе $(\vec{e})$ постоје ови односи (*Кин.*, **чл. 10.3**, обр. 187):

$$\vec{i}' = \vec{e}\cos\varphi + [\vec{k}', \vec{e}]\sin\varphi,$$

$$\vec{j}' = -\vec{e}\sin\varphi + [\vec{k}', \vec{e}]\cos\varphi, \quad (\vec{k}[\vec{k}', \vec{e}]) = \sin\theta,$$

$$\vec{k}' = \vec{k}\cos\theta + [\vec{e}, \vec{k}]\sin\theta.$$

Како је *замах константан* изаберимо $\vec{L}_O = H\vec{k}$ биће

$$L_1 = J_1\omega_1 = H(\vec{i}', \vec{k}) = H\sin\theta\sin\varphi,$$

$$L_2 = J_2\omega_2 = H(\vec{j}', \vec{k}) = H\sin\theta\cos\varphi, \qquad (381)$$

$$L_3 = J_3\omega_3 = H(\vec{k}', \vec{k}) = H\cos\theta.$$

Из треће једначине следи да је *угао нутације константан* ($\theta = \theta_0 = const.$) Друга два Ојлерова угла одредићемо из кинематичких једначина(376 *b*)

$$\omega_1 = \dot{\psi}\sin\theta_0\sin\varphi, \quad \omega_2 = \dot{\psi}\sin\theta_0\cos\varphi,$$

$$\omega_3 = \dot{\psi}\cos\theta_0 + \dot{\varphi} = c$$

када у њих ставимо вредности компонентних угаоних брзина из (381).

Тако добивамо

$$\boxed{\dot\psi = \frac{H}{J_1} = A = \Omega, \quad \dot\varphi\, A\, \frac{J_1 - J_3}{J_3} \cos\theta_0 = B = \omega_s} \tag{382}$$

где су A и B константе. Интеграљењем добивамо Ојлерове углове у функцији од времена

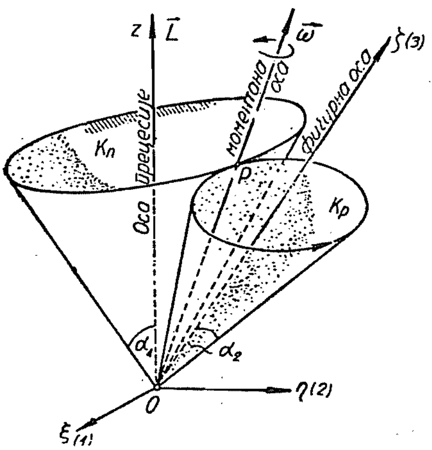
$$\psi = A\,t + \psi_0 = \Omega\,t + \psi_0, \quad \varphi = B\,t + \varphi_0 = \omega_s t + \varphi_0 \tag{382'}$$

где су ψ_0 и φ_0 интеграционе константе. Како они линеарно зависе од времена то је кретање *регуларна прецесија*. Услов (382) претставља потребан услов да би тело вршило овакво кретање по инерцији. Константа $A = \Omega$ претставља *брзину прецесије*, а $B = \omega_s$ *сопствену брзину обртања* тела око фигурне осе.

Да је угао нутације константан можемо доказати и геометриски. Ради тога означимо са α_2 угао који чини вектор тренутне угаоне брзине $(\vec\omega)$ са фигурном осом $(O\zeta)$ а оса α_1 угао између тренутне осе и вектора замаха $\vec L_O$. Претпостављамо да овај вектор пада у правац непомичне осе Oz, па је $\vec L_O = H\vec{\mathrm{k}}$. Тада је

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = (\sqrt{\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2})/c = const.$$

Вектор угаоне брзине описује око фигурне осе *кружни конус* угла отвора $2\alpha_2$ (сл. 152), а око Oz осе конус угла отвора $2\alpha_1$, јер је пројекција угаоне брзине на правац $\vec L_O$ константна, $\omega_L = \omega \cos\alpha_1$. Дакле, *покретни конус* (K_p) котрља *се по непокретном конусу* (K_n). Фигурна оса описује *прецесиони конус*, чија је оса Oz *(оса прецесије)*, угла отвора $2(\alpha_1 + \alpha_2)$. Кретање је *регуларна прецесија*.



Сл. 152. — Регуларна прецесија

Наша Земља обрће се око фигурне осе константном угаоном брзином (c) и периодом $T_s = 2\pi/c$. Уједно она изводи *регуларну ретроградну прецесију* (*Кин.*, **чл. 10.2**, сл. 125), јер је $\dot\psi = const.$, а φ негативно због односа $J_3 > J_1$. Тренутна оса опише непокретни конус за период $T_n = 2\pi J_1/H$, а покретни за $T_p = 2\pi J_1/(J_3 - J_1)c = J_1 T_s/(J_3 - J_1)$. Како је $(J_3 - J_1)/J_1 = 0{,}00327$, то је $T_p = 305$ звезданих дана (*Ојлеров период*). Ова је вредност добивена под претпоставком да је Земља круто тело; међутим, узме ли се у обзир и њена еластичност период траје 427 дана (*Chandler*-ов *период*).

Leonhard Euler (1707 — 1783)

Познајемо ли моменте инерције, угао θ_0 и сопствену брзину обртања, можемо одредити брзину прецесије помоћу обрасца (382).

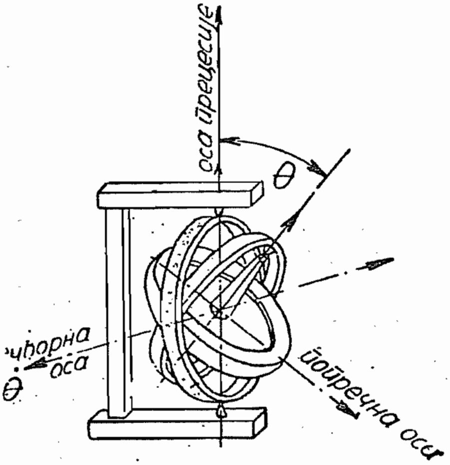
Например, када је $J_1 = J_2 = 2\,J_3$, $\theta_0 = 60^0$ тада је брзина прецесије $\Omega = 2\,\omega_3$.

Хомогени кружни диск обрће се по инерцији око тежишта. У почетном тренутку диску је саопштена угаона брзина (ω) око осе која са равни диска гради угао α. Да бисмо одредили брзину прецесије и њен положај у односу на раван диска, поступићемо овако: угаону брзину (ω) разлажемо на $\omega_1 = \omega \cos \alpha$ и $\omega_3 = \omega_3 = c = \omega \sin \alpha$, $\omega_2 = 0$; како је $J_3 = 2\,J_1 = 2\,J_2$ то из другог интеграла (378) следи да је замах $H = J_1\,\omega\,(1 + 3 \sin^2 \alpha)^{1/2}$, па је, према (382) $\Omega = \omega\,(1 + 3 \sin^2 \alpha)^{1/2}$. Из друге једначине (382) налазимо да је $\cos \theta_0 = -2 \sin \alpha\,(1 + 3 \sin^2 \alpha)^{-1/2} = \sin \beta$, одакле лако добијамо $\operatorname{tg} \beta = 2 \operatorname{tg} \alpha$, где је β угао који чини оса прецесије са равни диска.

Ако је $\theta = 0$ биће из (381') и $\omega_1 = \omega_2 = 0$, па $\dot{\psi}$ има произвољну вредност. Како је $J_3\,\omega_3 = L$ значи да покретна раван $O\xi\eta$ лежи у непокретној равни Oxy. Ако претпоставимо да је и $\psi = 0$, тада су Ојлерови углови

$$\psi = 0, \quad \varphi = B\,t + \varphi_0, \quad \theta = 0 \tag{383}$$

па се *круто тело обрће константном угаоном брзином око главне осе инерције, која се поклапа са геометриском осом обртног елипсоида инерције и са замахом.* Ово обртање вршиће увек хомогено обртно тело које се обрће око своје обртне — геометриске — осе. Због поклапања обртне осе и замаха она задржава *сталан положај у простору.*



Сл. 153. — Карданов оквир

Практично извођење оваквог обртања може се извести помоћу *Кардановог* (*Geronimo Cardano*, 1501 до 1576 год.) *оквира* (сл. 153). Он се састоји из два прстена, *спољашњег* који се може обртати око вертикалне осе *(осе прецесије)*, *унутрашњег* који се обрће око *чворне* осе учвршћене у првом прстену, и *тела*, чија се *фигурна* оса поклапа са осом учвршћеном у унутрашњем прстену. Спољашњи прстен учвршћен је за оквир. Осе су међусобно управне.

При оваквом саставу фигурна оса тела задржава *свој стални правац у простору.* Карданов оквир служи, дакле, као *стабилизатор* и примењује се за стабилисање торпеда[1] (*Obry*, 1900). Помоћу њега може се доказати и обртање Земље како је показао *Фуко* (1852 год.).

---

[1] Обријев гироскоп је био тежак око 0,800 kg а обртао се са 10000 o/min. Фигурна оса је била паралелна уздужној оси торпеда у тренутку испаљивања. Скрене ли торпедо са праволиниског кретања, фигурна оса задржава свој правац, те наступа обртање спољашњег прстена око осе прецесије, које се преноси на крмило торпеда.

3^{e} *Елипсоид инерције је троосни елипсоид.* — И у овом случају важе два прва интеграла Ојлерових динамичких једначина: *интеграл живе силе и интеграл замаха.* Трећи интеграл своди се на *елиптички интеграл.*

Из прва два интеграла

$$J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 = h - J_3 \omega_3^2, \quad J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2 = H^2 - J_3^2 \omega_3^2,$$

можемо одредити квадрате компонентних угаоних брзина ω_1^2 и ω_2^2 као функције од ω_3. Множећи прву једначину прво са J_2 а затим са J_1 и одузимањем друге од прве добивамо:

$$J_1 (J_2 - J_1) \omega_1^2 = h J_2 - H^2 - J_3 (J_2 - J_3) \omega_3^2 = f_1(\omega_3),$$

$$J_2 (J_2 - J_1) \omega_2^2 = H^2 - J_1 h + J_3 (J_1 - J_3) \omega_3^2 = f_2(\omega_3).$$

Помножимо ли међусобно ове две једначине и извучемо квадратни корен биће

$$\sqrt{J_1 J_2}\,(J_2 - J_1)\,\omega_1 \omega_2 = \sqrt{f_1(\omega_3) \cdot f_2(\omega_3)},$$

а према трећој Ојлеровој динамичкој једначини следи

$$\frac{d\omega_3}{\sqrt{f_1(\omega_3) \cdot f_2(\omega_3)}} = -\frac{dt}{J_3 \sqrt{J_1 J_2}}. \tag{384}$$

Време t изражава се елиптичким интегралом прве врсте компонентне брзине ω_3, па се ω_3 може изразити елиптичким функцијама променљиве t. Ако познајемо ову зависност онда се из прва два интеграла могу одредити и друге две компонентне угаоне брзине као елиптичке функције променљиве t. Кад се знају компонентне угаоне брзине могу се према Ојлеровим кинематичким једначинама одредити Ојлерови углови у функцији времена[1].

Елиптички интеграл прве врсте (177) сменом $u = \sin\varphi$ своди се на облик

$$t = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = F(\varphi, k)$$

где је k модул а φ амплитуда. Интеграл t је функција од амплитуде, $t = t(\varphi)$, али је и амплитуда функција интеграла, $\varphi = \varphi(t) = \mathrm{am}\ t$. Елип-

---

[1] *Jacobi*, Journal de Crelle, t. 39

тичке функције су тригонометриске функције амплитуде и обележавају се са:

$$\sin\varphi = \sin \operatorname{am} t = \operatorname{sn} t, \quad \cos\varphi = \operatorname{cn} t, \quad \operatorname{dn} t = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} =$$

$$= \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 t}. \quad \text{За } t = 0 \text{ биће } \operatorname{sn} 0 = 0,\ \operatorname{cn} 0 = \operatorname{dn} 0 = 1.$$

Како је $dt/d\varphi = (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 t)^{-1/2} = \operatorname{dn}^{-1} t$, то су изводи елиптичких функција:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\operatorname{sn} t) &= \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t, \\ \frac{d}{dt}(\operatorname{cn} t) &= -\operatorname{sn} t \operatorname{dn} t, \\ \frac{d}{dt}(\operatorname{dn} t) &= -k^2 \operatorname{sn} t \operatorname{cn} t. \end{aligned} \qquad (a)$$

Упоређујући ове изводе са Ојлеровим динамичким једначинама (376 a) можемо угаоне брзине претставити у облику

$$\omega_1 = A \operatorname{cn} b(t - t_0),\ \omega_2 = B \operatorname{sn} b(t - t_0),\ \omega_3 = C \operatorname{dn} b(t - t_0), \qquad (b)$$

где су A, B, C, b, t_0 константе које морају задовољити једначине (376 a). Изаберемо ли почетни тренутак $t = t_0$, биће константе $A = (\omega_1)_0$, $C = (\omega_3)_0$ и $(\omega_2)_0 = 0$, па почетна угаона брзина $\vec{\omega}_0$ лежи у равни $O\xi\zeta$, ако је $J_1 > J_2 > J_3$.

Уносећи вредности (b), према (a), у једначине (376 a) добивамо систем од три једначине са непознатим C, b, k^2:

$$\begin{aligned} -J_1 A b - (J_2 - J_3) B C &= 0, & b/B &= -C(J_2 - J_3)/A J_1, \\ J_2 B b - (J_3 - J_1) A C &= 0, & B b &= A C (J_3 - J_1)/J_2, \\ -k^2 J_3 C b - (J_1 - J_2) A B &= 0, & k^2 b/B &= -A(J_1 - J_2)/C J_3. \end{aligned}$$

Из њих одређујемо остале константе

$$\begin{aligned} b^2 &= C^2 (J_1 - J_3)(J_2 - J_3)/J_1 J_2, \\ B^2 &= A^2 J_1 (J_1 - J_3)/J_2 (J_2 - J_3), \\ k^2 &= A^2 J_1 (J_1 - J_2)/C^2 J_3 (J_2 - J_3). \end{aligned}$$

Како је k модул елиптичког интеграла то је $k^2 < 1$, па мора бити задовољен услов

$$A^2 J_1 (J_1 - J_2) < C^2 J_3 (J_2 - J_3), \quad \text{односно} \quad H^2 < 2 J_2 E_k = J_2 h.$$

Ради одређивања Ојлерових углова користићемо једначине (381) за $\omega_3 \neq const.$, па су:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{J_1 \omega_1}{J_2 \omega_2} = \sqrt{\frac{J_1}{J_2} \cdot \frac{J_2 - J_3}{J_1 - J_3}} \; \frac{\operatorname{cn} b(t - t_0)}{\operatorname{sn} b(t - t_0)},$$

$$\cos \theta = (CJ_3/H) \operatorname{dn} b(t - t_0).$$

Из Ојлерових кинематичких једначина (376 *b*) добивамо

$$\omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi = \dot{\psi} \cos \theta,$$

па је

$$\dot{\psi} = H \frac{h - J_3 A^2 \operatorname{dn}^2 \mathrm{b}(t - t_0)}{H^2 - J_3^2 A^2 \operatorname{dn}^2 \mathrm{b}(t - t_0)},$$

те је

$$\psi(t + T) - \psi(t) = c = const.;$$

$T = 4K/b$ је *период*, а K *потпуни елиптички интеграл.*

Елиптичке функције су периодичке, па се φ и θ мењају периодички са временом, али се угао ψ тако не мења. Тренутна оса после времена T заузима други положај у простору ако је $c \neq 2\pi$.

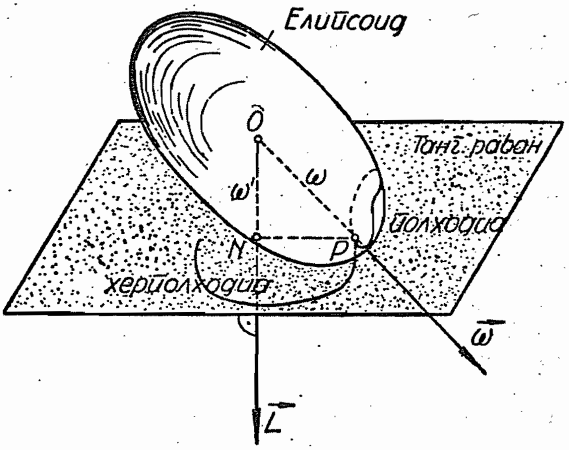
Поансо[1] је дао геометриску претставу овог кретања. Пошто важе два прва интеграла који показују да је кинетичка енергија константна и да је замах константан, овај последњи одређује, према закону о одржању замаха, једну *сталну — инваријабилну раван* у простору. Пројекција *угаоне брзине на правац вектора замаха константна је*, јер је

$$(\vec{\omega}, \vec{L}_O) = 2 E_k = h = const.$$

али *угаона брзина није константна*, већ је

$$\omega' L_O = h, \text{ тј. } \omega' = h/H.$$

Да видимо како се мења угаона брзина уочимо главни елипсоид инерције



Сл. 154. — Поансо-ово претстављање обртања крутог тела око непомичне тачке

$$J_1 \xi^2 + J_2 \eta^2 + J_3 \zeta^2 = 1,$$

где су ξ, η, ζ текуће координате у односу на главне осе инерције.

---

[1] *Poinsot, Journal de Liouville*, tome XVI, 1851.

Тренутна оса продире елипсоид у тачки P (сл. 154). Означимо координате ове тачке са ξ_1, η_1, ζ_1, биће

$$\xi_1 = \overline{OP}\,\omega_1/\omega, \ \eta_1 = \overline{OP}\,\omega_2/\omega, \ \zeta_1 = \overline{OP}\,\omega_3/\omega,$$

јер су $\omega_1/\omega, \ldots$, косинуси углова које оса гради са главним осама инерције. Пошто се тачка налази на елипсоиду то њене координате морају задовољавати једначину елипсоида, па је

$$\overline{OP}^2 \cdot (J_1\,\omega_1^2 + J_2\,\omega_2^2 + J_3\,\omega_3^2)/\omega^2 = 1 .$$

С обзиром на интеграл живе силе биће

$$\overline{OP}^2 \cdot h/\omega^2 = 1 ,$$

одакле је

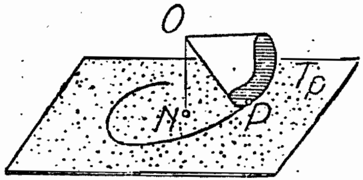
$$\boxed{\omega = \overline{OP}\,\sqrt{h}} \qquad (385)$$

Угаона брзина обртања крутог тела, у овоме случају, сразмерна је потегу који тренутна оса, пролазећи кроз непомичну тачку O отсеца на елипсоиду инерције код кога је испуњен однос $J_3 > J_2 > J_1$.

Из релације (385) следи

$$\omega_1 = \xi_1\,\sqrt{h}, \ \omega_2 = \eta_1\,\sqrt{h}, \ \omega_3 = \zeta_1\,\sqrt{h}.$$

Ако у тачки P поставимо тангенцијалну раван на елипсоид инерције њена једначина биће



Сл. 155. — Котрљање конуса полходије по сталној равни

$$J_1\,\xi\,\xi_1 + J_2\,\eta\,\eta_1 + J_3\,\zeta\,\zeta_1 = 1 ,$$

односно, уводећи горње вредности за координате,

$$J_1\,\omega_1\,\xi + J_2\,\omega_2\,\eta + J_3\,\omega_3\,\zeta = \sqrt{h}.$$

Како је интензитет замаха $L_O = H$ то деобом горње једначине са H добивамо

$$\frac{J_1\,\omega_1}{H}\,\xi + \frac{J_2\,\omega_2}{H}\,\eta + \frac{J_3\,\omega_3}{H}\,\zeta - \frac{\sqrt{h}}{H} = 0.$$

Ова је једначина нормална једначина *равни чија нормала повучена из координатног почетка чини углове* са главним осама инерције чији су косинуси смера $J_1\,\omega_1/H; \ldots$ Дужина нормале је $\sqrt{h}/H = \delta = \omega'/\sqrt{h} = const.$ Због (379) и (385) биће

$$\omega' = h/H = \delta\,\sqrt{h} = \omega\,\delta/\overline{OP}, \text{ па је } \omega = [\overline{OP} \cdot (h/H)]/\delta.$$

Угаона брзина је обрнуто сразмерна дужини нормале (Mac Cullagh-ова теорема).

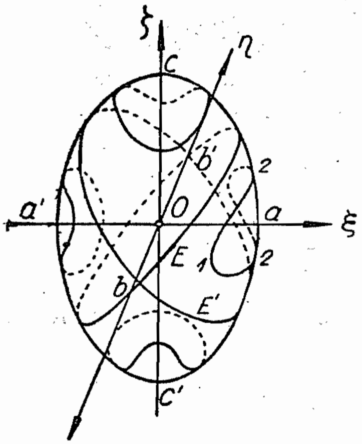
Како је најдужа полуоса елипсоида инерције $1/\sqrt{J_1}$ а најкраћа $1/\sqrt{J_3}$ то следи однос.

$$\frac{1}{\sqrt{J_1}} \geq \frac{\sqrt{h}}{H} = \delta \geqq \frac{1}{\sqrt{J_3}}. \tag{386}$$

Тангенцијална раван главног елипсоида инерције стална је раван у простору управна на вектор замаха а на сталном растојању ($\sqrt{h}/H$) *од координатног почетка* (непомичне тачке око које се обрће круто тело).

На основу овога Поансо је поставио теорему: *Обртање крутог тела око једне његове непомичне тачке по инерцији може се претставити као котрљање без клизања (или вртење без клизања) главног елипсоида инерције тела по сталној непокретној равни угаоном брзином која је сразмерна растојању додирне тачке равни елипсоида од непомичне тачке.* Стална раван назива се *раван Поансоа.*

Додирне тачке — полови (P) — при овом котрљању без клизања описују две криве линије, једну на самом елипсоиду инерције (покретну путању пола — *полходију*), а другу у непокретној равни (непокретну путању пола — *херполходију*).



Сл. 156. — Врсте полходија

Аксоиди су *конуси* чије су водиље полходије и херполходија а врх у непомичној тачки O. Први се конус назива *конус полходије* а други *конус херполходије.*

У овом случају можемо ово кретање претставити котрљањем конуса полходије по сталној равни, односно котрљањем полходије по херполходији (рулете)[1] — сл. 155.

Ако је елипсоид инерције *сфера*, обе путање пола постају *тачке* (обртање око непомичне осе). Ако је елипсоид инерције обртни, то је $\overline{OP} = const.$, па је котрљање елипсоида инерције по сталној равни константном угаоном брзином. Полходија и херполходија су *кругови* — случај прецесије, и то регуларне. Када је елипсоид инерције издужен, прецесија је *прогресивна*, а када је спљоштен она је *ретроградна* (*Кин.*, чл. 10.2).

---

[1] *Darboux* и *Koenigs* конструисали су апарат — херполходиограф — ради демонстрирања овог кретања (Koenigs, „*Révue générales des Sciences*", 1891) на основу геометриске интерпретације Mac Cullagh-a (гирациони елипсоид инерције).

Облик *полходије* зависи од почетних услова. Претпоставимо да је $J_3 > J_2 > J_1$ онда су тачке a, a' b, b' c, c' (сл. 156) врхови елипсоида инерције. Ако је $\sqrt{h/H} = \sqrt{1/J_3}$ полходија се своди на тачке a и a'. Ако тај однос буде $\sqrt{1/J_2}$ полходије постају елипсе кроз тачке b и b' и за случај $\sqrt{1/J_1}$ полходије постају тачке c и c'. Како растојање $\sqrt{h/H}$ варира према обрасцу (386) то се и полходије мењају. Према томе, има *три врсте полходија:* тачке a, a', c, c', елипсе и криве које окружавају тачке a, a' c, c' како је показано на сл. 156.

Херполходија има особину да увек своју конкавну страну обрће ка тачки N (продору вектора замаха кроз тангенцијалну раван).

Када је полходија тачка и херполходија је *тачка.* Када је прва елипса, друга је двогуба спирала која се асимптотски приближава тачки N.

Пример. — 89]. Написати једначину конуса полходије за случај обртања крутог тела око непомичне тачке.

Решење. — Једначина елипсоида инерције у односу на његове главне осе јесте

$$J_1 \xi^2 + J_2 \eta^2 + J_3 \zeta^2 = 1.$$

Једначина тангенцијалне равни у тачки $P(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ биће

$$J_1 \xi_1 (\xi - \xi_1) + J_2 \eta_1 (\eta - \eta_1) + J_3 \zeta_1 (\zeta - \zeta_1) = 0$$

па је растојање средишта (O) од ове равни

$$\delta = [J_1^2 \xi_1^2 + J_2^2 \eta_1^2 + J_3^2 \zeta_1^2]^{-1/2} = H^{-1} \sqrt{h} = const.$$

Ако ове координате ξ_1, η_1, ζ_1 сматрамо текућим биће

$$J_1^2 \xi^2 + J_2 \eta^2 + J_3 \zeta^2 = 1/\delta^2.$$

Ова једначина заједно са једначином елипсоида одређује једначину конуса полходије

$$J_1 [(1/\delta^2) - J_1] \xi^2 + J_2 [(1/\delta^2) - J_2] \eta^2 + J_3 [(1/\delta^2) - J_3] \zeta^2 = 0.$$

20.4 ЛАГРАНЖЕВО РЕШЕЊЕ

Основне претпоставке Лагранжевог решења[1] обртања крутог тела око једне његове непомичне тачке јесу: *да је тело тешко, да се обрће под утицајем сопствене тежине, да је елипсоид инерције за непомичну тачку обртни и да се тежиште тела налази на геометриској оси обртног елипсоида инерције.*

Непокретни координатни систем $Oxyz$ изаберимо са осом Oz управљеном навише, а покретни $O\xi\eta\zeta$ тако да се $O\zeta$ оса поклапа са геометриском осом обртног елипсоида, а раван $O\xi\eta$ са екваторијалном равни елипсоида инерције.

На тело дејствују две силе: *тежина тела,* у тежишту C $(\overline{OC} = s)$ и *отпор зглавка* са нападном тачком у O. Координате тежишта тела у односу на покретни триједар биће $\xi_C = \eta_C = 0$, $\zeta_C = s$ (сл. 157).

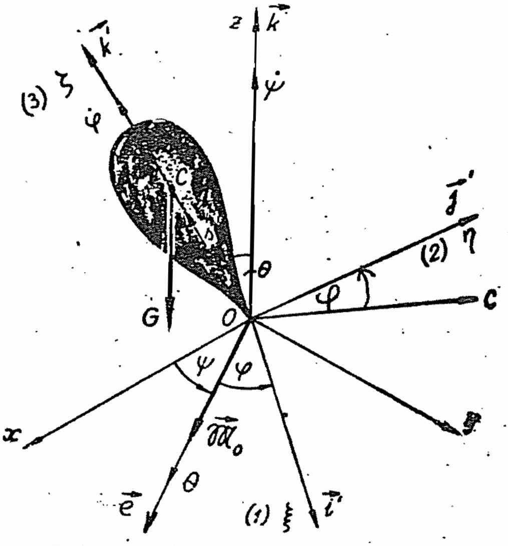
---

[1] *Lagrange — Mécanique analitique,* section IX.

Пошто обртање крутог тела око непомичне тачке има *три степена слободе кретања*, потребне су нам *три* једначине за одређивање кретања. Прва два интеграла Ојлерових динамичких једначина одредићемо помоћу закона о живој сили и замаху. Како је елипсоид инерције обртни то је $J_1 = J_2$ па је кинетичка енергија у овом случају

$$E_k = {}^1/_2 J_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + {}^1/_2 J_3 \omega_3^2. \tag{387}$$

Сила G има функцију силе $- \mathrm{M} g z_C$, где је z_C координата тежишта C у односу на непокретни триједар. Како осе Oz и $O\zeta$ граде угао нутације θ то је $z_C = s \cos\theta$, па је функција силе $U = - \mathrm{M} g \cos\theta$.



Сл. 157. — Обртање тешког симетричног тела око непомичне тачке

Пошто је рад отпора (сила веза — *отпора сферног зглавка*) једнак нули то је интеграл живе силе

$$\text{(I)} \quad \boxed{\begin{aligned} &{}^1/_2 J_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \\ &+ {}^1/_2 J_3 \omega_3^2 = h - \\ &- \mathrm{M} g s \cos\theta \end{aligned}} \tag{388}$$

где је $h = const.$

Момент силе G за непокретну осу Oz једнак је нули па је замах за ту осу константан, $L_z = const.$, и једнак пројекцији замаха на ту осу:

$$L_z = (\vec{L}_O, \vec{k}).$$

Ако су $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ ортови координатних оса покретног триједра онда је замах за пол O дат изразом

$$\vec{L}_O = L_1 \vec{i}' + L_2 \vec{j}' + L_3 \vec{k}'.$$

С обзиром на производе ортова (381)

$$(\vec{i}', \vec{k}) = \sin\theta \sin\varphi, \quad (\vec{j}', \vec{k}) = \sin\theta \cos\varphi, \quad (\vec{k}', \vec{k}) = \cos\theta$$

пројекција замаха на осу Oz износи

$$\text{(II)} \quad \boxed{L_z = J_1 (\omega_1 \sin\theta \sin\varphi + \omega_2 \sin\theta \cos\varphi) + J_3 \omega_3 \cos\theta = H} \tag{388}$$

где је H константа. Она претставља други интеграл.

Због $J_1 = J_2$, а како је $\mathfrak{M}_\zeta = \mathfrak{M}_3 = 0$, из треће Ојлерове једначине (376 *a*) следи и трећи интеграл

$$\text{(III)} \qquad \boxed{\omega_3 = c = const.} \tag{389}$$

Помоћу ова три интеграла (387, 388 и 389) можемо извести закон кретања тела. Други и трећи интеграл можемо написати у облику

$$\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2 + (2\,\mathrm{M}\,g\,s/J_1)\cos\theta = (2\,h/J_1) - (J_3\,c^2/J_1),$$

$$\sin\theta\,(\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi) + (J_3\,c/J_1)\cos\theta = H/J_1.$$

Из Ојлерових кинематичких једначина следе релације

$$\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2 = \dot\psi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2, \quad \omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi = \dot\psi\sin\theta$$

па горње једначине постају

$$\dot\psi^2\sin^2\theta = (2\,h/J_1) - (J_3\,c^2/J_1) - (2\,\mathrm{M}\,g\,s/J_1)\cos\theta - \dot\theta^2,$$

$$\dot\psi\sin^2\theta = (H/J_1) - (J_3\,c/J_1)\cos\theta.$$

Кад прву једначину помножимо са $\sin^2\theta$ а другу дигнемо на квадрат, па обе изједначимо, уводећи смене

$$(2\,h/J_1) - (J_3\,c^2/J_1) = A; \quad 2\,\mathrm{M}\,gs/J_1 = B; \quad H/J_1 = C; \quad J_3\,c/J_1 = D,$$

добићемо диференцијалну једначину

$$\dot\theta^2\sin^2\theta = (A - B\cos\theta)\sin^2\theta - (C - D\cos\theta)^2.$$

Сменом $u = \cos\theta$ добивамо

$$\dot u^2 = (A - B\,u)\,(1 - u^2) - (C - D\,u)^2 = f\,(u),$$

па је

$$t + C_1 = \int\frac{du}{\sqrt{f\,(u)}}, \tag{390}$$

где је C_1 интеграциона константа.

Време t се, дакле, изражава помоћу *елиптичког интеграла,* па се угао θ изражава елиптичком функцијом времена t. Кад одредимо угао θ, помоћу Ојлерових кинематичких једначина можемо одредити и остала два угла у функцији од t, тј. познаваћемо кретање крутог тела.

Функција $f\,(u)$ јесте кубна једначина и има три корена који су сви *реални.* Као што смо поступили код сферног клатна можемо и за ову функцију одредити те вредности при промени u од $-\infty$ до $+\infty$. Функција $f\,(u)$ три пута мења знак те, дакле, заиста има *три реална корена.* У интервалу $[-1, +1]$ постоје два реална корена таква да је $u_2 > u_1$; трећи је по апсолутној вредности већи од 1 и нема физичког значења. У интервалу $[u_1, u_2]$ функција $f(u)$ је позитивна и из (390) добивамо за време t реалну вредност.

Опишемо ли из непомичне тачке O, као центра, сферу произвољног полупречника, онда корени u_1 и u_2 претстављају *два паралелна круга.* За све време кретања геометриска оса обртног елипсоида инерције крутог тела увек продире ту сферу у појасу између паралелних кругова **(чл. 7.5)**.

Специјални случајеви овог кретања јесу: *регуларна* и *псеудорегуларна прецесија.*

a) **Регуларна прецесија.** — Момент силе G за непомичну тачку O пада у *правац чворне осе* $(\vec{e})$, те, с обзиром на трећи интеграл (389), Ојлерове динамичке и кинематичке једначине (376) постају:

$$
\begin{aligned}
&J_1\dot{\omega}_1-(J_1-J_3)\,\omega_2\,\omega_3=\mathrm{M}gs\sin\theta\cos\varphi, && \omega_1=\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi+\dot{\theta}\cos\varphi,\\
&J_1\dot{\omega}_2-(J_3-J_1)\,\omega_3\,\omega_1=-\mathrm{M}gs\sin\theta\sin\varphi, && \omega_2=\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi-\dot{\theta}\sin\varphi,\\
&\dot{\omega}_3=c, && \omega_3=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}=c.
\end{aligned}
$$

Да поставимо какав треба да буде услов да би тело, које задовољава претпоставке Лагранжевог решења проблема, вршило регуларну прецесију треба у горње једначине ставити вредности (382′):

$$\psi=At+\psi_0,\quad \varphi=Bt+\varphi_0,\quad \theta=\theta_0=const.$$

У овом случају кинематичке једначине постају

$$
\begin{aligned}
\omega_1&=A\sin\theta_0\sin\varphi,\\
\omega_2&=A\sin\theta_0\cos\varphi,\\
\omega_3&=A\cos\theta_0+B,
\end{aligned}
$$

па су

$$\dot{\omega}_1=AB\sin\theta_0\cos\varphi;\quad \dot{\omega}_2=-AB\sin\varphi\sin\theta_0;\quad \dot{\omega}_3=0;$$

$$B=c-A\cos\theta_0;\quad A=\Omega,\quad B=\omega_3.$$

Због тога прве две динамичке једначине дају услов

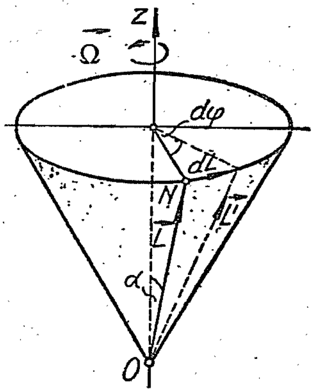
$$\boxed{J_3AB-(J_1-J_3)A^2\cos\theta_0=\mathrm{M}gs=Gs}\tag{391}$$

Он мора бити испуњен да би тело вршило регуларну прецесију под утицајем сопствене тежине. За $G=0$ образац се своди на (382).

b) **Псеудорегуларна прецесија.** — Кретање *тешког симетричног зврка (чигре)* који је добио *врло велику угаону брзину* око моментане осе која са фигурном осом чини *мали угао*, назива се *псеудорегуларна* *прецесија*[1] *(лажна прецесија)*, пошто у овом случају фигурна оса описује само приближно кружни конус око непокретне вертикалне осе. Претпостављајући да је, *због велике угаоне брзине, замах констант*, фигурна и тренутна оса описаће око њега, као вертикалне осе, кружне конусе *са врло малим угловима* отвора. Пошто је интензитет *замаха констант*, то *његов извод*, према Резаловој теореми (374), *има само преносни део извода управан на вектор*, па је

$$d\vec{L}_O = \vec{\mathfrak{M}}_O\, dt = [\vec{s}, \vec{G}]\, dt,$$

што зрачи да *вектор замаха мења свој правац али не и интензитет*. Он описује кружни конус око вертикалне осе која пролази кроз непомичну тачку O (сл. 158).



Сл. 158. — Псеудорегуларна прецесија

Брзину којом се мења вектор замаха око вертикалне осе Ω, наћи ћемо као брзину крајње тачке N вектора замаха $\vec{L}$

$$\boxed{\vec{v}_N = \frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{\Omega}, \vec{L}] = J\,[\vec{\Omega}, \vec{\omega}] = \vec{\mathfrak{M}}_O} \tag{392}$$

чији је интензитет

$$\frac{dL}{dt} = \Omega L \sin\alpha = J\omega\Omega\sin\alpha$$

где смо ставили $L \approx J\omega$, $\alpha \approx \theta$, пошто се правац замаха мало разликује од правца фигурне осе. Упоређујући ову једначину са (374) добићемо угаону брзину ове прецесије:

$$\boxed{\Omega = \frac{G s}{L} = \frac{G s}{J\omega}} \tag{392'}$$

јер је $\mathfrak{M}_O = G s \sin\alpha \approx G s \sin\theta$.

Из овога обрасца увиђамо да је *угаона брзина прецесије Ω утолико мања уколико је угаона брзина обртања тела око његове осе симетрије већа*.

Псеудорегуларну прецесију можемо схватити оним специјалним случајем обртања крутог тела око непомичне тачке, које задовољава

---

[1] Klein und Sommerfeld, „*Über die Theorie des Kreisels*“, Leipzig 1897—1910.

претпоставке потребне за Лагранжево решење, када су корени u_1 и u_2 једначине $f(u)$ *врло блиски* по апсолутној вредности. Тај случај наступа када се тело обрће око своје осе симетрије *врло великом угаоном брзином*. Геометриска оса крутог тела обрће се око непокретне осе Oz не излазећи из уске траке паралелних кругова сфере који одговарају коренима u_1 и u_2 поменуте једначине.

20.5 МОМЕНТ ДЕЈСТВА ЗВРКА (ДЕВИЈАЦИОНИ ОТПОР). СТАБИЛИСАЊЕ ЗВРКОМ

20.5.1 Гироскопски момент псеудорегуларне прецесије. — *Зврком (чигром) или гироскопом*[1] *назива се хомогено обртно (ротационо) тело које се обрће великом угаоном брзином око своје осе симетрије* (фигурне осе). Обично се гироскоп у пракси изводи у облику прстена (замајца) и може бити са три или са два степена слободе кретања.

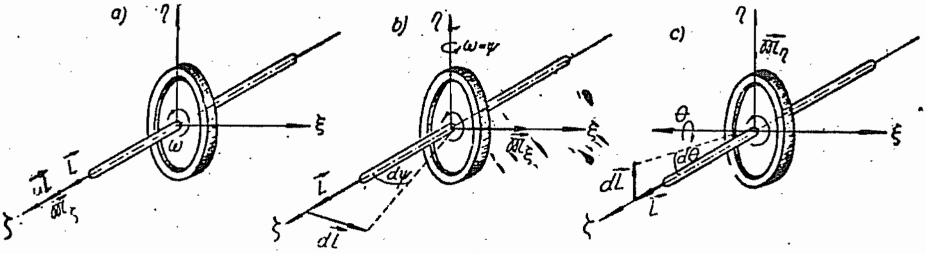
Елементарна теорија зврка оснива се на проблему псеудорегуларне прецесије (чл. 20.4).

Нека се зврк облика прстена, обрће *великом угаоном брзином око своје геометриске (фигурне) осе*. Ова је оса (на сл. 159 $O\zeta$ оса) хоризонтална и главна је централна оса симетрије па је, дакле, слободна оса.

Вектори $\vec{\omega}$ и $\vec{L}$ *колинеарни* су па је замах за ту осу

$$L_\zeta = J_\zeta\, \omega_\zeta\, .$$

Ако на зврк дејствује спрег $\vec{\mathfrak{M}}$ онда ће се замах према једначини (373) променити. Та промена зависи од интензитета и смера спрега.



Сл. 159. — Дејство спрега на зврк

Нека спрег дејствује у $O\xi\eta$ равни, тј. његов носач пада у правац $O\zeta$ осе (сл. 159 *a*), онда ће се променити само величина замаха

$$\frac{dL_\zeta}{dt} = \mathfrak{M}_\zeta$$

---

[1] Овај назив је први увео *Фуко* (*L. Foucault*, 1819—1868.)

па добивамо

$$J_\zeta \omega_\zeta = \mathfrak{M}_\zeta .$$

Дејствује ли спрег у позитивном смеру $O\xi$ (тј. у равни $O\eta\zeta$ у позитивном смеру) онда је вектор $d\vec{L}_\zeta$ паралелан тој оси (сл. 159 *b*), па се фигурна оса обрће око $O\eta$ осе у директном смеру, угаоном брзином $\Omega = \dot{\psi}$. Како је $dL_\zeta = L_\zeta \, d\psi = J_\zeta \omega_\zeta d\psi$, то је $dL_\zeta / dt = J_\zeta \omega_\zeta \dot{\psi} = J_\zeta \omega_\zeta \Omega$. Напротив, када спрег дејствује у позитивном смеру $O\eta$ осе вектор dL_ζ паралелан је тој оси, па се фигурна оса обрће око осе $O\xi$ у индиректном смеру угаоном брзином $\dot{\theta}$, јер је $dL_\zeta = J_\zeta \omega_\zeta d\theta$. Из ових излагања излази да ће у општем случају бити за неку осу (*u*):

$$\boxed{\frac{dL_u}{dt} = J_u \omega_u \Omega = \mathfrak{M}} \qquad (393)$$

Спрег $\vec{\mathfrak{M}}$ *обрће фигурну осу око треће осе која је управна на фигурну осу и на носач спрега*, или, *спрег тежи да фигурну осу најкраћим путем доведе до поклапања са осом дуж које он дејствује.*

Према Даламберовом принципу зврк се супротставља овом спрегу истим толиким спрегом $\mathfrak{M}_d$ само супротног смера. Овај момент се назива *момент дејства зврка, девијациони отпор* или *гироскопски момент. Он тежи да фигурну осу доведе најкраћим путем до поклапања са осом око које се обрће под утицајем спрега* $\vec{\mathfrak{M}}$ (Фуково правило *„истосмерног паралелизма“).*

Например, када $\vec{\mathfrak{M}}$ дејствује у смеру $+O\xi$ осе онда спрег $\mathfrak{M}_d$ дејствује у смеру $-O\xi$ осе, тј. дејствује у $O\eta\zeta$ равни у индиректном смеру и тежи да фигурну осу $O\zeta$ доведе до поклапања са осом $O\eta$ око које се она обрће угаоном брзином $\dot{\psi}$ (сл. 159 *b*). У случају да је $\vec{\mathfrak{M}}$ у смеру $+O\eta$ осе (сл. 159 *c*) биће $\mathfrak{M}_d$ у смеру $-O\eta$ осе, те дејствује у равни $O\xi\zeta$ у индиректом смеру и тежи да осу $O\zeta$ доведе до поклапања са осом $-O\eta$.

С обзиром на (392) биће *гироскопски момент*

$$\boxed{\vec{\mathfrak{M}}_d = -[\vec{\Omega}, \vec{u}] L_u = J[\vec{\omega}, \vec{\Omega}]} \qquad (394)$$

Он је вектор управан на раван фигурне осе и осе прецесије а таквог смера да ова три вектора $\overrightarrow{\mathfrak{M}}_d$, $\vec{\omega}$, $\vec{\Omega}$ образују *десни триједар* у координатном почетку O.

Његов је интензитет

$$\boxed{\mathfrak{M}_d = J\,\omega\,\Omega\,\sin\theta} \qquad (394')$$

где је θ угао између фигурне осе и осе прецесије, $\theta \approx \alpha$.

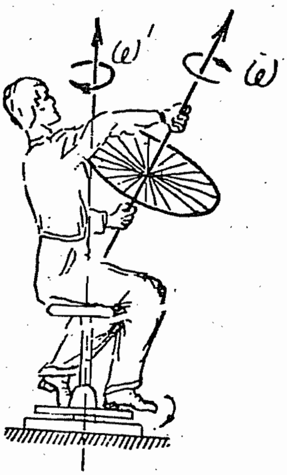
Када су осе управне, тада је $\theta = 90^0$, па је интензитет гироскопског момента

$$\boxed{\mathfrak{M}_d = J\,\omega\,\Omega} \qquad (394'')$$

Овакво дејство зврка назива се *гироскопско дејство*[1].

При скретању фигурне осе гироскопа који се обрће око ње великом угаоном брзином, јавља се спрег који тежи да исту доведе до поклапања са осом око које се она обрће при том скретању.

Гироскопски ефект може се врло лако експерименталним путем доказати. Човек седи на покретној столици (сл. 153) и у рукама држи зврк који се обрће великом угаоном брзином око фигурне осе у смеру показаном на слици. При томе је лева рука ниже од десне. Спусти ли се десна рука, фигурна ће оса скренути па ће се човек обрнути у смеру сатне казаљке око вертикалне осе угаоном брзином $\omega' = \Omega$.



Сл. 160 — Утицај гироскопског момента

Претпоставимо да је фигурна оса тела у Кардановом оквиру (сл. 153) хоризонтална (дакле, замах пада у правац те осе) и притиснимо унутрашњи прстен оквира, онда момент дејствује хоризонтално (пада у правац осе унутрашњег прстена) па ће се фигурна оса окренути око вертикалне тј. покренуће се спољашњи прстен. Ако би дејствовали притиском на спољашњи (вертикални прстен) момент пада у правац његове осе па ће се фигурна оса подићи и изазвати покретање унутрашњег система.

Примена зврка у техници је врло велика. Гироскопски се момент јавља увек када *фигурна оса тела скреће*. Код *зврка са два степена слободе кретања* јавља се у облику *притисака на ослонце* (лежишта). У случају псеудорегуларне прецесије он стоји

---

[1] Gyroscopic effect, гироскопический эффект, l'effet gyroscopique, Kreiselwirkung.

Гироскоп (Зврк)

Снимак узет из књиге H. Lamb — Higher Mechanics (Cambridge, 1929)

у равнотежи са моментом теже. Према томе, дејство зврка јавља се код *ротора турбина, возила, авиона, компаса, железнице на једној шини, бицикла, обруча, дечје чигре*, итд. итд. Он служи за стабилисање бродова, торпеда, употребљава се као аутоматски пилот, утиче и на кретање пројектила те ћемо на најобичнијим примерима, са којима се срећемо у свакидашњем животу, показати то дејство.

a) **Ротор.** — Дискови парне турбине обрћу се великим бројем обрта (и до 30000) око осовине подупрте у лежиштима (сл. 161). Због велике угаоне брзине вектор замаха колинеаран је са вектором угаоне брзине и пада у правац осовине ротора. Услед дејства спрега $\vec{\mathfrak{M}}_\xi$ наступиће скретање осовине у хоризонталној равни, тј. обртање око вертикалне $O\eta$ осе. Овом се моменту супротставља девијациони отпор (гироскопски момент). Према (394) биће

$$\vec{\mathfrak{M}}_d = J\,\omega\,\Omega\,[\vec{k}',\,\vec{j}'] = -J\,\omega_1\Omega\,\vec{i}\,.$$

Гироскопски момент усмерен је у смеру $-O\xi$ осе, дакле, дејствује у $O\eta\zeta$ равни у индиректном смеру и изазива *вертикалне притиске на ослонце* (лежишта) A и B Они износе

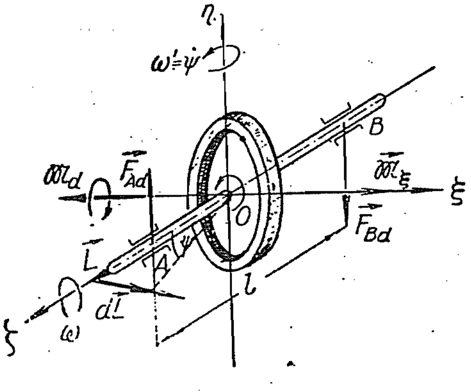
$$F_{Ad} = -F_{Bd} = J\,\omega\,\Omega/l,$$

где је l растојање ослонаца. Овим динамичким притисцима треба додати и статичке притиске.

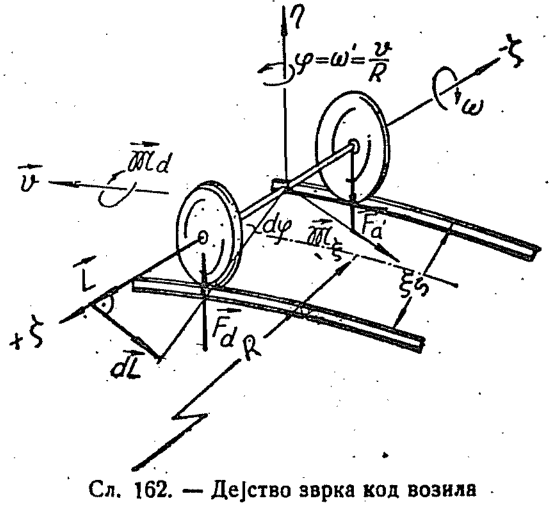
b) **Возила.** — Сваки пар точкова локомотиве можемо сматрати зврком који се обрће угаоном брзином $\omega = v/r$, где је v брзина воза а r полупречник точка. Ако је m^* *маса осовине и точкова редукована на полупречник точка*, онда је замах:

$$L = J\,\omega = m^*\,r^2\,v/r = m^*\,v\,r.$$

При кретању воза у кривини (сл. 162), наступа скретање око вертикалне ($O\eta$) осе па се појављује девијациони отпор који пада у правац негативне $O\xi$ осе и који изазива притиске на шине тако да је *спољашња шина више оптерећена*



Сл. 161. — Дејство зврка код турбинског ротора



Сл. 162. — Дејство зврка код возила

него унутрашња. Због тога се у кривини издиже спољашња шина (порео оног кога захтева дејство центрифугалне силе, $h = v^2\, s/Rg$. Величина притиска биће

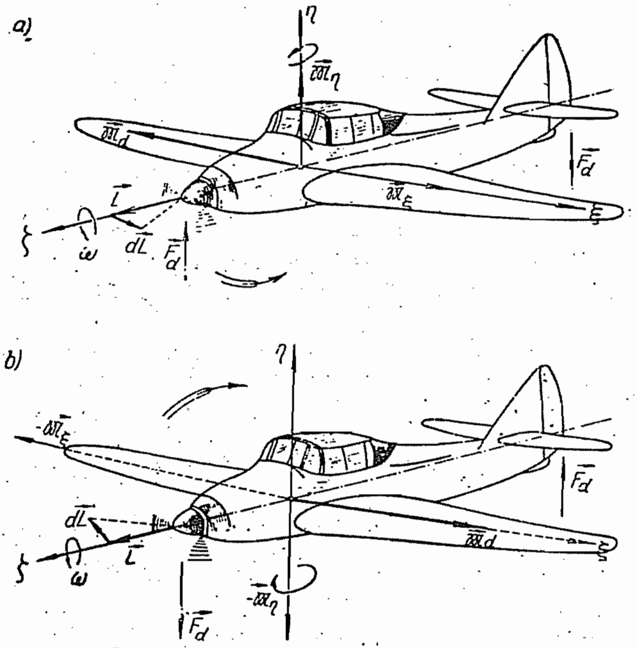
$$F_d = \mathfrak{M}_d/s = J\,\omega\,\Omega/s = m^*\;v^2\;r/Rs\,,$$

s је ширина колосека а R полупречник кривине путање.

При извођењу обрасца (396) претпостављено је да је колосек хоризонталан, међутим, исти се издиже за висину $h = v^2 s/Rg$ услед дејства центрифугалне силе. Како се у кривини ово уздизање благо остварује, то се јавља и угаона брзина скретања осе точкова $\Omega_1 = hv/s\,L$, где је L дужина кривине. Ова брзина изазива допунски девијациони отпор $J\,v^2\,h/rsL$, тако да је укупни момент

$$\mathfrak{M}'_d = \mathfrak{M}_d\,[1 + (R\,h/s\,L)] = \mathfrak{M}_d\,[1 + (v^2/g\,L)]\,.$$

Овај је утицај осетан при великим брзинама, те се због тога повећава дужина кривине, нарочито код електричних локомотива са мотором на осовини, јер исти повећава момент инерције (J) па и $\mathfrak{M}_d = m^*\,v^2\,r/R$.



Сл. 163. — Дејство зврка код авиона

c) **Авион.** — Пошто се елиса[1] авиона обрће великом брзином можемо сматрати да је замах $\vec{L}$ *колинеаран са подужном осом авиона* коју узимамо за $O\zeta$ осу (сл. 163 *a*). При заокрету авиона *налево* мора пилот дејствовати на крме за правац тако да ствара момент $\vec{\mathfrak{M}}_\eta$ који пада у правац $O\eta$ осе. Скретање осе изазваће спрег $\vec{\mathfrak{M}}_\xi$ који пада у позитиван правац $O\xi$ осе. Њему се супротставља момент дејства зврка $\vec{\mathfrak{M}}_d$, који пада у негативан правац $O\xi$ осе и дејствује тако да се *предњи део авиона* (нос) *подиже* а *задњи* (реп) *спушта*. У случају заокретања *надесно* биће обрнут случај — авион има тежњу да „*пикира*“ (сл. 163 *b*).

Ова кретања пилот парира употребом висинских крма.

Ако би се елиса обртала у смеру сатне казаљке (гледано са предње стране авиона) биће потпуно обрнут случај, тј. при заокретању *налево* авион има тежњу *да пикира*.

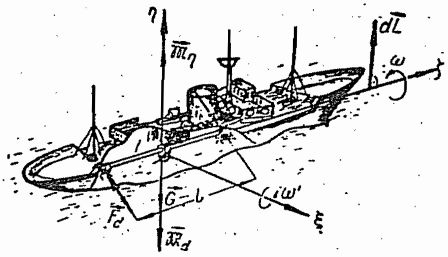
---

[1] Зврк се назива симетричан када је испуњен услов $J_1 = J_2 \neq J_3$ па било да је $O\zeta$ оса геометриска оса или не. Трокрака елиса је симетрични зврк иако није обртно тело. Међутим, двокрака елиса је несиметрични зврк.

d) **Брод.** — Брод може да осцилује око *подужне осе* (*ваљање — rolling*), око *попречне осе* (*њихање — pitching*) и око *вертикалне осе — скретање* (*вијугање — yawing*), (сл. 164). Услед овога јављају се гироскопски утицаји у свима обртним деловима брода, па и у ротору брзоходе парне турбине.

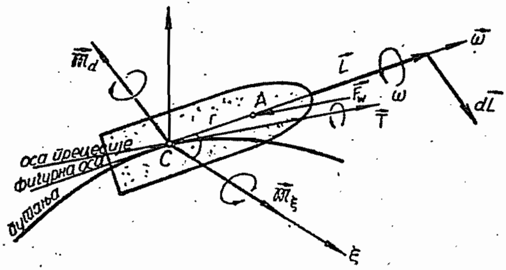
Претпоставимо само случај њихања по закону $\beta = \beta_0 \sin (2\pi t/T)$, онда је максимална брзина $\Omega = \omega' = |\dot{\beta}| = 2\pi\beta_0/T$. Према (394′) гироскопски момент пада у правац $C\eta$ осе, те изазива допунске притиске на лежишта турбине са вратилом у правцу уздужне осе брода:

$$\mathfrak{M}_d = J\,\omega\,\Omega = J \cdot {}^1/_{30}\,\pi\,n \cdot (2\pi\beta_0/T) = F_d\,l.$$



Сл. 164. — Њихање брода

e) **Пројектил.** — Отпор ваздуха утиче на кретање гранате-пројектила (сл. 165); лежи у вертикалној равни путање и паралелан је тангенти на путању а супротног је смера. Он напада осу пројектила у тачки *A* и тежи да га обрће око хоризонталне осе (тј. да га усправи). Ово штетно дејство отклања се тиме што се пројектилу још у цеви да обртно кретање (великом угаоном брзином) помоћу *завојних жлебова*. На тај начин пројектил постаје зврк. Услед овог обртања он ће скретати из равни гађања *удесно* (десни завоји) или *улево* (леви завоји), тј. имаће *деривацију* како се то отступање назива у балистици. Оса симетрије јесте фигурна оса. Због велике брзине обртања пројектила можемо сматрати да је замах константан и да пада у правац осе симетрије која се не поклапа са тангентом путање тежишта. Моменту отпора ваздуха супротставља се девијациони момент те је пројектил стабилисан у погледу обртања око попречне осе али ће под његовим утицајем наступити *прецесионо кретање* осе симетрије око тангенте путање слично прецесији чигре, само што је код чигре била оса прецесије вертикална и непомична, а овде је та оса тангента путање. Прецесија је истог смера као и обртање пројектила.



Сл. 165. — Дејство зврка код гранате

Из овога следи да је

$$\mathfrak{M}_d = F_w\,r = L\,\Omega = L\,2\pi/T$$

па је време једног обрта осе симетрије пројектила (*фигурне осе*) око тангенте (*осе прецесије*).

$$T = 2\pi\,L/r\,F_w.$$

Проблем кретања пројектила много је сложенији и ни до данас није тачно математичким путем решен. Поред деривације појављује се и *контрадеривација* према *Магнусовом ефекту*, а и *нутација* (због непрестане промене тренутне осе). Ово је нутационо кретање незнатно али може се знатно увећати услед осцилација и трзања цеви и несиметричног положаја тежишта (тада наступа *зујање*).

f) **Стабилисање зврком.** — Гироскоп смештен у Кардановом оквиру (сл. 153) има три степена слободе па може да служи за стабилисање. Нека је зврк постављен у месту на географској ширини φ северне хемисфере, тако да му фигурна оса буде у правцу север – југ (**N—S**) по хоризонтали, а оса унутрашњег прстена у правцу исток — запад (**O—W**). Зврк се обрће великом угаоном брзином (ω) око своје фигурне осе. Да би та оса увек задржала стални правац (**N—S**) и при обртању Земље (угаоном брзином Ω), дода се терет G на унутрашњем прстену а на продужењу осе зврка (ка **N**). Из једнакости момената $G s = J \omega \Omega \sin \theta$, где је θ азимут тога места, одређујемо терет $G = (J \omega \Omega \sin \theta)/s$. Први момент је усмерен ка западу, други ка истоку, те одржава правац **N—S** фигурне осе.

20.5.2 Гироскопски момент праве прецесије симетричног зврка

— Овај је проблем много сложенији од елементарне теорије зврка. Морамо усвојити такве осе покретног система да се оне релативно крећу у односу и на непокретни систем и на покретно тело. Такав је систем: *чворна оса* $(\vec{e})$, *попречна оса* $(\vec{c})$ и *фигурна оса* (*Кин.* **чл. 10.3**, сл. 126). Означимо угаону брзину тога обртања у случају прецесије са Ω а са ω_s угаону брзину сопственог обртања, онда је према Резаловој теореми (374)

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\vec{L}}_O + [\vec{\Omega}, \vec{L}_O] = \vec{\mathfrak{M}}_O \qquad (a)$$

односно скаларне једначине

$$\begin{aligned} \dot{L}_e + \Omega_c L_\zeta - \Omega_\zeta L_c &= \mathfrak{M}_e, \\ \dot{L}_c + \Omega_\zeta L_e - \Omega_e L_\zeta &= \mathfrak{M}_c, \\ \dot{L}_\zeta + \Omega_e L_c - \Omega_c L_e &= \mathfrak{M}_\zeta. \end{aligned} \qquad (b)$$

Компонентне замахе за ове осе одређујемо према обрасцима (370′), само су тада моменти инерције и центрифугални моменти промењиви и зависе од времена.

Тренутна угаона брзина је векторски збир $\vec{\omega} = \vec{\omega}_s + \vec{\Omega} = \omega_s \vec{k}' + \Omega \vec{k}$, па су пројекције угаоне брзине тела и угаоне брзине обртања овог триједра на те осе:

$$\omega_e = 0, \quad \omega_c = \Omega \sin \theta, \quad \omega_\zeta = \omega_s + \Omega \cos \theta,$$

$$\Omega_e = 0 \quad \Omega_c = \Omega \sin \theta, \quad \Omega_\zeta = \Omega \cos \theta.$$

Како је $J_e = J_1 \sin^2 \varphi + J_2 \cos^2 \varphi = J_1 = J_e$, то су пројекције замаха њихови изводи

$$\begin{aligned} &L_e = J_e \ \omega_e = 0, && \dot{L}_e = 0, && \theta = \theta_0 = const., \\ &L_c = J_c \ \omega_c = J_1 \ \Omega \sin \theta, && \dot{L}_c = 0, && \omega_s = \dot{\varphi} = const., \\ &L_\zeta = J_3 \ (\omega_s + \Omega \cos \theta), && \dot{L}_\zeta = 0, && \Omega = \dot{\psi} = const. \end{aligned}$$

па једначина (*a*) постаје

$$[\vec{\Omega}, \vec{L}_O] = \begin{vmatrix} \vec{e} & \vec{c} & \vec{k}' \\ 0 & \Omega \sin\theta & \Omega \cos\theta \\ 0 & J_1 \Omega \sin\theta & J_3(\omega + \Omega\cos\theta) \end{vmatrix} = \vec{\mathfrak{M}}_O \qquad (c)$$

Момент спољашњих сила који је потребан да би произвео регуларну прецесију мора да дејствује у *смеру чворне осе*, па је

$$\left\{J_3\,\omega_s\,\Omega\sin\theta\left[1 + \frac{(J_3 - J_1)\,\Omega^2\cos\theta}{J_3\,\omega_s}\right]\right\}\vec{e} = \mathfrak{M}_e\vec{e} = \vec{\mathfrak{M}}_O. \qquad (d)$$

У векторском облику могао би се написати и овако:

$$\boxed{J_3\,[\vec{\Omega}, \vec{\omega}_s]\left\{1 + \frac{J_3 - J_1}{J_3}\,\frac{\Omega}{\omega_s}\cos\theta\right\} = \vec{\mathfrak{M}}_O} \qquad (395)$$

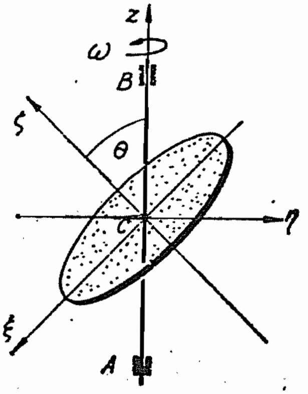
Гироскопски момент пада у негативни смер чворне осе, па је

$$\boxed{\vec{\mathfrak{M}}_d = J_3\,[\vec{\omega}_s, \vec{\Omega}]\left\{1 + \frac{J_3 - J_1}{J_3}\,\frac{\Omega}{\omega_s}\cos\theta\right\}} \qquad (395')$$

Први члан претставља гироскопски момент елементарне теорије зврка (при псеудорегуларној прецесији). Ако је угаона брзина прецесије доста мања од брзине сопственог обртања ($\Omega \ll \omega_s$) може се други члан у загради занемарити. На овоме је и заснована елементарна теорија зврка.

У случају да нема сопственог обртања ставићемо у изразу (*c*) да је $\omega_s = 0$, па је гироскопски момент

$$\boxed{\vec{\mathfrak{M}}_d = \{-{}^1\!/_2\,(J_3 - J_1)\,\Omega^2\sin 2\theta\}\,\vec{e}} \qquad (395'')$$



Сл. 166. — Динамички притисци на лежишта вратила са нагнутим диском

Он је усмерен у негативном смеру чворне осе.

Овакав случај имамо код диска који је нагнут према оси прецесије (сл. 166). Он дејствује у смеру осе $O\eta$, па изазива динамичке притиске на ослонце $\pm F_A\,l$ (в. задатак 80).

20.5.3 Гироскопски момент несиметричног зврка. — У пракси је овај случај чест (напр., двокрака елиса) али је тачно одређивање момента скопчано са великим математичким тешкоћама, па ћемо одредити само *приближне вредности*, што је довољно за практичне потребе.

Усвојићемо исти координатни систем као у претходном излагању. Тада су пројекције угаоне брзине тела и пројекције на главне осе инерције

$$\begin{gathered}\omega_e = 0, \quad \omega_c = \dot\psi \sin\theta, \quad \omega_\zeta = \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta, \quad \theta = \theta_0, \\ \omega_1 = \dot\psi \sin\theta \sin\varphi, \quad \omega_2 = \dot\psi\sin\theta\cos\varphi, \quad \omega_3 = \dot\varphi + \dot\psi\sin\theta.\end{gathered} \tag{a}$$

Из друге једначине (a) следе ови односи

$$\begin{gathered}\omega_1\cos\varphi = \omega_2\sin\varphi = {}^1\!/_2\,\dot\psi\sin\theta\sin 2\varphi, \quad \omega_1\sin\varphi = \dot\psi\sin\theta\sin^2\varphi, \\ \omega_2\cos\varphi = \dot\psi\sin\theta\cos^2\varphi.\end{gathered} \tag{b}$$

Пројекције замаха на осе, с обзиром на односе (a) и (b), биће

$$\begin{gathered}L_e = L_1\cos\varphi - L_2\sin\varphi = J_1\omega_1\cos\varphi - J_2\omega_2\sin\varphi = {}^1\!/_2(J_1 - J_2)\dot\psi\sin\theta\sin 2\varphi \\ L_c = L_1\sin\varphi + L_2\cos\varphi = \dot\psi\sin\theta\,(J_1\sin^2\varphi + J_2\cos^2\varphi), \\ L_\zeta = J_3\,(\dot\varphi + \dot\psi\sin\theta)\end{gathered} \tag{c}$$

па су њихови изводи по времену

$$\begin{gathered}\dot L_e = (J_1 - J_2)\,\dot\psi\dot\varphi\sin\theta\cos 2\varphi, \\ \dot L_c = \dot\varphi\dot\psi\sin\theta\,(J_1 - J_2)\sin 2\varphi.\end{gathered} \tag{d}$$

Занемарујући мале величине ($\dot\varphi^2$, $\dot\psi^2$, $\dot\psi\cos^2\varphi$, $\dot\psi\sin^2\varphi$); добивају се односи

$$\begin{gathered}\omega_e L_c = 0, \quad \omega_c L_e \approx 0, \quad \omega_3 L_c \approx 0, \quad \omega_e L_\zeta = 0, \\ \omega_c L_\zeta \approx J_3\dot\varphi\dot\psi\sin\theta, \quad \omega_3 L_e \approx {}^1\!/_2\,(J_1 - J_2)\,\dot\varphi\dot\psi\sin\theta\sin 2\varphi.\end{gathered}$$

Када се унесу у скаларне једначине према Резаловој теореми за триједар $O\,\vec{e}\,\vec{c}\,\vec{k}'$, стављајући уместо спољашњих момената девијационе, биће исти:

$$\begin{gathered}\mathfrak{M}_{de} = -\,(\dot L_e + \omega_c L_\zeta) = -\,[(J_1 - J_2)\,\dot\varphi\dot\psi\sin\theta\cos 2\varphi + J_3\dot\varphi\dot\psi\sin\theta], \\ \mathfrak{M}_{dc} = -\,(\dot L_c + \omega_3 L_e) = -\,[{}^3\!/_2\,(J_1 - J_2)\,\dot\varphi\dot\psi\sin\theta\sin 2\varphi]\,.\end{gathered} \tag{396}$$

Напр., танку двокраку елису можемо сматрати штапом, те су $J_1 = J_3$, $J_2 = 0$, па су компонентни гироскопски моменти:

$$\begin{gathered}\mathfrak{M}_{de} = -\,J_1\,\omega_S\,\Omega\sin\theta\,(1 + \cos 2\varphi), \\ \mathfrak{M}_{dc} = -\,{}^3\!/_2\,J_1\,\dot\varphi\,\dot\psi\sin\theta\sin 2\varphi.\end{gathered}$$

20.6 ОТПОР НЕПОМИЧНЕ ТАЧКЕ

Како отпор непомичне тачке пролази кроз ту тачку то је његов момент једнак нули, те због тога не улази у Ојлерове динамичке једначине (374′ или 375). Можемо га одредити користећи закон о кретању тежишта тела:

$$M\vec{a}_C = \vec{F} + \vec{F}_w, \tag{396}$$

где је $\vec{F}$ активна сила, $\vec{F}_w$ отпор, а $\vec{a}_C$ убрзање тежишта. Према *Кин.* чл. 10.5, обр. 197 ово убрзање износи

$$\vec{a}_C = [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}_C] + [\vec{\omega}\,[\vec{\omega}, \vec{r}_C]] = [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}_C] + (\vec{\omega}, \vec{r}_C)\,\vec{\omega} - \omega^2\,\vec{r}_C. \tag{396′}$$

Када се одреди кретање, тј. када се познају зависности Ојлерових углова у функцији од времена, онда се може одредити убрзање тежишта па и отпор

$$\vec{F}_w = M\vec{a}_C - \vec{F}. \tag{396″}$$

Једино у случају када се тежиште тела поклапа са непомичном тачком може се отпор непосредно одредити и износи $\vec{F}_w = -\vec{F}$, пошто је тада $\vec{r}_C = 0$.

Например, одредимо пројекцију отпора на хоризонталну непомичну раван (Oxy) тешког симетричног зврка који врши регуларну прецесију великом брзином сопственог обртања $(\omega_s \gg \Omega)$.

Због $\dot{\psi} = \Omega$, $\dot{\varphi} = \omega_s$ Ојлерове кинематичке једначине за угаоне брзине и угаона компонентна убрзања износе:

$$\begin{aligned}
&\omega_x = \omega_s \sin\theta \sin\psi, && \dot{\omega}_x = \omega_s \Omega \sin\theta \cos\psi, && \Omega = \psi = const.,\\
&\omega_y = -\omega_s \sin\theta \cos\psi, && \dot{\omega}_y = \omega_s \Omega \sin\theta \sin\psi, && \omega_s = \dot{\varphi} = const.,\\
&\omega_z = \Omega + \omega_s \cos\theta, && \dot{\omega}_z = 0, && \theta = \theta_0 = const.
\end{aligned}$$

Како је

$$\vec{r}_C = x_C\,\vec{i} + y_C\,\vec{j} + z_C\,\vec{k} = s\,\vec{k}' = s\sin\theta\,(\vec{i}\sin\psi - \vec{j}\cos\psi) + (s\cos\theta)\,\vec{k},$$

биће

$$(\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}_C) = s\,(\omega_s + \Omega\cos\theta)$$

и квадрат угаоне брзине

$$\omega^2 = \omega_s^2 + \Omega^2 + 2\,\omega_s\,\Omega\cos\theta.$$

Из (396′) добивамо пројекције вектора убрзања (*Кин.*, обр. 198)

$$a_x = -s\,\Omega^2 \sin\theta \sin\psi, \qquad a_y = s\,\Omega^2 \sin\theta \cos\psi.$$

Како је $\vec{F} = -Mg\,\vec{k}$, то из (396) следи да су отпори:

$$X_w = M\,a_x = -M\,s\,\Omega^2 \sin\theta \sin\psi, \qquad Y_w = M\,s\,\Omega^2 \sin\theta \cos\psi$$

па је

$$F_{wxy} = M s \Omega^2 \sin\theta.$$

Отпор је, дакле, једнак центрифугалној сили прецесије. Њена нападна тачка је у средишту у коме сматрамо да је сажета маса, полупречник је $r = s \sin\theta$ а угаона брзина $\dot{\psi} = \Omega$. Овај је отпор усмерен у смеру осе $-\vec{p}$ нормалне на чворну осу (*Кин.*, *сл.* 128).

Како су угаоне брзине прецесије и сопственог обртања везане условом (391), због $\omega_s \gg \Omega$, можемо ставити да је

$$\Omega = M g s / J_s \omega_s,$$

па је отпор

$$F_{wxy} = \frac{G^2 s^2}{g J_s^2 \omega_s^2} \sin\theta.$$

21. ОПШТЕ КРЕТАЊЕ КРУТОГ ТЕЛА. ЛАГРАНЖЕВЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА

Опште кретање крутог тела има *шесш сшейена слободе крешања*, те за одређивање кретања треба *шесш динамичких једначина*. За одређивање положаја тела потребни су нам шест података и за генералисане координате усвојићемо *шри координаше координашног иочешка йокрешног координашног сисшема* $A\,\xi\,\eta\,\zeta$, круто везаног са самим телом, у односу на непокретни координатни систем $Oxyz$, и *шри Ојлерова угла* које осе *нушације (чворна оса), ирецесије* (Az') и *сойсшвеног обршања* $(A\,\zeta)$ чине са осама координатног система $A\,x'\,y'\,z'$, паралелног апсолутном систему $(Oxyz)$ и осама релативног система $A\,\xi\,\eta\,\zeta$. Те су, дакле, координате: x_A, y_A, z_A, ψ, φ, θ.

Шест диференцијалних једначина кретања написаћемо у облику Лагранжевих диференцијалних једначина друге врсте **(чл. 11.1)** које у овом случају имају облик:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial E_k}{\partial x_A}-\dfrac{\partial E_k}{\partial x_A}=Q_{xA} & \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial E_k}{\partial \dot{\theta}}-\dfrac{\partial E_k}{\partial \theta}=Q_{\theta}, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial E_k}{\partial y_A}-\dfrac{\partial E_k}{\partial y_A}=Q_{yA}, & \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial E_k}{\partial \dot{\psi}}-\dfrac{\partial E_k}{\partial \psi}=Q_{\psi} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial E_k}{\partial \dot{z}_A}-\dfrac{\partial E_z}{\partial z_A}=Q_{zA}, & \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial E_k}{\partial \varphi}-\dfrac{\partial E_k}{\partial \varphi}=Q_{\varphi}, \end{array}} \qquad (397)$$

Изрази на десним странама ових једначина претстављају *генералисане силе за изабране генералисане координате*.

Да бисмо одредили генералисане силе уочимо да је положај произвољне тачке B крутог тела одређен изразом (*Кин.* чл. **11.2**):

$$\vec{r}_i = \vec{r}_A + \vec{\rho}_i,$$

а брзина дата једначином (*Кин.* 202):

$$\vec{v}_i = \vec{v}_A + [\vec{\omega}, \vec{\rho}_i] = \vec{v}_A + [\vec{\omega}, \vec{r}_i - \vec{r}_A].$$

Помножимо овај израз бесконачно малим приращтајем времена δt; онда је, због $\vec{v}_i \delta t = \delta \vec{r}_i$; $\vec{v}_A \delta t = \delta \vec{r}_A$; $\vec{\omega} \delta t = \delta \alpha \vec{\mathrm{u}}$, где је $\vec{\mathrm{u}}$ орт правца вектора угаоне брзине, виртуално померање

$$\delta \vec{r}_i = \delta \vec{r}_A + \delta \alpha [\vec{\mathrm{u}}, \vec{\rho}_i].$$

Према Лагранж-Даламберовом принципу виртуални рад на овом померању дат је изразом

$$\delta A = \sum_{i=1}^{i=n} (\vec{F}_i, \delta \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^{i=n} (\vec{F}_i, \delta \vec{r}_A + \delta \alpha, [\vec{\mathrm{u}}, \vec{\rho}_i])$$

односно

$$\delta A = \sum_{i=1}^{i=n} (\vec{F}_i, \delta \vec{r}_A) + \left(\delta \alpha \vec{\mathrm{u}}, \sum_{i=1}^{i=n} \left[\vec{\rho}_i, \vec{F}_i\right]\right) = (\vec{F}_r, \delta \vec{r}_A) + \delta \alpha, \vec{\mathrm{u}} \vec{\mathfrak{M}}_A),$$

где су $\vec{F}_r$ главни вектор, а $\vec{\mathfrak{M}}_A$ главни момент (за пол A) просторног система сила који напада круто тело.

Транслаторно померање пола A можемо изразити помоћу координата

$$\delta \vec{r}_A = \delta x_A \vec{\mathrm{i}} + \delta y_A \vec{\mathrm{j}} + \delta z_A \vec{\mathrm{k}}$$

а угаоно померање, према *Кин.* обр. 189, са

$$\delta \alpha \vec{\mathrm{u}} = \delta \theta \vec{\mathrm{e}} + \delta \psi \vec{\mathrm{k}} + \delta \varphi \vec{\mathrm{k}}'$$

па је виртуални рад

$$\delta A = X_r \delta x_A + Y_r \delta y_A + Z_r \delta z_A + \mathfrak{M}_e \delta \theta + \mathfrak{M}_k \delta \psi + \mathfrak{M}_{k'} \delta \varphi, \qquad (398)$$

где су

$$\mathfrak{M}_e = (\vec{\mathfrak{M}}_A, \vec{\mathrm{e}}), \quad \mathfrak{M}_k = (\vec{\mathfrak{M}}_A, \vec{\mathrm{k}}), \quad \mathfrak{M}_{k'} = (\vec{\mathfrak{M}}_A, \vec{\mathrm{k}}')$$

главни моменти система сила за осе нутације, прецесије и сопствене ротације. Како је генералисана сила скаларни производ силе и померања (чл. **11.1**, обр. 250), то је виртуални рад ових генералисаних сила дат изразом

$$\delta A = Q_{xA} \delta x_A + Q_{yA} \delta y_A + Q_{zA} \delta z_A + Q_e \delta \theta + Q_k \delta \psi + Q_{k'} \delta \varphi.$$

Пошто су варијације координата међу собом независне, то морају коефицијенти уз исте бити једнаки, тј. генералисане силе су:

$$\boxed{\begin{array}{lll} Q_{xA} = X_r, & Q_{yA} = Y_r, & Q_{zA} = Z_r \\ Q_{\theta} = \mathfrak{M}_e, & Q_{\psi} = \mathfrak{M}_k, & Q_{\varphi} = \mathfrak{M}_k' \end{array}} \qquad (399)$$

Између главних момената за осе прецесије, нутације и ротације и главних момената за координатне осе покретног триједра $A\,\xi\,\eta\,\zeta$ постоје, с обзиром на релације између косинуса смерова ових оса (*Кин.*, обр. 187 и 189), ови односи

$$\mathfrak{M}_e = \mathfrak{M}_{A\xi} \cos\varphi - \mathfrak{M}_{A\eta} \sin\varphi,$$

$$\mathfrak{M}_k = \mathfrak{M}_{A\xi} \sin\varphi \sin\theta + \mathfrak{M}_{A\eta} \cos\varphi \sin\theta + \mathfrak{M}_{A\zeta} \cos\theta, \quad \mathfrak{M}_{k'} = \mathfrak{M}_{A\zeta}$$

из којих можемо добити и ове једначине

$$\mathfrak{M}_{A\xi} = [(-\mathfrak{M}_{k'} \cos\theta + \mathfrak{M}_k) \sin\varphi]/\sin\theta + \mathfrak{M}_e \cos\varphi,$$

$$\mathfrak{M}_{A\eta} = [(-\mathfrak{M}_{k'} \cos\theta + \mathfrak{M}_k) \sin\varphi]/\sin\theta - \mathfrak{M}_e \sin\varphi, \quad \mathfrak{M}_{A\zeta} = \mathfrak{M}_{k'} .$$

Помоћу Лагранжевих диференцијалних једначина можемо извести једначину обртања крутог тела.

1^0) Кинетичка енергија *обртања крутог тела око непомичне осе* (сл. 115) износи $E_k = {}^1/_2\, J\,\omega^2 = {}^1/_2\, J\,\dot{\varphi}^2$, где је J момент инерције тела за ту осу а ω угаона брзина обртања. Кретање има *само један степен слободе,* па за генералисану координату узмимо угао φ, те је

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{d}{dt}\,\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} = J\,\ddot{\varphi} = J\,\dot{\omega}.$$

Из Ојлерове једначине, а према **чл. 17.1,** виртуално померање је дато изразом

$$\overrightarrow{\delta r} = \delta\varphi\,[\vec{k}, \vec{r}]$$

па су компонентна померања $\delta\xi = -\eta\,\delta\varphi$, $\delta\eta = \xi\,\delta\varphi$, $\delta z = 0$, те је рад

$$\Sigma\,(F_\xi\,\delta\xi + F_\eta\,\delta\eta + Z\,\delta z) = \delta\varphi\,\Sigma\,(\xi\,F_\eta - \eta\,F_\xi) = \mathfrak{M}_z\,\delta\varphi.$$

Генералисана сила за генералисану координату φ *јесте главни момент сила за осу* Az, па из Лагранжеве једначине (391) добивамо

$$J\,\omega = \mathfrak{M}_z$$

познату једначину обртања крутог тела око непомичне осе како смо извели у **чл. 17.**

2^0) Из *Кинематике равног кретања* (*Кин.*, **чл. 9**) познато је да је брзина произвољне тачке B одређена изразом

$$\vec{v} = \vec{v}_C + [\vec{\omega}, \vec{\rho}],$$

где смо уместо тачке A узели средиште (тежиште) плоче, према **чл. 18.1.** Помножимо овај израз са δt онда је виртуално померање дато изразом

$$\overrightarrow{\delta r} = \overrightarrow{\delta r_C} + \delta\varphi\,[\vec{k}, \vec{\rho}]$$

одакле су компонентна померања

$$\delta x = \delta x_C - \delta\varphi\,(y - y_C), \quad \delta y = \delta y_C + \delta\varphi\,(x - x_C), \quad \delta z = 0$$

па је елементарни рад

$$\Sigma\,(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = \delta x_C\,\Sigma\,X + \delta y_C\,\Sigma\,Y +$$
$$+\,\delta\varphi\,\Sigma\,[(x - x_C)\;Y - (y - y_C)\;X].$$

Генералисане силе за *генералисане координате* x_C, y_C, φ (*пошто равно кретање има три степена слободе кретања*) јесу координате резултанте X_r, Y_r и главни момент за осу управну на раван плоче а која пролази кроз средиште $(\mathfrak{M}_2)$.

Према Кениговој теореми **(чл. 18.2)** кинетичка је енергија дата изразом (348) па су парцијални изводи те енергије по генералисаним координатама

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_C} = \mathrm{M}\;x_C, \frac{\partial E_k}{\partial x_C} = 0, \qquad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}_C} = \mathrm{M}\;\dot{y}_C,$$
$$\frac{\partial E_k}{\partial y_C} = 0, \qquad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} = J_c\,\dot{\varphi}, \qquad \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = 0,$$

те из Лагранжевих једначина добивамо

$$\mathrm{M}\,\ddot{x}_C = X_r, \quad \mathrm{M}\,\ddot{y}_C = Y_r, \quad J_c\,\ddot{\varphi} = \mathfrak{M}_c,$$

познате једначине равног кретања крутог тела (347).

3^e) Обртање крутог тела око непомичне тачке има *три степена слободе кретања* **(чл. 20.2)**, па ћемо за генералисане координате узети *три Ојлерова угла*. Кинетичка је енергија дата изразом

$$E_k = {}^1/_2\,(J_1\,\omega_1^{\,2} + J_2\,\omega_2^{\,2} + J_3\,\omega_3^{\,2}),$$

где смо за координатне осе узели главне осе инерције тела. Из Ојлерових кинематичких једначина за ове осе **(чл. 20.3**, обр. 376), видимо да компонентне угаоне брзине ω_1 и ω_2 зависе од угла φ али не и од његовог извода φ, док ω_3 зависи од извода φ али не зависи од угла φ, па су парцијални изводи кинетичке енергије по координати φ и њеном изводу φ:

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial E_k}{\partial \omega_3}\;\frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\varphi}} = J_3\,\omega_3;$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = \frac{\partial E_k}{\partial \omega_1}\;\frac{\partial \omega_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_k}{\partial \omega_2}\;\frac{\partial \omega_2}{\partial \varphi} =$$

$$= J_1\,\omega_1\;\frac{\partial \omega_1}{\partial \varphi} + J_2\,\omega_2\,\frac{\partial \omega_2}{\partial \varphi} = (J_1 - J_2)\,\omega_1\,\omega_2.$$

Генералисана је сила за ову координату главни момент $\mathfrak{M}_3$ па је

$$J_3 \dot{\omega}_3 - (J_1 - J_2)\, \omega_1 \omega_2 = \mathfrak{M}_3$$

као што смо извели у чл. 20.2.

Примери. — **90)** *а*) Написати Лагранжеве једначине кретања Ватовог регулатора (сл. 96) занемарујући масе полуга.

Решење. — Кугла има две компонентне брзине: *бочну* $v_1 = l\dot{\varphi}$, услед промене релативног угла φ који гради полуга са вертикалом, и *обимну* услед обртања регулатора угаоном брзином $\dot{\theta} = \Omega$. Огрлица („муф") има само брзину свог праволиниског кретања. Како су $z_2 = 2l\cos\varphi$, $z_1 = l\cos\varphi$, то је $\dot{z}_2 = -2l\dot{\varphi}\sin\varphi$, па су кинетичка енергија и функција силе:

$$E_k = l^2 [(m + 2\,\mathrm{M}\sin^2\varphi)\,\dot{\varphi}^2 + m\,\dot{\theta}\,\sin^2\varphi],$$

$$U = 2\,(\mathrm{M} + m)\,gl\cos\varphi.$$

Координата θ је циклична, те даје циклични интеграл

$$2\,m\,l^2\,\dot{\theta}\,\sin^2\varphi = C$$

који претставља интеграл површине у равни управној на осу регулатора.

Лагранжева једначина за нецикличку координату је

$$\frac{d}{dt}[2\,l^2(m + 2\,\mathrm{M}\sin^2\varphi)\,\dot{\varphi}] - l^2(2\,\mathrm{M}\,\dot{\varphi}^2 + m\,\dot{\theta}^2)\sin 2\varphi = -2\,(\mathrm{M} + m)\,gl\sin\varphi,$$

односно

$$(2\,m + 4\,\mathrm{M}\sin^2\varphi)\,l^2\,\ddot{\varphi} + (2\,\mathrm{M}\,\dot{\varphi}^2 - m\,\dot{\theta}^2)\,l^2\sin 2\varphi = -2\,(\mathrm{M} + m)\,gl\sin\varphi,$$

b) Одредити услов стационарног обртања Ватовог регулатора.

Решење. — У овом случају су: $\varphi = \varphi_0 = const.$, $\dot{\theta} = \omega = const.$, па из предње једначине следи услов

$$\omega^2 = (\mathrm{M} + m)\, g/ml \cos\varphi_0.$$

91) Око тешког хомогеног кружног ваљка масе M обавијен је гипки конац чији је један крај обешен о непомичну тачку *O*. Ваљак пада без почетне брзине одмотавајући конац.

Одредити:

a) путању средишта ваљка, *b*) његово убрзање, *c*) силу у концу, *d*) брзину у тренутку када се ваљак спустио за висину *h*.

(*Мешћерски*, Зб. зад., зад. **630**)

Решење. — *а*) Путања је права линија.

b) Како је $E_k = {}^1/_2(\mathrm{M}\,\dot{z}_C^2 + J\,\dot{\varphi}^2) = {}^3/_4\,\mathrm{M}\,R^2\,\dot{\varphi}^2$ и $U = \mathrm{M}\,g\,z_C = M\,g\,R\,\varphi$ биће $R\,\ddot{\varphi} = \ddot{z}_C = {}^2/_3\,g$.

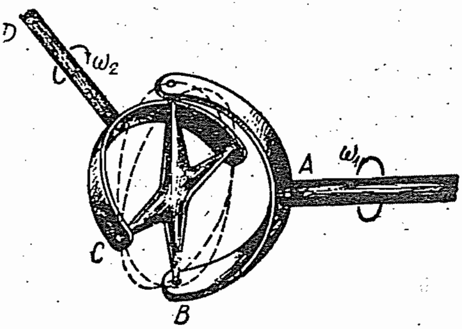
c) $G - \mathrm{M}\,\ddot{z}_C - F_u = 0$, па је $F_u = {}^1/_3\,G$.

d) $R\,\dot{\varphi} = {}^2/_3\,gt$, $R\,\varphi = {}^1/_3\,gt^2$, $v = {}^2/_3\sqrt{3\,g\,h}$.

92) Два вратила граде угао α а везана су зглобом Кардана-Хука (сл. 167), и обрћу се угаоним брзинама ω_1 и ω_2.

a) Одредити однос угаоних брзина.

b) Одредити екстремне вредности односа за $\alpha = 60^0$.



Сл. 167. — Зглоб Кардана — Хука

c) Написати једначину кретања првог вратила ако су оба изложена дејству обртних момената супротних смерова.

d) Одредити закон кретања првог вратила у случају да је угао α врло мали.

Решење. — *a*) Према *Кин.*, чл. **10.6, обр. 202** је:

$$i = \omega_1/\omega_2 = (1 - \sin^2\alpha\cos^2\varphi)/\cos\alpha,$$

$$\omega_{2\,max} = \omega_1/\cos\alpha,\quad \omega_{2\,min} = \omega_1/\cos\alpha.$$

b) За $\alpha = 60^0$ биће

$$\omega_{2\,max} = 2\,\omega_1,\quad \omega_{2\,min} = {}^1/_2\,\omega_1.$$

c) Кинетичка енергија система је

$$E_k = {}^1/_2\,[J_1\,\omega_1{}^2 + J_2\,(\omega_2\cos\alpha)^2] = {}^1/_2\,\dot{\varphi}_1{}^2\,[J_1 + J_2\cos^4\alpha\,(1 - \sin^2\alpha\cos^2\varphi_1)^{-2}].$$

Генералисана координата је угао φ_1 и генералисана сила редукована на ту координату $\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2\,(\omega_2/\omega_1)$, па је Лагранжева једначина

$$[J_1 + J_2\,p^2\cos^2\alpha]\,\varphi_1 - (J_2\,p^3\sin^2\alpha\cos\alpha\sin^2\varphi_1)\,\dot{\varphi}^2 = \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2\,p,$$

где је

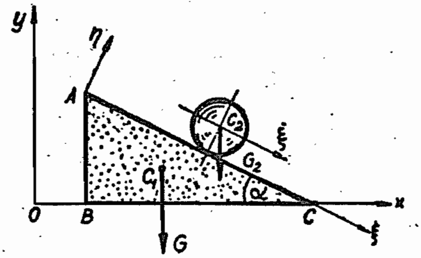
$$p = \cos\alpha/(1 - \sin^2\alpha\cos^2\varphi_1).$$

d) Како је $\cos\alpha \approx 1$, $\sin\alpha \approx 0$, предња једначина постаје

$\ddot{\varphi}_1 = (\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2)/(J_1 + J_2) = k$ јер је $p = 1$, па је закон кретања $\varphi = {}^1/_2\,k\,t^2 + C_1\,t + C_2$.

93) На глатком поду налази се троугаона призма, тежине G_1 (сл. 168). По страни AC призме котрља се без клизања хомогена кугла, тежине G_2. У почетном тренутку систем је био у миру.

Одредити кретање кугле и призме.



Сл. 168

Решење. — Кинетичка енергија и функција силе су

$$E_k = {}^1/_2\,M_1\,\dot{x}^2 + {}^1/_2\,M_2\,(\dot{\xi}^2 + 2\,\dot{x}\,\dot{\xi}\cos\alpha + \dot{x}^2) +$$
$$+ {}^1/_5\,M_2\,\dot{\xi}^2,$$

$$U = M_2\,g\,\xi\sin\alpha,$$

па помоћу Лагранжевих једначина добивамо једначине кретања:

$$(M_1 + M_2)\,\ddot{x} + M_2\,\ddot{\xi}\cos\alpha = 0,$$

$$^7/_5\,M_2\,\ddot{\xi} + M_2\,\ddot{x}\cos\alpha = M_2\,g\sin\alpha,$$

те су

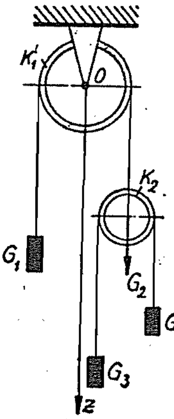
$$\ddot{\xi} = -\frac{M_1 + M_2}{M_2\cos\alpha}\,\ddot{x},\quad \ddot{x} = -\frac{5}{2}\,g\,\frac{G_2\sin 2\alpha}{7\,(G_1 + G_2) - 5\,G_2\cos^2\alpha}$$

Призма се креће налево константним убрзањем $\ddot{x}$. Између преносне брзине призме и релативне брзине кугле постоји овај однос

$$\dot{x} = -[G_2 \cos\alpha/(G_1+G_2)]\,\dot{\xi}.$$

94) Преко непомичног котура K_1 пребачено је уже, дужине l_1, о чијим су крајевима обешени терет, тежине G_1 и котур K_2, тежине G_2 (сл. 169). Преко котура K_2 пребачено уже, дужине l_2, о чијим крајевима висе терети тежина G_3 и G_4.

Занемарујући масе котурова и ужади, као и трење, одредити кретање система.



Сл. 169

Решење. — Како су $z_1 + z_2 = l_1$, $z_3 - z_2 + z_4 - z_2 = z_3 + z_4 - 2z_2 = l_2$, то су: $z_2 = l_1 - z_1$, $\ddot{z}_2 = -\ddot{z}_1$; $z_4 = l_2 + 2l_1 - 2z_1 - z_3$, $\ddot{z}_4 = -2\ddot{z}_1 - \ddot{z}_3$, те систем има два степена кретања.

Кинетичка енергија и функција силе су:

$$E_k = \Sigma\, {}^1/_2\, M_i z_i^2 = {}^1/_2\,[(M_1 + M_2 + 4M_4)\dot{z}_1^2 + 4M_4\dot{z}_1\dot{z}_3 + (M_3 + M_4)\dot{z}_3^2]$$

$$U = \Sigma M_i g z_i = g\,[(M_1 - M_2 - 2M_4)z_1 + (M_3 - M_4)z_3 +$$

$$+ (M_2 l_1 + M_4 l_2 + 2M_4 l_1]$$

па помоћу Лагранжевих једначина добивамо диф. једначине кретања

$$(M_1 + M_2 + 4M_4)\ddot{z}_1 + 2M_4\ddot{z}_3 = (M_1 - M_2 - 2M_4)g$$

$$2M_4\ddot{z}_1 + (M_3 + M_4)\ddot{z}_3 = (M_3 - M_4)g$$

те су убрзања константна:

$$\ddot{z}_1 = g\,[(G_3 + G_4)(G_1 - G_2 - 2G_4) - 2G_4(G_3 - G_4)]/[(G_3 + G_4)(G_1 + G_2 + 4G_4) - 4G_4^2];$$

$$\ddot{z}_3 = g\,[2G_4(G_1 - G_2 - 2G_4) - (G_3 - G_4)(G_1 + G_2 + 4G_4)]/[4G_4^2 -$$

$$-(G_3 + G_4)(G_1 + G_2 + 4G_4)].$$

22. СУДАР

22.1 ВРСТЕ СУДАРА

У Динамици материјалне тачке **(чл. 4.1)** дефинисали смо импулс силе као вектор интеграл (88)

$$\vec{\mathbf{I}} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\, dt = m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{K} - \vec{K}_0;$$

једнак прираштају количине кретања за временски размак $t - t_o$, где је $\vec{v}$ брзина која одговара тренутку $t = t_0 + \Delta t$ а $\vec{v}_0$ времену t_0. Када је сила $\vec{F}$ *коначна* импулс $\vec{\mathbf{I}}$ једнак је нули при $t \to t_0$. Ако је промена брзине $\vec{v} - \vec{v}_0$ коначне величине и изведена за врло кратко време, мора и импулс силе бити коначан те сила $\vec{F}$ мора бити *бесконачно велика.* Овакве силе које трају врло кратко време и дају коначан импулс називају се *тренутне силе коначног импулса.*

Из закона о живој сили (чл. 4.3 обр. 104) следи да је прираштај живе силе (кинетичке енергије)

$$E_k - E_{ko} = \int_{t_0}^{t} (\vec{F}, \vec{ds}) = \int_{t_0}^{t} (\vec{F}, \vec{v}\; dt) = {}^1/_2\, [(\vec{\mathbf{I}}, \vec{v}_0) + (\vec{\mathbf{I}}, \vec{v})].$$

За бескрајно мали временски размак, прираштај живе силе (кинетичке енергије) и рад тренутних сила имају коначне величине.

Померање тачке за тај прираштај времена бесконачно је мало и тежи нули. Како је $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ то је

$$\vec{\mathbf{I}} = m\,\vec{v} - m\,\vec{v}_0 = m\,\dot{\vec{r}} - m\,\vec{v}_0$$

па интеграљењем, у размаку $t - t_0$ добивамо

$$m\,(\vec{r} - \vec{r}_0) = m\,\vec{v}_0\,(t = t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{\mathbf{I}}\, dt = \vec{\mathbf{I}}_m\,(t - t_0),$$

где је $\vec{\mathbf{I}}_m$ средња вредност импулса у размаку $t - t_0$. Када $t \to t_0$ биће

$$\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = 0$$

те можемо сматрати да тачка остаје, за време овог кратког дејства силе, непокретна.

Када на материјалну тачку дејствују и коначне силе, тада је укупан импулс

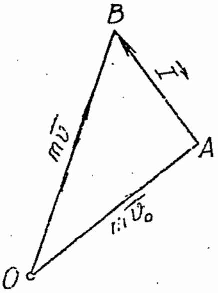
$$\vec{\mathbf{I}} = m\,\vec{v} - m\,\vec{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\,dt + \int_{t_0}^{t} \vec{F}_k\,dt = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\,dt,$$

пошто је други интеграл једнак нули, јер је сила коначна а временски размак тежи нули.

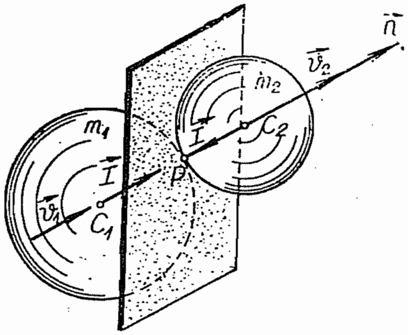
Дејство које неком телу дају ове тренутне силе коначног импулса назива се *удар*. Величина $\vec{\mathbf{I}}$ одређена горњом вредношћу назива се *импулс удара (ударни импулс)* и у *теорији идеалног удара игра исту улогу коју има сила при обичном кретању.* Према томе код удара разликујемо три елемента: *брзину* $\vec{v}_0$, у тренутку t_0, *брзину* $\vec{v}$, у тренутку $t = t_0 + \Delta t$, и *ударни импулс* $\vec{\mathbf{I}}$. Између ових елемената постоји веза

$$m\,\vec{v} = m\,\vec{v}_0 + \vec{\mathbf{I}} \tag{400}$$

коју можемо изразити из троугла OAB (сл. 170).



Сл. 170. — Ударни импулс



Сл. 171. — Први централни судар

Напишемо ли једначину (400) у облику

$$\vec{\mathbf{I}} + m(\vec{v}_0 - \vec{v}) = \vec{\mathbf{I}} + (-\Delta m\,\vec{v}) = 0, \tag{400'}$$

она претставља *Даламберов принцип при судару*, којим се успоставља равнотежа између импулса и импулса сила инерције (изгубљене количине кретања).

У случају принудног кретања (са везама) биће:

$$\vec{I} + \vec{I}_w + (-\Delta m \vec{v}) = 0, \tag{400''}$$

где је $\vec{I}_w$ *импулс везе.*

Ударни импулс које тело добива долази увек од неког другог тела, па се удар стварно своди на *судар тела*[1]. Нека су масе тела m_1 и m_2 и брзине њихових тежишта пре судара (*долазне брзине*) v_1 и v_2 онда ће се она у тренутку судара *додирнути у заједничкој тачки P* (сл. 171) у којој оба тела имају заједничку тангенцијалну раван, а затим ће се удаљити брзинама (*одлазним брзинама*) v'_1 и v'_2 или ће остати нека од њих у миру.

Нормала повучена у тачки судара (P) на тангенцијалну раван (додирну раван) назива се *нормала* или *правац судара.* Ако су у тренутку судара тежишта тела на овој нормали, судар се назива *централан,* у противном је *ексцентричан.* Буду ли вектори долазних брзина оба тела колинеарни са нормалом судара, судар се назива *прави* (*управни*), у противном је *коси судар.*

У тренутку судара оба се тела *деформишу.* Ова деформација траје извесно време док пројекције брзина тежишта оба тела на правац судара не буду једнаке по величини; тада су пројекције релативних брзина тежишта на правац судара једнаке нули. Од овога тренутка почиње прираштај пројекција релативних брзина до тренутка успостављања стања тела као што су била и пре судара, када се тела одвајају једно од другог. Према томе период судара Δt може се поделити на два периода: $\Delta t'$ (*период компресије*) и $\Delta t''$ (*период реституције*).

Да би тело масе m_1 ударило у тело масе m_2 мора бити $v_1 > v_2$. Како спољашње коначне силе не узимамо у обзир, то је $\vec{F}_r = 0$, те можемо применити закон о количини кретања система (**чл. 12.4**):

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v'}_1 + m_2 \vec{v'}_2. \tag{401}$$

Када су познате масе и долазне брзине не можемо помоћу ове једначине одредити одлазне брзине, јер имамо две непознате а само једну једначину. Треба нам још једна једначина као карактеристика самог процеса судара. У периоду компресије чврстих тела брзина првог ће се смањити за $(v_1 - c)$, а другог повећати за $(c - v_2)$, где је c брзина оба тела на крају компресије. Како су тела деформабилна неће се, уопште узев, деформације потпуно изгубити и у току реституције, па ће се брзина v_1 још смањити за величину $k \cdot (v_1 - c)$, а v_2 пове-

---

[1] *Marcus Marci* (1595—1667): „*De proportione motus*“, 1639.

ћати за износ $k\,(c - v_2)$, где је k неки коефицијент. Због тога ће одлазне брзине бити:

$$v'_1 = v_1 - (1 + k)\ (v_1 - c) = (1 + k)\,c - k\,v_1,$$

$$v'_2 = v_2 + (1 + k)\ (c - v_2) = (1 + k)\,c - k\,v_2.$$

Одузимањем ових једначина добивамо

$$v'_2 - v'_1 = k\,(v_1 - v_2).$$

Однос пројекција релативних брзина тежишта тела после и пре судара

$$\boxed{k = \frac{v_r'}{v_r} = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}} \qquad (402)$$

назива се *коефицијент судара (коефицијент успостављања)*. Како је Њутн показао, он не зависи од облика, величине ни од брзине тела, већ само од њихових еластичних особина. Он је *неименовани број* и одређује се експериментално.

При удару кугле масе m, о непокретну глатку површину, $f(x, y, z) = 0$, једначина (400) за оба периода даје:

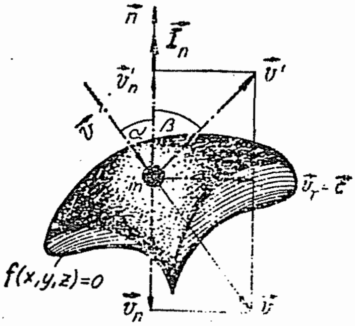
$$m\vec{c} - m\vec{v} = \vec{\mathrm{I}}_k, \quad m\vec{v}' - m\vec{c} = \vec{\mathrm{I}}_r,$$

где је $\vec{c}$ брзина у току процеса удара а I_k и I_r импулси у оба периода. Оба ова импулса падају у правац нормале површине — везе. Означимо са α угао који гради брзина $\vec{v}$ са нормалом $(\vec{\mathrm{n}})$ и са β одбојни угао, а како је брзина $\vec{c}$ могућна брзина за дату везу и задовољава услов $(\vec{c}, \operatorname{grad}\vec{f}) = (\vec{c}, \vec{\mathrm{n}}) = 0$, множењем горњих једначина ортовима $\vec{\mathrm{n}}$ и $\vec{\mathrm{T}}$ добивамо:

$$-m\,(\vec{v}, \vec{\mathrm{n}}) = m\,v\cos\alpha = \mathrm{I}_k,$$

$$m\,(\vec{v}', \vec{\mathrm{n}}) = m\,v'\cos\beta = \mathrm{I}_r,$$

$$m\,c = m\,(\vec{v}, \vec{\mathrm{T}}) = m\,(\vec{v}', \vec{\mathrm{T}}),\ c = v\sin\alpha = v'\sin\beta.$$



Сл. 172. — Удар кугле у непокретну површину

Однос импулса у оба периода удара јесте коефицијент судара

$$\boxed{k = \frac{\mathrm{I}_r}{\mathrm{I}_k} = \frac{v' \cos \beta}{v \cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}} \tag{402'}$$

Када лопта падне без почетне брзине, у безваздушном простору, са висине H на непокретну раван, од истог материјала, тада је њена релативна брзина при удару $v_1 = \sqrt{2gH}$. После удара лопта ће отскочити на висину h, па је брзина $v_1' = \sqrt{2gh}$, те је коефицијент удара

$$k = v_1'/v_1 = \sqrt{h/H} \leq 1.$$

За случај да су лопта и раван од слонове кости биће $k = {}^8/_9$, од дрвета ${}^1/_2$, стакла ${}^{15}/_{16}$, челика ${}^5/_9$.

Према вредности коефицијента судара разликујемо две врсте судара:

1^0 *нееластичан (пластичан)*[1], $k = 0$, тј. ако је $v_2' = v_1'$ што значи *да се брзине тела после судара изједначују,* и

2^0 *еластичан*[2], $k = 1$, што значи да је $v_2' - v_1' = v_1 - v_2$, тј. $v_r' = -v_r$, *те се релативне брзине изједначују.*

Ове две врсте судара су граничне, пошто је увек $0 < k < 1$.

Из (402') добивамо:

1^0 за $k = 0$ је $\beta = {}^1/_2 \pi$ па је $(\vec{v}', \vec{n}) = 0$,

2^0 за $k = 1$, $\alpha = \beta$, па је $v' = v$ и $(\vec{v}', \vec{n}) = -(\vec{v}, \vec{n})$,

3^e за $0 < k < 1$ биће $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \beta$ па је $\alpha < \beta$.

22.2 УПРАВНИ ЦЕНТРАЛНИ СУДАР

Претпоставимо да је брзина тела (C_1) већа од брзине тела (C_2), $v_1 > v_2$, и да су пре тренутка судара колинеарне са правцем судара (сл. 173), онда помоћу закона о одржању количине кретања

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

---

[1] Wallis (1616—1703), „Mechanica sive de motu", 1688.

[2] Huygens, „De motu corporum ex percusione".

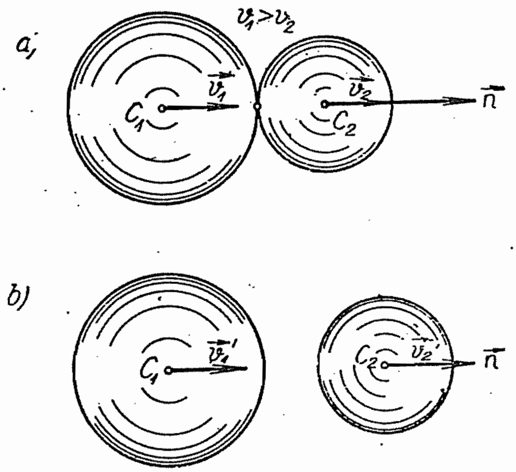
и коефицијента судара (402) можемо одредити брзине тела после судара по једначинама:

$$v_1' = \frac{(m_1 - km_2)v_1 + (1+k)m_2 v_2}{m_1 + m_2} = v_1 - \frac{1+k}{1+(m_1/m_2)}(v_1 - v_2), \tag{403}$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - k m_1)v_2 + (1+k)m_1 v_1}{m_1 + m_2} = v_2 + \frac{1+k}{1+(m_2/m_1)}(v_1 - v_2).$$

Импулс судара је

$$I = m_1(v_1' - v_1) = -\frac{m_1 m_2 (1+k)(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}. \tag{403'}$$



Сл. 173. — Управни централни судар

За *нееластичан (пластичан) судар* ($k = 0$) биће:

$$\boxed{v_1' = v_2' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad I = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_1'),} \tag{403''}$$

док су *одлазне брзине* при *потпуно еластичном судару* ($k = 1$):

$$\boxed{\begin{gathered} v_1' = v_1 - \frac{2\,m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2), \quad v_2' = v_2 + \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2), \\ I = -\frac{2\,m_1 m_2 (v_1 - v_1')}{m_1 + m_2} \end{gathered}} \tag{403'''}$$

Из ових односа видимо да су одлазне брзине при потпуно пластичном судару *једнаке*, док се при потпуно еластичном судару *одлазна брзина бржег тела смањује* а *споријег тела повећава*. При овом судару одлазне брзине су једнаке ако су и долазне брзине једнаке без обзира колике су масе тела.

Да би се тела при нееластичном судару одмах зауставила мора бити задовољен услов $m_1 v_1 = -m_2 v_2$, тј. масе стоје у обрнутом односу брзина.

Кинетичке енергије система тела пре и после судара износе:

$$E_k = {}^1/_2\,(m_1\,v_1^2 + m_2\,v_2^2),\quad E_k' = {}^1/_2\,(m_1\,v_1'^2 + m_2\,v_2'^2). \qquad (404)$$

Њихова разлика претставља *губитак кинетичке енергије при судару*

$$\boxed{\Delta\,E_k = \frac{m_1\;m_2}{2\,(m_1 + m_2)}\,(1 - k^2)\;(v_1 - v_2)^2} \qquad (405)$$

Например, ако је губитак енергије $\Delta\,E_k = {}^1/_8\,E_k$ онда се добива

$${}^1/_8 - [v_1\;v_2/3\,(v_1 - v_2)^2] = k^2,$$

па је коефицијент судара $k^2 < {}^1/_8$.

Губитак кинетичке енергије при *потпуно пластичном судару* износи:

$$\boxed{\Delta\,E_k = {}^1/_2\,\frac{m_1\,m_2}{m_1 + m_2}\,(v_1 - v_2)^2} \qquad (405')$$

а за *еластичан судар* ($k = 1$) је

$$\boxed{\Delta\,E_k = 0} \qquad (405'')$$

У првом случају не важи закон о одржавању кинетичке (механичке) енергије, а у другом важи. У првом се случају, према оштем закону о одржању енергије, кинетичка енергија претвара у друге врсте енергије.

Ове једначине претстављају *Карно*-ову (*Lazare Carnot*, 1753 — 1823 год.) *теорему*.

Нека је дат систем нееластичних тела, која су у непосредном или посредном судару. Нека је брзина произвољног тела, масе m_i, пре судара $\vec{v}_i$ а после судара $\vec{v}_i{}'$ онда је тело услед судара изгубило брзину $\vec{v}''$ тако да из векторског троугла брзина (слично сл. 94) следи

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i{}' + \vec{v}_i{}''.$$

Помножимо квадрат овог израза масом и саберимо за цео систем, биће

$$\Sigma\,m_i\,v_i^2 = \Sigma\,m_i\,v_i'^2 + \Sigma\,m_i\,v_i''^2 + 2\,\Sigma\,(\vec{v}',\;m_i\;\vec{v}_i{}'').$$

Како се према Даламберовом принципу изгубљене количине кретања система држе у равнотежи (према 292), то је кинетичка енергија система пре судара

$$E_k = E_k' + E_k'',$$

односно губитак кинетичке енергије при судару

$$\Delta \; E_k = E_k'' = \Sigma \, m_i \, v_i''^2 .$$

Ово је израз *прве Карно-ове теореме: При судару система нееластичних материјалних тела губитак кинетичке енергије једнак је кинетичкој енергији изгубљених брзина.*[1]

Примери. — **95)** Еластична кугла масе m_1 удари у две кугле маса m_2 и m_3, од истог материјала, које су пре судара биле у миру. Средишта свих кугла леже на једној прави.

Колика треба да буде маса друге кугле m_2 да би трећа кугла добила највећу брзину? Колика је та брзина? (*Huygens*).

Решење. — Одлазне брзине друге и треће кугле износе:

$$v_2' = (1 + k) \, m_1 \, v_1/(m_1 + m_2), \quad v_3' = (1 + k) \, m_2 \, v_2'/(m_2 + m_3) = f \, (m_2).$$

С обзиром на услов екстремума добивамо да је $m_2 = \sqrt{m_1 \, m_3}$, па је одлазна брзина треће кугле

$$v_3'{}_{max} = (1 + k)^2 \, m_1 \, v_1/(m_1 + 2 \, m_2 + m_3).$$

96) Кугла падне са висине h на непокретну хоризонталну раван и отскочи одње на висину $^1/_2 \, h$. Колики је коефицијент удара?

$$(1/\sqrt{2}).$$

97) На једној прави налази се n кугли у миру. Првој кугли саопшти се брзина v_1 у правцу дате праве а у смеру ка наредној кугли.

Одредити одлазну брзину последње кугле ако све имају исти коефицијент еластичности k.

Решење. — Према (403) поступно добивамо одлазне брзине

$$v_2' = (1 + k) \, m_1 \, v_1/(m_1 + m_2),$$

$$v_3' = (1 + k) \, m_2 \, v_2' (m_2 + m_3) = (1 + k)^2 \cdot [m_1/(m_1 + m_2)] \quad [m_2/(m_2 + m_3)] \, v_1,$$

па је уопште за n-ту куглу:

$$v_n' = (1 + k)^{n-1} \, v_1 \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{m_\nu}{m_\nu + m_{\nu+1}} =$$

$$= (1 + k)^{n-1} \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_2}{m_2 + m_3} \cdots \frac{m_{n-1}}{m_{n-1} + m_n} \, v_1 .$$

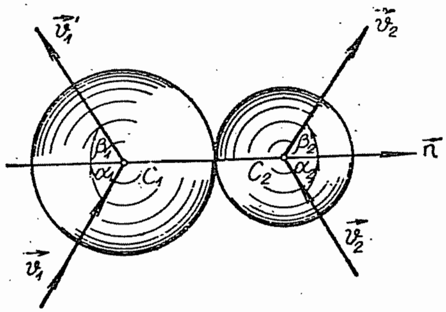
22.3 КОСИ ЦЕНТРАЛНИ СУДАР

Када долазне брзине v_1 и v_2 двеју кугли маса m_1 и m_2 чине са нормалом судара углове α_1 и α_2 *(упадне углове)* онда је *судар кос*

---

[1] L. Carnot, „Principes fondamentaux de l'équilibre et de mouvement", 1803.

(сл. 174) па ће и одлазне брзине градити са истом нормалом *одбојне углове* β_1 и β_2. Да бисмо одредили кретање кугли после судара потребно је да одредимо четири непознате величине: *две одлазне брзине* и *два одбојна угла.* Због тога разложимо одлазне брзине у по две компоненте: *нормалне* (у правцу нормале судара — *правца импулса*) и *тангенцијалне* (управо на претходни правац а у тангенцијалној равни). Под претпоставком да су површине кугли глатке а пошто нема ударних импулса у додирној равни, према (403), добивамо четири једначине са четири непознате



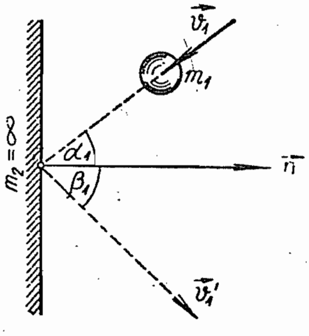
Сл. 174. — Коси централни судар

$$\boxed{\begin{aligned} v_1' \cos\beta_1 &= v_1 \cos\alpha_1 - \frac{1+k}{1+(m_1/m_2)}(v_1 \cos\alpha_1 - v_2 \cos\alpha_2), \\ v_2' \cos\beta_2 &= v_2 \cos\alpha_2 + \frac{1+k}{1+(m_2/m_1)}(v_1 \cos\alpha_1 - v_2 \cos\alpha_2), \\ m_1 v_1' \sin\beta_1 &= m_1 v_1 \sin\alpha_1, \quad m_2 v_2' \sin\beta_2 = m_2 v_2 \sin\alpha_2 \end{aligned}} \quad (406)$$

Из њих можемо одредити непознате величине (v_1', v_2', β_1, β_2).

На овај проблем своди се и проблем удара тела о непомичну површину. Например, када лопта масе m_1 удари у вертикални зид под углом α_1 према нормали удара, онда ће се од њега одбити под углом β_1 брзином v_1' (сл. 175). Како је у овом случају $m_2 = \infty$ а $v_2 = 0$, то из једначина (406) добивамо:

$$\begin{aligned} v_1' \cos\beta_1 &= -k\, v_1 \cos\alpha_1, \\ v_1' \sin\beta_1 &= v_1 \sin\alpha_1. \end{aligned} \quad (406')$$



Сл. 175. — Коси удар кугле о вертикални зид

Деобом ових једначина следи k tg $\beta_1 =$ $= -$ tg α_1 па је из прве одлазна брзина

$$v_1' = v_1 \cos\alpha_1 \sqrt{k^2 + \mathrm{tg}^2\, \alpha_1}. \quad (406'')$$

Код *еластичног судара* ($k = 1$) биће одлазна брзина

$$v_1' = v_1,$$

једнака долазној брзини, а угао је $\beta_1 = \alpha_1$ што значи *да ће се кугла одбити од вертикалног зида истом брзином и под истим углом према нормали судара.*

Код *нееластичног судара* ($k = 0$) биће

$$v_1' = v_1 \sin \alpha_1; \quad \beta = {}^1/_2\, \pi$$

па ће се кугла кретати дуж вертикалног зида.

Међутим, за *непотпуно еластичан судар* ($0 < k < 1$) биће одлазна брзина

$$v_1' < v_2, \text{ и } \beta_1 > \alpha_1$$

што значи да ће се *кугла одбити од зида мањом брзином али под већим углом према нормали судара.*

На овакве проблеме наилази се код *билијара.* Да би кугла ударена у тачки N (ξ, η) додирнула све четири стране билијарског стола и опет се вратила у полазни положај потребно је, при потпуно еластичном судару, да буде ударена у смеру једне дијагонале стола.

Доказ се може једноставно извести. Нека су тачке удара о бокове стола: A (0, a), C (c, h), D (b; d) и E (e, 0). Путања мора бити *паралелограм* са угловима 2α и $180—2\alpha$. Једначина праве која пролази кроз средине паралелних страна паралелограма, напр., AC и ED, је $y - {}^1/_2\,(h + a) = -(a/e)\,(x - {}^1/_2\, c)$, па пролази и кроз темена правоугаоног стола F (b, 0) и H (0, h).

Примери. — 98) Еластична куглица (коефицијента еластичности k) бачена је почетном брзином v_0 и елевационим углом α према хоризонту. Одредити њено кретање после удара у хоризонталну глатку раван *(проблем рикошета).*

Решење. — Кретање је по параболама. Домет је $D_1 = (v_0^2/g) \sin 2\,\alpha$. Хоризонтална компонента брзине остаје стално константна $v_0 \cos \alpha = const.$, док ће вертикална компонента бити $k\, v_0 \sin \alpha$, па је нови домет $D_2 = D_1\, k$, треће параболе $k^2\, v_0 \sin \alpha$, па је $D_3 = D_1\, k^2$ што значи да домети опадају у *геометриској прогресији* коефицијента k. Укупни домет биће

$$D = D_1\,(1 + k + k^2 + \ldots) = D_1/(1 - k).$$

99) На хоризонталној глаткој равни налазе се три исте еластичне кугле. Две су у миру и додирују се. Под којим углом треба трећа кугла, која се креће брзином v_3, да удари у једну од ових двеју кугли да би иста отишла у одређеном правцу (сл. 176)?

Решење. — Нека кугла III удари куглу II онда иста добије, према (402), брзину $v_2' = {}^1/_2\,(1 + k)\, v_3$. Прва кугла добије брзину $v_1' = {}^1/_4\,(1 + k)^2\, v_3 \cos \alpha$ тако да другој кугли остаје хоризонтална компонента брзине

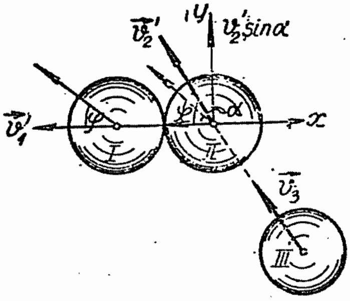
$$v_2''x = v_2'x - v_1' = {}^1/_4\,(1 - k^2)\, v_3 \cos \alpha,$$

па је

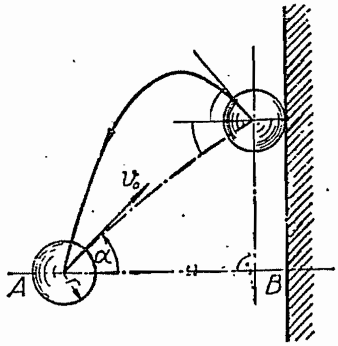
$$\operatorname{tg} \varphi = v'_{2y}/v_2''x = 2 \operatorname{tg} \alpha/(1 - k).$$

100) Кугла, полупречника $r = 5$ cm, чије се средиште налази на отстојању $\overline{AB} = b$ од вертикалног зида, бачена је почетном брзином $v_0 = 8{,}4$ m/sec и елевационим углом $\alpha = 45^0$ према хоризонту. После удара у зид кугла се враћа у почетни положај.

Одредити раздаљину $\overline{AB} = b$ ако је зид гладак а $k = 0{,}5$ (сл. 177).



Сл. 176



Сл. 177. — Одбој лопте од зида

Решење. — Кугла ће ударити у зид брзином v под углом φ, који чини тангента повучена на њену путању са нормалом удара, а одбиће се под углом θ. Обе су путање параболе па можемо сматрати да је парабола повратне путање парабола косог хица почетне брзине v_0' и елевационог угла α'. Из обрасца за коси хитац (67) следе једначине парабола

$$z = y \operatorname{tg} \alpha - {}^1\!/_2 g\, y^2/v_0^2 \cos^2 \alpha, \quad z = y \operatorname{tg} \alpha' - {}^1\!/_2 g\, y^2/v_0'^2 \cos^2 \alpha'.$$

С обзиром на обрасце (65) и (406) биће:

$$v_0 \cos \alpha = v \cos \varphi, \quad v_0' \cos \alpha' = v' \cos \theta = - k v \cos \varphi =$$
$$= - k\, v_0 \cos \alpha, \quad k \operatorname{tg} \theta = - \operatorname{tg} \varphi.$$

Како је

$$(v_0' \cos \alpha')^2 = k^2 v_0^2 \cos^2 \alpha$$

то одузимањем једначина линија путања добивамо однос

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha' = - {}^1\!/_2 g\, y\, (1 - k^2)/k^2 v_0^2 \cos^2 \alpha.$$

Диференцирањем тих једначина биће

$$\operatorname{tg} \varphi = z' = \operatorname{tg} \alpha - (g\, y/v_0^2 \cos^2 \alpha), \quad \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \alpha' - (g\, y/k^2 v_0^2 \cos^2 \alpha),$$

па је

$$\operatorname{tg} \alpha' = (g\, y/k^2 v_0^2 \cos^2 \alpha) - (\operatorname{tg} \varphi)/k.$$

Из везе $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha'$ добивамо релацију

$$\operatorname{tg} \alpha = g\, y\, (1 + k)/2\, k\, v_0^2 \cos^2 \alpha,$$

па је

$$y = (k\, v_0^2 \sin 2\,\alpha)/g\, (1 + k), \quad \text{односно} \quad b = y + r = 2{,}45 \text{ m}.$$

22.4 СУДАР ПЛОЧА

Када плоча која се компланo креће транслаторном брзином $\vec{v}_C$ и угаоном брзином ω добије у једној својој тачки *удар*, тада ударни импулс, уопште узев, не пролази кроз тежиште плоче, те је иста изложена *ексцентричном удару*. Услед њега промениће се и транслаторна и угаона брзина и биће $\vec{v}'_C$ и ω'. На основу закона о количини кретања и о замаху биће

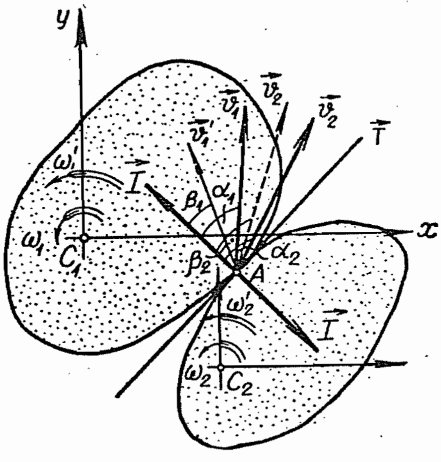
$$\Delta \vec{K} = \Delta (M \vec{v}_C) = \Sigma \vec{\mathbf{I}} = \vec{\mathbf{I}}_r, \quad \Delta \vec{L} = \Sigma \vec{M}^{\vec{\mathbf{I}}} = \vec{\mathfrak{M}}_u. \tag{407}$$

Промена количине кретања једнака је главном ударном импулсу а промена замаха главном моменту импулса (обртном импулсу). У скаларном облику горње једначине дају систем од три једначине

$$\boxed{\begin{gathered} M(\dot{x}'_C - x_C) = \mathbf{I}_x, \quad M(y'_C - y_C) = \mathbf{I}_y, \\ J_c(\omega' = \omega) = \mathfrak{M}_u = \mathbf{I}_r\, d \end{gathered}} \tag{407'}$$

Овде су: M маса плоче, $\vec{v}_C$ долазна брзина њеног средишта, $\vec{v}'_C$ одлазна брзина, J_c момент инерције плоче за тежишну осу управну на раван плоче, $\mathbf{I}_r$ главни ударни импулс и d крак импулса.

Када се две плоче које се крећу комплано сударе у тачки A (сл. 178) онда је *судар ексцентричан*, јер тежишта плоча не леже на нормали судара. Прва плоча добива импулс $\mathbf{I}$ и импулсни момент $\mathbf{I}\, d_1$, а друга супротни импулс $-\mathbf{I}$ и момент $-\mathbf{I}\, d_2$. Да бисмо одредили седам непознатих величина $\dot{x}'_{C1}$, $\dot{y}'_{C1}$, ω'_1, $\dot{x}'_{C2}$, $\dot{y}'_{C2}$, ω'_2, $\mathbf{I}$ потребно је и седам једначина. Шест једначина добивамо из система (407') а седму помоћу коефицијента судара



Сл. 178. — Судар плоча

$$k = \frac{v'_2 \cos \beta_2 - v'_1 \cos \beta_1}{v_1 \cos \alpha_1 - v_2 \cos \alpha_2} = const. \tag{408}$$

Он показује да је *количник пројекције релативне брзине на правац импулса додирне тачке обеју плоча после и пре судара константан, и зависи само од материјала плоча.* Те брзине одредићемо ако у тежиштима плоча узмемо два паралелна координатна система, тако да је додирна тачка A одређена координатама A $(x_1, y_1;\ x_2, y_2)$, према

Кинематици **чл. 9** (обр. 138), једначинама;

$$\dot{x}_i = \dot{x}_{Ci} - y_i\,\omega_i, \quad \dot{y}_i = \dot{y}_{Ci} + x_i\,\omega_i, \qquad i = 1,2 \qquad (409)$$
$$\dot{x}'_i = \dot{x}'_{Ci} - y_i\,\omega'_i, \quad \dot{y}'_i = \dot{y}'_{Ci} + x_i\,\omega'_i.$$

За $k = 0$ из (408) добивамо

$$v'_2 \cos\beta_2 = v'_1 \cos\beta_1 \qquad (409')$$

тј. *пројекције одлазних брзина на правац импулса једнаке су.*

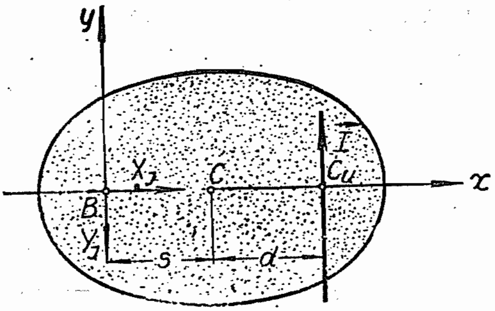
За $k = 1$ следи

$$v'_2 \cos\beta_2 - v'_1 \cos\beta_1 = v_1 \cos\alpha_1 - v_2 \cos\alpha_2 \qquad (409'')$$

тј. *пројекције релативних брзина на правац импулса пре и после судара једнаке су по интензитету али су супротног смера.*

Услед судара плоча биће губитак кинетичке енергије

$$\Delta E_k = {}^1\!/_2\,[M_1(v^2_{C_1} - v'^2_{C_1}) + J_1\,(\omega_1^2 - \omega'^2_1)] +$$
$$+ {}^1\!/_2\,[M_2(v^2_{C_1} - v'^2_{C_2}) + J_2\,(\omega_2^2 - \omega'^2_2)]. \qquad (410)$$



Сл. 179. — **Центар удара плоче**

Ако се *плоча обрће око једне непомичне тачке B* (сл. 179), онда има само један степен кретања. Нека је плоча у миру ($\omega = 0$) онда ће се услед удара $\vec{\mathrm{I}}$ појавити и *реактивни* удар у зглобу *B*. *Постоји само једна тачка плоче у којој треба да дејствује удар да би реактивни удар у зглобу B* био једнак нули. Да би било обртање мора удар I бити управан на праву *BC*, те је $\mathrm{I}_x = 0$, $\mathrm{I}_y = \mathrm{I}$. Због тога су компонентни реактивни импулси $\mathrm{I}_{wx} = 0$, $\mathrm{I}_{wy} = \mathrm{I}_w$, те једначине (407′) у вези са (400″) постају

$$M\,\dot{x}'_C = \mathrm{I}_x + \mathrm{I}_{wx} = 0, \quad M\,\dot{y}'_C = \mathrm{I}_y + \mathrm{I}_{wy} = \mathrm{I} + \mathrm{I}_w,$$
$$J\,\omega' = (J_c + M\,s^2)\,\omega' = \mathrm{I}\,(d + s); \quad J_c\,\omega' = \mathrm{I}\,d - \mathrm{I}_w\,s. \qquad (411)$$

Како мора бити $\mathrm{I}_w = 0$, то из друге једначине следи да је $\dot{y}'_C = \mathrm{I}/M$ а из четврте $\omega' = \mathrm{I}\,d/J_c$. Уношењем ових вредности у трећу једначину добивамо услов

$$\boxed{s = \frac{\mathrm{I}}{M\,\omega'} = \frac{J_c}{M\,d} = \frac{i_c^2}{d}, \quad i_c^2 = s\,d = s\,s'} \qquad (412)$$

Према томе су координатне тачке удара C_u

$$\boxed{x_u = s + d = s + s' = l_r,\ y_u = 0} \tag{412'}$$

Како је израз (412) идентичан са изразом за редуковану дужину клатна $l_r = s + s' = s + d$ обешеног у зглобу B, које може да осцилује око осе кроз тај зглоб управне на раван плоче, то се тачка назива *центар удара* (C_u) и одговара *Хајгенсовом центру клатна.* Из овога можемо извести овај закључак: *када ударни импулс дејствује у центру удара (Хајгенсовом центру) зглоб не трпи реактивне ударе.*

Например, физичком клатну облика штапа (сл. 124), које је у равнотежном положају, дат је импулс $\mathbf{I}$ у тачки A на удаљењу h од тачке вешања O управно на штап. Одредимо колики мора бити импулс да би се штап отклонио од равнотежног положаја за угао α.

Из (412) следи да је импулс $\mathbf{I} = J\,\omega'/h$. Како је из квадрата брзине $\dot\varphi^2 = 2(g/l_r)\,(1 - \cos\varphi) = 4\,(g/l_r)\,\sin^2 ({}^1/_2\,\varphi)$, биће $\omega' = 2\,\sqrt{g/l_r}\,\sin {}^1/_2\,\alpha$, те, због $J = {}^1/_3\,\mathrm{M}\,l^2$ и $l_r = {}^2/_3\,l$, добивамо потребни импулс

$$\mathbf{I} = G\,\frac{l}{h}\,\sqrt{\frac{2}{3}\,\frac{l}{g}}\,\sin\,\frac{\alpha}{2}\,.$$

Реактивни импулс износи

$$\mathbf{I}_w = \frac{\mathbf{I}\,d - J_c\,\omega'}{s} = G\,\sqrt{\frac{2}{3}\,\frac{l}{g}}\left(\frac{3}{2} - \frac{l}{h}\right)\,\sin\,\frac{\alpha}{2}\,.$$

За $h = l_r$ реактивни импулс је заиста једнак нули.

Овом методом можемо одредити коефицијент судара штапа. Нека се штап отклони од равнотежног положаја за угао α_1 и пусти без почетне брзине (сл. 124), он ће услед удара у ослонац A, на удаљењу h од тачке вешања O и на његовој вертикали, одбити за угао α_2. Како је у тренутку удара импулс управан на штап, то је, према (408), због $v_2 = 0$, коефицијент судара

$$k = \frac{v'_1}{v_1} = \frac{\omega'_1}{\omega_1} = \frac{\sin\,{}^1/_2\,\alpha_2}{\sin\,{}^1/_2\,\alpha_1}\,,$$

јер је

$$\dot\varphi^3 = 2\,(g/l_r)\,(\cos\varphi - \cos\varphi_0), \quad \omega^2 = 4\,(g/l_r)\,\sin^2 {}^1/_2\,\alpha.$$

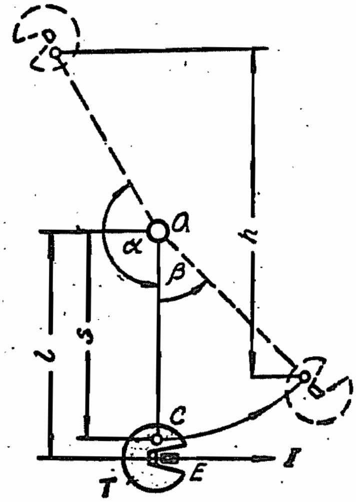
Charpy-ево клатно. — Ово клатно служи за испитивање *чврстоће материјала* на удар. Главни је део тог клатна тешки тег (T) који може да осцилује око непомичне хоризонталне осе и који на доњем крају носи нож којим при удару ломи епрувету материјала (E) чија се чврстоћа испитује (сл. 180). Тег се из равнотежног положаја отклони за угао α ($\alpha > 90^0$) и пусти. При пролазу кроз равнотежни положај он ломи епрувету а затим се отклања од тог положаја за угао β.

Из закона о живој сили следи

$$\tfrac{1}{2} J \omega^2 = G h = G s (1 - \cos \alpha) = 2 G s \sin^2 (\tfrac{1}{2} \alpha)$$

па је угаона брзина клатна до удара

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{G s}{J}} \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \sqrt{\frac{g s}{i^2}} \sin \frac{\alpha}{2} ,$$



Сл. 180. — *Charpy*-ево клатно

где су: G тежина, J момент инерције клатна за осу кроз O, i полупречник инерције, $s = \overline{OC}$.

Рад утрошен на ломљење бићe

$$\mathbf{A}_d = G s (\cos \beta - \cos \alpha).$$

При удару појавиће се импулс на месту удара који дејствује у хоризонталном правцу. Из обрасца (407) следи

$$J (\omega' - \omega) = - \mathbf{I}\, l$$

одакле можемо одредити величину импулса. Овај импулс изазива тренутне притиске у лежишту O. Усвојимо координатни систем у тачки O, онда је притисак лежишта такође у хоризонталном правцу и према једначини (407) биће

$$M (\dot{x}'_C - \dot{x}_C) = M s (\omega' - \omega) = \mathbf{I}_w - \mathbf{I}$$

одакле је притисак

$$\mathbf{I}_w = M s (\omega' - \omega) + \mathbf{I} = [M s - (J / l)] (\omega' - \omega).$$

Тај ће притисак бити једнак нули ако је испуњен услов

$$l = J / M s = i^2 / s \doteq l_r$$

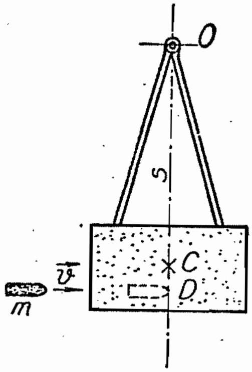
тј. *ако је удаљење центра удара од осе осциловања једнако редукованој дужини физичког клатна.*

Балистичко клатно[1]. — Балистичко клатно састоји се из једног сандука напуњеног песком или иловачом и обешеног о хоризонталну осу око које може осциловати (сл. 181). Оно служи за одређивање почетне брзине зрна испаљеног из оруђа. Нека је M маса клатна а m маса зрна, које можемо сматрати материјалном тачком, а J момент инерције клатна за хоризонталну осу кроз тачку O. Када зрно удари у балистичко клатно даће му импулс $\mathbf{I} = m v$ и оно ће добити елонгацију φ. Како нема спољашњих импулса то по закону о одржању замаха биће (за $\overline{OD} = l$):

$$L' = J \omega' + m l^2 \omega' - m v l = 0 ,$$

где је ω' угаона брзина обртања клатна после удара. Из ове једначине одредићемо брзину зрна

$$v = (J + m l^2) \omega' / m l. \qquad (a)$$



Сл. 181. — Балистичко клатно

---

[1] *Robin*, 1742 год.

Ако са s означимо растојање тежишта балистичког клатна од осе $O(\overline{OC} = s)$ онда је по закону о живој сили

$$^1/_2 (J + m\,l^2)\,\omega'^2 = (M\,g\,s + m\,g\,l) \cos\varphi + h,$$

где је $h = const.$ За $\varphi = \alpha$ биће $\omega' = 0$ па је $h = -\,M^*\,g\,s \cos\alpha$, где је $M^* = (M\,s + m\,l)$.

Због тога је

$$^1/_2 (J + m\,l^2)\,\omega^2 = M^*\,g\,(\cos\varphi - \cos\alpha).$$

Како је при $\varphi = 0$ почетна угаона брзина ω', то је

$$^1/_2 (J + m\,l^2)\,\omega'^2 = M^*\,g\,(1 - \cos\alpha) = 2\,M^*\,g \sin^2 (^1/_2\,\alpha)$$

па је почетна угаона брзина

$$\omega' = 2\sqrt{M^*\,g/(J + m\,l^2)}\cdot\sin(^1/_2\,\alpha). \qquad (b)$$

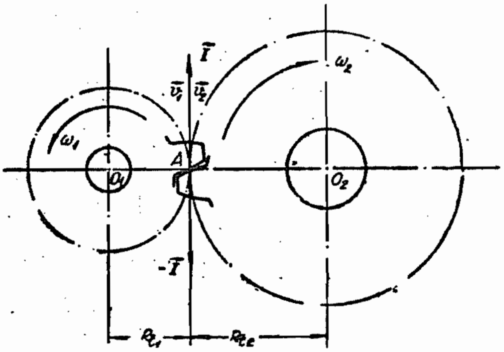
С обзиром на једначину (a) можемо одредити брзину зрна

$$v = 2\,[(J + m\,l^2)/ml]\,\sqrt{(M\,s + ml)\,g/(J + m\,l^2)}\,\sin\,^1/_2\,\alpha. \qquad (c)$$

Клатно се изводи тако да хоризонтална оса осциловања не трпи удар, те мора бити испуњен услов (412). Тада је брзина зрна

$$v \approx 2\,[(M\,s + m\,l)/m]\,\sqrt{g/l}\,\sin\,^1/_2\,\alpha. \qquad (d)$$

Судар захваћених зупчаника. — Два захваћена зупчаника маса M_1 и M_2 (сл. 182) обрћу се угаоним брзинама ω_1 и ω_2. Услед нетачног озубљавања у додирној тачки зубаца долази до судара. Тада је ударни импулс **I** управан на спојну праву $O_1\,O_2$. Како сваки зупчаник има само по један степен слободе кретања око непомичних оса то, према (407), добивамо односе



Сл. 182. — Судар захваћених зупчаника

$$J_1\,(\omega_1' - \omega_1) = \mathrm{I}\,R_1, \quad J_2\,(\omega'_2 - \omega_2) = -\,\mathrm{I}\,R_2, \qquad (a)$$

где су R_1 и R_2 полупречници подеоних (основних) кругова зупчаника. Под претпоставком да су површине зубаца глатке коефицијент судара је

$$k = (R_2\,\omega'_2 - R_1\,\omega'_1)/(R_1\,\omega_1 - R_2\,\omega_2). \qquad (b)$$

Из ових једначина можемо одредити непознате ω'_1, ω'_2, **I**.

Уведимо редуковане масе зупчаника на њихове обиме $M^*_1 = J_1/R_1^2$, $M^*_2 = J_2/R_2^2$ и претпоставимо да је судар потпуно нееластичан, тада је $R_1\,\omega_1' = R_2\,\omega_2'$ и једначина кретања је

$$M^*_1\,R_1\,(\omega_1' - \omega_1) + M^*_2\,R_2\,[(R_1/R_2)\,\omega_1' - \omega_2] = 0$$

те су обимне брзине после судара

$$R_1\,\omega'_1 = R_2\,\omega_2' = (M^*_1\,R_1\,\omega_1 + M^*_2\,R_2\,\omega_2)/(M^*_1 + M^*_2).$$

Оне се, дакле, одређују као брзине двеју материјалних тачака редукованих маса M^*_1 и M^*_2, долазних брзина $R_1\,\omega_1$, $R_2\,\omega_2$.

У случају овог судара губитак кинетичке енергије износи:

$$\Delta\,E_k = {}^1/_2\,M^*_1\;M^*_2\,(R_1\,\omega_1 - R_2\,\omega_2)^2/(M^*_1 + M^*_2).$$

Пример. — 101) Две кугле обешене су о тачке O_1 и O_2 помоћу конаца истих дужина, момената инерције за те осе J_1 и J_2 и додирују се. Лева кугла је изведена из равнотежног положаја за известан угао и пуштена. У тренутку удара у десну куглу њена је угаона брзина ω_1.

Одредити угаоне брзине кугли после удара.

Решење. — С обзиром на трећу једначину (407′) и (402) добивамо систем једначина

$$J_1\,(\omega'_1 - \omega_1) = I\,l, \quad J_2\,\omega_2' = - I\,l, \quad k = (\omega_2' - \omega_1')/\omega_1$$

па су одлазне угаоне брзине:

$$\omega'_1 \approx \omega_1\,(J_1 - k\,J_2)/(J_1 + J_2), \quad \omega'_2 = \omega_1\,J_1\,(1 + k)/(J_1 + J_2).$$

22.5 ДЕЈСТВО УДАРА НА ТЕЛО КОЈЕ СЕ ОБРЋЕ ОКО НЕПОМИЧНЕ ОСЕ. ЦЕНТАР УДАРА

Тело које се обрће око непомичне осе AB (сл. 119) трпи при обртању кинетичке притиске. Међутим, добије ли у некој тачки $N_0\,(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ удар импулса $\vec{I}$ онда ће и ослонци добити *реактивне импулсе* $\vec{I}_A$ и $\vec{I}_B$. Њих можемо одредити помоћу једначина (407), те добивамо векторске једначине

$$\boxed{\begin{aligned} &\Delta\,\vec{K} = \Delta\,(M\,\vec{v}_C) = M\,[\vec{\omega}' - \vec{\omega},\ \vec{\rho}_C] = \vec{I} + \vec{I}_A + \vec{I}_B \\ &\Delta\,\vec{L}_A = \Sigma\,[\vec{\rho}_i,\ \vec{I}_i] = [\vec{\rho}_0,\ \vec{I}] + [\vec{\rho}_B,\ \vec{I}_B] \end{aligned}} \qquad (413)$$

Како је непокретна оса AB уједно координатна оса Az то су $\omega_\xi = \omega_\eta = 0$ и $\omega_z = \omega$, па су, према (370′), компонентни замаси:

$$L_\xi = - J_{\xi z}\,\omega, \quad L_\eta = - J_{\eta z}\,\omega, \quad L_z = J_z\,\omega.$$

Пројицирањем вектора из једначина (413) на координатне осе добивамо шест скаларних једначина помоћу којих можемо одредити промену угаоне брзине обртања при удару и компонентне реактивне импулсе

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{I}_\xi + \mathbf{I}_{A\xi} + \mathbf{I}_{B\xi} = -M\eta_C(\omega' - \omega)\\
&\mathbf{I}_\eta + \mathbf{I}_{A\eta} + \mathbf{I}_{B\eta} = M\xi_C(\omega' - \omega)\\
&\mathbf{I}_z + \mathbf{I}_{Az} + \mathbf{I}_{Bz} = 0; \quad \mathbf{I}_{Bz} = 0\\
&(\eta_0\,\mathbf{I}_z - z_0\,\mathbf{I}_\eta) - \mathbf{I}_{B\eta}\,h = -J_{\xi z}(\omega' - \omega)\\
&(z_0\,\mathbf{I}_\xi - \xi_0\,\mathbf{I}_z) + \mathbf{I}_{B\xi}\,h = -J_{\eta z}(\omega' - \omega)\\
&(\xi_0\,\mathbf{I}_\eta - \eta_0\,\mathbf{I}_\xi) = J_z(\omega' - \omega).
\end{aligned}
\tag{414}
$$

При овоме смо претпоставили да реактивни импулси дејствују у позитивним смеровима координатних оса.

Центром удара назива се она тачка $C_u(\xi_u, \eta_u, z_u)$ у којој треба да дејствује удар да би реактивни импулси били једнаки нули $\vec{\mathbf{I}}_A = \vec{\mathbf{I}}_B = 0$.

Помножимо ли прву векторску једначину (413) прво ортом $\vec{k}$ а затим вектором положаја тежишта $\vec{\rho}_C$ тада, због наведеног услова, добивамо

$$M\,([\vec{\omega}' - \vec{\omega},\ \vec{\rho}_C]\,\vec{k}) = (\vec{\mathbf{I}},\ \vec{k}) = 0, \quad M\,([\vec{\omega}' - \vec{\omega},\ \vec{\rho}_C]\,\vec{\rho}_C) = (\vec{\mathbf{I}},\ \vec{\rho}_C) = 0\,.$$

Ове једначине показују да ударни импулс мора бити *управан на обртну осу* Az *и на раван која пролази кроз ту осу* и тежиште (C), тј тежиште тела мора бити у равни $A\eta z$. Због тога су компонентни импулси $\mathbf{I}_\eta = \mathbf{I}_z = 0$ и укупни импулс $\vec{\mathbf{I}} = \mathbf{I}_\xi\,\vec{i}' = \mathbf{I}\,\vec{i}'$. Оса Az је главна оса инерције тела за ту тачку, па је центрифугални момент $J_{\xi z} = 0$.

Када у једначине (414) уместо координата тачке N_0 ставимо координате центра удара C_u, с обзиром на горње односе добивамо

$$\mathbf{I} = -M\eta_C(\omega' - \omega), \quad z_u\,\mathbf{I} = -J_{\eta z}(\omega' - \omega), \quad -\eta_u\,\mathbf{I} = J_z(\omega' - \omega)$$

па су *координате центра удара*

$$\boxed{\xi_u = 0, \quad \eta_u = \frac{J_z}{M\eta_C}, \quad z_u = \frac{J_{\eta z}}{M\eta_C}} \tag{415}$$

Има ли тело раван симетрије управну на осу Az онда се тежиште тела налази у тој равни. Ако је оса Az уједно оса симетрије онда је $J_{\eta z} = 0$ па се добива образац (412), те се центар удара поклапа са Хајгенсовим центром.

У случају *танке хомогене плочице* уместо масених момената инерције могу се користити геометриски, па су координате центра удара

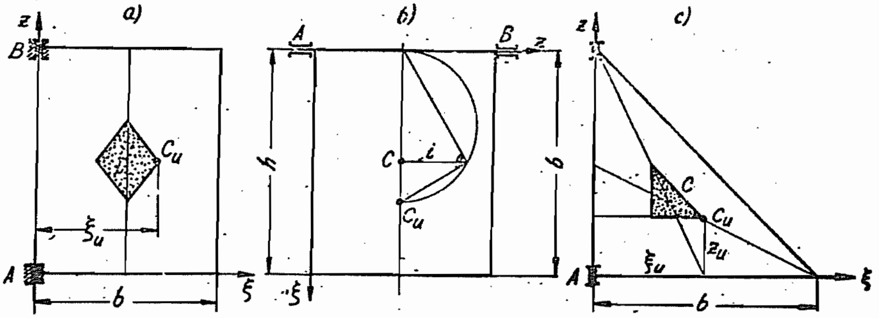
$$\boxed{\xi_u = 0; \quad \eta_u = \frac{i_z^2}{\eta_C}; \quad z_u = \frac{I_{\eta z}}{A\,\eta_C}} \qquad (415')$$

Центар удара поклапа се са оном тачком контуре језгра[1] *чија је неутрална оса сама оса око које се обрће плочица.*

Промене ли се индекси оса, лако се добивају одговарајући обрасци за координате центра удара.

Например, за правоугаони попречни пресек су: $i_z^2 = {}^1/_3\, b^2$, $\xi_C = {}^1/_2\, b$; $I_{\xi z} = {}^1/_4\, A^2$, па су координате центра удара (сл. 183 *a*)

$$\xi_u = {}^2/_3\, b = {}^1/_2\, b + {}^1/_6\, b; \quad z_u = {}^1/_2\, h.$$



Сл. 183. — Центар удара танке плочице поклапа се са тачком контуре језгра

Положај се може одредити и графички по методи одређивања језгра (сл. 183 *b*).

У случају равнокракоправоуглог троугла (сл. 183 *c*) добили бисмо: $i_z^2 = {}^1/_6\, b^2$, $\xi_C = {}^1/_3\, b$; $\xi_u = {}^1/_2\, b$; $I_{\xi z} = {}^1/_2 \iint z^2 \xi\, d\xi = {}^1/_{24}\, b^4$, јер је $\xi + z = b$ па је $z_u = {}^1/_4\, b$.

За случај полукружне плочице у равни $A\,\eta\,z$ која се обрће око пречника AB, због $I_z = {}^1/_8\, R^4 \pi$, $\eta_C = 4R/3\pi$, $I_{\eta z} = A\, z_C\, \eta_C$, $z_C = R$, добивамо:

$$\eta_u = {}^3/_{16}\, R\pi, \; z_u = R.$$

---

[1] Д. Рашковић, *Једна аналогија у механици.* Збор. рад. Маш. фак. 1952—53 г. стр. 49.

Пример. — 102) Одредити координате центра удара хомогене танке плочице облика кружног квадранта (сл. 184).

Решење. Момент инерције и центрифугални момент јесу

$$I_z = I_\zeta = \int_0^R \int_0^{1/2\pi} \rho^2 \cos^2 \varphi \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi =$$

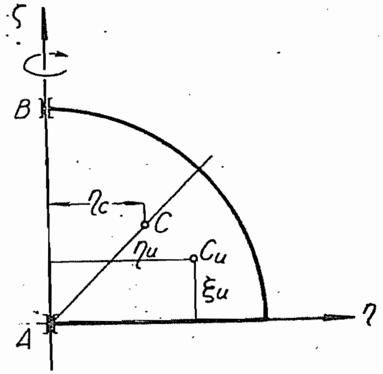
$$= {}^1/_{16} R^4 \pi = {}^1/_4 A R^2,$$

$$I_{\eta z} = I_{\eta\zeta} = \iint \rho^2 \cos\varphi \sin\varphi \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi = {}^1/_8 R^4 =$$

$$= {}^1/_2 A R^2/\pi.$$

Како је $\eta_C = 4 R/3\pi$ биће:

$$\eta_u = {}^3/_{16} R \pi, \; z_u = \zeta_u = {}^3/_8 R.$$



Сл. 184

22.6 ЛАГРАНЖЕВЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЗА ИМПУЛСЕ

Помножимо Лагранжеве једначине друге врсте

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = Q_i$$

са dt и интегралимо у размаку од t_0 до $t_0 + \Delta t = t$ добићемо

$$\int_{t_0}^{t} d \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial E_k}{\partial q_i} dt = \int_{t_0}^{t} Q_i \, dt.$$

Интеграл првог члана на левој страни горње једначине износи

$$\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right)_t - \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right)_{t_0} = \Delta \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) = \Delta (p_i)$$

и претставља прираштај генералисаног импулса (количине кретања или замаха). Интеграл другог члана је једнак нули, јер је тај члан коначне вредности при судару, а интеграл десне стране претставља *ударни импулс редукован на генералисану координату* q_i. Овим се начином Лагранжеве једначине друге врсте за тренутне силе коначног импулса изражавају новим једначинама

$$\boxed{\Delta \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) = \Delta (p_i) = \mathrm{I}_{qi}.} \tag{416}$$

Например, точак с венцем и жбицама укупне тежине G котрља се по путу брзином v_C и изненада удари на круту препреку висине h. Искористимо једначине (416) за одређивање кретања точка после удара.

Усвојимо у тачки удара A, која сада игра улогу тренутног пола и занемаримо утицај трења, координатни систем $A\,\xi\,\eta$ тако да оса $A\,\xi$ пада у правац тангенте на обим точка а $A\,\eta$ у правцу полупречника. Кинетичка енергија износи

$$E_k = {}^1/_2\, \mathrm{M}\, (\dot{\xi}c^2 + \dot{\eta}c^2) + {}^1/_2\, J_c\, \dot{\varphi}^2$$

па једначине (416) дају систем једначина

$$\mathrm{M}\,(\dot{\xi}_C - \nu_C \cos\alpha) = -\,\mathrm{M}\,R\,(\omega' + \omega \cos\alpha) = \mathbf{I}_{A\xi},$$

$$\mathrm{M}\,(\dot{\eta}_C + \nu_C \sin\alpha) = \mathrm{M}\,R\,\omega \sin\alpha = \mathbf{I}_{A\eta},$$

$$J_c\,(\omega' + \omega) = \mathbf{I}_{A\xi} R,$$

јер су: $\dot{\xi}_C = -\,R\,\omega'$; $\dot{\eta}_C = 0$. Угао α је између додирне нормале и правца тежине точка, те су

$$\cos\alpha = 1 - (h/R), \quad \sin\alpha = \sqrt{2\,(h/R) - (h/R)^2}$$

Момент инерције за његову осу износи

$$J_c = \mathrm{M}_\nu R^2 + {}^1/_3\, \mathrm{M}_r\, R^2 = {}^{10}/_9\, \mathrm{M}_\nu\, R^2 = {}^5/_6\, \mathrm{M}\, R^2,$$

јер је $G_r = {}^1/_3\, G_\nu$ и $G_\nu = {}^3/_4\, G$. Тада из горњих једначина добивамо угаону брзину обртања точка после удара, брзину средишта и компонентне реактивне импулсе

$$\omega' = -\,{}^1/_{11}\,(5 + 6\cos\alpha)\,\omega, \quad \dot{\xi}_C = {}^1/_{11}\,(5 + 6\cos\alpha)\,\nu_C,$$

$$\mathbf{I}_{A\xi} = {}^5/_{11}\,(1 - \cos\alpha)\,\mathrm{M}\,\nu_C, \ \mathbf{I}_{A\eta} = \mathrm{M}\,\nu_C \sin\alpha.$$

Да не би било клизања мора бити задовоље услов чистог котрљања

$$\mu \geqslant \mathbf{I}_{A\xi}/\mathbf{I}_{A\eta} = 5\,(1 - \cos\alpha)/11 \sin\alpha.$$

Како су кинетичке енергије пре и после удара

$$E_k = {}^1/_2\, \mathrm{M}^*\, \nu^2{}_C = {}^{11}/_{12}\, \mathrm{M}\, \nu^2{}_C, \quad E_k' = {}^{11}/_{12}\, \mathrm{M}\, \dot{\xi}^2{}_C =$$

$$= {}^{11}/_{12}\, \mathrm{M}\, \nu^2{}_C\, [(5 + 6\cos\alpha)/11]^2$$

то губитак енергије износи

$$\Delta E_k = {}^1/_{11}\, \mathrm{M}\, \nu^2{}_C\,(8 - 5\cos\alpha - 3\cos^2\alpha).$$

За случај да је висина препреке мала у односу на полупречник точка можемо ставити да је $(h/R)^2 \approx 0$, те добивамо вредности

$$\sin\alpha \approx \sqrt{2\,(h/R)}; \ \omega' = -\,\omega\,[1 - {}^6/_{11}\,(h/R)],$$

$$\mathbf{I}_{A\xi} = {}^5/_{11}\, \mathrm{M}\, \nu_C\,(h/R), \ \mathbf{I}_{A\eta} = M\, \nu_C \sqrt{2\,h/R}, \ \Delta E_k = {}^1/_{11}\, \mathrm{M}\, \nu^2{}_C\,[3 + (h/R)].$$

Пример. — 103) Фудбалска лопта коефицијента еластичности k при удару о земљу има вертикалну компоненту брзине $\dot{y}$ и угаону брзину ω.

Одредити домет лопте после удара у земљу.

Решење. — Вертикална компонента одбојне брзине је $V' \sin \alpha = -k \dot{y}$. Из једначина

$$M \dot{x}' = I_w = M R \omega', \ J_c (\omega' - \omega) = - I_w R, \ J_c \approx {}^2/_3 M R^2,$$

где је I_w импулс трења, одређујемо брзине

$$\omega' = {}^2/_5 \omega, \ \dot{x}' = {}^2/_5 R \omega$$

па је домет косог хица

$$D = (V'^2/g) \sin 2 \alpha = {}^4/_5 k R (\dot{y} \omega / g).$$

23. — КРЕТАЊЕ ТЕЛА СА ПРОМЕНЉИВОМ МАСОМ

У **чл. 18.2** проучили смо како се равно кретање крутог тела своди на кретање једне материјалне тачке променљиве масе M (обр. 348″) коју смо назвали *редукованом масом*. Уствари маса се тела није мењала, али нам је редукција масе омогућила упрошћавање решавања проблема кретања. Међутим, јављају се у техничкој пракси и многи проблеми када се маса тела *стварно мења* у току времена а може иста да зависи и од положаја, брзине и времена, $M = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$.

Нека се тело креће *транслаторно брзином* $\vec{v}$. Ако му је маса константна онда је према закону о количини кретања $M\, d\vec{v} = \vec{F}\, dt = d\vec{I}$. Међутим, ако истој маси у времену dt *придолази* маса dM брзином $\vec{w}$ онда ће се маса тела повећати на $M + dM$ па ће се даље кретати новом брзином $\vec{v} + d\vec{v}$. Количине кретања система пре и после сједињавања маса биће

$$\vec{K} = M \vec{v} + \vec{w}\, dM, \quad \vec{K}' = (M + dM)\, (\vec{v} + d\vec{v})$$

па је прираштај количине кретања

$$\Delta \vec{K} = \vec{K}' - \vec{K} \approx M\, d\vec{v} + (\vec{v} - \vec{w})\, dM.$$

Како је прираштај количине кретања једнак импулсу спољашњих сила које дејствују на тело у тренутку dt то добивамо

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} - \vec{w}) \frac{dM}{dt} = \vec{F}.$$

Основна динамичка једначина транслаторног кретања тела променљиве масе јесте:

$$\boxed{M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{v}_r \frac{dM}{dt} = \vec{F} + \vec{\mathfrak{F}}} \qquad (417)$$

Овде је $\vec{F}$ резултанта активних сила, $\vec{\mathfrak{F}}$ реактивна сила, а $\vec{v}_r$ релативна брзина додатне масе:

$$\vec{v}_r = \vec{w} - \vec{v}, \quad \vec{\mathfrak{F}} = (\vec{w} - \vec{v})\frac{dM}{dt}. \tag{417′}$$

Једначина (417) претставља *теорему Мешћерског: Диференцијална једначина транслаторног кретања тела променљиве масе своди се на једначину истог кретања константне масе када се активној сили дода реактивна сила.*

Према томе да ли је апсолутна или релативна брзина додатне масе једнака нули, горње се једначине своде на облике:

$$\vec{w} = 0, \qquad \frac{d}{dt}(M\vec{v}) = \vec{F}, \tag{417″}$$

$$\vec{v}_r = 0; \qquad M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}. \tag{417‴}$$

У случају да се маса dM одваја од масе M биће $dM < 0$.

Интеграцију једначине (417) показаћемо на класичном примеру *Келија (A. Cayley)* који је 1857. год. решио први проблем кретања са променљивом масом.

На столу се налази ланац сцецифичне тежине q по јединици дужине (kg/m). Један његов део дужине z виси преко стола. Додавањем елементарне масе настаје кретање ланца. Одредимо закон кретања. Маса је $M = \rho' z = qz/g$, $F = qz$, а апсолутна брзина додатне масе $\vec{w} = 0$ па је динамичка једначина облика (417″)

$$\frac{d}{dt}(M\dot{z}) = \dot{M}\dot{z} + M\ddot{z} = qz$$

односно

$$z\ddot{z} + \dot{z}^2 = gz.$$

Сменом $\dot{z}^2 = u$, због $2\dot{z}\ddot{z} = \dot{u} = (du/dt)\cdot(dz/dz) = \dot{z}u'$, где је u нова променљива, она се своди на линеарну једначину

$$u' + 2z^{-1}u = 2g, \text{ односно } u' + Pu = Q.$$

Општи интеграл је

$$u = \dot{z}^2 = e^{-\int P dz}\left[\int e^{\int P dz} Q\,dz + C_1\right].$$

Како је $C_1 = 0$ биће први интеграл

$$u = \dot{z}^2 = {}^2/_3\, gz.$$

За почетне услове кретања (за $t = 0$, $z = 0$, $\dot{z} = 0$) поновним интеграљењем добивамо закон кретања

$$z^{-1/2}\, dz = \sqrt{{}^2/_3\, g}\, dt, \text{ тј. } z = {}^1/_6\, gt^2.$$

Поред овог решења постоји и *„паразитско решење“* $z \equiv 0$.

Низ глатку стрму раван AB нагиба α клизи тело тежине G придржавано ужетом које се одмотава са бубња у врху A. Одредити брзину клижења тела узимајући у обзир и тежину ужета.

Како је у овом случају $\vec{w} = 0$ то је према (417″)

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{M}\,\dot{\xi}) = (G + q\,\xi)\sin\alpha = \mathrm{M}\,g\sin\alpha.$$

Множењем са $\mathrm{M}\,\dot{\xi}$ и сменом $\mathrm{M} = u$, због $q\,d\xi = g\,du$, добивамо

$$\mathrm{M}\,\dot{\xi}\,d(\mathrm{M}\,\dot{\xi}) = (\mathrm{M}^2 g \sin\alpha)\,d\xi = (g^2/q)\,u^3\,du \sin\alpha.$$

За почетне услове за $t = 0$, $\xi = 0$, $\dot{\xi} = 0$, биће $C = -(G^3 \sin\alpha)/3\,q\,g$, па је квадрат брзине

$$\dot{\xi}^2 = \frac{2\,g}{3\,q}\;\frac{(G + q\,\xi)^3 - G^3}{(G + q\,\xi)^2}\sin\alpha.$$

И при обртању користимо једначину (417) само се сада мења момент инерције а уместо силе и реактивне силе имамо момент и реактивни момент.

На цилиндричном вратилу тежине G_1, полупречника r, намотано је уже дужине l, тежине q по дужном метру, на чијем крају виси терет G. На вратилу је насађен замајац, тежине G_2, полупречника R. Одредимо брзину терета када се уже потпуно одвије ако су: $G_1 = 2\,G$, $ql = G$, $G_2 = 2\,G$, $r/R = \psi = {}^1/_3$ а одвијање почиње из стања мировања.

Применимо Даламберов принцип за средиште вратила

$$(G + q\,z)\,r - [(G + q\,z)/g]\,\ddot{z}\,r - \dot{\omega}\,(J_1 + J_2 + J_3) = 0.$$

Како су: $\dot{\omega} = \ddot{z}/r$, $J_1 = G_1\,r^2/2\,g$, $J_2 = G_2\,R^2/2\,g = G_2\,r^2/2\,g\,\psi^2$, $J_3 = q\,(l - z)\,r^2/g$ биће убрзање

$$\ddot{z} = \frac{2\,g\,(G + q\,z)}{2\,G + G_1 + 2\,q\,l + G_2\,\psi^{-2}} = \frac{g}{12\,l}(l + z),$$

и квадрат брзине

Крајња брзина је

$$\dot{z}_k = {}^1/_2\sqrt{gl}.$$

Вертикални хитац ракете у безваздушном простору. — У случају ракете имамо *умањивање* почетне масе M_0 па је dM/dt *негативно.* Једначина (417), занемарујући отпор ваздуха, постаје

$$M\ddot{z} = Z - c(dM/dt)$$

где је $c = \nu_r$ брзина експлозивних гасова масе dM које избацује ракета у времену dt.

С обзиром на Њутнов закон о гравитацији, и да је оса z усмерена навише, биће

$$M\ddot{z} = -\frac{MgR^2}{(R+z)^2} - c\frac{dM}{dt}$$

где је R полупречник Земље а z растојање ракете од Земљине површине, тј.

$$\ddot{z} + \frac{gR^2}{(R+z)^2} = -\frac{c}{M}\frac{dM}{dt}.$$

Претпоставља се да је убрзање ракете константно $\ddot{z} = kg$, па горња диференцијална једначина постаје

$$-\frac{c}{M}\frac{dM}{dt} = kg + \frac{gR^2}{[R+({}^1/_2 kgt^2)]^2},$$

јер је

$$z = {}^1/_2 kgt^2.$$

Интеграљењем, а како је почетна маса M_0, добивамо

$$-c\ln\left(\frac{M}{M_0}\right) = kgt + gR^2\left[\frac{t}{2R(R+{}^1/_2 kgt^2)} + \frac{1}{2R^2}\sqrt{\frac{2R}{kg}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{kg}{2R}}\,t\right)\right]$$

Ова једначина је употребљена за дискусију о могућности избацивања ракета на Месец[1].

Означимо са M_r масу скелета *једностепене ракете*, а са m_o *почетну масу горива* којим је ракета испуњена, онда је укупна *почетна маса ракете* $M_o = M_r + m_o$. При сагоревању горива мења се његова маса, па, ако је m *тренутна маса горива*, онда је укупна тренутна маса ракете $M = M_r + m$. Брзина истицања гасова је негативна $(-\nu_r)$, па занемаривањем утицаја теже, једначина (417) постаје:

$$M d\nu = -\nu_r\, dM; \qquad d\nu = -\nu_r\,(dM/M); \qquad \nu = \dot{z}. \qquad (a)$$

---

[1] *Otto von Eberhard*, *„Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik“* Leipzig, 1930.

Интеграљењем, за почетни услов да је при $t_o=0$ брзина $\nu=\nu_o$, биће

$$\nu+C=-\nu_r \ln M; \quad C=-\nu_o-\nu_r \ln M_o,$$

па је брзина кретања ракете у безваздушном простору уз занемаривање дејства теже:

$$\nu=\nu_o+\nu_r \ln (M_o/M)=\nu_o+\nu_r \ln [(M_r+m_o)/(M_r+m)]. \qquad (b)$$

Брзина кретања ракете на крају *„активног периода“* — када изгори сво гориво (m_o) — биће

$$\nu_1=\nu_o+\nu_r \ln (M_o/M_r)=\nu_o+\nu_r \ln C_1; \quad C_1=M_o/M_r=e^{(\nu_1-\nu_o)/\nu_r} \qquad (c)$$

где је C_1 број *Циолковског* (К Э. Циолковский, 1857—1935). Он представља количник масе ракете на почетку и на крају активног периода, када сагори сво гориво. Код *вишестепене ракете* уводи се овај број за сваки степен. Ако је $(M_s)_p$ *укупна маса ракете на почетку* s-тог *активног периода* а $(M_s)_z$ *укупна маса ракете на завршетку* s-тог *активног периода*, онда је број Циолковског дотичног активног периода једнак количнику тих маса. Поред овог броја уводи се и *коефицијент степена* k_s као количник *укупне масе ракете* на *почетку наредног периода* $(M_{s+1})_p$ и *укупне масе ракете на завршетку тог периода* $(M_s)_z$ а, такође и количник броја Циолковског и коефицијента степена те ће бити:

$$C_s=\frac{(M_s)_p}{(M_s)_z}=e^{\frac{(\nu_s-\nu_{s-1})}{\nu_{rs}}}; \quad k_s=\frac{(M_{s+1})_p}{(M_s)_z}; \quad \frac{C_s}{k_s}=\frac{(M_s)_p}{(M_{s+1})_p}. \qquad (d)$$

Када вишестепена ракета носи на крају *апаратуру* (*сателит*) масе M_a, тада је производ количника C_s/k_s:

$$\prod \frac{C_s}{k}=\frac{(M_1)_p}{(M_2)_p}\cdot\frac{(M_2)_p}{(M_3)_p}\cdots\frac{(M_{n-1})_p}{(M_n)_p}\cdot\frac{(M_n)_p}{M_a}=\frac{M_o}{M_a}, \qquad (e)$$

јер је $(M_1)_p=M_0$ а $(M_{n+1})_p=M_a$.

Како је за s-ти активни период $(M_s)_z=(M_s)_p-m_s$, то је потребна укупна маса горива

$$m_0=\sum_{s=1}^{n} m_s=\sum_{s=1}^{n}[(M_s)_p-(M_s)_z]=\sum_{s=1}^{n}\frac{C_s-1}{C_s}\cdot(M_s)_p. \qquad (f)$$

Пример. — Маса скелета првог степена тростепене ракете са апаратуром износи $M_1=8$ тона, а других степена су $M_1/2$, $M_1/4$ и $M_a=M_1/8$, па је укупна маса скелета $M_r=15\ M_1/8=15$ t. Бројеви Циолковског су $C_1=6$ и $C_2=5$. Почетна брзина је $\nu_0=0$ а потребна је брзина кретања апаратуре $\nu_3=9$ km/sec, док је релативна брзина истицања гасова једнака за сваки степен и износи $\nu_r=2$ km/sec. Одредити укупну масу горива, коефицијенте степена, брзине на крају сваког активног периода и помоћу производа количника C_s/k_s проверити почетну укупну масу ракете.

Решење.— Овде су масе $M_1=8$ t; $M_2=4$ t; $M_3=2$ t; $M_a=1$ t; $M_r=15$ t. Бројеви Циолковског су:

$$C_1=e^{\nu_1/2}=6; \qquad \nu_1=2\ln 6=3{,}5836\approx 3{,}58 \text{ km/sec};$$

$$C_2=e^{(\nu_2-\nu_1)/2}; \quad C_1C_2=30=e^{\nu_2/2}; \qquad \nu_2=2\ln 30\approx 6{,}80 \text{ km/sec};$$

$$C_3=e^{(\nu_3-\nu_2)/2}; \quad C_1C_2C_3=e^{\nu_3/2}=e^{4,5}=90; \; C_3=3.$$

Према (*f*) масе горива појединих активних периода су:

$$m_1=M_0\,[(C_1-1)/C_1]=5\,M_0/6=5\,(15+m_0)/6;$$

$$m_2=(M_0-M_1-m_1)\,[(C_2-1)/C_2]=4\,(M_0-M_1-m_1)/5;$$

$$m_3=(M_0-M_1-M_2-m_1-m_2)\,[(C_3-1)/C_3].$$

Пошто је $M_0=M_r+m_0=15+m_0$ добијају се систем једначина и решења:

$$\begin{array}{rcc} m_1-5\,m_2-5\,m_3=75; & m_1=365 \text{ t}; & m_0=423 \text{ t}; \\ m_2-4\,m_3=28; & m_2=52 \text{ t}; & M_0=438 \text{ t}. \\ m_3=6; & m_3=6 \text{ t}; & \end{array}$$

Коефицијенти степена су:

$$k_1=(M_2)_p/(M_1)_z=(438-365-8)/(438-365)=65/73;$$

$$k_2=(M_3)_p/(M_2)_z=(65-52-4)/(65-52)=9/13;$$

$$k_3=(M_4)_p/(M_3)_z=1/(2+1)=1/3,$$

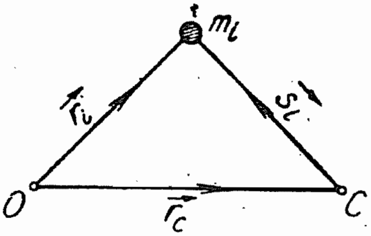
па је

$$\Pi\,(C_s/k_s)=C_1C_2C_3/k_1k_2k_3=(6\cdot 5\cdot 3)\;(73\cdot 13\cdot 3)/65\cdot 9\cdot 1=438=M_0/M_a.$$

ДОДАТАК

I МОМЕНТИ ИНЕРЦИЈЕ

1. Врсте момената инерције. — У динамици система материјалних тачака дефинисали смо линеарни момент материјалне тачке, $m\vec{r}$. Овај је израз вектор а његове Декартове координате mx, my, mz претстављају *планарне линеарне моменте масе*, тј. моменте масе m за координате равни Oyz, Ozx, Oxy.



Сл. 185. — Поларни момент инерције масе m_i

На исти начин можемо дефинисати и квадратне моменте. Производ масе m_i и квадрата растојања масе од пола O (сл. 185) назива се *поларни моменш инерције* масе m_i за пол O и обележава са

$$\boxed{J'_O = m_i\,(\vec{r}_i)^2 = m_i\ r_i^2} \tag{418}$$

За цео систем од n маса поларни момент инерције биће

$$\boxed{J_O = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\ r_i^2} \tag{418}$$

Пошто је маса увек позитиван скалар а r^2 је такође позитивно то је *поларни моменш инерције увек йозишивна величина.* Димензија је момента инерције $[M\,L^2]$ и мери се у техничком систему мера јединицом kg m sec² или kg cm sec².

Ако средиште система узмемо за пол, поларни момент инерције је

$$J_O = \Sigma\, m_i\ r_i^2 = \Sigma\, m_i\,(\vec{r}_C + \vec{s}_i)^2 = \Sigma\, m_i\ r_C^2 + \Sigma\, m_i\ s_i^2 + 2\,\Sigma\, m_i\ (\vec{s}_i,\ \vec{r}_C).$$

Како се знак збира не односи на вектор положаја средишта $(\vec{r}_C)$ то се трећи члан горње једначине може написати у облику $2\,(\vec{r}_C, \Sigma\, m_i\,\vec{r}_i)$

па је према (263) једнак нули. Због тога је поларни момент инерције за стари пол (*O*):

$$\boxed{J_O = J_C + M\,r_C^2} \tag{419}$$

Момент инерције за пол у средишту назива се *сойсшвени йоларни моменш инерције.* Производ масе система и квадрата растојања полова има такође димензију момента инерције и зависи од масе система и растојања полова *O* и *C*, те се назива *положајни йоларни моменш инерције.* Због тога горњу теорему можемо овако изразити: *Поларни моменш инерције сисшема за неки йол једнак је збиру сойсшвеног йоларног моменша инерције и йоложајног моменша инерције.*

Из (419) следи да је сопствени (централни) поларни момент инерције система

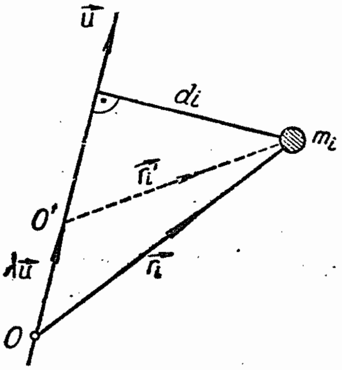
$$\boxed{J_C = J_O - M\,r_C^2} \tag{419'}$$

најмањи у односу на све йолове (шачке) у йросшору.

Када су масе континуално распоређене по простору, равни или линији, поларни моменти инерције таквих тела биће:

$$\boxed{J_O = \iiint\limits_{(V)} \rho\, r^2\, dV, \quad J_O = \iint\limits_{(A)} \rho''\, r^2\, dA; \quad J_O = \int\limits_{(L)} \rho'\, r^2\, dL} \tag{419''}$$

Овде су ρ, ρ'', ρ' *зайреминска, йовршинска,* односно *линиска гусшина.*



Сл. 186. — Аксијални момент инерције

Производ масе m_i и квадрата њеног растојања од неке осе (d_i) назива се *аксијални (еквашоријални) моменш инерције ше масе за осу*

$$\boxed{J'_u = m_i\, d_i^2} \tag{420}$$

Положај масе m_i у односу на осу можемо одредити вектором положаја $\vec{r_i}$ у односу на тачку *O* на тој оси (сл. 186). Како је оса оријентисана ортом $\vec{u}$, то је квадрат растојања масе од осе

$$d_i^2 = r_i^2 \sin^2\alpha = [\vec{u}, \vec{r_i}]^2$$

те се аксијални момент може написати у облику

$$\boxed{J'_u = m_i\,[\vec{\mathrm{u}},\ \vec{r}_i]^2} \qquad (420')$$

Момент инерције целог система биће

$$\boxed{J_u = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\,[\vec{\mathrm{u}},\ \vec{r}_i]^2 = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\, d_i^2} \qquad (420'')$$

Ако уместо осе $\vec{\mathrm{u}}$ узмемо Ox осу, оријентисану ортом $\vec{\mathrm{i}}$, биће аксијални момент

$$J_x = \Sigma\, m_i\,[\vec{\mathrm{i}},\ \vec{r}_i]^2 = \Sigma\, m_i \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ 1 & 0 & 0 \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix}^2 =$$

$$= \Sigma\, m_i\,(-\,z_i\,\vec{\mathrm{j}} + y_i\,\vec{\mathrm{k}})^2 = \Sigma\, m_i\,(y_i^2 + z_i^2)\,.$$

На исти начин биће и за друге две осе, па су аксијални моменти инерције за координатне осе:

$$\boxed{\begin{gathered} J_x = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\,(y_i^2 + z_i^2);\ J_y = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\,(z_i^2 + x_i^2); \\ J_z = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\,(x_i^2 + y_i^2) \end{gathered}} \qquad (421)$$

Када тачку O транслаторно померимо у $O'\,(\overrightarrow{OO'} = \lambda\,\vec{\mathrm{u}})$ аксијални се момент инерције неће променити, јер је, због $\vec{r}_i = \lambda\vec{\mathrm{u}} + \vec{r}_i{}'$, векторски производ $[\vec{\mathrm{u}},\ \vec{r}_i] = \lambda\,[\vec{\mathrm{u}},\ \vec{\mathrm{u}}] + [\vec{\mathrm{u}},\ \vec{r}_i{}'] = [\vec{\mathrm{u}},\ \vec{r}_i{}'] = const.$ константан.

У случају континуално распоређених маса изрази (421) постају

$$\boxed{\begin{gathered} J_x = \iiint\limits_{(V)} \rho\,(y^2 + z^2)\,d\,V;\quad J_y = \iiint\limits_{(V)} \rho\,(z^2 + x^2)\,d\,V; \\ J_z = \iiint\limits_{(V)} \rho\,(x^2 + y^2)\,d\,V \end{gathered}} \qquad (421')$$

и аналогно овоме за масе распоређене по површини односно линији. Например, за Ox координатну осу биће:

$$J_x = \iint \rho'' (y^2 + z^2)\, d\, A\,; \quad J_x = \int \rho' (y^2 + z^2)\, d\, L\,. \tag{421''}$$

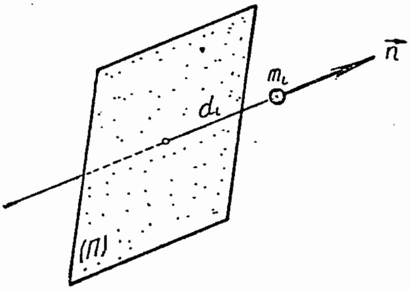
Под *планарним моментом инерције* масе m_i за раван Π (сл. 187) подразумева се производ масе и квадрата растојања масе од равни

$$\boxed{J_{\text{п}}^{i} = m_i\, d_i^2} \tag{422}$$

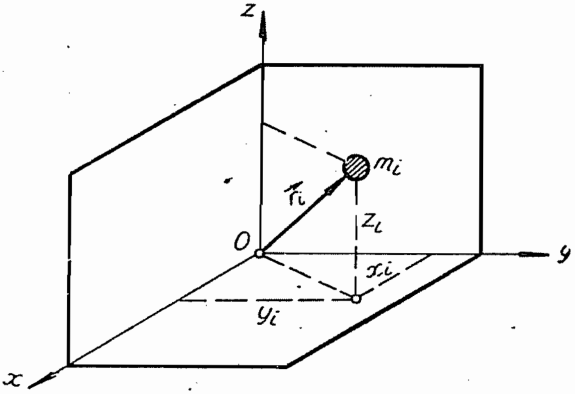
Например, планарни моменти материјалног система за координатне равни Oxy, Oyz и Ozx Декартовог координатног система у тачки O биће:

$$\begin{aligned} J_{\text{п}z} &= \Sigma\, m_i\, z_i^2, \\ J_{\text{п}x} &= \Sigma\, m_i\, x_i^2, \\ J_{\text{п}y} &= \Sigma\, m_i\, y_i^2. \end{aligned} \tag{422'}$$

Овде индекси z, x, y показују правце нормала на одговарајуће равни.



Сл. 187. — Планарни момент инерције



Сл. 188. — Односи између момената инерције

Како је $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$, с обзиром на (421) и (422'), између аксијалних и планарних момената инерције постоје ови односи (сл. 188):

$$\boxed{\begin{aligned} J_x &= \Sigma\, m_i\, (y_i^2 + z_i^2) = J_{\text{п}y} + J_{\text{п}z} \\ J_y &= \Sigma\, m_i\, (z_i^2 + x_i^2) = J_{\text{п}z} + J_{\text{п}x} \\ J_z &= \Sigma\, m_i\, (x_i^2 + y_i^2) = J_{\text{п}x} + J_{\text{п}y} \end{aligned}} \tag{423}$$

тј: *аксијални моменти инерције једнак је збиру планарних момената за две ортогоналне равни које се секу дуж те осе.*

Из једначина (423) следе односи:

$$J_x + J_y > J_z > J_x - J_y, \qquad (423$$

$$J_x + J_y + J_z = 2\,(J_{\text{п}x} + J_{\text{п}y} + J_{\text{п}z}). \qquad (423'')$$

Како је, према (422′) и (418′), *поларни момент инерције једнак збиру трију планарних момената за три управне равни које се стичу у полу*

$$J_O = J_{\text{п}z} + J_{\text{п}x} + J_{\text{п}y} \qquad (424)$$

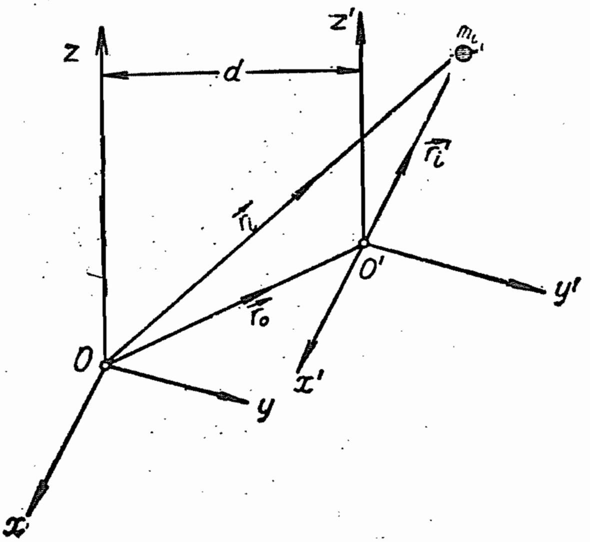
то је

$$\boxed{2\,J_O = J_x + J_y + J_z} \qquad (424')$$

Двоструки поларни момент инерције једнак је збиру аксијалних момената инерције за три ортогоналне осе које се секу у том полу.

2. Односи између момената инерције за две паралелне осе. — Ако се оса $\vec{\mathrm{u}}$ транслаторно помери промениће се и момент инерције за нову осу. Положаје масе m_i у односу на тачке O и O' на паралелним осама оријентисаним ортовима $\vec{\mathrm{u}}$ и $\vec{\mathrm{u}}'$ одредимо векторима $\vec{r}_i$ и $\vec{r'}_i$ а транслацију вектором $\vec{r}_0$ онда је (сл. 189)

$$\vec{r}_i = \vec{r}_0 + \vec{r}_i{}'.$$



Сл. 189. — Доказ Штајнерове теореме

Аксијални момент инерције масе m_i за стару осу $\vec{\mathrm{u}}$ биће

$$J'_u = m_i\,[\vec{\mathrm{u}}, \vec{r}_i]^2 = m_i\,[\vec{\mathrm{u}}, \vec{r}_0 + \vec{r}_i{}']^2 = m_i\,[\vec{\mathrm{u}}, \vec{r}_0]^2 +$$

$$+ 2\,m_i\,([\vec{\mathrm{u}}, \vec{r}_0]\;[\vec{\mathrm{u}}, \vec{r}_i{}']) + m_i\,[\vec{\mathrm{u}}, \vec{r}_i{}']^2$$

односно

$$J'_u = J'_{u'} + m_i\,d^2 + 2\,m_i\,\{(\vec{r}_0, \vec{r}_i{}') - (\vec{\mathrm{u}}, \vec{r}_0)\;(\vec{\mathrm{u}}, \vec{r}_i{}')\},$$

јер су[1]

$$[\vec{u}, \vec{r}_0]^2 = d^2; \quad ([\vec{u}\ \vec{r}_0]\ [\vec{u}\ \vec{r}_i{}']) = (\vec{r}_0\ \vec{r}_i{}') - (\vec{u}\ \vec{r}_0)\ (\vec{u}\ \vec{r}_i{}').$$

За материјални систем, с обзиром да је $M\ \vec{r}_C{}' = \Sigma\ m_i\ \vec{r}_i{}'$, биће

$$\boxed{J_u = J_{u'} + M\,d^2 + 2\ M\,\{(\vec{r}_0,\ \vec{r}_C{}') - (\vec{u},\ \vec{r}_0)\ (\vec{u},\ \vec{r}_C{}')\}} \tag{425}$$

Када се координатни систем $Oxyz$ транслаторно помери у тачку O' онда је аксијални момент инерције материјалног система за стару осу Oz:

$$J_z = J_{z'} + M\,d^2 + 2\,M\,\{x_0\,x_C{}' + y_0\,y_C{}' + z_0\,z_C{}' - z_0\,z_C{}'\}$$

тј.

$$\boxed{J_z = J_{z'} + M\,d^2 + 2\,(x_0\,S_{x'} + y_0\,S_{y'})} \tag{425'}$$

Дакле, *на промену аксијалног момента инерције утичу и положајни момент и статички моменти за две осе управне на осу Oz'*. На исти начин одредили бисмо и аксијалне моменте инерције за старе осе Ox и Oy.

Ако се транслација кординатног почетка изврши у средиште система тј. ако је $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{s}_i$, онда је $\vec{r}_C{}' = 0$, па добивамо:

$$\boxed{J_u = J_{u'}{}^{(C)} + M\,d^2} \tag{425''}$$

Ово је израз *Штајнерове* (*Jac. Steiner*, 1796—1863 год.) теореме која гласи: *Момент инерције за произвољну осу једнак је збиру момента инерције за паралелну средишну осу и производа целокупне масе система са квадратом растојања обеју оса.*

Момент инерције за тежишну осу назива се *сопствени аксијални момент инерције;* производ $M\,d^2$ је *положајни момент.*

Из (425'') добивамо

$$\boxed{J_{u'}{}^{(C)} = J_u - M\,d^2} \tag{425'''}$$

За разне осе у простору сопствени аксијални момент инерције има најмању вредност.

---

[1] $$([\vec{a},\ \vec{b}]\ [\vec{c},\ \vec{d}]) = (\vec{a},\ \vec{c})\ (\vec{b},\ \vec{d}) - (\vec{a},\ \vec{d})\ (\vec{b},\ \vec{c})$$

При транслацији Декартовог система $Oxyz$ у исти такав систем $Cx'y'z'$ у средишту добивамо сопствене аксијалне моменте инерције:

$$J_{x'} = J_x - \mathrm{M}\, a^2, \quad J_{y'} = J_y - \mathrm{M}\, b^2, \quad J_{z'} = J_z - \mathrm{M}\, c^2,$$

где су a, b, c растојања паралелних оса:

$$a = \sqrt{y_C^2 + z_C^2}, \qquad b = \sqrt{x_C^2 + z_C^2}, \qquad c = \sqrt{x_C^2 + y_C^2}.$$

3. Производ инерције. — Нека се две осе, оријентисане ортовима $\vec{u}$ и $\vec{v}$, секу у тачки O (сл. 190). Израз

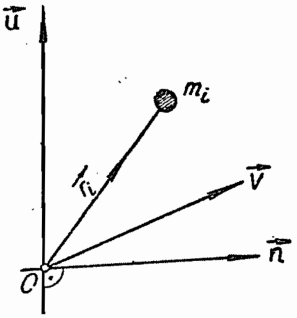
$$\Pi_{uv} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\, ([\vec{u}, \vec{r}_i], [\vec{v}, \vec{r}_i]) \qquad (426)$$

назива се *производ инерције* за дате осе.

Ако орт $\vec{v}$ разложимо на две компоненте

$$\vec{v} = \lambda\, \vec{u} + \mu\, \vec{n},$$

где су λ, μ произвољни скалари а $\vec{n} \perp \vec{u}$, производ инерције можемо написати у новом облику.



Сл. 190. — Производ инерције

$$\Pi_{uv} = \lambda\, \Sigma\, m_i\, [\vec{u}, \vec{r}_i]^2 + \mu\, \Sigma\, m_i\, ([\vec{u}, \vec{r}_i], [\vec{n}, \vec{r}_i])$$

Када су осе $\vec{u}$ и $\vec{v}$ *колинеарне* производ инерције претставља *аксијални момент* инерције

$$\boxed{\Pi_{uu} = \Sigma\, m_i\, [\vec{u}, \vec{r}_i]^2 = J_u} \qquad (426')$$

а ако су осе *ортогоналне* он претставља тзв. *девијациони момент* (*William Rankine*, 1820—1872 год.)

$$\boxed{\Pi_{un} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\, ([\vec{u}, \vec{r}_i], [\vec{n}, \vec{r}_i]) = D_{un}} \qquad (426'')$$

Према томе се производ инерције састоји из збира аксијалног и девијационог момента умножених одговарајућим скаларима λ и μ:

$$\boxed{\Pi_{uv} = \lambda\, J_u + \mu\, D_{un}} \qquad (426''')$$

За Декартове координатне осе Ox и Oy биће производ инерције

$$\Pi_{xy} = \Sigma m_i \left([\vec{\mathrm{i}}, \vec{r}_i], [\vec{\mathrm{j}}, \vec{r}_i] \right) = \Sigma m_i \left(-\vec{\mathrm{j}}\, z_i + \vec{\mathrm{k}}\, y_i, \ \vec{\mathrm{i}}\, z_i - \vec{\mathrm{k}}\, x_i \right) =$$

$$= - \Sigma m_i x_i y_i = D_{xy}.$$

На исти начин одредићемо девијационе моменте за остала два пара координатних оса.

Девијациони момент са супротним знаком назива се *центрифугални момент* за пар управних оса (*Culmann*). За осе Декартовог правоуглог координатног система центрифугални моменти биће

$$J_{xy} = - D_{xy} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \, x_i \, y_i , \qquad J_{yz} = - D_{yz} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \, y_i \, z_i ,$$

$$J_{zx} = - D_{zx} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \, z_i \, x_i . \tag{427}$$

При транслацији координатног система промениће се и центрифугални момент. Како је $\vec{r}_i = \vec{r}_0 + \vec{r}_i{}'$ (сл. 189), због односа $\mathrm{M}\,\vec{r}'_C = \Sigma m_i \vec{r}_i{}'$, добивамо центрифугални момент за пар старих управних оса:

$$J_{un} = - \Sigma m_i \left([\vec{\mathrm{u}}, \vec{r}_0 + \vec{r}_i{}'] \ [\vec{\mathrm{n}}, \vec{r}_0 + \vec{r}_i{}'] \right) =$$

$$= - \Sigma m_i \left([\vec{\mathrm{u}}, \vec{r}_0] + [\vec{\mathrm{u}}, \vec{r}_i{}'], [\vec{\mathrm{n}}, \vec{r}_0] + [\vec{\mathrm{n}}, \vec{r}_i{}'] \right)$$

односно

$$\boxed{\begin{gathered} J_{un} = J_{u'n'} - \mathrm{M} \left([\vec{\mathrm{u}}, \vec{r}_0] \ [\vec{\mathrm{n}}, \vec{r}_0] \right) - \mathrm{M} \left([\vec{\mathrm{u}}, \vec{r}_C{}'] \ [\vec{\mathrm{n}}, \vec{r}_0] - \right. \\ \left. - \mathrm{M} \left([\vec{\mathrm{u}}, \vec{r}_0] \ [\vec{\mathrm{n}}, \vec{r}_C{}'] \right) \right. \end{gathered}} \tag{428}$$

Например, центрифугални момент за осе Ox и Oy биће:

$$J_{xy} = J_{x'y'} + x_0 \, y_0 \, \mathrm{M} + x_0 \, S_{x'} + y_0 \, S_{y'} . \tag{428'}$$

Дакле, *на промену центрифугалног момента утичу и положајни момент и статички моменти.*

Извршили се транслација система у средиште, што је редован случај у пракси, биће $\vec{r}'_C = 0$, па једначина (428) постаје

$$\boxed{J_{un} = J_{u'n'} - \mathrm{M} \left([\vec{\mathrm{u}}, \vec{r}_C] \ [\vec{\mathrm{n}}, \vec{r}_C] \right)} \tag{428''}$$

Например, при транслацији Декартовог система $Oxyz$ у систем $C\,x'\,y'\,z'$ добићемо

$$J_{xy} = J_{x'y'} + x_C\, y_C\, M. \tag{428'''}$$

Из ове једначине видимо да *сопствени центрифугални момент има најмању вредност у односу на ма какав пар управних оса у простору.*

Аналогно обрасцу (428''') можемо извести и обрасце за друга два пара координатних оса.

Образац (428'') претставља Штајнерову теорему за центрифугалне моменте.

4. Промена момента инерције са променом правца осе кроз дату тачку.

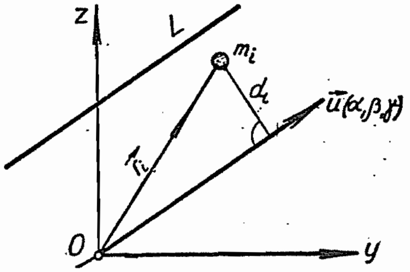
— Нека оса $\vec{u}$ пролази кроз сталну тачку O (сл. 191) и чини са координатним осама углове чије ћемо косинусе обележити са α, β, γ. Момент инерције система материјалних тачака за ту осу биће

$$J_u = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\, [\vec{u}, \vec{r}_i]^2.$$

Како је орт осе $\vec{u}$ дат изразом

$$\vec{u} = \alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j} + \gamma\,\vec{k}$$

то горњи израз постаје



Сл. 191. — Зависност момената инерције од положаја осе

$$J_u = \Sigma\, m_i\, [\alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j} + \gamma\,\vec{k}, \vec{r}_i]^2 = \alpha^2\, \Sigma\, m_i\, [\vec{i}, \vec{r}_i]^2 +$$

$$+ \beta^2\, \Sigma\, m_i\, [\vec{j}, \vec{r}_i]^2 + \gamma^2\, \Sigma\, [\vec{k}, \vec{r}_i]^2 + 2\,\alpha\,\beta\, \Sigma\, m_i\, ([\vec{i}, \vec{r}_i], [\vec{j}, \vec{r}_i]) +$$

$$+ 2\,\beta\,\gamma\, \Sigma\, m_i\, ([\vec{j}, \vec{r}_i], [\vec{k}, \vec{r}_i]) + 2\,\gamma\,\alpha\, \Sigma\, m_i\, ([\vec{k}, \vec{r}_i], [\vec{i}, \vec{r}_i]).$$

Уводећи аксијалне и девијационе моменте биће

$$J_u = J_x\,\alpha^2 + J_y\,\beta^2 + J_z\,\gamma^2 + 2\,D_{xy}\,\alpha\,\beta + 2\,D_{yz}\,\beta\,\gamma + 2\,D_{zx}\,\gamma\,\alpha$$

односно центрифугалне моменте:

$$\boxed{J_u = J_x\,\alpha^2 + J_y\,\beta^2 + J_z\,\gamma^2 - 2\,J_{xy}\,\alpha\,\beta - 2\,J_{yz}\,\beta\,\gamma - 2\,J_{zx}\,\gamma\,\alpha} \tag{429}$$

Помоћу овог обрасца можемо израчунати момент инерције за сваку осу која пролази кроз тачку O ако знамо моменте инерције и центрифугалне моменте за три управне осе које пролазе кроз ту тачку.

Ако оса L не пролази кроз координатни почетак онда ћемо израчунати, по горњем обрасцу, момент инерције за паралелну јој осу $\vec{u}$, која пролази кроз координатни почетак, а затим по обрасцу (425), или Штајнеровој теореми, и момент инерције за осу L.

5. Промена центрифугалног момента при ротацији оса. — Када се координатни систем $Oxyz$ заокрене око осе Oz у положај $Ouvz$ онда ће се променити центрифугални момент за пар управних оса Ox и Oy. Како је ротација извршена *у равни* то између ортова постоје ови односи

$$\vec{u} = \vec{i} \cos \varphi + [\vec{k}, \vec{i}] \sin \varphi, \quad \vec{v} = \vec{j} \cos \varphi + [\vec{k}, \vec{j}] \sin \varphi$$

те је центрифугални момент за нове осе Ou и Ov:

$$J_{uv} = - \Sigma m_i ([\vec{u}, \vec{r}_i] \, [\vec{v}, \vec{r}_i]) = - \Sigma m_i ([\vec{i}, \vec{r}_i] \cos \varphi + [\vec{j}, \vec{r}_i] \sin \varphi,$$

$$- [\vec{i}, \vec{r}_i] \sin \varphi + [\vec{j}, \vec{r}_i] \cos \varphi),$$

односно

$$\boxed{J_{uv} = (J_x - J_y) \sin \varphi \cos \varphi + J_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi).} \tag{430}$$

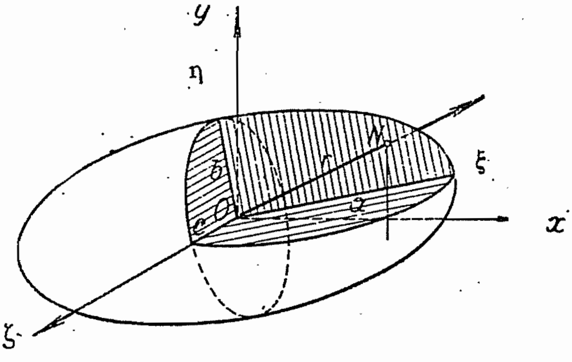
6. Елипсоид инерције. — Када оса $\vec{u}$ мења свој положај у простору, пролазећи кроз сталну тачку O, мењаће се и моменти инерције за ту осу, јер се мењају углови које оса чини са координатним осама. Да бисмо дознали промену момента инерције уочимо на оси $\vec{u}$ тачку N чији је потег

$$\overline{ON} = r = k / \sqrt{J_u},$$

где је k коефицијент сразмере. Како су координате тачке N (сл. 192)

$$x = r\alpha, \quad y = r\beta, \quad z = r\gamma,$$

то једначина (429) постаје



Сл. 192. — Елипсоид инерције

$$\boxed{\begin{gathered} J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2 J_{xy} x y - 2 J_{yz} y z - \\ - 2 J_{zx} z x = J_u r^2 = k^2 \end{gathered}} \tag{431}$$

Ако изаберемо да је коефицијент $k = 1$, горња једначина постаје

$$\boxed{J_x\, x^2 + J_y\, y^2 + J_z\, z^2 - 2\, J_{xy}\, xy - 2\, J_{yz}\, yz - 2\, J_{zx}\, zx = 1} \qquad (431')$$

Она претставља геометриско место тачака конструисаних са потегом $r = 1/\sqrt{J_u}$. Пошто је другог реда а не садржи чланове са x, y, z то претставља *централну површину другог реда* (елипсоид, једнограни и двограни хиперболоид). Како $r \neq \infty$, јер је немогуће да аксијални момент инерције система буде једнак нули за све правце кроз тачку O, а коефицијенти J_x, J_y, J_z су, по дефиницији, позитивне величине, то једначина претставља *елипсоид*, који се по *Кошију* и *Поансоу* назива *елипсоид инерције.*

Познајемо ли елипсоид инерције за систем $Oxyz$ онда по обрасцу (429) можемо лако одредити момент инерције за произвољну осу која пролази кроз координатни почетак пошто је

$$J_u = k^2/r^2 = k^2/\overline{ON}^2 \qquad (431'')$$

тј. *момент инерције за осу $\vec{u}$ једнак је реципрочној вредности квадрата потега* $\overline{ON}$. При овоме треба водити рачуна о размерама.

7. Главни моменти инерције. — Сваки елипсоид има три управне осе ($2a > 2b > 2c$) које су *главне осе*. Моменти инерције за ове осе називају се *главни моменти инерције* (J_1, J_2, J_3). Њихове су вредности

$$J_1 = k^2/a^2\,; \quad J_2 = k^2/b^2\,; \quad J_3 = k^2/c^2.$$

Како је $a > b > c$ то следи овај однос између главних момената инерције

$$J_1 < J_2 < J_3$$

тј. *најмањи је главни момент инерције за највећу осу елипсоида инерције.*

Пошто су осе елипсоида и међусобно *управне* то између главних момената постоји однос (423'): $J_1 + J_2 > J_3 > J_1 - J_2$, односно између главних полуоса

$$(1/a^2) + (1/b^2) > (1/c^2) > (1/a^2) - (1/b^2).$$

Само онај елипсоид чије главне осе задовољавају овај услов може бити елипсоид инерције.

Главне се осе a, b, c не поклапају са координатним осама x, y, z. Али, ако систем $Oxyz$ ротирамо тако да се *поклопи* са системом главних оса $O\xi\eta\zeta$ (сл. 192), онда је централна једначина елипсоида

$$(\xi/a)^2 + (\eta/b)^2 + (\zeta/c)^2 = 1$$

па је једначина овог елипсоида инерције

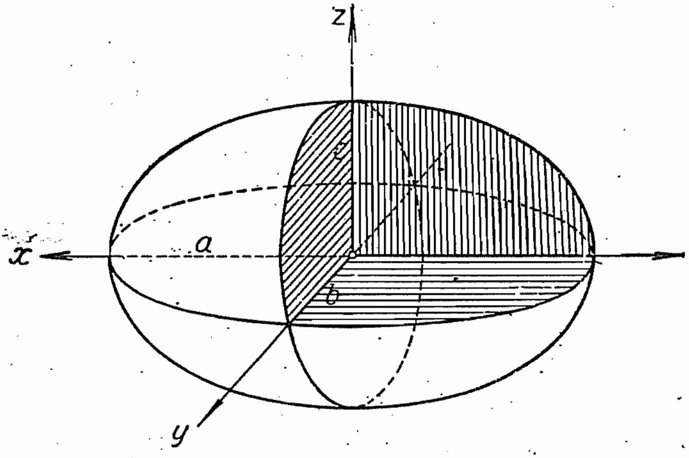
$$\boxed{J_1 \xi^2 + J_2 \eta^2 + J_3 \zeta^2 = k^2} \tag{432}$$

Из ове једначине увиђамо да су центрифугални моменти за главне осе једнаки нули

$$\boxed{J_{\xi\eta} = J_{\eta\zeta} = J_{\zeta\xi} = 0} \tag{432'}$$

јер се због симетрије тела у односу на триједар главних оса јављају центрифугални моменти истих вредности али супротних знакова те се поништавају.

На тај начин можемо уочити ово: *Кроз сваку тачку простора можемо поставити ортогонални триједар оса за које су центрифугални моменти једнаки нули.* Овакве три осе називају се *главне осе инерције* за дату тачку (пол O) а моменти за ове осе су *главни моменти инерције.*



Сл. 193. — Централни елипсоид инерције

Ако је пол у *средишту система* (тежишту — средишту инерције) главне осе су *главне централне осе* а моменти су *главни централни моменти инерције.* Помоћу њих можемо лако одредити по Штајнеровој теореми моменте инерције за паралелне осе.

Од свих могућих момената инерције најмањи одговара највећој главној централној оси, те за тела збијеног облика ова оса приближно има правац највеће димензије тела.

Ако нека оса $\vec{u}$ чини са главним осама инерције углове чији су косинуси α; β, γ онда је момент инерције за ту осу

$$\boxed{J_u = J_1\,\alpha^2 + J_2\,\beta^2 + J_3\,\gamma^2} \qquad (433)$$

Ако су два главна момента инерције једнака, напр., $J_2 = J_3$, елипсоид инерције је *обртни (ротациони)* за *a* осу$_1$ једначине

$$\boxed{J_1\,\xi^2 + J_2\,(\eta^2 + \zeta^2) = k^2} \qquad (434)$$

Главних оса инерције има више па се систем са оваквом особином назива *систем ротације у динамичком смислу* за *a* осу. Момент инерције за произвољну осу $\vec{u}$ кроз тачку *O* биће

$$J_u = J_1\,\alpha^2 + J_2\,(\beta^2 + \gamma^2). \qquad (434')$$

Ако су *сва три главна момента инерције* једнака, елипсоид се инерције своди на сферу једначине

$$\boxed{J_1\,(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = k^2} \qquad (434'')$$

па се систем назива *сфером у динамичком смислу*. Момент инерције за осу $\vec{u}$ биће

$$\boxed{J_u = J_1\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = J_1 = const.} \qquad (434''')$$

тј. *константан за све осе које пролазе кроз тачку O.*

Одређивање *главних оса елипсоида инерције* (431) и *главних момената инерције* своди се на одређивање вредности косинуса углова α_i, β_i, γ_i које су везане условом

$$f(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = \alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 - 1 = 0$$

и које дају квадратној форми (429) *екстремну вредност.*

Као што је познато из анализе проблем *условног екстремума* своди се на одређивање екстремума функције

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = F(\alpha, \beta, \gamma) - \lambda f(\alpha, \beta, \gamma),$$

где је λ множилац а F $(\alpha; \beta, \gamma)$ квадратна форма (429).

Из услова екстремума добивамо ове услове:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = \frac{\partial F}{\partial \alpha} - 2\lambda\alpha = 0; \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = 0; \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} = 0,$$

који се могу написати у облику система хомогених алгебарских једначина

$$\begin{aligned} (J_x-\lambda)\,\alpha - J_{xy}\beta - J_{xz}\gamma &= 0, \quad J_{zx}=J_{xz},\\ -J_{yx}\alpha + (J_y-\lambda)\,\beta - J_{yz}\gamma &= 0, \quad J_{yx}=J_{xy},\\ -J_{zx}\alpha - J_{zy}\beta + (J_z-\lambda)\,\gamma &= 0, \quad J_{zy}=J_{yz}. \end{aligned}$$

Овај систем хомогених једначина има, сем тривијалног решења (који је према дефиницији момената инерције немогућ), стварно решење ако је детерминанта система једнака нули

$$\begin{vmatrix} (J_x-\lambda) & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & (J_y-\lambda) & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & (J_z-\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Ова једначина претставља *секуларну (Хамилтонову) једначину* и *има три реална корена*[1] λ_i који претстављају главне моменте инерције J_1, J_2 и J_3.

Секуларна једначина има облик:

$$\lambda^3 - S_1\lambda^2 + S_2\lambda - S_3 = 0,$$

где су:

$$S_1 = J_x + J_y + J_z;$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} J_y & -J_{yz} \\ -J_{yz} & J_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_z & -J_{xz} \\ -J_{xz} & J_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_x & -J_{xy} \\ -J_{xy} & J_y \end{vmatrix},$$

$$S_3 = \begin{vmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{vmatrix}.$$

Да λ_i заиста претставља главни момент инерције уверавамо се лако из услова екстремума функције $\Phi(\alpha,\beta,\gamma)=0$, јер је

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\alpha + \frac{\partial\Phi}{\partial\beta}\beta + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}\gamma = \frac{\partial F}{\partial\alpha}\alpha + \frac{\partial F}{\partial\beta}\beta + \frac{\partial F}{\partial\gamma}\gamma - 2\lambda(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) = 2J_u - 2\lambda = 0,$$

пошто је $F(\alpha,\beta,\gamma)=0$ хомогена квадратна форма за коју важи Ојлерова теорема за хомогене функције.

Косинусе смера *главних оса инерције* одређујемо из једначина:

$$\alpha_i : \beta_i : \gamma_i = \begin{vmatrix} J_y - J_i & -J_{yz} \\ -J_{yz} & J_z - J_i \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -J_{yz} & -J_{xy} \\ J_z - J_i & -J_{zx} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -J_{xy} & J_y - J_i \\ -J_{zx} & -J_{yz} \end{vmatrix}$$

и услова $\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 - 1 = 0$, где је $J_i = \lambda_i$ а $i = 1, 2, 3$.

---

[1] Р. Кашанин — Виша математика, II књ., чл. 8.

У случају равног система биће $J_{xz} = J_{yz} = 0$ и $J_z = 0$ па се елипсоид инерције претвара у *елипсу инерције*, као што је познато из *Отпорности материјала* (Додатак, чл. 7).

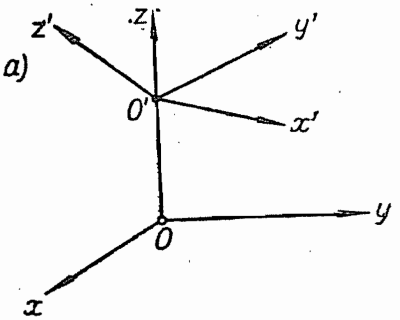
Ако су масе система тако распоређене у односу на координатни систем $Oxyz$ да маси m_i, чије су координате x_i, y_i, z_i, одговара маса $m_i' = m_i$, чије су координате $x_i, y_i, -z_i$, онда се за раван Oxy каже да је *раван кинетичке симетрије*. У случају *хомогеног* тела раван кинетичке симетрије поклапа се са равни *геометријске симетрије*. Користећи се симетријом можемо лако одредити положај главних оса инерције.

1° Ако је раван Oxy *раван симетрије* онда свакој елементарној маси $dm\ (x, y, z)$ одговара елементарна маса $dm\ (x, y, -z)$ па су центрифугални моменти

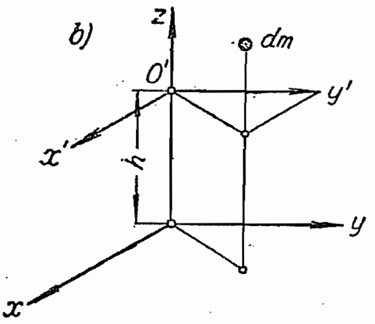
$$J_{xz} = \int x\, z\, dm = \int (x\, z - x\, z)\, dm = 0;\ J_{yz} = 0.$$

Пошто су центрифугални моменти једнаки нули то је Oz оса *главна оса* инерције. Дакле, *свака права управна на раван симетрије главна је оса инерције за своју продорну тачку кроз ту раван*. Друге две главне осе леже у тој равни.

2° Ако су равни Oxy и Oxz *равни симетрије* онда је њихов пресек, Ox оса, *главна оса инерције* пошто су, према претходном, осе Oz и Oy главне осе. Дакле, *ако тело има две ортогоналне равни симетрије онда је њихов пресек главна оса инерције за све њене тачке*. Ако је тежиште тела на тој оси она је онда и *главна централна оса*.



Сл. 194*a*. — Главне осе за тачке O и O' нису паралелне



Сл. 194*b*. — Главне осе за тачке главне централне осе (Oz) паралелне су са главним централним осама у тачки O

3° Ако је оса Oz *оса симетрије* онда је она главна оса за све њене тачке пошто је тада $J_{xz} = J_{yz} = 0$. Како се тежиште тела налази на тој оси то је она и главна централна оса инерције.

4° Ако су осе Ox, Oy, Oz главне осе инерције за тачку O тада главне осе $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$, за тачку O' на оси Oz (сл. 194*a*) нису паралелне главним осама за тачку O. Али, ако се пол O поклапа са тежиштем тела C а Ox, Oy, Oz су главне централне осе инерције, онда су главне осе за тачку O', на оси Oz, паралелне главним централним осама. Да докажемо ово уочимо (сл. 194*b*) да је $\overline{OO'} = h$ па су координате масе (dm): $x = x'$, $y = y'$, $z = z' + h$ те су центрифугални моменти

$$J_{xy} = \int x\, y\, dm = \int x'\, y'\, dm = J_{x'y'} = 0,$$

$$J_{yz} = \int y\, z\, dm = \int y'\, z'\, dm + h \int y'\, dm = \int y'\, z'\, dm = J_{y'z'} = 0,$$

$$J_{zx} = \int z\, x\, dm = \int z'\, x'\, dm + h \int x'\, dm = \int z'\, x'\, dm = J_{z'x'} = 0,$$

јер су

$$\int y'\, dm = \int y\, dm = 0; \quad \int x'\, dm = 0,$$

Дакле, *главне осе инерције за све тачке главне централне осе инерције паралелне су главним централним осама инерције.*

8. Полупречник инерције. — Аксијални момент инерције материјалног система претстављен је једначином (420″). Тај се израз може заменити производом масе система и квадрата растојање исте од осе

$$\boxed{J_u = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\, d_i^2 = M\, i_u^2} \tag{435}$$

Ово се растојање (i_u) назива *полупречник инерције* (по *Ојлеру*) или *крак инерције* (по *Поансоу*). Он је, дакле, количник

$$\boxed{i_u = \sqrt{J_u/M}} \tag{435′}$$

и има *димензију дужине*. Обично се мери јединицом cm.

Према (435′) полупречници инерције за координатне осе биће

$$i_x = \sqrt{J_x/M}, \qquad i_y = \sqrt{J_y/M}, \qquad i_z = \sqrt{J_z/M}.$$

Ако су осе уједно главне осе инерције полупречници се називају *главни полупречници инерције.* За главне централне осе они су *главни централни полупречници инерције.*

У теорији замајца уведен је појам пречника инерције ($D_i = 2\,i$).

Једначина елипсоида инерције (432) може се изразити помоћу полупречника инерције у облику

$$M\,(i_1^2\,\xi^2 + i_2^2\,\eta^2 + i_3^2\,\zeta^2) = k^2$$

или са

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1,$$

где су полуосе елипсоида

$$a=k/i_1\sqrt{\mathrm{M}},\qquad b=k/i_2\sqrt{\mathrm{M}},\qquad c=k/i_3\sqrt{\mathrm{M}}.$$

Оне су, дакле, *обрнуто сразмерне главним полупречницима инерције.*

9. Инверзни (гирациони) елипсоид инерције. — На централном елипсоиду инерције (432) уочимо једну тачку N одређену вектором положаја $\vec{r}=\xi\vec{\mathrm{i}}'+\eta\vec{\mathrm{j}}'+\zeta\vec{\mathrm{k}}'$ и у њој повуцимо тангенцијалну раван. Нормала повучена из средишта продире ту раван у тачки N'. Све ове тачке образују *подерну површину*[1] датог елипсоида. Растојање ове тачке од средишта O износи

$$\delta=\frac{(\vec{r},\operatorname{grad} f)}{|\operatorname{grad} f|},\quad \text{где је}\quad f(\xi,\eta,\zeta)=J_1\xi^2+J_2\eta^2+J_3\zeta^2-k^2=0.$$

Инверзна тачка N'' тачке N' добивена инверзијом[2] преко круга полупречника R одређена је условом $\overline{ON''}\cdot\overline{ON'}=R^2=\rho\delta$, па је вектор положаја те тачке

$$\vec{\rho}=\xi''\vec{\mathrm{i}}'+\eta''\vec{\mathrm{j}}'+\zeta''\vec{\mathrm{k}}'=\frac{R^2}{\delta}\vec{\mathrm{n}}=\frac{R^2}{(\vec{r},\operatorname{grad} f)}\operatorname{grad} f.$$

Између координата тачака N и N'' постоје ови односи:

$$\xi''=\frac{R^2}{2k^2}2J_1\xi=\frac{R^2J_1}{k^2}\xi,\qquad \xi=\frac{k^2}{R^2J_1}\xi'',\dots$$

јер су

$$\operatorname{grad} f=2(J_1\xi\vec{\mathrm{i}}'+J_2\eta\vec{\mathrm{j}}'+J_3\zeta\vec{\mathrm{k}}'),\qquad (\vec{r},\operatorname{grad} f)=2k^2.$$

Унесу ли се вредности за ξ, η, ζ у (432), добива се једначина нове површине

$$\frac{k^4}{R^4}\left(\frac{\xi''^2}{J_1}+\frac{\eta''^2}{J_2}+\frac{\zeta''^2}{J_3}\right)=k^2$$

---

[1] Подера неке криве линије за одређени пол је геометриско место тачака пресека нормала спуштених из пола на тангенту криве. Подерна површина односи се на продорне тачке нормала са тангенцијалним равнима површине.

[2] Инверзија се оснива на конструкцији пола и поларе круга. Апарати се називају инверзори. Он може да послужи да се кретање тачке по кружној линији преслика у кретање по вертикалној правој.

односно

$$\boxed{\frac{\xi^2}{J_1}+\frac{\eta^2}{J_2}+\frac{\zeta^2}{J_3}=\frac{R^4}{k^2}} \tag{432a}$$

Геометриско место тачака N'' јесте елипсоид чије су полуосе управно сразмерне квадратним коренима главних момената инерције. Овај се елипсоид назива *реципрочни* или *инверзни,* односно *гирациони* или *Mac-Cullagh-ов елипсоид инерције.* Он је послужио за други геометриски начин интерпретације проблема обртања крутог тела око непомичне тачке које одговара Ојлеровом случају.

Истим поступком добио би се од овог другог елипсоида опет Поансоов елипсоид, те се због тога и називају реципрочним. За њих важи овај однос

$$\rho\,\delta = r\,\delta'' = R^2.$$

10. Израчунавање момената инерције. — За израчунавање момената инерције хомогених тела постоје углавном три методе:

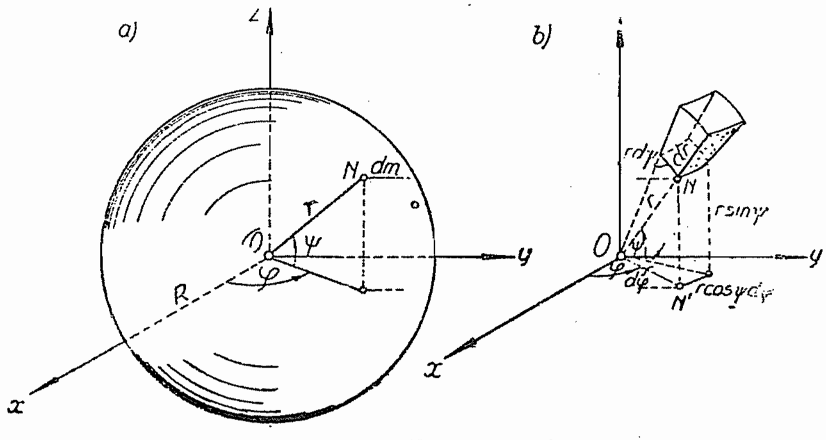
1° *директног интеграљења*

2° *метода пресека*, и

3° *експериментално одређивање* (**чл. 17.4**).

1° Метода директног интеграљења. — Овом методом израчунавају се моменти инерције директним интеграљењем једначина (419''), (421) и (421').

На примерима показаћемо примену ове методе.



Сл. 195. – Лопта (сфера)

1) *Лопта.* — Усвојимо ли сферни координатни систем (*Кин.*, чл. **1.4**) онда је запремина елементарног паралелепипеда (сл. 195):

$$dV = r^2 \cos\psi\, dr\, d\varphi\, d\psi,$$

па је поларни момент инерције за средиште лопте

$$J_O = \rho \int\limits_0^R r^4 \, d\, r \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\psi \, d\,\psi = {}^4/_5 \, \rho \, R^5 \pi .$$

Како је маса хомогене лопте $M = {}^4/_3 \, \rho \, R^3 \pi$, а с обзиром на потпуну симетрију, $J_x = J_y = J_z$, и образац (424), $2\, J_O = 3\, J_x$, биће поларни и аксијални моменти инерције:

$$\boxed{\begin{aligned} J_O &= {}^3/_5 \, M \, R^2 = {}^3/_{20} \, M \, D^2 \\ J_x = J_y = J_z &= {}^2/_5 \, M \, R^2 = {}^1/_{10} \, M \, D^2 \\ M &= \rho \, {}^4/_3 \, R^3 \tau = \rho \, {}^1/_6 \, D^3 \pi \end{aligned}} \qquad (436)$$

где је D пречник лопте.

Елипсоид инерције је *сфера*.

Ако се маса налази континуално распоређена између *двеју концентричних лопти*, полупречника r и R, биће моменти инерције

$$\boxed{\begin{gathered} J_O = {}^3/_5 \, \frac{1 - \psi^5}{1 - \psi^3} \, M \, R^2 ; \;\; J_x = J_y = J_z = {}^2/_5 \, \frac{1 - \psi^5}{1 - \psi^3} \, M \, R^2 \\ M = \rho \, {}^4/_3 \, (1 - \psi^3) \, R^3 \pi : \quad \psi = r/R \end{gathered}} \qquad (437)$$

За *шупљу лопту*, мале дебљине (δ), применом горњих образаца и занемарујући мале величине другог и вишег реда, биће

$$\boxed{\begin{gathered} J_O \approx M \, R^2, \quad J_x = J_y = J_z \approx {}^2/_3 \, M \, R^2, \\ M \approx \rho \, 4 \, R^2 \pi \, \delta \approx \rho \, A \, \delta \end{gathered}} \qquad (437')$$

До ових образаца долазимо и помоћу *Лагранжеве теореме* (*теореме о средњој вредности)*

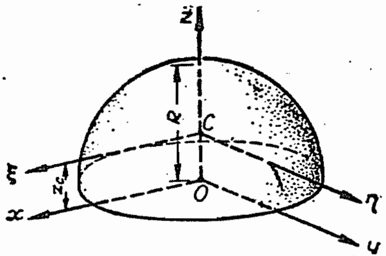
$$f\,(a + h) - f\,(a) = h\, f'\,(\xi) = h\, f'\,(a + \theta\, h) \approx h\, f'\,(a) .$$

Например, како је маса лопте $M = {}^4/_3 \, \rho \, R^3 \pi$ то је маса шупље лопте $M = 4\, \rho \, R^2 \pi \, d\, R = 4\, \rho \, R^2 \pi \, \delta$. Поларни момент инерције лопте је $J_O = {}^4/_5 \, \rho \, R^5 \pi$, па је поларни момент шупље лопте

$$J_O \approx 4\, \rho \, R^4 \pi \, \delta \approx M \, R^2 .$$

2) *Полулопта*. — За полулопту, полупречника R (сл. 196), биће моменти инерције

$$J_x = J_y = J_z = {}^4/_{15} \, \rho \, R^5 \pi = {}^2/_5 \, M \, R^2 ,$$



Сл. 196. — Полулопта

где је $M = \rho\, {}^2/_3\, R^3 \pi$ маса полулопте. Како је тежиште полулопте на Oz оси, то ћемо главне моменте инерције одредити по Штајнеровој теореми

$$J_\xi = J_\eta = {}^2/_5\, M R^2 - M\,({}^3/_8\, R)^2 = {}^{83}/_{320}\, M R^2 .$$

Дакле, биће

$$\boxed{\begin{array}{ll} J_x = J_y = J_z = {}^2/_5\, M R^2; & J_\xi = J_\eta = {}^{83}/_{320}\, M R^2, \\ J_O = {}^3/_5\, M R^2; & M = \rho\, {}^2/_3\, R^3 \pi \end{array}} \qquad (438)$$

Елипсоид инерције за тачку O је сфера, а главни централни елипсоид инерције је обртни елипсоид за Oz осу.

За *шупљу полулопту* полупречника R, дебљине δ, добивамо помоћу Лагранжеве теореме:

$$M = \rho\, {}^2/_3 \cdot 3 R^2 \pi \delta \approx 2 \rho R^2 \pi \delta ,$$

$$d J_x = {}^2/_5\, (R^2 dM + 2 M\, dR) = {}^2/_5\, (2 \rho R^4 \pi \delta + 2 \cdot {}^2/_3\, \rho R^4 \pi \delta) \approx {}^2/_3\, M R^2 .$$

Како се тежиште шупље полулопте поклапа са тежиштем површине полулопте[1], $z_C = {}^1/_2\, R$, то је према Штајнеровој теореми

$$J_\xi = {}^2/_3\, M R^2 - {}^1/_4\, M R^2 .$$

Дакле, биће:

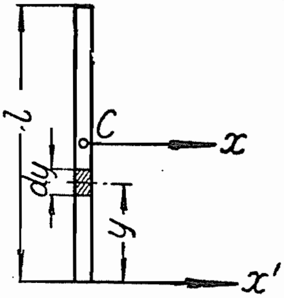
$$\boxed{\begin{array}{ll} J_x = J_y = J_z \approx {}^2/_3\, M R^2, & J_O \approx M R^2 \\ M \approx 2 \rho R^2 \pi \delta, & J_\xi = J_\eta \approx {}^5/_{12}\, M R^2 \end{array}} \qquad (438')$$

3) *Танки хомогени штап.* — Танки штап дужине l, специфичне масе ρ' (сл. 197), има момент инерције за x' осу

$$\boxed{J_{x'} = \int_0^l \rho' y^2\, dy = {}^1/_3\, M l^2} \qquad (439)$$

где је $M = \rho' l$. За паралелну тежишну Cx осу биће:

$$\boxed{J_x = {}^1/_3\, M l^2 - M\,({}^1/_2\, l)^2 = {}^1/_{12}\, M l^2} \qquad (439')$$



Сл. 197. — Танки хомогени штап

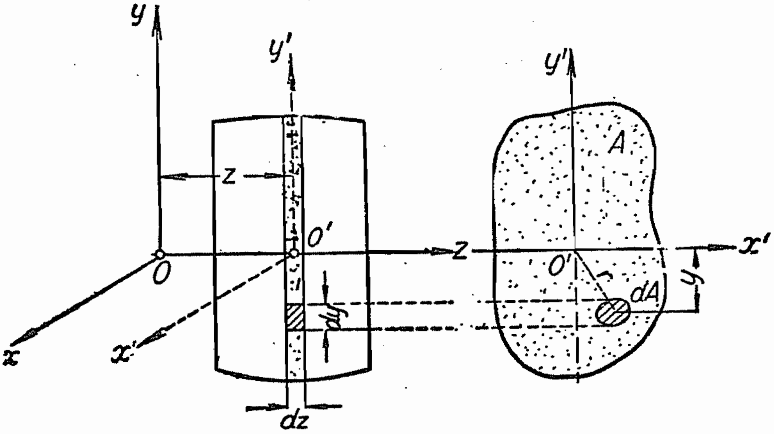
---

[1] *Статика*, чл. 36.2.

2⁰ Метода пресека. — *а*) *Призматична тела.* — Тело, чија се геометриска оса поклапа са Oz осом, поделимо у танке плоче паралелне Oxy равни (сл. 198), масе $m = \rho A\, dz$, где је A површина пропречног пресека, а dz дебљина. Момент инерције плоче за Oz осу, с обзиром на елементарну масу $dm = \rho\, dA\, dz$, биће

$$dJ_z = \iiint\limits_V r^2\, dm = \rho\, dz \iint\limits_A r^2\, dA = \rho\, I_O{}'\, dz,$$

где је $I_O{}'$ *поларни момент инерције*[1] *површине попречног пресека* A за *пол* O', продорну тачку осе Oz кроз пресек A.



Сл. 198. — Одређивање момената инерције методом пресека

Момент инерције плоче (A) за Ox осу биће

$$dJ_x = \iiint\limits_V r_2{}^2\, dm = \rho\, dz \iint\limits_A (y^2 + z^2)\, dA = \rho\, dz \iint\limits_A y^2\, dA +$$

$$+ \rho\, z^2\, dz \iint\limits_A dA = \rho\, I_{x'}\, dz + \rho\, A\, z^2\, dz$$

где је $I_{x'}$ *момент инерције површине попречног пресека* A за $O'x'$ осу паралелну оси Ox. На исти начин одредићемо и dJ_y, па су аксијални моменти инерције за координатне осе:

$$\boxed{\begin{aligned} J_z &= \int \rho\, I_{O'} dz; \quad J_x = \int \rho\, I_{x'}\, dz + \int \rho\, A\, z^2\, dz, \\ J_y &= \int \rho\, I_{y'}\, dz + \int \rho\, A\, z^2\, dz \end{aligned}} \qquad (440)$$

---

[1] *Отпорност материјала, Додатак* — Моменти инерције равних површина

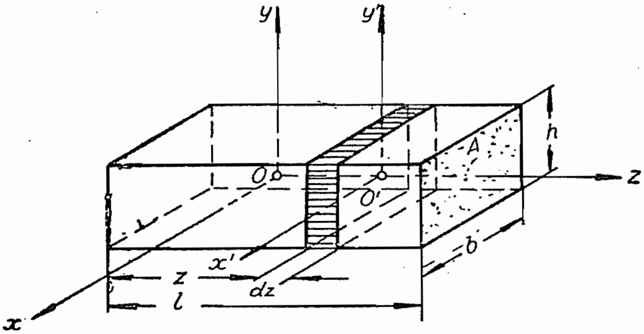
Две последње једначине следе из Штајнерове теореме (425′). Интеграљењем ових момената инерције плоче у датим границама променљиве z добићемо моменте инерције тела.

1) *Призма.* — У тежишту *паралелепипеда* константног попречног пресека $(b \cdot h)$, дужине l, усвојимо координатни систем $Oxyz$ (сл. 199*a*). Моменти инерције попречног пресека (правоугаоника) су

$$I_{O'} = {}^1/_{12}\, A\,(b^2 + h^2)$$

$$I_{x'} = {}^1/_{12}\, A\, h^2,$$

$$I_{y'} = {}^1/_{12}\, A\, b^2,$$



Сл. 199 *a*. — Паралелепипед

па су, према (440), моменти инерције

$$J_z = \int d\,J_z = \rho\, {}^1/_{12}\, A\,(b^2 + h^2) \int\limits_{-l/2}^{l/2} dz = \rho\, {}^1/_{12}\, A\, l\,(b^2 + h^2) = {}^1/_{12}\, \mathrm{M}\,(b^2 + h^2),$$

$$J_x = \int dJ_x = \rho\, {}^1/_{12}\, A\; h^2 \int\limits_{-l/2}^{l/2} dz + \rho\, A \int\limits_{-l/2}^{l/2} z^2\, dz = {}^1/_{12}\, \mathrm{M}'(l^2 + h^2),$$

где је $\mathrm{M} = \rho\, A\, l$ маса.

На исти начин одредићемо и J_y. Дакле, биће:

$$\boxed{\begin{array}{c} J_x = {}^1/_{12}\, \mathrm{M}\,(l^2 + h^2); \quad J_y = {}^1/_{12}\, \mathrm{M}\,(l^2 + b^2) \\ J_z = {}^1/_{12}\, \mathrm{M}\,(b^2 + h^2); \quad \mathrm{M} = \rho\, A\, l \end{array}} \qquad (441)$$

За *коцку* ивице a, биће:

$$\boxed{J_x = J_y = J_z = {}^1/_6\, \mathrm{M}\, a^2; \quad \mathrm{M} = \rho\, a^3} \qquad (442)$$

Правилна, права, n-то страна призма. — Основа је ове призме *правилни n*-то угаоник и може се поделити на n равностраних троуглова основице b а висине h (сл. 199*b*).

Средишни угао 2α, који одговара основици b, једнак је $2\pi/n$ тј. $\alpha = \pi/n$ па је $\operatorname{ctg}\alpha = 2\,h/b$. Поларни момент инерције једног троугла за пол у врху O' (средишту уписаног круга) биће

$$I_{O'} = I_{x'} + I_{y'},$$

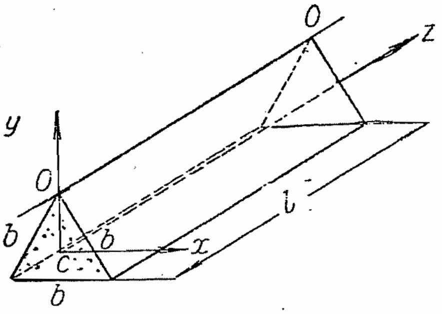
где су $I_{x'}$ и $I_{y'}$ аксијални моменти инерције троугла за осу Ox', кроз теме троугла и $O'y'$ осу симетрије. Ови моменти износе $\frac{1}{4}\,b\,h^3$ и $\frac{1}{48}\,b^3\,h$ па је

$$I_{O'} = \frac{1}{4}\,bh\,[h^2 + \frac{1}{12}\,b^2].$$

Укупни поларни момент инерције n-тоугаоника биће

$$I_{O'} = \frac{1}{4}\,n\,b\,h\,(h^2 + \frac{1}{12}\,b^2) =$$

$$= \frac{1}{24}\,A\,b^2\,[1 + 3\operatorname{ctg}^2(\pi/n)],$$



Сл. 199 b. — Правилна тространа призма

где је A површина основе, па је

$$J_z = \rho\,I_{O'}\,l = \frac{1}{24}\,\mathrm{M}\,b^2\,[1 + 3\operatorname{ctg}^2(\pi/n)].$$

За $n = 3$, 4, 5, 6 биће:

$n = 3$, $J_z = \frac{1}{12}\,\mathrm{M}\,b^2$; $n = 4$, $J_z = \frac{1}{6}\,\mathrm{M}\,b^2$ (коцка),

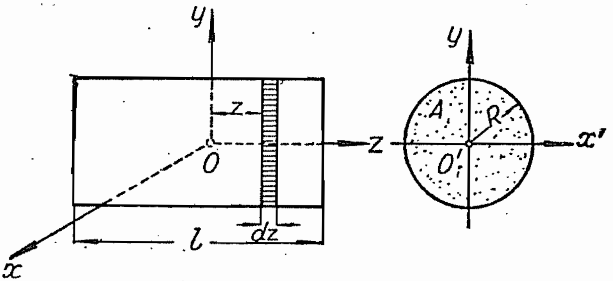
$n = 5$, $J_z = \frac{1}{24}\cdot 6{,}68\,\mathrm{M}\,b^2$; $n = 6$, $J_z = \frac{10}{24}\,\mathrm{M}\,b^2 = \frac{5}{12}\,\mathrm{M}\,b^2$.

2) *Цилиндар.* — За цилиндар дужине l, кружног попречног пресека, полупречника R (сл. 200), моменти су инерције попречног пресека

$$I_{O'} = \frac{1}{2}\,A\,R^2,$$

$$I_{x'} = I_{y'} = \frac{1}{4}\,A\,R^2,$$

па су моменти инерције цилиндра:



Сл. 200. — Цилиндар (ваљак)

$$\boxed{J_x = J_y = \frac{1}{12}\,\mathrm{M}\,(l^2 + 3\,R^2); \quad J_z = \frac{1}{2}\,\mathrm{M}\,R^2; \quad \mathrm{M} = \rho\,A\,l} \qquad (443)$$

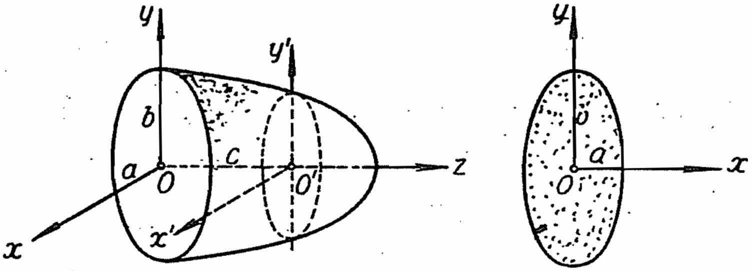
Код *диска* мале дебљине ($l = \rho$) можемо занемарити величину $(\delta/R)^2$ као малу у односу на јединицу, па из (443) добивамо

$$\boxed{J_x = J_y \approx \frac{1}{4}\,\mathrm{M}\,R^2, \qquad J_z \approx \frac{1}{2}\,\mathrm{M}\,R^2 = 2\,J_x} \qquad (443')$$

3) *Елипсоид.* — Пресецимо троосни елипсоид са равни паралелном Oxy равни (сл. 201) пресек је елипса, полуоса x и y, па су аксијални и

поларни моменти површине 'овог пресека

$$I_{x'} = {}^1/_4\, \pi\, y^3\, x, \qquad I_{y'} = {}^1/_4\, \pi\, x^3\, y; \qquad I_{O'} = {}^1/_4\, \pi\, (x^2 + y^2)\, xy.$$



Сл. 201. — Троосни елипсоид

Попречни пресек је променљив јер су полуосе ове елипсе променљиве. Пресеци елипсоида са координатним равнима Oyz и Ozx јесу елипсе једначина

$$b^2 z^2 + c^2 y^2 = b^2 c^2, \qquad a^2 z^2 + c^2 x^2 = a^2 c^2$$

из којих следе релације

$$c^2 (x^2 + y^2) = (a^2 + b^2)\ (c^2 - z^2), \qquad c^2 x\, y = ab\, (c^2 - z^2)$$

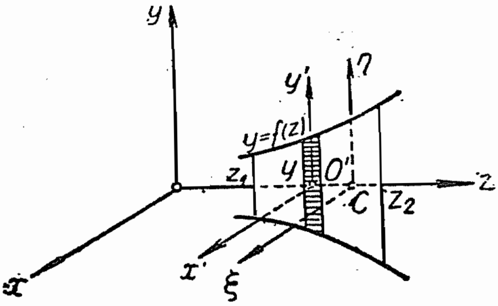
па је

$$J_z = \rho\, {}^1/_4\, \pi\, ab\, (a^2 + b^2)\, c^{-4} \int_{-c}^{c} (c^2 - z^2)^2\, dz = {}^1/_5\, \mathrm{M}\, (a^2 + b^2),$$

где је $\mathrm{M} = \rho\, {}^4/_3\, abc\, \pi$ маса елипсоида. На исти начин одредићемо и остала два аксијална момента инерције. Дакле, биће

$$\boxed{\begin{array}{l} J_x = {}^1/_5\, \mathrm{M}\, (b^2 + c^2); \quad J_y = {}^1/_5\, \mathrm{M}\, (c^2 + a^2); \quad J_z = {}^1/_5\, \mathrm{M}\, (a^2 + b^3) \\ J_O = {}^1/_5\, \mathrm{M}\, (a^2 + b^2 + c^2); \qquad \mathrm{M} = \rho\, {}^4/_3\, abc\, \pi \end{array}} \quad (444$$

b) *Обртна тела.* — Код обртних тела која постају потпуним обртањем меридијана $y = f(z)$ око Oz осе (сл. 202) *попречни је пресек круг*, површине $y^2 \pi$, па су моменти инерције попречног пресека



Сл. 202. — Обртно тело

$$I_{O'} = {}^1/_2\, y^4\, \pi\,;$$

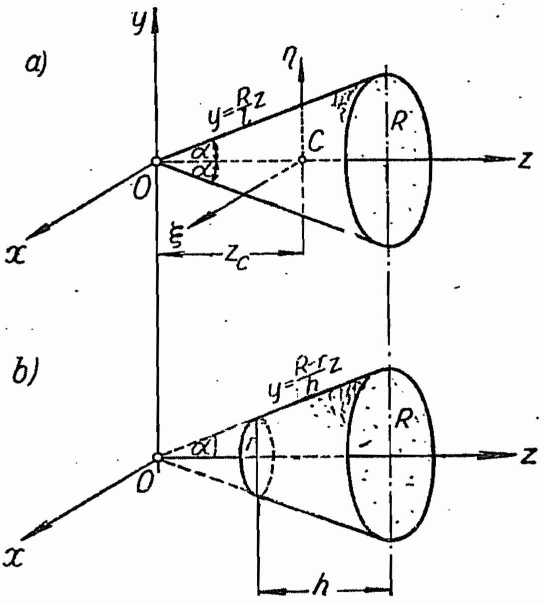
$$I_{x'} = I_{y'} = {}^1/_4\, y^4\, \pi = {}^1/_2\, I_{O'}.$$

Унесимо ове вредности у обрасце (440) биће:

$$\boxed{\begin{aligned} J_z &= {}^1/_2\,\rho\,\pi\int_{z_1}^{z_2}[f(z)]^4\,dz, \\ J_x = J_y &= {}^1/_2 J_z + \rho\,\pi\int_{z_1}^{z_2} z^2\,[f(z)]^2\,dz \end{aligned}} \qquad (445)$$

Пошто је оса Oz тежишна оса то је уједно и главна централна оса инерције. Друге две главне централне осе $C\xi$ и $C\eta$ паралелне су осама Ox и Oy, J_z је уједно и главни централни момент инерције а друга два главна централна момента инерције одредићемо по Штајнеровој теореми

$$\boxed{J_\xi = J_\eta = J_x - M\,z_C{}^2} \qquad (445')$$



Сл. 203. — Кружни конус

1) *Конус.* — Конус постаје обртањем меридијана, праве $y = m\,z$ (сл. 203), коефицијента правца $m = \mathrm{tg}\,\alpha = R/l$, где је $l = H$ висина конуса.

Уносећи ову вредност у образац (445) биће

$$J_z = {}^1/_2\,\rho\,\pi\,(R/l)^4\int_0^l z^4\,dz = {}^1/_{10}\,\rho\,\pi\,R^4\,l,$$

$$J_x = J_y = {}^1/_2\,J_z + \rho\,\pi\,(R/l)^2\int_0^l z^4\,dz = {}^1/_{20}\,\rho\,\pi\,R^2\,l\,(4\,l^2 + R^2).$$

Уводећи масу конуса биће обрасци

$$\boxed{J_x = J_y = {}^3/_{20}\,M\,(4\,l^2 + R^2), \quad J_z = {}^3/_{10}\,M\,R^2; \quad M = \rho\,{}^1/_3\,R^2\,\pi\,l} \qquad (446)$$

На исти начин добићемо аксијалне моменте инерције *зарубљеног конуса* (сл. 203 *b*), висине h:

$$\boxed{\begin{aligned} J_z &= {}^1/_{10}\,\rho\,\pi\frac{1-\psi^5}{1-\psi}R^4\,h = {}^3/_{10}\,\frac{1-\psi^5}{1-\psi^3}\,\mathrm{M}\,R^2; \qquad \psi = r/R \\ \mathrm{M} &= \rho\,{}^1/_3\,\pi\,(R^2+R\,r+r^2)\,h = \rho\,{}^1/_3\,(1+\psi+\psi^2)\,R^2\pi\,h \end{aligned}} \tag{447}$$

јер су:

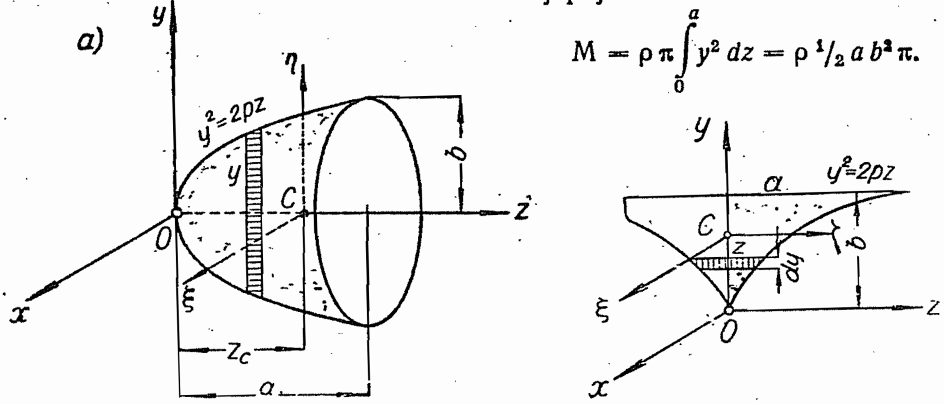
$$h' = h\,\psi/(1-\psi), \qquad H = h/(1-\psi).$$

2) *Параболоид.* — Код обртног параболоида (сл. 204 *a*) меридијан је парабола $y^2 = 2\,p\,z = b^2\,z/a$, па је

$$J_z = {}^1/_2\,\rho\,\pi\,(b^2/a)^2\int_0^a z^2\,dz = {}^1/_6\,\mathrm{M}\,b^2,$$

јер је

$$\mathrm{M} = \rho\,\pi\int_0^a y^2\,dz = \rho\,{}^1/_2\,a\,b^2\,\pi.$$



Сл. 204. — Обртни параболоиди

Друга два главна момента инерције су:

$$J_x = J_y = {}^1/_6\,\mathrm{M}\,b^2 + \rho\,\pi\,b\,a^{-1}\int_0^a z^3\,dz = {}^1/_6\,\mathrm{M}\,(3\,a^2+b^2);$$

дакле, биће

$$\boxed{J_x = J_y = {}^1/_6\,\mathrm{M}\,(3\,a^2+b^2); \quad J_z = {}^1/_3\,\mathrm{M}\,b^2; \quad \mathrm{M} = \rho\,{}^1/_2\,a\,b^2\,\pi} \tag{448}$$

Тежиште параболоида налази се на Oz оси, $z_C = {}^2/_3\,a$ (*Статика*, IV део, обр. 274), па су главни централни моменти инерције

$$\boxed{J_\xi = J_\eta = {}^1/_6\,\mathrm{M}\,({}^1/_3\,a^2+b^2), \quad J_z = {}^1/_3\,\mathrm{M}\,b^2} \tag{448'}$$

За обртни параболоид око Oy осе (сл. 204 b) биће главни моменти инерције, јер је $z = a\,y^2/b^2$,

$$J_y = {}^1/_2\,\rho\,\pi\,(a/b^2)^4 \int_0^b y^8\,dy = {}^5/_{18}\,\mathrm{M}\,a^2$$

$$J_x = J_z = {}^5/_{36}\,\mathrm{M}\,a^2 + \rho\,\pi\,(a/b^2)^2 \int_0^b y^6\,dy = {}^5/_{18}\,\mathrm{M}\,({}^1/_2\,a^2 + {}^{18}/_7\,b^2)$$

пошто је

$$\mathrm{M} = \rho\,\pi \int_0^b z^2\,dy = \rho\,{}^1/_5\,b\,a^2\,\pi,$$

$$\boxed{\begin{array}{l} J_x = J_z = {}^5/_{18}\,\mathrm{M}\,({}^1/_2\,a^2 + {}^{18}/_7\,b^2) \\ J_y = {}^5/_{18}\,\mathrm{M}\,a^2\,; \quad \mathrm{M} = \rho\,{}^1/_5\,a^2\,b\,\pi \end{array}} \qquad (448'')$$

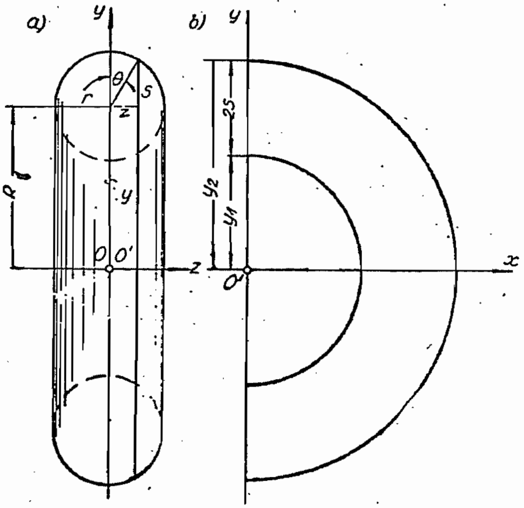
Главни централни моменти инерције, пошто је $y_C = {}^5/_6\,b$ (*Статика*, обр. 275), биће

$$\boxed{J_\xi = J_\zeta = {}^5/_{18}\,\mathrm{M}\,({}^1/_2\,a^2 + {}^1/_{14}\,b^2), \qquad J_y = {}^5/_{18}\,\mathrm{M}\,a^2} \qquad (448''')$$

3) *Кружни торус.* — Пресецимо торус (сл. 205) равни паралелном равни Oxy на растојању z од ње, онда је попречни пресек *кружни прстен* дебљине $2\,s = 2\sqrt{r^2 - z^2}$, полупречника $y_2 = R + s$, $y_1 = R - s$. Аксијални и поларни моменти инерције овог попречног пресека износе:

$$I_{x'} = I_{y'} = {}^1/_4\,\pi\,(y_2^4 - y_1^4) =$$

$$= 2\pi\,R\,(R^2 + s^2)\,s = {}^1/_2\,I_{O'}.$$



Сл. 205. — Кружни торус

Како су $z = r\sin\theta$, $s = r\cos\theta$, то уношењем у обрасце (445) добивамо:

$$J_z = 2\,\rho\!\int\! I_O'\,dz =$$

$$= 8\,\rho\,\pi\,R\,r^2 \int_0^{{}^1/_2\pi} (R^2 + r^2\cos^2\theta)\cos^2\theta\,d\,\theta,$$

$$J_x = J_y = {}^1/_2\,J_z + 8\,\rho\,\pi\,R\,r^4 \int_0^{{}^1/_2\pi} \sin^2\theta\,\cos^2\theta\,d\,\theta.$$

Како је маса торуса $M = \rho V = \rho r^2 \pi \cdot 2 R \pi$, интеграљењем[1] биће:

$$\boxed{\begin{aligned} J_z &= M(R^2 + {}^3/_4 r^2), \quad M = \rho 2 R r^2 \pi^2 \\ J_x &= J_y = M({}^1/_2 R^2 + {}^5/_8 r^2) \end{aligned}} \tag{449}$$

На овај проблем своди се проблем одређивања момената инерције *трансмисионог каишника са жлебом.* Нека је каишник ваљак полупречника R и дебљине $2r$, са исеченим полукружним жлебом на омотачу полупречника r, тада је попречни пресек круг полупречника $y = R - r \cos\varphi$ и $dz = r \cos\varphi\, d\varphi$, па су моменти инерције:

$$J_z = \rho \pi R^5 \psi \int_0^{{}^1/_2 \pi} (1 - \psi \cos\varphi)^4 \cos\varphi\, d\varphi; \quad \psi = r/R,$$

$$J_x = J_y = {}^1/_2 J_z + 2 \rho \pi R^5 \psi^3 \int_0^{{}^1/_2 \pi} (1 - \psi \cos\varphi)^2 \sin^2\varphi \cos\varphi\, d\varphi.$$

Масу каишника одређујемо по Гулденовој теореми:

$$M = \rho \{R^2 \pi \cdot 2 r - {}^1/_2 r^2 \pi \cdot 2 [R - (4 r/3 \pi)] \pi\} = \rho R^3 \pi \psi (2 - \pi \psi + {}^4/_3 \psi^2).$$

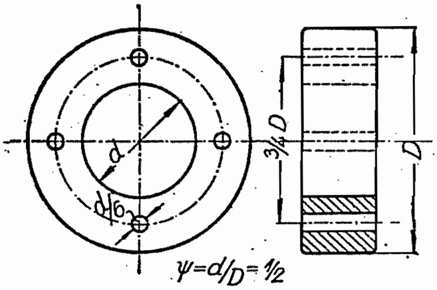
Интеграљењем добивамо[2]

$$J_z = \rho R^5 \pi \psi [(1 + 4 \psi^2 + {}^8/_{15} \psi^4) - \pi (\psi + {}^3/_4 \psi^3)],$$

$$J_x = J_y = {}^1/_2 J_z + 2 \rho R^5 \psi^3 \pi [{}^1/_3 - {}^2/_{15} \psi^2 - {}^1/_8 \pi \psi].$$

Примери. — 1) Колики је момент инерције ваљка за његову изводницу?

$(J_a = {}^3/_2 M R^2)$



Сл. 206.

2) Колики је момент инерције конуса за његову изводницу?

Решење. — Узмимо изводницу у равни Oyz (сл. 203*a*); биће према (429)

$$J_q = J_z \cos^2\alpha + J_y \sin^2\alpha =$$
$$= {}^3/_{20} M R^2 (6 l^2 + R^2)/(l^2 + r^2).$$

3) Који услов мора бити испуњен да би се елипсоид инерције за теме O обртног параболоида (сл. 204*a*) претворио у сферу?

Решење. — Из услова $J_x = J_y = J_z$, према (448), добивамо $b = a\sqrt{3}$.

---

[1] $\int \sin^n x\, dx = - n^{-1} (\sin^{n-1} x \cos x) + n^{-1} (n-1) \int \sin^{n-2} x\, dx,$

$\int \cos^n x\, dx = n^{-1} (\cos^{n-1} x \sin x) + n^{-1} (n-1) \int \cos^{n-2} x\, dx.$

[2] $\int_0^{{}^1/_2\pi} \sin^{2n+1} x\, dx = \int_0^{{}^1/_2\pi} \cos^{2n+1} x\, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdot \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdot \cdot (2n+1)},$

$\int_0^{{}^1/_2\pi} \sin^{2n} x\, dx = \int_0^{{}^1/_2\pi} \cos^{2n} x\, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdot \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdot \cdot 2n} \cdot \frac{\pi}{2}.$

4) За колико се промени момент инерције ваљка за z осу када се из њега избуше назначене рупе (сл. 206)?

Решење. — Како су $M_0 = {}^1/_4 M$, $m = {}^1/_{144} M$ промена момента инерције износи:

$$\Delta J_z = {}^1/_2 M_0 r^2 + 4m\,({}^1/_2 r'^2 + {}^9/_{16} R^2) \approx {}^{23}/_{512} J_z\,.$$

5) Одредити моменте инерције тела (сл. 207) за осе Oz и $a-a$.

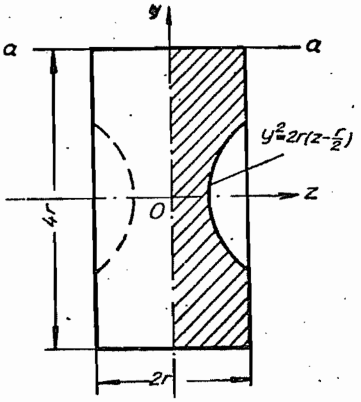
Решење. — Тело се састоји из цилиндра и два параболоида, маса $M_1 = 8\rho\pi r^3$, $M_2 = {}^1/_{32} M_1$ па је $M = M_1 - 2M_2 = {}^{15}/_{16} M_1$.

Према обрасцима (443) и (448) биће:

$$J_z = 2M_1 r^2 - {}^1/_{48} M_1 r^2 = {}^{95}/_{48} M_1 r^2 = {}^{95}/_6 \rho\pi r^5.$$

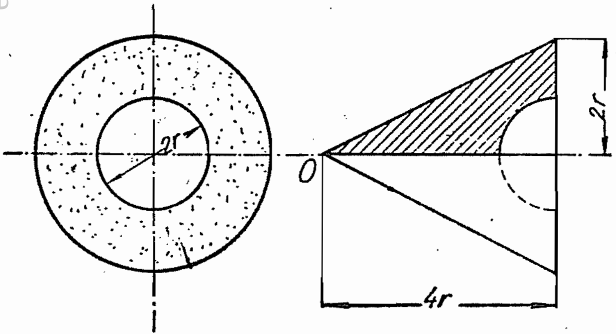
Према Штајнеровој теореми је

$$J_a = J_z + M \cdot 4r^2 = {}^{275}/_{48} M_1 r^2 = {}^{275}/_6 \rho\pi r^5.$$



Сл. 207.

6) Одредити главне централне моменте инерције датог тела (сл. 208).



Сл. 208.

Решење. — Координате су тежишта тела

$$x_C = y_C = 0;$$

$$z_C = {}^{161}/_{56}\, r \approx 2{,}91\, r.$$

Како су $M_1 = {}^{16}/_3 \rho\pi r^3$, $M_2 = {}^1/_8 M_1$ биће:

$$J_z = {}^3/_{10} M_1 R^2 - {}^2/_5 M_2 r^2 =$$

$$= {}^{23}/_{20} M_1 r^2 = {}^{92}/_{15} \rho\pi r^5$$

и

$$J_\xi = J_\eta = {}^{198}/_{20} M_1 r^2 -$$

$$- {}^1/_8\,[{}^{83}/_{320} + {}^{25}/_{64}]\, M_1 r^2 \approx$$

$$\approx 108\,\rho\pi r^5.$$

7) Одредити аксијални момент инерције тела које постаје потпуним обртањем дате површине (сл. 209) око Oz осе.

Решење.

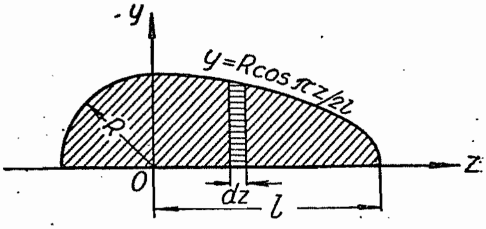
$$J_{z1} = {}^2/_5 m R^2.$$

$$J_{z2} = {}^1/_2 \rho\pi R^4 \int_0^l \cos^4({}^1/_2 \pi z/l)\, dz =$$

$$= {}^1/_2 \rho\pi R^4 \cdot {}^3/_8\, l = {}^3/_8 M R^2,$$

јер је

$$M = \rho\pi R^2 \int_0^l \cos^2({}^1/_2 \pi z/l)\, dz = {}^1/_2 \rho\pi R^2 l$$



Сл. 209.

па је

$$J_z = {}^3/_8 M R^2 + {}^2/_5 m R^2 = {}^1/_{240} \rho\pi R^4 (64R + 45l).$$

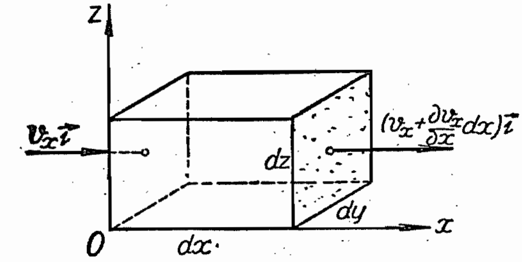
II ОСНОВИ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА

1. Гаусова теорема. — Нека је површина A поље векторске функције $\vec{v}$ онда се површински интеграл

$$\iint_A (\vec{v},\, d\vec{A})$$

скаларног производа вектора $\vec{v}$ и управљеног површинског елемента $d\vec{A}$ назива *проток* вектора $\vec{v}$ кроз површину A (в. *Кин.*, Додатак III). Тај је интеграл *скалар* и може се написати у облику

$$\iint_A (\vec{v}, d\vec{A}) = \iint_A (v_x\, dy\, dz + v_y\, dz\, dx + v_z\, dx\, dy). \tag{450}$$



Сл. 210 *a*. — Хидромеханичко значење дивергенције

Под *дивергенцијом*[1] векторског поља подразумевали смо скаларни производ Хамилтоновог оператора и самог вектора не дајући никакво физичко значење самом том појму. Да бисмо сазнали суштину овог појма посматрајмо *поље струјања* идеалне течности и нека вектор $\vec{v}$ претставља *брзину струјања*. Уочимо у томе пољу елементарну запремину у облику правоуглог паралелепипеда (сл. 210 *a*) онда у јединици времена у тај запремински елемент утиче у правцу Ox осе количина течности $\rho\, v_x\, dy\, dz$ односно $v_x\, dy\, dz$ сматрајући да је густина идеалне течности $\rho = 1$. Пошто је вектор $\vec{v}$ функција координата x, y, z, то ће се и његова координата v_x мењати, тј. зависити од положаја честице течности, па је брзина истицања течности у правцу исте осе

$$v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx.$$

Према томе је вишак истекле течности у правцу Ox осе

$$\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx\right) dy\, dz - v_x\, dy\, dz = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx\, dy\, dz = \frac{\partial v_x}{\partial x} d\, V.$$

---

[1] Овај назив увео је *William Clifford* (1845—1879 год.), 1878 г.

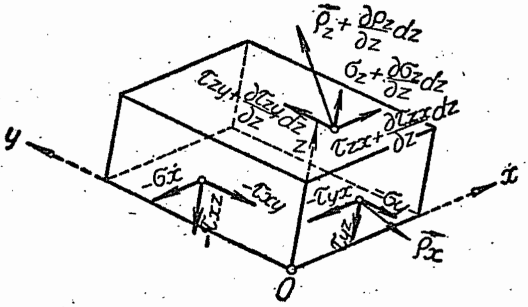
На исти начин вишкови истекле течности и у друга два правца биће $\frac{\partial v_y}{\partial y} dV$ и $\frac{\partial v_z}{\partial z} dV$, па је укупни вишак истекле течности из запреминског елемента у јединици времена

$$dQ = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dV = \operatorname{div} \vec{v} \cdot dV.$$

За јединицу запремине биће, пак,

$$\frac{dQ}{dV} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = \operatorname{div} \vec{v} = (\nabla, \vec{v}).$$

Према томе под *дивергенцијом*, у области хидромеханике, *можемо разумети вишак количине течности која истиче из јединице запремине у јединици времена.*



Сл. 210 *b*. — **Напони напрегнутог тела**

Ако је дивергенција у некој тачки поља *позитивна* онда из јединичне запремине *истиче* течност, па се та тачка назива *извор* поља. У противном, ако је дивергенција *негативна* онда је у тој тачки *понор*, течност *понире*. Када је дивергенција једнака нули тада нема протицања течности.

Појам дивергенције проширује се на сва векторска поља без обзира на њихово физичко значење. Издвојимо напр. из напрегнутог тела[1] елементарни паралелепипед запремине $dx\, dy\, dz$ и означимо са $\vec{\rho}_x$, $\vec{\rho}_y$, $\vec{\rho}_z$ напоне за три равни које се поклапају са координатним равнима (сл. 210 *b*) онда је напон за страну паралелну *Oyz* равни, а померену за dx, дат изразом

$$\vec{\rho}_x + \frac{\partial \vec{\rho}_x}{\partial x} dx$$

па је промена напона у том правцу на померању dx

$$\left(\vec{\rho}_x + \frac{\partial \vec{\rho}_x}{\partial x} dx - \vec{\rho}_x\right) dy\, dz = \operatorname{div} \vec{\rho}_x\, dV = (\Delta, \vec{\rho}_x)\, dV$$

где је

$$\vec{\rho}_x = \tau_{yx}\, \vec{i} + \sigma_y\, \vec{j} + \tau_{yz}\, \vec{k}.$$

Према томе дивергенцијом је окарактерисана промена напона напрегнутог тела. Услед дејства спољашних сила наступиће и *деформације*. Ако је померање тачке дато као векторска функција положаја

$$\vec{s} = u\, \vec{i} + v\, \vec{j} + w\, \vec{k},$$

---

[1] Ј. Хлитчијев — Поглавља из теорије еластичности. Београд, 1950, стр. 4.

где су његове координате u, v, w функције положаја (координата x, y, z) онда се под *дилатацијама* подразумевају изрази

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Запремина деформисаног елементарног паралелепипеда $dx\,dy\,dz$ постаће

$$dx\,(1+\varepsilon_x)\,dy\,(1+\varepsilon_y)\,dz\,(1+\varepsilon_z) \approx dx\,dy\,dz\,(1+\varepsilon_V)$$

где је

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

запреминска дилатација

$$\varepsilon_V = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{s}$$

и претставља прираштај запремине елементарног паралелепипеда услед деформације[1].

На основу Хуковог закона биће

$$\mathrm{E}\ \varepsilon_x = \sigma_x - \mu\,(\sigma_y + \sigma_z); \qquad \mathrm{E}\ \varepsilon_y = \sigma_y - \mu\,(\sigma_z + \sigma_x);$$

$$\mathrm{E}\ \varepsilon_z = \sigma_z - \mu\,(\sigma_x + \sigma_y)$$

па је запреминска дилатација

$$\varepsilon_V = (1 - 2\,\mu)\,S_1{}^{\sigma}/\mathrm{E}$$

где је $S_1{}^{(\sigma)} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$.

У случају *равномерног хидростатичког притиска* $(\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p)$

биће

$$\varepsilon_V = -3\,(1 - 2\,\mu)\,p/\mathrm{E} = -p/\mathbf{K},$$

где је

$$\mathbf{K} = \mathrm{E}/3\,(1 - 2\,\mu) = {}^{2}/_{8}\,[(1+\mu)/(1-2\,\mu)]\ \mathrm{G}.$$

запремински модул еластичности[2] (kg/cm²) који зависи од *Јанг*-овог *модула еластичности* (E) и *Поасон*-овог *коефицијента* (μ), односно модула клизања (G).

У пољу вектора $\vec{v}$ уочимо коначну запремину V обухваћену површином A. Ако поделимо ову запремину на бесконачно много запреминских елемената онда је он обухваћен површинским елементом A'. Проток вектора $\vec{v}$ кроз ову површину дат је изразом

$$\iint\limits_{A'} (\vec{v}, d\vec{A})$$

и једнак је укупном протоку из те елементарне запремине у јединици времена, тј. биће

$$\operatorname{div} \vec{v}\, d\,V = \iint\limits_{A'} (\vec{v}, d\,A).$$

Саберемо ли ове изразе за укупну запремину V морамо водити рачуна да су унутрашње површине суседних запреминских елемената

---

[1] D. Rachkovitch — Forme diadique des équations fondamentalles de la Théorie d'élasticité (Publications de L'Institut mathématique — Ac. d. sciences — Belgrade, 1948)

[2] Ibid — Отпорност материјала, чл. 4.1, обр. 72.

заједничке и да су им управљени површински елементи супротно оријентисани па су и протоци кроз те површине супротни и поништавају се, те остаје само интеграл по спољашњој површини (A) која обухвата запремину (V), тј. биће

$$\boxed{\iint\limits_A (\vec{v}, d\vec{A}) = \iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{v}\, d\,V} \qquad (450')$$

Овај став претставља *Гаусову теорему (теорема дивергенције)* и показује начин *претварања површинског интеграла у запремински.* У развијеном облику за Декартове правоугле координате биће

$$\iint\limits_A v_x\, dy\, dz + v_y\, dz\, dx + v_z\, dx\, dy =$$

$$= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz \qquad (450'')$$

(тзв. формула *Остроградског* или *Гринова* формула).

2. Гринови обрасци. — Применимо ли Гаусов образац на специјално векторско поље дато изразом $\vec{v} = W \operatorname{grad} U$, где су U и W скалари, биће

$$\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} (W \operatorname{grad} U) = (\nabla, W \nabla U) = \nabla W \nabla U + W \Delta U = \operatorname{grad} W \operatorname{grad} U + W \Delta U$$

па је

$$\boxed{\iint\limits_A W\, (\operatorname{grad} U, d\vec{A}) = \iiint\limits_V \operatorname{grad} W \operatorname{grad} U\, d\,V + \iiint\limits_V W \Delta U\, d\,V} \qquad (451)$$

Овај израз претставља *први Гринов* (*George Green*, 1793—1841) *образац*[1].

Ако скалари U и W промене улоге биће Гринов образац

$$\iint\limits_A U\, (\operatorname{grad} W, d\vec{A}) = \iiint\limits_V \operatorname{grad} U \operatorname{grad} W\, d\,V + \iiint\limits_V U \Delta W\, d\,V.$$

Одузмемо ли ову једначину од (451) добићемо *други (главни) Гринов образац*

$$\iint\limits_A (W \operatorname{grad} U - U \operatorname{grad} W, d\vec{A}) = \iiint\limits_V (W \Delta U - U \Delta W)\, d\,V. \qquad (451')$$

---

[1] *Green. — „An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism“.* 1828 год.

Ако скалари U и W задовољавају Лапласову једначину (*Кин.* стр. 278), тј. ако су они хармониске функције па задовољавају услове $\Delta U = 0$, $\Delta W = 0$, онда образац (451') постаје

$$\iint\limits_A W\,(\text{grad } U,\ d\vec{A}) = \iint\limits_A U\ (\text{grad } W, d\vec{A}) \qquad (451'')$$

и претставља *Трећи Гринов образац.*

Гринови обрасци, као специјални случајеви Гаусовог обрасца, служе за претварање површинског интеграла у два запреминска.

3. Стоксова теорема. — Извод скаларне функције $U(x, y, z)$ у датом правцу јесте израз

$$\frac{dU}{d\vec{r}} = (\text{grad } U, \vec{e}) = (\vec{e}, \nabla)\,U$$

где је $\vec{e}$ орт вектора $d\vec{r}$.

Ако уместо скаларног поља $U(\vec{r})$ узмемо векторско поље $\vec{v} = \vec{v}\,(\vec{r})$ онда је извод вектора $\vec{v}$ у правцу орта $\vec{e}$ дат изразом

$$\frac{d\vec{v}}{d\vec{r}} = \lim_{\Delta r\to 0}\frac{\vec{v}(\vec{r}_1)-\vec{v}(\vec{r}_0)}{\Delta r} = \frac{d v_x}{d r}\vec{i} + \frac{d v_y}{d r}\vec{j} + \frac{d v_z}{d r}\vec{k},$$

јер је $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$. Изводи пројекција вектора $\vec{v}$ у датом правцу $\vec{e}$ могу се, према горњем, написати у облику

$$\frac{d v_x}{d r} = (\vec{e}, \nabla)\,v_x,\quad \frac{d v_y}{d r} = (\vec{e}, \nabla)\,v_y,\quad \frac{d v_z}{d r} = (\vec{e}, \nabla)\,v_z.$$

Унесемо ли ове вредности у израз за извод вектора $\vec{v}$ у правцу орта $\vec{e}$ биће

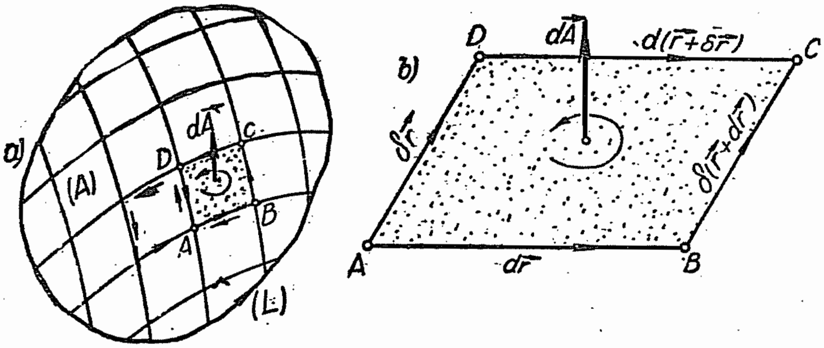
$$\frac{d\vec{v}}{d\vec{r}} = (\vec{e}, \nabla)\ (v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) = (\vec{e}, \nabla)\,\vec{v}. \qquad (452)$$

Промена векторске функције $\vec{v}\,(\vec{r})$ у томе пољу при померању тачке за $d\vec{r}$ дата је, онда, изразом

$$\boxed{d\vec{v} = (d\vec{r}, \nabla)\,\vec{v}} \qquad (452)$$

Нека је површина (A), омеђена контуром (L), поље дате векторске функције $\vec{v}\,(\vec{r})$. Поделимо ту површину на бесконачно много површинских елемената (сл. 211 *a*) које можемо сматрати паралелограмима (сл. 211 *b*). Ако је тачка A паралелограма одређена вектором положаја $\vec{r}$ у односу на сталну тачку — пол — O онда је тачка B одређена, у односу на A, релативним вектором положаја $d\vec{r}$, а тачка D, вектором положаја $\delta\vec{r}$, који претстављају *елементарна померања.* Тачка C, одређена је у односу на тачку D померањем $d(\vec{r} + \delta\vec{r})$ а у односу на B померањем $\delta(\vec{r} + d\vec{r})$. Како је

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AD} + \vec{DC}$$



Сл. 211. — Доказ Стоксове теореме

то мора бити испуњен услов

$$\delta d\vec{r} = d\delta\vec{r}.$$

Интеграл $\int_L (\vec{v}, d\vec{r})$ узет по некој кривој (L) назива се *флукс вектора* $\vec{v}$ дуж те криве (L). Ако је крива затворена онда се интеграл назива *циркулација*[1] *вектора* $\vec{v}$. Према томе циркулација вектора $\vec{v}$ по контури $ABCD$ биће:

$$\oint_{ABCD} (\vec{v}, d\vec{r}) = (\vec{v}, d\vec{r}) + (\vec{v}, \delta\vec{r}) + d(\vec{v}, \delta\vec{r}) - (\vec{v}, d\vec{r}) -$$

$$- \delta(\vec{v}, d\vec{r}) - (\vec{v}, \delta\vec{r}) = d(\vec{v}, \delta\vec{r}) - \delta(\vec{v}, d\vec{r}) = (d\vec{v}, \delta\vec{r}) - (\delta\vec{v}, d\vec{r}).$$

Како су $d\vec{v}$ и $\delta\vec{v}$ прираштаји векторске функције у правцима $d\vec{r}$ и $\delta\vec{r}$ то се могу написати у облику

$$d\vec{v} = (d\vec{r}, \nabla)\,\vec{v}, \quad \delta\vec{v} = (\delta\vec{r}, \nabla)\,\vec{v}$$

па сменом ових вредности циркулације постаје

$$\oint_{ABCD} (\vec{v}, d\vec{r}) = (d\vec{r}, \nabla)\,(\vec{v}, \delta\vec{r}) - (\delta\vec{r}, \nabla)\,(\vec{v}, d\vec{r}).$$

---

[1] W. Thomson, 1869 год.

Израз на десној страни ове једначине може се написати у облику скаларног производа двају векторских производа четири вектора[1]

$$\oint_{ABCD} (\vec{v},\ d\vec{r}) = ([\nabla, \vec{v}],\ [d\vec{r}, \delta\vec{r}]) = (\mathrm{rot}\ \vec{v}, d\vec{A}), \qquad (453)$$

где је $d\vec{A} = [d\vec{r}, \delta\,\vec{r}]$ управљени површински елемент $ABCD$.

Ако саберемо све циркулације вектора $\vec{v}$ по контурама свих паралелограма површине (A) онда ће се оне дуж унутрашњих контура поништавати (због супротних смерова) и остаће само циркулација по спољашњој контури (L), тј.

$$\boxed{\oint_{L} (\vec{v}, d\vec{r}) = \iint_{A} (\mathrm{rot}\ \vec{v}, d\vec{A})} \qquad (453')$$

Ово је израз *Стоксове* (*George Stokes*, 1819—1903 год.) теореме која гласи: *Циркулација векторске функције по контури (L) једнака је протоку ротора те функције кроз површину (A) омеђену том контуром.*

Помоћу ове *теореме можемо криволиниске интеграле претворити у површинске*, и обрнуто.

За Декартове координате Стоксова теорема може се написати у скаларном облику

$$\int_{L} v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz = \int\!\!\int_{A} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) dy\,dz + \qquad (453'')$$

$$+ \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

За примену Стоксове формуле потребни су следећи услови: 1° контура (L) мора бити затворена, 2° координате вектора $\vec{v}$ морају бити континуалне на контури и 3^e парцијални изводи тих координата морају бити континуални у свима тачкама домена (површине A).

У случају равног векторског поља, у равни Oxy, Стоксова формула постаје

$$\int_{L} v_x\,dx + v_y\,dy = \int\!\!\int_{A} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

тј. позната *Гринова формула (Риманов став).*

---

[1] $([\vec{a}, \vec{b}], [\vec{c}, \vec{d}]) = (\vec{e}, [\vec{c}, \vec{d}]) = (\vec{c}\,[\vec{d}, \vec{e}]) = (\vec{c}, [\vec{d}\,(\vec{a}, \vec{b})] =$

$= (\vec{c}, \vec{a}\,(\vec{b}, \vec{d}) - \vec{b}\,(\vec{d}, \vec{a})) = (\vec{c}, \vec{a})\,(\vec{b}, \vec{d}) - (\vec{d}, \vec{a})\,(\vec{b}, \vec{c}).$

Из једначине (453) следи

$$\oint_{ABCD} (\vec{v}, d\vec{r}) = |\,\mathrm{rot}\,\vec{v}\,|\, d\,A \cos\theta,$$

где је θ угао који чине вектори $\mathrm{rot}\,\vec{v}$ и $d\vec{A}$. Елементарна циркулација биће максимална када су ови вектори колинеарни ($\theta = 0$) па је *интензитет ротора у некој тачки поља једнак максималној циркулацији за јединицу површине око те тачке.*

Да бисмо сазнали физичку суштину појма ротора претпоставимо да је вектор $\vec{v}$ обимна брзина тачке крутог тела које се обрће око непомичне осе константном угаоном брзином ω. Свака тачка крутог тела као што нам је познато из кинематике, описује кружну путању. Циркулација вектора брзине биће максимална ако је раван путање управна на осу обртања тј. ако су вектори $\vec{\omega}$ и $d\vec{A}$ колинеарни, па су у томе случају и вектори $\vec{\omega}$ и $\mathrm{rot}\,\vec{v}$ колинеарни. Како је $v = R\omega$, где је R полупречник кружне путање, то је циркулација $2R\pi \cdot R\omega = 2R^2\pi\omega$ и површина $R^2\pi$, па је интензитет ротора брзине

$$|\,\mathrm{rot}\,\vec{v}\,| = \Gamma_{max}/A = 2\omega,$$

тј. *једнак двострукој угаоној брзини*, као што смо, другим путем, извели у *Кинематици* (чл. 10.4).

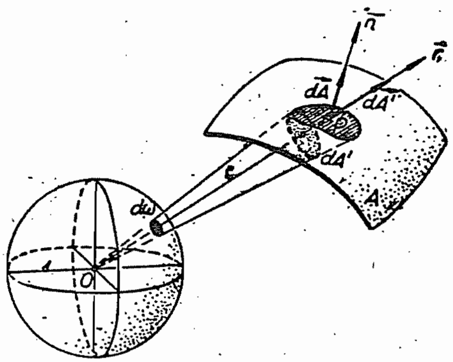
4. Просторни угао.

— Посматрајмо поље скаларне функције $U = 1/r$, где је r растојање тачке поља од непомичне тачке — пола — O (тзв. *сферне функције*). За ову смо функцију доказали да је *хармониска* (*Кин.*, Додатак III), јер је

$$\mathrm{grad}\,\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{\vec{r}_0}{r^3}\,;\ \Delta\,\frac{1}{r} = 0. \qquad (454)$$

Еквискаларне су површине овог поља *концентричне сфере* и градијент пада у правац полупречника.

Претпоставимо да имамо бесконачно малу контуру L и изван ње тачку O (*сл.* 212). Ако контуру узмемо за водиљу а пол O за врх добићемо елементарни конус. Под *просторним (телесним) углом* $d\omega$ подразумева се угао под којим се из тачке O види површински елемент у тачки P омеђен контуром L. Овај се угао мери на овај начин. Из тачке O као средишта опишимо сферу полупречника $r = 1$ онда површина $d\,\omega$ коју исеца ова сферу у конусу јесте мера просторног угла. Ако из пола O опишемо сферу полупречника r она ће исецати површину dA' која је једнака пројекцији површинског елемента dA на правац потега r те је



Сл. 212. — Просторни угао

$$d\,A' = (d\vec{A}, \vec{n}) = \pm\, d\,A \cos(\vec{r}, \vec{n}).$$

Из сличности пресека конуса са сферама следи однос $dA' : d\omega = r^2 : 1$ па је

$$d\,\omega = \frac{d\,A'}{r^2} = \frac{d\,A \cos(\vec{r}, \vec{\mathrm{n}})}{r^2}. \tag{455}$$

Према томе је димензија просторног угла *неименовани број*[1] као и обичног угла. Флукс вектора grad $(1/r)$ кроз површину A биће према (450)

$$\iint\limits_A (\nabla r^{-1}, \vec{dA}) = -\iint\limits_A r^{-2} \cos(\vec{r}, \vec{\mathrm{n}})\, dA = -\iint\limits_A d\omega,$$

ако је орт нормале наперен у запремину обухваћену површином A.

Ако је *површина затворена* и такве особине да је потег r продире у двема тачкама онда је вредност горњег интеграла за пол изван површине

$$\iint\limits_A d\,\omega = 0. \tag{455'}$$

Ако је пак *пол у запремини*, омеђеној површином A, онда је збир просторних углова једнак површини сфере полупречника 1, тј. горњи интеграл биће

$$\iint\limits_A \frac{\cos(\vec{r}, \vec{\mathrm{n}})}{r^2}\, d\,A = -4\,\pi. \tag{455''}$$

Ова два интеграла позната су под називом *Гаусових интеграла*[2].

Ако пол лежи на самој површини A у таквој тачки у којој се може повући тангенцијална раван на површину, онда је горњи интеграл једнак половини површине сфере полупречника 1, тј. -2π.

5. Њутнов потенцијал.

— Када на материјалну тачку масе m дејствује више маса силама обрнуто сразмерним квадратима растојања тада је *функција силе* (чл. 5, обр. 135)

$$U = f\left[\frac{m_1\, m}{r_1} + \frac{m_2\, m}{r_2} + \frac{m_3\, m}{r_3} + \ldots + \frac{m_n\, m}{r_n}\right] \tag{456}$$

где су $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ растојања маса m_i од m. Претпоставимо ли да је маса $m = 1$ онда је функција силе

$$U = f\left[\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \ldots + \frac{m_n}{r_n}\right] = f \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{r_i} \tag{456'}$$

---

[1] Ако је $\sphericalangle(\vec{r}, \vec{n}) < {}^1/_2\,\pi$ он је *позитиван* (види се позитивна страна површинског елемента); за $\sphericalangle(\vec{r}, \vec{n}) > {}^1/_2\,\pi$ он је *негативан*.

[2] *Gauss*, *„Theoria Attractionis Corporum Sphaeroidicorum Ellipticorum homogeneorum Methodo nova tractata“*. (Werke, Bd. V.)

Потенцијална функција[1] је дата изразом (за $f=1$)

$$\Pi=-\left[\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}+\ldots+\frac{m_n}{r_n}\right]=-\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i} \qquad (457)$$

и назива се *Њутнов потенцијал*[2] масе $m=1$ у тачки $N(x, y, z)$.

Ако сваки члан m_i/r_i има исте особине као и $1/r$, тј. да је функција хармониска у свима тачкама поља, изузев у полу (извору), онда је и потенцијална функција такође хармониска

$$\boxed{\Delta\,\Pi=0} \qquad (457')$$

За *континуално распоређене масе* биће потенцијал у тачки $N(x, y, z)$ поља услед дејства масе dm у тачки (извору) $N'(a, b, c)$ дат изразом

$$\boxed{\Pi=-\iiint\limits_{V}\frac{dm}{r}} \qquad (458)$$

где је $dm=\rho\,dV$ а r растојање $\overline{NN'}$

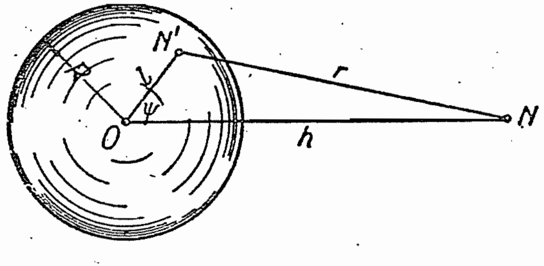
$$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2},$$

односно

$$\Pi=-\iiint\limits_{V}\frac{dm}{r}=-\iiint\limits_{V}\frac{\rho\,dV}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}. \qquad (458')$$

Да одредимо потенцијал *хомогене сфере*, полупречника R, уочимо у њој тачку N' на растојању l од средишта сфере; онда из троугла ONN' (сл. 213) следи по косинусној теореми

$$r^2=h^2+l^2-2hl\cos\psi.$$



Сл. 213. — Потенцијал сфере

Ако елемент запремине изразимо помоћу сферних координата *(функционалне детерминанте — јакобијана)* узимајући да Oz оса пада у пра-

---

[1] *У хидромеханици* постоји *функција брзина* $\Phi=\Phi(x, y)$ таква да су компоненте брзине дате изразима $v_x=\partial\Phi/\partial x$, $v_y=\partial\Phi/\partial y$ односно циркуларна и радијална брзина $v_c=r^{-1}\,\partial\Phi/\partial\varphi$, $v_r=\partial\Phi/\partial r$.

[2] Детаљније види: *Р. Кашанин — Виша Математика*, књ. 2, гл. V.

вац ON биће потенцијал

$$\Pi = -\iiint\limits_V \rho\, l^2 r^{-1} \sin\psi\, d\psi\, d\varphi\, dl.$$

Како су h и l константе то из горње једначине, с обзиром да r зависи од ψ, следи $r\, dr = h\, l \sin\psi\, d\psi$, па је

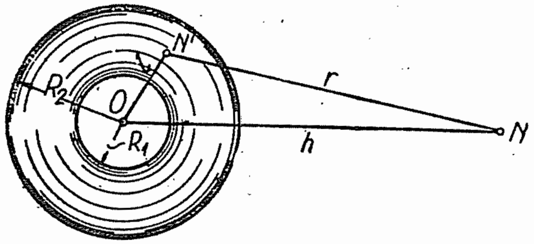
$$\Pi = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{h-l}^{h+l} (\rho\, l/h)\, dr\, d\varphi\, dl = (2\pi\rho/h) \int_0^R \int_{n-l}^{h+l} l\, dr\, dl =$$

$$= (4\pi\rho/h) \int_0^R l^2\, dl,$$

односно

$$\boxed{\Pi = -\frac{4\pi\rho R^3}{3h} = \frac{-M}{h}} \qquad (459)$$

Дакле, *хомогена сферна површина привлачи тачку N, која се налази изван сфере, као једна материјална тачка масе целе сфере M концентрисане у средишту O.*



Сл. 214. — Сферна љуска

На потпуно исти начин одредићемо и потенцијал *хомогеног тела између двеју концентричних сфера (сферне љуске*, сл. 214) дебљине $\delta = R_2 - R_1$, за $h > R_2$:

$$\boxed{\Pi = -\frac{4\pi\rho}{h} \int_{R_1}^{R_2} l^2\, dl = \frac{-4\pi\rho}{3h}(R_2^3 - R_1^3) = \frac{-M}{h}} \qquad (460)$$

Ако се тачка N налази у сферној шупљини, $h < R_1$, биће потенцијал

$$\boxed{\Pi = \frac{-2\pi\rho}{h} \int_{R_1}^{R_2} \int_{l-h}^{l+h} l\, dl\, dr = -2\pi\rho\,(R_2^2 - R_1^2)} \qquad (460')$$

Он не зависи од h па је константан за целу шупљину сфера[1].

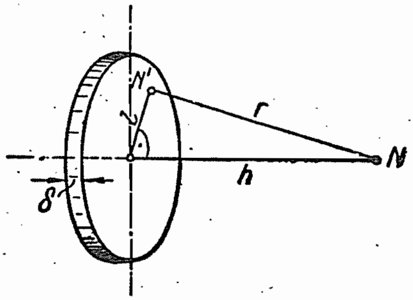
Ако би тачка N била у делу између сфера (*у љусци*), онда дату запремину можемо, поделити на два дела концентричном сфером кроз тачку N, па је потенцијал.

$$\boxed{\Pi = \frac{-4\pi\rho}{3h}(h^3 - R_1^3) - 2\pi\rho(R_2^2 - h^2)} \qquad (460'')$$

Потенцијал *танког хомогеног кружног диска* полупречника R (сл. 215), у тачки N, која се налази на оси диска биће

$$\Pi = -\int_0^R \int_0^{2\pi} \rho\,\delta \frac{l\,dl\,d\varphi}{\sqrt{h^2 + l^2}} =$$

$$= -2\pi\rho\delta \int_0^R \frac{l\,dl}{\sqrt{h^2 + l^2}}$$



Сл. 215. — Диск

односно

$$\boxed{\Pi = -2\pi\rho\delta\left[\sqrt{h^2 + R^2} - h\right]} \qquad (461)$$

Да одредимо *силу привлачења хомогеног штапа* AB, дужине l у тачки N (сл. 216), опишимо из те тачке, као средишта, кружну линију полупречника p једнаког најкраћем растојању тачке N од штапа, $p = \overline{ND}$, која сече потеге $r_1 = \overline{NA}$ и $r_2 = \overline{NB}$ у тачкама A' и B'. Произвољну тачку штапа AB означимо са K, њен потег са $r = \overline{NK}$, линиски елемент са dl, масу $\rho'\,dl$, онда потег r сече кружну линију у тачки K' и чини угао θ са потегом ND.

Сила привлачења овог линиског елемента у тачки N биће

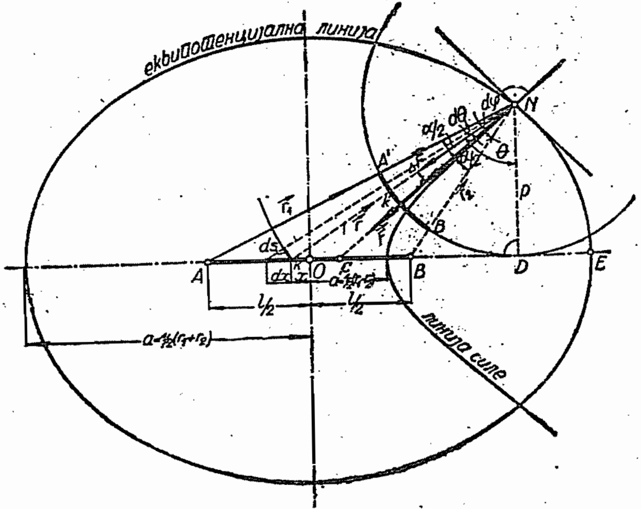
$$\Delta F = \frac{\rho'\,dl}{r^2} = \frac{\rho'\,r\,d\theta}{r^2\cos\theta} = \frac{\rho'\,d\theta}{p} = \frac{\rho'\,p\,d\theta}{p^2},$$

пошто су: $p = r\cos\theta$, $ds = r\,d\theta = dl\cos\theta$. Ово нам показује да је сила привлачења линиског елемента dl једнака сили привлачења његове

---

[1] Како је привлачна сила $F = \partial\Pi/\partial h = 0$ то хомогена сферна љуска не дејствује никаквом привлачном силом на масу у самој шупљини љуске (*Њутнова теорема*).

пројекције на кружну линију, полупречника p, описану из пола N. Према томе и *укупна сила привлачења хомогеног штапа AB у тачки N једнака је сили привлачења хомогеног лука $\widehat{A'B'}$, исте специфичне масе, који је добивен пројицирањем дужине штапа AB на кружну линију* полупречника p, *описану из тачке N као средишта.* Означимо угао $\sphericalangle ANB$ са α; онда нападна линија силе, по закону симетрије, мора бити симетрала тог угла.



Сл. 216. — Потенцијал хомогеног штапа

Нека привлачна сила линиског елемента Δl чини са том симетралом угао φ онда је сила привлачења

$$\boxed{F = \frac{-\rho'}{p}\int\limits_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\cos\varphi\, d\varphi = -\frac{2\,\rho'}{p}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}} \qquad (462)$$

Ако је дужина штапа много велика у односу на растојање p *(бесконачно дугачки хомогени штап)* онда је угао $\alpha \approx \pi$, па је сила привлачења

$$\boxed{F_{(l=\infty)} = \frac{-2\rho'}{p}} \qquad (462')$$

и управна је на штап[1].

---

[1] У *теорији магнетизма* основни је *Фарадеј-Кулонов закон*, којим се одређује сила привлачења полова магнета (јачина m и m_1), претстављен математичким изразом $\vec{F} = (m\, m_1/\mu\, r^2)\,\vec{r}_0$, где је r растојање полова, $\vec{r}_0$ орт тог правца а μ *магнетски пермеабилитет*. Вектор $\vec{H} = (m/\mu\, r^3)\,\vec{r}$ назива се *магнетски вектор* или *магнетска сила*, а вектор $\vec{B} = \mu\,\vec{H}$ назива се *магнетска индукција*. Он задовољава услове div $\vec{B} = 0$ и rot $\vec{B} = 0$ у целом магнетском пољу изузев пола N (јачине $m_1 = 1$). У *теорији*

Уведимо углове $\sphericalangle\, DNA = \theta_1$, $\sphericalangle\, DNB = \theta_2$ онда су, због односа $p = r_1 \cos \theta_1 = r_2 \cos \theta_2$, интензитети компоненти силе привлачења паралелне штапу (F_l) и управне на штап (F_p) дате изразима

$$F_l = -F \sin (\theta_2 + {}^1\!/_2\, \alpha) = -\rho' [(1/r_2) - (1/r_1)]/l,$$

$$F_p = \rho' (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)/p.$$

Пошто нападна линија силе F пада у правац симетрале угла $\sphericalangle\, BNA$ то је она тангента хиперболе која пролази кроз тачку N а чије су жиже крајње тачке штапа A и B.[1] *Линије су силе*, дакле, *хиперболе. Еквипотенцијалне линије су конфокалне елипсе*, које су ортогоналне на хиперболама. У свакој тачки елипсе која пролази кроз тачку N а има жиже у тачкама A и B, потенцијал има исту вредност па уместо да га израчунамо у тачки N можемо га много једноставније израчунати у тачки E, темену елипсе велике осе $2\,a = r_1 + r_2$, па је

$$\Pi = -\rho' \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dx}{a + x} = -\rho' \ln \frac{a + {}^1\!/_2\, l}{a - {}^1\!/_2\, l} = -\rho' \ln \frac{r_1 + r_2 + l}{r_1 + r_2 + l}. \tag{463}$$

Еквипотенцијалне су површине конфокални ротациони елипсоиди добивени обртањем конфокалних елипса око осе AB.

6. Поасонова једначина. — Из Гаусове теореме (450), с обзиром на (455″)

$$\iint_A (\nabla\, r^{-1}, d\vec{A}) = -\iint_A d\,\omega = -4\pi,$$

где је r раздаљина тачке на површини A од сталне тачке — пола — O, множећи је масом m, концентрисаном у полу O, биће, према дефиницији потенцијала:

$$\iint_A (\nabla\, m\, r^{-1}, d\vec{A}) = -4\pi \iiint_V \rho\, d\,V.$$

Површински интеграл на левој страни [проток вектора grad $(1/r)$ кроз површину A] може се, помоћу Гаусове теореме (450′), претворити у запремински интеграл кроз запремину омеђену том површином

$$\iiint_V \operatorname{div} \operatorname{grad} (m/r)\, d\,V = -4\pi \iiint_V \rho\, d\,V.$$

електромагнетизма основни је *Био — Саваров закон* изражен једначином $\vec{H} = (J/c) \int_L [\vec{r}, \vec{dl}]$ где су: $J\, r^{-8}$ јачина струје, c константа димензије брзине (по *Колраушу* и *Веберу* она има величину блиску брзини светлости). У магнетском пољу бесконачне праволиниске струје магнетски вектор има интензитет $H = 2\, J/c\, p$ у тачки N поља на удаљењу p од проводника.

[1] Н. Салтиков, *Аналитичка геометрија* I. Београд, 1947, чл. 139. стр. 175.

Како је div grad $(m/r) = \Delta\,(m/r)$ (*Кин.*, Додатак III) то горња једначина постаје

$$\boxed{\iiint_V (\Delta\,\Pi + 4\,\pi\,\rho)\,d\,V = 0} \qquad (464)$$

Пошто овај интеграл важи за сваку запремину која опкољава *Њутново поље (поље гравитације)*, мора бити

$$\boxed{\Delta\,\Pi + 4\,\pi\,\rho = 0} \qquad (464')$$

Ово је позната *Подсонова диференцијална једначина*[1] и даје везу између потенцијала и густине. Она важи у свакој тачки поља и потенцијал Π је њено решење. Изван границе привлачног тела, $\rho = 0$, она се своди на *Лапласову диференцијалну једначину* $\Delta\,\Pi = 0$.

7. Логаритамски потенцијал. — Посматрајмо привлачење двеју маса у равни *Oxy* с тим да је сила обрнуто сразмерна *првом степену растојања маса*

$$\vec{F} = -\frac{m\,m_1}{r}\,\vec{\mathfrak{r}}_0 = \frac{-\,m}{r}\,\vec{\mathfrak{r}}_0 \qquad (465)$$

за $m_1 = 1$. Како је $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$, а $\cos\alpha = (x-a)/r$ то су пројекције силе на координатне осе Декартовог координатног система у тој равни

$$\partial U/\partial x = X = -\,m r^{-1}\cos\alpha = -\,m\,r^{-2}\,(x-a), \qquad Y = -\,m\,r^{-2}\,(y-b),$$

па је функција силе

$$U = \int X\,dx + f\,(y) = -\,{}^1\!/_2\,m\,\ln\,r^{2'} + f\,(y).$$

Како је

$$\partial U/\partial y = Y = -\,m\,r^{-2}\,(y-b) + f'\,(y),$$

то је $f'\,(y) = 0$ па је $f\,(y) = C$ те функција силе има облик

$$\boxed{U = -\,{}^1\!/_2\,m\,\ln\,r^2 = -\,m\,\ln\,r} \qquad (466)$$

---

[1] Поасонова једначина игра велику улогу у *електростатици* јер даје везу између електричног потенцијала и густине електрицитета. Сва излагања за Њутново гравитационо поље важе и за поље непрекидно распоређених електрицитета. Под *густином електрицитета* ρ подразумева се количник de/dV где је *e количина електрицитета* или *оптерећење*. Привлачне (или одбојне) силе између двају оптерећења дате су *Кулоновим законом*

$$\vec{F} = (e\,e_1/r^2)\,\vec{\mathfrak{r}}_0,$$

где је по *Гаусу* узета константа $f = 1$.

а потенцијал

$$\boxed{\Pi = m \ln r} \tag{466'}$$

Како су

$$\partial \Pi/\partial x = m\, r^{-2}\,(x - a), \quad \partial \Pi/\partial y = m\, r^{-2}\,(y - b),$$

$$\partial^2 \Pi/\partial x^2 = m\,[r^2 - 2\,(x + a)^2]/r^4, \quad \partial^2 \Pi/\partial y^2 = m\,[r^2 - 2\,(y - b)^2]/r^4,$$

то потенцијална функција задовољава Лапласову једначину

$$\Delta \Pi = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} = 0. \tag{466''}$$

Овај се потенцијал, $\Pi = m \ln r$, назива *логаритамски потенцијал* и игра велику улогу у теорији функција комплексне променљиве.[1]

Ако је $z = x + i\,y$ комплексна променљива онда је $w\,(z) = u\,(x.\,y) + i\,v\,(x,\,y)$ функција те променљиве ако свакој тачки у равни *xy* одговара одређена тачка у равни *uv*. Функције *u* и *v* задовољавају тзв. *Коши-Риманове* једначине па су реални и имагинарни делови функције комплексне променљиве хармониске функције јер задовољавају Лапласову једначину

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0.$$

Слично извођењу за тродимензионални простор можемо и овде за раван извести Гринове обрасце, Гаусову теорему и Поасонову једначину. Први образац даје везу између линиског и површинског интеграла

$$\int\limits_L \left(U \frac{\partial \Pi}{\partial \mathrm{n}} - \Pi \frac{\partial U}{\partial \mathrm{n}} \right) ds = \iint\limits_A (\Pi \,\Delta U - U \,\Delta \Pi)\, dx\, dy$$

где је $\Delta \Pi$ — Хамилтонова функција. За $U = 1$ следи *Гаусова* теорема

$$\int\limits_L \frac{\partial \Pi}{\partial \mathrm{n}} ds = - \iint\limits_A \Delta \Pi \, dx\, dy.$$

Ако је функција Π хармониска у целом пољу омеђеном контуром L биће

$$\int\limits_L \frac{\partial \Pi}{\partial \mathrm{n}} ds = 0.$$

Како је $\ln r$ хармониска функција то, дакле, важи став

$$\int\limits_L \frac{\partial \ln r}{\partial \mathrm{n}} ds = \int\limits_L \frac{1}{r} \, \frac{\partial r}{\partial \mathrm{n}} ds = \int\limits_L \frac{\cos\,(\vec{r}, \vec{\mathrm{n}})}{r} ds = 0.$$

Ако је пол у контури онда је вредност криволиниског интеграла

$$\int\limits_L \frac{\partial \ln r}{\partial \mathrm{n}} ds = - \int\limits_0^{2\pi} d\,\varphi = - 2\,\pi$$

---

[1] Н. Обрадовић, *Основи механике флуида*. Београд, 1952, стр. 120.

па *Поасонова* једначина гласи

$$\Delta \Pi + 2\pi \rho'' = 0,$$

где је ρ'' *површинска густина.*

Примери. — 1) Израчунати проток вектора $\vec{v}\,(x, 2y, 4z)$ кроз октант лопте $(R = 1)$ у првом квадранту

Решење. —

$$\operatorname{div} \vec{v} = 7, \quad dV = r^2 \cos\psi\, dr\, d\varphi\, d\psi,$$

па је према (450′)

$$\iint_A (\vec{v},\, d\vec{A}) = \iiint_V \operatorname{div} \vec{v}\, dV = 7 \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} r^2 \cos\psi\; dr\, d\varphi\, d\psi = {}^7/_6\,\pi.$$

2. Круто тело обрће се око Oz осе константном угаоном брзином. Колики је $\operatorname{rot} \vec{v}$ произвољне тачке $C\,(x, y, z)$? Колика је циркулација тога вектора по кругу $x^2 + y^2 = R^2$ узимајући је у позитивном смеру, а колика по кругу $(x-2)^2 + y^2 = 2$?

Решење. — Из Ојлерове једначине (*Кин.*, 111) биће компонентне брзине

$$v_x = -\omega y; \quad v_y = \omega x$$

па је, према (*Кин.* 196), $\operatorname{rot} \vec{v} = 2\omega \vec{k}$. Према Стоксовој теореми биће циркулација

$$= \oint_L (\vec{v},\, d\vec{r}) = \iint_A (\operatorname{rot} \vec{v},\, d\vec{A}) = 2\omega \iint_A dx\, dy = 2\omega R^2 \pi$$

односно за $R^2 = 2$ биће $\Gamma = 4\omega\pi$.

3) Израчунати циркулацију вектора $\vec{v}\,(-2y, 2x)$ по кругу $x^2 + y^2 = 16$ у позитивном смеру.

Решење. — Према (453″) биће

$$\Gamma = 4 \iint_A dx\, dy = 64\,\pi.$$

4) На материјалну тачку дејствује променљива сила $\vec{F}\,(y^2, 2xy, 0)$. Израчунати рад који изврши сила при померању своје нападне тачке из координатног почетка у тачку N (2, 2, 2 cm). F мерено у kg

Решење. — Из услова (116) видимо да је сила F конзервативна, према томе је рад $\mathbf{A} = U$. Функција силе има према (121) облик $U = x y^2$ па је рад $\mathbf{A} = 8$ kgcm.

5) Материјална тачка, масе m, креће се по правој L под утицајем привлачне силе из пола O, који не лежи на правој. Интензитет је силе обрнуто сразмеран квадрату растојања тачке од пола, $r = \overline{ON}$. Колики је рад те силе ако тачка дође из бесконачности до положаја N_1, када је $r_1 = p$, најкраће растојање праве L од пола O

Решење. — Рад је силе

$$\mathbf{A} = -\int_\infty^p k\, x\, r^{-3}\, dr = -\int_\infty^p F\, dr = k/p.$$

6) За случај кретања у зад. 30 (сл. 32) израчунати рад привлачне силе на путу тачке од положаја $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi/4$.

Решење. — Пошто је сила конзервативна то је

$$A = U = [k/r]_{2R}^{R\sqrt{2}} = {}^1/_2\, k\,(\sqrt{2} - 1)/R.$$

7) Одредити силу привлачења хомогене сфере (сл. 213) у тачки N $(h, 0)$.

Решење. — Из обрасца (459), с обзиром на (110) и (111), биће

$$F = -\partial \Pi/\partial h = -M/h^2,$$

где је M маса сфере.

8) Одредити силу привлачења хомогеног диска (сл. 215) у тачки N помоћу потенцијала (обр. 461) и непосредно интеграљењем.

Решење. — *a*) Како је $F = -\partial\Pi/\partial h$ то је

$$F = -2\pi\rho\delta\,[1 - h/(\sqrt{h^2 + R^2})].$$

b) Пројекција силе F на правац h биће

$$Z = -\rho\delta\iint\limits_A h\, r^{-3}\, d\,A = -\rho\delta\, h\int_0^R\int_0^{2\pi}(h^2 + l^2)^{-3/2}\, l\, dl\, d\varphi = -2\pi\delta\, h\int_0^R (h^2 + l^2)^{-3/2}\, l\, dl,$$

па интеграљењем добијамо исту вредност као и горе.

9) Одредити силу привлачења правог хомогеног кружног цилиндра, дужине l, полупречника основе R, у тачки N, која се налази на његовој геометриској оси а на растојању h од једне основе.

Решење. — Поделимо цилиндар у танке дискове, дебљине dz, онда је према претходном задатку

$$F = -2\pi\rho\int_h^{h+l}[1 - (z/\sqrt{z^2 + R^2})]\, dz = -2\pi\rho\left(l - \sqrt{(h + l)^2 + R^2} + \sqrt{h^2 + R^2}\right).$$

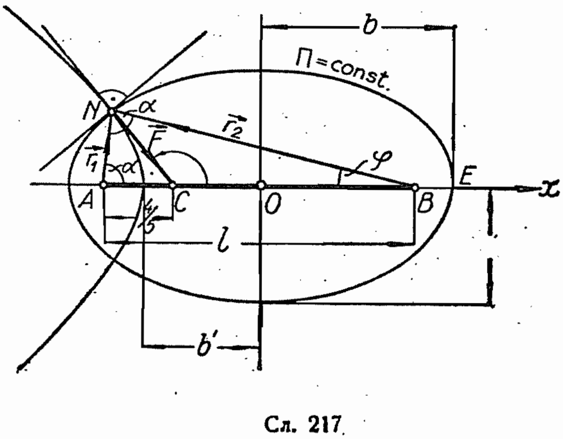
10) Израчунати интензитет силе привлачења и потенцијал хомогеног штапа AB (сл. 217) у тачки N ако су $\rho' = 3$, $r_1 = 1$, $r_2 = 4$, $l = 4$. Како гласи једначина нападне линије силе и у којој тачки сече штап AB? Написати једначину еквипотенцијалне линије и линије силе у датој тачки.

Решење. — Троугао ABN равнокраки је, па је

$$\sin\varphi = p/r_2 = p/4$$

те је

$$\sin\alpha = p/r_1 = p$$



Сл. 217

односно

$$\sin \varphi = \sin (180 - 2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

тј.

$$p^2 = 63/64.$$

Како је $\cos \alpha = {}^1/_8$ то је

$$\sin \alpha = 2 \sin ({}^1/_2\, \alpha) \cos ({}^1/_2\, \alpha) = 2 \sin ({}^1/_2\, \alpha) \sqrt{{}^1/_2\,(1 + \cos \alpha)} =$$

$$= {}^3/_2 \sin ({}^1/_2\, \alpha) = p$$

тј.

$$\sin ({}^1/_2\, \alpha) = {}^2/_3\, p$$

па је према (462) привлачна сила

$$F = {}^4/_3\, \rho' = 4.$$

потенцијал је, према (463),

$$\Pi = 3 \ln 9.$$

Једначина је нападне линије силе

$$y - p = \operatorname{tg} (\omega + {}^1/_2\, \alpha)\, (x + {}^1/_2\, l - r_1 \cos \alpha)$$

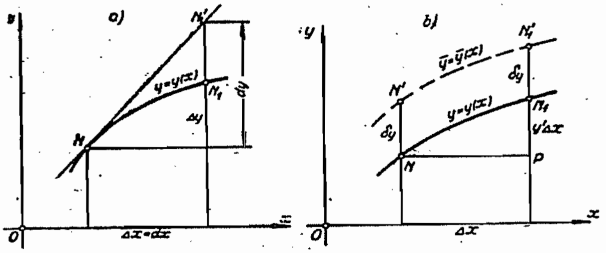
где је коефицијент правца $-{}^{40}/_{27}\, p$. Нападна линија сече штап у тачки $C\,(-{}^6/_5;\ 0)$ па је $\overline{AC} = {}^4/_5$.

Пошто је линеарна ексцентрично $e = {}^1/_2\, l = 2$ то су полуосе еквипотенцијалне елипсе $b = {}^5/_2$, $c = {}^3/_2$ па је једначина елипсе $36\, x^2 + 100\, y^2 = 225$.

Реална је оса хиперболе $2\, b' = 3$ па је једначина линије силе-хиперболе $28\, x^2 - 36\, y^2 = 63$, коефицијент правца тангенте повучене у тачки $N\,(-{}^{15}/_8,\ p)$ износи $-{}^{40}/_{27}\, p$; ова се вредност поклапа са горе добивеном. Коефицијент правца тангенте повучене на елипсу у истој тачки је ${}^{24}/_{85}\, p$ па лако увиђамо да су обе тангенте међусобне управне што је карактеристика конфокалних кривих линија.

III ОСНОВИ ВАРИЈАЦИОНОГ РАЧУНА

1. **Варијација функције.** — Нека је $y = f(x)$ функција независно промењиве x онда је диференцијал $dy = f'(x)\,dx$. Као што је познато диференцијал претставља прираштај (инкремент) ординате на тангенти (сл. 218 *a*) услед прираштаја независно промењиве x за $\Delta x = dx$. Он се разликује од прираштаја функције y, јер је $\Delta y = (f + \Delta x) - f(x)$. Узмемо ли уместо функције $y = y(x)$ нову функцију



Сл. 218. — Диференцијал, прва и тотална варијација

$$\overline{y} = y(x) + \varepsilon\,\eta(x), \tag{467}$$

где је ε произвољни мали константан број а $\eta(x)$ произвољна диференцијабилна функција од x, онда се промена ординате (y) услед *промене облика саме функције* назива *прва* или *проста варијација* функције и обележава се са

$$\boxed{\delta y = \overline{y} - y = \varepsilon\,\eta(x)} \tag{468}$$

Прва варијација, дакле, *претставља промену ординате услед промене облика саме функције не мењајући независно промењиву* (x), те је $\delta y = \overline{NN'}$ (сл. 218 *b*). Пошто се не мења независно промењива то се ова варијација назива *изохроном*.

Диференцирајмо (468) по x добићемо:

$$\frac{d}{dx}\,\delta y = \overline{y}' - y' = \varepsilon\,\eta'(x),$$

а како је по дефиницији варијације $\delta y' = \overline{y}' - y'$ то следи

$$\boxed{\frac{d}{dx}\,\delta y = \delta y' = \delta\,\frac{dy}{dx}} \qquad (468')$$

што показује да у *случају изохроне варијације диференцирање и варирање имају комутативни карактер*.

Под *тоталном варијацијом* подразумева се промена (прираштај) функције услед прираштаја независно променљиве и промене саме функције. Промени ли се независно променљива (аргумент) x за Δx онда је тотална варијација

$$\boxed{\Delta y = \delta y + y'\,\Delta x} \qquad (469)$$

Први члан претставља прву варијацију (δy), а други је промена функције $y(x)$ услед промене независно променљиве (Δx). Први члан се назива и *главни део варијације*.

Ако израз (469) диференцирамо по x добићемо

$$\frac{d}{dx}\,\Delta y = \delta y' + y''\,\Delta x + y'\,\frac{d}{dx}\,\Delta x\,.$$

Како је по дефиницији тотална варијација функције $y' = y'(x)$ израз

$$\Delta y' = \delta y' + y''\,\Delta x \quad \text{то је} \quad \frac{d}{dx}\,\Delta y = \Delta y' + y'\,\frac{d}{dx}\,\Delta x$$

па је

$$\frac{d}{dx}\,\Delta y \neq \Delta y' = \Delta\,\frac{dy}{dx} \qquad (469')$$

тј. *диференцирања и варирања у случају тоталне варијације немају комутативни карактер*. Једино у случају да је $y = x$ комутативност важи.

2. **Функционал.** — Лук криве $y = y(x)$, чија се апсциса мења у размаку $a \leqslant x \leqslant b$, а фунција има непрекидни извод $y'(x)$ у томе размаку, одређен је одређеним интегралом

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx\,.$$

Мењајући криву $y = y(x)$ мењаће се и дужина лука (s), па горњи интеграл мења своју вредност. Ту зависност интеграла пишемо у облику

$$J = J\,[y(x)]$$

и кажемо да је тај одређени интеграл *функционал* класе функција $y = y(x)$ ако свакој тој функцији одговара нека вредност интеграла. Како функција $y = y(x)$ геометриски претставља *линију* то се овакав функционал назива и *функција линије.*

Напр., ако је $y = y(x) = x$ а размак $0 \leqslant x \leqslant 1$ онда је $J = \sqrt{2}$. За $y = \mathrm{Ch}\, x$, у истом размаку, биће $J = {}^1/_2\,(e - e^{-1})$.

3. Основни задатак варијационог рачуна. — Основни задатак овог рачуна је одређивање екстремних вредности функционала. То значи да за одређени интеграл

$$J = \int_a^b f(x, y, y')\, dx\,,$$

коме су границе константе а подинтегрална функција f функција од независно променљиве x, функције y и његовог извода y', треба из фамилије кривих $y = y(x)$ одредити ону криву за коју тај интеграл добива *екстремну вредност.* Та крива се назива *екстремала дотичног функционала.*

Ако уместо криве $y(x)$ узмемо оближњу криву $y(x)$ и ставимо је у горњи интеграл биће $J[\bar{y}(x)]$. Разлика

$$J[\bar{y}(x)] - J[y(x)] = \delta J \tag{470}$$

назива се *прва варијација интеграла (функционала).* Пошто функционал треба да има екстремну вредност, то, слично услову за екстремум функције, мора бити испуњен услов $\delta J = 0$. Дакле, мора прва варијација функционала бити једнака нули.

На проблеме варијационог рачуна први је наишао француски научник *Ферма* (Pierre de Fermat, 1601—1665) приликом проучавања проблема о одбијању и преламању светлости — *Фермашов принцип.* Према томе принципу у нехомогеној изотропној средини окарактерисаном индексом преламања $n = n(x, y, z)$ светлост се простире дуж оне криве за коју интеграл $\int n\, ds$, — тзв. *ойшичка дужина криве* — има екстремну вредност. Дуж те криве линије време простирања светлости је најкраће — минимум („Principe du moindre temps“).

Овај варијациони проблем је аналитички сличан проблему *Јохана Бернулија* о *брахисшохроној* сили теже **(чл. 8.3,3⁰)**. Галилеј је био пре њега показао („*Discorsi*, *шрећи дан*) да ће тешка тачка за *краће време* стићи из положаја A у положај B по кружном луку неголи по тетиви (сл. 49). Бернули је доказао да ће при $v_0 = 0$ тачка стићи из A у B за најкраће време ако се креће по *циклоиди.*

4. Ојлерова једначина. — Прву општу методу за одређивање екстремала Јакова Бернулија усавршио је Ојлер и тиме поставио основ варијационом рачуну („*Traité des isopérimètres*“, 1744), постављајући услов да екстремала мора да задовољи диференцијалну једначину другог реда која се назива *Ојлеровом једначином.*

Да би функционал

$$J[y(x)] = \int_a^b f(x, y, y')\,dx$$

имао *минимум*, мора прва варијација интеграла бити $\delta J = 0$. Узмемо ли уместо криве $y = y(x)$ оближњу криву $\overline{y} = y + \varepsilon\eta(x)$, под условом да и она пролази кроз тачке A и B, онда је

$$J[\overline{y}(x)] = \int_a^b f(x, \overline{y}, \overline{y'})\,dx = \int_a^b f(x, y + \delta y, y' + \delta y')\,dx.$$

Развијемо ли горњи израз у ред и ограничимо се, због малог ε, на чланове првог степена, биће:

$$J[\overline{y}(x)] = \int_a^b f(x, y, y')\,dx + \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right)dx + \ldots$$

Прва варијација функционала, дакле, биће:

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right)dx.$$

Како је $\delta y = \varepsilon\eta(x)$ то је $\delta y' = \varepsilon\eta'(x) = \frac{d}{dx}\delta y$ па сменама $u = \frac{\partial f}{\partial y'}$, $dv = d(\delta y) = \delta y' \cdot dx$ други члан постаје

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'}d(\delta y) = \left[\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y.$$

Како крива пролази кроз тачке A и B то су $[\delta y]_a = 0$, $[\delta y]_b = 0$, па је први члан десне стране једнак нули те је прва варијација

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\delta y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\,dx.$$

Пошто је услов за екстремум $\delta J = 0$ за сваку криву $\overline{y} = \overline{y}(x)$, тј. за произвољну варијацију δy, мора бити испуњен услов

$$\boxed{\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0} \tag{471}$$

који претставља *Ојлерову диференцијалну једначину (варијациони извод).*

Како је $f = f(x, y, y')$ то се Ојлерова једначина може написати и у овом облику

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{471'}$$

па претставља обичну диференцијалну једначину другог реда.

У специјалном случају када f *не зависи експлицитно* од x једначина (471) даје први интеграл. Помножимо ли (471) са y' биће:

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right) y' - \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0.$$

Како је

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} y'\right) - \frac{\partial f}{\partial y'} y''$$

и

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y''$$

то је

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} y' - f\right) = 0$$

па је први интеграл облика

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y'} y' - f = C} \tag{472}$$

где је C произвољна константа. Пошто f не зависи експлицитно од x то се интеграљење даље може извршити квадратурама.

На примерима показаћемо одређивање екстремала.

1) Од свих равних кривих које пролазе кроз тачке $A\ (0, 0)$ и $B\ (a, b)$ одредити ону која има најмању дужину.

Како је $J = \int \sqrt{1 + y'^2}\, dx$, а $f = \sqrt{1 + y'^2}$ не зависи експлицитно од x, то, према (472), добивамо интеграл $y'^2 = C_1^2$, па је $y = C_1 x + C_2$, тј. права линија.

2) Из фамилије кривих $y = y(x)$ које пролазе кроз тачке $A\,(x_0, y_0)$ и $B\,(x_1, y_1)$ одредити ону која при обртању око осе Ox производи најмању обртну површину.

Како је $J = S = 2\pi \int y\sqrt{1 + y'^2}\, dx$, а f не зависи експлицитно од x, то добивамо интеграл $C_1 y' = \sqrt{y^2 - C_1^2}$. Сменом $y' = \operatorname{Sh} u$ добивамо параметарске једначине криве

$$x = C_1 u + C_2, \quad y = C_1 \operatorname{Ch} u.$$

Крива линија је *ланчаница*, а површина *катеноид*.

5. Условни екстремум. — Чести су проблеми варијационог рачуна да се одреди екстремала функционала која мора задовољити неки накнадни услов. Овакав екстремум се назива *условни*. Он се може овако формулисати: из класе кривих $y = y(x)$, које задовољавају услов да интеграл

$$K = \int_a^b g(x, y, y')\, dx \tag{473}$$

има одређену вредност, одредити ону која је екстремала интеграла

$$J = \int_a^b f(x, y, y')\, dx. \tag{473'}$$

Да бисмо одредили овакву екстремалу морамо увести ове претпоставке:

1° да функције f и g имају непрекидне прве и друге изводе у размаку $a \leq x \leq b$ за произвољне вредности y и y', и

2° да екстремала $y = y(x)$ није једновремено и екстремала интеграла K.

Ако су ови услови испуњени онда се према Ојлеровој теореми екстремала $y = y(x)$ функционала J одређује као екстремала новог функционала

$$L = \int_a^b h(x, y, y')\, dx, \tag{474}$$

где је подинтегрална функција

$$h = f + \lambda g, \tag{474'}$$

а λ произвољни множилац.

Екстремала мора тада задовољавати Ојлерову једначину за функцију h:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\left[\frac{d}{dx}\frac{\partial g}{\partial y'} - \frac{\partial g}{\partial y}\right] = 0. \tag{475}$$

Напр., од свих кривих $y = y(x)$, одређење дужине l, које имају крајеве у тачкама A и B најниже је тежиште *ланчанице*. Или, од свих кривих $y = y(x)$, дужине l, које пролазе кроз тачке $A(a, 0)$ и $B(b, 0)$, при чему је $l > \overline{AB}$, највећу површину ограничава са дужи AB *кружна линија*.

6. Екстремум двојног интеграла — Нека је функционал облика двојног интеграла

$$J = \int\int f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy. \tag{476}$$

где су $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ и $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ (*Monge*-ове *ознаке*). Екстремала $z = z(x, y)$ горњег функционала мора задовољавати парцијалну диференцијалну једначину

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right) = 0 \tag{476'}$$

Проблем одређивања диф. једначине попречних осцилација греде са континуално распоређеном масом своди се и на овај проблем.

7. Рицова метода. — Као директна метода одређивања екстремума функционала $J[y(x)]$ своди се на претстављање екстремале у облику реда

$$y(x) = \sum_{1}^{\infty} C_i \varphi_i(x), \tag{477}$$

где су C_i произвољне реалне константе а $\varphi_i(x)$ произвољне функције од (x), напр. полиноми или тригонометриске функције. Ако изразе $y = y(x)$ и $y' = y'(x)$ унесемо у функционал и извршимо интеграљење добићемо да је функционал J функција коефицијената C_i

$$J = J(C_1, C_2, \dots, C_n, \dots).$$

Задатак се своди на одређивања коефицијената C_i под условом екстремума функционала, тј. из услова

$$\frac{\partial J}{\partial C_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots).$$

У општем случају, дакле, проблем се своди на решавање бесконачно много алг. једначина са бесконачно много непознатих.

1909 год. је *Риц (Walther Ritz)* применио приближну методу. Уместо стварне екстремале узима приближну

$$y_n = \sum_{1}^{n} C_i \varphi_i(x)$$

па се проблем своди на решење коначног броја алг. једначина

$$\frac{\partial J}{\partial C_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

са коначним бројем непознатих C_i.

Ако n расте ка ∞ онда се y_n приближава стварној екстремали.

При употреби ове методе мора се:

1° доказати конвергенција функције y_n,

2° ако y_n конвергира ка y доказати да је $y(x)$ заиста екстремала,

3° оценити грешку $| y(x) - y_n(x) |$.

Рицова метода се много примењује у теорији еластичности и теорији осцилација (као „метода енергије“, напр. при одређивању критичне брзине вратила).

IV УВОД У МЕХАНИКУ СЛИЧНОСТИ

У механици смо извели основне кинематичке и динамичке појмове: *пут*, *брзину*, *убрзање*, *силу*, *рад (енергију)*, *снагу*, *замах*, *импулс* итд. и видели да се све те величине даду извести из основних јединица: *дужине*, *времена и масе*. Из ових основних јединица те су величине изведене помоћу *димензионих образаца*. У Уводу видели смо да ти обрасци морају бити *хомогени* у погледу на дужине, време и масе, тј. ти обрасци морају важити макакав систем мера усвојили.

У разним проблемима динамике уочили смо да постоје *диференцијалне једначине* кретања које се не могу интегралити у коначном облику. У таквим смо случајевима упућени на приближна нумеричка решења (случај математичког и сферног клатна, динамичког проблема клипног механизма). Због тога се у модерној техници, при градњи бродова, авиона, хидрауличких мотора итд., прво израђују *модели*, на којима се (напр. у аеродинамичким тунелима за авионске моделе) испитују конструкције како би се добили јасни подаци о свима утицајима који се јављају при раду са *правом машином*.

Да би се испитивања на моделима могла искористити при конструкцији праве машине мора између *модела* и *оригинала* постојати известан однос, или, како се друкчије каже, морају модел и оригинал бити *слични*. Услове сличности поставља *теорија сличности* односно *теорија модела* и они су такви да се *диференцијалне једначине* (и њихови интеграли) *проблема за оригинал и модел потпуно поклапају*.

Сличности има више врста и разликујемо: *геометриску*, *кинематичку*, *динамичку*, *статичку*, *термичку*, итд. итд. Ми ћемо укратко изложити само оне које су важне са гледишта механике.

1. Геометриска сличност. — Упоредимо два тела (K) и (K') тако да је друго слично првом (али је умањено). Означимо са L дужину линије на *оригиналу* (K) а са L' дужину одговарајуће линије на *моделу* (K'), онда су та тела слична ако између дужина линија постоји однос

$$L'/L = \lambda \tag{478}$$

који се зове *однос сличности за дужине*.

Ако је A део површине оригинала а A' одговарајући део површине сличне фигуре модела онда између тих површина постоји однос

$$A'/A = \lambda^2 \tag{478'}$$

а на исти начин биће и однос одговарајућих запремина

$$V'/V = \lambda^3. \tag{478''}$$

Ако усвојимо произвољну јединицу дужине и ако постоји зависност између дужина, површина, запремина прве фигуре (K) у облику

$$f(L_1, L_2, \ldots, A_1, A_2, \ldots, V_1, V_2, \ldots,) = 0 \tag{479}$$

постојаће иста зависност ако узмемо λ пута мању јединицу дужине тј. биће

$$f(\lambda L'_1, \lambda L'_2, \dots, \lambda^2 A_1, \lambda^2 A_2, \dots, \lambda^3 V_1, \lambda^3 V_2, \dots) = 0$$

па с обзиром на (479) следи

$$f(L'_1, L'_2, \dots A'_1, A'_2, \dots V'_1, V'_2, \dots) = 0$$

што значи да иста зависност важи и за сличну фигуру — модел.

2. Кинематичка сличност. — Нека се фигура (K) креће у односу на непокретни координатни систем $Oxyz$ а њој слична фигура (K') у односу на непокретни систем $O'x'y'z'$. Оба кретања биће *кинематички слична* ако су испуњени услови:

a) да је однос геометриске сличности констант, $\lambda = \text{const}$.

b) да између тренутака t и t' постоји зависност $t' = f(t)$, тј. ако је та веза облика

$$t' - t'_0 = \tau (t - t^0),$$

где је τ константа а t_0 и t'_0 почетни тренуци од којих се посматрају кретања у оба система.

Ако тачки N фигуре (K), у тренутку t, одговара тачка N' фигуре (K'), у тренутку t', и ако су почетни положаји ових тачака N_0 и N'_0 за t_0 и t'_0 онда су лукови путања $\overset{\frown}{N_0N}$ и $\overset{\frown}{N_0'N'}$ слични пошто су фигуре геометриски сличне. Слични су и вектори положаја покретне тачке, тј. постоји однос њихових модула

$$r'/r = \overset{\frown}{N'_0N'}/\overset{\frown}{N_0N} = \lambda,$$

те између координата постоје односи

$$x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y, \quad z' = \lambda z;$$

између елемената времена постоји однос $dt' = \tau\, dt$.

Према томе између брзина и убрзања постојаће односи[1]

$$v' = \frac{dr'}{dt'} = \lambda \frac{dr}{dt'} = \frac{\lambda}{\tau} \frac{dr}{dt} = \frac{\lambda}{\tau} v, \quad a' = \frac{\lambda}{\tau^2} a. \tag{480}$$

3. Динамичка сличност. — Нека су два система *кинематички слична.* Ако између њихових хомологних маса постоји однос

$$m' = \mu m; \; \mu = \lambda^3 \rho_0 \tag{481}$$

кажемо да су *слични у динамичком погледу* или да су *механички слични,* где је $\rho_0 = \rho'/\rho$ однос специфичних маса.

Између сила које дејствују на те материјалне тачке постоје односи

$$F'/F = (m'/m)\,(a'/a) = \mu \lambda/\tau^2 = f$$

како је поставио Њутн у „Принципијама"

Једначина

$$\boxed{f = \mu \lambda/\tau^2 = \lambda^4 \rho_0/\tau^2} \tag{482}$$

претставља *основне релације механичке сличности* и показује да су односи сличности

---

[1] Кинематика, чл. 5 (обр. 98 и 100).

дужина, времена, маса и сила међусобно у вези. Три односа можемо произвољно бирати а четврти је потпуно одређен овом једначином која претставља *Берйранов (Bertrand) закон сличносйи.*

4. Статичка сличност. — Између сила које дејствују, по Хуковом закону, на два геометриски слична тела, модула еластичности E и E' биће однос

$$f = \frac{F'}{F} = \frac{\varepsilon' E' A'}{\varepsilon E A} = \frac{E'}{E} \lambda^2, \tag{483}$$

пошто је због геометриске сличности $\varepsilon'/\varepsilon = (\Delta l'/l') / (\Delta l/l) = 1$.

Примери. — **1)** *Модел йарне машине.* — Односи тежина и односи маса, због $\rho_0 = 1$, биће

$$\mu = M'/M = G'/G = f = V'/V = \lambda^3.$$

Из Њутновог обрасца сличности (482) следи

$$\tau = \sqrt{\mu \lambda / f} = \sqrt{\lambda}$$

па је однос брзина

$$v'/v = \lambda/\tau = \sqrt{\lambda}.$$

Однос је снага

$$P'/P = F' v'/F v = \lambda^3 \sqrt{\lambda} = \lambda^{7}/_{2}.$$

Однос притиска паре и напона износи

$$p'/p = (F'/A')/(F/A) = \lambda = \sigma'/\sigma.$$

Бројеви обрта стоје у односу

$$n'/n = \omega'/\omega = (v'/r')/(v/r) = \sqrt{\lambda}/\lambda = 1/\sqrt{\lambda}.$$

2) Авион и његов модел израђени су од истог материјала (исте специфичне тежине и истог модула еластичности).

a) Да ли је могућа механичка сличност модела и авиона ако треба да су у положају равнотеже изједначени?

b) У коме односу стоје силе, при датом услову, да би модел и авион имали исте специфичне тежине?

c) У коме односу морају стајати дужине и силе модела и авиона, израђених од различитих материјала (храстовине $\gamma = 0{,}7$ kg/dm³; $E = 120\,000$ kg/cm² и челика $\gamma = 7{,}8$ kg/dm³; $E = 2{,}200.000$), да би, при датом услову, били механички слични?

Решење. — Због једнакости специфичних тежина и модула еластичности биће $\rho_0 = 1$, $f = \lambda^2 = \mu = \lambda^3$ што је *немогуће*, па је механичка сличност неостварљива.

b) $\rho_0 = 1$, $f = \mu = \lambda^3$.

c) Однос специфичних тежина је $\rho_0 = 0{,}7/7{,}8 = 0{,}09 = f/\lambda^3$, $f = \mu$. Однос је модула еластичности $120.000/2{,}200.000 = 0{,}055$, па је, из (483), $f = 0{,}055\,\lambda^2$ те упоређењем добивамо $\lambda = 0{,}6$, $f = 0{,}02$.

3) Однос дужина модела и авиона је 1/9. Мотор авиона чини 1400 обрта у минуту. Са којим се бројем импулса у минуту мора дејствовати на модел да би се осцилације модела могле применити на авион? У коме односу стоје снаге ако су и модел и авион од материјала исте специфичне тежине?

Решење. — Како је $\rho_0 = 1$ то је $f = \mu \lambda^3 = \lambda^4/\tau^2$ па је $\lambda = \tau^2$. Однос брзина је $v'/v = {}^1/_3$, а броја обртаја $n'/n = 1/\sqrt{\lambda} = 3$.

Однос снага је $\lambda^{7/2} = 1:2187$.

РЕГИСТАР ИМЕНА

(Бројеви означавају стране)

РЕГИСТАР

(Бројеви означавају страну)