

**OSNOVI TEORIJE  
NELINEARNIH  
OSCILACIJA**

**MR.KATICA R. STEVANOVIC**

**N I Š**

**1 9 7 3**

O S N O V I            T E O R I J E  
N E L I N E A R N I H  
O S C I L A C I J A

MR.KATICA R.STEVANOVIĆ

N                    I                    28  
                    1    9    7    3

OSNOVI TEORIJE NELINEARNIH OSCILACIJA

S A D R Ž A J

|   |    |
|---|----|
| Uvod  | 6  |
| Osnovni problemi sa nelinearnim oscilacijama  | 10 |
| Dinamički nelinearni sistemi i oblici diferencijalnih jednačina koje ih karakterišu | 21 |
| I G l a v a   |    |
| Nelinearni oscilatorni sistemi sa jednim stepenom slobode oscilovanja               | 25 |
| 1.Slobodne nelinearne oscilacije sa jednim stepenom slobode oscilovanja             | 25 |
| 2.Matematičko klatno  | 27 |
| 3.Parabolična karakteristika restitucione sile                                      | 32 |
| II G l a v a  |    |
| Približne metode  | 37 |
| 1.Metoda Ljapunova - Krilova  | 37 |
| 2.Lindstat - ova metoda   | 41 |
| 3.Metoda malih koeficijenata  | 46 |
| 4.Metoda sporopromanljive amplitude   | 51 |

|   |     |
|---|-----|
|   | 2.  |
| 5. <u>Metoda Krilova - Bogoljubova</u>  | 54  |
| 6. <u>Metoda Krilova - Bogoljubova - Mitropoljskog za nalaženje rešenja nelinearne diferencijalne jednačine sa sporo promenljivim parametrima</u> | 61  |
|   |     |
| III    G l a v a  |     |
| Metoda fazne ravni  | 80  |
|   |     |
| 1. Fazna ravan i fazne trajektorije   | 80  |
| 2. Singularne tačke i kriterijumi za njihovu klasifikaciju  | 96  |
| 3. Indeks singulariteta   | 110 |
| 4. Grafičke metode  | 113 |
| 4.1. <u>Metoda izoklina</u>   | 113 |
| 4.2. <u>Metoda Lienard-a</u>  | 119 |
| 4.3. <u>Metoda Pell-a</u>   | 129 |
| 4.4. <u>Metoda Schefer-a</u>  | 130 |
| 4.5. <u>Metoda Drobova</u>  | 132 |
|   |     |
| IV    G l a v a   |     |
| Stabilnost oscilovanja  | 135 |
|   |     |
| 1. <u>Stabilnost kretanja i teoreme Ljapunova</u>   | 135 |
| 2. Ljapunov-ljeva funkcija prvog reda   | 140 |
| 3. Ljapunov-ljeva funkcija drugog reda  | 145 |
| 4. Ljapunov-ljeva teorema o stabilnosti u prvom približenju   | 152 |
| 5. Izučavanje stabilnosti oscilacija pomoću jednačina prve aproksimacije dobijenih asimptotskim metodama  | 157 |
|   |     |
| V    G l a v a  |     |
| <u>Sistemi Ljapunova, konzervativni sistemi, geometrijska diskusija krivih energije u faznoj ravni</u>  | 161 |



|   |     |
|---|-----|
| 1.Ljapunov-ljev sistem - slučaj jednog stepena slobode oscilovanja  | 161 |
| 2.Ljapunov-ljev sistem - slučaj proizvoljnog broja stepeni slobode oscilovanja  | 171 |
| 3.Konzervativni sistemi i geometrijska diskusija krivih energije u faznoj ravni   | 174 |
| 4.Površina energije   | 179 |
| 5.Primeri   | 181 |
| 6.Linije energije u faznoj ravni i uporedjivanje sa faznim trajektorijama   | 200 |
| VI G l a v a  |     |
| Prinudne nelinearne oscilacije  | 205 |
| 1.Prosta prinudna oscilacija sa nelinearnom otpornom silom  | 205 |
| 2.Galjerkinova metoda   | 213 |
| 3.Energija sistema koji prinudno osciluje   | 218 |
| 4.Grafička metoda nalaženja amplitude prinudnog oscilovanja   | 220 |
| 5.Analitičke metode rešavanja diferencijalnih jednačina oscilovanja pod dejstvom proste prinudne sile   | 222 |
| 6.Metoda perturbacije   | 233 |
| 7.Subharmonijska rešenja  | 239 |
| 8.Rešenje prinudne nelinearne oscilacije sa prigušivanjem   | 243 |
| 9.Približna rešenja pomoću krajnjih suma trigonometrijskih funkcija   | 256 |
| 10.Dejstvo kvaziperiodičkih sila sa promenljivom amplitudom i frekvencijom na nelinearni oscilatorni sistem - prolazak kroz rezonantno stanje | 270 |
| 11.Asimptotska metoda Krilova - Bogoljubova - Mitropoljskog za izučavanje nestacionarnog rezonantnog stanja                                   | 273 |

|      |  |     |
|------|--|-----|
| VII  | G l a v a  |     |
|      | Samopobudne oscilacije   | 288 |
|      | 1.Samopobudne oscilacije   | 288 |
|      | 2.Granične trajektorije i Lienard-ov kriterijum  | 290 |
|      | 3.Rešenje jednačine samopobudnog oscilatora<br>asimptotskom metodom  | 293 |
|      | 4.Relaksacione oscilacije  | 300 |
| VIII | G l a v a  |     |
|      | Reolinarne oscilacije  | 310 |
|      | 1.Integraljenje jednačina pomoću potencijalnih<br>redova   | 310 |
|      | 2.Hill-ova diferencijalna jednačina  | 313 |
|      | 3.Mathieu-ova diferencijalna jednačina   | 322 |
|      | 4.Parametarske oscilacije  | 338 |
| IX   | G l a v a  |     |
|      | Nelinearne oscilacije sistema sa više stepeni<br>slobode oscilovanja   | 340 |
|      | 1.Jednofrekventne i višefrekventne oscilacije<br>sistema sa više stepeni slobode oscilovanja   | 340 |
|      | 2.Jednofrekventne oscilacije nelinearnih sistema<br>sa više stepeni slobode oscilovanja i sa sporo<br>promenljivim parametrima   | 342 |
|      | 3.Sastavljanje asimptotske aproksimacije rešenja<br>bez prethodnog sastavljanja tačnih diferencijalnih<br>jednačina oscilovanja. Interpretacija pomoću<br>energije - virtuelnog rada | 356 |
|      | 4.Neki specijalni slučajevi sistema diferencijalnih<br>jednačina oscilovanja sistema sa više stepeni<br>slobode oscilovanja  | 359 |
|      | 5.Korišćenje energetske interpretacije jednačina<br>prve aproksimacije za rešavanje parcijalnih<br>diferencijalnih jednačina - jednačina oscilovanja<br>elastičnih tela              | 362 |

|   |     |
|---|-----|
| 5.1. Poprečne oscilacije štapa napregnutog aksijalnom silom promenljive frekvencije | 364 |
| 5.2. Poprečne oscilacije štapa dvostruke krutosti u prelaznom režimu oscilovanja    | 374 |
| <br>  |     |
| X    G l a v a  |     |
| Metoda usrednjenja <u>N.N. Bogoljubova</u>  | 390 |
| <br>  |     |
| 1. Transformacija diferencijalnih jednačina na standardni oblik                     | 392 |
| 2. Usvojene oznake i operatori  | 395 |
| 3. Metoda usrednjenja <u>N.N. Bogoljubova</u>                                       | 396 |
| 4. Analiza usrednjenih jednačina  | 401 |
| 5. Primeri  | 402 |
| <br>  |     |
| L i t e r a t u r a   | 409 |

## U V O D

Oscilacije konstrukcija i mašina, elektromagnetne oscilacije u radiotehnici i optici, zvučne i ultrazvučne oscilacije, oscilatorne pojave u atomskom jezgru, periodička i bliskoperiodička kretanja nebeskih tela, oscilatorne pojave u biologiji idr. su na prvi pogled veoma različiti procesi, ali su istovremeno svi objedinjeni metodama Matematičke fizike u jedno učenje o oscilacijama.

Problemi Nelinearnih oscilacija imaju, danas, dominantnu ulogu u najraznovrsnijim oblastima fizike i tehnike. Sama teorija Nelinearnih oscilacija, kao naučni pravac javila se dvadesetih godina 20 veka u vezi sa otkrićem elektronskih cevi i novih pojava u Mehanici i Akustici. U periodu od 1907 godine do 1928 godine centar izučavanja nelinearnih oscilacija bio je u Nemačkoj. Müller i B<sup>ar</sup>akhauzen i njihovi učenici su razvili kvazilinearne metode. Tridesetih godina XX veka u SSSR-u su postojale dve škole nelinearnih oscilacija : Moskovsko-Gorkovska na čelu sa Mendeljštamom ( Менделџтамп ) i Papaleksijem ( Папалекси ) i Kijevska škola sa Krilovim ( Крилов ) i Bogoljubovim ( Боголюбов ).

Teorija Nelinearnih oscilacija inspirisana je radovima Poincaré-a i Ланунов -a koji i danas predstavljaju njenu osnovu. Jednu od najznačajnijih uloga u daljem

razvoju teorije nelinearnih oscilacija odigrao je Van-der Pol, koji je prvi obratio pažnju na neprimenljivost metode linearizacije na nelinearne zadatke. On je predložio metodu sporo-promenljivih koeficijenata, sličnu Lagrange-ovoj metodi varijacije konstanta. I pored toga što je veliki broj zadataka bio rešen ovom Van-der Pol-ovom metodom, ona je davala samo prvu aproksimaciju, t.j. nije bila asimptotska i stepen njene tačnosti nije bio jasan, a ostalo je otvoreno pitanje njenog matematičkog dokaza i obrazloženja.

Prve stroge matematičke metode rešavanja nelinearnih tehničkih zadataka dali su Liénar (1928) i Cartan (1925). Stroge metode nelinearnih oscilacija : metodu malog parametra i metode izučavanja osobina rešenja diferencijalnih jednačina predložili su Poincaré i Ланунов, a primenjivali su ih za rešavanje zadataka nebeske mehanike. U primeni tih metoda astronomi su naišli na problem pojave u rešenjima takozvanih sekularnih članova, koji su bili nepogodni za izračunavanje.

U radovima Lagrange-a, Laplace-a, Осиповича, Deloné-a, Newkomb-a, Guldin-a, Lindestat-a su predložene metode pomoću kojih se mogla izbeći pojava sekularnih članova.

Na kraju XIX veka Poincaré je u radovima "O problemu triju tela i jednačini dinamike" (1890) i "Nove metode nebeske mehanike" (1892 -1899) podvrgao strogoj analizi izučavanja svojih prethodnika i pokazao da su svi trigonometrijski redovi, u kojima se provodi metoda malog parametra, divergentni. Posle izvesnog broja članova, članovi počinju da divergiraju, ali zbir prvih članova tih redova daje veličinu čija je greška utoliko manja, ukoliko je manja vrednost malog parametra. U tom smislu Poincaré naziva takve redove asimptotskim. U njegovim radovima metoda malog parametra je dobila matematički dokaz, uopštenje i dalji razvoj. Poincaré je predložio metodu pomoću koje se određuje karakter kretanja po

obliku osnovnog dela diferencijalne jednačine bez njenog integraljenja i da se iz familije integralnih krivih nalaze krive koje odgovaraju periodičkom kretanju. U svojim istraživanjima on je dao odgovor na pitanje, kada sistem može da se nalazi u ravnoteži ili stanju periodičkog kretanja. On je uveo i pojmove indeksa Poincaré-a i graničnog ciklusa. Njegove radove nastavili su Bendikson, Birkof, Лефшиц, Андронов, Понтягин, Леонтович i drugi.

Asimptotske metode, koje su predložili Poincaré i Ляпунов u svojim radovima neposredno su mogle da se primenjuju samo na čisto periodičke režime oscilovanja. Za izučavanje osobina procesa koji nisu čisto periodički, za takozvane kvazi-periodičke, bile su potrebne nove metode. Od 1932 do 1937 godine Крылов i Боголюбов su objavili niz zajedničkih radova (oko 30), koji su bili posvećeni rešavanju problema iz teorije nelinearnih oscilacija. Metoda Kri-lova - Bogoljubova je odmah dobila praktičnu primenu. 1937. godine oni su objavili monografiju [161] u kojoj su izloženi teorijski osnovi asimptotske metode u primeni na nekonzervativne sisteme, a takodje ustanovljen princip linearizacije za dobijanje prve aproksimacije rešenja diferencijalnih jednačina, koji je prost i pogodan za praktične proračune.

Matematički dokaz metode Van-der Pol-a dali su Fatou, Менделштам i Шапалекс. Specijalnu metodu usrednjenja dao je sa matematičkim dokazom Н.Н. Боголюбов. Suštinski doprinos razvoju asimptotskih metoda nelinearne mehanke dao je Ю.А. Митропольский, uopštavajući ih na diferencijalne jednačine sa sporopromenljivim parametrima (u toku vremena jednog perioda sopstvenih oscilacija), koje opisuju nestacionarne procese, što je izložio u svojim monografijama [217], [218], [220], [221]. Njegova asimptotska teorija nestacionarnih oscilacija dobila je široku primenu u izučavanju različitih mehaničkih sistema u radovima savremenika Лисаренка, Волосова, Самольенка,

Руданика , Гробова , i drugih.

Pri izučavanju praktičnih zadataka iz oblasti oscilacija sistema sa više stepeni slobode oscilovanja, često se srećemo sa pojavom da trenje i poremećajne sile dovode do brzog uspostavljanja oscilacija osnovnog tona, pa je na osnovu toga *Борисов* predložio asimptotsku metodu zasnovanu na principu jednofrekventnosti koja dozvoljava da se nadje bilo koja asimptotska aproksimacija rešenja sistema jednačina, koje opisuju oscilacije materijalnog sistema sa mnogo stepeni slobode oscilovanja. Princip jednofrekventnosti dobio je i široku primenu u radovima *Митропольског* i njegovih učenika.

Za izučavanje osobina nelinearnih sistema primenjuje se metoda fazne ravni, faznog prostora i faznih trajektorija, koja se i danas razvija. U vezi sa ovim razvijene su grafičke metode za konstrukciju faznih trajektorija medju kojima su najpoznatije: Metoda izoklina, metoda Liénard-a, metoda Pell-a, metoda Schäfer-a, metoda Дробова i druge.

Zajedno sa razvitkom nelinearne mehanike bio je povezan i razvoj matematike tako da realno možemo da kažemo da se sa jednog od aspekata teorija nelinearnih oscilacija može da razmatra kao matematička disciplina.

Cilj datog rada je izlaganje osnova nelinearnih oscilacija koje bi omogućile izučavanje nelinearnih oscilatornih procesa koji se javljaju u mašinstvu, bez zadržavanja na studioznijim matematičkim dokazima koji nisu neophodni. Ovaj rad, prema zamisli autora mora da služi kao rukovetstvo koje će studenta da uvede u oblast izučavanja problema nelinearnih oscilacija i pokaže mogućnosti primene izloženih metoda.

## OSNOVNI PROBLEMI SA NELINEARNIM OSCILACIJAMA

Oscilacije konstrukcija i mašina, elektromagnetne oscilacije u radiotehnici i optici, samopobudne oscilacije u sistemima regulacije i sistemima sa posledejstvom, zvučne i ultrazvučne oscilacije, sve te reklo bi se različite, ne mnogo slične oscilatorne pojave objedinjuju se metodama matematičke fizike u jedno učenje o oscilacijama.

Neophodno je da se uoči da sa razvojem nauke i tehnike brzo raste uloga učenja o oscilacijama. Ne govoreći o takvim disciplinama kao što su radiotehnika i akustika, koje su u potpunosti "zaokupljene" izučavanjem oscilacija možemo uzeti za primer mašinstvo. Ne tako davno izučavanju oscilacija nije se pridavalo mnogo pažnje i proračuni otpornosti i izdržljivosti konstrukcije u osnovi su se izvodili statički. Istovremeno sa povećanjem brzohodosti mašina i smanjenjem gabarita konstrukcija i pri prelazu na brzohodo mašinstvo zanemariti ulogu oscilacija postalo je gotovo nemoguće.

Osnovi savremene teorije oscilacija se mogu naći u radovima Galilei-a, Hajgens-a, Newton-a o problemu kretanja klatna. U radovima Lagrange-a se već nalazi formirana teorija malih oscilacija, koja je u daljem razvoju dobila naziv teorija linearnih oscilacija. Osnovni pojmovi linearne



teorije oscilacija kao sopstvena frekvencija, dekrement pri-  
gušivanja, rezonantno stanje, normalni oscilatori, normalne i  
glavne koordinate postali su nezamenljivo sredstvo za izuča-  
vanje skoro svih oblasti fizike i tehnike. Svojstvo linear-  
nih oscilatornih sistema je i princip superpozicije. U teori-  
ji linearnih oscilacija široku primenu su dobili i simboli-  
čki diferencijalni operatori čija se efektivnost vidi posebno  
u primeni na oscilacije elastičnih tela i sistema sa više  
stepeni slobode oscilovanja.

Linearna teorija oscilacija je veoma razradje-  
na, pa su se često problemi nelinearnog karaktera linearizo-  
vali i rešavali bez neke dublje analize koja bi dovela do  
zaključka o neprimenljivosti takve interpretacije.

U prošlom veku je postojala metoda malog para-  
metra, koja je mogla da bude primenjena za izučavanje neline-  
arnih oscilacija, dovoljno bliskih linearnim.

Dovoljno bliske linearnim oscilacijama naziva-  
ju se oscilacije, za koje diferencijalne jednačine iako su  
nelinearne sadrže neki parametar  $\epsilon$ , za čiju vrednost  $\epsilon = 0$   
jednačina postaje linearna i pri čemu se pretpostavlja da  
je  $\epsilon$  mali parametar.

Medjutim obično razlaganje po stepenima malog  
parametra dovodi do toga da se u približnim formulama upo-  
redo sa harmonijski zavisnim od vremena članovima javljaju  
takozvani sekularni - vekovni članovi. Sekularni članovi su  
oblika  $t^m \sin \omega t$  i  $t^m \cos \omega t$  u kojima se  
vreme  $t$  javlja van znaka sinusa i cosinusa. Kao posledica  
toga zajedno sa vremenom brzo rastu sekularni članovi, ta-  
ko da to bez studioznije analize dovodi do pogrešnih zak-  
ljučaka, ako se izuzme to da približna formula važi za ogra-  
ničeni interval vremena. Ovu teškoću moguće je uočiti i na  
primeru metode Poisson-a.

Metoda Poisson-a se primenjuje za rešavanje

nelinearne diferencijalne jednačine koja sadrži mali parametar  $\varepsilon$ , a oblika je

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon \phi\left(x; \frac{dx}{dt}\right) \quad (1)$$

Rešenje koje zadovoljava ovu diferencijalnu jednačinu sa tačnošću do malih veličina reda  $\varepsilon^{n+1}$ , tražimo u obliku  $n$  - točlanog reda

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \varepsilon^i \quad (2)$$

Ako red (2) unesemo u jednačinu (1) i desnu stranu jednačine razložimo po stepenima malog parametra  $\varepsilon$ , a zatim izjednačimo koeficijente uz jednake stepene  $\varepsilon$ , zanemarujući pri tome stepene više od  $n$ , dobićemo sistem jednačina

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_0}{dt^2} + \omega^2 x_0 &= 0 \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 &= \phi\left(x_0, \frac{dx_0}{dt}\right) \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega^2 x_2 &= \phi'_x\left(x_0, \frac{dx_0}{dt}\right) x_1 + \phi'_{x'}\left(x_0, \frac{dx_0}{dt}\right) x_1' \end{aligned} \quad (3)$$

Ako razmotrimo ovu metodu na primeru

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + dx + \gamma x^3 = 0 \quad (4)$$

možemo uočiti problem sekularnih članova. Uvodjenjem oznaka  $\omega^2 = \frac{d}{m}$ ,  $\varepsilon = \frac{\gamma}{m}$  dobijamo da je

$$\phi(x) = -x^3 \quad (5)$$

pa je sistem (3) oblika

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_0}{dt^2} + \omega^2 x_0 &= 0 \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 &= -x_0^3 \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega^2 x_2 &= -3x_0^2 x_1' \end{aligned} \quad (6)$$

Iz preve jednačine sistema (6) nalazimo

$$x_0 = a \cos(\omega t + \theta) \quad (7)$$

što zamenom u drugu jednačinu daje

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = -\frac{3}{4} a^3 \cos(\omega t + \theta) - \frac{1}{4} a^3 \cos 3(\omega t + \theta) \quad (8)$$

odakle nalazimo

$$x_1 = -\frac{3}{8\omega} a^3 t \sin(\omega t + \theta) + \frac{a^3}{32\omega^2} \cos 3(\omega t + \theta) \quad (9)$$

pa je rešenje sa tačnošću reda  $\varepsilon^2$  oblika

$$x = a \cos(\omega t + \theta) - \frac{3\varepsilon}{8\omega} a^3 t \sin(\omega t + \theta) + \frac{\varepsilon a^3}{32\omega^2} \cos 3(\omega t + \theta) \quad (10)$$

U nadjenom približnom rešenju se javio sekularni član

$$-\frac{3\varepsilon}{8\omega} a^3 t \sin(\omega t + \theta)$$

pa se može zaključiti da će oscilacije predstavljene izrazom (10) rasti sa vremenom što je u protivurečnosti sa karakterom tačnog rešenja jednačine (4), koje se može izraziti pomoću eliptičke funkcije oblika

$$x = x_{\max} \operatorname{cn} \left\{ \frac{2k}{\pi} \psi \right\} \quad (\psi = \omega t + \theta) \quad (11)$$

Do istog zaključka možemo da dođemo ako jednačinu (4) pomnožimo sa  $\frac{dx}{dt}$  i nađemo integral žive sile

$$\frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \alpha x^2 + \frac{\gamma}{4} x^4 = E \quad (12)$$

koji izražava zakon očuvanja energije sistema odakle zaključujemo da energija sistema ne sme neograničeno da raste. Ova metoda zbog ranije spomenutih sekularnih članova nije pogodna i nije u upotrebi, a i zbog toga što je primenljivi-

va samo za kratak interval vremena. Može da se kaže još i to da pojava sekularnih članova u (10) može da navede na zaključak o tome da jednačina (4) nema periodičkih rešenja što nije tačno.

Laplace i Lagrange su predložili metode koje bi izbegle pojavu sekularnih članova. Medjutim i ti stepeni redovi po stepenima malog parametra koje su predložili Laplace i Lagrange su divergentni ali i istovremeno veoma pogodni za praktične proračune, jer se ti redovi javljaju kao asimptotski i u tom smislu što njihova greška  $m$ -tog reda je približno proporcionalna  $(m+1)$ -om stepenu malog parametra. To znači da se neograničenim povećanjem broja članova ne postiže konvergencija reda, iako odredjivanje koeficijenata postaje veoma složeno, zato se koristi red sa malim brojem članova, pri što manjem  $\epsilon$ , pri čemu postizemo asimptotičnost reda.

Primena asimptotskih metoda je bila razradjena, ali je problem bio u tome što su sve te metode bile prilagođene za primenu na konzervativne sisteme. U poslednjih dvadeset godina ove su se metode razvile i u pravcu primene na nekonzervativne dinamičke sisteme.

*Ляпунов* i Poincaré su dali osnovu teorije linearnih diferencijalnih jednačina sa periodičkim koeficijentima i istovremeno proučavali nelinearne diferencijalne sisteme, koji sadrže mali parametar, a imaju za  $\epsilon = 0$  periodička rešenja, sa strogim matematičkim dokazima. Teorija stabilnosti *Ляпунова* posebno igra važnu ulogu u izučavanju nelinearnih sistema.

U teoriji nelinearnih oscilacija uočene su pojave problema stabilnosti generacije opadajućih oscilacija transformacije frekvencija, prinudne sinhronizacije, modulacije, problem prolaska kroz rezonantno stanje, koje mogu da se reše samo uvođenjem nelinearnih elemenata, jer u čisto linearnim sistemima ne mogu da postoje stacionarni režimi pri dejstvu spoljašnjih sila koji zavise od početnih uslova. Takodje

u linearnim sistemima pri dejstvu spoljašnje poremećajne sile sa nekom frekvencijom  $\Omega$ , mogu da se uspostave prinudne oscilacije samo sa tom frekvencijom, dok pojava nelinearnih članova može da dovede do pojave i oscilacija sa kombinovanim frekvencijama. Takodje nelinearni članovi mogu da izazovu poremećaj faze oscilovanja, a i da dovedu do zavisnosti perioda sopstvenih oscilacija od amplitude i faze. Da još jednom naglasimo da pojava nelinearnih članova dovodi do nepri-  
menljivosti principa superpozicije.

Sasvim je prirodno da su najdostupniji za izučavanje nelinearni sistemi sa malim parametrom, dok je izučavanje sistema sa bitnim nelinearnostima (velikim) veoma težak problem s matematičke tačke gledišta, koje traži individualni pristup u svakom konkretnom slučaju. Najbolje do sada su izučeni konzervativni sistemi i sistemi sa jednim stepenom slobode oscilovanja. Van-der Pol-ova jednačina oblika

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1-x^2)\frac{dx}{dt} + \omega^2x = 0 \quad (13)$$

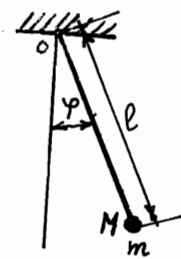
sa metodom koju je predložio Van-der Pol za njeno rešavanje a koja je analogna metodi Lagrange-a a koju je primenjivao u nebeskoj mehanici, je odigrala važnu ulogu u razvoju nelinearne mehanike, iako je na tom stupnju bila intuitivna izvedena bez dužnih matematičkih dokaza.

Navedimo neke tipične primere nelinearnih sistema.

1. Najprostiji primer nelinearnog oscilatora je obično matematičko klatno (Sl.1) čija je jednačina

$$ml^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} + mg\ell \sin\varphi = 0 \quad (14)$$

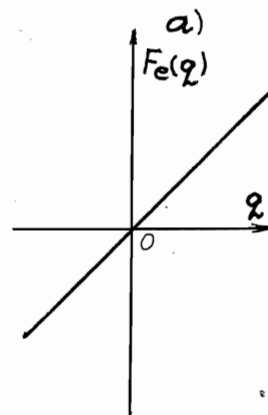
gde je  $m$  - masa,  $\ell$  - dužina klatna,  $\varphi$  - ugao otklona od vertikalnog položaja. Frekvencija oscilovanja takvog klatna zavisi od amplitude oscilovanja, pa oscilovanje nije izohrono.



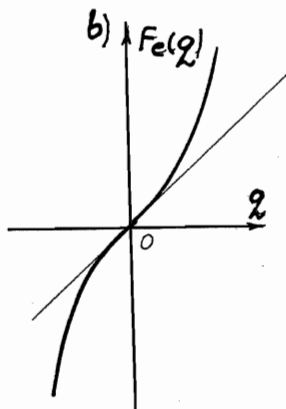
Sl.1.1



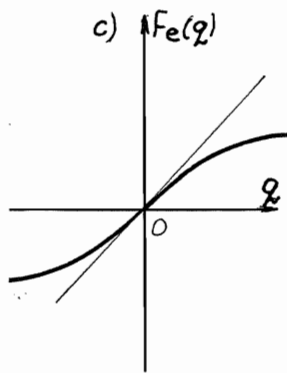
Sl.1.2



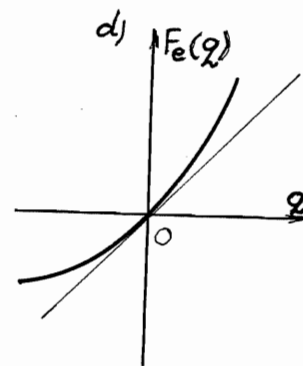
Sl.1.2a



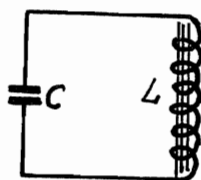
Sl.1.2b



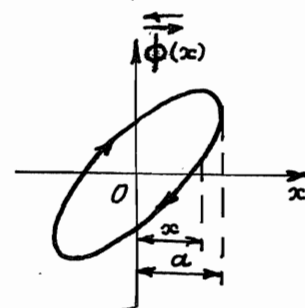
Sl.1.2c



Sl.1.2d



Sl.1.3



Sl.1.4

17.

2. Oscilovanje mase na opruzi nelinearne karakteristike krutosti opruge koja zavisi od koordinate  $x$  i čija je jednačina *oscilovanja*

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f(x) = 0 \quad (15)$$

I u tom slučaju se javljaju neizohrone oscilacije. Karakter neizohronosti zavisi od vrste nelinearnosti opruge. (Sl.2).

3. Primer oscilatornog kola koje se sastoji iz kalema samoindukcije  $L$  sa gvozenim jezgrom i kapacitivnosti  $C$ . Neka je  $\phi$  magnetni fluks koji prolazi kroz kalem. Tada je jednačina za proučavano kolo oblika

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0 \quad (16)$$

gde je struja  $i = i(\phi)$  nelinearna funkcija magnetnog fluksa. (Sl.3).

4. Primer vertikalnih oscilacija mase  $m$  na štapu dužine  $l$  sa poprečnim presekom  $A$  i sa modulom elastičnosti  $E$ , uz pretpostavku da masa *masa* vrši samo vertikalne oscilacije i da se masa štapa zanemaruje, a uzima u obzir unutrašnje trenje pomoću funkcije  $\omega^2 \vec{\phi}(x)$ , gde strelice označavaju smer rasta (opadanja) funkcije sa  $x$  prikazan je jednačinom

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 [x + \vec{\phi}(x)] = 0 \quad (17)$$

gde je  $\omega^2 = \frac{EA}{m l^2}$  (Sl.4, \_\_\_\_\_).

5. Samopobudni oscilatori su takvi sistemi u kojima pri izvesnim uslovima položaj ravnoteže gubi svoju stabilnost i javlja se kretanje, koje sistem dovodi u stanje stacionarnog periodičkog oscilovanja. Oscilacije koje takvi oscilatori vrše su samopobudne oscilacije ili auto-oscilacije. Primer takvih oscilacija je kolo sa induktivnom

spregom sa slike 5. čija je jednačina oblika

$$\frac{d^2 V_a}{dt^2} + f(V_a) \frac{dV_a}{dt} + \omega_r^2 V_a = 0 \quad (18)$$

gde  $V_a$  označava anodni napon tj, napon na anodi triode, gde je  $i_a = f(V_a)$  nelinearna karakteristika triode, koja se ogleda u nelinearnoj zavisnosti anodne struje od napona na anodi triode usled dejstva rešetkinog napona  $V_a$ .

6. Klatno Frouda takodje izvodi samopobudne oscilacije, gde se suvo trenje javlja kao uzrok kovitlanja klatna. (Sl.6).

7. U navedenim primerima oscilatornih sistema poremećajne sile ne zavise eksplicitno od vremena. Ti sistemi su bili izolovani od spoljašnjih uticaja, i kao posledica toga sile koje su dejstvovala na sistem zavisile su samo od dinamičkog stanja samog sistema. Kao primer uzmimo nelinearni vibrator na koji dejstvuje slaba harmonijska poremećajna sila  $\varepsilon F_0 \cos \Omega t$  i čija je jednačina oblika

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \frac{dx}{dt}) + \varepsilon F_0 \cos \Omega t \quad (19)$$

Srednja snaga

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \varepsilon F_0 \cos \Omega t \frac{dx}{dt} dt \quad (20)$$

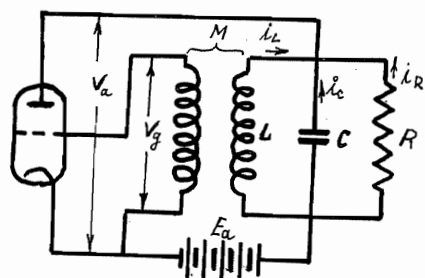
koja se silom unosi u sistem za vreme  $T$  ne može bitno da izmeni oblik oscilacije. Pretpostavljajući da je rešenje jednačine (19) približno harmonijsko oblika

$$x \approx a \cos(\omega t + \psi) \quad (22)$$

$$\frac{dx}{dt} \approx -a\omega \sin(\omega t + \psi)$$

jer mala nelinearnost i mala spoljašnja sila ne mogu da za jedan period bitno izmene oblik oscilovanja, možemo da dobijemo srednju snagu  $P$  u obliku

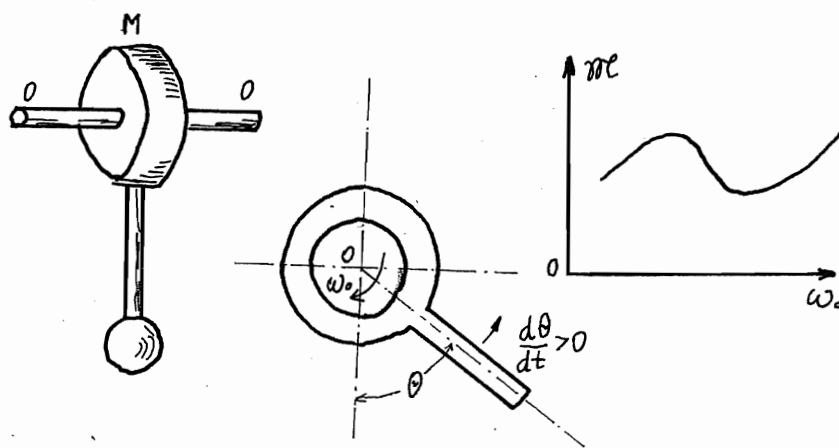




S1.5



S1.7



S1.6

$$P = \frac{d\omega \varepsilon F_0}{2T} \left[ \frac{\cos[(\omega + \Omega)t + \psi]}{\omega + \Omega} - \frac{\cos[(\Omega - \omega)t - \psi]}{\Omega - \omega} \right]_{t_0}^{t_0 + T} \quad (23)$$

Za dovoljno dug period  $T$  ovaj izraz za srednju snagu  $P$  praktično je različit od nule samo u slučaju kada je spoljašnja frekvencija dovoljno bliska sopstvenoj frekvenciji. U tom slučaju poremećajna sila koja deluje u toku produženog vremena može da znatno utiče na posmatrani nelinearni vibrator samo u slučaju kada je  $\Omega \approx \omega$ . Takvo rezonantno stanje je osnovno ili glavno rezonantno stanje. Ovde smo analizu izvodili na osnovu čisto harmonijskog oblika sopstvenih oscilacija, tako da ako se analiza vrši pri nelinearnom članu u sopstvenim oscilacijama javiće se i viši harmonici  $n\omega$ .

8. Poprečne oscilacije zglobno vezanog štapa, koji se nalazi pod dejstvom aksijalne periodičke sile  $F(t) = \varepsilon F_0 \cos \Omega t$  (Sl.7) se opisuju pomoću Mathe-ove diferencijalne jednačine

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 [1 + h \cos \Omega t] x = 0 \quad (24)$$

gde je  $h = -\frac{l^2 F_0}{\beta J}$ ,  $\beta$  - savojna krutost štapa,  $l$  - dužina štapa. Smatrajući  $\omega^2 h x \cos \Omega t$  spoljašnjim poremećajem možemo da nadjemo srednju snagu u prvoj aproksimaciji u obliku

$$P = \frac{\omega^3 h}{4T} \left[ \frac{\cos[(\Omega + 2\omega)t + 2\psi]}{\Omega + 2\omega} - \frac{\cos[(\Omega - 2\omega)t - 2\psi]}{\Omega - 2\omega} \right]_{t_0}^{t_0 + T} \quad (25)$$

Iz izraza (25) se vidi da rad izvršen poremećajnom silom  $\omega^2 h x \cos \Omega t$  za duži interval vremena  $T$  nije jednak nuli u slučaju kada je  $\Omega = 2\omega$ , odnosno  $\omega = \frac{\Omega}{2}$ . U ovom slučaju se uočava rezonantno stanje demultiplikacionog rezonantnog stanja.

9. Oscilacije klatna promenljive dužine mogu se opisati diferencijalnom jednačinom oblika

$$\frac{d}{dt} \left\{ m l(t) \frac{d\varphi}{dt} \right\} + g l(t) \sin\varphi = 0 \quad (26)$$

gde je  $\varphi$  ugao otklona klatna,  $l(t)$  dužina klatna, funkcija vremena,  $m$  masa. Ovde imamo slučaj sporopromenljivih parametara sa vremenom.

Iz nabrojanih primera mogu se naslutiti neke teškoće na koje se nailazi u obijašnjavanju pojava u nelinearnim sistemima o kojima će dalje detaljnije biti reči.

DINAMIČKI NELINEARNI SISTEMI I OBLICI DIFERENCIJAL-  
NIH JEDNAČINA KOJI IH KARAKTERIŠU

Kada smo <sup>isceli</sup> govorili o osnovnim problemima sa nelinearnim oscilacijama naveli smo više primera nelinearnih sistema i videli da su diferencijalne jednačine koje ih opisuju nelinearne.

Materijalni sistem, čije se kretanje može opisati nelinearnom diferencijalnom jednačinom ili sistemom nelinearnih diferencijalnih jednačina nazivamo nelinearnim materijalnim sistemom. Iz izloženog se može zaključiti da je nelinearnost jednačina najbitnija karakteristika nelinearnih sistema. To je najčešće nelinearna karakteristika sile, ali u opštem slučaju to je nelinearna dinamička karakteristika koja obuhvata i karakteristiku sile i karakteristiku inercionih i ostalih osobina nelinearnog sistema.

Dinamička karakteristika u jednačini oblika

$$\frac{d^2q}{dt^2} = f(q, \dot{q}, t) \quad (1)$$

je funkcija  $f(q, \dot{q}, t)$  i u opštem obliku je funkcija koordinate, brzine i vremena. Ako vreme nije eksplicitno prisutno u diferencijalnim jednačinama kretanja, što znači da u toku vremena ne dejstvuju spoljašnji promenljivi poremećajni fak-

tori, za takve oscilacije kažemo da su autonome, sopstvene ili slobodne nelinearne oscilacije.

Dinamički nelinearni sistem sa jednim stepenom slobode oscilovanja u opštem obliku se može predstaviti diferencijalnim jednačinama oblika

$$F\left(\frac{d^n q}{dt^n}, \frac{d^{n-1} q}{dt^{n-1}}, \dots, \frac{dq}{dt}, q\right) = 0 \quad (1)$$

$$F\left(\frac{d^n q}{dt^n}, \frac{d^{n-1} q}{dt^{n-1}}, \dots, \frac{dq}{dt}, q, t\right) = 0 \quad (2)$$

gde je  $q$  generalisana koordinata,  $\frac{d^i q}{dt^i}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )  $i$ -ti izvod generalisane koordinate po vremenu  $t$ . Jednačina (1) karakteriše autonomni sistem jer ne sadrži eksplicitno vreme, dok jednačina (2) karakteriše neautonomni sistem. Kako ćemo razmatrati samo sisteme drugog reda to se možemo ograničiti na opšti oblik nelinearne diferencijalne jednačine drugog reda za autonomni sistem

$$F\left(\frac{d^2 q}{dt^2}, \frac{dq}{dt}, q\right) = 0 \quad (3)$$

i neautonomni sistem

$$F\left(\frac{d^2 q}{dt^2}, \frac{dq}{dt}, q, t\right) = 0 \quad (4)$$

Ako se jednačina (4) može da napiše u obliku

$$\varphi\left(\frac{d^2 q}{dt^2}, \frac{dq}{dt}, q\right) = f(t) \quad (5)$$

onda kažemo da je nelinearni sistem sa jednim stepenom slobode oscilovanja čije je kretanje opisano jednačinom (5) podvrgnut režimu prinudnog kretanja, pri čemu je  $f(t)$  prinudna (perturbaciona) spoljašnja sila ili pak redukovana perturbaciona sila. Ako je  $f(t) = F_0 \cos \omega t$  ili  $f(t) = F_0 \sin \omega t$  onda se dinamički sistem nalazi u režimu

prostih prinudnih oscilacija. Kada se kretanje dinamičkog sistema može da definiše diferencijalnom jednačinom

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + P(t) \frac{dq}{dt} + Q(t)q = 0 \quad (6)$$

ili

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + P(t) \frac{dq}{dt} + Q(t)q = f(t) \quad (7)$$

onda kažemo da sistem izvodi reolinearne (reonomne) oscilacije i to u prvom slučaju slobodne, a u drugom slučaju prinudne. Medjutim najčešće ćemo se sretati sa jednačinama oblika

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + Y_1 \left( \frac{dq}{dt}, q \right) = 0 \quad (8)$$

i

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + Y_2 \left( \frac{dq}{dt}, q, t \right) = 0 \quad (9)$$

Pokušaji da se nadju rešenja prethodno navedenih jednačina dovode no niza integrabilnih ili najčešće neintegrabilnih slučajeva. Opšta metoda rada je najčešće približno integriranje pomoću trigonometrijskih, potencijalnih, eksponencijalnih redova ili njihove kombinacije i grafička i numerička kvadratura. Za pojedine oblike diferencijalnih jednačina na koje se svodi veći broj dinamičkih nelinearnih sistema postoje posebne metode rešavanja. Za slobodne oscilacije pored analitičkih postoji i veći broj grafičkih dovoljno tačnih metoda, pomoću kojih se dolazi do podataka o ponašanju i karakteru dinamičkog sistema.

Ako generalisanu koordinatu  $q$  smatramo matricom kolonom  $\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix}$ , funkcije  $F$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $Y_1$ ,  $f$  i  $Y_2$  matricama reda  $n \times n$  ili matricama kolonama to tada za sisteme sa više stepeni slobode oscilovanja važe iste jednačine napred navedene.

Posebna grupa jednačina su nelinearne parcijelne diferencijalne jednačine koje opisuju oscilacije elas-

5.1.1  
oscilacije  
bilo

tičnih tela sistema sa beskonačno mnogo stepeni slobode  
oscilovanja.

## I G l a v a

NELINEARNI OSCILATORNI SISTEMI SA JEDNIM  
STEPENOM SLOBODE OSCILOVANJA1. SLOBODNE NELINEARNE OSCILACIJE SA JEDNIM  
STEPENOM SLOBODE OSCILOVANJA

Slobodne (autonomne) nelinearne oscilacije sistema sa jednim stepenom slobode oscilovanja mogu se opisati nelinearnom diferencijalnom jednačinom oblika

$$\alpha \ddot{q} + F_e(q) = 0 \quad (1)$$

gde je  $\alpha$  inercioni koeficijent,  $F_e(q)$  restituciona sila (restoring - spring - force),  $(-\alpha \ddot{q})$  inerciona sila. Restituciona sila  $F_e(q)$  zavisi od generalisane koordinate  $q$ ; Jednačinom (1) može da se izrazi oscilovanje mase na opruzi krutosti  $\frac{dF_e(q)}{dq}$  koja je funkcija izduženja opruge. Oscilovanje tada može biti jako, ako se krutost opruge povećava sa izduženjem, linearno ako je krutost opruge konstantna, i meko ako se krutost opruge smanjuje sa deformacijom. Krutost opruge može biti nesi metrična u odnosu na ravnotežni položaj. Za slučaj predstavljen na slici 2. pod d) za izduženje



krutost opruge je jaka, dok je za skraćenje (sabijanje) opruge krutost meka, pa oscilovanje mase na ovakvoj opruzi pretstavlja naizmeničnu kombinaciju mekog i jakog oscilovanja. Na sl. 2 pod a, b, c, i d dato je nekoliko slučajeva zavisnosti restitucione sile od generalisane koordinate.

Da bi smo rešili jednačinu (1) prepisaćemo je u obliku

$$\ddot{q} + \kappa^2 f(q) = 0 \quad (2)$$

gde je  $\kappa^2 f(q)$  redukovana restituciona sila, i pomnožićemo je identitetom  $dq = \dot{q} dt$ , pa izvršiti integraljenje posle čega se dobije

$$\dot{q}^2 = v^2 = -2\kappa^2 \int_{q_0}^q f(\xi) d\xi + C \quad (C = \dot{q}_0^2) \quad (2)$$

gde su usvojeni početni uslovi  $q = q_0$  za  $v = 0$ . Iz jednačine (2) dobija se brzina oscilovanja u obliku

$$\dot{q} = v = \pm \kappa \sqrt{\int_{q_0}^q f(\xi) d\xi} \quad C \quad (3)$$

Još jednom integracijom uz razdvajanje promenljivih dobija se vreme oscilovanja u funkciji koordinate  $q$  kao

$$t(q) = \frac{1}{\kappa \sqrt{2}} \int_{q_0}^q \frac{d\eta}{\sqrt{\int_{q_0}^{\eta} f(\xi) d\xi}} \quad C \quad (4)$$

Ako se izraz u integralu iz (4) može da integrirati onda se za vreme  $t$  može dobiti analitička funkcija, čija inverzna daje promenu koordinate od vremena. Kada je  $f(q)$  analitički zanata funkcija integral

$$\int_{\eta}^{q_0} f(\xi) d\xi = J(q_0) - J(\eta) \quad (5)$$

se može lako integraliti pa se vreme kretanja može napisati u obliku

$$t(\varrho) = \frac{1}{k\sqrt{2}} \int_0^{\varrho} \frac{d\eta}{\sqrt{J(\varrho_0) - J(\eta)}} \quad (6)$$

Ovaj integral najčešće sadrži neintegrabilni integral, pa se za njegovo rešavanje najčešće koriste numeričke ili grafičke metode.

2. MATEMATIČKO KLATNO. Kod matematičkog klatna karakteristika sile opruge je sinusna funkcija ugla otklona klatna od vertikalnog donjeg položaja kao što je na slici 1. označeno, pa je

$$\varphi(\varrho) = \sin \varphi \quad (7)$$

Smenom izraza (7) u integral (5) se dobija

$$\int_{\eta}^{\varphi_0} \varphi(\xi) d\xi = -\cos \varphi_0 + \cos \eta \quad (8)$$

i na osnovu toga vreme kretanja klatna je

$$t(\varphi) = \frac{1}{k\sqrt{2}} \int_0^{\varphi} \frac{d\eta}{\sqrt{\cos \eta - \cos \varphi_0}} \quad (9)$$

gde je  $k^2 = g/l$ , vodeći računa o tome da je za  $t=0$   $\varphi=0$  i za  $\dot{\varphi}=0$   $\varphi=\varphi_0$ .

Trigonometrijskim identičnostima

$$\cos \eta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\eta}{2} \quad \cos \varphi_0 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \quad (10)$$

integral (9) može da se napiše u obliku

$$t(\varphi) = \frac{1}{k} \int_0^{\varphi} \frac{d(\frac{\eta}{2})}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\eta}{2}}} \quad (11)$$

koji se smenama

$$\sin \frac{\eta}{2} = \varepsilon \sin \alpha \quad \varepsilon^2 = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \quad 0 < \varepsilon < 1 \quad (12)$$

gde je  $\mu$  nova promenljiva, a  $\varepsilon$  konstanta ograničene vrednosti, svodi na normalni eliptički integral ili koji se još zove Legendre-ov eliptički integral prve vrste

$$t(u) = \frac{1}{k} \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\varepsilon^2 u^2)}} = \frac{1}{k} F(\varepsilon, u) \quad (13)$$

Ako se za  $\mu$  uzme smena  $\sin \theta$  integral (13) se može da napiše u obliku

$$t(\theta) = \frac{1}{k} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 \theta}} = \frac{1}{k} \bar{F}(\varepsilon, \theta) \quad (14)$$

Izraz (14) sadrži eliptički integral prve vrste u funkciji modula  $\varepsilon$  i amplitude  $\theta$ .

Period oscilacije može da se izračuna ako se uzme amplituda  $\theta = \pi/2$  do koje se integrali i vrednost uveća četiri puta pa se dobija

$$T = \frac{4}{k} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 \theta}} = \frac{4}{k} \bar{F}(\varepsilon, \frac{\pi}{2}) = \frac{4}{k} K(\varepsilon) \quad (15)$$

Da bi se našla numerička vrednost perioda oscilovanja treba naći vrednost integrala  $\bar{F}(\varepsilon, \frac{\pi}{2})$ . Prema Euler-u podintegralnu funkciju razvijemo pomoću binomne formule u red oblika

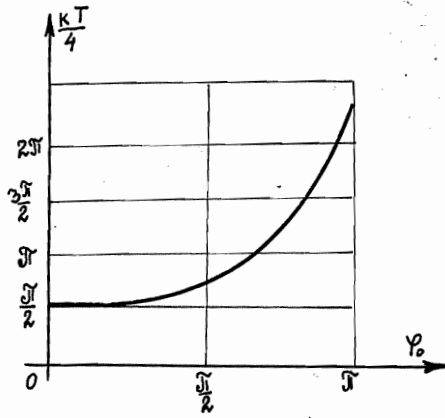
$$(1-\varepsilon^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \varepsilon^{2n} \sin^{2n} \theta \quad (16)$$

čijom zamenom u eliptički integral i integraljenjem se dobija

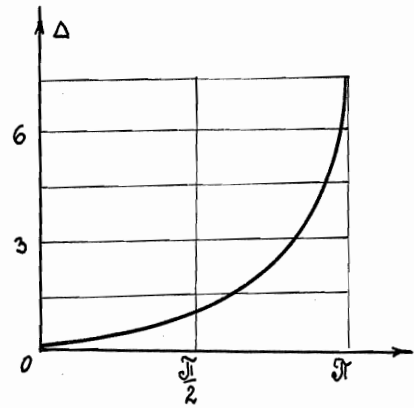
$$K(\varepsilon) = \bar{F}(\varepsilon, \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \varepsilon^{2n} \right\} \quad (17)$$

I na osnovu toga dobijamo period oscilovanja matematičkog klatna oblika

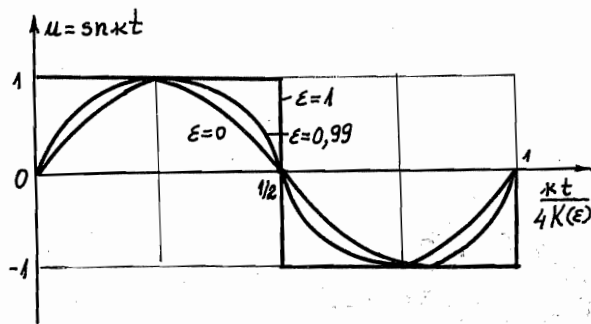
$$T = \frac{2\pi}{k} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \varepsilon^{2n} \right\} \quad (18)$$



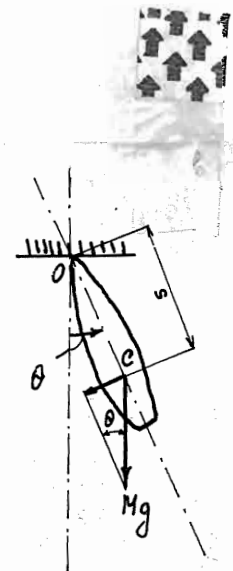
S1.8 a



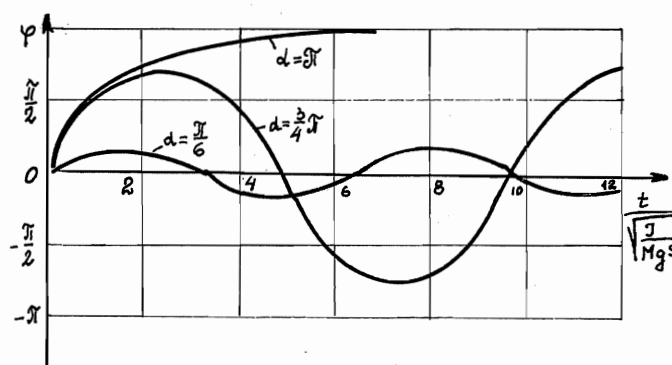
S1.8 b



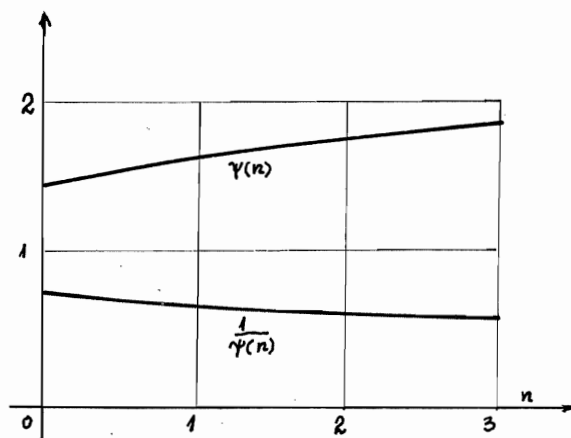
S1.8 c



S1.8 d



S1.9



S1.10

Za slučaj malih oscilacija matematičkog klatna za period oscilovanja se može uzeti samo prvi član reda pa je

$$T = \frac{2\tilde{T}}{\kappa} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = T_0 \quad (19)$$

što je identično sa periodom koji se dobija u slučaju linearizacije karakteristike sile. Period oscilovanja se može napisati u obliku

$$T = T_0 (1 + \Delta)$$

gde je

$$\Delta = \frac{2}{\pi} \bar{F}\left(\epsilon, \frac{\tilde{T}}{2}\right) - 1$$

Na slici 8 data je zavisnost  $\kappa^{T/4}$  i  $\Delta$  u funkciji promene amplitude oscilovanja  $\varphi_0$ . Za dovoljno malo  $\varphi_0$  vrednosti za  $\Delta$  i  $T$  sa dovoljnom tačnošću mogu se izraziti u obliku

$$\Delta \approx \frac{1}{16} \varphi_0^2 \quad T \approx T_0 \left(1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2\right)$$

Period oscilovanja matematičkog klatna zavisi od modula  $\epsilon$  tj. od amplitude oscilovanja. Zakon oscilovanja matematičkog klatna može da se izrazi preko Jacobi-jeve eliptičke funkcije

$$\varphi = 2 \operatorname{arc} \sin \left\{ \sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \operatorname{am} \left[ \frac{4K(\sin \frac{\varphi_0}{2})}{T} t \right] \right\} \quad (20)$$

Primer fizičkog klatna može da se proučava na isti način kao i matematičko klatno s tom razlikom što je  $\kappa = \frac{Mgs}{J}$ ,  $M$  masa klatna,  $s$  rastojanje težišta od ose oscilovanja,  $J$  moment inercije fizičkog klatna za tačku vešanja. Na slici 9 prikazana je zavisnost ugla oscilovanja fizičkog klatna od apscise  $\sqrt{\frac{Mgs}{J}} \cdot t$  za nekoliko različitih vrednosti  $\varphi_0 = \pi/6, 3\pi/4, \pi$ .

3. Primer PARABOLIČNE KARAKTERISTIKE RESTITUCIONE SILE. U slučaju parabolichne karakteristike restitucione sile funkcija  $F_e(q)$  je oblika parabole višeg reda

$$\frac{1}{\alpha k^2} F_e(q) = \psi(q) = (\text{sign } q) q^{2p} \quad (21)$$

$$\psi(q) = q^{2p+1} \quad (22)$$

gde je  $p=1,2,\dots$ . Jednačine kretanja su sada

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + k^2 (\text{sign } q) q^{2p} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + k^2 q^{2p+1} = 0 \quad (24)$$

Ako se kretanje razmatra za četvrtinu perioda, onda se jednačine (23) i (24) mogu obuhvatiti jednačinom

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + k^2 q^n = 0 \quad (25)$$

Na osnovu (7) se može pisati

$$J(q_0) - J(\eta) = \frac{q_0^{n+1}}{n+1} \left[ 1 - \left( \frac{\eta}{q_0} \right)^{n+1} \right] = \frac{q_0^{n+1}}{n+1} (1 - \zeta^{n+1}) \quad (26)$$

gde je uveden odnos  $\zeta = \frac{\eta}{q_0}$ . Vreme oscilovanja se sada može napisati u obliku

$$t(q) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{n+1}{2 q_0^{n-1}}} \int_0^{q/q_0} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^{n+1}}} \quad (27)$$

Ovaj integral važi za početne uslove  $t=0$ ,  $q=0$  i  $\dot{q} = v_0$ . Period oscilovanja je

$$T = \frac{4}{k} \sqrt{\frac{n+1}{2 q_0^{n-1}}} \int_0^{2/q_0} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^{n+1}}} = \frac{4}{k} \frac{\Upsilon(n)}{q_0^{\frac{n-1}{2}}} \quad (28)$$

gde je

$$\Upsilon(n) = \sqrt{\frac{n+1}{2}} \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^{n+1}}} = \sqrt{\frac{n+1}{2n^2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2+n}{2n}\right)} \quad (29)$$

33.

Dijagram funkcije  $\Psi(n)$  i njene recipročne vrednosti  $1/\Psi(n)$  prikazan je na slici 10 u zavisnosti od eksponenta  $n$ .

Zavisnost vremena od koordinate može se nalaziti za različite vrednosti eksponenta  $n$ .

Za  $n=0$  integral (27) daje vreme  $t$  u obliku

*n=0 nije oscilovanje*

$$t(q) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{q_0}{2}} \int_0^{q/q_0} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta}} = \frac{\sqrt{2}}{k} (\sqrt{q_0} - \sqrt{q_0 - q}) \quad (30)$$

odakle se može eksplicitno izraziti generalisana koordinata  $q$  u funkciji vremena

$$q = -\frac{k^2 t^2}{2} + \sqrt{2q_0} k t \quad (31)$$

Period oscilovanja je tada

$$T = \frac{4}{k} \sqrt{2q_0} = \frac{4q_0}{k^2} \quad (32)$$

Za  $n=1$  vreme oscilovanja je

$$t(q) = \frac{1}{k} \int_0^{q/q_0} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{k} \arcsin \frac{q}{q_0} \quad (33)$$

i zakon oscilovanja

*???*

$$q(t) = q_0 \sin k t \quad q_0 = ? \quad (34)$$

Period oscilovanja je tada  $T = \frac{2\pi}{k}$  i ne zavisi od amplitude oscilovanja, pa je oscilovanje izohrono (linearni slučaj).

Za  $n=2$  vreme oscilovanja je

$$t(q) = \frac{1}{k} \int_0^{q/q_0} \frac{d\zeta}{\sqrt{2q_0(1-\zeta^3)}} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2q_0}} \int_{2 \arctg \sqrt{\frac{1-q/q_0}{\sqrt{3}}}}^{2 \arctg \frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2 \sin^2 \varphi}} \quad (35)$$

pri čemu je uvedena smena  $\zeta = 1 - \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}$  i izvršena smena granica. Integral (35) se može napisati i u pogodnijem obliku za analizu tj. da mu jedna granica bude jednaka nuli:



$$t(\varrho) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2\varrho_0}} \left[ \int_0^{2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}} - \int_0^{2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-2/\varrho_0}{\sqrt{3}}}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}} \right] =$$

$$= \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2\varrho_0}} \left[ \bar{F}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \bar{F}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-2/\varrho_0}{\sqrt{3}}}\right) \right] \quad (36)$$

U literaturi se ovaj izraz za vreme oscilovanja nalazi češće u obliku

$$t(\varrho) = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{k\sqrt{\varrho_0}} \left[ \bar{F}\left(\arcsin \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \arccos \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right) - \bar{F}\left(\arcsin \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \arccos \frac{\sqrt{3}-1+2/\varrho_0}{\sqrt{3}+1-2/\varrho_0}\right) \right] \quad (37)$$

Period oscilovanja je

$$T = \frac{4}{k} \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2\varrho_0}} \bar{F}\left(75^\circ, 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{7}{k\sqrt{\varrho_0}} \quad (38)$$

Zakon oscilovanja se dobija iz (37) u obliku

$$\varrho = \varrho_0 - 2_0 \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{am} \left[ \bar{F}\left(75^\circ, 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \sqrt{\frac{2\varrho_0}{\sqrt{3}}} kt \right] \right\} \quad (39)$$

Za  $n=3$  vreme oscilovanja je

$$t(\varrho) = \frac{\sqrt{2}}{k\varrho_0} \int_0^{2/\varrho_0} \frac{d\delta}{\sqrt{1-\delta^4}} = \frac{1}{k\varrho_0} \left[ \bar{F}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \bar{F}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \arccos \frac{\varrho}{\varrho_0}\right) \right] \quad (40)$$

i period oscilovanja

$$T = \frac{1}{k\varrho_0} \bar{F}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (41)$$

Zakon oscilovanja se može izraziti u obliku

$$\varrho(t) = \varrho_0 \cos \operatorname{am} \left[ \bar{F}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \varrho_0 kt \right] = \varrho_0 \operatorname{cn} \left[ K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \varrho_0 kt \right] \quad (42)$$

Upoređujući vrednosti perioda oscilovanja za razne vrednosti eksponenta  $n$  dolazimo do zaključka da sa porastom eksponenta  $n$  raste vrednost perioda  $T$  za iste početne uslove.

Kao primer ovde ćemo proučiti slučaj oscilatora sa karakteristikom restitucione sile oblika  $F_2(q) = c_1 q + c_2 q^3$  za koji je diferencijalna jednačina oblika

$$\ddot{q} + \kappa^2(q + \alpha q^3) = 0 \quad (43)$$

gde su koeficijenti  $\kappa^2 = c_1/m$ ,  $\alpha = c_2/c_1$ .

Nalaženje zakona oscilovanja dovodi do eliptičkih integrala. Na osnovu (7) nalazimo

$$J(q_0) - J(\eta) = \int_{\eta}^{q_0} (\xi + \alpha \xi^3) d\xi = \frac{1}{2}(q_0^2 - \eta^2) \left[ 1 + \frac{1}{2} \alpha (q_0^2 + \eta^2) \right] \quad (44)$$

odnosno vreme oscilovanja

$$t(q) = \frac{1}{\kappa} \int_0^q \frac{d\xi}{\sqrt{(q_0^2 - \xi^2) \left[ 1 + \frac{1}{2} \alpha (q_0^2 + \xi^2) \right]}} \quad (45)$$

Ako se uvedu zamene  $\eta/q_0 = \zeta$ ,  $q/q_0 = \zeta$  i  $m = \alpha q_0^2$  i stavi da je

$$\sin^2 \varphi = \frac{2 \left( \frac{q}{q_0} \right)^2 \left( 1 + \frac{1}{m} \right)}{1 + \left( \frac{q}{q_0} \right)^2 + \frac{2}{m}}$$

dobija se vreme u funkciji od amplitude oscilovanja

$$t(q) = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{1}{1+m}} \bar{F} \left( \sqrt{\frac{m}{2(1+m)}}, \sin \varphi \right) = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{1}{1+m}} \hat{F} \left( \sqrt{\frac{m}{2(1+m)}}, \varphi \right) \quad (46)$$

odnosno period oscilovanja

$$T = \frac{4}{\kappa} \sqrt{\frac{1}{1+m}} \bar{F} \left( \sqrt{\frac{m}{2(1+m)}}, \frac{\pi}{2} \right) = \frac{4}{\kappa} \sqrt{\frac{1}{1+m}} K \left( \sqrt{\frac{m}{2(1+m)}} \right) \quad (47)$$

odakle se vidi da oscilovanje nije izohrono i da zavisi od početne amplitude oscilovanja.

Za slučaj kada je karakteristika restitucione sile oblika  $f(q) = q - \alpha q^3$  dobijamo da je

$$J(q_0) - J(\eta) = \frac{1}{2}(q_0^2 - \eta^2) \left[ 1 - \frac{\alpha}{2}(q_0^2 + \eta^2) \right] \quad (48)$$

što daje za vreme oscilovanja

$$t(q) = \frac{1}{k} \int_0^q \frac{d\eta}{\sqrt{(q_0^2 - \eta^2) \left[ 1 - \frac{1}{2} (q_0^2 - \eta^2) \right]}} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{m}} \int_0^{q/q_0} \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2) \left( \frac{2-m}{m} - \xi^2 \right)}} \quad (49)$$

Uvodjenjem nove promenljive  $\xi = \sin \varphi$  u ovaj integral dobijamo

$$t(q) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{2+m}} \int_0^{\arcsin q/q_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{m}{2-m} \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{2+m}} \bar{F} \left( \sqrt{\frac{m}{2-m}}, \arcsin \frac{q}{q_0} \right) \quad (50)$$

odakle je

$$q(t) = q_0 \operatorname{sn} \left( \sqrt{\frac{2-m}{2}} kt \right) \quad (51)$$

Period oscilovanja je tada

$$T(m) = \frac{4}{k} \sqrt{\frac{2}{2-m}} \bar{F} \left( \sqrt{\frac{m}{2-m}}, \frac{\pi}{2} \right) \quad (52)$$

gde je  $m = dq_0^2$  te se vidi da period oscilacije zavisi od amplitude oscilovanja.

## II      G l a v a

## P R I B L I Ź N E      M E T O D E

## 1. METODA      LJAPUNOVA-KRILOVA

Metoda Ljapunova - Krilova omogućava da se na-  
dje rešenje jednačine

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = -\varepsilon f(x) \quad (1)$$

koje je <sup>periodičko</sup> periodičko i ne sadrži sekularne članove. Označimo  
frekvenciju slobodnih oscilacija sa  $p$  i uvedemo novu promen-  
ljivu  $\tau = pt + \varphi$  posle čije zamene u jednačinu (1) dobijamo

$$p^2 \frac{d^2x}{d\tau^2} + \omega^2 x + \varepsilon f(x) = 0 \quad (2)$$

Rešenje ove jednačine za početne uslove

$$x(0) = A = x_0 \quad x'(0) = 0 \quad (3)$$

tražimo u obliku reda po stepenima  $\varepsilon$

$$x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k q_k(\tau) \quad (4)$$

gde su  $q_0(\tau)$ ,  $q_1(\tau)$ ,  $q_2(\tau)$ ... nepoznate funkcije promenlji-  
ve  $\tau$ . Istovremeno kvadrat kružne frekvencije tražimo u obli-  
ku reda po stepenima

$$p^2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon^k \quad (5)$$

gde su  $a_k$  konstante.

Kako je za  $\varepsilon=0$ ,  $p^2=\omega^2$  to sledi da je  $a_0=\omega^2$ . Funkciju  $f(x)$  možemo da razložimo u red

$$f(x) = f(q_0) + \varepsilon f'(q_0) q_1 + \varepsilon^2 [q_2 f'(q_0) + \frac{1}{2} q_1^2 f''(q_0)] + \dots \quad (6)$$

Posle unošenja  $x(\tau)$ ,  $f(x)$  i  $p^2$  u jednačinu (2) i izjednačavanja sa nulom koeficijenata uz  $\varepsilon^k$  dobijamo sistem postupnih diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q_0}{d\tau^2} + q_0 &= 0 \\ \frac{d^2 q_1}{d\tau^2} + q_1 &= -\frac{1}{\omega^2} f(q_0) - \frac{a_1}{\omega^2} \frac{d^2 q_0}{d\tau^2} \\ \frac{d^2 q_2}{d\tau^2} + q_2 &= -\frac{1}{\omega^2} f'(q_0) q_1 - \frac{a_2}{\omega^2} q_0'' - \frac{1}{\omega^2} a_1 \frac{d^2 q_1}{d\tau^2} \\ &\dots \end{aligned} \quad (7)$$

Iz ovog sistema jednačina za početne uslove  $x(0) = x_0$  i  $x'(0) = 0$  nalazimo  $q_k, a_k$  iz uslova da vreme  $\tau$  ne ulazi u rešenja van znakova trigonometrijskih funkcija.

Pokazaćemo to na primeru diferencijalne jednačine

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x + \gamma x^3 = 0 \quad (8)$$

Saglasno prethodnom je

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k q_k \\ \omega^2 &= p^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k a_k \end{aligned} \quad (9)$$

Tada sistem jednačina (7) dobija oblik

$$\begin{aligned} q_0'' + p^2 q_0 &= 0 \\ q_1'' + p^2 q_1 &= -a_1 q_0' - q_0^3 \\ q_2'' + p^2 q_2 &= -a_2 q_0 - a_1 q_1 - 3q_0^2 q_1 \\ &\dots \end{aligned} \quad (10)$$

Početni uslovi neka su

$$\begin{aligned} q_0(0) &= \alpha_0 & q_0'(0) &= 0 \\ q_k(0) &= 0 & q_k'(0) &= 0 \quad (k \neq 0) \end{aligned} \quad (11)$$

Iz prve jednačine sistema (10) je  $q_0 = \alpha_0 \cos pt$ .<sup>4</sup> Zamenom te vrednosti u drugu jednačinu dobijamo

$$q_1'' + p^2 q_1 = -\alpha_0 \left( a_1 + \frac{3}{4} \alpha_0^2 \right) \cos pt - \frac{1}{4} \alpha_0^3 \cos 3pt \quad (12)$$

Da se nebi pojavili sekularni članovi mora da je  $a_1 = -\frac{3}{4} \alpha_0^2$ . Tada je

$$q_1 = A_1 \cos pt + B_1 \sin pt + \frac{1}{32} \frac{\alpha_0^3}{p^2} \cos 3pt \quad (13)$$

Za početne uslove (11) dobijamo da je

$$q_1 = \frac{1}{32} \frac{\alpha_0^3}{p^2} (\cos 3pt - \cos pt) \quad (14)$$

Posle unošenja  $q_1$  u treću jednačinu sistema (10) dobijamo

$$q_2'' + p^2 q_2 = -\alpha_0 \left( a_2 + \frac{3}{128} \frac{\alpha_0^4}{p^2} \right) \cos pt - \frac{3}{128} \frac{\alpha_0^5}{p^2} (\cos 3pt + \cos 5pt) \quad (15)$$

Na isti način kao u prethodnoj jednačini, iz uslova odsustva sekularnih članova nalazimo da je  $a_2 = -\frac{3}{128} \frac{\alpha_0^4}{p^2}$ , a zatim i rešenje

$$q_2 = \frac{1}{1024} \frac{\alpha_0^5}{p^4} (\cos 5pt + 3 \cos 3pt - 4 \cos pt) \quad (16)$$

koje zadovoljava početne uslove (11). Sledi da je rešenje oblika

$$x = \alpha_0 \cos pt + \varepsilon \frac{\alpha_0^3}{32 p^2} (\cos 3pt - \cos pt) + \varepsilon^2 \frac{\alpha_0^5}{1024 p^4} (\cos 5pt + 3 \cos 3pt - 4 \cos pt) \quad (17)$$

i kvadrat frekvencije

$$p^2 = \omega^2 + \frac{3}{4} \varepsilon x_0^2 + \frac{3}{128} \varepsilon^2 \frac{x_0^4}{\omega^2} \quad (18)$$

Ako postupak produžimo dobijamo za rešenje izraz

$$x = x_0 \cos pt + \varepsilon \frac{x_0^3}{32p^2} (\cos 3pt - \cos pt) + \varepsilon^2 \frac{x_0^5}{1024p^4} (\cos 5pt + 3 \cos 3pt - 4 \cos pt) + \varepsilon^3 \frac{x_0^7}{32768p^6} (\cos 7pt + 3 \cos 5pt - 3 \cos 3pt - \cos pt) \quad (19)$$

gde je

$$p^2 \approx \omega^2 + \varepsilon \frac{3x_0^2}{4} + \varepsilon^2 \frac{3x_0^4}{128\omega^2} - \varepsilon^3 \frac{21x_0^6}{1024\omega^4} \quad (20)$$

Na analogni način ova metoda se može primeniti i za nalaženje rešenja jednačine oblika

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x + \varepsilon F\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0 \quad (21)$$

## 2.LINDSTÄT - OVA METODA

Analogna metoda metodi Ljapunova-Krilova je ova metoda Lindstät-a. Postoji i Newcomb-ova metoda koja je slična ovim navedenim metodama.

Lindstät-ova metoda aproksimacije se koristi za rešavanje diferencijalne jednačine oblika

$$\ddot{q} + \omega^2 f(q) = 0 \quad (1)$$

gde je

$$f(q) = \sum_{i=0}^n \alpha_i q^{i+1} \quad (\alpha_0 = 1) \quad (2)$$

Prema ovoj metodi treba uvesti "bezdimeziono vreme" kao novu promenljivu

$$\tau = t\omega\sqrt{1+p} \quad (3)$$

a rešenje pretpostaviti u obliku stepenog reda po početnoj vrednosti amplitude kao

$$q(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} q_0^k \xi_k(\tau) \quad (4)$$

Da bi se dobila periodička rešenja konstanta  $p$  se pretpostavi u obliku reda

$$p = \sum_{k=1}^{\infty} q_0^k p_k \quad (5)$$

U izrazima (4) i (5) su  $\xi_k(\tau)$  periodičke funkcije "bezdimezionog vremena",  $p_k$  nepoznate konstante,  $q_0$  početna amplituda. Funkcije  $\xi_k(\tau)$  zbog zadatih početnih uslova

$\tau = 0$ ;  $q = q_0$  i  $\frac{dq}{d\tau} = 0$  moraju da zadovoljavaju i sledeće uslove



$$\xi_1(0)=1 \quad \xi_i(0)=0 \quad \left. \frac{d\xi_i}{d\vartheta} \right|_{\vartheta=0} = 0 \quad (6)$$

Pomoću nove promenljive (3) jednačina (1) može da se napiše kao

$$(1+p) \frac{d^2 q}{d\vartheta^2} + q = - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i q^{i+1} \quad (7)$$

Zamenom redova (4) i (5) u jednačinu (7) dobijamo

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k q_0^k\right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \ddot{\xi}_k q_0^k\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k q_0^k = - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \left(\sum_{i=1}^{\infty} q_0^i \xi_i\right)^{k+1} \quad (8)$$

iz koje metodom neodređenih koeficijenata uz jednake stepene  $q_0$  dobijamo sistem jednačina

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + \xi_1 &= 0 \\ \ddot{\xi}_2 + \xi_2 &= -p_1 \ddot{\xi}_1 - \alpha_1 \xi_1 \\ \ddot{\xi}_3 + \xi_3 &= -p_2 \ddot{\xi}_1 - 2\alpha_1 \xi_1 \xi_2 - p_1 \ddot{\xi}_2 - \alpha_2 \xi_1^3 \\ \ddot{\xi}_4 + \xi_4 &= -p_3 \ddot{\xi}_1 - p_2 \ddot{\xi}_2 - p_1 \ddot{\xi}_3 - \alpha_1 \xi_1^2 - 2\alpha_1 \xi_1 \xi_3 - 2\alpha_2 \xi_1^2 \xi_2 - \alpha_3 \xi_1^4 \end{aligned} \quad (9)$$

Prva jednačina ovog sistema ima rešenje  $\xi_1 = \cos \vartheta$  koje je usaglašeno sa početnim uslovima. Druga jednačina ovog sistema postaje

$$\ddot{\xi}_2 + \xi_2 = p_1 \cos \vartheta - \frac{1}{2} \alpha_1 - \frac{1}{2} \alpha_1 \cos 2\vartheta \quad (10)$$

Da bi rešenje te jednačine bilo periodičko mora da je  $p_1 = 0$  pa je rešenje

$$\xi_2 = -\frac{1}{6} \alpha_1 (3 - 4 \cos \vartheta + \cos 2\vartheta) \quad (11)$$

Treća jednačina sistema (9) postaje

$$\ddot{\xi}_3 + \xi_3 = -\frac{1}{3} \alpha_1 + \left(p_2 + \frac{5}{6} \alpha_1^2 - \frac{3}{4} \alpha_2\right) \cos \vartheta - \frac{1}{3} \alpha_1^2 \cos 2\vartheta - \left(\frac{1}{4} \alpha_2 + \frac{1}{6} \alpha_1^3\right) \cos 3\vartheta \quad (12)$$

Iz uslova periodičnosti rešenja jednačine (12) dobijamo da je

$$p_2 = \frac{3}{4} \alpha_2 - \frac{5}{6} \alpha_1^2 \quad (13)$$

i rešenje je

$$\xi_3 = -\frac{1}{3} \alpha_1^2 + \left(\frac{29}{144} \alpha_1^2 - \frac{1}{32} \alpha_2\right) \cos \tilde{\varepsilon} + \frac{1}{9} \alpha_1^2 \cos 2\tilde{\varepsilon} + \left(\frac{1}{48} \alpha_1^2 + \frac{1}{32} \alpha_2\right) \cos 3\tilde{\varepsilon} \quad (14)$$

Ako se zadovoljimo sa tačnošću do trećeg stepena rešenje jednačine (1) dobijamo u obliku

$$\begin{aligned} q(\tilde{\varepsilon}) = & \left\{ -\frac{1}{2} \alpha_1 q_0^2 - \frac{1}{3} \alpha_1^2 q_0^3 + \dots \right\} + \left\{ q_0 + \frac{1}{3} \alpha_1 q_0^2 + \left(\frac{29}{144} \alpha_1^2 - \frac{1}{32} \alpha_2\right) q_0^3 \dots \right\} \cos \tilde{\varepsilon} + \\ & + \left\{ \frac{1}{6} \alpha_1 q_0^2 + \frac{1}{9} \alpha_1^2 q_0^3 + \dots \right\} \cos 2\tilde{\varepsilon} + \left\{ \frac{1}{48} \alpha_1^2 + \frac{1}{32} \alpha_2 + \dots \right\} q_0^3 \cos 3\tilde{\varepsilon} + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

Period oscilovanja je tada

$$T = \frac{2\tilde{\pi}}{\omega \sqrt{1+p}} = \frac{2\tilde{\pi}}{\omega \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4} \alpha_2 - \frac{5}{6} \alpha_1^2\right) q_0^2}} \approx \frac{2\tilde{\pi}}{\omega} \left[ 1 + \left(\frac{5}{12} \alpha_1^2 - \frac{3}{8} \alpha_2\right) q_0^2 \right] \quad (16)$$

jer je

$$p = \left(\frac{3}{4} \alpha_2 - \frac{5}{6} \alpha_1^2\right) q_0^2 \quad (17)$$

Lindstät-ova metoda može da se primeni i na slučaj kada je karakteristika restitucione sile neka proizvoljna analitička funkcija, pri čemu tu funkciju treba prvo razviti u potencijalni red po stepenima generalisane koordinate  $q$ .

Lindstät-ova metoda, u nešto modificiranom obliku se može primeniti i za rešavanje diferencijalne jednačine oblika

$$\ddot{q} + \mathcal{P}(\dot{q}) + \omega^2 f(q) = 0 \quad (18)$$

gde je  $\mathcal{P}(\dot{q})$  redukovana sila prigušivanja, a  $f(q)$  redukovana restituciona sila. U specijalnim slučajevima ova jednačina se svodi na oblike

$$\ddot{q} + \gamma(\dot{q}) + \omega^2 q = 0$$

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega^2 q = 0 \quad (19)$$

Za slučaj amortizovanih oscilacija sa otpornom silom srazmernom kvadratu brzine oblika  $\pm b\dot{q}^2$  kretanje se može definisati diferencijalnom jednačinom

$$\ddot{q} - \frac{1}{2}\delta\dot{q}^2 + \omega^2 q = 0 \quad (20)$$

Za kretanje ulevo od ravnotežnog položaja, a za vreme prvog hoda pokazaćemo kako se može naći rešenje Lindstätt-ovom metodom. Uvedimo novu promenljivu pomoću koje jednačina (20) postaje

$$(1+p)\ddot{q}^* + q = \alpha(1+p)\ddot{q}^{*2} \quad \left( \ddot{q}^* = \frac{d^2q}{d\tilde{t}^2}; \tilde{t} = \omega t \sqrt{1+p} \right) \quad (21)$$

gde je  $\ddot{q}^* = \frac{d^2q}{d\tilde{t}^2}$  i  $\ddot{q}^{*2} = \frac{d^2\ddot{q}^*}{d\tilde{t}^2}$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}\delta\omega^2$ .

Rešenje pretpostavimo u obliku reda po početnoj amplitudi

$$q = q_0 \xi_1(\tilde{t}) + q_0^2 \xi_2(\tilde{t}) + q_0^3 \xi_3(\tilde{t}) + \dots \quad (22)$$

a takođe i konstantu

$$p = p_1 q_0 + p_2 q_0^2 + p_3 q_0^3 + \dots \quad (23)$$

gde je  $q = q_0; \dot{q} = 0$  za  $\tilde{t} = 0$  što povlači i uslov da je  $\tilde{t} = 0$

$$\xi_1(0) = 1 \quad \xi_i(0) = 0 \quad \xi_i'(0) = 0 \quad (24)$$

Zamenom (22) i (23) u jednačinu (21) i izjednačavajući koeficijente uz stepene  $q_0$  sa nulom dobijamo sistem jednačina

$$\begin{aligned} \xi_1^{**} + \xi_1 &= 0 \\ \xi_2^{**} + \xi_2 &= -p_1 \xi_1^{**} + \alpha \xi_1^{*2} \\ \xi_3^{**} + \xi_3 &= -p_1 \xi_2^{**} + p_1 \alpha \xi_1^{*2} - p_2 \xi_1^{**} + 2\alpha \xi_1^* \xi_1^{**} \end{aligned} \quad (25)$$

Iz prve jednačine ovog sistema dobija se rešenje  $\xi_1 = \cos \tilde{z}$ , koje zadovoljava početne uslove. Znajući rešenje prve jednačine sistema, drugu jednačinu pišemo u obliku

$$\xi_2^{**} + \xi_2 = p_1 \cos \tilde{z} + \alpha \cos^2 \tilde{z} = p_1 \cos \tilde{z} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \cos 2\tilde{z} \quad (26)$$

čije rešenje nalazimo kao

$$\xi_2 = \frac{\alpha}{6} (3 - 4 \cos \tilde{z} + \cos 2\tilde{z}) \quad (27)$$

prethodno izjednačivši sa nulom konstantu  $p_1 = 0$ . Iz treće jednačine sistema nalazimo da je  $p_2 = -\frac{1}{3} \alpha^2$  i rešenje

$$\xi_3 = -\frac{2}{9} \alpha^2 + \frac{61}{72} \alpha^2 \cos \tilde{z} - \frac{2}{9} \alpha^2 \cos 2\tilde{z} + \frac{1}{24} \alpha^2 \cos 3\tilde{z} \quad (28)$$

koje zadovoljava početne uslove. Rešenje diferencijalne jednačine (21) je

$$q(\tilde{z}) \approx \left( \frac{1}{2} \alpha q_0^2 - \frac{2}{9} \alpha^2 q_0^3 \right) + \left( q_0 - \frac{2}{3} \alpha q_0^2 + \frac{61}{72} \alpha^2 q_0^2 \right) \cos \tilde{z} + \left( \frac{1}{6} \alpha q_0^2 - \frac{2}{9} \alpha^2 q_0^3 \right) \cos 2\tilde{z} + \frac{1}{24} \alpha^2 q_0^3 \cos 3\tilde{z} \quad (29)$$

Za  $\tilde{z} = \pi$  i  $\dot{q} = 0$  amplituda je

$$q_{01} = -q_0 + \frac{3}{4} \alpha q_0^2 - \frac{16}{9} \alpha^2 q_0^3 + \dots \quad (30)$$

i vreme prvog hoda je

$$T_1 = \frac{\pi}{\omega \sqrt{1+p}} = \frac{\pi}{\omega \sqrt{1 - \frac{1}{3} \alpha^2 q_0^2}} \approx \frac{\pi}{\omega} \left( 1 + \frac{1}{6} \alpha^2 q_0^2 \right) \quad (31)$$

Za kretanje udesno treba rešavati transformisanu jednačinu oblika

$$(1+p) \ddot{q}^{**} + \dot{q} = -\alpha (1+p) \dot{q}^{*2} \quad (32)$$

a za početne uslove  $\tilde{z} = \pi$ ,  $\dot{q} = 0$  i  $q = -q_{01}$ .

### 3. METODA MALIH KOEFICIJENATA (VAN DER POL-OVA METODA)

Ova metoda se primenjuje kod sistema bliskih linearnim konzervativnim sistemima čije se kretanje može da pretstavi diferencijalnom jednačinom oblika

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f_1\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (1)$$

gde je  $\varepsilon$  mali parametar. Uvodimo "bezdimeziono vreme"  $\tilde{t} = \omega t$  pomoću koga se jednačina (1) može da napiše u obliku

$$\frac{d^2x}{d\tilde{t}^2} + x = \frac{\varepsilon}{\omega^2} f_1\left(x, \frac{dx}{d\tilde{t}}\omega\right) = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{d\tilde{t}}\right) \quad (2)$$

Rešenje jednačine (2) pretpostavimo u obliku

$$x = a \cos \tilde{t} + b \sin \tilde{t} \quad (3)$$

gde su  $a$  i  $b$  funkcije vremena  $\tilde{t}$ . Diferenciranjem pretpostavljenog rešenja dobijemo

$$\frac{dx}{d\tilde{t}} = -a \sin \tilde{t} + b \cos \tilde{t} + \frac{da}{d\tilde{t}} \cos \tilde{t} + \frac{db}{d\tilde{t}} \sin \tilde{t} \quad (4)$$

pa da bi bilo

$$\frac{dx}{d\tilde{t}} = -a \sin \tilde{t} + b \cos \tilde{t} \quad (5)$$

mora da je

$$\frac{da}{d\tau} \cos \tau + \frac{db}{d\tau} \sin \tau = 0 \quad (6)$$

Ako sada izraz (5) diferenciramo po vremenu  $\tau$  i tu vrednost zajedno sa (5) unesemo u jednačinu (2) dobijamo

$$-\frac{da}{d\tau} \sin \tau + \frac{db}{d\tau} \cos \tau = \varepsilon f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \quad (7)$$

Rešavanjem jednačina (6) i (7) dobijamo izvode promenljivih "konstanti"

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= -\varepsilon f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \sin \tau \\ \frac{db}{d\tau} &= \varepsilon f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \cos \tau \end{aligned} \quad (8)$$

Sistem jednačina (8) je neautonoman jer zavisi od "bezdimenzionog vremena" eksplicitno. Za male vrednosti  $\varepsilon$  izvodi  $\frac{da}{d\tau}$  i  $\frac{db}{d\tau}$  su mali te sleduje da su  $a(\tau)$  i  $b(\tau)$  sporo promenljive funkcije vremena  $\tau$ . Kako su jednačine za  $\frac{da}{d\tau}$  i  $\frac{db}{d\tau}$  reda  $\varepsilon$  i kako su kao funkcije ograničeno promenljive u toku jednog perioda "bezdimenzionog vremena"  $\tau$  to je Van-der Pol pomnožio desne strane jednačina (8) i izvršio integraljenje u intervalu  $(0, 2\pi)$  čime je dobio bez studioznijeg matematičkog dokaza

$$\begin{aligned} P(a, b) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \sin \tau d\tau \\ Q(a, b) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \cos \tau d\tau \end{aligned} \quad (9)$$

i jednačine (8) napisao u obliku (10)

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= \varepsilon P(a, b) \\ \frac{db}{d\tau} &= \varepsilon Q(a, b) \end{aligned} \quad (10)$$

Te jednačine se nazivaju jednačinama Van-der Pol-a. Iz tih jednačina se vidi da je stacionarno stanje ravnoteže za

$a=0$  i  $b=0$ . Ako posmatramo u ravni  $(a, b)$  jednačine (10) zaključujemo da stanja ravnoteže u ravni  $(a, b)$  za koje je  $P(a,b)=0$  i  $Q(a,b)=0$  odgovaraju periodičkom kretanju posmatranog sistema (2). Te ostale tačke se dobijaju za vrednosti kada su  $P(a,b)=0$  i  $Q(a,b)=0$  simultano za iste vrednosti  $a$  i  $b$  jednake nuli. Sistem jednačina (10) može se preko polarnih koordinata  $\rho$  i  $\varphi$  u ravni  $(\rho, \varphi)$  svesti smenom

$$x = \rho \cos(\varphi - \psi) = \rho \cos \psi \quad ; \quad \psi = \varphi - \psi$$

na

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\varphi} &= \varepsilon \phi(\rho) \\ \frac{d\psi}{d\varphi} &= \varepsilon G(\rho) \end{aligned} \quad (11)$$

Ako uvedemo oznaku  $\omega_e(\rho) = 1 - \varepsilon G(\rho)$  dobijamo da je

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\varphi} &= \varepsilon \phi(\rho) \\ \frac{d\psi}{d\varphi} &= \omega_e(\rho) \end{aligned} \quad (12)$$

Takodje možemo da uvedemo i oznaku

$$h(\rho) = \frac{\varepsilon}{2\pi \rho} \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \psi, -\rho \sin \psi) \sin \psi d\psi = -\frac{\varepsilon}{\rho} \phi(\rho) \quad (13)$$

pomoću koje dobijamo sistem u obliku

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -h(\rho)\rho \quad \frac{d\psi}{d\varphi} = \omega_e(\rho) \quad (14)$$

Diferenciramo sada izraz za  $x = \rho \cos \psi$  po  $\varphi$  pa dobijamo

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\rho \frac{d\psi}{d\varphi} \sin \psi + \frac{d\rho}{d\varphi} \cos \psi = -h(\rho)\rho \cos \psi - \rho \omega_e(\rho) \sin \psi \quad (15)$$

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} = \left( -\frac{dh}{d\rho} \frac{d\rho}{d\varphi} \rho - h \frac{d\rho}{d\varphi} - \rho \omega_e \frac{d\psi}{d\varphi} \right) \cos \psi + \left( h \rho \frac{d\psi}{d\varphi} - \rho \frac{d\omega_e}{d\rho} \frac{d\rho}{d\varphi} - \omega_e \frac{d\rho}{d\varphi} \right) \sin \psi \quad (16)$$

Izračunamo kvadrat  $\omega_e^2(\rho)$  u obliku

$$\omega_e^2(\rho) = [1 - \varepsilon G(\rho)]^2 = 1 - 2\varepsilon G(\rho) + \varepsilon^2 G^2(\rho) \approx 1 - \frac{\varepsilon}{\rho} \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \psi, -\rho \sin \psi) \cos \psi d\psi \quad (17)$$

i unošenjem izraza (14) i (15) u (16) dobijamo linearizovanu diferencijalnu jednačinu (2) u obliku

$$\frac{d^2 x}{d\tilde{t}^2} + 2h(\rho) \frac{dx}{d\tilde{t}} + \omega_e^2(\rho) x = O(\varepsilon^2) \quad (18)$$

metodom ekvivalentne linearizacije.

Do istog rezultata (18) se može doći razvijanjem funkcije  $\varepsilon f(x, \dot{x})$  u Fourier-ov red i zanemarivanjem viših harmonika, odakle se dobija

$$\varepsilon f(\rho \cos \psi, -\rho \sin \psi) \approx a_1 \cos \psi + a_2 \sin \psi = \frac{a_1}{\rho} x - \frac{b_1}{\rho} \frac{dx}{d\tilde{t}} \quad (19)$$

gde je

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \psi, -\rho \sin \psi) \cos \psi d\psi \\ b_1 &= \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \psi, -\rho \sin \psi) \sin \psi d\psi \end{aligned} \quad (20)$$

Na osnovu ovoga jednačina (2) je

$$\frac{d^2 x}{d\tilde{t}^2} + \left(1 - \frac{a_1}{\rho}\right) x + \frac{b_1}{\rho} \frac{dx}{d\tilde{t}} = 0 \quad (21)$$

gde je

$$1 - \frac{a_1}{\rho} = \omega_e^2(\rho) \quad \frac{b_1}{2\rho} = h(\rho) \quad (22)$$

Što daje istu jednačinu (18).

Vidi se da ove metode dovode do istih rezultata do kojih je dovela i metoda Van-der Pol-a.

Van der Pol-ova metoda je odigrala ogromnu ulogu u razvoju metoda nelinearne mehanike. Samo zahvaljujući radovima Van der Pol-a metode iz nebeske mehanike su počele da se primenjuju u nelinearnoj mehanici. Ova metoda



Van der Pol-a javila se oko 1920 - 1923 godine u vezi sa brzim razvojem radiotehnike i sa pojavom elektronskih cevi i pokazalo se da je veoma zgodna za izučavanje kola sa nelinearnim elementom (elektronska cev). Za formalnu primenu metode Van der Pola nije bilo nikakvih ograničenja u vezi sa prirodom sila pod čijim dejstvom je proizilazio oscilatorni proces. Van der Pol je predložio prostu šemu redukcije zadatka teorije oscilacija na izučavanje jednog posebnog slučaja jednačina i drugo on je uprošćeni sistem zamenjivao usrednjenim po "brzoj" promenljivoj. Metoda Van der Pol-a je bila očigledna i zgodna za proračune, pa je bila veoma popularna medju inženjerima. Medjutim sama metoda je u to vreme bila čisto intuitivnog karaktera i drugo dugo niko nije čak ni pokušao da da matematički dokaz. Менделџитам и Папаљекси su dali prvu ocenu tačnosti metode Van der Pol-a, dok je Fatou dao matematički dokaz.

Za dobijanje rešenja jednačina čije se amplitude sporo menjaju sa vremenom i nisu periodičke funkcije Van der Pol je predložio specijalnu metodu "Sporo promenljivih" koeficijenata analognu metodi koju je Lagrange primenjivao u nebeskoj mehanici. Van der Pol je pomoću svoje metode izučio niz praktičnih zadataka izučavajući procese uspostavljanja oscilacija, stacionarne režime i oscilatorni histerezis.

Moram još jednom da naglasim da je metoda Van der Pol-a data čisto intuitivnim rasudjivanjem i mada se pokazala plodotvornom u prvom periodu rada u oblasti nelinearne mehanike, ona nije mogla da da ocenu tačnosti rezultata. Nedostatak Van der Polove metode je bio u tome što je ona mogla da se primeni samo na sisteme sa jednim stepenom slobode oscilovanja.

## 4. METODA SPORO PROMENLJIVE AMPLITUDE

Metoda sporo promenljive amplitude primenjuje se za neperiodičke procese. Ovu metodu prvi je primenio Van der Pol. Prema ovoj metodi rešenje se pretpostavi u obliku  $x = R(t) \cos \Psi$ , gde je  $R(t)$  amplituda sporo promenljiva sa vremenom. Posmatra se diferencijalna jednačina oblika

$$m\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0 \quad (1)$$

Izvodi po vremenu pretpostavljenog rešenja su

$$\dot{x} = \dot{R} \cos \Psi - \omega R \sin \Psi \quad (2)$$

$$\ddot{x} = \ddot{R} \cos \Psi - 2\dot{R}\omega \sin \Psi - R\omega^2 \cos \Psi \quad (3)$$

gde je  $\Psi = \omega t$ . S obzirom na prirodu pretpostavljene funkcije  $R(t)$  mora da je  $\dot{R} \ll R\omega$  i  $\ddot{R} \ll \omega^2 R$  te je

$$\dot{x} \approx -\omega R \sin \Psi \quad (4)$$

$$\ddot{x} \approx -2\omega \dot{R} \sin \Psi - \omega^2 R \cos \Psi \quad (5)$$

Funkciju  $f(x, \dot{x})$  treba aproksimirati prvim članovima Fourierovog reda u obliku

$$f(x, \dot{x}) = f(R \cos \Psi, -\omega R \sin \Psi) \approx a_1 \cos \Psi + b_1 \sin \Psi \quad (6)$$

gde su koeficijenti

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(R \cos \psi, -\omega R \sin \psi) \cos \psi d\psi$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(R \cos \psi, -\omega R \sin \psi) \sin \psi d\psi \quad (7)$$

Na osnovu prethodnog je

$$m\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = -m(2\omega \dot{R} \sin \psi + \omega^2 R \cos \psi) + a_1 \cos \psi + b_1 \sin \psi = 0 \quad (8)$$

odakle sledi da mora da bude

$$mR\omega = a_1$$

$$2m\dot{R}\omega = b_1 \quad (9)$$

Na primeru Van der Pol-ove jednačine pokažimo primenu ove metode. Za Van der Pol-ovu jednačinu je

$$f(x, \dot{x}) = x - (\alpha - \beta x^2) \dot{x} = \omega R \left( \alpha - \frac{R^2 \beta}{4} \right) \sin \psi + R \cos \psi - \frac{R^3 \omega \beta}{4} \sin 3\psi \quad (10)$$

odnosno

$$a_1 = R \quad b_1 = R\omega \left( \alpha - \frac{R^2 \beta}{4} \right) \quad (11)$$

Upoređivanjem sa (9) dobijamo da je

$$\dot{R} = \frac{R}{2m} \left( \alpha - \frac{R^2 \beta}{4} \right) \quad \omega^2 = \frac{1}{m} \quad (12)$$

Za  $\dot{R} = 0$  dobija se stacionarna amplituda  $R_{st} = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ . Smenom  $y^2 = R^4$  i  $\dot{y} = 2R\dot{R}$  jednačina (12) se svodi na jednačinu

$$\dot{y} = \frac{y}{m} \left( \alpha - \frac{y\beta}{4} \right) \quad (13)$$

koja razdvaja promenljive i može da se napiše u obliku

$$\frac{dy}{dy - \frac{\beta}{4} y^2} = \frac{dt}{m} \quad (14)$$

odakle se integraljenjem dobija

$$y = \frac{4d}{\beta} \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{4d}{\beta y_0}\right) e^{-\frac{\alpha}{m} t}} \quad (15)$$

gde je  $y = R^2$  za  $y_0 = R_0^2$ . Vraćajući se na početnu promenljivu  $R$  dobijamo amplitudu oscilovanja u obliku

$$R(t) = \frac{R_{st}}{\sqrt{1 - \left[1 - \left(\frac{R_{st}}{R_0}\right)^2\right] e^{-\frac{\alpha}{m} t}}} \quad (16)$$

odnosno rešenje u obliku

$$x(t) = \frac{R_{st}}{\sqrt{1 - \left[1 - \left(\frac{R_{st}}{R_0}\right)^2\right] e^{-\frac{\alpha}{m} t}}} \cos \omega t \quad (17)$$

## 5. МЕТОДА N.M.KRILOVA I N.N.BOGOLJUBOVA

Metoda *Крылова - Боголюбова* je asimptotska i primenjuje se za nalaženje rešenja sopstvenih oscilacija sistema bliskih linearnim. Ova metoda dobila je široku primenu u radovima *Крылова*, *Боголюбова*, *Митропольског* i njihovih učenika. Pokazaćemo osnovnu ideju i postavke ove metode na primeru diferencijalne jednačine oblika

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \frac{dx}{dt}) \quad (1)$$

gde je  $\varepsilon$  mali pozitivan parametar. Metoda se zasniva na fizičkoj pretstavi karaktera proučavanog oscilatornog sistema kada nema poremećaja. Kada je  $\varepsilon = 0$ , t.j. kada odsustvuje poremećaj oscilovanje je čisto harmonijsko oblika

$$x = a \cos \psi \quad (2)$$

sa konstantnom amplitudom  $a$  i jednakopromenljivim faznim uglom  $\psi$

$$\frac{da}{dt} = 0 \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega \quad (3)$$

Pojava nelinearnog poremećaja dovodi do pojave u rešenju jednačine (1) viših harmonika, uslovljava zavisnost trenutne frekvencije  $\frac{d\psi}{dt}$  od amplitude, a može da izazove i sistematsko uvećanje ili smanjenje amplitude oscilovanja u zavisno-

sti od energije koju apsorbuje ili odaje poremećajna sila. Svi ti efekti iščezavaju u graničnom slučaju  $\varepsilon=0$ . Uzimajući to u obzir rešenje jednačine (1) tražimo u obliku reda po stepenima malog parametra u obliku

$$x = a \cos \Psi + \varepsilon U_1(a, \Psi) + \varepsilon^2 U_2(a, \Psi) + \dots \quad (4)$$

gde se  $U_1(a, \Psi)$ ,  $U_2(a, \Psi)$ , ... javljaju kao periodičke funkcije ugla  $\Psi$ , perioda  $2\pi$ , a veličine  $a$  i  $\Psi$  kao funkcije vremena odredjuju se iz sistema diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots \\ \frac{d\Psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Na taj način nalaženje asimptotske aproksimacije rešenja jednačine (1) svodi se na izbor odgovarajućih izraza za funkcije  $U_i(a, \Psi)$ ,  $A_i(a)$  i  $B_i(a)$  tako da izraz (4) u kome  $a$  i  $\Psi$  bivaju zamenjene funkcijama vremena, koje se odredjuju iz jednačina (5), bude rešenje početne jednačine (1).

Kada su nadjeni eksplicitni izrazi za koeficijente razlaganja u izrazima (4) i (5) pitanje integraljenja jednačine (1) svodi se na prostiji slučaj integraljenja jednačina (5) sa razdvojenim promenljivim(argumentima), koje omogućavaju izučavanje pomoću poznatih elementarnih načina.

Odredjivanje koeficijenata redova (4) i (5) ne predstavlja principijelni problem, ali s obzirom da formule vrlo brzo postaju složene, to praktično efektivno mogu da budu nadjena samo prva dva člana.

Zadržavajući u redovima (4) i (5) samo prvih  $m$  članova t.j. stavljajući da je

$$x = a \cos \Psi + \sum_{i=1}^m \varepsilon^i U_i(a, \Psi) \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 & i \\
 & \frac{da}{dt} = \sum_{i=1}^m \varepsilon^i A_i(a) \\
 & \frac{d\psi}{dt} = \omega + \sum_{i=1}^m \varepsilon^i B_i(a)
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

dobijamo aproksimacije prvog drugog i t.d. ili uopšte ne tako velikog reda. To je zato jer je poznato da se praktična primena asimptotske metode određuje ne osobinama konvergencije redova (4) i (5) pri  $m \rightarrow \infty$ , nego asimptotskim osobinama za zadat broj članova  $m$  kada  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Neophodno je samo to da pri malom  $\varepsilon$  izraz za (4) daje dovoljno tačnu aproksimaciju rešenja jednačine (1) i za dovoljno dug period vremena. Zato se obično redovi (4) i (5) pretpostavljaju kao formalni, neophodni za nalaženje asimptotske aproksimacije (6).

Nalaženje asimptotskih aproksimacija može se postaviti i strožije kao nalaženje takvih funkcija  $u_i(a, \psi)$ ,  $A_i(a)$  i  $B_i(a)$  da bi izraz (6) u kome se funkcije vremena  $a$  i  $\psi$  određuju jednačinama  $m$ -tog približenja (7) zadovoljavao jednačinu (1) sa tačnošću do malih veličina reda  $\varepsilon^{m+1}$ .

U posmatranom slučaju jednačine (1) moguće je bilo ustanoviti konvergenciju redova (4) i (5) pri veoma opštim uslovima postavljenim za funkciju  $f(x, \frac{dx}{dt})$ . Ali s obzirom da ćemo dalje imati slučaj kada su posmatrani redovi divergentni, to mi ovde nećemo vezivati izlaganje metode nalaženja asimptotskih aproksimacija sa dokazivanjem konvergencije i zato ćemo redovima po stepenima malog parametra davati formalni smisao.

Napomenimo i još nekoliko reči o proceni greške. Iz činjenice da dobijeno približno rešenje zadovoljava jednačinu (1) sa greškom reda  $\varepsilon^{m+1}$ , to i pomoću majoriranja može se utvrditi da će odstupanje približnog rešenja od odgovarajućeg tačnog (uz saglasnost početnih uslova)

biti ograničeno veličinom reda  $\varepsilon^{m+1}t$  i na taj način razlika ostaje mala za ma koliko velike vrednosti  $\varepsilon t$ , samo ako je  $\varepsilon$  dovoljno malo.

Pitanje strogog obrazloženja asimptotskih metoda pretstavlja poseban čisto matematički problem koji ima značaj za teoriju diferencijalnih jednačina sa malim parametrom.

Nalaženje funkcija  $u_i(a, \psi)$ ,  $A_i(a)$  i  $B_i(a)$  sadrži u sebi izvestan stepen proizvoljnosti, a da bi određivanje tih funkcija bilo jednoznačno moramo postaviti za njih dopunske uslove. Medjutim i izbor dopunskih uslova je proizvoljan. Kao dopunski uslov mi biramo uslov da u funkcijama  $u_i(a, \psi)$  odsustvuju prvi harmonici, t.j. potrebno je da bude zadovoljen sledeći uslov

$$\int_0^{2\pi} u_j(a, \psi) e^{i\psi} d\psi = 0 \quad \left( \begin{array}{l} j=1, 2, \dots, m \\ i = \sqrt{-1} \end{array} \right) \quad (8)$$

S fizičkog gledišta to znači da smo veličini  $a$  dali smisao potpune (pune) amplitude prvog osnovnog harmonika oscilovanja. Diferencirajući izraz (4) i uzimajući u obzir izraze (5), nalazimo

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -a\omega \sin\psi + \varepsilon \{ A_1(a) \cos\psi - aB_1(a) \sin\psi + \omega \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \} + \\ &+ \varepsilon^2 \{ A_1(a) \cos\psi - aB_2(a) \sin\psi - A_1(a) \frac{\partial u_1}{\partial a} + B_1(a) \frac{\partial u_1}{\partial \psi} + \omega \frac{\partial u_2}{\partial \psi} \} + \varepsilon^3 \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -a\omega^2 \cos\psi + \varepsilon \{ -2\omega A_1 \sin\psi - 2\omega a B_1 \cos\psi + \omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} \} + \\ &+ \varepsilon^2 \{ (A_1 \frac{dA_1}{da} - aB_1^2 - 2\omega a B_2) \cos\psi - (2\omega A_2 + 2A_1 B_1 + \\ &+ A_1 \frac{dB_1}{da} a) \sin\psi + 2\omega_1 A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} + 2\omega B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \omega^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} \} + \varepsilon^3 \dots \end{aligned} \quad (9)$$



Desnu stranu jednačine (1) uzimajući u obzir (9) možemo da napišemo u sledećem obliku

$$\begin{aligned} \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) &= \varepsilon f(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) + \varepsilon^2 \left\{ \mu_1(a, \psi) f'_x(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) + \right. \\ &\quad \left. + (A_1 \cos \psi - a B_1 \sin \psi + \omega \frac{\partial \mu_1}{\partial \psi}) f'_{x'}(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \right\} + \\ &\quad + \varepsilon^3 \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Da bi posmatrani red (4) zadovoljio početnu jednačinu (1) sa tačnošću do malih veličina reda  $\varepsilon^{m+1}$ , neophodno je izjednačiti koeficijente uz jednake stepene  $\varepsilon$  sa leve i desne strane jednačine (1) do članova  $m$ -tog reda, uključujući i članove  $m$ -tog reda. Kao rezultat dobijamo

$$\omega^2 \left( \frac{\partial^2 \mu_i}{\partial \psi^2} + \mu_i \right) = f_{i-1}(a, \psi) + 2\omega A_i \sin \psi + 2\omega a B_i \cos \psi \quad (11)$$

$(i = 1, 2, 3, \dots, m)$

gde je označeno

$$\begin{aligned} f_0(a, \psi) &= f(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \\ f_1(a, \psi) &= \mu_1(a, \psi) f'_{x'}(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) + [A_1 \cos \psi - B_1 a \sin \psi + \omega \frac{\partial \mu_1}{\partial \psi}] \times \\ &\quad \times f'_{x'}(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) + (a B_1^2 - A_1 \frac{dA_1}{da}) \cos \psi + \\ &\quad + (2A_1 B_1 + A_1 \frac{dB_1}{da} a) \sin \psi - 2\omega A_1 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial a \partial \psi} - 2\omega B_1 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial \psi^2} \end{aligned} \quad (12)$$

.....

Vidi se da su funkcije  $f_i(a, \psi)$  periodičke funkcije promenljive  $\psi$  sa periodom  $2\pi$  i zavise od  $a$ .

Da bi smo odredili  $A_1(a)$ ,  $B_1(a)$  i  $\mu_1(a, \psi)$  iz prve jednačine sistema (11) razložimo funkciju  $f_0(a, \psi)$  u Fourier-ov red

$$f_0(a, \psi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_0^{(m)}(a) e^{im\psi} \quad (13)$$

gde je

$$f_0^{(m)}(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) e^{-im\psi} d\psi \quad (14)$$

a funkciju  $u_1(a, \psi)$  potražimo u obliku

$$u_1(a, \psi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u_1^{(m)}(a) e^{im\psi} \quad (15)$$

pa izraze (13) i (15) unesemo u prvu jednačinu sistema (11) dobićemo

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \omega^2(1-m^2) u_1^{(m)}(a) e^{im\psi} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_0^{(m)}(a) e^{im\psi} + 2\omega A_1 \sin\psi + 2\omega a B_1 \cos\psi \quad (16)$$

odakle je

$$u_1(a, \psi) = \sum_{\substack{m=-\infty \\ (m \neq \pm 1)}}^{+\infty} \frac{e^{im\psi}}{2\pi(1-m^2)\omega^2} \int_0^{2\pi} f_0(a \cos\psi, -a\omega \sin\psi) e^{-im\psi} d\psi \quad (17)$$

$$i A_1(a) = -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f_0(a \cos\psi, -a\omega \sin\psi) \sin\psi d\psi$$

$$B_1(a) = -\frac{1}{2\pi\omega a} \int_0^{2\pi} f_0(a \cos\psi, -a\omega \sin\psi) \cos\psi d\psi \quad (18)$$

Na sličan način rešavajući drugu jednačinu sistema (11) dobijamo

$$u_2(a, \psi) = \sum_{\substack{m=-\infty \\ (m \neq \pm 1)}}^{+\infty} \frac{e^{im\psi}}{2\pi(1-m^2)\omega^2} \int_0^{2\pi} f_1(a, \psi) e^{-im\psi} d\psi \quad (19)$$

i

$$A_2(a) = -\frac{1}{2\omega} \left\{ 2A_1 B_1 + A_1 \frac{dB_1}{da} a \right\} - \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} [U_1(a, \psi) f'_x(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) + (A_1 \cos \psi - a B_1 \sin \psi + \omega \frac{\partial U_1}{\partial \psi}) f'_x(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi)] \sin \psi d\psi$$

$$B_1(a) = -\frac{1}{2\omega} \left\{ B_1^2 - \frac{A_1}{a} \frac{dA_1}{da} \right\} - \frac{1}{2\pi\omega a} \int_0^{2\pi} [U_1(a, \psi) f'_x(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) + (A_1 \cos \psi - a B_1 \sin \psi + \omega \frac{\partial U_1}{\partial \psi}) f'_x(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi)] \cos \psi d\psi \quad (20)$$

Pri rešavanju većine praktičnih zadataka za sastavljanje asimptotskih aproksimacija sasvim je dovoljno da se ograničimo na prvu aproksimaciju koja može biti predstavljena u obliku

$$x = a \cos \psi \quad (21)$$

gde se  $a$  i  $\psi$  određuju iz jednačina prve aproksimacije

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a) \quad (22)$$

u kojima su  $A_1(a)$  i  $B_1(a)$  određeni formulama (18). Ove jednačine prve aproksimacije je moguće dobiti i drugim metodama.

6. METODA KRILOVA-BOGOLJUBOVA-MITROPOLJSKOG  
 ZA NALAŽENJE REŠENJA NELINEARNE DIFEREN-  
 CIJALNE JEDNAČINE SA SPORO PROMENLJIVIM  
 KOEFICIJENTIMA

Ova metoda se primenjuje za nalaženje rešenja diferencijalne jednačine oscilovanja sistema sa jednim stepenom slobode oscilovanja i sa sporo promenljivim parametrima. Metoda se zasniva na asimptotskoj metodi Krilova-Bogoljubova. Da bi smo pokazali suštinu ove metode posmatračemo diferencijalnu jednačinu sa sporo promenljivim parametrima

$$\frac{d}{dt} \left[ m(\varepsilon) \frac{dx}{dt} \right] + \mathcal{L}(\varepsilon) x = \varepsilon F(\varepsilon, x, \frac{dx}{dt}) \quad (1)$$

gde je  $\varepsilon$  mali pozitivan parametar,  $\varepsilon = \varepsilon t$  "sporo promenljivo vreme". Pretpostavljamo da su koeficijenti jednačine (1)  $m(\varepsilon)$ , a takodje i funkcija  $F(\varepsilon, x, \frac{dx}{dt})$  diferencijabilni i da su u intervalu  $0 \leq \varepsilon \leq L$ ,  $m(\varepsilon)$  i  $\mathcal{L}(\varepsilon)$  pozitivne funkcije sporo promenljivog vremena.

Pretpostavka o sporo promenljivim parametrima sistema kaže da se oni veoma malo promene za period od jedne oscilacije.

Jednovremeno sa jednačinom (1) proučimo i jednačinu

$$m(\varepsilon) \frac{d^2 x}{dt^2} + \mathcal{L}(\varepsilon) x = 0 \quad (2)$$

gde se parametar  $\varepsilon$  posmatra kao konstantna veličina-parametar, a sa tim i  $m(\varepsilon)$  i  $\mathcal{L}(\varepsilon)$  kao konstante zavisne od parametra  $\varepsilon$ . Jednačinu (2) dobijamo kada u jednačinu (1) stavimo da je  $\varepsilon = 0$  i  $\varepsilon$  posmatramo kao konstantni parametar koji ne zavisi od vremena. Jednačinu (2) ćemo nazvati neporemećenom jednačinom koja odgovara jednačini (1).

Rešenje jednačine (2) neporemećenog oscilovanja je čisto harmonijsko oblika

$$x = a \cos \Psi \quad (3)$$

sa konstantnom amplitudom i frekvencijom

$$\frac{da}{dt} = 0 \quad \frac{d\Psi}{dt} = \omega \quad (4)$$

gde su  $\Psi = \omega t + \varphi$ ,  $\omega = \sqrt{\frac{\mathcal{L}(\varepsilon)}{m(\varepsilon)}}$  i  $\varepsilon = \text{const.}$

Pojava nelinearnog poremećaja, a takodje zavisnost parametra  $\varepsilon$  kao "sporopromenljivog vremena" od vremena dovodi do pojave u rešenju jednačine (1) dopunskih članova u poredjenu sa formulom (3). Tako sada amplituda neće biti konstantna, a ni frekvencija koje će zavisiti i od sporopromenljivog vremena. Uzimajući sve to u obzir, prirodno je da rešenje jednačine (1) pretpostavimo u vidu reda

$$x = a \cos \Psi + \varepsilon \mathcal{M}_1(\varepsilon, a, \Psi) + \varepsilon^2 \mathcal{M}_2(\varepsilon, a, \Psi) + \dots \quad (5)$$

u kome su  $\mathcal{M}_1(\varepsilon, a, \Psi)$ ,  $\mathcal{M}_2(\varepsilon, a, \Psi)$ , ... periodičke funkcije ugla  $\Psi$  perioda  $2\pi$ , a veličine  $a$  i  $\Psi$  kao funkcije vremena pretpostavimo u obliku

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon \mathcal{A}_1(\varepsilon, a) + \varepsilon^2 \mathcal{A}_2(\varepsilon, a) + \dots \\ \frac{d\Psi}{dt} &= \omega(\varepsilon) + \varepsilon \mathcal{B}_1(\varepsilon, a) + \varepsilon^2 \mathcal{B}_2(\varepsilon, a) + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

gde je  $\omega(\xi) = \sqrt{\frac{L(\xi)}{m(\xi)}}$  - "sopstvena" frekvencija proučavanog oscilatornog sistema,  $\xi = \varepsilon t$ .

Kako pretpostavljeni redovi sadrže u sebi mogućnost višeznačnosti to usvajamo dopunske uslove oblika

$$\int_0^{2\pi} \mu_m(\xi, a, \psi) e^{i\psi} d\psi = 0 \quad (i = \sqrt{-1}, m = 1, 2, \dots, m) \quad (8)$$

Uvodjenje ovih uslova je ekvivalentno uslovu da  $a$  predstavlja punu amplitudu prvog osnovnog harmonika.

Diferenciranjem reda (5) nalazimo

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{da}{dt} \left\{ \cos\psi + \varepsilon \frac{\partial \mu_1}{\partial a} + \varepsilon^2 \frac{\partial \mu_2}{\partial a} + \dots \right\} + \frac{d\psi}{dt} \left\{ -a \sin\psi + \varepsilon \frac{\partial \mu_1}{\partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial \mu_2}{\partial \psi} + \dots \right\} + \\ &\quad + \varepsilon^2 \frac{\partial \mu_1}{\partial \xi} + \varepsilon^3 \frac{\partial \mu_2}{\partial \xi} + \dots \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2a}{dt^2} \left\{ \cos\psi + \varepsilon \frac{\partial \mu_1}{\partial a} + \varepsilon^2 \frac{\partial \mu_2}{\partial a} + \dots \right\} + \frac{d^2\psi}{dt^2} \left\{ -a \sin\psi + \varepsilon \frac{\partial \mu_1}{\partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial \mu_2}{\partial \psi} + \dots \right\} + \\ &\quad + \left( \frac{da}{dt} \right)^2 \left\{ \varepsilon \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial a^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial a^2} + \dots \right\} + 2 \frac{da}{dt} \frac{d\psi}{dt} \left\{ -\sin\psi + \varepsilon \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial a \partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial a \partial \psi} + \dots \right\} + \\ &\quad + \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 \left\{ -a \cos\psi + \varepsilon \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial \psi^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial \psi^2} + \dots \right\} + 2 \frac{da}{dt} \left\{ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial a \partial \xi} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial a \partial \xi} + \dots \right\} + \\ &\quad + 2 \frac{d\psi}{dt} \left\{ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial \xi \partial \psi} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial \xi \partial \psi} + \dots \right\} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial \xi^2} + \varepsilon^4 \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial \xi^2} + \dots \\ &\quad \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Uzimajući u obzir jednačine (6) nalazimo

$$\begin{aligned} \frac{d^2a}{dt^2} &= \varepsilon^2 \left( A_1 \frac{\partial A_1}{\partial a} + \frac{\partial A_1}{\partial \xi} \right) + \varepsilon^3 \dots \\ \frac{d^2\psi}{dt^2} &= \varepsilon \frac{d\omega(\xi)}{d\xi} + \varepsilon^2 \left( A_1 \frac{\partial B_1}{\partial a} + \frac{\partial B_1}{\partial \xi} \right) + \varepsilon^3 \dots \\ \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 &= \varepsilon^2 A_1 + \varepsilon^3 \dots \\ \frac{da}{dt} \frac{d\psi}{dt} &= \varepsilon A_1 \omega(\xi) + \varepsilon^2 [A_2 \omega(\xi) + A_1 B_1] + \varepsilon^3 \dots \\ \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 &= \omega^2(\xi) + 2\varepsilon \omega(\xi) B_1 + \varepsilon^2 [B_1^2 + 2\omega(\xi) B_2] + \varepsilon^3 \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Unošenjem izraza (5), (9) i (10) u jednačinu (1) i izjednačavanjem koeficijenata sa leve i desne strane uz jednake stepene  $\varepsilon$  dobijamo sledeći sistem jednačina

$$m(\varepsilon) \left[ \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial \psi^2} + \omega^2(\varepsilon) \mu_1 \right] = \mathcal{F}_0(\varepsilon, a, \psi) + 2m(\varepsilon)\omega(\varepsilon)A_1 \sin \psi + 2m(\varepsilon)\omega(\varepsilon)B_1 \cos \psi + \frac{d[m(\varepsilon)\omega(\varepsilon)]}{d\varepsilon} a \sin \psi \quad (11)$$

$$m(\varepsilon) \left[ \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial \psi^2} + \omega^2(\varepsilon) \mu_2 \right] = \mathcal{F}_1(\varepsilon, a, \psi) + m(\varepsilon) \left[ 2\omega(\varepsilon)aB_2 - \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 - aB_1^2 - \frac{\partial A_1}{\partial \varepsilon} - \frac{dm(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{A_1}{m(\varepsilon)} \right] \cos \psi + m(\varepsilon) \left[ 2\omega(\varepsilon)A_2 + 2A_1 B_1 + a \frac{\partial B_1}{\partial \varepsilon} + a \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + \frac{dm(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{a B_1}{m(\varepsilon)} \right] \sin \psi \quad (12)$$

.....

gde su uvedene oznake

$$\mathcal{F}_0(\varepsilon, a, \psi) = F(\varepsilon, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(\varepsilon, a, \psi) = & F_x'(\varepsilon, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \mu_1 + F_{x^2}'(\varepsilon, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \times \\ & \times [A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \frac{\partial \mu_1}{\partial \psi} \omega(\varepsilon)] - m(\varepsilon) \left[ 2 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial \varepsilon \partial \psi} \omega(\varepsilon) + 2 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial a \partial \psi} A_1 \omega(\varepsilon) + \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial \psi^2} \omega(\varepsilon) B_1 + \frac{\partial \mu_1}{\partial \psi} \frac{d\omega(\varepsilon)}{d\varepsilon} + \frac{\partial \mu_1}{\partial \psi} \frac{\omega(\varepsilon)}{m(\varepsilon)} \frac{dm(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

.....

Iz jednačine (11) uzimajući u obzir uslov da  $\mu_1(\varepsilon, a, \psi)$  ne sadrži prvi harmonik nalazimo izraz za

$$\mu_1(\varepsilon, a, \psi) = \frac{1}{2\pi C(\varepsilon)} \sum_{n \neq \pm 1} \frac{e^{in\psi}}{1-n^2} \int_0^{2\pi} f_0(\varepsilon, a, \psi) e^{-in\psi} d\psi \quad (15)$$

Iz uslova da  $\mu_1(\varepsilon, a, \psi)$  ne sadrži prvi harmonik dobijamo izraze za  $A_1(\varepsilon, a)$  i  $B_1(\varepsilon, a)$  :

$$A_1(\varepsilon, a) = -\frac{a}{2m(\varepsilon)\omega(\varepsilon)} \frac{d[m(\varepsilon)\omega(\varepsilon)]}{d\varepsilon} - \frac{1}{2\pi m(\varepsilon)\omega(\varepsilon)} \int_0^{2\pi} f_0(\varepsilon, a, \psi) \sin\psi d\psi$$

$$B_1(\varepsilon, a) = -\frac{1}{2\pi m(\varepsilon)\omega(\varepsilon)a} \int_0^{2\pi} f_0(\varepsilon, a, \psi) \cos\psi d\psi \quad (16)$$

Na taj način u prvoj aproksimaciji imamo asimptotsko rešenje jednačine (1) u obliku

$$x = a \cos\psi \quad (17)$$

gde se  $a$  i  $\psi$  određuju iz sistema jednačina prve aproksimacije

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon a}{2m(\varepsilon)\omega(\varepsilon)} \frac{d[m(\varepsilon)\omega(\varepsilon)]}{d\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2\pi m(\varepsilon)\omega(\varepsilon)a} \int_0^{2\pi} f_0(\varepsilon, a, \psi) \sin\psi d\psi$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2\pi m(\varepsilon)\omega(\varepsilon)a} \int_0^{2\pi} f_0(\varepsilon, a, \psi) \cos\psi d\psi \quad (18)$$

Jednačine prve aproksimacije možemo da napišemo i u obliku

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon a}{2m(\varepsilon)\omega(\varepsilon)} \frac{d[m(\varepsilon)\omega(\varepsilon)]}{d\varepsilon} - \delta_e(\varepsilon, a) a$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_e(\varepsilon, a) \quad (19)$$



gde su  $\delta_e(\tau, a)$  i  $\omega_e(\tau, a)$  redom ekvivalentni dekrement pri-  
gušivanja i ekvivalentna frekvencija, funkcije amplitude i  
sporo promenljivog vremena:

$$\delta_e(\tau, a) = \frac{\varepsilon}{2\pi m(\tau)\omega(\tau)a} \int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi) \sin \psi d\psi$$

$$\omega_e^2(\tau, a) = \omega^2(\tau) - \frac{\varepsilon}{\pi m(\tau)a} \int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi) \cos \psi d\psi \quad (20)$$

Iz jednačine (12) na sličan način nalazimo izraz za  $u_2(\tau, a, \psi)$   
u obliku

$$u_2(\tau, a, \psi) = \frac{1}{2\pi c(\tau)} \sum_{n \neq \pm 1} \frac{e^{in\psi}}{1-n^2} \int_0^{2\pi} f_1(\tau, a, \psi) e^{-in\psi} d\psi \quad (21)$$

a iz uslova da  $u_2(\tau, a, \psi)$  ne sadrži prvi harmonik dobijamo izraz  
za  $A_2(\tau, a)$  i  $B_2(\tau, a)$  u obliku

$$A_2(\tau, a) = -\frac{1}{2\omega(\tau)} \left[ a \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + 2A_1 B_1 + \frac{a}{m(\tau)} \frac{d[m(\tau)B_1]}{d\tau} \right] -$$

$$-\frac{1}{2\pi m(\tau)\omega(\tau)} \int_0^{2\pi} f_1(\tau, a, \psi) \sin \psi d\psi \quad (22)$$

$$B_2(\tau, a) = \frac{1}{2\omega(\tau)a} \left[ \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 - aB_1^2 + \frac{1}{m(\tau)} \frac{d[m(\tau)A_1]}{d\tau} \right] -$$

$$-\frac{1}{2\pi m(\tau)\omega(\tau)a} \int_0^{2\pi} f_1(\tau, a, \psi) \cos \psi d\psi$$

Asimptotsko rešenje u drugoj aproksimaciji možemo da napi-  
šemo u obliku

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(\tau, a, \psi) \quad (23)$$

gde  $a$  i  $\psi$  moraju da budu određeni iz jednačina druge  
aproksimacije

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(\tau, a) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a) \quad (24)$$

gde se  $A_1(\tau, a)$  i  $B_1(\tau, a)$  odredjuju izrazima (16),  $A_2(\tau, a)$  i  $B_2(\tau, a)$  izrazima (22),  $\mu_1(\tau, a, \psi)$  prema formuli (15). Naglasićemo da u svim dobijenim formulama  $a$  i  $\tau$  psmatramo kao konstantne parametre u slučaju integraljenja po  $\psi$ .

Upoređujući izraze za prvu i drugu aproksimaciju sa rezultatima dobijenim u paragrafu 5. utvrđujemo da je opšta šema nalaženja rešenja u oba slučaja sasvim analogna. Jednačine prve aproksimacije (18) ralikuju se od jednačina prve aproksimacije dobijenih u paragrafu 5. prisustvom sporo promenljivog vremena i dopunskog člana

$$-\frac{\varepsilon a}{2m(\tau)\omega(\tau)} \frac{d[m(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau}$$

Na taj način, u prvoj aproksimaciji spora promenljivost mase i koeficijenta elastičnosti, osim narušenja harmoničnosti uvodi i "dopunske sile" trenja, čiji znak zavisi od toga na kakav način se menjaju parametri izučavanog oscilatornog sistema.

Pri sastavljanju asimptotskih aproksimacija rešenja mi smo umesto integraljenja jedne diferencijalne jednačine drugog reda problem sveli na integraljenje sistema od dve jednačine prvog reda koje u mnogim slučajevima ne mogu da budu integraljene pomoću elementarnih funkcija, i tada njihova rešenja možemo da tražimo samo numerički. Numerički bi isto mogli da integralimo i početnu diferencijalnu jednačinu, ali se javlja mogućnost pojave sistematske greške u toku numeričkog proračuna. Numeričko integraljenje jednačina prve aproksimacije ne pretstavlja teškoću jer se kod njih kao promenljive javljaju amplituda i faza, a ne sama oscilatorna funkcija  $x$ . Za dobijanje potpune slike procesa ovde je dovoljno da se izračuna ne velika količina tačaka raspoređenih na relativno "glatkoj" krivoj što suštinski uprošćuje numeričku integraciju, jer je ta kriva obvoj-

nica funkcije rešenja  $x$ .

Izvešćemo još za neke specijalne slučajeve jednačine (1) jednačine prve aproksimacije.

Neka u izučavanom oscilatornom sistemu nema trenja, tada jednačina koja opisuje kretanje ima oblik

$$\frac{d}{dt} \left[ m(\tau) \frac{dx}{dt} \right] + c(\tau) x = \varepsilon f(\tau, x) \quad (25)$$

U tom slučaju jednačine prve aproksimacije imaju oblik

$$\frac{da}{dt} = - \frac{\varepsilon a}{2 m(\tau) \omega(\tau)} \frac{d[m(\tau) \omega(\tau)]}{d\tau} \quad (26)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(\tau) - \frac{\varepsilon}{2\pi m(\tau) \omega(\tau) a} \int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi) \cos \psi d\psi$$

Ovaj sistem jednačina se može integraliti, pa iz prve jednačine dobijamo

$$a = \frac{a_0}{[m(\tau) \omega(\tau)]^{1/2}} \quad (27)$$

gde je  $a_0$  početna vrednost amplitude za  $t=0$ . Unoseći nađjenu vrednost amplitude u drugu jednačinu sistema (26) dobijamo

$$\psi = \int_0^t \omega_2(\tau) d\tau \quad (28)$$

gde je

$$\omega_2(\tau) = \omega(\tau) - \frac{\varepsilon}{2\pi [m(\tau) \omega(\tau)]^{1/2} a_0} \int_0^{2\pi} f_0\left(\tau, \frac{a_0}{[m(\tau) \omega(\tau)]^{1/2}}, \psi\right) \cos \psi d\psi \quad (29)$$

Na taj način, u prvoj aproksimaciji oscilacije, koje se opisuju jednačinom (25) su "sinusoidalna" sa amplitudom obrnuto proporcionalnom  $\sqrt{m(\tau) \omega(\tau)}$  i fazom koja se menja po zakonu (28).

Kao drugi primer posmatraćemo diferencijalnu jednačinu oscilovanja sistema sa sporo promenljivom masom koja se nalazi pod dejstvom linearne elastične sile  $c(\varepsilon)x$  sa sporo promenljivim koeficijentom elastičnosti i nelinearnog trenja koje zavisi od brzine i sporo promenljivog vremena. Diferencijalna jednačina oscilovanja ja tada

$$\frac{d}{dt} \left[ m(\varepsilon) \frac{dx}{dt} \right] + c(\varepsilon)x = \varepsilon \mathcal{F}(\varepsilon, \frac{dx}{dt}) \quad (30)$$

U tom slučaju jednačine prve aproksimacije su

$$\frac{da}{dt} = - \frac{\varepsilon a}{2m(\varepsilon)\omega(\varepsilon)} \frac{d[m(\varepsilon)\omega(\varepsilon)]}{d\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2\pi m(\varepsilon)\omega(\varepsilon)} \int_0^{2\pi} \mathcal{F}(\varepsilon, a, \gamma) \sin \gamma d\gamma \quad (31)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(\varepsilon)$$

Iz druge jednačine odmah nalazimo zakon promene pune faze

$$\psi = \int_0^t \omega(\varepsilon) dt \quad (32)$$

Iz druge jednačine sistema (31) sledi da frekvencija oscilovanja sistema opisanog jednačinom (30) u prvoj aproksimaciji ne zavisi od amplitude, a zavisi samo od karaktera sporo promenljivih koeficijenata  $m(\varepsilon)$  i  $c(\varepsilon)$ .

## III      G l a v a

## M E T O D A      F A Z N E      R A V N I

## 1. FAZNA RAVAN I FAZNE TRAJEKTORIJE

Stanje oscilatornog sistema sa jednim stepenom slobode oscilovanja potpunije možemo opisati ako jednovremeno posmatramo koordinatu položaja sistema  $x$  i brzinu  $\frac{dx}{dt}$  u faznoj ravni. Fazne koordinate  $x$  i  $\sqrt{\frac{dx}{dt}}$  određuju faznu ravan.

Ranije izložene metode ograničene su u svojoj primeni na jednačine koje sadrže mali parametar. Medjutim kada diferencijalna jednačina ne sadrži mali parametar te metode se ne mogu primeniti, dok se metoda fazne ravni sa uspehom može primeniti i na te opštije diferencijalne jednačine.

Posmatramo nelinearni oscilatorni sistem, čije se oscilovanje može opisati diferencijalnom jednačinom oblika

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \quad (1)$$

gde je  $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$  nelinearna funkcija koordinate  $x$  i brzine  $\frac{dx}{dt}$ , koja smenom  $y = \frac{dx}{dt}$  može da se svede na sistem od dve jednačine sa promenljivim  $x$  i  $y$  :

$$\frac{dy}{dt} = -f(x, y) \quad (2)$$

$$\frac{dx}{dt} = y$$

Ovakav oblik jednačina nam omogućava nam da proučimo zavisnost puta (generalisane koordinate) i brzine (generalisane brzine) na osnovu koje možemo izvesti zaključke o karakteru kretanja, koje izvodi posmatrani sistem.

Sistem jednačina (2) predstavlja specijalan slučaj sistema prvog reda opšteg oblika

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y) \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y)$$

Ako u Descartes-ovom pravouglom koordinatnom sistemu na apscisnu osu nanesimo koordinatu  $x$ , a na ordinatnu osu  $y = \dot{x}$ , dobijamo faznu ravan. Koordinate  $x$  i  $y = \dot{x}$  su fazne koordinate.

Tačku u faznoj ravni (фазавој плоскостью, phase plane, Phasenebene) sa koordinatama  $x$  i  $y$  nazivamo reprezentativnom tačkom. Reprezentativna tačka predstavlja lik pokretne tačke ili mase u faznoj ravni. Koordinate lika pokretne tačke u faznoj ravni zadovoljavaju sistem diferencijalnih jednačina (3). Niz uzastopnih položaja reprezentativne tačke daje krivu liniju koja se zove fazna kriva ili fazna trajektorija. Faznom trajektorijom ili putanjom se naziva jer predstavlja putanju lika pokretne tačke u faznoj ravni. U faznoj ravni možemo da definišemo i pojam fazna brzina. Fazna brzina predstavlja brzinu reprezentativne tačke na faznoj trajektoriji u faznoj ravni.

Vektor fazne brzine pada u pravac tangente na faznu trajektoriju i ima koordinate

$$\mathcal{V}_x = \dot{x} = P(x, y) \quad (4)$$

$$\mathcal{V}_y = \dot{y} = Q(x, y)$$

i intenzitet

$$\mathcal{V} = \sqrt{P^2(x, y) + Q^2(x, y)}$$

U specijalnom slučaju definisanom sistemom jednačina (2) fazna brzina je

$$\mathcal{V} = \sqrt{y^2 + f^2(x, y)}$$

U vezi sa faznom brzinom interesantno je proučiti položaj lika pokretne tačke, a sa tim i ponašanje sistema tamo gde je fazna brzina jednaka nuli. Očigledno da u tim tačkama treba da su jednovremeno zadovoljeni uslovi

$$P(x, y) = 0 \quad Q(x, y) = 0 \quad (5)$$

Takve tačke u kojima je fazna brzina jednaka nuli nazivaju se **singularnim tačkama**. U tim tačkama nije zadovoljen uslov Cauchy-jeve teoreme o jedinstvenosti rešenja diferencijalnih jednačina. Singularne tačke sistema imaju fizičko značenje kao stanja ravnoteže, stabilne ili nestabilne, posmatranog dinamičkog sistema.

Ako izdvojimo tačke koje zadovoljavaju uslov (5) i proučavamo sistem (3) samo za  $P(x, y) \neq 0$  i  $Q(x, y) \neq 0$ , onda u opštem obliku sistem možemo da svedemo na diferencijalnu jednačinu oblika

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \quad (6)$$

koja se dobija ako se jednačine sistema (3) podele međusobno. Integralne krive ove diferencijalne jednačine su fazne trajektorije. Kroz svaku tačku fazne ravni u kojoj fazna

brzina nije jednaka nuli prolazi samo po jedna fazna trajektorija, kao jedinstveno rešenje diferencijalne jednačine (6). Skup (familija) faznih trajektorija, integralnih krivih jednačine (6) naziva se faznim portretom oscilatornog sistema u faznoj ravni.

Da bi smo u opštem slučaju integralnih krivih (6) mogli da objasnimo karakter krivih, karakter i vrstu singulariteta, a sa tim i dinamičke osobine dinamičkog sistema koji je njima opisan, korisno je proučiti iste na posebnim primerima linearnih ili prostijih nelinearnih sistema. Posmatraćemo harmonijski oscilator sa viskoznom trenjem, koji je definisan sledećom diferencijalnom jednačinom

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (7)$$

koja zamenom  $\dot{x} = y$  prelazi u sistem

$$\frac{dy}{dt} = -2\delta y - \omega^2 x \quad (8)$$

$$\frac{dx}{dt} = y$$

Singularna tačka ovog sistema je određena koordinatama  $x=0$ ,  $y=0$ . Izdvajajući singularnu tačku, sistem (8) možemo da napišemo kao jednu jednačinu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\delta y - \omega^2 x}{y} \quad (9)$$

Da bi smo našli integralnu krivu ove jednačine uvešćemo smenu  $y = zx$ , za koju je  $\frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}$  na osnovu čega jednačina (9) postaje

$$z + x \frac{dz}{dx} = \frac{-2\delta z - \omega^2}{z}$$

odnosno razdvajanjem promenljivih dobijamo

$$\frac{z dz}{z^2 + 2\delta z + \omega^2} = - \frac{dx}{x} \quad (10)$$



Zavisno od odnosa  $\delta$  i  $\omega$  dobijaju se različite integralne krive, pa ćemo jednačinu (10) proučavati za različite slučajeve odnosa  $\delta$  i  $\omega$ .

Kada je  $\delta < \omega$ , a to je slučaj malog otpora viskoznog trenja jednačinu (10) pogodnije je napisati u obliku

$$\frac{(z+\delta)dz}{(z+\delta)^2+(\omega^2-\delta^2)} - \frac{\delta dz}{(z+\delta)^2+(\omega^2-\delta^2)} = -\frac{dx}{x} \quad (11)$$

što integraljenjem daje

$$\frac{\delta}{\sqrt{\omega^2-\delta^2}} \operatorname{arctg} \frac{z+\delta}{\sqrt{\omega^2-\delta^2}} = \ln \frac{x}{C} \sqrt{(z+\delta)^2+(\omega^2-\delta^2)} \quad (12)$$

ili vraćajući se na početne promenljive

$$\sqrt{y^2+2\delta xy+\omega^2 x^2} = C e^{\frac{\delta}{\sqrt{\omega^2-\delta^2}} \operatorname{arctg} \frac{\delta x+y}{x\sqrt{\omega^2-\delta^2}}} \quad (13)$$

Fazna brzina je

$$v = \sqrt{(2\delta y + \omega^2 x)^2 + y^2}$$

Radi lakše analize oblika integralnih krivih zadatih izrazom (13) zgodno je uvesti nove promenljive

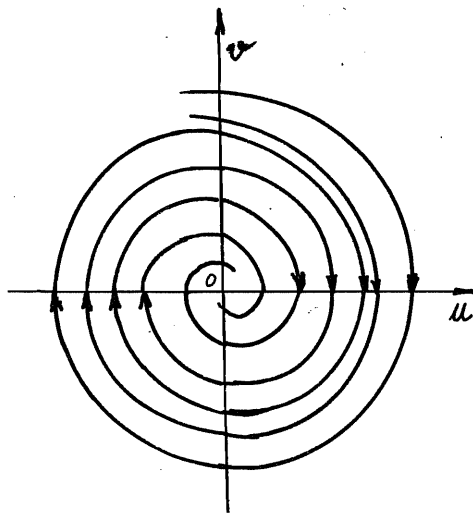
$$u = \sqrt{\omega^2 - \delta^2} x \quad ; \quad v = y + \delta x \quad (14)$$

tako da se sada fazna trajektorija (13) u ravni  $(u, v)$  može da napiše u obliku

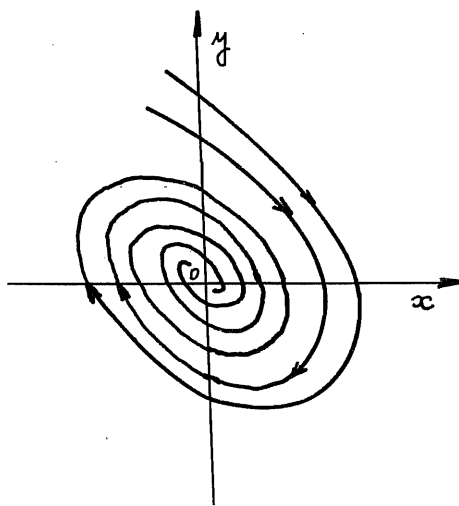
$$u^2 + v^2 = C' e^{\frac{\delta}{\sqrt{\omega^2-\delta^2}} \operatorname{arctg} \frac{v}{u}} \quad (15)$$

Prevodjenjem jednačine (15) na polarne koordinate  $u = \rho \cos \varphi$ ,  $v = \rho \sin \varphi$  u ravni  $(\rho, \varphi)$  dolazimo do jednačine

$$\rho = C e^{\frac{\delta}{\sqrt{\omega^2-\delta^2}} \varphi} \quad (16)$$



S1.11 a



S1.11b

Jednačina (16) u ravni  $(\varrho, \varphi)$  pretstavlja logaritamsku spiralu. Za razne vrednosti integralne konstante  $C$  dobija se fazni portret integralnih logaritamskih spirala (slika 11).

Tačka  $(\varrho=0, \varphi=-\infty)$  ne može biti dostignuta za konačno vreme. Takva singularna tačka, kojoj asimptotski teži pokretna tačka naziva se **fokusom** (žižom). U literaturi se nalazi još i pod imenom **spiralne tačke**. Iz veze promenljivih  $(u, v)$  i faznih koordinata  $(x, y)$  koja je linearna možemo zaključiti da se karakter integralnih krivih u faznoj ravni neće bitno izmeniti. Znači da su fazne krive takodje spirale. Za male vrednosti izraza  $\frac{\delta}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}}$  karakter spirale u  $(u, v)$  ravni je krug jednačine  $u^2 + v^2 = C'^2$ , a u faznoj ravni elipsa jednačine  $y^2 + 2hxy + \omega^2 x^2 = \text{const}$  i to centralna, ali sa glavnim osama pod nekim uglom sa faznim osama.

Na slici 11 a i b je dat grafički prikaz integralnih krivih u ravni  $(u, v)$  i faznih trajektorija u  $(x, y)$  ravni. Smer kretanja reprezentativne tačke po faznoj trajektoriji odgovara smeru fazne brzine, što je na slikama označeno strelicama. Fazna brzina je

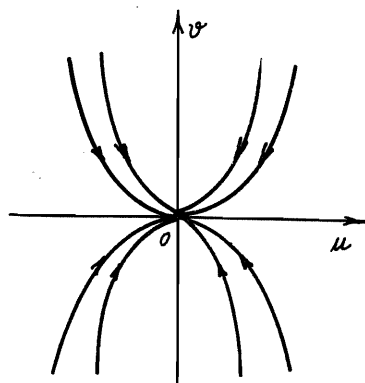
$$\vec{v} = y\vec{i} - (2\delta y + \omega^2 x)\vec{j}$$

i za  $x > 0$  i  $y > 0$  projekcija uz ort  $\vec{i}$  je pozitivna a uz ort  $\vec{j}$  negativna što odgovara smeru označenom na slici. U posmatranom slučaju singularna tačka je stabilna žiža.

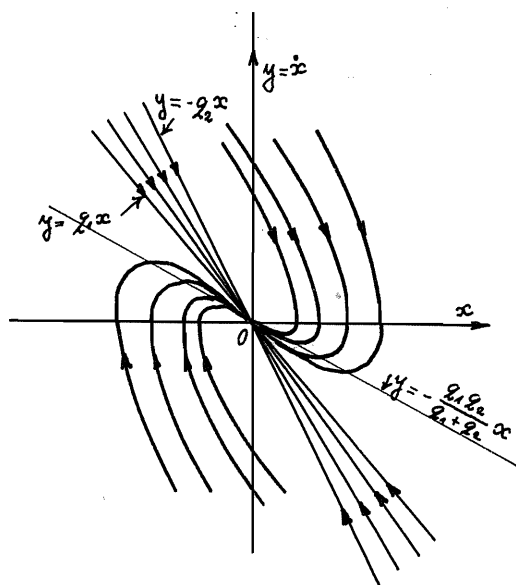
Kada je  $\delta > \omega$ , diferencijalna jednačina integralnih krivih (10) se može napisati u obliku

$$\frac{(z+\delta)dz}{(z+\delta)^2 - (\delta^2 - \omega^2)} - \frac{\delta dz}{(z+\delta)^2 - (\delta^2 - \omega^2)} = -\frac{dx}{x} \quad (17)$$

što integraljenjem daje



S1.12 a



S1.12 b

$$x^2 [(z+\delta)^2 - (\delta^2 - \omega^2)] = C^2 \left[ \frac{z+\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2}}{z+\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2}} \right]^{\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega^2}}} \quad (18)$$

vraćanjem na fazne koordinate dobijamo

$$y^2 + 2\delta xy + \omega^2 x^2 = C^2 \left[ \frac{y + (\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x}{y + (\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x} \right]^{\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega^2}}} \quad (19)$$

Radi kraćeg pisanja usvojimo oznake  $q_1$  i  $q_2$  tako da je

$$q_1 = \delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2} > 0 \quad i \quad q_2 = \delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2}; \quad q_2 > q_1 \quad (20)$$

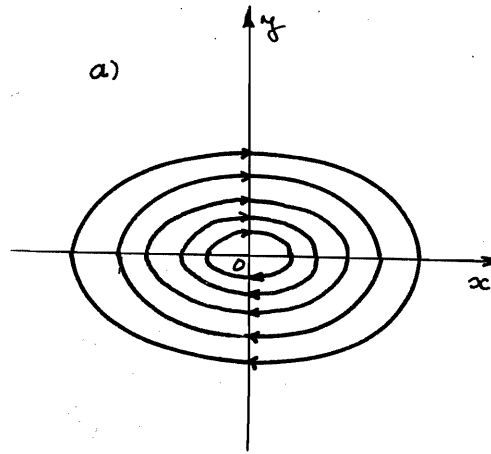
i jednačina (19) se može sada napisati u obliku

$$(y + q_2 x)^{q_2} = C (y + q_1 x)^{q_1} \quad (21)$$

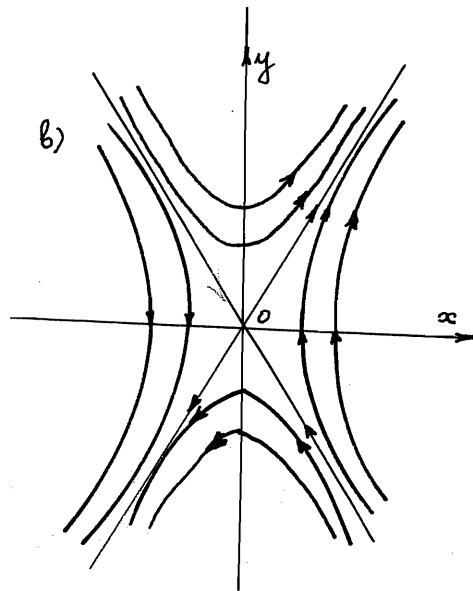
Uvodjenjem novih promenljivih  $u = y + q_2 x$  i  $v = y + q_1 x$  jednačina (21) postaje

$$v = C_1 u^{q_2/q_1} = C_1 u^\alpha \quad (22)$$

gde je  $\alpha = q_2/q_1 > 1$ . Za  $C_1 = 0$  integralna kriva je  $u$ -osa, dok je za  $C_1 \rightarrow \infty$   $v$ -osa. Ostale integralne krive su parabole, što zavisi od vrednosti  $C_1$ , a što se vidi sa slike 12 a. Osa  $u$  je tangenta na sve integralne krive u tački  $u=0$ ,  $v=0$ , jer je  $\frac{dv}{du} = 0$  za  $u=0$ , što ćemo iskoristiti za odredjivanje oblika faznih trajektorija u  $(x, y)$ -ravni. Jednačina  $u$ -ose je  $v = y + q_1 x = 0$ , odnosno  $y = -q_1 x$ , a  $v$ -ose  $u = y + q_2 x = 0$  odnosno  $y = -q_2 x$ . Na slici 12 b prikazan je izgled faznih trajektorija sa smerom kretanja pokretne tačke po njima. Singularna tačka  $(0, 0)$  je tačka kroz koju prolaze sve integralne krive, pa se i naziva č v o r o m. U ovom slučaju je to stabilan čvor, jer je smer



S1.13 a



S1.13 b

kretanja ka čvoru i odgovara stabilnom stanju ravnoteže.

Za  $\delta=0$  integralne krive su elipse jednačine  $y^2 + \omega^2 x^2 = C$ , a singularna tačka je njima obuhvaćena i predstavlja centar, što se vidi sa slike 13 a. Ovo su zatvorene fazne krive i odgovaraju periodičkom kretanju. Do ovakvog zaključka se dolazi posmatranjem tačke, koja se kreće po trajektoriji i posle izvesnog vremena  $T$  dođe ponovo u istu tačku.

Na primeru obrnutog matematičkog klatna može se pokazati singularna tačka u obliku sedla. Jednačina kretanja u ovom slučaju je

$$\ddot{x} - \omega^2 \sin x \approx \ddot{x} - \omega^2 x = 0$$

odnosno

$$\frac{dy}{dt} = \omega^2 x \quad \frac{dx}{dt} = y$$

pa je jednačina integralnih krivih

$$\frac{dy}{dx} = \omega^2 \frac{x}{y}$$

koja integraljenjem postaje

$$y^2 - \omega^2 x^2 = C$$

Fazni portret je familija hiperboli predstavljenih na slici 13 b. Za  $C=0$  integralne krive su  $y = \pm \omega x$ , a za  $C \neq 0$  te prave se javljaju kao asimptote. Singularna tačka je tipa sedla. Na grafiku sa slike 13 b naznačen je smer kretanja, odakle zaključujemo da je tačka  $(0, 0)$  nestabilno sedlo, do čega smo mogli da dođemo i analizom stabilnosti gornjeg vertikalnog položaja matematičkog klatna. U svakom realnom kretanju položaj ravnoteže čiji je lik u faznoj ravni tačka tipa sedla se javlja kao nestabilan.

Oscilovanje mase pod uticajem restitucione sile jake opruge  $-\omega^2 \psi(x) = -(\alpha x + \beta x^3)$  zadato je diferencijalnom jednačinom oblika

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x + \beta x^3 = 0 \quad (23)$$

Uvodjenjem faznih koordinata  $y = \frac{dx}{dt}$  i  $x$  prethodna jednačina se svodi na sistem

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha x - \beta x^3 \quad \frac{dx}{dt} = y \quad (24)$$

Ovaj sistem jednačina, za  $\alpha x + \beta x^3 \neq 0$  i  $y \neq 0$  se može napisati kao jednačina integralnih krivih oblika

$$y dy = -(\alpha x + \beta x^3) dx \quad (25)$$

čijim integraljenjem se dobija jednačina integralnih krivih u konačnom obliku

$$y^2 + \alpha x^2 + \frac{\beta}{2} x^4 = h \quad (26)$$

gde je  $h$  konstanta integracije. Singularna tačka faznog portreta je u tački  $x=0, y=0$  i predstavlja centar. Integralne krive presecaju apscisnu osu u tačkama za koje je istovremeno

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ x^4 + \frac{2\alpha}{\beta} x^2 - \frac{2h}{\beta} &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

odnosno

$$x_{1/2} = \pm \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \frac{2h}{\beta}}} \quad (28)$$

a ordinatnu osu u tačkama u kojima je  $y = \pm \sqrt{h}$ . Prema izrazu (26) može se zaključiti da su fazne krive zatvorene krive poput elipse. Za male vrednosti  $h$ , a sa tim i vrednosti  $x$ , član  $\beta x^4/2$  se može zanemariti u približnom određivanju karaktera krivih, pa se da zaključiti da su krive



oblika elipsi. Za veće vrednosti  $h$  i  $\alpha$  imamo izobličenje elipsi sa porastom člana  $\beta x^4/2$ . Na slici 14 a su prikazane fazne krive za taj slučaj. Za ovo kretanje zaključujemo da je periodičko, jer se reprezentativna tačka kreće po zatvorenoj krivoj, te mora posle vremena  $T$  da ponavlja svoje uzastopne brzine i položaje. Vreme  $T$  je period oscilovanja koja je funkcija amplitude. Strelice na faznim krivim pokazuju smer kretanja reprezentativne tačke.

Ako je restituciona sila meke opruge data kao  $-w^2\phi(x) = -(\alpha x - \beta x^3)$  onda za slučaj kretanja materijalne tačke pod uticajem te sile, integralne krive u faznoj ravni faznih koordinata  $x$  i  $y = \dot{x}$  su zadate sistemom jednačina

$$\frac{dy}{dt} = -(\alpha x - \beta x^3) \quad \frac{dx}{dt} = y \quad (30)$$

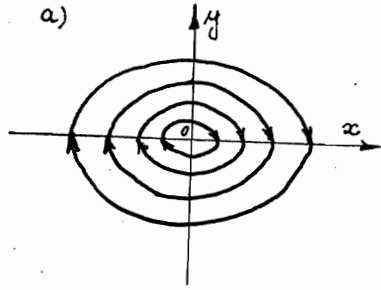
odakle se dobija jednačina integralnih krivih u konačnom obliku

$$y^2 + \alpha x^2 - \frac{\beta}{2} x^4 = h \quad (31)$$

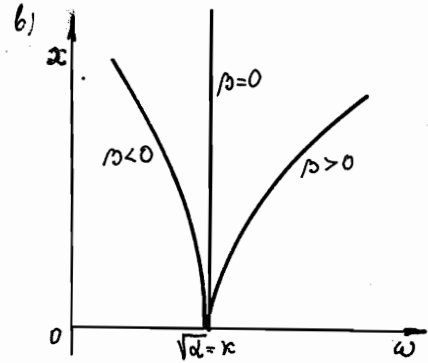
Presek ove krive sa apscisnom osom je za

$$x = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - \frac{2h}{\beta}}} \quad (33)$$

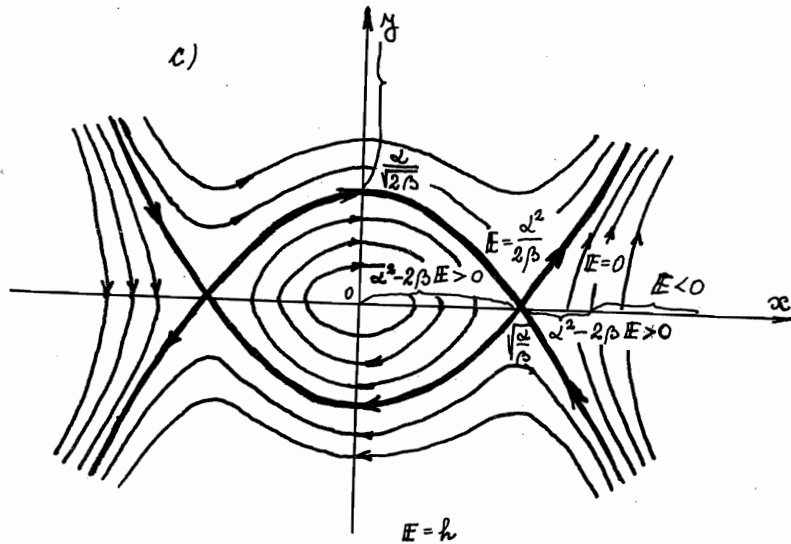
a sa ordinatnom osom za  $y = \pm \sqrt{h}$  i postoji samo za  $h \geq 0$ . Fazne krive date jednačinom (31) prikazane su u ravni  $(x, y)$  na slici 14 c. Vidi se da sve krive nisu zatvorene, ali da seku koordinatne ose ortogonalno izuzev u tačkama na  $x$ -osi u kojima je  $\phi(x) = 0$ , tj.  $x = 0$  i  $x = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ , koje su singularne tačke. Za  $h \geq 0$  i male vrednosti  $\alpha$  krive imaju oblik približno centralnih elipsi, a sa udaljenjem od tačke  $x = 0$ , krive menjaju oblik pod uticajem porasta člana  $-\beta x^4/2$  sa porastom fazne koordinate  $x$ . Zbog parnosti po  $x$  i  $y$  integralne krive su simetrične u odnosu na koor-



Sl.14 a



Sl.14 b



Sl.14 c

dinane ose fazne ravni. Proučavanje oblika integralnih krivih moramo da ograničimo na nekoliko oblasti.

Za  $h < 0$  integralne krive su otvorene krive

$$y = \pm \sqrt{-|h| - \alpha x^2 + \beta x^4/2} \quad (34)$$

i definisane su za

$$|x| \geq \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \frac{2|h|}{\beta}}} \quad (35)$$

pri čemu imaju dve grane koje podsećaju na grane hiperbole.

Za  $h = 0$  dvema granama hiperboloidnog oblika se pridružuje i tačka  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

Za  $h > 0$  integralne krive su

$$y = \pm \sqrt{h - \alpha x^2 + \beta x^4/2} \quad (36)$$

i sastoje se iz jedne zatvorene krive i dve otvorene grane ili iz samo dve otvorene grane.

Za  $h = \alpha^2/2\beta$  dobija se kriva koja je na prelazu napred navedenih grupa integralnih krivih i naziva se razdvojnim trajektorijom ili sepa trisom. Na ovoj krivoj je za  $x = 0$  brzina  $y = \pm \alpha/\sqrt{2\beta}$ , a brzina je jednaka nuli za  $x = \pm \sqrt{\alpha/\beta}$ , t.j. u presecima integralne krive sa apscisnom osom.

Za  $h < \alpha^2/2\beta$  svaka integralna kriva se sastoji iz tri grane: jedne zatvorene, koja okružuje koordinatni početak i dve otvorene neograničene grane

Za  $h > \alpha^2/2\beta$  ne postoje preseci sa  $x$ -osom odnosno nema tačaka kojima odgovara brzina jednaka nuli, a integralne krive su dve otvorene neograničene grane, kao što je na slici 14 c naznačeno. Za  $x = 0$  brzina je  $y = \pm \alpha/\sqrt{2\beta}$ .

Ovde smo mogli da uočimo da postoje tri vrste

grana integralnih krivih i jedna izolovana tačka, pri čemu je jedna integralna kriva na prelazu sve tri grane. Na faznom portretu uočavamo tri singularne tačke i to jedan centar i dve sedlaste tačke. Centru odgovara stabilno stanje ravnoteže, dok sedlastim tačkama odgovaraju nestabilna stanja ravnoteže. Sedlaste tačke se mogu nazvati i " r e p u l z i v n i m " tačkama ravnoteže. Treba naglasiti da zatvorenim faznim krivama odgovaraju periodička rešenja, a otvorenim neperiodička. U slučaju kretanja po razdvojnoj krivoj interesantno je sračunati period  $T_s$  potreban za kretanje reprezentativne tačke do sedlaste tačke  $(\sqrt{\alpha/\beta}, 0)$

$$T_s = 4 \int_0^a \frac{dx}{v} = 4 \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{h - \alpha x^2 + \beta x^4/2}} = \sqrt{\frac{2\beta}{\alpha^2}} \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} \quad (37)$$

gde je  $\sqrt{\beta/\alpha} x = \sin \theta$ , odakle vidimo da je  $T_s$  neodređeno, pa za to kretanje i kretanje u bliskoj okolini sedlaste tačke zaključujemo da je sporo - da je p u z a n j e.

Uzred bi moglo da se napravi izvesno poredjenje u zavisnosti od amplitude  $x$  i frekvencije oscilovanja  $\omega$  za karakteristike  $-\omega^2 f(x) = -(\alpha x \pm \beta x^3)$ . Na skiciranom dijagramu sa slike 14 b je prikazana ta zavisnost za linearnu, meku i jaku oprugu. Za jaku oprugu  $\beta > 0$  frekvencija raste sa amplitudom, a za meku  $\beta < 0$  frekvencija opada sa porastom amplitude kao sto je na slici naznačeno.

## 2. SINGULARNE TAČKE I KRITERIJUMI ZA NJIHOVU KLASIFIKACIJU

Položaji ravnoteže - mirovanja sistema sa jednim stepenom slobode oscilovanja čije kretanje opisuje jednačina oblika

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x, \dot{x}) = 0 \quad (1)$$

odgovaraju singularitetima diferencijalne jednačine

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{f(x, y)}{y} \quad (2)$$

U prethodnom paragrafu bilo je reči o singularnim tačkama i njihovoj podeli, a ovde će biti reči o kriterijumima za njihovu klasifikaciju i o njihovoj primenu pri proučavanju ponašanja sistema sa jednim stepenom slobode oscilovanja.

Posmatraćemo opštiju diferencijalnu jednačinu datu kao

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \quad (3)$$

Sa  $(x_0, y_0)$  obeležimo singularnu tačku, za koju su jednovremeno zadovoljeni uslovi  $P(x_0, y_0) = 0$  i  $Q(x_0, y_0) = 0$ .

Svaku drugu tačku za koju jednovremeno  $P(x, y)$  i  $Q(x, y)$  nisu jednaki nuli posmatramo kao regularnu tačku, tj. ona nije singularna. Ako funkcije  $P(x, y)$  i  $Q(x, y)$  razvijemo u red po stepenima  $(x - x_0)$  i  $(y - y_0)$  dobijamo

$$\frac{d(y - y_0)}{d(x - x_0)} = \frac{(x - x_0)Q'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)Q'_y(x_0, y_0) + Q_1(x, y)}{(x - x_0)P'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)P'_y(x_0, y_0) + P_1(x, y)} \quad (4)$$

jer je  $Q(x_0, y_0) = 0$  i  $P(x_0, y_0) = 0$  prema definiciji singularnih tačaka. Iz ovoga možemo da zaključimo da koordinatni sistem  $(x, y)$  možemo da premestimo u singularnu tačku i da zato možemo da razmatramo singularne tačke diferencijalne jednačine oblika

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy + Q_2(x, y)}{ax + by + P_2(x, y)} \quad (5)$$

ne gubeći pri tome opštost u razmatranju. Poincaré je pokazao da diferencijalna jednačina oblika (19) u kojoj su konstante  $a, b, c$  i  $d$  takve da je determinanta  $\Delta = ad - bc \neq 0$  i u kojoj funkcije  $P_2(x, y)$  i  $Q_2(x, y)$  postaju nula kao  $x^2 + y^2$  kada  $x \rightarrow 0$  i  $y \rightarrow 0$ , imaju singularne tačke kao i jednačina

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by} \quad (6)$$

Takodje je Poincaré pokazao i koji su kriterijumi za razlikovanje tipova singularnih tačaka, a u funkciji konstanti linearnog dela funkcija  $P(x, y)$  i  $Q(x, y)$ ,  $a, b, c$  i  $d$ . Vrlo retko se javljaju slučajevi kada je determinanta jednaka nuli u kom slučaju se dobijaju singulariteti višeg reda i koji se razlikuju od onih koji se dobijaju iz jednačine (6).

Uslov  $\Delta \neq 0$  je najčešće zadovoljen pa ćemo se zato i zadržati na Poincaré - ovim rezultatima, izvedeći samo kriterijume za klasifikaciju singularnih tačaka.

Iz jednačine (6) dobija se singularna tačka

$x=0$  ,  $y = -\frac{a}{b}x = -\frac{c}{d}x = 0$  kada je  $\Delta \neq 0$  .Ova singularna tačka se javlja kao jedinstvena tačka linearnog sistema (6).Ovaj podatak o položaju singularne tačke ne koristi mnogo u oblasti nelinearnih sistema, jer ne kaže ništa o ponašanju fazne krive u oblasti singularne tačke, čak ni po linearnoj aproksimaciji. Zbog toga ćemo naći rešenje sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy \end{aligned} \quad (7)$$

Rešenje pretpostavljamo u obliku

$$\begin{aligned} x &= Ce^{rt} & \dot{x} &= Cre^{rt} \\ y &= Cbe^{rt} & \dot{y} &= Cbre^{rt} \end{aligned} \quad (8)$$

Kako je  $e^{rt} \neq 0$  , to rešenje  $x=0$  ,  $y=0$  nije obuhvaćeno oblikom (8). Zamenom rešenja (8) u sistem jednačina (7) i skraćivanjem sa  $Ce^{rt}$  dobijamo sistem

$$\begin{aligned} br - db &= c \\ r - b\delta &= a \end{aligned} \quad (9)$$

odakle se  $\delta$  može izračunati u obliku

$$\delta = \frac{r-a}{b} = \frac{c}{r-d} \quad (10)$$

Na osnovu (10) dobijamo karakterističnu jednačinu

$$r^2 - (a+d)r + ad - bc = 0 \quad (11)$$

čiji su koreni

$$r_{1/2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - ad + bc} \quad (12)$$

Kako se iz jednačine (11) vidi postoje dva korena, a sa tim i dva koeficijenta raspodele  $\beta_1$  i  $\beta_2$  koji se javljaju kao koreni jednačine

$$b\beta^2 + (a+d)\beta - c = 0 \quad (13)$$

koja se dobija iz sistema jednačina (9) eliminacijom  $v$ . Opšte rešenje rešenje sistema jednačina (7) sada dobija oblik

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \\ y &= C_1 \beta_1 e^{r_1 t} + C_2 \beta_2 e^{r_2 t} \end{aligned} \quad (14)$$

Zavisno od znaka i vrednosti korena  $r_1$  i  $r_2$  možemo da odredimo karakter integralne krive u okolini tačke  $x=0$ ,  $y=0$ . Zato izvedemo linearnu transformaciju koordinata

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y \\ \eta &= \gamma x + \delta y \end{aligned} \quad (15)$$

pri čemu  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\lambda$  i  $\mu$  odredjujemo iz uslova da se sistem početnih jednačina (7) može da napiše u obliku

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \lambda \xi \\ \frac{d\eta}{dt} &= \mu \eta \end{aligned} \quad (16)$$

Diferenciramo sistem (15) i izjednačimo ga sa sistemom jednačina (16) odakle dobijamo

$$\begin{aligned} \alpha(a-\lambda) + \beta c &= 0 & \gamma(a-\mu) + \delta c &= 0 \\ \alpha b + \beta(d-\lambda) &= 0 & \gamma b + \delta(d-\mu) &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

iz koga treba odrediti koeficijente transformacije  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  i  $\delta$  uz uslov da su različiti od nule, pa treba da su determinante sistema jednake nuli

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & c \\ b & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0 \quad (18)$$



$$\begin{vmatrix} a-\mu & c \\ b & d-\mu \end{vmatrix} = \mu^2 - (a+d)\mu + ad - bc = 0 \quad (19)$$

Kako su jednačine (18) i (19) jednake po obliku i vrednostima koeficijenata sa karakterističnom jednačinom (11) to zaključujemo da je  $r_1 = \lambda$  i  $r_2 = \mu$ . Odredivši  $\lambda$  i  $\mu$  možemo da pišemo da je

$$\frac{\beta}{\delta} = \frac{r_2 - d}{b} = \frac{c}{r_2 - a} = -\lambda_1 \quad (20)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r_1 - d}{b} = \frac{c}{r_1 - a} = -\lambda_2 \quad (21)$$

pa je lako pokazati da je

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= -\frac{a-d}{b} \\ \lambda_1 \lambda_2 &= -\frac{c}{b} \end{aligned} \quad (22)$$

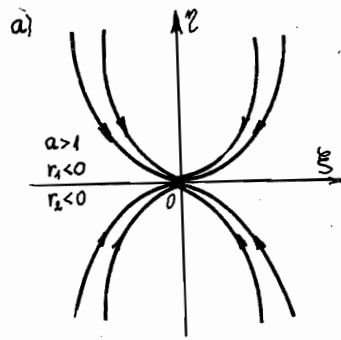
odakle sleduje da se  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  javljaju kao koreni jednačine (13) čiji su koreni koeficijenti raspodele. Sada se formule transformacije (15) mogu napisati kao

$$\begin{aligned} \xi &= \beta(-\lambda_2 x + y) \\ \eta &= \alpha(-\lambda_1 x + y) \end{aligned} \quad (23)$$

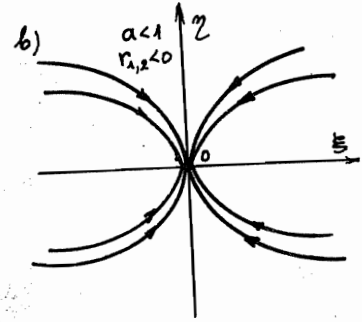
a sistem jednačina (16) kao

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= r_1 \xi \\ \frac{d\eta}{dt} &= r_2 \eta \end{aligned} \quad (24)$$

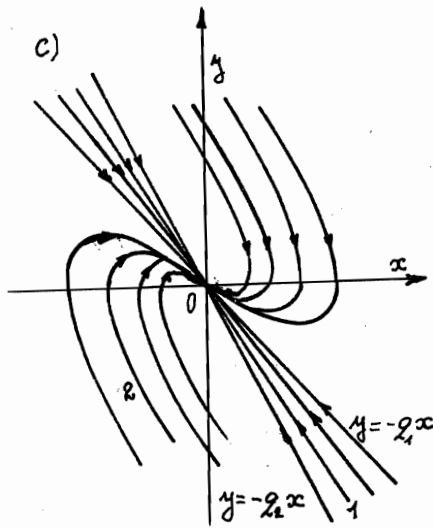
Razmatranje karaktera faznih krivih moguće je vrlo lako sprovesti u ravni  $(\xi, \eta)$ , a sa tim odrediti i vrstu singularne tačke. S obzirom na linearnu vezu faznih koordinata i promenljivih  $\xi$  i  $\eta$ , karakter faznih



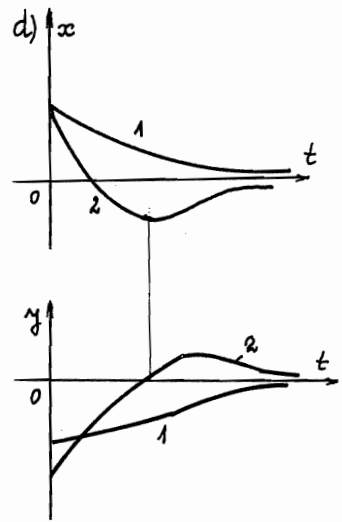
S1.15 a



S1.15 b



S1.15 c



S1.15 d

krivih u faznoj ravni neće se znatno promeniti u odnosu na onaj u ravni  $(\xi, \eta)$ . Kada pretpostavimo vrednosti korena  $r_1$  i  $r_2$  onda na osnovu toga možemo odrediti integralne krive i vrstu singulariteta.

1<sup>o</sup> Neka su  $r_1$  i  $r_2$  realni i istog znaka, pa sledi da za realne vrednosti  $x$  i  $y$ , moraju biti i vrednosti za  $\xi$  i  $\eta$  realne.

Jednačina integralnih krivih je tada

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{r_2}{r_1} \frac{\eta}{\xi} = a \frac{\eta}{\xi} \quad (25)$$

gde je  $a = r_2/r_1 > 0$  i jednačina integralnih krivih u konačnom obliku je

$$\eta = C \xi^a \quad (26)$$

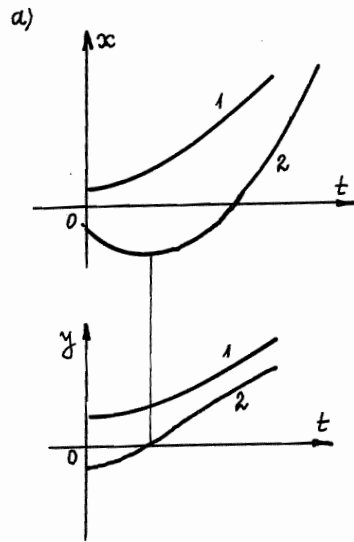
Za  $0 < a < 1$  tangenta integralnih krivih je  $\eta$  -osa ( $\xi = 0$ ), a za  $a > 1$  tangenta je  $\xi$  -osa ( $\eta = 0$ ). Na slici 15 a i b prikazan je izgled integralnih krivih u  $(\xi, \eta)$  ravni. Vidi se da je singularna tačka čvor i to za negativne vrednosti korena  $r_1$  i  $r_2$  stabilni, a za  $r_1$  i  $r_2$  pozitivno nestabilni čvor.

U  $(x, y)$  ravni ose  $\xi$  i  $\eta$  imaju jednačine

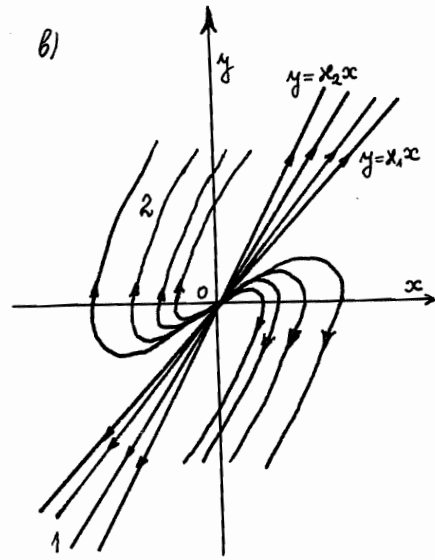
$$\begin{aligned} y &= \lambda_1 x & \text{za } \xi - \text{ocy} \\ y &= \lambda_2 x & \text{za } \eta - \text{ocy} \end{aligned} \quad (27)$$

U ravni  $(x, y)$  fazne krive imaju izgled kao na slici 15 c za  $a > 1$  i sa negativnim korenima; singularna tačka je stabilni čvor. Na slikama 16 a za  $a > 1$  i 16 b za  $a < 1$  i sa pozitivnim korenima  $r_1$  i  $r_2$  singularna tačka je nestabilni čvor.

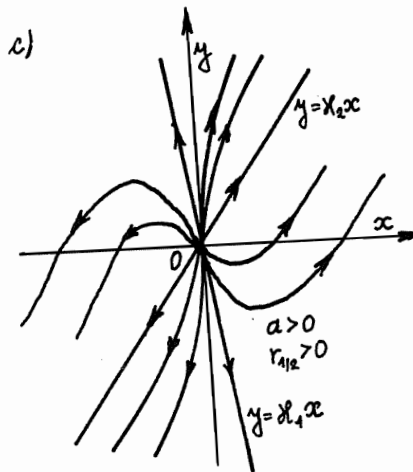
2<sup>o</sup> Kada su  $r_1$  i  $r_2$  realni i različitog znaka onda integralne krive u ravni  $(\xi, \eta)$  su zadate



Sl.16 a



Sl.16 b



Sl.16 c

jednačinom

$$\eta = \frac{C}{\xi^a} \quad (28)$$

gde je  $a = |r_2/r_1|$ . Jednačina predstavlja familiju hiperbola prikazanih na slici 17 b. Ose  $\xi$  i  $\eta$  su asimptote i za  $C=0$  i  $C=\infty$  predstavljaju integralne krive. Tačka  $\xi=0$ ,  $\eta=0$  je sedlasta tačka i to nestabilno sedlo. U ravni  $(x, y)$  na slici 17 c fazne krive su oblika hiperbola sa asimptotama  $y=\lambda_1 x$  i  $y=\lambda_2 x$ , koje su preslikane  $\xi$  i  $\eta$  ose na ravan  $(x, y)$ .

3<sup>o</sup> Ako su koreni karakteristične jednačine konjugovano-kompleksni i iznose  $r_1 = a_1 + ib_1$ ,  $r_2 = a_1 - ib_1$ , gde je  $i = \sqrt{-1}$ , a  $a_1$  i  $b_1$  su realni brojevi, onda su za realne vrednosti  $x$  i  $y$ ,  $\xi$  i  $\eta$  konjugovano-kompleksni. Medjutim mogu se naći linearne transformacije za

$\xi$  i  $\eta$  u novim realnim promenljivim  $u$  i  $v$  smenom

$$\begin{aligned} \xi &= u + iv \\ \eta &= u - iv \end{aligned} \quad (29)$$

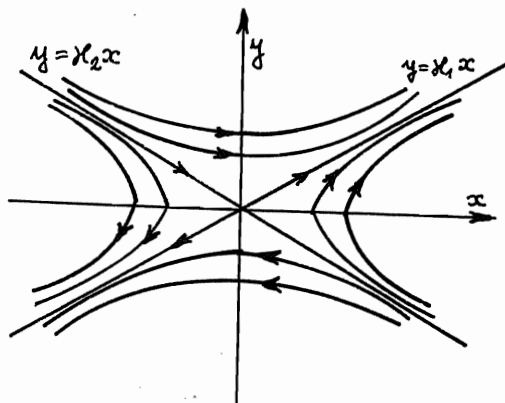
Na osnovu (24) možemo da napišemo

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= a_1 u - b_1 v \\ \frac{dv}{dt} &= b_1 u + a_1 v \end{aligned} \quad (30)$$

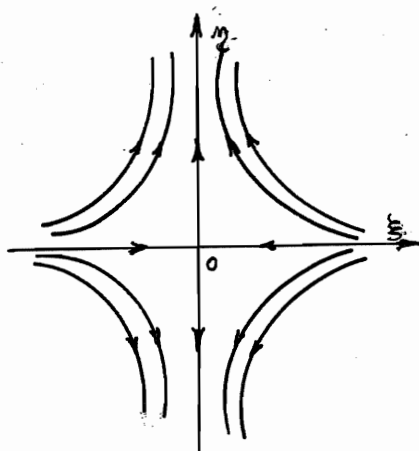
Diferencijalna jednačina integralnih krivih u ravni  $(u, v)$  je tada

$$\frac{dv}{du} = \frac{b_1 u + a_1 v}{a_1 u - b_1 v} \quad (31)$$

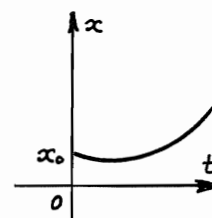
odakle se dobija singularna tačka  $u=0$ ,  $v=0$ . Radi lakšeg geometrijskog razmatranja integralnih krivih možemo da predjemo na polarne koordinate u  $(u, v)$  ravni



Sl.17 c



Sl.17 b



Sl.17 a

$$u = \rho \cos \varphi \quad v = \rho \sin \varphi \quad (32)$$

Odakle se dobija diferencijalna jednačina integralnih krivih

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{a_1}{b_1} d\varphi \quad (33)$$

iz koje se integraljenjem dobija

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{a_1}{b_1}(\varphi - \varphi_0)} = C e^{\frac{a_1}{b_1}\varphi} \quad (34)$$

Ova jednačina predstavlja logaritamsku spiralu. Tačka  $u=0$ ,  $v=0$  se javlja kao asimptotska tačka - žiža (fokus). Na slikama 11 a i b i 18 a prikazan je oblik integralnih krivih u ravni  $(u, v)$  i u ravni  $(x, y)$ , u kojoj su krive spirale s obzirom na linearnu vezu koordinata  $u$  i  $v$  sa  $x$  i  $y$ .

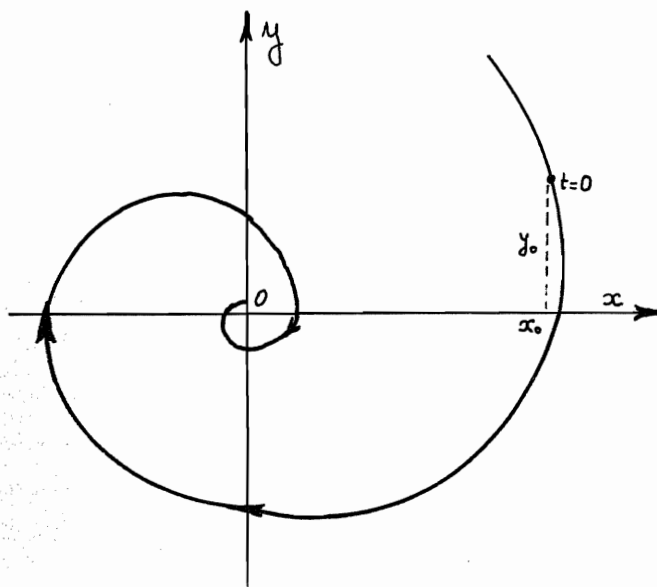
Za pozitivni realni deo  $a_1$  (pri čemu je po načinu formiranja korena) korena  $r_1$  i  $r_2$  sleduje iz jednačine (34) da se tačka udaljuje od žiže te je to nestabilna spiralna tačka. Za negativni realni deo  $a_1$  singularna tačka je stabilna žiža, jer se po njoj reprezentativna tačka približava sa porastom vremena.

4<sup>o</sup> U slučaju da je realni deo  $a_1$  jednak nuli sistem jednačina (31) je

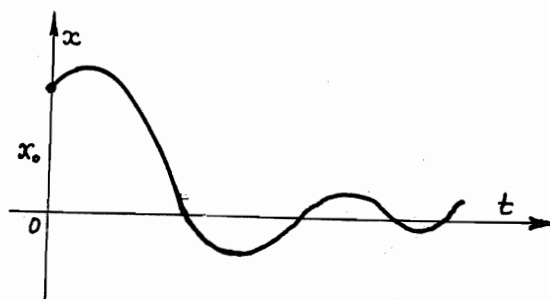
$$\frac{dv}{du} = -\frac{u}{v} \quad ; \quad u^2 + v^2 = \text{const.} \quad (35)$$

pa su integralne krive u ravni  $(x, y)$  krugovi sa singularnom tačkom kao centrom. Uzimajući u obzir da je

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}[(\alpha + \beta)x + (\rho + \delta)y] \\ v &= \frac{1}{2}[(\alpha - \beta)x + (\rho - \delta)y] \end{aligned} \quad (36)$$



Sl.18 a



Sl.18 b



i zamenivši u jednačinu  $u^2 + v^2 = \text{const.}$  dobijamo

$$\frac{\alpha}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 + y^2 + \alpha y \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{\beta} \right) = C \quad (37)$$

odakle vidimo da singularnu tačku okružuju zatvorene krive ali o karakteru same singularne tačke ne možemo ništa da zaključimo.

Za  $a+d \neq 0$  i  $ad-bc \neq 0$  sistem jednačina (7) može da ima singularnu tačku zavisno od vrednosti korena  $r_1$  i  $r_2$  kako je to u tablici naznačeno

| Koreni<br>$r_1$ i $r_2$ | realni        |                 |              | konjugovano kompleksni |               |
|-------------------------|---------------|-----------------|--------------|------------------------|---------------|
|                         | negativni     | pozitivni       | raznog znaka |                        |               |
| Vrsta singulariteta     | stabilni čvor | nestabilni čvor | sedlo        | nestabilna žiža        | stabilna žiža |

Ako uvedemo oznake

$$p = -(a+d) \quad q = ad - bc$$

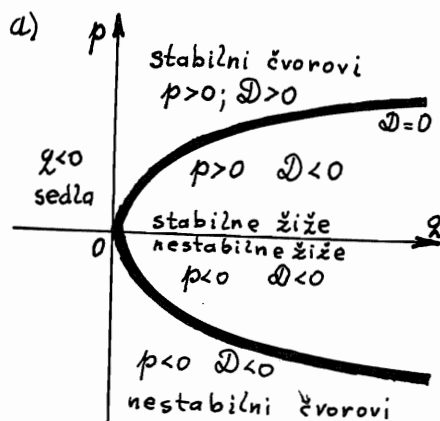
onda se koreni karakteristične jednačine mogu napisati u obliku

$$r_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad (38)$$

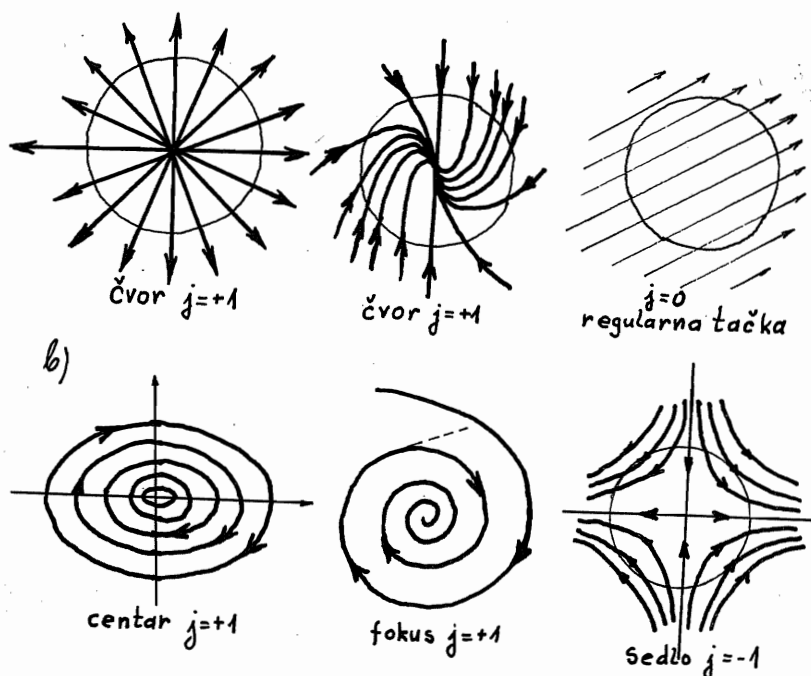
Sa  $\mathcal{D}$  obeležimo diskriminantu korena, koja svojim predznakom određuje da li je koren realan ili ne, a znak  $p$  određuje znak realnog dela kod konjugovano kompleksnih korena.

U ravni  $(q, p)$  na slici 19 a su prokazane oblasti stabilnosti i obeležene vrste singularnih tačaka u tim oblastima. Kriva  $p^2 = 4q$  deli oblast  $(q, p)$  ravni na delove u kojima su realni i imaginarni koreni  $r_1$  i  $r_2$ . Za  $q < 0$  oblast je nestabilna, a singularne tačke su sedla, dok su koreni  $r_1$  i  $r_2$  uvek realni i raznog znaka. Za

$q > 0$  diskriminanta  $\mathcal{D}$  može biti pozitivna i negativna i kriva  $p^2 - 4q = 0$  deli singularne tačke žiže od čvorova. Za  $p > 0$  i  $q > 0$  oblast  $(q, p)$  ravni sadrži stabilne singularitete : čvorove za  $p > 0, \mathcal{D} > 0$  i žiže za  $p > 0, \mathcal{D} < 0$ .



Sl.19 a



Sl.19 b

## 3. INDEKS SINGULARITETA

Poincaré je prvi uveo pojam indeksa singulariteta. Po Poincaré-u indeks singulariteta možemo ovako da opišemo:

Izaberemo u faznoj ravni neku zatvorenu krivu  $C$ , za koju pretpostavimo da je prosta, da nema dvostrukih tačaka i da ne prolazi kroz singularitete, a da u sebi sadrži samo jedan singularitet. Zatim uzmemo neku tačku  $S$  na krivoj  $C$  i postavimo kroz nju vektor fazne brzine određen sa  $\frac{dx}{dt}$  i  $\frac{dy}{dt}$  tj.

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \quad (1)$$

i označimo sa  $\theta(t)$  ugao koji vektor fazne brzine zahvata sa pozitivnom apscisnom osom  $Ox$ .

Ako se izvrši kompletan obrtaj po zatvorenoj krivoj  $C$ , pokrećući tačku  $S$  u pozitivnom matematičkom smeru i ponovo dolazeći u početnu tačku, ugao  $\theta(t)$  će se promeniti za  $2\pi j$ , gde je  $j$  pozitivan ili negativan ceo broj a vektor fazne brzine će ponovo doći u izabrani prthodni položaj. Broj  $j$  se naziva **indeksom singulariteta**, koji obuhvata zatvorena kriva  $C$ . Očevidno je da se može da napiše za indeks singulariteta da je

$$j = \frac{1}{2\pi} \oint_C d(\operatorname{arctg} \frac{dY}{dx}) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{P dQ - Q dP}{Q^2 + P^2} \quad (2)$$

jer je

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{dY}{dx} \quad (3)$$

odnosno

$$d\theta = \frac{P dQ - Q dP}{Q^2 + P^2} \quad (4)$$

Ako je, naprimer  $j = -1$  to znači da se vektor polja - fazne brzine - jednom obrne oko tačke S u negativnom matematičkom smeru, dok ista tačka S načini jedan obrtaj u pozitivnom matematičkom smeru po krivoj C. Ako je  $j = 0$  vektor fazne brzine može da osciluje ali ne pravi potpunu rotaciju oko tačke S. Ovakva definicija indeksa singulariteta je prihvatljiva samo ako je taj indeks isti po vrednosti za bilo koju krivu koja obuhvata posmatrani singularitet. Ovo se može pokazati izabiranjem druge krive C', koja obuhvata singularitet i ako krivu C prevodimo u krivu C' pri čemu ugao  $\theta(t)$  u korespondentnim tačkama S i S' može da varira, ali pošto je indeks stalan broj, posle celog obrtaja se mora dobiti ista vrednost.

Ako kriva C obuhvata više singulariteta, onda je indeks singulariteta krive C jednak zbiru indeksa krivih koje obuhvataju pojedine singularitete. Za praktično rešavanje indeksa singulariteta moguće je uzeti kao krivu C elipsu

$$(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = 1 \quad (5)$$

koja okružuje singularitet (tačku ravnoteže). Ako su  $P(x, y)$  i  $Q(x, y)$  linearne funkcije

$$P(x,y) = ax + by \quad (6)$$

$$Q(x,y) = cx + dy$$

onda je

$$dP = a dx + b dy$$

$$dQ = c dx + d dy$$

što zamenom u (2) daje

$$j = \frac{bc - ad}{2\pi} \oint_C \frac{x dy - y dx}{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2} \quad (7)$$

Za integraljenje po krivoj C se dobija

$$j = \frac{bc - ad}{2\pi} \int_C x dy - y dx = \frac{bc - ad}{2\pi} S \quad (8)$$

pa sleduje da je Poincaré - ov indeks singulariteta (+1) za čvor, žižu i centar, a za sedlo (-1), dok je za regularnu tačku nula što je i naznačeno na slici 19 b. S obzirom da centri, žiže i čvorovi imaju indeks (+1), mogli bi smo pomisliti da nam podatak o indeksu singulariteta ničemu ne služi. Medjutim važno je uočiti sledeće: ako je indeks singulariteta unutar neke krive C jednak (+1) ili (-1) možemo zaključiti da je krivom obuhvaćeno jedno manje sedlo ili više od ostalih singulariteta, što nam je dosta korisna informacija, jer znamo da integralne krive, koje prolaze kroz sedlastu tačku su prelazne krive, koje odgovaraju granama integralnih krivih različitog oblika.

#### 4. GRAFIČKE METODE

U većini slučajeva nelinearnih oscilacija pri razmatranju i proučavanju faznih trajektorija u faznoj ravni često se nailazi na nemogućnost analitičkog integraljenja. Zbog toga postoji više grafičkih približnih metoda za nalaženje integralnih krivih. Te metode u osnovi predstavljaju grafičko integraljenje. Neke od grafičkih metoda su opštijeg karaktera, a neke ograničene na jedan oblik diferencijalnih jednačina. Ove metode i pored svoje približnosti mogu da pruže željenu tačnost integralne krive. Takođe ove grafičke metode omogućavaju kvalitativnu analizu integralnih krivih.

##### 4.1. METODA IZOKLINA

Jedna od najopštijih grafičkih metoda je metoda **i z o k l i n a**. Metoda izoklina se primenjuje za nalaženje integralnih krivih diferencijalne jednačine drugog reda oblika

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \quad (1)$$

koja opisuje kretanje dinamičkog sistema. Ova metoda se može

primeniti i na opštiji oblik diferencijalne jednačine drugog reda, ako se ona u opštem slučaju pomoću faznih koordinata  $x$  i  $y = \dot{x}$  može da transformiše na sistem diferencijalnih jednačina prvog reda oblika

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y) \quad (2)$$

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y)$$

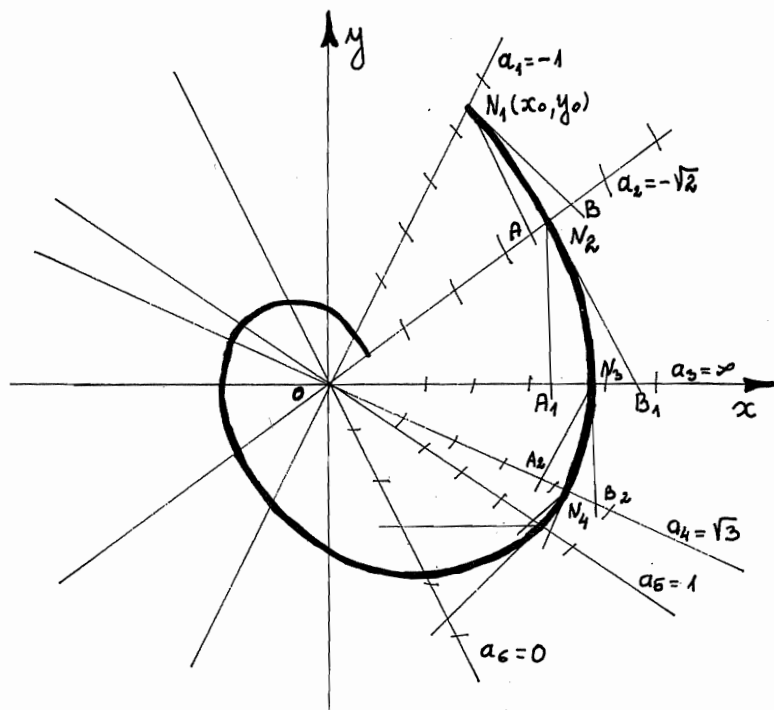
koje se mogu napisati u obliku

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = Y(x, y) \quad (3)$$

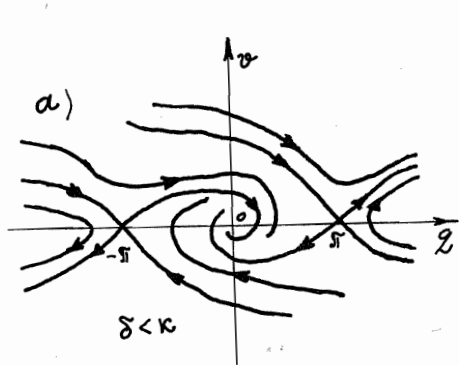
Ako stavimo da je  $Y(x, y) = a_i = \text{const}$ , dobijamo jednačinu geometrijskog mesta tačaka u kojima integralne krive imaju jednak (isti) ugao nagiba tangente na integralnu krivu. Krive  $Y(x, y) = a_i$  nazivaju se **izoklinama**.

Metoda izoklina se sastoji u sledećem:

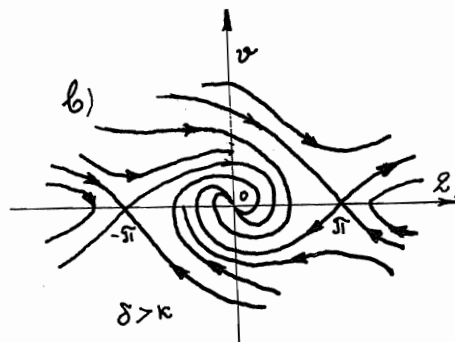
U faznoj ravni se postavi familija izoklina za razne vrednosti konstante  $a_i$ . Presečna tačka izoklinih je singularna tačka faznih trajektorija, jer u tim tačkama  $\frac{dy}{dx}$  ostaje neodređeno, a te tačke odgovaraju stanjima ravnoteže posmatranog sistema. Zatim, izaberemo tačku  $N_i$  na izoklini  $a_i$  (vidi sliku 20) kroz koju želimo da povučemo integralnu krivu i u njoj povučemo prave sa uglovnim koeficijentima  $a_i$  i  $a_{i+1}$ , koje seku narednu izoklinu sa uglovnim koeficijentom  $a_{i+1}$  u tačkama  $A$  i  $B$ . Podelimo, sada, luk izokline između tačaka  $A$  i  $B$  na dva jednaka dela tačkom  $N_{i+1}$ . Sada lukom krive spojimo tačke  $N_i$  i  $N_{i+1}$  tako da im prave sa nagibom  $a_i$  i  $a_{i+1}$  u odgovarajućim tačkama budu tangente. Isti postupak ponavljamo za tačku  $N_{i+1}$  na izoklini  $a_{i+1}$  čime dobijamo tačku  $N_{i+2}$  na izoklini  $a_{i+2}$  sa uglovnim koeficijentom  $a_{i+2}$  i td. Na slici 20 može da se vidi napred opisana konstrukcija.



S1.20



S1.22 a



S1.22 b



Za tačnije nalaženje integralnih krivih potrebno je da vrednosti  $a_i$  i  $a_{i+1}$  budu tako izabrane, da su izokline bliiske jedna drugoj.

Kao primer za nalaženje integralnih krivih metodom izoklina istu ćemo primeniti na matematičko klatno sa viskoznim prigušivanjem. Pretpostavljamo da je prigušivanje srazmerno prvom stepenu ugaone brzine. Jednačina kretanja tada glasi

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \kappa^2 \sin q = 0 \quad (4)$$

koja uvodjenjem smene  $\dot{q} = v$  daje sistem

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -2\delta v - \kappa^2 \sin q \\ \frac{dq}{dt} &= v \end{aligned} \quad (5)$$

iz koga se dobija jednačina integralnih krivih oblika

$$\frac{dv}{dq} = \frac{-2\delta v - \kappa^2 \sin q}{v} \quad (6)$$

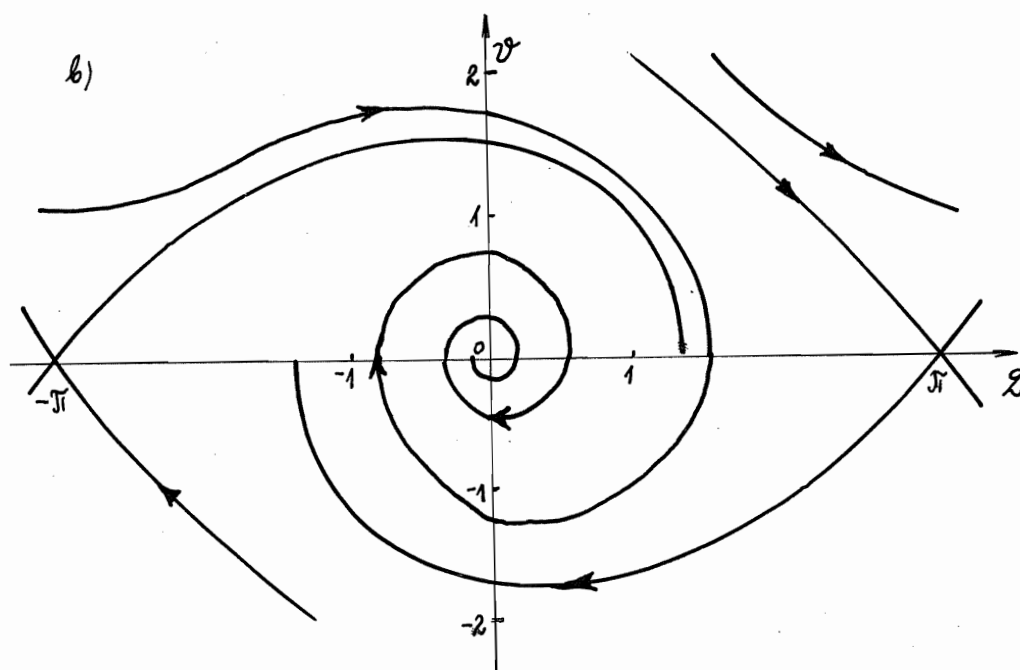
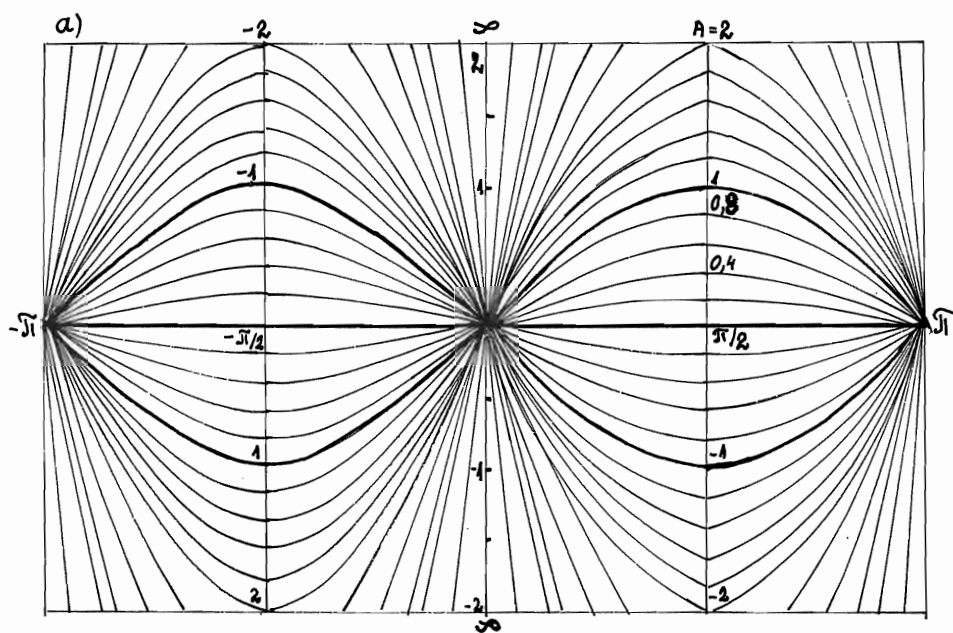
Iz jednačine (6) se vidi da su singularne tačke određene sa  $v=0$  i  $q = \pm \kappa \hat{\pi}$ ,  $\kappa = 1, 2, \dots$ . Izokline su date sa

$$v = -\frac{\kappa^2}{a_i + 2\delta} \sin q \quad (7)$$

odakle se vidi da su to sinusoide različite amplitude

$$A = -\frac{\kappa^2}{a_i + 2\delta} \quad (8)$$

Na slici 21 a date su izokline sa naznačenim pravcem tangenti na njima. U izabranoj tački  $N$  primenjujemo napred opisani postupak od izokline do izokline i dobijamo grafički prikazane integralne krive sa slike 21 b.



S1.21

U ovom slučaju fazni portret je periodičan sa periodom  $2\pi$ , i u intervalu koji se ponavlja ima tri singularne tačke. Ako je interval  $(-\pi, \pi)$  onda on sadrži dva sedlasta singulariteta i jednu tačku tipa žiže ili čvora. Karakter singularnih tačaka moguće je ovde i analitički odrediti. Zato ćemo da nadjemo koeficijente  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  koji iznose

$$\begin{aligned} a &= 0 ; & c &= -\kappa^2 \cos \varrho_0 ? \\ b &= 1 ; & d &= -2\delta \end{aligned} \quad (9)$$

pomoću kojih možemo da formiramo karakterističnu jednačinu na osnovu čijih korena određujemo karakter singulariteta.

Za singularitet  $\varrho_0 = 0$ ,  $\nu_0 = 0$  koreni karakteristične jednačine su

$$r_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \kappa^2} \quad (10)$$

čiji je realni deo uvek negativan, te je singularna tačka stabilna. Diskriminanta  $\mathcal{D} = \delta^2 - \kappa^2$  zavisi od odnosa  $\delta$  i  $\kappa$ . Kada je  $\delta > \kappa$  koreni su realni i negativni i singularna tačka je stabilni čvor (slika 22 b). Za  $\delta < \kappa$  koreni su konjugovano-kompleksni sa negativnim realnim delom, pa je singularna tačka stabilna žiža (spiralni centar). Stanje ravnoteže karakterisano ovom singularnom tačkom je u oba slučaja stabilno (slika 22 a).

Za singularne tačke  $\varrho_2 = \pi$ ,  $\nu_2 = 0$  i  $\varrho_3 = -\pi$ ,  $\nu_3 = 0$  koreni karakteristične jednačine su

$$r_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\kappa^2 + \delta^2} \quad (11)$$

odakle se vidi da su realni i različitog znaka, pa su zato singularne tačke tipa sedla, a stanja ravnoteže njima definisana nestabilna.

## 4.2. METODA LIENARD-A

Metoda francuskog inženjera Lienard-a se primenjuje se kod samopobudnih oscilacija i oscilacija koje se mogu definisati diferencijalnom jednačinom oblika

$$\ddot{q} + \varphi_1(\dot{q}) + \kappa^2 q = 0 \quad (12)$$

koja se smenom  $\tau = \kappa t$  može da transformiše na oblik

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} + \varphi\left(\frac{dq}{d\tau}\right) + q = 0 \quad (13)$$

gde je  $\varphi\left(\frac{dq}{d\tau}\right) = \frac{1}{\kappa^2} \varphi_1\left(\frac{dq}{dt}\right)$ , za grafičko nalaženje integralnih krivih i graničnih ciklusa, pomoću kojih mogu da se izuče svi oblici kretanja. Označivši sa  $v = \frac{dq}{d\tau}$  iz jednačine (13) može da se dobije jednačina integralnih krivih

$$\frac{dv}{dq} = \frac{-q - \varphi(v)}{v} \quad (14)$$

na koju može da se direktno primeni metoda Lienard-a.

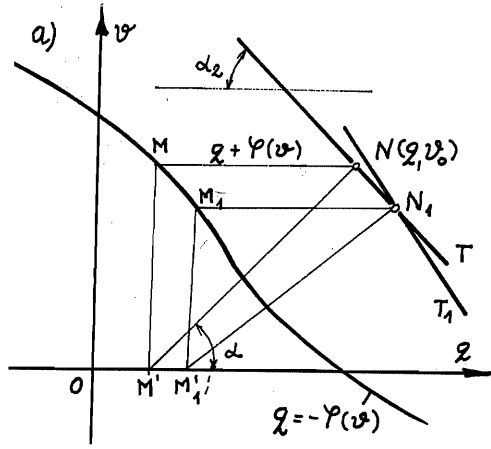
Metoda Lienard-a se sastoji u sledećem:

Nacrta se u faznoj ravni  $(q, v)$  kriva

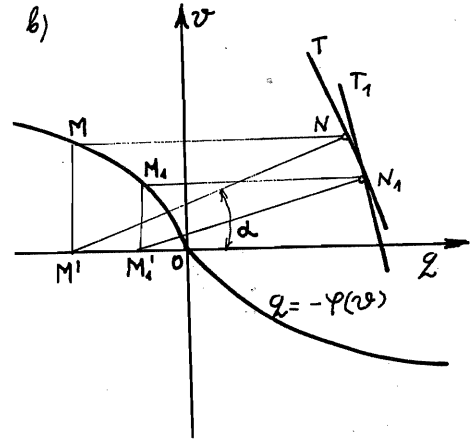
$q = -\varphi(v)$  (slika 23 a i b), a zatim se izabere tačka u toj ravni sa koordinatama  $q$  i  $v$ . Iz te tačke se povuče prava paralelna  $q$ -osi do preseka sa krivom  $q = -\varphi(v)$  i presečna tačka označi sa  $M$ . U tački  $M$  spusti se normala na  $q$ -osu, koja se seče u tački  $M'$ . Odsečak  $\overline{NM}$  je

$$\overline{NM} = q + \varphi(v)$$

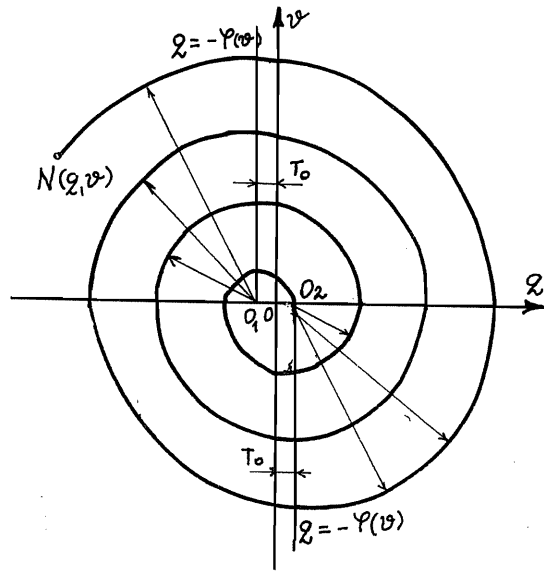
Sada spojimo presečnu tačku  $M'$  na  $q$ -osi sa izabranom tač-



Sl. 23 a



Sl. 23 b



Sl. 24

kom  $N$ , pri tome je tangens ugla nagiba duži  $\overline{M'N}$  prema osi  $q$  jednak:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{MM'}}{\overline{MN}} = \frac{-v}{q + \varphi(v)} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_2} \quad (15)$$

Upoređenjem izraza (14) i (15) zaključujemo da je tangenta na integralnu krivu upravna na duž  $\overline{NM'}$  u tački  $N$ , što sledi iz uslova ortogonalnosti dva pravca  $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha_2 + 1 = 0$ . Na slici 24 je dat grafički prikaz Lienard-ove metode. Cela fazna trajektorija se može dobiti na sledeći način:

Kroz tačku  $N$  povučemo odsečak upravnan na duži  $\overline{M'N}$  i na tom odsečku izaberemo novu tačku  $N_1$  i odredimo istim (kao opisani) postupkom tangentu na integralnu krivu u toj tački. Kao rezultat dobijemo izlomljenu liniju koja je utoliko približnija integralnoj krivoj ukoliko su odsecci manji. Metoda Lienard-a u osnovi je metoda određivanja pravca polja u bilo kojoj tački fазne ravni, a crtanje integralnih krivih predstavlja aproksimaciju malih lukova krive malim dužima.

Postoji izvestan broj interesantnih slučajeva gde Lienard-ova metoda konstrukcije integralnih krivih daje odmah integralne krive na osnovu nekih uočenih osobina i gde nema potrebe da se određuju poligonalne približne krive. Primer je slučaj harmonijskog oscilovanja ili slučaj harmonijskog oscilatora sa suvim trenjem.

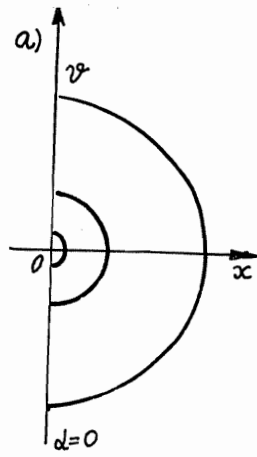
U slučaju oscilatora sa Coulomb-ovim trenjem jednačina oscilovanja je

$$\ddot{q} + k^2 q = -(\operatorname{sign} \dot{q}) T = \begin{cases} -T & \text{za } \dot{q} \geq 0 \\ +T & \text{za } \dot{q} < 0 \end{cases} \quad (16)$$

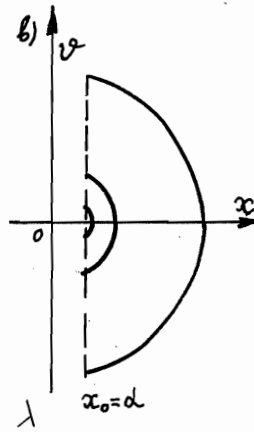
odakle se dobija jednačina integralnih krivih u obliku

$$\frac{dv}{dq} = \frac{-q - \varphi(v)}{v} \quad (17)$$

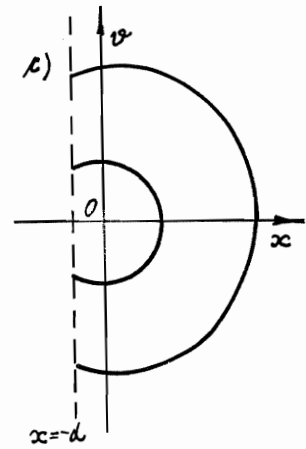
gde je



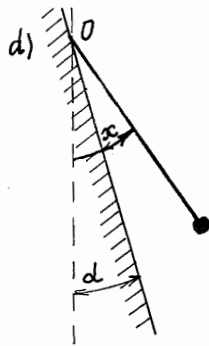
S1.25a



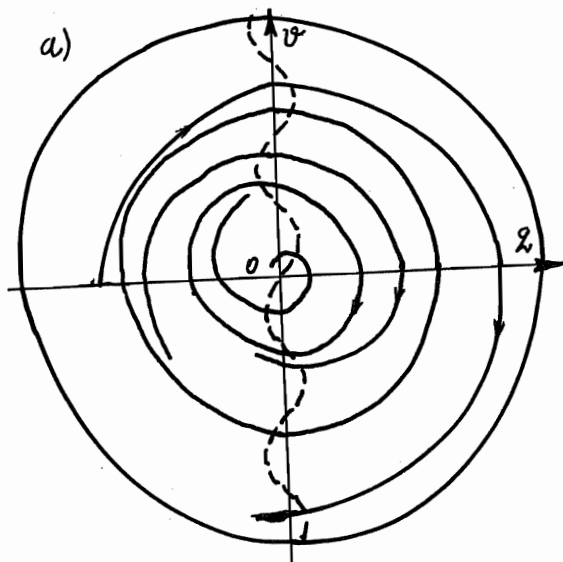
S1.25 b



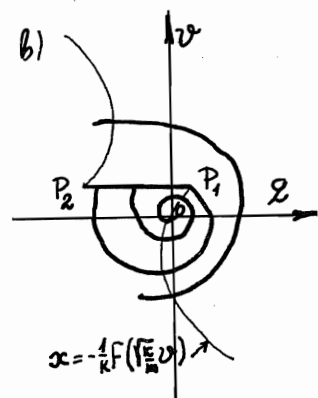
S1.25 c



S1.25 d



S1.26 a



S1.26 b

$$\varphi(\nu) = \begin{cases} \frac{\Gamma}{\nu^2} = \lambda_0 & \text{za } \frac{d\varrho}{d\nu} \geq 0 \\ -\lambda_0 & \text{za } \frac{d\varrho}{d\nu} < 0 \end{cases}$$

U faznoj ravni (  $\varrho$  ,  $\nu$  ) nacrtamo dijagram  $y = -\varphi(\nu)$  i zaključujemo da su integralne krive delovi kružnica, koje imaju kao centre naizmenično tačke  $O_1$  i  $O_2$ . Pri preseku integralne krive sa  $\varrho$  - osom centar se smenjuje.

Jasno je da se amplituda smanjuje za  $\lambda_0$  između svakog sukcesivnog para položaja mirovanja  $\nu=0$ , dok na kraju masa ne dođe u mirovanje, kada  $\varrho$  bude između  $\pm \lambda_0$ , t.j. sila trenja bude veća od sile opruge. Priložena slika

24 pokazuje konstrukciju fazne krive u ovom slučaju. Broj poluokretanja, koje izvrši reprezentativna tačka na faznoj krivoj je  $n = |A|/\lambda_0$ , gde je  $A$  početna amplituda za  $\nu=0$ .

Drugi primer je Meissner-ovo prosto klatno koje udara o neelastičan zid, tako da se vrednost kinetičke energije smanjuje u odredjenom odnosu pri svakom udaru. Na slici je dat izgled tog klatna sa obeleženom koordinatom nagiba zida. Smatramo da se kinetička energija pri svakom udaru smanji za 50%, a da se pri svakom udaru promeni i znak brzine. Ako je jednačina oscilovanja klatna  $\ddot{x} + \alpha x = 0$ , to su integralne krive kružnice sa centrima u koordinatnom početku. Na slici 25 su prikazane integralne krive za problem neelastičnog sudara i to za  $\alpha > 0$  i  $\alpha = 0$  koje imaju diskontinuitete, koji za  $\alpha \geq 0$ , teže tački  $x = \alpha$ ,  $\nu = 0$ , t.j. klatno teži položaju mirovanja. Slučaj  $\alpha < 0$  se kvalitativno razlikuje od prethodnog i posle izvesnog vremena konvergira ka  $x = 0$ .

Na primeru samopobudnih oscilavija prikazaćemo primenu Lienard-ove grafičke metode konstrukcije integralnih krivih. Ovde je karakteristično da sila prigušivanja  $-\varphi(\nu)$  ima isti znak kao i brzina za male vrednosti brzine, a suprotan za velike vrednosti brzine. Sila u ovom slučaju utiče na povećanje amplitude oscilacije za male brzine, a kada je



brzina velika na smanjenje amplitude. Ova dva efekta suprotnih tendencija uslovljavaju kretanje, koje teži ka oscilatornom. Neka se jednačina oscilovanja može da napiše u obliku Van der Pol-ove jednačine

$$\ddot{q} - \varepsilon(\dot{q} - \frac{1}{3}\dot{q}^3) + q = 0 \quad (18)$$

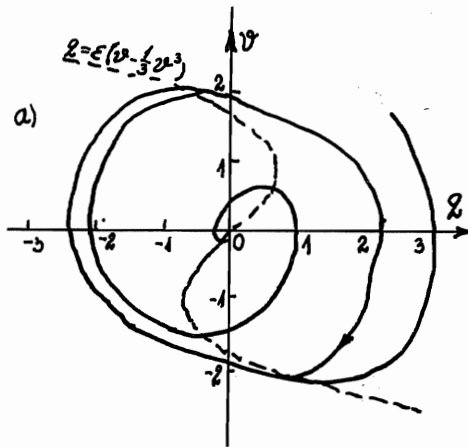
onda se jednačina integralnih krivih možeda napiše kao

$$\frac{dv}{dq} = \frac{\varepsilon(v - v^3/3) - q}{v} \quad (19)$$

odakle je  $-V(v) = \varepsilon(v - v^3/3) = q$ . Da bi dobili integralne krive u faznoj ravni metodom Lienard-a nacrtaćemo krivu  $q = \varepsilon(v - v^3/3)$  a zatim izabрати jednu tačku  $N(q, v)$  i naći pravac polja u toj tački, a krivu aproksimirati odsečkom tangente u toj tački. Integralne krive su na slici 27 nacrtane za nekoliko različitih vrednosti  $\varepsilon$ .

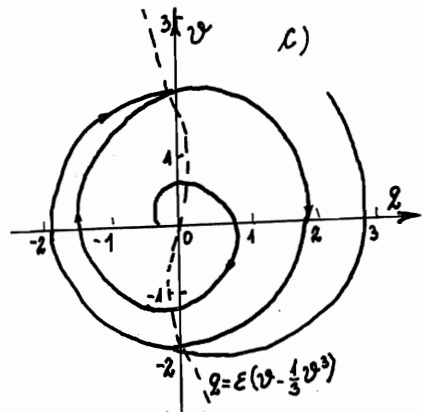
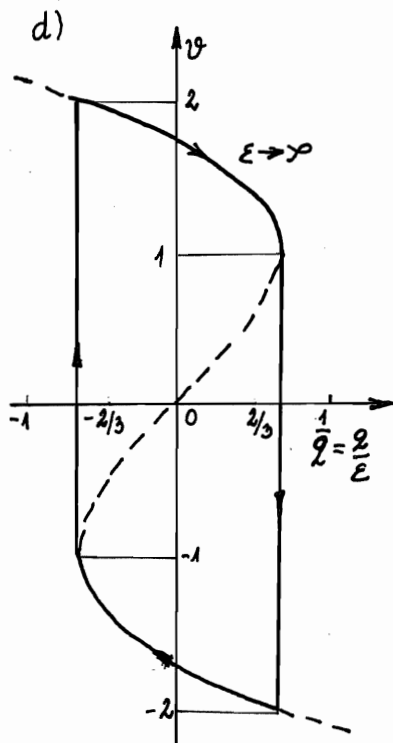
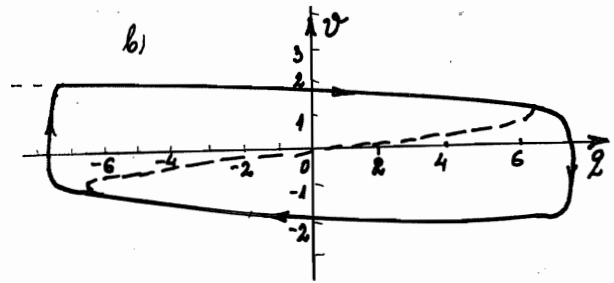
Za  $\varepsilon = 0$  tačka  $M'$  je koordinatni početak, a integralne krive su koncentrične kružne linije sa centrom u  $M'$ . Za ovo prosto harmonijsko oscilovanje singularna tačka je centar.

Za  $\varepsilon > 0$  singularitet je nestabilna spiralna tačka. Iz Lienard-ove konstrukcijemože da se vidi da su integralne krive blizu koordinatnog početka i daleko od koordinatnog početka spirale pri čemu obe teže jednoj zatvorenoj integralnoj krivoj koja odgovara periodičkom rešenju jednačine (18), pri povećanju vremena  $t$ . Ovo je važna osobina samopobudnih oscilacija. Ovakve pojave prvi je proučavao Poincaré, koji je ovakvom periodičkom kretanju dao naziv granični ciklus ili ciklus po zatvorenoj faznoj krivoj. Ovakav zatvoreni ciklus sadrži jednu singularnu tačku indeksa (+1), tj. spiralnu tačku. Kada  $\varepsilon \rightarrow 0$  zatvorena fazna kriva graničnog ciklusa teži krugu. Na priloženoj slici 27 prikazane su integralne krive, dobijene Lienard-ovom metodom konstrukcije za  $\varepsilon = 0, 1$ ;



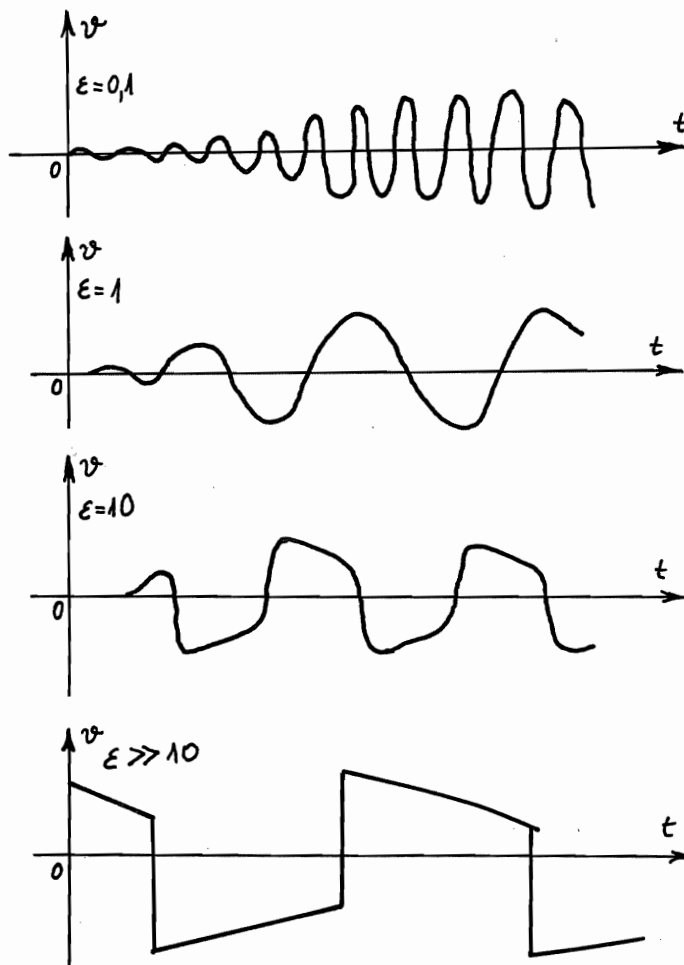
Sl.27 a

Sl.27 b



Sl.27 c

Sl.27 d



Sl.28

$\epsilon = 1$ ;  $\epsilon = 10$ ; i  $\epsilon = \infty$ . Takodje su na slici 28 prikazane krive  $\psi(t)$  za navedene vrednosti  $\epsilon$ , za slučaj kada sistem osciluje sa malim početnim vrednostima za  $\varrho$  i  $2\varrho$ . Sa povećanjem  $\epsilon$  javljaju se veće deformacije sinusnog talasa brzine. Za  $\epsilon > 10$  su to već oscilacije r e l a k s a c i j e. Pomoću Lienard-ove konstrukcije nadjene su integralne krive u slučajevim gde je  $-\mathcal{V}(\psi) = \sin \psi$  i gde je  $-\mathcal{V}(\psi)$  grafički definisano kao na slici a.

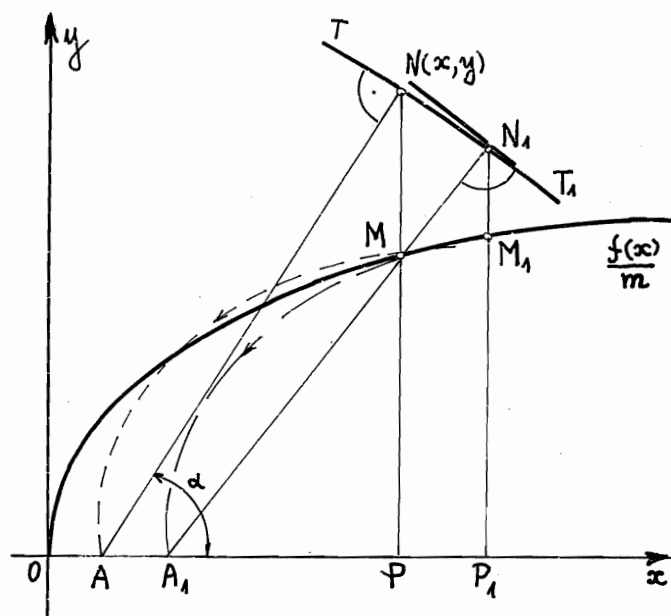
U slučaju da je  $-\mathcal{V}(\psi)$  zadato grafički kao na slici 26 b, uočava se da čim bilo koja integralna kriva dodirne pravolinijski segment  $\overline{P_1 P_2}$  ona je sledi sa leva na desno, dok ne dodje u  $P_1$  pri čemu je  $\psi = \text{const}$ . Fizičko značenje prigušivanja na segmentu  $\overline{P_2 P_1}$  znači da se sila suvog trenja na masu sama podešava zavisno od veličine primenjene spoljne sile opruge, a brzina je konstantna jer vrednost sile trenja nije prevazidjena. Ako se  $-\mathcal{V}(\psi)$  može da napiše kao  $-\frac{1}{k} F(\psi)$ , onda karakter kretanja zavisi od  $1/k$  i za veće vrednosti  $k$  oscilacija će biti skoro prosta, a za  $k$  malo dolazi do pojave relaksacije. Kod slabe opruge javljaju se trzajuće oscilacije. Za slučaj  $-\mathcal{V}(\psi) = \sin \psi$  javlja se mnogo graničnih ciklusa koji su naizmenično stabilni i nestabilni.

Lienard-ova metoda može da se primeni i na diferencijalnu jednačinu oblika

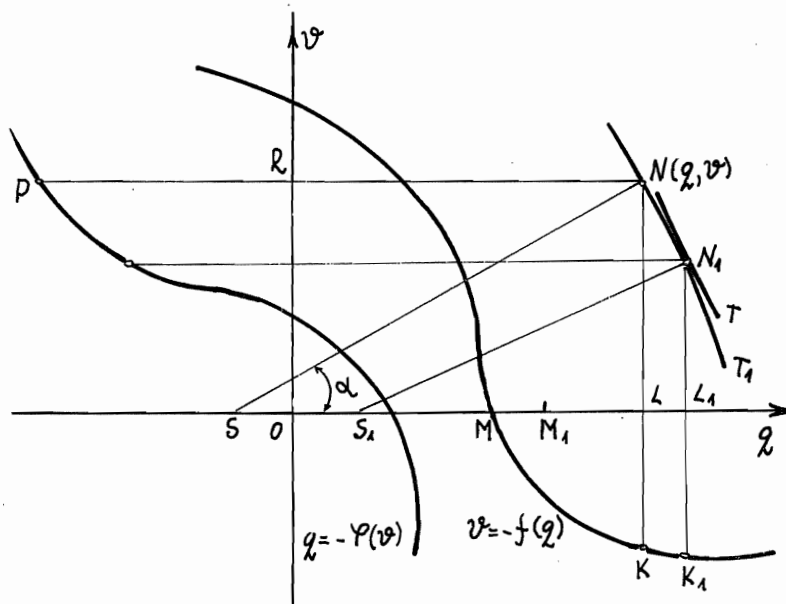
$$m\ddot{x} + f(x) = 0 \quad (19)$$

U ravni  $(x, y)$  nacrtamo grafik funkcije  $f(x)/m$  kao na slici 29. U tački  $N$  u kojoj želimo da nadjemo pravac polja povučemo normalu na  $x$ -osu, koja seče u tački  $M$  krivu, a u tački  $P$  osu  $x$ . Tačku  $M$  obaramo u tačku  $A$ , oko tačke  $P$ , na  $x$ -osu. Tada je pravac polja upravan na duži  $\overline{AN}$  jer je

$$\text{tg} \alpha = \text{tg} \angle NAP = \frac{NP}{RA} = \frac{my}{f(x)} = -\frac{1}{\text{tg} \alpha_1}$$



S1.29



S1.30

gde je

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{dy}{dx} = -\frac{f(x)}{m y}$$

čime je dokazana izložena konstrukcija. Fazna kriva se prema ovoj metodi aproksimira poligonalnom linijom i to sa dovoljnom tačnošću, ako su tačke u kojima nalazimo pravce polja dovoljno bliske jedna drugoj.

### 4.3. METODA PELLA

Metoda Pella se koristi za grafičku konstrukciju integralnih krivih diferencijalne jednačine

$$\frac{dv}{dq} = \frac{-\mathcal{P}(v) - f(q)}{v} \quad (20)$$

koja se dobija smenom  $v = \dot{q}$  iz diferencijalne jednačine

$$\ddot{q} + \mathcal{P}(\dot{q}) + f(q) = 0 \quad (21)$$

Metoda Pella se sastoji u sledećem:

U faznoj ravni se ucrtaju krive  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(v)$  i  $f = f(q)$  pri čemu se  $\mathcal{P}$  nanosi u negativnom smeru  $q$ -ose a  $f(q)$  u negativnom smeru  $v$ -ose, t.j. crtaju se krive

$$q = -\mathcal{P}(v) \quad ; \quad v = -f(q)$$

Da bi se našao pravac tangente na integralnu krivu kroz bilo koju tačku  $N$  fazne ravni, treba iz te tačke povući paralelu sa  $v$  osom do preseka sa krivom  $-f(q)$ , i odsečak  $\overline{KL}$  do  $q$ -ose preneti na  $q$ -osu u negativnom pravcu od ose  $q$ , od tačke  $L$  do tačke  $M$ , ako je  $f(q) > 0$ , a u pozitivnom ako je  $f(q) < 0$ .

Ponovo kroz tačku  $N$  povučemo pravu para-

lelnu sa osom  $q$  do preseka  $P$  sa  $-\varphi(v)$ . Odsečak  $\overline{RP}$  do  $v$ -ose je  $\varphi(v)$  u tački  $N$ , prenesemo u tačku  $M$  do tačke  $S$  u negativnom pravcu  $q$ -ose, ako je  $\varphi(v) > 0$ . Zatim spijimo tačku  $N$  sa tačkom  $S$ , te normala u tački  $N$  na  $\overline{SN}$  predstavlja tangentu na integralnu krivu u datoj tački. (Sl.30).

Dokaz ove izložene metode se može pokazati na sledeći način

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{NL}}{\overline{SL}} = \frac{\overline{NL}}{\overline{ML} + \overline{SM}} = \frac{v}{\varphi(v) + f(q)} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_2}$$

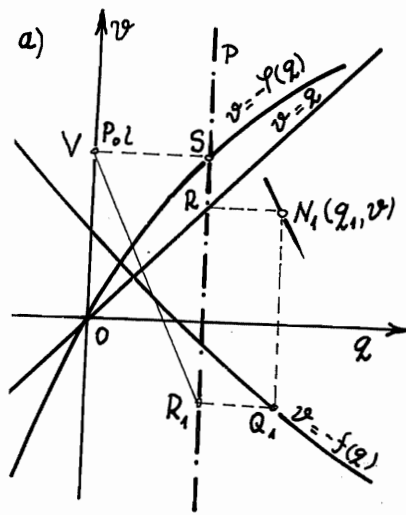
što znači da su duž  $\overline{SN}$  i tangenta u  $N$  integralne krive ortogonalne. Uzimajući tačku  $N_1$  blisku tački  $N$  na tangenti ponavljamo postupak određivanja pravca polja i t.d., čime dobijamo aproksimativno poligonalnu liniju kao integralnu krivu. Tačnost je uslovljena udaljenjem tačaka  $N$  i  $N_1$ .

#### 4.4. SCHÄFER-OVA METODA

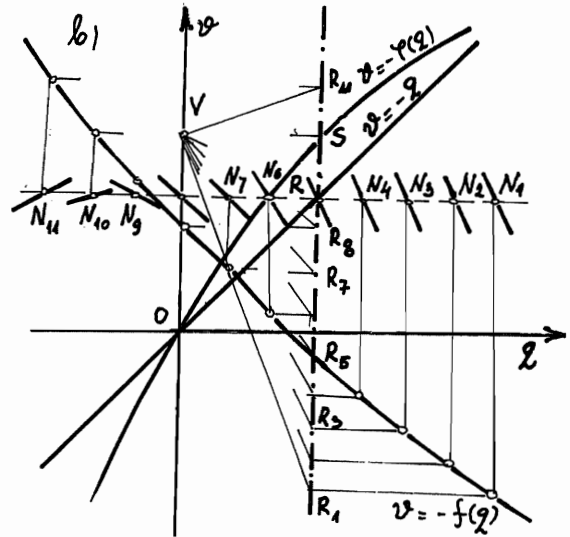
Ova metoda se primenjuje za nalaženje pravca polja integralnih krivih oblika

$$\frac{dv}{dq} = \frac{-\varphi(v) - f(q)}{v} \quad (22)$$

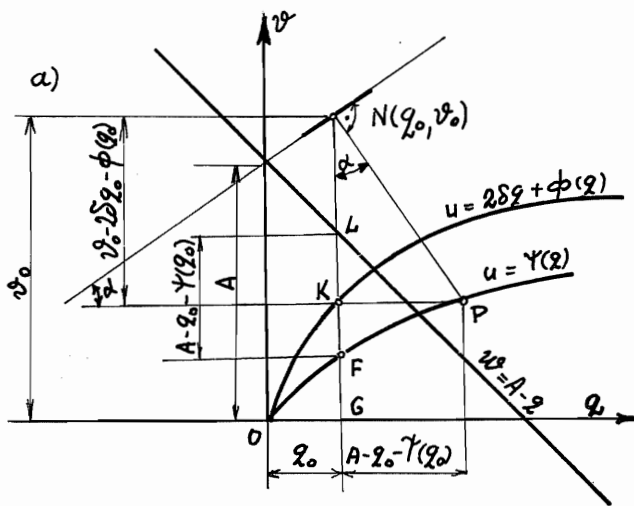
sa proizvoljnom funkcijom otstojanja  $-f(q)$  i funkcijom  $-\varphi(v)$  prigušivanja, koja zavisi od brzine. U faznoj ravni  $(q, v)$  slika 31 a, crtamo krive  $v = -f(q)$  i  $v = -\varphi(q)$  i pravu  $v = q$  i izaberemo tačku  $N_1(q_1, v)$  kroz koju povučemo paralelu sa  $q$ -osom do preseka sa pravom  $q = v$  u tački  $R$ . Kroz tačku  $R$  povlačimo pravu paralelnu  $v$ -osi i čiji je presek sa krivom  $v = -\varphi(q)$  tačka  $S$ . Kroz tačku  $S$  povlačimo, zatim, paralelu sa  $q$ -osom do preseka  $V$



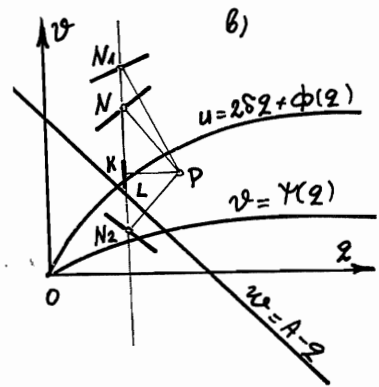
Sl.31 a



Sl.31 b



Sl.32 a



Sl.32 b



sa osom  $v$ , koji nazivamo polom. Sada ponovo iz tačke  $N_1$  povlačimo paralelu sa  $v$ -osom do preseka sa krivom  $v = -f(q)$  u  $Q_1$ , odakle vučemo paralelu sa  $q$ -osom do preseka sa pravom kroz  $R$  u  $R_1$ . Pravac polja kroz tačku  $N_1$  je paralelan sa duži  $\overline{R_1V}$ . Da je to stvarno tako, treba naći tangens ugla  $\angle NVR_1$  koji iznosi

$$\operatorname{tg} \angle NVR_1 = \frac{\overline{SR_1}}{\overline{SV}} = \frac{-\gamma(v) - f(q_1)}{v_1} = \left. \frac{dv}{dq} \right|_{\substack{q=q_1 \\ v=v_1}} \quad (23)$$

Racionalnu konstrukciju je moguće sprovesti za čitav niz tačaka odjednom, ako sve tačke  $N_i$  budu na istoj visini  $v$  kao na slici 31 b. Za sve tačke na istoj visini  $v$  je jedan isti pol  $v$  i jedna ista prava. Na slici 31 b se vidi osnovni karakter i konstrukcija za niz tačaka  $N_i$  sa istom visinom  $v$ . Kad je u jednoj tački određen pravac polja integralnih krivih, postupak se ponavlja za drugu tačku  $N_{i+1}$  na tangenti kroz  $N_i$  u blisku tački  $N_i$ .

#### 4.5. METODA DROBOVA

Ova grafička metoda se primenjuje na jednačinu oblika

$$\frac{d}{dt} \{ \dot{q} + 2\delta q + \phi(q) \} + q + \gamma(q) = A \quad (23)$$

gde su  $\gamma(q)$  i  $\phi(q)$  nelinearne funkcije, a  $\delta$  i  $A$  konstante. Uvodjenjem smene

$$v = \dot{q} + 2\delta q + \phi(q) \quad (24)$$

jednačina (23) se može da napiše u obliku sistema

$$\frac{d\varrho}{dt} = \vartheta - 2\delta\varrho - \phi(\varrho) \quad (25)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = A - \varrho - \gamma(\varrho)$$

U ravni  $(\varrho, \vartheta)$  jednačina integralnih krivih je

$$\frac{d\vartheta}{d\varrho} = \frac{A - \varrho - \gamma(\varrho)}{\vartheta - 2\delta\varrho - \phi(\varrho)} \quad (26)$$

Prema metodi Drobova u faznoj ravni crtamo krive

$$\begin{aligned} \mu &= 2\delta\varrho + \phi(\varrho) \\ \vartheta &= \gamma(\varrho) \end{aligned} \quad (27)$$

i pravu

$$\vartheta = A - \varrho$$

i biramo u ravni  $(\varrho, \vartheta)$  tačku  $N$  sa koordinatama  $(\varrho_0, \vartheta_0)$  kroz koju hoćemo da nacrtamo integralnu krivu. Iz te tačke spustamo normalu na  $\varrho$ -osu (vidi sliku 32 a) pa je

$$\overline{NK} = \overline{NG} - \overline{KG} = \vartheta_0 - 2\delta\varrho_0 - \phi(\varrho_0)$$

i

$$\overline{LF} = \overline{LG} - \overline{FG} = A - \varrho_0 - \gamma(\varrho_0)$$

Sada kroz tačku  $K$  povučemo paralelu sa  $\varrho$ -osom; na nju nanese-  
mo duž  $\overline{KP} = \overline{LF} = A - \varrho_0 - \gamma(\varrho_0)$ , i to ako je  $A - \varrho_0 - \gamma(\varrho_0) > 0$  kao na sli-  
ci 32 a, a u negativnom smeru  $\varrho$ -ose ako je  $A - \varrho_0 - \gamma(\varrho_0) < 0$ .  
Integralne krive su upravne na duži  $\overline{PN}$ , t.j. pravce polja.

Sa slike se vidi da je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A - \varrho_0 - \gamma(\varrho_0)}{\vartheta_0 - 2\delta\varrho_0 - \phi(\varrho_0)} = \frac{\overline{KP}}{\overline{NK}} = \left( \frac{d\vartheta}{d\varrho} \right)_0$$

Može se uočiti da sve normale na integralne krive u tačkama koje se sve nalaze na pravnoj paralelnoj  $\vartheta$ -osi, prolaze

kroz istu tačku  $P$  .

Kriva  $u = 2\delta q + \phi(q)$  se javlja kao geometrijsko mesto tačaka integralnih krivih u kojima su tangente vertikalne, a preseči krive  $v = \psi(q)$  i prave  $w = A - q$  kao tačke u kojima su tangente horizontalne.

## IV      G l a v a

## STABILNOST      OSCILOVANJA

## 1. STABILNOST KRETANJA I TEOREME LJAPUNOVA

Ako se stvarno kretanje podudara sa određenim zakonom kretanja, onda takvo kretanje nazivamo *neporemećeno kretanje*, za razliku od svakog drugog sa kojim ga budemo upoređivali, a koje nazivamo *poremećeno kretanje*. Odstupanje poremećenog kretanja od neporemećenog kretanja nazivamo *poremećaj*. Pod poremećajem možemo podrazumevati i otklon sistema od ravnotežnog položaja, a oscilatorno kretanje poremećenim stanjem ravnoteže sistema. <sup>4</sup>Zadatak proučavanja odstupanja poremećenih kretanja od neporemećenih stvarnih od zadatih, pripada oblasti koju nazivamo stabilnost kretanja. Poseban slučaj je kada izučavamo odstupanje poremećenog od neporemećenog stanja ravnoteže, a to je slučaj izučavanja stabilnosti stanja ravnoteže.

Postoji više pristupa u rešavanju problema stabilnosti kretanja i stabilnosti položaja ravnoteže, medju kojima je najopštija Ljapunovljeva teorija. Problem o stabilnosti kretanja u najopštijem obliku prvi put je bio formulisan u doktorskoj disertaciji *Ляпунов-а* pod nazivom "*Общая задача об устойчивости движения*" (1892). *Ляпунов* je u disertaciji razvio metode rešavanja zadatka o stabilnosti kretanja. U članku "*Исследование одного из особых случаев*"

задачи об устойчивости движения" ( Маш. сборник 1893 - XVII вып.2)  
 Ляпунов је дао услове стбилности помоћу једначина са варијацијама ("уравнений в вариациях. ") за нелинеарне системе чија се стбилност не може изучавати помоћу линеарних чланова.

Ovde će biti reči o стбилности положаја равнотеже и кретања (прелазних стања) како је то Лјapunов посматрао у функцији малих промена почетних услова. Дефиниција стбилности по Лјapunову полaзи од чињенице да се динамички систем, који је изложен малим променама почетних услова, враћа или не у почетно стање - равнотежни положај. Стбилност кретања значи зависи од почетних услова, карактера поремећаја и карактеристика система. Дефиниција стбилности Ляпунов-а је општа јер обухвата стварне услове динамичког система и испитивање стбилности спроводи у односу на околину датих почетних услова.

Динамички систем се може приказати системом једначина

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

са почетним условима  $x_i(0) = x_{0i}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . За стационарно стање истог система може се писати да је

$$F_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

Ako су решења једначина система (1) у облику  $x_i = x_i(t)$  и ако је  $x_i(0)$  у близини равнотежног положаја  $\bar{x}_i$  то понашање функције  $x_i(t)$  možemo посматрати у односу на равнотежни положај и уз трансформацију координата  $x_i(t) = \bar{x}_i + y_i(t)$  једначину (1) možemo написати као

$$\frac{dy_i}{dt} = F_i(\bar{x}_1 + y_1, \bar{x}_2 + y_2, \dots, \bar{x}_n + y_n) = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (3)$$

Ravnotežnom položaju sada odgovaraju rešenja sistema (3)  $= 0$ . Definicija stabilnosti prema Ляпунов -u bazira se na pretpostavci da postoji veza izmedju rešenja poremećenog i neporemećenog sistema.

Prema Ляпунов -u dinamički sistem je stabilan ako se za proizvoljan pozitivan broj  $\varepsilon$  može naći drugi pozitivan broj  $\eta(\varepsilon)$  tako da budu zadovoljene nejednačine

$$\begin{aligned} |y_{0i}| &\leq \eta(\varepsilon) \\ |y_i(t)| &\leq \varepsilon \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (4)$$

za svaki trenutak vremena posle  $t=t_0$ .

U teoriji oscilacija ova definicija ima isto značenje kao i kod stabilnosti kretanja uopšte. Prema Ляпунов -u stanje ravnoteže dinamičkog sistema je stabilno, ako se za zadanu okolinu  $\varepsilon$  položaja ravnoteže, može uvek naći oblast  $\eta(\varepsilon)$  takva da posmatrana tačka smeštena u početnom trenutku u toj oblasti ne dostigne nikad granicu  $\varepsilon$ .

Stabilnost zahteva funkcionalnu vezu  $\eta(\varepsilon)$  i  $\varepsilon$ . Kada  $t \rightarrow \infty$  moguća su dva slučaja: 1. da je  $y_i(t)$  oscilatorna funkcija kada je kretanje stabilno (prigušene ili podržane oscilacije) i 2. da se  $y_i(t)$  asimptotski približava ravnotežnom položaju ili neporemećenom kretanju kada je kretanje asimptotski stabilno (ovakva stabilnost prelaznih stanja u tehničkoj praksi automatskog upravljanja je poželjna).

U definiciji stabilnosti se često umesto apsolutne vrednosti perturbacija mogu uzeti i kvadrati promene početnih uslova pa je

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i^2(t) &\leq R^2 \\ \sum_{i=1}^n y_{0i}^2 &\leq R_0^2(R) \end{aligned} \quad (5)$$

Vrednost  $\varepsilon$ , u definiciji Ляпунов -a je takva da se za donju granicu uzima beskonačno mali broj, a za gornju granicu se može uzeti dovoljno veliki broj. Kada je  $\varepsilon$  dovoljno malo

govori se o stabilnosti dinamičkog sistema u malom, a kada je dovoljno veliko o stabilnosti u velikom. Uslov stabilnosti (5) može se objasniti i na sledeći način:

Ako se sva rešenja sistema nalaze u zoni  $R$ , definisanoj koordinatama  $y_i(t)$  odgovarajuće perturbacije početnih uslova moraju se naći u okolini  $R$ . koordinatnog početka, ako je sistem stabilan.

Kretanje dinamičkog sistema može biti predstavljeno i sistemom jednačina

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (6)$$

gde funkcije  $F_i$  zavise eksplicitno od vremena  $t$ , što je slučaj dejstva permanentnih perturbacija na sistem. Pretpostavimo da su rešenja sistema jednačina (6)

$$x_i = x_i(t) \quad i=1, 2, 3, \dots, n \quad (7)$$

za početne uslove

$$t=0 \quad x_i = x_{0i} \quad i=1, 2, \dots, n \quad (8)$$

Pretpostavimo da u početnom trenutku promenljive imaju vrednosti

$$\bar{x}_{0i} = x_{0i} + y_{0i} \quad i=1, 2, \dots, n \quad (9)$$

gde su uvedene nove promenljive oblika

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(t) = x_i(t) + y_i(t) \quad i=1, 2, \dots, n \quad (10)$$

Ovako definisano kretanje je s t a b i l n o ako za proizvoljno mali broj  $\epsilon > 0$ , možemo da nađemo broj  $\eta(\epsilon) > 0$ , da za sve vrednosti  $t \geq t_0$  budu zadovoljeni uslovi iz nejednako-

sti

$$|\bar{x}_i(t) - x_i(t)| \leq \varepsilon \quad (11)$$

$$|\bar{x}_{oi} - x_{oi}| \leq \eta(\varepsilon) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

Razliku iz izraza u (11) možemo da obeležimo sa

$$y_i = y_i(t) = \bar{x}_i(t) - x_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

i ona predstavlja koordinate mogućeg kretanja. Moguće kretanje je određeno pomoću relativnih koordinata  $y_i = y_i(t)$ , a "nemoguće" kretanje je određeno pomoću relativnih koordinata  $y_i = 0$ , što je za moguće kretanje položaj ravnoteže. Moguće kretanje, određeno relativnim koordinatama  $y_i(t)$  je po Ljapunovu stabilno za vrednosti relativnih koordinata  $y_{i0} = 0$ , ako za veoma mali broj  $\varepsilon > 0$ , možemo da nadjemo drugi pozitivan broj  $\eta(\varepsilon) > 0$ , tako da relativne koordinate zadovoljavaju nejednačinu

$$|y_i(t)| \leq \varepsilon \quad (14)$$

uz uslov da za početne koordinate važi

$$|y_{oi}| < \eta(\varepsilon) \quad (15)$$

za svaki naredni trenutak vremena  $t \geq t_0$ . Taj isti uslov stabilnosti se može da napiše u obliku

$$\sum_{i=1}^n y_i^2(t) \leq \varepsilon^2 \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^n y_{oi}^2 \leq \eta^2(\varepsilon)$$

za malo  $\varepsilon$  i  $t \geq t_0$ .



## 2. LJAPUNOVljeVA FUNKCIJA PRVOG REDA

Kako je u većini slučajeva nelinearnih sistema nemoguće integraliti sistem diferencijalnih jednačina (1) iz čl.1, to je Ляпунов dao dve metode za analizu stabilnosti, koje ne zahtevaju integraljenje diferencijalnih jednačina nelinearnog sistema.

Pomoću jednačina (3) iz čl.1, možemo da nadujemo brzinu neke funkcije  $V$  koordinata  $y_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , u obliku

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_i} f_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (1)$$

Funkcija  $V(y_1, y_2, \dots, y_n)$  može biti u obliku definitne, semidefinitne ili indefinitne forme koordinata  $y_i$ . Funkcija  $V(y_1, y_2, \dots, y_n)$  definitne forme može se napisati u obliku

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 \leq R^2 \quad (2)$$

a nalazi se u oblasti  $n$ -to dimenzione sfere

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = R^2 \quad (3)$$

Funkcija  $V(y_1, y_2, \dots, y_n)$  ovako definisana može primati vrednosti jednog znaka, a postaje jednaka nuli samo u tačkama u kojima su sve koordinate  $y_i$  jednake nuli. Ovakva funkcija  $V(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$  naziva se funkcijom Ляпунов -a prvog reda.

Funkcija  $V$  je semidefinitna ako su sve njene vrednosti istog znaka, ali može da bude jednaka nuli u raznim tačkama  $y_i$ , a ne samo za  $y_i = 0$ .

Naprimer funkcija  $V(y_1, y_2) = y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2$  je semidefinitna jer je jednaka nuli za  $y_1 = -y_2$ .

Funkcija  $V$  ima nedefinitnu formu ako može primati vrednosti pozitivnog i negativnog znaka sa promenom  $y_i$ . Funkcija neparnog stepena je nedefinitne forme, dok za stepenu funkciju parnog stepena opšte ne možemo zaključiti. Na primeru funkcije promenljivih  $y_1, y_2$  i  $y_3$  pokazaćemo oblike napred navedenih formi iste funkcije. Pozitivno definitna forma je za  $V(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ , dok je za  $V(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 + y_3^2$  pozitivno semidefinitna forma. Nedefinitna forma je u slučaju kada je  $V(y_1, y_2) = y_1^2 - y_2^2$  ili  $V(y_1, y_2, y_3) = y_1$ .

Posmatrajmo sada sferu

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = \varepsilon^2 \quad (4)$$

i neka je  $V(y_1, y_2, \dots, y_n)$  pozitivno definitna funkcija u oblasti  $\mathcal{E}$ . Označimo sa  $P$  najnižu granicu oblasti  $V$  na sferi  $\mathcal{E}$  i onda možemo da definišemo sledeću teoremu:

Ako je  $0 \leq C \leq P$  onda je  $V$  površina  $V(y_1, y_2, \dots, y_n) = C$  zatvorena i ona okružuje sa svih strana početnu koordinatu i nalazi se unutar sfere  $\mathcal{E}$ . Posledica ovoga je da se za  $C_1 < C_2 \leq P$  površina  $V(y_1, y_2, \dots, y_n) = C_1$  nalazi unutar površine  $V(y_1, y_2, \dots, y_n) = C_2$  i nigde je ne tangira.

Ljapunovljeva funkcija prvog reda sa dvema promenljivim može se i geometrijski interpretirati. Zato definišimo Ljapunovljevu funkciju  $V(x, y)$  u oblasti

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = x^2 + y^2 \leq R^2 \quad (5)$$

kao površinu u trodimenzionalnom prostoru

$$z = V(x, y) \quad (6)$$

Za ilustraciju geometrijske interpretacije priložena je skica na slici 33, površine  $z = V(x, y)$  u oblasti  $\varepsilon$  u ravni  $(x, y)$ . Možemo sada da nabrojimo sledeća svojstva funkcije Ljapunova prvog reda sa dvema promenljivim: Kriva  $V(x, y) = C$  za razne vrednosti  $C$  dobija se kao projekcija na ravan  $(x, y)$  presečne krive površine  $z = V(x, y)$  i ravni  $z = C$ . Kriva  $V(x, y) = P$  se dobija presekom ravni  $z = P$  sa površinom  $z = V(x, y)$ . Ravan  $z = P$  je najniža granica površine  $V$  u oblasti  $\varepsilon$ .

Kriva  $V(x, y) = Q$ , gde je  $Q$  gornja granica površine  $V$  u oblasti  $\varepsilon$ , se dobija presekom površine  $z = V(x, y)$  sa ravni  $z = Q$  i njena projekcija na ravan  $(x, y)$  obuhvata oblast  $\varepsilon$  tangirajući je u jednoj tački.

**T e o r e m a** o stabilnosti stanja ravnoteže. Ako je jednačina mogućeg kretanja takva da možemo naći funkciju  $V(y_1, y_2, \dots, y_n)$  definitne forme čiji bi izvod po vremenu bila funkcija semidefinitne firme i suprotnog znaka, onda bi ravnotežno stanje sistema, određeno vrednostima početnih koordinata jednakim nuli bilo stabilno prema Ljapunovu.

Ako je  $V(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) > 0$ , onda treba da je  $\frac{dV}{dt} \leq 0$  da bi stanje ravnoteže bilo stabilno.

Označimo sa  $P > 0$  najnižu granicu funkcije  $V(y_1, y_2, \dots, y_n)$  na sferi

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = \varepsilon^2 \quad (7)$$

i kako je funkcija  $V(y_1, y_2, \dots, y_n)$  neprekidna u nultoj tački i od vremena eksplicitno ne zavisi sleduje da dopušta beskonačno malu najvišu granicu, tako da bi se  $P$  moglo usvojiti kao vrlo mali broj, ako je moguće naći takav radijus  $\eta > 0$  i takvu sferu

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = \eta^2 \quad (8)$$

na kojoj bi  $P$  bilo najveća granica na funkciji  $V$  tako da

je za sve vrednosti  $y_i$  zadovoljeno

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 \leq \eta^2 \quad (9)$$

a sa tim će biti zadovoljena i nejednačina  $V(y_1, y_2, \dots, y_n) \leq P$ .

Za početne koordinate  $y_{0i}$  je

$$\sum_{i=1}^n y_{i0}^2 \leq \eta^2 \quad (10)$$

$$V_0 = V(y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}) \leq P \quad (11)$$

Polazeći od nejednačine  $\frac{d}{dt} V(y_1, y_2, \dots, y_n) < 0$  i njenim integraljenjem po vremenu u oblasti od nule do proizvoljnog vremena  $t$  dobijamo

$$\int_0^t \dot{V} dt = V(y_1, y_2, \dots, y_n) - V(y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}) \leq 0 \quad (12)$$

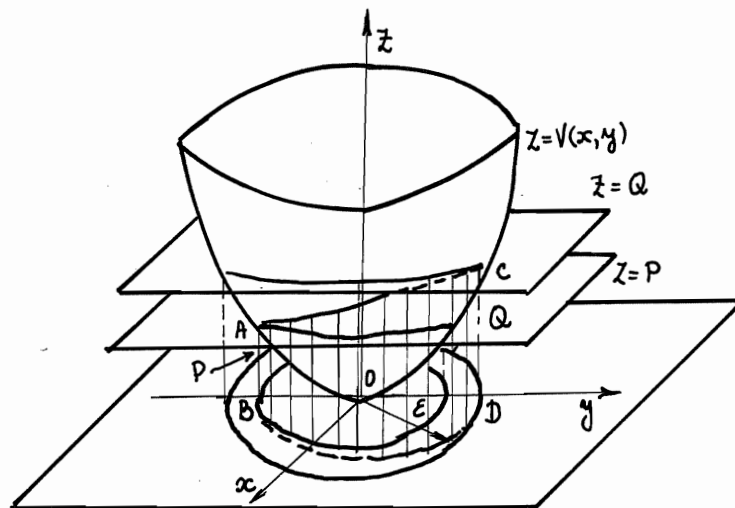
Uzimajući u obzir prethodne nejednačine zaključujemo da je

$$V(y_1, y_2, \dots, y_n) \leq V_0(y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}) \leq P \quad (13)$$

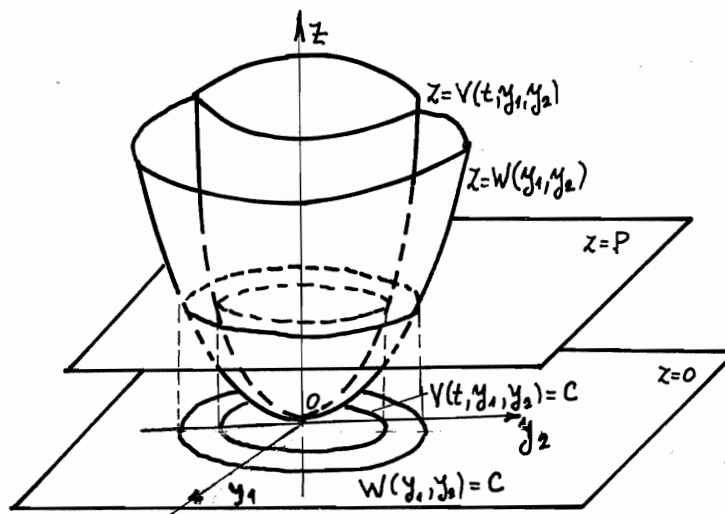
znajući da je izvedena pod pretpostavkom da je  $\frac{d}{dt} V(y_1, \dots, y_n) \leq 0$ . Može se zaključiti da funkcija  $V(y_1, \dots, y_n)$  za sve vreme kretanja ostaje manja od svoje najniže granice na sferi. Sleduje da za početne uslove  $y_{0i}$  izabrane prema (10) posmatrana tačka neće izaći iz oblasti  $\mathcal{E}$  sfere definisane izrazom (7), t.j. koordinate  $y_i$  mogućeg kretanja će zadovoljavati uslov

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 \leq \varepsilon^2 \quad (14)$$

za sve vreme  $t \geq 0$ .



Sl.33



Sl.34

## 3. LJAPUNOVljeVA FUNKCIJA DRUGOG REDA

ZA izučavanje stabilnosti kretanja prema drugoj metodi Ljapunovljeva funkcija pored relativnih koordinata  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , zavisi i eksplicitno od vremena  $t$ . Takva funkcija naziva se Ljapunovljevom funkcijom drugog reda. Za Ljapunovljevu funkciju drugog reda je zadata oblast u kojoj ona za sve vrednosti  $t \geq 0$ , treba da bude konačna, jednoznačna i neprekidna po svim promenljivim i definitna, a ta oblast je

$$\sum_{i=1}^n y_i^2(t) \leq R^2 \quad (1)$$

Prema Ljapunovu funkcija drugog reda

$$V(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (2)$$

je definitna u oblasti  $R$ , ako u toj oblasti postoji pozitivno odredjena funkcija prvog reda

$$W(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \quad (3)$$

koja ne zavisi eksplicitno od vremena, takva da je za svako  $t \geq 0$  zadovoljena nejednačina

$$V(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \geq W(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (4)$$

ili

$$-V(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \geq W(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (5)$$

Za nejednakost (4) funkcija  $V(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$  je pozitivno

definitna, dok je za drugu nejednakost (5) negativno definitna.

Naprimer, neka je funkcija

$$V(t, y_1, y_2) = t(y_1^2 + y_2^2) - 2y_1 y_2 \cos t \quad (6)$$

a u cilju odredjivanja njene definitnosti istu ćemo napisati u obliku

$$V(t, y_1, y_2) = (t-1)(y_1^2 + y_2^2) + (y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 y_2 \cos t) \quad (7)$$

pri čemu je prvi izraz pozitivan za svako  $t > 1$ , dok je drugi izraz uvek pozitivan, pa znači da je funkcija  $V(t, y_1, y_2)$  veća od  $y_1^2 + y_2^2$  te važi

$$V(t, y_1, y_2) = t(y_1^2 + y_2^2) - 2y_1 y_2 \cos t \geq y_1^2 + y_2^2 = W(y_1, y_2) \quad (8)$$

Kako je  $W(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$  pozitivno definitna forma to je  $V(t, y_1, y_2)$  takodje pozitivno definitna forma jer je zadovoljena nejednakost  $V \geq W$  za bilo koje vrednosti za koje je  $y_1^2 + y_2^2 \leq R^2$ .

Geometrijsko objašnjenje uslova (4) za odredjivanje definitnosti forme funkcije Ljapunova lepo se može uočiti sa priložene slike 34. U prostoru  $(y_1, y_2, z)$  su predstavljene površine  $z = W(y_1, y_2)$  i  $z = V(t, y_1, y_2)$  i krive  $W(y_1, y_2) = C$  i  $V(t, y_1, y_2) = C$  u nekom trenutku (koji je proizvoljan) vremena. Uslov definitnosti forme funkcije Ljapunova drugog reda je da bude iznad funkcije prvog reda kao na slici, a najmanje jednaka njoj u bilo kom trenutku vremena. Ako isti uslov hoćemo da izrazimo preko ravni  $(y_1, y_2)$  onda je potrebno da kriva  $W(y_1, y_2) = C$  obuhvata u svakom trenutku vremena krivu  $V(t, y_1, y_2) = C$ .

**T e o r e m a** o stabilnosti se može izraziti u sledećem obliku: Ako su jednačine mogućeg kretanja

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (9)$$

takve da možemo naći funkciju  $V(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$  definitne

forme, čiji bi izvod za dati sistem (9) bio semidefinitne forme suprotnog znaka od  $V(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$  to bi stanje ravnoteže relativnog kretanja definisanog sa  $y_i = 0$  bilo stabilno po Ljapunovu.

Pretpostavimo da je prema uslovima teoreme navedena funkcija  $V(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$  kao pozitivno definitna forma za koju u oblasti

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 \leq R^2 \quad (10)$$

za svako  $t \geq 0$ , važe nejednakosti

$$V(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \geq W(y_1, y_2, \dots, y_n); \quad \frac{dV}{dt} \leq 0 \quad (11)$$

Treba dokazati da za unapred zadati broj  $\varepsilon > 0$  možemo naći takav broj  $\eta(\varepsilon) > 0$ , da ako za početne uslove važi nejednakost

$$\sum_{i=1}^n y_{i0}^2 \leq \eta^2 \quad (12)$$

to za promenljive  $y_i$  za svaki trenutak vremena treba da vazi sledeća nejednačina

$$\sum_{i=1}^n y_i^2(t) \leq \varepsilon^2 \quad (13)$$

Da bi smo to dokazali uzmimo da je

$$0 < \varepsilon \leq R \quad (14)$$

i postavimo sferu

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = \varepsilon^2 \quad (15)$$

i neka je  $P > 0$  najmanja vrednost funkcije  $W$  na toj sferi. Iz uslova teoreme da je  $\frac{d}{dt}V(t, y_1, \dots, y_n) < 0$  i mogućeg kretanja za svako  $t > 0$ , posle integraljenja dobijamo



$$V(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \leq V(0, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}) = V_0 \quad (16)$$

Posmatrajmo sada funkciju

$$V_1(y_1, y_2, \dots, y_n) = V(0, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (17)$$

pri promeni  $y_i$  u oblasti definisanoj sa (13). Kako sada funkcija  $V_1(y_1, \dots, y_n)$  ne zavisi eksplicitno od vremena to ona dopušta beskonačno malu višu granici i sleduje da bi se mogao naći takav broj  $\eta(P) > 0$  koji bi za sve vrednosti  $y_i$  zadovoljavao uslov

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 \leq \eta^2$$

a pri tome funkcija  $V_1$  ne bi bila veća od  $P$ , tj.

$$V_1(y_1, y_2, \dots, y_n) = V(0, y_1, y_2, \dots, y_n) \leq P \quad (18)$$

Za početne koordinate bi se moglo napisati da je

$$\sum_{i=1}^n y_{0i}^2 \leq \eta^2 \quad ; \quad V_0(y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}) \leq P \quad (19)$$

Ako se uzmu u obzir nejednačine (16) i (19) može se napisati da je

$$V(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \leq P \quad (20)$$

za svako  $t \geq 0$ , a kako je  $P$  najniža granica funkcije  $W$  na sferi (15) to je

$$V(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \leq W(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (21)$$

što je pokazano uz pretpostavku

$$\frac{d}{dt} V(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \leq 0 \quad (22)$$

te je "nemoguće" kretanje (položaj ravnoteže relativnog kretanja) stabilno.

**T e o r e m a** o asimptotskoj stabilnosti se može iskazati na sledeći način: Ako su jednačine mogućeg kretanja

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (23)$$

takve da možemo naći funkciju  $V(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$  definitne forme (koja dopušta vrlo malu gornju granicu) čiji bi izvod po vremenu bio funkcija definitne forme suprotnog predznaka od funkcije  $V(t, y_1, \dots, y_n)$ , kada se iskoriste jednačine mogućeg kretanja, onda je moguće kretanje asimptotski stabilno u okolini početnog "nemogućeg kretanja"  $y_i = 0$ .

Dokaz ove teoreme možemo izvesti polazeći od funkcije  $V(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$  pozitivno definitne forme za promenljive iz oblasti

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 \leq R^2$$

za  $t \geq 0$ . Da bi sistem bio asimptotski stabilan treba prema teoremi da je

$$V(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \geq W(y_1, y_2, \dots, y_n); \quad -\frac{dV}{dt} \geq W_1(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (24)$$

gde su  $W$  i  $W_1$  pozitivne vrednosti u oblasti  $R$  i funkcije su samo  $y_i$ .

Moguće kretanje izabrane tačke sistema ne sme da predje sferu

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = \varepsilon^2$$

za početne uslove

$$\sum_{i=1}^n y_{0i}^2 \leq \eta^2(\varepsilon)$$

Ako izaberemo  $\ell$  tako da je donja granica  $V$  t.j. da je

$$V(t, y_1, y_2, \dots, y_n) > \ell \quad (25)$$

za  $y_i$  iz oblasti

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 \geq \varepsilon_1^2$$

onda je

$$\varepsilon_1^2 \leq \sum_{i=1}^n y_i^2 \leq \varepsilon^2 \quad (26)$$

Uzmemo  $P_1$  kao donju granicu  $W_1$  u oblasti definisanoj sa (26) pa možemo pisati da je

$$0 < P_1 \leq W_1 \leq -\frac{dV}{dt} \quad (27)$$

Ako nejednačinu (27) integralimo po vremenu od nule do  $t$  dobijamo da je

$$V(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \leq V(0, y_1, y_2, \dots, y_n) - P_1 t \quad (28)$$

Ma koliko bilo malo  $P_1$  nastupiće takav moment vremena  $t$  za koje je desna strana nejednačine (28) postala negativna, pa je pomoću sistema jednačina (23) nemoguće određivanje pozitivne funkcije  $V$ . Samo u slučaju kada je  $\sum_{i=1}^n y_i^2 \rightarrow 0$ , tada je i  $P_1 \rightarrow 0$  kada bi kretanje bilo asimptotski stabilno, jer bi  $V(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$  bilo definitno i suprotnog znaka od svog definitnog izvoda.

Ljapunovljeva t e o r e m a o nestabilnosti kretanja se može definisati na sledeći način:

Ako su jednačine mogućeg kretanja takve da možemo naći ograničenu funkciju  $V(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$  definitne forme istog znaka kao i  $V$  u blizini položaja relativnog mirovanja  $y_i = 0$  za bilo koje vreme  $t \geq t_0$ , onda je isti

položaj nestabilan.

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 \leq R^2$$

Matematički bi se to moglo izraziti: U oblasti za bilo koje vreme  $t$  treba da je

$$\frac{d}{dt} V(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \geq W_1(y_1, y_2, \dots, y_n) ; \quad |V| < L \quad (29)$$

Neka je  $\sum_{i=1}^n y_{0i}^2 \leq \varepsilon$  i  $V(t_0, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}) > 0$  i kako je za sve vreme  $t > t_0$  izvod  $\frac{dV}{dt}$  pozitivan na osnovu (29) mora da bude

$$V(t, y_1, y_2, \dots, y_n) > V(t_0, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}) = V_0 > 0 \quad (30)$$

Ako je sa  $P_1$  označena donja granica  $W_1$  u oblasti

$$\varepsilon_1^2 \leq \sum_{i=1}^n y_i^2 \leq R^2$$

onda je

$$0 < P_1 \leq W_1 \leq \frac{dV}{dt}$$

što integraljenjem daje

$$V(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \geq V(t_0, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}) + P_1(t - t_1) \quad (31)$$

Poslednja dobijena nejednačina je moguća jer funkcija na desnoj strani linearno raste sa vremenom, te ista ne bi mogla da bude stalno zadovoljena.

#### 4. LJAPUNOVljeVA TEOREMA O STABILNOSTI U PRVOM PRIBLIŽENJU

Kao što se iz prethodnog može videti sistem sa jednim stepenom slobode kretanja u opštem obliku se može da pretstavi sistemom diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

a može se transformacijom svesti na oblik

$$\frac{dx}{dt} = a(x - x_0) + b(y - y_0) + P_1(x, y) \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dt} = c(x - x_0) + d(y - y_0) + Q_1(x, y)$$

gde  $x_0$  i  $y_0$  mogu biti i jednake nuli. U prvoj aproksimaciji mogu se jednačine sistema (2) napisati kao

$$\frac{dx_1}{dt} = ax_1 + by_1 \quad (3)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = cx_1 + dy_1$$

gde je  $x_1 = x - x_0$  i  $y_1 = y - y_0$  uz uslov ekvivalencije nelinearnog i linearnog sistema u okolini tačke  $(x_0, y_0)$  odnosno  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = 0$ .

Ljapunov je u svojoj prvoj metodi ispitao uslove pod kojima se može primeniti linearna aproksimacija za ispitivanje stabilnosti. Neka su za dati nelinearni dinamički sistem jednačina (1) funkcije  $P(x, y)$  i  $Q(x, y)$  takve da se mogu razviti u stepeni red u okolini  $R$  tačke  $(x_0, y_0)$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2 \quad (4)$$

onda je sistem jednačina (1) po prvom približenju dat u obliku (3) gde su  $P_1(x, y)$  i  $Q_1(x, y)$  zanemarene. Sada se o stabilnosti može suditi na osnovu prve aproksimacije (3).

Ljapunov je dokazao, što je na primerima već pokazano, da je ravnotežni položaj stabilan ako oba korena imaju realne delove negativne, a nestabilan ako su realni delovi oba korena pozitivni. Ako su realni delovi oba korena jednaki nuli ili jedan jednak nuli, a drugi negativan jednačine prve aproksimacije ne mogu dati odgovor na pitanje o stabilnosti. Ova metoda Ljapunova po prvoj aproksimaciji nema važnosti direktne metode, jer se ograničava na okolinu ravnotežnog položaja  $x_0, y_0$  i ispituje se stabilnost u malom.

Ako sistem jednačina (1) zadovoljava uslove za prvu aproksimaciju oko tačke  $(x_0, y_0)$  onda se karakteristična jednačina može napisati kao

$$\begin{vmatrix} a-r & b \\ c & d-r \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

a na osnovu vrednosti njenih korena možemo da odredimo karakter stabilnosti.

Prema Ljapunovu, na primer kretanje zadato sistemom jednačina

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y + ax^3 \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay^3 \end{aligned} \quad (6)$$

se može po prvoj aproksimaciji napisati u obliku linearnog sistema diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y \\ \frac{dy}{dt} &= x \end{aligned} \quad (7)$$

Stanje  $x=0, y=0$  je stabilno u linearizovanom problemu. Da bi odredili da li je to stabilno stanje ravnoteže za nelinearni sistem uzećemo funkciju Ljapunova prvog reda

u obliku  $V(x,y) = x^2 + y^2$ , pa je njen izvod

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} = 2a(x^4 + y^4) \quad (8)$$

Za  $a > 0$  stanje  $x=y=0$  je nestabilno, dok je za  $a < 0$  asimptotski stabilno, a za  $a=0$  prosto stabilno, jer znak  $a$  određuje definitnost forme izvoda funkcije  $V(x,y)$  Ljapunova prvog reda. Za  $a > 0$  je pozitivno definitna forma i izvoda i funkcije  $V(x,y)$  pa je zato nestabilno stanje ravnoteže.

Neka pomoću transformacija koordinata

$$\xi = \alpha x + \beta y \quad \eta = \delta x + \epsilon y \quad (9)$$

nelinearni sistem može da se napiše u obliku

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda \xi + P_3(\xi, \eta) \quad (10)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \mu \eta + Q_3(\xi, \eta)$$

gde su  $\lambda$  i  $\mu$  koreni karakteristične jednačine dati kao

$$\lambda = \alpha_1 + i\beta_1 \quad (11)$$

$$\mu = \alpha_1 - i\beta_1$$

Za dokaz Ljapunovljeve teoreme da znak korena određuje stabilnost položaja ravnoteže uzmimo kao Ljapunovljevu funkciju prvog reda funkciju

$$V = \xi^2 + \eta^2 + \xi\eta \quad (12)$$

i nađimo njen izvod *po vremenu*

$$\frac{dV}{dt} = 2\xi\dot{\xi} + 2\eta\dot{\eta} + \xi\dot{\eta} + \eta\dot{\xi} \quad (13)$$

ili uzimanjem u obzir transformisanog sistema (10) isti izvod možemo da napišemo kao

$$\frac{dV}{dt} = 2(\lambda\xi^2 + \mu\eta^2) + (\lambda + \mu)\xi\eta + (2\xi + \eta)P_3 + (\xi + 2\eta)Q_3 \quad (14)$$

Prvi deo je binarna forma koja se može napisati u obliku

$$\phi(\xi, \eta) = \lambda(2\xi + \eta)\xi + \mu(\xi + 2\eta)\eta \quad (15)$$

čija je diskriminanta forme

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2\lambda & \lambda \\ \mu & 2\mu \end{vmatrix} = 3\lambda\mu \quad (16)$$

i koja se formira na osnovu koeficijenata kvadratne binarne forme i pomoću nje možemo odrediti znak forme. Za dovoljno male vrednosti  $\xi$  i  $\eta$  mogu se članovi trećeg i višeg stepena zanemariti, i definitnost forme  $\dot{V}$  zavisi od prvog dela koji je binarna forma. Uzimajući u obzir vrednosti za  $\lambda$  i  $\mu$ , tako da je  $\alpha_1$  negativno, a sa tim i binarna forma negativno definitna. Stanje ravnoteže  $\xi=0$ ,  $\eta=0$  je stabilno, jer to odredjuju definitnosti formi  $V$  i  $\dot{V}$ . Na isti način bi smo mogli da utvrdimo i definitnost forme  $V$  i njenog izvoda za druge vrednosti korena karakteristične jednačine.

### 5. STABILNOST GRANIČNOG KRUGA (CIKLUSA)

U slučaju samopobudnih oscilacija javlja se granični ciklus (u faznoj ravni granični krug - zatvorena kriva) te nas interesuje njegova stabilnost. Graničnom ciklusu (krugu) odgovara periodičko rešenje

$$x = x_1(t) \quad y = y_1(t)$$

i ono zadovoljava uslov

$$x_1(t+T) = x_1(t) \quad y_1(t+T) = y_1(t)$$

gde su  $x$  i  $y$  fazne koordinate, a  $T$  period oscilovanja. Ako su  $x_1$  i  $y_1$  bile fazne koordinate graničnog kruga, a fazne koordinate  $x_2$  i  $y_2$  izaberemo u delu fazne ravni unutar graničnog kruga, ali vrlo blizu istog, i ako su iste periodičke funkcije vremena, onda će periodičko kretanje biti stabilno,



ako za svaki mali broj  $\varepsilon > 0$ , postoji takav broj  $\eta(\varepsilon) > 0$  za koji su zadovoljeni uslovi

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq \varepsilon \quad |y_2(t) - y_1(t)| < \varepsilon$$

$$|x_2(t_0) - x_1(t_0)| < \eta(\varepsilon) \quad |y_2(t_0) - y_1(t_0)| < \eta(\varepsilon)$$

za ma koji trenutak vremena  $t \geq t_0$ . Ako je ovaj uslov zadovoljen u spoljnoj i unutrašnjoj zoni graničnog kruga u faznoj ravni onda je on stabilan u celini. Granični krug može biti polustabilan, ako nisu zadovoljeni uslovi za obe oblasti faznog prostora ili nestabilan ako ni u jednoj oblasti faznog prostora nisu zadovoljeni ti uslovi.

6. IZUČAVANJE STABILNOSTI OSCILACIJA POMOĆU  
JEDNAČINA PRVE APROKSIMACIJE DOBIJENIH  
ASIMPTOTSKIM METODAMA

Za izučavanje stacionarnih režima oscilovanja u nelinearnim sistemima mogu se koristiti jednačine prve aproksimacije koje se dobijaju pomoću asimptotskih metoda. Zato je potrebno da se sastave jednačine u varijacijama i da se izvrši analiza korena karakteristične jednačine i u zavisnosti od znaka realnog dela da se izvuče zaključak o stabilnosti ili nestabilnosti proučavanog režima. Razume se da će rezultat koji se dobije imati smisla za konačni interval vremena, jer se proučavaju jednačine prve aproksimacije, a ne tačne koje smo aproksimirali jednačinama prve aproksimacije na intervalu vremena  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

Ovde ćemo navesti teoreme na osnovu kojih se određuje stabilnost kretanja analizom jednačina prve aproksimacije (usrednjenih) koje proizilaze iz teorije Ljapunova, a mogu se naći ovako definisane u radu [27].

**T e o r e m a:** Neka jednačina

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x) \quad (1)$$

gde je  $x$   $n$ -merni vektor, a  $X(t, x)$   $n$ -merna funkcija, zadovoljava sledeće uslove:

a) Jednačina prve aproksimacije (usrednjena)

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) \quad (2)$$

ima kvazistatičko rešenje  $\xi = \xi_0$ .

b) Realni delovi korena karakteristične jednačine

$$\text{Det} | \mathbb{I}_p - \chi_{\cdot \infty}'(\xi_0) | = 0 \quad (3)$$

su različiti od nule.

c) Funkcija  $\chi(t, x)$  zadovoljava uslove za postojanje rešenja jednačine (1) i skoro je periodička (bliska periodičkoj) po  $t$  i monotona u odnosu na  $x$ .

Tada je moguće naći takve pozitivne konstantne brojeve  $\beta_0$  i  $\varepsilon_0$ , tako da za svako  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  jednačina (1) ima jedinstveno skoro periodičko (blisko periodičnom) rešenje koje zadovoljava nejednakost

$$|x^*(t) - \xi_0| < \beta_0 \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (4)$$

Ako su svi realni delovi korena karakteristične jednačine (3) negativni tada proizvoljno rešenje  $x(t)$  jednačine (1) teži ka  $x^*(t)$  po zakonu

$$|x(t) - x^*(t)| \leq C e^{-\beta \varepsilon (t - t_0)} \quad (5)$$

gde su  $C$  i  $\beta$  pozitivne konstante iz čega proizilazi da je rešenje  $x^*(t)$  asimptotski stabilno.

Ako je realni deo makar jednog korena karakteristične jednačine (3) pozitivan to rešenje  $x^*(t)$  je nestabilno.

Ako pretpostavimo da jednačine prve aproksimacije (usrednjene) imaju periodičko rešenje

$$\xi(\omega t) = \xi \quad (6)$$

$$\xi(\varphi + 2\pi) = \xi(\varphi)$$

tada možemo da formulišemo sledeći t e o r e m u:

Neka jednačina (1) u standardnom obliku zadovoljava sledeće uslove:

a) Jednačina prve aproksimacije (2) ima periodičko rešenje (6).

b) Realni delovi svih  $(n-1)$  karakterističnih pokazatelja - karakterističnih brojeva jednačine s varijacijama

$$\frac{d(\delta\xi)}{dt} = \varepsilon \chi'_{ox} [\xi(\omega t)] \delta\xi \quad (7)$$

koji odgovaraju periodičkom rešenju su različiti od nule (jedan karakteristični pokazatelj može biti jednak nuli).

Osim toga u nekoj okolini orbite periodičkog rešenja funkcije  $\chi(t, x)$  zadovoljavaju neophodne uslove za postojanje skoro periodičkog rešenja (rešenja bliskog periodičkom), koje zavisi samo od jedne konstante (faze).

Tada je moguće naći takve pozitivne brojeve - konstante  $\varepsilon_0$  i  $\delta$  tako da pri proizvoljnom  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ , jednačina (1) ima jedinstveno skoro periodičko rešenje

$$x^*(t) = \mathcal{F}[t, \theta(t)] \quad (8)$$

koje zavisi od proizvoljne konstante (faze).

Ako su svi realni delovi karakterističnih pokazatelja jednačine (7) sa varijacijama, negativni, to proizvoljno rešenje  $x(t)$  jednačine (1) sa početnim uslovima iz dovoljno male okoline orbite (2) težiće sa vremenom ka rešenju (2) po zakonu

$$|x(t) - \mathcal{F}[t, \theta(t)]| \leq C_1 e^{-\gamma(t-t_0)} \quad (9)$$

a iz toga sledi da će rešenje (8) imati orbitalnu asimptotsku stabilnost i privlačiće sebi sva rešenja jednačine (1) koja leže u blizini rešenja jednačine (2). Ako je realni deo bilo kog karakterističnog pokazatelja pozitivan orbita (8) je tada nestabilna.

U slučaju pojave karakterističnih pokazatelja jednakih nuli (više od jednog) ili karakterističnih pokazatelja sa pozitivnim realnim delom dobijamo kritični slučaj za čije proučavanje je potrebno mesto jednačina prve aproksimacije uzeti jednačine viših aproksimacija.

Kako jednačine prve aproksimacije možemo dobiti pomoću metode usrednjenja, a date teoreme kazuju kako metoda usrednjenja može da se iskoristi za izučavanje stabilnosti stacionarnih režima određenih jednačinama prve aproksimacije dobijenih asimptotskim metodama. Znači da je za konkretnu primenu ove teorije potrebno naći parcijalne izvode desnih strana jednačina prve aproksimacije i pomoću njih sastaviti jednačine sa varijacijama i karakterističnu jednačinu. Zatim je potrebno odrediti korene karakteristične jednačine i videti da li su svi realni delovi korena karakteristične jednačine negativni i na osnovu toga izvući zaključak o stabilnosti oscilovanja. Ako se bar jedan realni deo korena javi kao pozitivan oscilovanje je nestabilno.

## V            G l a v a

SISTEMI LJAPUNOVA, KONZERVATIVNI SISTEMI,  
GEOMETRIJSKA DISKUSIJA KRIVIH ENERGIJE U  
FAZNOJ RAVNI1. SISTEM LJAPUNOVA - SLUČAJ JEDNOG STEPENA  
SLOBODE

Klasična teorija periodičkih rešenja diferencijalnih jednačina, čiji je osnovni deo analitička funkcija promenljivih je proizišla iz radova *Ляпунов*-a i Poincaré-a na kraju prošlog veka. Uporedo sa izučavanjima teorijskog karaktera radilo se i na razradi metoda efektivnog sastavljanja periodičkih rešenja. Ovde ćemo proučiti samo neka izabrana poglavlja koja su nam neophodna za primenu u teoriji oscilacija.

U glavi II čl. 1 smo izučavali rešenja diferencijalne jednačine oblika

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \quad ; \quad f(-x) = -f(x) \quad (1)$$

koja opisuje oscilovanje nelinearnog konzervativnog sistema. Ako primenimo metodu fazne ravni za slučaj kada je  $f(0) = 0$ , utvrđujemo da su fazne trajektorije ovog sistema u dovoljno maloj okolini položaja ravnoteže zatvorene. Zatvorenim trajektorijama odgovaraju periodička rešenja. Ovakav sistem pripada opštijem sistemu *Ляпунов*-a. Sistemi *Ляпунов*-a imaju mnoge osobine konzervativnih sistema. Kao i konzervativni siste-

mi u okolini položaja ravnoteže pri izvesnim uslovima sistemi *Ляпунов* -a opisuju periodička kretanja.

*Ляпунов* je za te sisteme razradio veoma efektivnu metodu nalaženja periodičkih rešenja kretanja.

Ovde ćemo posmatrati sistem diferencijalnih jednačina<sup>1°</sup>

$$\frac{d\xi}{dt} = a_{11}\xi + a_{12}\eta + X^*(\xi, \eta) \quad (2)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = a_{21}\xi + a_{22}\eta + Y^*(\xi, \eta)$$

u kome su  $X^*(\xi, \eta)$  i  $Y^*(\xi, \eta)$  analitičke funkcije promenljivih u okolini tačke  $\xi = \eta = 0$  takve da njihov razvoj po stepenima  $\xi$  i  $\eta$  počinje od članova čiji stepen nije niži od drugog:

$$X^*(\xi, \eta) = b_{20}\xi^2 + b_{02}\eta^2 + b_{11}\xi\eta + b_{30}\xi^3 + \dots \quad (3)$$

$$Y^*(\xi, \eta) = d_{20}\xi^2 + d_{02}\eta^2 + d_{11}\xi\eta + d_{30}\xi^3 + \dots$$

Sistem (2) nazvaćemo sistemom *Ляпунов* -a ako su zadovoljena sledeća dva uslova:

a) Jednačina

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \delta & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \delta \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

ima čisto imaginarne korene  $\pm \lambda i$  ;

b) Sistem(2) ima analitički prvi integral

$$H(\xi, \eta) = \text{const} \quad (5)$$

čiji razvoj po stepenima  $\xi$  i  $\eta$  počinje od članova drugog reda, tj. funkcija  $H(\xi, \eta)$  u okolini tačke  $\xi = \eta = 0$  ,

<sup>1°</sup> Vidi N.N.Moiseev

može se predstaviti u obliku

$$H(\xi, \eta) = a_0^* + a_{20}^* \xi^2 + a_{02}^* \eta^2 + a_{11}^* \xi \eta + \dots \quad (6)$$

Sistem čije je oscilovanje predstavljeno jednačinom (1) se može predstaviti u obliku (2). Ako je naprimer  $f(z) = \omega^2 z + a_2 z^2 + \dots$ , smenom  $\dot{\xi} = -\omega \eta$ ,  $z = \xi$  jednačina (1) se svodi na sistem

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\omega \eta \\ \dot{\eta} &= \omega \xi + \frac{a_2}{\omega} \xi^2 + \dots \end{aligned}$$

koji je oblika (2), odakle vidimo da ovakav konzervativni sistem stvarno ispunjava uslove da pripada sistemu *Ляпунов* -а.

Sistemu *Ляпунов* -а pripadaju i mnogi nekon- zervativni sistemi koji se sreću u tehnici i fizici. O čemu će biti reči u narednom članu.

#### I. TRANSFORMACIJA JEDNAČINA NA KANONSKI OBLIK.

Proučimo pomoćni sistem jednačina

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= a_{11} \xi + a_{12} \eta \\ \dot{\eta} &= a_{21} \xi + a_{22} \eta \end{aligned} \quad (7)$$

koji opisuje oscilovanje sa konstantnom amplitudom, ako njena karakteristična jednačina ima par čisto imaginarnih korena. Eliminacijom iz jednačine (7) promenljive  $\eta$ , dobijamo

$$\ddot{\xi} - (a_{11} + a_{22}) \dot{\xi} + (a_{22} a_{11} - a_{21} a_{12}) \xi = 0 \quad (8)$$

Da bi bio zadovoljen uslov o imaginarnosti korena karakteristične jednačine, mora da je koeficijent uz  $\dot{\xi}$  jednak nuli, tj. mora da je  $a_{11} = -a_{22}$  i osim toga treba da je

$$\lambda^2 = a_{22} a_{11} - a_{21} a_{12} > 0 \quad (9)$$

Uvedemo smenu



$$\xi = x \quad \dot{x} = -\lambda y \quad (10)$$

gde je  $\lambda$  - aritmetička vrednost korena  $\sqrt{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}}$ , pomoću koje jednačina (8) daje ekvivalentni sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda y \\ \dot{y} &= \lambda x \end{aligned} \quad (11)$$

Pomoću smene promenljivih (10) početni sistem jednačina (2) se svodi na sledeći sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda y + X(x, y) \\ \dot{y} &= \lambda x + Y(x, y) \end{aligned} \quad (12)$$

gde su  $X(x, y)$  i  $Y(x, y)$  analitičke funkcije svojih argumenata, čiji razvoj u stepeni red počine sa članovima drugog i višeg stepena. Ovako transformisani sistem jednačina (12) pogodnije je koristiti za izučavanje sistema Лангмоб-а, nego sistem (2).

II. TRANSFORMACIJA INTEGRALA  $H(\xi, \eta)$ . Saglasno pretpostavci b) oblik integrala  $H(x, y)$  je

$$H(x, y) \equiv Ax^2 + By^2 + Cxy + \dots = \tilde{\mu} \quad (13)$$

gde je  $\tilde{\mu}$  neka konstanta. Kako je  $H(x, y)$  prvi integral to je na osnovu (12)  $\frac{dH}{dt} = 0$ , što nam dozvoljava da izračunamo koeficijente  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Nalazimo da je

$$\frac{dH}{dt} = (2Ax + Cy)[- \lambda y + X(x, y)] + (2By + Cx)[\lambda x + Y(x, y)] = \quad (14)$$

Izjednačavajući koeficijente uz  $x^2$ ,  $y^2$  i  $xy$  dobijamo da je  $A = B$  i  $C = 0$ . Ne umanjujući opštost možemo staviti da je  $A = B = 1$  i integral (14) napisati u obliku

$$H(x,y) = x^2 + y^2 + W(x,y) = \mu^2 \quad (15)$$

gde je  $W(x,y)$  analitička funkcija svojih argumenata, a čiji razvoj u stepeni red počinje članovima trećeg stepena,  $\mu^2$  je neka konstanta koju mi možemo uvek računati za pozitivnu za dovoljno male vrednosti promenljivih  $x$  i  $y$ .

### III. PERIODIČNOST REŠENJA SISTEMA LJAPUNOVA.

Dokažimo sada da su rešenja sistema (12) za dovoljno male vrednosti konstante  $\mu$ , periodičke funkcije vremena  $t$ . Zato je dovoljno pokazati da su fazne trajektorije u ravni  $(x, y)$  zatvorene i da  $\dot{\theta}$  zadržava svoj znak. Zato ćemo uvesti polarne koordinate

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho \sin \theta \end{aligned} \quad (16)$$

i uočićemo da proizvoljna zatvorena trajektorija  $\rho(\theta)$  mora biti periodička funkcija argumenta  $\theta$ . Na osnovu prethodnog sastavimo izraz za prvi analitički integral  $H$  kao

$$H \equiv \rho^2 \left( 1 + \frac{1}{\rho^2} W(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \right) = \mu^2 \quad (17)$$

gde je  $W(\rho, \theta)$  analitička funkcija  $\rho$ , čiji razvoj ima oblik

$$\begin{aligned} W(\rho, \theta) &= \rho^3 (d_{20} \cos^2 \theta + d_{21} \cos^2 \theta \sin \theta + d_{12} \cos \theta \sin^2 \theta + d_{30} \sin^2 \theta) + \dots + \\ &+ \rho^{n+m} (d_{n+m,0} \cos^{n+m} \theta + \dots + d_{0,n+m} \sin^{n+m} \theta) + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

U formuli (17) funkcija  $\frac{1}{\rho^2} W(\rho, \theta)$  može biti predstavljena u obliku reda

$$\frac{1}{\rho^2} W(\rho, \theta) = \rho a_1(\theta) + \rho^2 a_2(\theta) + \dots \quad (19)$$

pri čemu su svi koeficijenti  $a_i(\theta)$  polinomi po  $\sin \theta$  i  $\cos \theta$ , tj. periodičke funkcije  $\theta$ . Na taj način izraz (17) možemo napisati kao

$$\xi [1 + \rho a_1(\theta) + \dots]^{1/2} = \mu \quad (20)$$

Ovaj izraz možemo posmatrati kao jednačinu za određivanje  $\rho(\theta)$ . Koristeći analitičnost funkcija koje su obuhvaćene izrazom (20) mi ćemo funkciju  $\rho(\theta)$  tražiti u obliku reda

$$\rho = \mu + b_2(\theta)\mu^2 + b_3(\theta)\mu^3 + \dots \quad (21)$$

Direktnim izračunavanjem uveravamo se o tome da su koeficijenti razvoja (21) polinomi po  $\sin \theta$  i  $\cos \theta$ . Tako naprimer je

$$b_2(\theta) = -\frac{1}{2}a_1(\theta); \quad b_3(\theta) = a_1^2 - \frac{1}{2}a_2; \quad \dots \quad (22)$$

Na taj način, koeficijenti  $b_i(\theta)$  su stepene funkcije koeficijenata  $a_i(\theta)$ , koji se javljaju kao polinomi po  $\sin \theta$  i  $\cos \theta$ . Kao posledica takve strukture koeficijenata red (21) određuje periodičku funkciju argumenta  $\theta$ , perioda  $2\tilde{T}$ , tj. pri promeni ugla  $\theta$  od nule do  $2\tilde{T}$  veličina  $\rho$  se vraća na svoju početnu vrednost. Ako se pri tome pokaže da  $\tilde{\theta}$  zadržava svoj znak, to će značiti da je fazna trajektorija zatvorena.

Na taj način rešenja sistema (12) funkcije  $x(t)$  i  $y(t)$  biće periodičke funkcije vremena  $t$ . Funkcije  $x(t)$  i  $y(t)$  se javljaju kao analitičke po parametru  $\mu$ . U suštini na osnovu analitičnosti desnih strana sistema jednačina (12), rešenja tog sistema će biti analitičke funkcije početnih vrednosti  $x(0) = c$  i  $y(0) = b$ . Konstanta  $\mu$  se takodje određuje pomoću početnih vrednosti kao

$$\mu^2 = c^2 + b^2 + W(c, b) \quad (23)$$

Kako desne strane jednačina (12) ne zavise od vremena to bez ograničenja opštosti početne uslove je moguće prihvatiti u obliku

$$x(0) = c ; \quad y(0) = 0 . \quad (24)$$

Oдавде se vidi da rešenja sistema jednačina (12) pretstavljaju analitičke funkcije početne koordinate  $c$ , a takodje i konstanta prvog integrala  $\mu$ , koja je analitička funkcija se može napisati kao

$$\mu = c + \mu_2 c^2 + \dots \quad (25)$$

IV. IZRAČUNAVANJE PERIODA OSCILOVANJA. Za izračunavanje perioda oscilovanja sastavimo diferencijalne jednačine koje zadovoljavaju promenljive  $\xi$  i  $\theta$ . Izračunamo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\xi} \cos \theta - \xi \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} &= \dot{\xi} \sin \theta + \xi \dot{\theta} \cos \theta \end{aligned} \quad (26)$$

i u tom sistemu zamenimo izvode  $\dot{x}$  i  $\dot{y}$  njihovim izrazima iz sistema jednačina (12) pa rešavajući ih u odnosu na izvode  $\dot{\xi}$  i  $\dot{\theta}$  nalazimo tražene jednačine

$$\frac{dS}{dt} = X(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta) \cos \theta + Y(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta) \sin \theta \quad (27)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \lambda + \frac{1}{\xi} \{ Y(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta) \cos \theta - X(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta) \sin \theta \}$$

Iz druge jednačine nalazimo vreme  $t$

$$t = \int_0^{\theta} \frac{\xi d\theta}{\lambda \xi + Y(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta) \cos \theta - X(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta) \sin \theta} \quad (28)$$

Da bi izraz za vreme  $t$  zadovoljio uslove (24) neophodno je u (28) konstantu integracije izjednačiti sa nulom. Iskoristimo sada to da je  $\xi$  analitička funkcija  $\mu$ , što nam doz-

voljava da podintegralnu funkciju u izrazu (28) razložimo u red po stepenima  $\mu$  kao

$$t = \frac{1}{\lambda} \left\{ \theta + \int_{\theta_0}^{\theta} [\mu \mathcal{V}_1(\theta) + \mu^2 \mathcal{V}_2(\theta) + \dots] d\theta \right\} \quad (29)$$

gde su  $\mathcal{V}_i(\theta)$  periodičke funkcije po  $\theta$  perioda  $2\mathcal{T}$ . Integral

$$II = \int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\mathcal{T}} [\mu \mathcal{V}_1(\theta) + \mu^2 \mathcal{V}_2(\theta) + \dots] d\theta \quad (30)$$

ima podintegralnu periodičku funkciju pa ne zavisi od početne vrednosti  $\theta_0$  i možemo ga napisati u obliku

$$II = 2\mathcal{T} (\mu h_1 + \mu^2 h_2 + \dots) \quad (31)$$

gde su  $h_i$  - potpuno određeni brojevi. Na taj način pro promeni  $\theta$  za  $2\mathcal{T}$  vreme  $t$  dobija priraštaj  $T$  jednak periodu oscilovanja

$$T = \frac{2\mathcal{T}}{\lambda} (1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + \dots) \quad (32)$$

koji ne zavisi od  $\theta_0$ . Koristeći se prethodnim za period oscilovanja možemo da napišemo da je

$$T(\mu, \theta_0) = \int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\mathcal{T}} \frac{\xi d\theta}{\lambda \xi + Y(\xi \cos \theta, \eta \sin \theta) \cos \theta - X(\xi \cos \theta, \eta \sin \theta) \sin \theta} \quad (33)$$

Kada  $\mu \rightarrow 0$ , period  $T$  teži periodu linearnih oscilacija  $\frac{2\mathcal{T}}{\lambda}$ , tj. periodu oscilovanja u sistemu gde su  $X \equiv 0$  i  $Y \equiv 0$ .

**T e o r e m a** *Лангюна* - a: Ako je konstanta  $\mu$  dovoljno mala, to su sva rešenja sistema (12) periodičke funkcije vremena  $t$ , pri čemu je period parna funkcija parametra  $\mu$  i pri  $\mu \rightarrow 0$  teži ka  $2\mathcal{T}/\lambda$ . Rešenja sistema (12) su analitičke funkcije veličine  $\mathcal{C}$ , početnog otklona promenljive  $x$ .

V. Primer nekonzervativnog sistema. Klasa sistema Ланунов-a kao što smo već rekli je znatno šira od klase konzervativnih sistema i u primenjenim zadacima se ti sistemi često sreću. Razmotrimo sada jednačinu koja se sreće u teoriji talasa, koji se javljaju na površini teške viskozne tečnosti koja se sliva po nagnutom žljebu<sup>1</sup>

$$\ddot{x} - \beta x \dot{x} + \lambda^2 x = 0 \quad (34)$$

Tačka  $x = \dot{x} = 0$  se javlja kao položaj ravnoteže. Pokažimo da ova jednačina pripada sistemu Ланунов-a. Zato je potrebno da proverimo navedena dva uslova: prvo-koreni karakteristične jednačine linearizovanog sistema moraju da budu čisto imaginarni i drugo sistem (34) mora da ima prvi integral analitički u okolini položaja ravnoteže. Prvi od tih uslova je očevidan ako se uvede smena  $y = \dot{x}$  u jednačinu (34) koju tada možemo da prepíšemo u obliku

$$y \frac{dy}{dx} = (\beta y - \lambda^2) x \quad (35)$$

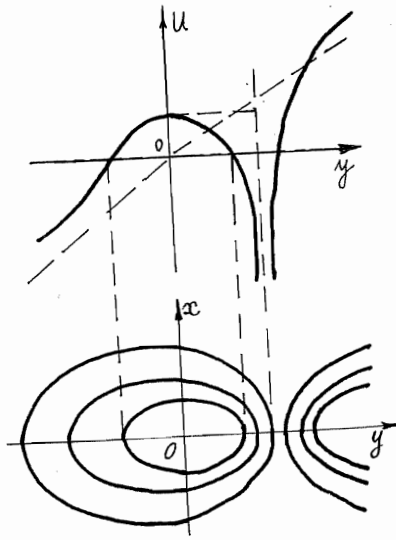
U ovoj jednačini promenljive se razdvajaju i posle integraljenja se dobija

$$\begin{aligned} \frac{2y}{\beta} + \frac{2\lambda^2}{\beta^2} \ln(\beta y - \lambda^2) &= x^2 + C_1 & y > \frac{\lambda^2}{\beta} \\ \frac{2y}{\beta} + \frac{2\lambda^2}{\beta^2} \ln(\lambda^2 - \beta y) &= x^2 + C_2 & y < \frac{\lambda^2}{\beta} \end{aligned} \quad (36)$$

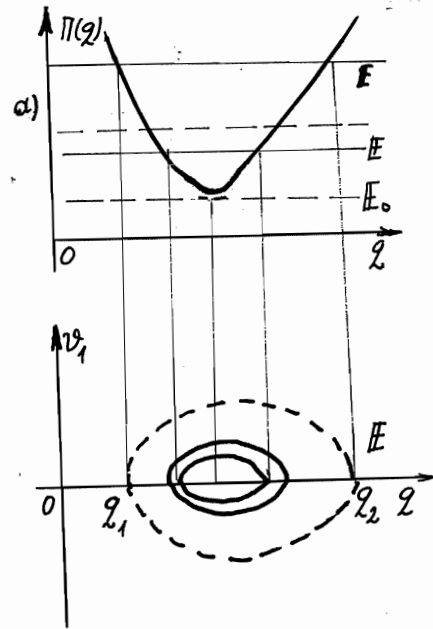
Ovi izrazi pokazuju da prvi integral koji dopusta jednačina (34) će biti analitički u okolini tačke  $x = y = 0$ . I tako jednačina (34) saglasno teoremi Ланунов-a ima u okolini položaja ravnoteže periodička rešenja. Do istog zaključka možemo da dođemo analizom fazne ravni. Označimo sa

$$u(y) = \frac{2y}{\beta} + \frac{2\lambda^2}{\beta^2} \ln(\beta y - \lambda^2) \quad y > \frac{\lambda^2}{\beta} \quad (37)$$

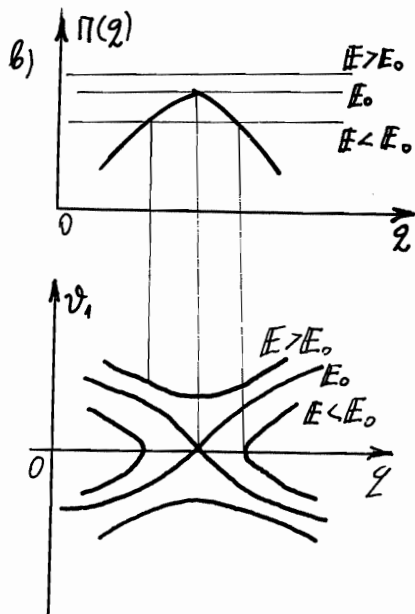
<sup>1</sup> vidi N.N. Moiseev



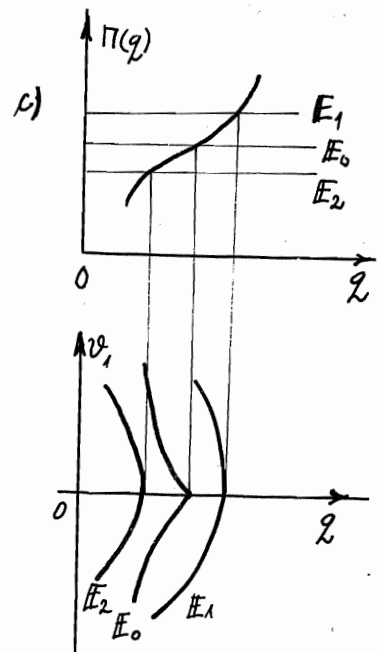
S1.35



S1. 36 a



S1.36 b



S1.36 c

$$\mu(y) = \frac{2y}{\beta} + \frac{2\lambda^2}{\beta^2} \ln(\lambda^2 - \beta y) \quad y < \frac{\lambda^2}{\beta} \quad (37)$$

Prvi integral možemo sada da napišemo u obliku

$$x = \pm \sqrt{\mu(y) - C} \quad (38)$$

koji nam omogućava da sastavimo fazne trajektorije u faznoj ravni. Na slici 35 su prikazane fazne trajektorije za jednačinu (34). Vidi se da je poluravan  $y < \frac{\lambda^2}{\beta}$  ispunjena zatvorenim trajektorijama, koje su nesimetrično raspoređene u odnosu na  $Ox$ -osu, ali kojima odgovaraju periodička rešenja polazne jednačine.

## 2. SISTEMI LJAPUNOVA. SLUČAJ PROIZVOLJNOG BROJA STEPENI SLOBODE OSCILOVANJA.

U prethodnom članu smo proučili neka svojstva sistema *Ляпунов*-a drugog reda. Izloženi zaključci i teorema *Ляпунов*-a mogu biti uopšteni na sisteme *Ляпунов*-a višeg reda, ali su pri tome ograničenja veća. U slučaju sistema *Ляпунов*-a proizvoljnog reda moguće je odrediti samo određenu familiju ili klasu periodičkih rešenja. Bez obzira na ograničen karakter ovog istraživanja on se često javlja kao i jedini način izučavanja i sastavljanja periodičkih rešenja nelinearnih sistema sa više stepeni slobode oscilovanja.

Ovde se nećemo detaljnije zadržavati na izučavanju, nego ćemo samo navesti teoremu *Ляпунов*-a za sistem *Ляпунова* -a proizvoljnog broja stepeni slobode oscilovanja.

Sistem diferencijalnih jednačina



$$\dot{\tilde{x}}_i = F_i(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n+2}) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n+2. \quad (39)$$

nazvaćemo sistemom *Ляпунов* -a, ako zadovoljava sledeće uslove:

a) Funkcije  $F_i$  su analitičke funkcije svojih argumenata; u okolini tačke  $\tilde{x}_i = 0$  se mogu izraziti u obliku

$$F_i = \sum_{j=1}^{n+2} a_{ij} \tilde{x}_j + F_i^*(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{n+2}) \quad (i=1, 2, \dots, n+2) \quad (40)$$

ovde su  $a_{ij}$  konstantni brojevi,  $F_i^*$  analitičke funkcije čiji razvoj počinje od članova drugog stepena

$$F_i^* = \sum_{s_1+s_2+\dots+s_{n+2}=2}^{\infty} a_i^{(s_1, s_2, \dots, s_{n+2})} \tilde{x}_1^{s_1} \tilde{x}_2^{s_2} \dots \tilde{x}_{n+2}^{s_{n+2}} \quad (41)$$

b) Jednačina

$$D(\lambda) \equiv |a_{ij} - \lambda^* \delta_i^j| = 0 \quad (42)$$

ima u krajnjem slučaju jedan par čisto imaginarnih korena  $\pm i\lambda$ .

c) Koreni  $\pm i\lambda$  su prosti i među korenima te jednačine nema korena oblika  $\pm i\rho\lambda$ , gde je  $\rho$  proizvoljan ceo broj.

d) Sistem (39) ima prvi analitički integral

$$H(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{n+2}) = \text{const} \quad (43)$$

Sistem jednačina (39) može da se transformiše na oblik

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda y + X(x, y, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda x + Y(x, y, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_s}{dt} &= b_{s_1} x_1 + \dots + b_{s_n} x_n + X_s(x, y, x_1, \dots, x_n) \quad (s=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (44)$$

što ovde nećemo dokazivati. Pri izvesnim uslovima ovakvi sistemi dopustaju periodičko rešenje koje se razlaže u red po stepenima početne vrednosti jedne od koordinata uz pretpostavku da je ta vrednost dovoljno mala. Pitanje o postojanju periodičkog rešenja kod ovakvih sistema prema teoriji Ляпунов -a povezano je sa pitanjem o stabilnosti neporemećenog kretanja sistema, određenog nultom vrednošću koordinata u jednom od "kritičnih slučajeva", naime kada karakteristična jednačina ima par čisto imaginarnih korenova.

**T e o r e m a Ляпунов -a:** Ako jednačine nelinearnog sistema  $(n+2)$ -og reda mogu da budu transformisane na oblik (44) gde je  $\lambda$  pozitivan broj,  $b_{sk}$  konstantni koeficijenti,  $X$ ,  $Y$  i  $X_s$  analitičke funkcije promenljivih  $x$ ,  $y$ ,  $x_n, \dots, x_1$ , za dovoljno male vrednosti, koje u svom razvoju počinju sa članovima ne nižeg reda od dva u odnosu na te promenljive i ako jednačine (44) imaju prvi integral oblika

$$H \equiv x^2 + y^2 + W(x_1, x_2, \dots, x_n) + S(x, y, x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const}$$

gde je  $W(x_1, \dots, x_n)$  kvadratna forma promenljivih  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , a  $S(x, y, x_1, \dots, x_n)$  funkcija svih koordinata čiji razvoj počinje sa članovima ne nižim od trećeg reda (stepena) to sistem (44) ima u dovoljno maloj okolini tačke  $x = y = x_1 = \dots = x_n = 0$  periodičko rešenje, koje se može da razvije u red po stepenima početne vrednosti  $x = A$  (pretpostavljene dovoljno malom) koje isčezava za  $A = 0$  i ima period koji se može razviti u red po stepenima  $A$  i koji postaje  $2\pi/\lambda$  za  $A = 0$ .

### 3. KONZERVATIVNI SISTEMI I GEOMETRIJSKA DISKUSIJA KRIVIH ENERGIJE U FAZNOJ RAVNI

Kao što smo već napomenuli nelinearni konzervativni sistemi predstavljaju specijalan slučaj sistema *Лапунов*-a i mogućnost njihovog izučavanja obuhvaćena je opštim metodama za izučavanje sistema *Лапунов*-a.

Konzervativni sistemi su najčešće su dosta gruba aproksimacija realnih nelinearnih sistema, koja samo do određene granice daje zadovoljavajuće rezultate. Takva aproksimacija je zgodna u smislu prostijeg izučavanja oscilacija uz jednovremenu mogućnost da se studioznije izuči niz drugih pitanja. Konzervativne sisteme karakteriše konstantnost energije u toku procesa oscilovanja.

Posmatrajmo primer oscilovanja konzervativnog sistema sa jednim stepenom slobode oscilovanja, čija je diferencijalna jednačina oblika

$$\alpha \frac{d^2 q}{dt^2} + F_e(q) = 0 \quad (1)$$

gde je  $-F_e(q)$  restituciona sila koja je funkcija generalisane koordinate,  $\alpha$  inercioni koeficijent koji može da ima različito fizičko značenje. Restituciona sila pod čijim se dejstvom vrši kretanje je konzervativna jer proizvoljno zavisi od koordinate. Restituciona sila, kao konzervativna sila se može izraziti kao gradijent skalarne funkcije sile

$$-F_e(q) = \frac{\partial U}{\partial q} \quad (2)$$

Jednačinu (1) smenom  $\dot{q} = v$  možemo prevesti na sistem od

od dve jednačine

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{m} F_e(q) = \varphi(q) \quad (3)$$

$$\frac{dq}{dt} = v$$

odakle sledi jednačina integralnih krivih

$$m v dv + F_e(q) dq = 0 \quad (4)$$

Integraljenjem poslednje jednačine dobijamo

$$\frac{mv^2}{2} + \int F_e(q) dq = E_1 \quad (5)$$

Ova jednačina može da se interpretira pomoću energije i ona kaže da je zbir kinetičke i potencijalne energije konstantan

$$E_k + E_p = E_1 = \text{const} \quad (6)$$

Za našu analizu najpogodnije je ovu jednačinu da napišemo u obliku

$$\frac{v^2}{2} + \Pi(q) = \frac{v_0^2}{2} + \Pi(q_0) = E - \text{const} \quad (6')$$

gde je  $E$  totalna energija sistema. Sa  $\Pi(q)$  je obeležena funkcija sile. Za početne uslove konstanta integracije je

$$E = \frac{v_0^2}{2} + \Pi(q_0)$$

i ona je konstantna za sve vreme kretanja sistema, dok koordinata i brzina,  $q$  i  $v$ , moraju uvek da zadovoljavaju jednačinu (6). Fazna trajektorija (6') u faznoj ravni predstavlja i krivu konstantne energije. Singularne tačke su na mestima gde je fazna brzina jednaka nuli, odnosno gde je

$$v = \sqrt{v_0^2 + [\varphi(q)]^2} = 0 \quad (7)$$

Singularne tačke su, znači, na  $q$ -osi gde funkcija  $\varphi(q)$  preseca  $q$ -osu.

Jednačina integralnih krivih se može napisa-

ti u obliku

$$\dot{q} = \frac{v}{\sqrt{2}} = \pm \sqrt{E - \Pi(q)} \quad (8)$$

odakle se vidi da su integralne krive simetrične u odnosu na  $q$  - osu. Za  $E - \Pi(q) < 0$  realne grane na integralnim krivim ne postoje, za  $E - \Pi(q) > 0$  postoje takve realne grane.

Obeležimo sa  $\chi = \Pi(q)$  funkciju potencijalne energije, a onda funkcija  $\frac{1}{m} F_e(q)$  predstavlja izvod potencijalne energije po koordinati

$$\frac{d\Pi(q)}{dq} = \frac{1}{m} F_e(q) = F(q) \quad (9)$$

Kako je u singularnim tačkama  $F(q)$  jednako nuli, to možemo uočiti da se singularne tačke integralnih krivih javljaju u tačkama sa apscisama  $q$  za koje potencijalna energija ima ekstremne vrednosti. Ovo možemo uočiti uporednim razmatranjem dve ravni  $(q, \Pi(q))$  i  $(q, v)$  koje imaju istu apscisu  $q$ . Na slici 36 prikazane su integralne krive i njihovi singulariteti za različite promene potencijalne energije  $\Pi(q)$ . Na slici 36 a funkcija potencijalne energije  $\chi = \Pi(q)$  ima minimum  $E_0$  i zatvorene integralne krive prelaze u singularnu tačku koja je centar. Za slučaj kada je  $E < E_0$  ne postoje integralne krive, dok su za  $E > E_0$  zatvorene i okružuju singularnu tačku - centar. Ova tačka je stabilni centar, jer je potencijalna energija u minimumu. Ovo zaključujemo na osnovu Lagrange-ove t e o r e m e, koja glasi: Ako potencijalna energija konzervativnog sistema ima izolovani maksimum u položaju ravnoteže taj položaj je stabilan. Kako zatvorene integralne krive odgovaraju periodičkim kretanjima to je period periodičkog kretanja

$$T = 2 \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{v} = 2 \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{\sqrt{2(E - \Pi(q))}} \quad (10)$$

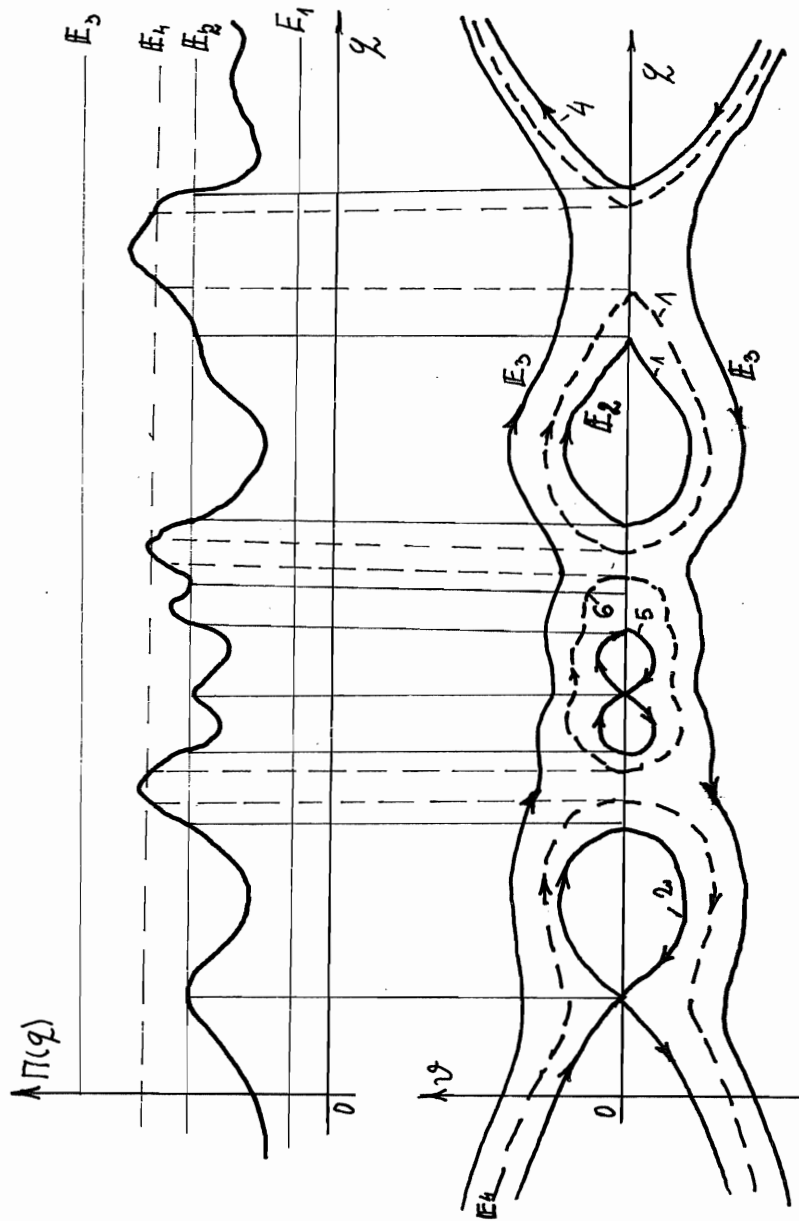
gde su  $q_1$  i  $q_2$  presečne tačke integralne krive sa osom, što je na slici i prikazano.

U slučaju da potencijalna energija ima maksimum, onda za  $E = E_0$  gde je  $E_0$  maksimum funkcije potencijalne energije  $\mathcal{Z} = \Pi(q)$ , integralna kriva se sastoji iz četiri grane, koje prolaze kroz singularnu tačku tipa sedla, čija apscisa odgovara apscisi  $q$  maksimuma potencijalne energije. Ovakvu faznu trajektoriju nazivamo razdvojna linija ili separatrisa, jer ona razdvaja grane trajektorija različitih oblika i nalazi se na prelazu jednih oblika grana u druge. Ostale trajektorije ne prolaze kroz sedlastu tačku, koja predstavlja nestabilni položaj ravnoteže u faznoj ravni. Na ovaj slučaj može se primeniti *Ла-рухов* - ljeva *теорема* o nestabilnosti položaja ravnoteže koja glasi: Ako potencijalna energija konzervativnog sistema ima izolovani maksimum u položaju ravnoteže taj položaj je nestabilan. Za  $E > E_0$  fazne trajektorije se sastoje iz grana ispod i iznad separatrice koja prolazi kroz sedlastu tačku. Za  $E < E_0$  fazne trajektorije su otvorene grane koje su rasporedjene levo i desno od sedlaste tačke i okrenute svojom konveksnom stranom ka njoj. (Sl. 36 b)

Kada funkcija potencijalne energije ima prevojnu tačku u kojoj su prvi i drugi izvod jednaki nuli, tj. kada je tangenta na krivu energije u toj tački horizontalna, kao integralna kriva u faznoj ravni javiće se kriva sa vrhom (špicom) na apscisi koja odgovara prevojnoj tački. Položaj ravnoteže kome odgovara ta tačka je nestabilan. (Vidi sliku 36 c).

Stabilnost u singularnim tačkama može se odrediti i na osnovu ponašanja funkcije sile o čemu govori i sledeća Lejenne-Dirichlet-ova teorema: Kada u položaju ravnoteže materijalnog sistema, na koji dejstvuju konzervativne sile, funkcija sile ima maksimum, položaj ravnoteže je stabilan, dok je u suprotnom taj položaj nestabilan - labilan ili indeferentan.

Na opštem primeru funkcije  $\mathcal{Z} = \Pi(q)$  prikažaćemo analizu kretanja za različite vrednosti konstante ener-



sl.37

gije  $E$  u odnosu na krivu potencijalne energije. Ako je prava  $z = E = \text{const.}$  ispod krive  $z = \Pi(q)$  i nigde je ne seče integralne krive ne postoje i kretanje je nemoguće sa takvom energijom. Ako je prava  $z = E = \text{const.}$  cela iznad krive energije  $z = \Pi(q)$  grane integralne krive idu iz beskonačnosti u beskonačnost i ne seku apscisnu osu. Takve krive u ruskoj literaturi se nalaze pod nazivom *узелноујуну*. Kretanje čija se reprezentativna tačka kreće po takvim krivama, će se odvijati od početnog položaja sa koordinatom  $q_0$  i brzinom  $v_0$ , ka položaju u beskonačnosti sa stalnim uvećanjem brzine.

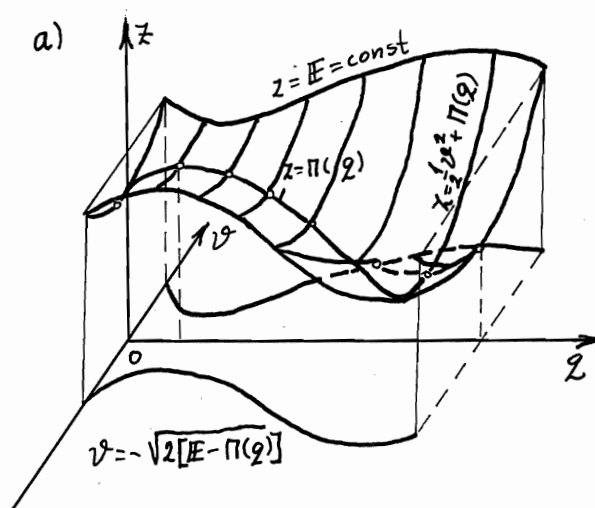
Ako je konstanta energije tako izabrana da prava  $z = E = \text{const.}$  seče, tangira u maksimumu i minimumu, seče u prevojnoj tački krivu energije na faznom portretu se dobija više izolovanih grana faznih krivih, što se može videti sa slike 37. Za vrednosti koordinate  $q$  za koje je  $\Pi(q) > E$  ne postoje trajektorije u faznoj ravni. Za ostale vrednosti koordinate  $q$  za koje je  $\Pi(q) < E$  postoje fazne trajektorije u vidu zatvorenih krivih (1), separatrise (2), izolovanih tačaka (6) i otvorenih grana (3) i (4). Fazne trajektorije koje se samopresecaju u tački tipa sedla nazivaju se separatrise, a odvajaju krive raznih tipova. Pri povećanju konstante energije  $E$  dobijaju se fazne krive koje zahvataju separatrisu i odgovaraju periodičkim rešenjima, dok za smanjenje konstante energije  $E$ , dobijamo takodje zatvorene krive obuhvaćene separatrisom u datom slučaju. Neograničeni delovi krivih označeni sa (4) na slici odgovaraju neperiodičkim kretanjima. Sa (5) je označena separatrisa sa jednom petljom i drugim delom koji ide u beskonačnost.

#### 4. POVRŠINA ENERGIJE

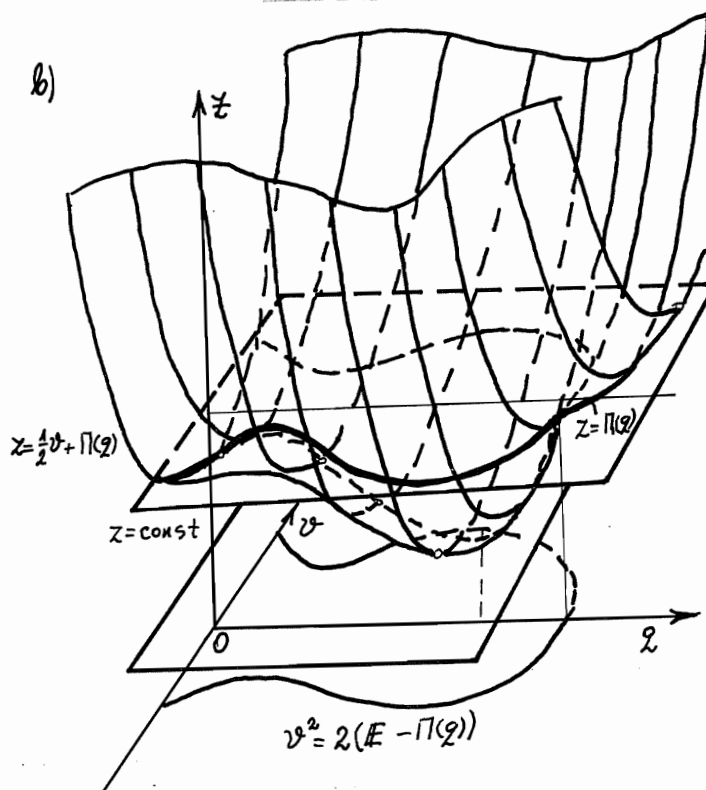
Interesantno je proučiti površinu zadatau izrazom

$$z = E = \frac{v^2}{2} + \Pi(q) \quad (1)$$





S1.38 a



S1.38 b

u prostornom Descartes-ovom pravouglom koordinatnom sistemu  $(q, v, z)$  koja predstavlja površinu energije (Energiefläche). Ovakva površina je predstavljena na slici i omogućava nam da na njoj uočimo neke krive:

1<sup>o</sup>  $z = \Pi(q)$  je kriva potencijalne energije koja se dobija za  $v=0$ , tj. presekom  $(q, z)$  ravni i površine energije.

2<sup>o</sup> Fazne krive tj. krive  $E = \text{const}$ , odnosno krive

$$v = \sqrt{2} \sqrt{E - \Pi(q)}$$

čijom se projekcijom na ravan  $(q, v)$  dobija fazna kriva, odnosno fazni portret za razne vrednosti konstante energije  $E$ . Ove krive se dobijaju presekom površine energije i ravni paralelnih ravni  $(q, v)$  na visini  $E$ .

3<sup>o</sup> Za  $z = \frac{v^2}{2} + \Pi(q_i)$  dobijaju se krive oblika parabole, koje se nalaze u preseku površine energije i ravni  $z = q_i$  gde je  $q_i$  izabrana koordinata. Ove krive pokazuju promenu brzine i energije sistema za konstantnu apscisu. Može se uočiti za sve površine energije konzervativnih sistema da je kriva  $z = \Pi(q)$  u ravni  $(q, h)$  direktrisa, a parabola  $z = \frac{1}{2} v^2$  ili  $z = \frac{1}{2} v^2 + \Pi(q_i)$  generatrisa, čijim kretanjem nastaje površina energije, dok je u toku kretanja svojim temenom uvek na direktrisi, a osa joj je paralelna sa  $z$  osom.

Sa priloženog crteža slika 38 vidi se priroda površine energije konzervativnih sistema. Na slici pod b se vidi da pomeranjem ravni  $z = E$  paralelne ravni  $(q, v)$  i projektovanjem njenih preseka sa površinom energije se dobija fazni portret u faznoj ravni.

## 5. PRIMERI

1<sup>o</sup> Kao primer posmatraćemo provodnik koji je prikazan oprugama, a pod dejstvom električnog polja oscilu-

je, jer kroz isti protiče struja, kao što je na slici 39 označeno. Diferencijalna jednačina kretanja provodnika je

$$m\ddot{x} + \kappa_1(x - \frac{\lambda}{a-x}) = 0 \quad (1)$$

gde je  $\lambda = \frac{2I_1 I_2 l}{\kappa_1}$  parametar,  $\kappa_1$  konstanta obe opruge i  $m$  masa provodnika koji osciluje. Izraz  $\frac{\kappa_1 \lambda}{a-x}$  predstavlja silu privlačenja između provodnika kada kroz jedan protiče struja jačine  $i$ , a kroz drugi koji je nepokretan struja jačine  $I$ .

Jednačina integralnih krivih je

$$\frac{dY}{dx} = \frac{\kappa_1(x^2 - ax + \lambda)}{mY(a-x)} \quad Y = \dot{x} \quad (2)$$

a singularne tačke na  $x$ -osi su

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \lambda} \quad (3)$$

i postoje za  $\lambda \leq \frac{a^2}{4}$ . U faznoj ravni se javlja još jedna neregularna tačka  $x = a$  u kojoj postoji asimptota integralnih krivih i krive energije. Potencijalna energija sistema se može izračunati iz (1) kao

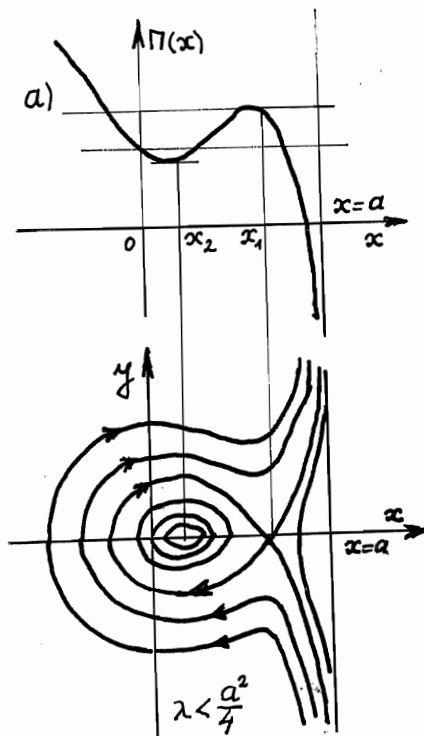
$$\Pi(x) = \frac{\kappa_1}{m} \int (x - \frac{\lambda}{a-x}) dx = \frac{\kappa_1}{m} \left[ \frac{x^2}{2} + \lambda \ln(a-x) \right] \quad (4)$$

na osnovu čega je

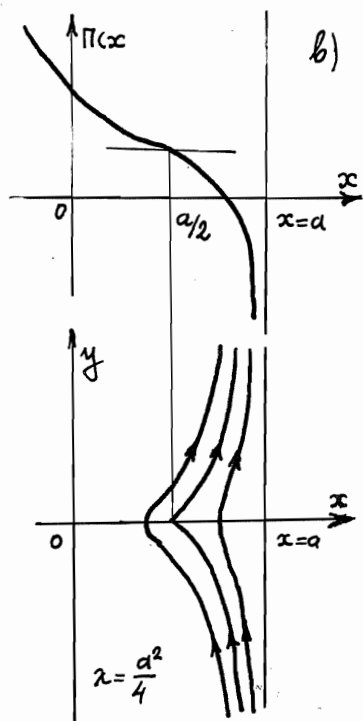
$$\frac{Y^2}{2} + \frac{\kappa_1}{m} \left[ \frac{x^2}{2} + \lambda \ln(a-x) \right] = E = \text{const} \quad (5)$$

Ovo je jednačina energijske ravnoteže za posmatrani primer. Za nalaženje integralnih krivih postavićemo krivu energije u  $(x, z)$  ravni. Kriva energije  $z = \Pi(x)$  ima ekstremne vrednosti za

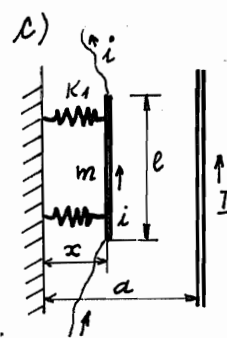
$$x - \frac{\lambda}{a-x} = 0 \quad (6)$$



S1.39 a



S1.39 b



S1.39 c

Zato se sistem mora proučavati za slučajeve kada je

$$\lambda > \frac{\alpha^2}{4}; \quad \lambda = \frac{\alpha^2}{4}; \quad \lambda < \frac{\alpha^2}{4};$$

Za slučaj kada je  $\lambda > \frac{\alpha^2}{4}$  nema ekstremnih tačaka i funkcija  $\frac{d\pi}{dx}$  je stalno negativna, što znači da je funkcija  $\pi(x)$  monotonno opadajućate su integralne krive bez singulariteta, kao što se vidi sa slike 39 b. Kretanje štapa je neperiodičko, što se tumači činjenicom da je opruga suviše slaba i ne javljaju se oscilacije, pokretni provodnik se jednostavno kreće prema nepokretnom provodniku bez oscilacija.

Za slučaj kada je  $\lambda < \frac{\alpha^2}{4}$  kriva energije  $\pi(x)$  ima maksimum  $E_{max}$  za

$$x = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \lambda} \quad (7)$$

i minimum  $E_{min}$  za

$$x = \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \lambda} \quad (8)$$

što se vidi i na slici 39 a. Iz ovoga sledi da za  $E = E_{max}$  integralna kriva sadrži sedlast singularitet i jednu zatvorenu i jednu otvorenu granu, koje se spajaju u sedlu.

Za  $E_{min} < E < E_{max}$  fazna trajektorija se sastoji iz zatvorene i otvorene grane. Kretanje kome odgovara zatvorena integralna kriva je periodičko, tada je opruga kruta, a početna brzina mala i položaj provodnika koji osciluje nije blizu nepokretnog provodnika. Inače uvek postoji grana, koja je asimptotska u odnosu na pravu  $x = \alpha$ , što se tumači time da je jačina električnog polja pored samog nepokretnog provodnika beskonačno jakog intenziteta.

Za  $E = E_{min}$  integralna kriva se sastoji iz otvorene grane i izolovane tačke

$$x = \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \lambda} \quad (9)$$

Za  $E < E_{min}$  i  $E < E_{max}$  kriva se sastoji iz otvorene grane oblika kao na slici, a prava  $x = \alpha$  je njena asimptota. U ovom slučaju kretanja su neperiodička, ali vrlo različitih tipova kao što se sa slike vidi.

Znači da za  $\lambda < \frac{\alpha^2}{4}$  fazni portret sadrži jedno sedlo i jedan centar. Za  $\lambda = \frac{\alpha^2}{4}$  singulariteti se poklapaju i formira se singularitet višeg reda. Kriva  $x = \Pi(x)$  ima infleksije - prevoje sa horizontalnom tangentom kroz tačku sa apscisom  $x = \frac{\alpha}{2}$ . Fazna trajektorija kroz ovu tačku nije glatka kao ostale već ima vrh. Za ove vrednosti  $\lambda$  ne postoje periodička kretanja, već su sva neperiodička. Pored integralnih krivih prikazane su i promene funkcije potencijalne energije.

2° Primer kretanja teške tačke po paraboli koja se obrće oko vertikalne ose. Teška tačka mase  $m$  može se slobodno kretati po paraboli jednačine  $x^2 = 2px$  koja se okreće oko ose  $z$  konstantnom brzinom. Sistem ima jedan stepen slobode kretanja. Kinetička energija kuglice je

$$E_k = \frac{m}{2} \left[ \omega^2 x^2 + \frac{\dot{x}^2}{p^2} (p^2 + x^2) \right] \quad (10)$$

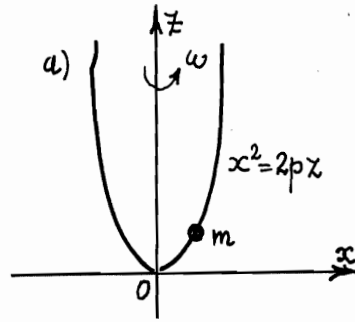
gde je  $v_1 = \omega x$  prenosna brzina, a  $v_2^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2$  relativna brzina. Potencijalna energija tačke je

$$\Pi(x) = mgz = mg \frac{x^2}{2p} \quad (11)$$

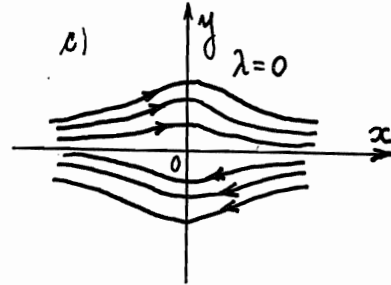
Pomoću Lagrange-ove jednačine druge vrste i izraza za kinetičku i potencijalnu energiju dobijamo jednačinu kretanja u obliku

$$m \left( 1 + \frac{x^2}{p^2} \right) \ddot{x} + m \frac{x \dot{x}^2}{p^2} + m \lambda x = 0 \quad (12)$$

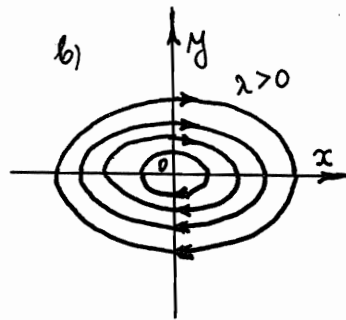
Smenom  $y = \dot{x}$  dobijamo jednačinu integralnih krivih



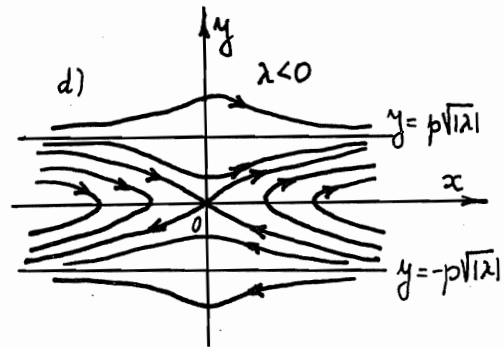
S1.40 a



S1.40 c



S1.40 b



S1.40 d

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{(\lambda + \frac{x^2}{p^2})x}{y(1 + \frac{x^2}{p^2})} \quad (13)$$

koja razdvaja promenljive, a njenim integraljenjem se dobija

$$(1 + \frac{x^2}{p^2})y^2 + \lambda x^2 = E \quad (14)$$

gde je  $E$  integralna konstanta. Iz jednačine (13) se vidi da postoji samo jedna singularna tačka bez obzira na znak parametra  $\lambda$  i to za  $x=0, y=0$ .

Za slučaj  $\lambda = 0$  postojaće beskonačno mnogo stanja ravnoteže na  $x$ -osi.

Za slučaj  $\lambda > 0$  kretanje je moguće samo ako je  $E > 0$ , dok je za  $\lambda < 0$  moguće kretanje bez obzira na znak konstante integracije  $E$ .

Za slučaj  $\lambda > 0$  fazne trajektorije su zatvorene krive, koje za dovoljno veliko  $p^2$  i malo  $x$ , su približno jednake elipsama. U ovom slučaju singularna tačka je stabilni centar.

Za slučaj  $\lambda < 0$  fazne trajektorije su različite po obliku otvorene beskonačne grane, razdvojene separatriksom. Singularna tačka  $x=0, y=0$  je nestabilno sedlo kroz koje prolazi separatriša za  $E=0$  i njena jednačina je

$$y = \pm \sqrt{|\lambda|} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2/p^2}} \quad (15)$$

Kada  $x \rightarrow \infty$  separatriše prelaze u prave  $y = \pm \sqrt{|\lambda|} p$  koje su joj asimptote. I ove prave predstavljaju integralne krive i kretanje reprezentativne tačke je tada jednoliko, konstantnom brzinom po paraboli. Za  $E < 0$  fazne trajektorije presecaju  $x$  osu u tačkama  $x = \pm \sqrt{\frac{-E}{|\lambda|}}$ . Za  $E > 0$  nema preseka sa  $x$ -osom, ali se dobijaju po dve grane sa svake strane  $x$ -ose, koje se asimptotski za  $x \rightarrow \pm \infty$  približavaju pravama  $y = \pm \sqrt{|\lambda|} p$ . Za  $|y| > p\sqrt{|\lambda|}$



kretanje tačke je približno kretanju za  $\lambda = 0$ . Na slici 40 b, c i d naznačene su fazne trajektorije za  $\lambda > 0$ ,  $\lambda < 0$  i  $\lambda = 0$ . Ovde treba napomenuti da je  $\lambda = 0$  vrednost koja odvaja zatvorene od otvorenih trajektorija faznog portreta, jer se za  $\lambda$  pozitivno dobijaju zatvorene krive, a za  $\lambda$  negativno otvorene fazne trajektorije sa separatrišom. Za samo  $\lambda = 0$  se dobijaju otvorene krive.

3<sup>o</sup> Jednačina oscilovanja matematičkog klatna može se razmatrati sa aspekta konzervativnih sistema. Jednačina oscilovanja matematičkog klatna je

$$\ddot{\varphi} + \kappa^2 \sin \varphi = 0 \quad (16)$$

gde je  $\kappa^2 = g/l$  i  $\varphi$  ugao otklona klatna. Integral energije je oblika

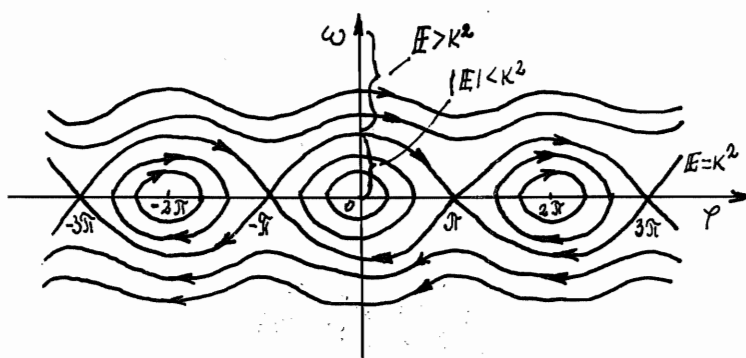
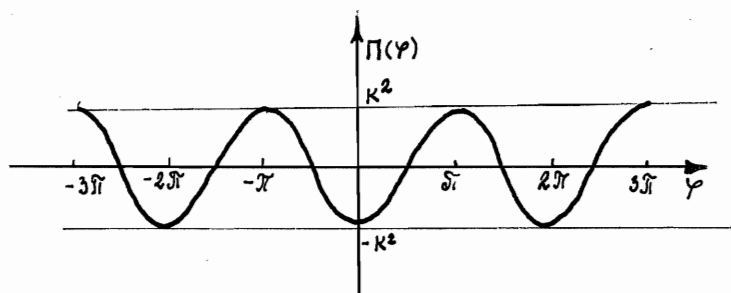
$$\frac{\omega^2}{2} - \kappa^2 \cos \varphi = E \quad (17)$$

singularne tačke su  $\omega = 0$ ,  $\varphi = \pm \kappa \pi$ . Funkcija  $z = \Pi(\varphi)$  ima u tačkama  $\varphi = \pm (2\kappa - 1)\pi$  izolovane maksimume, te integralne krive za te vrednosti  $\varphi$  imaju singularne tačke tipa sedla što odgovara nestabilnim stanjima ravnoteže.

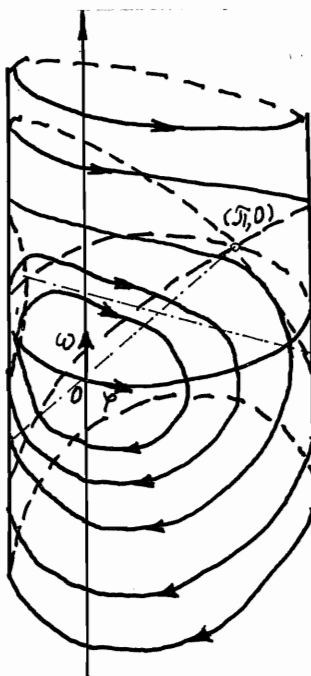
Za  $\varphi = \pm 2\kappa\pi$  funkcija potencijalne energije  $z = \Pi(\varphi)$  ima relativne minimume i u tim tačkama se javljaju singularne tačke - centri. To su stabilni centri ravnoteže. Fazni portret je dat u faznoj ravni  $(\varphi, \omega)$  na slici 41 a, i njemu je pridružen i grafik  $z = \Pi(\varphi)$ .

Za  $E < -\kappa^2$  realno stanje oscilovanja klatna je nemoguće.

Za  $-\kappa^2 < E < +\kappa^2$  fazne trajektorije se javljaju kao zatvorene krive koje okružuju centre. Ove zatvorene krive odgovaraju periodičkom kretanju klatna za koje početna brzina oscilovanja (za  $\varphi = 0$ ) nije veća od  $2\kappa$  ( $\omega \leq 2\kappa$ ). Period oscilovanja za matematičko klatno u glavi čl. 1.



S1.41 a



S1.41 b

Za  $E = \kappa^2$  fazne trajektorije su tipa separatrisa sa preseccima u sedlastim tačkama. Za  $E > \kappa^2$  fazne trajektorije su otvorene beskonačne krive. Klatno u ovom slučaju pravi progresivna kretanja po krugu u jednom smeru. Uslovi za kretanje po separatri si su praktično neostvarljivi jer bi trebalo da tačka "puzi" ka sedlu.

Kako su fazne krive periodičke sa periodom  $2\pi$ , to je moguće faznu ravan "namotati" oko jednog cilindra (valjka) poluprečnika jedinica, čime se delovi faznih trajektorija u intervalu  $2\pi$  poklapaju jedni na druge i dobijaju se zatvorene krive sa jednom sedlastom tačkom i jednim centrom kao što je pokazano na slici 41 b.

4<sup>o</sup> Klatno sa prigušivanjem srazmernim kvadratu ugaone brzine (sa turbulentnim prigušivanjem) je moguće ostvariti ako se matematičko klatno uroni u neki medij, koji daje silu prigušivanja srazmernu kvadratu ugaone brzine, a suprotnog je smera od nje. Diferencijalna jednačina kretanja klatna je tada

$$\ddot{\varphi} + c \dot{\varphi} |\dot{\varphi}| + \kappa^2 \sin \varphi = 0 \quad (18)$$

gde je ugao  $\varphi$  ugao otklona od donjeg vertikalnog položaja. Jednačina integralnih krivih je

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{-\kappa^2 \sin \varphi - c\omega |\omega|}{\omega} \quad (19)$$

gde je  $\omega = \dot{\varphi}$ . Singulariteti jednačine (2) koji odgovaraju položajima ravnoteže su na  $\varphi$  - osi za koje je  $\varphi = n\pi$ , gde je  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Za  $\varphi = 0, \omega = 0$  karakteristična jednačina ne daje odgovor na pitanje o tipu singulariteta (jer su koreni karakteristične jednačine sa realnim delom jednakom nuli), a sa time i o stabilnosti ravnoteže. Ali zato uporedjivanjem sa slučajem klatna bez prigušivanja, gde je za  $\varphi = 0$ ,

$\omega = 0$  centar, zaključujemo da je to ovde spiralna žiža.

Za  $\varphi = \pi$ ,  $\omega = 0$  singularitet je sedlo jer na ovaj singularitet ne deluje prigušivanje.

Za  $\varphi = 2n\pi$ ,  $\omega = 0$  sve su spiralne stabilne žiže, a za  $\varphi = (2n-1)\pi$  i  $\omega = 0$  su nestabilna sedla.

Integralne (fazne) krive se javljaju tako da svako kretanje reprezentativne tačke po njima ima težnju ka položaju stabilne ravnoteže - položaju singularne tačke tipa žiže. Integralne krive u ovom slučaju mogu da se dobiju uvođenjem smene  $\omega = \dot{\varphi}$  i  $\nu = \frac{\omega}{\kappa}$  u jednačinu (18)

$$\nu \frac{d\nu}{d\varphi} + \kappa \nu |\nu| + \sin\varphi = 0 \quad (20)$$

odakle može da se napiše

$$\frac{d(\nu^2)}{d\varphi} + 2\kappa \nu^2 = -2\sin\varphi \quad \text{za } \nu > 0 \quad (21)$$

$$\frac{d(\nu^2)}{d\varphi} - 2\kappa \nu^2 = -2\sin\varphi \quad \text{za } \nu < 0$$

i u konačnom obliku imamo jednačine integralnih krivih

$$\nu^2 = C_1 e^{-2\kappa\varphi} + \frac{2}{1+4\kappa^2} \cos\varphi - \frac{4\kappa}{1+4\kappa^2} \sin\varphi \quad \text{za } \nu > 0 \quad (22)$$

$$\nu^2 = C_2 e^{-2\kappa\varphi} + \frac{2}{1+4\kappa^2} \cos\varphi + \frac{4\kappa}{1+4\kappa^2} \sin\varphi \quad \text{za } \nu < 0$$

Na slici 42 prikazane su integralne krive sa kvadratnim prigušivanjem. Konstante  $C_1$  i  $C_2$  određuju karakter krivih. Ako je klatno dat početni impuls tako da ima početnu brzinu  $\omega_0$  onda pri dovoljno malom  $\omega_0$  klatno će oscilovati oko položaja  $\varphi = 0$  težeći tom položaju ravnoteže. Ako je  $\omega_0$  dovoljno veliko klatno će načiniti jedan ili više obrtaja oko tačke vešanja pre nego što počne da osciluje oko stabilnog položaja ravnoteže  $2n\pi$ . Na faznom dijagramu reprezentativna tačka se pri tome kreće iz tačke  $(0, \omega_0)$  pa se spušta do jednog od singulariteta  $\varphi = 2n\pi$ , zavisno od veličine  $\omega_0$ , oko koga

obilazi i približava mu se.

Može se postaviti pitanje da nadjemo opseg  $\omega_0$  u kome će se odgovarajuća kriva  $(\varphi, \omega)$  spustiti na željeni singularitet ili to praktično znači da tražimo početnu ugaonu brzinu (početne uslove) za koje će klatno izvršiti određeni broj  $n$  punih obrtaja, posle koga će težiti ravnotežnom položaju  $\varphi = 2n\pi$ . Da bi smo odgovorili na ovo pitanje po integralnim krivim kroz sedlaste tačke treba se vratiti do ordinatne  $\omega$ -ose  $\varphi = 0$ , gde nadjemo  $\omega_n$  i  $\omega_{n+2}$  između kojih je odnos  $\omega_n < \omega_0 < \omega_{n+2}$ . Klatno će izvršiti  $(n+1)/2$  punih obrtaja dok ne stigne u stanje mirovanja. Vrednosti  $\omega_n$  treba da se odrede eksplicitno iz izraza (22) što je vrlo lako. Treba odrediti  $C_1$  tako da je za  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = (2k-1)\pi$  i onda izračunati  $\omega_0 = \frac{\omega_0}{\kappa}$  za  $\varphi = 0$ . Integraciona konstanta je za  $n = 2k-1$  i date uslove

$$C_{1n} = \frac{2}{1+4c^2} e^{2c(2k-1)\pi} \quad (23)$$

Za koju iz jednačina (22) za  $\varphi = 0$  sledi

$$\omega_n^2 = \frac{2\kappa^2}{1+4c^2} \left[ e^{2c(2k-1)\pi} + 1 \right] \quad (24)$$

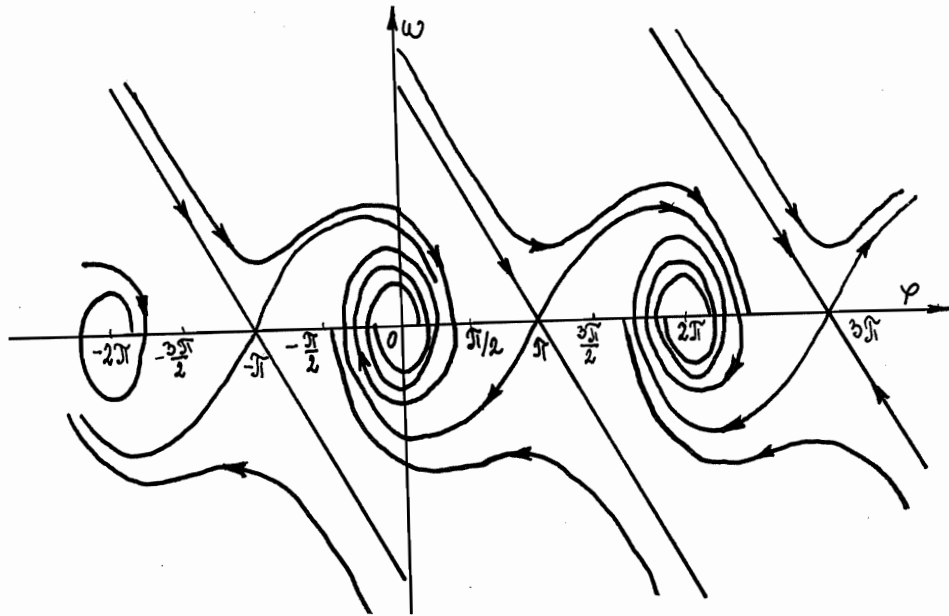
Za narednu krivu koja prolazi kroz sedlastu tačku  $n=2k+1$  i konstanta je

$$C_{1(n+2)} = \frac{2}{1+4c^2} e^{2c(2k+1)\pi} \quad (25)$$

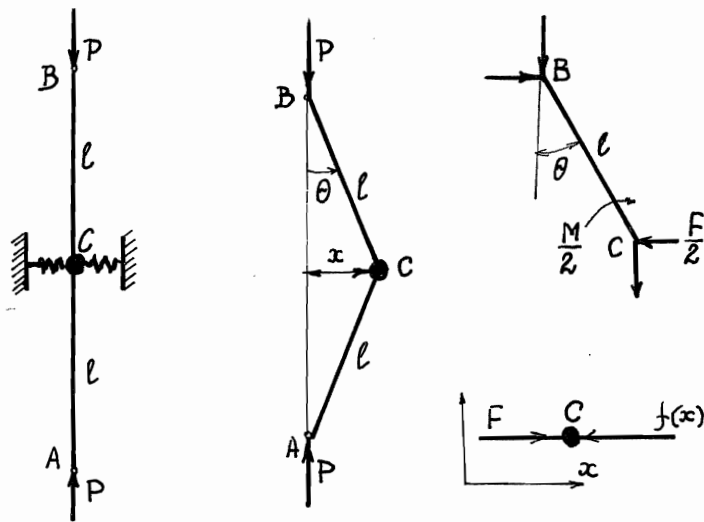
i ugaona brzina za  $\varphi = 0$  je

$$\omega_{n+2}^2 = \frac{2\kappa^2}{4c^2+1} \left[ e^{2c(2k+1)\pi} + 1 \right] \quad (26)$$

Da bi klatno sa otporom srazmernim kvadratu brzine  $\dot{\varphi}$  moglo da izvrši  $(n+1)/2$  punih obrtaja oko tačke vešanja, pre nego što počne da teži ravnotežnom položaju potrebno je da ima



Sl.42 a



Sl.43 a

početnu ugaonu brzinu  $\omega_0$  iz intervala

$$\omega_n^2 < \omega_0^2 < \omega_{n+2}^2 \quad (27)$$

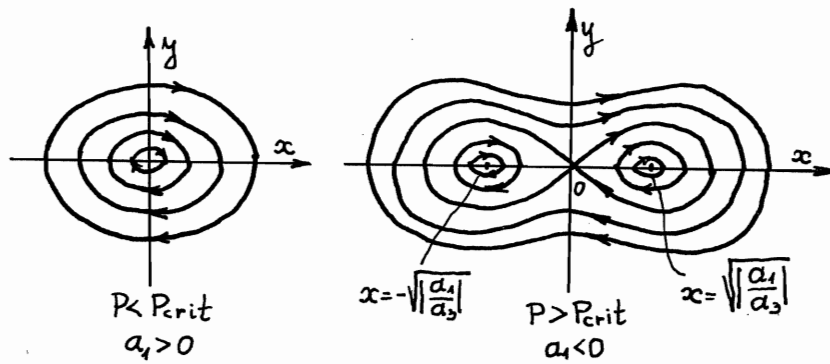
gde su  $\omega_n^2$  i  $\omega_{n+2}^2$  napred izračunate vrednosti.

5<sup>o</sup> Kao naredni primer posmatraćemo elastičnu stabilnost napregnutog stuba dinamičkim putem. Za proučavanje elastične stabilnosti prave elastične šipke (stuba) dinamičkim putem, na koju aksijalno dejstvuju kompresione sile može se usvojiti uprošćeni model sa slike 43 a. Model se sastoji iz dve šipke dužine  $l$  bez mase, koje po vertikali slobodno klize, a drugim delom su spojene zglobom C. U zglobu se postiže otpor pomoću torziona opruge i još u zglobu je smeštena materijalna tačka mase  $m$ , koja pretstavlja redukovanu masu elastične šipke. Model je dopunjen i jednom zavojnom oprugom.

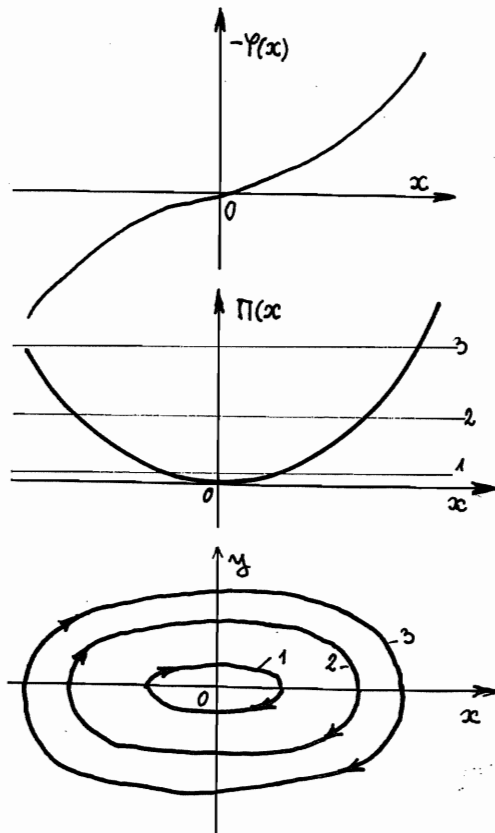
Prava elastična šipka (stub) će biti u ravnoteži do trenutka kad kompresione sile predju izvesnu kritičnu vrednost, posle čega nastaje izvijanje ili lom. Rezultati ispitivanja na uprošćenom modelu mogu pružiti dovoljno tačne podatke o stanju stabilnosti, iako je ispitivanje svedeno na jedan stepen slobode, umesto da se radi sa beskonačno mnogo stepeni slobode kretanja.

Kompresione sile dejstvuju na krajevima A i B šipki duž vertikalne linije. Zavojne opruge u zglobu C dejstvuju u smislu proizvodjenja bočne sile koja zavisi od pomeranja  $x$ . Šipke u tački C (zglobu) dejstvuju jedna na drugu pomoću torziona opruge, čiji je moment srazmeran uglu zaokretanja jedne šipke u odnosu na drugu. Ova torziona opruga zamenjuje krutost izvijanja elastičnog stuba. Iz uslova jednakosti sila u vertikalnom pravcu je  $V = P$ , a iz uslova ravnoteže momenata za tačku C je

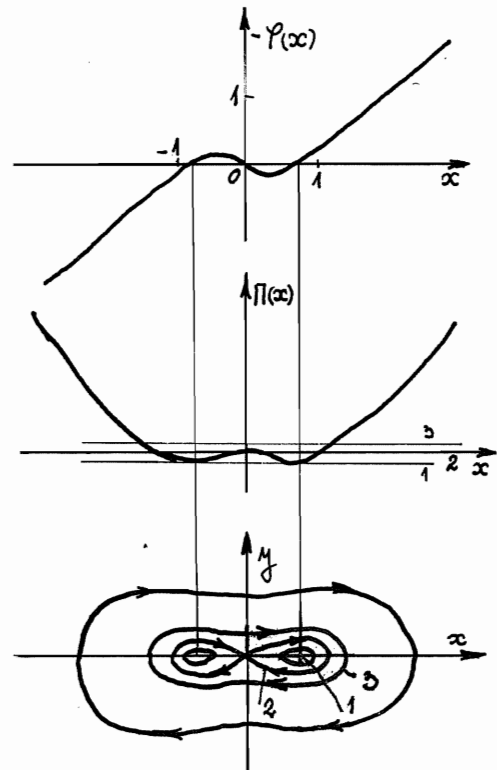
$$-\frac{M}{2} + Vl \sin \theta - \frac{Fl}{2} \cos \theta = 0 \quad (28)$$



Sl.43 b i c



Sl.43 b'



Sl.43 c'



odakle dobijamo silu

$$F(x) = \frac{2Pl \sin \theta - M}{l \cos \theta} \quad (29)$$

Ako je sila zavojne opruge nelinearne karakteristike

$$f(x) = \alpha x + \beta x^3$$

i moment torziona opruge

$$M = 2k_1 \arcsin \frac{x}{l}$$

jednačina oscilovanja definisanog modela je tada

$$m \ddot{x} - \frac{2P \frac{x}{l} - \frac{k_1}{l} \arcsin \frac{x}{l}}{\sqrt{1 - (\frac{x}{l})^2}} + \alpha x + \beta x^3 = 0 \quad (30)$$

Kako je bočno pomeranje  $x$  suviše malo u odnosu na dužinu  $l$ , to možemo silu  $F(x)$  da razvijemo po stepenima  $\frac{x}{l}$  zadržavajući prva tri člana razvoja, dok ostale članove kao male veličine višeg stepena možemo zanemariti. Tada dobijamo jednačinu kretanja u sledećem obliku

$$m \ddot{x} + \left( \alpha + \frac{2}{l^2} k_1 - \frac{2P}{l} \right) x + \left( \beta + \frac{4k_1}{3l^4} - \frac{P}{l^3} \right) x^3 = 0 \quad (31)$$

Ako sa  $\alpha_1$  i  $\alpha_3$  obeležimo izraze

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha + \frac{2k_1}{l^2} - \frac{2P}{l} \\ \alpha_3 &= \beta + \frac{4k_1}{3l^4} - \frac{P}{l^3} \end{aligned} \quad (32)$$

onda je diferencijalna jednačina kretanja  $m \ddot{x} + \alpha_1 x + \alpha_3 x^3 = 0$ .

Ako bi smo posmatrali statički, stavili bi smo da je ubrzanje jednako nuli i sa tim  $\alpha_1 x + \alpha_3 x^3 = 0$ . Ako pretpostavimo da je  $x$  malo, možemo  $x^3$  da zanemarimo i zadržimo samo linearni član  $\alpha_1 x = 0$ , te sledi da je  $x = 0$  stanje ravnoteže izuzev ako nije  $\alpha_1 = 0$  odakle se dobija kritična vrednost sile

$$P_{\text{krit}} = \frac{\alpha l}{2} + \frac{k_1}{l} \quad (33)$$

i stub bi morao da se izvija jer je ravnoteža indiferentna. Jednačina integralnih krivih pri dinamičkom razmatranju je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{m} \frac{-a_1 x - a_3 x^3}{y} \quad (34)$$

gde je  $y = \dot{x}$ . Singularne tačke faznog portreta su za  $y=0$  i  $a_1 x + a_3 x^3 = 0$ . Singularna tačka  $x=0$ ,  $y=0$  se uvek javlja. Singularne tačke  $y=0$ ,  $x = \pm \sqrt{-\frac{a_1}{a_3}}$  su uslovljene znakom koeficijenata diferencijalne jednačine,  $a_1$  i  $a_3$ .

Pretpostavljajući da je  $a_3 > 0$ , za dovoljno velike vrednosti koeficijenta  $\beta$  ( $a$  i  $P/l^3$  je malo zbog velikog  $l^3$ ), singularitete možemo proučavati samo u zavisnosti od znaka koeficijenta  $a_1$ . Ako je  $a_1 > 0$ , tj.  $P < P_{krit}$ , u faznom portretu se javlja samo jedna singularna tačka  $x=0$ ,  $y=0$  i to kao stabilni centar. Integralne krive su u tom slučaju zatvorene krive. I šipka (stub) osciluje periodički oko nultog položaja ravnoteže koji je stabilan. Slika 43 b.

Za slučaj  $a_1 < 0$  t.j.  $P > P_{krit}$  fazni portret sadrži singularitete: za  $x=0$ ,  $y=0$  sedlo kao nestabilnu tačku; za  $x = \pm \sqrt{-\frac{a_1}{a_3}}$ ,  $y=0$  centre kao stabilne tačke - položaje ravnoteže. Integralna kriva koja prolazi kroz sedlo je separatrisa u obliku osmice koja okružuje centre i zatvorene krive u sebi, a okružena je takodje zatvorenim krivama. Kretanje je periodičko u širokom opsegu (vidi sliku 43 c).

Stabilnost se može ispitati i primenom navedenih teorema u članu 3 na potencijalnu energiju oblika

$$\Pi(x) = \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_3 x^4}{4} \quad (35)$$

6<sup>o</sup> Interesantno je ispitati uticaj viskoznog trenja - prigušivanja na elastičnu stabilnost prethodno posmatranog stuba. U tom slučaju jednačina oscilovanja je

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + a_1 x + a_3 x^3 = 0 \quad (36)$$

gde je  $c > 0$ . Jednačina integralnih krivih je tada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{m} \frac{-a_1 x - c y - a_2 x^3}{y} \quad (37)$$

Singularne tačke su iste kao i u prethodnom primeru bez prigušivanja. Za  $a_1 > 0$  singularitet  $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$  je stabilna tačka, jer je karakteristična jednačina prve aproksimacije  $r^2 + cr + a_1 = 0$  sa korenima

$$r_{1/2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - a_1}$$

koji imaju negativni realni deo za  $\frac{c^2}{4} < a_1$  kada je singularitet žiža, a oba su negativna za  $\frac{c^2}{4} > a_1$ , kada je to stabilni čvor. Za  $a_1 < 0$  postoje tri singularne tačke. Za  $x = 0, y = 0$  karakteristična jednačina je  $r^2 + cr - |a_1| = 0$  i koreni su

$$r_{1/2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + |a_1|}$$

realni i raznog znaka i singularna tačka je sedlo.

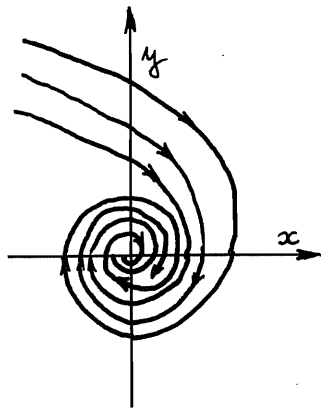
Za  $x = \pm \sqrt{-\frac{a_1}{a_2}}, y = 0$  karakteristična jednačina sistema u prvom približenju je  $r^2 + cr + 2|a_1| = 0$  sa korenima

$$r_{1/2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2|a_1|}$$

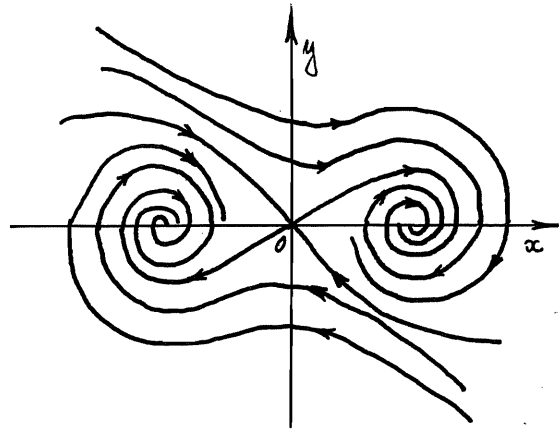
koji odredjuju za  $\frac{c^2}{4} > 2|a_1|$  čvor, a za  $\frac{c^2}{4} < 2|a_1|$  žižu i to obadve kao stabilne.

Fazne trajektorije za ovaj slučaj prikazane su na slici 44. Vidi se da sva kretanja teže jednom ili drugom položaju stabilne ravnoteže. Integralne krive koje sadrže sedlo razdvajaju krive raznih oblika, t.j. one koje teže jednom od onih koje teže drugom singularitetu.

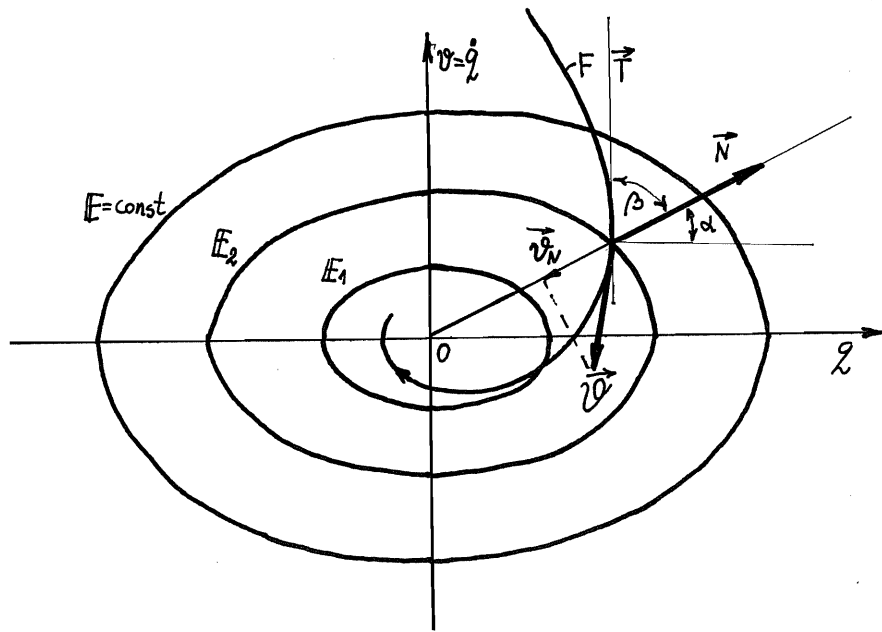
Dinamička analiza problema stabilnosti elastičnog stuba na uprošćenom modelu daje zadovoljavajuće rezultate za objašnjenje pojave izvijanja.



S1.44 a



S1.44 b



S1.45

## 6. LINIJE ENERGIJE U FAZNOJ RAVNI I UPOREDJIVANJE SA FAZNYM TRAJEKTORIJAMA

Medju posmatranim primerima u čl.5 uporedo sa proučavanjem konzervativnih sistema -primera, proučavani su i primeri sistema sa prigušivanjem i to iz sledećeg razloga: Kod konzervativnih sistema fazne (integralne) krive i krive konstantne energije su identične, medjutim kod sistema sa prigušivanjem moguće je postaviti fazne trajektorije čija je diferencijalna jednačina

$$\frac{dv}{dq} = \frac{-\varphi(v) - f(q)}{v} \quad (1)$$

i linije konstantne energije

$$E_k + E_p = E(q, v) \quad (2)$$

Kod konzervativnih sistema je

$$E_k + E_p = E = \text{const} \quad (3)$$

dok je za nekonzervativne sisteme

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p) = \frac{d}{dt} E(q, v) = -2\phi \quad (4)$$

gde je  $\phi$  funkcija rasipanja ili mera opadanja (degradacije) energije. I za sisteme sa prigušivanjem se mogu crtati krive konstantne energije kao

$$E(q, v) = E' \quad (5)$$

ali se pri tome reprezentativna tačka neće kretati po liniji konstantne energije kao kod konzervativnih sistema, nego po faznoj trajektoriji (integralnoj krivoj) pri čemu će seći po-

jedine linije konstantne energije, jer energija sistema u ovom slučaju nije konstantna.

S obzirom da fazne trajektorije seku linije konstantne energije potrebno je odrediti kakav je to presek. Neka je  $\vec{N}$  ort normale linije energije u pravcu porasta skalaru  $E'$  i neka gradi sa koordinatnim osama uglove  $\alpha$  i  $\beta$  (vidi sliku 45) čiji su kosinusi smeru

$$\cos \alpha = \frac{1}{A} \frac{\partial E}{\partial q} \quad \cos \beta = \frac{1}{A} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \quad (6)$$

gde je

$$A = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right)^2}$$

Fazna brzina određuje smer fazne trajektorije i njene koordinate su

$$\mathcal{V}_q = \dot{q} = v \quad \mathcal{V}_{\dot{q}} = \dot{v} = \frac{dv}{dt} \quad (7)$$

Izvod totalne energije po vremenu je

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \frac{d\dot{q}}{dt} = A(\dot{q} \cos \alpha + \dot{v} \cos \beta) = A \mathcal{V}_N \quad (8)$$

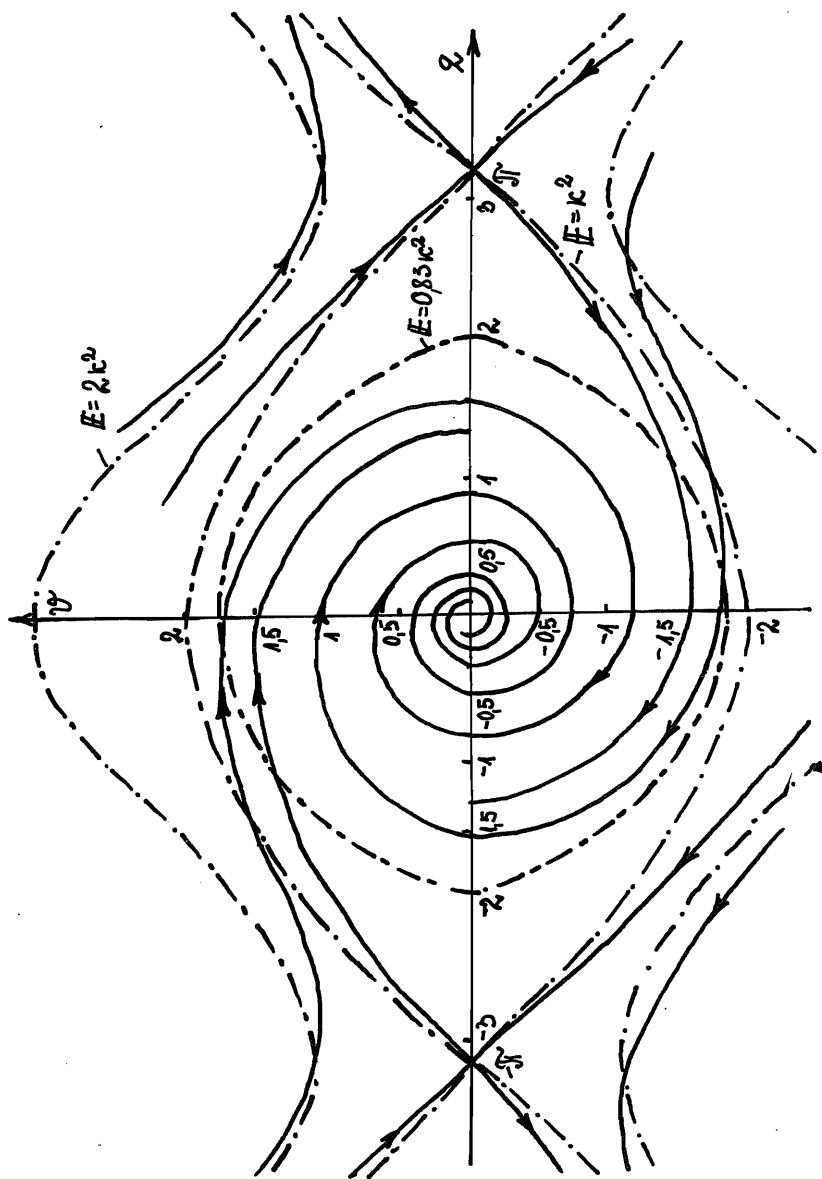
gde je  $\mathcal{V}_N$  projekcija fazne brzine na pravac normale  $\vec{N}$  linije energije. Kako je iz jednačine (4) i iz jednačine (8) dat izvod energije to možemo napisati

$$\frac{dE}{dt} = -2\phi = \mathcal{V}_N A \quad (9)$$

tj. projekcija fazne brzine na pravac normale na liniju energije je

$$\mathcal{V}_N = -\frac{2\phi}{A}$$

i negativna je, što pokazuje da fazna trajektorija seče liniju energije spolja - unutra što znači sa se u ovakvom disipativnom sistemu energija smanjuje sa vremenom i asimptotski teži ravnotežnom položaju.



S1.46

Može se desiti da fazne krive seku linije energije unutra - spolja u kom slučaju se otporna sila prigušivanja javlja kao negativna tj. sistemu se pridodavanjem energije sa vremenom povećava ukupna energija.

Upoređivanjem faznih trajektorija iz primera klatna sa trenjem i bez trenja možemo zaključiti da fazne trajektorije (linije konstantne energije) matematičkog klatna bez prigušivanja predstavljaju samo linije konstantne energije matematičkog klatna sa vikožnim prigušivanjem, dok fazne trajektorije, kao što je napred prikazano, imaju drugi oblik i seku linije energije spolja - unutra kao što se vidi sa slike 46. Isto važi i za primer elastične stabilnosti stuba sa prigušivanjem u odnosu na slučaj bez prigušivanja.

1<sup>o</sup> Na primeru klatna možemo dokazati tvrdnju da fazne trajektorije seku linije energije spolja - unutra pomoću normalne projekcije fazne brzine na pravac normale. Za klatno sa turbulentnim prigušivanjem je

$$\frac{d\omega}{dt} = -k^2 \sin\varphi - c\omega/|\omega| \quad (10)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

Potencijalna i kinetička energija su

$$E_p(\varphi) = -mgl \cos\varphi$$

$$E_k(\varphi) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2$$

i ukupna energija

$$E = \frac{1}{2} m l^2 \omega^2 - mgl \cos\varphi$$

Izvod totalne energije sistema po vremenu je

$$\frac{d}{dt} E = m l^2 \omega \dot{\omega} + mgl \sin\varphi \dot{\varphi} = -c m l^2 \omega^2 / |\omega| = -2c\varphi$$

Fazna brzina je

$$v = \sqrt{\omega^2 + (k^2 \sin\varphi + c\omega/|\omega|)^2}$$



dok je  $A$  (prema napred definisanom izrazu)

$$A = \sqrt{(mgl \sin \varphi)^2 + (ml^2 \omega)^2}$$

Projekcija fazne brzine na pravac normale na linije energije je

$$\mathcal{V}_N = - \frac{2\phi}{A} = - \frac{c \omega^2 | \omega |}{\sqrt{(k^2 \sin^2 \varphi)^2 + \omega^2}}$$

i negativna je, što znači da fazna trajektorija seče linije energije spolja-unutra približavajući se asimptotski ravnotežnom položaju.

2<sup>o</sup> U primeru elastične stabilnosti stuba kinetička i potencijalna energija su

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$E_p = \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_3}{4} x^4$$

pa je ukupna energija sistema

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_3}{4} x^4$$

i njen izvod

$$\frac{dE}{dt} = -c \dot{x}^2 = -c y^2 = -2\phi$$

Veličina je

$$A = \sqrt{(a_1 x + a_3 x^3)^2 + (m y)^2}$$

Projekcija fazne brzine na pravac normale na liniju energije je

$$\mathcal{V}_N = - \frac{2\phi}{A} = - \frac{c y^2}{A}$$

i negativna je što znači da fazne krive seku linije energije spolja - unutra težeći asimptotski ravnotežnom položaju.

## VI      G l a v a

## PRINUDNE NELINEARNE OSCILACIJE

1. PROSTA PRINUDNA OSCILACIJA SA NELINEARNOM  
OTPORNOM SILOM

Prosta prinudna oscilacija sa otpornom silom  $\phi(\dot{q})$ , nelinearnom funkcijom brzine, može se pretstaviti diferencijalnom jednačinom oblika

$$a\ddot{q} + \phi(\dot{q}) + c q = F_0 \cos \Omega t \quad (1)$$

Otporna sila  $\phi(\dot{q})$  najčešće je stepena funkcija generalisane brzine  $\dot{q}$ , kao

$$\phi(\dot{q}) = \sum_{i=1}^n (\text{sign } \dot{q}) b_i |\dot{q}|^i \quad (2)$$

ili

$$\phi(\dot{q}) = (\text{sign } \dot{q}) b_n |\dot{q}|^n \quad (3)$$

gde je  $n$  eksponent,  $b_i$  --koeficijent prigušivanja. U ovom slučaju zadatak se obično svodi na linearizovanje otporne sile i izračunavanje modificiranog koeficijenta otpora  $\beta^*$ , prema Jacobsen-u. Modificirani koeficijent otpora se izraču-

nava iz uslova jednakosti rada otpornih sila za četvrtinu perioda oscilovanja

$$\int_0^{q_0} \beta^* \dot{q} dq = \int_0^{q_0} \phi(\dot{q}) dq \quad (4)$$

Kada je otporna sila data u obliku (3), i uz pretpostavku rešenja diferencijalne jednačine (1) u obliku

$$q = C \cos \Omega t \quad (5)$$

i njenog izvoda

$$\dot{q} = -C\Omega \sin \Omega t \quad (6)$$

uslov za nalaženje modificiranog koeficijenta otpora možemo napisati u obliku

$$\int_0^C b_n \dot{q}^n dq = b_n C^{n+1} \Omega^n \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} \Omega t d(\Omega t) = \int_0^C \beta^* \dot{q} dq = \frac{\pi}{4} \beta^* C^2 \Omega \quad (7)$$

odakle se dobija modificirani koeficijent otpora

$$\beta^* = \frac{4}{\pi} b_n C^{n-1} \Omega^{n-1} \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} \Omega t d(\Omega t) = \frac{n(n-2)(n-4)\dots 3}{(n+1)(n-1)(n-3)\dots 4} \pi \quad (8)$$

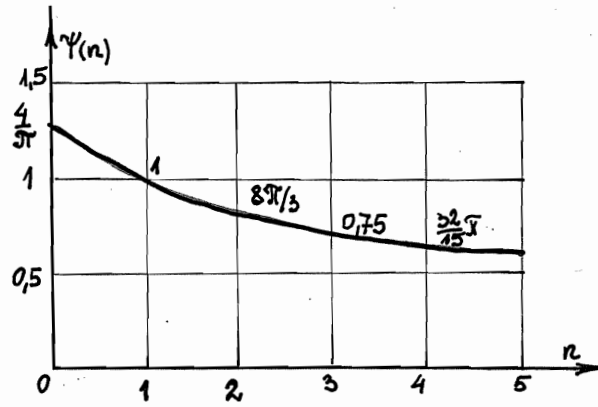
Integral na desnoj strani je izračunat parcijalnom integracijom uz korišćenje osobine rekurzivnosti, međjutim ovaj integral se češće izražava preko  $\Gamma$  a  $m$  a funkcije koja se definiše pomoću Euler-ovog integrala

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{p-1} dt \quad ; \quad (\Re(p) > 0) \quad (9)$$

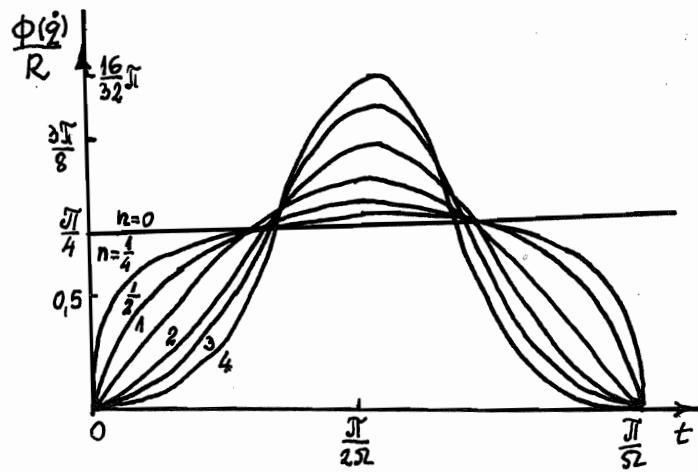
u obliku

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x dx = \frac{\pi}{2^{2+n}} \frac{\Gamma(2+n)}{[\Gamma(\frac{n+3}{2})]^2} \quad (10)$$

Modificirani koeficijent otpora može sada da se napiše u obliku



Sl.47



Sl.48

$$\beta^* = b_n C^{n-1} \Omega^{n-1} \Psi(n) \quad (11)$$

gde je sa  $\Psi(n)$  obeleženo

$$\Psi(n) = \frac{1}{2^n} \frac{\Gamma(2+n)}{[\Gamma(\frac{n+3}{2})]^2} \quad (12)$$

Koeficijent  $\Psi(n)$  zavisi od eksponenta  $n$ , i na dijagramu  $(n, \Psi)$  prikazana je ta grafička zavisnost (slika 47 a).

Kada smo našli modificirani koeficijent, umesto funkcije prigušivanja  $\phi(\dot{q})$  u diferencijalnu jednačinu (1) možemo da unesemo njenu linearizovanu vrednost

$$\phi(\dot{q}) \approx \beta^* \dot{q} = b_n C^{n-1} \Omega^{n-1} \Psi(n) \dot{q} \quad (13)$$

čime smo zadatak sveli na prostu prinudnu oscilaciju sa otpornom silom srazmernom prvom stepenu brzine, te še dalje razmatranje izvodi formalnom primenom aparata linearne teorije. Stavimo da je

$$2\delta = \frac{\beta^*}{a} = \frac{b_n}{a} C^{n-1} \Omega^{n-1} \Psi(n) \quad (14)$$

pa je diferencijalna jednačina oblika

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega^2 q = h \cos \theta; \quad \theta = \omega t - \theta_0 \quad (15)$$

gde je  $\omega^2 = c/a$  i  $h = F_0/a$ .

Rešenje se sada pretpostavi u obliku

$$q_p = A \cos \theta + B \sin \theta \quad (16)$$

Zmenom (16) i njegovih izvoda u jednačinu (15) i izjednačavanjem koeficijenata uz  $\cos \theta$  i  $\sin \theta$  sa nulom dobijamo sistem algebarskih jednačina za nalaženje nepoznatih  $A$  i  $B$

$$A(\omega^2 - \Omega^2) + 2\delta B \Omega = h \quad (17)$$

$$B(\omega^2 - \Omega^2) - 2\delta A \Omega = 0$$

odakle nalazimo vrednosti za  $A$  i  $B$

$$A = \frac{h(\omega^2 - \Omega^2)}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2} \quad (18)$$

$$B = \frac{2\delta \Omega h}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}$$

Rešenje se sada može napisati u obliku

$$q_p = C \cos(\Omega t - \theta_0 - \alpha) \quad (19)$$

gde je

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{h}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}} = \frac{h/\omega^2}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2 + 4\xi^2 \gamma^2}}; \quad \gamma = \frac{\Omega}{\omega}; \quad \xi = \frac{\delta}{\omega} \quad (20)$$

i

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\xi\gamma}{1-\gamma^2} \quad (21)$$

Dalje analiza se razlikuje od one koja se primenjuje na linearne sisteme. Na osnovu izraza (14) izraz za amplitudu (21) postaje

$$C^2 = \frac{C_0^2}{(1-\gamma^2)^2 + f^2 C^{2n-2}} \quad (22)$$

gde je obeleženo sa  $C_0 = \frac{h}{\omega^2}$  i  $f = \frac{b_n}{a} \gamma(n) \frac{\Omega^n}{\omega^n}$ , odakle može napisati zavisnost amplitude oscilovanja i ostalih parametara sistema

$$f^2 C^{2n} + C^2 (1-\gamma^2)^2 - C_0^2 = 0 \quad (23)$$

Za početne uslove  $t=0$ ,  $q=q_0$  i  $\dot{q}=\dot{q}_0$ , rešenje možemo da napišemo u obliku

$$\begin{aligned}
z = e^{-\delta t} & \left[ z_0 \cos \sqrt{\omega^2 - \delta^2} t + \frac{\delta z_0 + \dot{z}_0}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}} \sin \sqrt{\omega^2 - \delta^2} t \right] - \\
& - C e^{-\delta t} \left[ \cos \sqrt{\omega^2 - \delta^2} t \cos(\theta_0 + \alpha) + \frac{\delta \cos(\theta_0 + \alpha) + \omega \sin(\theta_0 + \alpha)}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}} \sin \sqrt{\omega^2 - \delta^2} t \right] + \\
& + C \cos(\Omega t - \theta_0 - \alpha) = z_1 + z_2 + z_p
\end{aligned} \quad (24)$$

gde su:  $z_1$  - amortizovana oscilacija koja zavisi od početnih uslova,  $z_2$  - amortizovana oscilacija pod dejstvom prinudne sile,  $z_p$  - stvarna prinudna oscilacija, čiji je period oscilovanja jednak periodu poremećajne sile

$$T_p = \frac{2\pi}{\Omega} = T_F$$

Za duže vreme amortizovane oscilacije praktično isčeznu (priguše se) i ostaje samo režim prinudnog oscilovanja što se zaključuje prisustvom člana  $e^{-\delta t}$ . U slučaju rezonantnog stanja  $\gamma = \frac{\Omega}{\omega} = 1$ , jednačina (23) se svodi na prostiji oblik čije rešenje po  $C$  daje vrednost amplitude prinudnog oscilovanja

$$C = \sqrt[n]{\frac{C_0}{f}} = \frac{1}{\Omega} \sqrt[n]{\frac{ka}{\omega b_n \gamma(n)}} \quad (25)$$

Fazni ugao prinudne oscilacije je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b_n C^{n-1} \Omega^n \gamma(n)}{a (\omega^2 - \Omega^2)} \quad (26)$$

što za slučaj rezonancije iznosi  $\alpha = \pi/2$ . Na slici 48 b dat je grafik zavisnosti sile prigušivanja  $\phi(\dot{z})$ , redukovane sa  $\hat{K}$ , od vremena  $t$ , za razne vrednosti eksponenta  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ , što u analitičkom obliku izgleda

$$\phi(\dot{z}) = b_n \Omega^n C^n \sin^n \Omega t = \frac{\hat{K}}{\gamma(n)} \sin^n \Omega t \quad (27)$$

gde je

$$\hat{K} = \beta^* \Omega C = \frac{\phi^*(\dot{z})}{\sin \Omega t} = \gamma(n) b_n C^n \Omega^n \quad (28)$$

U slučaju kada je  $n = 2$  jednačina oscilovanja je

$$a\ddot{q} + (\text{sign}\dot{q})b_2\dot{q}^2 + c_0q = F_0 \cos s_2 t \quad (29)$$

Modificirani koeficijent otpora  $\beta^*$  je tada  $\beta^* = b_2 C_0 \gamma^{(2)}$ ,  
gde je

$$\gamma^{(2)} = \frac{\Gamma(2+2)}{2^2 [\Gamma(\frac{2+3}{2})]^2} = \frac{8}{3} \mathcal{I} \quad (30)$$

pa je

$$\beta^* = \frac{8}{3} b_2 \mathcal{I} C_0 = 2\delta a \quad (31)$$

Na osnovu prethodnog jednačina (23) može da se napiše u obliku

$$\left(\frac{b_2}{a}\right)^2 \gamma^4 \gamma^{(2)2} C_0^4 + C_0^2 (1-\gamma^2)^2 - C_0^2 = 0 \quad (32)$$

Rešenja prethodne algebarske jednačine daju vrednost amplitude prinudnih oscilacija

$$C^2 = \frac{-(1-\gamma^2)^2 + \sqrt{(1-\gamma^2)^2 + 4\beta^2 \gamma^4 \gamma^{(2)2}}}{2\beta^2 \gamma^4 \gamma^{(2)2}} C_0^2 \quad (33)$$

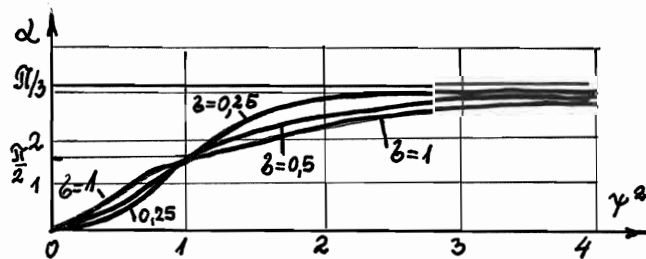
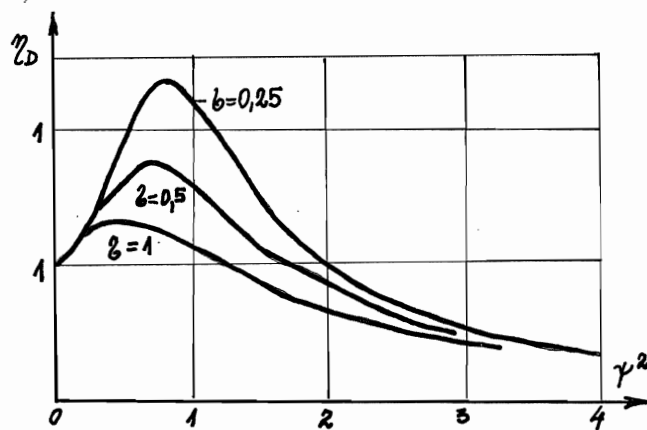
gde je obeleženo  $\beta = b_2 C_0 / a$ . Ugao faznog pomeranja u ovom slučaju je

$$\text{tg}\alpha = \frac{f C}{1-\gamma^2} = \frac{\gamma^{(2)} \beta \gamma^2}{1-\gamma^2} ; \quad \left( \eta_D = \frac{C}{C_0} \right) \quad (34)$$

Na slici 49 a i b grafički je prikazana zavisnost dinamičkog faktora (množioca rezonanse)  $\eta_D = \frac{C}{C_0} = \eta_D(\gamma^2)$ , i odnosa frekvencija  $\gamma = \Omega/\omega$ . Zapaža se da je za  $\gamma=0$ ,  $\eta_D(0)=1$  i

$$\left[ \frac{d\eta_D(\gamma^2)}{d\gamma^2} \right]_{\gamma=0} = 1 \quad (35)$$





Sl.49 a i b

t.j. tangenta na sve krive dijagrama je pod uglom od  $\pi/4$  bez obzira na ostale parametre sistema oscilovanja. U slučaju da brzina oscilovanja nije harmonijska (kao što je pretpostavljeno pri rešavanju zadatka), onda sila prigušivanja nema oblik kao na priloženom dijagramu. Za tačnija rešavanja moraju se uzeti u obzir i viši harmonici.

## 2. METODA GALERKINA

Galjerkinova metoda u osnovnoj zamisli primenjena je na probleme elektrostatičke. Ovde će biti prikazan način primene Galjerkinove metode za određivanje rešenja diferencijalne jednačine

$$a\ddot{q} + \phi(\dot{q}) + F_e(q) - F_0 \sin \omega t = 0 \quad (1)$$

čije rešenje pretpostavljamo u obliku reda

$$q = \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k(t) \quad (2)$$

gde su  $C_k$  koeficijenti, a  $\varphi_k(t)$  funkcije vremena. Rešenje pretpostavljamo da je periodičko, t.j. da zadovoljava sledeće uslove

$$q(t_0) = q(t_0 + T) \quad \dot{q}(t_0) = \dot{q}(t_0 + T) \quad (3)$$

za proizvoljno  $t_0$ . Pošto  $q(t)$  ne možemo da nadujemo tako da identički zadovoljava jednačinu (1) to ćemo izabrati  $n$  funkcija  $\varphi_k(t)$  koje pojedinačno zadovoljavaju uslove periodičnosti

$$\varphi_k(t_0) = \varphi_k(t_0 + T) \quad \dot{\varphi}_k(t_0) = \dot{\varphi}_k(t_0 + T) \quad (4)$$

Sada, umesto da tražimo da pretpostavljeno rešenje (2) identički zadovoljava jednačinu (1), tražićemo da ono zadovoljava sledeću jednačinu

$$\int_{t_0}^{t_0+T} [a\ddot{q} + \phi(\dot{q}) + F_0(q) - F_0 \sin \omega t] p(t) dt = 0 \quad (5)$$

u kojoj je  $p(t)$  funkcija težine (Gewichtsfunktion). Kako pretpostavljeno rešenje  $q(t)$  sadrži  $n$  konstanti  $C_k$ , onda za njihovo odredjivanje možemo da postavimo  $n$  različitih funkcija  $p(t)$ . Kao funkcije  $p(t)$  biramo funkcije  $\varphi_k(t)$  iz pretpostavljenog rešenja (2) tako da dobijamo  $n$  jednačina oblika

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \left[ a \sum_{k=1}^n C_k \ddot{\varphi}_k + \phi \left( \sum_{k=1}^n C_k \dot{\varphi}_k \right) + F_0 \left( \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k \right) - F(t) \right] \varphi_k(t) dt = 0 \quad (6)$$

( $k=1, 2, \dots, n$ )

Jednačina

$$a\ddot{q} + a\kappa^2 f(q) - F_0 \cos \omega t = 0 \quad (7)$$

se može rešiti napred opisanom Galjerkinovom metodom. Pretpostavimo rešenje u obliku

$$q = C \cos \omega t \quad (8)$$

pa se uslov (6) svodi na jednačinu

$$\int_{t_0}^{t_0+T} [-a C \omega^2 \cos \omega t + a\kappa^2 f(C \cos \omega t) - F_0 \cos \omega t] \cos \omega t dt = 0 \quad (9)$$

koja smenom  $\omega t = \vartheta$ , i integraljenjem daje

$$(C_0 + C\psi^2) = \mathcal{J}(C) \quad (10)$$

gde je

$$\mathcal{J}(C) = \frac{1}{\omega} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+2\pi} f(C \cos \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta ; \quad \psi = \frac{\omega}{\kappa} ; \quad C_0 = \frac{F_0}{a\kappa^2} ; \quad (11)$$

Za konkretan primer, kada je

$$f(q) = q + \beta^2 q^3 \quad (12)$$

onda za  $J(C)$  dobijamo vrednost

$$J(C) = C \left( 1 + \frac{3}{4} \beta^2 C^2 \right) \quad (13)$$

pa je

$$\gamma^2 = 1 + \frac{3}{4} \beta^2 C^2 - \frac{C_0}{C} \quad (14)$$

Odnos frekvencija oscilovanja za velike vrednosti amplitude oscilovanja teži asimptotski paraboličkoj zavisnosti

$$\gamma^2 = 1 + \frac{3}{4} \beta^2 C^2 \quad (15)$$

Ako je funkcija  $f(q)$  polinom

$$f(q) = q + \sum_{i=1}^n \alpha_i q^i \quad (16)$$

onda je

$$J(C) = C + \sum_{i=1}^n \alpha_i C^i \zeta(i) \quad (17)$$

gde je

$$\zeta(i) = \frac{1}{\int_0^{2\pi} \cos^{i+1} \varphi d\varphi} = \frac{1}{2^{i+2}} \frac{\Gamma(i+2)}{[\Gamma(\frac{i+3}{2})]^2} \quad (18)$$

pa se može da napiše zavisnost odnosa frekvencija od amplitude oscilovanja kao

$$\gamma^2 = 1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \zeta(i) C^{i-1} - \frac{C_0}{C} \quad (19)$$

Često se u literaturi koristi, umesto vrednosti amplitude njena apsolutna vrednost  $|C|$ , te prethodna jednačina postaje

$$\psi^2 = 1 + \sum_{i=1}^n d_i \xi(i) |C|^{i-1} \mp \frac{C_0}{C} \quad (19')$$

Znak (-) važi za slučaj kada je sila poremećaja u fazi sa pomeranjem, a znak (+) kada je faza između njih  $\pi$ .

U slučaju proste prinudne oscilacije sa otpornom silom rešenje pretpostavljamo u obliku

$$x = \sum_{k=1}^2 C_k \varphi_k = C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t = C \cos(\Omega t - d) \quad (20)$$

gde je  $C^2 = C_1^2 + C_2^2$ ,  $\operatorname{tg} d = \frac{C_2}{C_1}$ . Smenom  $\varrho = \Omega t$  i unošenjem pretpostavljenog rešenja u jednačinu - integral

$$\int_{t_0}^{t_0+T} [\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + k^2(x + d_2 x^3) - h \cos \Omega t] \varphi_k(t) dt = 0; \quad (k=1,2); \quad (21)$$

pri čemu su

$$\varphi_1(\varrho) = \cos \varrho \quad \varphi_2(\varrho) = \sin \varrho \quad (22)$$

dobijamo sistem algebarskih jednačina po  $C_1$  i  $C_2$

$$\begin{aligned} [(k^2 - \Omega^2) + \frac{3}{4} k^2 d_2 C^2] C_1 + 2\delta \Omega C_2 &= h \\ -2\delta \Omega C_1 + [(k^2 - \Omega^2) + \frac{3}{4} k^2 d_2 C^2] C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

odakle su koeficijenti  $C_1$  i  $C_2$

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{2\delta \Omega h}{4\delta^2 \Omega^2 + [(k^2 - \Omega^2) + \frac{3}{4} k^2 d_2 C^2]^2} \\ C_2 &= \frac{h [(k^2 - \Omega^2) + \frac{3}{4} k^2 d_2 C^2]}{4\delta^2 \Omega^2 + [(k^2 - \Omega^2) + \frac{3}{4} k^2 d_2 C^2]^2} \end{aligned} \quad (24)$$

Pomoću koeficijenata  $C_1$  i  $C_2$  možemo da sastavimo algebarsku jednačinu za amplitudu prinudne oscilacije

$$C^2 \{ 4\delta^2 \Omega^2 + [(k^2 - \Omega^2) + \frac{3}{4} k^2 d_2 C^2]^2 \} = h^2 \quad (25)$$

Jednačina (25) daje zavisnost amplitude oscilovanja od frekvencije prinudne sile. Za razne vrednosti odnosa  $h = F_0/a$  dobija se familija amplitudnih krivih.

Faznu ugao se dobija u obliku

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2\delta\Omega}{(k^2 - \Omega^2) + \frac{3}{4}k^2 d_2 C^2} \quad (26)$$

kao funkcija frekvencije poremećajne sile, koeficijenta prigušivanja i amplitude oscilovanja. Za slučaj  $\delta = 0$  faza je jednaka nuli.

Ako se oscilovanje opisuje jednačinom

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + c f(q) - F_0 \cos \Omega t = 0 \quad (27)$$

onda rešenje možemo da pretpostavimo u obliku (20) i za taj slučaj dobijamo sistem jednačina

$$\begin{aligned} -a\Omega^2 c + c J(C) - F_0 \cos \alpha &= 0 \\ b\Omega c - F_0 \sin \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

gde je

$$J(C) = \int_{\xi_0}^{\xi_0 + 2\pi} f(C \cos(\xi - \alpha)) \cos \xi d\xi \quad (29)$$

Iz sistema (28) nalazimo

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2D\gamma}{\frac{J(C)}{C} - \gamma^2} \quad (30)$$

gde je  $D = b/2ak$ ,  $k^2 = c/a$ . Iz sistema (28) eliminacijom  $\alpha$  dobijamo

$$\left[ \frac{J(C)}{C} - 2D^2 \right] \mp \sqrt{\left( \frac{C_0}{C} \right)^2 - 4D^2 \left[ \frac{J(C)}{C} - D^2 \right]} = \gamma_{1/2} \quad (31)$$

## 3. ENERGIJA SISTEMA KOJI PRINUDNO OSCILUJE

Neka je oscilovanje sistema sa jednim stepenom slobode oscilovanja dato jednačinom

$$a\ddot{q} + f(q, \dot{q}) = F(t) \quad (1)$$

enda množenjem sa  $dq$  i integraljenjem u granicama od nule do  $q$ , dobijamo

$$\int_0^q a\dot{q} dq + \int_0^q f(q, \dot{q}) dq - \int_0^q F(t) dq = const \quad (2)$$

Funkciju  $f(q, \dot{q})$  možemo da rastavimo na deo koji ne zavisi i deo koji zavisi od brzine.

$$f(q, \dot{q}) = f(q, 0) \pm g(q, \dot{q}) = F_e(q) + g(q, \dot{q})$$

pa je

$$\int_0^q a\dot{q} dq + \int_0^q f(q, 0) dq + \int_0^q g(q, \dot{q}) dq + \int_0^q F(t) dq = const. \quad (2')$$

Jednačinu (2') možemo da napišemo u obliku

$$E_k + E_p + E_\phi - E_F = E_0$$

gde je

$$E_k = \int_0^q a\dot{q} dq = \frac{a\dot{q}^2}{2} - \frac{a\dot{q}_0^2}{2}$$

kinetička energija sistema;

$$E_p = \int_0^q F_e(q) dq$$

potencijalna energija sistema;

$$E_\phi = \int_0^q \phi(\dot{q}, q) dq$$

energija rasipanja (prigušivanja);

$$E_F = \int_0^2 F(t) dq$$

energija koja se dovodi sistemu dejstvom spoljašnje poremećajne sile  $F(t)$ ;  $E_0$  je početna energija sistema za  $\dot{q}_0 = 0$ .

Ako izvršimo integraljenje za četvrtinu perioda uz pretpostavljeno rešenje, možemo dobiti zavisnost amplitude oscilovanja od frekvencije poremećajne sile. Tada imamo da zavisnost frekvencije prinudne sile i amplitude oscilovanja može proizići iz zakona o radu, t.j. na osnovu toga da je rad svih sila na pomeranju od položaja ravnoteže do maksimalne amplitude jednak nuli.

Jednačinu

$$a\ddot{q} + F_e(q) = F_0 \sin \omega t \quad (3)$$

pomnožimo sa  $dq$  i integralimo u granicama od nule do  $C$ , uz pretpostavku rešenja  $q(t) = C \sin \omega t$ ,

$$a\omega^2 C^2 \int_0^1 F_e C = 2E_p \quad (4)$$

gde je

$$E_p = \int_0^C F_e(C \sin \omega t) C \cos \omega t d(\omega t) \quad (5)$$

Za slučaj simetrične karakteristike je

$$F_e(q) = a\kappa^2(q + \beta^2 q^3) \quad (6)$$

i



$$E_p = \frac{\alpha k^2 C^2}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 C^2\right) \quad (7)$$

pa je zavisnost amplitude od frekvencije poremećajne sile u obliku

$$(\Omega^2 - k^2)C + h = \frac{1}{2} \beta^2 k^2 C^3 \quad (8)$$

Za opštiji slučaj karakteristike sile

$$F_e(q) = k^2 \left( q + \sum_{i=1}^n \alpha_{i-1} q^i \right) \quad (9)$$

potencijalna energija je

$$E_p = k^2 \left( \frac{C^2}{2} + \sum_{i=2}^n \frac{\alpha_{i-1}}{i+1} C^{i+1} \right) \quad (10)$$

pa je amplitudno frekventna zavisnost data sa

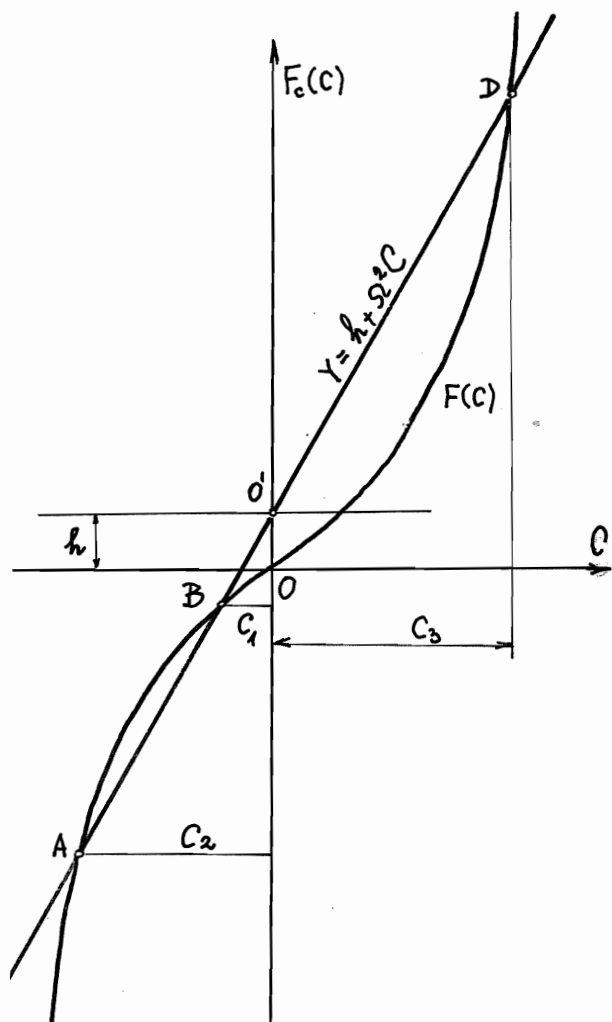
$$(\Omega^2 - k^2)C + h = 2k^2 \sum_{i=2}^n \frac{\alpha_{i-1}}{i+1} C^{i+1} \quad (11)$$

#### 4. GRAFIČKA METODA NALAŽENJA AMPLITUDE PRINUDNOG OSCILOVANJA

U slučaju kada se prosta prinudna oscilacija sistema sa jednim stepenom slobode oscilovanja može da definiše diferencijalnom jednačinom

$$a\ddot{q} + F_e(q) = F_0 \cos \Omega t \quad (1)$$

moгуće je primeniti grafičku metodu za nalaženje amplitude



sl.50

prinudnog oscilovanja uz poznavanje frekvencije i amplitude prinudne sile. Prema Galjerkinovoj metodi za pretpostavljeno rešenje  $q(t) = C \cos \Omega t$  može se napisati jednačina

$$h + C\Omega^2 = \kappa^2 J(C) = F_c(C) \quad (2)$$

gde je

$$F_c(C) = \frac{\kappa^2}{\mathcal{J}} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + 2\mathcal{J}} f(C \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

Za grafičko nalaženje amplitude potrebno je u ravni  $(C, F_c)$  nacrtati krivu  $F_c = F_c(C)$ , i pravu  $Y = \Omega C + h$ , pri čemu se  $Y$  nanosi na ordinatnu osu. U preseku krive  $F_c = F_c(C)$  i prave  $Y = \Omega C + h$  za odgovarajuću vrednost frekvencije  $\Omega$  može se sa grafika pročitati apscisa  $C$ , koja određuje amplitudu oscilovanja za pretpostavljeno rešenje  $q(t) = C \cos \Omega t$  oscilovanja. Ideja je prikazan na slici 50.

## 5. ANALITIČKE METODE REŠAVANJA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA OSCILOVANJA POD DEJSTVOM PROSTE PRINUDNE SILE

Za nalaženje rešenja oscilovanja oscilatora sa nelinearnom karakteristikom restitucione sile, a pod dejstvom prinudne sile Duffing je dao metodu aproksimativnog karaktera, koju je prvi put upotrebio za rešavanje tako zvane Duffing-ove jednačine. Pored Duffing-a na ovoj metodi je radio i Rubert uvodeći pojam poremećaja. U daljem tekstu pokažemo nekoliko modifikacija ove metode u primeni na prinudne oscilacije nelinearnog oscilatora sa jednim stepenom slobode oscilovanja.

I. Duffing-ova jednačina za prinudni oscilator ima oblik

$$a\ddot{q} + \alpha\kappa^2 f(q) = F_0 \sin \omega t \quad ; \quad f(q) = q + \alpha_2 q^3 \quad (1)$$

i na prvi pogled se ne razlikuje od linearne, do samo članom  $\alpha_2 q^3$ , međutim suštinski njena rešenja se u mnogome razlikuju od rešenja takve linearne jednačine. Ni do danas ova jednačina nije potpuno izučena i o velikom broju periodičkih i neperiodičkih rešenja se malo zna iz matematičke prakse.

Do periodičkih rešenja se dolazi raznim metodama aproksimacije. Duffing-ova metoda se odnosi na nalaženje onih približnih periodičkih rešenja, koja imaju istu frekvenciju oscilovanja kao i prinudna sila  $F_0 \sin \omega t$ , a u osnovi je aproksimativna metoda iteracije.

Diferencijalnu jednačinu (1) napišemo u obliku

$$\ddot{q} = h \sin \omega t - \kappa^2 (q + \alpha_2 q^3) \quad (2)$$

gde je  $h = F_0/a$ ,  $\kappa^2 = \omega^2$ . Aproksimaciju  $q = 0$ , možemo da ne razmatramo, već kao prvu aproksimaciju da usvojimo  $q_0 = C \sin \omega t$ , i istu unesemo u desnu stranu jednačine (2), posle čega dobijemo

$$\ddot{q}_1 \approx [h - \kappa^2 (C + \frac{3}{4} \alpha_2 C^3)] \sin \omega t + \frac{1}{4} \kappa^2 \alpha_2 C^3 \sin 3\omega t \quad (3)$$

Integraljenjem prethodne jednačine dva puta dobijamo narednu aproksimaciju

$$q_1 \approx -\frac{1}{\omega^2} [h - \kappa^2 (C + \frac{3}{4} \alpha_2 C^3)] \sin \omega t - \frac{\kappa^2 \alpha_2 C^3}{36 \omega^2} \sin 3\omega t \quad (4)$$

pri čemu smo početne uslove izabrali tako da konstante integracije budu jednake nuli, da bi se osigurala periodičnost sledećih aproksimacija.

Možemo sada da zaključimo, da se proces iteracije zasniva u umetanju svake sukcesivne aproksimacije u desnu stranu jednačine (2) i integraljenju tako dobijene jednačine. Za konvergenciju aproksimativno dobijenih rešenja potrebno je da  $k^2$ ,  $\alpha_2$  i  $h$  budu dovoljno mali.

Uporedjenjem izraza pretpostavljenog rešenja  $q_0 = C \sin \Omega t$  i dobijene prve aproksimacije (4) uz zanemarivanje viših harmonika (zbog malih koeficijenata) sledi odnos kružne frekvencije  $\Omega$  prinudne sile i amplitude prinudne oscilacije

$$(\Omega^2 - k^2)C + h = \frac{3}{4} k^2 \alpha_2 C^3 \quad (5)$$

Za  $h = 0$  dobija se izraz naveden pri razmatranju nelinearnih slobodnih oscilacija. Za  $\Omega = k$  amplituda oscilovanja je

$$C = \sqrt[3]{\frac{4h}{3k^2\alpha_2}} \quad (6)$$

a što je slučaj kada kod linearnih oscilatora dolazi do pojave rezonancije, kada su frekvencije prinudne i slobodne oscilacije jednake, a amplituda beskonačno velika.

Iz jednačine (5) teorijski za slučaj konstantne frekvencije može se odrediti amplituda  $C$ , kao koren algebarske jednačine trećeg stepena. Medjutim praktično je to veoma teško jer ne postoji neka opšta i tačna metoda. Ostaje nam samo na raspolaganju da koristimo neke približne metode. Odnos dat jednačinom (5) je amplitudno frekventni odnos pa možemo smatrati da je naprimer poznata amplituda  $a$  da treba drediti frekvenciju prinudne oscilacije, što je mnogo lakše zbog jednovaltnosti njene vrednosti.

II. Opisaćemo još jedan aproksimativni postupak iteracije koji se neznatno razlikuje od Duffing-ovog, a i ima prednost što se ne mora pretpostaviti da je  $\kappa^2$  malo.

Jednačinu (1) napišemo u obliku

$$\ddot{q} + \Omega^2 q = (\Omega^2 - \kappa^2) q - d_2 \kappa^2 q^3 + \kappa^2 d_2 h_0 \sin \Omega t \quad (7)$$

pri čemu smo stavili da je  $h = \kappa^2 d_2 h_0$ , i pretpostavili da su  $d_2$  i  $h$  mali. Proces iteracije počinjemo rešavanjem jednačine (7) kada je  $\Omega = \kappa$  i  $d_2 = 0$  t.j. sa slobodnom oscilacijom čija je frekvencija jednaka frekvenciji prinudne sile. Rešenje je  $q_0 = C \sin \Omega t$ , uz pretpostavku da  $C$  poznato. Može se dodati i izraz  $D \cos \Omega t$ , ali bi on već u narednom stupnju iteracije bio jednak nuli. Unesemo sada  $q_0(t)$  u jednačinu (7) koja postaje

$$\ddot{q} + \Omega^2 q = \left[ (\Omega^2 - \kappa^2) C - \frac{3}{4} d_2 \kappa^2 C^3 + \kappa^2 d_2 h_0 \right] \sin \Omega t + \frac{d_2 \kappa^2 C^3}{4} \sin 3\Omega t \quad (8)$$

Jednačina (8) na desnoj strani sadrži izraz  $\sin \Omega t$  koji bi se javio kao rešenje homogene diferencijalne jednačine  $\ddot{q} + \Omega^2 q = 0$ , pa bi zbog toga rešenje nehomogene diferencijalne jednačine (8) u  $\mathbb{R}^1$  sadržalo sekularni član  $At \cos \Omega t$ , zbog čega ne bi bilo periodičko. Kako nas interesuju samo periodička rešenja to ćemo konstantu uz  $\sin \Omega t$ , na desnoj strani jednačine (8) izjednačiti sa nulom i dobiti

$$(\Omega^2 - \kappa^2) C + \kappa^2 d_2 h_0 = \frac{3}{4} d_2 \kappa^2 C^3 \quad (9)$$

što je identično uslovu (5) prema prvobitnoj Duffing-ovoj metodi, a što daje amplitudno-frekventnu zavisnost. Sada je jednačina (8) u obliku

$$\ddot{q} + \Omega^2 q = \frac{1}{4} d_2 \kappa^2 C^3 \sin 3\Omega t \quad (10)$$

i njeno rešenje i ujedno druga aproksimacija je

$$g_1 = C_1 \sin \Omega t - \frac{1}{32} \alpha_2 \left(\frac{K}{\Omega}\right)^2 C^3 \sin 3\Omega t \quad (11)$$

gde  $C_1$  još nije određeno. Sada se prema ovoj metodi za odabere vrednost prve aproksimacije  $C$  i ovakav pristup se sada poštuje u svim narednim stupnjevima iteracije. Sada je

$$g_1 = C \sin \Omega t - \frac{C^3}{32 \left( \frac{1}{\alpha_2} + \frac{3}{4} C^2 - \frac{K_0}{C} \right)} \sin 3\Omega t \quad (12)$$

Ovaj postupak pri kojem je dobijena aproksimacija rešenja (12) sproveden je pod uslovom da se frekvencija prinudnog oscilovanja ne razmatra kao unapred propisana, nego da je dobijena iz (9) pošto je vrednost amplitude  $C$  usvojena. Ovo navodi na to da se frekvencija prinudnog oscilovanja  $\Omega$  razmatra kao funkcija amplitude  $C$ , što je malo neprirodno s obzirom da se eksplicitno sadrži u diferencijalnoj jednačini kretanja (1).

Dalji proces iteracije bi se sastojao u umećanju dobijenog rešenja (12) u desnu stranu jednačine (7) posle čega bi se dobilo

$$\begin{aligned} \ddot{g}_2 + \Omega^2 g_2 = & \left[ (\Omega^2 - K^2) C - \frac{3}{4} \alpha_2 K^2 C^3 - \frac{3}{4} \frac{\alpha_2^2}{32} C^5 K^2 \left(\frac{K}{\Omega}\right)^2 - \frac{3}{2} \frac{\alpha_2^2 K^2}{32} \left(\frac{K}{\Omega}\right)^4 C^7 + \alpha_2 K^2 h_0 \right] \sin \Omega t + \\ & + \left[ \frac{1}{4} \alpha_2 K^2 C^3 - \frac{1}{32} \alpha_2 \left(\frac{K}{\Omega}\right)^2 (\Omega^2 - K^2) C^3 + \frac{3}{62} \alpha_2^2 C^5 K^2 \left(\frac{K}{\Omega}\right)^2 + \frac{3}{4} \frac{\alpha_2^4}{32^3} K^2 \left(\frac{K}{\Omega}\right)^6 C^9 \right] \sin 3\Omega t \quad (13) \\ & + \frac{3}{4} \frac{1}{32} K^2 \alpha_2^2 C^5 \left(\frac{K}{\Omega}\right)^2 (1 + C \frac{\Omega^2}{K^2}) \sin 5\Omega t + \frac{3}{4} \frac{\alpha_2^3}{32^2} K^2 \left(\frac{K}{\Omega}\right)^4 C^7 \sin 7\Omega t + \frac{1}{4} \frac{\alpha_2^4}{32^3} K^2 \left(\frac{K}{\Omega}\right)^6 C^9 \sin 9\Omega t \end{aligned}$$

ili

$$\ddot{g}_2 + \Omega^2 g_2 = P_1 \sin \Omega t + \sum_{k=1}^4 P_{2k+1} \sin(2k+1) \Omega t \quad (14)$$

Koeficijenti  $P_{2k+1}$  ( $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ) obuhvataju amplitude prinudne oscilacije  $C$  i frekvencije  $\Omega$  prinudnog oscilo-

vanja. Da bi se obezbedila periodičnost rešenja treba staviti da je koeficijent uz  $\sin \Omega t$  jednak nuli što daje

$$\gamma^2 = \left(\frac{\Omega}{K}\right)^2 = \frac{3}{4} \alpha_2 \left[ \frac{4}{3\alpha_2} + C^2 + \frac{1}{32} \alpha_2 C^4 \gamma^2 + \frac{1}{2 \cdot 16^2} \alpha_2^2 \gamma^4 C^6 - \frac{4}{3} \frac{h_0}{C} \right] \quad (15)$$

Jednačina (14) postaje sada

$$\ddot{q}_{\lambda 2} + \Omega^2 q_{\lambda 2} = \sum_{i=1}^4 P_{2i+1} \sin(2i+1)\Omega t \quad (16)$$

i njeno rešenje i druga aproksimacija rešenja jednačine (7) je

$$q_{\lambda 2} = C \sin \Omega t + \sum_{i=1}^4 P'_{2i+1} \sin(2i+1)\Omega t \quad (17)$$

gde je

$$P'_{2i+1} = \frac{-P_{2i+1}}{4\Omega^2 i(i+1)} \quad (18)$$

Na isti način, kao i u prethodnom stupnju iteracije, uz pretpostavku da su koeficijenti  $P'_{2i+1}$  mali stavljeno je  $C_2 = C$  i dalji postupak iteracije se sprovodi tako aproksimacija rešenja (17) unosi u desnu stranu jednačine (7) pri čemu ona postaje linearna kombinacija sinusa  $(2k+1)\Omega t$ . Opet na isti način zbog traženja periodičkog rešenja stavljamo da je koeficijent uz  $\sin \Omega t$  jednak nuli, odakle dobijamo vezu amplitude i frekvencije prinudne sile.

Svaka naredna jednačina je oblika

$$\ddot{q}_{\lambda v} + \Omega^2 q_{\lambda v} = \sum_{i=1}^{\infty} S_{2i+1}^{(v)} \sin(2i+1)\Omega t ; \quad S_1^{(v)} = 0 \quad (19)$$

a aproksimacija oblika

$$q_{\lambda v} \approx C_v \sin \Omega t - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S_{2i+1}^{(v)}}{4\Omega^2 i(i+1)} \sin(2i+1)\Omega t ; \quad C_v \equiv C \quad (20)$$



Postupak se ponavlja do stupnja zahtevane aproksimacije, a rešenje se dobija u obliku reda po sinusima neparnih umnožaka  $\Omega t$ .

Isti postupak se usvaja i za nalaženje rešenja jednačine oblika

$$\ddot{q} + k^2(q + d_2 q^3) = h \cos \Omega t \quad (21)$$

samo se tada aproksimativna rešenja dobijaju u obliku reda po kosinusima neparnih umnožaka  $\Omega t$ . Veze amplitude prinudne oscilacije  $C$  i frekvencije  $\Omega$  su identične kao u prethodnom primeru sa sinusom.

Odnosi (5) i (15) ako se razmatraju u ravni  $(\Omega, C)$ ,  $(\Omega^2, C)$  ili  $(\gamma, C)$  daju familiju krivih sa amplitudom prinudne sile  $F_0$  (ili  $h$ ) kao parametrom. Ove krive se nazivaju rezonantne krive ili amplitudne krive stacionarnog rezonantnog stanja, jer se za  $d_2 = 0$  svode na poznate amplitudno-frekventne krive rezonantnog stanja za linearne prinudno oscilujuće sisteme.

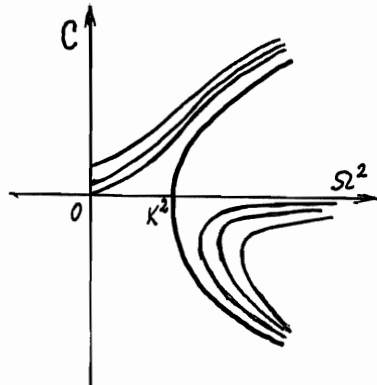
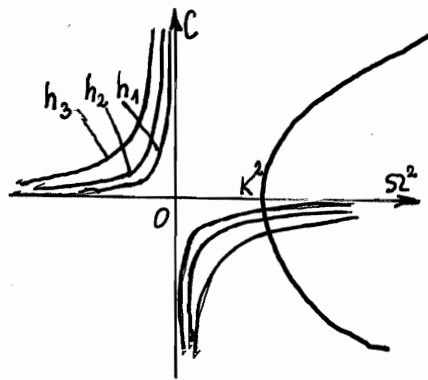
Rezonantne krive se obično ucrtavaju sa amplitudom kao ordinatom i frekvencijom kao apscisom. Za crtanje rezonantnih krivih pogodno je nacrtati krivu za

$$\Omega^2 = k^2 \left(1 + \frac{3}{4} d_2 C^2\right) \quad (22)$$

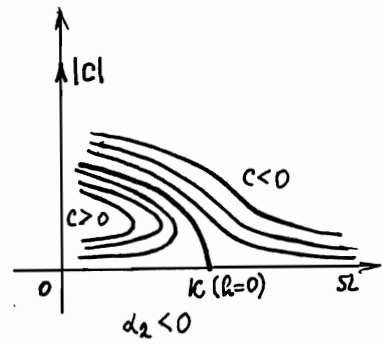
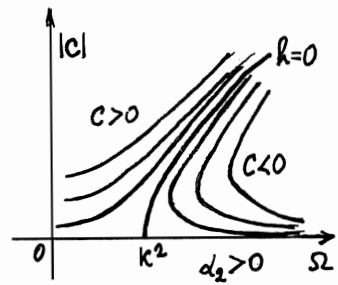
i familiju krivih

$$\Omega^2 = - \frac{k^2 d_2 h_0}{C} = - \frac{h}{C} \quad (23)$$

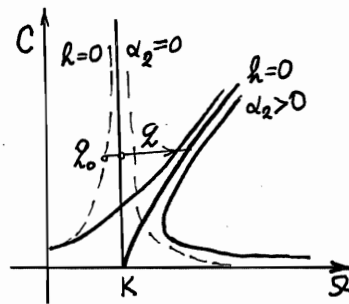
kako je to na priloženoj slici 51 a naznačeno. Pomoću krivih (22) i (23) amplitudno frekventna zavisnost se može prikazati kao na slici 51 b. Uobičajeno je međjutim da se crta grafička zavisnost apsolutne vrednosti amplitude  $|C|$  od frekvencije ili kvadrata frekvencije prinudne sile, pa se na prilo-



S1.51 a i b



S1.51 c i d



S1.51 e

ženim skicama sa slike 51 c i d može videti izgled takvog dijagrama za slučaj meke  $\alpha_2 < 0$  i jake  $\alpha_2 > 0$  opruge. Amplitude na desnoj strani od krive (22) su negativne, a levo od nje pozitivne što znači da je kretanje u fazi sa spoljašnjom silom  $C > 0$ , ili je fazni ugao  $\pi$  pri  $C < 0$ , a u zavisnosti da li je  $\Omega$  veće, manje ili jednako frekvenciji slobodnih oscilacija  $k = \omega$ . Upoređivanjem rezonantnih krivih za linearni sistem sa onim za nelinearni sistem slika 51 e, pri čemu na oba dejstvuju iste prinudne sile, možemo zaključiti da rezonantne krive za nelinearni slučaj mogu nastati "savijanjem" rezonantnih krivih linearnog sistema nadesno za tvrdu oprugu  $\alpha_2 > 0$ , a nalevo za meku oprugu  $\alpha_2 < 0$ , od tačke  $\Omega = \omega$ . Za male vrednosti amplitude prinudnih oscilacija  $C$  približnost upoređivanih krivih je veoma velika.

Sa dijagrama rezonantnih krivih se dolazi do odgovora zašto se može uzeti veličina  $C$  kao određena, a frekvencija se mora da razmatra kao njena funkcija. To je iz razloga što postoje tri vrednosti amplitude  $C$ . Iteracije su bile počete sa <sup>sinusnom</sup> slobodnom linearnom oscilacijom, a zatim se odatle prešlona blisko rešenje (4) (slika 51 e) i zato je u linearnizovanom problemu amplituda  $C$  bila presudna, i morala da bude prihvaćena kao početna.

III. Ovde ćemo prikazati još jednu modifikaciju Duffing-ove metode u primeni za rešavanje Duffing-ove jednačine prinudnog oscilovanja

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + k^2(q + \alpha q^3) = h \cos \Omega t \quad (24)$$

Ova jednačina može da pretstavlja jednačinu oscilovanja matematičkog ili fizičkog klatna (pri čemu su uzeta samo prva dva člana Taylor-ovog stepenog reda) na koje dejstvuje harmonijski moment kružne frekvencije  $\Omega$ .

Radi skraćenog pisanja, a i uopštenijeg posmatranja promenljive i konstante redukujemo na bezdimenzionu veličinu

$$\varrho = kt ; \quad x = \frac{k^2}{h} \varrho ; \quad \psi = \frac{\Omega}{k} ; \quad \varepsilon = \frac{d_2 h^2}{k^4} \quad (25)$$

pa diferencijalna jednačina (24) postaje

$$\frac{d^2 x}{d\varrho^2} + x + \varepsilon x^3 = \cos \psi \varrho \quad (26)$$

Kako je  $f(x) = -f(-x)$  i  $\cos \psi \varrho = \cos(-\psi \varrho)$  to možemo očekivati oscilaciju periodičnu u odnosu na vreme  $\varrho$  i parnu te rešenje možemo pretpostaviti u obliku Fourier-ovog reda samo po kosinusima neparnih umnožaka  $\psi \varrho$ , kao

$$x(\varrho) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n-1} \cos(2n-1) \psi \varrho \quad (27)$$

gde su  $x_{2n-1}$  nepoznati koeficijenti koje treba odrediti. Unošenjem rešenja (27) u jednačinu (26) dobija se

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\psi^2 x_{2n-1} (2n-1)^2 \cos(2n-1) \psi \varrho + \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n-1} \cos(2n-1) \psi \varrho + \varepsilon \left( \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n-1} \cos(2n-1) \psi \varrho \right)^3 - \cos \psi \varrho = 0 \quad (28)$$

Konverzijom stepena i grupisanjem članova u prethodnom izrazu isti možemo napisati kao Fourier-ov red po cosinusima neparnog umnožka

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{2\nu-1} \cos(2\nu-1) \psi \varrho = 0 \quad (29)$$

gde bi svi koeficijenti  $a_{2\nu-1}$  trebalo da budu jednaki nuli, ako bi želeli da rešenje oblika (27) identički zadovoljava jednačinu (26). To je praktično nemoguće jer se javlja problem rešavanja beskrajno mnogo jednačina sa beskrajno nepoznatih  $x_{2n-1}$ , koje se ne javljaju linearno, već u ovom slučaju sa trećim stepenom. Mi međjutim izbegavamo glomaznost na račun

tačnosti i zadovoljavamo se nižom aproksimacijom rešenja.

Rešenje u obliku

$$x(\varphi) = x_1 \cos \psi \varphi + x_3 \cos 3\psi \varphi \quad (30)$$

unesemo u jednačinu (26) i dobijemo

$$\begin{aligned} & \left[ (1-\psi^2)x_1 + \frac{3}{4}\varepsilon(x_1^2 + x_1x_3 + 2x_3^2)x_1 - 1 \right] \cos \psi \varphi + \left[ (1-9\psi^2)x_3 + \frac{1}{4}\varepsilon(x_1^3 + 6x_1^2x_3 + \right. \\ & \left. + 3x_3^3) \right] \cos 3\psi \varphi + \frac{3}{4}\varepsilon x_1x_3(x_1+x_3)\cos 5\psi \varphi + \frac{3}{4}\varepsilon x_1x_3^2\cos 7\psi \varphi + \frac{1}{4}\varepsilon x_3^3\cos 9\psi \varphi = 0 \quad (31) \end{aligned}$$

Kako imamo dve nepoznate  $x_1$  i  $x_3$  to možemo zahtevati da su samo prva dva koeficijenta jednačine (31) jednaka nuli i da ista nije identički zadovoljena pod uslovom da su prva dva člana  $a_1 \cos \psi \varphi$  i  $a_3 \cos 3\psi \varphi$  veća od ostale sume  $\sum_{\nu=3}^{\infty} a_{2\nu-1} \cos(2\nu-1)\psi \varphi$ , što će biti zadovoljeno za  $|x_3| \ll |x_1|$  i  $\varepsilon \ll 1$ , jer koeficijenti  $a_5$ ,  $a_7$  i  $a_9$  sadrže samo članove sa višim stepenima od  $x_3$ . S obzirom na ovu pretpostavku u koeficijentima  $a_1$  i  $a_3$  možemo da zanemarimo članove sa  $x_3^2$  i  $x_3^3$ , pa se iz uslova  $a_1=0$  i  $a_3=0$  dobija

$$(1-\psi^2)x_1 + \varepsilon \frac{3}{4}x_1^3 - 1 = 0 \quad (32)$$

$$(1-9\psi^2)x_3 + \frac{1}{4}\varepsilon x_1^3 = 0$$

I ovde će kružna frekvencija biti posmatrana kao funkcija amplitude; iz sistema jednačina (32) je

$$\psi^2 = 1 + \frac{3}{4}\varepsilon x_1^2 - \frac{1}{x_1} \quad (33)$$

$$x_3 = \frac{1}{4} \frac{\varepsilon x_1^3}{9\psi^2 - 1}$$

Ove odnose ima smisla razmatrati i analizirati samo ako je

$$\left| \frac{x_3}{x_1} \right| = \frac{1}{4} \left| \frac{\varepsilon x_1^2}{9\psi^2 - 1} \right| \ll 1 \quad (34)$$

Za vrednosti  $\psi$  oko  $1/3$  t.j. za  $\Omega$  oko  $3\kappa$ , ova približna analiza ne važi je nije zadovoljen uslov  $|x_3| \ll |x_1|$ .

Da bismo nacrtali krivu definisanu prvim izrazom (33) u ravni  $(\psi^2, |x_1|)$  možemo da iskoristimo osobi-

nu da se za velike vrednosti  $\alpha_1$  data kriva može aproksimirati krivom  $\psi^2 = 1 + \frac{3}{4}\epsilon \alpha_1^2$ . Ekstremne vrednosti posmatrane krive se nalaze iz uslova ekstremnosti, pa je za  $\alpha_1 = -\sqrt[3]{\frac{2}{3\epsilon}}$  ekstremna vrednost odnosa frekvencija

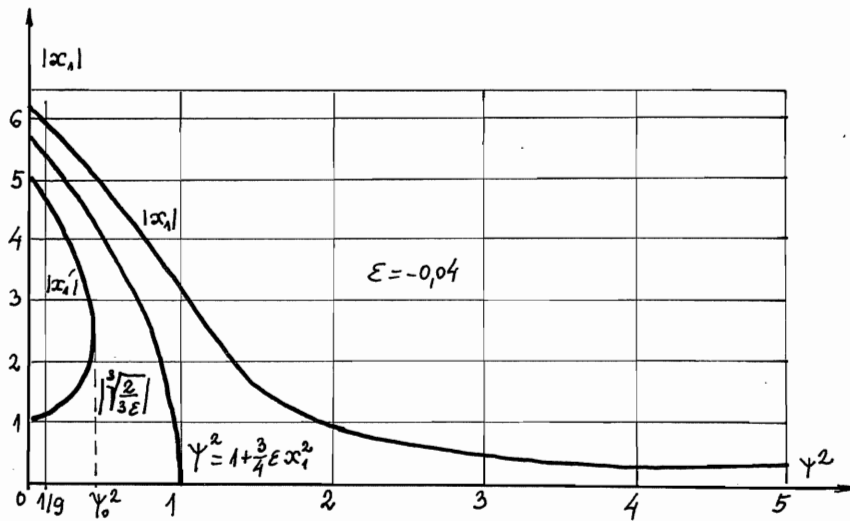
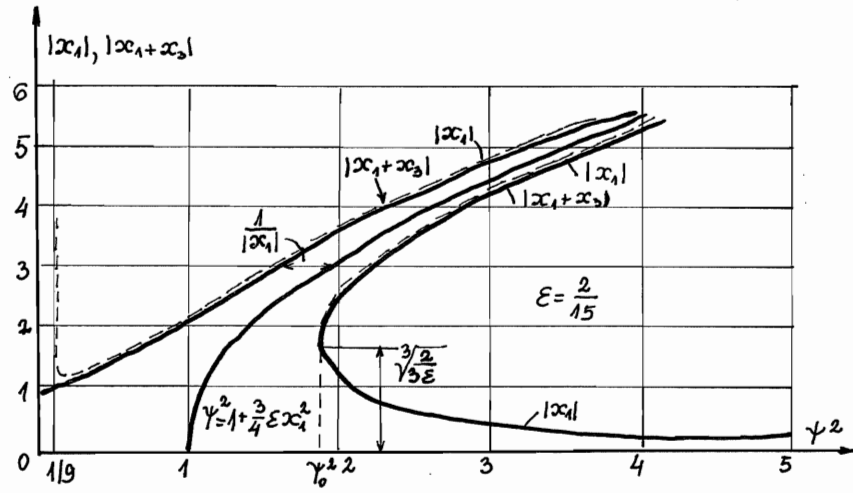
$$\psi_{\alpha_1 = -\sqrt[3]{\frac{2}{3\epsilon}}}^2 = 1 + \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{3\epsilon}{2}} = \psi_0^2 \quad (35)$$

Za vrednosti odnosa frekvencija  $\psi < \psi_0$  pri  $\epsilon > 0$  na dijagramu rezonantnih krivih je  $\alpha_1 > 0$  i dobija se samo jedno rešenje, koje je u fazi sa prinudnom silom. Za  $\psi > \psi_0$  pri  $\epsilon > 0$  jednačina prva iz (33) daje tri vrednosti  $\alpha_1$  i to jednu vrednost  $\alpha_1$  pozitivnu i dve negativne vrednosti za  $\alpha_1$  od kojih je prva u fazi, a ostale dve su sa faznim uglom  $\pi$  prema prinudnoj sili. Za  $\psi = \psi_0$  dobijaju se dva rešenja, jedno sa pozitivnom amplitudom  $\alpha_1$  i jedno sa negativnom amplitudom. Prvo rešenje za amplitudu prinudnog oscilovanja je u fazi, a drugo u suprotnoj fazi od prinudne sile. Za  $\epsilon < 0$  imamo obrnute zaključke od onih za  $\epsilon > 0$ . Na priloženim dijagramima sa slika 52 a i b izradjenim za  $\epsilon = 2/15$  i  $\epsilon = -0,04$  se mogu videti rezonantne krive za slučaj meke ( $\epsilon < 0$ ) i jake ( $\epsilon > 0$ ) opruge.

Na dijagramu slika 52 a za  $\epsilon = 2/15$  ucrtane su isprekidanim linijama krive  $|\alpha_1 + \alpha_3|$  kao druga približnost za amplitudu prinudne oscilacije. Vidi se da se krive  $|\alpha_1|$  i  $|\alpha_1 + \alpha_3|$  neznatno razlikuju svuda sem u okolini  $\psi = 1/3$ , jer je kriva  $|\alpha_1 + \alpha_3|$  oko te tačke počela asimptotski da se ponaša prema pravoj  $\psi = 1/3$ .

U slučaju  $\epsilon < 0$  kao što se vidi sa slike b, rezonantne krive se savijaju ulevo, te možemo potražiti slučaj kada je  $\psi_0^2$  jednako nuli, pri čemu bi se dobijale jednoznačne vrednosti za  $\alpha_1$ , i to negativne, a rešenja sa faznim uglom  $\pi$  u odnosu na prinudnu silu.

Treba da je



Sl.52 a i b

$$\gamma_0^2 = 1 + \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{2}} = 0 \quad (36)$$

odakle se dobija vrednost za

$$\varepsilon = -\left(\frac{2}{3}\right)^4 \approx -0,2$$

Za vrednosti  $\varepsilon < -0,2$  nebi egzistirala realna rešenja za  $\psi = \frac{\Omega}{\kappa}$ , a i za  $\gamma_0^2$  oko  $1/9$  zahtev u pretpostavci  $|\alpha_3| \ll |\alpha_1|$  nebi bio zadovoljen. Za  $\gamma_0^2 = 1/9$  je  $\varepsilon \approx -0,006$  te je ispunjen uslov  $|\alpha_3| \ll |\alpha_1|$  jer se ne uzima ni približno vrednost  $-0,006$ .

## 6.METODA PERTURBACIJE

Pri analitičkom nalaženju približnih rešenja slobodnih nelinearnih oscilacija bilo je reči o ovoj metodi. Metoda perturbacije je jedna od najopštijih metoda za proučavanje nelinearnih problema u mehanici, a zasniva se na Linds-tät-ovoj metodi, koju je on prvi put upotrebio rešavajući neke od problema u nebeskoj mehanici.

Metoda se sastoji, kao što je već poznato u razvijanju željenih veličina po stepenima izvesnog parametra, koji može biti uzet kao mali i odredjivanju nekih parametara i koeficijenata rešavanjem niza linearnih diferencijalnih jednačina. Prednost metode je u tome što je relativno pouzdana u slučajevima kada ništa neznamo o opštem karakteru rešenja koje tražimo. Do izvesnih zaključaka o rešenjima se može doći, ako se zaključi da red, kojim je rešenje pretpostavljeno konvergira nekom ili periodičkom rešenju. Ima slučajeva da metoda perturbacije dovodi do vrlo glomaznih izračunavanja, te zbog toga nije najprikladnija. U tom slučaju se koristimo perturbacionom



metodom u smislu nalaženja neke bitne osobine rešenja, a zatim na osnovu toga možemo izabrati neku pogodniju metodu za dalja proučavanja. Ovde ćemo se ponovo zadržati na Duffing-ovoj diferencijalnoj jednačini

$$\ddot{q} + \kappa^2(q + \alpha_2 q^3) = h \cos \Omega t \quad (1)$$

čije ćemo rešenje potražiti perturbacionom metodom, a u obliku stepenog reda po malom parametru  $\varepsilon$  kao

$$q(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i q_i \quad (2)$$

gde su  $q_i(t)$  funkcije vremena. Ako se traži periodičko rešenje  $q(t)$  frekvencije iste kao i poremećajne sile, bilo bi prirodno da posmatramo amplitudu rešenja  $q(t)$ , koju treba odrediti u zavisnosti od  $\Omega$ . U prethodnim analizama došli smo do zaključka da amplituda treba da bude osrednjena, a frekvencija odredjivana u funkciji amplitude, te zato uvodimo smenu promenljivih  $\varphi = \Omega t$  i jednačinu (1) možemo da napišemo u obliku

$$\Omega^2 \frac{d^2 q}{d\varphi^2} + \kappa^2(q + \alpha_2 q^3) = h \cos \varphi \quad (3)$$

Za rešenje ćemo pretpostaviti da je periodičko sa periodom  $T = 2\pi/\Omega$  i da ima amplitudu  $C$ . Prema metodi perturbacija parametar  $\varepsilon$  se može uzeti donekle proizvoljno, ali kako mi proučavamo rešenje u okolini linearizovanog problema i kako je  $\kappa^2 \alpha_2 = \beta$  malo, to za  $\varepsilon$  usvajamo vrednost  $\beta$  i red (2) je sada

$$q(\varphi) = q_0(\varphi) + \beta q_1(\varphi) + \beta^2 q_2(\varphi) + \dots \quad (4)$$

Takodje je neophodno u red staviti i frekvenciju  $\Omega$ , po stepenima istog parametra  $\beta$  kao

$$\Omega = \Omega_0 + \beta \Omega_1 + \beta^2 \Omega_2 + \dots \quad (5)$$

Da bi rešenje bilo periodično potrebno je da budu zadovoljeni sledeći uslovi

$$\begin{aligned} q_{i,1}(\mathcal{E} + 2\mathcal{D}) &= q_i(\mathcal{E}) \\ q_0(0) &= C \quad q_i(0) = 0 \\ q_0'(0) &= 0 \quad q_i'(0) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Stavimo da je  $h = \beta h_0$ , jer smo pretpostavili da je  $h$  malo i reda  $\beta$ . Unošenjem redova (4) i (5) u jednačinu (3) dobijamo

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \Omega_k \right)^2 \left( \sum_{i=0}^{\infty} q_{i,1}'' \beta^i \right) + k^2 \sum_{i=0}^{\infty} q_i \beta^i + \beta \left( \sum_{i=0}^{\infty} q_i \beta^i \right)^3 = \beta h_0 \cos \Omega t \quad (7)$$

Izjednačujući član koji ne sadrži  $\beta$ , sa nulom dobijamo jednačinu

$$q_0'' \Omega_0^2 + q_0 k^2 = 0 \quad (8)$$

čije je rešenje, uz zadovoljenje uslova (6)

$$q_0 = C \cos \mathcal{E} \quad (9)$$

pri čemu je  $\Omega_0 = k$ . Izjednačavajući zatim koeficijent uz  $\beta$  sa nulom dobijamo jednačinu

$$q_{1,1}'' \Omega_0^2 + k^2 q_{1,1} = -2 q_0'' \Omega_0 \Omega_1 - q_0^3 + h_0 \cos \mathcal{E} \quad (10)$$

koja posle unošenja rešenja  $q_0$  dobija oblik

$$q_{1,1}'' \Omega_0^2 + k^2 q_{1,1} = \left[ \left( 2 \Omega_0 \Omega_1 - \frac{3}{4} C^2 \right) C + h_0 \right] \cos \mathcal{E} - \frac{1}{4} C^3 \cos 3\mathcal{E} \quad (11)$$

Da bi rešenje  $q_{1,1}(\mathcal{E})$  bilo periodičko stavljamo da je koeficijent uz  $\cos \mathcal{E}$  jednak nuli, odakle izračunavamo

$$\Omega_1 = \frac{1}{2\Omega_0 C} \left( \frac{3}{4} C^3 - h_0 \right) = \frac{1}{2K} \left( \frac{3}{4} C^2 - \frac{h_0}{C} \right) \quad (12)$$

Jednačina (11) ima rešenje

$$q_1 = - \frac{C^3}{32K} (\cos \vartheta - \cos 3\vartheta) \quad (13)$$

Sada bi trebalo postupno sve koeficijente uz stepene  $\beta$  izjednačavati sa nulom pri čemu bi se dobio sistem diferencijalnih jednačina koji može lako postupno da se reši.

Ako se zadržimo na prva dva člana stepenog reda, pri čemu smo rešili prve dve jednačine postavljenog sistema, dobijemo rešenje u obliku

$$q = \left( C - \frac{1}{32} \alpha_2 C^3 \right) \cos \Omega t + \frac{\alpha_2 C^3}{32} \cos 3\Omega t + \dots \quad (14)$$

gde je prinudna kružna frekvencija oscilovanja dobijena kao

$$\Omega = K + \frac{\alpha_2}{2} K \left( \frac{3}{4} C^2 - \frac{h_0}{C} \right) + \dots \quad (15)$$

## 7. SUBHARMONIJSKA REŠENJA

U prethodnim članovima tražili smo rešenja koja imaju frekvenciju oscilovanja kao i prinudna sila, a u višim aproksimacijama smo dobijali umnoške frekvencije oscilovanja. Medjutim kod nelinearnih sistema mogu se permanentno pojaviti i oscilacije čija je frekvencija oscilovanja deo frekvencije  $\Omega$  prinudne sile. U ovakvim slučajevima demultiplikacije frekvencije prinudne sile, kao frekvencije prinudnog oscilovanja imamo razmatranje subharmonijskih oscilacija. Vrlo je teško objasniti fizičku prirodu njihove pojave, ali najprostije objašnjenje bi bilo sledeće: svaka slobodna oscilacija sadrži više harmonike i zato je moguće da spoljna sila sa frekvencijom jednakom jednom od ovih viših harmonika može da pobudi i održi harmonike najniže frekvencije. Ova pojava zahteva da prigušivanje ne bude suviše veliko.

Ovde će biti rešen samo specijalan slučaj subharmonijskih oscilacija i to reda  $1/3$ . Pomoću promenljive

Duffing-ovu jednačinu napišemo u obliku

$$\Omega^2 q'' + k^2 q + \beta q^3 = h \cos \vartheta \quad (\vartheta = \Omega t) \quad (1)$$

$$(\cdot = \frac{d}{d\vartheta})$$

Subharmonijsko rešenje tražimo u obliku reda

$$q(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{\frac{2n-1}{3}} \cos \frac{2n-1}{3} \vartheta = C_{1/3} \cos \frac{\vartheta}{3} + C_1 \cos \vartheta + \dots \quad (2)$$

što će se iz daljeg postupka pokazati opravdanim. Zamenom ovog reda u jednačinu (1) dobijamo

$$-\Omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3}\right)^2 C_{\frac{2n-1}{3}} \cos \frac{2n-1}{3} \vartheta + k^2 \sum_{n=1}^{\infty} C_{\frac{2n-1}{3}} \cos \frac{2n-1}{3} \vartheta +$$

$$+\beta \left[ \sum_{n=1}^{\infty} C_{\frac{2n-1}{3}} \cos \frac{2n-1}{3} \vartheta \right]^3 - h \cos \vartheta = 0 \quad (3)$$

Izjednačivši koeficijente uz  $\cos \varrho/3$  i  $\cos \varrho$  sa nulom dobijamo

$$\begin{aligned} (k^2 - \frac{\Omega^2}{9})C_{1/3} + \frac{3}{4}\beta(C_{1/3}^3 + C_{1/3}^2 C_1 + 2C_{1/3} C_1^2) &= 0 \\ (k^2 - \Omega^2)C_1 + \frac{1}{4}\beta(C_{1/3}^3 + 6C_{1/3}^2 C_1 + 3C_1^3) &= h \end{aligned} \quad (4)$$

Prva jednačina ovog sistema za linearni slučaj  $\beta=0$ , daje  $C_{1/3} = 0$ , sem ako nije  $\Omega = 3k$  i ne može da se dobije subharmonijska oscilacija. Medjutim ako je  $\Omega = 3k$  onda  $C_{1/3}$  može da bude proizvoljno uzeto, dok je  $C_1 = -h/8k^2$ . Zbog proizvoljnosti  $C_{1/3}$  za  $\beta=0$ , to za  $\beta \neq 0$  moramo odrediti  $C_{1/3}$ . Veličine  $C_{1/3}$  i  $h$  treba da su unapred određene, a veličine  $\Omega$  i  $C_1$  koje su za  $\beta=0$  fiksirane treba razmatrati kao zavisne od  $C_{1/3}$  i  $h$  kao parametara.

Apksimaciju počinjemo pisanjem prve od jednačina (4) kao

$$\Omega^2 = 9k^2 + \frac{27}{4}\beta(C_{1/3}^2 + C_{1/3}C_1 + 2C_1^2) \quad (5)$$

i druge kao

$$-8k^2 C_1 = h + (\Omega^2 - 9k^2)C_1 - \frac{1}{4}\beta(C_{1/3}^3 + C_{1/3}^2 \cdot 6C_1 + 3C_1^3) \quad (6)$$

Zamenom (5) u (6) dobija se

$$-8k^2 C_1 = h - \frac{1}{4}\beta(C_{1/3}^3 - 21C_{1/3}^2 C_1 - 27C_{1/3} C_1^2 - 51C_1^3) \quad (7)$$

Iteracija za  $\beta=0$  daje

$$C = -\frac{h}{8k^2}; \quad \Omega = 3k \quad (8)$$

pri čemu smatramo da smo  $C_{1/3}$  unapred odredili. U sledećem stupnju iteracije je

$$\Omega^2 = 9k^2 + \frac{27}{4}\beta (C_{1/3}^2 + C_{1/3}C + 2C^2) \quad (9)$$

$$C_1 = C + \frac{1}{32} \frac{\beta}{k^2} (C_{1/3}^3 - 21C_{1/3}^2C - 27C_{1/3}C^2 - 51C^3)$$

Prva jednačina sistema (9) pretstavlja u ravni  $(\Omega, C_{1/3})$  elipsu za  $\beta < 0$ , a hiperbulu za  $\beta > 0$ . Nalaženjem izvoda ove jednačine po  $C_{1/3}$  i izjednačavanjem sa nulom istog, dobijamo vrednost amplitude  $C_{1/3}$  za koju  $\Omega^2$  ima ekstremnu vrednost. Izvod je

$$\frac{d\Omega^2}{dC_{1/3}} = \frac{27}{4}\beta(2C_{1/3} + C) = 0 \quad (10)$$

i ekstremna vrednost  $\Omega^2$  za  $C_{1/3} = -\frac{C}{2}$  iznosi

$$\Omega^2 = 9(k^2 + \frac{21}{16}\beta C^2) \quad (11)$$

i ona je za

$$\frac{d^2\Omega^2}{dC_{1/3}^2} = \frac{27}{2}\beta \begin{cases} > 0 & \text{minimum za } \beta > 0 \\ < 0 & \text{maksimum za } \beta < 0 \end{cases} \quad (12)$$

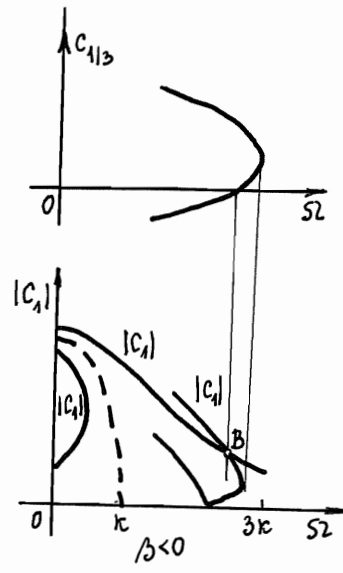
Na priloženim slikama 53 a i b prikazan je dijagram  $(\Omega, C_{1/3})$ .

Na osnovu prethodnog dolazimo do sledećih zaključaka o egzistenciji subharmonijskih oscilacija:

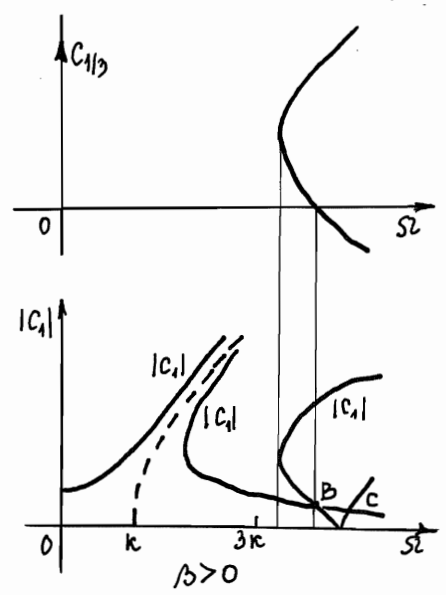
Kada je  $\beta < 0$  subharmonijska oscilacija se može javiti samo za

$$\Omega < 3\sqrt{k^2 + \frac{21}{16}\beta C^2}$$

jer smo pokazali da je u tom slučaju to maksimum frekvencije za postojanje  $C_{1/3}$ .



S1.53 a



S1.53 b

Kada je  $\beta > 0$  subharmonijska oscilacija se može javiti samo kod velikih frekvencija većih od

$$\Omega > 3\sqrt{k^2 + \frac{2A}{16}\beta} C^3$$

Za svako  $\beta \neq 0$  ne mora postojati subharmonijska oscilacija frekvencije  $\Omega = 3\kappa$  kao kod linearne jednačine.

Za  $C_{1/3} = 0$  prvi odnos iz sistema (4) je identički zadovoljen, dok drugi daje

$$(k^2 - \Omega^2)C_1 + \frac{3}{4}\beta C_1^3 = h$$

Iz druge jednačine (9) za  $C_{1/3} = 0$  dobija se

$$C_1 = C - \frac{51}{32} \frac{\beta}{k^2} C^3$$

gde je  $C = -\frac{h}{8k^2}$ , kako je ranije definisano.

Ovde možemo da spomenemo samo pojam bifurkacije, kome na dijagramu slika 53 odgovara tačka B u kojoj su harmonijske i subharmonijske oscilacije identične. Subharmonijske oscilacije rezultuju iz harmonijskih kroz bifurkaciju za amplitudu  $C_1$ .

## 8. REŠENJE PRINUDNE NELINEARNE OSCILACIJE SA PRIGUŠIVANJEM

I. Neka je oscilovanje sistema sa jednim stepenom slobode oscilovanja dato diferencijalnom jednačinom

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + k^2 f(q) = h \cos \Omega t \quad (1)$$

Obeležimo sa  $\psi = \frac{\Omega}{k}$  i  $\varrho = \kappa t$  i prethodnu jednačinu prevedemo na bezdimenziono vreme



$$q'' + 2Dq' + f(q) = \frac{h}{k^2} \cos \gamma \vartheta = h_0 \cos \gamma \vartheta \quad (2)$$

gde je  $D = \delta/k^2$ . Jednačinu (2) ćemo zameniti linearnom jednačinom oblika

$$q'' + 2Dq' + \gamma_A^2 q = h_0 \cos \gamma \vartheta \quad (3)$$

gde koeficijent  $\gamma_A^2$  prema metodi harmonijskog bilansa izračunavamo kao koeficijent razvoja u Fourier-ov red

$$\alpha^* = \gamma_A^2 = \frac{1}{\pi C} \int_0^{2\pi} f(C \cos \gamma \vartheta) \cos \gamma \vartheta d(\gamma \vartheta) \quad (4)$$

uz  $\cos \gamma \vartheta$ , dok je koeficijent uz  $\sin \gamma \vartheta$  jednak nuli.

Kada je  $f(q) = q + \alpha q^3$  koeficijent  $\gamma_A^2$  je

$$\gamma_A^2 = 1 + \frac{3}{4} \alpha C^2 \quad (5)$$

i funkcija  $f(q)$  se aproksimira sa

$$f(q) \approx \gamma_A^2 q = \left(1 + \frac{3}{4} \alpha C^2\right) q \quad (6)$$

te dobijamo jednačinu (2) u linearizovanom obliku

$$q'' + 2Dq' + \left(1 + \frac{3}{4} \alpha C^2\right) q = h_0 \cos \gamma \vartheta \quad (7)$$

Periodičko rešenje jednačine (3) je

$$q = C \cos(\gamma \vartheta - \varphi_0) \quad (8)$$

Njegova zamena u jednačinu (7) koju treba da zadovoljava da je sistem

$$\begin{aligned}(\psi_A^2 - \psi^2)C \cos \psi_0 - 2D\psi C \sin \psi_0 &= h_0 \\ (\psi_A^2 - \psi^2)C \sin \psi_0 - 2D\psi C \cos \psi_0 &= 0\end{aligned}\quad (9)$$

Iz koga izračunavamo fazni ugao

$$\operatorname{tg} \psi_0 = \frac{2D\psi}{\psi_A^2 - \psi^2}\quad (10)$$

i amplitudu prinudne oscilacije

$$C = \frac{h_0}{\sqrt{(\psi_A^2 - \psi^2)^2 + 4D^2\psi^2}}\quad (11)$$

Izraž (11) se može napisati u obliku

$$\psi^4 - 2\psi^2\left(1 + \frac{3}{4}\alpha C^2 - 2D^2\right) + \left(1 + \frac{3}{4}\alpha C^2\right)^2 - \frac{h_0^2}{C^2} = 0\quad (12)$$

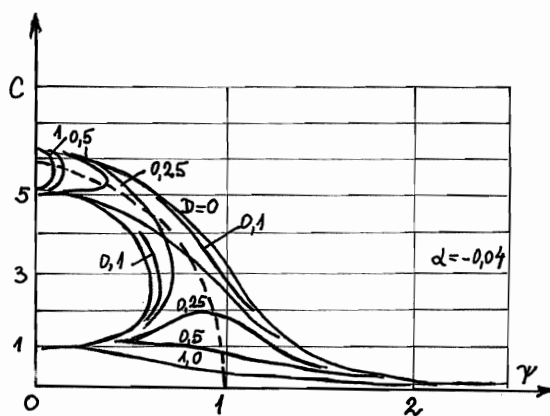
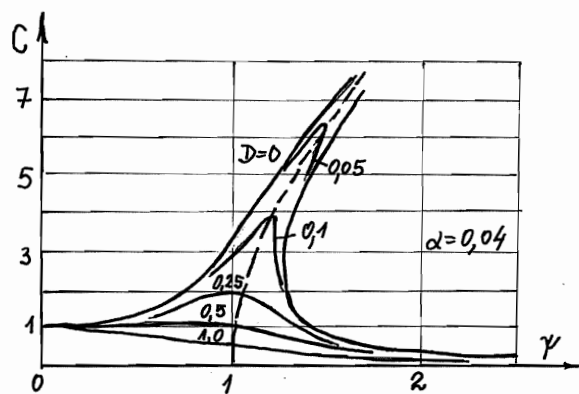
Odakle se rešavanjem dobija kvadrat odnosa frekvencija

$$\psi^2 = \left(1 + \frac{3}{4}\alpha C^2 - 2D^2\right) \pm \sqrt{\frac{h_0^2}{C^2} - 4D^2\left(1 + \frac{3}{4}\alpha C^2 - D^2\right)}\quad (13)$$

Ovim izrazom problem razmatranja rešenja smo sveli na razmatranje rezonantnih krivih u ravni  $(\psi, C)$ . Odatle je jasno da mogu da egzistiraju jedna, dve ili nijedna vrednost kvadrata odnosa frekvencija  $\psi^2$ , a to znači da prirodu rezonantnih krivih određuju parametri  $D$ ,  $\alpha$  i  $h_0$ .

Na slici 54 nacrtane su rezonantne krive za  $\alpha = 0,04$  (a) i  $\alpha = -0,04$  (b) i za vrednost  $h_0 = \text{const}$ , a portret krivih je za promenljivu vrednost faktora prigušivanja, kako je naznačeno. Za  $D=0$  dobijaju se spoljašnje rezonantne krive i one obuhvataju sve ostale krive za  $D>0$ .

Moguće je dobiti "maksimume" savijenih rezonantnih krivih stavljanjem da je koren u izrazu (13) jednak nuli odakle dobijamo



Sl.54 a i b

$$C_{max}^2 = -\frac{2}{3\alpha}(1-D^2) \pm \sqrt{\frac{4}{9\alpha^2}(1-D^2)^2 - \frac{h_0^2}{3\alpha D^2}} \quad (14)$$

Odgovarajuća vrednost za  $\psi_{max}^2$  je

$$\psi_{max}^2 = \left(1 + \frac{3}{4}\alpha C_{max}^2 - 2D^2\right) = 1 + \frac{1-D^2}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{3\alpha h_0^2}{4D^2(1-D^2)^2}} - 1 \right] - 2D^2 \quad (15)$$

Iz izraza (10) za ugao faze dobijamo

$$\operatorname{tg} \psi_0 = \frac{2D\psi}{1 + \frac{3}{4}\alpha C^2 - \psi^2} \quad (16)$$

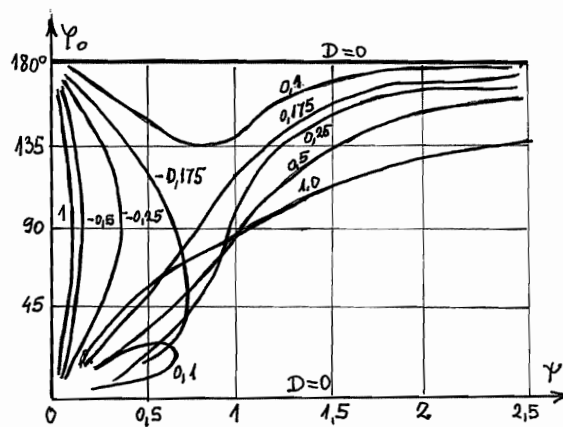
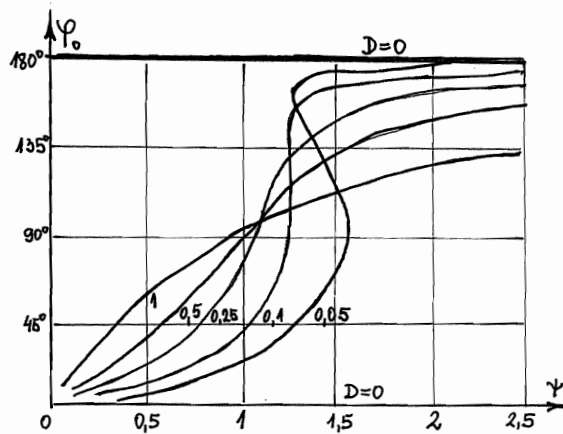
odakle se vidi da on zavisi od amplitude prinudnih oscilacija  $C$ , te se mora uzeti zavisnost  $C(\psi)$  i na osnovu nje crtati tok faze u zavisnosti od promene frekvencije.

Na slici 55 nacrtan je fazni ugao prema prethodnom izrazu pri čemu je na ordinatnu osu nanesen ugao  $\psi_0$  u stepenima, a na apscisnu osu odnos frekvencija  $\psi = \frac{\Omega}{k}$ .

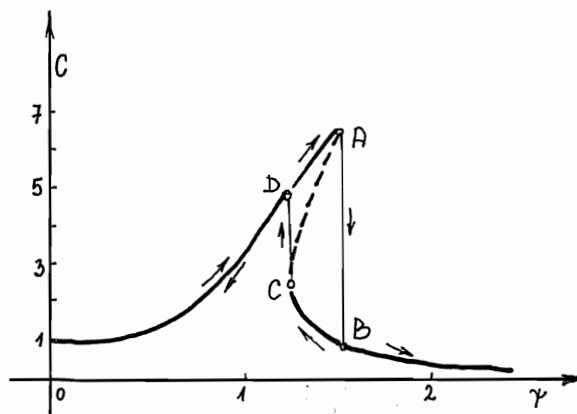
Ovde se srećemo sa jednom vrlo karakterističnom pojavom kod nelinearnih sistema, a to je pojava skakanja stacionarnih amplituda takozvano "kvazistacionarno" stanje kretanja sistema. Ako egzistira više stacionarnih amplituda onda se očekuje da sve vrednosti ne odgovaraju stabilnim stanjima oscilovanja.

Na slici 56 a nacrtana je jedna kriva rezonantnog prigušenog kretanja. Strelicama je naznačeno kretanje amplitude pri promeni frekvencije u jednom i drugom smeru (porasta i opadanja). Deo rezonantne krive AC nacrtan je isprekidano, jer ne odgovara stabilnom oscilovanju. Vidi se da stacionarna amplituda skače pri porastu frekvencije od A na B, a pri opadanju od C na D, što nastaje usled prilagodjavanja amplitude za male odnosno za velike vrednosti frekvencije prinudne sile.

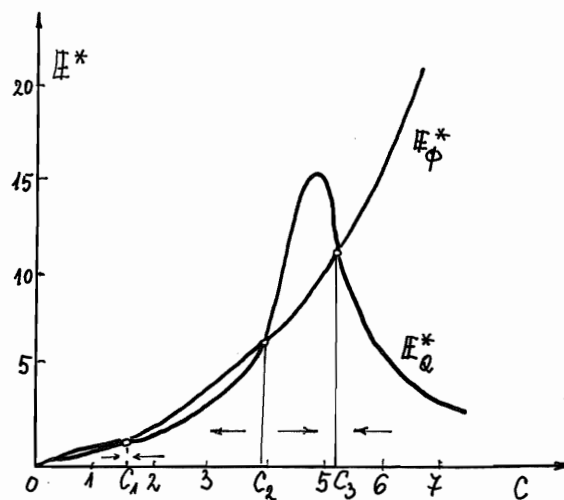
Zajedno sa pojavom skokova na amplitudnoj re-



Sl.55 a i b



S1.56 a



S1.56 b

zonantnoj krivoj, javlja se i skok faznog ugla  $\varphi_0$ . Veoma komplikovane varijante faznog ugla mogu da nastupe u slučaju  $\alpha < 0$ , kada se pri prigušivanju amplitudna kriva rezonantnog stanja sastoji iz dve delimične grane koje su nezavisne jedna od druge.

Za sisteme sa jednim stepenom slobode kretanja može se odrediti granica stabilnih i nestabilnih delova rezonantne krive i zato je pogodno iskoristiti bilans energije.

Energija prigušivanja  $E_\phi^*$  je

$$E_\phi^* = 2\delta\Omega C^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(\Omega t - \varphi_0) d(\Omega t) = 2\pi D C^2 \psi \quad (17)$$

dok je energija dovedena poremećajem

$$E_F^* = \int_0^{2\pi} h \cos \Omega t \sin(\Omega t - \varphi_0) d(\Omega t) = \pi h C \sin \varphi_0 \quad (18)$$

U jednačinu (17) unesemo izraz  $\psi(C)$ , dok u jednačinu (18) unesemo izraz  $\varphi_0(C)$ , pa zatim u istoj ravni nacrtamo krive  $E_\phi^*(C)$  i  $E_F^*(C)$ . U opštem slučaju ove krive mogu da se preseku i tri puta. Tendencija promene amplitude se može odrediti iz energije diferencije  $E_\phi^* - E_F^*$ . Ako je više energije rasipano prigušivanjem nego što je dovedeno poremećajem onda se u sistemu ispoljava težnja ka smanjenju amplitude oscilovanja, dok u obrnutom slučaju imamo težnju ka povećanju amplitude oscilovanja. Na slici 56 b se to da videti. Vidi se da su  $C_1$  i  $C_3$  stacionarne vrednosti amplitude i njima odgovaraju stabilna stanja oscilovanja.

II. Nelinearnu diferencijalnu jednačinu oscilovanja sa prigušivanjem možemo napisati u obliku

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + k^2(q + \beta q^3) = h \cos(\Omega t + \theta_0) \quad (19)$$

Uvodjenjem bezdimenzionih veličina

$$x = \frac{\kappa^2 \varrho}{h}, \psi = \frac{\Omega}{\kappa}; \quad \varepsilon = \frac{\beta h^2}{\kappa^4}; \quad \lambda = \frac{\delta}{\kappa}; \quad \varrho = \kappa t \quad (20)$$

možemo prethodnu jednačinu da prevedemo na oblik

$$\frac{d^2 x}{d\varrho^2} + 2\lambda \frac{dx}{d\varrho} + x + \varepsilon x^3 = \cos(\psi \varrho + \theta_0) \quad (21)$$

koji će nam omogućiti da izvučemo neke opšte zaključke o karakteru rešenja. Faznu ugao  $\theta_0$  uzet je kao ugao koji treba odrediti iz uslova da rešenje jednačine (2) bude oblika

$$x = x_1 \cos \psi \varrho \quad (22)$$

Pretpostavljeno rešenje ne obuhvata više harmonike što je donekle opravdano jer je  $\varepsilon \ll 1$ .

Da bi pretpostavljeno rešenje zadovoljavalo jednačinu (21) potrebno je da je zadovoljen sistem jednačina

$$\begin{aligned} (1 - \psi^2)x_1 + \frac{3}{4}\varepsilon x_1^3 &= \cos \theta_0 \\ 2\lambda \psi x_1 &= \sin \theta_0 \end{aligned} \quad (23)$$

Odakle izračunavamo fazni ugao kao

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{2\lambda \psi}{(1 - \psi^2) + \frac{3}{4}\varepsilon x_1^2} \quad (24)$$

Dok se eliminisanjem faznog ugla  $\theta_0$  iz istog sistema dobija amplitudno frekventna zavisnost

$$x_1^2 \left[ (1 - \psi^2 + \frac{3}{4}\varepsilon x_1^2)^2 + 4\lambda^2 \psi^2 \right] = 1 \quad (25)$$

Da bi rešenje (22) u aproksimativnom smislu bilo rešenje jednačine (21) potrebno je da je zadovoljen uslov da fazni ugao ima vrednost odredjenu izrazom (24), dok amplituda prinudne prigušene oscilacije treba da zadovoljava uslov (25). Jedna-



čina (25) rešena po  $\psi^2$  daje

$$\psi^2 = 1 + \frac{3}{4} \varepsilon x_1^3 - 2\lambda^2 \pm \sqrt{\frac{1}{x_1^2} + \lambda^2(4\lambda^2 - 3\varepsilon x_1^2 - 4)} \quad (26)$$

što predstavlja familiju rezonantnih krivih za utvrđene vrednosti  $\varepsilon$ , a pri promeni koeficijenta prigušivanja  $\lambda$ . Rezonantne amplitudne krive su rasporedjene sa obe strane krive

$$\psi^2 = 1 - 2\lambda^2 + \frac{3}{4} \varepsilon x_1^2 \quad (27)$$

kao srednje krive i na horizontalnom otstojanju

$$\pm \sqrt{\frac{1}{x_1^2} + \lambda^2(4\lambda^2 - 3\varepsilon x_1^2 - 1)} \quad (28)$$

Kada je ovaj koren jednak nuli onda je

$$\bar{x}_1^2 = \frac{1}{2\lambda^2(1-\lambda^2)} \frac{1}{1 \pm \sqrt{1 + \frac{3}{4} \frac{\varepsilon}{\lambda^2(1-\lambda^2)}}} \quad (29)$$

Bude li vrednost za

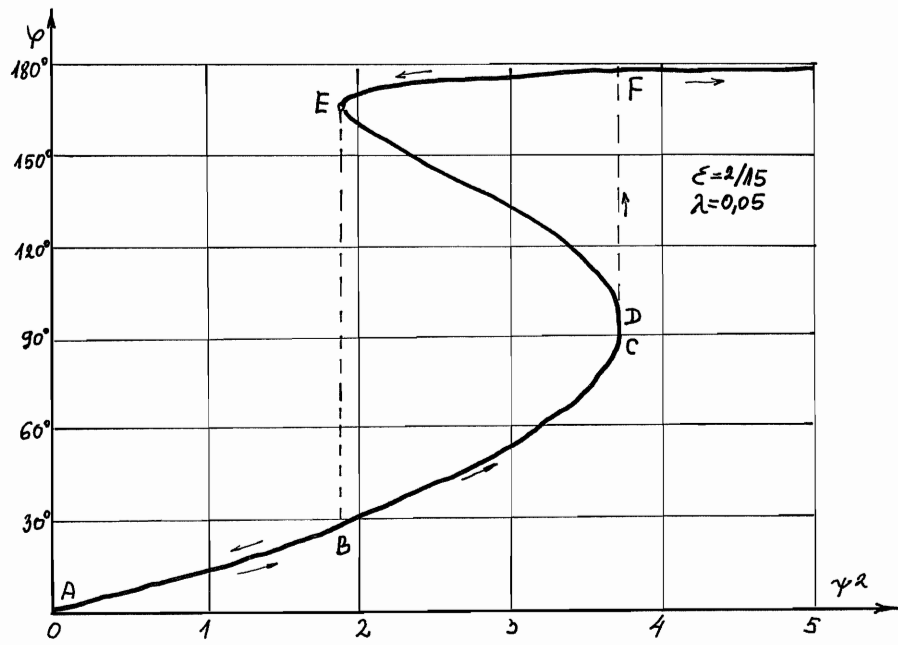
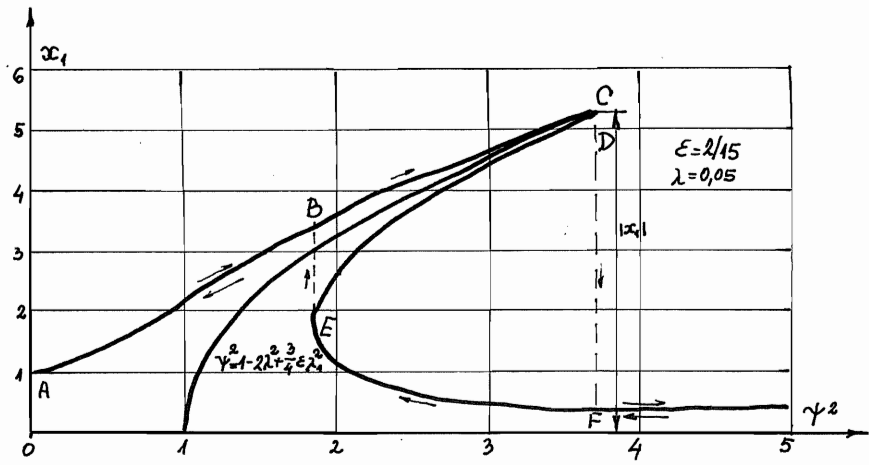
$$\varepsilon < -\frac{3}{4} \lambda^2(1-\lambda^2)^2 \quad (30)$$

onda za  $x_1^2$  ne dobijamo nikakvu realnu vrednost. Ako  $\varepsilon$  zadovoljava uslov

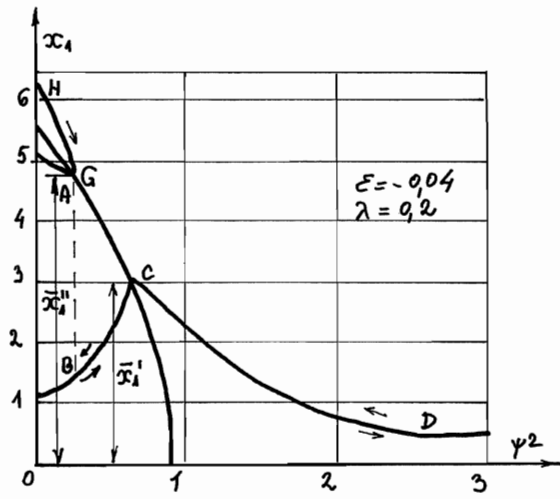
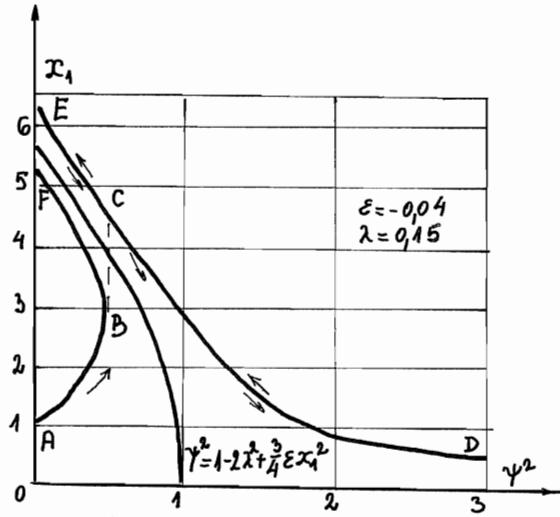
$$-\frac{3}{4} \lambda^2(1-\lambda^2)^2 < \varepsilon < 0 \quad (31)$$

onda je moguće u izrazu (29) za  $x_1^2$  uzeti oba predznaka pri čemu dobijamo dve vrednosti za  $\bar{x}_1$  i  $\psi^2$  u ravni amplitudno frekventnih rezonantnih krivih.

Na slikama 57 a i 58 a i b su prikazane amplitudno-frekventne rezonantne krive sa naznačenim  $\varepsilon$ . Na krivama su naznačene strelice koje pokazuju promenu amplitude pri porastu ili opadanju frekvencije. Na prvom dijagramu je prikazana rezonantna kriva sa nadlinearnom karakteristikom (jaka opruga) sa  $\varepsilon = 2/15$  i  $\lambda = 0,05$ ; ona preseca srednju krivu u tački sa ordinatom  $x_1^2$  datom izrazom (29) i apscisom



Sl.57 a i b



Sl.58 a i b

određenom sa

$$\psi^2 = 1 + \frac{3}{4} \varepsilon \frac{1}{2\lambda^2(1-\lambda^2)^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{3}{4} \frac{\varepsilon}{\lambda^2(1-\lambda^2)^2}}\right)} - 2\lambda^2 \quad (32)$$

To je jednovremeno i maksimalna vrednost ordinate i postiže se za  $\varepsilon=0$ ,  $\lambda=0$  i  $\psi=1,5$ . Za svako  $\varepsilon>0$  i  $\lambda$  postoji po jedna vrednost za  $\alpha_1$  i  $\psi^2$  koje određuju maksimum rezonantne krive. Uz dijagram rezonantne krive sa slike 57 a, uporedo je priložen i dijagram promene faznog ugla između prinudne sile i prinudne oscilacije (slika 57 b).

Na dijagramima sa slike 58 koji su izrasjeni za iste vrednosti  $\varepsilon=-0,04$ , ali za različite koeficijente prigušivanja  $\lambda=0,15$  i  $\lambda=0,2$  pri čemu su  $\lambda$  vrednosti izabrane tako da je za prvu vrednost zadovoljen uslov (30), a za drugu nije te se može uočiti bitna razlika rezonantnih krivih.

Za  $\lambda=0,2$  uslov (30) nije zadovoljen i zato dobijamo dve vrednosti  $\alpha_1'$  i  $\alpha_1''$  za rešenja iz (29). Amplitudno-frekventna rezonantna kriva se sastoji iz dve grane od kojih svaka preseca srednju krivu; za višu granu to je tačka minimuma, a za nižu tačka maksimuma, što je i označeno na dijagramu. Zavisno od smera promene frekvencije i početne tačke na rezonantnoj krivoj vidi se strelicama naznačen put promene amplitude prinudne nelinearne oscilacije, što se sa slike može lepo uočiti.

### 9. PRIBLIŽNA REŠENJA POMOĆU KRAJNJIH SUMA TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Ovde će biti reči o metodi opštijeg karaktera pomoću koje je moguće naći rešenja jednačine prinudnog nelinearnog oscilovanja

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + F(q, \dot{q}, t) = \frac{d^2 q}{dt^2} - F_0(q) - D(q, \dot{q}) - Q(t) = 0 \quad (1)$$

gde je  $Q(t)$  prinudna periodična sila perioda  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ . Metoda se u osnovi sastoji u pretpostavljanju rešenja prinudne oscilacije kao reda trigonometrijskih funkcija sa nepoznatim koeficijentima koje treba odrediti iz uslova da pretpostavljeno rešenje zadovoljava identički jednačinu oscilovanja. Prema tome pretpostavljamo rešenje u obliku Fourier-ovog reda

$$q(t) = \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^n (\alpha_\nu \cos \nu \Omega t + \beta_\nu \sin \nu \Omega t) \quad (2)$$

gde su  $\alpha_\nu$ ,  $\beta_\nu$  i  $\alpha_0$  nepoznati koeficijenti koje treba odrediti. Unošenjem pretpostavljenog rešenja i njegovih izvoda u jednačinu (1) dobijamo

$$-\Omega^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 (\alpha_\nu \cos \nu \Omega t + \beta_\nu \sin \nu \Omega t) - F_0 \left( \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \cos \nu \Omega t + \beta_\nu \sin \nu \Omega t \right) - D \left( \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \cos \nu \Omega t + \beta_\nu \sin \nu \Omega t, -\Omega \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu (\alpha_\nu \cos \nu \Omega t + \beta_\nu \sin \nu \Omega t) \right) - Q(t) = 0 \quad (3)$$

Konverzijom stepena i grupisanjem članova jednačinu (3) možemo da napišemo u obliku Fourier-ovog reda

$$A = \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \cos \mu \Omega t + b_\mu \sin \mu \Omega t \quad (4)$$

čiji su koeficijenti

$$\alpha_0 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [F_0(q) + D(q, \dot{q}) + Q(t)] d(\Omega t) \quad (5)$$

$$a_{\mu} = -\omega^2 \mu^2 \alpha_{\mu} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [F(\varrho) + D(\varrho, \dot{\varrho}) + Q(t)] \cos \mu \omega t \, d(\omega t) \quad \mu = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

$$a_{\mu} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [F(\varrho) + D(\varrho, \dot{\varrho}) + Q(t)] \cos \mu \omega t \, d(\omega t) \quad \mu = n+1, n+2, \dots \quad (7)$$

$$b_{\mu} = -\omega^2 \mu^2 \beta_{\mu} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [F_0(\varrho) + D(\varrho, \dot{\varrho}) + Q(t)] \sin \mu \omega t \, d(\omega t) \quad \mu = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

$$b_{\mu} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [F_0(\varrho) + D(\varrho, \dot{\varrho}) + Q(t)] \sin \mu \omega t \, d(\omega t) \quad \mu = n+1, n+2, \dots \quad (9)$$

Radi skraćenog pisanja integrale koji se u prethodno izračunatim koeficijentima javljaju skraćeno obeležiti sa

$$f_{a\mu} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [F_0(\varrho) + D(\varrho, \dot{\varrho}) + Q(t)] \cos \mu \omega t \, d(\omega t) \quad \mu = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

$$f_{b\mu} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [F_0(\varrho) + D(\varrho, \dot{\varrho}) + Q(t)] \sin \mu \omega t \, d(\omega t) \quad \mu = 1, 2, \dots$$

te su sada koeficijenti reda (4)

$$a_0 = -f_{a_0}$$

$$a_{\mu} = -f_{a\mu} - \omega^2 \mu^2 \alpha_{\mu} \quad \mu = 1, 2, \dots, n, n+1, n+2, \dots \quad (11)$$

$$b_{\mu} = -f_{b\mu} - \omega^2 \mu^2 \beta_{\mu} \quad \mu = 1, 2, \dots, n, n+1, n+2, \dots$$

pri čemu se za  $\mu > n$  uzimaju izrazi samo do vertikalne crte. Izrazi (11) sadrže u sebi još neodredjene koeficijente  $\alpha_{\nu}$  i  $\beta_{\nu}$  iz pretpostavljenog rešenja.

Pretpostavljeno rešenje  $q(t)$  identički bi zadovoljavalo jednačinu (1) ako bi  $\alpha_{\nu}$  i  $\beta_{\nu}$  bili tako izabrani da svi koeficijenti  $a_{\mu}$  i  $b_{\mu}$  identički budu jednaki nuli. Medjutim realno to je neostvarljivo jer ima mnogo koeficijenata  $a_{\mu}$  i  $b_{\mu}$ , što sobom povlači i toliko jednačina, a mi imamo samo  $2n+1$  nepoznatih koeficijenata  $\alpha_{\nu}$  i  $\beta_{\nu}$  koje treba odrediti. Zato se zadovoljavamo izjednačavanjem pr-

vih  $n+1$  koeficijenata  $a_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, \dots, n$ ) i prvih  $n$  koeficijenata  $b_\mu$  ( $\mu = 1, 2, 3, \dots, n$ ) sa nulom čime dobijamo  $2n+1$  jednačinu sa isto toliko nepoznatih. Posle toga možemo proveriti tačnost aproksimacije izračunavajući izraz

$$\mathcal{B}(t) = Q(t) - \sum_{\mu=n+1}^{\infty} (f_{a_\mu} \cos \mu \Omega t + f_{b_\mu} \sin \mu \Omega t) \quad (12)$$

pri čemu je očigledno da će rešenje  $q(t)$  oblika (2) biti tačno rešenje jednačine (1) ako mesto prinudne sile  $Q(t)$  na sistemu dejstvuje prinudna sila  $\mathcal{B}(t)$ . Odstupanje funkcije  $\mathcal{B}(t)$  od vrednosti stvarne prinudne sile karakteriše tačnost rešenja  $q(t)$ . Problem u ovoj metodi nastaje iz nemogućnosti rešavanja algebarskog sistema jednačina

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_\mu &= 0 \quad \mu = 1, 2, \dots, n \\ b_\mu &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

jer se sa brojem članova izrazi usložnjavaju. Često se zadovoljavamo, da bi smo tu poteškoću izbegli, rešenjem koje sadrži tri člana

$$q(t) = \frac{1}{2} d_0 + d_1 \cos \Omega t + \beta_1 \sin \Omega t \quad (14)$$

pri čemu nepoznate koeficijente  $d_0$ ,  $d_1$  i  $\beta_1$  izračunavamo iz sistema od tri jednačine

$$\begin{aligned} a_0 &= -f_{a_0} = 0 \\ a_\mu &= -\Omega^2 d_1 - f_{a_1} = 0 \\ b_\mu &= -\Omega^2 \beta_1 - f_{b_1} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

I. Kao prvi primer pokazaćemo postupak nalaženja rešenja metodom krajnje sume trigonometrijskih funkcija nelinearnog oscilatornog sistema sa jednim stepenom slobode oscilovanja ako ima simetričnu karakteristiku restitucione sile u odnosu na početni položaj, t.j. za koju važi

$$F_0(\varrho) = -F_0(-\varrho) \quad (16)$$

a prigušivanje se zanemaruje i prinudna sila je oblika  $Q(t) = h \cos \Omega t$ . Na osnovu navedenih karakteristika sistema nalazimo da je

$$\begin{aligned} f_{a\mu} &= \frac{1}{\mathcal{F}} \int_{-\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} [F_0(\varrho) + h \cos \Omega t] \cos \mu \Omega t \, d(\Omega t) \\ f_{b\mu} &= \frac{1}{\mathcal{F}} \int_{-\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} [F_0(\varrho) + h \cos \Omega t] \sin \mu \Omega t \, d(\Omega t) \end{aligned} \quad (17)$$

Ako rešenje pretpostavimo u obliku (14) onda za nalaženje nepoznatih koeficijenata dobijamo sledeći sistem jednačina

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0 & \beta_0 &= 0 \\ \Omega^2 \alpha_1 + \frac{1}{\mathcal{F}} \int_{-\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} F_0(\varrho) \cos \Omega t \, d(\Omega t) + h &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Uvedemo oznaku

$$\mathcal{F} = \frac{1}{\mathcal{F}C} \int_{-\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} F_0(C \cos \Omega t) \cos \Omega t \, d(\Omega t) \quad (19)$$

pa iz jednačine (18) dobijamo izraz

$$\Omega^2 = - \left( \mathcal{F} + \frac{h}{C} \right) \quad (20)$$

na osnovu koga možemo da nacrtamo amplitudno-frekventne rezonantne krive. Korisno je da nacrtamo krivu  $\Omega^2 = -\mathcal{F}(C)$  koja predstavlja srednju krivu rezonantnih krivih, a dobija se izjednačavanjem  $h$  sa nulom. Uočava se da se rezonantne krive za velike vrednosti amplitude ponašaju asimptotski prema srednjoj krivoj. Ostale rezonantne krive dobijaju se dodavanjem sa obe strane u horizontalnom pravcu srednjoj krivoj  $h/(\pm C)$ . Srednja kriva deli amplitude sa pozitivnim i negativnim znakom. Za  $\mathcal{F} < 0$  t.j. za svako  $C < 0$  i  $h > 0$  moguće su oscilacije sa faznim uglom od  $180^\circ$  u odnosu na prinudnu silu i to za sve frekvencije. Prinudne oscilacije u fazi sa prinudnom



silom moguće su samo kada je  $F + \frac{h}{c} < 0$ .

Kao primer rezonantnih krivih na slici su date rezonantne krive za matematičko klatno koje prinudno osciluje usled dejstva momenta  $M_0 \cos \Omega t$ , za koje je

$$F_0(\varrho) = -\frac{g}{l} \sin \varrho \quad ; \quad Q(t) = \frac{M_0}{m l^2} \cos \Omega t = h \cos \Omega t \quad (21)$$

gde je  $m$  masa,  $l$  dužina klatna,  $\varrho$  ugao u radijanima. Integral (19) je

$$F(c) = \frac{4}{\pi c} \int_0^{\pi/2} F_0(c \cos \Omega t) \cos \Omega t d(\Omega t) = \frac{\pi^2 g}{4l [K(\frac{1}{2}c)]^2} \quad (22)$$

što daje

$$\bar{\Omega}^2 = \frac{\pi}{4} [K(\frac{1}{2}c)]^{-2} - \frac{\bar{M}_0}{c} = \gamma^2 \quad (23)$$

gde je  $\bar{\Omega}^2 = \frac{l}{g} \Omega^2$  i  $\bar{M}_0 = \frac{M_0}{mgl}$ .

Drugi primer je kada je karakteristika restitucione sile sastavljena iz delova parabole

$$F_0(\varrho) = \mp k^2 |\varrho|^n \quad (24)$$

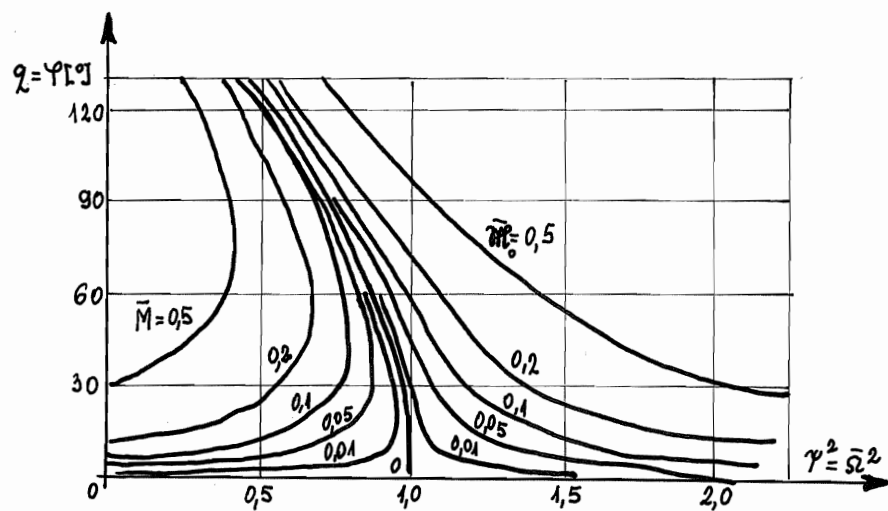
pa je kvadrat frekvencije

$$\Omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} - \frac{h}{c} = \frac{k^2 \pi}{4[\psi(n)]^2 |c|^{1-n}} - \frac{h}{c} \quad (25)$$

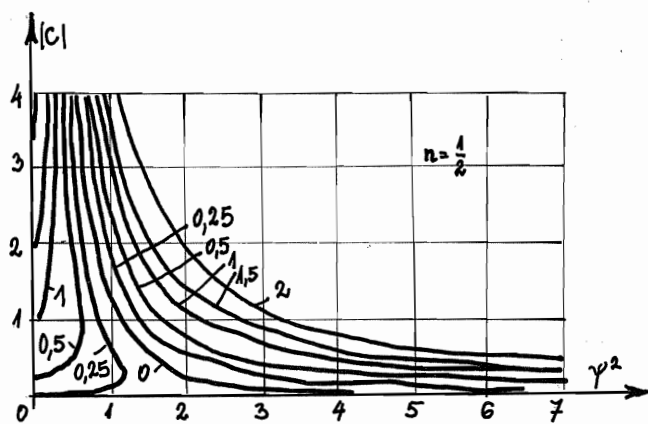
gde je

$$T = \frac{4}{k} c^{\frac{1-n}{2}} \psi(n) \quad ; \quad \psi(n) = \sqrt{\frac{n+2}{2}} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{n+1}}} \quad (26)$$

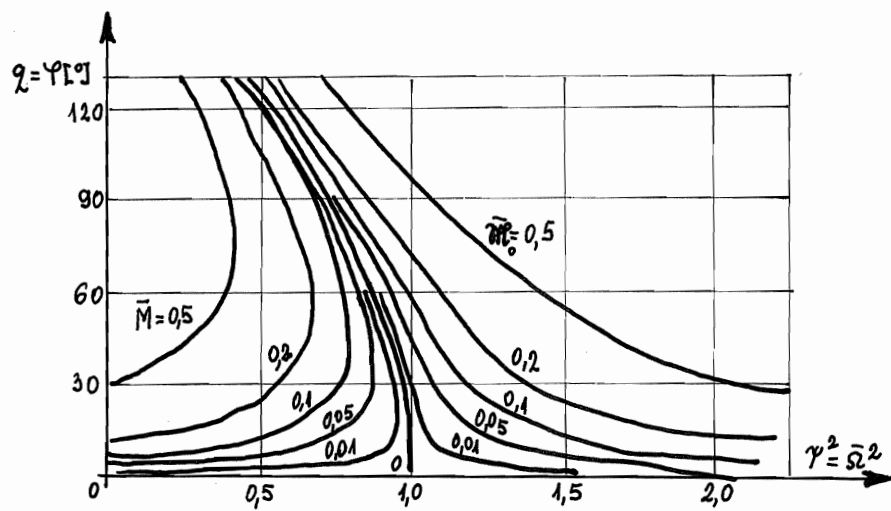
Na slici 59 su prikazane rezonantne krive  $|c|$  u funkciji odnosa frekvencija  $\psi^2 = \Omega^2/k^2$  za  $n = 0, 5$  za različite vrednosti  $C_0 = h/k^2$  kao što je naznačeno.



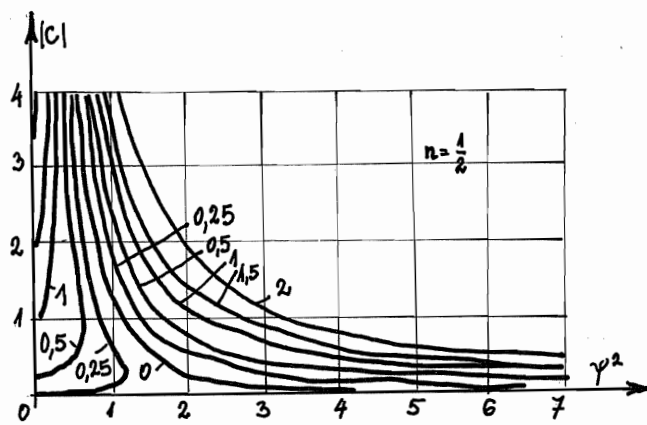
S1.59 a



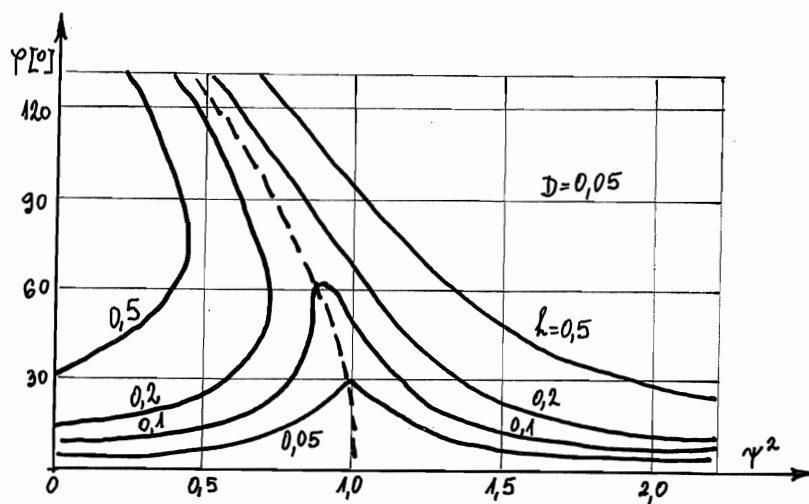
S1.59 b



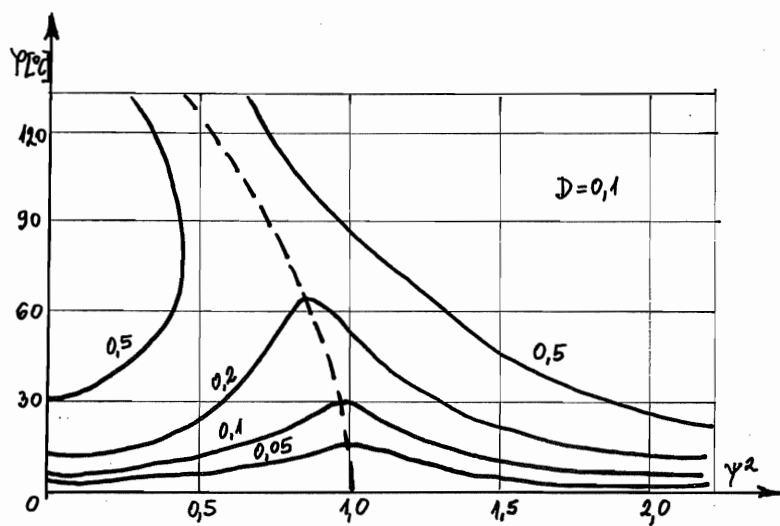
S1.59 a



S1.59 b



S1.59 c



S1.59 d

II. Drugi slučaj ove metode je kada su funkcije  $F(q)$  i  $\phi(\dot{q})$  neparne, a poremećaj je u vidu harmonične sile. Jednačina kretanja za taj slučaj je

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + F_0(q) + \phi(\dot{q}) - h \cos \Omega t = 0 \quad (27)$$

pa rešenje iste možemo da pretpostavimo u obliku

$$q(t) = \alpha_1 \cos \Omega t + \beta_1 \sin \Omega t \quad (28)$$

što će se pokazati i opravdanim. Pretpostavljeno rešenje napišemo u obliku

$$q(t) = C \cos(\Omega t - \theta_0) \quad (29)$$

gde je  $C^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2$ ,  $\text{tg } \theta_0 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$ . Na osnovu opšte metode nalazimo

$$f_{a\mu} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{F_0(C \cos \theta) + \phi(-C \Omega \sin \theta) - h \cos \Omega t\} \cos \mu \Omega t d(\Omega t) \quad (30)$$

$\theta = \Omega t - \theta_0$

$$f_{b\mu} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{F_0(C \cos \theta) + \phi(-C \Omega \sin \theta) - h \cos \Omega t\} \sin \mu \Omega t d(\Omega t)$$

pa sistem (14) postaje

$$\begin{aligned} a_1 &= -f_{a1} - \Omega^2 \alpha_1 = 0 \\ b_1 &= -f_{b1} - \Omega^2 \beta_1 = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Označavajući sa

$$\mathcal{F} = \frac{4}{\pi C} \int_0^{\pi/2} F_0(C \cos \Omega t) \cos \Omega t d(\Omega t)$$

i

$$\mathcal{D} = \frac{4}{\pi C} \int_0^{\pi/2} F_0(C \cos \Omega t) \sin \Omega t d(\Omega t)$$

sistem (31) možemo da prepíšemo u obliku

$$\begin{aligned} \alpha_1 \Omega^2 + \alpha_1 \mathcal{F}(C) + \beta_1 \mathcal{D}(C) + h &= 0 \\ \beta_1 \Omega^2 + \beta_1 \mathcal{F}(C) - \alpha_1 \mathcal{D}(C) &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Prvu jednačinu ovog sistema pomnožimo sa  $\frac{\alpha_1}{C^2}$ , a drugu sa  $\frac{\beta_1}{C^2}$  i saberemo ih dobijamo

$$\Omega^2 + \mathcal{F}(C) = -\frac{\alpha_1}{C^2} h \quad (33)$$

a zatim pomnožimo prvu jednačinu sa  $\frac{\beta_1}{C^2}$ , a drugu sa  $\frac{\alpha_1}{C^2}$  pa ih oduzmemo dobijamo

$$\mathcal{D}(C) = -\frac{\beta_1}{C^2} h \quad (34)$$

Kvadriranjem i sabiranjem poslednjih dveju jednačina dobijamo

$$\Omega^2 = -\left[ \mathcal{F} \pm \sqrt{\left(\frac{h}{C}\right)^2 - \mathcal{D}^2} \right] \quad (35)$$

dok deljenjem istih se dobija

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{\mathcal{D}(C)}{\Omega^2 + \mathcal{F}(C)} \quad (36)$$

Jednačina (35) predstavlja amplitudno-frekventnu zavisnost. Srednja kriva rezonantnih krivih je  $\Omega^2 = \mathcal{F}(C)$ . Za  $h^2 = (\mathcal{D}C)^2$  rezonantna kriva preseca srednju krivu i tada je ugao faznog pomeranja  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ . Oblik faznih krivih zavisi od oblika funkcije prigušivanja, koja može biti definisana kao

$$\phi(\dot{q}) = -\delta \frac{\dot{q}^{n+1}}{|\dot{q}|} \quad (37)$$

pa je za taj slučaj

$$\mathcal{D}(C) = -\delta C^{n-1} \Omega^n \Psi(n) \quad (38)$$

gde je

$$\Psi(n) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} s_2 t d(s_2 t) = \frac{(n+1)!}{2^n \left[ \left(\frac{n+1}{2}\right)! \right]^2} \quad (39)$$

Za nelinearni prigušeni oscilatorni sistem, gde je karakteristika restitucione sile data sa  $F_0(q) = \kappa^2(q + \alpha q^3)$ , na slici 60 date su rezonantne krive, a na slici 61

Prvu jednačinu ovog sistema pomnožimo sa  $\frac{\alpha_1}{C^2}$ , a drugu sa  $\frac{\beta_1}{C^2}$  i saberemo ih dobijamo

$$\Omega^2 + \mathcal{F}(C) = -\frac{\alpha_1}{C^2} h \quad (33)$$

a zatim pomnožimo prvu jednačinu sa  $\frac{\beta_1}{C^2}$ , a drugu sa  $\frac{\alpha_1}{C^2}$  pa ih oduzmemo dobijamo

$$\mathcal{D}(C) = -\frac{\beta_1}{C^2} h \quad (34)$$

Kvadriranjem i sabiranjem poslednjih dveju jednačina dobijamo

$$\Omega^2 = -\left[ \mathcal{F} \pm \sqrt{\left(\frac{h}{C}\right)^2 - \mathcal{D}^2} \right] \quad (35)$$

dok deljenjem istih se dobija

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{\mathcal{D}(C)}{\Omega^2 + \mathcal{F}(C)} \quad (36)$$

Jednačina (35) predstavlja amplitudno-frekventnu zavisnost. Srednja kriva rezonantnih krivih je  $\Omega^2 = \mathcal{F}(C)$ . Za  $h^2 = (\mathcal{D}C)^2$  rezonantna kriva preseca srednju krivu i tada je ugao faznog pomeranja  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ . Oblik faznih krivih zavisi od oblika funkcije prigušivanja, koja može biti definisana kao

$$\phi(\dot{q}) = -\delta \frac{\dot{q}^{n+1}}{|\dot{q}|} \quad (37)$$

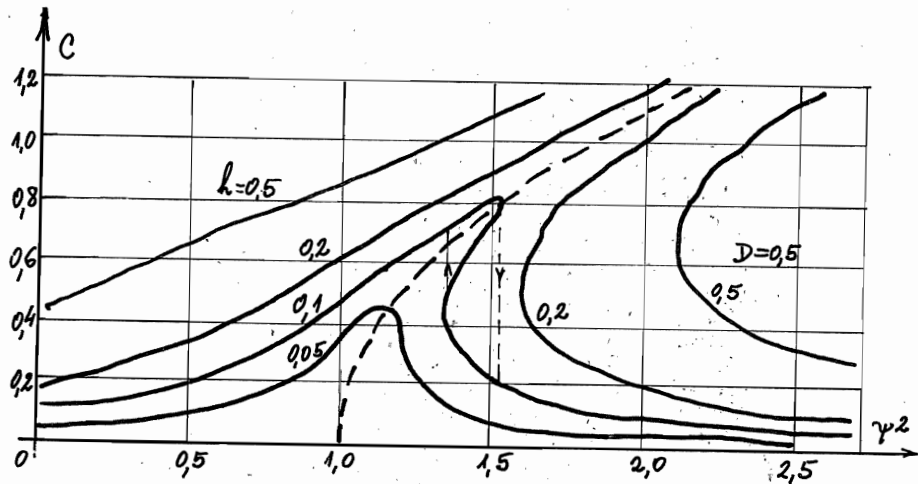
pa je za taj slučaj

$$\mathcal{D}(C) = -\delta C^{n-1} \Omega^n \Psi(n) \quad (38)$$

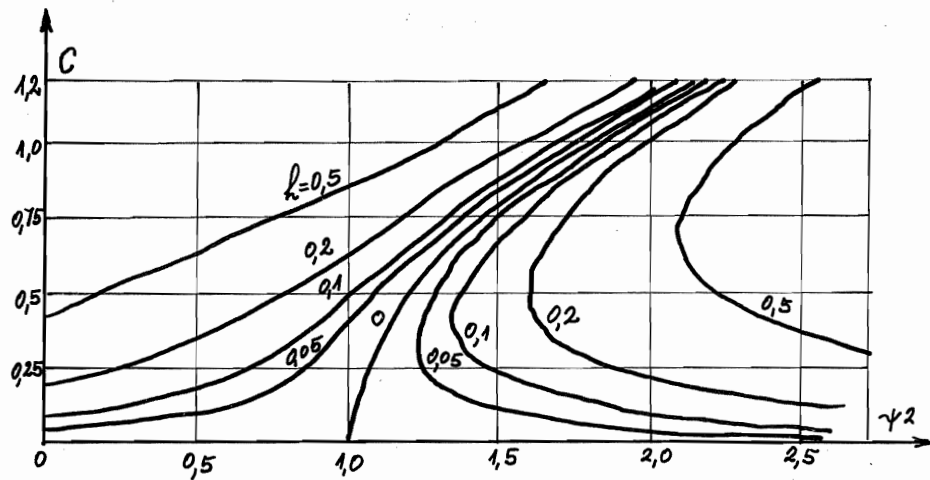
gde je

$$\Psi(n) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} s_2 t d(s_2 t) = \frac{(n+1)!}{2^n \left[ \left(\frac{n+1}{2}\right)! \right]^2} \quad (39)$$

Za nelinearni prigušeni oscilatorni sistem, gde je karakteristika restitucione sile data sa  $F_0(q) = \kappa^2(q + \alpha q^3)$ , na slici 60 date su rezonantne krive, a na slici 61

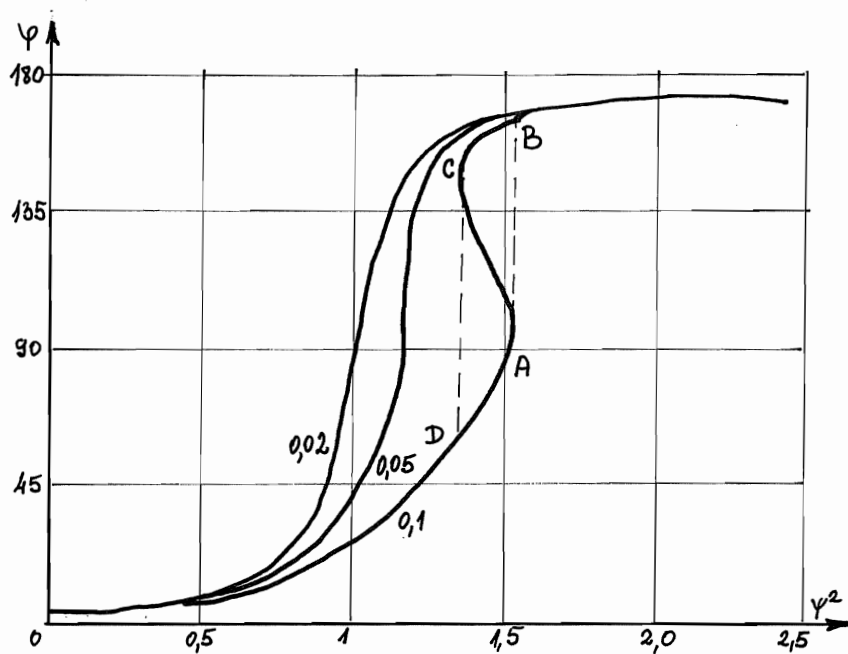


S1.60 b

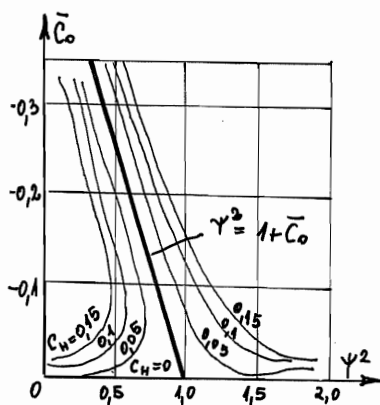


S1.60 ia

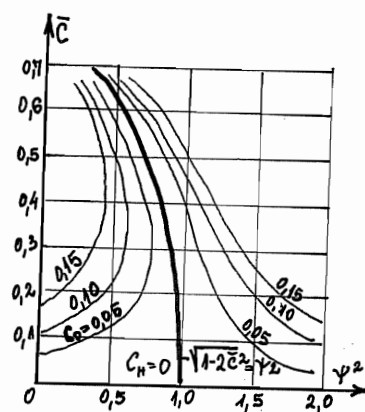




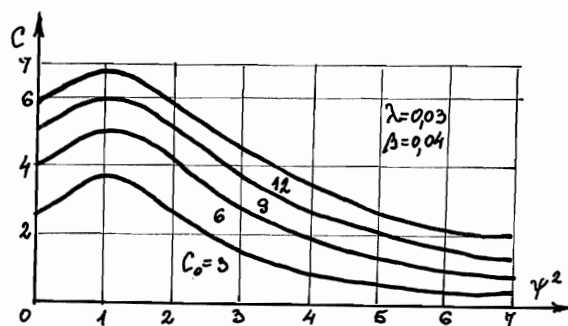
S1.61



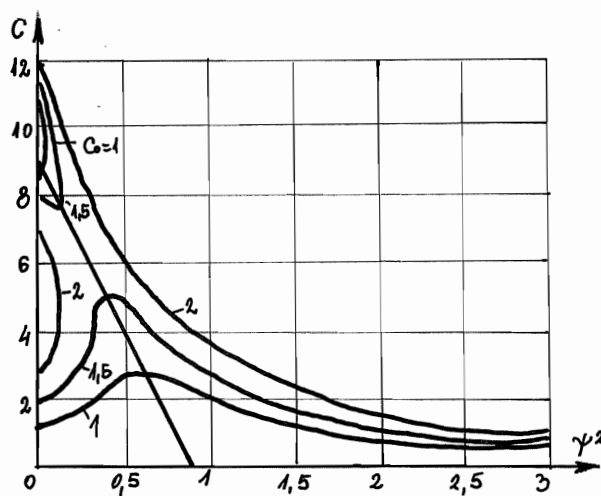
S1.62 a



S1.62 b



Sl.63 a



Sl.63 b

krive faznog ugla u funkciji promene frekvencije poremećajne sile. Prigušivanje je pri tome proporcionalno brzini. Na slici 63 b prikazane su rezonantne krive za Duffing-ov problem sa turbulentnim prigušivanjem (proporcionalnim kvadratu brzine) za  $d = 3\lambda/4$  i  $\lambda = 0,03$ .

Za matematičko klatno, koje prinudno osciluje usled dejstva harmonijski promenljivog momenta, sa viskoznom prigušivanjem na slici 60 a i b prikazane su rezonantne krive za koeficijente prigušivanja  $D = 0,05$  i  $D = 0,1$ .

Kada restituciona sila ima karakteristiku sastavljenu iz dva dela parabole kao

$$F_e(q) = +k^2(q \mp \varepsilon q^2) \quad (d = k^2d \geq 0)$$

a sistem je izložen viskoznom prigušivanju rezonantne krive izgledaju kao na slici 60 a nacrtane su za  $\lambda = 0,2$  i  $\varepsilon = 3\pi/80$ .

III. Ova metoda se može primeniti i kada je karakteristika restitucione sile nesimetrična u odnosu na početni položaj, bez prigušivanja, a perturbaciona sila je oblika  $Q = h \cos \omega t$ . Jednačina oscilovanja je tada

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + F_0(q) - h \cos \omega t = 0 \quad (40)$$

Izrazi (10) su sada

$$\begin{aligned} f_{a\mu} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [F_0(q) + h \cos \omega t] \cos \mu \omega t d(\omega t) \\ f_{b\mu} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [-F_0(q) + h \cos \omega t] \sin \mu \omega t d(\omega t) \end{aligned} \quad (41)$$

i jednačine sistema (13) za ovaj slučaj su

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_0(q) d(\omega t) = 0 \\ a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_0(q) \cos \omega t d(\omega t) - h - \omega^2 \alpha_1 = 0 \\ b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_0(q) \sin \omega t d(\omega t) - \omega^2 \beta_1 = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

Rešenje pretpostavljamo u obliku

$$q(t) = C_0 + C \cos \Omega t \quad (43)$$

pri čemu je  $\alpha_0 = 2C_0$ ,  $\alpha_1 = C$  i  $\beta_1 = 0$ . Poslednja jednačina sistema (42) je zadovoljena, dok se koeficijenti  $C_0$  i  $C$  određuju iz drugih dveju jednačina istog sistema, koje postaju

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_0(C_0 + C \cos \Omega t) d(\Omega t) = 0 \quad (44)$$

$$\Omega^2 = \frac{1}{\pi C} \int_{-\pi}^{\pi} F_0(C_0 + C \cos \Omega t) \cos \Omega t d(\Omega t) - \frac{h}{C}$$

Kada se restituciona sila uzme u obliku  $F_0(q) = k^2(q + \mu q^2)$  onda sistem jednačina (44) daje

$$2C_0(1 + \mu C_0) + \mu C^2 = 0 \quad (45)$$

$$\frac{\Omega^2}{k^2} = 1 + 2\mu C_0 - \frac{h}{k^2 C}$$

Radi skraćenog pisanja uvedemo zamene

$$\bar{C} = \mu C; \quad \bar{C}_0 = \mu C_0; \quad \bar{C}_H = \mu \frac{h}{k^2}; \quad \gamma^2 = \frac{\Omega^2}{k^2}$$

pomoću kojih se sistem (45) uprošćava na

$$2\bar{C}_0(1 + \bar{C}_0) + \bar{C}^2 = 0 \quad (46)$$

$$\gamma^2 = 2\bar{C}_0 + 1 - \frac{\bar{C}_H}{\bar{C}}$$

Eliminacijom amplitude  $\bar{C}$  iz ovog sistema jednačina dobijamo

$$\gamma^2 = 1 + \bar{C}_0 - \frac{\bar{C}_H}{\sqrt{2\bar{C}_0(\bar{C}_0 - 1)}}$$

dok se eliminacijom  $\bar{C}_0$  dobija izraz

$$\gamma^2 = \sqrt{1 - 2\bar{C}^2} - \frac{\bar{C}_H}{\bar{C}}$$

Pomoću ovih izraza se mogu sastaviti amplitudno-frekventne rezonantne krive za amplitude  $\bar{C}_0$  i  $\bar{C}$ . Na slikama 62 a i b prikazane su rezonantne krive definisane poslednjim izrazima. Za prvi slučaj srednja kriva je  $\gamma^2 = 1 + \bar{C}_0$ , dok je za drugi slučaj srednja kriva  $\gamma^2 = \sqrt{1 - 2\bar{C}^2}$ .

10. DEJSTVO KVAZIPERIODIČKIH SILA SA PROMENLJIVOM AMPLITUDOM I FREKVENCIJOM NA NELINEARNI OSCILATORNI SISTEM. PROLAZAK KROZ REZONANTNO STANJE

Pri proučavanju nestacionarnih (prelaznih) režima u oscilatornim sistemima mogu se uočiti pojave čija je analiza od teorijskog i praktičnog interesa. Pre nego što se u oscilatornom sistemu uspostavi određeni stacionarni režim često se može uočiti pojava znatnog povećanja amplitude oscilovanja. To se može javiti i kao posledica pojave bijenja, prolaska frekvencije spoljašnje sile kroz rezonantne vrednosti - vrednosti sopstvene frekvencije sistema i njoj bliske vrednosti ili pri promeni nekih drugih parametara sistema.

Naročito intenzivno se uveličava amplituda prilikom prolaska kroz rezonantno stanje i zato je izučavanje ovih pojava veoma važno i predstavlja interes kao i izučavanje pojava pri običnom stacionarnom rezonantnom stanju.

Pre nego što predjemo na objašnjavanje pojave prolaska kroz rezonantno stanje proanaliziraćemo opšte usvojen pojam rezonancije kao pojave koja se može uočiti u oscilatornim sistemima. Spoljašnje periodičke sile, koje dejstvuju na oscilatorni sistem u takt sa sopstvenim oscilacijama, izazivaju velika odstupanja amplituda sopstvenih oscilacija. Za oscilatorne sisteme koji se opisuju linearnim diferen-

cijalnim jednačinama, rezonantnim stanjem se naziva pojava, koja se ogleda u tome što amplitude oscilovanja sistema počinju brzo da rastu i dostižu neki maksimum, kada je frekvencija spoljašnje sile jednaka frekvenciji slobodnih oscilacija ili pak nekom njenom delu. Pri tome u linearnim oscilatornim sistemima u periodu uspostavljanja rezonantnog stanja (porasta amplitude oscilovanja) parametri sistema - sopstvene i spoljašnje frekvencije sistema, amplituda poremećajne sile ostaju neporemećeni.

U oscilatornim sistemima, koji se opisuju složenijim diferencijalnim jednačinama, naprimer diferencijalne jednačine sa periodičko-promenljivim koeficijentima (parametarska rezonantna stanja) ili nelinearnim diferencijalnim jednačinama suština pojave rezonantnog stanja je složenija. Naprimer, u nelinearnim sistemima sopstvena frekvencija sistema može da zavisi od amplitude oscilovanja i u toku uspostavljanja rezonantnog stanja ona se može menjati, dok se ne uspostavi takav režim pri kome će amplituda biti konstantna.

U opštem slučaju u složenim oscilatornim sistemima rezonancijom nazivamo pojavu koja se uočava u neautonomnim oscilatornim sistemima izloženim dejstvu spoljašnjih periodičkih sila, koje eksplicitno zavise od vremena, pri kojoj amplituda oscilovanja intenzivno raste u toku uspostavljanja oscilovanja, posle čega će ona imati neku konstantnu vrednost odgovarajuću frekvenciji spoljašnje sile. Opšta karakterna crta pojave rezonantnog stanja kako u linearnim tako i u nelinearnim oscilatornim sistemima je ta što obično mala poremećajna sila dovodi do veoma značajnog uvećanja amplitude oscilovanja.

Navedene rezonantne pojave karakterišu se time, što se u oscilatornom sistemu uspostavlja vremenom stacionarni oscilatorni režim, pri kome su svi parametri oscilatornog sistema konstantni, dok su u procesu uspostavljanja u nelinearnim sistemima neki parametri bili promenljivi sa

vremenom.

Kada na oscilatorni sistem dejstvuje spoljašnja sila - poremećaj - kvaziperiodička funkcija promenljive frekvencije može se uočiti intenzivni porast amplitude oscilovanja kada frekvencija spoljašnje sile prolazi kroz vrednosti koje su bliske ili jednake sopstvenoj frekvenciji oscilovanja sistema. Ta pojava intenzivnog porasta amplitude oscilovanja naziva se prolaskom sistema kroz rezonanciju ili rezonantno stanje. Pojava prolaska kroz rezonantno stanje se uočava u toku nekog konačnog vremenskog intervala, dok se obično rezonantno stanje uočava u trenutku vremena. Veličina maksimalnih amplituda koje se razvijaju u toku pojave prolaska kroz rezonantno stanje zavise od brzine promene parametara sistema - frekvencije spoljašnje sile. Svaka pojava prolaska kroz rezonantno stanje ima svoje posebne karakteristike koje zavise od osobina konkretnog proučavanog sistema.

Pri proučavanju pojava rezonantnog stanja i prolaska kroz rezonantno stanje može se izvesti zaključak da je veoma teško razgraničiti rezonantne pojave koje se uočavaju pri prolasku i uspostavljanju stacionarnog rezonantnog stanja. To je naročito teško u složenim nelinearnim sistemima.

11. ASIMPTOTSKA METODA KRILOVA-BOGOLJUBOVA-MITROPOLJSKOG ZA IZUČAVANJE NESTACIONARNOG REZONANTNOG STANJA

U poglavlju slobodnih oscilacija prikazali smo asimptotsku metodu prilagođenu za slučaj slobodnih oscilacija sistema sa jednim stepenom slobode oscilovanja, a i za slučaj sa sporo promenljivim parametrima sistema. Ovde ćemo proučiti rezonantni slučaj kada je

$$\omega(\varrho) \approx \frac{p}{q} \nu(\varrho) \quad (1)$$

gde su  $p$  i  $q$  uzajamno prosti brojevi,  $\omega(\varrho)$  sopstvena frekvencija sistema,  $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\varrho)$  trenutna frekvencija prinudne sile za sistem sa jednim stepenom slobode oscilovanja i sa sporo promenljivim parametrima pri čemu ćemo pretpostaviti i da se frekvencija spoljašnje sile sporo menja sa vremenom (mala promena u toku perioda vremena jednakog prirodnoj jedinici vremena).

Proučićemo sledeću nelinearnu diferencijalnu jednačinu sa sporo promenljivim koeficijentima

$$\frac{d}{dt} \left[ m(\varrho) \frac{dx}{dt} \right] + c(\varrho)x = \varepsilon F(\varrho, \theta, x, \frac{dx}{dt}) \quad (2)$$

u kojoj je  $\varepsilon$  mali parametar,  $\varrho = \varepsilon t$  "sporo promenljivo" vreme,  $F(\varrho, \theta, x, \frac{dx}{dt})$  funkcija periodička po  $\theta$  s periodom  $2\pi$  koja se može predstaviti u obliku reda

$$F(\varrho, \theta, x, \frac{dx}{dt}) = \sum_{n=-N}^{n=N} e^{in\theta} F_n(\varrho, x, \frac{dx}{dt}) \quad (3)$$



čiji su koeficijenti  $F_n(\varepsilon, \alpha, \frac{d\alpha}{dt})$  cele racionalne funkcije  $\alpha$  i  $\frac{d\alpha}{dt}$ , i dovoljno puta diferencijabilne po  $\varepsilon$ .

Pretpostavićemo, osim toga, da je  $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\varepsilon)$  trenutna frekvencija dovoljno puta diferencijabilna po  $\varepsilon$ . Radi mogućnosti primene asimptotske metode za sastavljanje približnih rešenja pretpostavljamo da su  $m(\varepsilon)$  i  $\mathcal{L}(\varepsilon)$  takodje dovoljno puta diferencijabilne i strogo pozitivne za proizvoljne vrednosti  $\varepsilon$ . Pod tim pretpostavkama sastavimo približna rešenja za jednačinu (2) u najopštijem obliku, pogodna za izučavanje kako rezonantne oblasti tako i za prilaze ka njoj iz nerezonantne oblasti za slučaj proizvoljnog demultiplokacionog rezonantnog stanja. Do pravilnog izbora strukture asimptotskog rešenja jednačine (2) dolazimo na osnovu fizičkih tumačenja.

Pri odsustvu poremećaja  $\varepsilon=0$  i pri konstantnom  $\varepsilon$  rešenje jednačine (2) je oblika kosinusne funkcije s konstantnom amplitudom i fazom odredjenim početnim uslovima. Pri pojavi poremećaja u rešenju se mogu pojaviti obertoni, harmonici sa kombinovanim frekvencijama, mogu se javiti različite rezonancije i druge pojave. Pojava sporo promenljivog vremena  $\varepsilon$  (spora promena mase sistema, koeficijenta elastičnosti, frekvencije spoljašnje periodičke sile i drugih parametara) takodje izazivaju u sistemu niz dopunskih pojava koje se ne mogu uočiti u oscilatornom sistemu sa konstantnim koeficijentima. Sopstvena frekvencija  $\omega(\varepsilon) = \sqrt{\frac{\mathcal{L}(\varepsilon)}{m(\varepsilon)}}$  će se takodje sporo menjati sa vremenom i zavisno od trenutne frekvencije spoljašnje sile  $\nu(\varepsilon)$  će uticati na veličinu amplitude oscilovanja. Uzimajući sve to u obzir prirodno je rešenje pretpostaviti u obliku

$$\alpha = a \cos\left(\frac{p}{2}\theta + \varphi\right) + \varepsilon \mathcal{U}_1(\varepsilon, \alpha, \theta, \frac{p}{2}\theta + \varphi) + \varepsilon^2 \mathcal{U}_2(\varepsilon, \alpha, \theta, \frac{p}{2}\theta + \varphi) + \dots \quad (4)$$

u kome su  $\mathcal{U}_1(\varepsilon, \alpha, \theta, \frac{p}{2}\theta + \varphi)$  i  $\mathcal{U}_2(\varepsilon, \alpha, \theta, \frac{p}{2}\theta + \varphi)$  periodičke funkcije uglova  $\theta$  i  $\frac{p}{2}\theta + \varphi$  perioda  $2\pi$ , dok se  $\alpha$  i  $\varphi$  kao funkcije vremena odredjuju iz sistema jednačina

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(\varepsilon, a, \varphi) + \varepsilon^2 A_2(\varepsilon, a, \varphi) + \dots \quad (5)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(\varepsilon) - \frac{p}{2} \nu(\varepsilon) + \varepsilon B_1(\varepsilon, a, \varphi) + \varepsilon^2 B_2(\varepsilon, a, \varphi) + \dots$$

gde se razlika  $\omega(\varepsilon) - \frac{p}{2} \nu(\varepsilon)$  može menjati u toku procesa oscilovanja i karakteriše razliku između faze sopstvenog oscilovanja i faze spoljašnjeg poremećaja.

Za sastavljanje približnog rešenja neophodno je naći funkcije

$$\mu_1(\varepsilon, a, \theta, \frac{p}{2}\theta + \varphi); \quad \mu_2(\varepsilon, a, \theta, \frac{p}{2}\theta + \varphi); \quad \dots \quad (6)$$

$$A_1(\varepsilon, a, \varphi); \quad B_1(\varepsilon, a, \varphi); \quad A_2(\varepsilon, a, \varphi); \quad B_2(\varepsilon, a, \varphi); \quad \dots$$

čije se određivanje govoreći uopšteno javlja kao višeznačno.

Za postizanje jednoznačnosti određivanja funkcija (6) uvodimo dopunski uslov: odsustvo u periodičkim funkcijama  $\mu_1(\varepsilon, a, \theta, \frac{p}{2}\theta + \varphi)$  i  $\mu_2(\varepsilon, a, \theta, \frac{p}{2}\theta + \varphi)$  prvog harmonika  $\varphi = \frac{p}{2}\theta + \varphi$ . Taj uslov se može napisati u obliku

$$\int_0^{2\pi} \mu_1(\varepsilon, a, \theta, \varphi) e^{i\varphi} d\varphi = 0 \quad (7)$$

$$\int_0^{2\pi} \mu_2(\varepsilon, a, \theta, \varphi) e^{i\varphi} d\varphi = 0; \quad \dots$$

Sa fizičke tačke gledišta uvodjenje uslova (7) ekvivalentno je izboru veličine  $a$  kao pune amplitude prvog harmonika oscilovanja, što je jednako odsustvu za proizvoljno  $\varepsilon$  u funkcijama  $\mu_1(\varepsilon, a, \theta, \varphi)$  i  $\mu_2(\varepsilon, a, \theta, \varphi)$  rezonantnih članova čiji imenioci mogu postati jednaki nuli.

Diferencirajmo desne strane jednačina (5) dobićemo sledeće izraze

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = \varepsilon \left[ \omega(\varepsilon) - \frac{p}{2} \nu(\varepsilon) \right] \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} + \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} B_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \varepsilon} + \left[ \omega(\varepsilon) - \frac{p}{2} \nu(\varepsilon) \right] \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} \right] + \varepsilon^3 \dots \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\gamma}{dt^2} = & \varepsilon \left\{ \frac{d\omega}{dt} - \frac{p}{2} \frac{d\nu}{dt} + \left[ \omega(\varepsilon) - \frac{p}{2} \nu(\varepsilon) \right] \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial \varphi} \right\} + \\ & + \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial a} \mathcal{A}_1 + \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial \varphi} \mathcal{B}_1 + \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial \varepsilon} + \left[ \omega(\varepsilon) - \frac{p}{2} \nu(\varepsilon) \right] \frac{\partial \mathcal{B}_2}{\partial \varphi} \right\} + \varepsilon^3 \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Diferenciranjem izraza (4) sa uzimanjem u obzir izraza (5), (8) i (9) dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = & -a\omega(\varepsilon)\sin\gamma + \varepsilon \left\{ \mathcal{A}_1 \cos\gamma - \mathcal{B}_1 a \sin\gamma + \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial \theta} \nu(\varepsilon) + \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial \varphi} \omega(\varepsilon) \right\} + \\ & + \varepsilon^2 \left\{ \mathcal{A}_2 \cos\gamma - \mathcal{B}_2 a \sin\gamma + \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial a} \mathcal{A}_1 + \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial \varphi} \mathcal{B}_1 + \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial \theta} \nu(\varepsilon) + \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial \varphi} \omega(\varepsilon) \right\} + \\ & + \varepsilon^3 \dots \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{i} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = & -a\omega^2(\varepsilon)\cos\gamma + \varepsilon \left\{ \left[ \omega(\varepsilon) - \frac{p}{2} \nu(\varepsilon) \right] \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial \varphi} - 2a\omega(\varepsilon)\mathcal{B}_1 \right\} \cos\gamma - \\ & - \left\{ \left[ \omega(\varepsilon) - \frac{p}{2} \nu(\varepsilon) \right] a \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial \varphi} + 2\omega(\varepsilon)\mathcal{A}_1 \right\} \sin\gamma - \frac{d\omega(\varepsilon)}{dt} a \sin\gamma + \frac{\partial^2 \mathcal{M}_1}{\partial \theta^2} \nu^2(\varepsilon) + \\ & + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{M}_1}{\partial \theta \partial \varphi} \nu(\varepsilon)\omega(\varepsilon) + \frac{\partial^2 \mathcal{M}_1}{\partial \varphi^2} \omega^2(\varepsilon) \left. \right\} + \varepsilon^2 \left\{ \left[ \omega(\varepsilon) - \frac{p}{2} \nu(\varepsilon) \right] \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial \varphi} - 2a\omega(\varepsilon)\mathcal{B}_2 \right\} \cos\gamma - \\ & - \left\{ \left[ \omega(\varepsilon) - \frac{p}{2} \nu(\varepsilon) \right] a \frac{\partial \mathcal{B}_2}{\partial \varphi} + 2\omega(\varepsilon)\mathcal{A}_2 \right\} \sin\gamma + \left[ \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial a} \mathcal{A}_1 + \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial \varphi} \mathcal{B}_1 + \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial \varepsilon} - a\mathcal{B}_1^2 \right] \cos\gamma - \\ & - \left[ 2\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1 + a \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial a} \mathcal{A}_1 + a \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial \varphi} \mathcal{B}_1 + a \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial \varepsilon} \right] \sin\gamma + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{M}_1}{\partial \varepsilon \partial \varphi} \omega(\varepsilon) + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{M}_1}{\partial \varepsilon \partial \theta} \nu(\varepsilon) + \\ & + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{M}_1}{\partial a \partial \theta} \nu(\varepsilon)\mathcal{A}_1 + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{M}_1}{\partial a \partial \varphi} \omega(\varepsilon)\mathcal{A}_1(\varepsilon) + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{M}_1}{\partial \theta \partial \varphi} \nu(\varepsilon)\mathcal{B}_1 + \\ & + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{M}_1}{\partial \varphi^2} \omega(\varepsilon)\mathcal{B}_1 + \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial \varphi} \left[ \omega(\varepsilon) - \frac{p}{2} \nu(\varepsilon) \right] \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial a} \left[ \omega(\varepsilon) - \frac{p}{2} \nu(\varepsilon) \right] \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial \varphi} + \\ & + \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial \theta} \frac{d\nu(\varepsilon)}{dt} + \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial \varphi} \frac{d\omega(\varepsilon)}{dt} + \frac{\partial^2 \mathcal{M}_2}{\partial \theta^2} \nu^2(\varepsilon) + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{M}_2}{\partial \theta \partial \varphi} \nu(\varepsilon)\omega(\varepsilon) + \frac{\partial^2 \mathcal{M}_2}{\partial \varphi^2} \omega^2(\varepsilon) \left. \right\} + \varepsilon^3 \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Unoseći izraze (4), (10) i (11) u levu i desnu stranu jednačine (2) i izjednačavajući koeficijente uz jednake stepene dobi-  
jamo sistem jednačina

$$\begin{aligned}
 m(\varepsilon) \left\{ \omega^2(\varepsilon) + \left[ \nu(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \theta} + \omega(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \psi} \right]^{(2)} \right\} \mu_1 = F_0(\varepsilon, \alpha, \theta, \psi) - \\
 - m(\varepsilon) \left\langle \left[ \omega(\varepsilon) - \frac{p}{2} \nu(\varepsilon) \right] \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial \varphi} - 2\alpha \omega(\varepsilon) \mathcal{B}_1 \right\rangle \cos \psi + \\
 + m(\varepsilon) \left\langle \left[ \omega(\varepsilon) - \frac{p}{2} \nu(\varepsilon) \right] \alpha \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial \varphi} + 2\omega(\varepsilon) \mathcal{A}_1 + \frac{1}{m(\varepsilon)} \frac{d[m(\varepsilon)\omega(\varepsilon)]}{d\varepsilon} \alpha \right\rangle \sin \psi \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m(\varepsilon) \left\{ \omega^2(\varepsilon) + \left[ \nu(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \theta} + \omega(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \psi} \right]^{(2)} \right\} \mu_2 = F_1(\varepsilon, \alpha, \theta, \psi) - \\
 - m(\varepsilon) \left\langle \left[ \omega(\varepsilon) - \frac{p}{2} \nu(\varepsilon) \right] \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial \varphi} - 2\alpha \omega(\varepsilon) \mathcal{B}_2 + \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial \alpha} \mathcal{A}_1 + \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial \psi} \mathcal{B}_1 + \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial \varepsilon} - \alpha \mathcal{B}_1^2 + \right. \\
 \left. + \frac{dm(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{\mathcal{A}_1}{m(\varepsilon)} \right\rangle \cos \psi + m(\varepsilon) \left\langle \left[ \omega(\varepsilon) - \frac{p}{2} \nu(\varepsilon) \right] \alpha \frac{\partial \mathcal{B}_2}{\partial \varphi} + 2\omega(\varepsilon) \mathcal{A}_2 + 2\mathcal{A}_1 \mathcal{B}_1 + \right. \\
 \left. + \alpha \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial \alpha} \mathcal{A}_1 + \alpha \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial \psi} \mathcal{B}_1 + \alpha \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial \varepsilon} + \frac{dm(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{\alpha}{m(\varepsilon)} \mathcal{B}_1 \right\rangle \sin \psi \quad (13)
 \end{aligned}$$

gde su uvedene oznake

$$F_0(\varepsilon, \alpha, \theta, \psi) = F(\varepsilon, \theta, \alpha \cos \psi, -\alpha \omega \sin \psi) \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
 F_1(\varepsilon, \alpha, \theta, \psi) = F_{\varepsilon'} \mu_1 + F_{\varepsilon'} [\mathcal{A}_1 \cos \psi - \mathcal{B}_1 \alpha \sin \psi + \frac{\partial \mu_1}{\partial \theta} \nu(\varepsilon) + \frac{\partial \mu_1}{\partial \psi} \omega(\varepsilon)] - \\
 - m(\varepsilon) \left[ 2 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial \varepsilon^2 \partial \psi} \omega(\varepsilon) + 2 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial \varepsilon^2 \partial \theta} \nu(\varepsilon) + 2 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial \alpha \partial \theta} \nu(\varepsilon) \mathcal{A}_1 + 2 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial \alpha \partial \psi} \omega(\varepsilon) \mathcal{A}_1 + \right. \\
 \left. + 2 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial \theta \partial \psi} \nu(\varepsilon) \mathcal{B}_1 + 2 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial \psi^2} \omega(\varepsilon) \mathcal{B}_1 + \frac{\partial \mu_1}{\partial \psi} \left\langle \omega(\varepsilon) - \frac{p}{2} \nu(\varepsilon) \right\rangle \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial \varphi} + \right. \\
 \left. + \frac{\partial \mu_1}{\partial \alpha} \left\langle \omega(\varepsilon) - \frac{p}{2} \nu(\varepsilon) \right\rangle \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mu_1}{\partial \theta} \frac{d\nu(\varepsilon)}{d\varepsilon} + \frac{\partial \mu_1}{\partial \psi} \frac{d\omega(\varepsilon)}{d\varepsilon} + \right. \\
 \left. + \frac{1}{m(\varepsilon)} \frac{\partial \mu_1}{\partial \theta} \nu(\varepsilon) \frac{dm(\varepsilon)}{d\varepsilon} + \frac{\partial \mu_1}{\partial \psi} \frac{\omega(\varepsilon)}{m(\varepsilon)} \frac{dm(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right] \quad (15)
 \end{aligned}$$

Nije teško videti da su izrazi (14) i (15) periodičke funkcije  $\theta$  i  $\gamma = \frac{p}{2}\theta + \psi$  sa periodom  $2\pi$ , a i da zavise od  $\varepsilon$  i  $a$ . Za određivanje nepoznatih funkcija  $A_1(\varepsilon, a, \psi)$ ,  $B_1(\varepsilon, a, \psi)$  i  $u_1(\varepsilon, a, \theta, \psi)$  iz jednačine (12) predstavimo funkciju (14) u obliku dvojnog trigonometrijskog reda

$$F_0(\varepsilon, a, \theta, \psi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_{0(nm)}(\varepsilon, a) e^{i\{n\theta + m\psi\}} \quad (16)$$

gde su poznati koeficijenti razvoja

$$F_{0(nm)}(\varepsilon, a) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0(\varepsilon, a, \theta, \psi) e^{-i\{n\theta + m\psi\}} d\theta d\psi \quad (17)$$

Izraz za traženu funkciju  $u_1(\varepsilon, a, \theta, \psi)$  periodičku po  $\theta$  i  $\psi = \frac{p}{2}\theta + \psi$  sa periodom  $2\pi$  po obema uglovni promenljivim tražićemo u obliku konačnog Fourier-ovog reda

$$u_1(\varepsilon, a, \theta, \psi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_{(nm)}(\varepsilon, a) e^{i\{n\theta + m\psi\}} \quad (18)$$

u kome su koeficijenti  $g_{(nm)}(\varepsilon, a)$  nepoznati i potrebno ih je odrediti. U rezultatu iz jednačine (12) dobijamo

$$\begin{aligned} m(\varepsilon) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \{\omega^2(\varepsilon) - [m\omega(\varepsilon) + n\nu(\varepsilon)]^2\} g_{(nm)}(\varepsilon, a) e^{i\{n\theta + m\psi\}} = \\ = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{i\{n\theta + m\psi\}} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0(\varepsilon, a, \theta, \psi) e^{-i\{n\theta + m\psi\}} d\theta d\psi - \\ - m(\varepsilon) \left\{ [\omega(\varepsilon) - \frac{p}{2}\nu(\varepsilon)] \frac{\partial A_1}{\partial \psi} - 2a\omega(\varepsilon) B_1 \right\} \cos \psi + \\ + m(\varepsilon) \left\{ [\omega(\varepsilon) - \frac{p}{2}\nu(\varepsilon)] a \frac{\partial B_1}{\partial \psi} + 2\omega(\varepsilon) A_1 + \frac{1}{m(\varepsilon)} \frac{d[m(\varepsilon)\omega(\varepsilon)]}{d\varepsilon} a \right\} \sin \psi \end{aligned} \quad (19)$$

Saglasno uslovu (7)  $u_1(\varepsilon, a, \theta, \psi)$  ne sme da sadrži prvi harmonik ugla  $\psi$ . Da bi taj uslov bio zadovoljen potrebno je da je

$$\begin{aligned}
& m(z) \left\{ \left[ \omega(z) - \frac{p}{2} \nu(z) \right] a \frac{\partial \beta_1}{\partial \varphi} + 2\omega(z) \beta_1 + \frac{1}{m(z)} \frac{d[m(z)\omega(z)]}{dz} a \right\} \sin \gamma - \\
& - m(z) \left\{ \left[ \omega(z) - \frac{p}{2} \nu(z) \right] \frac{\partial \beta_1}{\partial \varphi} - 2a\omega(z) \beta_1 \right\} \cos \gamma + \\
& + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi^2} e^{i\{n\theta+m\varphi\}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0(z, \alpha, \theta, \varphi) e^{-i\{n\theta+m\varphi\}} d\theta d\varphi = 0 \\
& [nq + p(m \pm 1) = 0]
\end{aligned} \tag{20}$$

Odnosno iz jednačine (19) izjednačavajući koeficijente uz jednake harmonike dobijamo

$$g_{(mn)}(z, \alpha) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0(z, \alpha, \theta, \varphi) e^{-i\{n\theta+m\varphi\}} d\theta d\varphi}{4\pi^2 m(z) \{ \omega^2(z) - [m\omega(z) + n\nu(z)]^2 \}} \tag{21}$$

Na osnovu izraza (21) sastavljamo izraz za funkciju

$$\begin{aligned}
u_1(z, \alpha, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2 m(z)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\{n\theta+m\varphi\}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0(z, \alpha, \theta, \varphi) e^{-i\{n\theta+m\varphi\}} d\theta d\varphi}{\omega^2(z) - [m\omega(z) + n\nu(z)]^2} \\
[nq + p(m \pm 1) \neq 0]
\end{aligned} \tag{22}$$

U izrazu (20) u dvostrukoj sumi kompleksni eksponenti za  $nq + p(m \pm 1) = 0$  imaju oblik

$$e^{i\{n\theta+m\varphi\}} = e^{i\{\mp \frac{p}{2}\theta + m\varphi\}} = e^{i\{\mp \varphi + (m \pm 1)\varphi\}} \tag{23}$$

Osim toga  $m \pm 1$  je deljivo sa  $q$  pa taj izraz možemo zameniti sa  $2q$ . Izjednačavajući u izrazu (20) koeficijente uz  $\cos \gamma$  i  $\sin \gamma$  sa nulom dobijamo sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} [\omega(\varepsilon) - \frac{p}{2}\nu(\varepsilon)] \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial \varphi} - 2a\omega(\varepsilon)\mathcal{B}_1 &= \\ &= \frac{1}{2\pi^2 m(\varepsilon)} \sum_{\delta=-\infty}^{+\infty} e^{i\delta 2\varphi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0(\varepsilon, a, \theta, \gamma) e^{-i\delta 2\varphi} \cos \gamma \, d\theta d\gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\omega(\varepsilon) - \frac{p}{2}\nu(\varepsilon)] a \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial \varphi} + 2\omega(\varepsilon)\mathcal{A}_1 &= -\frac{1}{m(\varepsilon)} \frac{d[m(\varepsilon)\omega(\varepsilon)]}{d\varepsilon} a - \quad (24) \\ &= \frac{1}{2\pi^2 m(\varepsilon)} \sum_{\delta=-\infty}^{+\infty} e^{i\delta 2\varphi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0(\varepsilon, a, \theta, \gamma) e^{-i\delta 2\varphi} \sin \gamma \, d\theta d\gamma \end{aligned}$$

U poslednjim jednačinama sabiranje se izvodi za sve vrednosti indeksa  $\delta$  za koje su integrali na desnoj strani, koji stoje pod znakom zbira različiti od nule. Ti integrali će biti različiti od nule za one vrednosti indeksa  $\delta$  za koje sumarni pokazatelj koji odgovara eksponentu trigonometrijskog reda jednak nuli.

Za odredjivanje  $\mathcal{A}_1(\varepsilon, a, \varphi)$  i  $\mathcal{B}_1(\varepsilon, a, \varphi)$  dovoljno je rešiti sistem (24). Ako  $\mathcal{A}_1(\varepsilon, a, \varphi)$  i  $\mathcal{B}_1(\varepsilon, a, \varphi)$  zadovoljavaju sistem jednačina (24) u izrazu za  $\mu_1(\varepsilon, a, \theta, \gamma)$  koji se dobija kao partikularno rešenje nehomogene jednačine (12) koje odgovara dvostruko periodičkoj strani se neće javiti sabitci čiji imenioci mogu postati jednaki nuli. Na taj način bi funkcija  $\mu_1(\varepsilon, a, \theta, \gamma)$  bila konačna. Za tražene funkcije  $\mathcal{A}_1(\varepsilon, a, \varphi)$  i  $\mathcal{B}_1(\varepsilon, a, \varphi)$  dovoljno je uzeti neko partikularno, periodičko po  $\varphi$  rešenje sistema (24). Metodom neodredjenih koeficijenata vrlo lako se odredjuju rešenja

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1(\varepsilon, a, \varphi) &= -\frac{a}{2m(\varepsilon)\omega(\varepsilon)} \frac{d[m(\varepsilon)\omega(\varepsilon)]}{d\varepsilon} + \frac{1}{2\pi^2 m(\varepsilon)} \sum_{\delta=-\infty}^{+\infty} e^{i\delta 2\varphi} \times \\ &\times \left\{ \frac{[2\omega(\varepsilon) - p\nu(\varepsilon)] \delta i \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0(\varepsilon, a, \theta, \gamma) e^{-i\delta 2\varphi} \cos \gamma \, d\theta d\gamma - 2\omega(\varepsilon) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0(\varepsilon, a, \theta, \gamma) e^{-i\delta 2\varphi} \sin \gamma \, d\theta d\gamma}{4\omega^2(\varepsilon) - [2\omega(\varepsilon) + p\nu(\varepsilon)]^2} \right\} \quad (25) \end{aligned}$$

$$B_1(\varepsilon, a, \varphi) = -\frac{1}{2\pi^2 m(\varepsilon) a} \sum_{\delta=-\infty}^{+\infty} e^{i\delta\varphi} \left\{ \frac{[q\omega(\varepsilon) - p\nu(\varepsilon)] \delta i \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0(\varepsilon, a, \theta, \gamma) e^{-i\delta\varphi} \sin\gamma d\theta d\gamma + 2\omega(\varepsilon) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0(\varepsilon, a, \theta, \gamma) e^{-i\delta\varphi} \cos\gamma d\theta d\gamma}{4\omega^2(\varepsilon) - [q\omega(\varepsilon) + p\nu(\varepsilon)]^2} \right\} \quad (26)$$

Na sličan način iz jednačine (13) možemo da odredimo izraz za  $u_2(\varepsilon, a, \theta, \gamma)$ , a za  $A_2(\varepsilon, a, \varphi)$  i  $B_2(\varepsilon, a, \varphi)$  da dobijemo sistem jednačina

$$\begin{aligned} [\omega(\varepsilon) - \frac{p}{2}\nu(\varepsilon)] \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} - 2\omega(\varepsilon) a B_2 &= -\left[ \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} B_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \varepsilon} - a B_1^2 + \frac{dm(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{A_1}{m(\varepsilon)} \right] + \\ &+ \frac{1}{2\pi^2 m(\varepsilon)} \sum_{\delta=-\infty}^{+\infty} e^{i\delta\varphi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\varepsilon, a, \theta, \gamma) e^{-i\delta\varphi} \cos\gamma d\theta d\gamma \\ [\omega(\varepsilon) - \frac{p}{2}\nu(\varepsilon)] a \frac{\partial B_2}{\partial \varphi} + 2\omega(\varepsilon) A_2 &= -\left[ \frac{\partial B_1}{\partial a} a A_1 + \frac{\partial B_1}{\partial \varphi} a B_1 + \frac{\partial B_1}{\partial \varepsilon} a + 2A_1 B_1 + \frac{dm(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{a B_1}{m(\varepsilon)} \right] - \\ &- \frac{1}{2\pi^2 m(\varepsilon)} \sum_{\delta=-\infty}^{+\infty} e^{i\delta\varphi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\varepsilon, a, \theta, \gamma) e^{-i\delta\varphi} \sin\gamma d\theta d\gamma \end{aligned} \quad (27)$$

Rezimirajući prethodno rečeno možemo da zaključimo da kao prvu aproksimaciju rešenja usvajamo

$$x|_I = a \cos\left(\frac{p}{2}\theta + \varphi\right) \quad (28)$$

gde se  $a(t)$  i  $\varphi(t)$  određuju iz sistema jednačina prve aproksimacije

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\varepsilon, a, \varphi) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega(\varepsilon) - \frac{p}{2}\nu(\varepsilon) + \varepsilon B_1(\varepsilon, a, \varphi) \end{aligned} \quad (29)$$



Ako je razlika  $\omega(\tau) - \frac{p}{2}\nu(\tau)$  velika to jednačine (29) možemo usrednjiti po  $\nu$ , a ako je pak mala reda  $\varepsilon$ , to sistem (29) možemo razmatrati kao jednačine "sporih" kretanja.

Kao drugu aproksimaciju usvajamo izraz

$$x|_{II} = \alpha \cos\left(\frac{p}{2}\theta + \varphi\right) + \varepsilon u_1(\tau, \alpha, \theta, \frac{p}{2}\theta + \varphi) \quad (30)$$

gde  $a(t)$  i  $\varphi(t)$  moraju kao funkcije vremena da budu određene iz jednačina druge aproksimacije

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, \alpha, \varphi) + \varepsilon^2 A_2(\tau, \alpha, \varphi) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega(\tau) - \frac{p}{2}\nu(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, \alpha, \varphi) + \varepsilon^2 B_2(\tau, \alpha, \varphi) \end{aligned} \quad (31)$$

Jednačine prve i druge aproksimacije (29) i (31) u opštem slučaju ne mogu se analitički integraliti pa nam ostaje numerička metoda integraljenja ili pak neke opšte metode kvalitativne analize. Jednačine prve i druge aproksimacije su uzajamno povezane u odnosu na  $\alpha$  i  $\varphi$ . Uopšte redovi (4) i (5) su divergentni, ali se ovde koristi njihova osobina asimptotičnosti.

## 12. NEKI SPECIJALNI SLUČAJEVI JEDNAČINE (2) IZ ČL.11

Kao specijalan slučaj jednačine (2) iz čl.11 posmatrajmo diferencijalnu jednačinu nelinearnog oscilatora koji se nalazi pod dejstvom "sinusoidalne" sile, čija se amplituda i frekvencija sporo menjaju sa vremenom. U tom slučaju diferencijalna jednačina glasi

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + cx = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \varepsilon E(\tau) \sin \theta \quad (1)$$

gde je  $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\varrho)$ ,  $\varrho = \varepsilon t$ ,  $m$  i  $c$  konstante. Na osnovu teorije iz prethodnog člana posmatračemo osnovno rezonantno stanje za  $p=2$  pa je rešenje u prvoj aproksimaciji

$$x = a \cos(\theta + \varphi) \quad (2)$$

u kome su  $a(t)$  i  $\varphi(t)$  funkcije vremena, koje treba odrediti iz jednačina prve aproksimacije

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi m \omega} \int_0^{2\pi} f_0(a, \gamma) \sin \gamma d\gamma - \frac{\varepsilon E(\varrho)}{m[\omega + \nu(\varrho)]} \cos \varphi \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega - \nu(\varrho) - \frac{\varepsilon}{2\pi m \omega a} \int_0^{2\pi} f_0(a, \gamma) \cos \gamma d\gamma + \frac{\varepsilon E(\varrho)}{m a [\omega + \nu(\varrho)]} \sin \varphi \end{aligned} \quad (3)$$

gde je

$$f_0(a, \gamma) = f(a \cos \gamma, -a \omega \sin \gamma) \quad (4)$$

Ako uvedemo ekvivalentni dekrement prigušivanja i ekvivalentnu sopstvenu frekvenciju slobodnih oscilacija prema formuli

$$\delta_e(a) = \frac{\varepsilon}{2\pi m \omega a} \int_0^{2\pi} f_0(a, \gamma) \sin \gamma d\gamma \quad (5)$$

$$\omega_e^2(a) = \frac{c}{m} - \frac{\varepsilon}{\pi m a} \int_0^{2\pi} f_0(a, \gamma) \cos \gamma d\gamma$$

jednačine prve aproksimacije možemo napisati u sledećem obliku

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta_e(a) a - \frac{\varepsilon E(\varrho)}{m[\omega + \nu(\varrho)]} \cos \varphi \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega_e^2(a) - \nu(\varrho) + \frac{\varepsilon E(\varrho)}{m a [\omega + \nu(\varrho)]} \sin \varphi \end{aligned} \quad (6)$$

Kao primer za ovaj slučaj posmatraćemo nelinearni oscilator čije se kretanje opisuje jednačinom

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx + dx^3 = F_0 \sin \theta \quad (7)$$

gde je  $x$  koordinata, koja određuje položaj sistema,  $t$  vreme,  $m$  masa,  $b$  koeficijent otpora,  $F_0 = cx + dx^3$  nelinearna restituciona sila,  $F_0$  amplituda poremećajne sile,  $\theta$  neka funkcija vremena. Radi uprošćenja uvedimo bezdimenzione koordinate  $x_1$  i vreme  $t_1$  prema formulama

$$x_1 = \sqrt{\frac{d}{c}} x \quad t_1 = \sqrt{\frac{c}{m}} t \quad (8)$$

i jednačinu (7) napišemo u obliku

$$\frac{d^2 x_1}{dt_1^2} + \delta \frac{dx_1}{dt_1} + x_1 + x_1^3 = F_1 \sin \theta \quad (9)$$

gde su uvedene oznake

$$\delta = \frac{b}{\sqrt{m c}} \quad F_1 = \frac{F_0}{c} \sqrt{\frac{d}{c}} \quad (10)$$

Pretpostavimo da su trenje i amplituda spoljašnje sile, a takođe i nelinearni član restitucione sile dovoljno malii tada je

$$\epsilon \int (x_1, \frac{dx_1}{dt_1}) = - \left[ \delta \frac{dx_1}{dt_1} + x_1^3 \right] \quad (11)$$

pa saglasno izrazima (3) nalazimo za prvu aproksimaciju rešenja

$$x = a \cos(\theta + \varphi) \quad (12)$$

gde se  $a(t)$  i  $\varphi(t)$  određuju iz sistema jednačina prve

$$\frac{da}{dt_1} = -\frac{\delta a}{2} - \frac{F_1}{1+\nu(\tau)} \cos \varphi$$

$$\frac{d\varphi}{dt_1} = 1 - \nu(\tau) + \frac{3a^2}{8} + \frac{F_1}{a[1+\nu(\tau)]} \sin \varphi$$
(13)

gde je  $\nu(\tau) = \frac{d\theta}{dt_1}$  neka funkcija vremena, koja karakteriše promenu trenutne frekvencije. Pomoću jednačina (13) može se izučiti stacionarni i nestacionarni oscilatorni proces. Za dobijanje u prvoj aproksimaciji stacionarnih vrednosti amplitude i frekvencije potrebno je u sistemu (13) desne strane izjednačiti sa nulom, odakle se dobija

$$-\delta a - F_1 \cos \varphi = 0 \quad (1 + \nu(\tau) \approx 2)$$

$$a \left[ \left( 1 + \frac{3}{8} a^2 \right)^2 - \nu^2 \right] + F_1 \sin \varphi = 0$$
(14)

Eliminisanjem faze  $\varphi$  dobijamo sledeću zavisnost izmedju amplitude stacionarnih oscilacija frekvencije spoljašnje sile

$$a^2 \left\{ \left[ \left( 1 + \frac{3}{8} a^2 \right)^2 - \nu^2 \right]^2 + \delta^2 \right\} = F_1^2$$
(15)

iz koje nalazimo

$$\nu = \sqrt{\left( 1 + \frac{3}{8} a^2 \right)^2 \pm \sqrt{\frac{F_1^2}{a^2} - \delta^2}}$$
(16)

Pomoću ove zavisnosti sastavljamo rezonantnu krivu stacionarnih oscilacija koja je prikazana na slici , a takodje i skerletnu krivu odredjenu sa

$$\nu = 1 + \frac{3}{8} a^2$$

Stabilnom stacionarnom rezonantnom stanju odgovara deo krive izvučen punom linijom, a nestabilnom deo krive izvučene tankom

linijom. Sa slike se vidi da pri porastu frekvencije u tački B se javlja skok amplitude na vrednost u tački C, koja je manja od vrednosti u tački B. Pri smanjenju frekvencije javlja se skok u tački D od jedne vrednosti na veću u tački A. Porast i opadanje frekvencije je ovde upotrebljeno u smislu veoma spore promene tako da se sistem može posmatrati kao stacionarni. Za nestacionarni slučaj potrebno je za zadanu promenu  $\nu(\tau)$  numerički integriti sistem (13) i nacrtati rezonantne krive u funkciji promene frekvencije u smeru porasta ili opadanja frekvencije. Integraljenje sistema (13) treba izvršiti za ceo interval vremena za koji se menja frekvencija od trenutka kada je frekvencija spoljašnje sile dovoljno bliska sopstvenoj frekvenciji sistema i ne nalazi se u rezonantnoj zoni, pa do potpunog izlaska iz rezonantne zone.

Posmatraćemo slučaj linearne promene

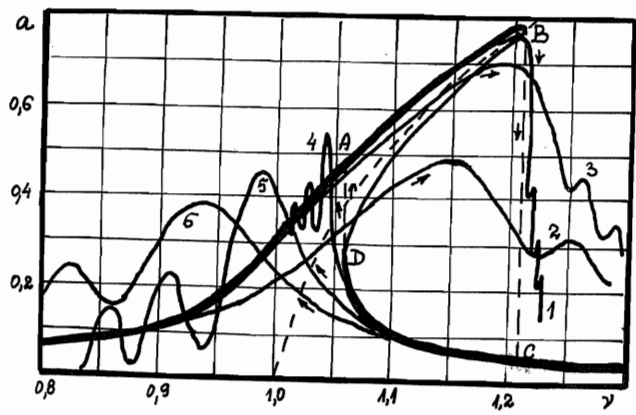
$$\nu(\tau) = \nu_0 + \beta t$$

za  $\beta > 0$  frekvencija raste, a za  $\beta < 0$  opada. Brzina prolaska kroz rezonantno stanje zavisi od koeficijenta  $\beta$ . Za vrlo malu apsolutnu vrednost  $\beta$  dobija se kriva koja je sasvim bliska apsolutnoj krivoj stacionarnog rezonantnog stanja. Na slici 64 su prikazane rezonantne krive nestacionarnog rezonantnog stanja za tri brzine promene frekvencije spoljašnje sile i za slučaj tvrde karakteristike nelinearne restitutione sile.

Pri prolasku kroz rezonantno stanje suštinski uticaj na rezonantne krive pokazuje brzina promene frekvencije spoljašnje sile. Pri njenom povećanju maksimumi amplituda se snižavaju, a "oštrina" prvog maksimuma se umanjuje. Posle postizanja prvog maksimuma se uočavaju bijenja amplituda pri čemu što se brže ostvaruje prolazak kroz rezonantno stanje tim se karakterističnije izražavaju posle ovog maksimuma nekoliko maksimuma manje veličine.

Kako se pri stacionarnom režimu u sistemu uočava skok amplituda to pri prolasku kroz rezonantno stanje frekven-

cije se uočavaju nagle promene amplitude - naročito za spori prolazak. Maksimumi amplitude se ne javljaju u momentu poklapanja frekvencije poremećajne sile sa sopstvenom frekvencijom sistema, nego kasnije ili ranije što zavisi od brzine promene frekvencije, karaktera nelinearnosti, a takodje i od smera promene frekvencije.



Sl.64

## VII      G l a v a

## SAMOPOBUDNE OSCILACIJE

## 1. SAMOPOBUDNE OSCILACIJE

Osnovna karakteristika samopobudnog oscilatornog sistema je da za održavanje stacionarnog oscilatornog režima u takvim sistemima nije neophodno spoljašnje periodičko dejstvo, nego se neprigušene oscilacije održavaju izvorom energije koji daje konstantno po vremenu dejstvo, koje zahvaljujući karakteristikama sistema daje pri oscilacijama promenljivo dejstvo, koje održava stacionarne oscilacije. Ovakve oscilacije se nazivaju **s a m o p o b u d n e** oscilacije ili **a u t o o s c i l a c i j e**.

Nekada se samopobudne oscilacije posmatraju kao slobodne oscilacije sa negativnim trenjem. Sistemi sa negativnim prigušenjem su dinamički nestabilni. Kod samopobudne oscilacije se javlja alternirajuća sila, koja održava kretanje, a stvara se ili kontroliše kretanjem, kada se kretanje prekine i alternirajuća sila nestane.

Ovde treba naglasiti da postoji razlika između dinamičke i statičke stabilnosti. Svaki dinamički stabilan sistem je i statički stabilan, dok obrnuto ne važi. Neki mehanički sistem je statički stabilan, ako se pomeranjem iz ravnotežnog položaja sistema stvara sila (ili spreg) koja teži da sistem vrati u ravnotežni položaj. Ako pak nastupi pove-

ćanje udaljenja od ravnotežnog položaja onda je sistem statički nestabilan. Ako se javi slučaj da sistem osciluje oko ravnotežnog položaja i pri tome se amplituda oscilacije povećava imamo slučaj statički stabilnog, ali dinamički nestabilnog sistema. Ako se pak amplituda smanjuje sa težnjom da se oscilacije priguše imamo slučaj i statički i dinamički stabilnog oscilatornog sistema.

Kod samopobudnih oscilatora imamo pojavu da je položaj ravnoteže statički stabilan, ali dinamički nestabilan. U takvim sistemima dolazi do porasta amplitude oscilovanja sa tendencijom prelaska na harmonijsko kretanje.

Samopobudne oscilacije su od velike važnosti, naročito u tehnici i posebno automatskoj regulaciji. Samopobudni oscilatori su uglavnom nelinearni oscilatorni sistemi.

Zahtev da oscilovanje samopobudnog oscilatora bude neprigušeno harmonijsko, uslovljava da energija sistema treba da bude stalna u toku svake posebne oscilacije i da je uskladjena sa samim kretanjem. U ovim sistemima mora da postoji obostrana veza između izvora energije i oscilatornog dela sistema. Nije dovoljno postojanje samo izvora energije, jer neregulisano trošenje energije moglo bi da dovede do naglog skoka energijskog nivoa, a zatim do postepenog pada do minimuma, što nebi odgovaralo periodičkom kretanju i nebi došlo do uspostavljanja autooscilacija. Pritok energije mora da bude tako uskladjen da daje oscilatornom delu sistema onoliko mehaničke energije, koliko ovaj utroši na negativnom radu. Kod oscilatora sa negativnim trenjem rad sile otpora uvećava energiju sistema.

Samopobudnim oscilatorom ili autooscilatornim sistemom naziva se nekonzervativni sistem koji izvodi neprigušene periodičke oscilacije i karakteriše se sledećim osnovnim delovima: 1<sup>o</sup> konstantnim izvorom energije; 2<sup>o</sup> oscilatornim objektom; 3<sup>o</sup> mehanizmom za regulisanje pritoka u sistem



energije iz izvora; 4<sup>o</sup> povratnom spregom između oscilatornog objekta i mehanizma za regulisanje pritoka energije.

Nekad je teško prepoznati autooscilatorni sistem sa svim nabrojanim delovima. Mehanizam povratne sprege nekad je veoma teško ili skoro nemoguće uočiti.

Autooscilacije se najčešće javljaju u sistemima sa nelinearnim trenjem.

U autooscilatornim sistemima mehanizam za regulisanje upravlja kretanjem sistema pomoću povratne sprege. U tom dvostranom uzajamnom dejstvu oscilatornog sistema i mehanizma za regulisanje pomoću obratne veze ostvaruje se samoupravljanje energijom sistema i kao rezultat toga u autooscilatornom sistemu se javljaju stabilne neprigušene oscilacije, koje po pravilu ne zavise od početnih uslova.

## 2. GRANIČNE TRAJEKTORIJE I LIÉNARD-OV KRITERIJUM

U autooscilatornim sistemima sa samopobudom za proizvoljne početne uslove sistem teži nekom stabilnom periodičkom kretanju. Ako bi smo u faznoj ravni predstavili samopobudne oscilacije tom stabilnom periodičkom kretanju odgovarala bi zatvorena fazna trajektorija takozvana **g r a n i -**  
**č n a t r a j e k t o r i j a**. Granična trajektorija u opštem slučaju može biti stabilna, nestabilna ili delimično stabilna - spoljašnje ili unutrašnje stabilna.

Samopobudni oscilator će uvek oscilovati stabilno, ako njegova fazna ravan ima bar jednu stabilnu graničnu trajektoriju. I nestabilnoj graničnoj trajektoriji odgovara periodičko kretanje, koje zbog nestabilnosti ne može biti realizovano.

Ako postoji samo jedna stabilna granična

trajektorija dovoljno je da se oscilatoru samo malo naruši stanje ravnoteže, pa da se asimptotski primakne stabilnom harmonijskom kretanju. Ukoliko postoje dve granične trajektorije od kojih je jedna nestabilna i zatvara stabilnu žižu, dok je druga stabilna i obuhvata nestabilnu graničnu trajektoriju, onda je potrebno sistem izvesti van oblasti nestabilne granične trajektorije da bi on asimptotski težio neprigušenom oscilovanju. Pri ovakvom posmatranju stabilnosti dolazimo do pojma **o r b i t a l n e s t a b i l n o s t i** graničnih trajektorija.

Autooscilatorni karakter sistema može biti uočen proučavanjem jednačine kretanja. Postoje mnogobrojne metode koje omogućavaju da na osnovu karakteristika diferencijalne jednačine sistema dokažemo mogućnost postojanja u tom sistemu neprigušenih harmonijskih oscilacija. Ovde ćemo navesti nekoliko teorema o oslovima postojanja granične trajektorije na faznoj ravni.

Liénard je izučavo diferencijalnu jednačinu oblika

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) \frac{dx}{dt} + g(x) = 0 \quad (1)$$

na koju može da se svede veliki broj nelinearnih sistema, a medju njima i autooscilacije. Ovim oblikom obuhvaćena je i Van der Pol-ova jednačina. Uvedimo sada oznake

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(x) dx \\ G(x) &= \int_0^x g(x) dx \end{aligned} \quad (2)$$

Teorema Dragiljeva (*Драгилџева*): Ako

1°  $g(x)$  zadovoljava uslove Lefschetz-a da je  $xg(x) > 0$  za  $x \neq 0$ ,  $G(x) \rightarrow \infty$  za  $x \rightarrow \infty$ ;

2°  $F(x)$  jednoznačno određena na intervalu  $-\infty < x < +\infty$  i za svaki konačni interval zadovoljava uslove Lefschetz-a i osim toga za dovoljno male  $|x|$  je  $F(x) < 0$

za  $x > 0$  i  $F(x) > 0$  za  $x < 0$  ;

3<sup>o</sup> postoji broj  $M$  i ma kakvi brojevi  $k$  i  $k'$ ,  
pri čemu je  $k' < k$  tako da je

$$\begin{array}{ll} F(x) \geq k & \text{kada je } x > M \\ F(x) \leq k' & \text{kada je } x < -M \end{array}$$

tada jednačina (1) ima u krajnjem slučaju jednu graničnu trajektoriju.

Pitanju jedinstvenosti granične trajektorije posvećena je **t e o r e m a** Levison-a i Smidth-a:

Neka je :

1<sup>o</sup>  $g(x)$  neparna funkcija, takva da je  $g(x) > 0$   
za  $x > 0$  ;

2<sup>o</sup>  $F(x)$  neparna funkcija pri čemu postoji  
vrednost  $x_0$ , takva da je  $F(x) < 0$  za  $0 < x < x_0$  i  $F(x) \geq 0$   
i monotono raste za  $x \geq x_0$  ;

3<sup>o</sup>  $F(\infty) = G(\infty) = \infty$

4<sup>o</sup>  $f(x)$  i  $g(x)$  zadovoljavaju uslove

Lefschetz-a na konačnom proizvoljnom intervalu;

U tom slučaju jednačina (1) ima jednu jedinstvenu graničnu trajektoriju.

I na kraju ćemo navesti **t e o r e m u**

Liénard-a:

Jednačina (1) ima jednu stabilnu graničnu trajektoriju ako zadovoljava sledeće uslove:

1<sup>o</sup>  $f(x)$  je parna funkcija,  $g(x)$  je neparna funkcija i osim toga  $xg(x) > 0$  za proizvoljno  $x$ , a  
 $f(0) < 0$  ;

2<sup>o</sup>  $f(x)$  i  $g(x)$  su analitičke funkcije;

3<sup>o</sup>  $F(x) \rightarrow \infty$  za  $x \rightarrow \infty$  ;

4<sup>o</sup> Jednačina  $F(x) = 0$  ima jedinstven koren  
 $x = a$  i osim toga za  $x \geq a$  funkcija  $F(x)$  monotono raste.  
Kao što se možemo lako uveriti ove uslove zadovoljava jednačina Van der Pol-a.

### 3. REŠENJE JEDNAČINE SAMOPOBUDNOG OSCILATORA ASIMPTOTSKOM METODOM

Samopobudne oscilacije se mogu opisati diferencijalnom jednačinom oblika

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \epsilon f(x) \frac{dx}{dt} \quad (1)$$

Prema asimptotskoj metodi navedenoj u gl. izraz na desnoj strani potrebno je razložiti u Fourier-ov red i da bi smo postupak uprostiti uvešćemo funkciju

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx \quad (2)$$

i nju razložiti u red u obliku

$$F(a \cos \Psi) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(a) \cos n \Psi \quad (3)$$

Ako diferenciramo izraz (3) i izmemo u obzir vezu (2) dobijamo

$$f(a \cos \Psi) a \omega \sin \Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \omega n F_n(a) \sin n \Psi ; \quad \frac{d\Psi}{dt} = \omega \quad (4)$$

Na osnovu prethodno izložene asimptotske metode i izraza (18) (19) i (20) a uporedjenjem sa (4) dobijamo izraze za  $A_1(a)$ ,  $B_1(a)$ ,  $A_2(a)$  i  $B_2(a)$

$$A_1(a) = \frac{1}{2} F_1(a)$$

$$B_1(a) = 0$$

$$A_2(a) = 0$$

$$B_2(a) = -\frac{1}{8a\omega} F_1(a) \frac{dF_1(a)}{da} - \frac{1}{2\omega a^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 F_n^2(a)}{n^2 - 1} \quad (5)$$

Sada u prvoj aproksimaciji imamo da je

$$x = a \cos \Psi \quad (6)$$

gde  $a$  i  $\Psi$  moraju da zadovoljavaju jednačine prve aproksimacije

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2} F_1(a) \\ \frac{d\Psi}{dt} &= \omega \end{aligned} \quad (7)$$

U drugoj aproksimaciji je

$$x = a \cos \Psi + \frac{\varepsilon}{\omega} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1} F_n^*(a) \sin n\Psi \quad (8)$$

gde se  $a$  i  $\Psi$  određuju iz jednačina druge aproksimacije

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2} F_1^*(a) \\ \frac{d\Psi}{dt} &= \omega + \varepsilon^2 B_2(a) \end{aligned} \quad (9)$$

Kao primer proučićemo Van der Pol-ovu jednačinu oblika

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1-x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (10)$$

Prema (2) funkcija se dobija kao

$$F(x) = \int_0^x (1-x^2) dx = x - \frac{x^3}{3} \quad (11)$$

posle čega nalazimo da je

$$F(a \cos \Psi) = a \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) \cos \Psi - \frac{a^3}{12} \cos 3\Psi \quad (12)$$

odakle je

$$F_1(a) = a \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) ; \quad F_3(a) = -\frac{a^3}{12} ; \quad F_k(a) = 0 ; \quad k \neq 1, 3. \quad (13)$$

Na osnovu izraza (5) nalazimo da je

$$\mathcal{A}_1(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{4}\right) \quad \mathcal{B}_1(\alpha) = 0 \quad (14)$$

pa je rešenje u prvoj aproksimaciji

$$\frac{d\alpha}{dt} = \varepsilon \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\alpha^2}{4}\right) \quad (15)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = 1$$

Iz prve aproksimacije vidimo da su oscilacije harmonijske sa konstantnom frekvencijom  $\omega=1$  i amplitudom koja se može naći integraljenjem iz prve jednačine (15). Prvu jednačinu sistema (15) pomnožimo sa  $\alpha$  i dobijamo

$$\frac{d\alpha^2}{dt^2} = \varepsilon \alpha^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{4}\right) \quad (16)$$

odnosno njenim rešavanjem dobijamo

$$\alpha = \frac{a_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}a_0^2(e^{\varepsilon t} - 1)}} \quad (17)$$

Prvu aproksimaciju rešenja možemo sada da napišemo u obliku

$$x = \frac{a_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}a_0^2(e^{\varepsilon t} - 1)}} \cos(\omega t + \theta) \quad (18)$$

Iz ovog izraza se vidi da ako je početna amplituda  $a_0$  jednaka nuli dobijamo trivijalno rešenje  $x=0$ , koje očigledno odgovara statičkom režimu odnosno odsustvu oscilacija. Iz poslednje formule (18) zaključujemo da je statički režim dinamički nestabilan, jer i za ma kakvu malu početnu amplitudu  $a_0$  amplituda  $\alpha$  će monotono da raste i približava vrednosti 2. Dolazimo do zaključka da se javlja samopobudjivanje oscilacija.

Stacionarnom režimu oscilacija odgovara

$$x = 2 \cos(t + \theta)$$

i to je stabilan režim harmonijskih oscilacija na koji se posle dovoljno dugog vremena svode sve oscilacije nezavisno od početne amplitude  $a_0$ . Kažemo da ovaj stacionarni režim oscilacija ima osobinu "privlačenja ostalih režima". Ovom režimu u faznoj ravni odgovara granična trajektorija.

U drugoj aproksimaciji za rešenje nalazimo izraz

$$x = a \cos \Psi - \frac{\varepsilon a^3}{32} \sin 3\Psi \quad (19)$$

gde se  $a$  i  $\Psi$  odredjuju iz jednačina druge aproksimacije

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon \frac{a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) \\ \frac{d\Psi}{dt} &= 1 - \varepsilon \left(\frac{1}{8} - \frac{a^2}{8} + \frac{7a^4}{256}\right) \end{aligned} \quad (20)$$

Za stacionarne oscilacije u drugoj aproksimaciji dobijamo

$$\bar{x} = 2 \cos(\omega t + \theta) - \frac{\varepsilon}{4} \sin 3(\omega t + \theta) \quad (21)$$

gde je  $\omega = 1 - \frac{\varepsilon^2}{16}$ .

Ako izvršimo uporedjenje osobina konzervativnih oscilatornih sistema sa ovim samopobudnim oscilatorom dolazimo do zaključka da su kod konzervativnih sistema moguće oscilacije sa proizvoljnom konstantnom amplitudom, dok su pak kod samopobudnih sistema moguće oscilacije sa konstantnom amplitudom samo za neke njene određene vrednosti.

Kako u konzervativnom sistemu nema rasipanja energije, a ni izvora energije to pobudjene oscilacije ne mogu ni da rastu ni da opadaju i amplituda ostaje jednaka njenoj početnoj vrednosti. Kod samopobudnih oscilacija imamo rasipanje energije, a takodje i izvor energije, pa će zato amplituda oscilovanja da raste ako je količina energije date izvorom veća od količine energije koja se odaje disipativnim silama, i obrnuto opadaće ako se više energije odaje disipativnim silama pa će oscilacije da se prigušuju. Konstantnu vrednost

amplituda će da zadrži samo u slučaju, kada postoji ravnoteža energije koja se troši disipativnim silama.

Klasičan primer samopobudnih oscilacija su oscilacije klatna časovnika, koje se pobudjuju impulsima. Tada imamo da je jednačina oscilovanja

$$J \frac{d^2 x}{dt^2} + \left\{ \lambda \frac{dx}{dt} - I \frac{\frac{dx}{dt} + \left| \frac{dx}{dt} \right|}{2} \delta(x - x_0) \right\} + kx = 0 \quad (23)$$

gde je  $x_0$  - vrednost ugla otklona klatna za koju klatno šalje impuls  $I$ ,  $\delta(x)$  - "nesopstvena" funkcija Dirac-ova funkcija, koja se određuje sa

$$\int_{-0}^{+0} \delta(x) dx = 1; \quad \delta(x) = 0 \text{ za } x \neq 0 \quad (24)$$

Uvedemo oznake  $\omega^2 = \frac{k}{J}$  i

$$\varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \frac{\lambda}{J} \frac{dx}{dt} - \frac{I}{J} \frac{\frac{dx}{dt} + \left| \frac{dx}{dt} \right|}{2} \delta(x - x_0) \quad (25)$$

Koristeći prethodne rezultate dobijamo

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi &= \frac{1}{J} \int_0^{2\pi} \lambda a \omega \sin^2 \psi d\psi - \frac{I a \omega}{J} \int_0^{2\pi} \delta(a \cos \psi - x_0) \times \\ &\times \frac{\sin \psi + |\sin \psi|}{2} \sin \psi d\psi = \frac{\lambda a \omega \pi}{J} - \frac{I a \omega}{J} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \delta(a \cos \psi - x_0) \sin^2 \psi d\psi \end{aligned} \quad (26)$$

Neka je  $\psi_a$  koren jednačine

$$a \cos \psi = x_0 \quad (27)$$

koji leži između 0 i  $\frac{\pi}{2}$  za slučaj da je  $a \geq x_0$  pa imamo da je

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta(a \cos \psi - x_0) \sin^2 \psi d\psi &= \int_{\psi_a-0}^{\psi_a+0} \delta(a \cos \psi - x_0) \sin^2 \psi d\psi = \\ &= \frac{1}{a} \int_{x_0-0}^{x_0+0} \delta(x - x_0) \sin \psi_a dx = \frac{1}{a} \sin \psi_a = \frac{1}{a} \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}} \end{aligned} \quad (28)$$



dok je za slučaj  $a < x_0$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta(a \cos \Psi - x_0) \sin^2 \Psi d\Psi = 0 \quad (30)$$

Za određivanje trenutne amplitude i pune faze u prvoj aproksimaciji se dobija sistem

$$\frac{da}{dt} = \begin{cases} -\frac{\lambda}{2J} a & a < x_0 \\ -\frac{\lambda}{2J} a + \frac{I}{2J^2} \sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{a}\right)^2} & a \geq x_0 \end{cases} \quad (31)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = \begin{cases} \omega & a < x_0 \\ \omega - \frac{I x_0}{2J^2 a^2} & a \geq x_0 \end{cases}$$

Iz ovih jednačina se vidi da za dovoljno male vrednosti amplitude  $a_0$ , naprimer  $a < x_0$ , amplituda  $a(t)$  će opadati i težiti nuli sa vremenom, pa će oscilacije vremenom da se priguše. U tom slučaju oscilacije nemaju samopobude i statička ravnoteža  $a=0$  je dinamički stabilna.

Istovremeno se postavlja pitanje o postojanju stacionarnih (uspostavljenih) dinamičkih režima koji odgovaraju konstantnim amplitudama različitomod nule. Očevidno je da takve vrednosti amplitude moraju da zadovoljavaju jednačinu

$$-\frac{\lambda}{2J} a + \frac{I}{2J^2} \sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{a}\right)^2} = 0 \quad (32)$$

jer uslov postojanja stacionarnih amplituda je  $\frac{da}{dt} = 0$ . Na taj način pitanje egzistencije stacionarnih dinamičkih režima vezano je sa pitanjem o postojanju realnih pozitivnih korena u jednačini atacionarnih amplituda (32). Zato ćemo da proučimo tu jednačinu prepisavši je u obliku bikvadratne jednačine

$$a^4 - \left(\frac{I}{J\lambda}\right)^2 a^2 + \left(\frac{I}{J\lambda}\right)^2 x_0^2 = 0 \quad (33)$$

iz koje nalazimo dva korena

$$a_1^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{I}{\mathcal{F}\lambda} \right)^2 - \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{I}{\mathcal{F}\lambda} \right)^4 - x_0^2 \left( \frac{I}{\mathcal{F}\lambda} \right)^2} \quad (34)$$

$$a_2^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{I}{\mathcal{F}\lambda} \right)^2 + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{I}{\mathcal{F}\lambda} \right)^4 - x_0^2 \left( \frac{I}{\mathcal{F}\lambda} \right)^2} \quad (35)$$

Koreni će biti realni za

$$x_0 < \frac{1}{2} \frac{I}{\mathcal{F}\lambda} \quad (36)$$

U slučaju kada je  $x_0 > \frac{1}{2} \frac{I}{\mathcal{F}\lambda}$  oba korena (34) i (35) biće kompleksna i u tom slučaju stacionarni dinamički režimi su nemogući. U tom slučaju jedinstveni stacionarni režim može biti položaj statičke ravnoteže  $a=0$ . Tada bez obzira na početnu vrednost amplitude oscilacije će se prigušiti monotono opadajući.

U slučaju da je zadovoljen uslov (36) za  $a \gg x_0$  proces promene amplitude se odvija na sledeći način

$$\text{ako je } a(0) < a_1 \quad a(t) \rightarrow 0 \text{ za } t \rightarrow \infty$$

$$\text{ako je } a(0) > a_1 \quad a(t) \rightarrow a_2 \text{ za } t \rightarrow \infty$$

kada je  $a(0) > a_2$  tada će amplituda monotono da opada do vrednosti  $a_2$ , a ako je  $a_1 < a(0) < a_2$  to će amplituda monotono da raste, težeći toj vrednosti  $a_2$ .

I tako ako parametri oscilatornog sistema zadovoljavaju uslov (36) to su u sistemu moguće stabilne stacionarne oscilacije konstantne amplitude

$$a_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{I}{\mathcal{F}\lambda} \right)^2 + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{I}{\mathcal{F}\lambda} \right)^4 - x_0^2 \left( \frac{I}{\mathcal{F}\lambda} \right)^2}}$$

ali za to da bi se pobudile te oscilacije, neophodno je da početna amplituda bude veća od  $a_1$ , t.j. neophodno je i dovoljno da postoji takav graničnik, koji bi omogućio otklon klatna, koji je veći od  $a_1$ .

Naprimer, ako su početni uslovi za  $t=0$ ,  $x=0$ ,  $\frac{dx}{dt} = A$ , to vidimo da je  $\gamma_0 = \frac{3\mathcal{F}}{2}$ ,  $A = a_0 \omega$ , pa odatle sledi da je uslov pobudjivanja oscilacija  $A > a_1 \omega$ .

## 4. RELAKSACIONE OSCILACIJE

Već je bilo reči o sistemima čije se oscilovanje opisuje Van der Pol-ovom diferencijalnom jednačinom oblika

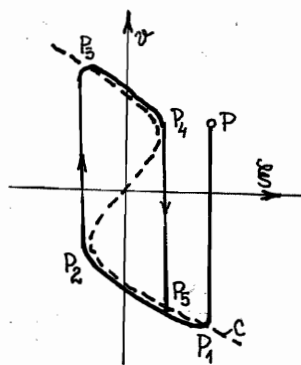
$$\frac{d^2x}{dt^2} - \epsilon \left[ \frac{dx}{dt} - \frac{1}{3} \left( \frac{dx}{dt} \right)^3 \right] + x = 0 \quad (1)$$

kada je  $\epsilon$  mali parametar, kada je ova jednačina opisivala samopobudne oscilacije. Ovde ćemo posmatrati istu diferencijalnu jednačinu samo za velike vrednosti parametra  $\epsilon \gg 1$ , kada se javljaju takozvane relaksacione oscilacije ili ublažene oscilacije. Ovim imenom ih je nazvao Van der Pol najverovatnije zato što se pokazuju u dvema jasnim i karakterističnim fazama. U jednoj se energija polako nagomilava i u drugoj, kojoj se oslobadja skoro odmah kada je postignut izvestan kritičan prag. Za dalje razmatranje pogodno je uvesti novu promenljivu  $\xi = \frac{x}{\epsilon}$  i novo vreme  $t_1 = \frac{t}{\epsilon}$  u uslovima kada je  $\epsilon$  veliki parametar, pa jednačinu (1) možemo da napišemo u obliku

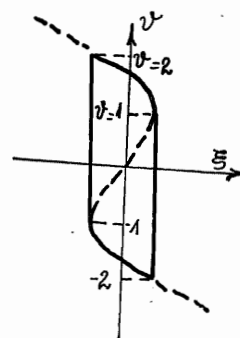
$$\frac{d\psi}{d\xi} = \epsilon \frac{(\psi - \frac{\psi^3}{3}) - \xi}{\psi} = \epsilon \frac{-F(\psi) - \xi}{\psi} ; \quad \psi = \frac{d\xi}{dt_1} \quad (2)$$

U ravni  $(\xi, \psi)$  nacrtamo krivu  $\xi = -F(\psi)$  kao na slici .U svakoj tački krive je pravac polja horizontalan jer za  $\xi = -F(\psi)$  izraz (2) tj.  $\frac{d\psi}{d\xi}$  je jednak nuli. U svakoj drugoj tački ravni  $(\xi, \psi)$  pravac polja teži da bude vertikaln kako  $\epsilon \rightarrow \infty$ .

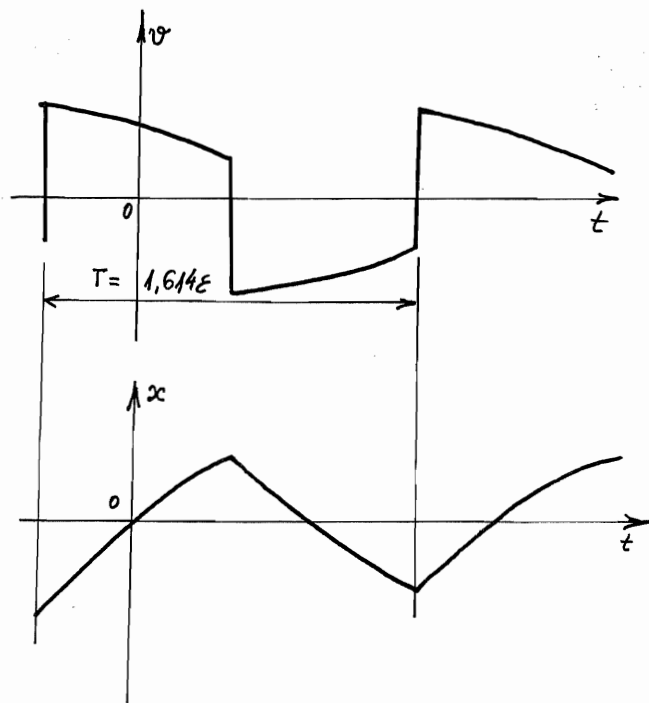
Ako hoćemo da proučimo jedno rešenje onda izaberemo proizvoljnu tačku P u ravni  $(\xi, \psi)$ . Integralna kriva bi polazila iz P kao vertikalna prava linija sve do krive C u čijoj bi okolini bila horizontalna sa daljom tendencijom



S1.65 a



S1.65 b



S1.65 c i d

da prati krivu C do tačke  $P_2$ , odakle postaje vertikalna do  $P_3$ , preseka sa krivom C u tački  $P_3$ , gde je horizontalna, a zatim nastavlja iznad krive C, ali prateći je do  $P_4$ , odakle opet biva vertikalna do  $P_5$  i tako ponovo.

Na osnovu ovoga se može zaključiti da se za vrlo velike vrednosti parametra  $\varepsilon$ , može staviti da se kriva graničnog ciklusa sastoji od dva odsečka pravih  $\xi = \text{const}$  i od delova karakteristične krive  $\xi = v - \frac{1}{3}v^3$  (vidi sliku 65 a, b). Na osnovu ovakvog zaključka možemo potražiti period oscilovanja obilazeci jednom po napred definisanoj graničnoj trajektoriji. Period je

$$T = \varepsilon \oint \frac{d\xi}{v^2} = \oint \frac{dx}{v^2}$$

Za vertikalni deo granične krive je  $d\xi = 0$  i on teorijski ne doprinosi periodu, a za ostali deo je

$$T = \varepsilon \oint \frac{d(v - \frac{v^3}{3})}{v^2} = 2\varepsilon \left( \ln \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right) \approx 1,614 \varepsilon$$

Na dijagramima slika 65 c data je zavisnost brzine oscilacijw relaksacije od vremena sa naznačenim periodom, a takodje i zavisnost oscilacije od vremena.

I tako za slučaj da je  $\varepsilon \gg 1$  pri asimptotskom tretiranju, oscilatorni proces će se odvijati na sledeći način: pri porastu  $\xi$  od početne vrednosti  $\xi_0$ , brzina  $\dot{\xi}$  će biti pozitivna i reprezentativna tačka na faznoj ravni će se kretati po krivoj  $P_3P_4$ . Kada  $\xi$  dostigne maksimalnu vrednost  $\xi_+$ , reprezentativna tačka će skokom da predje iz položaja  $P_4$  u  $P_5$ , što odgovara trenutnoj promeni znaka brzine i dalje pri smanjenju  $\xi$  brzina  $\dot{\xi}$  će ostajati negativna i reprezentativna tačka će se kretati po krivoj  $P_2P_5$ . U tački  $P_2$  će opet proizaći promena znaka brzine i reprezentativna tačka na faznoj ravni skokom će da predje u položaj  $P_3$ . Na taj način u toku jednog perioda oscilovanja brzina  $\dot{\xi}$  trpi dvaput skok brzine - u trenucima postizanja maksimalne i minimalne vred-

nosti. Razumljivo je da je u praksi brzina neprekidna i pored toga što se brzo menja i kada je ma koliko bilo veliko  $\varepsilon$ , ali konačno, govoreći o prekidu mi dopuštamo određeno uprošćenje koje odgovara prihvaćenju našoj asimptotskoj aproksimaciji.

Proučene na primeru oscilacije se nazivaju r e l a k s a c i o n e oscilacije ili ublažene oscilacije. Ove se oscilacije često nazivaju i p r e k i d n e oscilacije, iako ovde prekid ne znači prekid oscilatornog kretanja već se shvata kao trenutna, ili u vremenu veoma kratkom, promena karaktera kretanja-brzine što se iz navedenog primera vidi.

Navedena ovde idealizovana analiza jednačina Van der Pol-a za velike vrednosti parametra  $\varepsilon$ , može biti primenjena u opštem slučaju za izučavanje nelinearnih oscilatornih sistema za  $\varepsilon \gg 1$ . Pri takvoj analizi mi možemo za veliko  $\varepsilon$  da u jednačini zanemarimo inercioni član i u rezultatu da dobijemo diferencijalnu jednačinu prvog reda

$$F\left(\frac{dx}{dt}\right) + x = 0 \quad (3)$$

koja karakteriše relaksacione oscilacije, pri čemu je mnogo zgodnije tu jednačinu rešiti po  $\frac{dx}{dt}$  i napisati je u obliku

$$\frac{dx}{dt} = \phi(x) \quad (4)$$

gde je  $\phi(x)$  određena v i š e z n a č n a funkcija, što je povezano sa brojem graničnih stabilnih i nestabilnih trajektorija. Uočili smo još i osobinu da se relaksacione oscilacije odvijaju bez spoljašnjih periodičkih sila pa je zato normalno jednačinu (4) nazvati jednačinom slobodnih relaksacionih oscilacija.

Relaksacione oscilacije su jedan poseban oblik samopobudnih oscilacija. Relaksacione oscilacije se u mehanici najčešće javljaju u sistemima sa trenjem pa srećemo i naziv f r i k c i o n e oscilacije.

Ako na površini energije razmotrimo relaksacione oscilacije (slika 66) uočićemo da je reprezentativna tačka "preskočila" iz jedne tačke na drugu - tj. sa jednog nivoa na drugi, tako da se na faznoj trajektoriji javlja skok - prekid. Zavisno od toga u koliko malom vremenskom intervalu se odvija promena brzine imamo nazive "mekša pobuda" i "impulsivna samopobuda".

Periodične smopobudne oscilacije, čija se granična trajektorija lomi u nekim tačkama nazivamo prekidnim ili relaksacionim oscilacijama. Kao primer, prekidnih oscilacija je i primer oscilatora sa suvim trenjem na beskonačnoj pokretnoj traci (kaišu). Na slici 67 je prikazan mehanički sistema sa masom  $m$  bloka, koji osciluje slobodno na grubom kaišu, koji se kreće brzinom  $v$ , koji je preko linearne opruge povezan sa nepokretnim suportom. Ako je brzina kaiša specijalno izabrana blok neće relativno mirovati na kaišu već će vršiti trzajne oscilacije, koje nastaju kao rezultat promenljive sile suvog trenja, koje je funkcija brzine relativnog klizanja  $\dot{s}$  bloka u odnosu na kaiš. Na skiciranom dijagramu je prikazana zavisnost sile trenja  $-\mathcal{F}(\dot{s})$  od brzine klizanja  $\dot{s}$ , a znak minus je iz razloga što je sila trenja suprotnog znaka od brzine relativnog klizanja. Kada masa bloka relativno miruje u odnosu na kaiš, sila trenja je numerički veoma velika, a zatim se smanjuje do izvesne kritične vrednosti posle čega ponovo raste sa brzinom.

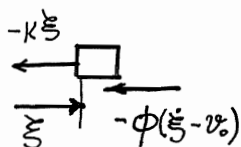
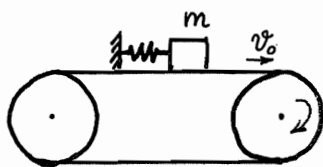
Usvojimo za koordinatu pomeranja bloka od položaja kada opruga ne trpi deformaciju  $\xi$  i relativnu brzinu klizanja izražavamo u obliku

$$\dot{s} = \dot{\xi} - v_0 \quad (5)$$

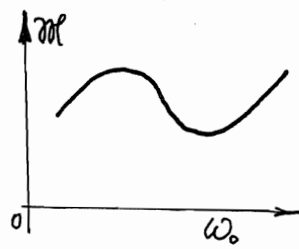
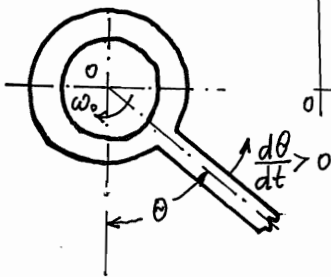
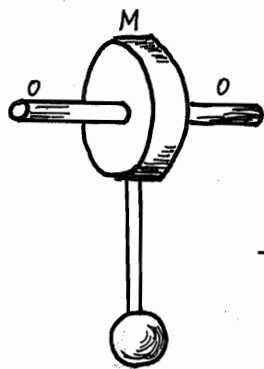
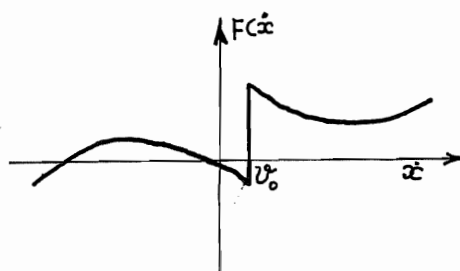
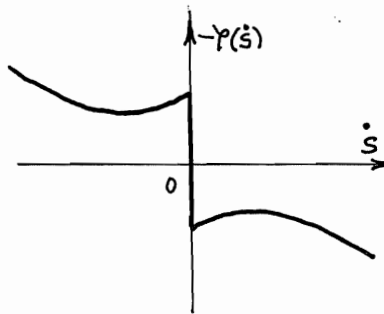
Jednačinu kretanja bloka možemo da napišemo u obliku

$$m \ddot{\xi} + \mathcal{F}(\dot{s}) + c \xi = m \ddot{\xi} + \mathcal{F}(\dot{\xi} - v_0) + c \xi = 0 \quad (6)$$

gde je  $c$  krutost opruge.



Sl.67 a, b i c



Sl.68



Kako je položaj ravnoteže mase bloka

$$\xi_r = -\frac{1}{c} \varphi(-v_0) \quad (7)$$

to je prirodno uzeti za promenljivu  $x$ , koja meri rastojanje bloka od njegovog položaja ravnoteže pod dejstvom sile opruge i sile trenja, pri čemu je

$$x = \xi + \frac{1}{c} \varphi(-v_0) \quad (8)$$

pa je diferencijalna jednačina kretanja

$$\ddot{x} + F(\dot{x}) + \kappa^2 x = 0 \quad (9)$$

gde je  $\kappa^2 = \frac{c}{m}$

$$F(\dot{x}) = \frac{1}{m} [\varphi(\dot{x} - v_0) - \varphi(-v_0)] \quad (10)$$

Funkcija  $mF(\dot{x})$  prikazana je na slici 67 c i vidi se da kada  $v_0$  nije suviše veliko da se ta funkcija  $mF(\dot{x})$  ponaša slično po obliku kao i funkcija  $\varphi(\dot{s})$ .

Rayleigh je proučavao oscilacije na struni violine, koje se javljaju zbog prevlačenja gudala u jednom pravcu i promenljivosti suvog trenja između gudala i strune. Samopobudne oscilacije se javljaju i pri čegrtanju kočionih papuča na točkovima vagona. Propadanje mosta Takoma pripisano je jakoj samopobudnoj oscilaciji.

Na slici 68 je prikazano klatno sa mufom kod koga se pojavljuju samopobudne oscilacije usleg suvog trenja koje se javlja kao uzrok "kovitlanju" klatna. Klatno je nasadjeno na vratilo 0, koje se okreće konstantnom ugaonom brzinom  $\omega$ . Trenje mufa pri okretanju vratila je poznato. Označimo sa  $\theta$  otklon ose klatna sa vertikalom, sa  $J$  moment inercije klatna, sa  $\lambda \frac{d\theta}{dt}$  moment sile trenja klatna o vazduh proporcionalan brzini i sa  $m\ell = F(v)$  moment sile trenja između mufa i vratila, a zbog jednostavnosti problema pretpostavimo da

zavisi od brzine  $v$ , gde je

$$v = \omega_0 + \frac{d\theta}{dt} \quad (11)$$

Jednačina kretanja klatna je sada

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda \frac{d\theta}{dt} + F\left(\omega_0 + \frac{d\theta}{dt}\right) + mgs \sin\theta = 0 \quad (12)$$

Na dijagramu slika 68 b je data zavisnost  $\mathcal{M} = F(v)$ . Ako  $\omega_0$  budemo tako odabrali da bude apscisa prevojne tačke, tj. da je  $F''(\omega_0) = 0$ , pri čemu je  $F'(\omega_0) + \lambda < 0$  i  $F'''(\omega_0) > 0$  onda možemo da moment trenja razvijemo u potencijalni red kao

$$\mathcal{M} = F\left(\omega_0 + \frac{d\theta}{dt}\right) = F(\omega_0) + F'(\omega_0) \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2!} F''(\omega_0) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{3!} F'''(\omega_0) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^3 + \dots \quad (13)$$

pa za male oscilacije klatna da dobijemo jednačinu oscilovanja u obliku

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{J} \left\{ F(\omega_0) + [F'(\omega_0) + \lambda] \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{6} F'''(\omega_0) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^3 \right\} + \frac{mgs}{J} \theta = 0 \quad (14)$$

ili

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta_1}{dt^2} - \varepsilon \left[ \frac{d\theta_1}{dt} - \frac{\alpha}{3} \left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^3 \right] + \kappa^2 \theta_1 &= 0; & \kappa^2 &= \frac{mgs}{J}; & \varepsilon &= \frac{F'(\omega_0) + \lambda}{J}; \\ \beta &= \frac{1}{J} F(\omega_0); & \alpha &= \frac{1}{2} F'''(\omega_0) [F'(\omega_0) + \lambda]^{-1} \end{aligned} \quad (15)$$

gde je  $\theta_1 = \theta + \frac{\beta}{\kappa}$ . Ova jednačina je oblika Van der Pol-ove diferencijalne jednačine.

Jednačina (15) se može napisati u opštem obliku

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \varepsilon F\left(\frac{d\theta}{dt}\right) + \kappa^2 \theta = 0 \quad (16)$$

Ova jednačina u opštem obliku opisuje relaksacione oscilacije. U produžetku ćemo proučiti jedan primer kada funkcija ima oblik sastavljen iz odsečaka pravih kao na slici 69 a i b, a analitički to možemo izraziti u obliku

$$\ddot{x} + \varepsilon x + \begin{cases} +\varepsilon \dot{x} = 0 & \text{za } |\dot{x}| \leq 1 \\ -\varepsilon(2-\dot{x}) = 0 & \text{za } |\dot{x}| > 1 \\ +\varepsilon(2+\dot{x}) = 0 & \text{za } |\dot{x}| < -1 \end{cases} \quad (17)$$

Ovakvim odsečcima se može zameniti i krivolinijska karakteristika sile prigušivanja.

U graničnom slučaju kada  $\varepsilon \rightarrow \infty$  i kada je  $\xi = \frac{x}{2}$  u ravni  $(\xi, \dot{x})$  se kao kriva graničnog ciklusa može aproksimativno da usvoji kriva sa slike 69 a, zadata analitički u obliku

$$\xi = \begin{cases} \pm 1 \\ -(2-\dot{x}) \\ -(2+\dot{x}) \end{cases} \quad (18)$$

U tom slučaju period oscilovanja je

$$T = \int \frac{dx}{\dot{x}} = 2\varepsilon \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\dot{x}} = 2\varepsilon \int_1^3 \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = 2\varepsilon \ln 3 \quad (19)$$

Opšte rešenje kretanja za ovaj slučaj je

$$x = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} & \text{za } |\dot{x}_1| \leq 1 \\ 2 + C_3 e^{-\lambda_1 t} + C_4 e^{-\lambda_2 t} & \text{za } |\dot{x}_1| \geq 1 \\ -2 + C_5 e^{\lambda_1 t} + C_6 e^{\lambda_2 t} & \text{za } \dot{x}_1 \leq -1 \end{cases} \quad (20)$$

gde se  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  odredjuju unošenjem pretpostavljenih rešenja u jednačine sistema (17) i iz uslova da one budu zadovoljene. Tada dobijamo za

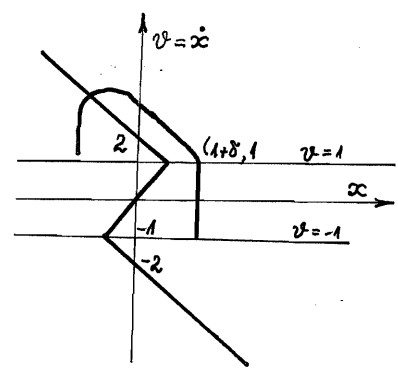
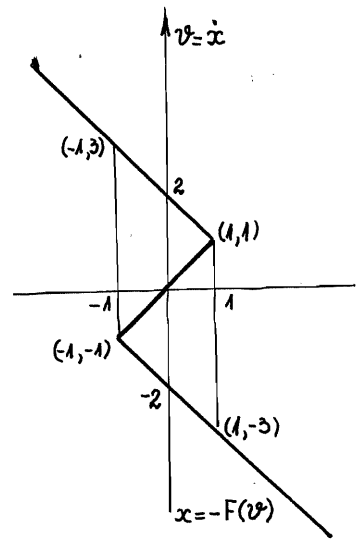
$$\lambda_{1/2} = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4}}{2} \quad (21)$$

$C_i$  su konstante koje treba odredjivati za početne uslove i za uslove u tačkama lomljenja pravih  $(-1, 3)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(-1, -1)$  i  $(1, -3)$ .

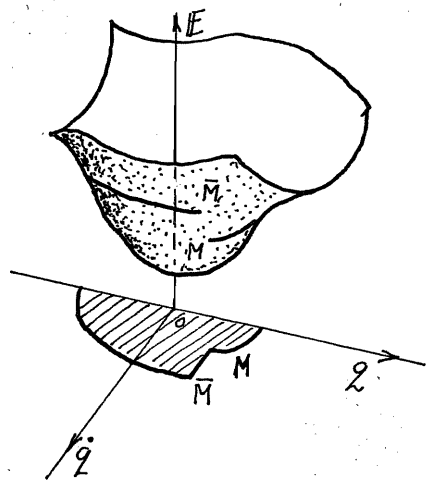
Korene karakteristične jednačine možemo dobiti i u vidu stepenih redova po  $\varepsilon$  kao

$$\lambda_1 = \varepsilon \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon^4} - \frac{2}{\varepsilon^6} - \frac{5}{\varepsilon^8} - \frac{14}{\varepsilon^{10}} - \dots \right)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon^4} + \frac{5}{\varepsilon^6} + \frac{14}{\varepsilon^8} + \dots \right)$$
(22)



Sl. 69 a i b



Sl. 66

## VIII G l a v a

## REOLINEARNE OSCILACIJE

## 1. INTEGRALJENJE POMOĆU POTENCIJALNIH REDOVA

Sistem koji vrši reolinearne (reonomne) oscilacije se može pretstaviti diferencijalnom jednačinom oblika

$$\frac{d^2x}{dt^2} + P(t)\frac{dx}{dt} + Q(t)x = 0 \quad (1)$$

odakle se vidi da su kod ovih sistema kvazielastični i otporni koeficijent proizvoljne funkcije vremena. U opštem slučaju ovakve diferencijalne jednačine se mogu integraliti pomoću redova. Ovde će biti proučena primena Taylor-ovog i Maclaurin-ovog reda. Rešenje diferencijalne jednačine (1) se može pretpostaviti u obliku reda

$$x = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu} (t-t_0)^{\nu} \quad (2)$$

čiji su koeficijenti  $A_{\nu}$  konstante, koje se lako mogu odrediti tako da zadovoljavaju jednačinu (1) i početne uslove  $t=t_0$ ,  $x=x_0$  i  $\dot{x}=\dot{x}_0$ .

Kao primer nalaženja rešenja reolinearnih jednačina potražićemo rešenje slobodnih oscilacija oscilatora sa prigušivanjem čiji je otporni koeficijent linearna funkcija vremena. Tađa se jednačina oscilovanja može napisati u obliku

$$\ddot{x} + t\dot{x} + x = 0 \quad (3)$$

čije opšte rešenje možemo pretpostaviti u obliku Maclaurin-ovog reda

$$x = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu} t^{\nu} \quad (4)$$

Unošenjem ovog reda i njegovih izvoda u jednačinu (3) dobijamo

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} [(\nu+2)(\nu+1)A_{\nu+2} + (\nu+1)A_{\nu}] t^{\nu} = 0 \quad (5)$$

Odakle izjednačavajući sa nulom sabrane koeficijente uz iste stepene  $t$  dobijamo rekurentnu formulu za izračunavanje koeficijenata pretpostavljenog rešenja, kao

$$A_{\nu+2} = -\frac{1}{\nu+2} A_{\nu} \quad (6)$$

gde je  $\nu = 0, 1, 2, \dots, \infty$ . Pomoću formule (6) dolazimo do izraza za koeficijente sa parnim indeksom

$$A_{2n} = (-1)^n \frac{A_0}{(2n)!!} \quad (7)$$

i neparnim indeksom

$$A_{2n+1} = (-1)^n \frac{A_1}{(2n+1)!!} \quad (8)$$

Rešenje se sada može napisati u obliku reda sa poznatim koeficijentima

$$x = A_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!!} + A_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!!} \quad (9)$$

ili

$$x = A_0 p_1(t) + A_1 p_2(t) \quad (10)$$

gde su

$$p_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!!} = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (11)$$

$$p_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!!}$$

a konstante  $A_0$  i  $A_1$  se odredjuju iz početnih uslova.

Primer reolinearnih oscilacija je i u slučaju kada je koeficijent krutosti opruge stepena funkcija vremena kao  $t^p$ , a takodje i otporni koeficijent stepena funkcija vremena kao  $t^q$ , gde je  $q$  eksponent, pa je jednačina oscilovanja

$$\ddot{x} + q t^q \dot{x} + p t^p x = 0 \quad (12)$$

Rešenje pretpostavimo u obliku reda (4) čijim se unošenjem u jednačinu (12) dobija

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+2)(\nu+1) A_{\nu+2} t^{\nu} + q \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu A_{\nu} t^{\nu+q-1} + p \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu} t^{\nu+p} = 0 \quad (13)$$

Da bi se ova jednačina identički svela na nulu potrebno je da je zbir koeficijenata uz iste stepene  $t$  jednak nuli, odakle se dobijaju rekurentne formule za koeficijente reda pretpostavljenog rešenja.

Dalji postupak pokazaćemo na konkretnom primeru kada je  $q=0$  i  $p=2$ . Pa iz (13) dobijamo

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} [(\nu+2)(\nu+1) A_{\nu+2} + 2 A_{\nu}] t^{\nu} = 0 \quad (14)$$

Odakle je

$$A_2 = 0; \quad A_3 = 0; \quad A_{\nu+4} = -\frac{2}{(\nu+4)(\nu+3)} A_{\nu}; \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (15)$$

Može se uočiti zakonitost da su 2,6,10,... -ti i 3,7,11,... -ti koeficijenti jednaki nuli, a da se ostali koeficijenti mogu grupisati u dve grupe i definisati pomoću izraza oblika

$$A_{4n} = (-1)^n \frac{2A_0}{[(4n-1)(4n)]!!} \quad (16)$$

$$A_{4n+1} = (-1)^n \frac{2A_1}{[4n(4n+1)]!!}$$

pa se rešenje može napisati u obliku

$$x = 2A_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{4n}}{[(4n-1)(4n)]!!} + 2A_1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{4n+1}}{[4n(4n+1)]!!} \quad (17)$$

Za slučaj kada je  $p=1$  i  $q=0$  rešenje se dobija u obliku

$$x = A_0 \left[ 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{t^{3\nu}}{[(3\nu-1)3\nu]!!} \right] + A_1 \left[ 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{t^{3\nu+1}}{[3\nu(3\nu+1)]!!} \right] \quad (18)$$

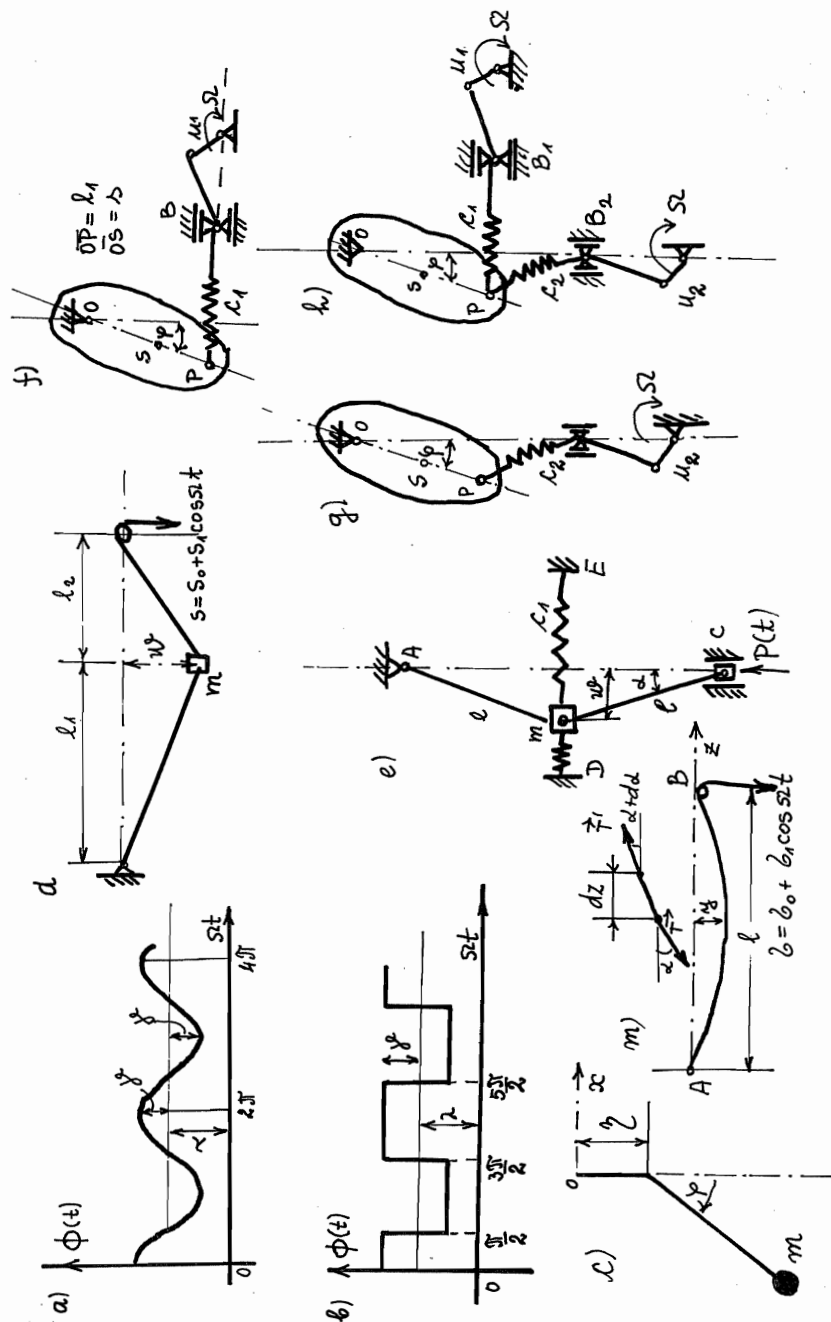
## 2. HILL-OVA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Diferencijalna jednačina oblika

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \phi(t)x = 0 \quad (1)$$

je Hill-ova diferencijalna jednačina i karakteriše reolinerarni sistem gde je karakteristika elastične sile linearna, ali je krutost opruge funkcija vremena. U specijalnim slučajevima funkcija  $\phi(t)$  može biti periodička funkcija vremena. Na priloženoj slici 70 a i b se vide dva primera periodičke funkcije  $\phi(t)$ . Kada je  $\phi(t) = \lambda + \mu \cos \Omega t$  onda je to Mathieu-ova di-





Sl.70 a, b, e, d, e, f, g, h, m

ferencijalna jednačina, dok je za slučaj  $\phi(t) = (\lambda + \gamma \cos 2\Omega t)^{-1}$  Weigand-ova (Hill-ova) diferencijalna jednačina. Za slučaj kada je  $\phi(t) = \lambda \pm \gamma$  gde se znak + uzima za  $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ , a znak - za  $\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$  kao što je na slici 70 b naznačeno imamo Meissner-ovu diferencijalnu jednačinu.

I. Matematičko klatno sa pokretnom tačkom vešanja nacrtano na slici 70 c sa označenim potrebnim veličinama osciluje oko ravnotežnog položaja pri čemu se tačka vešanja klatna harmonijski kreće po zakonu  $\eta = a \cos \Omega t$  od tačke 0 u kojoj postavimo koordinatni sistem  $Oxy$ . Koordinate klatna su

$$x = -l \sin \varphi ; \quad y = \eta + l \cos \varphi = a \cos \Omega t + l \cos \varphi \quad (2)$$

pa su kinetička i potencijalna energija

$$E_k = \frac{m}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 + a^2 \Omega^2 \sin^2 \Omega t + 2a l \Omega \dot{\varphi} \sin \Omega t \sin \varphi) \quad (3)$$

$$E_p = -mgl \cos \varphi$$

Ako primenimo Lagrange-ove jednačine druge vrste za koordinatu  $\varphi$  dobijamo diferencijalnu jednačinu kretanja

$$\ddot{\varphi} + \left( \frac{g}{l} + \frac{a\Omega^2}{l} \cos \Omega t \right) \sin \varphi = 0 \quad (4)$$

Ako pretpostavimo da su oscilacije male onda je  $\sin \varphi \approx \varphi$  i stavljajući da je  $\Omega t = \xi$  diferencijalna jednačina kretanja postaje

$$\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + (\lambda + \gamma \cos \xi) \varphi = 0 \quad (5)$$

a oblika je Mathieu-ove diferencijalne jednačine.

II. Diferencijalna jednačina kretanja mase okačene o nerastegljiv konac zanemarljive mase pri čemu na konac dejstvuje sila  $S = S_0 + S_1 \cos \Omega t$  male amplitude  $S_1$ , je oblika

Mathieu-ove jednačine. Sa slike 70 d se vidi položaj mase prema tačkama vešanja A i B. Sa  $S$  je označena sila u delu konca koji se zateže. Sila koja dejstvuje na masu u pravcu pomeranja je

$$F = S \sin \varphi_1 + S \sin \varphi_2 \approx S w \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2} \quad (6)$$

a na osnovu nje možemo pisati diferencijalnu jednačinu kretanja mase u pravcu

$$m \ddot{w} + S w \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) = 0 \quad (7)$$

Kako je sila  $S = S_0 + S_1 \cos \varrho t$  gde je  $S_0$  sila prethodnog zatezanja u struni, a  $S_1$  amplituda periodičke sile onda je diferencijalna jednačina kretanja

$$\frac{d^2 w}{d \varrho^2} + (\lambda + \beta \cos \varrho) w = 0 \quad (8)$$

u kojoj su  $\varrho = \Omega t$ ,  $\lambda = \frac{1}{\Omega^2} \frac{S_0}{m} \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right)$  i  $\beta = \frac{1}{\Omega^2} \frac{S_1}{m} \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right)$ .

III. Kao primer da se problem oscilovanja svodi na rešavanje Mathieu-ove diferencijalne jednačine posmatramo zakon oscilovanja mase sa slike 70 e, gde je prikazan raspored opruga i poluga. U tački C dejstvuje sila promenljiva sa vremenom  $p(t) = P_0 + P_1 \cos \Omega t$ , a koja se dobija posredstvom krivajnog mehanizma i jedne opruge. Krivajni mehanizam se okreće ugaonom brzinom  $\Omega$ . Sa  $\mathcal{L}_1$  označimo konstantu opruge, a sa  $K$  silu proizvedenu dejstvom sile  $p(t)$ , u pravcu oscilovanja mase. Ako je ugao  $\alpha$  mali onda je  $K \approx p \alpha = p \frac{w}{\ell}$  pa se jednačina oscilovanja mase  $m$  dobija u obliku

$$\ddot{w} + w \left[ \frac{\mathcal{L}_1}{m} - \frac{1}{\ell m} (P_0 + P_1 \cos \Omega t) \right] = 0 \quad (9)$$

Ako uvedemo promenljivu  $\vartheta = \Omega t$  i konstante

$$\frac{1}{m\Omega^2} \left( \mathcal{C}_1 - \frac{P_0}{l} \right) = \lambda ; \quad \gamma = - \frac{P_1}{lm\Omega^2}$$

jednačina (9) postaje Mathieu-ova diferencijalna jednačina

$$\mathcal{W}^{**} + (\lambda + \gamma \cos \vartheta) \mathcal{W} = 0 \quad (10)$$

IV. Na slici 70 f, g, h prikazana je grupa fizičkih klatna na koja dejstvuje posredstvom opruga krivajni mehanizam, a čije se kretanje može opisati takodje Mathieu-ovom diferencijalnom jednačinom. Ako je sa  $\varphi$  obeležen ugao otklona klatna, onda je jednačina kretanja za:

klatno obeleženo sa f

$$J\ddot{\varphi} + (mg\Delta + \mathcal{C}_1 l_1^2) \varphi = \mathcal{C}_1 \mu_1 l_1^2 \cos \Omega t \quad (11)$$

klatno obeleženo sa g

$$J\ddot{\varphi} + mg\Delta \varphi + \mathcal{C}_2 l_2 \left( 1 + \frac{l_1}{l_2} \right) (\mu_0 + \mu_2 \cos \Omega t) \varphi = 0 \quad (12)$$

klatno obeleženo sa h

$$\mathcal{W}^{**} + \mathcal{W}(\lambda + \gamma \cos \vartheta) = H \cos \vartheta \quad (13)$$

pri čemu su skraćeno obeležene sledeće veličine

$$\vartheta = \Omega t ; \quad H = \frac{1}{\Omega^2} \frac{\mathcal{C}_1 l_1 \mu_1}{m k_0^2} ; \quad J = m k_0^2 ; \quad l = \frac{k_0^2}{\Delta} ; \quad \gamma = \frac{\mathcal{C}_2 l_1 \mu_2}{m k_0^2 \Omega^2} \left( 1 + \frac{l_1}{l_2} \right) ;$$

$$\lambda = \frac{g}{l\Omega^2} + \frac{\mathcal{C}_1 l_1^2}{m k_0^2 \Omega^2} + \frac{\mathcal{C}_1 l_1 \mu_1}{m k_0^2 \Omega^2} \left( 1 + \frac{l_1}{l_2} \right)$$

V. U slučaju transverzalnih oscilacija žice zategnute na krajevima i gde u svakom poprečnom preseku dejstvuje normalni napon  $\delta$  promenljiv sa vremenom, a pada u pravac same žice, smatramo da se zbog potpune savitljivosti žice tangencijalni naponi ne javljaju. Žica se povlačenjem izvede iz

ravnotežnog položaja (vidi sliku 70 m) i pusti da osciluje u ravni  $Ozy$ , te je pomeranje svake tačke funkcija vremena  $t$  i apscise  $z$ ; smatramo takodje da je  $ds = dz\sqrt{1+y'^2} \approx dz$ . Kako je  $y'$  vrlo malo stavimo da je  $ds \approx dz$  i zanemarimo  $\frac{\partial \phi}{\partial z} dz$  - pri-  
raštaj normalnog napona, jer ne utiče na treperenje žice, već samo na pravac u krajnjim tačkama elementa. Zanemarujemo uti-  
caj spoljašnjih sila i pišemo da je  $\vec{F} = \partial A (\vec{T}' - \vec{T})$ . Projekcije ove sile se dobijaju skalarnim množenjem sile ortovima  $\vec{k}$  i  $\vec{j}$ , što daje

$$\begin{aligned} Z &= (\vec{F}, \vec{k}) = \partial A [\cos(\alpha + d\alpha) - \cos\alpha] \\ Y &= (\vec{F}, \vec{j}) = \partial A [\sin(\alpha + d\alpha) - \sin\alpha] \end{aligned} \quad (14)$$

Za vrlo male oscilacije je  $\cos(\alpha + d\alpha) \approx \cos\alpha$ ;  $\sin(\alpha + d\alpha) \approx \sin\alpha + d\alpha \cos\alpha =$   
 $= (\frac{\partial y}{\partial z})_D$ ;  $\sin\alpha \approx (\frac{\partial y}{\partial z})_C$ , pa je  $Z \approx 0$ , dok je sila u pravcu  $y$  jednaka

$$Y = \partial A \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)_D - \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)_C \right] \approx \partial A \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} dz \quad (15)$$

Masa elementa žice je  $\rho A dz$ , a projekcija ubrzanja na pra-  
vac  $y$  je  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ , pa je jednačina transverzalnih oscilacija

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \quad (16)$$

gde je

$$c^2 = \frac{\partial}{\rho} = \frac{\partial_0 + \partial_1 \cos \Omega t}{\rho} \quad (17)$$

Rešenje jednačine (16) može da se traži u obliku proizvoda i  
funkcija  $y(z,t) = Z(z)T(t)$  koje unošenjem u datu jednačinu omoguća-  
vaju da se ista svede na dve obične diferencijalne jednačine

$$\begin{aligned} Z'' + k^2 Z &= 0 \\ T'' + \frac{k^2}{\rho} (\partial_0 + \partial_1 \cos \Omega t) T &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Prva jednačina je linearna, dok je druga oblika Mathieu-ove di-  
ferencijalne jednačine, jer se pomoću  $\xi = \Omega t$ ,  $\lambda = \frac{k^2}{\Omega^2} \frac{\partial}{\rho}$  i

$$\gamma = \frac{k^2 z_1}{\Omega^2 \xi} = \left( \frac{h \pi}{2 \Omega} \right)^2 \frac{z_1}{\xi} \quad \text{može svesti na oblik}$$

(19)

$$T'' + (\lambda + \gamma \cos \vartheta) T = 0$$

#### VI. Diferencijalna jednačina oblika

$$(\lambda + \gamma \cos t) \ddot{x} + \alpha x = 0 \quad (20)$$

je Hill-ova diferencijalna jednačina. Može se uočiti da svojim oblikom izražava promenljivost inercionog koeficijenta.

Kao primer posmatračemo vertikalno vratilo koje se obrće oko svoje ose ugaonom brzinom  $\Omega$ , a na sredini raspona je nasadjen disk čiji glavni momenti inercije nisu jednaki (vidi sliku 71 a). To može biti eliptički disk ili češće se u mašinstvu koristi disk sa zarezima. Posmatračemo oscilacije savijanja vratila pod dejstvom sile  $Y=F$  pa je ugib u pravcu  $Oy$  ose

$$f_y = \frac{Fl^3}{48E} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{J_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{J_2} \right) \quad (21)$$

Krutost vratila je

$$C = \frac{F}{f_y} = \frac{48E}{l^3} \frac{2J_1 J_2}{J_1 + J_2 + (J_2 - J_1) \cos 2\Omega t} \quad (22)$$

Jednačina oscilovanja je

$$m \ddot{y} + \frac{48E}{l^3} \frac{2J_1 J_2}{J_1 + J_2} \frac{y}{1 + \frac{J_2 - J_1}{J_1 + J_2} \cos 2\Omega t} = 0 \quad (23)$$

Ako uvedemo oznake

$$C_0 = \frac{48E}{l^3} \frac{2J_1 J_2}{J_1 + J_2}; \quad \mathcal{K} = \frac{J_2 - J_1}{J_2 + J_1}; \quad \lambda = \frac{m \Omega^2}{C_0}; \quad \gamma = \frac{m \mathcal{K}}{C_0} \Omega^2 \quad (24)$$

i smenu promenljive  $\vartheta = \Omega t$ , onda se jednačina (23) svodi na Hill-ovu diferencijalnu jednačinu oblika

$$(\lambda + \mathcal{K} \cos 2\mathcal{E}) \frac{d^2 y}{d\mathcal{E}^2} + y = 0 \quad (25)$$

Kako je  $\mathcal{K} = \frac{J_1 - J_2}{J_1 + J_2}$ , to  $\mathcal{K}$  može da bude mnogo manji od jedinice kada se glavni momenti inercije malo razlikuju, pa se može uzeti da je približno

$$\frac{1}{1 + \mathcal{K} \cos 2\mathcal{E}} \approx 1 - \mathcal{K} \cos 2\mathcal{E}$$

i Hill-ova (Weigand-ova) diferencijalna jednačina (25) se može svesti na Mathieu-ovu diferencijalnu jednačinu oblika

$$\frac{d^2 y}{d\mathcal{E}^2} + \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 (1 - \mathcal{K} \cos 2\mathcal{E}) y = 0 \quad (26)$$

#### VIII. Diferencijalna jednačina oblika

$$\ddot{x} + \mathcal{P}(t) \dot{x} + Q(t) x = 0 \quad (27)$$

se pomoću smene  $x = z U(t)$  može svesti na jednačinu

$$U \ddot{z} + (2\dot{U} + \mathcal{P}U) \dot{z} + (\ddot{U} + \mathcal{P}\dot{U} + QU) = 0 \quad (28)$$

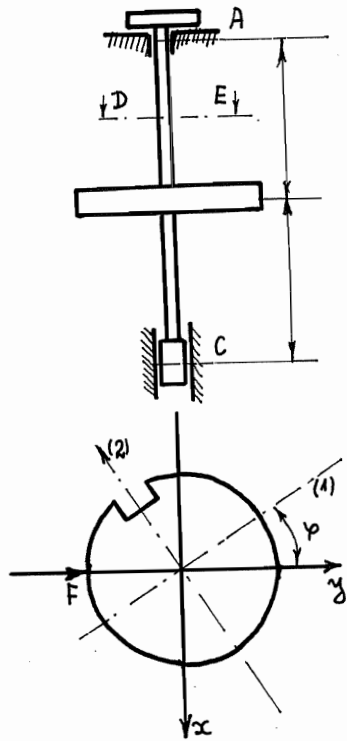
Ako smo funkciju  $U(t)$  tako izabrali da je

$$U(t) = e^{-\int \frac{1}{2} \mathcal{P}(t) dt} \quad \text{ili} \quad 2\dot{U} = -\mathcal{P}U \quad (29)$$

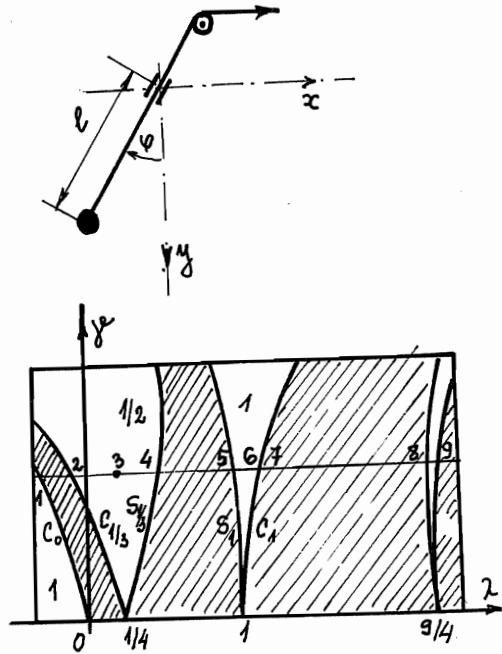
onda jednačinu (28) dobijamo u obliku

$$\ddot{z} + \left(Q - \frac{1}{4} \mathcal{P}^2 - \frac{1}{2} \dot{\mathcal{P}}\right) z = 0 \quad (30)$$

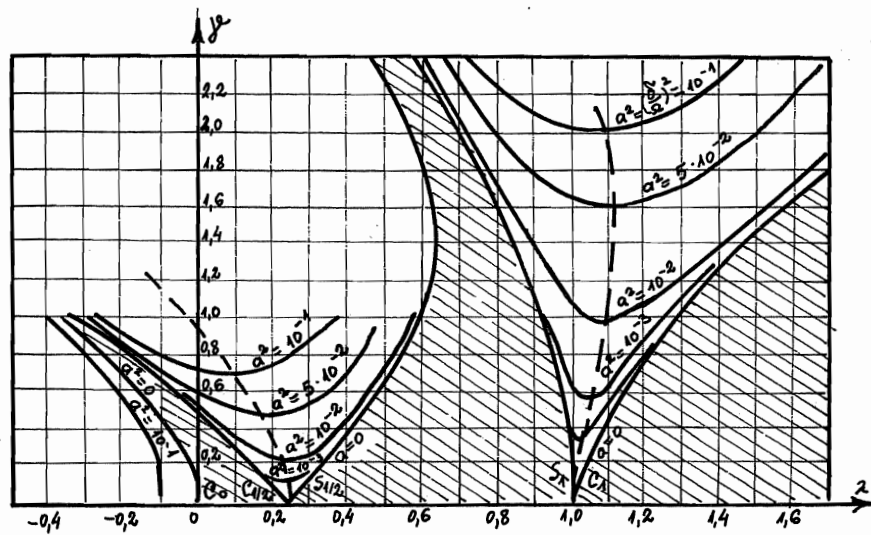
što je oblika Hill-ove diferencijalne jednačine. Izraz u zagradi  $\left(Q - \frac{1}{4} \mathcal{P}^2 - \frac{1}{2} \dot{\mathcal{P}}\right)$  naziva se invarijantom jednačine.



Sl.71 a



Sl.72 a i b



Sl.73



IX. Ako se dužina matematičkog klatna periodički menja (slika 72 b) po zakonu  $l = l_0(1 + \varepsilon \cos \omega t)$  onda je diferencijalna jednačina oscilovanja oblika

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{\dot{l}(t)}{l(t)} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l(t)} \varphi = 0 \quad (31)$$

gde je  $\varphi$  otklon klatna od vertikalnog položaja. Ova se jednačina može svesti na Hill-ovu diferencijalnu jednačinu koristeći se postupkom izloženim i delu VIII.

### 3. MATHEIU-OVA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Kao što smo rekli, Mathieu-ova diferencijalna jednačina obuhvaćena je opštom grupom Hill-ovih jednačina  $\ddot{z} + I(\varphi)z = 0$ , gde je  $I(\varphi) = \lambda + \mu \cos 2\varphi$  i najčešće se sreće napisana u obliku

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} + (\lambda + \mu \cos 2\varphi)y = 0 \quad (1)$$

Ova jednačina je veoma važna u tehnici. Iz nekoliko priloženih primera u prethodnom članu 2, može se videti priroda sistema, koje možemo pretstaviti Mathieu-ovom diferencijalnom jednačinom. Široka primena je dovela do toga da je ova jednačina veoma mnogo ispitivana sa ciljem odredjivanja stabilnosti kretanja pri promeni parametara  $\lambda$  i  $\mu$ . Sa matematičkog stanovišta njena su rešenja detaljno ispitana i odredjen je potpuno tip rešenja. Medjutim i pored toga u većoj meri su poznata samo numerička rešenja.

Odredjivanje stabilnosti rešenja zahteva poznavanje izvesnih činjenica o rešenjima jednačine (1). Izučava-

nje rešenja jednačine (1) počecemo sa nekim rešenjem  $y(\vartheta)$ , za koje smatramo da nije ni parna ni neparna funkcija od  $\vartheta$ , a što važi i za  $y(-\vartheta)$  pa bi bilo očevidno da  $y(\vartheta)$  i  $y(-\vartheta)$  čine fundamentalni par rešenja. Zbir fundamentalnog para rešenja  $y(\vartheta) + y(-\vartheta)$  bi onda bilo parno rešenje, a razlika  $y(\vartheta) - y(-\vartheta)$  neparno rešenje. Jednačina (1) ne može da ima dva parna rešenja koja su linearno nezavisna, jer tada ne bi bili zadovoljeni početni uslovi  $y(0) = 0$  i  $y'(0) = 1$ , što važi i za neparno rešenje. Možemo zaključiti da Mathieu-ova diferencijalna jednačina ima osnovni par rešenja  $y_1$  i  $y_2$  od kojih je jedno parna, a drugo neparna funkcija od  $\vartheta$ .

Ako rešenje  $y(\vartheta)$  ima period  $2\pi$  onda ga možemo napisati u obliku Fourier-ovog reda kao

$$y(\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta) \quad (2)$$

Unošenjem ovog reda u Mathieu-ovu diferencijalnu jednačinu dobijamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(\lambda - n^2)a_n + \frac{\gamma}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})] \cos n\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} [(\lambda - n^2)b_n + \frac{\gamma}{2}(b_{n-1} + b_{n+1})] \sin n\vartheta + \frac{1}{2}(a_0\lambda + a_1\gamma) = 0 \quad (3)$$

Da bi ova jednačina bila identički zadovoljena treba da su koeficijenti uz  $\sin n\vartheta$  i  $\cos n\vartheta$  jednaki nuli, a takodje i slobodni član

$$\begin{aligned} \lambda a_0 + \gamma a_1 &= 0 \\ (\lambda - n^2)a_n + \frac{\gamma}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}) &= 0 \\ (\lambda - n^2)b_n + \frac{\gamma}{2}(b_{n-1} + b_{n+1}) &= 0 \\ (\lambda - 1)b_1 + \frac{\gamma}{2}b_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Vrlo često se javlja da je neki od koeficijenata jednak nuli za početne uslove, i onda ako je to koeficijent uz  $\sin n\vartheta$  i svi ostali koeficijenti uz sinuse u redu su jednaki nuli, odnosno rešenje se može napisati kao

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (5)$$

Ako je pak, neki od koeficijenata uz  $\cos nx$  jednak nuli, onda su svi naredni koeficijenti  $a_n$  te je rešenje oblika

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (6)$$

U slučaju kada se rešenje može predstaviti u obliku (5) odnosno (6) rekurentni odnosi (4) se svode na

$$\begin{aligned} a_0 \lambda + a_1 \gamma &= 0 \\ (\lambda - n^2) a_n + \frac{\gamma}{2} (a_{n-1} + a_{n+1}) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

odnosno

$$\begin{aligned} (\lambda - 1) b_1 + \frac{\gamma}{2} b_2 &= 0 \\ (\lambda - n^2) b_n + \frac{\gamma}{2} (b_{n-1} + b_{n+1}) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Kako su jednačine (4) odnosno (7) i (8) homogene, to determinante sistema moraju biti jednake nuli. Za slučaj sistema (4) determinanta sistema je

$$\begin{vmatrix} \lambda & \gamma & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\gamma}{2} & \lambda - 1 & \frac{\gamma}{2} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{\gamma}{2} & \lambda - 2^2 & \frac{\gamma}{2} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{\gamma}{2} & \lambda - n^2 & \frac{\gamma}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

i često se naziva Hill-ovom determinantom. Za sistem (8) Hill-ova determinanta bi bila

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & \frac{\gamma}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\gamma}{2} & \lambda - 2^2 & \frac{\gamma}{2} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

Hill-ovim determinantama su potpuno određene oblasti  $(\lambda, \gamma)$

koje daju stabilna rešenja Mathieu-ove diferencijalne jednačine. Vrednosti  $\lambda$  i  $\gamma$  iz determinante (10) su tranzitne vrednosti i nalaze se na prelazu iz stabilne u nestabilne oblasti. Na isti način se mogu odrediti prelazne vrednosti za  $\lambda$  i  $\gamma$ , koje odgovaraju periodičkim rešenjima periode  $4\mathcal{T}$ . Na ovaj način se mogu potpuno odrediti oblasti stabilnosti. Na slikama 74 i 75 su prikazane oblasti stabilnosti u ravni  $(\lambda, \gamma)$  koje su osenčene, dok su oblasti nestabilnosti bele. Stabilne oblasti su zajedno spojene u tačkama  $\lambda = n^2/4$ ,  $\gamma = 0$ , gde je  $n$  ceo broj. Za ove vrednosti  $\lambda = n^2/4$  i  $\gamma = 0$  jednačina (1) je oblika

$$\frac{d^2 y}{d\mathcal{T}^2} + \frac{n^2}{4} y = 0 \quad (11)$$

i njeno rešenje je

$$y(\mathcal{T}) = A \cos \frac{n}{2} \mathcal{T} + B \sin \frac{n}{2} \mathcal{T} \quad (12)$$

u kome  $\sin \frac{n}{2} \mathcal{T}$  i  $\cos \frac{n}{2} \mathcal{T}$  čine fundamentalni par rešenja, jer njima obuhvatamo sva periodička rešenja i to za  $n$  parno imaju period  $2\mathcal{T}$ , a za  $n$  neparno period  $4\mathcal{T}$ . Pokazano je da za velike vrednosti  $\gamma$  stabilne oblasti postaju veoma uzane i teže ka krivim koje imaju nagib  $(-1)$ . Za negativne vrednosti  $\lambda$  oblasti stabilnosti postaju veoma uske. Za  $\lambda = \frac{n^2}{4}$ ,  $\gamma = 0$  granične tačke stabilnih oblasti su na  $\lambda$ -osi i pripadaju stabilnim oblastima i one su jedine tranzitne tačke koje imaju ovo svojstvo.

Opšte rešenje jednačine (1) je

$$y(\mathcal{T}) = A e^{\mu \mathcal{T}} p_1(\mathcal{T}) + B e^{-\mu \mathcal{T}} p_2(\mathcal{T}) \quad (13)$$

gde su  $A$  i  $B$  konstante integracije, koje se odredjuju iz početnih uslova; funkcije  $p_1(\mathcal{T})$  i  $p_2(\mathcal{T})$  su periodičke

funkcije perioda  $2\pi$ , i mogu se napisati u obliku

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{i\nu x} \\ p_2(x) &= \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} b_\nu e^{i\nu x} \end{aligned} \quad (14)$$

i ne zavise od početnih uslova. Koeficijenti rešenja (13) moraju da zadovoljavaju uslove

$$\begin{aligned} [\lambda + (i\nu + \mu)^2] a_\nu + \frac{\gamma}{2} (a_{\nu-1} + a_{\nu+1}) &= 0 \\ [\lambda + (i\nu - \mu)^2] b_\nu + \frac{\gamma}{2} (b_{\nu-1} + b_{\nu+1}) &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

koji se dobijaju zamenom rešenja (13) u jednačinu (1). Broj predstavlja karakteristični eksponent i vezuje partikularna rešenja, tako da nisu nezavisna. Iz sistema jednačina (15) vidi se da koeficijenti funkcija  $p_1(x)$  i  $p_2(x)$  ne zavise od početnih uslova već od parametara  $\lambda$  i  $\gamma$ . Sada se može za razne vrednosti karakterističnog eksponenta da posmatra rešenje (13) diferencijalne jednačine (1).

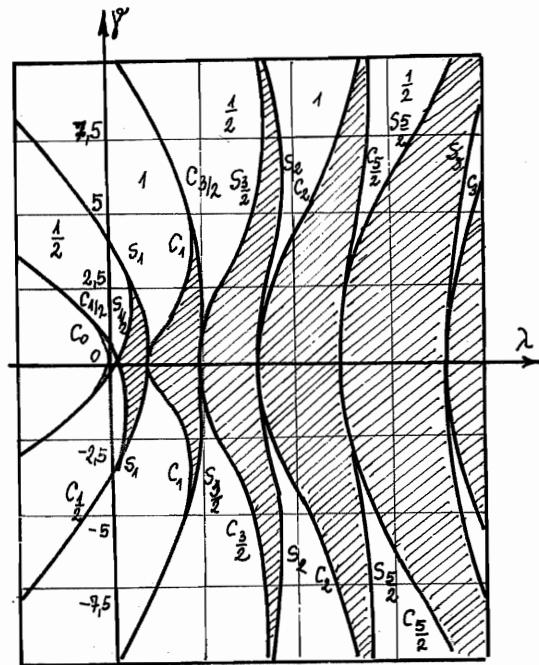
Posmatraćemo tri slučaja:

- I.  $\mu = i\beta$ , čisto imaginarne vrednosti pri čemu je  $\beta \neq \frac{n^2}{2}$ ;
- II.  $\mu = \alpha + \frac{n}{2}i$ , kompleksne vrednosti;
- III.  $\mu = \frac{n}{2}i$ , čisto imaginarne vrednosti, pri čemu uzima vrednosti polovine celih brojeva.

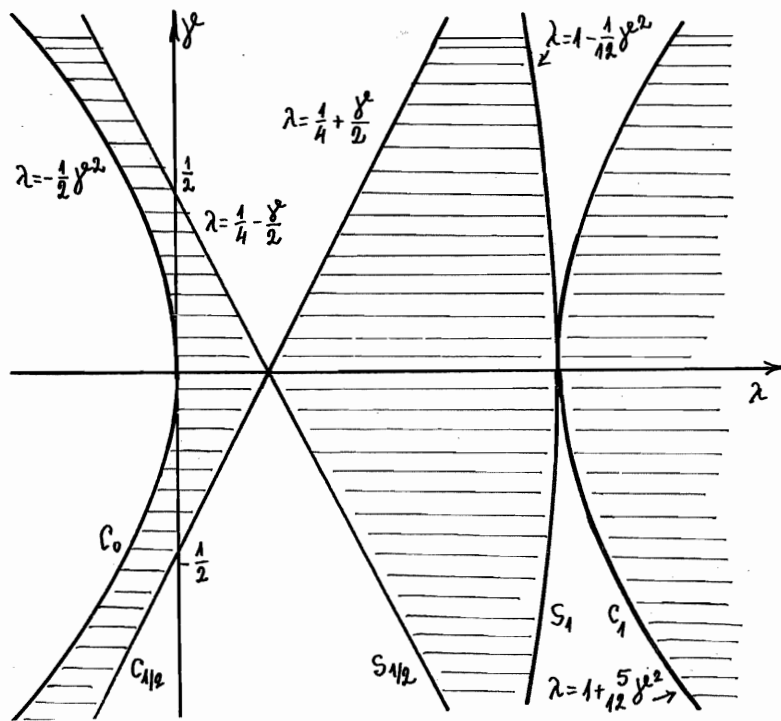
Partikularni integrali jednačine (1) su oblika  $y_{1,2}(x) = e^{\pm \mu x} p_{1,2}(x)$  i zovu se "periodičkim funkcijama druge vrste" mada nisu stvarno periodičke zbog člana  $e^{\pm \mu x}$ .

Za vrednost  $\mu = i\beta$ , t.j. čisto imaginarnu, oba partikularna integrala su ograničena za velike vrednosti  $x$  i rešenje se može napisati kao zbir proizvoda periodičkih funkcija

$$y(x) = C p_1(x) \cos \beta x + D p_2(x) \sin \beta x \quad (16)$$



S1.74



S1.75

i zaključujemo da je kretanje stabilno (slučaj "najstabilnosti" - Stabiler Fall).

Za  $\mu = \alpha + \beta i$ ,  $\beta = \frac{n}{2}$ , bez obzira na znak, jedan od partikularnih integrala postaje neograničen zbog eksponencijalne funkcije  $e^{|\alpha| \xi}$ , koja se neprestano i neograničeno uvećava sa porastom  $\xi$ , te je kretanje nestabilno.

Za  $\mu = \frac{n}{2}i$  rešenje je oblika

$$y(\xi) = A p_3(\xi) + B [\xi p_3(\xi) + p_4(\xi)] \quad (17)$$

gde su  $p_3(\xi)$  i  $p_4(\xi)$  periodičke funkcije perioda  $2\pi$ , odnosno  $4\pi$ , zavisno od toga da li je  $n$  paran ili neparan broj. Funkcija  $p_3(\xi)$  u ovom slučaju je Matheiu-ova funkcija prve vrste, a  $\xi p_3(\xi) + p_4(\xi)$  je Matheiu-ova funkcija druge vrste. Rešenje u ovom slučaju je nestabilno zbog porasta prvog člana sa porastom  $\xi$  kao linearne funkcije.

Pregled parova vrednosti  $\lambda$  i  $\xi$  Matheiu-ove diferencijalne jednačine, koji dovode do ograničenog stabilnog rešenja ili neograničenog labilnog rešenja dali su INCE i STRUTT u Ince-Strutt-ovoj karti, koja je prikazana na slici 74. Granične krive se dobijaju za  $\mu = \frac{n}{2}$  i računamo ih u nestabilna područja. Jedine tačke graničnih krivih koje spadaju u stabilna rešenja su tačke  $\lambda = \left(\frac{n}{2}\right)^2$  na  $\lambda$ -osi. Na istoj karti sa  $C_0$ ,  $S_{1/2}$ ,  $C_{1/2}$ ,  $C_1$ ,  $S_1$ ,  $C_{3/2}$ ,  $S_{3/2}$ , ... obeležene su granične krive stabilnih oblasti. U nestabilnim područjima rešenja su označena znacima  $1/2$  i  $1$  i pokazuju da je nestabilna oscilacija sa pola ili celom frekvencijom  $\Omega$ .

Ovde se javljaju sub- i nadoscilacije kao komponente rešenja. Kada je  $\xi = 0$  jednačina se svodi na jednačinu sa konstantnim koeficijentima

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (18)$$

čija su rešenja

$$y = A \cos \xi \sqrt{\lambda} + B \sin \xi \sqrt{\lambda} \quad (19)$$

ili

$$y(\varrho) = C e^{\varrho \sqrt{|\lambda|}} + D e^{-\varrho \sqrt{|\lambda|}} \quad (20)$$

odakle se vidi da se za  $\lambda > 0$  dobijaju stabilna rešenja, a za  $\lambda < 0$  nestabilna rešenja.

Na Ince-Strutt-ovoj karti stabilnim rešenjima odgovara pozitivna  $\lambda$  osa, a nestabilnim rešenjima negativna  $\lambda$  -osa.

Za male vrednosti  $\delta$  u proučavanju rešenja Matheiu-ove diferencijalne jednačine (približavanje linearnom sistemu) granične krive možemo da razvijemo po stepenima malog parametra  $\delta$  u obliku  $\lambda = \lambda(\delta^2)$ , a da pri tome zadržimo samo izvestan broj izraza (sabiraka) najnižeg stepena u redu.

Iz prethodnog imamo da su stabilne oblasti povezane nad tačkama  $\lambda = \frac{n^2}{4}$ ,  $\delta = 0$  i koje odgovaraju linearno nezavisnim periodičkim rešenjima  $\sin \frac{n}{2}\varrho$  i  $\cos \frac{n}{2}\varrho$ . Od svake tačke  $\lambda = \frac{n^2}{4}$ ,  $\delta = 0$  treba da očekujemo dva ogranka krivih  $\lambda = \lambda(\delta^2)$ , izuzev u tački  $n = 0$ , kada će se javiti samo jedan ogranak. Svaka tačka graničnih krivih  $\lambda = \lambda(\delta^2)$  odgovara periodičkom rešenju perioda  $2\pi$  ili  $4\pi$ . Kada  $\delta \rightarrow 0$  očekujemo da periodička rešenja teže odredjenim rešenjima  $\sin \frac{n}{2}\varrho$  i  $\cos \frac{n}{2}\varrho$ .

Pretpostavimo da rešenja  $y(\varrho, \delta)$  i  $\lambda(\delta^2)$  mogu biti napisana u obliku reda po stepenima  $\delta^2$  kao

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \delta^2 y_1 + \delta^4 y_2 + \dots \\ \lambda &= \lambda_0 + \delta^2 \lambda_1 + \delta^4 \lambda_2 + \dots \end{aligned} \quad (21)$$

Vrednosti  $\lambda_i$  su konstante, dok su  $y_i$  funkcije od  $\varrho$ , koje moraju da se odrede tako da budu periodičke funkcije vremena sa periodom  $2\pi$  ili  $4\pi$ , a da se rešenje  $y(\varrho)$  pri tome može da redukuje na  $\cos \frac{n}{2}\varrho$  ili  $\sin \frac{n}{2}\varrho$  kada  $\delta \rightarrow 0$ .

Izraze (21) unesemo u jednačinu (1) tako da dobijemo



$$\sum_{i=0}^{\infty} \delta^i y_i'' + \left( \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \delta^k + \delta \cos \vartheta \right) \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i y_i = 0 \quad (22)$$

Ova jednačina je identički zadovoljena kada su koeficijenti svih stepena  $\delta$  jednaki nuli, i na osnovu toga dobijamo sistem linearnih diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} y_0'' + \lambda_0 y_0 &= 0 \\ y_1'' + \lambda_1 y_1 &= -\lambda_1 y_0 - y_0 \cos \vartheta \\ y_2'' + \lambda_2 y_2 &= -\lambda_2 y_0 - \lambda_1 y_1 - y_1 \cos \vartheta \end{aligned} \quad (23)$$

koje se mogu sukcesivno rešavati. Rešenje prve jednačine je

$$y_0(\vartheta) = A \cos \vartheta \sqrt{\lambda_0} + B \sin \vartheta \sqrt{\lambda_0} \quad (24)$$

a kako treba da ima period  $2\pi$  ili  $4\pi$ , to mora da je  $\lambda_0 = \frac{n^2}{4}$ , tj.  $y_0 = \cos \frac{n}{2} \vartheta$  ili  $y_0 = \sin \frac{n}{2} \vartheta$ . Vidi se da se rešenje (21) sa  $\lambda_0 = \frac{n^2}{4}$  za  $\delta \rightarrow 0$  redukuje na ovaj oblik. Da bi smo dobili više aproksimacije stavimo da je  $n=0$  i  $\lambda_0=0$  i  $y_0=1$ , i druga jednačina sistema (23) daje

$$y_1'' = \lambda_1 - \cos \vartheta \quad (25)$$

Da bi rešenje jednačine bilo periodičko potrebno je da  $\lambda_1$  bude jednako nuli, te je posle integraljenja rešenje

$$y_1 = \cos \vartheta + C_1 \quad (26)$$

Treća jednačina sistema (23) sada postaje

$$y_2'' = -\lambda_2 - (\cos \vartheta + C_1) \cos \vartheta = -\lambda_2 - \frac{1}{2} - C_1 \cos \vartheta - \frac{1}{2} \cos 2\vartheta \quad (27)$$

Da bi rešenje ove jednačine bilo periodičko potrebno je da je

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2} \quad (28)$$

$$y_2 = C_1 \cos \vartheta + \frac{1}{8} \cos 2\vartheta + C_2$$

Na ovakav način dolazimo do jednačine granične krive stabilno-

sti  $C_0$  u obliku

331.

$$\lambda = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{7}{32}y^4 - \frac{29}{144}y^6 + \dots \quad (29)$$

Za nalaženje granične krive kroz  $\lambda_0 = \frac{n^2}{4} = \frac{1}{4}$  rešenje treba da teži obliku  $y_0 = \cos \frac{\tilde{x}}{2}$  ili  $y_0 = \sin \frac{\tilde{x}}{2}$ . Za ovaj slučaj drugu jednačinu sistema (23) možemo da napišemo u obliku

$$y_1'' + \frac{1}{4}y_1 = (-\lambda_1 - \cos \tilde{x}) \cos \frac{\tilde{x}}{2} = (-\lambda_1 - \frac{1}{2}) \cos \frac{\tilde{x}}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{3}{2}\tilde{x} \quad (30)$$

Da bi rešenje ove jednačine bilo periodičko treba da je  $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ . Ako se postupak aproksimacije nastavi dobija se granična kriva  $C_{1/2}$  u obliku

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{32}y^6 - \frac{1}{384}y^8 - \dots \quad (31)$$

Za slučaj kada rešenje teži rešenju  $y = \sin \frac{\tilde{x}}{2}$ , dobija se granična kriva  $S_{1/2}$  u obliku

$$\lambda = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{8}y^4 - \frac{1}{32}y^6 - \frac{1}{384}y^8 + \dots \quad (32)$$

Da bi smo našli granične krive kroz  $\lambda_0 = 1$ , za  $n = 2$ , moramo postupiti na sličan način, tako da za slučaj da rešenje teži  $\sin \tilde{x}$  se dobija granična kriva

$$S_1 \therefore \lambda = 1 + \frac{5}{12}y^2 - \frac{763}{3456}y^4 + \dots \quad (33)$$

odnosno za slučaj kada teži  $\cos \tilde{x}$

$$C_1 \therefore \lambda = 1 - \frac{1}{12}y^2 + \frac{5}{3456}y^4 + \dots \quad (34)$$

Na sličan način se dolazi do ostalih graničnih krivih za  $y$  malo, koje su na Ince-Strutt-ovoj karti označene sa  $S_{3/2}$ ,  $S_2$ ,  $C_{3/2}$ ,  $S_3$ , ..., a za neke od njih

navodimo jednačine

$$\begin{aligned}
 n=3 \quad C_{3/2} \quad \therefore \quad \lambda &= \frac{9}{4} + \frac{1}{16} \delta^2 - \frac{1}{32} \delta^3 + \frac{13}{5120} \delta^4 + \dots \\
 S_{3/2} \quad \therefore \quad \lambda &= \frac{9}{4} + \frac{1}{16} \delta^2 + \frac{1}{32} \delta^3 + \frac{13}{5120} \delta^4 + \dots \\
 n=4 \quad S_2 \quad \therefore \quad \lambda &= 4 + \frac{1}{30} \delta^2 + \frac{493}{216000} \delta^4 + \dots \\
 C_2 \quad \therefore \quad \lambda &= 4 + \frac{1}{30} \delta^2 + \dots
 \end{aligned} \tag{35}$$

Na slici 75 je prikazana oblast Ince-Strutt-ove karte za male vrednosti parametra  $\delta$  sa aproksimativnim graničnim krivama. Sa karte se vidi da po dve susedne krive S ili C ograničavaju oblasti stabilnosti, dok po dve susedne krive, koje prolaze iz iste tačke  $\lambda = n^2/4$ , ograničavaju nestabilne oblasti.

Diferencijalna jednačina oblika

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \Omega^2(\lambda + \delta \cos \Omega t)q = 0 \tag{36}$$

Naziva se takodje Matheiu-ovom diferencijalnom jednačinom, jer se ona stvarno može svesti na klasičan oblik Matheiu-ove diferencijalne jednačine transformacijom

$$q = q_1 e^{-\delta t} = q_1 e^{-\frac{\delta}{\Omega} \vartheta} \tag{37}$$

kao

$$q_1'' + \left(\lambda - \frac{\delta^2}{\Omega^2} + \delta \cos \vartheta\right) q_1 = 0 \tag{38}$$

gde je  $q_1$  nova koordinata.

Iz jednačina (37) i (13) zaključujemo da rešenja jednačine (36) nisu stabilna kao realna rešenja kada

je  $\mu = \alpha + \beta i$  .Rešenja jednačine (36) su

$$q = q_1 e^{-\frac{\delta}{\Omega} t} = A e^{(\mu - \frac{\delta}{\Omega}) \tau} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_{\nu} e^{i \nu \tau} + B e^{-(\mu + \frac{\delta}{\Omega}) \tau} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} b_{\nu} e^{i \nu \tau} \quad (39)$$

Za stabilnost kretanja potrebno je da realni deo  $(\mu - \frac{\delta}{\Omega})$  bude negativan, tj. da je

$$\operatorname{Re}(\mu - \frac{\delta}{\Omega}) < 0 \quad \text{ili} \quad \operatorname{Re}(\mu) < \frac{\delta}{\Omega} \quad (40)$$

a imaginarni deo  $i\beta$  da je različit od  $n/2$ . U ostalim slučajevima se dobija nestabilno rešenje.

Radi razgraničenja stabilnih i nestabilnih područja u ravni  $(\lambda, \delta^2)$  potrebno je, pored proučavanja krivih  $\operatorname{Re}(\mu)$ , proučiti i krive

$$\operatorname{Re}(\mu) = \frac{\delta}{\Omega} = \text{const} \quad (41)$$

u slučaju kada ima prigušivanja. Ove krive je postavio i za njih izveo proračune G. Kotowski u nestabilnim područjima. Na slici 73 su nacrtane krive prigušivanja u područjima nulte, polu i frekvencije prvog reda za  $(\frac{\delta}{\Omega})^2 = 10^{-4}; 10^{-3}; 10^{-2}; 5 \cdot 10^{-2}; 10^{-1}$ . Sa slike se može videti da se stabilna područja proširuju, dok se labilna područja sužavaju, a može se uočiti da se područja nižeg reda  $n$  manje menjaju od onih višeg reda  $n$ . Proizilazi da rešenja (37) jednačine (36) mogu još neograničeno da rastu i pored prigušivanja.

Ince-Strutt-ova karta omogućava analizu stabilnosti različitih kretanja, čija se diferencijalna jednačina može svesti na Matheiu-ov oblik diferencijalne jednačine.

1<sup>o</sup> Primer vitkog štapa pod pritiskom pulzirujuće aksijalne sile  $P = P_0 + S \cos \omega t$  poslužiće nam za konkretnu diskusiju o stabilnosti na Ince-Strutt-ovoj karti. Diferencijalna jednačina oscilovanja je tada

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + (P_0 + S \cos \Omega t) \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (42)$$

gde su:  $E$  modul elastičnosti,  $J$  moment inercije za osu savijanja-oscilovanja,  $m$  masa po jedinici dužine štapa.

Rešenje jednačine (42) može se pretpostaviti u obliku  $y(z,t) = Z(z)T(t)$ . Za granične uslove

$$y(0,t) = y(l,t) = 0 ; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \Big|_{z=l} = 0 \quad (43)$$

rešenje je oblika

$$y(z,t) = A \sin \frac{n\Omega}{\ell} z T(t) \quad (44)$$

Funkcija vremena  $T(t)$  se izračunava iz jednačine oblika

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + T \left[ \frac{1}{\Omega^2} \left( \frac{EJ}{m} \frac{n^4 \Omega^4}{\ell^4} - P_0 \frac{n^2 \Omega^2}{m \ell^2} \right) - S \frac{n^2 \Omega^2}{\Omega^2 m \ell^2} \cos \varrho \right] = 0 \quad (45)$$

gde je  $\varrho = \Omega t$ , a koja se dobija iz jednačine (42) neposrednom zamenom rešenja (44). Ako uvedemo oznake

$$\omega_0^2 = \frac{EJ}{m} \frac{n^4 \Omega^4}{\ell^4} ; \quad P_{E,n} = P_E = \frac{n^2 \Omega^2 EJ}{\ell^2} ; \quad p = \frac{P_0}{P_E} ; \quad s = \frac{S}{P_E} \quad (46)$$

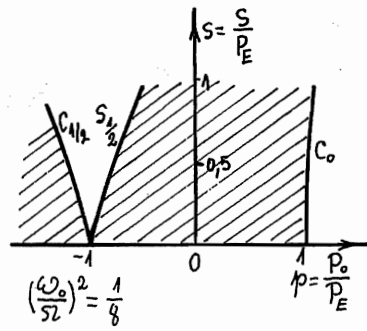
$$\lambda = \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} (1-p) ; \quad \gamma = -\frac{\omega_0^2}{\Omega^2} s$$

jednačinu (45) možemo da svedemo na Matheiu-ov oblik

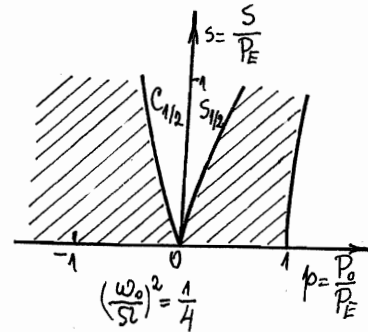
$$\frac{d^2 T}{dt^2} + T (\lambda + \gamma \cos \varrho) = 0 \quad (47)$$

koji nam omogućava korišćenje podataka iz Ince-Strutt-ove karte. Podatke o stabilnosti kretanja ograničene oblasti  $\lambda$ ,

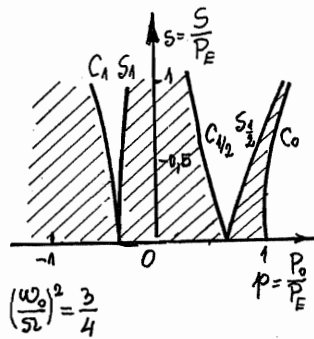
$\gamma$  možemo preneti na konstantne parametre proučavanog sistema  $\omega_0$ ,  $P_0$ ,  $S$ ,  $\Omega$  i  $P_{E,n}$ . Ako je potrebno dati štap-stub ispitati na različite vrste opterećenja  $P$  onda treba utvrditi vrednosti za  $\omega_0^2$  i  $P_{E,n}$ . Kao osnovu za



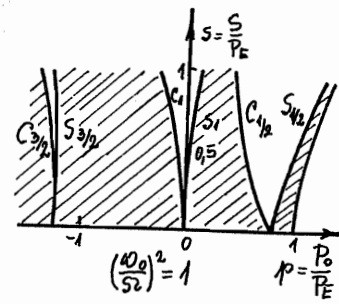
S1.76 a



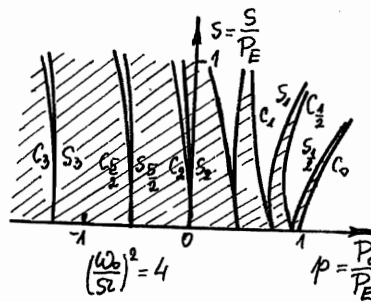
S1.76 b



S1.76 c



S1.76 d



S1.76 e

proučavanje uzećemo Euler-ovu kritičnu silu  $P_{E,1}$  za  $n=1$  i njoj odgovarajuću vrednost  $\omega_0^2$ . Aksijalna sila je definisana parametrima  $P_0$ ,  $S$  i  $\Omega$  koji određuju parametre transformisane jednačine  $\lambda$  i  $\gamma$ .

Kako  $\lambda$  i  $\gamma$  zavise od vrednosti frekvencije  $\Omega$  aksijalne sile, to ćemo stabilnost oscilovanja vitkog štapa posmatrati u zavisnosti od odnosa frekvencija

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1, 4 = \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}$$

Za te odnose sastavićemo Ince-Strutt-ove karte ali tako da apscisa bude  $p = \frac{P_0}{P_E}$ , jer od nje zavisi  $\lambda$ , a ordinata  $s = \frac{S}{P_E}$  jer od nje zavisi  $\gamma$ . Rezultati su prikazani na slici 76 a, b, c, d i e. Vidi se da sada granične krive imaju suprotnu tendenciju od onih u  $(\lambda, \gamma)$  ravni, jer je  $\lambda$  srazмерно negativnoj vrednosti  $p$ .

Nulta tačka Ince+Strutt-ove karte  $\lambda = 0$ ,

$\gamma = 0$  odgovara opterećenju stuba pomoću Euler-ove kritične sile jer je

$$P_0 = P_E = \frac{J^2 E J}{l^2}$$

Za  $P_0 < P_E$  je  $\lambda > 0$  i stanje je stabilno za  $s = 0$ . Za  $P_0 > P_E$  je  $\lambda < 0$  i stanje oscilovanja je nestabilno. Na osi se vidi da je za  $p < 1$  stabilno stanje oscilovanja, dok je za  $p > 1$  labilno. Ovo su i obijašnjenja Euler-ove teorije dobijene statičkom proučavanjem dejstva aksijalne sile izvijanja. Za  $P = 0$  dobija se tačka  $\lambda = \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}$ .

Sa priloženih Ince-Strutt-ovih karti uočavamo da sa porastom odnosa  $\frac{\omega_0^2}{\Omega^2}$  područja nestabilnosti se gomilaju izmedju 0 i 1 vrednosti za  $p$ . Za  $(\frac{\omega_0}{\Omega})^2 = \frac{1}{4}$  područje stabilnosti izmedju  $p=0$  i  $p=1$  je veliko, dok za  $\frac{\omega_0}{\Omega} = \frac{\omega_0}{\Omega} = 2$  to područje sadrži nagomilana područja nestabilnosti, ali je svima zajedničko da su labilna za  $P_0 > P_E$ , tj. za  $p > 1$ .

Područja nestabilnosti mogu se smanjiti prigušivanjem, u kom slučaju se vrhovi područja nestabilnosti povlače sa apscisne ose  $p$  na gore i to utoliko više ukoliko su područja uža, tj. veća im je vrednost  $\lambda$ . Područja nestabilnosti postaju beznačajna za veliko  $\lambda$ . Spomenućemo nekoliko karakteristika koje se mogu uočiti sa Ince-Strutt-ovih karti za  $(\frac{\omega_0}{\Omega})^2 = 1/4$ ; Interesantno je da nestabilno područje  $\lambda = 1/4$  leži u okolini vrednosti sile  $P_0 = 0$ ; tada u slučaju da se javi mala pulzirajuća aksijalna sila sa frekvencijom  $\Omega = 2\omega_0$ , stub izvodi nestabilne oscilacije, što znači da se amplituda oscilovanja uvećava sa vremenom. Isti slučaj imamo i za  $(\frac{\omega_0}{\Omega})^2 = n^2/4$ .

Matheiu-ova diferencijalna jednačina se koristi u teoriji potencijala i to najčešće u obliku

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} + (k^2 - 2h^2 \cos 2\varphi) x = 0 \quad (48)$$

Za odredjivanje vrednosti parametara i koeficijenata rešenja za početne uslove

$$x(0) = x(2\pi) \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi)$$

sopstvene funkcije se mogu tražiti kao trigonometrijski red sinusa ili kosinusa neparnih ili parnih umnožaka promenljive  $\varphi$ . Za sopstvenu funkciju

$$S_{2n+1} = \sum_{m=0}^{\infty} B_{2n+1, 2m+1} \sin(2m+1)\varphi \quad (49)$$

jednačina (48) postaje

$$-(2m+1)^2 S_{2n+1} + (k^2 - 2h^2 \cos 2\varphi) S_{2n+1} = 0 \quad (50)$$

odakle se dobija sistem

$$\begin{aligned} -h^2 B_{2n+1, 2m-1} + [k - (2m+1)^2] B_{2n+1, 2m+1} - h^2 B_{2n+1, 2m+3} &= 0 \\ (k-1+h^2) B_{2n+1, 1} - h^2 B_{2n+1, 3} &= 0 \end{aligned} \quad (51)$$



Kako je  $B_{2n+1,2m+1} \neq 0$  to mora da determinanta sistema da bude jednaka nuli

$$\Delta = \begin{vmatrix} k-1+h^2 & -h^2 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ -h^2 & k-3^2 & -h^2 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & -h^2 & k-5^2 & -h^2 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & -h^2 & k-7^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0$$

Sopstvene vrednosti se mogu odrediti iterativnim postupkom pomoću verižnog razlomka

$$K = 1 - h^2 + \frac{h^4}{k-3^2 - \frac{h^4}{k-5^2 - \frac{h^4}{k-7^2 - \dots}}}$$

Na primeru da je  $h = 1$  mogu se dobiti sopstvene vrednosti  $K_0 = 0$ ;  $K_1 = -0,0116$ ;  $K_2 = -0,11023$ ;  $K_3 = -0,110249$   
.....

#### 4. PARAMETARSKE OSCILACIJE

U prethodnim članovima ove glave proučili smo neke diferencijalne jednačine sa promenljivim koeficijentima - reolinarne i među njima Mathieu-ovu i Hill-ovu diferencijalnu jednačinu. Oscilacije, opisane ovim jednačinama nazivaju se parametarski pobudne oscilacije ili kratko parametarske oscilacije. Sve dinamičke veličine koje zavise od vremena možemo izraziti promenljivim parametrima. Kada se inercioni, restiticioni koeficijent, koeficijent sile otpora ili koefi-

cijent sile trenja menjaju sa vremenom tada se kao jednačine oscilovanja javljaju diferencijalne jednačine linearne ili nelinearne sa promenljivim koeficijentima. Kod prinudnih oscilacija pobuda se ostvaruje dejstvom spoljašnjih prinudnih sila koje se u diferencijalnim jednačinama izražavaju nehomogenim delom diferencijalnih jednačina, dok se kod parametarski pobudnih oscilacija izražavaju promenljivošću sopstvenih parametara - koeficijenata homogenih diferencijalnih jednačina.

Primeri, koje smo u prethodnom izlaganju naveli: matematičko klatno sa oscilujućom tačkom vešanja, matematičko klatno sa promenljivom dužinom, transverzalne oscilacije žice zategnute promenljivom silom, poprečne oscilacije vertikalnog vratila sa nasadjenim diskom, čiji se momenti inercije razlikuju, transverzalne oscilacije štapa pod dejstvom aksijalne pulzirujuće sile su primeri parametarskih oscilacija.

Pri proučavanju Mathieu-ove diferencijalne jednačine postavili smo uslove za pojavu stabilnog ili nestabilnog položaja ravnoteže, a sa tim i rastućih i opadajućih amplituda oscilacija, što je prikazano u Ince-Strutt-ovoj karti. Uočili smo takodje da u toku kretanja amplitude mogu rasti - nestabilan slučaj i opadati - stabilan. Pojavu rastućih oscilacija izazvanu promenom parametara sistema nazivamo parametarsko rezonantno stanje - p a r a m e t a r s k a r e z o n a n c i j a. Parametarsko rezonantno stanje se bitno razlikuje od običnog rezonantnog stanja i mnogo je opasnije od njega.

Ako se parametarski pobudjene oscilacije postepeno prigušuju (u krajnjem slučaju nemaju tendenciju porasta) stanje ravnoteže će biti stabilno; ako su pak oscilacije sa rastućom amplitudom - slučaj parametarskog rezonantnog stanja stanje ravnoteže je nestabilno. Zato se kao vrlo važan zadatak u analizi parametarskih oscilacija javlja odstranjenje porasta amplitude. Trenje u ovakvim slučajevima pokazuje stabilizujuće dejstvo.

## IX      G l a v a

NELINEARNE OSCILACIJE SISTEMA SA VIŠE  
STEPENI SLOBODE OSCILOVANJA1. JEDNOFREKVENTNE I VIŠEFREKVENTNE OSCILACIJE  
SISTEMA SA VIŠE STEPENI SLOBODE OSCILOVANJA

Oscilatorni sistemi sa više stepeni slobode oscilovanja se sreću u mnogim problemima savremene tehnike. Oscilacije u takvim sistemima su višefrekventne jer se kombinacija većeg broja prostih (kod linearnih normalnih) oscilacija. U specijalnim početnim uslovima oscilatorni sistem sa više stepeni slobode oscilovanja može da osciluje sa samo jednom frekvencijom. Takođe pored početnih uslova dejstvo disipativnih sila i spoljašnjih poremećajnih sila dovodi do brzog isčezavanja viših harmonika, t.j. oblika oscilovanja, i do uspostavljanja osnovnog tona oscilovanja sa frekvencijom bliskom frekvenciji spoljašnje poremećajne sile. Zato je u specijalnim početnim uslovima ili pri dejstvu spoljašnje perturbacione sile samo sa jednom frekvencijom, celishodno pri proučavanju razmatrati jednofrekventni režim oscilovanja u kome sve tačke sistema osciluju sa jednom i samo jednom frekven-

cijom. Na celishodnost izučavanja jednofrekventnih oscilacija u sistema sa više i beskonačno mnogo stepeni slobode oscilovanja ukazao je H.H.Боголюбов .

Jednofrekventni princip bitno uprošćava i nalaženje asimptotskih aproksimacija rešenja i svodi zadatak na integraljenje samo dve diferencijalne jednačine prvog reda u odnosu na sporopromenljive amplitudu i fazu jednofrekventnih oscilacija. Pri tome se mogu zanemariti početni uslovi, zato što u uslovima rezonantnog stanja sistema podržavaju se i razvijaju oscilacije u odredjenom obliku dinamičke ravnoteže, koje odgovaraju sopstvenoj rezonantnoj frekvenciji, a na račun spoljašnjih poremećajnih sila. Ovde je upotrebljen izraz oblik dinamičke ravnoteže, pod kojim podrazumevamo oscilovanje sistema sa jednom sopstvenom frekvencijom i njoj odgovarajućim oblikom oscilovanja.

Drugi oblici (nerezonantnih) sopstvenih oscilacija odredjeni početnim uslovima u realnim sistemima prigušiče se (isčeznu će) pod uticajem disipativnih sila. Zato u uslovima rezonantnog stanja sistema i pri dejstvu disipativnih sila oscilacije u sistemima sa mnogo stepeni slobode oscilovanja proizilaze kao jednofrekventne u odredjenom obliku dinamičke ravnoteže bliskom jednom od oblika glavnih (normalnih) oscilacija. Da na kraju naglasimo i to da se sve ovde rečeno odnosi na nelinearne sisteme sa više stepeni slobode oscilovanja koji su bliski linearnim. U opštem slučaju nelinearnosti ne mogu se izvući neki opštiji zaključci .

2. JEDNOFREKVENTNE OSCILACIJE NELINEARNIH  
SISTEMA SA VIŠE STEPENI SLOBODE OSCILO-  
VANJA I SA SPOROPROMENLJIVIM PARAMETRIMA

Proučimo oscilacije sistema sa  $n$  stepeni slobode oscilovanja, čije su kinetička i potencijalna energija

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(\varrho) \dot{q}_i \dot{q}_k = \frac{1}{2} (\dot{q}) A \{\dot{q}\} \quad A = (a_{ik}) \quad (1)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n c_{ik}(\varrho) q_i q_k = \frac{1}{2} (q) C \{q\} \quad C = (c_{ik}) \quad (2)$$

gde su  $q_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) generalisane koordinate,  $\varrho = \varepsilon t$  - "lagano" promenljivo vreme - sporo promenljivo vreme,  $\varepsilon$  - mali pozitivan parametar,  $a_{ik}(\varrho) = a_{ki}(\varrho)$  - inercioni koeficijenti,  $c_{ik}(\varrho) = c_{ki}(\varrho)$  - kvazielastični koeficijenti (uspostavljanja), neke funkcije sporo promenljivog vremena  $\varrho$ , koje imaju izvode proizvoljnog reda po sporo promenljivom vremenu  $\varrho$ .

Pretpostavićemo da su na konačnom intervalu  $0 \leq t \leq T$ , gde je  $T = \mathcal{L}/\varepsilon$ ,  $\mathcal{L}$  - može biti izabrano proizvoljno veliko za proizvoljno male vrednosti  $\varepsilon$ , kvadratne forme kinetičke i potencijalne energije pozitivno definitne.

Neka se dati oscilatorni sistem nalazi pod

dejstvom malog poremećaja, koji je određen generalisanim silama

$$\varepsilon Q_i(\varepsilon, \theta, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) ; \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

periodičkim po  $\theta$  sa periodom  $2\pi$ , koje se mogu razviti u konačne Fourier-ove redove sa koeficijentima u obliku polinoma po  $q_i$  i  $\dot{q}_i$ . Pretpostavljamo da je  $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\varepsilon)$  i da su funkcije  $\nu(\varepsilon)$ ,  $Q_i(\varepsilon, \theta, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$  neograničeno puta diferencijabilne po  $\varepsilon$  na intervalu  $0 \leq \varepsilon \leq \mathcal{L}$ .

Pomoću Lagrange-ovih jednačina druge vrste sastavljamo sistem od  $n$  nelinearnih diferencijalnih jednačina drugog reda

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ik}(\varepsilon) \dot{q}_i \right\} + \sum_{i=1}^n c_{ik}(\varepsilon) q_i = \varepsilon Q_k(\varepsilon, \theta, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \quad (4)$$

$(k=1, 2, \dots, n)$

Sistem jednačina (4) nazvaćemo sistemom jednačina poremećenog oscilovanja. Uporedo sa ovim sistemom proučimo i sistem jednačina

$$\sum_{i=1}^n [a_{ik}(\varepsilon) \ddot{q}_i + c_{ik}(\varepsilon) q_i] = 0 ; \quad (k=1, 2, 3, \dots, n) \quad (5)$$

neporemećenog oscilovanja, koji dobijamo iz sistema (4) stavljajući da je  $\varepsilon=0$ , pri čemu  $\varepsilon$  nije više  $\varepsilon t$  nego se posmatra kao neki konstantni parametar. Sistem jednačina neporemećenog oscilovanja je sa homogenim linearnim jednačinama sa konstantnim koeficijentima i njegovo rešenje nalazimo u obliku

$$q_i^{(s)} = A_i^{(s)}(\varepsilon) a_s \cos[\omega_s(\varepsilon)t + \alpha_s]; \quad (i, s=1, 2, 3, \dots, n) \quad (6)$$

gde su  $\omega_s(\varepsilon)$  ( $s=1, 2, 3, \dots, n$ ) - sopstvene frekvencije koje se određuju iz frekventne jednačine

$$D(\omega^2) = | -a_{ik}(\varrho) \omega_s^2(\varrho) + \mathcal{L}_{ik}(\varrho) |_{-0}; \quad (i, k, s = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (7)$$

a  $A_i^{(s)}(\varrho)$  ( $i, s = 1, 2, 3, \dots, n$ ) - su normalne funkcije, amplitude sopstvenih vektora, koje se javljaju kao netrivialna rešenja sistema homogenih algebarskih jednačina oblika

$$\sum_{i=1}^n \{ -a_{ik}(\varrho) \omega_s^2(\varrho) + \mathcal{L}_{ik}(\varrho) \} A_i^{(s)}(\varrho) = 0; \quad (s, k = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

i imaju svojstvo ortogonalnosti

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(\varrho) A_i^{(s)}(\varrho) A_k^{(r)}(\varrho) = 0 \quad (s \neq r) \quad (9)$$

$$\sum_{i,k=1}^n \mathcal{L}_{ik}(\varrho) A_i^{(s)}(\varrho) A_k^{(r)}(\varrho) = 0 \quad (s \neq r)$$

U ovim izrazima od (5) do (9) veličine  $A_k^{(r)}$ ,  $\omega_s(\varrho)$ ,  $A_k^{(r)}$ ,  $\mathcal{L}_{ik}(\varrho)$  i  $a_{ik}(\varrho)$  zavise od  $\varrho$  kao od parametra.  $a_s$  i  $\alpha_s$  su realne konstante. Ako sada u izrazima (6) i jednačinama (5) stavimo da je  $\varrho = \varepsilon t$  to će funkcije (6) samo približno (sa tačnošću do malih veličina reda  $\varepsilon$ ) da zadovoljavaju jednačine (5) i predstavljaju oscilacije sa sporopromenljivom frekvencijom i oblikom oscilovanja. Pre nego što pristupimo sastavljanju asimptotskih rešenja sistema (4) koja odgovaraju jednofrekventnim oscilacijama (pri dovoljno malom  $\varepsilon$ ) bliskim jednom od normalnih neporemećenih oscilacija (6), pretpostavljamo da su za sve vrednosti parametra  $\varrho$ , koje pripadaju proučavanom intervalu  $0 \leq \varrho \leq \mathcal{L}$  ispunjeni sledeći uslovi:

1. U neporemećenom sistemu, koji se opisuje diferencijalnim jednačinama (5) moguće su neprigušene harmonijske oscilacije sa frekvencijom  $\omega_k(\varrho)$ , koje zavise samo od dve proizvoljne konstante.

2. Jedinstveno rešenje sistema (5) koje odgo-

vara ravnotežnom stanju sistema je trivijalno rešenje  $q_1 = q_2 = q_3 = \dots = q_n = 0$ .

3. Frekvencija  $\omega_k(\varepsilon)$ , a i nijedan viši harmonik  $2\omega_k(\varepsilon)$ ,  $3\omega_k(\varepsilon)$ ,  $4\omega_k(\varepsilon)$ ,  $\dots$ ,  $m\omega_k(\varepsilon)$  nisu jednaki sopstvenim frekvencijama  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\dots$ ,  $\omega_{k-1}$ ,  $\omega_{k+1}$ ,  $\dots$ ,  $\omega_n$  neporemećenog oscilovanja sistema (ne postoje unutrašnja rezonantna stanja).

Uz pretpostavku da su zadovoljeni navedeni uslovi, rešenje sistema jednačina poremećenog oscilovanja tražimo u obliku

$$q_i = A_i^{(1)}(\varepsilon) a \cos\left(\frac{p}{\varrho} \theta + \varphi\right) + \varepsilon \mu_i^{(1)}(\varepsilon, \alpha, \theta, \frac{p}{\varrho} \theta + \varphi) + \varepsilon^2 \mu_i^{(2)} + \dots \quad (10)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

u kojima su  $\varepsilon = \varepsilon t$ ,  $\mu_i^{(e)}(\varepsilon, \alpha, \theta, \frac{p}{\varrho} \theta + \varphi)$  - periodičke funkcije po  $\theta$  i  $\frac{p}{\varrho} \theta + \varphi = \varphi$  sa periodom  $2\pi$ , a veličine  $\alpha$  i  $\varphi$  kao funkcije vremena se određuju iz sistema diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \varepsilon A_1(\varepsilon, \alpha, \varphi) + \varepsilon^2 A_2(\varepsilon, \alpha, \varphi) + \dots \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega_1(\varepsilon) - \frac{p}{\varrho} \nu(\varepsilon) + \varepsilon B_1(\varepsilon, \alpha, \varphi) + \varepsilon^2 B_2(\varepsilon, \alpha, \varphi) + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

gde su  $p$  i  $\varrho$  uzajamno prosti, ne veliki brojevi, čiji izbor zavisi od izučavanog rezonantnog stanja;  $\omega_1(\varepsilon)$  - je koren jednačine (7),  $A_i^{(1)}(\varepsilon)$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) - netrivialna rešenja algebarskih jednačina (8) za  $s = -1$ .

Za rešenje postavljenog zadatka neophodno je naći takve izraze za funkcije

$$\mu_i^{(e)}(\varepsilon, \alpha, \theta, \varphi); A_\ell(\varepsilon, \alpha, \varphi); B_\ell(\varepsilon, \alpha, \varphi) \quad \left( \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, \dots, n \\ \ell = 1, 2, 3, \dots, n \end{array} \right) \quad (12)$$

da asimptotski redovi (10) posle unošenja u njih umesto  $\alpha$  i  $\varphi$  funkcija vremena određenih jednačinama (11), budu



rešenje sistema jednačina (4).

Redovi (10) i (11) se mogu sastaviti bez principijelnih teškoća, međutim sa povećanjem broja članova formule postaju veoma složene i praktično može da se nadje samo nekoliko prvih članova. Zato se redovi (10) i (11) posmatraju kao formalni neophodni za sastavljanje asimptotskih aproksimacija, koje pri fiksiranom broju članova  $m$  i  $\varepsilon \rightarrow 0$ , teže ka partikularnom rešenju sistema jednačina neporemećenog oscilovanja.

Kako integracija pomoću (10) uvodi samo dve proizvoljne integracione konstante, to mi pomoću (10) možemo dobiti asimptotsku aproksimaciju ne za opšte rešenje, koje treba da zavisi od  $2n$  proizvoljnih integracionih konstanti, već za neku dvoparametarsku familiju partikularnih rešenja.

U nelinearnim sistemima princip superpozicije ne važi pa ne možemo sastaviti opšte rešenje polazeći od različitih partikularnih rešenja. U većem broju važnih slučajeva familija partikularnih rešenja zadovoljava fizički smisao procesa, pa je onda od interesa da se izuči baš ta familija rešenja. Diferenciranjem jednačina (11) dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a}{dt^2} = & \varepsilon \left\{ \left[ \omega_1(\varepsilon) - \frac{p}{2} \nu(\varepsilon) \right] \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} \right\} + \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} B_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \varepsilon} + \right. \\ & \left. + \left[ \omega_1(\varepsilon) - \frac{p}{2} \nu(\varepsilon) \right] \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} \right\} + \varepsilon^3 \dots + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = & \varepsilon \left\{ \frac{d\omega_1(\varepsilon)}{d\varepsilon} - \frac{p}{2} \frac{d\nu(\varepsilon)}{d\varepsilon} + \left[ \omega_1(\varepsilon) - \frac{p}{2} \nu(\varepsilon) \right] \frac{\partial B_1}{\partial \varphi} \right\} + \\ & + \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial B_1}{\partial \varphi} B_1 + \frac{\partial B_1}{\partial \varepsilon} + \left[ \omega_1(\varepsilon) - \frac{p}{2} \nu(\varepsilon) \right] \frac{\partial B_1}{\partial \varphi} \right\} + \varepsilon^3 \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Posle toga diferencirajući izraz (10) i uzimajući u obzir jednakosti (11), (13) i (14) nalazimo izraze za  $\frac{dq_i}{dt}$  i  $\frac{d^2 q_i}{dt^2}$ . Unoseći te izraze u levu stranu sistema jednačina (4) dobijamo

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \left\{ a_{ik}(\varphi) \frac{d^2 \varrho_i}{dt^2} + \frac{da_{ik}(\varphi)}{d\varphi} \frac{d\varrho_i}{dt} + c_{ik}(\varphi) \varrho_i \right\} = \sum_{i=1}^n \left[ -a_{ik}(\varphi) \omega_1^2(\varphi) + c_{ik}(\varphi) \right] \times \\
& \times A_i^{(1)}(\varphi) a \cos \Psi + \sum_{i=1}^n \left\{ \varepsilon \left\langle a_{ik}(\varphi) \left[ A_i^{(1)}(\varphi) \left\langle \omega_1(\varphi) - \frac{p}{2} \nu(\varphi) \right\rangle \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \varphi} - 2A_i^{(1)}(\varphi) a \omega_1(\varphi) \times \right. \right. \right. \\
& \times \beta_1 \left. \right\rangle \cos \Psi - a_{ik}(\varphi) \left[ A_i^{(1)}(\varphi) a \left\langle \omega_1(\varphi) - \frac{p}{2} \nu(\varphi) \right\rangle \frac{\partial \beta_1}{\partial \varphi} + 2A_i^{(1)}(\varphi) \omega_1(\varphi) \mathcal{H}_1 \right] \sin \Psi - \\
& - \left[ 2\omega_1(\varphi) \frac{dA_i^{(1)}(\varphi)}{d\varphi} a_{ik}(\varphi) + \frac{d\omega_1(\varphi)}{d\varphi} A_i^{(1)}(\varphi) a_{ik}(\varphi) + \omega_1(\varphi) A_i^{(1)}(\varphi) \frac{da_{ik}(\varphi)}{d\varphi} \right] a \sin \Psi + \\
& + a_{ik}(\varphi) \left[ \nu^2(\varphi) \frac{\partial^2 \mathcal{U}_i^{(1)}}{\partial \theta^2} + 2\nu(\varphi) \omega_1(\varphi) \frac{\partial^2 \mathcal{U}_i^{(1)}}{\partial \theta \partial \varphi} + \omega_1^2(\varphi) \frac{\partial^2 \mathcal{U}_i^{(1)}}{\partial \varphi^2} \right] + c_{ik}(\varphi) \mathcal{U}_i^{(1)} \left. \right\rangle + \\
& + \varepsilon^2 \left\langle a_{ik}(\varphi) \left[ A_i^{(1)}(\varphi) \left\langle \omega_1(\varphi) - \frac{p}{2} \nu(\varphi) \right\rangle \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial \varphi} - 2A_i^{(1)}(\varphi) a \omega_1(\varphi) \beta_2 \right] \cos \Psi - \right. \\
& - a_{ik}(\varphi) \left[ A_i^{(1)}(\varphi) \left\langle \omega_1(\varphi) - \frac{p}{2} \nu(\varphi) \right\rangle \frac{\partial \beta_2}{\partial \varphi} a + 2A_i^{(1)}(\varphi) \omega_1(\varphi) \mathcal{H}_2 \right] \sin \Psi + \\
& + a_{ik}(\varphi) \left[ A_i^{(1)}(\varphi) \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial a} \mathcal{H}_1 + A_i^{(1)}(\varphi) \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \varphi} \beta_1 + A_i^{(1)}(\varphi) \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \varphi} - A_i^{(1)}(\varphi) a \beta_1^2 \right] \cos \Psi + \\
& - a_{ik}(\varphi) \left[ 2A_i^{(1)}(\varphi) \mathcal{H}_1 \beta_1 + A_i^{(1)}(\varphi) a \frac{\partial \beta_1}{\partial a} \mathcal{H}_1 + A_i^{(1)}(\varphi) a \frac{\partial \beta_1}{\partial \varphi} \beta_1 + A_i^{(1)}(\varphi) \frac{\partial \beta_1}{\partial \varphi} \right] \times \\
& \times \sin \Psi + \left[ a_{ik}(\varphi) \frac{d^2 A_i^{(1)}(\varphi)}{d\varphi^2} a + 2 \frac{dA_i^{(1)}(\varphi)}{d\varphi} \mathcal{H}_1 a_{ik}(\varphi) + \frac{dA_i^{(1)}(\varphi)}{d\varphi} \frac{da_{ik}(\varphi)}{d\varphi} a + \right. \\
& + A_i^{(1)}(\varphi) \frac{da_{ik}(\varphi)}{d\varphi} \mathcal{H}_1 \left. \right] \cos \Psi - \left[ 2 \frac{dA_i^{(1)}(\varphi)}{d\varphi} a_{ik}(\varphi) \beta_1 + A_i^{(1)}(\varphi) \beta_1 \frac{da_{ik}(\varphi)}{d\varphi} \right] \times \\
& \times a \sin \Psi \left. \right\rangle + \varepsilon^3 \dots + \dots \left. \right\} \quad (15)
\end{aligned}$$

Zamenom  $q_i$  i  $\frac{dq_i}{dt}$  u desne strane jednačina (4) i njihovim razlaganjem u Taylor-ove redova nalazimo

$$\begin{aligned} \varepsilon Q_k = & \varepsilon Q_k(\varepsilon, \theta, q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}, \dot{q}_{10}, \dots, \dot{q}_{n0}) + \varepsilon^2 \left\{ \sum_{i=1}^n [\mu_i^{(1)} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial Q_k}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{dA_i^{(1)}(\varepsilon)}{d\varepsilon} a \cos \psi + A_i^{(1)}(\varepsilon) A_1 \cos \psi - A_i^{(1)}(\varepsilon) a \beta_1 \sin \psi \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \mu_i^{(1)}}{\partial \theta} \nu(\varepsilon) + \frac{\partial \mu_i^{(1)}}{\partial \psi} \omega_1(\varepsilon) \right\} + \varepsilon^3 \dots + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

gde su uvedene oznake

$$q_{i0} = A_i^{(1)}(\varepsilon) a \cos \psi ; \quad \dot{q}_{i0} = -A_i^{(1)}(\varepsilon) a \omega_1 \sin \psi \quad (17)$$

Da bi asimptotski redovi (10) zadovoljavali jednačine (4) sa tačnošću do malih veličina reda  $\varepsilon^m$  potrebno je izjednačiti u izrazima (15) i (16) koeficijente uz jednake stepene  $\varepsilon$  do članova  $(m-1)$ -og reda. U rezultatu dobijamo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \{ a_{ik}(\varepsilon) [\omega_1(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \psi} + \nu(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \theta}]^{(2)} \mu_i^{(1)} + c_{ik}(\varepsilon) \mu_i^{(1)} \} &= Q_{k0}(\varepsilon, \theta, a, \psi) - \\ - \sum_{i=1}^n \{ a_{ik}(\varepsilon) \langle A_i^{(1)}(\varepsilon) [\omega_1(\varepsilon) - \frac{p}{2} \nu(\varepsilon)] \frac{\partial A_1}{\partial \psi} - 2 A_i^{(1)}(\varepsilon) \omega_1(\varepsilon) a \beta_1 \rangle \cos \psi - \\ - a_{ik}(\varepsilon) \langle A_i^{(1)}(\varepsilon) a [\omega_1(\varepsilon) - \frac{p}{2} \nu(\varepsilon)] \frac{\partial \beta_1}{\partial \psi} + 2 A_i^{(1)}(\varepsilon) \omega_1(\varepsilon) A_1 \rangle \sin \psi - \\ - [2 \omega_1(\varepsilon) \frac{dA_i^{(1)}(\varepsilon)}{d\varepsilon} a_{ik}(\varepsilon) + \frac{d\omega_1(\varepsilon)}{d\varepsilon} A_i^{(1)}(\varepsilon) a_{ik}(\varepsilon) + \omega_1(\varepsilon) A_i^{(1)}(\varepsilon) \frac{da_{ik}}{d\varepsilon}] a \sin \psi \} &= \\ \equiv G_{k0}(\varepsilon, \theta, a, \psi) & \quad (18) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n \{ a_{ik}(\varepsilon) [\omega_1(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \psi} + \nu(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \theta}]^{(2)} \mu_i^{(2)} + c_{ik}(\varepsilon) \mu_i^{(2)} \} = \phi_{k0}(\varepsilon, \theta, a, \psi) -$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^n \{ a_{ik}(\varrho) [A_i^{(1)}(\varrho) \langle \omega_1(\varrho) - \frac{P}{2} \nu(\varrho) \rangle \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial \varphi} - 2A_i^{(1)}(\varrho) a \omega(\varrho) \mathcal{B}_2 ] \cos \Psi - \\
& - a_{ik}(\varrho) [A_i^{(1)}(\varrho) \langle \omega_1(\varrho) - \frac{P}{2} \nu(\varrho) \rangle \frac{\partial \mathcal{B}_2}{\partial \varphi} a + 2A_i^{(1)}(\varrho) \omega_1(\varrho) \mathcal{A}_1 ] \sin \Psi + \\
& + a_{ik}(\varrho) [A_i^{(1)}(\varrho) \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial a} \mathcal{A}_1 + A_i^{(1)}(\varrho) \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial \varrho} - A_i^{(1)}(\varrho) a \mathcal{B}_1^2 ] \cos \Psi - \\
& - a_{ik}(\varrho) [2A_i^{(1)}(\varrho) \mathcal{A}_1 \mathcal{B}_1 + A_i^{(1)}(\varrho) a \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial a} \mathcal{A}_1 + A_i^{(1)}(\varrho) a \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial \varphi} \mathcal{B}_1 + \\
& + A_i^{(1)}(\varrho) \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial \varrho} ] \sin \Psi + [ a_{ik}(\varrho) \frac{d^2 A_i^{(1)}(\varrho)}{d\varrho^2} a + \frac{dA_i^{(1)}(\varrho)}{d\varrho} \frac{da_{ik}(\varrho)}{d\varrho} a + \\
& + A_i^{(1)}(\varrho) \frac{da_{ik}(\varrho)}{d\varrho} \mathcal{A}_1 ] \cos \Psi - [ 2 \frac{dA_i^{(1)}(\varrho)}{d\varrho} a_{ik}(\varrho) \mathcal{B}_1 + A_i^{(1)}(\varrho) \frac{da_{ik}(\varrho)}{d\varrho} \mathcal{B}_1 ] \times \\
& \times a \sin \Psi \} \equiv \phi_{k_0}(\varrho, \theta, a, \Psi) \\
& \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& k = 1, 2, 3 \dots \dots \dots
\end{aligned} \tag{19}$$

U jednačinama (18) i (19) uvedene su ozna-

$$Q_{k_0}(\varrho, \theta, a, \Psi) = Q_{k_0}(\varrho, \theta, \dot{\varrho}_{1_0}, \dots, \dot{\varrho}_{n_0}, \dot{\varrho}_{1_0}, \dots, \dot{\varrho}_{n_0}) \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{k_0}(\varepsilon, \theta, \alpha, \psi) = & \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \mu_i^{(i)} + \frac{\partial Q_k}{\partial \dot{q}_i} \left\langle \frac{dA_i^{(i)}(\varepsilon)}{d\varepsilon} \alpha \cos \psi + A_i^{(i)}(\varepsilon) \mathcal{A}_1 \cos \psi - \right. \right. \\
& \left. \left. - A_i^{(i)}(\varepsilon) \alpha \mathcal{B}_1 \sin \psi \right\rangle + \frac{\partial \mu_i^{(i)}}{\partial \theta} \nu(\varepsilon) + \frac{\partial \mu_i^{(i)}}{\partial \psi} \omega_i \right] - \sum_{i=1}^n \left\{ a_{ik}(\varepsilon) \left[ 2 \frac{\partial^2 \mu_i^{(i)}}{\partial \varepsilon^2 \partial \psi} \omega_i(\varepsilon) + \right. \right. \\
& + 2 \frac{\partial^2 \mu_i^{(i)}}{\partial \varepsilon \partial \theta} \nu(\varepsilon) + 2 \frac{\partial^2 \mu_i^{(i)}}{\partial \alpha \partial \theta} \nu(\varepsilon) \mathcal{A}_1 + 2 \frac{\partial^2 \mu_i^{(i)}}{\partial \theta \partial \psi} \nu(\varepsilon) \mathcal{B}_1 + \\
& + 2 \frac{\partial^2 \mu_i^{(i)}}{\partial \psi^2} \omega_i(\varepsilon) \mathcal{B}_1 + 2 \frac{\partial^2 \mu_i^{(i)}}{\partial \alpha \partial \psi} \omega_i(\varepsilon) \mathcal{A}_1 + \frac{\partial \mu_i^{(i)}}{\partial \psi} \left\langle \omega_i(\varepsilon) - \frac{p}{2} \nu(\varepsilon) \right\rangle \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial \psi} + \\
& + \frac{\partial \mu_i^{(i)}}{\partial \alpha} \left\langle \omega_i(\varepsilon) - \frac{p}{2} \nu(\varepsilon) \right\rangle \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial \psi} + \frac{\partial \mu_i^{(i)}}{\partial \theta} \frac{d\nu(\varepsilon)}{d\varepsilon} + \frac{\partial \mu_i^{(i)}}{\partial \psi} \frac{d\omega_i(\varepsilon)}{d\varepsilon} \left. \right] + \quad (21) \\
& + \left. \frac{da_{ik}(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{\partial \mu_i^{(i)}}{\partial \theta} \nu(\varepsilon) + \frac{da_{ik}(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{\partial \mu_i^{(i)}}{\partial \psi} \omega_i(\varepsilon) \right\} \\
& (\kappa = 1, 2, 3, \dots, n)
\end{aligned}$$

Desne strane jednačina (18) kao periodičke funkcije po  $\theta$  i  $\psi$  sa periodom  $2\mathcal{I}$ , pretstavimo u vidu Fourier-ovih redova

$$G_{k_0}(\varepsilon, \theta, \alpha, \psi) = \sum_{\ell, m} g_k^{(\ell, m)}(\varepsilon, \alpha) e^{i\{\ell\theta + m\psi\}} \quad (\kappa = 1, 2, \dots, n) \quad (22)$$

gde su

$$g_k^{(\ell, m)}(\varepsilon, \alpha) = \frac{1}{4\mathcal{I}^2} \iint G_{k_0}(\varepsilon, \theta, \alpha, \psi) e^{-i\{\ell\theta + m\psi\}} d\theta d\psi \quad (23)$$

Nepoznate funkcije  $\mu_i^{(i)}(\varepsilon, \alpha, \theta, \psi)$  tražićemo u obliku Fourier-ovog reda

$$\mu_i^{(\ell)}(\varrho, a, \theta, \psi) = \sum_{\ell, m} K_{(i, \ell)}^{(\ell, m)}(\varrho, a) e^{i\{\ell\theta + m\psi\}} \quad (24)$$

gde su  $K_{(i, \ell)}^{(\ell, m)}(\varrho, a)$  nepoznati koeficijenti koje treba odrediti. Unesemo li izraze (22), (24) i izvode  $\frac{\partial^2 \mu_i^{(\ell)}}{\partial \theta^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \mu_i^{(\ell)}}{\partial \theta \partial \psi}$  i  $\frac{\partial^2 \mu_i^{(\ell)}}{\partial \psi^2}$  u levu i desnu stranu jednačine (18) i izjednačimo li koeficijente uz jednake harmonike, to ćemo za određivanje koeficijenata  $K_{(i, \ell)}^{(\ell, m)}(\varrho, a)$  da dobijemo sistem algebarskih jednačina

$$\sum_{i=1}^n \left\{ -a_{ik}(\varrho) [\omega_i m + \nu \ell]^2 + \mathcal{L}_{ik}(\varrho) \right\} K_{(i, \ell)}^{(\ell, m)}(\varrho, a) = g_k^{(\ell, m)}(\varrho, a) \quad (25)$$

( $k=1, 2, \dots, n$ )

Da bi smo rešili taj sistem jednačina koristićemo normalne koordinate, pretpostavljajući  $K_{(i, \ell)}^{(\ell, m)}(\varrho, a)$  u obliku

$$K_{(i, \ell)}^{(\ell, m)}(\varrho, a) = \sum_{s=1}^n \mathcal{L}_s^{(\ell, m)}(\varrho, a) A_i^{(s)}(\varrho) \quad (26)$$

gde su  $\mathcal{L}_s^{(\ell, m)}(\varrho, a)$  nepoznati koeficijenti, koje treba odrediti. Unesemo li izraz (26) u sistem jednačina (25), a imajući u vidu sistem jednačina (8), dobiće se

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ik}(\varrho) \left\{ \omega_s^2(\varrho) - [\omega_i(\varrho)m + \nu(\varrho)\ell]^2 \right\} \mathcal{L}_s^{(\ell, m)} A_i^{(s)}(\varrho) = g_k^{(\ell, m)}(\varrho, a) \quad (27)$$

( $k=1, 2, \dots, n$ )

Pomnožimo jednačine ovog sistema odgovarajućim  $A_k^{(s)}$  i izvršimo sabiranje po indeksu  $k$ , pa ćemo dobiti

$$\sum_{s=1}^n \mathcal{L}_s^{(\ell, m)}(\varrho, a) \left\{ \omega_s^2(\varrho) - [\omega_i(\varrho)m + \nu(\varrho)\ell]^2 \right\} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}(\varrho) A_i^{(s)}(\varrho) A_k^{(s)}(\varrho) = \sum_{k=1}^n g_k^{(\ell, m)}(\varrho, a) A_k^{(s)}(\varrho) \quad (28)$$

Imajući u vidu ortogonalnost normalnih funkcija (9) i uvodeći oznaku

$$m_s(\varrho) = \sum_{i, k=1}^n a_{ik}(\varrho) A_i^{(s)}(\varrho) A_k^{(s)}(\varrho) \quad (s=1, 2, 3, \dots, n) \quad (29)$$

nalazimo nepoznate koeficijente

$$\mathcal{L}_s^{(\ell m)}(\tau, \alpha) = \frac{\sum_{k=1}^n g_k^{(\ell m)}(\tau, \alpha) A_k^{(s)}(\tau)}{m_s(\tau) \{ \omega_s^2(\tau) - [\omega_1(\tau)m + \nu(\tau)\ell]^2 \}} \quad (30)$$

pa su

$$\mathcal{M}_i^{(i)}(\tau, \alpha, \theta, \psi) = \sum_{\ell, m} \sum_{s=1}^n A_i^{(s)}(\tau) \frac{\sum_{k=1}^n g_k^{(\ell m)}(\tau, \alpha) A_k^{(s)}(\tau) e^{i\{\ell\theta + m\psi\}}}{m_s(\tau) \{ \omega_s^2(\tau) - [\omega_1(\tau)m + \nu(\tau)\ell]^2 \}} \quad (31)$$

Kako smo za  $\mathcal{M}_i^{(i)}(\tau, \alpha, \theta, \psi)$  pretpostavili da su periodičke funkcije perioda  $2\pi$ , to one moraju imati konačne vrednosti, jer konstante izučavanog sistema mogu uzimati proizvoljno velike vrednosti. Zato u desnim stranama izraza (31) ne smeju da postoje članovi čiji se imenioci za neke vrednosti  $\tau$  mogu izjednačiti sa nulom. To se može dogoditi za

$$m\omega_1(\tau) + \ell\nu(\tau) = \pm\omega_1(\tau) \quad (32')$$

ili za

$$\ell g + p(m \pm 1) = 0 \quad (32)$$

zato izrazi (31) imaju konačne vrednosti kada je zadovoljen uslov

$$\sum_{k=1}^n g_k^{(\ell m)}(\tau, \alpha) A_k^{(s)}(\tau) e^{i\{\ell\theta + m\psi\}} = 0 \quad (33)$$

$$[\ell g + p(m \pm 1) = 0]$$

identički po  $\alpha$  i  $\tau$  u proučavanoj oblasti - intervalu vremena. Pri ovome je nužno naglasiti da nam je oblast promene  $\tau$  unapred poznata, dok oblast promene  $\alpha$  nije unapred poznata. Zato je neophodno pre nego što se reši sistem jednačina, oceniti moguću oblast promene funkcije  $\alpha(\tau)$  i u toj oblasti proveriti da li je zadovoljen uslov (33). Imajući u vidu (33), (23) i oznake (20) i (21) možemo sastaviti izraz za traženu funkciju

$$\mu_i^{(n)}(\tau, a, \theta, \psi) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l,m} \sum_{s=1}^n A_i^{(s)}(\tau) e^{i\{\ell\theta + m\psi\}} \times$$

$$[za \quad s=1 \quad \ell_2 + (m \pm 1)p \neq 0]$$

$$\times \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^n Q_{k0}(\tau, a, \theta, \psi) A_k^{(s)}(\tau) e^{-i\{\ell\theta + m\psi\}} d\theta d\psi}{m_s(\tau) \{\omega_s^2(\tau) - [m\omega_1(\tau) + l\nu(\tau)]^2\}} \quad (34)$$

$$- 2\omega_1(\tau) a \sum_{s=1}^n \frac{\sum_{i=1}^n \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{\partial E_k(\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] \dot{q}_{k,i} = A_i^{(1)}(\tau) A_i^{(s)}(\tau)}{m_s(\tau) [\omega_s^2(\tau) - \omega_1^2(\tau)]} \sin \psi$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

gde je

$$m_s(\tau) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(\tau) A_i^{(s)}(\tau) A_k^{(s)}(\tau) = 2 E_k [A_i^{(s)}(\tau)]$$

Uvedimo oznake za indekse  $\ell = -2p$ ,  $m = 2q \pm 1$  i pomoću njih predstavimo jednačinu (33) u obliku

$$\sum_{k=1}^n g_k^{(-2p, 2q \pm 1)}(\tau, a) A_k^{(s)}(\tau) e^{\pm i\psi + i2q\psi} = 0 \quad (35)$$

pa u njoj izjednačimo koeficijente uz  $\cos \psi$  i  $\sin \psi$  sa nulom, tako da dobijemo sistem jednačina

$$\left[ \omega_1(\tau) - \frac{p}{2} \nu(\tau) \right] \frac{\partial A_1}{\partial \psi} - 2a\omega_1(\tau) B_1 =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 m_1(\tau)} \sum_{\frac{1}{2}} e^{i2q\psi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^n Q_{k0}(\tau, a, \theta, \psi) A_k^{(1)}(\tau) e^{-i2q\psi} \cos \psi d\theta d\psi$$

$$\left[ \omega_1(\tau) - \frac{p}{2} \nu(\tau) \right] a \frac{\partial B_1}{\partial \psi} + 2\omega_1(\tau) A_1 = - \frac{a}{m_1(\tau)} \frac{d[m_1(\tau) \omega_1(\tau)]}{d\tau} -$$

$$- \frac{1}{2\pi^2 m_1(\tau)} \sum_{\frac{1}{2}} e^{i2q\psi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^n Q_{k0}(\tau, a, \theta, \psi) A_k^{(1)}(\tau) e^{-i2q\psi} \sin \psi d\theta d\psi \quad (36)$$



Iz sistema ovih parcijalnih jednačina nalazimo nepoznate funkcije  $\mathcal{A}_1(\tau, \alpha, \varphi)$  i  $\mathcal{B}_1(\tau, \alpha, \varphi)$  kao partikularna rešenja metodom neodređenih koeficijenata

$$\mathcal{A}_1(\tau, \alpha, \varphi) = -\frac{a}{2\omega_1(\tau)m_1(\tau)} \frac{d[\omega_1(\tau)m_1(\tau)]}{d\tau} + \frac{2}{m_1(\tau)} \sum_{\delta} e^{i\delta\varphi} \frac{[2\omega_1(\tau) - p\nu(\tau)]i\delta\mathcal{C}_\delta(\tau, \alpha) + 2\omega_1(\tau)d_\delta(\tau, \alpha)}{4\omega_1^2(\tau) - [2\omega_1(\tau) - p\nu(\tau)]^2\delta^2} \quad (37)$$

$$\mathcal{B}_1(\tau, \alpha, \varphi) = \frac{2}{\alpha m_1(\tau)} \sum_{\delta} e^{i\delta\varphi} \frac{[2\omega_1(\tau) - p\nu(\tau)]i\delta d_\delta(\tau, \alpha) - 2\omega_1(\tau)\mathcal{C}_\delta(\tau, \alpha)}{4\omega_1^2(\tau) - [2\omega_1(\tau) - p\nu(\tau)]^2\delta^2}$$

gde je označeno

$$\mathcal{C}_\delta(\tau, \alpha) = \frac{1}{4\delta^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^n Q_{k\delta}(\tau, \alpha, \theta, \psi) A_k^{(1)}(\tau) E^{-i\delta\varphi} \cos\psi d\theta d\psi \quad (38)$$

$$d_\delta(\tau, \alpha) = -\frac{1}{4\delta^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^n Q_{k\delta}(\tau, \alpha, \theta, \psi) A_k^{(1)}(\tau) E^{-i\delta\varphi} \sin\psi d\theta d\psi$$

Na isti način iz sistema jednačina (19) mogu se odrediti  $\mathcal{U}_i^{(2)}(\tau, \alpha, \theta, \psi)$ , a iz uslova da  $\mathcal{U}_i^{(2)}(\tau, \alpha, \theta, \psi)$  ne sadrže sabirke čiji su imenioci nula, mogu se odrediti  $\mathcal{A}_2(\tau, \alpha, \varphi)$  i  $\mathcal{B}_2(\tau, \alpha, \varphi)$  t.j. iz uslova

$$\sum_{k=1}^n g_{k2}^{(\ell m)}(\tau, \alpha) A_k^{(1)}(\tau) = 0 \quad (39)$$

$[k=1; \ell g + p(m \pm 1) = 0]$

gde su  $g_{k2}^{(\ell m)}(\tau, \alpha)$  koeficijenti Fourier-ovog reda funkcije (21).

Sada je postupak sastavljanja prve asimptot-ske aproksimacije sledeći. Prvo izučavamo sistem jednačina neporemećenog oscilovanja (5) i iz (7) nalazimo sopstvene frekvencije i normalne funkcije (amplitude sopstvenih vektora). Za-

tim odredimo  $p$  i  $q$  zavisno od toga kakvo rezonantno stanje posmatramo. Onda proverimo da li su zadovoljeni uslovi od jedan do tri. Posle toga kao prvu aproksimaciju usvajamo

$$q_i(t) = A_i^{(1)}(\varepsilon) a \cos\left(\frac{p}{2}\theta + \varphi\right) \quad (40)$$

u kojoj su  $a$  i  $\varphi$  neke funkcije vremena, koje se određuju iz sistema jednačina prve aproksimacije

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(\varepsilon, a, \varphi) \quad (41)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_1(\varepsilon) - \frac{p}{2}\nu(\varepsilon) + \varepsilon B_1(\varepsilon, a, \varphi),$$

gde su  $A_1(\varepsilon, a, \varphi)$  i  $B_1(\varepsilon, a, \varphi)$  - partikularna, periodička po  $\varphi$ , rešenja sistema (36) odredjena formulama (37) i (38). Tako je sastavljanje prve asimptotske aproksimacije rešenja koje odgovara jednofrekventnom režimu oscilovanja svedeno na integraljenje sistema jednačina prve aproksimacije (41), koje se u opštem slučaju ne integrale u zatvorenom obliku, već ostaje da se numerički integrale. Ovde je prednost postignuta u tome što je znatno prostije numerički integraliti jednačine prve aproksimacije, koje određuju  $a(t)$  i  $\varphi(t)$ , negoli neposredno jednačine kretanja, koje određuju  $q_i(t)$  - oscilatorne veličine, jer je  $a(t)$  njihova obvojnica.

Ova metoda u literaturi je poznata kao metoda Mitropoljskog (Ю. А. Митропольский).

3. SASTAVLJANJE ASIMPTOTSKE APROKSIMACIJE  
 REŠENJA BEZ PRETHODNOG SASTAVLJANJA  
 TAČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA  
 OSCILOVANJA. INTERPRETACIJA POMOĆU ENERGIJE  
 - VIRTUALNOG RADA.

Izložena metoda u čl. 2 ove glave, nalaženja prve asimptotske aproksimacije rešenja i jednačina prve aproksimacije dozvoljava prostu energetska interpretaciju, pomoću koje možemo direktno da sastavimo jednačine prve aproksimacije bez prethodnog sastavljanja jednačina oscilovanja.

Zato je potrebno da nadjemo izraz virtualnog rada, koji bi izvršile poremećajne sile  $\epsilon Q_k(\varrho, \theta, \dot{\varrho}_1, \dots, \dot{\varrho}_n, \dot{\theta})$  u režimu harmonijskih oscilacija

$$\varrho_{i0} = A_i^{(1)}(\varrho) \alpha \cos\left(\frac{P}{Q} \theta + \varphi\right) \quad (1)$$

$$\dot{\varrho}_{i0} = -A_i^{(1)}(\varrho) \alpha \omega_i(\varrho) \sin\left(\frac{P}{Q} \theta + \varphi\right) \quad (2)$$

na virtualnim pomeranjima

$$\delta \varrho_{i0} = A_i^{(1)}(\varrho) \left\{ \cos\left(\frac{P}{Q} \theta + \varphi\right) \delta \alpha - \alpha \sin\left(\frac{P}{Q} \theta + \varphi\right) \delta \varphi \right\} \quad (3)$$

koja odgovaraju varijacijama amplitude i faze prve normalne oscilacije. Ovde  $\varrho$  posmatramo kao konstantni parametar, a u konačnim formulama i jednačinama prve aproksimacije stavljamo da je  $\varrho = \epsilon t$ .

Sa tačnošću do malih veličina prvog reda imamo za virtualni rad izraz

$$\delta W = \varepsilon \sum_{k=1}^n Q_{k0}(\varepsilon, \theta, \alpha, \frac{p}{2}\theta + \varphi) \left[ \cos\left(\frac{p}{2}\theta + \varphi\right) \delta\alpha - \alpha \sin\left(\frac{p}{2}\theta + \varphi\right) \delta\varphi \right] A_k^{(1)}(\varepsilon) \quad (4)$$

Označimo sa  $\overline{\delta W}$  srednju vrednost virtualnog rada za puni ciklus oscilovanja (jedan period oscilovanja) i razložimo dvostruki Fourier-ov red izraz za virtualni rad i posle integraljenja po punoj fazi  $\varphi = \frac{p}{2}\theta + \varphi$  dobićemo

$$\overline{\delta W} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta W d\varphi = \frac{\varepsilon \delta\alpha}{4\pi^2} \sum_{\beta=-\infty}^{+\infty} e^{i\beta\varphi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^n Q_{k0}(\varepsilon, \theta, \alpha, \varphi) A_k^{(1)}(\varepsilon) e^{-i\beta\varphi} \cos\varphi d\theta d\varphi - \quad (5)$$

$$- \frac{\varepsilon \alpha \delta\varphi}{4\pi^2} \sum_{\beta=-\infty}^{+\infty} e^{i\beta\varphi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^n Q_{k0}(\varepsilon, \alpha, \theta, \varphi) A_k^{(1)}(\varepsilon) e^{-i\beta\varphi} \sin\varphi d\theta d\varphi$$

gde su  $l$  i  $m$  povezani sa  $\beta$  odnosima  $m = \beta q \pm 1$  i  $l = -\beta p$ .

Za koeficijente uz varijacije  $\delta\alpha$  i  $\delta\varphi$  uvodimo simboličke oznake  $\frac{\delta W}{\delta\alpha}$  i  $\frac{\delta W}{\delta\varphi}$  pomoću kojih sistem jednačina (36) iz čl.2 ove glave možemo napisati

$$\varepsilon \left[ \omega_1(\varepsilon) - \frac{p}{2} \nu(\varepsilon) \right] \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial \varphi} - 2\varepsilon \omega_1(\varepsilon) \alpha \mathcal{B}_1 = \frac{2}{m_1(\varepsilon)} \frac{\delta W}{\delta \alpha}$$

$$\varepsilon \left[ \omega_1(\varepsilon) - \frac{p}{2} \nu(\varepsilon) \right] \alpha \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial \varphi} + 2\varepsilon \omega_1(\varepsilon) \mathcal{A}_1 = \frac{2}{m_1(\varepsilon) \alpha} \frac{\delta W}{\delta \varphi} - \frac{\varepsilon \alpha}{m_1(\varepsilon)} \frac{d[m_1(\varepsilon) \omega_1(\varepsilon)]}{d\varepsilon} \quad (6)$$

Oдавде metodom neodredjenih koeficijenata nije teško odrediti  $\mathcal{A}_1(\varepsilon, \alpha, \varphi)$  i  $\mathcal{B}_1(\varepsilon, \alpha, \varphi)$  i pomoću njih sastaviti sistem jednačina prve aproksimacije

$$\frac{d\alpha}{dt} = - \frac{\varepsilon \alpha}{2m_1(\varepsilon) \omega_1(\varepsilon)} \frac{d[m_1(\varepsilon) \omega_1(\varepsilon)]}{d\varepsilon} + \frac{2}{m_1(\varepsilon)} \sum_{\beta} \frac{[p\omega_1(\varepsilon) - 2\nu(\varepsilon)] i \beta \frac{\delta W_2}{\delta \alpha} + 2\omega_1(\varepsilon) \frac{1}{\alpha} \frac{\delta W_2}{\delta \varphi}}{4\omega_1^2(\varepsilon) - [p\omega_1(\varepsilon) - 2\nu(\varepsilon)]^2 \beta^2}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_1(\varepsilon) - \frac{p}{2}\nu(\varepsilon) + \frac{2}{am_1(\varepsilon)} \sum \frac{[p\omega_1(\varepsilon) - 2\nu(\varepsilon)]i\delta \frac{\delta \bar{W}_2}{\delta p} \frac{1}{a} - 2\omega_1(\varepsilon) \frac{\delta \bar{W}_2}{\delta a}}{4\omega_1^2(\varepsilon) - [p\omega_1(\varepsilon) - 2\nu(\varepsilon)]^2 b^2} \quad (7)$$

Za sastavljanje jednačina prve aproksimacije neophodno je izračunati srednju vrednost virtualnog rada prema izrazu (5), a zatim odrediti "parcijalne izvode"  $\frac{\delta \bar{W}_2}{\delta a}$  i  $\frac{\delta \bar{W}_2}{\delta p}$ , a pre-  
ma

$$\delta \bar{W} = \sum_{\delta=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\delta \bar{W}_2}{\delta a} \delta a + \frac{\delta \bar{W}_2}{\delta p} \delta p \right\} \quad (8)$$

a zatim uneti u formule (7). Na energetske interpretaciji viših približenja nećemo se zadržavati.

4. NEKI SPECIJALNI SLUČAJEVI SISTEMA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA OSCILOVANJA SISTEMA SA VIŠE STEPENI SLOBODE OSCILOVANJA

Sastavimo jednačine prve aproksimacije za jednofrekventni režim oscilovanja za neke specijalne slučajeve sistema diferencijalnih jednačina oscilovanja sistema sa više stepeni slobode.

1° Neka generalisane poremećajne sile imaju oblik

$$\varepsilon Q_k(\varepsilon, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

U tom slučaju jednačine poremećenog oscilovanja su oblika

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_{ik}(\varepsilon) \dot{q}_i \right\} + \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{ik}(\varepsilon) q_i = \varepsilon Q_k(\varepsilon, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

Uz pretpostavke navedene u čl. 2 ove glave za prvu asimptotsku aproksimaciju dvoparametarske familije partikularnih rešenja bliskih prvom normalnom obliku oscilovanja uzimamo

$$q_i = A_i^{(1)}(\varepsilon) \alpha \cos \Psi \quad (3)$$

gde se  $\alpha$  i  $\Psi$  odredjuju iz sistema jednačina prve aproksimacije

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\varepsilon \alpha}{2m_1(\varepsilon)\omega_1(\varepsilon)} \frac{d[m_1(\varepsilon)\omega_1(\varepsilon)]}{d\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2\pi m_1(\varepsilon)\omega_1(\varepsilon)} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^n Q_{k0}(\varepsilon, \alpha, \Psi) A_k^{(1)}(\varepsilon) \sin \Psi d\Psi$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_1(\vartheta) - \frac{\varepsilon}{2\pi m_1(\vartheta) \omega_1(\vartheta) a} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^n Q_{k0}(\vartheta, \psi) A_k^{(1)}(\vartheta) \cos \psi d\psi \quad (4)$$

2° Neka je sistem jednačina poremećenog oscilovanja oblika

$$\sum_{i=1}^n (a_{ik} \ddot{q}_i + c_{ik} \dot{q}_i) = \varepsilon Q_k(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) + \varepsilon E_k(\vartheta) \sin \theta \quad (5)$$

(k=1, 2, \dots, n)

gde su  $a_{ik} = a_{ki}$  i  $c_{ik} = c_{ki}$  konstante. Prva aproksimacija rešenja je tada

$$q_i = A_i^{(1)} a \cos(\theta + \psi); \quad \psi = \theta + \varphi \quad (6)$$

gde su  $a$  i  $\varphi$  funkcije vremena i određuju se iz sistema jednačina prve aproksimacije

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\pi m_1 \omega_1} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^n Q_{k0}(a, \psi) A_k^{(1)}(\vartheta) \sin \psi d\psi - \frac{\varepsilon \sum_{k=1}^n E_k(\vartheta) A_k^{(1)}(\vartheta)}{m_1(\vartheta) [\omega_1(\vartheta) + \nu(\vartheta)]} \cos \varphi \quad (7)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_1 - \nu(\vartheta) - \frac{\varepsilon}{2\pi m_1 \omega_1 a} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^n Q_{k0}(a, \psi) A_k^{(1)} \cos \psi d\psi + \frac{\varepsilon \sum_{k=1}^n E_k(\vartheta) A_k^{(1)}}{m_1 [\omega_1 + \nu(\vartheta)]} \sin \varphi$$

3° Neka je sistem jednačina poremećenog oscilovanja oblika

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ik}(\vartheta) \dot{q}_i \right\} + \sum_{i=1}^n c_{ik}(\vartheta) q_i = \varepsilon \sum_{i=1}^n \lambda_{ik}(\vartheta) \dot{q}_i + \varepsilon E_k(\vartheta) \sin \theta \quad (8)$$

(k=1, 2, \dots, n)

prva asimptotska aproksimacija rešenja je oblika (6) dok se  $a$  i  $\varphi$  određuju iz sistema jednačina prve aproksimacije

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon a}{2m_1(\varepsilon)\omega_1(\varepsilon)} \left[ n_1(\varepsilon)\omega_1(\varepsilon) - \frac{d[m_1(\varepsilon)\omega_1(\varepsilon)]}{d\varepsilon} \right] - \frac{\varepsilon \sum_{k=1}^n E_k(\varepsilon) A_k^{(1)}(\varepsilon)}{m_1(\varepsilon)[\omega_1(\varepsilon) + \nu(\varepsilon)]} \cos \varphi$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_1(\varepsilon) - \nu(\varepsilon) + \frac{\varepsilon \sum_{k=1}^n E_k(\varepsilon) A_k^{(1)}(\varepsilon)}{a m_1(\varepsilon)[\omega_1(\varepsilon) - \nu(\varepsilon)]} \sin \varphi \quad (9)$$

gde je sa  $n_1(\varepsilon)$  obeleženo

$$n_1(\varepsilon) = \sum_{i,k=1}^n \lambda_{ik}(\varepsilon) A_i^{(1)}(\varepsilon) A_k^{(1)}(\varepsilon) \quad (10)$$

U svim ovim slučajevima sastavljene su jednačine prve aproksimacije za izučavanje osnovnog rezonantnog stanja. Podrazumeva se da su pri sastavljanju jednačina prve aproksimacije korišćene jednačine iz čl. 2 ove glave : (37) , (38) , (40) i (41) za slučaj kada je  $p = q = 1$ .



5. KORIŠĆENJE ENERGETSKE INTERPRETACIJE JEDNAČINA PRVE APROKSIMACIJE ZA REŠAVANJE PARCIJALNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA - JEDNAČINA OSCILOVANJA ELASTIČNIH TELA.

Izložena energetska interpretacija jednačina prve aproksimacije u čl.4 omogućava da se one sastave bez prethodnog sastavljanja tačnih diferencijalnih jednačina oscilovanja. Saglasno sa tom metodom za dobijanje asimptotske aproksimacije rešenja dovoljno je sastaviti linearni sistem koji opisuje neporemećeno oscilovanje i proveriti da li zadovoljava sve uslove iz čl.2 ove glave, a to znači naći sopstvene frekvencije i koordinate sopstvenih vektora, posle čega se mogu direktno sastaviti jednačine prve aproksimacije za amplitudu i fazu,  $\alpha$  i  $\varphi$ , koristeći se izrazom srednjeg virtualnog rada poremećajnih generalisanih sila. Ovo daje ideju da se izložena metoda u čl.2 formalno može da primeni za sastavljanje asimptotskih aproksimacija rešenja parcijalnih diferencijalnih jednačina, koje opisuju oscilacije elastičnih tela.

Zaista kao i u sistemima sa konačnim brojem stepeni slobode oscilovanja, u oscilatornim sistemima sa raspodeljenim parametrima (čije se kretanje opisuje nelinearnim diferencijalnim jednačinama hiperboličkog tipa) u određenim uslovima mogu se ostvariti jednofrekventne oscilacije i kada su one stabilne, važno je da se one izuče. Zato je i opravdano

da se iskoristi mogućnost izučavanja jednofrekventnih oscilacija elastičnih tela.

*Ю. А. Митрополский* i njegov učenik *Б. И. Мосеенков* prvi su iskoristili asimptotske metode za izučavanje nestacionarnih oscilacija elastičnih tela (struna, štap, vratila).

### 5.1. POPREČNE OSCILACIJE ŠTAPA NAPREGNUTOG AKSIJALNOM SILOM PROMENLJIVE FREKVENCIJE

Posmatraćemo poprečne oscilacije štapa napregnuto aksijalnom silom promenljive frekvencije za slučaj opštijih linearnih graničnih uslova. U slučaju kada krajevi štapa nisu zglobno vezani obične Fourier-ove zamene promenljivih nisu zgodne, čak ni moguće, dok energetska metoda dozvoljava da se izračunavaju jednofrekventne oscilacije za različite granične uslove. Za različite granične uslove dobijamo različite sopstvene frekvencije i normalne funkcije, koje određuju oblik dinamičke ravnoteže za neporemećeno kretanje.

Ovde ćemo proučiti štapa dužine  $l$ , na čiji kraj dejstvuje kvaziharmonijska aksijalna sila

$$F = S(\theta) \quad (1)$$

gde je  $S(\theta)$  periodička funkcija sa periodom  $2\pi$ , a  $\theta = \theta(t)$  pri čemu je  $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\vartheta)$  - funkcija "sporopromenljivog vremena"  $\vartheta = \varepsilon t$ ,  $\varepsilon$  - mali parametar. Kao što je poznato, parcijalna diferencijalna jednačina za poprečne oscilacije štapa je

$$\beta \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + S(\theta) \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

gde je  $\beta = EI_x$  - savojna krutost štapa,  $\gamma = \rho/g$  - gustina materijala grede,  $A$  - površina poprečnog preseka. Ovu jednačinu možemo razmatrati kao jednačinu poremećenog kretanja štapa pod dejstvom aksijalne poremećajne sile (1).

Granični uslovi na krajevima štapa  $z=0, z=l$ ,

najčešće se javlja u obliku:

1) krajevu uklešteni

$$\left. \begin{array}{l} y=0 \\ z=l \\ z=0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial z} \\ z=0 \\ z=l \end{array} \right\} = 0 \quad (3)$$

2) jedan kraj uklešten, drugi zgloбно vezan

$$\left. \begin{array}{l} y(z,t) \\ z=0 \\ z=l \end{array} \right\} = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial z} \\ z=0 \end{array} \right\} = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \\ z=l \end{array} \right\} = 0 \quad (4)$$

3) zgloбно vezani krajevi

$$\left. \begin{array}{l} y(z,t) \\ z=0 \\ z=l \end{array} \right\} = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \\ z=0 \\ z=l \end{array} \right\} = 0 \quad (5)$$

ili u opštem slučaju u obliku

$$L_{ij} \left( y, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial z^3} \right) \Big|_{z=0}^{z=l} = 0 \quad i, j = 1, 2. \quad (6)$$

koji obuhvata napred nabrojane slučajeve, gde je  $L_{ij}$  linearni operator. Neka je  $Z_1(z)$  prva (osnovna) normalna funkcija, koja odgovara najmanjem karakterističnom broju  $\kappa_1$  i određuje se iz diferencijalne jednačine

$$\frac{d^4 Z_1(z)}{dz^4} - \kappa_1^4 Z_1(z) = 0 \quad (7)$$

pri čemu na krajevima  $z=0$  i  $z=l$  ona zadovoljava jedne od napred navedenih graničnih uslova. Na osnovu jednačine (2) očividno je da dobijamo

$$\int_0^l \left( B \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + SA \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + S \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right) Z_1(z) dz = 0 \quad (8)$$

Ako je poremećajna sila jednaka nuli, jednačina neporemećenog kretanja je

$$\beta \frac{\partial^4 y^*}{\partial z^4} + SA \frac{\partial^2 y^*}{\partial t^2} = 0 \quad (9)$$

zajedno sa graničnim uslovima (6). Jednačina (9) u jednofrekventnom režimu oscilovanja u prvoj aproksimaciji ima rešenje

$$y^* = Z_1(z) a \sin(\omega t + \varphi) \quad (10)$$

u kome su  $a$  i  $\varphi$  proizvoljne konstante, a

$$\omega^2 = \frac{\beta}{SA} k_1^4 \quad (11)$$

Asimptotsko rešenje (10) odgovara jednofrekventnom režimu oscilovanja u prvom obliku dinamičke ravnoteže. Pretpostavivši da je odnos osne sile  $F = S(\theta)$  prema kritičnom Euler-ovom opterećenju  $P_{cr}$  dovoljno mali, pri izračunavanju jednofrekventnih oscilacija poremećenog kretanja, pretpostavimo da je oblik ugiba određen normalnom funkcijom  $Z_1(z)$ . U vezi sa tim mi ćemo tražiti približno rešenje jednačine poremećenog kretanja (2) u obliku

$$y(z, t) = T(t) Z_1(z) \quad (12)$$

gde je  $T(t)$  funkcija samo vremena  $t$ . Unošenjem pretpostavljenog rešenja (12) u jednačinu (8) i uzimanjem u obzir jednačine (7) dobijamo

$$\beta k_1^4 T(t) + SA \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + S(\theta) T(t) \frac{\int_0^l \frac{d^2 Z_1(z)}{dz^2} Z_1(z) dz}{\int_0^l Z_1(z)^2 dz} = 0 \quad (13)$$

Parcijalnim integraljenjem i uzimanjem u obzir graničnih uslova (6) i jednačine (7) dobijamo da je

$$\int_0^l \frac{d^2 Z_1}{dz^2} Z_1(z) dz = - \int_0^l \left[ \frac{dZ_1(z)}{dz} \right]^2 dz \quad (14)$$

$$\int_0^l \left[ \frac{d^2 Z_1(z)}{dz^2} \right]^2 dz = K_1^2 \int_0^l [Z_1(z)]^2 dz$$

Sledi sada da je

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 \left(1 - \frac{S}{P_1}\right) T(t) = 0 \quad (15)$$

gde je

$$P_1 = B \frac{\int_0^l \left[ \frac{d^2 Z_1(z)}{dz^2} \right]^2 dz}{\int_0^l \left[ \frac{dZ_1(z)}{dz} \right]^2 dz} \quad (16)$$

Veličina  $P_1$  koja se određuje ovim izrazom, javlja se kao približna veličina kritične Euler-ove sile izračunate pomoću Rayg-hly-eve metode energije. Zato i dobijamo da je približno:

Osim toga saglasno definiciji

$$P_{cr} = \min \frac{\int_0^l B \left( \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right)^2 dz}{\int_0^l \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 dz} \quad (17)$$

je

$$P_1 > P_{cr} \quad (18)$$

Praktično odnos  $\frac{S}{P_{cr}}$  je dovoljno mali. Saglasno jednačini (18) očevidno je da je

$$\frac{S}{P_{cr}} > \frac{S}{P_1}$$

i zato je odnos  $\frac{S}{P_1}$  takodje dovoljno mali. Pretpostavimo da je poremećajna aksijalna sila oblika

$$S(\theta) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \sin(n\theta + \varphi_n) \quad (19)$$

t.j. javlja se kao poliharmonijska sila po  $\theta$ . Prepišemo jedna-

činu (15) u obliku

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = \frac{S(\theta)}{P_1} \omega^2 T \quad (20)$$

i pretpostavimo u daljem da izučavamo demultiplikaciono rezonantno stanje oblika

$$\omega \cong \frac{s}{r} \nu(\vartheta) \quad (21)$$

i nalazimo prvu asimptotsku aproksimaciju rešenja jednačine (20) u obliku

$$T(t) = a \cos\left(\frac{s}{r} \theta + \varphi\right) \quad (22)$$

Da bi smo sastavili jednačine prve aproksimacije koristimo energetska metodu čl. , pa je zato potrebno izračunati virtualni rad  $\varepsilon \delta W$  za poremećajnu silu  $\varepsilon Q = \frac{S(\theta)}{P_1} \omega^2 T(t)$ , koji bi ona izvršila u režimu sinusnih oscilacija

$$q = a \cos\left(\frac{s}{r} \theta + \varphi\right) = T(t)$$

na virtualnom pomeranju

$$\delta T(t) = \cos\left(\frac{s}{r} \theta + \varphi\right) \delta a - a \sin\left(\frac{s}{r} \theta + \varphi\right) \delta \varphi$$

Sa začnošću do malih veličina drugog reda imamo da je

$$\varepsilon \delta W = \frac{S(\theta)}{P_1} \omega^2 a \left[ \cos^2\left(\frac{s}{r} \theta + \varphi\right) \delta a - \frac{a}{2} \sin 2\left(\frac{s}{r} \theta + \varphi\right) \delta \varphi \right]$$

Odnosno srednji virtualni rad je

$$\varepsilon \delta \overline{W} = \frac{\omega^2 a}{2\pi P_1} \int_0^{2\pi} S(\theta) \left[ \cos^2\left(\frac{s}{r} \theta + \varphi\right) \delta a - \frac{a}{2} \sin 2\left(\frac{s}{r} \theta + \varphi\right) \delta \varphi \right] d\left(\frac{s}{r} \theta + \varphi\right) \quad (23)$$

Uzimajući u obzir silu  $S(\theta)$  oblika (19) i izračunavajući izraz srednjeg virtualnog rada utvrdjujemo da je on jednak nuli za sve cele vrednosti indeksa sabiranja  $n$  kada je  $2s \neq nr$ . Zaključujemo takođe da pojava demultiplikacionog rezonantnog

stanja ima mesta samo za  $2s = \kappa r$ , gde je  $\kappa$  ceo broj, tj. kada je  $\omega \cong \frac{\kappa}{2} \nu(\vartheta)$ . Drugim rečima rezonantno stanje se javlja za sopstvene frekvencije jednake ili približno jednake polovini frekvencije nekog harmonika aksijalne sile. Na osnovu toga nalazimo izraz za srednji virtualni rad

$$\varepsilon \overline{\dot{W}} = \frac{\omega^2 a}{4P_1} \left\{ [2S_0 + S_\kappa \cos(2\varphi - \varphi_\kappa)] \delta a - a S_\kappa \sin(2\varphi - \varphi_\kappa) \delta \varphi \right\} \quad (24)$$

Iz ovog izraza odredjujemo "parcijalne" izvode  $\varepsilon \frac{\delta \overline{\dot{W}}}{\delta a}$  i  $\varepsilon \frac{\delta \overline{\dot{W}}}{\delta \varphi}$  i njihovim unošenjem u jednačine prve aproksimacije čl. dobijamo jednačine prve aproksimacije za amplitudu i fazu

$$\frac{da}{dt} = - \frac{\omega^2 S_\kappa}{4P_1} \frac{1}{[\omega - (r\omega - s\nu(\vartheta))]} a \sin(2\varphi - \varphi_\kappa) \quad (25)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega - \frac{\omega S_0}{2P_1} - \frac{s}{r} \nu(\vartheta) - \frac{\omega^2 S_\kappa}{4P_1} \frac{\cos(2\varphi - \varphi_\kappa)}{[\omega - (r\omega - s\nu(\vartheta))]}$$

gde su  $s$ ,  $r$  i  $\kappa$  vezani uslovom  $2s = \kappa r$ , a  $P_1$  se određuje po formuli (16).

Zaustavimo se sada na izučavanju pojave demultiplikacionog rezonantnog stanja i izučavanju oblasti stabilnosti i nestabilnosti oscilovanja. Naglasimo da je jednačinama prve aproksimacije (24) moguće zanemariti član koji stoji u imeniocu desne strane. Zaista ukoliko je odnos

$$\frac{\omega - \frac{s}{r} \nu(\vartheta)}{\omega}$$

dovoljno mala veličina prvog reda, zanemarivanje članova  $r\omega - s\nu(\vartheta)$  koji stoje u imeniocima dovodi do zanemarivanja u jednačinama prve aproksimacije (25) članova malih veličina drugog reda što je potpuno opravdano za jednačine prve aproksimacije. Posle zanemarivanja naznačenih članova jednačine prve aproksimacije su

$$\frac{da}{dt} = - \frac{\omega S_\kappa}{4P_1} a \sin(2\varphi - \varphi_\kappa) \quad (26)$$



$$\frac{d\varphi}{dt} = \left[ \omega - \frac{\omega S_0}{2P_1} - \frac{\kappa}{2} \nu(\varrho) \right] - \frac{\omega S_\kappa}{4P_1} \cos(2\varphi - \varphi_\kappa) \quad (26)$$

Da bi smo izučili ove jednačine uvedemo zamenu promenljivih  $\alpha$  i  $\varphi$  promenljivim  $u$  i  $v$  pomoću formula transformacije

$$\begin{aligned} u &= \alpha \cos\left(\varphi - \frac{\varphi_\kappa}{2}\right) \\ v &= -\alpha \sin\left(\varphi - \frac{\varphi_\kappa}{2}\right) \end{aligned} \quad (27)$$

Jednačine prve aproksimacije izražene pomoću novih promenljivih glase

$$\frac{du}{dt} = \left\{ \frac{S_\kappa \omega}{4P_1} + \left[ \omega - \frac{\omega S_0}{2P_1} - \frac{\kappa}{2} \nu(\varrho) \right] \right\} v \quad (28)$$

$$\frac{dv}{dt} = \left\{ \frac{S_\kappa \omega}{4P_1} - \left[ \omega - \frac{\omega S_0}{2P_1} - \frac{\kappa}{2} \nu(\varrho) \right] \right\} u$$

i javljaju se kao linearne diferencijalne jednačine promenljivih  $u$  i  $v$ . Za slučaj poliharmonijske sile  $F = S(\theta)$  kada je frekvencija  $\nu(\varrho)$  konstantna, jednačine prve aproksimacije će biti linearne sa konstantnim koeficijentima. Pri izučavanju zona nestabilnosti smatraćemo da je  $\varrho$  parametar pa ćemo i  $\nu(\varrho)$  smatrati konstantnim. Zato ćemo rešenje sistema (28) tražiti u obliku

$$\begin{aligned} u &= A e^{\mu t} \\ v &= B e^{\mu t} \end{aligned} \quad (29)$$

i dobiti odgovarajuću karakterističnu jednačinu

$$\mu^2 + \left[ \omega - \frac{\omega S_0}{2P_1} - \frac{\kappa}{2} \nu(\varrho) \right]^2 - \left( \frac{\omega S_\kappa}{4P_1} \right)^2 = 0 \quad (30)$$

čiji su koreni

$$\mu_{1/2} = \pm d = \pm \sqrt{\left( \frac{\omega S_\kappa}{4P_1} \right)^2 - \left[ \omega - \frac{\omega S_0}{2P_1} - \frac{\kappa}{2} \nu(\varrho) \right]^2} \quad (31)$$

Opšte rešenje sistema (28) je sada

$$u = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t}$$

$$v = \frac{\alpha}{\frac{\omega S_{\kappa}}{4P_1} + \left[ \omega - \frac{\omega S_0}{2P_1} - \frac{\kappa}{2} \nu(\vartheta) \right]} (C_1 e^{\alpha t} - C_2 e^{-\alpha t}) \quad (32)$$

gde su  $C_1$  i  $C_2$  proizvoljne konstante integracije, koje mogu biti određene iz početnih uslova. Iz izraza za korene karakteristične jednačine (31) vidimo da su oni realni za

$$\frac{\omega S_{\kappa}}{4P_1} > \pm \left[ \omega - \frac{\omega S_0}{2P_1} - \frac{\kappa}{2} \nu(\vartheta) \right] \quad (33)$$

odakle sledi da ako frekvencija poremećajne sile leži u intervalu

$$2\omega \left( 1 - \frac{S_0}{2P_1} \right) + \frac{S_{\kappa}\omega}{2P_1} > \kappa \nu(\vartheta) > 2\omega \left( 1 - \frac{S_0}{2P_1} \right) - \frac{S_{\kappa}\omega}{2P_1} \quad (34)$$

poprečne oscilacije dospevaju u oblast demultiplikacionog rezonantnog stanja - parametarskog rezonantnog stanja i njihova amplituda raste po eksponencijalnom zakonu bez obzira koliko male bile početne vrednosti amplitude. Drugim rečima nejednakost (34) određuje zonu nestabilnosti u čijoj se sredini položaji ravnoteže pokazuju nestabilnim i poprečne oscilacije se samopobudjuju. Zone nestabilnosti određene saglasno jednačinama prve aproksimacije obuhvataju sve navedene slučajeve linearnih graničnih uslova. Pojava konstantne komponente  $S_0$  aksijalne sile  $F = S(\vartheta)$ , dovodi do toga da sopstvena frekvencija poprečnih oscilacija se pomera, tj. tj. ako je frekvencija sopstvenih slobodnih poprečnih oscilacija jednaka  $\omega$  (u odsustvu dodatnih aksijalnih sila) to je frekvencija  $\omega^*$  pomerena dejstvom konstantne komponente opterećenja i određuje se po formuli

$$\omega^* = \omega \left( 1 - \frac{S_0}{2P_1} \right) \quad (35)$$

Iz izraza (34) proizilazi da harmonijske komponente u rezonantnoj zoni uzajamno ne utiču jedna na drugu. Svaki harmonik aksijal

ne sile određuje svoju sopstvenu individualnu rezonantnu zonu, koja zavisi od amplitude tog harmonika. Svi izvedeni zaključci se odnose na prvu aproksimaciju. Već u drugoj aproksimaciji javlja se uzajamni uticaj harmonika u zoni rezonantnog stanja. U nejednakosti (34) možemo da predjemo od kružnih frekvencija na broj obrta u sekundu. Neka je  $n_0$  broj sopstvenih slobodnih oscilacija u sekundu,  $n_k$  broj oscilacija  $k$ -og harmonika aksijalne sile. Iz nejednakosti (34) dobijamo

$$2n_0\left(1 - \frac{S_0}{2P_1}\right) - \frac{S_k n_0}{2P_1} < n_k < 2n_0\left(1 - \frac{S_0}{2P_1}\right) + \frac{S_k n_0}{2P_1} \quad (36)$$

pri čemu je

$$n_0 = \frac{\kappa_1^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\beta}{\rho A}} \quad (37)$$

Dobijene formule se mogu koristiti za određivanje položaja "opsnih zona".

Izvedene formule važe za slučaj i kada je štap promenljivog poprečnog preseka, u kom slučaju u formulama treba  $n_0$  i  $P_1$  zameniti sledećim izrazima

$$n_0 = \frac{\kappa_1^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\beta}{\rho A}} \quad (38)$$

$$P_1 = \frac{\int_0^l \beta(z) \left[ \frac{d^2 Z_1(z)}{dz^2} \right]^2 dz}{\int_0^l \left[ \frac{dZ_1(z)}{dz} \right]^2 dz} \quad (39)$$

gde je

$$\frac{d^2 \left[ \beta(z) \frac{d^2 Z_1(z)}{dz^2} \right]}{dz^2} = A(z) \rho \kappa_1^4 Z_1(z) \quad (40)$$

Ovde je  $\kappa_1$  - najmanji karakterističan broj. Veličine  $\kappa_1$  i  $P_1$  moguće je odrediti i pomoću Retz-ove metode.

Jednačine prve aproksimacije (25) za opšti slučaj amplitude  $\alpha$  i faze  $\varphi$  u oblasti promene frekvencije  $\nu(\tau)$  dovoljno udaljenih od zone parametarskog rezonantnog stanja uz smenu promenljivih (27) daju sistem jednačina

$$\frac{d\mu}{dt} = \left\{ \frac{S_\kappa \omega^2}{4P_1(\kappa\nu(\tau) - \omega)} + \left[ \omega \left(1 - \frac{S_0}{2P_1}\right) - \frac{\kappa}{2} \nu(\tau) \right] \right\} \nu \quad (41)$$

$$\frac{d\nu}{dt} = \left\{ \frac{S_\kappa \omega^2}{4P_1(\kappa\nu(\tau) - \omega)} - \left[ \omega \left(1 - \frac{S_0}{2P_1}\right) - \frac{\kappa}{2} \nu(\tau) \right] \right\} \mu$$

u kojima je  $\tau = \varepsilon t$ . Ovaj sistem linearnih diferencijalnih jednačina sa promenljivim koeficijentima ne može se u zatvorenom obliku integraliti, pa se zato primenjuju numeričke metode. Pre svega nužno je naći vrednosti amplitude  $\alpha$  i faze  $\varphi$  u početnom trenutku, tj.  $\alpha_0$  i  $\varphi_0$  i prema formulama (27) odrediti  $\mu_0$  i  $\nu_0$  neophodne kao početne vrednosti za integraljenje sistema (41). Osim toga treba zadati i zakon promene "frekvencije"  $\nu(\tau)$  poremećajne aksijalne sile. Naime te podatke moguće je menjati po izabranom zakonu tako da pri tome  $\kappa\nu(\tau)$  kontinualno uzima vrednosti iz intervala određenog nejednakošću (34). Tada će taj prelazni režim odgovarati slučaju prolaska kroz zonu parametarskog rezonantnog stanja.

## 5.2. POPREČNE OSCILACIJE ŠTAPA DVOSTRUKE KRUTOSTI U PRELAZKOM REŽIMU OSCILOVANJA

Posmatraćemo slučaj prostornih poprečnih oscilacija štapa ili vratila različitih savojnih krutosti u glavnim ravnima savijanja, koji se okreće promenljivom ugaonom brzinom  $\omega(\varphi)$  gde je  $\varphi = \varepsilon t_1$ ,  $\varepsilon$  - mali parametar,  $t_1$  - vreme u jedinicama reda veličine perioda sopstvenih poprečnih oscilacija štapa u glavnim ravnima savijanja. Za sastavljanje diferencijalnih jednačina neporemećenog kretanja i sastavljanja asimptotskih rešenja energetsom metodom, pre svega, sastavićemo izraze za kinetičku i potencijalnu energiju. Pri tome pored klasičnih pretpostavki pri izučavanju malih poprečnih oscilacija tankog štapa pretpostavljamo da se štap u procesu oscilovanja ne uvija. Pretpostavljamo da je štap statički neuravnotežen, tj. linija geometrijskog mesta težišta elementa štapa koji miruje nije pravolinijska, nego je pomeren u odnosu na pravolinijsku osu i pri tome je ravna kriva unapred poznata. Pretpostavljamo da su krajevi zglobno vezani. Uzdužne oscilacije pri izučavanju poprečnih zanemarujemo.

Uvešćemo dva sistema koordinata  $Oxyz$  i  $O\xi\eta$  od kojih je prvi nepokretan, a drugi pokretan i okreće se zajedno sa štapom ugaonom brzinom  $\omega(\varphi)$ . Ose  $Oz$  i  $O\xi$  usmerimo duž obrtne ose, koja se poklapa sa pravolinijskom geometrijskom osom štapa u miru, a koordinatni početak izaberemo na levom osloncu. Druge dve ose pokretnog koordinatnog sistema izaberemo da se poklapaju sa glavnim osama inercije

površine poprečnog preseka štapa. Osu  $Oy$  nepokretnog koordinatnog sistema usmerimo vertikalno naniže kao što je na slici prikazano. Projektujemo proizvoljan poprečni presek štapa koji se obrće u proizvoljnom trenutku, na  $Oxy$  ravan. Tada je položaj težišta tog preseka određen vektorom  $\vec{r}_c$ , koji je funkcija položaja preseka i vremena  $t$ . Sa slike je očevidno da je

$$\vec{r}_c = \vec{w} + \vec{g} \quad (1)$$

gde je  $\vec{w}$  vektor pomeranja geometrijskog centra elementa štapa, a  $\vec{g}$  - vektor ekscentričnosti težišta. Vektor  $\vec{g}$  u pokretnom koordinatnom sistemu funkcija je položaja elementa štapa dužine  $dz$ , tj. funkcija promenljive  $z$ . U pokretnom koordinatnom sistemu jednačina (1) se može napisati u obliku

$$\xi_c \vec{i}' + \eta_c \vec{j}' = (\xi + \xi_2) \vec{i}' + (\eta + \eta_2) \vec{j}' \quad (2)$$

gde  $\vec{i}'$  i  $\vec{j}'$  ortovi osa pokretnog koordinatnog sistema. Na osnovu Rivals-ove teoreme o izvodu vektora je

$$\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \overset{*}{v}_c + [\vec{\omega}, \vec{r}_c] \quad (3)$$

gde je  $\overset{*}{v}_c$  relativni izvod vektora. Projekcije apsolutne brzine težišta su sada

$$\begin{aligned} v_{\xi} &= \frac{\partial \xi}{\partial t} - \omega (\eta + \eta_2) \\ v_{\eta} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + \omega (\xi + \xi_2) \end{aligned} \quad (4)$$

na osnovu kojih sastavljamo izraz za kinetičku energiju sistema

$$E_k = \frac{\rho A}{2} \int_0^l \left\{ \left[ \frac{\partial \xi}{\partial t} - \omega (\eta + \eta_2) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \omega (\xi + \xi_2) \right]^2 \right\} d\xi \quad (5)$$

gde je  $\rho_v A$  - linearna gustina mase štapa konstantnog preseka,  $l$  - dužina vratila,  $\rho_1 = \rho_\xi$  i  $\rho_2 = \rho_\eta$  ;  
 $\omega = \omega(\tau)$  - ugaona brzina obrtanja vratila funkcija sporo promenljivog vremena.

Odgovarajuća potencijalna energija usled de-  
 formacionog rada i rada sile teže je

$$E_p = \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} [\beta_1 \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} \right)^2 + \beta_2 \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} \right)^2] - mg(y \cos \theta - z \sin \theta) \right\} d\xi \quad (6)$$

gde su  $\beta_1$  i  $\beta_2$  savojne krutosti vratila u glavnim rav-  
 nima savijanja;  $\theta = \int_0^t \omega(\tau) d\tau$  - ugao obrtanja pokretnog siste-  
 ma. Izrazi za kinetičku i potencijalnu energiju su izraženi po-  
 moću koordinata pokretnog sistema. Uzimajući u obzir male veli-  
 čine kao što su asimetrija poprečnog preseka ili "različitost"  
 glavnih momenata inercije, uticaj sopstvene težine, statičku neu-  
 ravnoteženost, možemo da izdvojimo u izrazima za kinetičku i po-  
 tencijalnu energiju delove - izraze koji sadrže te male veliči-  
 ne: odgovarajuće "poremećajne" potencijalnu i kinetičku energi-  
 ju. Tada je za štap konstantnog poprečnog preseka napisati kine-  
 tičku energiju u sledećem obliku:

$$E_k = E_k' + \varepsilon E_k'' \quad (7)$$

gde su:  $E_k'$  kinetička energija neporemećenog kretanja

$$E_k' = \frac{\rho A}{2} \int_0^l \left\{ \left[ \frac{\partial \xi}{\partial \tau} - \omega(\tau) \eta \right]^2 + \left[ \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \omega(\tau) \xi \right]^2 \right\} d\xi \quad (8)$$

$\varepsilon E_k''$  kinetička energija poremećenog kretanja

$$\varepsilon E_k'' = \frac{\rho A}{2} \int_0^l \left\{ \omega^2(\tau) (\rho_\xi^2 + \rho_\eta^2) - 2\rho_\eta \omega(\tau) \left[ \frac{\partial \xi}{\partial \tau} - \omega(\tau) \eta \right] + 2\rho_\xi \omega(\tau) \left[ \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \omega(\tau) \xi \right] \right\} d\xi \quad (9)$$

Za potencijalnu energiju pišemo da je

$$E_p = E_p' + \varepsilon E_p'' \quad (10)$$

gde je  $E_p'$  potencijalna energija neporemećenog kretanja,

$$E_p' = \frac{\beta_1 + \beta_2}{4} \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial \zeta^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta^2} \right)^2 \right] d\zeta \quad (11)$$

i  $\varepsilon E_p''$  potencijalna energija poremećenog kretanja

$$\varepsilon E_p'' = \int_0^l \left\{ \frac{\beta_1 - \beta_2}{4} \left[ \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial \zeta^2} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta^2} \right)^2 \right] - \beta_1 g (\xi \cos \theta - \eta \sin \theta) \right\} d\zeta \quad (12)$$

Za sastavljanje diferencijalne jednačine poprečnih oscilacija neporemećenog kretanja korišćemo varijacioni princip Hamilton-Ostrogradskog

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_p' - E_k') dt = 0 \quad (13)$$

Na osnovu Euler-ovih jednačina dobijamo jednačine neporemećenog oscilovanja

$$\begin{aligned} c^2 \frac{\partial^4 \xi}{\partial \zeta^4} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - 2\omega(\tau) \frac{\partial \eta}{\partial t} - \varepsilon \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} \eta - \omega^2(\tau) \xi &= 0 \\ c^2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial \zeta^4} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + 2\omega(\tau) \frac{\partial \xi}{\partial t} + \varepsilon \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} \xi - \omega^2(\tau) \eta &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

gde je

$$c^2 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2\beta_1 A} \quad (15)$$

Prirodni granični uslovi za slučaj zglobno vezanih krajeva su

$$\begin{aligned} \xi(\zeta, t)|_{\zeta=0} = \xi(\zeta, t)|_{\zeta=l} = \eta(\zeta, t)|_{\zeta=0} = \eta(\zeta, t)|_{\zeta=l} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial \zeta^2} \Big|_{\zeta=0} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \zeta^2} \Big|_{\zeta=l} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta^2} \Big|_{\zeta=0} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta^2} \Big|_{\zeta=l} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Ako pomnožimo drugu jednačinu sistema (14) sa  $i$  i saberemo sa prvom i uvedemo oznaku

$$\eta(\zeta, t) = \xi(\zeta, t) + i \eta(\zeta, t) \quad (17)$$



dobijamo diferencijalnu jednačinu u kompleksnom obliku

$$c^2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + 2i\omega(\varepsilon) \frac{\partial \eta}{\partial t} + i\varepsilon \frac{d\omega(\varepsilon)}{d\varepsilon} \eta - \omega^2(\varepsilon) \eta = 0 \quad (18)$$

Ako sa  $\eta$  obeležimo izraz

$$\eta(z, t) = x(z, t) + i y(z, t) \quad (19)$$

i formulu prelaza sa pokretnog koordinatnog sistema na nepokretni

$$\eta = \bar{\eta} e^{-i\theta} \quad (20)$$

iskoristimo za transformaciju jednačine (18) dobijamo

$$c^2 \frac{\partial^4 \bar{\eta}}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial t^2} = 0 \quad (21)$$

koja predstavlja diferencijalnu jednačinu neporemećenog oscilovanja u nepokretnom koordinatnom sistemu, a u kompleksnom obliku. Granični uslovi u kompleksnom obliku za diferencijalnu jednačinu (21) su

$$\eta(z, t) \Big|_{z=0}^{z=l} = 0 \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \Big|_{z=0}^{z=l} = 0 \quad (22)$$

Da bi smo primenili energetska metodu sastavljanja asimptotskih rešenja za poremećen sistem, neophodno je naći "normalne" funkcije koje određuju oblik dinamičke ravnoteže i odgovarajuće sopstvene frekvencije neporemećenog sistema. Primenjujući Fourier-ovu metodu dobijamo jednačinu za nalaženje "normalne" funkcije

$$\frac{d^4 Z(z)}{dz^4} - \lambda^4 Z(z) = 0 \quad (23)$$

koja se javlja kao realna funkcija i za granične uslove (22) ima oblik

$$Z_k(z) = \sin \frac{\kappa \hat{\omega}}{\ell} z \quad (23')$$

dok su sopstvene frekvencije

$$\omega_n = \frac{n^2 \hat{\omega}^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{\beta_1 + \beta_2}{2 S_A}}$$

Na osnovu ovoga partikularno rešenje jednačine (21) je

$$y''(z,t) = \sin \frac{\hat{\omega}}{\ell} z \left[ a_1 e^{i(\omega_1 t + \varphi_1)} + a_2 e^{-i(\omega_1 t + \varphi_2)} \right] \quad (24)$$

gde su  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  realne proizvoljne konstante. Ako predjemo na realne funkcije dobijamo da je

$$x^{(1)}(z,t) = \sin \frac{\hat{\omega}}{\ell} z \left[ a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \cos(\omega_1 t + \varphi_2) \right] \quad (25)$$

$$y^{(1)}(z,t) = \sin \frac{\hat{\omega}}{\ell} z \left[ a_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - a_2 \sin(\omega_1 t + \varphi_2) \right]$$

Neka je za neke vrednosti  $\varepsilon \in [0, \varepsilon]$ ,  $\frac{d\theta}{dt} = \omega(\varepsilon) \approx \omega$  prvu aproksimaciju rešenja poremećenog oscilovanja potražićemo u obliku

$$x^{(n)}(z,t) = \sin \frac{\hat{\omega}}{\ell} z \left[ a_1 \cos(\theta + \varphi_1) + a_2 \cos(\omega_1 t + \varphi_2) \right] \quad (26)$$

$$y^{(n)}(z,t) = \sin \frac{\hat{\omega}}{\ell} z \left[ a_1 \sin(\theta + \varphi_1) - a_2 \sin(\omega_1 t + \varphi_2) \right]$$

gde  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  moraju biti određene kao funkcije vremena iz sistema jednačina prve aproksimacije, koji ćemo sastaviti koristeći energetska metodu.

Prvo treba odrediti poremećajne sile koje odgovaraju "poremećenoj" potencijalnoj energiji (radi uprošćenja stavićemo da je  $g = 0$  i pri proučavanju uticaja statičke neuravnoteženosti zanemaćićemo poremećaje usled sila sopstvene težine) i "poremećenoj" kinetičkoj energiji, a koje se javljaju usled asimetrije preseka, statičke neuravnoteženosti

i promenljive ugaone brzine okretanja. Osim nabrojanih poremećajnih sila, takodje ćemo uračunavati i male disipativne sile koje obrazuju silu trenja proporcionalnu brzini kretanja elementa štapa i usmerenu suprotno od nje. Silu spoljašnjeg trenja za element štapa napisaćemo u obliku  $-\kappa \frac{\partial^2 \eta}{\partial t} d\zeta$ , gde je  $\kappa$  koeficijent spoljašnjeg trenja, redukovano na jedinicu dužine štapa. Za dobijanje eksplicitnih izraza poremećajnih sila, određenih u nepokretnom sistemu koordinata u odnosu na koji smo posmatrali neporemećeni sistem, načićemo prvo raspodeljene sile u pokretnom sistemu koordinata. Unošenjem pod znak integrala u formuli Hamilton-ovog principa umesto  $E_k'$  i  $E_p'$  vrednosti  $\varepsilon E_k''$  i  $\varepsilon E_p''$  i posle variranja dobijemo raspodeljeno opterećenje redukovano na glavne pravce savijanja

$$\begin{aligned} \varepsilon q_{\xi}(\zeta, t) &= \int_{\xi} A \left[ \int_{\xi} \omega^2(\tau) + \varepsilon \int_{\eta} \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} \right] + \frac{\beta_{\xi} - \beta_{\eta}}{2} \frac{\partial^4 \xi}{\partial \zeta^4} \\ \varepsilon q_{\eta}(\zeta, t) &= \int_{\eta} A \left[ \int_{\eta} \omega^2(\tau) - \varepsilon \int_{\xi} \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} \right] - \frac{\beta_{\xi} - \beta_{\eta}}{2} \frac{\partial^4 \eta}{\partial \zeta^4} \end{aligned} \quad (27)$$

Ako drugi izraz pomnožimo sa imaginarnom jedinicom i saberemo sa prvim dobijamo kompleksnoznačni izraz za raspodeljeno opterećenje izazvano poremećajnim silama u pokretnom koordinatnom sistemu

$$\varepsilon q(\zeta, t) = \int_{\xi} A \int \left[ \omega^2(\tau) - i \varepsilon \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} \right] + \frac{\beta_{\xi} - \beta_{\eta}}{2} \frac{\partial^4 \bar{\eta}}{\partial \zeta^4} \quad (28)$$

gde je

$$\begin{aligned} q(\zeta, t) &= q_{\xi}(\zeta, t) + q_{\eta}(\zeta, t) i ; \quad \xi = \xi_{\xi} + i \xi_{\eta} \\ \bar{\eta}(\zeta, t) &= \xi(\zeta, t) + i \eta(\zeta, t) \end{aligned} \quad (29)$$

Ako iskoristimo formulu prelaza na nepokretni sistem koordinata i pri tome uvedemo uticaj trenja, dok sabirak  $i \int_{\xi} A \int \varepsilon \frac{d\omega(\tau)}{d\tau}$  u izrazu (28) zanemarimo kao malu veličinu drugog reda dobijamo poremećajnu silu koja dejstvuje na element štapa  $d\zeta$ , sledeći izraz

$$\varepsilon Q(z, t) = \beta_1 A \beta_2 \omega^2(z) e^{i\theta} + \frac{\beta_3 - \beta_2}{2} \frac{\partial^4 \bar{y}}{\partial z^4} e^{2i\theta} - \kappa \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} \quad (30)$$

gde je

$$\bar{y}(z, t) = x(z, t) - i y(z, t) \quad (31)$$

Iz poslednjeg izraza razdvajajući realni i imaginarni deo nalazimo sile poremećaja koje dejstvuju na element štapa u smerovima  $Ox$  i  $Oy$  nepokretnog sistema koordinata

$$\varepsilon Q_x(z, t) = \beta_1 A \omega^2 (\beta_3 \cos \theta - \beta_2 \sin \theta) + \frac{\beta_3 - \beta_2}{2} \left( \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} \cos 2\theta + \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} \sin 2\theta \right) - \kappa \frac{\partial x}{\partial t} \quad (32)$$

$$\varepsilon Q_y(z, t) = \beta_1 A \omega^2 (\beta_2 \cos \theta + \beta_3 \sin \theta) + \frac{\beta_3 - \beta_2}{2} \left( \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} \sin 2\theta - \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} \cos 2\theta \right) - \kappa \frac{\partial y}{\partial t}$$

Da bi smo našli izraze za poremećajne sile u režimu sinusoidnih oscilacija u prvom obliku dinamičke ravnoteže unesemo pretpostavljene vrednosti (26) u jednačinu (32) i sa tačnošću do malih veličina prvog reda nalazimo

$$\begin{aligned} \varepsilon Q_x^{(1)}(z, t) &= \beta_1 A \omega^2 (\beta_3 \cos \theta - \beta_2 \sin \theta) + \sin \frac{\hat{\omega}}{\ell} z \frac{\beta_3 - \beta_2}{2} \left( \frac{\hat{\omega}}{\ell} \right)^4 [a_1 \cos(\theta + \varphi_1) + a_2 \cos(2\theta + \omega_1 t + \varphi_2)] + \\ &\quad + \kappa \omega_1 \sin \frac{\hat{\omega}}{\ell} z [a_1 \sin(\theta + \varphi_1) + a_2 \sin(\omega_1 t + \varphi_2)] \quad (33) \\ \varepsilon Q_y^{(1)}(z, t) &= \beta_1 A \omega^2 (\beta_2 \cos \theta + \beta_3 \sin \theta) + \sin \frac{\hat{\omega}}{\ell} z \frac{\beta_3 - \beta_2}{2} \left( \frac{\hat{\omega}}{\ell} \right)^4 [a_1 \sin(\theta - \varphi_1) + a_2 \sin(2\theta + \omega_1 t + \varphi_2)] + \\ &\quad + \kappa \omega_1 \sin \frac{\hat{\omega}}{\ell} z [a_2 \cos(\omega_1 t + \varphi_2) - a_1 \cos(\theta + \varphi_1)] \end{aligned}$$

Sastavimo sada izraze za virtualni rad, koji bi izvršile poremećajne sile u režimu sinusnih oscilacija, određene izrazima (33) na virtualnim pomeranjima

$$\delta x^{(1)}(z, t) = \sin \frac{\hat{\omega}}{\ell} z [\cos(\theta + \varphi_1) \delta a_1 - a_1 \sin(\theta + \varphi_1) \delta \varphi_1 + \cos(\omega_1 t + \varphi_2) \delta a_2 - a_2 \sin(\omega_1 t + \varphi_2) \delta \varphi_2] \quad (34)$$

$$\delta y^{(1)}(z, t) = \sin \frac{\hat{\omega}}{\ell} z [\sin(\theta + \varphi_1) \delta a_1 + a_1 \cos(\theta + \varphi_1) \delta \varphi_1 - \sin(\omega_1 t + \varphi_2) \delta a_2 - a_2 \cos(\omega_1 t + \varphi_2) \delta \varphi_2]$$

koja odgovaraju varijacijama amplituda  $a_1$  i  $a_2$  i faza  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  u prvom obliku dinamičke ravnoteže sa tačno-

šću do malih veličina prvog reda. Za virtualni rad sada imamo

$$\delta W_x = \int_0^l \varepsilon Q_{x_0}^{(1)}(z, t) \delta x^{(1)}(z, t) dz \quad (35)$$

$$\delta W_y = \int_0^l \varepsilon Q_{y_0}^{(1)}(z, t) \delta y^{(1)}(z, t) dz$$

Radi uprošćenja rada pretpostavićemo da je statička neuravnoteženost oblika

$$p_x(z) = p_1 \sin \frac{\pi}{l} z \quad (36)$$

$$p_y(z) = -p_2 \sin \frac{\pi}{l} z$$

Potrebno je da sada sračunamo srednju vrednost virtualnog rada za puni ciklus oscilovanja prema formulama

$$\overline{\delta W_x} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta W_x d(\theta + \varphi_1) d(\omega_1 t + \varphi_2) \quad (37)$$

$$\overline{\delta W_y} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta W_y d(\theta + \varphi_1) d(\omega_1 t + \varphi_2)$$

Ako unesemo u desne strane izraza  $\overline{\delta W_x}$  i  $\overline{\delta W_y}$  i integralimo kako je naznačeno nalazimo da je

$$\begin{aligned} \overline{\delta W_x} = \overline{\delta W_y} = \frac{l}{4} \left\{ [p_1 A \omega^2(\tau) (p_1 \cos \varphi_1 - p_2 \sin \varphi_1) + \frac{\beta_{21} - \beta_{22}}{2l^4} \pi^4 a_1 \cos 2\varphi_1] \delta a_1 - \right. \\ \left. - [p_1 A \omega^2(\tau) (a_1 p_2 \cos \varphi_1 + a_1 p_1 \sin \varphi_1) + \frac{\beta_{21} - \beta_{22}}{2l^4} \pi^4 a_1^2 \sin 2\varphi_1 + \right. \\ \left. + \kappa \omega_1 a_1^2] \delta \varphi_1 - \kappa \omega_1 a_2^2 \delta \varphi_2 \right\} \quad (38) \end{aligned}$$

Osim toga nalazimo i da je

$$m_1 = p_1 A \int_0^l \sin^2 \frac{\pi}{l} x dz = \frac{p_1 A l}{2} \quad (39)$$

Označimo sada sa

$$\overline{\delta W} = \overline{\delta W_x} = \overline{\delta W_y} = \overline{\delta W}_1(a_1, \varphi_1) + \overline{\delta W}_2(a_2, \varphi_2) \quad (40)$$

što je moguće za posmatrani zadatak.

Iz izraza (38) možemo da odredimo  $\delta$ -ti parcijalni izvod srednjeg virtualnog rada  $\delta \overline{W}_1$  i  $\delta \overline{W}_2$  i da te izvode unesemo u sistem jednačina prve aproksimacije iz gl. čl. u energetske interpretaciji i da dobijemo dva sistema jednačina prve aproksimacije za nalaženje redom  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= -\alpha a_1 - \delta_1^e(\tau) \sin \varphi_1 - \delta_2^e(\tau) \cos \varphi_1 - \beta(\tau) a_1 \sin 2\varphi_1 \\ \frac{d\varphi_1}{dt} &= 1 - \Delta(\tau) - \delta_1^e(\tau) \frac{1}{a_1} \cos \varphi_1 + \delta_2^e(\tau) \frac{1}{a_1} \sin \varphi_1 - \beta(\tau) \cos 2\varphi_1 \\ \frac{da_2}{dt} &= -\alpha a_2 \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (41)$$

gde su uvedene oznake

$$\begin{aligned} \Delta(\tau) &= \frac{\omega(\tau)}{\omega_1}; \quad \beta(\tau) = \frac{\beta_1 - \beta_2}{2\Delta(\tau)(\beta_1 + \beta_2)}; \quad \alpha = \frac{\nu}{2S_v A \omega_1}; \\ \delta_1^e(\tau) &= \frac{S_1 \Delta^2(\tau)}{1 + \Delta(\tau)}; \quad \delta_2^e(\tau) = \frac{S_2 \Delta^2(\tau)}{1 + \Delta(\tau)}; \quad \delta = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \end{aligned} \quad (42)$$

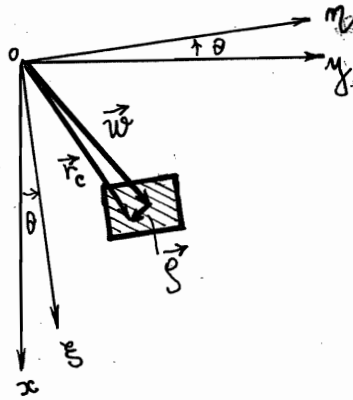
Obratimo pažnju da smo izraz za srednji virtualni rad mogli da nadujemo i varijacijom i nalaženjem srednje vrednosti izraza  $\frac{1}{2}(\varepsilon E_k'' - \varepsilon E_p'')$ .

Sistem jednačina prve aproksimacije u zatvorenom obliku ne možemo da integralimo. Ostaje samo mogućnost numeričkog integraljenja nekom od približnih metoda.

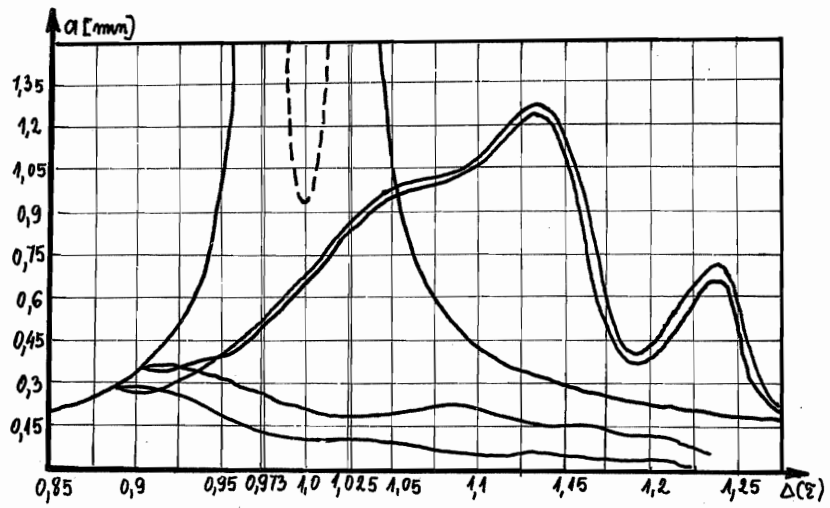
Ovde ćemo navesti neke od rezultata koje je dobio B.I. Moseenkov u svojoj kandidatskoj disertaciji, a koji su interesantni sa aspekta objašnjenja pojave stacionarnog i nestacionarnog rezonantnog stanja štapa koji se obrće (vratila). Za vratilo od čelika pravougaonog preseka  $7,28 \times 7,7 \text{ cm}^2$ , dužine  $l = 200 \text{ cm}$ , gustine  $\rho = 0,0079 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$ , modula elastičnosti

$E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ , koeficijenta otpora  $\chi = 2,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg sec}}{\text{cm}^2}$ , neuravnote-  
 ženost statička  $\xi = \xi_1 = \xi_2 = 0,05 \text{ mm}$  i neka je zakon promene ugaone  
 brzine  $\Delta(\varphi) = 0,9 + 0,003t$ . Za te vrednosti  $i$  i za promenu  $\Delta(\varphi)$   
 u intervalu  $0,85 \leq \Delta(\varphi) \leq 1,3$ , sastavljena je amplitudna kriva sta-  
 cionarnog rezonantnog stanja prikazana na slici 77 b, gde  
 su punim linijama obeležene stabilne grane, a crtkasto nestabi-  
 lne grane. Sistem jednačina (40) je integraljen numerički za  
 zadate podatke, i pri tome su dobijeni podaci na osnovu kojih  
 je sastavljena amplitudno frekventna kriva prolaska kroz re-  
 zonantno stanje statički neuravnoteženog ( $\xi \neq 0$ ) i statički  
 uravnoteženog ( $\xi = 0$ ) vratila - štapa koji se okreće za jed-  
 nake početne uslove ( $\Delta(0) = 0,9$ ). Posmatrani slučaj odgovara  
 neznatnoj razlici savojnih krutosti  $\frac{\beta_2}{\beta_1} = 0,894$ ,  $\delta = 0,056$ , a  
 sa tim uskoj zoni parametarskog rezonantnog stanja. Zbog toga  
 što je zona parametarskog rezonantnog stanja uska i ima trenje  
 početne amplitude statički uravnoteženog štapa pri datoj brzi-  
 ni prolaska kroz rezonantno stanje se prigušuju. Dejstvo para-  
 metarskog rezonantnog stanja na rast amplitude u uskoj zoni je  
 kratkovremeno i zato neznatno. Porast amplitude neuravnoteženog  
 štapa je na račun pojave osnovnog rezonantnog stanja i pri pro-  
 meni početnih uslova javlja se kao stabilan kako u odnosu na  
 oblik rezonantne krive tako i u odnosu na vrednosti koje uzi-  
 ma. Na taj način u posmatranom primeru radijus direktnog obrt-  
 nog kretanja  $\alpha_1$  u prelaznom režimu zavisi u većoj meri od  
 statičke neuravnoteženosti nego od asimetrije preseka.

Proučimo sada drugi primer, koji se od prvog  
 razlikuje time što su razmere poprečnog preseka štapa  $7 \times 8 \text{ cm}^2$   
 ( $\frac{I_2}{I_1} = 0,765$ ) i sa tim ima znatno razlikovanje savojnih krutos-  
 ti. Blagodareći toj razlici zona parametarskog rezonantnog sta-  
 nja znatno je veća nego u prethodnom primeru i određuje se  
 nejednačinom  $0,929 \leq \Delta(\varphi) \leq 1,061$ . Amplitudnu rezonantnu krivu  
 stacionarnog stanja obrtanja štapa posmatramo u intervalu  
 $0,85 \leq \Delta(\varphi) \leq 1,25$ . Stabilne grane na slici 78, su izvu-  
 čene punom linijom, dok su nestabilne grane izvučene ispreki-

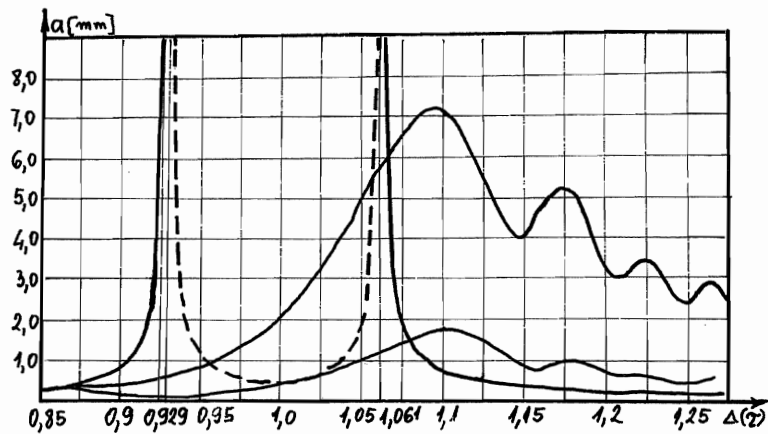


Sl.77 a

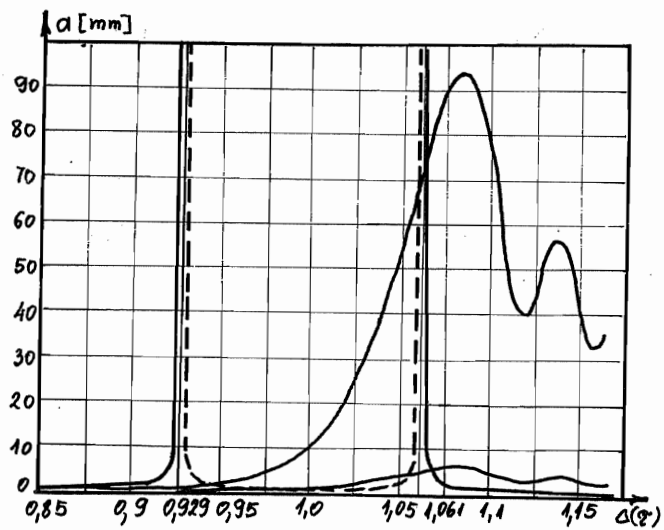


Sl.77 b





S1.78



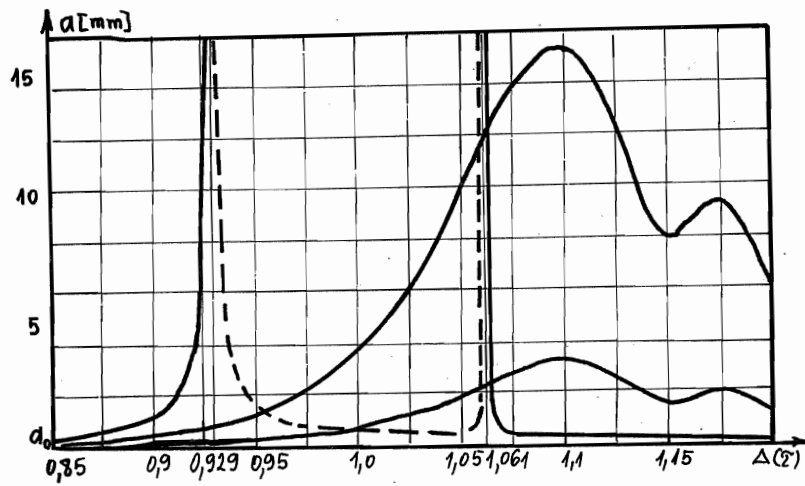
S1.79

danom linijom. Obratimo pažnju na to da se nestabilna grana spustila skoro do ose  $\Delta(\tau)$  što je izazvano znatnim uvećanjem zone parametarskog rezonantnog stanja. Posle toga mi sastavljamo krive prolaska kroz rezonantno stanje za sledeće režime obrtanja štapa: a)  $\Delta(\tau) = 0,85 + 0,003t$ ,  $\xi \neq 0$  - gornja kriva,  $\xi = 0$  - donja kriva na slici 78 ; b)  $\Delta(\tau) = 0,85 + 0,0015t$ ,  $\xi \neq 0$  - gornja kriva,  $\xi = 0$  - donja kriva slika 79 .

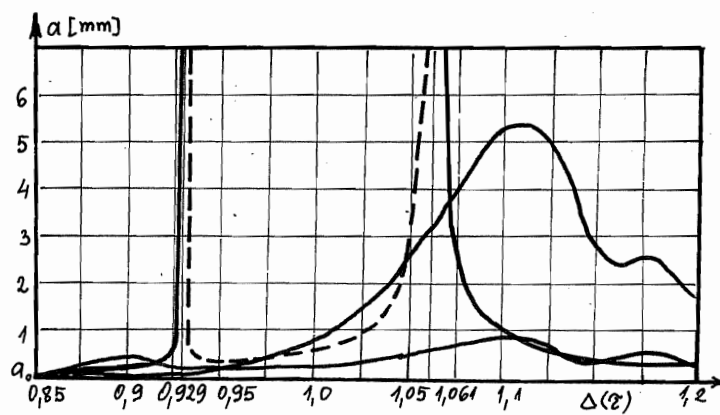
Kao što se sa grafika vidi statička neuravnoteženost koja pobudjuje osnovno rezonantno stanje na granici parametarskog rezonantnog stanja u početnom stadijumu javlja se kao osnovni uzrok porasta amplitude oscilovanja pri zadatoj brzini prolaska. Nezavisno od pojave unutrašnjeg trenja amplituda oscilovanja statički neuravnoteženog štapa u početnom stadijumu raste u isto vreme kao amplituda statički uravnoteženog štapa kao posledica pojave sile trenja prigušuje se ka početku dejstva parametarske rezonancije, kada pada na minimalnu vrednost. U drugom stadijumu prolaska pod dejstvom parametarske rezonancije kao uzrok se javlja različitost savojnih krutosti. Tok porasta amplituda pod dejstvom parametarskog rezonantnog stanja, kako za statički uravnotežen tako i za statički neuravnotežen štap je skoro isti na osnovu čega je prirodno doći do zaključka o dominantnom uticaju različitih krutosti. Na taj način statička neuravnoteženost u početnom stadijumu prelaznog režima razvoja amplitude oscilovanja ka početku dejstva parametarskog rezonantnog stanja izaziva znatno uvećanje početne vrednosti amplitude. U tome se i zaključuje osnovna uloga statičke neuravnoteženosti.

Upoređujući grafike rezonantnih amplituda pri raznim brzinama prolaska, vidimo da pri manjoj brzini prolaska maksimum amplitude se pomera u stranu manjih vrednosti ugaone brzine, a porast amplitude prolazi neuporedivo brže, pri čemu je to posebno primetno za statički neuravnotežen štap.

Na narednim slikama 80 a, b, prikazane su amplitudne krive stacionarnog i nestacionarnog rezonantnog stanja, kada je ekscentričnost  $\xi$  u glavnoj ravni savijanja



S1.80 a



S1.80 b

najmanje savojne krutosti, slika 80 a, odnosno u glavnoj ravni savijanja najveće krutosti slika 80 b.

Kao što se vidi sa grafika položaj ekscentričnosti u odnosu na glavne ravni savijanja suštinski utiče na veličinu maksimalnih amplituda u prelaznom režimu obrtanja pri jednoj i istoj brzini prolaska. Najveće amplitude dostižu se u prelaznom režimu, ako se ravan akscentriciteta poklapa sa glavnom ravni savijanja najmanje savojne krutosti, najmanje - pri poklapanju sa glavnom ravni savijanja najmanje savojne krutosti.

## X    G l a v a

## METODA USREDNJENJA    N.N.BOGOLJUBOVA

Metoda usrednjenja prvo se javila u nebeskoj mehanici, pa je u prvoj etapi svog razvoja vezana sa zadacima iz nebeske mehanike. Tada su primenjivane različite šeme usrednjenja kao šeme Gauss-a, Fatou-a, Delloné-a, Hill-a i drugih. Osnovno u svim tim šemama metode usrednjenja je da su desne strane složenih diferencijalnih jednačina, koje opisuju oscilovanje ili obrtanje, zamenjivane uprošćenim - "izgladjenim" ("сила уменьши") usrednjenim funkcijama, koje ne sadrže eksplicitno vreme i brzo promenljive parametre sistema.

U teoriji nelinearnih oscilacija metoda usrednjenja dugo vremena je ostala nepoznata. Bila je poznata samo metoda Van der Pola.

Značajne rezultate u razvijanju metode usrednjenja dali su A.N. Krilov i N.N. Bogoljubov. Oni su pokazali da se metoda usrednjenja može primeniti u slučaju kada se strane jednačina, koje se usrednjavaju javljaju kao kvazi priedičke funkcije vremena. Strogu matematičku teoriju sa dokazima izgradio je N.N. Bogoljubov, i pokazao da je metoda usrednjenja suštinski povezana sa nekom zamenom promenljivih, koja dozvoljava da se vreme  $t$  isključi iz desnih strana diferencijalnih jednačina sa proizvoljnim stepenom tačnosti u odnosu na mali parametar  $\varepsilon$ , o čemu će bliže biti reči. Bogoljubov je pokazao ne samo kako sastaviti sistem jednačina prve aproksimacije

nego i usrednjeni sistem jednačina viših aproksimacija, čija rešenja aproksimiraju rešenja tačnog sistema sa proizvoljnom unapred zadatom tačnošću.

Н.Н.Боголюбов je izveo i strogi matematički dokaz ove metode, koji se sastoji u rešavanju dva problema. Prvi problem je u određivanju uslova pri kojima razlika između rešenja tačnog sistema jednačina

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x) \quad (1)$$

i rešenja odgovarajućeg njemu usrednjenog sistema

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) \quad (2)$$

za dovoljno male vrednosti parametra  $\varepsilon$  postaje proizvoljno mala na konačnom, dovoljno velikom intervalu vremena. Drugi problem je u određivanju veze između različitih svojstava rešenja tačnih jednačina i usrednjenih, koja zavise od ponašanja na beskonačnom intervalu vremena, a posebno u uspostavljanju veze između periodičkih rešenja tačnog i usrednjenog sistema jednačina. Ta dva problema matematičkog dokaza rešena su u osnovnom dvema osnovnim teoremama usrednjenja Н.Н.Боголюбова, koje ovde nećemo obradivati. Samo ćemo spomenuti da je neophodno postojanje srednje granične vrednosti

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T X(t, \xi) dt \right] = X_0(\xi) \quad (3)$$

U savremenom razvoju metode usrednjenja Н.Н.Боголюбова učestvuje i daje veliki doprinos poznata Kijevska škola Instituta matematike AN USSR na čelu sa Ю.А.Митропольским. Danas u sovjetskoj literaturi može se naći niz radova iz metode usrednjenja, a takodje i metode osrednjenja usmerenih na rešavanje različitih diferencijalnih jednačina počevši od onih poznatih pod imenom diferencijalnih jednačina sa brzo promen-

lživom fazom, preko sistema jednačina sa malim parametrom uz izvode, sistema jednačina koje opisuju oscilacije izazvane trenutnim silama, pa do jednačina sa kašnjenjem i parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Mnogi aktuelni zadaci nelinearnih mehaničkih i električnih oscilacija, radiotehnike, akustike, hidroelastičnosti mogu da se rešavaju pomoću metode usrednjenja. Takođe se može očekivati i uspešna primena metode usrednjenja za izučavanje i ekonomskih i bioloških pojava.

Jedan od važnih zadataka metode usrednjenja je njena dalja primena na parcijalne diferencijalne jednačine. Široka je mogućnost primene metode usrednjenja i na zadatke teorije regulisanja.

#### 1. TRANSFORMACIJA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA NA STANDARDNI OBLIK

Neka je nelinearni oscilatorni sistem zadat sledećim izrazima dvostruke kinetičke i dvostruke potencijalne energije

$$2E_k = (\dot{q}) A \{\dot{q}\} \quad (4)$$

$$2E_p = (q) C \{q\}$$

gde su  $A = (a_{ij})$ ;  $(a_{ik} = a_{ki})$  - inercijska matrica koja karakteriše maseni raspored sistema, kvadratna je, simetrična, reda  $n$  i uvek je forma kinetičke energije pozitivno definitna;  $C = (c_{ij})$   $(c_{ij} = c_{ji})$  - kvazielastična matrica, koja karakteriše uticaj konzervativnih sila, kojima je podvrgnut materijalni sistem.  $(q)$ ,  $(\dot{q})$ ,  $\{q\}$ ,  $\{\dot{q}\}$  matrica vrsta, odnosno matrica kolona, čiji su elementi generalisane koordinate, odnosno generalisane brzine.

Neka na materijalni sistem dejstvuju male poremećajne sile, koje se u matičnom obliku mogu napisati

$$\{ \tau_{\alpha} (q_p, \dot{q}_p) + \sum_{\alpha} Q_1^{(\alpha)} (q_p, \dot{q}_p) \cos \Omega_{\alpha} t + Q_2^{(\alpha)} (q_p, \dot{q}_p) \sin \Omega_{\alpha} t \} \quad (5)$$

$$C = \{C_{ij}\}; \quad Q_1 = \{Q_{1ij}^{(\alpha)}\}; \quad Q_2 = \{Q_{2ij}^{(\alpha)}\}; \quad Q_0 = \{Q_{0ij}\}; \quad (6)$$

$\varepsilon$  - mali parametar,  $\Omega_{\alpha}$  - frekvencije poremećajnih sila.

Moguće je uvesti normalne koordinate  $\{\alpha\}$  pomoću matrice  $V = (\{v_j^{(s)}\})_{j=1}^n$  glavnih vektora čiji se elementi  $v_j^{(s)}$  izračunavaju iz sistema jednačina

$$\begin{aligned} (C - \omega_s^2 A) \{v_j^{(s)}\} &= 0 & r, s &= 1, 2, \dots, n \\ (v_i^{(r)}) A \{v_j^{(s)}\} &= \delta_{rs} & i, j &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (7)$$

gde su  $\omega_s^2$  karakteristični brojevi (sopstvene vrednosti) izračunate iz frekventne jednačine

$$f(\omega^2) = |C - \omega^2 A| = 0 \quad (8)$$

na sledeći način

$$\{q\} = V \{\alpha\} \quad (9)$$

pa su dvostruke kinetička i potencijalna energije

$$2E_K = (\dot{\alpha}) I \{\dot{\alpha}\} \quad (10)$$

$$2E_P = (\alpha) \Lambda \{\alpha\}$$

$I$  - jedinična matrica,  $\Lambda = V' C V$  dijagonalna matrica sa elementima na dijagonali jednakim karakterističnim brojevima.

Lagrange-ove jednačine druge vrste neporemećenog oscilovanja izražene pomoću normalnih koordinata su



(11)

Učini na normalne koordinate dobijamo sledeći sistem ne-  
 linearnih diferencijalnih jednačina poremećenog oscilovanja

$$\{\ddot{x}\} + \Lambda \{x\} = \varepsilon \mathcal{X}(t, x, \dot{x}) \quad (12)$$

gde se  $\varepsilon \mathcal{X}(t, x, \dot{x})$  određuju iz uslova ekvivalentnosti radova

$$\delta W = \varepsilon (\delta x) \mathcal{X} = \varepsilon (\delta q) Q = \varepsilon (\delta x) V' Q \quad (13)$$

pa je

$$\varepsilon \mathcal{X} = \varepsilon V' Q \quad (14)$$

Jednačine (12) pomoću zamene promenljivih

$$\begin{aligned} \{x\} &= \{z_k e^{i\omega_k t} + z_{-k} e^{-i\omega_k t}\} \\ \{\dot{x}\} &= i \{\omega_k z_k e^{i\omega_k t} - \omega_k z_{-k} e^{-i\omega_k t}\} \end{aligned} \quad (15)$$

gde su  $z_k$  i  $z_{-k}$  konjugovano kompleksne nepoznate funkcije vremena, mogu se transformisati na standardni oblik.

Diferencirajući izraze (15) i unoseći ih u sistem jednačina (12) dobijamo sistem

$$\begin{aligned} \{\dot{z}_k e^{i\omega_k t} + \dot{z}_{-k} e^{-i\omega_k t}\} &= 0 \\ i \{\dot{z}_k \omega_k e^{i\omega_k t} - \dot{z}_{-k} \omega_k e^{-i\omega_k t}\} &= \varepsilon \mathcal{X} \end{aligned} \quad (15)$$

odakle je

$$\{\dot{z}_k\} = -\frac{\varepsilon i}{2} \left\{ \frac{\mathcal{X}_k}{\omega_k} e^{-i\omega_k t} \right\} \quad (16)$$

gde je radi uprošćenja stavljeno da je

$$X_{-k} = X_k \quad (17)$$

pri čemu su u  $X_k(t, x_p, \dot{x}_p)$  zamenjeni izrazi (15), pa je

$$\frac{i}{\omega_k} e^{-i\omega_k t} X_k(t, x_p, \dot{x}_p) = Z_k(t, z_p) \quad k, p = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n \quad (18)$$

Sistem jednačina (12) se ovim preveo na oblik

$$\{\dot{z}\} = \varepsilon \{Z\} \quad \text{ili} \quad \dot{Z} = \varepsilon Z \quad (19)$$

## 2. USVOJENE OZNAKE

Pre nego što predjemo na izlaganje same metode usrednjenja uvešćemo neke oznake koje će nam uprostiti transformacije pri objašnjavanju same metode. Pridržavaćemo se u osnovnom originalnog izlaganja Н.Н.Борознишова, dajući pri tome interpretaciju pomoću matrica.

Neka su  $\{z_k\} = Z$  matrica kolona, a  $(z_k)$  matrica vrsta sa elementima  $z_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) i  $\{Z_k\} = Z$  matrica kolona sa elementima  $Z_k(t, z_1, z_2, \dots, z_n)$ . Jednačine na kojima ćemo pokazati metodu usrednjenja pišemo u obliku

$$\frac{dZ}{dt} = \varepsilon Z(t, z) \quad (20)$$

Elementi matrice  $Z$  mogu da se predstavje u obliku

$$Z = \sum_{\nu=1}^{\infty} Z_{\nu} e^{i\nu t} \quad (21)$$

gde je

$$\mathbf{Z}_\nu = \{Z_{\nu k}(z_1, z_2, \dots, z_n)\} \quad (22)$$

Za izvod matrične funkcije  $\mathbf{F}(t, \mathbf{z}) = \{F\}$  pisaćemo da je

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{z}}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \right\} \mathbf{F} \quad (23)$$

Ako se matrična funkcija  $\mathbf{F}(t, \mathbf{z})$  može da pretstavi u vidu zbir-  
ra oblika

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{z}) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} e^{i\nu t} \mathbf{F}_\nu(\mathbf{z}) \quad (24)$$

to možemo da uvedemo sledeće oznake

$$\mathbf{M}_t \{ \mathbf{F}(t, \mathbf{z}) \} = \mathbf{F}_0(\mathbf{z}) \quad \text{operator usrednjenja} \quad (25)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}(t, \mathbf{z}) = \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu} \mathbf{F}_\nu(\mathbf{z}) \quad (26)$$

$$\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}(t, \mathbf{z}) = \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{(i\nu)^2} \mathbf{F}_\nu(\mathbf{z}) \quad (27)$$

i da na osnovu njih dobijemo identitete

$$\frac{\partial \tilde{\tilde{\mathbf{F}}}}{\partial t} = \tilde{\tilde{\mathbf{F}}}; \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}}{\partial t} = \tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{M}_t \{ \mathbf{F}(t, \mathbf{z}) \} \quad (28)$$

operator  $\sim$  ćemo nazvati operatorom integracije, a  $\mathbf{M}_t$   
operatorom usrednjenja po promenljivoj  $t$ .

### 3. МЕТОДА УСРЕДНЈЕНЈА Н.Н. БОГОЛЮБОВА

Oblik približnog rešenja sistema

$$\left\{ \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\} = \varepsilon \{ \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) \}; \quad \text{ili} \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \varepsilon \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) \quad (29)$$

može biti nadjen ili bolje reći pogodjen, pomoću savršeno intuitivnih rasudjivanja. Kako je  $\frac{d\alpha}{dt}$  proporcionalno malom parametru, to je prirodno računati da je  $\alpha$  sporopromenljiva veličina. Zato možemo da  $\{\alpha\}$  predstavimo kao zbir ravnomerno promenljivog člana  $\xi$  i zbira malih oscilatornih članova i zbog njihovih malih veličina u desnoj strani jednačine (29), možemo u prvoj aproksimaciji da stavimo da je  $\alpha = \xi$ . Zbog (21) možemo da napišemo

$$\frac{d\alpha}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon \sum_{\nu \neq 0} e^{i\nu t} X_\nu(\xi) \quad (30)$$

Zbir koji stoji na desnoj strani jednačine (30) sastoji se iz malih sinusoidalnih sabiraka, a smatrajući da oni izazivaju samo male oscilacije  $\alpha$  oko  $\xi$  i ne utiču na sistematsku promenu  $\alpha$  (nerezonantni slučaj) mi ih možemo zanemariti i doći do jednačine prve aproksimacije

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) = \varepsilon M_t\{X(t, \xi)\} \quad (31)$$

Za dobijanje druge aproksimacije u izrazu za  $\alpha$  neophodno je uzeti u obzir i oscilatorne članove  $\varepsilon e^{i\nu t} X_\nu(\xi)$ , koji u rešenju izazivaju oscilacije oblika

$$\frac{\varepsilon}{i\nu} e^{i\nu t} X_\nu(\xi) \quad (32)$$

tako da dolazimo do izraza

$$\alpha = \xi + \sum_{\nu \neq 0} \frac{\varepsilon e^{i\nu t}}{i\nu} X_\nu(\xi) = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi) \quad (33)$$

U sistemu jednačina (29) izvršimo zamenu promenljivih (33) pri čemu  $\xi$  posmatramo kao nepoznatu

$$\frac{d}{dt} [\xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi)] = \varepsilon X(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi)) \quad (34)$$

Diferenciranjem izraza na levoj strani sistema jednačina (34) dobijamo

$$\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi)) \quad (35)$$

odnosno

$$\left( I + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} \right) \frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon [X(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi)) - X(t, \xi)] \quad (36)$$

Množeći levu i desnu stranu jednačine (36) inverznom matricom

$$\left( I + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} \right)^{-1} \approx I - \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \dots \quad (37)$$

za nove nepoznate dobijamo

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) - \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} X_0(\xi) + \varepsilon^2 \left( \tilde{X}(t, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) + \varepsilon^3 \dots \quad (38)$$

Zanemarujući male veličine drugog reda, dobijamo jednačine prve aproksimacije

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) = \varepsilon M_t \{X(t, \xi)\} \quad (39)$$

Kao prvu aproksimaciju možemo da usvojimo

$$x = \xi \quad (40)$$

uzevši da je  $\xi$  rešenje jednačine prve aproksimacije (39) dok ćemo izraz (33) u kome  $\xi$  zadovoljava istu jednačinu nazvati prvom popraavljenom aproksimacijom.

Za dobijanje druge aproksimacije tražićemo zamenu promenljivih analognu zameni (33) koja promenljivu transformiše na promenljivu  $x$  i pri tome zadovoljava jednačinu

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 P(\xi) + \varepsilon^3 \dots \quad (41)$$

Potražimo rešenje u obliku

$$x = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi) + \varepsilon^2 F(t, \xi) \quad (42)$$

gde se  $F(t, \xi)$  može predstaviti zbirom

$$F(t, \xi) = \sum_{\mu} e^{i\mu t} F_{\mu}(\xi) \quad (43)$$

Unoseći izraz (42) u jednačinu (29) dobijamo

$$\frac{d\xi}{dt} [\xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi) + \varepsilon^2 F(t, \xi)] = \varepsilon X(t, \xi) + \varepsilon^2 (\tilde{X}(t, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi}) X(t, \xi) + \varepsilon^3 \dots \quad (44)$$

i izvedeći naznačeno diferenciranje na levoj strani jednačine (44) i razlažući u Taylor-ov red desnu stranu dobijamo

$$\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial t} = \varepsilon X(t, \xi) + \varepsilon^2 (\tilde{X}(t, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi}) X(t, \xi) + \varepsilon^3 \dots \quad (45)$$

ili

$$\varepsilon X(t, \xi) + \varepsilon^2 P(\xi) + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} X_0(\xi) + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial t} + \varepsilon^3 \dots = \varepsilon X(t, \xi) + \varepsilon^2 (\tilde{X}(t, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi}) X(t, \xi) + \varepsilon^3 \dots \quad (46)$$

Da bi leva i desna strana ove jednačine bile međusobom jednake sa tačnošću do malih veličina trećeg reda potrebno je da izaberemo funkcije  $P(\xi)$  i  $F(t, \xi)$  tako da bude zadovoljen sledeći odnos

$$\frac{\partial F}{\partial t} = [\tilde{X}(t, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi}] X(t, \xi) - \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} X_0(\xi) - P(\xi) \quad (47)$$

Imajući u vidu da je

$$\tilde{X}(t, \xi) = \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu} X_{\nu}(\xi) \quad (48)$$

$$X(t, \xi) = \sum_{\nu} e^{i\nu t} X_{\nu}(\xi)$$

to možemo da napišemo

$$(\tilde{X}(t, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi}) X(t, \xi) - \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} X_0(\xi) = \sum_{\mu} e^{i\mu t} \Phi_{\mu}(\xi) \quad (49)$$

Da bi odnos (47) bio zadovoljen potrebno je da je

$$P(\xi) = \phi_0(\xi) = M_t \left\{ \left[ \tilde{X}(t, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] X(t, \xi) - \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} X_0(\xi) \right\} \quad (50)$$

odnosno da je

$$F(t, \xi) = \overline{\left[ \tilde{X}(t, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] X(t, \xi)} - \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} X_0(\xi) \quad (51)$$

Iz svega napred rečenog može da se izvede zaključak da za određeno iz jednačine

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon M_t \{ X(t, \xi) \} + \varepsilon^2 M_t \left\{ \left[ \tilde{X}(t, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] X(t, \xi) \right\} \quad (52)$$

izraz

$$x = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi) + \varepsilon^2 \overline{\left[ \tilde{X}(t, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] X(t, \xi)} - \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} X_0(\xi) \quad (53)$$

zadovoljava jednačinu (29) sa tačnošću do malih veličina trećeg reda.

Pokažimo sada da izraz (53) možemo da smatramo zamenom promenljivih pomoću koje možemo jednačinu (29) da transformišemo na oblik (41). Zbog toga prodiferenciramo izraz (53) i imajući u vidu izraze (50) i (51) dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial t} = \left( I + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial t} = \\ &= \left( I + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon X(t, \xi) + \varepsilon^2 \overline{\left[ \tilde{X}(t, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] X(t, \xi)} - \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} X_0(\xi) - \varepsilon X_0(\xi) - \varepsilon^2 M_t \left\{ \left[ \tilde{X}(t, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] X(t, \xi) \right\} \end{aligned} \quad (54)$$

Zamenjujući vrednost zadatu izrazom (53) u desnu stranu jednačine (29) i razvijajući je u red dobijamo

$$\varepsilon X(t, x) = \varepsilon X(t, \xi) + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi) + \varepsilon^2 F(t, \xi) = \varepsilon X(t, \xi) + \varepsilon^2 \overline{\left[ \tilde{X}(t, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] X(t, \xi)} + \varepsilon^3 \dots \quad (55)$$

Izjednačavajući izraze (54) i (55) i istovremeno množeći sa

$$\left( I + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial \xi} \right)^{-1} = I - \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \dots \quad (56)$$

i rešavajući po  $\frac{d\xi}{dt}$  dobijamo

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon M_t \{X(t, \xi)\} + \varepsilon^2 M_t \left\{ \left[ \tilde{X}(t, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] X(t, \xi) \right\} + \varepsilon^3 \dots \quad (57)$$

Više aproksimacije se mogu dobiti slično dobijanju druge aproksimacije. U primeni se uglavnom koristi prva, a ponekad druga. Više aproksimacije se uglavnom primenjuju za opšta teorijska razmatranja i analizu svojstva sistema. Praktično se ona retko primenjuju usled brzog uslozljavanja njihovog sastavljanja.

#### 4. ANALIZA USREDNJENIH JEDNAČINA

Dobijene usrednjene jednačine imaju osnovno preimućstvo nad tačnim u tome što ne sadrže u desnim, stranama eksplicitno vreme i javljaju se kao autonomne. Uporedo sa tim one su i diferencijalne, što nalaže određena ograničenja na mogućnosti primene izložene metode. I pored toga za veliki broj praktično interesantnih zadataka usrednjene jednačine su veoma pogodne za njihovo rešavanje ili pak izučavanje. Pri tome je u mnogim slučajevima, gde opšte rešenje usrednjenog sistema ne može da se dobije, moguće je u krajnjem slučaju, izučiti partikularna rešenja, koja odgovaraju uspostavljenim stacionarnim procesima. Pri proizvoljnom  $n$ , ako  $X_0(\xi)$  postaje jednako nuli u nekoj tački  $\xi = \xi_0$ , možemo proučiti "kvazistatičko" rešenje  $\xi = \xi_0$  jednačina prve aproksimacije. Za proučavanje stabilnosti tog rešenja moguće je sastaviti jednačine u varijacijama



$$\frac{d\delta\xi}{dt} = \varepsilon \frac{\partial X_0(\xi_0)}{\partial \xi} \delta\xi \quad (58)$$

koje su linearne, pa možemo sastaviti karakterističnu jednačinu oblika

$$\text{Det} \left| p - \varepsilon \frac{\partial X_0(\xi)}{\partial \xi} \right| = 0 \quad (59)$$

u kojoj su  $p$  koreni karakteristične jednačine, zavisno od čijeg znaka realnog dela određujemo stabilnost ili nestabilnost "kvazistatičkog" rešenja. Ako bi bar jedan koren karakteristične jednačine imao pozitivan realni deo imali bi smo slučaj nestabilnosti "kvazistatičkog" rešenja. Ako su svi realni delovi korena karakteristične jednačine jednaki nuli, onda je potrebno vršiti analizu pomoću jednačina viših aproksimacija. U formulama viših aproksimacija najčešće se javljaju mali delitelji tako da se praktična primenljivost metode usrednjenja određuje asimptotskim svojstvima za određeni rang aproksimacije  $i$  za  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## 5. PRIMERI

I. Rešenje jednačine Van der Pol-a. Kao primer za ilustraciju izložene metode usrednjenja proučimo klasičnu jednačinu Van der Pol-a:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (60)$$

i uvedimo nove promenljive  $a$  i  $\varphi$  pomoću formula zamene

$$\begin{aligned} x &= a \cos(t+\varphi) \\ \frac{dx}{dt} &= -a \sin(t+\varphi) \end{aligned} \quad (61)$$

Jednačinu (60) transformišemo na sistem jednačina u standardnom obliku

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} a \\ \varphi \end{Bmatrix} = \varepsilon \begin{Bmatrix} \frac{a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{a^3}{2} \cos 2(t+\varphi) + \frac{a^3}{8} \cos 4(t+\varphi) \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) \sin 2(t+\varphi) - \frac{a^2}{8} \sin 4(t+\varphi) \end{Bmatrix} \quad (62)$$

Usrednjene jednačine u prvoj aproksimaciji glase

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \varphi_1 \end{Bmatrix} = \varepsilon \begin{Bmatrix} \frac{a_1}{2} \left(1 - \frac{a_1^2}{4}\right) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (63)$$

pa je rešenje za početnu amplitudu  $a_1 = a_0$  i fazu  $\varphi_{10}$

$$x = \frac{a_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}a_0^2(e^{\varepsilon t} - 1)}} \cos(t + \varphi_{10}) \quad (64)$$

Za slučaj da je  $\frac{da_1}{dt} = 0$  imamo stacionarnu amplitudu  $a_0 = 2$  pa je rešenje  $x = 2 \cos(t + \varphi_{10})$ .

Usrednjene jednačine u drugoj aproksimaciji

glase

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \varphi_1 \end{Bmatrix} = \varepsilon \begin{Bmatrix} \frac{a_1}{2} \left(1 - \frac{a_1^2}{4}\right) \\ -\varepsilon \left(\frac{1}{8} - \frac{a_1^2}{8} + \frac{7a_1^4}{256}\right) \end{Bmatrix} \quad (65)$$

dok je stacionarno rešenje u drugoj aproksimaciji

$$x = 2 \cos(t + \varphi_1) - \frac{\varepsilon}{4} \sin 3(t + \varphi_1) \quad (66)$$

II. Klatno sa oscilujućom tačkom vešanja. Kao primer proučimo oscilovanje fizičkog klatna koje se može slobodno okretati oko određene horizontalne ose u vertikalnoj ravni, čija tačka vešanja osciluje po sinusnom zakonu u vertikalnom pravcu malom amplitudom  $a$  i frekvencijom  $\Omega$ , tako da je

$$\Omega > \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{l_r}{a}; \quad \frac{l_r}{a} \ll 1; \quad (67)$$

gde je  $l_r$  redukovana dužina fizičkog klatna,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  frekvencija malih slobodnih oscilacija klatna.

Pokazaćemo da gornji nestabilni položaj ravnoteže može postati stabilan za određene odnose parametara klatna. Da bi smo proučili mogućnost te interesantne pojave posmatraćemo jednačinu oscilovanja klatna sa oscilujućom tačkom vešanja

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda \frac{d\theta}{dt} + \frac{g - a\omega^2 \sin^2 t}{l} \sin \theta = 0 \quad (68)$$

gde je  $\theta$  ugao otklona, koji se računa od donjeg položaja ravnoteže  $y = a \sin^2 t$  vertikalno pomeranje tačke vešanja,  $\lambda$  koeficijent otpora za koji pretpostavljamo da ima takvu vrednost da za slučaj fiksirane tačke vešanja, kretanje klatna za male otklone od donjeg položaja ravnoteže ima oscilatorni karakter  $\lambda^2/4 < g/l$ .

Da bi smo primenili metodu usrednjenja neophodno je u jednačini (68) izabrati mali parametar i svesti jednačinu na standardni oblik. Umesto vremena  $t$  uvedemo vreme  $\vartheta$ , čija je jedinica  $2\pi$

$$\vartheta = \omega t$$

pa će jednačina biti

$$\frac{d^2\theta}{d\vartheta^2} + \frac{\lambda}{\omega} \frac{d\theta}{d\vartheta} + \left( \frac{g}{l\omega^2} - \frac{a}{l} \sin^2 \vartheta \right) \sin \theta = 0 \quad (69)$$

Radi uprošćenja uvedemo i oznake

$$\kappa = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{l}{a}; \quad \alpha = \frac{\lambda}{2\omega} \kappa; \quad \frac{g}{l\omega^2} = \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = \kappa^2 \left( \frac{a}{l} \right)^2; \quad \frac{\lambda}{\omega} = \frac{\lambda}{\omega_0} \frac{\omega_0}{\omega} = 2\alpha \frac{a}{l}; \quad (70)$$

i jednačinu (69) možemo napisati u obliku

$$\frac{d^2\theta}{d\vartheta^2} + 2\alpha \frac{a}{l} \frac{d\theta}{d\vartheta} + \left\{ \kappa \left( \frac{a}{l} \right)^2 - \left( \frac{a}{l} \right) \sin^2 \vartheta \right\} \sin \theta = 0 \quad (71)$$

Za mali parametar usvojimo  $\varepsilon = \frac{a}{l}$  pa dobijamo

$$\frac{d^2\theta}{d\vartheta^2} + 2\varepsilon\alpha \frac{d\theta}{d\vartheta} + \varepsilon (\kappa \varepsilon - \sin^2 \vartheta) \sin \theta = 0 \quad (72)$$

Da bi smo jednačinu (72) transformisali na standardni oblik

uvodimo promenljive  $\varphi$  i  $\Omega$  pomoću sledećih formula zamene

$$\theta = \varphi - \varepsilon \sin \vartheta \sin \varphi \quad (73)$$

$$\frac{d\theta}{d\vartheta} = \varepsilon \Omega - \varepsilon \cos \vartheta \sin \varphi \quad (74)$$

Diferenciranjem izraza (73) i uporedjivanjem sa (74) dobijamo

$$(1 - \varepsilon \sin \vartheta \cos \varphi) \frac{d\varphi}{d\vartheta} = \varepsilon \Omega \quad (75)$$

Diferenciranjem izraza (74) i zamenom u (72) dobijamo

$$\frac{d\Omega}{dt} = \varepsilon \left\{ -\sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi - k^2 \sin \varphi + \Omega^2 \cos \vartheta \cos \varphi - 2\alpha \Omega + 2\alpha \cos \vartheta \sin \varphi \right\} + \varepsilon^2 \dots \quad (76)$$

a iz izraza (75) dobijamo

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \varepsilon \Omega + \varepsilon^2 \dots \quad (77)$$

Usrednjenjem poslednjih dveju jednačina dobijamo sistem usrednjenih jednačina u prvoj aproksimaciji

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \varepsilon \Omega \quad (78)$$

$$\frac{d\Omega}{d\vartheta} = -\varepsilon \left\{ \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi + k^2 \sin \varphi + 2\alpha \Omega \right\}$$

Umesto ovog sistema od dveju usrednjenih jednačina prvog reda zgodnije je proučavati jednu jednačinu drugog reda pa iz sistema (78) eliminacijom  $\Omega$  dobijamo

$$\frac{d^2\varphi}{d\vartheta^2} + 2\varepsilon\alpha \frac{d\varphi}{d\vartheta} + \varepsilon^2 \left( k^2 + \frac{1}{2} \cos \varphi \right) \sin \varphi = 0 \quad (79)$$

Ova jednačina prve aproksimacije je mnogo prostija od tačne jednačine (71) zato što eksplicitno ne sadrži vreme. Ova jednačina predstavlja jednačinu oscilovanja sistema sličnog klata sa nepokretnom tačkom vešanja u kome je restituciona sila proporcionalna ne  $\sin \varphi$ , nego  $(k^2 + \frac{1}{2} \cos \varphi) \sin \varphi$ .

Analizirajući usrednjenu jednačinu (79) zaključujemo da ima kvazistatičko rešenje  $\varphi = \pi$ , koje odgovara gornjem položaju ravnoteže klatna. Za izučavanje stabilnosti proučićemo male otklone  $\delta\varphi$  od položaja ravnoteže. Zato sastavimo jednačinu pomoću varijacija

$$\frac{d^2 \delta\varphi}{d\tau^2} + 2\varepsilon\alpha \frac{d\delta\varphi}{d\tau} + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} - \kappa^2\right) \delta\varphi = 0 \quad (80)$$

pa će uslov stabilnosti da bude  $\left(\frac{1}{2} - \kappa^2\right) > 0$ , odnosno

$$\Omega > \sqrt{\frac{2g}{l}} \frac{l}{a} \quad (81)$$

Oдавде izvodimo zaključak da ako je frekvencija oscilovanja tačke vešanja dovoljno velika tako da je zadovoljena nejednakost (81) tada je gornji položaj klatna stabilan. Na sličan način dolazimo do zaključka da je gornji položaj  $\varphi = 0$  uvek stabilan.

III. Oscilacije klatna sa sporopromenljivom dužinom. Proučimo primenu metode usrednjenja na matematičkom klatnu konstantne mase u uslovima malog otpora, proporcionalnog brzini i sa sporo promenljivom dužinom.

Označimo sa  $\alpha$  ugao otklona klatna od vertikalnog položaja,  $g$  ubrzanje zemljine teže,  $m$  masu klatna,  $l = l(\tau)$  sporopromenljivu dužinu,  $2\delta$  koeficijent trenja. Diferencijalna jednačina oscilovanja je

$$\frac{d}{dt} \left[ m l^2(\tau) \frac{d\alpha}{dt} \right] + 2\delta \frac{d}{dt} [l(\tau) \alpha] + mg l(\tau) \sin \alpha = 0 \quad ; \quad \varepsilon = \varepsilon t \quad (82)$$

Za dovoljno male otklone možemo  $\sin \alpha$  da zamenimo sa prva dva člana stepenog reda i jednačinu možemo napisati u obliku

$$\frac{d}{dt} \left[ m l^2(\tau) \frac{d\alpha}{dt} \right] + mg l(\tau) \alpha = \frac{mg l(\tau)}{6} \alpha^3 - 2\delta l(\tau) \frac{d\alpha}{dt} - 2\varepsilon \delta \frac{dl(\tau)}{d\tau} \alpha \quad (83)$$

Da bi smo pri sastavljanju jednačina prve aproksimacije lakše mogli da računavamo male članove uvešćemo zamenu  $x = \sqrt{\varepsilon} x_1$  i  $\delta = \varepsilon \delta_1$ , koja karakteriše malost amplitude oscilovanja i trenja, pa jednačinu (83) možemo da napišemo u obliku

$$\frac{d}{dt} \left[ m \ell(\varrho)^2 \frac{dx_1}{dt} \right] + mg \ell(\varrho) x_1 = \varepsilon \left\{ \frac{mg \ell(\varrho)}{6} x_1^3 - 2\delta_1 \ell(\varrho) \frac{dx_1}{dt} \right\} - 2\varepsilon^2 \delta_1 \frac{d\ell(\varrho)}{d\varrho} x_1 \quad (84)$$

Uvedemo smenu

$$x_1 = a \cos \Psi \quad \frac{dx_1}{dt} = -a \omega(\varrho) \sin \Psi \quad (85)$$

pa usrednjene jednačine prve aproksimacije dobijamo kao

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\varepsilon \left[ \frac{\delta_1}{m \ell(\varrho)} + \frac{3\ell'(\varrho)}{4\ell(\varrho)} \right] a \\ \frac{d\Psi}{dt} &= \omega(\varrho) \left( 1 - \varepsilon \frac{a^2}{16} \right) \end{aligned} \quad (86)$$

gde je  $\omega(\varrho) = \sqrt{\frac{g}{\ell(\varrho)}}$ . Integraljenjem prve jednačine ovog sistema za početne uslove  $t=0$ ,  $a=a_0$  dobijamo izraz za amplitudu rešenja

$$a = a_0 e^{-\frac{\varepsilon \delta_1}{m} \int_0^t \frac{dt}{\ell(\varrho)}} \left[ \frac{\ell(0)}{\ell(\varrho)} \right]^{3/4} \quad (87)$$

i unošenjem ovog izraza u drugu jednačinu sistema (86) dobijamo izraz za fazu

$$\Psi = \int_0^t \omega(\varrho) \left[ 1 - \frac{\varepsilon a_0^2}{16} e^{-\frac{2\varepsilon \delta_1}{m} \int_0^t \frac{dt}{\ell(\varrho)}} \left[ \frac{\ell(0)}{\ell(\varrho)} \right]^{3/2} \right] dt \quad (88)$$

Jednačine (87) i (88) omogućavaju da se izvede potpuna analiza oscilovanja klatna sa sporo promenljivom dužinom. Unoseći u te jednačine zadatu vrednost za sporo promenljivu dužinu  $\ell(\varrho)$ ,  $\varrho = \varepsilon t$  i izračunavajući integrale moguće je dobiti proste formule za amplitudu i fazu koje se mogu lako da analiziraju.

Za slučaj odsustva trenja imamo

$$a = \alpha_0 \left[ \frac{l(0)}{l(\tau)} \right]^{3/4} \quad (89)$$

u literaturi se nalazi pojam **a d i j a b a t s k e** invarijante za sisteme sa sporo promenljivim parametrima, koji se definiše količnikom energije i frekvencije sistema

$$\frac{E}{\omega} = \text{const} \quad (90)$$

Za klatno sa sporo promenljivom dužinom energija  $E$  sistema je

$$E = mg l(\tau) \bar{x}^2 = mg l \overline{a^2 \cos^2 \gamma} = mg l \alpha_0 \left[ \frac{l(0)}{l(\tau)} \right]^{3/2} \cdot \frac{1}{2} \quad (91)$$

pa je odnos

$$\frac{E}{\omega} = \frac{mg l(\tau) \alpha_0^2 \left[ \frac{l(0)}{l(\tau)} \right]^{3/2}}{2 \left[ \frac{g}{l(\tau)} \right]^{1/2}} = \frac{mg \alpha_0^2}{2 \sqrt{g}} [l(0)]^{3/2} = \text{const} \quad (92)$$

konstantan.

## L I T E R A T U R A

1. Андронов А.А. Витт А.А. Хайкин С.Э. Теория колебания, ГИФМЛ. Москва 1959 г.
2. Александров В.М. Асимптотические методы в смешанных задачах теории упругости, Автореферат докт. дисс. Ленинград, 1970
3. Appel' P. Теоретическая механика, ГИФМЛ, Москва 1960.
4. Андреев Л.Н. Тронцкий В.А. Расчет колебаний систем имеющих участки на упругом основании, Триккладная механика, ОММК АН УССР, т. III в. 5, 1967
5. Александрина Н.И. Удар груза о балку, Известия АН СССР, ОТН, №4, 1957.
6. Астатев В.К. Исследование динамики виброударной системы с распределенными параметрами, Механика машин, вып. 17-18. Издво "Наука" 1969.
7. Акуленко Л.Д. К вопросу о стационарных колебаниях и вращениях, УМЖ. 1966, т 18, №15,
8. Айзерман М.А. Гантмахер ф.Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем, Москва АН СССР 1963.
9. Ананов Г.Д. Метод ортогональных проекций в задачах механики, Москва 1948.
10. Артюнак Н.Х. Абрамянов В.Л. Кручение упругих тел, Москва физ-мат-гиз 1963
11. Артабалеvский И.И. Методы уравнивания сил инерции в рабочих машинах со сложными кинематическими схемами, Москва, Академиздат 1938.



12. Анђелић Ђ. Стојановић Р. Рационална механика, завод за издавање уџбеника СРС. Београд 1965.
13. Анђелић Ђ. Основи механике непрекидних средина, Београд 1950.
14. Абрамов Б. М. Абрамов А. Б. Динамически поглотитељ колебањих изазиваних периодическим ударима. Механика машин, вып. 19-20. Издво „Наука“ 1969.
15. Adkins J. E. Large elastic deformations, Progress in Solids Mechanics, vol. II, Механика, ИИЛ. 6\*76, 1962.
16. Абдурахманов М. А. О класическој разрешимости некоторых задач сопряжения уравнений параболического типов, канд. дисс. АН. Казахстанской ССР, Алма-Ата 1971.
17. Ананин А. И. К теории поперечных колебаний стержней переменного сечения, „Известия высш. учебн. заведений“ „Строительство и архитектура“ 1969 №11. 45-50.
18. Бабий В. П. К теории поперечных колебаний эксцентрично нагруженной металлической балки, Прикладная механика ОММК т II в. 7 1966.
19. Бабиев Н. Н. Поперечные колебания стержня переменного сечения со свободными концами с учетом сил внутреннего трения, Инженерный сборник т XVIII. 1954.
20. Березин И. С. Жидков Н. П. Методы вычислений, физматгиз 1960
21. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих тел, Москва ГИТТЛ 1956.
22. Вауер Н. Ф. Нелинейная реакция неоднородных шарнирно опертых балок, „Аеронавт. Ж.“ 1970. 74. №16.
23. Boisson C. Lesueur C. Gotteband M. Etude théorique des vibrations des poutres iso on hyperstatiques à inertie variable, sur appuis rigides, „Мéc., Matér. éléc.“ 1970. №250
24. Березанский Ю. М. Некоторые вопросы спектральной теории уравнений в частных разностях и частных производных, докт. дисс. Киев 1970.

25. Боголюбов Н.Н. Одноостотные свободные колебания в нелинейных системах со многими степенями свободы, Сборник трудов строительной механики АН УССР, №10, 1949.
26. Боголюбов Н.Н. Теория возмущений в нелинейной механике, Сборник трудов института строительной механики АН УССР №14, 1950.
27. Боголюбов Н.Н. Митропольский Ю.А. Метод интегральных многообразий в нелинейной механике, Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям Издво АН УССР, т.1, Киев 1963.
28. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем, Издво АН УССР, ГИТТЛ. 1956
29. Булгаков В.В. Колебания, ГОСТЕХИЗДАТ, 1956.
30. Бородин Р.М. Решение уравнений движения уравновешенного гироскопа методом усреднения, УМЖ, 1961, 13, 3.
31. Боголюбов Н.Н. Митропольский Ю.А. Аналитические методы в теории нелинейных колебаний, Труды I съезда по теоретической и прикладной механике, Издво АН УССР, 1961.
32. Болотин В.В. О воздействии подвижной нагрузки на мосты, Труды МИИТ, вып. 74. 1950.
33. Бабаков И.М. Теория колебаний, Гостехиздат, 1958.
34. Березовский А.А. Некоторые нелинейные краевые задачи математической физики, докл. дисс. Киев.
35. Бондарь Н.Т. Денищенко Ю.А. Приложение метода переменного масштаба времени к решению задач о динамическом воздействии подвижной нагрузки на сооружения, Сборник "Исследования по теории сооружений" т.14. Москва 1965.

36. Boisson C. L. Lesueur C. Gotteband M. Etude théorique des vibrations des poutres iso ou hyperstatiques à inertie variables sur appuis rigides. „Méc. matér. éléc.“. 1970. №250.
37. Болотин В. В. Параметрическое возбуждение кососимметричных колебаний упругих арок, Инж. сборник, т. XV. 1953.
38. Ballo J. und Ziemba S. Torsion und Längsschwingungen eines Stabes mit nichtlinearen und örtlich veränderlichen Materialeigenschaften. III konf. über Nichtlineare Schwingungen Berlin 1966.
39. Brinell E. J. The statics and dynamics of a transversely isotropic Timoshenko beam. „J. Compos. Mater.“ 1970, 4, July.
40. Бабаев Н. Н. О колебаниях плоских балочных перекрытий с учетом сил неупругого сопротивления, Известия АН СССР, ОТН, №5 1957
41. Бондар Н. Г. Приближенное замкнутое решение нелинейного волнового уравнения, Прикладная механика т V. вып 7. 1969. АН УССР.
42. Barré de Saint-Venant et Flamant: Théorie de l'élasticité des corps solides de Clebsch, 1883, Paris.
43. Бондар Н. Г. Устойчивость и колебания нелинейноупругих балок в магнитном поле, Прикладная механика т IV. в. 11 1968, АН УССР.
44. Бари Н. К. Тригонометрические ряды, Гост. издат. физ. лит. литературы. Москва 1961.
45. Бесполова Л. В. Метрикин В. С. Об устойчивости двухмассовой модели гидродарника, Механика машин, вып. 17-18, Издво „Наука“ Москва 1969.
46. Блехман Вращение неуравновешенного ротора, обусловленное гармоническими колебаниями его оси, Известия АН СССР. №8. 1954. ОТН

47. Брук С. З. Поверхностные волны Релея в вязко-упругой среде  
ДАН СССР, 1971, т 198, №2.
48. Баркан Д. Д. Мачерет Я. А. Вибрации оснований и фундамен-  
тов, Сборник 4, Москва, ОНТИ 1934.
49. Быкова Н. О. Воздействие напряжений меняющихся частоты  
на резонансные системы, Тр. МАП №28 (1948).
50. Буднов И. Г. Отзвк о сочинениях профессора Тимошенко,  
Издво Института инженеров путей сообще-  
ния 1913.
54. Бегнаев Х. Об устойчивости вязкоупругих стержней при  
динамическом нагружении. Вопросы вычислительной  
и прикладной механики, вып. IV 1971, Ташкент.
55. Бондар Н. Г. Приближенное решение некоторых задач статикки  
нелинейноупругих стержней, "Строительная механика  
и расчет сооружений" №6 1963.
56. Блекер О. Анализ нелинейных систем, Издво "Мир" 1969.
57. Бондаренко Г. В. Малые колебания упругих систем, Москва  
1934.
58. Бренева Р. М. Операционный метод решения некоторых видов  
уравнений в частных производных с посто-  
янными коэффициентами, "Труды Иркутского поли-  
технического ин-та" 1969. вып. 52.
59. Vizdigan Gh. Blumentfeld M. Stoicescu L. Fetci Z. Свободные  
поперечные колебания балки с упругими опорами  
на обоих концах. "Studii și cercetări mat. ar.  
Acad. RSR" 1967, 25, №4.
60. Библимовић А. Рационална механика I, II, Београд 1950/51.
61. Баркгаузен Г. Введение в учение о колебаниях с приложением  
к механическим и электрическим колебаниям, Мо-  
сква - Ленинград, Госэнергоиздат 1934.
62. Бишоп Р. Колебания, Москва "Наука" 1968.
63. Блерих ф. Устойчивость металлических конструкций,  
Москва, физматгиз 1959.

64. Бондаренко Г. В. Малые колебания упругих тел, Ленинград электротех. институт 1934.
65. Блехман И. И. Вращение неуравновешенного ротора, обусловленное гармоническими колебаниями его оси ИАН СССР, ОТН, № 8, 1957.
66. Бейлин Б. А. Джанелидзе Г. Ю. Обзор работ по динамической устойчивости упругих систем, ПММ т. XVI. в. 5. 1952.
67. Белман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, ИЛ. Москва 1954 г.
68. Беляев Н. М. Устойчивость триэдрических стержней под действием переменных продольных сил, Сб. "Инженерные сооружения и строительная механика" Издво "Лугт" Ленинград 1924.
69. Болотин В. В. Параметрические колебания упругих систем. Прочность и устойчивость колебаний, 3 справочник. Москва.
70. Baznett R. L. Minimum Deflections of a Uniformly Accelerating Cantilever Beam, Journal of Applied Mechanics, serie E, 1963, v. 30. № 3.
71. Болотин В. В. Определение амплитуд поперечных колебаний вызываемых продольными силами, В сб. "Поперечные колебания и критические скорости II. Издво АН СССР. 1953 Москва.
72. White F. The use of the WKB Method in applied mechanics, Developments in the or and Appl. Mech. Vol. Plenum. Press. 1963.
73. Власов В. З. Леонтьев Н. И. Балки, плиты, оболочки на упругом основании, физматгиз, Москва 1960.
74. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек "Наука" Москва 1972.
75. Васишин С. А. О применении асимптотических методов к некоторым классам нелинейных уравнений в частных производных, канд. дисс. Киев, Унт

математики АН УССР. 1970.

76. Василенко Н.Ф. Исследование стационарных нелинейных колебаний в системах с распределенными параметрами при наличии внутреннего резонанса, Проблемы прочности №5, 1971.
77. Wrenn B.G. Mayers J. Nonlinear beat vibration with variable axial boundary restraint. "AIAA Journal" 1970, 8, №9, 1970
78. Вольфсон Б.П. Об одной задаче колебаний инженерных сооружений периодической структуры, Прикладная механика т.VI. вып. 6. 1970, Киев.
79. Волосов В.М. Маргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем, Издво Московского университета 1971.
80. Воронцов Г.В. Матричная форма вариационных методов решения задач о прочности, устойчивости и колебаниях неразрезанных стержней, Прикладная механика 1968, т.VI, вып. 12. Киев. АН УССР.
81. Вуйичић В.А. Общее утверждение об устойчивости движения и состоянии равновесия механических систем, Publications de L'Institut Mathématique, Nouvelle série, t 11 (25) Beograd 1971.
82. Вуйичић В. Теорија осцилација, Савремена администрација Београд 1967.
83. Валеев К.Т. Замечания об асимптотическом методе, Математическая физика, вып. 10, Киев 1971.
84. Вилксне В.П. О колебаниях балок, лежащих на упругом массивном основании; Вопросы динамики и динамической прочности в.2. 1954. Издво АН Латв. ССР, ОН
85. Волосов В.М. Нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной, Матем. сборн. 30, 2, 1952.

86. Ван цзи-де. Прикладная теория упругости, Москва, физматгиз 1959.
87. Волмир А.С. Устойчивость деформируемых систем, Москва, "Наука" 1967.
88. Волосов В.М. Моргунов Б.И. Метод усреднения в теории колебательных систем, Издво Московского Университета 1971.
89. Вахрамеев Ю.М. Жорнев В.М. Одночастотные колебания стержней при конечных прогибах, Издво "Наука" ИАН СССР, Механика твердого тела №5. 1971.
90. Вознюк А.В. Коломиец В.Т. Применение асимптотических методов нелинейной механики для исследования одночастотных возмущениях, Математическая физика, Респ. межвед. сб. 1969. выт. 6.
91. Васянин И. Н. Шендеров Б.И. Асимптотический метод расчета динамики движения консольных балок от воздействия подвижной сосредоточенной нагрузки. "Сб. научн. тр. Челяб. политехнического ин-та" 1969. № 77.
92. Вайнттейн ф.Л. Резонансные явления при вынужденных колебаниях натянутой упругой нити, В сб. Теорет. механика. Строительная механика, Высш. мат." М. 1969.
93. Воробьев Ю.С. Уравнения свободных колебаний вращающихся стержней. Рабочие процессы в турбомашинах и прочность их элементов. Издво "Наукова Думка" Киев 1965
94. Верещагин А.И. К вопросу о поперечных колебаниях балок с нелинейными опорами, Ученые записки №156, Пермь 1966.
95. Ганиев Р.ф. Нелинейные пространственные колебания твердых и упругих тел, Автореферат докт. дисс. Институт Механики АН УССР. Киев 1969.

96. Городецкая Л.Л. К вопросу о продольных колебаниях системы со сосредоточенных массами и упругими и вязко упругими связями, автореферат канд. дисс. ДИИ ж/д Т, Днепропетровск 1951.
97. Торчаков Н.Т. Крутильные колебания коленчатых валов, двигателей внутреннего сгорания при прохождении через резонанс, сб. трудов лабр. проблем быстроходных машин и механизмов АН УССР 1946.
98. Гринев В.Б. Филипов А.П. Об оптимальных формах стержней при вынужденных колебаниях, В. сб. „Конф. по колебаниям мех. сист. Тельсы докл.“ Киев „Наукова думка“ 1971.
99. Триголю Э.И. Нелинейные колебания и устойчивость толстых стержней и оболочек, Известия АН СССР, ОТН. 1954, № 3.
100. Галеркин Б.Г. Стержни и пластинки, Вестник инженеров. №15. 1915.
101. Гробов В.А. Асимптотические методы расчета изгибных колебаний валов турбомашин, Издво АН СССР, Москва 1961.
102. Григорьев Н.В. Нелинейные колебания элементов машин и сооружений, ГНИ машиностроительной литературы Москва 1961.
103. Горошко О.А. Динамика упругой конструкции в условиях свободного полета, Издво „Наукова думка“ Киев 1965.
104. Гольденблат И.И. Современные проблемы колебаний устойчивости инженерных сооружений, Стройиздат 1947.
105. Горелик Г.С. Колебания и волны, Введение в акустику, радиотехнику и оптику, Москва, 1959.
106. Филментберг М.Ф. Исследования статистических задач, колебаний механических систем, автореферат докт. дисс. Киев 1971.



107. Дифференциальные уравнения с частными производными, Труды симпозиума посвященного 60-летию академика Сергея Львовича Соболева АН СССР Сибирское отделение Ин-та математики, "Наука" 1970.
108. Диментберг ф.М. Изгибные колебания вращающихся валов, Издво АН СССР 1959.
109. Диментберг ф.М. Об устойчивости шибкого вала с неуравновешенным диском при действии внутреннего и внешнего трения, Известия АН СССР. ОТН 1954. №10.
110. Дейвис Р.М. Волны напряжений в твердых телах, Москва, ИЛТЛ. 1961.
111. Зубов В.И. Методы Ляпунова и их применение, Издво ЛГУ 1957
112. Эмерфилд А. Механика деформируемых сред, Москва ИЛ 1954.
113. Janet Maurice, Les systèmes d'équations aux dérivées partielles, Paris 1965.
114. Качественные методы: Труды пятой международной конференции по нелинейным колебаниям Ин-та математики АН УССР, Киев 1970.
115. Крылов Н.М. Боголюбов Н.Н. „Quelques exemples d'oscillations non linéaires", t. 194. p 957.
116. Крылов Н.М. Боголюбов Н.Н. Исследование явлений резонанса при поперечных колебаниях стержней находящихся под воздействием периодических нормальных сил приложенных к одному из концов стержня, Исследование колебания конструкций, Харьков 1935.
117. Крылов А.Н. Об определении критических скоростей вращающегося вала, Ленинград 1932.
118. Крылов Н.М. Боголюбов Н.Н. Основные проблемы нелинейной механики, Ленинград 1932.
119. Крылов Н.М. Избранные труды, т1, т2, т3, Издво АН УССР Киев 1961.

120. Крылов А. Н. О неким дифференциальным уравнением маятника в фазовом пространстве, Белград 1952.
121. Крылов А. Н. Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику Киев 1937.
122. Kauderer H. *Nonlinear Mechanics*, Berlin, 1958.
123. Кац Я. М. Вынужденные колебания при прохождении через резонанс, Изв. сд. Издво АН СССР, 3, вып. 2, 1947.
124. Калакин Л. А. Метод Галеркина для уравнений с малыми параметрами при старших производных, Математический сборник т. 85 (127) №4(8) 1971.
125. Кушурль М. Я. Автоколебания роторов, Издво АН СССР, Москва 1965.
126. Курдюме В. Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, ГИИТИЛ. Москва 1950.
127. Кургоф Т. Механика - Лекции по математической физике Издво АН СССР, Москва 1962.
128. Кинг Н. Стоунг. Теория механических колебаний, ГИИТИ, машиностроительной литературы, Москва 1963.
129. Курант Рихард. Уравнения с частными производными Издво "Мир" Москва 1967.
130. Кошляков Н. С. Глинер Э. Б. Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики Издво "Высшая школа" Москва 1970.
131. Кушурль М. Я. Поперечные колебания вращающихся валов при наличии внутреннего трения, Известия АН СССР, ОТН №10. 1954.
132. Каннингхэм В. Введение в теорию нелинейных систем, Москва, Госэнергоиздат 1962.
133. Курант Р. Гильберт Д. Методы математической физики, т. II. ГИИТИ 1945.
134. Лапунов А. М. Общая задача об устойчивости движения, сд. соч. т. II. Издво АН СССР 1956.

135. Лэмб Г. Динамическая теория звука, физматгиз 1960.
136. Ляв А. Математическая теория упругости, ОНТИ Москва 1935.
137. Лойцянский Л.Т. Лурье А.И. Теоретическая механика, ОНТИ 1934
138. Лившиц М.С. Операторы, колебания, волны, Издво "Наука" ГРФМЛ. Москва 1966.
139. Лапунов А.М. Собранные сочинений, Издво АН СССР 1956.
140. Митропольский Ю.А. Исследование колебаний в нелинейных системах со многими степенями свободы и медленно меняющимися параметрами, УМЖС, т 1, №2. 1949.
141. Митропольский Ю.А. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах, Киев, Издво АН УССР 1955.
142. Митропольский Ю.А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, Москва, Издво "Наука" 1964.
143. Митропольский Ю.А. Лекции по методу усреднения в нелинейной механике, Киев, Издво "Наукова думка" 1966.
144. Митропольский Ю.А. Мосеевков Б.И. Лекции по применению асимптотических методов к решению уравнений в частных производных, Ин-т Математики АН УССР, Киев 1968.
145. Мосеевков Б.И. О колебаниях при прохождении через резонанс. Студентські наукові праці, Збірник XVI Математика, Вид-во КДУ 1955.
146. Magnus K. Schwingungen, Teubner, Stuttgart, 1961.
147. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, ГИИТМ. Москва 1956.
148. Одморшев А.Н. Введение в теорию колебаний, "Наука" 1965.

149. Лисаренко Г.С. Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале, Издво АН УССР 1955.
150. Торхун Л. Н. Поперечные колебания балки находящейся под воздействием системы пульсирующих сил с подвижными точками приложения, Прикладная механика т 8, в. 11. 1967
151. Поновко Г.Я. Основы прикладной теории упругих колебаний, Издво "Машиностроение" Москва 1967.
152. Пленкаре Андри, Избранные труды, Новые методы небесной механики, Издво "Наука" 1971. Москва.
153. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными, ГИИТТИ Л. Москва 1953.
154. Пфейффер П. Колебания упругих тел, ОНТИ ГИТТИ 1934.
155. Рашкович З. Теорија осцилација, "Научна књига" Београд 1965.
156. Rašković D. On Some Particular Vibrating Nonlinear System ZAMM band 43. 1963.
157. Релей: Теория звука, ГИИТТИ Л. Москва 1955.
158. Раковић Ђ. Электроника I, II Београд 1960.
159. Салшиков Н. Парцијалне диференцијалне једначине, Београд 1951.
160. Соболев С. Л. Уравнения математической физики, "Наука" Москва 1966.
161. Шеванович К.Р. Свободные нелинейные поперечные колебания балки в двухчастотном режиме, В сб. "Аналитические и качественные методы теории дифференциальных уравнений, Ин-т математики АН УССР, Киев 1972.
162. Шеванович К.Р. Двухчастотные нестационарные вынужденные колебания балки, Математическая физика, вып. 12. "Наукова Думка" Киев 1972.
163. Meyer zur Capellen, Živković Z. Gedämpfte Zweimassensysteme, Amplitudenfunktion und Schwingungsleitfähigkeit, Mitteilung aus dem Institut für Getriebelehre und Maschinendynamik der TH Aachen vol 25. 1969.

164. Собрание трудов Академика А.Н. Крылова, Изд-во АН СССР, Москва 1937, 1936, 1951.
165. Толстов Г.П. Рады фурье, фильматиз, Москва 1960.
166. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле, Изд-во "Наука" 1967.
167. Скулик Е. Простые и сложные колебательные системы Изд-во "Мир" 1971.
168. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики, Изд-во "Наука" Москва 1969.
169. Владимирова В.С. Уравнения математической физики, Изд-во "Наука" 1971.
170. Лионс Л.Ж. Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения, Изд-во "Мир" Москва 1971.
171. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, Изд-во "Мир" Москва 1968.
172. Томович Р. Увод у нелинеарне системе аутоматског управљања, Београд 1964.
173. Томович Р. Анализа осцилационих динамичких система Београд 1963.
174. Григорян А.П. Погорелский И.Б. История механики, Изд-во "Наука" Москва 1971.
175. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем, Изд-во "Машиностроение" Москва 1970.
176. Фреценко С.Ф. Шкиль Н.И. Николенко В.Ф. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений, "Наукова Думка" Киев 1966.
177. Четаев Н.П. Устойчивость движения, Гостелмиздат, Москва 1955.
178. Novaski V. Динамика еластичних система, Градевинска књига Београд 1966.
179. Ландау Л.Д. Лифшиц Е.М. Механика неупругих средина, Градевинска књига, Београд 1965.

180. Менделъштам Л.И. Лекции по колебаниям, Издво АН СССР
181. Боголюбов Н.Н. Митропольский Ю.А. Симоленко А.М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике, "Наукова Думка" Киев 1969.
182. Рубанчик В.Т. Прохождение через резонанс в нелинейной системе с двумя степенями свободы. Студенческие научные работы, сб. XVI. Киев 1955г.
- 183.