

*Univerzitet u Nišu*

*Mašinski fakultet*

МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ У НИШУ

Примљено: 28.9.1990			
Орг. јед.	Број	Прилог	Вредности
	9772		

*Analiza stanja napona i stanja deformacija  
ravno napregnutih ploča sa primenom  
na eliptično prstenastu ploču*

*- magistarski rad -*

Mentor:

dr Katica Hedrih, red.prof.

Kandidat:

Dragan Jovanović, dipl.ing.

Niš, 1990

*Posvećujem sinu Stefanu*

Zahvaljujem se mentoru prof. dr. Katici Hedrih na konsultacijama, podršci i korisnim predlozima i savetima u toku istraživanja vezanih za ovaj rad. Posebno se zahvaljujem prof. dr. Rastku Čukiću i prof. dr. Stjepanu Jeciću, kao i katedrama za mehaniku na Mašinskom fakultetu u Beogradu i fakultetu Strojarnstva i brodogradnje u Zagrebu, koji su omogućili korišćenje laboratorija, biblioteka i opreme radi realizacije eksperimentalnog dela magistarskog rada. Zahvaljujem se takođe upravniku računskog centra Mašinskog fakulteta u Nišu dr. Bratislavu Blagojeviću, zatim asistentu mr. Miroslavu Trajanoviću, kao i radnicima Računskog centra, koji su mi omogućili korišćenje opreme, pružili savete i pomoć u korišćenju opreme Računskog centra. Zahvaljujem se Vladi Mišiću na kompjuterskoj pripremi rada za štampanje. Takođe se zahvaljujem biblioteci Mašinskog fakulteta, kao i Milki Radivojević i Liljani Petrović koje su mi omogućile brzi pristup bibliotečkim informacijama. Zahvaljujem se kolektivu Mašinskog fakulteta, koji je materijalno pomagao moje usavršavanje u toku postdiplomskih studija i izrade magistarskog rada, a posebno se zahvaljujem onim pojedincima koji me u tome nisu sputavali. Zahvaljujem se Republičkoj zajednici nauke koja mi je, dodelom sredstava za usavršavanje, omogućila realizaciju programa istraživanja u okviru teme magistarskog rada.

dipl. ing. Dragan Jovanović

## Pregled nekih oznaka korišćenih u radu

$\Phi$	-Airy-jeva naponska funkcija
$F(z), X(z)$	-analitičke funkcije kompleksne promenljive
$C_n, A_n, B_n$	-koeficijenti razvoja u red
$u, v$	-komponenta pomeranja u Descartes-ovom koordinatnom sistemu
$X'_t, Y'_t$	-komponente površinske sile po konturi ploče
$\omega(\zeta)$	-funkcija konformnog preslikavanja
$\rho, \varphi$	-radijus i ugao ili eliptično-hiperbolične koordinate
$x, y$	-Descartes-ove koordinate
$\sigma_h, \sigma_e, \tau_{he}$ $\sigma_\rho, \sigma_\varphi$ i $\tau_{\rho\varphi}$	-komponente tenzora napona u eliptično-hiperboličnom koordinatnom sistemu
$u_h, u_e, u_\rho, u_\varphi$	-komponente pomeranja u eliptično-hiperboličnom koordinatnom sistemu
$P_u, P_s$	-kontinualna opterećenja na unutrašnjoj i spoljašnjoj konturi
$\bar{e}_0, \bar{h}_0$	-ortovi u eliptično-hiperboličnom koordinatnom sistemu
$dS_\rho, dS_\varphi$ $dS_h, dS_e$	-elementi luka hiperbole i elipse
$\mu$	-Poisson-ov koeficijent
$E$	-Modul elastičnosti
$\varepsilon_h, \varepsilon_e, \gamma_{he}$ $\varepsilon_\rho, \varepsilon_\varphi, \gamma_{\rho\varphi}$	-Dilatacije i klizanje u eliptično-hiperboličnom koordinatnom sistemu

## S a d r Ź a j:

I Pregled istraživanja stanja napona i stanja deformacija ravno napregnutih ploča, čija je srednja površ višestruko povezana oblast .....	1
II Pregled metoda kojima se rešavaju zadaci ravno napregnutih ploča	
II.1. Analitičke metode	
II.1.1. Funkcija kompleksne promenljive sa konformnim preslikavanjem .....	5
II.1.2. Naponska funkcija .....	5
II.1.3. Granični uslovi .....	9
II.1.4. Konformno preslikavanje .....	11
II.1.5. Uticaj konformnog preslikavanja na karakter harmonijskih funkcija .....	14
II.1.6. Komponente tenzora napona i vektora pomeranja u preslikanoj ravni .....	15
II.1.7. Primena konformnog preslikavanja za dvostruko povezane oblasti .....	17
II.2. Metoda polinoma u rešavanju ravanskih problema teorije elastičnosti .....	19
II.3. Metoda varijacionog računa u rešavanju ravanskih problema teorije elastičnosti .....	21
III Numeričke metode	
III.1. Metoda konačnih razlika .....	24
III.2. Metoda konačnih elemenata .....	27
IV Eksperimentalne metode	
IV.1. Metoda optičke analize naponskog stanja .....	34
IV.2. Metoda tenzometra - korišćenje mernih traka za određivanje napona i deformacija .....	43
V Izučavanje naponskog i deformacionog stanja ravno napregnute eliptično prstenaste ploče	
V.1. Određivanje naponskog i deformacionog stanja eliptično prstenaste ploče primenom metode konačnih elemenata .....	51
V.2. Primena metode fotoelastičnosti za određivanje naponskog i deformacionog stanja eliptično prstenaste ploče .....	111
V.3. Primena funkcije kompleksne promenljive i konformnog preslikavanja za izučavanje naponskog i deformacionog stanja ravno napregnute eliptično prstenaste ploče	
V.3.1. Konformno preslikavanje eliptičnog u kružni prsten .....	137
V.3.2. Razmatranje graničnih uslova na konturama eliptičnog prstena .....	138
V.3.3. Određivanje koeficijenata $A_n$ i $B_n$ pri razvoju u Laurent-ov red analitičkih funkcija kompleksne promenljive $F_1(\zeta)$ i $X_1(\zeta)$ .....	142
V.3.4. Komponente tenzora napona u eliptično - hiperboličnim koordinatama za razmatrani slučaj eliptično prstenaste ploče i njihova veza sa koeficijentima $A_n$ i $B_n$ .....	151

V3.5. Uticaj simetrije kontura i opterećenja na koeficijente $A_n$ i $B_n$ .....	155
V3.6. Komponente vektora pomeranja u eliptično hiperboličnom koordinatnom sistemu za primer eliptično prstenaste ploče .....	156
V3.7. Komponente tenzora deformacije u eliptično hiperboličnom koordinatnom sistemu za primer eliptično prstenaste ploče .....	158
V3.8. Stanje napona i stanje deformacija ravno napregnute eliptično prstenaste ploče određeno primenom funkcije kompleksne promenljive i konformnog preslikavanja za različite slučajeve opterećenja .....	160
VI Zaključak .....	185
Prilog I Konformno preslikavanje nekih kontura .....	188
Prilog II Krivolinijske koordinate pri konformnoj transformaciji u polarne koordinate .....	190
Prilog III Konceptija programskog paketa "BERSAFE" .....	193
Prilog IV Baždarenje fotoelastičnog materijala na disku i štapu .....	201
Prilog V Preslikavanje polarnih u eliptično - hiperbolične koordinate i eliptično - hiperbolične koordinate tenzora napona .....	205
Prilog VI Programi i rezultati .....	208
Literatura	

## I Pregled istraživanja stanja napona i stanja deformacija ravno napregnutih ploča, čija je srednja površ višestruko povezana oblast

Istraživanja stanja napona i stanja deformacija ravno napregnutih ploča vršena su sa različitim polazišta i različitim metodama. Polazišta istraživača zavisila su od teorijskih i eksperimentalnih mogućnosti i praktičnih interesa za rešavanje konkretnih problema. Metode za rešavanje ove problematike razvijane su i dopunjavane pre svega razvojem matematičkog aparata<sup>1</sup> kao i razvojem novih eksperimentalnih metoda i mernih uređaja.

Kao što se vidi, sve metode koje se mogu primenjivati u rešavanju ove problematike mogle bi se podeliti u tri osnovne grupe:

- 1) analitičke
- 2) numeričke i
- 3) eksperimentalne

Analitičke metode koje su pogodne za rešavanje postavljenog zadatka su:

- metoda funkcije kompleksne promenljive sa konformnim preslikavanjem [72]
- metoda polinoma
- metoda varijacionog računa.

Numeričke metode pogodne za izračunavanje postavljenog zadatka pomoću računara su:

- metoda konačnih razlika i
- metoda konačnih elemenata.

Eksperimentalne metode koje su efikasne za analizu stanja napona i stanja deformacija za postavljeni zadatak su:

- metode optičke analize naponskog i deformacionog stanja i
- tenzometrijska metoda (primenom mernih traka).

Н.У. Мухелишвили razrađuje matematički aparat za rešavanje ravnog zadatka teorije elastičnosti primenom funkcije kompleksne promenljive, svodeći osnovne probleme (ravnog stanja napona, ravnog stanja deformacija) na probleme određivanja naponske funkcije pomoću analitičke funkcije kompleksne promenljive. Мухелишвили primenjuje konformno preslikavanje za rešavanje nekih problema definišući pri tome funkcije preslikavanja u obliku:

a) Bilinearne funkcije  $z = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}$

b) Epitrofnoidne  $z = \omega(\zeta) = R(\zeta + m\zeta^n)$ ,  $R > 0$ ,  $0 \leq m \leq \frac{1}{n}$

c) Hipotrofnoidne  $z = \omega(\zeta) = R(\zeta + \frac{m}{\zeta^n})$ ,  $R > 0$ ,  $0 \leq m \leq \frac{1}{n}$

d) Eliptičkih prstenova  $z = \omega(\zeta) = R(\zeta + \frac{m}{\zeta^n})$ ,  $R > 0$ ,  $m \geq 0$

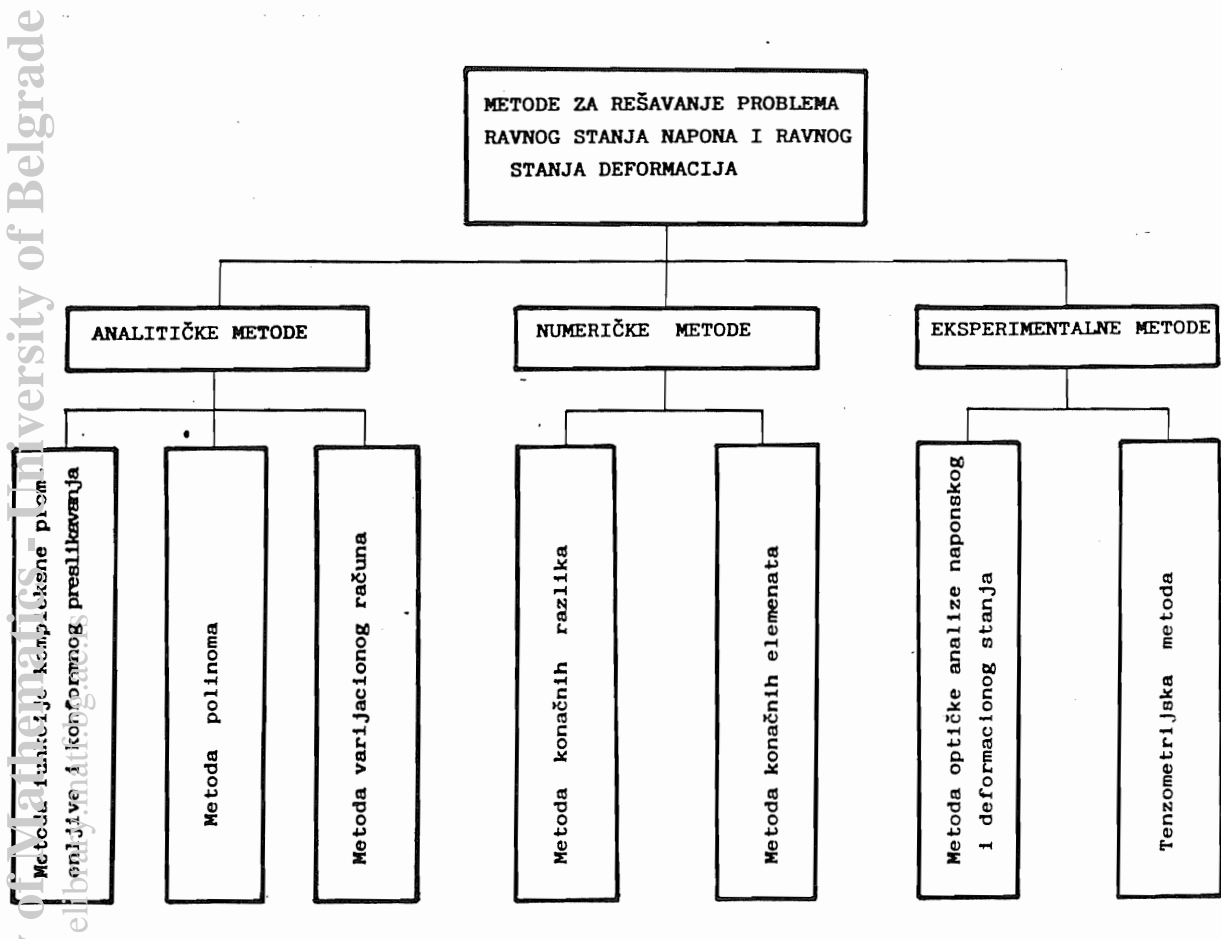
<sup>1</sup> Г.Б. Колосов je 1909 postavio veoma jednostavnu i preglednu formulu, izražavajući komponente tenzora napona i vektora pomeranja pri elastičnim naprežanjima kod ravnog zadatka preko Gurove funkcije, analitičke u jednostruko povezanoj oblasti. Kasnije je Н.И. Мухелишвили dokazao ovu relaciju za opštiji slučaj konačne i beskonačne višestruko povezane oblasti. Formula Колосов - Мухелишвили-ja ima oblik [11]:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \{ F'(z) \}$$

$$\sigma_x - \sigma_y - 2i\tau_{xy} = 2 \{ z \overline{F''(\bar{z})} + \overline{X''(z)} \}$$

O ovome će više reči biti u poglavlju II.

Predhodna klasifikacija metoda mogla bi se prikazati šemataski:



Slika 1.

Мусхелишвили такође даје решење неких конкретних задатака. На пример, даје решење првог основног проблема<sup>2</sup> за напрезање кружног прстена применом функције комплексне променљиве разрађујући нешто опшirniji проблем који су решили Г. Б. Колосов и С.Г.Микхлин коришћењем потенцијалних редова. При томе Мусхелишвили разматра први и други основни проблем<sup>3</sup> simultano, пишући јединствен израз за граничне услове:

$$k\bar{\varphi}(t) + \bar{t}\varphi'(t) + \psi(t) = \bar{f}(t) \dots\dots\dots (1)$$

где је за први фундаментални проблем:

$$k=1 \quad i \quad f(t) = f_1(t) + if_2(t) = i \int_0^s (X_n + iY_n) ds + C$$

док је за други основни проблем:

$$k=-x \quad i \quad f(t) = 2\mu(g_1 + ig_2).$$

Уводећи предпоставку да се ради о вишеструко повезаној области и разматрајући случај коначне и бесконачне области Мусхелишвили каже [72]:

<sup>2</sup> Под првим основним проблемом се подразумева случај када су гранични услови задати силама на контури области

<sup>3</sup> Под другим основним проблемом се подразумева случај када су гранични услови задати померanjima на контури области



“Jedina razlika od slučaja konačne jednostruko povezane oblasti je taj da nepoznate funkcije  $\varphi(z)$  i  $\psi(z)$  mogu biti (i uopšte će biti) višeznačne.”

Мухелишвили primenom funkcije kompleksne promenljive i konformnog preslikavanja rešava niz konkretnih problema ravnog stanja napona i ravnog stanja deformacija [72] kao na primer: kružni disk opterećen po konturi koncentrisanim silama, disk pod dejstvom koncentrisanih sila i spregova u unutrašnjim tačkama, rotirajući disk sa pričvršćenim diskretnim masama, ploča sa eliptičnim čvorom izložena istezanju, eliptični čvor (u ploči) koji je izložen konstantnom pritisku, jednoosno naprezanje beskonačne ploče sa krutim eliptičnim središtem. On takođe navodi opšte metode za rešavanje graničnih problema koje su dali S.G.Mikhlin i D.I.Sherman [88] kao i integralne jednačine D.I.Sherman-a i G.Lauricella [88]. Posebno su interesantna rešenja graničnih problema za oblasti, preslikane u krug, uz pomoć racionalnih funkcija. Tu on daje rešenja za kružni disk, beskonačnu ploču sa kružnim otvorom i beskonačnu ploču sa eliptičnim otvorom.

Primenom funkcije kompleksne promenljive Мухелишвили takođe rešava i probleme torzije i savijanja homogenih i složenih štapova. I.S.Sokolnikoff [88] korišćenjem metode funkcije kompleksne promenljive daje rešenje za jednostruko povezane oblasti i to: za kružnu oblast opterećenu jednako raspodeljenim pritiskom ili koncentrisanim ekscentričnim silama, za kružnu oblast kod koje su zadata konstantna radijalna pomeranja, za beskonačnu oblast ograničenu iznutra korugom i akoju deluje uniformni unutrašnji pritisak ili koncentrisana sila ili moment, za jednoosno ili dvoosno zatezanje ili čisto smicanje. Sokolnikoff daje takođe rešenje analitičkih funkcija  $\varphi(\zeta)$  i  $\psi(\zeta)$  za problem beskonačne oblasti (ploče) sa eliptičnim otvorom, pri tome on razmatra slučaj jednako raspodeljenog pritiska na eliptičnoj granici i slučaj ploče izložene istezanju i oslabljene eliptičnim otvorom. Pri tome se on poziva na Мухелишвили-ja [2], ali kao prvog autora ovog rešenja navodi C.E.Inglis-a i izvor Transactions of the Institute of Naval Architects, London (1913). Što je posebno od interesa za ovaj rad Sokolnikoff daje postavku problema za eliptični disk i eliptični prsten pozivajući se na Мухелишвили-ja, ali navodeći O.Tedone-a (1906) [88] i T.Boggio-a (1901) [88] kao autore mnogo komplikovanijeg pristupa problemu. Kao autore koji su razmatrali osnovni problem sa dvostruko povezanom oblasti navode se još A.Timpe (1905) [88] G.Lame (1852), C.Тимошенко i J.N.Goodier (1951), K.Weighardt (1915), M.Z.Narodetzky (1948), D.V.Weinberg (1949), L.N.G.Filon (1924), A.I.Kalandiya (1953), M.P.Scheremetev (1953) [88], D.I.Sherman (1950) [88].

Potrebno je takođe pomenuti radove:

V.T. Buchwald i G.A.O. Davies - Plane elastostatic boundary value problems of double connected regions (1962) i E.A. Колчанова, A.B. Швецов - О построении конформного отображения сложной симметричной двухсвязной области (1966).

England A.H. se takođe bavi primenom funkcije kompleksne promenljive u istraživanju stanja napona i stanja deformacije napregnutih ploča [23]. Naime, on rešava problem savijanja eliptične ploče pod dejstvom konstantnog opterećenja. Zatim, razmatra ravnotežu konfokalnog eliptičnog prstena, pri tome on razrađuje redukciju beskonačnog sistema jednačina koji se dobije za određivanje nepoznatih koeficijenata. Beskonačni sistem jednačina on približno rešava, iterativnim putem. England A.H. daje i rešenje analitičkih funkcija  $\varphi_0(z)$  i  $\psi_0(z)$  za eliptični prsten savijen konstantnim pritiskom (pri tome je unutrašnja kontura slobodna, a spoljašnja

fiksirana). Pri tome, on se poziva na Lekhnitskii S.G. - razmatranje višeznačnosti i analitičkih funkcija. Космодамианский A.C. daje rešenja primera [59], kao što su: zategnuta ploča sa dva jednaka eliptična otvora metodom malih parametara ili putem beskonačnog sistema algebarskih jednačina; ploča sa dva eliptična otvora pod dejstvom koncentrisanih sila i momenata; istežanje beskonačne izotropne ploče oslabljene beskonačnim nizom eliptičnih otvora i što je posebno interesantno za ovaj rad naponsko stanje izotropne eliptične ploče, oslabljene konačnim brojem eliptičnih otvora.

Amenzade Y. daje [7] prikaz metode konformnog preslikavanja sa primenom na eliptični otvor u beskonačnoj ploči. Pri tome je korišćena funkcija preslikavanja:

$$z = \omega(\zeta) = A(\zeta^{-1} + m\zeta), \quad A > 0, \quad 0 \leq m \leq 1 \quad \dots\dots\dots (2)$$

koja spoljašnju oblast elipse sa centrom u tački  $z=0$  i poluosama  $A(1+m)$  i  $A(1-m)$  konformno preslikava u jedinični krug  $|\zeta| < 1$ .

Nowacki W. u knjizi [76] daje primenu kompleksnih potencijala:

$$\varphi(z) = z \sum_{k=1}^m A_k \ln(z - z_k) + \sum_{k=1}^m \gamma_k \ln(z - z_k) + \varphi_0(z)$$

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^m \gamma'_k \ln(z - z_k) + \psi_0(z) \quad \dots\dots\dots (3)$$

za višekonturane oblasti sa  $(m+1)$  konturom. Takođe, on daje rešenje zadatka za beskonačne oblasti, pri čemu se funkcija preslikavanja u jedinični krug može dati u opštem obliku:

$$z = \omega(\zeta) = \frac{a}{\zeta} + \sum_{n=0}^{\infty} k_n \zeta^n, \quad |\zeta| \leq 1 \quad \dots\dots\dots (4)$$

Ovde je tačka  $z = \infty$  korespondirajuća tački  $\zeta = 0$ . Takođe, on daje određivanje kompleksnih potencijalnih funkcija uz primenu integralnih jednačina.

U radu [92] Šimić V. daje primenu funkcije kompleksne promenljive u ravanskim problemima teorije elastičnosti za anizotropna tela i takođe određivanje kompleksnih potencijala metodom najmanjih kvadrata. U radu [64] Batista M. daje prikaz analitičkog rešavanja naponsko - deformacionog stanja za ravne dvokonturane oblasti. Pri tome koristi iteracijski postupak u rešavanju sistema linearnih algebarskih jednačina, uz primenu računara, tako da je drugi deo rešavanja ovog zadatka praktično realizovan numeričkim putem. U knjizi [18] Демидов С. daje niz rešenih problema napregnutih ploča sa eliptičnom konturom uz primenu funkcije kompleksne promenljive. On takođe ovde daje i varijacionu postavku zadatka ravno napregnutih ploča, ali bez rešenja slučajeva sa eliptičnim konturama.

Može se navesti još niz radova koji se bave ovom problematikom i kojima se primena funkcije kompleksne promenljive i konformnog preslikavanja razvija u primenljivu i efikasnu metodu za rešavanje određene klase zadataka.

## II Pregled metoda kojima se rešavaju zadaci ravno napregnutih ploča

### II.1. Analitičke metode

#### II.1.1. Funkcija kompleksne promenljive sa konformnim preslikavanjem

Sušтина metode funkcije kompleksne promenljive je u tome da se naponska funkcija izrazi pomoću analitičkih funkcija kompleksne promenljive. Analitičke funkcije kompleksne promenljive se određuju primenom odgovarajućeg postupka, a zatim se određuju naponi, pomeranja i dilatacije na osnovu određenih analitičkih funkcija kompleksne promenljive.

#### II 1.2. Naponska funkcija

Kada se radi o ravnom stanju napona i ravnom stanju deformacija, naponi se mogu izraziti preko Airy-jeve naponske funkcije  $\Phi(x,y)$ , koja mora zadovoljavati biharmonijsku jednačinu:

$$\nabla^4 \Phi = \Delta^2 \Phi = 0 \quad \dots \quad (5)$$
$$\Delta = \nabla^2$$

Uvedimo funkciju  $p(x,y) = \nabla^2 \Phi$ , koja prema predhodnoj jednačini zadovoljava Laplace-ovu jednačinu:

$$\Delta p = 0 \quad \dots \quad (6)$$

i uvedimo funkciju  $q(x,y)$  koja je konjugovana funkciji  $p(x,y)$ . Funkcija  $q(x,y)$  je takva da sa  $p(x,y)$  zadovoljava Cauchy - Riemann-ove uslove:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = - \frac{\partial q}{\partial x} \quad \dots \quad (7)$$

Tada možemo da tvrdimo da je funkcija  $f_1(z) = p + iq$  analitička funkcija. Integraljenjem funkcije  $f_1(z)$  dobija se nova analitička funkcija  $F(z)$ :

$$F(z) = P + iQ = \frac{1}{4} \int f_1(z) dz \quad \dots \quad (8)$$

Funkcije  $P(x,y)$  i  $Q(x,y)$  zadovoljavaju Laplace-ovu jednačinu, odnosno, harmonijske su. Diferenciranjem funkcije u obliku (8) po  $z$  dobija se:

$$F'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} - i \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{4} f_1(z) = \frac{1}{4} (p + iq) \quad \dots \quad (9)$$

Odavde sledi:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{4} p \quad \dots \quad (10)$$

Može se dokazati da je:

$$\Delta(xP + yQ) = 2 \frac{\partial P}{\partial x} + 2 \frac{\partial Q}{\partial y} + x \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) + y \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \right) \dots \quad (11)$$

Izrazi u zagradama na desnoj strani relacije (11) jednaki su nuli pošto  $P$  i  $Q$  zadovoljavaju Laplace-ovu jednačinu pa su harmonijske funkcije, pa sledi:

$$\nabla^2(xP + yQ) = 2 \frac{\partial P}{\partial x} + 2 \frac{\partial Q}{\partial y} = p \quad \dots \quad (12)$$

uz korišćenje relacije (10). Pošto je  $p(x,y) = \Delta \Phi$  izraz (12) može da se napiše u obliku:

$$\Delta(\Phi - xP - yQ) = 0 \quad \dots \quad (13)$$

Izraz u zagradi relacije (13) može da se označi kao funkcija  $P_1(x,y)$  koja je harmonijska pa Airy-jeva naponska funkcija može da se napiše u obliku:

$$\Phi = xP + yQ + P_1 \quad \dots \quad (14)$$

Naponska funkcija  $\Phi(x, y)$  može da se izrazi preko analitičkih funkcija kompleksne promenljive  $X(z)$  i  $F(z)$ . Napišimo sada analitičku funkciju  $X(z)$ :

$$X(z) = P_1 + iQ_1 \quad \dots\dots\dots (15)$$

gde je  $Q_1(x, y)$  konjugovana funkcija  $P_1(x, y)$ . Razvijmo zatim izraz:

$$\bar{z}F(z) = (x-iy)(P+iQ) = xP + yQ + i(xQ - yP) \quad \dots\dots\dots (16)$$

Sabiranjem realnih delova funkcija  $X(z)$  i  $\bar{z}F(z)$  uz korišćenje relacije (14) dobijamo Airy-jevu naponsku funkciju izraženu preko analitičkih funkcija kompleksne promenljive  $X(z)$  i  $F(z)$ :

$$\Phi = \text{Re} \{ \bar{z}F(z) + X(z) \} \quad \dots\dots\dots (17)$$

gde  $\text{Re}$  označava realni deo funkcije.

Označavajući sa  $X(\bar{z})$  i  $F(\bar{z})$  konjugovane analitičke funkcije kompleksne promenljive:

$$\bar{F}(\bar{z}) = P - iQ \quad \text{i} \quad \bar{X}(\bar{z}) = P_1 - iQ_1 \quad \dots\dots\dots (18)$$

sledi:

$$\bar{z}F(z) = xP + yQ + i(xQ - yP)$$

$$z\bar{F}(\bar{z}) = (x+iy)(P-iQ) = xP + yQ - i(xQ - yP)$$

Pa se Airy-jeva naponska funkcija može napisati u funkciji od  $X(z)$ ,  $F(z)$ ,  $X(\bar{z})$  i  $F(\bar{z})$  u obliku:

$$\Phi = \frac{1}{2} \left[ \bar{z}F(z) + z\bar{F}(\bar{z}) + X(z) + \bar{X}(\bar{z}) \right] \quad \dots\dots\dots (19)$$

pri čemu su korišćene relacije:

$$f(z) = p + iq, \quad \bar{f}(\bar{z}) = p - iq$$

$$\text{Re} \{ f(z) \} = \frac{1}{2} \left[ f(z) + \bar{f}(\bar{z}) \right] \quad \dots\dots\dots (20)$$

Što je izvorno dokazao Мусхелишвили Н.И. [72].

Sada se naponi, dilatacije i pomeranja mogu korišćenjem naponske funkcije  $\Phi$  prikazati preko analitičkih funkcija kompleksne promenljive  $F(z)$  i  $X(z)$  za slučaj ravnog naponskog stanja.

Korišćenjem poznatih izraza za dilatacije i klizanja iz teorije elastičnosti [33]:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y) = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) \\ \epsilon_y &= \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x) = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy} = - \frac{2(1+\mu)}{E} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

pri čemu su zapreminske sile zanemarene, te korišćenjem relacije (10) i veze:

$$p = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$$

sledi da su parcijalni izvodi komponentnih pomeranja:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E} \left[ \left( p - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right] = \frac{1}{E} \left[ p - (1+\mu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right] = \\ &= \frac{1}{E} \left[ 4 \frac{\partial P}{\partial x} - (1+\mu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right] \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{E} \left[ 4 \frac{\partial Q}{\partial y} - (1+\mu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] \quad \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

Integraljenjem predhodnih izraza (22) dobija se:

$$u = \frac{1}{E} \left[ 4P - (1+\mu) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + f_1(x) \right]$$

$$v = \frac{1}{E} \left[ 4Q - (1+\mu) \frac{\partial \Phi}{\partial y} + f_2(x) \right] \dots\dots\dots (23)$$

gde su  $f_1(y)$  i  $f_2(y)$  proizvoljne funkcije. Zamenom relacija (23) u treći izraz (21) dobijamo:

$$4 \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) - 2(1+\mu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} =$$

$$= -2(1+\mu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \dots\dots\dots (24)$$

Pošto je  $\partial P / \partial y = -\partial Q / \partial x$  sledi:

$$\frac{df_1}{dy} + \frac{df_2}{dx} = 0 \dots\dots\dots (25)$$

Ovde funkcije  $f_1(y)$  i  $f_2(y)$  predstavljaju polje pomeranja krutog tela, pa ih zanemarujemo. Iz relacija (23) sada slede izrazi za komponentna pomeranja:

$$u = \frac{1}{E} \left[ 4P - (1+\mu) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]$$

$$v = \frac{1}{E} \left[ 4Q - (1+\mu) \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]$$

$$u + iv = \frac{1}{E} \left[ 4(P + iQ) - (1+\mu) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right] \dots\dots\dots (26)$$

Unoseći u jednačinu (19) relacije:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = i$$

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = -i \dots\dots\dots (27)$$

dobijamo:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[ z F'(z) + F(z) + \bar{z} \bar{F}'(\bar{z}) + \bar{F}(\bar{z}) + X'(z) + X(z) \right]$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{i}{2} \left[ \bar{z} F'(z) - F(z) - z \bar{F}'(\bar{z}) + \bar{F}(\bar{z}) + X'(z) - \bar{X}'(\bar{z}) \right] \dots (28)$$

pa sledi:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi}{\partial y} = F(z) + z \bar{F}'(\bar{z}) + \bar{X}'(\bar{z}) \dots\dots\dots (29)$$

Korišćenjem izraza (26) i (28) konačno dobijamo vezu između komponentnih pomeranja  $u$  i  $v$  i analitičkih funkcija kompleksne promenljive  $F(z)$  i  $X(z)$ :

$$u + iv = \frac{3-\mu}{E} F(z) - \frac{1+\mu}{E} \left[ z \bar{F}'(\bar{z}) + \bar{X}'(\bar{z}) \right] \dots\dots\dots (30)$$

Diferenciranjem izraza (29) po  $x$  i po  $y$ :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = F''(z) + z \bar{F}''(\bar{z}) + \bar{F}'(\bar{z}) + \bar{X}''(\bar{z})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = i \left[ F'(z) - z \bar{F}''(\bar{z}) + \bar{F}'(\bar{z}) - \bar{X}''(\bar{z}) \right] \dots\dots\dots (31)$$

i korišćenjem poznatih izraza iz teorije elastičnosti [74]:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \dots\dots\dots (32)$$

dobijamo relacije između napona  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  i analitičkih kompleksnih funkcija  $X(z)$  i  $F(z)$ :

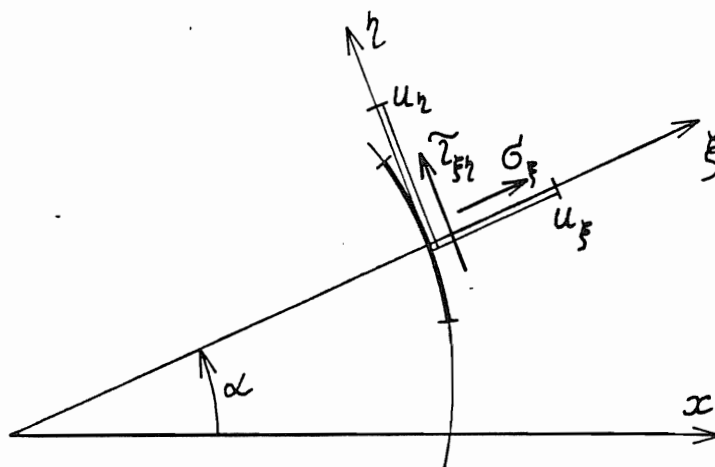
$$\sigma_x + \sigma_y = 2F'(z) + 2\bar{F}'(\bar{z}) = 4\text{Re}\{F'(z)\} \quad (33)$$

$$\sigma_y - \sigma_x - 2i\tau_{xy} = 2[z\bar{F}''(\bar{z}) + \bar{X}''(z)] \quad (34)$$

ili:

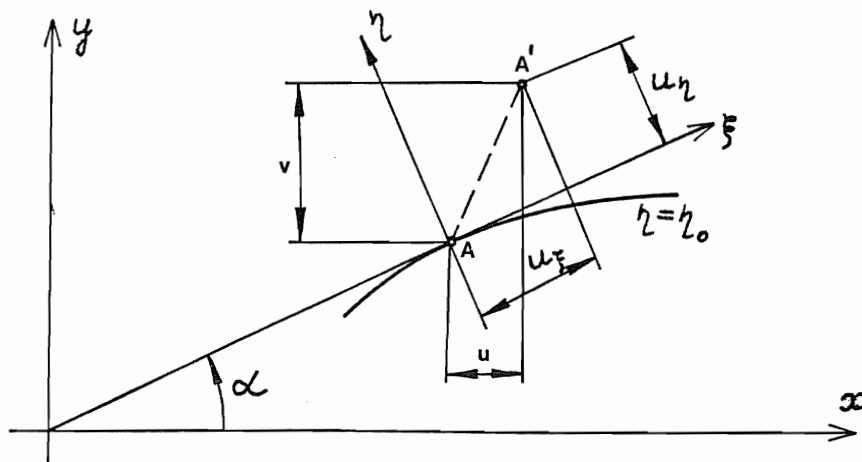
$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[zF''(z) + X''(\bar{z})] \quad (35)$$

Razmotrimo sada kako bi se izrazi (26) (33) (34) i (35) mogli prikazati u krivolinijskim koordinatama. Uzmimo u razmatranje sistem ortogonalnih krivolinijskih koordinata  $(\zeta, \eta)$  u  $z$ -ravni. Element luka krive  $\zeta = \zeta_0$  je upravan na pravac u kome  $\zeta$  raste. Označimo normalni napon na taj element sa  $\sigma$ , a smičući napon sa  $\tau_{\zeta\eta}$ , kao što je prikazano na slici 2.



Slika 2.

Analogno predhodnom na elementu luka krive  $\eta = \eta_0$  normalni napon je  $\sigma_\eta$ , a smičući napon je  $\tau_{\eta\zeta}$ . Za smičuće napone važi relacija  $\tau_{\zeta\eta} = \tau_{\eta\zeta}$ . Označimo pomeranja duž  $\zeta$  i  $\eta$  pravca sa  $u_\zeta$  i  $u_\eta$  respektivno i označimo sa  $\alpha$  ugao koji tangenta na  $\eta$  krivu gradi sa  $x$ -osom, kao što je to prikazano na slici 3.



Slika 3.

Postavimo relacije između pomeranja u x i y pravcu i  $\xi$  i  $\eta$  pravcu:

$$\begin{aligned} u &= u_\xi \cos \alpha - u_\eta \sin \alpha \\ v &= u_\xi \sin \alpha + u_\eta \cos \alpha \end{aligned} \quad (36)$$

pa sledi:

$$\begin{aligned} u+iv &= u_\xi (\cos \alpha + i \sin \alpha) + i u_\eta (\cos \alpha + i \sin \alpha) \\ u+iv &= (u_\xi + i u_\eta) e^{i\alpha} \end{aligned}$$

Na osnovu izraza (30) možemo napisati:

$$u_\xi + i u_\eta = (u+iv) e^{-i\alpha} \quad (38)$$

Razmatranjem veza između komponentnih napona u polarnom i Descartes-ovom koordinatnom sistemu dobijamo poznate relacije:

$$\begin{aligned} \sigma_\xi + \sigma_\eta &= \sigma_x + \sigma_y \\ \sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta} &= (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) e^{2i\alpha} \end{aligned} \quad (39)$$

Izrazimo zatim napone  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  pomoću relacija (33) i (34) i dobijamo:

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = 4\text{Re}\{F'(z)\} = 2[F'(z) + \overline{F'(\bar{z})}] \quad (40)$$

$$\sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta} = 2[\overline{z}F''(z) + X''(z)] e^{2i\alpha} \quad (41)$$

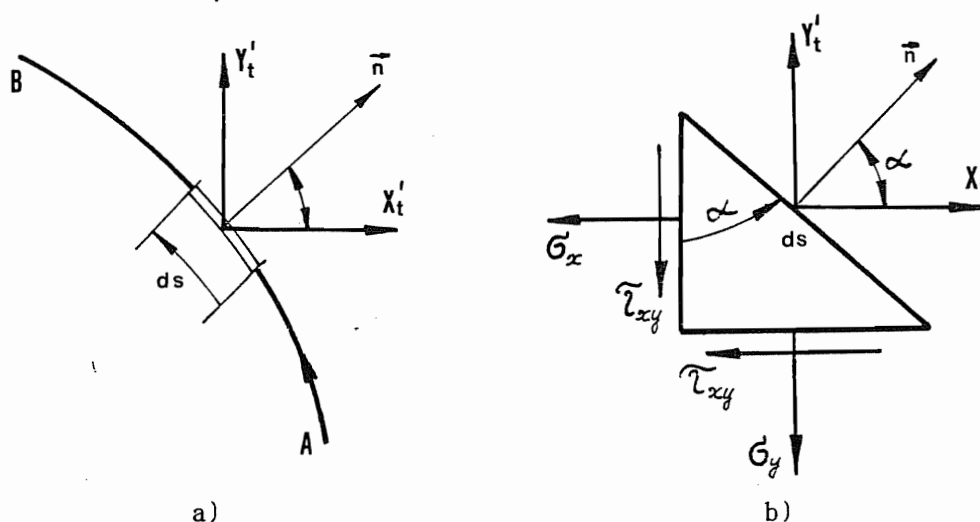
Oduzimanjem izraza (41) od izraza (40) dobijamo pogodniju formu izraza:

$$\sigma_\xi - i\tau_{\xi\eta} = F'(z) + \overline{F'(\bar{z})} - [\overline{z}F''(z) + X''(z)] e^{2i\alpha} \quad (42)$$

Ako razmatramo polarne koordinate dovoljno je u predhodne izraze staviti umesto  $\xi$  i  $\eta$  oznake  $\rho$  i  $\varphi$ , gde  $\rho$  označava radijalni pravac, a  $\varphi$  cirkularan pravac.

### 1.3. Granični uslovi

Razmotrimo zatim problem graničnih uslova. Posmatrajmo jedan luk AB u oblasti  $S^+$ , koji ima smer od A prema B, a normala  $\vec{n}$  je usmerena udesno kada se krećemo od A prema B kao što je to prikazano na slici 4.-a



Slika 4.

Predpostavimo da su komponente sile koja dejstvuje na strani pozitivne normale, a na elementarnoj dužini luka  $ds$ , označene sa  $X'_t$  i  $Y'_t$  i da su u pravcu koordinatnih osa x

i y. Pišući jednačine ravnoteže za elementarni trougao prikazan na slici 4-b, dobijamo:

$$\begin{aligned} X'_t &= \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \\ Y'_t &= \sigma_y \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha \end{aligned} \quad (43)$$

Pošto je  $\cos \alpha = dy/ds$  i  $\sin \alpha = -dx/ds$  i uzimajući u obzir relaciju (32) sledi:

$$\begin{aligned} X'_t &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \frac{dx}{ds} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \\ Y'_t &= - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} = - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (44)$$

gde je  $d/ds$  izvod po lučnoj konturi  $s$ .

Integraljenjem po delu luka od  $A$  do  $B$  dobijamo komponente rezultujuće sile:

$$\begin{aligned} X_t &= \int_A^B X'_t ds = \int_A^B \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) ds = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_A^B \\ Y_t &= \int_A^B Y'_t ds = - \int_A^B \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) ds = - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_A^B \end{aligned} \quad (45)$$

Ako iskoristimo relacije (28) iz izraza (45) mogu se dobiti komponente rezultujuće sile u korelaciji sa analitičkim, funkcijama kompleksne promenljive  $F(z)$  i  $X(z)$ :

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{i}{2} \left[ \overline{z} F'(z) - F(z) - z \overline{F}'(\overline{z}) + \overline{F}(\overline{z}) + X'(z) - \overline{X}'(\overline{z}) \right]_A^B \\ F_y &= - \frac{1}{2} \left[ \overline{z} F'(z) + F(z) + z \overline{F}'(\overline{z}) + \overline{F}(\overline{z}) + X'(z) + \overline{X}'(\overline{z}) \right]_A^B \end{aligned} \quad (46)$$

A moment sila koje dejstvuju duž luka  $AB$  za koordinatni početak  $O$  je:

$$M = \int_A^B (xY'_t - yX'_t) ds = - \int_A^B \left[ x d \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + y d \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right] \quad (47)$$

Parcijalnim integraljenjem se dobija:

$$M = - \left( x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \Big|_A^B + \Phi \Big|_A^B \quad (48)$$

Pa se konačno iz relacija (46) i (48) dobijaju izrazi za rezultujuću silu:

$$F_R = \int_A^B (X'_t + iY'_t) ds = -i \left[ F(z) + z \overline{F}'(\overline{z}) + \overline{X}'(\overline{z}) \right]_A^B \quad (49)$$

i rezultujući moment:

$$M = -\operatorname{Re} \left\{ z \overline{z} F'(z) + z X'(z) - \int_A^B X'(z) dz \right\} \quad (50)$$

kao što je to dokazao Мусхелишвили N.I. [72] Izraz (49) se može napisati u obliku:

$$F(z) + z \overline{F}'(\overline{z}) + \overline{X}'(\overline{z}) = f_1 + if_2 + \text{const} \quad (51)$$

gde je:

$$f_1 + if_2 = i \int_A^B (X'_t + iY'_t) ds$$

Pri tome je integracija vršena po konturi u smeru tako da oblast  $S$  ostaje sa leve strane. Na taj način se granični uslov zadat silama (ili naponima) na konturi svodi na određivanje analitičkih funkcija kompleksne promenljive  $F(z)$  i  $X(z)$  koje moraju zadovoljavati granične uslove (51) na konturi  $C$  oblasti  $S$ . Na sličan način se može postaviti i granični uslov po pomeranjima kako je to dao Entland A.H. [23].



Na konturi C je moguće takođe odrediti normalni  $\sigma_{nk}$  i smičući napon  $\tau_{nk}$ . Ako je krivolinijski koordinatni sistem  $\xi, \eta$  postavljen tako, da se deo konture C, duž koje je specificiran napon, poklapa sa  $\xi = \xi_0$  tada granični uslovi dobijaju oblik:

$$\sigma_{\xi} + i\tau_{\xi\eta} = \sigma_{nk} + i\tau_{nk} \dots\dots\dots (52)$$

na delu  $\xi = \xi_0$ .

Korišćenjem izraza (52) i transformisanog izraza (42) granični uslovi se mogu napisati u obliku:

$$F'(z) + \overline{F'(z)} - e^{-2i\alpha} [z\overline{F''(z)} + \overline{X''(z)}] = \sigma_{nk} + i\tau_{nk}, \quad z \in C \dots\dots (53)$$

gde je  $\alpha$  ugao nagiba spoljašnje normale na konturu C. Ovaj oblik graničnih uslova je često pogodan čak i kada se radi o višekonturnim oblastima i kada su analitičke kompleksne funkcije F(z) i X(z) jednoznačne funkcije.

Problem graničnih uslova zadatih naponima može biti prikazan u relaciji sa rezultujućom silom R(t), za jedan proizvoljan luk na konturi C od  $z = t_0$  do  $z = t$  u obliku:

$$\begin{aligned} [F(z) + z\overline{F(z)} + \overline{\omega(z)}]_{t_0}^t &= iR(t) \\ &= i \int_{t_0}^t (\sigma_{\xi} + i\tau_{\xi\eta}) e^{i\alpha} ds \\ &= \int_{t_0}^t (\sigma_{\xi} + i\tau_{\xi\eta}) dt \quad (t \in C) \dots\dots\dots (54) \end{aligned}$$

gde je smer integracije takav da  $S^+$  ostaje sa leve strane [23].

Za oblasti sa kružnom konturom predhodna formula omogućava znatno jednostavnija rešenja. Ukoliko oblast  $S^+$  ima komplikovaniji oblik relacija između  $\alpha$  i koordinata  $z, \bar{z}$  je znatno komplikovanija.

Ukoliko je moguće da se odredi konformna transformacija koja će preslikavati posmatranu oblast u neki jednostavniji oblik, na primer što je najpogodnije u kružnu oblast ili poluravan tada je moguće rešiti transformisani (preslikani) granični uslov u toj preslikanoj (zamišljenoj) oblasti.

Razmotrimo sada osnovne principe po kojima bi se to moglo realizovati.

## II 1.4. Konformno preslikavanje

Jedna od najefikasnijih metoda za rešavanje problema dvodimenzionalne linearne elastičnosti kod komplikovanih kontura je da se oblast komplikovane konture preslika u oblast jednostavne konture. Matematički oblik izraza graničnih uslova koji se dobijaju preslikavanjem je najčešće mnogo složeniji, ali su teškoće u radu sa njima manjeg značaja od olakšica koje se postižu jednostavnijom geometrijom konture.

Ovde ćemo prikazati neke slučajeve graničnih uslova koji se mogu konformno preslikati u unutrašnju ili spoljašnju oblast kruga. Takve oblasti su disk oivičen konturom C ili beskonačna ravan sa otvorom konture C, pri čemu je kriva konture kontinualna. Ovde se granični uslovi transformišu u jednostavnije granične uslove na kružnoj konturi.

Praktična korisnost konformnih transformacija ne proizilazi iz toga što one čine široku klasu transformacija već iz činjenice da nam one omogućavaju da proširimo osnovnu formulaciju kompleksne promenljive na transformisan problem, te da metode razvijene za rešavanje oblasti u obliku poluravni i kružne oblasti primenimo na veliku klasu problema sa različitim komplikovanijim konturama.

Razmotrimo transformaciju  $z=\omega(\zeta)$  koja preslikava tačke iz oblasti  $R_\zeta$  u  $\zeta$ -ravni u tačke oblasti  $R_z$  u  $z$ -ravni. Ako izaberemo jednoznačnu - funkciju preslikavanja  $z=\omega(\zeta)$ , tada specificiranjem oblasti  $R_\zeta$  definišemo i oblast  $R_z$ . Uzećemo transformaciju između  $R_\zeta$  i  $R_z$  tako da je jednoznačna i inverzna, tako da izborom inverzne transformacije  $\zeta=\omega^{-1}(z)$  možemo definisati odgovarajuće jednoznačno preslikavanje iz  $R_z$  u  $R_\zeta$ . Uzmimo da je  $\omega(\zeta)$  holomorfna u  $R(\zeta)$  i da je  $\omega'(\zeta) \neq 0$  za  $\zeta \in R_\zeta$  da bi očuvali formulaciju kompleksne promenljive.

Karakteristike ovog tipa transformacije mogu biti mnogo lakše ispitane analiziranjem veza između odgovarajućih krivih u  $R_\zeta$  i  $R_z$ .

Predpostavimo da je  $L_\zeta$  luk u  $R_\zeta$  koji prolazi kroz tačku  $\zeta_0 \in R_\zeta$  tada kad se tačka  $\zeta$  kreće po luku  $L_\zeta$  odgovarajuća tačka  $z=\omega(\zeta)$  će opisivati luk  $L_z$  koji prolazi kroz tačku  $z_0=\omega(\zeta_0) \in R_z$ . Pošto je  $\omega(\zeta)$  holomorfna, relacija između malog priraštaja  $\delta\zeta$  duž  $L_\zeta$  u tački  $\zeta_0$  i odgovarajućeg priraštaja  $\delta z$  duž  $L_z$  će biti:

$$\delta z = \omega'(\zeta_0) \delta\zeta \dots\dots\dots (55)$$

Iz ove relacije se mogu izvesti mnoge osobine preslikavanja.

Prvo, određujući da je  $\omega'(\zeta_0) \neq 0$ , preslikavanje je lokalno jednoznačno i inverzno daje relaciju:

$$\delta\zeta = \frac{\delta z}{\omega'(\zeta_0)} \dots\dots\dots (56)$$

Drugo, pošto je:

$$\left| \frac{\delta z}{\delta\zeta} \right| = \left| \omega'(\zeta_0) \right| \dots\dots\dots (57)$$

Lokalni priraštaj je  $|\omega'(\zeta_0)|$  i nezavisan je od smera  $L_\zeta$  u  $\zeta=\zeta_0$ . A takode:

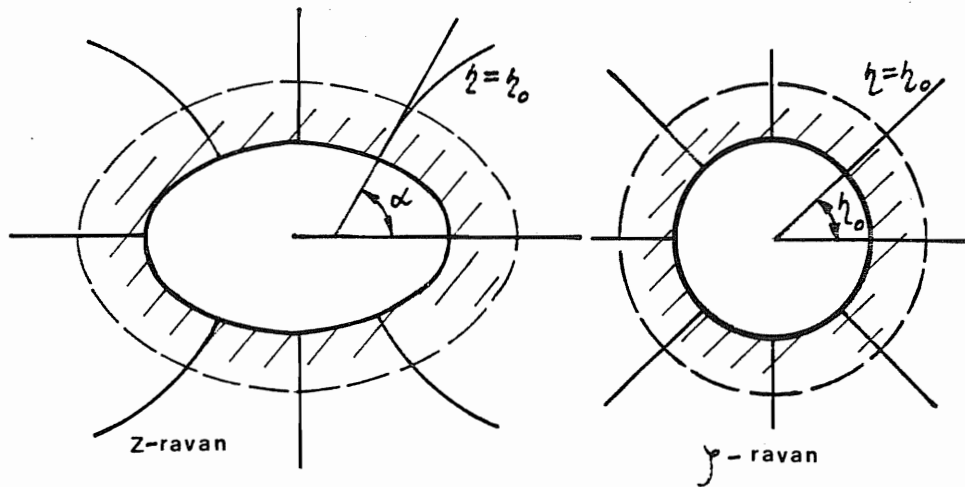
$$\arg(\delta z) = \Phi + \arg(\omega'(\zeta_0) \delta\zeta) \dots\dots\dots (58)$$

gde je  $\Phi = \arg(\omega'(\zeta_0))$  tako da je ugao nagiba elementa  $\delta z$  na  $L_z$  u odnosu na realnu osu u  $z$ -ravni jednak uglu nagiba elemente  $\delta\zeta$  u odnosu na realnu osu u  $\zeta$ -ravni plus konstantan ugao. Prema tome okolina tačke  $\zeta_0$  u  $\zeta$ -ravni je transformisana pomoću umnoška  $|\omega'(\zeta_0)|$  i kruto zarotirana za ugao  $\Phi = \arg(\omega'(\zeta_0))$  u okolini tačke  $z_0$  u  $z$ -ravni uz predpostavku da je  $\omega'(\zeta_0) \neq 0$ . U specijalnom slučaju kada se dva luka  $L_\zeta^1$  i  $L_\zeta^2$  presecaju u  $\zeta=\zeta_0$  pod uglom  $\vartheta$  onda se i odgovarajući lukovi  $L_z^1$  i  $L_z^2$  u  $R_z$  presecaju u  $z_0$  pod istim uglom  $\vartheta_0$  i sa istom orijentacijom.

Transformacija koja uglove ostavlja očuvane, zove se konformna, pa je i transformacija iz  $R_\zeta$  u  $R_z$  konformna, kada je  $\omega(\zeta)$  holomorfna i  $\omega'(\zeta_0) \neq 0$  za sve vrednosti  $\zeta$  u  $R_\zeta$ . Ovi uslovi takode obezbeđuju da je transformacija iz  $R_z$  u  $R_\zeta$  konformna.

Razmotrimo konformno preslikavanje oblasti  $R_z$  u unutrašnjost ili spoljašnjost kruga  $|\zeta|=a$  u  $\zeta$ -ravni.

Kako krugovi  $|\zeta|=const$  i radijalne linije  $\arg \zeta = const$  čine ortogonalnu krivolinijsku mrežu u  $\zeta$ -ravni, konformno preslikvanje  $z=\omega(\zeta)$  ovih linija formira jednu ortogonalnu krivolinijsku mrežu u oblasti  $R_z$   $z$ -ravni. Ustvari mreža krivih  $|\zeta|=\xi$ ,  $\arg \zeta=\eta$  može se iskortistiti da definiše sistem ortogonalnih krivolinijskih koordinata  $(\xi, \eta)$  u oblasti  $R_z$ . Posebno možemo uzeti krivu  $\xi=a$  za granicu konture  $C$  i ako je  $R_\zeta$  oblast  $|\zeta| \leq a$  svaka kriva  $\xi=\xi_0$  ležaće potpuno unutar oblasti  $R_z$  kada je  $\xi_0$  konstanta i  $0 \leq \xi_0 \leq a$ . Takode, krive  $\eta=const$  seku graničnu konturu  $C$  i svaku drugu krivu iz familije  $\zeta=const$  ortogonalno u  $R_z$ . To nam omogućava da odredimo ugao nagiba normale  $\alpha$  na koordinatnu krivu  $\xi=const$  u svakoj tački mreže kao što je prikazana na slici 5.



Slika 5.

U tački  $z$  u oblasti  $R_z$  koja odgovara  $\zeta = \xi_0 e^{i\eta}$  u oblasti  $R_\zeta$ , normala na krivu  $\xi = \xi_0$  se poklapa sa mrežom radijalnih linija  $\arg \zeta = \eta$  u  $\zeta$ -ravni.

Prema tome iz izraza (58) sledi:

$$\alpha = \arg(\omega'(\zeta)) + \eta, \quad \zeta = \xi_0 e^{i\eta} \quad (59)$$

tako da je:

$$e^{2i\alpha} = e^{2i\eta} \frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}} = \frac{\zeta \omega'(\zeta)}{\overline{\zeta \omega'(\zeta)}} \quad (60)$$

Konformno preslikavanje definiše prirodni koordinatni sistem u oblasti  $R_z$ . Važno je da se zna da li je  $\omega'(\zeta)$  u tačkama na konturi  $|\zeta| = a$ . Može se dokazati da  $\omega'(\zeta) \neq 0$  na konturi  $|\zeta| = a$  obezbeđuje da granična kontura  $C$  u  $R_z$  ima kontinualnu promenu krivine. Predpostavimo da kontura  $C$  zadovoljava takav uslov. Ukoliko je  $R_z$  ograničena jednokonturna oblast koja se nalazi unutar konture  $C$ , ona može biti konformno preslikana u oblast  $|\zeta| \leq a$  pomoću funkcije  $z = \omega(\zeta)$ , gde se  $\omega(\zeta)$  može razviti u red u okolini  $\zeta = 0$  u obliku:

$$z = \omega(\zeta) = a_0 + a_1 \zeta + \dots + a_n \zeta^n + \dots \quad (a_1 \neq 0) \quad (61)$$

Može se podesiti da je  $a_0 = 0$  i da  $a_1$  bude realno, ali ne nula izborom  $\zeta$ -osa (ukoliko je  $a_1 = 0$  tada je  $\omega'(0) = 0$ , pa preslikavanje nije konformno). Slično, ako je  $R_z$  spoljašnja oblast u odnosu na konturu  $C$ , ona može biti konformno preslikana u  $|\zeta| \geq a$  pomoću  $z = \omega(\zeta)$ , gde je uz primenu Laurent-ove teoreme:

$$z = \omega(\zeta) = a_1 \zeta + a_0 + \frac{b_1}{\zeta} + \frac{b_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{b_n}{\zeta^n} \quad (62)$$

Članom  $\zeta^n$  za  $n \geq 2$  se isključuju, ukoliko želimo da predpostavimo da je  $\omega(\zeta)$  homomorfna u beskonačnosti. Možemo takođe izborom  $\zeta$ -osa, podesiti da bude  $a_0 = 0$  i da je  $a_1$  realno tako da izraz (62) dobija oblik:

$$z = R\zeta + \frac{b_1}{\zeta} + \frac{b_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{b_n}{\zeta^n} \quad (63)$$

Skraćivanje reda (62) ili (63) na  $n$  članova omogućava nam aproksimaciju u preslikavanju funkcijom  $z = \omega(\zeta)$  na poznatu tačnost i definiše oblast  $R_z^n$  približno istog oblika kao  $R_z$ . Može se dokazati da rešenje graničnih problema za oblast  $R_z^n$  teži rešenjima  $R_z$  kada  $n \rightarrow \infty$ . Ilustracija predhodnog data je u Prilogu I na strani 188.

## II 1.5. Uticaj konformnog preslikavanja na karakter harmonijskih funkcija

Preslikavanje svake funkcije  $\Phi(x,y)$  u funkciju  $\Phi(\xi,\eta)$  uz pomoć proizvoljnih jednačina:

$$\begin{aligned} \xi &= f_1(x,y) \\ \eta &= f_2(x,y) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (64)$$

ne menja veličinu funkcije u odgovarajućim tačkama. Pa prema tome, ako su  $(x_i, y_i)$  i  $(\xi_i, \eta_i)$  koordinate para korespondentnih tačaka onda je:

$$\Phi(x_i, y_i) = \Phi(\xi_i, \eta_i) \quad \dots\dots\dots (65)$$

Pokažimo sada da harmonijski karakter funkcije ostaje očuvan kada je harmonijska funkcija transformisana uz pomoć konjugovanih funkcija. Neka je zadata funkcija  $\Phi(x,y)$  takva da je:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (66)$$

Tada je:

$$\frac{\partial^2 \Phi(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (67)$$

Diferenciranjem  $\Phi(\xi, \eta)$  po  $x$  dobijamo:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (68)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

pa je:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \\ &+ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (69)$$

Analogno predhodnom, diferenciramo  $\Phi(\xi, \eta)$  po  $y$  i dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \\ &+ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (70)$$

Vodeći računa o tome da su funkcije  $\Phi$ ,  $\xi$  i  $\eta$  harmonijske i korišćenjem Cauchy-Riemann-ovih uslova (7) sledi:

$$\left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (71)$$

i takođe:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (72)$$

Te sabiranjem jednačina (69) i (70) i s obzirom na jednačine (71) i (72) dobijamo:

$$\left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right) \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (73)$$

S obzirom da je izraz u srednjoj zagradi različit od nule sledi da Laplasijan u izrazu (73) mora biti jednak nuli:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = 0 \dots\dots\dots (74)$$

Što dokazuje da je  $\Phi(\xi, \eta)$  harmonijska funkcija.

Ta činjenica je od koristi pri rešavanju problema teorije elastičnosti i dokazala se u velikom broju primena na procese harmonizacije kod problema komplikovanih izvora koncentracije napona, kao što su kružni otvori, žlebovi itd.

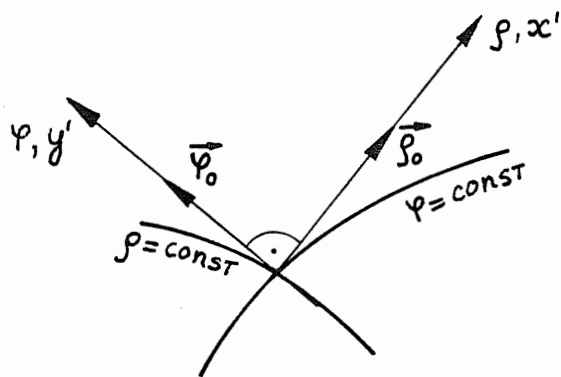
Uz pomoć pogodnih konformnih transformacija jedan ortogonalan sistem krivih može se transformisati u kvadratnu mrežu. Pošto konformna transformacija ne menja veličinu funkcije u odgovarajućim tačkama, granične vrednosti  $\Phi(x, y) = \Phi(\xi, \eta)$  korespondentnim tačkama se mogu uzeti istim u oba koordinatna sistema  $(x, y)$  i  $(\xi, \eta)$ .

Pomoću jednačine (74) pokazali smo da je  $\Phi(\xi, \eta)$  harmonijska funkcija tako da veličine  $\Phi(\xi, \eta)$  u svim tačkama mreže u  $(\xi, \eta)$  ravni mogu biti određene harmonizacijom, pa veličine  $\Phi(\xi, \eta)$  tako određene u  $(\xi, \eta)$  ravni predstavljaju takođe veličine  $\Phi(x, y)$  u korespondentnim tačkama u  $\Phi(x, y)$  ravni.

### II1.6. Komponente tenzora napona i vektora pomeranja u preslikanoj ravni

Razmotrimo sada komponente tenzora napona u krivolinijskom koordinatnom sistemu. Postavimo koordinatni sistem  $x'Oy'$  tako da se ose  $x'$  i  $y'$  poklapaju sa osama  $\rho$  i  $\varphi$  respektivno, kao što je prikazano na slici 6., tada će biti:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \sigma_x, \\ \sigma_\varphi &= \sigma_y, \\ \tau_{\rho\varphi} &= \tau_{x'y'} \dots\dots\dots (75) \end{aligned}$$



Slika 6.

Pomeranja predstavljena preko funkcija kompleksne promenljive data su izrazom (30). Ovaj izraz je prvi izveo Kolosov V.G. Pri tome su pomeranja  $u$  i  $v$  u pravcu koordinatnih osa  $x$  i  $y$ . Komponente tenzora napona napisane u relaciji sa funkcijama kompleksne promenljive date su izrazima (33), (34) i (35). Relacija između pomeranja u Descartes-ovim i polarnim koordinatama data je izrazom (37), a to se inverzno može napisati:

$$u_\rho + iu_\varphi = (u + iv)e^{-i\alpha} \dots\dots\dots (76)$$

Veza između napona u Descartes-ovim i polarnim koordinatama data je poznatim izrazima:

$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ \sigma_{y'} &= \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ \tau_{x'y'} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \dots\dots\dots (77)\end{aligned}$$

Pa se iz ovih izraza izvode relacije (39) ili drugačije napisano:

$$\begin{aligned}\sigma_\rho + i\tau_\rho &= \sigma_{x'} + i\tau_{x'y'} = \sigma_x + i\tau_{xy} \\ \sigma_\rho - i\tau_\rho + 2i\tau_{\rho\phi} &= \sigma_{y'} - i\tau_{x'y'} + 2i\tau_{xy} = (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) e^{2i\alpha} \dots (78)\end{aligned}$$

Oдавде se uz primenu funkcija kompleksne promenljive izrazi (39), a oduzimanjem ovih izraza se dobija:

$$\sigma_\rho - i\tau_\rho = \overline{F}'(\overline{z}) + F'(z) - [zF''(z) + X''(z)] e^{2i\alpha} \dots\dots\dots (79)$$

Ukoliko izvršimo konformnu transformaciju - preslikavanje korišćenjem funkcije  $z = \omega(\zeta)$ , iz  $z$  u  $\zeta$ -ravan iz izraza (30), (33) i (35) dobijamo relacije:

$$u + iv = \frac{3-\mu}{E} F_1(\zeta) - \frac{1+\mu}{E} \left[ \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{F}'_1(\overline{\zeta}) + \frac{\overline{X}'_1(\overline{\zeta})}{\omega'(\zeta)} \right] \dots\dots\dots (80)$$

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\text{Re} \left\{ \frac{F'_1(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right\} = 2 \left[ \frac{F'_1(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{F}'_1(\overline{\zeta})}{\omega'(\zeta)} \right] \dots\dots\dots (81)$$

$$\begin{aligned}\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} &= \frac{2}{[\omega'(\zeta)]^3} \left[ \overline{\omega}(\overline{\zeta}) F''_1(\zeta) \omega'(\zeta) - \overline{\omega}(\overline{\zeta}) F'_1(\zeta) \omega''(\zeta) + \right. \\ &\quad \left. + X''_1(\zeta) \omega'(\zeta) - X'_1(\zeta) \omega''(\zeta) \right] \dots\dots\dots (82)\end{aligned}$$

Pri tome su analitičke funkcije  $F(z)$  i  $X(z)$  korišćenjem izraza  $z = \omega(\zeta)$  transformisan, a takođe i njihovi izvodi:

$$\begin{aligned}F(z) &= F[\omega(\zeta)] = F_1(\zeta) \\ X(z) &= X[\omega(\zeta)] = X_1(\zeta) \\ F'(z) &= \frac{dF}{dz} = \frac{dF_1}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \frac{F'_1(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \\ X'(z) &= \frac{dX}{dz} = \frac{dX_1}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \frac{X'_1(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \\ F''(z) &= \frac{d}{d\zeta} \left[ \frac{F'_1(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] \frac{d\zeta}{dz} = \frac{F''_1(\zeta) \omega'(\zeta) - F'_1(\zeta) \omega''(\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^3} \\ X''(z) &= \frac{d}{d\zeta} \left[ \frac{X'_1(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] \frac{d\zeta}{dz} = \frac{X''_1(\zeta) \omega'(\zeta) - X'_1(\zeta) \omega''(\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^3} \dots\dots (83)\end{aligned}$$

Pri prelasku na krivolinijske koordinate korišćemo vezu:

$$e^{i\alpha} = \frac{dz}{|dz|} \dots\dots\dots (84)$$

odnosno:

$$e^{2i\alpha} = \frac{(dz)^2}{|dz|^2} = \frac{[\omega'(\zeta) d\zeta]^2}{[|\omega'(\zeta)| \cdot |d\zeta|]^2} = \left( \frac{d\zeta}{|d\zeta|} \right)^2 \frac{(\omega'(\zeta))^2}{|\omega'(\zeta)|^2} \dots\dots (85)$$

gde je:

$$\frac{\zeta^2}{\rho^2} = e^{2i\phi}$$

pa sledi:

$$e^{2i\alpha} = e^{2i\phi} \frac{(\omega'(\zeta))^2}{|\omega'(\zeta)|^2} = \frac{\zeta^2}{\rho^2} \frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}} \dots\dots\dots (86)$$

gde je:

$$|\omega'(\zeta)| = \omega'(\zeta) \overline{\omega'(\zeta)}$$

Na sličan način se može razviti izraz (84) u:

$$e^{i\alpha} = \frac{dz}{|dz|} = \frac{\omega'(\zeta)d\zeta}{|\omega'(\zeta)| \cdot |d\zeta|} = \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} e^{i\varphi} = \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} \frac{\zeta}{\rho} \dots \dots \quad (87)$$

ili:

$$e^{-i\alpha} = \frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|} \frac{\overline{\zeta}}{\rho} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (88)$$

Tako da iz izraza (78), (79) uz korišćenje relacija (86), (87) ili (88) dobijamo relacije između napona u krivolinijskim koordinatama i analitičkih funkcija kompleksne promenljive u preslikanoj  $\zeta$ -ravni:

$$\sigma_{\rho} + \sigma_{\varphi} = 4\text{Re} \left\{ \frac{F_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right\} = 2 \left[ \frac{F_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{F_1'(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}} \right] \dots \dots \dots \quad (89)$$

$$\sigma_{\rho} - \sigma_{\varphi} + 2i\tau_{\rho\varphi} = \frac{2}{[\omega'(\zeta)]^3} \left[ \overline{\omega(\zeta)} F_1''(\zeta) \omega'(\zeta) - \overline{\omega(\zeta)} F_1'(\zeta) \omega''(\zeta) + X_1''(\zeta) \omega'(\zeta) - X_1'(\zeta) \omega''(\zeta) \right] e^{2i\alpha}$$

sledi:

$$\sigma_{\varphi} - \sigma_{\rho} + 2i\tau_{\rho\varphi} = \frac{\zeta^2}{\rho^2} \frac{2}{\overline{\omega'(\zeta)} [\omega'(\zeta)]^3} \left[ \overline{\omega(\zeta)} F_1''(\zeta) \omega'(\zeta) - \overline{\omega(\zeta)} F_1'(\zeta) \omega''(\zeta) + X_1''(\zeta) \omega'(\zeta) - X_1'(\zeta) \omega''(\zeta) \right] \dots \dots \dots \quad (90)$$

Takođe iz:

$$\sigma_{\rho} - i\tau_{\rho\varphi} = \frac{F_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{F_1'(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}} - \left[ \overline{\omega(\zeta)} \frac{F_1''(\zeta) \omega'(\zeta) - F_1'(\zeta) \omega''(\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^3} + \frac{X_1''(\zeta) \omega'(\zeta) - X_1'(\zeta) \omega''(\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^3} \right] e^{2i\alpha}$$

sledi:

$$\sigma_{\rho} - i\tau_{\rho\varphi} = \frac{F_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{F_1'(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}} - \left[ \overline{\omega(\zeta)} \frac{F_1''(\zeta) \omega'(\zeta) - F_1'(\zeta) \omega''(\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^3} + \frac{X_1''(\zeta) \omega'(\zeta) - X_1'(\zeta) \omega''(\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^3} \right] \frac{\zeta^2}{\rho^2} \frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}} \dots \dots \dots \quad (91)$$

Dok iz izraza (76), (80) i uz korišćenje relacije (88) dobijamo relaciju između komponentnih pomeranja u krivolinijskim koordinatama i analitičkih funkcija kompleksne promenljive u preslikanoj  $\zeta$ -ravni:

$$u_{\rho} + iu_{\varphi} = (u + iv) \frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|} \frac{\overline{\zeta}}{\rho} \dots \dots \dots \quad (92)$$

sledi:

$$u_{\rho} + iu_{\varphi} = \frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|} \frac{\overline{\zeta}}{\rho} \left\{ \frac{3-\mu}{E} F_1(\zeta) - \frac{1+\mu}{E} \left[ \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{F_1'(\zeta)} + \frac{\overline{X_1'(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}} \right] \right\} \quad (93)$$

### II1.7. Primena konformnog preslikavanja za dvostruko povezane oblasti

Metoda za rešavanje jednokonturnih oblasti može se modifikovati tako da daje efikasno rešenje osnovnih problema za kružni prsten. A kao što smo ranije pokazali čitav niz različitih dvokonturnih oblasti se može pogodnom konformnom transformacijom preslikati u kružni prsten.

Međutim generalizacija formula za jednokonturane oblasti na dvokonturane često vodi sistemu jednačina po nepoznatim koeficijentima Lauren-ovog reda koji je nemoguće rešiti.

Razmatrajmo slučaj kada su granični uslovi zadati silama na konturi kružnog prstena. Neka je prsten formiran od para koncentričnih krugova  $C_1$  i  $C_2$  poluprečnika  $\rho_1$  i  $\rho_2$  pri čemu je  $\rho_1 < \rho_2$ . Predpostavićemo da su opterećenja koja dejstvuju na konturama takva da su rezultujuća sila i moment jednaki nuli na svakoj konturi. U tom slučaju funkcije  $F(z)$  i  $X(z)$  će biti analitičke u prstenu  $\rho_1 \leq |z| \leq \rho_2$  (Sokolnikoff I.S.) [88] i izvorno Мусхлишвили [72]. Pa prema tome možemo analitičke funkcije kompleksne promenljive  $F'(z)$  i  $X''(z)$  razviti u Laurent-ov red:

$$F'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z^n$$

$$X''(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n z^n \quad \text{za } \rho_1 \leq |z| \leq \rho_2 \quad \dots\dots\dots (94)$$

Koeficijenti  $A_n$  i  $B_n$  moraju biti takvi da zadovoljavaju uslove na konturama  $C_1$  i  $C_2$  odnosno relaciju (51):

$$F(z) + z\overline{F'(z)} + \overline{X''(z)} = f_1^{(k)} + if_2^{(k)} + \text{const}$$

na  $C_{(k)}$   $k=1,2, \dots\dots\dots (95)$

gde je:

$$i \int [X_t^{(k)}(s) + iY_t^{(k)}(s)] = f_1^{(k)} + if_2^{(k)} + \text{const} \quad \dots\dots\dots (96)$$

Veličina integracione konstante u izrazu (95) može bizi izabrana proizvoljno samo na jednoj konturi, a na drugoj se ona određuje tako da naponi i pomeranja u prstenu budu jednoznačni i kontinualni. Lučni parametar  $s$  na kružnim konturama  $C_1$  i  $C_2$  može biti uzet kao  $s = \rho_{(k)} \cdot \vartheta$ , gde je  $\vartheta$  polarni ugao. Dakle, desnu stranu izraza (96) moguće je prikazati kao funkciju  $\vartheta$  i označimo tu funkciju sa  $F_{(k)}\vartheta$ . Predpostavljajući da  $F_{(k)}\vartheta$  može biti predstavljena Fourier-ovim redom po kompleksnoj jedinici:

$$F_{(k)}(\vartheta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(k)} e^{in\vartheta} \quad \dots\dots\dots (97)$$

Uz korišćenje relacija (94) i (97) možemo saa napisati granične uslove u obliku:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [(1-n)A_n + B_{n-2}\rho_1^{-2}] \rho_1^n e^{in\vartheta} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{A_n} \rho_1^n e^{-in\vartheta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(1)} e^{in\vartheta} \quad (98)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [(1-n)A_n + B_{n-2}\rho_2^{-2}] \rho_2^n e^{in\vartheta} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{A_n} \rho_2^n e^{-in\vartheta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(2)} e^{in\vartheta} \quad (99)$$

gde je stavljeno  $z = \rho_1 e^{i\vartheta}$  na unutrašnjoj i  $z = \rho_2 e^{i\vartheta}$  na spoljašnjoj konturi.

Zatim se upoređivanjem koeficijenata uz iste stepene  $e^{in\vartheta}$  dobija sistem jednačina za nepoznate koeficijente  $A_n$  i  $B_n$ :

$$A_0 + \overline{A_0} - B_{-2} a^{-2} = C_0^{(1)}$$

$$A_0 + A_0 - B_{-2} b^{-2} = C_0^{(2)}$$

$$(1-n)A_n a^n - B_{n-2} a^{n-2} + \overline{A_{-n}} a^{-n} C_n^{(1)}$$

$$(1-n)A_n b^n - B_{n-2} b^{n-2} + \overline{A_{-n}} b^{-n} C_n^{(2)} \quad \dots\dots\dots (100)$$

Rešavanje ovog sistema jednačina ne predstavlja problem i dobijeni koeficijenti  $A_n$  i  $B_n$  se zatim mogu zameniti u relacijama (94), te na taj način dobijemo analitičke funkcije kompleksne promenljive  $F'(z)$  i  $X''(z)$ .



Dobijene analitičke funkcije se zatim mogu zameniti u izrazima za napone i pomeranje (33), (35) i (30) ili (40), (41) i (38), već zavisno od toga u kom koordinatnom sistemu se radi. Iz ovih izraza se zatim razdvajanjem realnih i imaginarnih članova mogu odrediti komponentni naponi i pomeranja  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  i  $u_x, u_y$ .

## II.2. Metoda polinoma u rešavanju ravanskih problema teorije elastičnosti

Diferencijalna jednačina ravanskog problema teorije elastičnosti, data preko Airy-jeve naponske funkcije  $\Phi(x,y)$ , naziva se još i Maxwell-ova diferencijalna jednačina u obliku:

$$\Delta\Delta\Phi=0$$

ili:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^4} = 0 \dots\dots\dots (101)$$

Ova jednačina važi u slučaju odsustva zapreminskih sila i određuje funkciju  $\Phi$  kao jednu iz skupa biharmonijskih funkcija. Pri tome važe granični uslovi koje možemo napisati u obliku:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (102)$$

gde su:

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  - komponente matrice tenzora napona

$n_x = dy/ds$  i  $n_y = -dx/ds$

$p_{nx}, p_{ny}$  - opterećenja na konturi

$s$  - dužina luka konture merama od neke utvrđene tačke u smeru tako da posmatrana oblast ostaje sa leve strane

Prikažimo sada Airy-jevu naponsku funkciju u obliku polinoma:

$$\Phi(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} x^m y^n \dots\dots\dots (103)$$

Korišćenjem izraza (32) dobijamo komponente tenzora napona  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) A_{mn} x^m y^{n-2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} m(m-1) A_{mn} x^{m-2} y^n \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mn A_{mn} x^{m-1} y^{n-1} \dots\dots\dots (104) \end{aligned}$$

Napišimo sada polinom (103) u razvijenom obliku:

$$\begin{aligned} \Phi(x,y) &= A_{00} + A_{10}x + A_{01}y + A_{11}xy + A_{20}x^2 + A_{02}y^2 + \\ &+ A_{21}x^2y + A_{12}xy^2 + \dots + A_{mn}x^m y^n \dots\dots\dots (105) \end{aligned}$$

Odavde vidimo da primenjujući relacije (104) na polinom (105), u izrazima za napone ne figurišu koeficijenti  $A_{00}, A_{10}, A_{01}$  pa možemo uzeti da je  $A_{00} = A_{10} = A_{01} = 0$ . Napišimo sada Maxwell-ovu diferencijalnu jednačinu (101) u razvijenom obliku, tj zamenjujući polinom (103) u njoj:

$$\sum_{m=4}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} m(m-1)(m-2)(m-3) A_{mn} x^{m-4} y^n +$$

$$+ 2 \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} m(m-1)n(n-1) A_{mn} x^{m-2} y^{n-2} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3) A_{mn} x^m y^{n-4} = 0 \dots\dots\dots (106)$$

Ukoliko je  $m+n \leq 3$ , funkcija  $\Phi$  je biharmonijska u svakom članu. Međutim kako linearni deo polinoma ne utiče na napone izostavljamo ga, pa se granice sumiranja mogu pomeriti, kao što je pokazano u literaturi [Jecić S.] [44] te se izraz (106) može napisati u obliku:

$$\sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} [(m-1)m(m+1)(m+2)A_{m+2n-2} + 2m(m-1)n(n-1)A_{mn} +$$

$$+ (n-1)n(n+1)(n+2)A_{m-2n+2}] x^{m-2} y^{n-2} = 0 \dots\dots\dots (107)$$

Da bi izraz (107) bio zadovoljen potrebno je da bude:

$$(m-1)m(m+1)(m+2)A_{m+2n-2} + 2m(m-1)n(n-1)A_{mn} +$$

$$+ (n-1)n(n+1)(n+2)A_{m-2n+2} = 0$$

$$\text{za } m \geq 2, n \geq 2 \dots\dots\dots (108)$$

Dakle kada je  $m+n > 3$ , uspostavljaju se veze između koeficijenata  $A_{mn}$  u homogenom polinomu oblika (108) a stepena  $k=m+n$ . Na primer ukoliko uzmemo da je  $m=2$  i  $n=2$  dobijamo vezu između koeficijenata  $A_{40}$ ,  $A_{22}$  i  $A_{04}$ :

$$24A_{40} + 8A_{22} + 24A_{04} = 0$$

ili:

$$A_{22} = -3(A_{40} + A_{04}) \dots\dots\dots (109)$$

Pa sada biharmonijski polinom (103) ili (105) predstavlja zbir četiri nezavisna člana oblika:

$$\Phi_4(x,y) = A_{40}[x^4 - 3x^2y^2] + A_{31}x^3y + A_{13}xy^3 + A_{04}[y^4 - 3x^2y^2] \dots\dots\dots (110)$$

Kada se uzme da je polinom petog stepena dobijamo dve relacije između koeficijenata  $A_{50}$ ,  $A_{32}$  i  $A_{14}$  za  $m=3$  i  $n=2$  i koeficijenata  $A_{41}$ ,  $A_{23}$ ,  $A_{05}$  za  $m=2$  i  $n=3$  u obliku:

$$120A_{50} + 24(A_{14} + A_{32}) = 0$$

ili:

$$A_{50} = -\frac{1}{5}(A_{14} + A_{32}) \dots\dots\dots (111)$$

i:

$$120A_{05} + 24(A_{41} + A_{23}) = 0$$

ili:

$$A_{05} = -\frac{1}{5}(A_{41} + A_{23}) \dots\dots\dots (112)$$

Pa je sada biharmonijski polinom (103) petog stepena, sa četiri nezavisna partikularna rešenja i ima oblik:

$$\Phi_5(x,y) = A_{41}[x^4y - \frac{1}{5}y^5] + A_{32}[x^3y^2 - \frac{1}{5}x^5] +$$

$$+ A_{23}[x^2y^3 - \frac{1}{5}y^5] + A_{14}[xy^4 - \frac{1}{5}x^5] \dots\dots\dots (113)$$

Svako nezavisno rešenje potpunog biharmonijskog polinoma drugog, trećeg, četvrtog itd, stepena može predstavljati rešenje Maxwell-ove diferencijalne jednačine za određene granične uslove. Ispitujući ova nezavisna rešenja nalazimo granične uslove

za koje su pojedina od ovih rešenja zadovoljavajuća. Ovom metodom mogu se naći rešenja nekih jednostavnijih problema. Nedostatak ove metode je u tome što se retko mogu sasvim tačno zadovoljiti granični uslovi.

### II3. Metoda varijacionog računa u rešavanju ravanskih problema teorije elastičnosti

Telo zapremine  $V$  ograničeno površinom  $S$ , nalazi se u ravnoteži pod dejstvom zapreminskih sila  $(F'_v)_i$  i površinskih sila  $(F'_n)_i$  na delu površine  $S_i$ .

Neka je stanje deformacija tela određeno pomeranjima  $u_i$ , a stanje napona komponentama tenzora napona  $\sigma_{ij}$  koje moraju zadovoljavati navedene jednačine ravnoteže.

$$\sigma_{ij,j} + \rho (F'_v)_i = 0 \quad (114)$$

i Cauchy-jeve granične uslove:

$$\sigma_{ij,j} n_j \Big|_{S_i} = (F'_n)_i \quad (115)$$

Podvrgnimo komponente tenzora napona  $\sigma_{ij}$  proizvoljnoj varijaciji, ali takvoj da je granično stanje napona, karakterisano komponentama  $\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}$ , statički moguće pri zadatim uslovima spoljašnjeg opterećenja, tj. mora zadovoljavati jednačine ravnoteže i granične uslove:

$$(\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij})_{,j} + \rho (F'_v)_i = 0 \quad (116)$$

$$(\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}) n_j \Big|_{S_j} = (F'_n)_i \quad (117)$$

Iz upoređivanja izraza (114) i (116), a takođe (115) i (117) sledi da varijacija  $\delta\sigma_{ij}$  u zapremini  $V$  mora zadovoljavati sličnu jednačinu ravnoteže:

$$\delta\sigma_{ij,j} = 0 \quad (118)$$

i granične uslove:

$$\delta\sigma_{ij,j} n_j \Big|_{S_i} = 0 \quad (119)$$

Na ostalim delovima  $S_u$  površine tela, na kojima nisu zadate površinske sile već pomeranja, varijacije  $\delta\sigma_{ij}$  mogu biti proizvoljne:

$$\delta\sigma_{ij,j} n_j \Big|_{S_k} = \delta(F'_n)_i \quad (120)$$

Pri prelazu ka graničnom naponskom stanju promena dopunskog deformacionog rada tela je:

$$\delta \int_V \int_V \int_V \Lambda(\sigma_{ij}) dV = \int_V \int_V \int_V \Lambda(\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}) dV - \int_V \int_V \int_V \Lambda(\sigma_{ij}) dV \dots \quad (121)$$

gde je:

$$\Lambda(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2E} \left[ (1+\mu) \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \mu (\sigma_{ii})^2 \right] \quad (122)$$

Razvijmo u Taylor-ov red deo izraza koji se odnosi na specifični deformacioni rad usled promenjenog naponskog stanja:

$$\begin{aligned} \Lambda(\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}) &= \Lambda(\sigma_{ij}) + \frac{\partial \Lambda(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \delta\sigma_{ij} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Lambda(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \delta\sigma_{ij} \delta\sigma_{kl} \quad (123) \end{aligned}$$

Poslednji sabirak izraza (123) sadrži drugu varijaciju dodeljenog dopunskog rada i s obzirom na relaciju (123) i uzimajući u obzir da je  $\sigma_{ij} \sigma_{ij} = \delta_{ik} \delta_{jl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}$ ,  $(\sigma_{ij})^2 = \delta_{ij} \delta_{kl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}$  može se napisati:

$$\begin{aligned} \delta^2 \Lambda(\sigma_{ij}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Lambda(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \delta \sigma_{ij} \delta \sigma_{kl} = \\ &= \frac{1}{2E} [(1+\mu) \sigma_{ik} \sigma_{jl} - \mu \delta_{ij} \delta_{kl}] \delta \sigma_{ij} \delta \sigma_{kl} = \\ &= \frac{1}{2E} [(1+\mu) \delta \sigma_{ij} \delta \sigma_{ij} - \mu (\delta \sigma_{ij})^2] = \Lambda(\delta \sigma_{ij}) \dots\dots\dots (124) \end{aligned}$$

Sledi, da je druga varijacija  $\delta^2 \Lambda(\sigma_{ij}) = \Lambda(\delta \sigma_{ij})$  mala veličina drugog reda u poređenju sa  $\delta \sigma_{ij}$ .

Uzimajući u obzir relacije:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \dots\dots\dots (125)$$

i da varijacija  $\delta \sigma_{ij} = \delta \sigma_{ji}$  mora zadovoljavati izraz (118), drugi član u prvom delu izraza (123) predstavlja oblik prve varijacije  $\delta \Lambda(\sigma_{ij})$  i može se napisati kao:

$$\begin{aligned} \delta \Lambda(\sigma_{ij}) &= \frac{\partial \Lambda(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} = \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \delta \sigma_{ij} = u_{i,j} \delta \sigma_{ij} = \\ &= (u_i \delta \sigma_{ij})_{,j} - u_i \delta \sigma_{ij,j} = (u_i \delta \sigma_{ij})_{,j} \dots\dots\dots (126) \end{aligned}$$

Zanemarimo poslednji sabirak u izrazu (123) i korišćenjem (126) uprostimo izraz (121) na oblik:

$$\delta \iiint_V \Lambda(\sigma_{ij}) dV = \iiint_V (u_i \delta \sigma_{ij})_{,j} dV \dots\dots\dots (127)$$

Integral na desnoj strani izraza (127) transformišemo po formuli Green - Ostrogradskog uz korišćenje uslova (119) i (120):

$$\begin{aligned} \iiint_V (u_i \delta \sigma_{ij})_{,j} dV &= \iint_S u_i \delta \sigma_{ij} n_j ds = \iint_{S_u} u_i \delta \sigma_{ij} n_j ds = \\ &= \iint_{S_u} u_i \delta (F_n)_i ds \dots\dots\dots (128) \end{aligned}$$

Ukoliko su na površini  $S_u$  zadata pomeranja  $u_i^{(s)}$  onda je  $\delta u_i$  i znak varijacije možemo uzeti za znak poslednjeg integrala. Tada izraz (127) možemo napisati u obliku:

$$\delta \left[ \iiint_V \Lambda(\sigma_{ij}) dV - \iint_{S_u} t_i u_i^{(s)} ds \right] = 0 \dots\dots\dots (129)$$

ili:

$$\delta \Psi = 0 \dots\dots\dots (130)$$

gde je:

$$\Psi = \iiint_V \Lambda(\sigma_{ij}) dV - \iint_{S_u} (F_n)_i u_i^{(s)} ds = 0 \dots\dots\dots (131)$$

potencijalna energija sistema.

Pošto je  $\delta^2 \Lambda(\sigma_{ij}) = \Lambda(\delta \sigma_{ij}) > 0$  može se formulisati na osnovu predhodnog principa minimuma potencijalne energije pri varijaciji napona ili Castigliano-vu teoremu: Od svih mogućih naponskih stanja tela koja zadovoljavaju Cauchy-jeve granične uslove i Navier-ove jednačine ravnoteže egzistira ono naponsko stanje koje zadovoljava uslov da potencijalna energija  $\Psi$  ima minimum.

Dajmo sada varijacionu postavku ravanskog problema teorije elastičnosti pri zadatim silama na konturi L, uz korišćenje principa minimuma potencijalne energije odnosno Castigliano-ve teoreme.

U ovom slučaju, sile na konturi, označene sa  $(F'_n)_1$  i  $(F'_n)_2$ , se ne variraju i varijaciona jednačina (129) dobija oblik:

$$\delta\Psi = \delta \int \int \Lambda(\sigma_{ij}) dx_1 dx_2 = 0 \quad (132)$$

gde je  $\Lambda(\sigma_{ij})$  specifičan deformacioni rad koji se određuje formulom (122).

U slučaju ravnog naponskog stanja izraz (122) dobija oblik:

$$\Lambda(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2E} [\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 2(1+\mu)\sigma_{12}^2 - 2\mu\sigma_{11}\sigma_{22}] \quad (133)$$

Ukoliko u izrazu (133) zamenimo  $E$  i  $\mu$  sa  $E'$  i  $\mu'$  prema relacijama:

$$E' = \frac{E}{1-\mu^2}, \quad \mu' = \frac{\mu}{1-\mu} \quad (134)$$

dobijamo sledeći izraz za specifičan deformacioni rad u slučaju ravnog stanja deformacije.

$$\Lambda(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2E} [(1-\mu^2)(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2) + 2(1+\mu)\sigma_{12}^2 - 2\mu(1+\mu)\sigma_{11}\sigma_{22}] \quad (135)$$

Pri razmatranju jednokonturne oblasti, ograničene konturom  $L$ , saglasno teoremi, Levy-Michell-a, za izotropne materijale Poisson-ov koeficijent  $\mu$  u jednačinama (133) i (135) možemo staviti jednak nuli. S obzirom na predhodno i na izraze (32) za funkciju  $\Psi$  dobijamo sledeći izraz:

$$\Psi = \frac{1}{2E} \int \int_F [(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2})^2 + (\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2})^2 + 2(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y})^2] dx dy \quad (136)$$

Na taj način, se varijaciona postavka ravnog problema teorije elastičnosti svodi na određivanje Airy-jeve naponske funkcije  $\Phi(x,y) = \Phi(x_1,y_1)$ , vodeći računa pri tome o graničnim uslovima (115) i vršeći minimizaciju funkcije (136).

Ova minimizacija se može realizovati Ritz-ovom metodom, pri čemu se funkcija  $\Phi(x,y)$  prikazuje u obliku reda:

$$\Phi = C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2 + \dots + C_n\Phi_n = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\Phi_k(x,y) \quad (137)$$

Funkcija  $\Phi(x,y)$  pri tome mora zadovoljavati granične uslove (115). Koeficijente  $C_k$  određujemo iz uslova ekstrema (minimuma) integrala (132) iz čega se dobija sistem jednačina:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial C_1} = 0; \dots; \frac{\partial \Psi}{\partial C_i} = 0; \dots; \frac{\partial \Psi}{\partial C_n} = 0 \quad (138)$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina dobija se funkcija  $\Phi(x,y)$  a zatim se korišćenjem relacija (32) mogu odrediti naponi  $\sigma_x, \sigma_y$  i  $\tau_{xy}$ .

### III Numeričke metode

#### III 1. Metoda konačnih razlika

Pored analitičkog rešavanja problema teorije elastičnosti približnim i egzaktnim metodama, rešenja se mogu dobiti i numeričkim metodama, kao što je metoda konačnih razlika. Suština ove metode je u zameni osnovnih parcijalnih diferencijalnih jednačina i konturnih uslova odgovarajućim jednačinama konačnih razlika. Odnosno, vrši se zamena diferencijalnih operatora njihovim diferencijskim ekvivalentima, a kao nepoznate se javljaju vrednosti tražene funkcije u čvornim tačkama mreže. Ta tražena funkcija može biti Airy-jeva naponska funkcija, na osnovu koje zatim određujemo napone, a zatim dilatacije i pomeranja. Prema tome, diferencijalni problem se svodi na rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina što je mnogo jednostavnije.

Kod generalizovanog ravnog naprežanja i uopšte kod ravnog zadatka teorije elastičnosti možemo uvesti naponsku funkciju na osnovu ravnoteže, a uslovi kompatibilnosti deformacija određuju ograničenje u odnosu na klasu funkcija  $\Phi(x,y)$ . Zamenjujući uslove kompatibilnosti u izrazima [74]:

$$t_{\alpha\beta} = \Delta\Phi\delta_{\alpha\beta} - \Phi_{,\gamma\delta}\delta_{\gamma\alpha}\delta_{\delta\beta} \dots\dots\dots (139)$$

dobijamo Maxwell-ovu diferencijalnu jednačinu u obliku (101), a koja određuje funkciju  $\Phi$  kao jednu iz skupa biharmonijskih funkcija.

Kada su granični uslovi zadati naponima ili silama na konturi, onda se oni mogu napisati u obliku [139] ili nešto drugačije:

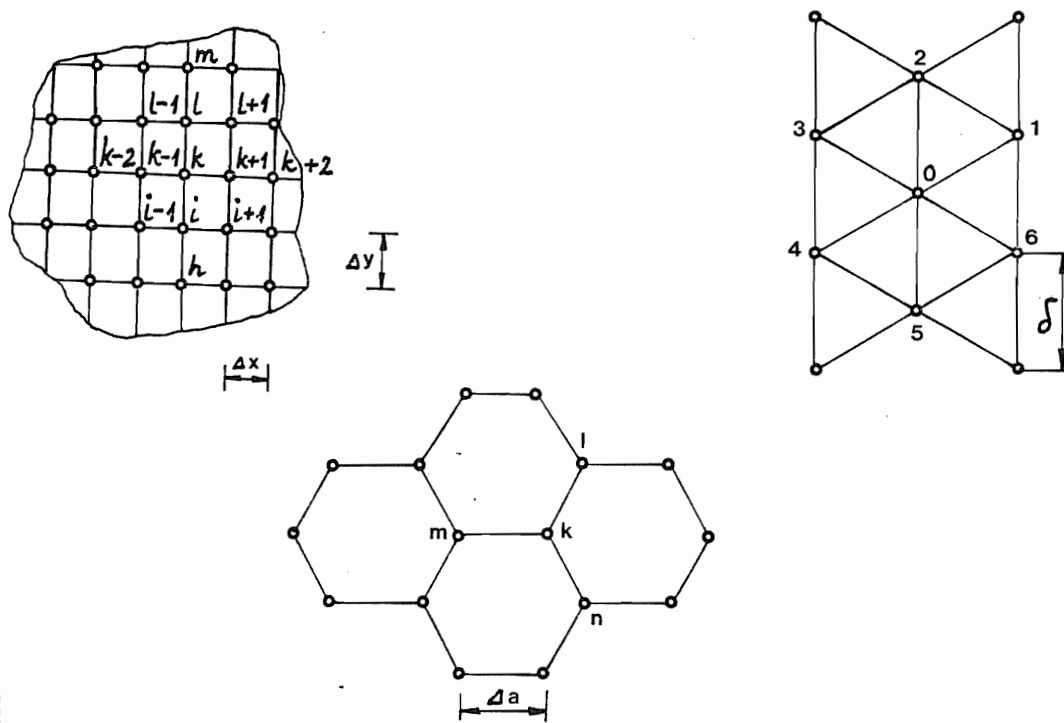
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \cos\alpha - \frac{\delta^2\Phi}{\partial x\partial y} \sin\alpha &= t_x = \bar{X} \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \sin\alpha - \frac{\delta^2\Phi}{\partial x\partial y} \cos\alpha &= t_y = \bar{Y} \dots\dots\dots (140) \end{aligned}$$

Ukoliko znamo raspored sila koje dejstvuju na konturi, onda integraljenjem jednačina (140) možemo odrediti veličinu funkcije  $\Phi(x,y)$  na konturi. Problem se sada svodi na to da se odredi funkcija (u ovom slučaju Airy-jeva naponska funkcija) koja u svakoj tački unutar konture zadovoljava jednačinu (101):

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4} = 0 \dots\dots\dots (141)$$

a na konturi ona, kao i njeni prvi izvodi ima vrednosti određene graničnim uslovima.

Mreža koja se koristi pri ovoj metodi može biti kvadratna, pravougaona, trouglasta ili šestougona, a njen oblik i rastojanje čvorova biramo zavisno od oblika konture tela. Mogući tipovi mreža prikazani su na slici 7. U cilju povećanja tačnosti ove metode potrebno je ići na gušću mrežu, međutim tada raste broj jednačina koje treba rešiti, pa to ograničava povećanje gustine mreže.



Slika 7.

U cilju objašnjenja praktične realizacije metode razmotrimo kvadratnu mrežu sa rasponom  $\delta$  prikazanu na slici 8. i napišimo jednačine.

Transformisaćemo diferencijalnu jednačinu (141) u linearni oblik. Pri tome se drugi izvodi transformišu preko relacija:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_k &\approx \frac{1}{\delta^2} (\Phi_{k+1} - 2\Phi_k + \Phi_{k+3}) \\ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_{k+1} &\approx \frac{1}{\delta^2} (\Phi_{k+5} - 2\Phi_{k+1} + \Phi_k) \\ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_{k+3} &\approx \frac{1}{\delta^2} (\Phi_k - 2\Phi_{k+3} + \Phi_{k+9}) \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (142)$$

Slično tome se četvrti izvodi po x i y koordinati mogu transformisati pomoću relacija:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4}\right)_k &\approx \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{\delta^2} \left[ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_{k+1} - 2\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_k + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_{k+3} \right] \approx \\ &\approx \frac{1}{\delta^4} [6\Phi_k - 4\Phi_{k+1} - 4\Phi_{k+3} + \Phi_{k+5} + \Phi_{k+9}] \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (143)$$

$$\left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4}\right)_k \approx \frac{1}{\delta^4} [6\Phi_k - 4\Phi_{k+2} - 4\Phi_{k+4} + \Phi_{k+7} + \Phi_{k+11}] \dots \dots \dots \quad (144)$$

i:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_k &\approx \frac{1}{\delta^4} [4\Phi_k - 2(\Phi_{k+1} + \Phi_{k+2} + \Phi_{k+3} + \Phi_{k+4}) + \\ &+ \Phi_{k+6} + \Phi_{k+8} + \Phi_{k+10} + \Phi_{k+12}] \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (145)$$

Kada se izrazi (143), (144) i (145) zamene u (141) dobija se:

$$\begin{aligned} 20\Phi_k - 8(\Phi_{k+1} + \Phi_{k+2} + \Phi_{k+3} + \Phi_{k+4}) + 2(\Phi_{k+6} + \Phi_{k+8} + \Phi_{k+10} + \Phi_{k+12}) + \\ + \Phi_{k+5} + \Phi_{k+7} + \Phi_{k+9} + \Phi_{k+11} = 0 \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (146)$$

Ova jednačina mora biti zadovoljena u svakoj čvornoj tački mreže unutar konture ploče. Da bi odredili granične vrednosti naponske funkcije  $\Phi$  integralimo jednačine (140) pri tome koristimo i relacije:

$$\cos \alpha = \frac{dy}{ds} \text{ i } \cos \beta = -\frac{dx}{ds} \dots\dots\dots (147)$$

Pa sledi:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{dx}{ds} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} &= \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = \bar{X} \\ -\frac{dx}{ds} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{dy}{ds} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} &= -\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = \bar{Y} \dots\dots\dots (148) \end{aligned}$$

Integraljenjem se iz izraza (148) dobija:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \int \bar{Y} ds + A \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \int \bar{X} ds + B \dots\dots\dots (149) \end{aligned}$$

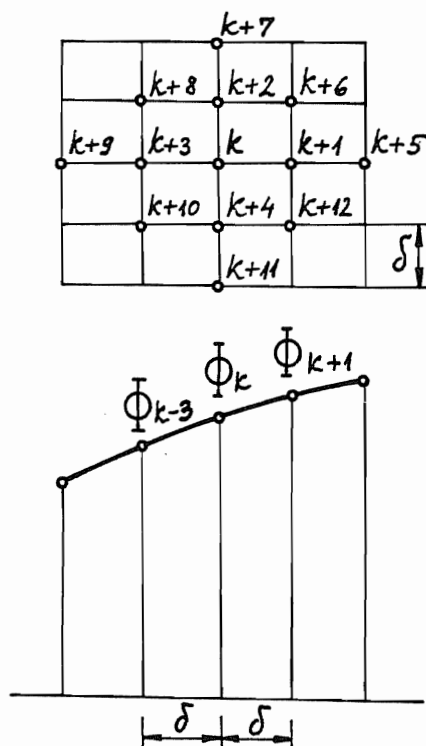
U cilju određivanja naponske funkcije  $\Phi$  koristimo relaciju:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} \dots\dots\dots (150)$$

koja posle integraljenja daje:

$$\Phi(x,y) = x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \int \left( x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial x} + y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial y} \right) ds \dots\dots\dots (151)$$

Kada izvede u ovoj jednačini transformišemo korišćenjem relacija (148) i (149) možemo odrediti granične vrednosti funkcije  $\Phi$ . Pri određivanju prvih izvoda (149) pojavljuju se integracione konstante A i B, a integracija u (151) uvodi i treću konstantu C, tako da konačni izraz za funkciju  $\Phi$  sadrži linearnu funkciju  $Ax+By+C$ . Pošto su komponentni naponi određeni drugim izvodima naponske funkcije  $\Phi$ , ova linearna funkcija ne utiče na stanje napona, pa se konstante A, B i C mogu uzeti proizvoljno, recimo  $A=B=C=0$ .



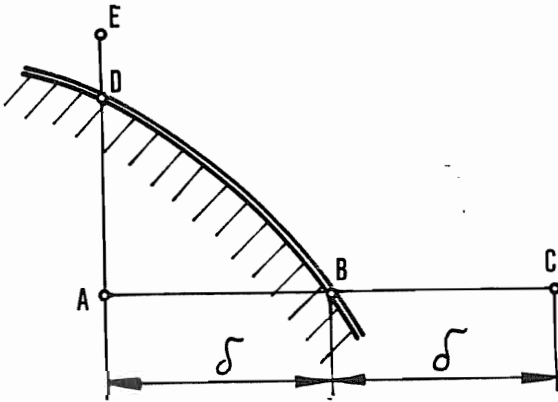
Slika 8.



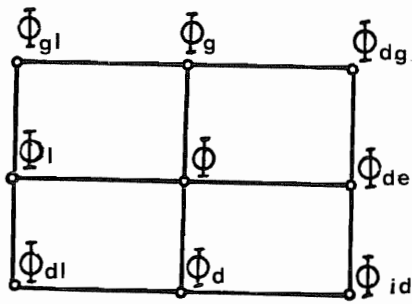
Iz konturnih uslova za  $\Phi$  i njihovih prvih izvoda možemo odrediti približne vrednosti za  $\Phi$  u čvornim tačkama mreže u blizini konture kao što su tačke A, C i E na slici 9. Ukoliko imamo u tački B vrednosti  $\Phi$  i  $(\partial\Phi/\partial x)_B$ , dobija se:

$$\begin{aligned} \Phi_C &= \Phi_B + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_B \cdot \delta \\ \Phi_A &= \Phi_B - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_B \cdot \delta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (152)$$

Slično se dobija i za tačku E. Tačniju aproksimaciju ovih veličina možemo dobiti kasnije kada proračunom odredimo približan oblik površine koja opisuje naponsku funkciju  $\Phi$ .



Slika 9.



Slika 10.

Kada smo odredili približne vrednosti funkcije  $\Phi$  u čvornim tačkama blizu konture, a za čvorne tačke unutar kontrure napisali jednačine (146) dobijamo sistem linearnih jednačina koji je dovoljan za određivanje svih čvornih vrednosti naponske funkcije  $\Phi$ .

Sada možemo odrediti napone u čvornim tačkama korišćenjem izraza za druge izvode  $\Phi$  u obliku (142), koje zamenimo u relacijama (32) i na taj način ih linearizujemo:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \frac{\Phi_g - 2\Phi_o + \Phi_d}{\delta^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \frac{\Phi_e - 2\Phi_o + \Phi_{de}}{\delta^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = -\frac{(\Phi_{dg} + \Phi_{dl}) - \Phi_{id} - \Phi_{gl}}{4\delta^2} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (153)$$

Pri čemu je korišćena šema rasporeda čvorova za Airy-jevu naponsku funkciju, koja je prikazana na slici 10.

Ova metoda se svodi na matematičku diskretizaciju i zamenu parcijalnih diferencijalnih jednačina, sistemom običnih algebarskih jednačina. Ovakav sistem algebarskih jednačina se rešava obično primenom nekog kompjuterskog progama.

### III 2. Metoda konačnih elemenata

Sve približne metode polaze od pretpostavljenog rešenja, koje može biti dato u obliku polinoma ili trigonometrijskih redova, a koje treba da:

- a) tačno zadovoljava granične uslove ali samo približno diferencijalne jednačine.
- b) tačno zadovoljava diferencijalne jednačine ali samo približno granične uslove.
- c) približno zadovoljava i granične uslove i diferencijalne jednačine.

Dok metoda graničnih elemenata spada u grupu pod b), metode konačnih razlika i konačnih elemenata spadaju u treću grupu. Metoda konačnih elemenata tačnije i jednostavnije aproksimira granične uslove od recimo metode konačnih razlika a i fizički ima više smisla.

Kod metode konačnih elemenata vršimo fizičku diskretizaciju i delimo telo na konačan broj standardnih elemenata, te tako sistem sa beskonačnim brojem stepena slobode svodimo na sistem sa konačnim brojem stepena slobode, te sada treba rešavati konačan broj jednačina umesto beskonačnog. Međutim, pošto je broj jednačina, čak i kod jednostavnijih primera veliki, ova metoda nameće primenu računara. Konačni elementi povezani su među sobom stranicama i čvorovima, a inače mogu biti: jednodimenzionalni, dvodimenzionalni i trodimenzionalni.

Upotrebom polinoma ili trigonometrijskih funkcija može se predpostaviti rešenje zavisno promenljive, odnosno tražene veličine. Takve predpostavljene funkcije zovu se funkcije rasporeda ili modeli rasporeda i one samo približno sa većom ili manjom tačnošću opisuju promenu tražene veličine. Tačnost metode zavisi od niza faktora kao što su: veličina i oblik elemenata, gustina i raspored i čak pravilan izbor rasporeda elemenata za dati problem, pri čemu i iskustvo igra određenu ulogu.

Razmotrimo sada teorijske temelje ove metode. Posmatrajmo jedan konačan element koji je deo deformabilnog tela i sa  $\{S\}$  označimo vektor pomeranja tačke u polju tog elementa, za proizvoljno opterećenje. Vektor pomeranja i njegove koordinate će biti funkcije koordinata tačaka u polju tog elementa:

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(x,y,z) \\ g(x,y,z) \\ h(x,y,z) \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (154)$$

Za primere linijskih elemenata možemo napisati komponente vektora pomeranja u obliku polinoma:

$$S_k = \sum_{i=1}^n C_i x^i, \quad (n=3) \quad k=1,2,3 \dots\dots\dots (155)$$

gde se konstante  $C_i$  biraju tako da su zadovoljeni uslovi u čvorovima posmatranog linijskog elementa. Za dvodimenzionalne elemente vektor pomeranja se može napisati u obliku:

$$\{S\} = a\{C\} \dots\dots\dots (156)$$

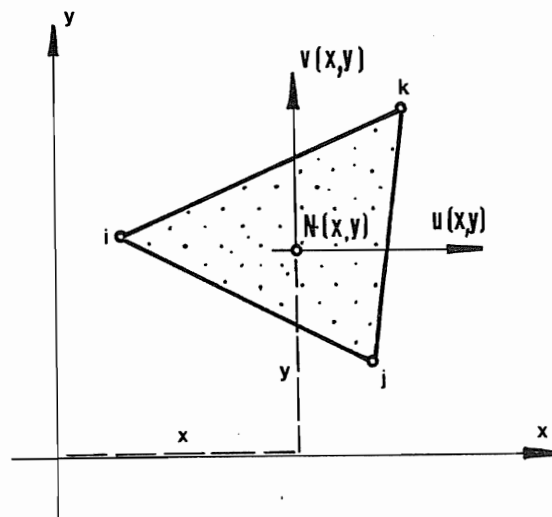
gde je  $\{S\}$  vektor pomeranja u polju elementa,  $a$  pravougaona matrica tj. matrica polja elementa,  $\{C\}$  vektor čiji su elementi konstante  $C_k$  koji se bira tako da vektor pomeranja  $\{S\}$  u čvorovima elementa imaju vrednosti zadate graničnim uslovima.

Matrica polja elementa  $a$  je za elemente složenije od linijskog nepoznata, te je moramo izabrati. Prema tome, aproksimativno se pretpostavi promena komponentata vektora pomeranja  $\{S\}$  u polju konačnog elementa. Kada se za trouglasti konačni element, prikazan na slici 17., pretpostavi linearna promena, matrica polja će imati oblik:

$$a = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \dots\dots\dots (157)$$

a matrica koeficijenata:

$$\{C\} = (C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_6) \dots\dots\dots (158)$$



Slika 11.

Ukoliko za zakon promene komponentnih pomeranja izaberemo kvadratnu promenu, odnosno polinom drugog reda, matrica  $a$  bi imala oblik:

$$a = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (159)$$

$a$  matrica koeficijenata:

$$(C) = (C_1 \ C_2 \dots C_{i1} \ C_{i2}) \dots\dots\dots (160)$$

Vidi se da sa uvođenjem tačnijih aproksimacija u vidu polinoma višeg reda imamo porast broja nepoznatih konstanti što izaziva probleme sa glomaznim računom. Povećanje tačnosti aproksimacije stoga se često postiže uvođenjem većeg broja manjih konačnih elemenata na mesto datog pri čemu ti manji konačni elementi imaju linearnu aproksimaciju. Izbor matrice polja  $a$  i matrice  $\{C\}$  zavisi od izbora čvornih vektora konačnog elementa.

Ako označimo sa  $\{S\}$  čvorni vektor pomeranja, onda matrica kolona ima broj elemenata jednak proizvodu broja čvorova konačnog elementa i stepeni slobode kretanja čvora odnosno elementa. Na primer, za konačni element sa slike 11., u dvodimenzionalnom prostoru čvorni vektor pomeranja ima 6 elemenata:

$$\{S\} = \left\{ \begin{matrix} \{S_i\} \\ \{S_j\} \\ \{S_k\} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots (161)$$

Zato matrica kolona  $\{C\}$  ima šest elemenata, jer se može postaviti šest graničnih uslova elementa, odnosno šest uslova za vektor pomeranja u čvorovima. Kao elementi čvornog vektora mogu se uzeti i pravci tangente na komponente vektora pomeranja, pa bi u tom slučaju imali 18 elemenata matrice kolone  $\{C\}$ . Dakle, od izbora čvornog vektora  $\{S\}$  zavisi i izbor matrice  $\{C\}$  i matrice polja  $a$ , a matrica krutosti  $\{C\}$  mora imati onoliko članova koliko ih ima i čvorni vektor pomeranja  $\{S\}$ . Matrica polja  $a$ , na drugoj strani mora imati onoliko kolona koliko matrica  $\{C\}$  ima elemenata u koloni, a onoliko

vrsta koliko matrica  $\{S\}$  ima elemenata u koloni, jer je:

$$\{S_i\} = a \begin{Bmatrix} C \\ \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (162)$$

Grafični uslovi se uopšteno mogu napisati u obliku:

$$\{s_k\} = \{S\} = \{s\}_k \dots\dots\dots (163)$$

gde  $k$  označava da se radi o konturnim (graničnim) uslovima u čvorovima konačnog elementa. Kako je vektor pomeranja u polju elementa dat izrazom (159) to za granične uslove važi relacija:

$$\{S\} = a_k \{C\} \dots\dots\dots (164)$$

ili primenjeno na primer linearne aproksimacije:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (165)$$

Pri tome se matrica  $a_k$  naziva matrica polja graničnih vrednosti. Ona je konstantna za određene granične uslove konačnog elementa, kvadratna je, nesingularna i moguće joj je naći inverznu matricu  $a_k^{-1}$ . Sada korišćenjem izraza (164) možemo odrediti matricu nepoznatih konstanti. Zatim, zamenom predhodnog izraza

$$\{C\} = a_k^{-1} \{S\} \dots\dots\dots (166)$$

u relaciju (156) dobijamo vektor pomeranja izražen kao:

$$\{S\} = a \{C\} = a a_k^{-1} \{S\} = b \{S\} \dots\dots\dots (167)$$

gde je  $b = a \cdot a_k^{-1}$  i naziva se interpolaciona matrica. Jednačina (170) daje vezu između vektora pomeranja  $\{S\}$  u polju elementa i čvornog vektora pomeranja  $\{S\} = \{S^k\}$  preko interpolacione matrice  $b$  i predstavlja značajnu relaciju u metodi konačnih elemenata.

Pošto se izabere tip konačnog elementa, može se sastaviti interpolaciona matrica  $b$  i osnovna jednačina konačnog elementa. Potrebno je odrediti sledeće matrice:  $\{\epsilon\}$  tenzora specifične deformacije i  $\{\sigma\}$  tenzora napona u funkciji čvornog vektora  $\{S\}$  posmatranog konačnog elementa preko relacija:

$$\{\epsilon\} = D \{s\} = D b \{S\} = p \{S\} \dots\dots\dots (168)$$

gde je:

$$p = D b = D a a_k^{-1} \dots\dots\dots (169)$$

i:

$$\{\sigma\} = E \{\epsilon\} + \{\sigma\} = E p \{S\} + \{\sigma\} \dots\dots\dots (170)$$

gde je  $\{\sigma\}$ -matrica tenzora napona usled promene temperature.

Neka vektor sila koje napadaju konačni element u čvorovima  $\{F\}$  ima isti broj prostornih koordinata kao i čvorni vektor pomeranja  $\{S\}$ . Za trouglasti konačni element sa slike 17. čvorni vektor sila je:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} \{F_i\} \\ \{F_j\} \\ \{F_k\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \\ x_k \\ y_k \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (171)$$

Sada virtualni rad spoljašnjih sila koje dejstvuju na posmatrani konačni element možemo napisati u obliku:

$$\delta W^s = (\delta S)\{F\} \dots\dots\dots (172)$$

Virtualni deformacioni rad unutrašnjih sila konačnog elementa je:

$$\delta W^u = \int_V (\delta \epsilon)\{\sigma\}dV \dots\dots\dots (173)$$

Zamenimo u predhodnom izrazu relacije (171) i (173), te dobijamo izraz za virtualni rad unutrašnjih sila:

$$\delta W^u = \int_V (\delta S)p' E p\{S\}dV + \int_V (\delta S)p'\{\sigma\}dV \dots\dots\dots (174)$$

ili:

$$\delta W^u = (\delta S)\left[\int_V p' E p\{S\}dV + \int_V p'\{\sigma'\}dV\right] \dots\dots\dots (175)$$

Iz jednakosti spoljašnjeg i unutrašnjeg deformacionog rada sledi:

$$(\delta S)\left[\{F\} - \int_V p' E p\{S\}dV - \int_V p'\{\sigma'\}dV\right] = 0 \dots\dots\dots (176)$$

Pošto je varijacija čvornog vektora pomeranja proizvoljna, onda sledi:

$$\{F\} = \int_V p' E p\{S\}dV + \int_V p'\{\sigma'\}dV \dots\dots\dots (177)$$

ili:

$$\{F\} = k\{S\} + \{F^t\} \dots\dots\dots (178)$$

gde je:

$$k = \int_V p' E p dV \dots\dots\dots (179)$$

$$\{F^t\} = \int_V p'\{\sigma'\}dV \dots\dots\dots (180)$$

Izraz (178) naziva se jednačinom konačnog elementa i daje vezu između vektora čvornih sila  $\{F\}$  i vektora čvornih pomeranja  $\{S\}$  datog konačnog elementa pri čemu je  $\{F^t\}$  vektor sila usled promene temperature. Matrica  $k$  data izrazom (179) naziva se matricom krutosti konačnog elementa, a gde je  $E$  matrica tenzora elastičnosti.

Pošto se za svaki konačni element može napisati po jedna jednačina, za čitavu konstrukciju se može napisati onoliko jednačina, koliko ima konačnih elemenata. Grupisanjem svih jednačina konačnih elemenata možemo napisati jednačinu konstrukcije. Kada se uzmu u obzir granični uslovi cele konstrukcije i poznata opterećenja u čvorovima iz sistema jednačina konačnih elemenata konstrukcije mogu se odrediti nepoznate komponente vektora pomeranja u čvorovima konstrukcije.

Matrica krutosti konačnog elementa  $k$  određuje se za dati tip konačnog elementa i važi za sve konačne elemente istog tipa. Ona zavisi od geometrijskih karakteristika konačnog elementa i od fizičkih karakteristika materijala.

Transponovanu matricu  $p$  možemo napisati na osnovu izraza (169) i smene  $D = D \cdot a$  u obliku:

$$p' = (a_k^1)' D \dots\dots\dots (181)$$

Matricu krutosti konačnog elementa  $k$  možemo da napišemo sada u obliku:

$$k = \int_V p' E p dV = (a_k^1)' \int_V D E D dV a_k^1 \dots\dots\dots (182)$$

a ako uvedemo smenu:

$$k_2 = \int_V D' E D dV$$

i u obliku:

$$k = (a_k^1)' k_2 a_k^1 \dots\dots\dots (183)$$

Matricu  $k_2$  nazivamo uopštena ili generalisana matrica krutosti konačnog elementa i ista je za iste tipove konačnih elemenata.

Kako su konačni elementi različito orijentisani u prostoru potrebno je pre sastavljanja jednačine konstrukcije sve osnovne jednačine konačnih elemenata izraziti u jednom opštem ili globalnom koordinatnom sistemu u odnosu na čitavu konstrukciju.

Tako transformisanu matricu krutosti konačnog elementa u opšte koordinatnom sistemu možemo napisati u obliku:

$$k = A \cdot k \cdot A' \dots\dots\dots (184)$$

gde je  $A$  matrica transformacije.

Takođe, transformisana osnovna jednačina konačnog elementa u opštem koordinatnom sistemu se može napisati u obliku:

$$\{\bar{F}\} = \bar{k} \{\bar{S}\} \dots\dots\dots (185)$$

Jednačinu konstrukcije dobijamo tako što združimo osnovne jednačine konačnih elemenata (185) koje smo transformacijom preveli na oblik u zajedničkom koordinatnom sistemu. Ta jednačina ima oblik:

$$F = K S \dots\dots\dots (186)$$

gde su:  $F$  matrica kolona čiji su elementi komponente generalisanih čvornih sila, a  $S$  matrica kolona čiji su elementi komponente čvornih vektora pomeranja. Pri sastavljanju matrica  $F$  i  $S$  uzima se u obzir činjenica da je konstrukcija deformabilno telo koje ima  $n$  čvorova u koje smo uračunali i njegove oslonce.

Matrica krutosti konstrukcije  $K$  sastavljena je od  $n$  puta  $n$  podmatrica  $\bar{k}_{sr}$  koje su složene na sledeći način:

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (187)$$

Podmatrice  $\bar{k}_{sr}$  se dobijaju tako da se matrice krutosti pojedinih elemenata razbiju na podmatrice koje pripadaju pojedinim čvorovima.

Za trougaoni konačni element sa čvorovima  $i, j, k$  deljenje matrice krutosti na podmatrice se realizuje na sledeći način:

$$\begin{Bmatrix} \{\bar{F}_i\} \\ \{\bar{F}_j\} \\ \{\bar{F}_k\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{ii} & \bar{k}_{ij} & \bar{k}_{ik} \\ \bar{k}_{ji} & \bar{k}_{jj} & \bar{k}_{jk} \\ \bar{k}_{ki} & \bar{k}_{kj} & \bar{k}_{kk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{S}_i\} \\ \{\bar{S}_j\} \\ \{\bar{S}_k\} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (188)$$

Podmatrice  $\bar{k}_{rs}$  su transformacijom date u referentnom koordinatnom sistemu.

Dijagonalne podmatrice  $\bar{k}_{rr}$  pripadaju svakom čvoru (r) i sastavljene su od onoliko dijagonalnih podmatrica  $\bar{k}_{ii}$ ,  $\bar{k}_{jj}$ , ...  $\bar{k}_{ll}$  koliko se elemenata stiče u posmatranom čvoru:

$$\bar{k} = \sum (\bar{k}_{ii}^{(e)} \bar{k}_{jj}^{(f)} \dots \bar{k}_{ll}^{(g)}) \dots \dots \dots (189)$$

Za čitavu konstrukciju čvorna pomeranja ili rotacije predstavljaju granične uslove. Zbog konjugovanosti generalisanih sila i generalisanih pomeranja, u čvornim tačkama ili osloncima su jedni poznati, a drugi nepoznati i obratno. Stoga je potrebno naći transformaciju koja omogućava da možemo izračunati prvo sve nepoznate komponente vektora pomeranja  $S$ , a zatim reakcije odnosno komponente vektora sila  $F$  ili obratno.

Da bi se to ostvarilo potrebno je podeliti jednačinu konstrukcije (189) tako da zadržimo sve poznate komponente vektora pomeranja  $S$  u podmatricu  $S_r$  a preostale komponente u podmatricu  $S_m$ . Kod podele matrice  $F$  analogno se dobijaju podmatrice  $F_r$  čiji su elementi komponente reakcija, dok su elementi podmatrice  $F_m$  poznata opterećenja. Tako smo dobili jednačinu konstrukcije u obliku:

$$\begin{Bmatrix} F_m \\ F_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{mr} \\ K_{rm} & K_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_m \\ S_r \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (190)$$

Posle izvršenog množenja podmatrica, dobijaju se dve matricne jednačine:

$$\begin{aligned} F_m &= K_{mm} S_m + K_{mr} S_r \\ F_r &= K_{rm} S_m + K_{rr} S_r \dots \dots \dots (191) \end{aligned}$$

Kada su komponente vektora  $S_r$  poznate iz predhodnih jednačina (194) sledi:

$$S_r = K_{rr}^{-1} (F_r - K_{rm} S_m) \dots \dots \dots (192)$$

a kada je  $S_r = 0$ , sledi:

$$S_r = K_{rm}^{-1} F_m \dots \dots \dots (193)$$

Preko ovih jednačina mogu se izračunati sve komponente vektora pomeranja  $\{S\}$ . Zatim možemo odrediti reakcije konstrukcije, čime je rešen statički problem. Sada možemo odrediti napone i dilatacije preko jednačina (171) i (173).

U ovom kratkom opisu metode konačnih elemenata korišćena je u skraćenom obliku interpretacija ove metode iz literature [45]. Za rešavanje problema teorije elastičnosti metodom konačnih elemenata razvijeno je mnogo programskih paketa kao: SAP IV, SUPER SAP, MEKELBA, BERSAFE od kojih je u ovom radu korišćen BERSAFE. Korišćenje ovog programa biće opisano kasnije na konkretnom primeru.

## IV Eksperimentalne metode

### IV 1. Metoda optičke analize naponskog stanja

Postoji više metoda za optičku analizu napona i deformacija kao što su Moire metoda, klasična interferometrija, holografska interferometrija, fotoelastičnost. Ovde će biti obrađena samo fotoelastičnost.

Metoda fotoelastičnosti se zasniva na osobini nekih providnih materijala, koji su u nenapregnutom stanju homogeni i izotropni, da pod dejstvom opterećenja postaju optički anizotropni i vrše dvojno prelamanje svetlosti odnosno polarizaciju. Svetlosni zrak prolazeći kroz takav materijal polarizuje u dve upravne ravni u kojima se zraci prostiru različitim brzinama, te se kao posledica toga javlja fazna razlika između tih zraka. Interferencijom tih zraka u polarizacionom filtru dobija se fotoelastična slika, koja nam zatim služi za određivanje naponskog ili deformacionog stanja našeg opitnog uzorka.

Seebeck i Brewster D. (1811) su prvi otkrili da amorfni providni materijali vrše dvojno prelamanje kada su napregnuti.

Amorfni materijali ponašaju se kao zbir kristala različito orjentisanih optičkih osa. Pojava napona izaziva uređenu orijentaciju optičkih osa kristala u materijalu. Ispitivanje Neumann-a (1841), Maxwell-a (1853) kao i Wrtheim-a (1854) pokazala su da se i optičke ose kristala poklapaju sa osama glavnih napona. U pravcima ovih osa kristala razlaže se upadni zrak polarizovane svetlosti, a ove dve komponente razloženog zraka kreću se različitim brzinama kroz telo. Fotoelastičnost su za ispitivanje konstrukcija među prvima koristili Wilson C. i Mesnager A., a kasnije i Co-ker G. E. koji je uveo celuloid (1920) kao materijal za izradu modela. Uvođenjem novih providnih foto elastičnih materijala u upotrebu naročito posle 1940. godine metoda fotoelastičnosti dobija veoma veliku primenu u ispitivanju konstrukcija. Postoje korpuskularna i talasna teorija svetlosti od kojih ni jedna ne objašnjava sve fenomene svetlosti. Fotoelastičnost je zasnovana u talasnoj teoriji svetlosti i ovde će biti izloženo nekoliko osnovnih postulata fotoelastične metode.

Svetlost pre svega može biti monohromatska ili jednobojna ako sadrži samo jednu talasnu dužinu; zatim polihromatska ili višebojna, ako sadrži više talasnih dužina i bela ako sadrži sve talasne dužine svetlosti.

Svetlost može biti opisana elektromagnenim talasom, pri čemu se u svakoj tački kroz koju prolazi elektro-magnetni talas periodički menja intenzitet električnog polja što je opisano vektorom električnog polja  $\vec{E}$  i intenzitetom magnetnog polja što je opisano vektorom magnetnog polja  $\vec{H}$ . Ova dva vektora su međusobom zavisna i u izotropnoj homogenoj sredini su međusobom upravni. Često se umesto vektora električnog polja koristi termin "vektor svetla". Ukoliko se pravac i intezitet vektora  $\vec{E}$  u toku proširanja svetlosti menja proizvoljno radi se o nepolarizovanoj svetlosti i obratno ukoliko opostoji zakonitost radi se o polarizovanoj svetlosti.

Razlikujemo nekoliko vrsta polarizovane svetlosti:

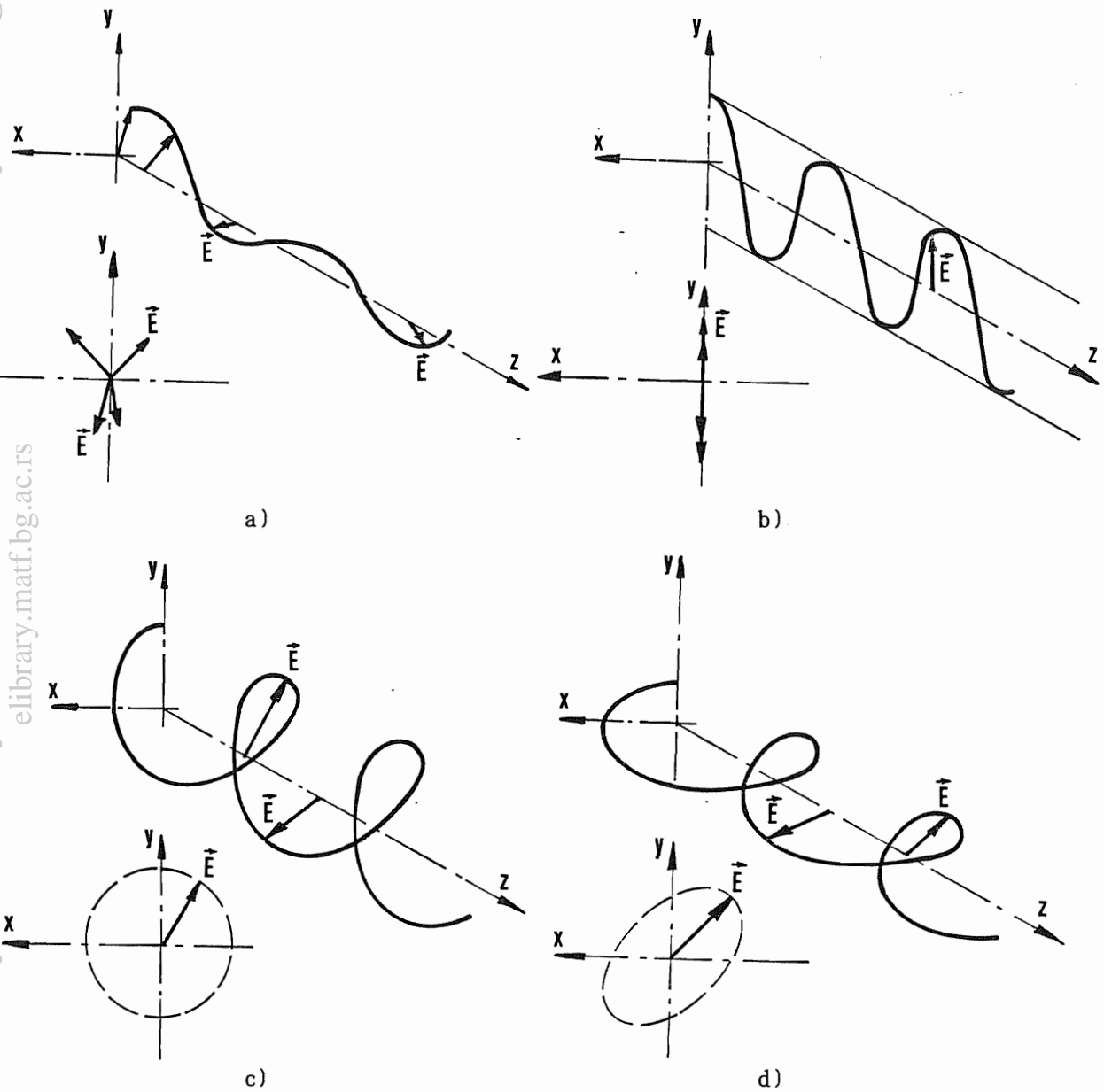
- ravanski ili linearno polarizovanu,
- kružno ili cirkularno polarizovanu i
- eliptično polarizovanu svetlost.

Kod ravanski polarizovane svetlosti pravac vektora  $\vec{E}$  leži u jednoj ravni u toku proširanja svetlosti. Ta ravan se naziva "ravan polarizacije". Kružno polarizovana svetlost je takva da je intenzitet vektora  $\vec{E}$  konstantan ali mu se pravac menja



tako da vrh ovog vektora opisuje kružnu zavojnicu u toku prostiranja svetlosti. Eliptično polarizovanu svetlost imamo kada vrh vektora  $\vec{E}$  opisuje eliptičnu zavojnicu u toku prostiranja svetlosti. Na slici 12. a), b), c), d) prikazana su redom: nepolarizovana, ravanski, kružno i eliptično polarizovana svetlost.

Neka upadni zrak svetlosti ima brzinu  $v_u$  i neka je indeks prelamanja pri ulasku u "novu" sredinu  $n_u$ . Posle prolaska kroz anizotropnu sredinu javlja se:



Slika 12.

"redovni" svetlosni zrak brzine  $v_r = v_u$  sa indeksom prelamanja  $n_r = n_u$  i "neredovni" svetlosni zrak brzine  $v_n \neq v_u$  i indeksom prelamanja  $n_n \neq n_u$  kao što je prikazano na slici 13.

Na osnovu razlike optičkih puteva redovnog i neredovnog zraka - možemo napisati relaciju:

$$R = d(n_r - n_n) \dots\dots\dots (194)$$

gde je:

- R - retardacija,
- d - debljina ploče,
- $n_r, n_n$  - indeksi prelamanja redovnog i neredovnog zraka.

Osnove optičke analize naponskog stanja metodom fotoelastičnosti čine dva zakona:  
**KVALITATIVNI:** U nekoj tački opterećenog predmeta, pravci glavnih normalnih napona se poklapaju sa trasama ravni oscilovanja redovnog i neredovnog talasnog kretanja usled dvojnog prelamanja u toj tački.

**KVANTITATIVNI:** U posmatranoj tački opterećenog predmeta, razlika indeksa i prelamanja redovnog i neredovnog svetlosnog talasa je srazmerna razlici glavnih normalnih napona u toj tački kao što je pokazano izrazom:

$$n_r - n_n = C_\sigma (\sigma_1 - \sigma_2) \dots\dots\dots (195)$$

odnosno:

$$\delta = \frac{R}{\lambda} = \frac{d}{\lambda} (n_r - n_n) = \frac{dC_\sigma}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) \dots\dots\dots (196)$$

gde je:

- $\lambda$  - talasna dužina svetlosti,
- $C_\sigma$  - optička konstanta naprezanja i
- $\sigma_1, \sigma_2$  - glavni normalni naponi.

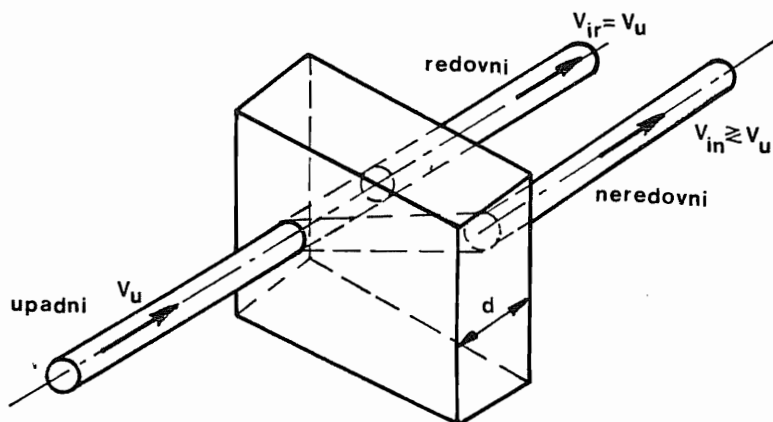
Ovde se može uvesti relacija za naponsko optičku konstantu:

$$f_\sigma = \frac{\lambda}{C_\sigma} \dots\dots\dots (197)$$

pa se konačno dobija izraz:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{f_\sigma}{d} \delta \dots\dots\dots (198)$$

Pri tome treba voditi računa da se veličina ove konstante menja pri svakoj promeni talasne dužine upotrebljene monohromatske svetlosti.



Slika 13.

Pretpostavimo da zrak polarizovane svetlosti ulazi u optički anizotropnu napregnutu ploču oscilujući po zakonu:

$$v_p = a_0 \sin \omega t \dots\dots\dots (199)$$

pri tome, on leži u ravni koja zaklapa uglove  $\beta$  i  $90 - \beta$  u odnosu na optičke ose u posmatranoj tački ploče. Tada se on razlaže na dve komponente u pravcima ravni glavnih normalnih napona:

$$\begin{aligned} v'_1 &= v_p \sin \beta = a_0 \sin \beta \sin \omega t \\ v'_2 &= v_p \cos \beta = a_0 \cos \beta \sin \omega t \dots\dots\dots (200) \end{aligned}$$

Pri izlasku iz ploče debljine  $d$  javlja se fazno kašnjenje:

$$\varphi = 2\pi \frac{R}{\lambda} = 2\pi \frac{d}{\lambda} (n_r - n_n) = 2\pi\delta \quad (201)$$

gde je  $\delta$ -kašnjenje po talasnoj dužini. Uvođenjem glavnih normalnih napona ovo se može napisati u obliku:

$$\varphi = 2\pi \frac{d}{f\sigma} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (202)$$

Svetlost je sada eliptično polarizovana sa komponentama:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_0 \sin \beta \sin(\omega t - \varphi) \\ v_2 &= a_0 \cos \beta \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (203)$$

Ukoliko se ravan oscilovanja redovnog ili neredovnog zraka poklopi sa ravni polarizacije, taj zrak se gubi:

$$\begin{aligned} \text{za } \beta=0: \quad v_1 &= 0, & v_2 &= a_0 \sin \omega t \\ \text{za } \beta=\frac{\pi}{2}: \quad v_1 &= a_0 \sin(\omega t - \varphi), & v_2 &= 0 \end{aligned}$$

Ako je kašnjenje  $\delta=0, 1, 2, \dots, k$  ceo broj, fazno kašnjenje je  $\varphi=0, 2\pi, 4\pi, \dots, 2k\pi$ , te sledi da je  $v_2 = v_1 \operatorname{ctg} \beta$ . Tada je trajektorija vrha svetlosnog vektora prava linija, a svetlost je ravno polarizovana.

Ploča koja izaziva ovakvo kašnjenje naziva se celotalasna ploča i taj slučaj prikazan na slici 14-a.

Kada je kašnjenje  $\delta=k+1/2$  fazno kašnjenje je  $\varphi=(2k+1)\pi$ , pa pošto je opet  $v_2 = v_1 \operatorname{ctg} \beta$  dobijamo ravno polarizovanu svetlost, ali se javlja polutalasno zakašnjenje pa se ploča naziva polutalasna i taj slučaj je prikazan na slici 14-b.

Kada je  $\delta=(2k+1)/4$  fazno kašnjenje je  $\varphi=(2k+1)\pi/2$ , te se pri prolasku kroz ploču svetlost eliptično polarizuje i putanja vrha svetlosnog vektora data je izrazom:

$$\frac{v_1^2}{a_0^2 \sin^2 \beta} + \frac{v_2^2}{a_0^2 \cos^2 \beta} = 1 \quad (204)$$

Kašnjenje je u ovom slučaju četvrtina talasa, pa se ploča zove četvrt-talasna. Taj slučaj je prikazan na slici 14-c.

U specijalnom slučaju se za  $\beta=\pi/4$  dobija kružno polarizovana svetlost.

Polariskopi su uređaji koji služe za optičku analizu naponskog i deformacionog stanja metodom fotoelastičnosti. Prema načinu prosvetljavanja modela polariskopi se dele na: polariskop sa prosvetljavanjem i na refleksni polariskop. Osetljivost refleksnih polariskopa je veća, ali se intenzitet svetlosti kod njih smanjuje priliom refleksije.

Prema vrsti polarizovane svetlosti ili prema rasporedu optičkih ekemenata polariskopi se dele na ravanske ili linearne i kužne ili cirkularne.

Ako je svetlost koja prolazi kroz model ravno polarizovana imamo ravni polariskop. Svetlosni vektor na izlazu polarizacionog filtera je dat izrazom:

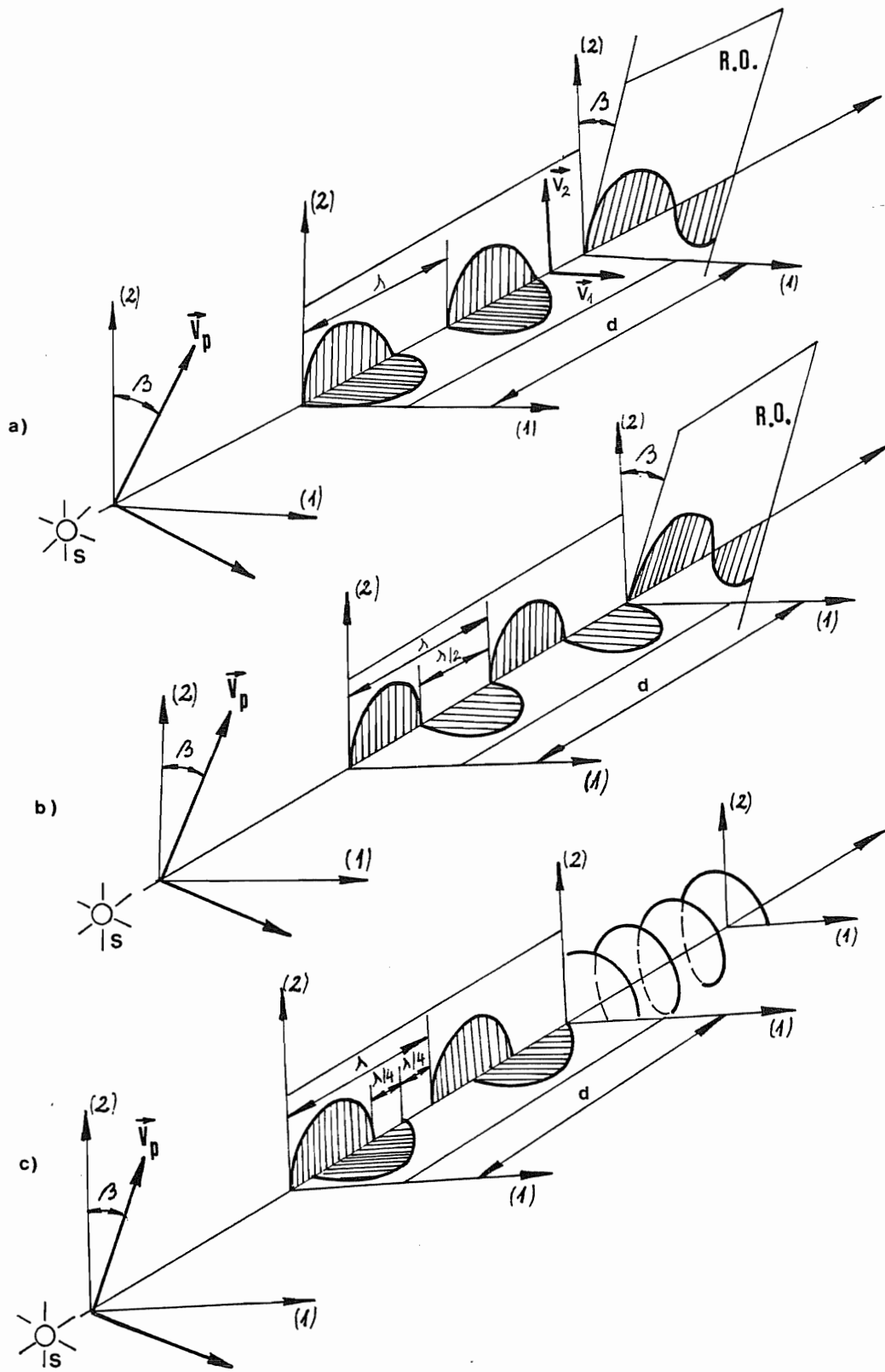
$$v_p = a_0 \sin \omega t \quad (205)$$

U materijalu napregnutog modela ovaj vektor se razlaže na dve komponente u pravcima glavnih normalnih napona:

$$\begin{aligned} v_1' &= a_1 \sin \omega t = a_0 \sin \beta \sin \omega t \\ v_2' &= a_2 \sin \omega t = a_0 \sin \beta \sin \omega t \end{aligned} \quad (206)$$

Izlazeći iz modela jedan zrak dobija ugao kašnjenja:

$$\varphi = 2\pi\delta = 2\pi \frac{d}{f\sigma} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (207)$$



Slika 14.

Komponente svetlosnog vektora su:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_0 \sin \beta \sin (\omega t - \varphi) \\ v_2 &= a_0 \cos \beta \sin (\omega t) \end{aligned} \quad (208)$$

što odgovara eliptično polarizovanoj svetlosti.

Kada je analizator pod nekim uglom  $(90-\alpha)$  u odnosu na optičku osu polarizatora, on će propuštati komponente svetlosti  $v_1$  i  $v_2$ , koje se poklapaju sa pravcem polarizacije analizatora:

$$v_A = v_1 \cos(\beta-\alpha) - v_2 \sin(\beta-\alpha) \quad (209)$$

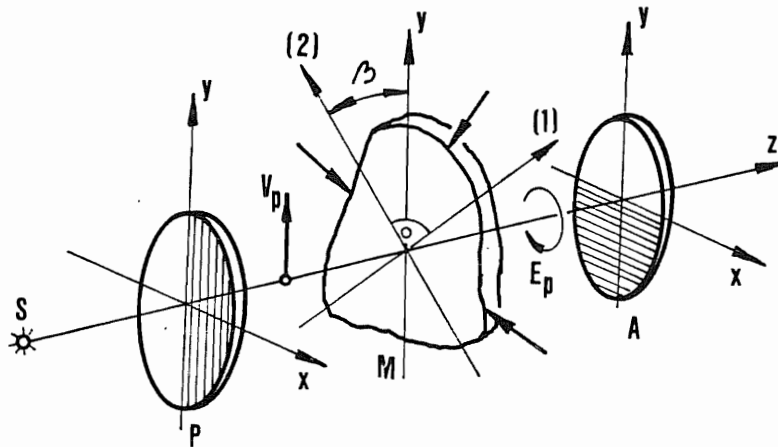
Smenom izraza (208) u (209) dobija se:

$$\begin{aligned} v_A &= a_0 \left[ \sin \beta \cos(\beta-\alpha) \cos 2\pi\delta - \cos \beta \sin(\beta-\alpha) \right] \sin \omega t + \\ &+ a_0 \sin \beta \cos(\beta-\alpha) \sin 2\pi\delta \cos \omega t \end{aligned} \quad (210)$$

Intenzitet tako dobijene svetlosti je:

$$I_{\max} = a_0^2 \left[ \sin^2 \alpha + \sin 2\beta \sin(2\beta-\alpha) \sin^2 \pi\delta \right] \quad (211)$$

Polariskop u konfiguraciji za ravno polarizovanu svetlost prikazan je na slici 15.



Slika 15.

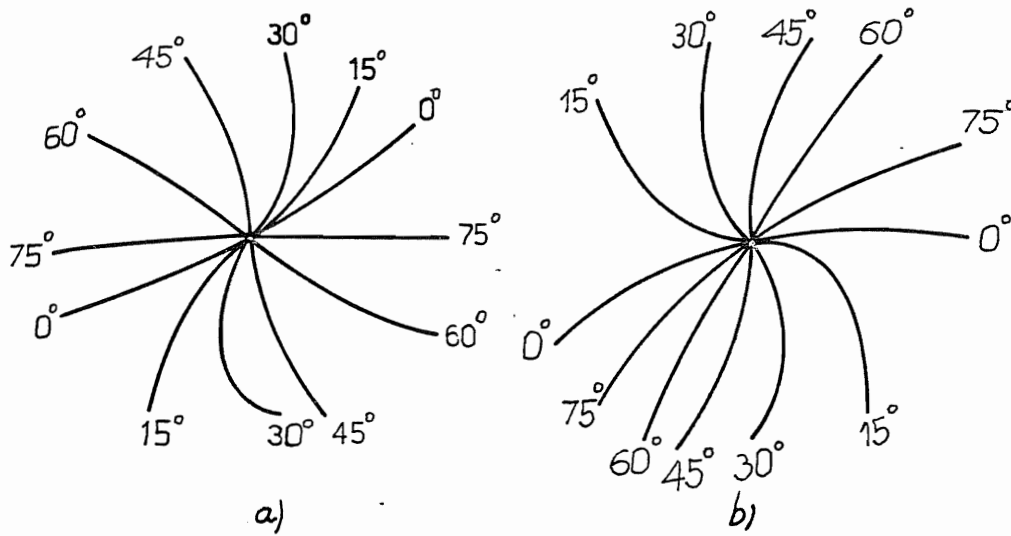
U tačkama modela u kojima se pravci glavnih napona poklapaju sa optičkim osama polarizatora i analizatora imamo intenzitet svetlosti jednak nuli. Ove tamne linije i polja nazivaju se izokline. Prema tome, izokline su geometrijsko mesto tačaka u kojima glavni pravci napona imaju iste pravce sa osama polarizatora i analizatora i određene su parametrom izokline koji predstavlja ugao nagiba glavnih pravaca u odnosu na referentne ose.

Navedimo ovde nekoliko pravila za analizu slike izoklina:

- Izoklina parametra  $\alpha$  i izoklina parametra  $\alpha \pm \pi/2$  identične su
- Kroz svaku tačku u kojoj su glavni naponi  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  različiti, prolazi samo jedna izoklina
- Kroz izotropnu tačku kada je  $\sigma_1 = \sigma_2$  i kroz singularnu tačku kada je  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  prolaze izokline svih parametara.

Izotropna i singularna tačka mogu biti pozitivne i negativne. Ako parametar izokline raste u smeru suprotnom kazaljki na satu, kada obilazimo izotropnu tačku izotropna tačka je pozitivna.

Primeri pozitivne i negativne izotropne i singularne tačke prikazani su na slici 16. a i b.



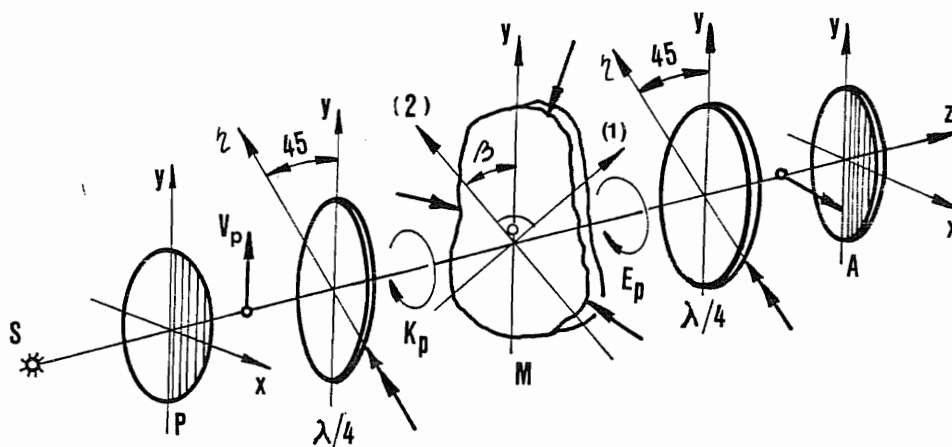
Slika 16.

- Dve susedne izotropne ili singularne tačke suprotnog su predznaka,
- Na mestu na kome se izoklina seče sa slobodnom konturom, parametar izokline jednak je uglu koji tangenta ili normala na konturu grade sa referentnom osom.
- Ako je deo konture prava linija, čitav deo konture se poklapa sa odgovarajućom izoklinom.
- Ukoliko telo ima osu simetrije i simetrično je opterećeno, onda je osa simetrije izoklina čiji je parametar ugla koji osa simetrije zaklapa sa referentnim pravcem.

Izokline se vide u polariskopu sa ravno polarizovanim svetlom i to zajedno sa izohromama. Kada posmatramo model u beloju svetlosti izokline su tamne linije i polja, a izohrome su obojene.

Važna napomena je da pri promeni intenziteta opterećenja pravci glavnih napona ostaju nepromenjeni pa se ni izokline ne menjaju.

Kod cirkularnog polariskopa, pored polarizatora i analizatora imamo i dve četvrt talasne ploče, kao što je to prakazano na slici 17.



Slika 17.

Po izlasku iz polarizatora svetost je linearно polarizovana:

$$v_p = a_0 \sin \omega t \quad \dots \quad (212)$$

U četvrttalasnoj ploči vektor svetlosti se razlaže na dve komponente:

$$\begin{aligned} v'_{pb} &= v_p \cos \frac{\pi}{4} = a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \omega t \\ v'_{ps} &= v_p \sin \frac{\pi}{4} = a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \omega t \quad \dots \quad (213) \end{aligned}$$

Fazna razlika između ovih oscilovanja je  $j\varphi$ ,  $\varphi = \pi/2$ , a u talasnim dužinama  $R = \lambda/4$ . Posle izlaska iz četvrttalasne ploče komponente vektora su:

$$\begin{aligned} v_{pb} &= a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \omega t \\ v_{ps} &= a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\omega t - \varphi) = -a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \omega t \quad \dots \quad (214) \end{aligned}$$

pa je svetlost sada kružno polarizovana:

$$\left( \frac{v_{pb}}{a_0 \frac{\sqrt{2}}{2}} \right)^2 + \left( \frac{v_{ps}}{a_0 \frac{\sqrt{2}}{2}} \right)^2 = 1 \quad \dots \quad (215)$$

Svetlosni vektor se na ulasku u model razlaže na dve komponente u pravcima glavnih normalnih napona, koji u opštem slučaju leže pod uglom  $\beta$  u odnosu na referentnu osu:

$$\begin{aligned} v'_{1M} &= v_{ps} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) - v_{pb} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \\ v'_{2M} &= v_{ps} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) + v_{pb} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \quad \dots \quad (216) \end{aligned}$$

Na izlazu iz modela dobijamo eliptično polarizovanu svetlost pri čemu je fazno kašnjenje:

$$\varphi = 2\pi \frac{d}{s} (\sigma_1 - \sigma_2)$$

komponente:

$$\begin{aligned} v_{1M} &= -a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \cos(\omega t - 2\pi\delta) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \sin(\omega t - 2\pi\delta) \right] \\ v_{2M} &= a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \cos \omega t + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \sin \omega t \right] \quad \dots \quad (217) \end{aligned}$$

Posle izlaska iz modela svetlost nailazi na drugu četvrttalasnu ploču  $(\lambda/4)_A$  i razlaže se na pravce spore i brze ose te ploče:

$$\begin{aligned} v'_{As} &= -v_{1M} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) + v_{2M} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \\ v'_{Ab} &= v_{1M} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) + v_{2M} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \quad \dots \quad (218) \end{aligned}$$

Posle izlaska iz četvrttalasne ploče javlja se fazno kašnjenje  $\varphi = \pi/2$  između redovnog i neredovnog zraka pa imamo:

$$\begin{aligned} v_{As} &= a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{4}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

tj.:

$$\begin{aligned} v_{As} &= a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \cos(\omega t - \varphi) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \cos(\omega t) + \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \sin(\omega t - \varphi) - \right. \\ &\quad \left. - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \sin(\omega t) \right] \quad \dots \quad (219) \end{aligned}$$

Optička osa analizatora leži pod uglom  $(90-\alpha)$  u odnosu na optičku osu polarizatora. Kroz analizator prolaze samo komponente u pravcu polarizacije analizatora:

$$v_A = v_{As} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + v_{Ab} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = -a_0 \left[ \cos(2\beta - \pi\delta) \sin \pi\delta \cos \alpha + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\pi\delta) \sin \alpha \right] \cos(\omega t - 2\pi\delta) + a_0 \left[ \sin(2\beta - \pi\delta) \sin \pi\delta \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin 2\pi\delta \sin \alpha \right] \sin(\omega t - 2\pi\delta) \dots\dots\dots (220)$$

U ovom slučaju će intenzitet svetlosti biti:

$$I_{\max} = a_0^2 \left[ \sin^2 \pi\delta \cos^2 \alpha + \cos^2 \pi\delta \sin^2 \alpha + 2 \cos 2\beta \cos 2\pi\delta \sin \pi\delta \sin 2\alpha \right] \dots\dots\dots (221)$$

Kada su ukrštene optičke ose polarizatora i analizatora pod pravim uglom (tamno polje analizatora) intenzitet svetlosti je:

$$I_{\max} \Big|_{\alpha=0} = a_0^2 \sin^2 \pi\delta \dots\dots\dots (222)$$

U tačkama gde je kašnjenje  $\delta$  celobrojna vrednost, dobija se:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{f\sigma}{d} m, \quad \delta = m \dots\dots\dots (223)$$

a tada je maksimalni intenzitet svetlosti:

$$I_{\max} \Big|_{\alpha=0, \delta=0.1.2.\dots.m} = 0 \dots\dots\dots (224)$$

Kada su optičke ose polarizatora i analizatora paralelne (svetlo polje analizatora) maksimalni intenzitet svetlosti je:

$$I_{\max} \Big|_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = a^2 \cos^2 \pi\delta \dots\dots\dots (225)$$

pa kada je:  $\delta = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots, \frac{1}{2}(2m+1)$ , dobija se:

$$I_{\max} \Big|_{\alpha=\frac{\pi}{2}, \delta=\frac{1}{2}(2m+1)} = 0 \dots\dots\dots (226)$$

Tamne linije i polja koja su analitički određena izrazima (227) i (229) nazivaju se izohrome. Izohrome su dakle geometrijska mesta tačaka jednakih razlika glavnih normalnih napona:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{f\sigma}{d} \sigma = \frac{f\sigma}{h} N \dots\dots\dots (227)$$

Pri tome se u tamnom polju analizatora vide izohrome celobrojnog reda  $\delta=1,2,3,\dots,m$ , a u svetlom polju izohrome reda jedne polovine celog broja:

$$\delta = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots, \frac{1}{2}(2m+1).$$

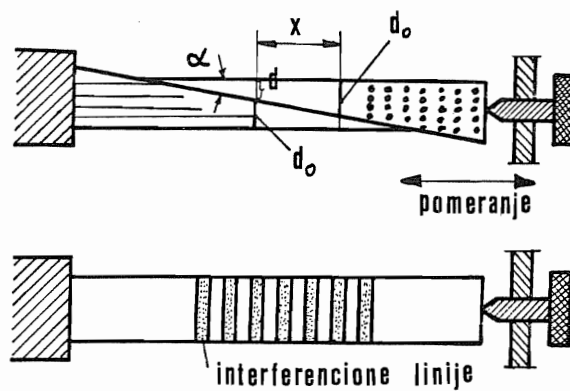
U monohromatskoj svetlosti izohrome se vide kao tamne linije, dok se u beloju svetlosti vide u boji, pri čemu svaka boja odgovara određenom redu izohrome, a ugasiće se samo one boje za koje  $\delta$  ima celobrojnu vrednost. U literaturi postoje tablice u kojima su dati redovi izohroma koji odgovaraju određenim bojama.

Postoji više metoda kojima se može odrediti red izohroma sa velikom tačnošću, što je potrebno, kada se radi o slabo osetljivim fotoelastičnim materijalima, kod slojeva u prostornoj fotoelastičnosti ili kod fotoelastičnih obloga.

Metode kompenzacije su sledeće:

1. Tardy metoda
2. Senarmont metoda
3. Babinet - Soleil - kompenzatorom ili kompenzacijom nulte ravnoteže (slika 18.)





Slika 18.

Inače korišćenjem slike izohroma dobijenih u tamnom i svetlom polju možemo odrediti red izohrome sa korakom 0.5, a zatim interpolacijom odrediti i vrednosti između njih. Uz korišćenje fotografija i interpolacije ova metoda je za optički osetljive materijale dovoljno tačna.

Metodom fotoelastičnosti dobijamo za svaku razmatranu tačku modela podatke o pravcu glavnih normalnih napona posredstvom izoklina i položaja optičkih osa polarizatora i analizatora i podatke o razlici glavnih normalnih napona ( $\sigma_1 - \sigma_2$ ), posredstvom reda izohroma u datoj tački i naponsko optičke konstante za dati materijal. Kod ravnih problema teorije elastičnosti javljaju se tri nepoznate komponente napona  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  ili tri specifične deformacije  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$ , koje treba odrediti. Za određivanje naponskog i deformacionog stanja modela, pored podataka dobijenih korišćenjem izoklina i izohroma potreban je još jedan podatak. Zato se za određivanje napona koristi nekoliko metoda koje su u suštini analitičke ili eksperimentalne. Te metode za određivanje napona su:

1. Metoda razlike smičućih napona
2. Određivanjem izopaha (geometrijskog mesta tačaka jednakog zbira glavnih napona)
3. Metoda kosog prosvetljavanja
4. Određivanjem zbira glavnih normalnih napona pomoću Laplace-ove jednačine

U ovom radu korišćena je metoda razlike tangencijalnih napona i o njoj će biti više reči kroz konkretan primer koji se ovde analizira. Takođe biće više reči i o baždarenju materijala i vrstama materijala koji se koriste u metodi fotoelastičnosti.

## IV 2. Metoda tenzometra - korišćenje mernih traka za određivanje napona i deformacija

Korišćenje mernih traka za ispitivanje deformacionog i naponskog stanja zasniva se na otkriću Lord Kelvin-a (1856.) da žica mehanički opterećena menja svoj električni otpor. Korišćenje ovog otkrića kod mernih traka počelo je tek 1939. godine u SAD, istraživanjima Simons-a koji je počeo sa razvojem ove metode.

Činjenica da su promene u električnom otporu žice posledica promena dimenzija žice usled dilatacije može se vrlo jednostavno objasniti. Električni otpor provodnika dužine  $L$ , poprečnog preseka  $A$  i specifičnog električnog otpora  $\rho$  je dat izrazom:

$$R = \rho \frac{L}{A} \dots\dots\dots (228)$$

Diferenciranjem ovog izraza i deljenjem otporom R dobija se:

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dL}{L} - \frac{dA}{A} \quad (229)$$

Član  $dA$  predstavlja promenu poprečnog preseka provodnika koja je posledica poprečne kontrakcije jednake  $-\mu dL/L$ .

Ako je prečnik žice pre dejstva aksijalnog opterećenja označen sa  $d_0$ , onda je prečnik žice posle dilatacije dat sa:

$$d_f = d_0 \left(1 - \mu \frac{dL}{L}\right) \quad (230)$$

Iz predhodnih izraza sledi:

$$\frac{dA}{A} = -2\mu \frac{dL}{L} + \mu^2 \left(\frac{dL}{L}\right) \approx -2\mu \frac{dL}{L} \quad (231)$$

Zamenjujući izraz (231) u izraz (229) dobijamo:

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dL}{L} (1 + 2\mu) \quad (232)$$

Što može biti napisano u obliku:

$$K = \frac{\frac{dR}{R}}{\frac{d\rho}{\rho}} = (1 + 2\mu) + \frac{\frac{d\rho}{\rho}}{\varepsilon} \quad (233)$$

gde je K osetljivost legure koja je upotrebljena u provodniku i definisana je kao promena otpora po jedinici inicijalnog otpora podeljenog sa dejstvujućom dilatacijom. K se još naziva i faktorom proporcionalnosti i K-faktorom.

Razmatranje relacije (233) da osetljivost bilo koje legure na dilataciju zavisi od dva faktora: promene dimenzije provodnika izražene članom  $(1+2\mu)$  i promene specifičnog otpora izražene članom  $(d\rho/\rho/\varepsilon)$ . Eksperimenti su pokazali da se veličina K kreće od oko -12 do + 4 za većinu metalnih legura. Jasno je da promena specifičnog otpora potiče od varijacije broja slobodnih elektrona i njihove pokretljivosti sa promenom dilatacije. Spisak nekih metalnih legura koje se obično koriste u izradi mernih traka, kao i njihov K - faktor dat je u tabeli 1.

MATERIJAL	SASTAV U PROCENTIMA	K
KONSTANTAN	45Ni, 55Cu	2.0-2.1
NIKL HROM	80Ni, 20Cr	2.1
IZOELASTIK	36Ni, 8Cr, 0.5Mo, 55.5Fe	3.6
KARMA	74Ni, 20Cr, 3Al, 3Fe	2.0
LEGURA 479	92Pt, 8W	4.0
NIKL	čist	-12.1
PLATINA	čist	6.1
SREBRO	čist	2.9
BAKAR	čist	2.6

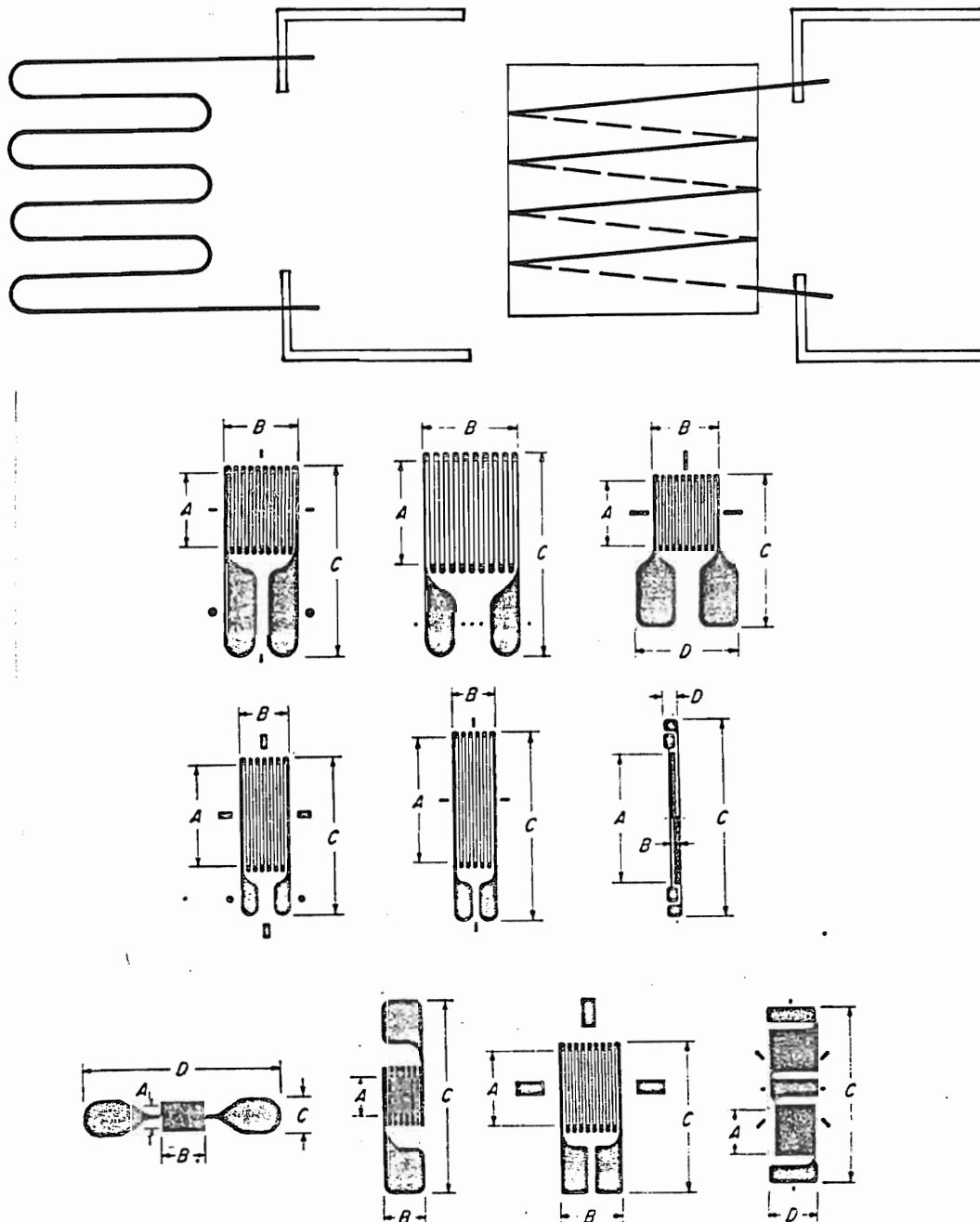
Tabela 1.

U cilju što veće tačnosti merenja i eliminacije raznih sporednih otpora potrebno je da otpor merne trake bude veći od određene vrednosti, recimo 100Ω. Da bi dobili dužinu

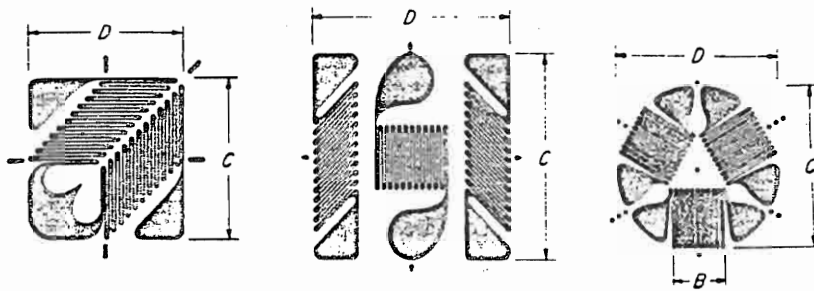
provodnika koja omogućava dobijanje potrebnog otpora, a koju treba smestiti na što manji prostor, merne trake se izrađuju od namotaja tanke žice (starija metoda) ili u vidu folija ili "štampanjem" provodničkog materijala na plastičnu podlogu. Prema načinu izvođena trake delimo na:

- trake sa žicom
- trake sa folijom
- trake sa poluprovodnikom

Trake sa žicom se izrađuju tako da je žica ili ravno namotana ili sa kružnim namotajem kao što je prikazano na slici 19. Trake sa folijom se obično izrađuju od konstantana "štampanjem" sloja debljine 2-10 $\mu$ m. Mogućnosti izrade ovog tipa merne trake su velike i one se izrađuju različitim oblicima i dimenzijama, od kojih su neke prikazane na slici 20.



Slike 19. i 20.



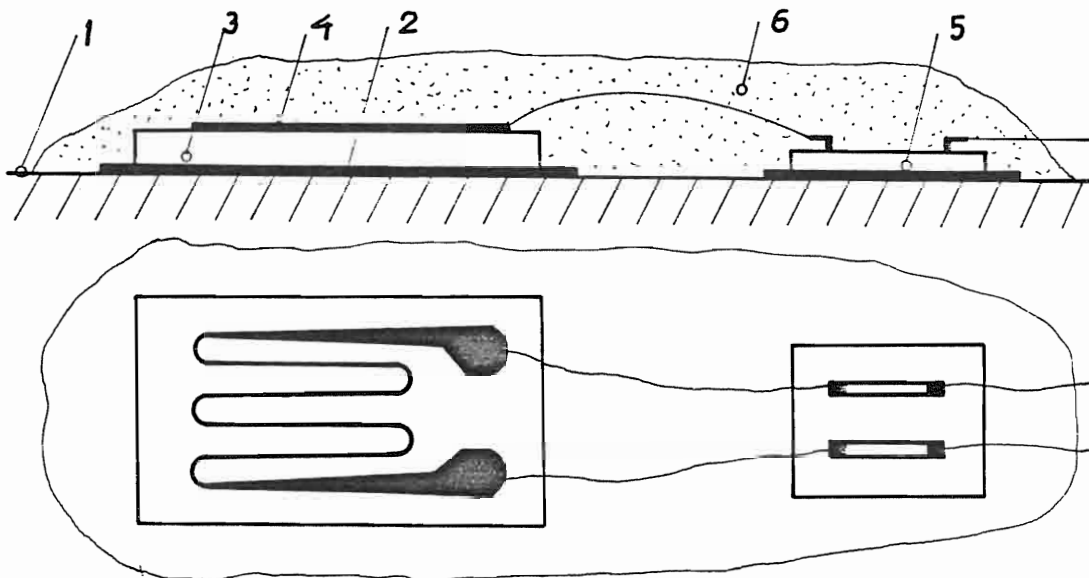
Slika 21.

Pored običnih mernih traka izrađuju se i trake specijalne namene kao što su:

- Rozete koje omogućavaju da se trake postave u pravcu glavnih normalnih napona, ako su ti pravci poznati. Tri rozete su prikazane na slici 21.
- Membranske trake, koje služe za merenje radijalnih i tangencijalnih napona
- Trake za merenje širine naprslina
- Merni lanci koji služe za uvrđivanje promene gradijenata deformacije
- Samo-kompensacione merne trake koje se koriste u nepovoljnim temperaturnim uslovima.

Takođe merne trake se koriste za izradu različitih pretvarača mehaničkih veličina: sile, pritiska, torzionog momenta itd.

Merne trake se na ispitivanu površinu lepe specijačnim lepkom, a zatim se traka zaštićuje specijalnim kitom, koji je štiti od mogućih oštećenja i drugih uticaja, kao što je prikazano na slici 22.



- |                       |                  |
|-----------------------|------------------|
| 1. Ispitivani objekat | 4. Merna traka   |
| 2. Lepak              | 5. Priključak    |
| 3. Nosač trake        | 6. Zaštitna masa |

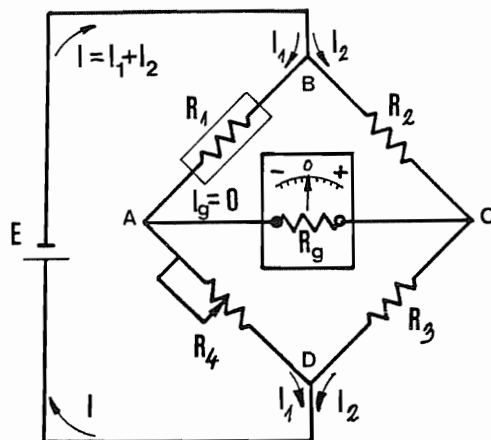
Slika 22.

Merenjem relativne promene otpora  $\Delta R/R$  merne trake i korišćenjem izraza (233) možemo odrediti veličinu dilatacije na mestu gde je traka zalepljena. Pošto su dilatacije male veličine reda  $10^{-3}$ , a K-faktor većine mernih traka se kreće od 1.95

do 2.15, potrebno je "signal" pojačati. U tu svrhu se koristi Wheatston-ov most, u kombinaciji sa uređajima za elektronsko pojačavanje signala. Wheatston C. je ustvari otkrio uređaj pomoću koga se mogao meriti električni otpor. Ovaj uređaj zasnovan je u suštini na Kirchoff-ovim zakonima koji glase:

1. Zbir jačina struje koje dotiču u čvor iz više grana jednog kola jednak je zbiru jačina struja koje ističu iz tog čvora.
2. Zbir napona duž ma koje zatvorene konture jednak je nuli.

Prema šemi Wheatston-ovog mosta datoj na slici 23., podešavanjem otpora  $R_3$  i  $R_4$  uz konstantne vrednosti otpora  $R_1$  i  $R_2$  može se postići da u kraku AC jačine struje bude nula  $I_g = 0$  ili napon  $U_{AC} = 0$ .



Slika 23.

Sa slike 23. se vidi da se jačina struje, koja dolazi od izvora  $I = I_1 + I_2$ , grana u dve grane na  $I_1$  i  $I_2$ . Kada je napon između tačaka A i C jednak nuli pad napona u granama BA i BC mora biti jednak:

$$U_{BA} = U_{BC} \dots\dots\dots (234)$$

odnosno:

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 \dots\dots\dots (235)$$

Prema prvom Kirchoff-ovom zakonu pošto u grani AC nema struje, jačina struje u grani AD mora biti ista kao u grani BA. Isto važi i za grane CB i CD. Zatim, pad napona od A do D mora biti jednak padu napona od C do D.

$$U_{AD} = U_{CD} \dots\dots\dots (236)$$

odnosno:

$$I_1 R_4 = I_2 R_3 \dots\dots\dots (237)$$

Ako izraz (235) podelimo izrazom (237) sledi:

$$\frac{R_1}{R_4} = \frac{R_2}{R_3} \dots\dots\dots (238)$$

Izraz (238) se naziva "uslovom ravnoteže Wheatston-ovog mosta" i može se napisati u obliku:

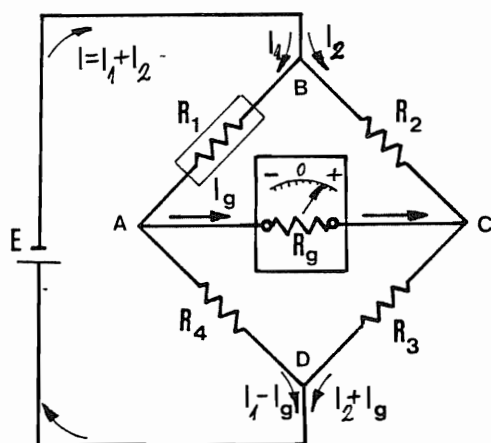
$$R_1 = \frac{R_2}{R_3} R_4 \dots\dots\dots (239)$$

Odavde, ako znamo  $R_4$  i odnos  $R_2/R_3$  možemo odrediti  $R_1$ . Tačnost ovde zavisi kako od tačnosti veličina  $R_2$ ,  $R_3$  i  $R_4$  tako i od preciznosti galvanometra koji

utvrđuje kada je jačina struje nula. Primenimo sada ovaj most na mernu traku. Predpostavimo da je otpor  $R_1$  na slici 23. ustvari merna traka. Promenom  $R_1$  za  $\Delta R_1$  usled promene  $d l / l$  most će izaći iz ravnoteže.

Ako pretpostavimo da su otpori  $R_2$  i  $R_3$  konstantne veličine, most možemo ponovo uravnotežiti promenom otpora  $R_4$ . Ukoliko je otpor  $R_4$  kalibrisan i može se precizno meriti možemo merenjem veličine  $\Delta R_4$  za koju se most ponovo uravnotežava odrediti preko izraza (239) i veličinu  $\Delta R_1$ , a zatim preko izraza (233) i veličinu  $\varepsilon$  u mikrodilatacijama.

Razmotrimo zatim relcije između pojedinih otpora i intenziteta struje u mostu, u slučaju neuravnoteženog mosta, koristeći pri tome šemu na slici 24.



Slika 24.

Na osnovu drugog Kirchoff-ovog zakona i slike 24 dobija se izraz za intenzitet struje u galvanometru:

$$I_g = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{R_2 (R_1 + R_4) (R_g + R_3 + R_4) + R_1 R_3 R_4 - R_2 R_4^2 + R_g R_3 (R_1 + R_4)} \dots \quad (240)$$

gde je  $R_g$ -otpor galvanometra.

Kada se ispitivani objekat opteretiti, promeni se otpor merne trake, pa se most izbaci iz ravnoteže, što se očitava intenzitetom sstruje u galvanometru. Podešavanjem promenljivog otpora most se ponovo dovodi u ravnotežu. Ako je promena otpora pre i posle opterećivanja  $\Delta R_1$ , deformacija ispitivanog objekta, određuje se preko izraza (233) u obliku:

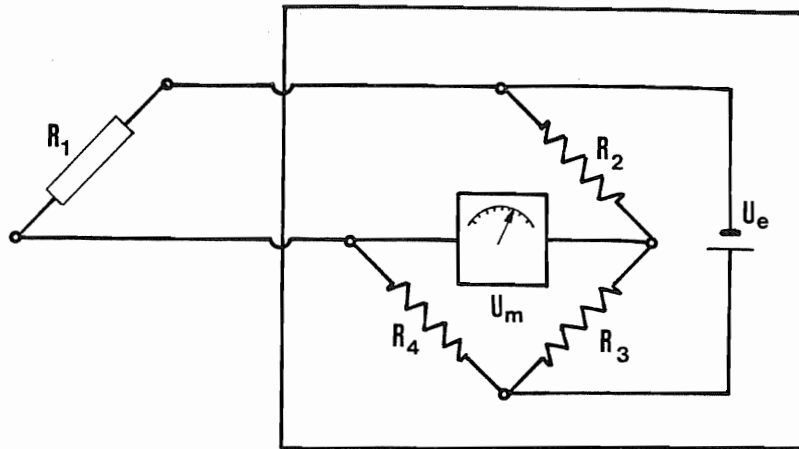
$$\varepsilon = \frac{1}{K} \frac{\Delta R_1}{R_1} \dots \dots \dots \quad (241)$$

Ukoliko se skala na galvanomtru izbaždari u  $\mu\text{m}/\text{m}$ , dilatacija se može očitavati direktno na skali. Kada je most van ravnoteže izlazni napon otvorenog kola, kao što je dato u literaturi [13] je:

$$U_m = \left( \frac{R_2}{R_2 + R_3} - \frac{R_1}{R_1 + R_4} \right) U_E \dots \dots \dots \quad (242)$$

Osim konfiguracije punog mosta može se postaviti i konfiguracija u četvrtmostu i polumostu.

Četvrtmost se realizuje tako da je u samo jednoj grani priključena merna traka, a u ostalim granama su obični otpornici konstantnog otpora, kao što je prikazano na slici 25.



Slika 25.

U ovom slučaju iz izraza (242) sledi:

$$U_m = \left( \frac{1}{2} - \frac{R + \Delta R}{R + \Delta R + R} \right) U_E = \pm \left( \frac{\Delta R}{4R + 2\Delta R} \right) U_E \dots\dots\dots (243)$$

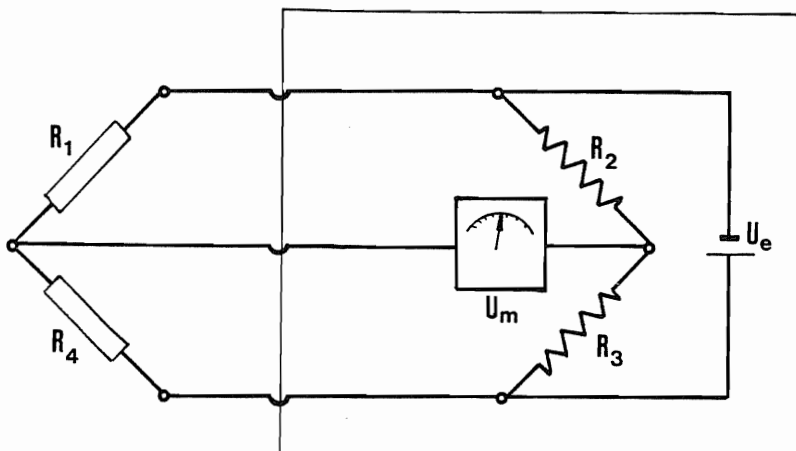
Za vrlo malo  $\Delta R$  može se ovaj izraz napisati u obliku:

$$U_m = \pm \frac{1}{4} \frac{\Delta R}{R} U_E \dots\dots\dots (244)$$

Korišćenjem izraza (241) dobijamo dilataciju kod četvrtmosta:

$$\varepsilon = \frac{4U_m}{U_E K} \dots\dots\dots (245)$$

Kod polumosta dva otpornika predstavljaju merne trake koje su izložene dilataciji, kao što je prikazano na slici 26.



Slika 26.

Kod polumosta izraz (242) dobija oblik:

$$U_m = \left( \frac{1}{2} - \frac{R + \Delta R}{R + \Delta R + R - \Delta R} \right) U_E = \pm \frac{1}{2} \frac{\Delta R}{R} U_E \dots\dots\dots (246)$$

Na osnovu izraza (241) sada za dilataciju dobijamo:

$$\varepsilon = \frac{2U_m}{U_E K} \dots\dots\dots (247)$$

Ovde se vidi da je osetljivost polumosta dvostruko veća od osetljivosti četvrtmosta.

Ukoliko su sva četiri otpornika merne trake, onda se radi o punom mostu. U tom slučaju izraz (242) dobija oblik:

$$U_m = \left( \frac{R - \mu \Delta R}{R - \mu \Delta R + R + \Delta R} - \frac{R + \Delta R}{R + \Delta R + R - \mu \Delta R} \right) U_E \dots\dots\dots (248)$$

Odnosno za male promene otpora:

$$U_m = \pm \frac{1 + \mu}{2} \frac{\Delta R}{R} U_E \dots\dots\dots (249)$$

Iz izraza (241) sada sledi za dilataciju:

$$\varepsilon = \pm \frac{2U_m}{1.3 U_E K} \dots\dots\dots (250)$$

Što pokazuje da je osetljivost punog mosta 2.6 puta veća od četvrtmosta.

Promena otpora merne trake može biti posledica ne samo dilatacije već i promene temperature. Da bi uticaj temperature eliminisati u most se uključuje kompenzaciona merna traka, koja nije izložena dilataciji već samo temperaturnim promenama. Ako su  $R_1$  i  $R_4$  otpori dve merne trake od kojih je  $R_4$  kompenzaciona, onda će one imati istu promenu otpora usled temperature. Na osnovu izraza (242) izlazni napon će biti:

$$U_m = \frac{R_2(R_4 + \Delta R_4) - R_3(R_1 + \Delta R_1)}{(R_1 + \Delta R_1 + R_2)(R_3 + R_4 + \Delta R_4)} U_E \dots\dots\dots (251)$$

Na taj način uticaj temperature je eliminisan i kao rezultat se dobija samo mehanička deformacija.

O uticaju različitih faktora na tačnost merenja, kao i o primeni mernih traka na različite vrste opterećenja i konstrukcija može se još dosta napisati.



## V Izučavanje naponskog i deformacionog stanja ravno napregnute eliptično prstenaste ploče

### V 1. Određivanje naponskog i deformacionog stanja eliptično prstenaste ploče primenom metode konačnih elemenata

U ovom poglavlju je korišćenjem metode konačnih elemenata, odnosno programskog paketa BERSAFE određeno naponsko i deformaciono stanje eliptično-prstenaste ploče. (Konceptija programskog paketa BERSAFE data je u Prilogu III na strani 193. Pri tome su razmatrane sledeće varijante opterećenja na eliptičnom prstenu:

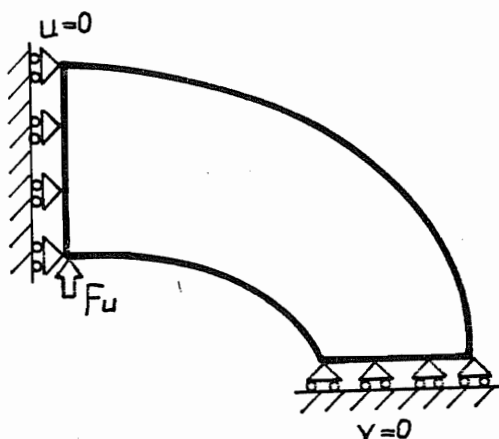
1) Koncentrisana sila  $F_u = 17.4128 \text{ N}$  po debljini elemenata od 1 mm, koja deluje upravno na unutrašnju konturu u čvoru 1, kao što je prikazano na slici 27. Ovaj slučaj je označen šifrom ELIU.

2) Koncentrisana sila  $F_s = 46.5776 \text{ N}$  po debljini elementa od 1 mm, koja deluje upravno na spoljašnju konturu u čvoru 176, kao što je prikazano na slici 28. Ovaj slučaj je označen šifrom ELIS.

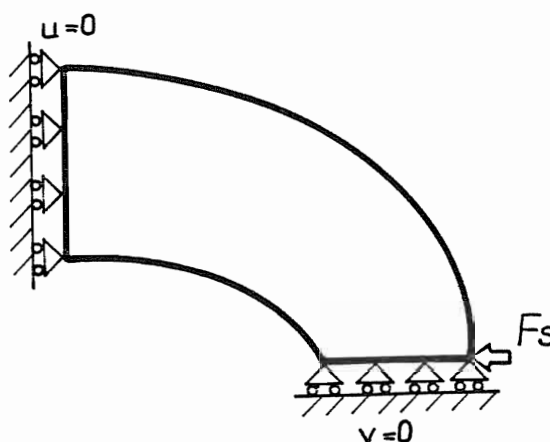
3) Koncentrisane sile  $F_u = 17.4128 \text{ N}$  na unutrašnjoj i  $F_s = 46.5776 \text{ N}$  na spoljašnjoj konturi, koje deluju u čvorovima 1 i 176 respektivno, kao što je prikazano na slici 29. Ovaj slučaj je označen šifrom ELIUS.

4) Kontinualno jednako raspodeljeno opterećenje  $q_u = 17.4128 \text{ N/mm}$  upravno na unutrašnju konturu, a oivičeno hiperbolom  $\varphi = 60^\circ$  kao što je prikazano na slici 30. Ovaj slučaj označen je šifrom ELIUK 60.

5) Kontinualno jednako raspodeljeno opterećenje  $q_s = 46.5776 \text{ N/mm}$ , upravno na spoljašnju konturu, a ograničeno hiperbolom  $\varphi = 60^\circ$ , odnosno deluje na ekvivalentnom uglu od  $30^\circ$ , kao što je to na slici 31. prikazano. Ovaj slučaj označen je šifrom ELISK 30.



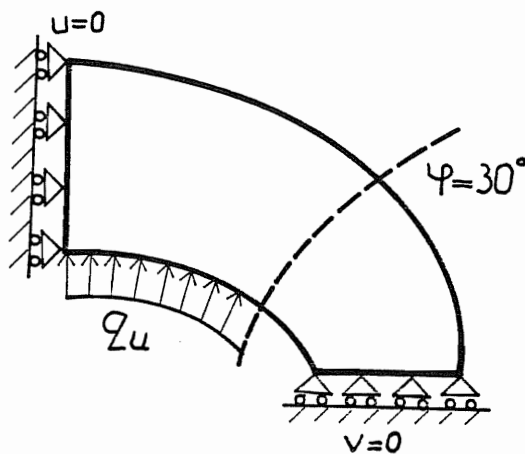
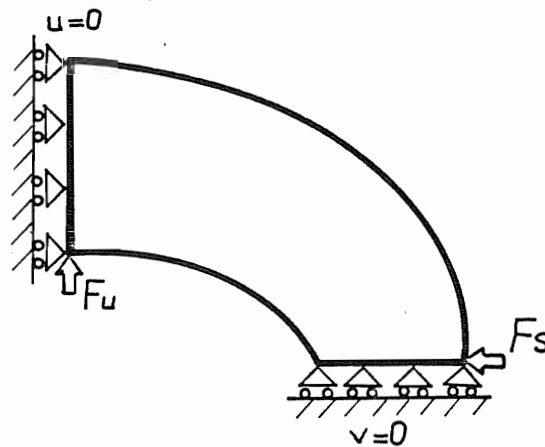
Slika 27.



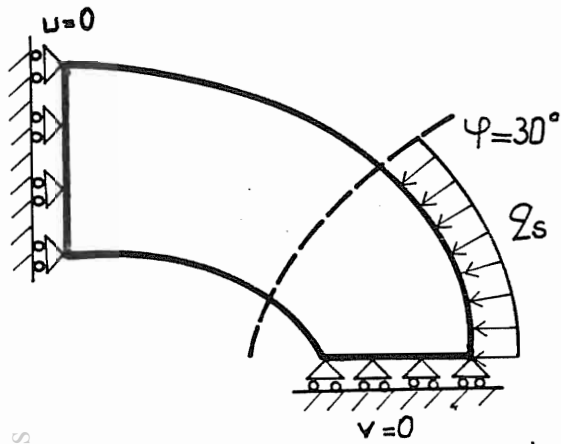
Slika 28.

6) Kontinualno jednako raspodeljeno opterećenje upravno na unutrašnju konturu  $q_u = 34.8255 \text{ N/mm}$  deluje na segmente ograničenom hiperbolom  $\varphi = 60^\circ$ , a kontinualno opterećenje  $q_s = 46.5776 \text{ N/mm}$  deluje upravno na spoljašnju konturu na segmentu ograničenom hiperbolom  $\varphi = 30^\circ$  kao što je prikazano na slici 32. Ovaj slučaj opterećenja označen je šifrom ELIUSK 30.

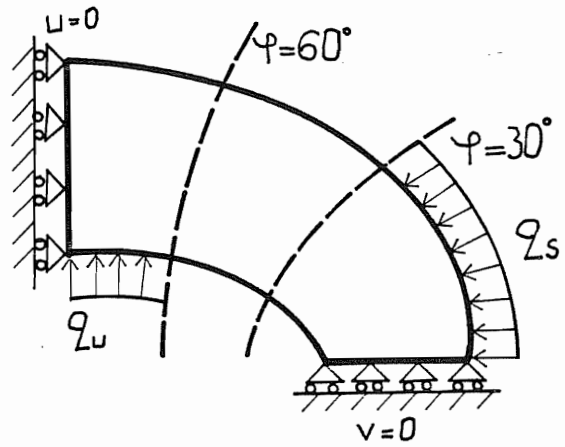
7) Kontinualno jednako raspodeljeno opterećenje upravno na unutrašnju konturu  $q_u = 34.8255 \text{ N/mm}$  deluje na segmentu ograničenom hiperbolom  $\varphi = 30^\circ$ , a kontinualno opterećenje  $q_s = 46.5776 \text{ N/mm}$  deluje upravno na spoljašnju konturu na segmentu ograničenom hiperbolom  $\varphi = 30^\circ$  kao što je prikazano na slici 33. Ovaj slučaj opterećenja označen je šifrom ELIUSK 3060.



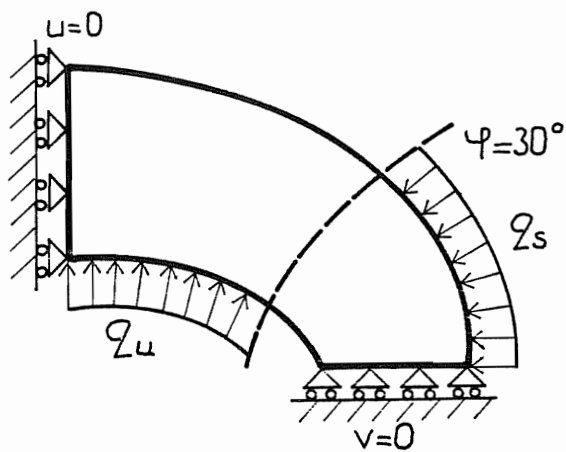
Slike 29. i 30.



Slika 31.



Slika 32.



Slika 33.

Pored ovih slučajeva obrađeni su i slučajevi opterećenja označeni kao: ELIUK 6, ELIUK 30, ELISK 6, ELISK 60, ELIUSK 6 i ELIUSK 60, koji nisu prikazani u radu, jer bi to zahtevalo veliki prostor.

Prilikom razmatranja svih slučajeva iskorišćena je simetrija opterećenja i konture u odnosu na dve ose, tako da je u analizi metodom konačnih elemenata posmatrana samo četvrtina eliptičnog prstena. Pri tome je pretpostavljeno da su u čvorovima 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 pomeranja u x-pravcu jednaka nuli tj.  $u=0$ , a u čvorovima 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176 pomeranja u y-pravcu jednaka nuli tj.  $v=0$ . Na taj način je korišćenjem simetrije smanjen broj posmatranih čvorova.

Prvi korak pri radu sa BERSAFE jeste da se na karticama 00 i 01 zada ime razmatranog problema i takođe zadaju osnovni parametri.

Drugi korak je da se na karticu 11 unese topološki redosled čvorova na elementima kao što je dato u Prilogu VI na strani 208.

Treći korak je unošenje koordinata čvorova dobijenih programom "MREŽA" u karticu tip 21, kao što je prikazano u Prilogu VI na strani 208.

Četvrti korak je definisanje vrste i veličine opterećenja na kartici tip 51. Pri radu se praktično samo ova kartica menjala, jer se menjalo samo opterećenje kod različitih primera.

Peti korak je definisanje karakteristika materijala od koga je načinjena struktura. Da bi se rezultati dobijeni metodom konačnih elemenata i rezultati dobijeni drugim metodama mogli upoređivati direktno pretpostavljeno je da se radi o ARALDITU - B modula elastičnosti  $E=3499,125517 \text{ N/mm}^2$ , a Poisson-ovog koeficijenta  $\mu=0.38$ .

Pored navedenih kartica korišćene su još neke, kao:

- KARTICA TIP 19 - za određivanje čvorova konturnih linija
- KARTICA TIP 10 - za određivanje maksimalnih i minimalnih koordinata tela i druge kartice.

Program se aktivira izborom opcije 7 u meniju. Tako se dobiju izlazni BSF fajlovi na kojima su smešteni rezultati. Na osnovu njih se zatim može vršiti grafičko postprocesiranje ili priprema PLT fajlova za crtanje na ploteru. Izborom opcije 9 u meniju, vrši se grafička obrada rezultata u programu BERSAFE.

Kada imamo prvi slučaj opterećenja označen kao ELIU, odnosno koncentrisane sile deluju na unutrašnjoj konturi u pravcu kraćih poluosa elipsi dobijaju se dijagrami rasporeda normalnih napona  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i smičućeg  $\tau_{xy}$  na spoljašnjoj konturi i dijagrami rasporeda normalnog napona  $\sigma_x$  u presecima određenim čvorovima od 34 do 44 i čvorovima od 89 do 99, kao što je prikazano na slici 34.

Na slici 35 prikazani su dijagrami rasporeda napona  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  na unutrašnjoj konturi a u predhodno naznačenim presecima dati su dijagrami rasporeda normalnog napona  $\sigma_y$ . Ovde se uočava veći gradijent porasta napona  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  u blizini mesta na konturi, gde deluju koncentrisane sile.

Na slici 36 prikazani su dijagrami rasporeda napona  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  na "središnjoj" elipsi određenoj čvorovima 6, 17, 28, 39, 50, 61, 72, 83, 94, 105, 116, 127, 138, 149, 160 i 171, kao i dijagrami rasporeda smičućeg napona  $\tau_{xy}$  u presecima. Na ovim dijagramima se vidi kojim tačkama kontura i preseka naponi  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  imaju pozitivne, a u kojim tačkama negativne vrednosti.

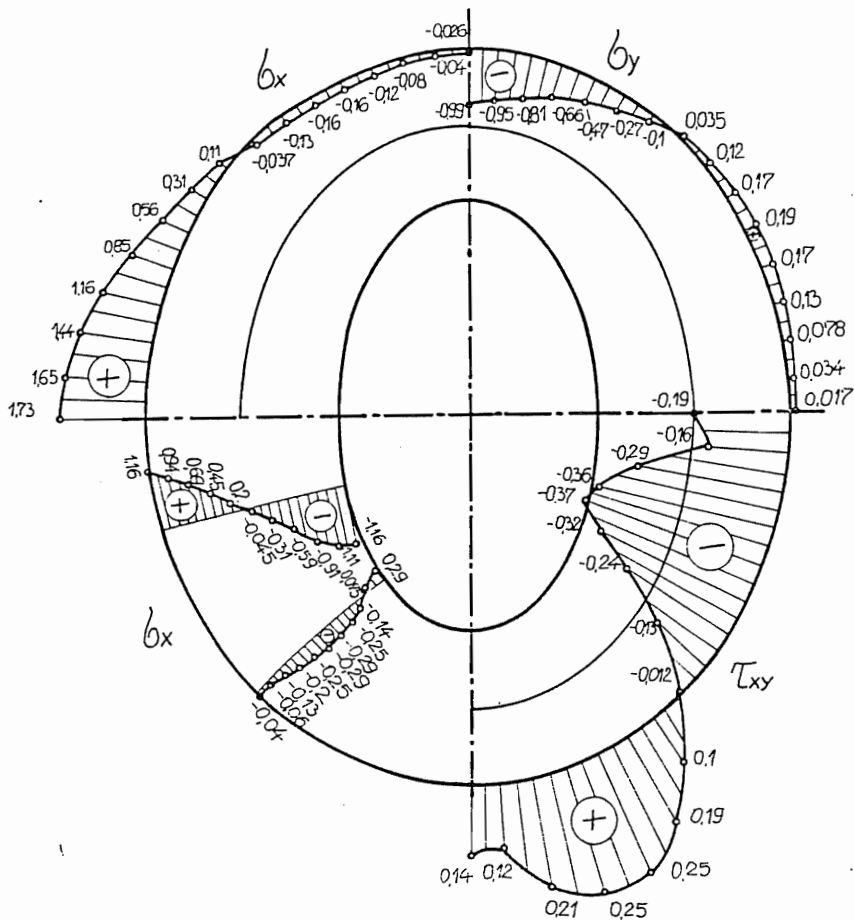
Na slici 37. prikazani su dijagrami glavnih normalnih napona  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , kao i dijagrami komponentnih pomeranja u i v u pravcima x i y ose, a za tačke na spoljašnjoj konturi eliptičnog prstena.

Na slici 38. prikazani su dijagrami glavnih normalnih napona  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  i pomeranja u i v u tačkama na unutrašnjoj konturi, a na slici 39. dati su dijagrami glavnih normalnih napona  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  i pomeranja u i v u tačkama "središnje" elipse.

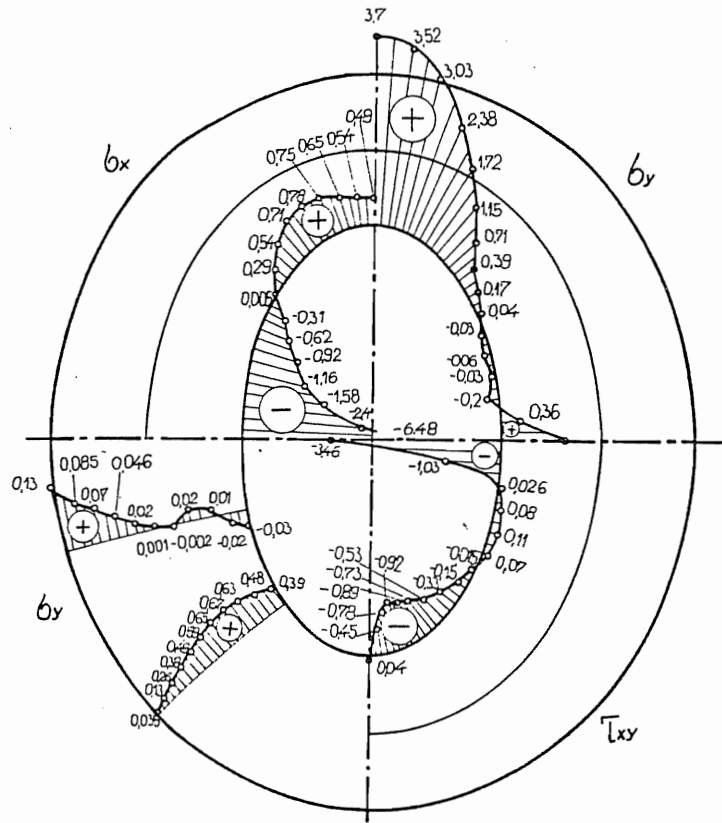
Posmatrajući slike 37. i 38. uočavamo tačke na konturama, u kojima su glavni normalni naponi jednaki nuli  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ , a koje razdvajaju zonu istezanja od zone pritiska na konturama. Takođe, na slici 38., na mestu dejstva koncentrisane sile uočavamo povećan gradijent porasta glavnog napona.

Mreža konačnih elemenata u nedeformisanom stanju i u deformisanom stanju pod dejstvom opterećenja za ovaj slučaj, prikazana je na slici 40.

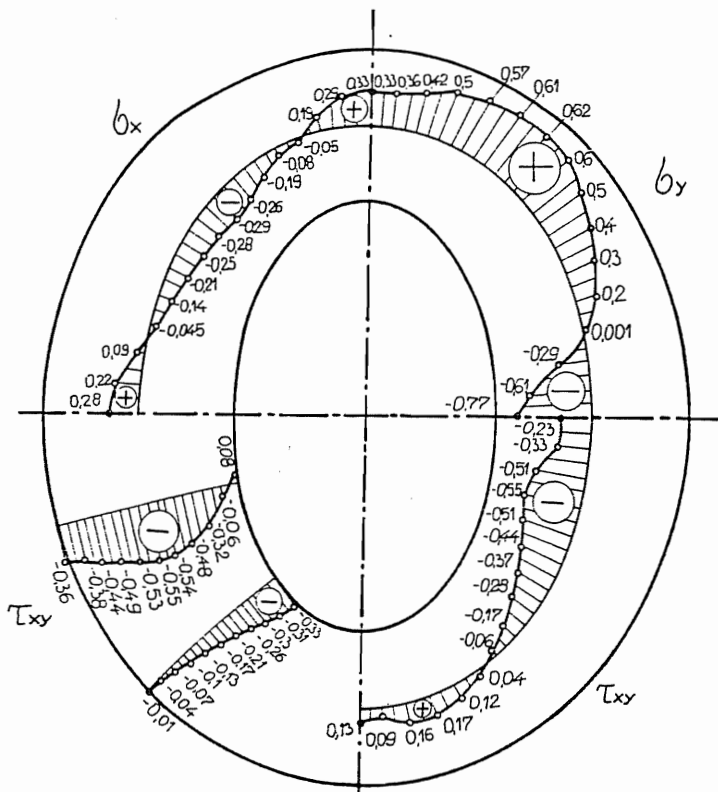
Grafičkim postprocesiranjem dobijenih rezultata urađene su izolinije za napone i pomeranja. Pri tome, izolinije predstavljaju geometrijska mesta tačaka u kojima napon ili pomeranje ima konstantnu vrednost.



Slika 34.

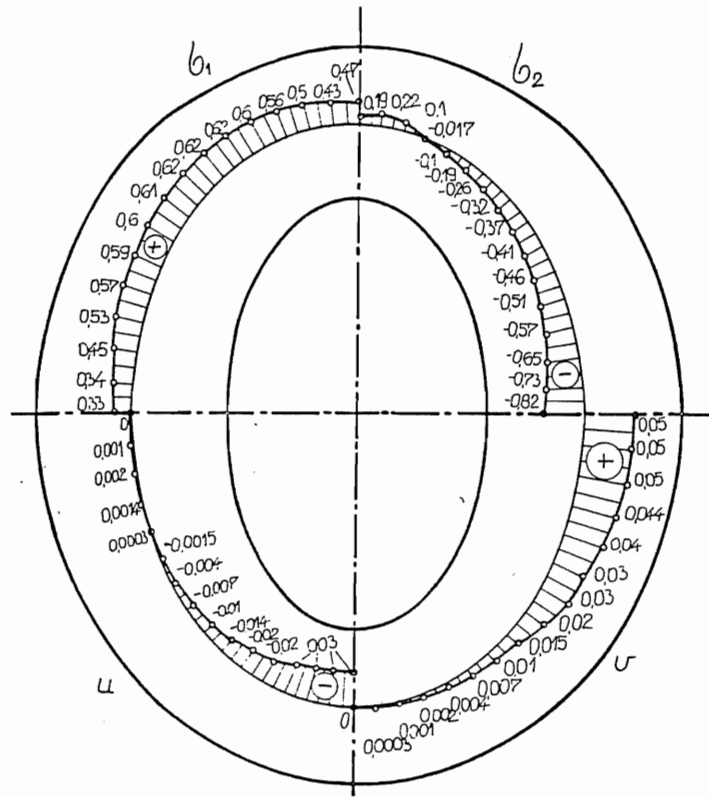


Slika 35.

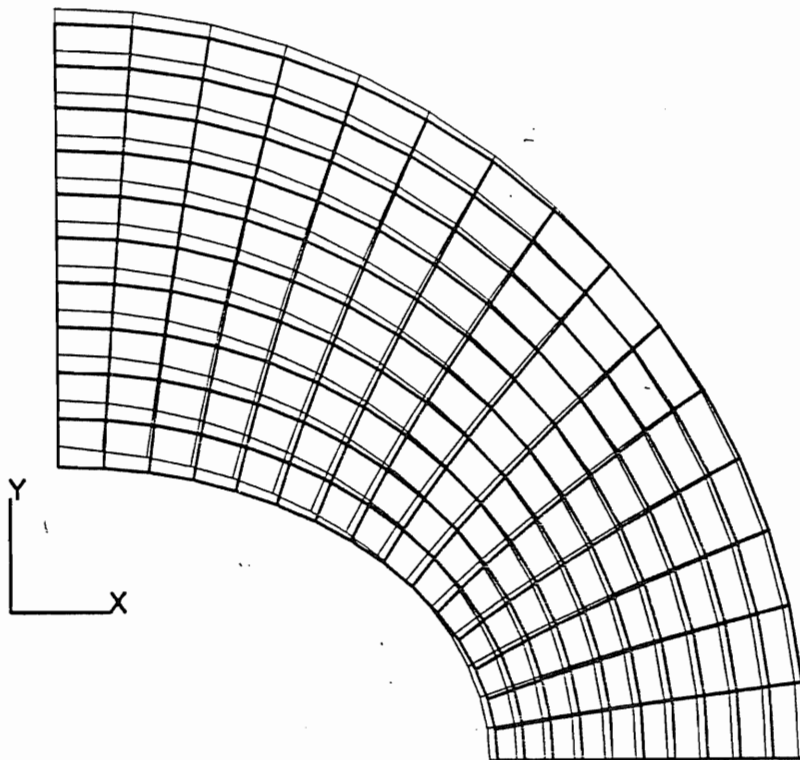


Slika 36.





Slika 39.



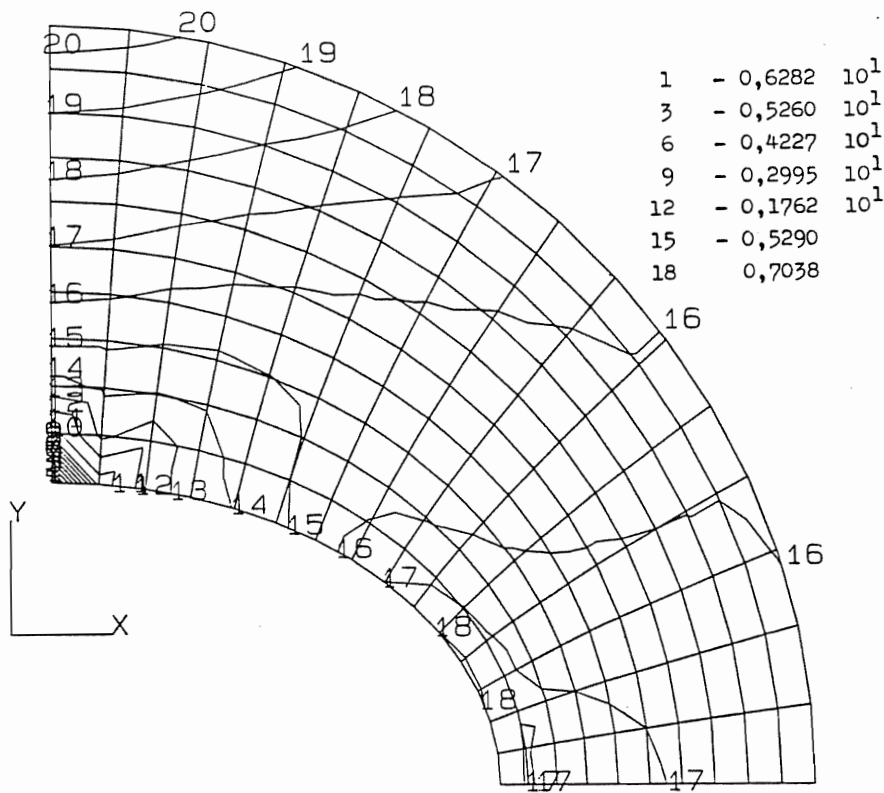
Slika 40.



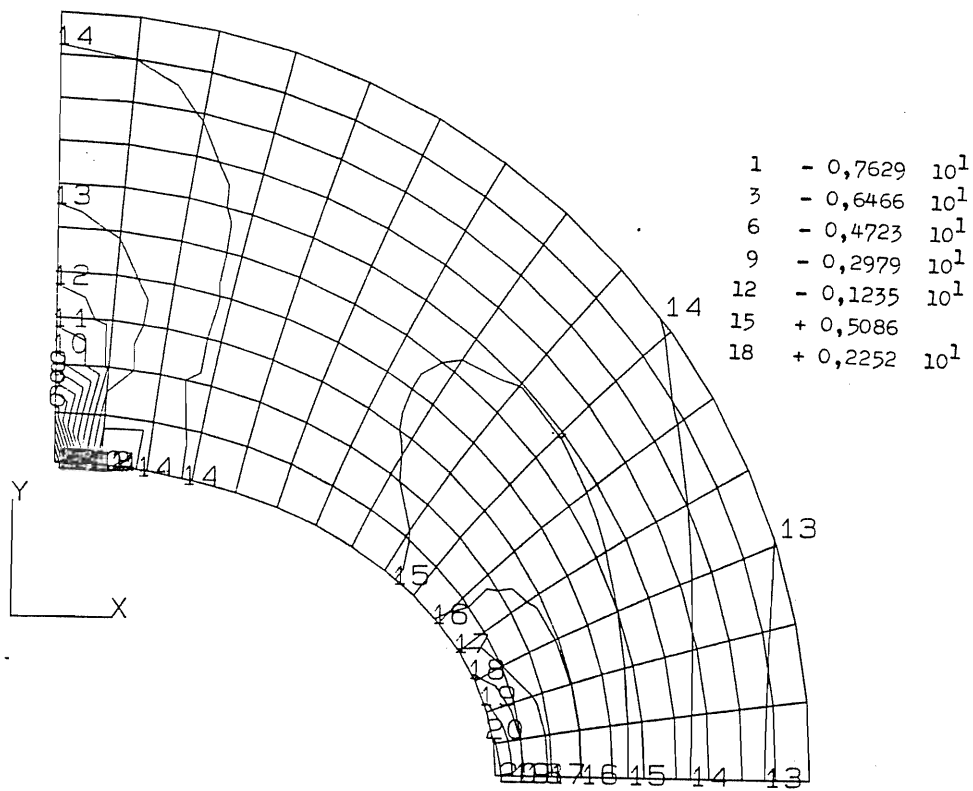
Tako su izolinije za normalne napone  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i smičući napon  $\tau_{xy}$  prikazane na slikama 41., 42., i 43. redom. Na ovim slikama uočavamo uvećan gradijent promene napona u lokalnoj zoni dejstva koncentrisane sile.

Na slikama 44. i 45. prikazane su izolinije za glavne normalne napone  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , gde se takođe uočava koncentracija napona u lokalnoj zoni dejstva koncentrisane sile.

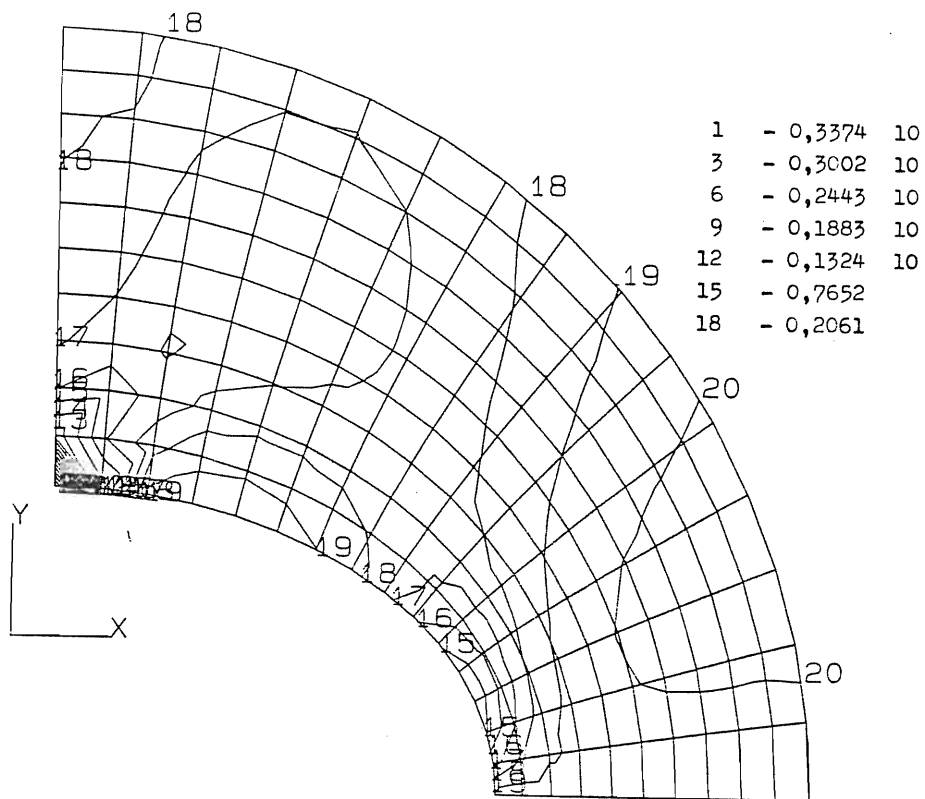
Na slikama 46. i 47. prikazane su izolinije za komponentna pomeranja  $u$  i  $v$ . U Prilogu VI na strani 208. dati su numerički rezultati na osnovu kojih su crtani ovi dijagrami.



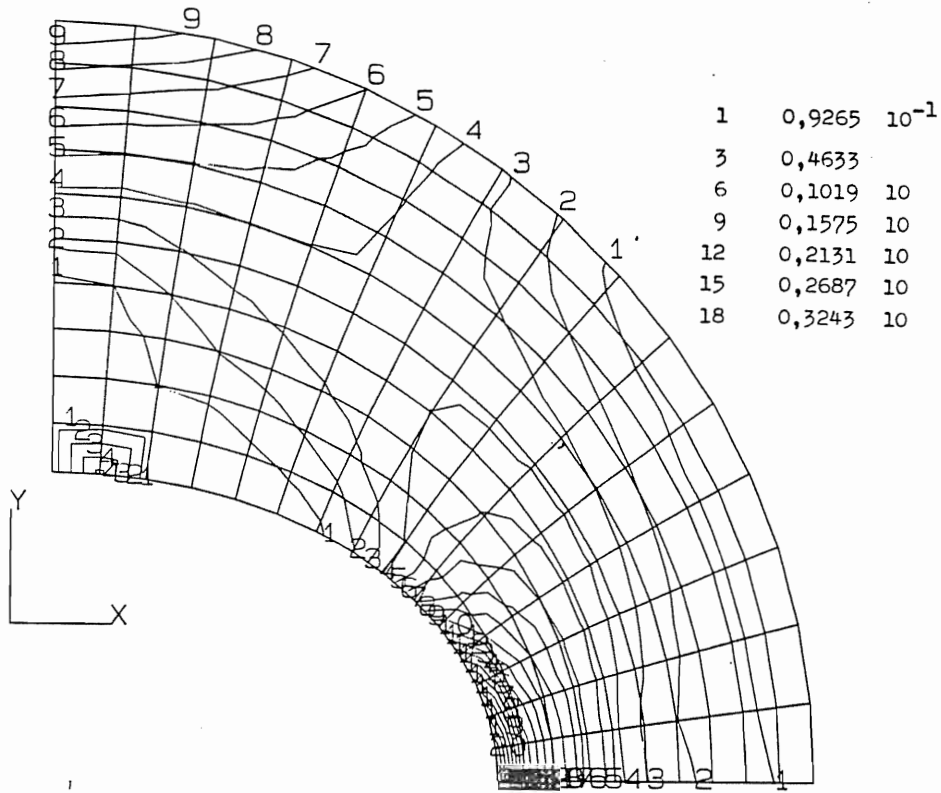
Slika 41.



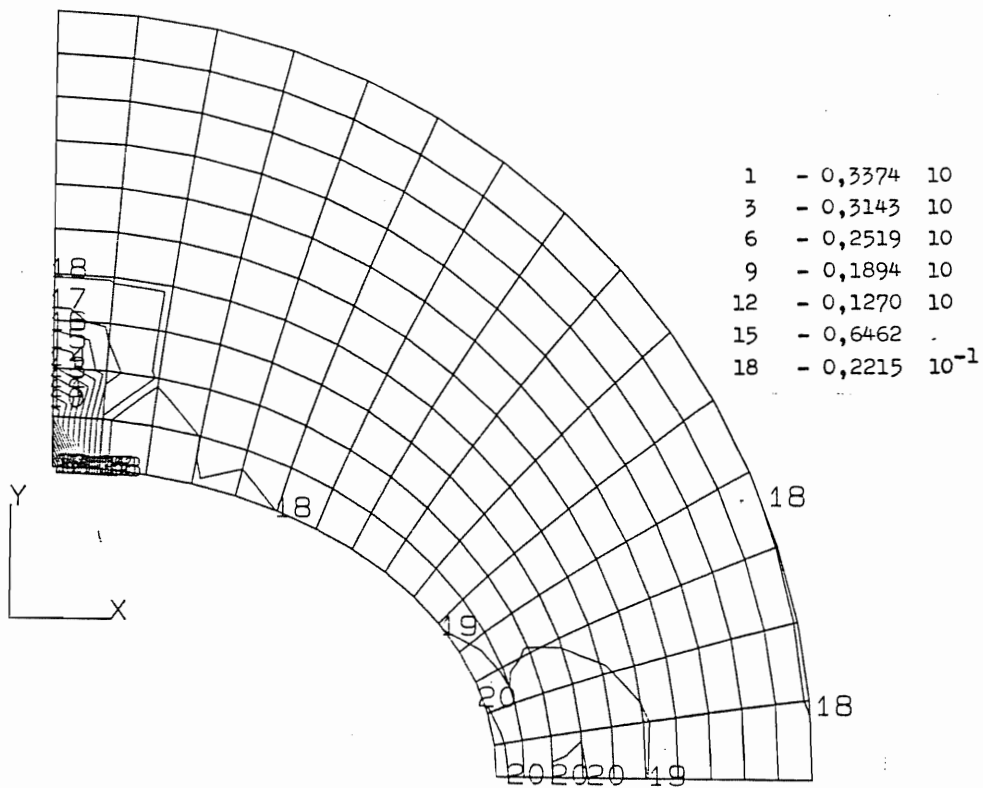
Slika 42.



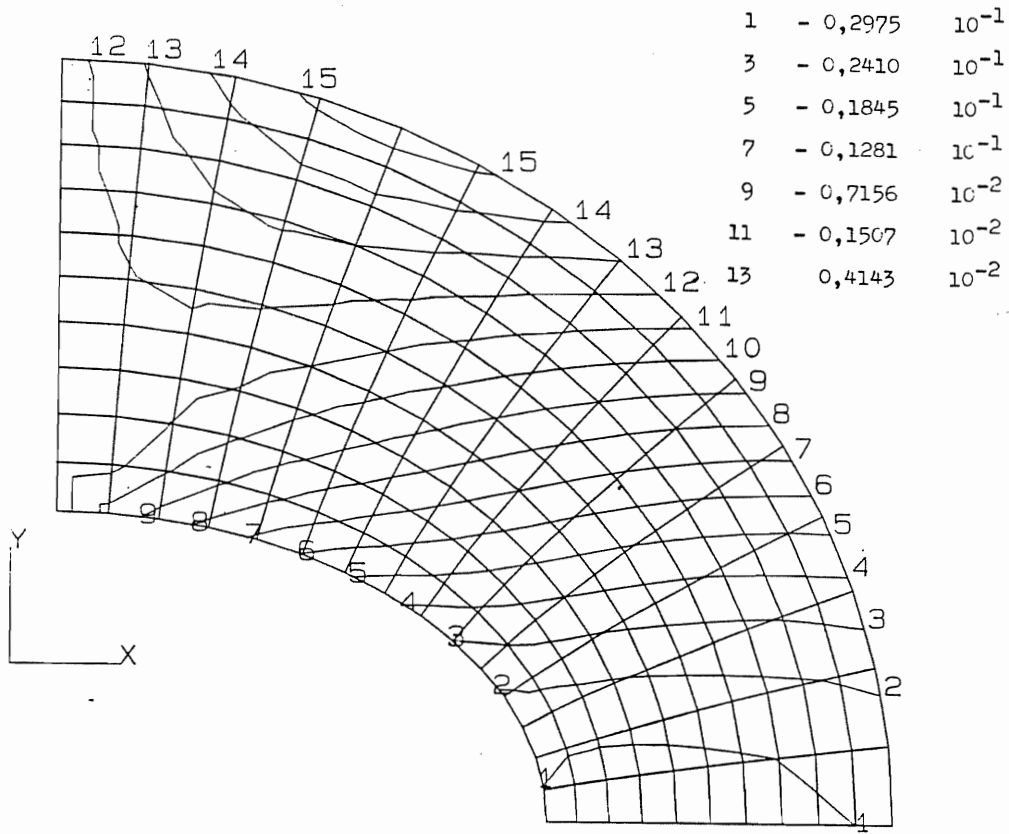
Slika 43.



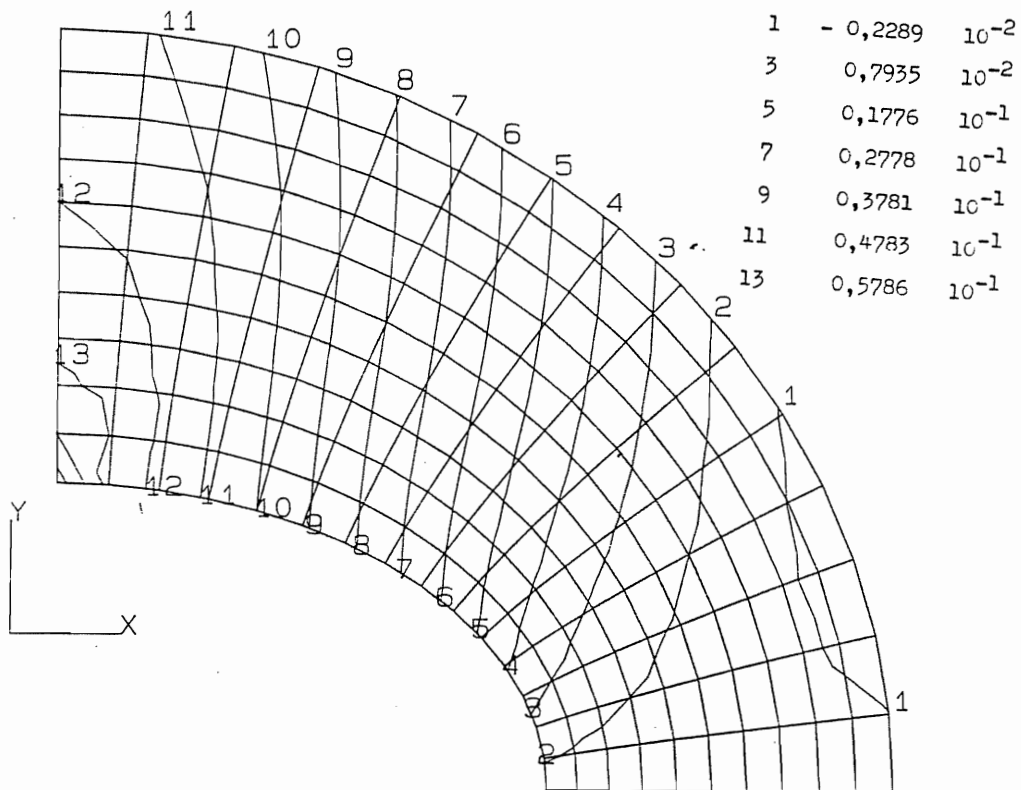
Slika 44.



Slika 45.



Slika 46.



Slika 47.

Za drugi slučaj opterećenja označen sa ELIS, odnosno kada koncentrisane sile dejstvuju na spoljašnjoj konturi u pravcu dužih poluosa elipse dobijaju se dijagrami rasporeda normalnih napona  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i smičućeg napona  $\tau_{xy}$  na spoljašnjoj konturi i dijagrami rasporeda normalnog napona  $\sigma_x$  u ranije naznačenim preseccima, kao što je prikazano na slici 48.

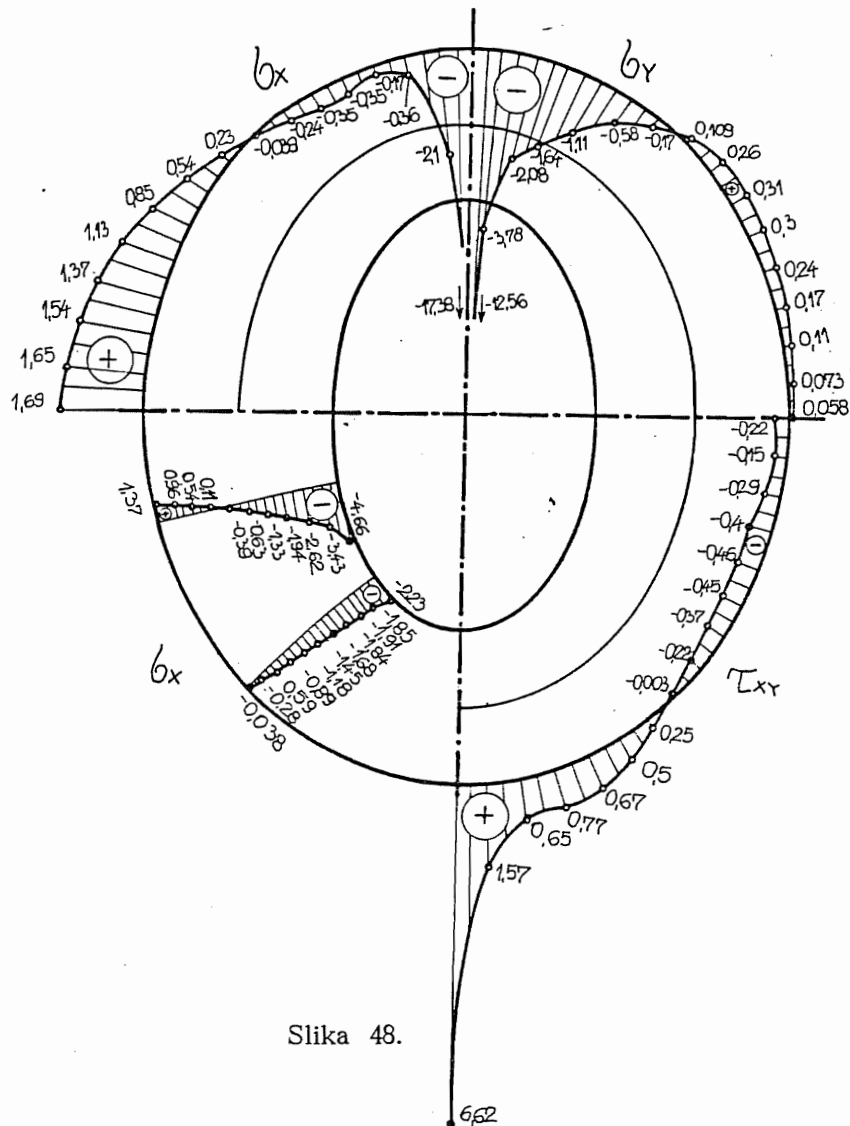
Na ovoj slici se uočava koncentracija napona na mestu dejstva koncentrisane sile na spoljašnjoj konturi. Na slici 49. prikazani su dijagrami rasporeda napona  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$ , a u preseccima su dati dijagrami rasporeda normalnog napona  $\sigma_y$ .

Na slici 50. prikazani su dijagrami rasporeda napona  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  u tačkama "središnje" elipse, kao i dijagrami rasporeda smičućeg napona  $\tau_{xy}$  u preseccima.

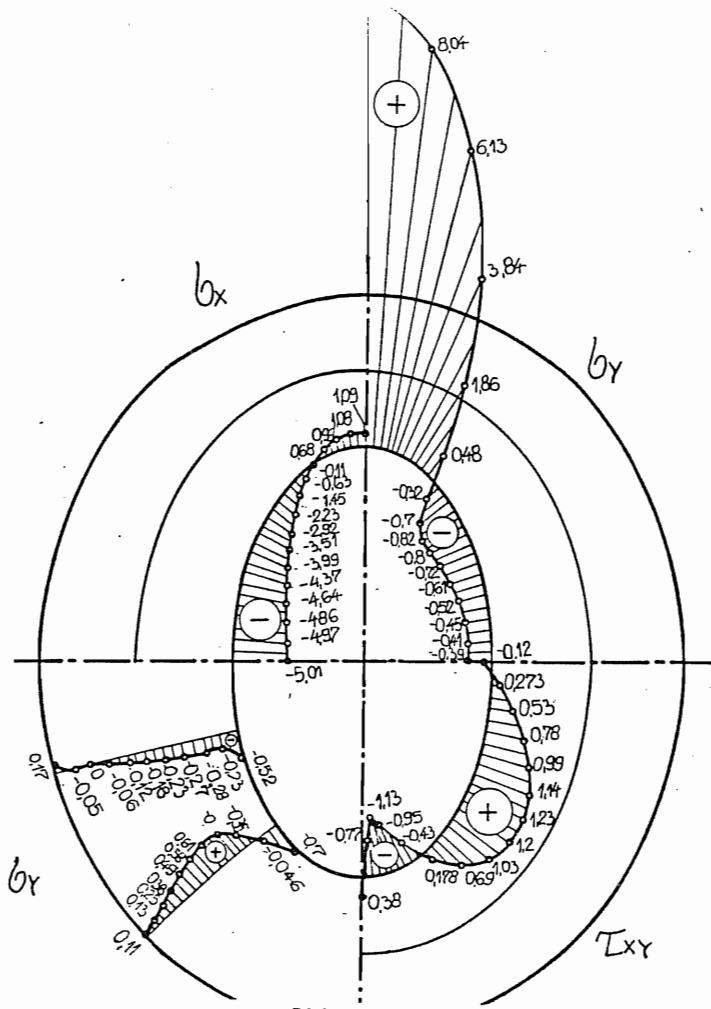
Na slici 51. prikazani su dijagrami glavnih normalnih napona  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , na spoljašnjoj konturi, kao i dijagram komponentnih pomeranja  $u$  i  $v$  u tačkama spoljašnje konture.

Na slici 52. dati su dijagrami glavnih normalnih napona  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , kao i dijagrami komponentnih pomeranja  $u$  i  $v$  u tačkama unutrašnje konture. Pošto su na slikama 51. i 52. dati glavni normalni naponi, a na konturama je jedan od glavnih normalnih napona jednak nuli ( $\sigma_1=0$  ili  $\sigma_2=0$ ), stoga se deo dijagrama označen sa (+) odnosi na  $\sigma_1$ , a deo dijagrama označen sa (-) na  $\sigma_2$ . Takođe, uočavaju se tačke u kojima su oba glavna normalna napona jednaka nuli, a koje razdvajaju zone pritiska i zone istezanja na konturama.

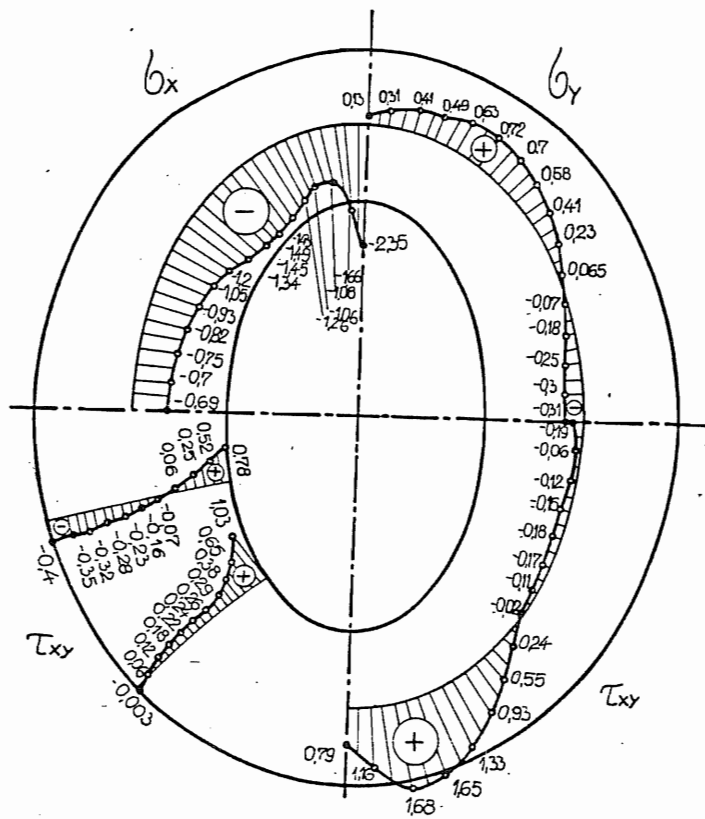
Na slici 66. dati su dijagrami glavnih normalnih napona  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , i komponentnih pomeranja  $u$  i  $v$  tačkaka "središnje" elipse.



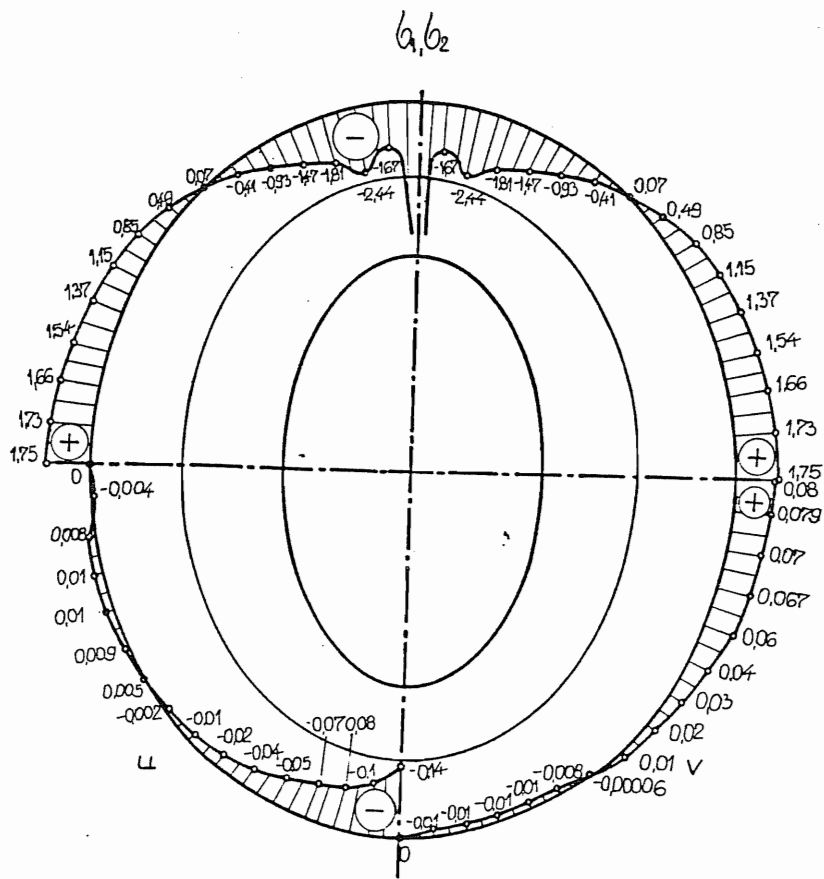
Slika 48.



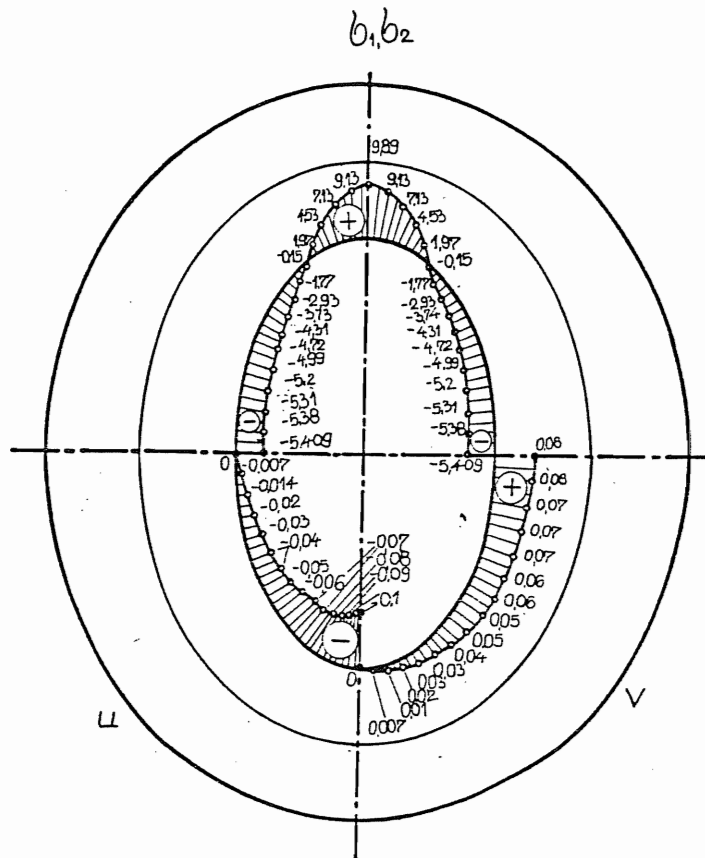
Slika 49.



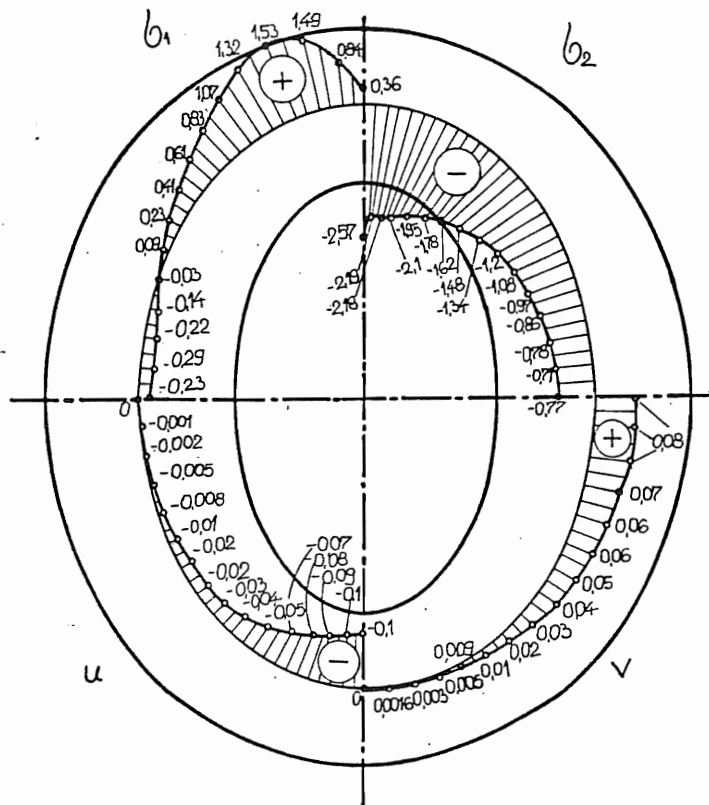
Slika 50.



Slika 51.



Slika 52.



Slika 53.

Na slikama 54., 55. i 56. prikazane su izolocije za normalne napone  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i smičući napon  $\tau_{xy}$ . Na ovim slikama uočava se koncentracija napona na spoljašnjoj konturi, u okolini tačke u kojoj dejstvuje koncentrisana sila.

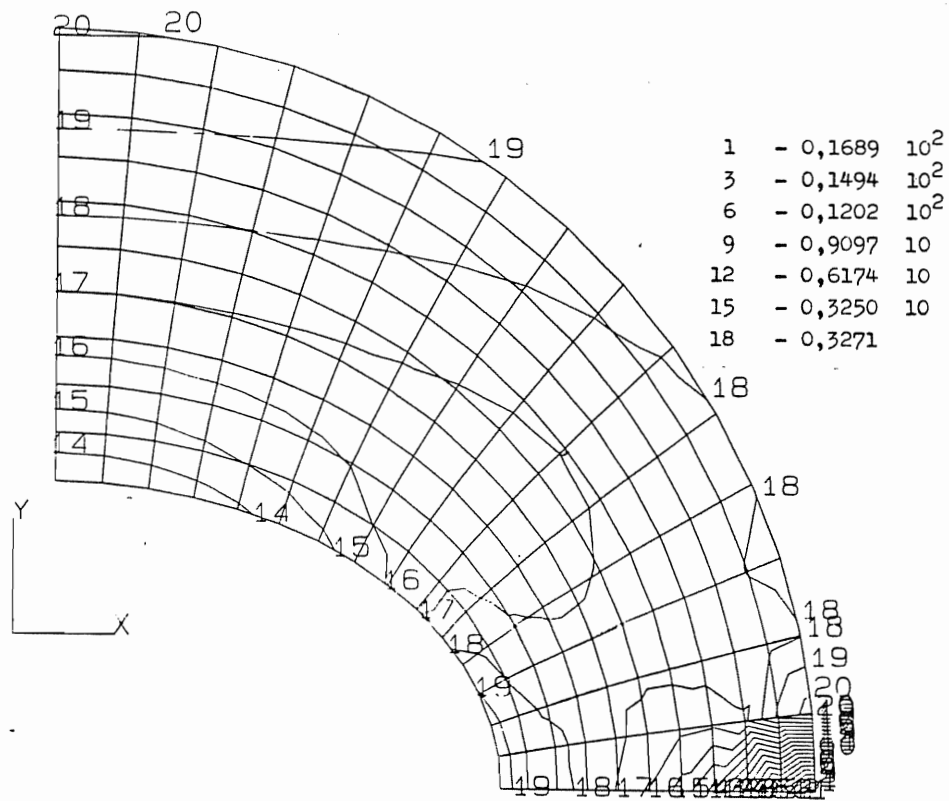
Na slikama 57. i 58. date su izolocije glavnih normalnih napona  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , na kojima se takođe uočavaju mesta koncentracije napona.

Na slikama 59. i 60. prikazane su izolocije za komponentna pomeranja  $u$  i  $v$ , na kojima se vodi da je najveće komponentno pomeranje  $u$  (pravac  $x$ -ose), u tački dejstva koncentrisane sile.

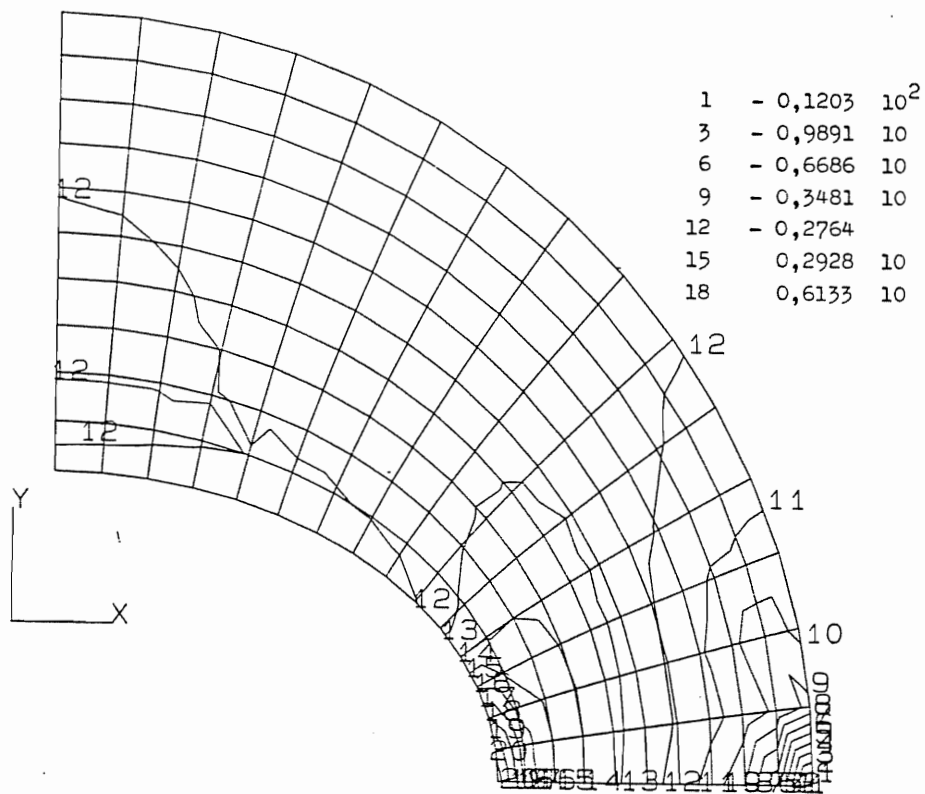
Za treći slučaj opterećenja označen sa ELIUS, a kod koga koncentrisane sile dejstvuju na spoljašnjoj i unutrašnjoj konturi, kao što je prikazano na slici 29. grafičkim post procesivanjem numeričkih rezultata dobijena su izopolja.

Izopolja su oblasti na ploči u kojima se data veličina kreće u određenim granicama. Tako na slikama 61., 62. i 63. imamo prikazana izopolja normalnih napona  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i smičućeg napona  $\tau_{xy}$ , a na slikama 64. i 65. prikazana su izopolja glavnih normalnih napona  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ .

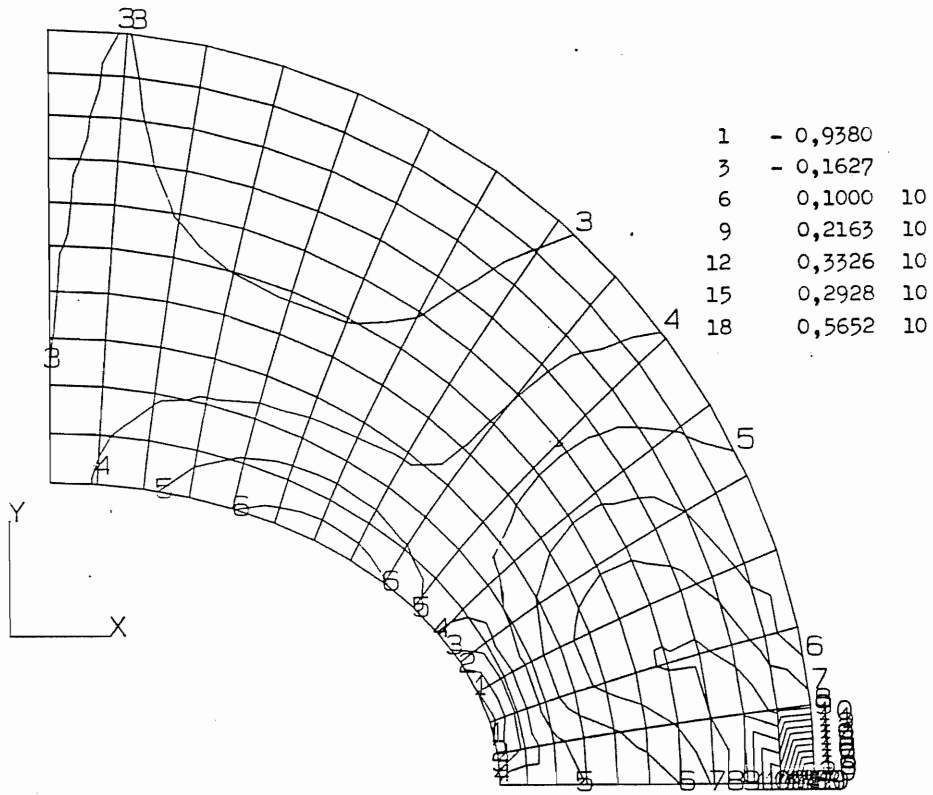




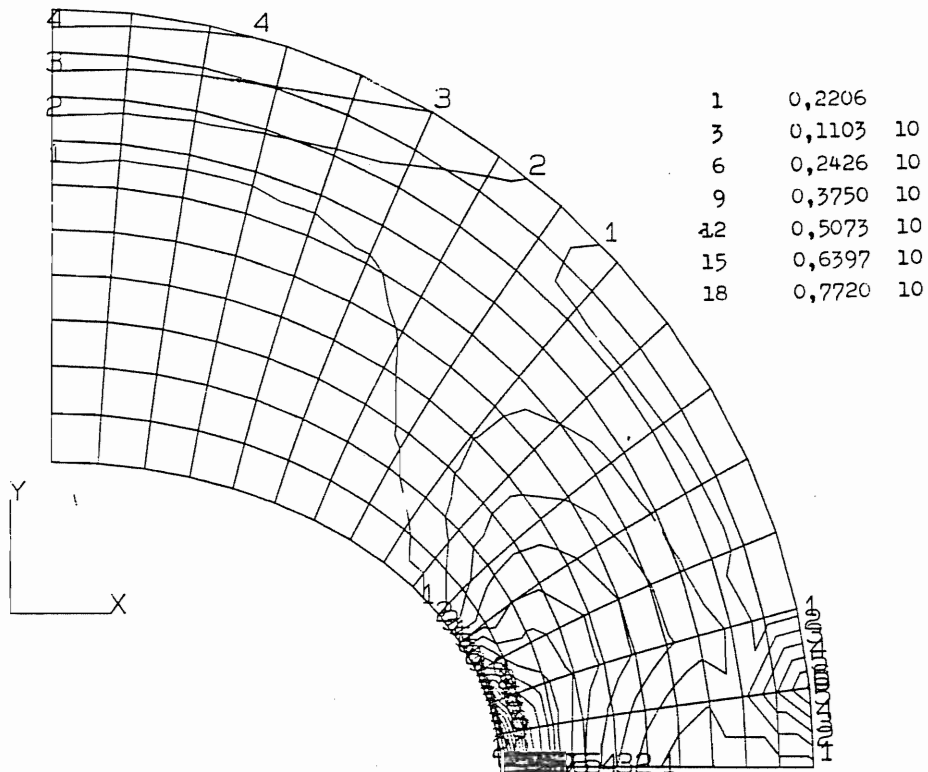
Slika 54.



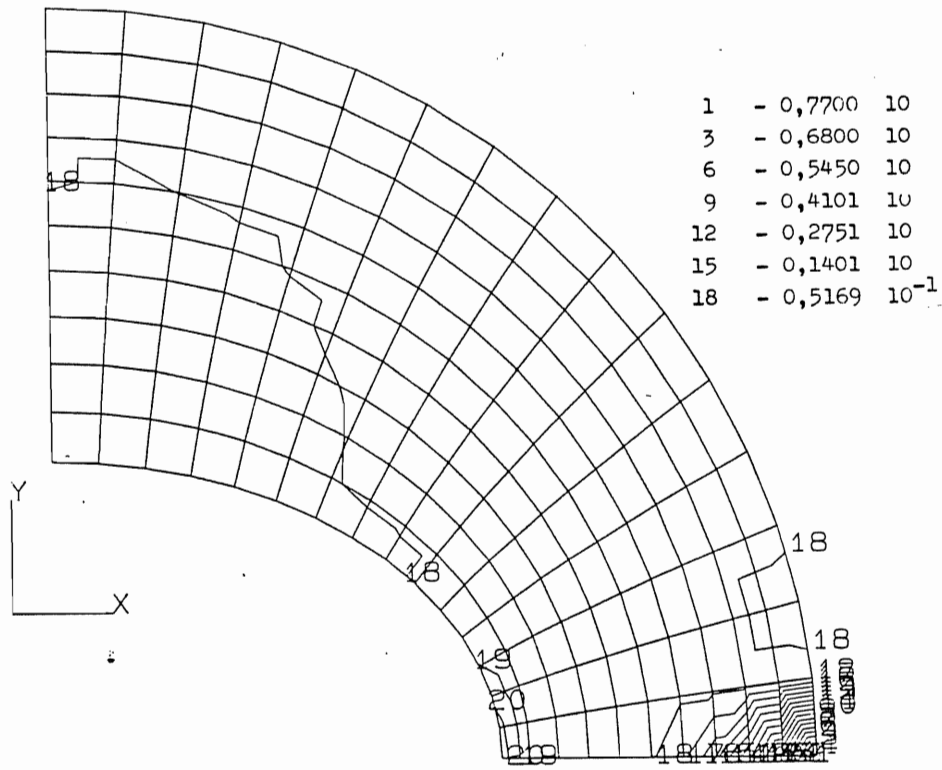
Slika 55.



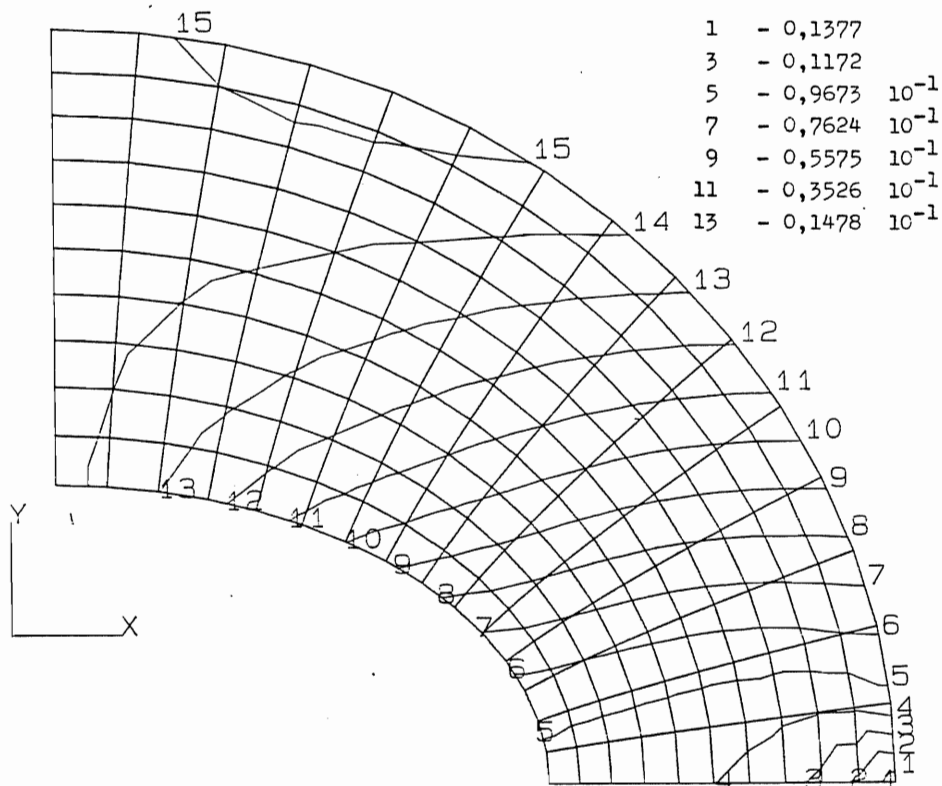
Slika 56.



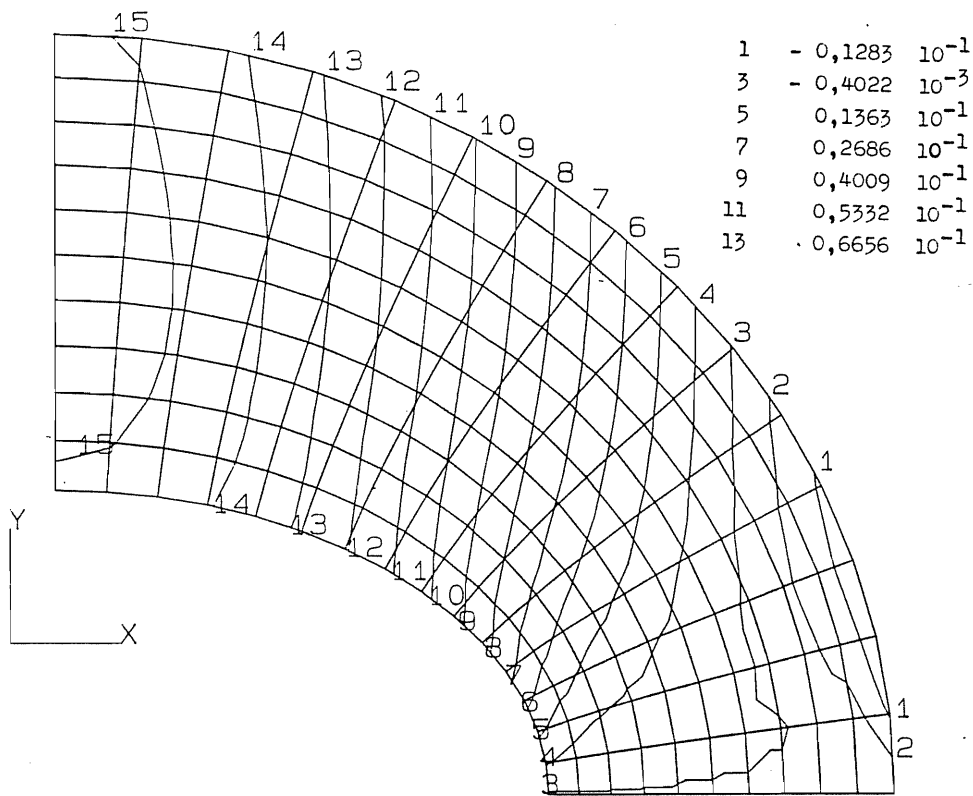
Slika 57.



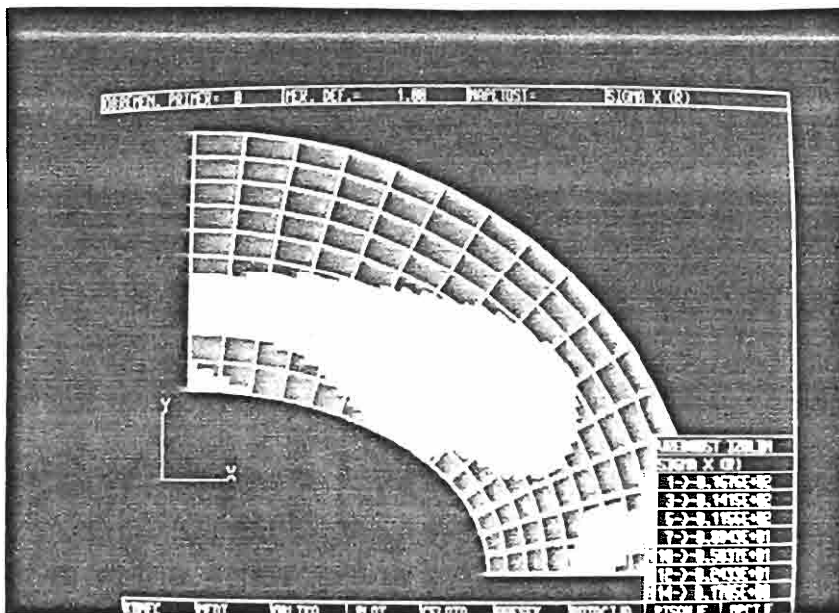
Slika 58.



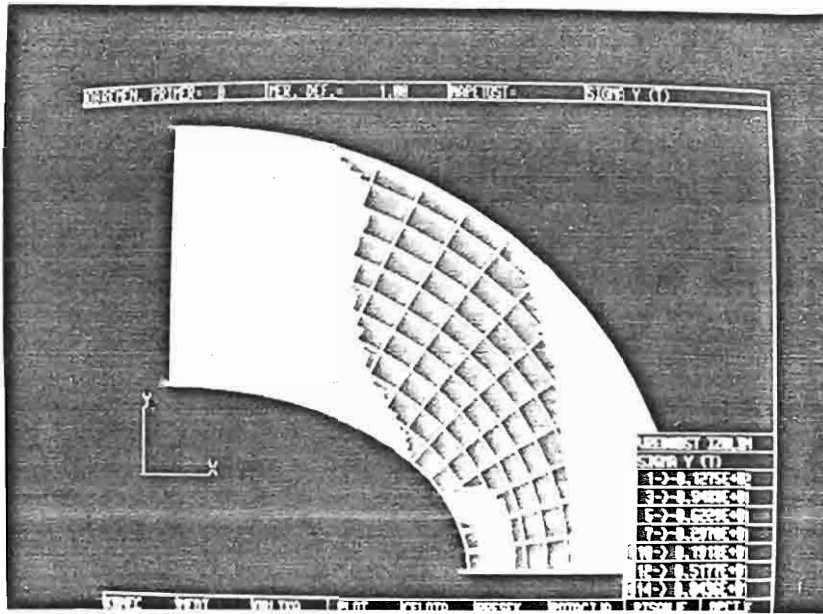
Slika 59.



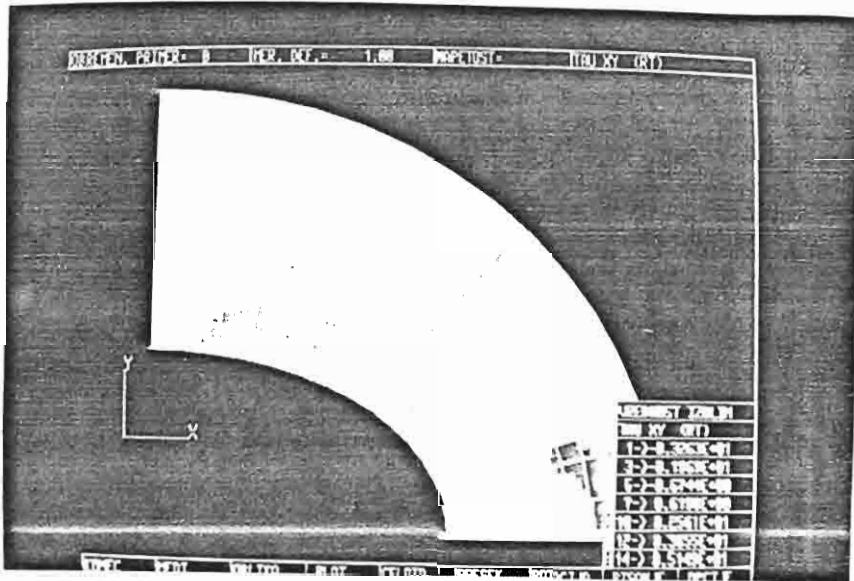
Slika 60.



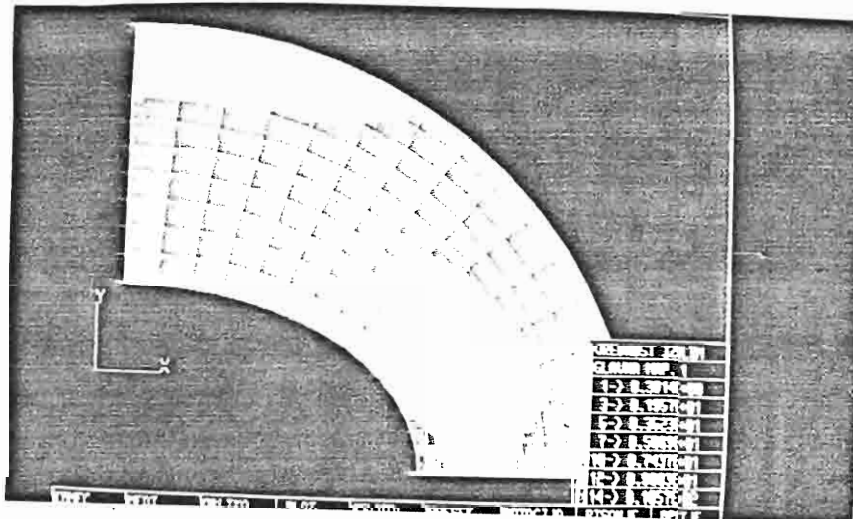
Slika 61.



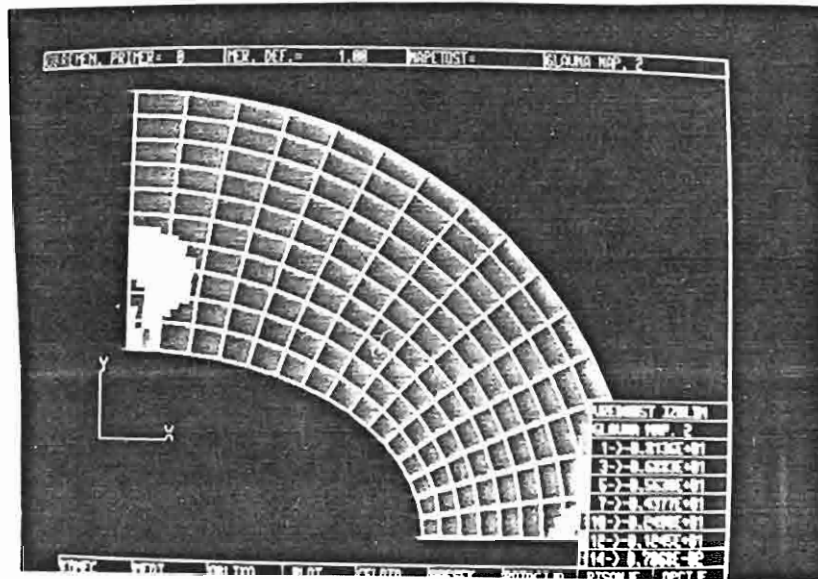
Slika 62.



Slika 63.

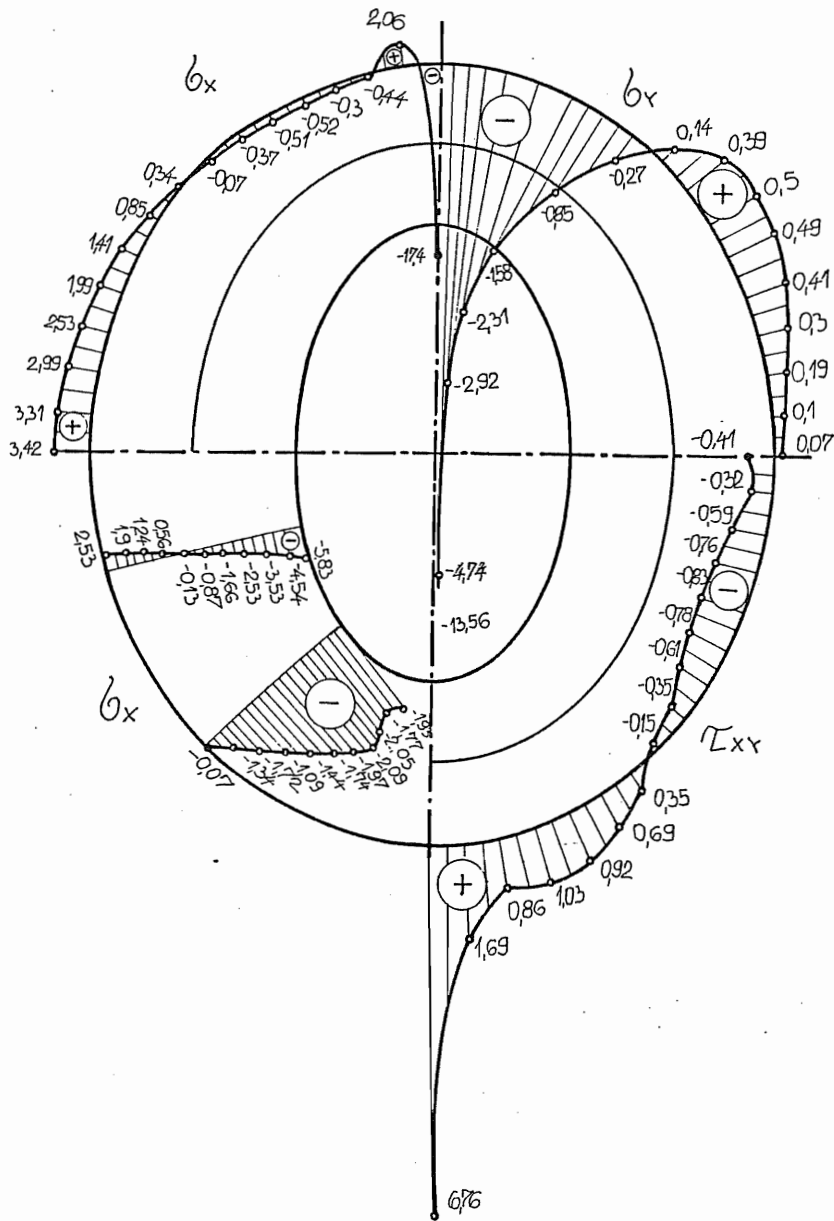


Slika 64.

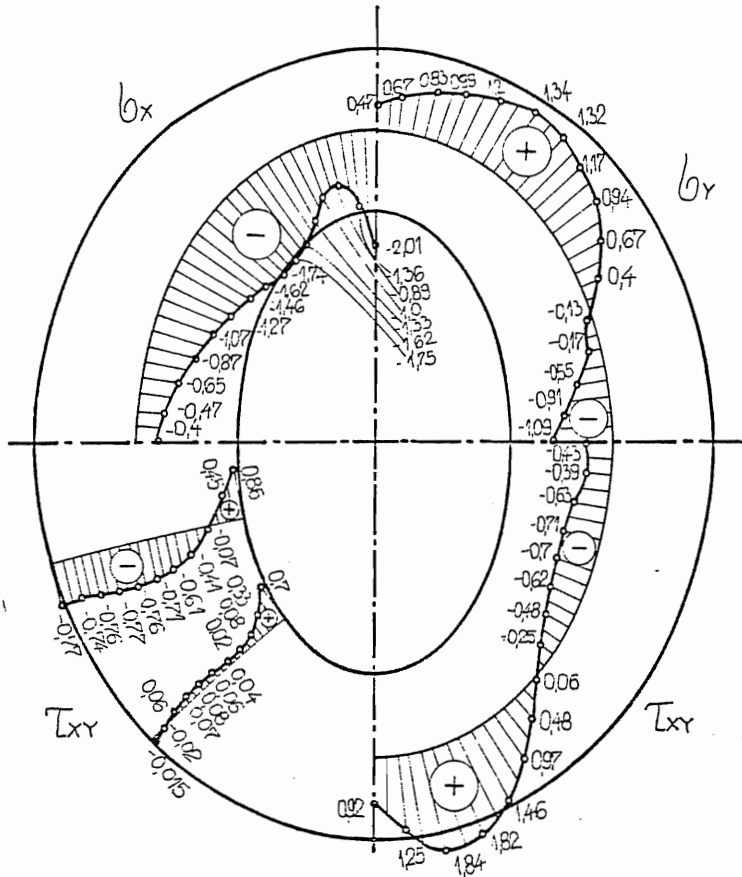
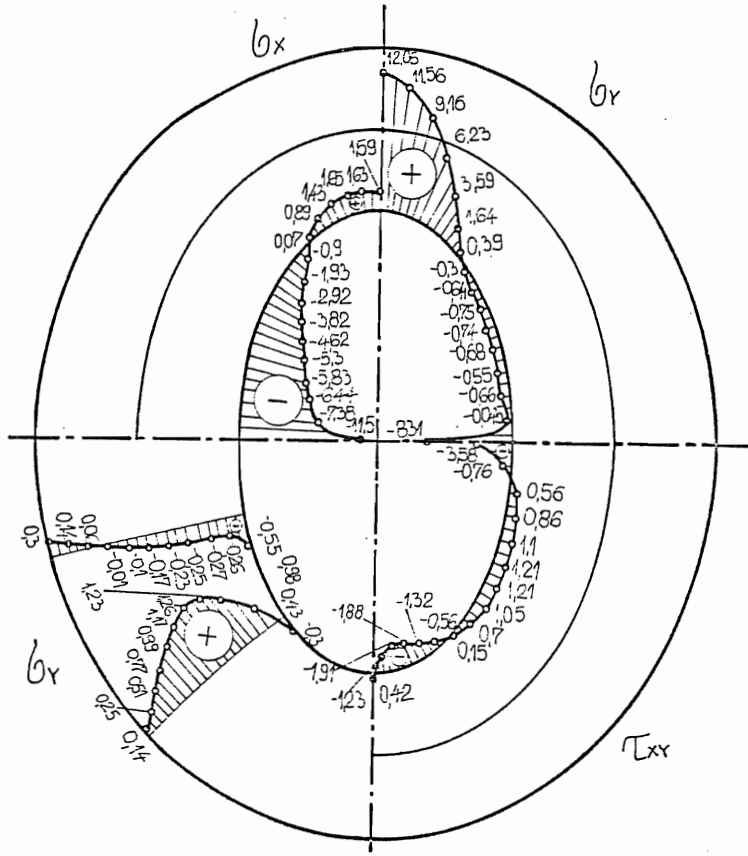


Slika 65.

Na slici 66. za ovaj slučaj opterećenja, prikazani su dijagrami normalnih napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  i smičućeg napona  $\tau_{xy}$  u tačkama spoljašnje konture, kao i dijagrami normalnog napona  $\sigma_x$  u presecima. Na slici 67. prikazani su dijagrami normalnih napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  i smičućeg napona  $\tau_{xy}$  u tačkama unutrašnje konture, kao i dijagrami normalnog napona  $\sigma_y$  u zadatim presecima. Na ove dve slike uočava se superpozicija rasporeda napona za prva dva slučaja opterećenja, kao i koncentracija napona na mestu dejstva koncentrisanih sila. Na slici 68. dati su dijagrami normalnih napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  i u tačkama "središnje" elipse, kao i dijagrami rasporeda smičućeg napona  $\tau_{xy}$  u datim presecima. Na slici 69. dati su dijagrami glavnih normalnih napona  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  i komponentnih pomeranja u i v za tačke na spoljašnjoj konturi eliptičnog prstena. Na ovoj slici se uočava koncentracija napona u lokalnoj zoni dejstva sile, a takođe i pojava opadanja napona u blizini mesta na kome dejstvuje koncentrisana sila. Na slici 70. prikazani su dijagrami glavnih normalnih napona  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  i komponentnih pomeranja u i v u tačkama na unutrašnjoj konturi. Na ovoj kao i na predhodnoj slici se uočavaju tačke na konturama u kojima su  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  i koje razdvajaju zone istezanja i pritiska na konturama. Dijagrami glavnih normalnih napona  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  i komponentnih pomeranja u i v za tačke na središnjoj elipsi prikazani su na slici 71. Na slikama 72., 73. i 74. prikazane su izololinije normalnih napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  i smičućeg napona  $\tau_{xy}$ . Ovde se mogu uočiti mesta koncentracije napona i oblasti malih promena napona. Izololinije glavnih normalnih napona  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  prikazani su na slikama 75. i 76. Izololinije komponentnih pomeranja u i v za ovaj slučaj opterećenja date su na slikama 77. i 78. U Prilogu VI na strani 208 dati su listinzi sa rezultatima za slučaj opterećenja označen sa ELIUS.

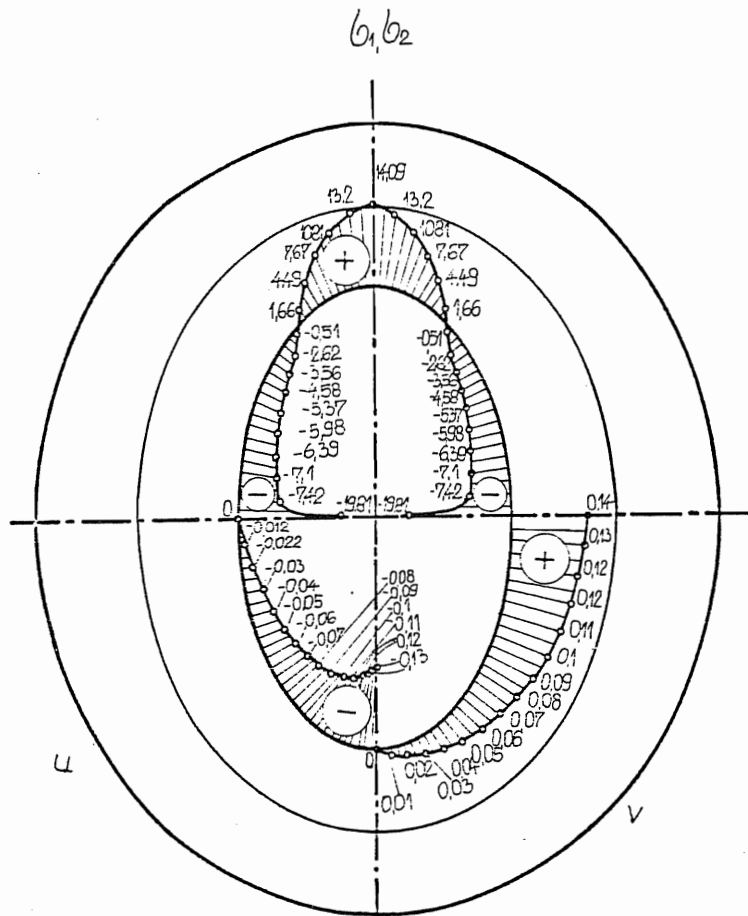
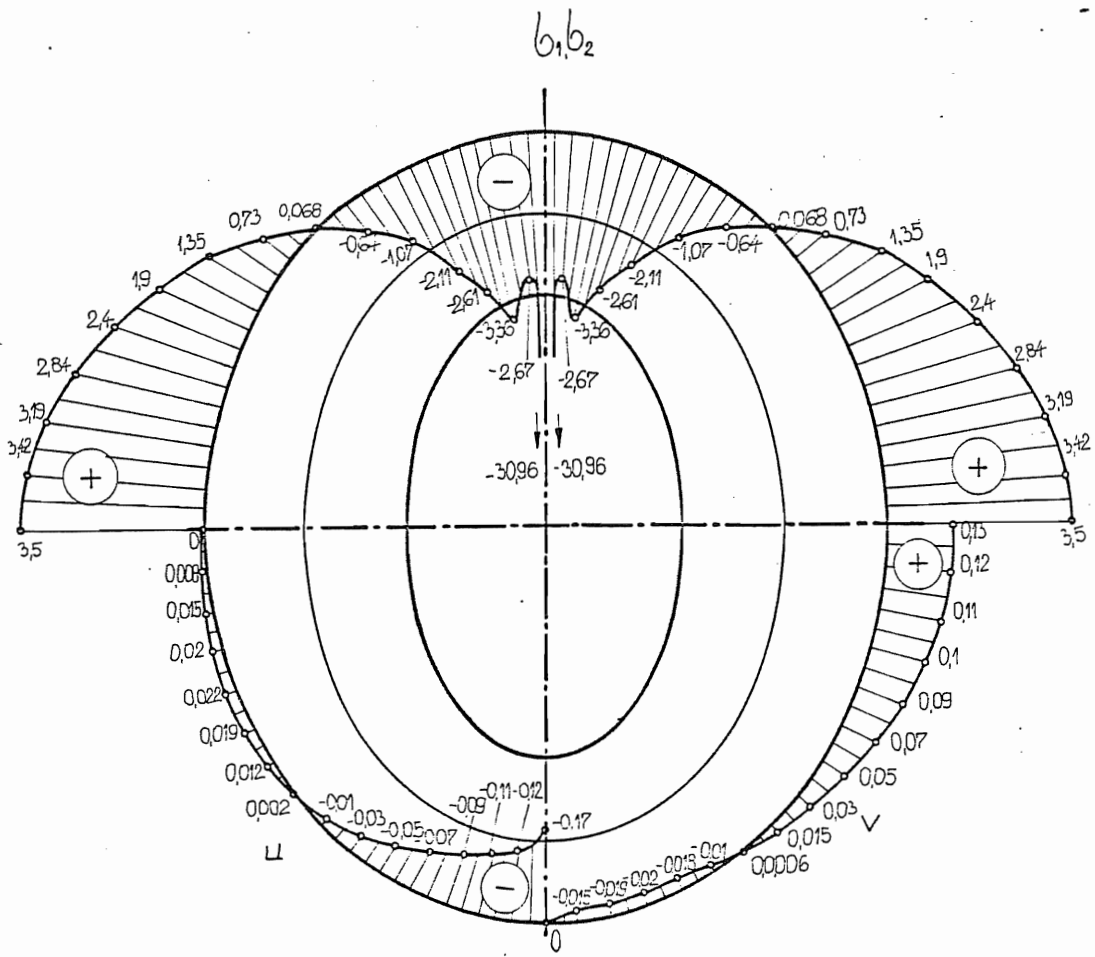


Slika 66.

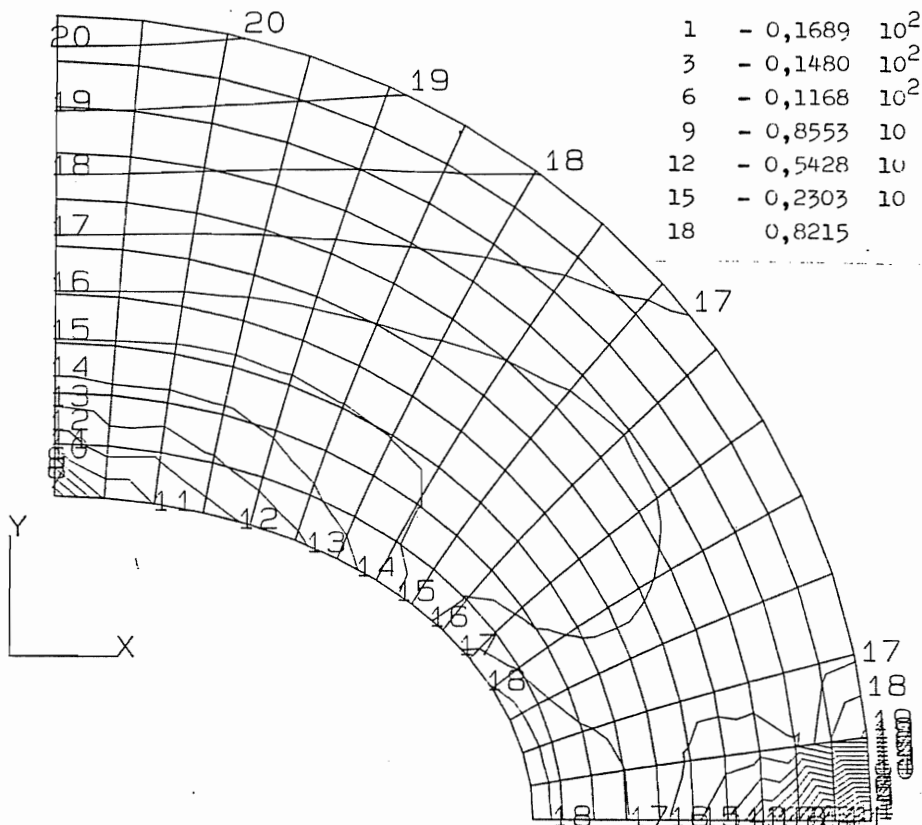
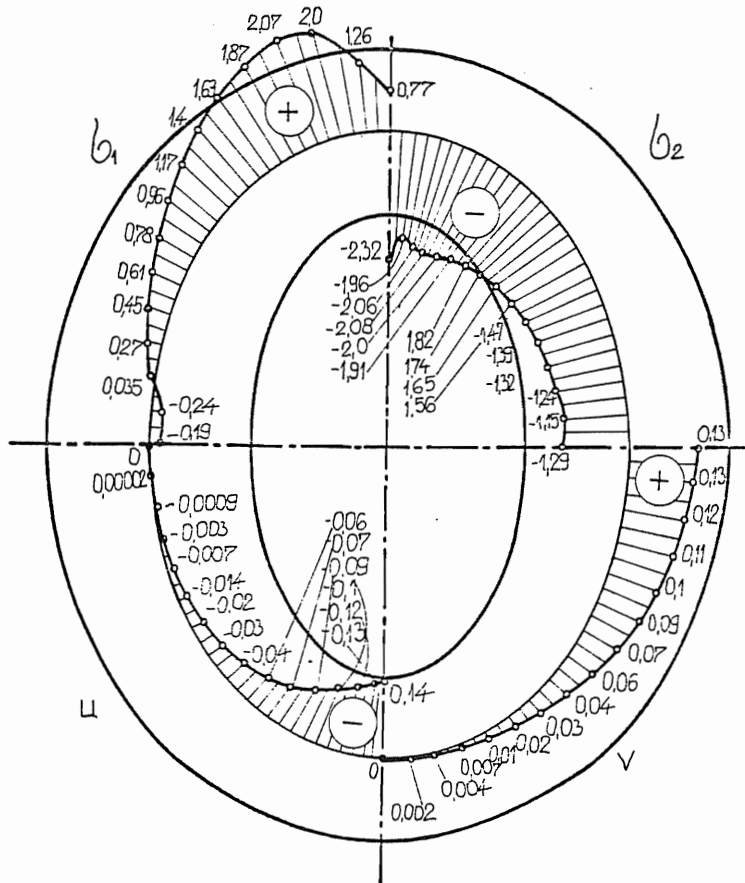


Slike 67. i 68.

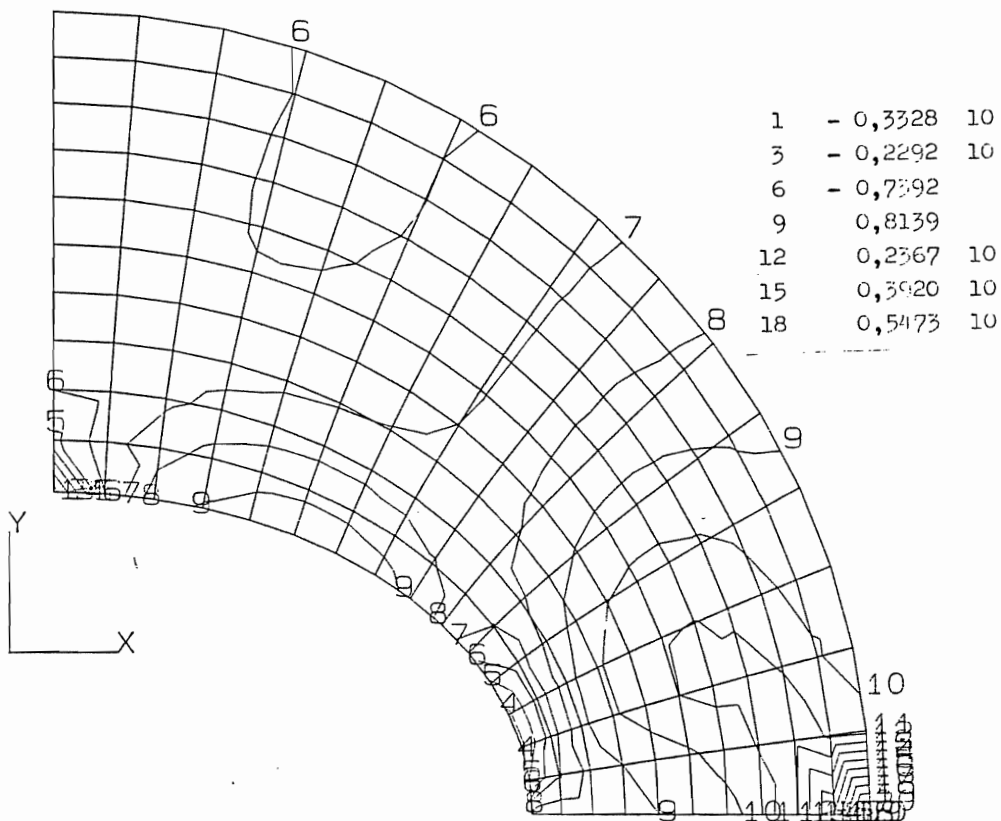
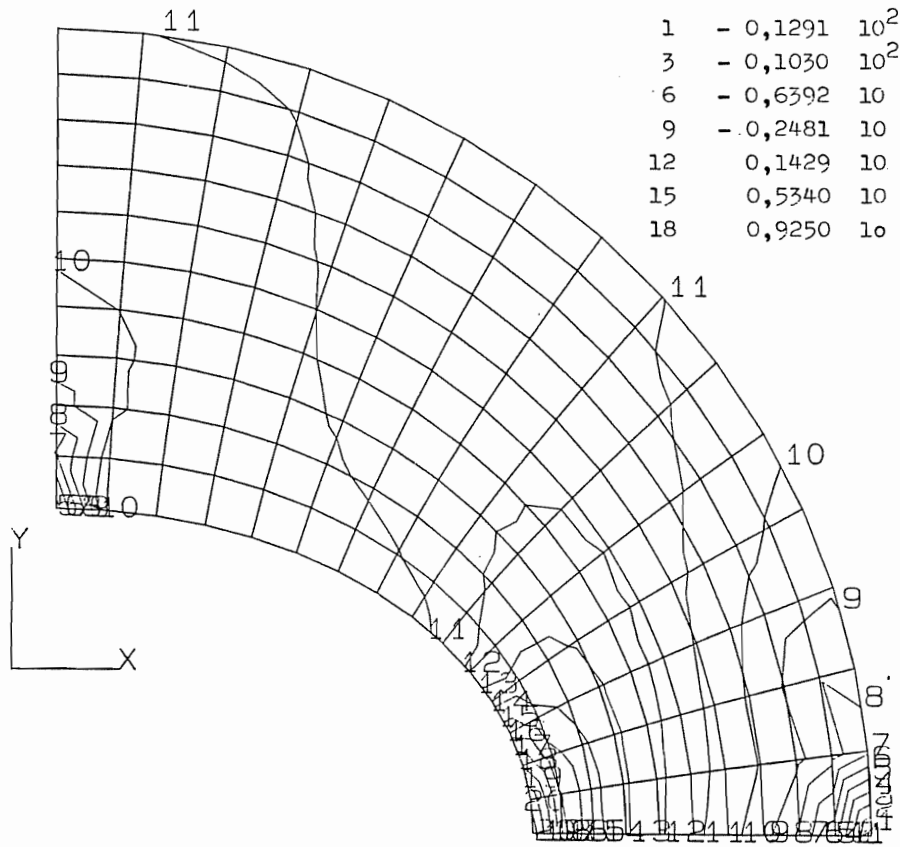




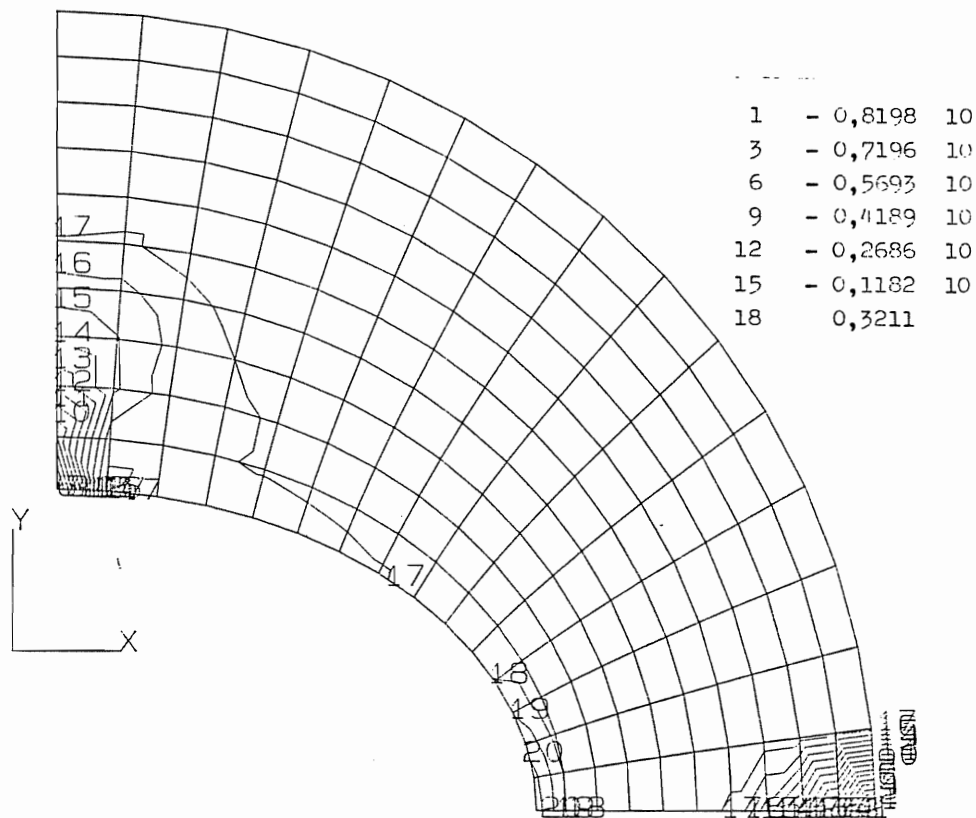
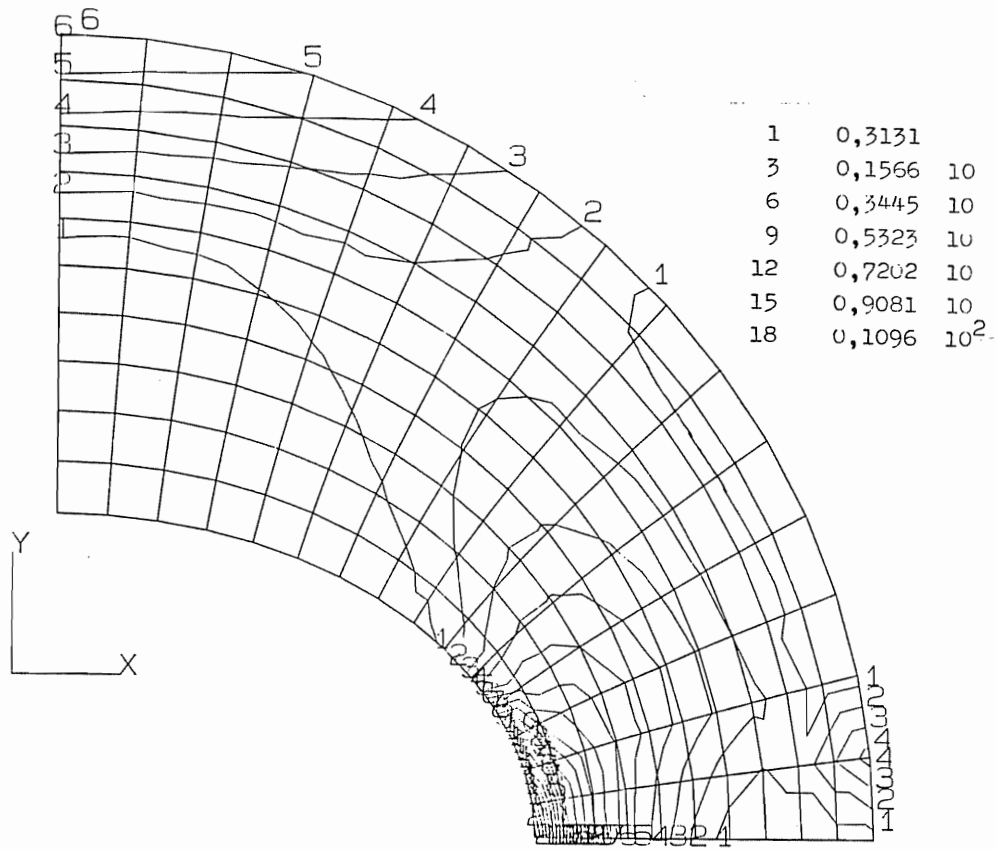
Slike 69. i 70.



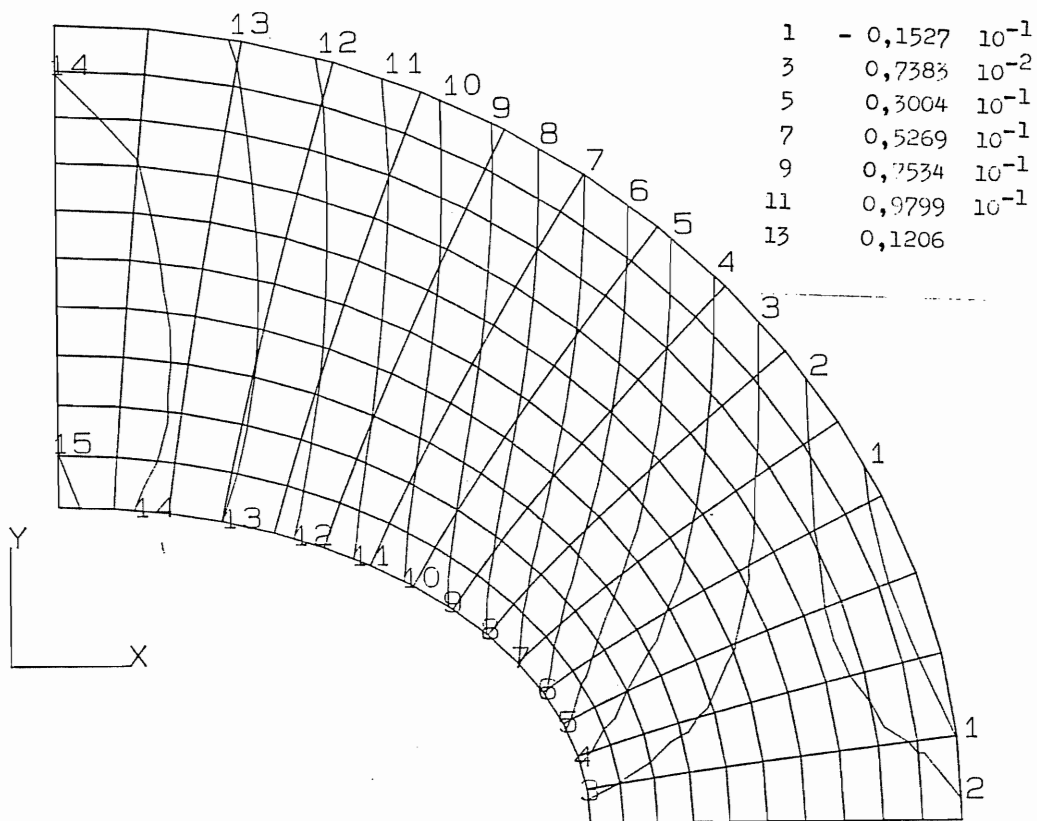
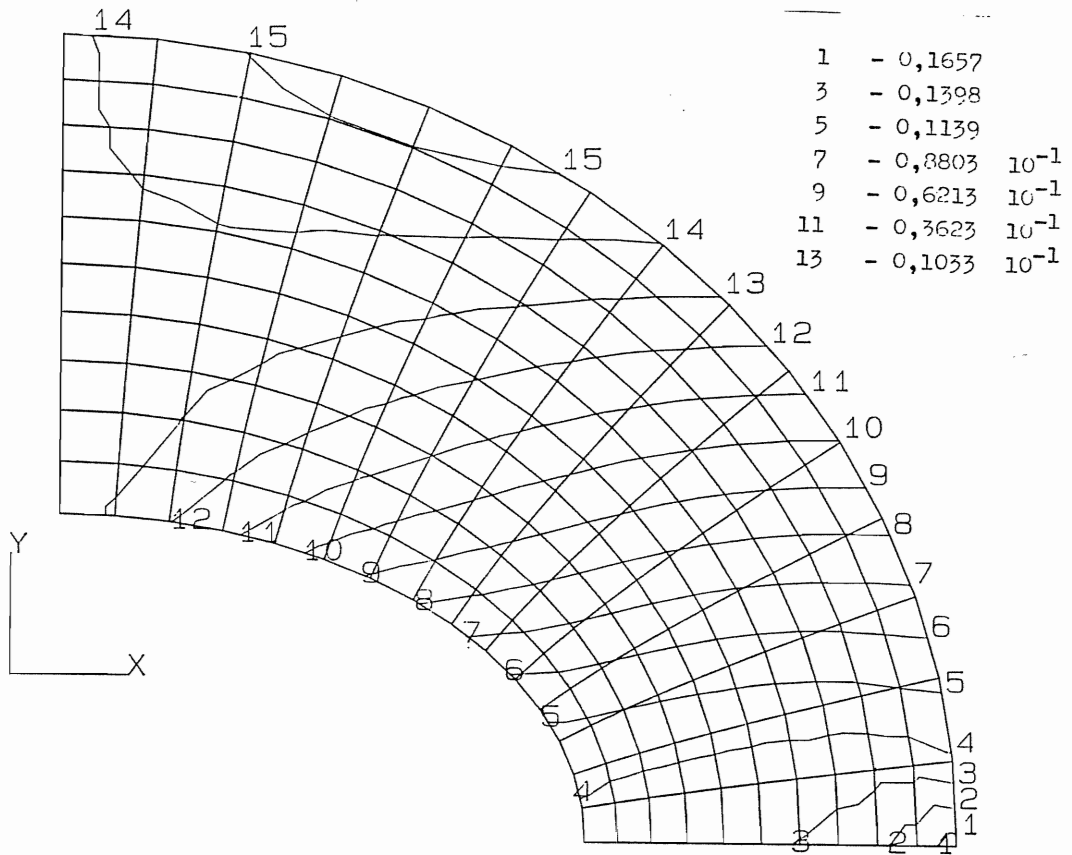
Slike 71. i 72.



Slike 73. i 74.

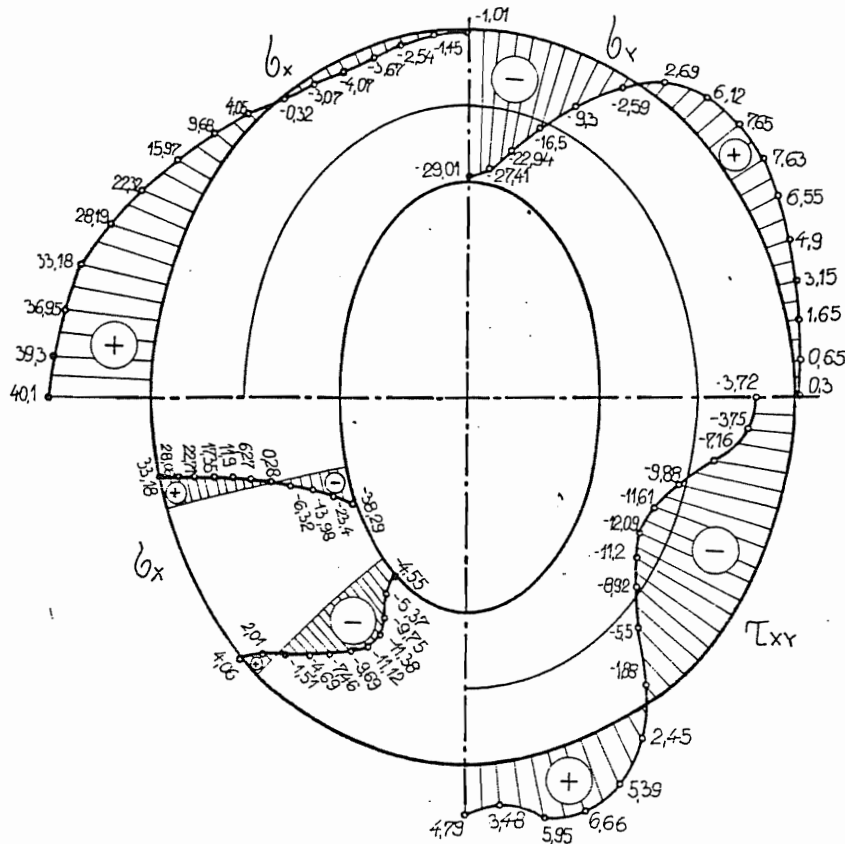


Slike 75. i 76.



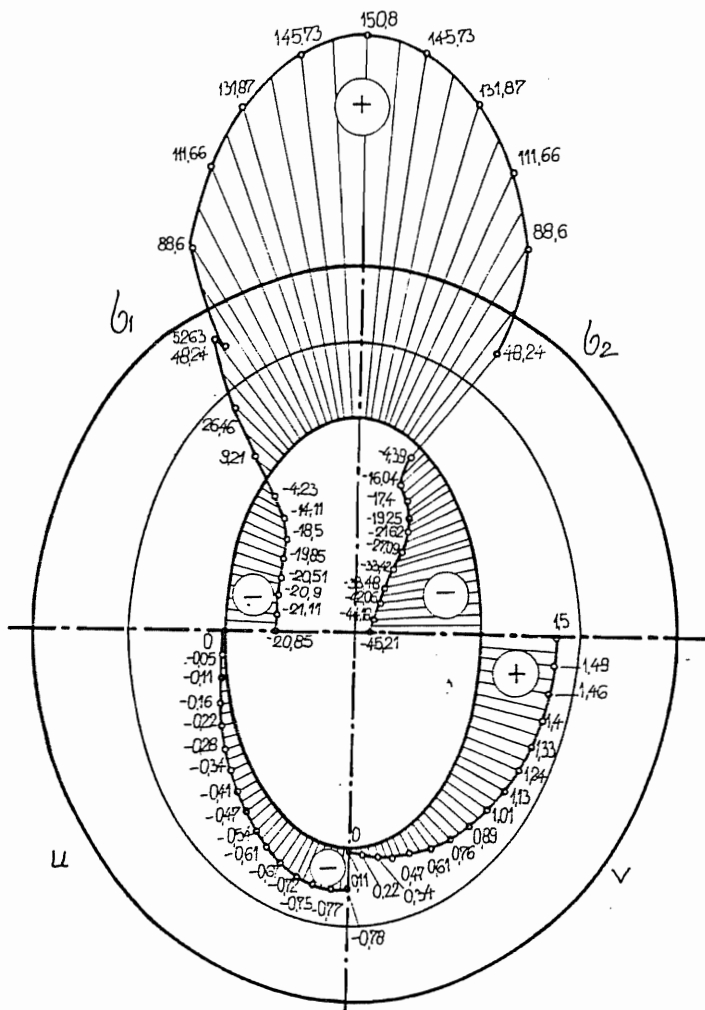
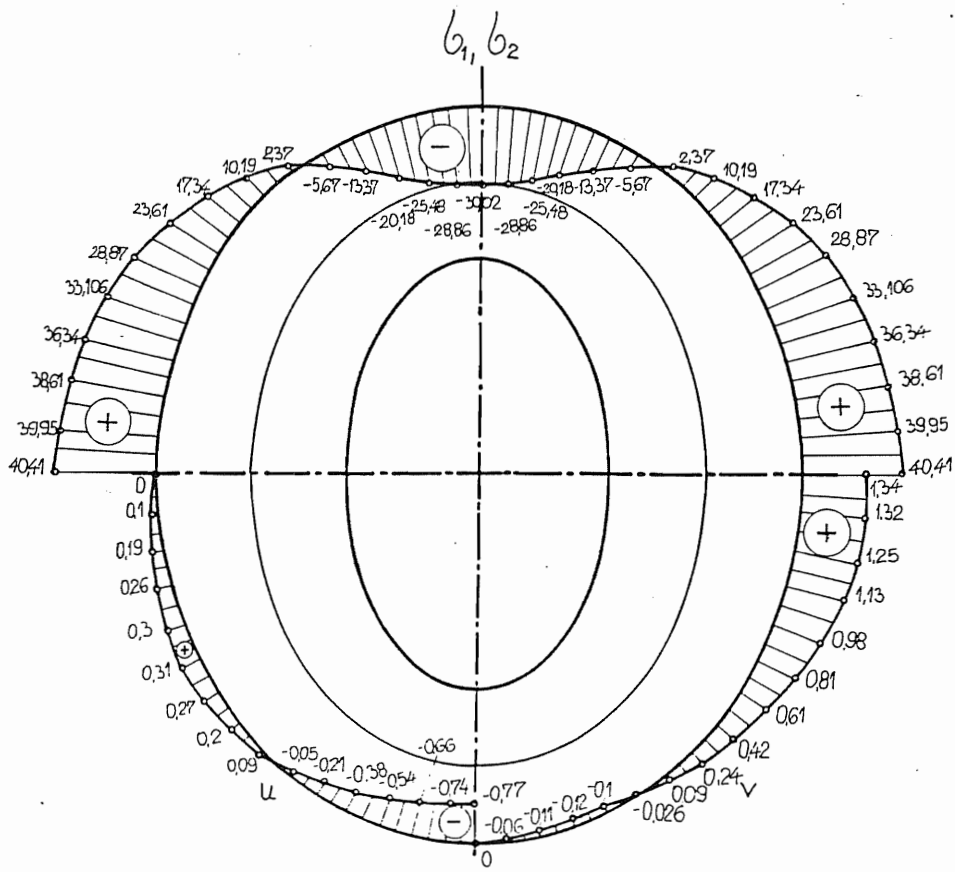
Slike 77. i 78.

Za četvrti slučaj opterećenja označen kao ELIUK 60 dobijeni su dijagrami rasporeda normalnih napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  i smičućeg napona  $\tau_{xy}$ , za tačke na spoljašnjoj konturi prikazanoj na slici 79. Na istoj slici prikazan je raspored normalnog napona  $\sigma_x$  u zadatim presecima. Uočava se sličnost ovih dijagrama sa dijagramima dobijenim za opterećenje koncentrisanom silom na unutrašnjoj konturi ELIU. Na slici 80. prikazani su dijagrami normalnih napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  i smičućeg napona  $\tau_{xy}$  na unutrašnjoj konturi i dijagrami napona  $\sigma_y$  u zadatim presecima. Na slici 81. dati su dijagrami napona  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  u tačkama "središnje" elipse i dijagrami smičućeg napona  $\tau_{xy}$  u presecima. Dijagrami glavnih normalnih napona  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  i komponentnih pomeranja  $u$  i  $v$  za tačke na spoljašnjoj konturi, unutrašnjoj konturi i "središnjoj" elipsi prikazani su na slikama 82., 83. i 84. Sličnost ovih dijagrama sa dijagramima dobijenim za slučaj opterećenja ELIU je očigledna. Pri tome se na dijagramima glavnih normalnih napona  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  uočavaju tačke na konturama eliptičnog prstena koje rzdvajaju zone pritiska i istezanja. Na slikama 85., 86. i 87. prikazane su izolinije normalnih napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  i smičućeg napona  $\tau_{xy}$ . Na slikama 88. i 89. prikazane su izolinije glavnih normalnih napona  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , a na slikama 90. i 91. izolinije komponentnih pomeranja  $u$  i  $v$  za ovaj slučaj opterećenja. Numerički rezultati za ovaj slučaj opterećenja na osnovu kojih su crtani dijagrami dati su u Prilogu VI na strani 208.



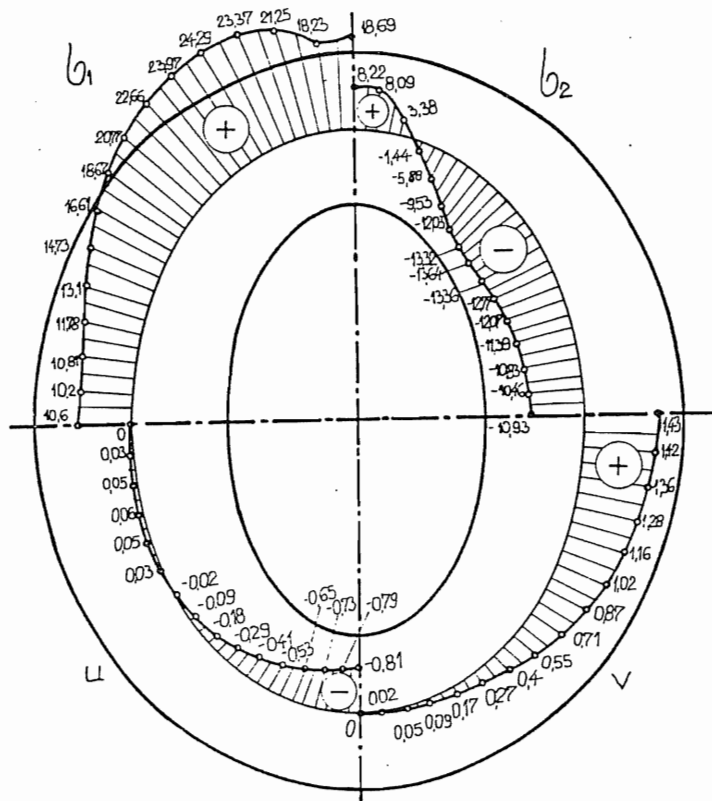
Slika 79.



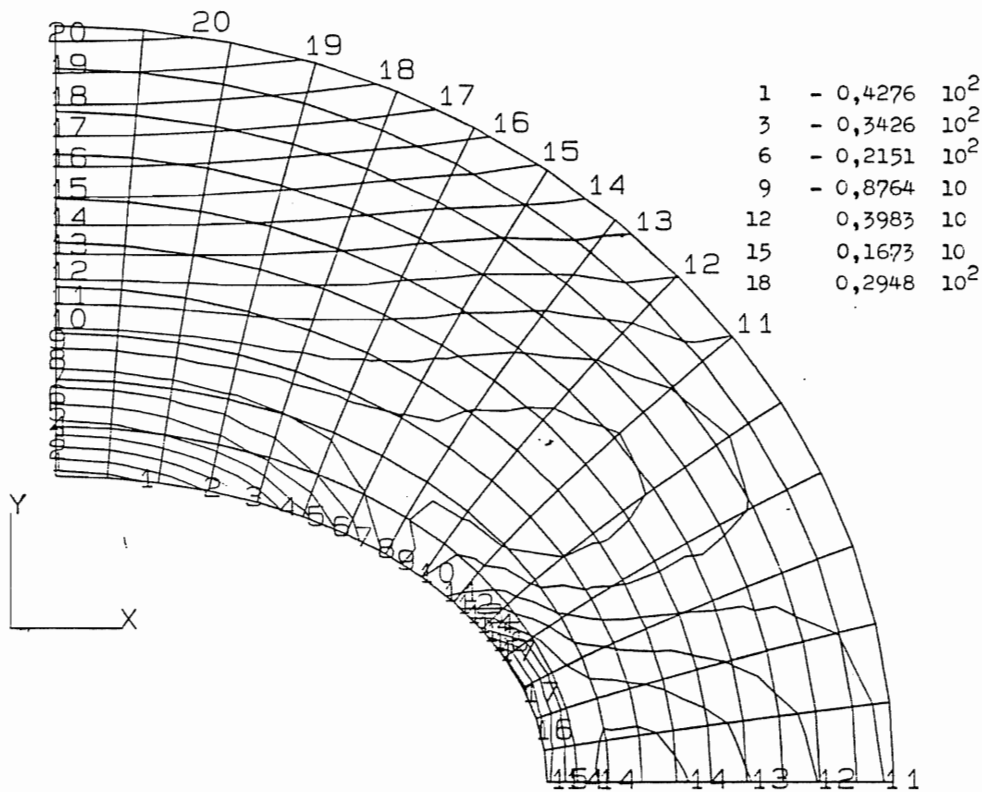


Slike 82 i 83

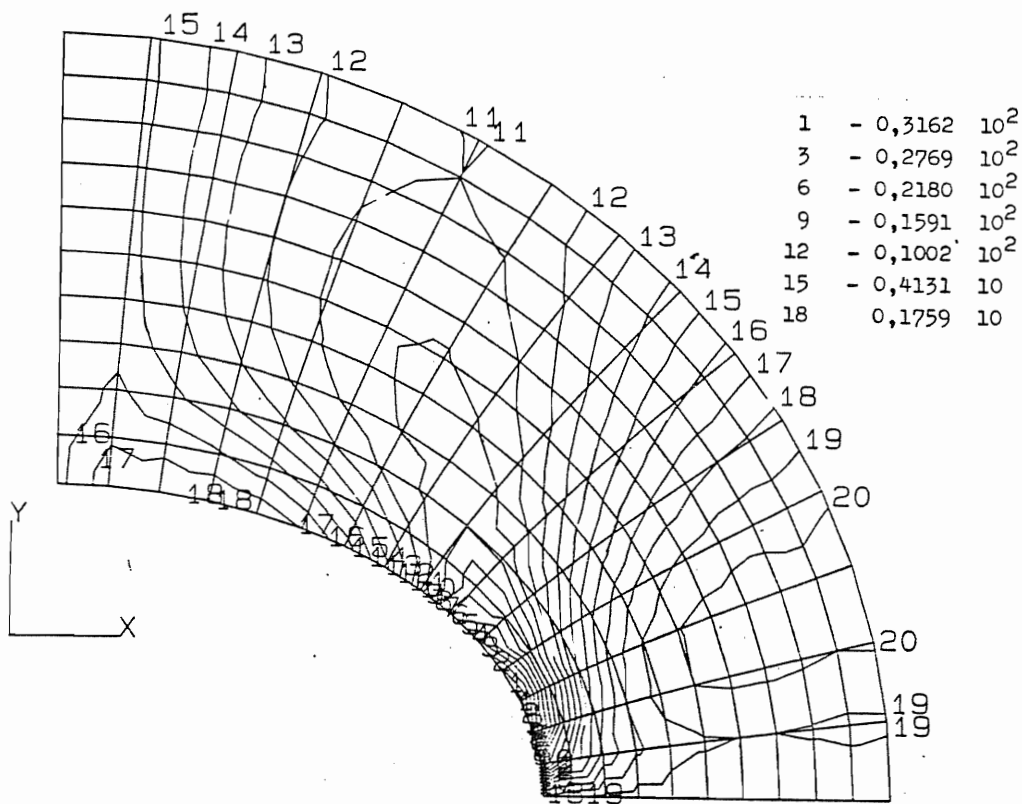
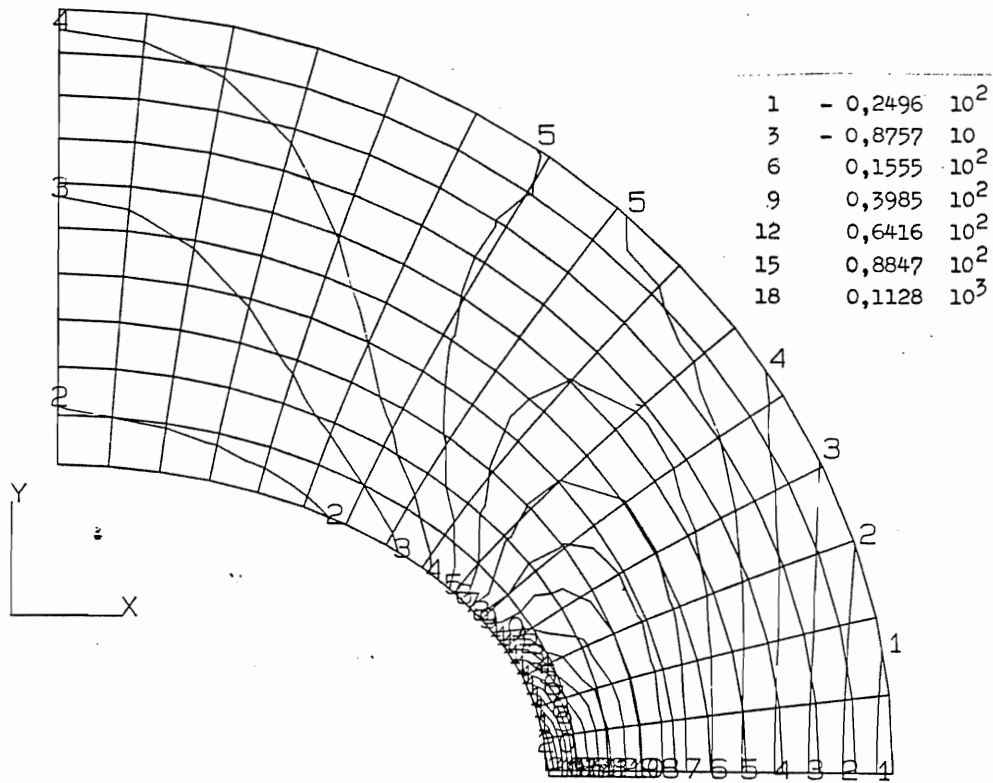




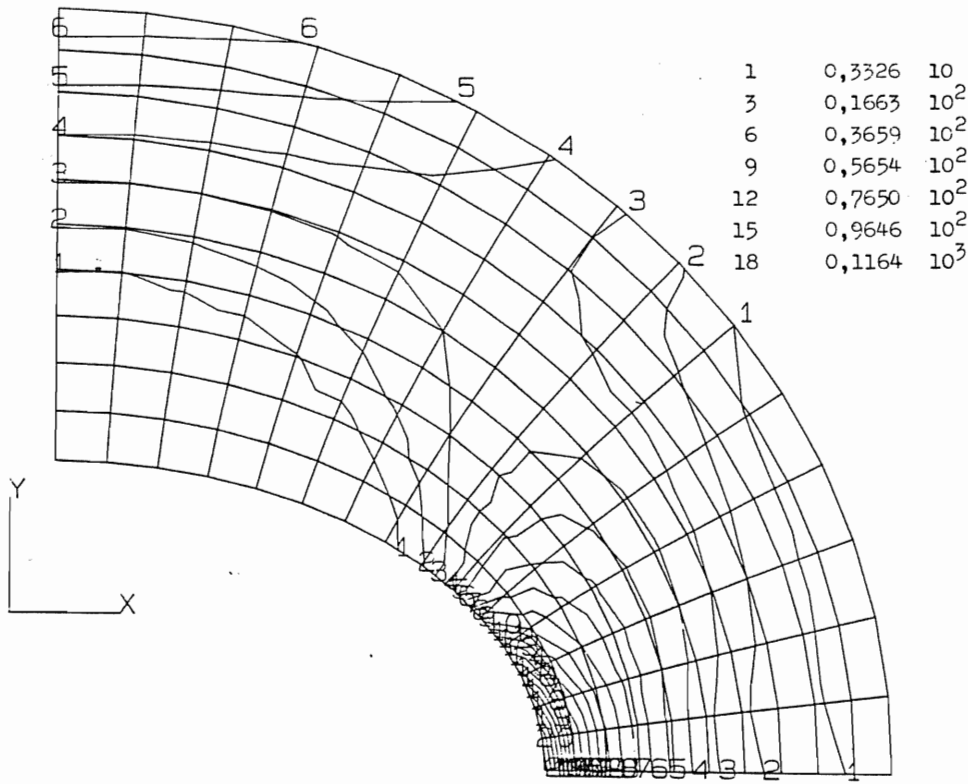
Slika 84.



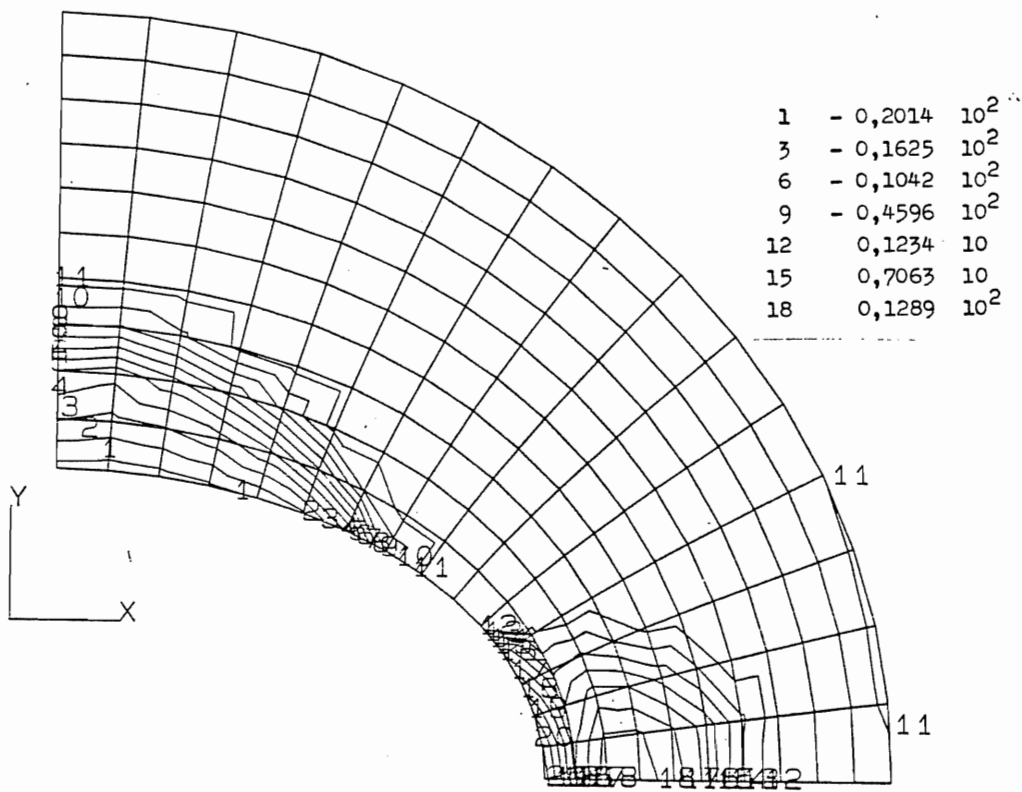
Slika 85.



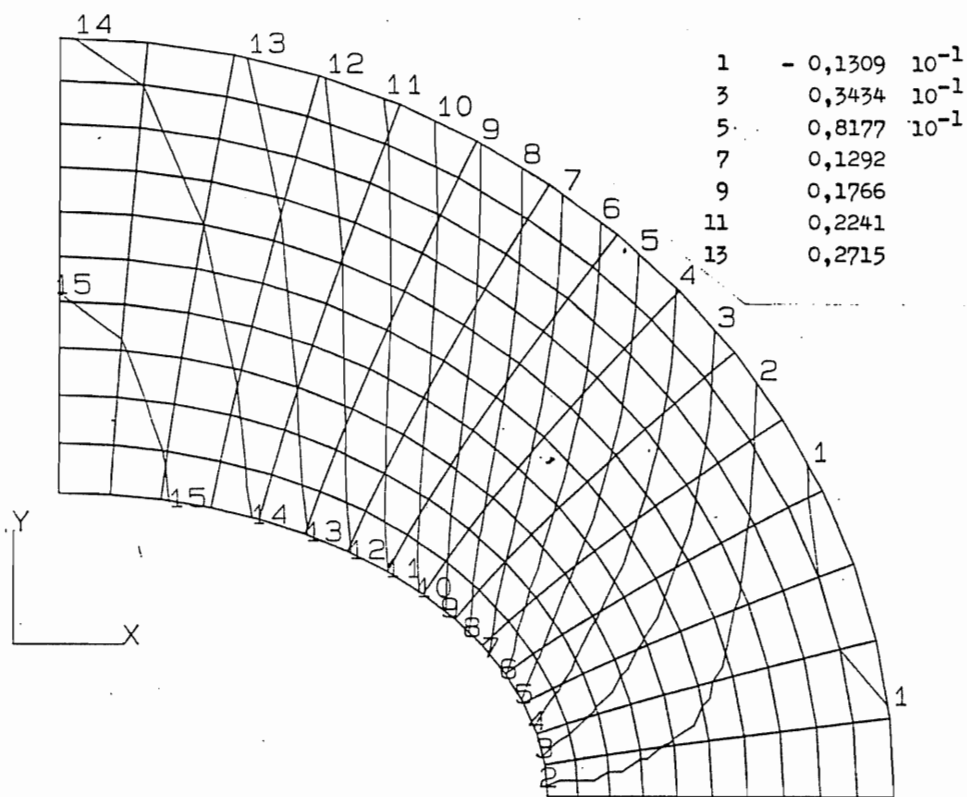
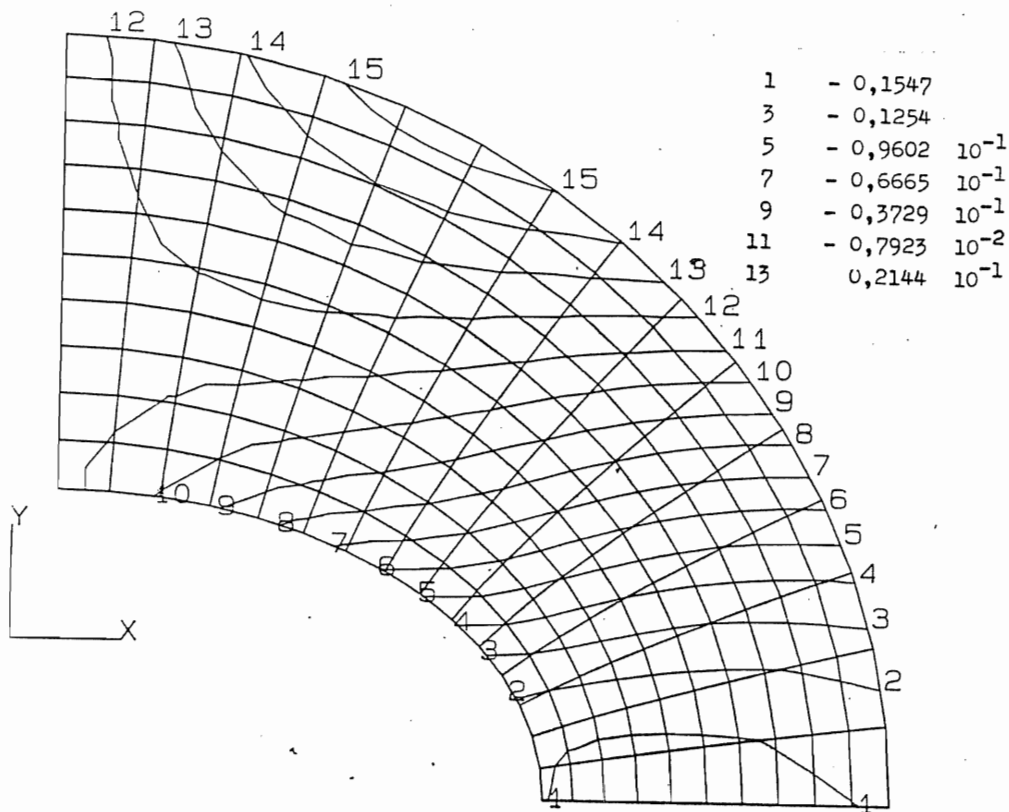
Slike 86. i 87.



Slika 88.

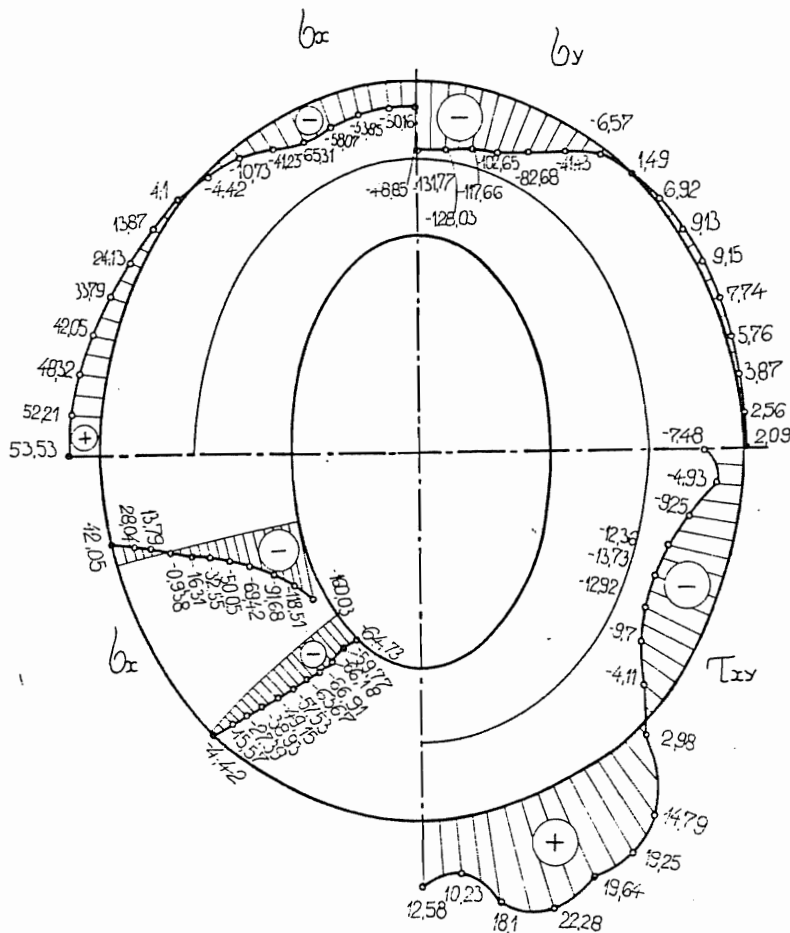


Slika 89.

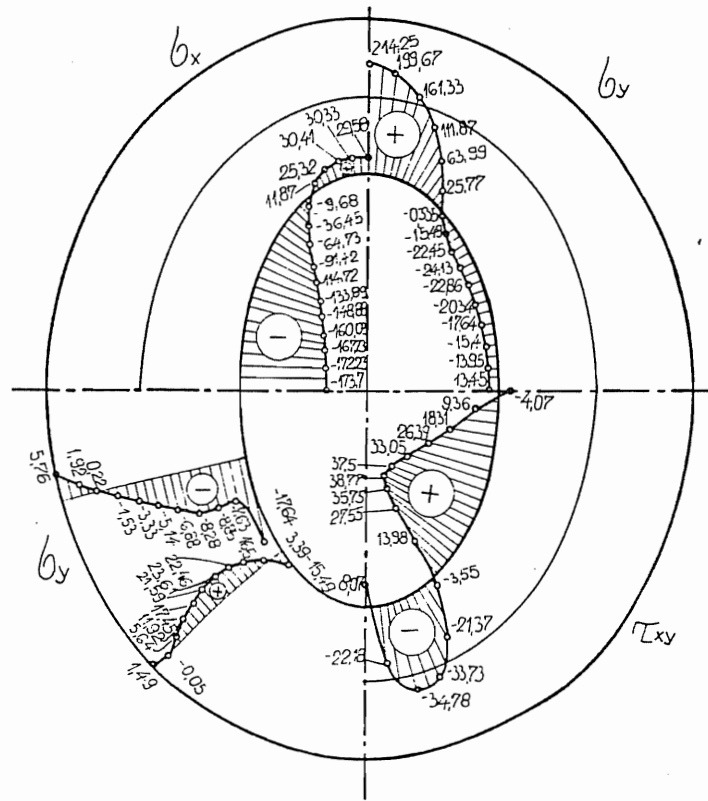


Slike 90. i 91.

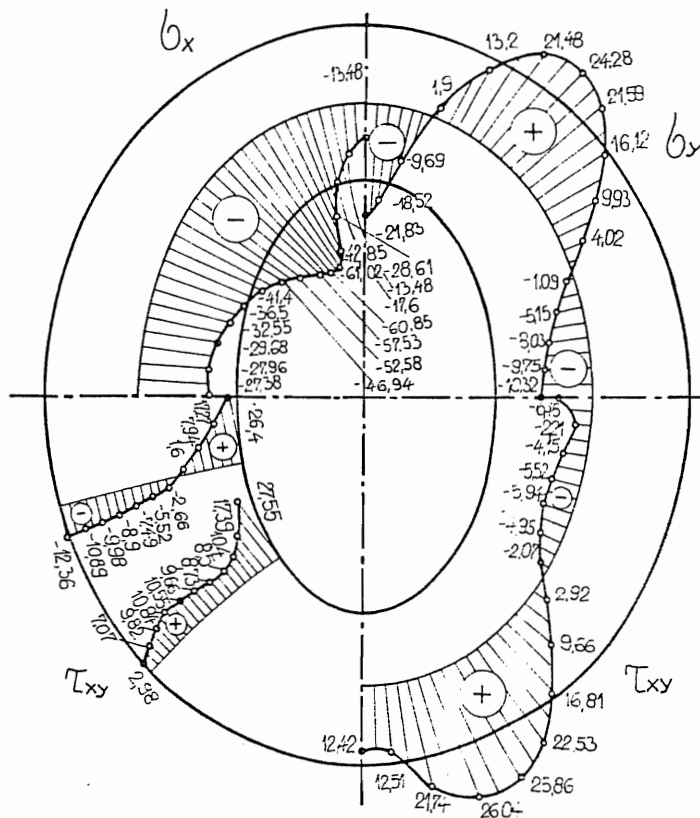
Kod petog slučaja opterećenja koji je označen kao ELISK 30, a kod koga kontinualno jednako raspodeljeno opterećenje deluje na delu spoljašnje konture, dobijeni su dijagrami normalnih napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  i smičućeg napona  $\tau_{xy}$ , za tačke na spoljašnjoj konturi, kao i dijagrami normalnog napona  $\sigma_x$  u datim preseccima prikazani na slici 92. Raspored napona  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  u tačkama na unutrašnjoj konturi i raspored napona  $\sigma_y$  u tačkama preseka dati su dijagramima na slici 93. Uočava se sličnost oblika ovih dijagrama sa odgovarajućim dijagramima za slučaj opterećenja koncentrisanom silom na spoljašnjoj konturi označen kao ELIS. Na slici 94. prikazani su dijagrami napona  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  u tačkama "središnje" elipse, kao i dijagram smičućeg napona  $\tau_{xy}$  u datim preseccima. Dijagrami glavi njih normalnih napona  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  i komponentnih pomeranja  $u$  i  $v$  za tačke spoljašnje konture dati su na slici 95. Na ovoj slici se uočava kontinualna promena glavnog normalnog napona na mestu gde prestaje kontinualno opterećenje na konturi, što je suprotno pretpostavljenoj skokovitoj promeni. Uvođenjem konačnog elementa tipa EP 16 povećala bi se tačnost izračunatih napona na ovom mestu i aproksimacija graničnih uslova bi bila tačnija. Na slici 96. prikazani su dijagrami glavnih normalnih napona  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  i komponentnih pomeranja  $u$  i  $v$  za tačke na unutrašnjoj konturi. Ovi dijagrami su slični odgovarajućim dijagramima za opterećenje označeno sa ELIS. Na slici 97. dati su dijagrami glavnih normalnih napona  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  i komponentnih pomeranja  $u$  i  $v$  za tačke na "središnjoj" elipsi. Izolinije normalnih napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  i smičućeg napona  $\tau_{xy}$  za ovaj slučaj opterećenja prikazane su na slikama 98., 99., i 100.



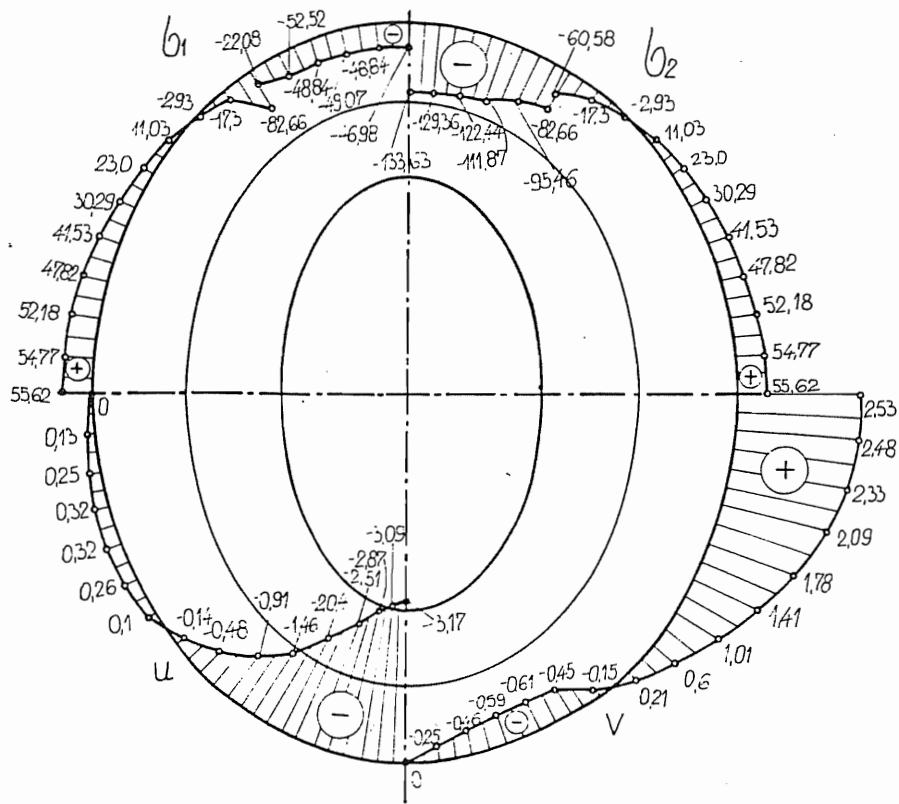
Slika 92.



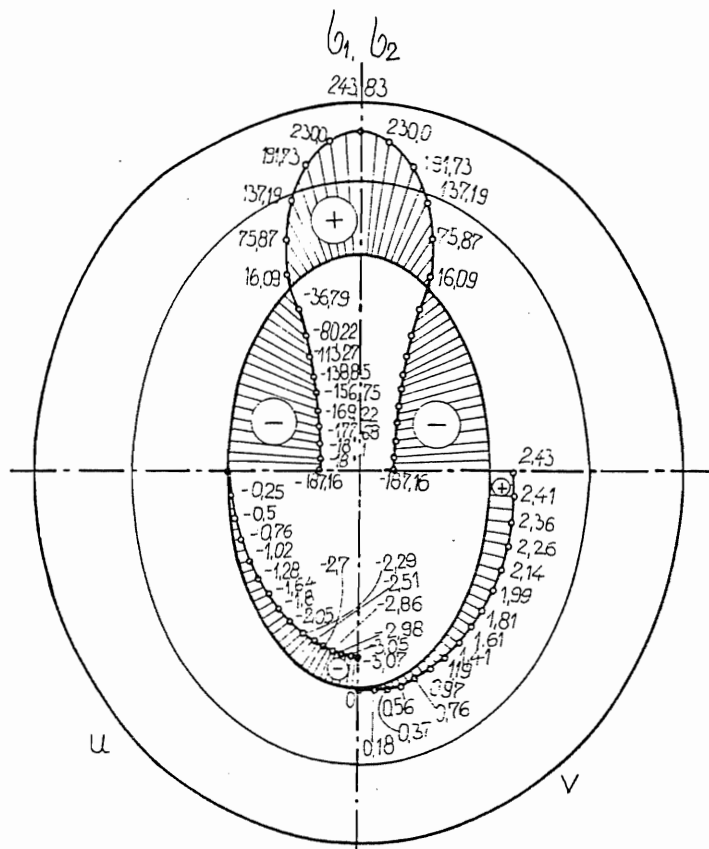
Slika 93.



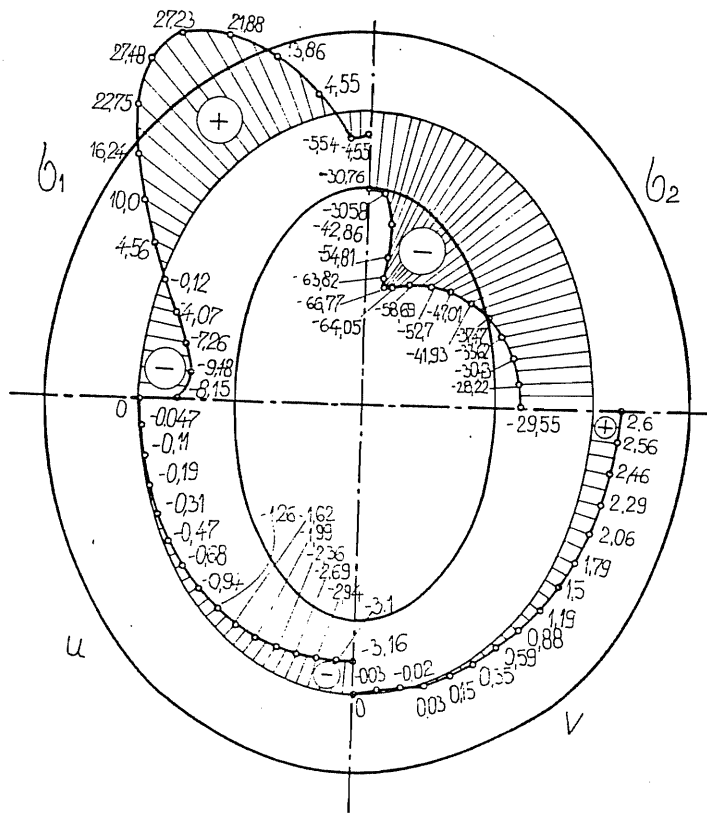
Slika 94.



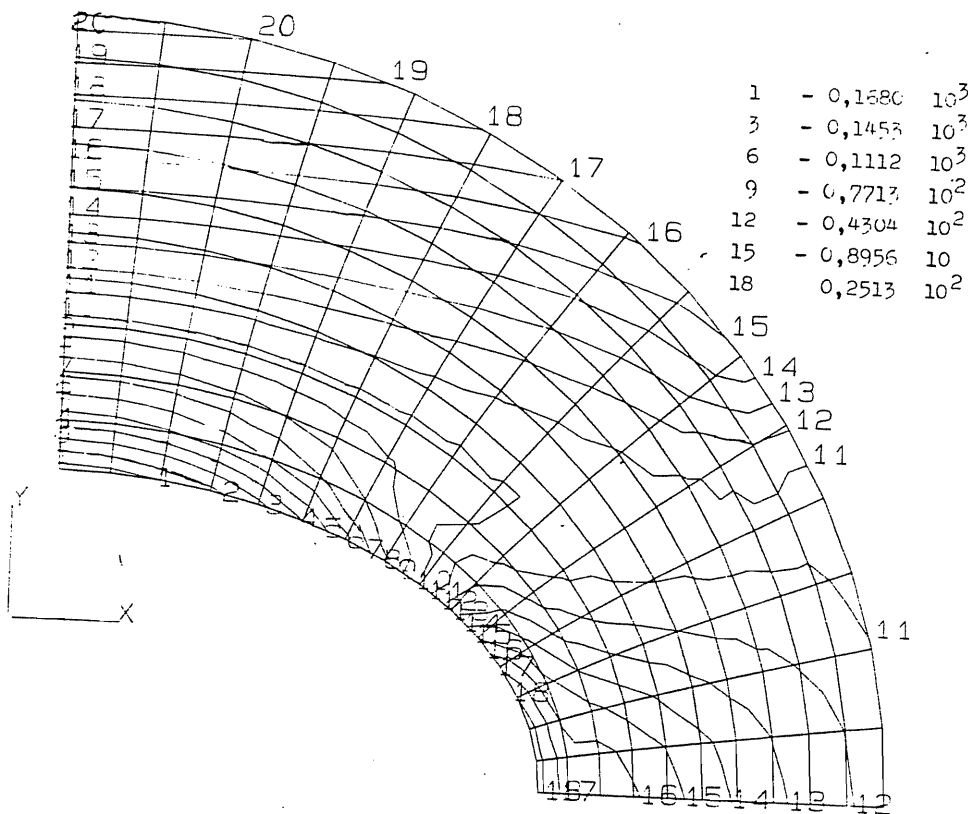
Slika 95.



Slika 96.

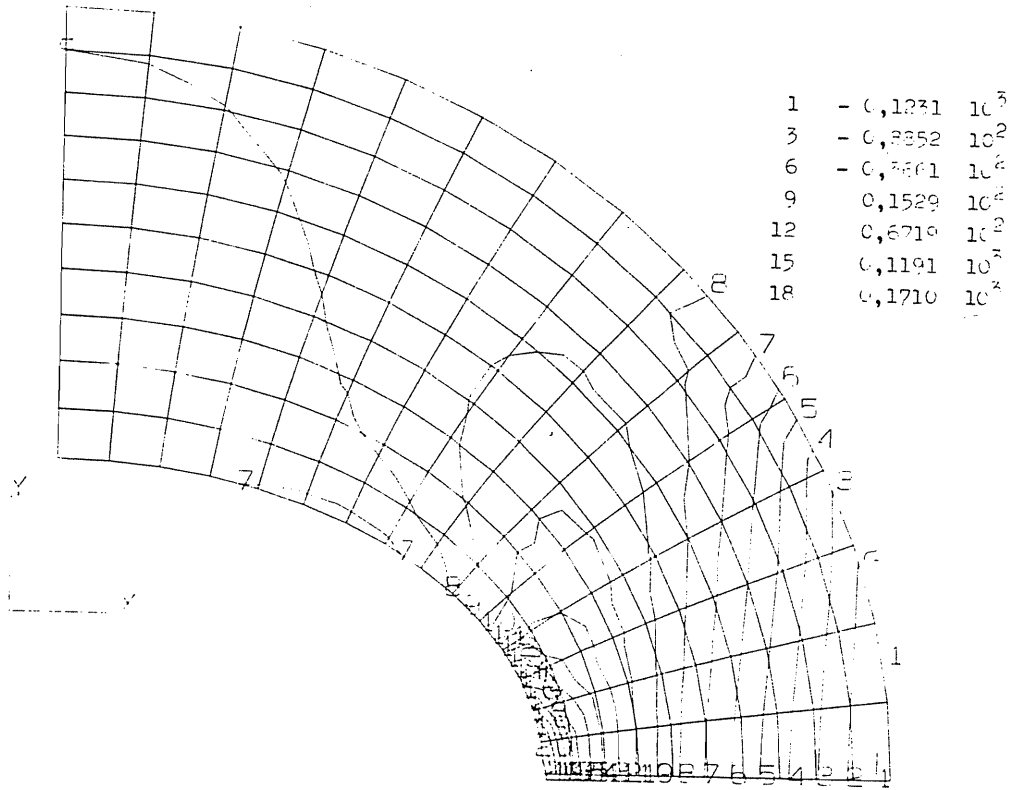


Slika 97.

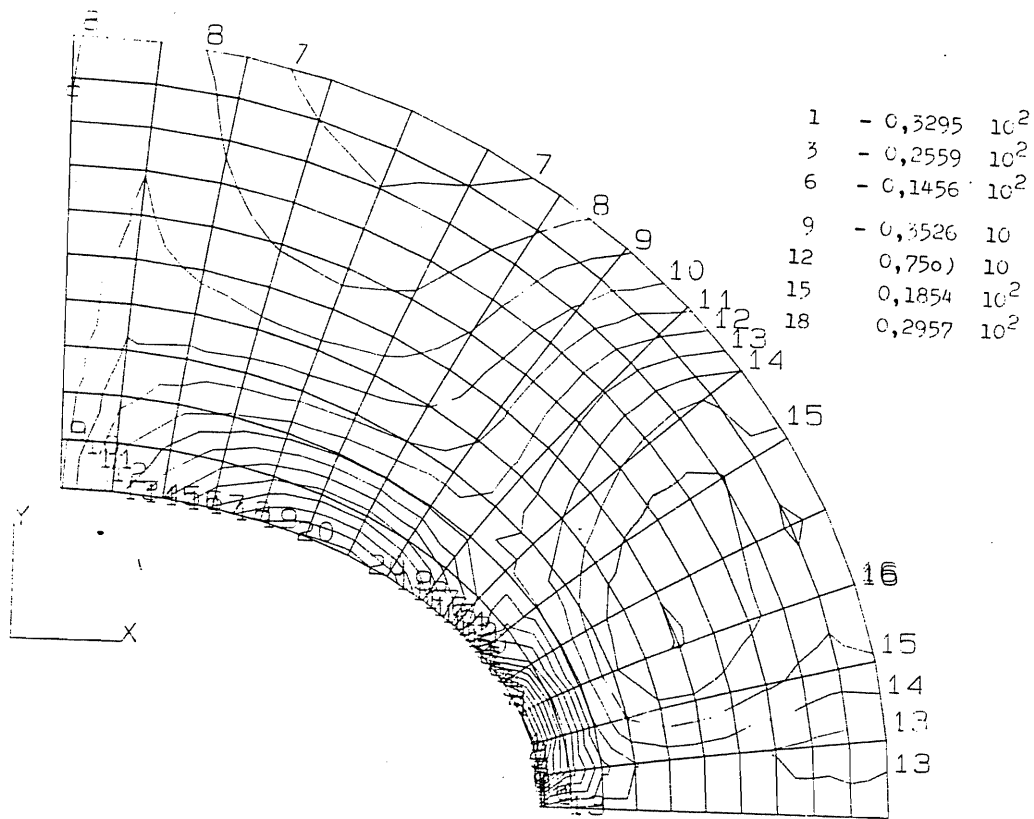


Slika 98.



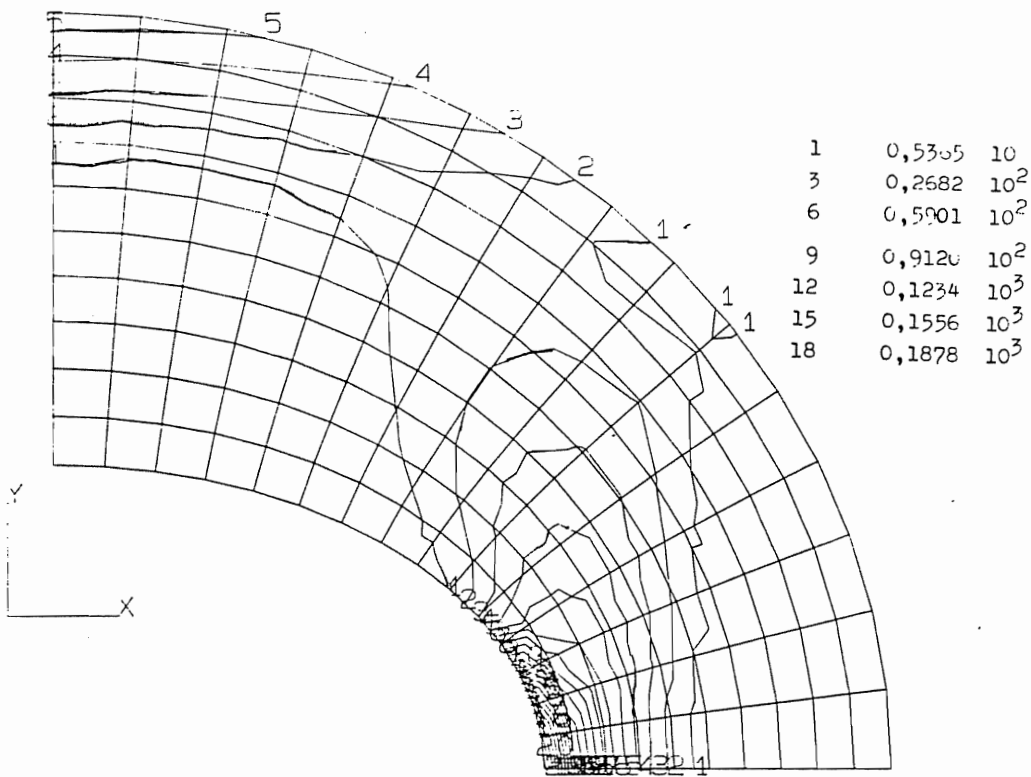


Slika 99.

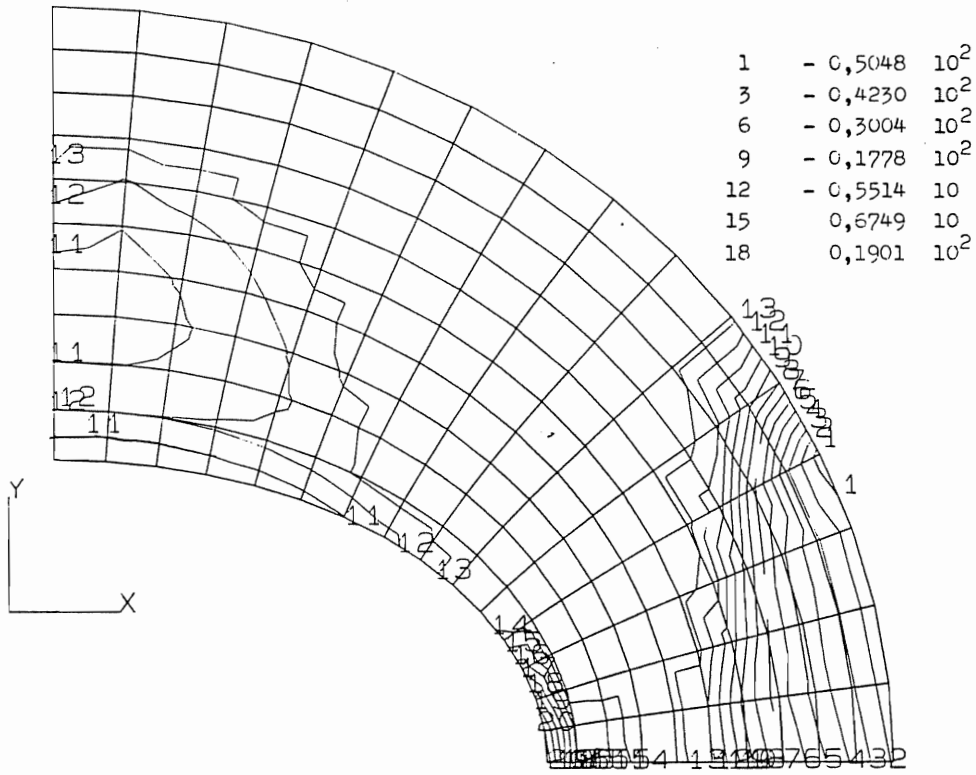


Slika 100.

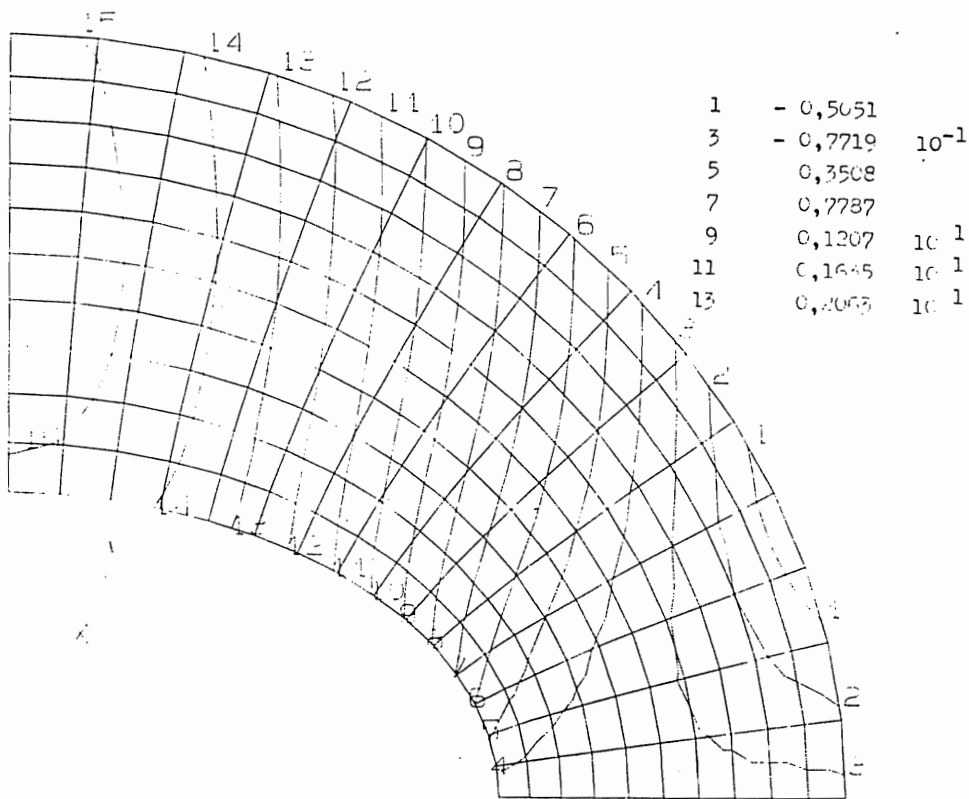
Izolinije glavnih normalnih napona  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  prikazane su na slikama 101. i 102., pri čemu se na slici 102. uočava oblast konture na kojoj dejstvuje kontinualno opterećenje. Na slikama 103. i 104. prikazane su izolinije komponentnih pomeranja  $u$  i  $v$ , a na slici 105. prikazana je deformisnana mreža konačnih elemenata za ovaj slučaj opterećenja.



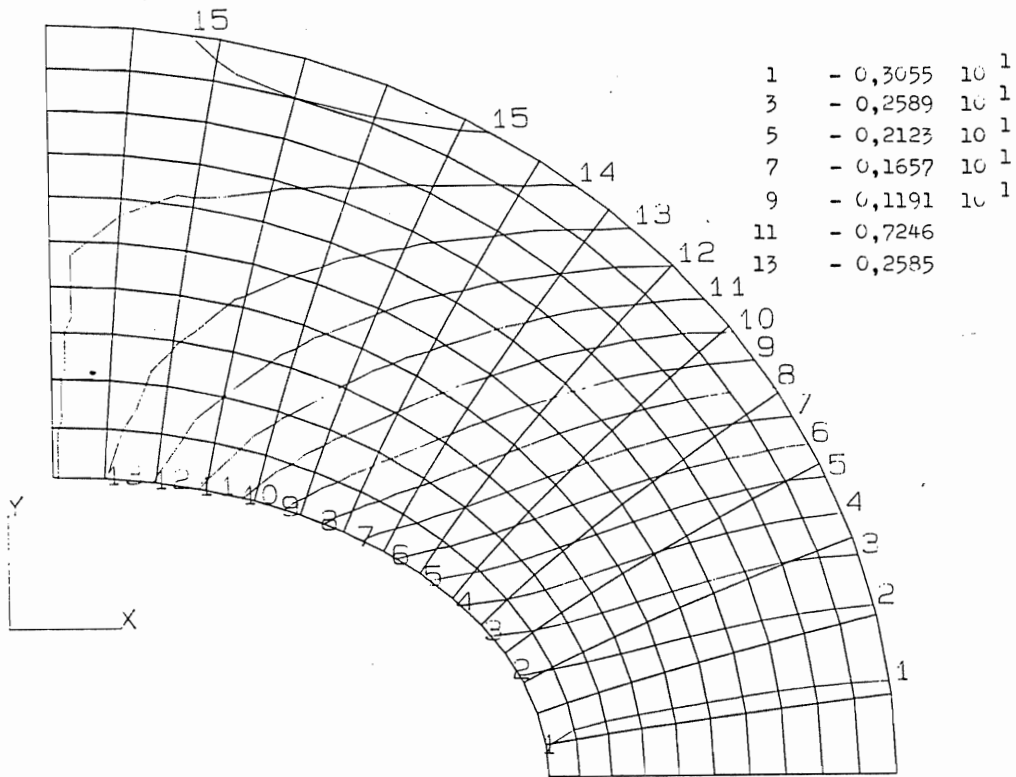
Slika 101.



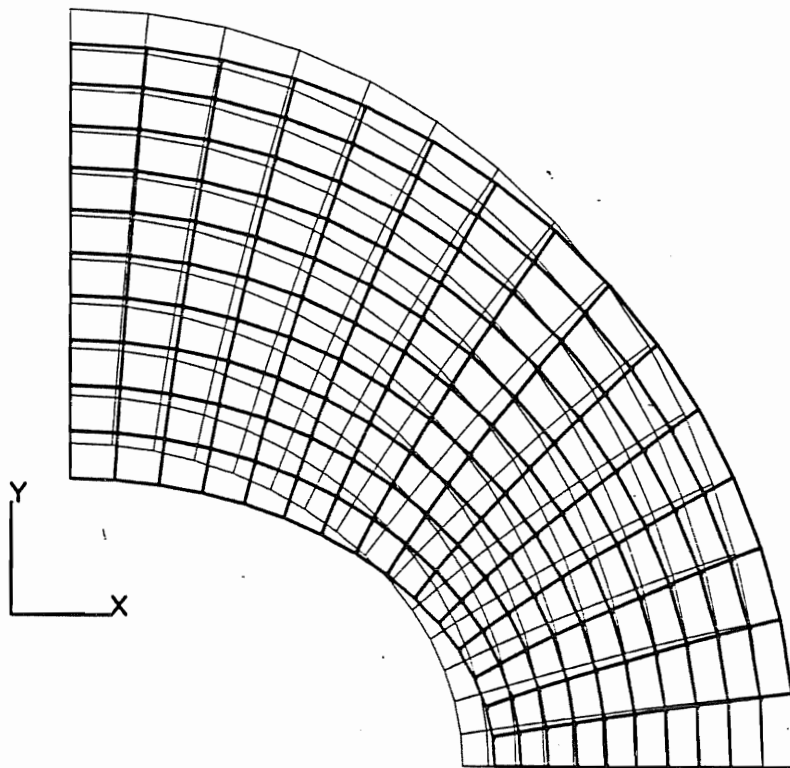
Slika 102.



Slika 103.

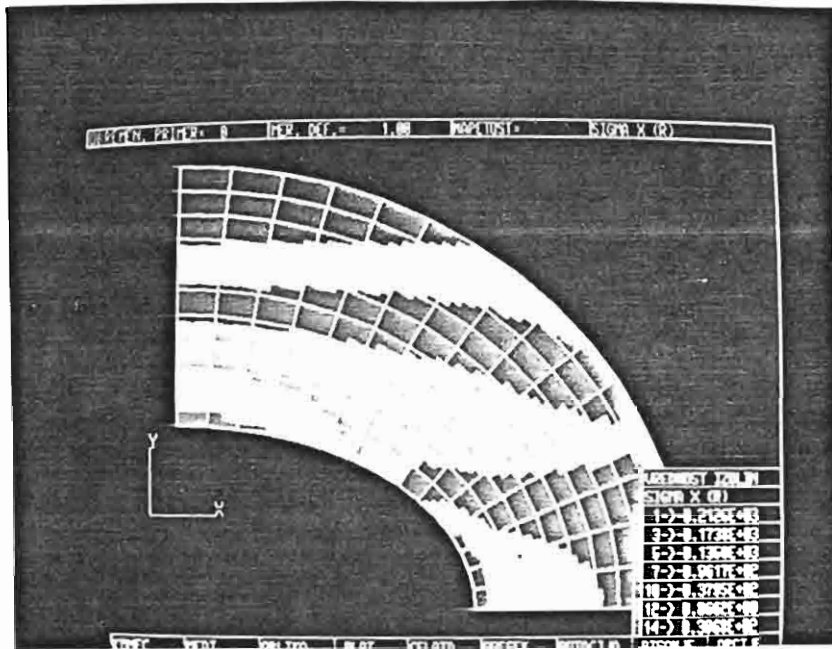


Slika 104.

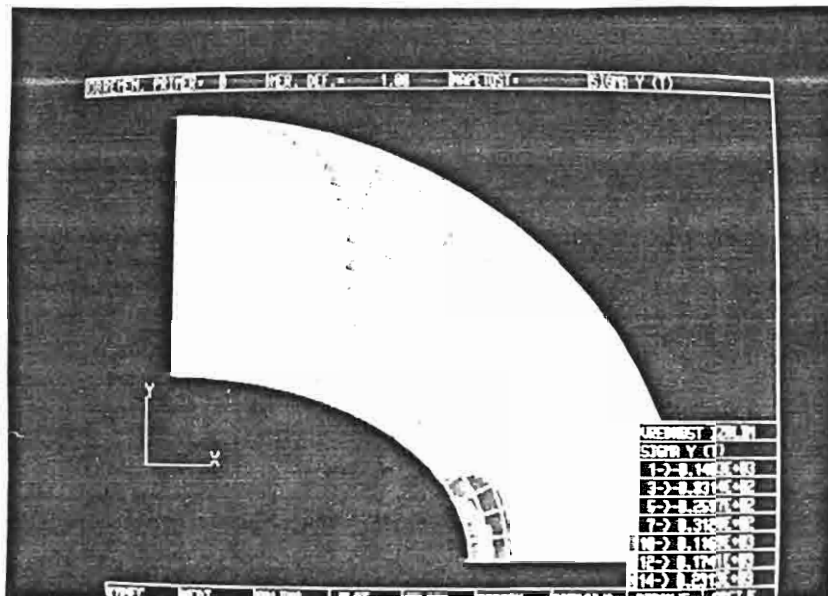


Slika 105.

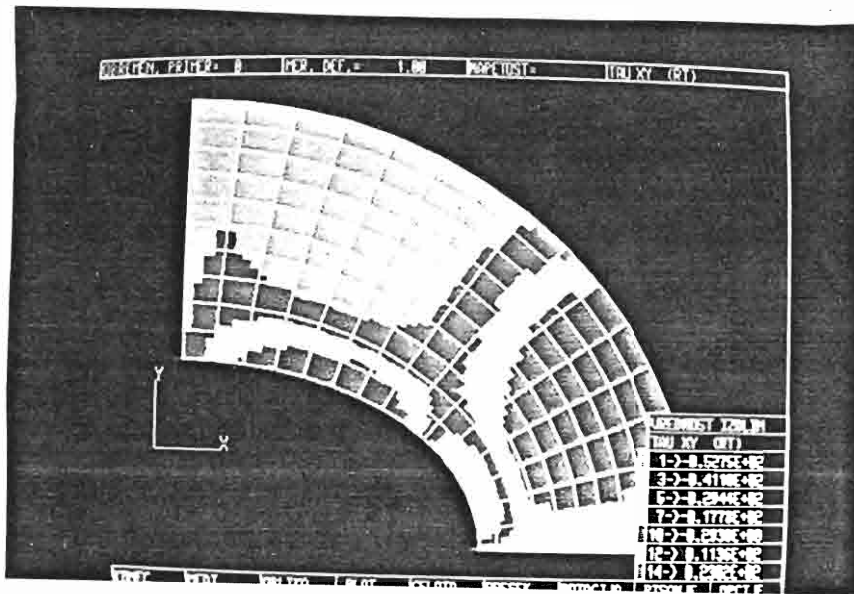
Za šesti slučaj opterećenja označen kao ELIUSK 30 obradom numeričkih rezultata u grafičkom postprocesoru dobijene su slike izopolja za normalne napone  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  i smičući napon  $\tau_{xy}$  prikazane na slikama 106., 107. i 108. Izopolja glavnih normalnih napona  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  prikazana su na slikama 109. i 110.



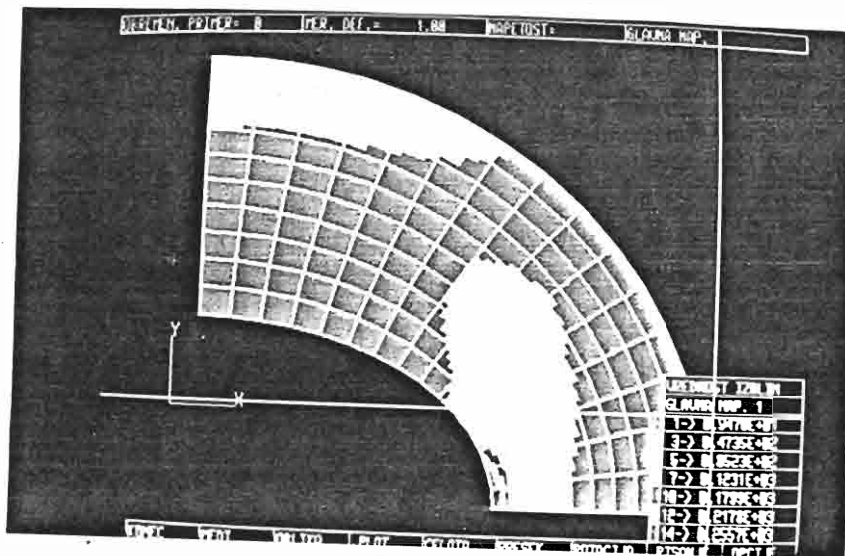
Slika 106.



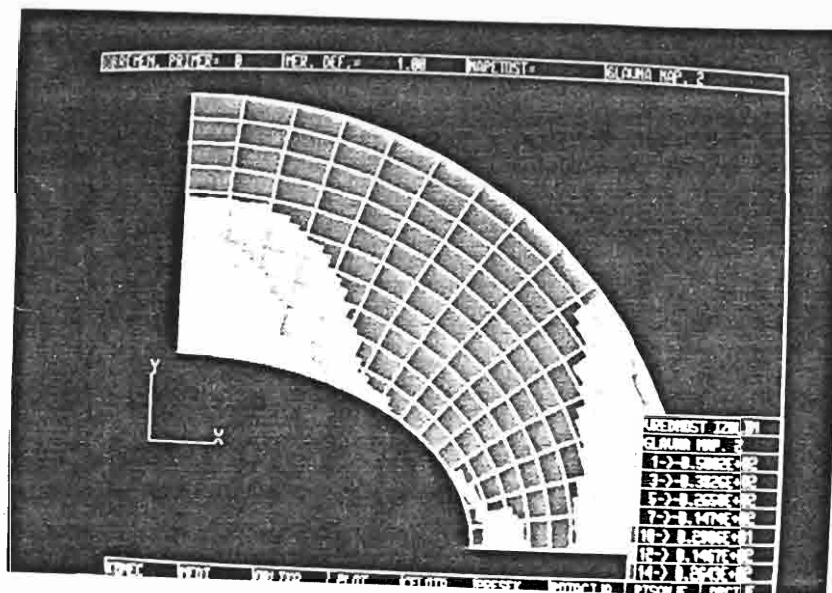
Slika 107.



Slika 108.



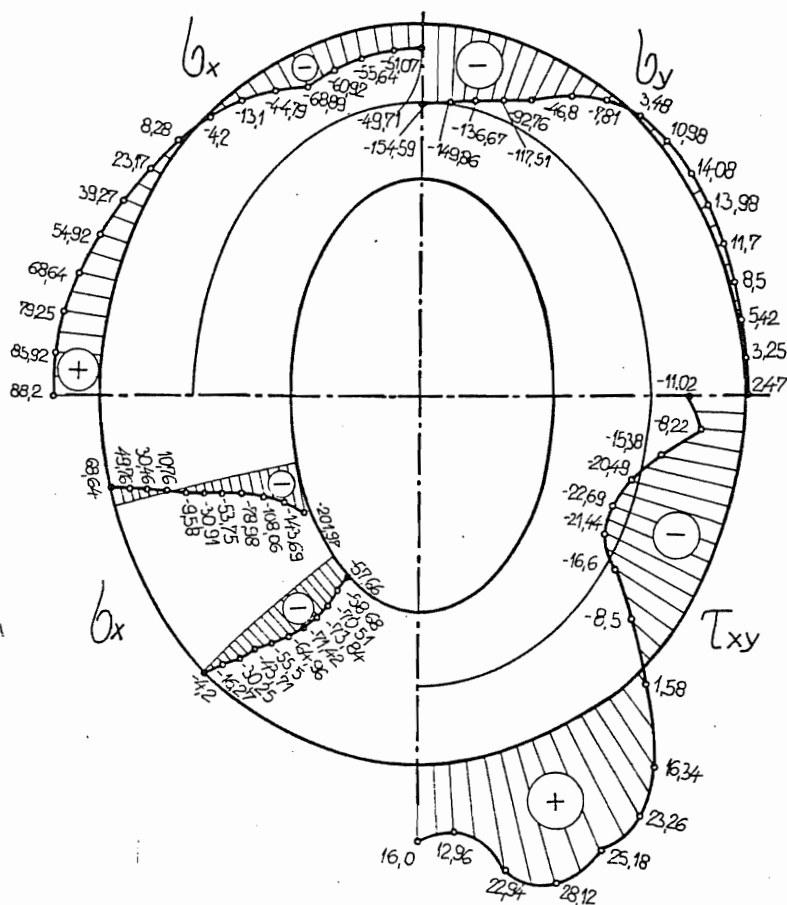
Slika 109.



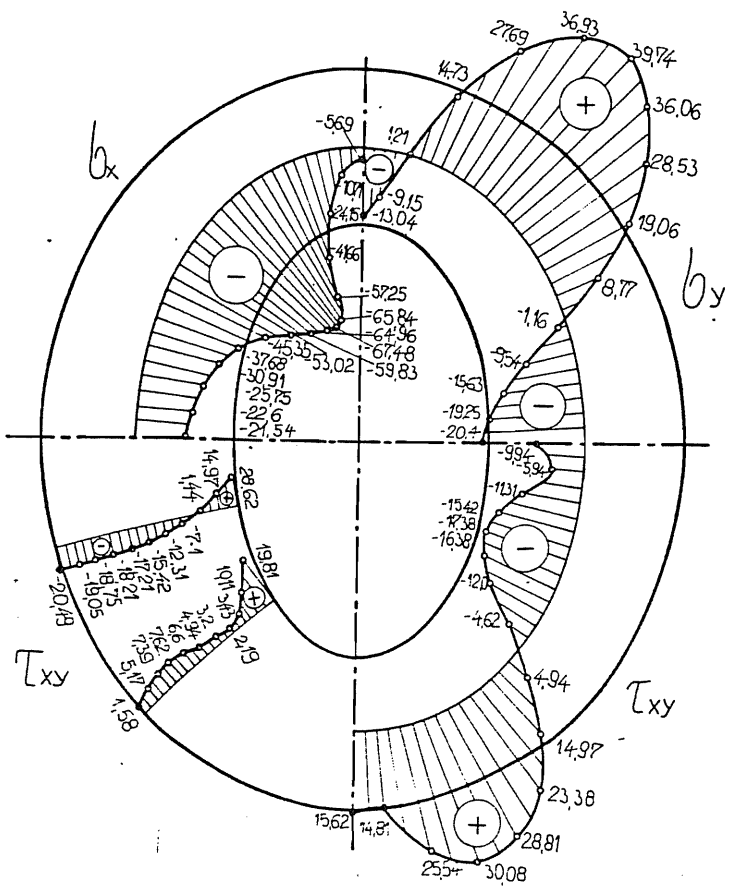
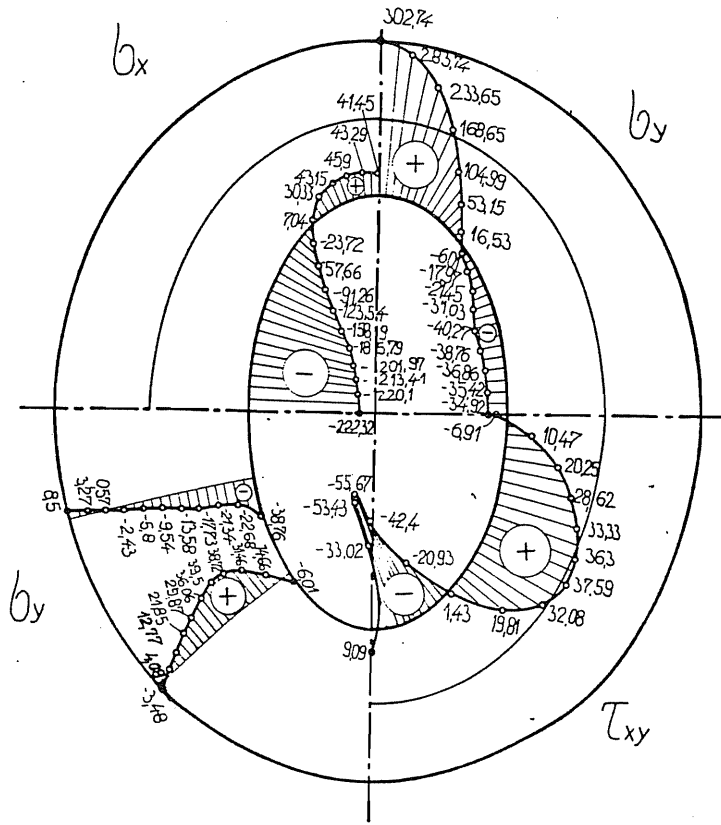
Slika 110.

Za slučaj opterećenja označen kao ELIUSK 30 kada kontinualno opterećenje deluje na delu unutrašnje i na delu spoljašnje konture, dobijeni dijagrami normalnih napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  i smičućeg napona  $\tau_{xy}$ , u tačkama spoljašnje konture kao i dijagrami normalnog napona  $\sigma_x$  u datim presecima, prikazani su na slici 111. Na slici 112. dati su dijagrami normalnih napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  i smičućeg napona  $\tau_{xy}$  za tačke unutrašnje konture, kao u dijagrami normalnog napona  $\sigma_y$  u datim presecima. Na predhodnim slikama uočava se analogija sa dijagramima za slučaj opterećenja koncentrisanim silama ELIUS. Na slici 113. prikazani su dijagrami napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  i smičućeg napona  $\tau_{xy}$  u tačkama "središnje" elipse kao i dijagrami smičućeg napona  $\tau_{xy}$  u presecima. Dijagrami glavnih normalnih napona  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  i komponentnih pomeranja u i v tačaka na spoljašnjoj konturi, unutrašnjoj konturi i na "središnjoj" elipsi prikazani su na slikama 114., 115. i 116. Kod dijagrama glavnih normalnih napona na konturnim linijama, u lokalnoj oblasti gde se završava kontinualno opterećenje postoji prelaz sa dela konture na kome postoje dva glavna normalna napona, na deo konture na kome je jedan od njih jednak nuli ( $\sigma_1=0$  ili  $\sigma_2=0$ ).

Izolnije za napone  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  za ovaj slučaj opterećenja prikazani su na slikama 117., 118. i 119. Na ovim slikama izolnija se uočavaju oblasti sa većim i sa manjim gradijentom promene napona. Na slikama 120. i 121. prikazani su izolnije glavnih normalnih napona  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , a na slikama 122. i 123. date su izolnije komponentnih pomeranja u i v u pravcu osa x i y.

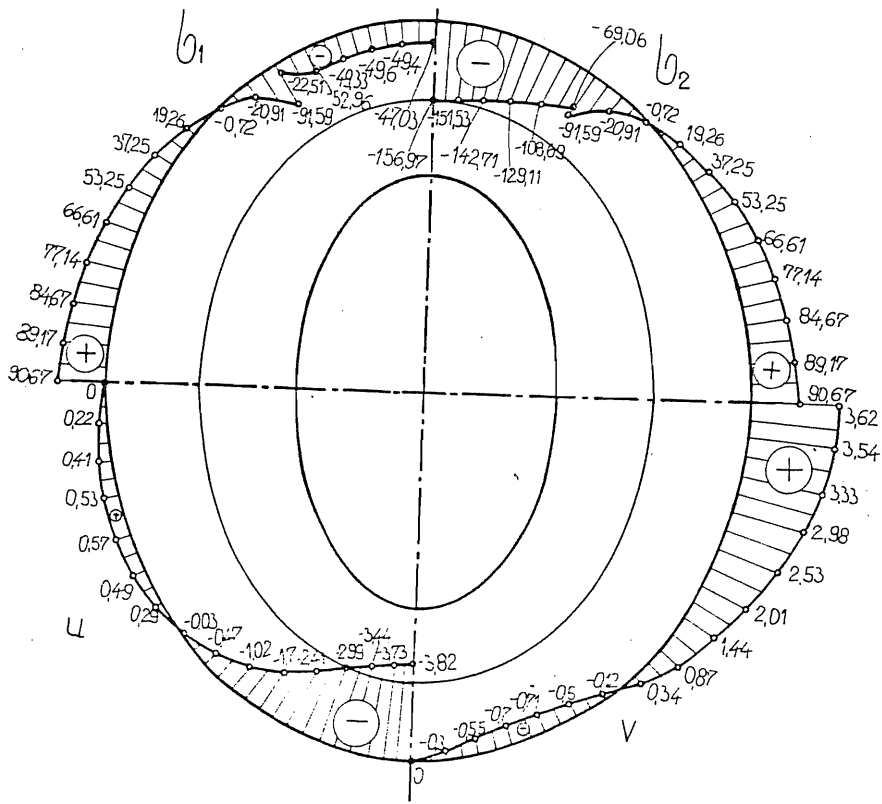


Slika 111.

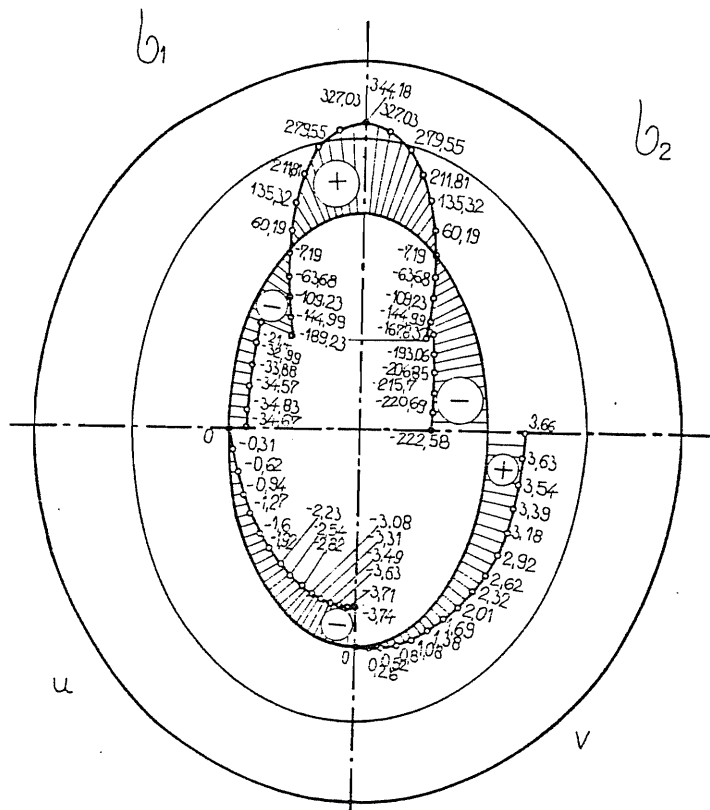


Slike 112. i 113.

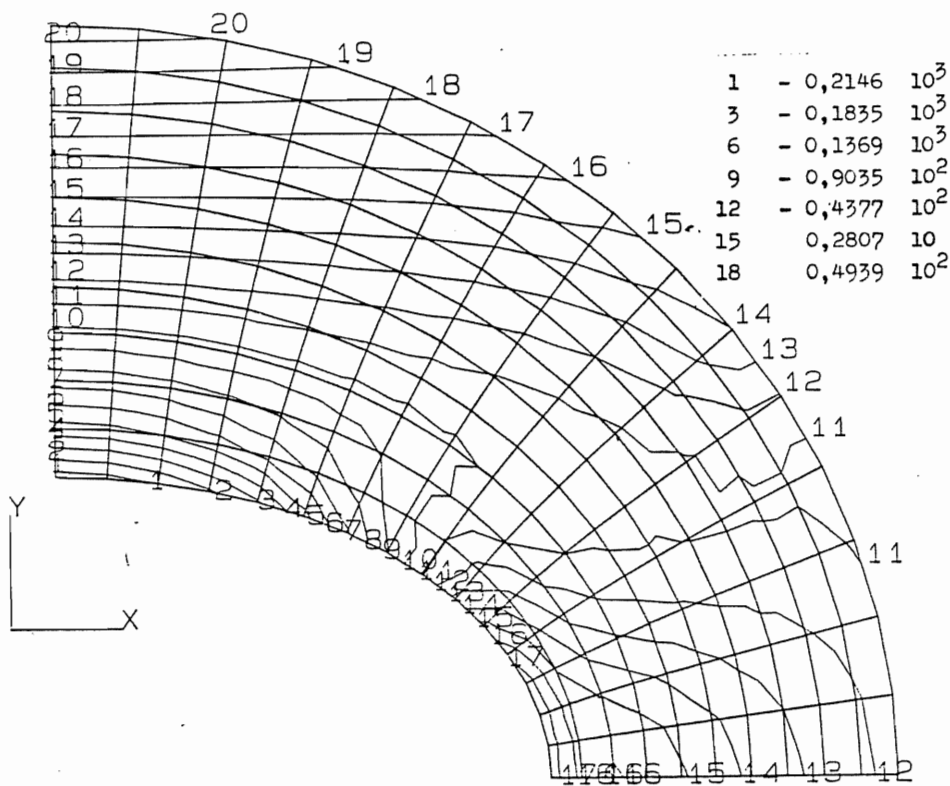
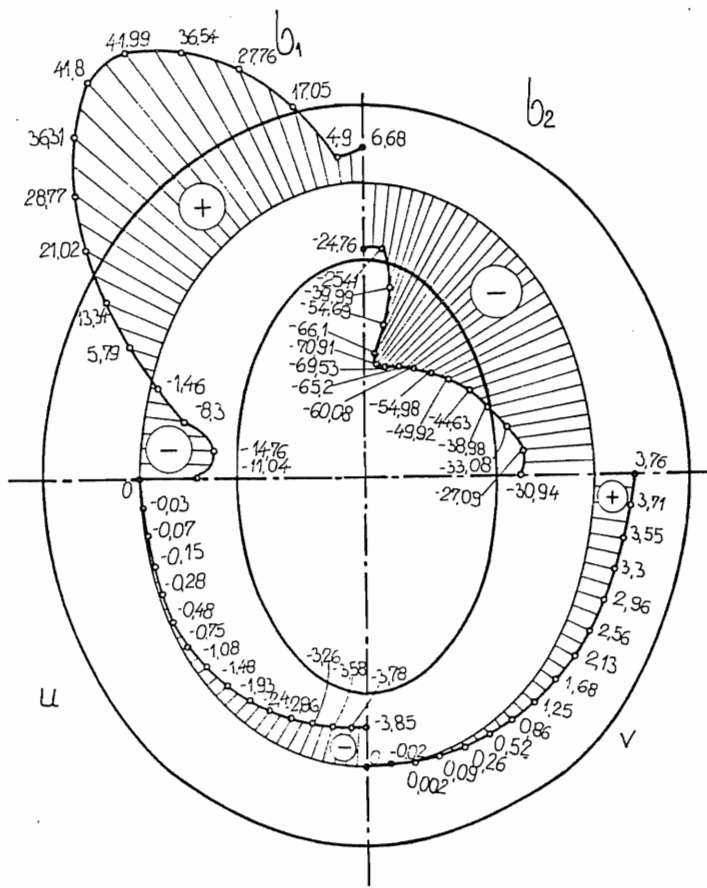




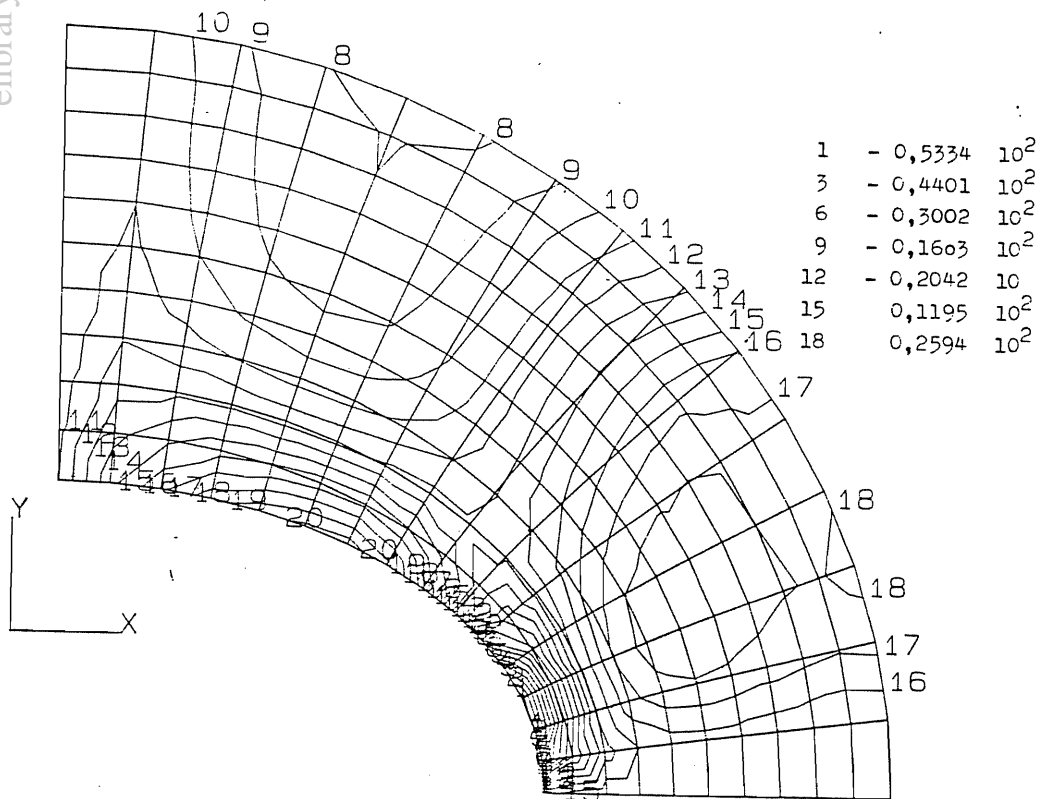
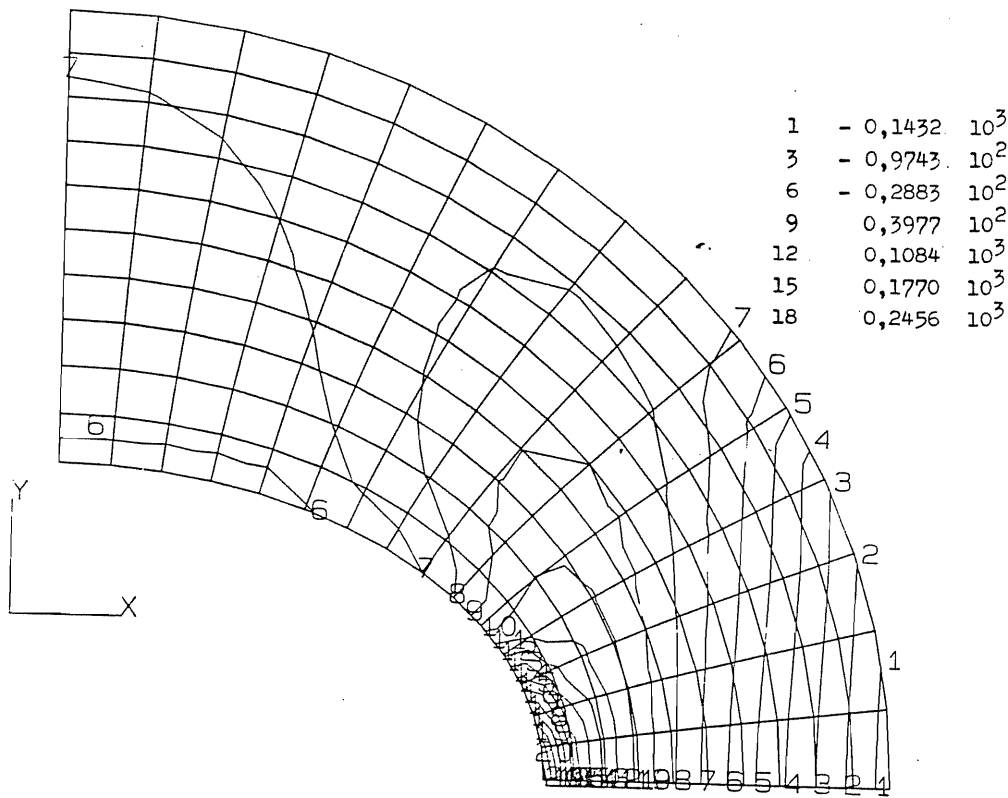
Slika 114.



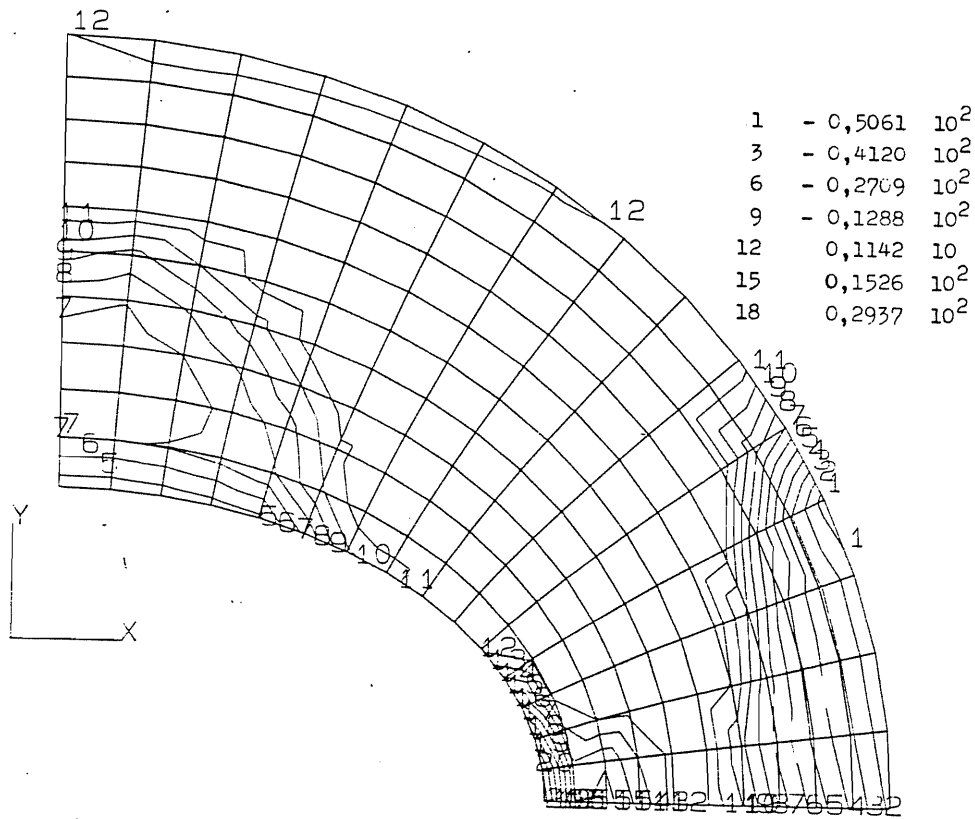
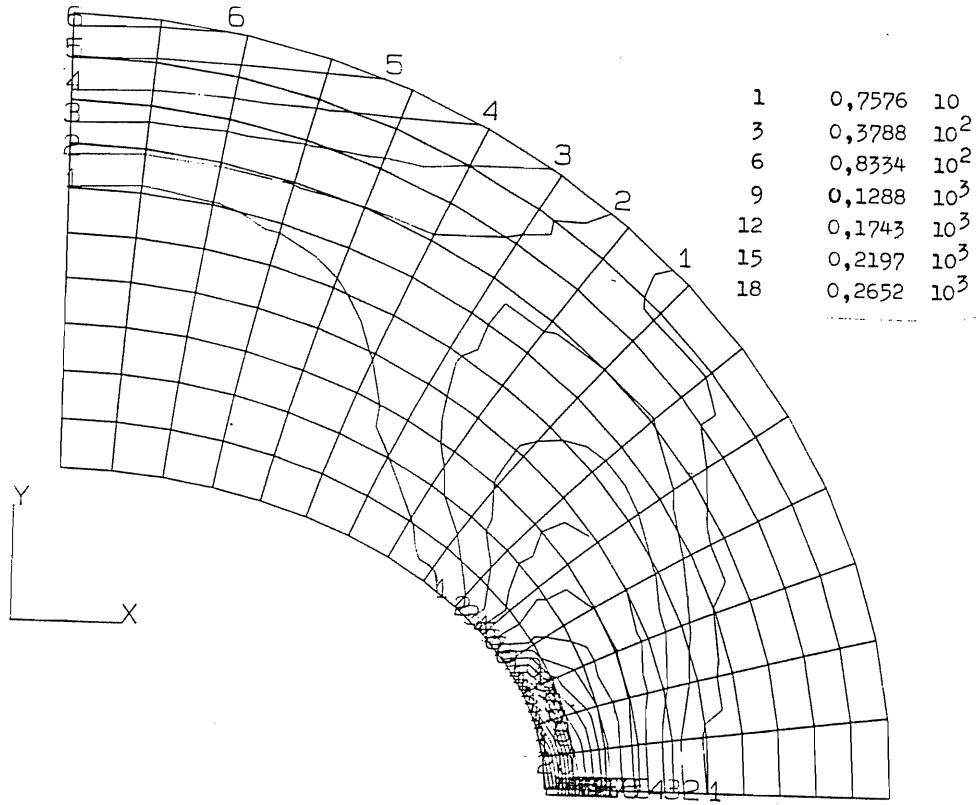
Slika 115.



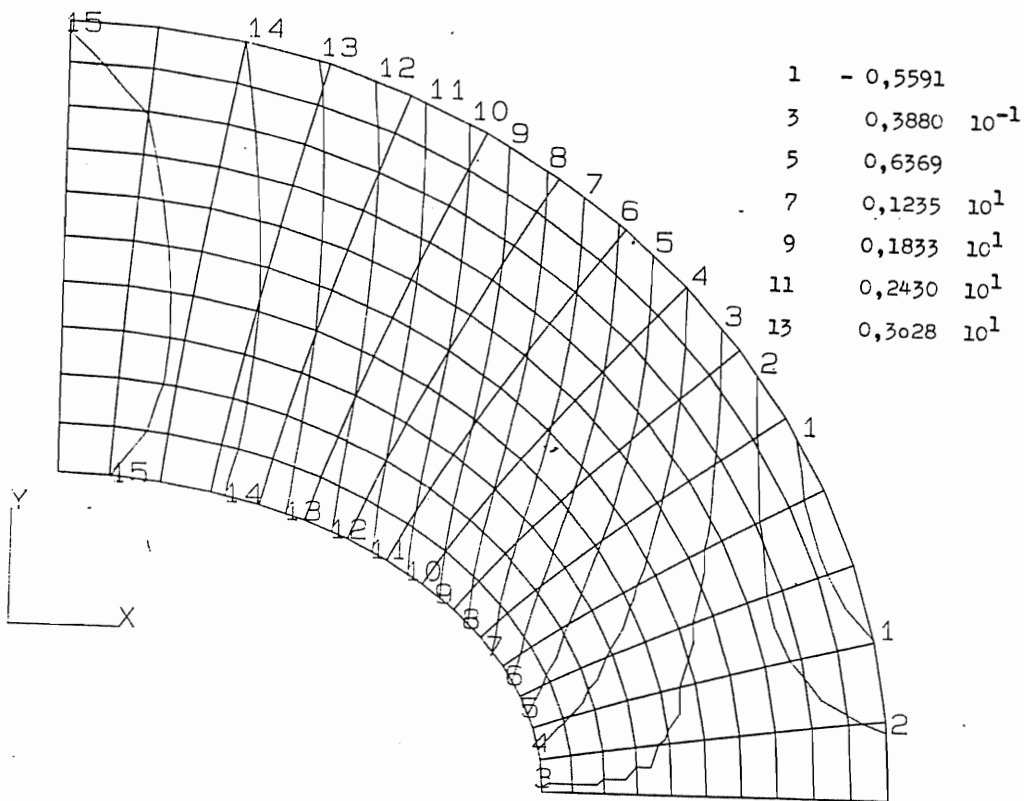
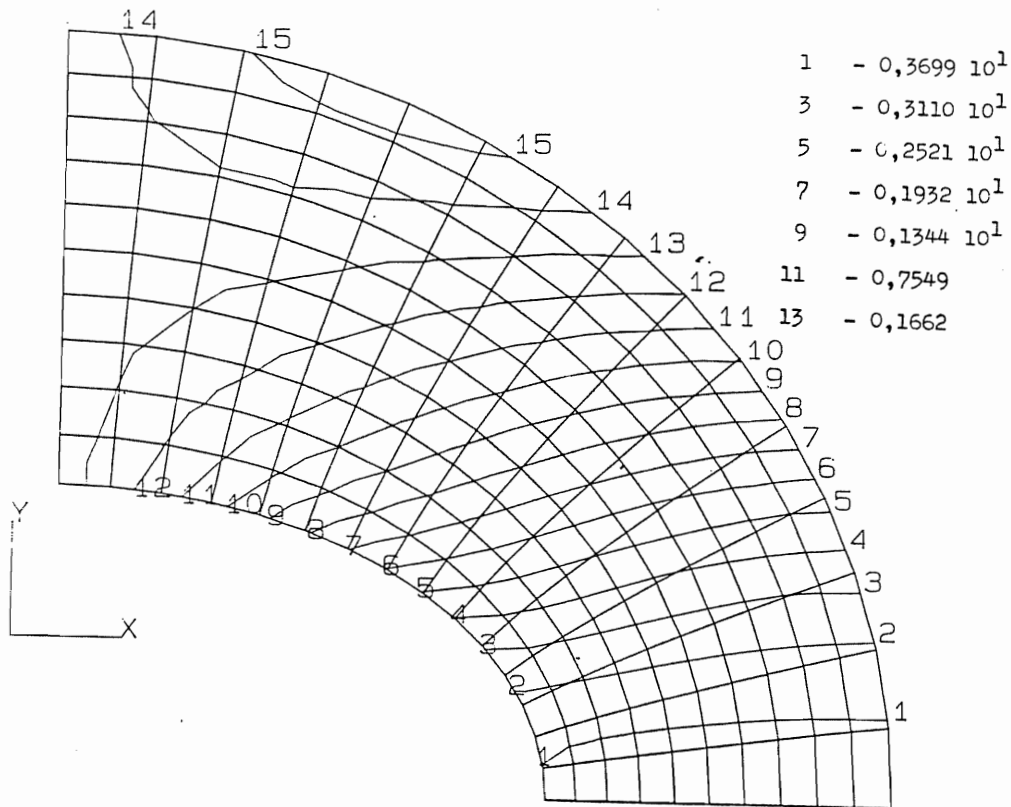
Slike 116. i 117.



Slike 118. i 119.



Slike 120. i 121.

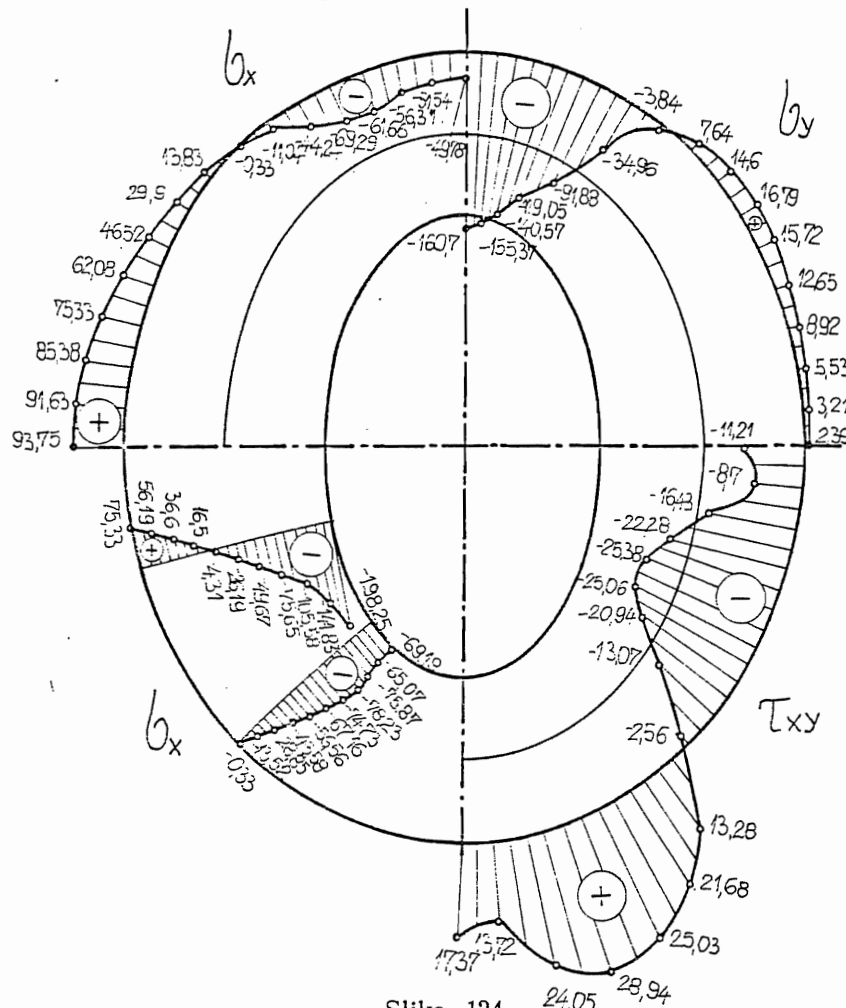


Slike 122. i 123.

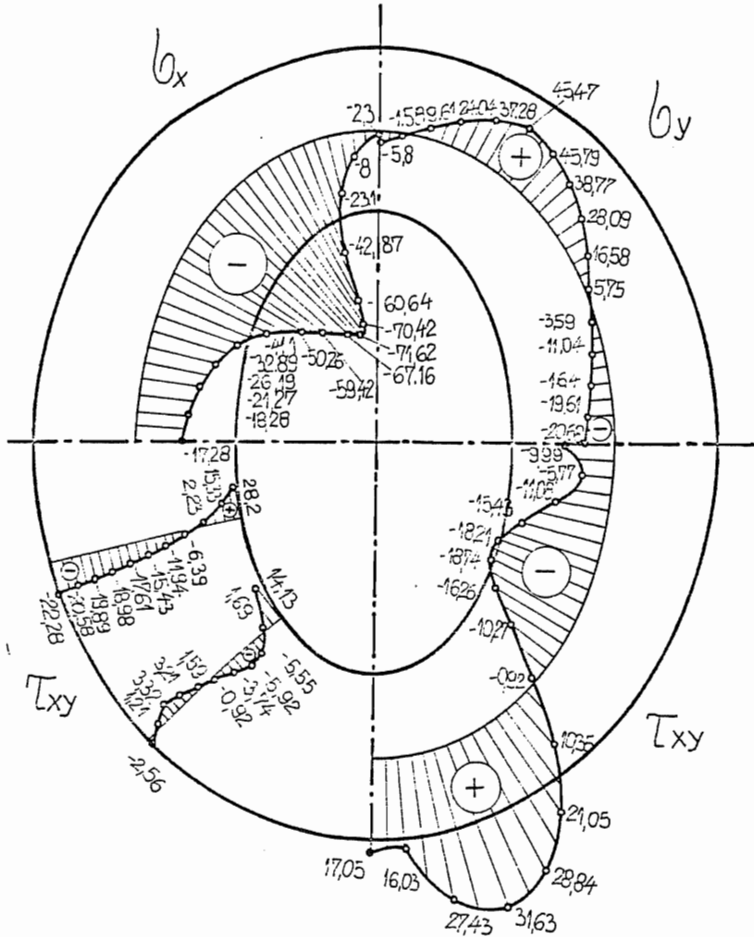
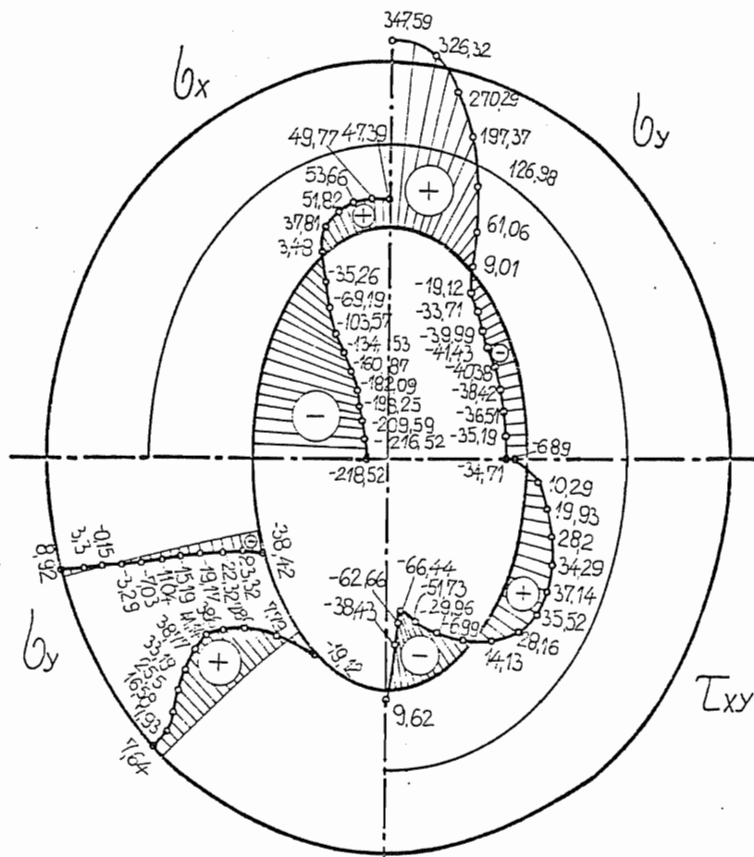
U slučaju kada je eliptični prsten opterećen kontinualnim jednako raspodeljenim opterećenjima na određenim oblastima unutrašnje i spoljašnje konture, a koji je označen kao ELIUSK 3060 na osnovu numeričkih rezultata dobijeni su dijagrami napona i komponentnih pomeranja. Na slici 124. prikazani su dijagrami normalnih napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  i smičućeg napona  $\tau_{xy}$  u tačkama spoljašnje konture, kao i dijagrami normalnog napona  $\sigma_x$  u preseccima. Dijagrami napona  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  u tačkama unutrašnje konture, kao i dijagrami normalnog napona  $\sigma_y$  u tačkama preseka prikazani su na slici 125. Na ovim slikama uočavamo oblasti konture opterećene kontinualnim jednako raspodeljenim pritisnim silama. Na slici 126. prikazani su naponi  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  u tačkama "središnje" elipse, kao i dijagrami smičućeg napona  $\tau_{xy}$  u tačkama preseka. Dijagrami glavnih normalnih napona  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  i komponentnih pomeranja  $u$  i  $v$ , za tačke spoljašnje konture, unutrašnje konture i "središnje" elipse prikazane su na slikama 127., 128. i 129. Na ovim slikama se uočavaju tačke u kojima su oba glavna normalna napona jednaka nuli ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ) i koja razdvajaju zonu istezanja od zone pritiska na konturama. Takođe, uočava se prelazna oblast, na mestu na konturi gde prestaju kontinualna opterećenja.

Izolinije za slučaj opterećenja označen sa ELIUSK 3060, a za normalne napone  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  i tangencijalni napon  $\tau_{xy}$  prikazane su na slikama 130., 131. i 132. Izolinije glavnih normalnih napona  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  su prikazane na slikama 133. i 134., a izolinije komponentnih pomeranja  $u$  i  $v$  date su na slikama 135. i 136.

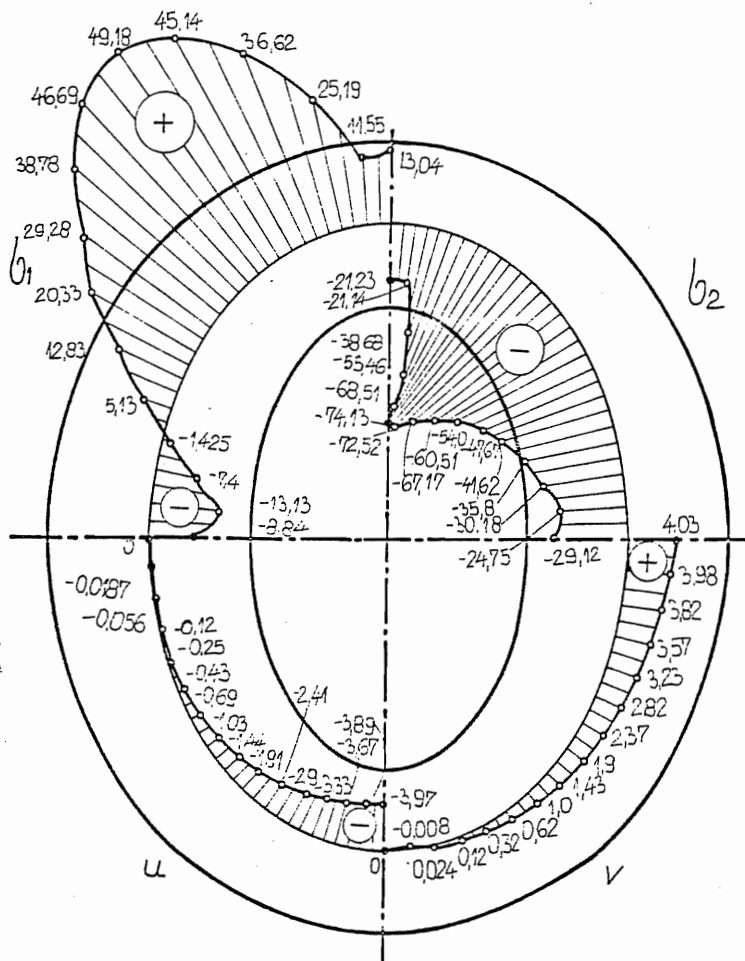
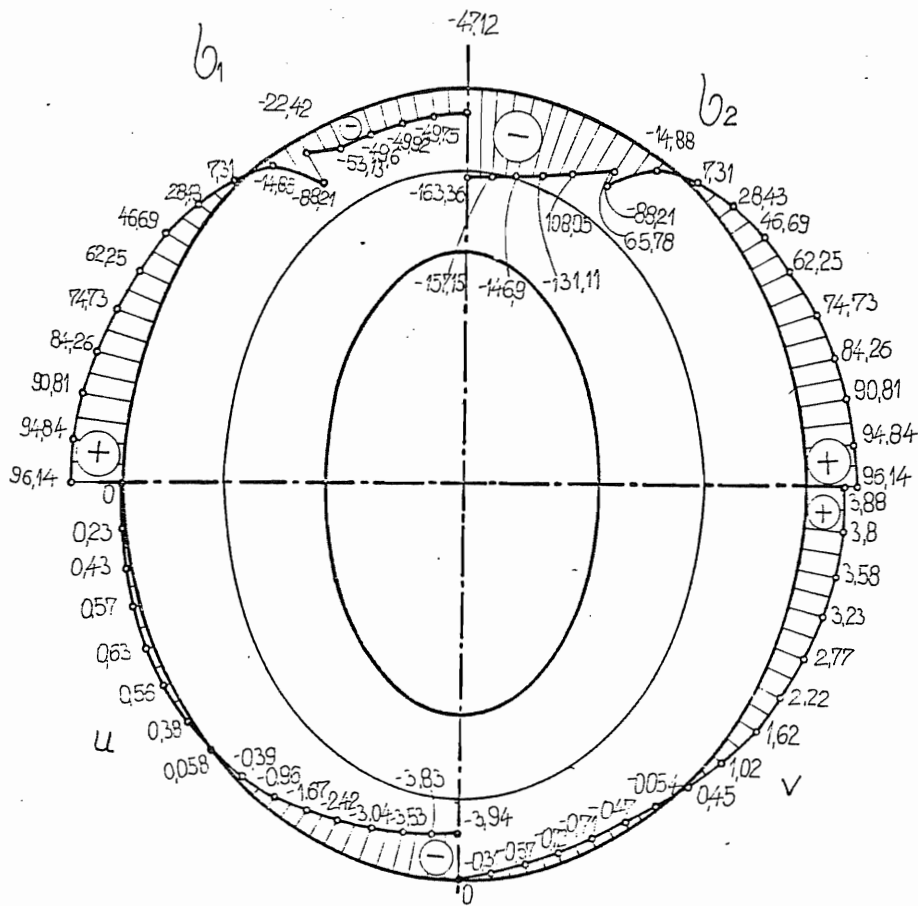
U Prilogu VI na strani 208 dati su numerički rezultati na osnovu kojih su crtani dijagrami za ovaj slučaj opterećenja.



Slika 124.

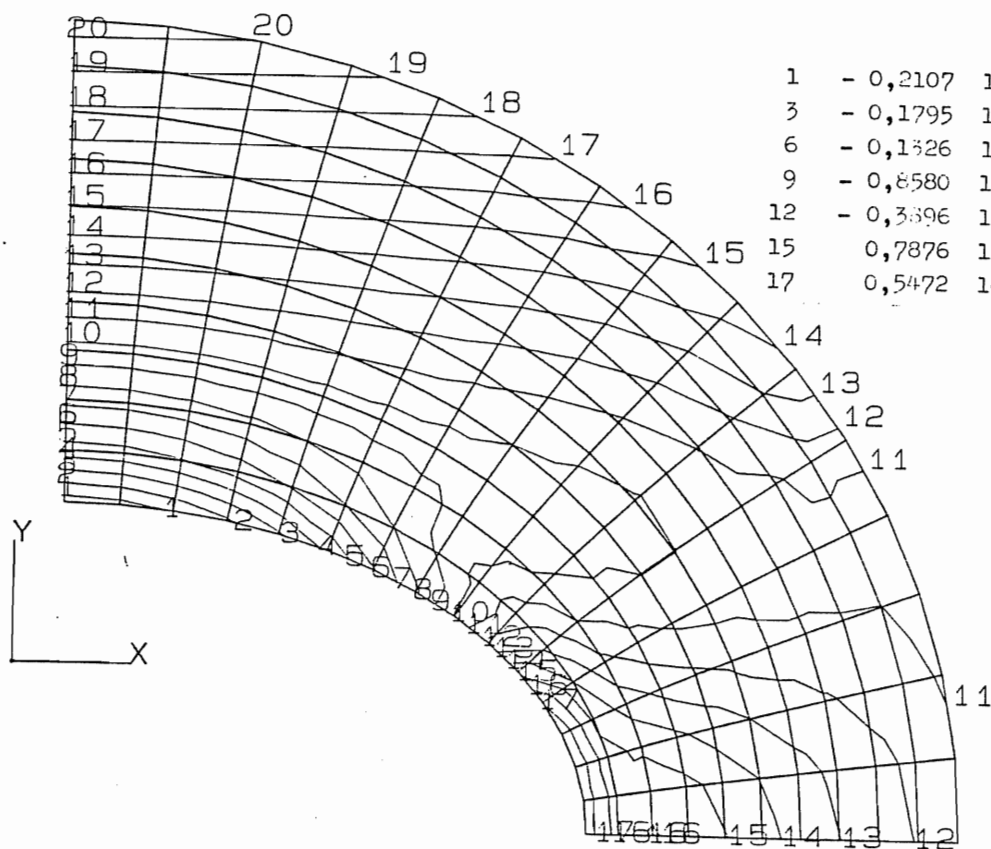
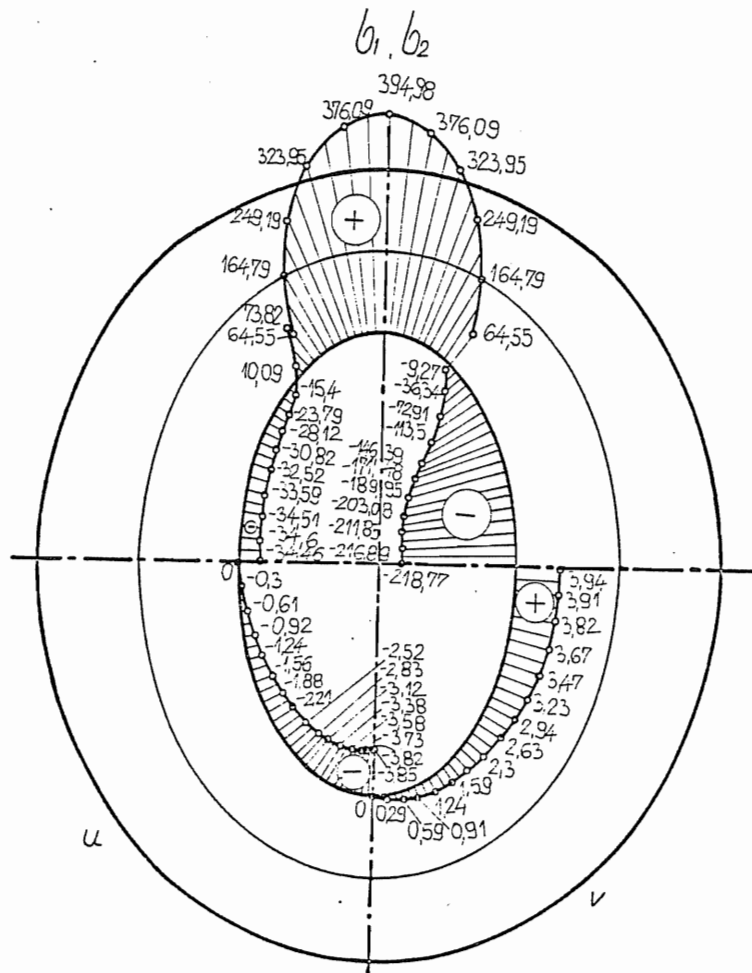


Slike 125. i 126.

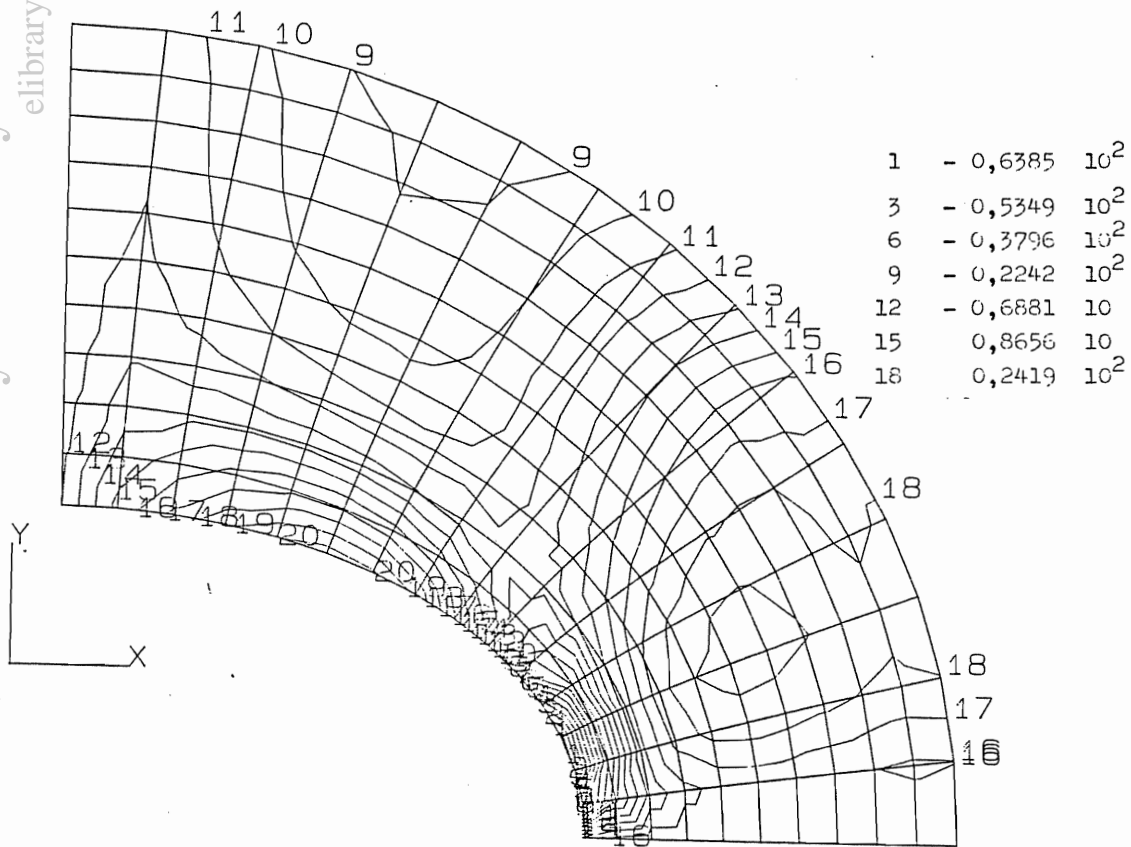
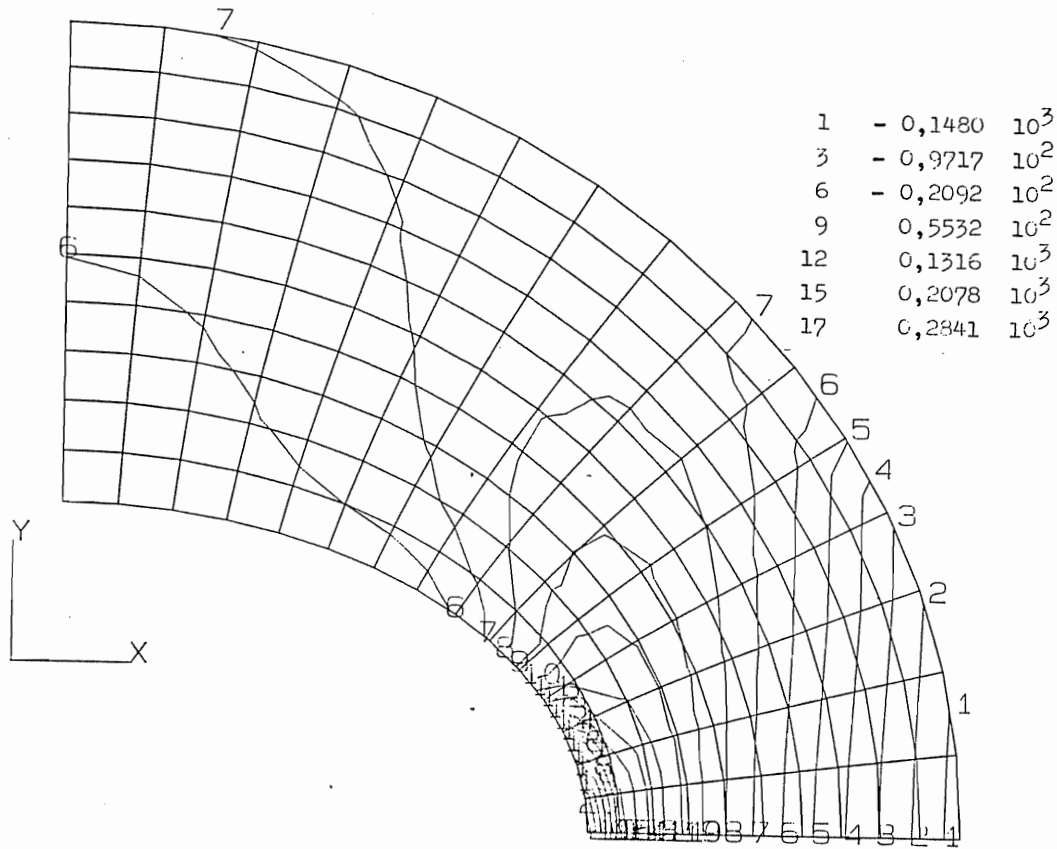


Slike 127. i 128.

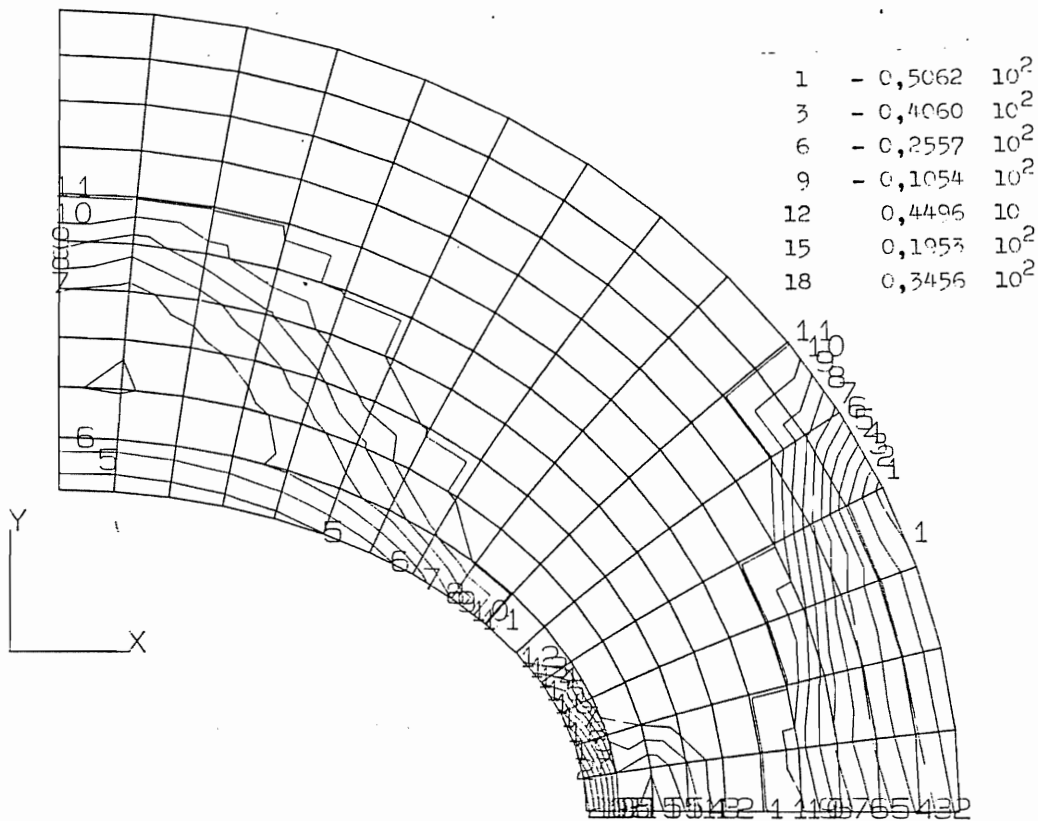
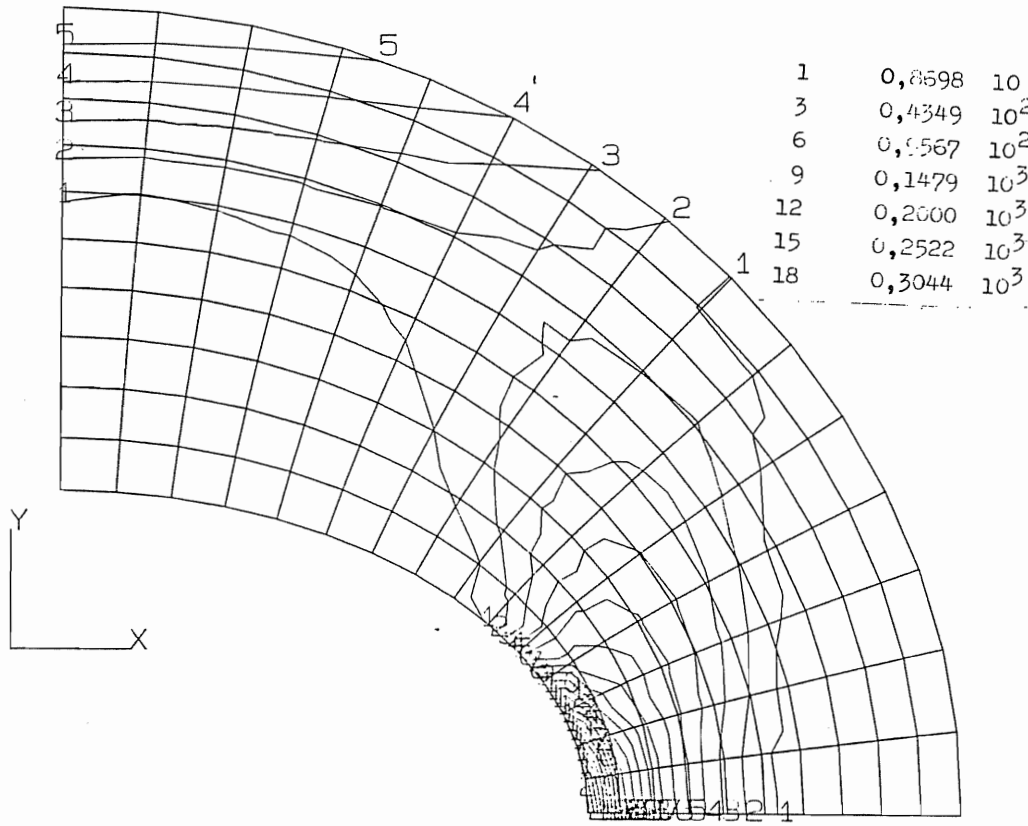




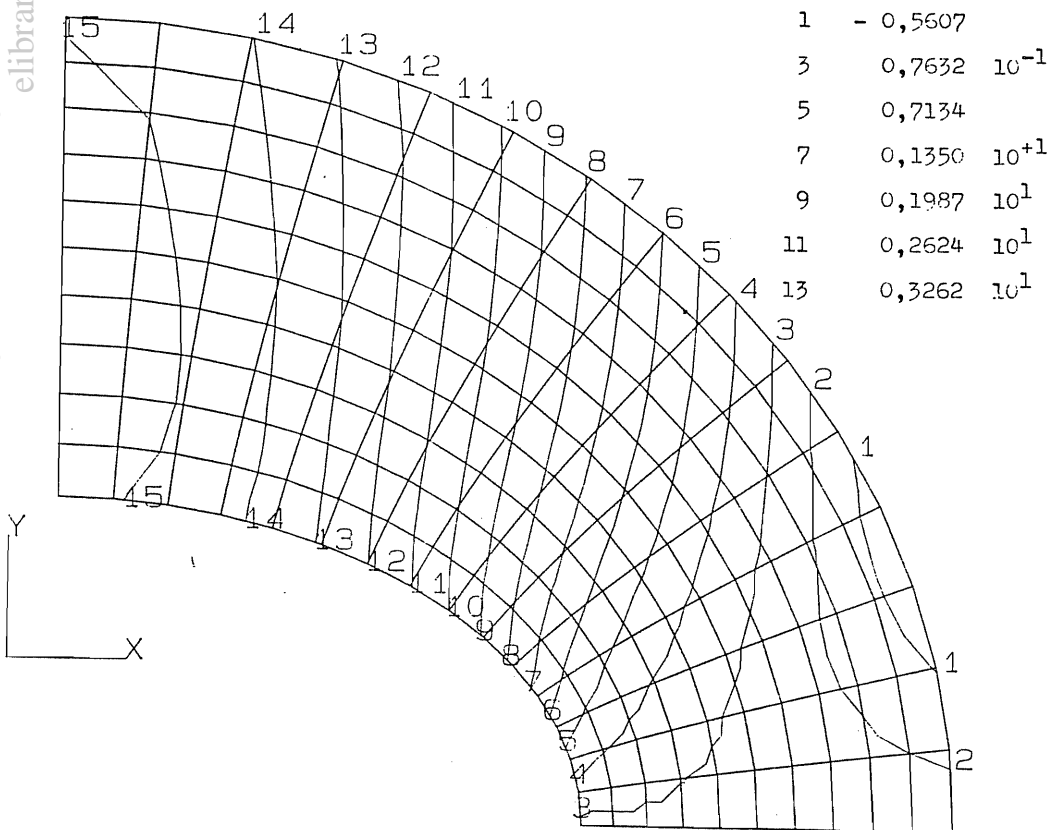
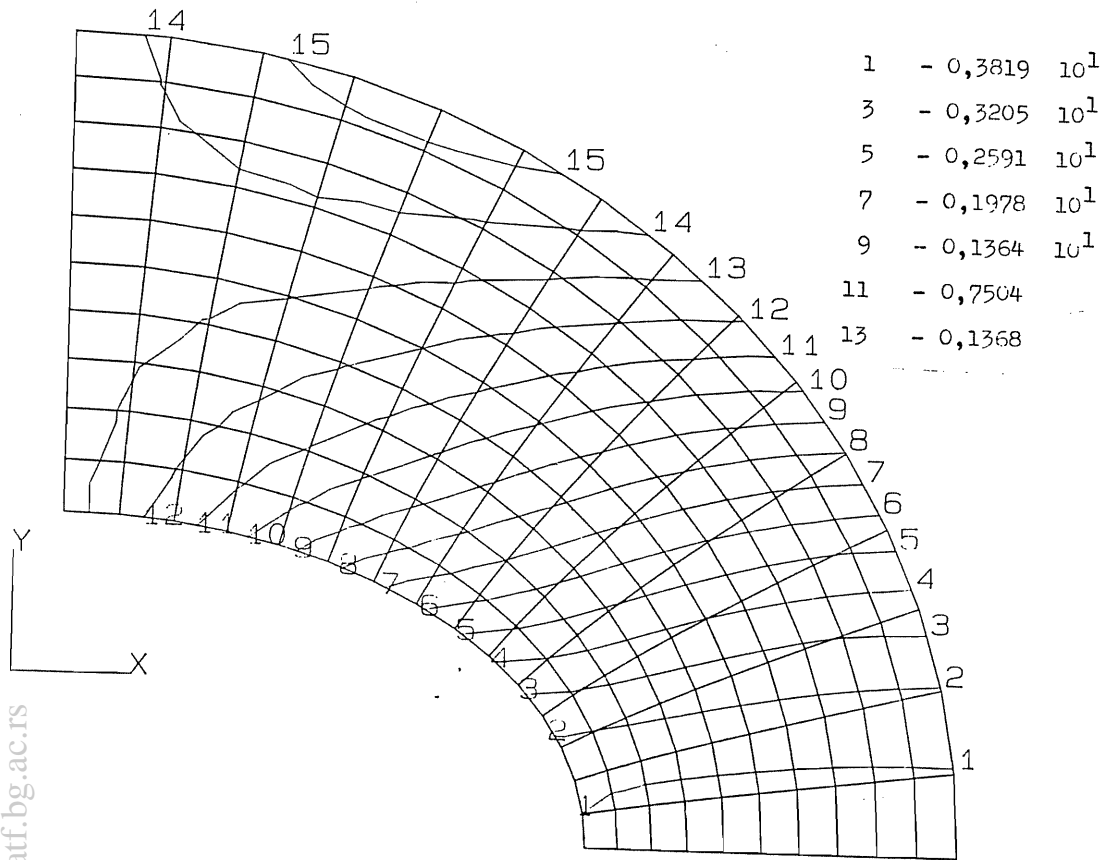
Slike 129. i 130.



Slike 131. i 132.



Slike 133. i 134.



Slike 135. i 136.

Odstupanja glavnih normalnih napona od vrednosti zadatih graničnih uslova su posledica same metode konačnih elemenata i izbora tipa konačnog elementa (EP 8). Karakteristike ovog tipa konačnog elementa su da je napon na stranicama elementa konstantan, a predpostavlja se linearna promena komponentnih pomeranja. Prvi način da se poveća tačnost je uvođenje konačnog elementa kod koga je promena napona aproksimirana linearnom funkcijom, a komponentna pomeranja parabolom drugog reda, kao što je slučaj sa konačnim elementom tipa EP 16. Primenom konačnog elementa tipa EP 24 kod koga je promena napona aproksimirana kvadratnom parabolom, a komponentna pomeranja kubnom parabolom postigla bi se još viša tačnost, ali sa znatno većim utroškom vremena. Drugi način da se tačnost poveća je povećanje broja konačnih elemenata istog tipa, što povećava vreme unosa podataka u računar. Kvalitativna slika naponskog i deformacionog stanja, ovim povećanjem tačnosti, ne bi se bitno promenila. Između programa SAPIV i BERSAFE za analizu metodom konačnih elemenata je izabran ovaj drugi, zbog kvalitetnije grafike koja prikazuje rezultate, kao i zbog preglednijeg i jednostavnijeg unosa ulaznih podataka.

## V 2. Primena metode fotoelastičnosti za određivanje naponskog i deformacionog stanja eliptično-prstenaste ploče

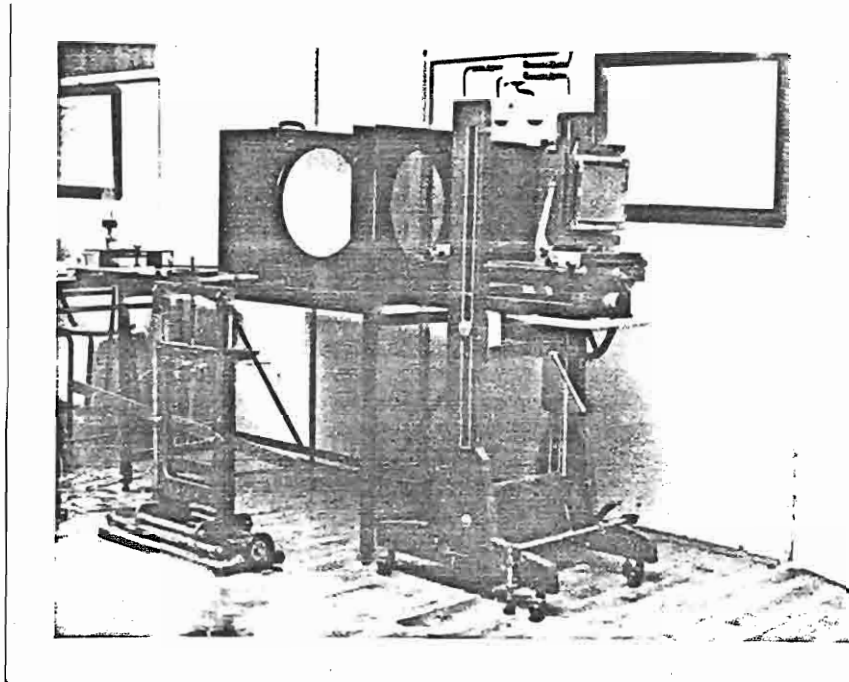
U eksperimentalnom delu ovog rada primenjena je metoda fotoelastičnosti. Teorijske osnove ove metode date su u Poglavlju IV 1. U vezi sa ovim eksperimentom interesantan je rad [26] M.M.Frocht-a iz 1938., koji je prezentiran na Petom internacionalnom kongresu primenjene mehanike u Cambridge-u. U ovom radu M.M.Frocht-a primenom metode fotoelastičnosti, odnosno korišćenjem familija izohroma i izopaha, izvršena je analiza glavnih napona, u tačkama konture i u tačkama preseka kružno-prstenaste ploče opterećene dijametralno simetričnim parom koncentrisanih sila. Analogija rezultata analize stanja napona eliptično-prstenaste ploče, koja je ovde urađena, potpuna je sa tim rezultatima i predstavlja njihovo uopštavanje.

Eksperiment koji je ovde izložen, ima za cilj određivanje stanja napona tanke ploče ograničene dvema konfokalnim elipsama, a koja je opterećena jednim ili sa dva para dijametralno simetričnih pritiskajućih koncentrisanih sila. Određivanje stanja napona odnosno snimanje slika izoklina i izohroma izvedeno je korišćenjem polariskopa "Tiedemann" sa difuznim svetlom, koji je prikazan na slici 137. Tiedemann-ov polariskop se sastoji od: izvora bele ili monohromatske svetlosti (žute) talasne dužine  $\lambda = 589.3 \text{ nm}$ , zatim od dva polarizaciona filtera od kojih je jedan u funkciji polarizatora, a drugi u funkciji analizatora, kao i od dve četvrt-talasne ploče koje se stavljaju kada se radi sa kružno polarizovanom svetlošću. Ovaj polariskop se može predstaviti u dve konfiguracije:

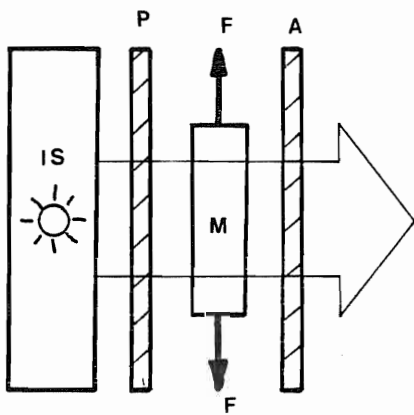
- 1) Ravanski polarizovana svetlost, pri čemu se na analizatoru dobija slika izoklina. Ova konfiguracija je prikazana na slici 138.
- 2) Kružno polarizovana svetlost, pri čemu se na analizatoru dobija slika izohroma. Ova konfiguracija je prikazana na slici 139.

U sklopu polariskopa je postavljen ram za opterećivanje modela, prikazan na slici 140. Osnovnom ramu za opterećivanje je za ovaj eksperiment dodat kotur (k),

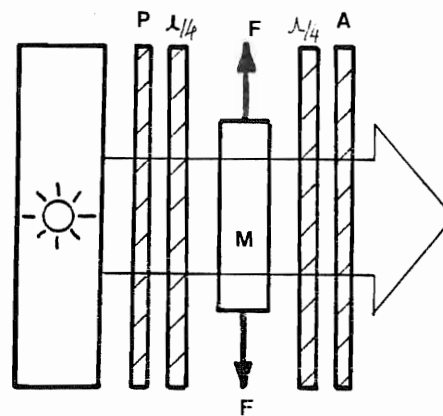
čelična užad i zavrtnji za podešavanje pravca opterećenja (z), sa valjcima (v) koji prenose silu opterećenja na konturu modela, kao što je prikazano na slici 141.



Slika 137.



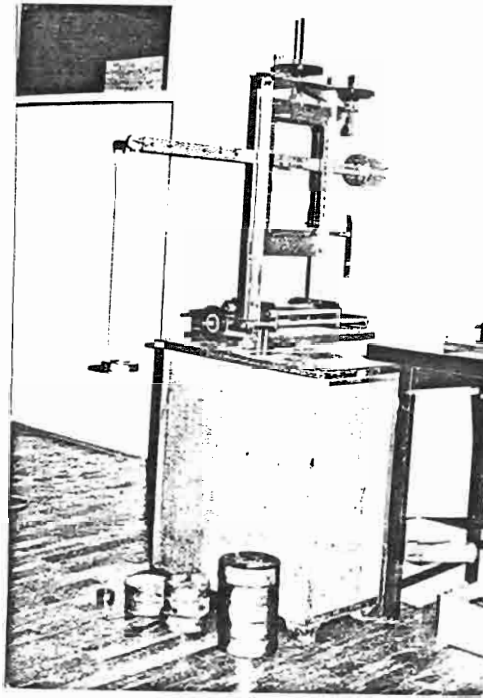
Slika 138.



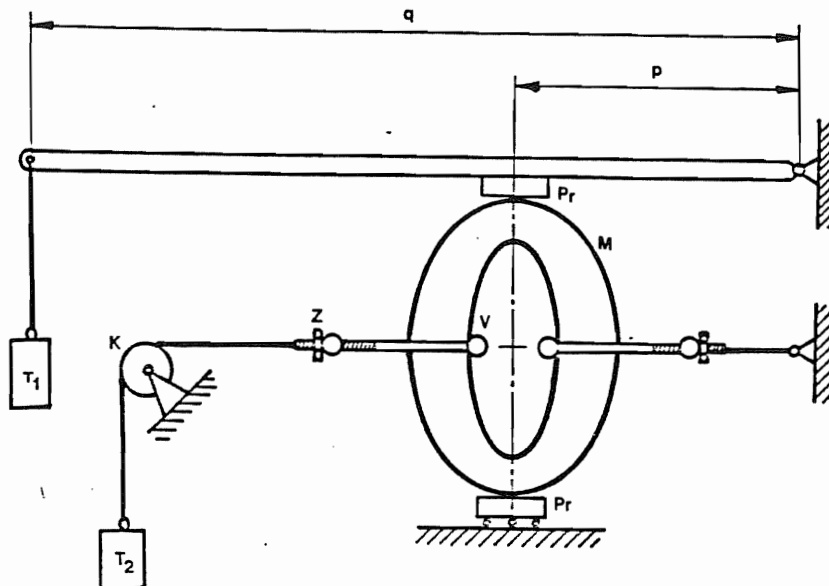
Slika 139.

U cilju dovođenja ispitivane eliptično prstenaste ploče iz nenapregnutog u napregnuto stanje, korišćenjem rama za opterećivanje, dejstvovalo se na model

koncentrisanim silama po unutrašnjoj i spoljašnjoj konturi.



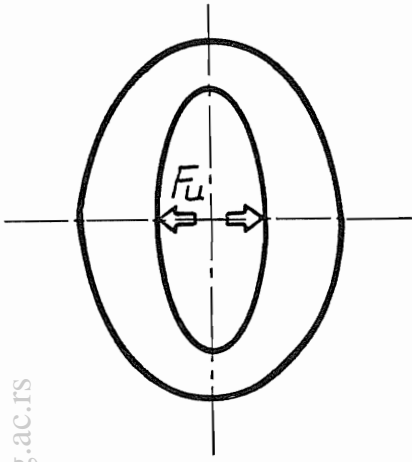
Slika 140.



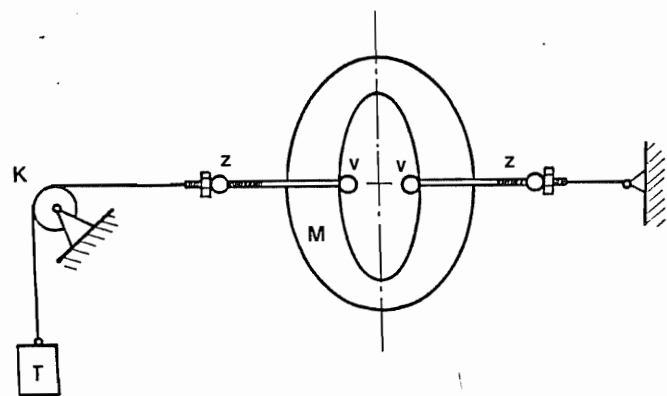
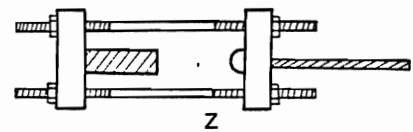
Slika 141.

Opterećenje koncentrisanim silama po unutrašnjoj konturi je realizovano preko valjkastih pritiskivača, na koje je sila opterećenja prenošena pomoću čeličnog užeta,

dok je opterećenje parom koncentrisanih sila na spoljašnjoj konturi realizovano pomoću podloge i poluge. Prilikom kombinovanja opterećenja ortogonalnim parovima koncentrisanih sila po unutrašnjoj i spoljašnjoj konturi, vodilo se računa da ne dođe do interakcije opterećenja, pa su papučice (Pr) pritiskivača po spoljašnjoj konturi postavljene na valjčice, čime je izbegnuta pojava tangencijalnih napona na kontaknoj površini. Kod slučaja opterećenja kada dejstvuju dijametralne koncentrisane sile na unutrašnjoj konturi, kao što je prikazano na slici 142., mehanizam za opterećivanje je postavljen u konfiguraciji kao što je prikazano na slici 143.



Slika 142.

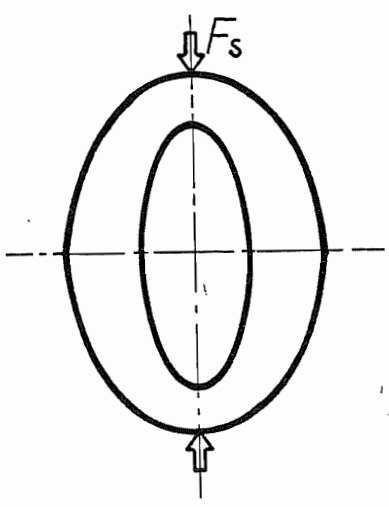


Slika 143.

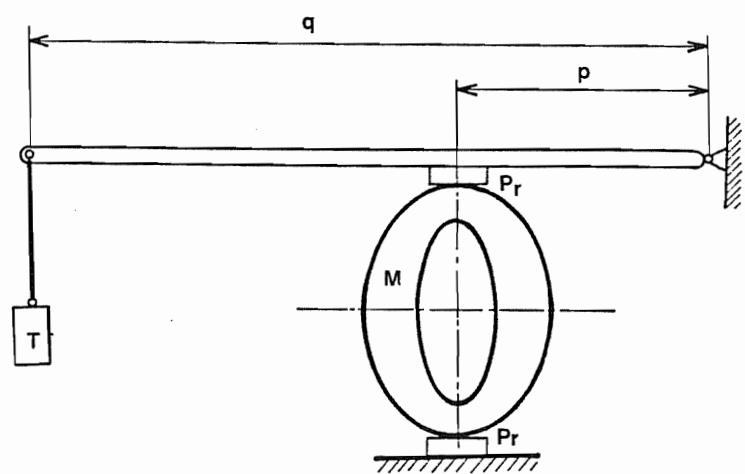
Pri tome je na čelično uže okačen teg mase  $m_x = 35.5$  kg, odnosno težine  $F_x = F_u = 348.255$  N. Kod drugog slučaja, kada dejstvuju koncentrisane sile po spoljašnjoj konturi na polugu pritiskivača je okačen teg mase  $m_y = 14.6$  kg, odnosno težine  $Q = 143.226$  N. Pošto se sila prenosi preko poluge, sila koja dejstvuje na konturu će biti:

$$F_y = F_s = \frac{q}{p} Q \dots\dots\dots (252)$$

Pošto su dužine  $p = 12.3$  cm,  $q = 80$  cm sledi da će sila na spoljnoj konturi biti  $F_y = F_s = 931.5512$  N. Ovaj slučaj opterećenja kao i konfiguracija mehanizma šematski su prikazani na slici 144. i 145. redom.



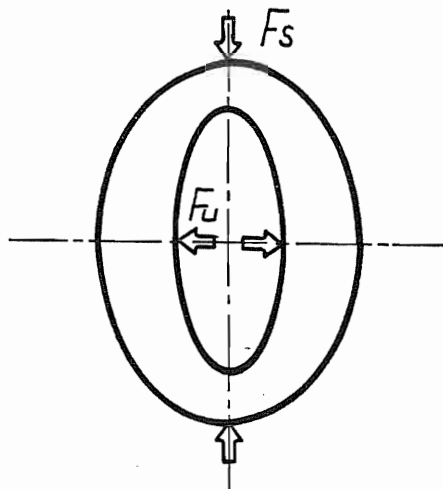
Slika 144.



Slika 145.



Kod trećeg slučaja opterećenja, istovremeno dejstvuju koncentrisane sile i po spoljašnjoj i po unutrašnjoj konturi, kao što je prikazano na slici 146., pa ovo predstavlja kombinaciju prva dva slučaja.



Slika 146.

Prema tome kod ovog slučaja opterećenja, dejstvuju istovremeno sile  $F_u = 348.255 \text{ N}$  i  $F_s = 931.5512 \text{ N}$ . Model eliptično-prstenaste ploče izrađen je od ploče ARALDIT-a B debljine  $h = 10 \text{ mm}$ . Mehanička obrada modela odnosno dovođenje na zadati oblik, vršena je na trakastoj testerici, a zatim na brzohodnoj glodalici sa preko 20000 o/min. Pri tome je predhodno načinjen model od pleksi-stakla, koji je poslužio kao matrica za izradu konačnog modela. Kvalitetnom obradom prema preporukama iz literature [4], kao i kratkim vremenskim periodom, koji je protekao između izrade modela i izvršenog eksperimenta izbegnuta je pojava ivičnih (rubnih) efekata usled eventualnog upijanja vlage ili gubitka anhidrida. Pre nego što se pristupilo eksperimentu korišćenjem polariskopa provereno je da nema rubnog efekta ili zaostalih zamrznutih napona u modelu. Na taj način, konture eliptično-prstenaste ploče su dovedene na oblik dve konfokalne elipse, čije su koordinate zadate izrazima:

$$\begin{aligned} x &= R \left( \rho + \frac{m}{\rho} \right) \cos \varphi \\ y &= R \left( \rho - \frac{m}{\rho} \right) \sin \varphi \dots\dots\dots (253) \end{aligned}$$

gde je:  $R = 4$ ,  $m = 0.25$ , a  $\rho_1 = 1$  za unutrašnju konturnu elipsu i  $\rho_2 = 2$  za spoljašnju konturnu elipsu.

Pa su poluose unutrašnje elipse  $a_1 = 50 \text{ mm}$  i  $b_1 = 30 \text{ mm}$ , a poluose spoljašnje elipse  $a_2 = 85 \text{ mm}$  i  $b_2 = 75 \text{ mm}$ .

Mehaničke i optičke karakteristike materijala od koga je izrađen model utvrđene su baždarenjem na disku i štapu prema preporukama iz literature [4], [17] i [25].

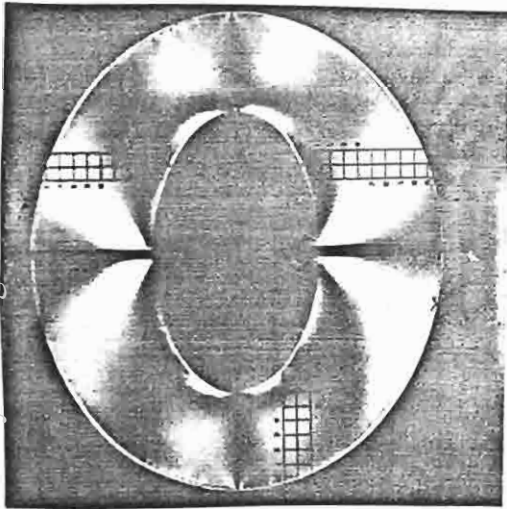
Detaljan opis baždarenja fotoelastičnog materijala dat je u Prilogu IV.

Pomoću fotografske opreme i polariskopa snimljene su fotografije izoklina i izohroma na 35 mm i plan filmu 6.5 x 9 cm. Ove fotografije korišćene su zatim za izradu mapa izoklina i izohroma. Pri tome je zbog veće preciznosti određivanje izoklina realizovano na dva načina:

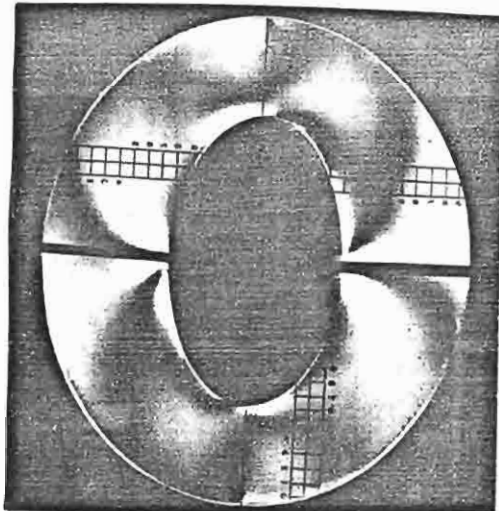
- 1) fotografisanjem izoklina, a zatim njihovim projektovanjem na papir i ucrtavanjem mape.

2) nanošenjem folije, koja ne izaziva optički efekat, na model i direktnim crtanjem izoklina na njoj.

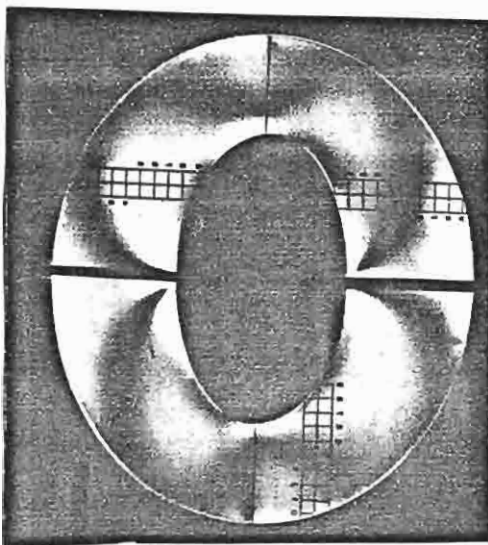
Takođe, izohrome su fotografisane u "tamnom" i "svetlom" ekranu polariskopa pri čemu smo u tamnom polju dobili celobrojne vrednosti izohroma (0, 1, 2, 3, ...), a u svetlom polju polovine ( 1/2, 3/2, 5/2, ...). Pri tome je red izohroma u nekim tačkama kontrolisan kompenzacijom po Tardy-ju, i to pre svega "nulte" izohrome, singularne i izotropne tačke. Pri tome se fotografisanje realizovalo u monohromatskoj svetlosti, a Tardy kompenzacija u "beloj" i monohromatskoj svetlosti. Izokline snimljene u beloj svetlosti za prvi slučaj opterećenja, kada deluju u pravcu kraćih poluosa elipsi, koncentrisane sile na unutrašnjoj konturi  $F_u=348.255\text{ N}$  date su na slikama označenim brojem 147. i to izokline  $0^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $70^\circ$  i  $80^\circ$  (izoklina  $90^\circ$  se poklapa sa izoklinom  $0^\circ$ ).



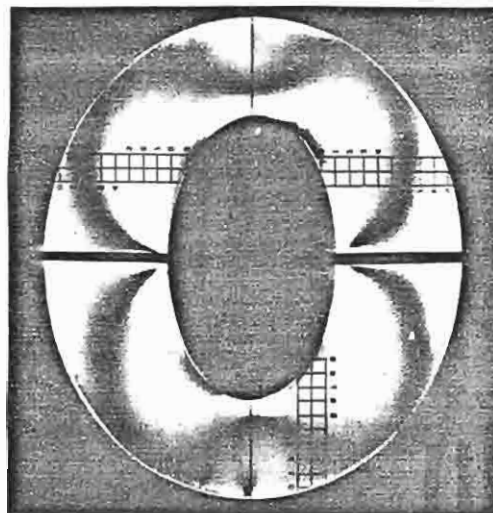
$0^\circ$



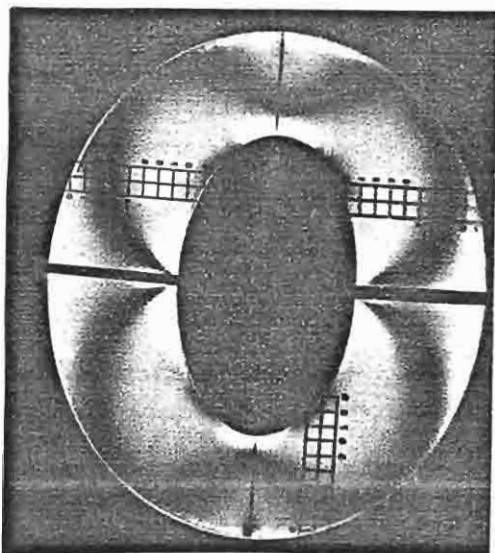
$10^\circ$



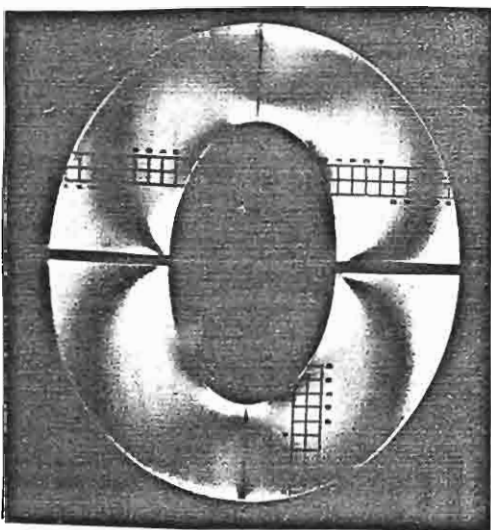
$20^\circ$



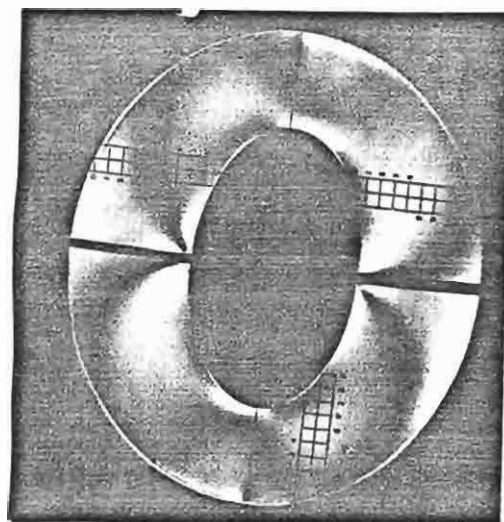
$30^\circ$



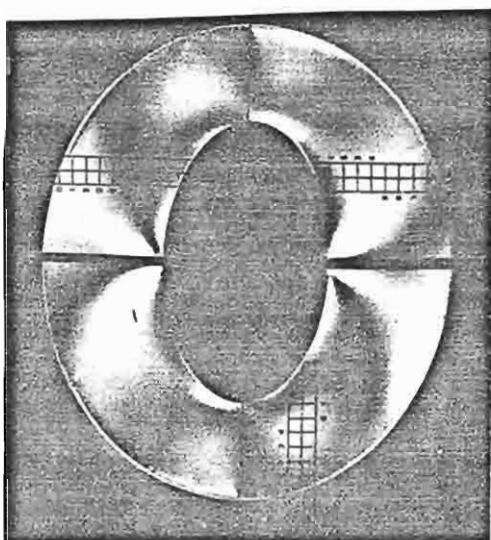
40°



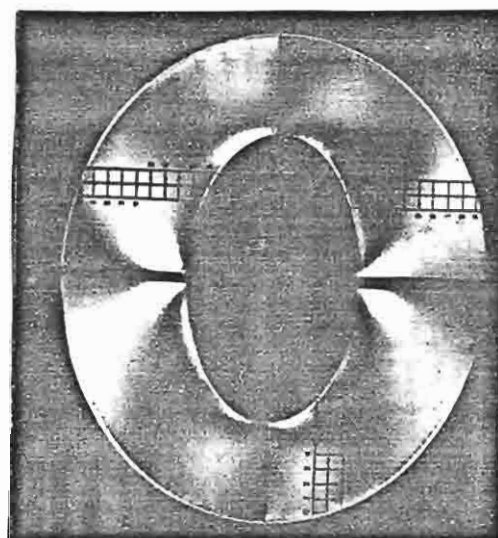
50°



60°



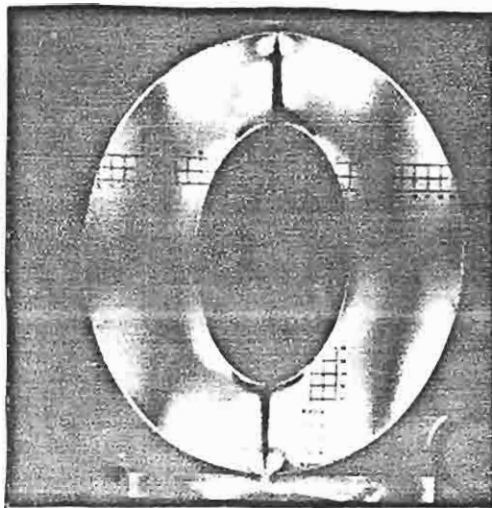
70°



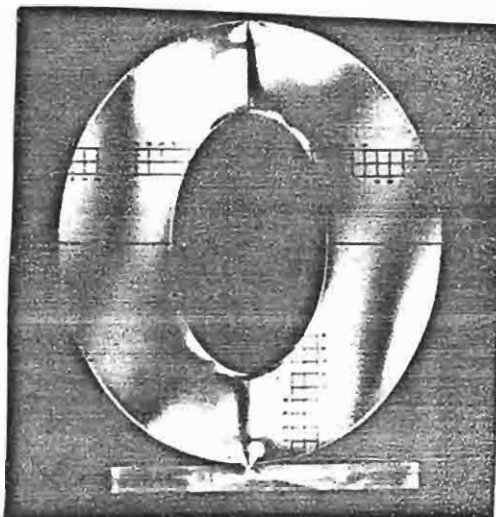
80°

Slika 147.

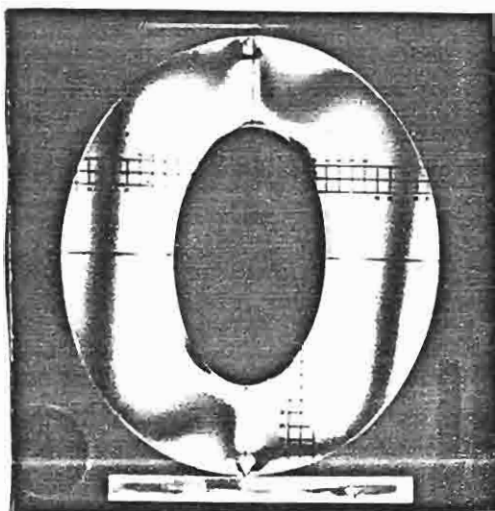
Na slikama 148. prikazane su fotografije izoklina parametra  $0^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $70^\circ$  i  $80^\circ$  za drugi slučaj opterećenja, tj. koncentrisanim silama u pravcu dužih poluosa  $F_s = 931.5512 \text{ N}$  na spoljašnjoj konturi.



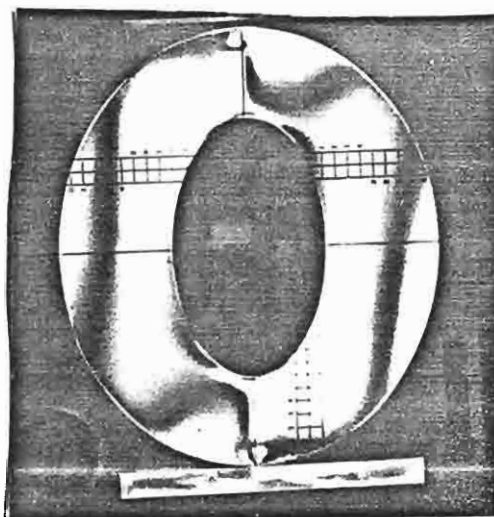
$0^\circ$



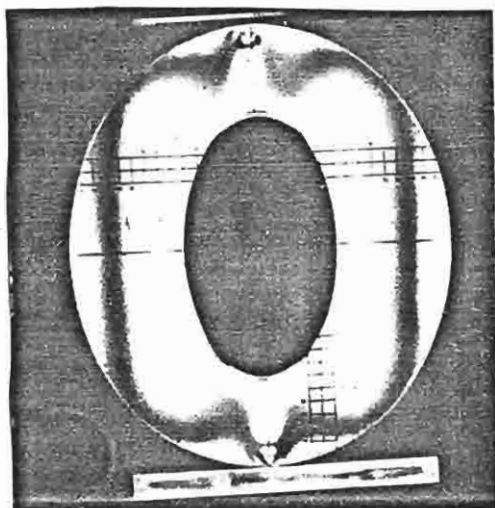
$10^\circ$



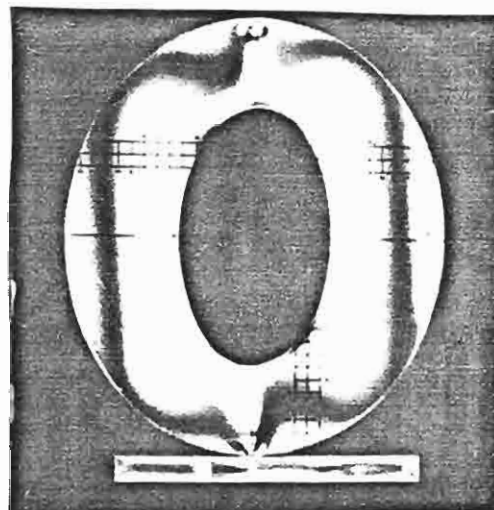
$20^\circ$



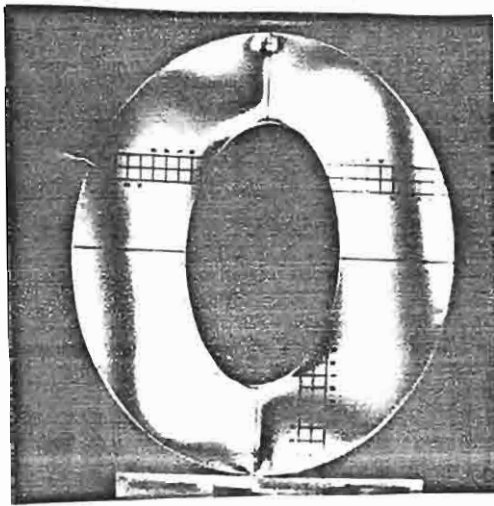
$30^\circ$



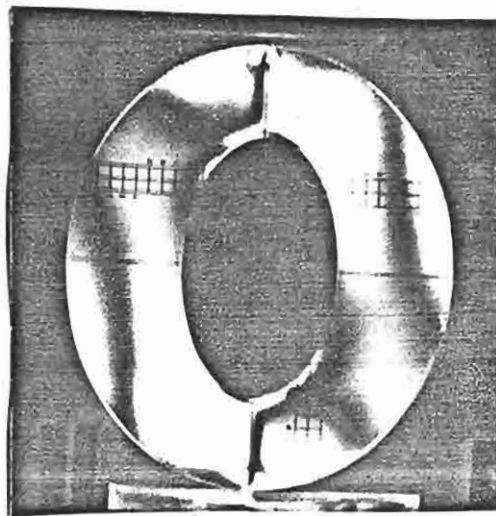
$40^\circ$



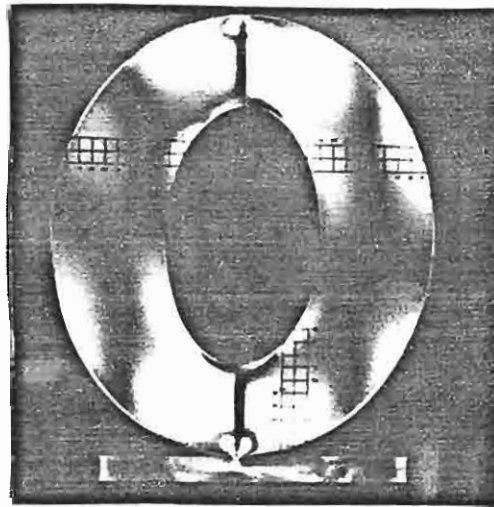
$50^\circ$



60°



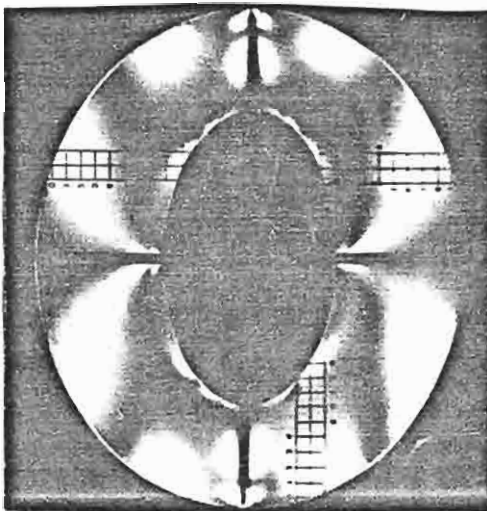
70°



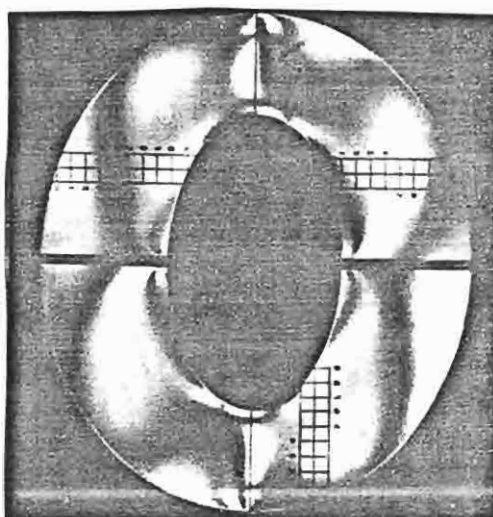
80°

Slika 148.

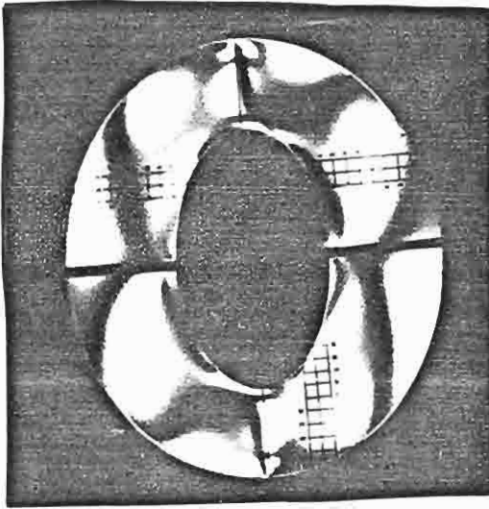
Na slikama 167. prikazane su fotografije izoklina parametra 0°, 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70° i 80° za treći slučaj opterećenja, tj. pri dejstvu koncentrisanih sila  $F_u = 348.255 \text{ N}$ ,  $F_s = 931.5512 \text{ N}$  u pravcu poluosu, na unutrašnju i spoljašnju konturu.



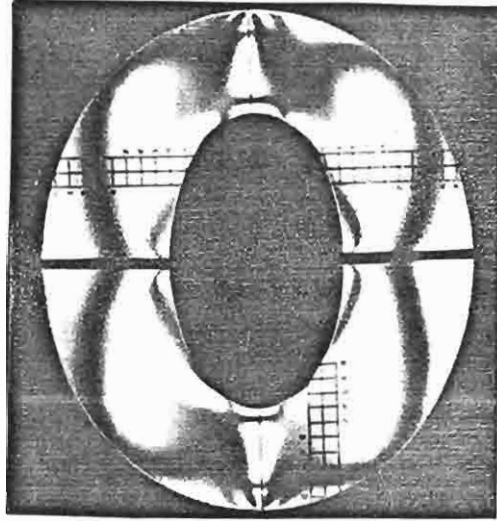
0°



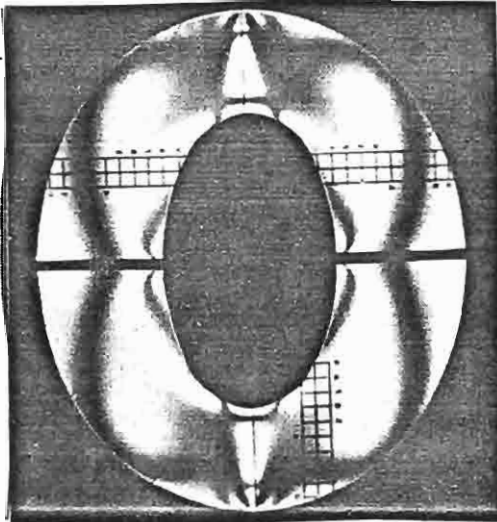
10°



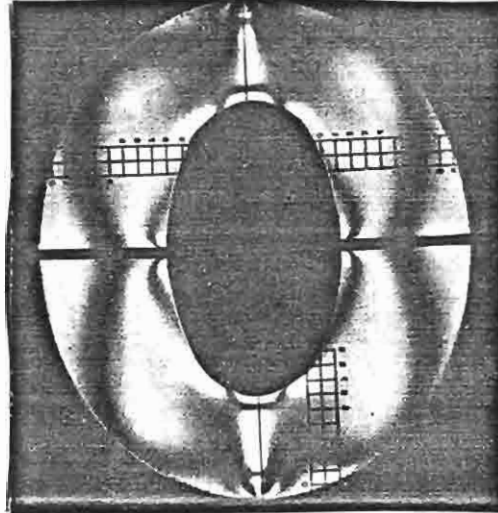
20°



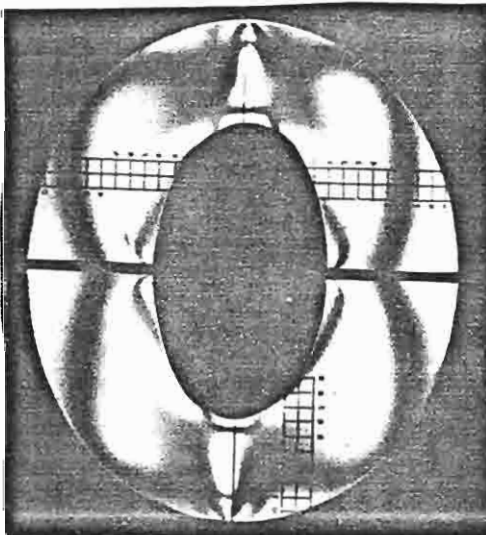
30°



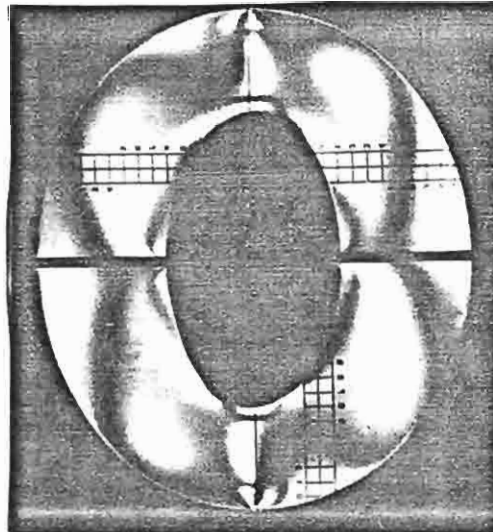
40°



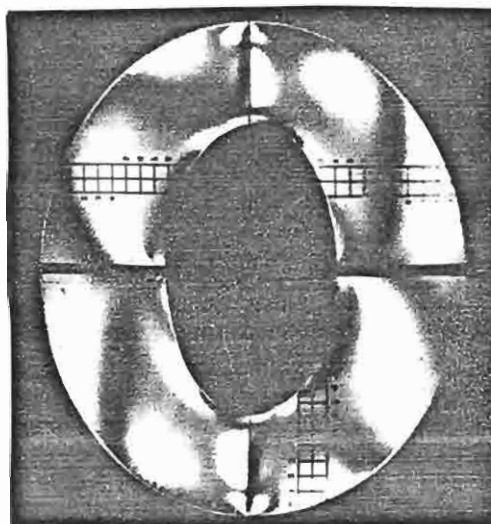
50°



60°



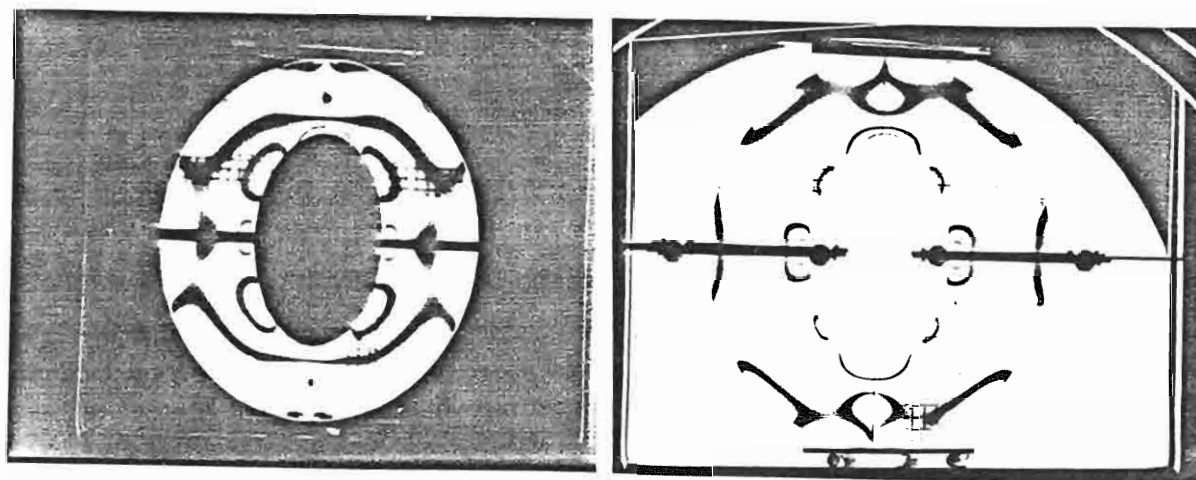
70°



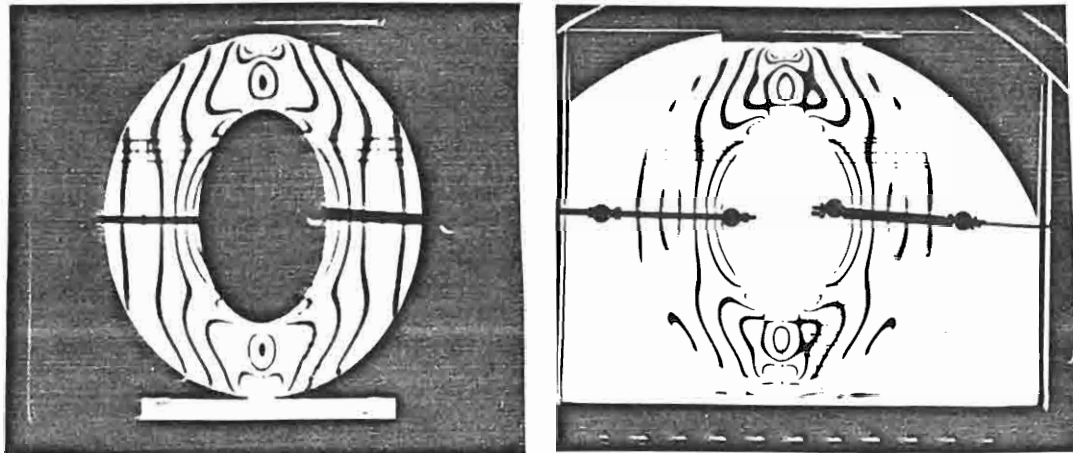
80°

Slika 149.

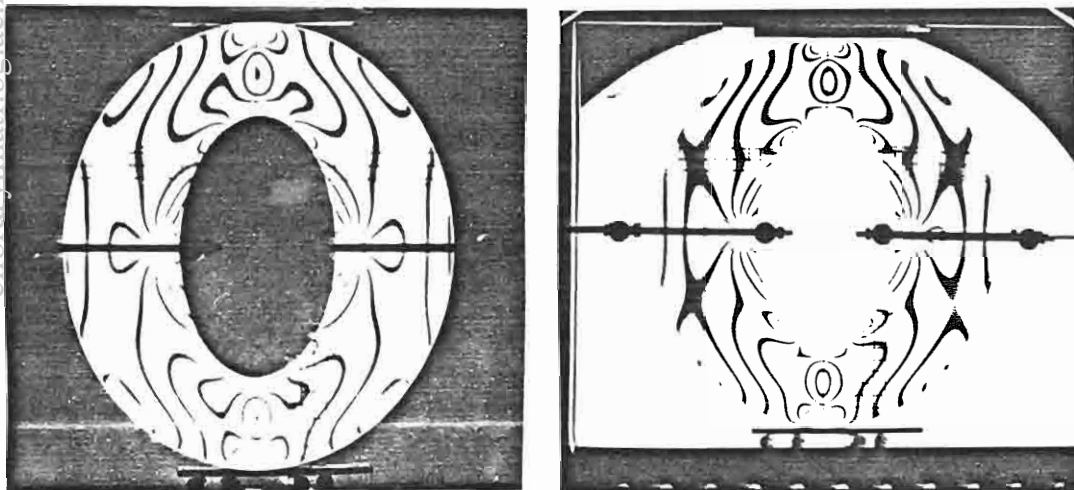
Korišćenjem fotografija izoklina kao i direktnim crtanjem na foliji dobio sam mape izoklina za tri slučaja opterećenja, pri tome je na slici 153. prikazana mapa izoklina za slučaj opterećenja koncentrisanim silama na unutrašnjoj konturi. Na slici 155. prikazana je mapa izoklina za slučaj opterećenja koncentrisanim silama na spoljašnjoj konturi. Za slučaj opterećenja u pravcu poluosa elipsi koncentrisanim silama po unutrašnjoj i spoljašnjoj konturi, mapa izoklina je prikazana na slici 157. Na grafičkim prikazima familija izoklina sa  $S^+$  i  $S^-$  označene su pozitivne i negativne singularne tačke, dok su sa  $T^+$  i  $T^-$  označene pozitivne i negativne izotropne tačke. Takođe su naznačeni i uglovi jednog glavnog pravca naprezanja, pripadajućeg odgovarajućoj izoklini u odnosu na referentnu osu polariskopa. Drugi glavni pravac napona je upravan na prvi. Izohrome su snimane fotografisanjem modela u konfiguraciji polariskopa za kružno-polarizovanu svetlost i to u tamnom i svetlom polju. Na slici 150. prikazane su fotografije izohroma u tamnom i svetlom polju za slučaj opterećenja koncentrisanim silama na unutrašnjoj konturi, na slici 151. za slučaj opterećenja koncentrisanim silama na spoljašnjoj konturi i na slici 152. za slučaj opterećenja koncentrisanim silama na obe konture.



Slika 150.



Slika 151.

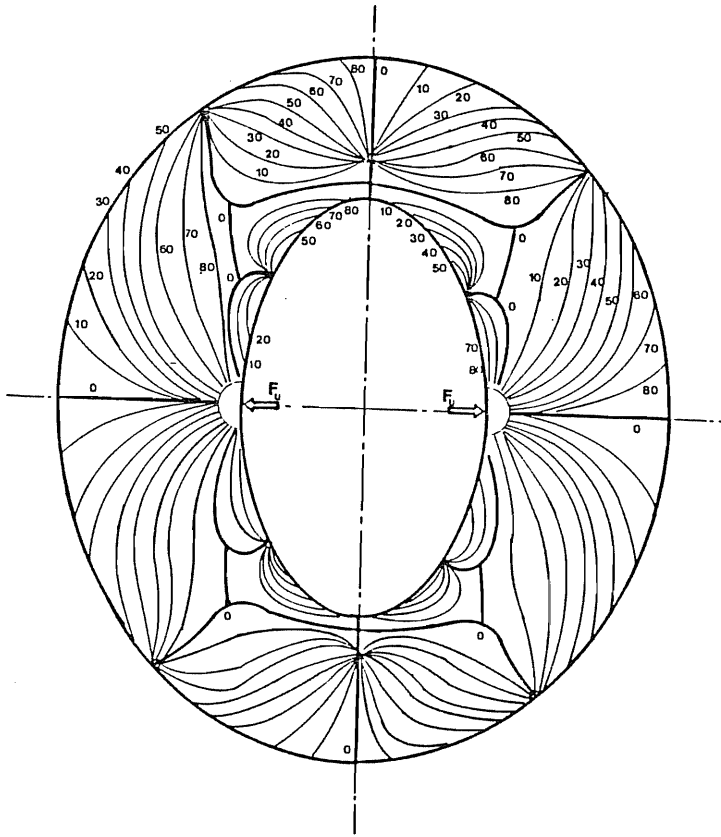


Slika 152.

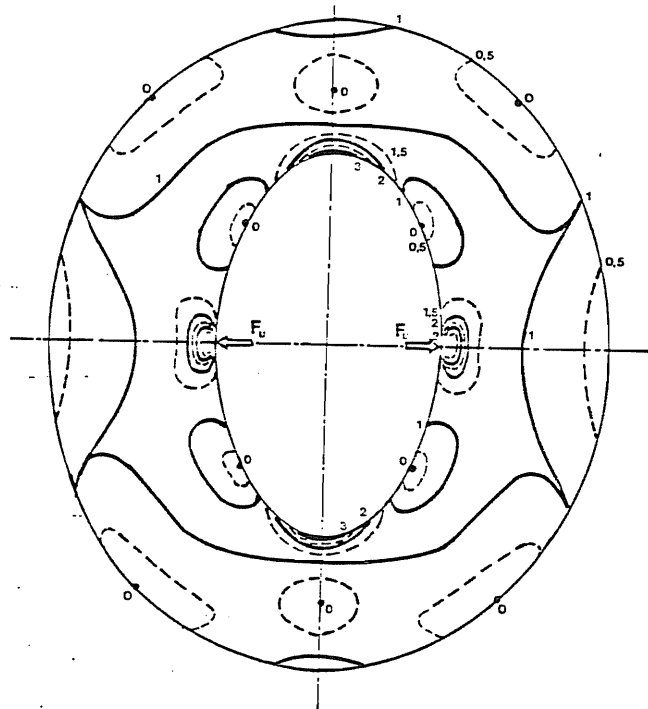
Na osnovu fotografija izoklina prikazanih na slikama 147., 148., 149. i fotografija izohroma prikazanih na slikama 150., 151. i 152. nacrtane su mape izoklina i izohroma za sva tri slučaja opterećenja. Tako su na slikama 154., 156., i 158. prikazane mape familija izohroma redom za naznačene vrste opterećenja. Na ovim mapama označen je red izohroma, čije je određivanje realizovano na dva načina: metodom Tardy odnosno kompenzacijom direktno na polariskopu, dovođenjem određene izohrome u datu tačku; i naknadnom analizom fotografija u "tamnom" i "svetlom" polju uz korišćenje linearne interpolacije. Pri tome je metoda kompenzacije po Tardy-ju bila samo pomoćna u cilju kontrole rezultata dobijenih sa fotografija.

Na grafičkim prikazima familija izohroma sa  $O_{\pm}$ , označene su tačke koje razdvajaju zone naprezanja na istezanje i zone naprezanja na pritisak, linijskih elemenata povučeni iz tačaka konture u pravcima tangencijalnim na konturu ploče. Takođe su naznačeni i brojevi reda izohroma.

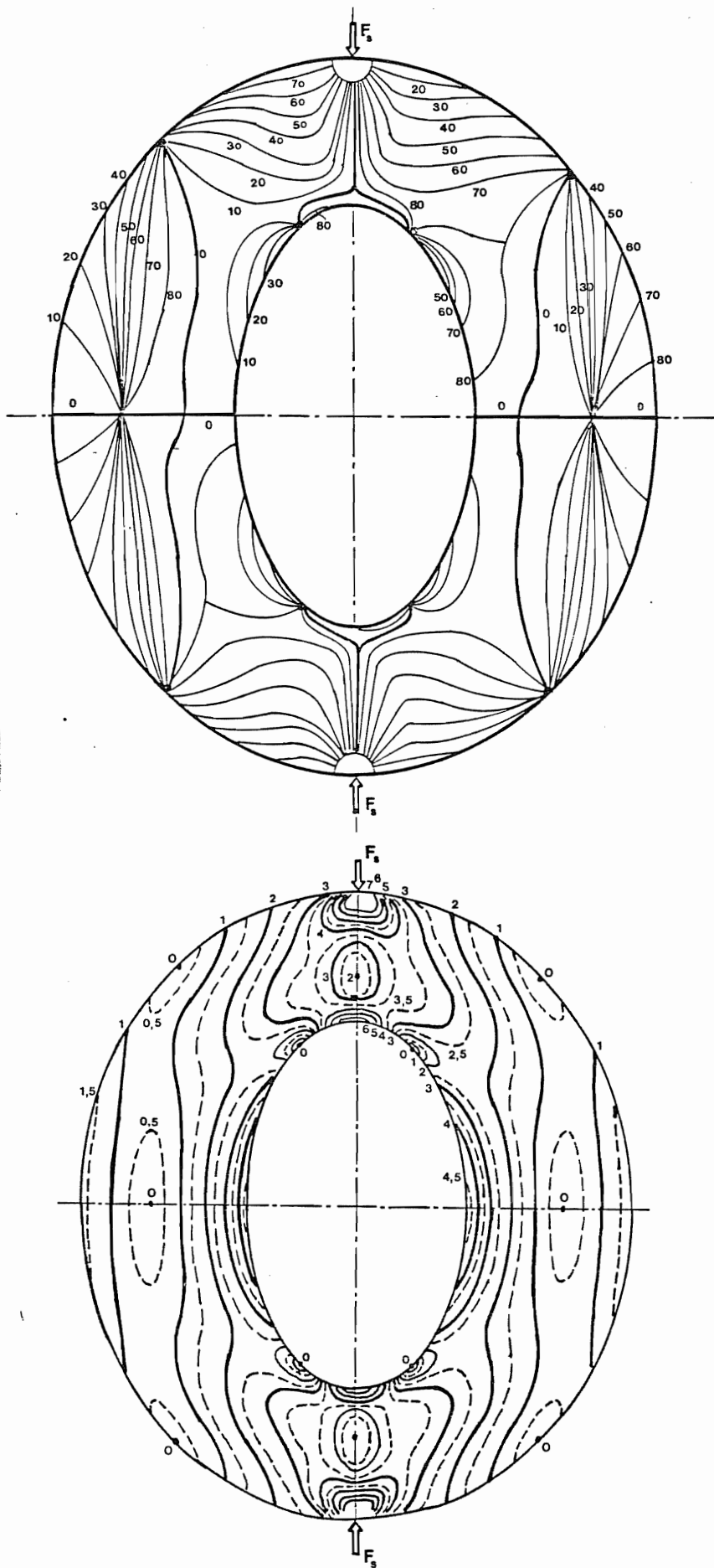




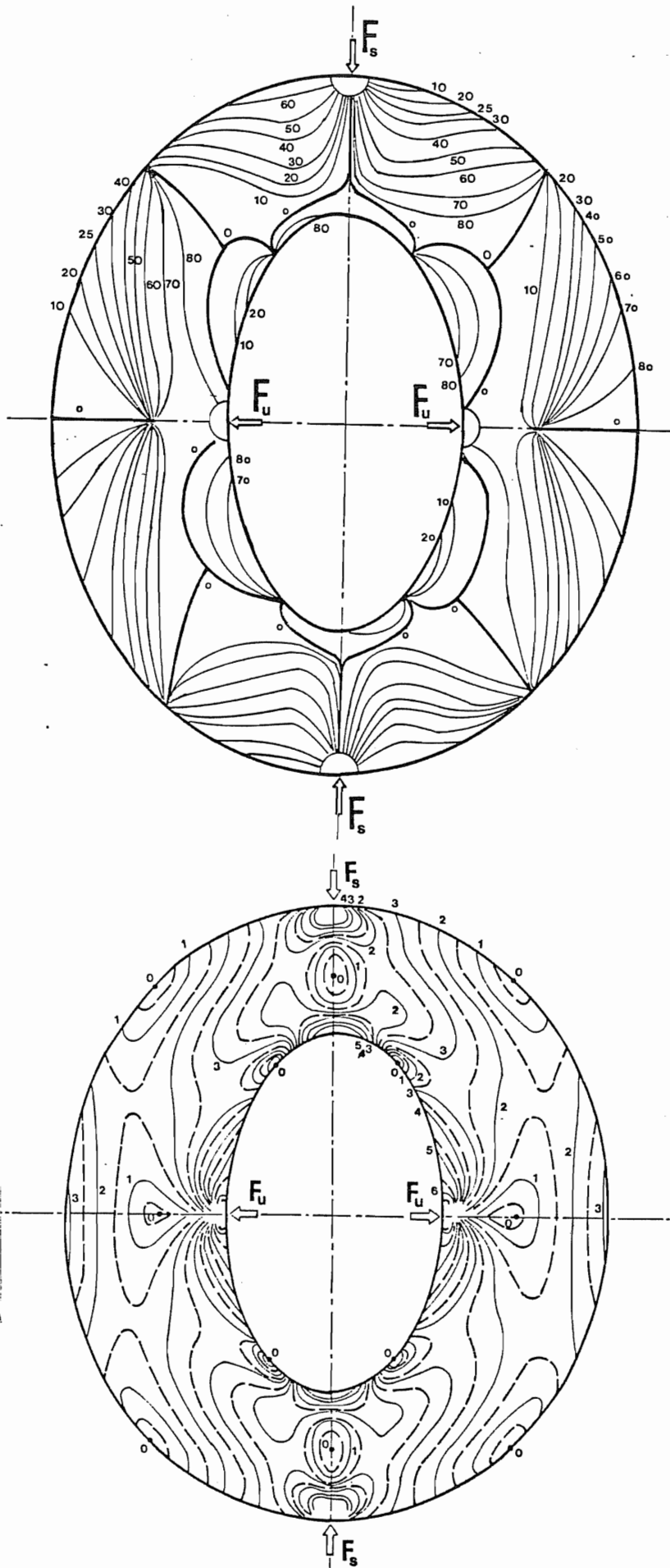
Slika 153.



Slika 154.



Slike 155. i 156.



Slike 157. i 158.

Za određivanje glavnih napona u tačkama na konturi i u tačkama zadatih preseka eliptično-prstenaste ploče koristimo relaciju (227):

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N f_{\sigma}}{h}$$

gde je: N-red izohrome,

h-debljina ploče i

$f_{\sigma}$ -naponsko-optička konstanta.

U tačkama konture ploče takođe koristimo granični uslov, da je normalni napon u tim tačkama za tangencijalne površi na konturi ploče jednak nuli. Pošto je jedan od glavnih normalnih napona  $\sigma_1$  ili  $\sigma_2$  na konturi jednak nuli iz izraza (227) sledi:

$$\sigma_1 = \frac{N f_{\sigma}}{h}, \quad \sigma_2 = 0$$

odnosno:

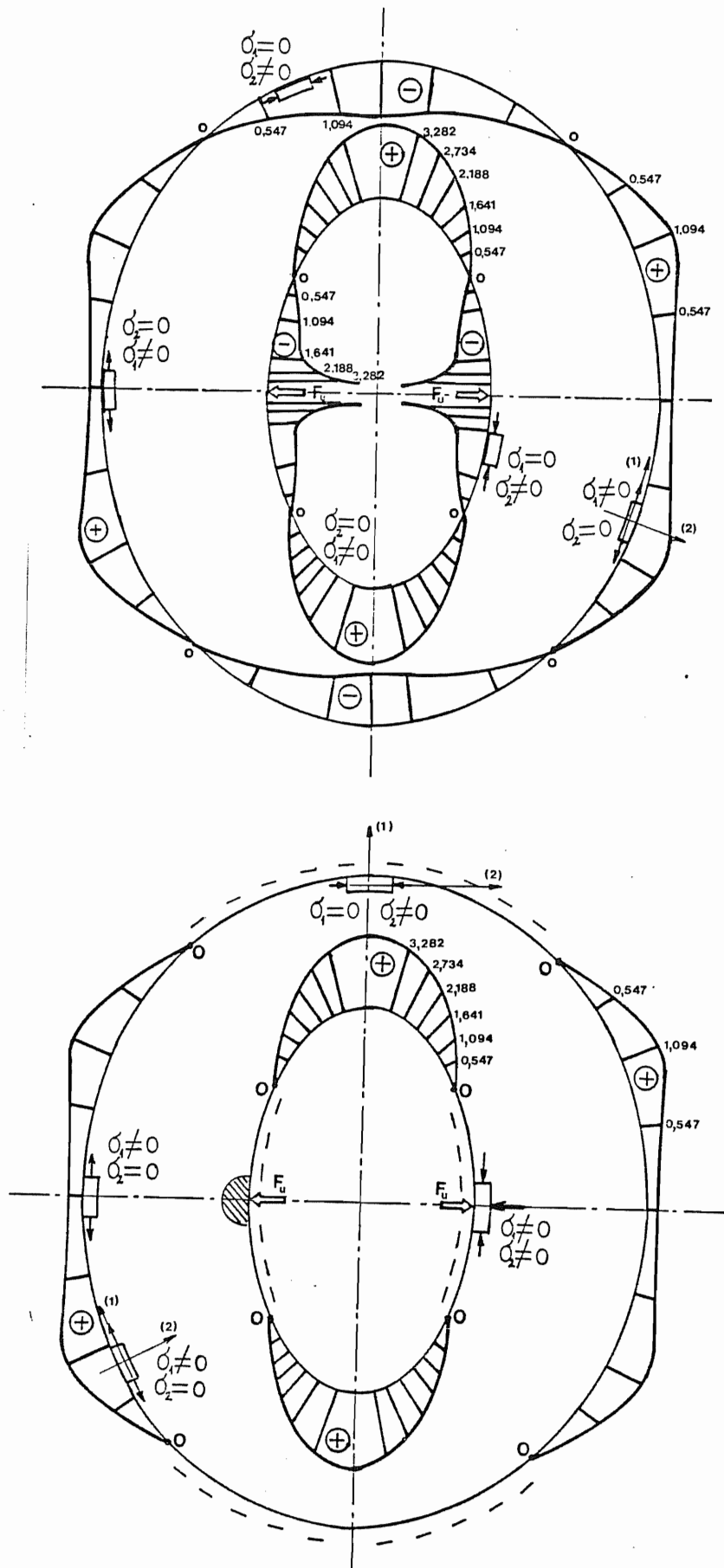
$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \frac{N f_{\sigma}}{h} \dots\dots\dots (254)$$

Prema tome, vrednosti glavnih normalnih napona u tačkama konture mogu se dobiti množenjem reda N izohrome, redukovanom vrednošću naponsko-optičke konstante  $F_{\sigma}/h$ , koja za ovaj primer iznosi:  $F_{\sigma}/h = 1.093 \text{ N/mm}^2$ . Pravci glavnih napona u tačkama konture su tangencijalni na eliptične konture i tangencijalni u odnosu na odgovarajuću ortogonalnu hiperbolu povučenu u datoj tački na eliptičnu konturu. Koristeći konvenciju da se indeksom (1) označava glavni napon veće vrednosti, a sa (2) manje vrednosti, to u slučaju kada se radi o zatezanju linijskog elementa povučenog iz tačke konture, u pravcu konture je  $\sigma_1 \neq 0$ , a  $\sigma_2 = 0$ , a kada se radi o pritisku linijskog elementa povučenog iz tačke konture u pravcu konture, onda je  $\sigma_1 = 0$ , a  $\sigma_2 \neq 0$ .

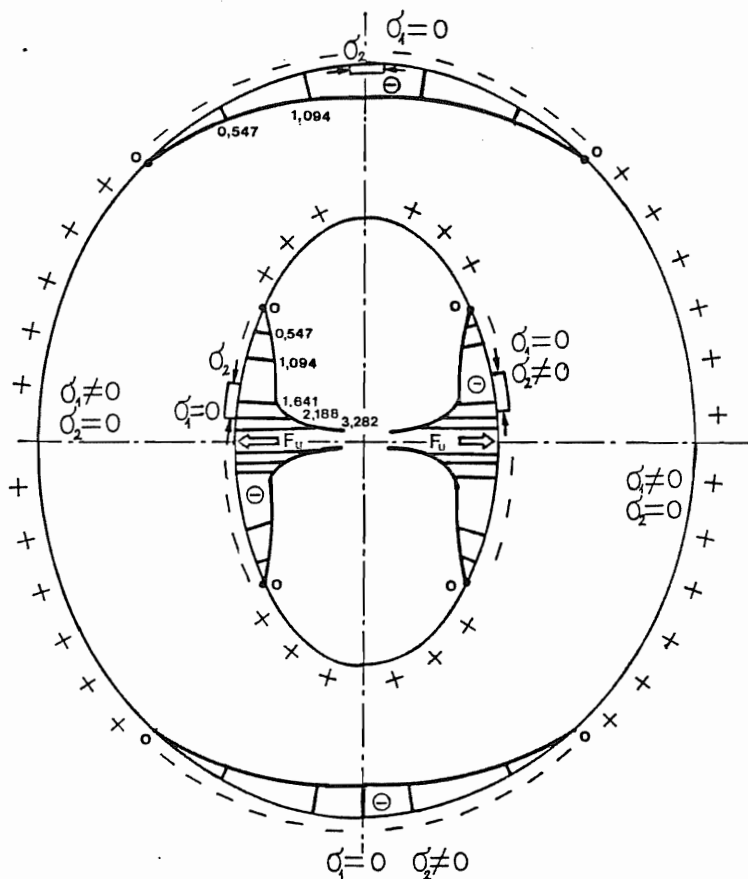
Korišćenjem koordinatnog sistema sa koordinatnim linijama: konfokalne elipse i odgovarajuće ortogonalne familije hiperbola, zaključujemo da su glavni pravci naprezanja u svakoj tači spoljašnje i unutrašnje konture eliptično prstenaste ploče u pravcima tangencijalnim na odgovarajuće koordinatne linije, što ne važi i za tačke unutar ploče, isključujući konture, što se vidi i sa familija izoklina. Ako poredimo mape izoklina za sve tri vrste opterećenja sa slika 153., 155. i 157., vidimo da se izokline sa istim oznakama uglova završavaju (izlaze) na konture u istim tačkama isključujući lokalne zone kontura ploče oko napadnih tačaka sile ili opterećenja u kojima dolazi do pojave efekta lokalnih naprezanja.

Vidimo da su glavni pravci napona u tačkama slobodne konture uslovljni geometrijom konture ploče i da je parametar izokline odnosno ugao koji određuje data izoklina, jednak uglu nagiba, tangente na konturu u odnosu na referentnu osu, u tački u kojoj ta izoklina izlazi na konturu.

Korišćenjem izraza (254) mogu se odrediti vrednosti glavnih normalnih napona  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  u tačkama konture ploče. Na taj način određeni glavni naponi, za slučaj opterećenja koncentrisanim silama po unutrašnjoj konturi, prikazane su na slici 159. Na slici 160. prikazan je dijagram glavnog napona  $\sigma_1$  u tačkama na unutrašnjoj i spoljašnjoj konturi ploče i predstavlja dijagram napona zatezanja u tačkama konture, dok je na slici 161. prikazan dijagram glavnog napona  $\sigma_2$  takođe u tačkama unutrašnje i spoljašnje konture i predstavlja dijagram napona pritiska za ovaj slučaj opterećenja. Takođe, na ovim slikama su prikazani linijski elementi na konturama sa naznačenim smerom dejstvujućih napona.



Slike 159. i 160.



Slika 161.

Glavne pravce napona u tačkama unutar ploče možemo analizirati pomoću familija izoklina, a stanje napona u tačkama unutar ploče možemo odrediti korišćenjem familija izoklina i izohroma i metode razlike tangencijalnih napona, koja se još sreće u literaturi kao Frocht-ova metoda. Ova metoda opisana je u literaturi [17]. Iz Navier-ovih jednačina ravnoteže u slučaju ravnog stanja naprezanja i odsustva zapreminskih sila dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (255)$$

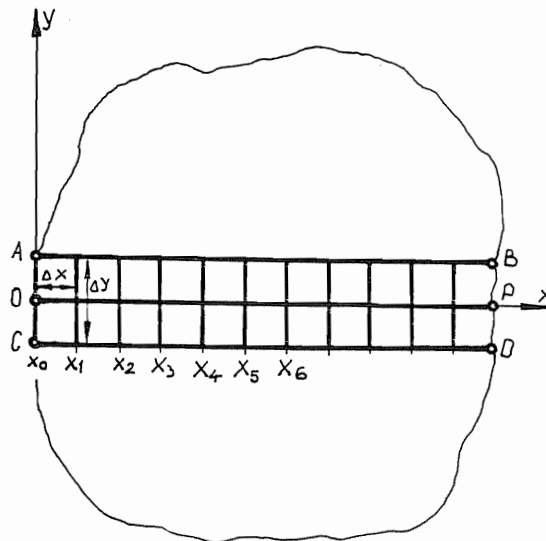
Prva jednačina (255) može biti integraljena po x, kao što je dato na slici 162., saglasno relaciji:

$$\int_0^{x_1} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx = - \int_0^{x_1} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dx \quad (256)$$

Ova jednačina se može numerički prikazati uvođenjem metode konačnih razlika, gde se parcijalno diferenciranje zamenjuje razlikama ili diferencama korišćenjem relacije:

$$\int_0^{x_1} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx = \sigma_x|_{x_1} - \sigma_x|_{x_0} = - \frac{\Delta \tau_{xy}}{\Delta y} \Big|_{\frac{(x_0+x_1)}{2}} \cdot \Delta x \quad (257)$$

gde:  $x_0$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  itd. određuju tačke duž ose x. Ovde  $\Delta x$  i  $\Delta y$  predstavljaju konačne intervale duž x i y kao što je prikazano na slici 162.



Slika 162.

Ako usvojimo da je  $\Delta x = \Delta y$  jednačina (257) se svodi na izraz:

$$\sigma_x|_{x_1} = \sigma_x|_{x_0} - \Delta\tau_{xy} \frac{(x_0 + x_1)}{2} \dots\dots\dots (258).$$

Veličina  $\sigma_x|_{x_0}$  može se odrediti direktno iz reda izohroma u tački  $x_0$  na slobodnoj konturi. Veličina  $\Delta\tau_{xy}$  može biti izračunata iz mape izohroma i izoklina, odnosno, zatim je moguće odrediti  $\sigma_x$  u tački  $x_1$  unutar oblasti. Ako ovaj postupak ponavljamo korak po korak, možemo odrediti  $\sigma_x$  duž pravca OP:

$$\begin{aligned} \sigma_x|_{x_2} &= \sigma_x|_{x_1} - \Delta\tau_{xy} \frac{(x_1 + x_2)}{2} \\ \sigma_x|_{x_3} &= \sigma_x|_{x_2} - \Delta\tau_{xy} \frac{(x_2 + x_3)}{2} \\ \sigma_x|_{x_4} &= \sigma_x|_{x_3} - \Delta\tau_{xy} \frac{(x_3 + x_4)}{2} \dots\dots\dots (259) \end{aligned}$$

Metoda zasnovana na razlici tangencijalnih napona zahteva obiman račun i određivanje velikog broja vrednosti sa visokom tačnošću određene veličine. Tačnost je neophodna, jer integraljenjem po pravcu greška se kumulira i na kraju može biti značajna. Procedura pri sprovođenju ove metode je sledeća:

- 1) Nacrtamo pravce OP, AB i CD na modelu i označimo tačke  $x_1, x_2, x_3$  duž ovih pravaca;
- 2) Odredimo i nacrtamo dijagrame reda izohroma N duž pravaca OP, AB i CD;
- 3) Odredimo i nacrtamo dijagrame parametra izoklina, određujući pravac  $\sigma_1$  na taj način, duž ovih pravaca;
- 4) Korišćenjem relacije:

$$\tau_{xy} = \frac{Nf\sigma}{2h} \sin 2\alpha \dots\dots\dots (260)$$

odredimo  $\tau_{xy}$  duž pravaca AB i CD;

- 5) Nacrtamo dijagram  $\tau_{xy}$  duž pravaca AB i CD;
- 6) Izračunamo  $\Delta\tau_{xy}$  u tačkama:  $(x_0 + x_1)/2, (x_1 + x_2)/2, (x_2 + x_3)/2$ , korišćenjem izraza:

$$\Delta\tau_{xy} = \tau_{xy}|_{AB} - \tau_{xy}|_{CD} \dots\dots\dots (261)$$

7) Odredimo vrednost  $\sigma_x|_{x_0}$  prema relaciji;

$$\sigma_x|_{x_0} = \sigma_t \cos^2 \alpha, \quad \sigma_n = 0 \quad (262)$$

8) Izračunamo  $\sigma_x$  duž pravca x korišćenjem relacija (258) i (259);

9) Izračunamo vrednost  $\sigma_y$  duž pravca x prema relaciji:

$$\sigma_y = \sigma_x - \frac{N f \sigma}{h} \cos 2\vartheta \quad (263)$$

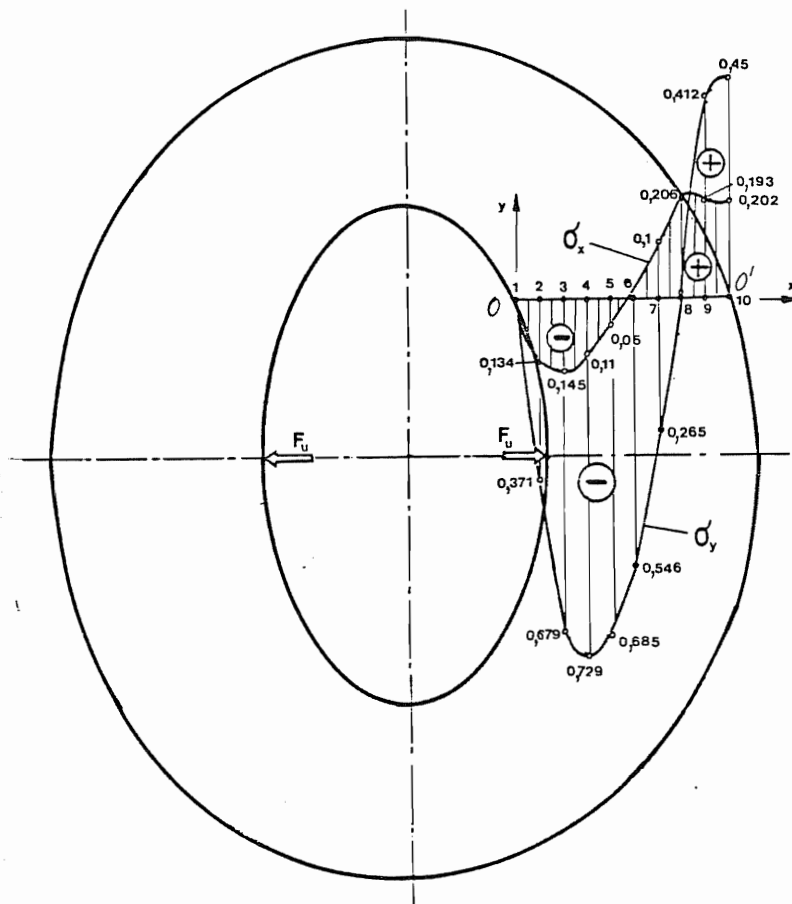
10) Odredimo  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  preko relacija:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left( \sigma_x + \sigma_y + \frac{f \sigma N c}{h} \right)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \left( \sigma_x + \sigma_y - \frac{f \sigma N c}{h} \right) \quad (264)$$

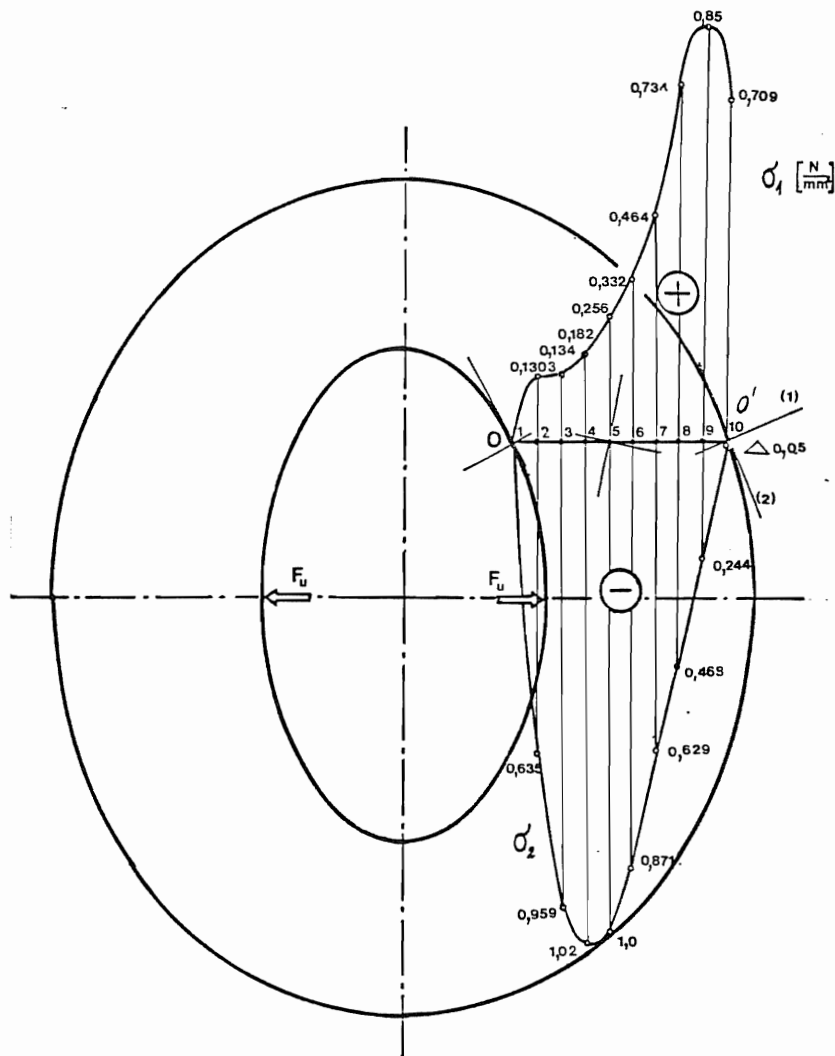
11) Nacrtamo dijagrame  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  duž pravca x.

Ova metoda može poslužiti za pisanje računarskih programa koji određuju veličinu napona  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  u ispitivanoj oblasti uz korišćenje izohroma i izoklina. Primer ovakvog programa je program "ZAGI", koji koristi ulazni fajl "ULA" i izlazni fajl "IZA", a koji su dati u Prilogu VI na strani 208. Ovaj program je postavljen na računaru Honeywell H-6 i poslužio je za određivanje veličina napona u preseccima elipse. Za slučaj opterećenja koncentrisanim silama na unutrašnjoj konturi, na slici 163. prikazan je raspored normalnih napona,  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  u tačkama duži OO' paralelne kraćim poluosama elipse. Na slici 164. dati su dijagrami rasporeda glavnih normalnih napona  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  za iste tačke na duži OO'. Vrednosti  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  na duži OO' dobijene su korišćenjem metode razlike tangencijalnih napona, a rezultati dobijeni u tačkama konture slažu se sa rezultatima koje smo predhodno dobili za dijagrame na slici 159.



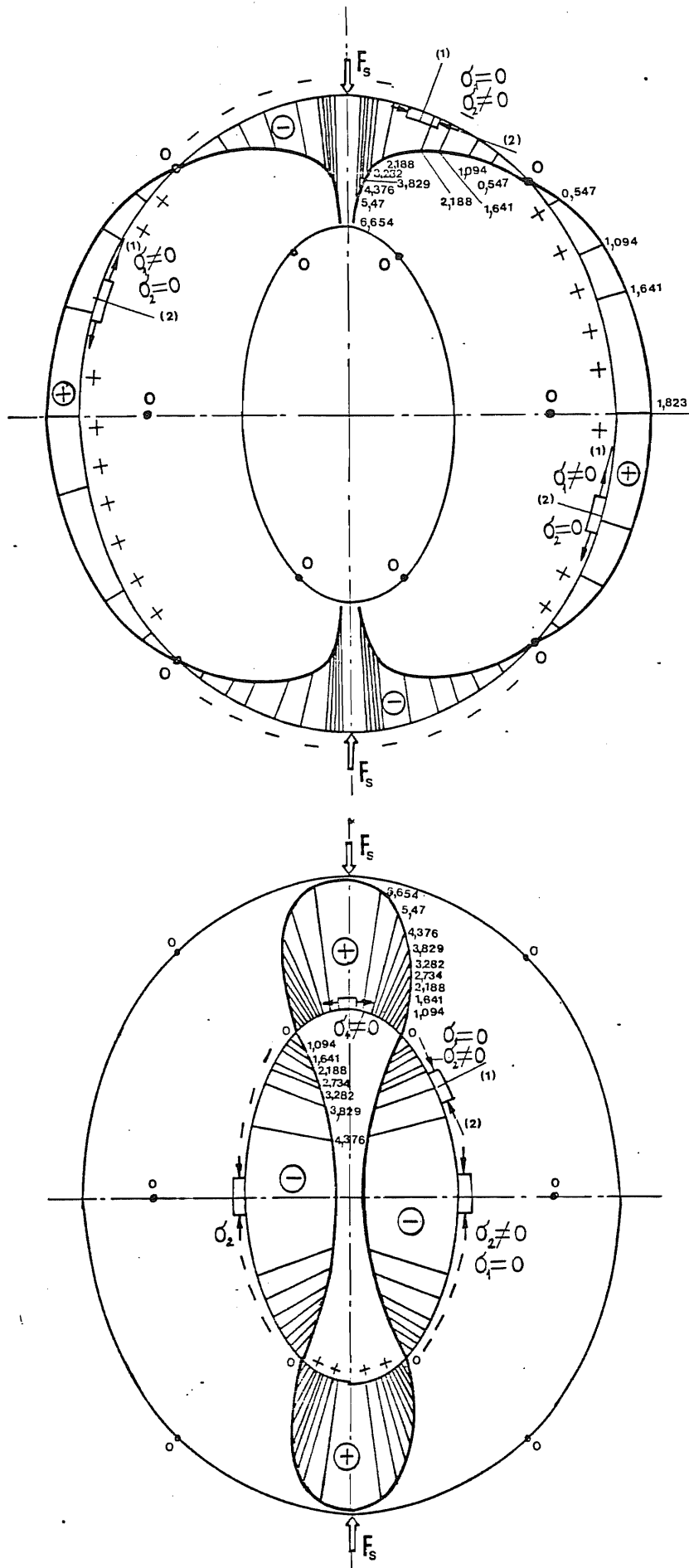
Slika 163.



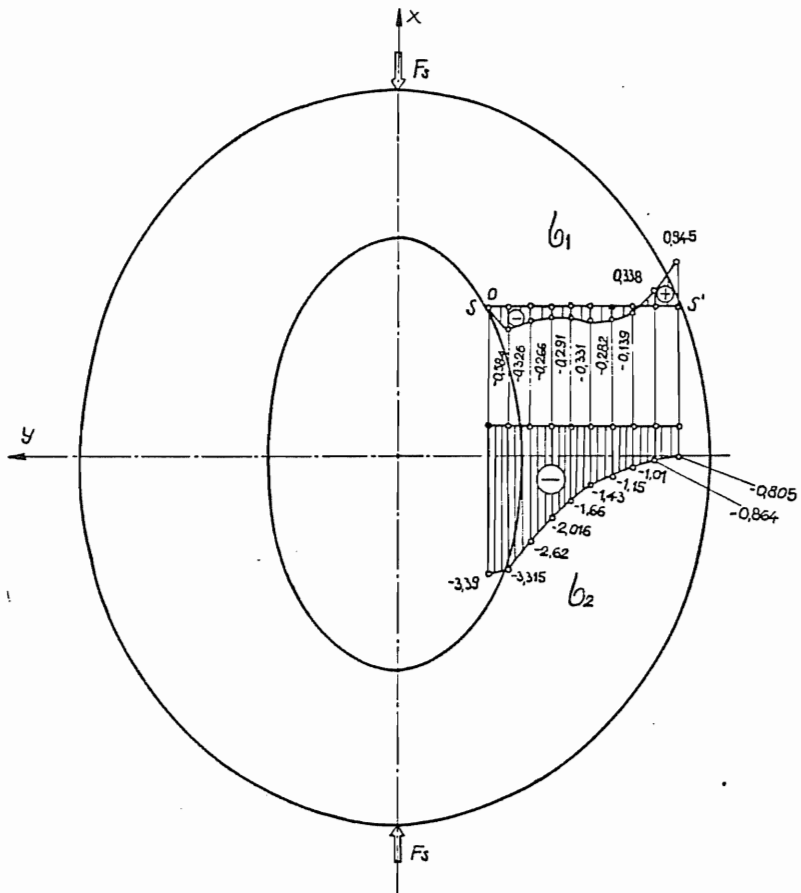
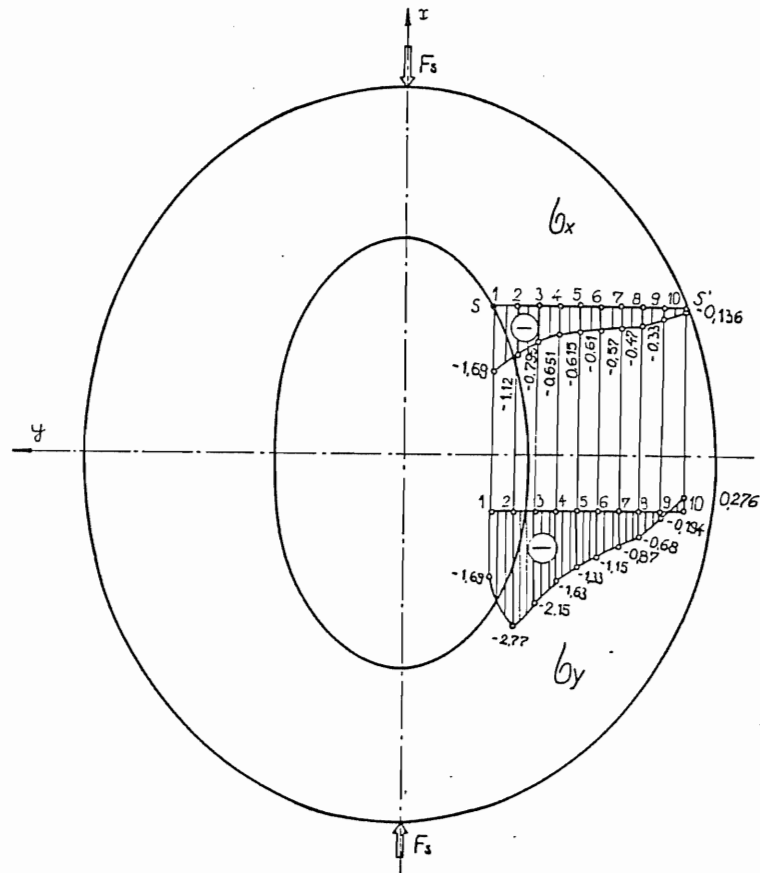


Slika 164.

U slučaju kada je eliptično-prstenasta ploča opterećena parom koncentrisanih sila na spoljašnjoj konturi, sa napadnom linijom u pravcu većih poluosa elipsi, korišćenjem izraza (254) dobijene su vrednosti glavnih normalnih napona  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  na konturama, čiji je raspored prikazan dijagramima i to na slici 165., na spoljašnjoj, a na slici 166. na unutrašnjoj konturi. Pri tome su oznakama (+) i (-) označene zone istezanja i pritiska linijskih elemenata povučениh u tačkama konture.



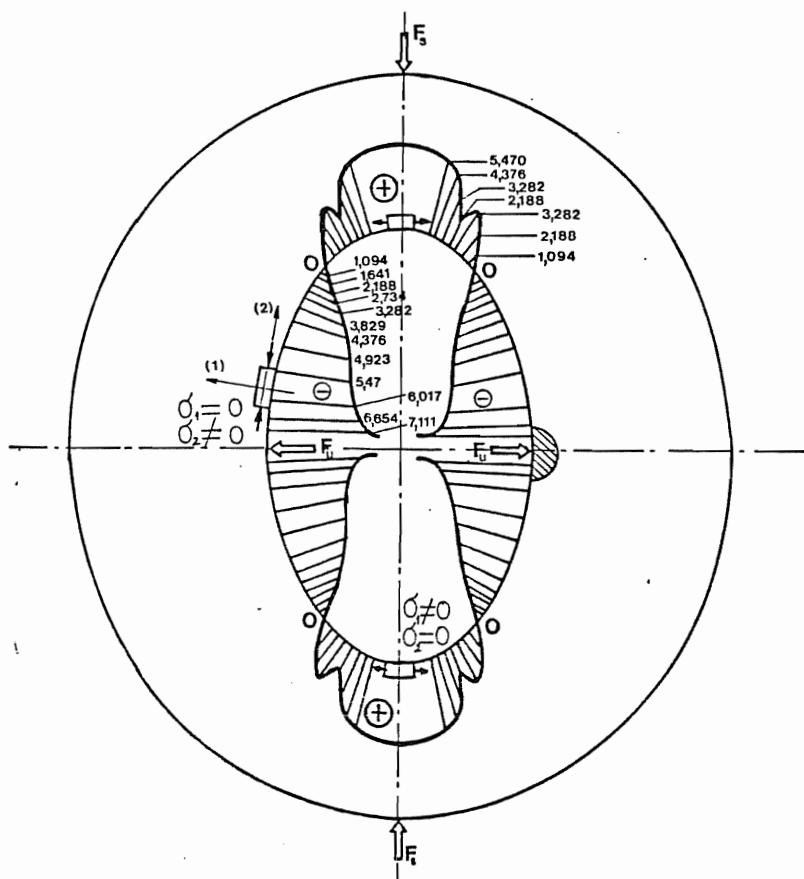
Slike 165. i 166.



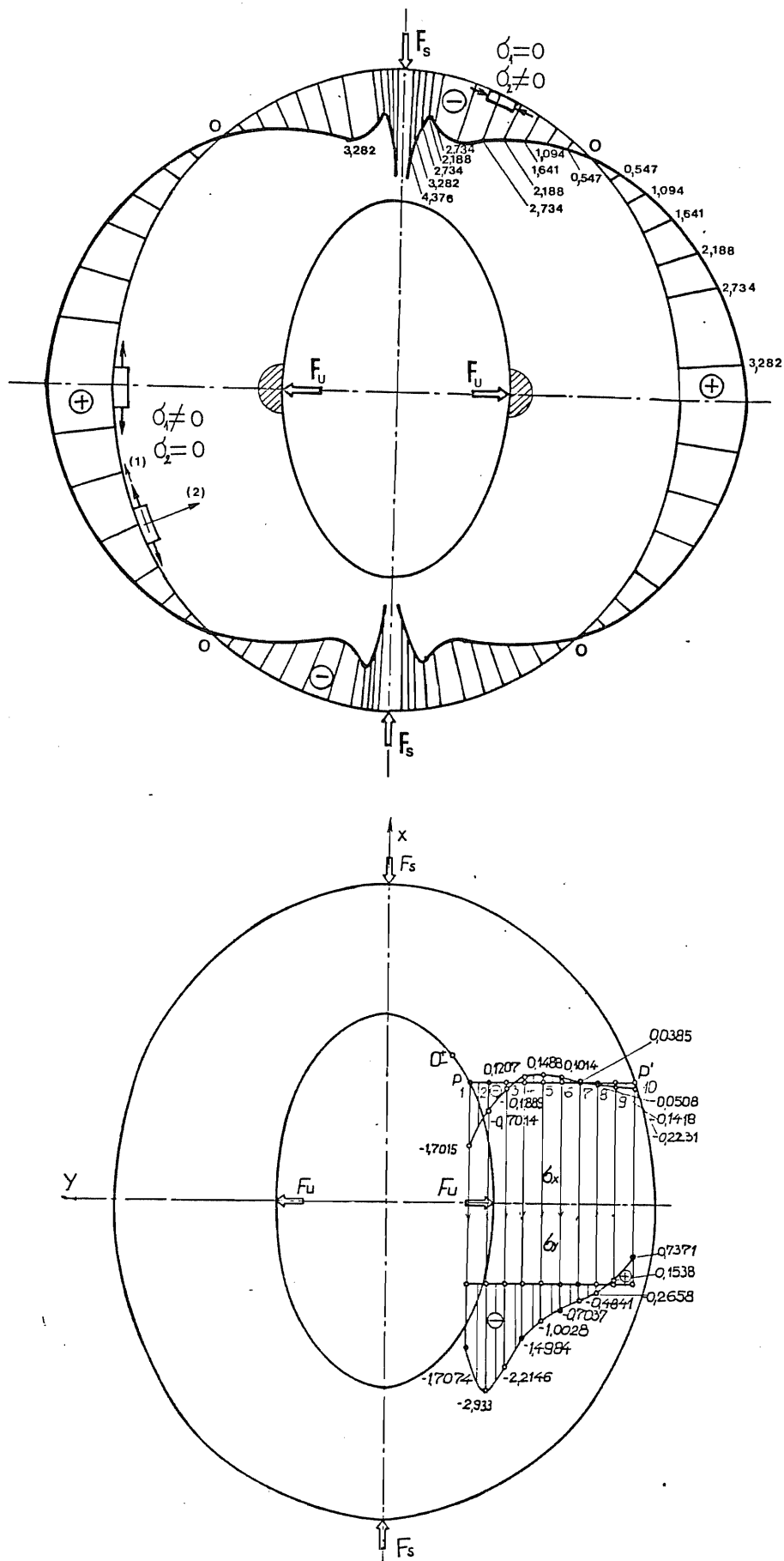
Slike 167. i 168.

Primenom metode razlike tangencijalnih napona, tj. prema ovoj metodi napisanog programa "ZAGI" u tačkama preseka SS' određene su vrednosti normalnih napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  kao i glavnih normalnih napona  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ . Na osnovu tih izračunatih vrednosti nacrtani su dijagrami prikazani na slici 167. i 168. U slučaju kada je eliptično-prstenasta ploča opterećena parovima koncentrisanih sila i po unutrašnjoj i po spoljašnjoj konturi, ortogonalnih napadnih linija, a u pravcima poluosa elipse, odnosno, u slučaju "rezultujućeg" opterećenja, primenom relacija (254) dobijene su vrednosti glavnih normalnih napona na konturama. Na osnovu ovih rezultata, na slici 169. prikazan je sumarni dijagram glavnih normalnih napona pritiska (-) i zatezanja (+) u tačkama unutrašnje konture, a za ravni upravne na konturu, odnosno linijske elemente u pravcu konture, a na slici 170. prikazan je sumarni dijagram glavnih normalnih napona pritiska i zatezanja u tačkama spoljašnje konture, za ravni upravne na konturu, odnosno linijske elemente u pravcu spoljašnje konture. Primenom metode razlike tangencijalnih napona i programa "ZAGI" dobijene su vrednosti normalnih napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  prikazane dijagramom na slici 171. i vrednosti glavnih normalnih napona prokazane na slici 172. Listinzi podataka dobijenih eksperimentom kao i listinzi rezultata dobijenih na računaru dati su u Prilogu VI na strani 208.

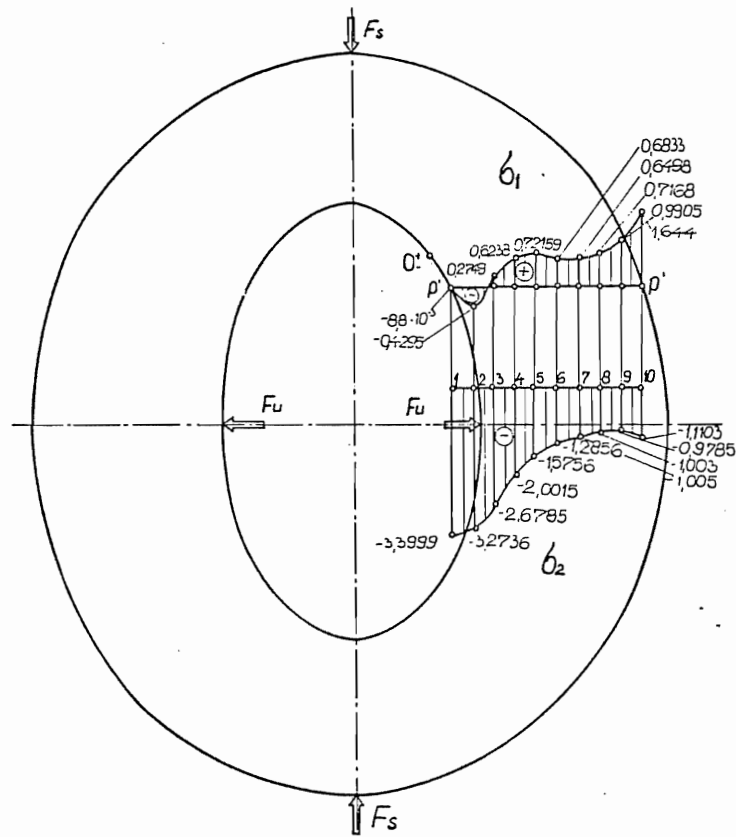
Akumulacija greške po Frocht-ovoj metodi prisutna je u rezultatima datim u dijagramima na slikama 163., 164., 167., 168., 171. i 172.



Slika 169.



Slike 170. i 171.



Slika 172.

Ova greška može se otkloniti, pre svega korekcijom polaznih podataka, o parametru izoklina i redu izohroma, a posebno podešavanjem prve vrednosti  $\sigma_1$  u preseku na veličinu koju ima u tački na konturi. Osim toga, integraljenje se u datom preseku može izvesti u suprotnom smeru, te na taj način izvršiti korekcija rezultata koji imaju najveću kumulaciju greške.

### V3. Primena funkcije kompleksne promenljive i konformnog preslikavanja za izučavanje naponskog i deformacionog stanja ravno napregnute eliptično - prstenaste ploče

#### V3.1. Konformno preslikavanje eliptičnog u kružni prsten

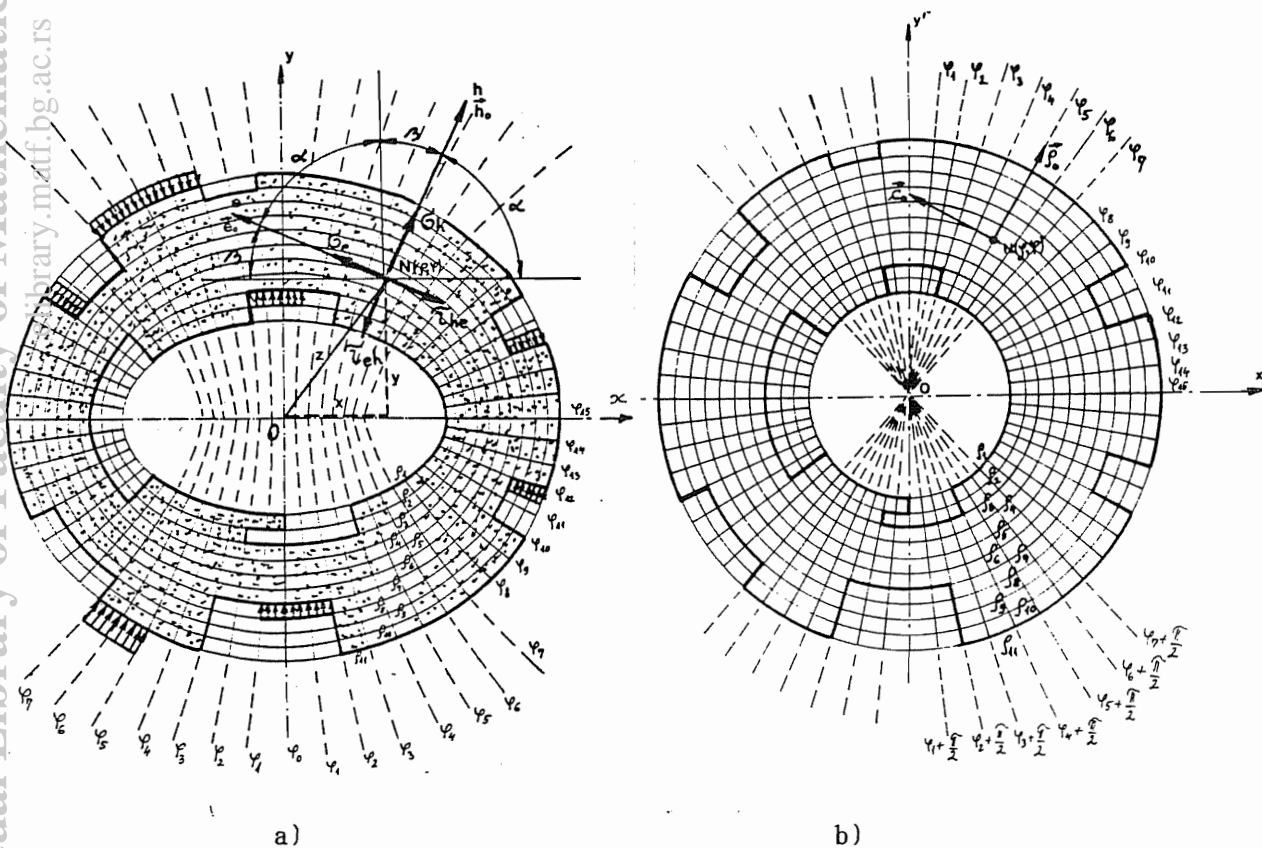
Muskhelishvili [72] je pokazao da je preslikavanje analitičkom funkcijom  $z = \omega(\zeta)$  konformno u svim tačkama kompleksne ravni  $\zeta$  u kojima je zadovoljen uslov  $\omega'(\zeta) \neq 0$ . U slučaju koji razmatramo biće:

$$\omega'(\zeta) = R \left( 1 - \frac{m}{\zeta^2} \right) = 0 \quad (265)$$

Pa sledi  $\zeta = \sqrt{m}$  što znači da je preslikavanje konformno svuda osim u tačkama:

$$\zeta = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \quad (266)$$

Za poluose  $a_1=5$ ,  $b_1=3$  i  $a_2=8.5$ ,  $b_2=7.5$  to su tačke:  $\zeta = \pm 0.5$  i  $\zeta = \pm 0.25$ . Ako posmatramo eliptične konture, koje se preslikavaju u koncentrične krugove:  $\rho_1=1$  i  $\rho_2=2$ , onda se u čitavoj razmatranoj oblasti kružnog prstena ne nalaze singularne tačke, te je preslikavanje konformno.



Slika 173.

Prava u  $\zeta$ -ravni  $\zeta = \rho e^{i\alpha} = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  preslikava se u hiperbolu u  $z$ -ravni koja seče pod pravim uglom, konfokalne elipse, koje odgovaraju koncentričnim krugovima, jer se radi o konformnom preslikavanju. Ova hiperbola data je izrazom:

$$z = R \left( \rho e^{i\alpha} + \frac{m}{\rho e^{i\alpha}} \right) \quad (267)$$

pri čemu je  $e^{i\alpha} = \text{const}$  i određuje datu hiperbolu, a  $\rho$  je promenljiva koja određuje tačku na toj hiperboli.

Ako zamislimo da je u  $\zeta$ -ravni svaka tačka određena presekom prave i kružnice, onda se u preslikanoj  $z$ -ravni njoj može pridružiti tačka određena presekom odgovarajuće hiperbole i elipse. Odnosno, pri preslikavanju iz  $\zeta$ -ravni u  $z$ -ravan preslikavamo polarni u eliptično - hiperbolički koordinatni sistem, o čemu se govori u Prilogu I. U opštem slučaju veza između polarnih i proizvoljnih krivolinijskih koordinata data je u Prilogu II. S obzirom na osobine konformnog preslikavanja, da uglovi između pravaca ostaju očuvani, krivama koje se seku pod pravim uglom u jednoj ravni u preslikanoj ravni odgovaraće takođe upravne krive, koje se takođe seku pod pravim uglom.

Takođe, vektorima međusobno upravnim ili pod određenim uglom u preslikanoj ravni odgovaraće vektori koji su upravni ili pod određenim uglom. U poglavlju II 1.5. razmotren je uticaj konformnog preslikavanja na karakter harmonijskih funkcija, odnosno u našem primeru Airy-jeve naponske funkcije.

### V3.2. Razmatranje graničnih uslova na konturama eliptičnog prstena

U ovom radu se razmatraju granični uslovi zadati silama na konturi, i to opterećenja koncentrisanim silama i kontinualnim jednako raspodeljenim opterećenjem.

Kao što smo dali u poglavlju II 1.7. izrazima (94), možemo analitičke funkcije kompleksne promenljive  $F_1'(\zeta)$  i  $X_1''(\zeta)$  prikazati u obliku Laurent-ovog reda:

$$\begin{aligned}
 F_1'(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^n \\
 X_1''(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \zeta^n \dots\dots\dots (268)
 \end{aligned}$$

Integraljenjem ovih izraza dobija se:

$$\begin{aligned}
 F_1(\zeta) &= A_0 \zeta + A_{-1} \ln \zeta + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq -1,0}}^{\infty} \frac{A_n \zeta^{n+1}}{n+1} + c_1 \\
 X_1'(\zeta) &= B_0 \zeta + B_{-1} \ln \zeta + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq -1,0}}^{\infty} \frac{B_n \zeta^{n+1}}{n+1} + c_2 \dots\dots\dots (269)
 \end{aligned}$$

Konstante  $c_1$  i  $c_2$  odgovaraju polju pomeranja krutog tela, pa ih možemo izjednačiti sa nulom  $c_1 = c_2 = 0$ .

Analitičke funkcije kompleksne promenljive odnosno njihove izvode predstavljene u preslikanoj  $\zeta$ -ravni u obliku Laurent-ovog reda po kompleksnoj promenljivoj  $\zeta = \rho e^{i\varphi}$ , sa nepoznatim koeficijentima  $A_n$ ,  $B_n$  i  $\bar{A}_n$  i  $\bar{B}_n$  treba odrediti korišćenjem graničnih uslova. Pa se zadatak svodi na određivanje nepoznatih koeficijenata na osnovu graničnih uslova zadatih raspodeljenim površinskim silama na eliptičnim segmentima kontura. S obzirom da se radi o beskonačno mnogo koeficijenata ograničenje članova reda na konačan broj u proračunu definiše se željenom tačnošću aproksimacije graničnih uslova. Na konturama ploče poznati su naponi  $\sigma_h$  i  $\tau_{eh}$  koji



su u funkciji hiperbolične koordinate, pa se izrazi (89) i (91) mogu iskoristiti za definisanje graničnih uslova:

$$\begin{aligned} [\sigma_h + \sigma_e]_{kj} &= \sum_{-\infty}^{\infty} V_n^{(j)} \zeta^n \Big|_{kj} = \sum_{-\infty}^{\infty} V_n^{(j)} [\rho^n e^{in\varphi}]_{kj} \\ [\sigma_h - i \tau_{eh}]_{kj} &= \sum_{-\infty}^{\infty} C_n^{(j)} \zeta^n \Big|_{kj} = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n^{(j)} [\rho^n e^{in\varphi}]_{kj} \dots\dots\dots (270) \end{aligned}$$

gde su:  $\sigma_h$ ,  $\sigma_e$ ,  $\tau_{eh}$  komponente tenzora napona u eliptično-hiperboličnom koordinatnom sistemu.

Odavde se dobija u razvijenom obliku graničnih uslova:

$$\begin{aligned} \left\{ 2 \left[ \frac{F_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\bar{F}_1'(\zeta)}{\bar{\omega}'(\zeta)} \right] \right\} &= \sum_{-\infty}^{\infty} V_n^{(j)} [\rho^n e^{in\varphi}]_{kj} \quad j=1,2,3,\dots,N \\ \left\{ \frac{F_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\bar{F}_1'(\zeta)}{\bar{\omega}'(\zeta)} - \frac{1}{[\omega'(\zeta)]^2 \bar{\omega}'(\zeta)} - \frac{\zeta^2}{\rho^2} \left[ \bar{\omega}(\zeta) (F_1''(\zeta) \omega'(\zeta) - \right. \right. \right. \\ &\left. \left. - F_1'(\zeta) \omega''(\zeta)) + (X_1''(\zeta) \omega'(\zeta) - X_1'(\zeta) \omega''(\zeta)) \right] \right\} \Big|_{kj} = \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} C_n^{(j)} [\rho^n e^{in\varphi}]_{kj} \dots\dots\dots (271) \end{aligned}$$

Takođe, ukoliko su granični uslovi zadati komponentnim pomeranjima  $u_h$  i  $u_e$  u pravcu koordinatnih linija - hiperbola i elipsi, onda granični uslovi mogu biti zadati u obliku:

$$[u_h + i u_e]_{kj} = \sum_{-\infty}^{\infty} H_n^{(j)} [\rho^n e^{in\varphi}]_{kj} \dots\dots\dots (272)$$

odnosno u razvijenom obliku, korišćenjem relacije (93) dobijamo:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\zeta}{\rho} \frac{\bar{\omega}'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} \left\{ \frac{3-\mu}{E} F_1(\zeta) - \frac{1+\mu}{E} \left[ \frac{\omega(\zeta)}{\bar{\omega}'(\zeta)} \bar{F}'(\rho) + \frac{\bar{X}_1'(\zeta)}{\bar{\omega}'(\zeta)} \right] \right\} \right\rangle &= \\ = \sum_{-\infty}^{\infty} H_n^{(j)} [\rho^n e^{in\varphi}]_{kj} \dots\dots\dots (273) \end{aligned}$$

Primenimo sada ovo razmatranje na primeru eliptično - prstenaste ploče opterećene kao što je prikazano na slici 173.-a.

U Prilogu V su date eliptičko hiperboličke koordinate tenzora napona  $\sigma_e$ ,  $\sigma_h$ ,  $\tau_{eh}$ , kao i ortovi  $\bar{e}_0$  i  $\bar{h}_0$  u tangencijalnim pravcima na elipse, odnosno hiperbole, kao koordinatne linije.

Osnovne pretpostavke u odnosu na definisanje graničnih uslova su da sile ili kontinuaolno opterećenje deluju u srednjoj ravni ploče ili simetrično u odnosu na nju i da je pravac dejstva sila upravan na konture ploče. Neka su  $p_s(\varphi)$  i  $p_u(\varphi)$  kontinualna opterećenja pritiskajuća na spoljašnjoj i unutrašnjoj konturi i neka su  $\rho$  i  $\varphi$  koordinate eliptično - hiperboličnog koordinatnog sistema, gde  $\rho$  definiše određenu elipsu, a  $\varphi$  određuje hiperbolu. Veza između eliptično - hiperboličnih koordinata i Descartes-ovih su date u Prilogu V, a koordinatne linije su elipse i hiperbole:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{x}{R(\rho + \frac{m}{\rho})} \right]^2 + \left[ \frac{y}{R(\rho - \frac{m}{\rho})} \right]^2 &= 1 \\ \left[ \frac{x}{R \cos \varphi} \right]^2 - \left[ \frac{y}{R \sin \varphi} \right]^2 &= 1 \dots\dots\dots (274) \end{aligned}$$

Duž hiperbola se menja parametar  $\rho$ , a duž elipsi parametar  $\varphi$ . Tako za  $\rho = \rho_2$  imamo elipsu koja definiše spoljašnju konturu ploče, a  $\rho = \rho_1$  imamo elipsu koja

definiše unutrašnju konturu ploče, Korišćenjem eliptično - hiperboličnog koordinatnog sistema i razmatrajući opterećenja kao što je prikazano na slici 173.-a., granične uslove možemo napisati u obliku:

a) za tačke na unutrašnjoj konturi

$$\sigma_{\rho}(\rho_1, \varphi) = \begin{cases} -p_u & \text{za } \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \leq \varphi \leq \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \\ & \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \leq \varphi \leq \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \\ 0 & \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + \alpha, \frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha, 2\pi\right) \end{cases}$$

$$\tau_{\rho\varphi}(\rho_1, \varphi) = 0 \quad \text{za } \varphi \in (0, 2\pi) \quad \dots\dots\dots (275)$$

b) za tačke na spoljašnjoj konturi

$$\sigma_{\rho}(\rho_1, \varphi) = \begin{cases} -p_u & \text{za } 2\pi - \beta \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \beta \\ & \pi - \beta \leq \varphi \leq \pi + \beta \\ 0 & \varphi \in \left(\beta, \frac{\pi}{2} + \beta\right) \cup \left(\pi + \beta, 2\pi - \beta\right) \end{cases}$$

$$\tau_{\rho\varphi}(\rho_1, \varphi) = 0 \quad \text{za } \varphi \in (0, 2\pi) \quad \dots\dots\dots (276)$$

Korišćenjem prethodnih graničnih uslova (275) i (276) i njihovim predstavljanjem u obliku reda (270) sa koeficijentima  $C_n^{(1)}$  i  $C_n^{(2)}$  moguće je granične uslove predstaviti u obliku reda. Za unutrašnju konturu imamo relaciju:

$$\left[\sigma_{\rho} - i \tau_{\rho\varphi}\right]_{\rho=\rho_1} = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n^{(1)} e^{in\varphi} = -p_u(\varphi) \quad \dots\dots\dots (277)$$

a za spoljašnju konturu:

$$\left[\sigma_{\rho} - i \tau_{\rho\varphi}\right]_{\rho=\rho_2} = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n^{(2)} e^{in\varphi} = -p_s(\varphi) \quad \dots\dots\dots (278)$$

gde je:  $\sigma_{\rho} = \sigma_h$ ,  $\sigma_{\varphi} = \sigma_e$ ,  $\tau_{\rho\varphi} = \tau_{he}$ .

Korišćenjem Cauchy-jevog integrala kao što je utvrdio Muskhelishvili [72], koeficijenti  $C_n^{(1)}$  i  $C_n^{(2)}$  se mogu odrediti preko relacija:

$$C_n^{(1)} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_u(\varphi) d\varphi$$

$$C_n^{(2)} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_s(\varphi) d\varphi \quad \dots\dots\dots (279)$$

Nakon integraljenja u relacijama (279) uz korišćenje uslova (275) i (276) dobijamo koeficijente:

$$C_0^{(1)} = -\frac{2p_u \alpha}{\pi},$$

$$C_{2k}^{(1)} = -\frac{(-1)^k p_u}{\pi k} \sin 2k\alpha = -\frac{p_u}{\pi k} e^{ik\pi} \sin 2k\alpha$$

$$C_{2k+1}^{(1)} = 0 \quad \dots\dots\dots (280)$$

i:

$$C_0^{(2)} = -\frac{2p_s \beta}{\pi}$$

$$C_{2k}^{(2)} = -\frac{p_s}{\pi k} \sin 2k\alpha$$

$$C_{2k+1}^{(2)} = 0 \quad \dots\dots\dots (281)$$

Analizom se dolazi do zaključka da su svi koficijenti neparnog indeksa  $C_{2k+1}^{(2)}$  i  $C_{2k+1}^{(2)}$  jednaki nuli za ovakav raspored opterećenja, dok su koficijenti parnih indeksa  $C_{2k}^{(1)}$  i  $C_{2k}^{(2)}$  različiti od nule.

Razmotrimo sada slučaj kada na konturama deluju parovi koncentrisanih suprotno usmerenih sila u pravcima poluosa elipsi.

Neka na deo spoljašnje eliptične konture deluje kontinualno jednako-raspodeljeno opterećenje ogrničeno hiperbolama  $\varphi = \beta$  i  $\varphi = -\beta$  kao što je prikazano na slici 174.

Rezultujuća sila ovog kontinualnog opterećanja data je izrazom:

$$F_s = \int_{-\beta}^{\beta} p_s \cos \delta dS_{\varphi} \dots\dots\dots (282)$$

Pri tome je kosinus nagiba tangente na hiperbolu u određenoj tački dat izrazom:

$$\cos \delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \left( 1 - \frac{m}{\rho^2} \right) \cos \varphi \dots\dots\dots (283)$$

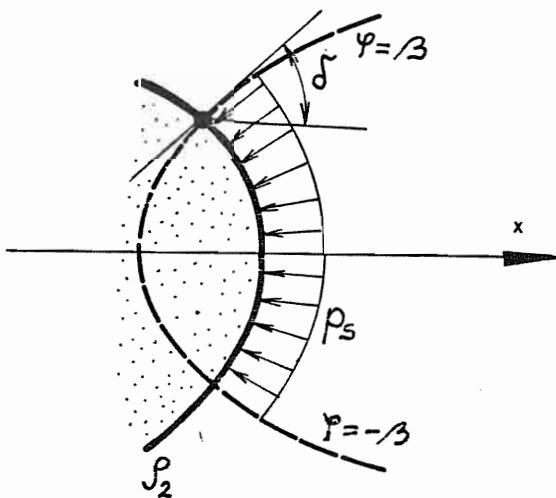
Elementi luka hiperbole i elipse dati su relacijama:

$$dS_h = dS_{\rho} = R\sqrt{g} d\rho \dots\dots\dots (284)$$

$$dS_e = dS_{\varphi} = R\rho\sqrt{g} d\varphi \dots\dots\dots (285)$$

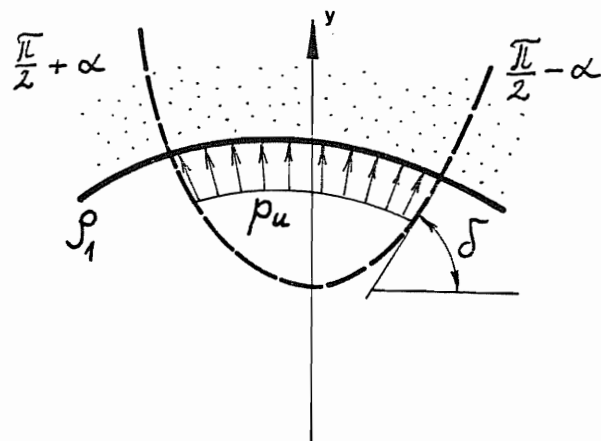
Zamenom izraza (283) i (285) u relaciji (282) i integraljenjem od  $-\beta$  do  $\beta$  dobijamo rezultujuću silu na spoljašnjoj konturi:

$$F_s = 2p_s R \rho_2 \left( 1 - \frac{m}{\rho_2^2} \right) \sin \beta \dots\dots\dots (286)$$



Slika 174.

Pri tome je  $F_s = F_{sx}$ , a  $F_{sy} = 0$  zbog simetrije opterećenja u odnosu na osu x.



Slika 175.

Neka na deo unutrašnje eliptične konture deluje kontinualno jednako - raspodeljeno opterećenje ograničeno hiperbolama  $\varphi = (\pi/2) - \alpha$  i  $\varphi = (\pi/2) + \alpha$ , kao što je prikazano na

slici 175. Rezultujuća sila ovog kontinualnog opterećenja data je izrazom:

$$F_u = \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} p_u \sin \delta dS_\varphi \dots\dots\dots (287)$$

Zamenom izraza (283) i (285) u relaciji (287) i integraljenjem od  $(\pi/2)-\alpha$  do  $(\pi/2)+\alpha$  dobijamo rezultujuću silu na unutrašnjoj konturi:

$$F_u = 2p_u R \rho_1 \left(1 + \frac{m}{\rho_1^2}\right) \sin \alpha \dots\dots\dots (288)$$

Pri tome je  $F_u = F_{uy}$ , a  $F_{ux} = 0$  zbog simetrije opterećenja u odnosu na osu y. Ukoliko koncentrisanu silu uzmemo kao specijalan slučaj kontinualnog opterećenja, kada se dužina konture na kojoj dejstvuje kontinualno opterećenje svodi na tačku pa predstavlja granični slučaj. Dakle određivanjem granične vrednosti dobijamo:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin 2k\alpha}{2k\alpha} = 1 \dots\dots\dots (289)$$

Korišćenjem izraza (289) u relacijama (280) i (281) za koeficijente  $C_{2k}^{(1)}$  i  $C_{2k}^{(2)}$  dobijamo izraze:

$$C_{2k}^{(1)} = -\frac{2p_u \alpha}{\pi} (-1)^k$$

$$C_{2k}^{(2)} = -\frac{2p_s \beta}{\pi} \dots\dots\dots (290)$$

Zamenom  $p_u$  i  $p_s$  dobijenih iz izraza (286) i (288) u izrazima (290) dobijamo:

$$C_{2k}^{(1)} = -\frac{F_u (-1)^k}{R \pi \rho_1 \left(1 + \frac{m}{\rho_1^2}\right)}$$

$$C_{2k}^{(2)} = -\frac{F_s}{R \pi \rho_2 \left(1 + \frac{m}{\rho_2^2}\right)} \dots\dots\dots (291)$$

Izraze (291) za koeficijente  $C_{2k}^{(1)}$  i  $C_{2k}^{(2)}$  koristimo dakle u slučaju kada se radi o koncentrisanim silama.

### V3.3. Određivanje koeficijenata $A_n$ i $B_n$ pri razvoju u Laurent-ov red analitičnih funkcija kompleksne promenljive $F_1(\zeta)$ i $X_1(\zeta)$

Razvojem analitičnih funkcija kompleksne promenljive u Laurent-ov red, odnosno izvoda ovih funkcija, kao što je dato izrazima (268) i (269) imamo relacije:

$$F_1'(\zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n \zeta^n$$

$$\overline{F_1'(\zeta)} = \sum_{-\infty}^{\infty} \overline{A_n} \overline{\zeta}^n$$

$$F_1''(\zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} n A_n \zeta^{n-1}$$

$$X_1''(\zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} B_n \zeta^n \dots\dots\dots (292)$$

Pri tome su u izrazima (269) konstante  $c_1$  i  $c_2$  jednake nuli, a da bi zavisnost između koeficijenata bila jednoznačna koeficijenti  $A_{-1}$  i  $B_{-1}$  moraju biti jednaki nuli, što će kasnije biti detaljnije razmotreno.

Prvi i drugi izvod i konjugovane vrednosti funkcije preslikavanja  $z = \omega(\zeta)$  dati su izrazima:

$$\begin{aligned} \omega'(\zeta) &= R\left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right) \\ \overline{\omega(\zeta)} &= R\left(\bar{\zeta} + \frac{m}{\bar{\zeta}}\right) \\ \overline{\omega'(\zeta)} &= R\left(1 - \frac{m}{\bar{\zeta}^2}\right) \\ \omega''(\zeta) &= \frac{2mR}{\zeta^3} \dots\dots\dots (293) \end{aligned}$$

Zamenjivanjem relacija (268), (269), (292) i (293) u izrazu (91) dobijamo relaciju koja određuje vezu između koeficijenata  $A_n$  i  $B_n$  na jednoj strani i koeficijenata  $C_n^{(s)}$  ( $s=1,2$ ), a koje smo prethodno odredili na osnovu zadatih graničnih uslova:

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} A_n \zeta^n}{R\left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right)} \right|_{\zeta=\zeta_s} + \left. \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} \overline{A_n} \bar{\zeta}^n}{R\left(1 - \frac{m}{\bar{\zeta}^2}\right)} \right|_{\zeta=\zeta_s} - \\ & - \left\{ R\left(\bar{\zeta} + \frac{m}{\bar{\zeta}}\right) \frac{\left[ \sum_{-\infty}^{\infty} n A_n \zeta^{n-1} \right] R\left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right) - \left[ \sum_{-\infty}^{\infty} A_n \zeta^n \right] \frac{2mR}{\zeta^3}}{R^3\left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right)^3} + \right. \\ & \left. + \frac{\left[ \sum_{-\infty}^{\infty} B_n \zeta^n \right] R\left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right) - \left[ B_{-1} \ln \zeta + \sum_{-\infty}^{\infty} B_n \frac{\zeta^{n+1}}{n+1} \right] \frac{2mR}{\zeta^3}}{R^3\left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right)^3} \right\} \\ & \cdot \left. \frac{\zeta^2 R\left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right)}{\rho^2 R\left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right)} \right|_{\zeta=\zeta_s} = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n^{(s)} e^{in\varphi} \dots\dots\dots (294) \end{aligned}$$

Pri tome se za  $s=1$ , radi o unutrašnjoj konturi pa je  $\rho=\rho_1$ , a za  $s=2$  radi se o spoljašnjoj konturi i tada je  $\rho=\rho_2$ .

Zbog glomaznosti izraza (294) u cilju pojednostavljivanja rada, razvijaćemo svaki član izraza (294) posebno, koristeći pri tome relacije:

$$\begin{aligned} g(\rho, \varphi) &= \left(1 + \frac{m^2}{\rho^4}\right) - \frac{2m}{\rho^2} \cos 2\varphi \\ g^*(\rho, \varphi) &= \left(1 + \frac{m^2}{\rho^4}\right) + \frac{2m}{\rho^2} \cos 2\varphi \\ \left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right)^{-1} &= \frac{1}{g(\rho, \varphi)} \left(1 - \frac{m}{\zeta^2} e^{2i\varphi}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right)^1 &= \frac{1}{g(\rho, \varphi)} \left(1 - \frac{m}{\zeta^2} e^{-2i\varphi}\right) \\ \left(\bar{\zeta} + \frac{m}{\zeta}\right) &= \rho e^{-i\varphi} \left(1 + \frac{m}{\zeta^2} e^{2i\varphi}\right) \\ \left[\bar{\zeta} \left(1 + \frac{m}{\zeta^2}\right)\right]^1 &= \frac{1}{g^*(\rho, \varphi)} \frac{1}{\rho} e^{i\varphi} \left(1 + \frac{m^2}{\zeta^2} e^{-2i\varphi}\right) \\ \frac{\bar{\zeta} \left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right)}{\rho \left|1 - \frac{m}{\zeta^2}\right|} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(e^{-i\varphi} - \frac{m}{\zeta^2} e^{i\varphi}\right) \dots\dots\dots (295) \end{aligned}$$

Članove na levoj strani izraza (294) označimo sa  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$  i  $S_7$ :

$$\begin{aligned} S_1(\rho, \varphi) &= \rho^2 R \left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right) \left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n \zeta^n \\ S_2(\rho, \varphi) &= \rho^2 R \left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right)^2 \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{A}_n \bar{\zeta}^n \\ S_3(\rho, \varphi) &= \zeta^2 R \left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right) \left(\bar{\zeta} + \frac{m}{\zeta}\right) \sum_{-\infty}^{\infty} n A_n \zeta^{n-1} \\ S_4(\rho, \varphi) &= R \left(\bar{\zeta} - \frac{m}{\zeta}\right) \frac{2m}{\zeta} \sum_{-\infty}^{\infty} A_n \zeta^n \\ S_5(\rho, \varphi) &= \zeta^2 \left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right) \sum_{-\infty}^{\infty} B_n \zeta^n \\ S_6(\rho, \varphi) &= (\ln \zeta) \frac{2m}{\zeta} B_{-1} = 0 \\ S_7(\rho, \varphi) &= \frac{2m}{\zeta} \sum_{-\infty}^{\infty} B_n \frac{\zeta^{n+1}}{n+1} \dots\dots\dots (296) \end{aligned}$$

Desna strana izraza (294) označi se kao  $S_8$ :

$$S_8(\rho, \varphi) = \rho^2 R^2 \left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right)^2 \left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right) \sum_{-\infty}^{\infty} C_n^{(s)} e^{in\varphi} \quad s=1,2 \dots\dots\dots (297)$$

Sada se izraz (294) može napisati u obliku:

$$\begin{aligned} S_1(\rho, \varphi) + S_2(\rho, \varphi) - S_3(\rho, \varphi) + S_4(\rho, \varphi) - \\ - S_5(\rho, \varphi) + S_6(\rho, \varphi) + S_7(\rho, \varphi) = S_8(\rho, \varphi) \dots\dots\dots (298) \end{aligned}$$

Da bi zavisnost između koeficijenata bila jednoznačna, mora da koeficijent uz  $(i\varphi)$  bude jednak nuli, tj.  $B_{-1}=0$ , tako da je i član  $S_6$  jednak nuli  $S_6=0$ .

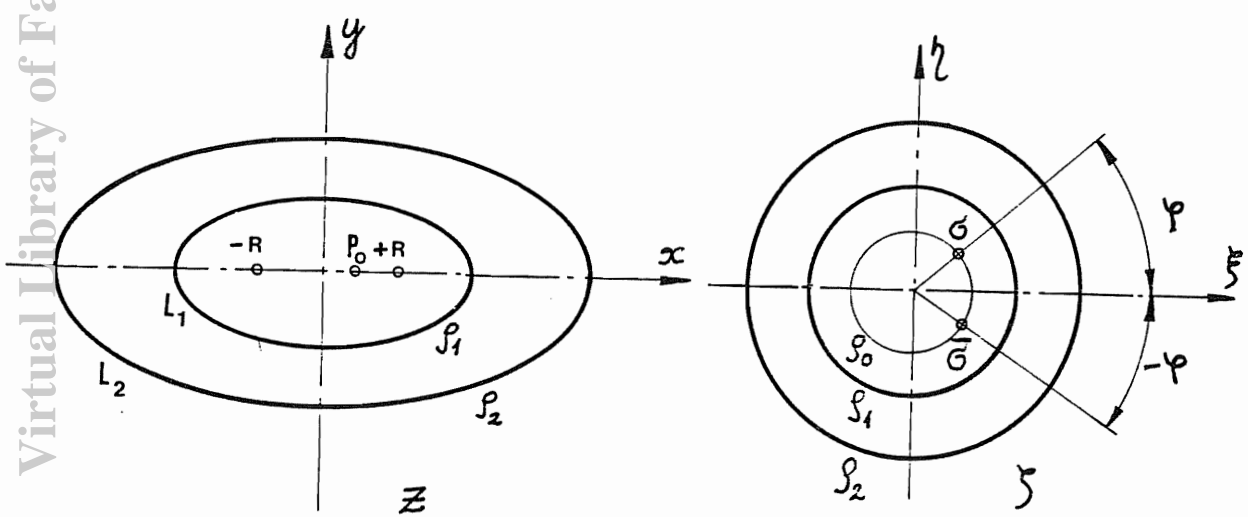
Takođe u članu  $S_7$  se vidi da  $n$  mora biti različito od  $-1$ , da ovaj član ne bi dobio beskonačnu vrednost.

Razvijmo zatim izraze (296) i izraz (297) za članove korišćenjem relacija (295) i prikazujući kompleksni broj  $\zeta$  u eksponencijalnom obliku  $\zeta = \rho e^{i\varphi}$ . Zatim, svedemo u svim članovima kompleksnu jedinicu na isti stepen  $n$ , te dobijemo koeficijente (zavisne od  $A_n$  i  $B_n$ ) koji stoje uz isti stepen kompleksne jedinice  $e^{in\varphi}$ . Na taj

način dobijamo članove od  $S_1$  do  $S_8$  u obliku:

$$\begin{aligned}
 S_1(\rho, \varphi) &= R \sum_{-\infty}^{\infty} [A_n(\rho^{n+2} + m^2 \rho^{n-2}) - mA_{n+2} \rho^{n+2} - \\
 &\quad - mA_{n+2} \rho^{n+2} - mA_{n-2} \rho^{n-2}] e^{in\varphi} \\
 S_2(\rho, \varphi) &= R \sum_{-\infty}^{\infty} [\bar{A}_{-n} \rho^{-(n-2)} - 2m\bar{A}_{-(n+2)} \rho^{-(n+2)} + \\
 &\quad + m^2 \bar{A}_{-(n+4)} \rho^{-(n+4)}] e^{in\varphi} \\
 S_3(\rho, \varphi) &= R \sum_{-\infty}^{\infty} \{A_n(\rho^{n+2} - m^2 \rho^{n-2})n + m[(n-2)\rho^{n-2}A_{n-2} - \\
 &\quad - (n+2)\rho^{n+2}A_{n+2}]\} e^{in\varphi} \\
 S_4(\rho, \varphi) &= R \sum_{-\infty}^{\infty} 2m(A_{n+2}\rho^{n+2} + mA_n\rho^{n-2}) e^{in\varphi} \\
 S_5(\rho, \varphi) &= \sum_{-\infty}^{\infty} (B_{n-2} - mB_n)\rho^n e^{in\varphi} \\
 S_7(\rho, \varphi) &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{2m}{n+1} B_n \rho^n e^{in\varphi} \\
 S_8(\rho, \varphi) &= R^2 \sum_{-\infty}^{\infty} [C_n^{(s)} \rho^2 (1 + \frac{2m^2}{\rho^4}) - m(2 + \frac{m^2}{\rho^4}) C_{n+2}^{(s)} + \\
 &\quad + \frac{m^2}{\rho^2} C_{n+4}^{(s)} - mC_{n-2}^{(s)}] e^{in\varphi} \quad (s=1,2) \dots\dots\dots (299)
 \end{aligned}$$

Pri konformnom preslikavanju krugu  $\rho = \rho_0$  koji leži u  $\zeta$ -ravni odgovara duž između tačaka  $x = -R$  i  $x = +R$  na osi  $x$  u ravni  $z$ . Ako posmatramo tačku  $P_0$  na duži u ravni  $z$  njoj će u  $\zeta$ -ravni odgovarati dve tačke  $\sigma = \rho_0 e^{i\varphi}$  i  $\bar{\sigma} = \rho_0 e^{-i\varphi}$  kao što je prikazano na slici 176.



Slika 176.

Kontinualnost analitičkih funkcija kompleksne promenljive  $F(z)$  i  $X(z)$  zahteva da važe relacije:

$$\begin{aligned} F_1'(\sigma) &= \sigma_1'(\bar{\sigma}) \\ X_1''(\sigma) &= X_1''(\bar{\sigma}) \end{aligned} \quad (300)$$

Kako razmatrani primeri predstavljaju slučaj opterećenja simetričnog u odnosu na ose  $x$  i  $y$ , odnosno  $x_1$  i  $y_1$ , ovaj stav bi se mogao proširiti na čitavu oblast eliptičnog prstena, odnosno kružnog prstena:

$$\begin{aligned} F_1'(\zeta) &= \sigma_1'(\bar{\zeta}) \\ X_1''(\zeta) &= X_1''(\bar{\zeta}) \end{aligned} \quad (301)$$

Na osnovu izraza (268) i (301) sledi:

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{\infty} A_n \zeta^n &= \sum_{-\infty}^{\infty} A_n \bar{\zeta}^n = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n \zeta^{-n} = \sum_{-\infty}^{\infty} A_{-n} \zeta^n \\ \sum_{-\infty}^{\infty} B_n \zeta^n &= \sum_{-\infty}^{\infty} B_n \bar{\zeta}^n = \sum_{-\infty}^{\infty} B_n \zeta^{-n} = \sum_{-\infty}^{\infty} B_{-n} \zeta^n \end{aligned} \quad (302)$$

Odavde je očigledno da bi važile relacije (302), mora biti zadovoljeno:

$$A_n = A_{-n}, \quad B_n = B_{-n} \quad (303)$$

odnosno koeficijenti pozitivnog indeksa jednaki su koeficijentima sa negativnim indeksom iste apsolutne vrednosti.

Pošto su koeficijenti  $C_n^{(1)}$  i  $C_n^{(2)}$  za ovakav slučaj opterećenja realne veličine, možemo uzeti da su koeficijenti  $A_n$  i  $\bar{A}_n$  takođe realni, odnosno  $A_n = \bar{A}_n$ . Do ovakvog zaključka se došlo i u literaturi [56], [72] i [88] za slučaj kružne oblasti i kružnog prstena.

Ukoliko zatim relacije (299) zamenimo u izrazu (298) i iskoristimo predhodne zaključke dobićemo vezu između nepoznatih i poznatih koeficijenata, pri čemu su nepoznati koeficijenti  $A_n, A_{n+2}, A_{n-2}, A_{n+4}, B_{n-2}$  i  $B_n$ , a poznati  $C_n^{(s)}, C_{n+2}^{(s)}, C_{n-2}^{(s)}, C_{n+4}^{(s)}$ , za  $s=1,2$ . Ova veza ima oblik:

$$\begin{aligned} &\left\{ A_n \left[ (1-n)\rho^{n+2} + (3+n)m^2\rho^{n-2} + \rho^{-(n-2)} \right] + \right. \\ &+ mA_{n+2} \left[ (n+3)\rho^{n+2} - 2\rho^{-(n+2)} \right] - m(n-1)\rho^{n-2} A_{n-2} + \\ &+ m^2\rho^{-(n+6)} A_{n+4} - \frac{1}{R}\rho^n B_{n-2} + \left. \frac{m}{R} \frac{n+3}{n+1} \rho^n B_n \right\} \Big|_{\rho=\rho_s} = \\ &= R \left[ \rho^2 \left( 1 + 2\frac{m^2}{\rho^4} \right) C_n^{(s)} + m \left( 2 + \frac{m^2}{\rho^4} \right) C_{n+2}^{(s)} + \frac{m^2}{\rho^2} C_{n+4}^{(s)} - m C_{n-2}^{(s)} \right] \Big|_{\rho=\rho_s} \dots \quad (304) \end{aligned}$$

gde je:  $s=1$  i  $\rho=\rho_1$  za unutrašnju konturu i  $s=2$ , a  $\rho=\rho_2$  za spoljašnju konturu.

Deljenjem relacije (304) sa  $\rho^n$  i uvođenjem smene:

$$\begin{aligned} L_n^{(s)}(\rho) &= R \left[ \rho^{-(n-2)} \left( 1 + 2\frac{m^2}{\rho^4} \right) C_n^{(s)} + m \rho^{-n} \left( 2 + \frac{m^2}{\rho^4} \right) C_{n+2}^{(s)} + \right. \\ &+ \left. \frac{m^2}{\rho^2} \rho^{-n} C_{n+4}^{(s)} - m \rho^{-n} C_{n-2}^{(s)} \right] \Big|_{\rho=\rho_s} \dots \quad (305) \end{aligned}$$

dobijamo izraz (304) u obliku jednostavnijem za dalju analizu:

$$\begin{aligned} &\left\{ A_n \left[ (1-n)\rho^2 + (3+n)\frac{m^2}{\rho^2} + \rho^{-2(n-1)} \right] + \right. \\ &+ mA_{n+2} \left[ (n+3)\rho^2 - 2\rho^{-2(n+1)} \right] - m(n-1)\rho^{-2} A_{n-2} + \\ &+ m^2\rho^{-2(n+3)} A_{n+4} - \left. \frac{1}{R} B_{n-2} + \frac{m}{R} \frac{n+3}{n+1} B_n \right\} \Big|_{\rho=\rho_s} = L_n^{(s)}(\rho) \Big|_{\rho=\rho_s} \dots \quad (306) \end{aligned}$$



gde je  $\rho = \rho_1, \rho_2$ , a  $s=1,2$  za unutrašnju i spoljašnju konturu respektivno.

Ako od izraza (306) napisanog za spoljašnju konturu, znači kada je  $\rho = \rho_2$  i  $s=2$ , oduzmemo isti izraz napisan za unutrašnju konturu, kada je  $\rho = \rho_1$  i  $s=1$ , dobijamo relaciju:

$$m(1-n)(\rho_1^{-2} - \rho_2^{-2})A_{n-2} + A_n \left[ (1-n)(\rho_2^{-2} - \rho_1^{-2}) + (n+3)m^2(\rho_2^{-2} - \rho_1^{-2}) + \rho_2^{-2(n-1)} - \rho_1^{-2(n-1)} \right] + mA_{n+2} \left[ (n+3)(\rho_2^{-2} - \rho_1^{-2}) - 2(\rho_2^{-2(n+1)} - \rho_1^{-2(n+1)}) \right] + A_{n+4}m^2(\rho_2^{-2(n+3)} - \rho_1^{-2(n+3)}) = E_n(\rho_1, \rho_2)$$

$$n = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (307)$$

gde je:

$$E_n(\rho_1, \rho_2) = L_n^{(2)}(\rho_2) - L_n^{(1)}(\rho_1) \quad (308)$$

Pošto su koeficijenti neparnog indeksa  $C_{2k+1}^{(s)} = 0$ , biće  $L_{2k+1}^{(s)} = 0$  odakle sledi da je  $E_{2k+1}(\rho_1, \rho_2) = 0$ . Takođe i koeficijenti  $A_{2k+1}$  su jednaki nuli, što će biti dokazano na osnovu simetrije kontura i opterećenja kada se bude govorilo o naponima.

Kada  $n$  uzima vrednosti  $n = -4, -2, 0, 2$  odnosno  $k = n/2 = -2, -1, 0, 1$  izraz (327) daje sistem od četiri jednačine sa četiri nepoznate:  $A_0, A_2, A_4$  i  $A_6$ . Pri tome je iskorišćena veza (323) pa je:  $A_2 = A_{-2}, A_4 = A_{-4}, A_6 = A_{-6}$ . Naravno  $n$  može uzimati parne celobrojne vrednosti od  $-\infty$  do  $\infty$ , ali mi ćemo prvo rešiti sistem "oko nule".

Matrica nepoznatih koeficijenata ima oblik:

$$\begin{array}{l} n = -4 \\ n = -2 \\ n = 0 \\ n = 2 \end{array} \left| \begin{array}{cccc} A_{-6} & A_{-4} & A_{-2} & A_0 \\ A_{-4} & A_{-2} & A_0 & A_2 \\ A_{-2} & A_0 & A_2 & A_4 \\ A_0 & A_2 & A_4 & A_6 \end{array} \right|$$


---


$$\begin{array}{cccc} A_{n-2} & A_n & A_{n+2} & A_{n+4} \end{array}$$

Sistem od četiri jednačine sa četiri nepoznate, može se napisati u matričnom obliku:

$$D\{A\} = E \quad (309)$$

gde je:

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_2 \\ A_4 \\ A_6 \end{Bmatrix}, \quad E = \begin{Bmatrix} E_{-4}(\rho_1, \rho_2) \\ E_{-2}(\rho_1, \rho_2) \\ E_0(\rho_1, \rho_2) \\ E_2(\rho_1, \rho_2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1_1 \\ 1_2 \\ 1_3 \\ 1_4 \end{Bmatrix}$$

$$D = (a_{ik})_{\substack{\rightarrow i \\ \downarrow k}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{33} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Na primer za  $n = -4$  imamo jednačinu:

$$a_{11}A_0 + a_{21}A_2 + a_{31}A_4 + a_{41}A_6 = 1_1 \quad (310)$$

Bazni koeficijenti<sup>4</sup>  $a_{ik}$  se dobijaju zamenom  $n = -4, -2, 0, 2$  u relaciji (307) i dati su izrazima:

$$a_{11} = m^2(\rho_2^2 - \rho_1^2)$$

$$a_{21} = -m \left[ (\rho_2^2 - \rho_1^2) + 2(\rho_2^6 - \rho_1^6) \right]$$

$$a_{31} = 5(\rho_2^2 - \rho_1^2) - m^2 \left( \frac{1}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_1^2} \right) + (\rho_2^{10} - \rho_1^{10})$$

$$a_{41} = 5m \left( \frac{1}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_1^2} \right)$$

<sup>4</sup> geometrijski koeficijenti

$$\begin{aligned}
 a_{12} &= -m(\rho_2^2 - \rho_1^2) \\
 a_{22} &= [3(\rho_2^2 - \rho_1^2) + 2m^2(\rho_2^{-2} - \rho_1^{-2}) + (\rho_2^6 - \rho_1^6)] \\
 a_{32} &= 3m(\rho_2^{-2} - \rho_1^{-2}) \\
 a_{42} &= 0 \\
 \hline
 a_{13} &= 2(\rho_2^2 - \rho_1^2) + 3m^2(\rho_2^{-2} - \rho_1^{-2}) \\
 a_{23} &= m[3(\rho_2^2 - \rho_1^2) - (\rho_2^{-2} - \rho_1^{-2})] \\
 a_{33} &= m^2(\rho_2^{-6} - \rho_1^{-6}) \\
 a_{43} &= 0 \\
 \hline
 a_{14} &= -m(\rho_2^{-2} - \rho_1^{-2}) \\
 a_{24} &= -(\rho_2^2 - \rho_1^2) + (5m^2 + 1)(\rho_2^{-2} - \rho_1^{-2}) \\
 a_{34} &= m[5(\rho_2^2 - \rho_1^2) - 2(\rho_2^{-6} - \rho_1^{-6})] \\
 a_{44} &= m^2(\rho_2^{-10} - \rho_1^{-10}) \dots\dots\dots (311)
 \end{aligned}$$

Desna strana jednačine (307) odnosno izraz (308) kada se razvije daje:

$$\begin{aligned}
 E_n(\rho_1, \rho_2) &= R \left[ C_n^{(2)} \rho_2^{2-n} \left( 1 - \frac{2m^2}{\rho_2^4} \right) - C_n^{(1)} \rho_1^{2-n} \left( 1 + \frac{2m^2}{\rho_1^4} \right) - \right. \\
 &- m \rho_2^{-n} \left( 2 + \frac{m^2}{\rho_2^4} \right) C_{n+2}^{(2)} + m \rho_1^{-n} \left( 2 + \frac{m^2}{\rho_1^4} \right) C_{n+2}^{(1)} + \\
 &\left. + \frac{m^2}{\rho_2^2} \rho_2^{-n} C_{n+4}^{(2)} - \frac{m^2}{\rho_1^2} \rho_1^{-n} C_{n+4}^{(1)} - m \rho_2^{-n} C_{n-2}^{(2)} + m \rho_1^{-n} C_{n-2}^{(1)} \right] \dots\dots\dots (312)
 \end{aligned}$$

Slobodni članovi sistema nehomogenih linearnih jednačina dobijaju se kada u izrazu (312) stavimo  $n = -4, -2, 0$  i  $2$ , i dati su izrazima:

$$\begin{aligned}
 l_1 &= E_n(\rho_1, \rho_2) \Big|_{n=-4} = R \left\{ m^2 (\rho_2^2 C_0^{(2)} - \rho_1^2 C_0^{(1)}) - C_4^{(1)} \rho_1^6 \left( 1 + \frac{2m^2}{\rho_1^4} \right) + \right. \\
 &+ C_4^{(2)} \rho_2^6 \left( 1 - \frac{2m^2}{\rho_2^4} \right) - m \left[ \rho_2^4 \left( 2 + \frac{m^2}{\rho_2^4} \right) C_2^{(2)} + \rho_1^4 \left( 2 + \frac{m^2}{\rho_1^4} \right) C_2^{(1)} \right] + \\
 &\left. - m (\rho_2^4 C_6^{(2)} + \rho_1^4 C_6^{(1)}) \right\} \\
 l_2 &= E_n(\rho_1, \rho_2) \Big|_{n=-2} = R \left\{ C_2^{(2)} \rho_2^4 \left( 1 + \frac{3m^2}{\rho_2^4} \right) - C_2^{(1)} \rho_1^4 \left( 1 + \frac{3m^2}{\rho_1^4} \right) - \right. \\
 &- m \left[ \rho_2^2 \left( 2 + \frac{m^2}{\rho_2^4} \right) C_0^{(2)} + \rho_1^2 \left( 2 + \frac{m^2}{\rho_1^4} \right) C_0^{(1)} \right] + \\
 &\left. - m (\rho_2^2 C_4^{(2)} + \rho_1^2 C_4^{(1)}) \right\} \\
 l_3 &= E_n(\rho_1, \rho_2) \Big|_{n=0} = R \left\{ C_0^{(2)} \rho_2^2 \left( 1 + \frac{2m^2}{\rho_2^4} \right) - C_0^{(1)} \rho_1^2 \left( 1 + \frac{2m^2}{\rho_1^4} \right) - \right. \\
 &- m \left[ \left( 3 + \frac{m^2}{\rho_2^4} \right) C_2^{(2)} + \left( 3 + \frac{m^2}{\rho_1^4} \right) C_2^{(1)} \right] + \\
 &\left. + m^2 \left( \frac{1}{\rho_2^2} C_4^{(2)} - \frac{1}{\rho_1^2} C_4^{(1)} \right) \right\} \\
 l_4 &= E_n(\rho_1, \rho_2) \Big|_{n=2} = R \left\{ C_2^{(2)} \left( 1 + \frac{2m^2}{\rho_2^4} \right) - C_2^{(1)} \left( 1 + \frac{2m^2}{\rho_1^4} \right) - \right. \\
 &- m \left[ \left( 2 + \frac{m^2}{\rho_2^4} \right) \frac{1}{\rho_2^2} C_4^{(2)} + \left( 2 + \frac{m^2}{\rho_1^4} \right) \frac{1}{\rho_1^2} C_4^{(1)} \right] + \\
 &\left. + m^2 \left( \frac{1}{\rho_2^4} C_6^{(2)} - \frac{1}{\rho_1^4} C_6^{(1)} \right) - m \left( \frac{1}{\rho_2^2} C_0^{(2)} - \frac{1}{\rho_1^2} C_0^{(1)} \right) \right\} \dots\dots\dots (313)
 \end{aligned}$$

Sistem od četiri linearne nehomogene jednačine možemo rešiti recimo primenom Cramer-ovog pravila ili nekom numeričkom metodom kao što je Gauss - Seidel metoda ili metoda kvadratnog korena. Za numeričke metode postoji veliki broj napisanih gotovih programa na računaru.

Pošto smo odredili koeficijente  $A_0, A_2, A_4$  i  $A_6$  stavljanjem u izraz (307)  $n=4$  dobijamo jednačinu u kojoj je nepoznat koeficijent  $A_8$  i dalje za svako naredno  $n$  dobijamo po jednu jednačinu sa jednom nepoznom, pri tome  $n$  uzima vrednosti  $n=4,6,8,10,12 \dots$ . Ukoliko umesto  $n$  stavimo  $n=2k$ ,  $k$  će imati vrednosti  $k=2,3,4,5,6 \dots$ .

Tako iz izraza (307) možemo odrediti obrazac za određivanje koeficijenata  $A_{n+4}$  za  $n=2k$ ,  $k=2,3,4,5,6, \dots$ , u obliku:

$$A_{n+4} = \frac{1}{m^2(\rho_2^{-2(n+3)} - \rho_1^{-2(n+3)})} \{ [L_n^{(2)}(\rho_2) - L_n^{(1)}(\rho_1)] + \\ + m(n-1)(\rho_2^{-2} - \rho_1^{-2})A_{n-2} - A_n [-(n-1)(\rho_2^2 - \rho_1^2) + \\ + (n+3)m^2(\rho_2^{-2} - \rho_1^{-2}) + \rho_2^{-2(n-1)} - \rho_1^{-2(n-1)}] - \\ - mA_{n+2} [(n+3)(\rho_2^2 - \rho_1^2) - 2(\rho_2^{-2(n+1)} - \rho_1^{-2(n+1)})] \} \dots \dots \dots (314)$$

Odredimo sada koeficijente  $B_n$  koji su u izrazu (307) bili eliminisani. Kada u relaciji (306) zamenimo  $n=0$  dobija se:

$$A_0(2\rho^2 + 3\frac{m^2}{\rho}) + mA_2(3\rho^2 - \rho^{-2}) + m^2\rho^{-6}A_4 - \frac{1}{R}B_{-2} + \\ + \frac{3m}{R}B_0 = L_2(\rho) \dots \dots \dots (315)$$

A kada u relaciji (306) zamenimo  $n=2$  dobija se:

$$-m\rho^{-2}A_0 + A_2(\rho^{-2} - \rho^2 + \frac{5m^2}{\rho^2}) + mA_4(5\rho^2 - 2\rho^{-6}) + \\ + m^2A_6\rho^{-10} - \frac{1}{R}B_0 + \frac{5m}{3R}B_2 = L_2^{(s)}(\rho) \dots \dots \dots (316)$$

Izraz (315) pomnožimo sa  $5m$ , a izraz (316) sa  $3$  i saberemo ih čime smo eliminisali  $B_2$  i dobili obrazac za određivanje koeficijenta  $B_0$ :

$$mA_0[10\rho^2 + 3(5m^2 - 1)\rho^{-2}] + A_2[3(5m^2 - 1)\rho^2 + (10m^2 + 3)\rho^{-2}] + \\ + mA_4[(5m^2 - 6)\rho^{-6} + 15\rho^2] + 3m^2\rho^{-10}A_6 + \frac{1}{R}(15m^2 - 3)B_0 = \\ = 5mL_0^{(s)}(\rho) + 3L_2^{(s)}(\rho) \dots \dots \dots (317)$$

odnosno:

$$B_0 = \frac{R}{15m^2 - 3} \{ 5mL_0^{(s)}(\rho) + 3L_2^{(s)}(\rho) - mA_0[10\rho^2 + 3(5m^2 - 1)\rho^{-2}] - \\ - A_2[3(5m^2 - 1)\rho^2 + (10m^2 + 3)\rho^{-2}] - mA_4[(5m^2 - 6)\rho^{-6} + 15\rho^2] - \\ - 3m^2\rho^{-10}A_6 \} \dots \dots \dots (318)$$

gde se može zameniti  $s=1$  i  $\rho=\rho_1$  za unutrašnju konturu i  $s=2$   $\rho=\rho_2$  za spoljašnju konturu. Proverom rezultata dobijenih na računaru ustanovljeno je da se za oba ova slučaja dobija ista vrednost  $B_0$ .

Ako zatim izraz (316) pomnožimo sa  $(3m)$  i saberemo ga sa izrazom (315) dobijamo obrazac za određivanje koeficijenta  $B_2$ :

$$B_2 = \frac{R}{5m^2 - 1} \{ L_0^{(s)}(\rho) + 3mL_2^{(s)}(\rho) - 2A_0\rho^2 - mA_2(2 + 15m^2)\rho^{-2} - \\ - m^2(15\rho^2 - 5\rho^{-6})A_4 - 3m^3\rho^{-10}A_6 \} \dots \dots \dots (319)$$

gde  $s$  može biti 1 i 2, a  $\rho = \rho_1$  i  $\rho = \rho_2$  za unutrašnju i spoljašnju konturu<sup>5</sup>.

Pošto smo odredili koeficijente  $B_0$  i  $B_2$  korišćenjem relacije (306) možemo napisati obrazac za određivanje ostalih koeficijenata  $B_n$ :

$$B_n = \frac{R(n+1)}{m(n+3)} \left\{ L_n^{(s)}(\rho) - A_n \left[ (1-n)\bar{\rho}^2 + (3+n) \frac{m^2}{\rho^2} + \rho^{-2(n-1)} \right] - \right. \\ \left. - mA_{n+2} \left[ (n+3)\rho^2 - 2\rho^{-2(n+1)} \right] + m(n-1)\rho^2 A_{n-2} - \right. \\ \left. - m^2 A_{n+4} \rho^{-2(n+3)} + \frac{1}{R} B_{n-2} \right\} \dots\dots\dots (320)$$

gde je na unutrašnjoj konturi  $s=1$  i  $\rho = \rho_1$ , a na spoljašnjoj  $s=2$  i  $\rho = \rho_2$ . Pošto je  $n$  paran broj, možemo staviti u predhodni izraz  $n=2k$   $k=2,3,4,5\dots$

Na taj način odredili smo koeficijente razvoja u Laurent-ov red, analitičkih funkcija kompleksne promenljive, pa su time i ove analitičke funkcije  $F_1(\zeta)$  i  $X_1(\zeta)$  kao i njihovi izvodi korišćenjem relacija (268), (269) i (292) u potpunosti određeni.

Pošto smo odredili koeficijente  $A_n$  i  $B_n$  sada možemo uspostaviti relacije između ovih koeficijentata i komponenti tenzora napona, vektora pomeranja i dilatacija.

<sup>5</sup> Provera na računaru je pokazala da se u oba slučaja dobija ista vrednost,  $B_2$  što se i očekivalo.

### V3.4. Komponente tenzora napona u eliptično - hiperboličnim koordinatama za razmatrani slučaj eliptično - prstenaste ploče i njihova veza sa koeficijentima $A_n$ i $B_n$

Napišimo komponente tenzora napona u eliptično-hiperboličnim koordinatama  $\rho$  i  $\varphi$ . Korišćenjem relacije (91) i izraza (292) i (293) i smenom  $n=2k$  možemo napisati relaciju (91) u obliku:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho^{-1}} \tau_{\rho\varphi} = & \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} A_{2k} \zeta^{2k}}{R\left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right)} + \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} A_{2k} \bar{\zeta}^{2k}}{R\left(1 - \frac{m}{\bar{\zeta}^2}\right)} - \\ & - \frac{\zeta^2}{\rho^2} \frac{1 - \frac{m}{\zeta^2}}{1 - \frac{m}{\bar{\zeta}^2}} \left[ R\left(\bar{\zeta} + \frac{m}{\bar{\zeta}}\right) \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} 2k A_{2k} \zeta^{2k-1} R\left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right) - \sum_{-\infty}^{\infty} A_{2k} \zeta^{2k} \frac{2m}{\zeta^3} R}{R^3\left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right)^3} + \right. \\ & \left. + \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} B_{2k} \zeta^{2k} R\left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right) - \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k+1} \zeta^{2k-1} \frac{2m}{\zeta^3} R}{R^3\left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right)^3} \right] \dots\dots\dots (321) \end{aligned}$$

iz relacije (89) dobijamo:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho} + \sigma_{\varphi} = & 2 \left\{ \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} A_{2k} \zeta^{2k}}{R\left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right)} + \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} A_{2k} \bar{\zeta}^{2k}}{R\left(1 - \frac{m}{\bar{\zeta}^2}\right)} \right\} = \\ = & \frac{2}{gR} \sum_{-\infty}^{\infty} A_{2k} \rho^{2k} \left[ \cos 2k\varphi - \frac{m}{\rho^2} \cos 2(k+1)\varphi \right] \dots\dots\dots (322) \end{aligned}$$

Iz izraza (322) sada možemo dobiti relaciju između komponenti tenzora napona  $\sigma_{\rho}$  i  $\sigma_{\varphi}$  u obliku:

$$\sigma_{\varphi} = \frac{2}{gR} \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} A_{2k} \rho^{2k} \left[ \cos 2k\varphi - \frac{m}{\rho^2} \cos 2(k+1)\varphi \right] \right\} - \sigma_{\rho} \dots\dots\dots (323)$$

U izrazu (321) na desnoj strani zamenimo kompleksni broj  $\rho$  njegovim eksponencijalnim oblikom  $\rho e^{i\varphi}$ , predhodno razdvajajući na članove desnu stranu izraza u cilju lakše analize:

$$\begin{aligned} a_1(\rho, \varphi) &= \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} A_{2k} \zeta^{2k}}{R\left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right)} \\ a_2(\rho, \varphi) &= \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} \bar{A}_{2k} \bar{\zeta}^{2k}}{R\left(1 - \frac{m}{\bar{\zeta}^2}\right)} \\ a_3(\rho, \varphi) &= \frac{\zeta^2}{\rho^2} \frac{1 - \frac{m}{\zeta^2}}{1 - \frac{m}{\bar{\zeta}^2}} R\left(\bar{\zeta} + \frac{m}{\bar{\zeta}}\right) \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} 2k A_{2k} \zeta^{2k-1} R\left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right)}{R^3\left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_4(\rho, \varphi) &= \frac{\zeta^2}{\rho^2} \frac{1 - \frac{m}{\zeta^2}}{1 - \frac{m}{\bar{\zeta}^2}} R \left( \bar{\zeta} + \frac{m}{\zeta} \right) \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} A_{2k} \zeta^{2k} \frac{2m}{\zeta^3} R}{R^3 \left( 1 - \frac{m}{\zeta^2} \right)^3} \\
 a_5(\rho, \varphi) &= \frac{\zeta^2}{\rho^2} \frac{1 - \frac{m}{\zeta^2}}{1 - \frac{m}{\bar{\zeta}^2}} \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} B_{2k} \zeta^{2k} R \left( 1 - \frac{m}{\zeta^2} \right)}{R^3 \left( 1 - \frac{m}{\zeta^2} \right)^3} \\
 a_6(\rho, \varphi) &= \frac{\zeta^2}{\rho^2} \frac{1 - \frac{m}{\zeta^2}}{1 - \frac{m}{\bar{\zeta}^2}} \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k+1} \zeta^{2k+1} \frac{2m}{\zeta^3} R}{R^3 \left( 1 - \frac{m}{\zeta^2} \right)^3} \dots \dots \dots (324)
 \end{aligned}$$

sledi:

$$\begin{aligned}
 a_1(\rho, \varphi) &= \frac{1}{gR} \sum_{-\infty}^{\infty} A_{2k} \rho^{2k} \left( e^{2ik\varphi} - \frac{m}{\rho^2} e^{2i(k+1)\varphi} \right) \\
 a_2(\rho, \varphi) &= \frac{1}{gR} \sum_{-\infty}^{\infty} A_{2k} \rho^{2k} \left( e^{-2ik\varphi} - \frac{m}{\rho^2} e^{-2i(k+1)\varphi} \right) \\
 a_3(\rho, \varphi) &= \frac{1}{\rho gR} \sum_{-\infty}^{\infty} 2k A_{2k} \rho^{2k} \left[ e^{2ik\varphi} - \frac{m}{\rho^2} e^{2i(k-1)\varphi} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{m^3}{\rho^6} e^{2i(k+1)\varphi} + \frac{m^2}{\rho^4} e^{2i(k+2)\varphi} \right] \\
 a_4(\rho, \varphi) &= \frac{2m}{g^3 R} \sum_{-\infty}^{\infty} A_{2k} \rho^{2(k-1)} \left[ \left( 1 + 3 \frac{m^2}{\rho^4} \right) e^{i2(k-1)\varphi} - \frac{m}{\rho^2} e^{i2(k-2)\varphi} - \right. \\
 &\quad \left. - 3 \frac{m}{\rho^2} \left( 1 + \frac{m^2}{\rho^4} \right) e^{i2k\varphi} + \frac{m^2}{\rho^4} \left( 3 + \frac{m^2}{\rho^4} \right) e^{i2(k+1)\varphi} - \frac{m^3}{\rho^6} e^{i2(k+2)\varphi} \right] \\
 a_5(\rho, \varphi) &= \frac{1}{g^2 R^2} \sum_{-\infty}^{\infty} B_{2k} \rho^{2k} \left[ \left( 1 + \frac{m^2}{\rho^4} \right) e^{i2(k+1)\varphi} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{m}{\rho^2} e^{i2(k+2)\varphi} - \frac{m}{\rho^2} e^{i2k\varphi} \right] \\
 a_6(\rho, \varphi) &= \frac{2m}{g^3 R^2} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k+1} \rho^{2(k-1)} \left[ \left( 1 + 2 \frac{m^2}{\rho^4} \right) e^{i2k\varphi} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{m^2}{\rho^2} e^{i2(k-1)\varphi} - \frac{m}{\rho^2} \left( 2 + \frac{m^2}{\rho^4} \right) e^{i2(k+1)\varphi} + \frac{m^2}{\rho^4} e^{i2(k+2)\varphi} \right] \dots (325)
 \end{aligned}$$

Tako izraz (321) možemo napisati u obliku:

$$\sigma_{\rho-i} \tau_{\rho\varphi} = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 \dots \dots \dots (326)$$

gde su  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  i  $a_6$  dati izrazima (325).

Odnosno, izraz (341) možemo napisati u razvijenom obliku:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho} - i \tau_{\rho} \varphi = & \frac{1}{gR} \sum_{-\infty}^{\infty} A_{2k} \rho^{2k} \left\{ \left[ e^{2ik\varphi} + e^{-2ik\varphi} - \frac{m}{\rho^2} \left( e^{2i(k+1)\varphi} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + e^{-2i(k+1)\varphi} \right) \right] - \frac{2k}{g} \left[ e^{2ik\varphi} - \frac{m}{\rho^2} e^{2i(k-1)\varphi} + \frac{m^3}{\rho^6} e^{2i(k+1)\varphi} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{m^2}{\rho^4} e^{2i(k+2)\varphi} \right] + \frac{2m}{g^2 \rho^2} \left[ \left( 1 + 3 \frac{m^2}{\rho^4} \right) e^{i2(k-1)\varphi} - \frac{m}{\rho^2} e^{i2(k-2)\varphi} - \right. \right. \\ & \left. \left. - 3 \frac{m}{\rho^2} \left( 1 + \frac{m^2}{\rho^4} \right) e^{i2(k+1)\varphi} + \frac{m^2}{\rho^4} \left( 3 + \frac{m^2}{\rho^4} \right) e^{i2(k+1)\varphi} - \frac{m^3}{\rho^6} e^{i2(k+2)\varphi} \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{g^2 R^2} \sum_{-\infty}^{\infty} B_{2k} \rho^{2k} \left\{ \left[ \frac{m}{\rho^2} e^{i2k\varphi} + \frac{m}{\rho^2} e^{i2(k+2)\varphi} - \left( 1 + \frac{m^2}{\rho^4} \right) e^{i2(k+1)\varphi} \right] + \right. \\ & + \frac{2m}{g \rho^2 (2k+1)} \left[ \left( 1 + 2 \frac{m^2}{\rho^4} \right) e^{i2k\varphi} - \frac{m}{\rho^2} e^{i2(k-1)\varphi} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{m}{\rho^2} \left( 2 + \frac{m^2}{\rho^4} \right) e^{i2(k+1)\varphi} + \frac{m^2}{\rho^4} e^{i2(k+2)\varphi} \right] \right\} \dots \dots \dots (327) \end{aligned}$$

Uvođenjem trigonometrijskog oblika kompleksnog broja  $\zeta = \rho e^{i\varphi} = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  i razdvajanjem realnog i imaginarnog dela izraza (327), s obzirom na činjenicu da naponu  $\sigma_{\rho}$  u izrazu (327) odgovara realni deo izraza na desnoj strani, a tangencijalnom naponu  $\tau_{\rho} \varphi$  odgovara imaginarni deo izraza na desnoj strani, dobija se za napon  $\sigma_{\rho}(\rho, \varphi) = \sigma_h$  sledeća relacija:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}(\rho, \varphi) = \sigma_h = & \frac{1}{gR} \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} \rho^{2k} \left( \cos 2k\varphi \left\{ A_{2k} \left[ 1 - \frac{2k}{g} - \frac{6m^2}{\rho^4 g^2} \left( 1 + \frac{m^2}{\rho^4} \right) \right] + \right. \right. \right. \\ & + \frac{1}{gR} B_{2k} \frac{m}{\rho^2} \left[ 1 + \frac{2}{(2k+1)g} \left( 1 + 2 \frac{m^2}{\rho^4} \right) \right] \right\} + \\ & + \cos 2(k-1)\varphi \left\{ A_{2k} \left[ \frac{2km}{g \rho^2} + \frac{2m}{g^2 \rho^2} \left( 1 + 3 \frac{m^2}{\rho^4} \right) \right] - \right. \\ & - \frac{1}{gR} B_{2k} \frac{2m^2}{\rho^4 g (2k+1)} \left. \right\} + \cos 2(k-2)\varphi \left[ A_{2k} \left( -2 \frac{m^2}{\rho^4 g^2} \right) \right] + \\ & + \cos 2(k+1)\varphi \left\{ A_{2k} \left[ -\frac{m}{\rho^2} - \frac{2km^3}{g \rho^6} + \frac{2m^3}{g^2 \rho^6} \left( 3 + \frac{m^2}{\rho^4} \right) \right] + \right. \\ & + \frac{1}{gR} B_{2k} \left[ -\left( 1 + \frac{m^2}{\rho^4} \right) - \frac{2m^2}{\rho^4 g (2k+1)} \left( 2 + \frac{m^2}{\rho^4} \right) \right] \right\} + \\ & + \cos 2(k+2)\varphi \left\{ A_{2k} \left[ -\frac{m^2}{\rho^4} - \frac{2m^4}{g^2 \rho^6} \right] + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{gR} B_{2k} \left[ \frac{m}{\rho^2} + \frac{2m^3}{\rho^5 g (2k+1)} \right] \right\} \right\} \dots \dots \dots (328) \end{aligned}$$

a za tangencijalni napon  $\tau_{\rho\varphi}(\rho, \varphi) = \tau_{he}$  izraz:

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\varphi}(\rho, \varphi) = \tau_{he} = & \frac{1}{gR} \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} A_{2k} \rho^{2k} \left\{ \frac{2k}{g} \left[ \sin 2k\varphi - \frac{m}{\rho^2} \sin 2(k-1)\varphi - \right. \right. \right. \\ & - \frac{m}{\rho^2} \sin 2(k-1)\varphi + \frac{m^3}{\rho^6} \sin 2(k+1)\varphi - \frac{m^2}{\rho^4} \sin 2(k+2)\varphi \left. \right] + \\ & + \frac{2m}{g^2 \rho^2} \left[ \frac{m}{\rho^2} \sin 2(k-2)\varphi - \left(1 + 3 \frac{m^2}{\rho^4}\right) \sin 2(k-1)\varphi + \right. \\ & + 3 \frac{m}{\rho^2} \left(1 + \frac{m^2}{\rho^4}\right) \sin 2k\varphi - \frac{m^2}{\rho^4} \left(3 + \frac{m^2}{\rho^4}\right) \sin 2(k+1)\varphi + \\ & \left. \left. + \frac{m^3}{\rho^6} \sin 2(k+2)\varphi \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{g^2 R^2} \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} B_{2k} \rho^{2k} \left\{ \left[ \left(1 + \frac{m^2}{\rho^4}\right) \sin 2(k+1)\varphi - \frac{m}{\rho^2} \sin 2k\varphi - \right. \right. \right. \\ & - \frac{m}{\rho^2} \sin 2(k+2)\varphi \left. \right] + \frac{2m}{\rho^2 g(2k+1)} \left[ \frac{m}{\rho^2} \sin 2(k-1)\varphi - \right. \\ & - \left(1 + 2 \frac{m^2}{\rho^4}\right) \sin 2k\varphi + \frac{m}{\rho^2} \left(2 + \frac{m^2}{\rho^4}\right) \sin 2(k+1)\varphi - \\ & \left. \left. - \frac{m^2}{\rho^4} \sin 2(k+2)\varphi \right] \right\} \dots \dots \dots (329) \end{aligned}$$

Unošenjem u izraz (323) relacije (328) za normalni napon  $\sigma_{\rho}(\rho, \varphi)$ , dobija se izraz za normalni napon  $\sigma_{\varphi}(\rho, \varphi)$  u obliku:

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi}(\rho, \varphi) = \sigma_e = & \frac{1}{gR} \sum_{-\infty}^{\infty} A_{2k} \rho^{2k} \left\{ \frac{2k}{g} \left[ \cos 2k\varphi - \right. \right. \\ & - \frac{m}{\rho^2} \cos 2(k-1)\varphi + \frac{m^3}{\rho^6} \cos 2(k+1)\varphi - \frac{m^2}{\rho^4} \cos 2(k+2)\varphi \left. \right] - \\ & - \frac{2m}{g^2 \rho^2} \left[ \left(1 + 3 \frac{m^2}{\rho^4}\right) \cos 2(k-1)\varphi - \frac{m}{\rho^2} \cos 2(k-2)\varphi - \right. \\ & - 3 \frac{m}{\rho^2} \left(1 + \frac{m^2}{\rho^4}\right) \cos 2k\varphi + \frac{m^2}{\rho^4} \left(3 + \frac{m^2}{\rho^4}\right) \cos 2(k+1)\varphi - \\ & \left. - \frac{m^3}{\rho^6} \cos 2(k+2)\varphi \right] \left. \right\} - \frac{1}{g^2 R^2} \sum_{-\infty}^{\infty} B_{2k} \rho^{2k} \left\{ \left[ \frac{m}{\rho^2} \cos 2k\varphi + \right. \right. \\ & + \frac{m}{\rho^2} \cos 2(k+2)\varphi - \left(1 + \frac{m^2}{\rho^4}\right) \cos 2(k+1)\varphi \left. \right] + \\ & + \frac{2m}{\rho^2 g(2k+1)} \left[ \left(1 + 2 \frac{m^2}{\rho^4}\right) \cos 2k\varphi - \frac{m}{\rho^2} \cos 2(k-1)\varphi - \right. \\ & \left. - \frac{m}{\rho^2} \left(2 + \frac{m^2}{\rho^4}\right) \cos 2(k+1)\varphi + \frac{m^2}{\rho^4} \cos 2(k+2)\varphi \right] \left. \right\} \dots \dots \dots (330) \end{aligned}$$

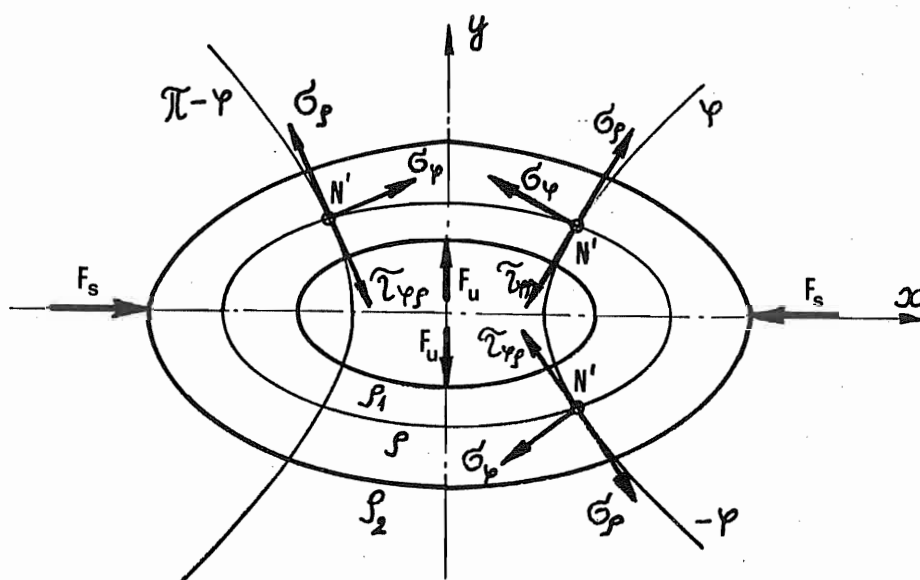
Pri tome je  $\sigma_{\rho}(\rho, \varphi) = \sigma_h$  normalni napon u tačkama ploče a za ravan sa jediničnom normalom  $\vec{h}_0$  u pravcu tangente na hiperboličnu koordinatnu liniju, kao što je prikazano na slici 1. u Prilogu V;  $\sigma_{\varphi}(\rho, \varphi) = \sigma_e$  normalni napon u tačkama ploče za ravan sa jediničnom normalom  $\vec{e}_0$  u pravcu tangente na eliptičnu koordinatnu liniju;  $\tau_{\rho\varphi}(\rho, \varphi) = \tau_{he}$  u tačkama ploče određenim koordinatama  $(\rho, \varphi)$  za ravan sa jediničnom normalom  $\vec{h}_0$  u pravcu tangente na hiperboličnu koordinatnu liniju i u pravcu orta  $\vec{e}_0$  koji je tangentan na eliptičnu koordinatnu liniju kao što je prikazano na slici 1. u Prilogu V.



### V.3.5. Uticaj simetrije kontura i opterećenja na koeficijente $A_n$ i $B_n$

Ukoliko posmatramo simetriju kontura i opterećenja kod eliptično prstenaste ploče u odnosu na ose  $x$  i  $y$  dolazi se do zaključka o takođe simetričnom rasporedu napona  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_\varphi$  i  $\tau_{\rho\varphi}$  u odnosu na iste ose  $x$  i  $y$ . Neka se tačke  $N(\rho, \varphi)$  i  $N'(\rho, -\varphi)$  nalaze na eliptično-prstenastoj ploči simetrično pod uglovima  $(\varphi)$  i  $(-\varphi)$  u odnosu na osu  $x$ , u tom slučaju će za simetrično opterećenje u odnosu na osu  $x$  i normalni naponi  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_\varphi$  biti jednaki u obe tačke kao što je prikazano na slici 177. Isti zaključak važi i za tangencijalni napon  $\tau_{\rho\varphi}$  ili  $\tau_{\varphi\rho}$ .

Stavimo u izraz (328) za normalni napon  $\sigma_\rho(\rho, \varphi)$  prvo koordinate  $\rho$  i  $\varphi$



Slika 177.

a zatim  $\rho$  i  $-\varphi$  i ta dva izraza izjednačimo:

$$\sigma_\rho(\rho, \varphi) = \sigma_\rho(\rho, -\varphi) \dots\dots\dots (331)$$

Vidi se s obzirom na relaciju:

$$\cos(-\varphi) = \cos(\varphi) \dots\dots\dots (332)$$

da je izraz (331) identički zadovoljen.

Posmatrajmo zatim simetriju  $\sigma_\rho(\rho, \varphi)$  u odnosu na  $y$ -osu stavljavući u izraz (328) prvo koordinate  $\rho$  i  $\varphi$ , a zatim  $\rho$  i  $\pi - \varphi$ . Izjednačimo zatim te izraze:

$$\sigma_\rho(\rho, \varphi) = \sigma_\rho(\rho, \pi - \varphi) \dots\dots\dots (333)$$

S obzirom na relacije:

$$\begin{aligned} \cos[n(\pi - \varphi)] &= (-1)^n \cos n\varphi \\ \cos[(n+2)(\pi - \varphi)] &= (-1)^n \cos (n+2)\varphi \\ \cos[(n-2)(\pi - \varphi)] &= (-1)^n \cos (n-2)\varphi \\ \cos[(n+4)(\pi - \varphi)] &= (-1)^n \cos (n+4)\varphi \\ \cos[(n-4)(\pi - \varphi)] &= (-1)^n \cos (n-4)\varphi \dots\dots\dots (334) \end{aligned}$$

gde se  $n$  može zameniti sa  $2k$ , iz izraza (333) sledi:

$$\sigma_{\rho}(\varphi) = (-1)^n \sigma_{\rho}(\varphi)$$

ili:

$$\sigma_{\rho}(\varphi) [1 - (-1)^n] = 0 \dots\dots\dots (335)$$

Jednačina (355) egzistira samo za parno  $n$  odnosno  $n=2k$ , a za  $n=2k+1$  sledi:

$$2\sigma_{\rho}(\varphi) = 0 \dots\dots\dots (336)$$

što je zadovoljeno samo kada je  $\sigma_{\rho}(\varphi) = 0$ , a u opštem slučaju nije zadovoljeno.

Oдавde sledi zaključak da su koeficijenti  $A_n$  i  $B_n$  neparnog indeksa  $n=2k+1$  jednaki nuli:

$$A_{2k+1} = 0, B_{2k+1} = 0 \dots\dots\dots (337)$$

Isti zaključak sledi i kada se analizira simetrija normalnog napona  $\sigma_{\varphi}(\rho, \varphi)$  u odnosu na ose  $x$  i  $y$ , odnosno u tačkama  $N(\rho, \varphi)$ ,  $N'(\rho, -\varphi)$  i  $N''(\rho, \pi - \varphi)$ . To se dobija primenom relacija (332) i (334) u izrazu (330) za koordinate tačaka  $N$ ,  $N'$  i  $N''$ .

Ukoliko posmatramo simetriju tangencijalnog napona  $\tau_{\varphi\rho}(\rho, \varphi)$  u odnosu na osu  $x$ , unošenjem koordinata  $\rho$  i  $\varphi$ , a zatim  $\rho$  i  $-\varphi$  u izraz (329) i njihovim izjednačavanjem, a s obzirom na relaciju:

$$\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi) \dots\dots\dots (338)$$

sledi:

$$-\tau_{\varphi\rho}(\rho, \varphi) = \tau_{\varphi\rho}(\rho, -\varphi) \dots\dots\dots (339)$$

Ovo znači da je tangencijalni napon suprotnog znaka za  $\varphi$  i  $-\varphi$ .

U slučaju simetrije tangencijalnog napona u odnosu na osu  $y$  potvrđuju se zaključci dati izrazima (337) i (339).

### V.3.6. Komponente vektora pomeranja u eliptično-hiperboličnom koordinatnom sistemu za primer eliptično-prstenaste ploče

Iz izraza (93) za komponente vektora pomeranja koji određuje vezu između komponentnih pomeranja i analitičkih funkcija kompleksne promenljive uz korišćenje relacija (268) (292) (293) sledi:

$$u_{\rho} + i u_{\varphi} = \frac{1}{E} \left\{ (3-\mu) \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{A_{2k} \zeta^{2k+1}}{2k+1} - (1+\mu) \left[ \frac{\zeta + \frac{m}{\zeta}}{1 - \frac{m}{\zeta^2}} \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{A}_{2k} \bar{\zeta}^{2k} + \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k+1} \zeta^{2k+1}}{R \left( 1 - \frac{m}{\zeta^2} \right)} \right] \right\} \frac{\zeta}{\rho} \frac{\left( 1 - \frac{m}{\zeta^2} \right)}{\left| 1 - \frac{m}{\zeta^2} \right|} \dots\dots (340)$$

Razdvojimo desnu stranu izraza (340) na članove  $b_1$ ,  $b_2$  i  $b_3$  gde su ovi članovi dati izrazima:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{A_{2k} \zeta^{2k+1}}{2k+1} \frac{\bar{\zeta}}{\rho} \frac{\left(1 - \frac{m}{\bar{\zeta}^2}\right)}{\left|1 - \frac{m}{\zeta^2}\right|} \\
 b_2 &= \frac{\zeta + \frac{m}{\zeta}}{1 - \frac{m}{\bar{\zeta}^2}} \frac{\bar{\zeta}}{\rho} \frac{\left(1 - \frac{m}{\bar{\zeta}^2}\right)}{\sqrt{g}} \sum_{-\infty}^{\infty} A_{2k} \bar{\zeta}^2 \\
 b_3 &= \frac{\bar{\zeta}}{\rho} \frac{\left(1 - \frac{m}{\bar{\zeta}^2}\right)}{\left|1 - \frac{m}{\zeta^2}\right|} \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k+1} \zeta^{2k+1}}{R\left(1 - \frac{m}{\bar{\zeta}^2}\right)} \dots\dots\dots (341)
 \end{aligned}$$

Izraz (340) korišćenjem smene date relacijama (341) možemo napisati u obliku:

$$u_{\rho} + i u_{\varphi} = \frac{1}{E} \left\{ (3-\mu) b_1 - (1+\mu) [b_2 + b_3] \right\} \dots\dots\dots (342)$$

U daljem radu članove  $b_1$ ,  $b_2$  i  $b_3$  razvijamo uvođenjem eksponencijalnog oblika kompleksnog broja  $\zeta$  i korišćenjem relacija (295) i izraza:

$$\left|1 - \frac{m}{\zeta^2}\right| = \sqrt{g} \dots\dots\dots (343)$$

Članovi  $b_1$ ,  $b_2$  i  $b_3$  u razvijenom obliku su dati izrazima:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{A_{2k} \rho^{2k+1}}{(2k+1)\sqrt{g}} \left( e^{i2k\varphi} - \frac{m}{\rho^2} e^{i2(k+1)\varphi} \right) \\
 b_2 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{-\infty}^{\infty} A_{2k} \rho^{2k+1} \left( e^{-i2k\varphi} + \frac{m}{\rho^2} e^{-i2(k+2)\varphi} \right) \\
 b_3 &= \frac{1}{Rg\sqrt{g}} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{B_{2k} \rho^{2k+1}}{2k+1} \left[ e^{-i2(k+1)\varphi} \left(1 + \frac{m^2}{\rho^4}\right) - \frac{m}{\rho^2} e^{-i2k\varphi} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{m}{\rho^2} e^{-i2(k+2)\varphi} \right] \dots\dots\dots (344)
 \end{aligned}$$

Unošenjem izraza (344) u relaciju (342) dobijamo:

$$\begin{aligned}
 u_{\rho} + i u_{\varphi} = u_h + i u_v = \frac{1}{\sqrt{g} E} \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho^{2k+1}}{2k+1} \left[ A_{2k} \left\{ (3-\mu) \left( e^{i2k\varphi} - \right. \right. \right. \right. \\
 - \frac{m}{\rho^2} e^{i2(k+1)\varphi} \right) - (1+\mu) (2k+1) \left( e^{-i2k\varphi} + \frac{m}{\rho^2} e^{-i2(k+1)\varphi} \right) \right\} - \\
 - \frac{1+\mu}{Rg} B_{2k} \left[ \left(1 + \frac{m^2}{\rho^4}\right) e^{-i2(k+1)\varphi} - \frac{m}{\rho^2} e^{-i2k\varphi} - \right. \\
 \left. \left. - \frac{m}{\rho^2} e^{-i2(k+2)\varphi} \right] \right] \right\} \dots\dots\dots (345)
 \end{aligned}$$

Uvođenjem trigonometrijskog oblika kompleksnog broja  $\zeta = \rho e^{i\varphi} = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  i razdvajanjem realnog i imaginarnog dela na desnoj strani izraza (345), s obzirom na činjenicu da komponenti vektora pomeranja  $u_\rho(\rho, \varphi)$  odgovara realni, a komponenti  $u_\varphi(\rho, \varphi)$  odgovara imaginarni deo izraza, dobija se:

$$u_\rho(\rho, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{g}} E \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho^{2k+1}}{2k+1} \left[ A_{2k} \left\{ (3-\mu) \left( \cos 2k\varphi - \frac{m}{\rho^2} \cos 2(k+1)\varphi \right) - (1+\mu)(2k+1) \left( \cos 2k\varphi + \frac{m}{\rho^2} \cos 2(k+1)\varphi \right) \right\} - \frac{1+\mu}{Rg} B_{2k} \left[ \left( 1 + \frac{m^2}{\rho^4} \right) \cos 2(k+1)\varphi - \frac{m}{\rho^2} \cos 2k\varphi - \frac{m}{\rho^2} \cos 2(k+2)\varphi \right] \right] \right\} \dots\dots\dots (346)$$

$$u_\varphi(\rho, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{g}} E \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho^{2k+1}}{2k+1} \left[ A_{2k} \left\{ (3-\mu) \left( \sin 2k\varphi - \frac{m}{\rho^2} \sin 2(k+1)\varphi \right) + (1+\mu)(2k+1) \left( \sin 2k\varphi + \frac{m}{\rho^2} \sin 2(k+1)\varphi \right) \right\} + \frac{1+\mu}{Rg} B_{2k} \left[ \left( 1 + \frac{m^2}{\rho^4} \right) \sin 2(k+1)\varphi - \frac{m}{\rho^2} \sin 2k\varphi - \frac{m}{\rho^2} \sin 2(k+2)\varphi \right] \right] \right\} \dots\dots\dots (347)$$

Pri tome je  $u_\rho(\rho, \varphi) = u_h(\rho, \varphi)$  pomeranje u pravcu  $\vec{h}_0$  tangentno na hiperboličnu koordinatnu liniju u datoj tački, a  $u_\varphi(\rho, \varphi) = u_e(\rho, \varphi)$  je pomeranje u pravcu  $\vec{e}_0$  tangentno na eliptičnu koordinatnu liniju u datoj tački.

### V.3.7. Komponente tenzora deformacije u eliptično hiperboličnom koordinatnom sistemu za primer eliptično prstenaste ploče

Komponentne tenzora deformacije u slučaju ravnog stanja napona mogu se izraziti preko relacija zasnovanih na Hooke-ovom zakonu u linearnoj teoriji elastičnosti:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\rho(\rho, \varphi) &= \frac{1}{E} (\sigma_\rho - \mu \sigma_\varphi) = \frac{1}{E} [\sigma_\rho(1+\mu) - \mu(\sigma_\rho + \sigma_\varphi)] \\ \varepsilon_\varphi(\rho, \varphi) &= \frac{1}{E} (\sigma_\varphi - \mu \sigma_\rho) = \frac{1}{E} [\sigma_\varphi(1+\mu) - \mu(\sigma_\rho + \sigma_\varphi)] \\ \gamma_{\rho\varphi}(\rho, \varphi) &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{\rho\varphi} \dots\dots\dots (348) \end{aligned}$$

U relacije (348) unesemo izraze (322) (328) (329) (330) za komponente tenzora napona  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_\varphi$  i  $\tau_{\rho\varphi}$  u eliptično-hiperboličnom koordinatnom sistemu, pa dobijamo izraze za:

- 1) dilataciju  $\varepsilon_\rho(\rho, \varphi) = \varepsilon_h$  linijskog elementa koji leži u tački  $N(\rho, \varphi)$  ploče u pravcu jediničnog vektora  $\vec{h}_0$ , a koji je tangentan na hiperboličnu koordinatnu liniju;
- 2) dilataciju  $\varepsilon_\varphi(\rho, \varphi) = \varepsilon_e$  linijskog elementa koji leži u tački  $N(\rho, \varphi)$  ploče, a u pravcu jediničnog vektora  $\vec{e}_0$  koji je tangentan na eliptičnu koordinatnu liniju;

3) klizanje  $\gamma_{\rho\varphi}(\rho, \varphi) = \gamma_{he}$ , a što predstavlja promenu ugla između linijskih elemenata u tački  $N(\rho, \varphi)$ , koji leži u pravcu jediničnih vektora  $\vec{h}_0$  i  $\vec{e}_0$ , koji su tangenti na hiperboličnu i eliptičnu koordinatnu liniju.

Ove komponente tenzora deformacije date su izrazima:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\rho}(\rho, \varphi) = \varepsilon_h(\rho, \varphi) = & \frac{1}{ERg} \sum_{-\infty}^{\infty} A_{2k} \rho^{2k} \left\{ (1-\mu) \left[ \cos 2k\varphi - \right. \right. \\ & - \frac{m}{\rho^2} \cos 2(k+1)\varphi \left. \right] + (1+\mu) \left[ -\frac{2k}{g} \left[ \cos 2k\varphi - \right. \right. \\ & - \frac{m}{\rho^2} \cos 2(k-1)\varphi + \frac{m^3}{\rho^6} \cos 2(k+1)\varphi - \frac{m^2}{\rho^4} \cos 2(k+2)\varphi \left. \right] + \\ & + \frac{2m}{g^2 \rho^2} \left[ \left( 1+3\frac{m^2}{\rho^4} \right) \cos 2(k-1)\varphi - \frac{m}{\rho^2} \cos 2(k-2)\varphi - \right. \\ & - 3\frac{m}{\rho^2} \left( 1+\frac{m^2}{\rho^4} \right) \cos 2k\varphi + \frac{m^2}{\rho^4} \left( 3+\frac{m^2}{\rho^4} \right) \cos 2(k+1)\varphi - \\ & \left. \left. - \frac{m^3}{\rho^6} \cos 2(k+2)\varphi \right] \right\} + \frac{1+\mu}{Eg^2 R^2} \sum_{-\infty}^{\infty} B_{2k} \rho^{2k} \left\{ \left[ \frac{m}{\rho^2} \cos 2k\varphi + \right. \right. \\ & + \frac{m}{\rho^2} \cos 2(k+2)\varphi - \left( 1+\frac{m^2}{\rho^4} \right) \cos 2(k+1)\varphi \left. \right] + \\ & + \frac{2m}{\rho^2 g(2k+1)} \left[ \left( 1+2\frac{m^2}{\rho^4} \right) \cos 2k\varphi - \frac{m}{\rho^2} \cos 2(k-1)\varphi - \right. \\ & \left. \left. - \frac{m}{\rho^2} \left( 2+\frac{m^2}{\rho^4} \right) \cos 2(k+1)\varphi + \frac{m^2}{\rho^4} \cos 2(k+2)\varphi \right] \right\} \dots \dots \dots (349) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi}(\rho, \varphi) = \varepsilon_e = & \frac{1}{EgR} \sum_{-\infty}^{\infty} A_{2k} \rho^{2k} \left\{ -2\mu \left[ \cos 2k\varphi - \right. \right. \\ & - \frac{m}{\rho^2} \cos 2(k+1)\varphi \left. \right] + (1+\mu) \left[ \frac{2k}{g} \left[ \cos 2k\varphi - \right. \right. \\ & - \frac{m}{\rho^2} \cos 2(k-1)\varphi + \frac{m^3}{\rho^6} \cos 2(k+1)\varphi - \frac{m^2}{\rho^4} \cos 2(k+2)\varphi \left. \right] - \\ & - \frac{2m}{g^2 \rho^2} \left[ \left( 1+3\frac{m^2}{\rho^4} \right) \cos 2(k-1)\varphi - \frac{m}{\rho^2} \cos 2(k-2)\varphi - \right. \\ & - 3\frac{m}{\rho^2} \left( 1+\frac{m^2}{\rho^4} \right) \cos 2k\varphi + \frac{m^2}{\rho^4} \left( 3+\frac{m^2}{\rho^4} \right) \cos 2(k+1)\varphi - \\ & \left. \left. - \frac{m^3}{\rho^6} \cos 2(k+2)\varphi \right] \right\} - \frac{1+\mu}{Eg^2 R^2} \sum_{-\infty}^{\infty} B_{2k} \rho^{2k} \left\{ \left[ \frac{m}{\rho^2} \cos 2k\varphi + \right. \right. \\ & + \frac{m}{\rho^2} \cos 2(k+2)\varphi - \left( 1+\frac{m^2}{\rho^4} \right) \cos 2(k+1)\varphi \left. \right] + \\ & + \frac{2m}{\rho^2 g(2k+1)} \left[ \left( 1+2\frac{m^2}{\rho^4} \right) \cos 2k\varphi - \frac{m}{\rho^2} \cos 2(k-1)\varphi - \right. \\ & \left. \left. - \frac{m}{\rho^2} \left( 2+\frac{m^2}{\rho^4} \right) \cos 2(k+1)\varphi + \frac{m^2}{\rho^4} \cos 2(k+2)\varphi \right] \right\} \dots \dots \dots (350) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{\rho\varphi}(\rho, \varphi) = \gamma_{he}(\rho, \varphi) = & \frac{2(1+\mu)}{EgR} \sum_{-\infty}^{\infty} A_{2k} \rho^{2k} \left\{ \frac{2k}{g} \left[ \sin 2k\varphi - \right. \right. \\
& - \frac{m}{\rho^2} \sin 2(k-1)\varphi + \frac{m^3}{\rho^6} \sin 2(k+1)\varphi - \frac{m^2}{\rho^4} \sin 2(k+2)\varphi \left. \right] + \\
& + \frac{2m}{g^2 \rho^2} \left[ \frac{m}{\rho^2} \sin 2(k-2)\varphi - \left(1 + 3 \frac{m^2}{\rho^4}\right) \sin 2(k-1)\varphi + \right. \\
& + 3 \frac{m}{\rho^2} \left(1 + \frac{m^2}{\rho^4}\right) \sin 2k\varphi - \frac{m^2}{\rho^4} \left(3 + \frac{m^2}{\rho^4}\right) \sin 2(k+1)\varphi + \\
& \left. \left. + \frac{m^3}{\rho^6} \sin 2(k+2)\varphi \right] \right\} + \\
& + \frac{2(1+\mu)}{Eg^2 R^2} \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} B_{2k} \rho^{2k} \left\{ \left[ \left(1 + \frac{m^2}{\rho^4}\right) \sin 2(k+1)\varphi - \frac{m}{\rho^2} \sin 2k\varphi - \right. \right. \right. \\
& - \frac{m}{\rho^2} \sin 2(k+2)\varphi \left. \right] + \frac{2m}{\rho^2 g(2k+1)} \left[ \frac{m}{\rho^2} \sin 2(k-1)\varphi - \right. \\
& - \left(1 + 2 \frac{m^2}{\rho^4}\right) \sin 2k\varphi + \frac{m}{\rho^2} \left(2 + \frac{m^2}{\rho^4}\right) \sin 2(k+1)\varphi - \\
& \left. \left. - \frac{m^2}{\rho^4} \sin 2(k+2)\varphi \right] \right\} \dots\dots\dots (351)
\end{aligned}$$

### V3.8. Stanje napona i stanje deformacija ravno napregnute eliptično-prstenaste ploče određeno primenom funkcije kompleksne promenljive i konformnog preslikavanja za različite slučajeve opterećenja

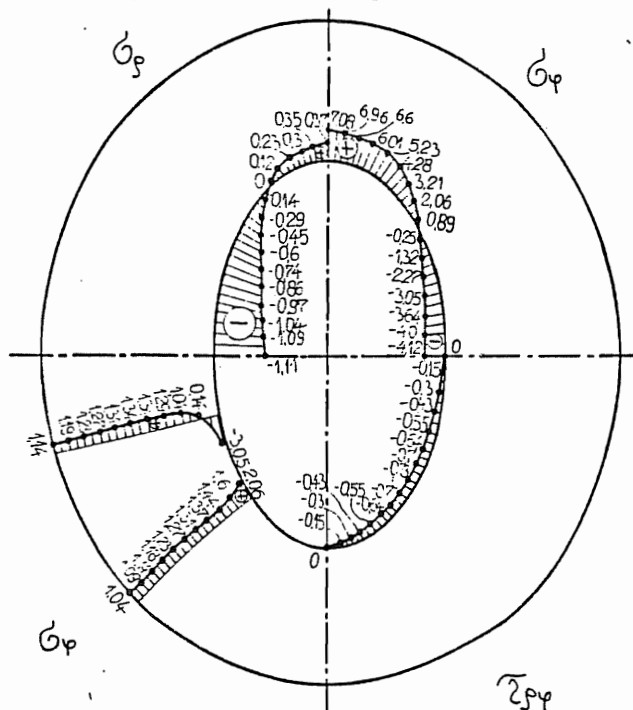
Korišćenjem analitičkih izraza koje smo predhodno izveli u poglavlju V3. sastavljen je program NAISS za računar Honeywell H-6 koji omogućava numeričku analizu. Programom se pomoću graničnih uslova određuju koeficijenti  $C_{2k}^{(1)}$  i  $C_{2k}^{(2)}$  njihovog razvoja u Laurent-ov red. U cilju kontrole tačnosti ovakvog prikazivanja graničnih uslova načinjen je program ZVEZDA, koji u izlaznoj datoteci ORION daje kao rezultat veličine komponentnih napona u eliptično hiperboličkom koordinatnom sistemu u tačkama na konturi ploče. Poklapanje ili odstupanje vrednosti napona od zadatih veličina pokazuje i ukazuje na tačnost aproksimacije postignute ovakvim prikazivanjem graničnih uslova, kao i tačnost postignutu određenim brojem članova reda koji su uzeti u obzir. Izvršena numerička analiza korišćenjem ovog programa pokazala je da porast tačnosti ne sledi direktno iz porasta broja članova reda, jer su redovi u osnovi divergentni. Postoji optimalan broj članova koji se menja i sa vrstom opterećenja, tj. zavisi da li se radi o koncentrisanoj sili ili kontinualnom opterećenju. U tom smislu bilo je potrebno načiniti podprogram, koji bi određivao broj članova reda u aproksimaciji sa stanovišta najveće tačnosti.

Program ZVEZDA i primer datoteke ORION za slučaj opterećenja ELIUSK 3060 dati su u Prilogu VI na strani 208.

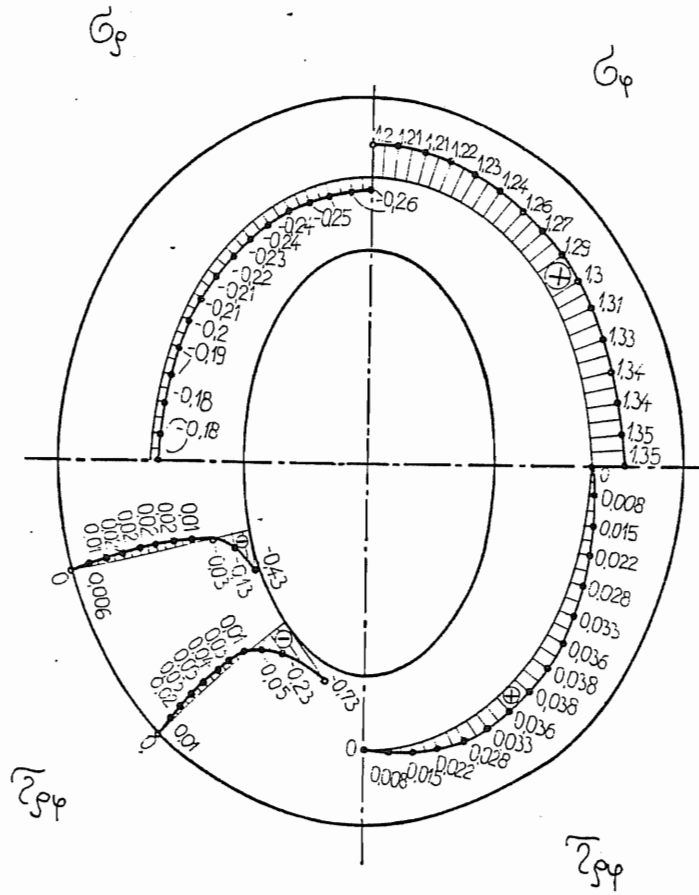
Korišćenjem koeficijenata  $C_{2k}^{(1)}$  i  $C_{2k}^{(2)}$  i izvedenih relacija (306), (307), (316) odnosno (314), (318) i (319) dobijaju se koeficijenti  $A_n$  i  $B_n$  razvoja u red analitičkih funkcija kompleksne promenljive  $F_1(\zeta)$  i  $X_1(\zeta)$ . U programu je ugrađen deo koji vrši kontrolu tako određenih koeficijenata  $A_n$  i  $B_n$ , s obzirom na zadate granične uslove i dobijene podatke smešta u datoteku KONTROL. Korišćenjem koeficijenata  $A_n$  i  $B_n$ , sada možemo u nastavku programa odrediti komponentne napone u eliptično hiperboličnom koordinatnom sistemu date relacijama (328), (329) i (330), zatim komponente vektora pomeranja date relacijama (346) i (347) u eliptično hiperboličnom koordinatnom sistemu ili Descartes-ovom koordinatnom sistemu korišćenjem relacija dobijenih iz izraza (80). Komponentne dilatacije i klizanje u eliptičko-hiperboličnom koordinatnom sistemu mogu se dobiti korišćenjem relacija (349), (350) i (351) ili radi jednostavnosti direktno na osnovu dobijenih napna korišćenjem izraza (348).

Tako su korišćenjem predhodno izvedenih relacija po metodi funkcije kompleksne promenljive i konformnim preslikavanjem dobijeni naponi, pomeranja i dilatacije za eliptično-prstenastu ploču opterećenu različitim slučajevima opterećenja, koji su ranije definisani oznakama ELIU, ELIS, ELIUS, ELIUK 60, ELISK 30 i ELIUSK 3060 kao što je dato u Poglavlju V 1.

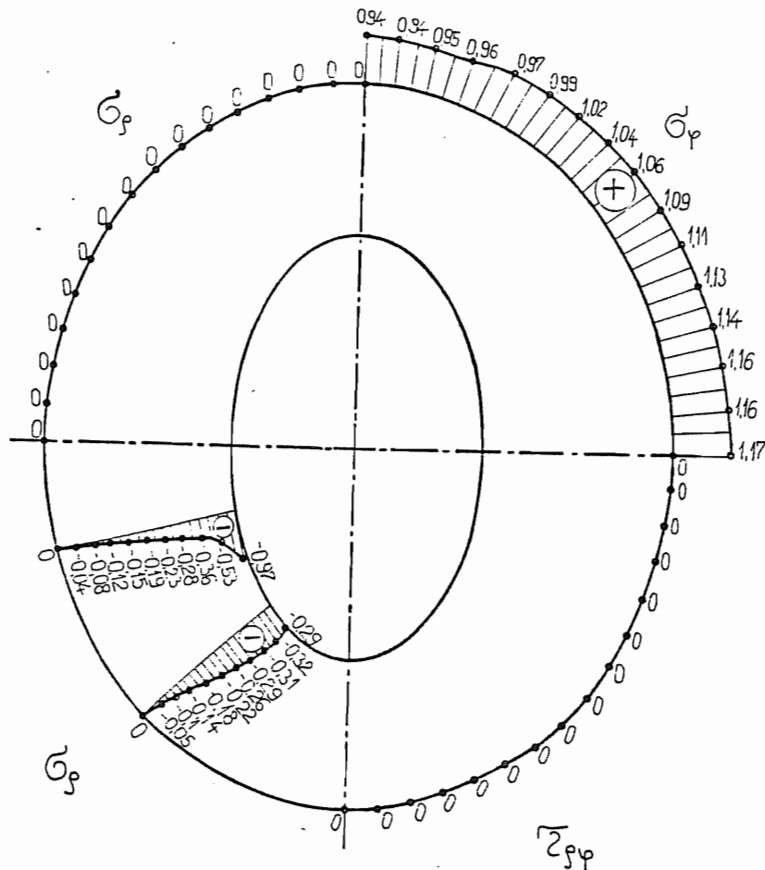
Za opterećenje ELIU kada koncentrisane sile  $F_u = 34.8255 \text{ N}$  dejstvuju u pravcu kraćih poluosa upravno na unutrašnju konturu dobijeni su dijagrami komponentnih normalnih napona  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_\varphi$  i smičućeg napona  $\tau_{\rho\varphi}$  u tačkama na unutrašnjoj konturi i napona  $\sigma_\varphi$  u tačkama preseka, kao što je prikazano na slici 178. Na slikama 179. i 180. komponentni naponi prikazani su u tačkama središnje elipse i spoljašnje konture kao i u presecima, a za isti slučaj opterećenja. Komponentne dilatacije  $\varepsilon_\rho$  i  $\varepsilon_\varphi$  u eliptično hiperboličnom koordinatnom sistemu, kao i komponentna pomeranja  $u$  i  $v$  u pravcu koordinatnih osa u tačkama unutrašnje konture, središnje elipse i spoljašnje konture prikazani su na slikama 181. 182. i 183.



Slika 178.

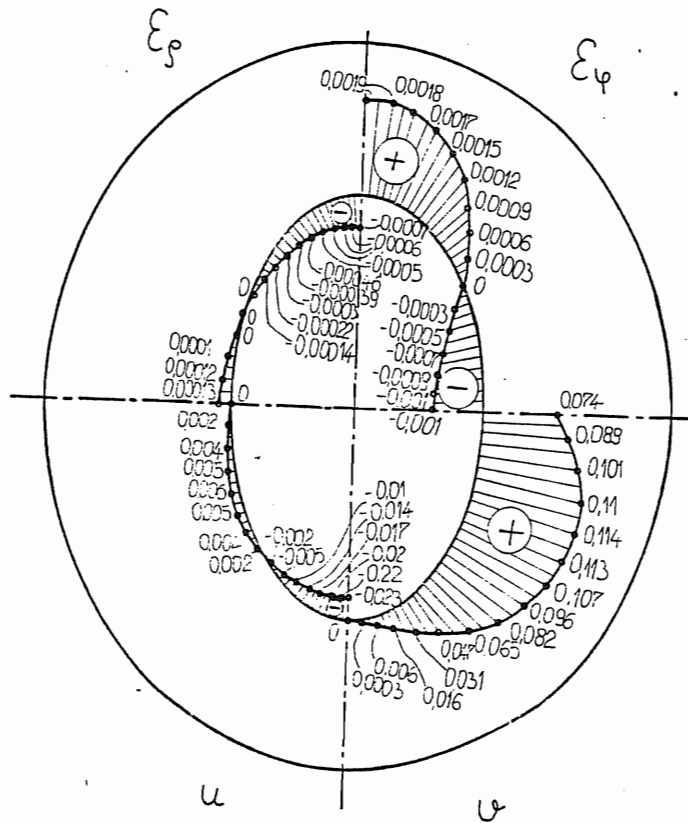


Slika 179.

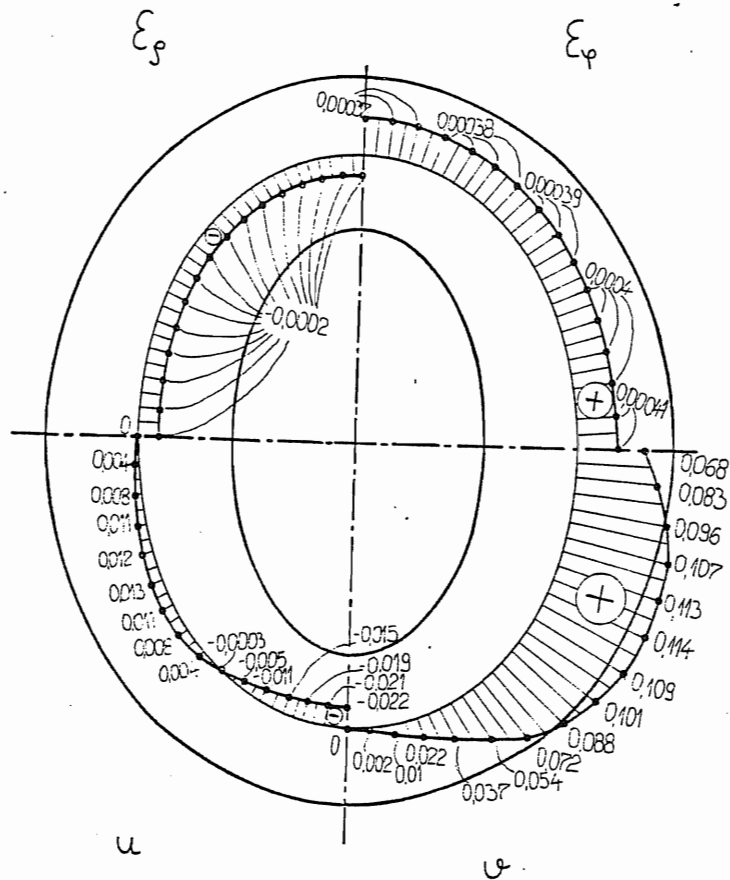


Slika 180.

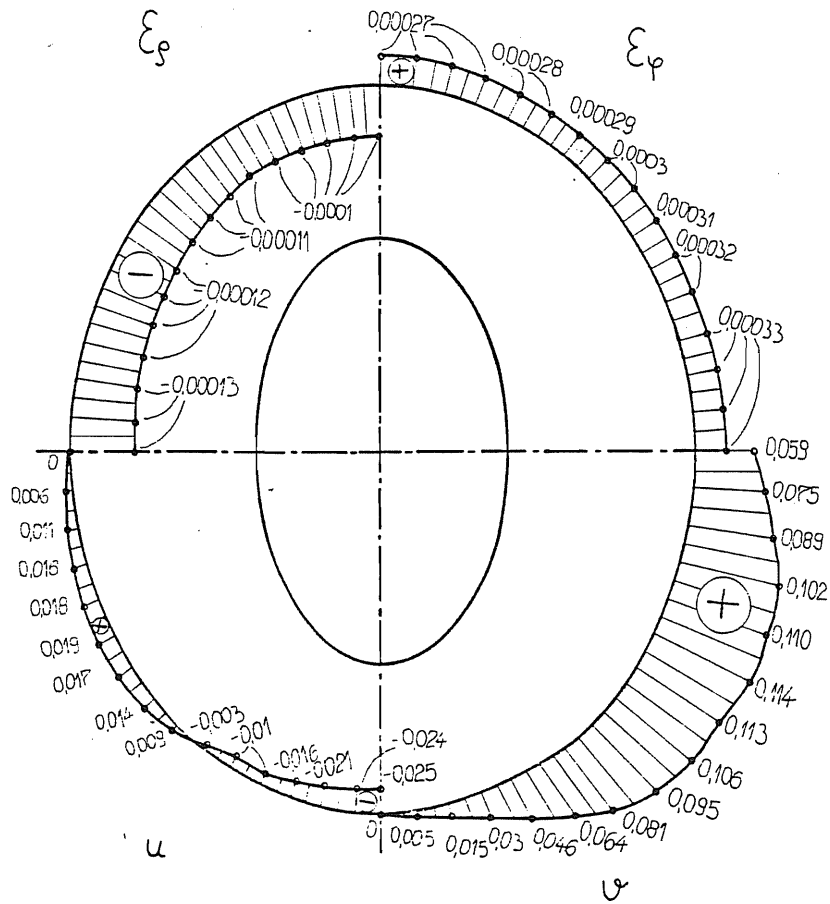




Slika 181.

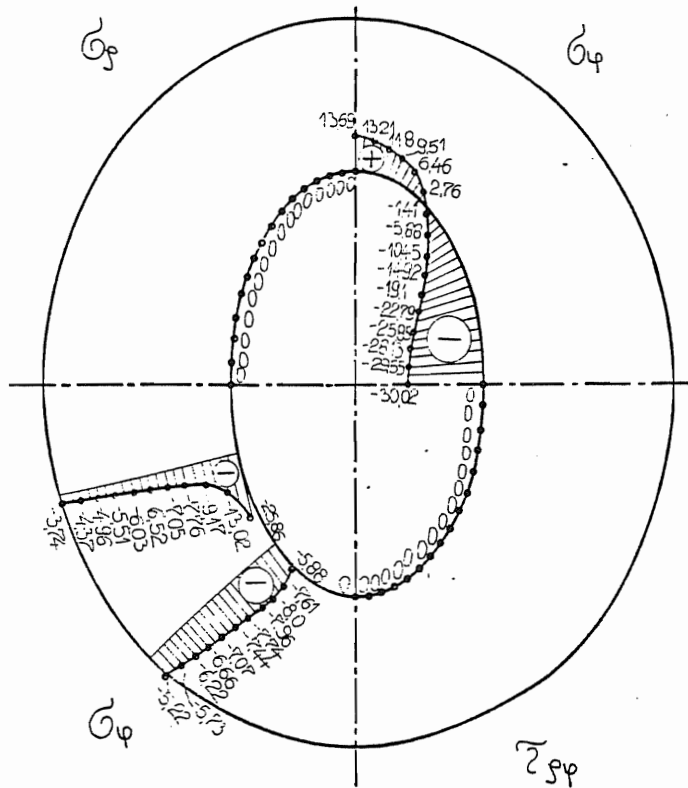


Slika 182.

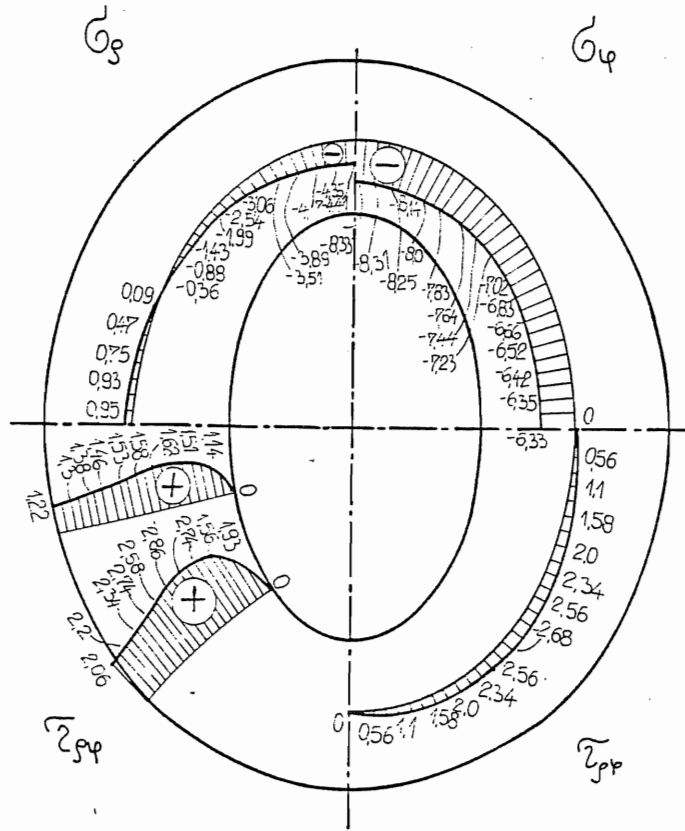


Slika 183.

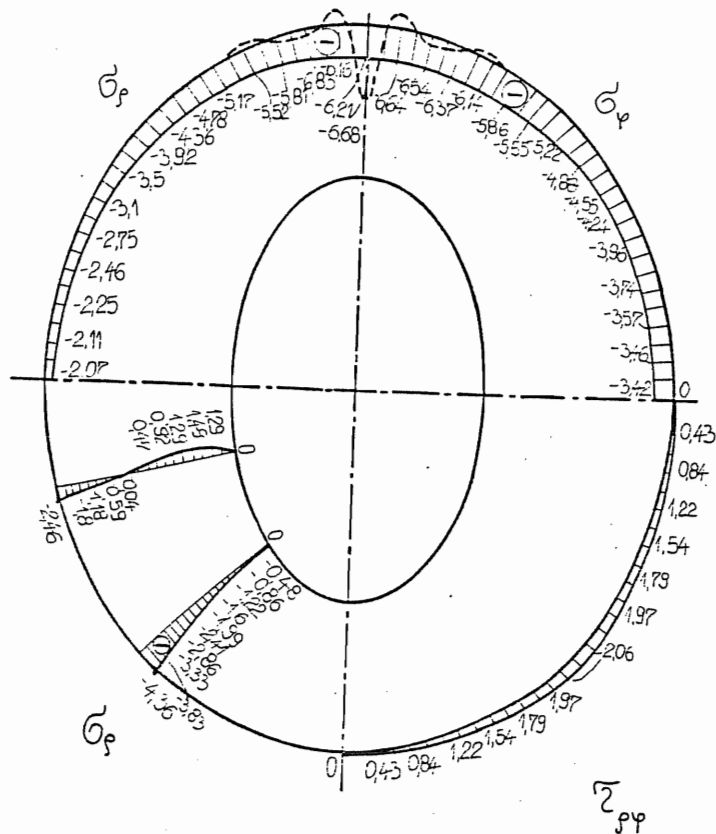
Za slučaj opterećenja ELIS kada koncentrisane sile  $F_s = 93.15512 \text{ N}$  dejstvuju na spoljašnjoj konturi u pravcu dužih poluosa, dijagrami normalnih napona  $\sigma_\rho$  i  $\sigma_\varphi$  i smičućeg napona  $\tau_{\rho\varphi}$  u tačkama na unutrašnjoj konturi, središnjoj elipsi i spoljašnjoj konturi prikazani su na slikama 184., 185. i 186. Na slici 186. isprekidanom linijom prikazan je dijagram normalnog napona  $\sigma_\rho$  dobijen programom ZVEZDA. Na slici 187. prikazani su dijagrami komponentnih dilatacija  $\varepsilon_\rho$  i  $\varepsilon_\varphi$  u eliptičko-hiperboličnim koordinatama i komponentna pomeranja  $u$  i  $v$  u pravcu osa  $x$  i  $y$ , za tačke na unutrašnjoj konturi, naslici 188. za tačke na središnjoj elipsi, a na slici 189. dilatacije i pomeranja za tačke na spoljašnjoj konturi.



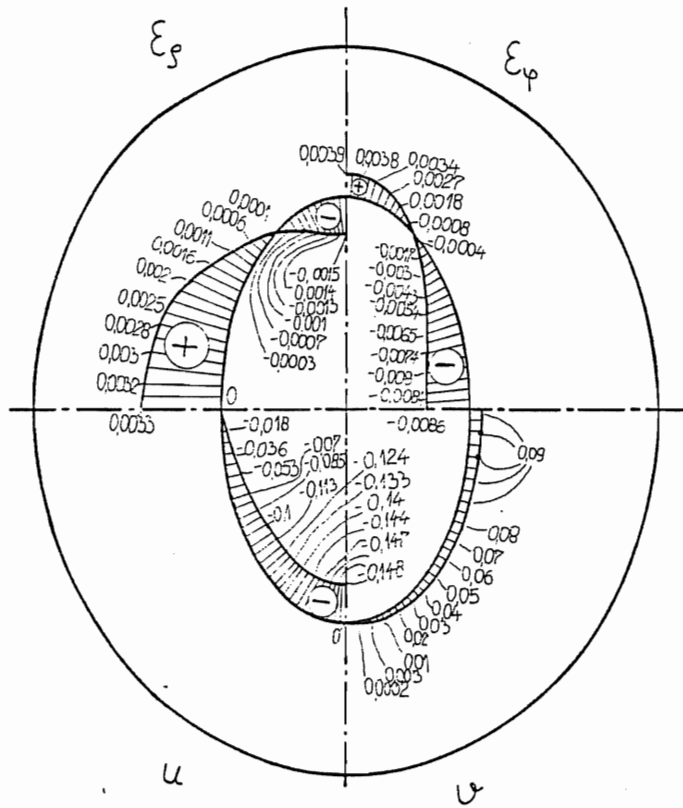
Slika 184.



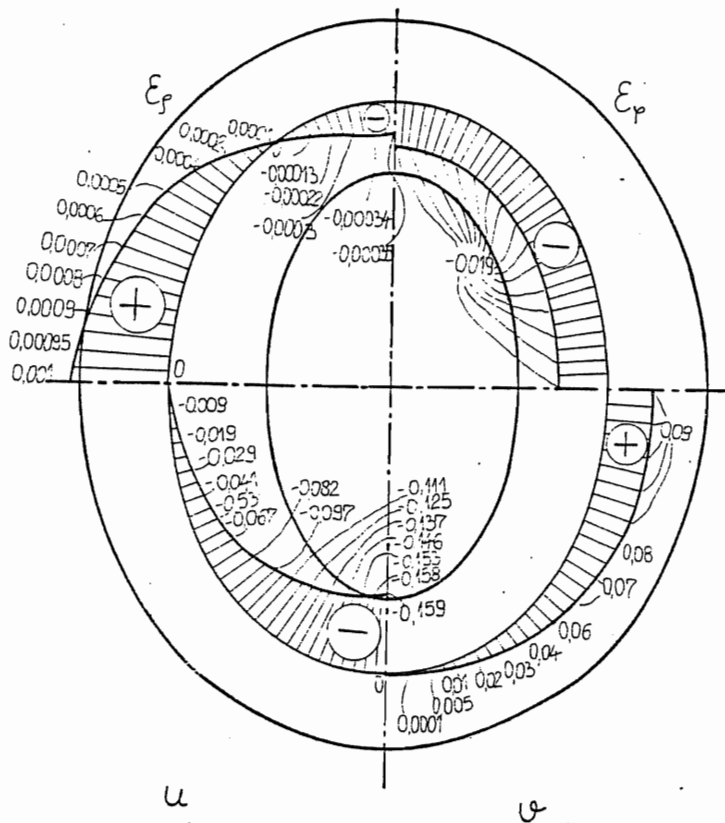
Slika 185.



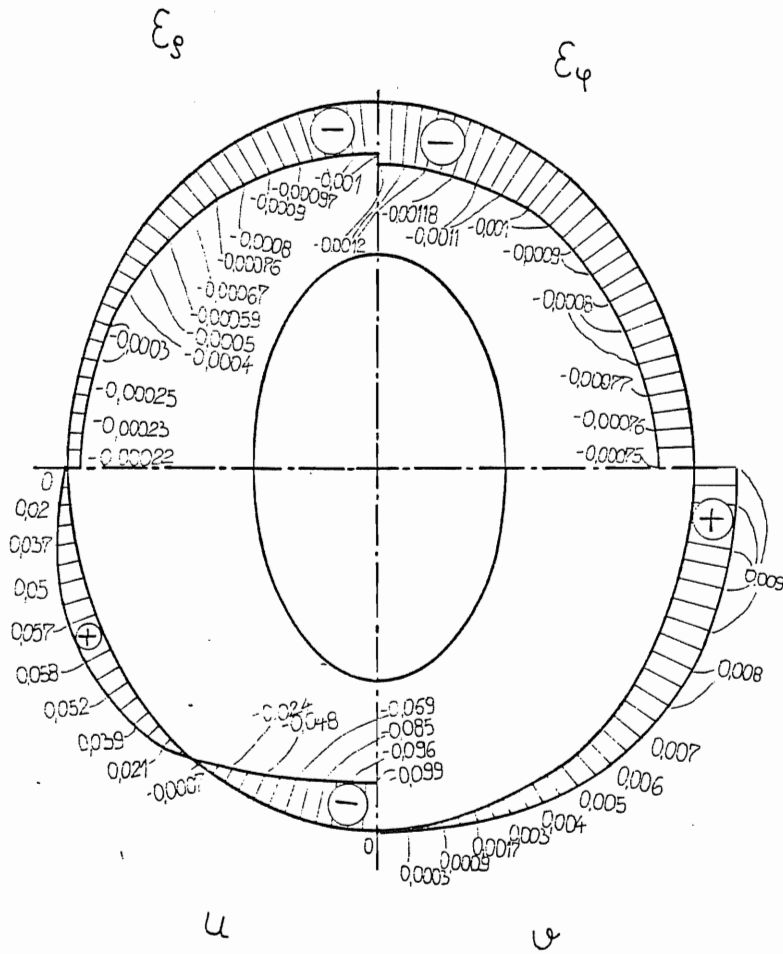
Slika 186.



Slika 187.

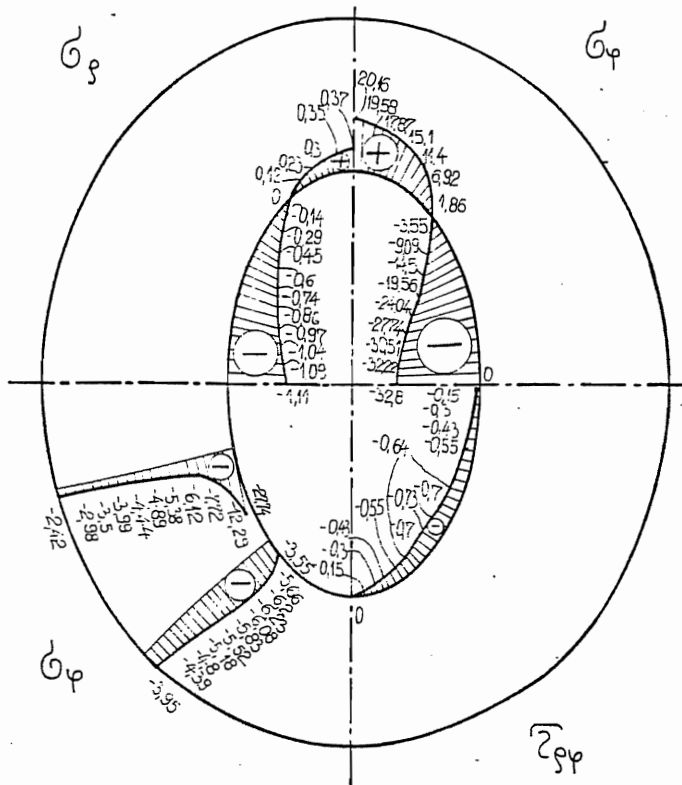


Slika 188.

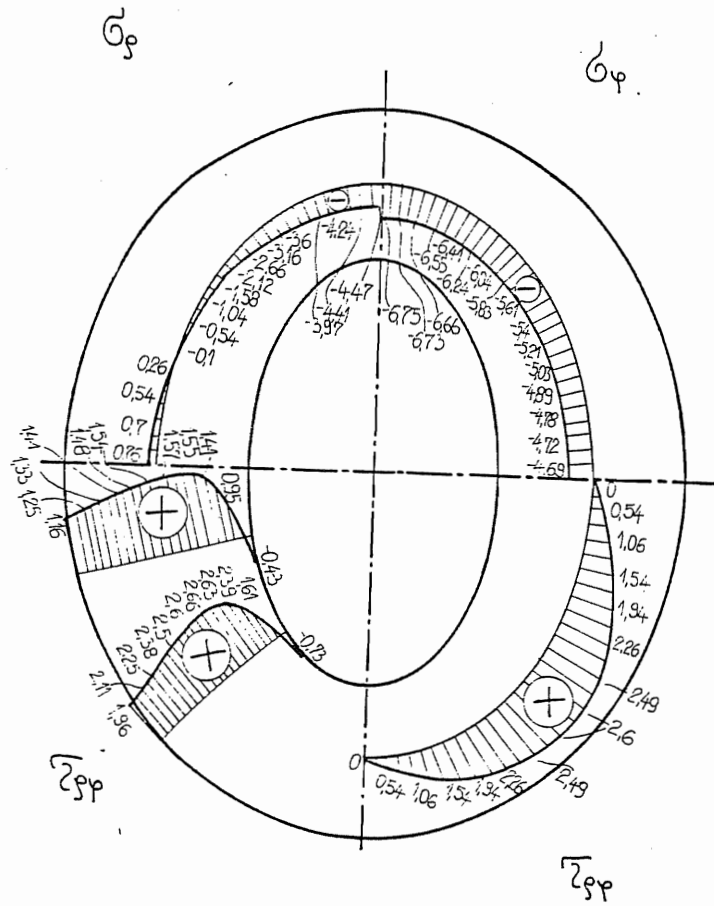


Slika 189.

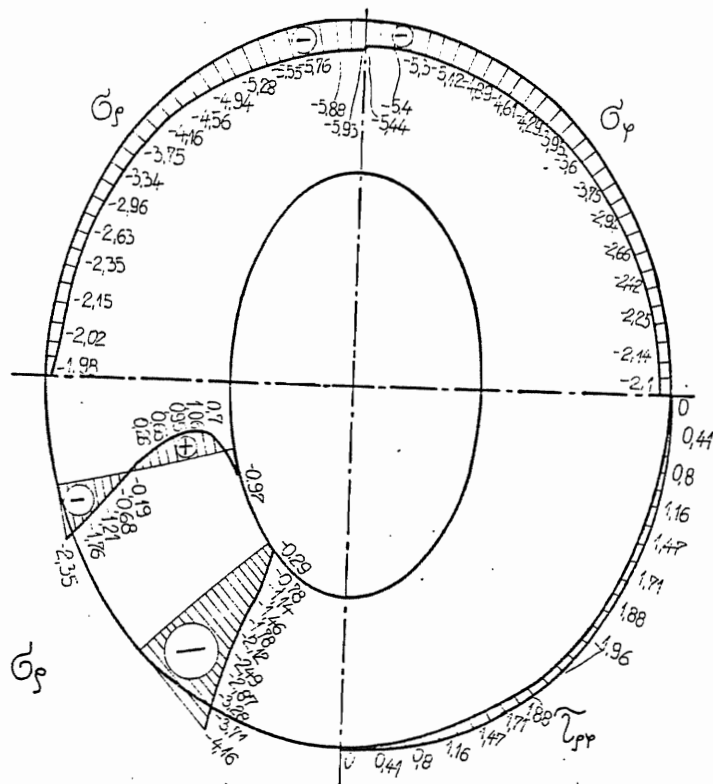
Za slučaj opterećenja označen kao ELIUS na slici 190. prikazani su normalni naponi  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_\varphi$  i smičući napon  $\tau_{\rho\varphi}$  u tačkama unutrašnje konture, kao i napon  $\sigma_\varphi$  u tačkama preseka određenih hiperbolama  $\varphi=42^\circ$  i  $\varphi=72^\circ$ . Na slici 191. prikazani su naponi  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_\varphi$  i  $\tau_{\rho\varphi}$  u tačkama središnje elipse, kao i smičući napon  $\tau_{\rho\varphi}$  u presecima. Na slici 192. prikazani su naponi  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_\varphi$  i  $\tau_{\rho\varphi}$  u tačkama spoljašnje elipse, kao i normalni napon  $\sigma_\rho$  u presecima. Dijagrami komponentnih dilatacija  $\varepsilon_\rho$  i  $\varepsilon_\varphi$  i komponentnih pomeranja u i v za tačke unutrašnje konture prikazani su na slici 193., a dijagrami komponentnih dilatacija  $\varepsilon_\rho$  i  $\varepsilon_\varphi$  i komponentnih pomeranja u i v za tačke središnje elipse prikazani su na slici 194. Dijagrami komponentnih dilatacija  $\varepsilon_\rho$  i  $\varepsilon_\varphi$ , kao i komponentnih pomeranja u i v za tačke spoljašnje konture prikazani su na slici 195.



Slika 190.



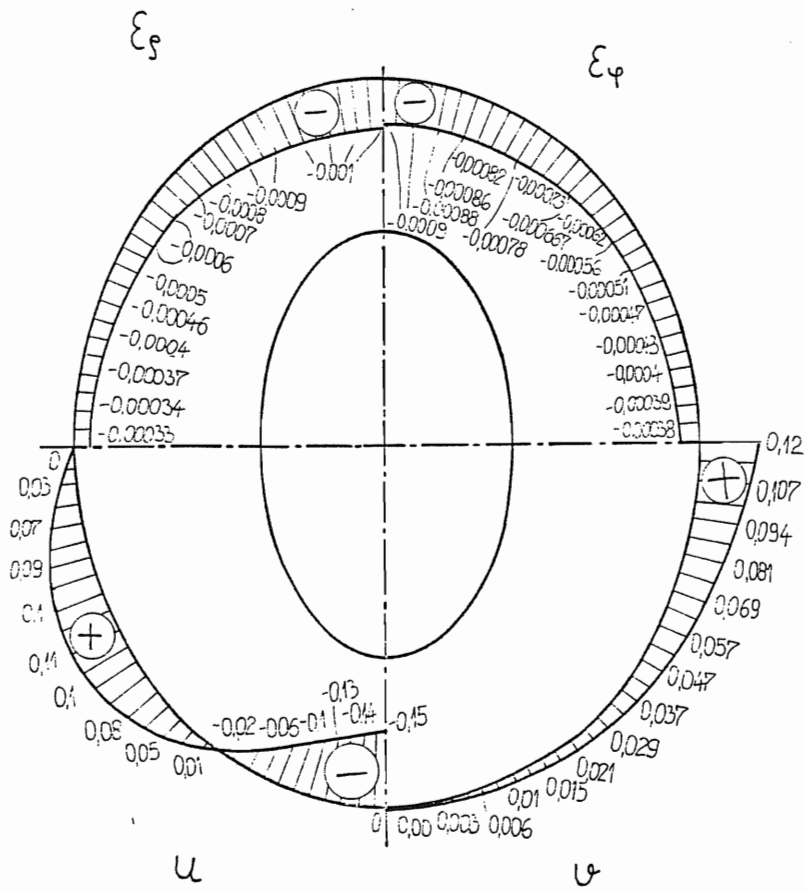
Slika 191.



Slika 192.



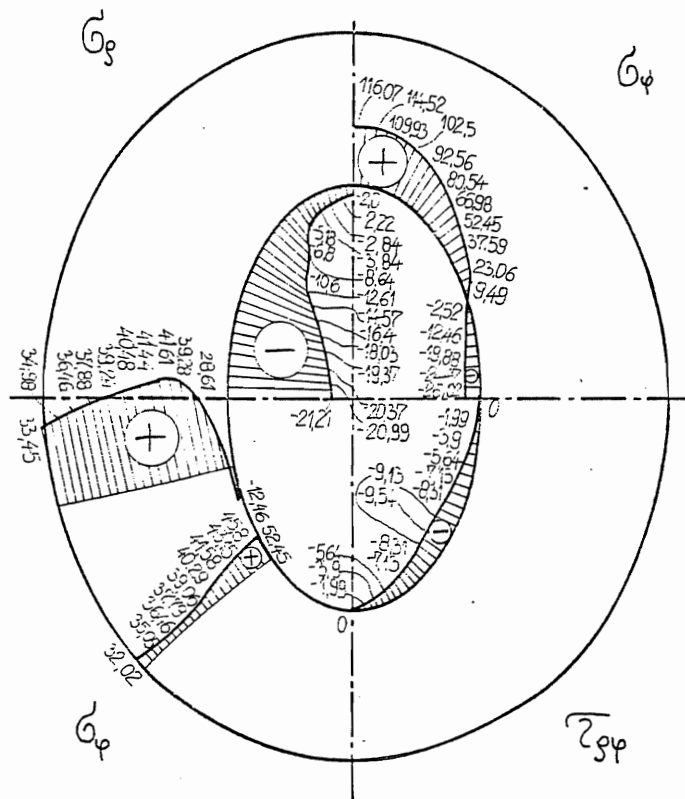




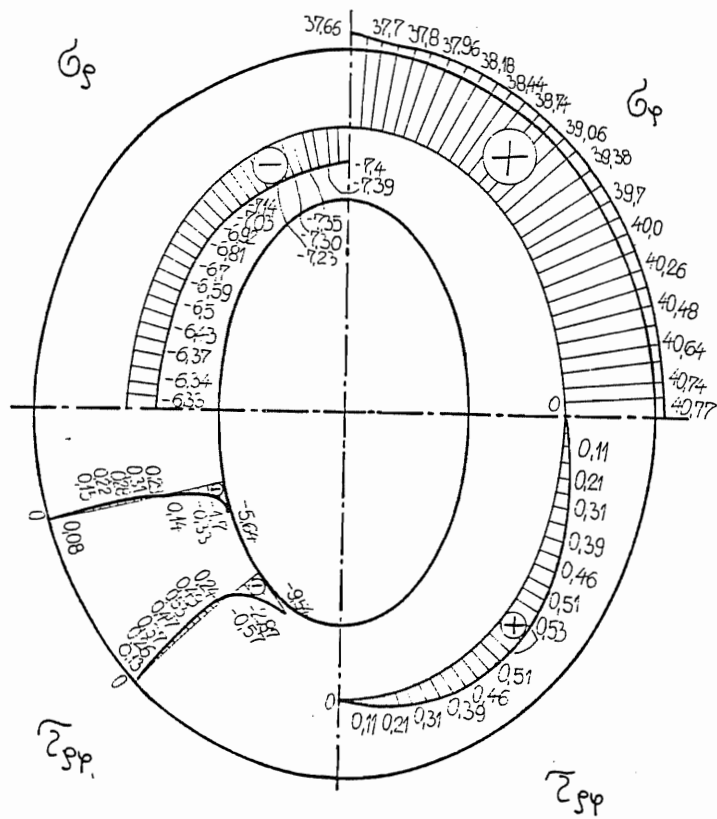
Slika 195.

Za slučaj opterećenja označen kao ELIUK 60, kada kontinualno površinsko opterećenje  $p_u = 17.41275 \text{ N/mm}$  deluje upravno na unutrašnju konturnu površ u oblasti konture ograničenoj hiperbolama  $\varphi = \pm 30^\circ$  izračunate vrednosti napona dilatacija i pomeranja dati su u Prilogu VI na strani 208.

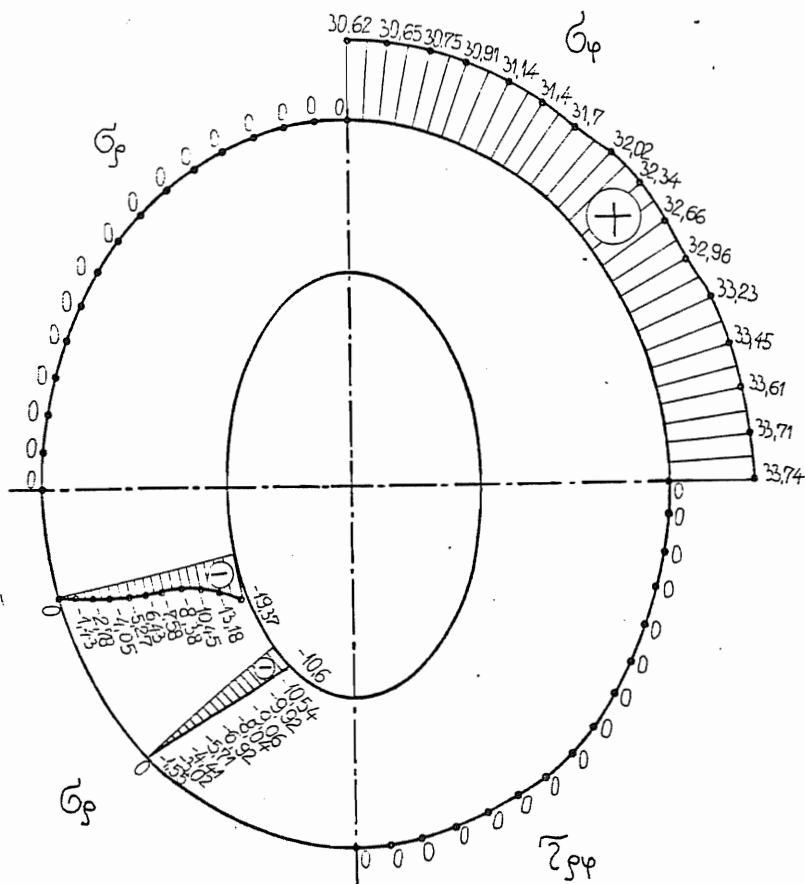
Dijagrami normalnih napona  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_\varphi$  i smičućeg napona  $\tau_{\rho\varphi}$  u tačkama unutrašnje konture, kao i dijagrami normalnog napona  $\sigma_\varphi$  u presecima prikazani su na slici 196. Na slici 197. prikazani su dijagrami napona  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_\varphi$  i  $\tau_{\rho\varphi}$  za tačke središnje elipse kao i dijagrami smičućeg napona  $\tau_{\rho\varphi}$  u presecima. Na slici 198. dati su dijagrami napona  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_\varphi$  i  $\tau_{\rho\varphi}$  u tačkama spoljašnje konture kao i normalni napon  $\sigma_\rho$  u presecima određenim hiperbolama  $\varphi = 42^\circ$  i  $\varphi = 72^\circ$ . Na ovoj slici se vidi da je granični uslov na spoljašnjoj konturi za napone  $\sigma_\rho$  i  $\tau_{\rho\varphi}$  identički zadovoljen što nije bio slučaj na unutrašnjoj konturi. Na slici 199. kao i 200. i 201. prikazane su komponentne dilatacije  $\epsilon_\rho$ ,  $\epsilon_\varphi$  u eiptično-hiperboličnom koordinatnom sistemu, kao i komponentna pomeranja  $u$  i  $v$ , koja su data za Descartes-ov koordinatni sistem (da bi se mogla upoređivati sa ranije određenim vrednostima). Pri tome su na slici 199. dati dijagrami za vrednosti dilatacija i pomeranja na unutrašnjoj konturi, na slici 200. su prikazani dijagrami dilatacija i pomeranja za tačke na spoljašnjoj elipsi, a na slici 201. dati su dijagrami dilatacija i pomeranja na spoljašnjoj konturi.



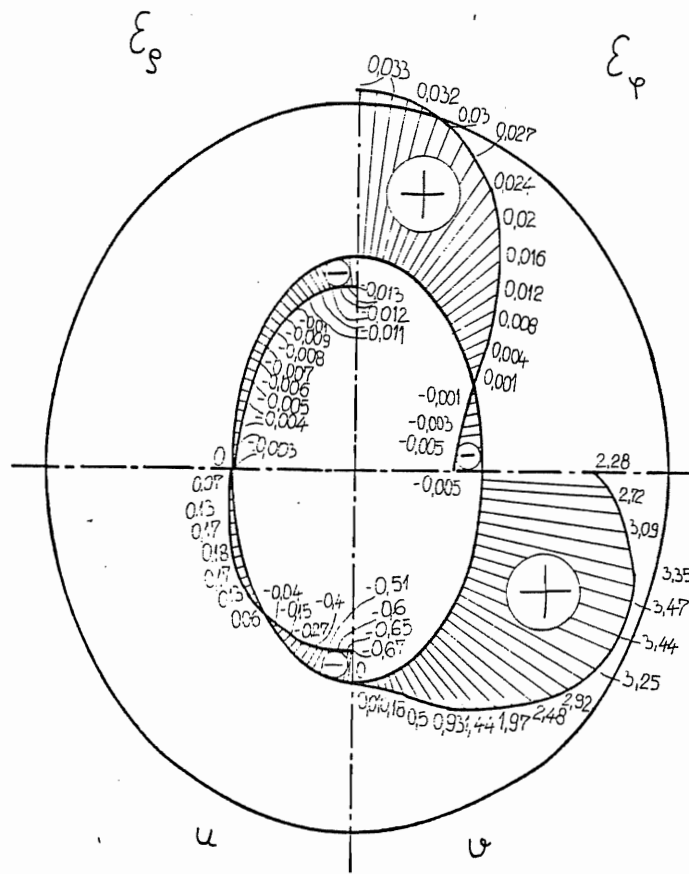
Slika 196.



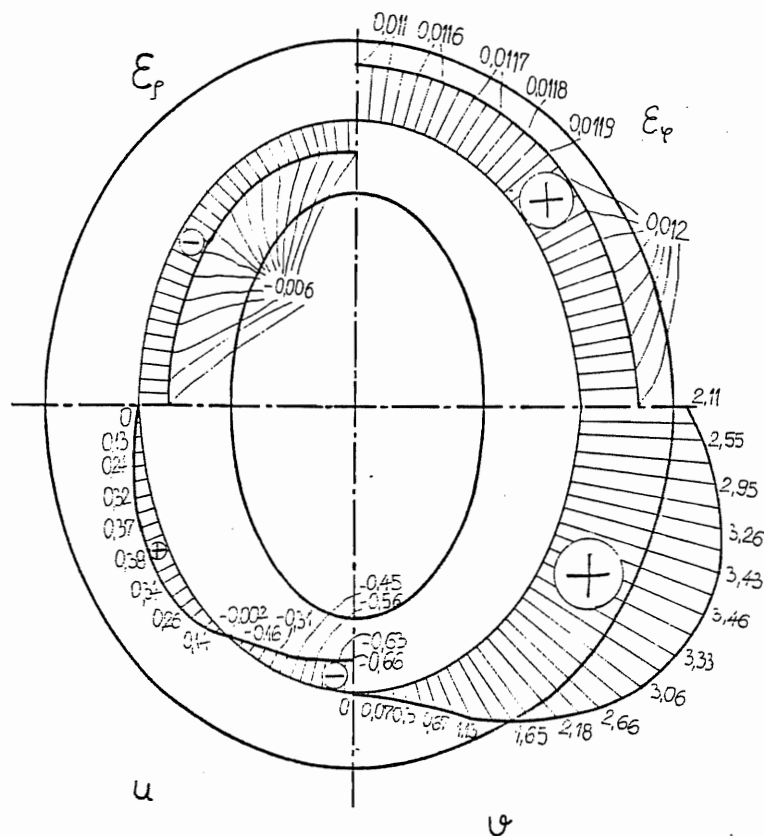
Slika 197.



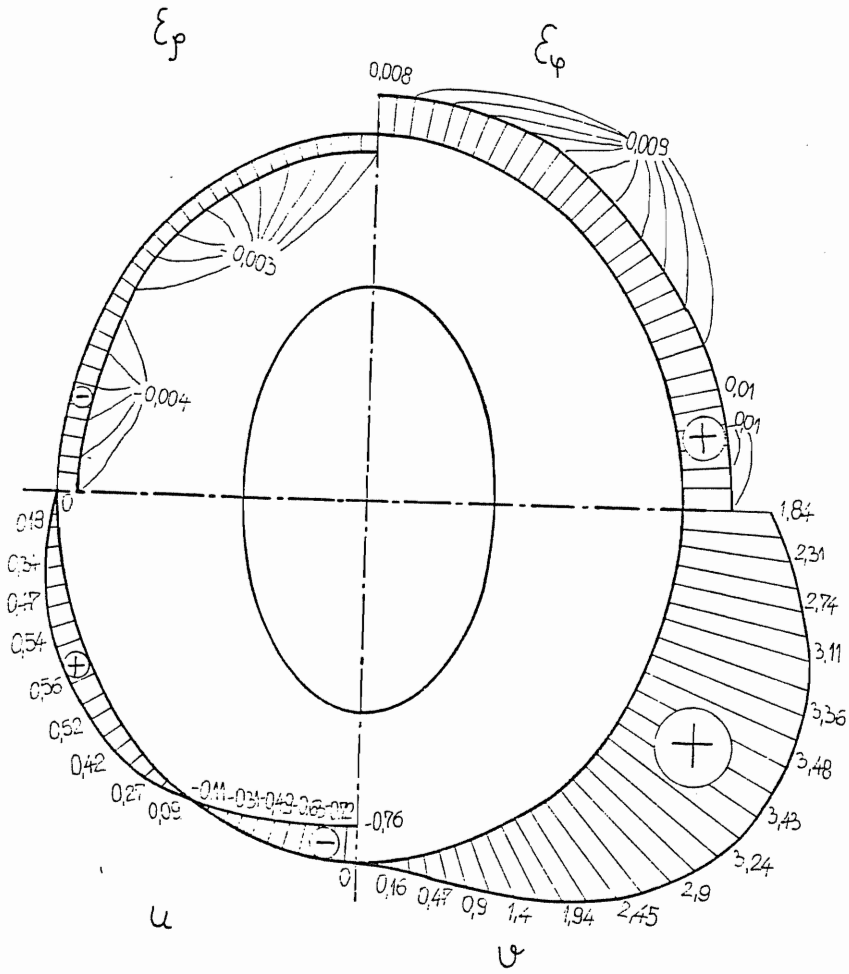
Slika 198.



Slika 199.

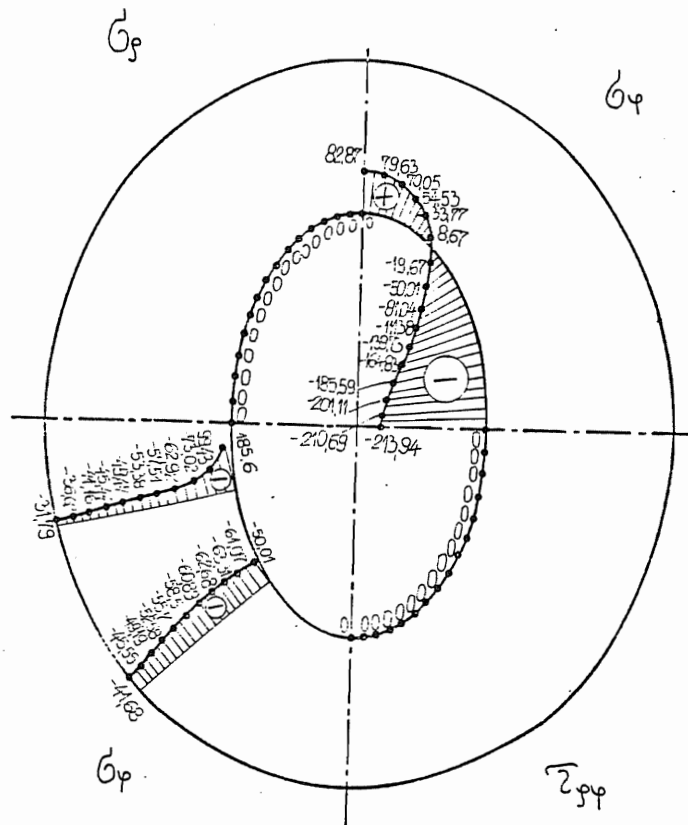


Slika 200.

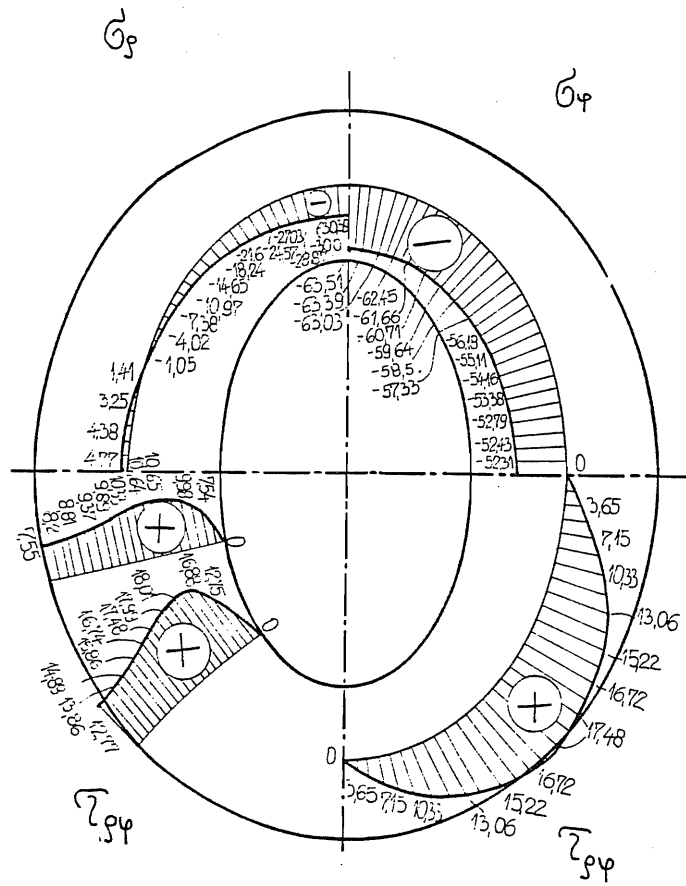


Slika 201.

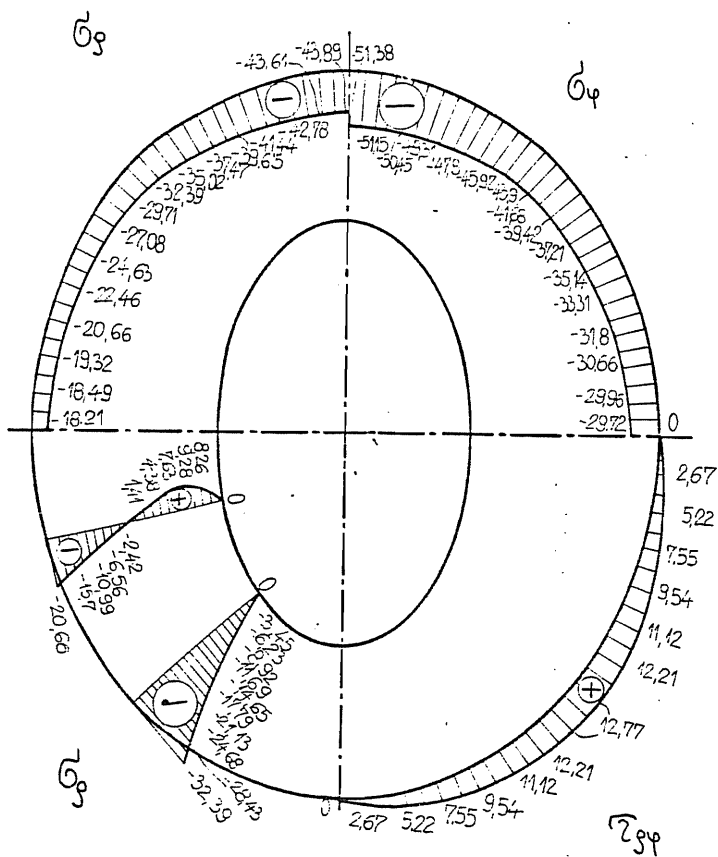
Za slučaj opterećenja označen kao ELISK 30, kada kontinualno jednako raspodeljeno opterećenje  $p_s = 46.5776 \text{ N/mm}$  deluje na delu spoljašnje konture ograničenom hiperbolama  $\varphi = \pm 30^\circ$  dijagrami normalnih napona  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_\varphi$  i smičuće napona  $\tau_{\rho\varphi}$  u eliptičko-hiperboličnom koordinatnom sistemu, a za tačke na unutrašnjoj konturi, središnjoj elipsi i spoljašnjoj konturi prikazani su na slikama 202., 203. i 204. Takođe, na istim slikama su dati i dijagrami napona  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_\varphi$  i  $\tau_{\rho\varphi}$  u tačkama preseka određenim hiperbolama  $\varphi = 42^\circ$  i  $\varphi = 72^\circ$ . Na slikama 205., 206. i 207. dati su dijagrami komponentnih dilatacija  $\varepsilon_\rho$  i  $\varepsilon_\varphi$  i komponentnih pomeranja  $u$  i  $v$  u tačkama unutrašnje konture, središnje elipse i spoljašnje konture, redom.



Slika 202.

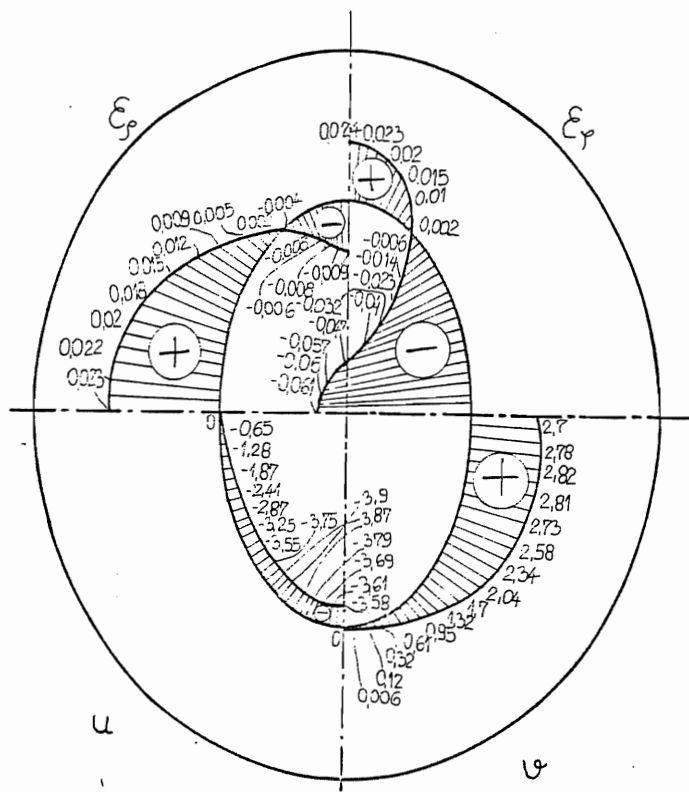


Slika 203.

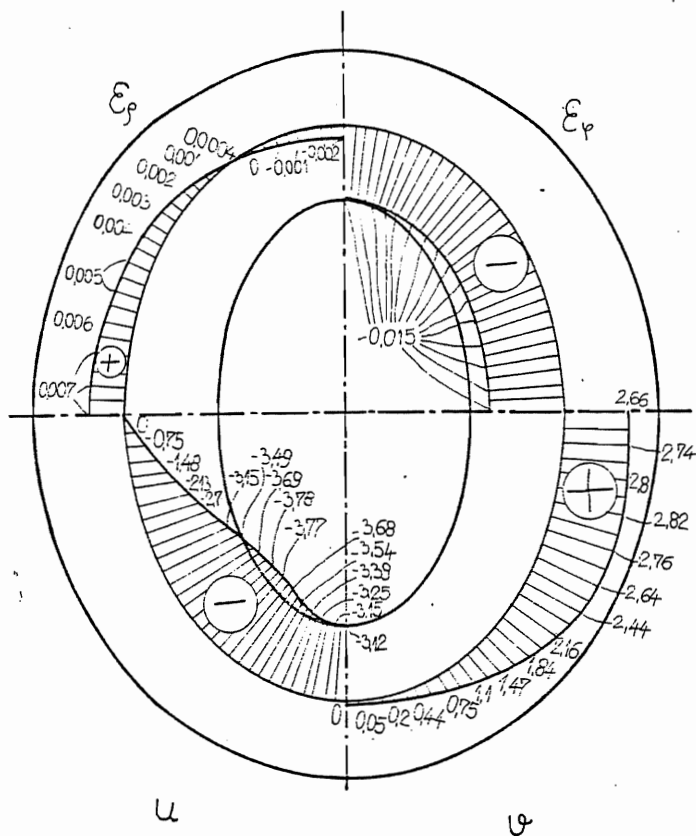


Slika 204.

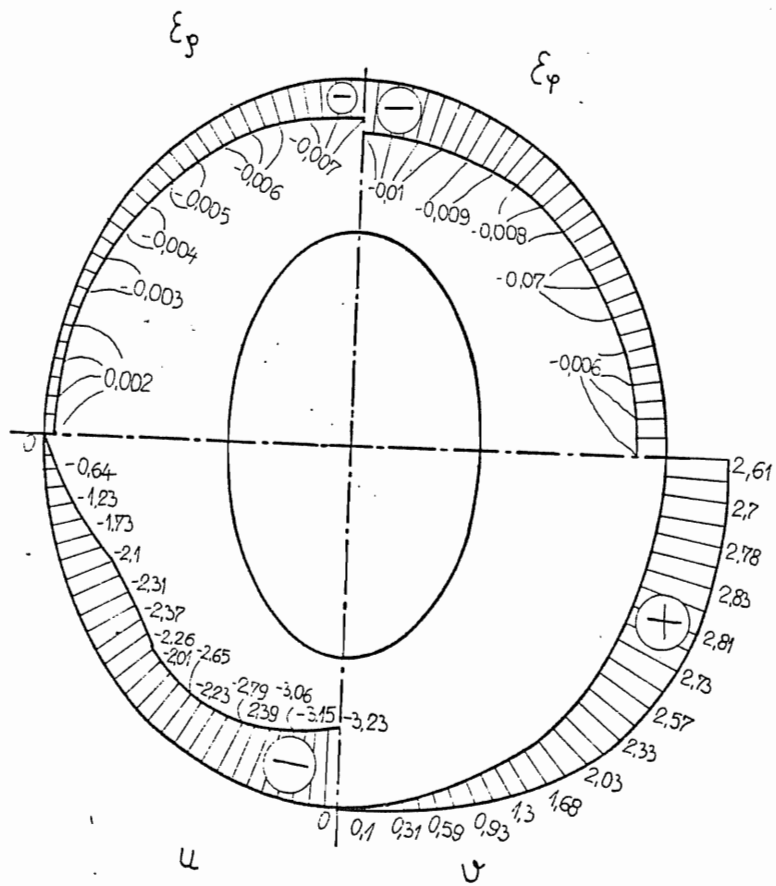




Slika 205.

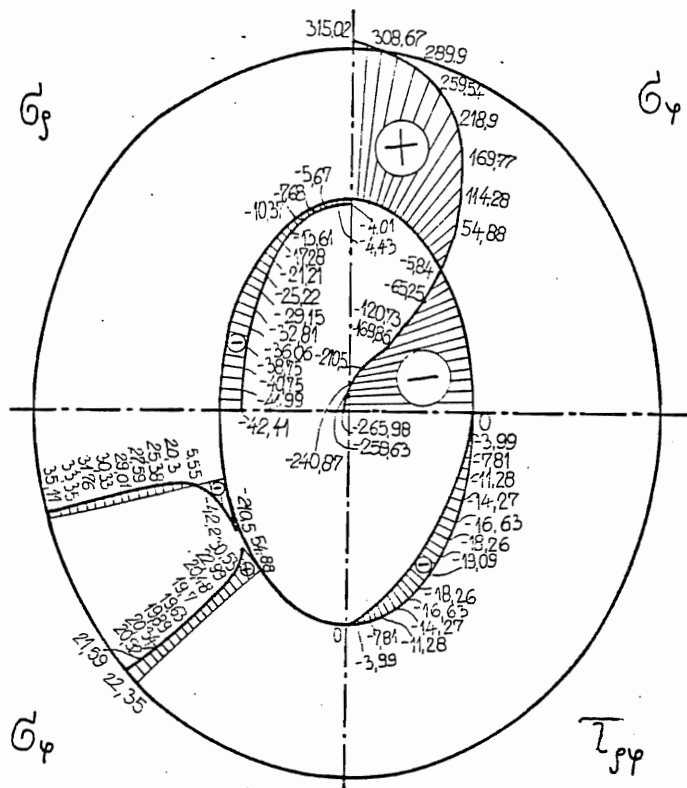


Slika 206.

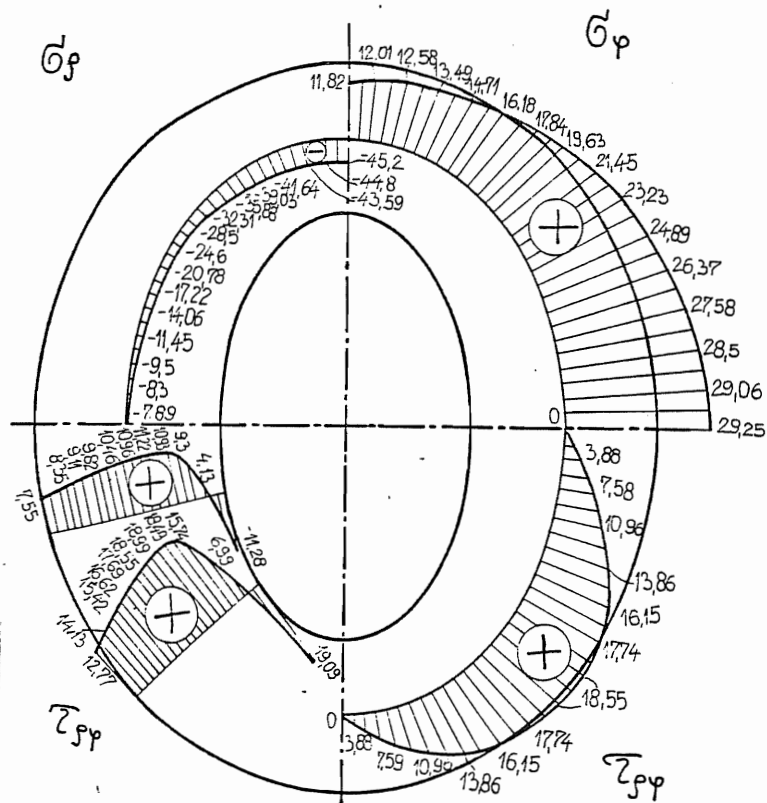


Slika 207.

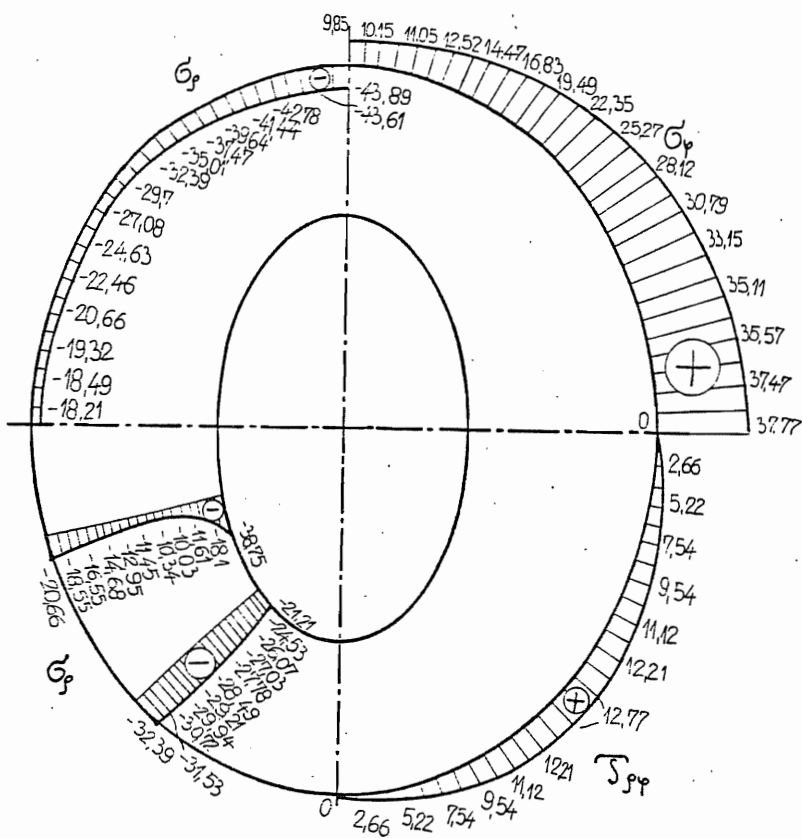
Za slučaj opterećenja označen sa ELIUSK 3060, kada istovremeno dejstvuju kontinualna opterećenja na unutrašnjoj i spoljašnjoj konturi pri čemu je  $p_u = 34.8255 \text{ N/mm}$ , a  $p_s = 46.5776 \text{ N/mm}$ , dijagrami normalnih napona  $\sigma_\rho$  i  $\sigma_\varphi$  i smičućeg napona  $\tau_{\rho\varphi}$  u tačkama unutrašnje konture, središnje elipse i spoljašnje konture, kao i u tačkama preseka određenim hiperbolama  $\varphi = 42^\circ$  i  $\varphi = 72^\circ$  prikazane su na slikama 208., 209. i 210., a dijagrami komponentnih dilatacija  $\varepsilon_\rho$ ,  $\varepsilon_\varphi$  i komponentnih pomeranja  $u$  i  $v$  za ovaj slučaj opterećenja prikazani su na slikama 211., 212. i 213. Pri tome su na slici 211. dati dijagrami dilatacija i pomeranja na unutrašnjoj konturi, na slici 212. dati su dijagrami dilatacija i pomeranja za tačke središnje elipse i na slici 213. prikazani su dijagrami dilatacija i pomeranja na spoljašnjoj konturi.



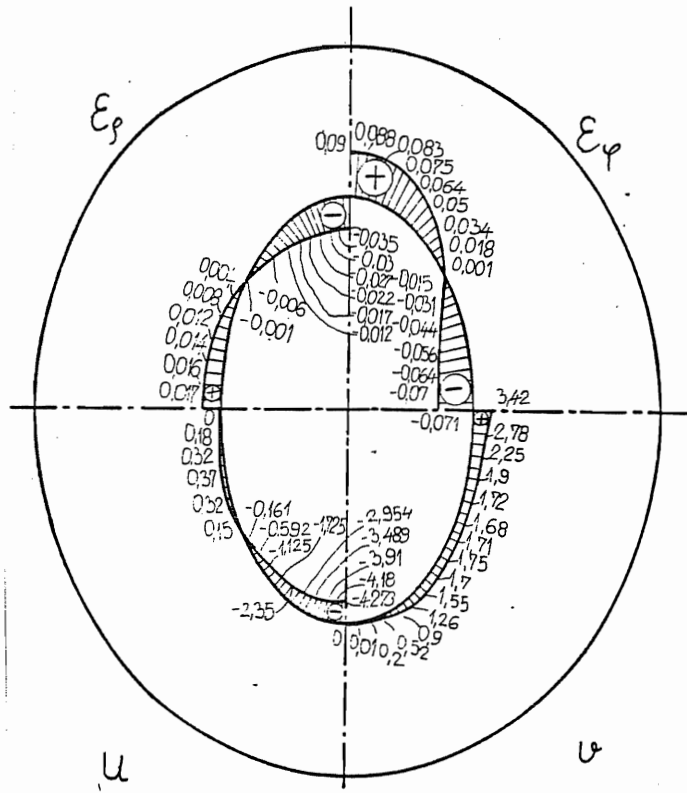
Slika 208.



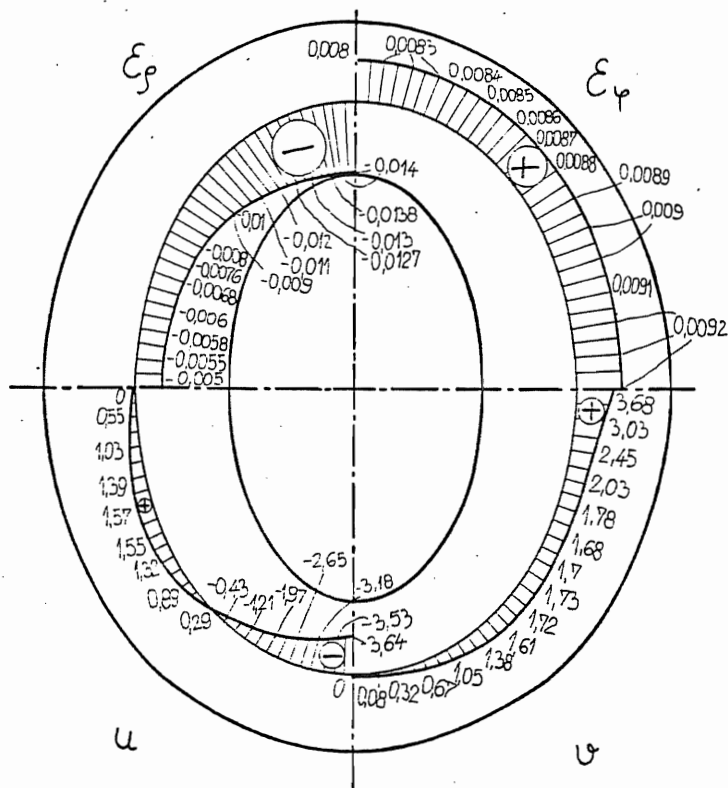
Slika 209.



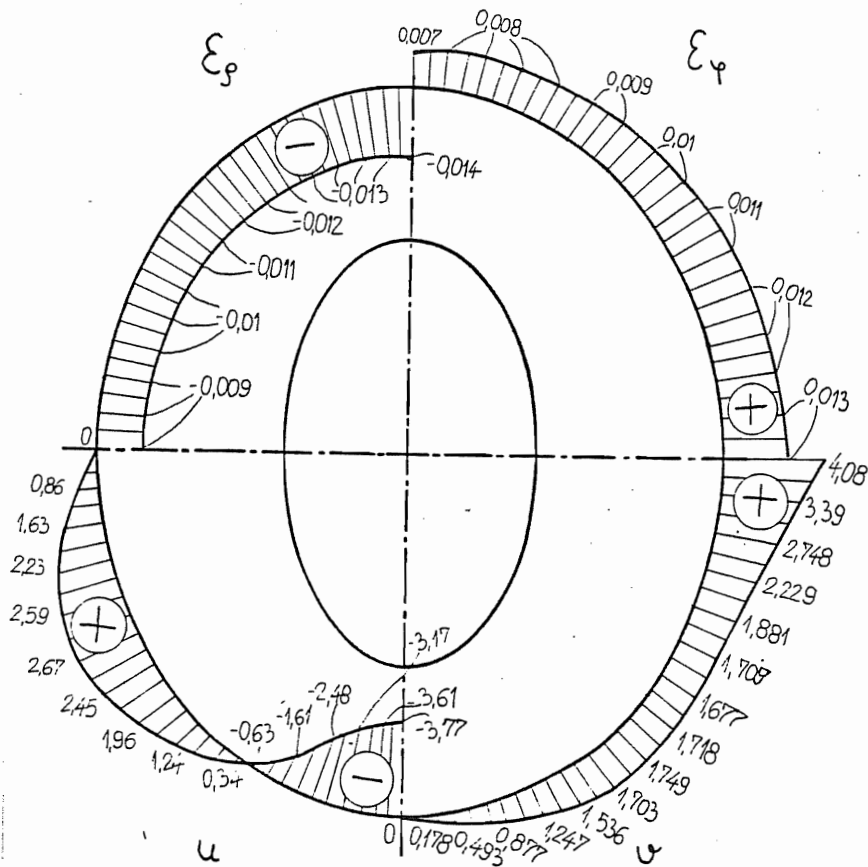
Slika 210.



Slika 211.



Slika 212.



Slika 213.

Na dijagramima napona dobijenih numeričkom analizom, primenom metode funkcije kompleksne promenljive i konformnog preslikavanja, uočava se izvesno odstupanje napona od zadatih graničnih uslova. To je posledica činjenice da je pri sumiranju uzimano samo nekoliko članova reda ( od 3 do 5), jer se za veći broj članova reda javljalo značajnije odstupanje od očekivanih vrednosti napona, s obzirom na granične uslove. Dijagrami normalnih napona su oblikom slični dijagramima dobijenim po metodi konačnih elemenata, mada postoje razlike u dobijenim vrednostima napona. Tangencijalni naponi su jednaki nuli u tačkama na osama simetrije kao što se očekuje na osnovu simetrije opterećenja i ploče.

## VI Zaključak

U ovom radu dat je kratak pregled istraživanja stanja napona i stanja deformacija ravno napregnutih ploča za višestruko povezane oblasti. Zatim je dat pregled metoda za rešavanje zadatka ravno napregnutih ploča. Od analitičkih metoda date su teorijske osnove metode primene funkcije kompleksne promenljive i konformnog preslikavanja, metode polinoma i metode varijacionog računa. Date su zatim teorijske osnove numeričkih metoda i to: metode konačnih razlika i metode konačnih elemenata. Opisane su zatim principi i teorijske osnove eksperimentalnih metoda: metode fotoelastičnosti i metode korišćenja mernih traka.

Zatim su za izučavanje naponskog i deformacionog stanja ravno napregnute eliptično prstenaste ploče, na konkretnom primeru, primenjene metoda konačnih elemenata, metoda fotoelastičnosti i metoda funkcije kompleksne promenljive i konformnog preslikavanja. Time je primenom teorijske, numeričke i eksperimentalne metode u potpunosti zatvoren ciklus naučnog istraživanja, postavljenog zadatka.

U primeni metode funkcije kompleksne promenljive i konformnog preslikavanja izvedeni su izrazi za komponente tenzora napona i komponente tenzora deformacija za eliptičko-hiperbolični koordinatni sistem. Takođe, za konkretan primer sa konfokalno-eliptičnim konturama razrađeno je preslikavanje graničnih uslova iz jedne u drugu kompleksnu ravan., pri čemu se u preslikanoj ravni dobijaju konture u obliku koncentričnih krugova. Granični uslovi i analitičke funkcije kompleksne promenljive razvijeni su u Laurent-ov red. Koeficijenti razvoja u red za granične uslove određeni su primenom Cauchy-jevog integrala, a koeficijenti razvoja u red analitičkih funkcija kompleksne promenljive određeni su iz sistema linearnih nehomogenih algebarskih jednačina. Korišćenjem ovih koeficijenata zatim je određeno naponsko i deformaciono stanje pomoću relacija za napone, dilatacije i pomeranja izvedenih za ovaj primer.

Proračun je sproveden za različite kombinacije kontinualnog opterećenja i opterećenja koncentrisanim silama. Pri tome, treba naglasiti da je razmatrani problem simetričan, pa su u sistemu jednačina uzete samo jednačine za parne koeficijente. Kod nesimetričnog problema javili bi se i neparni koeficijenti, pa bi imali još jedan sistem jednačina sa neparnim koeficijentima, što je interesantno za dalji rad. Takođe, u razmatranom primeru postoji ravnoteža sila na svakoj konturi posebno. Interesantno je za dalji rad razmotriti slučaj kada ovaj uslov nije ispunjen, tj. postoji samo opšta ravnoteža sila za celu ploču.

Za sprovođenje proračuna kod metode fotoelastičnosti i metode funkcije kompleksne promenljive i konformnog preslikavanja korišćen je računar Honeywell H6, a za metodu konačnih elemenata Microwax. Programi koji su korišćeni pri sprovođenju proračuna dati su u prilogu ovog rada, kao i neki od rezultata dobijenih proračunom. Pored izloženog za ovaj rad je pripremljena i eliptično prstenasta ploča za određivanje naponskog i deformacionog stanja korišćenjem mernih traka, međutim od ovog merenja se odustalo zbog potrebe izrade mehanizma za opterećivanje što bi zahtevalo još znatne troškove, pa se od tog eksperimenta odustalo.

Da rezimiramo, u ovom radu je za eliptično-prstenastu ploču određeno naponsko i deformaciono stanje i nacrtani su dijagrami napona i pomeranja kao i izolinije za sedam različitih slučajeva opterećenja ploče i to:

- koncentrisanim silama na unutrašnjoj konturi u pravcu kraćih poluosa elipsi
- koncentrisanim silama na spoljanjoj konturi u pravcu dužih poluosa elipsi
- koncentrisanim silama na unutrašnjoj i spoljašnjoj konturi u pravcu poluosa elipsi
- kontinualnim jednako raspodeljenim silama upravnim na unutrašnju konturu na delu konture ograničenom hiperbolama  $\varphi = \pm 30^\circ$
- kontinualnim jednako raspodeljenim silama upravnim na delu spoljašnje konture ograničenim hiperbolama  $\varphi = \pm 30^\circ$
- kontinualnim jednako raspodeljenim silama upravnim na delu unutrašnje i spoljne konture, a ograničenim hiperbolama  $\varphi = \pm 30^\circ$   $\varphi = \pm 60^\circ$
- kontinualnim jednako raspodeljenim silama upravnim na delu unutrašnje i spoljne konture, a ograničenim hiperbolama  $\varphi = \pm 30^\circ$

Pri tome je napisan program MREŽA koji određuje koordinate tačaka u mreži konačnih elemenata.

Eksperimentom u kome je primenjena metoda fotoelastičnosti snimljene su i nacrtane mape izoklina i izohroma i određeno je naponsko stanje eliptično-prstenaste ploče opterećene:

- koncentrisanim silama na unutrašnjoj konturi u pravcu kraćih poluosa elipsi
- koncentrisanim silama na unutrašnjoj konturi u pravcu dužih poluosa elipsi
- koncentrisanim silama na unutrašnjoj i spoljašnjoj konturi u pravcu poluosa elipsi

Određivanje napona je realizovano primenom metode razlike tangencijalnih napona, uz korišćenje mapa izoklina i izohroma. Pri tome je proračun izveden korišćenjem programa ZAGI na računaru Honeywell H-6.

Za dati primer eliptično-prstenaste ploče razrađena je metoda funkcije kompleksne promenljive i konformnog preslikavanja i napisani su programi ZVEZDA i NAISS, kao i niz verzija ovih programa u toku razrade zadatka. Primenom ove metode rešeni su različiti slučajevi opterećenja eliptično-prstenaste ploče i to:

- koncentrisane sile dejstvuju pritiskajući unutrašnju konturu ploče u pravcu kraćih poluosa elipsi
- koncentrisane sile dejstvuju pritiskajući spoljašnju konturu ploče u pravcu dužih poluosa elipsi
- koncentrisane sile dejstvuju pritiskajući konture eliptično prstenaste ploče u pravcu kraćih i dužih poluosa elipsi
- kontinualne jednako raspodeljene sile pritiskaju unutrašnju konturu eliptično prstenaste ploče na delu između hiperbola  $\varphi = \pm 30^\circ$
- kontinualne jednako raspodeljene sile pritiskaju spoljašnju konturu eliptično prstenaste ploče na delu između hiperbola  $\varphi = \pm 30^\circ$
- kontinualne jednako raspodeljene sile pritiskaju i spoljašnju i unutrašnju konturu naizmenično na delu između hiperbola  $\varphi = \pm 30^\circ$



Pri tome su kod ove metode izvedeni izrazi za komponente tenzora napona i komponente tenzora deformacija, kao i komponenta pomeranja u eliptično-hiperboličnom koordinatnom sistemu. Takođe, izvršeno je preslikavanje graničnih uslova sa polarnih na eliptično-hiperbolične koordinate i napisani su odgovarajući izrazi za granične uslove u eliptično-hiperboličnom koordinatnom sistemu. Na taj način, za navedene slučajeve opterećenja dobijeno je naponsko i deformaciono stanje eliptično prstenaste ploče uz primenu metode funkcije kompleksne promenljive i konformnog preslikavanja što je ilustrovano dijagramima napona, dilatacija i pomeranja.

# Prilog I

## Konformno preslikavanje nekih kontura

Razmotrimo nekoliko funkcija preslikavanja koje će poslužiti kao ilustracija preslikavanja:

1. Oblast  $|\zeta| \geq 1$ , oivičena dakle jediničnim krugom može biti konformno preslikana u spoljašnjost eliptične konture pomoću:

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right) \dots\dots\dots (1)$$

gde je  $\omega'(\zeta) \neq 0$  za  $|\zeta| \geq 1$  ako je  $|m| < 1$ .

Kako elipsa odgovara jediničnim krugu  $\zeta = e^{i\eta}$  sledi da ona ima parametarsku jednačinu:

$$z = R(1+m)\cos\eta + iR(1-m)\sin\eta \dots\dots\dots (2)$$

a poluose su joj  $R(1+m)$  i  $R(1-m)$ .

Da bi prikazali različite elipse uzimamo da parametar  $m$  ima vrednosti u rasponu  $0 \leq m \leq 1$ . Kada je  $m=0$  tada elipsa postaje krug poluprečnika  $R$ , a u graničnom slučaju kada je  $m=1$ , ona degeneriše u uzanu pukotinu ili usek dužine  $4R$ . Ispitivanje krivolinijskog koordinatnog sistema definisanog ovim preslikavanjem pokazuje da se on sastoji od ortogonalnih familija elipsi i hiperbola. Očigledno je da oblast ograničenu dvema elipsama iz ove familije možemo preslikati pomoću funkcije (1) u kružni prsten kao što je prikazano na slici 5.

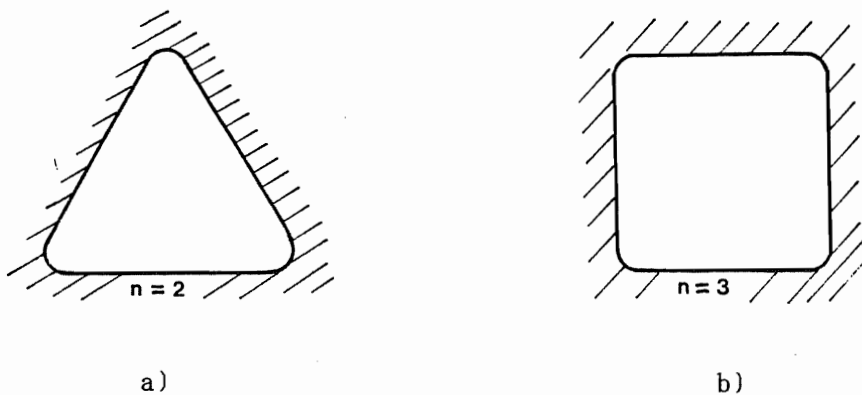
2. Oblast  $|\zeta| \geq 1$  se preslikava konformno u spoljašnju oblast hipotrohoida preko formule:

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta^n}\right) \quad (0 \leq m < \frac{1}{n}) \dots\dots\dots (3)$$

gde je  $n$  pozitivan ceo broj i  $\omega'(\zeta) \neq 0$  za  $|\zeta| \geq 1$ . Parametarska jednačina hipotrohoida se dobija stavljanjem  $\zeta = e^{i\eta}$  i ima oblik:

$$z = R(e^{i\eta} + me^{-in\eta}) \dots\dots\dots (4)$$

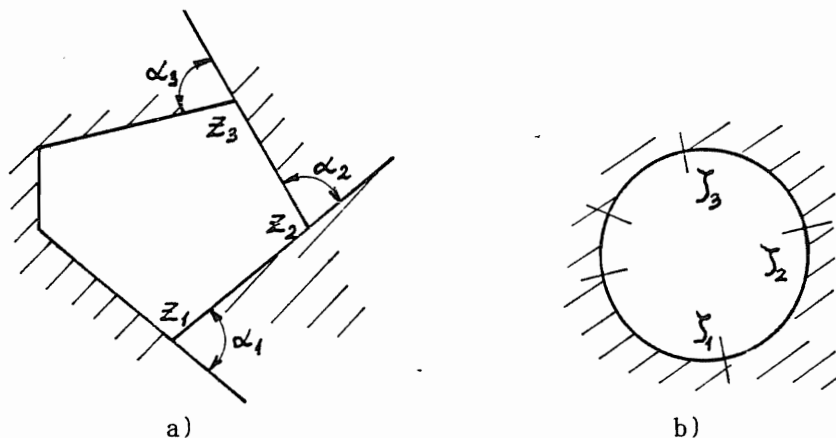
Hipotrohoid je putanja tačke fiksirane na pokretnom krugu koji kotrlja bez klizanja po unutrašnjosti nepokretnog kruga. Ograničenje  $0 \leq m < 1/n$  je ekvivalentno pretpostavci da tačke leže u unutrašnjosti pokretnog kruga, tako da hipotrohoid nema petlje i ima temena ili šiljke ako je  $m=1/n$ . Glavni razlog što je ovo preslikavanje interesantno je u tome, što opšti oblik hipotrohoida predstavlja krivolinijski poligon. Za  $n=2$  to je krivolinijski trougao, a za  $n=3$  krivolinijski četvorougao pa aproksimativno opisuju konture koje su od interesa za analizu. Ove hipotrohoide prikazane su na slici 1.a i b.



Slika 1.

3. Ovakva konformna preslikavanja koja uključuju to da je granična linija konture kontinualna moguće je proširiti ukidanjem nekih uslova i obezbediti preslikavanje unutrašnje ili spoljašnje oblasti zatvorenog poligona u unutrašnju ili spoljašnju oblast jediničnog kruga  $|\zeta|=1$ . Ovo preslikavanje se može ostvariti pomoću Schwarz - Christoffel transformacije [54] i ona je konformna osim u nekim tačkama konture.

Posmatrajmo jednostavan zatvoren  $n$ -to strani poligon sa unutrašnjim uglovima  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$  tako da je  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 2\pi$ . Ako su temena poligona u tačkama  $z_1, z_2 \dots z_n$  ( vidi sliku 2-a), ovim tačkama su korespondentne tačke  $\zeta_k = e^{i\eta_k}$  ( $k=1,2,\dots,n$ ) na krugu  $|\zeta|=1$ , kao što je to na slici 2-b prikazano.



Slika 2.

Oblast izvan poligona se može preslikati u oblast  $|\zeta| \geq 1$  uz pomoć transformacijske formule  $z = \omega(\zeta)$  gde je:

$$\omega'(\zeta) = A \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\zeta_k}{\zeta}\right)^{\frac{\alpha_k}{\pi}} \dots\dots\dots (5)$$

gde  $A$  je konstanta.

Napomenimo da  $\omega'(\zeta)$  može biti razvijeno u polinom po  $1/\zeta$  u obliku:

$$\omega'(\zeta) = A \left(1 - \frac{1}{\pi\zeta} \sum_{k=1}^n \alpha_k \zeta_k + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)\right) \dots\dots\dots (6)$$

Ovde će  $z = \omega(\zeta)$  sadržati i član sa  $\log \zeta$  i biti višeznačno osim u slučaju kada su određene tačke  $\zeta_k$  izabrane tako da bude:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \zeta_k = 0$$

Preslikavanje definisano izrazom (5), je konformno u svim tačkama unutar oblasti, ali nije konformno u graničnim tačkama  $\zeta_k$ , gde je  $\omega'(\zeta_k) = 0$ . Ovakve tačke stvaraju probleme pri rešavanju zadataka sa poligonalnim konturama, pa se vrši aproksimacija izraza (5) pomoću polinoma po  $1/\zeta$  što je ekvivalentno kao kada se poligon zameni sličnim oblikom, ali glatkih kontura, gde su temena poligona zaobljena malim radijusima.

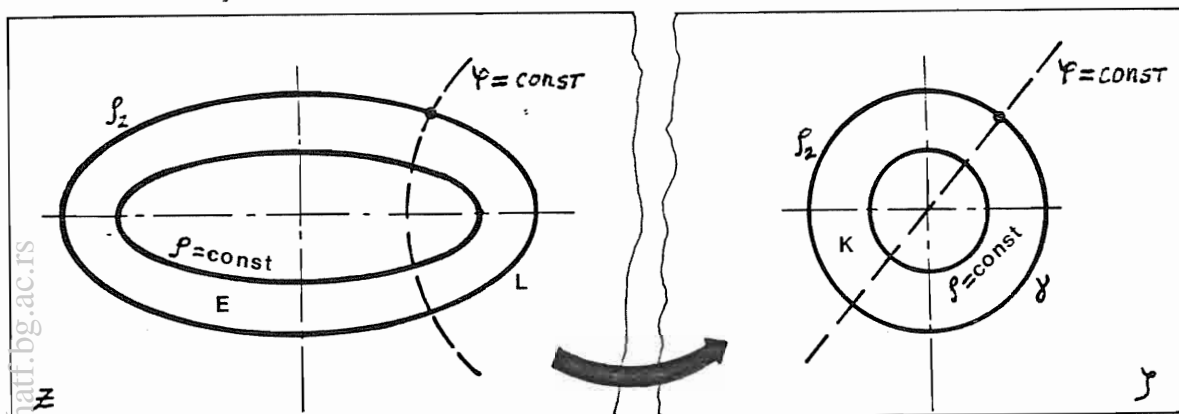
Ovo je prikazano u literaturi [23].

## Prilog II

### Krivolinijske koordinate pri konformnoj transformaciji u polarne koordinate

Razmotrimo konformno preslikavanje date oblasti (na primer elipse)  $E$  u  $z$ -ravni u oblast (na primer krug)  $K$  u  $\zeta$ -ravni. Dakle iz krivolinijskih koordinata u opstem slucaju u jednoj kompleksnoj ravni prelazimo na polarne u drugoj kompleksnoj ravni.

Pri preslikavanju centar koordinatnog sistema ostaje očuvan ( $\zeta=0, z=0$ , ostaje u centru koordinatnog sistema). Logično je da se uvedu polarne koordinate  $\rho$  i  $\varphi$  u  $\zeta$ -ravni, pri čemu važi relacija  $\zeta = \rho e^{i\varphi} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ . Krugovi  $\rho = \text{const}$  i radijusi  $\varphi = \text{const}$  u  $\zeta$ -ravni odgovaraju krivama u  $z$ -ravni koje takođe označavamo sa  $\rho = \text{const}$  i  $\varphi = \text{const}$ . Konturi  $L$  oblasti  $E$  pri tome odgovara kontura  $\gamma$  oblasti  $K$  kao što je to prikazano na slici 1.



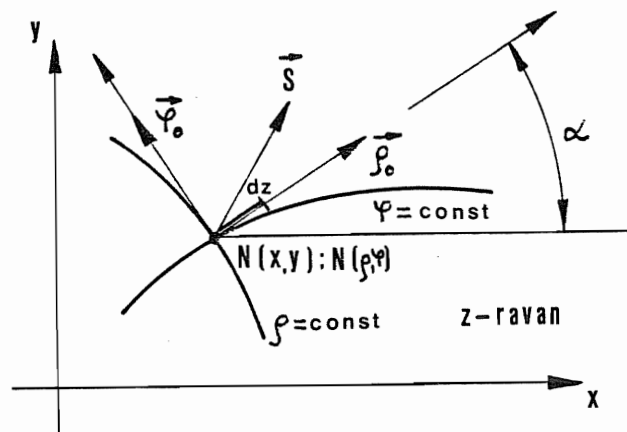
Slika 1.

Veličine  $\rho$  i  $\varphi$  mogu biti razmatrane kao krivolinijske koordinate tačaka, čije su Descartes-ove koordinate  $x$  i  $y$  u  $z$ -ravni. One su povezane relacijom:

$$x + iy = \omega(\zeta) = \omega(\rho e^{i\varphi}) \dots\dots\dots (1)$$

Linije  $\rho = \text{const}$  i  $\varphi = \text{const}$  su koordinatne linije, koje su saglasno konformnoj transformaciji ortogonalne.

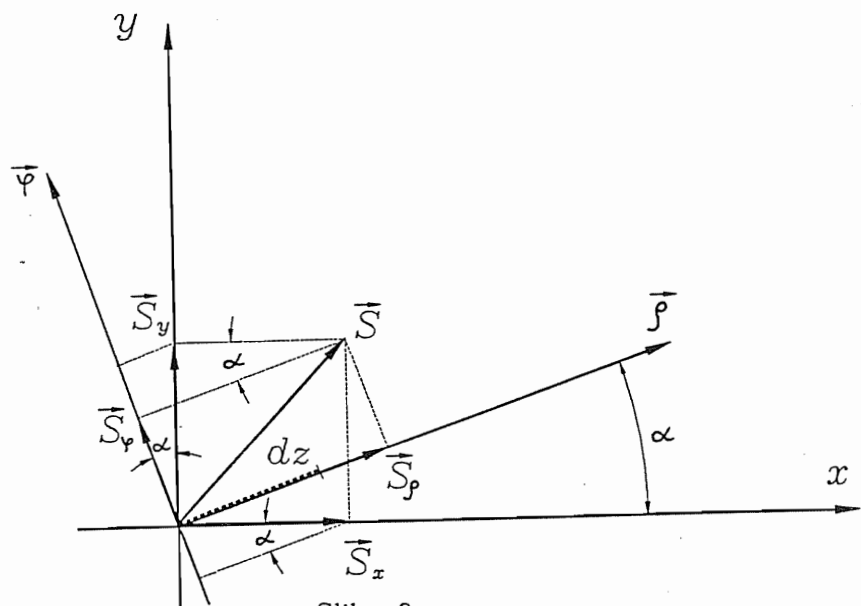
Uzmimo neku tačku u  $z$ -ravni i postavimo kroz nju linije  $\rho = \text{const}$  i  $\varphi = \text{const}$ . Neka je  $\vec{\rho}_0$  ort tangencijalan na koordinatnu liniju  $\zeta = \text{const}$  u smeru porasta  $\rho$ . Neka je  $\vec{\varphi}_0$  ort tangentne ose na liniju  $\rho = \text{const}$  u smeru porasta  $\varphi$ . Neka ove tangentne ose budu ose krivolinijskih koordinata u tački  $N(\rho, \varphi)$ , kao što je to prikazano na slici 2.



Slika 2.

Sistem ortova  $\vec{\rho}_0$  i  $\vec{\varphi}_0$  sa ustanovljenim smerom orjentisan je kao i sistem  $xOy$ , tj. ako se krećemo u pozitivnom smeru ortu  $\vec{\rho}_0$ , ort  $\vec{\varphi}_0$  ostaje levo, što je saglasno činjenici da konformna transformacija ostavlja očuvane orjentacije osa.

Ako je  $\vec{S}$  vektor u ravni  $z$  koji polazi iz tačke  $N(\rho, \varphi)$  tj.  $z = \omega(\rho e^{i\varphi})$  projekcije tog vektora na ose  $Ox$  i  $Oy$  bi bile  $S_x$  i  $S_y$ , a na ose  $\rho$  i  $\varphi$  bi bile  $S_\rho$  i  $S_\varphi$  kao što je prikazano na slici 3.



Slika 3.

Pošto razmaranje sprovodimo u kompleksnim ravnima sledi:

$$S_\rho + iS_\varphi = e^{-i\alpha}(S_x + iS_y) = S_x(\cos\alpha - i\sin\alpha) + S_y(i\cos\alpha + \sin\alpha) \dots \quad (2)$$

odnosno:

$$\begin{aligned} S_\rho &= S_x \cos \alpha + S_y \sin \alpha \\ S_\varphi &= -S_x \sin \alpha + S_y \cos \alpha \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Ako u tački  $z$  imamo pomeranje  $dz$  u tangencijalnom pravcu  $\vec{\rho}$ , odgovarajuća tačka u  $\rho$ -ravni će načiniti pomeranje u radijalnom pravcu, kao što je prikazano na slikama 3. i 4.

Prema tome:

$$\begin{aligned} dz &= |dz| \cos \alpha + i |dz| \sin \alpha = |dz| e^{i\alpha} \\ d\rho &= |d\zeta| \cos \varphi + i |d\zeta| \sin \varphi = |d\zeta| e^{i\varphi} \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (4)$$

te sledi:

$$e^{i\alpha} = \frac{dz}{|dz|} = \frac{\omega'(\zeta)d\zeta}{|\omega'(\zeta)| \cdot |d\zeta|} = \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} e^{i\varphi} = \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} \frac{\zeta}{\rho} \dots \dots \dots \quad (5)$$

gde je:

$$\begin{aligned} dz &= \omega'(\zeta)d\zeta \\ |dz| &= |\omega'(\zeta)| \cdot |d\zeta| \\ \zeta &= \rho e^{i\varphi}, \quad e^{i\varphi} = \frac{\zeta}{\rho} \quad \bar{\zeta} = \rho e^{-i\varphi} \end{aligned}$$

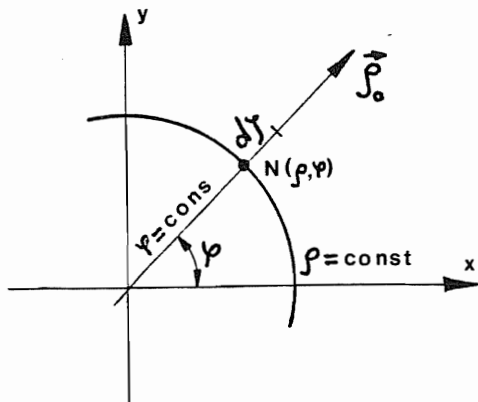
Dalje dobijamo iz (5):

$$e^{-i\alpha} = \frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|} e^{-i\varphi} = \frac{\overline{\omega'(\zeta)} \bar{\zeta}}{|\omega'(\zeta)| \rho} \dots \dots \dots \quad (6)$$

Sada iz relacija (2) i (6) dobijamo:

$$S\rho + iS\varphi = \frac{\overline{\omega'(\zeta)} \overline{\zeta}}{|\omega'(\zeta)| \rho} (S_x + iS_y) \dots\dots\dots (7)$$

Što predstavlja vezu između komponenti vektora u ova dva koordinatna sistema.



Slika 4.

## Prilog III

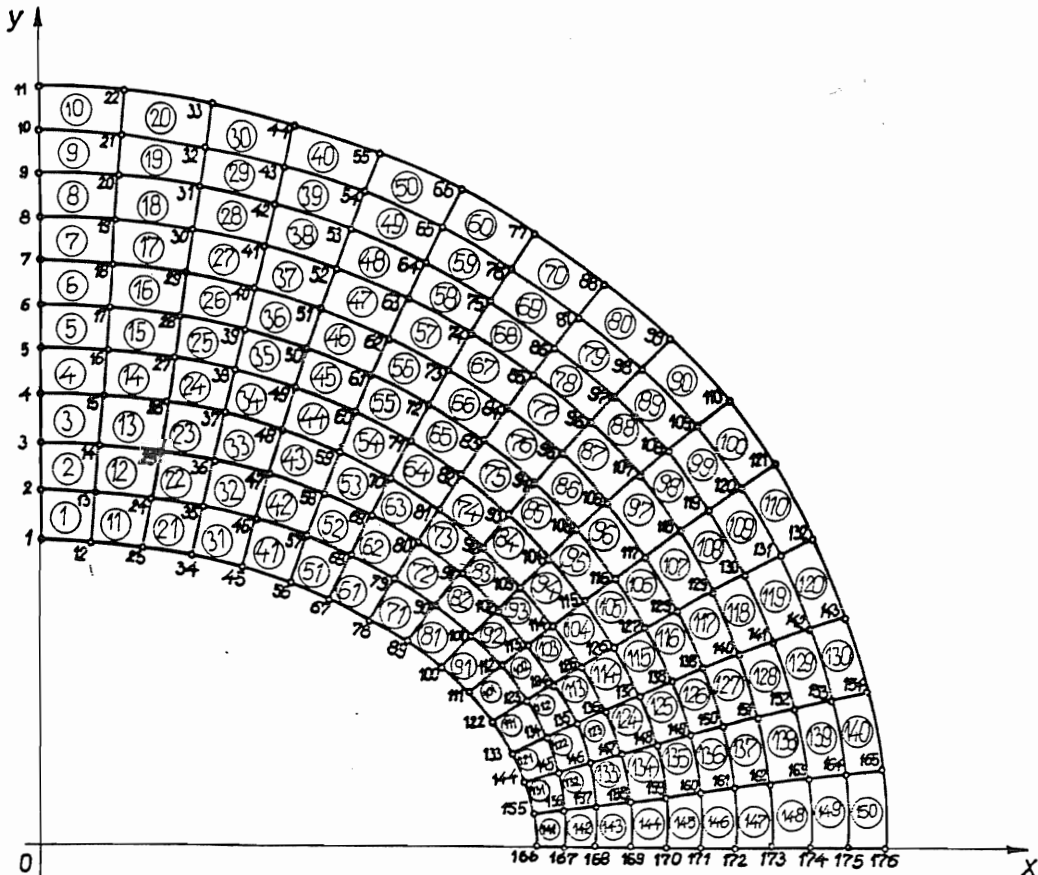
### Koncepcija programskog paketa BERSAFE

Programski paket BERSAFE sadrži veliki broj opcija i različite tipove elemenata koji se mogu koristiti. Program je tako načinjen da korisnik na karticama ulaznih podataka odredi tačno šta se traži. Da bi se smanjio broj ulaznih podataka koje mora uneti korisnik "default" vrednosti mogu biti date za glavni tip elemenata, itd. Kada su jednom određene, ove veličine će biti uzimane sve dok se ne javi potreba za njihovom promenom kod nekog elementa. Ove promene se zadaju na kartici 31, uvek kada je ulaz različit od nule.

Razmatrane strukture, delovi i konstrukcije prikazuju se u vidu skupova konačnih elemenata i čvorova. Numerisanje elemenata vrši se posebno za svaki slučaj i brojevi elemenata se mogu kretati u rasponu od 1 do 9999, mada ova granica postoji samo kada su ulazni podaci u formatu ispod 4 karaktera. Definisane strukture pri ulazu u program je podeljena na određivanje topologije i geometrije čvorova. Topološka definicija određuje koji su čvorovi sadržani u svakom elementu. Lista brojeva čvorova data je ovde za primer koji se obrađuje, u Prilogu VI rada na strani 208. Takođe, topološka definicija daje redosled čvorova, što je takođe dato u priloženoj listi. Numerisanje elemenata je nasuprot predhodnom proizvoljno i nema uticaja na rešenje.

Geometrija čvorova određuje koordinata u prostoru za svaki čvor koji je određen brojem čvora. Geometrija čvorova za razmatrani eliptični prsten, data je u Prilogu VI na strani 208. Koordinate čvorova za razmatrani primer određene su korišćenjem eliptično - hiperboličnog koordinatnog sistema u programu "MREŽA" na računaru Honeywell H-6. Program "MREŽA" dat je u Prilogu VI na strani 208.

Četvrtina eliptičnog prstena izdeltjenog na konačne elemente sa numerisanim elementima i čvorovima prikazana je na slici 1.



Slika 1.

Tip izabranog elementa definiše karakteristike datog elementa, kao što su:

- broj čvorova na elementu
- polje u kome se menja promenljiva (na primer konstantni napon ili linearna promena napona)

U definisanju strukture kao uređenog skupa konačnih elemenata, korisnik mora izabrati odgovarajući tip elementa i dovoljnu gustinu elemenata na mestu velikih gradijenata napona. Neadekvatne mreže konačnih elemenata vode do nepouzdanih rezultata, a na drugoj strani previše guste ili komplikovane mreže vode nekorisnom rasipanju vremena računara koji se koristi.

U BERSAFE-u različiti koordinatni sistemi mogu biti definisani za opisivanje geometrije čvorova, komponenti opterećenja u čvornim tačkama, stepena slobode za pomeranja i napone nezavisno jedni od drugih. Koordinatni sistem se definiše korišćenjem ICOORD reda sa 4 ulaza na kartici tipa 01. Koordinatni sistemi mogu biti: Descartes-ov, Polarno-cilindrični, sferni.

Pomeranja se mogu odrediti u svakom čvoru strukture. Broj komponenti, ili stepena slobode u svakom čvoru se menja, zavisno od tipa elementa kome pripada taj čvor i može se menjati od čvora do čvora. Kod dvodimenzionalnih elemenata imamo dva stepena slobode, a kod trodimenzionalnih imamo tri. Pravci ovih stepena slobode su u "default" kartezijanski, ali oni mogu biti definisani i kao polarno-cilindrični ili sferni, uz pomoć kartica 24 i 31 čak i u lokalnom koordinatnom sistemu u svakom elementu i čvoru.

Različiti tipovi stepeni slobode se nazivaju tipovi promenljivih i podeljeni su na:

- 1) za dvodimenzionalni kartezijanski koordinatni sistem -  $u, v$
- 2) za osnosimetričan dvodimenzionalni kartezijanski -  $u, v$
- 3) za polarni dvodimenzionalni -  $u, v$
- 4) za kartezijanski trodimenzionalni -  $u, v, w$
- 5) za cilindrični trodimenzionalni -  $u_r, u_\theta, w$
- 6) za sferni trodimenzionalni -  $u_r, u_\theta, u_\varphi$

Štapovi, ploče i ljsuke uključuju dodatne stepene slobode kao što je rotacija tj.  $\partial w / \partial n$  (gde je  $n$  lokalna normala). Svaki tip konačnog elementa ima odgovarajući broj stepeni slobode.

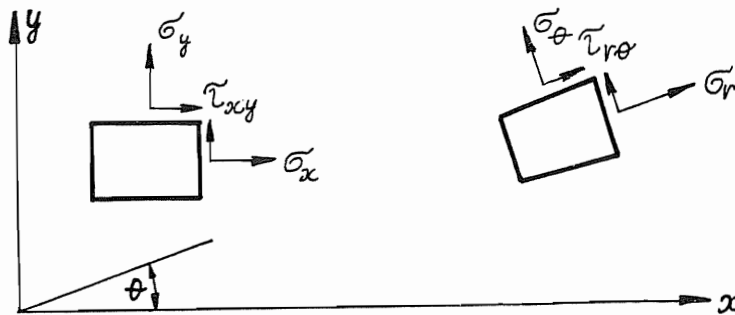
Tipovi varijabli su označeni brojevima, na primer sa (1,2,3) su označene translacije ( $u, v, w$ ) ili cilindrične  $u_r, u_\theta, w$  ili sferne  $u_r, u_\theta, u_\varphi$ . Prvi izvodi prethodnih translacija odnosno stepeni slobode rotacije označeni su brojevima (11,12,13). Takođe drugi izvodi translacija označeni su brojevima u opsegu od 21 do 29.

Ukoliko se pretpostavlja pojava pukotina, to je potrebno definisati na "ulazu" uz pomoć numeracije tipa promenljive.

Komponentni naponi sračunati uz pomoć BERSAFE su za većinu tipova konačnih elemenata nezavisni od ulaznog koordinatnog sistema i tipa elementa. Neki elementi u obliku štapa ili ljsuke, automatski generišu lokalni koordinatni sistem. U dve dimenzije, normalni naponi su pozitivni ako se radi o zatezanju, a tangencijalni naponi su pozitivni, ako su usmereni kao što je prikazano na slici 2.

Slično je i kada se radi o trodimenzionalnim problemima. ICOORD opcija na kartici tipa 01 omogućava sračunavanje u kartezijanskim ili polarno-cilindričnim ili sfernim koordinatama. Takođe mogu se odrediti i glavni naponi sa kosinusima uglova glavnih pravaca u odnosu na referentne ose. Komponentni naponi mogu biti dati u čvornim tačkama i u Gauss-ovim tačkama.





Slika 2.

Vrste opterećenja koje dejstvuju na stukturu koju ispitujemo mogu biti:

1) Tačkasta opterećenja ili koncentrisana opterećenja, dejstvuju u čvoru i imaju intenzitet i pravac dejstva koji mora prolaziti kroz čvor. Koncentrisane sile se zadaju u datom čvoru preko komponenti u pravcu zadanog koordinatnog sistema.

Za ravne tipove elemenata, pretpostavlja se da opterećenje dejstvuje po jedinici debljine osim za element EP4, kod koga opterećenje dejstvuje po jedinici površine.

Za trodimenzionalne, ljuskaste i linijske elemente, opterećenje se ne množi debljinom.

2) Pritisici i linearna opterećenja su kod dvodimnzionalnih problema sile koje dejstvuju po jedinici dužine i po jedinici dubine na ivicama određenih elemenata. Kod trodimenzionalnih slučajeva, sila deluje po jedinici površine. Kod kontinualnog opterećenja, program automatski određuje čvorna opterećenja korišćenjem rutina za oblik funkcija raspodele. Za pravougaone oblike, jedinični pritisak duž stranica za dve dimenzije ili duž površi za tri dimenzije daje ekvivalentna opterećenja u čvorovima, kao što je prikazano na slici 3. za linearne, kvadratne i kubne elemente. Kontinualno opterećenje se menja linearno, parabolično ili je konstatno, što je prikazano na slici zajedno sa ekvivalentnim čvornim opterećenjima.

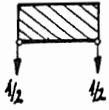
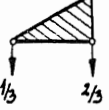
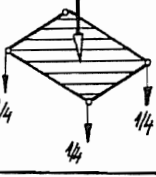
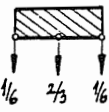
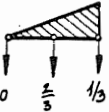
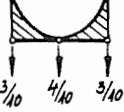
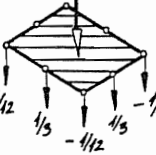
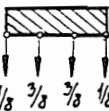
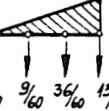

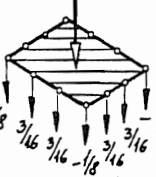
3) Gravitaciona opterećenja koja deluju u svakoj tački tela može se zadati kod mnogo tipova konačnih elemenata.

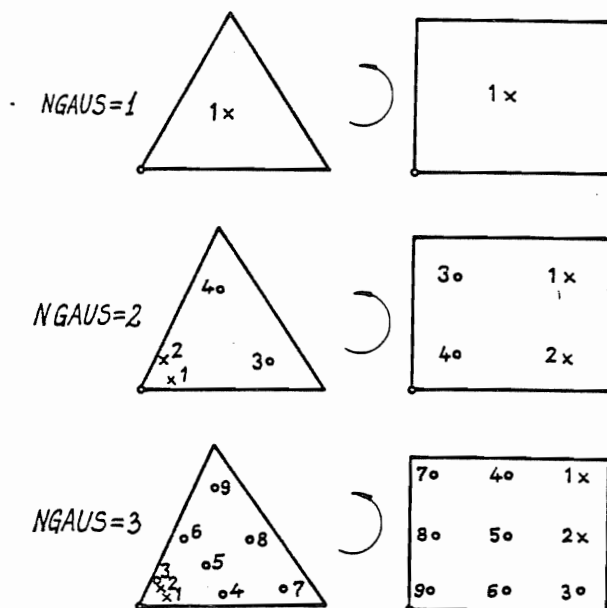
4) Centrifugalna opterećenja su definisana za određene tipove elemenata i tada je potrebno odrediti: ugaonu brzinu, gravitacionu konstantu i specifičnu težinu ili gustinu. Ose rotacije su ustanovljene kod svakog tipa elementa.

5) Temperaturna opterećenja su posledica teperaturnog polja, koje je zadato temeraturama u čvorovima. Za ljuske temperaturne razlike mogu biti zadate po debljini od spoljašnje ka unutrašnjoj površini.

Pored prethodnih opterećenja na konturama mogu biti zadati kao granični uslovi pomereanja koja mogu biti nula ili imati neku određenu vrednost i dilatacije koje se mogu zadati za dvodimnzionalne, osnosimetrične i trodimenzionalne elemente.

Za datu konstrukciju može se zadati do 50 nezavisnih opterećenja. Karakteristike materijala se zadaju na posebnim ulaznim karticama. Kada se radi o karakteristikama materijala zavisnim od temperature one se mogu zadati na više kartica. U ovom radu je kartica tip 81 korišćena za unos karaktekristika materijala.

PRITISAK			PRITISAK
KONSTANTNO	LINEARNO	PARABOLIČNO	KONSTANTNO
		-	
			
			



Slike 3. i 4.

Veliki broj elemenata komplikovanijeg oblika zahteva postupak poznat kao numerička integracija u izračunavanju elemenata matrice krutosti. Zavisno od reda upotrebljenog polinoma, postaje različita pravila, pri čemu polinomi višeg reda zahtevaju više referentnih tačaka u svakom elementu. Ova pravila se uvode aktiviranjem NGAUS na kartici tipa 01. NGAUS kontroliše broj tačaka u datom smeru, tako NGAUS=2 za dve dimenzije daje 4 tačke po elementu, a za tri dimenzije 8 tačaka po elementu. Položaj Gauss-ovih tačaka u trouglovima i četvorouglovima za NGAUS=1,2 i 3 prikazana na slici 4.

Tačke su određene numerički s obzirom na topološki smer. Ovo je bitno kada se u Gauss-ovim tačkama štampanju ili crtaju vrednosti napona, tada se smer određuje označavanjem prve dve tačke sa "x". NGAUS nije potreban za procenu matrice krutosti kod sledećih tipova elemenata: EP4, EP6, EPGF, EP3T, EX2, EX4, EX6, EX6F, EX3T, E26, E212, CSB12, PEB12, GBE12, HBE12, PL9, FS12, CS54 I EX9N.

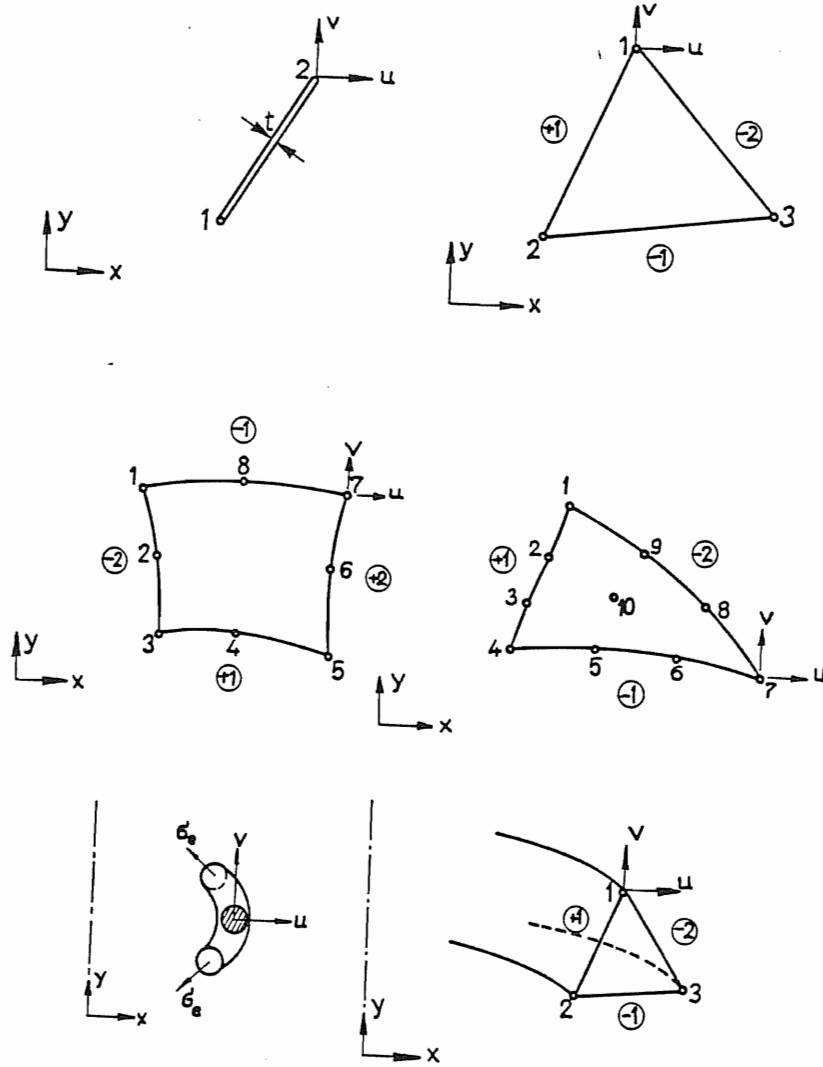
Kako svaka integraciona tačka znatno angažuje kompjutersko vreme, više tačaka podrazumeva i veće troškove. Treba dakle koristiti što manje aproksimacija polinomima, kada to ne izaziva značajnije greške. Preporučene vrednosti NGAUS su zato date u posebnim tabelama.

Za prikazivanje vrste opterećenja može se koristiti program BERSUB.

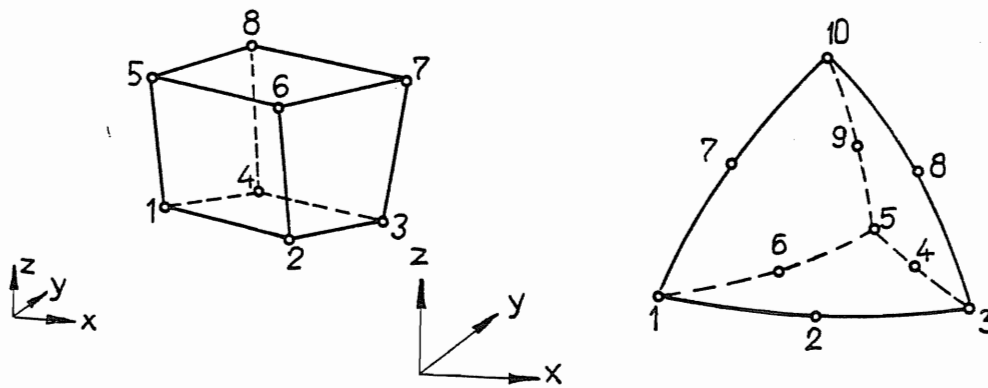
Navedimo zatim neka ograničenja koja ima BERSAFE:

- broj elemenata ne može preći 9999
- broj čvorova ne može preći 9999
- najviše 50 slučajeva opterećenja
- najviše 50 kartica opterećenja po elementu ili podstrukturi
- najviše 30 kartica za virtualno širenje pukotina
- do 1500 stepeni slobode na granici podstrukture
- do 12 različitih tipova elemenata u jednom hodu
- do 201 stepeni slobode povezanih sa jednačinom na kartici opštih ograničenja, tipa 15's.

BERSAFE sadrži skup tipiziranih konačnih elemenata, koji se koriste zavisno od vrste razmatranog problema. Za svaki tip elementa definisan je broj čvorova, metod definisanja topologije, promenljive koje su prisutne u svakom čvoru, raspoložive mogućnosti dejstva sila i pretpostavljena pomeranja i naponi u svakom elementu. Za sve tipove elemenata, promenljive su ustanovljene sa "default" osama. Za čvorove duž stranica elementa, mora se voditi računa u definisanju geometrije, koja se sračunava automatski ukoliko je izostavimo. Ako su dati čvorovi na sredini stranica kvadratnog elementa, oni će ležati na upravnoj bisektrisi između dva čvora, u protivnom javiće se povećanje greške. Stranica elementa se definiše parabolom koja se automatski postavlja da prolazi kroz tri čvora. Za prostorni element postavljaju se dodatni čvorovi, koji leže na jedno-trećinskoj i dvo-trećinskoj bisektrisi upravnoj na stranicu u cilju postizanja veće tačnosti. Stranica elementa se definiše prostornom krivom, koja se automatski postavlja kroz četiri čvora. Za većinu konačnih elemenata, naponi imaju komponente u kartezijskim pravcima, i dati su u čvorovima i Gauss-ovim tačkama. Oni se mogu pretstaviti i u polarno-cilindričnim i sfernim koordinatama, ako se tako definiše pomoću ICOORD(4) na kartici 01. Na slici 5. prikazani su konačni elementi EP4, EP6, EP16 i EP20, zatim EX2 i EX6, a na slici 6. elementi EZ24 i EZ30. Ovo su samo neki od elemenata definisanih u BERSAFE-u.

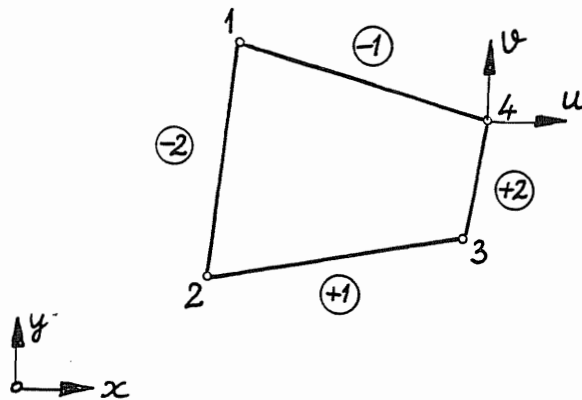


Slika 5.



Slika 6.

Konačni element koji je u ovom radu korišćen za rešavanje problema naponskog i deformacionog stanja u eliptičnom prstenu opterećenog koncentrisanim silama i kontinualnim opterećenjem je EP8 koji je prikazan na slici 7.



Slika 7.

Opišimo sada karakteristike ovog konačnog elementa. Ovaj konačni element ima 4 čvora, a topološki smer je suprotan kazaljka na satu i može se početi u bilo kom čvoru. Promenljive su  $u$  i  $v$  u pravcu Descartes-ovih koordinata u čvoru. Opterećenja ili granične vrednosti koje se mogu zadati su sledeće:

- 1) Koncentrisane sile u čvorovima, ali zadate po jedinici debljine
- 2) Temperature u čvorovima uključujući i termičke dilatacije
- 3) Gravitaciona opterećenja kao posledica mase tela i ubrzanja zemljine teže
- 4) Kontinualno raspodeljene sile duž stranica elemenata, koje su zadate kao sila po jedinici dužine i koje deluju upravno na stranicu. Pozitivne su ako se radi o pritisku. Takođe dat je indikator  $\pm 1$  i  $\pm 2$  kao što je prikazano na slici 39. a koji određuje prvi čvor u topološkom smeru.
- 5) Centrifugalne sile koje dejstvuju na čitavu strukturu oko ose  $z$ .
- 6) Proizvoljno usmerene dilatacije, za koje se pretpostavlja da su konstantne za ceo element

Karakteristike ovog elementa su takođe da se pretpostavlja konstantan napon duž stranica, a linearna promena pomeranja i temperature duž stranica. Smatra se takođe da je element EP8 konstantne debljine. Naponi na elementu su u Descartes-ovom koordinatnom sistemu  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$ .

Rešenje sa unosom podataka u BERSAFE preko "kartica" je napravljeno u cilju smanjenja mogućnosti greške pri unosu podataka. U stvari, ne radi se o pravim karticama, već o fajlovima koji ispunjavaju funkciju, koju su nekad vršile kartice. Svaki tip "kartice" sadrži određenu vrstu informacije koja može biti zadavana u utvrđenom ili slobodnom formatu. Unutar svakog tipa kartice način davanja informacije je određen pravilima. Tip kartice određuje se brojem, a sve kartice istog tipa, grupisane su zajedno i uređene su nekim poretком unutar tipa. Sve kartice osim "00", "01" i "99" mogu se izostaviti ukoliko informacija vezana za tu karticu nije potrebna.

Objasnimo, uz kratak opis njihovog sadržaja, kada se pojedine kartice koriste.

KARTICA TIP 00: Ovo je kartica koja sadrži naziv posla. Ona se uvek mora dati.

Kartica tipa 00 se može takođe upotrebiti bilo gde, pri unosu podataka, za poruke i komentare.

KARTICA TIP 01: Ova kartica daje informacije o poslu koji se obavlja. Sadrži različite kontrolne parametre, kao što su opcije za štampanje, zatim "default" vrednosti, zatim glavne tipove elemenata i materijal koji se koristi. Jedna kartica ovog tipa mora biti zadata.

KARTICA TIP 02: Ovo je druga kartica sa dodatnim informacijama o poslu i može se izostaviti.

KARTICA TIP 11: Ovo je topološka kartica, koja daje redosled čvorova na elementima. Ova kartica nije neophodna ukoliko se mreža generiše programom kao što je BERGEN. Međutim podaci dobijeni programom za generisanje mreže, mogu se promeniti korišćenjem ove kartice.

KARTICA TIP 12: Ovo je pomoćna topološka kartica, koja definiše razdvajanje čvorova i može se izostaviti ukoliko se ne javlja razdvajanje čvorova odnosno nema pukotina.

KARTICA TIP 13: Izjednačava proizvoljne stepene slobode kretanja.

KARTICA TIP 14: Izjednačava čvorove, sa bilo kojim brojem stepeni slobode kretanja po čvoru.

KARTICA TIP 15: Ograničava stepene slobode kretanja.

KARTICA TIP 16: Definiše podstrukture iz liste čvorova ili stepena slobode. Potrebna je za (ITYPE=3) podstrukture čija topologija se ne uklapa u karticu 11.

KARTICA TIP 21: Definiše položaj čvorova, tj. sadrži koordinate čvorova i temperature u čvorovima. Dopunski čvorovi na sredini stranica konačnih elemenata ne moraju biti određeni, ukoliko se temperatura i geometrija, nezavisno jedno od drugog, linearno menjaju duž stranice. Ova kartica nije neophodna ukoliko su koordinate čvorova određene korišćenjem programa za generisanje mreže, slično kao kod kartice 11.

KARTICA TIP 22: Geometrija čvorova, sa alternativnim formatom koji služi da se omogući određivanje koordinata ili temperatura za čvorove gde se ta veličina ne menja.

KARTICA TIP 23: Služi u specijalnom slučaju kod mehanike loma.

KARTICA TIP 24: Definiše lokalne koordinatne sisteme u čvorovima, za stepene slobode određene u svakom čvoru posebno.

KARTICA TIP 25: Definiše geometriju čvorova i temperaturu, slično kao kartica 21 ali sa većom tačnošću na ulaznim podacima.

KARTICA TIP 31: Služi za povezivanje elemenata. Sadrži podatke o materijalu, tipu i debljini za određene elemente različite od "default" vrednosti datih na kartici 01.

KARTICA TIP 41: Definiše vrstu naponskog stanja.

KARTICA TIP 51: Definiše podatke o opterećenju koje deluje na stranice ili čvorove.

KARTICA TIP 52: Služi da bi izbegli veliki broj kartica tipa 51, koje imaju iste podatke za opterećenja različitih elemenata ili čvorova. Ove kartice moraju pratiti osnovnu karticu tipa 51.

KARTICA TIP 71 i 72: Definišu podatke o zadatim pomeranjima.

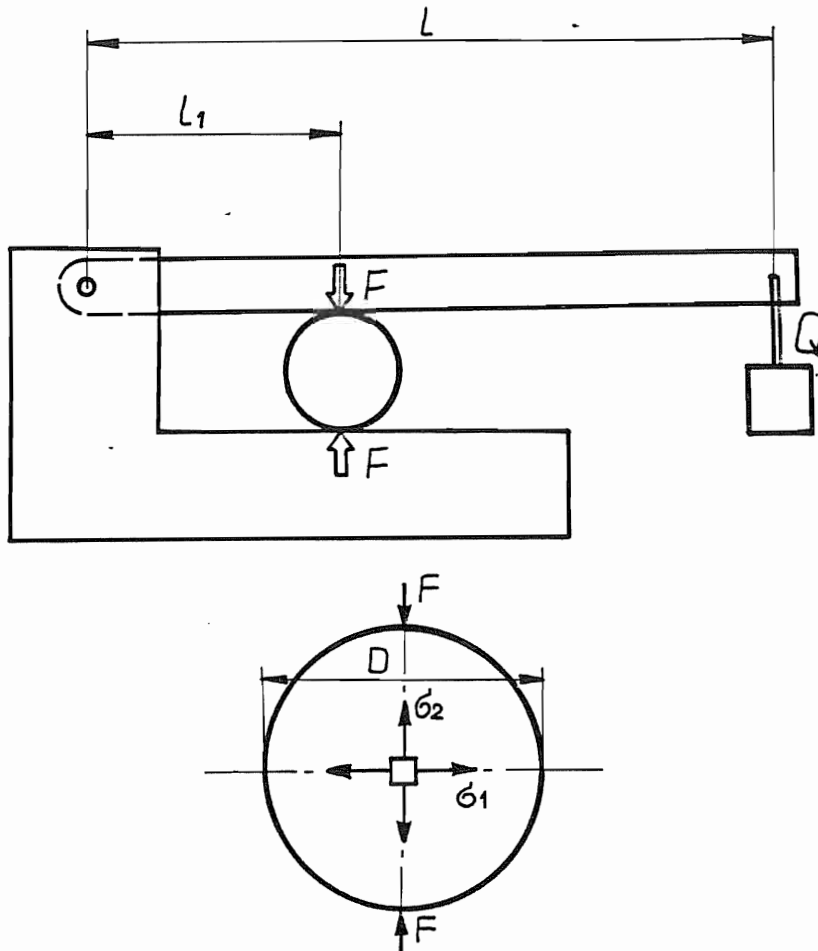
KARTICA TIP 81: Definiše podatke o materijalu. Za izotropne materijale svaka kartica ovog tipa određuje vrstu materijala i referentnu temperaturu. Kod ortotropnih materijala tri kartice određuju materijal i referentnu temperaturu. Korišćenjem više kartica za isti materijal može se odrediti promena mehaničkih i drugih karakteristika materijala u funkciji temperature. Pri tome se koristi linearna interpolacija. Takve kartice se grupišu uređeno sa porastom temperature.

KARTICA TIP 99: Ovo je završna ili krajnja kartica, koja uvek mora biti data kao poslednja kartica ulaznih podataka.

## Prilog IV

### Baždarenje fotoelastičnog materijala na disku i štapu

Baždarenje na disku je realizovano tako što je od istog materijala od koga je izrađen model načinjen i disk prečnika  $D=40\text{mm}$ . Ovaj disk optereti se dijametralno, koncentrisanim silama  $F$  u mehanizmu za opterećivanje, kao što je prikazano na slici 1.



Slika 1.

Pošto su u teoriji elastičnosti izvedeni izrazi za glavne normalne napone u centru diska [17]:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{2F}{\pi Dh} \\ \sigma_2 &= -\frac{6F}{\pi Dh} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (1)$$

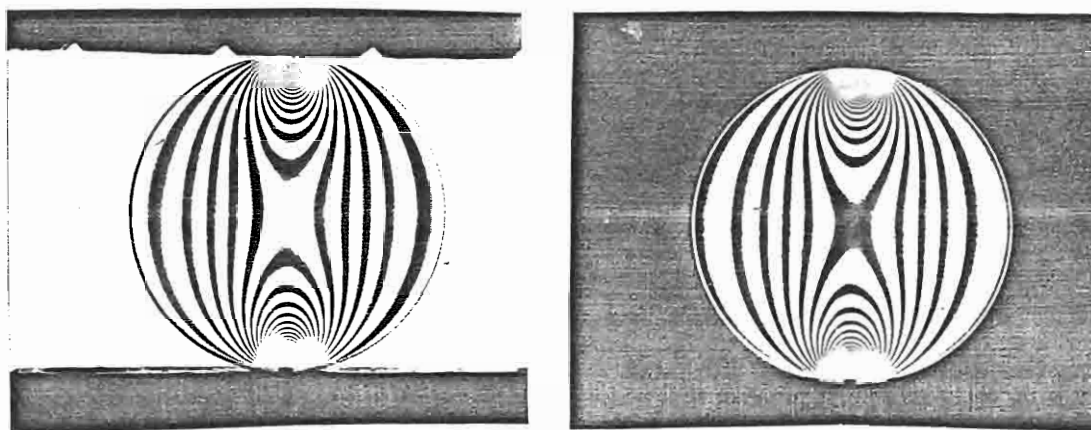
Zamenom ovih izraza u jednačini (227) sledi relacija za naponsko-optičku konstantu u obliku:

$$f_\sigma = \frac{8F}{\pi DN_0} \quad \dots \dots \dots (2)$$

Treba naglasiti da je poluga mehanizma prikazanog na slici 1 prethodno uravnotežena, pa njena težina nema uticaja na silu koja deluje na disk, a koja se određuje preko relacije:

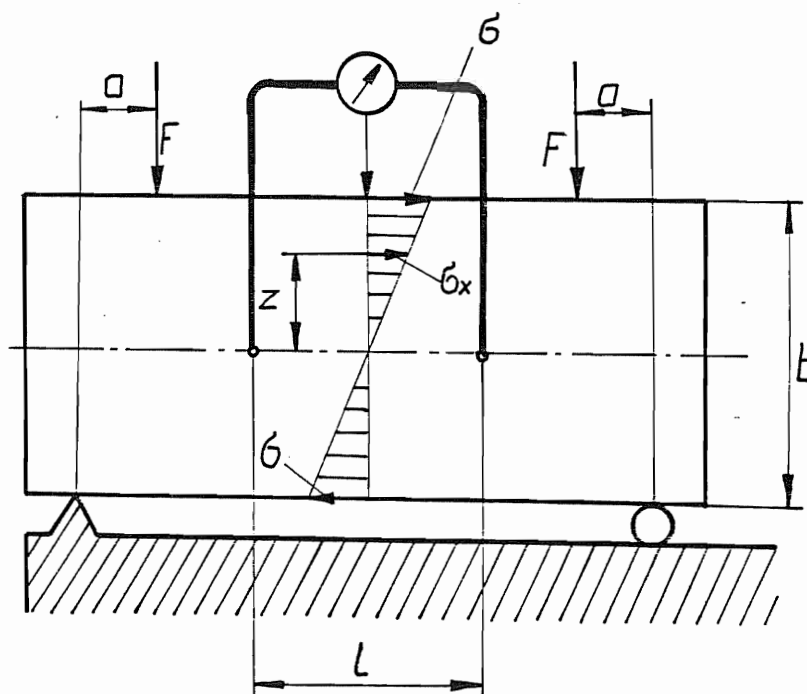
$$F = \frac{1}{l_1} Q \quad \dots \dots \dots (3)$$

Gde u našem slučaju treba staviti sledeće vrednosti:  $l=80\text{ cm}$ ,  $l_1=12\text{ cm}$ ,  $Q=13\text{ kg}\cdot 9.81\text{ m/s}^2=127.53\text{ N}$ , pa se dobija:  $F=850.2\text{ N}$ . Kompenzacijom po Tardy-ju i interpolacijom sa fotografija izohroma u svetlom i tamnom polju, koje su prikazane na slici 2-a,b određena je vrednost izohroma u sredini diska:  $N_0=4.95$ . Sada zamenom vrednosti  $D$ ,  $F$  i  $N_0$  u izrazu (2) dobijamo vrednost naponsko optičke konstante  $f_{\sigma}=10.93443\text{ N/mm}$ .



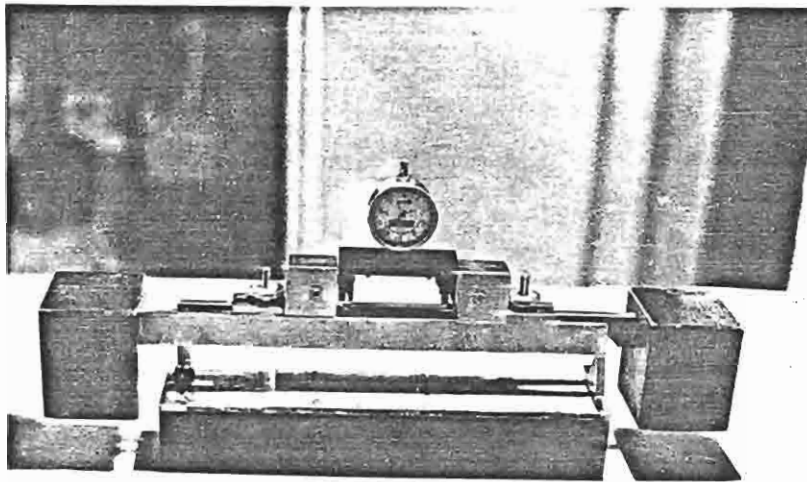
Slika 2.

Baždarenje na štapu opterećenom na savijanje, realizuje sa tako, što se štap izrađen od istog materijala kao i model, optereti na čisto savijanje. Šematski prikaz takvog štapa da je na slici 3. a na slici 4. data je fotografija, na tom principu praktično realizovanog Tiedemann-ovog uređaja za baždarenje.



Slika 3.





Slika 4.

Maksimalni normalni napon pri čistom savijanju je u tačkama ivičnih vlakana štapa za poprečne preseke i dat je izrazom:

$$\sigma_f = \frac{M_f}{W_x} = \frac{6a F}{h \cdot b^2} \dots\dots\dots (4)$$

gde je:

- $M_f$  - moment savijanja,
- $W_x$  - otporni moment,
- $a$  - rastojanje pravca sile  $F$  od oslonca,
- $b$  - širina štapa i
- $h$  - debljina štapa.

Ugib elastične linije na sredini raspona  $l$  dat je izrazom:

$$w = \frac{M l^2}{8EI_x} = \frac{3 a l^2 F}{2Ehb^3} \dots\dots\dots (5)$$

gde je:

- $E$  - modul elastičnosti,
- $I_x$  - aksijalni moment inercije štapa.

Pošto je na slobodnoj ivici štapa jedan od glavnih napona jednak nuli, iz jednačine (227) dobijamo relaciju:

$$f_\sigma = \frac{\sigma_f h}{N_k} \dots\dots\dots (6)$$

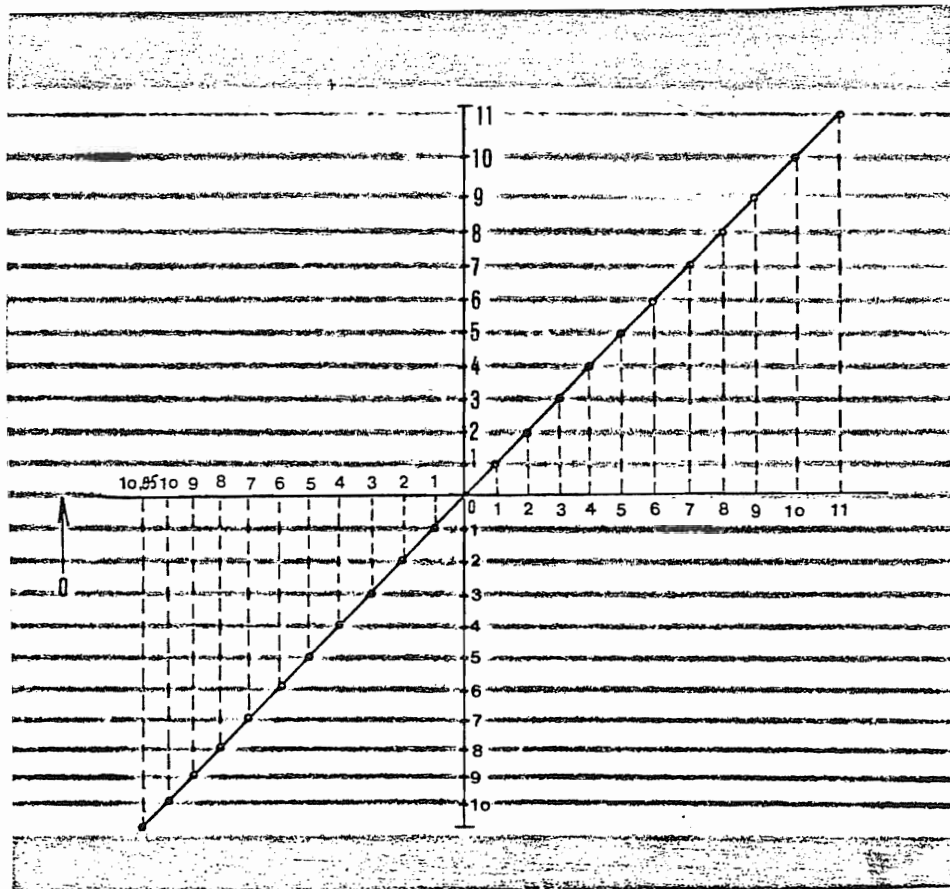
gde je:  $N_k = (N_{kg} + N_{kd})/2$  srednja vrednost reda izohrome na ivici štapa, a  $N_{kg}$  i  $N_{kd}$  vrednost reda izohroma na gornjoj i donjoj ivici štapa respektivno.

Zamenom izraza (4) u izrazu (6) dobija se relacija za određivanje naponsko optičke konstante:

$$f_\sigma = \frac{6aF}{N_k b^2} = \frac{6M_f}{N_k b^2} \dots\dots\dots (7)$$

Korišćenjem slike izohroma napregnutog štapa u tamnom polju, koa što se vidi na slici 5. odredimo red izohroma na ivici  $N_{kg} = 10.75$  i  $N_{kd} = 10.9$ , pa se dobija  $N_k = 10.825$ . Pošto je za Tiedemann-ov uređaj za baždarenje, koji je ovde korišćen moment savijanja dat  $M_f = 784.8$  Ncm, a dimenzije štapa  $b = 20$  mm i  $h = 10$  mm, dobija se da je vrednost naponsko optičke konstante:  $f_\sigma = 108.7482$  N/cm = 10.875 N/mm.

U cilju određivanja modula elastičnosti E fotoelastičnog materijala, na štap izložen čistom savijanju se pričvršćuje komparater kao što se vidi na slikama 3. i 4., kojim se određuje ugib tačaka na ivičnim vlaknima štapa na sredini raspona  $l=60$  mm.



Slika 5.

Veličina ugiba  $w'$  izmerena komparaterom je manja od ugiba elastične neutralne linije  $w$ , usled poprečne dilatacije za iznos  $\Delta w$ . Veličinu  $\Delta w$  određujemo preko relacije:

$$\Delta w = \int_0^{b/2} \varepsilon_x dz = \frac{\mu}{E} \int_0^{b/2} \sigma_x(z) dz \quad \dots \quad (8)$$

odnosno, pošto je  $\sigma_x = \frac{2\sigma_f}{b} z$ , sledi:

$$\Delta w = \frac{2\sigma_f}{b} \frac{\mu}{E} \int_0^{b/2} z dz = \frac{\mu b}{4E} \sigma_f = \frac{3}{2} \frac{\mu a F}{E b h} \quad \dots \quad (9)$$

Ugib izmeren komparaterom će onda biti:

$$w' = w - \Delta w = \frac{3M}{2Ebh} \left( \frac{l^2}{b^2} - \mu \right) \quad \dots \quad (10)$$

Pa se odavde može odrediti modul elastičnosti, izvođenjem relacije:

$$E = \frac{3M}{2bh w'} \left( \frac{l^2}{b^2} - \mu \right) \quad \dots \quad (11)$$

U našem primeru uzimamo da je Poisson-ov koeficijent za ARALDIT-B  $\mu=0.38$ , a izmereni ugib je  $w'=0.145$  mm. Primenom relacije (11), dobija se modul elastičnosti:  $E=349912.5517$  N/cm<sup>2</sup> = 3499.125517 N/mm<sup>2</sup>  $\approx$  349.92 kN/cm<sup>2</sup>.

## Prilog V

### Preslikavanje polarnih u eliptično hiperboličke koordinate i eliptično hiperboličke koordinate tenzora napona

Uzmimo u razmatranje eliptični prsten opterećen na unutrašnjoj i spoljašnjoj konturi kontinualnim jednako raspodeljenim opterećenjem na delovima kontura omeđenim hiperbolama zadatih parametara.

Neka su hiperbole koje ograničavaju opterećenja date izrazom:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots\dots\dots (1)$$

Ovim hiperbolama koje se nalaze u z-ravni odgovaraju prave u  $\zeta$ -ravni koje prolaze kroz koordinatni početak  $\zeta=0$ .

Obratno, ako je prava  $\varphi = \beta = \text{const}$ , zadata izrazom  $\zeta = \rho e^{i\varphi} = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , odnosno  $\xi = \rho \cos \varphi$ ,  $\eta = \rho \sin \varphi$ , primenom funkcije preslikavanja:

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right) \quad \dots\dots\dots (2)$$

gde je:

$$R = \frac{a+b}{2} \quad \text{i} \quad m = \frac{a-b}{a+b}$$

u z-ravni dobijamo hiperbolu:

$$\begin{aligned} z = \omega(\zeta) &= R\left(\rho e^{i\varphi} + \frac{m}{\rho e^{i\varphi}}\right) = \\ &= R\left(\rho + \frac{m}{\rho}\right) \cos \varphi + R\left(\rho - \frac{m}{\rho}\right) i \sin \varphi \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

Odnosno:

$$\begin{aligned} x &= R\left(\rho + \frac{m}{\rho}\right) \cos \varphi \\ y &= R\left(\rho - \frac{m}{\rho}\right) \sin \varphi \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

gde je:  $\varphi = \text{const}$ ,  $\cos \varphi = \text{const}$  i  $\sin \varphi = \text{const}$ .

Ilustracija ovakvog preslikavanja data je na slici 1.

Analogno prethodnom, primenom funkcije preslikavanja (2), koncentričnim krugovima  $\rho = \text{const}$  u  $\zeta$ -ravni odgovaraju, konfokalne elipse različitih poluosa, koje leže u z-ravni. Pri tome, su poluose ovih elipsi određene izrazima:

$$\begin{aligned} a_i &= R\left(\rho_i + \frac{m}{\rho_i}\right) \\ b_i &= R\left(\rho_i - \frac{m}{\rho_i}\right) \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

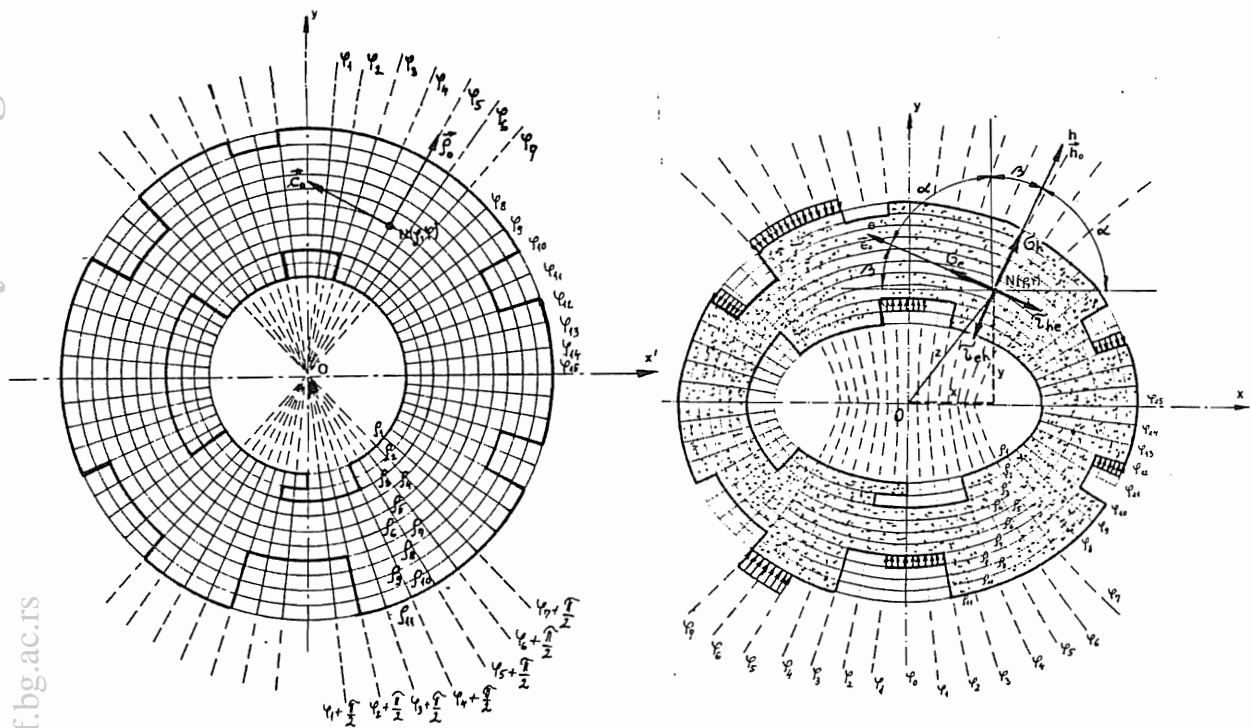
Posmatrajmo familiju konfokalnih elipsi i odgovarajućih ortogonalnih hiperbola:

$$\begin{aligned} \left[\frac{x}{R\left(\rho + \frac{m}{\rho}\right)}\right]^2 + \left[\frac{y}{R\left(\rho - \frac{m}{\rho}\right)}\right]^2 &= 1 \\ \left[\frac{x}{R \cos \varphi}\right]^2 + \left[\frac{y}{R \sin \varphi}\right]^2 &= 1 \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

gde je:

$$R = \frac{a+b}{2} \quad \text{i} \quad m = \frac{a-b}{a+b}$$

a  $\rho$  i  $\varphi$  eliptično - hiperbolične koordinate.



Slika 1.

Na slici 1. prikazana je familija elipsi  $\rho = \text{const}$  i familija hiperbola  $\varphi = \text{const}$  i ortovi  $\bar{h}_0$  i  $\bar{e}_0$  u tangencijalnom pravcu na elipse, odnosno hiperbole, pri čemu su ovi ortovi u odnosu na ortove  $\bar{i}$  i  $\bar{j}$  Descartes-ovog koordinatnog sistema dati relacijama:

$$\begin{aligned} \bar{e}_0 &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left[ -\left(\rho + \frac{m}{\rho}\right) \bar{i} + \text{ctg} \varphi \left(\rho - \frac{m}{\rho}\right) \bar{j} \right] \\ \bar{h}_0 &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left[ \text{ctg} \varphi \left(\rho - \frac{m}{\rho}\right) \bar{i} + \left(\rho + \frac{m}{\rho}\right) \bar{j} \right] \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

gde je:

$$\Delta = \left(\rho + \frac{m}{\rho}\right)^2 + \text{ctg}^2 \varphi \left(\rho - \frac{m}{\rho}\right)^2$$

Označimo sa  $\sigma_e$  normalni napon u tački  $N(x, y)$  odnosno  $N(\rho, \varphi)$  za presečnu ravan ploče tangencijalno na hiperboličnu koordinatnu liniju, a sa ortom normale  $\bar{e}_0$  u pravcu tangente na eliptičnu koordinatnu liniju, dok sa  $\tau_{eh}$  označimo smičući napon za presek tangencijalno na eliptičnu koordinatnu liniju, a sa ortom normale  $\bar{h}_0$  u pravcu tangencijalno na hiperbolu, te su fizičke koordinate matrice tenzora napona:

$$\begin{aligned} \sigma_e &= \frac{1}{\Delta} \left\{ \sigma_x \left(\rho + \frac{m}{\rho}\right)^2 + \sigma_y \text{ctg}^2 \varphi \left(\rho - \frac{m}{\rho}\right)^2 - 2 \tau_{xy} \text{ctg} \varphi \left(\rho^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) \right\} \\ \sigma_h &= \frac{1}{\Delta} \left\{ \sigma_x \text{ctg}^2 \varphi \left(\rho - \frac{m}{\rho}\right) + \sigma_y \left(\rho + \frac{m}{\rho}\right)^2 - 2 \tau_{xy} \text{ctg} \varphi \left(\rho^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) \right\} \\ \tau_{eh} = \tau_{he} &= \frac{1}{\Delta} \left\{ (\sigma_x - \sigma_y) \text{ctg} \varphi \left(\rho^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \tau_{xy} \left[ \text{ctg}^2 \varphi \left(\rho - \frac{m}{\rho}\right)^2 - \left(\rho + \frac{m}{\rho}\right)^2 \right] \right\} \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

gde su korišćene relacije:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{ctg} \varphi \left( \rho - \frac{m}{\rho} \right)$$

$$\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left( \rho + \frac{m}{\rho} \right) \dots\dots\dots (9)$$

U ovim izrazima  $\alpha$  predstavlja ugao koji ort  $\vec{h}_0$  zaklapa sa pravcem x ose, odnosno ugao koji ort  $\vec{e}_0$  zaklapa sa pravcem y ose, kao što je to prikazano na slici 1.

## Literatura

- [1] Aben H. - Integrated Photoelasticity, New York, 1979
- [2] Абовский П.Н., Андреев П.Н., Деруга П.А. - Вариационны принципы теории упругости и теории оболочек, Москва, 1978
- [3] Ajovalasit A. - Experimental methods in photothermoelasticity, Udine, 1970
- [4] Alfirević I., Jecić S. - Fotoelasticimetrija, Zagreb, 1982
- [5] Alfirević I. - Viša nauka o čvrstoći, Zagreb, 1975
- [6] Александров Я.А., Ахмедзянов Х.М. - Поляризациино-оптические методы механики деформируемого тела, Москва, 1973
- [7] Amenzade A.Y. - Theory of Elasticity, Moscow, 1979
- [8] Anđelić T. - Tenzorski račun, Beograd, 1980
- [9] Arril J. - Encyclopedia Vishay d'Analyse des Contraintes, Paris, 1974
- [10] Batista M., Kosel F., Baebler M. - Analitično določanje napetosno-deformacijskega stanja za ravninska končna dvakrat povezana območja, zbornik radova, Večiči, 1984
- [11] Белоносов С.М. - Основные плоские статические задачи теории упругости для односвязных и двусвязных областей, Новосибирск, 1962
- [12] Brčić V. - Otpornost materijala sa teorijom elastičnosti, Beograd, 1965
- [13] Brčić V., Čukić R. - Eksperimentalne metode u projektovanju konstrukcija, Beograd, 1965
- [14] Brčić V. - Photoelasticity in theory and practice, Udine, 1970
- [15] Buchwald V.T., Davies O.A.G. - Plane elastostatic boundary value problems of double connected regions, Sydney, 1962
- [16] Ćirić V. - Uvod u programiranje i programski jezik Fortran, Beograd, 1981
- [17] Dally W.J., Riley F.W. - Experimental stress analysis, Cambridge, 1967
- [18] Демидов П.С. - Теория упругости, Москва, 1979
- [19] Доннелл Г.Л. - Балки пластины и оболочки, Москва, 1982
- [20] Durelli J.A. - Applied stress analysis, New Jersey, 1982
- [21] Дюрелли А., Райли У. - Введение в фотомеханику, Москва, 1969
- [22] Eibl J. - Zur Anwendung Konformer Abbildungen in der Membrantheorie bei Schalen nach Flächen 2. Ordnung mit positiver Gauß-Krümmung, Düsseldorf, 1969
- [23] England A.H. - Complex Variable Methods in Elasticity, London, 1971
- [24] Fempl S. - Elementi varijacionog računa, Beograd, 1965
- [25] Frocht M.M. - Photoelasticity (volume I,II), New York, 1948
- [26] Frocht M.M. - Photoelasticity - The selected scientific papers, Oxford, 1969
- [27] Frocht M.M. - Photoelasticity (Proceedings of international simposium in Chicago), Oxford, 1963
- [28] Girkmann K. - Površinski sistemi nosača, Beograd, 1965
- [29] Hedrih K., Jecić S., Jovanović D. - Glavni naponi u tačkama eliptično-prstenaste ploče ravno napregnute parovima koncentrisanih sila, Tehnika, Beograd, 1990
- [30] Hedrih K., Jovanović D. - The stress and strain state of the elliptical-annular plate by the complex variable function and conformal mapping method, Hannover, GAM, 1990
- [31] Hedrih K., Jovanović D. - Primena funkcije kompleksne promenljive i konformnog preslikavanja za određivanje eliptično-hiperboličnih koordinata tenzora napona ravno napregnutih ploča, Zbornik radova, Ohrid, 1990

- [32] Hedrih K., Jecić S., Jovanović D. - Main Stresses at the countur points of the elliptical-annular plate stressed by pairs of opposing concentrated forces, Hannover, GAM, 1990
- [33] Hedrih K. - Izabrana poglavlja teorije elastičnosti, Niš, 1988
- [34] Hedrih K., Mitić S. - Ravno naprezanje kružno-prstenaste ploče, Zbornik radova, Vrnjačka Banja, 1988
- [35] Hedrih K., Mitić S. - Analiza stanja napona i stanja deformacija ravno napregnute kružno-prstenaste ploče primenom funkcije kompleksne promenljive, Tehnika, Beograd, 1990
- [36] Hedrih K. - Osnovi metode konačnih elemenata (MF-Niš), Niš, 1978
- [37] Hellen K.T. - Bersafe (user's guide), Berkley, 1983
- [38] Хесин Л.Г. - Метод фотоупругости (том I, II, II), Москва, 1975
- [39] Hetenyi M. - Handbook of Experimental Stress Analysis, New York, 1950
- [40] Heywood R.B. - Photoelasticity for designers, Oxford, 1969
- [41] Hilitčijev J. - Poglavlja iz teorije elastičnosti, Beograd, 1948
- [42] Holister G.S. - Experimental stress analysis, Cambridge, 1967
- [43] Ishlinsky Y.A., Chernousko L.F. - Advances in Theoretical and Applied Mechanics, Moscow, 1981
- [44] Jecić S. - Teorija elastičnosti, Zagreb, 1986
- [45] Jecić S. - Noviji optički postupci u eksperimentalnoj analizi naprezanja, Zbornik radova, Bečići, 1984
- [46] Jaksimović V. - Standardni Fortran, Beograd, 1982
- [47] Josifović M. - Izabrana poglavlja iz elastičnosti i plastičnosti, Beograd, 1976
- [48] Jovanović D. - Pretvarač torzionih veličina, Seminarski rad iz metrologije, Niš, 1983
- [49] Jovanović D. - Primena metode fotoelastičnosti za ispitivanje naponskog stanja eliptično-prstenaste ploče opterećene koncentrisanim silama, Zbornik radova, Ohrid, 1990
- [50] Jovanović D. - Određivanje faktora koncentracije napona na primeru cevi kružnog poprečnog preseka, sa poprečnim kružnim otporom, pri opterećenju aksijalnim silama pritiska primenom metode refleksne fotoelastičnosti, Zbornik radova MFN, Niš, 1990
- [51] Jovanović D. - Seminarski rad iz teorije elastičnosti, Niš, 1985
- [52] Kalajdžić M. - Metod konačnih elemenata, Beograd, 1978
- [53] Kalajdžić M. - Metod konačnih elemenata u Basic-u, Beograd, 1988
- [54] Kalandiya A.I. - On the Hertz Problem of the Compression of Elastic Bodies, Gruz SSR, 1960
- [55] Kaufmann R. - Das spannungsoptische oberflächenschichtverfahren, Seminar "Primenjena fotoelastičnost", Rijeka, 1984
- [56] Kojić M. - Teorija elastičnosti, Kragujevac, 1975
- [57] Колчанова Е.А., Швецов А.В. - О построении конформного отображения сложной симметричной двухсвязной области, Москва, 1967
- [58] Корн Г., Корн Т. - Справочник по математике, Москва, 1970
- [59] Космодамианский А.С. - Плосклязадача теории упругости для пластин с отверстиями вырезами и выступами, Киев, 1975
- [60] Космодамианский С.А., Шалдырван А.Б. - Толстые много-связные пластины, Киев, 1978

- [61] Kostrenčić Z. - Teorija elastičnosti, Zagreb, 1982
- [62] Козачок Г.А. - Холографические методы исследования в экспериментальной механике, Москва, 1984
- [63] Краснов Л.М., Макаренко И.Г., Киселев И.А. Вариационное исчисление, Москва, 1973
- [64] Kuske A. - Taschenbuch der Spannungsoptik, Stuttgart, 1971
- [65] Kuske A., Robertson G. - Photoelastic Stress Analysis, New York, 1974
- [66] Lekhnitskii G.S. - Theory of Elasticity of an Anisotropic Body, Moscow, 1982
- [67] Leko M., Plavšić M. - Rešeni problemi iz tenzorskog računa, Beograd, 1973
- [68] Макаров А.Р. - Тензометрия в машиностроении, Москва, 1975
- [69] Mićunović M. - Primenjena mehanika kontinuuma, Beograd, 1983
- [70] Milovanović G., Đorđević Đ. - Programiranje numeričkih metoda na Fortran jeziku, Niš, 1979
- [71] Mitrović S.D. - Kompleksna analiza, Beograd, 1981
- [72] Muskelishvili N.I. - Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, Moscow, 1954, Leyden, 1962 (English translation)
- [73] Muškis D.A. - Advanced mathematics for engineers, Moscow, 1975
- [74] Narelović N., Plavšić M. - Teorija elastičnosti, Beograd, 1985
- [75] Нарасимхамурти Т. - Фотоупругие и электрооптические свойства кристаллов, Москва, 1984
- [76] Новацкий В. - Теория упругости, Москва, 1979
- [77] Parezanović N. Računarske mašine i programiranje, Beograd, 1982
- [78] Parton Z.V., Perlin I.P. - Integral equations in elasticity, Moscow, 1982
- [79] Parton Z.V., Perlin I.P. - Mathematical Methods of the Theory of Elasticity (tom I, II), Moscow, 1984
- [80] Pašić H. - Metod konačnih elemenata, Sarajevo, 1980
- [81] Radojković M. - Ispitivanje konstrukcija (I i II deo), Beograd, 1970
- [82] Rašković D. - Teorija elastičnosti, Beograd, 1985
- [83] Rekach G.V. - Manual of the Theory of Elasticity, Moscow, 1979
- [84] Schöpf J.H. - Räumliche Spannungsoptik, Seminar "Primenjena fotoelastičnost", Rijeka, 1984
- [85] Sekulović M. - Metod konačnih elemenata, Beograd, 1984
- [86] Senjanović I. - Teorija ploča i ljuski, Zagreb, 1982
- [87] Senjanović I. - Metoda konačnih elemenata u strukturnoj analizi brodskih konstrukcija, Zagreb, 1975
- [88] Sokolnikoff I.S. - Mathematical Theory of Elasticity, London, 1956
- [89] Соляник-Красса К.В. - Осесимметричная задача теории упругости, Москва, 1987
- [90] Stojiljković V. - Merenje mehaničkih veličina električnim putem, Niš, 1980
- [91] Шереметев М.П. - Упругое равновесие эллиптического кольца, Москва, 1953
- [92] Šimić V. - Primena funkcije kompleksne promenljive ravanskim problemima teorije elastičnosti anizotropnog tjela, Bečići, 1984
- [93] Timošenko S., Guider N. J. - Teorija elastičnosti, Beograd, 1962
- [94] Timošenko S., Vojnovski-Kruger S. - Teorija ploča i ljuski, Beograd, 1962
- [95] Троицкий А.В., Петрухов В.Л. - Оптимизация формы упругих тел, Москва, 1982
- [96] Vučanović B. - Metodi optimizacije, Novi Sad, 1980
- [97] Vukotić R. Ispitivanje konstrukcija, Beograd, 1982
- [98] Wieringa H. - Experimental Stress Analysis, Dordrecht, 1986



- [99] Wolf H. - Spannungsoptik, Berlin, 1961
- [100] Wu C.K., Hui Y.C. - A Complex -Variable Method for Two-Dimensional Internal Stress Problems and it's Applications to Crack Growth in Nonelastic Materials: Part II - Applications, Journal of Applied Mechanics, vol 54, 1987
- [101] Zandman F., Redner S., Dally W.J. - Photoelastic coatings, Westport, 1977
- [102] Inženjersko-tehnički priručnik - Otpornost materijala, proračun konstrukcija, Beograd, 1979
- [103] Katalog 400 (Katalog mernih traka-Vishay), Measurements group, München, 1984
- [104] Araldit B (CT 200), Härter HT 903 (Tehničko uputstvo) Ciba - Geigy, 1980
- [105] Callibration of photoelasticplastics for two and three-dimensional model analysis, Bulletin T-402, Raleigh, 1979
- [106] Photoelastic models, Bulletin P-1120, Raleigh, 1979
- [107] Precision transmission polariscope systems for photoelastic model analysis, Bulletin S-114, Raleigh, 1976
- [108] Araldit Festharz-Giesssysteme, Araldit B 41 oder B 46, Härter HT 901 oder HT 903, (Tehničko uputstvo) Ciba - Geigy, 1980
- [109] Strain Measurement With The 030-Series Reflection Polariscope, (Technical manual), Raleigh, 1984
- [110] Precision transmission polariscope systems for photoelastic model analysis, Bulletin S-114, Raleigh, 1976