УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

СЕКВЕНЦИЈАЛНИ ТЕСТОВИ

МАСТЕР РАД

МЕНТОР: ПАВЛЕ МЛАДЕНОВИЋ

СТУДЕНТ: САЊА СТАНОЈЕВИЋ 1061/2012

БЕОГРАД, НОВЕМБАР, 2013.ГОД.

САДРЖАЈ

ТЕСТИРАЊЕ СТАТИСТИЧКИХ ХИПОТЕЗА

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

Статистичка хипотеза

Случајне појаве у математичкој статистици описујемо статистичким моделом. Избор статистичког модела у свакој конкретној ситуацији зависи од предзнања о разматраној случајној појави. У многим истраживањима региструју се вредности неке случајне величине (обележја чија расподела није унапред позната). Статистички модел се у таквим ситуацијама задаје фамилијом допустивих расподела тог обележја. Параметарску фамилију допустивих расподела, која зависи од једног или више непознатих параметара, у општем случају означавамо са $P=\{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$, где је ϑ параметар, а Θ параметарски простор.

Свака претпоставка која сужава класу допустивих расподела назива се статистичка хипотеза.

ПРИМЕР 1. Наводимо неколико статистичких хипотеза:

(а) Обележје има нормалну расподелу.

(б) Обележје има експоненцијалну расподелу.

(в) Нормално расподељено обележје има позитивно математичко очекивање.

(г) Нормално расподељено обележје има математичко очекивање једнако датом броју m_0 .

(д) Нормално расподељено обележје има математичко очекивање једнако броју m_0 и дисперзију једнаку датом броју σ_0^2.

(ђ) Обележје има расподелу задату функцијом расподеле F_0.

(е) Два обележја са нормалном расподелом и познатом дисперзијом имају једнака математичка очекивања.

(ж) Два обележја су независна.

Параметарске и непараметарске хипотезе

Приметимо да је у случајевима (в), (г), (д), (е) из примера 1. фамилија допустивих расподела параметарска, а статистичка хипотеза фиксира вредности или сужава скуп допустивих вредности неких параметара од којих зависи расподела. Таква хипотеза зове се *параметарска хипотеза* . Код осталих хипотеза претпоставља се да расподела обележја има дати тип, а не односи се на вредности параметара. Такве хипотезе називају се *непараметарским хипотезама*.

Независно од тога да ли је статистичка хипотеза параметарска или непараметарска, она може једнозначно одређивати расподелу разматраног обележја или само фамилију допустивих расподела сузити на ужу подфамилију (која се може састојати и од бесконачно много расподела). Ако статистичка хипотеза једнозначно одређује расподелу обележја, онда се она назива *проста хипотеза*. У противном хипотеза је *сложена*. Нека, рецимо, фамилија допустивих расподела зависи од параметара $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_r$. Тада је проста свака хипотеза која фиксира вредност сваког од тих параметара, а сложена, на пример, хипотеза која фиксира вредности неких s од тих параметара, при чему је $1 \leq s \leq r$ (у овој ситуацији s је *број ограничења,* а $r - s$ *број степени слободе*).

Тест и критична област теста

Нека је X обележје чију расподелу проучавамо и нека је

$$(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

прост случајни узорак из расподеле $\mathcal{L}(X)$*.* Нека је даље H_0 нека хипотеза о расподели обележја X*.* Један од задатака математичке статистике је да се на основу реализоване вредности $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ узорка тестира, односно провери, да ли је хипотеза H_0 тачна или не. Правило помоћу кога се на основу узорка одлучује да ли треба прихватити као тачну хипотезу H_0 или је одбацити као нетачну, зваћемо *статистички тест*, или кратко *тест*.

Описаћемо општу схему сваког статистичког теста.

Случајни узорак $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ узима вредности у неком подскупу *S* скупа $\mathbb{R}^n$, $S \subset \mathbb{R}^n$. Нека је α број из интервала (0,1) и *W* подскуп скупа $\mathbb{R}^n$ за који важи: Вероватноћа да узорак $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ узме вредност из скупа *W* ако је хипотеза H_0 тачна, није већа од броја α, тј.

$$P\{ (X_1, X_2, \dots, X_n) \in W \mid H_0\} \leq \alpha . \qquad (1)$$

За α узимамо „мале“ вредности, на пример, $\alpha = 0.05$ или $\alpha = 0.01$. Претпоставимо да за реализацију вредности узорка важи $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in W$.

С обзиром да догађај $\{ (X_1, X_2, \dots, X_n) \in W \mid H_0\}$ има малу вероватноћу (не већу од датог броја α), природно је у овом случају одбацити хипотезу H_0 као нетачну. С друге стране, догађај $\{ (X_1, X_2, \dots, X_n) \notin W \mid H_0\}$ има велику вероватноћу (не мању од броја 1- α). Зато, у случају да за реализовани узорак важи $(x_1, x_2, \dots, x_n) \notin W$, нема разлога да сумњамо у тачност хипотезе H_0.

Дефиниција 1. Скуп $W \subset \mathbb{R}^n$ зове се *критична област* за хипотезу H_0, а број α за који важи (1) зове се *праг значајности* или *величина критичне области*. *Статистички тест* (правило статистичког закључивања) на основу критичне области *W*, одређујемо на следећи начин: *ако реализовани узорак$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ припада критичној области, онда хипотезу H_0 одбацујемо. Ако реализовани узорак не припада критичној области, онда хипотезу H_0 прихватамо.*

Термин критична област је природан. То је област која садржи оне вредности $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ које су критичне за дату хипотезу, тј. чија реализација означава одбацивање те хипотезе. Критичну област одређује H_1 (облик), а на основу α и T_n одређујемо границе критичне области *W* . Статистику $T_n = T_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$ зовемо *тест статистика* и претпостављамо да има следећа својства.

(a) Под претпоставком да је тачна хипотеза H_0, позната је тачна расподела статистике T_n или њена приближна расподела за велике вредности обима узорка (ако је хипотеза H_0 сложена, онда је расподела статистике T_n иста за све расподеле обележја које су обухваћене хипотезом H_0).

(б) Статистика T_n, слободније речено, карактерише одступање реализованог узорка од вредности које је природно очекивати, под претпоставком да је хипотеза H_0 тачна.

Критичне области обично имају неки од следећих облика:

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : T_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq C\},$$

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : T_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq C\},$$

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : |T_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \geq C\}.$$

Хипотеза H_0 која се тестира обично се назива *нулта хипотеза*. Претпоставка да обележје X има расподелу која припада оном делу фамилије допустивих расподела, који садржи све расподеле које нису обухваћене нултом хипотезом, назива се *алтернативна хипотеза* и обично се означава са H_1. У случају одбацивања нулте хипотезе H_0 прихвата се алтернативна хипотеза H_1.

У вези са тестирањем статистичких хипотеза приметимо следећу важну чињеницу: Ако реализовани узорак не припада критичној области, тј. ако на основу формулисаног теста прихватамо нулту хипотезу, то још не значи да је нулта хипотеза тачна. Прихватање нулте хипотезе једино означава да између реализованог узорка и теоријске претпоставке о расподели обележја на датом нивоу значајности не постоји битно одступање. Слично, ако реализовани узорак припада критичној области, тј. ако одбацујемо нулту хипотезу, још увек је могућно да је нулта хипотеза тачна.

Код тестирања статистичке хипотезе обично прво задајемо величину критичне области α, а затим одређујемо критичну област. Зато је у релацији (1) исправније писати да важи неједнакост, јер на пример, у случају дискретне расподеле обележја могуће је да не постоји скуп W за који важи једнакост

$$P\{(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in W \mid H_0\} = \alpha.$$

<u>Грешке прве и друге врсте</u>

Приликом тестирања једне исте статистичке хипотезе можемо користити различите тестове, тј. различите критичне области. Да бисмо неком тесту могли дати предност у односу на други, потребно је имати критеријум за упоређивање тестова. Погодан критеријум за упоређивање тестова је моћ теста, и сматраћемо тест бољим уколико је његова моћ већа.

Већ смо рекли да одлука о прихватању или одбацивању нулте хипотезе на основу неког теста може бити погрешна. При томе, могуће су следеће грешке:

(а) *Грешка прве врсте* је грешка која се чини ако се одбаци нулта хипотеза H_0 у ситуацији када је она тачна.

(б) *Грешка друге врсте* је грешка која се чини ако се прихвати нулта хипотеза H_0 у ситуацији када је тачна алтернативна хипотеза.

Вероватноћа грешке прве врсте једнака је величини критичне области W , тј. дата је са

$P\{ (X_1, X_2, \dots, X_n) \in W \mid H_0\} = \alpha,$

А вероватноћа грешке друге врсте (обично је означавамо са β) дата је са

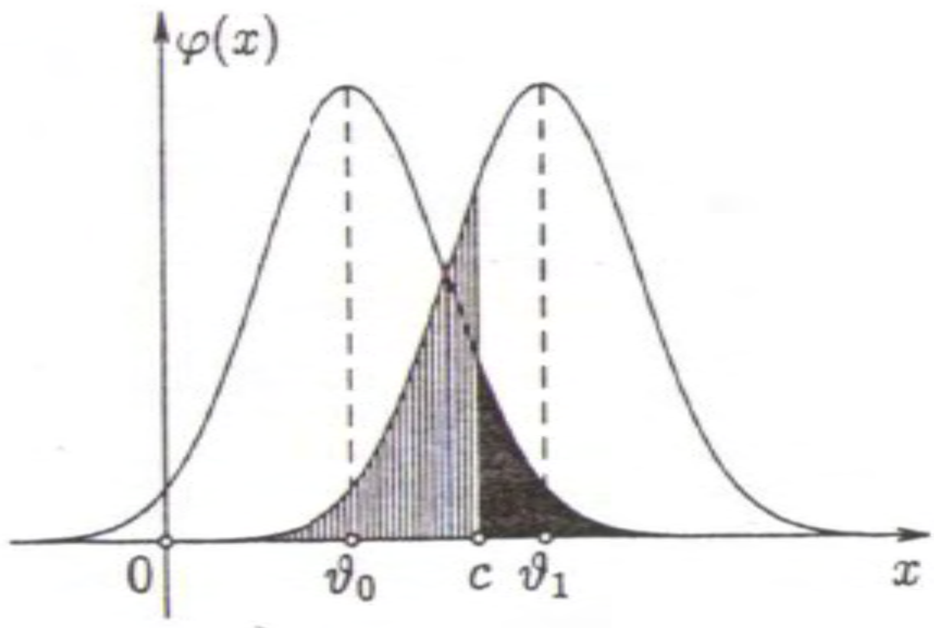
$P\{ (X_1, X_2, \dots, X_n) \notin W \mid H_1\} = \beta.$

Наравно пожељно је да грешке прве и друге врсте буду што је могуће мање. Међутим, обично се смањивањем грешке прве врсте повећава грешка друге врсте, што показује следећи пример.

Пример 2. Нека је $\Theta=\{ \vartheta_0, \vartheta_1\}$ параметарски простор и нека параметру ϑ_0 одговара $\mathcal{N}:(\vartheta_0, \sigma^2)$ расподела, а параметру ϑ_1 одговара $\mathcal{N}:(\vartheta_1, \sigma^2)$ расподела, при чему је $\vartheta_0 < \vartheta_1$, а σ^2 је познат број. Претпоставимо да на основу узорка $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ треба тестирати хипотезу $H_0(\vartheta = \vartheta_0)$ против алтернативе $H_0(\vartheta = \vartheta_1)$. Узмимо за тест статистику узорачку средину, а за критичну област скуп

$W= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \overline{x_n} \geq c \}$.

Повећањем константе c смањује се вероватноћа грешке прве врсте, а повећава вероватноћа грешке друге врсте, види сл.1.



Слика 1.

Због претходно реченог критична област се бира на следећи начин: Фиксира се вероватноћа грешке прве врсте *α*, па се онда међу свим критичним областима величине *α* бира она за коју је вероватноћа грешке друге врсте минимална.

<u>Моћ теста</u>

Претпоставимо да је $\mathcal{F}$ класа допустивих функција расподеле обележја *X*, $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ узорак обима *n*, $W \subset \mathbb{R}^n$ критична област величине *α* за тестирање хипотезе да стварна функција расподеле обележја *X* припада скупу $H_0 \subset \mathcal{F}$. Свака функција расподеле *F* за коју важи $F \in \mathcal{F} \setminus H_0$ назива *се алтернативна функција расподеле* или кратко *алтернативна расподела*.

Моћ теста се дефинише као вероватноћа одбацивања лажне нулте хипотезе и износи 1- β. Моћ теста расте када расте грешка прве врсте, а опада када расте грешка друге врсте. Минимална вредност моћи теста једнака је грешки прве врсте.

Да бисмо одредили функцију моћи теста потребно је знати расподелу тест статистике при свим алтернативним расподелама обележја *X*. А то понекад може бити и посебно тежак задатак.

<u>Центрираност и постојаност теста</u>

С обзиром да се нулта хипотеза H_0 одбацује ако важи { $(X_1, X_2, \dots, X_n) \in W$ }, то је природно сматрати статистички тест заснован на критичној области *W* утолико бољим уколико су веће вероватноће *M*(*F*) при алтернативним расподелама. При томе, пожељно је да статистички тест има својства која уводимо следећим двема дефиницијама.

ДЕФИНИЦИЈА 3. Нека је $\mathcal{F}$ класа допустивих функција расподеле обележја *X* и нека је $W \subset \mathbb{R}^n$ критична област за тестирање хипотезе $H_0 \subset \mathcal{F}$ са прагом значајности *α* на основу узорка $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Статистички тест заснован на критичној области *W* је *центриран* ако за сваку алтернативну функцију расподеле $F \in \mathcal{F} \setminus H_0$ важи неједнакост $M(F) > \alpha$.

Центрираност теста означава да је већа вероватноћа да ће нулта хипотеза H_0 бити одбачена у случају када је она нетачна, него у случају када је тачна. Стога се користи и термин: непристрасност теста.

ДЕФИНИЦИЈА 4. Нека је $\mathcal{F}$ класа допустивих функција расподеле обележја *X* и нека је $W \subset \mathbb{R}^n$ критична област за тестирање хипотезе $H_0 \subset \mathcal{F}$ са прагом значајности *α* на основу узорка $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Статистички тест заснован на критичној области *W* је *постојан* ако за сваку алтернативну функцију расподеле $F \in \mathcal{F} \setminus H_0$ важи једнакост

$$\lim_{n\to\infty} P\{ (X_1, X_2, \dots, X_n) \in W \mid F \} = 1$$

Постојан статистички тест, слободније речено, са вероватноћом блиском јединици препознаје одступања стварне (теоријске) функције расподеле обележја од нулте хипотезе.

1. СЕКВЕНЦИЈАЛНИ ТЕСТОВИ

1.1. УВОДНЕ НАПОМЕНЕ

Резултати које ћемо разматрати су основа оних који се односе на тестирање једноставних хипотеза. Неки резултати који се односе на тестирање сложених хипотеза налазе се у књизи Валда (1947а), а више новијих резултата налазе се у папирима Бернарда (1952) и Кокса (1952). Давид и Крускал (1956) и Руштон (1950,1952) су добили резултате секвенцијалних *t-тестова* .

Основну идеју о секвенцијалним тестовима дали су Доџ и Роминг (1929) који су направили шему дуплог узорковања за одлучивање да ли ће прихватити или одбити много *N* чланова који садрже непознат број дефектних *N* θ, где је θ умножак броја 1/ *N* и припада интервалу *[0,1].* По Доџ-Ромингновој шеми узорак обима n_1 се извлачи из целине и добија се једно од три алтернативних решења, и то у зависности од броја m_1 нетачности (дефектности) нађене у узорку:

1) Прихватити целину ако је $m_1 \leq c_1$.
2) Одбацити целину ако је $m_1 > c_2$.
3) Извући други узорак обима n_2 ако је $c_1 < m_1 \leq c_2$.

Ако је одлука 3) донета, ако се други узорак величине n_2 извуче, онда се једна од две одлуке доноси, у зависности од броја m_2 нетачних чланова у другом узорку:

1) Прихватити целину ако је $m_1 + m_2 \leq c_2$.
2) Одбацити целину ако је $m_1 + m_2 > c_2$

План дуплог узорковања је у потпуности одређен навођењем четири броја n_1, n_2, c_1 и c_2. Укупна величина узорка је очигледно случајна променљива *n* која може да узима две вредности, n_1 и $n_1 + n_2$. Детаљан поступак о плану једног узорковања и дуплог узорковања је дат у књизи Доџија и Романга (1959).

Да бисмо видели да план дуплог узорковања заједно са решењима која су у вези операције у суштини сачињавају статистички тест, можемо само да имамо у виду да се одбацивање целине јавља ако и само ако дводимензионална случајна променљива *(*m_1, m_2*)* припада критичној области *W* дефинисаној као $E_1 \cup E_2$, где је

E_1 је скуп тачака у простору узорка (m_1, m_2) за које је $m_1 > c_2$ и E_2 је скуп за који важи $c_1 < m_1 \leq c_2$ и $m_1 + m_2 > c_2$. *P(W* |θ*)* је вероватноћа одбацивања целине ако је његова фракција (удео) оштећења θ, и може да се напише без нарочитих потешкоћа у зависности од вероватноћа датих у хипергеометријским расподелама. *P(W* |θ*)* као функција од θ је наравно, моћ функције "теста" *W* . Ако допустимо :

$L(\theta) = P(\overline{W}|\theta)$,

тада је $L(\theta)$ вероватноћа прихватања целине која има дефект θ. Кажемо да је целина у зони предности (прихватања) ако је $\theta \leq \theta_0$, у неутралној зони ако је $\theta_0 < \theta < \theta_1$, у зони одбацивања ако је $\theta \geq \theta_1$. За дати ризик произвођача α (вредност грешке прве врсте) за $\theta = \theta_0$ и потрошачке вредности ризика β (вредност грешке друге врсте) за $\theta = \theta_1$ имамо да је

$L(\theta_0) = 1-\alpha$, $\qquad L(\theta_1) = \beta$

где су у пракси, вредности α и β обично узимају из интервала [0.01,0.10]. Карактеристична крива операције тј. график $L(\theta)$ као функције од θ, пролази кроз тачке (0,1) , (θ_0, 1-α) , (θ_1,β) и (1,0).

Идеја о тачнијој секвенцијалној процедури је дата захваљујући Барткију (1943) који је проширио појам двоструког узорковања на *вишеструко узорковање* за случај бесконачно велике целине која има непознату фракцију оштећења θ. Други рани примери математичких студија о вишестепеним процедурама укључују Махаланобисове серије узорака пописа јутара земљишта засађеног у Бенгалу ,и Хотелингсово (1941) запажање о низу експеримената да би се одредио максимум регресионе функције, и стохастички апроксимациони методи по Диксону и Муду (1948). Међутим, Валд је предузео главни корак ка општој теорији секвенцијалне анализе, онакве какве познајемо данас. У овом поглављу представићемо само кратак приказ неких од основних Валдових резултата у секвенцијалној анализи.

1.2. ОСНОВНА СТРУКТУРА СЕКВЕНЦИЈАЛНОГ ТЕСТА

(а) Опис догађаја у секвенцијалном тесту

Доџ-Ромингова шема дуплог узорковања показује суштинску структуру општег секвенцијалног теста. Сваки одређени скуп компонената (x_1, x_2, …) има неку функцију расподеле која зависи од θ и чији је параметарски простор Ω. Тако, ($x_1, \ldots, x_n$) има извесну функцију расподеле $F(x_1, \ldots x_n; \theta)$ за n=1,2, … . Прво ћемо размотрити просту хипотезу $H(\theta_0; \Omega)$ (краће H_0) да је $\theta = \theta_0$.

Нека $R^{(1)}, \ldots, R_1^{(n)}$ буду простори узорка од $x_1, \ldots, x_n$, редом, и нека $R_n = R^{(1)} \times \ldots \times R_1^{(n)}$ буде простор узорка за ($x_1, \ldots, x_n$) , n=1,2… . Биће погодно употребити R_∞ где је $R_\infty = R_1^{(1)} \times R_1^{(2)} \times \ldots$

За сваки позитивни целобројни n, нека G_n°, G_n', G_n буду дисјунктни догађаји у R_n такви да

(1.2.1) $\quad G_n^\circ \cup G_n' \cup G_n = G_{n-1} \times R_1^{(n)}$.

Почињемо са секвенцијалним експериментом извлачењем x_1 и усвајамо следећа правила за прекид или наставак експеримента:

$x_1 \in G_1^\circ$ прихватамо H_0 без даљег извлачења

(1.2.2) $\quad x_1 \in G_1'$ одбацујемо H_0 без даљег извлачења

$x_1 \in G_1$ извлачимо x_2

(x_1, x_2) $\in G_2^\circ$ прихватамо H_0 без даљег извлачења

(1.2.3) $\quad$ (x_1, x_2) $\in G_2'$ одбацујемо H_0 без даљег извлачења

(x_1, x_2) $\in G_2$ извлачимо x_3

и уопштено, ако

$(x_1, \ldots, x_n) \in G_n^\circ$ прихватамо H_0 без даљег извлачења

(1.2.4) $\quad (x_1, \ldots, x_n) \in G_n'$ одбацујемо H_0 без даљег извлачења

$(x_1, \dots, x_n) \in G_n$ извлачимо x_{n+1}

n=1,2,…

Згодно је назвати G_1, G_2, ... низом *непрекидних догађаја експеримента*.

Примећујемо да су $G_1^{\circ}, \dots, G_{n-1}^{\circ}, G_1', \dots, G_{n-1}'$ цилиндрични догађаји у R_n , а G_n°, G_n', G_n догађаји у R_n тако да су 2*n*+1 догађаја дисјунктни и важи

(1.2.5) $G_1^{\circ} \cup \dots \cup G_n^{\circ} \cup G_1' \cup \dots \cup G_n' \cup G_n = R_n$.

Међутим, још је згодније да су ови исти догађаји, за сваки позитивни цео број *n*, дисјунктни цилиндрични догађаји у R_∞ , чија је унија сама по себи R_∞ .

Догађаји $G_1^{\circ}, \dots, G_n^{\circ}, G_1', \dots, G_n', G_n$, *n*=1,2,… , заједно са процедуром одлучивања дефинисаном у (1.2.2) , (1.2.3) и (1.2.4) дефинишу секвенцијални тест *S* за H_0.

Критична област W_α за одбацивање H_0 је $G_1' \cup G_2' \cup \dots$ где се *G*-ови бирају тако да *P* ($W_\alpha|\theta_0$) = *α* . Процедура извођења секвенцијалног теста корак по корак биће названа *секвенцијални процес* за *S* .

Било који тест за H_0 на бази узорка фиксне величине *n* и уз област одбацивања W у простору узорка може се назвати *дегенерисани секвенцијални тест* у коме су $G_1^{\circ}, \dots, G_{n-1}^{\circ}, G_1', \dots, G_{n-1}', G_n$ нула (празни) скупови док је G_n'=*W* и G_n°= $\bar{W}$.

(б) Вероватноће у секвенцијалном тесту

Вероватноће прихватања H_0, одбацивања H_0, и извлачења x_{n+1} након извлачења x_n су

(1.2.6) *P* ($G_n^{\circ}|\theta$), *P* ($G_n'|\theta$), *P* ($G_n|\theta$)

редом.

Већ смо навели да су догађаји $G_1^{\circ}, \dots, G_n^{\circ}, G_1', \dots, G_n', G_n$ дисјунктни и њихове вероватноће су функције од параметра *θ*.

Нека су

$$L_n(\theta) = P\,(G_1^{\circ}|\theta) + \ldots + P\,(G_n^{\circ}|\theta)$$

$$M_n(\theta) = P\,(G_1'|\theta) + \ldots + P\,(G_n'|\theta) \tag{1.2.7}$$

$$N_n(\theta) = P\,(G_n|\theta)$$

и

$$L(\theta) = \lim_{n\to\infty} L_n(\theta) = P\,(G^{\circ}|\theta)$$

$$M(\theta) = \lim_{n\to\infty} M_n(\theta) = P\,(G'|\theta) \tag{1.2.8}$$

$$N\,(\theta) = \lim_{n\to\infty} N_n(\theta)$$

где је $G^{\circ} = G_1^{\circ} \cup G_2^{\circ} \cup \ldots$, и $G' = G_1' \cup G_2' \cup \ldots$. Ова ограничења која постоје почев од $L_n(\theta)$, $M_n(\theta)$, $N_n(\theta)$ нису негативна са збиром 1 а почев од $L_n(\theta)$ и $M_n(\theta)$ не опадају пошто је n=1,2,… . $L\,(\theta')$ и $M\,(\theta')$ су вероватноће прихватања H_0 и одбацивања H_0 ако је права вредност за θ у популацији θ'. $L(\theta)$, као функција од θ је оперативна карактеристична функција секвенцијалног теста *S*. $N\,(\theta)$ је вероватноћа да ће се секвенцијални процес за *S* настављати бесконачно. Ако је $N\,(\theta) = 0$ то значи да се секвенцијални процес завршава са вероватноћом 1. Очигледно је да

$$L(\theta) + M(\theta) + N\,(\theta) = 1 \tag{1.2.9}$$

Ако је $G_n^{\circ} \cup G_n' = G_n^*$, ставимо

$$p(n\,|\theta) = P(G_n^*\,|\theta) \tag{1.2.10}$$

онда је $p(n\,|\theta)$ вероватноћа да се секвенцијални процес за *S* завршава (са одлуком да се прихвати H_0 или одбаци H_0) са *n* проба, ако је θ права вредност параметра.

Ако се секвенцијални процес за *S* завршава са вероватноћом 1, тј. ако је $N\,(\theta) = 0$ онда је просечни број проба потребних за завршавање процеса

$$\mathcal{E}(n|\theta) = \sum_{t=1}^{\infty} t p(t|\theta) \tag{1.2.11}$$

што је наравно, функција од θ. $\mathcal{E}(n\,|\theta)$ се обично назива у секвенцијалној анализи *просечни број узорка*. У случају дегенеративног секвенцијалног теста тј. теста базираног на узорку фиксне величине *n*, имамо наравно

$$\mathcal{E}(n\,|\theta) = n\,.$$

Пошто је

$\mathcal{E}(n\,|\theta) \geq \sum_{t=1}^{m} tp(t|\theta) + mP(G_m|\theta)$

m=1,2,…, потребно је за $\lim_{m\to\infty} mP(G_m|\theta) = 0$, тј. $N(\theta)$=0, да би $\mathcal{E}(n\,|\theta)$ био ограничен.

Следећу теорему која се односи на $\mathcal{E}(n)$, конструисали су Валд (1945) и Блеквел (1946).

Теорема 1.2.1 Претпоставимо да је $(x_1, x_2, \ldots)$ низ независних случајних променљивих из расподеле са ограниченом средњом вредношћу $\mathcal{E}(x)$, и нека S буде секвенцијални тест за кога је $\mathcal{E}(n)$ ограничено. Ако $x_1+x_2+\ldots+x_n$ означава збир извучених x-ова све док се S не заврши, онда је

(1.2.12) $\mathcal{E}(x_1+x_2+\ldots+x_n) = \mathcal{E}(x)\cdot \mathcal{E}(n)$.

Да бисмо доказали теорему 1.2.1 приметимо да је

(1.2.13) $\mathcal{E}(x_1+x_2+\ldots+x_n) = \mathcal{E}(x_1) + \mathcal{E}(x_2|x_1 \in G_1)\cdot P(G_1) + \mathcal{E}(x_3|(x_1,x_2) \in G_2)\cdot P(G_2) + \ldots$

где је G_1, G_2, ... дефинисано у (1.2.4). Пошто су $x_1, x_2, \ldots$ узајамно независни и имају средње вредности које су све једнаке $\mathcal{E}(x)$ очигледно је да се (1.2.13) своди на

(1.2.14) $\mathcal{E}(x_1+x_2+\ldots+x_n) = \mathcal{E}(x)[1+P(G_1)+P(G_2)+\ldots]$.

Као раније нека $G_n^* = \mathring{G}_n \cup G_n'$, n=1,2,… затим пошто су $G_1^*, \ldots, G_n^*, G_n$ дисјунктни догађаји у R_∞ за свако n чији је збир вероватноћа до 1, и пошто ограниченост $\mathcal{E}(n)$ подразумева завршетак S са вероватноћом 1, имамо

$$1 = \sum_{t=1}^{\infty} P(G_t^*)$$

(1.2.15)

$$P(G_t) = \sum_{t'=t+1}^{\infty} P(G_{t'}^*) \quad t = 1,2, \ldots .$$

Заменом ових у (1.2.14) налазимо

(1.2.16) $\mathcal{E}(x_1+x_2+\ldots+x_n) = \mathcal{E}(x)[\sum_{t=1}^{\infty} tP(G_t^*)]$,

што је (1.2.12) и на тај начин доказујемо теорему 1.2.1.

(в) Критеријуми за бирање секвенцијалног теста

У формалној дефиницији секвенцијалног теста видеће се да није било рестрикција на скуповима G_n°, G_n', G_n у нашим секвенцијалним тестовима, осим у оним када су за свако *n* они дисјунктни скупови који задовољавају (1.2.1). Један од основних проблема у конструисању секвенцијалног теста *S* је одабир G_n°, G_n' и G_n. Један од пожељних захтева који ће се увек наметати је тај да се секвенцијални процес за *S* завршава вероватноћом 1, тј.

(1.2.17) $\quad N(\theta)=0.$

Други пожељан захтев, као у случају статистичких тестова је фиксирање ризика грешке прве врсте, тј. захтев

(1.2.18) $\quad L(\theta_0)=1-\alpha$

Такође ће бити корисно поредити два секвенцијална теста (као у случају статистичких тестова базираних на узорцима фиксне величине) фиксирати ризик β грешке друге врсте за неку вредност θ, рецимо $\theta=\theta_1$, тј. захтева

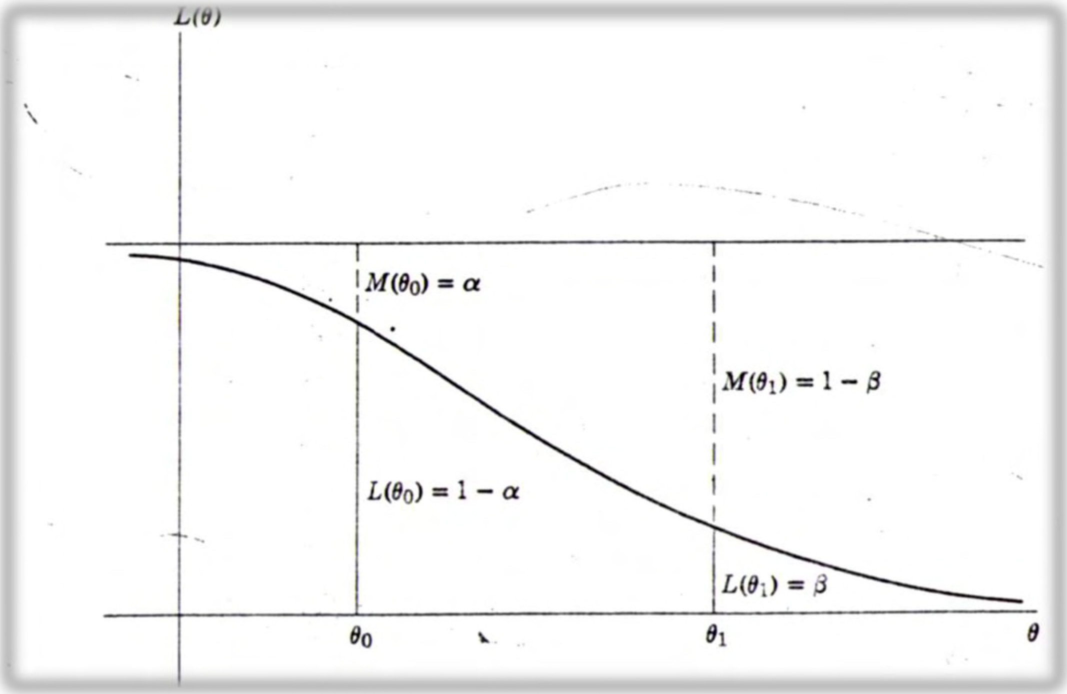
(1.2.19) $\quad L(\theta_1)=\beta$.

У разматрању θ_0 наспрам алтернативе θ_1, нека H_0 означава хипотезу да је θ_0 права вредност за θ, а H_1 хипотеза да је θ_1 права вредност.

Из услова (1.2.17), (1.2.18) и (1.2.19) подразумева се, наравно да је

(1.2.20) $\quad M(\theta_0)=\alpha, \qquad M(\theta_1)=1-\beta.$

Када се узме да је $\theta_0<\theta_1$, скупови вредности за θ за које је $\theta\leq\theta_0$, $\theta_0<\theta<\theta_1$, $\theta\geq\theta_1$, сматрају се зонама које су подесније за *прихватање*, *индиферентност*, и *одбијање* H_0.



Слика 2.

Узимањем да је $\theta_0 > \theta_1$, можемо поставити сличне зоне.

Под претпоставком да је $N(\theta)$=0, основне карактеристике графика $L(\theta)$ под условима наведеним у (1.2.17), (1.2.18) и (1.2.19) виде се на слици 2.

Секвенцијални тест за који $L(\theta)$ задовољава (1.2.18) и (1.2.19) зваће се секвенцијални тест *јачине* $(\alpha, \theta_0;\ \beta, \theta_1)$.

Ако су S_1и S_2 два секвенцијална теста са оперативним карактеристичним функцијама $L_1(\theta)$ и $L_2(\theta)$ тако да је $L_1(\theta_0) = L_2(\theta_0) = 1 - \alpha$ док је $L_1(\theta_1) < L_2(\theta_1)$, кажемо да је S_1 *јаче* од S_2 за тестирање H_0 против H_1. Ако је S_1 *јаче* од S_2 за све могуће секвенцијалне тестове S_2, онда S_1 који може да се означи са S^* , има *максималну јачину* .

Ако су просечни бројеви узорка из два теста S_1 и S_2 исте јачине $\mathcal{E}_1(n \mid \theta)$ и $\mathcal{E}_2(n \mid \theta)$ и ако је

(1.2.21) $\mathcal{E}_1(n \mid \theta) \leq \mathcal{E}_2(n \mid \theta), \quad \theta=\theta_0, \theta_1,$

са једнакошћу која не важи и за θ_0 и θ_1, S_1 ће се сматрати пожељнијим од S_2 за тестирање H_0 против H_1.

Ако је однос (1.2.21) који важи и за θ_0 и θ_1 и за све могуће изборе S_2 различите од S_1, онда је S_1, који може да се означи са S^* секвенцијални тест *максималне ефикасности*. У одељку 1.4 показаћемо да се такав секвенцијални тест S^* максималне ефикасности може конструисати методом базираном на односу вероватноће.

ПРИМЕР 3. (Пример дуплог узорковања) Претпоставимо да имамо машину са временом трајања *T* (нпр.20 сати). За нулту хипотезу узимамо да је H_0 (поузданост машине 0.9), а интервал поверења је 0.95, дакле *α* = 0.05. Да бисмо тестирали ову хипотезу ми стављамо *n* (нпр.20) елемената на тестирање за *T* сати, и тада рачунамо колико елемената ће „ преживети” . Број „преживелих“ машина које означавамо са *X* има биномну расподелу *B*(*n* =20, *p*), где је *p* поузданост уређаја, тј. вероватноћа да такав уређај опстане након времена *T*. Можемо изразити такав биномни модел вероватноће са:

P$\{X > c\}$= 1- P$\{X \leq c\}$= 1 - $\sum_{x=1}^{c} \quad c_x^n (1-p)^{n-x}$

Сада претпоставимо да је поузданост 0.8 или мања неприхватљива и имамо H_1(поузданост ≤ 0.8), и дефинишемо план дуплог узорковања са *S* (n_1=20, n_2=20, c_1=14, c_2=15, c_3=33). Извлачимо први узорак обима n_1=20 и рачунамо број опсталих *X*. Ако је *X* > 15 не одбацујемо H_0, ако је *X* < 14 одбацујемо H_0 (поузданост је неприхватљива). Ако је *X* једнако 14 или 15 извлачимо други узорак обима n_2=20 и рачунамо број „преживелих” које означавамо са *Y*. Тада само ако је *X*+ *Y*< 33 одбацујемо хипотезу H_0 и одлучујемо да поузданост уређаја није прихватљива.

План *S* (n_1=20, n_2=20, c_1=14, c_2=15, c_3=33) је конструисан на следећи начин. За први узорак n_1 који смо извукли, бирамо из биномне таблице за *B*(*n* =20, *p=0.9*), број c_2=15 зато што вероватноћа прихватања (број опсталих *X* > 15) „добре“ групе (поузданост ≥ 0.9) је $P_{0.9}\{X \geq 16\}$=0.957. Затим бирамо c_1=14 зато што је вероватноћа одбацивања „ добре“ серије $P_{0.9}\{X \leq 13\}$=0.002. Тада из биномне таблице *B*(*n* =20, *p=0.8*) имамо да је вероватноћа прихватања „лоше“ групе (поузданост 0.8 и $X \geq 16$) 1- $P_{0.8}\{X \leq 15\}$= 1 – 0.3704= 0.630, и вероватноћа одбацивања „лоше“ групе је $P_{0.8}\{X \leq 13\}$=0.087. ако је број „преживелих” *X*=14 или 15, резултати се сматрају неуверљивим. Вероватноћа неуверљивих резултата када је група добра (повољна) је 0.041, и када је група лоша је 0.284. Ако зато извлачимо други узорак n_2=20 и дефинишемо број c_3=33. Прихватамо серију ако је укупни број опсталих 33 и више, и одбацујемо групу ако је број опсталих мањи од 33. Не тврдимо да је план *S* оптималан, али пружа добру илустрацију оваквог тестирања.

Вероватноћа прихватања за сваки план дуплог узорковања *S*, за свако *p*, дата је следећом једначином.

P$\{$прихватања групе$\}$= P$\{$ прихватање у почетку$\}$ +
P$\{$у почетку неуверљиво, па прихваћено у другом извлачењу$\}$

= P$\{$прво извлачење ≥ 16 $\}$ +
P$\{$прво извлачење $= 14$ или 15, и комбиновано извлачење ≥ 33 $\}$

$=\sum_{x=16}^{20} Bin(x;\ n=20,\ p) + Bin(x=14;\ n=20,\ p)\cdot[Bin(x=19;\ n=20, p) + Bin(x=20; n=20,\ p)] + Bin(x=15; n=20, p)\cdot[Bin(x=18; n=20, p) + Bin(x=19; n=20, p) + Bin(x=20;\ n=20, p)]$

Приметимо да бисмо добили резултат од 33 преживелих и више, у комбинованом првом и другом узорку, прво треба да добијемо у првом узорку 15 или 14 успешних (тј. неубедљив резултат) а затим довољан број успешних у другом узорку (18, 19 или 20). У случају када је поузданост *p* = 0.9 у плану дуплог узорковања прихватамо нулту хипотезу са вероватноћом 0.982, док је код теста са фиксним узорком та вероватноћа само 0.957 за *n* =20, и *c* =16.

P$\{$прихватања групе$\}$= P$\{$ прихватање у почетку$\}$ +
P$\{$у почетку неуверљиво, па прихваћено у другом извлачењу$\}$

= 0.957 + 0.0089 · (0.2701 + 0.1215) + 0.0319 ·(0.2851 + 0.2701 + 0.1215) = 0.982

Вероватноћа одбацивања у нашем плану дуплог узорковања се добија заменом речи „прихватање" речју „одбацивање" у једначини. За тачну поузданост *p=0.09*, вероватноћа погрешног одбацивања је 0.018, и P{ *X* < 16 } = 1- 0.957 = 0.043, што одговара вероватноћи за план са фиксним узорком за *n* =20, и *c* =16:

P$\{$одбацивања групе$\}$= P$\{$ одбацивање у почетку$\}$ +
P$\{$у почетку неуверљиво, па одбачено у другом извлачењу$\}$

= P$\{$прво извлачење ≤ 13 $\}$ +
P$\{$прво извлачење $= 14$ или 15, и комбиновано извлачење < 33 $\}$

$=\sum_{x=0}^{13} Bin(\ x; n=20,\ p) +\ Bin\ (\ x=\ 14;\ n\ =20,\ p\ )\cdot\{(1-[Bin(x=19; n=20,\ p) + Bin\ (x=20; n=20,\ p)]\} + Bin(x=15; n=20,\ p)\cdot\{1-[Bin(x=18; n=20, p) + Bin(x=19; n=20, p) + Bin\ (x=20; n=20,\ p)]\}$

= 0.0024 + 0.0089 · (1- (0.2701 + 0.1215)) + 0.0319· (1 – (0.2851 + 0.2701 + 0.1215)) = 0.018

Табела 1. Појединачне и комбиноване вероватноће за B(n =20, p=0.9 и 0.8)

Опстали	p = 0.9	p = 0.8	Комбиновано за p = 0.9	Комбиновано за p = 0.8
10	0.000006	0.002031	0.00001	0.00259
11	0.000053	0.007387	0.00006	0.00998
12	0.000356	0.022161	0.00042	0.03214
13	**0.001970**	**0.54550**	**0.00239**	**0.08669**
14	0.008867	0.109100	0.01125	0.19579
15	0.031921	0.174560	0.04317	0.37035
16	**0.089779**	**0.218199**	**0.13295**	**0.58855**
17	0.190120	0.205364	0.32307	0.79392
18	0.285180	0.136909	0.60825	0.93082
19	0.270170	0.057646	0.87842	0.98847
20	0.121577	0.011529	1.00000	1.00000

На овај начин смо показали како се спроводи шема дуплог узорковања у поређењу са једноузорачким тестом, и не само да се повећава вероватноћа прихватања добре одлуке, већ такође се смањује вероватноћа одбијања добре одлуке, чак и кад је резултат почетног тестирања неуверљив. Ове карактеристике су њихова највећа предност јер у многим случајева се смањују додатни трошкови и напори помоћу шеме дуплог узорковања и уопштено, помоћу секвенцијалних тестова.

1.3 ДЕКАРТОВ СЕКВЕНЦИЈАЛНИ ТЕСТ

(а) Опис и својства теста

Пре бављења најбољим могућим секвенцијалним тестовима који се могу осмислити, може бити корисно одредити идеје о једноставном, чак и не веома ефикасном секвенцијалном тесту базираном на биномној расподели времена чекања. Претпоставимо да је $(x_1, x_2, \ldots)$ низ независних случајних променљивих које имају исту функцију расподеле $F(x;\theta)$.

Размотримо следећи секвенцијални тест *S* за тестирање H_0 против H_1. Нека G_0°, G_0', G_0 буду дисјунктни *почетни скупови* чија је унија цела реална оса, и нека $G_{(n)}^{\circ}$, $G_{(n)}'$, $G_{(n)}$ буду скупови $G_{(0)}^{\circ}$, $G_{(0)}'$, $G_{(0)}$ у $R_1^{(n)}$, *n*= 1, 2, … где је $R_1^{(n)}$ простор узорка од x_n , *n*= 1, 2, … . Онда ће се видети да дисјунктни догађаји $G_1^{\circ}, \ldots, G_n^{\circ}, G_1', \ldots, G_n', G_n$ дефинисани у (1.2.4) могу бити конструисани на следећи начин :

G_1^i={$x_1 \in G_{(1)}^i$}, *i*=°,′

G_2^i={$(x_1, x_2) \in G_{(1)} \times G_{(2)}^i$}, *i* =°,′

.

(1.3.1) .

.

G_n^i={$(x_1, \ldots, x_n) \in G_{(1)} \times \ldots \times G_{(n-1)} \times G_{(n)}^i$}, *i* =°,′

G_n={$(x_1, \ldots, x_n) \in G_{(1)} \times \ldots \times G_{(n)}$}.

Тако је секвенцијални процес за *S* једноставно наставак извлачења из $(x_1, x_2, \ldots)$ све док један *x* упада у G_0 на реалној оси. Чим *x* упадне у G_0° ми прихватамо H_0 , или пак чим *x* упадне у G_0' прихватамо H_1. Такав тест назива се Декартов секвенцијални тест.

Нека је

$$a\,(\theta)=\int_{G_0^\circ} dF(x;\theta)$$

(1.3.2) $$b(\theta)=\int_{G_0'} dF(x;\theta)$$

$$c\,(\theta)=\int_{G_0} dF(x;\theta)=1-a(\theta)-b(\theta).$$

$a\,(\theta)$, $b(\theta)$ и $c\,(\theta)$ обележићемо са a, b и c, и нека $a(\theta_i) = a_i$, $b(\theta_i) = b_i$ и $c(\theta_i) = c_i$, i= 0, 1. Онда ће

(1.3.3) $P\,(G_t^\circ\,|\theta)=a\,c^{t-1}$, $P\,(G_t'\,|\theta)=b\,c^{t-1}$, $P\,(G_n\,|\theta)=c^n$

t=1, … ,n

$$L_n(\theta)=\frac{a(1-c^n)}{1-c}$$

(1.3.4) $$M_n(\theta)=\frac{b(1-c^n)}{1-c}$$

$$N_n(\theta)=c^n.$$

Ако се G_0 изабере тако да је $c\,(\theta) < 1$, имаћемо $\lim_{n\to\infty} N_n(\theta)=0$, и

$$L(\theta)=\frac{a}{a+b}$$

(1.3.5)

$$M(\theta)=\frac{b}{a+b}$$

Вероватноћа да се секвенцијални процес завршава након извлачења x_n дата је на начин

(1.3.6) $p(n\mid\theta)=(a+b)\,c^{n-1}$

А просечан број узорка је

(1.3.7) $\mathcal{E}(n\,|\theta)=(a+b)\sum_{n=1}^{\infty} n\,c^{n-1}=\frac{1}{a+b}$.

Видећемо да је $p(n \mid \theta)$ само специјалан случај времена чекања биномне расподеле за k = 1.

Ако ризици грешака прве и друге врсте треба да буду α и β када је $\theta = \theta_0$ и $\theta = \theta_1$ тада G_0° и G_0' мора да задовољавају једнакости

(1.3.8) $\frac{a_0}{a_0+b_0}$=1- α , $\frac{a_1}{a_1+b_1} = \beta$

тј. морамо имати

(1.3.9) $\frac{a_0}{b_0} = \frac{1-\alpha}{\alpha}$, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{\beta}{1-\beta}$.

Ако због одређених вредности α и β, и $\mathcal{E}(n\ |\theta_0)(=1/(a_0+b_0))$ постоји скуп избора за G_0° и G_0' избор који даје најјачи Декартов секвенцијални тест у случају $F(x\ ;\theta)$ има густину расподеле $f(x;\theta)$ како сугерише теорема Нојмана –Пирсона. Тј. G_0° узимамо као скуп вредности од x за које однос вероватноће задовољава

(1.3.10) $\frac{f(x;\theta_1)}{f(x;\theta_0)} \le k_0$,

и G_0' као скуп за кога је

(1.3.11) $\frac{f(x;\theta_1)}{f(x;\theta_0)} \ge\ k_1$,

где су $k_1 >\ k_0 > 0$ изабрани тако да је (1.3.8) задовољено за G_0° и G_0' за специјалне вредности α, β и $\mathcal{E}(n\ |\theta_0)$. Другим речима било који други избор скупова G_0° и G_0', рецимо $G_0^{\circ *}$ и $G_0'^{*}$ што допушта фиксно $a_0/(a_0 + b_0)$ при фиксним α и $\mathcal{E}(n\ |\theta_0)$ и при фиксним n_0 (а отуд и вероватноћу грешке прве врсте и фиксни просечни број узорка при θ_0), што даје Декартов секвенцијални тест *S* за кога је $a_1/(a_1 + b_1) > \beta$ тј. за кога вероватноћа грешке друге врсте већа је за секвенцијални тест на бази G_0° и G_0' као што се види у (1.3.10) и (1.3.11) .

Примедба. Истовременим извлачењем *r* *x*-ова из популације, може се направити *r* –тоструки Декартов секвенцијални тест *S* . Биће довољно размотрити само случај где су скупови прихватања и одбацивања у простору узорка R_r од $(x_1, \dots, x_r)$ одређени односом вероватноће. Тако, нека G_0° буде скуп тачака $(x_1, \dots, x_r)$ које задовољавају

(1.3.12) $\prod_{i=1}^{r} \frac{f(x_i;\theta_1)}{f(x_i;\theta_0)} \le k_0$,

и скуп G_0' који задовољава

(1.3.13) $\prod_{i=1}^{r} \frac{f(x_i;\theta_1)}{f(x_i;\theta_0)} \ \ge\ k_1$

док је G_0 скуп који не задовољава ни једну неједнакост, где су $k_1 > k_0 > 0$ одабрани тако да задовољавају (1.3.8), и a (θ), b(θ) и c (θ) дефинисани као P (G_0° |θ), P (G_0' |θ) и P (G_0 |θ). То се може видети по аргументу k да овај избор G_0° и G_0' даје јачи Декартов секвенцијални тест од било ког другог избора G_0° и G_0' у простору узорка $(x_1, \dots, x_r)$ који допушта фиксним $a_0/(a_0 + b_0)$ при фиксним α и $\mathcal{E}(n\,|\theta_0)$.

Читаоцу ће бити очигледно да ако постоји тешкоћа у фиксирању грешака прве врсте и друге врсте при α и β за једнострук Декартов секвенцијални тест, можемо фиксирати ове грешке колико год хоћемо близу α и β користећи r –тоструки Декартов секвенцијални тест за одговарајући одабрани r.

(б) Примена непараметарског тестирања

Ако се ништа не зна о $F(x\ ;\theta)$ осим да је непрекидна, онда Декартов секвенцијални тест даје непараметарски секвенцијални тест. Да бисмо ово видели нека $F(x\ ;\theta_0)$, $F(x\ ;\theta_1)$ буду непрекидне, и нека буду обележене са $F_0(x)$ и $F_1(x)$ редом. Нека одаберемо G_0° и G_0' као интервале $(-\infty, a)$ и $(b, +\infty)$, $a < b$, онда се (1.3.8) може написати као

(1.3.14) $$\frac{F_0(a)}{F_0(a)+1-F_0(b)} = 1-\alpha, \quad \frac{F_1(a)}{F_1(a)+1-F_1(b)} = \beta$$

и Декартов секвенцијални тест на бази овог избора G_0° и G_0' постаје тест за прихватање непрекидне функције расподеле $F_0(x)$ са вредностима $F_0(a)$ и 1- $\alpha F_0(a)$/(1-α) при a и b против алтернативе прихватања непрекидне функције расподеле са вредностима $F_1(a)$ и 1-(1-β) $F_1(a)/\beta$ при a и b. Просечна величина узорка је $[F_0(a) + 1 - F_0(b)]^{-1}$ ако је $F_0(x)$ расподела која се управо узоркује , а $[F_1(a) + 1 - F_1(b)]^{-1}$ ако је $F_1(x)$ расподела која се управо узоркује.

1.4 СЕКВЕНЦИЈАЛНИ ТЕСТ КОЛИЧНИКА ВЕРОДОСТОЈНОСТИ

(а) Дефиниција теста

Дискусија о избору G_0°, G_0' и G_0 који воде ка најјачим Декартовим секвенцијалним тестовима за тестирање H_0 и H_1, указује на најбољи могући избор скупова $G_1^{\circ}, \dots, G_n^{\circ}, G_1', \dots, G_n', G_n$, n=1,2,… , за неки секвенцијални тест. Наиме, да бисмо одабрали G_n°, G_n' и G_n, за дисјунктне догађаје у R_n који задовољавају (1.2.1) за n=1,2,…, дефинисане за свако n путем одговарајућих неједнакости

(1.4.1) $\frac{Q_{1n}}{Q_{0n}} \leq k_0, \qquad \frac{Q_{1n}}{Q_{0n}} \geq k_1, \quad k_0 < \frac{Q_{1n}}{Q_{0n}} < k_1$

где је

(1.4.2) $Q_{in} = \prod_{t=1}^{n} f(x_t; \theta_i), \quad i = 0,1$

и где су $f(x \ ;\theta_0)$ и $f(x \ ;\theta_1)$ густине расподеле апсолутно непрекидне у међусобном односу . Довољно је само размотрити случај густина расподела у овом одељку. Овај тест је првобитно предлаган од Валда (1945) и зове се *секвенцијани тест количника веродостојности*. Због тога тест садржи прихватање H_0, прихватање H_1 или извлачење x_{n+1} после извлачења x_n на основу тога да ли $(x_1, \dots, x_n)$ задовољава прву, другу или трећу неједнакост у (1.4.1) n=1,2,… где су k_0 и k_1 фиксни тако да

(1.4.3) $L(\theta_0)=1-\alpha, \qquad L(\theta_1)=\beta$

тј. тако да су вероватноће грешака прве и друге врсте α и β.

(б) Својства функције расподеле броја проба потребних за завршетак секвенцијалног процеса количника веродостојности

Прво размотримо питање да ли се секвенцијални процес количника веродостојности завршава са вероватноћом 1. Нека

(1.4.4) $z = \log\left(\frac{f(x \ ;\theta_1)}{f(x \ ;\theta_0)}\right)$

и нека $H(z, \theta)$ буде функција расподеле од z за фиксну вредност θ у параметарском простору Ω. Када $\theta_0 \neq \theta_1$ претпоставља се да је z недегенерисана случајна променљива .

Нека

(1.4.5) $\quad z_t = \log\left(\frac{f(x_t;\theta_1)}{f(x_t;\theta_0)}\right), \quad t = 1,2, \dots .$

Онда је $(z_1, z_2, \dots)$ стохастички процес створен обичним насумичним узорковањем из неке расподеле $H(z\,;\theta)$ и секвенцијални процес завршава се за најмањи цели број n за који неједнакост

(1.4.6) $\quad \log\, k_0 < z_1 + \dots + z_n < \log\, k_1$

не важи. Имајмо на уму да је G_n догађај за кога неједнакост (1.4.6) важи, а отуд је догађај који проистиче из извлачења преко n x-ова пре него што се секвенцијални процес заврши.

Нека $\xi_1 = z_1 + \dots + z_r$, $\quad \xi_2 = z_{r+1} + \dots + z_{2r}, \dots , \xi_i = z_{(i-1)r+1} + \dots + z_{ir}, \dots$. ако се секвенцијални процес никада не заврши, онда морамо имати

(1.4.7) $\quad \xi_i^2 < D^2, \quad i = 1,2, \dots ,$

где је $D = |\log\, k_0| + |\log\, k_1|$. Пошто је $\xi_1, \xi_2, \dots$ низ независних случајних променљивих које имају исту функцију расподеле, рецимо $J(\xi\,;\theta)$, вероватноћа да неједнакости (1.4.7) за $i = 1,2, \dots, m$ важе је p^m где је

(1.4.8) $\quad p = P\,(\xi_1^2 < D^2) = \dots = P\,(\xi_m^2 < D^2).$

Пошто је z недегенерисано има позитивну варијансу σ^2. Варијанса за ξ је $r\sigma^2$ и може да премаши D^2 бирањем $r > D^2/\sigma^2$, у ком случају имамо $\mathcal{E}(\xi^2) > D^2$ а отуд

$$P\,(\xi^2 < D^2) = p < 1.$$

Због тога, ако узмемо $r > D^2/\sigma^2$, и пустимо да $m \to \infty$, налазимо да је вероватноћа немогућности завршавања секвенцијалног процеса $\lim_{m\to\infty} p^m = 0$.

Закључујемо

Теорема 1.4.1 Ако случајна променљива z дефинисана у (1.4.4) има коначну средњу вредност, и коначну позитивну варијансу, секвенцијални процес количника веродостојности завршава се са вероватноћом 1.

Односно, бoља теорема која важи за функцију расподеле броја проба потребних за завршавање секвенцијалног процеса донета је захваљујући Штајну (1946). Модификована Штајнова теорема гласи:

Теорема 1.4.2 Ако је случајна променљива *z* недегенерисана сви моменти од *n* постоје.

Да би утврдили теорему 1.4.2 довољно је размотрити генераторну функцију момента ψ (*u*) од *n*

(1.4.9) $\psi(u) = \mathcal{E}(e^{un}) = \sum_{t=1}^{\infty} e^{ut} P(\, G_t^{*} | \theta)$

где је $G_t^{*} = G_t^{\circ} \cup G_t'$ и то је догађај који резултира у завршавању секвенцијалног процеса при извлачењу *t*-ог. При раздвајању серије десно од (1.4.9) на блокове од сваког *r*-а видеће се да је $u \geq 0$

$\psi(u) \leq e^{ru} P\,(0 < n \leq r) + e^{2ru} P\,(\, r < n \leq 2r\,) + \ldots$

$\leq e^{ru} P\,(n > 0) + e^{2ru} P\,(n > r\,) + \ldots$

Али знамо из (1.4.8) да ако *z* има позитивне варијансе

$P\,(n \geq mr) \leq p^{m}$.

Отуд је

(1.4.10) $\psi(u) \leq e^{ru} + e^{2ru} p + e^{3ru} p^{2} + \ldots = e^{ru}(1 - e^{ru} p\,)^{-1}$.

Ако је $u \leq 0$ налазимо

(1.4.10a) $\psi(u) \leq e^{u}(1 - e^{ru} p\,)^{-1}$.

Стога, ако је *u* било који реални број који задовољава $e^{ru} p < 1$, ψ (*u*) конвергира.

Интервал за *u* за који ова неједнакост важи садржи $u = 0$ као унутрашњу тачку и следи да *k*-ти извод од ψ (*u*) постоји када је $u = 0$ што даје *k*-ти моменат од *u* за $k = 1, 2, \ldots$

Коначно следећи резултат (као додатак на теорему 1.2.1) је важан у добијању израза за $\mathcal{E}(n\,|\theta)$, и за испитивање ефикасности секвенцијалног теста количника веродостојности.

Теорема 1.4.3 Ако је *z* недегенерисана случајна променљива ,тада је

(1.4.11) $\mathcal{E}(z_1 + z_2 + \ldots + z_n | \theta) = \mathcal{E}(z\,|\theta) \cdot \mathcal{E}(n\,|\theta)$.

Ограниченост $\mathcal{E}(n \mid \theta)$ следи из теореме 1.4.2 и преостали аргумент следи из теореме 1.2.1.

(в) Одређивање граничних константи k_0 и k_1 за секвенцијалне тестове количника веродостојности

Сада размотримо проблем одређивања граничних константи k_0 и k_1 за секвенцијални тест односа вероватноће јачине (α, θ_0; β, θ_1). Тачно одређивање k_0 и k_1 је тежак проблем, мада је лако наћи блиске неједнакости и добре апроксимације.

Из дефиниције секвенцијалног теста количника веродостојности следи да ће H_0 бити прихваћена након извлачења x_n ако је прва неједнакост у (1.4.1) задовољена. Пошто смо обележили овај догађај са G_n°, ми имамо на свим тачкама у G_n°

(1.4.12) $\quad Q_{1n} \leq k_0\, Q_{0n}, \quad n = 1,2, \dots$.

На основу (1.2.8) имамо

(1.4.13) $\quad L(\theta) = P(G_1^\circ \mid \theta) + P(G_2^\circ \mid \theta) + \dots$.

Ако је $L(\theta)$ јачине (α, θ_0; β, θ_1), онда имамо

(1.4.14) $\quad L(\theta_0) = 1 - \alpha, \qquad L(\theta_1) = \beta.$

Из (1.4.12) следи да

(1.4.15) $\quad P(G_n^\circ \mid \theta_1) \leq k_0\, P(G_n^\circ \mid \theta_0), \quad n = 1,2, \dots$.

Због тога

$\sum_{n=1}^{\infty} P(G_n^\circ \mid \theta_1) \leq k_0 \sum_{n=1}^{\infty} P(G_n^\circ \mid \theta_0)$

тј.

(1.4.16) $\quad L(\theta_1) \leq k_0 L(\theta_0).$

Заменом из (1.4.14) налазимо да k_0 мора да задовољи неједнакост

$$k_0 \geq \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

На сличан начин разматрањем догађаја G'_n који резултира у прихватању H_1након извлачења x_n, *n* = 1,2, …, где друга неједнакост из (1.4.1) важи налазимо да

(1.4.17) $\quad M(\theta_1) \geq \; k_1 M(\theta_0)$.

Пошто је $N(\theta)$=0 имамо $M(\theta)$ = 1- $L(\theta)$. Заменом у (1.4.17) и коришћењем (1.4.14) налазимо да k_1 мора да задовољи

$$k_1 \leq \; \frac{1-\beta}{\alpha}.$$

Због тога,

Теорема 1.4.4 Константе k_0 и k_1 за секвенцијални тест количника веродостојности јачине (α, θ_0; β, θ_1) задовољавају неједнакости

(1.4.18) $\quad k_0 \geq \; \frac{\beta}{1-\alpha}, \quad k_1 \leq \; \frac{1-\beta}{\alpha}.$

А сада ћемо испитати актуелну јачину секвенцијалног теста количника веродостојности ако за дате α и β изаберемо

(1.4.19) $\quad k_0 = \; \frac{\beta}{1-\alpha}, \quad k_1 = \; \frac{1-\beta}{\alpha}.$

Добро је мислити на (α, θ_0; β, θ_1) као на јачину која се очекује од теста и

(α', θ_0; β', θ_1) као јачину која ће се добити тестом. Онда следи из (1.4.18) да је

(1.4.20) $\quad \frac{\beta}{1-\alpha} \geq \frac{\beta'}{1-\alpha'}$ и $\frac{1-\beta}{\alpha} \leq \frac{1-\beta'}{\alpha'}$.

Из ове две неједнакости следи да је

(1.4.21) $\quad \beta' \leq \frac{\beta}{1-\alpha}$, и $\alpha' \leq \frac{\alpha}{1-\beta}$

А такође и да је

(1.4.22) $\quad \alpha' + \beta' \leq \alpha + \beta$.

Задња неједнакост једноставно показује да је збир вероватноћа стварних грешака прве и друге врсте за избор k_0 и k_1 дате у (1.4.19) не може да превазиђе збир вероватноћа очекивних грешака прве и друге врсте. Због тога имамо

Теорема 1.4.5 Ако су константе k_0 и k_1 за секвенцијални тест количника веродостојности јачине која се очекује (α, θ_0; β, θ_1) сада одабране као β/(1-α) и

α/(1-β) редом, стварна јачина резултирајућег теста је (α', θ_0; β', θ_1) где α' и β' задовољавају неједнакости (1.4.21) и (1.4.22).

У пракси очекивана јачина (α, θ_0; β, θ_1) има вредности α и β који ретко прелазе 0.10 а неједнакости (1.4.21) и (1.4.22) показују да разлика између стварне јачине и очекиване јачине са практичне стране није веома важна.

(г) Функција операционих карактеристика секвенцијалног теста количника веродостојности

До сада смо разматрали функције операционих карактеристика $L(\theta)$ за само две вредности за θ, наиме, θ_0 и θ_1. Тачно одређивање $L(\theta)$ за произвољно θ у параметарском простору Ω је тежак проблем. Међутим можемо одредити приближан израз за $L(\theta)$ без непотребних тешкоћа.

По Валду (1945) биће погодно утврдити следећу лему ван скупа:

Лема 1.4.6 Нека $z = \log f(x\ ;\theta_1) - \log f(x\ ;\theta_0)$, где је x случајна променљива која има густину расподеле $f(x\ ;\theta)$ тако да θ буде тачка у параметарском простору Ω који садржи θ_0 и θ_1.

Ако

(1) $\mathcal{E}\,(e^{zh})$ постоји за свако реално h ,
(2) $\mathcal{E}\,(z) \neq 0$,
(3) За неко $\delta_1 > 0$ и $0 < \delta_2 < 1$, $P\,(e^z > 1+ \delta_1) > 0$ и $P\,(e^z < 1- \delta_2) > 0$,

онда за свако θ постоји једно h тј. $h(\theta) \neq 0$ тако да

(1.4.23) $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{f(x\ ;\theta_1)}{f(x\ ;\theta_0)}\right)^h f(x;\theta)dx = 1$

тј.

$\mathcal{E}\,(e^{zh(\theta)}) = 1$.

Да би доказали лему 1.4.6 нека E_1 буде скуп вредности од x за које $e^z > 1 + \delta_1$ и E_2 скуп за који је $e^z < 1 - \delta_2$. Онда имамо за $h > 0$,

(1.4.24) $\mathcal{E}\,(e^{zh}) \geq \int_{E_1} e^{zh} f(x;\theta)\, dx > (1 + \delta_1)^h\, P\,(E_1)$

и за $h < 0$

(1.4.25) $\mathcal{E}\,(e^{zh}) \geq \int_{E_2} e^{zh}\, f(x;\theta)\, dx > (1-\ \delta_2\ )^h\ P\,(E_2)$.

Пошто су $P\,(E_1)$ и $P\,(E_2) \neq 0$ јасно је из (1.4.24) и (1.4.25) да

(1.4.26) $\lim_{h\to+\infty} \mathcal{E}\,(e^{zh}) = \lim_{h\to-\infty} \mathcal{E}\,(e^{zh}) = +\infty$.

Када означимо $\mathcal{E}\,(e^{zh})$ са $\psi\,(h)$ а први и други извод од $\psi\,(h)$ са ψ' (h) и $\psi''\,(h)$, онда имамо

(1.4.27) $\psi'\,(0) = \mathcal{E}\,(z\,) \neq 0$

и

(1.4.28) $\psi''\,(h) = \mathcal{E}\,(z^2 e^{zh}) > 0$

Пошто је $\psi\,(0) = 1$, $\psi'\,(0) \neq 0$, и $\psi''\,(h) > 0$ очигледно је да $\psi\,(h)$ који зависи од θ као и h има минимум мањи од 1, шта више $\psi\,(h) - 1 = 0$ има два корена $h = 0$ и $h = h(\theta)$ где $h(\theta) \neq 0$ и тако се закључује доказ за лему 1.4.6.

А сада да размотримо проблем апроксимације $L(\theta)$. Догађај G_n° за које је H_0 прихваћено након извлачења x_n одређен је првом неједнакошћу (1.4.1). Исти догађај G_n° је одређен неједнакошћу

(1.4.29) $Q_{*n} \leq {k_0}^h Q_n$

где је

(1.4.30) $Q_{*n} = \left(\frac{Q_{1n}}{Q_{0n}}\right)^h Q_n$ и $Q_n = \prod_{t=1}^{n} f(\,x_t;\theta)$

и h је било који реални број. Сада се Q_{*n} може написати као

(1.4.31) $Q_{*n} = \prod_{t=1}^{n} \left(\frac{f(x_t;\theta_1)}{f(x_t;\theta_0)}\right)^h f(x_t;\theta)$.

Због леме 1.4.6, за свако θ постоји једно h , рецимо $h(\theta)$, $\neq 0$ тако да је

(1.4.32) $\int \left(\frac{f(x\ \ ;\theta_1)}{f(x\ \ ;\theta_0)}\right)^{h(\theta)} f(x\ \ ;\theta)\, dx = 1$.

Због тога функција $f^*(x;\theta)$ дефинисана у

(1.4.33) $f^*(x;\theta) = \left(\frac{f(x\ \ ;\theta_1)}{f(x\ \ ;\theta_0)}\right)^{h(\theta)} f(x;\theta)$

има својства густине расподеле.

Нека $P^*(G_n^\circ\,|\theta)$ буде вероватноћа догађаја G_n° оцењена на основу $f^*(x;\theta)$ на потпуно исти начин када је $P(G_n^\circ\,|\theta)$ вероватноћа од G_n° оцењена на основу $f(x;\theta)$. Ако дефинишемо $L^*(\theta)$ слично као $L(\theta)$ у (1.2.8) нека

$L^*(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} P^*\,(G_n^\circ\,|\theta) = P^*(G^\circ\ \ |\theta)$.

Затим аргументом који је сличан оном који је употребљен у извођењу (1.4.16) налазимо

(1.4.34) $\quad L^*(\theta) \leq\ {k_0}^{h(\theta)} L\,(\theta)$.

Догађај G_n' који резултира из прихватања H_1 а који је дефинисан другом неједнакошћу из (1.4.1) подједнако је дефинисан неједнакошћу

(1.4.35) $\quad Q_{*n} \geq\ {k_1}^h Q_n$.

Ако пратимо аргумент сличан ономе кога смо добили у (1.4.34) налазимо као код (1.4.17) да је

(1.4.36) $\quad 1 - L^*(\theta) \geq\ {k_1}^{h(\theta)}(\,1 - L\,(\theta))$.

Ако резонујемо као код замене неједнакости у (1.4.18) једнакостима из (1.4.19) због приближних вредности k_0 и k_1 то сугерише замену неједнакости (1.4.34) и (1.4.36) једнакостима да би се приближили $L\,(\theta)$. Ова добијена апроксимација је

(1.4.37) $\quad L\,(\theta) \cong \frac{1-\,{k_1}^{h(\theta)}}{{k_0}^{h(\theta)}-\,{k_1}^{h(\theta)}}$.

Пошто је $h(\theta_0)$ =1 и $h(\theta_1)$ = - 1, видеће се да ако се вредности од k_0 и k_1 приближе (1.4.19) та апроксимација (1.4.37) даје тачне вредности за $L\,(\theta_0)$ и $L\,(\theta_1)$ због секвенцијалног теста количника веродостојности јачине (α, θ_0; β, θ_1), као што је у (1.4.14).

Апроксимација (1.4.37) за $L\,(\theta)$ задовољавајућа је због практичних разлога. Прецизније испитивање колико је тачна апроксимација за вредности θ различите од θ_0 и θ_1 је прилично тежак део анализе који се изоставља. Али детаљи такве анализе налазе се у Валдовој књизи (1947а).

Можемо закључити следеће

Теорема 1.4.7 Под условима из леме 1.4.6 апроксимција за карактеристичну оперативну функцију $L\,(\theta)$ за секвенцијални тест количника веродостојности јачине (α, θ_0; β, θ_1) дата је у (1.4.37) где $h(\theta)$ задовољава (1.4.32) и где су k_0 и k_1 приближни као у (1.4.19).

(д) Просечан број узорка секвенцијалног теста количника вердостојности

Да бисмо добили приближан израз за $\mathcal{E}(n\,|\theta)$ можемо поступити овако: ако је $\mathcal{E}(z\,|\theta)\neq 0$ из (1.4.11) налазимо да је

(1.4.38) $\quad \mathcal{E}(n\,|\theta)=\dfrac{\mathcal{E}(z_1+z_2+\ \dots+z_n|\theta)}{\mathcal{E}(z\,|\theta)}$.

Као раније нека $G^{\circ}=G_1^{\circ}\cup G_2^{\circ}\cup\dots$, и $G'=G_1'\cup\ G_2'\cup\dots$. Онда је $P\,(\mathrm{G}^{\circ}\ \ |\theta)=L(\theta)$, и $P\,(\mathrm{G}'\ \ |\theta)=1-L\,(\theta)$ можемо написати

(1.4.39) $\quad \mathcal{E}(z_1+\ z_2+\ \dots+\ z_n|\theta)=\mathcal{E}(z_1+\ z_2+\ \dots+\ z_n|G^{\circ}\,;\theta)\ L\,(\theta)\ +$

$+\,\mathcal{E}(z_1+\ z_2+\ \dots+\ z_n|G'\,;\theta)\ (1-L\,(\theta))$.

Али је $\mathcal{E}(z_1+\ z_2+\ \dots+\ z_n|G^{\circ}\,;\theta)\leq\log\ k_0$ и $\mathcal{E}(z_1+\ z_2+\ \dots+\ z_n|G'\,;\theta)\geq\log\ k_1$. Заменом k_0 и k_1 у овим неједнакостима вредностима којима су наведене у (1.4.19) и заменом неједнакости једнакостима налазимо да (1.4.38) даје следећу апроксимацију за $\mathcal{E}(n\,|\theta)$:

(1.4.40) $\quad \mathcal{E}(n\,|\theta)\cong\dfrac{L\,(\theta) log\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)+(1-L\,(\theta))\ log\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)}{\mathcal{E}(z\,|\theta)}$.

При θ_0 и θ_1 приближне вредности за $\mathcal{E}(n\,|\theta)$ су

$$\mathcal{E}(n\,|\theta_0)\cong\frac{(1-\alpha)\ log\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)+\alpha\ log\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)}{\mathcal{E}(z\,|\theta_0)}$$

(1.4.41)

$$\mathcal{E}(n\,|\theta_1)\cong\frac{\beta\ log\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)+(1-\beta)\ log\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)}{\mathcal{E}(z\,|\theta_1)}$$

Ове апроксимације су задовољавајуће из практичних разлога. Проблем постављања граница код грешке у апроксимацији у (1.4.40) захтева знатну анализу коју ми изостављамо.

(ђ) Ефикасност секвенцијалног теста количника веродостојности

Следећа теорема Валда (1945) даје ниже границе за $\mathcal{E}(n\,|\theta)$ при θ_0 и θ_1 за било који секвенцијални тест:

Теорема 1.4.8 Нека $(x_1, x_2, \ldots)$ буде низ независних случајних променљивих чија је густина расподеле $f(x;\theta)$ тако да је $\mathcal{E}(n\,|\theta) \neq 0$ где је z дефинисано у (1.4.4). Нека *S* буде било који секвенцијални тест јачине (α, θ_0; β, θ_1) који се завршава са вероватноћом 1. Онда је

$$\mathcal{E}(n\,|\theta_0) \geq \frac{(1-\alpha)\, log\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right) + \alpha\, log\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)}{\mathcal{E}(z\,|\theta_0)}$$

(1.4.42)

$$\mathcal{E}(n\,|\theta_1) \geq \frac{\beta\, log\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right) + (1-\beta)\, log\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)}{\mathcal{E}(z\,|\theta_1)}$$

Неће бити двосмислености ако обележимо са G_n°, G_n' и G_n основне догађаје у простору узорка $(x_1, \ldots, x_n)$ n= 1, 2 , … који задовољавају (1.2.1) као догађаје који дефинишу произвољан секвенцијални тест *S*. [У случају да је *S* секвенцијални тест количника веродостојности G_n°, G_n' и G_n , n= 1, 2 , … су дефинисани у (1.2.1) и са три неједнакости у (1.4.1).] По обичају нека z_1, z_2,...буде дефинисано као у (1.4.5). Из (1.4.11) произилази да ћемо за *S* имати

(1.4.43) $\mathcal{E}(n\,|\theta) = \dfrac{\mathcal{E}(z_1 + z_2 + \ldots + z_n|\theta)}{\mathcal{E}(z\,|\theta)}$.

Али је

(1.4.44) $\mathcal{E}(z_1 + z_2 + \ldots + z_n|\theta) = \mathcal{E}(z_1 + z_2 + \ldots + z_n|G^{\circ}\,;\theta)\, P\,(G^{\circ}|\theta) +$

$+\, \mathcal{E}(z_1 + z_2 + \ldots + z_n|G'\,;\theta)\, P\,(G'|\theta)$.

Прво, хајде да размотримо $\mathcal{E}(n \mid \theta_0)$. Пошто је S јачине (α, θ_0; β, θ_1) имамо

(1.4.45) $\quad P(\mathrm{G}^\circ \mid \theta_0) = 1 - \alpha$, $P(\mathrm{G}' \mid \theta_0) = \alpha$.

Искориставши чињеницу да је за сваку случајну променљиву y

(1.4.46) $\quad \mathcal{E}(y) \leq \log \mathcal{E}(e^y)$,

имамо

(1.4.47)
$$\mathcal{E}(z_1 + z_2 + \ldots + z_n \mid G^\circ ; \theta_0) \leq \log \mathcal{E}(e^{z_1 + z_2 + \ldots + z_n} \mid G^\circ ; \theta_0)$$
$$= \log \mathcal{E}\left(\frac{Q_{1n}}{Q_{0n}} \mid (G^\circ ; \theta_0)\right).$$

где је $\mathcal{E}\left(\frac{Q_{1n}}{Q_{0n}} \mid G^\circ ; \theta_0\right)$ условна средња вредност преко G° ($= G_1^\circ \cup G_2^\circ \cup \ldots$) када је $\theta = \theta_0$, производа $\left(\frac{f(x_1;\theta_1)}{f(x_1;\theta_0)}\right)\left(\frac{f(x_2;\theta_1)}{f(x_2;\theta_0)}\right) \ldots$ узетог све док се не заврши секвенцијална процедура. Али

(1.4.48) $\quad \mathcal{E}\left(\frac{Q_{1n}}{Q_{0n}} \mid G^\circ ; \theta_0\right) = P(G^\circ \mid \theta_1) / P(G^\circ \mid \theta_0) = \frac{\beta}{1-\alpha}$.

Због тога је

(1.4.49) $\quad \mathcal{E}(z_1 + z_2 + \ldots + z_n \mid G^\circ ; \theta_0) \leq \log \frac{\beta}{1-\alpha}$.

Слично

(1.4.50) $\quad \mathcal{E}(z_1 + z_2 + \ldots + z_n \mid G' ; \theta_0) \leq \log \frac{1-\beta}{\alpha}$.

Заменом из (1.4.45), (1.4.49) и (1.4.50) у (1.4.44) добијамо прву неједнакост у (1.4.42) . Друга неједнакост се добија на потпуно сличан начин и тиме се доказује теорема 15.4.8.

Даља проучавања нижих граница за $\mathcal{E}(n \mid \theta)$ обавили су Хоефдинг (1960), Кифер и Вајс (1957). Андерсон (1960) и Донели (1957) су направили неке измене теста вероватноће у случају узорковања из нормалне расподеле са познатом варијансом али непознатим средњом вредноћу, тако да се умањује $\mathcal{E}(n \mid \theta)$.

У случају секвенцијаног теста количника веродостојности , тј. где су G_n°, G_n' и G_n одређени у (1.2.1) и неједнакостима у (1.4.1) видели смо да су

$$\mathcal{E}(z_1 + z_2 + \ \dots + z_n | G^\circ ; \theta) \leq \log k_0$$

(1.4.51)

$$\mathcal{E}(z_1 + z_2 + \ \dots + z_n | G' ; \theta) \geq \log k_1 \ .$$

Ако, када тачка узорка $(x_1, \dots, x_n)$ упадне у G_n°, (тј. када $z_1 + z_2 + \ \dots + z_n \leq \log k_0$) након извлачења x_n , ми произвољно одређујемо $z_1 + \dots + z_n$ вредност $\log k_0$, и када $(x_1, \dots, x_n)$ упадне у G_n' (тј.када је $z_1 + z_2 + \ \dots + z_n \geq \log k_1$) након извлачења x_n, ми произвољно одређујемо $z_1 + \dots + z_n$ вредност $\log k_1$, онда неједнакости у (1.4.49) и (1.4.50) постају једнакости, а изрази (1.4.41) постају једнакости за $\mathcal{E}(n | \theta_0)$ и $\mathcal{E}(n | \theta_1)$. Тако се види да су једнакости (1.4.42) заиста остварене у случају секвенцијалног теста количника веродостојности путем апроксимације при којој је $z_1 + \dots + z_n$, n= 1,2, ... , добила вредност $\log k_0$ или $\log k_1$ на основу унапред поменутог правила. Под овим условима не постоји секвенцијални тест који би био ефикаснији за тестирање H_0 и H_1 од модификованог теста количника веродостојности. Овај аргумент који се односи на оптимални карактер секвенцијалног теста количника веродостојности био је првобитно дат од стране Валда(1945). Комплетнији и строжији аргумент су касније дали Валд и Волфовић (1948).

(е) Скраћивање секвенцијалног теста количника веродостојности

Ако се секвенцијални тест количника веродостојности не заврши за n = 1, ..., N-1 , под претпоставком да је следеће правило усвојено за завршавање теста након извлачења x_n :

Прихватамо H_0 ако је

(1.4.52) $\log k_0 < z_1 + z_2 + \ \dots + z_N \leq 0$;

прихватамо H_1 ако је

(15.4.53) $0 < z_1 + z_2 + \ \dots + z_N < \log k_1$.

Нека овај скраћени секвенцијални тест буде обележен са S_N и нека α_N и β_N буду грешке прве врсте и друге врсте у вези са S_N . Ми ћемо размотрити проблем одређивања горњих граница за α_N и β_N . Нека $G^{\circ}_{(N)}$ и $G'_{(N)}$ буду догађаји у R_N у коме су H_0 и H_1 прихваћени тестом S_N . Онда су $G^{\circ}_{(N)}$ и $G'_{(N)}$ дисјунктни догађаји чија је унија R_N.

Биће пожељније размотрити $G^{\circ}_{(N)}$ и $G'_{(N)}$ као цилиндричне скупове у R_∞ ; Они су дисјунктни наравно, а њихова унија је R_∞.

Имамо да је

(1.4.54) $\quad P\,(G'_{(N)}\,|\theta_0) = \alpha_N$.

Као раније, нека G° и G' означавају догађаје у R_∞ у којима су H_0 и H_1 прихваћени у нескраћеном секвенцијалом тесту количника веродостојности *S*. Сећамо се да је

(1.4.55) $\quad P\,(G'\,|\theta_0) = \alpha$.

Нека G'^{*} буде догађај у R_∞ у коме је H_1 прихваћено у скраћеном случају а одбачено (H_0 је прихваћено) у нескраћеном случају.

Тада је

(1.4.56) $\quad G'_{(N)} \subset (G' \cup G'^{*})$.

Сада ако *J* означава догађај за R_∞ у коме (1.4.53) важи ми имамо $G'^{*} \subset J$, а отуд

(1.4.57) $\quad G'_{(N)} \subset (G' \cup J)$.

Сада ако изаберемо довољно велико N да чини $z_1 + z_2 + \ldots + z_N$ приближно нормалним, имамо

(1.4.58) $\quad P\,(0 < z_1 + z_2 + \ldots + z_N < \log k_1\,|\theta_0) = \Phi(y_0') - \Phi(y_0) + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$

где је

$$y_0 = -\sqrt{N}\,\mathcal{E}(z\,|\theta_0)/\sigma(z\,|\theta_0)$$

(1.4.59)

$$y_0' = \sqrt{N}\left[\frac{1}{N} log\ k_1 - \mathcal{E}(z\,|\theta_0)\right] / \sigma(z\,|\theta_0)$$

и $\Phi(y)$ је функција расподеле од *N* (0, 1), где су $\mathcal{E}(z\,|\theta_0)$ и $\sigma^2(z\,|\theta_0)$ средња вредност и варијанса случајне променљиве $z = \log\left(\frac{f(x\ \ ;\theta_1)}{f(x\ \ ;\theta_0)}\right)$, одређене из густине расподеле $f(x\ \ ;\theta_0)$.

Због тога је осим код редоследа $\frac{1}{\sqrt{N}}$, $\alpha + \Phi(y_0') - \Phi(y_0\ )$ је горња граница за α_N. На сличан начин налазимо осим код редоследа $\frac{1}{\sqrt{N}}$, да је $\beta + \Phi(y_1') - \Phi(y_1\ )$ горња граница за β_N где је

$$y_1\ = \sqrt{N}\left[\frac{1}{N} log\ k_0 - \mathcal{E}(z\,|\theta_1)\right] / \sigma(z\,|\theta_1)$$

(1.4.59a)

$$y_1' = -\sqrt{N}\ \mathcal{E}(z\,|\theta_1)/\sigma(z\,|\theta_1)\ ,$$

кад год су $\mathcal{E}(z\,|\theta_1)$ и $\sigma^2(z\,|\theta_1)$ средња вредност и варијанса од *z* одређене из $f(x\ \ ;\theta_1)$.

За мале вредности *α* и *β*, непознатима k_0 (у y_1) и k_1 (у y_0') , могу се скоро сасвим приближити *β*/(1 – *α*) и (1 – *β*)/*α*, редом, као што је наведено у одељку 1.4(ц).

У закључку имамо следеће резултате захваљујући Валду (1945):

Теорема 1.4.9 Ако случајна променљива

$$z = \log\left(\frac{f(x\ \ ;\theta_1)}{f(x\ \ ;\theta_0)}\right)$$

има ограничену средњу вредност и варијансу израчунату било из $f(x\ \ ;\theta_0)$ или из $f(x\ \ ;\theta_1)$, горња граница за грешку α_N прве врсте скраћеног секвенцијалног теста количника веродостојности S_N је

$$\alpha + \Phi(y_0') - \Phi(y_0\ ) + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$$

где је *α* грешка прве врсте нескраћеног теста количника веродостојности S и где су y_0 и y_0' дати у (1.4.59). Слично томе горња граница за грешку друге врсте β_N је

$$\beta + \Phi(y_1') - \Phi(y_1\ ) + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$$

где је β грешка друге врсте од S тамо где су y_1 и y_1' дати у (1.4.59.а).

ПРИМЕР 4. Претпоставимо сада да хоћемо да тестирамо прихватљиво средње време трајања машине.

H_0: машина траје 200 сати и више
H_1: машина траје 100 сати и мање

Ако трајање машине има експоненцијалну расподелу (са средњом вредношћу μ), расподела и густина случајне променљиве коју означавамо са X (трајање машине) под хипотезом H_i , i=0,1, μ_i, је

$F_{\mu_i}(X) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu_i}}$, $f(X) = \frac{1}{\mu_i} e^{-\frac{x}{\mu_i}}$, i=0,1; μ_0= 200, μ_1=100.

Стављамо те машине на тестирање, једну по једну, време трајања теста је T= 20 сати након чега процењујемо да ли свака од машина ради (прошла је тест) или не (пала је на тесту).

Вероватноће ових резултата под хипотезама H_i , i=0,1 су:

p_i= P {успех под хипотезом H_i}= P_{μ_i}{ опстале машине за T= 20 }= P_{μ_i}{ X> 20} =

= 1- P {X ≤ 20}= $e^{-\frac{20}{\mu_i}}$, i=0,1

P {успех под хипотезом H_0}= $e^{-\frac{20}{200}} = e^{-0.1}$ = 0.905

P {успех под хипотезом H_1}= $e^{-\frac{20}{100}} = e^{-0.2}$ = 0.819

Можемо да трансформишемо овај однос еквивалентним хипотезама

H_0: p_0= 0.905, H_1: p_1= 0.819

У оваквој поставци, тестирање сваког уређаја за 20 сати је независно са вероватноћом успеха p_i. Нека је y- број успеха у n проба, и има биномну расподелу $B(n, p_i)$, i=0,1. Дефинишемо количник веродостојности помоћу биномне расподеле под хипотезама H_i , i=0,1.

$$\frac{\mathrm{P}\,\{y \text{ успеха под хипотезом } H_1\}}{\mathrm{P}\,\{y \text{ успеха под хипотезом } H_0\}} = \frac{Bin(y\,;n,p_1)}{Bin(y\,;n,p_0)} = \frac{k{p_1}^{y}\,(1-p_1)^{n-y}}{k{p_0}^{y}\,(1-p_0)^{n-y}} = \frac{{p_1}^{y}\,(1-p_1)^{n-y}}{{p_0}^{y}\,(1-p_0)^{n-y}}$$

k – је број начина на који може да се добије *y* успеха у *n* проба.

Сада дефинишемо *α* и *β.*

α- је ризик произвођача, одбијање уређаја са прихватљивим временом трајања,

β- је ризик потрошача, вероватноћа прихватања уређаја са неприхватљивим временом трајања и нека *α* = *β* = 0.128. Сада можемо пронаћи две вредности *A* и *B*, на сваком од *n* корака, јер имамо тестирано *n* машина секвенцијално (једну по једну) и добијамо *y* –број успеха, *PR*-количник веродостојности је:

$$\mathrm{P}\{PR > A\} = \mathrm{P}\left\{\frac{{p_1}^{y}\,(1-p_1)^{n-y}}{{p_0}^{y}\,(1-p_0)^{n-y}} > A\right\} = \beta$$

$$\mathrm{P}\{PR < B\} = \mathrm{P}\left\{\frac{{p_1}^{y}\,(1-p_1)^{n-y}}{{p_0}^{y}\,(1-p_0)^{n-y}} < B\right\} = 1-\alpha$$

Сада дефинишемо секвенцијални тест количника веродостојности *S* са *S*(*A*,*B*), помоћу претходних једначина као тест који упоређује *PR* са вредностима *A* и *B* на сваком од *n* корака, и доноси се одлука:

1) прихватамо H_0 ако је *PR*< *B*,

2) прихвтамо H_1 ако је *PR*> *A*,

3) настављамо тестирање ако је *B* <*PR*< *A.*

Нпр. након стављања 10 уређаја на тестирање, *n*=10, имамо да је *y*= 6. Затим добијамо биномни секвенцијални тест са резултатима:

$$\mathrm{P}\left\{\frac{y=6 \text{ успеха под хипотезом } H_1}{y=6 \text{ успеха под хипотезом } H_0}\right\} = \frac{Bin(6\,;10,p_1)}{Bin(6\,;10,p_0)} = \frac{0.819^6(1-0.819)^{10-6}}{0.905^6(1-0.901)^{10-6}} = \frac{3.24E-4}{4.47E-5} = 7.23$$

Сада упоређујемо 7.23 са адекватним вредностима *A* и *B* и одлучујемо да:

1) да зауставимо тестирање и прихватимо H_1 у којој је вероватноћа успеха 0.819 и експоненцијална средња вредност је 100 сати и мање, ако је *PR* вредност 7.23 већа од *A,*

2) да зауставимо тестирање и прихватимо H_0 у којој је вероватноћа успеха 0.905, и експоненцијална средња вредност је 200 сати и више, ако је *PR* вредност 7.23 мања од *B,*

3) узимамо следећи узорак и понављамо процес ако је 7.23 између *A* и *B*.

Можемо да поједноставимо процес и једначине, узимајући логаритам у *PR* једначини која следи, дефинишући област настављања тестирања:

$$B < \frac{{p_1}^{y}\,(1-p_1)^{n-y}}{{p_0}^{y}\,(1-p_0)^{n-y}} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{y}\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^{n-y} < A$$

Резултат је линеарна једначина која је функција од *y*, ограничена логаритамским вредностима *A* и *B*:

$$ln\,(B) < y\,ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right) + (n-y)\,ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)$$

$$= n\,ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right) + y\left\{ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right) - ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)\right\} < ln\,(A)$$

$$ln\,(B) < an + by < ln\,(A)$$

$$a = ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right),\quad b = \left\{ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right) - ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)\right\}$$

Коефицијенти *a* и *b* су очигледно функције од p_i, *i*=0,1, и константе *A* и *B* могу се апроксимовати:

$$A \cong \frac{(1-\beta)}{\alpha},\quad B \cong \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

У нашем примеру p_0= 0.905, p_1= 0.819, *n* =10, *y* =6, *α* = *β* = 0.128. сада можемо израчунати коефицијенте *a* и *b*, и вредности *A* и *B* се могу апроксимовати:

$$a = ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right) = ln\,\frac{1-0.819}{1-0.905} = ln\,(1.906) = 0.6446$$

$$b = \left\{ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right) - ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)\right\} = ln\,\frac{0.819}{0.905} - ln\,\frac{1-0.819}{1-0.905} = -\,0.0998 - 0.6446 = -\,0.7444$$

$$A \cong \frac{(1-\beta)}{\alpha} = \frac{1-0.128}{0.128} = 6.\,813$$

$$ln\,A = ln\,(6.813) = 1.919$$

$$B \cong \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{0.128}{1-0.128} = 0.147$$

$$ln\,B = -\,1.919$$

ln *B*= - 1.919 < 0.64446·*n* -0.7444·*y* < ln *A*= 1.919

Али 0.64446· 10 – 0.7444· 6 = 1.979 > 1.919

Пошто је 1.979 веће од 1.919 (*PR*> *A*) заустављамо тестирање и прихватамо H_1 да је p_1= 0.819 (тј.да машине раде мање од 100 сати). Да је једначина 0.64446· *n* – 0.7444· *y* дала вредност мању од -1.919, ми бисмо прихватили H_0, да је p_0= 0.819 (тј. да машине раде преко 200 сати). Да је резултат једначине био између -1.919 и 1.919 ми бисмо наставили тестирање.

Описана процедура је тешка за употребу. Боља процедура за секвенцијални тест количника веродостојности је када упоредимо *y* директно са бројем проба *n*.

ln *B*< *an* + *by* < ln *(A)*

$\frac{ln\ \mathrm{B}}{b}$ - $\frac{\mathrm{a}}{b}$ ·*n*= h_1+ *sn* > *y* >$\frac{ln\ \mathrm{A}}{b}$ - $\frac{\mathrm{a}}{b}$ ·*n* = h_0+ *sn*

h_1+ *sn*= $\frac{-1.919}{-0.7444}$ - $\frac{0.6446}{-0.7444}$ ·*n* > *y* > $\frac{1.919}{-0.7444}$ - $\frac{0.6446}{-0.7444}$ ·*n* = h_0+ *sn*

r_n= h_1+ *sn* = 2.578 + 0.866·*n* > *y* >-2.578 + 0.866·*n*= h_0+ *sn*= a_n

Заменом броја *n* бројевима фаза које иду од 1, 2, ..., добијамо границе секвенцијалног теста количника веродостојности ($\mathrm{a}_n;\ r_n$) (односно бројеве одбијања и прихватања).

Погледајмо табелу 2. Приметимо да је немогуће одбити машине (тј. прихватити H_1) ако је *n*= 4 и мање. Такође је немогуће прихватити H_0 ако тестирамо више од 20 уређаја. Такође, приметимо како гранични параметри (пресецања h_0 и h_1, и нагиба *s*) у једначинама зависе од *α* и *β,* и од вероватноћа p_0 и p_1.

Пресецања: $h_1= \frac{ln\ \mathrm{B}}{b} = \frac{ln\left\{\frac{\beta}{1-\alpha}\right\}}{\left\{ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right)-ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)\right\}}$; $h_0= \frac{ln\ \mathrm{A}}{b} = \frac{ln\left\{\frac{1-\beta}{\alpha}\right\}}{\left\{ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right)-ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)\right\}}$

Нагиба: $s= -\frac{\mathrm{a}}{b} = -\frac{ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)}{\left\{ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right)-ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)\right\}} > 0$

Приметимо што су мање грешке *α* и *β* већа је вредност за h_1. То значи, да ће у просеку секвенцијални тест дуже трајати, (имаће више фаза) до коначне одлуке.

Табела 2. Приказ резултата секвенцијалног теста количника веродостојности

Ред	Фаза	Одбијање	Прихватање
1	1	-1.712	3.444
2	2	-0.846	4.310
3	3	0.020	5.176
4	**4**	**0.886**	**6.042**
5	5	1.752	6.908
6	6	2.618	7.774
7	7	3.484	8.640
8	8	4.350	9.506
9	9	5.216	10.372
10	10	6.082	11.238
11	11	6.948	12.104
12	12	7.814	12.970
13	13	8.680	13.836
14	14	9.546	14.702
15	15	10.412	15.568
16	16	11.278	16.434
17	17	12.144	17.300
18	18	13.010	18.166
19	19	13.876	19.032
20	**20**	**14.742**	**19.898**
21	21	15.608	21.630
22	22	16.474	21.630
23	23	17.340	22.496
24	24	18.206	23.362
25	25	19.072	24.228

Пошто смо захтевали веће гаранције за секвенцијални тест количника веродостојности (мање грешке), овај тест ће нужно захтевати више информација (више фаза) да би обезбедио одлуку која задовољавајућа за грешке α и β.

Нагиб s зависи од вероватноћа p_0 и p_1, а такође и оба гранична параметра зависе од тих вероватноћа. Област настављања тестирања која је дефинисана нагибом s и параметрима h_0 и h_1, карактерише брзину и одлуку која ће се донети у сваком кораку (фази).

Претпоставимо да смо заинтересовани за процену серије долазног материјала и да је прихватљив ниво квалитета дефинисан као максимум процената дефектних, нпр. 10% ($p \leq 0.1$). Такође, претпоставимо да други проценат дефектности дефинише неприхватљив квалитет материјала, и изнад тог процента нећемо прихватити серију долазног материјала (нпр. 20% дефектности и више). Затим дефинишемо вредности p_0= 1 – 0.1 =0.9 и p_1= 1- 0.2= 0.8, за хипотезе H_0 и H_1. Затим се због лакшег тестирања, мањих трошкова и осталих практичних разлога, одлучујемо да тестирамо више ставки секвенцијално, тако што се узима свака посебно, једна по једна, уместо да узмемо један узорак фиксне величине *n* у једном тренутку.

ж) Просечан број обима узорка (ASN)

Највећа предност вишеструког узорковања је је смањено дуготрајно тражење или просечна величина узорка довољна до доношења добре одлуке. За сада случајна променљива „величина узорка“ је вероватноћа исхода (варира у сваком случају). То је „очекивана вредност“, позната као ASN „просечан број узорака“, и зависи од вредности реалног параметра у тесту, било да је то проценат дефектности *p*, поузданост, или неки други параметар који нас занима.

ASN се добија следећом дефиницијом очекиване вредности. За дупло узорковање:

$$\text{ASN}= \text{E}\{\text{SN}\} = \sum_{SN} SN \cdot P\{SN\} = n_1 \cdot \text{P}(n_1) + (n_1 + n_2) \cdot \text{P}(n_1 + n_2)$$

У шеми дуплог узорковања, SN (број узорка) може бити једино n_1или $n_1 + n_2$. P(n_1) је вероватноћа извлачења само првог узорка, која се јавља када је одлука донета после првог извученог узорка (са вероватноћом 1- P$\{c_1 \leq Y \leq c_2\}$). Вероватноћа P$\{n_1 + n_2\}$ да извлачимо други узорак, укупног обима $n_1 + n_2$, се јавља наравно када имамо неубедљив резултат након првог извлачења (са вероватноћом P$\{c_1 \leq Y \leq c_2\}$).

Илустроваћемо овај случај користећи план дуплог узорковања нпр.

S (n_1=20, n_2= 20, c_1=14, c_2= 15, c_3= 33), описан раније. Нека тачна поузданост *p* буде 0.9, *p*= 0.9, и нека Y буде број опсталих које смо добили након извлачења првог узорка обима n_1=20. Затим, добијање неубедљивих резултата након након првог узорковања, када је *p*= 0.9, је P($c_1 \leq Y \leq c_2$)= P($14 \leq Y \leq 15$)=

0.0089+0.0319. Онда је ASN = 20.81 једва већи од тачног броја елемената узорка *n*= 20 што је било потребно за једноузорчки план, фиксне величине n_1=20:

ASN= $n_1 \cdot \mathrm{P}(n_1) + n_2 \cdot \mathrm{P}(n_2)$ = 20 · (1- (0.0089+0.0319) + 40·(0.0089+0.0319))

Табела 3 показује ASN вредности за план дуплог узорковања S, израчунат за дату вредност параметра *p*.

Табела 3. Поређење ASN за дупло узорковање за дато p

поузданост	0.95	0.9	0.85	0.8	0.75	0.7	0.65	0.6
ASN	20.05	20.82	22.96	25.67	27.42	27.41	25.96	23.98

Генерално, за секвенцијалне тестове количника веродостојности, ASNce добија следећи неке принципе описане за план дуплог узорковања. Наравно, број узорковања *n* можемо проширити на било који број, не само на двоструко узорковање. Множимо у свакој фази узорковања вероватноће добијених одлука, за дату вредност параметра *p* и одлука није донета раније у секвенцијалном тесту (тј. пратили смо унутар секвенцијалног теста количника веродостојности област настављања тестирања, све до садашње фазе):

ASN(p) = $\mathrm{E_p}\{$SN= $\sum_{SN\geq 1} SN \cdot P_P\{\text{одлука у фази } SN \text{ али не раније}\}$

ASN вредност за секвенцијалне тестове количника веродостојности у општем случају није лако израчунати.

1.5 ПРИМЕНА СЕКВЕНЦИЈАЛНОГ ТЕСТА КОЛИЧНИКА ВЕРОДОСТОЈНОСТИ НА БИНОМНУ РАСПОДЕЛУ

Да бисмо илустровали резултате одељка 1.4 размотрићемо случај узорковања из биномне расподеле $B_i(1, \theta)$.

У овом случају $(x_1, x_2, \ldots)$ је низ независних случајних променљивих чија је функција расподеле

(1.5.1) $$f(x;\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}, \quad x = 0, 1.$$

Ако се $\sum_{t=1}^{n} x_t$ означи са n_1 имамо

(1.5.2) $$\frac{Q_{1n}}{Q_{0n}} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{n_1}\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{n-n_1}.$$

Користећи апроксимацију (1.4.19) за k_0 и k_1 нека a_n и b_n буду дефинисани

$$a_n = \frac{\log\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right) - n\log\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)}{\log\left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]}$$

(1.5.3)

$$b_n = \frac{\log\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right) - n\log\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)}{\log\left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]}.$$

Три неједнакости у (1.4.1) редуковати на

(1.5.4) $$n_1 \le a_n, \quad n_1 \ge b_n, \quad a_n < n_1 < b_n.$$

Тако се секвенцијални процес наставља докле год је $a_n < n_1 < b_n$; завршава се након извлачења x_n са прихватањем H_0 ако је $n_1 \le a_n$; а завршава се након извлачења x_n са прихватањем H_1 (одбацивањем H_0) ако је $n_1 \ge b_n$.

Коришћењем апроксимација (1.4.19) за k_0 и k_1 у (1.4.37) добијамо следећу апроксимацију за оперативну карактеристичну функцију нашег секвенцијалног теста :

(1.5.5) $$L(\theta) \cong \frac{1-\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^{h(\theta)}}{\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^{h(\theta)} - \left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^{h(\theta)}}$$

Где је $h(\theta)$ функција од θ дефинисана применом (1.4.32) тј.

(1.5.6) $$\sum_{x=0}^{1}\left[\frac{\theta_1^x(1-\theta_1)^{1-x}}{\theta_0^x(1-\theta_0)^{1-x}}\right]^h \theta^x(1-\theta)^{1-x} = 1 .$$

Упрошћавањем (1.5.6) добијамо следећи функционални одос између θ и h

(1.5.7) $$\theta = \frac{1-\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^h}{\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^h-\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^h} .$$

Видеће се да $h(\theta_0)$ = 1 и $h(\theta_1)$ = - 1. Шта више, видеће се из (1.5.5) да апроксимциона формула за $L(\theta)$ даје тачне вредности за $L(\theta_0)$ и $L(\theta_1)$.

Ако се погледа (1.4.40) и израчуна вредност за $\mathcal{E}(n|\theta)$ налазимо да је просечни број узорка $E(n|\theta)$ приближно дат у

(1.5.8) $$\mathcal{E}(n|\theta)= \frac{L(\theta)\log\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)+(1-L(\theta))\log\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)}{\theta\log\frac{\theta_1}{\theta_0}+(1-\theta)\log\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)} .$$

Тако, ако се (приближан) израз за $L(\theta)$ у (1.5.5) и израз за θ у (1.5.7) замене у (1.5.8) добијамо израз за $\mathcal{E}(n|\theta)$ као функцију параметра h . $\mathcal{E}(n|\theta)$ се може лако одредити за θ = 0 , θ_1 , θ_2.

Примене Валдовог секвенцијалног теста количника веродостојности за узорковање из разних специфичих расподела објављено је од стране Валда (1947а) и од стране истраживачке групе за статистику, Универзитета Колумбија (1945,1947).

1.6 СЕКВЕНЦИЈАЛНА ПРОЦЕНА

(а) Опште напомене

Општа теорија о секвенцијалној процени параметара није била развијена. Валд (1947а) је дао формулацију општег проблема секвенцијалне процене интервалима али га није решио. Он и Штајн (1947) размотрили су секвенцијалну процедуру за одређивање интервала поверења фиксне дужине и интервала поверења за средњу вредност нормалне расподеле са познатом варијансом. Други проблеми специфичне процене су такође разматрани, имајући циљеве који су сродни проблемима секвенцијалне процене. Приказ броја резултата ових проблема дао је Анскомбе (1953).

Основна идеја секвенцијалне процене параметра је углавном урадити довољно узорака да би се могао проценити већи степен прецизности што у извесном смислу не зависи од параметра непознате популације који се процењује. Израз „степен прецизности“ можемо да поставимо на разне начине. Један једноставан начин да се изрази таква прецизност био би обезбедити вршиоца процене за параметар чија варијанса не зависи од тог праметра. Ово се понекад може радити употребом узорака чија је величина унапред фиксирана.

Други начин да се изрази таква прецизност био би да параметар има интервал поверења дужине која се унапред одреди при узорковању. Ово се може постићи специјалним случајевима помоћу узорка фиксне величине. На пример претпоставимо да је μ непознато али σ^2 је познато у N (μ, σ^2), и да је $\bar{x}$ средња вредност узорка величине n из расподеле. Онда је $\bar{x} \pm \frac{1}{2}\delta$ интервал поверења дужине δ имајући коефицијенат $\geq \gamma$, који процењује μ, под условом да је n - 1 одабрано као највећи цео број у $y_\gamma^2\sigma^2/\delta^2$ (уколико ова величина није цео број у том случају n се бира као овај цео број) где y_γ задовољава $\Phi(y_\gamma)$ - $\Phi(-y_\gamma)$ = γ, $\Phi(y)$ што је функција расподеле N (0, 1).

(б) Штајнова процена фиксног интервала за средњу вредност нормалне расподеле

У случају где су σ^2 и μ непознати, Штајн (1945) је показао како би се процедура дуплог узорковања могла употребити за утвђивање интервала поверења фиксне дужине δ за процену μ уз коефицијент поверења који је $\geq \gamma$. Његов резултат гласи овако :

Теорема 1.6.1 Нека $(x_1, \ldots, x_n)$ буде први узорак, а $(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$ други независни узорак из $N(\mu, \sigma^2)$. Нека s^2 буде варијанса првог узорка а $\bar{x}$ средња вредност оба комбинована узорка. Нека $k = [2s\, t_{n-1.\gamma}/\delta]^2$ где је $t_{n-1.\gamma}$ горња $100(1 - \frac{1}{2}\gamma)\%$ тачка Студентове расподеле $S(n - 1)$. Нека m буде одабрано као 0 ако је $k - n \leq 0$ и као најмањи позитивни цео број $\geq k - n$ ако је $k - n > 0$. Онда је $\bar{x} \pm \frac{1}{2}\delta$ интервал поверења дужине δ за μ са коефицијентом поверења $\geq \gamma$.

Да бисмо доказали теорему 1.6.1, лако можемо видети, мада је $\bar{x}$ средња вредност узорка величине m из $N(\mu, \sigma^2)$ где је m случајна променљива, $(\bar{x} - \mu) / [\sigma/\sqrt{m+n}\,]$ има расподелу $N(0, 1)$, и независна је од $(n - 1)\, s^2/\, \sigma^2$, који има расподелу Хи –квадрат $C(n - 1)$. Тако , $(\bar{x} - \mu)\sqrt{m+n}/s$ има Студентову расподелу $S(n - 1)$ и отуд имамо

$$(1.6.1) \quad P\left(-\, t_{n-1,\gamma} < \frac{(\bar{x} - \mu)}{s}\sqrt{m+n} \; < \; +\, t_{n-1,\gamma}\right) = \gamma$$

или еквивалентно

$$(1.6.2) \quad P\left(\bar{x} \; - \; \frac{st_{n-1,\gamma}}{\sqrt{m+n}} < \; \mu \; < \; \bar{x} + \; \frac{st_{n-1,\gamma}}{\sqrt{m+n}}\right) = \gamma \,.$$

Ако је $st_{n-1,\gamma}/\sqrt{n} \leq \frac{1}{2}\delta$ тада је $\bar{x} \pm \delta$ интервал поверења дужине δ за μ који се добија помоћу средње вредности само првог узорка и има коефицијент поверења $\geq \gamma$. Међутим ако је $st_{n-1,\gamma}/\sqrt{n} > \frac{1}{2}\delta$ извлачимо други узорак величине m тако да је m најмањи позитивни цео број за који

$$\frac{st_{n-1,\gamma}}{\sqrt{m+n}} \leq \frac{1}{2}\delta$$

тј. *m* је најмањи позитивни цео број тако да је

$$m \geq \left[\frac{2st_{n-1,\gamma}}{\delta}\right]^2 - n .$$

У овом случају $\bar{x} \pm \frac{1}{2}\delta$, је исто тако интервал поверења дужине $\leq \delta$ за μ дате средњом вредношћу оба узорка комбиновано и коефицијентом поверења који је $\geq \gamma$, и тако доказујемо теорему 1.6.1.

Закључак

Основна и најважнија разлика између секвенцијалних и обичних тестова је у обиму узорка. Код секвенцијалних тестова величина узорка није фиксна, већ се врши узорковање које се зауставља у складу са унапред дефинисаном правилу, док код осталих тестова величина узорка је фиксна и задаје се унапред. Много је ефикасније узимати елементе узорка један за другим (секвенцијално) и дефинисати правило заустављања, уместо да их узмемо све у једном тренутку. Узимање узорка постепено (секвенцијално) и процена њихових резултата у свакој фази узорковања, омогућава заустављање процеса и доношење одлуке раније за разлику од класичних тестова. Ако је ситуација јасна, повољна или неповољна (нпр. ако узорак показује да је квалитет телевизора добар или лош), тада заустављамо процес раније, штедећи тиме време и новац. Само у случају када су подаци двосмислени и нејасни настављамо узорковање и у том случају тражимо додатне информације да бисмо донели што бољу одлуку. Код секвенцијалних тестова обим узорка може бити знатно мањи него код стандардних тестова, а закључак знатно квалитетнији (пример 3).

Овакав тип тестирања се примењује у статистичкој контроли квалитета и било којој области у којој је узимање узорака скупо или веома дуго траје (као што је тестирање времена рада неких уређаја).

У раду су приказани тестови количника веродостојности и његова примена на биномну расподелу (пример 4) и Декартов секвенцијални тест. Описане су шеме тестериња сваког од ових тестова, и неке важне њихове карактеристике, и теореме.

У даљем проучавању секвенцијалних тестова могли бисмо разматрати могућност прављења непараметарских секвенцијалних тестова. Такође, можемо правити поређења између обичних и секвенцијалних тестова, и тако донети неке закључке у смислу који су тестови моћнији, прецизнији, јефтинији, и бржи.

Литература

1. Павле Младеновић, ***ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА***, четврто издање, Математички факултет 2008.год, страна 261-284.

2. START 2005-2, BINSEQ, Разумевање биномног секвенцијалног тестирања, Vol.12, Num.2.

3. Samuel S. Wilks, ***MATHEMATICAL STATISTICS***, издата 1962. од стране John Wiley & Sons, Inc., страна 472-498. У овој књизи се користе и одломци из књига:

4. T. W. Anderson (1960), Модификација секвенцијалног теста односа вероватноће да би се смањила величина узорка, *Ann.Math.Stat.*, Vol. 31, страна 165-197.

5. F. J. Anscombe (1953), Секвенцијална процена, *Jour. Roy. Stat. Soc., Series B,* Vol. 15, страна 1-29.

6. G. A. Barnard (1952), Фреквенција појединих секвенцијалних тестова, *Biometrika,* Vol. 39, страна 144-150.

7. W. Bartky (1943), Вишеструко узорковање са константном вероватноћом, *Ann. Math. Stat.*, Vol. 37, страна 363-377.

8. D. Blackwell (1946), Односи се на једначину Валда, *Ann. Math. Stat.*, Vol. 17, страна 84-87.

9. D. R. Cox (1952), Секвенцијални тест за сложену хипотезу, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, Vol. 48, страна 290-299.

10. H. T. David и W. H. Kruskal (1956), WAGR секвенцијални тест за доношење одлуке са вероватноћом 1, *Ann. Math. Stat*., Vol. 27, страна 797-805.

11. W. J. Dixon и A. M. Mood (1948), Метод добијања и анализирања осетљивости података, *Jour. Amer. Stat. Assn.*, Vol. 43, страна 109-126.

12. H. F. Dodge и H. G. Roming (1929), Метод инспекције узорковања, *Bell System Tech*. *Jour*., Vol. 8, страна 613-631.

13. H. F. Dodge и H. G. Roming (1959), *Sampling Inspection Tables*, друго издање, John Wiley, New York.

14. T. G. Donnely (1957), *A family of sequential tests*, Ph. D. Thesis, University of North Carolina.

15. A. Dvoretzky, J. Kiefer, и J. Wolfowitz (1953a), Секвенцијална одлука проблема за процесе са непрекидним параметром, Тестирање хипотеза, *Ann. Math. Stat*., Vol. 24, страна 254-264.

16. A. Dvoretzky, J. Kiefer, и J. Wolfowitz (1953b), Секвенцијална одлука проблема за процесе са непрекидним параметром, Проблеми процене, *Ann. Math. Stat*., Vol. 24, страна 403-415.

17. W. Hoeffding (1960), Ниже границе за очекиване величине узорка и просечног ризика секвенцијалног поступка, *Ann. Math. Stat*., Vol. 31, страна 352-368.

18. H. Hotelling (1941), Експериментално одређивање максимума функције, *Ann. Math. Stat*., Vol. 12, страна 20-45.

19. J. Kiefer (1948), *Sequential Determination of the Maximum of a Function*, Ph. D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology.

20. J. Kiefer (1953), Секвенцијална минимаксна потрага за максимумом, *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 4, страна 502-506.

21. J. Kiefer (1957), Оптимална секвенцијална претрага и апроксимациони метод под минималним условима регуларности, *Jour. Ind. Appl. Math.*, Vol. 5, страна 105-136.

22. J. Kiefer и L. Weiss (1957), Неке особине генерализованог секвенцијалног теста односа вероватноћа, *Ann. Math. Stat*., Vol. 28, страна 57-74.

23. J. Kiefer и J. Wolfowitz (1952), Стохастичка процена максимума регресионе функције, *Ann. Math. Stat*., Vol. 23, страна 462-466.

24. P. C. Mahalanobis (1940), Узорак анкете о површини земље под јутом у Бенгалу, уз дискусију о планирању експеримената, *Proc. Second Indian Stat. Conference*, Statistical Publishing Society, Calcutta.

25. H. Robbins (1952), Неки аспекти секвенцијалног дизајна експеримената, *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 58, страна 527-535.

26. H. Robbins и S. Monro (1951), Стохастички апроксимациони метод, *Am. Math. Stat.*, Vol. 22, страна 400-407.

27. S. Rushton (1950), О секвенцијалном t-тесту, *Biometrika*, Vol. 37, страна 326-333.

28. S. Rushton (1952), О двоструком секвенцијалном t-тесту, *Biometrika*, Vol. 39, страна 302-308.

29. Statistical Research Group, Columbia University (1945), *Sequential Analysis of Statistical Data: Applications*, Columbia University Press.

30. Statistical Research Group, Columbia University (1947), *Techniques of Statistical Analysis*, McGraw-Hill, New York.

31. C. Stein (1945), Двоузорачки тест за линеарну хипотезу чија моћ је независна од варијансе, *Ann. Math. Stat*., Vol. 16, страна 243-258.

32. C. Stein (1946), Напомена о кумулативним сумама, *Ann. Math. Stat*., Vol. 17, страна 498-499.

33. A. Wald (1945), Секвенцијални тест за статистичке хипотезе, *Ann. Math. Stat.*, Vol. 16, страна 117-186.

34. A. Wald (1947a), *Sequential Analysis*, John Wiley, New York.

35. A. Wald и Wolfowitz (1948), Оптимални карактер секвенцијалног теста односа вероватноћа, *Ann. Math. Stat*., Vol. 19, страна 326-339.

,