Математички факултет

Универзитет у Београду

МАСТЕР РАД

Десет Аполонијевих проблема о додиру кругова,
решених применом инверзије у односу на круг

Марија Путниковић

Ментор
Др Зоран Лучић

Чланови комисије:
Др Неда Бокан, Др Милан Божић, Др Зоран Лучић

Београд, 2014

Предговор

Требало би да је циљ сваког научног рада да читаоцу пружи нека нова сазнања, прошири видике, подстакне на размишљање о новим сопственим идејама... Намера аутора овог рада је да, поред ових општих циљева, конкретно укаже на употребу пресликавања инверзијом у односу на круг, која се, нажалост, ретко користи, а може у великој мери допринети једноставности решења великог броја геометријских задатака и математичких проблема и прикаже решавање чувених *Десет Аполонијевих проблема о додиру кругова* управо помоћу пресликавања инверзијом.

Прво поглавље садржи теоријски увод у сам рад - појам инверзије(дефиниције и теореме везане за пресликавање инверзијом), појам инверзивне равни и неколико инверзијом решених задатака односно доказа познатих теорема, уз напомену да постоји још доста теорема које се могу доказати применом инверзије, на чини се, једноставнији начин, но због обимности овог рада тај је део изостављен.

У другом поглављу решено је свих десет Аполонијевих проблема применом пресликавања инверзијом у односу на круг. Сваки од проблема садржи: " општи случај"- конструкцију траженог круга равни, где су три елемента равни задата у најопштијем положају, "специјалне случајеве "- конструкцију траженог круга равни при заданим посебним положајима три елемента равни и број решења сваког од Аполонијевих проблема у оквиру сваког од ових случајева.

⋄ Под општим случајем подразумевамо следеће:

1. проблем- у оквиру овог проблема не постоји општи и посебни случајеви већ само случај када за дате три тачке постоји, односно не постоји решење проблема;
2. проблем- дате две тачке не припадају датој прави;
3. проблем- дате две тачке не припадају датом кругу;
4. проблем- дата тачка не припада ни једној од дате две праве;
5. проблем- дата тачка не припада ни датој прави ни датом кругу;
6. проблем- дата тачка не припада ни једном од дата два круга;
7. проблем- у оквиру овог проблема не постоји општи и специјални случајеви већ само задати положаји три праве у равни за који постоји, односно не постоји решење постављеног проблема;
8. проблем- ни једна од дате две праве није тангента датог круга;
9. проблем- дата права није тангента ни једног од дата два круга, при чему се дати кругови не додирују;
10. проблем- никоја од два од дата три круга не припадају истом параболичком прамену кругова.

⋄ Специјалних случајева, односно посебних положаја у некима од Аполонијевих проблема је велики број те наводимо само неке од разматраних:

2. проблем- једна од дате две тачке припада датој прави;
3. проблем- једна од дате две тачке припада датом кругу;
4. проблем- дата тачка припада једној од дате две праве;

5. проблем- дата тачка припада датој прави и не припада датом кругу; дата тачка припада датом кругу и не припада датој прави; дата тачка припада и датој прави и датом кругу;

6. проблем- дата тачка припада једном од дата два круга; оба дата круга садрже дату тачку;

8. проблем- једна од дате две праве тангента је датог круга; обе дате праве тангенте су датог круга;

9. проблем- дата права тангента је само једног од дата два круга; дата права заједничка је тангента датих кругова; дата два круга припадају истом параболичком прамену кругова, при чему дата права није радикална оса тог прамена; дата два круга припадају истом параболичком прамену кругова, при чему је дата права радикална оса тог прамена;

10. проблем- два од дата три круга припадају истом параболичком прамену кругова; сва три дата круга припадају истом параболичком прамену кругова.

На крају, посебну захвалност дугујем свом ментору, Др Зорану Лучићу, на безрезервној подрш ци, залагању и исказаном стрпљењу. Надам се да ће овај рад испунити очекивања читалаца и бар неки од горе наведених циљева.

Садржај

Поглавље 1

≺∘≻ Инверзија ≺∘≻

Дефиниција: Нека је $k(O, r)$ произвољан круг неке равни E^2 и нека је $E_*^2 = E^2 \backslash \{O\}$. Пресликавање ψ_k: $E_*^2 \to E_*^2$ дефинисано са $\psi_k(X) = X' \Leftrightarrow X'$ припада полуправи OX и $OX \cdot OX' = r^2$ назива се *инверзија* у односу на круг $k(O, r)$. Тачку O називамо *центром* или *средиштем инверзије*, дуж r називамо *полупречником инверзије*, величину r^2 *степеном инверзије*, а круг k *кругом инверзије* ψ_k.

На основу дефиниције пресликавања инверзијом у односу на круг може се закључцхити да центар O инверзије ψ_k нема своју слику у овој инверзији, нити је тачка O слика у инверзији ψ_k било које тачке равни E, јер би важило $OO \cdot OO' = r^2$, што није могуће. С тога, ако желимо да пресликавање инверзијом посматрамо као бијективно, о чему ће бити речи нешто касније, уместо равни E за домен и кодомен пресликавања ψ_k морамо узети раван $E_*^2 = E^2 \backslash \{O\}$.

Приметимо следеће: ако је A и A' пар одговарајућих тачака у инверзији ψ_k($\psi_k(A) = A'$) тада је права AA' управна на круг $k(O, r)$ инверзије ψ_k јер су, на основу дефиниције пресликавања инверзијом, центар O инверзије и тачке A и A' колинеарне.

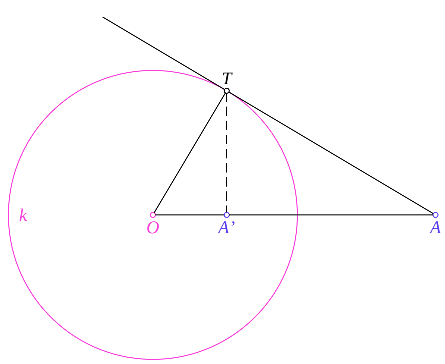
Нека је $k(O, r)$ круг неке равни и ψ_k пресликавање инверзијом у односу на круг k. Одредимо слику у инверзији ψ_k произвољне тачке A ове равни, при чему је $A \neq O$.

Не умањујући општост претпоставимо да тачка A припада спољашњој области круга k. Означимо са T тачку у којој било која од две тангенте на круг k конструисане из тачке A додирује круг k, а са A' подножје управне из T на праву OA(слика 1).

Посматрајмо троуглове OTA и $OA'T$. Како је $\measuredangle OTA' \cong \measuredangle OAT$(углови са нормалним крацима) и $\measuredangle OA'T \cong \measuredangle OTA = 90^\circ$, то су посматрани троуглови OTA и $OA'T$ слични($\triangle OTA \sim \triangle OA'T$). Из сличности ових троуглова следи:

$$\frac{OA'}{OT} = \frac{OT}{OA} \Leftrightarrow \frac{OA'}{r} = \frac{r}{OA}$$

одакле је $OA \cdot OA' = r^2$.



слика 1

Из дефиниције пресликавања инверзијом у односу на круг следи да је управо тачка A' слика тачке A у инверзији ψ_k.

Теорема 1: Инверзија у односу на круг је инволутивно пресликавање.

доказ: Означимо са ψ_k пресликавање инверзијом у односу на произвољан круг $k(O,r)$ неке равни. Нека је A било која тачка те равни и A' слика тачке A у инверзији ψ_k: $\psi_k(A) = A'$. На основу дефиниције инверзије је $OA \cdot OA' = r^2$, па је и $OA' \cdot OA = r^2$, што значи да је тачка A слика у инверзији ψ_k тачке A': $\psi_k(A') = A$ те је:

$$\psi_k(\psi_k(A)) = \psi_k(A') = A,$$

одакле следи да је инверзија у односу на круг инволутивно пресликавање. ♦

Приликом малопређашњег одређивања слике у инверзији ψ_k произвољне тачке A неке равни, претпоставили смо да тачка A припада спољашњој области круга $k(O,r)$ инверзије ψ_k. Сада, на основу претходне теореме, можемо закључити да, да смо тачку A одабрали у унутрашњој области круга k, обзиром да је инверзија инволутивно пресликавање, обрнутим поступком одредили бисмо њену слику A' у инверзији ψ_k. Обзиром на ове закључке следи следећа теорема:

Теорема 2: У инверзији ψ_k: $E^2_* \to E^2_*$ тачки A која припада унутрашњој области круга $k(O,r)$ инверзије ψ_k као слика у инверзији ψ_k одговара тачка A' која припада спољашњој области круга k. И обратно, тачки A која припада спољашњој области круга $k(O,r)$ инверзије ψ_k као слика у инверзији ψ_k одговара тачка A' која припада унутрашњој области круга k.

доказ: Нека је $k(O,r)$ круг инверзије неке равни, ψ_k пресликавање инверзијом у односу на круг k, A произвољна тачка исте равни различита од центра O инверзије $\psi_k(A \neq O)$, а тачка $A' = \psi_k(A)$ њена слика у овој инверзији.

– Ако тачка A припада унутрашњој области круга k инверзије ψ_k тада је $OA < r$, а пошто су, на основу дефиниције пресликавања инверзијом у односу на круг, тачке O, A и A' колинеарне и важи једнакост $OA \cdot OA' = r^2$, то је $OA' > r$, одакле следи да се тачка A' налази ван круга k инверзије ψ_k.

– Ако тачка A припада спољашњој области круга k инверзије ψ_k тада је $OA > r$, а како су, обзиром на дефиницију пресликавања инверзијом у односу на круг, тачке O, A и A' колинеарне и важи $OA \cdot OA' = r^2$, то је $OA' < r$, што значи да тачка A' припада унутрашњој области круга k инверзије ψ_k. ♦

Теорема 3: У инверзији $\psi_k : E^2_* \to E^2_*$ тачка A је инваријантна ако и само ако је $A \in k$.

доказ: Ако је тачка A инваријантна, односно ако важи: $A' = \psi_k(A)$ и $A \equiv A'$, а по дефиницији пресликавања инверзијом је $OA \cdot OA' = r^2$, то је $OA \cdot OA = r^2$, одакле је $OA = r$, па следи да тачка A припада кругу $k(O,r)$ инверзије ψ_k. Обратно, ако тачка A припада кругу $k(O,r)$($A \in k \Rightarrow OA = r$) и ако је $A' = \psi_k(A)$ њена слика у инверзији ψ_k, на основу дефиниције, тачка A' припада полуправи OA и $OA \cdot OA' = r^2$, а како је $OA = r$ то је и $OA' = r$. Пошто A' припада полуправи OA следи да је $A = A'$, тј. тачка $A \in k$ је инваријантна. ⧫

Теорема 4: Пресликавање инверзијом у односу на круг је бијекција.

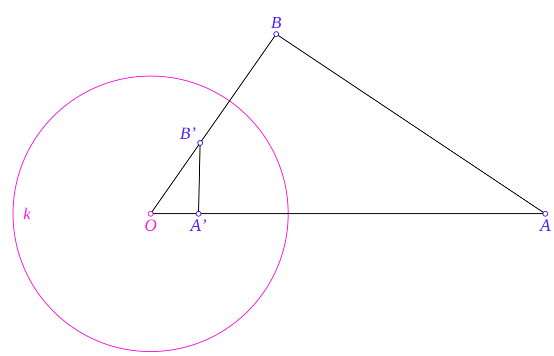
доказ: Нека је A произвољна тачка равни $E^2_* = E^2 \backslash \{O\}$, $k(O, r)$ произвољан круг ове равни и ψ_k пресликавање инверзијом у односу на круг k. За тачку A на полуправи OA једнозначно је одређена тачка A' таква да је $OA' = \dfrac{r^2}{OA}$, а на основу дефиниције пресликавања инверзијом у односу на круг је $OA \cdot OA' = r^2$, где је A' слика у инверзији ψ_k тачке A, тј. $A' = \psi_k(A)$, па је пресликавање инверзијом " на", односно сурјекција.

Даље, ако је $\psi_k(A) = \psi_k(A_1) = A'$ тада је $OA \cdot OA' = r^2$ и $OA_1 \cdot OA' = r^2$, па је $OA = OA_1$, а пошто обе тачке A и A_1 припадају полуправи OA' то је $A \equiv A_1$, што значи да је пресликавање инверзијом "$1 - 1$", односно ин јекција.

Дакле, како је пресликавање инверзијом ψ_k "$1 - 1$" и "na" следи да је пресликавање инверзијом у односу на круг бијекција. ⧫

Лема 1: Нека су O, A, B три неколинеарне тачке неке равни, $k(O, r)$ круг те равни, произвољног полупречника, са центром у тачки O и ψ_k пресликавање инверзијом у односу на круг k. Ако су A' и B' редом слике тачака A и B у инверзији ψ_k тада су троуглови OAB И $OB'A'$ слични.

доказ: Ако су $A' = \psi_k(A)$ и $B' = \psi_k(B)$ редом слике тачака A и B у инверзији ψ_k, из дефиниције пресликавања инверзијом, тачке O, A, A' су колинеарне и тачке O, B, B' су колинеарне, па је $\measuredangle A'OB' = \measuredangle BOA$ (слика 2).



слика 2

На основу дефиниције пресликавања инверзијом у односу на круг је:

$$A' = \psi_k(A) \Rightarrow OA \cdot OA' = r^2$$

$$B' = \psi_k(B) \Rightarrow OB \cdot OB' = r^2,$$

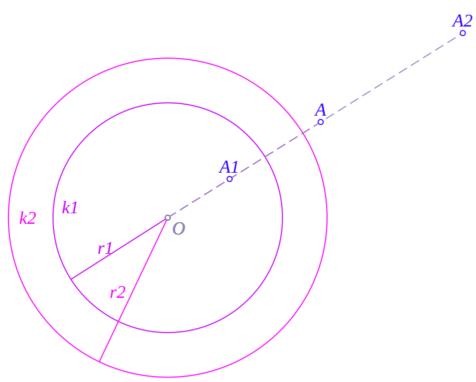
па је $\dfrac{OA}{OB'} = \dfrac{OB}{OA'}$. Из $\measuredangle A'OB' = \measuredangle BOA$ и $\dfrac{OA}{OB'} = \dfrac{OB}{OA'}$ следи $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$. ♢

Теорема 5: Производ двају инверзија ψ_{k_1} и ψ_{k_2} у односу на концентричне кругове $k_1(O,r_1)$ и $k_2(O,r_2)$ представља хомотетију са коефицијентом $(\dfrac{r_2}{r_1})^2$.

доказ: Нека су $k_1(O,r_1)$ и $k_2(O,r_2)$ концентрични кругови неке равни, A произвољна тачка те равни, ψ_{k_1} инверзија у односу на круг $k_1(O,r_1)$ и ψ_{k_2} инверзија у односу на круг $k_2(O,r_2)$. Ако је A_1 слика тачке A у инверзији ψ_{k_1}, а A_2 слика тачке A_1 у инверзији ψ_{k_2}, тј. $A_1=\psi_{k_1}(A)$ и $A_2=\psi_{k_2}(A_1)$ тада важи:

$$\psi_{k_1}(A)=A_1 \;\Rightarrow\; OA\cdot OA_1=r_1^2$$
$$\psi_{k_2}(A_1)=A_2 \;\Rightarrow\; OA_1\cdot OA_2=r_2^2,$$

одакле је $\dfrac{r_2^2}{r_1^2}=\dfrac{OA_2}{OA}$. Како су, на основу дефиниције пресликавања инверзијом, тачке O,A,A_1 колинеарне и тачке O,A_1,A_2 колинеарне, то су све четири тачке O,A,A_1 и A_2 колинеарне (слика 3).



слика 3

Како је $A_2=\psi_{k_2}(A_1)=\psi_{k_2}(\psi_{k_1}(A))=\psi_{k_2}\circ\psi_{k_1}(A)$, то производ инверзија ψ_{k_1} и ψ_{k_2} слика тачку A у тачку A_2 такву да је $\dfrac{OA_2}{OA}=\dfrac{r_2^2}{r_1^2}=(\dfrac{r_2}{r_1})^2$, па је производ инверзија ψ_{k_1} и ψ_{k_2} хомотетија са центром у тачки O и коефицијентом $(\dfrac{r_2}{r_1})^2$, односно $\psi_{k_2}\circ\psi_{k_1}=\mathcal{H}_{O,(\frac{r_2}{r_1})^2}$. ♦

На основу до сада наведеног јасно је да инверзија није изометријска трансформација. Ускоро ћемо доказати да пресликавање инверзијом у односу на круг не чува колинеарност тачака.

Пре но што искажемо и докажемо следећу теорему, ради једноставнијег исказа и доказа исте, уведимо следећу ознаку: $\Phi^*=\Phi\backslash\{O\}$, где је Φ фигура равни E^2 (у нашем случају та фигура биће права или круг), $k(O,r)$ круг исте равни, произвољног полупречника, чији је центар тачка O и ψ_k пресликавање инверзијом у односу на круг $k(O,r)$.

Теорема 6: Нека је $k(O,r)$ круг равни E^2, ψ_k пресликавање инверзијом у односу на круг k и p и l редом права и круг те равни. Тада:

○ ако $O \in p$, онда $\psi_k(p^*) = p^*$;

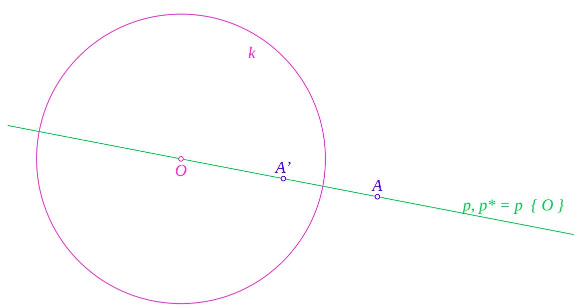
⊚ ако $O \notin p$, онда $\psi_k(p) = j^*$, где је j круг исте равни који садржи центар O инверзије ψ_k;

⋆ ако $O \in l$, онда $\psi_k(l^*) = q$, где је q права исте равни која не садржи центар O инверзије ψ_k;

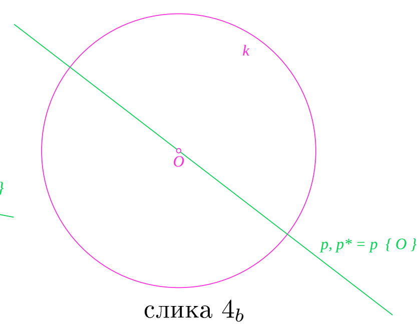
⊛ ако $O \notin l$, онда $\psi_k(l) = l'$, где је l' круг исте равни који не садржи центар O инверзије ψ_k.

доказ:

○ Нека је $A \in p^*$ произвољна тачка праве p^* и тачка $A' = \psi_k(A)$ њена слика у инверзији ψ_k. На основу дефиниције пресликавања инверзијом, тачке O, A и A' су колинеарне, а како, по нашој претпоставци, тачке O и A припадају прави p то и тачка A' припада прави p. Обзиром да је тачка A произвољна тачка праве p^* то за сваку тачку праве p^* важи да њена слика у инверзији ψ_k такође припада прави p^*, те је отуда $\psi_k(p^*) = p^*$ (слика 4_a, слика 4_b).



слика 4_a

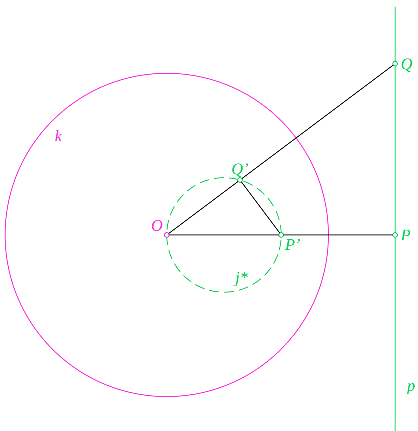


слика 4_b

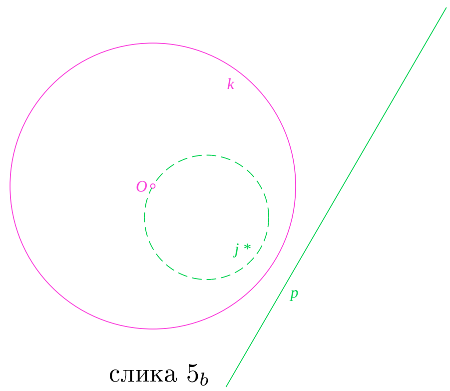
⊚ Означимо са P подножје управне из O на праву p. Како $O \notin p$ то је $P \neq O$, па тачка P у инверзији ψ_k има своју слику $P' = \psi_k(P)$. Нека је Q произвољна тачка праве p и $Q' = \psi_k(Q)$ њена слика у инверзији ψ_k. На основу леме је $\triangle OPQ \sim \triangle OQ'P'$, па је $\measuredangle OQ'P' = \measuredangle OPQ = 90°$, јер је тачка P подножје нормале из O на p па је $\measuredangle OPQ = 90°$. Дакле, тачка Q' припада кругу над пречником OP'. Обзиром да је тачка $Q \in p$ произвољна тачка праве p а њена слика Q' у инверзији ψ_k припада кругу над пречником OP', то слика у инверзији ψ_k сваке тачке праве p припада кругу над пречником OP'. Означимо са j овај круг(круг над пречником OP') и подсетимо се раније уведене ознаке $j^* = j \backslash \{O\}$.

Обрнутим поступком доказујемо да је свака тачка круга j^* слика у инверзији ψ_k неке од тачака праве p.

На крају, пошто центар O инверзије ψ_k у односу на круг $k(O,r)$ нема своју слику у овој инверзији, нити се било која тачка равни E^2 слика у тачку O то можемо рећи да је $\psi_k(p) = j^*$ (слика 5_a, слика 5_b).



слика 5_a

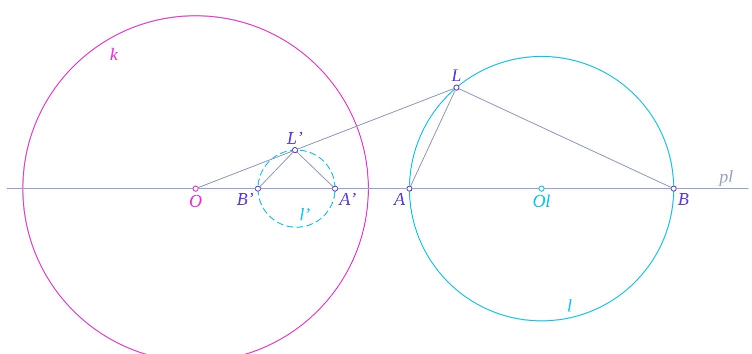


слика 5_b

$\star$ Раније смо доказали да је пресликавање инверзијом у односу на круг инволутивно па је овај део тврђења директна последица претходног тврђења $\circledcirc$.

$\circledast$ Нека је p_l права која садржи центар O круга $k(O, r)$ инверзије ψ_k и O_l центар круга l, а A и B тачке у којима права p_l сече круг l. Не умањујући општост узмимо да је $\mathcal{B}(O, A, B)$(ово се тврђење доказује слично и ако је $\mathcal{B}(O, B, A)$, као и за све друге распореде тачака O, A и B).

Нека су $A' = \psi_k(A)$ и $B' = \psi_k(B)$ слике у инверзији ψ_k редом тачака A и B и L произвољна тачка круга l, различита од тачака A и B, а $L' = \psi_k(L)$ њена слика у инверзији ψ_k.



слика 6_a

На основу леме важи: $\triangle OAL \sim \triangle OL'A'$ и $\triangle OBL \sim \triangle OL'B'$. Из сличности троуглова OBL и $OL'B'$ следи да је $\measuredangle B'L'O = \measuredangle LBO$, а из сличности троуглова OAL и $OL'A'$ је $\measuredangle A'L'O = \measuredangle LAO$ (слика 6_a).

Посматрајмо $\triangle A'L'B'$ и његове углове:

$$\measuredangle A'L'B' = \measuredangle A'L'O - \measuredangle B'L'O,$$

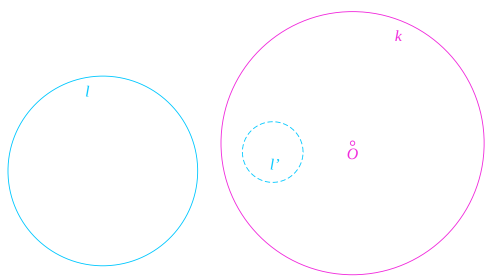
а како је $\measuredangle A'L'O = \measuredangle LAO$ и $\measuredangle B'L'O = \measuredangle LBO$, то је

$$\measuredangle A'L'O - \measuredangle B'L'O = \measuredangle LAO - \measuredangle LBO = 180^\circ - \measuredangle LAB - \measuredangle LBO = 180^\circ - (\measuredangle LAB + \measuredangle LBO)$$

$$= 180^\circ - (180^\circ - \measuredangle ALB) = \measuredangle ALB = 90^\circ,$$

јер тачка L припада кругу l а дуж AB је један од пречника овог круга, па је $\measuredangle ALB = 90^\circ$ као угао над пречником.

Дакле, $\measuredangle A'L'B' = \measuredangle A'L'O - \measuredangle B'L'O = \measuredangle ALB = 90^\circ$, па тачка L' припада кругу над пречником $A'B'$. Означимо овај круг са l'. Како је тачка $L \in l$ произвољна тачка круга l, а њена слика у инверзији ψ_k припада кругу l' то и слика у инверзији ψ_k сваке тачке круга l припада кругу l'.



слика 6_b

Обрнутим поступком доказујемо да је свака тачка круга l' слика у инверзији ψ_k неке од тачака круга l, па можемо закључити да је $\psi_k(l) = l'$. ♦

Пример: Нека је $k(O, r)$ круг неке равни и ψ_k пресликавање инверзијом у односу на тај круг Ако су A и B две разне тачке те равни(различите од центра O посматране инверзије), а A' и B' редом њихове слике у инверзији ψ_k, доказати да је тада:

$$A'B' = \frac{r^2}{OA \cdot OB} \cdot AB.$$

решење: Размотримо два могућа случаја:

1. Тачке O, A и B су три разне колинеарне тачке. Не умањујући општост претпоставимо да је $\mathcal{B}(O, A, B)$. На основу пресликавања инверзијом у односу на круг је:

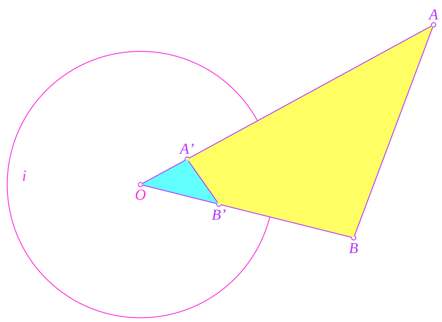
$$OA \cdot OA' = r^2 \Rightarrow OA' = \frac{r^2}{OA} \quad \wedge \quad OB \cdot OB' = r^2 \Rightarrow OB' = \frac{r^2}{OB}$$

Како је $\mathcal{B}(O, A, B)$ то је $\mathcal{B}(O, B', A')$ одакле следи да је:

$$A'B' = OA' - OB' = \frac{r^2}{OA} - OB' = \frac{r^2}{OB} = \frac{r^2}{OA \cdot OB} \cdot (OB - OA) = \frac{r^2}{OA \cdot OB} \cdot AB.$$

2. Тачке O, A и B су три разне неколинеарне тачке (слика 7). У овом случају, на основу леме, троуглови OAB и $OB'A'$ су слични одакле је:

$$A'B' : AB = OB' : OA \Rightarrow \quad A'B' = \frac{AB \cdot OB'}{OA} \qquad (*)$$



слика 7

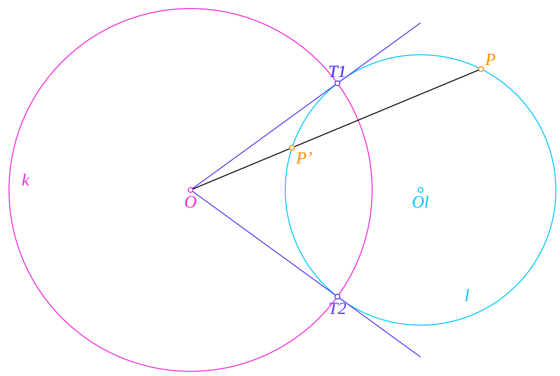
Како је $B' = \psi_k(B)$, то је, на основу дефиниције пресликавања инверзијом у односу на круг, $OB \cdot OB' = r^2$ одакле је $OB' = \dfrac{r^2}{OB}$. Уврштавањем последње једнакости у једнакост $(*)$ добијамо тражену релацију. $\diamond$

Конструкцију слике у некој инверзији круга или праве неке равни можемо, на основу претходне теореме, вршити конструкцијом слика у инверзији две или три тачке које припадају кругу или прави чију слику у инверзији одређујемо. Имајући на уму да су тачке на кругу инверзије једине инваријантне тачке неке равни, уколико права или круг неке равни секу круг инверзије тада се њихове пресечне тачке са кругом инверзије сликају у саме себе, те је за конструкцију слике праве или круга потребно у инверзији пресликати мање тачака.

Важно је напоменути и да, уколико се неки круг равни, назовимо га l, неком инверзијом слика у други круг те равни, означимо га са l', тада се центар круга l не слика у центар круга l'.

Размотримо сада посебан случај када круг $l(O_l, r_l)$ неке равни садржи две инверзне тачке P и P', тј. тачке за које је $\psi_k(P) = P'$, где је $k(O, r)$ произвољан круг те равни а ψ_k инверзија у односу на круг k.

Како је $OP \cdot OP' = r^2$, а на основу потенције тачке O у односу на круг l је $OP \cdot OP' = OT_1^2$, где је OT_1 тангента из тачке O на круг l, а $T_1 \in l$ тачка додира тангенте OT_1 и круга l, то је $OT_1^2 = OP \cdot OP' = r^2$. Дакле $OT_1^2 = r^2$, а како је r полупречник круга k инверзије ψ_k, а тачка O центар круга k, следи да тачка T_1 припада кругу k, па је она инваријантна($\psi_k(T_1) = T_1$). Обзиром да центар O инверзије ψ_k не припада кругу l из тачке O постоји још једна тангента на круг l. Означимо са $T_2 \in l$ тачку у којој друга тангента из тачке O на круг l додирује круг l. Сличним разматрањем као у случају тачке T_1 долазимо до закључка да је и тачка T_2 инваријантна тачка тј. $\psi_k(T_2) = T_2$. Дакле, круг l садржи две инваријантне тачке T_1 и T_2 и пар инверзних тачака P и P' па се круг l инверзијом ψ_k пресликава у самог себе $\psi_k(l) = l$ (слика 8).



слика 8

На основу горе наведеног можемо извести и следеће закључке:

$\circ$ уколико круг l неке равни сече круг $k(O,r)$ инверзије ψ_k те равни у две разне тачке A и B и садржи пар инверзних тачака P и P'($\psi_k(P) = P'$), тада се круг l инверзијом ψ_k пресликава у себе самог(јер тачке A и B осим кругу l припадају и кругу k инверзије ψ_k, па су обе ове тачке инваријантне, односно $\psi_k(A) = A' = A$ и $\psi_k(B) = B' = B$, те круг l садржи три пара инверзних тачака).

$\circ\circ$ уколико круг l неке равни садржи пар инверзних тачака P и P'($\psi_k(P) = P'$) тада круг l сече круг $k(O,r)$ инверзије ψ_k и обзиром да су тачке додира T_1 и T_2 тангенти OT_1 и OT_2 из центра O инверзије ψ_k на круг l уједно и тачке пресека круга l и круга инверзије k, следи да је круг l управан на круг k инверзије ψ_k. Важи и обрнуто: уколико је круг l управан на круг k инверзије ψ_k тада се круг l инверзијом ψ_k пресликава у самог себе.

Дакле, сваки круг елиптичког прамена који садржи две инверзне тачке P и P' у инверзији ψ_k управан је на круг инверзије k. И обрнуто, скуп кругова који садрже неку тачку P и управни су на круг $k(O,r)$ инверзије ψ_k неке равни је елиптички прамен кругова те равни, који, поред тачке P, садрже и њој инверзну тачку $P' = \psi_k(P)$.

$\prec\!\circ\!\succ$ **Инверзивна раван**

На основу до сада исказаних и доказаних особина пресликавања инверзијом у односу на круг могли смо запазити велику сличност између овог пресликавања и пресликавања осном рефлексијом. Наиме:

• инверзија у односу на круг и осна рефлексија су инволутивна пресликавања;

• приликом пресликавања инверзијом неке равни све инваријантне тачке те равни припадају кругу инверзије и при пресликавању тачака неке равни осном рефлексијом све инваријантне тачке те равни припадају оси рефлексије;

• ако се тачка X неке равни осном рефлексијом пресликава у тачку X' тада је права XX' управна на осу рефлексије. Слично, ако се тачка X неке равни пресликава инверзијом у односу на произвољан круг те равни у тачку X' тада је права XX' управна на круг инверзије;

• ако је s произвољна права неке равни E^2 и $\mathcal{S}_s : E^2 \to E^2$ пресликавање осном рефлексијом, где је права s оса рефлексије, тада је $\mathcal{S}_s$ бијективно пресликавање. Слично, ако је $k(O,r)$ произвољан круг равни E^2 и $E^2_* = E^2\backslash\{O\}$("пробушена"раван E^2, односно раван E^2 без центра O круга $k(O,r)$) и ψ_k: $E^2_* \to E^2_*$ пресликавање инверзијом у односу на круг $k(O,r)$, тада је ψ_k бијективно пресликавање.

• кругови који садрже неку тачку A и управни су на осу s рефлексије $\mathcal{S}_s$ припадају елиптичком прамену кругова који поред тачке A садрже и њену слику $A' = \mathcal{S}_s(A)$ у осној рефлексији $\mathcal{S}_s$. Такође, кругови који садрже неку тачку A и управни су на круг $k(O,r)$ инверзије ψ_k припадају елиптичком прамену кругова који поред тачке A садрже и њену слику $A' = \psi_k(A)$ у инверзији ψ_k.

Обзиром на све наведено пресликавање инверзијом у односу на круг понекад називамо и *рефлексијом у односу на круг*, па у складу са тим дефиницију круга можемо проширити и допустити да и права буде круг, односно посматрати праву као круг неограниченог полупречника. Тада можемо рећи да постоји јединствен круг који садржи три разне тачке не размишљајући о њиховој колинеарности, јер уколико су те тачке колинеарне тада припадају јединственом кругу неограниченог полупречника, као и то да се инверзијом у односу на произвољан круг неке равни сваки круг те равни пресликава у круг.

Проширимо еуклидску раван додајући јој "идеалну"тачку O'("бесконачно далеку тачку") која је и заједничка тачка и заједничко средиште свих правих које посматрамо као кругове неограниченог полупречника.

Претпоставимо да два круга(било да су ограниченог или неограниченог полупречника) неке равни која имају једну заједничку тачку. Тада се они или додирују, па им додирна тачка једина заједничка тачка, или се секу, па поред ове, коју смо претпоставили, имају још једну заједничку тачку. Ово је јасно уколико су оба круга кругови(ограниченог полупречника) или је је један од ових кругова круг(ограниченог полупречника), а други круг је права(круг неограниченог полупречника). Уколико су оба круга праве(кругови неограниченог полупречника) тада су оне паралелне, па је претпостављена заједничка тачка заправо "идеална"тачка"O', или се ове праве секу, па им је поред њихове пресечне тачке, друга заједничка тачка O'.

Разматрајући инверзију ψ_k у односу на круг $k(O,r)$ еуклудске равни E^2 и уводећи појам $E^2_* = E^2\backslash\{O\}$, доказали смо да је пресликавање инверзијом ψ_k: $E^2_* \to E^2_*$ бијекција и да свака тачка равни E^2 изузев центра O инверзије ψ_k има своју слику у инверзији ψ_k(ово је разлог због кога смо за домен и кодомен функције ψ_k узели $E^2_* = E^2\backslash\{O\}$). Сада, додавањем "идеалне"тачке O' еуклидској равни, можемо рећи да свака тачка равни E^2 има своју слику при пресликавању инверзијом ψ_k, јер је тачка O' слика у инверзији ψ_k центра O ове инверзије. Еуклидска раван допуњена тачком O' назива се *инверзивна раван(конформна раван)*. Дакле, пресликавање инверзијом у односу на круг дефинисано у инверзивној равни је бијективно пресликавање.

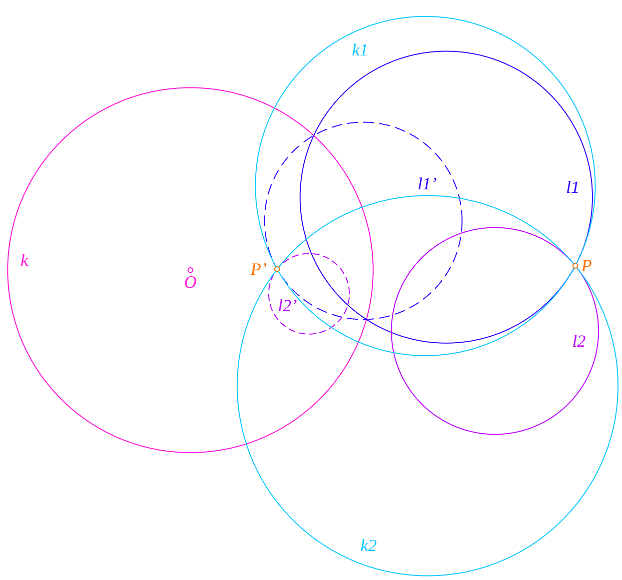
Све праве инверзивне равни које садрже центар O инверзије ψ_k(у односу на круг $k(O,r)$ те равни) садрже и тачку O' која је слика у инверзији ψ_k центра O ове инверзије, тј $O' = \psi_k(O)$. Ако су тачке O и O' истоветне, круг инверзије постаје права, па инверзија постаје осна рефлексија.

Сада, када и праве и кругове инверзивне равни посматрамо као кругове, под појмом углова инверзивне равни подразумевамо углове које захватају кругови те равни.

У осној рефлексији углови се пресликавају у њима подударне углове, јер ако се два круга секу у тачама A и A' тада се осном рефлексијом у односу на праву која садржи средишта ова два круга тачка A пресликава у тачку A', угао који ова два круга захватају у тачки A пресликава се у угао који ова два круга захватају у тачки A', а како се сваки од ова два круга посматраном осном рефлексијом пресликава у себе самог, то је угао који ова два круга захватају у тачки A подударан углу који ова два круга захватају у тачки A'. Ово нам омогућава да докажемо следећу теорему:

Теорема 7: Инверзијом се углови пресликавају у њима подударне углове.

доказ: Нека је $k(O, r)$ произвољан круг неке равни, ψ_k пресликавање инверзијом у односу на круг k и l_1 и l_2 два круга исте равни који се секу у некој тачки P. Не умањујући општост претпоставимо да тачка P не припада кругу k инверзије ψ_k. У том случају слика у инверзији ψ_k тачке P је тачка $P' = \psi_k(P)$ која са тачком P није истоветна. Тада постоје кругови k_1 и k_2 који садрже и тачку P и тачку P' при чему круг k_1 додирује изнутра круг l_1 у тачки P, а круг k_2 додирује круг l_2 такође у тачки P. Како се кругови k_1 и l_1 додирују у тачки P то је тангента на круг k_1 у тачки P истоветна тангенти на круг l_1 у тачки P. Слично, обзиром да се кругови k_2 и l_2 додирују у тачки P, тангента на круг k_2 у тачки P истоветна је тангенти на круг l_2 у тачки P (слика 9). Одавде следи да је угао који захватају кругови l_1 и l_2 у тачки P истоветан углу који захватају кругови k_1 и k_2 у тачки P.



слика 9

Обзиром да кругови k_1 и k_2 садрже пар инверзних тачака P и P' то се сваки од ових кругова инверзијом ψ_k пресликава у самог себе, тј. $\psi_k(k_1) = k_1$ и $\psi_k(k_2) = k_2$. Слике у инверзији ψ_k кругова l_1 и l_2 редом су кругови $l'_1 = \psi_k(l_1)$ и $l'_2 = \psi_k(l_2)$, при чему, обзиром да кругови l_1 и l_2 оба садрже тачку P, њихове слике у инверзији ψ_k, кругови l'_1 и l'_2, оба садрже слику у инверзији ψ_k тачке P, тачку P'.

Како се кругови k_1 и l_1 додирују у тачки P то се њихове слике у инверзији ψ_k, кругови k_1 и l'_1 додирују у тачки P'. Слично, кругови k_2 и l_2 додирују се у тачки P, те се њихове слике у инверзији ψ_k, кругови k_2 и l'_2 додирују у тачки P'. Стога се угао који захватају кругови k_1 и k_2 у тачки P инверзијом ψ_k пресликава у њему подударан угао(који ова два круга захватају у тачки P'), па се угао који захватају кругови l_1 и l_2 у тачки P инверзијом ψ_k пресликава у њему подударан угао(који захватају њихове слике у инверзији ψ_k, кругови l'_1 и l'_2, у тачки P'). ♦

У посебном случају, прави углови се инверзијом пресликавају у праве углове, стога се управни кругови пресликавају у управне кругове.

Наредно тврђење, нешто општије од претходне теореме наводимо без доказа:

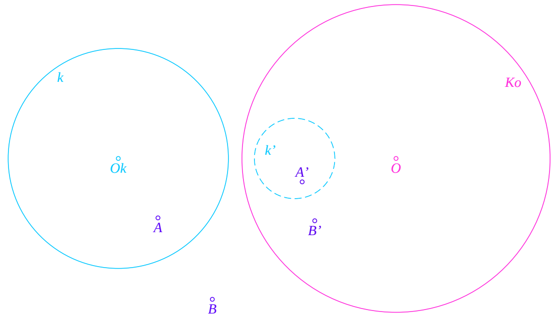
Став 1: Инверзијом се углови које захватају два круга пресликавају у њима по апсолутној вредности мере једнаке углове, при чему су ти углови супротне оријентације.

Обзиром на овај став за пресликавање инверзијом у односу на круг можемо рећи да је *изогонално пресликавање*(чува једнакост углова по апсолутној вредности), прецизније *антиконформно пресликавање*(мења оријентацију углова).

Раније смо доказали да је сваки круг који садржи две инверзне тачке A и B у инверзији $\psi_k(\ B = \psi_k(A))$ управан на круг $k(O, r)$ инверзије ψ_k.

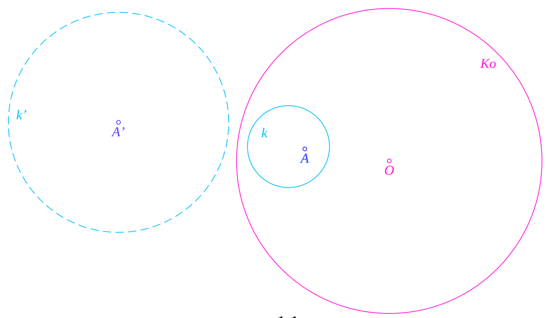
Размотримо и следеће: нека је $k(O_k, r_k)$ круг неке инверзивне равни, ψ_k пресликавање инверзијом у односу на круг $k(O_k, r_k)$, тачке A и B пар инверзних тачака у инверзији $\psi_k(\ B = \psi_k(A))$ и нека је $k_0(O, r)$ круг исте равни чији је центар тачка O, а ψ_{k_0} пресликавање инверзијом у односу на круг k_0.

Инверзијом ψ_{k_0} круг k пресликава се у круг $k' = \psi_{k_0}(k)$, а тачке A и B редом у тачке $A' = \psi_{k_0}(A)$ и $B' = \psi_{k_0}(B)$, при чему су тачке A' и B' једна другој инверзне у инверзији $\psi_{k'}$ у односу на круг $k' = \psi_{k_0}(k)$ (слика 10).



слика 10

У посебном случају, када је тачка B центар инверзије ψ_{k_0}(центар круга k_0), у инверзији ψ_{k_0} слика $B' = \psi_{k_0}(B)$ тачке B је тачка O'. Тада је тачка A инверзна тачки O у инверзији ψ_k у односу на круг k(тј. тачка A је слика у инверзији ψ_k тачке O: $A = \psi_k(O)$), а тачка A' је инверзна тачка тачки O' у инверзији $\psi_{k'}$($A' = \psi_{k'}(O')$) у односу на круг $k' = \psi_{k_0}(k)$, те је тачка A' средиште круга k' (слика 11).



слика 11

Дакле, уколико је $k(O_k, r_k)$ круг неке инверзивне равни, ψ_k пресликавање инверзијом у односу на круг k, A произвољна тачка те равни и O центар неког круга k_0 исте равни, тада, ако се инверзијом ψ_k тачка O пресликава у тачку A, инверзијом ψ_{k_0} у односу на круг k_0(чији је центар тачка O) круг k пресликава у круг $k' = \psi_{k_0}(k)$, тачка A се пресликава у тачку $A' = \psi_{k_0}(A)$ која је центар круга k'.

$\prec\circ\succ$ **Примена инверзије**

У овом одељку решићемо само неколико познатих теорема из геометрије(које су углавном решене стандардним геометријским методама) применом инверзије у односу на круг, уз напомену да постоји још много математичих проблема који се могу решити применом инверзије.

Теорема (уопштена **Птоломејева теорема**)

Доказати да за сваке четири тачке A, B, C и D равни E^2 важи релација:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geqslant AC \cdot BD.$$

Једнакост важи ако и само ако је четвороугао $ABCD$ конвексни тетивни четвороугао или ако су тачке A, B, C и D колинеарне.

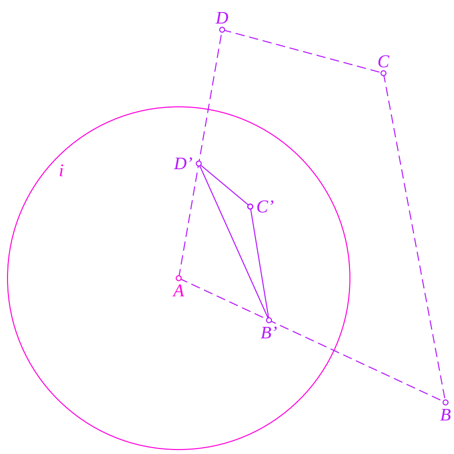
решење: Нека су A, B, C и D четири разне неколинеарне тачке равни E^2 и нека је i круг исте равни, произвољног полупречника, чији је центар нека од ове четири тачке. Не умањујући општост, узмимо да је центар круга i у тачки A, $i(A, r)$. Посматрајмо пресликавање инверзијом ψ_i у односу на круг i (слика 12).

Слике у инверзији ψ_i тачака B, C и D редом су тачке $B' = \psi_i(B)$, $C' = \psi_i(C)$ и $D' = \psi_i(D)$. Из неједнакости троугла имамо да је:

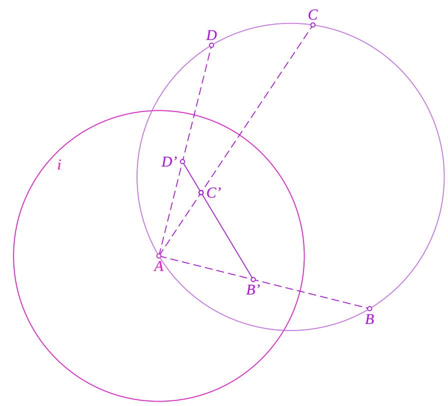
$$B'C' + C'D' \geqslant D'B' \quad (*)$$

а на основу раније решеног примера је:

$$B'C' = \frac{r^2}{AB \cdot AC} \cdot BC \quad \wedge \quad C'D' = \frac{r^2}{AC \cdot AD} \cdot CD \quad \wedge \quad D'B' = \frac{r^2}{AD \cdot AB} \cdot DB.$$



слика 12



слика 13

Када ове три једнакости уврстимо у неједнакост $(*)$ имамо да је:

$$\frac{r^2}{AB \cdot AC} \cdot BC + \frac{r^2}{AC \cdot AD} \cdot CD \geqslant \frac{r^2}{AD \cdot AB} \cdot DB.$$

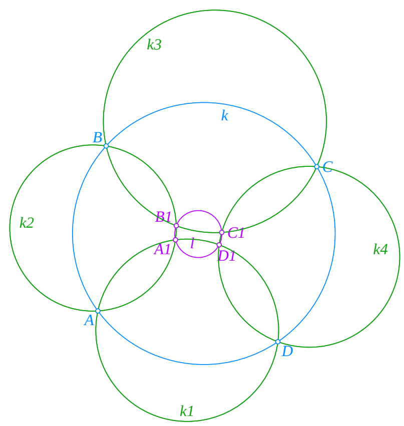
Множењем последње неједнакости са $AB \cdot AC \cdot AD$ добијамо тражену неједнакост:

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD \geqslant AC \cdot DB.$$

Једнакост важи уколико тачка C' припада затвореној дужи $B'D'$, тј. ако тачка C припада кругу описаном око троугла ABD тј. луку BD тог круга на коме није тачка A, односно ако је $ABCD$ конвексни тетивни четвороугао (слика 13). ♦

Теорема (Микелова теорема о шест кругова)

Нека су k_1, k_2, k_3 и k_4 кругови једне равни такви да се кругови k_1 и k_2 секу у тачкама A и A_1; кругови k_2 и k_3 секу у тачкама B и B_1; кругови k_3 и k_4 секу у тачкама C и C_1 и k_4 и кругови k_1 секу у тачкама D и D_1. Ако су тачке A, B, C и D коцикличне тада су тачке A_1, B_1, C_1 и D_1 коцикличне или колинеарне.



решење: Нека су k_1, k_2, k_3 и k_4 кругови исте равни такви да се k_1 и k_2 секу у тачкама A и A_1, k_2 и k_3 секу у тачкама B и B_1, k_3 и k_4 секу у тачкама C и C_1 и k_4 и кругови k_1 секу у тачкама D и D_1. Претпоставимо да су тачке A, B, C и D коцикличне, односно да припадају истом кругу. Означимо тај круг са k. Нека је i круг исте равни, произвољног полупречника, чији је центар нека од тачака A, B, C или D. Не умањујући општост узмимо да је центар круга i тачка A, $i(A, r)$. Посматрајмо пресликавање инверзијом ψ_i у односу на круг i.

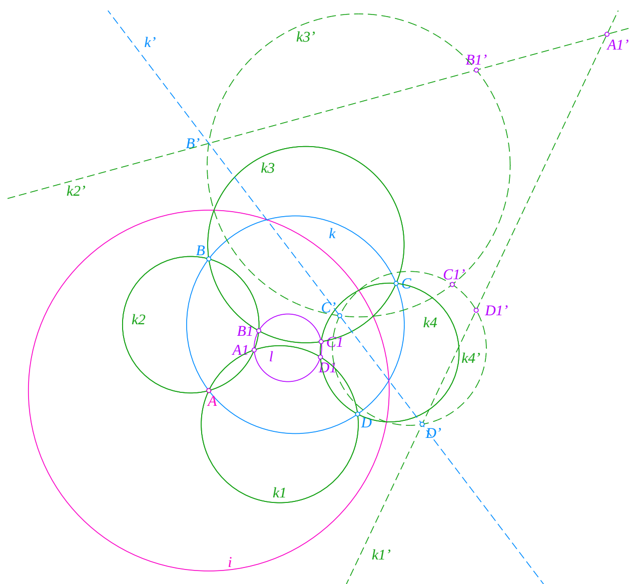
Круг k_1 садржи тачку A(центар инверзије ψ_i) те је инверзији ψ_i његова слика $k_1' = \psi_i(k_1)$ права. Како круг k_1 садржи тачке A_1, D и D_1, то његова слика у инверзији ψ_i, права k_1', садржи тачке $A_1' = \psi_i(A_1)$, $D' = \psi_i(D)$ и $D_1' = \psi_i(D_1)$, слике у инверзији ψ_i редом тачака A_1, D и D_1.

Круг k_2 садржи тачку A, центар посматране инверзије, те је инверзији ψ_i његова слика $k_2' = \psi_i(k_2)$ права. Како круг k_2 садржи тачке A_1, B и B_1, његова слика у инверзији ψ_i, права k_2', садржи тачке $A_1' = \psi_i(A_1)$, $B' = \psi_i(B)$ и $B_1' = \psi_i(B_1)$, слике у инверзији ψ_i редом тачака A_1, B и B_1.

Трећи круг који садржи центар инверзије ψ_i, тачку A, је круг k па је у инверзији ψ_i и његова слика $k' = \psi_i(k)$ права. Круг k садржи и тачке B, C и D, па његова слика у инверзији, права k', садржи слике у инверзији ψ_i ових тачака, тачке $B' = \psi_i(B)$, $C' = \psi_i(C)$ и $D' = \psi_i(D)$.

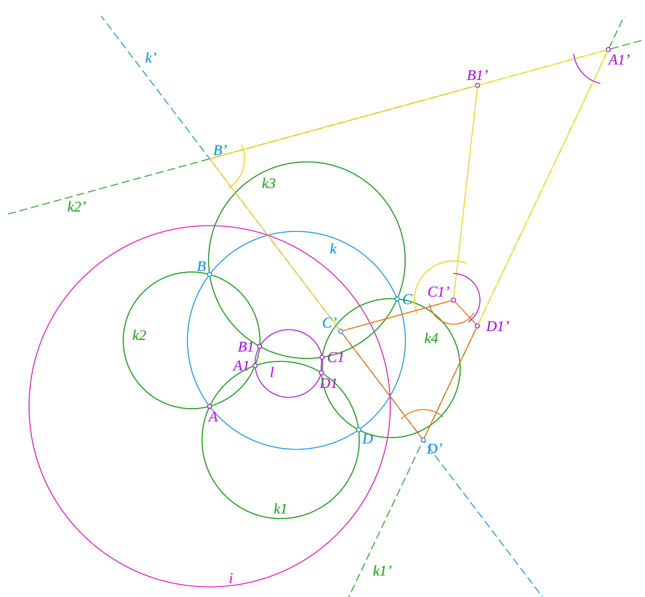
Како круг k_3 не садржи тачку A, центар посматране инверзије, у инверзији ψ_i његова слика $k_3' = \psi_i(k_3)$ је круг, при чему, обзиром да круг k_3 садржи тачке B, B_1, C и C_1, његова слика у инверзији, круг k_3', садржи слике у инверзији ψ_i ових тачака, тачке $B' = \psi_i(B)$, $B_1' = \psi_i(B_1)$, $C' = \psi_i(C)$ и $C_1' = \psi_i(C_1)$.

Слично, круг k_4 не садржи тачку A, центар инверзије ψ_i, те је у инверзији ψ_i његова слика $k_4' = \psi_i(k_4)$ круг, при чему, пошто круг k_4 садржи тачке C, C_1, D и D_1, његова слика у инверзији, круг k_4', садржи слике у инверзији ψ_i ових тачака, тачке $C' = \psi_i(C)$, $C_1' = \psi_i(C_1)$, $D' = \psi_i(D)$ и $D_1' = \psi_i(D_1)$ (слика 14).



слика 14

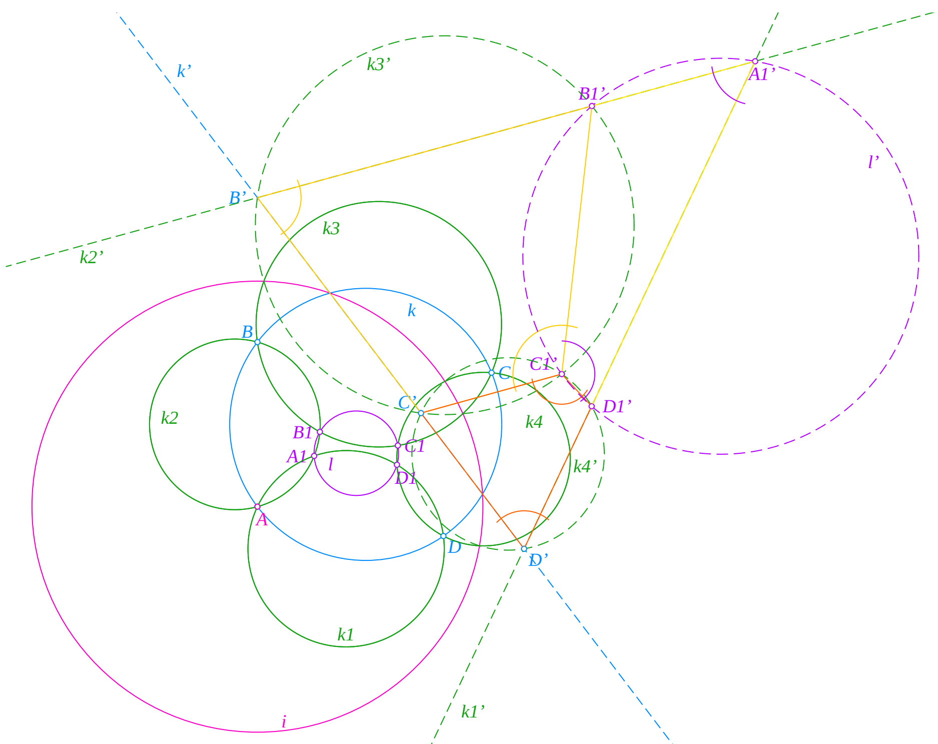
Пошто тачке B', B_1', C' и C_1' припадају кругу k_3' четвороугао BB_1CC_1 је тетиван, па је $\measuredangle B_1'C_1'C' = \pi - \measuredangle B_1'B'C = \pi - \measuredangle B'$. Четвороугао CC_1DD_1 такође је тетиван, обзиром да тачке C', C_1', D' и D_1' припадају кругу k_4', те је $\measuredangle D_1'C_1'C' = \pi - \measuredangle D_1'D'C = \pi - \measuredangle D'$.



слика 15

На основу до сада закљученог следи да је $\measuredangle B_1'C_1'D_1' = 2\pi - (\measuredangle B_1'C_1'C' + \measuredangle D_1'C_1'C') = 2\pi - (\pi - \measuredangle B' + \pi - \measuredangle D') = \measuredangle B' + \measuredangle D'$. Посматрајмо углове троугла $A_1'B'D'$: пошто је збир углова у троуглу једнак π то је $\measuredangle B'A_1'D' = \pi - (\measuredangle B' + \measuredangle D')$ (слика 15).

На крају, како за углове четвороуглу $A_1'B_1'C_1'D_1'$ важи: $\measuredangle B_1'C_1'D_1' + \measuredangle B_1'A_1'D_1' = (\measuredangle B' + \measuredangle D') + (\pi - (\measuredangle B' + \measuredangle D')) = \pi$, то је четвороугао $A_1'B_1'C_1'D_1'$ тетиван, па тачке A_1', B_1', C_1' и D_1' припадају истом кругу, означимо га са l'. Тачке A_1', B_1', C_1' и D_1' слике су у инверзији ψ_i тачака A_1, B_1, C_1 и D_1, а како је инверзија инволутивно пресликавање, то и тачке A_1, B_1, C_1 и D_1 припадају истом кругу, кругу који је слика у инверзији ψ_i круга l' тј. кругу коме је слика у инверзији ψ_i круг l': $l = \psi_i^{-1}(l') = \psi_i(l')$ (слика 16).⧫



слика 16

Пре но што се упустимо у исказ и доказ следеће теореме наведимо(без доказа, који су једноставни) неколико помоћних тврђења која ће нам користи у доказу исте.

Тврђење 1: Нека су A, B, C и D четири разне тачке неке равни, k круг над пречником AB исте равни и ψ_k пресликавање инверзијом у односу на круг k. Тада важи еквиваленција:

$$\psi_k(C) = D \Leftrightarrow \mathcal{H}(A, B; C, D). \quad \lozenge$$

Напоменимо и то да ако је пар тачака A и B хармонијски спрегнут паром тачака C и D, тада је и пар тачака C и D хармонијски спрегнут паром тачака A и B, односно: $\mathcal{H}(A,B;C,D)=\mathcal{H}(C,D;A,B)$.

Тврђење 2: Нека су S и S_a центри кругова k и k_a, где је k круг уписан у троугао ABC, круг k_a споља уписан(приписан троуглу) у троугао ABC који додирује страницу BC овог троугла; L и L_a редом тачке у којима кругови k и k_a доирују страницу BC; тачка A' подножје управне из темена A на страницу BC; тачка E пресек бисектрисе унутрашњег угла код темена A са страницом BC и тачке N и N_a редом подножја управних из тачака S и S_a на праву AA'. Тада важи:

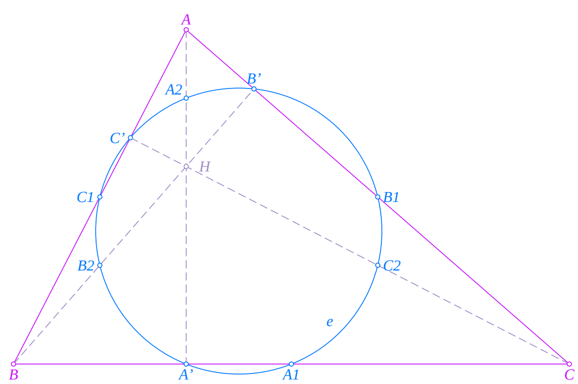
1) $\mathcal{H}(A,E;S,S_a)$
2) $\mathcal{H}(A,A';N,N_a)$
3) $\mathcal{H}(A',E;L,L_a)$ $\quad\Diamond$.

Напомена: У доказу теореме која следи користићемо трећи део тврђења 2.

Тврђење 3: Ако је k круг уписан у троугао ABC, који додирује страницу BC овог троугла у тачки L; круг k_a споља уписан у троугао ABC, који додирује страницу BC овог троугла у тачки L_a и A_1 средиште странице BC, тада је тачка A_1 средиште дужи LL_a. $\Diamond$

Присетимо се и Ојлеровог круга(круг девет тачака):

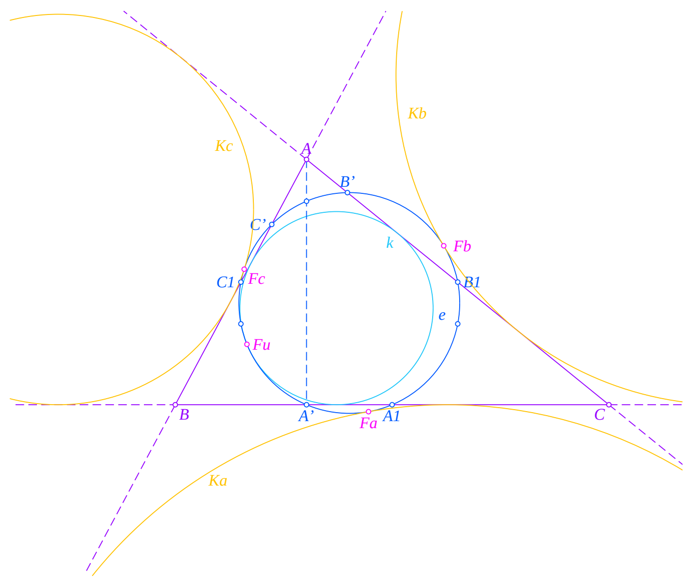
Нека је ABC троугао коме су тачке A_1, B_1 и C_1 редом средишта страница BC, CA и AB; A', B' и C' подножја висина редом из темена A, B и C; тачка H ортоцентар троугла ABC и тачке A_2, B_2 и C_2 редом средишта дужи AH, BH и CH. Тада постоји круг који садржи тачке A_1, B_1, C_1, A', B', C', A_2, B_2 и C_2 и тај се круг назива **Ојлеров круг** (слика 17).



слика 17

Теорема (Фојербахова теорема)

Ојлеров круг троугла додирује уписан круг и споља уписане кругове тог троугла у тзв. Фојербаховим тачкама тог троугла. Доказати.



решење: Нека је k круг уписан у троугао ABC и L тачка у којој круг k додирује страницу BC овог троугла; k_a круг споља уписан у троугао ABC и L_a додирна тачка круга k_a са страницом BC; e Ојлеров круг овог троугла; тачке A_1, B_1 и C_1 редом средишта страница BC, CA и AB троугла ABC; тачка A' подножје висине из темена A на страницу BC(праву BC) и тачка E пресек бисектрисе унутрашњег угла код темена A са правом BC.

На основу тврђења 3 тачка A_1 је и средиште дужи LL_a па постоји круг, означимо га са i, са центром у тачки A_1, који садржи тачке L и L_a, тј. коме је дуж LL_a пречник. Узмимо круг i за круг инверзије и посматрајмо пресликавање инверзијом ψ_i у односу на круг i.

Круг k сече круг i инверзије ψ_i у тачки L и у истој тој тачки додирује страницу BC троугла ABC, а како страница BC садржи пречник LL_a круга i следи да је угао између тангенти на кругове k и i у тачки L једнак $90°$, тј. круг k управан је на круг i инверзије ψ_i.

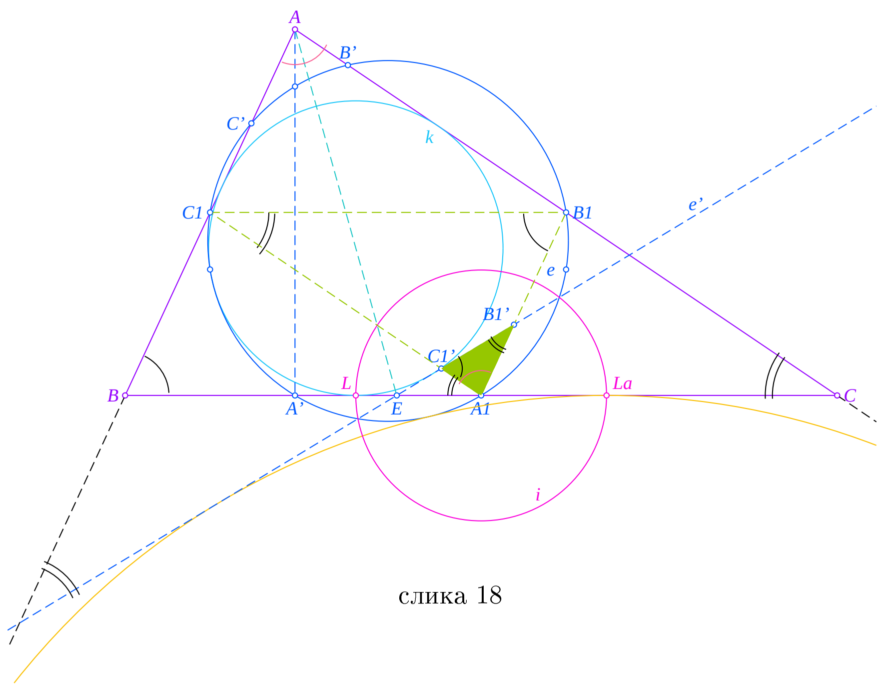
Слично, круг k_a сече круг i инверзије ψ_i у тачки L_a и у истој тој тачки додирује страницу BC троугла ABC и обзиром да страница BC садржи пречник LL_a круга i то су тангенте на кругове k_a и i у тачки L_a управне, што значи да је и круг k_a управан на круг i инверзије ψ_i.

Дакле, кругови k и k_a управни су на круг инверзије i па се, на основу раније донетих закључака, инверзијом ψ_i сваки од ових кругова пресликава у себе самог: $k' = \psi_i(k) = k$ и $k'_a = \psi_i(k_a) = k_a$.

Ојлеров круг e садржи средиште A_1 странице BC, па је у инверзији ψ_i његова слика $e' = \psi_i(e)$ права, обзиром да је тачка A_1 средиште круга i, односно центар инверзије ψ_i.

Доказаћемо да је права e' тангента и круга k и круга k_a (слика 18).

На основу тврђења 2 важи да је $\mathcal{H}(A', E; L, L_a)$, а на основу тврђења 1 је $\mathcal{H}(A', E; L, L_a) \Leftrightarrow \psi_i(A') = E$ где је i(круг инверзије ψ_i) круг над пречником LL_a. Дакле, из $\mathcal{H}(A', E; L, L_a)$ следи да је $\psi_i(A') = E$, односно подножје A' висине из темена A троугла ABC инверзијом ψ_i пресликава се у тачку E пресека бисектрисе унутрашњег угла код темена A са правом BC. Како тачка A' припада Ојлеровом кругу e, њена слика у инверзији ψ_i, тачка E, припада слици у инверзији ψ_i круга e, правој e'.



слика 18

Нека су $B_1' = \psi_i(B_1)$ и $C_1' = \psi_i(C_1)$ редом слике у инверзији ψ_i тачака B_1 и C_1(средишта страница AC и AB троугла ABC). Пошто тачке B_1 и C_1 припадају Ојлеровом кругу e, њихове слике у инверзији ψ_i, тачке B_1' и C_1', припадају слици у инверзији ψ_i круга e, правој e'. Напоменимо да, обзиром да су дужи A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1 средње линије троугла ABC, троугао $A_1B_1C_1$ сличан је троуглу ABC. Како је тачка A_1 средиште инверзије ψ_i то је, на основу леме 1, троугао $A_1C_1'B_1'$ сличан троуглу $A_1B_1C_1$.

Уведимо, ради лакшег сналажења у остатку доказа, следеће ознаке: $\alpha = \measuredangle BAC$, $\beta = \measuredangle ABC$, $\gamma = \measuredangle BCA$ $(\alpha + \beta + \gamma = \pi)$.

Из сличности троуглова $A_1C_1'B_1'$ и $A_1B_1C_1$ је: $\measuredangle A_1C_1'B_1' = \measuredangle A_1B_1C_1 = \measuredangle ABC = \beta$ и $\measuredangle A_1B_1'C_1' = \measuredangle A_1C_1B_1 = \measuredangle ACB = \gamma$, отуда је $\measuredangle C_1'A_1B_1' = \pi - (\beta + \gamma) = \alpha$. Дуж A_1C_1 паралелна је страници AC, па је $\measuredangle C_1A_1B = \measuredangle ACB = \gamma$ (као углови са паралелним крацима), а како је $\measuredangle B_1'C_1'A_1 = \beta$, то је $\measuredangle EC_1'A_1 = \alpha + \gamma$, па је $\measuredangle C_1'EA_1 = \beta - \gamma$. Дакле, права e' са страницом BC троугла ABC образује угао $\beta - \gamma$.

Спољашњи угао код темена B троугла ABC износи $\alpha+\gamma$ и пошто је код темена E једнак $\beta-\gamma$, следи да права e' са правом AB образује угао $\gamma = \measuredangle ACB$, што значи да је права e' тангента круга k, а како e' са страницом AC троугла ABC образује угао једнак $\beta = \measuredangle ABC$ односно $\alpha+\gamma = \measuredangle BAC + \measuredangle ACB$ то је права e' тангента и круга k_a. Дакле права e' заједничка је(унутрашња) тангента кругова k и k_a.

На крају, обзиром да је права e' слика у инверзији ψ_i Ојлеровог круга e, а кругови k и k_a сами су своје слике у овој инверзији, пошто пресликавање инверзијом чува једнакост углова то је $\measuredangle(e,k) = \measuredangle(\psi_i(e), \psi_i(k)) = \measuredangle(e',k)$ и $\measuredangle(e,k_a) = \measuredangle(\psi_i(e), \psi_i(k_a)) = \measuredangle(e',k_a)$ одакле следи да круг e додирује круг k и круг e додирује круг k_a.

На исти начин доказује се да Ојлеров круг e додирује и кругове k_b и k_c, где је круг k_b спољa уписан у троугао ABC при чему додирује страницу AC овог троугла; круг k_c спољa уписан у троугао ABC при чему додирује страницу AB овог троугла.

Дакле, Ојлеров круг e додирује сва четири круга k, k_a, k_b и k_c у по једној тачки и те се тачке називају *Фојербахове тачке* троугла.♦

Поглавље 2

≺○≻ Аполонијеви проблеми о додиру кругова ≺○≻

≺•≻ Аполонијев проблем 1 ≺•≻

↬Конструисати круг који садржи три дате тачке (A, B, C).

решење:

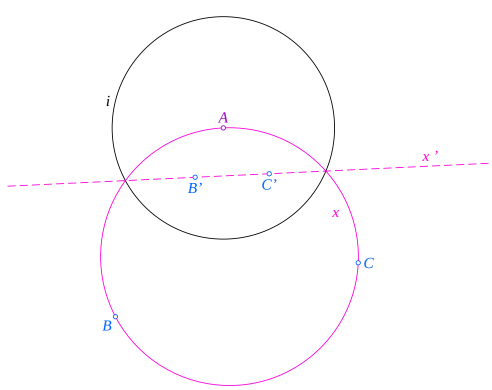
Тражени круг је круг описан око $\triangle ABC$ уколико дате тачке A, B, C нису колинеарне. Ако су тачке A, B, C колинеарне тада не постоји круг који испуњава услове постављеног проблема.

Иако је овај проблем тривијалан, он се такође може решити применом инверзије у односу на круг. Наиме, нека су A, B, C дате три неколинеарне тачке неке равни и нека је i круг те равни, произвољног полупречника, са центром у било којој од датих тачака. Не умањујући општост узмимо да је центар круга i дата тачка A и ψ_i инверзија у односу на круг i. Претпоставимо још да полупречник круга i није једнак ни једној од дужина дужи AB и AC.

Инверзијом у односу на круг i дате тачке B и C пресликавају се редом у тачке B' и C': $\psi_i(B) = B'$, $\psi_i(C) = C'$. Тражени круг, назовимо га x, по услову задатка садржи дату тачку A, а како је она центар инверзије ψ_i, у посматраној инверзији слика $x' = \psi_i(x)$ траженог круга x је права. Круг x садржи и тачке B и C, па његова слика, права x', садржи тачке B' и C' добијене као слике у инверзији ψ_i датих тачака B и C. Задатак се своди на конструкцију праве x' кроз две инверзијом ψ_i добијене тачке B' и C'.

На крају, тражени круг x слика је у инверзији добијене праве x', јер како је инверзија инволутивно пресликавање важи: $x = \psi_i^{-1}(x') = \psi_i(x')$ (слика 1_1).

Обзиром да постоји тачно једна права кроз две разне тачке, то је добијена права x' јединствена, те постоји само један круг x који испуњава услов постављеног проблема.



слика 1_1

≺•≻ Аполонијев проблем 2 ≺•≻

↬Конструисати круг који садржи две дате тачке и додирује дату праву (A, B, p).

решење:

Нека су дате тачке A и B и права p неке равни и нека је x тражени круг те равни који садржи тачке A и B и додирује праву p. Размотримо најопштији случај, када ни једна од датих тачака не припада правој p и обе се налазе са исте стране праве p.

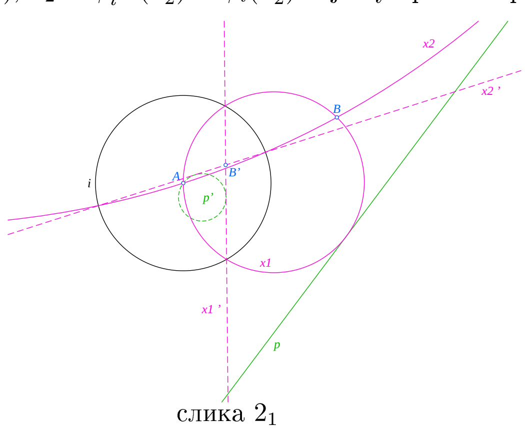
Означимо са i круг исте равни, произвољног полупречника, са центром у једној од датих тачака, не умањујући општост узмимо да је тачка A центар круга i, $i(A, r)$. Посматрајмо пресликавање инверзијом ψ_i у односу на круг i.

Дата права p не садржи тачку A, центар инверзије ψ_i, па је у овој инверзији њена слика $p' = \psi_i(p)$ круг. Слика у инверзији ψ_i дате тачке B је тачка $B' = \psi_i(B)$.

Тражени круг x, по услову задатка, садржи тачку A(центар инверзије ψ_i), па је у посматраној инверзији његова слика $x' = \psi_i(x)$ права. Права p и круг x имају једну заједничку тачку стога их толико имају и њихове слике у инверзији, и како инверзија чува једнакост углова: $\measuredangle(x, p) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(p)) = \measuredangle(x', p')$ следи да је права x' тангента круга p'. Како круг x садржи тачку B, његова слика, права x', садржи тачку B', $(B \in x \Rightarrow \psi_i(B) \in \psi_i(x) \Leftrightarrow B' \in x')$. Дакле, слика x' траженог круга x је права која пролази кроз тачку B' и тангента је круга p'. Проблем се своди на конструкцију тангенте x' из тачке B', добијене одређивањем слике у инверзији ψ_i дате тачке B, на круг p', добијен одређивањем слике у инверзији ψ_i дате праве p.

На крају, тражени круг x слика је у инверзији добијене праве x', јер како је инверзија инволутивно пресликавање то је: $x = \psi_i^{-1}(x') = \psi_i(x')$.

Број решења, односно број кругова који задовољавају услов постављеног проблема, зависи од броја тангенти из тачке B' на круг p'. У посматраном случају, када ни једна од тачака A и B не припада датој правој p, тачка B' не припада кругу p', па постоје тачно две тангенте, означимо их са x'_1 и x'_2, из тачке B' на круг p', а самим тим и два круга x_1 и x_2, одговарајуће слике у инверзији ψ_i добијених правих x'_1 и x'_2: $x_1 = \psi_i^{-1}(x'_1) = \psi_i(x'_1)$, $x_2 = \psi_i^{-1}(x'_2) = \psi_i(x'_2)$ који су тражено решење (слика 2_1).



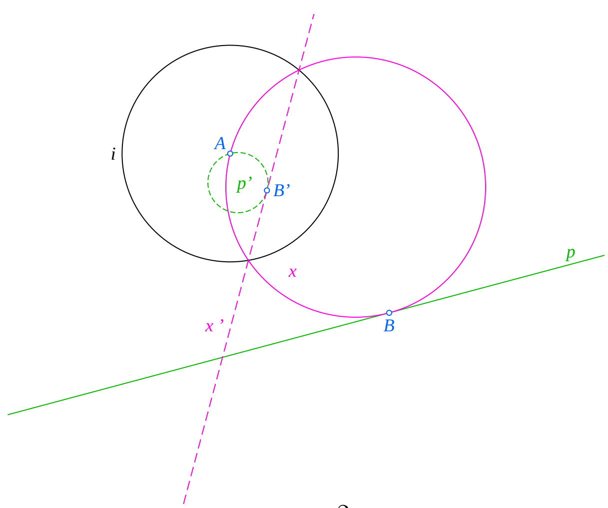
слика 2_1

○≻≻ Размотримо сада специјалне случајеве:

Једини специјалан случај за који постоји решење проблема је уколико нека од дате две тачке припада датој прави. Не умањујући општост претпоставимо да дата тачка B припада датој прави p.

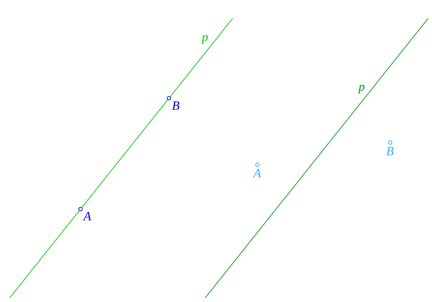
У овако задатом положају елемената A, B и p неке равни, тражене кругове можемо одредити истом инверзијом ψ_i, у односу на круг i, $i(A, r)$, као у претходном случају.

Разматрање је потпуно идентично, једина је разлика у броју решења проблема, јер како, по нашој претпоставци, дата тачка B припада датој прави p, тачка B' припада кругу p', те постоји тачно једна тангента x' из B' на p', стога и тачно један круг x, одговарајућа слика у инверзији ψ_i добијене праве x': $x = \psi_i^{-1}(x') = \psi_i(x')$, који задовољава услов постављеног проблема (слика 2_2).



слика 2_2

Задатак нема решења уколико обе дате тачке припадају датој прави или ако се дате две тачке налазе са разних страна дате праве (слика 2_3).



слика 2_3

$\prec\bullet\succ$ **Аполонијев проблем 3** $\prec\bullet\succ$

↬Конструисати круг који садржи две дате тачке и додирује дати круг (A, B, k).

решење:

Нека су A и B дате тачке и k дати круг неке равни. Назовимо x тражени круг те равни који садржи дате тачке A и B и додирује дати круг k. Размотримо најопштији случај, када круг k не садржи ни једну од датих тачака и обе се тачке налазе или у спољашњој или у унутрашњој области круга k.

Означимо са i круг исте равни, произвољног полупречника, са центром у једној од датих тачака. Не умањујући општост узмимо да је дата тачка B центар круга i, $i(B, r)$, и посматрајмо пресликавање инверзијом ψ_i у односу на круг i.

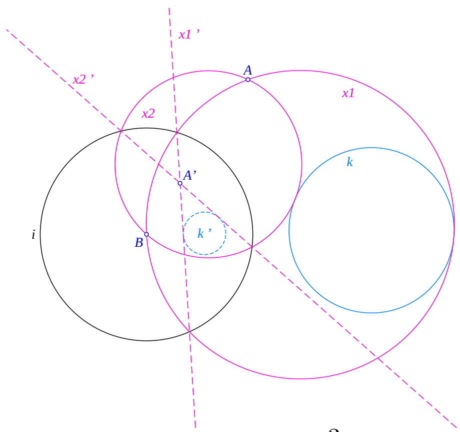
Дати круг k не садржи тачку B, центар инверзије ψ_i, па је у овој инверзији његова слика $k' = \psi_i(k)$ круг. Слика у инверзији ψ_i дате тачке A је тачка $A' = \psi_i(A)$.

Тражени круг x, по услову задатка, садржи тачку B(центар инверзије ψ_i), те је у посматраној инверзији његова слика $x' = \psi_i(x)$ права. Круг x и круг k се додирују, односно имају једну заједничку тачку, па их толико имају и њихове слике у инверзији и обзиром да инверзија чува једнакост углова: $\measuredangle(x, k) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k)) = \measuredangle(x', k')$ следи да је права x' тангента круга k'. Круг x, по услову задатка, садржи тачку A, отуда и права x' садржи тачку A', $(A \in x \Rightarrow \psi_i(A) \in \psi_i(x))$. Дакле, права x' садржи тачку A' и тангента је круга k', те се задатак своди на конструкцију тангенте из тачке A', добијене одређивањем слике дате тачке A у инверзији ψ_i, на круг k', добијен одређивањем слике у инверзији ψ_i датог круга k.

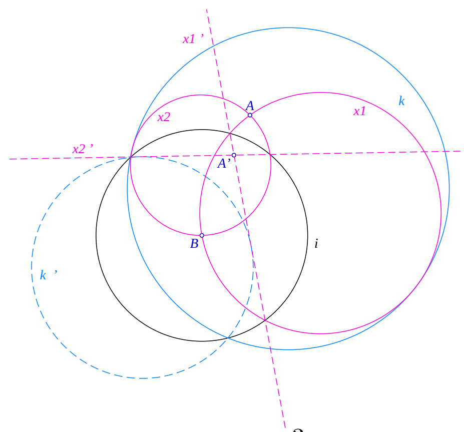
На крају, обзиром да је инверзија инволутивно пресликавање, тражени круг x слика је у инверзији ψ_i добијене тангенте x': $x = \psi_i^{-1}(x') = \psi_i(x')$.

Број решења, односно број кругова који задовољавају услов постављеног проблема, зависи од броја тангенти x' из тачке A' на круг k'. У посматраном случају, када ни једна од датих тачака A и B не припада датом кругу k, тачка A' не припада кругу k', па постоје тачно две тангенте, назовимо их x'_1 и x'_2, из A' на k', а самим тим и два круга x_1 и x_2, одговарајуће слике у инверзији добијених правих x'_1 и x'_2: $x_1 = \psi_i^{-1}(x'_1) = \psi_i(x'_1)$, $x_2 = \psi_i^{-1}(x'_2) = \psi_i(x'_2)$, који задовољавају услов постављеног проблема.

Слика 3_1 приказује конструкцију тражених кругова уколико су дате тачке A и B у спољашњој области датог круга k. Слика 3_2 приказује конструкцију тражених кругова уколико су дате тачке A и B у унутрашњој области датог круга k.



слика 3_1



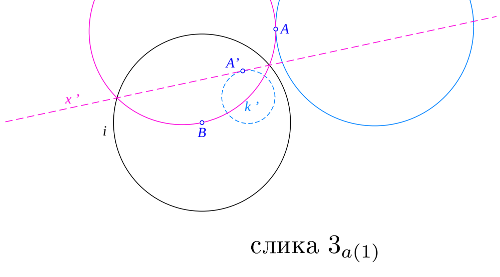
слика 3_2

○≻≻ Размотримо сада специјалан случај:

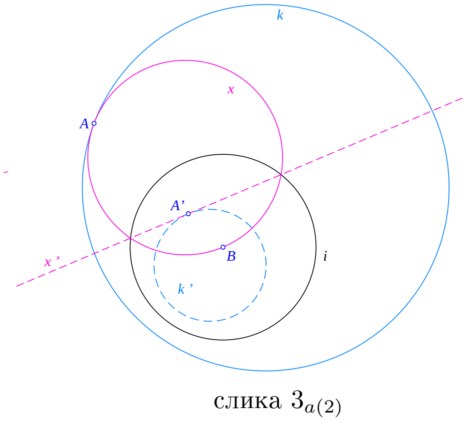
Једини специјалан случај, односно посебан положај задатих елемената равни, за који постоји решење овог проблема, је положај при коме тачно једна дата тачка припада датом кругу. Не умањујући општост узмимо да тачка A припада кругу k.

Постоје два начина да се одреди тражено решење. Први начин је горње описани, помоћу инверзије ψ_i у односу на круг i, произвољног полупречника, са центром у датој тачки B. Разматрање је готово идентично, једина разлика је у броју решења, броју кругова који испуњавају услов постављеног проблема. Наиме, по нашој претпоставци дата тачка A припада датом кругу k, па тачка A' припада кругу k', отуда постоји тачно једна тангента x' из A' на k', одговарајућа слика у инверзији ψ_i тразхеног круга x, па је круг x слика у инверзији добијене праве x': $x = \psi_i^{-1}(x') = \psi_i(x')$.

Слика $3_{a(1)}$ приказује конструкцију инверзијом ψ_i траженог круга, уколико је дата тачке A на кругу k а тачка B се налази у његовој спољашњој области. Слика $3_{a(2)}$ приказује конструкцију инверзијом ψ_i траженог круга, уколико је дата тачке A на кругу k а тачка B се налази у његовој унутрашњој области.



слика $3_{a(1)}$



слика $3_{a(2)}$

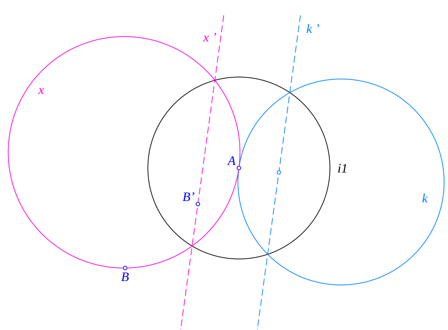
Други начин за одређивање траженог круга је помоћу инверзије ψ_{i_1} у односу на круг i_1 исте равни, са центром у датој тачки $A \in k$, произвољног полупречника $r_1 \neq r$, где је r полупречник датог круга k.

Дати круг k, по претпоставци, садржи тачку A, центар инверзије ψ_{i_1} те је у овој инверзији његова слика $k' = \psi_{i_1}(k)$ права. Слика у инверзији ψ_{i_1} дате тачке B је тачка $B' = \psi_{i_1}(B)$.

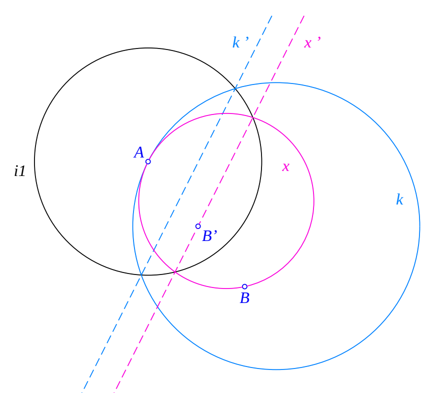
Тражени круг x, по условy задатка, садржи тачку A(центар инверзије ψ_{i_1}), одакле је у посматраној инверзији његова слика $x' = \psi_{i_1}(x)$ права. Круг x и дати круг k се додирују, а пошто инверзија чува једнакост углова: $\measuredangle(x, k) = \measuredangle(\psi_{i_1}(x), \psi_{i_1}(k)) = \measuredangle(x', k')$ следи да су праве x' и k' међусобно паралелне. Како круг x, по постављеном услову садржи дату тачку B, права x' садржи тачку B'. Да закључимо: слика x' траженог круга x је права која садржи тачку B' и паралелна је прави k'. Задатак се своди на конструкцију праве x' кроз тачку B', добијене као слика у инверзији ψ_{i_1} дате тачке B, паралелне прави k', добијене одређивањем слике у у инверзији ψ_{i_1} датог круга k.

На крају, круг x слика је добијене праве x' у инверзији ψ_{i_1}: $x = \psi_{i_1}^{-1}(x') = \psi_{i_1}(x')$.

На слици $3_{a(3)}$ приказана је конструкција, помоћу инверзије ψ_{i_1}, траженог круга, уколико је дата тачке A на кругу k а тачка B се налази у његовој спољашњој области. На слици $3_{a(4)}$ је конструкција помоћу инверзије ψ_{i_1} траженог круга, уколико је дата тачке A на кругу k а тачка B се налази у његовој унутрашњој области.

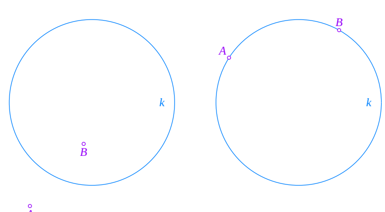


слика $3_{a(3)}$



слика $3_{a(4)}$

Постављени проблем нема решења уколико обе дате тачке припадају датом кругу или се једна налази у унутрашњој а друга у спољашњој области круга(слика 3_b).



слика 3_b

$\prec\!\bullet\!\succ$ Аполонијев проблем 4 $\prec\!\bullet\!\succ$

$\looparrowright$Конструисати круг који садржи дату тачку и додирује дате две праве (B, p, q).

решење:

Нека су дате праве p и q и тачка B неке равни и нека је x тражени круг те равни који садржи дату тачку B и додирује дате праве p и q. Размотримо најпре најопштији случај, када ни једна од правих p и q не садржи тачку B.

Означимо са i круг исте равни са центром у датој тачки B, произвољног полупречника, $i(B, r)$, а са ψ_i пресликавање инверзијом у односу на круг i.

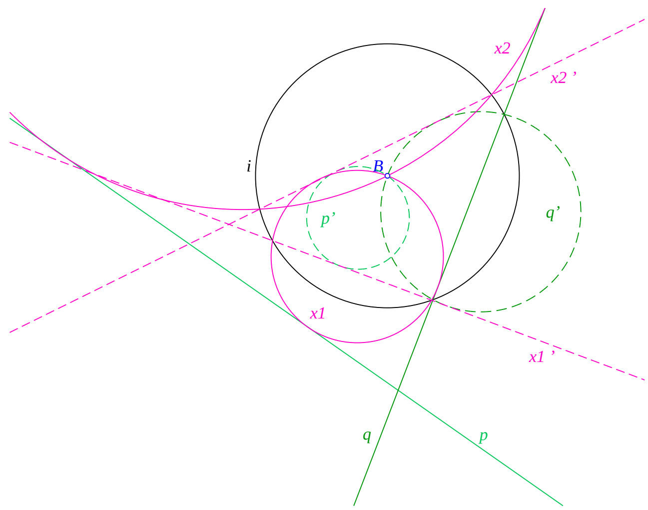
Како ни једна од датих правих p и q не садржи дату тачку B, центар инверзије ψ_i, у посматраној инверзији њихове слике $p' = \psi_i(p)$ и $q' = \psi_i(q)$ су кругови који, по дефиницији пресликавања инверзијом у односу на круг, оба садрже центар инверзије(тачку B), што значи да се кругови p' и q' или секу(B је једна од две пресечне тачке) или додирују у тачки B(ово је важно напоменути због броја кругова који су решење постављеног проблема).

Тражени круг x, по услову овог проблема, садржи дату тачку B, центар инверзије ψ_i, те је у инверзији ψ_i његова слика $x' = \psi_i(x)$ права. По постављеном услову круг x додирује праве p и q, односно са сваком од њих има по једну заједничку тачку, па и права x' са сваким од кругова p' и q' има по једну заједничку тачку и пошто инверзија чува једнакост углова: $\measuredangle(x, p) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(p)) = \measuredangle(x', p')$ и $\measuredangle(x, q) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(q)) = \measuredangle(x', q')$, следи да је права x' тангента и круга p' и круга q'. Задатак се своди на конструкцију заједничке тангенте кругова p' и q', добијених одређивањем слика датих правих p и q у инверзији ψ_i.

На крају, обзиром да је инверзија инволутивно пресликавање, тражени круг x слика је у инверзији ψ_i добијене праве x': $x = \psi_i^{-1}(x') = \psi_i(x')$.

Број решења, односно број кругова који задовољавају услов постављеног проблема, зависи од узајамног положаја кругова p' и q', тј. од броја њихових заједничких тангенти(како смо већ напоменули, ова се два круга или секу или додирују у центру инверзије B), тј. узајамног положаја у равни датих правих p и q.

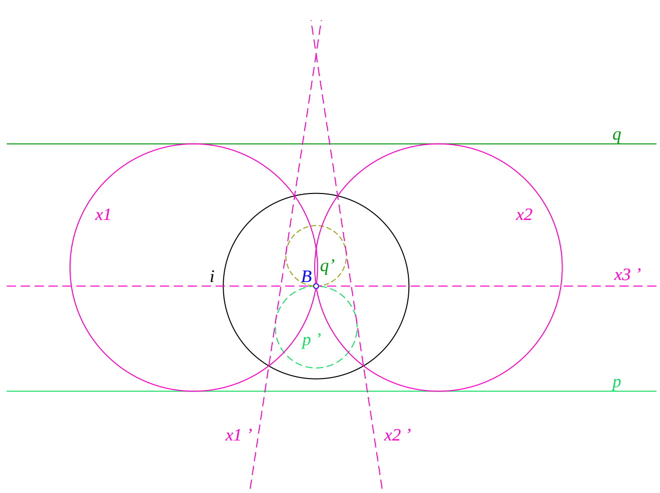
– Уколико се дате праве p и q секу, секу се и кругови p' и q', па постоје две заједничке тангенте ових кругова, означимо их са x_1' и x_2', одговарајуће слике у инверзији тражених кругова, а тражени кругови слике су у инверзији ψ_i добијених правих x_1' и x_2': $x_1 = \psi_i^{-1}(x_1') = \psi_i(x_1')$, $x_2 = \psi_i^{-1}(x_2') = \psi_i(x_2')$, (слика 4_1).



слика 4_1

– Уколико су дате праве p и q паралелне то се њихове слике, кругови p' и q', додирују споља у центру B инверзије, па постоје три заједничке тангенте ова два круга, две спољашње x_1' и x_2' и једна унутрашња x_3' (у тачки додира B). Напоменимо да иако дате праве p и q немају заједничких тачака, њихове слике, кругови p' и q' имају заједничку тачку(сам центар инверзије). Разлог за ово је једнакост углова при пресликавању инверзијом: $\measuredangle(p,q) = \measuredangle(\psi_i(p), \psi_i(q)) = \measuredangle(p', q')$.

Вратимо се на коначно решење задатка: унутрашња тангента, права x_3', садржи центар инверзије, тачку B, па је она сама своја слика у инверзији: $x_3 = \psi_i^{-1}(x_3') = \psi_i(x_3') = x_3' \backslash \{B\}$. Спољашње тангенте, праве x_1' и x_2', одговарају као слике у инверзији траженим круговима x_1 и x_2, па су кругови слике у инверзији добијених правих x_1' и x_2': $x_1 = \psi_i^{-1}(x_1') = \psi_i(x_1')$, $x_2 = \psi_i^{-1}(x_2') = \psi_i(x_2')$ (слика 4_2).



слика 4_2

$\circ\succ\succ$ Размотримо сада специјалан случај:

Специјалан случај, једини могући, односи се на задати положај при коме дата тачка припада једној од датих правих.

Нека дата тачка B припада једној од датих правих p или q. Не умањујући општост узмимо да тачка B припада прави p.

Слично као у општем случају, посматраћемо пресликавање инверзијом ψ_i, у односу на круг i исте равни, произвољног полупречника, са центром у датој тачки B.

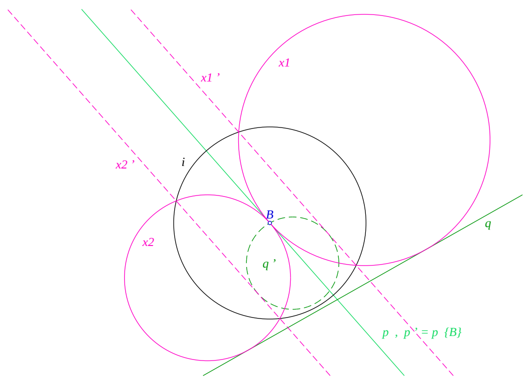
Дата права p, по нашој претпоставци, садржи тачку B(центар инверзије ψ_i), па је слика у инверзији ψ_i праве p она сама, без центра инверзије B: $p' = \psi_i(p) = p\backslash\{B\}$. Дата права q не садржи центар B инверзије ψ_i, па је у овој инверзији њена слика $q' = \psi_i(q)$ круг, који по дефиницији пресликавања инверзијом, садржи центар инверзије(тачку B). Тражени круг x, по услову задатка, садржи тачку B, центар инверзије ψ_i, те је у посматраној инверзији његова слика $x' = \psi_i(x)$ права. По постављеном услову, круг x додирује дату праву q стога и њихове слике, права x' и круг q', имају тачно једну заједничку тачку и како је $\measuredangle(x, q) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(q)) = \measuredangle(x', q')$ следи да је права x' тангента круга q'. Круг x додирује и дату праву p, а како су у инверзији њихове слике праве x' и p', обзиром да инверзија чува једнакост углова: $\measuredangle(x, p) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(p)) = \measuredangle(x', p')$ следи да су праве x' и p' међусобно паралелне. Задатак се своди на конструкцију тангенте x' на круг q', добијен одређивањем слике у инверзији дате праве q, паралелне прави $p' = p\backslash\{B\}$.

Коначно, на основу особине инволутивности пресликавања инверзијом у односу на круг, тражени круг x слика је у инверзији добијене праве x': $x = \psi_i^{-1}(x') = \psi_i(x')$.

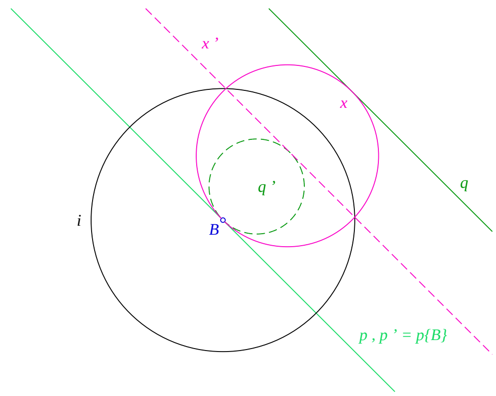
Број кругова који испуњавају услов постављеног проблема зависи од броја тангенти на круг q' паралелних прави p', односно узајамног положаја у равни датих правих q и p. Слично разматрању које смо детаљно извршили у општем случају:

– Уколико се дате праве p и q секу, права p' сече круг q', па постоје две тангенте, означимо их са x_1' и x_2', на круг q', паралелне прави p', које одговарају као слике у инверзији траженим круговима x_1 и x_2, а кругови су слике у инверзији добијених правих x_1' и x_2': $x_1 = \psi_i^{-1}(x_1') = \psi_i(x_1')$, $x_2 = \psi_i^{-1}(x_2') = \psi_i(x_2')$ (слика $4_{a(1)}$).

– Уколико су дате праве p и q паралелне, због $\measuredangle(p, q) = \measuredangle(\psi_i(p), \psi_i(q)) = \measuredangle(p', q')$, права p' тангента је круга q', те постоји још само једна тангента, у ознаци x', на круг q' паралелна његовој тангенти p', одговарајућа слика у инверзији ψ_i траженог круга x, одакле је тражени круг x слика у истој инверзији добијене праве x': $x = \psi_i^{-1}(x') = \psi_i(x')$, (слика $4_{a(2)}$).

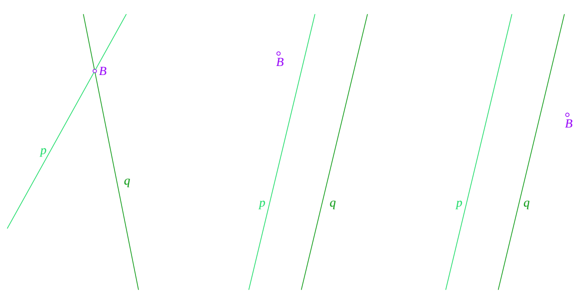


слика $4_{a(1)}$



слика $4_{a(2)}$

Задатак нема решења уколико се дате праве секу у датој тачки или уколико дата тачка и једна од датих правих припадају истој од две полуравни на које друга дата права дели дату раван(слика 4_b).



слика 4_b

$\prec\bullet\succ$ Аполонијев проблем 5 $\prec\bullet\succ$

↬Конструисати круг који садржи дату тачку и додирује дату праву и дати круг (A, p, k).

решење:

Нека су дати тачка A, права p и круг k неке равни и нека је x тражени круг исте равни који садржи дату тачку и додирује дату праву и дати круг. Размотримо најопштији случај када ни права p ни круг k не садрже тачку A.

Означимо са i круг те равни са центром у датој тачки A, произвољног полупречника, $i(A, r)$, а са ψ_i пресликавање инверзијом у односу на круг i.

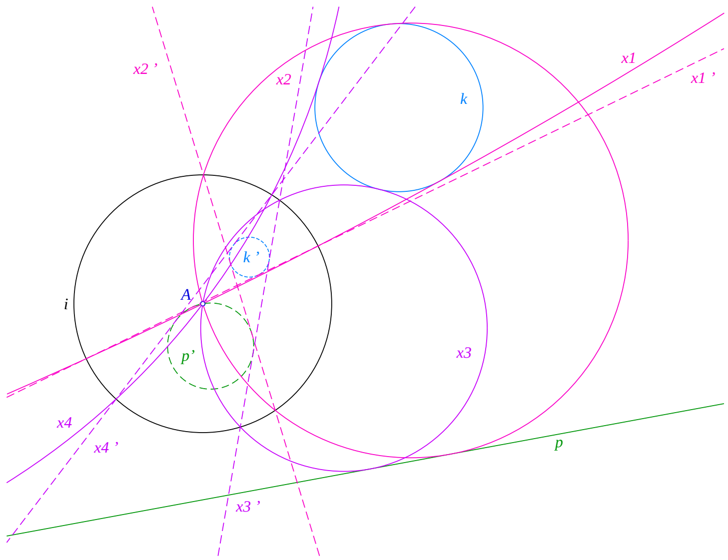
Дата права p не садржи дату тачку A, центар инверзије ψ_i, па је у овој инверзији њена слика $p' = \psi_i(p)$ круг (који, по дефиницији пресликавања инверзијом, садржи центар инверзије). Дати круг k такође не садржи тачку A, центар инверзије, па је у инверзији ψ_i и његова слика $k' = \psi_i(k)$ круг.

Тражени круг x, по услову задатка, садржи тачку A, центар инверзије ψ_i, те је у посматраној инверзији његова слика $x' = \psi_i(x)$ права. По постављеном услову, круг x додирује дату праву p и дати круг k, односно са сваким од њих има по једну заједничку тачку, па и права x' са сваким од кругова p' и k' има по једну заједничку тачку. Уз то, обзиром да инверзија чува једнакост углова: $\measuredangle(x, p) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(p)) = \measuredangle(x', p')$ и $\measuredangle(x, k) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k)) = \measuredangle(x', k')$, следи да је права x' тангента и круга p' и круга k'. Задатак се своди на конструкцију заједничке тангенте кругова p' и k', добијених одређивањем слика дате праве p и датог круга k у инверзији ψ_i.

На крају, тражени круг x слика је у инверзији ψ_i добијене праве x', јер како је инверзија инволутивно пресликавање то је $x = \psi_i^{-1}(x') = \psi_i(x')$.

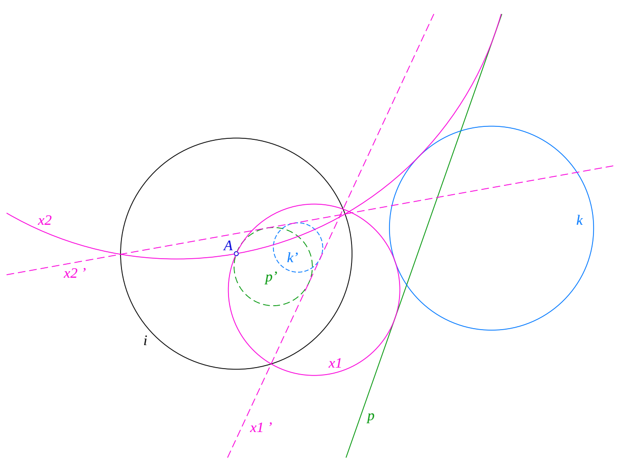
Број решења, односно број кругова x, који задовољавају услов постављеног проблема, зависи од броја заједничких тангенти кругова p' и k', односно од њиховог узајамног положаја, тачније од узајамног положаја дате праве p и датог круга k. У овом, најоштијем случају, када дата тачка A не припада ни датој правој p, ни датом кругу k важи:

– Ако се тачка A налази у спољашњој области круга k а круг k и права p немају заједничких тачака тада немају заједничких тачака ни њихове слике у инверзији ψ_i, кругови k' и p', па постоје четири њихове заједничке тангенте, две унутрашње, x_1' и x_2', и две спољашње, x_3' и x_4', које одговарају као слике у инверзији траженим круговима x_1, x_2, x_3 и x_4, а сами кругови слике су у инверзији ψ_i добијених тангенти: $x_1 = \psi_i^{-1}(x_1') = \psi_i(x_1')$; $x_2 = \psi_i^{-1}(x_2') = \psi_i(x_2')$; $x_3 = \psi_i^{-1}(x_3') = \psi_i(x_3')$; $x_4 = \psi_i^{-1}(x_4') = \psi_i(x_4')$. Напоменимо да унутрашњим тангентама одговарају кругови x_1 и x_2 који додирују дати круг k изнутра, а спољашњим тангентама кругови x_3 и x_4 који дати круг k додирују споља (слика 5_1).



слика 5_1

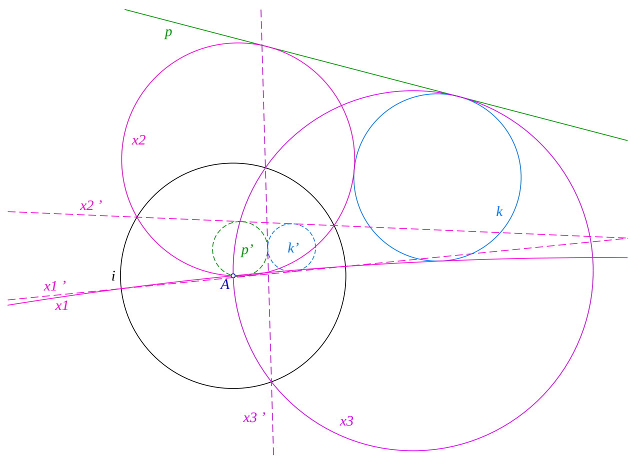
– Ако се тачка A налази у спољашњој области круга k, а права p и круг k се секу, тада се секу и њихове слике у инверзији, кругови k' и p', па постоје само њихове две спољашње заједничке тангенте, x_1' и x_2', одговарајуће слике у инверзији ψ_i тражених кругова x_1 и x_2, а кругови су слике у инверзији добијених правих x_1' и x_2': $x_1 = \psi_i^{-1}(x_1') = \psi_i(x_1')$ и $x_2 = \psi_i^{-1}(x_2') = \psi_i(x_2')$, при чему оба тражена круга дати круг додирују споља (слика 5_2).



слика 5_2

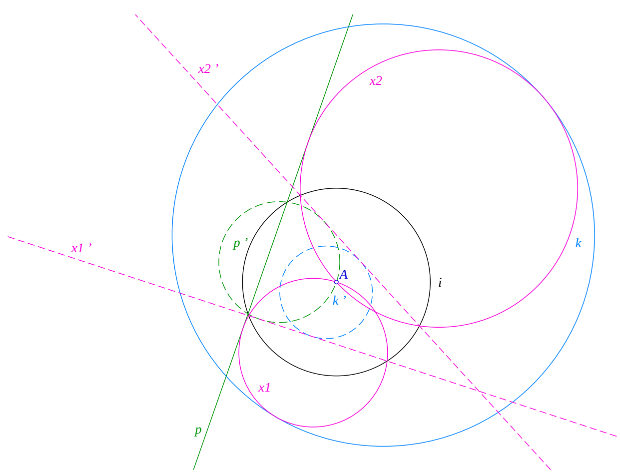
– Ако се тачка A налази у спољашњој области круга k, а права p је тангента круга k, тада и њихове слике у инверзији имају тачно једну заједничку тачку и обзиром да важи: $\measuredangle(k,p) = \measuredangle(\psi_i(k), \psi_i(p)) = \measuredangle(k', p')$, следи да се кругови p' и k' додирују и то споља, те постоје три њихове заједничке тангенте, две спољашње, x_1' и x_2', и једна унутрашња x_3' (у тачки додира кругова k' и p'), које одговарају као слике у инверзији

ψ_i траженим круговима x_1, x_2 и x_3, а сами кругови слике су у инверзији добијених правих x'_1, x'_2 и x'_3, при чему спољашњим тангентама, x'_1 и x'_2, одговарају кругови x_1 и x_2, који додирују дату праву p и дати круг k споља, а унутрашњој тангенти, x'_3, круг x_3, који дати круг k додирује изнутра и садржи тачку додира дате праве p и датог круга k у којој их оба и додирује(о овом кругу биће речи и касније)(слика 5_3).



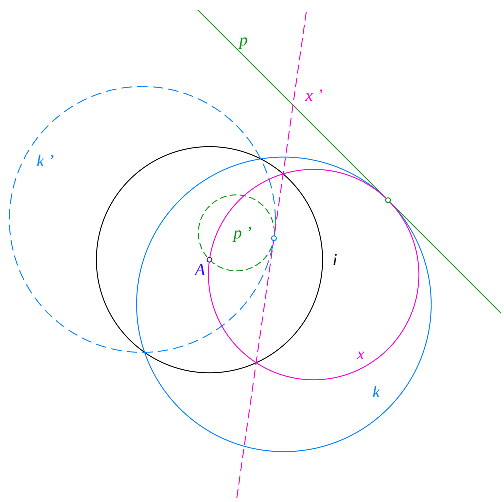
слика 5_3

–Ако се тачка A налази у унутрашњој области круга k, а права p сече круг k, (слично као и у случају када се дата тачка A налази у спољашњој области датог круга k), секу се и њихове слике у инверзији ψ_i, кругови k' и p', па постоје само њихове две спољашње заједничке тангенте, праве x'_1 и x'_2, одговарајуће слике у инверзији ψ_i тражених кругова x_1 и x_2, при чему оба тражена круга дати круг додирују изнутра (слика 5_4).



слика 5_4

– Ако се тачка A налази у унутрашњој области круга k, а права p је тангента круга k, (слично као и у случају када се дата тачка A налази у спољашњој области датог круга k), њихове слике у инверзији ψ_i имају тачно једну заједничку тачку и због $\measuredangle(k,p) = \measuredangle(\psi_i(k), \psi_i(p)) = \measuredangle(k', p')$, следи да се кругови p' и k' додирују изнутра, па постоји тачно једна њихова заједничка тангента, x', у тачки додира кругова p' и k', одговарајућа слика у инверзији ψ_i траженог круга x, који садржи тачку додира дате праве p и датог круга k, у којој их и додирује (слика 5_5).



слика 5_5

≻≻≻Напомена:

Проблем одређивања свих тражених кругова у случају да је дата права p тангента датог круга k, а дата тачка A не припада ни прави p ни кругу k решили смо у општем случају, инверзијом ψ_i у односу на круг i, $i(A,r)$.

Постоји још један начин да се одреди само круг који садржи дату тачку A, а праву p и круг k додирују у њиховој додирној тачки.

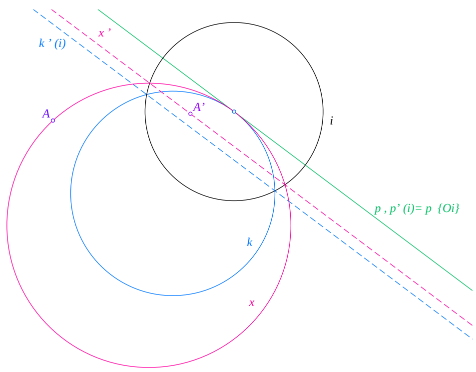
Посматрајмо инверзију ψ_i у односу на круг i исте равни, произвољног полупречника, чији је центар тачка додира дате праве p и датог круга k.

Како права p садржи центар инверзије ψ_i њена слика у овој инверзији је она сама, без центра инверзије, $p' = \psi_i(p) = p \backslash \{O_i\}$. Круг k такође садржи центар инверзије ψ_i, па је у посматраној инверзији и његова слика $k' = \psi_i(k)$ права, и то права паралелна прави p', обзиром да је права p тангента круга k ($\measuredangle(p,k) = \measuredangle(\psi_i(p), \psi_i(k)) = \measuredangle(p', k')$), (што се и без теоријског предзнања може видети приликом конструкције, одређивањем слике круга k у инверзији ψ_i). Слика у инверзији ψ_i дате тачке A је тачка $A' = \psi_i(A)$.

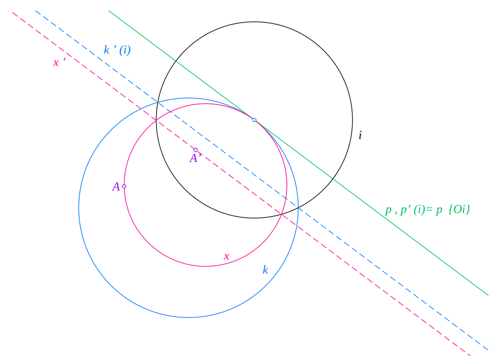
Како смо претпоставили, тражени круг x садржи додирну тачку праве p и круга k (у којој их додирује), а она је центар посматране инверзије ψ_i, па је у овој инверзији његова слика $x' = \psi_i(x)$ права. Обзиром да круг x, по услову постављеног проблема, додирује и праву p и круг k, на основу једнакости $\measuredangle(x,p) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(p)) = \measuredangle(x', p')$ и $\measuredangle(x,k) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k)) = \measuredangle(x', k')$, следи да су праве x', p' и k' међусобно паралелне. Круг x садржи тачку A те права x' садржи тачку A'. Задатак се своди на конструкцију праве x' кроз тачку A', паралелну међусобно паралелним правама k' и $p' = p \backslash \{O_i\}$, која је јединствена.

Обзиром на особину инволутивности пресликавања инверзијом у односу на круг тражени круг x одговарајућа је слика у инверзији ψ_i добијене праве x': $x = \psi_i^{-1}(x') = \psi_i(x')$.

Слика 5_6 приказује конструкцију инверзијом ψ_i траженог круга у случају да је тачка A у спољашњој области круга k; слика 5_7 приказује конструкцију инверзијом ψ_i траженог круга у случају да је тачка A у унутрашњој области круга k.



слика 5_6



слика 5_7

○≻≻ Размотримо сада специјалне случајеве, односно положаје датих елемената у којима дата тачка припада или датој прави или датом кругу:

≺•≻ случај 5 (A):

Дата тачка A припада датој прави p и не припада датом кругу k.

Са i означимо круг те равни, произвољног полупречника, са центром у тачки A, $i(A, r)$, а са ψ_i пресликавање инверзијом у односу на круг i.

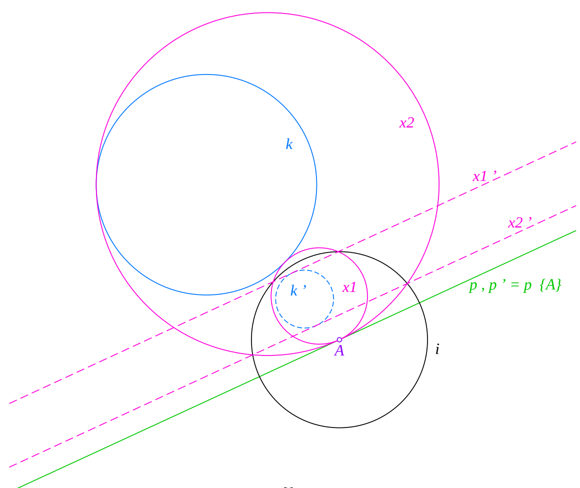
Дата права p садржи тачку A, центар инверзије ψ_i, те је у инверзији ψ_i њена слика она сама, без центра инверзије, тј. $p' = \psi_i(p) = p \backslash \{A\}$, а како дати круг k не садржи центар A инверзије ψ_i, у овој инверзији његова је слика $k' = \psi_i(k)$ круг.

Тражени круг x, по услову задатка, садржи тачку A, центар посматране инверзије, па се он инверзијом ψ_i пресликава у праву $x' = \psi_i(x)$. Круг x, по услову задатка, додирује дати круг k, па њихове слике у инверзији имају тачно једну заједничку тачку. Због ове чињенице и једнакости $\measuredangle(x, k) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k)) = \measuredangle(x', k')$, следи да је права x' тангента круга k'. Круг x додирује и дату праву p, те обзиром на једнакост $\measuredangle(x, p) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(p)) = \measuredangle(x', p')$ следи да су њихове слике, x' и p', паралелне праве. Задатак се своди на конструкцију тангенте x' на круг k', добијен одређивањем слике датог круга k у инверзији ψ_i, паралелне прави $p' = p \backslash \{A\}$.

Коначно, тражени круг x одговарајућа је слика добијене праве x' у инверзији ψ_i: $x = \psi_i^{-1}(x') = \psi_i(x')$.

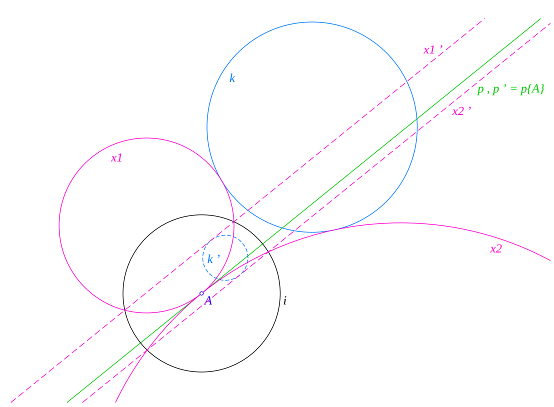
Број решења, односно број кругова x, који задовољавају услов постављеног проблема, зависи од броја тангенти на круг k' паралелних прави p', односно од узајамног положаја дате праве p и датог круга k:

– Ако дата права p и дати круг k немају заједничких тачака тада их немају ни њихове слике, круг k' и права p', па постоје две тангенте, означимо их са x'_1 и x'_2, на круг k' паралелне прави p', које су одговарајуће слике у инверзији ψ_i тражених кругова x_1 и x_2, а кругови су слике у инверзији ψ_i добијених правих x'_1 и x'_2: $x_1 = \psi_i^{-1}(x'_1) = \psi_i(x'_1)$, $x_2 = \psi_i^{-1}(x'_2) = \psi_i(x'_2)$ (слика $5_{a(1)}$).



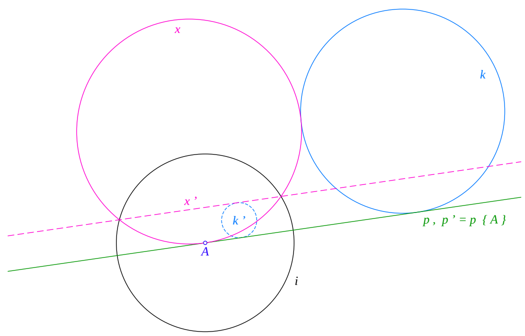
слика $5_{a(1)}$

–Ако дата права p сече дати круг k секу се и њихове слике, права p' и круг k', те постоје две тангенте, x'_1 и x'_2, на круг k' паралелне прави p', а самим тим и два круга, x_1 и x_2, који задовољавају услов постављеног проблема (слика $5_{a(2)}$).



слика $5_{a(2)}$

–Ако је дата права p тангента датог круга k, тада и њихове слике у инверзији имају тачно једну заједничку тачку и због једнакости $\measuredangle(k,p) = \measuredangle(\psi_i(k), \psi_i(p)) = \measuredangle(k', p')$, следи да је права p' тангента круга k', па постоји тачно једна тангента x' на круг k' паралелна прави p', а самим тим и један круг x, слика у инверзији ψ_i добијене праве x': $x = \psi_i^{-1}(x') = \psi_i(x')$, који задовољава услов постављеног проблема (слика $5_{a(3)}$).



слика $5_{a(3)}$

$\prec\bullet\succ$ **случај 5 (** B **)**:

Дата тачка A припада датом кругу k и не припада датој прави p.

Посматрајмо инверзију ψ_i, у односу на круг i исте равни, произвољног полупречника, са центром у датој тачки A(разматрање овог случаја је врло слично претходном).

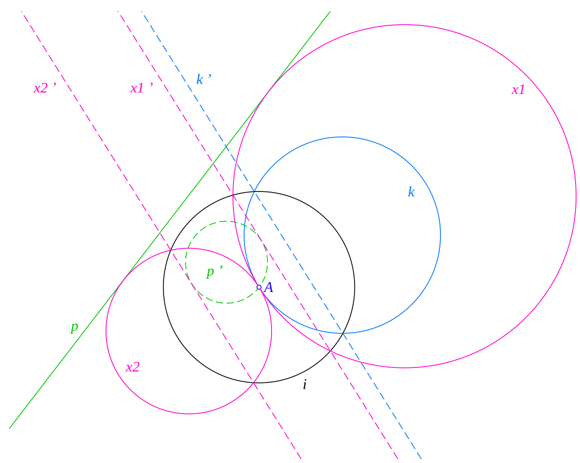
Како дата права p не садржи центар A инверзије ψ_i, њена је слика у овој инверзији $p' = \psi_i(p)$ круг(који по дефиницији пресликавања инверзијом садржи центар инверзије), а како дати круг k садржи тачку A, центар инверзије ψ_i, у овој инверзији његова је слика $k' = \psi_i(k)$ права.

Тражени круг x, по услову задатка, садржи тачку A, центар посматране инверзије, па је у инверзији ψ_i његова слика $x' = \psi_i(x)$ права. Круг x, по услову задатка, додирује дати круг k, те због једнакости $\measuredangle(x,k) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k)) = \measuredangle(x', k')$ следи да су праве x' и k' међусобно паралелне. По постављеном услову, круг x додирује дату праву p па њихове слике у инверзији имају тачно једну заједничку тачку, а обзиром на једнакост $\measuredangle(x,p) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(p)) = \measuredangle(x', p')$, следи да је права x' тангента круга p'. Задатак се своди на конструкцију тангенте x' на круг p', добијен одређивањем слике дате праве p у инверзији ψ_i, паралелне прави k', добијене одређивањем слике датог круга k у инверзији ψ_i.

На крају, тражени круг x слика је добијене праве x' у инверзији ψ_i , обзиром на особину инволутивности пресликавања помоћу инверзије у односу на круг: $x = \psi_i^{-1}(x') = \psi_i(x')$.

Број решења, односно број тражених кругова x, зависи од броја тангенти на круг p' паралелних прави k', односно од узајамног положаја дате праве p и датог круга k:

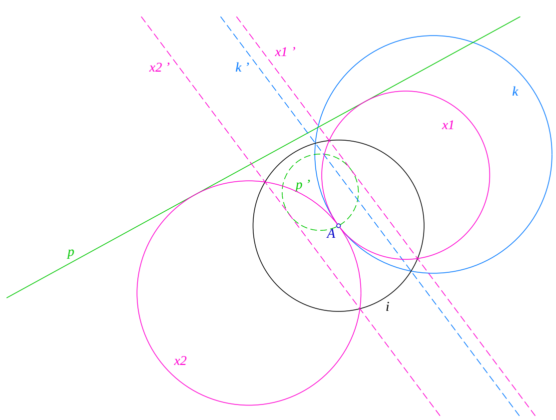
– Ако дата права p и дати круг k немају заједничких тачака тада их немају ни њихове слике, круг p' и права k', па постоје две тангенте, означимо их са x_1' и x_2', на круг p' паралелне прави k', одговарајуће слике у инверзији ψ_i тражених кругова x_1 и x_2, а кругове добијамо одређивањем слика у инверзији ψ_i добијених правих x_1' и x_2': $x_1 = \psi_i^{-1}(x_1') = \psi_i(x_1')$, $x_2 = \psi_i^{-1}(x_2') = \psi_i(x_2')$ (слика $5_{b(1)}$).



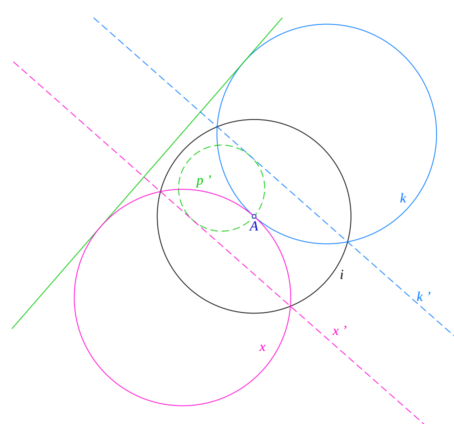
слика $5_{b(1)}$

–Ако дата права p сече дати круг k тада, слично као у претходном случају, постоје две тангенте, x_1' и x_2', на круг p' паралелне прави k', а самим тим и два круга, x_1 и x_2, који задовољавају услов постављеног проблема (слика $5_{b(2)}$).

–Ако је дата права p тангента датог круга k, тада и њихове слике у инверзији имају тачно једну заједничку тачку и обзиром на једнакост $\measuredangle(k,p) = \measuredangle(\psi_i(k), \psi_i(p)) = \measuredangle(k', p')$, следи да је права k' тангента круга p', па постоји још тачно једна тангента x' на круг p', паралелна његовој тангенти k', која је одговарајућа слика у инверзији ψ_i траженог круга x, а круг x слика је у инверзији ψ_i добијене праве x': $x = \psi_i^{-1}(x') = \psi_i(x')$ (слика $5_{b(3)}$).



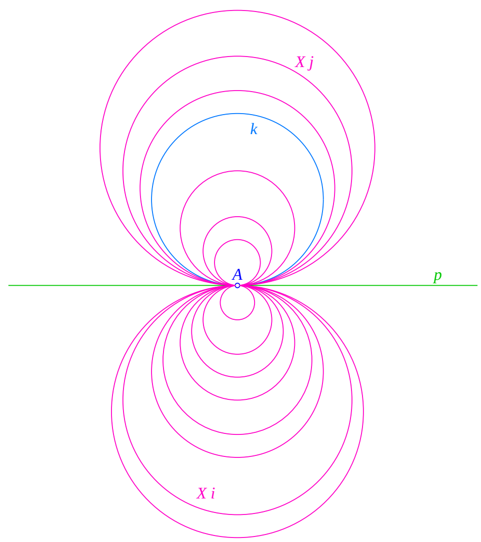
слика $5_{b(2)}$



слика $5_{b(3)}$

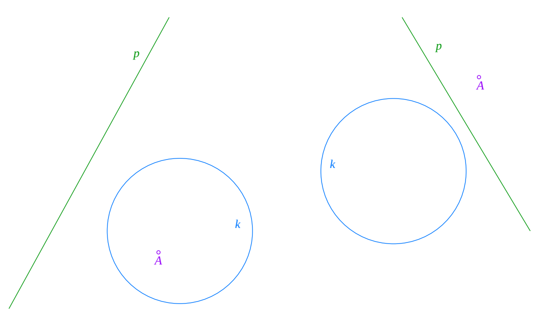
$\prec\bullet\succ$ **случај 5 (** C **)**:

Уколико дата права p и дати круг k садрже дату тачку A, односно ако је права p тангента круга k у тачки A, постоји бесконачно много кругова x који задовољавају услов постављеног проблема: скуп кругова параболичког прамена коме припада дати круг k, а дата права p је радикална оса овог прамена, јесте решење задатог проблема (слика 5_c).



слика 5_c

Задатак нема решења у случају да се дата тачка A налази у унутрашњој области датог круга k, а дата права p и круг k немају заједничких тачака и уколико се дати круг k и дата тачка A налазе са разних страна дате праве p (слика 5_d).



слика 5_d

≺•≻ Аполонијев проблем 6 ≺•≻

↬Конструисати круг који садржи дату тачку и додирује дата два круга (A, k_1, k_2)

решење:

Нека су дати тачка A и кругови k_1 и k_2 неке равни. Са x означимо тражени круг те равни који садржи дату тачку и додирује дате кругове. Размотримо најопштији случај када ни један од кругова k_1 и k_2 не садржи тачку A.

Означимо са i круг те равни, са центром у датој тачки A, произвољног полупречника, $i(A, r)$, а са ψ_i инверзију у односу на круг i.

Дати круг k_1, по претпоставци, не садржи дату тачку A, центар инверзије ψ_i, па је у инверзији његова слика $k_1' = \psi_i(k_1)$ круг. Слично, дати круг k_2 такође не садржи центар A инверзије ψ_i, те је у овој инверзији и његова слика $k_2' = \psi_i(k_2)$ круг.

Тражени круг x, по услову задатка, садржи дату тачку A, центар инверзије ψ_i, отуда је посматраној инверзији његова слика $x' = \psi_i(x)$ права. По постављеном услову овог проблема, круг x додирује и круг k_1 и круг k_2, односно са сваким од њих има по једну заједничку тачку, стога слика x' круга x, са сваком од слика k_1' и k_2' кругова k_1 и k_2 има по једну заједничку тачку. Уз то, обзиром да инверзија чува једнакост углова: $\measuredangle(x, k_1) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k_1)) = \measuredangle(x', k_1')$ и $\measuredangle(x, k_2) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k_2)) = \measuredangle(x', k_2')$, следи да је права x' тангента и круга k_1' и круга k_2'. Задатак се своди на конструкцију заједничке тангенте x', кругова k_1' и k_2', добијених одређивањем слика у инверзији ψ_i датих кругова k_1 и k_2.

На крају, тражени круг x слика је у инверзији ψ_i добијене праве x', јер како је инверзија инволутивно пресликавање то је $x = \psi_i^{-1}(x') = \psi_i(x')$.

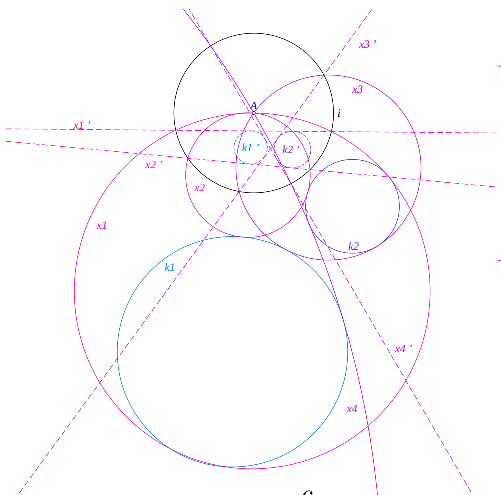
Број решења, број кругова x, који задовољавају услов постављеног проблема, зависи од броја заједничких тангенти кругова k_1' и k_2', тј. од њиховог међусобног положаја, односно од међусобног положаја датих кругова k_1 и k_2.

∗ У случају да се дата тачка A налази у спољашњој области оба дата круга тада:

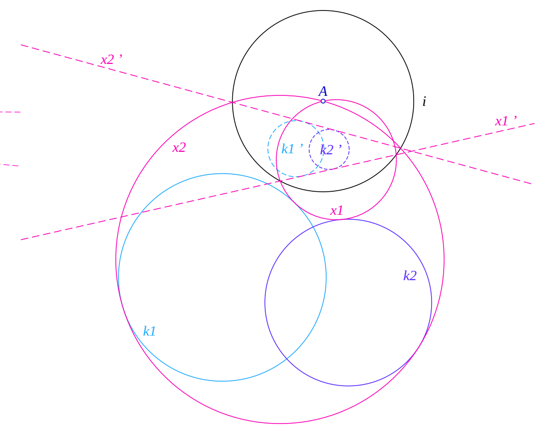
– уколико се сваки од кругова k_1 и k_2 налази у спољашњој области другог, ни њихове слике, кругови k_1' и k_2', немају заједничких тачака, па постоје четири њихове заједничке тангенте, две спољашње, x_1' и x_2', и две унутрашње, x_3' и x_4', које одговарају као слике у инверзији траженим круговима x_1, x_2, x_3 и x_4, а сами кругови су слике у инверзији ψ_i добијених тангенти: $x_1 = \psi_i^{-1}(x_1') = \psi_i(x_1')$; $x_2 = \psi_i^{-1}(x_2') = \psi_i(x_2')$; $x_3 = \psi_i^{-1}(x_3') = \psi_i(x_3')$; $x_4 = \psi_i^{-1}(x_4') = \psi_i(x_4')$.

Напоменимо да су спољашње тангенте, x_1' и x_2', одговарајуће слике тражених кругова x_1 и x_2, од којих један додирује оба дата круга споља, други оба дата круга изнутра; унутрашње тангенте, x_3' и x_4', одговарајуће су слике тражених кругова x_3 и x_4, при чему један од њих додирује дати круг k_1 споља а дати круг k_2 изнутра, други тражени круг обрнуто (слика 6_1).

– уколико се дати кругови k_1 и k_2 секу, секу се и њихове слике у инверзији, кругови k_1' и k_2', па постоје две њихове заједничке спољашње тангенте x_1' и x_2', које одговарају као слике у инверзији траженим круговима x_1 и x_2, а кругови су слике у инверзији добијених правих x_1' и x_2': $x_1 = \psi_i^{-1}(x_1') = \psi_i(x_1')$ и $x_2 = \psi_i^{-1}(x_2') = \psi_i(x_2')$, при чему оба садрже дату тачку A, један додирује оба дата круга изнутра, други их додирује оба споља (слика 6_2).

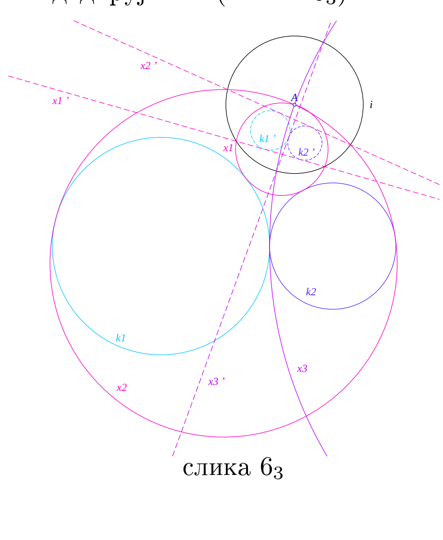


слика 6_1



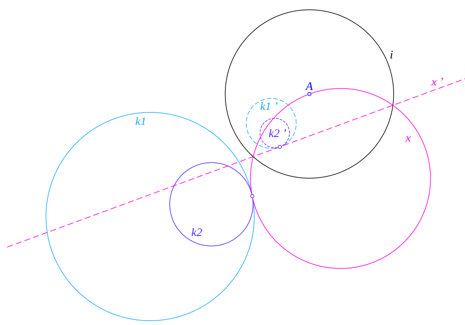
слика 6_2

– уколико се кругови k_1 и k_2 додирују споља и њихове слике у инверзији, кругови k_1' и k_2' додирују се споља (обзиром да важи $\measuredangle(k_1, k_2) = \measuredangle(\psi_i(k_1), \psi_i(k_2)) = \measuredangle(k_1', k_2')$) те постоје три њихове заједничке тангенте, две спољашње x_1' и x_2' и једна унутрашња x_3', одговарајуће слике у инверзији траженим круговима x_1, x_2 и x_3, а кругови су слике у инверзији добијених правих x_1', x_2' и x_3'. Кругови x_1 и x_2, чије су слике у инверзији ψ_i спољашње тангенте, додирују дате кругове један оба споља, други оба изнутра. Трећи тражени круг x_3, чија је слика у инверзији ψ_i унутрашња тангента, додирује један од датих кругова споља, други изнутра, садржи тачку додира датих кругова k_1 и k_2 у којој их и додирује оба (слика 6_3).



слика 6_3

– уколико се кругови k_1 и k_2 додирују изнутра и њихове слике у инверзији, кругови k_1' и k_2' додирују се изнутра ($\measuredangle(k_1, k_2) = \measuredangle(\psi_i(k_1), \psi_i(k_2)) = \measuredangle(k_1', k_2')$) те постоји тачно једна заједничка тангента x' на ова два круга (у њиховој тачки додира), одговарајућа слика у инверзији кругу x: $x = \psi_i^{-1}(x') = \psi_i(x')$. Тражени круг x садржи дату тачку A, а кругове k_1 и k_2 додирује у њиховој додирној тачки (слика 6_4).

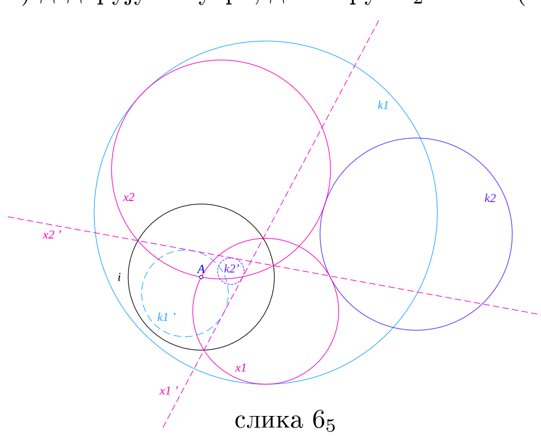


слика 6_4

$**$ У случају да се дата тачка A налази у унутрашњој области једног од дата два круга (не умањујући општост узмимо да је то круг k_1) тада:

– уколико се сваки од кругова k_1 и k_2 налази у спољашњој области другог задатак нема решења.

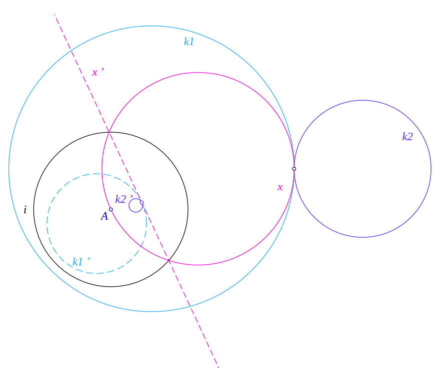
– уколико се дати кругови k_1 и k_2 секу(слично као и у сличају када се дати кругови секу, а дата тачка се налази у спољашњој области оба од њих), секу се и њихове слике у инверзији, кругови k_1' и k_2', па постоје две њихове заједничке спољашње тангенте x_1' и x_2', а самим тим и два тражена круга x_1 и x_2, слике у инверзији ψ_i добијених правих x_1' и x_2', при чему оба тражена круга дати круг k_1(у чијој је унутрашњој области дата тачка A) додирују изнутра, дати круг k_2 споља (слика 6_5).



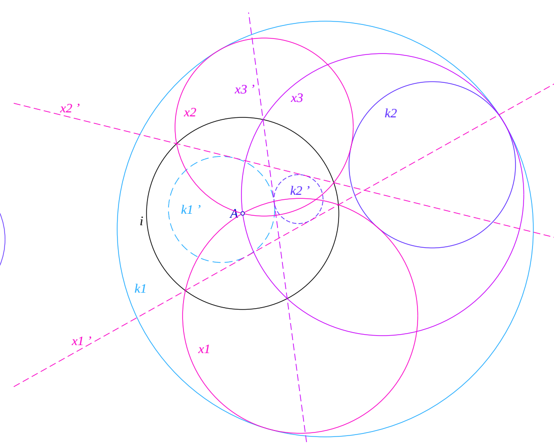
слика 6_5

– уколико се кругови k_1 и k_2 додирују споља, обзиром да се центар A инверзије ψ_i налази у унутрашњој области једног круга, њихове слике, кругови k_1' и k_2' додирују се изнутра(кругови k_1 и k_2 имају једну заједничку тачку па их толико имају и њихове слике k_1' и k_2' у инверзији и важи $\measuredangle(k_1, k_2) = \measuredangle(\psi_i(k_1), \psi_i(k_2)) = \measuredangle(k_1', k_2')$), па постоји тачно једна њихова заједничка тангента x', и то у тачки додира. Тангента x' је одговарајућа слика у инверзији ψ_i траженом кругу x(круг x је слика у инверзији праве x': $x = \psi_i^{-1}(x') = \psi_i(x')$) који садржи тачку додира датих кругова k_1 и k_2(јер слика x' траженог круга x садржи тачку додира кругова k_1' и k_2', слика у инверзији датих кругова k_1 и k_2) (слика 6_6).

– уколико се кругови k_1 и k_2 додирују изнутра, обзиром да се центар A инверзије налази у унутрашњој области једног круга, њихове слике, кругови k_1' и k_2' додирују се споља(кругови k_1 и k_2 имају једну заједничку тачку и толико их имају и њихове слике k_1' и k_2' у инверзији ψ_i и важи $\measuredangle(k_1, k_2) = \measuredangle(\psi_i(k_1), \psi_i(k_2)) = \measuredangle(k_1', k_2')$), па постоје три њихове заједничке тангенте, две спољашње x_1' и x_2' и једна унутрашња x_3'(у тачки додира), а самим тим и три тражена круга x_1, x_2 и x_3. Добијене спољашње тангенте x_1' и x_2' одговарају као слике у инверзији траженим круговима x_1 и x_2 који додирују дати круг k_1 изнутра и дати круг k_2 споља. Унутрашња тангента x_3'(садржи тачку додира кругова k_1' и k_2') одговара као слика у инверзији траженом кругу x_3 који садржи тачку додира датих кругова k_1 и k_2 и додирује оба дата круга изнутра у тој тачки (слика 6_7).

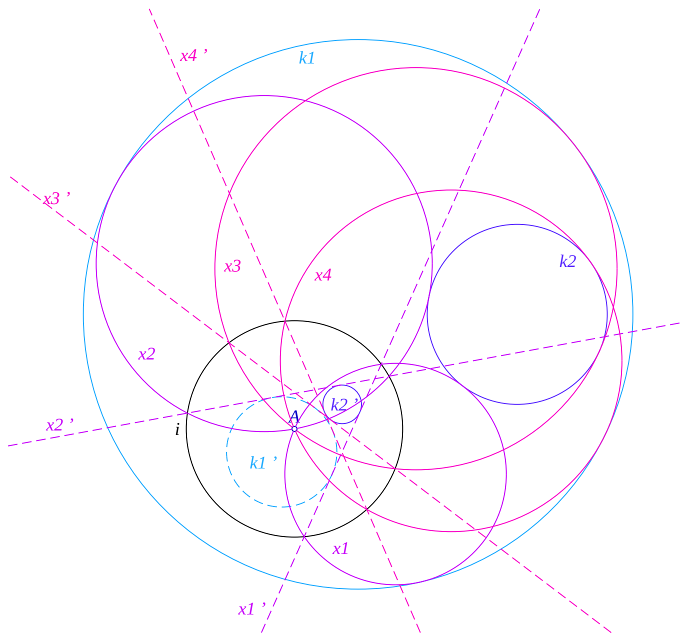


слика 6_6



слика 6_7

– уколико се и дати круг k_2 налази у унутрашњој области датог круга k_1, они немају заједничких тачака, па их немају ни њихове слике у инверзији, кругови k_1' и k_2'. Међутим, како се центар A инверзије ψ_i налази у унутрашњој области круга k_1, то се круг k_2' налази у спољашњој области круга k_1', па постоје четири њихове заједничке тангенте, две спољашње x_1' и x_2' и две унутрашње x_3' и x_4', а самим тим и четири круга x_1, x_2, x_3 и x_4 која задовољавају услов постављеног проблема. Добијене спољашње тангенте x_1' и x_2' одговарајуће су слике у инверзији ψ_i траженим круговима x_1 и x_2 који дати круг k_1 додирују изнутра а дати круг k_2 додирују споља. Добијене унутрашње тангенте x_3' и x_4' одговарајуће су слике у инверзији ψ_i траженим круговима x_3 и x_4 који оба дата круга додирују изнутра (слика 6_8).



слика 6_8

Напоменимо да се и у овом Аполонијевом проблему, у случајевима када се дати кругови додирују споља или изнутра, тражени кругови x који садрже додирну тачку датих кругова k_1 и k_2, могу одредити помоћу инверзије ψ_i у односу на круг i, чији је центар додирна тачка датих кругова, што важи и за разматрани "општи" случај и за наредни "специјалан" случај (сличну смо инверзију већ детаљно објаснили у Аполонијевом проблему 5, у случају када је дата права тангента датог круга).

$\circ\succ\succ$ Размотримо сада специјалне случајеве, под које ћемо уврстити положај датих елемената равни у коме дата тачка припада само једном датом кругу и положај при коме припада и једном и другом кругу:

$\prec\bullet\succ$ **случај 6 (** A **)**:

Дата тачка припада само једном датом кругу.

Не умањујући општост узмимо да дата тачка A припада датом кругу k_1.

Означимо са i круг те равни са центром у датој тачки A произвољног полупречника, $i(A,r)$, и посматрајмо инверзију ψ_i у односу на круг i.

Круг k_1 садржи тачку A, центар инверзије ψ_i, па је у посматраној инверзији његова слика $k_1' = \psi_i(k_1)$ права, а како круг k_2 не садржи центар A инверзије ψ_i, у овој инверзији његова је слика $k_2' = \psi_i(k_2)$ круг(напоменимо да ни права k_1' ни круг k_2' не садрже центар A инверзије).

Тражени круг x, по услову задатка, садржи дату тачку A, центар инверзије ψ_i, те је посматраној инверзији његова слика $x' = \psi_i(x)$ права. По услову задатка тражени круг x додирује дати круг k_1 и садржи дату тачку A, а како и круг k_1 садржи тачку

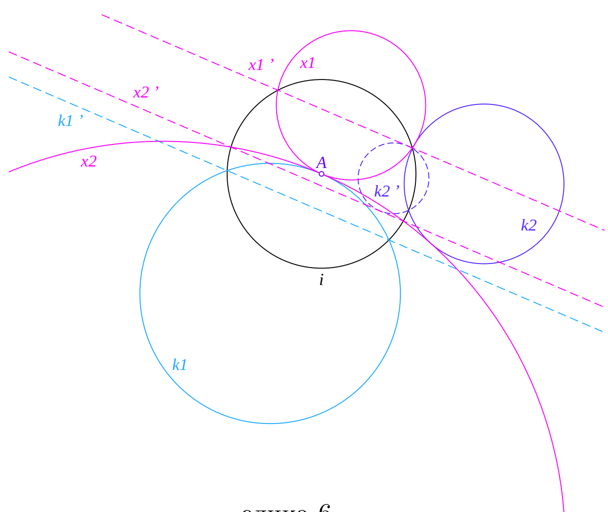
A то круг x додирује k_1 у A. Пошто инверзија чува једнакост углова: $\measuredangle(x, k_1) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k_1)) = \measuredangle(x', k_1')$ следи да су слике у инверзији кругова x и k_1, праве x' и k_1', међусобно паралелне. Круг x, по задатом услову, додирује дати круг k_2, тј. има са њим једну заједничку тачку, па и њихове слике у инверзији, права x' и круг k_2', имају једну заједничку тачку и како важи $\measuredangle(x, k_2) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k_2)) = \measuredangle(x', k_2')$ можемо закључити да је права x' тангента круга k_2'. Задатак се своди на конструкцију тангенте x' на круг k_2', добијен одређивањем слике у инверзији ψ_i датог круга k_2, паралелне правој k_1', добијене одређивањем слике у инверзији ψ_i датог круга k_1.

На крају, тражени круг x слика је у инверзији ψ_i добијене праве x', јер како је инверзија инволутивно пресликавање то је $x = \psi_i^{-1}(x') = \psi_i(x')$.

Број решења, односно број тражених кругова x, зависи од броја тангенти на круг k_2', паралелних прави k_1', односно од узајамног положаја датих кругова k_1 и k_2:

– уколико се сваки од кругова k_1 и k_2 налази у спољашњој области другог, тада ни њихове слике у инверзији, права k_1' и круг k_2', немају заједничких тачака, па постоје две тангенте, x_1' и x_2', на круг k_2' паралелне прави k_1', одговарајуће слике у инверзији ψ_i тражених кругова x_1 и x_2.

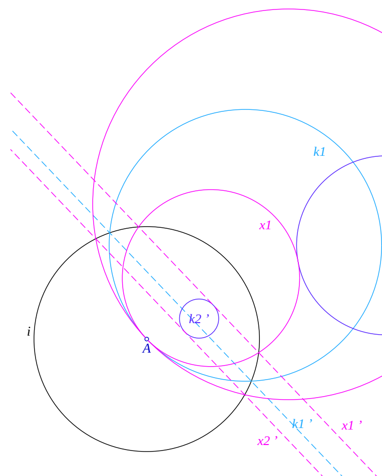
На крају, тражени кругови x_1 и x_2 слике су у инверзији ψ_i добијених правих x_1' и x_2': $x_1 = \psi_i^{-1}(x_1') = \psi_i(x_1')$, $x_2 = \psi_i^{-1}(x_2') = \psi_i(x_2')$. Оба добијена круга x_1 и x_2 дати круг k_2 додирују споља, а дати круг k_1 један тражени круг додирује споља у датој тачки A, други тражени круг га додирује изнутра у тачки A (слика $6_{a(1)}$).



слика $6_{a(1)}$

– уколико се дати кругови k_1 и k_2 секу, њихове слике, права k_1' и круг k_2', имају две заједничке тачке(секу се), те постоје две тангенте, x_1' и x_2', на круг k_2' паралелне прави k_1', које одговарају као слике у инверзији ψ_i траженим круговима x_1 и x_2.

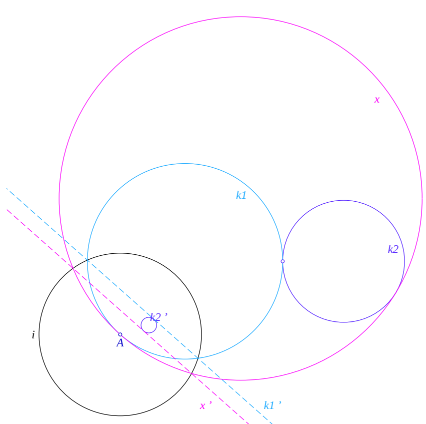
Тражени кругови x_1 и x_2 слике су у инверзији ψ_i добијених правих x_1' и x_2': $x_1 = \psi_i^{-1}(x_1') = \psi_i(x_1')$, $x_2 = \psi_i^{-1}(x_2') = \psi_i(x_2')$. Оба тражена круга x_1 и x_2 дати круг k_1 у датој тачки A додирују изнутра, а један од њих додирује дати круг k_2 споља, други тражени круг додирује k_2 изнутра (слика $6_{a(2)}$).



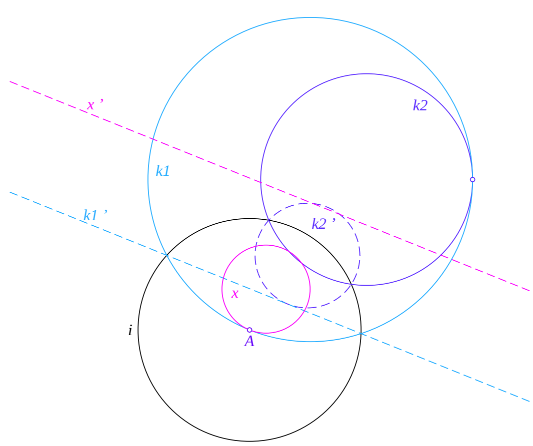
слика $6_{a(2)}$

– уколико се кругови k_1 и k_2 додирују споља, њихове слике у инверзији имају тачно једну заједничку тачку, а како важи $\measuredangle(k_1, k_2) = \measuredangle(\psi_i(k_1), \psi_i(k_2)) = \measuredangle(k_1', k_2')$ следи да је права k_1' тангента круга k_2', па постоји још тачно једна тангента x' на круг k_2' паралелна његовој тангенти k_1'. Добијена тангента x' одговарајућа је слика у инверзији ψ_i траженог круга x($x = \psi_i^{-1}(x') = \psi_i(x')$) , при чему круг x оба дата круга додирује изнутра(слика $6_{a(3)}$).

– уколико се кругови k_1 и k_2 додирују изнутра, тада, слично као у претходном случају, права k_1' тангента је круга k_2', па постоји још тачно једна тангента x' на круг k_2' паралелна његовој тангенти k_1', која одговара као слика у инверзији ψ_i траженом кругу x($x = \psi_i^{-1}(x') = \psi_i(x')$). Круг x дати круг k_1 у датој тачки A додирује изнутра, а дати круг k_2 додирује споља (слика $6_{a(4)}$).



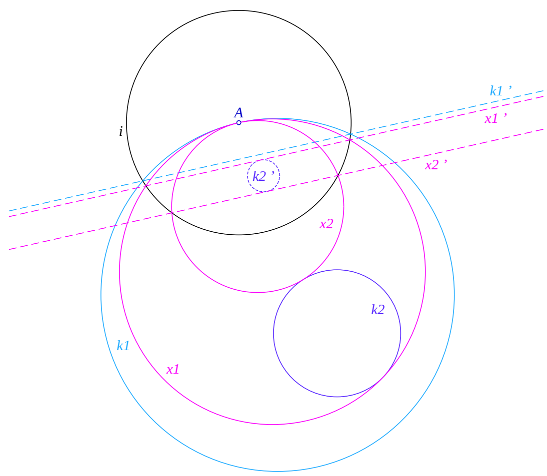
слика $6_{a(3)}$



слика $6_{a(4)}$

– уколико се дати круг k_2 налази у унутрашњој области датог круга k_1, они немају заједничких тачака, па их немају ни њихове слике, права k_1' и круг k_2', те постоје две тангенте x_1' и x_2' на круг k_2' паралелне прави k_1', одговарајуће слике у инверзији ψ_i тражених кругова x_1 и x_2.

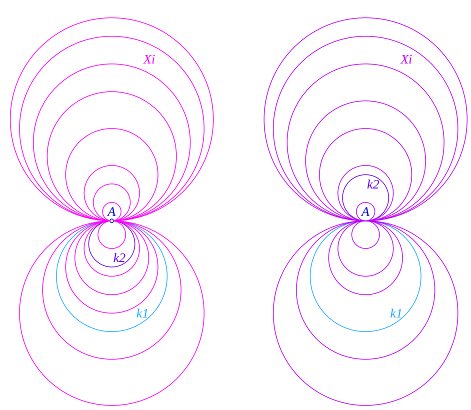
Тражени кругови x_1 и x_2 слике су у инверзији ψ_i добијених правих x_1' и x_2': $x_1 = \psi_i^{-1}(x_1') = \psi_i(x_1')$, $x_2 = \psi_i^{-1}(x_2') = \psi_i(x_2')$, при чему оба добијена круга, x_1 и x_2, дати круг k_1 у датој тачки A додирују изнутра, а један од њих дати круг k_2 додирује споља, други додирује k_2 изнутра (слика $6_{a(5)}$).



слика $6_{a(5)}$

≺•≻ случај 6 (B **)**:

Уколико оба дата круга садрже дату тачку A, односно $A \in k_1$ и $A \in k_2$, а како тражени круг x додирује оба дата круга и садржи тачку A то задатак има решења само ако се кругови k_1 и k_2 додирују баш у тачки A (споља или изнутра). Дакле, кругови k_1 и k_2 припадају параболичком прамену кругова који садрже тачку A, а како сваки круг тог прамена задовољава услов постављеног проблема, скуп кругова овог прамена јесте решење задатка. (слика 6_b)



слика 6_b

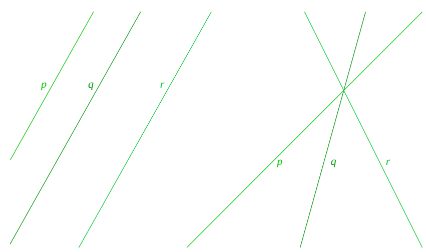
≺•≻ **Аполонијев проблем 7** ≺•≻

↬Конструисати круг који додирује три дате праве (p, q, r).

решење:

Размотрићемо узајамни положај датих правих p, q и r и приказати слике тражених кругова(овај проблем нећемо решавати инверзијом јер је тривијалан).

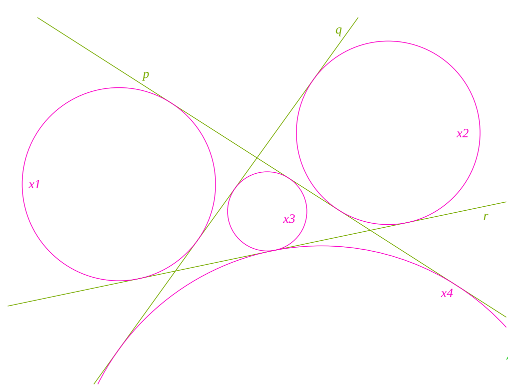
У случају да праве p, q и r припадају прамену паралелних правих или прамену конкурентних правих не постоји круг који испуњава услов постављеног проблема.
(слика 7_3).



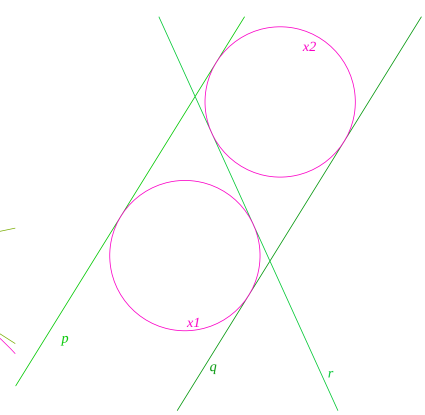
слика 7_3

Ако сваке две од датих правих имају по једну заједничку тачку тада њихове пресечне тачке образују троугао па је тражени круг x круг уписан у тај троугао. У овом случају постоје још три круга који задовољавају услов постављеног проблема.
(слика 7_1).

На крају, ако су две од датих правих међусобно паралелне, трећа са сваком од њих има по једну заједничку тачку, тада постоје два круга x_1 и x_2, једнаких полупречника, који испуњавају услов постављеног проблема (слика 7_2).



слика 7_1



слика 7_2

≺•≻ Аполонијев проблем 8 ≺•≻

↬Конструисати круг који додирује дате две праве p и q и дати круг (p, q, k)

решење:

Нека су у истој равни дате праве p и q и круг $k(O_k, r)$ и са x означимо тражени круг те равни који додирује дате праве и дати круг.

Посматрајмо најопштији случај када ни једна од датих правих p и q није тангента датог круга k.

Приметимо следеће:

1. Ако тражени круг $x(O_x, r_x)$ додирује дати круг $k(O_k, r)$ споља и дате праве p и q, тада круг y, концентричан кругу x, полупречника $r_y = r_x + r$, $y(O_x, r_y = r_x + r)$, где је r полупречник датог круга k, садржи центар круга k и додирује праве p_1 и q_1, где је права p_1 паралелна датој прави p, на растојању r од праве p, при чему су права p_1 и дати круг k са разних страна праве p, односно $p_1 \parallel p$, $d(p_1, p) = r$ и $(p_1, k \div p)$. Слично, права q_1 паралелна је датој прави q, на растојању r од праве q и са различите стране праве q од круга k: $q_1 \parallel q$, $d(q_1, q) = r$ и $(q_1, k \div q)$.

2. Ако тражени круг $x(O_x, r_x)$ додирује дати круг $k(O_k, r)$ изнутра и дате праве p и q , тада круг y, концентричан кругу x, полупречника $r_y = r_x - r$, $y(O_x, r_y = r_x - r)$, садржи центар O_k датог круга k и додирује праве p_2 и q_2, где је права p_2 паралелна датој прави p, на растојању r од праве p, при чему су права p_2 и дати круг k са исте стране праве p; права q_2 паралелна је датој прави q, на растојању r од праве q и са исте стране праве q где и круг k.

Идеја за решавање овог, као и последња два Аполонијева проблема о додиру, је конструкција, помоћу инверзије у односу на круг, помоћног круга, концентричног траженом кругу, који испуњава одређене услове.

♢ Анализирајмо случај 1:

Конструишимо најпре праве p_1 и q_1, такве да је $p_1 \parallel p$, $d(p_1, p) = r$ и $(p_1, k \div p)$ и $q_1 \parallel q$, $d(q_1, q) = r$ и $(q_1, k \div q)$. Посматрајмо пресликавање инверзијом ψ_k у односу на дати круг $k(O_k, r)$.

Како ни једна од правих p_1 и q_1 не садржи центар круга k, центар инверзије(по нашој претпоставци, ни једна од датих правих p и q није тангента датог круга k), у инверзији ψ_k њихове слике $p_1' = \psi_k(p_1)$ и $q_1' = \psi_k(q_1)$ су кругови p_1' и q_1', који по дефиницији пресликавања инверзијом у односу на круг, садрже центар инверзије, тачку O_k.

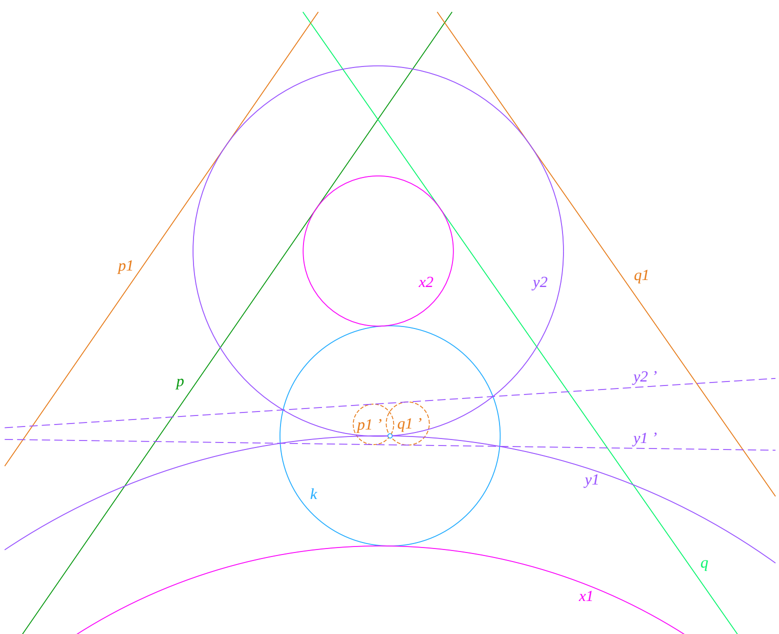
Круг y садржи центар круга k, односно центар инверзије ψ_k, па је у инверзији његова слика $y' = \psi_k(y)$ права. Како круг y додирује праву p_1 то и њихове слике, права y' и круг p_1' имају тачно једну заједничку тачку. Уз овај закључак и обзиром да инверзија чува једнакост углова: $\measuredangle(p_1, y) = \measuredangle(\psi_k(p_1), \psi_k(y)) = \measuredangle(p_1', y')$, следи да је права y' тангента круга p_1'. Слично, круг y додирује праву q_1, тј. са њом има једну заједничку тачку, па их толико имају и њихове слике у инверзији, права y' и круг q_1' и како важи $\measuredangle(q_1, y) = \measuredangle(\psi_k(q_1), \psi_k(y)) = \measuredangle(q_1', y')$, следи да је права y' тангента и круга q_1'. Дакле, права y', слика у инверзији ψ_k траженог помоћног круга y, тангента је и круга p_1' и круга q_1' односно њихова је заједничка тангента. Задатак се своди на конструкцију заједничке тангенте кругова p_1' и q_1' добијених одређивањем слика у инверзији ψ_k правих p_1 и q_1.

На крају, тражени помоћни круг y слика је у инверзији ψ_k добијене тангенте y', јер како је инверзија инволутивно пресликавање то је $y = \psi_k^{-1}(y') = \psi_k(y')$, а тражени круг x концентричан је добијеном кругу y, при чему је $x(O_y, r_x = r_y - r)$.

Размотримо број решења овог проблема:

$*$ Уколико се праве p и q секу, секу се и праве p_1 и q_1, а самим тим и кругови p_1' и q_1'(једна од две заједничке тачке ових кругова је центар инверзије), па постоје две њихове заједничке спољашње тангенте, праве y_1' и y_2'. Обзиром на особину инволутивности пресликавања помоћу инверзије у односу на круг, тражени, помоћни кругови y_1 и y_2 слике су у инверзији ψ_k правих y_1' и y_2': $y_1 = \psi_k^{-1}(y_1') = \psi_k(y_1')$ и $y_2 = \psi_k^{-1}(y_2') = \psi_k(y_2')$.

На крају, тражени кругови x_1 и x_2 концентрични су добијеним круговима y_1 и y_2, при чему је $x_1(O_{y_1}, r_{x_1} = r_{y_1} - r)$ и $x_2(O_{y_2}, r_{x_2} = r_{y_2} - r)$ (кругови x_1 и x_2 додирују дате праве p и q и дати круг k споља). (слика 8_1).

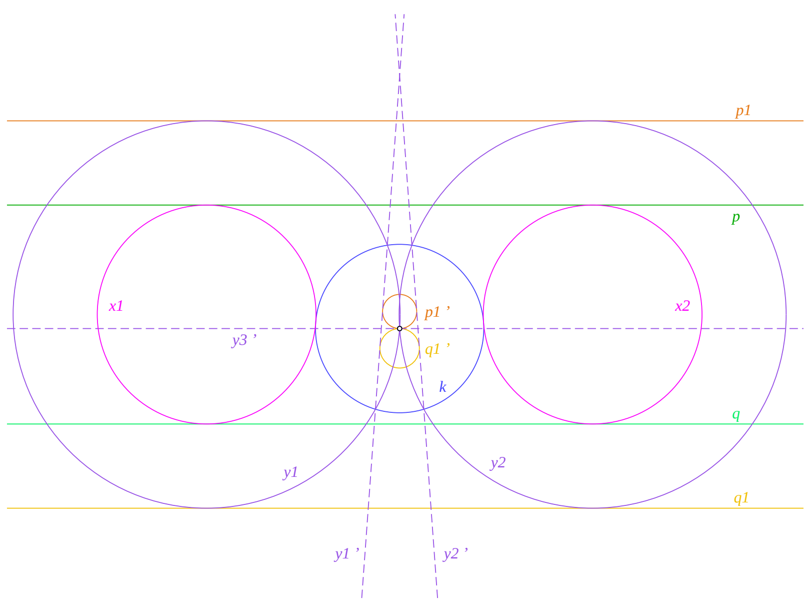


слика 8_1

$*$ Уколико су дате праве p и q паралелне и налазе се са разних страна датог круга k(само у овом случају задатак има решења), паралелне су и праве p_1 и q_1, а због једнакости: $\measuredangle(p_1,q_1) = \measuredangle(\psi_k(p_1),\psi_k(q_1)) = \measuredangle(p_1',q_1')$, кругови p_1' и q_1' се додирују споља у центру инверзије, јер га, по дефиницији, садрже оба. У овом случају постоје три заједничке тангенте кругова p_1' и q_1', две спољашње и једна унутрашња, у тачки додира O_k, центру инверзије.

Спољашње тангенте, праве y_1' и y_2' одговарају као слике у инверзији ψ_k траженим, помоћним круговима y_1 и y_2, те су кругови y_1 и y_2 слике у инверзији ψ_k добијених правих y_1' и y_2': $y_1 = \psi_k^{-1}(y_1') = \psi_k(y_1')$ и $y_2 = \psi_k^{-1}(y_2') = \psi_k(y_2')$. Унутрашња тангента, права y_3', садржи центар инверзије па је њена слика $y_3 = \psi_k^{-1}(y_3') = \psi_k(y_3')$, она сама, без центра O_k инверзије ψ_k: $y_3 = y_3' \backslash \{O_k\}$.

Тражени кругови x_1 и x_2 концентрични су добијеним круговима y_1 и y_2, при чему је $x_1(O_{y_1}, r_{x_1} = r_{y_1} - r)$ и $x_2(O_{y_2}, r_{x_2} = r_{y_2} - r)$ (кругови x_1 и x_2 додирују дате праве p и q и дати круг k споља). (слика 8_2).



слика 8_2

$\Diamond\Diamond$ Анализа случаја 2 слична је анализи случаја 1, било да се дате праве p и q секу, било да су паралелне, те ћемо објашњење и излагање скратити:

Конструишимо праве p_2 и q_2, такве да је $p_2 \parallel p$, $d(p_2,p) = r$ и $q_2 \parallel q$, $d(q_2,q) = r$(r полупречник датог круга k), с тим што су права p_2 и дати круг k са исте стране дате праве p и права q_2 и дати круг k са исте стране дате праве q. Помоћу исте инверзије ψ_k у односу на дати круг $k(O_k,r)$ долазимо до закључака сличних као у случају 1:

Праве p_2 и q_2 не садрже центар круга k(центар инверзије ψ_k) те су у овој инверзији њихове слике $p_2' = \psi_k(p_2)$ и $q_2' = \psi_k(q_2)$ кругови p_2' и q_2', који по дефиницији пресликавања помоћу инверзије у односу на круг, садрже центар инверзије(центар круга k).

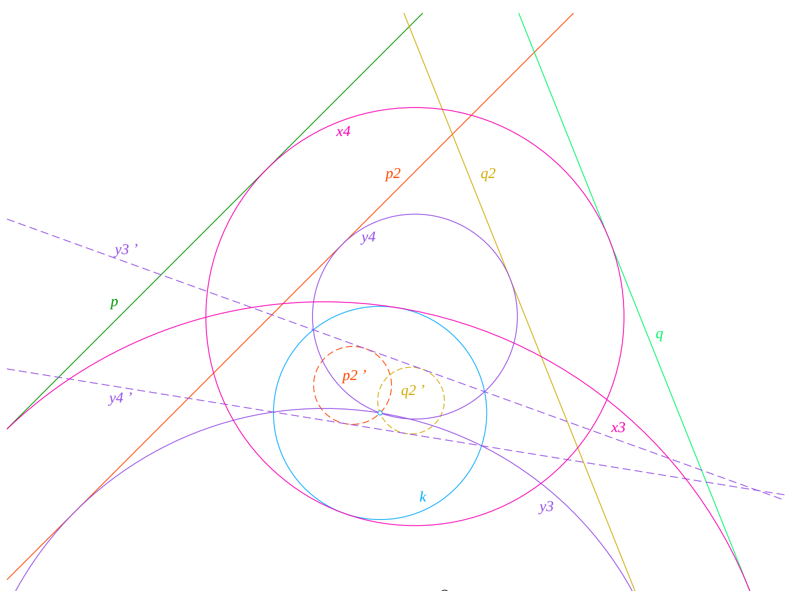
Круг y садржи центар круга k(центар инверзије ψ_k) па је у посматраној инверзији његова слика $y' = \psi_k(y)$ права. Како круг y додирује праву p_2 то и њихове слике, права y' и круг p_2' имају тачно једну заједничку тачку и обзиром да важи: $\measuredangle(p_2, y) = \measuredangle(\psi_k(p_2), \psi_k(y)) = \measuredangle(p_2', y')$, следи да је права y' тангента круга p_2'. Из потпуно идентичног разлога можемо закључити да је права y' тангента и круга q_2'. Дакле, права y', слика у инверзији ψ_k траженог помоћног круга y, тангента је и круга p_2' и круга q_2' односно њихова је заједничка тангента. Задатак се своди на конструкцију заједничке тангенте кругова p_2' и q_2' добијених одређивањем слика у инверзији ψ_k правих p_2 и q_2.

На крају, тражени помоћни круг y слика је у инверзији ψ_k добијене тангенте y', јер како је инверзија инволутивно пресликавање то је $y = \psi_k^{-1}(y') = \psi_k(y')$, а тражени круг x концентричан је добијеном кругу y, при чему је $x(O_y, r_x = r_y + r)$.

Број решења овог проблема, односно број тражених кругова, зависи од узајамног положаја датих правих p и q, односно p_2 и q_2:

$*$ Уколико се праве p и q секу, секу се и праве p_2 и q_2, те се и њихове слике у инверзији ψ_k, кругови p_2' и q_2', такође секу(једна од две заједничке тачке ових кругова је центар инверзије), па постоје две њихове заједничке спољашње тангенте, означимо их са y_3' и y_4', одговарајуће слике у инверзији тражених помоћних кругова. Обзиром на особину инволутивности инверзије у односу на круг, тражени, помоћни кругови, у ознаци y_3 и y_4, слике су у инверзији ψ_k добијених тангенти y_3' и y_4': $y_3 = \psi_k^{-1}(y_3') = \psi_k(y_3')$ и $y_4 = \psi_k^{-1}(y_4') = \psi_k(y_4')$.

Коначно, тражени кругови x_3 и x_4 концентрични су добијеним круговима y_3 и y_4, при чему је $x_3(O_{y_3}, r_{x_3} = r_{y_3} + r)$ и $x_4(O_{y_4}, r_{x_4} = r_{y_4} + r)$ (кругови x_3 и x_4 додирују дате праве p и q а дати круг k изнутра) (слика 8_3).

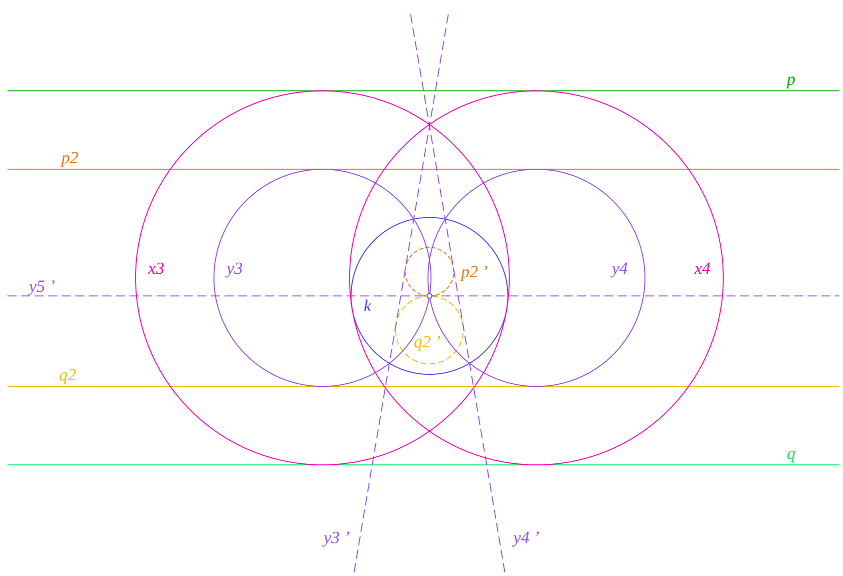


слика 8_3

$*$ Уколико су дате праве p и q паралелне и налазе се са разних страна датог круга k(само у овом случају задатак има решења), паралелне су и праве p_2 и q_2, а због једнакости: $\measuredangle(p_2, q_2) = \measuredangle(\psi_k(p_2), \psi_k(q_2)) = \measuredangle(p_2', q_2')$, кругови p_2' и q_2' се додирују споља у центру инверзије, јер га, по дефиницији, садрже оба. У овом случају постоје три заједничке тангенте кругова p_2' и q_2', две спољашње и једна унутрашња, у тачки додира O_k, центру инверзије.

Спољашње тангенте, праве y_3' и y_4' одговарајуће су слике у инверзији ψ_k тражених, помоћних кругова y_3 и y_4, те су кругови y_3 и y_4 одговарајуће слике добијених правих y_3' и y_4', односно $y_3 = \psi_k^{-1}(y_3') = \psi_k(y_3')$ и $y_4 = \psi_k^{-1}(y_4') = \psi_k(y_4')$. Унутрашња тангента, права y_5', садржи центар инверзије па је њена слика $y_5 = \psi_k^{-1}(y_5') = \psi_k(y_5')$, она сама, без центра O_k инверзије ψ_k: $y_5 = y_5' \backslash \{O_k\}$.

Тражени кругови x_3 и x_4 концентрични су добијеним круговима y_3 и y_4, при чему је $x_3(O_{y_3}, r_{x_3} = r_{y_3} + r)$ и $x_4(O_{y_4}, r_{x_4} = r_{y_4} + r)$ (кругови x_3 и x_4 додирују дате праве p и q и дати круг k изнутра). (слика 8_4).

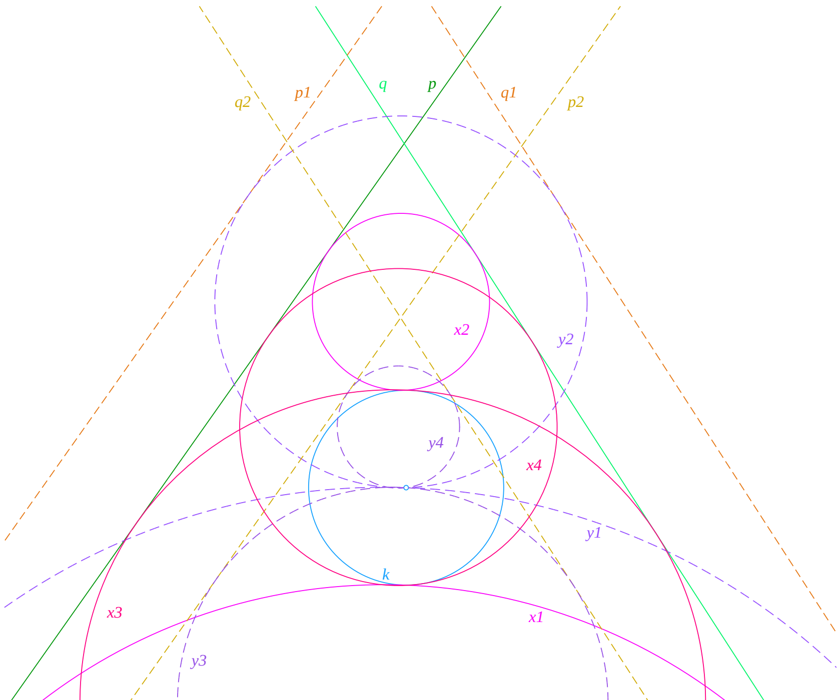


слика 8_4

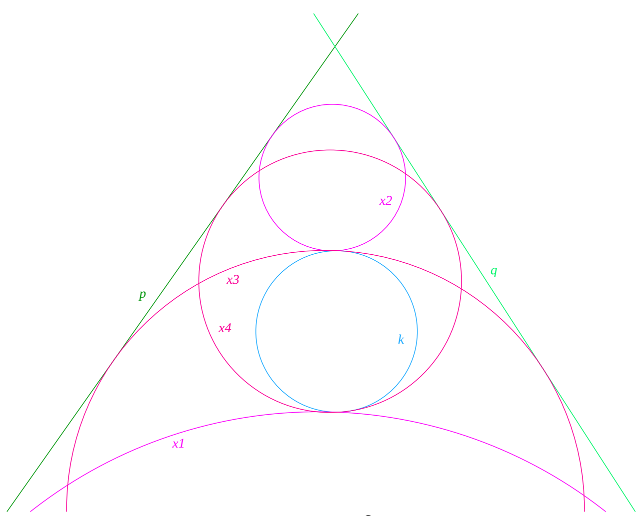
Сада, када смо извршили комплетну анализу, одредимо коначно решење Аполонијевог проблема 8 о додиру:

– У случају да се дате праве p и q секу и ни једна од њих није тангента датог круга k постоји четири круга, x_1, x_2, x_3 и x_4, који додирују праве p и q и круг k(x_1 и x_2 су кругови случаја 1 ;x_3 и x_4 су кругови случаја 2).

Слика 8_5 приказује сва четири тражена и четири помоћна концентрична круга. На слици 8_6 приказани су само тражени кругови.



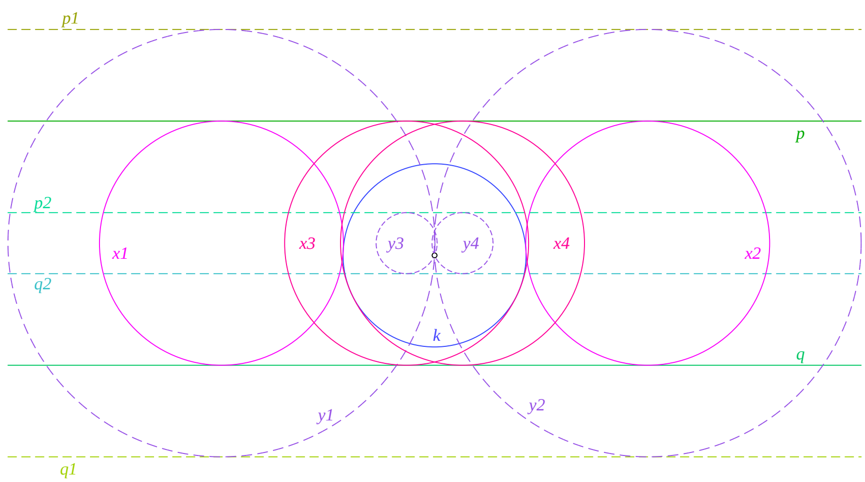
слика 8_5



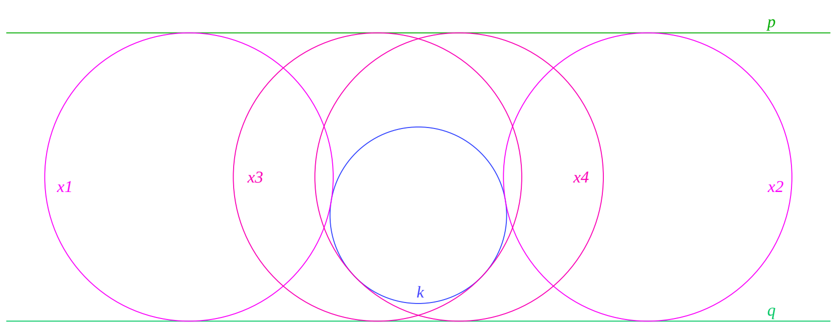
слика 8_6

– У случају да су дате праве p и q паралелне и ни једна од њих није тангента датог круга k такође постоји четири круга, x_1, x_2, x_3 и x_4, који додирују праве p и q и круг k(x_1 и x_2 су кругови случаја 1 ; x_3 и x_4 су кругови случаја 2) .

Слика 8_7 приказује сва четири тражена и четири помоћна концентрична круга. На слици 8_8 приказани су само тражени кругови.

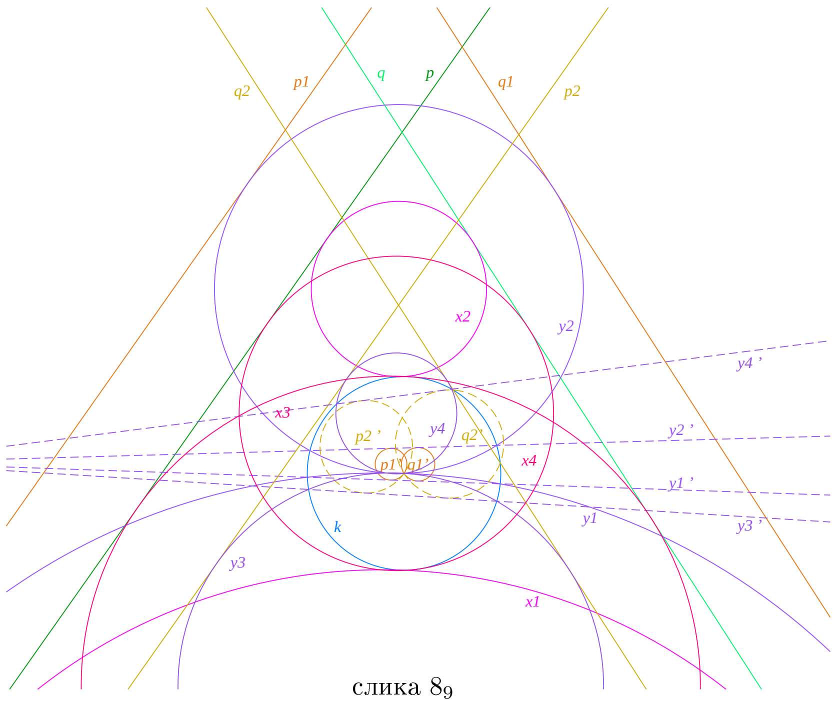


слика 8_7

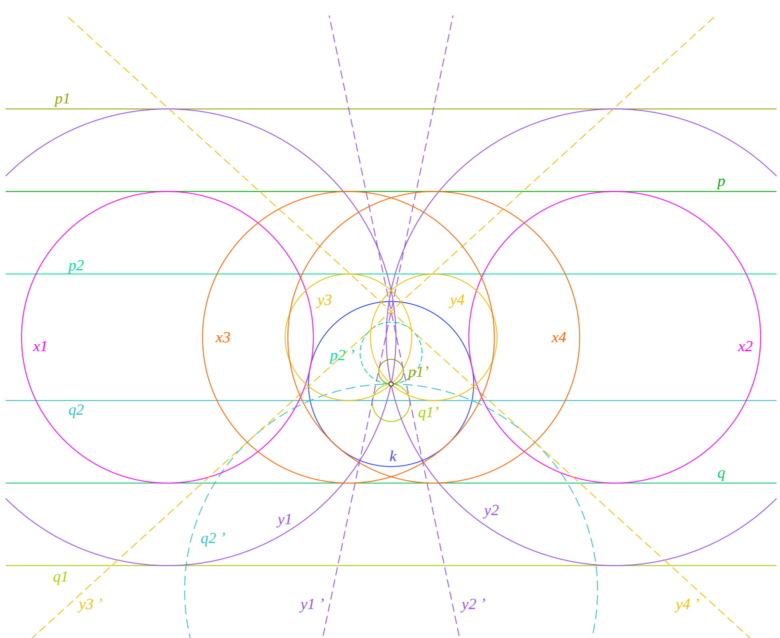


слика 8_8

Прилажемо слику 8_9 која приказује конструкцију инверзијом ψ_k сва четири тражена круга уколико се дате p и q секу и слику 8_{10} која приказује конструкцију инверзијом ψ_k сва четири тражена круга уколико су дате праве p и q паралелне.



слика 8_9



слика 8_{10}

$\circ\succ\succ$ Размотримо сада специјалне случајеве:

$\prec\bullet\succ$ **случај 8 (** A **)**:

У овом случају размотрићемо положаје, у заједничкој равни, у којима је тачно једна дата права тангента датог круга и пратити случај $8(A)$ кроз промену међусобног положаја датих правих у равни.

Не умањујући општост узмимо да је дата права p тангента датог круга $k($ дата права q није тангента датог круга $k)$.

1. Нека се дате праве p и q секу, при чему је права p тангента датог круга $k(O_k, r)$.

Постоје четири круга која додирују дате праве p и q и дати круг k. Два тражена круга садрже тачку додира дате праве p и датог круга k, при чему један од њих додирује дати круг споља, други тражени круг додирује дати изнутра. Преостала два тражена круга не садрже тачку додира праве p и круга k и круг k додирују споља.

Тражене кругове који садрже тачку додира датих праве p и круга k можемо одредити на два начина: помоћу инверзије у односу на дати круг k и помоћних концентричних кругова $y($ описаних на почетку излагања) или помоћу инверзије у односу на круг i, исте равни, произвољног полупречника, чији је центар додирна тачка дате праве p и датог круга k.

Прикажимо најпре решење помоћу инверзије у односу на дати круг k:

Одредимо прво тражени круг, у ознаци x_1, који додирује праву q, садржи тачку додира праве p и круга $k($ у којој их додирује), при чему x_1 додирује споља круг k.

Конструишимо праву q_1 паралелну датој прави q, на растојању једнаком полупречнику r датог круга k од праве q, при чему су права q_1 и дати круг k са разних страна праве $q($ $(q_1 \parallel q$; $d(q_1, q) = r$; $(q_1, k \div q)$ $)$, као и праву p_1, која садржи центар O_k датог круга k и паралелна је датој прави $p($ $d(p_1, p) = r$, $(p_1 \parallel p)$.

Ако тражени круг x_1 испуњава услове које смо поставили, тада круг, означимо га са y_1, концентричан кругу x_1, полупречника $r_y = r_x + r$. додирује праве p_1 и q_1 и садржи центар O_k датог круга $k($ круг y_1 додирује праву p_1 у центру O_k круга $k)$. Одредимо круг y_1 помоћу инверзије ψ_k у односу на дати круг $k(O_k, r)$.

Како права p_1 садржи центар инверзије, њена је слика у инверзији ψ_k она сама, без центра инверзије: $p_1' = \psi_k(p_1) = p_1' \backslash \{O_k\}$. Права q_1 не садржи центар инверзије, па је у посматраној инверзији њена слика $q_1' = \psi_k(q_1)$ круг $q_1'($ који, по дефиницији, садржи центар инверзије).

Круг y_1 садржи центар круга $k($ центар инверзије) те је у инверзији ψ_k његова слика $y_1' = \psi_k(y_1)$ права. Како круг y додирује праву q_1 то и њихове слике, права y' и круг q_1' имају тачно једну заједничку тачку и обзиром да важи једнакост: $\measuredangle(q_1, y_1) = \measuredangle(\psi_k(q_1), \psi_k(y_1)) = \measuredangle(q_1', y_1')$, следи да је права y_1' тангента круга q_1'. Права p_1 и круг y_1 додирују се у центру инверзије те су, због једнакости: $\measuredangle(p_1, y_1) = \measuredangle(\psi_k(p_1), \psi_k(y_1)) = \measuredangle(p_1', y_1'))$, њихове слике p_1' и y_1' паралелне праве. Задатак се своди на конструкцију тангенте y_1' на круг q_1', добијен одређивањем слике праве q_1

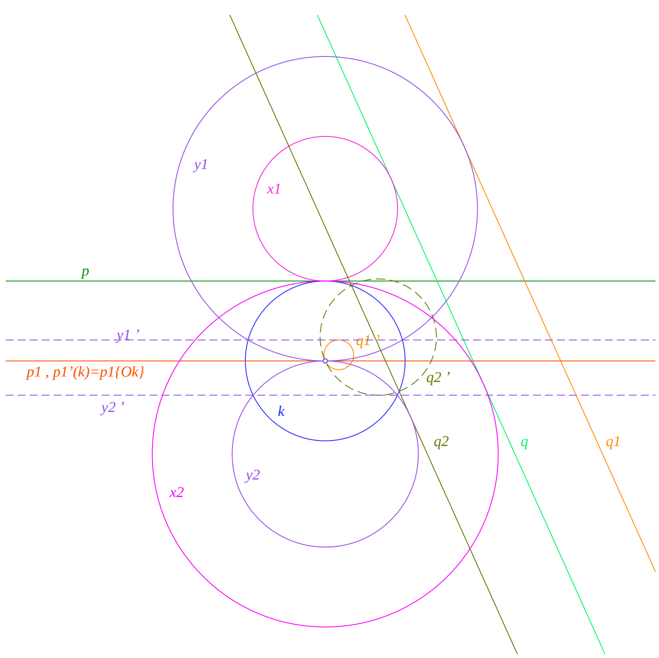
у инверзији ψ_k, паралелне прави $p_1' = p_1 \backslash \{O_k\}$. Даље је тражени, помоћни, круг y_1 слика добијене праве y_1' у инверзији ψ_k: $y_1 = \psi_k^{-1}(y_1') = \psi_k(y_1')$.

На крају, тражени круг x_1 концентричан је добијеном кругу y_1 полупречника $r_x = r_y - r$ и додирује дату праву q, садржи тачку додира дате праве p и датог круга k(у којој их и додирује обоје и додирује k споља).

Морамо скренути пажњу на врло битан детаљ, а тиче се одабира тангенте y_1'. Наиме, дате праве p и q се секу, па се секу и праве p_1 и q_1, самим тим и њихове слике у инверзији, односно права $p_1' = p_1 \backslash \{O_k\}$ сече круг q_1', те постоје две тангенте на q_1' паралелне са p_1' и бирамо само ону која је слика у инверзији ψ_k одговарајућег помоћног круга y_1, тј. круга чији концентрични круг x_1 испуњава све услове које смо захтевали(то је тангента ближа центру инверзије ψ_k, јер друга тангента на круг q_1' даје помоћни круг $y(O_y, r_y)$ чији концентрични круг $x(O_y, r_x = r_y + r_k)$ садржи додирну тачку праве p и круга k, али не додирује праву q).

Други тражени круг, у ознаци x_2, који додирује дату праву q, садржи тачку додира дате праве p и датог круга k у којој их и додирује, при чему изнутра додирује круг k, добићемо на готово идентичан начин као круг x_1: инверзијом ψ_k у односу на круг k, помоћног концентричног круга y_2, исте праве p_1 и праве q_2, паралелне датој прави q, на растојању једнаком полупречнику r датог круга k од праве q, при чему су права q_2 и дати круг k са исте стране праве q(и у овом случају биће две тангенте од којих само једна даје одговарајући помоћни круг, тј. круг концентричан траженом кругу који испуњава све услове које смо поставили).

Слика $8_{a(1)}$ приказује констукцију инверзијом ψ_k оба тражена круга x_1 и x_2.



слика $8_{a(1)}$

Кругове који задовољавају услов постављеног Аполонијевог проблема а не садрже тачку додира дате праве p и датог круга k једино можемо одредити помоћу инверзије у односу на дати круг k и то на следећи начин:

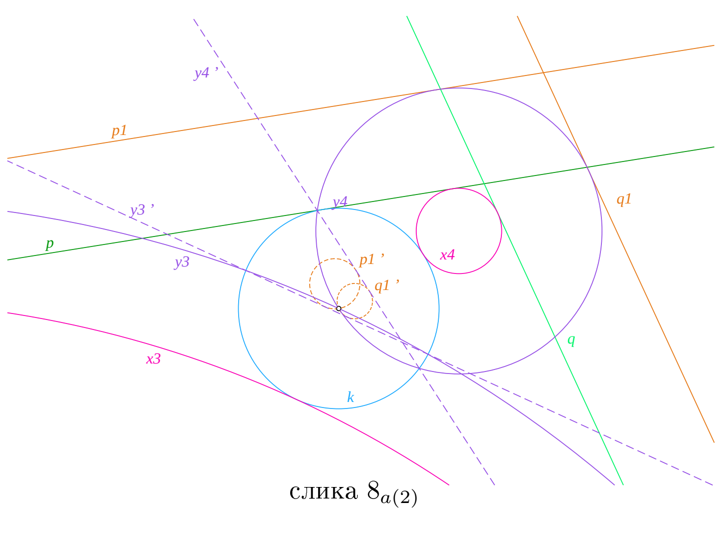
Назовимо x_3 и x_4 тражене кругове који додирују дате праве p и q, дати круг k додирују споља и не садрже додирну тачку праве p и круга k. Слично као у општем случају 1, ова два круга одредићемо инверзијом ψ_k у односу на дати круг k, помоћу правих p_1 и q_1($p_1 \parallel p$, $d(p_1,p)=r$, $(p_1,k\div p)$; $q_1 \parallel q$, $d(q_1,q)=r$, $(q_1,k\div q)$) и помоћног круга y, концентричног траженом кругу x, који садржи центар датог круга k, $y(O_x, r_y = r_x + r)$ и додирује праве p_1 и q_1(r полупречник датог круга k, r_x полупречник траженог круга x).

Означимо са ψ_k инверзију у односу на дати круг $k(O_k,r)$. Како ни једна од правих p_1 и q_1 не садржи центар круга k, центар инверзије, у инверзији ψ_k њихове слике $p_1' = \psi_k(p_1)$ и $q_1' = \psi_k(q_1)$ су кругови p_1' и q_1', који по дефиницији пресликавања инверзијом у односу на круг, садрже центар инверзије, тачку O_k.

Круг y садржи центар круга k, односно центар инверзије ψ_k, па је у овој инверзији његова слика $y' = \psi_k(y)$ права. Како круг y додирује и праву p_1 и праву q_1, тј. са сваком од њих има тачно једну заједничку тачку то и права y', слика у инверзији круга y, са сваким од кругова p_1' и q_1', сликама у инверзији ψ_k правих p_1 и q_1 има по једну заједничку тачку и обзиром на једнакости: $\measuredangle(p_1,y) = \measuredangle(\psi_k(p_1),\psi_k(y)) = \measuredangle(p_1',y')$ и $\measuredangle(q_1,y) = \measuredangle(\psi_k(q_1),\psi_k(y)) = \measuredangle(q_1',y')$, следи да је права y' тангента и круга p_1' и круга q_1'. Задатак се своди на конструкцију заједничке тангенте y' кругова p_1' и q_1', добијених одређивањем слика у инверзији ψ_k правих p_1 и q_1.

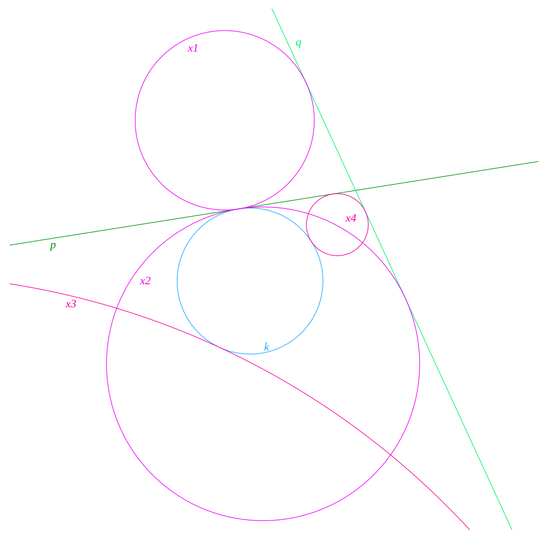
По претпоставци, дате праве p и q се секу, те се секу и праве p_1 и q_1, а самим тим и кругови p_1' и q_1'(једна од пресечних тачака је центар круга k, центар инверзије) па постоје две њихове заједничке спољашње тангенте, назовимо их y_3' и y_4', одговарајуће слике у инверзији ψ_k помоћних кругова y_3 и y_4, а кругови су y_3 и y_4 слике у инверзији ψ_k добијених правих y_3' и y_4': $y_3 = \psi_k^{-1}(y_3') = \psi_k(y_3')$ и $y_4 = \psi_k^{-1}(y_4') = \psi_k(y_4')$.

На крају, тражени кругови x_3 и x_4 концентрични су добијеним круговима y_3 и y_4, при чему је $x_3(O_{y_3}, r_{x_3} = r_{y_3} - r)$ и $x_4(O_{y_4}, r_{x_4} = r_{y_4} - r)$ (слика $8_{a(2)}$).



слика $8_{a(2)}$

Слика $8_{a(3)}$ приказује сва четири тражена круга.



слика $8_{a(3)}$

Поменули смо да се тражени кругови који садрже додирну тачку дате праве p и датог круга k могу одредити и инверзијом у односу на неки круг i, исте равни, произвољног полупречника, чији је центар тачка додира дате праве p и датог круга k. Приказаћемо и тај начин:

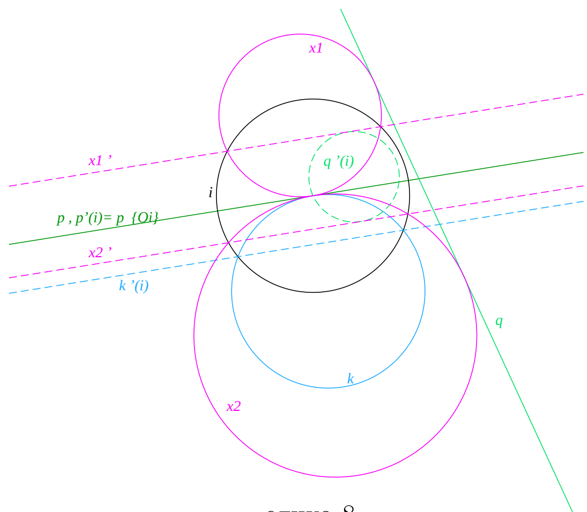
Означимо са i круг произвољног полупречника, са центром у додирној тачки праве p и круга k. Посматрајмо пресликавање инверзијом ψ_i у односу на круг i.

Права p садржи центар инверзије ψ_i па је њена слика у овој инверзији она сама без центра инверзије: $p' = \psi_i(p) = p\backslash\{O_i\}$. Круг k такође садржи центар инверзије ψ_i па је у посматраној инверзији и његова слика $k' = \psi_i(k)$ права, и то права паралелна прави p', обзиром да је права p тангента круга k($\measuredangle(p,k) = \measuredangle(\psi_i(p), \psi_i(k)) = \measuredangle(p', k')$), (што се може и видети приликом конструкције одређивањем слике круга k у инверзији ψ_i). Права q не садржи центар инверзије ψ_i те је у овој инверзији њена слика $q' = \psi_i(q)$ круг.

По нашој претпоставци тражени круг x садржи додирну тачку праве p и круга k(у којој их додирује) а она је центар инверзије ψ_i, те је у овој инверзији његова слика $x' = \psi_i(x)$ права. Обзиром да круг x, по услову постављеног проблема, додирује и праву p и круг k, на основу једнакости: $\measuredangle(x,p) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(p)) = \measuredangle(x', p')$ и $\measuredangle(x,k) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k)) = \measuredangle(x', k')$, следи да су праве x', p' и k' међусобно паралелне. Тражени круг x, по услову задатка, додирује дату праву q па њихове слике у инверзији, права x' и круг q', имају тачно једну заједничку тачку и како је $\measuredangle(x,q) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(q)) = \measuredangle(x', q')$ следи да је права x' тангента круга q'. Задатак се своди на конструкцију тангенте x' на круг q', добијен одређивањем слике у инверзији ψ_i дате праве q, паралелне прави $p' = \psi_i(p) = p\backslash\{O_i\}$ и њој паралелној прави k', добијене одређивањем слике у инверзији ψ_i датог круга k.

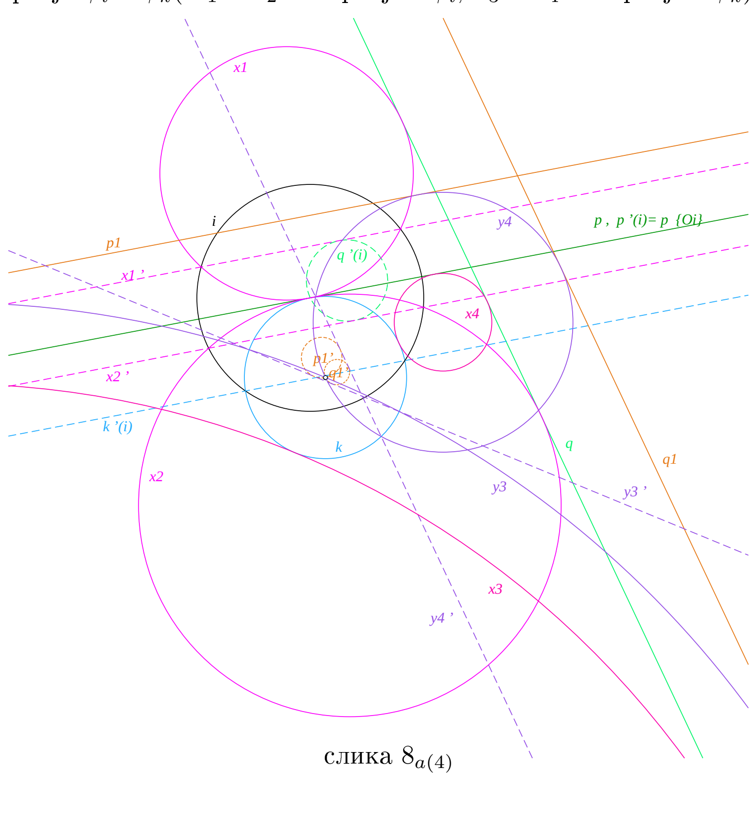
Како се дате праве p и q секу, а права q није тангента датог круга k, постоје две тангенте, означимо их са x'_1 и x'_2, на круг q' паралелне међусобно паралелним правама

p' и k', одговарајуће слике у инверзији ψ_i тражених кругова x_1 и x_2, а кругови су слике у инверзији добијених тангенти: $x_1 = \psi_i^{-1}(x_1') = \psi_i(x_1')$ и $x_2 = \psi_i^{-1}(x_2') = \psi_i(x_2')$ (слика $8_{a(5)}$).



слика $8_{a(5)}$

Прилажемо слику $8_{a(4)}$ која приказује конструкцију сва четири тражена круга, помоћу инверзија ψ_i и ψ_k(x_1 и x_2 инверзијом ψ_i; x_3 и x_4 инверзијом ψ_k).



слика $8_{a(4)}$

2. Нека су дате праве p и q паралелне, налазе се са разних страна датог круга k, при чему је права p тангента круга $k(O_k, r)$.

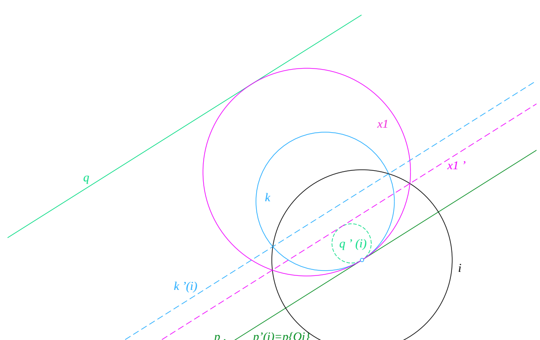
Постоје три круга, означимо их са x_1, x_2 и x_3, који задовољавају услов постављеног проблема. Један од њих садржи додирну тачку дате праве p и датог круга k; друга два круга не садрже поменуту додирну тачку и дати круг k додирују споља.

Први тражени круг, у ознаци x_1, који садржи додирну тачку праве p и круга k, можемо на најједноставнији начин одредити инверзијом ψ_i, у односу на круг i исте равни, произвољног полупречника са центром у додирној тачки праве p и круга k, идентично као у претходном случају(детаљно објашњење изостављамо али ћемо укратко изложити важне чињенице и објаснити разлику која постоји у овом случају).

Слика $p' = \psi_i(p)$ у инверзији ψ_i дате праве p, обзиром да p садржи центар посматране инверзије, је она сама без центра инверзије: $p' = \psi_i(p) = p \backslash \{O_i\}$. Слика $k' = \psi_i(k)$ датог круга k је права, јер и круг k садржи центар инверзије ψ_i. Праве p' и k' међусобно су паралелне(права p тангента је круга k) обзиром на једнакост: $\measuredangle(p, k) = \measuredangle(\psi_i(p), \psi_i(k)) = \measuredangle(p', k')$. Дата права q не садржи центар инверзије ψ_i те је у инверзији ψ_i њена слика $q' = \psi_i(q)$ круг.

Тражени круг x, по претпоставци, садржи додирну тачку праве p и круга k(у којој их додирује), а та тачка је центар инверзије, у инверзији ψ_i слика $x' = \psi_i(x)$ круга x је права. Пошто x додирује p и k у њиховој тачки додира, због: $\measuredangle(x, p) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(p)) = \measuredangle(x', p')$ и $\measuredangle(x, k) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k)) = \measuredangle(x', k')$, праве x', p' и k' међусобно су паралелне. По услову задатка, круг x додирује дату праву q, па и њихове слике у инверзији, права x' и круг q', имају тачно једну заједничку тачку и како је $\measuredangle(x, q) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(q)) = \measuredangle(x', q')$ следи да је права x' тангента круга q'. Задатак се своди на конструкцију тангенте x' на круг q', добијен одређивањем слике у инверзији ψ_i дате праве q, паралелне међусобно паралелним правама $p' = \psi_i(p) = p \backslash \{O_i\}$ и k', где је права k' добијена одређивањем слике у инверзији ψ_i круга k.

Разлика је у томе што постоји тачно једна тангента, означимо је са x_1', на круг $q' = \psi_i(q)$, паралелна правама p' и k'. Наиме, по нашој претпоставци, праве p и q су паралелне, а како је: $\measuredangle(p, q) = \measuredangle(\psi_i(p), \psi_i(q)) = \measuredangle(p', q')$, следи да је права p' тангента круга q'. Дакле, права x_1', слика у инверзији ψ_i траженог круга x_1, тангента је круга q', паралелна међусобно паралелним правама k' и p', при чему је p' такође тангента круга q'. Тражени круг x_1 је слика у инверзији ψ_i добијене праве x_1' (слика $8_{a(6)}$).



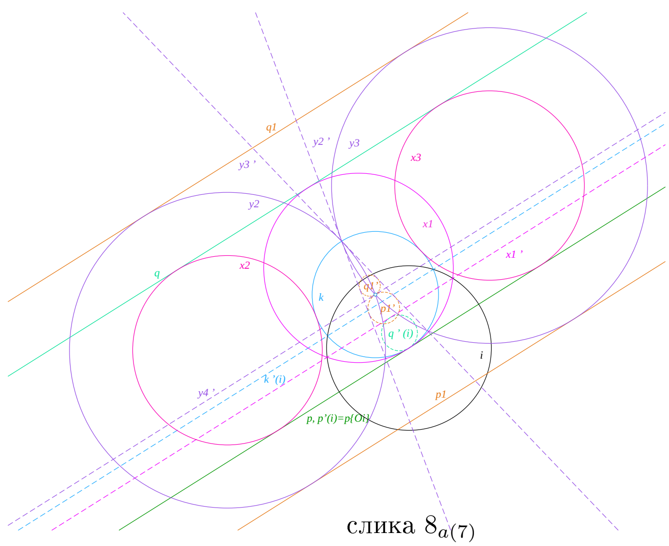
слика $8_{a(6)}$

Друга два тражена круга, x_2 и x_3, кругове који не садрже додирну тачку праве p и круга k, можемо одредити инверзијом ψ_k у односу на дати круг k, на идентичан начин као кругове x_3 и x_4 претходног случаја(у ком се дате праве p и q секу). Разлика је у томе што се кругови p_1' и q_1', добијени као слике у инверзији ψ_k правих p_1 и q_1 не секу, већ додирују споља у центру инверзије ψ_k(центру круга k), јер су, по претпоставци овог случаја, дате праве p и q паралелне, а самим тим и праве p_1 и q_1, па постоје три заједничке тангенте кругова p_1' и q_1', две спољашње, назовимо их y_2' и y_3', једна унутрашња y_4', која садржи центар инверзије ψ_k и паралелна је правама p и q.

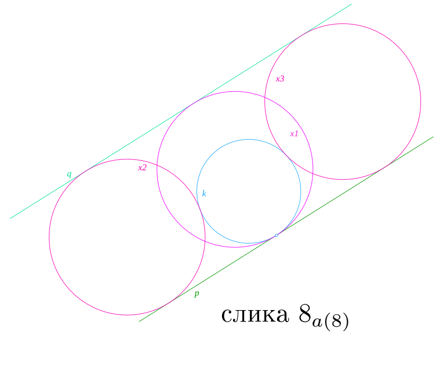
Спољашње тангенте, праве y_2' и y_3' одговарају као слике у инверзији ψ_k помоћним круговима y_2 и y_3 па су кругови y_2 и y_3 редом слике добијених правих y_2' и y_3' у инверзији ψ_k: $y_2 = \psi_k^{-1}(y_2') = \psi_k(y_2')$ и $y_3 = \psi_k^{-1}(y_3') = \psi_k(y_3')$. Унутрашња тангента, права y_4', садржи центар инверзије па је она сама своја слика, без центра O_k инверзије ψ_k: $y_4 = y_4' \backslash \{O_k\}$.

Коначно, тражени кругови x_2 и x_3 концентрични су добијеним круговима y_2 и y_3, при чему је $x_2(O_{y_2}, r_{x_2} = r_{y_2} - r)$ и $x_3(O_{y_3}, r_{x_3} = r_{y_3} - r)$.

На слици $8_{a(7)}$ приказана је конструкција свих тражених кругова, помоћу инверзија ψ_i и ψ_k. Слика $8_{a(8)}$ приказује сва три тражена круга.



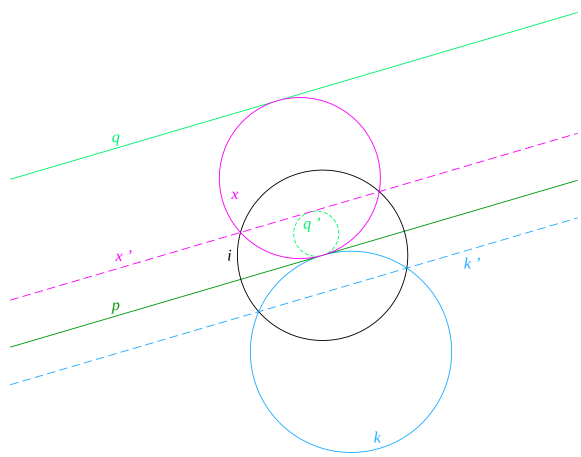
слика $8_{a(7)}$



слика $8_{a(8)}$

3. Нека су дате праве p и q паралелне, налазе се са исте стране датог круга k, при чему је права p тангента круга $k(O_k, r)$.

Постоји само један круг који задовољава услов постављеног проблема. Овај круг садржи тачку додира праве p и круга k, а можемо га одредити инверзијом ψ_i у односу на круг i исте равни, произвољног полупречника, са центром у тачки додира дате праве p и датог круга k(објашњење изостављамо, обзиром да смо ову инверзију већ више пута примењивали у случају $8(A)$) (слика $8_{a(9)}$).



слика $8_{a(9)}$

≺•≻ **случај 8 (** B **)**:

У овом случају претпоставићемо да су обе дате праве тангенте датог круга и пратити случај $8(B)$ кроз промену међусобног положаја правих у заједничкој равни.

1. Нека се дате праве p и q секу, при чему су обе тангенте датог круга $k(O_k, r)$.

Постоје четири круга која задовољавају услов постављеног проблема. Један од њих садржи тачку додира дате праве p и датог круга k(у тој тачки их додирује) и додирује дату праву q, други тражени круг садржи тачку додира праве q и круга k(у њој их додирује) и додирује праву p. Преостала два тражена круга не садрже ни једну од поменутих додирних тачака, додирују дате праве и споља дати круг.

Прва два тражена круга можемо одредити помоћу две инверзије, односно инверзија у односу на два различита круга. Са ψ_{i_1} означимо инверзију у односу на круг i_1 исте равни, произвољног полупречника, чији је центар тачка додира праве p и круга k, а са ψ_{i_2} инверзију у односу на круг i_2 исте равни, произвољног полупречника, са центром у тачка додира праве q и круга k. Инверзијом ψ_{i_1} одредићемо круг, у ознаци x_1, који садржи додирну тачку датих праве p и круга k(у којој их додирује); инверзијом ψ_{i_2} тражени круг x_2, који садржи тачку додира праве q и круга k(у којој их и додирује). Напоменимо да су обе ове инверзије сличне инверзији ψ_i случаја $8(A)$.

Посматрајмо инверзију ψ_{i_1}: како права p садржи центар инверзије ψ_{i_1}, у посматраној инверзији њена је слика она сама без центра инверзије: $p' = \psi_{i_1}(p) = p\setminus\{O_{i_1}\}$. Круг k такође садржи центар инверзије ψ_{i_1}, па је у инверзији ψ_{i_1} његова слика $k' = \psi_{i_1}(k)$ права, и то права паралелна прави p', обзиром да важи: $\measuredangle(k,p) = \measuredangle(\psi_{i_1}(k), \psi_{i_1}(p)) = \measuredangle(k',p')$, јер је по претпоставци овог случаја права p тангента круга k. Права q не садржи центар инверзије, па је у инверзији ψ_{i_1} њена слика $q' = \psi_{i_1}(q)$ круг. Важно је приметити следеће: обзиром да је, по претпоставци овог случаја, и права q тангента круга k, а како је $\measuredangle(k,q) = \measuredangle(\psi_{i_1}(k), \psi_{i_1}(q)) = \measuredangle(k',q')$ следи да је права k' тангента круга q'(што се може видети приликом конструкције одређивањем слика круга k и праве q у инверзији ψ_{i_1}). Ово је и разлог због кога постоји само један круг који задовољава услов задатка, а садржи поменуту додирну тачку.

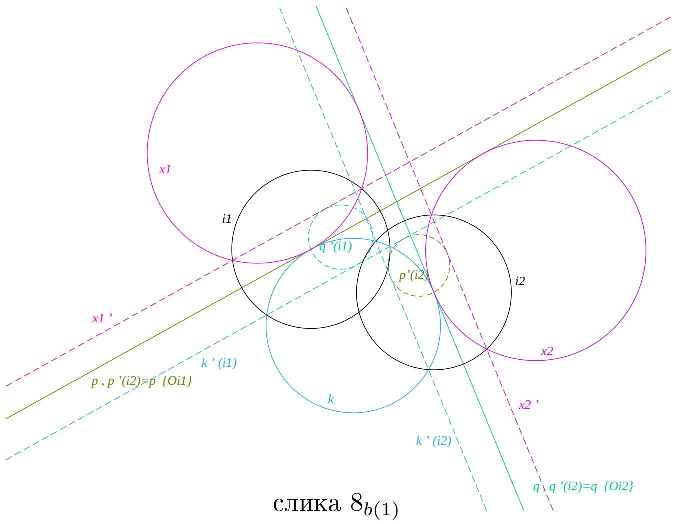
Тражени круг x_1 садржи центар инверзије ψ_{i_1}, те је у посматраној инверзији његова слика $x_1' = \psi_{i_1}(x_1)$ права. Круг x_1 по услову задатка додирује дату праву p и дати круг k, а по претпоставци садржи додирну тачку праве p и круга k, што може бити испуњено само ако круг x_1 додирује p и k у њиховој додирној тачки. Како је та тачка центар инверзије ψ_{i_1}, на основу једнакости углова: $\measuredangle(x_1,p) = \measuredangle(\psi_{i_1}(x_1), \psi_{i_1}(p)) = \measuredangle(x_1',p')$ и $\measuredangle(x_1,k) = \measuredangle(\psi_{i_1}(x_1), \psi_{i_1}(k)) = \measuredangle(x_1',k')$ следи да су p', k' и x_1' међусобно паралелне. Круг x_1 додирује дату праву q, па и њихове слике у инверзији, права x_1' и круг q', имају тачно једну заједничку тачку и због једнакости углова приликом пресликавања инверзијом, следи да је права x_1' тангента круга q'. Да резимирамо све закључке: права x_1' тангента је круга q' паралелна међусобно паралелним правама $p' = \psi_{i_1}(p) = p\setminus\{O_{i_1}\}$ и k', где је права k' такође тангента круга q'. Задатак се своди на конструкцију тангенте x_1' на круг q', добијен одређивањем слике у инверзији ψ_{i_1} дате праве q, паралелне његовој тангенти k', добијене одређивањем слике у инверзији ψ_{i_1} датог круга k.

На крају, тражени круг x_1, због особине инволутивности пресликавања инверзијом у односу на круг, слика је у инверзији добијене праве x_1': $x_1 = \psi_{i_1}^{-1}(x_1') = \psi_{i_1}(x_1')$.

У случају инверзије ψ_{i_2} чији је центар додирна тачка датог круга k и дате праве q, готово идентичним разматрањем као у случају инверзије ψ_{i_1} долазимо до следећих закључака: слика $p' = \psi_{i_2}(p)$ дате праве p је круг; слика q' дате праве q је она сама без центра инверзије: $q' = \psi_{i_2}(q) = q\setminus\{O_{i_2}\}$; слика $k' = \psi_{i_2}(k)$ датог круга k је права паралелна прави q', при чему је k' тангента круга p'; слика $x_2' = \psi_{i_2}(x_2)$ траженог круга x_2 је права, друга тангента круга p', паралелна његовој тангенти k' и њој паралелној прави $q' = q\setminus\{O_{i_2}\}$. Задатак се своди на конструкцију тангенте x_2' на круг p', добијен одређивањем слике у инверзији ψ_{i_2} дате праве p, паралелне његовој тангенти k', добијене одређивањем слике у инверзији ψ_{i_2} датог круга k.

Тражени круг x_2 слика је у инверзији добијене праве x_2': $x_2 = \psi_{i_2}^{-1}(x_2') = \psi_{i_2}(x_2')$.

На слици $8_{b(1)}$ приказана је конструкција кругова x_1 и x_2 инверзијама ψ_{i_1} и ψ_{i_2}.

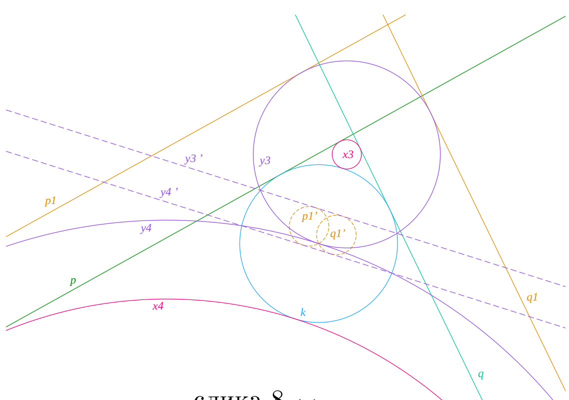


слика $8_{b(1)}$

Преостала два тражена круга који не садрже ни једну од додирних тачака датих правих и датог круга назовимо x_3 и x_4. Како смо већ напоменули, ови кругови додирују дате праве p и q, а дати круг k додирују споља. Можемо их одредити инверзијом ψ_k у односу на дати круг k, на идентичан начин као у оном делу случаја $8(A)$ када се праве p и q секу и p је тангента круга k(одређивање ових кругова објашњавали смо и у општем случају 1).

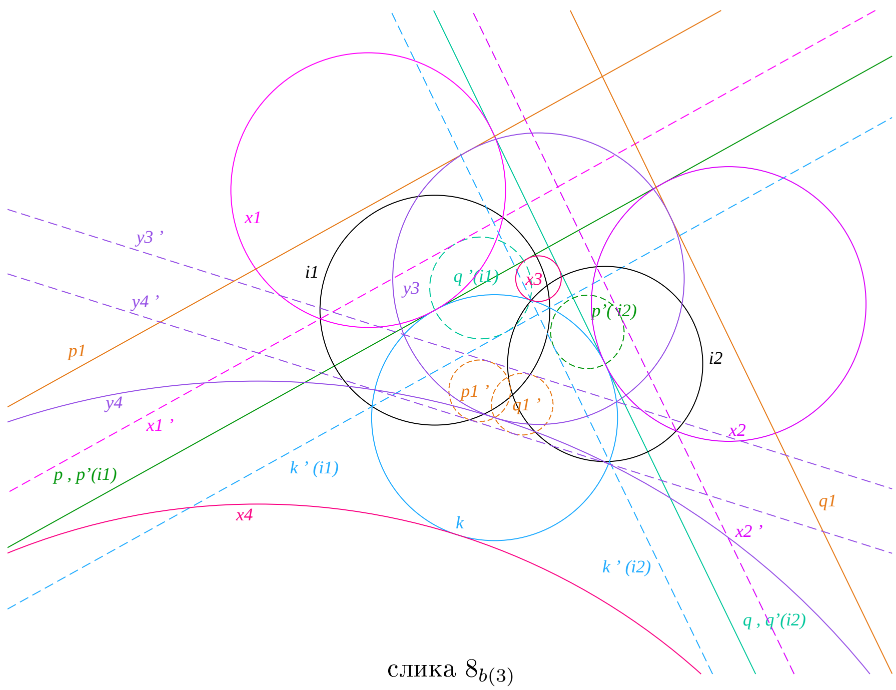
Иако ћемо објашњење конструкције ових кругова изоставити укажимо ипак на један интересантан закључак који се намеће у овако задатом положају датих правих и круга. Наиме, дате праве p и q се секу и по претпоставци обе су тангенте датог круга $k(O, r)$, па се и праве p_1 и q_1 паралелне редом правама p и q($d(p_1, p) = r$ и $(p_1, k \div p)$; $d(q_1, q) = r$ и $(q_1, k \div q)$) такође се секу, а како су тангентне дужи из тачке на круг међусобно подударне, то су и кругови p_1' и q_1', добијени одређивањем слика у инверзији ψ_k правих p_1 и q_1, међусобно подударни и секу се(једна од две пресечне тачке је центар круга k, центар инверзије).

На слици $8_{b(2)}$ приказана је конструкција кругова x_3 и x_4 инверзијом ψ_k.

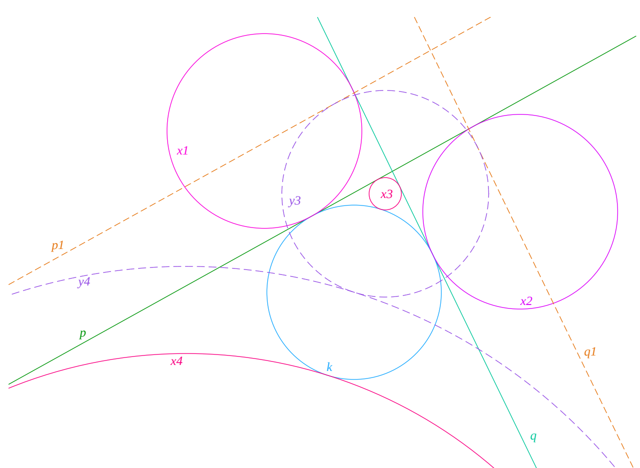


слика $8_{b(2)}$

Прилажемо слику $8_{b(3)}$ која приказује конструкцију тражених кругова помоћу све три поменуте инверзије ψ_{i_1}, ψ_{i_2} и ψ_k. Слика $8_{b(4)}$ приказује сва четири тражена круга и помоћне, њима концентричне, кругове.



слика $8_{b(3)}$



слика $8_{b(4)}$

2. Нека су дате праве p и q паралелне и обе су тангенте датог круга k.

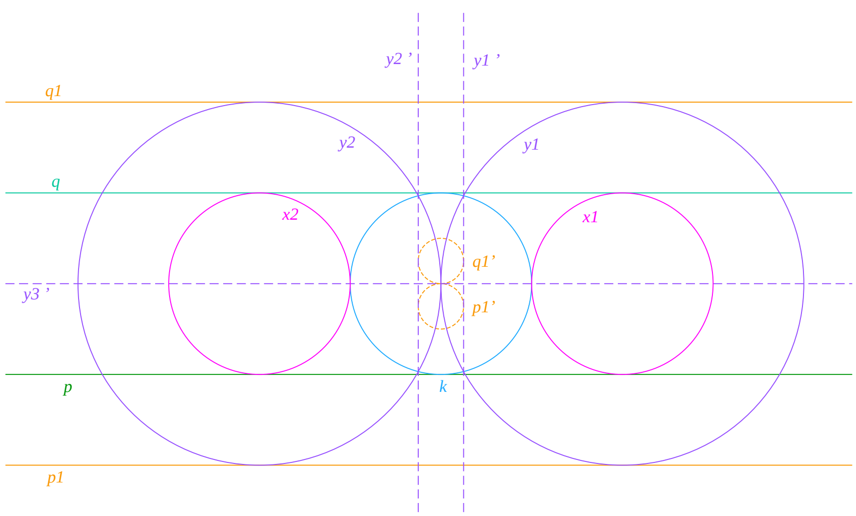
Постоје само два круга која додирују дате праве и дати круг(споља) постављене у овакав положај.

Задатак је врло једноставно решити без употребе инверзије, а инверзијом тражене кругове можемо одредити поново помоћу концентричног круга y, $y(O_x, r_y = r_x + r)$, (r полупречник датог круга k, r_x полупречник траженог круга x), помоћних правих p_1 и q_1: $p_1 \parallel p$, $d(p_1, p) = r$ и $(p_1, k \div p)$ и $q_1 \parallel q$, $d(q_1, q) = r$ и $(q_1, k \div q)$, инверзијом ψ_k у односу на дати круг k, готово иденично као у делу случаја $8(A)$ када су праве p и q паралелне и p је тангента круга k(где смо тражене кругове који не садрже додирну тачку праве p и круга k назвали x_2 и x_3). Укратко ћемо указати на неке делове конструкције:

Кругови p_1' и q_1', добијени као слике у инверзији ψ_k правих p_1 и q_1, су подударни и додирују се у центру инверзије ψ_k(центру датог круга k), јер су праве p_1 и q_1 паралелне и на истом су растојању од круга k, обзиром да важи једнакост углова приликом пресликавања инверзијом. Постоје три њихове заједничке тангенте, две спољашње, међусобно паралелне праве y_1' и y_2', једна унутрашња y_3', која садржи центар инверзије ψ_k и управна је на спољашње тангенте y_1' и y_2'.

Спољашње тангенте, праве y_1' и y_2', одговарају као слике у инверзији ψ_k траженим помоћним круговима y_1 и y_2, па су кругови y_1 и y_2 слике добијених правих y_1' и y_2' у инверзији ψ_k: $y_1 = \psi_k^{-1}(y_1') = \psi_k(y_1')$, $y_2 = \psi_k^{-1}(y_2') = \psi_k(y_2')$. Унутрашња тангента, права y_3', садржи центар инверзије па је њена слика у инверзији она сама, без центра O_k инверзије ψ_k, односно $y_3 = y_3' \backslash \{O_k\}$.

Тражени кругови x_1 и x_2 концентрични су добијеним круговима y_1 и y_2, при чему је $x_1(O_{y_1}, r_{x_1} = r_{y_1} - r)$ и $x_2(O_{y_2}, r_{x_2} = r_{y_2} - r)$ (слика $8_{b(5)}$).



слика $8_{b(5)}$

АНАЛИЗА (*)

Лема: Нека је i произвољан круг неке равни, $i(O, r)$ и ψ_i пресликавање инверзијом у односу на круг i. Ако је p права исте равни која не садржи центар O круга i(центар инверзије ψ_i), круг $p' = \psi_i(p)$ слика праве p у инверзији ψ_i, тада се тачке једне полуравни, на које права p дели дату раван, сликају у унутрашњу област круга p', тачке друге полуравни у спољашњу област круга p'. Прецизније, полураван којој припада центар O инверзије ψ_i слика се у спољашњу област круга p', полураван којој не припада центар инверзије слика се у унутрашњу област круга p'.

доказ:

Посматрајмо пресликавање инверзијом ψ_i, у односу на произвољан круг i неке равни са центром у тачки O, произвољног полупречника, $i(O, r)$.

Нека је права n норамала из центра O круга i(центар посматране инверзије) на произвољну праву p исте равни, која не садржи центар O инверзије ψ_i, o права кроз тачку O паралелна прави p, тачка P подножје нормале из O на p, а $P' = \psi_i(P)$ слика тачке P у овој инверзији, при чему је, по дефиницији пресликавања инверзијом $OP \cdot OP' = r^2$, где је r полупречник круга i инверзије. Како права p не садржи центар O инверзије, на основу теореме, у посматраној инверзији њена је слика $p' = \psi_i(p)$ круг над пречником OP'.

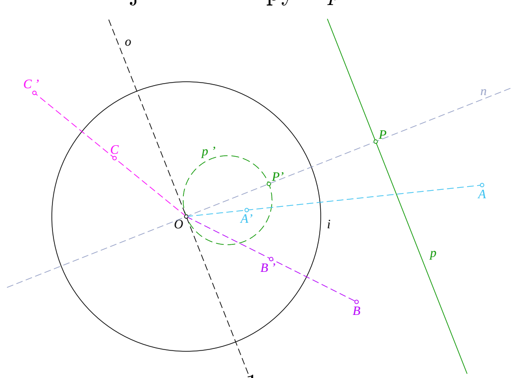
Обзиром да центар O инверзије ψ_i не припада прави p ова права дели раван на две полуравни, где се у једној од њих налази центар O посматране инверзије. Одаберимо произвољну тачку A у оној полуравни којој не припада центар O инверзије ψ_i и произвољну тачку B у оној полуравни у којој се налази центар O инверзије ψ_i, са оне стане праве o где је и права p. Слике у инверзији ψ_i тачака A и B редом су тачке $A' = \psi_i(A)$ и $B' = \psi_i(B)$, при чему, на основу дефиниције, тачке A' и B' припадају редом полуправама OA и OB и важи: $OA \cdot OA' = r^2 \wedge OB \cdot OB' = r^2$.

Пошто је тачка P подножје нормале из тачке O на праву p, а на основу одабира тачака A и B следи:

$$OP < OA \wedge OP \cdot OP' = r^2 = OA \cdot OA' \Rightarrow OP' > OA',$$

$$OP > OB \wedge OP \cdot OP' = r^2 = OB \cdot OB' \Rightarrow OP' < OB'.$$

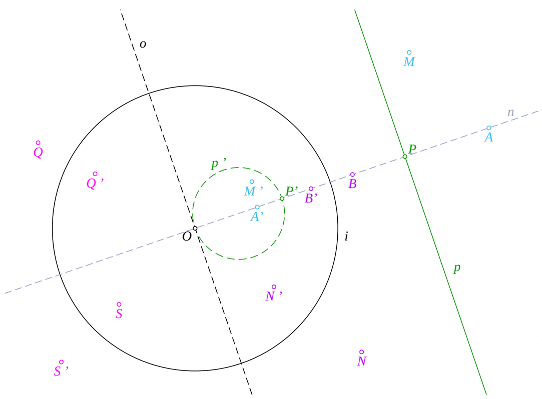
Како је OP' пречник круга p' тачка A' припада у унутрашњој области круга p', тачка B' налази се у спољашњој области круга p'.



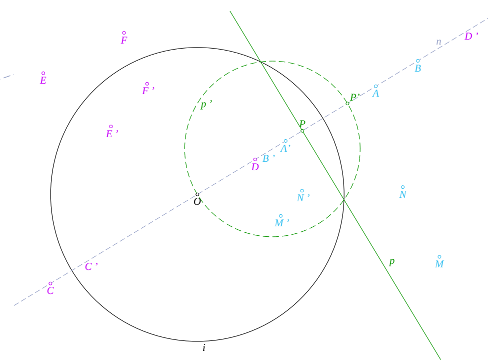
слика 1

На крају, остало је да пресликамо још један део дате равни, тачније део полуравни којој припада центар инверзије, са оне стране праве o са које није праве p. Одаберимо произвољну тачку C у полуравни којој припада тачка O тако да је $C, p \div o$. Слика у инверзији ψ_i тачке C је тачка $C' = \psi_i(C)$ где, на основу дефиниције, тачка C' припада полуправи OC што значи да је и тачка C' са оне стране праве o где и тачка C, у спољашњој области круга p'. $\diamond$

Слика 2 и слика 3 приказују пресликавање тачака равни $\alpha(O, p)$ инверзијом ψ_i, у односу на круг $i(O, r)$ равни α у случају када су права p и круг i инверзије дисјунктни и у случају да права p сече круг i инверзије.

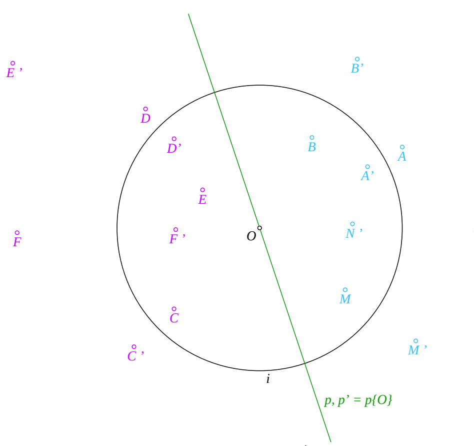


слика 2



слика 3

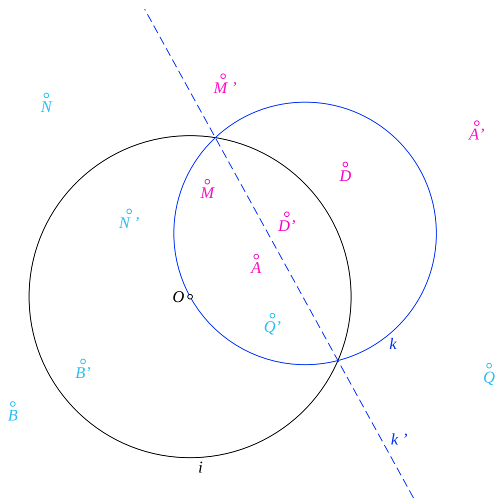
Напоменимо да, уколико права p садржи центар O инверзије ψ_i тада је њена слика у инверзији она сама, без центра инверзије: $p' = \psi_i(p) = p \backslash \{O\}$ и свака се од две полуравни на које права p дели раван $\alpha(p, O)$ инверзијом ψ_i слика у саму себе. (слика 4).



слика 4

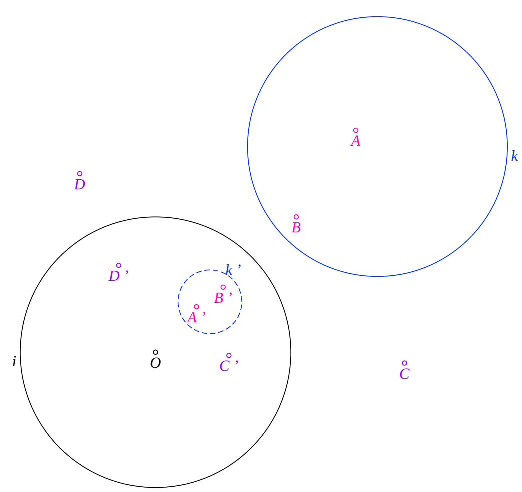
Имајући на уму да је инверзија инволутивно пресликавање наведено тврђење важи и у обрнутом смеру. Наиме, ако је α раван у којој је O произвољна тачка, круг k

припада равни α и садржи тачку O, i круг те равни, произвољног полупречника, са центром у тачки O и ψ_i пресликавање инверзијом у односу на круг i, тада је у посматраној инверзији слика $k' = \psi_i(k)$ круга k права, при чему се тачке унутрашње области круга k пресликавају у једну, тачке спољашње области круга k у другу полураван на које права k' дели раван α (слика 5).



слика 5

На сличан начин може се доказати да уколико круг k не садржи центар O инверзије ψ_i тада је у овој инверзији његова слика $k' = \psi_i(k)$ круг, при чему се тачке спољашње области круга k сликају у спољашњу област круга k', тачке унутрашње области круга k сликају се у тачке унутрашње области круга k' (слика 6).



слика 6

Пре но што се упустимо у дискусију о Аполонијевим проблемима 9 и 10 искористимо наведена тврђења за анализу одређених делова ових проблема ради лакшег решавања истих.

$\prec\circledast\succ$ Нека је k круг, p права, O тачка неке равни, при чему тачка O не припада ни кругу k ни правој p, i круг те равни, произвољног полупречника, са центром у тачки O и ψ_i пресликавање инверзијом у односу на круг i.

У инверзији ψ_i слике круга k и праве p редом су кругови $k' = \psi_i(k)$ и $p' = \psi_i(p)$, јер ни круг k ни права p не сеадрже центар O посматране инверзије.

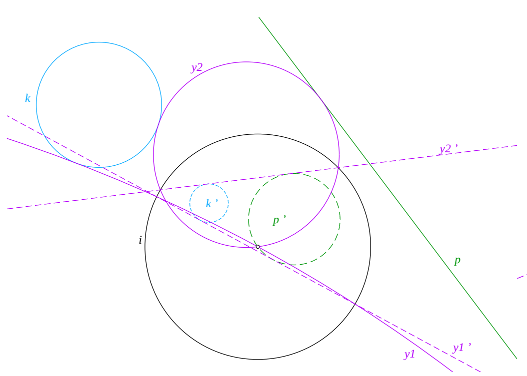
Ако је y круг исте равни који садржи тачку O тада је у инверзији ψ_i његова слика $y' = \psi_i(y)$ права, јер је тачка O центар инверзије ψ_i.

Уколико круг y додирује и круг k и праву p, односно са сваким од њих има тачно једну заједничку тачку, тада и његова слика у инверзији, права y', са сваком од слика круга k и праве p, круговима k' и p', има тачно по једну заједничку тачку и како инверзија чува једнакост углова: $\measuredangle(y,k) = \measuredangle(\psi_i(y), \psi_i(k)) = \measuredangle(y', k')$ и $\measuredangle(y,p) = \measuredangle(\psi_i(y), \psi_i(p)) = \measuredangle(y', p')$, следи да је права y' тангента и круга k' и круга p', односно њихова је заједничка тангента.

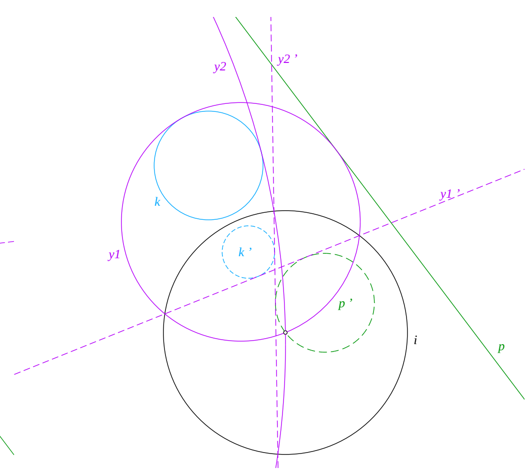
$\star\succ\succ$ Могу наступити следећа два случаја:

1) Ако круг y додирује праву p и круг k споља, тј. и круг k и права p се налазе у његовој спољашњој области(истој области), на основу леме и наведених тврђења кругови k' и p' припадају истој од две полуравни на које права y' дели дату раван, што значи да је права y' заједничка спољашња тангента кругова k' и p' (слика 7).

2) Ако круг y додирује праву p и круг k изнутра, тј. круг k припада унутрашњој, права p спољашњој области круга y(круг k и права p припадају различитим областима круга y), на основу леме и наведених тврђења кругови k' и p' припадају различитим полуравнима на које права y' дели дату раван, одакле следи да је права y' заједничка унутрашња тангента кругова k' и p' (слика 8).



слика 7



слика 8

$\prec\circledast\circledast\succ$ Нека су k_1 и k_2 два круга и O тачка неке равни, при чему тачка O не припада ни једном од ових кругова, i круг исте равни, произвољног полупречника, са центром у тачки O и ψ_i пресликавање инверзијом у односу на круг i.

У инверзији ψ_i слике кругова k_1 и k_2 редом су кругови $k_1' = \psi_i(k_1)$ и $k_2' = \psi_i(k_2)$, обзиром да кругови k_1 и k_2 не садрже центар O посматране инверзије.

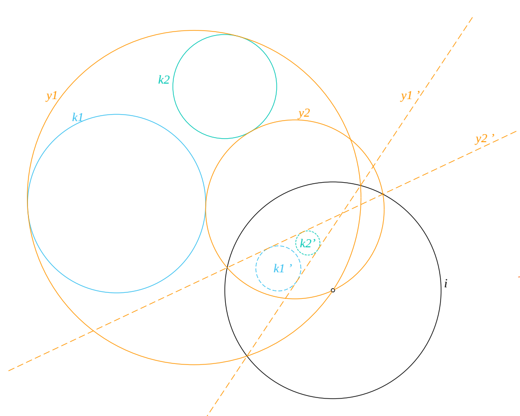
Ако је y круг те равни који садржи тачку O(центар инверзије), у инверзији ψ_i његова је слика $y' = \psi_i(y)$ права.

Уколико круг y додирује оба дата круга(односно са сваким од њих има тачно једну заједничку тачку), права y' са сваким од кругова k_1' и k_2' има по једну заједничку тачку и како важи једнакост углова: $\measuredangle(y, k_1) = \measuredangle(\psi_i(y), \psi_i(k_1)) = \measuredangle(y', k_1')$ и $\measuredangle(y, k_2) = \measuredangle(\psi_i(y), \psi_i(k_2)) = \measuredangle(y', k_2')$, следи да је права y' тангента и круга k_1' и круга k_2', односно њихова је заједничка тангента.

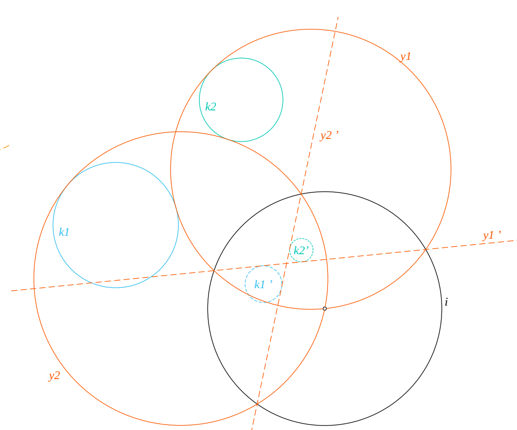
$\star\succ\succ$ Могу наступити следећа два случаја:

1) Ако круг y оба круга k_1 и k_2 додирује споља или их оба додирује изнутра, на основу леме и наведених тврђења, обзиром да оба круга k_1 и k_2 припадају његовој спољашњој области или су оба у његовој унутрашњој области(у истој су области круга y), слике у инверзији ψ_i ових кругова, кругови k_1' и k_2' припадају истој од две полуравни на које права y' дели дату раван, што значи да је права y' заједничка спољашња тангента кругова k_1' и k_2' (слика 9).

2) Ако круг y додирује један од кругова k_1 и k_2 споља и други круг изнутра, обзиром да се кругови k_1 и k_2 налазе у различитим областима круга y, кругови k_1' и k_2' припадају различитим полуравнима на које права y' дели дату раван, што значи да је права y' заједничка унутрашња тангента кругова k_1' и k_2' (слика 10).



слика 9



слика 10

$\prec\bullet\succ$ Аполонијев проблем 9 $\prec\bullet\succ$

$\looparrowright$Конструисати круг који додирује дату праву и дата два круга (p, k_1, k_2).

решење:

Нека су дати права p и кругови $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ неке равни. Не умањујући општост узмимо да је дати круг $k_1(O_1, r_1)$ круг мањег полупречника, $r_1 = min\{r_1, r_2\}$. Назовимо x тражени круг те равни који додирује дату праву и оба дата круга.

У најопштијем случају, када дати кругови k_1 и k_2 немају заједничких тачака, при чему се сваки од њих налази у спољашњој области другог, а дата права p ни са једним од њих нема заједничких тачака, при чему се оба дата круга налазе са исте стране праве p(у супротном нема решења), постоји осам кругова који задовољавају услов постављеног проблема. За њихово одређивање биће нам потребно разматрање начина на који тражени круг додирује дате кругове(у смислу додиривања споља или изнутра). Анализу морамо поделити на четири случаја:

$\Diamond$ Случај 1:

Посматрајмо круг k_{22} исте равни, концентричан датом кругу k_2 при чему је $k_{22}(O_2, r_{22} = r_2 - r_1)$ и праву p_1 паралелну датој прави p на растојању r_1 од праве p ($p_1 \parallel p$, $d(p_1, p) = r_1$), при чему су дата права p и дати кругови k_1 и k_2 са исте стране праве p_1(r_1 полупречник датог круга k_1, што ћемо подразумевати у сваком од наредних случајева).

Ако тражени круг $x(O, r_x)$ додирије дату праву p и оба дата круга споља, тада круг $y(O, r_y = r_x + r_1)$, концентричан кругу x, додирује праву p_1, садржи центар O_1 мањег датог круга k_1 и додирује круг k_{22} споља.

$\Diamond\Diamond$ Случај 2:

Посматрајмо круг k_{22} исте равни, концентричан датом кругу k_2, при чему је $k_{22}(O_2, r_{22} = r_2 - r_1)$ и праву p_2 паралелну датој прави p на растојању r_1 од праве p($p_2 \parallel p$, $d(p_2, p) = r_1$), при чему су сада права p_2 и дати кругови k_1 и k_2 са исте стране дате праве p.

Ако тражени круг $x(O, r_x)$ додирује дату праву p и оба дата круга изнутра, тада круг $y(O, r_y = r_x - r_1)$, концентричан кругу x, додирује праву p_2, садржи центар O_1 датог круга k_1 и додирује круг k_{22} изнутра.

$\Diamond\Diamond\Diamond$ Случај 3:

Посматрајмо круг kk_2 исте равни, концентричан датом кругу k_2, при чему је $kk_2(O_2, r_{22} = r_2 + r_1)$ и праву p_1 паралелну датој прави p на растојању r_1 од праве p($p_1 \parallel p$, $d(p_1, p) = r_1$), при чему су дата права p и дати кругови k_1 и k_2 са исте стране праве p_1.

Ако тражени круг $x(O, r_x)$ додирује дату праву p, дати круг k_1 споља и дати круг

k_2 изнутра, тада круг $y(O, r_y = r_x + r_1)$, концентричан кругу x, додирује праву p_1, садржи центар O_1 датог круга k_1 и додирује круг kk_2 изнутра.

$\Diamond\Diamond\Diamond\Diamond$ Случај 4:

Посматрајмо круг kk_2 исте равни, концентричан датом кругу k_2, при чему је $kk_2(O_2, r_{22} = r_2 + r_1)$ и праву p_2 паралелну датој прави p на растојању r_1 од праве p($p_2 \parallel p$, $d(p_2, p) = r_1$), при чему су права p_2 и дати кругови k_1 и k_2 са исте стране дате праве p.

Ако тражени круг $x(O, r_x)$ додирује дату праву p, дати круг k_1 изнутра и дати круг k_2 споља, тада круг $y(O, r_y = r_x - r_1)$, концентричан кругу x, додирује праву p_2, садржи центар O_1 датог круга k_1 и додирује круг kk_2 споља.

Проблем одређивања траженог круга x(њих осам) решићемо конструкцијом поменутог, њему концентричног круга y са анализираним својствима.

$\Diamond$ Размотримо случај 1:

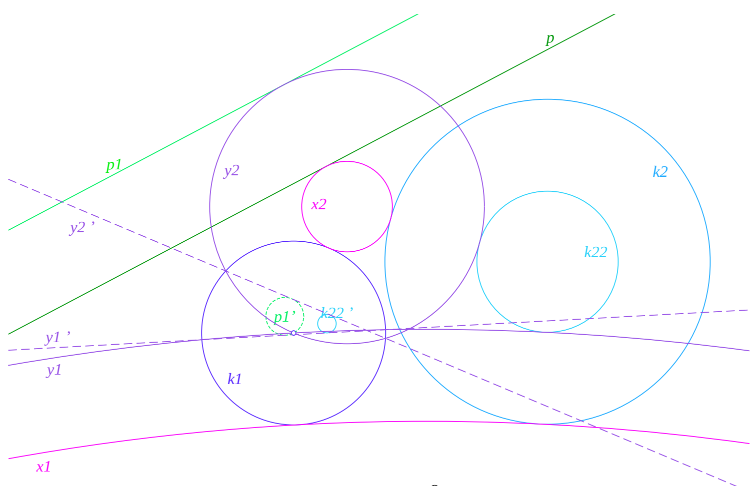
Конструишимо најпре круг k_{22}, концентричан датом кругу k_2, полупречника $r_{22} = r_2 - r_1$, $k_{22}(O_2, r_{22} = r_2 - r_1)$ и праву p_1 паралелну датој прави p на растојању r_1 од праве p, са различите стране праве p у односу на дате кругове k_1 и k_2. Означимо са ψ_{k_1} инверзију у односу на дати круг $k_1(O_1, r_1)$.

Круг k_{22} не садрже центар O_1 инверзије ψ_{k_1} па је у посматраној инверзији његова слика $k'_{22} = \psi_{k_1}(k_{22})$ такође круг k'_{22}. Права p_1 не садржи центар круга k_1, центар инверзије, те је у инверзији ψ_{k_1} њена слика $p'_1 = \psi_{k_1}(p_1)$ круг p'_1(који по дефиницији пресликавања инверзијом у односу на круг, садржи центар O_1 инверзије).

Круг y садржи центар O_1 инверзије ψ_{k_1} те је у инверзији ψ_{k_1} његова слика $y' = \psi_{k_1}(y)$ права. Како се кругови y и k_{22} додирују, односно имају једну заједничку тачку, то и њихове слике, права y' и круг k'_{22}, имају тачно једну заједничку тачку, и обзиром да важи једнакост углова при пресликавању инверзијом: $\measuredangle(k_{22}, y) = \measuredangle(\psi_{k_1}(k_{22}), \psi_{k_1}(y)) = \measuredangle(k'_{22}, y')$, следи да је права y' тангента круга k'_{22}. Круг y додирује праву p_1 па и њихове слике, права y' и круг p'_1, имају тачно једну заједничку тачку, и како је $\measuredangle(p_1, y) = \measuredangle(\psi_{k_1}(p_1), \psi_{k_1}(y)) = \measuredangle(p'_1, y')$, права y' тангента је и круга p'_1. Дакле, права y', слика траженог помоћног круга y, тангента је и круга k'_{22} и круга p'_1, односно њихова је заједничка тангента. Задатак своди на конструкцију заједничке тангенте кругова k'_{22} и p'_1, добијених одређивањем слика круга k_{22} и праве p_1 у инверзији ψ_{k_1}(којих је у најопштијем случају четири, две унитрашње и две спољашње). Из разлога наведених у анализи $(*)$, помоћним круговима y, којих је два, одговарају као слике спољашње тангенте, означимо их са y'_1 и y'_2.

Инверзија је инволутивно пресликавање па су помоћни кругови y_1 и y_2 слике у инверзији ψ_{k_1} добијених правих y'_1 и y'_2: $y_1 = \psi_{k_1}^{-1}(y'_1) = \psi_{k_1}(y'_1)$, $y_2 = \psi_{k_1}^{-1}(y'_2) = \psi_{k_1}(y'_2)$.

На крају, тражени кругови x_1 и x_2, концентрични су добијеним круговима y_1 и y_2 при чему је $x_1(O_{y_1}, r_{x_1} = r_{y_1} - r_1)$ и $x_2(O_{y_2}, r_{x_2} = r_{y_2} - r_1)$ (слика 9_1).



слика 9_1

◊◊ Размотримо случај 2:

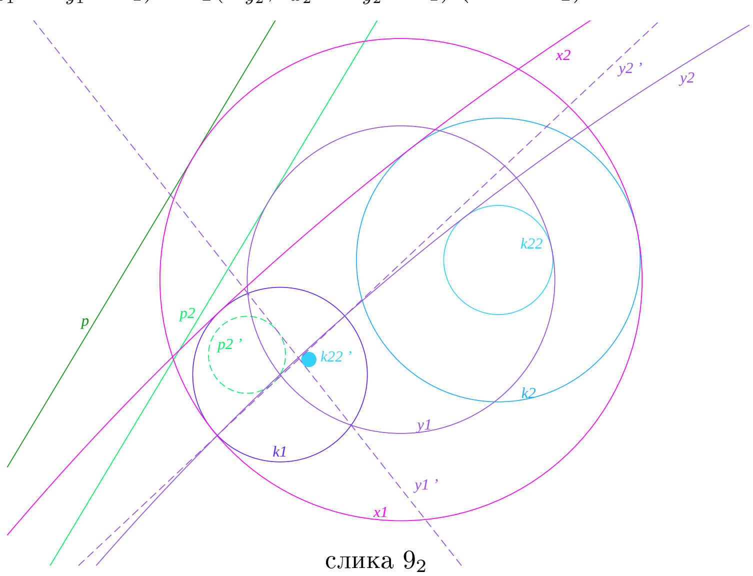
Анализа случаја 2. слична је анализи случаја 1. при чему је круг k_{22} исти као у претходном случају(концентричан датом кругу k_2, полупречника $r_{22} = r_2 - r_1$), а права p_2 паралелна датој прави p, на растојању r_1 од праве p, са оне стране праве p са које су и дати кругови k_1 и k_2. Ако посматрамо исту инверзију ψ_{k_1}, у односу на дати круг $k_1(O_1, r_1)$ и разматрање ће бити слично.

Круг k_{22} не садржи центар O_1 инверзије ψ_{k_1} па је у инверзији његова слика $k'_{22} = \psi_{k_1}(k_{22})$ такође круг. Права p_2 не садржи центар круга k_1, центар O_1 инверзије(јер по претпоставци дата права p и дати круг k_1 немају заједничких тачака, а $d(p_2, p) = r_1$, па је у посматраној инверзији њена слика $p'_2 = \psi_{k_1}(p_2)$ круг.

Круг y садржи центар O_1 инверзије ψ_{k_1}, па је у инверзији ψ_{k_1} његова слика $y' = \psi_{k_1}(y)$ права. Како круг y додирује круг k_{22}, то и њихове слике, права y' и круг k'_{22}, имају тачно једну заједничку тачку и обзиром на једнакост: $\measuredangle(k_{22}, y) = \measuredangle(\psi_{k_1}(k_{22}), \psi_{k_1}(y)) = \measuredangle(k'_{22}, y')$, следи да је права y' тангента круга k'_{22}. Слично, круг y додирује праву p_2, па и њихове слике, права y' и круг p'_2, имају тачно једну заједничку тачку и важи: $\measuredangle(p_2, y) = \measuredangle(\psi_{k_1}(p_2), \psi_{k_1}(y)) = \measuredangle(p'_2, y')$, што значи да је права y' тангента и круга p'_2. Дакле, права y', слика траженог помоћног круга y, тангента је и круга k'_{22} и круга p'_2, односно њихова је заједничка тангента. Задатак своди на конструкцију заједничке тангенте кругова k'_{22} и p'_2, добијених одређивањем слика у инверзији ψ_{k_1} круга k_{22} и праве p_2. Из разлога наведених у анализи $(*)$, помоћним круговима y, којих је два, одговарају унутрашње тангенте, означимо их са y'_1 и y'_2.

Помоћни кругови y_1 и y_2, због особине инволутивности пресликавања инверзијом у односу на круг, слике су у инверзији ψ_{k_1} добијених правих y'_1 и y'_2: $y_1 = \psi_{k_1}^{-1}(y'_1) = \psi_{k_1}(y'_1)$, $y_2 = \psi_{k_1}^{-1}(y'_2) = \psi_{k_1}(y'_2)$.

Тражени кругови x_1 и x_2 концентрични су добијеним круговима y_1 и y_2 при чему је $x_1(O_{y_1}, r_{x_1} = r_{y_1} + r_1)$ и $x_2(O_{y_2}, r_{x_2} = r_{y_2} + r_1)$ (слика 9_2).



слика 9_2

◊◊◊ Размотримо случај 3:

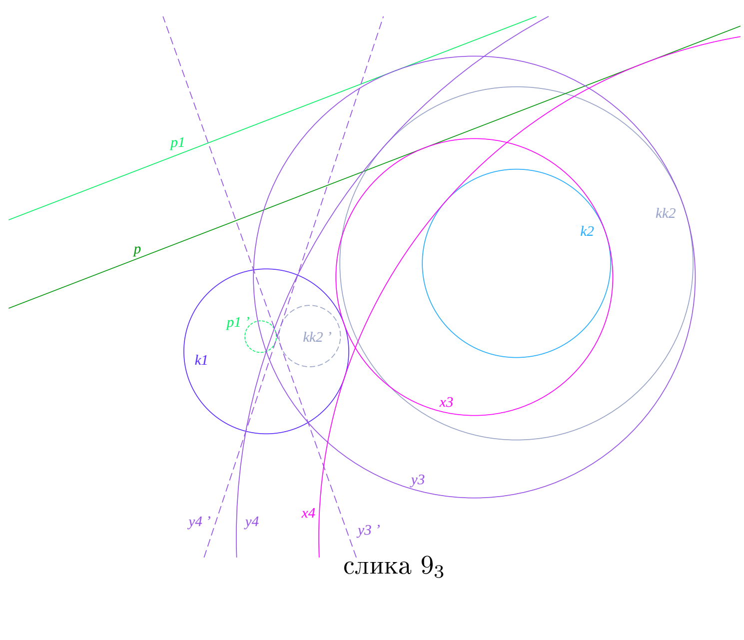
Конструишимо најпре круг kk_2, концентричан датом кругу k_2, при чему је сада круг kk_2 полупречника $r_{22} = r_2 + r_1$, тј. $kk_2(O_2, r_{22} = r_2 + r_1)$ и праву p_1 паралелну датој прави p на растојању r_1 од праве p, са различите стране праве p у односу на дате кругове k_1 и k_2. Са ψ_{k_1} означимо инверзију у односу на дати круг $k_1(O_1, r_1)$.

Круг kk_2 не садрже центар O_1 инверзије ψ_{k_1}(јер, по претпоставци, дати кругови k_1 и k_2 немају заједничких тачака, тј. сваки се налази у спољашњој области оног другог), па је у посматраној инверзији његова слика $kk_2' = \psi_{k_1}(kk_2)$ круг. Права p_1 такође не садржи центар O_1 инверзије ψ_{k_1}, те је њена слика $p_1' = \psi_{k_1}(p_1)$ круг.

Круг y садржи центар O_1 инверзије ψ_{k_1}, па је у овој инверзији његова слика $y' = \psi_{k_1}(y)$ права. Како се кругови y и kk_2 додирују, односно имају једну заједничку тачку, то и њихове слике, права y' и круг kk_2', имају тачно једну заједничку тачку и обзиром на једнакост углова при пресликавању инверзијом:$\measuredangle(kk_2, y) = \measuredangle(\psi_{k_1}(kk_2), \psi_{k_1}(y)) = \measuredangle(kk_2', y')$, следи да је права y' тангента круга kk_2'. Круг y додирује праву p_1 па и њихове слике, права y' и круг p_1', имају тачно једну заједничку тачку и $\measuredangle(p_1, y) = \measuredangle(\psi_{k_1}(p_1), \psi_{k_1}(y)) = \measuredangle(p_1', y')$, те је права y' тангента и круга p_1'. Права y', слика у инверзији ψ_{k_1} помоћног круга y, тангента је и круга kk_2' и круга p_1', односно њихова је заједничка тангента, те се задатак своди на конструкцију заједничке тангенте кругова kk_2' и p_1', добијених одређивањем слика у инверзији ψ_{k_1} круга kk_2 и праве p_1. Из разлога наведених у анализи $(*)$, траженим круговима y, којих је два, одговарају унутрашње тангенте, назовимо их y_1' и y_2'.

Обзиром на особину инволутивности пресликавања инверзијом у односу на круг, тражени помоћни кругови y_1 и y_2 слике су у инверзији добијених тангенти y_1' и y_2': $y_1 = \psi_{k_1}^{-1}(y_1') = \psi_{k_1}(y_1')$, $y_2 = \psi_{k_1}^{-1}(y_2') = \psi_{k_1}(y_2')$.

Тражени кругови x_1 и x_2, концентрични су добијеним круговима y_1 и y_2 при чему је $x_1(O_{y_1}, r_{x_1} = r_{y_1} - r_1)$ и $x_2(O_{y_2}, r_{x_2} = r_{y_2} - r_1)$ (слика 9_3).



слика 9_3

◊◊◊◊ Размотримо случај 4:

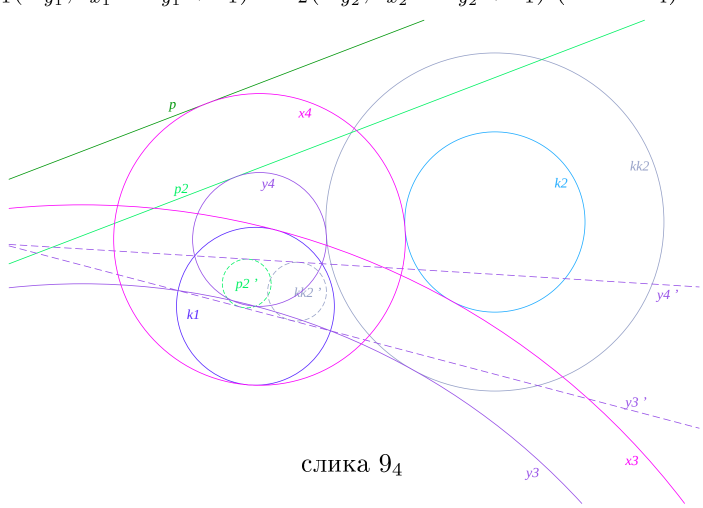
Конструишимо најпре круг kk_2, концентричан датом кругу k_2(исти као у случају 3), полупречника $r_{22} = r_2 + r_1$, $kk_2(O_2, r_{22} = r_2 + r_1)$ и овог пута(као у случају 2) праву p_2 паралелну датој прави p на растојању r_1 од праве p, са исте стране праве p са које су и дати кругови k_1 и k_2. Посматрајмо пресликавање истом инверзијом ψ_{k_1} у односу на дати круг $k_1(O_1, r_1)$.

Круг kk_2 не садрже центар O_1 инверзије ψ_{k_1}(јер, по претпоставци, дати кругови k_1 и k_2 немају заједничких тачака, сваки се налази у спољашњој области оног другог), па је у инверзији ψ_{k_1} његова слика $kk'_2 = \psi_{k_1}(kk_2)$ круг. Права p_2 не садржи центар круга k_1(разлог смо објаснили у случају 2), центар посматране инверзије, те је њена слика у инверзији $p'_2 = \psi_{k_1}(p_2)$ круг.

Круг y садржи центар O_1 инверзије ψ_{k_1}, па је у инверзији ψ_{k_1} његова слика $y' = \psi_{k_1}(y)$ права. Како се кругови y и kk_2 додирују, односно имају једну заједничку тачку, то и њихове слике, права y' и круг kk'_2, имају тачно једну заједничку тачку и обзиром да важи једнакост: $\measuredangle(kk_2, y) = \measuredangle(\psi_{k_1}(kk_2), \psi_{k_1}(y)) = \measuredangle(kk'_2, y')$, права y' тангента је круга kk'_2. Слично, круг y додирује праву p_2 па и њихове слике, права y' и круг p'_2, имају тачно једну заједничку тачку и $\measuredangle(p_2, y) = \measuredangle(\psi_{k_1}(p_2), \psi_{k_1}(y)) = \measuredangle(p'_2, y')$, те је права y' тангента и круга p'_2. Дакле, права y', слика у инверзији ψ_{k_1} траженог помоћног круга y, тангента је круга kk'_2 и круга p'_2, односно њихова је заједничка тангента. Задатак своди на конструкцију заједничке тангенте кругова kk'_2 и p'_2, добијених одређивањем слика у инверзији ψ_{k_1} круга kk_2 и праве p_2. Из разлога наведених у анализи $(*)$, помоћним круговима y, којих је два, одговарају спољашње тангенте, у ознаци y'_1 и y'_2.

Како је инверзија инволутивно пресликавање, тражени помоћни кругови y_1 и y_2 одговарајуће су слике у инверзији ψ_{k_1} добијених правих y'_1 и y'_2: $y_1 = \psi_{k_1}^{-1}(y'_1) = \psi_{k_1}(y'_1)$, $y_2 = \psi_{k_1}^{-1}(y'_2) = \psi_{k_1}(y'_2)$.

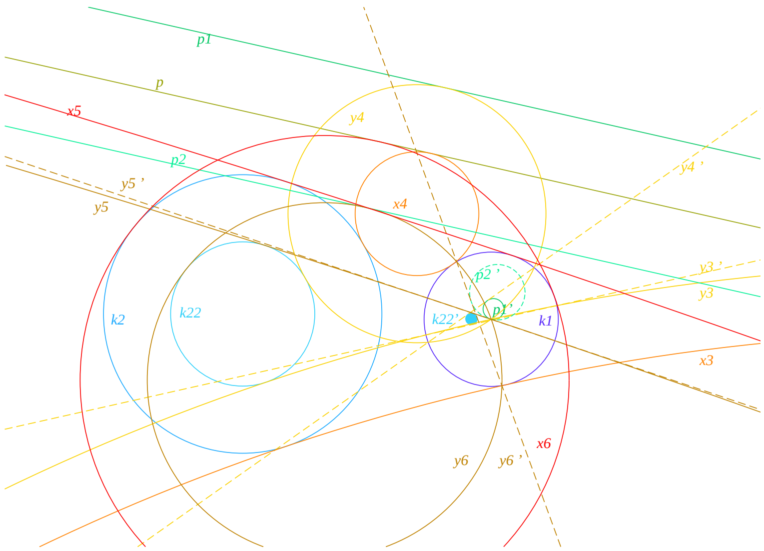
Коначно, тражени кругови x_1 и x_2, концентрични су добијеним круговима y_1 и y_2 при чему је $x_1(O_{y_1}, r_{x_1} = r_{y_1} + r_1)$ и $x_2(O_{y_2}, r_{x_2} = r_{y_2} + r_1)$ (слика 9_4).



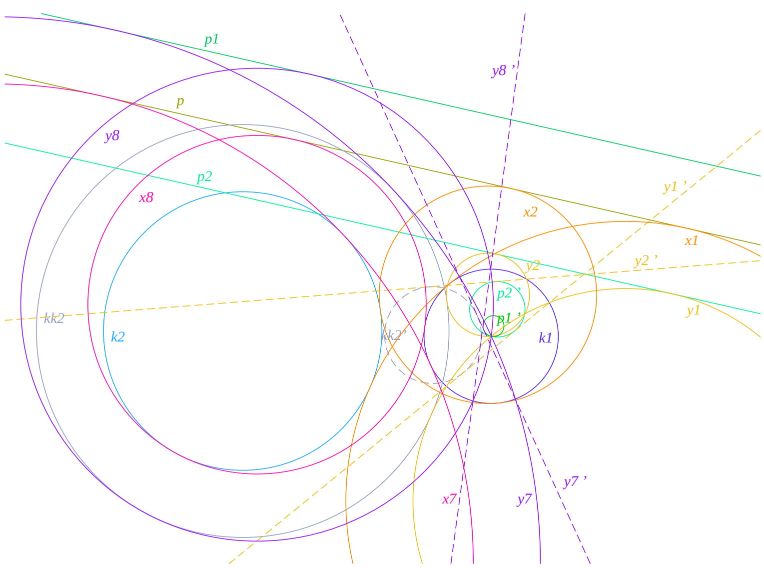
слика 9_4

Слика 9_5 приказује конструкцију инверзијом ψ_{k_1} помоћних кругова y_3, y_4, y_5 и y_6 и тражених кругова x_3, x_4, x_5 и x_6(на сликама су приказани заједно случајеви 1 и 2, у којима смо, као помоћ у решавању проблема, користили датом кругу k_2 концентричан круг k_{22} и праве p_1(случај 1) и p_2(случај 2) паралелне датој прави p).

Слика 9_6 приказује конструкцију инверзијом ψ_{k_1} помоћних кругова y_1, y_2, y_7 и y_8 и тражених кругова x_1, x_2, x_7 и x_8(на сликама су приказани заједно случајеви 3 и 4, у којима смо, као помоћ у решавању проблема, користили датом кругу k_2 концентричан круг kk_2 и праве p_1(случај 3) и p_2(случај 4) пралелне датој прави p).

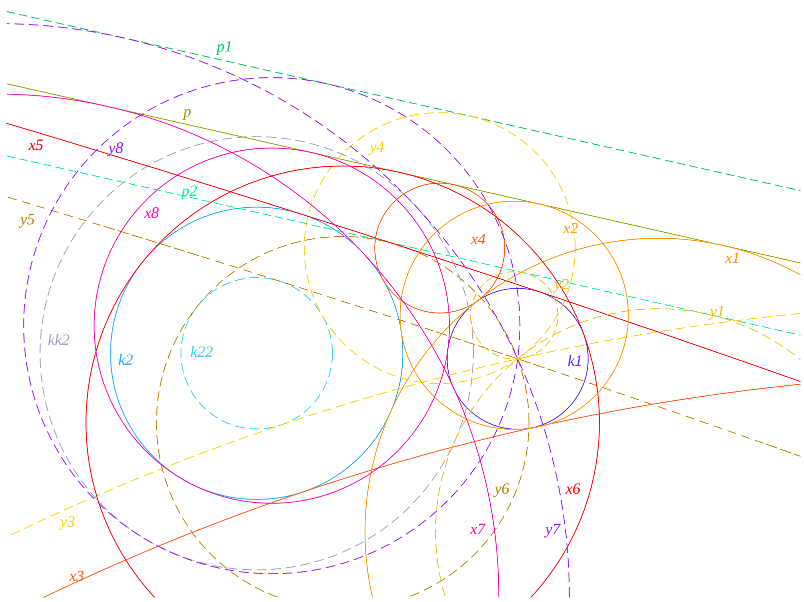


слика 9_5

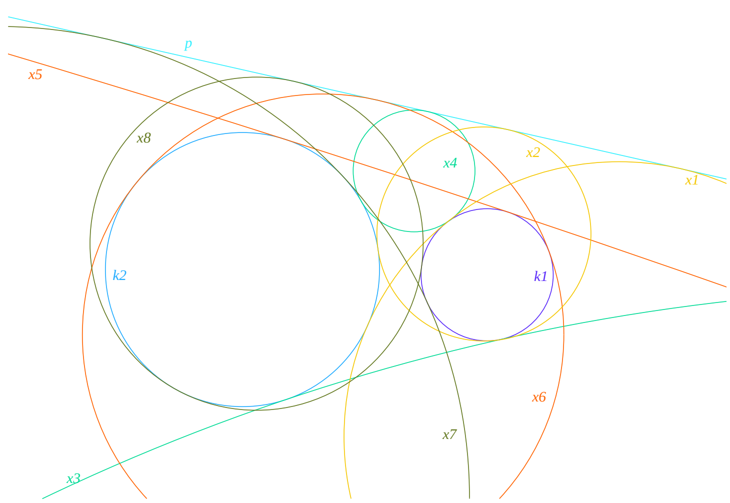


слика 9_6

На слици 9_7 приказано је свих осам тражених кругова x и осам помоћних кругова y. Слика 9_8 приказује само тражене кругове.



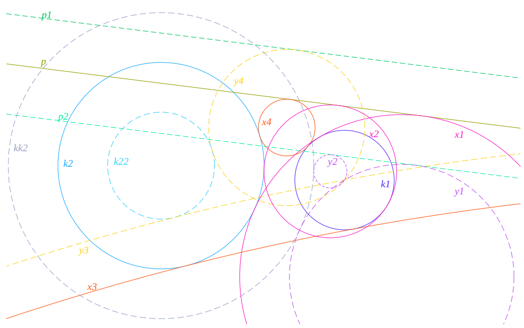
слика 9_7



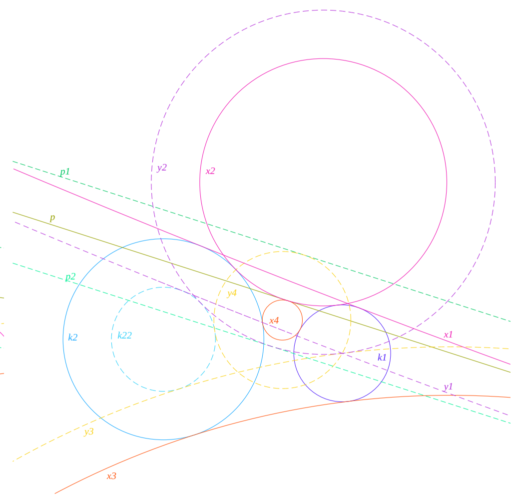
слика 9_8

Под " општим случајем" сматраћемо положаје дате праве p и датих кругова k_1 и k_2 у којима можемо одредити кругове који су решење овог проблема без кориш ћења инверзије у односу на неки други круг. То су ситуације у којима дата права није тангента ни једног ог датих кругова, а дата два круга су или дисјунктни или имају више од једне заједничке тачке.

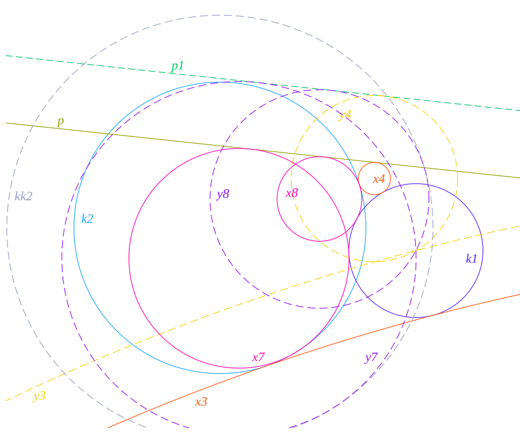
Постоји доста разних положаја у којима могу бити задати права и два круга, но приказаћемо само слике неких од наведених ” општих” случајева:
– слика 9_9: p сечица круга k_2; k_1 и k_2 дисјунктни.
– слика 9_{10}: p сечица оба круга; k_1 и k_2 дисјунктни.
– слика 9_{11}: p сечица круга k_2; k_1 и k_2 се секу.
– слика 9_{12}: p сечица оба круга; k_1 и k_2 се секу.



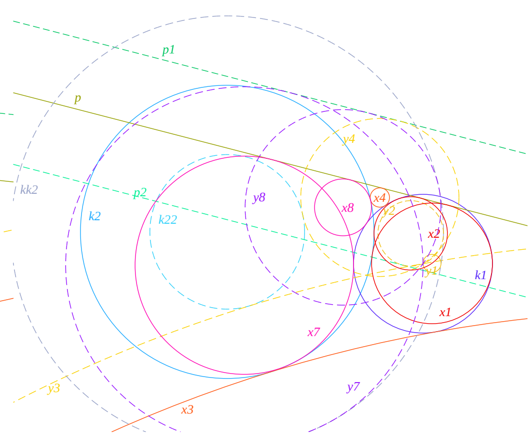
слика 9_9



слика 9_{10}



слика 9_{11}



слика 9_{12}

Под " специјалне случајеве" уврстићемо оне положаје задатих елемената за које, уз инверзију ψ_{k_1} у односу на дати круг k_1(мањег полупречника), за одређивање свих кругова који испуњавају услов постављеног проблема, морамо користити и неке друге инверзије, односно инверзије у односу на неке друге кругове исте равни. То су случајеви у којима је дата права тангента једног од датих кругова, заједничка тангента задатих кругова(унутрашња или спољашња), дата два круга се додирују(споља или изнутра) и све могуће комбинације наведених положаја, којих је прилично велики број. Овде ћемо решити Аполонијев проблем 9 за неке од најинтересантнијих случајева.

$\circ\succ\succ$ Специјални случајеви:

$\prec\bullet\succ$ **случај 9 (** A **)**:

Дата права p је заједничка тангента оба дата круга k_1 и k_2.

Сматрајући ово фиксираним положајем дате праве p у заједничкој равни проћи ћемо кроз случај A мењајући међусобни положај датих кругова k_1 и k_2.

$\bullet\succ$ **случај 9** (A_1):

Нека је дата права p заједничка спољашња тангента датих кругова k_1 и k_2, круг k_1 припада спољашњој области круга k_2.

Постоје четири круга која додирују дату праву и оба дата круга. Један тражени круг садржи тачку додира праве p и круга k_1(у тој тачки их и додирује), други садржи тачку додира праве p и круга k_2(њој их додирује), два тражена круга не садрже ни једну од ових додирних тачака.

Означимо са x_1 тражени круг који садржи тачку додира дате праве p и датог круга k_1 и одредимо прво тај круг. Посматрајмо пресликавање инверзијом ψ_{i_1}, у односу на круг i_1 исте равни, произвољног полупречника, чији је центар тачка додира праве p и круга k_1.

Како права p садржи центар инверзије ψ_{i_1}, то је њена слика у овој инверзији она сама без центра инверзије: $p' = \psi_{i_1}(p) = p\backslash\{O_{i_1}\}$. Круг k_1 садржи центар инверзије ψ_{i_1}, па је у инверзији ψ_{i_1} његова слика $k_1' = \psi_{i_1}(k_1)$ права и то права паралелна прави p', обзиром да инверзија чува једнакост углова($\measuredangle(k_1, p) = \measuredangle(\psi_{i_1}(k_1), \psi_{i_1}(p)) = \measuredangle(k_1', p')$). Дати круг k_2 не садржи центар инверзије ψ_{i_1}, па је у посматраној инверзији његова слика $k_2' = \psi_{i_1}(k_2)$ круг.

Тражени круг x_1, због постављеног услова овог случаја, садржи центар инверзије ψ_{i_1} па је у инверзији ψ_{i_1} његова слика $x_1' = \psi_{i_1}(x_1)$ права. Круг x_1 додирује дати круг k_2, па и њихове слике у инверзији, права x_1' и круг k_2', имају тачно једну заједничку тачку, и пошто важи $\measuredangle(x_1, k_2) = \measuredangle(\psi_{i_1}(x_1), \psi_{i_1}(k_2)) = \measuredangle(x_1', k_2')$ следи да права x_1' тангента круга k_2'. Како се тражени круг x_1 и дати круг k_1 додирују у центру инверзије, због једнакости углова $\measuredangle(x_1, k_1) = \measuredangle(\psi_{i_1}(x_1), \psi_{i_1}(k_1)) = \measuredangle(x_1', k_1')$, праве x_1' и k_1' су међусобно паралелне, паралелне прави p', обзиром да је $p' \parallel k_1'$ (исти закључак се намеће и ако посматрамо положај круга x_1 и праве p : они се по услову задатка додирују у центру инверзије ψ_{i_1}, те због $\measuredangle(x_1,p) = \measuredangle(\psi_{i_1}(x_1), \psi_{i_1}(p)) = \measuredangle(x_1', p')$ следи да су праве x_1' и p' паралелне).

Дакле, слика траженог круга x_1 у инверзији ψ_{i_1} је права x_1', тангента круга k_2', паралелна међусобно паралелним правама k_1' и p', па се задатак своди на конструкцију тангенте на круг k_2', добијен одређивањем слике у инверзији ψ_{i_1} датог круга k_2, паралелна правама k_1' и p', где је права k_1' добијена као слика у инверзији ψ_{i_1} датог круга k_1, а права p' слика је у инверзији ψ_{i_1} праве p: $p' = \psi_{i_1}(p) = p \backslash \{O_{i_1}\}$. У општем случају ових је тангенти две, међутим како је, по претпоставци овог случаја, права p тангента и круга k_2, њихове слике у инверзији, права p' и круг k_2', имају тачно једну заједничку тачку и $\measuredangle(k_2,p) = \measuredangle(\psi_{i_1}(k_2), \psi_{i_1}(p)) = \measuredangle(k_2', p')$, следи да је права p' је тангента круга k_2', отуда постоји тачно једна тангента, x_1', са наведеним својствима, а самим тим и тачно један круг x_1 који испуњава услов постављеног проблема, а садржи додирну тачку дате праве p и датог круга k_1.

На крају, тражени круг x_1 је слика у инверзији ψ_{i_1} добијене праве x_1', јер како је инверзија инволутивно пресликавање, то је $x_1 = \psi_{i_1}^{-1}(x_1') = \psi_{i_1}(x_1')$.

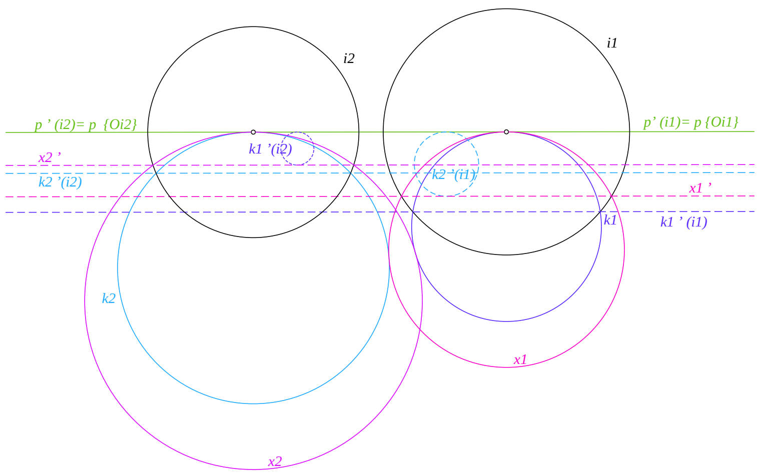
Други тражени круг, круг који садржи тачку додира датих праве p и круга k_2 означимо са x_2 и посматрајмо пресликавање инверзијом ψ_{i_2}, у односу на круг i_2 исте равни, произвољног полупречника, са центром у додирној тачки праве p и круга k_2.

Обзиром да је ово слична инверзија инверзији ψ_{i_1} и разматрање и закључци ће бити врло слични, те ћемо скратити детаљно објашњење. Наиме, права p садржи центар инверзије ψ_{i_2}, па је њена слика у овој инверзији она сама без центра инверзије, $p' = \psi_{i_2}(p) = p \backslash \{O_{i_2}\}$, круг k_2 садржи центар инверзије ψ_{i_2}, те је његова слика $k_2' = \psi_{i_2}(k_2)$ у овој инверзији права, круг k_1 не садржи центар инверзије ψ_{i_2}, па је његова слика $k_1' = \psi_{i_2}(k_1)$ такође круг, при чему је права p' тангента круга k_1', паралелна прави k_2', из идентичних разлога које смо детаљно објаснили у случају инверзије ψ_{i_1}.

Тражени круг x_2, због постављеног услова овог случаја, садржи додирну тачку праве p и круга k_2(у којој додирује и p и k_2), а та тачка је центар инверзије ψ_{i_2}, па је у посматраној инверзији његова слика $x_2' = \psi_{i_2}(x_2)$ права. Круг x_2 додирује дати круг k_1, па и њихове слике x_2' и k_1' у инверзији ψ_{i_2} имају тачно једну заједничку тачку и важи једнакост углова при пресликавању инверзијом, следи да је права x_2' тангента круга k_1'. Како се тражени круг x_2 и дати круг k_2 додирују у центру инверзије, због једнакости углова $\measuredangle(x_2,k_2) = \measuredangle(\psi_{i_2}(x_2), \psi_{i_2}(k_2)) = \measuredangle(x_2', k_2')$, праве x_2' и k_2' су међусобно паралелне, паралелне прави p', обзиром да је $p' \parallel k_2'$(исти закључак се намеће и ако посматрамо положај круга x_2 и праве p и њихових слика у инверзији ψ_{i_2}: они се по услову задатка додирују у центру инверзије ψ_{i_2}, те због $\measuredangle(x_2,p) = \measuredangle(\psi_{i_2}(x_2), \psi_{i_2}(p)) = \measuredangle(x_2', p')$ следи да су праве x_2' и p' паралелне). Задатак се своди на конструкцију тангенте на круг k_1', добијен одређивањем слике у инверзији ψ_{i_2} датог круга k_1, паралелна правама k_2' и p', где је права k_2' добијена одређивањем слике у инверзији ψ_{i_2} датог круга k_2, $p' = \psi_{i_2}(p) = p \backslash \{O_{i_2}\}$. Иако је оваквих тангенти у општем случају две, како је p тангента и круга k_1 то и њихове слике у инверзији имају тачно једну заједничку тачку и важи једнакост углова, па је права p' тангента круга k_1' и отуда постоји још само једна тангента x_2' на k_1' паралелна паралелним правама p' и k_2'.

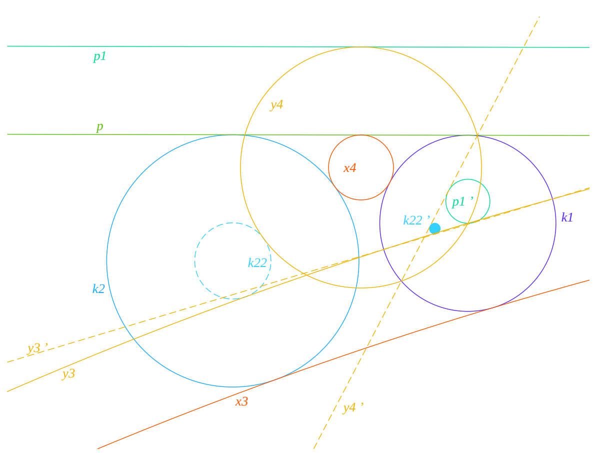
Коначно, тражени круг x_2 је слика у инверзији ψ_{i_2} добијене праве x_2', обзиром на особину инволутивности пресликавања помоћу инверзије у односу на круг важи: $x_2 = \psi_{i_2}^{-1}(x_2') = \psi_{i_2}(x_2')$.

Слика $9_{a_1(1)}$ приказује конструкцију инверзијама ψ_{i_1} и ψ_{i_2} кругова x_1 и x_2.



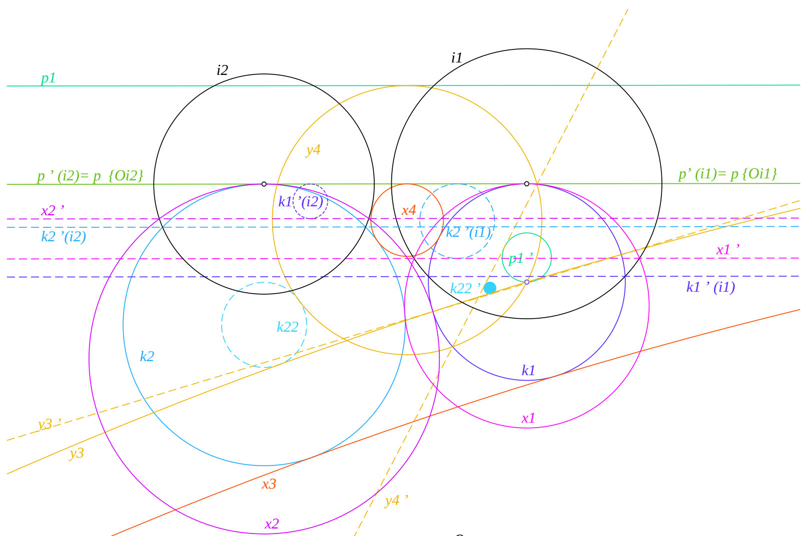
слика $9_{a1(1)}$

Назовимо x_3 и x_4 тражене кругове који не садрже ни једну од две додирне тачке, дате праве p и датог круга k_1, односно p и k_2. Оба тражена круга додирују дату праву p и дата два круга k_1 и k_2 споља. Кругови x_3 и x_4 су кругови које смо одређивали у општем случају 1 где смо детаљно објаснили поступак за њихово одређивање помоћу инверзије ψ_{k_1} у односу на дати круг k_1, те ћемо објашњење потпуно изоставити и приложити само слику која приказује конструкцију ових кругова (слика $9_{a_1(2)}$) .

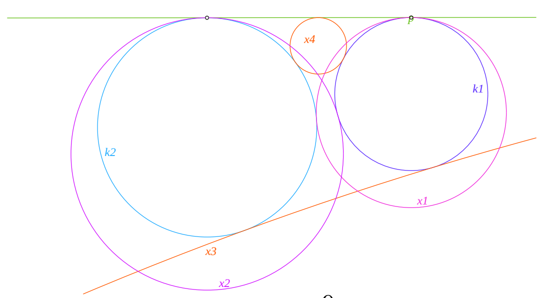


слика $9_{a1(2)}$

Као додатак прилажемо слику $9_{a_1(3)}$ која приказује конструкцију свих тражених кругова помоћу три кориш ћене инверзије ψ_{i_1}, ψ_{i_2} и ψ_{k_1}. На слици $9_{a_1(4)}$ приказана су сва четири тражена круга.



слика $9_{a1(3)}$



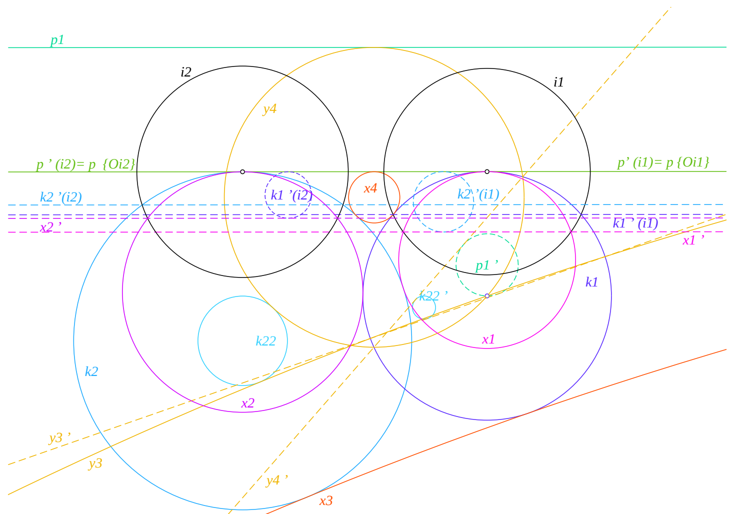
слика $9_{a1(4)}$

•≻ **случај 9** (A_2):

Нека је дата права p заједничка спољашња тангента датих кругова k_1 и k_2, при чему се кругови k_1 и k_2 секу.

У овом случају готово да нема разлике(ни у броју кругова који испуњавају услов постављеног проблема, ни у поступку за њихово одређивање) у односу на претходни случај, када су дати кругови k_1 и k_2 дисјунктни, само се положај тражених кругова x_1 и x_2(кругова који садрже редом додирну тачку дате праве p и датог круга k_1, односно додирну тачку праве p и круга k_2) разликује у односу на претходни слуцхај. Круг x_1 одређујемо инверзијом ψ_{i_1}; круг x_2 инверзијом ψ_{i_2}. Тражене кругове x_3 и x_4, кругове који не садрже ни једну од додирних тачака, одређујемо инверзијом ψ_{k_1}.

На слици 9_{a_2} приказана је конструкција сва четири тражена круга инверзијама ψ_{i_1}, ψ_{i_2} и ψ_{k_1}.

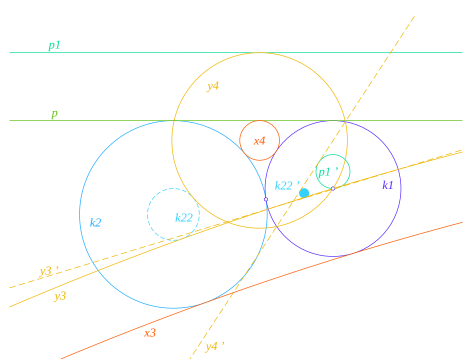


слика 9_{a2}

•≻ случај 9 (A_3):

Нека је дата права p заједничка спољашња тангента датих кругова k_1 и k_2, при чему се кругови k_1 и k_2 додирују споља.

У овом случају постоје само кругови x_3 и x_4, кругови који не садрже ни једну од три додирне тачке(тачка додира праве p и круга k_1, тачка додира праве p и круга k_2, тачка додира кругова k_1 и k_2). Оба тражена круга додирују дату праву p и оба дата круга споља(одређују се инверзијом ψ_{k_1} у односу на дати круг k_1)(слика 9_{a_3}).



слика 9_{a3}

Иако су јасни разлози зашто, у случају који разматрамо, не постоје кругови који садрже неку од додирних тачака, а испуњавају услов постављеног проблема, можемо их објаснити и помоћу инверзије.

Наиме, како је већ објашњено у случају 9_{A_1}, у инверзији ψ_{i_1}(у односу на круг i_1, произвољног полупречника, са центром у додирној тачки праве p и круга k_1) слика k_2' датог круга k_2 је круг, слике p' и k_1' дате праве p и датог круга k_1 су међусобно паралелне праве, при чему је права p' тангента круга k_2'. Но, како се кругови k_1 и k_2 додирују то и њихове слике у инверзији имају тачно једну заједничку тачку и важи једнакост углова при пресликавању инверзијом, стога је и права k_1' тангента круга k_2'. Дакле, обе праве p' и k_1' тангенте су круга k_2'. Ако би постојао круг x који садржи додирну тачку праве p и круга k_1 његова би слика у инверзији ψ_{i_1} била права x', тангента на круг k_2', паралелна међусобно паралелним правама p' и k_1', где су обе оне тангенте круга k_2', што није могуће.

На идентичан начин, а помоћу инверзије ψ_{i_2}(у односу на круг i_2 исте равни, произвољног полупречника, са центром у додирној тачки праве p и круга k_2) долази се до закључка да не постоји круг који испуњава услов постављеног проблема, а садржи додирну тачку дате праве p и датог круга k_2.

Не постоји круг који исруњава услов овог Аполонијевог проблема, а садржи трећу постојећу додирну тачку, додирну тачку датих кругова k_1 и k_2. Ако посматрамо инверзију ψ_i, у односу на круг i исте равни, произвољног полупречника, чији је центар тачка додира датих кругова k_1 и k_2(ову инверзију користићемо у неколико "специјалних" случајева који следе, те ћемо је тада и детаљно анализирати, овде о њој само укратко, без детаљних тумачења) слике $k_1' = \psi_i(k_1)$ и $k_2' = \psi_i(k_2)$ датих кругова међусобно су паралелне праве, јер инверзија чува једнакост углова: $\measuredangle(k_1, k_2) = \measuredangle(\psi_i(k_1), \psi_i(k_2)) = \measuredangle(k_1', k_2')$. Слика $p' = \psi_i(p)$ дате праве p је круг p', при чему су обе праве k_1' и k_2' тангенте круга p'.

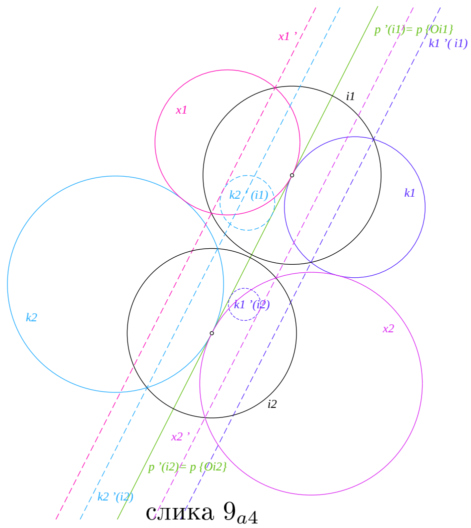
Ако би постојао круг x који исруњава услов постављеног проблема, а садржи додирну тачку датих кругова, која је центар инверзије ψ_i, његова би слика $x' = \psi_i(x)$ била права, тангента на круг p', паралелна међусобно паралелним правама k_1' и k_2', где су обе оне тангенте круга p', што је немогуће.

•$\succ$ **случај 9 (**A_4**)**:

Нека је дата права p заједничка унутрашња тангента датих кругова k_1 и k_2.

Обзиром да је дата права унутрашња тангента датих кругова, кругови k_1 и k_2 налазе се у различитих страна дате праве p, па постоје само два круга који испуњавају услов постављеног проблема, при чему један од њих садржи тачку додира дате праве p и датог круга k_1, други садржи додирну тачку праве p и круга k_2.

Круг x_1, који садржи тачку додира дате праве p и датог круга k_1 одређујемо инверзијом ψ_{i_1}; круг x_2, који садржи тачку додира дате праве p и датог круга k_2 инверзијом ψ_{i_2}, што је детаљно објашњено у случају 9_{A_1} (слика 9_{a_4}).



слика 9_{a4}

≺•≻ **случај 9 (** B **)**:

Дата два круга додирују се споља, дата права мења положај у заједничкој равни.

Дати се кругови k_1 и k_2 додирују споља и ово ћемо сматрати њиховим фиксираним положајем овог случаја; датој правој p мењаћемо положај у односу на њих, при чему ћемо посматрати само оне случајеве који се међусобно разликују.(ово је случај у коме ћемо објаснити и користити инверзију поменуту у случају 9_{A_3}).

•≻ **случај 9** (B_1):

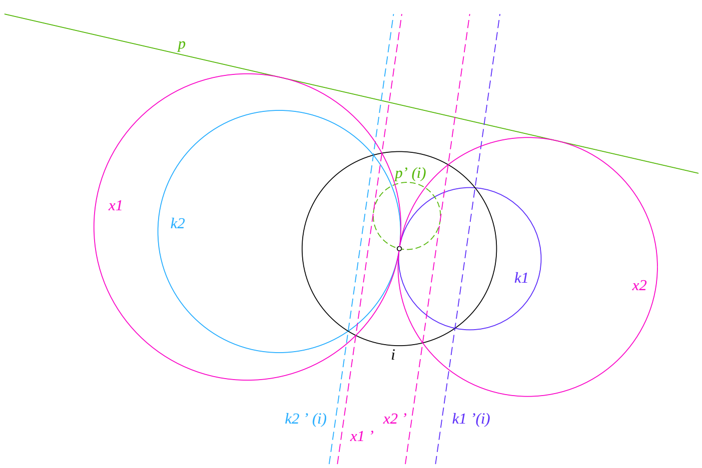
Кругови k_1 и k_2 додирују се споља, права p ни са једним од датих кругова нема заједничких тачака.

Постоји шест кругова који задовољавају услов постављеног проблема, додирују дате кругове и дату праву. Два од њих садрже тачку додира датих кругова k_1 и k_2, четири тражена круга не садрже тачку додира датих кругова.

Одредимо најпре тражене кругове који садрже додирну тачку датих кругова. Нека је i круг исте равну, произвољног полупречника, са центром у додирној тачки кругова k_1 и k_2, ψ_i пресликавање инверзијом у односу на круг i. Оба дата круга k_1 и k_2 садрже центар посматране инверзије, те су у инверзији ψ_i њихове слике $k_1' = \psi_i(k_1)$ и $k_2' = \psi_i(k_2)$ праве. Теоријски посматрано, дати се кругови додирују у центру инверзије, а како инверзија чува једнакост углова: $\measuredangle(k_1, k_2) = \measuredangle(\psi_i(k_1), \psi_i(k_2)) = \measuredangle(k_1', k_2')$, праве k_1' и k_2' су међусобно паралелне(што се може видети приликом конструкције одређивањем слика кругова k_1 и k_2 у инверзији ψ_i). Дата права p не садржи центар посматране инверзије, па је њена слика $p' = \psi_i(p)$ круг(који садржи центар инверзије, мада то овде није од важности).

Означимо са x тражени круг који садржи тачку додира датих кругова k_1 и k_2(биће то кругови x_1 и x_2, но за тренутак се поставимо као да не знамо број решења). Тражени круг x садржи центар инверзије, па је у инверзији ψ_i његова слика $x' = \psi_i(x)$ права. По нашем услову, оба дата круга k_1 и k_2 и тражени круг x садрже тачку додира кругова k_1 и k_2, а x их, по услову задатка, додирује оба, па круг x мора додиривати дате кругове у њиховој додирној тачки, која је центар инверзије ψ_i. Како инверзија чува једнакост углова: $\measuredangle(x, k_1) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k_1)) = \measuredangle(x', k_1')$ и $\measuredangle(x, k_2) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k_2)) = \measuredangle(x', k_2')$, следи да су праве k_1', k_2' и x' међусобно паралелне. Круг x додирује дату праву p, па и њихове слике у инверзији, права x' и круг p', имају тачно једну заједничку тачку и важи $\measuredangle(x, p) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(p)) = \measuredangle(x', p')$, одакле следи да је права x' тангента круга p'. Дакле, права x' тангента је круга p' паралелна међусобно паралелним правама k_1' и k_2'. Задатак се своди на конструкцију тангенте на круг p', добијен одређивањем слике дате праве p у инверзији ψ_i, паралелне међусобно паралелним правама k_1' и k_2', добијеним одређивањем слика у инверзији ψ_i редом датих кругова k_1 и k_2. Како дата права p са датим круговима k_1 и k_2 нема заједничких тачака, немају их ни њихове слике, круг p' и праве k_1' и k_2', па постоје две тангенте, x_1' и x_2', на круг p' паралелне међусобно паралелним правама k_1' и k_2', које одговарају као слике у инверзији ψ_i траженим круговима.

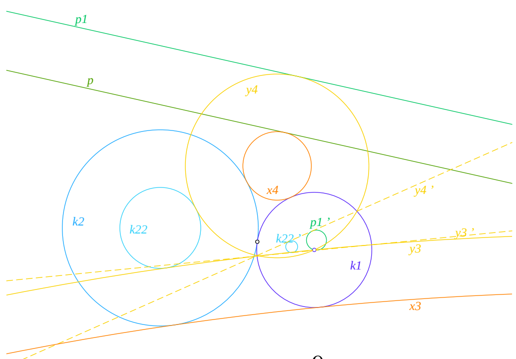
На крају, због особине инволутивности пресликавања инверзијом у односу на круг, тражени кругови x_1 и x_2 слике су у инверзији ψ_i добијених правих x_1' и x_2': $x_1 = \psi_i^{-1}(x_1') = \psi_i(x_1')$, $x_2 = \psi_i^{-1}(x_2') = \psi_i(x_2')$ (слика $9_{b_1(1)}$).



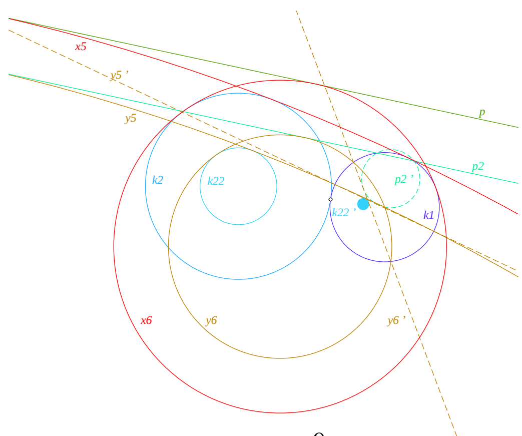
слика $9_{b1(1)}$

Преостала четири тражена круга назовимо x_3, x_4, x_5 и x_6, кругове који не садрже тачку додира датих кругова k_1 и k_2. Два од њих, означимо их са x_3 и x_4, додирују дату праву p и оба дата круга k_1 и k_2 споља. Ово су кругови чије смо одређивање инверзијом ψ_{k_1}(у односу на круг k_1) објаснили у општем случају 1, те ћемо приложити само слику. Преостала два тражена круга, означимо их са x_5 и x_6, додирују дату праву p и оба дата круга изнутра. Њихово смо одређивање, такође помоћу инверзије ψ_{k_1}, објаснили у општем случају 2.

Слика $9_{b_1(2)}$ приказује конструкцију инверзијом ψ_{k_1} кругова x_3 и x_4. Слика $9_{b_1(3)}$ приказује конструкцију инверзијом ψ_{k_1} кругова x_5 и x_6.

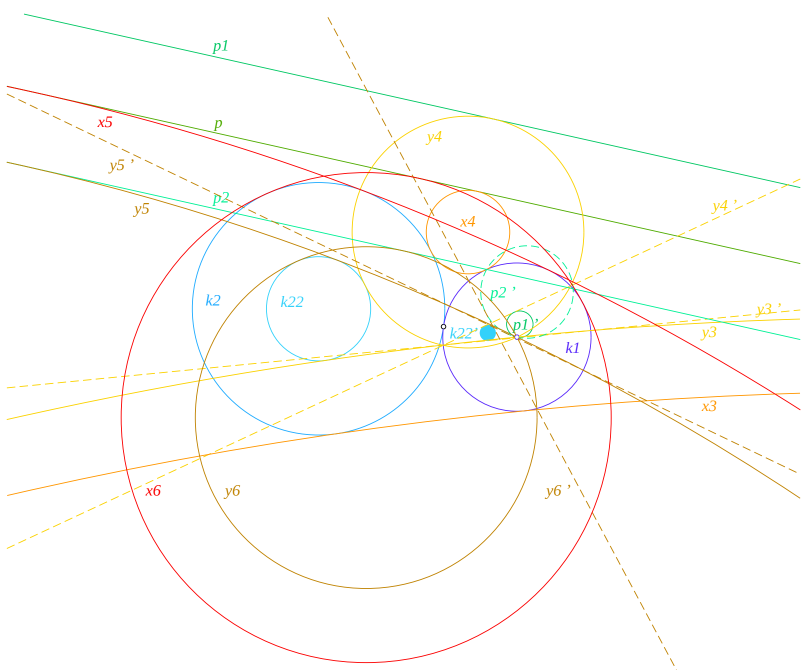


слика $9_{b1(2)}$



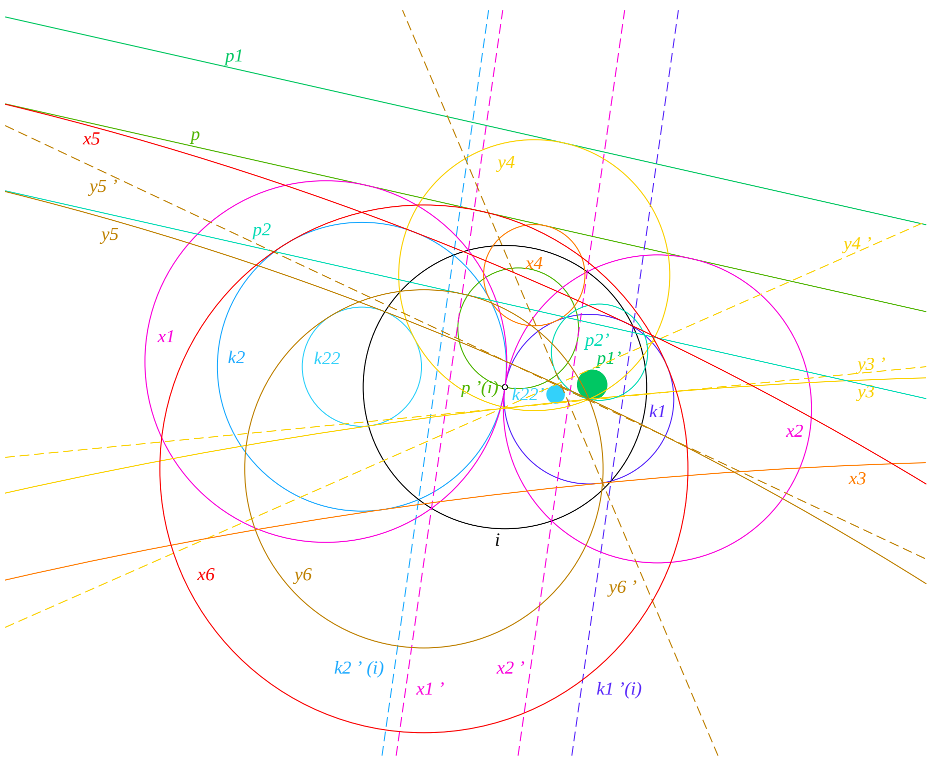
слика $9_{b1(3)}$

На слици $9_{b_1(4)}$ приказана је конструкција инверзијом ψ_{k_1} свих тражених кругова x_3, x_4, x_5 и x_6(који не садрже тачку додира датих кругова k_1 и k_2).

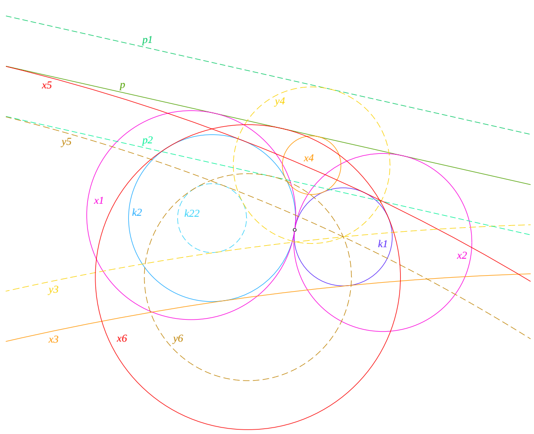


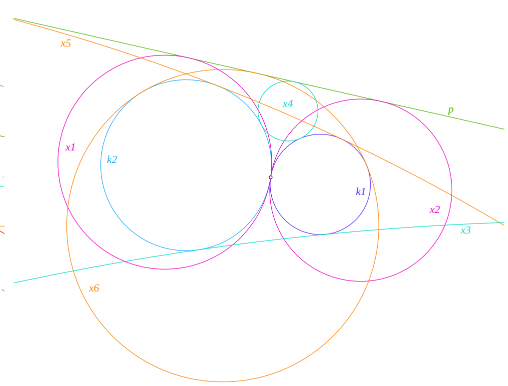
слика $9_{b1(4)}$

Дајемо као прилог слику $9_{b_1(5)}$ која приказује конструкције свих тражених кругова инверзијама ψ_i и ψ_{k_1}. На слици $9_{b_1(6)}$ приказано је свих шест тражених кругова и помоћни концентрични кругови, слика $9_{b_1(7)}$ приказује само шест тражених кругова.



слика $9_{b1(5)}$





слика $9_{b1(6)}$ слика $9_{b1(7)}$

•≻ случај 9 (B_2):

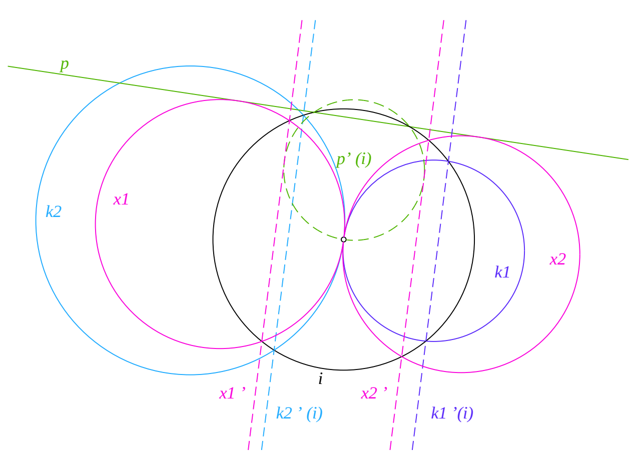
Кругови k_1 и k_2 додирују споља, права p сече само један од њих.

Не умањујући општост узмимо да права p сече само круг k_2, а са кругом k_1 нема заједничких тачака(слично би се разматрао случај када права p сече само круг k_1).

Постоје четири круга који задовољавају решење овог проблема. Два од њих садрже тачку додира датих кругова k_1 и k_2, два тражена круга не садрже тачку додира датих кругова.

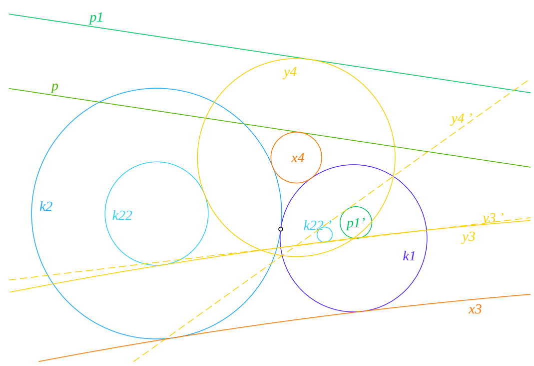
Означимо са x_1 и x_2 тражене кругове који садрже тачку додира датих кругова k_1 и k_2. Њих одређујемо инверзијом ψ_i у односу на круг i произвољног полупречника, са центром у тачки додира кругова k_1 и k_2. Детаљно смо проучили ову инверзију у случају 9(B_1), те ћемо овде укратко поновити: у инверзији ψ_i слика $p' = \psi_i(p)$ дате праве p је круг, обзиром да права p не садржи центар инверзије; слике $k_1' = \psi_i(k_1)$ и $k_2' = \psi_i(k_2)$ датих кругова k_1 и k_2 у инверзији ψ_i су праве, међусобно паралелне, јер се њих два додирују у тачки која је центар посматране инверзије. Тражени кругови x_1 и x_2 садрже тачку додира кругова k_1 и k_2, центар инверзије ψ_i, па су у инверзији ψ_i њихове слике $x_1' = \psi_i(x_1)$ и $x_2' = \psi_i(x_2)$ праве, а како, по постављеном услову, кругови x_1 и x_2 додирују кругове k_1 и k_2, сва се четири круга додирују у центру инверзије, те су њихове слике, праве x_1', x_2', k_1' и k_2', међусобно паралелне. Тражени кругови додирују дату праву p, те и њихове слике у инверзији, круг p' и праве x_1' и x_2', имају тачно једну заједничку тачку и обзиром да важи једнакост углова при пресликавању инверзијом, следи да су праве x_1' и x_2' тангенте круга p'. Задатак се своди на конструкцију тангенти x_1' и x_2' на круг p'(добијен одређивањем слике у инверзији ψ_i дате праве p) паралелних међусобно паралелним правама k_1' и k_2'(добијеним одређивањем слика у инверзији ψ_i датих кругова k_1 и k_2).

На крају, тражени кругови x_1 и x_2 слике су у инверзији ψ_i добијених правих x_1' и x_2': $x_1 = \psi_i^{-1}(x_1') = \psi_i(x_1')$, $x_2 = \psi_i^{-1}(x_2') = \psi_i(x_2')$ (слика $9_{b2(1)}$).



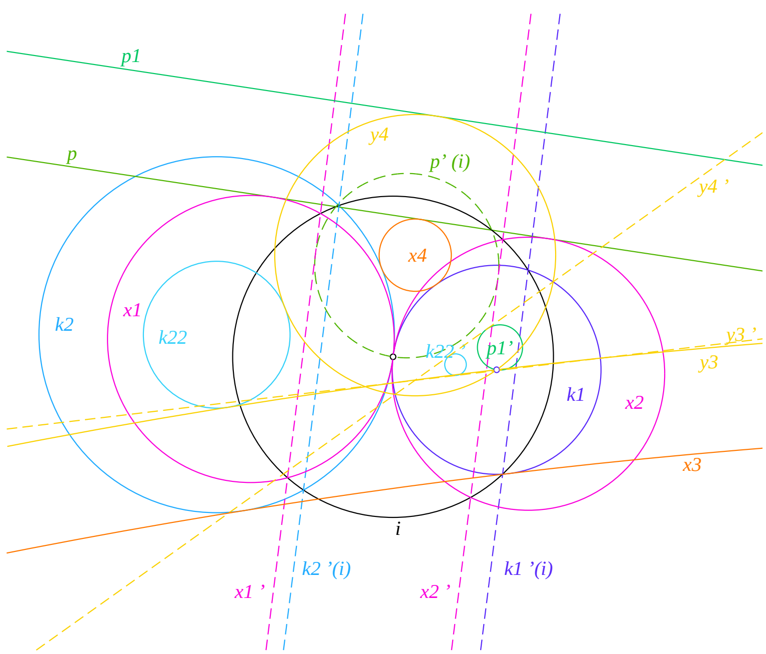
слика $9_{b2(1)}$

Назовимо x_3 и x_4 тражене кругове који не садрже тачку додира датих кругова. Ови кругови додирују дату праву p и оба дата круга k_1 и k_2 споља. Ово су кругови чије смо одређивање инверзијом ψ_{k_1}(у односу на дати круг k_1) објаснили у општем случају 1, те приложемо само слику конструкције ових кругова инверзијом ψ_{k_1}.
(слика $9_{b_2(2)}$).



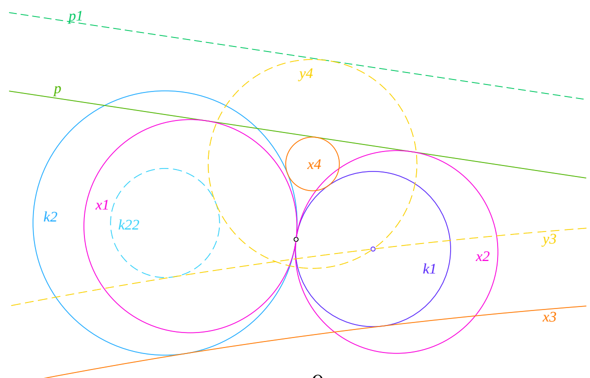
слика $9_{b2(2)}$

На слици $9_{b_2(3)}$ приказана је конструкција свих тражених кругова, инверзијама ψ_i и ψ_{k_1}.



слика $9_{b2(3)}$

На слици $9_{b_2(4)}$ приказана су сва четири тражена круга и помоћни концентрични кругови.

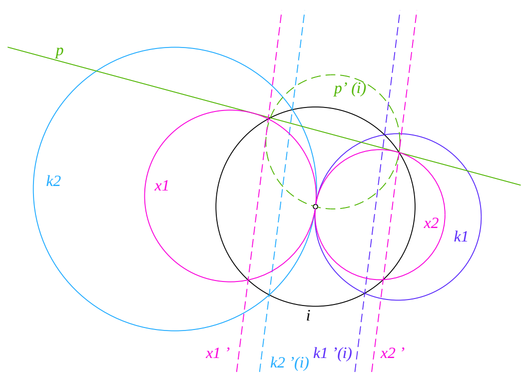


слика $9_{b2(4)}$

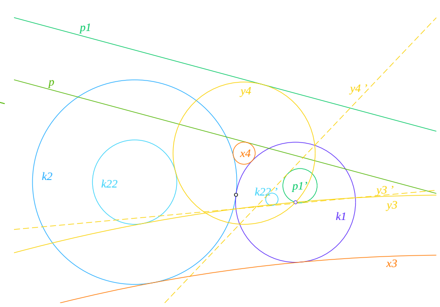
•≻ **случај 9** (B_3):

Кругови k_1 и k_2 додирују споља, права p сече оба од њих.

У овом случају готово да нема разлике(ни у броју кругова који испуњавају услов постављеног проблема, ни у поступку за њихово одређивање) у односу на претходно разматрани случај када је дата права p сечица само једног од датих кругова, једино се положај кругова x_1 и x_2(кругова који садрже тачку додира датих кругова k_1 и k_2) разликује у односу на претходни случај. Кругове x_1 и x_2 одређујемо инверзијом ψ_i(у односу на круг i, произвољног полупречника, са центром у додирној тачки датих кругова) (слика $9_{b_3(1)}$). Тражене кругове x_3 и x_4, кругове који не садрже поменуту додирну тачку, одређујемо инверзијом ψ_{k_1}(у односу на дати круг k_1) (слика $9_{b_3(2)}$).

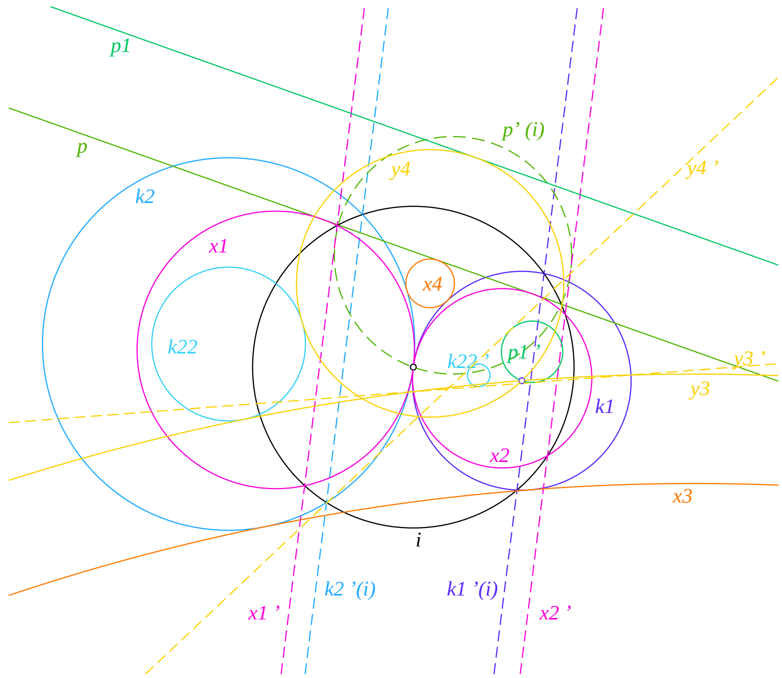


слика $9_{b3(1)}$

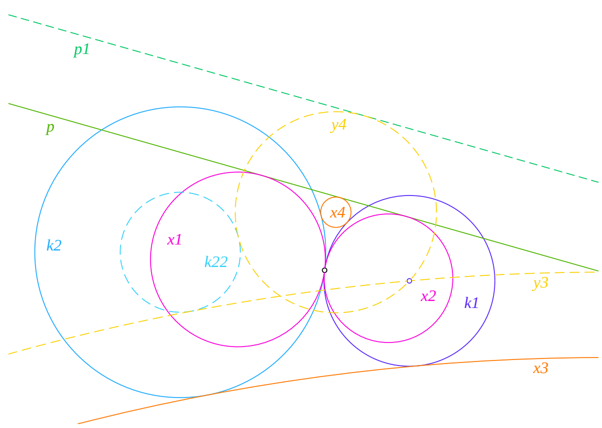


слика $9_{b3(2)}$

Као прилог дајемо слику $9_{b_3(3)}$ на којој се налази конструкција инверзијама ψ_i и ψ_{k_1} свих тражених кругова. На слици $9_{b_3(4)}$ приказана су сва четири тражена круга и помоћни концентрични кругови.



слика $9_{b3(3)}$



слика $9_{b3(4)}$

Положај у коме се дата два круга додирују споља, дата права је њихова заједничка тангента већ смо разматрали у случају A, а положај у коме се дата два круга k_1 и k_2 додирују споља, дата права p је тангента само једног од њих разматраћемо у наредном "специјалном" случају.

$\prec\!\bullet\!\succ$ **случај 9 (C):**

Дата права је тангента тачно једног од датих кругова.

Не умањујући општост узмимо да је дата права p тангента датог круга k_2. Ово ћемо сматрати сталним положајем дате праве и датог круга(фиксираним положајем случаја $9(C)$); кругу k_1 мењаћемо положај у заједничкој равни у односу на круг k_2 и праву p.

$\bullet\!\succ$ **случај 9 (C_1):**

Права p је тангента круга k_2; круг k_1 са правом p нема заједничких тачака и налази се у спољашњој области круга k_2.

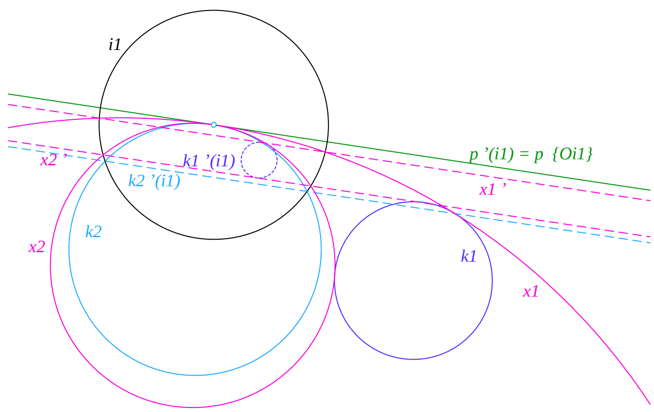
Постоји шест кругова који испуњавају услов постављеног проблема, додирују дату праву p и дата два круга k_1 и k_2. Два од њих садрже додирну тачку праве p и круга k_2, четири тражена круга не садрже поменуту тачку додира.

Одредимо најпре кругове који садрже тачку додира праве p и круга k_2. Нека је i_1 круг исте равни, произвољног полупречника, чији је центар додирна тачка праве p и круга k_2 и посматрајмо пресликавање инверзијом ψ_{i_1} у односу на круг i_1.

Дати круг k_2 садржи центар инверзије ψ_{i_1}, па је у посматраној инверзији његова слика $k_2' = \psi_{i_1}(k_2)$ права. Права p такође садржи центар инверзије, те је њена слика у инверзији ψ_{i_1} она сама, без центра инверзије: $p' = \psi_{i_1}(p) = p \backslash \{O_{i_1}\}$. Напоменимо да, како је дата права p тангента датог круга k_2, обзиром да инверзија чува једнакост углова: $\measuredangle(p, k_2) = \measuredangle(\psi_{i_1}(p), \psi_{i_1}(k_2)) = \measuredangle(p', k_2')$, праве p' и k_2' међусобно су паралелне(што се може видети приликом конструкције, одређивањем слике круга k_2 у инверзији ψ_{i_1}). Дати круг k_1 не садржи додирну тачку праве p и круга k_2(центар инверзије ψ_{i_1}), па је у посматраној инверзији његова слика $k_1' = \psi_{i_1}(k_1)$ круг. Како је дати круг k_1 дисјунктан и са правом p и са кругом k_2, ни њихове слике у инверзији немају заједничких тачака, односно круг k_2' нема заједничких тачака са паралелним правама p' и k_2'(ово је важна чињеница јер нам указује на број решења проблема, односно број тражених кругова).

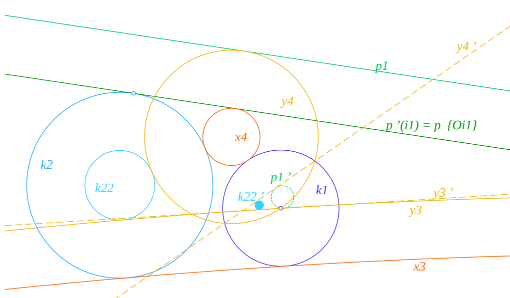
Означимо са x тражени круг који садржи тачку додира праве p и круга k_2(за тренутак претпоставимо да не знамо број решења). По претпоставци, тражени круг x садржи додирну тачку праве p и круга k_2(центар инверзије ψ_{i_1}), па је у овој инверзији његова слика $x' = \psi_{i_1}(x)$ права. Како, по нашој претпосцвци, и дата права p и дати круг k_2 и тражени круг x садрже тачку додира праве p и круга k_2, а круг x их, по услову задатка, додирује, круг x мора додиривати дате праву p и круг k_2 у њиховој додирној тачки(центру инверзије ψ_{i_1}). Пошто инверзија чува једнакост углова: $\measuredangle(x, p) = \measuredangle(\psi_{i_1}(x), \psi_{i_1}(p)) = \measuredangle(x', p')$ и $\measuredangle(x, k_2) = \measuredangle(\psi_{i_1}(x), \psi_{i_1}(k_2)) = \measuredangle(x', k_2')$, следи да су праве p', k_2' и x' међусобно паралелне. Круг x додирује дати круг k_1, па и њихове слике у инверзији, права x' и круг k_1', имају тачно једну заједничку тачку и како је: $\measuredangle(x, k_1) = \measuredangle(\psi_{i_1}(x), \psi_{i_1}(k_1)) = \measuredangle(x', k_1')$ то је права x' је тангента круга k_1'. Да резимирамо све закључке: права x' тангента је круга k_1' паралелна међусобно паралелним правама p' и k_2'. Задатак се своди на конструкцију тангенте на круг k_1', добијен одређивањем слике датог круга k_1 у инверзији ψ_{i_1}, паралелне међусобно паралелним правама k_2' и $p' = \psi_{i_1}(p) = p\backslash\{O_{i_1}\}$, где је права k_2' добијена одређивањем слике датог круга k_2 у инверзији ψ_{i_1}. Већ смо закључили да праве p' и k_2' са кругом k_1' немају заједничких тачака, отуда постоје две тангенте, означимо их са x_1' и x_2', на круг k_1' паралелне међусобно паралелним правама p' и k_2'.

На крају, тражени кругови x_1 и x_2, због особине инволутивности пресликавања инверзијом, слике су у инверзији ψ_{i_1} добијених правих x_1' и x_2': $x_1 = \psi_{i_1}^{-1}(x_1') = \psi_{i_1}(x_1')$, $x_2 = \psi_{i_1}^{-1}(x_2') = \psi_{i_1}(x_2')$ (слика $9_{c_1(1)}$).

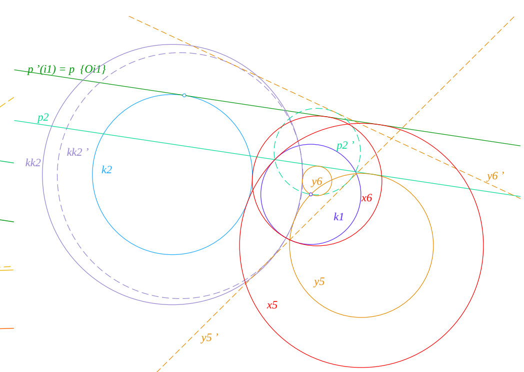


слика $9_{c1(1)}$

Преостала четири тражена круга означимо са x_3, x_4, x_5 и x_6, кругове који не садрже тачку додира праве p и круга k_2. Два од њих, нпр. x_3 и x_4, додирују дату праву p и оба дата круга k_1 и k_2 споља. Ово су кругови чије смо одређивање инверзијом ψ_{k_1}(у односу на круг k_1) објаснили у општем случају 1(слика $9_{c_1(2)}$). Преостала два тражена круга, x_5 и x_6, додирују дату праву p, дати круг k_1 изнутра, дати круг k_2 споља. Њихово смо одређивање, такође инверзијом ψ_{k_1}(у односу на k_1), објаснили у општем случају 4(слика $9_{c_1(3)}$).

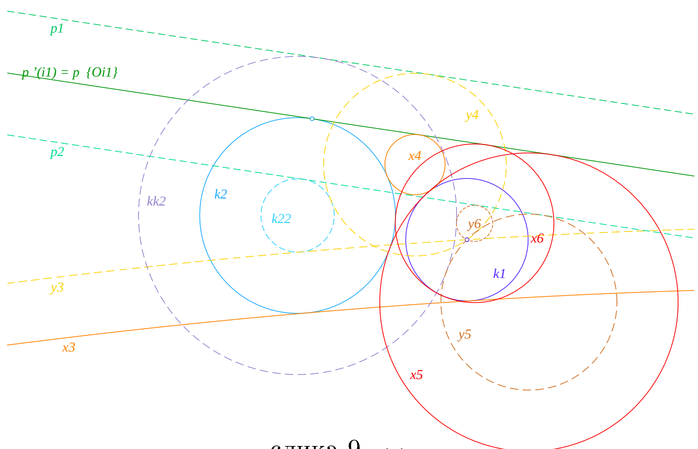


слика $9_{c1(2)}$



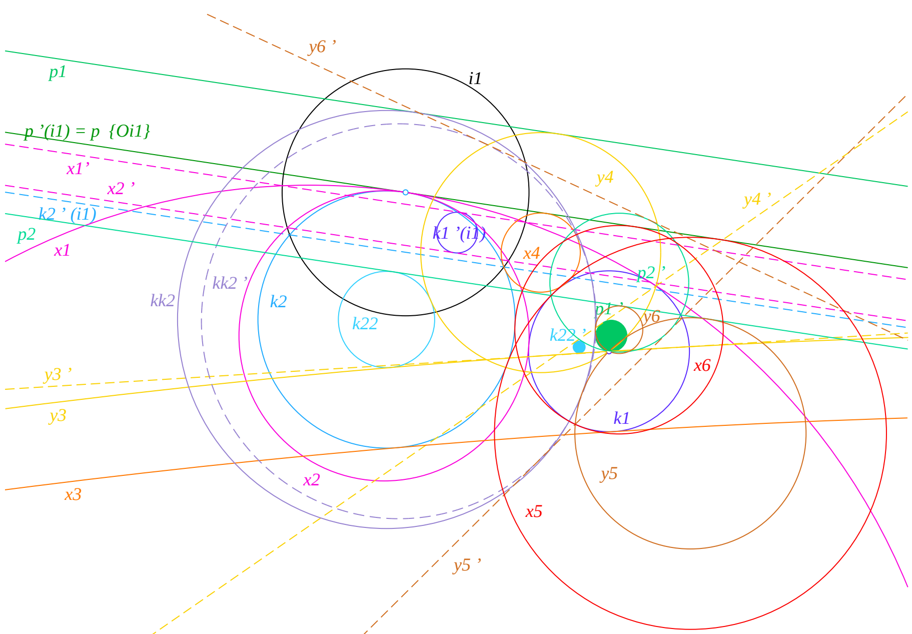
слика $9_{c1(3)}$

Слика $9_{c_1(4)}$ приказује тражене кругове x_3, x_4, x_5 и x_6 и помоћне концентричне кругове y_3, y_4, y_5 и y_6.



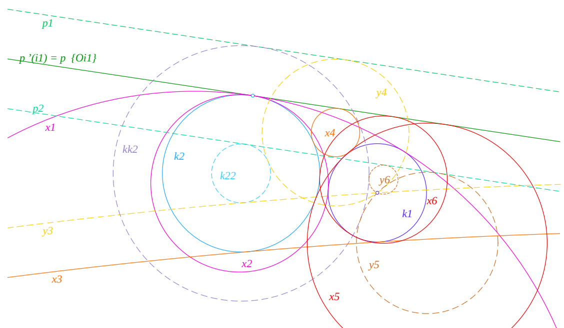
слика $9_{c1(4)}$

На слици $9_{c_1(5)}$ приказана је конструкција свих шест тражених кругова, инверзијама ψ_{i_1} и ψ_{k_1}.

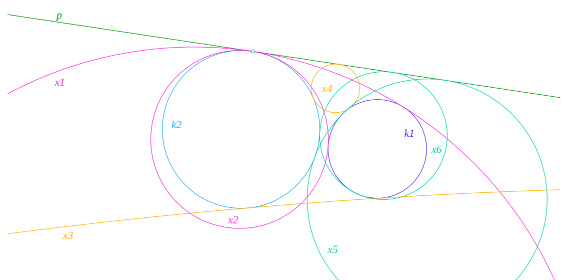


слика $9_{c1(5)}$

На слици $9_{c_1(6)}$ приказано је свих шест тражених кругова и помоћни концентрични кругови; слика $9_{c_1(7)}$ приказује само шест тражених кругова.



слика $9_{c1(6)}$



слика $9_{c1(7)}$

•≻ **случај 9** (C_2):

Права p је тангента круга k_2; кругови k_1 и k_2 се додирују споља.

Што се тиче међусобног односа дате праве p и датог круга k_1 свеједно је да ли права p сече круг k_1 или је са њим дисјунктна. У оба случаја и број тражених решења и начин њиховог одређивања биће исти.(Ово је положај датих елемената за који смо напоменули у случају $9(B)$ да ћемо га дискутовати у неком од наредних).

Постоје четири круга која испуњавају услов постављеног проблема, додирују дату праву и оба дата круга. Један тражени круг садржи тачку додира праве p и круга k_2, други садржи тачку додира кругова k_1 и k_2, два тражена решења не садрже ни једну од ових додирних тачака.

Нека је x_1 тражени круг који садржи тачку додира дате праве p и датог круга k_2. Њега одређујемо помоћу инверзије ψ_{i_1} у односу на круг i_1, произвољног полупречника, са центром у додирној тачки праве p и круга k_2, коју смо детаљно проучили у случају $9(C_1)$. Разлика ипак постоји и то у броју кругова који задовољавају овај услов. Наиме у општем случају постоје два круга која садрже посматрану додирну тачку и додирују дате праву и оба круга, но овде је такав само један круг због међусобног положаја датих кругова k_1 и k_2. Обзиром да смо то раније учинили нећемо детаљно анализирати инверзију ψ_{i_1}; кратко ћемо поновити неке изведене закључке и објаснити нове.

Дати круг k_2 садржи центар инверзије ψ_{i_1}, па је у посматраној инверзији његова слика $k_2' = \psi_{i_1}(k_2)$ права. Слично, права p такође садржи центар инверзије, те је њена слика у инверзији ψ_{i_1} она сама, без центра инверзије: $p' = \psi_{i_1}(p) = p\backslash\{O_{i_1}\}$. Права p је тангента круга k_2 и обзиром на једнакост углова: $\measuredangle(p, k_2) = \measuredangle(\psi_{i_1}(p), \psi_{i_1}(k_2)) = \measuredangle(p', k_2')$, праве p' и k_2' међусобно су паралелне. Дати круг k_1 не садржи центар инверзије ψ_{i_1}, па је у овој инверзији његова слика $k_1' = \psi_{i_1}(k_1)$ круг. Како се дати кругови k_1 и k_2 додирују споља и њихове слике у инверзији, круг k_1' и права k_2', имају тачно једну заједничку тачку, а пошто инверзија чува једнакост углова: $\measuredangle(k_1, k_2) = \measuredangle(\psi_{i_1}(k_1), \psi_{i_1}(k_2)) = \measuredangle(k_1', k_2')$, следи да је права k_2' тангента је круга k_1'(што се може видети приликом конструкције, одређивањем слика кругова k_1 и k_2 у инверзији ψ_{i_1}). Дакле, права k_2' тангента је круга k_1', паралелна прави p'(ово је разлог због кога постоји само један тражени круг).

Тражени круг x_1 садржи додирну тачку праве p и круга k_2(у тој их тачки и додирује), а она је центар инверзије, па је у инверзији ψ_{i_1} његова слика $x_1' = \psi_{i_1}(x_1)$ права. Инверзија чува једнакост углова: $\measuredangle(x_1, p) = \measuredangle(\psi_{i_1}(x_1), \psi_{i_1}(p)) = \measuredangle(x_1', p')$ и $\measuredangle(x_1, k_2) = \measuredangle(\psi_{i_1}(x_1), \psi_{i_1}(k_2)) = \measuredangle(x_1', k_2')$, те следи да су праве p', k_2' и x_1' међусобно паралелне. Круг x_1 додирује дати круг k_1, те њихове слике у инверзији, права x_1' и круг k_1', имају тачно једну заједничку тачку, а због једнакости углова приликом пресликавања инверзијом: $\measuredangle(x_1, k_1) = \measuredangle(\psi_{i_1}(x_1), \psi_{i_1}(k_1)) = \measuredangle(x_1', k_1')$, права x_1' тангента је круга k_1'. Да закључимо: права x_1' тангента је круга k_1' паралелна међусобно паралелним правама p' и k_2', где је k_2' такође тангента круга k_1', те се задатак се своди на конструкцију друге тангенте, x_1', на круг k_1', добијен одређивањем слике датог круга k_1 у инверзији ψ_{i_1}, паралелне међусобно паралелним правама $p' = \psi_{i_1}(p) = p\backslash\{O_{i_1}\}$ и k_2', где је права k_2' добијена одређивањем слике у инверзији ψ_{i_1} датог круга k_2.

Коначно, због особине инволутивности, тражени круг x_1 слика је у инверзији ψ_{i_1} добијене праве x_1': $x_1 = \psi_{i_1}^{-1}(x_1') = \psi_{i_1}(x_1)$.

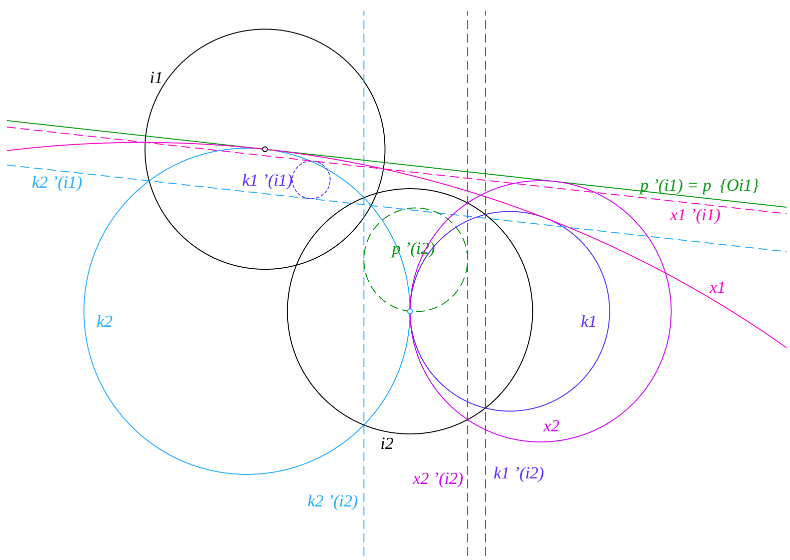
Круг који садржи додирну тачку датих кругова k_1 и k_2 назовимо x_2. Одређивање овог круга било је детаљно објашњено у случају $9(B_1)$, обзиром да је ово био стални положај датих кругова. Но и овде, као и у случају одређивања круга x_1, из сличних разлога, постоји само један тражени круг(у општем случају их је два која садрже додирну тачку). Укратко ћемо поновити: круг x_2 одређујемо инверзијом ψ_{i_2}, у односу на круг i_2 исте равни, произвољног полупречника, чији је центар додирна тачка кругова k_1 и k_2.

У инверзији ψ_{i_2} слике $k_1' = \psi_{i_2}(k_1)$ и $k_2' = \psi_{i_2}(k_2)$ редом датих кругова k_1 и k_2 су паралелне праве k_1' и k_2'(јер се они додирују у центру посматране инверзије). У инверзији ψ_{i_2} слика $p' = \psi_{i_2}(p)$ дате праве p је круг, јер она не садржи центар посматране инверзије. Како је права p тангента круга k_2 то и њихове слике у инверзији, круг p' и права k_2', имају тачно једну заједничку тачку, и обзиром да инверзија чува једнакост углова: $\measuredangle(p, k_2) = \measuredangle(\psi_{i_2}(p), \psi_{i_2}(k_2)) = \measuredangle(p', k_2')$, следи да је права k_2' тангента круга p'(што се може видети приликом конструкције, одредивањем слика круга k_2 и праве p у инверзији ψ_{i_2}). Дакле, права k_2' тангента је круга p', паралелна прави k_1'(ово је разлог због кога постоји само један тражени круг).

Тражени круг x_2, по нашем услову, садржи тачку додира кругова k_1 и k_2, центар инверзије ψ_{i_2}, па је у посматраној инверзији њихова слика $x_2' = \psi_{i_2}(x_2)$ права, а како, по услову задатка, круг x_2 додирује оба дата круга k_1 и k_2, сва три круга се додирују у центру инверзије ψ_{i_2}, те су њихове слике, праве x_2', k_1' и k_2', међусобно паралелне. Круг x_2 додирује дату праву p, те њихове слике у инверзији, права x_2' и круг p', имају тачно једну заједничку тачку и због једнакости углова приликом пресликавања инверзијом следи да је права x_2' тангента је круга p'. Задатак се своди на конструкцију друге тангенте, x_2', на круг p', добијен одређивањем слике у инверзији ψ_{i_2} дате праве p, паралелне међусобно паралелним правама k_1' и k_2', добијеним одређивањем слика датих кругова k_1 и k_2 у инверзији ψ_{i_2}, где је права k_2' такође тангента круга p'.

На крају, обзиром на особину инволутивности пресликавања инверзијом, тражени круг x_2 слика је у инверзији ψ_{i_2} добијене праве x_2': $x_2 = \psi_{i_2}^{-1}(x_2') = \psi_{i_2}(x_2)$.

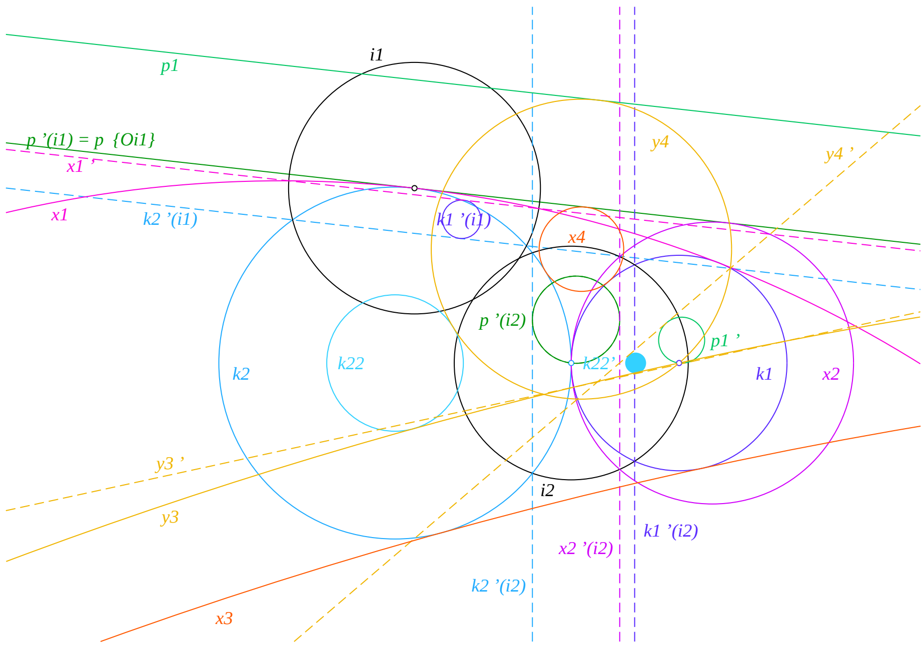
Слика $9_{c_2(1)}$ приказује конструкцију инверзијама ψ_{i_1} и ψ_{i_2} кругова x_1 и x_2.



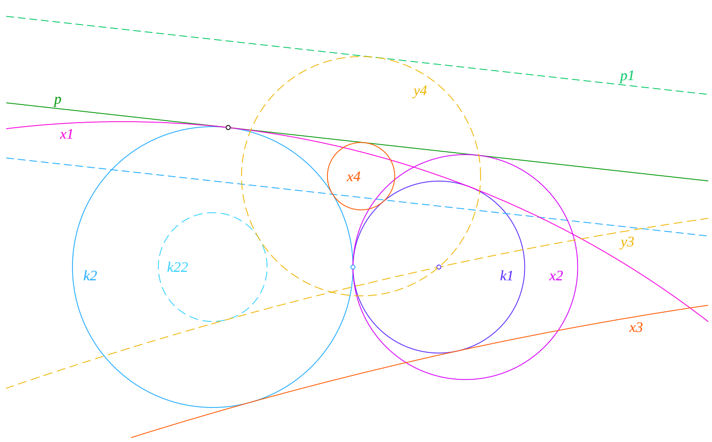
слика $9_{c2(1)}$

Преостала два тражена круга назовимо x_3 и x_4, кругове који не садрже ни једну од додирних тачака(дате праве p и датог круга k_1, односно датих кругова k_1 и k_2). Ови кругови додирују дату праву p и оба дата круга k_1 и k_2 споља. Њихово смо одређивање инверзијом ψ_{k_1}(у односу на дати круг k_1) детаљно објаснили у општем случају 1.

Слика $9_{c_2(2)}$ приказује конструкцију свих тражених кругова инверзијама ψ_{i_1}, ψ_{i_2} и ψ_{k_1}. На слици $9_{c_2(3)}$ приказана су сва четири тражена круга и помоћни концентрични кругови.



слика $9_{c2(2)}$



слика $9_{c2(3)}$

Иако случај који ћемо сада изложити није ни по чему специфичан, природно га је поменути, јер се положај задатих елемента намеће као следећи по реду:

•≻ **случај 9** (C_3):

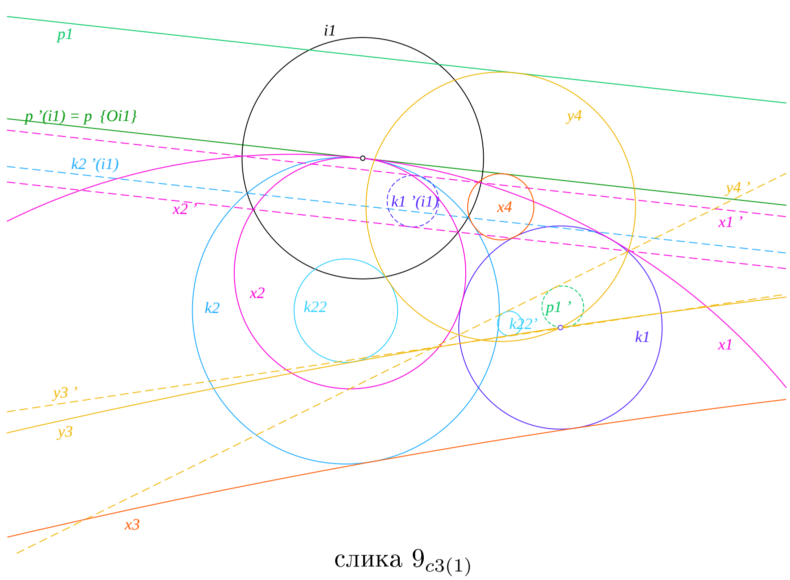
Права p је тангента круга k_2; кругови k_1 и k_2 се секу.

Положај дате праве p и датог круга k_1 није битан, свеједно је да ли је права p дисјунктна са кругом k_1 или је његова сечица(број тражених решења и начин њиховог одређивања је исти).

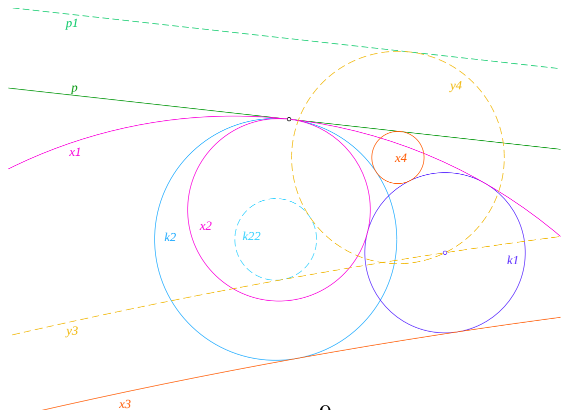
Четири круга задовољавају услов задатка. Два тражена круга садрже тачку додира дате праве p и датог круга k_2, два не садрже ову додирну тачку.

Већ смо напоменули да у овом положају нема ничег специфичног, те ћемо укратко: тражене кругове x_1 и x_2, који садрже тачку додира праве p и круга k_2, одређујемо инверзијом ψ_{i_1} у односу на круг i_1(произвољног полупречника, са центром у тој додирној тачки). Кругове x_3 и x_4, који не садрже поменуту додирну тачку, одређујемо инверзијом ψ_{k_1}(у односу на дати круг k_1) објашњене у општем случају 1.

Слика $9_{c_3(1)}$ приказује конструкцију инверзијама ψ_{i_1} и ψ_{k_1} сва четири тражена круга. Слика $9_{c_3(2)}$ приказује сва четири тражена круга и помоћне концентричне кругове.



слика $9_{c3(1)}$



слика $9_{c3(2)}$

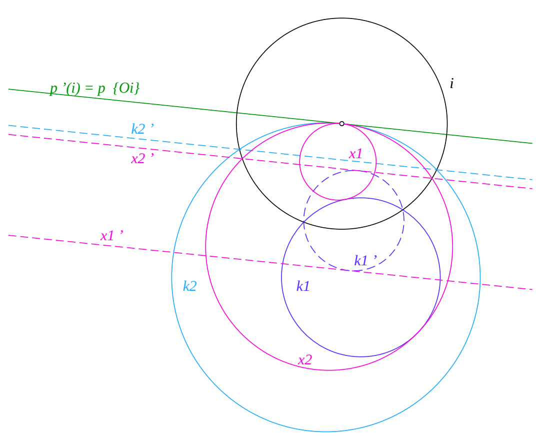
Редом следећи требао би бити положај када је дата права p тангента круга k_2, а кругови k_1 и k_2 се додирију изнутра. Њега ћемо оставити за наредни " специјалан" случај. У овом, случају (C), као подслучај преостаје последњи могући положај задатих елемената равни(мада ни он нема специфичности):

•≻ **случај 9 (C_4)**:

Права p је тангента круга k_2; круг k_1 налази се у унутрашњој области круга k_2 .

Постоје само два круга која додирују дату праву и дате кругове постављене у овакав положај, при чему оба тражена круга садрже додирну тачку дате праве p и датог круга k_2 и у тој тачки додирују праву p и круг k_2. Један од њих додирује дати круг k_1 споља, други тражени круг додирује круг k_1 изнутра. Тражене кругове, у ознаци x_1 и x_2, одређујемо помоћу детаљно анализиране инверзије ψ_i(у односу на круг i исте равни, произвољног полупречника, са центром у додирној тачки праве p и круга k_2).

На слици $9_{c_4(1)}$ приказана је конструкција тражених кругова x_1 и x_2.



слика $9_{c4(1)}$

≺•≻ случај 9 (D):

Дата два круга додирују се изнутра, дата права мења положај у заједничкој равни.

Нека се дати се кругови k_1 и k_2 додирују изнутра и ово ћемо сматрати њиховим сталним положајем овог случаја; датој прави p мењаћемо положај у односу на њих.

•≻ случај 9 (D_1):

Кругови k_1 и k_2 додирују се изнутра, права p ни са једним од датих кругова нема заједничких тачака.

Постоје само два круга која испуњавају услов постављеног проблема: додирују дате кругове и праву, задате у овај положај. Оба тражена круга садрже тачку додира датих кругова(у њој и додирују кругове k_1 и k_2).

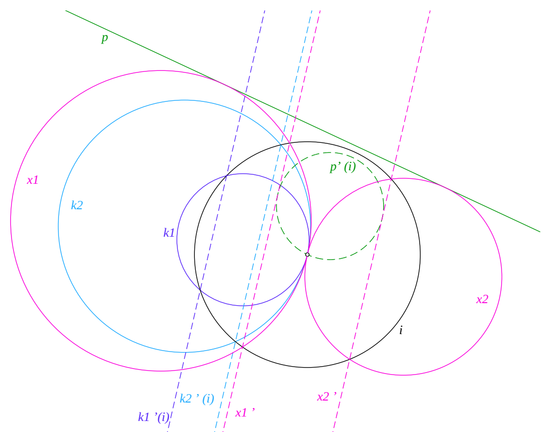
Тражене кругове одредићемо инверзијом ψ_i, у односу на круг i исте равни, произвољног полупречника, чији је центар тачка додира кругова k_1 и k_2(обзиром да је положај датих кругова сталан ово ће бити инверзија коју ћемо, уз још неке, користити у сваком наредном подслучају случаја 9(D)).

Дати кругови k_1 и k_2 садрже центар посматране инверзије, те су у овој инверзији њихове слике $k_1' = \psi_i(k_1)$ и $k_2' = \psi_i(k_2)$ праве. Како се кругови k_1 и k_2 додирују у центру инверзије, а инверзија чува једнакост углова: $\measuredangle(k_1, k_2) = \measuredangle(\psi_i(k_1), \psi_i(k_2)) = \measuredangle(k_1', k_2')$, праве k_1' и k_2' међусобно су паралелне(што се може видети и у конструкцији приликом одредивања слика кругова k_1 и k_2 инверзијом ψ_i). Дата права p не садржи центар посматране инверзије, па је у инверзији ψ_i њена слика $p' = \psi_i(p)$ круг(иако овде није од важности напоменимо да, по дефиницији, круг p' садржи центар инверзије).

Поставимо се као да не знамо број решења и означимо са x тражени круг који садржи додирну тачку датих кругова k_1 и k_2(обзиром да постоје два таква круга, круг x, нешто касније, преименоваћемо у x_1 и x_2). По нашој претпоставци, тражени круг x садржи додирну тачку датих кругова, центар инверзије, па је у инверзији ψ_i његова слика $x' = \psi_i(x)$ права. Оба дата круга k_1 и k_2 и тражени круг x садрже центар посматране инверзије, а x их, по услову задатка, додирује оба, што може бити испуњено само ако x дате кругове додирује у њиховој додирној тачки. Пошто инверзија чува једнакост углова: $\measuredangle(x, k_1) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k_1)) = \measuredangle(x', k_1')$ и $\measuredangle(x, k_2) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k_2)) = \measuredangle(x', k_2')$, следи да су праве k_1', k_2' и x' међусобно паралелне. Круг x додирује дату праву p, те и њихове слике у инверзији, права x' и круг p', имају тачно једну заједничку тачку, и важи: $\measuredangle(x, p) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(p)) = \measuredangle(x', p')$, што значи је права x' тангента круга p'. Дакле, права x' тангента је круга p' паралелна међусобно паралелним правама k_1' и k_2'. Задатак се своди на конструкцију тангенте на круг p', добијен одређивањем слике дате праве p у инверзији ψ_i, паралелне међусобно паралелним правама k_1' и k_2', добијеним као слике у инверзији ψ_i датих кругова k_1 и k_2. Како дата права p са датим круговима k_1 и k_2 нема заједничких тачака, немају их ни њихове слике, круг p' и праве k_1' и k_2', па постоје две тангенте, x_1' и x_2', на круг

p' паралелне правама k_1' и k_2'(међусобно паралелним).

Коначно, тражени кругови x_1 и x_2 слике су у инверзији ψ_i добијених правих x_1' и x_2'(особина инволутивности пресликавања инверзијом у односу на круг): $x_1 = \psi_i^{-1}(x_1') = \psi_i(x_1')$, $x_2 = \psi_i^{-1}(x_2') = \psi_i(x_2')$ (слика $9_{d_1(1)}$).



слика $9_{d1(1)}$

•≻ **случај 9** (D_2):

Кругови k_1 и k_2 се додирују изнутра, права p тангента је круга k_2. (Ово је положај који смо прескочили у случају $9(C)$, уз напомену да ћемо га обрадити овде.)

Само два круга испуњавају услов постављеног проблема: додирују дате кругове и дату праву, постављене у овакав положај. Један тражени круг садржи тачку додира дате праве p и круга k_2(у тој тачки их и додирује) и додирује дати круг k_1 споља. Други тражени круг садржи додирну тачку датих кругова(у којој их оба додирује) и наравно, додирује дату праву.

Одредимо прво тражени круг, у ознаци x_1, који садржи додирну тачку праве p и круга k_2. Круг x_1 одређујемо инверзијом ψ_{i_1}, у односу на круг i_1, исте равни, произвољног полупречника, са центром у додирној тачки праве p и круга k_2. Ово је био стални положај праве p и круга k_2 у случају $9(C)$, те смо се овом инверзијом служили више пута. Сада ћемо само укратко поновити неке закључке и установити разлог због кога постоји само једно тражено решење, јер их је два у општем случају.

Наиме, дати круг k_2 садржи центар инверзије ψ_{i_1}, па је у посматраној инверзији његова слика $k_2' = \psi_{i_1}(k_2)$ права. Права p такође садржи центар инверзије, те је њена слика у инверзији ψ_{i_1} она сама, без центра инверзије: $p' = \psi_{i_1}(p) = p \backslash \{O_{i_1}\}$. Како је права p тангента круга k_2, обзиром на једнакост углова $\measuredangle(p, k_2) = \measuredangle(\psi_{i_1}(p), \psi_{i_1}(k_2)) = \measuredangle(p', k_2')$, праве p' и k_2' су међусобно паралелне. Дати круг k_1 не садржи центар инверзије ψ_{i_1} , одакле је његова слика у инверзији $k_1' = \psi_{i_1}(k_1)$ круг. Пошто се дати кругови k_1 и k_2 додирују изнутра то и њихове слике у инверзији, круг k_1' и права

k_2', имају тачно једну заједничку тачку, и на основу једнакости углова: $\measuredangle(k_1,k_2) = \measuredangle(\psi_{i_1}(k_1),\psi_{i_1}(k_2)) = \measuredangle(k_1',k_2')$, следи да је права k_2' тангента круга k_1'(што се може видети приликом конструкције, одредивањем слика кругова k_1 и k_2 у инверзији ψ_{i_1}). Дакле, права k_2' тангента је круга k_1', паралелна прави p'(ово је разлог због кога постоји само један тражени круг).

Тражени круг x_1 садржи додирну тачку праве p и круга k_2, центар инверзије ψ_{i_1}, па је у посматраној инверзији његова слика $x_1' = \psi_{i_1}(x_1)$ права.(круг x_1 по нашем услову, додирује дату праву p и дати круг k_2 и садржи њихову додирну тачку што може бити испуњено само ако их додирује у њиховој тачки додира). Како инверзија чува једнакост углова: $\measuredangle(x_1,p) = \measuredangle(\psi_{i_1}(x_1),\psi_{i_1}(p)) = \measuredangle(x_1',p')$ и $\measuredangle(x_1,k_2) = \measuredangle(\psi_{i_1}(x_1),\psi_{i_1}(k_2)) = \measuredangle(x_1',k_2')$, то су праве p', k_2' и x_1' међусобно паралелне. Круг x_1 додирује дати круг k_1, па и њихове слике у инверзији, права x_1' и круг k_1', имају тачно једну заједничку тачку и због једнакости углова приликом пресликавања инверзијом: $\measuredangle(x_1,k_1) = \measuredangle(\psi_{i_1}(x_1),\psi_{i_1}(k_1)) = \measuredangle(x_1',k_1')$, следи да је права x_1' тангента круга k_1'. Да закључимо: права x_1' тангента је круга k_1' паралелна међусобно паралелним правама p' и k_2', где је k_2' такође тангента круга k_1', те се задатак се своди на конструкцију друге тангенте, x_1', на круг k_1', добијен одређивањем слике датог круга k_1 у инверзији ψ_{i_1}, паралелне међусобно паралелним правама $p' = \psi_{i_1}(p) = p\backslash\{O_{i_1}\}$ и k_2', где је права k_2' друга тангента круга k_1' добијена одређивањем слике у инверзији ψ_{i_1} датог круга k_2.

Коначно, на основу особине инволутивности пресликавања инверзијом у односу на круг, тражени круг x_1 слика је у инверзији ψ_{i_1} добијене праве x_1': $x_1 = \psi_{i_1}^{-1}(x_1') = \psi_{i_1}(x_1)$.

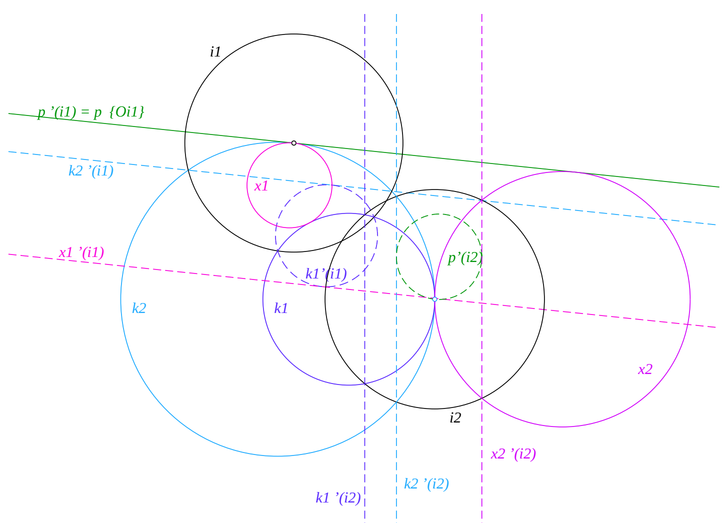
Означимо са x_2 тражени круг који садржи додирну тачку датих кругова k_1 и k_2. Одређивање овог круга било је детаљно објашњено у случају $9(D_1)$, обзиром да је ово стални положај датих кругова у случају $9(D)$. Но и овде, као и у случају одређивања круга x_1, из сличних разлога, постоји само један круг који испуњава услов постављеног проблема(у општем случају их је два). Укратко ћемо поновити: круг x_2 одређујемо инверзијом ψ_{i_2} у односу на круг i_2 исте равни, произвољног полупречника, са центром у додирној тачки кругова k_1 и k_2(ову инверзију смо у случају $9(D_1)$ означили са ψ_i).

У инверзији ψ_{i_2} слике $k_1' = \psi_{i_2}(k_1)$ и $k_2' = \psi_{i_2}(k_2)$ датих кругова k_1 и k_2 су паралелне праве k_1' и k_2'(јер се они додирују у центру посматране инверзије, а инверзија чува једнакост углова). Слика дате праве p у инверзији ψ_{i_2} је круг $p' = \psi_{i_2}(p)$, јер она не садржи центар посматране инверзије. Права p тангента је круга k_2 па и њихове слике, круг p' и права k_2', у инверзији ψ_{i_2} имају тачно једну заједничку тачку, а пошто важи једнакост углова: $\measuredangle(p,k_2) = \measuredangle(\psi_{i_2}(p),\psi_{i_2}(k_2)) = \measuredangle(p',k_2')$, то је права k_2' тангента круга p'. Дакле, права k_2' тангента је круга p', паралелна прави k_1'(ово је разлог због кога постоји само један тражени круг).

Тражени круг x_2 садржи тачку додира кругова k_1 и k_2, центар инверзије ψ_{i_2}, па је у инверзији ψ_{i_2} њихова слика $x_2' = \psi_{i_2}(x_2)$ права, а како, по постављеном услову, додирује оба круга k_1 и k_2, сва три круга се додирују у центру инверзије ψ_{i_2}, те су, на основу једнакости углова: $\measuredangle(x_1,k_1) = \measuredangle(\psi_{i_2}(x_1),\psi_{i_2}(k_1)) = \measuredangle(x_1',k_1')$ и $\measuredangle(x_1,k_2) = \measuredangle(\psi_{i_2}(x_1),\psi_{i_2}(k_2)) = \measuredangle(x_1',k_2')$, њихове слике, праве x_2', k_1' и k_2', међусобно паралелне. Круг x_2 додирује дату праву p, па њихове слике у инверзији, права x_2' и круг p', имају тачно једну заједничку тачку и важи: $\measuredangle(x_1, p) = \measuredangle(\psi_{i_2}(x_1), \psi_{i_2}(p)) = \measuredangle(x_1', p')$, што значи да је права x_2' тангента је круга p'. Задатак се своди на конструкцију друге тангенте, x_2', на круг p', добијен одређивањем слике дате праве p у инверзији ψ_{i_2}, паралелне међусобно паралелним правама k_1' и k_2', добијеним одређивањем слика датих кругова k_1 и k_2 у инверзији ψ_{i_2}, где је права k_2' друга тангента круга p'.

На крају, обзиром да је инверзија инволутивно пресликавање, тражени круг x_2 слика је у инверзији ψ_{i_2} добијене праве x_2': $x_2 = \psi_{i_2}^{-1}(x_2') = \psi_{i_2}(x_2)$.

На слици $9_{d_2(1)}$ приказана је конструкција помоћу инверзија ψ_{i_1} и ψ_{i_2} оба тражена круга x_1 и x_2.



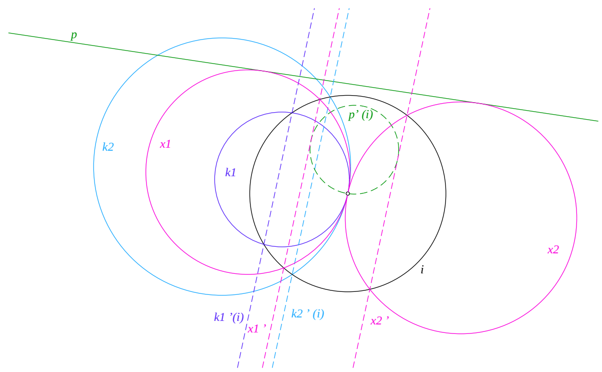
слика $9_{d2(1)}$

•≻ **случај 9** (D_3):

Кругови k_1 и k_2 додирују се изнутра, дата права p дисјунктна је са једним датим кругом, а сече други дати круг или је права p сечица оба дата круга.

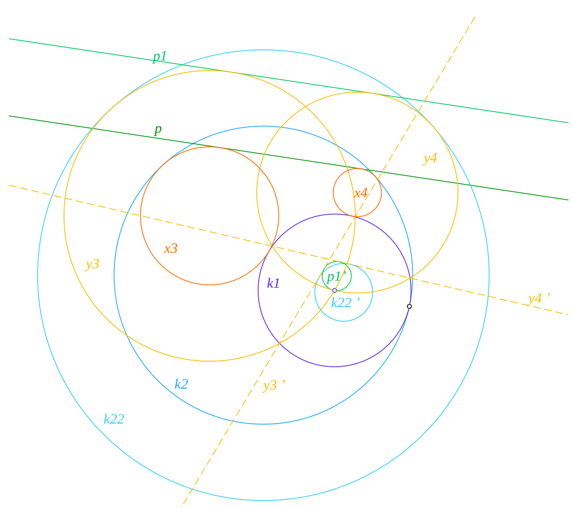
Не постоји разлика нити у броју решења, нити у начину на који тражени кругови додирују дате кругове и дату праву, било да је дата права p сечица само једног или оба дата круга. У сваком случају, постоје тачно четири круга која испуњавају услов постављеног проблема. Два од њих садрже додирну тачку датих кругова, преостала два не садрже поменуту тачку додира.

Тражене кругове, у ознаци x_1 и x_2, који садрже тачку додира датих кругова k_1 и k_2 одређујемо инверзијом ψ_i(у односу на круг i, произвољног полупречника, са центром у додирној тачки датих кругова), објашњене у случају $9(D_1)$(слика $9_{d_3(1)}$).



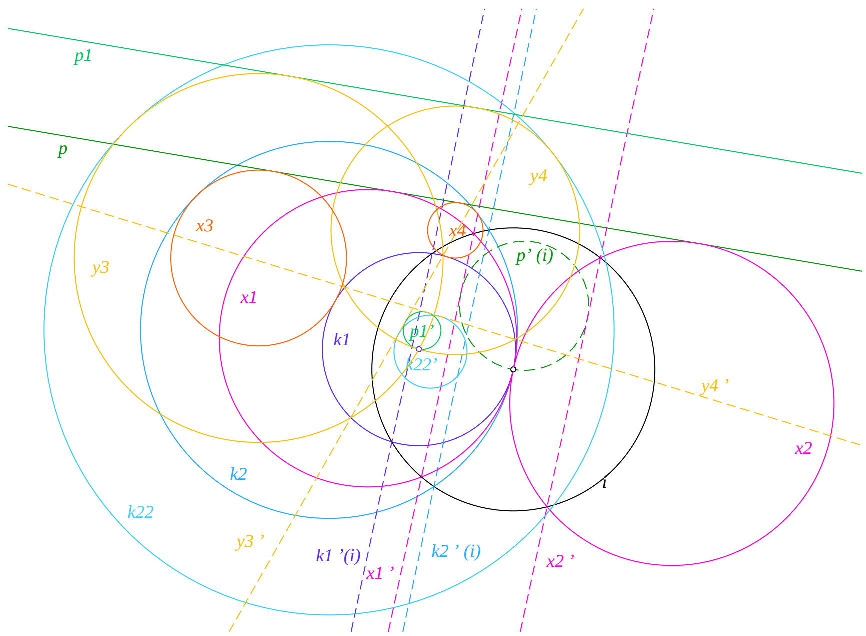
слика $9_{d3(1)}$

Тражени кругови, у ознаци x_3 и x_4, који не садрже тачку додира датих кругова, додирују дату праву, дати круг k_1 споља а дати круг k_2 изнутра. Ово су кругови чије смо одређивање објаснили у општем случају 3(помоћу инверзије ψ_{k_1}, у односу на дати круг k_1)(на слици $9_{d_3(2)}$ приказана је конструкција кругова x_3 и x_4).

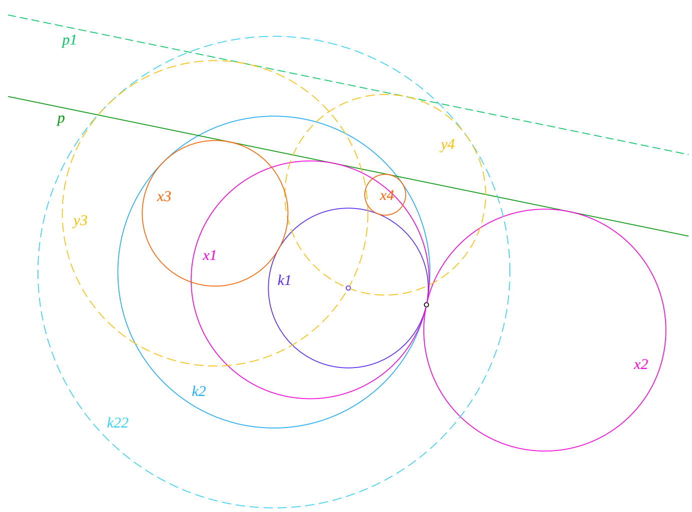


слика $9_{d3(2)}$

Слика $9_{d_3(3)}$ приказује конструкцију инверзијама ψ_i и ψ_{k_1} сва четири тражена круга, у случају да је права p сечица само једног датог круга. Слика $9_{d_3(4)}$ приказује сва четири тражена круга и помоћне концентричне кругове, у случају да је права p сечица само једног датог круга.

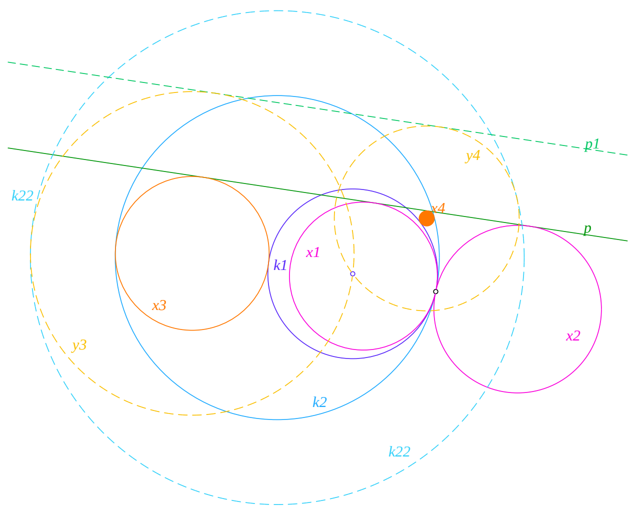


слика $9_{d3(3)}$



слика $9_{d3(4)}$

Слика $9_{d_3(5)}$ приказује сва четири тражена круга и помоћне концентричне кругове, у случају да дата права p сече оба дата круга.



слика $9_{d3(5)}$

Дошли смо до последњег могућег начина на који могу бити задати дата права и кругови у равни(овог случаја).

•≻ **случај 9 (D_4)**:

Кругови k_1 и k_2 додирују се изнутра, дата права p тангента је датог круга k_1.

Четиру круга испуњавају постављени услов: додирују дате кругове и дату праву. Један тражени круг садржи тачку додира дате праве p и датог круга k_1; други тразхени круг садржи тачку додира датих кругова k_1 и k_2; преостала два круга не садрже ни једну од поменутих додирних тачака.

Одредимо прво тражени круг, у ознаци x_1, који садржи додирну тачку праве p и круга k_1.(одређивање овог круга слично је одређивању круга који садржи тачку додира дате праве p и датог круга k_2, а објашњен је у случају $9(D_2)$, у ком је дата права p тангента круга k_2).

Означимо са i_1 круг исте равни, произвољног полупречника, са центром у додирној тачки праве p и круга k_1, а са ψ_{i_1} инверзију у односу на овај круг. Ова се инверзија појављује први пут у оквиру овог случаја, али је слична инверзији коју смо користили у случају да је права p тангента круга k_2, те је нећемо преопширно објашњавати.

Наиме, дата права p садржи центар инверзије ψ_{i_1}, па је њена слика у посматраној инверзији она сама, без центра инверзије, $p' = \psi_{i_1}(p) = p \backslash \{O_{i_1}\}$. Круг k_1 такође садржи центар инверзије ψ_{i_1}, па је у инверзији ψ_{i_1} његова слика $k_1' = \psi_{i_1}(k_1)$ права.

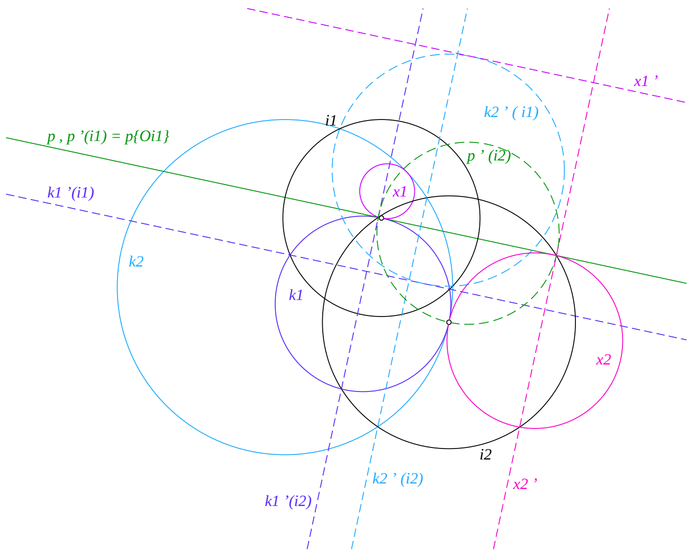
Како је права p тангента датог круга k_1, пошто важи једнакост углова: $\measuredangle(p, k_1) = \measuredangle(\psi_{i_1}(p), \psi_{i_1}(k_1)) = \measuredangle(p', k_1')$ следи да су праве p' и k_1' међусобно паралелне. Дати круг k_2 не садржи центар инверзије ψ_{i_1}, те је у овој инверзији његова слика $k_2' = \psi_{i_1}(k_2)$ круг. Пошто се дати кругови k_1 и k_2 додирују(изнутра) то и њихове слике, права k_1' и круг k_2', у инверзији ψ_{i_1} имају тачно једну заједничку тачку и како је: $\measuredangle(k_1, k_2) = \measuredangle(\psi_{i_1}(k_1), \psi_{i_1}(k_2)) = \measuredangle(k_1', k_2')$, права k_1' тангента је круга k_2'(што се може видети конструкцијом слика кругова k_1 и k_2 у инверзији ψ_{i_1}). Да сумирамо до сада наведено: права k_1' је тангента круга k_2', паралелна прави p'(ово је разлог што постоји само један тражени круг, јер их је два у општем случају, тј. у случају да се дати кругови k_1 и k_2 не додирују, било споља или изнутра).

Тражени круг x_1, по нашој претпоставци, садржи додирну тачку праве p и круга k_1, центар инверзије ψ_{i_1}, те је у овој инверзији његова слика $x_1' = \psi_{i_1}(x_1)$ права. Напоменимо да круг x_1, по услову задатка, додирује дате праву p и круг k_1, а по претпостављеном услову садржи њихову додирну тачку, што може бити испуњено само ако круг x_1 додирује праву p и круг k_1 у њиховој тачки додира. Пошто инверзија чува једнакост углова: $\measuredangle(x_1, p) = \measuredangle(\psi_{i_1}(x_1), \psi_{i_1}(p)) = \measuredangle(x_1', p')$ и $\measuredangle(x_1, k_1) = \measuredangle(\psi_{i_1}(x_1), \psi_{i_1}(k_1)) = \measuredangle(x_1', k_1')$, праве p', k_1' и x_1' међусобно су паралелне. Круг x_1 додирује дати круг k_2, па њихове слике у инверзији ψ_{i_1}, права x_1' и круг k_2', имају тачно једну заједничку тачку, а због једнакости углова приликом пресликавања инверзијом: $\measuredangle(x_1, k_2) = \measuredangle(\psi_{i_1}(x_1), \psi_{i_1}(k_2)) = \measuredangle(x_1', k_2')$, следи да је права x_1' тангента круга k_2'. Дакле, права x_1' тангента је круга k_2' паралелна међусобно паралелним правама p' и k_1', где је права k_1' такође тангента круга k_2' и задатак се своди на конструкцију друге тангенте x_1', на круг k_2', добијен као слика датог круга k_2 у инверзији ψ_{i_1}, паралелне међусобно паралелним правама $p' = \psi_{i_1}(p) = p \backslash \{O_{i_1}\}$ и k_1', где је права k_1' добијена одређивањем слике у инверзији ψ_{i_1} датог круга k_1.

На крају, тражени круг x_1 слика је у инверзији ψ_{i_1} добијене праве x_1': $x_1 = \psi_{i_1}^{-1}(x_1') = \psi_{i_1}(x_1)$.

Тражени круг, у ознаци x_2 , који садржи додирну тачку датих кругова k_1 и k_2, одређујемо помоћу добро познате и у сваком подслучају случаја $9(D)$ кориш ћене инверзије ψ_i(односу на круг i исте равни, произвољног полупречника, чији је центар додирна тачка датих кругова), с тим што је, слично као у подслучају $9(D_2)$, овог пута права k_1' тангента круга p', јер је дата права p тангента датог круга k_1(на слици је инверзија ψ_i означена са ψ_{i_2}, обзиром да смо горњу инверзију означили са ψ_{i_1}).

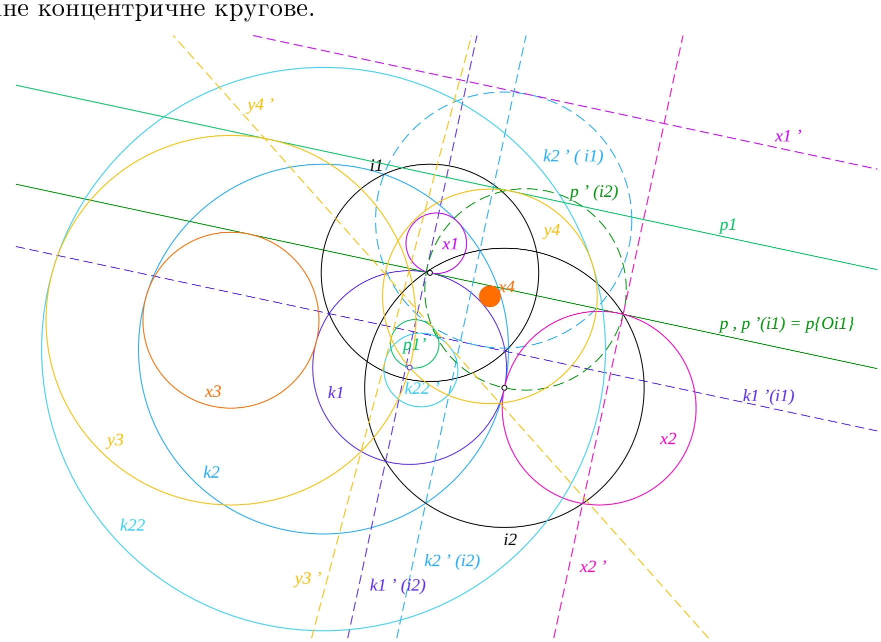
Слика $9_{d_4(1)}$ приказује конструкцију тражених кругова x_1 и x_2 помоћу инверзија ψ_{i_1} и ψ_{i_2}.



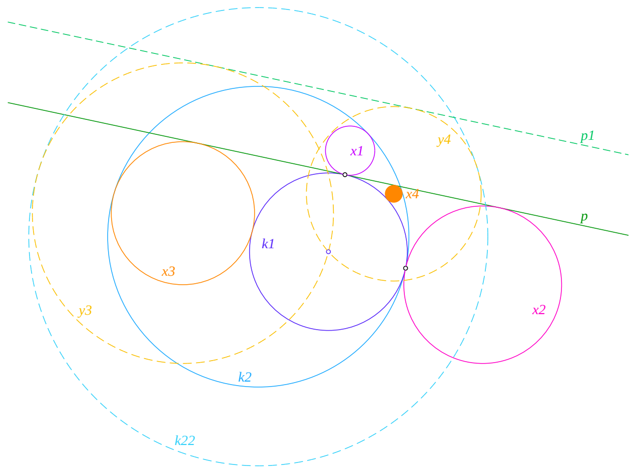
слика $9_{d4(1)}$

Тражени кругови, у ознаци x_3 и x_4, који не садрже ни једну од две поменуте додирне тачке, додирују дату праву и дати круг k_1 споља, дати круг k_2 изнутра. Ово су кругови чије смо одређивање објаснили у општем случају 3(помоћу инверзије ψ_{k_1}, у односу на дати круг k_1).

На слици $9_{d_4(2)}$ приказана је конструкција сва четири тражена круга(помоћу све три инверзије ψ_{k_1}, ψ_{i_1} и ψ_{i_2}). Слика $9_{d_4(3)}$ приказује сва четири тражена круга и помоћне концентричне кругове.



слика $9_{d4(2)}$



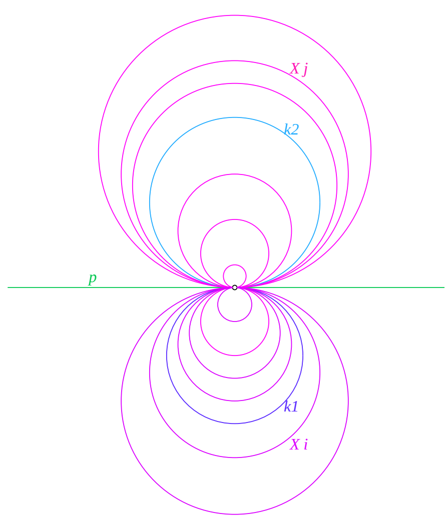
слика $9_{d4(3)}$

≺•≻ **случај 9 (** E **)**:

Дата два круга k_1 и k_2 додирују се, споља или изнутра; дата права p њихова је заједничка тангента и додирује их оба у њиховој додирној тачки.

Дате кругове k_1 и k_2 можемо посматрати као кругове који припадају параболичком прамену кругова коме је дата права p радикална оса.

У овом случају сваки круг истог прамена задовољава услов постављеног проблема и може се сматрати траженим решењем. Дакле, посматрани прамен је тражено ресхење овог проблема(слика 9_e).



слика 9_e

≺•≻ Аполонијев проблем 10 ≺•≻

↬Конструисати круг који додирује дата три круга (k_1, k_2, k_3).

решење:

Нека су дати кругови $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$, $k_3(O_3, r_3)$ неке равни, а x тражени круг те равни који додирује сва три дата круга. Не умањујући општост узмимо да је дати круг $k_1(O_1, r_1)$ круг најмањег полупречника, $r_1 = min\{r_1, r_2, r_3\}$.

У најопштијем случају, када дати кругови k_1, k_2, k_3 немају заједничких тачака, при чему се сваки од њих налази у спољашњој области друга два, постоји осам кругова који задовољавају услов постављеног проблема. За њихово одређивање биће нам потребно анализирање начина(у смислу додиривања споља или изнутра) на који тражени круг додирује дате. Анализу морамо поделити на четири случаја.

◊ Случај 1:

1. Посматрајмо кругове k_{22} и k_{33} исте равни, концентричне редом датим круговима k_2 и k_3, при чему је $k_{22}(O_2, r_{22} = r_2 - r_1)$ и $k_{33}(O_3, r_{33} = r_3 - r_1)$ (r_1 полупречник датог круга k_1).

а) Ако тражени круг $x(O, r_x)$ додирује сва три дата круга споља, тада круг $y(O, r_y = r_x + r_1)$ концентричан кругу x, садржи центар O_1 датог круга k_1 и додирује кругове k_{22} и k_{33}, оба споља.

б) Ако тражени круг $x(O, r_x)$ додирује сва три дата круга k_1, k_2, k_3 изнутра, тада круг $y(O, r_y = r_x - r_1)$, концентричан кругу x, садржи центар O_1 датог круга k_1 и додирује кругове k_{22} и k_{33}, оба изнутра.

◊◊ Случај 2:

2. Посматрајмо кругове k_{22} и k_{33} исте равни, концентричне редом датим круговима k_2 и k_3, при чему је $k_{22}(O_2, r_{22} = r_2 + r_1)$ и $k_{33}(O_3, r_{33} = r_3 + r_1)$ (r_1 полупречник датог круга k_1).

а) Ако тражени круг $x(O, r_x)$ додирује дати круг k_1 изнутра, а дате кругове k_2 и k_3 оба споља, тада круг $y(O, r_y = r_x - r_1)$, концентричан кругу x, садржи центар O_1 датог круга k_1 и додирује кругове k_{22} и k_{33}, оба споља.

б) Ако тражени круг x додирује k_1 споља, а k_2 и k_3 оба изнутра, тада круг $y(O, r_y = r_x + r_1)$, концентричан кругу x, садржи центар O_1 датог круга k_1 и додирује кругове k_{22} и k_{33}, оба изнутра.

◊◊◊ Случај 3:

3. Посматрајмо кругове k_{22} и k_{33} исте равни, концентричне редом датим круговима k_2 и k_3, при чему је $k_{22}(O_2, r_{22} = r_2 + r_1)$ и $k_{33}(O_3, r_{33} = r_3 - r_1)$ (r_1 полупречник датог круга k_1).

а) Ако тражени круг $x(O, r_x)$ додирује дате кругове k_1 и k_3 изнутра, а круг k_2 споља, тада круг $y(O, r_y = r_x - r_1)$, концентричан кругу x, садржи центар O_1 датог круга k_1, додирује k_{33} изнутра, а k_{22} споља.

б) Ако тражени круг $x(O, r_x)$ додирује дате кругове k_1 и k_3 споља, а круг k_2 изнутра, тада круг $y(O, r_y = r_x + r_1)$, концентричан кругу x, садржи центар O_1 датог круга k_1, додирује k_{33} споља, а k_{22} изнутра.

$\Diamond\Diamond\Diamond\Diamond$ Случај 4:

4. Посматрајмо кругове k_{22} и k_{33} исте равни, концентричне редом датим круговима k_2 и k_3, при чему је $k_{22}(O_2, r_{22} = r_2 - r_1)$ и $k_{33}(O_3, r_{33} = r_3 + r_1)$ (r_1 полупречник датог круга k_1).

а) Ако тражени круг $x(O, r_x)$ додирује дате кругове k_1 и k_2 изнутра, а круг k_3 споља, тада круг $y(O, r_y = r_x - r_1)$, концентричан кругу x, садржи центар O_1 датог круга k_1, додирује k_{22} изнутра, а k_{33} споља.

б) Ако тражени круг $x(O, r_x)$ додирује дате кругове k_1 и k_2 споља, а круг k_3 изнутра, тада круг $y(O, r_y = r_x + r_1)$, концентричан кругу x, садржи центар O_1 датог круга k_1, додирује k_{22} споља, а k_{33} изнутра.

Проблем одређивања траженог круга x(њих 8, у општем случају) решићемо конструкцијом поменутог, њему концентричног круга y са анализираним својствима.

◊ Размотримо случај 1:

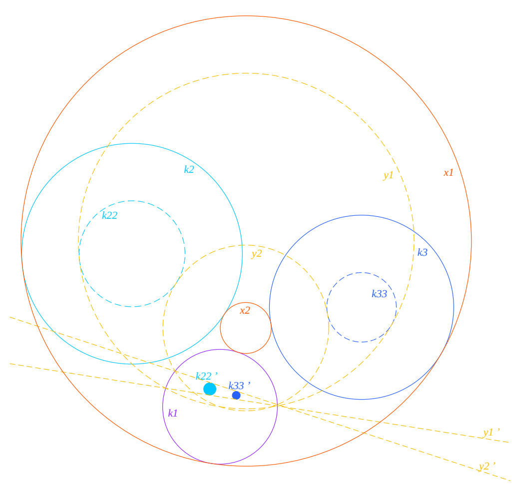
Конструишимо најпре кругове k_{22} и k_{33}, концентричне датим круговима k_2 и k_3, полупречника редом $r_{22} = r_2 - r_1$ и $r_{33} = r_3 - r_1$, тј. $k_{22}(O_2, r_{22} = r_2 - r_1)$ и $k_{33}(O_3, r_{33} = r_3 - r_1)$. Са ψ_{k_1} означимо инверзију у односу на дати круг $k_1(O_1, r_1)$.

Кругови k_{22} и k_{33} не садрже центар O_1 инверзије ψ_{k_1} па су у посматраној инверзији њихове слике $k'_{22} = \psi_{k_1}(k_{22})$ и $k'_{33} = \psi_{k_1}(k_{33})$ такође кругови.

Круг y, по нашој претпоставци, садржи центар датог круга k_1, тачку O_1 која је и центар инверзије ψ_{k_1}, те је у инверзији ψ_{k_1} његова слика $y' = \psi_{k_1}(y)$ права. Како, по нашој претпоставци, круг y додирује круг k_{22}, односно са њим има тачно једну заједничку тачку, то и њихове слике, права y' и круг k'_{22}, имају тачно једну заједничку тачку, и обзиром да важи једнакост углова при пресликавању инверзијом: $\measuredangle(k_{22}, y) = \measuredangle(\psi_{k_1}(k_{22}), \psi_{k_1}(y)) = \measuredangle(k'_{22}, y')$, следи да је права y' тангента круга k'_{22}. Слично, круг y додирује и круг k_{33}, тј. са њим има тачно једну заједничку тачку, па и њихове слике, права y' и круг k'_{33}, имају тачно једну заједничку тачку, и због једнакости углова: $\measuredangle(k_{33}, y) = \measuredangle(\psi_{k_1}(k_{33}), \psi_{k_1}(y)) = \measuredangle(k'_{33}, y')$, следи да је права y' тангента и круга k'_{33}. Дакле, права y', слика траженог помоћног круга y, тангента је и круга k'_{22} и круга k'_{33}, односно њихова је заједничка тангента. Задатак своди на конструкцију заједничке тангенте кругова k'_{22} и k'_{33}, добијених одређивањем редом слика кругова k_{22} и k_{33} у инверзији ψ_{k_1}(којих је у најопштијем случају четири, две унитрашње и две спољашње). Из разлога наведених у анализи $(*)$, помоћним круговима y, којих је два, одговарају као слике у инверзији спољашње тангенте, означимо их са y'_1 и y'_2.

Инверзија је инволутивно пресликавање, те су помоћни(концентрични траженим круговима) кругови y_1 и y_2 слике у инверзији ψ_{k_1} добијених правих y'_1 и y'_2: $y_1 = \psi_{k_1}^{-1}(y'_1) = \psi_{k_1}(y'_1)$, $y_2 = \psi_{k_1}^{-1}(y'_2) = \psi_{k_1}(y'_2)$(један добијени круг, нпр. y_2 одговара делу 1.а) овог случаја, други добијени круг y_1, делу 1.б) овог случаја).

На крају, тражени кругови x_1 и x_2, концентрични су добијеним круговима y_1 и y_2 при чему је $x_1(O_{y_1}, r_{x_1} = r_{y_1} + r_1)$ и $x_2(O_{y_2}, r_{x_2} = r_{y_2} - r_1)$ (слика 10_1).



слика 10_1

$\Diamond\Diamond$ Размотримо случај 2:

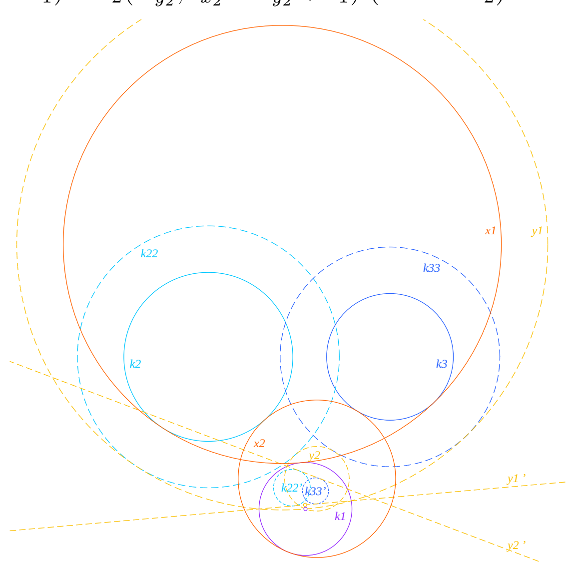
Анализа случаја 2. слична је анализи случаја 1. при чему су кругови k_{22} и k_{33} концентрични датим круговима k_2 и k_3, полупречника редом $r_{22} = r_2 + r_1$ и $r_{33} = r_3 + r_1$, тј. $k_{22}(O_2, r_{22} = r_2 + r_1)$ и $k_{33}(O_3, r_{33} = r_3 + r_1)$. Посматрајмо исту инверзију ψ_{k_1}, у односу на дати круг $k_1(O_1, r_1)$ и разматрање ће бити слично.

Кругови k_{22} и k_{33} не садрже центар O_1 инверзије ψ_{k_1}, па су у овој инверзији њихове слике $k'_{22} = \psi_{k_1}(k_{22})$ и $k'_{33} = \psi_{k_1}(k_{33})$ такође кругови.

На основу наше претпоставке, круг y садржи центар O_1 датог круга k_1(центар инверзије ψ_{k_1}), те је у инверзији ψ_{k_1} његова слика $y' = \psi_{k_1}(y)$ права. Круг y додирује и круг k_{22} и круг k_{33}, односно са сваким од њих има тачно једну заједничку тачку, па и њихове слике, права y' и круг k'_{22}, као и права y' и круг k'_{33}, имају тачно једну заједничку тачку и како важи једнакост углова при пресликавању инверзијом: $\measuredangle(k_{22}, y) = \measuredangle(\psi_{k_1}(k_{22}), \psi_{k_1}(y)) = \measuredangle(k'_{22}, y')$ и $\measuredangle(k_{33}, y) = \measuredangle(\psi_{k_1}(k_{33}), \psi_{k_1}(y)) = \measuredangle(k'_{33}, y')$, следи да је права y' тангента и круга k'_{22} и круга k'_{33}. Дакле, права y', слика у инверзији ψ_{k_1} траженог помоћног круга y тангента је оба круга k'_{22} и k'_{33}, односно њихова је заједничка тангента, и задатак се своди на конструкцију заједничке тангенте кругова k'_{22} и k'_{33}, добијених одређивањем слика у инверзији ψ_{k_1} редом кругова k_{22} и k_{33}. На основу анализе $(*)$ помоћним круговима, назовимо их y_1 и y_2, такође одговарају као слике у инверзији спољашње тангенте, њих означимо са y'_1 и y'_2.

Помоћни(концентрични траженим круговима) кругови y_1 и y_2, на основу особине инволутивности пресликавања инверзијом у односу на круг, слике су у инверзији ψ_{k_1} добијених правих y'_1 и y'_2: $y_1 = \psi_{k_1}^{-1}(y'_1) = \psi_{k_1}(y'_1)$ и $y_2 = \psi_{k_1}^{-1}(y'_2) = \psi_{k_1}(y'_2)$(један од добијених кругова, нпр. y_2 одговара делу 2.а), други добијени круг y_1 делу 2.б) овог случаја).

Тражени кругови x_1 и x_2 су концентрични добијеним круговима y_1 и y_2 при чему је $x_1(O_{y_1}, r_{x_1} = r_{y_1} - r_1)$ и $x_2(O_{y_2}, r_{x_2} = r_{y_2} + r_1)$ (слика 10_2).



слика 10_2

$\Diamond\Diamond\Diamond$ Размотримо случај 3:

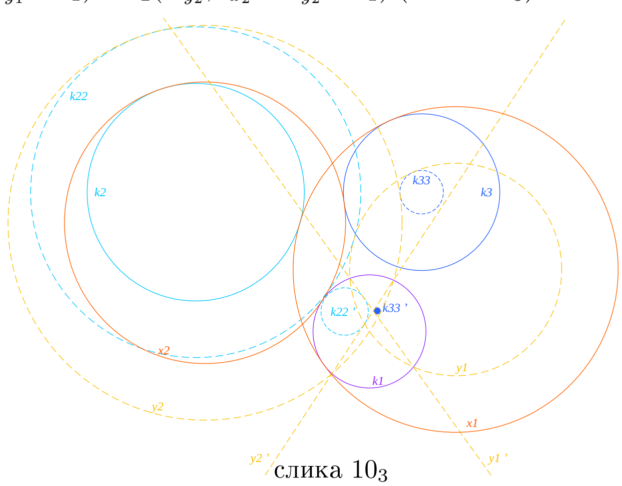
Конструишимо најпре кругове k_{22} и k_{33}, концентричне датим круговима k_2 и k_3, полупречника редом $r_{22} = r_2+r_1$ и $r_{33} = r_3-r_1$, тј. $k_{22}(O_2, r_{22} = r_2+r_1)$ и $k_{33}(O_3, r_{33} = r_3 - r_1)$. Са ψ_{k_1} означимо инверзију у односу на дати круг $k_1(O_1, r_1)$, као и до сада.

Кругови k_{22} и k_{33} не садрже центар инверзије ψ_{k_1}(центар O_1 датог круга k_1) инверзије, па су у инверзији ψ_{k_1} њихове слике $k'_{22} = \psi_{k_1}(k_{22})$ и $k'_{33} = \psi_{k_1}(k_{33})$ такође кругови.

Круг y, по нашем услову, садржи центар O_1 датог круга k_1(центар инверзије ψ_{k_1}) те је у посматраној инверзији његова слика $y' = \psi_{k_1}(y)$ права. Како се, по насхој претпоставци кругови y и k_{22} додирују, односно имају једну заједничку тачку, то и њихове слике у инверзији, права y' и круг k'_{22} имају тачно једну заједничку тачку, а пошто важи једнакост углова при пресликавању инверзијом у односу на круг: $\measuredangle(k_{22}, y) = \measuredangle(\psi_{k_1}(k_{22}), \psi_{k_1}(y)) = \measuredangle(k'_{22}, y')$, следи да је права y' тангента круга k'_{22}. Слично, кругови y и k_{33} такође се додирују, те и њихове слике у инверзији, права y' и круг k'_{33}, имају тачно једну заједничку тачку, а како је: $\measuredangle(k_{33}, y) = \measuredangle(\psi_{k_1}(k_{33}), \psi_{k_1}(y)) = \measuredangle(k'_{33}, y')$, следи да је права y' тангента и круга k'_{33}. Дакле, права y', слика у инверзији помоћног круга y, тангента је и круга k'_{22} и круга k'_{33}, односно њихова је заједничка тангента. Задатак се своди на конструкцију заједничке тангенте кругова k'_{22} и k'_{33}, добијених одређивањем слика у инверзији ψ_{k_1} редом кругова k_{22} и k_{33}. Из разлога наведених у анализи $(*)$, круговима y, којих је два, одговарају као слике у инверзији унутрашње тангенте, означимо их са y'_1 и y'_2.

Обзиром на особину инволутивности пресликавања инверзијом у односу на круг, помоћни(концентрични траженим круговима) кругови y_1 и y_2 слике су у инверзији ψ_{k_1} добијених правих y'_1 и y'_2: $y_1 = \psi_{k_1}^{-1}(y'_1) = \psi_{k_1}(y'_1)$, $y_2 = \psi_{k_1}^{-1}(y'_2) = \psi_{k_1}(y'_2)$(оба добијена круга садрже центар круга k_1, а један од њих, нпр. y_1 одговара делу 3.а) овог случаја, додирује k_{33} изнутра и k_{22} споља, други добијени круг y_2, делу 3.б) овог случаја, додирује k_{33} споља и k_{22} изнутра).

Тражени кругови x_1 и x_2, концентрични су добијеним круговима y_1 и y_2 при чему је $x_1(O_{y_1}, r_{x_1} = r_{y_1} + r_1)$ и $x_2(O_{y_2}, r_{x_2} = r_{y_2} - r_1)$ (слика 10_3).



слика 10_3

◊◊◊◊ Размотримо случај 4:

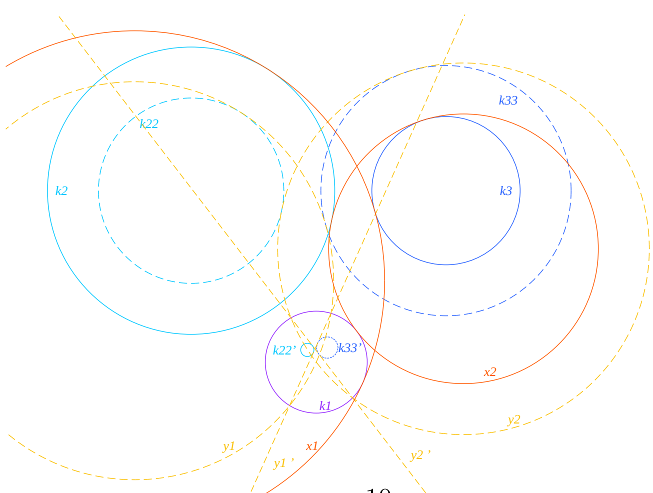
Конструишимо кругове k_{22} и k_{33}, концентричне датим круговима k_2 и k_3, полупречника редом $r_{22} = r_2 - r_1$ и $r_{33} = r_3 + r_1$, тј. $k_{22}(O_2, r_{22} = r_2 - r_1)$ и $k_{33}(O_3, r_{33} = r_3 + r_1)$. Посматрајмо поново инверзију ψ_{k_1} у односу на дати круг $k_1(O_1, r_1)$ и анализа овог случаја биће слична анализи случаја 3.

Кругови k_{22} и k_{33} не садрже центар O_1 инверзије ψ_{k_1} , те су у инверзији ψ_{k_1} њихове слике $k'_{22} = \psi_{k_1}(k_{22})$ и $k'_{33} = \psi_{k_1}(k_{33})$ такође кругови.

Помоћни круг y по нашем услову садржи центар O_1 датог круга k_1(центар инверзије ψ_{k_1}), па је у овој инверзији његова слика $y' = \psi_{k_1}(y)$ права. Круг y, по нашем услову, додирује сваки од кругова k_{22} и k_{33}, односно са сваким од њих има тачно једну заједничку тачку, што важи и за њихове слике у инверзији ψ_{k_1}, тј. права y' са сваким од кругова k'_{22} и k'_{33} има тачно једну заједничку тачку и како важи једнакост углова при пресликавању инверзијом: $\measuredangle(k_{22}, y) = \measuredangle(\psi_{k_1}(k_{22}), \psi_{k_1}(y)) = \measuredangle(k'_{22}, y')$ и $\measuredangle(k_{33}, y) = \measuredangle(\psi_{k_1}(k_{33}), \psi_{k_1}(y)) = \measuredangle(k'_{33}, y')$, следи да је права y' тангента и круга k'_{22} и круга k'_{33}. Дакле, права y', слика у инверзији ψ_{k_1} помоћног круга y заједничка је тангента кругова k'_{22} и k'_{33}. Задатак се своди на конструкцију заједничке тангенте кругова k'_{22} и k'_{33}, добијених одређивањем слика у инверзији ψ_{k_1} редом кругова k_{22} и k_{33}. На основу анализе $(*)$, помоћним круговима, назовимо их y_1 и y_2, одговарају као слике у инверзији унутрашње тангенте, означимо их са y'_1 и y'_2.

Како је инверзија инволутивно пресликавање, помоћни(концентрични траженим круговима) кругови y_1 и y_2 слике су у инверзији ψ_{k_1} добијених правих y'_1 и y'_2: $y_1 = \psi_{k_1}^{-1}(y'_1) = \psi_{k_1}(y'_1)$, $y_2 = \psi_{k_1}^{-1}(y'_2) = \psi_{k_1}(y'_2)$(оба добијена круга садрже центар круга k_1, а један од њих, нпр. y_1 одговара делу 4.а) овог случаја, додирује k_{22} изнутра и k_{33} споља, други добијени круг y_2, делу 4.б) овог случаја, додирује k_{22} споља и k_{33} изнутра).

Коначно, тражени кругови x_1 и x_2, концентрични су добијеним круговима y_1 и y_2 при чему је $x_1(O_{y_1}, r_{x_1} = r_{y_1} + r_1)$ и $x_2(O_{y_2}, r_{x_2} = r_{y_2} - r_1)$ (слика 10_4).



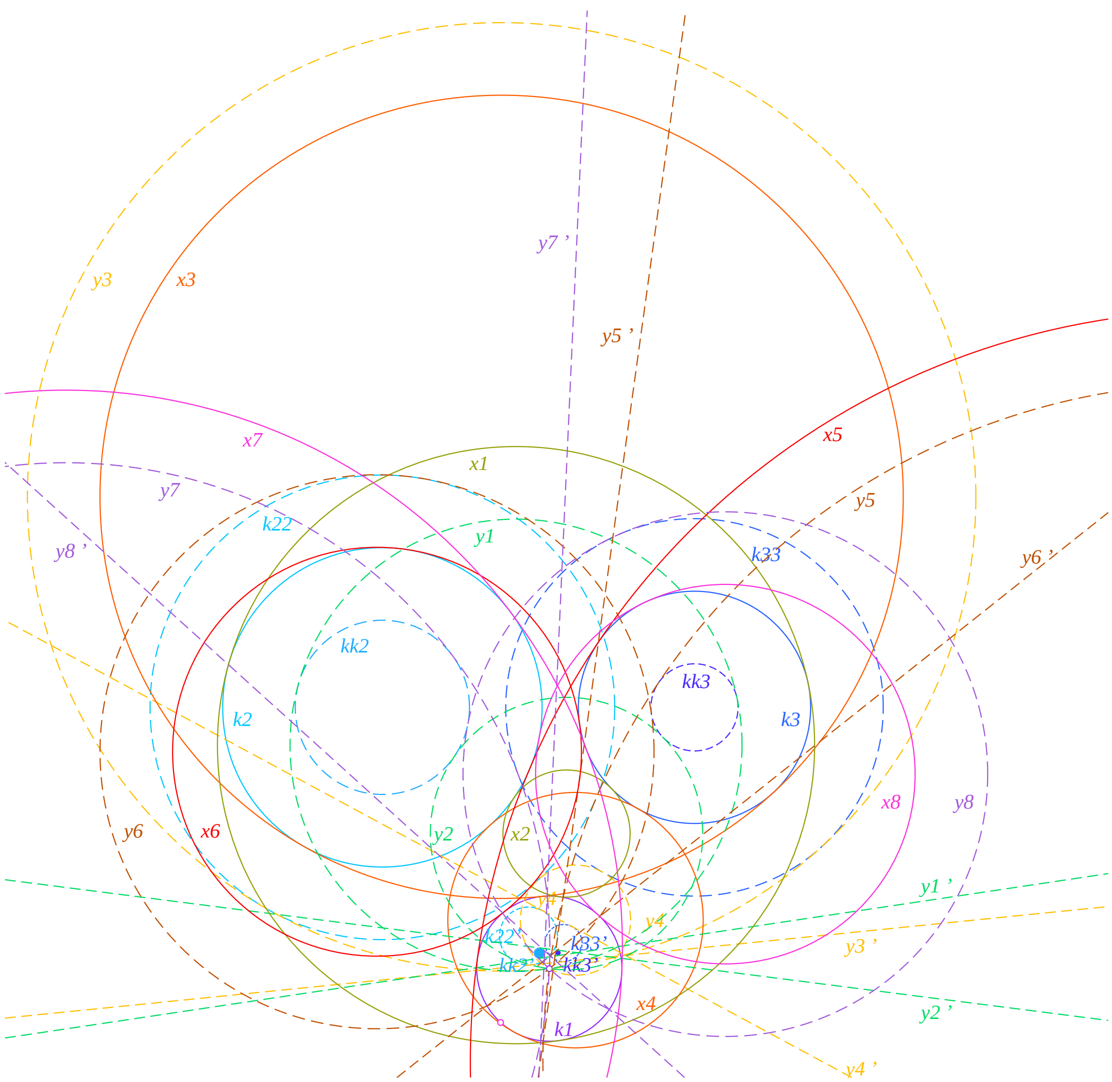
слика 10_4

У неколико наредних слика, ради лакшег разумевања компликованијих конструкција, кругови концентрични датим круговима $k_2(O_2, r_2)$, $k_3(O_3, r_3)$, који су у претходним разматрањима означавани са k_{22} и k_{33} означени су на следећи начин:

– $k_{22}(O_2, r_{22} = r_2 + r_1)$ и $k_{33}(O_3, r_{33} = r_3 + r_1)$, где је r_1 полупречник датог круга k_1(ово су кругови већег полупречника од полупречника датих кругова);

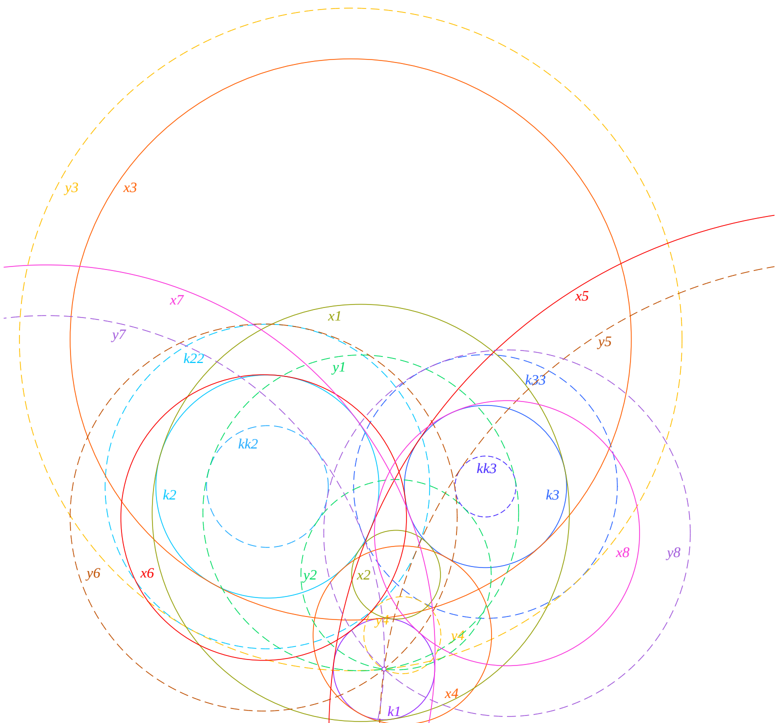
– $kk_2(O_2, r_{22} = r_2 - r_1)$ и $kk_3(O_3, r_{33} = r_3 - r_1)$,(r_1 полупречник датог круга k_1)(ово су кругови мањег полупречника од полупречника датих кругова).

На слици 10_5 приказана је конструкција инверзијом ψ_{k_1} свих осам тражених кругова.

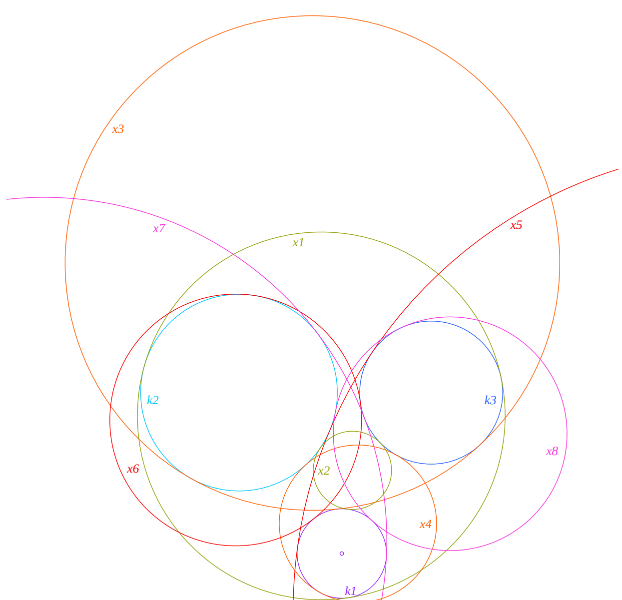


слика 10_5

Слика 10_6 приказује ших осам помоћних концентричхних кругова и свих осам тражених кругова. На слици 10_7 приказани су само тражени кругови.



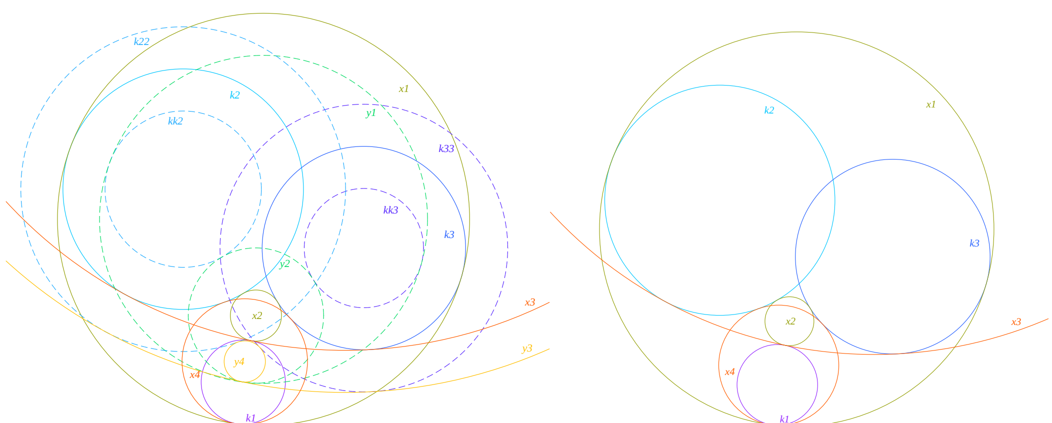
слика 10_6



слика 10_7

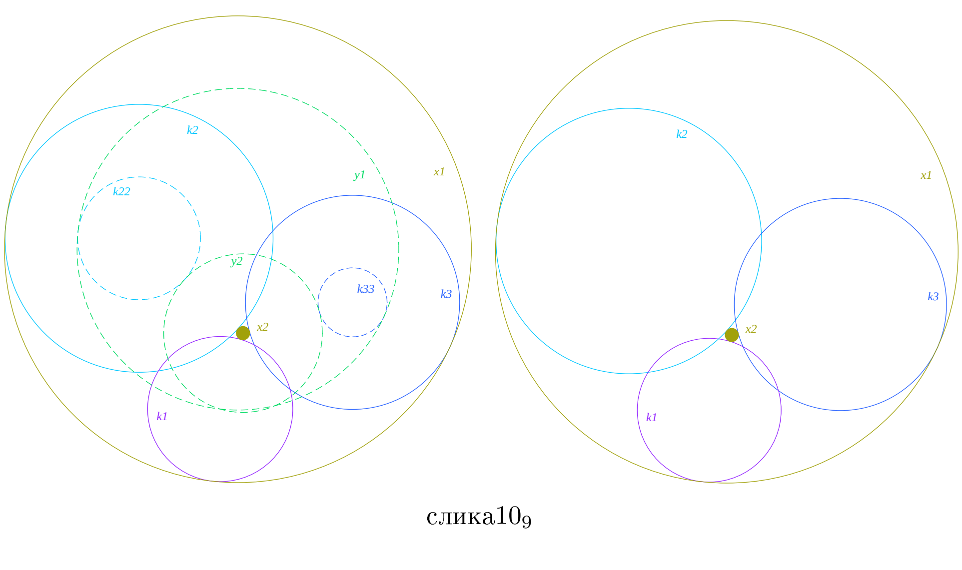
Под " општим случајем" сматраћемо положаје датих кругова k_1, k_2 и k_3 у којима можемо одредити кругове који су решење овог проблема користећи искључиво горе објашњену инверзију ψ у односу на дати круг најмањег полупречника. Неки од тих случајева су: сва три дата круга секу; два дата круга се секу, трећи дати круг припада унутрашњој области неког од њих два; два дата круга се секу, трећи дати круг налази се у спољашњој области оба од њих... Наредних неколико слика показује само неке од наведених случајева.

Слика 10_8 приказује сва четири тражена и четири помоћна концентрична круга(слика до ње само тражене кругове) у случају да се дата два круга секу, трећи дати круг налази се у спољашњој области оба од њих.



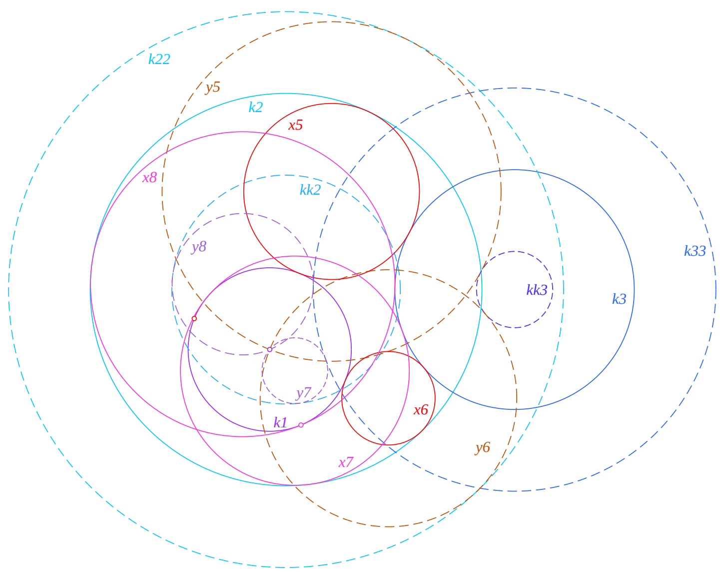
слика10_8

На слици 10_9 приказана су сва четири тражена и четири помоћна концентрична круга(слика до ње само тражене кругове) у случају да се сва три дата круга секу, при чему не постоји тачка која припада унутрашњој области сваког од њих.

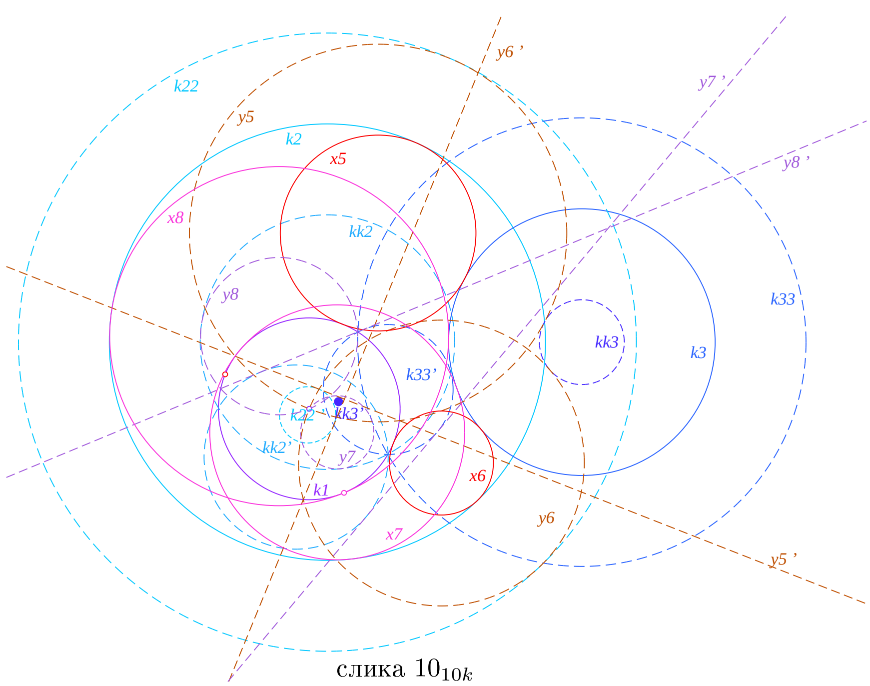


слика10_9

Слика 10_{10} приказује свих шест тражених и шест помоћних концентричних кругова у случају да се дата два круга секу, а трећи дати круг припада унутрашњој области неког од њих(на слици дати се кругови k_2 и k_3 секу а дати круг k_1 припада унутрашњој области датог круга k_2). Ккао прилог дајемо слику 10_{10k} на којој је приказана конструкција инверзијом ψ_{k_1} тражених кругова у овако задатом положају.



слика 10_{10}



слика 10_{10k}

$\circ\succ\succ$ Како смо завршили анализу најопштијег случаја, можемо се бавити дискусијом специјалних случајева, тачније специјалних положаја датих кругова. Под " специјалне" случајеве уврстићемо оне положаје задатих кругова k_1, k_2 и k_3 исте равни за које, поред инверзије ψ_{k_1}(у односу на дати круг k_1(круг најмањег полупречника од три дата круга)), за одређивање свих кругова који испуњавају услов постављеног проблема, морамо користити и неке друге инверзије, односно инверзије у односу на неке друге кругове исте равни. Неки од таквих случајева су: дата два круга додирују се споља, трећи дати круг мења положај у заједничкој равни у односу на њих два(сече један, сече оба, додирује један споља а сече други, додирује оба споља, додирује један изнутра...); два дата круга додирују се изнутра, трећи дати круг мења положај у заједничкој равни у односу на њих два(сече један од њих, сече оба ...) ...

Примећујемо да постоји велики број могућих положаја датих кругова k_1, k_2 и k_3 у некој равни и преобимно је све их дискутовати. Овде ћемо се бавити само некима од њих.

$\prec\bullet\succ$ **случај 10 (** A **)**:

Дата два круга додирују се споља, трећи дати круг мења положај у заједничкој равни у односу на њих два.

Не умањујући општост, узмимо да се дати кругови k_2 и k_3 додирују споља и ово ћемо сматрати фиксираним положајем случаја $10(A)$, дати круг k_1(круг најмањег полупречника од дата три круга, како смо раније претпоставили) " прошетаћемо" кроз раван која садржи дате кругове.
(ово није неопходно, јер се на исти начин посматрају и остале ситуације, али нам је једноставније да би смо могли остати у складу са ознакама и користити неке сегменте из општег случаја).

$\bullet\succ$ **случај 10 (**A_1**)**:

Дати кругови k_2 и k_3 додирују се споља, дати круг k_1 са њима нема заједничких тачака и налази се у спољашњој области оба од њих.

Постоји шест кругова који задовољавају услов постављеног проблема, додирују сва три дата круга задана оваквим положајем у равни. Два од њих садрже тачку додира датих кругова k_2 и k_3, преостала четири тражена круга не садрже тачку додира датих кругова.

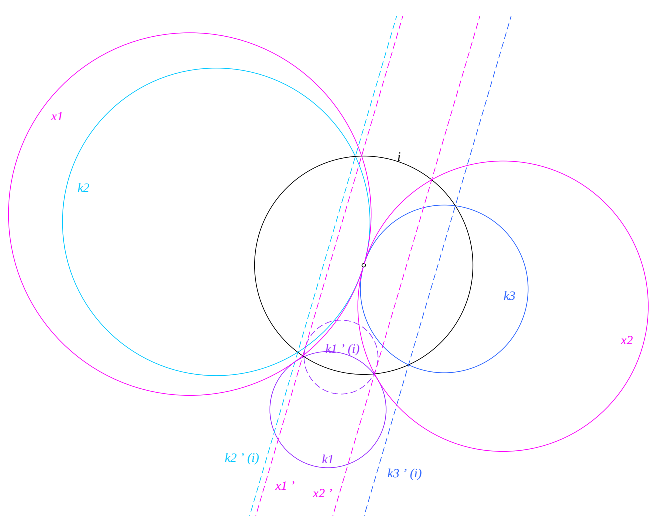
Одредимо најпре тражене кругове који садрже додирну тачку датих кругова k_2 и k_3. Нека је i круг исте равну, произвољног полупречника, чији је центар тачка додира кругова k_2 и k_3. Означимо са ψ_i пресликавање инверзијом у односу на круг i(обзиром да је ово стални положај кругова k_2 и k_3 случаја $10(A)$, инверзију ψ_i ћемо, уз још неке, користити у сваком наредном подслучају овог случаја).

Оба дата круга k_2 и k_3 садрже центар посматране инверзије, те су у инверзији ψ_i њихове слике $k_2' = \psi_i(k_2)$ и $k_3' = \psi_i(k_3)$ праве. Кругови k_2 и k_3 додирују у центру инверзије, а пошто инверзија чува једнакост углова: $\measuredangle(k_2, k_3) = \measuredangle(\psi_i(k_2), \psi_i(k_3)) =$

$\measuredangle(k_2', k_3')$, праве k_2' и k_3' међусобно су паралелне(што се може видети приликом конструкције одредивањем слика кругова k_2 и k_3 у инверзији ψ_i). Дати круг k_1 не садржи центар посматране инверзије, па је у инверзији ψ_i његова слика $k_1' = \psi_i(k_1)$ круг.

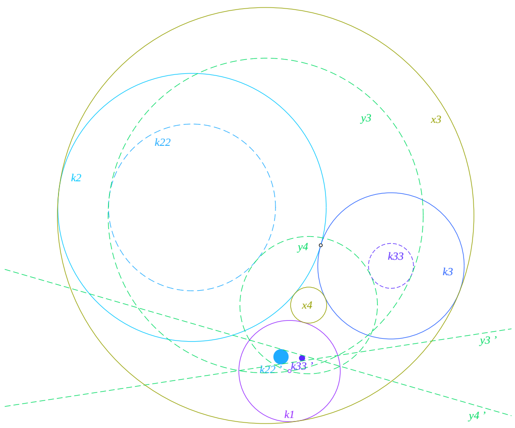
Означимо са x тражени круг који садржи тачку додира датих кругова k_2 и k_3(нешто касније преименоваћемо их у x_1 и x_2, но за тренутак се поставимо као да не знамо број решења). Тражени круг x садржи центар инверзије, па је у инверзији ψ_i његова слика $x' = \psi_i(x)$ права. По нашој претпоставци, оба дата круга k_2 и k_3 и тражени круг x садрже тачку додира кругова k_2 и k_3, а круг x их, по условy задатка, додирује оба, те круг x мора додиривати дате кругове у њиховој додирној тачки(која је центар инверзије ψ_i). Обзиром да пресликавање инверзијом у односу на круг чува једнакост углова: $\measuredangle(x, k_2) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k_2)) = \measuredangle(x', k_2')$ и $\measuredangle(x, k_3) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k_3)) = \measuredangle(x', k_3')$, следи да су праве k_2', k_3' и x' међусобно паралелне. Круг x, по условy задатка, додирује дати круг k_1, па и њихове слике у инверзији, права x' и круг k_1', имају тачно једну заједничку тачку и како важи једнакост углова при пресликавању инверзијом: $\measuredangle(x, k_1) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k_1)) = \measuredangle(x', k_1')$, следи да је права x' тангента круга k_1'. Дакле, права x' тангента је круга k_1' паралелна међусобно паралелним правама k_2' и k_3'. Задатак се своди на конструкцију тангенте на круг k_1', добијен одређивањем слике датог круга k_1 у инверзији ψ_i, паралелне међусобно паралелним правама k_2' и k_3', добијеним одређивањем слика у инверзији ψ_i редом датих кругова k_2 и k_3. На основу наше претпоставке, дати круг k_1 са датим круговима k_2 и k_3 нема заједничких тачака и налази се у спољашњој области оба од њих, па их немају ни њихове слике, круг k_1' и права k_2', односно круг k_1' и права k_3', те постоје две тангенте, означимо их са x_1' и x_2', на круг k_1' паралелне међусобно паралелним правама k_2' и k_3', које одговарају као слике у инверзији ψ_i траженим круговима.

На крају, на основу особине инволутивности пресликавања инверзијом у односу на круг, тражени кругови x_1 и x_2 слике су у инверзији ψ_i добијених правих x_1' и x_2': $x_1 = \psi_i^{-1}(x_1') = \psi_i(x_1')$, $x_2 = \psi_i^{-1}(x_2') = \psi_i(x_2')$ (слика $10_{a_1}(1)$).

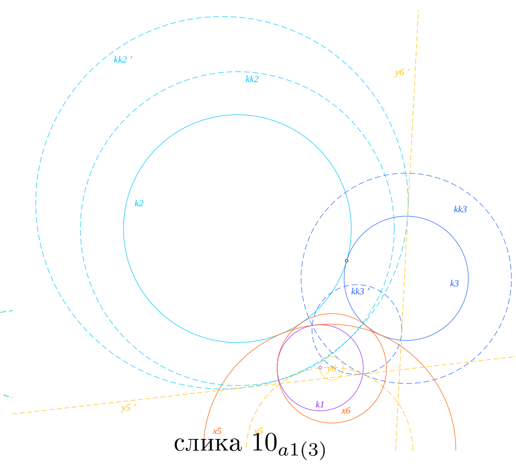


слика $10_{a1(1)}$

Преостала четири тражена круга назовимо x_3, x_4, x_5 и x_6, кругове који не садрже тачку додира датих кругова k_2 и k_3. Два од њих, означимо их са x_3 и x_4, додирују сва три дата круга споља, односно изнутра. Ово су кругови чије смо одређивање инверзијом ψ_{k_1}(у односу на круг k_1) објаснили у општем случају 1, те прилажемо само конструкцију(слика $10_{a1(2)}$). Последња два тражена круга, означимо са x_5 и x_6, додирују дати круг k_1 изнутра, а дате кругове k_2 и k_3 споља. Њихово смо одређивање, такође инверзијом ψ_{k_1} детаљно објаснили у општем случају 2, те прилажемо само слику $10_{a1(3)}$ која приказује конструкцију ових кругова.

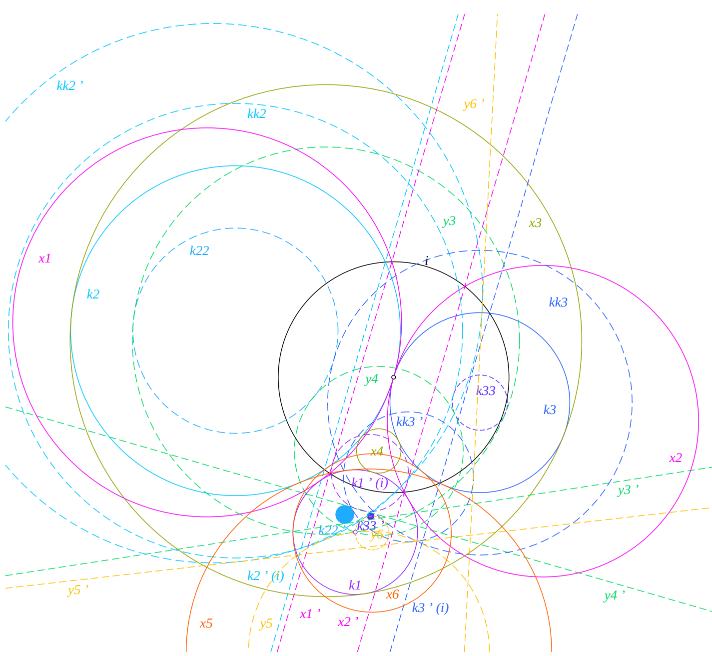


слика $10_{a1(2)}$



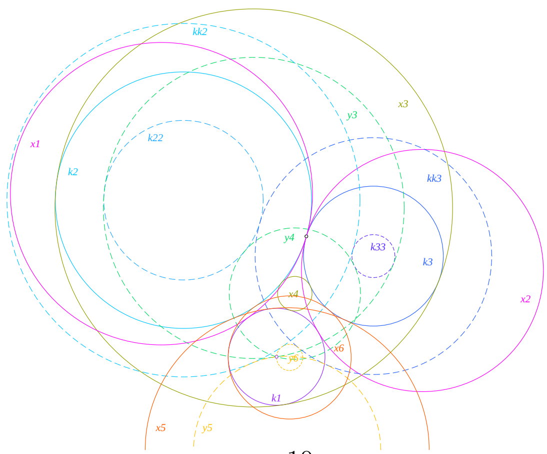
слика $10_{a1(3)}$

Слика $10_{a_1}(4)$ приказује конструкцију инверзијама ψ_i и ψ_{k_1} свих шест тражених кругова.

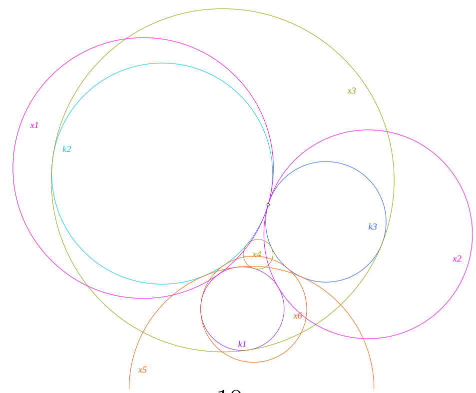


слика $10_{a1(3)}$

На слици $10_{a_1}(5)$ приказани су сви тражени кругови и помоћни концентрични кругови, на слици $10_{a_1}(6)$ приказани су само тражени кругови.



слика $10_{a1(5)}$



слика $10_{a1(6)}$

•≻ случај 10 (A_2):

Дати се кругови k_2 и k_3 додирују споља, дати круг k_1 додирује један од ова два круга такође споља.

Не умањујући општост узмимо да круг k_1 споља додирује дати круг k_2.(надаље ћемо, ради надовезивања случајева, а иначе је потпуно свеједно, пратити положај круга k_1 у односу на круг k_2).

Постоје четири круга која задовољавају услов постављеног проблема, додирују сва три дата круга. Један од њих садржи тачку додира датих кругова k_2 и k_3, други тражени круг садржи тачку додира датих кругова k_1 и k_2, преостала два тражена круга не садрже ни једну од поменутих додирних тачака.

Одредимо најпре тражени круг, у ознаци x_1, који садржи тачку додира датих кругова k_2 и k_3. Обзиром да је ово стални положај кругова k_2 и k_3 случаја $10(A)$, круг x_1 можемо одредити инверзијом ψ_i у односу на круг i исте равни, произвољног полупречника, са центом у тачки додира кругова k_2 и k_3. Ову смо инверзију детаљно објаснили у подслучају $10(A_1)$ овог случаја, те ће и овде добијени закључци бити исти. Но ипак постоји разлика у односу на претходни случај, а односи се на број тражених решења(у претходном случају постојала су два круга која додирују сва три дата круга и садрже тачку додира кругова k_2 и k_3. У овом случају такав је само један круг). Укратко ћемо поновити добијене закључке и објаснити неке нове.

Дати кругови k_2 и k_3 садрже центар посматране инверзије, па су у инверзији ψ_i њихове слике $k_2' = \psi_i(k_2)$ и $k_3' = \psi_i(k_3)$ праве. Како се кругови k_2 и k_3 додирују у центру инверзије, а инверзија чува једнакост углова: $\measuredangle(k_2, k_3) = \measuredangle(\psi_i(k_2), \psi_i(k_3)) = \measuredangle(k_2', k_3')$, следи да су праве k_2' и k_3' међусобно паралелне Дати круг k_1 не садржи центар посматране инверзије, па је у инверзији ψ_i његова слика $k_1' = \psi_i(k_1)$ круг. Приметимо следеће: по претпоставци овог случаја кругови k_1 и k_2 се додирују, тј имају тачно једну заједничку тачку, па и њихове слике у инверзији ψ_i, права k_2' и круг k_1', имају тачно једну заједничку тачку, и како важи једнакост углова при пресликавању инверзијом: $\measuredangle(k_1, k_2) = \measuredangle(\psi_i(k_1), \psi_i(k_2)) = \measuredangle(k_1', k_2')$, то је права k_2' тангента круга k_1'. Овај ће нам закључак бити врло користан нешто касније.

Тражени круг x_1 садржи центар инверзије, па је у инверзији ψ_i његова слика $x_1' = \psi_i(x_1)$ права. По нашој претпоставци, оба дата круга k_2 и k_3 и тражени круг x_1 садрже додирну тачку кругова k_2 и k_3, а круг x_1, по услову задатка, додирује оба круга k_2 и k_3, па круг x_1 мора додиривати дате кругове у њиховој додирној тачки(центру инверзије ψ_i). Обзиром да пресликавање инверзијом у односу на круг чува једнакост углова: $\measuredangle(x_1, k_2) = \measuredangle(\psi_i(x_1), \psi_i(k_2)) = \measuredangle(x_1', k_2')$ и $\measuredangle(x_1, k_3) = \measuredangle(\psi_i(x_1), \psi_i(k_3)) = \measuredangle(x_1', k_3')$, следи да су праве k_2', k_3' и x_1' међусобно паралелне. Круг x_1, по услову задатка, додирује дати круг k_1, па и њихове слике у инверзији, права x_1' и круг k_1', имају тачно једну заједничку тачку и како важи једнакост углова: $\measuredangle(x_1, k_1) = \measuredangle(\psi_i(x_1), \psi_i(k_1)) = \measuredangle(x_1', k_1')$, следи да је права x_1' тангента круга k_1'. Дакле, права x_1' тангента је круга k_1' паралелна међусобно паралелним правама k_2' и k_3'. Присетимо се раније изведеног закључка: права k_2' тангента је круга k_1', што је и разлог због кога постоји још само једна тангента x_1'(која је одговарајућа слика у инверзији ψ_i траженог круга x_1) на круг k_1' паралелна његовој тангенти k_2', а самим тим и тачно један круг који испуњава услов постављеног проблема и наше претпоставке. Задатак се своди на конструкцију друге тангенте на круг k_1', добијен одређивањем слике датог круга k_1 у инверзији ψ_i, паралелне међусобно паралелним правама k_2' и k_3', добијеним одређивањем слика у инверзији ψ_i редом датих кругова k_2 и k_3, где је права k_2' тангента круга k_1'.

Коначно, због особине инволутивности пресликавања инверзијом у односу на круг, тражени круг x_1 слика је у инверзији ψ_i добијене праве x_1': $x_1 = \psi_i^{-1}(x_1') = \psi_i(x_1')$.

Одредимо сада тражени круг, у ознаци x_2, који садржи тачку додира датих кругова k_1 и k_2. Означимо са i_1 круг исте равни, произвољног полупречника, са центром у тачки додира датих кругова k_1 и k_2. Посматрајмо пресликавање инверзијом ψ_{i_1} у односу на овај круг. Напоменимо да ће пресликавање инверзијом ψ_{i_1} донети сличне закључке као и пресликавање инверзијом ψ_i, обзиром да је положај датих кругова у односу на круг i инверзије ψ_i сличан положају датих кругова у односу на круг i_1 инверзије ψ_{i_1}, па ћемо излагање скратити колико је то могуће.

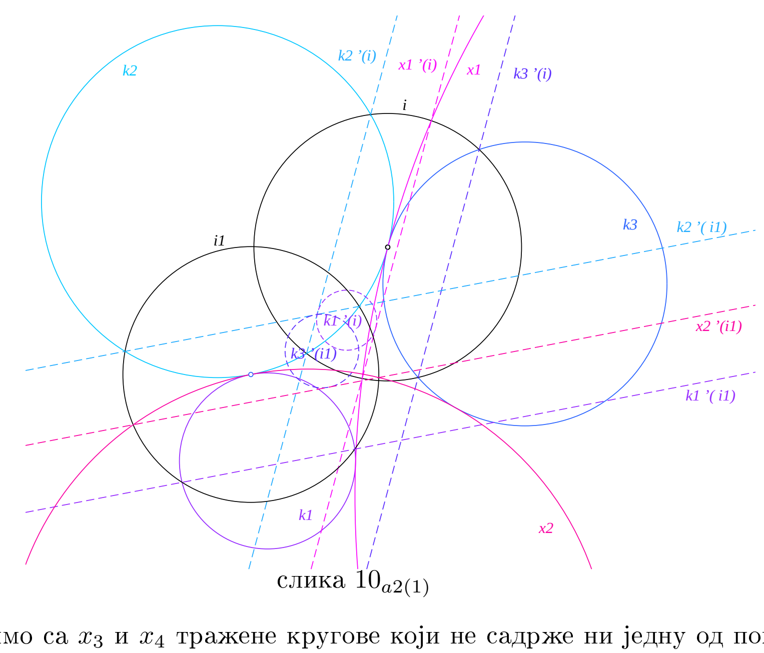
Оба дата круга k_1 и k_2 садрже центар инверзије ψ_{i_1}, па су у посматраној инверзији њихове слике $k_1' = \psi_{i_1}(k_1)$ и $k_2' = \psi_{i_1}(k_2)$ праве. Како се кругови k_1 и k_2 додирују у центру инверзије ψ_{i_1}, а пресликавање инверзијом у односу на круг чува једнакост углова: $\measuredangle(k_1, k_2) = \measuredangle(\psi_{i_1}(k_1), \psi_{i_1}(k_2)) = \measuredangle(k_1', k_2')$, то су праве k_1' и k_2' међусобно паралелне(што се може видети приликом конструкције одредивањем слика датих кругова k_1 и k_2 у инверзији ψ_{i_1}). Дати круг k_3 не садржи центар инверзије ψ_{i_1}, те је у овој инверзији његова слика $k_3' = \psi_{i_1}(k_3)$ круг. На основу претпоставке овог случаја кругови k_2 и k_3 се додирују, тј имају тачно једну заједничку тачку, па и њихове слике у инверзији ψ_{i_1}, права k_2' и круг k_3', имају тачно једну заједничку тачку, и како важи једнакост углова при пресликавању инверзијом: $\measuredangle(k_2, k_3) = \measuredangle(\psi_{i_1}(k_2), \psi_{i_1}(k_3)) = \measuredangle(k_2', k_3')$, следи да је права k_2' тангента круга k_3'(ово је закључак који ћемо употребити касније у овом излагању).

Тражени круг x_2 садржи центар инверзије ψ_{i_1}, па је у инверзији ψ_{i_1} његова слика

$x_2' = \psi_{i_1}(x_2)$ права. Оба дата круга k_1 и k_2 и тражени круг x_2, по нашој претпоставци, садрже тачку додира кругова k_1 и k_2, а круг x_2 их, по услову задатка, додирује оба, што може бити испуњено само ако круг x_2 додирује дате кругове k_1 и k_2 у њиховој додирној тачки(центру инверзије ψ_{i_1}). Како пресликавање инверзијом у односу на круг чува једнакост углова: $\measuredangle(x_2, k_1) = \measuredangle(\psi_{i_1}(x_2), \psi_{i_1}(k_1)) = \measuredangle(x_2', k_1')$ и $\measuredangle(x_2, k_2) = \measuredangle(\psi_{i_1}(x_2), \psi_{i_1}(k_2)) = \measuredangle(x_2', k_2')$, то су праве k_1', k_2' и x_2' међусобно паралелне. По услову постављеног проблема круг x_2 додирује дати круг k_3, па и њихове слике у инверзији ψ_{i_1}, права x_2' и круг k_3', имају тачно једну заједничку тачку и како важи једнакост углова: $\measuredangle(x_2, k_3) = \measuredangle(\psi_{i_1}(x_2), \psi_{i_1}(k_3)) = \measuredangle(x_2', k_3')$, следи да је права x_2' тангента круга k_3'. Да резимирамо до сада добијене закључке: права x_2' тангента је круга k_3' паралелна међусобно паралелним правама k_1' и k_2'. Како смо раније напоменули права k_2' тангента је круга k_3' и ово је разлог због кога постоји још само једна тангента x_2'(која одговара као слика у инверзији ψ_{i_1} траженом кругу x_2) на круг k_3' паралелна његовој тангенти k_2', а самим тим и тачно један круг који испуњава услов постављеног проблема и све наше претпоставке. Задатак се своди на конструкцију друге тангенте на круг k_3', добијен одређивањем слике датог круга k_3 у инверзији ψ_{i_1}, паралелне међусобно паралелним правама k_1' и k_2', добијеним одређивањем слика редом датих кругова k_1 и k_2 у инверзији ψ_{i_1}, где је права k_2' тангента круга k_3'.

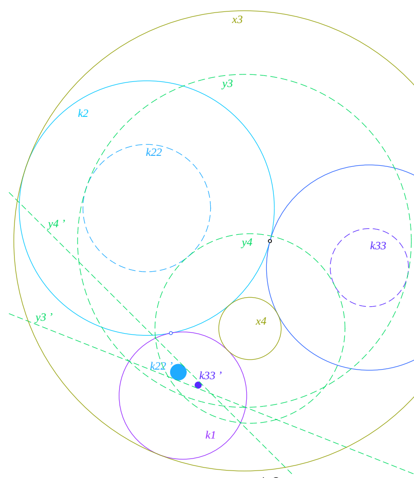
Пресликавање инверзијом у односу на круг је инволутивно пресликавање, па је тражени круг x_2 слика је у инверзији ψ_{i_1} добијене праве x_2': $x_2 = \psi_{i_1}^{-1}(x_2') = \psi_{i_1}(x_2')$.

Слика $10_{a2(1)}$ приказује конструкцију инверзијама ψ_i и ψ_{i_1} кругова x_1 и x_2.



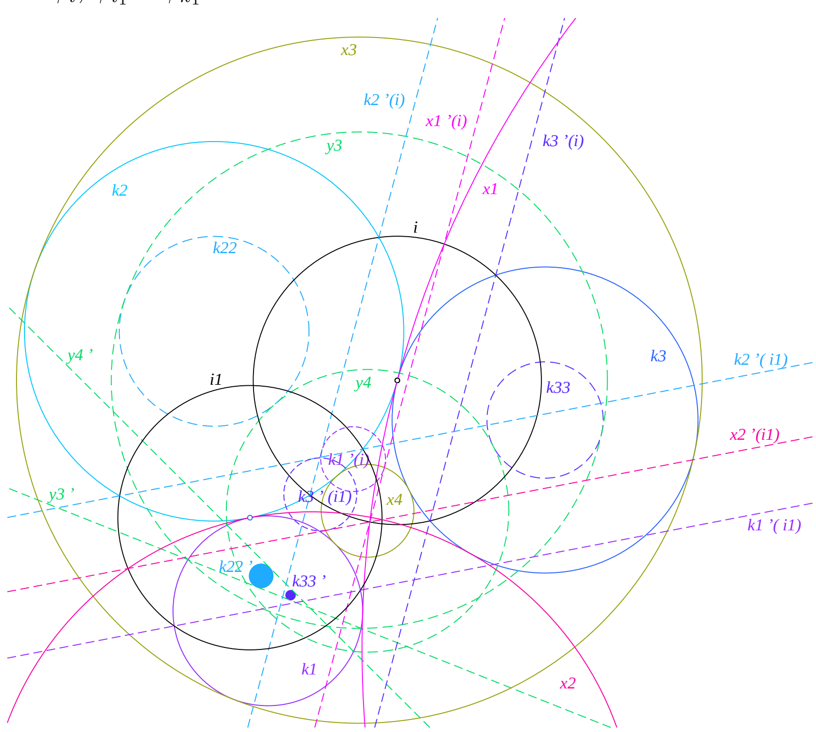
слика $10_{a2(1)}$

Означимо са x_3 и x_4 тражене кругове који не садрже ни једну од поменутих додирних тачака датих кругова(тачку додира датих кругова k_1 и k_2, односно тачку додира датих кругова k_2 и k_3). Један од њих, нпр x_3 додирује сва три дата круга изнутра, други тражени круг x_4 додирује сва три дата круга споља. Ова два круга су кругови чије смо одређивање инверзијом ψ_{k_1}, у односу на дати круг k_1(круг најмањег полупречника од три дата круга) детаљно објаснили у општем случају 1, те излагање о одређивању ових кругова изостављамо и прилажемо само слику конструкције тражених кругова x_3 и x_4(слика $10_{a_2(2)}$).



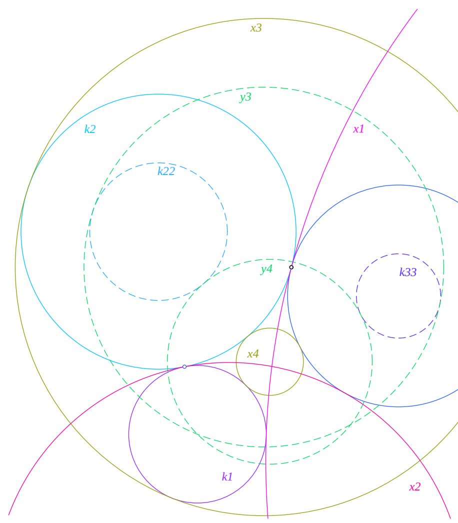
слика $10_{a2(2)}$

Прилажемо слику $10_{a_2(3)}$ која приказује конструкцију сва четири тражена круга инверзијама ψ_i, ψ_{i_1} и ψ_{k_1}.

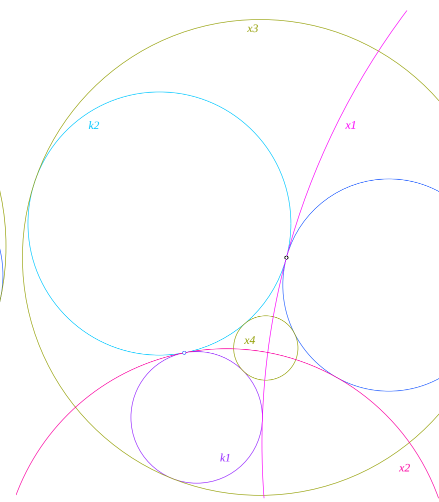


слика $10_{a2(3)}$

На слици $10_{a_2}(4)$ приказана су сва четири тражена круга и помоћни концентрични кругови. Слика $10_{a_2}(5)$ приказује само тражене кругове.



слика $10_{a2(4)}$



слика $10_{a2(5)}$

•≻ **случај 10 (**A_3**)**:

Дати кругови k_2 и k_3 додирују се споља, дати круг k_1 сече оба ова круга, или сече само један од њих, а са другим нема заједничких тачака и припада његовој спољашњој области.

Размотримо случај када дати круг k_1 сече само један од кругова k_2 и k_3(случај када круг k_1 сече оба дата круга k_2 и k_3 разматра се на готово идентичан начин). Не умањујући општост претпоставимо да дати круг k_1 сече само дати круг k_2, а са кругом k_3 нема заједничких тачака и налази се у његовој спољашњој области.

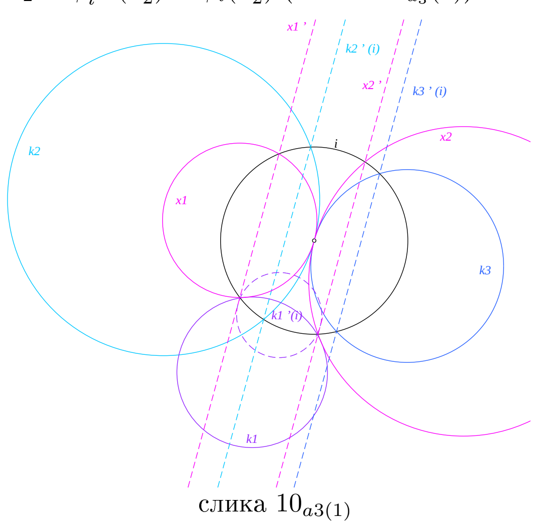
Постоје четири круга која испуњавају услов постављеног проблема, додирују сва три дата круга. Два од њих садрже тачку додира датих кругова k_2 и k_3, преостала два тражена круга не садрже додирну тачку датих кругова.

Тражене кругове који садрже тачку додира датих кругова k_2 и k_3 можемо одредити добро нам познатом инверзијом ψ_i у односу на круг i исте равни, произвољног полупречника, чији је центар тачка додира датих кругова k_2 и k_3. Обзиром да дати круг k_1 нема никакав "специјалан" положај у односу на друга два дата круга разматрање овог случаја готово је идентично разматрању у случају $10(A_1)$ и добијени закључци су слични, па ћемо само укратко поновити, без детаљног објашњења.

Наиме, слике у инверзији ψ_i датих кругова k_2 и k_3 редом су праве k_2' и k_3' ($k_2' = \psi_i(k_2)$ и $k_3' = \psi_i(k_3)$), јер оба круга k_2 и k_3 садрже центар инверзије ψ_i. Како се кругови k_2 и k_3 додирују у центру инверзије, а пресликавање инверзијом чува једнакост углова: $\measuredangle(k_2, k_3) = \measuredangle(\psi_i(k_2), \psi_i(k_3)) = \measuredangle(k_2', k_3')$, праве k_2' и k_3' међусобно су паралелне. Дати круг k_1 не садржи центар посматране инверзије, па је у инверзији ψ_i његова слика $k_1' = \psi_i(k_1)$ круг. Напоменимо да се, по нашој претпоставци, кругови k_1 и k_2 секу, те се секу и њихове слике у инверзији ψ_i, круг k_1' и права k_2', а кругови k_1 и k_3 немају заједничких тачака, па их немају ни њихове слике у инверзији ψ_i, круг k_1' и права k_3'.

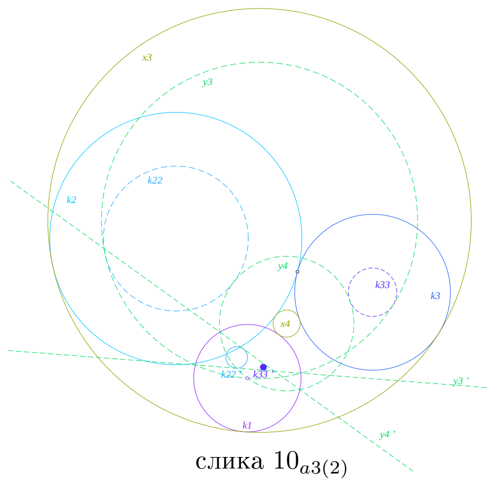
Означимо са x_1 и x_2 тражене кругове који испуњавају услов постављеног проблема, додирују сва три дата круга, и садрже тачку додира датих кругова k_2 и k_3(унапред знамо да их је два, обзиром на разматрање у поменутом случају $10(A_1)$). Кругови x_1 и x_2, по нашој претпоставци, садрже центар инверзије ψ_i, па су у овој инверзији њихове слике $x_1' = \psi_i(x_1)$ и $x_2' = \psi_i(x_2)$ праве. Сва четири круга k_2, k_3, x_1 и x_2, на основу претпостављеног услова, садрже центар инверзије ψ_i, а по услову постављеног проблема тражени кругови x_1 и x_2 додирују дате кругове k_2 и k_3, што може бити испуњено само ако сва четири круга припадају параболичком прамену кругова чија је радикална оса права управна на праву одређену центрима датих кругова k_2 и k_3. Уз овај закључак и на основу једнакости углова при пресликавању инверзијом у односу на круг($\measuredangle(x_1, k_2) = \measuredangle(\psi_i(x_1), \psi_i(k_2)) = \measuredangle(x_1', k_2')$ и $\measuredangle(x_1, k_3) = \measuredangle(\psi_i(x_1), \psi_i(k_3)) = \measuredangle(x_1', k_3')$ и $\measuredangle(x_2, k_2) = \measuredangle(\psi_i(x_2), \psi_i(k_2)) = \measuredangle(x_2', k_2')$; $\measuredangle(x_2, k_3) = \measuredangle(\psi_i(x_2), \psi_i(k_3)) = \measuredangle(x_2', k_3')$), следи да су праве k_2', k_3', x_1' и x_2' међусобно паралелне. По услову задатка тражени кругови x_1 и x_2 додирују дати круг k_1, па и њихове слике у инверзији ψ_i, права x_1' и круг k_1', односно x_2' и круг k_1', имају по једну једну заједничку тачку, и пошто важи једнакост углова при пресликавању инверзијом у односу на круг, то су праве x_1' и x_2' тангенте круга k_1', паралелне међусобно паралелним правама k_2' и k_3'(заиста је две такве тангенте обзиром на раније напоменут однос правих k_2' и k_3' и круга k_1'). Задатак се своди на констукцију тангенти x_1' и x_2' на круг k_1', добијен одређивањем слике у инверзији ψ_i датог круга k_1, паралелних међусобно паралелним правама k_2' и k_3', добијеним одређивањем слика редом датих кругова k_2 и k_3 у инверзији ψ_i.

Коначно, на основу особине инволутивности пресликавања инверзијом у односу на круг, тражени кругови x_1 и x_2 слике су у инверзији ψ_i добијених правих x_1' и x_2': $x_1 = \psi_i^{-1}(x_1') = \psi_i(x_1')$, $x_2 = \psi_i^{-1}(x_2') = \psi_i(x_2')$ (слика $10_{a_3}(1)$).



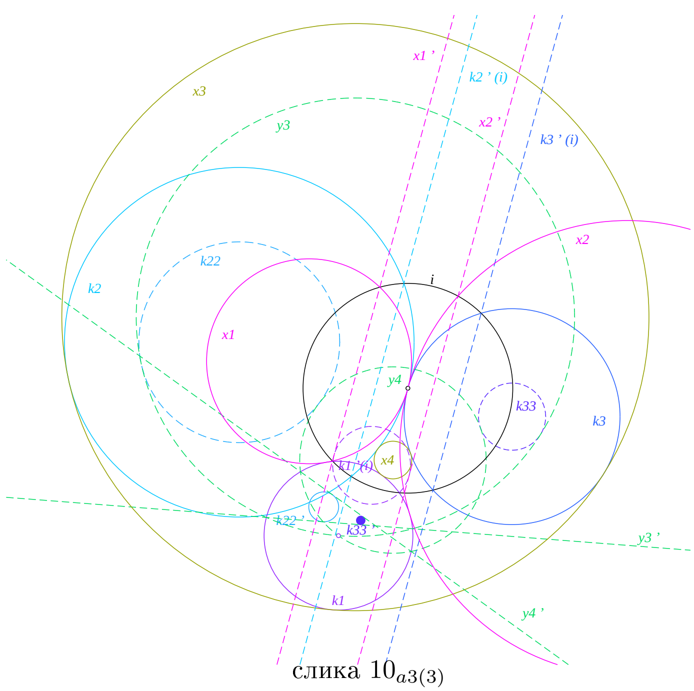
слика $10_{a3(1)}$

Преостала два тражена круга означимо са x_3 и x_4, кругове који не садрже тачку додира датих кругова k_2 и k_3. Један од њих, нпр x_3 додирује сва три дата круга изнутра, други тражени круг x_4 додирује сва три дата круга споља. Ова два круга су кругови чије смо одређивање инверзијом ψ_{k_1}, у односу на дати круг k_1(круг најмањег полупречника од три дата круга) детаљно објаснили у општем случају 1, те излагање о њиховом одређивању изостављамо и прилажемо само слику конструкције ова два круга(слика $10_{a_3(2)}$).



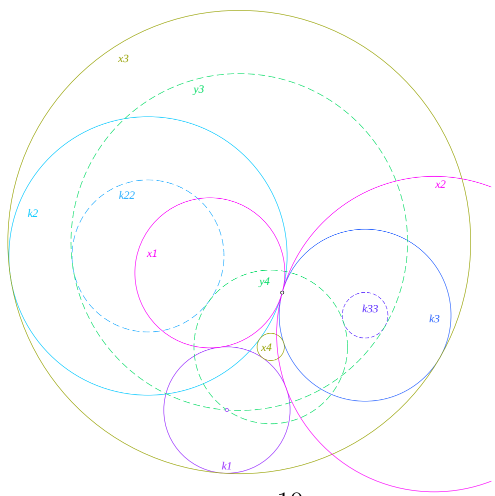
слика $10_{a3(2)}$

Слика $10_{a_3}(3)$ приказује конструкцију инверзијама ψ_i и ψ_{k_1} сва четири тражена круга.

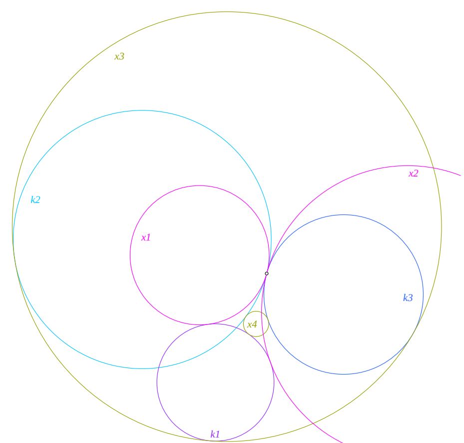


слика $10_{a3(3)}$

На слици $10_{a_3}(4)$ приказани су сви тражени кругови и помоћни концентрични кругови, на слици $10_{a_3}(5)$ приказани су само тражени кругови.

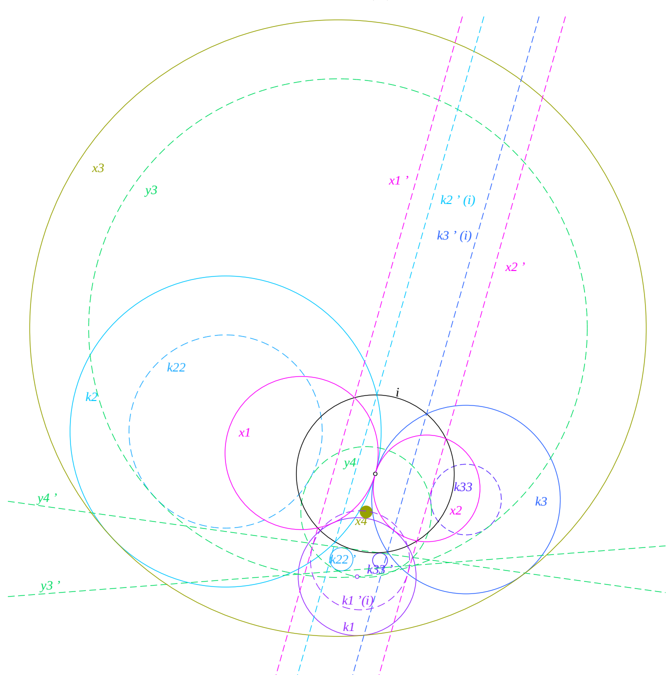


слика $10_{a3(4)}$

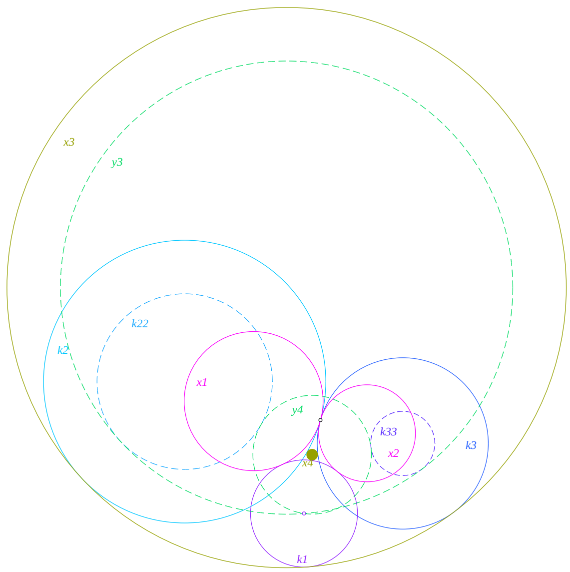


слика $10_{a3(5)}$

У случају када дати круг k_1 сече оба дата круга k_2 и k_3, при чему не постоји тачка која припада унутрашњој области сваког од дата три круга k_1, k_2 и k_3, напоменули смо да су и разматрања и закључци готово идентични те прилажемо само слику конструкције свих тражених кругова(слика $10_{a_3(6)}$) и слику која приказује тражене и помоћне концентричне кругове(слика $10_{a_3(7)}$).



слика $10_{a3(6)}$



слика $10_{a3(7)}$

•≻ **случај 10** (A_4):

Дати кругови k_2 и k_3 додирују се споља, дати круг k_1 додирује један од ова два круга изнутра.

Не умањујући општост узмимо да круг k_1 изнутра додирује дати круг k_2.

Постоје само два круга која задовољавају услов постављеног проблема, додирују сва три дата круга. Један од њих садржи тачку додира датих кругова k_2 и k_3, други тражени круг садржи тачку додира датих кругова k_1 и k_2.

Овај је случај сличан случају $10(A_2)$ те и само разматрање, па изостављамо детаљан поступак. Укратко подсећамо на поступак одређивања тражених решења:

Означимо са x_1 тражени круг који садржи тачку додира датих кругова k_2 и k_3. Овај круг одређујемо инверзијом ψ_i у односу на круг i исте равни, произвољног полупречника, са центром у додирној тачки кругова k_2 и k_3.

Дати круг k_1 не садржи центар инверзије ψ_i, те је у овој инверзији његова слика $k_1' = \psi_i(k_1)$ круг. Дати кругови k_2 и k_3 садрже центар посматране инверзије, па су у инверзији ψ_i њихове слике $k_2' = \psi_i(k_2)$ и $k_3' = \psi_i(k_3)$ праве. Обзиром да се кругови k_2 и k_3 додирују у центру инверзије, а инверзија чува једнакост углова: $\measuredangle(k_2, k_3) = \measuredangle(\psi_i(k_2), \psi_i(k_3)) = \measuredangle(k_2', k_3')$, праве k_2' и k_3' међусобно су паралелне. Напоменимо да се, по претпоставци овог случаја, кругови k_1 и k_2 додирују(изнутра), тј. имају тачно једну заједничку тачку, па и њихове слике у инверзији ψ_i, права k_2' и круг k_1', имају тачно једну заједничку тачку и пошто важи једнакост углова при пресликавању инверзијом: $\measuredangle(k_1, k_2) = \measuredangle(\psi_i(k_1), \psi_i(k_2)) = \measuredangle(k_1', k_2')$, то је права k_2' тангента круга k_1'.

Тражени круг x_1 садржи центар инверзије ψ_i па је у овој инверзији његова слика

$x_1' = \psi_i(x_1)$ је права. По нашој претпоставци, оба дата круга k_2 и k_3 и тражени круг x_1 садрже додирну тачку кругова k_2 и k_3, а круг x_1, по услову задатка, додирује оба круга k_2 и k_3, што може бити испуњено само ако круг x_1 дате кругове додирује у њиховој додирној тачки(центру инверзије ψ_i). Обзиром да пресликавање инверзијом у односу на круг чува једнакост углова следи да су праве k_2', k_3' и x_1' међусобно паралелне. Круг x_1, по услову задатка, додирује дати круг k_1, па и њихове слике у инверзији, права x_1' и круг k_1', имају тачно једну заједничку тачку и како важи једнакост углова: $\measuredangle(x_1, k_1) = \measuredangle(\psi_i(x_1), \psi_i(k_1)) = \measuredangle(x_1', k_1')$, то је права x_1' тангента круга k_1'. Дакле, права x_1' тангента је круга k_1' паралелна међусобно паралелним правама k_2' и k_3', где је права k_2' такође тангента круга k_1'(закључак који смо извели раније, а који указује да постоји још само једна тангента x_1'(одговарајућа слика у инверзији ψ_i траженог круга x_1) на круг k_1' паралелна његовој тангенти k_2', самим тим и тачно један круг који испуњава услов постављеног проблема и наше претпоставке). Задатак се своди на конструкцију друге тангенте на круг k_1', добијен одређивањем слике датог круга k_1 у инверзији ψ_i, паралелне међусобно паралелним правама k_2' и k_3', добијеним одређивањем слика у инверзији ψ_i редом датих кругова k_2 и k_3, где је права k_2' тангента круга k_1'.

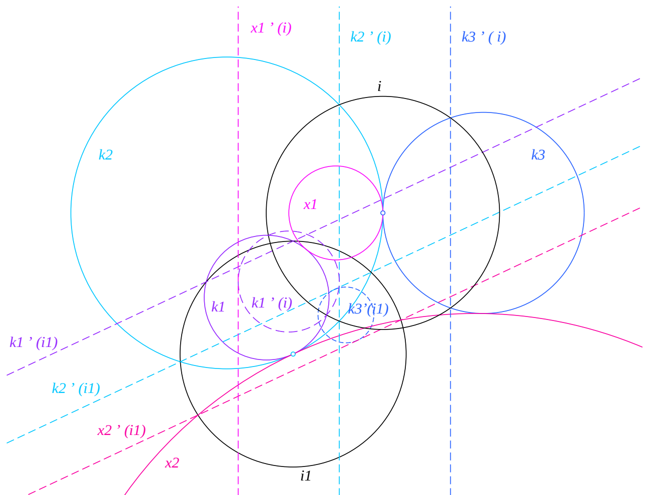
Обзиром на особину инволутивности пресликавања инверзијом у односу на круг тражени круг x_1 је слика у инверзији ψ_i добијене праве x_1': $x_1 = \psi_i^{-1}(x_1') = \psi_i(x_1')$.

Назовимо x_2 тражени круг који садржи тачку додира датих кругова k_1 и k_2. Овај круг одређујемо инверзијом ψ_{i_1} у односу на круг i_1 исте равни, произвољног полупречника, чији је центар тачка додира датих кругова k_1 и k_2, на потпуно идентичан начин као у случају $10(A_2)$ и идентично добијању круга x_1 овог случаја те поступак одређивања изостављамо. Указујемо на добијене закључке:

Слика у инверзији ψ_{i_1} траженог круга x_2 је права x_2', тангента на круг k_3' (слика у инверзији ψ_{i_1} датог круга k_3), паралелна међусобно паралелним правама k_1' и k_2'(редом слике у инверзији ψ_{i_1} датих кругова k_1 и k_2), при чему је права k_2' такође тангента круга k_3'.

Тражени круг x_2, на основу особине инволутивности пресликавања инверзијом у односу на круг, слика је у инверзији ψ_{i_1} добијене праве x_2': $x_2 = \psi_{i_1}^{-1}(x_2') = \psi_{i_1}(x_2')$.

Слика $10_{a_4}(1)$ приказује конструкцију инверзијама ψ_i и ψ_{i_1} оба тражена круга.



слика $10_{a4(1)}$

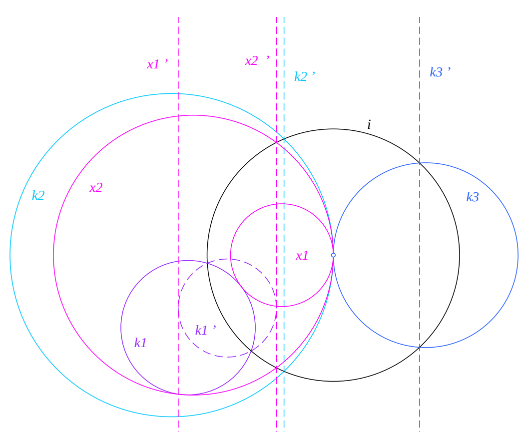
●≻ **случај 10** (A_5):

Дати се кругови k_2 и k_3 додирују спољa, дати круг k_1 припада унутрашњој области једног од ова два круга.

Не умањујући општост, претпоставимо да се дати круг k_1 налази се у унутрашњој области датог круга k_2.

Постоје само два круга који испуњавају услов постављеног проблема, додирују сва три дата круга. Оба тражена круга садрже тачку додира датих кругова k_2 и k_3.

Тражене кругове одређујемо добро нам познатом инверзијом ψ_i у односу на круг i исте равни, произвољног полупречника чији је центар додирна тачка датих кругова k_2 и k_3. Инверзију ψ_i користили смо у сваком подслучају случаја $10(A)$ те разматрање изостављамо, прилажемо слику $10_{a_5}(1)$ која приказује конструкцију тражених кругова.



слика $10_{a5(1)}$

$\prec\bullet\succ$ **случај 10 (** B **)**:

Дата се два круга додирују изнутра, трећи дати круг мења положај у заједничкој равни у односу на њих два.

Не умањујући општост, претпоставимо да се дати кругови k_2 и k_3 додирују изнутра и овакав њихов положај сматрајмо инваријантним положајем случаја $10(B)$. Датом кругу k_1(круг најмањег полупречника од дата три круга, како смо раније претпоставили) мењаћемо положај у равни која садржи ова три круга и кругове који су решења овог Аполонијевог проблема.

$\bullet\succ$ **случај 10 (**B_1**)**:

Дати кругови k_2 и k_3 додирују се изнутра, дати круг k_1 са њима нема заједничких тачака и налази се у спољашњој области оба од њих.

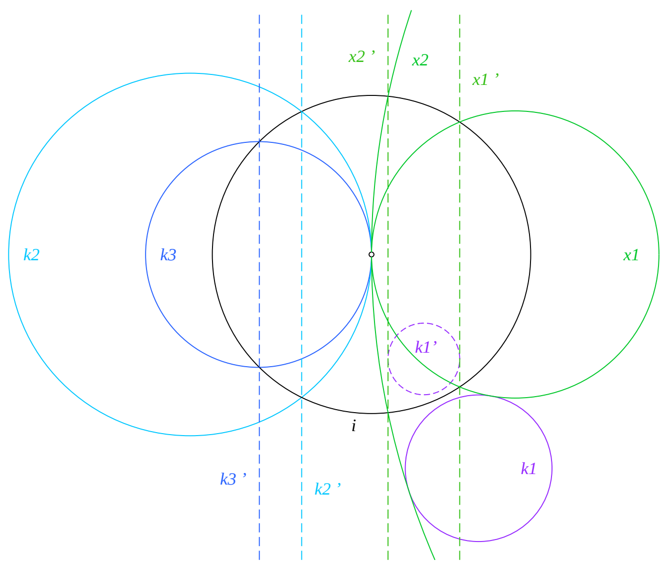
Постоје само два круга која задовољавају услов постављеног проблема, додирују сва три дата круга постављена у овакав положај у равни. Оба тражена круга садрже тачку додира датих кругова k_2 и k_3.

Означимо са i круг исте равну, произвољног полупречника, чији је центар тачка додира датих кругова k_2 и k_3. Посматрајмо пресликавање инверзијом ψ_i у односу на круг i. Нагласимо да, обзиром да је ово стални положај датих кругова k_2 и k_3 случаја $10(B)$, инверзију ψ_i ћемо, уз још неке инверзије, односно инверзије у односу на неке друге кругове, користити у сваком наредном подслучају случаја $10(B)$.

Оба дата круга k_2 и k_3 садрже центар круга i(центар инверзије ψ_i) па су у посматраној инверзији њихове слике $k_2' = \psi_i(k_2)$ и $k_3' = \psi_i(k_3)$ праве. Како се кругови k_2 и k_3 додирују у центру инверзије, обзиром да инверзија чува једнакост углова: $\measuredangle(k_2, k_3) = \measuredangle(\psi_i(k_2), \psi_i(k_3)) = \measuredangle(k_2', k_3')$, праве k_2' и k_3' међусобно су паралелне(што се може видети и приликом конструкције одређивањем слика кругова k_2 и k_3 у инверзији ψ_i). Дати круг k_1 не садржи центар посматране инверзије па је у инверзији ψ_i његова слика $k_1' = \psi_i(k_1)$ круг.

Означимо са x тражени круг који садржи тачку додира датих кругова k_2 и k_3(поставимо се као да не знамо број кругова који су решење проблема, а нешто касније преименоваћемо x у x_1 и x_2). Тражени круг x, како смо раније закључили, садржи додирну тачку датих кругова k_2 и k_3, центар инверзије ψ_i, те је у инверзији ψ_i његова слика $x' = \psi_i(x)$ права. По нашој претпоставци оба дата круга k_2 и k_3 и тражени круг x садрже тачку додира кругова k_2 и k_3, а круг x, по услову задатка, додирује оба дата круга k_2 и k_3, што може бити испуњено само ако круг x дате кругове додирује у њиховој додирној тачки(која је центар инверзије ψ_i). Пресликавање инверзијом у односу на круг чува једнакост углова: $\measuredangle(x, k_2) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k_2)) = \measuredangle(x', k_2')$ и $\measuredangle(x, k_3) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k_3)) = \measuredangle(x', k_3')$, одакле следи да су праве k_2', k_3' и x' међусобно паралелне. Круг x, по услову задатка, додирује дати круг k_1, односно са њим има тачно једну заједничку тачку, па и њихове слике у инверзији, права x' и круг k_1', имају тачно једну заједничку тачку и како важи једнакост углова при пресликавању инверзијом: $\measuredangle(x, k_1) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k_1)) = \measuredangle(x', k_1')$, следи да је права x' тангента круга k_1'. Да сумирамо досадашње закључке: права x' тангента је круга k_1' паралелна међусобно паралелним правама k_2' и k_3' и задатак се своди на конструкцију тангенте на круг k_1', добијен одређивањем слике датог круга k_1 у инверзији ψ_i, паралелне међусобно паралелним правама k_2' и k_3', добијеним одређивањем слика у инверзији ψ_i редом датих кругова k_2 и k_3. На основу наше претпоставке, дати круг k_1 са датим круговима k_2 и k_3 нема заједничких тачака(налази се у спољашњој области оба од њих), што значи да их немају ни њихове слике у инверзији, круг k_1' и права k_2', односно круг k_1' и права k_3', те постоје две тангенте, означимо их са x_1' и x_2', на круг k_1' паралелне међусобно паралелним правама k_2' и k_3'. Ове две тангенте одговарају сликама у инверзији ψ_i тражених кругова x_1 и x_2.

Инверзија у односу на круг је инволутивно пресликавање па су тражени кругови x_1 и x_2 слике у инверзији ψ_i добијених правих x_1' и x_2': $x_1 = \psi_i^{-1}(x_1') = \psi_i(x_1')$, $x_2 = \psi_i^{-1}(x_2') = \psi_i(x_2')$ (слика $10_{b_1}(1)$).



слика $10_{b1(1)}$

•≻ **случај 10 (B_2):**

Дати кругови k_2 и k_3 додирују се изнутра, дати круг k_1 сече само дати круг k_2 или сече оба дата круга k_2 и k_3.

Иако на први поглед делује свеједно, ипак постоји разлика када дати круг k_1 сече само круг k_2 и када сече оба круга k_2 и k_3 и та се разлика огледа у броју решења, односно у броју кругова који испуњавају услов постављеног проблема, додирују сва три дата круга k_1, k_2 и k_3.

↪ Размотримо најпре случај када се дати кругови k_2 и k_3 додирују изнутра, дати круг k_1 сече само дати круг k_2:

Постоје четири круга која испуњавају услов постављеног проблема, додирују сва три дата круга. Два од њих садрже тачку додира датих кругова k_2 и k_3, преостала два тражена круга не садрже додирну тачку ових кругова.

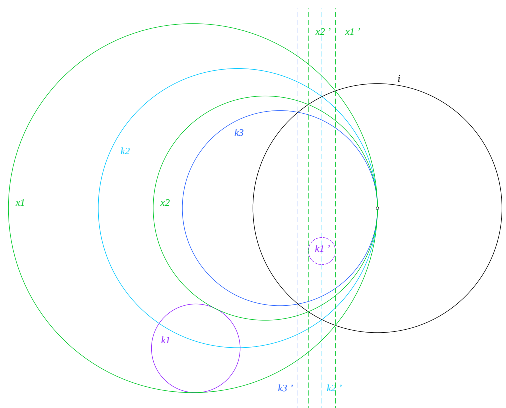
Тражене кругове који садрже тачку додира датих кругова k_2 и k_3 можемо одредити инверзијом ψ_i у односу на круг i исте равни, произвољног полупречника, чији је центар тачка додира датих кругова k_2 и k_3(инверзијом коју смо детаљно размотрили у претходном случају). Обзиром да дати круг k_1 нема никакав посебан положај у односу на друга два дата круга разматрање овог дела случаја готово је идентично разматрању у случају $10(B_1)$. Укратко понављамо, без детаљног објашњења, већ изведене закључке:

Наиме, слике у инверзији ψ_i датих кругова k_2 и k_3 редом су праве k_2' и k_3' ($k_2' = \psi_i(k_2)$ и $k_3' = \psi_i(k_3)$), јер оба круга k_2 и k_3 садрже центар инверзије ψ_i. Кругови k_2 и k_3 додирују се у центру инверзије, а како пресликавање инверзијом у односу на круг чува једнакост углова: $\measuredangle(k_2, k_3) = \measuredangle(\psi_i(k_2), \psi_i(k_3)) = \measuredangle(k_2', k_3')$, праве k_2' и k_3' међусобно су паралелне. Дати круг k_1 не садржи центар посматране инверзије, па је у инверзији ψ_i његова слика $k_1' = \psi_i(k_1)$ круг. Напоменимо да се, по нашој претпоставци, кругови k_1 и k_2 секу, те се секу и њихове слике у инверзији ψ_i, круг k_1' и права k_2', а кругови k_1 и k_3 немају заједничких тачака, па их немају ни њихове слике у инверзији ψ_i, круг k_1' и права k_3'.

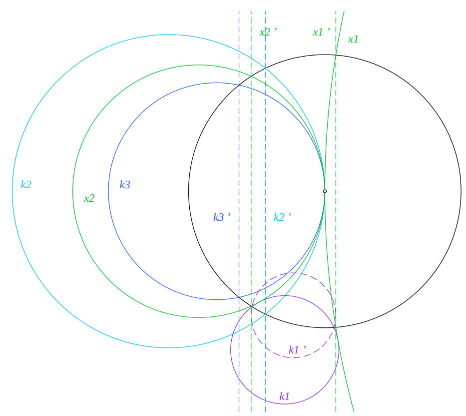
Тражени круг, означимо га са x, како смо претпоставили, садржи додирну тачку датих кругова k_2 и k_3(центар инверзије ψ_i), па је у инверзији ψ_i његова слика $x' = \psi_i(x)$ права. Сва три круга k_2, k_3 и x, на основу претпостављеног услова, садрже центар инверзије ψ_i, а по услову постављеног проблема тражени круг x додирују дате кругове k_2 и k_3, што може бити испуњено само ако сва три круга припадају параболичком прамену кругова чија је радикална оса права управна на праву одређену центрима датих кругова k_2 и k_3. Уз овај закључак и на основу једнакости углова при пресликавању инверзијом у односу на круг($\measuredangle(x, k_2) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k_2)) = \measuredangle(x', k_2')$; $\measuredangle(x, k_3) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k_3)) = \measuredangle(x', k_3')$), следи да су праве k_2', k_3' и x' међусобно паралелне. По услову задатка тражени круг x додирују дати круг k_1, па и њихове слике у инверзији ψ_i, права x' и круг k_1', имају тачно једну заједничку тачку, и пошто важи једнакост углова при пресликавању инверзијом у односу на круг($\measuredangle(x, k_1) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k_1)) = \measuredangle(x', k_1')$), следи да је права x' тангента круга k_1'. Дакле, у инверзији ψ_i слика x' траженог круга x је права, тангента круга k_1', паралелна међусобно паралелним правама k_2' и k_3', где је круг k_1' добијен одређивањем слике датог круга k_1 у инверзији ψ_i, праве k_2' и k_3' добијене су одређивањем слика у инверзији ψ_i редом датих кругова k_2 и k_3. Како смо раније напоменули права k_2' сече круг k_1', права k_3' са кругом k_1' нема заједничких тачака, па постоје две тангенте, означимо их са x_1' и x_2', на круг k_1' паралелне међусобно паралелним правама k_2' и k_3', које одговарају као слике у инверзији ψ_i траженим круговима x_1 и x_2.

Коначно, на основу особине инволутивности пресликавања инверзијом у односу на круг, тражени кругови x_1 и x_2 слике су у инверзији ψ_i добијених правих x_1' и x_2': $x_1 = \psi_i^{-1}(x_1') = \psi_i(x_1')$, $x_2 = \psi_i^{-1}(x_2') = \psi_i(x_2')$.

Слике $10_{b_2}(1)$ и $10_{b_2}(1_1)$ обе приказују конструкцију инверзијом ψ_i тражених кругова x_1 и x_2, а разликују се по положају тражених кругова у односу на дати круг k_1, у зависности од његовог положаја у равни.

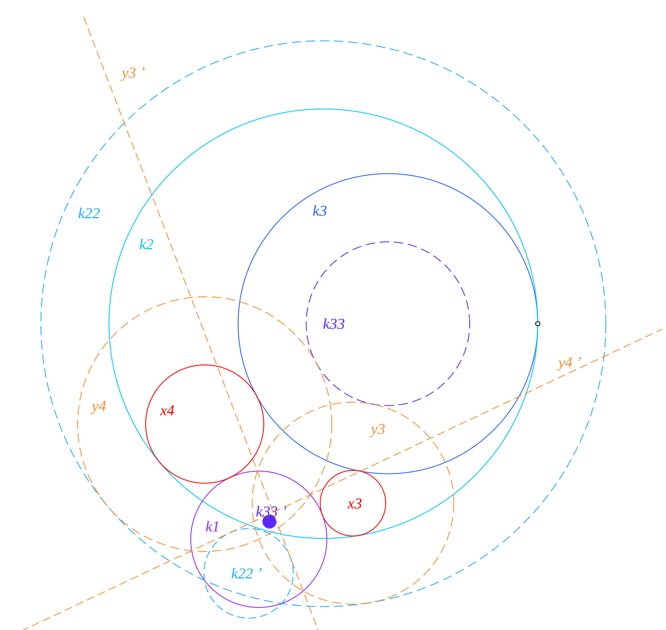


слика $10_{b2(1)}$



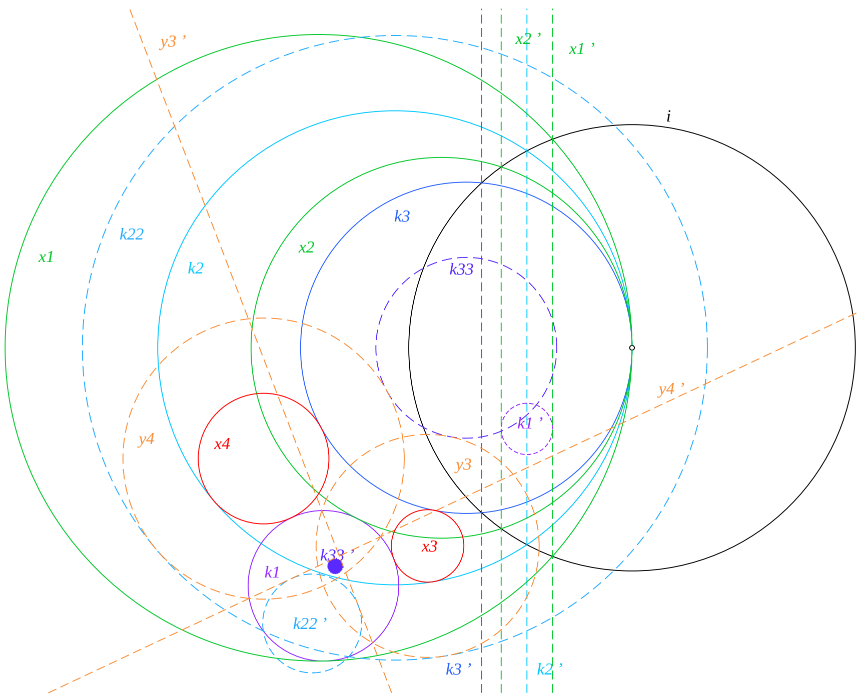
слика $10_{b2(1_1)}$

Преостала два тражена круга означимо са x_3 и x_4, кругове који не садрже тачку додира датих кругова k_2 и k_3. Оба тражена круга додирују споља дате кругове k_1 и k_3 а дати круг k_2 додирују изнутра. Ова два круга су кругови чије смо одређивање инверзијом ψ_{k_1}, у односу на дати круг k_1(круг најмањег полупречника од три дата круга) детаљно објаснили у општем случају 3, те излагање о њиховом одређивању изостављамо и прилажемо само слику конструкције ова два круга(слика $10_{b_2(2)}$).



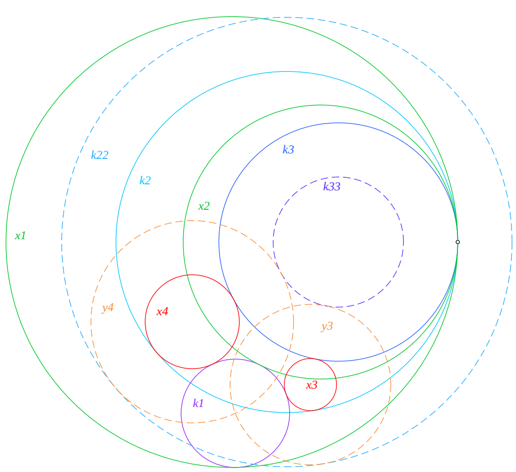
слика $10_{b2(2)}$

Слика $10_{b2(3)}$ приказује конструкцију инверзијама ψ_i и ψ_{k_1} сва четири тражена круга.

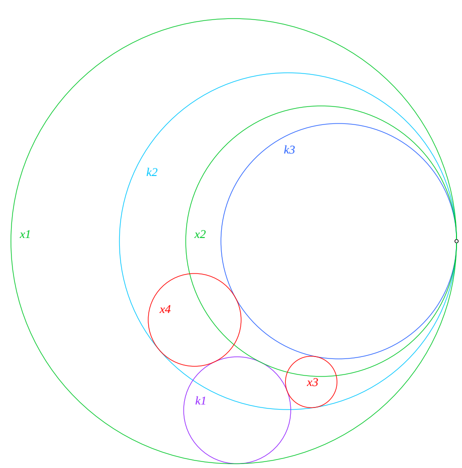


слика $10_{b2(3)}$

Слика $10_{b_2}(4)$ приказује све тражене кругове и помоћне концентричне кругове; на слици $10_{b_2}(5)$ приказани су само тражени кругови.



слика $10_{b2(4)}$



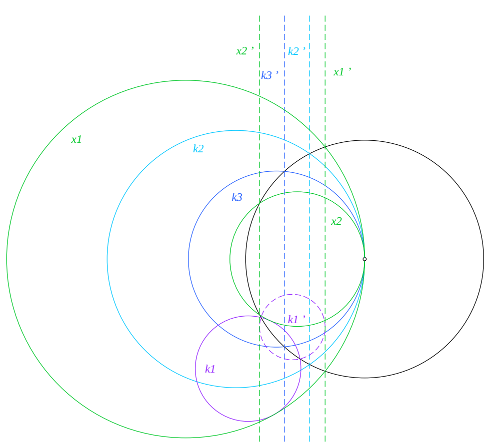
слика $10_{b2(5)}$

$\hookrightarrow$ Размотримо сада случај када се дати кругови k_2 и k_3 додирују изнутра, дати круг k_1 сече оба дата круга k_2 и k_3:

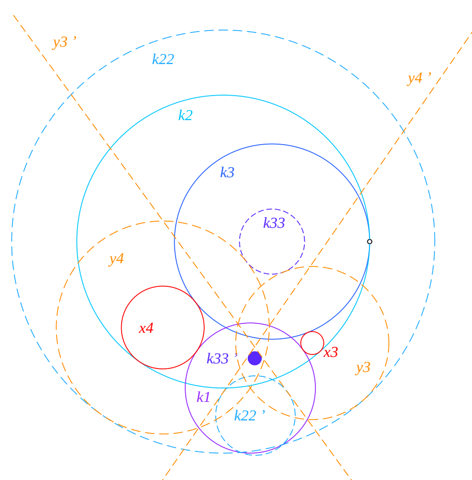
Постоји шест кругова који задовољавају услов постављеног проблема, додирују сва три дата круга задана овим положајем у равни. Два тражена круга садрже тачку додира датих кругова k_2 и k_3, преостала четири тражена круга не садрже тачку додира датих кругова.

Означимо са x_1 и x_2 тражене кругове који садрже додирну тачку датих кругова k_2 и k_3. Ове кругове можемо одредити добро нам познатом инверзијом ψ_i у односу на круг i исте равни, произвољног полупречника, са центром у тачки додира датих кругова k_2 и k_3 и у њиховом одређивању не постоји никаква разлика у односу на претходни случај када дати круг k_1 сече само дати круг k_2(слика $10_{bb_2(1)}$).

Тражене кругове који не садрже тачку додира датих кругова k_2 и k_3 означимо са x_3, x_4, x_5 и x_6. Кругови x_3 и x_4 додирују дате кругове k_1 и k_3 споља, дати круг k_2 додирују изнутра. Ово су кругови чије смо одређивање детаљно објаснили у општем случају 3(у њиховом одређивању такође не постоји разлика у односу на претходни случај када дати круг k_1 сече само дати круг k_2) (слика $10_{bb_2(2)}$).

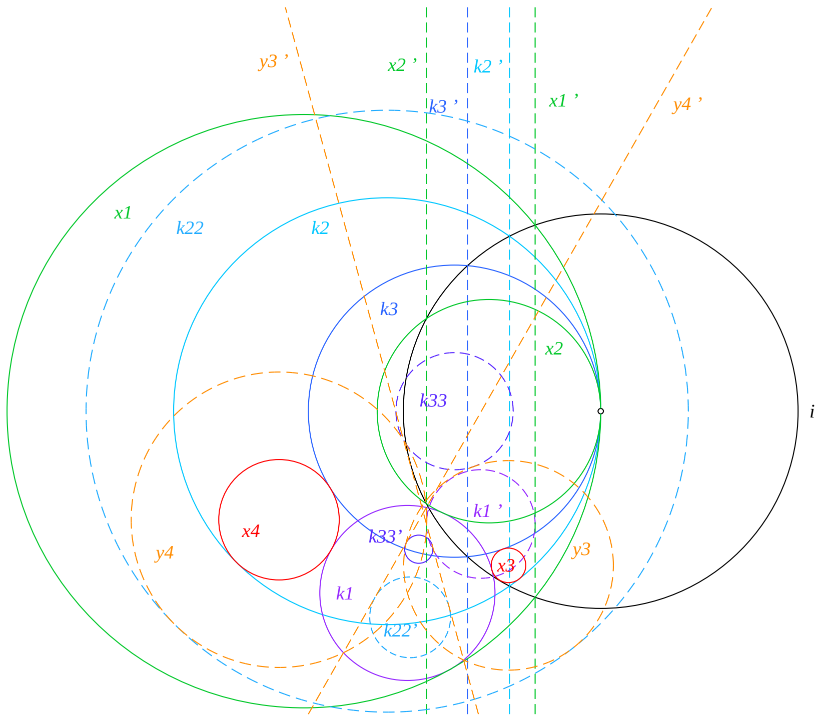


слика $10_{bb2(1)}$



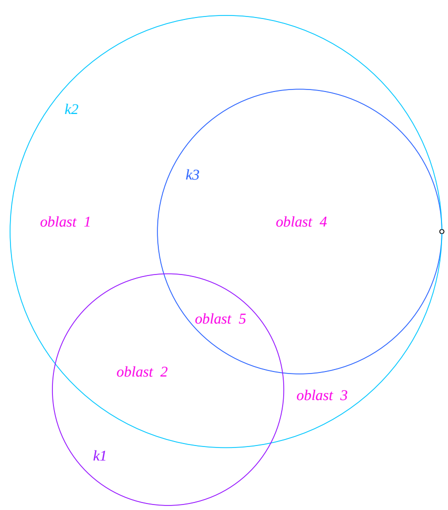
слика $10_{bb2(2)}$

Слика $10_{bb2(3)}$ приказује конструкцију инверзијама ψ_i и ψ_{k_1} четири тражена круга x_1, x_2, x_3 и x_4.



слика $10_{bb2(3)}$

Пре но што се упустимо у одређивање последња два тражена круга(означили смо их са x_5 и x_6) размотримо положај датих кругова k_1, k_2 и k_3 са још једног аспекта. Наиме, у овако заданом положају у равни датих кругова($k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$, $k_3(O_3, r_3)$; $r_1 < r_3 < r_2$) дати кругови k_1 и k_3 деле унутрашњу област датог круга k_2 на пет дисјунктних области(слика $10_{bb2(pom)}$).



слика $10_{bb2(pom)}$

Тражени кругови x_3 и x_4, који не садрже тачку додира датих кругова k_2 и k_3, додирују споља кругове k_1 и k_3 и изнутра круг k_2 па они припадају области 1 и области 3. У области 5 не постоји круг који испуњава услов постављеног проблема, области 4 припада тражени круг x_2, који садржи тачку додира датих кругова k_2 и k_3. На крају, нама најинтересантнија, је област 2. У овој области постоје два круга која испуњавају услов овог Аполонијевог проблема, додирују сва три дата круга. Ова смо два круга, на почетку излагања случаја $10(B_2)$, означили са x_5 и x_6. Тражени кругови x_5 и x_6 додирују дате кругове k_1 и k_2 изнутра и дати круг k_3 споља. Поступак за одређивање тражених кругова са сличним особинама(додирују дате кругове k_1 и k_2 споља и дати круг k_3 изнутра) детаљно смо изложили и образложили у општем случају 4(инверзијом ψ_{k_1}, у односу на дати круг k_1(круг најмањег полупречника од три дата круга)). Кругове x_5 и x_6 од кругова одређиваних у случају 4 разликује то што припадају унутрашњој области круга k_1 и њихово одређивање инверзијом ψ_{k_1} долази у обзир као један од могућих начина али отвара низ питања и случајева(да ли су помоћни, концентрични траженим, кругови y већег или мањег полупречника од тражених кругова x(што зависи од тога где се налази центар O_1 датог круга k_1)...).

Постоји једноставнији начин, који нема никаквих недоумица, за одређивање кругова x_5 и x_6, инверзијом са којом се до сада нисмо сретали.

Пре но што уведемо пресликавање инверзијом приметимо следеће:

Нека су kk_1 и kk_2 кругови исте равни(којој припадају дати кругови k_1, k_2 и k_3) концентрични редом датим круговима $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$, при чему је $kk_1(O_1, r_{11} = r_1 + r_3)$ и $kk_2(O_2, r_{22} = r_2 + r_3)$ (r_3 полупречник датог круга k_3).

Ако тражени круг x додирује дати круг k_3 споља а дате кругове k_1 и k_2 оба изнутра, тада круг $y(O, r_y = r_x + r_3)$, концентричан кругу x, садржи центар O_3 датог круга k_3 и додирује кругове kk_1 и kk_2 оба изнутра.

Конструишимо најпре кругове kk_1 и kk_2, концентричне датим круговима k_1 и k_2, полупречника редом $r_{11} = r_1 + r_3$ и $r_{22} = r_2 + r_3$, тј. $kk_1(O_1, r_{11} = r_1 + r_3)$ и $kk_2(O_2, r_{22} = r_2 + r_3)$, (r_3 полупречник датог круга k_3). Означимо са ψ_{k_3} пресликавање инверзијом у односу на дати круг $k_3(O_3, r_3)$.

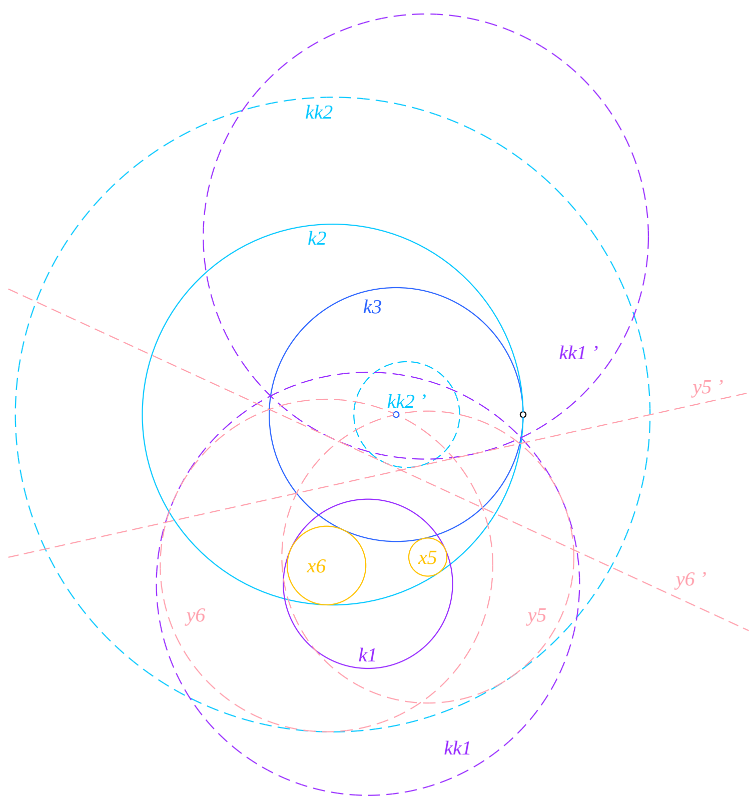
Кругови kk_1 и kk_2 по претпоставци не садрже центар O_3 датог круга k_3(центар посматране инверзије ψ_{k_3}) па су у овој инверзији њихове слике $kk_1' = \psi_{k_3}(kk_1)$ и $kk_2' = \psi_{k_3}(kk_2)$ такође кругови.

Помоћни, концентричан траженом кругу, круг y на основу нашег закључка садржи центар датог круга k_3, тачку O_3, а та је тачка центар инверзије ψ_{k_3}, те је у инверзији ψ_{k_3} његова слика $y' = \psi_{k_3}(y)$ права. Како, по нашој претпоставци, круг y додирује круг kk_1, односно са њим има тачно једну заједничку тачку, то и њихове слике у инверзији, права y' и круг kk_1', имају тачно једну заједничку тачку, и пошто важи једнакост углова при пресликавању инверзијом: $\measuredangle(kk_1, y) = \measuredangle(\psi_{k_3}(kk_1), \psi_{k_3}(y)) = \measuredangle(kk_1', y')$, следи да је права y' тангента круга kk_1'. Слично, круг y додирује и круг kk_2, тј. са њим има тачно једну заједничку тачку, па и њихове слике у инверзији, права y' и круг kk_2', имају тачно једну заједничку тачку, и како важи једнакости углова при пресликавању инверзијом у односу на круг: $\measuredangle(kk_2, y) = \measuredangle(\psi_{k_3}(kk_2), \psi_{k_3}(y)) = \measuredangle(kk_2', y')$, следи да је права y' тангента и круга kk_2'. Да резимирамо до сада закључено: права y', слика у инверзији ψ_{k_3} траженог помоћног круга y, тангента је и круга kk_1' и круга kk_2'(редом слика у инверзији ψ_{k_3} помоћних кругова kk_1 и kk_2, концентричних датим круговима k_1 и k_2), односно њихова је заједничка тангента. Задатак своди на конструкцију заједничке тангенте кругова kk_1' и kk_2', добијених одређивањем редом слика кругова kk_1 и kk_2 у инверзији ψ_{k_3}. Кругови kk_1 и kk_2 се секу па се секу и њихове слике у инверзији, кругови kk_1' и kk_2', те за њих постоје само две заједничке и то спољашње тангенте. Да би смо остали у складу са ознакама и ранијом дискусијом о овим круговима тангенте означимо са y_5' и y_6'(сличан закључак о заједничким тангентама можемо извести и на основу анализе $(*)$, обзиром да круг y оба круга kk_1 и kk_2 додирује изнутра, односно припада унутрашњој области и круга kk_1 и круга kk_2).

Инверзија у односу на круг је инволутивно пресликавање, те су помоћни(концентрични траженим круговима) кругови y_5 и y_6 слике у инверзији ψ_{k_3} добијених правих y_5' и y_6': $y_5 = \psi_{k_3}^{-1}(y_5') = \psi_{k_3}(y_5')$, $y_6 = \psi_{k_3}^{-1}(y_6') = \psi_{k_3}(y_6')$.

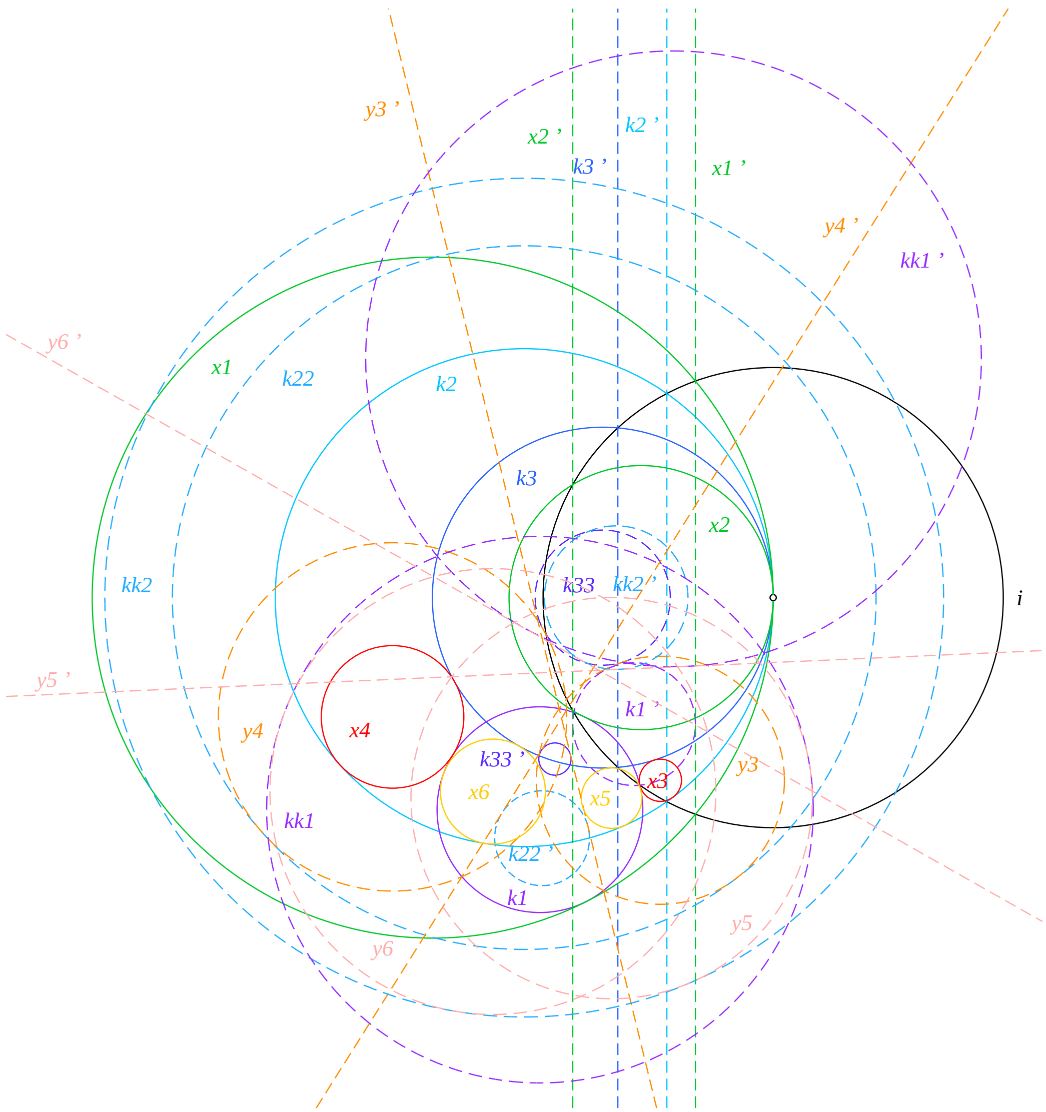
На крају, тражени кругови x_5 и x_6, концентрични су добијеним круговима y_5 и y_6 при чему је $x_5(O_{y_5}, r_{x_5} = r_{y_5} - r_3)$ и $x_6(O_{y_6}, r_{x_6} = r_{y_6} - r_3)$.

На слици $10_{bb_2}(4)$ приказана је конструкција инверзијом ψ_{k_3} помоћних, концентричних траженим, кругова y_5 и y_6 и тражених кругова x_5 и x_6.



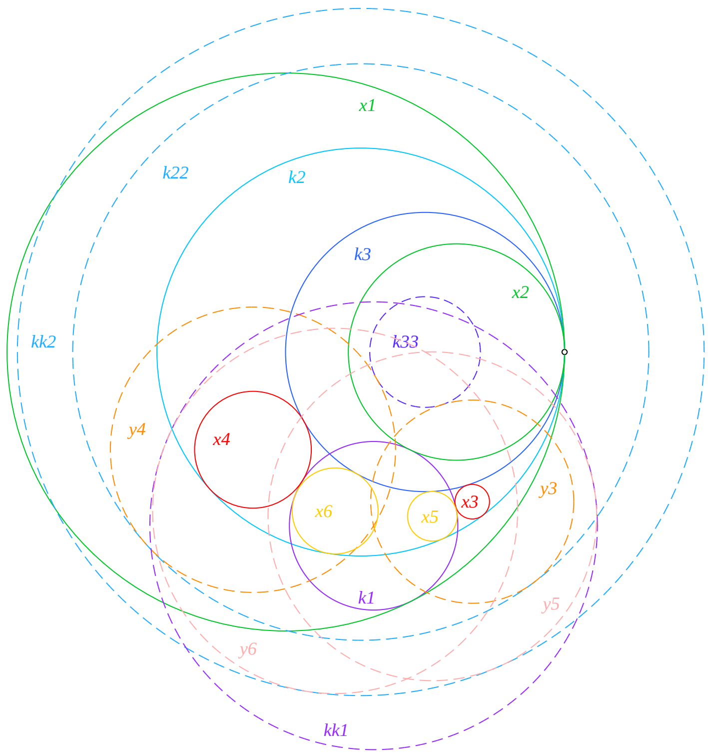
слика $10_{bb2(4)}$

Прилажемо слику $10_{bb_2}(5)$ која приказује конструкцију инверзијама ψ_i, ψ_{k_1} и ψ_{k_3} свих шест тражених кругова.

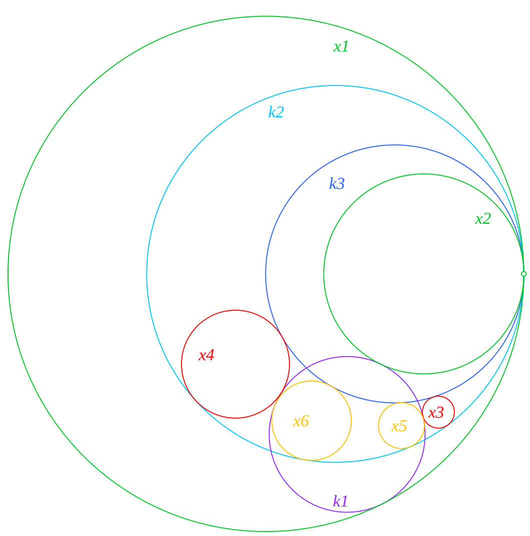


слика $10_{bb2(5)}$

На слици $10_{bb_2}(6)$ приказани су сви тражени кругови и помоћни концентрични кругови, на слици $10_{bb_2}(7)$ приказани су само тражени кругови.



слика $10_{bb2(6)}$



слика $10_{bb2(7)}$

•≻ **случај 10 (B_3):**

Дати кругови k_2 и k_3 додирују се изнутра, дати круг k_1 додирује изнутра круг k_2, а са кругом k_3 нема заједничких тачака и припада његовој спољашњој области.

Постоје четири круга која задовољавају услов постављеног проблема, додирују сва три дата круга. Један тражени круг садржи тачку додира датих кругова k_2 и k_3, други тражени круг садржи тачку додира датих кругова k_1 и k_2, преостала два тражена круга не садрже ни једну од поменутих додирних тачака.

Означимо са x_1 тражени круг који садржи тачку додира датих кругова k_2 и k_3 и одредимо прво њега. Обзиром да је овакав положај стални положај кругова k_2 и k_3 случаја 10(B), круг x_1 можемо одредити инверзијом ψ_i у односу на круг i исте равни, произвољног полупречника, са центом у тачки додира кругова k_2 и k_3, као и у сваком подслучају овог случаја(ову смо инверзију детаљно објаснили у подслучају 10(B_1) овог случаја). У овом подслучају већина закључака биће иста, но ипак постоји разлика у односу на поменути подслучај, а та се разлика огледа у броју тражених решења(у случају 10(B_1) постојала су два круга која додирују сва три дата круга и садрже тачку додира кругова k_2 и k_3. У овом случају такав је само један круг). Укратко ћемо поновити већ утврђене закључке и објаснити неке нове, а пресликавање инверзијом ψ_i у даљем тексту означаваћемо са ψ_{i_1}.

Дати кругови k_2 и k_3 садрже центар посматране инверзије, па су у инверзији ψ_{i_1} њихове слике $k_2' = \psi_{i_1}(k_2)$ и $k_3' = \psi_{i_1}(k_3)$ праве. Кругови k_2 и k_3 додирују се у центру инверзије и пошто инверзија чува једнакост углова: $\measuredangle(k_2, k_3) = \measuredangle(\psi_{i_1}(k_2), \psi_{i_1}(k_3)) = \measuredangle(k_2', k_3')$, следи да су праве k_2' и k_3' међусобно паралелне. Дати круг k_1 не садржи центар инверзије ψ_{i_1}, па је у овој инверзији његова слика $k_1' = \psi_{i_1}(k_1)$ круг. Имајмо на уму да се, по претпоставци овог случаја, кругови k_1 и k_2 додирују, односно имају тачно једну заједничку тачку те и њихове слике у инверзији ψ_{i_1}, права k_2' и круг k_1', имају тачно једну заједничку тачку и како важи једнакост углова при пресликавању инверзијом: $\measuredangle(k_1, k_2) = \measuredangle(\psi_{i_1}(k_1), \psi_{i_1}(k_2)) = \measuredangle(k_1', k_2')$, следи да је права k_2' тангента круга k_1'. Овај ће нам закључак користити нешто касније за утврђивање броја тражених решења.

Тражени круг x_1 садржи центар инверзије ψ_{i_1}, па је у овој инверзији његова слика $x_1' = \psi_{i_1}(x_1)$ права. На основу наше претпоставке оба дата круга k_2 и k_3 и тражени круг x_1 садрже додирну тачку кругова k_2 и k_3, а круг x_1, по услову задатка, додирује оба круга k_2 и k_3, што може бити испуњено само ако сва три круга k_2,k_3 и x_1 припадају параболичком прамену кругова чија је радикална оса права управна на праву одређену центрима датих кругова k_2 и k_3(у том случају сва три ова круга садрже додирну тачку кругова k_2 и k_3(центар инверзије ψ_{i_1})). Обзиром да пресликавање инверзијом у односу на круг чува једнакост углова: $\measuredangle(x_1, k_2) = \measuredangle(\psi_{i_1}(x_1), \psi_{i_1}(k_2)) = \measuredangle(x_1', k_2')$ и $\measuredangle(x_1, k_3) = \measuredangle(\psi_{i_1}(x_1), \psi_{i_1}(k_3)) = \measuredangle(x_1', k_3')$, следи да су праве k_2', k_3' и x_1' међусобно паралелне. Круг x_1, по услову постављеног проблема, додирује дати круг k_1, па и њихове слике у инверзији, права x_1' и круг k_1', имају тачно једну заједничку тачку и обзиром да важи једнакост углова: $\measuredangle(x_1, k_1) = \measuredangle(\psi_{i_1}(x_1), \psi_{i_1}(k_1)) = \measuredangle(x_1', k_1')$, следи да је права x_1' тангента круга k_1'. Да закључимо: права x_1' тангента је круга k_1' паралелна међусобно паралелним правама k_2' и k_3'. Присетимо се раније изведеног закључка: права k_2' тангента је круга k_1' и ово је разлог због кога постоји још само једна тангента x_1'(која одговара као слика у инверзији ψ_{i_1} траженог круга x_1) на круг k_1' паралелна његовој тангенти k_2', а самим тим и тачно један круг који испуњава услов постављеног проблема и наше претпоставке. Задатак се своди на конструкцију друге тангенте на круг k_1', добијен одређивањем слике датог круга k_1 у инверзији ψ_{i_1}, паралелне међусобно паралелним правама k_2' и k_3', добијеним одређивањем слика у инверзији ψ_{i_1} редом датих кругова k_2 и k_3, где је права k_2' тангента круга k_1'.

Коначно, због особине инволутивности пресликавања инверзијом у односу на круг, тражени круг x_1 слика је у инверзији ψ_{i_1} добијене праве x_1': $x_1 = \psi_{i_1}^{-1}(x_1') = \psi_{i_1}(x_1')$.

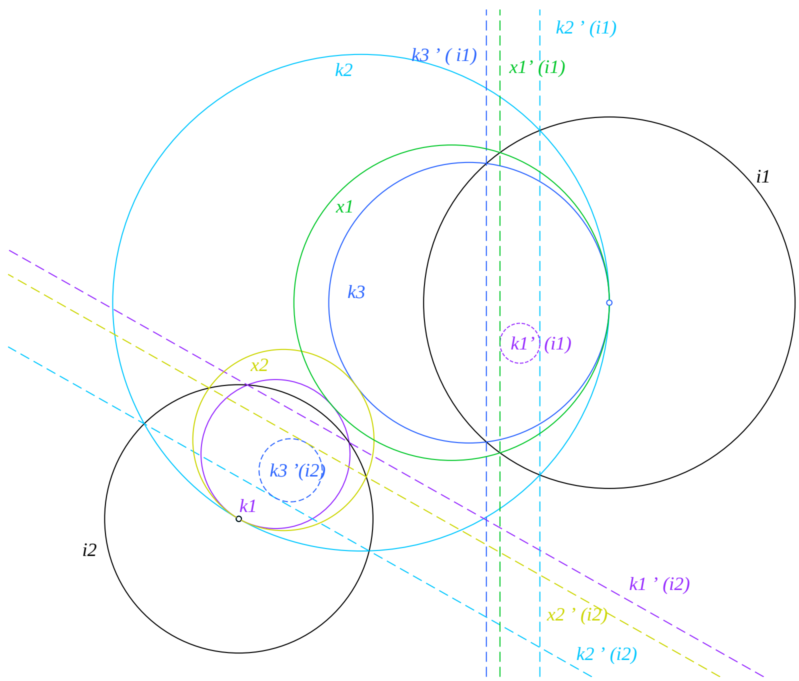
Одредимо сада тражени круг, у ознаци x_2, који садржи тачку додира датих кругова k_1 и k_2. Означимо са i_2 круг исте равни, произвољног полупречника, са центром у тачки додира датих кругова k_1 и k_2. Посматрајмо пресликавање инверзијом ψ_{i_2} у односу на круг i_2. Обзиром да ће пресликавање инверзијом ψ_{i_2} донети сличне закључке као и пресликавање инверзијом ψ_{i_1} јер је положај датих кругова k_2 и k_3 у односу на круг i_1 инверзије ψ_{i_1} сличан положају датих кругова k_1 и k_2 у односу на круг i_2 инверзије ψ_{i_2} излагање ћемо скратити колико буде могуће.

Оба дата круга k_1 и k_2 садрже центар инверзије ψ_{i_2} па су у посматраној инверзији њихове слике $k_1' = \psi_{i_2}(k_1)$ и $k_2' = \psi_{i_2}(k_2)$ праве. Кругови k_1 и k_2 додирују у центру инверзије ψ_{i_2}, а пресликавање инверзијом у односу на круг чува једнакост углова: $\measuredangle(k_1, k_2) = \measuredangle(\psi_{i_2}(k_1), \psi_{i_2}(k_2)) = \measuredangle(k_1', k_2')$, то су праве k_1' и k_2' међусобно паралелне(што се може видети приликом конструкције одредивањем слика датих кругова k_1 и k_2 у инверзији ψ_{i_2}). Дати круг k_3 не садржи центар инверзије ψ_{i_2}, те је у овој инверзији његова слика $k_3' = \psi_{i_2}(k_3)$ круг. На основу претпоставке овог случаја кругови k_2 и k_3 се додирују, односно имају тачно једну заједничку тачку, па и њихове слике у инверзији ψ_{i_2}, права k_2' и круг k_3', имају тачно једну заједничку тачку и како важи једнакост углова при пресликавању инверзијом: $\measuredangle(k_2, k_3) = \measuredangle(\psi_{i_2}(k_2), \psi_{i_2}(k_3)) = \measuredangle(k_2', k_3')$, следи да је права k_2' тангента круга k_3'(ово је закључак који ћемо употребити касније у овом излагању, такође за утврђивање броја тражених кругова).

Тражени круг x_2 садржи центар инверзије ψ_{i_2}, па је у инверзији ψ_{i_2} његова слика $x_2' = \psi_{i_2}(x_2)$ права. Оба дата круга k_1 и k_2 и тражени круг x_2, по нашој претпоставци, садрже тачку додира кругова k_1 и k_2, а круг x_2 их, по услову задатка, додирује оба, што може бити испуњено само ако круг x_2 додирује дате кругове k_1 и k_2 у њиховој додирној тачки(центру инверзије ψ_{i_2}) или како смо другачије рекли приликом одређивања круга x_1, само ако сва три круга k_1, k_2 и x_2 припадају параболичком прамену кругова чија је радикална оса права управна на праву одређену центрима датих кругова k_1 и k_2. Пресликавање инверзијом у односу на круг чува једнакост углова: $\measuredangle(x_2, k_1) = \measuredangle(\psi_{i_2}(x_2), \psi_{i_2}(k_1)) = \measuredangle(x_2', k_1')$ и $\measuredangle(x_2, k_2) = \measuredangle(\psi_{i_2}(x_2), \psi_{i_2}(k_2)) = \measuredangle(x_2', k_2')$, то су праве k_1', k_2' и x_2' међусобно паралелне. По услову постављеног проблема круг x_2 додирује дати круг k_3, па и њихове слике у инверзији ψ_{i_2}, права x_2' и круг k_3', имају тачно једну заједничку тачку и пошто важи једнакост углова при пресликавању инверзијом: $\measuredangle(x_2, k_3) = \measuredangle(\psi_{i_2}(x_2), \psi_{i_2}(k_3)) = \measuredangle(x_2', k_3')$, следи да је права x_2' тангента круга k_3'. Дакле, права x_2' тангента је круга k_3' паралелна међусобно паралелним правама k_1' и k_2'. Напоменусмо да је права k_2' тангента круга k_3' што је и разлог због кога постоји још само једна тангента x_2'(која одговара као слика у инверзији ψ_{i_2} траженом кругу x_2) на круг k_3' паралелна његовој тангенти k_2' па постоји и тачно један круг који испуњава услов постављеног проблема и све наше претпоставке. Задатак се своди на конструкцију друге тангенте на круг k_3', добијен одређивањем слике датог круга k_3 у инверзији ψ_{i_2}, паралелне међусобно паралелним правама k_1' и k_2', добијеним одређивањем слика у инверзији ψ_{i_2} редом датих кругова k_1 и k_2, при чему је права k_2' тангента круга k_3'.

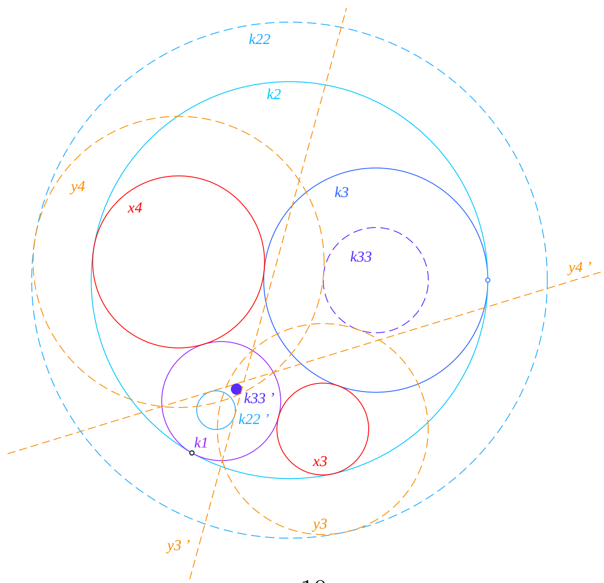
На крају, пошто је инверзија у односу на круг инволутивно пресликавање, тразхени круг x_2 слика је у инверзији ψ_{i_2} добијене праве x_2': $x_2 = \psi_{i_2}^{-1}(x_2') = \psi_{i_2}(x_2')$.

На слици $10_{b_3(1)}$ приказана је конструкција инверзијама ψ_i и ψ_{i_1} кругова x_1 и x_2.



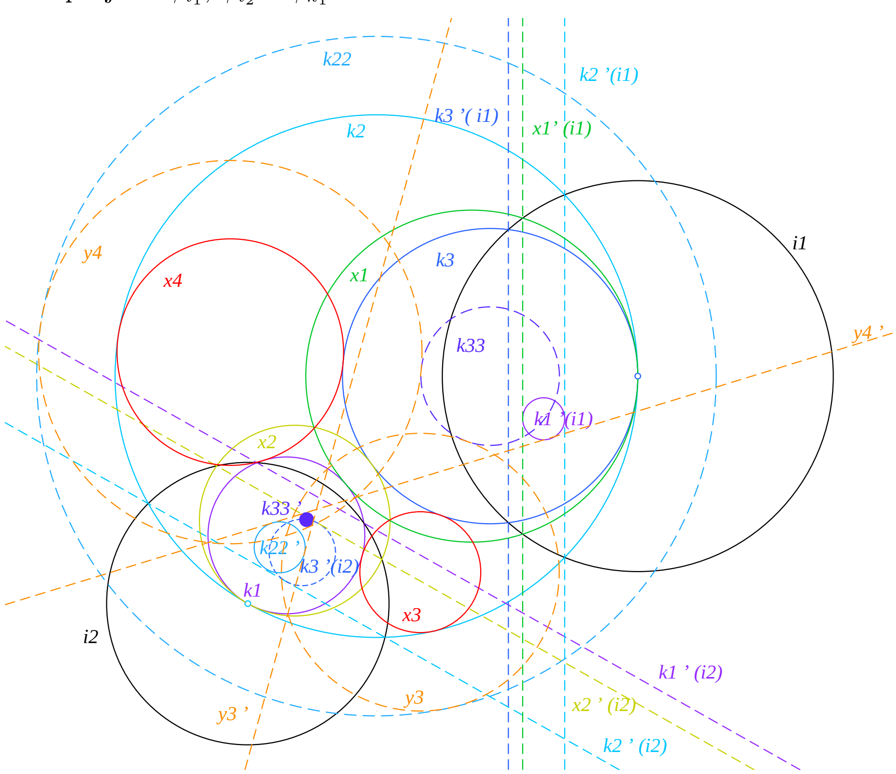
слика $10_{b3(1)}$

Кругове који испуњавају услов задатог проблема а не садрже ни једну од две поменуте тачке додира, тачку додира датих кругова k_1 и k_2, односно тачку додира датих кругова k_2 и k_3, означимо са x_3 и x_4. Оба ова круга додирују дати круг k_2 изнутра(припадају његовој унутрашњој области), а дате кругове k_1 и k_3 додирују споља. Ова два круга су кругови чији смо поступак одређивања инверзијом ψ_{k_1}, у односу на дати круг k_1(круг најмањег полупречника од три дата круга) детаљно изложили у општем случају 3 па излагање о одређивању ових кругова изостављамо и прилажемо само слику конструкције тражених кругова x_3 и x_4(слика $10_{b_3(2)}$).



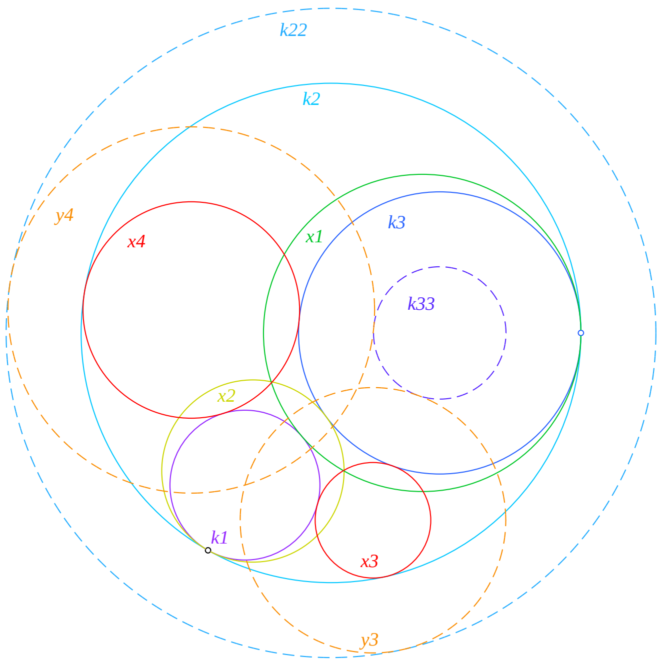
слика $10_{b3(2)}$

Дајемо као прилог слику $10_{b_3(3)}$ која приказује конструкцију сва четири тражена круга инверзијама ψ_{i_1}, ψ_{i_2} и ψ_{k_1}.

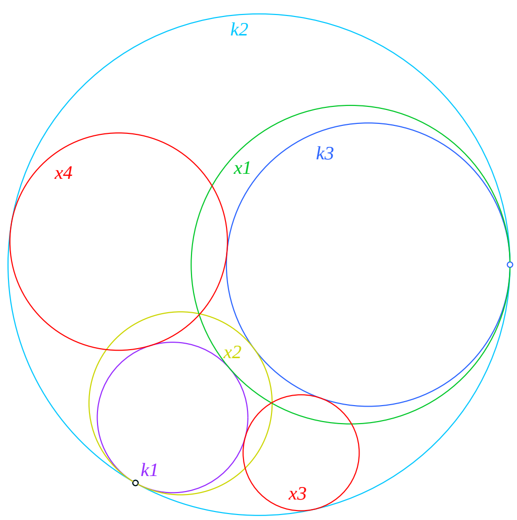


слика $10_{b3(3)}$

На слици $10_{b_3}(4)$ приказана су сва четири тражена круга и помоћни концентрични кругови. Слика $10_{b_3}(5)$ приказује само тражене кругове.



слика $10_{b3(4)}$



слика $10_{b3(5)}$

Напоменимо да се у случају да дати круг k_1 додирује споља дати круг k_2 као и у случају да дати круг k_1 додирује изнутра дати круг k_2 и сече дати круг k_3 кругови који испуњавају услов постављеног проблема одређују на сличан начин, односно инверзијама у односу на исте кругове као у случају $10(B_3)$(то су исти кругови као у овом случају).

•≻ случај 10 (B_4):

Дати се кругови k_2 и k_3 додирују изнутра, дати круг k_1 припада унутрашњој области круга k_2, а са кругом k_3 нема заједничких тачака и припада његовој спољашњој области.

Шест је кругова који задовољавају услов постављеног проблема, додирују сва три дата круга задана оваквим положајем у равни. Два тражена круга садрже тачку додира датих кругова k_2 и k_3, преостала четири тражена круга не садрже тачку додира датих кругова.

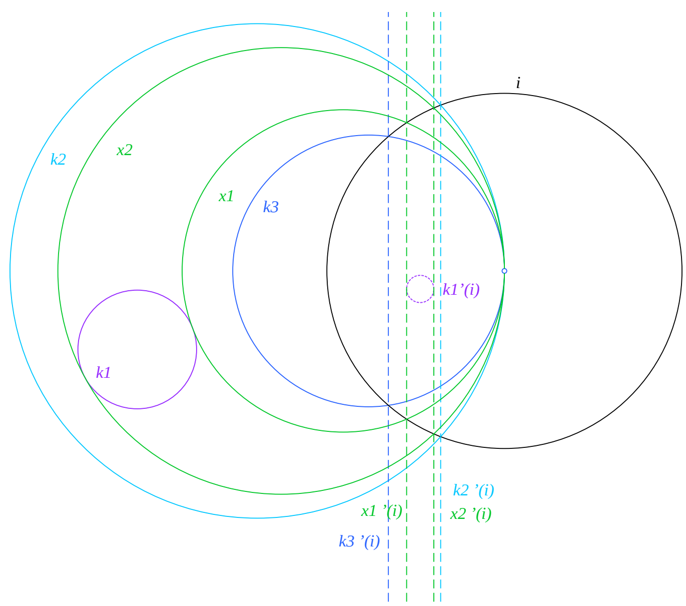
Тражене кругове који садрже тачку додира датих кругова k_2 и k_3 можемо одредити добро нам познатом инверзијом ψ_i у односу на круг i исте равни, произвољног полупречника, чији је центар тачка додира датих кругова k_2 и k_3. Обзиром да дати круг k_1 нема никакав посебан положај у односу на друга два дата круга разматрање овог случаја готово је идентично разматрању у свим претходним подслучајевима случаја $10(B)$ где смо користили инверзију ψ_i и добијени закључци су слични. Укратко понављамо старе и допуњавамо их неким новим за овај случај везаним закључцима.

Наиме, слике у инверзији ψ_i датих кругова k_2 и k_3 редом су праве k_2' и k_3'($k_2' = \psi_i(k_2)$ и $k_3' = \psi_i(k_3)$), јер оба круга k_2 и k_3 садрже центар инверзије ψ_i. Обзиром да се кругови k_2 и k_3 додирују у центру инверзије, а пресликавање инверзијом чува једнакост углова: $\measuredangle(k_2, k_3) = \measuredangle(\psi_i(k_2), \psi_i(k_3)) = \measuredangle(k_2', k_3')$, праве k_2' и k_3' међусобно су паралелне. Дати круг k_1 не садржи центар посматране инверзије, па је у инверзији ψ_i његова слика $k_1' = \psi_i(k_1)$ круг. По нашој претпоставци, круг k_1 припада унутрашњој области круга k_2 тј. кругови k_1 и k_2 немају заједничких тачака, те их немају ни њихове слике у инверзији ψ_i, круг k_1' и права k_2'. Круг k_1 са кругом k_3 такође нема заједничких тачака и припада његовој спољашњој области па ни њихове слике у инверзији ψ_i, круг k_1' и права k_3', немају заједничих тачака. На ове закључке посебно скрећемо пажњу обзиром да ће нам баш они послужити за утврђивање броја решења односно кругова који испуњавају услов постављеног проблема.

Тражени круг x, по нашој претпоставци, садржи тачку додира датих кругова k_2 и k_3, центар инверзије ψ_i, па је у инверзији ψ_i његова слика $x' = \psi_i(x)$ права. Кругови k_2, k_3 и x по нашем услову садрже тачку додира кругова k_2 и k_3, а по услову задатка круг x додирује и круг k_2 и круг k_3 па сва три круга припадају параболичком прамену кругова чија је радикална оса права управна на праву одређену центрима датих кругова k_2 и k_3. Обзиром да важи једнакости углова при пресликавању инверзијом у односу на круг: $\measuredangle(x, k_2) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k_2)) = \measuredangle(x', k_2')$; $\measuredangle(x, k_3) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k_3)) = \measuredangle(x', k_3')$, следи да су праве k_2', k_3' и x' међусобно паралелне. Како, по услову постављеног проблема, тражени круг x додирују дати круг

k_1 то и њихове слике у инверзији ψ_i, права x' и круг k_1', имају тачно једну заједничку тачку, и пошто је: $\measuredangle(x, k_1) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k_1)) = \measuredangle(x', k_1')$, следи да је права x' тангента круга k_1'. Да резимирамо: у инверзији ψ_i слика x' траженог круга x је права, тангента круга k_1', паралелна међусобно паралелним правама k_2' и k_3', где је круг k_1' добијен одређивањем слике датог круга k_1 у инверзији ψ_i, праве k_2' и k_3' добијене су одређивањем слика у инверзији ψ_i редом датих кругова k_2 и k_3. Напоменули смо раније да праве k_2' и k_3' са кругом k_1' немају заједничких тачака, па постоје две тангенте на круг k_1', означимо их са x_1' и x_2'(одговарајуће слике у инверзији ψ_i траженх кругова x_1 и x_2), на круг k_1' паралелне међусобно паралелним правама k_2' и k_3'.

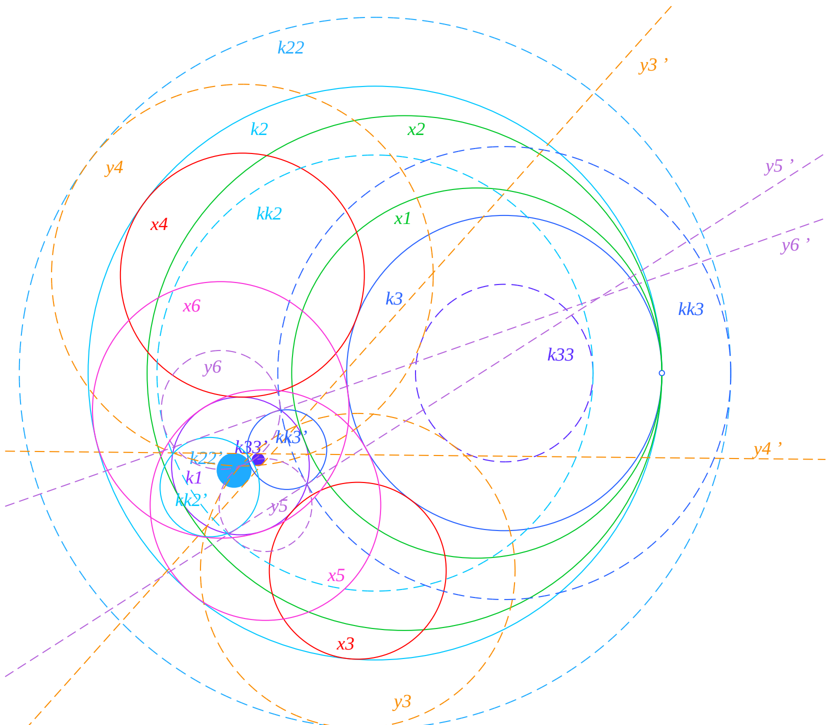
Инверзија је инволутивно пресликавање па су тражени кругови x_1 и x_2 слике у инверзији ψ_i добијених правих x_1' и x_2': $x_1 = \psi_i^{-1}(x_1') = \psi_i(x_1')$, $x_2 = \psi_i^{-1}(x_2') = \psi_i(x_2')$(слика $10_{b_4}(1)$).



слика $10_{b4(1)}$

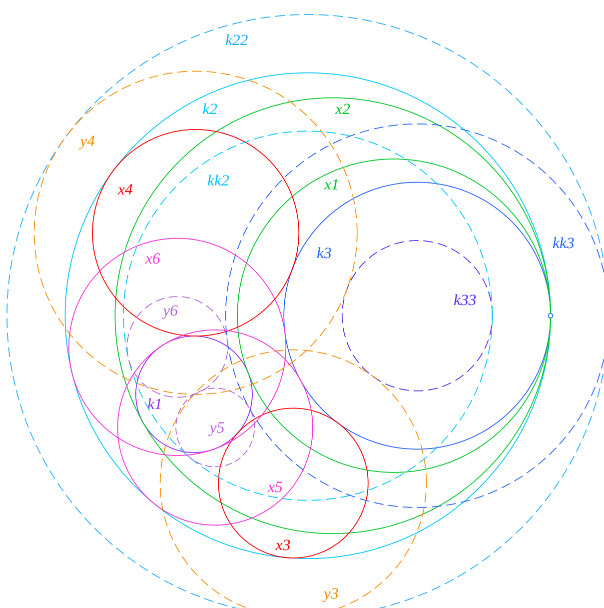
Преостала четири круга која испуњавају услов овог Аполонијевог провлема а не садрже тачку додира датих кругова k_2 и k_3 означимо са x_3, x_4, x_5 и x_6. Два од њих, нпр. x_3 и x_4 додирују дате кругове k_1 и k_3 споља а дати круг k_2 изнутра. Одређивање кругова са овом особином(инверзијом ψ_{k_1} у односу на дати круг k_1, најмањег полупречника од дата три круга) изложили смо у општем случају 3. На крају, кругови x_5 и x_6 додирују дате кругове k_1 и k_2 изнутра а дати круг k_3 споља. Одређивање кругова са овим својством(истом инверзијом ψ_{k_1}) изложили смо у општем случају 4.

Слика $10_{b_4}(2)$ приказује конструкцију инверзијама ψ_i и ψ_{k_1} свих шест тражених кругова.

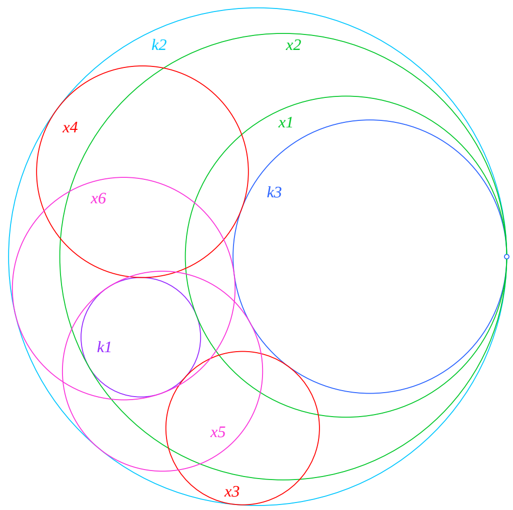


слика $10_{b4(2)}$

Слика $10_{b_4}(3)$ приказује све тражене кругове и помоћне концентричне кругове, на слици $10_{b_4}(4)$ приказани су само тражени кругови.



слика $10_{b4(3)}$



слика $10_{b4(4)}$

•≻ **случај 10 (B_5)**:

Дати кругови k_2 и k_3 додирују се изнутра, дати круг k_1 припада унутрашњој области круга k_2 и додирује споља круг k_3.

Постоје четири круга која задовољавају услов постављеног проблема, додирују сва три дата круга. Један од њих садржи тачку додира датих кругова k_2 и k_3, други тражени круг садржи тачку додира датих кругова k_1 и k_3, преостала два тражена круга не садрже ни једну од поменутих додирних тачака.

Одредимо најпре круг, у ознаци x_1, који испуњава услов постављеног проблема и садржи тачку додира датих кругова k_1 и k_3. Означимо са i_1 круг исте равни којој припадају дати кругови k_1, k_2 и k_3, произвољног полупречника, коме је центар тачка додира датих кругова k_1 и k_3. Посматрајмо пресликавање инверзијом ψ_{i_1} у односу на круг i_1.

Дати кругови k_1 и k_3 садрже центар круга i_1(центар инверзије ψ_{i_1}) у инверзији ψ_{i_1} њихове слике $k_1' = \psi_{i_1}(k_1)$ и $k_3' = \psi_{i_1}(k_3)$ праве. Пошто се кругови k_1 и k_3 додирују(споља) у центру инверзије ψ_{i_1} обзиром да пресликавање инверзијом у односу на круг чува једнакост углова: $\measuredangle(k_1, k_3) = \measuredangle(\psi_{i_1}(k_1), \psi_{i_1}(k_3)) = \measuredangle(k_1', k_3')$, то су праве k_1' и k_3' међусобно паралелне(што се може видети приликом конструкције одређивањем слика датих кругова k_1 и k_3 у инверзији ψ_{i_1}). Дати круг k_2 не садржи центар инверзије ψ_{i_1} па је у инверзији ψ_{i_1} његова слика $k_2' = \psi_{i_1}(k_2)$ круг. На основу наше претпоставке о положају кругова k_2 и k_3 ови се кругови додирују, тј. имају тачно једну заједничку тачку, па и њихове слике у инверзији ψ_{i_1}, права k_3' и круг k_2', имају тачно једну заједничку тачку, и како важи једнакост углова при пресликавању инверзијом: $\measuredangle(k_2, k_3) = \measuredangle(\psi_{i_1}(k_2), \psi_{i_1}(k_3)) = \measuredangle(k_2', k_3')$, следи да је права k_3' тангента круга k_2'(овај ћемо закључак употребити нешто касније у овом излагању за утврђивање разлога постојања само једног круга који испуњава услов задатка и све наше претпоставке).

Тражени круг, означили смо га са x_1, садржи центар инверзије ψ_{i_1} па је у инверзији ψ_{i_1} његова слика $x'_1 = \psi_{i_1}(x_1)$ права. На основу наше претпоставке оба дата круга k_1 и k_3 и тражени круг x_1 садрже тачку додира кругова k_1 и k_3, а круг x_1 по услову задатка додирује оба дата круга k_1 и k_3 што може бити испуњено само ако круг x_1 додирује дате кругове k_1 и k_3 у њиховој додирној тачки(центру инверзије ψ_{i_1}), односно ако кругови k_1, k_3 и x_1 припадају параболичком прамену кругова коме је радикална оса права управна на праву која садржи центре кругова k_1 и k_3. Како пресликавање инверзијом у односу на круг чува једнакост углова: $\measuredangle(x_1, k_1) = \measuredangle(\psi_{i_1}(x_1), \psi_{i_1}(k_1)) = \measuredangle(x'_1, k'_1)$ и $\measuredangle(x_1, k_3) = \measuredangle(\psi_{i_1}(x_1), \psi_{i_1}(k_3)) = \measuredangle(x'_1, k'_3)$, то су праве k'_1, k'_3 и x'_1 међусобно паралелне. По услову постављеног проблема круг x_1 додирује дати круг k_2, односно са њим има заједничку тачно једну тачку, те и њихове слике у инверзији ψ_{i_1}, права x'_1 и круг k'_2, имају тачно једну заједничку тачку и како важи једнакост углова: $\measuredangle(x_1, k_2) = \measuredangle(\psi_{i_1}(x_1), \psi_{i_1}(k_2)) = \measuredangle(x'_1, k'_2)$, следи да је права x'_1 тангента круга k'_2. Дакле, права x'_1 тангента је круга k'_2 паралелна међусобно паралелним правама k'_1 и k'_3. Раније смо закључили да је права k'_3 тангента је круга k'_2 и ово је разлог због кога постоји још само једна тангента x'_1(која одговара као слика у инверзији ψ_{i_1} траженом кругу x_1) на круг k'_2 паралелна његовој тангенти k'_3, а самим тим и тачно један круг који испуњава услов постављеног проблема и све наше претпоставке. Задатак се своди на конструкцију друге тангенте на круг k'_2, добијен одређивањем слике датог круга k_2 у инверзији ψ_{i_1}, паралелне међусобно паралелним правама k'_1 и k'_3, добијеним одређивањем слика у инверзији ψ_{i_1} редом датих кругова k_1 и k_3, при чему је права k'_3 тангента круга k'_2.

На крају , обзиром да је пресликавање инверзијом у односу на круг је инволутивно пресликавање тражени круг x_1 слика је у инверзији ψ_{i_1} добијене праве x'_1: $x_1 = \psi_{i_1}^{-1}(x'_1) = \psi_{i_1}(x'_1)$.

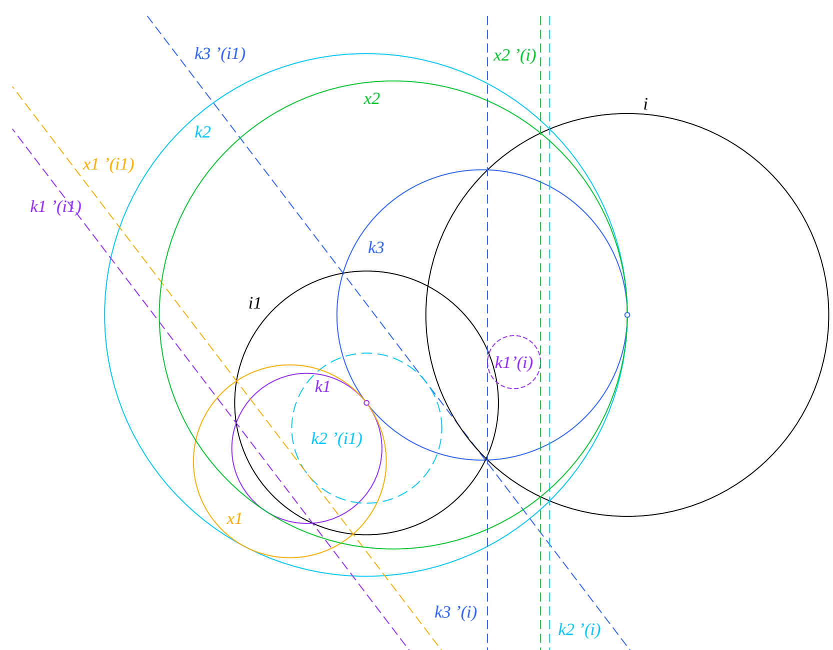
Означимо са x_2 тражени круг који испунава услов постављеног проблема и садржи тачку додира датих кругова k_2 и k_3. Круг x_2, као и у сваком претходном подслучају случаја $10(B)$, можемо одредити добро нам познатом инверзијом ψ_i у односу на круг i исте равни, произвољног полупречника, са центом у тачки додира кругова k_2 и k_3, обзиром да је ово стални положај датих кругова k_2 и k_3 у случају $10(B)$. Да се не бисмо понављали укратко ћемо изложити већ познате закључке.

Слике у инверзији ψ_i датих кругова k_2 и k_3 редом су праве k'_2 и k'_3($k'_2 = \psi_i(k_2)$ и $k'_3 = \psi_i(k_3)$), јер оба круга k_2 и k_3 садрже центар инверзије ψ_i. Пошто се кругови k_2 и k_3 додирују у центру инверзије, а пресликавање инверзијом у односу на круг чува једнакост углова: $\measuredangle(k_2, k_3) = \measuredangle(\psi_i(k_2), \psi_i(k_3)) = \measuredangle(k'_2, k'_3)$, то су праве k'_2 и k'_3 међусобно су паралелне. Дати круг k_1 не садржи центар посматране инверзије, па је у инверзији ψ_i његова слика $k'_1 = \psi_i(k_1)$ круг. Имајмо на уму са се, по нашој претпоставци, кругови k_1 и k_3 додирују, тј. имају тачно једну заједничку тачку па и њихове слике у инверзији ψ_i, права k'_3 и круг k'_1, имају тачно једну заједничку тачку, и како важи једнакост углова при пресликавању инверзијом: $\measuredangle(k_1, k_3) = \measuredangle(\psi_i(k_1), \psi_i(k_3)) = \measuredangle(k'_1, k'_3)$, то је права k'_3 тангента круга k'_1.

Тражени круг x_2 садржи центар инверзије ψ_i, па је у посматраној инверзији његова слика $x'_2 = \psi_i(x_2)$ права. По нашој претпоставци, оба дата круга k_2 и k_3 и тразхени круг x_2 садрже додирну тачку кругова k_2 и k_3, а круг x_2, по услову задатка, додирује оба круга k_2 и k_3, што значи да (као и у одређивању круга x_1 инверзијом ψ_{i_1}) кругови k_2, k_3 и x_2 припадају параболичком прамену кругова коме је радикална оса права управна на праву која садржи центре кругова k_2 и k_3. Обзиром на једнакост углова при пресликавању инверзијом у односу на круг: $\measuredangle(x_2, k_2) = \measuredangle(\psi_i(x_2), \psi_i(k_2)) = \measuredangle(x_2', k_2')$ и $\measuredangle(x_2, k_3) = \measuredangle(\psi_i(x_2), \psi_i(k_3)) = \measuredangle(x_2', k_3')$, следи да су праве k_2', k_3' и x_2' међусобно паралелне. Тражени круг x_2, по услову задатог проблема, додирује дати круг k_1, односно са њим има тачно једну заједничку тачку, то и њихове слике у инверзији, права x_2' и круг k_1', имају тачно једну заједничку тачку и како важи једнакост углова при пресликавању инверзијом: $\measuredangle(x_2, k_1) = \measuredangle(\psi_i(x_2), \psi_i(k_1)) = \measuredangle(x_2', k_1')$, следи да је права x_2' тангента круга k_1'. Дакле, права x_2' тангента је круга k_1' паралелна међусобно паралелним правама k_2' и k_3'. Присетимо се раније донетог закључка да је права k_3' тангента је круга k_1' па отуда постоји још само једна тангента x_2'(која одговара као слика у инверзији ψ_i траженом кругу x_2) на круг k_1' паралелна његовој тангенти k_3' а тиме и тачно један круг који испуњава услов постављеног проблема и наше претпоставке. Задатак се своди на конструкцију друге тангенте на круг k_1', добијен одређивањем слике датог круга k_1 у инверзији ψ_i, паралелне међусобно паралелним правама k_2' и k_3', добијеним одређивањем слика у инверзији ψ_i редом датих кругова k_2 и k_3, где је права k_3' тангента круга k_1'.

Коначно, због особине инволутивности пресликавања инверзијом у односу на круг, тражени круг x_2 слика је у инверзији ψ_i добијене праве x_2': $x_2 = \psi_i^{-1}(x_2') = \psi_i(x_2')$.

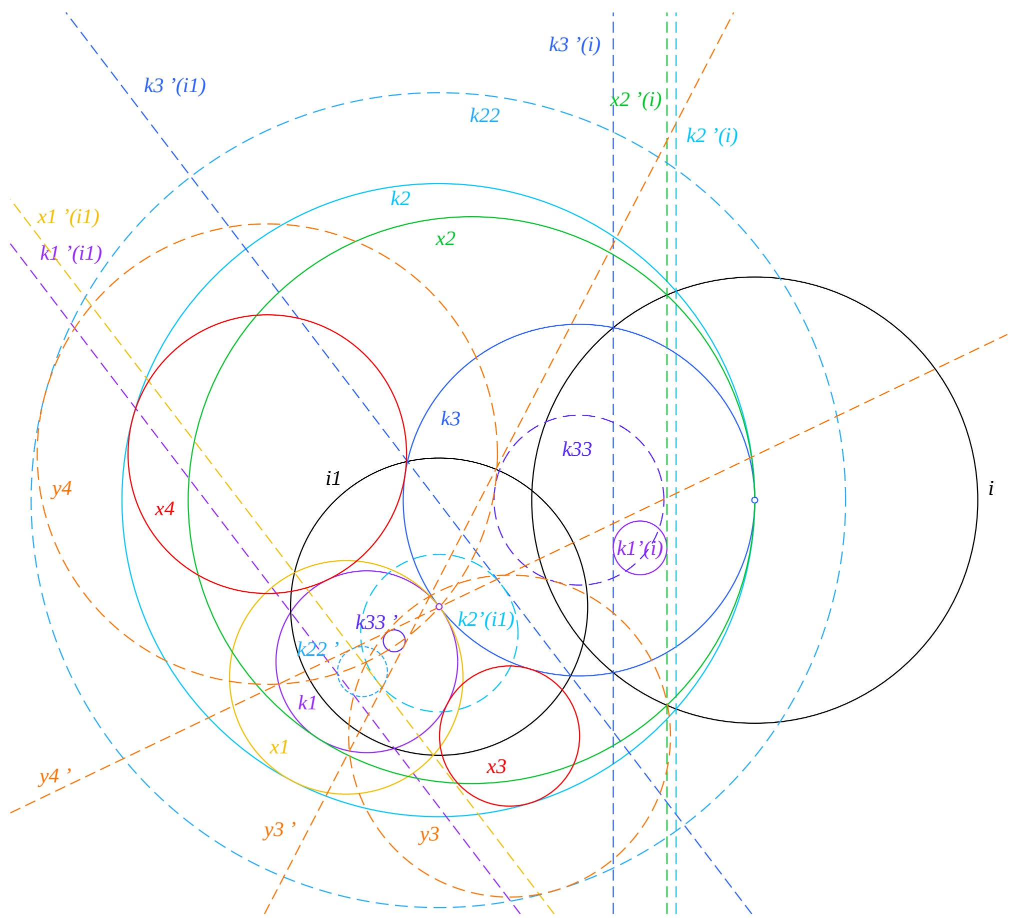
Слика $10_{b_5(1)}$ приказује конструкцију инверзијама ψ_i и ψ_{i_1} тражених кругова x_1 и x_2.



слика $10_{b5(1)}$

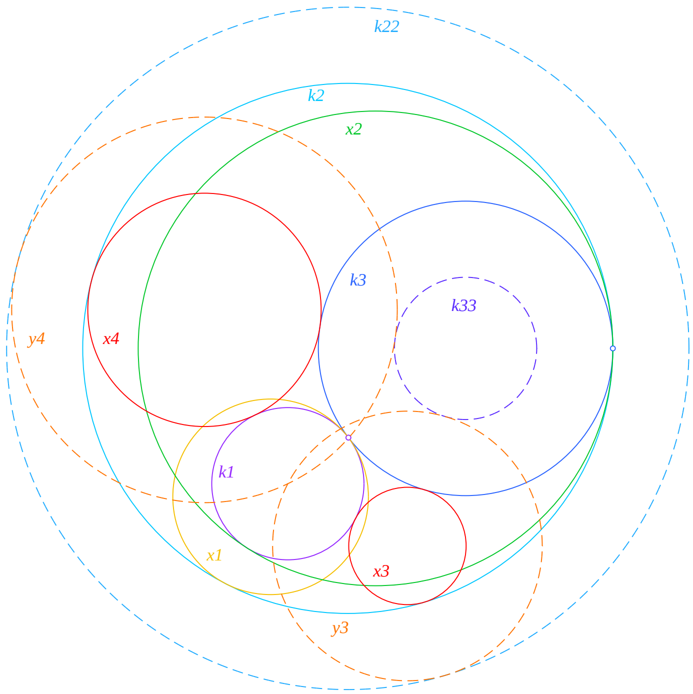
Кругове који испуњавају услов задатог проблема а не садрже ни једну од поменутих додирних тачака(тачку додира датих кругова k_1 и k_3, односно тачку додира датих кругова k_2 и k_3) означимо са x_3 и x_4. Оба круга x_3 и x_4 додирују дати круг k_2 изнутра(припадају његовој унутрашњој области), а дате кругове k_1 и k_3 додирују споља. Одређивање кругова са оваквом особином(инверзијом ψ_{k_1} у односу на дати круг k_1, круг најмањег полупречника од три дата круга) изложено је и детаљно образложено у општем случају 3.

Прилажемо слику $10_{b5(2)}$ која приказује конструкцију инверзијама ψ_i, ψ_{i_1} и ψ_{k_1} сва четири тражена круга.

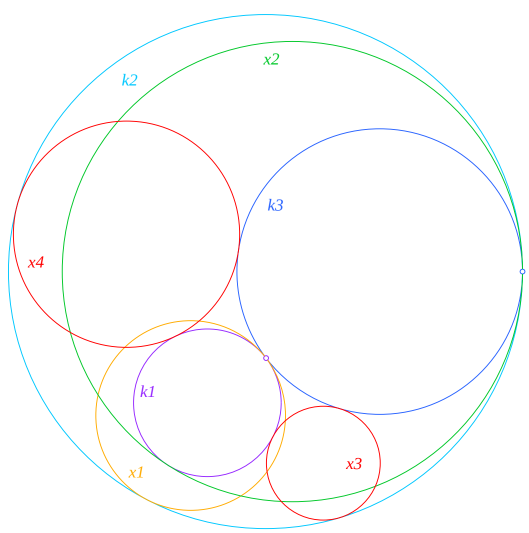


слика $10_{b5(2)}$

Слика $10_{b_5}(3)$ приказује све тражене кругове и помоћне концентричне кругове, на слици $10_{b_5}(4)$ приказани су само тражени кругови.



слика $10_{b5(3)}$



слика $10_{b5(4)}$

•≻ **случај 10 (B_6)**:

Дати кругови k_2 и k_3 додирују се изнутра, дати круг k_1 припада унутрашњој области круга k_2 и сече круг k_3.

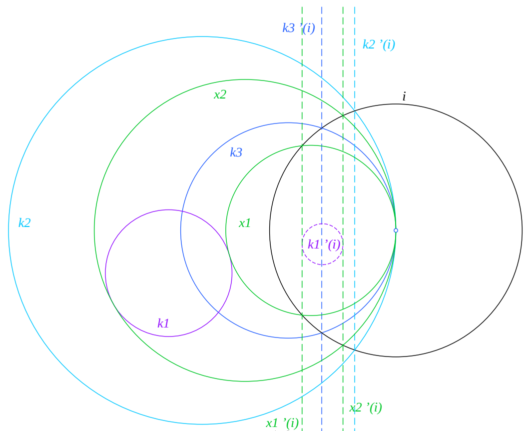
Постоје четири круга која испуњавају услов постављеног проблема, додирују сва три дата круга. Два од њих садрже тачку додира датих кругова k_2 и k_3, преостала два тражена круга не садрже додирну тачку ових кругова.

Кругове који испуњавају услов постављеног проблема и садрже тачку додира датих кругова k_2 и k_3 можемо одредити, као и до сада, инверзијом ψ_i у односу на круг i исте равни, произвољног полупречника, чији је центар тачка додира датих кругова k_2 и k_3. Обзиром да дати круг k_1 нема никакав посебан положај у односу на друга два дата круга разматрање овог дела случаја готово је идентично разматрању у случају $10(B_1)$ и закључци су идентични као у наведеном случају.

Укратко, слике у инверзији ψ_i датих кругова k_2 и k_3 су праве k_2' и k_3' ($k_2' = \psi_i(k_2)$ и $k_3' = \psi_i(k_3)$ јер оба круга садрже центар посматране инверзије, међусобно паралелне, обзиром да инверзија чува једнакост углова: $\measuredangle(k_2, k_3) = \measuredangle(\psi_i(k_2), \psi_i(k_3)) = \measuredangle(k_2', k_3')$. У инверзији ψ_i слика датог круга k_1 је круг $k_1' = \psi_i(k_1)$ круг, пошто дати круг k_1 не садржи центар инверзије ψ_i.

Тражени круг, у ознаци x, по нашој претпоставци садржи цетар инверзије ψ_i те је у овој инверзији његова слика $x' = \psi_i(x)$ права. Пошто, по услову задатка, тражени круг додирује дате кругове k_2 и k_3, а по нашој претпоставци садржи додирну тачку ова два круга, следи да кругови x, k_2 и k_3 припадају параболичком прамену кругова чија је радикална оса права управна на праву одређену центрима датих кругова k_2 и k_3. Како пресликавање инверзијом чува једнакост углова($\measuredangle(x, k_2) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k_2)) = \measuredangle(x', k_2')$; $\measuredangle(x, k_3) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k_3)) = \measuredangle(x', k_3')$), следи да су праве k_2', k_3' и x' међусобно паралелне. По услову задатог проблема тражени круг x додирују дати круг k_1, па и њихове слике у инверзији ψ_i, права x' и круг k_1', имају тачно једну заједничку тачку и обзиром да важи једнакост углова при пресликавању инверзијом у односу на круг($\measuredangle(x, k_1) = \measuredangle(\psi_i(x), \psi_i(k_1)) = \measuredangle(x', k_1')$), следи да је права x' тангента круга k_1'. Дакле, у инверзији ψ_i слика x' траженог круга x је права, тангента круга k_1', паралелна међусобно паралелним правама k_2' и k_3', од којих ни једна није тангента круга k_1', пошто дати круг k_1 не додирује ни један од датих кругова k_2 и k_3. Задатак се своди на констукцију тангенте на круг k_1', добијен одређивањем слике у инверзији ψ_i датог круга k_1, паралелних међусобно паралелним правама k_2' и k_3', добијеним одређивањем слика датих кругова k_2 и k_3 у инверзији ψ_i. Постоје две тангенте које испуњавају ове услове, означимо их са x_1' и x_2', и оне одговарају као слике у инверзији ψ_i тражених кругова.

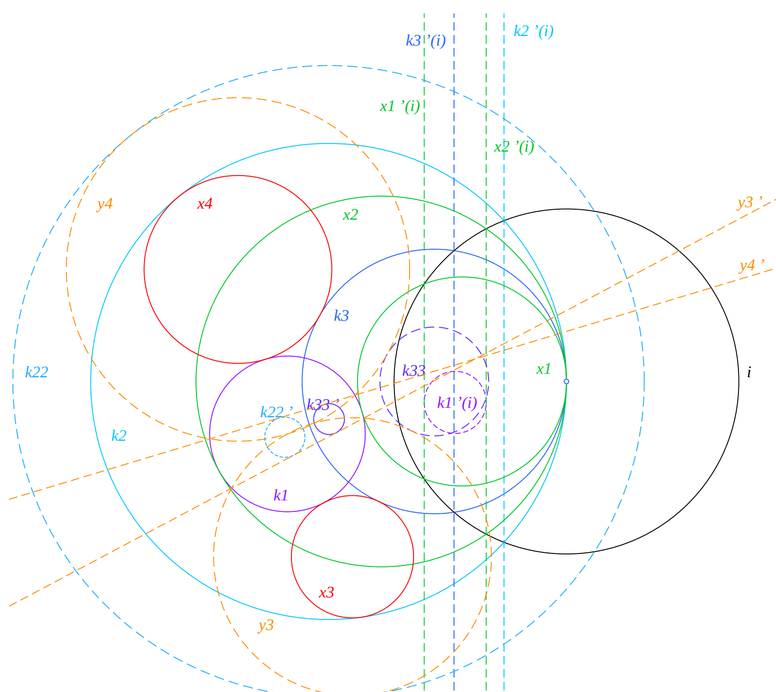
Коначно, на основу особине инволутивности пресликавања инверзијом у односу на круг, тражени кругови x_1 и x_2 слике су у инверзији ψ_i добијених правих x_1' и x_2': $x_1 = \psi_i^{-1}(x_1') = \psi_i(x_1')$, $x_2 = \psi_i^{-1}(x_2') = \psi_i(x_2')$ (слика $10_{b_6}(1)$).



слика $10_{b6(1)}$

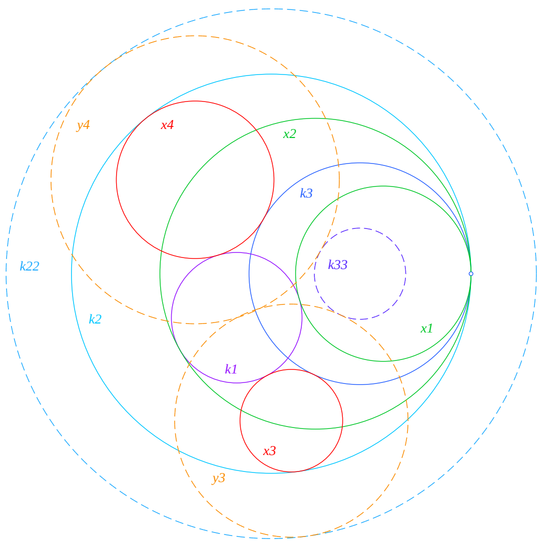
Кругове који испуњавају услов задатог проблема а не садрже тачку додира датих кругова k_2 и k_3 означимо са x_3 и x_4. Оба тражена круга x_3 и x_4 додирују дати круг k_2 изнутра(припадају његовој унутрашњој области) и споља додирују дате кругове k_1 и k_3. Поступак одређивања кругова са сличном особином изложено је и детаљно образложено у општем случају 3(инверзијом ψ_{k_1} у односу на дати круг k_1, круг најмањег полупречника од три дата круга).

Слика $10_{b_6}(2)$ приказује конструкцију инверзијама ψ_i и ψ_{k_1} сва четири тражена решења(тражена круга x_1, x_2, x_3 и x_4)

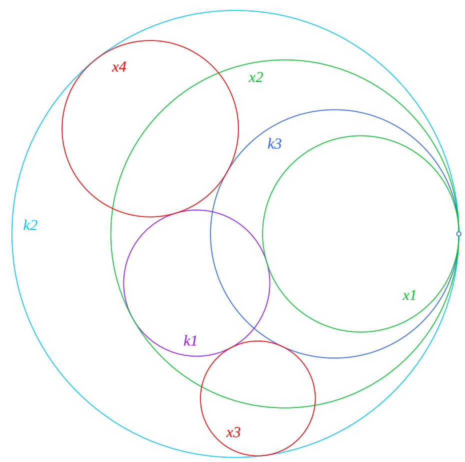


слика $10_{b6(2)}$

На слици $10_{b_6}(3)$ приказани су сви тражени кругови и помоћни концентрични кругови; на слици $10_{b_6}(4)$ приказани су само тражени кругови.



слика $10_{b6(3)}$



слика $10_{b6(4)}$

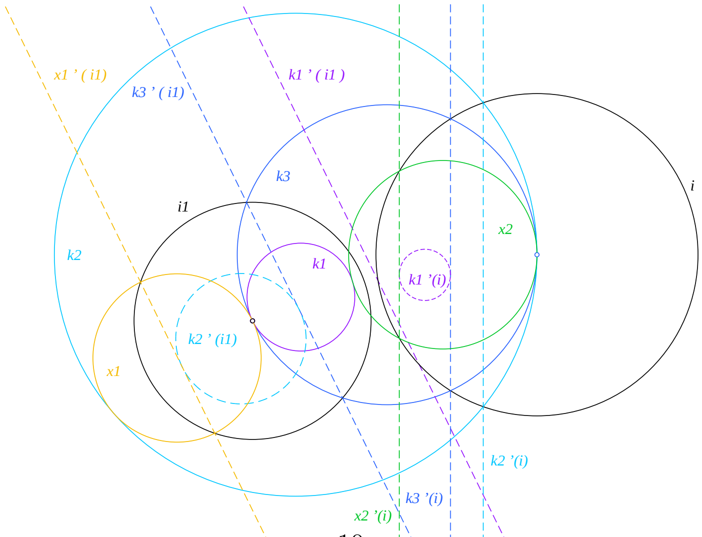
•≻ **случај 10 (B_7)**:

Дати кругови k_2 и k_3 додирују се изнутра, дати круг k_1 додирује изнутра круг k_3.

Постоје само два круга која задовољавају услов постављеног проблема, додирују сва три дата круга задана оваквим положајем у равни. Један тражени круг садржи тачку додира датих кругова k_2 и k_3, други тражени круг садржи тачку додира датих кругова k_1 и k_3.

Овај је случај готово идентичан случају $10(B_5)$(у коме се дати кругови k_2 и k_3 додирују изнутра, а дати круг k_1 припада унутрашњој области круга k_2 и додирује споља круг k_3) па се и одређивање тражених кругова може извршити на идентичан начин као у поменутом случају. Изостављамо поступак одређивања и подсећамо да се тражени круг, у ознаци x_1, који садржи додирну тачку кругова k_1 и k_3, одређује инверзијом ψ_{i_1} у односу на круг i_1 исте равни, произвољног полупречника, са центром у тачки додира кругова k_1 и k_3, а тражени круг, у ознаци x_2, који садржи додирну тачку кругова k_2 и k_3, одређује инверзијом ψ_i у односу на круг i исте равни, произвољног полупречника, чији је центар тачка додира кругова k_2 и k_3.

Слика $10_{b_7(1)}$ приказује конструкцију инверзијама ψ_i и ψ_{i_1} тражених кругова x_1 и x_2.



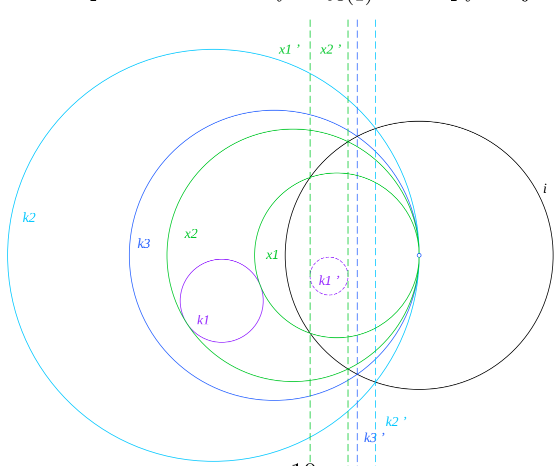
слика $10_{b7(1)}$

•≻ **случај 10 (B_8):**

Дати кругови k_2 и k_3 додирују се изнутра, дати круг k_1 припада унутрашњој области круга k_3.

Постоје само два круга која задовољавају услов постављеног проблема, додирују сва три дата круга задана оваквим положајем у равни. Оба тражена круга садрже тачку додира датих кругова k_2 и k_3.

У овом случају нема битне разлике, у смислу донетих закључака, у односу на случај $10(B_1)$(иако је положај датих кругова другачији у односу на овај случај), где је изложен и детаљно образложен поступак за одређивање тражених кругова. Изостављамо излагање и прилажемо слику $10_{b8(1)}$ конструкције тражених решења.

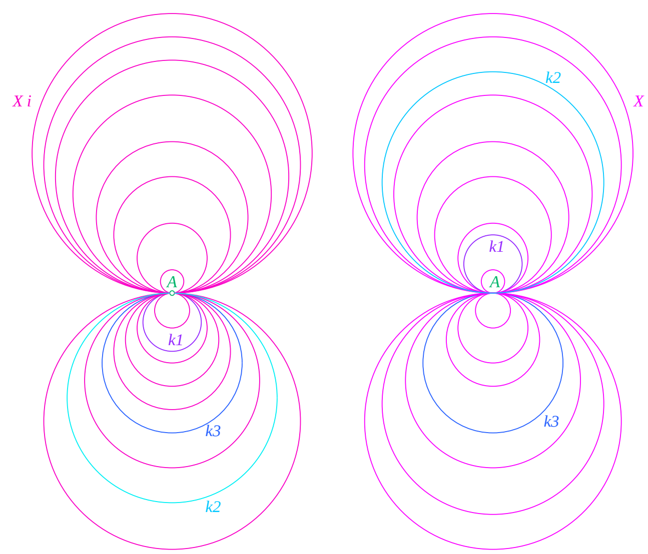


слика $10_{b8(1)}$

≺•≻ **случај 10 (** C **)**:

Сва три дата круга k_1, k_2, k_3 имају тачно једну заједничку тачку, односно припадају параболичком прамену кругова.

У овом случају сваки круг истог прамена задовољава услов постављеног проблема, па се може сматрати траженим решењем (слика 10_c).



слика 10_c

Аполоније,
кратак историјски осврт на лик и дело

Грчки математичар Аполониос(262 – 190 год. пре нове ере) рођен је у Перги, у Памфилији, граду у северозападном делу Мале Азије. Као млад дошао је у Александрију(Египат) где је стицао математичко образовање од Еуклидових ученика. Претпоставља се да је предавао у Александрији, Пергамону и Ефесу и постао један од највећих математичара тог доба.

Његово чувено дело о конусним пресецима ($\chi\omega\nu\iota\chi\alpha$) величанствени је споменик александријске науке. Због овог дела познат је као "највећи геометар"тог доба и оно је до данас остало основно класично дело из области елементарне геометрије. Конусне пресеке изучавали су многи и пре Аполонија, но он је тај који је уз велики сопствени допринос и открића систематизовао и знања својих претходника. Био је први који је дао теоријску основу за сва три конусна пресека: кружни конус, прав и кос конус. Такође је први који је увидео обе гране хиперболе, дефинисао елипсу, параболу и хиперболу(као пресеке кружног конуса), а називи ових кривих потичу управо од њега. Дело о конусним пресецима састоји се од осам књига, од којих је сачувано седам, последња недостаје. Прве четири књиге долазе од Грка и садрже знања и открића Аполонијевих претходника која је он систематизовао и уредио(1.- расправа о свим добијеним конусним пресецима правог односно косог кружног конуса; 2.- асимптоте и гране хиперболе и цртање тангенти; 3.- теореме о површинама, о хармонијским својствима полова, теореме о производу сегмената насталих пресеком тетива; 4.- расправа о доказима из треће књиге и још нека хармонијска својства полова). Пета, шеста и седма књига долазе до нас у арапском преводу и садрже самостална Аполонијева открића. Пета књга сматра се најоригиналнијом од свих седам. У њој се разматра нормала као минимална и максимална права линија повучена из тачке на криву. Шеста књига говори о једнакости и сличности конуса, а седма књига говори о пречницима и праволинијским фигурама описаним над тим пречницима.

Изучавао је и друге математичке проблеме(налажење броја π, усавршавање Архимедовог нумеричког система користећи као основу број 104, тј. увео је рачунање *миријадама*, које се на истоку и у Европи дуго користило), а данас се често помињу његови задаци тј. проблеми одређивања круга која додирује три задата елемента неке равни(три дате тачке; две тачке и праву; две тачке и круг; тачку и две праве; тачку, праву и круг; ...), чувених *Десет Аполонијевих проблема о додиру кругова*.

Са овим делом упознао нас је грчки математичар Папос [1], а сачувано је у редакцији чувеног математичара Виет [2], који их је и сам решавао, а пре њега, као и после, овим су се проблемима, нарочито десетим(одређивање круга који додирује дата три круга неке равни) бавили многи и познати и мање познати научници(од познатијих, у Аполонијево доба, Еуклид [3], касније Виет, Њутн [4]...).

Само Аполонијево решење није сачувано, па нам је остало непознато како их је

[1] Папос (250 - 300. године нове ере, грчки математичар)

[2] Франсоа Виет (1540 - 1603 , француски математичар)

[3] Еуклид (рођен око 300. године пре нове ере, у Александрији), чувени антички математичар

[4] Исак Њутн (1643 - 1727, енглески физичар, математичар и астроном)

он решио. Једно од најлепших решења свих десет Аполонијевих проблема дао је наш савременик, чувени математичар Антон Димитрија Билимович [5].

[5]Антон Димитрија Билимович (1879 - 1970, Житомир, Украина)

Литература

[1] **Зоран Лучић**, *Еуклидска и хиперболичка геометрија*, Тотал десигн и Математички факултет, Београд 2007

[2] **Милан Митровић, Срђан Огњановић, Михаило Вељковић, Љубинка Петковић, Ненад Лазаревић**, *Геометрија за први разред Математичке гимназије*, Београд 1998

[3] **Драгомир Лопандић**, *Геометрија*, Научна књига, Београд 1979

[4] **Драгомир Лопандић**, *Збирка задатака из основа геометрије*, Математички факултет, Београд 1971

[5] **Антон Билимовић**, *Десет Аполонијевих задатака о додиру кругова*, преузето са сајта Професора Др Зорана Лучића

[6] **Милутин Миланковић**, *Историја астрономске науке*, Научна књига, Београд 1979

[7] **Дирк Ј. Стојк**, *Кратак преглед историје математике*, Завод за удзбенике и наставна средства, Београд 1969

[8] **Томовић Синиша**, *Кружни снопови и трансформације у еуклидском моделу инверзивног простора* - мастер рад, ментор Др Зоран Лучић, Београд 2013