Univerzitet u Beogradu

Matematički fakultet

Verovatnoće razaranja kod procesa rizika

i stepene ocene

MASTER RAD

Mentor: Student:

prof. dr Pavle Mladenović Perišić Jelena dipl. mat.

Beograd, mart 2014.

Sadržaj:

1 Uvod

U aktuarskoj matematici koriste se matematički modeli koji opisuju osetljivost osiguravajućih kompanija na rizik propasti, nesolventnost odnosno nedovoljnost sredstava za pokriće šteta. Osnovne veličnine koje se koriste za opisivanje ovakvih procesa su verovatnoća razaranja, raspodela kapitala neposredno pre trenutka razaranja i visina deficita u trenutku razaranja. Sve ove veličine zavise od visine početnog kapitala. Početni (osnovni) kapital u Republici Srbiji za osnivanje osiguravajuće kompanije za neživotno osiguranje je 4.5 miliona evra[1].

Teorija stohastičkih procesa i primenjena teorija verovatnoće, čiji je deo aktuarska matematika, doživela je neverovatan napredak u drugoj polovini dvadesetog veka. Teorija rizika u osiguranju je sinonim za matematiku neživotnog osigiranja. Suštinski problem u neživotnom osiguranju je ocena verovatnoće propasti, odnosno razaranja, bankrota. Sa ovim je blisko povezano određivanje ukupnog iznosa zahteva u toku prethodno definisanog vremenskog intervala. Obično je taj vremenski interval jedna godina. Takođe, aktuarska matematika utvrđuje cene osiguranja. Osiguravajuće društvo se sklapanjem ugovora o osiguranju obavezuje da će nadoknaditi štete nad osiguranim predmetima, ukoliko do štete dođe. Na taj način osiguravajuća kompanija preuzima ne sebe rizik osiguranika, a kao naknadu dobija premiju. Postavlja se pitanje određivanja visine premije tako da kompanija izbegne bankrotstvo. Stoga je potrebno modelirati broj osiguranih slučajeva koji će pretrpeti štetu, kao i iznose šteta, u dugom vremenskom periodu, što je jedan od ključnih zadataka teorije neživotnog osiguranja.

Osnovni pojmovi teorije verovatnoće i stohastičke analize navedeni su u prvom poglavlju. U drugom poglavlju je posvećena pažnja Kramer Lundbergovom modelu koji je temelj za teoriju rizika, kao i Puasonov proces pomoću koga je i definisan ovakav model. U trećem poglavlju je definisan proces obnavljanja koji predstavlja uopštenje Puasonovog procesa. U nastavku su navedene osobine zbira isplaćenih odšteta, tj. procesa koji predstavlja sumu isplaćenih odšteta u portfoliju koji zavisi od vremena. Odrediti red veličine ove promenljive je najvažniji zadatak, sobzirom da ta informacija govori o visini premije koju treba naplatiti od osiguranika. Posledice katastrofa kao što su zemljotresi ili uragani često dovode do ogromnih šteta. Ovi veoma retki dogadjaji uglavnom imaju vrlo veliki uticaj na rizik osiguranog portfolija, a zbog toga i na rezultat čitavog poslovanja osiguravajuće kuće. Ono što će nam kod ovakvih situacija biti od pomoći jesu tzv. raspodele sa teškim repom, čime ćemo se baviti u petom poglavlju. U šestom poglavlju je uveden pojam razaranja i verovatnoća da do njega dođe, koja predstavlja suštinu proučavanja teorije rizika. Ovaj deo je prilično zahtevan uzimajući u obzir potrebna predznanja iz teorije verovatnoće. Mada, sa druge strane čitalac može uvideti kako može primeniti određene delove iz teorije verovatnoće, kao što su proces obnavljanja, Laplasova transformacija... U odeljku 6.1 bavićemo se verovatnoćom razaranja ukoliko važi uslov čistog profita koji je osnov za određivanje premije osiguranja, u poglavlju 6.2 pokazujemo rezultat verovatnoće razaranja ukoliko važi uslov malih odšteta, dok se u poglavlju 6.3 bavimo verovatnoćom razaranja kada smo izloženi velikim iznosima odšteta. U poslednjem poglavlju ćemo se baviti gornjim granicama koje verovatnoća razaranja može da iznosi.

[1] Zakon o osiguranju, član 28, tačka 2, „Službeni glasnik RS“ br. 55/2004, 61/2005, 101/2007 i 107/2009

1.1 Osnovni pojmovi teorije verovatnoće i pojmovi koji će biti korišćeni u radu

Teorija verovatnoća je osnovni stub moderne matematike. Ona je usko povezana sa drugim matematičkim oblastima poput algebre, topologije, analize itd. Teorija verovatnoća je matematička disciplina koja proučava slučajne eksperimente. Pri tome, pod slučajnim eksperimentom podrazumevamo komplekse uslova koji se mogu neograničeno puta ponavljati, ali ne dovode uvek do jednoznačno određenog ishoda. Svakom slučajnom eksperimentu pridružujemo skup svih mogućih ishoda koji zovemo prostor elementarnih događaja, a označavamo ga sa Ω. U ovom poglavlju su navedeni samo osnovni pojmovi, dok opširnije možete pronaći u literaturi [3] P.Mladenović, Verovatnoća i statistika.

Neka je Ω prostor ishoda nekog eksperimenta. Neke od podskupova skupa Ω zvaćemo događajima. Klasu svih događaja označavaćemo sa $\mathcal{A}$. Navodimo neka svojstva:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. Ako $A \in \mathcal{A}$, onda $\overline{A} \in \mathcal{A}$
3. Ako $A \in \mathcal{A}$ i $B \in \mathcal{A}$, onda $A \cup B \in \mathcal{A}$
4. Ako $A_1 \in \mathcal{A}, A_2 \in \mathcal{A}, \dots$ onda $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

*Definicija 1.1.1: Klasa $\mathcal{A}$ podskupova prostora elementarnih događaja, koja ima svojstva 1,2 i 3 zove se **algebra događaja**, a klasa $\mathcal{A}$ koja ima svojstva 1,2 i 4 zove se **σ −algebra događaja**.*

*Definicija 1.1.2: Funkcija $P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ je **verovatnoća** na merljivom prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$, ako ima sledeća svojstva:*

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(\mathrm{A}) \geq 0$ *za svaki događaj* $A \in \mathcal{A}$
3. *Ako su $A_1, A_2, A_3, \dots$ događaji iz $\mathcal{A}$, takvi da za različite i i j važi $A_i \cap A_j = \emptyset$, onda važi jednakost*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

*Lema 1.1.1: (**Kolmogorovljeva nejednakost**) Neka su $X_1, X_2, \dots, X_n$ nezavisne slučajne veličine takve da je za $j \in \{1,2,\dots,n\}$ važi $EX_j = 0, DX_j < +\infty$ i neka je $S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$. Tada za svako $\varepsilon > 0$ važi:*

$$P\left\{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{ES_n}{\varepsilon^2}.$$ [2]

[2] Dokaz pogledati u literaturi [3] na str.176

*<u>Teorema 1.1.1</u>: (**Jaki zakon velikih brojeva**) Neka je $(X_n)_{n\geq 1}$ niz nezavisnih slučajnih veličina takav da važi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{DX_n}{n^2} < +\infty.$$

Tada važi:

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - EX_i) = 0\right\} = 1.$$ [3]

*<u>Teorema 1.1.2</u>: (**Čebišovljeva nejednakost**) Neka je Xproizvoljna slučajna promenljiva, a ε i r pozitivni brojevi. Tada važi nejednakost:*

$$P\{|X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E|X|^r}{\varepsilon^r}.$$

Specijalno za $r = 2$ važi nejednakost:

$$P\{|X - EX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$ [4]

*<u>Definicija 1.1.3</u>: (**Tejlorov red**) Za proizvoljnu funkciju $f(x)$ koja ima izvode u okolini tačke a Tejlorov red je definisan na sledeći način:*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

*Specijalno, kada je a=0, ovakav red se naziva **Maklorenov red**.*

Detaljnije u vezi Tejlorovog reda[5] i naredne teoreme možete pronaći u literaturi [5] D.Adnađević, Z.Kadelburg, Matematička analiza 1.

*<u>Teorema 1.1.3</u>: (**Teorema o dva policajca**[6])Neka su $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}, (c_n)_{n\geq 1}$ tri niza koja zadovoljavaju sledeća svojstva:*

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$
2. *Za svako $n \geq n_0$ važi $a_n \leq b_n \leq c_n$*

Tada je i niz b_n konvergentan i važi $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n$.

[3] Dokaz pogledati u literaturi [3] na str. 177
[4] Dokaz pogledati u literaturi [3] na str. 90
[5] Videti u literaturi [5] na str.262
[6] U literaturi [5] na str. 45 Stav 3.1.7

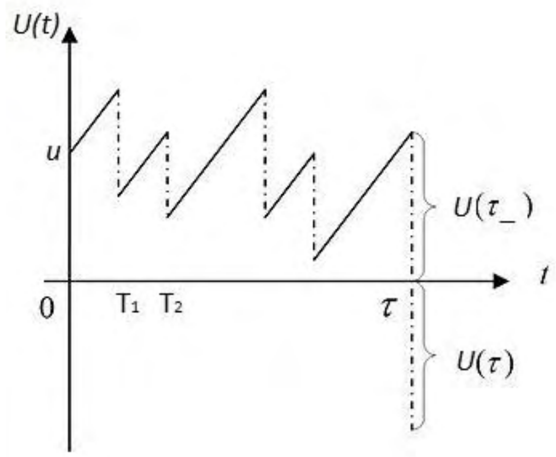
2 Kramer-Lundbergov model

Temelj teorije rizika postavio je Filip Lundberg, Švedski aktuar 1903.godine, a Harald Kramer je nastvaio njegov rad i 1930. ga objavio. On je uveo takozvanu verovatnoću razaranja kao meru rizika iz vremenskog aspekta osiguranja na konačnom ili beskonačnom intervalu. Teorija rizika je sinonim za matematiku neživotnog osiguranja, koja se suočava sa problemom modeliranja prispelih odšteta, na osnovu kojih dobijamo informaciju koliku premiju je potrebno naplatiti osiguranicima. Naravno, osim matematičkih proračuna, tržište tj. konkurencija i potencijalni osiguranici utiču na visinu premije. Jedan od Lunderbergovih ključnih doprinosa je uvođenje jednostavnog modela koji je sposoban da opiše osnovnu dinamiku homogenog portfolija osiguranja. Pod ovim podrazumevamo portfolio ugovora ili polisa za slične vrste rizika kao sto je osiguranje vozila za pojedine vrste automobila, osiguranje od krađe u domaćinstvu ili osiguranje jedne porodične kuće od štete prouzrokovane poplavom. Takav model poznat je pod nazivom Kramer-Lundbergov model ili klasični model rizika. U literaturi [1] T.Mikosch, Non-life insurance mathematics i [2] P.Embrechts, C.Kluppelberg, T.Mikosch, Modelling extremal events for insurance and finance može se pronaći opširnije u vezi sa Kramer-Ludbergovim modelom. Osnovni proces rizika ima sledeći oblik:

$$V(t) = \Pi(t) - S(t) \tag{2.1}$$

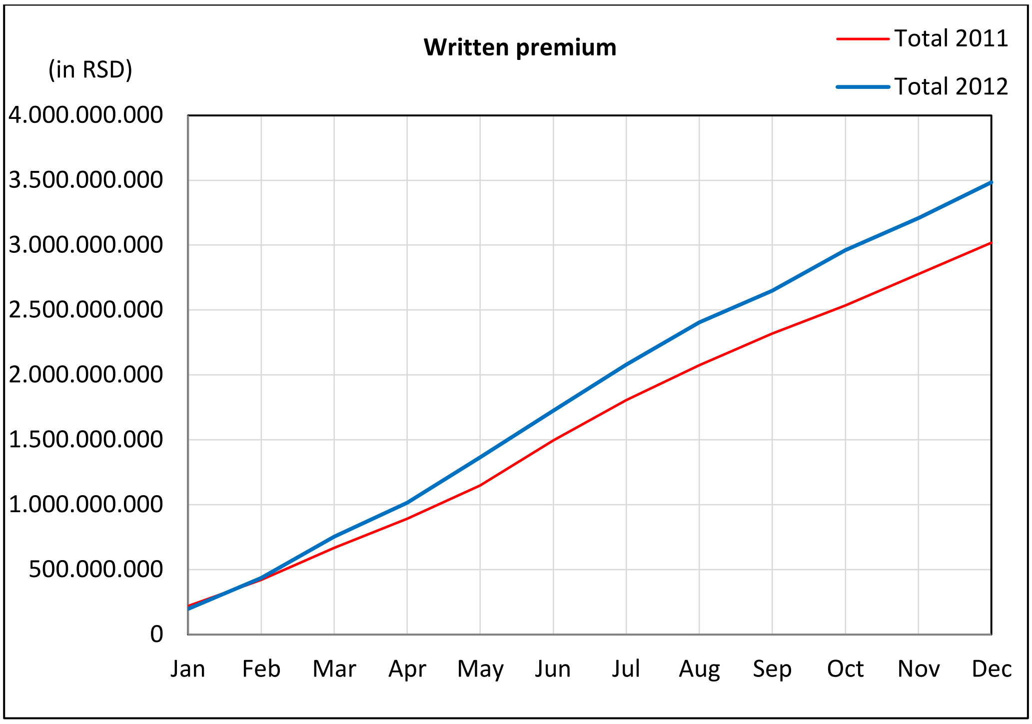
gde $\Pi(t)$ označava ukupan iznos prikupljene premije osiguravajućeg društva do trenutka t, a $S(t)$ predstavlja akumulirani iznos šteta nastalih do trenutka t. Ukoliko je početni kapital društva jednak u onda proces ima sledeći oblik:

$$U(t) = u + \Pi(t) - S(t), \qquad t \geq 0 \tag{2.2}$$



Grafik 1

Na grafiku1 prikazana je idealna trajektorija (realizacija) procesa *U(t).* Dakle, početni kapital društva u jednak je procesu rizika u trenutku 0. Onda, trajektorija raste do trenutka T_1, u kojem se dogodila prva šteta. Iznos se smanjio za iznos nastale štete X_1. Na intervalu $[T_1, T_2)$ proces takođe raste do pojave naredne štete u trenutku T_2 gde pada za iznos X_2, itd. Takođe, na grafiku1 vidimo da je moguće da proces uzima negativne vrednosti, ukoliko nastane dovoljno velika šteta koja će dovesti do toga da se trajektorija procesa nađe ispod nule. U ovom radu ćemo se baviti verovatnoćom da nastane pomenuti slučaj. Proces rizika *U(t)* je ništa drugo nego tok novca posmatran kroz vreme. Najčešće je pretpostavka da je prikupljanje premije linearno sa vremenom tj. $\Pi(t) = c \cdot t$, gde je c brzina akumulacije kapitala.



Grafik 2

Na grafiku 1 prikazan je primer akumulacije premije po mesecima, i vidimo da je približno linearna sa vremenom.[7]

Pre uvođenja Kramer-Lunbergovog modela navešćemo dve definicije o Puasonovom procesu.

<u>Definicija 2.1</u>: *Slučajan proces* $\{N(t), t \geq 0\}$ *je* ***Puasonov*** *ako ima sledeća svojstva:*

1. $N(0) = 0$ *skoro sigurno*
2. *Ima nezavisne priraštaje tj. ako* $n \in \mathbb{N}$ *i* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n N(t_k) - N(t_{k-1})$, *za* $k = 1,2, \ldots, n$ *su nezavisne slučajne veličine*
3. *Postoji neopadajuća funkcija* $\mu: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *takva da za proizvoljne* $0 < s < t$ *važi* $N(t) - N(s) \in \mathcal{P}\big(\mu(t) - \mu(s)\big)$. *Funkcija* μ *zove se funkcija srednje vrednosti*
4. Sa verovatnoćom 1 trajektorije $N(t, \omega), t \geq 0$, neprekidne su sa desne strane za $t \geq 0$ *i imaju levu graničnu vrednost za* $t > 0$.

<u>Definicija 2.2</u>: *Ako je funkcija Puasonovog procesa* $\big(N(t)\big)_{t \geq 0}$ *data sa* $\mu(t) = \lambda \cdot t$ *za* $t \geq 0$ *gde je* $\lambda > 0$ *parametar, onda se taj proces zove* ***homogen Puasonov proces*** *sa intenzitetom* λ. *Ukoliko je* $\lambda = 1$, *onda proces nazivamo standardan homogen Puasonov proces.*

[7] Podaci preuzeti sa sajta Narodne banke Srbije www.nbs.rs

*Definicija 2.3: **Kramer-Lundbergov model** ima sledeće pretpostavke:*

1. *Slučajne veličine* $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ *su pozitivne, nezavisne i jednako raspodeljene i predstavljaju veličinu štete prilikom nastanka osiguranog slučaja, čije je očekivanje konačno*
2. *Štete se javljaju u slučajnim trenucima* $0 < T_1 < T_2 < \cdots, T_0 = 0$
3. *Broj šteta koje se dogode na* $[0, t]$ *obeležavamo sa* $N(t) = sup\{n \geq 1: T_n \leq t\}$*, gde je* $sup\,\emptyset = 0$
4. *Vreme između dospeća šteta obeležavamo sa* $Y_1 = T_1$ *i* $Y_k = T_k - T_{k-1}$ *za* $k \geq 2$ *i oni su nezavisne i jednako raspodeljene slučajne veličine sa eksponencijalnom funkcijom raspodele sa parametrom* λ*, dakle*
$$P\{Y_k \leq t\} = P\{T_k - T_{k-1} \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$
5. *Nizovi* $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ *i* $(Y_i)_{i=1}^{\infty}$ *su međusobno nezavisni.*

Teorema 2.1: Neka je $(Y_n)_{n\geq 1}$ *niz nezavisnih slučajnih veličina koje imaju istu eksponencijalnu raspodelu* $\mathcal{E}(\lambda)$ *sa parametrom* $\lambda > 0$. *Neka je* $T_0 = 0$ *i* $T_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n, n \geq 1$ *i* $N(t) = |\{k \geq 1 | T_k \leq t\}|$, $t \geq 0$. *Tada je* $(N(t))_{t\geq 0}$ *homogen Puasonov proces sa intenzitetom* λ.[8]

Ukoliko u četvrtoj pretpostavci definicije 2.3 izostavimo da vreme između dospeća šteta ima eksponencijalnu raspodelu, tada $N(t)$ nazivamo proces obnavljanja.

[8] Dokaz pogledati u literaturi [1] str.22

3 Proces obnavljanja

Osnovna motivacija uvođenja procesa obnavljanja je ta da Puasonov proces nije uvek adekvatan za opisivanje broja prispelih šteta. Mogu postojati veliki razmaci između zahteva za odštetom. Na primer, nije uobičajeno da štete prouzrokovane olujom pristižu sa Puasonovim procesom jer nekada su i godine potrebne da prođu da bi se takav događaj ponovio. U ovakvim slučajevima, mnogo je prirodnije pretpostaviti da vremena između prispeća odšteta imaju raspodelu koja dozvoljava velike razmake između trenutaka prispeća odšteta. Na primer, Paretova ili log-normalna raspodela više odgovaraju ovakvim događajima, uzimajući u obzir da njihovi repovi su znatno teži nego rep eksponencijalne raspodele.

*Definicija 3.1: Neka je (Y_n) niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom funkcijom raspodele F, F(0)=0. Neka je $T_0 = 0, T_k = Y_1 + \cdots + Y_k, k \geq 1$ i $N(t) = |\{k \geq 1 : T_k \leq t\}|$. Slučajan niz (T_n) zove se niz trenutaka obnavljanja, a slučajni proces $\{N(t), t \geq 0\}$ nazivamo **proces obnavljanja**.*

U ovom radu ćemo se baviti modelima gde je broj šteta nastalih do trenutka *t* predstavljen kao proces obnavljanja. U skladu sa tim, navešćemo teoreme koje se odnose na procese obnavljanja.

Lema 3.1: Pretpostavimo da su na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definisani niz slučajnih veličina $(Z_n)_{n\geq 1}$ i slučajni proces $\{N(t), t \geq 0\}$ tako da važe sledeći uslovi:

1. $\lim_{n\to\infty} Z_n = Z$ *skoro sigurno*
2. *Za* $\forall t \geq 0$ *važi* $P\{N(t) \in \{0,1,2,\ldots\}\} = 1$
3. $N(t) \to \infty, t \to \infty$ *skoro sigurno*

Tada važi

$$\lim_{t\to\infty} Z_{N(t)} = Z \text{ skoro sigurno.}$$

Dokaz leme 3.1 nalazi se u literaturi [1]T.Mikosch, Non-life insurance mathematics na strani 61.

Teorema 3.1: Pretpostavimo da kod procesa obnavljanja važi $EY_1 = \frac{1}{\lambda} \in (0, +\infty)$. Tada je

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \lambda \text{ skoro sigurno} \tag{3.1}$$

Dokaz: $N(t) = |\{k \geq 1, T_k \leq t\}, \forall t \geq 0$, gde je $T_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ niz nezavisnih slučajnih veličina. Prema jakom zakonu velikih brojeva[9]

$$Z_n = \frac{T_n}{n} \xrightarrow{s.s.} EY_1 = \frac{1}{\lambda}, kada\ n \to \infty$$

$$T_n \xrightarrow{s.s.} \infty, kada\ n \to \infty$$

$$N(t) \xrightarrow{s.s.} \infty, kada\ n \to \infty$$

[9] Pogledati poglavlje 1.1

Na osnovu leme3.1

$$Z_{N(t)} = \frac{T_{N(t)}}{N(t)} \xrightarrow{s.s.} \frac{1}{\lambda}, kada\ t \to \infty$$

$$\{N(t) = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$$

$$\frac{T_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} \leq \frac{T_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)}$$

Na osnovu teoreme o dva policajca[10] važi:

$$\frac{t}{N(t)} \to \frac{1}{\lambda}, kada\ t \to \infty$$

$$\frac{N(t)}{t} \to \lambda, kada\ t \to \infty$$

Čime smo dokazali teoremu.■

Navešćemo još dve teoreme bez dokaza a koji se mogu naći u literaturi [1] T.Mikosch, Non-life insurance mathematics na strani 62.

<u>*Teorema 3.2*</u>*: Pretpostavimo da kod procesa obnavljanja važi* $EY_1 = \frac{1}{\lambda} \in (0, +\infty)$. *Tada je*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{EN(t)}{t} = \lambda \tag{3.2}$$

<u>*Teorema 3.3*</u>*: Pretpostavimo da kod procesa obnavljanaj važi* $0 < DY_1 < +\infty$ *i* $EY_1 = \frac{1}{\lambda} \in (0, +\infty)$. *Tada važi:*

$$a)\ \lim_{t \to \infty} \frac{DN(t)}{t} = \frac{DY_1}{(EY_1)^3} = \lambda DY_1 \tag{3.3}$$

$$b)\ \frac{N(t) - \lambda t}{\sqrt{\frac{tDY_1}{(EY_1)^3}}} \xrightarrow{D} Z \in \mathcal{N}(0,1)\ \ kada\ t \to +\infty \tag{3.4}$$

[10] Pogledati poglavlje 1.1

4 Zbir isplaćenih odšteta

U ovom odeljku posmatraćemo zbir svih šteta nastalih do trenutka *t* kao proces:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \qquad t \geq 0 \tag{4.1}$$

Gde je (X_i) niz nezavisnih, jednako raspodeljenih slučajnih veličina predstavlja velićine šteta koje su pozitivne vrednosti i nezavisnih od slučajnih trenutaka prispeća šteta (T_n), kao što smo već definisali u Kramer-Lundbergovom modelu. Navešćemo teoreme koje se odnose na matematičko očekivanje i disperziju zbira isplaćenih odšteta.

<u>Teorema 4.1</u>: Ukoliko zahtevi za odštetom pristižu u skladu sa procesom obnavljanja N(t), i visina odštete je predstavljena kao niz $(X_i)_{i\geq 1}$ gde su elementi niza nezavisni i jednako raspodeljeni sa konačnim matematičkim očekivanjem m i disperzijom σ^2 onda za matematičko očekivanje i disperziju zbira isplaćenih odšeta važi sledeće:

$$ES(t) = EN(t) \cdot E(X_1) = m \cdot EN(t) \tag{4.2}$$

$$DS(t) = EN(t) \cdot DX_1 + DN(t) \cdot (EX_1)^2 = \sigma^2 EN(t) + m^2 DN(t) \tag{4.3}$$

Dokaz:

$$ES(t) = \sum_{k=0}^{\infty} E(S(t)|N(t) = k) \cdot P\{N(t) = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\sum_{j=1}^{N(t)} X_j \middle| N(t) = k\right) \cdot P\{N(t) = k\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\sum_{j=1}^{k} X_j\right) \cdot P\{N(t) = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} kmP\{N(t) = k\} = m \sum_{k=0}^{\infty} kP\{N(t) = k\} = mEN(t).$$

$$DS(t) = E\big(S(t)\big)^2 - \big(ES(t)\big)^2 = E\left(\sum_{j=1}^{N(t)} X_j\right)^2 - m^2(EN(t))^2$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\left(\sum_{j=1}^{N(t)} X_j\right)^2 \middle| N(t) = k\right) \cdot P\{N(t) = k\} - m^2(EN(t))^2$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\sum_{j=1}^{k} X_j\right)^2 \cdot P\{N(t) = k\} - m^2\big(EN(t)\big)^2$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(D\left(\sum_{j=1}^{k} X_j\right) + \left(\sum_{j=1}^{k} EX_j\right)^2\right) \cdot P\{N(t) = k\} - m^2\big(EN(t)\big)^2$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k\sigma^2 + k^2m^2) \cdot P\{N(t) = k\} - m^2\big(EN(t)\big)^2 = \sigma^2 EN(t) + m^2 DN(t). \blacksquare$$

<u>Teorema 4.2</u>: Neka kod proizvoljnog procesa obnavljanja važi $EY_1 = \frac{1}{\lambda}$, $EX_1 = m$ *, pri čemu je* $\frac{1}{\lambda}, m \in (0, \infty)$*. Tada važi:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{ES(t)}{t} = \lambda m \tag{4.4}$$

<u>Teorema 4.3</u>: Neka su kod proizvoljnog procesa obnavljanja disperzije DX_1 *i* DY_1 *konačne i neka je* $EY_1 = \frac{1}{\lambda}$, $EY_1 = m, DX_1 = \sigma^2$*.Tada važi:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{DS(t)}{t} = \lambda(\sigma^2 + \lambda^2 m^2 DY_1) \tag{4.5}$$

<u>Teorema 4.4</u>: Ako slučajne veličine X_1 *i* Y_1 *imaju konačne dosperzije onda važi:*

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| P\left\{\frac{S(t) - ES(t)}{\sqrt{DS(t)}} \le x\right\} - \Phi(x)\right| = 0 \tag{4.6}$$

Gde je

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

5 Raspodele sa lakim i teškim repovima

<u>Definicija 5.1</u>: *Neka je F funkcija raspodele, F(0)=0,* $x_0 = sup\{t|F(t) < 1\} = +\infty$.

$$-Ako\ je\ \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{1-F(x)}{e^{-\lambda x}} < \infty\ za\ neko\ \lambda > 0, onda\ funkcija\ raspodele\ ima\ lak\ rep.$$

$$-Ako\ je\ \underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{1-F(x)}{e^{-\lambda x}} > 0\ za\ svako\ \ \lambda > 0, onda\ funkcija\ raspodele\ ima\ težak\ rep.$$

Primeri raspodela sa lakim repovima

Eksponencijalna	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, kada\ je\ \lambda > 0, x \geq 0$
Gama	$f(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, kada\ je\ \alpha > 0, \beta > 0, x > 0$
Vejbulova	$F(x) = 1 - e^{-cx^\tau}, kada\ je\ x > 0, c > 0, \tau \geq 1$
Usečena normalna	$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, kada\ je\ x \geq 0$

Primeri raspodela sa teškim repovima

Log-normalna	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, kada\ je\ x > 0, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$
Vejbulova	$F(x) = 1 - e^{-cx^\tau}, kada\ je\ x > 0, c > 0, \tau < 1$
Paretova	$F(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x_0 + x}\right)^\alpha, kada\ je\ \alpha > 0, x_0 > 0, x > 0$
Burova	$F(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x_0 + x^\tau}\right)^\alpha, kada\ je\ \ \alpha > 0, x_0 > 0, \tau > 0, x > 0$

6 Verovatnoća razaranja

Glavni deo klasične teorije rizika posvećen je verovatnoći razaranja. To je globalna mera rizika koju nalazimo u posmatranom portfoliju. Srećemo se sa dva slučaja, koja se onose na iznose šteta. Prvi slućaj je kada važi uslov malih odšteta, i tu dolazimo do rezultata da je vrlo mala verovatnoća da dodje do razaranja. Sa druge strane, kod velikih zahteva za odštetom dolazimo do potpuno drugačijih rezultata, verovatnoća razaranja je znatno veća u odnosu na prvi slučaj. Iz tih razloga osiguravajuće kompanije kod ugovora koji nose veliki rizik, tj. gde visine odšteta mogu prevazići mogućnost isplate od strane osiguravajućeg društva, pribegavaju reosiguranju, tj. prenošenju rizika na drugu kompaniju.

Posmatramo proces rizika oblika:

$$U(t) = u + \Pi(t) - S(t), \qquad t \geq 0 \tag{6.1}$$

<u>Definicija 6.1</u>: Događaj usled koga je veličina $U(t)$manja od 0 nazivamo ***razaranje****, tj.*

$$Razaranje = \{U(t) < 0 \; za \; neko \; t > 0\}$$

Trenutak u kome se dogodi razaranje nazivamo ***trenutak razaranja****, tj.*

$$T = \inf\{t: U(t) < 0\}$$

Verovatnoća razaranja u beskonačnom vremenskom intervalu *je verovatnoća da se razaranje dogodi ukoliko je početni kapital jednak u:*

$$\Psi(u) = P\{razaranje | U(0) = u\} = P\{T < \infty\} \, .$$

Verovatnoća razaranja u konačnom vremenskom intervalu *(posmatramo vremenski interval (0,t)) je verovatnoća da se razaranje dogodi ukoliko je početni kapital jednak u $\Psi(u; t) = P\{T < t\}$ pri čemu T zavisi od u, pa možemo zapisati u obliku:*

$$\Psi(u; x) = P\{T < xu\}, \qquad za \; dato \; x \in \mathbb{R}$$

Oba, i razaranje i trenutak razaranja zavise od početnog kapitala u. Uslov $U(0) = u$ u verovatnoći razaranja je neprirodno ubačen, s obzirom da je $U(0)$ konstanta. Ovakva uslovna verovatnoća je često korišćena u literaturi jer pokazuje vrednost početnog kapitala koji utiče na verovatnoću.

Koristeći definiciju razaranja, napisaćemo je u drugačijem obliku:

$$Razaranje = \left\{\inf_{t \geq 0} U(t) < 0\right\} = \left\{\inf_{n \geq 1} U(T_n) < 0\right\} = \left\{\inf_{n \geq 1}\left\{u + cT_n - \sum_{j=1}^{n} X_j < 0\right\}\right\} =$$

$$= \left\{\inf_{n \geq 1}\left\{u + \sum_{j=1}^{n}(cY_j - X_j) < 0\right\}\right\} = \left\{\sup_{n \geq 1}\left\{\sum_{j=1}^{n}(X_j - cY_j) > u\right\}\right\}$$

Prema prethodnom je verovatnoća razaranja:

$$\Psi(u) = P\left\{\sup_{n\geq 1}\left\{\sum_{j=1}^{n}(X_j - cY_j) > u\right\}\right\} \tag{6.2}$$

Verovatnoća preživljavanja je definisana na sledeći način:

$$\varphi(u) = 1 - \Psi(u)$$

Iako veoma komplikovana verovatnoća razaranja je privukla veliku pažnju u literaturi primenjene teorije verovatnoće. Posebno je interesantno asimptotsko ponašanje $\Psi(u)$ kada $u \to \infty$. Verovatnoća $\Psi(u)$ je kompleksna mera globalnog ponašanja portfelja osiguravajućeg društva sa promenom vremena. Osnovni cilj je izbeći razaranje sa verovatnoćom 1, i verovatnoću sa kojom slučano lutanje (S_n) prelazi najveći prag *u* minimizirati, zapravo treba da bude toliko mala da dogadjaj razaranja može biti isključen iz praktičnih razmatranja ukoliko je početni kapital dovoljno veliki.

6.1 Uslov čistog profita

Svaki od nizova $(X_i)\ i\ (Y_i)$ sadrži slučajne promenljive koje su jednako raspodeljene i nezavisne, otuda je i slučajna promenljiva $X_j - cY_j$ iz (6.2) koju ćemo obeležiti sa Z_j. Na osnovu jakog zakona velikih brojeva je:

$$\frac{S_n}{n} \to EZ_1, skoro\ sigurno\ \ kada\, n \to \infty$$

- Ukoliko važi $EZ_1 \geq 0$ onda je verovatnoća razaranja jednaka 1.
- Ukoliko važi $EZ_1 < 0$ onda je verovatnoća razaranja manja od 1.

<u>Definicija 6.1.1:</u> Ukoliko je slučajna promenljiva Z_j definisana na gore pomenuti način, onda je ***uslov čistog profita****:*

$$EZ_1 = EX_1 - cEY_1 < 0$$

$$cEY_1 > EX_1 \ \Rightarrow c > \frac{EX_1}{EY_1} \tag{6.1.1}$$

Takođe, možemo obeležiti:

$$\rho = c\frac{EX_1}{EY_1} - 1 \tag{6.1.2}$$

Tada je uslov čistog profita dat sa $\rho > 0$.

Dakle, intuitivno govoreći, uslov čistog profita je da za dati vremenski period očekivani iznos šteta treba da bude manji nego prispela premija u tom istom vremenskom intervalu. Drugim rečima govoreći, srednja vrednost protoka novca portfelja je pozitivna, tj. veći je priliv nego odliv novca. Dakle, potrebno je izabrati premiju toliku da važi uslov čistog profita da osiguravajuće društvo ne bi negativno poslovalo. Postavljanje uslova čistog profita ne znači i izbegavanje razaranja jer očekivanje slučajnog procesa relativno malo govori o fluktuacijama samog procesa.

<u>Primer 6.1.1</u>: Posmatraćemo Kramer-Lunbergov model i postavićemo za njega uslov čistog profita.

$$c > \frac{E(X_1)}{E(Y_1)} = \frac{m}{\frac{1}{\lambda}} = m\lambda \Longrightarrow \rho = \frac{c}{m\lambda} - 1 > 0.$$

6.2 Uslov malih odšteta. Lundbergov koeficijent. Lundbergova granica

U ovom odeljku ćemo izvesti osnovnu gornju granicu za verovatnoću razaranja $\Psi(u)$. U daljem tekstu pretpostavljaćemo da važi uslov čistog profita (6.1.1). Dodatno ćemo zahtevati da važi uslov malih odšteta:

*<u>Definicija 6.2.1</u>: Za niz nezavisnih slučajniih veličina (X_i) sa istom raspodelom F, kažemo da važi **uslov malih odšteta** ako postoji generatorna funkcija Ee^{sX_1} u okolini nule $(-s_0, s_0)$ za neko $s_0 > 0$.*

Ako važi pretpostavka da važi uslov malih odšteta tj. ako $\exists\ Ee^{sX_1}$ za $s \in (-s_0, s_0)$ i koristeći Čebišovljevu nejednakost[11] onda važi sledeće:

$$1 - F(x) = P\{X_1 > x\} = P\{e^{sX_1} > e^{sx}\} \leq \frac{Ee^{sX_1}}{Ee^{sx}} = \frac{Ee^{sX_1}}{e^{sx}}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - F(x)}{e^{-sx}} \leq Ee^{sX_1} < +\infty$$

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{1 - F(x)}{e^{-sx}} < +\infty \ \Rightarrow funkcija\ raspodele\ F\ ima\ lak\ rep$$

<u>Definicija 6.2.2</u>: Pretpostavimo da važe sledeća dva uslova:

1. *Uslov malih odšteta: $\exists\ Ee^{sZ_1}$ za neko $s \in (-s_0, s_0)$, $s_0 > 0$*
2. *Neka je A jedinstveno pozitivno rešenje jednačine po s:*
   $$Ee^{sZ_1} = Ee^{sX_1 - scY_1} = 1$$
   *Onda za A kažemo da je **Lundbergov koeficijent**.*

Sada ćemo definisati jedan od ključnih zaključaka aktuarske matematike.

---

[11] Pogledati poglavlje 1.1

Teorema 6.2.1: (***Lundbergova nejednakost***) *Dat je proces obnavljanja. Ako važe uslovi:*

1. *Uslov čistog profita*
2. *Postoji Lundbergov koeficijent A*

   Onda važi sledeća nejednakost:

$$\psi(u) \le e^{-Au} \tag{6.2.1}$$

Dokaz:

$$\psi(u) = P\left\{\sup_{n\ge 1} S_n > u\right\}, S_n = Z_1 + \cdots + Z_n,\ \ Z_1 = X_1 - cY_1$$

$$\psi_n(u) = P\left\{\max_{1\le k\le n} S_k > u\right\} = P(B_n)$$

Kako je niz B_n rastući tj. $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots \subseteq B_n \subseteq B$, gde je

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \Longrightarrow P(B_n) je\ rastući, a\ zbog\ neprekidnosti\ verovatnoće$$

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(B), tj. \lim_{n\to\infty} \psi_n(u) = \psi(u)$$

Otuda, dovoljno je dokazati da važi:

$$\psi_n(u) \le e^{-Au}, \forall n \ge 1$$

Matematička indukcija:

$$n = 1: \quad P\{Z_1 > u\} = P\{e^{AZ_1} > e^{Au}\} \le \frac{Ee^{AZ_1}}{Ee^{Au}} = e^{-Au}$$

p.p. da važi $\psi_k(u) \le e^{-Au}$ dokazujemo $\psi_{k+1}(u)$

$$\psi_{k+1}(u) = P\left\{\max_{1\le j\le k+1} S_j > u\right\} = P\{Z_1 > u\} + P\left\{\max_{1\le j\le k+1} S_j > u\, , Z_1 \le u\right\}$$

$$= \int_u^{\infty} dF_{Z_1}(t) + \int_{-\infty}^{u} P\left\{\max_{1\le j\le k} (S_j + t) > u\right\} dF_{Z_1}(t) = I_1 + I_2$$

Kako je $e^{A(t-u)} \ge 1$ otuda je $I_1 = \int_u^{\infty} 1 \cdot dF_{Z_1}(t) \le \int_u^{\infty} e^{A(t-u)} dF_{Z_1}(t)$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{u} P\left\{\max_{1\le j\le k} (S_j + t) > u\right\} dF_{Z_1}(t) = \int_{-\infty}^{u} P\left\{\max_{1\le j\le k} S_j > u - t\right\} dF_{Z_1}(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{u} \psi_k(u-t)\, dF_{Z_1}(t) \le \int_{-\infty}^{u} e^{-A(u-t)}\, dF_{Z_1}(t)\ zbog\ indukcijske\ pretpostavke$$

$$\psi_{k+1}(u) = I_1 + I_2 \le \int_u^{\infty} e^{A(t-u)} dF_{Z_1}(t) + \int_{-\infty}^{u} e^{-A(u-t)}\, dF_{Z_1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{A(t-u)}\, dF_{Z_1}(t) =$$

$$= Ee^{A(Z_1 - u)} = Ee^{AZ_1} \cdot Ee^{-Au} = e^{-Au}$$

Čime smo dokazali nejednakost (6.2.1) ■

Lundbergova granica koja je eksponencijalna osigurava da će verovarnoća razaranja biti jako mala ukoliko je početni kapital dovoljno veliki. Takođe, gornja granica takođe zavisi i od Lunbergovog koeficijenta. Što je manji taj koeficijent to je rizičniji porfolio. Na osnovu (6.2.1) dolazimo do sledeće teoreme.

*Teorema 6.2.2: (**Kramerova granica**)*
Razmotrimo Kramer-Lundbergov model za koji važi uslov čistog profita. Pretpostavimo da je funkcija raspodele odšteta F apsolutno neprekidna i važi uslov malih odšteta i postoji Lundbergov koeficijent A na $(-s_0, s_0)$*. Tada postoji konstanta c takva da važi:*

$$\lim_{u\to\infty} e^{Au}\psi(u) = c \,.$$ [12]

Konstanta c može se predstaviti na sledeći način:

$$c = \left[\frac{A}{\rho E X_1}\int_0^{\infty} x e^{Ax}\overline{F}_{X_1}(x)dx\right]^{-1}$$

gde je ρ definisan kao u (6.1.2).

6.3 Verovatnoća razaranja u slučaju velikih odšteta

Neka je $X_1, X_2, \ldots$ niz slučajnih promenljivih iz skupa $\mathbb{R}$ i $u > 0$. Slučajna promenljiva X_n predstavlja razliku šteta i prispele premije u godini n, a u predstavlja početni kapital osiguravajuće kompanije. Obeležićemo $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,\ n = 1, 2, \ldots$ Trenutak razaranja je, kao i već ranije definisan:

$$T = T(u) = \begin{cases} inf\{n: S_n > u\} \\ \infty, \quad S_n \le u \ \text{za} \ \forall n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Interesuju nas verovatnoće razaranja kada je u veliko. Predmet interesovanja su konačni vremeski okviri, mada će biti razmatrana i verovatnoća $P(T < \infty)$.

U matematici u osiguranju posmatramo uopštene procese $\{X_n\}$, tj. ne mora važiti uslov malih odšteta što je slučaj u nekim vrstama osiguranja npr. osiguranje od rizika požara. Slučajna promenljiva X_n predstavlja razliku šteta i prispele premije u godini n. Prirodno se nameće da su uzastopne godine zavisne jer na buduće premije utiče istorija šteta. Takođe, razvoj šteta ima zavisne elemente, zbog npr. ekonomskih ciklusa.

U uopštenim procesima, teško je naći oštre procene za verovatnoće razaranja, čak i kada posmatramo u asimptotskom smislu. Npr. Za dato $x > 0$, često je moguće uzeti grubu procenu $P(T \le xu) \approx e^{-r(x)u}$ uz definisanje funkcije $r(x)$. Značenje prethodne procene vidimo u sledećem:

$$\lim_{u\to\infty}\frac{1}{u}\ln P(T \le xu) = -r(x) \qquad (6.3.1)$$

[12] Dokaz pogledati u literaturi [2] str.29

U modelima gde štete imaju raspodelu sa teškim repom, limes (6.3.1) i nije od velike pomoći. Mnogo je bolje razmotriti drugačiju zavisnost. Pretpostavimo da postoji granična vrednost:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{1}{\ln u} \ln P(T \le xu) = -R(x) \tag{6.3.2}$$

gde je $R(x) \in (0, \infty)$. Iz ove granične vrednosti dolazimo do stepene ocene $P(T \le xu) \approx u^{-R(x)}$, za velike u. Dodatno, oblik funkcije R(x) može otkriti koji delovi modela su kritični za verovatnoću razaranja. Za procese sa teškim repom, veza između veličina kao što su trenutak razaranja, parcijalne sume i maksimuma je proučavana u mnogim studijama. Pre svega ćemo razmotriti najjednostavniji slučaj, kada je u pitanju Kramer-Lundbergov model.

Lema 6.3.1: Dat je Kramer-Lundbergov model za koji važi uslov čistog profita. Pretpostavimo da je funkcija raspodele pojedinačnih odšteta F apsolutno neprekidna. Označićemo verovatnoću preživljavanja sa $\varphi(u) = 1 - \Psi(u)$, gde je $\Psi(u)$ verovatnoća razaranja. Tada važi:

$$\varphi(u) = \varphi(0) + \frac{1}{(1+\rho)EX_1} \int_0^u \big(1 - F(t)\big)\varphi(u-t)dt$$

$$tj.\, \varphi(u) = \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho} \int_0^u \varphi(u-t)dF_I(t)$$

$$gde\ je\ F_I(x) = \frac{1}{EX_1} \int_0^x (1 - F(t))dt\,, x > 0.$$

Lema 6.3.2: Neka važe uslovi Leme 6.3.1 i neka je $(X_{I,n})_{n\ge1}$ niz nezavisnih slučajnih veličina sa zajedničkom funkcijom raspodele F_I. Tada važi jednakost:

$$\varphi(u) = \frac{\rho}{1+\rho}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\rho)^n} P\big\{X_{I,1} + \dots + X_{I,n} \le u\big\}\right), u \ge 0$$

$$tj.\, \varphi(u) = \frac{\rho}{1+\rho}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\rho)^n} F_I^{n*}\right), u \ge 0.$$

Definicija 6.3.1: Ako su F i G funkcije raspodele verovatnoća, onda se funkcija $(F * G)$ naziva konvolucija funkcija raspodela F i G, i definisana je na sledeći način:

$$(F * G)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x-t)dG(t)$$

Definicija 6.3.2: Funkcija F^{n*} zove se n-ta konvolucija funkcije raspodele F i definisana je na sledeći način:

$$F^{0*}(x) = \begin{cases} 1, ako\ je\ x \ge 0 \\ 0, ako\ je\ x < 0 \end{cases}$$

$$F^{n*}(x) = P\{X_1 + X_2 + \dots + X_n \le x\}, n \ge 1$$

Definicija 6.3.3: Neka je $(X_n)_{n\geq 1}$ niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom funkcijom raspodele $F(x) = P\{X_1 \leq x\}$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ i $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Slučajne veličine $X_1, \dots, X_n$ i njihova funkcija raspodele su subeksponencijalne ako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi:

$$P\{S_n > x\} \sim nP\{X_1 > x\} \sim P\{M_n > x\}$$

I pišemo $F \in \mathcal{S}$.

U Literaturi [6] Embrecht, Veraverbeke dokazana je sledeca teorema.

Teorema 6.3.1: Neka u Kramer-Lundbergovom modelu važi uslov čistog profita. Tada su ekvivalentni sledeći uslovi:

1. $F_I \in \mathcal{S}$
2. $1 - \Psi(u) \in \mathcal{S}$
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{\Psi(u)}{1-F_I(u)} = \frac{1}{\rho}$

Neka je $X_1, X_2, \dots$ niz slučajnih promenljivih, kao što je na početku ovog poglavlja opisano, iz skupa $\mathbb{R}$ na fiksnom prostoru verovatnoća i neka je $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ i $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ za $n = 1, 2, \dots$ Neka je u početni kapital i T trenutak razaranja.[13] Naš cilj je da dobijemo ocene za verovatnoće razaranja u smislu repova verovatnoća procesa $\{S_n\}$ i $\{M_n\}$.

U nastavku ovog odeljka, razmatramo procese kod kojih je $T < \infty$, tj. kod kojih se javlja razaranje. Naša osnovna pretpostavka je da levi repovi niza $\{X_n\}$ nisu previše teški. Dvostrane granice dobijamo u obliku parcijalnih suma, dok donje granice dobijamo u obliku maksimuma. U nastojanju da opišemo verovatnoće razaranja, uvodimo asimptotske mere procesa $\{S_n\}$ i $\{M_n\}$. U svom radu je H.Nyrihinen[14] definisao za $y > 0$ parametre $\overline{R_s}(y)$ i $\underline{R_s}(y)$ na sledeći način:

$$\lim_{\delta\to 0+} \overline{\lim_{n\to\infty}} (logn)^{-1} logP\big(S_n > n(y-\delta)\big) = -\overline{R_s}(y)$$

$$\lim_{\delta\to 0+} \underline{\lim_{n\to\infty}} (logn)^{-1} logP\big(S_n > n(y+\delta)\big) = -\underline{R_s}(y)$$

Ako su oba parametra konačna, onda za svako $\varepsilon > 0$:

$$n^{-\underline{R_s}(y)-\varepsilon} \leq P(S_n > n(y+\delta)) \leq P(S_n > ny) \leq P(S_n > n(y-\delta)) \leq n^{-\overline{R_s}(y)+\varepsilon}$$

$$n^{-\underline{R_s}(y)-\varepsilon} \leq P(S_n > ny) \leq n^{-\overline{R_s}(y)+\varepsilon}$$

za velike n. Jasno je da $\overline{R_s}(y)$ i $\underline{R_s}(y)$ rastu sa rastom y i $\overline{R_s}(y) \leq \underline{R_s}(y)$ za svako $y > 0$. Takođe, lako se vidi da je $\overline{R_s}(y)$ neprekidna s leva, a $\underline{R_s}(y)$ neprekidna s desna. Za maksimum definišemo globalne parametre $\overline{R_M}$ i $\underline{R_M}$ na sledeći način:

[13] Videti definiciju 6.1

[14] Literatura [4]

$$\lim_{\delta\to 0+}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(logn)^{-1}\,logP\big(M_n > n^{1-\delta}\big) = -\overline{R_M}$$

$$\lim_{\delta\to 0+}\underline{\lim}_{n\to\infty}\,(logn)^{-1}\,logP(M_n > n^{1+\delta}) = -\underline{R_M}$$

<u>Lema 6.3.3</u>:

Pretpostavimo da

$$\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}(\log n)^{-1}\log P\left(\sum_{i=1}^{n}|X_i|\mathrm{I}(X_i\le 0) > n^{1+\delta}\right) < -\underline{R}_M \tag{6.3.3}$$

Tada za svako $x > 0$, važi

$$\underline{\lim}_{u\to\infty}\,(logu)^{-1}\log P(T\le xu) \ge -\underline{R}_S(1/x) \ge -\underline{R}_M \tag{6.3.4}$$

Dokaz:

Dokazujemo prvu nejednakost iz 6.3.4. Neka je u veliko i $y\in(0,x)$. Tada je:

$$P(T\le xu) = P\{S_{xu} > u\} \ge P\big(S_{[yu]} > u\big)$$

Postoji $\varepsilon\in(0,y)$ tako da važi:

$$(\log u)^{-1}\log P(T\le xu) \ge \frac{\log[yu]}{\log u}(\log[yu])^{-1}\log P\left(S_{[yu]} > \frac{[yu]}{y-\varepsilon}\right)$$

Dalje je zamenom $yu = n$ i prelaskom na $\underline{\lim}$

$$\underline{\lim}_{u\to\infty}\,(\log u)^{-1}\log P(T\le xu) \ge \underline{\lim}_{n\to\infty}\,(\log n)^{-1}\log P\left(S_n > \frac{n}{y-\varepsilon}\right)$$

jer kada $u\to\infty$ onda $n\to\infty$.

Dokazali smo prvu nejednakost koristeći činjenicu da su $y\in(0,x)$ i $\varepsilon\in(0,y)$ proizvoljni. Razmatramo drugu nejednakost iz (6.3.4). Moramo pokazati da je $\underline{R}_S(y)\le\underline{R}_M$ za svako $y > 0$. Možemo pretpostaviti da je $\underline{R}_M$ konačno. Za dato $\delta > 0$ imamo da je:

$$P(S_n > ny) \ge P\left(M_n > n^{1+\delta},\, S_n - M_n > -n^{1+\frac{\delta}{2}}\right)$$

$$= P\big(M_n > n^{1+\delta}\big) - P\left(M_n > n^{1+\delta},\, S_n - M_n \le -n^{1+\frac{\delta}{2}}\right)$$

$$\ge P\big(M_n > n^{1+\delta}\big) - P\left(S_n - M_n \le -n^{1+\frac{\delta}{2}}\right)$$

(6.3.5)

Za veliko n. Kako važi:

$$\left\{S_n - M_n \leq -n^{1+\delta/2}\right\} \subseteq \left\{\sum_{i\leq n} |X_i| \mathrm{I}(X_i \leq 0) \geq n^{1+\delta/2}\right\}$$

Iz nejednakosi (6.3.3) i (6.3.5) dolazimo do nejednakosti iz (6.3.4)■

Sledeće ćemo dati dovoljne uslove za (6.3.4) koji su jači od (6.3.3) ali jednostavniji.

Teorema 6.3.2:

Pretpostavimo da

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E(|X_n|^t \mathrm{I}(X_n \leq 0)) < \infty \tag{6.3.6}$$

Za svako $t > 0$, i neka je $x > 0$. Tada nejednakost (6.3.4) važi i

$$\overline{\lim_{u\to\infty}} (\log u)^{-1} \log P(T \leq xu) \leq -\bar{R}_S(1/x) \tag{6.3.7}$$

Dokaz:

Prema lemi 6.3.3 prva nejednakost u (6.3.4) važi bez ikakvih uslova. Posmatramo drugu nejednakost. Možemo pretpostaviti da je $\underline{R}_M$ konačno i tada pokazati da (6.3.3) važi. Neka su $t > 0$ i $\delta > 0$. Po Čebišovljevoj nejednakosti[15] dolazimo do sledećeg:

$$P\big(|X_i| \mathrm{I}(X_i \leq 0) > n^{\delta}\big) \leq C(t) n^{-\delta t} \tag{6.3.8}$$

Za svako $i \in \mathbb{N}$, gde C(t) je supremum iz (6.3.6). Kako je

$$P\left(\sum_{i\leq n} |X_i|\, \mathrm{I}(X_i \leq 0) > n^{1+\delta}\right) \leq C(t) n^{1-\delta t} \tag{6.3.9}$$

Kada $t \to \infty$ dobijamo sledeće:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (\log n)^{-1} \log P\left(\sum_{i\leq n} |X_i|\, \mathrm{I}(X_i \leq 0) > n^{1+\delta}\right) = -\infty$$

Odakle (6.3.3) važi. Druga nejednakost iz (6.3.4) proizilazi iz leme 6.3.3.

Dokažimo sada (6.3.7). Možemo pretpostaviti da je $\bar{R}_S(1/x) > 0$ i $\bar{R}_S(1/x) < \infty$. Slično se dokazuje i kada je $\bar{R}_S(1/x) = \infty$. Neka je $\varepsilon > 0$ dovoljno malo i $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$. Takođe, neka je $j \in [0, u^{\varepsilon} - 1]$ ceo broj i

---

[15] Videti poglavlje 1.1

$$
\begin{aligned}
P(T \in [jxu^{1-\varepsilon}, (j+1)xu^{1-\varepsilon}]) \\
&= P\left(T \in [jxu^{1-\varepsilon}, (j+1)xu^{1-\varepsilon}], S_{[(j+1)xu^{1-\varepsilon}]} - S_T > -u^{1-\varepsilon\prime}\right) \\
&+ P\left(T \in [jxu^{1-\varepsilon}, (j+1)xu^{1-\varepsilon}], S_{[(j+1)xu^{1-\varepsilon}]} - S_T \le -u^{1-\varepsilon\prime}\right). \qquad (6.3.10)
\end{aligned}
$$

Označimo sa $P_1(u,j)$ prvu verovatnoću, a sa $P_2(u,j)$ drugu verovatnoću u desnoj strani jednačine (6.3.10). Za $P_1(u,j)$ imamo da je:

$$
\begin{aligned}
P_1(u,j) &\le P\left(S_{[(j+1)xu^{1-\varepsilon}]} > u - u^{1-\varepsilon'}\right) \\
&\le P\left(S_{[(j+1)xu^{1-\varepsilon}]} > \frac{[(j+1)xu^{1-\varepsilon}](1-\varepsilon)}{x}\right) \le u^{-(1-2\varepsilon)\bar{R}_S\left(\frac{1-\varepsilon}{x}\right)} \qquad (6.3.11)
\end{aligned}
$$

Kada je u veliko. Gornja granica je uniformna za $j \in [0, u^{\varepsilon} - 1]$. Da bi smo procenili $P_2(u,j)$, posmatramo:

$$
\begin{aligned}
&\left\{T \in [jxu^{1-\varepsilon}, (j+1)xu^{1-\varepsilon}], S_{[(j+1)xu^{1-\varepsilon}]} - S_T \le -u^{1-\varepsilon\prime}\right\} \\
&\subseteq \left\{\sum_{i=[jxu^{1-\varepsilon}]+1}^{[(j+1)xu^{1-\varepsilon}]} |X_i| \mathrm{I}(X_i \le 0) \ge u^{1-\varepsilon'}\right\}.
\end{aligned}
$$

za $t > 0$, možemo zaključiti a na osnovu (6.3.8) i (6.3.9), kada je u veliko:

$$
P_2(u,j) \le u^{1-t(\varepsilon-\varepsilon')} \qquad (6.3.12)
$$

za svako *j*. Ako odaberemo da *t* bude veliko i kombinacijom (6.3.12) sa (6.3.10) i (6.3.11), vidimo da

$$
P(T \in [jxu^{1-\varepsilon}, (j+1)xu^{1-\varepsilon}]) \le u^{-(1-3\varepsilon)\bar{R}_S((1-\varepsilon)-x)}
$$

za svako $j \in [0, u^{\varepsilon} - 1]$. Sumiranjem po *j*, zaključujemo da (6.3.7) važi. Ovim smo dokazali Teoremu 6.3.2.■

6.4 Preciziranje gornjih granica

Osnovni cilj u ovom odeljku je izvesti gornje granice za verovatnoće razaranja u smislu maksimuma. Takođe, doći ćemo i do rezultata za neograničen vremenski opseg.

Proučavaćemo modele u kojima zajedničke funkcije raspodela priraštaja su kombinacije raspodela slučajnih vektora sa nezavisnim komponentama. Specijalno, neka je $(\eta_1, \eta_2, \dots)$ stohastički proces sa realnim vrednostima i neka je H_n zajednička funkcija raspodele. Pridružujemo slučajnu promenljivu ξ_v sa funkcijom raspodele G_v za svako $v \in \mathbb{R}$, i pretpostavimo da za svako fiksirano x, preslikavanje $v \to G_v(x)$ je merljivo. Razmatramo model u kojem za svako $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ i $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ važi sledeće:

$$P(X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n, \eta_1 \le y_1, \dots, \eta_n \le y_n)$$
$$= \int\limits_{v_1 \le y_1, \dots, v_n \le y_n} G_{v_1}(x_1) \cdots G_{v_n}(x_n) dH_n(v_1, \dots, v_n).$$

Prema tome, sa uslovom da $\eta_1 = v_1, \dots, \eta_n = v_n$, slučajne promenljive $X_1, \dots, X_n$ su nezavisne i funkcija raspodele za X_i je G_{v_i} za svako $i \le n$.

Pretpostavićemo da je srednja vrednost:

$$\mu(v) = E(\xi_v) = \int_{x \in \mathbb{R}} x dG_v(x)$$

postoji za svako $v \in \mathbb{R}$ i da $E(X_n)$ postoji za svako $n \in \mathbb{N}$. Neka je $f_i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ merljivo preslikavanje za $i = 1,2, \dots$ Ako $E(f_1(X_1) \cdots f_n(X_n))$ postoji, tada

$$E(f_1(X_1) \cdots f_n(X_n) | \eta_1, \dots \eta_n) = \prod_{i=1}^{n} \int_{x_i \in \mathbb{R}} f_i(x_i) d\, G_{\eta_i}(x_i) \ \ skoro\ sigurno \quad (6.4.1)$$

Posebno $\mu(\eta_i)$ je oblik od $E(X_i | \eta_1, \dots, \eta_n)$, za $i \le n$. Za $a \in \mathbb{R}$, definisaćemo parametar $p(a)$ na sledeći način:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} (\log n)^{-1} \log P(\mu(\eta_1) + \cdots + \mu(\eta_n) > na) = -p(a).$$

Pre nego što dodjemo do Teoreme 6.4.1, dokazaćemo dve leme koje su samo tehnička podrška za dokaz Teoreme 6.4.1. Neka su familija $\{\xi_v, v \in \mathbb{R}\}$, proces $\{S_n\}$, i parametar $p(a)$ kao već gore opisani.

<u>Lema 6.4.1</u>: Pretpostavimo da $sup_{v \in \mathbb{R}} E\big(|\xi_v|^t I(\xi_v \le 0)\big) < \infty$ *važi za neke* $t > 1$. *Za* $v \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *i* $\delta > 0$, *neka je:*

$$\underline{\xi}_v = \underline{\xi}_v(\delta, n) = \xi_v \mathrm{I}\big(\xi_v \le n^{1-\delta}\big), \ \ i$$

$$h = h(\delta, n) = n^{-1+\delta/2}.$$

Tada, za male δ *i dato* $\varepsilon > 0$, *postoji* $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$*takvo da za veliko n*

$$E\big(e^{h\underline{\xi}_v}\big) \le e^{h\left((1+\varepsilon')\mu(v)+\varepsilon\right)} \quad (6.4.2)$$

za svako $v \in \mathbb{R}$.

Dokaz:

Za dato $\varepsilon'' > 0$ možemo da odaberemo $b > 1$ takvo da

$$E(\max(\xi_v, -b)) < \mu(v) + \varepsilon'' \quad (6.4.3)$$

Za svako $v \in \mathbb{R}$. Za $b > 1$ imamo da je:

$$E(\max(\xi_v, -b)) = \mu(v) + \int_b^\infty P(\xi_v < -x)dx. \qquad (6.4.4)$$

Neka je $t > 1$ takvo da $\sup_{v\in\mathbb{R}} E\left(|\xi_v|^t \mathrm{I}(\xi_v \le 0)\right) < \infty$ važi. Za svako $x > 0$, imamo da je

$$E\left(|\xi_v|^t \mathrm{I}(\xi_v \le 0)\right) \ge x^t P(\xi_v < -x).$$

Pošto integral u (4.11) teži ka 0 kada b teži beskonačnosti. Ovo dokazuje (4.10). Neka je $b > 1$ takvo da (4.10) važi za svako $v \in \mathbb{R}$. Obeležimo:

$$\underline{\xi'}_v = \max(\underline{\xi}_v, -b) + b \qquad (6.4.5)$$

Primetimo da je $\underline{\xi'}_v$ negativna i da važi $\underline{\xi'}_v \le n^{1-\delta} + b$. Neka je $\underline{\mu}'(v) = E(\underline{\xi'}_v)$. Takođe je:

$$\begin{aligned}
E\left(e^{h\underline{\xi'}_v}\right) &= E\left(e^{h\underline{\xi'}_v} \cdot \mathrm{I}\left(\underline{\xi'}_v > 0\right)\right) + E\left(e^{h\underline{\xi'}_v} \cdot \mathrm{I}\left(\underline{\xi'}_v = 0\right)\right)\\
&= E\left(e^{h\underline{\xi'}_v} \cdot \mathrm{I}\left(\underline{\xi'}_v > 0\right)\right) + E\left(\mathrm{I}\left(\underline{\xi'}_v = 0\right)\right)\\
&= E\left(e^{h\underline{\xi'}_v} \cdot \mathrm{I}\left(\underline{\xi'}_v > 0\right)\right) + P\left(\underline{\xi'}_v = 0\right)\\
&= E\left(e^{h\underline{\xi'}_v} \cdot \mathrm{I}\left(\underline{\xi'}_v > 0\right)\right) + 1 - P\left(\underline{\xi'}_v > 0\right)\\
&= E\left(e^{h\underline{\xi'}_v} \cdot \mathrm{I}\left(\underline{\xi'}_v > 0\right)\right) - E\left(\mathrm{I}\left(\underline{\xi'}_v > 0\right)\right) + 1\\
&= E\left(\left(e^{h\underline{\xi'}_v} - 1\right) \cdot \mathrm{I}\left(\underline{\xi'}_v > 0\right)\right) + 1
\end{aligned}$$

Odavde je :

$$E\left(e^{h\underline{\xi'}_v}\right) = E\left(\frac{e^{h\underline{\xi'}_v} - 1}{\underline{\xi'}_v}\underline{\xi'}_v \mathrm{I}\left(\underline{\xi'}_v > 0\right)\right) + 1.$$

Iz Tejlorovog razvoja, vidimo da ($e^{hx} - 1)/x$ raste kada x raste i $x \in (0, \infty)$. Odavde,

$$E\left(e^{h\underline{\xi'}_v}\right) \le E\left(\frac{e^{h\left(n^{1-\delta}+b\right)} - 1}{n^{1-\delta} + b}\underline{\xi'}_v\right) + 1 = \frac{e^{h\left(n^{1-\delta}+b\right)} - 1}{n^{1-\delta} + b}\underline{\mu}'(v) + 1.$$

Sada, $h\left(n^{1-\delta} + b\right) \to 0 \; kada \; n \to \infty$. Dakle,

$$E\left(e^{h\underline{\xi'}_v}\right) \le \left(1 + \frac{\varepsilon''}{b}\right)h\underline{\mu}'(v) + 1 \le \exp\left(\left(1 + \frac{\varepsilon''}{b}\right)h\underline{\mu}'(v)\right)$$

za velike n. Prema (6.4.3) i (6.4.5) dolazimo do:

$$E\left(e^{h\underline{\xi}_\upsilon}\right) \leq E\left(e^{h\max(\underline{\xi}_\upsilon,-b)}\right) = E\left(e^{h(\max(\underline{\xi}_\upsilon,-b)+b-b)}\right) = E\left(e^{h\underline{\xi'}_\upsilon}\right)e^{-hb}$$
$$\leq \exp\left(h\left(\left(1+\frac{\varepsilon''}{b}\right)\left(\underline{\mu}'(\upsilon)+\varepsilon''+b\right)-b\right)\right).$$

I za pogodno odabrano ε'' dobijamo da važi (6.4.2)■

<u>Lema 6.4.2</u>:

Pretpostavimo da $sup_{\upsilon\in\mathbb{R}}\, E\left(|\xi_\upsilon|^t I(\xi_\upsilon \leq 0)\right) < \infty$ *je zadovoljeno za neke* $t > 1$. *Tada je, za svako* $a' > a$ *i* $\delta > 0$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(\log n)^{-1}\log P\left(S_n > na', M_n \leq n^{1-\delta}\right) \leq -p(a) \qquad (6.4.6)$$

Dokaz:

Neka su $\underline{\xi}_\upsilon$ i h definisani kao u lemi 6.4.1 i neka su $\delta, \varepsilon\ i\ \varepsilon'$ pozitivni, realni brojevi takvi da (6.4.2) važi za velike *n* i svako υ. Obeležićemo sa

$$\underline{X_i} = X_i \mathrm{I}\left(X_i \leq n^{1-\delta}\right), za\ i \leq n$$

i $\underline{S}_n = \underline{X}_1 + \cdots + \underline{X}_n$. Takođe, neka je za $a \in \mathbb{R}$,

$$A_n(a) = \{(\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n) \in \mathbb{R}^n : \mu(\upsilon_1) + \cdots + \mu(\upsilon_n) \leq na\}$$

I neka $a' > a$ je fiksirano. Prema Čebišovljevoj nejednakosti[16] imamo da je:

$$P\left(\underline{S}_n > na', \mu(\upsilon_1)+\cdots+\mu(\upsilon_n) \leq na\right) \leq e^{-hna'}E\left(e^{h\underline{S}_n}\mathrm{I}(\mu(\upsilon_1)+\cdots+\mu(\upsilon_n) \leq na)\right) (6.4.7)$$

I prema (6.4.1) imamo:

$$E\left(e^{h\underline{S}_n}\middle|\ (\mu(\upsilon_1)+\cdots+\mu(\upsilon_n) \leq na)\right)$$
$$= \int_{(\upsilon_1,\ldots,\upsilon_n)\in A_n(a)} E(e^{h\underline{\xi}_{\upsilon_1}})\cdots E(e^{h\underline{\xi}_{\upsilon_n}})dH_n(\upsilon_1,\ldots,\upsilon_n) \qquad (6.4.8)$$

Izborom $\delta, \varepsilon\ i\ \varepsilon'$ integral iz (6.4.8) je ograničen odozgo sa

$$\exp\left(hn\varepsilon + h(1+\varepsilon')\sum_{i\leq n}\mu(\upsilon_i)\right) \leq \exp\left(hn(\varepsilon + (1+\varepsilon')a)\right)$$

Sa $A_n(a)$. Prema (6.4.7)

$$P\left(\underline{S}_n > na', \mu(\eta_1)+\cdots+\mu(\eta_n) \leq na\right) \leq \exp\left(hn(\varepsilon+(1+\varepsilon')a - a')\right) \quad (6.4.9)$$

Za male $\varepsilon\ i\ \varepsilon'$, eksponent u (6.4.9) je negativan, tako da zbog $hn = n^{\delta/2}$, zaključujemo da

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(\log n)^{-1}\log\left(P\left(\underline{S}_n > na'\right) \leq -p(a)\right),$$

[16] Videti poglavlje 1.1

Što dokazuje (6.4.6) zato što je

$$P\left(S_n > na', M_n \leq n^{1-\delta}\right) \leq P\left(\underline{S}_n > na'\right) \blacksquare$$

U nastavku ćemo koristiti sledeću jednakost. Neka su $f_1, f_2, \dots, f_m$ realne, nenegativne funkcije definisane na intervalu $(0, \infty)$, i neka je

$$a_j = \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{1}{\ln x} \ln f_j \, , za \; j = 1, \dots, m$$

Tada je:

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{1}{\ln x} \ln(f_1(x) + \cdots + f_m(x)) = \max(a_1, \dots, a_m) \tag{6.4.10}$$

<u>Teorema 6.4.1</u>:

Pretpostavimo da

$$\sup_{v\in\mathbb{R}} E\left(|\xi_v|^t \mathrm{I}(\xi_v \leq 0)\right) < \infty \tag{6.4.11}$$

Za svako $t > 0$, i neka je $a > 0$. Tada je $\bar{R}_S(y) \geq min(p(a), \bar{R}_M)$ za svako $y > a$ i

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (\log n)^{-1} \log P(\, T \leq xu) \leq -\min(p(a), \bar{R}_M) \tag{6.4.12}$$

Za svako $x < 1/a$.

Dokaz:

Za $a > 0$ i $a' > a$, imamo sledeće:

$$P(S_n > na') \leq P\left(S_n > na', M_n \leq n^{1-\delta}\right) + P\left(M_n > n^{1-\delta}\right).$$

Dalje sledi iz (6.4.10) i Leme 6.4.2

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (\log n)^{-1} \log P(S_n > na') \leq -\min(p(a), \overline{R}_M).$$

Kako je $\overline{R}_S \geq \min\left(p(a), \overline{R}_M\right)$ za svako $y > a'$ odatle i za svako $y > a$. Uslov (6.3.6) je zadovoljen sa (6.4.10), u smislu, po teoremi 6.3.2 jednakost (6.4.12) važi za svako $x < 1/a$ ■

Sada razmotrimo verovatnoće razaranja kada je beskonačan vremenski horizont. Očigledno (6.4.10) implicira (6.3.6). Prema tome, ispod (6.4.10) imamo (6.3.4) i odatle dobijamo donju granicu:

$$\underline{\lim}_{u\to\infty} (\log u)^{-1} \log P(T < \infty) \geq -\underline{R}_M. \tag{6.4.13}$$

<u>Teorema 6.4.2</u>: Pretpostavimo da je (6.4.11) zadovoljena za svako $t > 0$ i da je

$$\lim_{a\to 0-} p(a) \geq \overline{R}_M + 1. \tag{6.4.14}$$

Tada

$$\overline{\lim_{u\to\infty}}(\log u)^{-1} \log P(T < \infty) \leq -\overline{R}_M. \tag{6.4.15}$$

Dokaz:

Kao i u dokazu za (6.3.7), jedini slučaj gde detaljno razmatramo je onaj kada je $\overline{R}_M \in (0, \infty)$. Odabirom parametra $a \in (0,1)$ i primenom Teoreme 6.4.1, vidimo da važi (6.4.12) kada je $x = 1$ i $\overline{R}_M \leq p(a)$. Prema (6.4.10) moramo pokazati da je

$$\overline{\lim_{u\to\infty}}(\log u)^{-1} \log P(T \in (u, \infty)) \leq -\overline{R}_M. \tag{6.4.16}$$

Fiksiramo malo $\varepsilon > 0$ i malo $\delta > 0$. Odabirom $a' = 0$ u Lemi 6.4.2 i korišćenjem (6.4.13) vidimo da je

$$\overline{\lim_{u\to\infty}}(\log u)^{-1} \log P\big(S_n > 0, M_n \leq n^{1-\delta}\big) \leq -\overline{R}_M - 1. \tag{6.4.17}$$

Neka je $y \geq 1$.

$$\begin{aligned} P\big(T \in [u^y, u^{y+\delta}]\big) & \\ &\leq P\left(S_n > 0 \; za \; neke \; n \in [u^y, u^{y+\delta}], M_{[u^{y+\delta}]} \leq u^{y(1-\delta)}\right) \\ &+ P\left(S_n > 0 \; za \; neke \; n \in [u^y, u^{y+\delta}], M_{[u^{y+\delta}]} > u^{y(1-\delta)}\right). \end{aligned} \tag{6.4.18}$$

Označimo sa $Q_1(u, y)$ prvu verovatnoću i sa $Q_2(u, y)$ drugu verovatnoću desne strane nejednakosti iz (6.4.17), i neka je *u* veliko. Tada je, na osnovu (6.4.16):

$$Q_1(u, y) \leq \sum_{n \in [u^y, u^{y+\delta}]} P\big(S_n > 0, M_n \leq n^{1-\delta}\big) \leq u^{y+\delta} u^{-y(\overline{R}_M + 1 - \varepsilon)} = u^{\delta - y(\overline{R}_M - \varepsilon)} \tag{6.4.19}$$

Ova procena je uniformna za $y \geq 1$. Za $Q_2(u, y)$ imamo:

$$Q_2(u, y) \leq P\left(M_{[u^{y+\delta}]} > u^{y(1-\delta)}\right) \leq P\left(M_{[u^{y+\delta}]} > [u^{y+\delta}]^{\frac{y(1-\delta)}{y+\delta}}\right) \leq u^{-y(\overline{R}_M - \varepsilon)} \tag{6.4.20}$$

$$\begin{aligned} P\big(T \in (u, \infty)\big) &\leq \sum_{j=0}^{\infty} P\big(T \in [u^{1+j\delta}, u^{1+(j+1)\delta}]\big) \\ &\leq u^{-\overline{R}_M + \delta + \varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} u^{-j\delta(\overline{R}_M - \varepsilon)} + u^{-\overline{R}_M + \varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} u^{-j\delta(\overline{R}_M - \varepsilon)}. \end{aligned}$$

Za male ε, oba gore navedena reda su konvergentna, što implicira da iz (6.4.16) dobijamo (6.4.10)■

Na kraju ovog odeljka bavićemo se pronalaženjem parametara $\overline{R_M}$ i $\underline{R_M}$. Za svako $n \in \mathbb{N}$ i $y > 0$, važi:

$$P(M_n > n^y) \leq \sum_{i=1}^{n} P(X_i > n^y) \tag{6.4.21}$$

Teorema 6.4.3 *Pretpostavimo da*

$$\sup_{v \in \mathbb{R}} E\left(\xi_v{}^t \mathrm{I}(\xi_v \geq 0)\right) < \infty \tag{6.4.22}$$

Za neko $t > 1$. *Tada za* y *koje je dovoljno blisko 1 važi:*

$$P(M_n > n^y) \sim \sum_{i=1}^{n} P(X_i > n^y) \tag{6.4.23}$$

Kada n *teži ka beskonačnosti.*

Dokaz:

Neka je $t > 1$ takvo da (6.4.22) važi. Za dato $x \geq 0$, imamo da je $1 - x \leq e^{-x}$.

Dakle, za svako $y > 0$ i $n \in \mathbb{N}$,

$$P(M_n > n^y) \geq \int_{v_1,\dots,v_n \in \mathbb{R}} \left(1 - \exp\left(-\sum_{i \leq n} P\left(\xi_{v_i} > n^y\right)\right)\right) dH_n(v_1, \dots, v_n).$$

Po Čebišovljevoj nejednakosti[17] je:

$$\sum_{i \leq n} P\left(\xi_{v_i} > n^y\right) \leq D(t) n^{1-ty},$$

Gde je $D(t)$ supremum u (6.4.22). Odatle je za *y* koje je blisko 1:

$$\begin{aligned} P(M_n > n^y) &\geq (1 + o(1)) \int_{v_1,\dots,v_n \in \mathbb{R}} \sum_{i \leq n} \sum_{i \leq n} P\left(\xi_{v_i} > n^y\right) dH_n(v_1, \dots, v_n) \\ &= (1 + o(1)) \sum_{i \leq n} P(X_i > n^y) \end{aligned}$$

Gde $o(1)$ teži ka 0 kada *n* teži beskonačnosti. Dakle (6.4.21) implicira (6.4.23)■

[17] Videti poglavlje 1.1

7 Zaključak

Literatura u vezi verovatnoće razaranja je obimna, jer je tema jako interesantna s obzirom da je usko povezana sa poslovanjem osiguravajućih kompanija. Kao što je u ovom radu navedeno, postoje dve mogućnosti da se posmataju rezultati poslovanja, kratkoročni i dugoročni rezultati. Kratkoročni pogled je uglavnom nametnut od strane regulatornih organa, kao što je u Republici Srbiji Narodna banka Srbije, i u Evropskoj Uniji EIOPA (European Insurance and Occupational Pensions Authority) koje nameću da se posmatra jednogodišnji period, dok je iz ugla aktuara i menadžmenta kompanije prihvatljivije posmatranje dugoročnih rezultata. U Evropskoj Uniji je svaka osiguravajuća kompanija u obavezi da odredi iznos kapitala koji je dovoljan da kompanija ostane solventna u periodu od jedne godine sa verovatnoćom 99,5% tj. da će bankrotirati jednom u 200 godina prosečno. Sve ove probleme određivanja kapitala potkrepljene su matematičkim proračunima kojima smo se bavili u ovom radu, i prilikom pisanja regulative uzeti su u obzir navedeni rezultati. Kako osiguranje predstavlja pre svega obećanje osiguranicima da će se njihove štete isplatii ukoliko do njih dođe, potrebno je vrlo podrobno doći do iznosa premija kako bi ovakvo obećanje moglo biti ispunjeno, tj. mora se obezbediti solventnost gledajući na duge staze.

8 Literatura

[1] T.Mikosch, Non-life insurance mathematics, Springer, Belin, 2003

[2] P.Embrechts, C.Kluppelberg, T.Mikosch, Modelling extremal events for insurance and finance, Springer, 2005

[3] P.Mladenović, Verovatnoća i statistika, Matematički fakultet, Beograd, 2008

[4] H.Nyrihinen, Power estimates for ruin probabilities, Nortern Ireland, 2005

[5] D.Adnađević, Z.Kadelburg, Matematička analiza 1,Matematički fakultet, Beograd, 2008

[6] P.Embrecht, N.Veraverbeke, Insurance: Mathematics and Economics, 1982

[7] B. Marović, Osiguranje. FINANCING Centar Novi Sad, 1997