ŽIVADIN PANTIĆ

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE I SISTEMI SVODLJIVI NA LAPLACE - OV OBLIK

Doktorska teza

U V O D

Homogena linearna diferencijalna jednačina n-tog reda

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + g_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + g_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \dots + g_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + g_n(x)y = 0$$

i sistem linearnih diferencijalnih jednačina

$$(2) \qquad \frac{dy_j}{dx} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x)\, y_k \qquad (j=1,2,3\dots,n)$$

bile su od uvek predmet istraživnja mnogih matematičara i to sa raznih tačaka gledišta, jer one imaju veliku primenu u teorijskoj fizici, mehanici i tehničkim problemima. Poznato je da se ove diferencijalne jednačine u opštem slučaju ne mogu integraliti pomoću kvadratura.

Međutim, homogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima, kao i diferencijalne jednačine koje se svode na diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima, integrale se pomoću kvadratura.

Poznati su potrebni i dovoljni uslovi da se jednačina (1) kao i sistem (2) sa promenljivim koeficijentima $g_i(x)$ i $a_{jk}(x)$ svode na jednačine sa konstantnim koeficijentima 1,2,3,4 .

Zatim je poznata metoda da se Laplace-ova diferencijalna jednačina

$$(3) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{a_1 x + b_1}{a_o x + b_o}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{a_2 x + b_2}{a_o x + b_o}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \dots + \frac{a_n x + b_n}{a_o x + b_o} y = 0$$

kao i sistem linearnih diferencijalnih jednačina

$$(4) \qquad \frac{dy_k}{dx} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a^o_{kr}\, x + b^o_{kr}}{a^o_{ko} x + b^o_{ko}}$$

mogu rešiti pomoću određenog integrala ili pomoću Laplace-ove transformacije.

Medjutim, postavlja se problem da li se mogu naći potrebni i dovoljni uslovi koje treba da zadovoljavaju koeficijenti $g_i(x)$ jednačine (1) kao i $a_{jk}(x)$ sistema (2) i da se one svode na Laplace-ove jednačine (3) i (4).

Koliko nam je poznato, taj problem nije rešen i mi smo stavili sebi u zadatak da u tezi nadjemo potrebne i dovoljne uslove izmedju koeficijenata $g_i(x)$ jednačine (1) i koeficijenata $a_{jk}(x)$ sistema (2) da se one svedu na Laplace-ovu jednačinu.

Materijal u tezi je rasporedjen tako što su obrađeni sledeći slučajevi:

1. Jednačina koja se svodi na jednačinu sa konstantnim koeficijentima smenom funkcije.

2. Jednačina koja se svodi na jednačinu sa konstantnim koeficijentima smenom nezavisno promenljive.

3. Jednačina koja se svodi na Laplace-ovu diferencijalnu jednačinu smenom funkcije.

4. Jednačina koja se svodi na Laplace-ovu diferencijalnu jednačinu smenom nezavisno promenljive.

5. Specijalne jednačine.

6. Sistem homogenih jednačina koje se svode na Laplace-ove jdenačine smenom funkcije.

7. Sistem homogenih jednačina koje se svode na Laplace-ovu jednačinu smenom nezavisno promenljive.

8. Semi- invarijante sistema linearnih jednačina u odnosu na nezavisno promenljivu.

1. Linearna diferencijalna jednačina koja se svodi na jednačinu sa konstantnim koeficijentima smenom funkcije.

Neka je data linearna diferencijalna jednačina sa promenljivim koeficijentima

$$(1.1)\quad \frac{d^n y}{dx^n} + g_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + g_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + g_n(x)\, y = o,$$

gde su $g_i(x)$ diferencijabilne funkcije na segmentu $x \in [a,b]$, a pod predpostavkom da su $g_i(x)$ realne funkcije.

Smenom

$$(1.2)\qquad y = z(x)\, u(x),$$

gde je $u(x)$ proizvoljna funkcija, a $z(x)$ nova nepoznata funkcija, jednačina (1) dobija oblik

$$(1.3)\quad \frac{d^n z}{dx^n} + \alpha_1(x)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \alpha_2(x)\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} + \dots + \alpha_{n-1}(x)\frac{dz}{dx} + \alpha_n(x)z = o,$$

gde su $\alpha_i(x)$ novi koeficijenti koji zavise od $g_i(x)$ i proizvoljne funkcije $u(x)$ i njihovih izvoda.

Dobija se koeficijent

$$(1.4)\qquad \alpha_1(x) = \frac{nu' + g_1(x)u}{u}.$$

Ako se postavi uslov $\alpha_1(x) = o$, tada je

$$(1.5) \qquad u(x) = e^{-\frac{1}{n}\int g_1(x)dx}$$

i jednačina (1.3) dobija kanoničan oblik

$$(1.6) \quad \frac{d^n z}{dx^n} + \alpha_2(x)\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} + \cdots + \alpha_{n-1}(x)\frac{dz}{dx} + \alpha_n(x)\, z = o.$$

Na taj način je rešenje jednačine (1) oblika

$$y = z(x)\, e^{-\frac{1}{n}\int g_1(x)dx}$$

Zamenom funkcije u(x) iz relacije (1.5) u ostalim koeficijentima $\alpha_i(x)$ jednačine (1.6), dobijaju se ostali koeficijenti $\alpha_i(x)$ $(i = 2, 3, \cdots n)$ u zavisnosti od koeficijenata $g_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots)$ i izvoda, tj.

$$\alpha_i(g_1, g_1', g_1'', \cdots g_2, g_3, \ldots g_n)\,(i = 2, \ldots n).$$

Poznato je da su koeficijenti $\alpha_i(x)$ $(i = 2, 3 \ldots n)$ semiinvarijante jednačine (1.1) za svaku transformaciju oblika (1.2), a jednačina (1.6) predstavlja kanoničan oblik jednačine (1.1) za transformaciju (1.5) [1, 2, 4]. T.Pejović je proučavao semiinvarijante jednačine (1.1) za transformaciju oblika (1.2) i iskoristio ih za svodjenje jednačine (1.1) na jednačinu sa konstantnim koeficijentima (Bulletin de la socicté mathematique de France 53.1925 (208-225)).

Mi ćemo ovaj problem tretirati na drugi način. Ako se dobijeni koeficijenti jednačine (1.3) izjednače sa konstantama, tj.

$$(1.7)\qquad \alpha_1(x) = \frac{nu' + g_1(x)u}{u} = A_1 = \text{const},$$

$$\alpha_2(x) = A_2 = \text{const}, \ \ldots\ \alpha_n(x) = A_n = \text{const},$$

tada je funkcija

$$(1.8)\qquad u = e^{\frac{1}{n}\int (A_1 - g_1(x))dx},$$

pa jednačina(1.3) postaje diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima, samo pod izvesnim uslovima, t.j. da koeficijenti g_i zadovoljavaju relacije

$$\alpha_i(g_1, g_1', g_1'', \ldots g_1^{(n-1)}, g_2, \ldots, g_n) = A_i$$

$$(1.9)\qquad \frac{d^n z}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} + \ldots + A_{n-1}\frac{dz}{dx} + A_n z = o,$$

gde su prema (1.7)

$$(1.10)\qquad \alpha_1(x) = A_1,\ \alpha_2(x) = A_2,\ \ldots\ \alpha_n(x) = A_n.$$

Teorema 1.A.

Relacije (1.10) daju potrebne i dovoljne uslove koje treba da zadovoljavaju koeficijenti $g_i(x)$ $(i=1,2,\ldots n)$ jednačine (1.1) , da se smenom (1.8) svede na jednačinu(1.9), gde su koeficijenti A_i $(i=1,2,\ldots n)$ konstante .

Lako je proveriti da su ovi uslovi isti koje je dobio T. Pejović u svojim radovima (Bulletin de socicieté de Mathematique de France, 53,1925 /208-225/).

Jednačina drugog reda

$$\frac{d^2y}{dx^2} + g_1(x)\frac{dy}{dx} + g_2(x)\, y = o, \tag{1.11}$$

smenom (1.2) postaje

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \alpha_1(x)\frac{dz}{dx} + \alpha_2(x)\, z = o,$$

gde su

$$\alpha_1(x) = \frac{2u'+g_1u}{u}, \quad \alpha_2(x) = \frac{u'' + u'g_1+g_2u}{u} . \tag{1.12}$$

Izjednačavanjem koeficijenata α_1 i α_2 sa konstantama dobija se jednačina

$$\frac{d^2z}{dx^2} + A_1\frac{dz}{dx} + A_2z = o,$$

gde je

$$u = e^{\frac{1}{2}\int\left[A_1-g_1(x)\right]\, dx}. \tag{1.13}$$

Uslovi (1.10) prema (1.12) i (1.13) u ovom slučaju glase

$$(1.14)\quad \alpha_1(x) = A_1,\ \alpha_2(x) = \frac{1}{4} A_1^2 + g_2 - \frac{1}{2} g_1' - \frac{1}{4} g_1^2 = A_2$$

gde su A_1 i A_2 konstante, tj. dobijaju se rezultati T. Pejovića [4].

2. Linearna diferencijalna jednačina koja se svodi na diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima smenom nezavisno promenljive.

Neka je data diferencijalna jednačina

$$(2.1) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + g_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + g_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + g_n(x)\, y = o,$$

gde su $g_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots n)$ definisane i diferencijabilne funkcije na segmentu $x \in [a,b]$.

Smenom

$$(2.2) \qquad \frac{d\xi}{dx} = v(x): \; \xi = \int v(x)dx = \Psi(x): \; x = \lambda(\xi)$$

jednačina (2.1) dobija oblika

$$(2.3) \quad \frac{d^n y}{d\xi^n} + \beta_1(x) \frac{d^{n-1} y}{d\xi^{n-1}} + \dots + \beta_{n-1}(x)\frac{dy}{d\xi} + \beta_n(x)\, y = o,$$

gde su $\beta_i(x)$ funkcije koeficijenata $g_i(x)$ i proizvoljne funkcije $v(x)$ i njihovih izvoda, gde umesto x treba zameniti njegovu vrednost izraženu kao funkciju od ξ pomoću relacije (2.2). Koeficijenti $\beta_i(x)$ su oblika

$$(2.4) \qquad \beta_1(x) = \frac{\frac{n(n-1)}{2} v'(x) + g_1(x) v}{v^2}, \dots$$

Ako se postavi uslov $\beta_1(x) = o$, tada je

$$(2.5)\quad \frac{d\xi}{dx} = \nu(x) = e^{-\frac{2}{n(n-1)}\int g_1(x)dx} : \xi = \int \nu(x)dx = \Psi(x);\ x = \lambda(\xi)$$

i jednačina (2.3) dobija kanoničan oblik

$$(2.6)\qquad \frac{d^n y}{d\xi^n} + \beta_2(\xi)\frac{d^{n-2} y}{d\xi^{n-2}} + \dots + \beta_n(\xi)\, y = 0.$$

Poznato je da su koeficijenti $\beta_i(\xi)$ ($i = 2,\dots n$) semiinvarijante za svaku transformaciju oblika (2.2), a jednačina (2.6) predstavlja kanoničan oblik jednačine (2.1) za transformaciju oblika (2.5).

T. Pejović je proučavao semi-invarijante jednačine (2.1) za transformaciju oblika (2.2) i iskoristio ih za svodjenje jednačine (2.1) na jednačinu sa konstantnim koeficijentima [1]. Mi ćemo ovaj problem tretirati na drugi način.

Ako se koeficijenti $\beta_i(x)$ jednačine (2.3) datih relacijama (2.4) izjednače sa konstantama, tj.

$$(2.7)\qquad \beta_1(x) = \frac{\frac{n(n-1)}{2}v' + g_1(x)v}{v^2} = A_1 = \text{cost},\ \beta_2(x) = A_2,\dots$$

$$\dots,\beta_n(x) = A_n,\ \text{tada je}$$

$$(2.8)\qquad \frac{1}{v} = e^{\frac{2}{n(n-1)}\int g_1(x)dx}\left[C - \frac{2A_1}{n(n-1)}\int e^{-\frac{2}{n(n-1)}\int g_1(x)dx}dx\right],$$

pa jednačina (2.3) postaje jednačina sa konstantnim koeficijentima samo pod izvesnim ulovima

$$(2.9) \qquad \frac{d^n y}{d\xi^n} + A_1 \frac{d^{n-1}y}{d\xi^{n-1}} + \ldots + A_{n-1}\frac{dy}{d\xi} + A_n\, y = o.$$

Zamenom funkcije $v(x)$ date jednačinom (2.8) u relacijama (2.7), dobiće se uslovi između koeficijenata $g_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$, jednačina (2.1) da se ona svede smenom (2.8) na jednačinu (2.9) sa konstantnim koeficijentima.

Teorema 2.A.

Relacije (2.7) daju potrebne i dovoljne uslove koje treba da zadovoljavaju koeficijenti $g_i(x)$ $(i=1,2,\ldots n)$ jednačine (2.1) da se ona smenom (2.8) svede na jednačinu (2.9) sa kostamtnim koeficijentima.

Lako je proveriti da su ovi uslovi isti koje je dobio T. Pejović u svojim radovima [1, 2, 3].

Ako se postave uslovi

$$(a) \quad \beta_1(x) = \frac{\frac{n(n-1)}{2}v' + g_1(x)v}{v^2} = \frac{A_1}{\xi}, \ \beta_2(x) = \frac{A_2}{\xi^2}, \ldots \beta_n = \frac{A_n}{\xi^n},$$

gde su A_i konstante, tada jednačina (2.3) postaje Euler-ova jednačina,

$$(b) \qquad \frac{d^n y}{d\xi^n} + \frac{A_1}{\xi}\frac{d^{n-1}y}{d\xi^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{\xi^{n-1}}\frac{dy}{d\xi} + \frac{A_n}{\xi^n}\, y = o.$$

Nepoznata funkcija $v(x)$ može se, prema (2.2) odrediti iz prve jednačine (a), tj. iz jednačine

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2}v' + g_1(x)v}{v^2} = \frac{A_1}{\xi} = \frac{A_1}{\int v(x)dx} .$$

Kako je, prema (2.2)

(c) $$\xi = \int v(x)dx = \Psi(x), \quad v(x) = \psi'(x) : v'(x) = \psi''(x),$$

to poslednja jednačina postaje

$$\frac{n(n-1)}{2} \psi\psi'' + g_1(x)\psi\psi' = A_1\psi'^2$$

koja se smenom

(d) $$\psi = e^{\int z dx}$$

svodi na Bernulijevu jednačinu po

(e) $$\frac{n(n-1)}{2} z' + g_1(x)z + \left[\frac{n(n-1)}{2} - A_1\right] z^2 = 0.$$

Jednačine (c),(d) i (e) daju funkciju $v(x)$ koju treba zameniti u jednačinu (a) da bi se dobili uslovi koje treba da zadovoljavaju koeficijenti $g_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ da se jednačina (2.1) svede na Euler-ovu jednačinu (b) .

Teorema 1.B

Relacije (a) pod uslovima (c), (d) i (e) daju potrebne i dovoljne uslove, da se jednačina (2.1) svede na Euler-ovu jednačinu (b).

Izložićemo Eruginovu metodu [2,5] 1'

Jednačina (2.1) smenom

$$\xi = \varphi(x) \tag{2.2}$$

gde su

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \varphi'(x) \frac{dy}{d\xi}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{d\xi^2} \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{d\xi} \frac{d^2\xi}{dx^2} = \varphi'^2(x) \frac{d^2y}{d\xi^2} + \varphi''(x) \frac{dy}{d\xi}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \left[\varphi'(x)\right]^n \frac{d^ny}{d\xi^n} + \ldots + \varphi^{(n)}(x) \frac{dy}{d\xi},$$

postaje jednačina (2.3), gde je

$$\beta_n(x) = \frac{g_n(x)}{\left[\varphi'(x)\right]^n} .$$

Da bi jednačina (2.3) bila jednačina sa konstantnim koeficijentima, mora biti

$$\beta_1(x) = A_1, \ldots \beta_n(x) = \frac{g_n(x)}{\left[\varphi'(x)\right]^n} = A_n \tag{2.10}$$

N.P. Erugin. Privodimi sistemi "Trudi fizičko-matematičeskogo ituta im.V.A.Steklova" T.XIII 1946.str.92

gde su A_i konstante. Tada će jednačina (2.3) postati jednačina (2.9). Iz poslednje od jednačina (2.10) sledi:

$$(2.11) \qquad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{A_n}} \int \sqrt[n]{g_n(x)}dx.$$

Zamenom funkcije $\psi(x)$ date relacijom (2.11) u relacijama (2.lo) dobiće se uslovi koje treba da zadovoljavaju koeficijenti $g_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ jednačina (2.1) da se ona svede na jednačinu (2,9) sa konstantnim koeficijentima .

Teorema 2.C.

Relacije (2.10) daju potrebne i dovoljne uslove izmedju koeficijenata $g_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ jednačine (2.1) da se smenom (2.11) ona svede na jednačinu (2.9) sa konstantnim koeficijentima.

Lako je proveriti da su ovi uslovi isti koje je dobio T. Pejović u svojim radovima [1,2,3,].

Na primer, jednačina

$$(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + n^2 y = o$$

pripada klasi jednačina koje se mogu svesti na jednačinu sa konstantnim koeficijentima, gde je

$$\xi = \frac{n}{\sqrt{A_2}} \arcsin x \ (A_2 = \text{const}).$$

Treba napomenuti da istovremena smena funkcije y i nezavisno promenljive x u jednačini (2.1) ne dovodi do efikasnih rezultata, jer se nepoznate funkcije $u(x)$ i $v(x)$ u smenama (1.2) i (2.2) ne mogu efektivno odrediti.

3. Diferencijalna jednačina koja se svodi na Laplace-ovu diferencijalnu jednačinu smenom funkcije.

Neka je data diferencijalna jednačina

$$(3.1)\quad \frac{d^n y}{dx^n} + g_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + g_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + g_n(x)\,y = o,$$

gde su $g_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots n)$ diferencijabilne funkcije na segmentu $x \in [a,b]$.

Smenom

$$(3.2)\quad y = z(x)\,u(x),$$

gde je $u(x)$ proizvoljna funkcija, a $z(x)$ nova nepoznata funkcija, jednačina(3.1) dobija oblik

$$(3.3)\quad \frac{d^n z}{dx^n} + \alpha_1(x)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \dots + \alpha_{n-1}(x)\frac{dz}{dx} + \alpha_n(x)\,z = o,$$

gde su $\alpha_i(x)$ novi koeficijenti kao funkcija od $g_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots n)$ funkcije $u(x)$ i njihovih izvoda.

Ovi su koeficijenti oblika

$$(3.4)\quad \alpha_1(x) = \frac{nu' + g_1(x)u}{u}, \dots\dots, \dots$$

Ako se posmatra Laplace-ova diferencijalna jednačina

$$(3.5)\qquad \frac{d^nz}{dx^n}+\frac{a_1x+b_1}{a_ox+b_o}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+\dots+\frac{a_nx+b_n}{a_ox+b_o}z=o$$

i uporede koeficijenti jednačina (3.3) i (3.5), dobijaju se potrebni i dovoljni uslovi

$$(3.6)\quad \frac{a_1x+b_1}{a_ox+b_o}=\frac{nu'+g_1u}{u},\ \frac{a_2x+b_2}{a_ox+b_o}=\frac{\binom{n}{n-2}u''+\binom{n-1}{n-2}g_1u'+g_2u}{u},\dots$$

$$u^{(n)}+g_1u^{(n-1)}+g_2u^{(n-2)}+\dots+g_{n-1}u'+g_nu=\frac{a_nx+b_n}{a_ox+b_o}u$$

da se jednačina (3.1) svede na jednačinu (3.5). Funkcija $u(x)$ se odredjuje iz prve od jednačina (3.6), tj. iz jednačine

$$(3.7)\quad \frac{nu'}{u}=\frac{a_1x+b_1}{a_ox+b_o}-g_1(x),\ \text{ili}\ u=e^{\frac{1}{n}\int\left(\frac{a_1x+b_1}{a_ox+b_o}-g_1\right)dx}.$$

Sa tako odredjenom funkcijom $u(x)$ i smenom

$$(3.7')\qquad y=u(x)z=e^{\frac{1}{n}\int\left(\frac{a_1x+b_1}{a_ox+b_o}-g_1\right)dx}z$$

jednačina (3.1) postaje jednačina (3.5).

Zamenom funkcije $u(x)$ iz relacije (3.7) u jednačine (3.6) dobiće se uslovi koje treba da zadovoljavaju koeficijenti $g_i(x)$ $(i=1,2,..,n)$ jednačine (3.1) da se ona svede na Laplace-ovu jednačinu (3.5)

Teorema 3.A.

Relacije (3.6) daju potrebne i dovoljne uslove koje treba da zadovoljavaju koeficijenti $g_i(x)$

($i=1,2,\ldots,n$) jednačine (3.1) da se ona smenom svede na Laplace-ovu jednačinu (3.5).

Neka je data diferencijalna jednačina drugog reda

$$\frac{d^2y}{dx^2} + g_1(x)\frac{dy}{dx} + g_2(x)\,y = o, \tag{3.8}$$

gde su $g_1(x)$ i $g_2(x)$ diferencijabilne funkcije na segmentu $x \in [a,b]$.

Smenom

$$y = z(x)\,u(x) \tag{3.9}$$

gde je $u(x)$ proizvoljna funkcija, a $z(x)$ nova funkcija, jednačina (3.8) svodi se na jednačinu:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \alpha_1(x)\frac{dz}{dx} + \alpha_2(x)\,z = o, \tag{3.10}$$

gde su $\alpha_1(x)$ i $\alpha_2(x)$ funkcije koeficijenata g_1, g_1' i g_2.

Uporedjenjem koeficijenata jednačine (3.10) sa koeficijentima Laplace-ove jednačine

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{a_1x+b_1}{a_ox+b_o}\frac{dz}{dx} + \frac{a_2x+b_2}{a_ox+b_o}\,z = o \tag{3.11}$$

dobijaju se potrebni i dovoljni uslovi

$$(3.12) \qquad \alpha_1(x) = \frac{2u'+g_1(x)u}{u} = \frac{a_1x+b_1}{a_ox+b_o}$$

$$\alpha_2(x) = \frac{u'' + g_1u'+g_2u}{u} = \frac{a_2x+b_2}{a_ox+b_o}$$

odakle je iz prve od relacija (3.12)

$$(3.13) \qquad u = e^{\frac{1}{2}\int\left(\frac{a_1x+b_1}{a_ox+b_o} - g_1(x)\right)dx}.$$

Posle zamene u drugu jednačinu uslova (3.12), dobija se veza

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_ox+b_o} - g_1\right)' + \frac{1}{4}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_ox+b_o} - g_1\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_ox+b_o} - g_1\right) g_1 + g_2 = \frac{a_2x+b_2}{a_ox+b_o}$$

Primer 1.

Jednačina

$$(3.14) \quad y''+ \frac{2a_1+(2a_1+2)x+3x^2}{x(x+1)}y' + \frac{a_1^2-a_1+(a_1^2+a_1)x+(3a_1+1)x^2+2x^3}{x^2 + x^3}y=o,$$

smenom

$$y = z(x)\ u(x)$$

svodi se na Laplace-ovu jednačinu

$$z'' + \frac{2+3x}{1+x} z' + \frac{1+2x}{1+x} z = 0, \tag{3.15}$$

gde je prema (3.13)

$$u = e^{\frac{1}{2}\int \left(\frac{2+3x}{1+x} - \frac{2a_1+(2a_1+2)x+3x^2}{x(x+1)}\right)dx} = e^{-a_1\int \frac{dx}{x}} =$$

$$= e^{-a_1 \ln x} = x^{-a_1}.$$

Posmatrajmo Laplace-ovu jednačinu

$$(3.16)\quad y^{(n)}+\frac{a_1x+b_1}{a_ox+b_o}y^{(n-1)}+\frac{a_2x+b_2}{a_ox+b_o}y^{(n-2)}+\ldots+\frac{a_nx+b_n}{a_ox+b_o}y=o,$$

koja se smenom

$$y = ze^{-\frac{1}{n}\int\frac{a_1x+b_1}{a_ox+b_o}dx}$$

svodi na kanoničan oblik

$$(3.17)\qquad z^{(n)} + J_2 z^{(n-2)} +\ldots+ J_n\, z = o,$$

gde su J_k $(k = 2,\ldots n)$ funkcije od x.

Isto tako jednačina

$$(3.18)\qquad y^{(n)} + g_1(x)\, y^{(n-1)} +\ldots+ g_n y = o,$$

smenom

$$(3.18')\qquad y = ze^{-\frac{1}{n}\int g_1(x)dx},$$

svodi na kanoničan oblik

$$(3.19)\qquad z^{(n)}+ J_2^o\, z^{(n-2)} +\ldots+ J_n^o\, z = o,$$

gde su $J_k^o(x)$ $(k = 2,\ldots n)$ funkcije koeficijenata $g_i(x)$ i njihovih izvoda.

Da bi se jednačina (3.18) svela na Laplace-ovu jednačinu (3.16), potrebno je i dovoljno da je prema (3.17) i (3.19), dobija se relacija

$$(3.20) \qquad J_k(x) = J_k^o\left[g_1(x),\ g_2(x), \ldots g_n(x)\right] (k=2,3,\ldots n).$$

Teorema 3.B.

<u>Relacije (3.20) daju potrebne i dovoljne uslove koje treba da zadovoljavaju koeficijenti $g_i(x)$ $(i=1,2,\ldots n)$ jednačine (3.18) da se ona svede na Laplace- ovu jednačinu (3.16)</u>

Na primer, Laplace-ova jednačina

$$y'' + \frac{a_1x+b_1}{a_ox+b_o}y' + \frac{a_2x+b_2}{a_ox+b_o}y = o,$$

smenom

$$y = ze^{-\frac{1}{2}\int\frac{a_1x+b_1}{a_ox+b_o}dx},$$

svodi se na kanoničan oblik

$$z'' + J_2 z = o,$$

gde je

$$J_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_ox+b_o}\right)' - \frac{1}{4}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_ox+b_o}\right)^2 + \frac{a_2x+b_2}{a_ox+b_o}.$$

Jednačina

$$y'' + g_1(x)y' + g_2(x)\, y = o,$$

smenom

$$y = ze^{-\frac{1}{2}\int g_1(x)dx},$$

svodi se na kanoničan oblik

$$z'' + J_2^o\, z = o,$$

gde je

$$J_2^o = -\frac{1}{2}\, g_1' - \frac{1}{4}\, g_1^2 + g_2\, .$$

Uslovi (3.20) u ovom slučaju glase

$$-\frac{1}{2}\, g_1' - \frac{1}{4}\, g_1^2 + g_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_ox+b_o}\right)' - \frac{1}{4}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_ox+b_o}\right)^2 + \frac{a_2x+b_2}{a_ox+b_o},$$

odakle se mogu izračunati koeficijenti. Tako će jednačine koje se svode na Laplace-ovu jednačinu glasiti

$$y'' + g_1(x)y' + \left[\frac{a_2x+b_2}{a_ox+b_o} - \frac{1}{4}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_ox+b_o}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_ox+b_o}\right)' + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\, g_1'(x) + \frac{1}{4}\, g_1^2(x)\right] y = o,$$

gde je $g_1(x)$ proizvoljna funkcija.

4. Jednačina koja se svodi na Laplace-ovu diferencijalnu jednačinu smenom nezavisno promenljive.

Neka je data diferencijalna jednačina

$$(4.1)\quad \frac{d^n y}{dx^n}+g_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+g_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\dots+g_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+g_n(x)y=o,$$

gde su $g_i(x)$ $(i = 1, 2,\dots n)$ diferencijabilne funkcije, koja se smenom nezavisno promenljive

$$(4.2)\qquad t = v(x),\ x = \lambda(t)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}v';\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{d^2t}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}(v')^2+\frac{dy}{dt}v''$$

. . . .

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{d^n y}{dt^n}\left(\frac{dt}{dx}\right)^n+\dots+\frac{dy}{dt}\ \frac{d^n t}{dx^n}$$

svodi na diferencijalnu jednačinu

$$(4.3)\qquad \frac{d^n y}{dt^n}+\alpha_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\dots+\alpha_{n-1}(x)\frac{dy}{dt}+\alpha_n(x)y=o,$$

gde u koeficijentima $\alpha_i(x)$ treba zameniti x kao funkciju od t pomoću relacije (4.2).

Lako je videti da je koeficijent $\alpha_n(x)$ oblika

$$\alpha_n(x)=\frac{g_n(x)}{[v'(x)]^n}.$$

Ako se koeficijenti jednačine (4.3) izjednače sa koeficijentima Laplace-ove jednačine

$$(4.4) \qquad \frac{d^n y}{dt^n} + \frac{a_1 t+b_1}{a_o t+b_o} \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + \frac{a_n t+b_n}{a_o t+b_o} y = o,$$

dobiće se, prema (4.2) relacija

$$(4.5) \quad \alpha_1(x) = \frac{a_1 v(x)+b_1}{a_o v(x)+b_o}, \ldots, \alpha_n(x) = \frac{g_n(x)}{[v'(x)]^n} = \frac{a_n v(x)+b_n}{a_o v(x)+b_o}.$$

Poslednja od ovih jednakosti daje funkciju $v(x)$, tj. dobija se jednačina

$$(4.6) \qquad \sqrt[n]{\frac{a_n v+b_n}{a_o v+b_o}} dv = \sqrt[n]{g_n(x)}\, dx,$$

koja se može integraliti. Kako su koeficijenti $\alpha_i(x)$ jednačine (4.3) funkcije koeficijenata $g_i(x)$ $(i=1,2,..n)$, to relacije (4.5) prema (4.6) daju uslove koje treba da zadovoljavaju koeficijenti $g_i(x)$ jednačine (4.1) da se ona svede na Laplace-ovu jednačinu (4.4), gde je $v(x)$ dato relacijom (4.6) .

Teorema 4.A.

Relacije (4.5) prema (4.6) daju potrebne i dovoljne uslove koje treba da zadovoljavaju koeficijenti $g_i(x)$ $(i= 1,2,..n)$ jednačine (4.1) da se ona smenom (4.2) svede na Laplace-ovu jednačinu (4.5) .

Na primer, jednačina

$$(4.7) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + g_1(x)\frac{dy}{dx} + g_2(x)\, y = o,$$

gde su $g_1(x)$ i $g_2(x)$ diferencijabilne funkcije na segmentu $x \in [a, b]$, smenom

$$(4.8) \qquad t = v(x)$$

postoje

$$(4.9) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{v'' + g_1 v'}{[v']^2}\frac{dy}{dt} + \frac{g_2(x)}{[v']^2}\, y = o.$$

Izjednačavanjem koeficijenata jednačine (4.9) sa koeficijentima Laplace-ove jednačine

$$(4.10) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{a_1 t + b_1}{a_o t + b_o}\frac{dy}{dt} + \frac{a_2 t + b_2}{a_o t + b_o}\, y = o,$$

dobijaju se, prema (4.8), relacije

$$(4.11) \qquad \begin{aligned} \frac{v'' + g_1 v'}{[v']^2} &= \frac{a_1 t + b_1}{a_o t + b_o} = \frac{a_1 v + b_1}{a_o v + b_o} \\ \frac{g_2(x)}{[v']^2} &= \frac{a_2 t + b_2}{a_o t + b_o} = \frac{a_2 v + b_2}{a_o v + b_o} \end{aligned}$$

Iz druge od gornjih relacija sledi

$$(4.12) \qquad \sqrt{\frac{a_2 v + b_2}{a_o v + b_o}}\, dv = \sqrt{g_2(x)}\, dx$$

Relacije (4.11), prema (4.12), daju potrebne i dovoljne uslove izmedju koeficijenata $g_1(x)$ i $g_2(x)$ jednačine (4.7) da se ona, smenom (4.8), svede na Laplace-ovu jednačinu (4.10).

Treba napomenuti da istovremeno smena funkcije y i nezavisno promenljive x u jednačini (4.1) ne dovodi do efektivnih rezultata, jer određivanje funkcije u(x) i v(x) u smenama (3.2) i (2.2) ne mogu se efektivne odrediti.

5. Specijalne jednačine 1'

Neka je data diferencijalna jednačina

$$1)\ \sum_{r=n}^{n+1} x^r\, y^{(n)} + \left[n\, a_{n-1}^{(n-1)}\, x^{n-1} + \sum_{r=n}^{n+1} a_r^{(n-1)} x^r\right] y^{(n-1)} +$$

$$+ \sum_{r=n-2}^{n+1} a_r^{(n-2)} x^r\, y^{(n-2)} + \dots + \sum_{r=2}^{n+1} a_r^{(2)} x^r y'' + \sum_{r=1}^{n+1} a_r^{(1)} x^r y' +$$

$$+ \sum_{r=o}^{n+1} a_r^{(o)} x^r\, y = 0,$$

u kojoj broj nepoznatih koeficijenata navedenih polinoma iznosi

$$\frac{n(n+5)}{2},$$

gde je n - prirodan broj i red diferencijalne jednačine.

Ako se diferencijalma jednačina (5.1) podeli sa $x^{n+1} + x^n$, dobija se jednačina oblika

$$(5.2)\qquad y^{(n)} + f_{n-1}(x) y^{(n-1)} + f_{n-2}(x) y^{(n-2)} + \dots + f_2(x) y'' +$$

$$+ f_1(x) y' + f_o(x) y = o,$$

gde koeficijenti $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots n-1)$ imaju nule u imenitelju i to $x = o$ i $x = -1$.

Funkcija $f_{n-1}(x)$ ima u imenitelju nule prvog

1' D. Mitrinović. Zbornik matematičkih problema II, reda $x=o$ i $x=-1$. Zatim da funkcija $f_{n-2}(x)$ ima u imenitelju nulu drugog reda $x=o$ i nulu prvog reda $x=-1$. Na osnovu navedenih funkcija proizilazi da funkcija $f_o(x)$ ima nulu n-tog reda $x=o$ i nulu prvog reda $x=-1$.

Smenom

$$(5.3)\quad y= x^{-k} z(x),$$

gde je k za sada neodređen broj, jednačina (5.1) svodi se na Laplace-ovu diferencijalnu jednačinu

$$(5.4)\quad (1+x)\, z^{(n)} + \left[a_n^{(n-1)} - \binom{n}{1}k + a_{n+1}^{(n-1)}x\right] z^{(n-1)} +$$

$$\left[a_n^{(n-2)} - a_{n+1}^{(n-1)}\binom{n-1}{1}k + a_{n+1}^{(n-2)}x\right] z^{(n-2)} + \dots$$

$$+\left[a_n^{(1)} - \binom{2}{1}k\, a_{n+1}^{(2)} + a_{n+1}^{(1)}x\right] z' + \left[a_n^{(o)} - k a_{n+1}^{(1)} + a_{n+1}^{(o)}x\right] z=0$$

pod sledećim potrebnim i dovoljnim uslovima

$$n a_{n-1}^{(n-1)} - \binom{n}{1}k = o,\quad \binom{n}{2}k(k+1) - a_n^{(n-1)}\binom{n-1}{1}k + a_{n-1}^{(n-2)} = 0$$

$$(5.5)\quad \binom{n}{2}k(k+1) - n\, a_{n-1}^{(n-2)}\binom{n-1}{1}k + a_{n-2}^{(n-2)} = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_2^{(o)} - a_3^{(1)}k + a_4^{(2)}k(k+1) + a_{n+1}^{(n-1)}\binom{n-1}{n-1}(-1)^{n-1}(k+n-2)\dots$$

$$\dots\dots(k+1)k = o,$$

$$a_1^{(o)} - a_2^{(1)}k + a_3^{(2)}k(k+1) + a_n^{(n-1)}(-1)^{n-1}(k+n-2)\dots(k+1)k +$$

$$+\binom{n}{n}(-1)^n(k+n-1)\dots\dots(k+1)k = 0,$$

$$a_o^{(o)} - a_1^{(1)}k + a_2^{(2)}(k+1)k + \dots\dots + a_{n-2}^{(n-2)}\binom{n-2}{n-2}(-1)^{n-2}(k+n-3)\dots$$

$$\dots\dots(k+1)k + n\, a_{n-1}^{(n-1)}\binom{n-1}{n-1}(-1)^{n-1}(k+n-2)\dots(k+1)k +$$

$$+ \binom{n}{n}(-1)^n(k+n-1)\,\ldots\ldots\,(k+1)k = 0$$

Navedeni uslovi (5.5) su dobijeni anuliranjem koeficijenata uz izraze

$$x^{-k+n-1}z^{(n-1)},\ x^{-k+n-1}z^{(n-2)},\ldots,x^{-k+1}z,\ldots,x^{-k}z$$

i predstavljaju sistem linearnih jednačina u kojima su nepoznate koeficijenti navedenih polinoma u diferencijalnoj jednačini (5.1). Broj ovih jednačina je

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

U sistemu (5.5) broj nepoznatih koeficijenata je

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n-1),$$

gde je sadržano i k kao nepoznata, koja se dobija iz prve relacije sistema jednačina (5.5) i iznosi

$$k = a_{n-1}^{(n-1)}.$$

Ovim sistemom jednačina nisu obuhvaćeni koeficijenti

$$a_{n+1}^{(n-1)},\ a_{n+1}^{(n-2)},\ a_{n+1}^{(n-3)},\ a_{n+1}^{(1)},\ a_{n+1}^{(o)}.$$

U sistemu jednačina (5.5) koeficijenti

$$a_n^{(n-1)}\ ,\ a_n^{(n-2)}\ ,\ a_n^{(n-3)}\ ,\ \ldots\ldots a_n^{(1)},\ a_n^{(o)}$$

su proizvoljni. Navedeni koeficijenti sadržani su u transformisanoj jednačini (5.4).

Prema tome, imamo $2n+1$ proizvoljnih koeficijenata koji se nalaze u jednačini (5.1) i jednačini (5.4).

Diferencijalna jednačina (5.1) transformisana je u jednačinu (5.4), kako bi se primenila Laplace-ova transformacija, koja glasi

$$(5.6)\quad L\left[xz^{(n)}\right] = -s^nZ'(s)-ns^{n-1}Z(s)+(n-1)s^{n-1}z(o) + \ldots + sz^{(n-3)}(o) + z^{(n-2)}(o),$$

gde su $z(o),\ z'(o),\ldots z^{(n-2)}(o)$ početne vrednosti pod kojima može da se integrali diferencijalna jednačina.

Laplace-ova transformacija (5.6) svodi diferencijalnu jednačinu (5.4) na linearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda po promenljivoj $Z(s)$

$$(5.7)\qquad Z'(s)\,H(s) + Z(s)\ G(s) = Q(s).$$

Ovde je

$$H(s) = s^n+a_{n+1}^{(n-1)}s^{n-1} +a_{n+1}^{(n-2)}s^{n-2} +\ldots+ a_{n+1}^{(1)}\ s + a_{n+1}^{(o)}$$

$$G(s)= -s^n+\left[n+\binom{n}{1}k- a_n^{(n-1)}\right]s^{n-1} + \ldots+ a_n^{(1)}(k+1) + a_n^{(o)}\ ,$$

$$Q(s) = -z(o)\left[s^{n-1} + \left(-(n-1)+a_n^{(n-1)} - \binom{n}{1}k\right)s^{n-2} + \ldots + a_n^{(1)}\right]$$

$$-z'(o)\left[s^{n-2} + \left(-(n-2)+a_n^{(n-1)} - \binom{n}{1}k\right)s^{n-3} + \ldots + a_n^{(2)}\right] -$$

$$-z^{(n-2)}(o)\left[s-1+a_n^{(n-1)} - \binom{n}{1}k\right] - z^{(n-1)}(o).$$

Opšti integral jednačine (5.7) je

$$(5.8) \qquad Z(s) = e^{-\int \frac{G(s)}{H(s)} ds}\left[A + \int \frac{Q(s)}{H(s)}\, e^{\int \frac{G(s)}{H(s)} ds} ds\right].$$

Primenom inverzne Laplace-ove transformacije

$$L^{-1}\left[Z(s)\right] = \frac{1}{2\pi j}\int_C Z(s)\, e^{sx} ds = z(x),$$

dobija se funkcija $z(x)$.

Rešenje diferencijalne jednačine (5.1) dobija oblik

$$y = x^{-k}\, z(x),$$

gde je, prema uslovu (5.5), $k = a_{n-1}^{(n-1)}$, a $a_{n-1}^{(n-1)}$ proizvoljno.

Rešenja diferencijalne jednačine (5.1) je funkcija, koja zavisi od koeficijenata $a_{n-1}^{(n-1)}$ i označava se sa

$$y = J_s(x) \quad , \text{ gde je } \quad s = a_{n-1}^{(n-1)}$$

Ostale koeficijente biramo tako da se jednačina (5.1), odnosno (5.4), uprosti u pogledu integracije. Tako će se dobiti jedna klasa funkcija $] \, a_{n-1}^{(n-1)}$ kao rešenje jednačine (5.1), odnosno (5.4), u zavisnosti od parametara $a_{n-1}^{(n-1)}$, čijom se varijacijom dobijaju razne funkcije.

Neka je data diferencijalna jednačina

$$(5.20)\quad \left[a^{(n)}_{-np+n+1}\, x^{-np+n+1} + a^{(n)}_{-np+n}\, x^{-np+n}\right] y^{(n)} +$$

$$+ \left[a^{(n-1)}_{-np+n+1}\, x^{-np+n+1} + a^{(n-1)}_{-np+n}\, x^{-np+n} + na^{(n-1)}_{-(n-1)p+n} x^{-(n-1)p+n}\right.$$

$$\left. + a^{(n-1)}_{-(n-1)p+(n+1)} x^{-(n-1)p+(n-1)}\right] y^{(n-1)} +$$

$$+ \left[a^{(n-2)}_{-np+n+1}\, x^{-np+n+1} + a^{(n-2)}_{-np+n}\, x^{-np+n} + a^{(n-2)}_{-(n-1)p+n} x^{-(n-1)p+n} +\right.$$

$$+ a^{(n-2)}_{-(n-1)p+(n-1)}\, x^{-(n-1)p+(n-1)} + a^{(n-2)}_{-(n-1)p+(n-2)} x^{-(n-1)p+(n-2)} +$$

$$+ a^{(n-2)}_{-(n-2)p+(n-1)}\, x^{-(n-2)p+(n-1)} +$$

$$\left. + a^{(n-2)}_{-(n-2)p+(n-2)}\, x^{-(n-2)p+(n-2)}\right] y^{(n-2)} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \left[a^{(o)}_{-np+n+1}\, x^{-np+n+1} + a^{(o)}_{-np+n}\, x^{-np+n} + \cdots\cdots +\right.$$

$$\left. + a^{(o)}_{-(n-2)p+(n-1)}\, x^{-(n-2)p+(n-1)} + \cdots + a^{(o)}_{1} x + a^{(o)}_{o}\right] y = 0,$$

koja se smenom

$$(5.21)\qquad y = z(x)\, e^{kx^p}$$

svodi na Laplace-ovu diferencijalnu jednačinu n-tog reda

(5.22)

$$(a^{(n)}_{-np+n+1}\, x + a^{(n)}_{-np+n})z^{(n)} + (a^{(n-1)}_{-np+n+1}\, x + a^{(n-1)}_{-np+n})\, z^{(n-1)} +$$

$$+\ldots\ldots+(a^{(o)}_{-np+n+1}\, x + a^{(o)}_{-np+n}\,)\, z = 0,$$

pod sledećim uslovima

$$n\, a^{(n)}_{-np+n+1}\, kp + na^{(n-1)}_{-(n-1)p+n} = o, \text{uz } x^{-(n-1)p+(n-1)}z^{(n-2)},$$

$$(5.23)\; n\, a^{(n)}_{-np+n} + a^{(n-1)}_{-np+n} = o, \text{ uz } x^{-(n-1)p+n}z^{(n-1)}$$

$$(n-1)a^{(n-1)}_{-np+n+1} + a^{(n-2)}_{-(n-1)p+n} = 0,$$

....

Dobijena jednačina (5.22) može da se Laplace-ovom transformacijom svede na linearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda.

$$(5.24) \qquad Z'(s)\, H(s) + Z(s)\, G(s) = Q(s),$$

koja ima opšti integral

$$Z(s) = e^{-\int\frac{G(s)}{H(s)}ds}\left[A + \int\frac{Q(s)}{H(s)}\, e^{\int\frac{G(s)}{H(s)}ds} ds\right].$$

Inverznom Laplace-ovom transformacijom

$L^{-1}\left[Z(s)\right]$ dobija se $z(x)$.

Iz navedenih uslova (5.23) odredjuje se broj

$$(5.25) \qquad p = -\frac{a^{(n-1)}_{-(n-1)p+n}}{ka^{(n)}_{-np+n+1}}.$$

Pošto smo dobili vrednost za p, tada je rešenje oblika

$$(5.26) \qquad y = z(x)\, e^{kx - \frac{a^{(n-1)}_{-(n-1)p+n}}{ka^{(n)}_{-np+n+1}}}$$

i tako se dobila klasa funkcija

$$(5.27) \qquad y = \mathfrak{J}\left(-\frac{a^{(n-1)}_{-(n-1)p+n}}{ka^{(n)}_{-np+n+1}}\right)(x),$$

koja predstavlja rešenje jednačine (5.20).

<u>Primer 1</u>. Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu drugog reda

$$(5.28) \quad (a_{-2p+3}x^{-2p+3} + a_{-2p+2}x^{-2p+2})y'' + (b_{-2p+3}\, x^{-2p+3} +$$

$$+ b_{-2p+2}x^{-2p+2} + 2b_{-p+2}x^{-p+2} + b_{-p+1}x^{-p+1})\, y' +$$

$$+ (c_{-2p+3}x^{-2p+3} + c_{-2p+2}x^{-2p+2} + c_{-p+2}x^{-p+2} +$$

$$+ c_{-p+1}x^{-p+1} + c_{-p}x^{-p} + c_1 x + c_o)\, y = o,$$

koja se smenom

$$(5.29) \qquad y = z\, e^{kx^p}$$

svodi se na Laplace-ovu diferencijalnu jednačinu

$$(5.30) \qquad (a_{-2p+3}x + a_{-2p+2})z'' + (b_{-2p+3}x + b_{-2p+2})\, z' +$$

$$+ (c_{-2p+3}x+c_{-2p+2})\, z = o$$

pod sledećim uslovima

$$2b_{-p+2} + 2kp\, a_{-2p+3} = o,$$

$$a_{-2p+2} \cdot 2kp + b_{-p+1} = o,$$

$$b_{-2p+3}\, kp + c_{-p+2} = o,$$

$$kp(p-1)\, a_{-2p+3} + b_{-2p+2}kp + c_{-p+1} = o, \tag{5.31}$$

$$a_{-2p+2}kp(p-1) + c_{-p} = o,$$

$$a_{-2p+3}\, k^2p^2 + 2b_{-p+2}kp + c_1 = o,$$

$$a_{-2p+2}\, k^2p^2 + b_{-p+1}kp + c_o = o.$$

Uslovi (5.31) dobijeni su anuliranjem članova uz

$$x^{-p+2}z', \; x^{-p+1}z', x^{-p+2}z, x^{-p+1}z, x^{-p}z, xz, z.$$

Iz prve relacije navedenog uslova (5.31) dobija se

$$p = -\frac{b_{-p+2}}{ka_{-2p+3}}. \tag{5.32}$$

Prema tome, rešenje jednačine (5.28) ima oblik

$$(5.33) \qquad y = z\, e^{kx - \frac{b_{-p+2}}{ka_{-2p+3}}} .$$

Ovo rešenje predstavlja klasu funkcije oblika

$$(5.34) \qquad y = \mathcal{J}_{\left(-\frac{b_{-p+2}}{ka_{-2p+3}}\right)}(x)$$

Primenom Laplace-ove transformacije na jednačinu (5.30), dobija se linearna diferencijalna jednačina prvog reda

$$(5.35) \qquad Z'(s)\, H(s) + Z(s)\, G(s) = Q(s),$$

koja ima opšti integral

$$Z(s) = e^{-\int \frac{G(s)}{H(s)}} \left[A + \int \frac{Q(s)}{H(s)}\, e^{\int \frac{G(s)}{H(s)} ds} ds \right].$$

Primenom inverzne Laplace-ove transformacije dobija se funkcija $z(x)$.

Treba napomenuti da su jednačine proučavane u ovom paragrafu, a koje su svodljive na Laplace-ovu jednačinu pod uslovima navedenim u ovom paragrafu, obuhvaćene jednačinama posmatranim u paragrafu 3 a koje su svodljive Na Laplace-ovu jednačinu pod uslo - vima navedenim u paragrafu 3. To sledi iz smene (3.2), (5.3) 7 (5.21) .

6. Sistem homogenih jednačina koje se svode na Laplace-ova jednačine smenom funkcije.

Neka je dat sistem homogemih linearnih diferencijalnih jednačina

$$(6.1) \quad y_j' = \frac{dy_j}{dx} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} y_k \quad (j=1,2,\ldots n)$$

gde su a_{jk} koeficijenti sistema i da su neprekidne funkcije u intervalu $x \in (a,\infty)$ a pod pretpostavkom da su a_{jk} realne funkcije.Može se pretpostaviti da su funkcije a_{jk} u delovima neprekidne u izvesnoj oblasti J.

Prema tome , pod rešenjem funkcije $y_j(x)$ $(j=1,2,..n)$ podrazumeva se neprekidna funkcija u oblasti J koja zadovoljava jednačinu (1) u integralnom obliku

$$(6.2) \quad y_j(x) = c_j + \int_{x_0}^{x} \Big[\sum_{i=1}^{n} a_{jk}(t) y_k(t) \Big] dt.$$

Ako se uvede vektorsko - matrična oznaka

$$y = \mathrm{colon}(y_1, y_2, \ldots y_n) \ , \ A(x) = \left[a_{jk}(x) \right]$$

tada se sistem može da napiše i matričnom obliku

$$(6.3) \quad \frac{dY}{dx} = A(x)\, Y,$$

gde $A(x) \in G(J)$.

Za linearni sistem diferencijalnih jednačina je ispunjena teorema o postojanju jedinstvenog rešenja, za bilo koji sistem broja $x_0 \in J$, $y_0 = \mathrm{colon}(y_{01}, y_{02}, \ldots y_{0n})$ postoji rešenje

$y=y(x)$ sistema (2) definisano za svako $x \in J$ i zadovoljava početne uslove ~~y(x)x=y~~

(6.4) $y(x_o) = y_o$

i da rešenje ima jedinstvena svojstva u oblasti J.

Neka je posmatrani sistem u obliku matrice

(6.5) $\frac{dY}{dx} = A(x)\, Y,$

gde je matrica

$$A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

pod predpostavkom da je A(x) nesigularna matrica $\det A \neq 0$.

Smenom funkcija

(6,6) $y_j = \sum_{k=1}^{n} z_{jk}\, u_k \quad (j= 1,2,..n)$

gde su $z_{jk}(k,j=1,2,...,n)$ za sada nepoznate funkcije koje treba da odredimo, dobija se novi sistem homogenih linearnih diferencijalnih jednačina sledećeg oblika

(6.7) $\frac{du_j}{dx} = U(x)\, u_j$

gde je U(x) matrica sa novim oblikom

(6.8) $$\begin{bmatrix} \frac{a_{11}z_{11} - z'_{11}}{z_{11}} & a_{12}\frac{z_{12}}{z_{11}} & \cdots & a_{1n}\frac{z_{1n}}{z_{11}} \\ a_{21}\frac{z_{11}}{z_{12}} & \frac{a_{22}z_{12} - z'_{12}}{z_{12}} & & a_{2n}\frac{z_{1n}}{z_{12}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}\frac{z_{11}}{z_{1n}} & \cdots & \cdots & \frac{a_{nn}z_{1n} - z'_{1n}}{z_{1n}} \end{bmatrix}$$

U ovom slučaju posmatramo elemente na glavnoj dijagonali matrice i upoređujemo ih sa elementima glavne dijagonale nove matrice. Uporedićemo matricu(6.8)sa sistemom Laplace-ovih diferencijalnih jednačina

$$(6.9) \qquad \frac{du_k}{dx} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a^o_{kr}\, x + b^o_{kr}}{a^o_{ko} x \; + b^o_{ko}} u_k \quad (r=1,2,\ldots,n)$$

ili predstavljeno sa maricom

$$\frac{dU}{dx} = B(x)\, U ,$$

gde je

$$(6.1o) \qquad B(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{a^o_{11}x + b^o_{11}}{a^o_{1o}x + b^o_{1o}} & ,\ldots\ldots\ldots & \dfrac{a^o_{1n}x + b^o_{1n}}{a^o_{1o}x + b^o_{1o}} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \vdots & & \\ \dfrac{a^o_{n1}x + b_{n1}}{a^o_{no}x + b^o_{no}} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \dfrac{a^o_{nn}x + b^o_{nn}}{a^o_{no}\; x + b^o_{no}} \end{bmatrix}$$

gde su koeficijenti:a^o_{kr}, b^o_{kr},a^o_{ko}, b^o_{ko} kostante.

Ako izvršimo upoređenje sistema(6.7) i(6.9)odnosno da uporedimo njihove matrice(6.8)i(6.1o)i sa upoređenjem elemenata na glavnim dijagonalama, tada se dobijaju potrebni i dovoljni uslovi koji nam određuju nepoznate funkcije

$$z_{11},\ z_{12},\ z_{13},\ldots\ldots z_{1n}\ .$$

Na osnovu prethodnog izlaganja potrebni i dovoljni uslovi imaju ~~mala~~ sledeći oblik

$$(6.11) \qquad \frac{a_{11}z_{11} - z'_{11}}{z_{11}} = \frac{a^o_{11}x + b^o_{11}}{a^o_{1o}\; x + b^o_{1o}}, \ldots \frac{a_{nn}z_{1n} - z'_{1n}}{z_{1n}} =$$

$$= \frac{a^o_{nn}x + b^o_{nn}}{a^o_{no}x + b^o_{no}} .$$

Na osnovu prethodnih relacija (6.11) određena su nepoznte funkcije i imaju sledeći oblik

$$z_{11} = e^{\int \left(a_{11}(x) - \frac{a_{11}^{o}x + b_{11}^{o}}{a_{1o}^{o}x + b_{1o}^{o}} \right)dx},$$

(6.12) ....

$$z_{1n} = e^{\int \left(a_{nn}(x) - \frac{a_{nn}^{o}x + b_{nn}^{o}}{a_{no}^{o}x + b_{no}^{o}} \right)dx}.$$

Prema tome smo sveli sistem diferencijalnih jednačina (5) na Laplace -ov sistem diferencijalnih jednačina.

Primer.

Neka je dat sistem linearnih diferencijalnih jednačina

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= a_{11}(x)\, y + a_{12}(x)\, z, \\ \frac{dz}{dx} &= a_{21}(x)\, y + a_{22}(x)\, z, \end{aligned}$$

gde su $a_{ik}(x)$ $(i,k=1,2)$ neprekidne funkcije na segmentu $x \in [a,b]$.

Smenom funkcija

$$(2) \qquad y = u_1(x)\, v_1 \quad , \quad z = u_2(x)\, v_2$$

i njihovih izvoda

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx} = u_1' v_1 + u_1 \frac{dv_1}{dx} \quad , \quad \frac{dz}{dx} = u_2' v_2 + u_2 \cdot \frac{dv_2}{dx} \quad ,$$

tada jednačina (1) postaje sledećeg oblika

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{dv_1}{dx} &= \frac{a_{11}\, u_1 - u_1'}{u_1}\, v_1 + a_{12}\frac{u_2}{u_1}\, v_2 \\ \frac{dv_2}{dx} &= a_{21}\frac{u_1}{u_2}\, v_1 + \frac{a_{22}\, u_2 - u_2'}{u_2}\, v_2 \end{aligned} .$$

Ako sistem jednačina (4) uporedimo sa sistemom Laplace-ovih diferencijalnih jednačina

$$(5)\quad \begin{aligned} \frac{dv_1}{dx} &= \frac{a_1x+b_1}{a_ox+b_o}\, v_1 + \frac{a_2x+b_2}{a_ox+b_o}\, v_2 \\ \frac{dv_2}{dx} &= \frac{c_1x+d_1}{c_ox+d_o}\, v_1 + \frac{c_2x+d_2}{c_ox+d_o}\, v_2 \,, \end{aligned}$$

dobijaju se veze iz kojih se mogu da odrede tražene funkcije i one imaju sledeći oblik

$$(6)\quad \begin{aligned} &\frac{a_{11}u_1 - u_1'}{u_1} = \frac{a_1x+b_1}{a_ox+b_o}\,, \qquad a_{12}\frac{u_2}{u_1} = \frac{a_2x+b_2}{a_ox+b_o} \\ &a_{21}\frac{u_1}{u_2} = \frac{c_1x+d_1}{c_ox+d_o}\,, \qquad \frac{a_{22}u_2 - u_2'}{u_2} = \frac{c_2x+d_2}{c_ox+d_o}\,. \end{aligned}$$

Na osnovu relacija (6) dobijaju se funkcije

$$(7)\quad \begin{aligned} u_1(x) &= e^{\int (a_{11} - \frac{a_1x+b_1}{a_ox+b_o})dx} \\ u_2(x) &= e^{\int (a_{22} - \frac{c_2x+d_2}{c_ox+d_o})dx}. \end{aligned}$$

Prema tome relacije (7) daju potrebne i doviljne uslove da se sistem jednačina (1) sa smenom fünkcija (2) svede na sistem jednačina (5) .

7. Sistem jednačina koji se svodi na Laplace-ove jednačine smenom nezavisno promenljive.

Ako se u sistemu (6.1) izvrši smena nezavisno promenljive $t= v(x)$, tada sistem postaje

$$(7.1)\quad \begin{aligned} \frac{dy}{dt}\, v' &= a_{11}(x)\, y + a_{12}(x)\, z \\ \frac{dz}{dt}\, v' &= a_{21}(x)\, y + a_{22}(x)\, z \quad . \end{aligned}$$

Uporeeđenjem sistema (7.1) sa sistemom (7.2)

$$(7.2)\quad \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{a_1t + b_1}{a_ot + b_o}\,y + \frac{a_2t + b_2}{a_ot + b_o}\,z \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{c_1t + d_1}{c_ot + d_o}\,y + \frac{c_2t + b_2}{c_ot + d_o}\,z \end{aligned}$$

dobija se veza između koeficijenata

$$(7.3)\quad \begin{aligned} \frac{a_1t + b_1}{a_ot + b_o} &= \frac{a_1v + b_1}{a_ov + b_o} = \frac{a_{11}}{v'}, \\ \frac{a_2t + b_2}{a_ot + b_o} &= \frac{a_2v + b_2}{a_ov + b_o} = \frac{a_{12}}{v'}, \\ \frac{c_1t + d_1}{c_ot + d_o} &= \frac{c_1v + d_1}{c_ov + d_o} = \frac{a_{21}}{v'}, \\ \frac{c_2t + d_2}{c_ot + d_o} &= \frac{c_2v + d_2}{c_ov + d_o} = \frac{a_{22}}{v'}, \end{aligned}$$

gde je $t = v(x)$.

Iz prve od ovih jednačina odredi se $v(x)$ i zameni u sledećim jednačinama i dobijaju se potrebni i dovoljni uslovi da se sistem (6.1) smenom $t=v(x)$ svodi na sistem (7.2).

Ako se posmatra prva jednačina iz (7.2) dobija se

$$\frac{1}{a_{11}(x)}\,v' = \frac{1}{a_{11}(x)}\frac{dv}{dx} = \frac{a_ov + b_o}{a_1v + b_1}$$

Ova diferencijalna jednačina se može rešiti u konačnom obliku. Smenom nezavisno promenljive x sa relacijom

$$(7.4)\quad \frac{d\xi}{dx} = a_{11}(x),$$

jednačina dobija nov oblik

$$\frac{dv}{d\xi} = \frac{a_ov + b_o}{a_1v + b_1}$$

ili da je $v' = \frac{dv}{d\zeta}$, pa se dobija

$$(7.5) \qquad v = \frac{b_o - b_1 v'}{a_1 v' - a_o} = \frac{b_o - b_1 p}{a_1 p - a_o} ,$$

gde je $v' = p = \frac{dv}{d\zeta}$.

Diferenciranjem jednačine (7.5) dobija se

$$dv = p\, d\zeta = \frac{-(a_1 p - a_o)\, b_1 - (b_o - b_1 p) a_1}{(a_1 p - a_o)^2}\, dp$$

$$(7.6) \qquad \zeta = \int \frac{1}{p}\, \frac{-(a_1 p - a_o) b_1 - (b_o - b_1 p) a_1}{(a_1 p - a_o)^2}\, dp + C = v.$$

Jednačine (7.5) i (7.6) daju v i ζ kao funkciju promenljive p. Prema (7.4) , dobija se

$$a_{11}(x)\, dx = d\zeta = \frac{1}{p}\, \frac{-(a_1 p - a_o) b_1 - (b_o - b_1 p)\, a_1}{(a_1 p - a_o)^2}\, dp ,$$

odakle se izračuna x kao funkcija promenljive p.
Poslednja jednačina i (7.5) daju v i x kao funkciju od p.

8. Semi - invarijante sistema linearnih jednačina u odnosu na nezavisno promenljivu

T. Pejović (1) je proučavao semi- invarijante sistema linearnih jednačina u odnosu na funkcije. Pokušaćemo da formiramo semi - invarijante u odnosu na nezavisno promenljivu. Zatim ćemo dobijene semi - invarijante da iskoristimo za ispitivanje rešenja datih jednačina.

Neka je , radi kratkoće, dat sistem od dve jednačine sa dve nepoznate

$$(8.1) \qquad \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= a_{11}(x)\, y + a_{12}(x)\, z , \\ \frac{dz}{dx} &= a_{21}(x)\, y + a_{22}(x)\, z , \end{aligned}$$

gde su koeficijenti $a_{ik}(x)$ funkcije koje imaju neprekidne izvode za $x \in [a,b]$.

Smenom (8.2) $\frac{d\zeta}{dx} = u(x)$

sistem (8.1) postaje

$$(8.3)\quad \begin{aligned} \frac{dy}{d\xi} &= \alpha_{11}(\xi)\, y + \alpha_{12}(\xi)\, z\,, \\ \frac{dz}{d\xi} &= \alpha_{21}(\xi)\, y + \alpha_{22}(\xi)\, z\,, \end{aligned}$$

gde je

$$(8,4)\quad \begin{aligned} \alpha_{11}(\xi) &= \frac{a_{11}(x)}{u}\,, & \alpha_{12}(\xi) &= \frac{a_{22}(x)}{u} \\ \alpha_{21}(\xi) &= \frac{a_{21}(x)}{u}\,, & \alpha_{22}(\xi) &= \frac{a_{22}(x)}{u} \end{aligned}$$

Sistem (8.1) , smenom

$$(8.5)\quad \frac{dt}{dx} = U(x) = a_{12}(x)\, e^{\int (a_{11}(x) + a_{22}(x))\, dx}\,,$$

postaje

$$(8.6)\quad \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= J_{11}(t) y + J_{12}(t)\, z, \\ \frac{dz}{dt} &= J_{21}(t)\, y + J_{22}(t)\, z, \end{aligned}$$

gde je

$$(8.7)\quad \begin{aligned} J_{11}(t) &= \frac{a_{11}(x)}{a_{12}(x)}\, e^{-\int (a_{11}(x) + a_{22}(x))\, dx} \\ J_{12}(t) &= e^{-\int (a_{11}(x) + a_{22}(x))\, dx} \\ J_{21}(t) &= \frac{a_{21}(x)}{a_{12}(x)}\, e^{-\int (a_{11}(x) + a_{22}(x))\, dx} \\ J_{22}(t) &= \frac{a_{22}(x)}{a_{12}(x)}\, e^{-\int (a_{11}(x) + a_{22}(x))\, dx}\,. \end{aligned}$$

Isto tako sistem (8.3) , smenom

$$(8.8)\quad \frac{dt_o}{d\xi} = U_o(\xi) = \alpha_{12}(\xi)\, e^{\int (\alpha_{11}(\xi) + \alpha_{22}(\xi))\, d\xi}$$

postaje

$$(8.9)\quad \begin{aligned} \frac{dy}{dt_o} &= \overset{o}{J}_{11}(t_o)\, y + \overset{o}{J}_{12}(t_o)\, z\,, \\ \frac{dz}{dt_o} &= \overset{o}{J}_{21}(t_o)\, y + \overset{o}{J}_{22}(t_o)\, z\,, \end{aligned}$$

gde je

$$(8.10)\quad \begin{aligned} \overset{o}{J}_{11}(t_o) &= \frac{\alpha_{11}(\xi)}{\alpha_{12}(\xi)}\, e^{-\int (\alpha_{11}(\xi) + \alpha_{22}(\xi))\, d\xi}, \\ \overset{o}{J}_{12}(t_o) &= e^{-\int (\alpha_{11}(\xi) + \alpha_{22}(\xi))\, d\xi} \\ \overset{o}{J}_{21}(t_o) &= \frac{\alpha_{21}(\xi)}{\alpha_{12}(\xi)}\, e^{-\int (\alpha_{11}(\xi) + _{22}(\xi))\, d\xi} \\ \overset{o}{J}_{22}(t_o) &= \frac{\alpha_{22}(\xi)}{\alpha_{12}(\xi)}\, e^{-\int (\alpha_{11}(\xi) + \alpha_{22}(\xi))\, d\xi}. \end{aligned}$$

Pokazaćemo najpre kakva veza postoji između relacija (8.5) i (8.8). Relacija (8.8) prema (8.4) postaje

$$\frac{dt_o}{d\xi} = U_o(\xi) = \frac{a_{12}(x)}{u}\, e^{\int \frac{a_{11}(x) + a_{22}(x)}{u}\, d\xi}$$

ili prema (8.2) i (8.5)

$$\frac{dt_o}{d\xi} = U_o(\xi) = \frac{a_{12}(x)}{u}\, e^{\int (a_{11}(x) + a_{22}(x))\, dx} =$$

$$= \frac{1}{u}\, U(x) = \frac{1}{u}\, \frac{dt}{dx}\,,$$

t.j. $\dfrac{dt_o}{d\xi} = \dfrac{1}{u}\,\dfrac{dt}{dx}\,, \quad U_o(\xi) = \dfrac{1}{u}U(x)$

Kako je

$$\frac{dt_o}{d\xi} = \frac{dt_o}{dx}\,\frac{dx}{d\xi} = \frac{1}{u}\,\frac{dt}{dx}\,,$$

to je, prema (8.2)

$$\frac{1}{u}\,\frac{dt_o}{dx} = \frac{1}{u}\,\frac{dt}{dx}\ . \ t_o=t \tag{8.11}$$

(Pretpostavljajući pri ovim transformacijama da su integracione konstante jednake nuli)

Posmatrajmo sada vezu između relacija (8.7) i (8.1o) . Prema (8.2) i (8.11) , relacije (8.1o) postaju

$$\begin{aligned}
J^o_{11}(t_o) &= \frac{a_{11}(x)}{a_{12}(x)} e^{-\int(a_{11}(x)+a_{22}(x))dx} = J_{11}(t)\\
J^o_{12}(t_o) &= e^{-\int(a_{11}(x)+a_{22}(x))\,dx} = J_{12}(t)\\
J^o_{21}(t_o) &= \frac{a_{21}(x)}{a_{22}(x)} e^{-\int(a_{11}(x)+a_{22}(x))dx} = J_{21}(t)\\
J^o_{22}(t_o) &= \frac{a_{22}(x)}{a_{12}(x)} e^{-\int(a_{11}(x)+a_{22}(x))dx} = J_{22}(t)
\end{aligned} \tag{8.12}$$

t.j. $J^o_{ik}(t_o) = J_{ik}(t) \quad (i,k=1,2)$

To znači da su koeficijenti $J_{ik}(t)$ ($i,k=1,2$) sistema (8.6) apsolutne semi - invarijante u odnosu na transformaciju (8.2).

Jednačine (8.6) i (8.8) su ekvivalentne.

Ako su koeficijenti $a_{ik}(x)$ ($i,k=1,2$) sistema (8.1) konstante, onda semi-invarijante $J_{ik}(t)$ ($i,k=1,2$) sistema (8.6), prema (8.5) i (8.7) postaju

$$\begin{aligned}
J_{11}(t) &= \frac{a_{11}}{a_{22}}\, e^{-(a_{11}+a_{22})x} = \frac{a_{11}}{(a_{11}+a_{22})t} = \frac{A_{11}}{t}\\
J_{12}(t) &= \frac{a_{12}}{(a_{11}+a_{22})t} = \frac{A_{12}}{t}\\
J_{21}(t) &= \frac{a_{21}}{(a_{11}+a_{22})t} = \frac{A_{21}}{t}\\
J_{22}(t) &= \frac{a_{22}}{(a_{11}+a_{22})t} = \frac{A_{22}}{t}
\end{aligned} \tag{8.13}$$

gde su A_{ik} konstante.

Relacije (8.13) daju posle diferenciranja

$$(8.14) \qquad J'_{ik}(t) = - \frac{A_{ik}}{t^2} \qquad (i,k=1,2).$$

Eliminacijom promenljive t između relacije (8.13) i (8.14) dobiće se jednačina

$$(8.15) \qquad J^2_{ik}(t) + A_{ik} J'_{ik}(t) = 0 \qquad (i,k=1,2).$$

Ako se $J_{ik}(t)$ i $J'_{ik}(t)$ izraze prema (8.5) i (8.7), kao funkcije od koeficijenata $a_{ik}(x)$ i njihovih izvoda $a'_{ik}(x)$ sistema (8.1) i zamene u relaciju (8.15), dobiće se potrebni i dovoljni uslovi između koeficijenta $a_{ik}(x)$ da se sistem (8.1) svede na sistem jednačina sa konstantnim koeficijentima.

Jednaačine(8.1) čiji koeficijenti zadovoljavaju uslove (8.15), pripadaju klasi jednačina sa konstantnim koeficijentima.

L I T E R A T U R A

1.N.P. Erugin.

1.1 Privodimi sistemi. Trudi matematik,im-na vm. V.A. S Steklova , Tóm XIII .1946.

1.2 P.P.M. T.XV v.1.1951

1.3 P.P.M. TXV V.2 1951.

1.4 P.P.M T XvI 1952,355-361

1.5.P.P.M.TXVI 1952 ,659-67o

1.6 Diferencij.uravnjenia No 1o.1966.

1.7 Diferencijalnie uravnjenija No 11 .1967

1.8 Diferencijalnije UravnjenijiaNo 4. 1967

2. N.P. Erugin Knjiga dlja čtenija po obšćem kursu diferencijalnih uravnjenija .Minsk,1972.

3. N.M. Matveev .
Metodi integrirovanija obiknovenih diferencijalnih uravnjenija .iz. L.G.U. 1955 .

4. T. Pejović.

4.1. Buletin de la societe mathematique de France,53 1925. 2o8-225

4.2 Bulletin de la societe de mathemaique et Phýsiqe de la R.P. Serbie,vol. IX.3-4, Beograd, 1957

5. T. Pejović .
Diferencijalne jednačine(egzistencija rešenja) Beograd . 1959

6. O.Perpn.

6.1 J. reine und angew. Math, 137. 191o,6-64

6.2Math.Z.6.192o.161-166 .

6.3 Math, Z. 1923. 149- 152

7. N.Z. Štokalo.
Linenie diferencijanija uravnjenija s peremenimi koeficijentimi .Izd. A.N. U.S.S.R. Kiev .196o